



HAL
open science

**Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par
mise en atmosphère raréfiée. Méthodes d'estimation
relatives aux fréquences et amortissements des modes
propres. Applications en acoustique musicale.**

Bertrand David

► **To cite this version:**

Bertrand David. Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée. Méthodes d'estimation relatives aux fréquences et amortissements des modes propres. Applications en acoustique musicale.. Acoustique [physics.class-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1999. Français. NNT: . tel-00011508

HAL Id: tel-00011508

<https://theses.hal.science/tel-00011508>

Submitted on 31 Jan 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité :

ACOUSTIQUE

présentée par

M. BERTRAND DAVID

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse :

Caractérisations acoustiques de structures vibrantes par mise en atmosphère raréfiée

*Méthodes d'estimation relatives aux fréquences et amortissements
des modes propres*

Applications en acoustique musicale

soutenue le 19 Juillet 1999

devant le jury composé de :

Mme Renée GATIGNOL

Présidente

M. Bernard E. RICHARDSON

Rapporteurs

M. Patrick DUVAUT

M. Jean-Louis GUYADER

Examineurs

M. Antoine CHAIGNE

M. Xavier BOUTILLON

M. Benoît FABRE

Remerciements

Conclure ce travail de thèse eut été plus difficile sans l'accompagnement bienveillant de mes amis et de mes proches. Leur présence fut un réconfort, un réservoir d'énergie pour avancer dos à la pente du découragement. Mes pensées vont particulièrement à Nathalie qui a su malgré cette maîtresse possessive, me garder son affection et sa patience tout au long du chemin.

L'idée originale de l'expérience vibratoire sous vide, si riche de possibilités, revient à Xavier Boutillon. Sa grande compétence scientifique m'a souvent éclairé et beaucoup apporté à l'occasion de nos conversations et du travail en commun. Le manuscrit a largement profité de sa relecture attentive.

Michèle Castellengo m'a accueilli au sein du Laboratoire d'Acoustique Musicale, dont elle est un pilier depuis plus de vingt années et actuellement la directrice. Outre la mémoire foisonnante des idées qu'elle sait faire surgir de son expérience et partager, les traits d'humanité du laboratoire lui doivent beaucoup.

La créativité, la bonne humeur et le grand sens pratique de Charles Besnainou en ont fait un interlocuteur privilégié des premières années consacrées à ce travail. Son contact a aidé et encouragé de nombreuses réalisations expérimentales.

Jean-Dominique Polack a relu avec attention un grand nombre de mes pages. Ces conseils et ses remarques furent précieux.

Catherine Fourcin, qui assure le secrétariat du laboratoire, fut un intermédiaire administratif efficace, rigoureux, sympathique et disponible.

Au cours de ce travail les discussions avec Claude Valette, Christian Cuesta, Alexandre Watzki et Arnaud Caracciolo m'ont permis de raffermir connaissances et idées, tant du point de vue théorique qu'expérimental.

Si Nathalie fut ma bonne muse, Benoît fut tout à la fois un soutien, un encouragement un interlocuteur inspiré et bienveillant. Son action amicale fut souvent décisive pour désensabler le navire. Je lui suis également reconnaissant d'avoir accepté d'être l'un des examinateurs.

L'ambiance dans le travail et la convivialité amicale qui furent notre quotidien de doctorants doivent beaucoup à Valérie. Le souvenir de la brioche matinale, partagée en salle café, évoque une puissante nostalgie. Mes pensées se tournent également vers les autres doctorants qui ont accompagné cette aventure : Jean, mon contemporain et compagnon de bureau pen-

dant plusieurs années, co-initiateur de la R.A.I.D.¹, Corsin, Santhy, Claire et Myriam. Marc-Pierre, notre chargé de recherche canadien préféré, a cédé au mal du pays. Il nous manque depuis son départ. Je n'oublie pas non plus mes amis de la première heure, rencontrés au DEA du Mans : Frédérique, Christophe et Vincent.

Mes parents ont été adorables tout au long de mon parcours², sachant intuitivement et raisonnablement maintenir l'équilibre entre l'éducation active et réactive. Une part du plaisir, lorsque ce travail touche à sa fin, leur revient.

1. Réunion d'Acoustique Inter-Doctorants
2. Et ils le sont toujours maintenant !

Table des matières

1	Introduction	11
I	Estimation de sinusoïdes amorties	15
2	Généralités	17
2.1	Classification	18
2.1.1	Méthodes paramétriques et méthodes classiques	18
2.1.2	Méthodes spécifiques et non spécifiques	19
2.2	Domaines d'application	20
2.2.1	Exemples généraux	21
2.2.2	Utilisation en mécanique vibratoire et en vibro-acoustique.	22
2.2.3	Applications en acoustique musicale	24
2.2.4	Cas de notre étude	24
2.2.5	Importance de la mesure des incertitudes	25
2.3	Formulation du problème	25
3	Méthode d'estimation utilisant une transformation de Hilbert	27
3.1	Principe général	28
3.2	La transformée de Hilbert	28
3.2.1	Signal analytique	29
3.2.2	Transformation de Hilbert	30
3.2.3	Application à un sinus amorti	30
3.3	Utilisation en bande étroite	32
3.3.1	Méthode par fenêtrage de la TFD	32
3.3.2	Synthèse d'un filtre RIF complexificateur	36

3.3.3	Comparaison entre les méthodes par TFD et par RIF	37
3.4	Calcul des incertitudes - Fiabilité de la mesure	40
3.4.1	Incertitude sur $\hat{\alpha}_k$ et sur $\hat{\omega}_k = 2\pi\hat{\nu}_k$	40
3.4.2	Calcul de la variance de α_k	41
3.4.3	Calcul dans l'hypothèse d'un bruit blanc	42
3.4.4	Interprétation	44
3.4.5	Cas général	44
4	Méthode Matrix Pencil	47
4.1	Exemple de la corde de guitare	48
4.2	Méthodes haute résolution : historique et idées de base	49
4.2.1	L'idée de Prony	50
4.2.2	Cas d'une ou deux composantes	51
4.2.3	Généralisation	52
4.2.4	Augmentation du degré de $p(z)$	53
4.2.5	Méthode Tufts-Kumaresan	56
4.2.6	Décomposition en sous-espace signal et sous-espace bruit	56
4.2.7	Décomposition aux valeurs singulières de la matrice de données	58
4.2.8	Exemple	59
4.2.9	Méthode Matrix pencil	63
4.3	Fondements théoriques	63
4.3.1	Principe et démonstration	63
4.3.2	Recherche des solutions	65
4.3.3	Réglages des paramètres	68
4.4	Simulations et comparaisons entre méthodes	69
4.4.1	Une composante réelle	71
4.4.2	Dispersion des mesures	74
4.4.3	Deux composantes proches en fréquence	76
4.4.4	Exemple réel d'un son de guitare	79
4.5	Qualité de l'estimateur matrix-pencil	81
4.5.1	Calcul de perturbation des valeurs propres z_i	81
4.5.2	Calcul du biais	82
4.5.3	Calcul de la variance	82
4.5.4	Résultat analytique dans le cas d'une composante non amortie	84

4.5.5	Simulations	84
4.5.6	Conclusion et utilisation	91
4.6	Sélection de l'ordre du modèle	91
4.6.1	Les critères d'information	92
4.6.2	Application	93
4.7	Algorithme complet	99
5	Efficacité des estimateurs	100
5.1	Existence d'une limite théorique - Théorème de Cramer-Rao	100
5.1.1	Définitions	101
5.1.2	Théorème de Cramer-Rao	101
5.1.3	Borne de Cramer-Rao	102
5.2	BCR pour une sinusoïde. Comparaison des méthodes.	102
5.2.1	Efficacités pour une composantes non amortie	102
5.2.2	Cas d'une composante amortie	103
5.3	Cas de deux sinusoïdes. Comparaison entre matrix pencil et la BCR	104
5.4	Conclusion et synthèse	106
II	Applications	107
6	Techniques expérimentales	109
6.1	Introduction	109
6.1.1	Généralités	109
6.1.2	Notre apport expérimental : mesure des vibrations sous vide	110
6.2	Principe des mesures vibratoires sous vide	111
6.2.1	Exemple d'un piston baffle rigide	111
6.2.2	Fréquence et facteur d'amortissement propres sous vide et dans l'air	115
6.2.3	Dépendance en fonction de la pression statique	116
6.2.4	Principe général de la mesure	118
6.3	Montage et protocole expérimentaux	120
6.3.1	Éléments du montage	120
6.3.2	Déroulement de l'expérimentation	125

7	Plaques minces	127
7.1	Objectif de l'étude des plaques minces	127
7.2	Interaction entre une plaque mince homogène et un fluide léger	128
7.2.1	Vibration <i>in vacuo</i>	129
7.2.2	Calcul du rayonnement acoustique	130
7.2.3	Les facteurs de pertes dans la vibration des plaques <i>in vacuo</i>	133
7.2.4	Valeurs modales pour le système vibrant dans l'air	134
7.2.5	Conclusion sur l'application aux plaques	136
7.3	Grandeurs acoustiques déduites de la mesure expérimentale	137
7.3.1	Facteur de rayonnement	137
7.3.2	Facteur de perte par rayonnement et rendement acoustique	138
7.3.3	Fréquence de coïncidence	139
7.4	Résultats pour une plaque en acier	142
7.4.1	Caractéristiques de la plaque	142
7.4.2	Dispositions expérimentales et traitements spécifiques	143
7.4.3	Variations des valeurs modales avec la pression statique	144
7.4.4	Quantités acoustiques mesurées	146
7.4.5	Synthèse sur ce cas expérimental	157
7.5	Application à une plaque en aluminium	157
7.5.1	Caractéristiques de la plaque	157
7.5.2	Résultats sur l'impédance de rayonnement	158
7.5.3	Résultats sur les pertes internes	161
7.6	Résultats obtenus dans le cadre de la commission C. Valor.	161
7.6.1	Cas expérimental E.1.1 de la commission C. Valor	162
7.6.2	Éléments du montage expérimental	163
7.6.3	Comparaison avec les résultats des autres expérimentateurs	164
7.7	Conclusion	164
8	Application à la guitare classique	167
8.1	Introduction	167
8.2	Étude préliminaire d'une verge encastrée en épicéa	169
8.2.1	Description de l'expérience	170
8.2.2	Traitement des données	171
8.2.3	Résultats et discussion	174

8.3	Montage expérimental pour la guitare	181
8.4	Caractérisation des signaux vibratoires de corde	184
8.4.1	Spectre	184
8.4.2	Inharmonicité	185
8.4.3	Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence	190
8.5	Digression sur le nombre de composantes par partiel	190
8.5.1	Critère empirique sur l'énergie des composantes	191
8.5.2	Critère empirique sur l'erreur de reconstruction	194
8.5.3	Application des critères d'information	197
8.5.4	Conclusion sur le nombre de composantes par partiel	197
8.6	Résultats expérimentaux - Rendements acoustiques entre 80 et 2500 Hz . . .	198
8.6.1	Variation des fréquences avec la pression	198
8.6.2	Variation des amortissements avec la pression	200
8.6.3	Ordre de grandeur des termes de perte interne et visqueux	202
8.6.4	Interprétations à l'aide de l'admittance au chevalet	203
8.6.5	Estimation du rendement acoustique	207
8.7	Discussion	207
9	Étude acoustique de la restauration du carillon de Perpignan	209
9.1	Introduction	209
9.1.1	Objectif de la mesure	210
9.1.2	Intérêt pour la facture	210
9.2	Déroulement des opérations, matériel et traitement	211
9.3	Résultats	211
9.3.1	Accord des cloches	211
9.3.2	Différences selon la position de la cloche	213
9.3.3	Différences entre avant et après restauration	215
9.4	Conclusions	216
10	Conclusion	218
A	Démonstration du théorème de Cramer-Rao	221
B	Borne de Cramer-Rao pour une somme d'exponentielles complexes	223

B.1	Prémices du calcul	223
B.1.1	Expression de la BCR	223
B.1.2	Expression de la densité de probabilité	224
B.2	Calculs et résultat général	224
B.3	Résultat pour une composante	226

Chapitre 1

Introduction

Soit un guitariste classique, raisonnablement véloce, capable de réaliser une dizaine de notes à la seconde. Il fournit environ 100 milliwatts d'efforts musculaires en pincement de corde et pourtant, le transducteur mécano-musical qu'il tient sur son genou ne nous restitue pas davantage que quelques microwatts de musique. La durée de la note, après que l'instrumentiste ai pincé la corde, est-elle significativement influencée par cette petite fraction de l'énergie mécanique prélevée et si chère à nos oreilles? Peut-on espérer accroître le niveau sonore produit — c'est le souhait des facteurs et des solistes — sans altérer la tenue du son? Quelle est la part de dissipation la plus importante : les frottements, qui produisent de la chaleur, ou le rayonnement acoustique? Le vieillissement de l'instrument est-il un facteur favorable ou défavorable sur la portion d'énergie acoustique? Ces multiples interrogations ont suscité et orienté le thème de notre étude : nous cherchons à définir une méthode et une technique expérimentale en relation avec ces préoccupations énergétiques.

Lorsqu'une structure mécanique, telle qu'un instrument de musique, un haut-parleur, ou un moteur électrique, est mise en vibration dans un environnement fluide, ses caractéristiques mécaniques et son comportement dynamique diffèrent de ce qu'ils sont *in vacuo*. **L'idée principale** sur laquelle se fonde le travail présenté est d'obtenir des renseignements sur l'interaction structure-fluide en *comparant* les deux comportements : vibrations dans l'air ambiant et en atmosphère raréfiée.

Notre objectif est de mettre au point une expérimentation applicable à des structures mécaniques linéaires, mises en vibration libre dans l'air. **Les résultats** de cette expérimentation sont *des grandeurs énergétiques* telles que le facteur de rayonnement, le facteur de perte par rayonnement et le rendement acoustique, qui caractérisent de manière globale le rayonnement acoustique de la structure. Ces grandeurs sont données pour chacun des modes de vibration.

Cette caractérisation acoustique globale fournit des ordres de grandeur sur les transferts d'énergie mécanique du système vers l'extérieur. La mesure de ces ordres de grandeur rejoint des préoccupations industrielles (tuyauteries, fuselages d'avion, sous-marins) dont le but est

le plus souvent de réduire le bruit produit par la vibration (Lesueur, 1988). En acoustique musicale, l'étude des transferts énergétiques n'est évidemment pas motivée par les mêmes intérêts! La *qualité sonore* d'un instrument est une notion subjective mais certaines des caractéristiques du signal acoustique produit par l'instrument et qui influencent cette qualité sont identifiables. Parmi ces caractéristiques nous pouvons par exemple citer la puissance sonore et la décroissance du signal produit par des instruments à son non entretenu. L'évolution historique de la facture du piano montre par exemple la recherche d'une puissance sonore plus grande, notamment en augmentant la tension des cordes, tout en conservant une bonne tenue de son (Askenfelt, 1990). Puissance sonore et vitesse de décroissance sont directement reliées aux propriétés énergétiques : transfert de l'énergie vers le champ acoustique rayonné et dissipation de l'énergie par divers mécanismes de frottement (interne ou visqueux par exemple). Ces sujets constituent une direction des recherches menées au sein du Laboratoire d'Acoustique Musicale : étude des mécanismes d'amortissement (Cuesta, 1990; Carraciolo, 1995; Valette et Cuesta, 1993) ou bilans de puissance (Boutillon, 1991). Il est notable que le rendement acoustique ait intéressé les chercheurs en acoustique des instruments de musique. E.W. Van Heuven (1949) s'est préoccupé du rendement des cloches de carillon, Rohloff (1940) s'est intéressé au rendement des violons et une étude sur les guitares a été menée par J.C.S. Lai (1990).

◇ Apport expérimental et traitement du signal Les moyens expérimentaux usuels destinés à l'étude énergétique du champ acoustique sont intensimétriques. Couramment utilisés pour des problèmes de nature industrielle, ils ont fait l'objet d'applications sur le piano (Suzuki, 1986) et sur la guitare (Lai et Burgess, 1990). Ils emploient une sonde (doublet microphonique) et nécessitent des mesures en plusieurs points (maillage de la structure).

Contrairement à ces techniques, notre méthode expérimentale ne mesure pas des grandeurs énergétiques *locales*. Elle étudie ces quantités de manière *globale* en s'intéressant à la *décroissance* du signal vibratoire. Notre expérimentation s'appuie sur une estimation des fréquences et facteurs d'amortissement modaux des structures vibrantes, environnées d'air à pression atmosphérique puis à des pressions statiques décroissantes contrôlées. Lorsque la structure, placée dans une enceinte étanche, vibre sous pression statique faible, la contribution acoustique de la dépense énergétique est fortement réduite. La décroissance temporelle de la vibration est alors dominée par la dissipation due aux frottements mécaniques.

Une grande partie du travail consiste à mesurer les décroissances temporelles et les fréquences modales. L'estimation doit être suffisamment précise pour détecter les variations entre mesures prises dans l'air et dans le vide et le nombre important de mesures nécessite une automatisation poussée du traitement. Les variations de fréquence sont toujours faibles (typiquement comprises entre quelques millièmes et quelques dixmillièmes). Les variations de facteurs d'amortissement vont en revanche de quelques % à presque 100 % dans certains cas.

Des méthodes classiques de traitement du signal permettent d'obtenir ces résultats dans le

cas où les modes de vibration sont séparables par filtrage mais il faut recourir à des méthodes spécifiques pour espérer y parvenir lorsque plusieurs composantes se trouvent trop proches en fréquence. C'est notamment le cas pour les signaux captés au chevalet d'une guitare pour lesquels l'ordre de grandeur du facteur de décroissance est le même que celui de la différence entre les fréquences. Nous avons utilisé deux algorithmes : une méthode non paramétrique, qui fournit des moyens pour caractériser le signal, et une méthode paramétrique spécifique —matrix pencil, qui permet d'estimer les paramètres de plusieurs composantes de fréquence voisines.

- ◇ **Applications** Ces deux méthodes ont été appliquées à l'estimation des fréquences et des facteurs d'amortissement pour trois types de signaux expérimentaux.

L'étude des plaques métalliques minces constitue une validation de la méthode par mise sous vide car nous disposons de résultats théoriques bien établis sur leur comportement vibroacoustique. La mesure des variations de fréquence et facteur d'amortissement pour chaque mode de vibration en fonction de la pression statique donne accès à des grandeurs acoustiques telles que l'impédance acoustique, le facteur de rayonnement ou le rendement acoustique.

Après une étude préliminaire pour tester le comportement mécanique des bois de lutherie sous vide, la méthode matrix pencil trouve une application dans le cas des signaux captés au chevalet de la guitare. Si les mesures effectuées sont aisément interprétables dans le cas des plaques métalliques étudiées, les mesures effectuées sur la guitare montrent des comportements dont l'interprétation est plus délicate. Ceci tient essentiellement au fait que la mesure porte, dans le cas de la guitare, sur la vibration de la corde. Cette dernière étant très peu affectée par le fluide environnant, nous apprécions les effets du rayonnement de l'ensemble de la structure sur le couplage entre corde et guitare. Nous cherchons, à partir de ces mesures à trouver le rendement acoustique pour les partiels de la corde de Mi grave d'une guitare.

L'estimation des paramètres modaux de cloche a permis d'évaluer l'effet de la restauration du carillon historique de Perpignan. Les fréquences et facteurs d'amortissement de chacun des modes de vibration des 42 cloches qui le composent ont été estimées avant et après sablage (pour enlever la couche d'oxyde), montées sur le carillon et déposées chez le fondeur.

- ◇ **Composition du document** Il comporte deux parties : traitement de signal et applications. La première est assez détaillée quant aux résultats théoriques. Ce détail a pour vocation de rendre accessible les méthodes pour des lecteurs peu familiers avec ces questions. La deuxième partie est essentiellement expérimentale et nous avons tenté de rendre sa lecture peu dépendante de la première partie.

Celle-ci comprend à la fois une description des deux méthodes et une étude comparée de leur performances statistiques. La question de la sélection des composantes exponentielles décroissantes significatives est abordée. La deuxième partie présente dans l'ordre les techniques expérimentales (principe et méthode) et les applications aux plaques, à la guitare et au carillon. Les résultats obtenus dans le cas des plaques sont comparés à des modèles théoriques simples (plaque infinie) et à des résultats obtenus de manière indépendante par d'autres expérimentateurs. Les résultats concernant la guitare amènent à proposer un modèle pour le couplage corde-chevalet qui fait apparaître explicitement l'influence de la charge acoustique. La méthode d'analyse a permis d'évaluer avec précision les effets du processus de restauration des cloches du carillon historique de Perpignan.

Première partie

Estimation de sinusoides amorties

Chapitre 2

Généralités

Résumé

Pour estimer les fréquences et les facteurs d'amortissement il existe des méthodes paramétriques et non paramétriques. Les méthodes paramétriques et en particulier des méthodes spécifiques sont utilisées couramment dans des contextes comme le traitement d'antenne ou la goniométrie mais leur utilisation en vibroacoustique est moins développée. Ces *généralités* permettent de situer notre travail et de mettre en formes le problème.

Cette partie du document s'intéresse à des signaux composés d'une somme de sinusoides amorties. Ces signaux sont échantillonnés à partir d'une mesure physique et comportent du bruit provenant des capteurs et de l'électronique afférente. Nous cherchons à estimer les fréquences et les facteurs d'amortissement des sinusoides amorties.

Ce problème d'estimation et ses variantes ont, depuis les travaux de R. de Prony et J. Fourier à la fin du XVIII^{ème} siècle, pris beaucoup d'importance parce qu'ils correspondent à des situations physiques courantes (variations périodiques de grandeurs). Les réponses théoriques apportées et leur application font parties de *l'analyse spectrale*.

Les applications que nous présentons dans la partie II concernent les plaques vibrantes, la guitare classique et les cloches du carillon de Perpignan. Dans chacun des cas, une évaluation fine des fréquences et facteurs d'amortissement propres est nécessaire. Cette partie du document décrit les deux méthodes de traitement du signal que nous avons utilisées. La première est non paramétrique et s'apparente à un filtrage de Hilbert. Elle s'applique lorsqu'une *unique* composante sinusoidale peut être isolée. La deuxième —la méthode Matrix pencil— est paramétrique : elle s'appuie sur les propriétés du modèle adopté pour le signal. Elle traite le cas de composantes multiples.

La première méthode est d'une complexité plus faible et permet une visualisation et une analyse rapide. Matrix pencil atteint des performances supérieures en terme de résolution et

permet une automatisation poussée du traitement. Quand plusieurs modes de vibrations ont des fréquences très proches, comme pour la guitare ou les cloches, la première méthode ne s'applique pas. Nous utilisons alors Matrix pencil.

Le nombre de composantes élémentaires (ou de modes propres de vibration) contenues dans un pic isolé de la densité spectrale de puissance reflète le nombre de degrés de liberté du système mécanique étudié. L'analyse Matrix pencil permet d'aborder l'estimation de ce nombre.

La précision de chacune de ces méthodes est évaluée théoriquement par le calcul du biais et de la variance des estimateurs. Ces calculs permettent d'estimer l'incertitude sur une mesure à partir de la valeur du rapport signal à bruit (RSB). Cette incertitude se distingue de celle obtenue par reproduction de la mesure expérimentale car elle dépend du RSB et n'est pas liée aux variations des conditions expérimentales. Sa valeur est importante pour décider de la validité des résultats (possibilité de séparer deux modes par exemple). Elle constitue également, lorsque la décroissance des signaux s'écarte légèrement de l'exponentielle, un indicateur très fiable. Le comportement faiblement non linéaire des verges encastrées en épicea peut être ainsi détecté.

Les paragraphes ci-dessous situent le contexte d'utilisation de ces méthodes et précisent leur classification. Le problème est ensuite formulé. Les chapitres suivants détaillent les deux méthodes. Des exemples synthétiques et expérimentaux viennent illustrer les développements théoriques.

2.1 Classification

Ce paragraphe situe les applications en acoustique musicale et le traitement de nos données expérimentales par rapport aux autres domaines d'application. Il décrit les grands types de méthodes existantes.

2.1.1 Méthodes paramétriques et méthodes classiques

- ◇ Historique L'estimation des paramètres fréquence et/ou facteur d'amortissement de composantes sinusoïdales amorties est un problème traité dans la littérature depuis deux siècles. Gaspard Riche, Baron de Prony le rencontra sous une forme particulière — somme d'exponentielles réelles — dans l'analyse de mesures thermodynamiques de détente de mélanges gazeux (Prony, 1795). Pour étudier la périodicité de certains phénomènes météorologiques, A. Schuster (Schuster, 1898) définit le *périodogramme* qui est le moyen usuel d'estimer la densité spectrale de puissance d'un signal. Le périodogramme est calculé à l'aide de la transformée

de Fourier Discrète.

Les méthodes dont les performances sont ainsi liées à celles de la transformée de Fourier sont des méthodes *classiques*. Celles apparentées à la méthode de Prony, qui font des hypothèses sur la structure du signal, sont des méthodes *paramétriques*. Cette approche précède historiquement de quelques années l'approche de Fourier (1805), mais son développement est récent alors que l'analyse de Fourier est bien connue et utilisée depuis plus d'un siècle.

◇ Différences de caractéristiques Les méthodes classiques bénéficient des algorithmes rapides de transformée de Fourier (TFR ou FFT) mais sont limitées par caractère fini de toute observation. La discontinuité introduite aux bornes de la fenêtre provoque l'étalement du spectre et une perte de résolution. Ces défauts sont étudiés en détail dans la plupart des ouvrages traitant d'analyse spectrale ou de transformée de Fourier (Brigham, 1988; Marple, 1987a; Kumaresan, 1993).

Les méthodes paramétriques s'appuient au contraire sur un modèle du signal ou du processus qui l'engendre. Elles supposent la continuité du signal en dehors de la fenêtre d'observation. Elles n'ont pas de limite théorique en résolution. Le prix à payer en contrepartie est une complexité de calcul plus importante. De plus, les méthodes paramétriques sont par essence sensibles aux erreurs de modélisation alors que la transformée de Fourier ne fait que modifier la *représentation* du signal.

2.1.2 Méthodes spécifiques et non spécifiques

Le principe des méthodes *spécifiques* ou encore *haute résolution* repose sur un modèle de signal. Les propriétés mathématiques du modèle sont exploitées pour estimer ses paramètres. Il peut s'agir d'un modèle de somme de sinus non amorties comme pour la méthode de Pisarenko (Pisarenko, 1973) ou la méthode MUSIC¹ (Schmidt, 1979). Matrix pencil (Hua et Sarkar, 1990) ou la méthode Tufts-Kumaresan (Kumaresan, 1982) modélisent le signal sous forme d'une somme de sinus amortis.

Les méthodes non spécifiques considèrent le signal comme un processus aléatoire y dont il faut estimer les coefficients générateurs. La forme générale de la relation entrée-sortie d'un système numérique linéaire et invariant dans le temps s'écrit

$$y[n] = b_0e[n] + b_1e[n-1] + \dots + b_pe[n-p] - a_1y[n-1] - a_2y[n-2] - \dots - a_qy[n-q], \quad p, q \in \mathbb{N}^2 \quad (2.1)$$

où le processus initiateur e est supposé être un bruit blanc. Les coefficients b_i modélisent la contribution dans $y[n]$ de la Moyenne Ajustée (MA)² des $e[n-i]$. Les coefficients a_i intro-

1. Multiple Signal Classification

2. Ou encore *Moving Average*

duisent une récurrence dans y . Le processus y le plus général possède à la fois cette propriété AutoRégressive (AR) et la contribution MA. Il est qualifié d'ARMA. Les méthodes spécifiques estiment les coefficients a_i et b_i , à partir desquels la densité spectrale du processus peut être calculée. Le spectre obtenu est paramétrique. De telles méthodes sont utilisées en traitement de la parole et du son. Un exemple classique est le codage par prédiction linéaire (Atal, 1970). Les difficultés rencontrées dans l'application de ces méthodes sont notamment :

- la non-linéarité des équations d'estimation du modèle ARMA
- le bon choix du nombre de coefficients dans le modèle
- la sensibilité des valeurs de pôles du modèle AR à une erreur sur les coefficients

◇ Lien entre l'estimation ARMA et les méthodes spécifiques La réponse impulsionnelle du filtre causal décrit par l'équation 2.1 est une somme d'exponentielles complexes. Les fréquences et les facteurs d'amortissement sont déterminés en recherchant les pôles du filtre (racines du polynôme de coefficients $a_0 = 1$ et $a_i, i = 1 \dots q$). Les amplitudes et les phases à l'origine s'obtiennent en calculant ses zéros (racines du polynôme de coefficients b_i). Le modèle de signal $x[n]$ adopté dans une démarche paramétrique spécifique —une somme de sinusoides amorties — correspond à la réponse impulsionnelle d'un tel filtre. Enfin en tenant compte du bruit additif de mesure nous obtenons le schéma de génération représenté sur la figure 2.1.

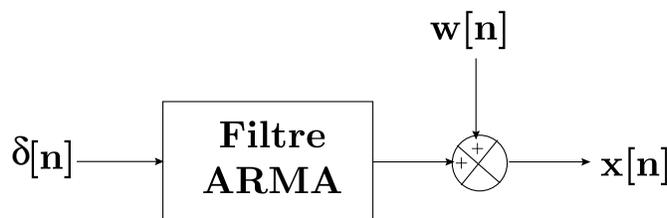


FIG. 2.1: Modèle de processus

2.2 Domaines d'application

Les domaines d'applications des méthodes paramétriques spécifiques sont variés. Il en est d'usuels, pour lesquels l'utilisation de ces méthodes est courante et d'autres, dont l'acoustique musicale fait partie, pour lesquels cette utilisation est peu répandue.

2.2.1 Exemples généraux

Dans des contextes expérimentaux où le nombre de points d'observation est trop faible et où le bruit additif est important la résolution obtenue par l'analyse de Fourier peut s'avérer trop limitée.

C'est par exemple le cas pour *la goniométrie et le traitement d'antenne*. La direction θ_m d'arrivée d'un signal radar (Haykin, 1985) ou sonar (Owsley, 1985) peut être estimée à l'aide d'une antenne de capteurs. La différence de marche entre les rayons provenant d'une même source m située à grande distance et qui parviennent à deux capteurs consécutifs de l'antenne est

$$\delta_m = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta_m$$

où d est la distance inter-capteur et λ la longueur d'onde. A un instant donné, le signal reçu par le n -ième capteur sera la somme des contributions de l'ensemble des M sources soit :

$$x[n] = \sum_{m=1}^M \underline{A}_m e^{jn\delta_m}$$

$\underline{A}_m \in \mathbb{C}$, contient les informations de déphasage et d'amplitude pour la source m . La détermination des paramètres δ_m permet ici de déterminer l'angle θ_m pour chaque source. Le nombre de points disponibles correspond au nombre de capteurs de l'antenne. Les méthodes spécifiques permettent d'améliorer sensiblement la résolution obtenue, c'est à dire la précision dans la localisation des sources.

Pour donner une idée de la diversité des applications possibles, nous pouvons citer *la sismologie* (Schoenberger, 1984) ou encore *Le traitement d'image*. Par exemple, les méthodes paramétriques peuvent être utilisées pour estimer le spectre 2D d'une image de surface marine. Ce type d'investigations permet d'accéder à des caractéristiques du milieu (bathymétrie) (Hafemeister, 1994).

D'une manière plus générale, ces méthodes peuvent être intéressantes pour *l'identification des systèmes physiques linéaires et invariants dans le temps*. Si l'évolution d'un tel système est régie par une équation du type

$$y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \dots + a_m \frac{d^m y(t)}{dt^m} = b_0 x(t) + b_1 \frac{dx(t)}{dt} + b_2 \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \dots + b_n \frac{d^n x(t)}{dt^n}$$

où x désigne l'entrée et y la sortie, alors la réponse impulsionnelle est une somme d'exponentielles complexes. Dans le cas des signaux réels, il s'agit d'exponentielles réelles et de sinusoides amorties. Les méthodes spécifiques permettent d'estimer les paramètres de fréquence et de taux d'amortissement. L'estimation des phases et des amplitudes à l'origine se réduit à résoudre un système d'équations linéaires. L'identification de la réponse impulsionnelle permet de prévoir le comportement du système et parfois d'en connaître les éléments

(cas des circuits électroniques par exemple). Ce type de description recouvre les systèmes électroniques, la production de la parole ou encore les lignes de transmission. Les systèmes mécaniques ou acoustiques dont nous traitons par la suite s'y rattachent également.

2.2.2 Utilisation en mécanique vibratoire et en vibro-acoustique.

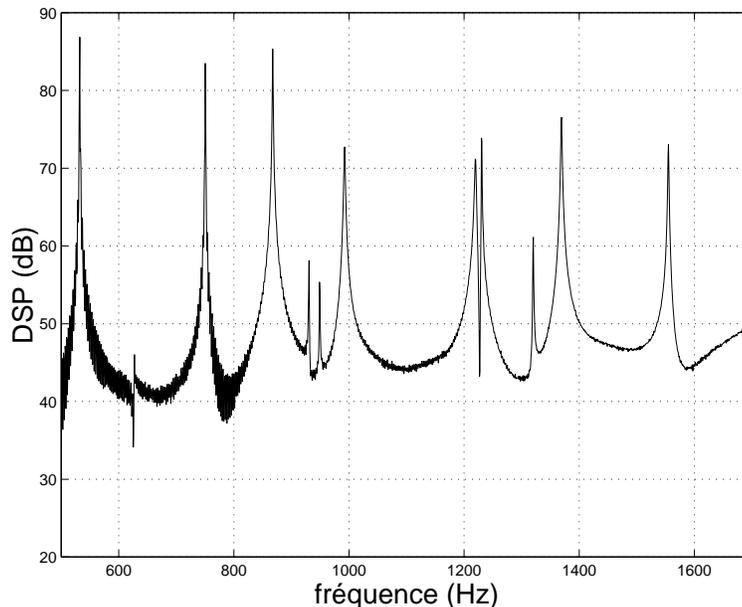


FIG. 2.2: Densité spectrale de puissance du signal d'accélération mesuré pour une plaque en aluminium, mise en vibration libre et excitée par impact. La référence 0dB est ajustée au niveau du bruit de fond.

Le spectre vibratoire obtenu pour une plaque d'aluminium excitée par impact est représenté Figure 2.2. Il est calculé à l'aide de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) du signal échantillonné issu d'un accéléromètre. Il présente une série de pics centrés sur les fréquences propres du système vibrant. Chacun de ces pics correspond à une sinusoïde amortie dans le domaine temporel. En effet :

Les équations de la mécanique des milieux continus aboutissent dans le cas général à un système d'équations différentielles comportant un opérateur d'espace, un opérateur de temps et une fonction d'excitation de la structure. Nous l'écrivons par exemple :

$$\mathcal{L}_{\text{espace}}(\mathbf{x}) + \mathcal{L}_{\text{temps}}(\mathbf{x}) = \mathbf{F} \quad (2.2)$$

où $\mathbf{x} = \mathbf{x}(M, t)$ représente le vecteur déplacement de la structure au point M considéré en fonction du temps. Lorsque ces équations sont linéaires, (ce qui est souvent obtenu en restreignant le domaine d'étude aux petits déplacements) le principe de superposition s'applique. La recherche de solutions monochromatiques, qui présentent une dépendance en temps de

la forme $e^{j\Omega t}$ fournit une équation différentielle en espace équivalent à 2.2. Pour $\mathbf{F} = 0$ — structure en vibration libre — il s'agit alors de résoudre *le problème aux valeurs propres*. Ce problème n'admet de solutions, en tenant compte des conditions aux limites, que pour certaines valeurs Ω_k (*pulsations propres*) de Ω . Ces valeurs correspondent à des mouvements particuliers de la structure ou *modes propres* de vibration, sur lesquels le mouvement libre peut se décomposer. Ces pulsations propres sont en général à valeur complexe si la dissipation est prise en compte. On pose :

$$\Omega_k = 2\pi\nu_k + j\alpha_k \quad (2.3)$$

Nous nous intéressons aux systèmes vibrants tels que la plaque en aluminium mentionnée plus haut. L'ordre de grandeur des taux d'amortissement propres α_k est plus faible que celui des fréquences propres ν_k . La réponse vibratoire du système est réelle et l'évolution temporelle du mode k suit une loi en $e^{-\alpha_k t} \cos(2\pi\nu_k t + \phi_k)$. La densité spectrale du signal vibratoire est par suite constitué de pics aux fréquences ν_k dont les largeurs sont proportionnelles aux taux d'amortissement α_k .

Dans le cas où la structure vibre dans un fluide léger, le rayonnement acoustique se traduit par un déplacement des fréquences ν_k (masse ajoutée) et un accroissement des taux d'amortissement (frottement ajouté), par rapport aux valeurs *in vacuo*. L'estimation des fréquences propres et taux d'amortissement propres permet de caractériser les propriétés mécaniques ou acoustiques de la structure (David, 1995; Lambourg, 1997).

◇ Intérêt des méthodes spécifiques Le signal vibratoire de plaque décrit plus haut décroît avec un temps caractéristique de l'ordre de plusieurs secondes. Il est échantillonné à des cadences courantes comme 44100 Hz (CD) ou 48000 Hz (DAT), ce qui signifie que le nombre de points disponibles pour l'analyse est conséquent : plusieurs fois 100000. Les rapports signaux à bruit de mesure sont de l'ordre de 50 à 70 dB. Nous sommes dans une configuration où l'analyse spectrale classique s'applique avec efficacité (*cf.* Chapitre 3). Cependant, les méthodes spécifiques se révèlent très utiles et parfois indispensables pour deux raisons :

- Le grand nombre de modes à traiter (≈ 100 pour la plaque en aluminium), impose une automatisation du procédé d'analyse. Cette automatisation est plus aisée lorsqu'on utilise une méthode spécifique.
- Deux modes de vibration peuvent se trouver trop proches en fréquence pour être séparables par de l'analyse de Fourier. C'est ce qui se produit lorsque le temps caractéristique de la décroissance est du même ordre que le battement occasionné par la présence des deux fréquences proches.

2.2.3 Applications en acoustique musicale

La caractérisation mécanique et acoustique des structures à l'aide des valeurs de fréquences et taux d'amortissement propres s'applique au cas de nombreux instruments de musique à son non entretenu. La décroissance du son est un des paramètres importants de leur musicalité. L'objectif recherché peut être la compréhension du fonctionnement et des techniques particulières de facture ou la synthèse numérique. Doutaut (1996) utilise les valeurs estimées des fréquences propres et des taux d'amortissement propres des lames de xylophone et de vibraphone pour implanter et tester un modèle de synthèse numérique pour les instruments de percussion à clavier.

Pour des instruments de musique tels que les percussions et les instruments à cordes, la source vibratoire est une membrane, une corde, une table d'harmonie ou une autre structure mécanique. En première approximation et souvent dans un large domaine de validité, le comportement vibratoire peut être considéré comme linéaire et le spectre de la vibration est une somme de raies dont les fréquences sont multiples (harmoniques) ou non d'une fréquence fondamentale. Pour connaître les caractéristiques mécaniques et acoustiques de ces instruments et/ou identifier les paramètres d'un modèle de synthèse numérique, il est nécessaire d'estimer ce spectre, c'est à dire estimer les composantes sinusoïdales qui forment le signal. Dans le cas d'une synthèse de percussion par exemple, le timbre obtenu dépend beaucoup d'une bonne estimation de la décroissance des composantes. Pour le piano, une mesure fine des raies spectrales met en évidence l'inharmonicité des partiels de corde, due à la raideur de celle-ci (Boutillon, Radier, Valette, et Castellengo, 1984; Valette et Cuesta, 1993).

L'estimation à l'aide des méthodes classiques est souvent prise en défaut en raison de la présence de battements. Ceux-ci sont une caractéristique importante de la sonorité des instruments. Ces battements peuvent être dus à une modulation d'intensité et/ou une modulation de fréquence comme dans le vibrato des chanteurs mais souvent, et en particulier pour les instruments à son non entretenu, ils sont l'expression de doublets ou triplets (voire davantage) fréquentiels. Notre système auditif perçoit comme variation temporelle les fréquences différentielles de ces multiplets. Lorsque l'analyse de Fourier se révèle inopérante pour séparer les différentes composantes, l'utilisation des méthodes spécifiques permet leur estimation. Le cas du piano est significatif : la plupart des notes correspondent à la frappe du marteau sur trois cordes simultanément et ces trois cordes sont légèrement désaccordées par le facteur pour permettre une plus longue décroissance du son (Weinreich, 1977).

2.2.4 Cas de notre étude

Au cours de notre étude, nous avons utilisé les deux types de méthodes — classique et spécifique — pour estimer les fréquences et les temps de décroissances modaux des structures

vibrantes. Pour étudier le rayonnement acoustique des plaques minces vibrantes les méthodes classiques s'appliquent avec efficacité lorsqu'on a affaire à des matériaux peu amortis. En revanche, les signaux vibratoires issus de la guitare en mode de jeu présentent des battements dus à des conditions aux limites anisotropes au chevalet (Lambourg et Chaigne, 1993). La proximité des fréquences mises en jeu impose l'utilisation d'une méthode paramétrique spécifique. Nous avons utilisé Matrix-Pencil.

L'automatisation du procédé est réalisée grâce à Matrix pencil. La caractérisation des signaux et leur prétraitement sont effectués par des algorithmes qui s'appuient sur la transformée de Fourier.

2.2.5 Importance de la mesure des incertitudes

L'utilisation des méthodes haute-résolution a ses limitations : les valeurs obtenues sont des estimations dont la précision dépend de la part d'aléas contenue dans le signal. L'incertitude sur les fréquences et les facteurs d'amortissement mesurés est meilleure si le rapport signal à bruit est plus grand. Prenons par exemple un mode vibratoire de corde de guitare. Nous trouvons deux composantes à 82.2 Hz et 82.3 Hz. Il est nécessaire de chiffrer l'incertitude sur ces valeurs pour la comparer à 0.1 Hz. D'autre part, le principe de notre mesure du rendement acoustique tel que défini dans l'introduction générale repose sur l'estimation des taux de décroissance tout d'abord dans l'air ambiant puis dans le vide. Les différences entre les valeurs obtenues sont parfois faibles et celles-ci ne pourront être jugées significatives que si on les sait plus grandes que l'incertitude sur chacune des mesures. Cette condition est d'autant plus difficile à réaliser que les signaux sont plus amortis (c'est par exemple le cas pour des éprouvettes ou des plaques en bois).

2.3 Formulation du problème

Nous cherchons à estimer les paramètres d'un signal composé d'une somme de sinusoïdes amorties et d'un bruit additif $w[n]$. Nous l'écrivons sous forme complexe :

$$x[n] = \sum_{k=1}^M b_k z_k^n + w[n] \quad , \quad n = 0, 1 \dots N - 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_k = e^{-\alpha_k + i\omega_k} \\ b_k = A_k e^{i\Phi_k} \end{cases} \quad (2.4)$$

Les α_k sont les *facteurs d'amortissement* ou *taux d'amortissement* et prennent des valeurs réelles. Ce sont des valeurs par échantillon ou réduites. Les *pulsations réduites* ω_k sont des réels compris entre 0 et π en valeur absolue. Les *amplitudes* A_k prennent des valeurs réelles positives et les phases Φ_k sont à valeurs réelles dans l'intervalle $]-\pi \pi]$. Les paramètres complexes b_k et z_k sont ceux que nous cherchons à estimer.

Il faut remarquer cependant, que le nombre M de composantes du signal est lui aussi *a priori* inconnu et doit être évalué.

La séquence $x[n]$ provient de l'échantillonnage d'un signal continu aux instants nT_e où T_e est la période d'échantillonnage. La relation entre les grandeurs réduites et les grandeurs exprimées dans le système international d'unités est alors donnée par :

$$\alpha_k^{si} = \alpha_k F_e \text{ et } f_k = \omega_k F_e / 2\pi \quad (2.5)$$

où le taux d'amortissement α_k^{si} est usuellement exprimé en s^{-1} . La décroissance d'une composante peut également être caractérisée par son *temps de décroissance* qui vaut $1/\alpha_k^{si}$, exprimé en secondes. La fréquence f_k est exprimée en Hz et F_e désigne la fréquence d'échantillonnage en Hz.

Classiquement un estimateur du quadruplet de paramètres :

$$\boldsymbol{\theta}_k = (\alpha_k, \omega_k, A_k, \Phi_k)$$

est noté

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}_k = (\hat{\alpha}_k, \hat{\omega}_k, \hat{A}_k, \hat{\Phi}_k)$$

Les propriétés d'un estimateur sont évaluées par le calcul de son biais et de sa variance. Le biais donne l'écart de la moyenne stochastique³ $\mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k$ de l'estimateur avec la valeur vraie. La variance donne l'écart quadratique moyen par rapport à la moyenne de l'estimateur :

$$\text{Var } \hat{\boldsymbol{\theta}}_k = \mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_k - \mathbf{E}\hat{\boldsymbol{\theta}}_k)$$

Cette variance est un indicateur de la dispersion possible des valeurs.

La qualité de l'estimation peut alors être appréciée en comparant ces valeurs aux valeurs optimales que l'on peut obtenir. Le biais vaut 0 lorsque l'estimateur est non biaisé et il existe une variance minimale théorique pour tout estimateur non biaisé d'un paramètre donné. Ce minimum théorique est la borne de Cramer-Rao ou BCR (*cf.* paragraphe 3.4).

3. encore appelée espérance mathématique, prise sur les réalisations du signal aléatoire

Chapitre 3

Méthode d'estimation utilisant une transformation de Hilbert

Résumé

Ce chapitre décrit une méthode d'estimation des paramètres qui s'apparente au filtrage de Hilbert. Son caractère essentiellement non paramétrique la rend intéressante pour recueillir des informations *a priori* sur les signaux. Lorsqu'on peut isoler une composante, elle fournit des valeurs de fréquence, d'amortissement, de phase et d'amplitude à l'origine. Le biais et la variance des estimateurs sont calculées. On montre qu'il existe une valeur optimale de la fenêtre d'observation, qui rend la variance minimale.

La méthode présentée dans ce paragraphe fournit une réponse au problème d'estimation posé (paragraphe 2.3) dans l'hypothèse où chacune des composantes peut être isolées des autres par filtrage. Le signal filtré correspond alors à l'expression 2.4 avec $M = 1$. Les paramètres de la composante sont l'amplitude à l'origine A_k , la phase à l'origine Φ_k , la fréquence réduite ν_k et le facteur d'amortissement réduit α_k . Elle s'écrit sous sa forme non bruitée :

$$x_k[n] = A_k e^{-\alpha_k n} \cos(2\pi\nu_k n + \Phi_k) \quad (3.1)$$

La cheville ouvrière de cette méthode est *la transformée de Hilbert*, telle qu'elle est définie originellement dans (Hille, 1959) et reprise par la suite dans de nombreux ouvrages (Flandrin, 1993; Charbit, 1996; Mitra et Kaiser, 1993). Nous utilisons cette transformée ou un filtrage équivalent pour extraire les lois de modulation en amplitude et en phase pour la raie spectrale étudiée. La méthode est de nature essentiellement non paramétrique : les hypothèses faites sur le modèle de signal sont peu contraignantes (pouvoir identifier des pics dans le spectre).

Cette propriété présente un intérêt dans l'étude préliminaire des signaux. Comme la méthode ne suppose pas connues les propriétés spécifiques du modèle de signal, le problème peut être abordé plus "en amont" en validant ou au contraire en infirmant le modèle proposé. La

visualisation de la loi de modulation en amplitude peut par exemple permettre de déceler une saturation, une décroissance non exponentielle ou un battement dû à la présence de deux composantes proches.

Ce chapitre présente le principe général de la méthode, décrit son cadre théorique. Le calcul de la variance de l'estimateur obtenu est donné.

3.1 Principe général

Le principe de la méthode est celui d'une démodulation, à ceci près que la fréquence modulante n'est pas connue. Il est utilisé sous une forme voisine dans le domaine des communications numériques sous la dénomination de démodulation MAQ (Modulation d'Amplitude en Quadrature, voir par exemple Charbit, 96). En démodulation MAQ on cherche à extraire deux lois en amplitude alors que nous voulons extraire une loi en amplitude et une loi en phase. Le signal complexe associé à une sinusoïde amortie de la forme 3.1 est :

$$y_k[n] = A_k e^{-\alpha_k n} e^{j(2\pi\nu_k n + \Phi_k)} \quad (3.2)$$

Le logarithme népérien de son module et son argument instantanés sont des fonctions affines du temps. En déterminant la pente de ces droites on obtient le taux d'amortissement α_k et la pulsation $2\pi\nu_k$. On peut compléter l'estimation en cherchant les ordonnées à l'origine des fonctions qui fournissent des valeurs de A_k et de Φ_k .

Pour effectuer cette double démodulation en amplitude (qui donne la fonction modulante $A_k e^{-\alpha_k n}$) et en phase (qui donne la fonction modulante $2\pi\nu_k n + \Phi_k$) il faut :

- isoler une composante (filtrage)
- passer du signal réel au signal complexe associé

Le *signal analytique* associé à $\cos(2\pi\nu_k n)$ est justement $e^{i2\pi\nu_k n}$ et la transformée de Hilbert permet d'obtenir le signal analytique associée à un signal réel. Cette transformée est simplement un filtrage numérique "spécial", au même titre que par exemple l'intégrateur ou le différentiateur. On peut trouver une étude de ces filtres par Régalia (93).

3.2 La transformée de Hilbert

La théorie de cette transformée se retrouve dans de nombreux ouvrages de traitement du signal (Duvaut, 1991; Flandrin, 1993; Charbit, 1996). Le conception des filtres numériques correspondants, quant à elle, est détaillée dans la référence citée plus haut (Regalia, 1993).

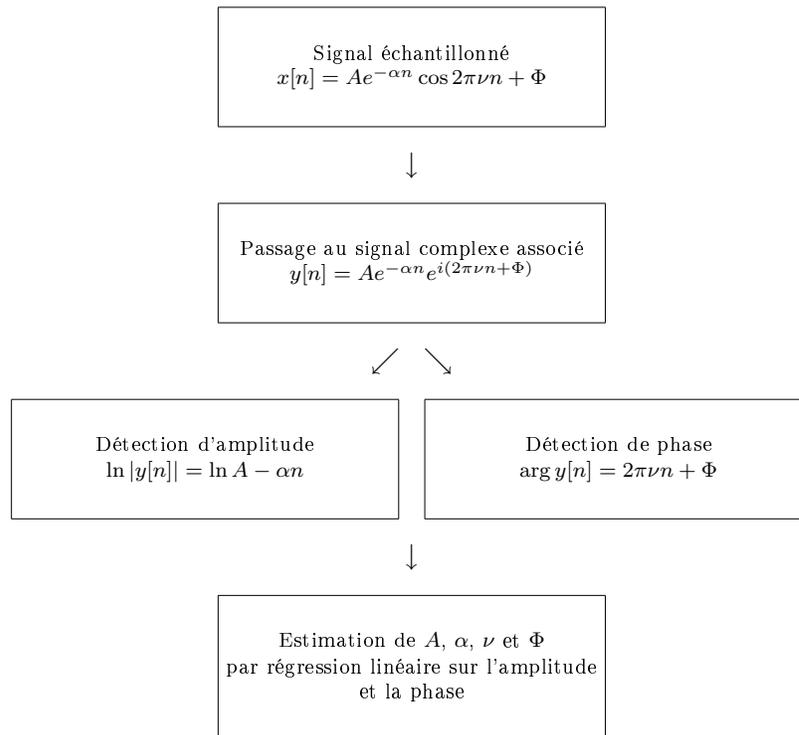


FIG. 3.1: Principe général de la méthode : démodulation à l'aide d'un passage au signal complexe associé

3.2.1 Signal analytique

La transformée de Fourier $\hat{x}(\nu)$ d'un signal numérique *réel* $x[n]$ possède la propriété de symétrie hermitienne, qui lie ses valeurs pour les fréquences réduites positives et négatives :

$$\hat{x}(\nu) = \hat{x}^*(-\nu) \quad (3.3)$$

Les valeurs de la transformée de Fourier sont redondantes : comme les transformées de Fourier des signaux numériques sont 1-périodiques, toute l'information est contenue dans un seul des deux segments $[0 \ 0.5[$ ou $[0.5 \ 1[$. Le signal analytique $x_a[n]$ associé au signal réel $x[n]$ est défini par sa transformée de Fourier, qui vérifie :

$$\hat{x}_a(\nu) = \begin{cases} 2\hat{x}(\nu) & \text{pour } \nu \in]0 \ 0.5[\\ \hat{x}(\nu) & \text{pour } \nu = 0 \text{ et } \nu = 0.5 \\ 0 & \text{pour } \nu \in]0.5 \ 1[\end{cases} \quad (3.4)$$

Ce signal véhicule la même quantité d'information que $x[n]$. $\hat{x}_a(\nu)$ est une fonction développable en série de Fourier dont les coefficients sont les valeurs $x_a[n]$, par définition de la transformée de Fourier d'un signal numérique. La valeur de $\hat{x}_a(\nu)$ aux points de discontinuité

$\nu = 0$ et $\nu = 0.5$ est égale à la demi-somme de ses valeurs par limite inférieure et supérieure¹. La partie imaginaire de $x_a[n]$ est nécessairement non-nulle si $x[n]$ n'est pas identiquement nul; c'est en quelque sorte un "complexifié" de $x[n]$. Le passage de x à x_a est un filtrage linéaire dont la réponse en fréquence est définie par la relation 3.4. La réponse impulsionnelle correspondante s'obtient par transformée de Fourier inverse :

$$h_a[n] = \int_0^{0.5} 2e^{j2\pi\nu n} d\nu = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ \frac{2j}{\pi n} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases} \quad (3.5)$$

3.2.2 Transformation de Hilbert

Cette transformation associe la partie réelle (*i.e.* $x[n]$) et la partie imaginaire $x_h[n]$ du signal analytique soit :

$$x_a[n] = x[n] + jx_h[n]$$

La transformée de Hilbert $x_h[n]$ du signal $x[n] = A \cos(2\pi\nu_0 n)$ vaut alors $A \sin(2\pi\nu_0 n)$ et s'obtient par déphasage de $\pi/2$. La partie imaginaire du signal analytique est en *quadrature* par rapport à sa partie réelle. Cette transformation est un filtrage linéaire dont la réponse fréquentielle s'obtient à partir de la définition 3.4 :

$$H(\nu) = \begin{cases} -j & \text{pour } \nu \in]0 \ 0.5[\\ 0 & \text{pour } \nu = 0 \text{ ou } \nu = 0.5 \\ j & \text{pour } \nu \in]0.5 \ 1[\end{cases} \quad (3.6)$$

La réponse impulsionnelle correspondante, qui est aussi la partie imaginaire de $h_a[n]$ est donnée par :

$$h(n) = \begin{cases} 0 & \text{pour } n \text{ pair} \\ \frac{2}{\pi n} & \text{pour } n \text{ impair} \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.3 Application à un sinus amorti

On passe du signal réel au signal analytique par un filtrage linéaire de gain :

$$G(\nu) = 1 + jH(\nu)$$

Si le signal réel est de la forme $x[n] = A(n) \cos(2\pi\nu_0 n)$, $\nu_0 \in [0 \ 0.5]$, son spectre est la somme du spectre de $A(n)$ décalé autour de $+\nu_0$ et du spectre de $A(n)$ décalé autour de $-\nu_0$. Si ce

1. Théorème de Dirichlet pour une fonction développée en série de Fourier et admettant des dérivées continues de part et d'autre de la discontinuité.

spectre est à support borné dans l'intervalle $[0 \ 0.5]$ alors les deux spectres ne se recouvrent pas et le signal analytique associé est :

$$x_a[n] = A(n)e^{j2\pi\nu_0 n} \quad (3.8)$$

Le filtrage de Hilbert du signal $x[n]$ permet d'obtenir la forme 3.8 et $A(n)$ s'en déduit comme indiqué dans le paragraphe 3.1. La condition sur B ne peut cependant pas être vérifiée parfaitement en raison de la durée limitée des signaux d'acquisition. Le signal analytique ne correspond alors plus à l'expression donnée en 3.8. Celle-ci en est toutefois une approximation dans de nombreuses situations usuelles où la majeure partie de l'énergie du signal étant comprise dans une bande de fréquence donnée $[\nu_0 - B \ \nu_0 + B]$ (avec souvent $B \ll \nu_0$).

La figure 3.2 représente le cas où la fonction $A(n)$ vaut :

$$A(n) = e^{-\alpha n} \times \mathbf{1}_{[0, +\infty[}(n)$$

avec α réel positif. La transformée de Fourier de cette séquence exponentielle causale est donnée par :

$$\mathring{A}(\nu) = \frac{1}{1 - e^{-\alpha - j2\pi\nu}}$$

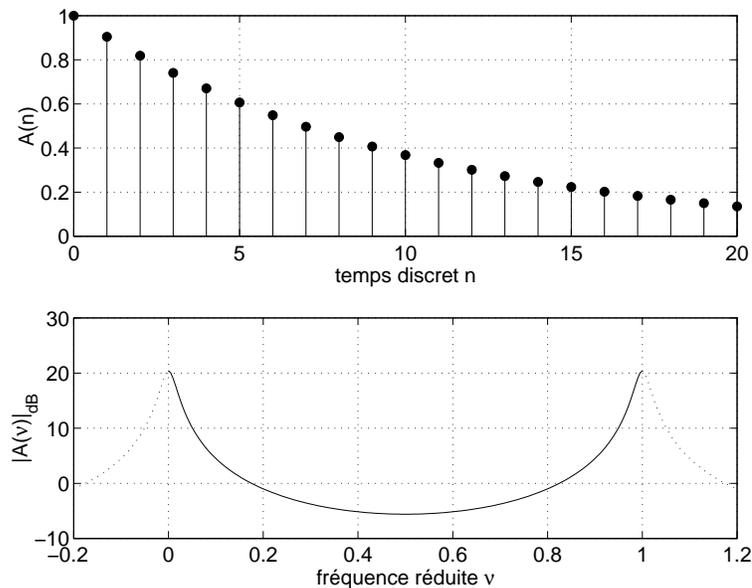


FIG. 3.2: Séquence exponentielle avec $\alpha = 0.1$ et sa transformée de Fourier.

Le spectre de

$$x_c[n] = e^{-\alpha n} e^{j2\pi\nu_0 n}$$

est obtenu en décalant celui de $e^{-\alpha n}$, dont la forme est donnée Figure 3.2 autour de la fréquence ν_0 . Il est *différent de zéro* dans l'intervalle $[0.5 \ 1]$. $x_c[n]$ n'est pas un signal analytique. Il sera quasi-analytique si la contribution du spectre pour l'intervalle $[0.5 \ 1]$ est négligeable. Pour

cette composante amortie, la bande utile du signal, définie par la largeur à mi-hauteur, est approchée pour les α faibles ($\alpha \ll 1$, condition vérifiée très généralement ici) par la valeur

$$B = \alpha/\pi$$

La condition de quasi-analyticité se traduit alors par :

$$\frac{B}{2\nu_0} \ll 1 \quad \leftrightarrow \quad \frac{\alpha}{2\pi\nu_0} \ll 1 \quad (3.9)$$

Il suffit que la pulsation soit très grande devant le facteur d'amortissement pour assurer la quasi-analyticité de x_c . Dans la très grande majorité des signaux expérimentaux étudiés, cette condition est satisfaite et le signal analytique associé à $x[n] = e^{-\alpha n} \cos(2\pi\nu_0 n)$ sera une bonne approximation de $x_c[n]$. En considérant la symétrie du spectre autour de ν_0 , on peut ajouter que la condition sera d'autant mieux satisfaite que ν_0 est proche de 0.25.

3.3 Utilisation en bande étroite

Comme dans l'exemple de la plaque en aluminium (figure 2.2, page 22), les signaux vibratoires recueillis lors de nos expériences présentent un spectre comprenant plusieurs raies. Lorsque les composantes sont bien séparées en fréquence, un filtrage complexe permet simultanément d'isoler une composante de passer au signal analytique.

Nous procédons de deux manières : d'une part à l'aide de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) et d'autre part par un filtrage numérique à coefficients complexes qui coupe la bande des fréquences réduites $[0.5 \ 1]$. La première technique présente l'avantage d'une complexité plus faible, allégée par les algorithmes de transformée de Fourier rapide alors que la seconde, plus coûteuse en temps de calcul, permet de construire un estimateur dont les performances sont meilleures. Seule cette seconde technique conserve au signal une forme d'exponentielle complexe.

3.3.1 Méthode par fenêtrage de la TFD

Cette méthode reprend une idée utilisée dans le script Matlab *Hilbert.m* (Claerbout, 1976), mais adaptée pour filtrer une bande de fréquence donnée $[\nu_0 \ \nu_1] = [k_0/N \ k_1/N]$. Les étapes de ce traitement sont décrites dans le schéma de la figure 3.3.

Le fenêtrage fréquentiel a pour but d'isoler une composante et de mettre à zéro les points dont la fréquence réduite est située dans la deuxième moitié du spectre. Le facteur 2 dans l'expression de la fenêtre provient de la définition 3.4 et l'entier k_1 sera choisi tel que $k_1/N < 0.5$. Ainsi, le signal $x_f[n]$ admet une TFD nulle dans cette deuxième moitié. La séquence finie $x_f[n]$ n'admet pas pour autant une transformée de Fourier nulle pour $\nu \in [0.5 \ 1]$: celle-ci n'est

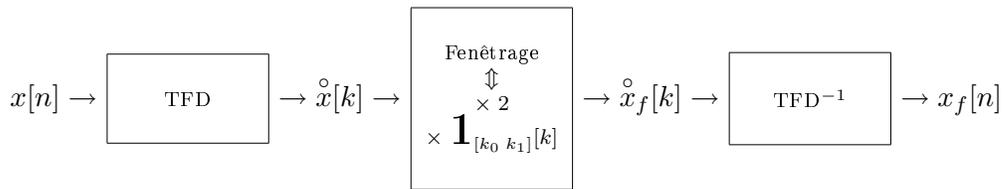


FIG. 3.3: Passage au signal analytique pour une composante par TFD. La TFD et la TFD inverse sont d'ordre N .

nulle qu'aux points $\nu = k/N$ et le signal $x_f[n]$ n'est en général pas analytique. En revanche, le signal $\tilde{x}_f[n]$, obtenu par N -périodisation de $x_f[n]$, admet pour transformée de Fourier un peigne de Dirac en k/N dont les poids sont précisément les $\hat{x}_f[k]$ et $\tilde{x}_f[n]$ est donc un signal analytique.

Pour utiliser des algorithmes de FFT, qui sont optimisés pour des ordres égaux à des puissances de deux et ainsi accélérer le traitement, N est pris égal à la puissance de deux immédiatement supérieure au nombre de points du signal.

◇ Effets de l'opération TFD-fenêtrage-TFD⁻¹ La TFD suppose des séquences d'entrée de longueur finie. Cette remarque a deux conséquences :

- La TFD est un échantillonnage de la transformée de Fourier de la séquence finie $x[n]$, $n \in [0, N-1]$. L'effet réciproque dans le domaine temporel est une N -périodisation de la séquence. Le traitement est invariant par décalage *circulaire* de la séquence et peut s'écrire sous la forme d'une convolution circulaire
- Une séquence finie $x[n]$, $n \in [0, N-1]$ correspond à une opération de multiplication par la fenêtre $\mathbf{1}_{[0, N-1]}$. Ce fenêtrage implique un étalement du spectre (convolution par un sinus cardinal) et par suite, dans le cas général, la séquence possède de l'énergie dans la bande passante du filtre *quelque soit la fréquence* ν_0 . Notamment, la séquence $e^{j2\pi\nu_0 n}$, $n \in [0, N-1]$ admet généralement une TFD non nulle pour $k \in [k_0, k_1]$ dans le cas où ν_0 n'est pas dans la bande passante ($\nu_0 \notin [k_0/N, k_1/N]$). La figure 3.4 illustre ce résultat par le tracé de l'énergie présente en sortie en réponse à une entrée sinusoïdale. Les lobes secondaires observés dans la bande coupée sont dus à l'étalement du spectre et limitent les performances du filtre.

Les *effets temporels* du traitement s'obtiennent en considérant la relation entre les TFD :

$$\hat{x}_f[k] = \hat{x}[k] \times 2 \times \mathbf{1}_{[k_0, k_1]}[k]$$

Cette relation entraîne une relation de convolution circulaire entre les séquences :

$$x_f[n] = x[n] \circledast f[n]$$

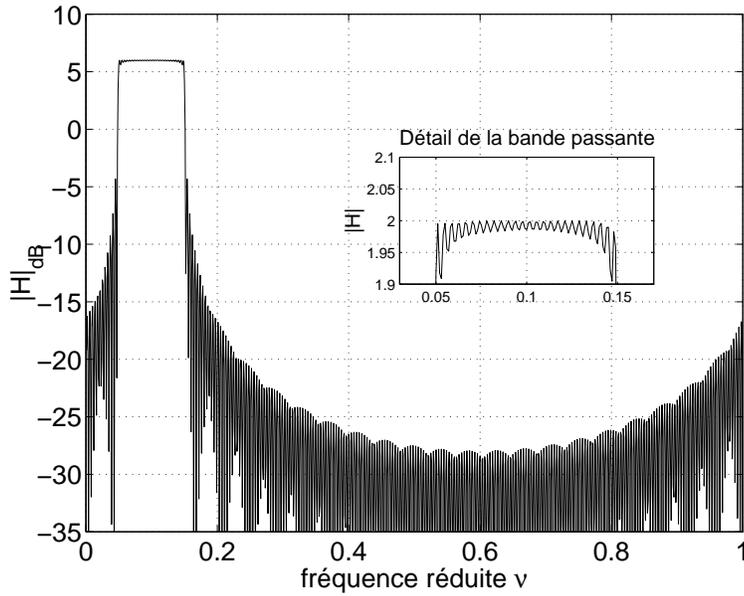


FIG. 3.4: Réponse à une entrée sinusoïdale du filtrage réalisé par TFD-Fenêtrage- TFD^{-1} . Les valeurs utilisées sont $N = 256$, fréquence centrale du filtre = 0.1 et bande passante = 0.1.

où $f[n]$ est la TFD inverse de la fenêtre $\mathbf{1}_{[k_0 k_1]}$ et vaut

$$f[n] = \frac{2}{N} e^{j \frac{2\pi n}{N} \left(\frac{k_0 + k_1}{2} \right)} \frac{\sin(\pi n (k_1 - k_0 + 1)/N)}{\sin(\pi n/N)}, n \in [0 N - 1]$$

La séquence $f[n]$, dont la forme est donnée figure 3.5 est un sinus cardinal numérique, qui s'obtient par périodisation d'ordre N d'un sinus cardinal; elle comporte un lobe principal et des lobes secondaires et est N -périodique. L'effet de cette convolution circulaire peut alors en être déduit. Il apparaît des ondulations au voisinage des transitions brusques du signal² et si le signal a été complété par des zéros (jusqu'à N , l'ordre de la FFT), ces points nuls en entrée ne seront plus nuls en sortie. La figure 3.6 montre ces résultats pour une sinusoïde amortie dont la fréquence ν_0 est située dans la fenêtre spectrale (*i.e.* $\nu_0 \in [k_0/N k_1/N]$).

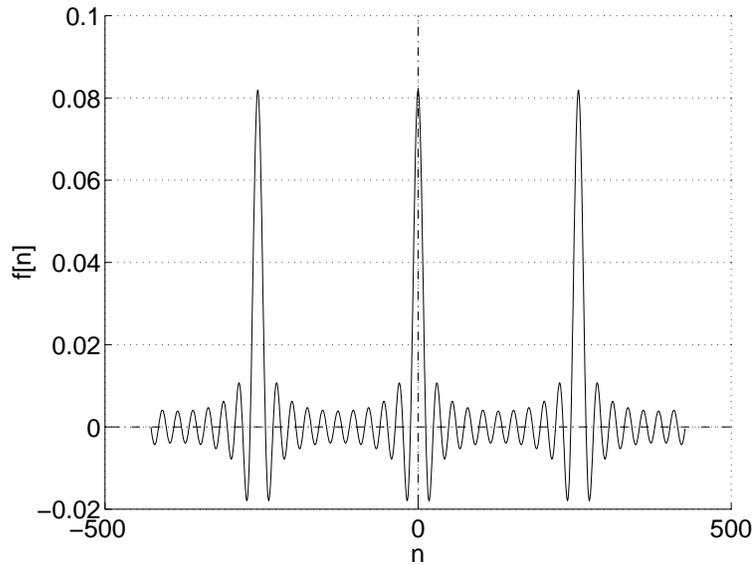


FIG. 3.5: Représentation de $f[n]$ pour $k_1 = -k_0 = 10$ et $N = 256$. Le lobe principal est d'amplitude $1/N$. On a représenté 3 périodes.

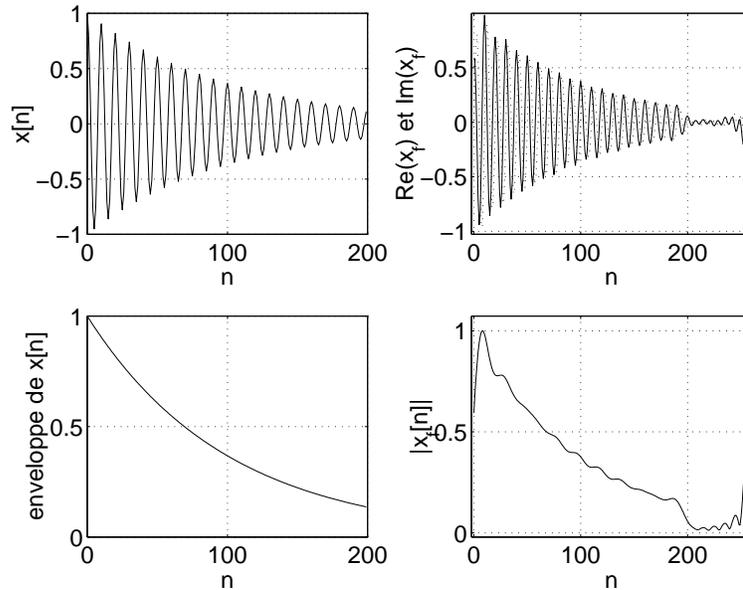


FIG. 3.6: Représentations de $x[n] = e^{-0.01n} \cos 2\pi 0.1 n$ et de $x_f[n]$ obtenues pour un nombre de points de signal égal à 200, un ordre de TFD $N = 256$. Les valeurs des fréquences basse et haute du filtre sont $\nu_0 = 0.05$ et $\nu_1 = 0.15$. On observe des ondulations sur l'enveloppe de x_f .

3.3.2 Synthèse d'un filtre RIF complexificateur

Les techniques usuelles de synthèse des filtres numériques sont applicables pour réaliser un filtre à bande étroite située dans la première partie du spectre. Nous cherchons ici à obtenir un filtre linéaire invariant à réponse impulsionnelle finie (RIF). Nous avons choisi d'utiliser ce type de filtre en raison de sa linéarité de phase et de la durée finie de sa réponse transitoire. Les méthodes classiques de conception de ces filtres RIF comprennent la méthode par fenêtrage, la méthode par échantillonnage en fréquence ou encore la méthode de Remez (voir par ex. (Saramäki, 1993)). Nous présentons ici l'application d'une technique de synthèse par fenêtrage.

La réponse en fréquence recherchée vaut 2 dans la bande passante et 0 dans la bande coupée soit :

$$H_{id}(\nu) = 2 \times \mathbf{1}_{[\nu_0 - \frac{\delta\nu}{2}, \nu_0 + \frac{\delta\nu}{2}]}(\nu)$$

La réponse impulsionnelle correspondante est un sinus cardinal :

$$h_{id}[n] = 2\delta\nu e^{j2\pi n\nu_0} \text{sinc } \pi n\delta\nu$$

La réponse impulsionnelle du filtre RIF est obtenue en multipliant cette séquence $h_{id}[n]$ par une fenêtre de troncature $\mathcal{F}[n]$ et par un décalage de d échantillons. Ce décalage a pour but de rendre le filtre causal. La réponse en fréquence du RIF est la convolution de $\overset{\circ}{h}_{id}(\nu)e^{-j2\pi\nu d}$ par la transformée de Fourier de la fenêtre $\mathcal{F}[n]$. Cette convolution a pour effet de faire apparaître des lobes secondaires dans la bande coupée, des ondulations dans la bande passante du filtre et d'élargir celle-ci.

Nous utilisons cette méthode lorsque les composantes sont bien séparées comme dans le cas des modes de vibration de plaques ou de verges. En effet une grande sélectivité du filtre ne peut être obtenue qu'au prix de l'augmentation du nombre de points de la réponse impulsionnelle et par suite une longueur de transitoire et une complexité de calcul accrue. Dans des conditions peu contraignantes, où pour un nombre de points de réponse impulsionnelle réaliste, la bande passante du filtre reste faible devant l'espacement entre les fréquences de deux modes adjacents, nous cherchons à avoir une bande coupée la plus atténuée possible. De cette manière, les autres composantes influent au minimum sur l'estimation de la composante étudiée. La fenêtre choisie possède la transformée de Fourier qui présente des lobes secondaires très faibles, au détriment de la largeur du lobe principal. De ce point de vue, parmi les fenêtres classiques, la fenêtre de Blackman (Blackman et Tukey, 1958) est intéressante : la bande coupée est au moins 75 dB au dessous de la bande passante et les ondulations dans la bande passante sont très faibles. Un exemple de filtre obtenu avec $\nu_0 = 0.2$ et $\delta\nu = 0.1$ est donné figure 3.7.

Les caractéristiques du filtre en fonction de son ordre N sont alors données par (Saramäki,

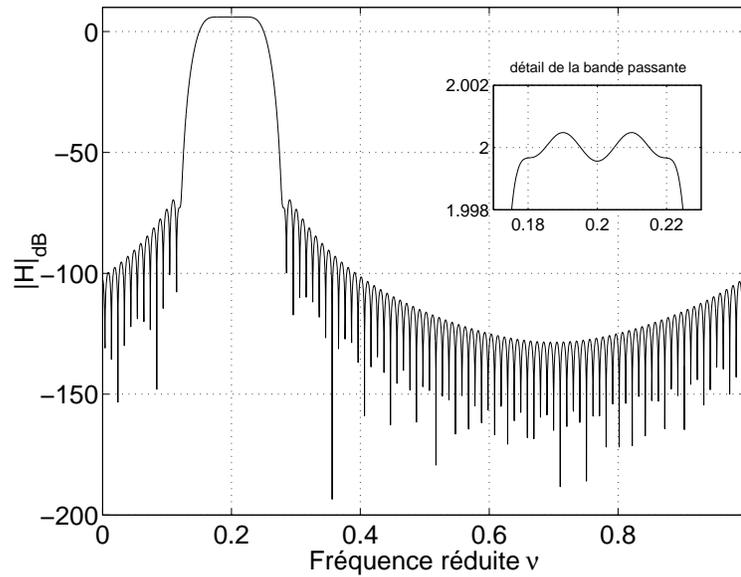


FIG. 3.7: Filtre RIF obtenu par la méthode des fenêtres pour $N = 100$, $\nu_0 = 0.2$ et $\delta\nu = 0.1$.

1993):

- Largeur de la bande de transition à -75dB : $\Delta\nu_T = \frac{5.57}{N}$. En ajoutant cette valeur à la valeur de bande passante du filtre idéal cherchée on obtient la bande passante à -75dB du filtre réel. Toutes les composantes situées en dehors d'une bande de fréquence $\nu_0 \pm \frac{\delta\nu + \Delta\nu_T}{2}$ seront atténuées d'au moins 75dB par rapport à celles situées dans la bande passante. Cette valeur permet de fixer l'ordre du filtre nécessaire pour obtenir la sélectivité voulue.
- Hauteur du premier lobe secondaire : -75.3dB par rapport à la bande passante
- Amplitude maximum des ondulations dans la bande : $1.5 \cdot 10^{-3}\text{dB}$

3.3.3 Comparaison entre les méthodes par TFD et par RIF

Les graphes de la figure 3.8 permettent de comparer les méthodes. Le mode de vibration libre de la plaque en aluminium étudié est à une fréquence de 1555Hz . Les amplitude et phase instantanées obtenues sont représentées.

Du point de vue des performances de filtrage, la comparaison entre les deux méthodes est à l'avantage de la deuxième (filtrage RIF). En effet, elle s'avère meilleure quant à l'atténuation dans la bande coupée et des ondulations dans la bande passante (*cf.* figures 3.4 et 3.7). Sa réponse en phase est linéaire. En outre, elle présente par nature (RIF) une réponse transitoire

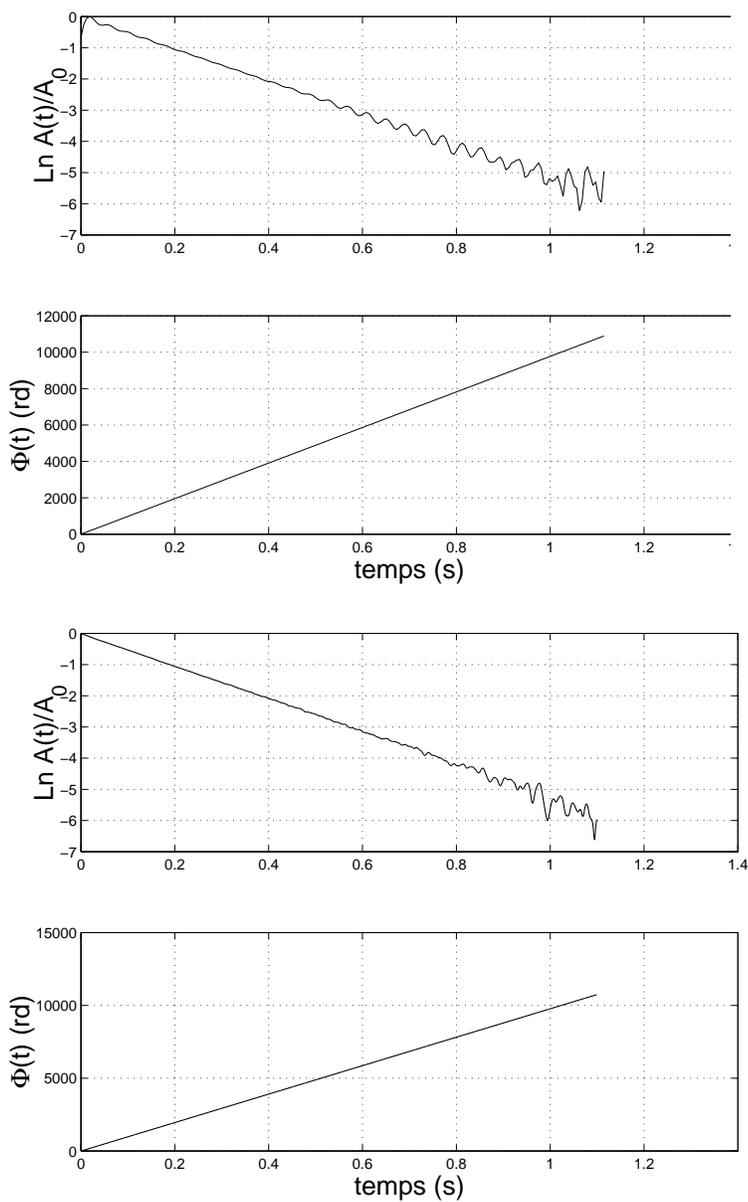


FIG. 3.8: Amplitude et phase instantanée du signal vibratoire du mode à 1555Hz d'une plaque d'aluminium en vibration libre. Le premier graphe est obtenu par la méthode TFD-fenêtrage- TFD^{-1} et le deuxième par la méthode par filtrage RIF.

finie qui correspond à la longueur de la réponse impulsionnelle. On peut s'en affranchir en éliminant du traitement les N premiers points du signal filtré.

Du point de vue de la complexité en revanche, la première méthode (par TFD-fenêtrage- TFD^{-1}) est plus avantageuse, en raison des algorithmes de transformée de Fourier Rapide (TFR ou FFT³). Il est possible d'évaluer la complexité du calcul pour obtenir le signal analytique par le nombre d'opérations à virgule flottante (ou *flops*) nécessaires pour traiter les 50000 échantillons de mesure :

- 3Mflops dans le cas de la méthode TFD-Fenêtrage- TFD^{-1}
- 400 Mflops dans le cas de la méthode à filtrage RIF.

Pour l'estimation des fréquences et des facteurs d'amortissement, nous retiendrons la *deuxième méthode*. Dans la première méthode, le signal de sortie résulte d'une convolution par un sinus cardinal. Celle-ci fait apparaître des ondulations sur l'amplitude instantanée, visibles figure 3.8; et ces ondulations introduisent *un biais* dans l'estimation. Pour la méthode utilisant un filtrage RIF de longueur L en revanche, la réponse à une exponentielle complexe $e^{-\alpha n + j2\pi\nu_0 n}$, $n \in [0, N-1]$ est, en dehors des $L-1$ premiers points, de même nature à un facteur d'amplitude et de phase près. Les estimateurs sont alors *non biaisés*. Une analyse équivalente, mais qui considère les pôles et les zéros du polynôme prédicteur du processus aboutit à des conclusions voisines: l'emploi de filtres RIF est préférable pour améliorer du rapport signal à bruit d'une composante (Kumaresan, 1993).

La méthode par TFD fournit cependant un moyen rapide d'investigation et de contrôle en cours d'expérimentation. Elle permettra notamment d'avoir rapidement un ordre de grandeur des paramètres, de contrôler l'absence de rebond après le premier impact et la linéarité des décroissances.

3.4 Calcul des incertitudes - Fiabilité de la mesure

Le filtre RIF de Hilbert synthétisé par la méthode "à fenêtre" décrite dans le paragraphe précédent permet d'obtenir le signal complexe correspondant à la composante étudiée. Pour les signaux de mesure l'expression générale de ce signal complexe, en tenant compte d'un bruit additif $w_k[n] \in \mathbb{C}$, sera de la forme :

$$y_k[n] = A_k e^{-\alpha_k n} e^{i(2\pi\nu_k n + \Phi_k)} + w_k[n] = b_k z_k^n + w_k[n]$$

Le bruit w_k regroupe toutes les contributions autres que le signal utile qui décrit la composante de fréquence ν_k . w_k tient compte non seulement de la part d'aléas qu'on retrouve pour toute mesure physique (divers bruits électroniques, bruit mécanique, erreurs d'échantillonnage et bruit de quantification, etc.) mais aussi des résidus de filtrage des autres composantes. La présence de ces perturbations entraîne une incertitude sur l'estimation des paramètres. Plus la variance du bruit sera grande et plus la dispersion dans les valeurs possibles sera importante.

3.4.1 Incertitude sur $\hat{\alpha}_k$ et sur $\hat{\omega}_k = 2\pi\hat{\nu}_k$

Les variances de ces estimateurs sont égales. En effet, si on prend le logarithme de la variable complexe $y_k[n]$ on obtient :

$$\ln y_k[n] = \ln b_k z_k^n + \ln\left(1 + \frac{w_k[n]}{b_k z_k^n}\right)$$

En supposant que le signal est faiblement bruité, c'est à dire :

$$\left|\frac{w_k[n]}{b_k z_k^n}\right| \ll 1$$

et en rappelant que la fonction $\ln z$, $z \in \mathbb{C}$ est holomorphe dans tout domaine fini n'entourant pas l'origine, on peut développer le calcul au premier ordre en :

$$\ln y_k[n] = \ln A_k - \alpha_k n + j(\omega_k n + \Phi_k) + \frac{w_k[n]}{b_k z_k^n}$$

En identifiant les parties réelles et les parties imaginaires on trouve :

$$\operatorname{Re}(\ln y_k[n]) = \ln A_k - \alpha_k n + \delta_k \frac{e^{\alpha_k n}}{A_k} \quad (3.10)$$

$$\operatorname{Im}(\ln y_k[n]) = \omega_k n + \Phi_k + \delta'_k \frac{e^{\alpha_k n}}{A_k} \quad (3.11)$$

Les expressions de δ_k et δ'_k se déduisent de w_k par

$$\delta_k[n] = \operatorname{Re}(w_k[n]) \cos(\omega_k n + \Phi_k) + \operatorname{Im}(w_k[n]) \sin(\omega_k n + \Phi_k) \quad (3.12)$$

et

$$\delta'_k[n] = \text{Im}(w_k[n]) \cos(\omega_k n + \Phi_k) - \text{Re}(w_k[n]) \sin(\omega_k n + \Phi_k) \quad (3.13)$$

Si w_k est un bruit blanc centré complexe alors δ_k et δ'_k sont deux bruits blancs réels centrés de même variance. Comme les estimation de α_k et de ω_k sont similaires (par régression linéaire), les variances des deux estimateurs sont égales. L'incertitude absolue sur la pulsation sera donc identique à celle sur le facteur d'amortissement. Pour les signaux étudiés, qui ont en général un faible amortissement, on trouve une incertitude *relative* plus forte pour le facteur d'amortissement.

3.4.2 Calcul de la variance de α_k

Nous menons ici le calcul des incertitudes sur l'estimation du facteur d'amortissement, qui est le paramètre clef de notre étude puisque relié aux mécanismes dissipatifs dans les structures vibrantes. Ce calcul de la variance d'erreur de l'estimateur $\hat{\alpha}_k$ obtenu par la méthode décrite au paragraphe précédent peut être mené à bien sous quelques hypothèses simplificatrices.

Tel que nous l'avons décrit dans le principe général de la méthode (*cf.* paragraphe 3.1), l'estimateur du facteur d'amortissement est obtenu en effectuant une régression linéaire sur $\ln |y_k[n]|$. La linéarisation du problème d'estimation grâce au logarithme opère dans le même temps une conversion non-linéaire du bruit et l'estimateur n'aura donc pas une variance minimale (Belikovitch, 1993). Le point de départ du calcul est l'expression 3.10 obtenue ci dessus. On estime alors α_k par une méthode de moindre carré standard (régression linéaire) et l'estimateur obtenu est donné par la formule :

$$\hat{\alpha}_k = -\frac{N \sum_n M[n]n - \sum_n M[n] \sum_n n}{N \sum_n n^2 - (\sum_n n)^2}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (3.14)$$

où on a pris $M[n] = \text{Re}(\ln y_k[n]) = \ln |y_k[n]|$. En reportant l'expression de $M[n]$ dans l'équation ci-dessus, on parvient à séparer une contribution purement déterministe et une autre relative au bruit sous la forme :

$$\hat{\alpha}_k = \alpha - \frac{12 \sum_n \delta_k[n] e^{\alpha n} (n - \frac{N-1}{2})}{A_k N(N-1)(N+1)} \quad (3.15)$$

Comme δ_k est centré, il ressort de l'équation 3.15 que l'estimateur $\hat{\alpha}_k$ ainsi défini est un estimateur *sans biais* de α . Le calcul de la variance de $\hat{\alpha}_k$ est plus complexe. $\text{Var } \hat{\alpha}_k$ est égale à la variance du terme fractionnaire de l'équation 3.15. Nous pouvons l'exprimer à l'aide de la fonction d'autocovariance du bruit δ_k , définie par :

$$\gamma_\delta(n, p) = \mathbf{E}(\delta_k[n] \delta_k[p])$$

Le développement du calcul aboutit alors à :

$$\text{Var } \hat{\alpha}_k = \left(\frac{12}{A_k N(N-1)(N+1)} \right)^2 \sum_{n,p} e^{\alpha(n+p)} \gamma_\delta(n, p) \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \left(p - \frac{N-1}{2} \right) \quad (3.16)$$

3.4.3 Calcul dans l'hypothèse d'un bruit blanc

Une expression analytique de $\text{Var } \hat{\alpha}_k$ peut être trouvée dans le cas où on suppose que $\delta_k[n]$ est un bruit blanc. Les résultats obtenus permettent de mettre en évidence une valeur optimale de N , qui minimise la variance de l'estimateur.

Lorsque $\delta_k[n]$ est un bruit blanc réel centré, de variance donnée σ_0^2 , il s'agit d'un processus stationnaire et sa fonction d'autocovariance est donnée simplement par :

$$\gamma_\delta(n, p) = \sigma_0^2 \delta[n - p]$$

Ce résultat reporté dans l'équation 3.16 conduit au résultat :

$$\text{Var } \hat{\alpha}_k = \left(\frac{12\sigma_0}{A_k(N-1)(N+1)N} \right)^2 F[n] \text{ avec } F[n] = \sum_n e^{2\alpha n} \left(n - \frac{N-1}{2} \right)^2 \quad (3.17)$$

La figure ci-dessous (figure 3.9) montre le comportement de $\text{Var } \hat{\alpha}_k$ en fonction de l'horizon d'observation N . On déduit de ce graphe que l'estimateur $\hat{\alpha}_k$ n'est *pas consistant*. Sa variance

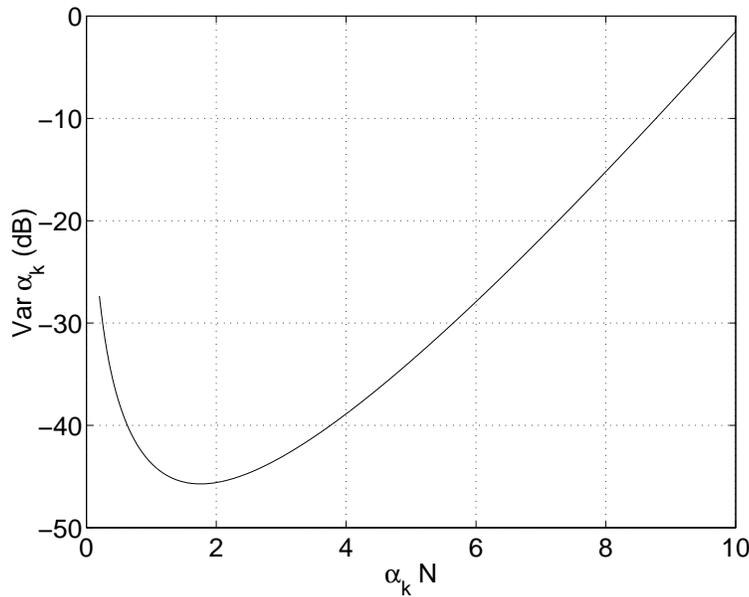


FIG. 3.9: Variance de l'estimateur du facteur d'amortissement en fonction du produit $\alpha_k N$, à α_k donné. On a choisi $\alpha_k = 10^{-2}$ pour le facteur d'amortissement, $A_k = 1$ pour l'amplitude et un rapport $A_k/\sigma_0 = 40\text{dB}$. N varie de 20 à 1000. La variance est donnée en dB, calculés par rapport à la valeur vraie (0dB).

ne tend pas vers 0 lorsque N devient grand. Il est nécessaire d'optimiser la méthode, en choisissant la valeur de N qui minimise la variance de l'estimateur. Cette valeur peut être évaluée numériquement à partir de l'équation 3.17 mais on peut obtenir l'expression analytique d'un équivalent sous des conditions très courantes pour les valeurs α_k et N . Si on a

$$\begin{cases} \alpha_k \ll 1 \\ N \gg 1 \end{cases}$$

on trouve cet équivalent de $\text{Var } \hat{\alpha}_k$, en tenant compte du fait que le produit $\alpha_k N$ peut prendre n'importe quelle valeur :

$$\text{Var } \hat{\alpha}_k \approx \frac{18\alpha_k^3 \sigma_0^2}{A_k^2} \frac{(x^2 + 2)(e^{2x} - 1) - 2x(e^{2x} + 1)}{x^6} \text{ avec } x = \alpha_k N \quad (3.18)$$

La valeur numérique (3 chiffres significatifs) de la variable x qui minimise la fonction ci-dessus vaut :

$$x = \alpha_k N = 1.76$$

On pourra donc effectuer une estimation en deux étapes :

1. Estimation $\hat{\alpha}_1$ de α_k en réglant N arbitrairement
2. Nouvelle estimation en utilisant le nombre $N = 1.76/\hat{\alpha}_1$

On peut itérer le procédé mais, dans les cas que nous avons rencontrés, cette estimation en deux temps était suffisante. Il faut en outre compléter le traitement par la vérification de l'hypothèse de faible bruit, c'est à dire :

$$|x[N]| \gg \sigma_0$$

3.4.4 Interprétation

Les résultats précédents montrent que l'estimateur du facteur d'amortissement peut être optimisé pour que sa variance soit minimale. Lorsqu'on utilise la valeur optimale du nombre de points d'analyse $N_{opt} = 1.76/\alpha_k$, on obtient cet estimateur $\hat{\alpha}_k^{opt}$ dont la variance vaut :

$$\text{Var } \hat{\alpha}_k^{opt} \approx \frac{27\alpha_k^3\sigma_0^2}{A_k^2} \quad (3.19)$$

Une autre écriture de cette formule fait apparaître le rôle du rapport signal à bruit (RSB_k) de la composante :

$$\text{RSB}_k = \frac{\sum_{n=0}^{N-1} A_k^2 e^{-2\alpha_k n}}{N\sigma_0^2} \approx 0.28 \frac{A_k^2}{\sigma_0^2}$$

$$\text{Var } \hat{\alpha}_k^{opt} = 7.44 \frac{\alpha_k^3}{\text{RSB}_k}$$

De manière attendue, les performances de l'estimateur se dégradent lorsque la proportion de bruit augmente. Mais l'équation précédente met également en évidence l'importance du rôle joué par la valeur du facteur d'amortissement : *à rapport signal/bruit égal, l'estimateur est moins performant (sa variance est plus forte) pour les amortissements forts*. Cette remarque vaut autant pour les incertitudes absolues que pour les incertitudes relative sur α_k . Si on prend pour l'ordre de grandeur de l'incertitude sur α_k l'écart type $(\text{Var } \hat{\alpha}_k^{opt})^{1/2}$ de l'estimateur, on trouve en effet une incertitude relative égale à :

$$\epsilon = 2.73 \frac{\alpha_k^{1/2}}{\text{RSB}_k^{1/2}} \quad (3.20)$$

Pour la plupart des structures vibrantes, on observe une croissance des amortissements modaux lorsque la fréquence augmente. Le résultat précédent permet de prévoir une *plus grande dispersion* des mesures d'amortissement pour les fréquences élevées.

3.4.5 Cas général

Les calculs qui précèdent sont menés dans l'hypothèse d'un bruit blanc. Dans le cas général, ce n'est bien sûr pas le cas; d'une part il peut intervenir une coloration physique du bruit (bruit rose par exemple) mais surtout, l'opération de filtrage RIF qui produit le signal va également filtrer le bruit de mesure. Le bruit δ_k sera donc *a priori* corrélé et il faut alors revenir à la formule 3.16 pour estimer la variance de l'estimateur.

Pour mener le calcul dans ce cas on suppose que le bruit additif réel $w[n]$ contenu dans les données est blanc, gaussien, centré et de variance σ^2 . On négligera les résidus de filtrage des composantes complexes autres que celle étudiée et par suite, le bruit complexe w_k relatif à

cette composante est simplement la convolution de w par la réponse impulsionnelle du filtre. Le filtre RIF utilisé est celui décrit dans le paragraphe 3.3 et on a

$$w_k[n] = h * w[n] = \sum_m h[m]w[n - m] \quad (3.21)$$

où h est donnée par

$$h[n] = 2\delta\nu\mathcal{F}(n) \operatorname{sinc}(\pi n\delta\nu) e^{j\omega_k n} = K[n]e^{j\omega_k n}$$

$\mathcal{F}(n)$ étant la fenêtre de synthèse du filtre, de longueur finie L et $\delta\nu$ sa bande passante.

On obtient alors à partir de 3.12 et 3.21

$$\delta_k[n] = \sum_m K[m] \cos(\omega_k(n - m) + \Phi_k) w[n - m]$$

Cette expression est un produit de convolution entre K et le bruit

$$w'[n] = \cos(\omega_k n + \Phi_k) w[n]$$

w' est un bruit blanc, gaussien, centré, instationnaire au deuxième ordre. Son autocovariance, qui traduit l'instationnarité par une dépendance en n , vaut :

$$\gamma_{w'}(n, p) = \sigma^2 \cos^2(\omega_k n + \Phi_k) \delta[n - p]$$

et il vient alors

$$\gamma_{\delta_k}(n, p) = \sum_m \sigma^2 \cos^2(\omega_k m + \Phi_k) K[n - m] K[p - m]$$

On en déduit l'expression de la variance de l'estimateur $\hat{\alpha}_k$

$$\begin{aligned} \operatorname{Var} \hat{\alpha}_k &= \left(\frac{12\sigma}{A_k(N-1)(N+1)N} \right)^2 \times \\ &\sum_{n=0}^{N-1} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_m e^{\alpha_k(n+p)} K[n-m] K[p-m] \cos^2(\omega_k m + \Phi_k) \left(n - \frac{N-1}{2} \right) \left(p - \frac{N-1}{2} \right) \end{aligned} \quad (3.22)$$

Cette expression peut être condensée sous la forme

$$\operatorname{Var} \hat{\alpha}_k = \left(\frac{12\sigma}{A_k(N-1)(N+1)N} \right)^2 \times \sum_m \cos^2(\omega_k m + \Phi_k) \left(\{K[-n] * e^{\alpha_k n} (n - \frac{N-1}{2})\}(m) \right)^2$$

La figure 3.10 décrit ce résultat. Les paramètres utilisés sont identiques à ceux de la figure 3.9, ainsi nous pouvons comparer ces résultats avec ceux donnés dans l'hypothèse d'un bruit blanc. Le filtre RIF est celui décrit dans le paragraphe 3.3.2. Les figures 3.9 et 3.10 sont comparables du point de vue ordre de grandeur et variations. Notamment le minimum est atteint pour une valeur de $\alpha_k N$ sensiblement égale à celle trouvée dans l'hypothèse d'un bruit blanc (1.70 au lieu de 1.76). Cela nous autorise à étendre les résultats du paragraphe 3.4.3.

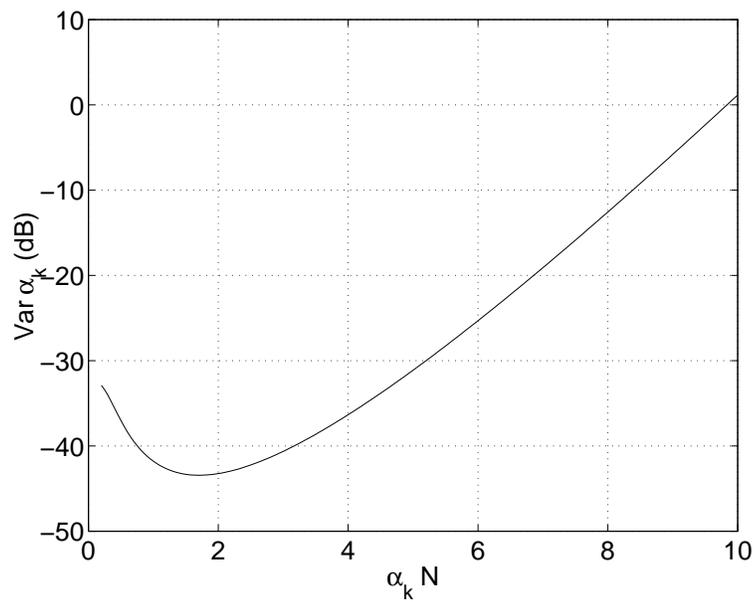


FIG. 3.10: Variance de l'estimateur du facteur d'amortissement en fonction du produit $\alpha_k N$, à α_k donné et en tenant compte du filtrage. Les paramètres sont ceux de la figure 3.9.

Chapitre 4

Méthode Matrix Pencil

Résumé

L'algorithme matrix pencil se base sur une modélisation du signal en somme de sinus amortis. Il fournit des estimateurs de fréquence et d'amortissement. Matrix pencil est une des méthodes spécifiques les plus efficaces parce qu'elle conjugue les idées de méthodes qui l'ont précédée. Ce chapitre détaille la théorie sur laquelle elle s'appuie. La variance des estimateurs est calculée dans le cas général par perturbation à l'ordre 1.

L'algorithme Matrix Pencil (encore appelé méthode ESPRIT dans une version peu différente (Roy, Paulraj, et Kailath, 1986) s'appuie sur les propriétés du modèle de signal défini en 2.4 par :

$$x[n] = \sum_{k=1}^M b_k z_k^n + w[n] \quad , \quad n = 0, 1 \dots N - 1 \quad (4.1)$$

Elle se rattache à une approche *paramétrique* du problème posé. Les principes de base de ce type d'approche furent établis par les travaux initiateurs du baron de Prony (Prony, 1795) et de Yule (Yule, 1927). Ils ont donné lieu à de très nombreux développements; à telle enseigne qu'il est difficile de réunir une bibliographie complète de toutes les méthodes existantes. L'avantage de ce type de méthode est de dépasser les limitations en terme de résolution auxquelles sont soumises les méthodes dites classiques basées sur l'analyse de Fourier. Les méthodes telles que Matrix Pencil sont souvent qualifiées pour cette raison de *haute résolution*. L'acceptation usuelle du terme de "résolution", qui se rapporte à un point de vue "fourieriste" (pouvoir séparateur des instruments d'optique, limité par la diffraction) doit cependant être étendue ici. En effet, si le signal étudié n'est pas bruité (rapport signal à bruit infini) et correspond au modèle proposé, la précision atteinte par une approche paramétrique est uniquement limitée par les possibilités de représentation des nombres relative au calculateur. En revanche, pour ce type de méthode, il existe un seuil de bruit pour lequel deux composantes

trop proches en fréquence ne pourront plus être estimées efficacement. C'est pourquoi, nous préférons parler de pouvoir séparateur (ou résolution) à *rapport signal à bruit donné*.

Dans les signaux musicaux il n'est pas rare de rencontrer des battements. Lorsque l'analyse de Fourier est inopérante, les méthodes haute résolution peuvent s'appliquer. C'est ce qu'illustre l'exemple de la corde de guitare, exposé dans le paragraphe qui suit. Nous proposons ensuite quelques repères historiques qui permettent de comprendre les idées fondatrices de ce type de méthode dont matrix pencil est un développement. Le calcul des variances d'estimateurs est donné.

4.1 Exemple de la corde de guitare

Le signal de vibration de la corde la plus grave d'une guitare (Mi à environ 82 Hz) présente un spectre quasi-harmonique. Celui-ci est composé de partiels multiples d'un fondamental situé à 82 Hz. La figure 4.1 montre l'allure typique du spectre et de la forme d'onde correspondant au deuxième partiel, obtenue par filtrage. On peut lire sur ces graphes un ordre de grandeur des temps caractéristiques des battements et de la décroissance. Tous deux sont de l'ordre de la dizaine de secondes. Une analyse postérieure confirme cette valeur :

- les deux fréquences peuvent être estimées à 164.85 et 164.73 Hz soit une différence de 0.12 Hz correspondant à un temps caractéristique de 8.3 s
- Les facteurs d'amortissement sont estimés respectivement à 0.12 s^{-1} et 0.15 s^{-1} soit des temps caractéristiques de 8.3 et 6.7 s.

L'analyse de Fourier n'est pas applicable sur ces données. En effet on ne pourra pas séparer les deux pics centrés sur chacune des fréquences puisque la largeur de ces pics est du même ordre de grandeur, voire supérieure à la différence entre les fréquences. C'est la propriété duale des observations temporelles précédentes, qui reste valable quelque soit la longueur de la fenêtre d'observation (c'est à dire de la précision fréquentielle atteinte par l'analyse de Fourier).

On peut noter que la présence de plusieurs modes de vibrations de fréquences proches est une caractéristique commune à de nombreux instruments à cordes libres, montées sur un chevalet. Elle résulte du couplage introduit par celui-ci, soit entre les différentes cordes (piano par exemple) soit entre deux polarisations vibratoires d'une même corde, respectivement parallèlement et perpendiculairement au chevalet. C'est pourquoi l'estimation des paramètres des signaux vibratoires correspondants est un besoin fréquent dans des contextes de synthèse musicale, d'étude physique des instruments ou de facture instrumentale (Laroche, 1993; Valimaki *et al.*, 1996; Weinreich, 1977). Les méthodes paramétriques haute résolution constituent

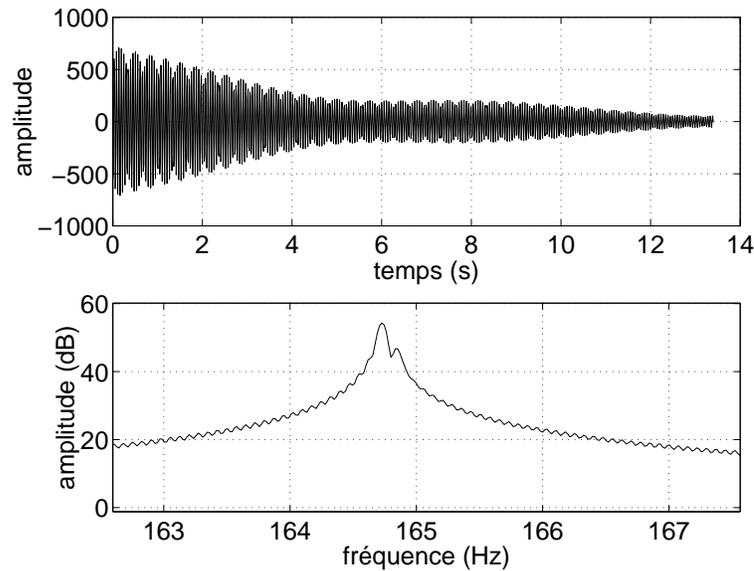


FIG. 4.1: Forme d'onde et densité spectrale de puissance pour le partiel n°2 de la vibration de la corde de Mi grave d'une guitare classique. Les amplitudes sont en unité arbitraire. Les signaux ont été acquis à l'aide d'un microphone placé à 1.5cm du chevalet. La modulation d'amplitude la plus rapide, avec un temps caractéristique aux alentours de .3s, est un effet dû à l'échantillonnage.

une réponse souvent adéquate à ce problème d'estimation.

4.2 Méthodes haute résolution : historique et idées de base

Le paragraphe précédent montre les limitations de l'analyse de Fourier dans des cas d'acoustique musicale. On les retrouve dans de nombreux problèmes de physique (*cf.* paragraphe 2) et elles incitent à rechercher d'autres approches pour résoudre problème posé : estimer les paramètres complexe b_k et z_k de chaque composante du signal $x[n]$ écrit plus haut (équation 4.1).

Alors que les méthodes classiques s'appuient sur une modification de la représentation du signal (transformée de Fourier) pour extraire l'information cherchée, les approches paramétriques essaient d'obtenir la meilleure ressemblance possible entre le signal mesuré et un modèle de celui-ci.

La mesure usuelle de cette ressemblance est l'erreur quadratique entre le signal et son modèle. L'approche directe ou de moindres carrés consiste à essayer de minimiser cette erreur donnée ici par :

$$|\epsilon|^2 = \sum_{n=0}^{N-1} \left| \sum_{k=1}^M A_k e^{i\Phi_k} e^{(-\alpha_k + i\omega_k)n} - x[n] \right|^2 \quad (4.2)$$

Cette minimisation peut s'écrire en dérivant l'expression de $|\epsilon|^2$ par rapport aux paramètres A_k , Φ_k , a_k et ω_k - 4 paramètres réels-, et en égalant les termes obtenus à zéro. On obtient un système de $4M$ équations *non linéaires*. Des algorithmes itératifs tels que la méthode Newton peuvent être utilisés pour résoudre ce système. Cependant elles sont peu utilisées en pratique (Hayes, 1996; Marple, 1987b) car outre le coût de calcul important, le résultat peut être faussé si les valeurs de départ sont trop éloignées des vraies valeurs des paramètres. La méthode ne parvient pas forcément au minimum absolu et peut converger vers un minimum local (Marple, 1987b). Il existe d'autres méthodes pour minimiser l'erreur qui, par exemple s'appuient sur la dépendance linéaire en amplitude complexe b_k ($b_k = A_k e^{i\Phi_k}$) pour réduire le nombre de paramètres sur lesquels s'effectue le moindre carré non linéaire aux seuls paramètres a_k et ω_k (Golub et Pereyra, 1973). Cette approche est référencée comme une *recherche multidimensionnelle* des paramètres (Kumaresan, 1993) mais elle n'est pas concluante dans le cas où les sinus sont amortis ($a_k \neq 0$). Toutes ces méthodes présentent en outre l'inconvénient de supposer connu le nombre M de composantes. On pourrait bien sûr itérer sur la valeur de M mais cela représente un surcoût en complexité de calcul important. Les méthodes haute résolution, dont l'élément originel est la *méthode de Prony*, bien qu'elles soient sous-optimales au sens des moindres carrés, sont en quelque sorte "moins aveugles" que l'approche directe. Cette dernière ne tient en effet pas compte des propriétés particulières des séries temporelles issues d'un modèle sinusoïdal amorti.

4.2.1 L'idée de Prony

Dès 1795, R. de Prony décrit une méthode destinée à modéliser des données expérimentales par des exponentielles amorties (Prony, 1795) qui jette les bases de l'analyse paramétrique. Elle est pratiquement contemporaine au travail de Fourier, qui propose la décomposition d'un signal périodique quelconque en une série harmonique indéfinie au début du XIX^{ème} siècle. Le principe de cette méthode consiste à transformer le problème non linéaire de recherche des taux d'amortissement en un problème linéaire : les exponentielles cherchées sont les zéros d'un polynôme et la recherche des coefficients de celui-ci est un problème linéaire.

Prony avait traité le cas d'exponentielles réelles mais le principe reste identique si on étend le problème aux cas des exponentielles complexes. La série temporelle correspondant au modèle 4.1 satisfait une équation de récurrence et le polynôme caractéristique de cette équation admet pour racines les pôles complexes z_k du signal. L'estimation des coefficients de ce polynôme est un problème linéaire. Le formalisme ainsi utilisé est très proche de celui de la transformée en z .

4.2.2 Cas d'une ou deux composantes

Dans le cas très simple $M = 1$ où le signal est modélisé par une seule sinusoïde amortie non bruitée :

$$x[n] = b_1 z_1^n \text{ avec } z_1 = \exp(-\alpha_1 + j\omega_1) \text{ et } b_1 \in \mathbb{C}$$

Le signal satisfait la relation de récurrence :

$$x[n] - z_1 x[n-1] = 0 \quad (4.3)$$

Deux échantillons du signal suffisent pour trouver z_1 qui est par exemple l'unique racine du polynôme de degré 1 en z^{-1}

$$p(z) = 1 - \frac{x[1]}{x[0]} z^{-1} \quad (4.4)$$

Ce cas de une seule composante bien que très simple, est intéressant, car la méthode Matrix pencil est en quelque sorte une généralisation de l'équation 4.3 où les échantillons sont remplacés par des matrices de données.

Si on passe au cas $M = 2$, le signal s'écrit alors comme la somme de deux sinusoïdes amorties :

$$x[n] = b_1 z_1^n + b_2 z_2^n \quad (4.5)$$

et $x[n]$ peut alors être considéré comme le terme général d'une suite dont la relation de récurrence est d'ordre 2 :

$$x[n] - (z_1 + z_2)x[n-1] + z_1 z_2 x[n-2] = 0 \quad (4.6)$$

Son polynôme caractéristique se factorise aisément en :

$$p(z) = (1 - z_1 z^{-1})(1 - z_2 z^{-1})$$

On peut maintenant utiliser les données $x[n]$ pour trouver les coefficients du polynôme $p(z)$ écrit sous la forme :

$$p(z) = 1 + p_1 z^{-1} + p_2 z^{-2} \quad (4.7)$$

Pour trouver les deux inconnues p_1 et p_2 , il faut deux équations du type 4.6, que l'on peut condenser sous forme matricielle en

$$\begin{bmatrix} x[2] & x[1] & x[0] \\ x[3] & x[2] & x[1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Il apparaît clairement sur cet exemple que la recherche des coefficients du polynôme $p(z)$ est un problème linéaire. Obtenir les pôles du signal est alors ramené à la recherche (classique) des racines de ce polynôme. Pour achever la résolution, on obtient les valeurs des amplitudes b_1 et b_2 à partir de l'équation linéaire suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ z_1 & z_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x[0] \\ x[1] \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

4.2.3 Généralisation

La généralisation à un nombre M de pôles du signal s'effectue en prenant un polynôme $p(z)$ de degré M . L'équation de récurrence s'écrit alors :

$$x[n] = - \sum_{k=1}^M p_k x[n-k] \quad (4.10)$$

C'est une équation de prédiction linéaire de l'échantillon $x[n]$ à partir des échantillons antérieurs. Le polynôme caractéristique de cette récurrence est décrit à l'aide de son vecteur de coefficients

$$\mathbf{p}' = [1 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_M]^T = [1 \ \mathbf{p}^T] \quad (4.11)$$

soit encore :

$$p(z) = \sum_{k=0}^M p_k z^{-k} \quad (4.12)$$

En prenant $p_0 = 1$. Pour déterminer les valeurs du vecteur \mathbf{p} il faut résoudre une équation matricielle analogue à l'équation 4.8 :

$$\begin{bmatrix} x[M] & x[M-1] & \dots & x[0] \\ x[M+1] & x[M] & \dots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x[2M] & x[2M-1] & \dots & x[M] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

L'égalité matricielle 4.13 correspond à un système de M équations linéaires dont les inconnues -les coefficients du polynôme $p(z)$ - sont également au nombre de M . Le problème admet une solution unique si les z_k sont distincts car alors la matrice de données n'est pas singulière. Les M racines du polynôme sont les pôles recherchés. Cependant, les valeurs obtenues ne seront exactes que si le signal correspond *exactement* au modèle proposé et la solution unique du problème sera altérée dès lors que cette condition ne sera pas remplie. Ce sera par exemple le cas si le nombre de composantes est différent de M . La sensibilité des résultats numériques obtenus sera importante. Le développement postérieur des méthodes haute-résolution vise à s'affranchir le plus possible de l'influence de ce bruit additif, toujours présent dans les mesures réelles.

La méthode de Prony étendue (Hildebrand, 1956), décrite par exemple dans (Marple, 1987a), consiste à augmenter le nombre d'équations puis à résoudre le système au sens des moindres carrés. Cette idée seule s'avère cependant insuffisante et les résultats sont largement faussés aux faibles rapports signal à bruit (Van Blaricum et Mitra, 1978).

Une autre proposition (Tufts et Kumaresan, 1980) vise à donner plus de "latitude" à la méthode en augmentant le nombre d'inconnues; ce qui est équivalent à augmenter l'ordre de la prédiction linéaire (ou de la récurrence) ou encore le degré du polynôme. On recherche

ainsi à décomposer le bruit sur ces composantes "en sus". On verra dans la suite que cette visée empirique à l'origine se révèle riche : de nombreuses méthodes —dont Matrix Pencil— utilisent une surestimation *a priori* du nombre de composantes. Se pose alors la question de pouvoir séparer les composantes "signal" des composantes "bruit". Ce problème, relié à l'analyse aux valeurs propres des matrices de données, est abordé dans ce qui suit et discuté au paragraphe 4.6

4.2.4 Augmentation du degré de $p(z)$

On suppose maintenant que le degré de $p(z)$ est L , avec

$$L \geq M$$

Le polynôme est décrit par son vecteur de coefficients :

$$\mathbf{p}' = [1 \ p_1 \ p_2 \ \dots \ p_L]^T \quad (4.14)$$

Pour étudier les propriétés de $p(z)$ et de ses racines, il faut introduire la matrice \mathbf{X}'_f définie par :

$$\mathbf{X}'_f = \begin{bmatrix} x[L] & x[L-1] & \dots & x[0] \\ x[L+1] & x[L] & \dots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x[N-1] & x[N-2] & \dots & x[N-L-1] \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

\mathbf{X}'_f est une matrice de données¹. On remarque en utilisant le modèle de signal,

$$x[n] = \sum_{k=1}^M b_k z_k^n \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.16)$$

que chaque ligne de la matrice \mathbf{X}'_f est une combinaison linéaire de vecteurs \mathbf{f}_k de la forme

$$\mathbf{f}_k = [1 \ z_k^{-1} \ z_k^{-2} \ \dots \ z_k^{-L}] \quad (4.17)$$

Comme k prend les valeurs $1, 2, \dots, M$, cette combinaison linéaire comprend M termes. Les valeurs de z_k étant supposées distinctes, les vecteurs $\{\mathbf{f}_k\}_{k=1,2,\dots,M}$ forment une famille libre et par suite la matrice \mathbf{X}'_f est de rang M si $N-L \geq M$, soit finalement :

$$\boxed{M \leq L \leq N - M} \quad (4.18)$$

Le vecteur \mathbf{p}' est choisi de manière à satisfaire à l'équation :

$$\mathbf{X}'_f \mathbf{p}' = \mathbf{0} \quad (4.19)$$

1. l'indice f est pour *future* et caractérise l'organisation de la matrice, qui correspond à une prédiction *avant* de $x[n]$ à partir des échantillons antérieurs.

Si la condition 4.18 est remplie, la matrice $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}$ est de rang M et la famille $\{\mathbf{f}_{\mathbf{k}}\}_{k=1,2,\dots,M}$ est une base de l'espace vectoriel engendré par $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}$. La relation 4.19 implique alors la nullité des produits scalaires :

$$\mathbf{f}_{\mathbf{k}}\mathbf{p}' = 0 \quad \text{pour} \quad k = 1, 2, \dots, M \quad (4.20)$$

Cette dernière équation 4.20 exprime simplement que les pôles z_k du signal sont aussi racines du polynôme $p(z)$.

On sait maintenant que si on construit $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}$ de manière à vérifier l'inégalité $M \leq L \leq N - M$ et qu'on trouve un vecteur \mathbf{p}' tel que $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}\mathbf{p}' = \mathbf{0}$ alors le polynôme correspondant admet pour racines les pôles du signal. Le vecteur \mathbf{p}' appartient donc au noyau de l'application linéaire définie par $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}$. Comme $\mathbf{X}'_{\mathbf{f}}$ possède $L+1$ colonnes la dimension du noyau vaut $L+1-M$, ce qui signifie qu'il existe $L+1-M$ choix pour \mathbf{p}' . On pouvait d'ailleurs déduire ce résultat en remarquant que le nombre de coefficients du polynôme vaut $L+1$ et qu'on lui impose simplement M racines. Parmi ces choix possibles, il en est un qui a une importance plus grande et qui est celui utilisé dans toutes les méthodes dérivées du principe décrit. Il consiste à prendre le vecteur \mathbf{p}' de norme minimale, c'est à dire tel que l'expression

$$1 + |p_1|^2 + |p_2|^2 + \dots + |p_L|^2$$

soit minimale. Le calcul des coefficients de ce polynôme de norme minimale s'effectue à partir de l'équation 4.19 réécrite à l'aide de

$$\mathbf{p}' = [1 \ \mathbf{p}'^T]$$

sous la forme :

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}} \mathbf{p} = -\mathbf{x} \quad (4.21)$$

avec

$$\mathbf{X}_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} x[L-1] & x[L-2] & \dots & x[0] \\ x[L] & x[L-1] & \dots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \dots & x[N-L-1] \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x[L] \\ x[L+1] \\ \vdots \\ x[N-1] \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

On obtient alors \mathbf{p} en utilisant le pseudo-inverse de Moore-Penrose de la matrice $\mathbf{X}_{\mathbf{f}}$, soit $\mathbf{X}_{\mathbf{f}}^+$:

$$\mathbf{p} = -\mathbf{X}_{\mathbf{f}}^+ \mathbf{x} \quad (4.23)$$

On démontre (Kumaresan, 1982) que cette condition de norme minimale pour les coefficients du polynôme $p(z)$ oblige les $L-M$ racines "en sus" (qui ne correspondent pas à du signal) à prendre des valeurs à l'intérieur du cercle unité. Cette propriété est intéressante lorsqu'on a affaire à des sinusoides amorties et que l'on ne recherche pas du traitement en temps réel. On peut alors utiliser une version "retournée" du signal (*i.e.* $x[N-1], x[N-2], \dots, x[0]$) dont les pôles sont à l'extérieur du cercle unité, ce qui permet de les distinguer des composantes de bruit. Ce résultat est illustré figure 4.2.

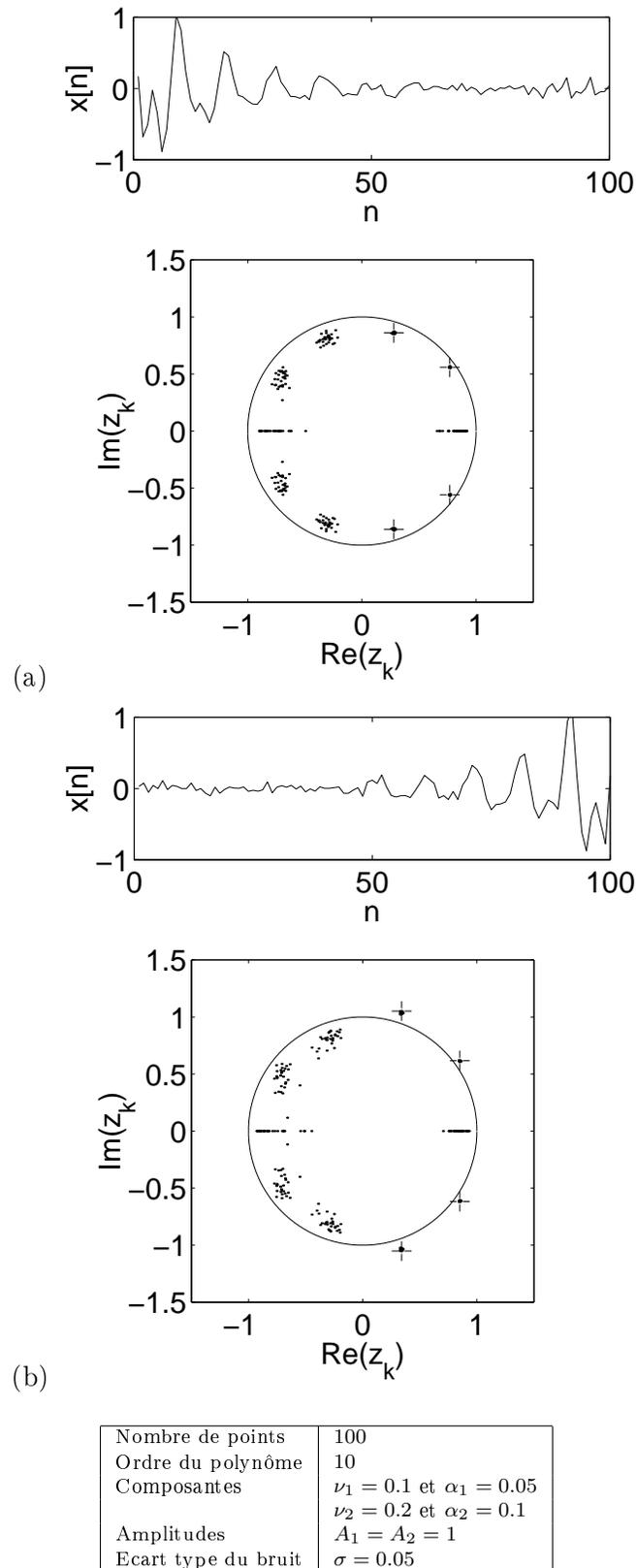


FIG. 4.2: Application de la méthode de Prony où l'ordre du polynôme est surestimé. Les formes d'onde des signaux et les pôles trouvés sont indiqués. On a effectué l'analyse pour 30 réalisations de bruit indépendantes. Les pôles vrais sont désignés par un '+'. Les valeurs des paramètres sont donnés dans le tableau ci-dessus. (a) analyse du signal. (b) analyse du signal "retourné". On remarque que l'écart type sur les pôles correspondants aux composantes est beaucoup moins

4.2.5 Méthode Tufts-Kumaresan

Cette méthode est développée ici parce qu'elle introduit une idée nouvelle (Kumaresan, 1982; Tufts *et al.*, 1982) dans la méthode de Prony modifiée décrite au paragraphe précédent. Cette idée est reprise dans Matrix-Pencil. Cette nouvelle idée consiste à effectuer un préfiltrage destiné à augmenter le rapport signal à bruit.

Ce filtrage peut être effectué de façon simple, par exemple au moyen d'un filtre à réponse impulsionnelle finie (RIF). Si l'ordre de ce filtre respecte la condition (Kumaresan, 1993)

$$0 \leq \text{ordre} \leq N - L$$

les propriétés du polynôme $p(z)$ restent valables vis à vis du signal filtré. Cependant l'idée de Tufts et Kumaresan est, quoique présentant une complexité de calcul plus importante, plus efficace parce qu'elle consiste à réaliser un filtrage *adapté aux données*, dont le principe général est de projeter le vecteur des échantillons de données sur le sous-espace signal engendré par les composantes sinusoïdales. La projection est rendue possible parce que cet espace est orthogonal au sous-espace bruit. La projection est aussi une manière d'améliorer le rapport signal à bruit.

4.2.6 Décomposition en sous-espace signal et sous-espace bruit

Nous considérons les sous-espaces de \mathbb{C}^N , munis du produit scalaire défini pour deux vecteurs aléatoires \mathbf{x} et \mathbf{y} , habituellement disposés en colonne :

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{E}(\mathbf{x}^\dagger \mathbf{y})$$

où l'opérateur \dagger désigne la transposition-conjugaison.

Nous nous intéressons aux propriétés de la matrice d'autocorrélation du signal x défini comme la somme d'un nombre M de composantes et d'un bruit w . w est supposé blanc, centré et de variance σ^2 et décorrélé du signal. On rappelle l'écriture de x :

$$x[n] = \sum_{k=1}^M b_k z_k^n + w[n]$$

Nous posons

$$b_k = |b_k| e^{j\Phi_k}$$

où les phases Φ_k sont des variables aléatoires indépendantes uniformément réparties dans l'intervalle $]-\pi, \pi]$. Si \mathbf{x}_0 est le vecteur de données défini par

$$\mathbf{x}_0 = [x[0] \ x[1] \ \cdots \ x[N-1]]^T$$

alors la matrice d'autocorrélation correspondante est donnée par :

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{E}(\mathbf{x}_0 \mathbf{x}_0^\dagger) \quad (4.24)$$

L'écriture de $x[n]$ sous la forme

$$x[n] = [z_1^n, z_2^n, \dots, z_M^n] \begin{bmatrix} |b_1| \\ |b_2| \\ \vdots \\ |b_M| \end{bmatrix} + w[n]$$

et la décorrélation du bruit et du signal conduit à l'expression :

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{Z}_0 \mathbf{\Pi} \mathbf{Z}_0^\dagger + \sigma^2 \mathbf{I} \quad (4.25)$$

Cette expression sépare les termes se rapportant à du signal et ceux se rapportant au bruit. \mathbf{Z}_0 est la matrice de Vandermonde définie par :

$$\mathbf{Z}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_M^{N-1} \end{bmatrix} \quad (4.26)$$

et la matrice $\mathbf{\Pi}$ est une matrice diagonale dont les termes sont les $|b_k|^2$:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} |b_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & |b_2|^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & |b_M|^2 \end{bmatrix}$$

La matrice $\mathbf{\Pi}$ est définie positive et par suite la matrice $\mathbf{R}_s = \mathbf{Z}_0 \mathbf{\Pi} \mathbf{Z}_0^\dagger$ l'est également. Comme \mathbf{R}_s est de rang M , elle admet M valeurs propres non nulles λ_i^s et $N - M$ valeurs propres égales à 0. On en déduit les valeurs propres λ_i de la matrice d'autocorrélation \mathbf{R}_x :

$$\begin{cases} \lambda_i = \lambda_i^s + \sigma^2, & i = 1, 2, \dots, M \\ \lambda_i = \sigma^2, & i = M + 1, M + 2, \dots, N \end{cases} \quad (4.27)$$

Les M vecteurs propres associés aux valeurs propres $\lambda_i, i = 1, \dots, M$ sont orthogonaux deux à deux et génèrent un sous-espace de dimension M , le *sous-espace signal*. Les M valeurs propres associées sont les M plus grandes. Le sous-espace bruit engendré par les $N - M$ vecteurs propres associés à la valeur propre σ^2 est orthogonal au sous-espace signal.

Cette décomposition de l'espace, liée aux propriétés spectrales de la matrice d'autocorrélation du signal est à la base de plusieurs méthodes haute-résolution telle que la méthode de Pisarenko (Pisarenko, 1973) ou l'algorithme MUSIC² (Schmidt, 1979).

4.2.7 Décomposition aux valeurs singulières de la matrice de données

La matrice d'autocorrélation vraie du signal est inaccessible parce que définie par une moyenne stochastique. Un estimateur $\hat{\gamma}_x(m)$ de l'autocorrélation est obtenu en remplaçant la moyenne stochastique par une moyenne d'ensemble. Pour une moyenne d'ensemble prise sur une somme de $N - L$ termes il sera de la forme :

$$\hat{\gamma}_x(m) = \frac{1}{N - L} \sum_{k=0}^{N-L-1} x[k + m]x[k]^*$$

L'estimateur ainsi construit est non-biaisé. Nous constatons d'après l'expression de la matrice de données \mathbf{X}_f décrite en 4.22 que $\mathbf{X}_f^\dagger \mathbf{X}_f$ est une estimée d'ordre L de \mathbf{R}_x à un facteur multiplicatif près.

L'analyse aux valeurs propres de \mathbf{R}_x est remplacée par celle de $\mathbf{X}_f^\dagger \mathbf{X}_f$, ce qui revient à chercher *les valeurs singulières* de \mathbf{X}_f .

La décomposition aux valeurs singulières ou SVD³ consiste à écrire la matrice de données

$$\mathbf{X}_f = \begin{bmatrix} x[L-1] & x[L-2] & \cdots & x[0] \\ x[L] & x[L-1] & \cdots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \cdots & x[N-L-1] \end{bmatrix}$$

sous la forme d'un produit de trois matrices :

$$\underset{N-L \times L}{\mathbf{X}_f} = \underset{N-L \times N-L}{\mathbf{U}} \underset{N-L \times L}{\mathbf{S}_f} \underset{L \times L}{\mathbf{V}^\dagger} \quad (4.28)$$

Les matrices \mathbf{U} et \mathbf{V} sont des matrices unitaires et \mathbf{S}_f a sur sa diagonale⁴ les *valeurs singulières* de \mathbf{X}_f , classiquement rangées par ordre décroissant à partir du coin supérieur gauche. Ces valeurs singulières sont une généralisation des valeurs propres pour le cas des matrices non carrées et correspondent aux racines carrées des valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}_f^\dagger \mathbf{X}_f$. Cette dernière matrice est en effet hermitienne définie positive et possède donc des valeurs propres réelles strictement positives.

Comme on l'a vu plus haut, la matrice $\mathbf{X}_f^\dagger \mathbf{X}_f$, qui est de dimension $L \times L$, est une estimation de la matrice d'autocorrélation du signal et par suite, elle tend à posséder M valeurs propres plus grandes que les $L - M$ autres valeurs propres. Dans la méthode Tufts-Kumaresan, on remplace la matrice \mathbf{X}_f par une approximation de celle-ci, obtenue en gardant les M premières valeurs singulières présentes sur la diagonale de \mathbf{S}_f . Les autres sont forcées à zéro. Cela revient à augmenter le rapport signal à bruit. On résout ensuite l'équation 4.19 en utilisant l'approximation de \mathbf{X}_f , qui est donc de rang inférieur (M au lieu de L), à la place de \mathbf{X}_f . On peut remarquer toutefois, que la valeur de M est *a priori* inconnue. Dans la pratique, il faut

3. *Singular Value Decomposition*

4. En fait, la matrice n'étant pas carrée, il s'agit d'une pseudo diagonale (termes de la forme s_{ii})

veiller à ne pas *sousestimer* le nombre de valeurs singulières qui correspondent à du signal. Le nombre M pourra parfois être évalué à *posteriori* par des considérations sur les ordres de grandeurs (Kumaresan, 1993).

4.2.8 Exemple

On reprend ici l'exemple donné plus haut (figure 4.2). Le signal a quatre composantes (2 composantes réelles, $M = 4$) :

$$x[n] = e^{-0.05n} \cos 2\pi 0.1n + e^{-0.01n} \cos 2\pi 0.2n + w[n], \quad n = 0, 1, \dots, 99$$

où $w[n]$ est un bruit blanc gaussien centré de variance $(0.05)^2$. L'ordre L du polynôme est pris égal 20. Alors on a

- \mathbf{X}_f de dimension 80×20
- La matrice \mathbf{S}_f de la même dimension et de la forme :

$$\begin{bmatrix} \ddots & & 0 \\ & (s_{ii}) & \\ 0 & & \ddots \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

- 4 valeurs singulières conservées.

Les valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}_f \mathbf{X}_f^\dagger$ sont données, dans l'ordre décroissant sur la figure 4.3. On observe nettement sur cette figure :

- Les 4 valeurs propres les plus grandes, regroupées deux par deux, chaque paire correspondant à une composante réelle.
- Une différence de valeur entre les paires, due à un facteur d'amortissement plus fort pour la deuxième composante. Son énergie est plus faible que celle de la première composante.
- La différence d'ordre de grandeur entre les valeurs propres "signal" et les valeurs propres "bruit", qui permet ici de les identifier sans ambiguïté.

Les deux figures (figure 4.4 et 4.5) suivantes permettent de mettre en évidence l'amélioration de l'estimation apportée par la projection du signal sur le sous-espace signal. On notera

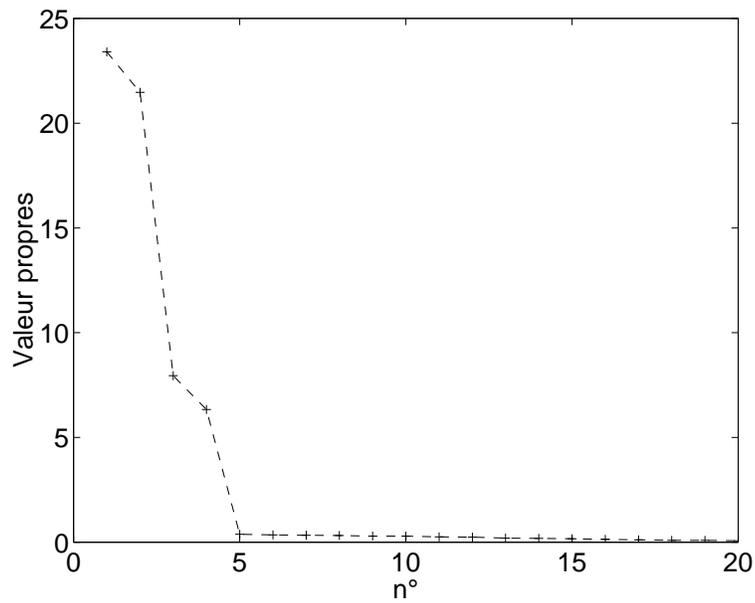


FIG. 4.3: Valeurs propres de la matrice $X_f X_f^\dagger$.

la diminution de la dispersion dans le cas de la méthode Tufts-Kumaresan. Il faut cependant remarquer que cette dispersion demeure même lorsque M est estimé à la bonne valeur (c'est le cas ici) car une partie du bruit se décompose dans le sous-espace signal; ce qui se traduit par le terme additif σ^2 dans les valeurs propres "signal".

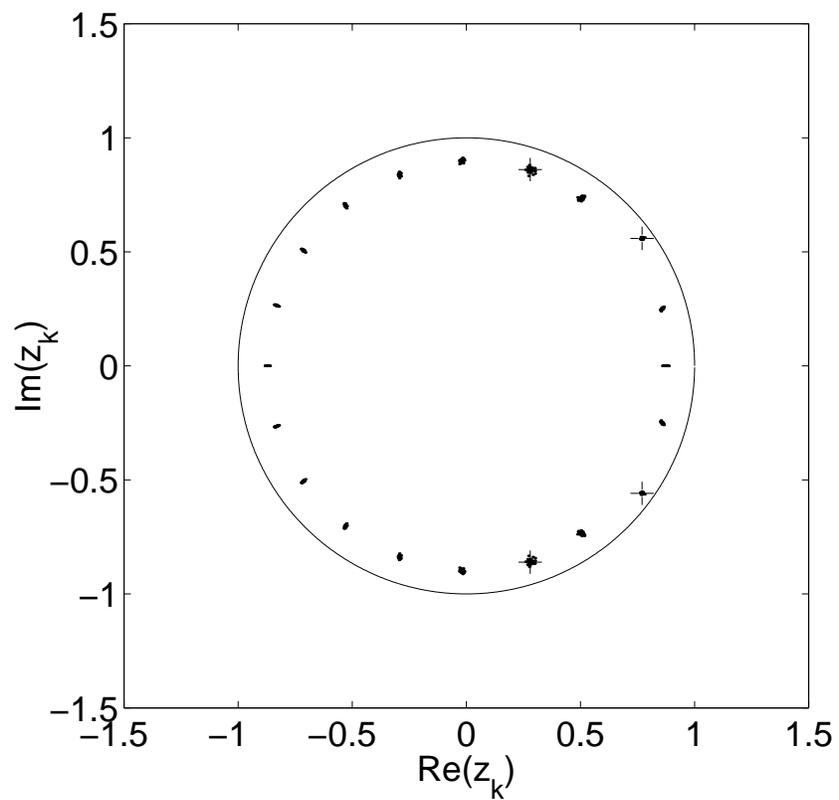


FIG. 4.4: Pôles du signal estimés par la méthode Tufts-Kumaresan, pour 30 réalisations du bruit indépendantes. L'ordre du polynôme vaut 20 et on a conservé 4 valeurs singulières de la matrice de données.

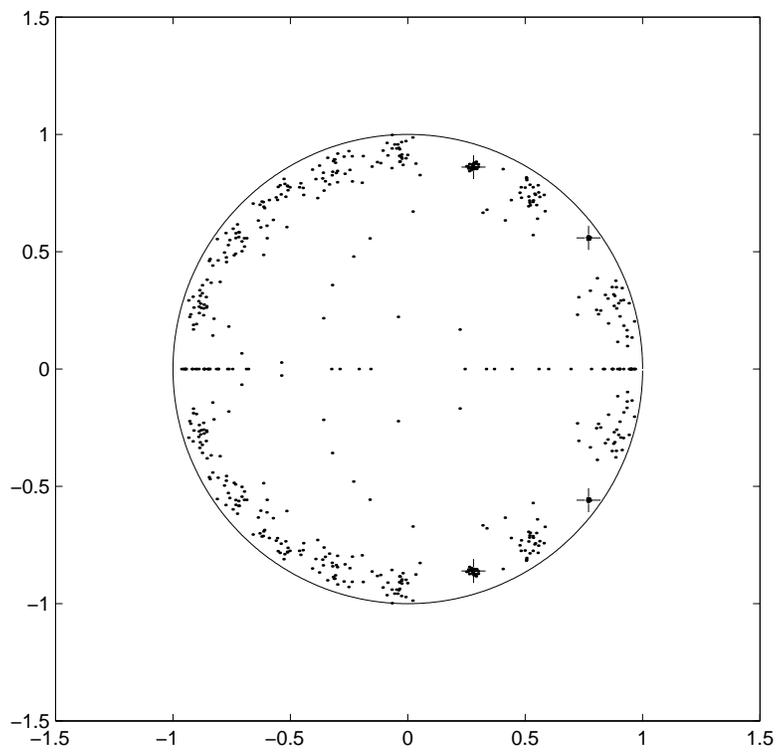


FIG. 4.5: Pôles du signal estimés par la méthode de Prony, pour 30 réalisations du bruit indépendantes. L'ordre du polynôme vaut 20.

4.2.9 Méthode Matrix pencil

Cette méthode représente une amélioration en terme de variance des estimateurs par rapport à la précédente. Elle utilise les mêmes principes — décomposition en valeurs singulières et approximation de la matrice de données — mais elle introduit une redondance supplémentaire, en s'appuyant sur les propriétés d'un "polynôme" de matrice (matrix pencil) défini à l'aide de *deux* matrices de données décalées.

4.3 Fondements théoriques

Ce paragraphe détaille les résultats théoriques qui sont à la base de l'algorithme matrix pencil (Hua et Sarkar, 1990). On rappelle la modélisation du signal choisie; soit une somme de M composantes complexes décrite par l'expression :

$$x[n] = \sum_{k=1}^M b_k z_k^n + w[n] \quad n = 0, \dots, N-1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_k = e^{\alpha_k + i\omega_k} \\ b_k = |b_k| e^{i\Phi_k} \end{cases} \quad (4.29)$$

Les propriétés sont étudiées dans le cas non bruité.

4.3.1 Principe et démonstration

Le fonctionnement de la méthode matrix pencil repose sur les propriétés d'un polynôme de matrices de données dont on étudie les propriétés de rang. Ce polynôme vaut :

$$\mathcal{P}(z) = \mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0$$

Il s'agit là d'une sorte prédicteur d'erreur matriciel, qui généralise l'idée de la méthode de Prony (cf. équation 4.3). Les propriétés annultrices du polynôme $p(z)$ devenant des propriétés de réduction de rang de la matrice $\mathcal{P}(z)$. \mathbf{X}_0 et \mathbf{X}_1 sont des matrices de données, construites à la manière de la matrice \mathbf{X}_f définie précédemment, et définies à l'aide du *paramètre pencil* p par les expressions :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{matrix} \mathbf{X}_0 \\ (N-p) \times p \end{matrix} = \begin{bmatrix} x[p-1] & x[p-2] & \dots & x[0] \\ x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \dots & x[N-p-1] \end{bmatrix} \quad (4.30)$$

et

$$\mathbf{X}_1 = \begin{matrix} \mathbf{X}_1 \\ (N-p) \times p \end{matrix} = \begin{bmatrix} x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ x[p+1] & x[p] & \dots & x[2] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[N-1] & x[N-2] & \dots & x[N-p] \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

La matrice \mathbf{X}_1 est simplement une "décalée" de un échantillon de la matrice \mathbf{X}_0 . Le paramètre pencil p qui fixe les dimensions des matrices, est l'équivalent du paramètre L dans la définition de la matrice \mathbf{X}_f (cf. équation 4.22); c'est l'analogue d'un degré de polynôme ou d'un ordre de prédiction. Le nombre de composantes est systématiquement surestimé par le nombre p . Le principe de la méthode repose sur la propriété suivante :

Propriété : Si le paramètre pencil p satisfait la condition

$$M \leq p \leq N - M$$

alors les pôles z_i , $i = 1, \dots, M$ sont réducteurs de rang pour la matrice $\mathcal{P}(z)$, i.e. :

$$\begin{cases} \text{rang}(\mathcal{P}(z)) = M \text{ si } z \neq z_i \\ \text{rang}(\mathcal{P}(z)) = M - 1 \text{ si } z = z_i \end{cases} \quad (4.32)$$

Démonstration : On introduit les matrices de Vandermonde données ci-dessous :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{Z}_p = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_M \\ z_1^2 & z_2^2 & \dots & z_M^2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_1^{N-p-1} & z_2^{N-p-1} & \dots & z_M^{N-p-1} \end{bmatrix} \\ \mathbf{Z}_r = \begin{bmatrix} z_1^{p-1} & z_1^{p-2} & \dots & 1 \\ z_2^{p-1} & z_2^{p-2} & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_M^{p-1} & z_M^{p-2} & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{array} \right. \quad (4.33)$$

ainsi que les matrices diagonales

$$\mathbf{B} = \text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_M) \quad \text{et} \quad \mathbf{Z} = \text{diag}(z_1, z_2, \dots, z_M) \quad (4.34)$$

S'en suivent alors les relations

$$\mathbf{X}_0 = \mathbf{Z}_p \mathbf{B} \mathbf{Z}_r \quad \text{et} \quad \mathbf{X}_1 = \mathbf{Z}_p \mathbf{B} \mathbf{Z} \mathbf{Z}_r \quad (4.35)$$

On en déduit

$$\mathcal{P}(z) = \mathbf{Z}_p \mathbf{B} (\mathbf{Z} - z \mathbf{I}_M) \mathbf{Z}_r \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad (4.36)$$

On constate que si $z = z_i$, alors le terme diagonal d'ordre i dans la matrice $\mathbf{Z} - z \mathbf{I}_M$ devient nul ce qui revient à annuler une colonne dans \mathbf{Z}_p et une ligne dans \mathbf{Z}_r . On peut alors distinguer deux cas :

- Si $M \leq p \leq N - M$ alors \mathbf{Z}_p et \mathbf{Z}_r sont de rang M , et la matrice $\mathbf{X}_1 - z_i \mathbf{X}_0$ sera de rang $M - 1$, pour $i = 1, 2 \dots M$; la valeur z_i est réductrice de rang pour $\mathbf{X}_1 - z \mathbf{X}_0$.

- Si $M > p$ ou $M > N - p$ alors, respectivement $\text{rang}(\mathbf{Z}_r) = p$ ou $\text{rang}(\mathbf{Z}_p) = N - p$ et $\text{rang}(\mathbf{B}(\mathbf{Z} - z_i \mathbf{I})\mathbf{Z}_r) = p$ ou $\text{rang}(\mathbf{Z}_p \mathbf{B}(\mathbf{Z} - z_i \mathbf{I})) = N - p$. Par suite le rang de $\mathbf{X}_1 - z\mathbf{X}_0$ ne décroît pas lorsque $z = z_i$.

Ceci termine la démonstration.

La matrice $\mathcal{P}(z)$ comporte $N - p$ lignes et p colonnes. On suppose que la condition $M \leq p \leq N - M$ est remplie. Comme $\mathcal{P}(z_i)$ est de rang $M - 1$ il existe *au moins* un vecteur non nul \mathbf{u}_i tel que :

$$\mathcal{P}(z_i)\mathbf{u}_i = (\mathbf{X}_1 - z_i\mathbf{X}_0)\mathbf{u}_i = 0$$

Le vecteur \mathbf{u}_i est de longueur $N - p$. On déduit de ce qui précède qu'il est un vecteur propre de la matrice $\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1$, associé à la valeur propre z_i soit :

$$\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1\mathbf{u}_i = z_i\mathbf{u}_i$$

La recherche des pôles du signal z_i est donc ramenée à l'étude des valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1$.

4.3.2 Recherche des solutions

Dans la méthode matrix-pencil, on ne trouve plus les solutions par la recherche des racines d'un polynôme, mais par celle des valeurs propres d'une matrice. Cette matrice $\mathbf{X}_0^+\mathbf{X}_1$, si le signal est non bruité, admet M valeurs propres non nulles et $p - M$ valeurs propres nulles. En revanche, en présence de bruit, toutes les valeurs propres sont en général non nulles. C'est ce qu'on observe sur la figure 4.6.

Pour améliorer les performances de la méthode, on utilise la projection du signal sur l'espace "signal" déjà utilisée pour la méthode Tufts-Kumaresan (Hua et Sarkar, 1990) : on remplace la matrice \mathbf{X}_0^+ par une approximation de rang inférieur, idéalement M . Sur la figure 4.7 on peut voir l'amélioration de la variance de l'estimateur sur l'exemple du facteur d'amortissement de la première composante ($z_1 = e^{-0.05 + j2\pi 0.1}$). On obtient des résultats équivalents pour la fréquence.

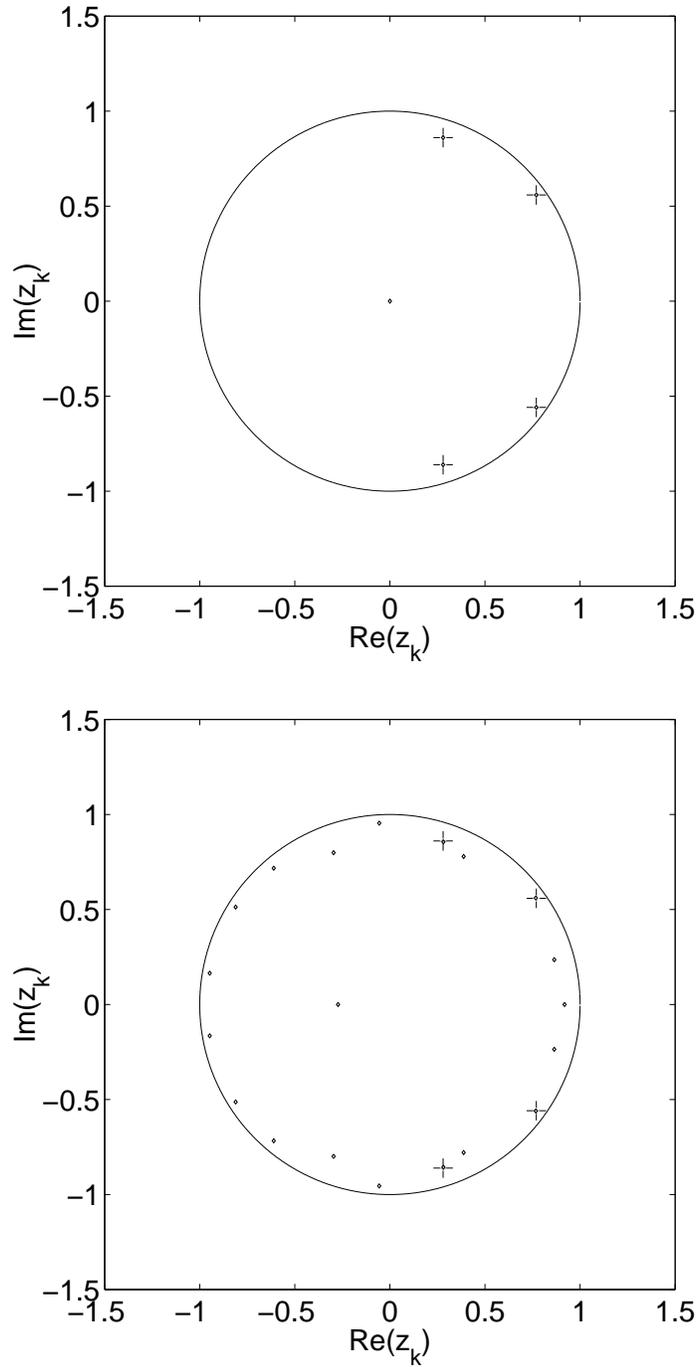


FIG. 4.6: Pôles du signal vrais (marqués '+') et valeurs propres de $X_0^+ X_1$ (marqués d'un \diamond). La figure du haut correspond au cas non bruité et celle du bas au cas d'un signal bruité. Les paramètres des signaux sont ceux déjà utilisés dans les exemples précédents (cf. figure 4.2)

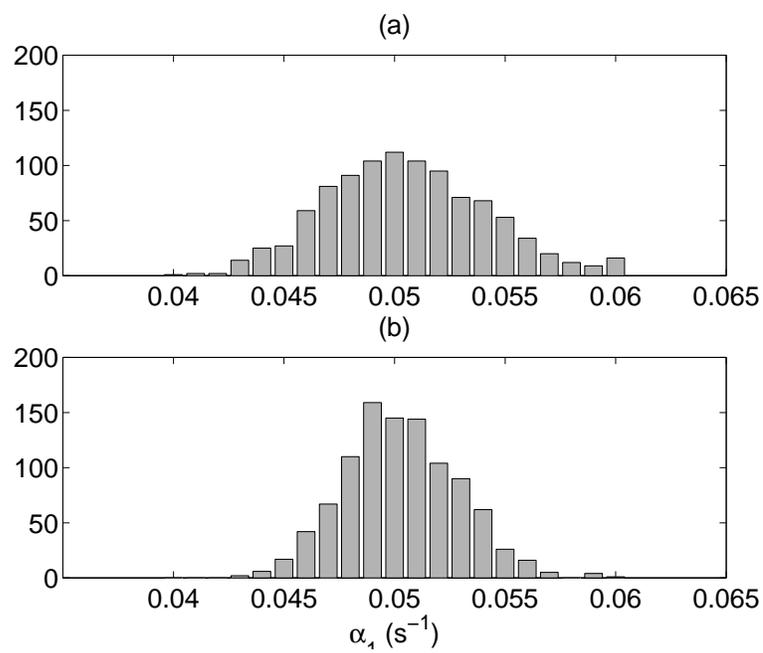


FIG. 4.7: Histogrammes de la mesure du facteur d'amortissement, dans le cas (a) où X_0^+ n'est pas approximée et dans le cas (b) où on a utilisé une approximation de rang 4 (deux composantes réelles). La variance de l'estimateur est clairement moins grande dans le second cas. Nombre de mesures : 1000, RSB : 26 dB.

4.3.3 Réglages des paramètres

Dans l'utilisation pratique de l'algorithme matrix pencil, il faut fixer les paramètres de la méthode, à savoir :

- le paramètre pencil p
- le rang de l'approximation de \mathbf{X}_0^+

En ce qui concerne le premier, il existe une valeur de p qui, dans le cas où le signal ne comporte qu'une seule composante réelle, minimise la variance de l'estimateur. Celle-ci sera étudiée plus loin mais on donne ici sa valeur optimale :

$$p = N/3$$

La question du rang de l'approximation (ou encore de la dimension du sous-espace signal de projection) est liée à l'estimation du nombre M de composantes. Les paragraphes précédents nous fournissent deux moyens pour faire cette estimation. Comme dans la méthode Tufts-Kumaresan, il est nécessaire pour trouver \mathbf{X}_0^+ d'effectuer une décomposition en valeurs singulières. Nous avons déjà vu que l'ordre de grandeur de ces valeurs au carré (valeurs propres de $\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_0$) permet d'estimer M .

La deuxième manière pour estimer M est une conséquence des résultats obtenus dans la méthode de Prony. Dans le cas bruité, on trouve en effet que les pôles estimés par les valeurs propres de $\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_1$ sont les mêmes que ceux obtenus par la méthode de Prony avec un polynôme de degré p . Les pôles qui correspondent à du bruit sont donc nécessairement à l'intérieur du cercle unité, ce qui permet de les différencier des pôles correspondant à du signal, en utilisant une version "retournée" de celui-ci (pour les signaux expérimentaux étudiés, il est toujours composé de sinusoïdes *décroissantes*). L'argumentation qui suit est un prolongement de celle menée dans le cas où le signal est non bruité dans (Hua et Sarkar, 1990).

Les pôles estimés par la méthode matrix pencil sont les valeurs propres de la matrice

$$\mathbf{C} = \mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_1$$

Les vecteurs colonnes \mathbf{c}_i de \mathbf{C} sont donc des solutions du système d'équations

$$\mathbf{X}_0 \mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i \quad i = 1, \dots, p \quad (4.37)$$

où les \mathbf{x}_i sont les vecteurs colonnes de \mathbf{X}_1 , soit :

$$\mathbf{x}_i = [x[p - i + 1] \ x[p - i + 2] \ \dots \ x[N - i]]^T$$

On peut ajouter que la matrice \mathbf{C} est la solution de norme minimale à l'équation 4.37. En remarquant que \mathbf{X}_1 est décalée de un échantillon par rapport à \mathbf{X}_0 , on trouve facilement une autre solution à cette équation soit :

$$\mathbf{C}_2 = \begin{bmatrix} c_1^1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ c_1^2 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & 1 \\ c_1^p & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

où les c_1^j sont les coefficients du vecteur \mathbf{c}_1 . Cette matrice est la matrice compagnon du polynôme

$$1 - \sum_{j=1}^p c_1^j z^{-j}$$

C'est à dire que les racines du polynôme sont les valeurs propres de la matrice. Il suffit alors de remarquer l'identité entre l'équation satisfaite par les coefficients p_j du polynôme $p(z)$ (méthode de Prony, cf équation 4.21) et celle satisfaite par les coefficients $-c_1^j$, qui s'écrira :

$$\mathbf{X}_0(-\mathbf{c}_1) = -\mathbf{x}_1$$

pour conclure. La recherche des racines de $p(z)$ (méthode de Prony) et la méthode matrix pencil fournissent toutes deux une solution à l'équation 4.37. Lorsque le signal est non bruité matrix pencil fournit une solution de rang M alors que Prony fournit une solution de rang p (la matrice \mathbf{C}_2). Ces matrices ont alors en commun les M valeurs propres de \mathbf{C} . En revanche, lorsque les signaux sont bruités, le rang des matrices est en général égal à p . Comme elles satisfont toutes deux l'équation 4.37, elles ont les mêmes valeurs propres. D'après les résultats obtenus pour la méthode de Prony (propriétés du polynôme $p(z)$ de norme minimale), cela signifie que

les $p - M$ valeurs propres de $\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_1$ qui ne correspondent pas à une composante du signal seront situées *l'intérieur du cercle unité*

Ce résultat est illustré figure 4.8 : les pôles estimés par la méthode de Prony et par matrix pencil (dans le cas où \mathbf{X}_0 n'est pas projetée sur le sous espace signal) sont identiques et comme on traite le signal "retourné", les pôles signal sont situés à l'extérieur du cercle unité.

4.4 Simulations et comparaisons entre méthodes

Ce paragraphe décrit au travers d'exemples synthétiques et expérimentaux, les performances comparées des différents algorithmes (matrix pencil, Tufts-Kumaresan et Prony). Les différents cas abordés sont ceux d'une unique composante réelle, d'un signal à deux composantes réelles très proches en fréquence (non séparables par de l'analyse de Fourier) et enfin d'un signal vibratoire expérimental (guitare).

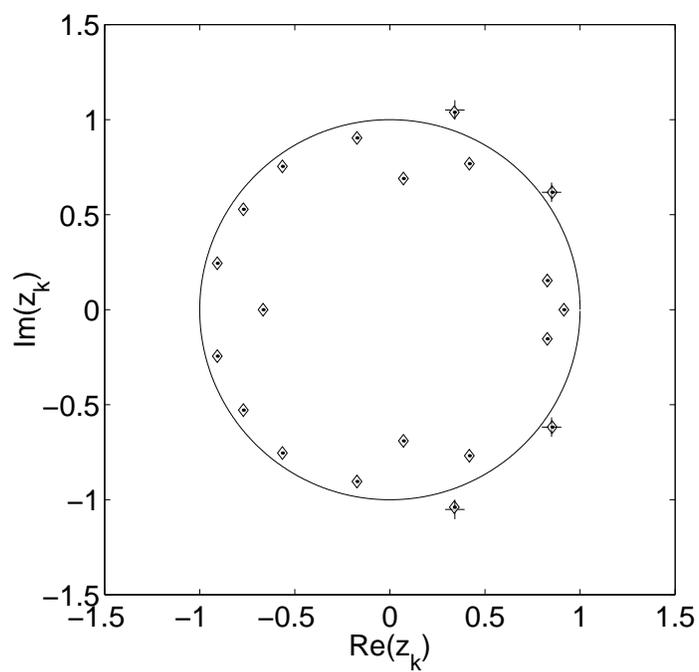


FIG. 4.8: Résultats obtenus pour le signal "retourné" : $x[N-1-n] = e^{-0.05n} \cos(2\pi 0.1n + \pi/4) + e^{-0.1n} \cos(2\pi 0.2n + 2\pi/3) + w[n]$. L'écart type du bruit vaut 0.05, $N = 100$. L'ordre du polynôme et le paramètre pencil sont $p = L = 20$. Les pôles trouvés par matrix pencil (désignés par un \diamond) et les pôles trouvés par Prony (désignés par un \times) sont identiques. Les 4 pôles correspondants aux deux composantes réelles sont à l'extérieur du cercle unité.

4.4.1 Une composante réelle

On analyse le signal

$$x[n] = e^{-0.05n} \cos(2\pi 0.1n + \pi/4) + w[n] \quad n = 0, \dots, N - 1$$

avec les valeurs de paramètres :

- Nombre de point $N = 100$
- Ecart type du bruit $\sigma = 0.05$ (soit un RSB de seulement 13dB)
- Nombre de réalisations indépendantes testées : 100
- ordre du polynôme et paramètre pencil $L = p = 20$
- rang de la pseudo inverse approchée X_0^+ : 2

On a effectué les analyses sur le signal "retourné", c'est à dire $x[N - 1 - n]$.

On peut faire plusieurs constatations sur ces graphiques. L'utilisation du signal retourné permet de définir sans ambiguïté les pôles qui correspondent à du signal et donc d'estimer M . La dispersion des mesures est plus forte dans le cas de la méthode de Prony que Tufs-Kumaresan, cependant il faut remarquer que si la variance sur les pôles qui correspondent à du bruit est réduite fortement, en revanche il est nécessaire de faire une analyse plus poussée (histogramme) pour conclure sur les pôles "signal". Pour matrix pencil, la matrice pseudo inverse étant de rang 2, le nombre de valeurs propres trouvées non nulles vaut 2 et sont donc les valeurs cherchées. On peut toutefois se demander quel serait le comportement de la méthode lorsque M n'est pas correctement estimé.

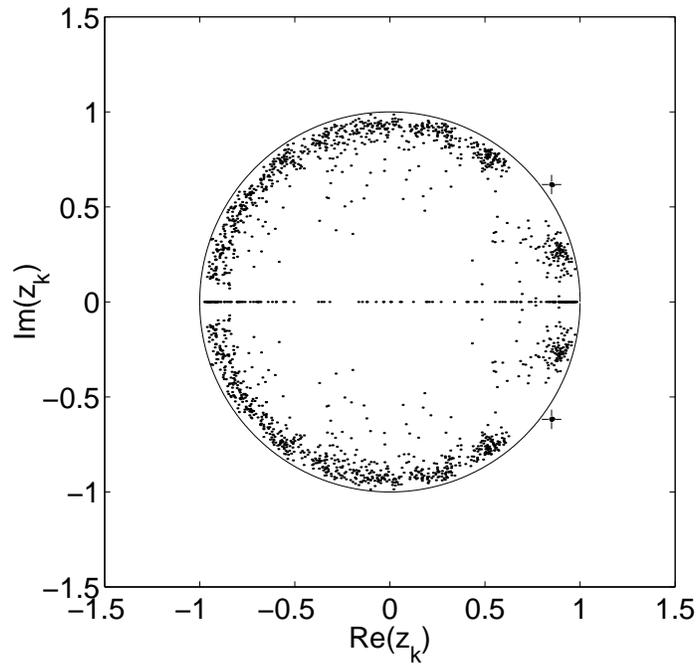


FIG. 4.9: Pôles du signal trouvés par la méthode de Prony

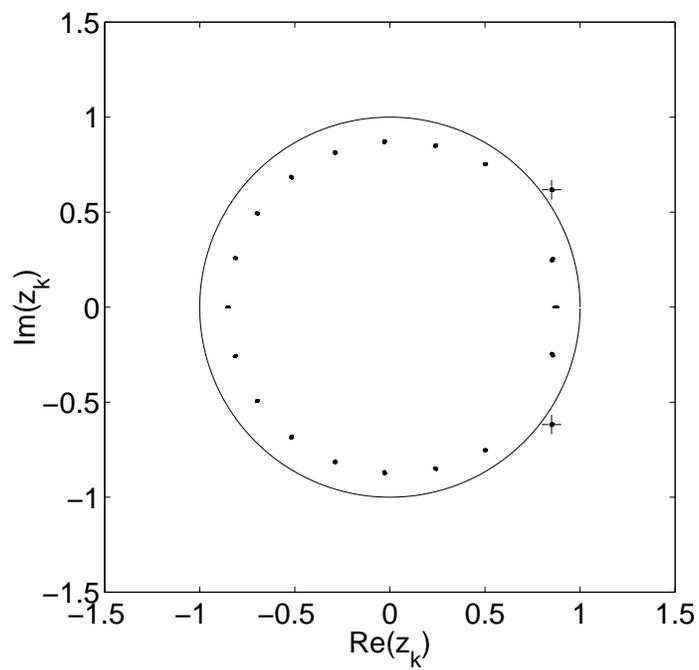


FIG. 4.10: Pôles du signal trouvés par la méthode Tufts-Kumaresan

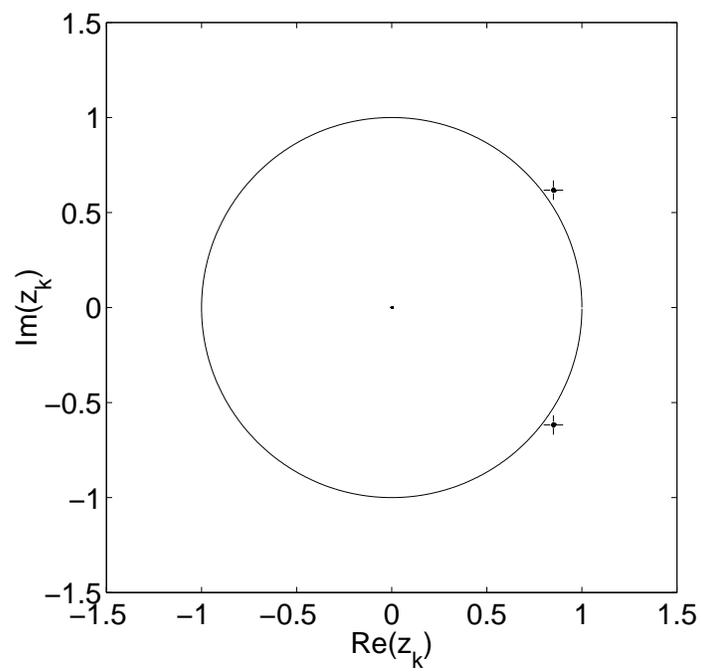


FIG. 4.11: Pôles du signal trouvés par la méthode matrix pencil

4.4.2 Dispersion des mesures

Pour préciser le comportement des estimateurs et comparer leurs performances, on trace ici les histogrammes des mesures du facteur d'amortissement. Les paramètres utilisés sont identiques à ceux du paragraphe précédent hormis le nombre de réalisations indépendantes des signaux réalisées, pris égal à 1000. On observe que les 3 estimateurs ont des variances

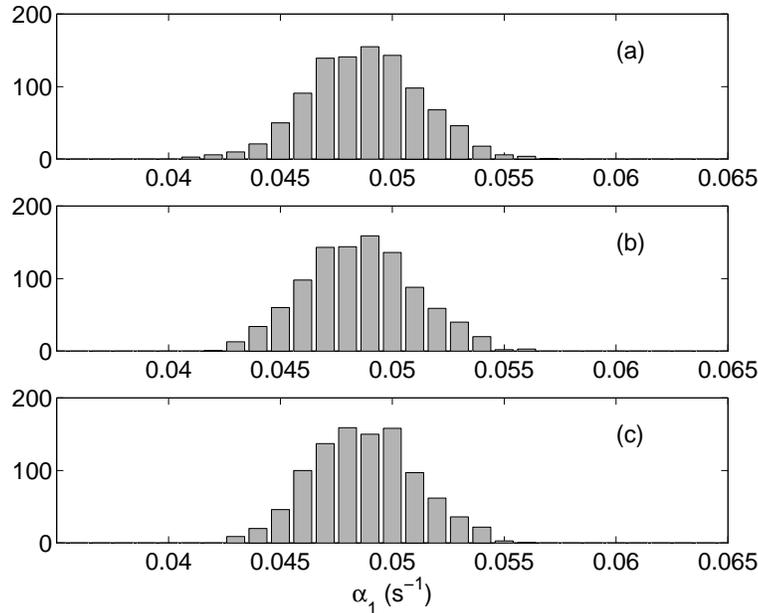


FIG. 4.12: Histogrammes de la valeur de α , obtenus sur *le signal retourné* par la méthode de Prony (a), Tufts-Kumaresan (b) et matrix pencil (c)

très proches dont les différences ne sont pas significatives (Les écarts type correspondants sont de l'ordre de $2.5 \cdot 10^{-2}$). On constate surtout, que les pôles obtenus par les trois méthodes ont tendance à se déplacer vers le cercle unité : on obtient des valeurs d'amortissement sous-estimées (ici on trouve une moyenne pour le facteur d'amortissement sensiblement égale pour les trois méthodes et qui vaut 0.489 au lieu de 0.05 soit 2.2% d'erreur).

Dans le cas où on traite le signal non retourné (séquence causale) alors les résultats, donnés figure 4.13 montrent d'une part des distributions mieux centrées sur la valeur vraie et d'autre part mettent en évidence l'amélioration obtenue par la méthode matrix pencil. Les estimateurs Prony et Tufts-Kumaresan ont une variance à peu près égale alors que celle de matrix pencil est moins forte.

L'estimation de la moyenne de chaque estimateur montre cependant un léger décalage avec la valeur vraie : on trouve pour les trois méthodes une moyenne d'ensemble sur les 1000 valeurs d'estimateur égale à -0.0505 (1% d'erreur). En reproduisant un grand nombre de ce type de test, avec des facteurs d'amortissement variés on constate que ces méthodes ont

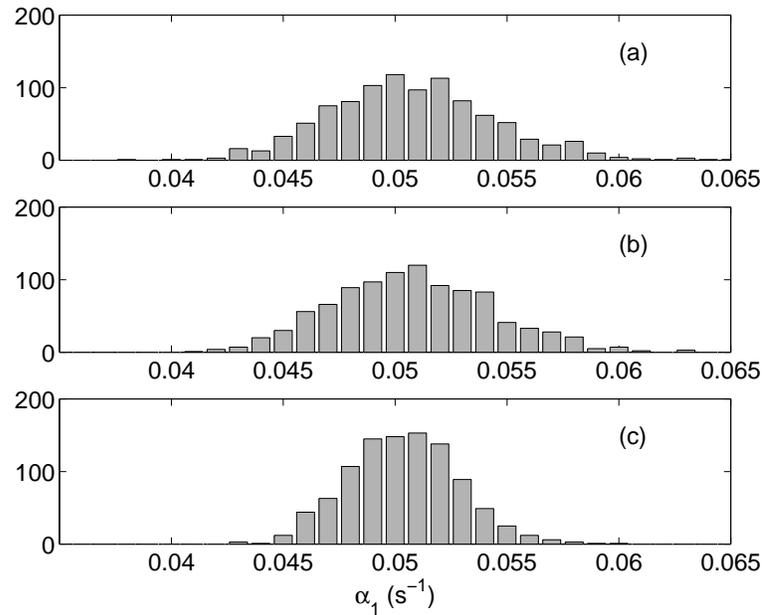


FIG. 4.13: Histogrammes de la valeur de α , obtenus sur *le signal non retourné* par la méthode de Prony (a), Tufts-Kumaresan (b) et matrix pencil (c)

tendance à trouver des valeurs de facteur d'amortissement inférieures aux valeurs vraies. C'est à dire à *surestimer* la décroissance dans le cas des sinusoïdes amorties.

On observe pas de tel décalage significatif sur les valeurs estimées de fréquence. Le même type de test conduit là encore à des performances meilleures (en particulier dans le cas des signaux décroissants) ou équivalentes de l'estimateur matrix pencil.

L'estimateur matrix pencil est dans tous les cas plus performant (ou au moins équivalent) en terme de variance que les deux autres méthodes. Ce résultat important, qui justifie en partie notre choix pour cet estimateur, est corroboré par les résultats donnés dans (Hua et Sarkar, 1990).

4.4.3 Deux composantes proches en fréquence

Cet exemple aborde le cas d'un doublet fréquentiel, pour lequel l'analyse de Fourier s'avère inopérante. La différence entre les fréquences est prise égale au facteur d'amortissement. Le signal synthétique de cet exemple vaut :

$$x[n] = e^{-0.05n} \cos(2\pi 0.1n + \pi/4) + e^{-0.05n} \cos(2\pi 0.105n + 2\pi/3) + w[n] \quad n = 0, \dots, N-1$$

avec un niveau bruit donné par son écart type

$$\sigma = 0.005$$

Ce niveau équivaut à avoir un RSB de 39dB. Le rang de la matrice X_0^+ approchée est pris égal à 4 (deux composantes réelles). Les graphes présentés correspondent à un "zoom" au voisinage des deux pôles à partie imaginaire positive, de manière à juger de la dispersion des mesures pour 100 réalisations du signal.

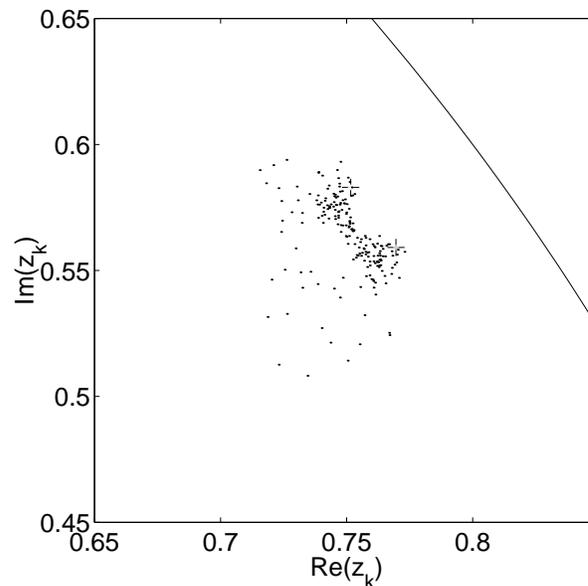


FIG. 4.14: Pôles trouvés par la méthode de Prony.

Il est clair sur cet exemple, que les pôles sont mieux distingués par la méthode matrix pencil que par les autres méthodes. On note pour toutes les méthodes une tendance "attractive" des estimateurs : la plupart des valeurs trouvées sont entre les deux pôles vrais. On retrouve également la tendance à surestimer les facteurs d'amortissement pour toutes les méthodes.

Cet exemple est à la limite des possibilités des méthodes. Si on augmente le niveau de bruit, on obtient alors des résultats similaires à ceux de la figure 4.17 obtenu par matrix pencil pour un niveau de bruit à 10^{-2} (32dB de RSB). On distingue un seul pôle qui est une moyenne entre les deux pôles vrais.

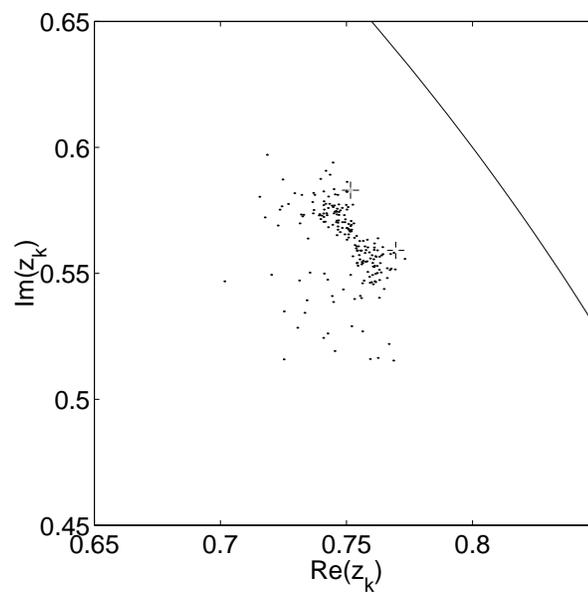


FIG. 4.15: Pôles trouvés par la méthode de Tufts-Kumaresan.

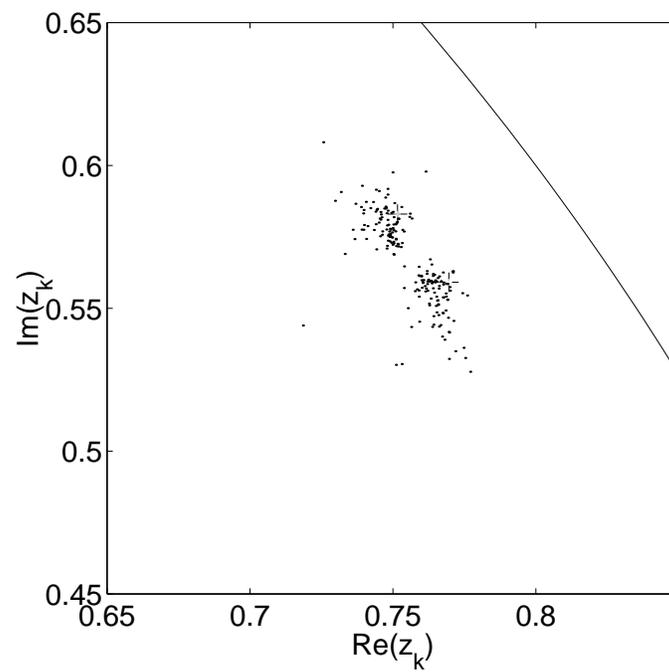


FIG. 4.16: Pôles trouvés par la méthode matrix pencil.

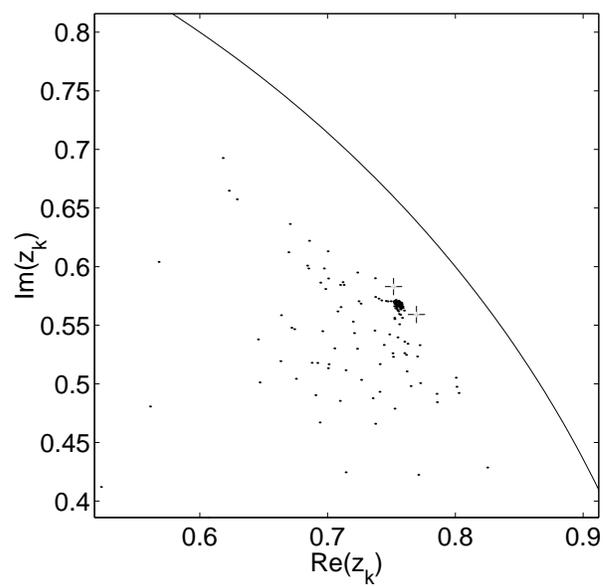


FIG. 4.17: Pôles trouvés par la méthode de matrix pencil avec un bruit d'écart type $\sigma = 0.01$.

4.4.4 Exemple réel d'un son de guitare

On prend ici l'exemple du partiel de rang 4 de la note de mi grave d'une guitare classique. Le signal est capté par un accéléromètre collé au chevalet puis filtré. La forme d'onde du partiel est reproduite avec son spectre figure 4.18. Le spectre est estimé par un périodogramme calculé au moyen de la TFD, sans fenêtrage.

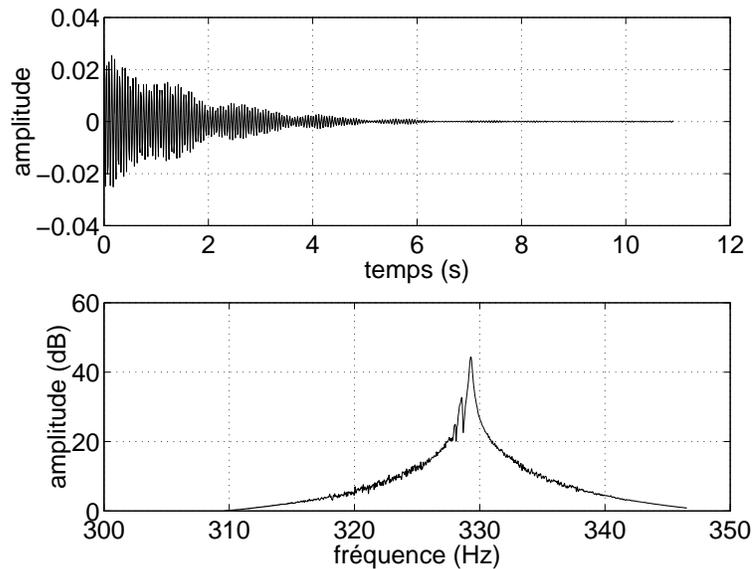


FIG. 4.18: Forme d'onde et spectre du partiel de rang 4 du mi grave d'une guitare classique.

La figure 4.19 présente les résultats obtenus par l'analyse matrix pencil du signal retourné, avec un paramètre pencil $p = 30$ et sans approximation de la pseudo inverse. Ce signal est un signal complexe, obtenu après filtrage de Hilbert (complexificateur), décalage en fréquence (pour pouvoir décimer) et décimation. 3 pôles sont à l'extérieur du cercle unité. Comme le décalage en fréquence est calculé pour amener les composantes autour de $\nu = 0.25$, on peut affirmer que le pôle extérieur au cercle et quasiment placé sur l'axe réel est un artéfact (résidu de filtrage par exemple). Le nombre de composantes peut donc être estimé à 2. La figure 4.20 confirme cette estimation de M : deux valeurs singulières sont plus importantes que les autres. En effectuant l'analyse matrix pencil avec la pseudo-inverse approchée de rang 2, on retrouve bien les deux pôles précités.

Pour finir, il faut reprendre l'estimation avec le signal causal et un rang de pseudo inverse égal à 2, pour éviter le décalage évoqué dans les paragraphes précédents (estimation qui se rapproche du cercle unité). On estime alors les fréquences, les facteurs d'amortissement et les temps de décroissance ($\tau = 1/\alpha$) à :

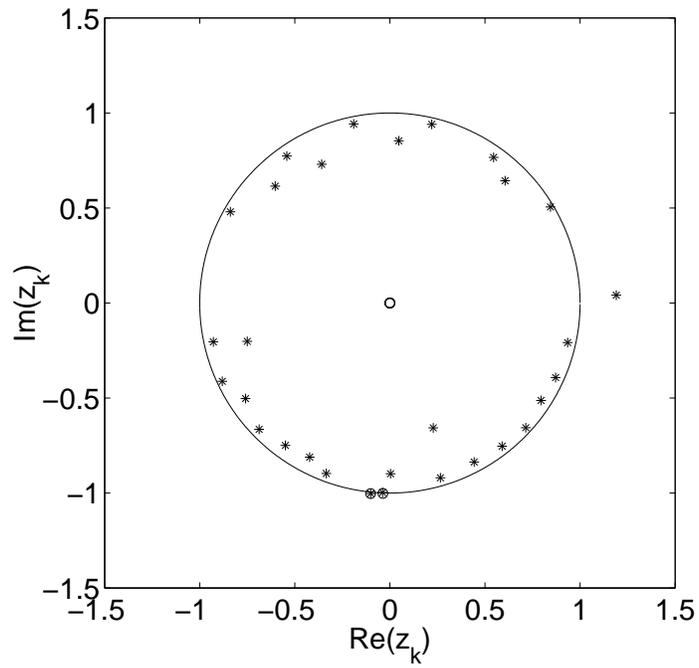


FIG. 4.19: Pôles trouvés par matrix pencil sur le signal retourné. Les '*' correspondent au cas où X_0^+ n'est pas approximée et les 'o' correspondent au cas d'une approximation de rang 2.

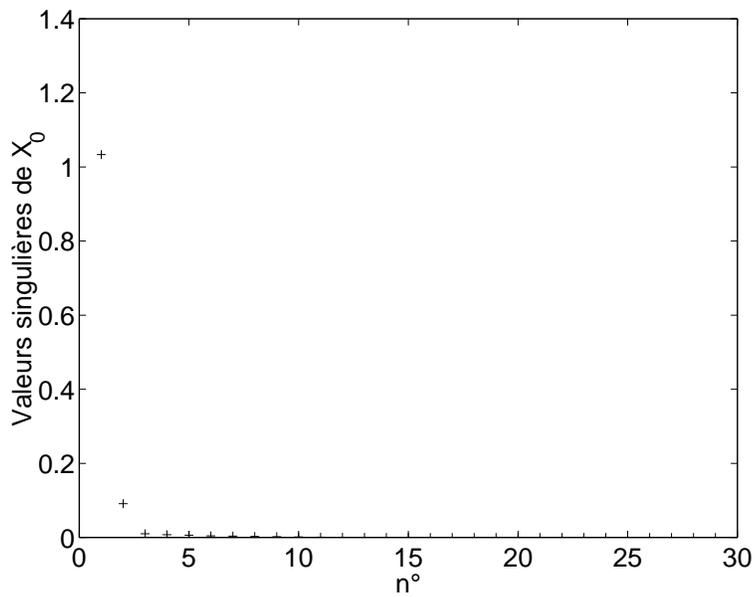


FIG. 4.20: Valeurs singulières de la matrice X_0^+

f (Hz)	328.5	329.3
α (s ⁻¹)	0.22	0.57
τ (s)	4.4	1.8

4.5 Qualité de l'estimateur matrix-pencil

Ce paragraphe étudie la qualité de l'estimateur matrix pencil, à l'aide du calcul théorique de son biais et de sa variance. Celle-ci possède une expression analytique simple dans le cas où le nombre de composantes est réduit à un; dans le cas de plusieurs composantes, on peut trouver les variances par un calcul numérique. La technique utilisée pour obtenir ces variances est un calcul de perturbation au premier ordre des valeurs propres.

4.5.1 Calcul de perturbation des valeurs propres z_i

Les pôles z_i du signal sont obtenus dans la méthode matrix pencil comme les valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_1$. Ces matrices sont des matrices de données dont les éléments sont les échantillons du signal (cf. équation 4.31 page 63). La méthode fournit des valeurs z_i exactes lorsque le signal n'est pas bruité mais ces valeurs sont perturbées en présence de bruit. On cherche ici l'expression des perturbations δz_i .

Celles-ci sont trouvées par un calcul de perturbation, mené à l'ordre 1, le bruit étant considéré comme petit devant les composantes sinusoïdales. On décompose alors les matrices de données en deux termes : une matrice de signal non bruité et une matrice dont les éléments sont les échantillons de bruit $w[n]$. On rappelle qu'on suppose le bruit blanc et centré. Soit, pour les matrices de données :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_0 = \mathbf{\Sigma}_0 + \mathbf{W}_0 = \mathbf{\Sigma}_0 + \delta \mathbf{X}_0 \\ \mathbf{X}_1 = \mathbf{\Sigma}_1 + \mathbf{W}_1 = \mathbf{\Sigma}_1 + \delta \mathbf{X}_1 \end{cases} \quad (4.38)$$

où les matrices $\mathbf{\Sigma}_0$ et $\mathbf{\Sigma}_1$ sont les matrices constituées à partir des échantillons *non bruités*. On appelle \mathbf{q}_i et \mathbf{p}_i respectivement les vecteurs propres à droite et à gauche de la matrice $\mathbf{\Sigma}_0^+ \mathbf{\Sigma}_1$, associés à la valeur propre z_i . z_i est supposée différente de zéro, c'est à dire associée à une composante du signal. Les vecteurs propres sont alors uniques, à un facteur multiplicatif près. On les prend tels que :

$$\mathbf{p}_i^\dagger \mathbf{q}_i = 1$$

Le calcul de perturbation, en tenant compte de $\delta(\mathbf{p}_i^\dagger \mathbf{q}_i) = 0$, conduit à

$$\delta z_i = \mathbf{p}_i^\dagger \delta(\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_1) \mathbf{q}_i \quad (4.39)$$

De cette expression on peut tirer plusieurs résultats intéressants :

- L'estimateur matrix pencil est non biaisé au premier ordre
- On peut trouver une expression analytique de la variance de l'estimateur dans le cas $M = 1$
- On peut estimer numériquement cette variance dans le cas général.

4.5.2 Calcul du biais

Comme le terme de perturbation dans les matrices de données comprend uniquement des valeurs de bruit et que celui-ci est centré, on peut déduire que la perturbation des valeurs propres est nulle en moyenne au premier ordre.

Démonstration. En effectuant un développement au premier ordre on trouve :

$$\delta(\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_1) = \delta(\mathbf{X}_0^+) \boldsymbol{\Sigma}_1 + \boldsymbol{\Sigma}_0^+ \delta(\mathbf{X}_1)$$

On reporte alors cette expression dans l'équation 4.39. On peut alors utiliser les identités

$$\mathbf{X}_0^+ \mathbf{X}_0 = \mathbf{I} \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma}_0 \boldsymbol{\Sigma}_0^+ \boldsymbol{\Sigma}_1 = \boldsymbol{\Sigma}_1$$

pour déduire le résultat

$$\delta z_i = \mathbf{p}_i^\dagger \boldsymbol{\Sigma}_0^+ (-\delta(\mathbf{X}_0) \boldsymbol{\Sigma}_0^+ \boldsymbol{\Sigma}_1 + \delta(\mathbf{X}_1)) \mathbf{q}_i \quad (4.40)$$

Cette égalité donne un développement au premier ordre de la perturbation de la valeur propre z_i en fonction des perturbations des matrices de données. Ces perturbations sont de moyenne nulle puisque :

$$\mathbf{E}(\delta \mathbf{X}_0) = \mathbf{E}(\mathbf{W}_0) = 0$$

et de même $\mathbf{E}(\delta \mathbf{X}_1) = 0$. Ce qui prouve le résultat au premier ordre :

$$\mathbf{E}(\delta z_i) = 0 \quad (4.41)$$

Matrix pencil est un estimateur non biaisé au premier ordre ce qui signifie que l'erreur commise en moyenne sur les valeurs propres est de l'ordre de σ^2 , la variance du bruit.

4.5.3 Calcul de la variance

On peut modifier l'expression 4.40 en utilisant les identités (Hua, 1987; Hua, 1988) :

$$\mathbf{p}_i^\dagger \boldsymbol{\Sigma}_0^+ = \frac{1}{b_i} \mathbf{v}_i^\dagger \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\Sigma}_0^+ \boldsymbol{\Sigma}_1 \mathbf{q}_i = z_i \mathbf{q}_i \quad (4.42)$$

où \mathbf{v}_i est solution du problème aux valeurs singulières $\mathbf{v}_i(\boldsymbol{\Sigma}_1 - z_i\boldsymbol{\Sigma}_0) = 0$. En considérant la décomposition du pinceau de matrices $\mathcal{P}(z)$ donné en 4.36 page 64 on peut identifier :

\mathbf{v}_i^\dagger est la i -ème ligne de \mathbf{Z}_r^\dagger

On obtient alors

$$\delta z_i = \frac{1}{b_i} \mathbf{v}_i^\dagger (\delta \mathbf{X}_1 - z_i \delta \mathbf{X}_0) \mathbf{q}_i \quad (4.43)$$

La perturbation sur les valeurs propres est ici exprimée simplement en fonction des valeurs non bruitées des vecteurs et valeurs propres et en fonction des matrices de données "bruit" \mathbf{W}_0 et \mathbf{W}_1 . La variance de δz_i s'obtient à partir de l'équation précédente. Les principaux intermédiaires du calcul suivent.

$$\mathbf{v}_i^\dagger \delta \mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} w[0] & w[1] & \cdots & w[N-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & v_{i1}^* \\ 0 & \ddots & \vdots \\ v_{i1}^* & & v_{iN-p}^* \\ \vdots & \ddots & \\ v_{iN-p}^* & & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{w}^\top \mathbf{V}_1^*$$

où \mathbf{V}_1 est de dimensions $N \times (N-p)$ et de même

$$\mathbf{v}_i^\dagger \delta \mathbf{X}_0 = \mathbf{w}^\top \mathbf{V}_0^*$$

on pose la matrice d'autocorrélation du bruit égale à

$$\Gamma_{\mathbf{w}} = \mathbf{E}(\mathbf{w}\mathbf{w}^\dagger)$$

et on construit la matrice

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 - z_i^* \mathbf{V}_0$$

et on aboutit au résultat (Hua et Sarkar, 1990) :

$$\text{Var } \delta z_i = \frac{1}{|b_i|^2} \mathbf{q}_i^\top \mathbf{V}^\dagger \Gamma_{\mathbf{w}} \mathbf{V} \mathbf{q}_i^* \quad (4.44)$$

Dans le cas où le bruit est blanc et centré on a simplement $\Gamma_{\mathbf{w}} = \sigma^2 \mathbf{I}_N$. Le résultat 4.44 qui précède permet de trouver numériquement la variance de l'erreur d'estimation au premier ordre. Les variances pour l'estimation de α_i et ω_i se déduisent de celle de δz_i en utilisant les relations qui suivent. Elles sont obtenues sous les hypothèses d'une distribution gaussienne et de l'indépendance des variables aléatoires α_i et ω_i ainsi que de l'égalité $\text{Var } \delta \alpha_i = \text{Var } \delta \omega_i$. Elles sont valables pour toutes les méthodes présentées ici :

$$\text{Var } \delta \alpha_i = \text{Var } \delta \omega_i = \frac{\text{Var } \delta z_i}{2} \quad (4.45)$$

L'intérêt de ce calcul, outre celui d'obtenir l'incertitude sur les valeurs estimées, est de pouvoir étudier l'efficacité de l'estimateur en fonction de deux paramètres. Quel paramètre pencil p doit-on choisir pour minimiser $\text{Var } \delta z_i$? Comment l'estimateur se dégrade-t-il lorsqu'on a affaire à deux fréquences de plus en plus proches?

4.5.4 Résultat analytique dans le cas d'une composante non amortie

Une réponse à la première des deux questions précédentes — le choix optimal du paramètre pencil — est donnée dans le cas d'une seule composante complexe $M = 1$, non amortie, soit :

$$z_1 = b_1 e^{j\omega_1}$$

Dans ce cas, l'expression 4.44 amène (Hua, 1987) au résultat

$$\text{Var } \delta\omega_1 = \frac{\sigma^2}{|b_1|^2} \begin{cases} \frac{1}{p(N-p)^2} & \text{si } p \leq N/2 \\ \frac{1}{p^2(N-p)} & \text{si } p \geq N/2 \end{cases} \quad (4.46)$$

On peut alors montrer facilement qu'il existe deux valeurs optimales pour le paramètre p à N donné qui sont :

$$p = N/3 \quad \text{ou} \quad p = 2N/3$$

En pratique toutes les valeurs comprises entre ces deux optima sont utilisables. La valeur $N/3$ limite la complexité de calcul.

D'autre part, la variance obtenue pour $\delta\omega_1$ tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini. L'estimateur matrix pencil est *consistant*.

4.5.5 Simulations

L'objectif de ces simulations est de valider les formules précédentes et tester des configurations particulières.

◇ Cas de une composante

La figure 4.21 présente le cas d'une composante non amortie dont il a été question plus haut. Les résultats théoriques sont obtenus par la formule 4.46, qui s'applique à ce cas particulier et donnent les mêmes résultats que l'application directe de la formule générale 4.44. Sur cet exemple on s'est intéressé à estimer la variance (sur 100 mesures) dans deux cas : le cas où le nombre M de composantes est correctement estimé à 1 et le cas où on surestime ce nombre de une unité. En effet, on peut en pratique être parfois incertain de cette valeur et il est alors préférable de la surestimer.

Les résultats mettent en évidence :

- Les valeurs optimales du paramètres pencil à $N/3$ et $2N/3$

- La variance prend des valeurs peu différentes pour les valeurs de p prises entre ces deux valeurs optimales.
- On relève peu de différence entre les deux estimations de ω_1 tant sur la variance que sur le résultat en moyenne 4.22

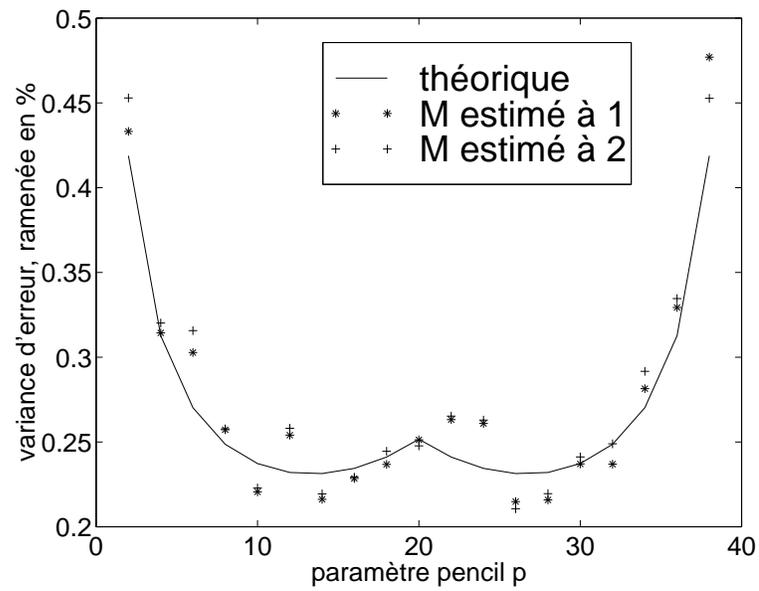


FIG. 4.21: Variance d'erreur $\delta\omega_1$ sur le signal à une composante $e^{j2\pi 0.1n}$, en fonction du paramètre pencil p . Le nombre d'échantillons vaut $N = 40$ et $\sigma = 0.2$. Les variances sont estimées avec 100 réalisations de bruits indépendantes.

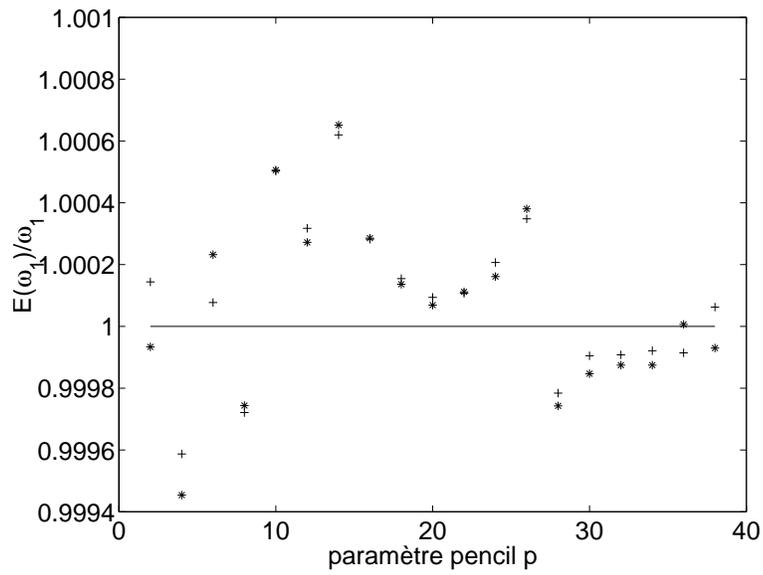


FIG. 4.22: Moyenne de ω_1 calculée sur 100 réalisations de bruit indépendantes.

- ◇ Une composante amortie Le facteur multiplicatif $\frac{\sigma^2}{|b_1|^2}$ dans l'expression 4.46 traduit une dépendance de la variance en inverse du RSB. Ce résultat obtenu dans le cas non amorti n'est pas généralisable au cas d'une composante amortie. Lorsque $\alpha_1 \neq 0$, la variance croît plus vite que $1/\text{RSB}$ lorsque l'amortissement augmente. C'est ce que montre la figure 4.23, tracée grâce à la formule 4.44.

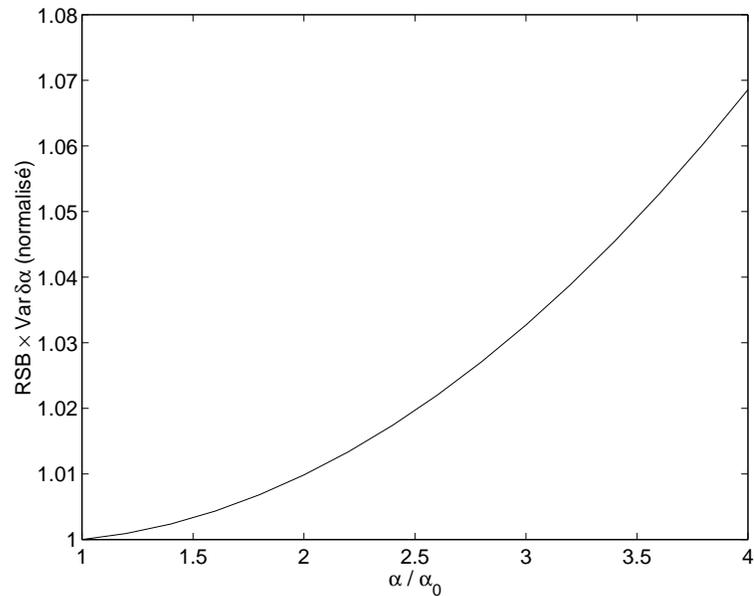


FIG. 4.23: La variance de l'estimateur croît plus vite que le $1/\text{RSB}$ lorsque les amortissements augmentent. La composante amortie étudiée est $e^{(-\alpha + j2\pi 0.2)n}$ avec $N = 40$ et $\sigma = .1$. α varie de 0.005 à 0.02.

- ◇ Comparaison $M = 1$ et $M = 2$ A l'aide de la formule 4.44 on peut trouver la variance sur les pulsations ou les facteurs d'amortissement dans n'importe quel cas par calcul numérique en utilisant l'égalité 4.45. Ici, on cherche à savoir si les valeurs optimales pour p restent valables dans le cas de deux composantes non amorties. La réponse est oui et son illustration se trouve figure 4.24.

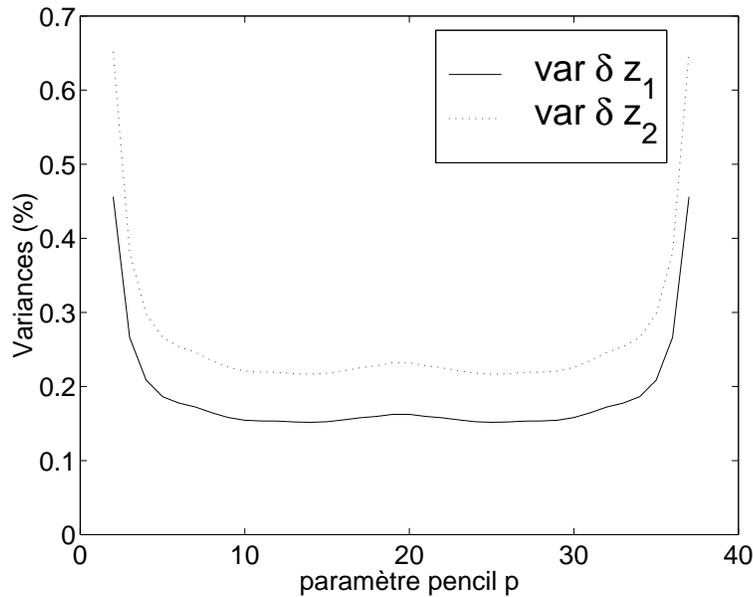


FIG. 4.24: Le signal étudié est $e^{2\pi 0.1n} + 0.7e^{2\pi 0.3n}$. $N = 39$ et $\sigma = 0.1$. On trouve des minima de variance à $N/3$ et $2N/3$.

Dans le cas général, la variance reste symétrique autour de $p = N/2$ mais la position des minima peut varier. Mais dans tous les cas, $N/3 \leq p \leq 2N/3$ reste un bon choix.

- ◇ Comportement en fonction de l'écart en fréquence de deux composantes Si on s'intéresse par exemple à estimer deux fréquences très proches contenues dans un partiel de note de guitare, la question de savoir si matrix pencil fournit une estimation fiable est importante : d'un point de vue de la compréhension physique, trouver une bonne approximation du signal ne suffit pas. C'est pourquoi nous avons choisi de traiter cet exemple.

Le signal choisi est de la forme :

$$e^{j\omega_1 n} + e^{j\omega_2 n}$$

La figure 4.25 présente le comportement de la variance d'erreur sur la pulsation ω_1 fixe, lorsque la seconde composante possède une fréquence variable autour de ω_1 . On aura donc $\omega_2 = \omega_1 + \Delta\omega$. On trouve que cette variance tend vers l'infini en $\omega_2 = \omega_1$ et que lorsque $\Delta\omega$ est suffisamment grand, la variance est de l'ordre de grandeur de celle qu'aurait le pôle isolé (cas $M = 1$).

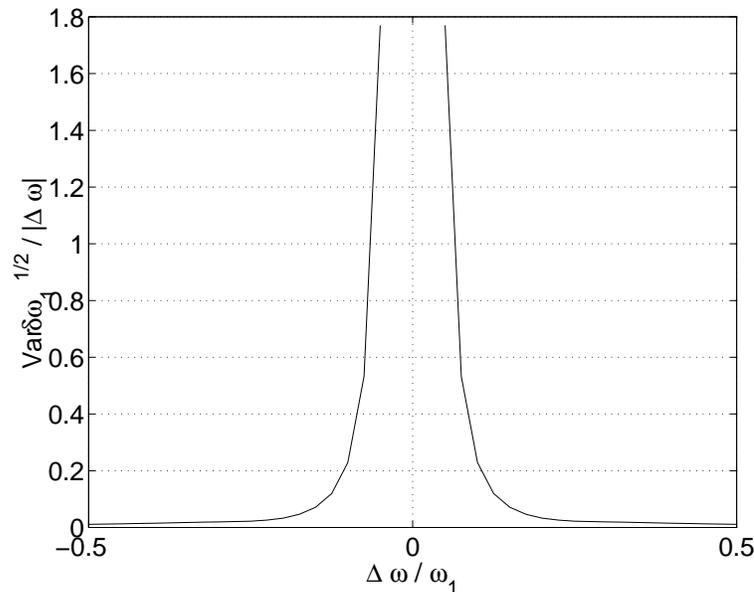


FIG. 4.25: Variance d'erreur de ω_1 dans le cas de deux composantes. Le signal est $e^{j2\pi 0.2n} + e^{j2\pi(0.2+\Delta\omega)n}$ avec $N = 40$, $\sigma = 0.1$. La variance d'erreur $\text{Var } \delta\omega_1$ est représentée en racine carrée (écart type de $\delta\omega_1$) normalisée à l'écart en fréquence $\Delta\omega$. La valeur $\frac{\sqrt{\text{Var } \delta\omega_1}}{\Delta\omega} = 1$ représente une valeur critique de la variance pour laquelle l'incertitude sur les fréquences est égale à l'écart entre les deux. Ce point est la limite de séparabilité entre les deux composantes.

Ce résultat est intéressant parce qu'on retrouve une notion de séparabilité des composantes : si $\Delta\omega$ est proche de 0 la variance d'erreur devient très grande et on ne peut donc plus séparer les composantes. Le comportement de l'estimateur matrix pencil est d'ailleurs révélateur à cet égard car lorsque l'écart entre les deux fréquences devient trop faible, la méthode ne détecte plus qu'un seul pôle qui est une sorte de moyenne entre les deux. Le paramètre

principal qui règle cette séparabilité est *le rapport signal à bruit*. Plus ce dernier est élevé est plus la courbe de la figure 4.25 se rapproche de ses asymptotes c'est à dire plus le point limite de la séparabilité est repoussé vers $\Delta\omega = 0$.

4.5.6 Conclusion et utilisation

Grâce aux calculs précédents, on peut estimer la variance des estimateurs de fréquence et de facteur d'amortissement dans tous les cas, avec pour seule connaissance préalable la valeur de la variance de bruit. On peut ainsi évaluer l'incertitude sur les grandeurs ν et α et établir, dans le cas de plusieurs composantes proches en fréquence, si la mesure est fiable. Nous la considérerons fiable lorsque l'incertitude sur les fréquence est largement inférieure à l'écart entre les deux. Dans la présentation de nos résultat expérimentaux, nous prenons l'incertitude égale à trois fois l'écart type de l'erreur d'estimation. Par exemple, si on effectue une mesure de ω on la prendra comme :

$$\varepsilon = 3(\text{Var } \delta\omega)^{1/2}$$

En admettant une distribution normale des valeurs, cela correspond à un intervalle de confiance à 99.7%.

Cette étude de l'incertitude aboutit à deux autres conclusions importantes pour l'expérimentateur.

1. Les incertitudes absolues sur les pulsations et sur les facteurs d'amortissement sont égales. Nous aurons donc une incertitude *relative* plus grande pour les facteurs d'amortissement.
2. Les incertitudes augmentent lorsque l'amortissement augmente. Aussi bien dans le cas de la méthode matrix pencil que dans le cas de la méthode classique cette augmentation est *plus rapide* que celle du rapport bruit à signal.

4.6 Sélection de l'ordre du modèle

L'ordre du modèle est le nombre M de composantes contenues dans le signal. Trouver sa valeur permet notamment de connaître le nombre de degré de liberté du système mécanique mis en vibration ce qui fournit une interprétation physique simple du nombre M : il correspond (à un facteur 2 près pour un signal réel) au nombre d'oscillateurs élémentaires auquel se ramène le système.

Il existe plusieurs moyens d'estimer M . On peut simplement, après avoir déduit les amplitudes et les phases par une technique de moindres carrés linéaire, évaluer l'énergie de chaque composante. On peut espérer, si le RSB est important, distinguer ainsi les composantes "signal" des composantes "bruit". Une autre manière de distinguer ces différentes composantes est de considérer l'ordre de grandeur des valeurs singulières de la matrices de données (*cf.* paragraphe 4.2). Les valeurs les plus fortes correspondent à du signal et lorsqu'on observe la variation de l'une à l'autre dans l'ordre décroissant, on trouve un "saut" entre les valeurs

"signal" et les valeurs "bruit". D'autre part, nous avons déjà vu au paragraphe 4.2 qu'un moyen d'estimer M est d'analyser le signal retourné. En effet, un système mécanique en vibration libre perd nécessairement de l'énergie et sa réponse est constituée de sinusoides *toutes décroissantes*. Pour le signal retourné, les pôles qui correspondent à du signal sont à l'extérieur du cercle unité et les pôles qui correspondent à du bruit sont à l'intérieur. Les énergies relatives des composantes et la situation des pôles par rapport au cercle unité constituent des indicateurs du nombre de composantes.

Pour compléter ces indicateurs, il existe des critères de sélection d'ordre, utilisés soit dans un contexte de modélisation AR (nombre de coefficients) soit dans un contexte de signal à composantes multiples (nombre de composantes élémentaires). Le plus ancien de ces critères, le critère AIC⁵, et la théorie afférente ont été développés par Akaike (Akaike, 1974).

4.6.1 Les critères d'information

- ◇ Cas de la modélisation AR Cet exemple illustre le principe d'utilisation de ces critères. Dans le cas d'une modélisation AR, la variance de l'erreur de prédiction diminue toujours lorsqu'on augmente l'ordre de prédiction. Pour estimer le nombre de coefficient du modèle il faut chercher le nombre à partir duquel en ajouter un autre ne réduit pas *sensiblement* la variance d'erreur. C'est pour remplacer cette appréciation qualitative, qui devient difficile pour les faibles RSB, qu'on utilise les critères d'information. Le critère AIC en particulier s'écrit :

$$\text{AIC}(k) = N \ln \text{Var } \epsilon + 2k$$

où k est l'ordre de prédiction et ϵ l'erreur de prédiction. $\text{AIC}(k)$ est la somme d'une fonction décroissante de k et d'une fonction croissante. L'ordre du modèle sera estimé au *minimum* de la valeur du critère AIC.

Les critères les plus connus hormis le critère AIC sont le MDL⁶ (Schwartz, 1978; Rissanen, 1978), le CAT⁷ (Parzen, 1977) et le FPE⁸ (Akaike, 1970). Ils sont en général exprimés en terme de variance d'erreur de prédiction ou de fonction log-vraisemblance. C'est à partir de cette dernière formulation que Wax et Kailath (Wax et Kailath, 1985) ont proposé une expression du AIC et du MDL pour estimer le nombre de composantes dans un signal multiple.

- ◇ Critères pour l'estimation du nombre de composantes Ces critères portent sur les valeurs propres λ_i de la matrice d'autocorrélation du signal. Comme des estimées de celles-ci sont les carrés des valeurs singulières de la matrice de donnée, il peuvent être exprimés directement en

5. Akaike's Information-theoretic Criterion

6. Minimum Description Length

7. Criterion Autoregressive Transfert

8. Final Prediction Error

terme de valeurs singulières. Ceci nous est particulièrement utile puisque l'algorithme matrix pencil utilisé comprend une décomposition aux valeurs singulières de la matrice de donnée. Nous reproduisons ci-dessous les expressions des deux critères formulés dans (Wax et Kailath, 1985).

A partir d'un jeu de K vecteurs d'observation de longueur L , si on suppose le bruit additif blanc et gaussien, on a

$$\text{AIC}(k) = -2K(L - k) \ln \mathcal{R}(k) + 2k(2L - k) \quad (4.47)$$

et

$$\text{MDL}(k) = -K(L - k) \ln \mathcal{R}(k) + \frac{1}{2}k(2L - k) \ln K \quad (4.48)$$

où la quantité $\mathcal{R}(k)$ s'exprime en terme de valeurs propres de la matrice d'autocorrélation comme le rapport de leur moyenne géométrique et de leur moyenne arithmétique :

$$\mathcal{R}(k) = \frac{\left(\prod_{i=k+1}^L \lambda_i \right)^{\frac{1}{L-k}}}{\frac{1}{L-k} \sum_{i=k+1}^L \lambda_i}$$

◇ Application dans matrix pencil Dans l'algorithme matrix pencil, on réalise la décomposition aux valeurs singulières de la matrice de données :

$$\mathbf{X}_0 = \begin{bmatrix} x[p-1] & x[p-2] & \dots & x[0] \\ x[p] & x[p-1] & \dots & x[1] \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x[N-2] & x[N-3] & \dots & x[N-p-1] \end{bmatrix}$$

La composition de cette matrice correspond à l'observation de $N - p$ vecteurs de longueur p . Les valeurs singulières de cette matrice sont les racines carrées des valeurs propres de la matrice $\mathbf{X}_0^\dagger \mathbf{X}_0$. A l'aide de cette remarque on peut identifier :

$$\begin{cases} L = p & \text{longueur des vecteurs} \\ K = N - p & \text{nombre de vecteurs} \end{cases}$$

4.6.2 Application

Nous présentons ici les résultats de deux applications : l'une sur des données synthétiques et l'autre sur des données réelles. L'analyse pour les données réelles montre les limites d'utilisation des critères d'information, dont l'expression est fondée sur l'hypothèse d'échantillons aléatoires indépendants (bruit blanc) qui est souvent mise à mal en pratique.

◇ Application à des données synthétiques Le signal utilisé est

$$x[n] = e^{(-0.05+j2\pi 0.1)n+\pi/4} + e^{(-0.1+j2\pi 0.2)n+2\pi/3} + w[n]$$

Le bruit est complexe, avec une variance $2\sigma^2 = 20.05^2$ (env. 20 dB). Le nombre d'échantillons vaut $N = 100$ et le paramètre pencil est $p = 33 \approx N/3$. On choisit également $M = p$ pour le rang d'approximation de la pseudo inverse (nombre de composantes finalement obtenu). On a reproduit dans le tableau ci-dessous les valeurs des paramètres des 10 premières composantes, classées par ordre décroissant d'énergie (en dB).

α_k	ν_k	A_k	Φ_k/π	En.(dB)
0.097	0.199	0.98	0.68	0
0.039	0.0995	0.15	0.31	-12
0.18	0.0891	0.16	0.32	-18
0.09	0.1574	0.08	-0.94	-21
0.49	0.3345	0.12	-0.45	-23
0.03	0.1460	0.03	0.53	-26
0.10	0.0163	0.04	-0.11	-28
0.17	-0.4114	0.04	0.31	-31
0.02	-0.0379	0.01	0.01	-31
0.06	0.3332	0.02	0.37	-31

Les deux composantes signal sont bien les plus fortes mais il est difficile de décider du nombre de composantes à partir de l'énergie. On pourra hésiter entre 2 (si on regarde les écarts entre composantes) et 4 (si on se réfère au niveau de bruit).

La figure 4.26 montre que le tracé des valeurs singulières de la matrice de données permet de détacher clairement 2 composantes "signal".

L'analyse matrix pencil sur le signal retourné fait apparaître les 2 pôles signal à l'extérieur du cercle unité (*cf.* figure 4.27 et permet ainsi de déterminer l'ordre du modèle sans ambiguïté.

Les deux critères, tracés figure 4.28 présentent tous deux des minima pour $k = 2$ mais le critère AIC présente un minimum moins marqué. Cette caractéristique est générale et le critère se révèle moins fiable que le critère MDL. Cette particularité avait d'ailleurs été relevée dans (Schwartz, 1978) : pour les grands nombre d'échantillons, le MDL est consistant alors que le AIC ne l'est pas. AIC aura tendance à surestimer le nombre de composantes.

Lorsqu'on augmente le niveau de bruit ($\sigma = 0.05$ par exemple), des pôles supplémentaires peuvent être trouvés par matrix pencil à l'extérieur du cercle unité, alors que les deux critères maintiennent une estimation stable de M . Les valeurs singulières continuent également à indiquer clairement $M = 2$.

◇ Application à la guitare Le signal de guitare étudié est celui du paragraphe 4.4 (*cf.* fi-

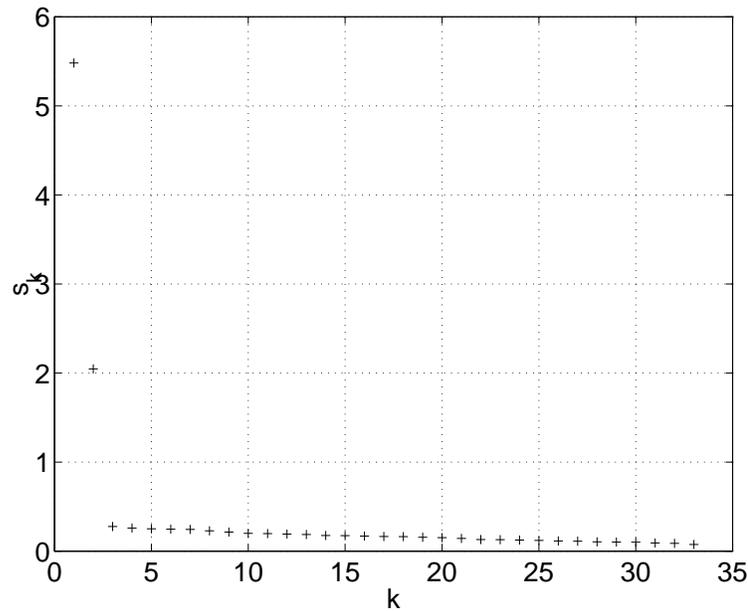


FIG. 4.26: Valeurs singulières de la matrice de donnée X_0 du signal, obtenues par décomposition aux valeurs singulières.

gure 4.18): le partiel 4 de la note de Mi grave. Ce partiel est obtenu par filtrage de Hilbert bande étroite (complexification) et décimation du signal original, après décalage en fréquence. Le signal traité contient $N = 500$ échantillons.

Les résultats obtenus pour les dix premières composantes sont regroupés dans le tableau ci-dessous, où les valeurs d'amortissement et de fréquence sont exprimées en unités S.I. :

α_k (s ⁻¹)	f_k (Hz)	A_k (10 ⁻³)	Φ_k/π	En.(dB)
0.65	329.28	28.9	0.12	0
0.41	328.60	3.65	-0.06	-16
0.85	328.32	2.46	0.93	-22
0.46	329.43	1.70	-0.69	-23
0.17	328.04	0.46	0.24	-30
0.92	329.86	0.63	0.82	-35
0.58	327.74	0.36	-0.15	-37
1.58	331.50	0.23	-0.01	-46
0.55	332.31	0.09	-0.08	-49
0.23	325.30	0.04	0.09	-53

La donnée de l'énergie de chacune des composantes permet de distinguer les 4 premières des suivantes mais on peut difficilement trancher entre 2 ou 4 composantes. Le graphe des valeurs singulières donné figure 4.29 est plus tranché en faveur de l'estimation $M = 2$.

Les pôles du signal retourné, trouvés en dehors du cercle unité sont au nombre de 3 dont 2 seulement à des fréquences "réalistes" (le troisième est à fréquence pratiquement

nulle). Cependant cette estimation n'est pas stable si on varie légèrement le nombre de points d'analyse. En fait, ceci peut s'expliquer par la variance de l'estimateur qui, étant très proche du cercle unité, peut passer de l'autre côté selon le vecteur d'observation utilisé.

Les critères d'information se révèlent ici difficiles d'utilisation ainsi que le montre la figure 4.30. L'explication de la variation monotone décroissante des critères, tient dans le prétraitement qui précède l'analyse matrix pencil proprement dite. L'hypothèse d'un bruit blanc additif n'est plus vérifiée. Nous avons par ailleurs vérifié que la forme des critères appliqués à l'analyse d'un bruit blanc filtré (sans signal) correspond à ce qui est observé ici. Nous pouvons espérer mieux de l'application de ces critères mais cela nécessite une étude particulière concernant le prétraitement des données. Cette étude dépasse le cadre du présent travail.

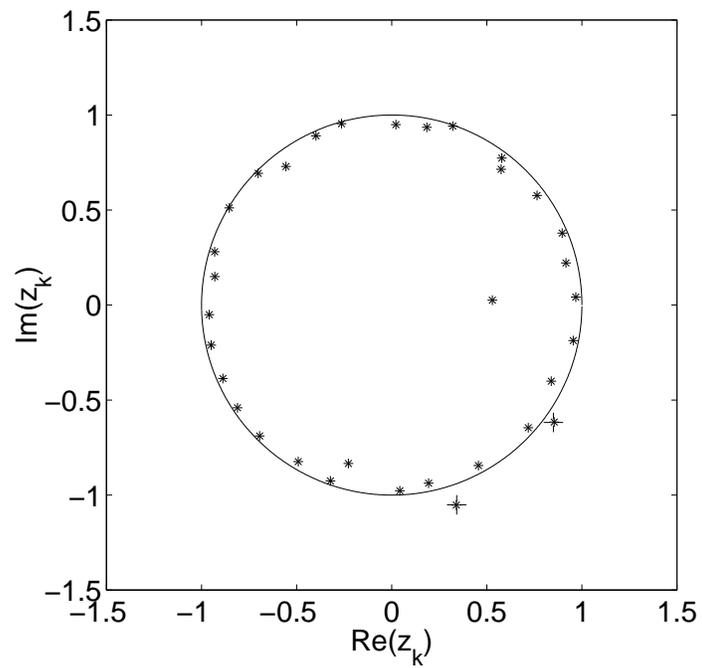
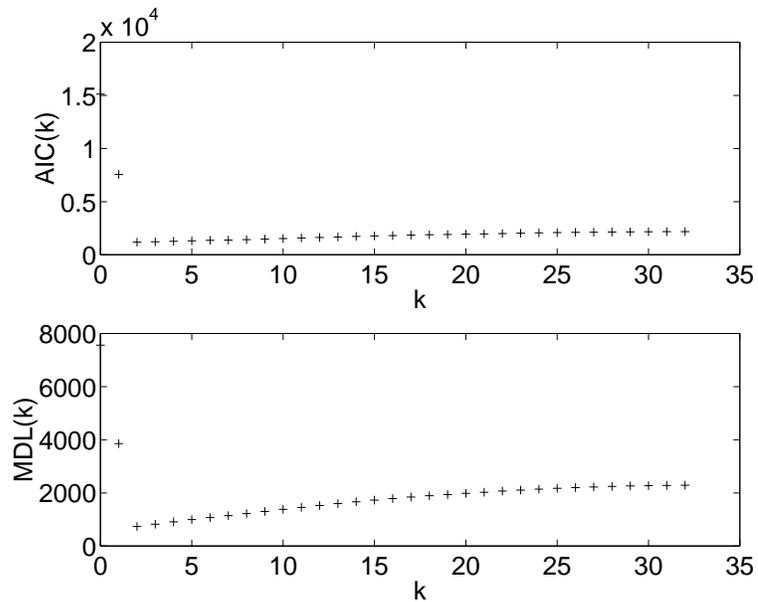
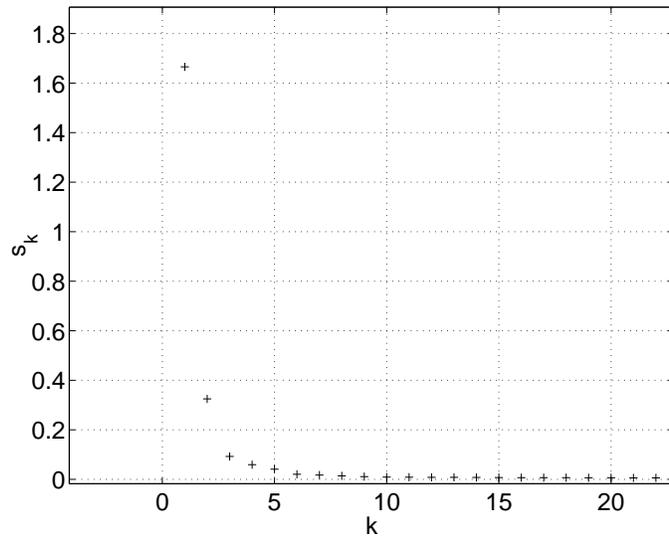
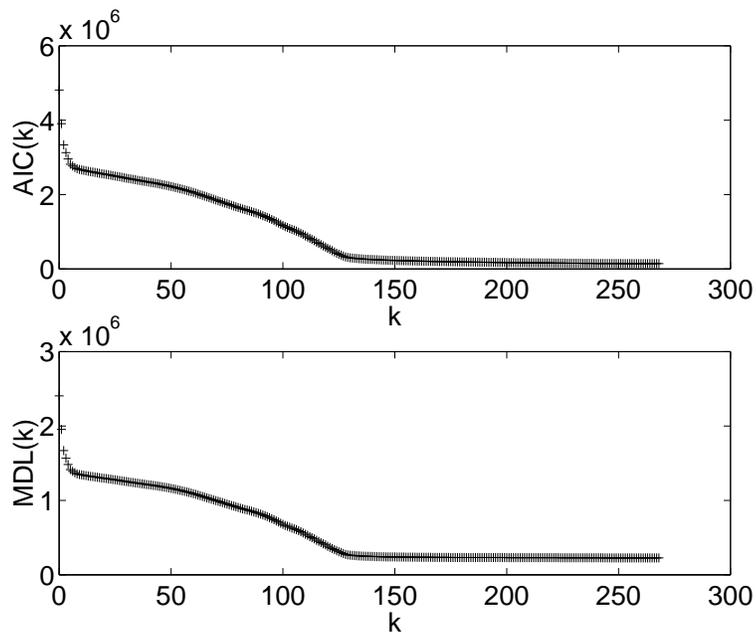


FIG. 4.27: Pôles trouvés par matrix pencil pour le signal retourné.

FIG. 4.28: Critères $AIC(k)$ et $MDL(k)$. Le minimum donne une estimation de l'ordre du modèle

FIG. 4.29: Valeurs singulières de la matrice de donnée X_0 du signal de guitareFIG. 4.30: Critères $AIC(k)$ et $MDL(k)$ appliqués à l'analyse matrix pencil d'un signal de guitare.

4.7 Algorithme complet

Ce paragraphe donne le séquençement complet du traitement du signal $x[n]$ qui nous a servi, programmé en langage Matlab[®], pour analyser les données.

Pour chaque pic de fréquence centrale réduite ν_i^c on effectue :

1. Filtrage RIF passe bande de largeur $\delta\nu_t$ autour de ν_i^c . $\delta\nu_t$ est la bande passante à -75 dB. Ce filtre est à coefficients complexes et filtre uniquement dans la bande $[0 \ 0.5[$ (cf. paragraphe 3.3). On obtient le signal analytique associé $x[n]$ soit $x_a[n]$ dont toutes les fréquences en dehors de la bande passante sont atténuées d'au moins 75 dB.
2. Décalage en fréquence de $\nu_i^c - \delta\nu/2$ par multiplication par l'exponentielle complexe correspondante. Le nouveau signal présente un seul pic dans son spectre à la fréquence $\delta\nu/2$.
3. Décimation du signal par un facteur $D \approx \frac{1}{2\delta\nu_t}$. De cette manière le pic du spectre se trouve centré sur la fréquence réduite 0.25. Le signal obtenu est $y[n] \in \mathbb{C}$. Cette opération est rendue nécessaire par la longueur souvent rédhibitoire des séquences de données après acquisition.
4. Matrix pencil pour obtenir les $\hat{\alpha}_i$ et $\hat{\omega}_i$
5. Eventuelle estimation du nombre de composantes et nouvelle application de matrix pencil avec le nombre M estimé
6. Moindre carrés linéaires avec le signal $y[n]$ pour obtenir les A_i et les Φ_i L'expression de ce moindre carré en fonction du vecteur de données y et de la matrice de Vandermonde $Z = (z_j^i)$ est :

$$\mathbf{b} = (\mathbf{Z}^\dagger \mathbf{Z})^{-1} \mathbf{y}$$

Le vecteur \mathbf{b} contient alors les amplitudes complexes $b_i = A_i e^{\Phi_i}$

Chapitre 5

Efficacité des estimateurs

Résumé

L'efficacité des estimateurs est mesurée par comparaison avec la Borne de Cramer-Rao correspondante. Le cas d'une et de deux composantes amorties est traité. La variance de l'estimateur matrix pencil se révèle très proche de la borne minimale.

De manière usuelle, l'efficacité d'un estimateur $\hat{\theta}$ non biaisé d'un paramètre θ est mesurée par le rapport de sa variance à la variance minimale qu'on peut obtenir quelque soit l'estimateur choisi. L'existence d'une telle valeur minimale est assurée par le *théorème de Cramer-Rao* et elle ne dépend que de la densité de probabilité des valeurs de θ . En particulier, on pourra la calculer pour un niveau de bruit donné.

Ce paragraphe a pour objectif de mesurer et de comparer l'efficacité des deux méthodes utilisées dans le cas d'une seule composante. Dans les autres cas, seule la méthode matrix pencil est utilisable et sa variance sera comparée à la valeur minimale ou *borne de Cramer-Rao*(BCR).

5.1 Existence d'une limite théorique - Théorème de Cramer-Rao

Une démonstration du théorème est donnée en annexe et on peut la trouver par exemple dans Scharf (1991).

5.1.1 Définitions

On considère un paramètre réel multidimensionnel $\boldsymbol{\theta}$ et un estimateur de ce paramètre $\hat{\boldsymbol{\theta}}$. Dans le cas d'un signal à deux composantes amorties par exemple, ce paramètre possédera 8 éléments :

$$\boldsymbol{\theta} = (A_1, \Phi_1, \alpha_1, \omega_1, A_2, \Phi_2, \alpha_2, \omega_2)^T$$

Soit un vecteur aléatoire \mathbf{x} , de dimension N , qui représente les données issues de l'expérience (observations). On notera la densité de probabilité de ce vecteur comme la fonction paramétrée par $\boldsymbol{\theta}$:

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$$

Si il s'agit par exemple d'un signal à deux composantes plus du bruit blanc gaussien centré de variance σ^2 , cette fonction vaut :

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \prod_{n=0}^{N-1} p(x_n) = \frac{1}{(2\pi\sigma^2)^{N/2}} \prod_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{|x_n - \bar{x}_n|^2}{2\sigma^2}}$$

avec

$$\bar{x}_n = A_1 e^{j\Phi_1} e^{(-\alpha_1 + j\omega_1)n} + A_2 e^{j\Phi_2} e^{(-\alpha_2 + j\omega_2)n}$$

On peut alors définir la *matrice d'information de Fisher* comme

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = -\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \left(\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} \ln f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \right) \quad (5.1)$$

et son terme général s'écrit :

$$J_{ij} = -\mathbf{E} \frac{\partial^2}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \ln f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) \quad (5.2)$$

5.1.2 Théorème de Cramer-Rao

Si $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est un estimateur non biaisé de $\boldsymbol{\theta}$ alors la matrice de covariance de $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ est minimisée par l'inverse de la matrice de Fisher, soit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T \geq \mathbf{J}^{-1} \quad (5.3)$$

Cette propriété montre en particulier l'existence d'une borne inférieure pour la variance de l'estimateur $\hat{\theta}_i$:

$$\text{Var } \hat{\theta}_i \geq (\mathbf{J}^{-1})_{ii} \quad (5.4)$$

5.1.3 Borne de Cramer-Rao

La borne inférieure de la variance du paramètre $\hat{\theta}_i$ est *la borne de Cramer-Rao* relative à ce paramètre. La définition 5.1 indique que cette borne est fonction de la densité de probabilité du vecteur d'observations. Dans notre cas, ce vecteur est la somme de composantes déterministes et d'un bruit additif. La densité de probabilité $f_{\theta}(\mathbf{x})$ se calcule à partir de la densité de probabilité du bruit, qui est donc la grandeur déterminante dans le calcul de la borne de Cramer-Rao. Dans l'hypothèse où le bruit est blanc gaussien et centré, cette borne sera fixée par la variance du bruit.

Alors que le paramètre déterminant dans l'analyse de Fourier est la largeur de la fenêtre d'analyse, le paramètre déterminant de notre estimation sera le rapport signal à bruit, qui fixe l'efficacité maximale que l'on peut obtenir, *quelque soit l'estimateur non biaisé* utilisé.

5.2 BCR pour une sinusoïde. Comparaison des méthodes.

Ce paragraphe donne les valeurs des variances et de la BCR dans le cas simple d'une seule composante amortie et non amortie. On pourra ainsi comparer les efficacités des deux estimateurs du facteur d'amortissement construits — celui par filtrage de Hilbert et matrix pencil. On s'intéresse au signal

$$x[n] = A_1 e^{j\phi_1} e^{(-\alpha_1 + j\omega_1)n} + w[n]$$

où $w[n]$ est un bruit blanc complexe gaussien centré, de variance $2\sigma^2$ connue.

5.2.1 Efficacités pour une composantes non amortie

Lorsque $\alpha_1 = 0$, la BCR pour un estimateur $\hat{\omega}_1$ possède une expression analytique donnée dans Lang et McClellan (1980) :

$$BCR = \frac{2\sigma^2}{A_1^2} \frac{6}{N(N^2 - 1)} \quad (5.5)$$

Comme en général on a $N \gg 1$ la borne inférieure des variances se comporte en $1/N^3$. On donne d'autre part les variances de la méthode matrix pencil (*cf.* paragraphe 4.5) et de la méthode par filtrage de Hilbert (*cf.* paragraphe 3.4).

La variance de l'estimateur matrix pencil est calculée pour la valeur du paramètre pencil $p = N/3$ optimale :

$$(\text{Var } \delta\omega_1)_{MP} = \frac{27\sigma^2}{2A_1^2 N^3} \quad (5.6)$$

Il est intéressant de remarquer que la variance de l'estimateur matrix pencil varie comme $1/N^3$ c'est à dire, pour les grandes valeurs de N reste dans *un rapport constant* avec la BCR. L'efficacité de l'estimateur est la même pour les petits nombres ou pour les grands nombres d'échantillons.

On peut trouver la valeur de la variance de l'estimateur par filtrage de Hilbert en utilisant le résultat 3.16 du paragraphe 3.4 transposé à la mesure de ω_1 soit :

$$(\text{Var } \delta\omega_1)_{Hi} = \frac{24\sigma^2}{A_1^2 N(N-1)(N+1)} \approx \frac{24\sigma^2}{A_1^2 N^3} \quad (5.7)$$

Dans ce cas, on a donc les valeurs d'efficacités suivantes :

$$\eta = \text{Var } \delta\omega_1 / BCR = \begin{cases} 1.13 & \text{pour matrix pencil} \\ 2 & \text{pour Hilbert} \end{cases}$$

Toutes choses égales par ailleurs, matrix pencil est meilleur estimateur que la méthode par filtrage de Hilbert puisque son efficacité est plus proche de 1. Cependant la complexité plus faible du filtrage de Hilbert autorise le traitement d'un plus grand nombre d'échantillons. Le traitement matriciel matrix pencil ne permet pas des N trop grands (dans notre cas la valeur limite est environ $N = 1000$).

5.2.2 Cas d'une composante amortie

Lorsque le signal comporte une seule composante amortie, la matrice de Fisher correspondante est de dimension 4×4 et sa structure particulière (*cf.* Annexe B) permet une inversion analytique (Kumaresan, 1982). On constate que la BCR comme les variances obtenues pour chacune des méthodes sont égales pour le paramètre α_1 et pour le paramètre ω_1 .

La valeur de la BCR pour le paramètre ω_1 est donnée par :

$$BCR = \frac{\sigma^2}{A_1^2} \frac{Q_0}{Q_0 Q_2 - Q_1^2} \quad (5.8)$$

où les valeurs Q_i sont définies par :

$$Q_0 = \sum_{n=0}^{N-1} |z_1|^{2n} \quad Q_1 = \sum_{n=0}^{N-1} n |z_1|^{2n} \quad Q_2 = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 |z_1|^{2n}$$

La valeur de la variance pour l'estimateur matrix pencil est donnée par un calcul numérique issu de la formule 4.44 (avec $p = N/3$) et la variance pour l'estimateur par filtrage de Hilbert vaut (*cf.* paragraphe 3.4) :

$$\text{Var } \hat{\alpha}_k = \left(\frac{12\sigma_0}{A_k(N-1)(N+1)N} \right)^2 F[n] \text{ avec } F[n] = \sum_n e^{2\alpha n} \left(n - \frac{N-1}{2} \right)^2$$

La figure 5.1 présente une comparaison entre les deux estimateurs. On a représenté les variances normalisées à la BCR. On constate que dans ce cas également, l'estimateur matrix pencil est plus efficace que l'estimateur par filtrage de Hilbert, avec les mêmes restrictions que dans le paragraphe précédent.

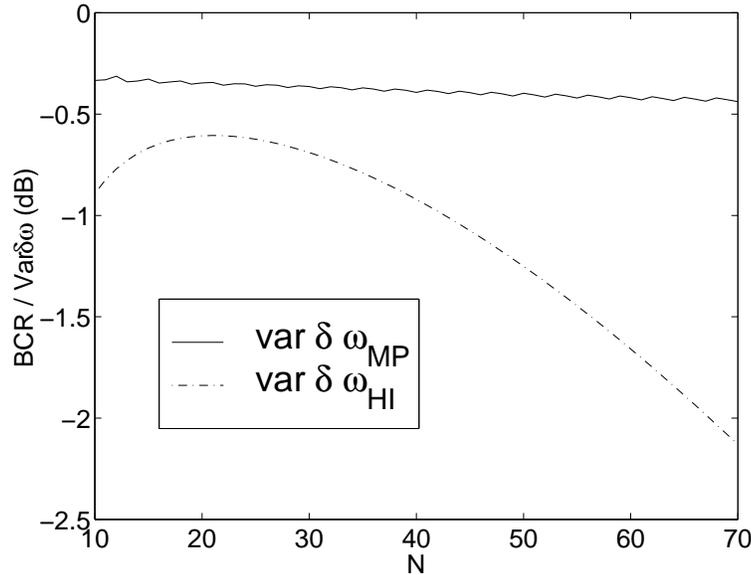


FIG. 5.1: Variances $\text{Var } \delta \omega$ normalisées à la BCR, en fonction de N pour les estimateurs matrix pencil et par filtrage de Hilbert. Le signal étudié vaut $e^{(-.02+j2\pi.25)n} + w(n)$ où $w \in \mathbb{C}$ est de variance 0.1.

5.3 Cas de deux sinusoïdes. Comparaison entre matrix pencil et la BCR

On s'intéresse ici au cas de deux exponentielles amorties lorsque leurs fréquences deviennent proches. On peut ainsi étudier les performances de l'estimateur matrix pencil en terme de séparabilité des composantes, vis à vis de l'optimal réalisable (BCR). Le comportement de la BCR en fonction de l'écart en fréquence $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ met en évidence une divergence de l'estimation (la variance devient très grande) lorsque les fréquences sont trop proches.

La figure 5.2 montre les variations conjointes de la variance de l'estimateur matrix pencil et de la BCR pour deux exponentielles amorties en fonction de leur écart en fréquence. On observe une divergence rapide des deux fonctions lorsque cet écart tend vers 0. Cet exemple montre que l'estimateur matrix pencil reste très efficace — c'est à dire que sa variance est proche du minimum — pour le cas des pôles proches en fréquences.

Cet exemple est pris pour illustrer une propriété générale de l'estimateur matrix pencil,

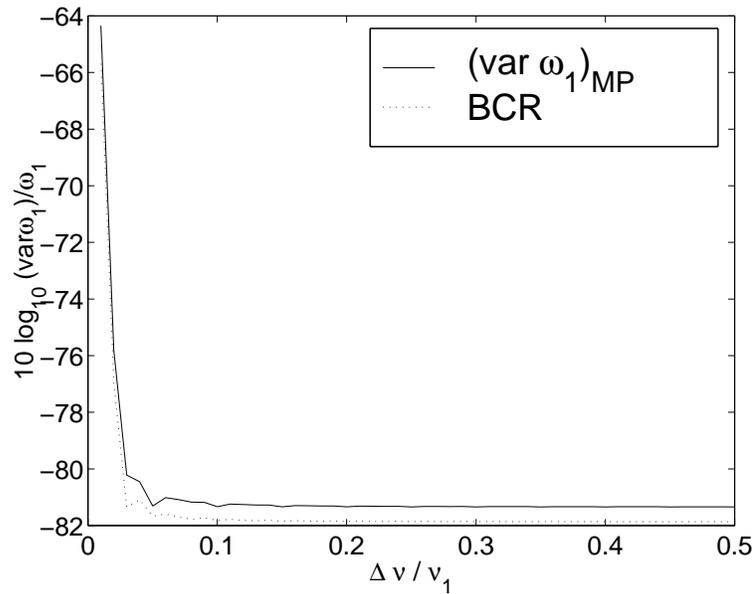


FIG. 5.2: $\text{Var } \delta \omega_1$ et BCR correspondante pour le signal $e^{(-.002+j\omega_1)n} + e^{(-.002+j\omega_2)n} + w[n]$ avec $\omega_1 = 2\pi \cdot 2$ et $\omega_2 = 2\pi \nu_2$. $N = 300$, $\sigma = .1$, et $\Delta \nu = \nu_2 - \nu_1$

qui garde une bonne efficacité dans le cas où le signal étudié contient plusieurs pôles proches en fréquence.

5.4 Conclusion et synthèse

Les deux méthodes de traitement de signal présentées dans ce chapitre reposent sur des principes différents — filtrage de Hilbert ou recherche de valeurs propres —, se rangent dans des catégories distinctes — méthode classique ou paramétrique — et n'ont pas le même domaine d'application. La première (par filtrage de Hilbert) permet d'aborder le problème en "amont" en extrayant les lois de modulation en amplitude et en phase. Elle peut traiter des signaux long (plusieurs dizaines de milliers de points) et est bien adaptée au cas des signaux de vibration dont les fréquences modales sont bien séparées (cas des plaques minces par exemple). La deuxième (matrix pencil) ne peut, en raison de sa complexité (environ en N^3) et du traitement matriciel (espace mémoire requis) s'appliquer qu'à des séquences plus courtes. Elle peut traiter le cas des composantes proches en fréquence, non séparables par la première méthode, comme les signaux vibratoires recueillis au chevalet d'une guitare par exemple. Ces performances en terme d'estimation de fréquence et de facteur d'amortissement, de résolution à niveau de bruit donné, sont pratiquement optimales puisque la variance des estimateurs reste toujours très proche de la borne de Cramer-Rao, sa borne inférieure théorique.

L'estimation du nombre de composantes contenues dans un pic du spectre est un problème délicat et nous avons proposé plusieurs moyens de l'aborder dont aucun ne s'est révélé parfaitement fiable sur les données réelles, notamment en raison de la nécessité de filtrer ces données et parce qu'elles sont souvent composées d'une composante principale et de composantes secondaires plus faibles. Reste la conjonction de tous les indicateurs fournis qui peut donner une bonne base empirique de détermination de M .

Deuxième partie

Applications

Chapitre 6

Techniques expérimentales

Résumé

Le principe général de l'expérimentation sous vide est décrit à l'aide de l'exemple d'un piston plan rectangulaire bafflé. La partie réactive de l'impédance de rayonnement se traduit par une masse ajoutée et la partie résistive par un amortissement ajouté. Ces deux termes sont proportionnels à la pression statique. Pour un mode donné, la mesure des variations linéaires de la fréquence et de l'amortissement propres avec la pression permet d'obtenir la valeur de cette impédance. Le matériel utilisé à cette fin et le protocole opératoire sont décrits.

6.1 Introduction

6.1.1 Généralités

Le comportement vibroacoustique des structures planes, a fait l'objet de multiples études théoriques et expérimentales. Ces études concernent la réponse des structures mécaniques à une excitation acoustique et le phénomène réciproque : le rayonnement acoustique. Les méthodes d'évaluation quantitative de grandeurs relatives au champ acoustique généré par une structure en vibration sont soit de type prévisionnel soit de type expérimental.

Les méthodes prévisionnelles conduisent à des résultats numériques produits par des calculateurs. Elles comprennent les méthodes par éléments finis et éléments finis de frontière (Dhatt et Touzot, 1981; Ben Mariem, 1984) et les méthodes énergétiques du type SEA¹ (Lyons et Maidanik, 1962; Lyons, 1975) ou Coefficients d'Influence Énergétique (Guyader, Boisson, et Lesueur, 1988).

1. Statistical Energy Analysis

Les méthodes expérimentales sont essentiellement du type intensimétriques, dans le domaine acoustique (Jacobsen, 1980; Pavic, 1977) ou vibratoire. La technique usuelle d'intensimétrie acoustique utilise comme outil principal un doublet microphonique qui permet d'estimer les vitesses acoustiques par différence finie. Dans les structures, l'énergie vibratoire est déduite à partir de mesures vélocimétriques. Le capteur correspondant peut être un accéléromètre piézoélectrique ou un vibromètre laser. Ces techniques nécessitent une discrétisation spatiale à la fois de la structure vibrante et de la surface de contrôle entourant la structure sur laquelle on mesure le champ acoustique.

Une présentation générale de ces méthodes est disponible dans l'ouvrage de C. Lesueur (1988) et des articles de synthèse sur chacun de ces sujets sont disponibles dans *l'Encyclopédia of Acoustics* (Crocker, 1997). Certaines de ces méthodes ont été appliquées pour étudier le rayonnement acoustique des instruments de musique (Weinreich et Arnold, 1980; Lai et Burgess, 1990)

6.1.2 Notre apport expérimental : mesure des vibrations sous vide

La dissipation de l'énergie par divers mécanismes d'origine mécanique ou acoustique se traduit par une décroissance du signal vibratoire lorsque la structure évolue librement. Notre approche expérimentale consiste à extraire des grandeurs caractéristiques du couplage fluide-structure grâce à l'étude de cette décroissance dans l'air et dans des atmosphères raréfiées.

Nous nous plaçons dans l'hypothèse où le comportement mécanique est linéaire et faiblement amorti : structures résonnantes à faible amplitude. Nous utilisons une description modale de ces structures.

Le schéma global des transferts d'énergie liés à la mise en vibration libre d'un système mécanique couplé à un fluide est représenté figure 6.1. Nous montrerons que pour les plaques, les pertes par frottement visqueux peuvent considérées comme négligeables. Nous étendrons par hypothèse ce résultat aux coques que nous avons étudiées (guitare et cloches). Ce mécanisme a cependant une influence dans l'étude des verges encastrées qui dissipent peu par rayonnement acoustique. Nous cherchons d'autre part à minimiser le transfert d'énergie vers les liaisons pour nous rapprocher des conditions de vibration libre.

Toutes les formes de dissipations — mécaniques et acoustiques — contribuent à la décroissance d'un mode propre dans l'air. Dans le vide seules les formes de dissipations mécaniques, ou *pertes internes*, interviennent. La comparaison entre le taux de décroissance mesuré dans l'air et celui mesuré dans le vide est liée à l'énergie dissipée sous forme rayonnement acoustique. Schématiquement, à l'aide de deux mesures vibratoires —une à l'air libre et une à pression statique faible devant la pression atmosphérique—, il est possible d'obtenir des rapports énergétiques tels que le facteur de rayonnement, le facteur de perte par rayonnement

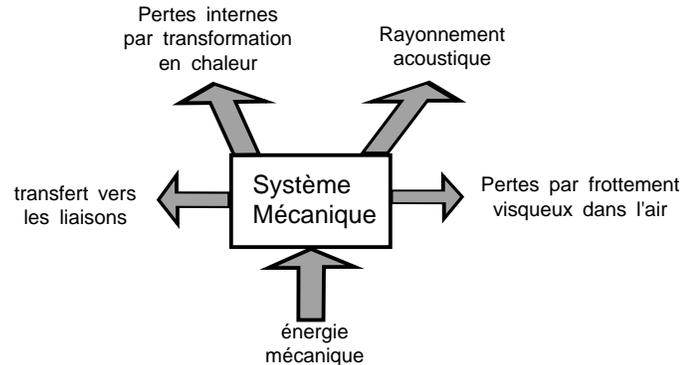


FIG. 6.1: Schéma général des transferts d'énergie pour une structure mise en vibration libre dans un fluide ambiant.

ou le rendement acoustique. Ces grandeurs sont utilisées de manière usuelle pour évaluer l'efficacité de rayonnement de la structure.

Cette méthode expérimentale que nous proposons requiert moins de mesures que la plupart des méthodes intensimétriques : elle ne nécessite ni de maillage de la structure ni de mesures de pressions ou d'intensités acoustiques. Cependant elle ne permet pas d'accéder aux valeurs absolues de puissance, d'intensité ou d'énergie. Les valeurs sont obtenues *pour chacun des modes de vibration*, c'est à dire pour chacune des fréquences modales.

Nous détaillons dans la suite ce principe général, en nous appuyant sur l'exemple mono-mode du piston rectangulaire bafflé, rigide et monté sur ressort et amortisseur. Cet exemple nous permet :

- de préciser les grandeurs acoustiques que nous pouvons déduire de nos mesures,
- de donner des ordres de grandeurs pour les plaques minces,
- de définir le protocole de mesure.

6.2 Principe des mesures vibratoires sous vide

6.2.1 Exemple d'un piston bafflé rigide

Ce cas simple est illustratif de la séparation des contributions de pertes internes et de pertes par rayonnement acoustique dans la décroissance du signal vibratoire. Il permet également de mettre en évidence l'influence de la charge acoustique sur la fréquence propre

d'oscillation. Cet exemple est inspiré d'une présentation de C. Lesueur (1988).

Le système étudié est un piston plan de masse M , de surface S , relié à un ressort de raideur K et de coefficient de frottement fluide λ , tel que représenté sur la figure 6.2. λ est suffisamment faible pour que la vibration libre du piston non couplé au fluide soit oscillante, loin du régime critique (hypothèse de faible amortissement), c'est à dire :

$$\lambda \ll \sqrt{KM} \quad \text{ou encore } Q = \frac{\sqrt{KM}}{\lambda} \gg 1$$

Ce piston est placé dans un baffle plan infini qui assure l'étanchéité acoustique entre les deux milieux placés de part et d'autre. Le baffle est supposé parfaitement rigide ce qui implique la nullité des vitesses acoustiques normales sur toute sa surface. La position du piston, astreint

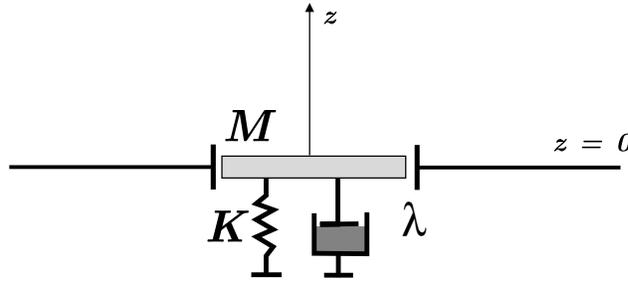


FIG. 6.2: Piston bafflé

à se déplacer le long de l'axe Oz , est repérée par w , avec $w = 0$ à l'équilibre. La pression acoustique p^+ s'exerce au dessus du piston et, par symétrie, la pression acoustique $p^- = -p^+$ s'exerce sur l'autre face et la force de pression acoustique totale vaut

$$F_p = -2 \iint_S p^+ dS$$

En se plaçant dans le cadre de l'acoustique linéaire, la pression pariétale moyenne $-F_p/S$ à la surface du piston et la vitesse \dot{w} du piston sont reliées par l'impédance de rayonnement Z_r :

$$-F_p/S = \frac{1}{S} \iint_S 2p^+ dS = Z_r \dot{w} = (R_r + jX_r) S \dot{w}$$

|| Dans tout le document les impédances acoustiques sont homogènes à un rapport *pression / vitesse* ||

Lorsque la masse est soumise à une force sinusoïdale $F_0 e^{j\omega t}$, l'équation du mouvement qui tient compte de la charge acoustique s'écrit alors sous une forme classique (Morse et Ingard, 1968)

$$(M + M_a) \ddot{w} + (\lambda + \lambda_a) \dot{w} + K w = F_0 e^{j\omega t} \quad (6.1)$$

$M_a = SX_r/\omega$ est une *masse ajoutée* à la masse M de la structure et $\lambda_a = SR_r$ a un effet *d'amortissement ajouté* à l'amortissement structural. La forme de l'équation 6.1 est à l'origine de notre technique de mesure.

Les quantités M_a et λ_a sont *a priori* des fonctions de ω . Nous supposons dans toute notre étude que l'influence du couplage à l'air est faible. La fréquence propre du système couplé est peu différente de celle du système non couplé et l'oscillateur reste largement au-dessus de l'amortissement critique. Cela revient à supposer que la masse ajoutée reste faible devant la masse M et que le système rayonnant peut encore être traité dans l'hypothèse de faible amortissement. Ces deux conditions sont toujours vérifiées dans les cas expérimentaux que nous avons étudiés.

La partie réactive de l'impédance de rayonnement modifie la fréquence propre du système et sa partie résistive modifie le taux d'amortissement.

- ◇ Remarque sur la masse et l'amortissement ajoutés Cette présentation en terme de masse et d'amortissement ajoutés est souvent reprise (Lesueur, 1988; Junger et Feit, 1993). Elle consiste à choisir une écriture particulière de l'impédance de rayonnement sous la forme

$$Z_r = (\lambda_a(\omega) + j\omega M_a(\omega)) / S \quad (6.2)$$

Elle n'est pas unique et il serait possible de faire une analyse en terme de raideur retranchée $-\omega SX_r$. La signification physique en serait moins aisée. Comme pour le piston rectangulaire, dont l'étude théorique suit, le choix de l'écriture 6.2 correspond souvent à une réalité en *basse fréquence*. M_a est alors asymptotiquement indépendant de la fréquence. Ce choix d'écriture est justifié même lorsque $M_a(\omega)$ n'est pas constante en raison du signe toujours positif de la réactance acoustique.

- ◇ Piston rectangulaire Cette étude met en évidence les comportements caractéristiques de l'impédance de rayonnement en fonction de la fréquence. Elle fournit également des ordres de grandeur utiles (*cf.* paragraphe 6.2.3).

Le cas du piston rectangulaire est traité analytiquement dans Morse (1968) et celui du piston circulaire par Junger et Feit (1993). Ils fournissent des résultats comparables en tendance. Dans le cas d'un piston carré de côté a , les expressions de la résistance et de la réactance de rayonnement sont donnés en termes de fonction de Struve et de Bessel :

$$\begin{cases} R_r = \rho_0 c r_r(ka) = \rho_0 c \left(1 - 4 \frac{1 - J_0(ka)}{(ka)^2}\right) \\ X_r = \rho_0 c x_r(ka) = \rho_0 c \frac{8}{\pi ka} \left(1 - \frac{\pi}{2ka} M_0(ka)\right) \end{cases} \quad (6.3)$$

$k = \omega/c$ est le nombre d'onde dans l'air et $M_0(ka)$ est la fonction de Struve d'ordre 0,

$$M_0(z) = 2/\pi \int_0^{\pi/2} \sin(z \cos \theta) d\theta$$

Le terme résistif normalisé $r_r(ka)$, le terme réactif normalisé $x_r(ka)$ et le terme de masse ajoutée sans dimension $x_r(ka)/(ka)$ sont représentés sur la figure 6.3. $x_r(ka)/(ka)$ est la masse ajoutée par unité de surface, exprimée en unité de dimension caractéristique du piston.

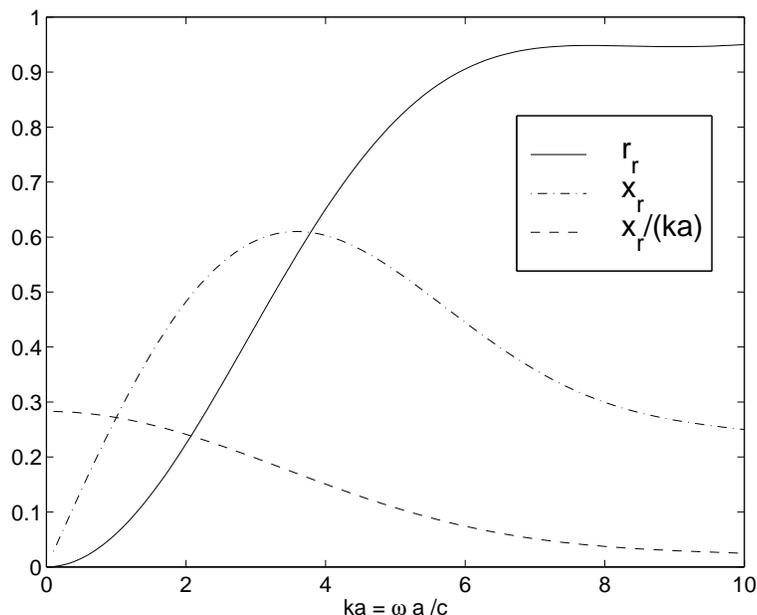


FIG. 6.3: Résistance, réactance et masse ajoutée de rayonnement pour un piston rectangulaire bafflé. Les valeurs sont normalisées à $\rho_0 c$. La masse ajoutée est ramenée à l'unité de surface.

L'interprétation de ce graphique nous donne :

- Le comportement basse fréquence (faibles ka) du piston est bien celui d'une masse ajoutée (X_r/ω constant) correspondant à une colonne de hauteur $\approx 0,3a$ d'air. La partie résistive est faible, le piston est peu efficace acoustiquement. Dans ce régime, l'air réagit localement comme un fluide incompressible : la longueur d'onde acoustique dans l'air est grande comparée aux dimensions caractéristiques du piston. Le terme de masse ajoutée représente l'inertie du fluide alentour de la plaque.
- En haute fréquence ($ka \gg 1$), la partie active l'emporte sur la partie réactive qui tend vers 0. Le transfert d'énergie sous forme rayonnée est efficace ($R_r/(\rho_0 c)$ tend vers 1). La partie réactive est en $1/\omega$, elle correspond à une "raideur retranchée" équivalente $-(4/\pi)\rho_0 a c^2$.

6.2.2 Fréquence et facteur d'amortissement propres sous vide et dans l'air

Dans le cas le plus général où X_r et R_r sont des fonctions quelconques de ω . Nous obtenons la fréquence propre complexe du système dissipatif *in vacuo* et celle du système dissipatif rayonnant par un calcul de perturbation à l'ordre 1. La fréquence propre du système non dissipatif et non rayonnant est ω_0 . La variation de cette fréquence est notée $\delta\omega \in \mathbb{C}$ avec l'hypothèse suivante :

$$|\delta\omega| \ll \omega_0 \quad (6.4)$$

La fréquence propre du système dissipatif couplé au fluide ou non reste proche de la fréquence propre *in vacuo* non dissipatif. D'autre part, le système couplé au fluide ou non est faiblement amorti ($\text{Im}(\delta\omega) \ll \omega_0$).

◇ Valeurs *in vacuo* La fréquence propre du système *in vacuo* et non dissipatif est solution de l'équation :

$$H(\omega) = -M\omega^2 + K = 0 \quad (6.5)$$

dont la solution est $\omega_0 = \sqrt{K/M}$. L'introduction du terme de frottement dans 6.5 conduit à

$$H(\omega) = -j\lambda\omega$$

Par un calcul de perturbation au premier ordre en $\delta\omega$ il vient alors :

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \omega} \right|_{\omega_0} \delta\omega = -2M\omega_0\delta\omega = -j\omega_0\lambda$$

soit finalement

$$\delta\omega = j \frac{\lambda}{2M} = j\alpha_0 \quad (6.6)$$

On retrouve ici la valeur du facteur d'amortissement $\alpha_0 = \lambda/(2M)$ de l'oscillateur mécanique à un degré de liberté.

◇ Valeurs pour le piston couplé à l'air L'équation du mouvement du piston couplé à l'air tient compte de l'impédance de rayonnement sous la forme :

$$H(\omega) = -j\lambda\omega - j\omega S Z_r(\omega) \quad (6.7)$$

Le calcul de perturbation donne alors :

$$\delta\omega = j \frac{\lambda}{2M} + j \frac{S R_r(\omega_0)}{2M} - \frac{S X_r(\omega_0)}{2M}$$

Ce qui amène finalement pour les valeurs de fréquence propre ω'_0 et de facteur d'amortissement α'_0 du système couplé à l'air :

$$\begin{cases} \alpha'_0 = \alpha_0 + \frac{SR_r(\omega_0)}{2M} \\ \omega'_0 = \omega_0 - \frac{SX_r(\omega_0)}{2M} \end{cases} \quad (6.8)$$

Ces expressions montrent que l'effet du rayonnement se traduit par une *augmentation* de l'amortissement propre *et* par une *diminution* de la fréquence propre.

6.2.3 Dépendance en fonction de la pression statique

Dans le cadre de l'acoustique linéaire, le calcul du rayonnement dans l'air se ramène à celui du champ de pression généré par une distribution continue de sources acoustiques. La pression acoustique générée par chacune de ces sources est proportionnelle à l'impédance caractéristique $\rho_0 c$ du milieu fluide où ρ_0 désigne la densité et c la vitesse des ondes acoustiques. Pour un gaz parfait, ρ_0 est proportionnelle à la pression statique P_0 et

$$c = \sqrt{\gamma \mathcal{R} T / \mathcal{M}}$$

\mathcal{R} constante des gaz parfait

T température absolue

\mathcal{M} Masse molaire du fluide

$\gamma = c_p/c_v$ rapport des chaleurs massiques à pression constante et à volume constant du fluide

Cette valeur de c est obtenue en supposant des transformations adiabatiques du fluide et ne dépend, parmi les variables d'état, que de la température. Si on considère l'air comme un gaz parfait, nous en déduisons que l'impédance de rayonnement est proportionnelle à la pression statique. Les expressions 6.8 peuvent alors se mettre sous la forme :

$$\begin{cases} \alpha'_0 = \alpha_0 + \beta_\alpha P_0 \\ \omega'_0 = \omega_0 - \beta_\omega P_0 \end{cases} \quad (6.9)$$

La fréquence et le facteur d'amortissement sont des fonctions affines de la pression statique. Les coefficients directeurs des droites sont donnés par

$$\begin{cases} \beta_\alpha = \gamma \frac{a^2 r_r(\omega_0)}{2M c} \\ \beta_\omega = \gamma \frac{a^2 x_r(\omega_0)}{2M c} \end{cases} \quad (6.10)$$

◇ Ordres de grandeur Nous appliquons ici ces résultats au cas d'un piston plan de côté 50 cm. Les valeurs de K , M et λ sont choisies de manière à rendre le système masse-ressort-amortisseur équivalent au mode (1,1) d'une plaque en acier de mêmes dimensions et d'épaisseur $h = 4$ mm. Ces valeurs sont :

- La raideur équivalente : $K = 1.9 \cdot 10^6$ N/m
- La masse $M = 7.8$ kg
- Le coefficient de frottement $\lambda = 3.1$ Ns/m

Les valeurs caractéristiques de la vibration *in vacuo* sont alors données par $\omega_0/(2\pi) = 78.19$ Hz et $1/\alpha_0 = 20.4$ s.

La figure 6.4 montre l'évolution théorique de la fréquence et du facteur d'amortissement en fonction de la pression statique, depuis le vide jusqu'à la pression atmosphérique (1000 mbar). Ces figures montrent que la mesure de fréquence doit être d'une précision inférieure au pour mille. En revanche, dans ce cas, la contribution acoustique au facteur d'amortissement dans l'air est supérieure à la contribution des pertes internes.

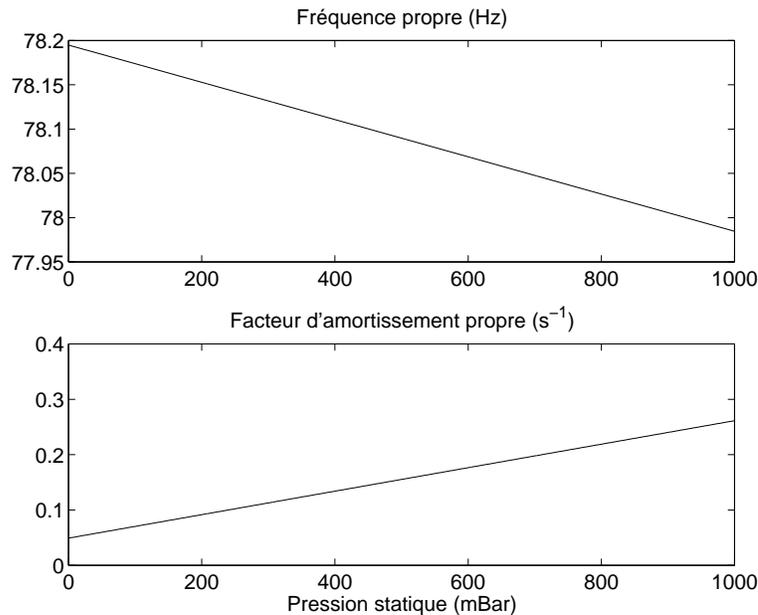


FIG. 6.4: Fréquence et facteur d'amortissement propres du mode (1,1) pour une plaque en acier ($0.5 \times 0.5 \times 0.004$ m) assimilé à un piston plan bafflé.

Nous pouvons vérifier sur ces graphes la validité des hypothèses à *posteriori*. La variation de fréquence est bien telle que :

$$\delta f_0 (\approx .2\text{Hz}) \ll f_0 (\approx 78\text{Hz})$$

et la vibration est faiblement amorti aussi bien dans l'air que dans le vide :

$$\begin{cases} \alpha_0^{\text{vide}} (\approx .05\text{s}^{-1}) \ll \omega_0 (\approx 490\text{rd.s}^{-1}) \\ \alpha_0^{\text{air}} (\approx .27\text{s}^{-1}) \ll \omega_0 \end{cases}$$

La validité de ces hypothèses autorise le développement à l'ordre 1 mené précédemment, qui conduit à la variation linéaire en fonction de la pression statique montrée sur la figure 6.4, lorsque le fluide est considéré comme parfait.

6.2.4 Principe général de la mesure

Les résultats présentés figure 6.4 nous ont conduits à envisager la technique de mesure dont les étapes suivent :

1. Mesurage du signal vibratoire à des pressions statiques P_0 décroissantes, puis, pour chacun des modes propres de vibration :
2. Estimation des fréquences $f(P_0)$ et des facteurs d'amortissements $\alpha(P_0)$ à l'aide des méthodes présentées dans la partie I,
3. Estimation de la pente des droites $f(P_0)$ et $\alpha(P_0)$ et extrapolation des valeurs à pression nulle,
4. Calcul des valeurs résistive et réactive de l'impédance de rayonnement. Les valeurs du facteur de rayonnement, facteur de perte par rayonnement et rendement acoustique s'en déduisent. La valeur $\alpha(P_0 = 0)$ donne accès à l'amortissement structural.

◇ Ordre de grandeur de la masse ajoutée et de l'amortissement ajoutés La mesure de la fréquence propre sous vide donne accès à la valeur du rapport M_a/M . Pour une grande majorité des cas étudiés au cours du travail, et en particulier pour les plaques métalliques, ce rapport est très inférieur au %.

L'amortissement ajouté peut prendre des valeurs très différentes : quelques % pour des modes vibratoires peu rayonnants et plusieurs dizaines de fois l'amortissement structural pour des modes de fréquence élevé dans des plaques métalliques. Pour les plaques métalliques la condition de faible amortissement est toujours vérifiée largement, tant sous vide que dans l'air (les facteurs de qualité sont souvent de l'ordre de plusieurs milliers).

◇ Remarque 1 sur la généralité de cette technique. Cas non bafflé. Notre configuration expérimentale correspond davantage au piston *non bafflé*. Les vitesses acoustiques ne sont plus

nulles sur le plan $z = 0$ en dehors de la surface vibrante.

En basse fréquence, pour des longueurs d'onde dans l'air grandes devant les dimensions du système, le champ de pression acoustique généré est de nature dipolaire alors qu'il était monopolaire dans le cas bafflé. La valeur de l'impédance de rayonnement est différente : les résultats obtenus par Shenderov (1988) et reproduits par Fahy (1997) montrent par exemple que la partie réelle de l'impédance de rayonnement décroît de -12 dB/Octave en basse fréquence contre -6 dB pour le piston bafflé. L'absence de baffle conduit à une modification des effets de masse et d'amortissement ajoutés mais n'intervient pas sur l'application de la technique sous vide.

En haute fréquence, la présence du baffle influe peu sur le rayonnement car les longueurs d'onde dans l'air sont plus faibles que les dimensions du système.

Les systèmes que nous étudions — plaques métalliques, possèdent des dimensions comparables à la longueur d'onde pour les premiers modes de vibration. Le concept d'impédance de rayonnement peut être généralisé en utilisant une description modale du comportement vibratoire de la structure. La technique de mise sous vide est alors applicable pour peu que le rayonnement acoustique n'entraîne pas de couplage entre les modes. Chacun d'eux peut alors être considéré comme analogue à un système à 1 degré de liberté tel que le piston décrit plus haut.

- ◇ Remarque 2. Vibration en espace clôt La vibration est mesurée à différentes pressions statiques à l'intérieur d'une enceinte étanche. La structure rayonne dans un espace fini. De plus, nous ne pouvons disposer de l'absorbant sur les parois pour ne pas isoler thermiquement le milieu fluide à l'intérieur de l'enceinte. Les valeurs d'impédance acoustique sont toujours proportionnelles à $\rho_0 c$ mais elles sont différentes de la valeur en champ libre. Plutôt que de modéliser les effets de la cavité dont la forme est complexe de la cavité (*cf.* paragraphe 6.3), nous avons préféré essayer de les évaluer en comparant des résultats expérimentaux obtenus dans la cuve et en chambre anéchoïque. Les résultats, qui sont donnés dans le paragraphe concernant les plaques, montrent que, de manière inattendue, les valeurs mesurées dans la chambre à vide diffèrent peu de ceux obtenus en chambre sourde. Par exemple, nos mesures de facteur de rayonnement pour la plaque d'aluminium sont comparables (avec une précision de l'ordre du dB) à ceux trouvés par des expérimentateurs de l'INRS à Nancy² par des mesures intensimétriques en chambre sourde.

- ◇ Application à la guitare

Le cas de la guitare est différent de celui des plaques et des cloches en vibrations libres. La guitare fonctionne grâce au couplage entre la corde et le corps de l'instrument. La corde ne

². Institut National de Recherche et de Sécurité

rayonne que très peu d'énergie acoustique par sa propre vibration. Elle se comporte comme un réservoir d'énergie mécanique et c'est le corps de l'instrument qui produit l'énergie acoustique. Le corps est donc mis en vibration *forcée* par la corde. Les fréquences et amortissements ne suivent en général plus la loi de comportement en fonction de la pression statique indiquée sur la figure 6.4. Ces questions seront discutées dans le chapitre consacré à la guitare.

6.3 Montage et protocole expérimentaux

Nous présentons successivement les éléments du montage et les étapes de l'expérimentation. Cette présentation est faite pour l'étude des plaques minces. Les particularités propres à l'expérimentation sur la guitare et sur les cloches sont données dans les chapitres correspondant.

6.3.1 Éléments du montage

- ◇ Schéma général Le montage et les différents moyens de mesure sont présentés figure 6.5.
- ◇ Cuve à vide, Pompe et manomètre

Cuve à vide. Elle a l'allure d'un tube en acier de forme grossièrement cylindrique. Son poids est de l'ordre de quelques centaines de kilogrammes. Les parois intérieures sont lisses. Des ouvertures sont pratiquées des deux côtés pour permettre le passage des voies aériennes et des câbles électriques. Ses dimensions et sa forme précise sont données figure 6.6. L'étanchéité est assurée par :

- un joint de caoutchouc sur l'ouverture principale,
- des bouchons de caoutchouc traversés par les connections électriques.

Le volume total de la cuve vaut 0.538 m^3 . Le mode fondamental de vibration dans la longueur (1.9 m) possède une fréquence de l'ordre de 90 Hz et le mode fondamental dans la largeur de la niche se situe vers 310 Hz.

Les structures étudiées sont placées dans la première partie de la cuve, en forme de niche. La partie antérieure cylindrique permet d'accueillir les structures de dimensions plus importantes. C'est le cas pour les guitare dont la longueur totale est supérieure à 1 m. Les expérimentations à pression ambiante sont réalisées porte fermée par soucis de continuité des conditions expérimentales à toutes les pressions.

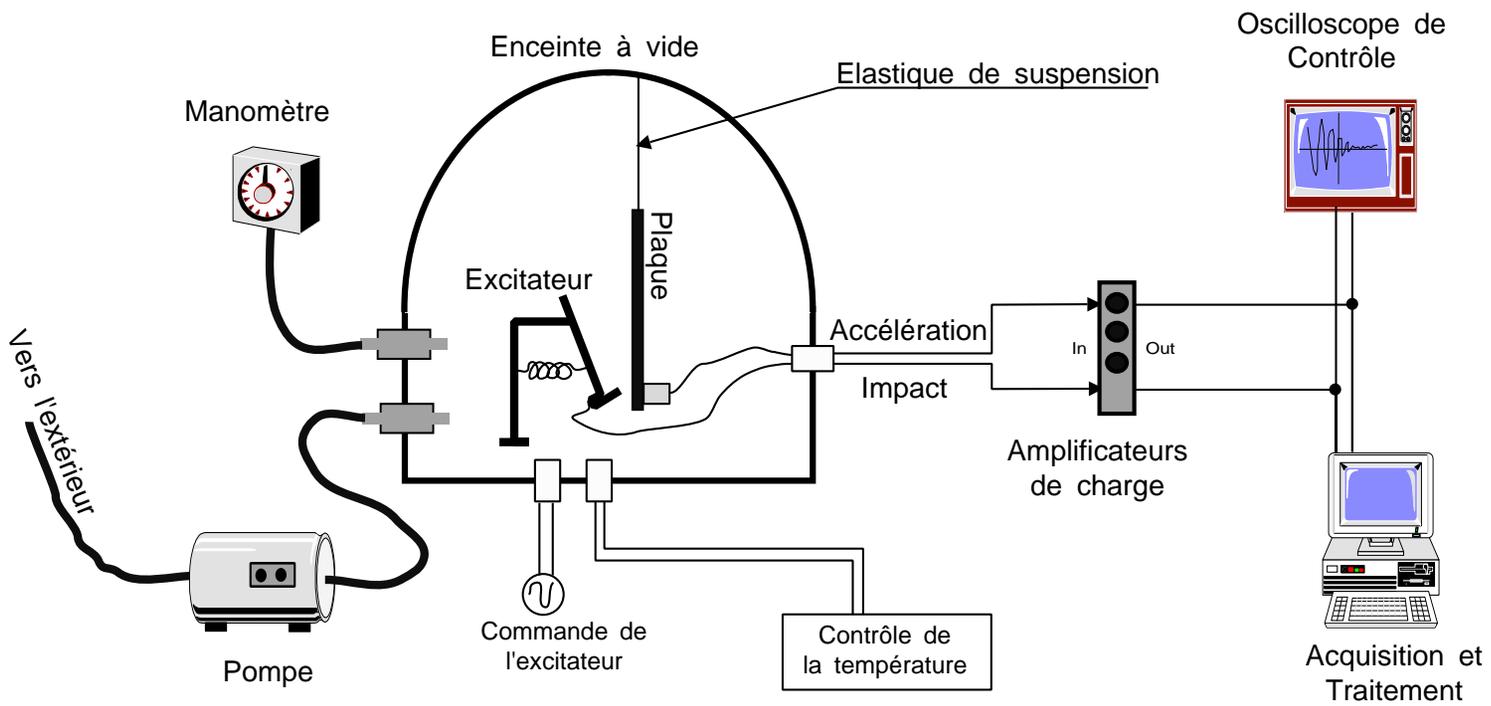


FIG. 6.5: Schéma général du montage

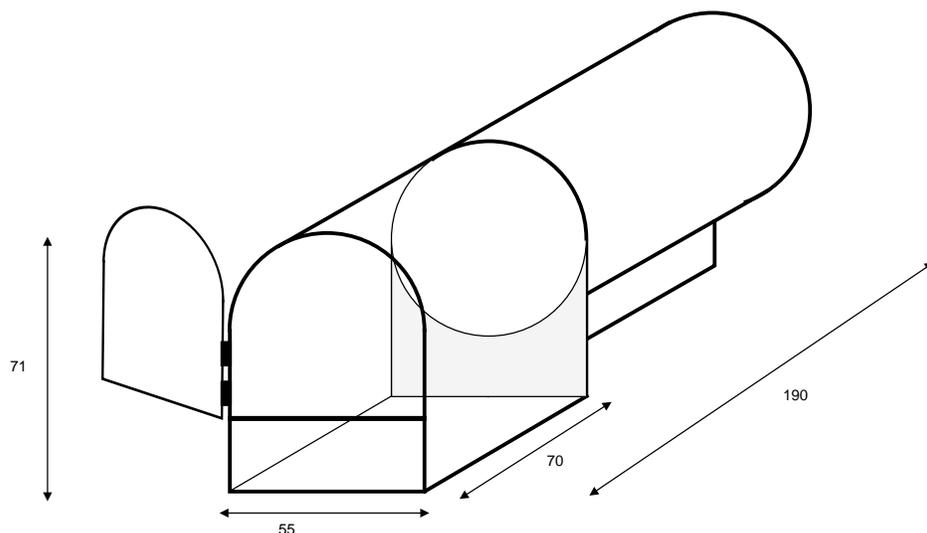


FIG. 6.6: Dimensions (cm) et forme de la cuve à vide. Représentation en "fil de fer".

Pompe et temps de descente à vide. La pompe utilisée est une pompe à palettes EDWARDS E1M5 dont les caractéristiques principales sont :

Débit volumétrique	5.6 m ³ /h
Vide limite	0.03 mBar

Si on suppose que la pompe déplace un volume constant par unité de temps, quelque soit la pression dans l'enceinte, alors la descente sous vide est du type logarithmique. Il faut le même temps pour passer de 1000 mBars à 500 mBars que celui pour passer de 500 à 250 mBars. Cette propriété reste vraie jusqu'à des pressions de quelques mBars. Le temps pour obtenir un vide P_f à partir de 1000 mBar est donné par :

$$\Delta t_{(mn)} = 39 - 13 \log_{10} P_f (mBar)$$

Manomètre. C'est un appareil de Marque BLONDELLE. L'indication de pression est fournie par une aiguille, en mBar par pas de 10. Ses caractéristiques sont :

Classe 1
O Absolu
Capteur à membrane
Échelle : de 1050 à 0 mbar

Autour de la pression atmosphérique, la membrane n'est plus sous tension et les frottements mécaniques introduisent un défaut d'ajustement de l'aiguille. Une vis de réglage permet une calibration de l'appareil avant chaque série de mesures.

- ◇ Contrôle de température L'influence de la température sur des résultats de mesures acoustiques est de l'ordre du %. Les impédances acoustiques sont proportionnelles à $\rho_0 c$, elles varient donc comme $\sqrt{T_0}$ où T_0 désigne la température *en Kelvin*. Une variation de 6 degrés lorsque $T_0 \approx 300$ K apporte une correction de 1%. Cet ordre de grandeur est non négligeable devant les variations de fréquence et d'amortissement que nous mesurons. Un fil thermocouple est introduit dans l'enceinte. Il permet la mesure de la température à l'intérieur au dixième de degré et avec un temps de réponse de l'ordre de la seconde. Cette mesure permet de vérifier que la descente en pression peut être considérée comme isotherme avec une très bonne approximation. En effet la masse et la bonne conductivité thermique de la cuve lui font jouer le rôle d'un thermostat. Les variations de température sont liées à la vitesse de dépressurisation.

Nous effectuons des mesures en descendant en pression par pas de 100 mBars. A chaque pas, la baisse de température n'excède pas quelques degrés Celsius. La température revient à l'ambiante en quelques minutes. Cette relaxation traduit le retour à l'équilibre thermodynamique dans l'enceinte. Elle doit être respectée pour ne pas fausser les résultats de mesure.

- ◇ Suspensions Nous mesurons les grandeurs acoustiques par différence entre les valeurs modales mesurées dans l'air et sous vide. Cette technique est valable quelque soit le type de conditions aux limites auxquelles sont soumises les plaques étudiées. Nous choisissons cependant de nous rapprocher le plus possible des conditions aux limites libre-libre. Pour deux raisons :

- Toute liaison entre la plaque et un autre élément mécanique occasionne des phénomènes de couplage. Ceux-ci se traduisent par une dissipation supplémentaire. Si l'amortissement ainsi introduit est trop important, les phénomènes acoustiques peuvent être masqués (facteur de perte par rayonnement faible devant les autres contributions). Pour optimiser la précision de mesure sur les grandeurs acoustiques, il faut minimiser ces couplages dissipatifs.
- La minimisation des liaisons externes permet l'étude de l'angle de perte interne. Notre objectif ne comprend pas d'étudier ces mécanismes de perte mais il est toutefois intéressant d'en obtenir un ordre de grandeur.

La suspension utilisée pour nos premières expériences sur les plaques (plaque en acier) était un simple fil de nylon suffisamment solide. Ce type de suspension présente l'inconvénient de devenir très raide sous l'effort de traction imposé par le poids de la plaque (ici 5.4 kg). Le fil prend alors des propriétés similaires à celle des poutres et ses modes de flexion se couplent aux modes de plaque ne présentant pas de noeud au point de suspension. Pour palier au mieux ces difficultés nous réduisons la longueur du fil pour rejeter les modes plus haut en fréquence. Il serait également possible d'effectuer une mesure de ces modes par pincement du fil et d'éliminer des mesures les modes de plaques dont les fréquences sont proches des modes

du fil.

Par la suite, pour minimiser le couplage relatif à la suspension de plaque, nous avons choisi des matériaux souples. Nous recherchons une liaison dont l'impédance mécanique soit le plus faible possible devant celle de la plaque. Il est nécessaire de trouver un compromis entre la solidité et la souplesse. Notre choix s'est porté sur des caoutchoucs très résistants, du type de ceux utilisés pour maintenir les toiles de tentes.

◇ **Capteurs de vibration** Nous disposons de deux types d'accéléromètre.

- un accéléromètre modèle Brüel & Kjaer 4374. Son poids est de 0.65 g. Son diamètre est de 5 mm pour une hauteur de 6.7 mm. Sa fréquence de résonance est à 85 kHz et sa réponse en fréquence est plate (ondulation $\ll 1$ dB) jusqu'à 20 kHz. Le conditionnement du signal est assuré par un amplificateur de charge modèle B&K 2635.
- un accéléromètre Knowles BU-1771 équipé d'un préamplificateur intégré. Son poids est de 0.3 g. C'est un parallélogramme de 8 x 5.6 x 4.1 mm. Sa fréquence de résonance avoisine les 10kHz, sa réponse en fréquence est plate jusqu'à 3kHz. Le conditionnement interne assure une sensibilité de -45 dB volts par g ($g = 9.81\text{ms}^{-2}$) dans la bande passante. Il est complété par un amplificateur de gain variable.

La présence des accéléromètres collés sur la structure se traduit par une masse ajoutée et une raideur ajoutée par le câble. Nous avons choisi des accéléromètres de faible poids et la raideur est minimisée par l'emploi de câbles fin et légers.

◇ **Excitateur** Il s'agit d'un marteau d'analyse modale. C'est un marteau d'impact modèle Dytran 5800SL. Il est accompagné d'un amplificateur de conditionnement Dytran 4102. La sensibilité totale vaut 21.51 mV/N. Il est intéressant de disposer d'un tel marteau pour pouvoir contrôler le rebond (réglage de l'échappement). L'allure d'un choc typique pour une plaque en aluminium est décrit 6.7. Le spectre correspondant à cet impact est donné figure 6.8

Placement des capteurs et lieu d'impact. Nous cherchons à faire porter la mesure sur le plus de modes possibles : il faut capter et exciter en dehors des noeuds. Pour les plaques minces dont les conditions aux limites sont proches du Libre-Libre le coin de la plaque est en dehors des noeuds. Le capteur et l'excitateur sont placés en vis à vis.

◇ **Chaîne d'acquisition**

Les signaux sont échantillonnés à la fréquence de 44.1 kHz ou de 48 kHz, codés linéairement

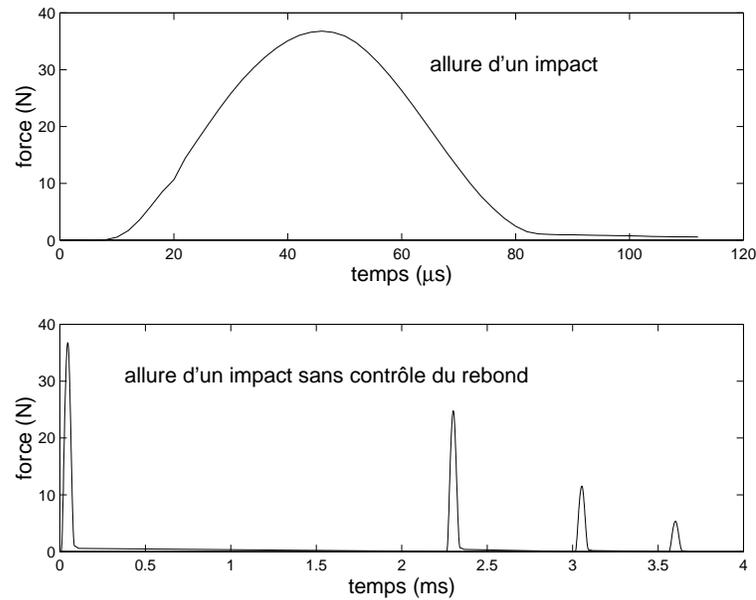


FIG. 6.7: Allure d'un impact de marteau avec et sans rebonds.

et quantifiés sur 16 bits. Les convertisseurs utilisés sont ceux des DAT³ dont nous disposons : un modèle HHB Portadat PDR100 ou Casio DA7. La récupération des données numériques s'effectue à l'aide d'une carte spécifique DIGITAL ONLY de Digital Audio (liaison SPDIF) ou plus récemment par une Carte Audiomedia avec l'assistance du logiciel Pro Tools.

6.3.2 Déroulement de l'expérimentation

Les étapes de l'expérimentation sont les suivantes :

1. Calibration du manomètre.
2. Tests de vibration. L'échappement du marteau est réglé pour éviter les rebonds. L'allure des décroissances est contrôlée.
3. Mesures en chambre à vide à partir de la pression atmosphérique. La descente en pression s'effectue par pas de 100 mbar. La stabilisation de la température est contrôlée.
4. Traitement des données

3. Digital Audio Tape

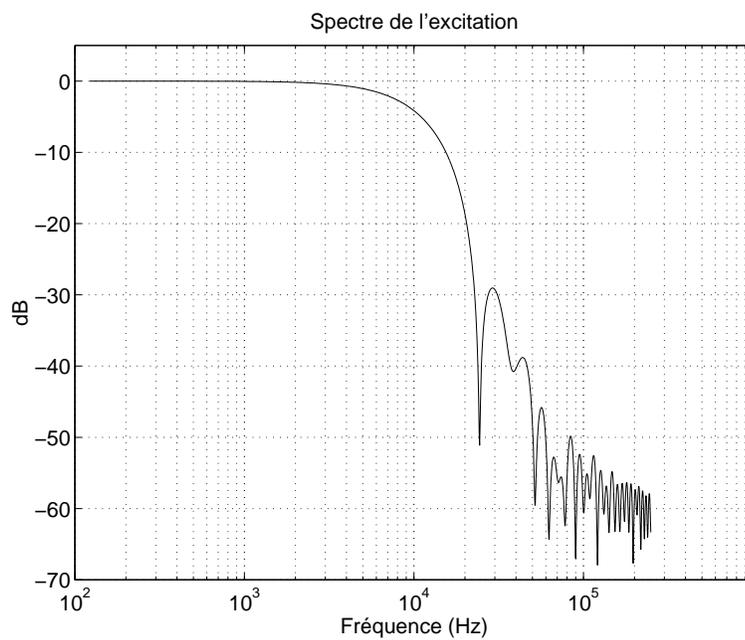


FIG. 6.8: Spectre du signal de force d'excitation. La fréquence de coupure à -3dB vaut approximativement 8500 Hz. Il chute à -20dB pour 20 kHz. Pour un choc moyen, le 0dB correspond à 70 N.

Chapitre 7

Plaques minces

Résumé

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux relatifs à l'étude de plaques minces métalliques (acier et aluminium). Les fréquences et taux d'amortissement des modes propres de vibration sont estimés à partir du signal de vibration libre. Cette estimation est effectuée à des pressions statiques décroissantes et extrapolée à $P_0 = 0$. La variation linéaire de la masse acoustique ajoutée et de l'amortissement dû au rayonnement est vérifiée. Pour un mode donné, la pente des deux droites de régression correspondantes est directement reliée aux parties imaginaire et réelle de l'impédance de rayonnement. Le facteur de rayonnement, le facteur de perte par rayonnement et le rendement acoustique s'en déduisent. Pour valider la méthode les résultats sont comparés

- à ceux d'autres expérimentateurs qui ont travaillé sur la même plaque en aluminium (Commission SFA ^a de Validation des Pro-giciels).
- à des valeurs théoriques (fréquence de coïncidence et facteur de rayonnement pour une plaque infinie)

^a Société Française d'Acoustique

7.1 Objectif de l'étude des plaques minces

Nous avons choisi ce sujet d'étude afin de jauger notre méthode expérimentale. D'une part, nous pouvons comparer nos observations avec des résultats théoriques bien établis et d'autre part nous avons travaillé sur le cas expérimental d'une plaque en aluminium, étudié

de manière indépendante dans deux autres laboratoires (l'INRS¹ à Nancy et l'ONERA²).

Les plaques étudiées sont métalliques —acier et aluminium. Ces matériaux peuvent être considérés comme isotropes et leur paramètres mécaniques (module d'Young, coefficient de Poisson et angle de perte) sont disponibles dans la littérature avec une bonne précision. Nous pouvons ainsi mettre en parallèle nos résultats avec les prédictions issues de modèles simples. Ces prédictions concernent essentiellement deux grandeurs caractéristiques du couplage fluide-structure : la fréquence de coïncidence et le facteur de rayonnement.

7.2 Interaction entre une plaque mince homogène et un fluide léger

Nous allons ici traiter plus en détail une plaque mince en flexion pure couplée avec un fluide léger. Nous supposons que la plaque est rectangulaire, bafflée par un écran rigide infini (*cf.* figure 7.1). Ces conditions ne correspondent pas à notre expérimentation (absence de baffle et espace clôt) mais elles présentent l'intérêt rendre le problème accessible au calcul analytique. Le principal apport de ce calcul est l'introduction de *l'impédance intermodale de rayonnement* qui caractérise l'action du champ acoustique généré par l'ensemble des modes de vibration sur un mode particulier.

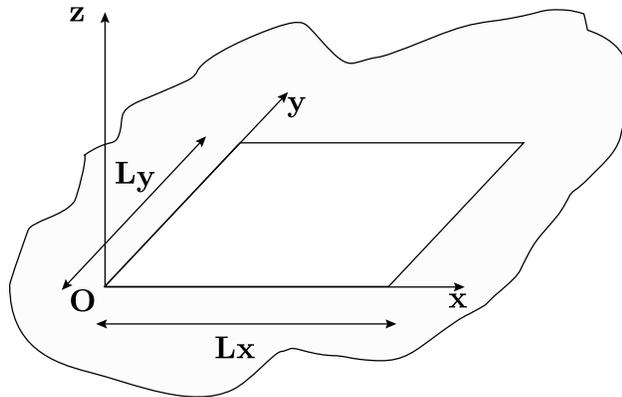


FIG. 7.1: Plaque mince bafflée

Le point de départ de ce paragraphe est l'équation du mouvement classique pour le comportement des plaques minces en flexion pure. En suivant des approches développées par C.

1. Institut National de Recherche et de Sécurité

2. Office National d'Études et de Recherches Aéronautiques

Lesueur (1988), M.C. Junger et D. Feit (1993) ou encore P.M. Morse et K.U. Ingard (1968), nous introduisons l'effet du champ acoustique rayonné. La technique de calcul consiste à décomposer le champ acoustique sur la base des modes propres *in vacuo*; la présence du baffle plan permet de résoudre le problème à l'aide de la transformée de Fourier spatiale du déplacement.

7.2.1 Vibration *in vacuo*

L'équation du mouvement associée à la vibration libre des plaques minces en flexion pure *in vacuo* s'écrit :

$$(D\nabla^4 + \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2})w = 0 \quad (7.1)$$

D est la rigidité de flexion. Son expression fait intervenir le module d'Young E , le coefficient de Poisson ν et h l'épaisseur de la plaque, supposée faible devant ses autres dimensions :

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \nu^2)}$$

ρ_s est la masse surfacique du matériau qui vaut $\rho_m h$ où ρ_m est la masse volumique.

$w = w(x, y, t)$ déplacement suivant Oz, la plaque étant considérée dans le plan (x, y) , de dimensions respectivement L_x et L_y .

En supposant une dépendance temporelle en $e^{j\omega t}$ l'équation 7.1 devient un problème aux valeurs propres. Les solutions de ce problème, associé aux conditions aux limites "plaque appuyée sur son contour" et avec le choix d'axes de la figure 7.1 sont des fonctions propres du type:

$$w_{mn}(x, y) = \sin k_m x \sin k_n y$$

où

$$k_m = \frac{m\pi}{L_x} \quad \text{et} \quad k_n = \frac{n\pi}{L_y}$$

Chaque fonction propre décrit une déformation particulière de la plaque ou *mode propre* correspondant à la *pulsation propre* :

$$\omega_{mn} = \sqrt{\frac{D}{\rho_s}}(k_m^2 + k_n^2)$$

ω_{mn} est la valeur propre associée.

7.2.2 Calcul du rayonnement acoustique

Nous cherchons ici l'expression de la pression acoustique p rayonnée au dessus du système plaque+baffle (pour les $z > 0$). La pression pour les $z < 0$ s'en déduit par symétrie et par suite la charge acoustique de rayonnement en appliquant un facteur 2. Dans tout ce qui suit on suppose une excitation sinusoïdale forcée en $e^{j\omega t}$.

Le problème acoustique à résoudre contient l'équation de propagation des ondes acoustiques, l'équation de continuité des vitesses à la surface de la plaque, les conditions de baffle plan en dehors de la plaque et les conditions de Sommerfeld à l'infini. Elles sont détaillées dans ce qui suit :

$$(\Delta + k^2)p = 0 \quad ; z > 0 \quad \text{Équation de Helmholtz avec } k = \omega/c$$

$$-\frac{\partial p}{\partial z} = j\omega\rho_0\dot{w} \quad ; z = 0 \quad \text{Équation d'Euler à la surface de la plaque, supposée d'impédance très grande devant l'impédance caractéristique du fluide}$$

$$\dot{w} = 0 \quad \text{en } z = 0 \text{ et en dehors de la plaque}$$

Conditions de Sommerfeld

La transformée de Fourier spatiale bidimensionnelle de la pression est définie comme³ :

$$\tilde{p}(\gamma_x, \gamma_y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} p(x, y, z) e^{-j(\gamma_x x + \gamma_y y)} dx dy$$

L'application de cette transformation à l'équation de Helmholtz et à l'équation d'Euler fournit le système suivant :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + k^2 - \gamma_x^2 - \gamma_y^2\right)\tilde{p} = 0 \quad ; z > 0 \quad (7.2)$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\tilde{p} = \omega^2\rho_0\tilde{w} \quad ; z = 0 \quad (7.3)$$

La solution de 7.2 qui satisfait aux conditions de Sommerfeld est de la forme

$$\tilde{p} = \tilde{p}_0 e^{-j\beta z}$$

où β est fonction de γ_x et γ_y

$$\beta = (k^2 - \gamma_x^2 - \gamma_y^2)^{\frac{1}{2}}$$

La valeur de \tilde{p}_0 s'obtient en reportant \tilde{p} dans l'équation 7.3, ce qui amène :

$$\tilde{p}_0 = j\omega\rho_0c \frac{k}{\beta} \tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y, 0)$$

3. Avec cette définition, les ondes de flexion progressives en x se trouvent dans le demi plan gauche de l'espace des γ .

Par transformée de Fourier inverse \mathcal{F}^{-1} il vient alors

$$p_0(x, y) = j\omega \rho_0 c \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{k}{\beta} \tilde{w}\right) \quad (7.4)$$

L'étape suivante consiste à décomposer la pression acoustique sur la base des modes propres non amortis, *in vacuo*

$$p_0(x, y) = \sum_{m,n} A_{mn} w_{mn} \quad (7.5)$$

où les $A_{mn} = A_{mn}(\omega)$ sont fonction de la fréquence. Les coefficients A_{mn} s'obtiennent par produit scalaire de l'égalité précédente avec w_{pq} . En tenant compte de l'orthogonalité des modes propres il vient, après multiplication des deux membres par w_{pq} et intégration sur la surface S de la plaque

$$A_{pq} = \frac{\langle p_0, w_{pq} \rangle}{\langle w_{pq}, w_{pq} \rangle} = \frac{1}{N_{pq}} \iint_S p_0(x, y) w_{pq} dx dy \quad (7.6)$$

N_{pq} est la norme du mode w_{pq} et vaut $\frac{L_x L_y}{4}$ pour la plaque appuyée partout. Pour terminer le calcul des A_{pq} , il faut

- incorporer dans 7.6 l'expression de p_0 trouvée au 7.4
- décomposer le déplacement transverse sur la base des modes propres :

$$w(x, y) = \sum_{r,s} W_{rs} w_{rs}(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \tilde{w}(\gamma_x, \gamma_y) = \sum_{r,s} W_{rs} \tilde{w}_{rs}(\gamma_x, \gamma_y) \quad (7.7)$$

- remarquer que l'intégrale sur S peut être étendue sur tout le plan $z = 0$ puisque $w = 0$ en dehors de la plaque.

Il vient alors :

$$A_{pq} = \frac{j\omega \rho_0 c k}{4\pi^2 N_{pq}} \iint_S \iint_{-\infty}^{+\infty} \sum_{r,s} W_{rs} \tilde{w}_{rs}(\gamma_x, \gamma_y) \frac{e^{j(\gamma_x x + \gamma_y y)}}{\beta(\gamma_x, \gamma_y)} w_{pq}(x, y) d\gamma_x d\gamma_y dx dy$$

En inversant l'ordre des intégrations et en utilisant l'identité :

$$\tilde{w}_{pq}(-\gamma_x, -\gamma_y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} w_{pq}(x, y, z) e^{j(\gamma_x x + \gamma_y y)} dx dy$$

on obtient l'expression de A_{pq} et par suite celle de p_0 en fonction des seules données modales de la plaque

$$A_{pq} = j\omega \sum_{r,s} W_{rs} Z_{rspq}$$

avec

$$Z_{rspq} = \frac{\rho_0 c k}{4\pi^2 N_{pq}} \iint_{-\infty}^{+\infty} \tilde{w}_{rs}(\gamma_x, \gamma_y) \tilde{w}_{pq}(-\gamma_x, -\gamma_y) 1/\beta(\gamma_x, \gamma_y) d\gamma_x d\gamma_y \quad (7.8)$$

La signification physique de la quantité Z_{rspq} apparaît lorsqu'on exprime la pression acoustique en $z = 0$ d'après l'équation 7.5

$$p_0(x, y) = \sum_{p,q,r,s} W_{rs} Z_{rspq} j\omega w_{pq}(x, y) \quad (7.9)$$

Si nous associons l'indice linéaire l au couple (p, q) et l'indice linéaire k au couple (r, s) , nous pouvons définir les vecteurs colonnes d'ordre infini \mathbf{W} , le vecteur des amplitudes modales du déplacement et \mathbf{w} , vecteur des modes propres de la structure non amortier *in vacuo* :

$$\mathbf{W} = [W_0 \ W_1 \ \dots \ W_k \ \dots]^T$$

$$\mathbf{w} = [w_0 \ w_1 \ \dots \ w_l \ \dots]^T$$

La décomposition du déplacement s'écrit alors

$$w = \mathbf{W}^T \mathbf{w}$$

et l'expression 7.9 devient

$$p_0 = j\omega \mathbf{W}^T \mathbf{Z}_1 \mathbf{w} \quad (7.10)$$

\mathbf{Z}_1 est la matrice des Z_{kl} ou *matrice d'impédance intermodale de rayonnement*. Le terme diagonal d'ordre k caractérise l'influence de la charge acoustique sur un mode k *comme s'il était isolé des autres modes*. Z_{kk} joue alors un rôle analogue à celui de l'impédance de rayonnement telle que nous l'avons décrite pour le piston bafflé du paragraphe 6.2.1. Le terme non-diagonal Z_{kl} traduit l'action de la pression acoustique générée par le mode l *pris isolément* sur la dynamique du mode k . La projection de l'équation du mouvement de la plaque couplée à l'air sur la base des vecteurs propres fournit un système d'équations différentielles *couplées*.

De même que pour le piston, la partie réelle Z_{kl} introduit un effet d'amortissement ajouté et sa partie imaginaire un effet de masse ajoutée. Mais dans le cas des plaques, les contributions à la masse et à l'amortissement ajoutés proviennent *de l'ensemble des modes* de la structure. L'écart $\delta\omega_{mn}$ entre la valeur de la fréquence propre du mode non amorti *in vacuo* et la fréquence modale complexe du mode lorsque la structure est couplée à l'air dépend de tout les autres modes. La méthode de mesure à pressions statiques décroissantes telle que nous l'avons décrite dans le cas du piston ne peut pas s'appliquer à l'identique dans le cas général. Nous nous limiterons à étudier cette application lorsqu'on peut *négliger le couplage intermodal*.

◇ Quand peut-on négliger le couplage intermodal?

Le résultat 7.10 est général dans le cadre des plaques minces. La géométrie de la structure et les conditions aux limites vibratoires déterminent les modes propres *in vacuo*; la forme de ces modes et les conditions aux limites acoustiques déterminent la valeur de l'impédance intermodale de rayonnement. Une expression approchée pour $kL_x \gg 1$ de cette impédance pour une plaque mince a été calculée par Davies (1969, 1971). Le calcul d'une expression plus complète est donné dans (Pope et Leibowitz, 1974). Une évaluation numérique pour une plaque composite couplée à de l'eau est proposée par Sandman (1975). Ces résultats permettent de mesurer l'importance du couplage introduit par le rayonnement. Il est généralement admis que :

- ce couplage reste faible lorsque la plaque vibre dans un fluide léger; la décomposition modale de la structure est alors comparable à celle obtenue lors de la vibration *in vacuo*,
- le couplage est plus faible si les modes propres possèdent des fréquences éloignées,
- l'amortissement structural tend à réduire le degré de couplage (Sandman, 1975).

Nos expériences concernent des plaques métalliques vibrant dans l'air. Le rapport entre les masses volumiques du matériau et celle de l'air sont :

$$\rho_\infty = \frac{\rho_{\text{acier}}}{\rho_{\text{air}}} = 6.0 \cdot 10^3 \quad \text{pour l'acier}$$

$$\rho_\infty = 2.1 \cdot 10^3 \quad \text{pour l'aluminium}$$

Ces rapports sont grand devant l'unité et assurent largement la condition de *couplage avec un fluide léger*. Cette condition consiste en effet à pouvoir négliger le terme

$$\frac{2k_F^4}{\rho_\infty h}$$

(où k_F est le nombre d'onde de flexion *in vacuo*) dans la relation de dispersion de la plaque couplée (Lesueur, 1988).

Si la condition de fluide léger est toujours vérifiée ici, il reste toutefois difficile de caractériser le couplage introduit entre deux modes dont les fréquences sont proches. Dans notre expérience nous nous en tiendrons à vérifier que le schéma modal reste comparable lorsque la pression statique diminue.

7.2.3 Les facteurs de pertes dans la vibration des plaques *in vacuo*

Ces pertes sont regroupées sous l'appellation *frottements internes* qui recouvrent des phénomènes physiques différents tels que la viscoélasticité et la thermoélasticité (Zener, Otis, et Nuckoll, 1938). Les deux types de pertes se traduisent par la dégradation irréversible d'énergie

mécanique en chaleur. Dans le cas de la viscoélasticité cette dégradation fait suite au réarrangements du réseau cristallin lors de la déformation (Simpson, Sosin, et Johnson, 1972). Les pertes thermoélastiques résultent des échanges de chaleur entre les parties comprimées et déprimées du matériau déformé. L'influence du terme de thermoélasticité est étudié en terme quantitatif dans l'ouvrage de C. Valette (1993) pour des cordes métalliques. Cette étude est prolongée pour les plaques métalliques (Caracciolo et Valette, 1995) et montre que le mécanisme peut être négligé (la fréquence où la dissipation thermoélastique est maximale est de l'ordre de 1 Hz pour l'acier). Notons cependant que ce résultat peut être remis en cause pour des plaques suffisamment épaisses car les pertes thermoélastiques varient en proportion de l'épaisseur au carré (Lambourg, 1997). La viscoélasticité est le terme prépondérant de perte interne. La dissipation correspondante est introduite dans les équations de comportement par l'intermédiaire d'un module d'Young complexe. La partie imaginaire du module traduit le retard de la déformation sur la contrainte imposée. Le module d'Young complexe est écrit de manière usuelle sous la forme

$$\bar{E} = |\bar{E}|e^{j\delta} \approx E(1 + j\delta)$$

δ est l'angle de perte viscoélastique du matériau, supposé petit devant 1.

L'angle de perte viscoélastique est peu dépendant de l'amplitude de déplacement et de la précontrainte statique. En revanche, il varie en fonction de la fréquence et de la température (Nashif, 1985). Les modèles rhéologiques sont utilisés pour traduire la dépendance en fréquence de δ (Christensen, 1982). Ces modèles traduisent les phénomènes dissipatifs et de mémoire du matériau. Lorsque nous examinons nos résultats expérimentaux nous considérons en première approximation que l'angle de perte est constant dans le domaine de fréquence étudié.

7.2.4 Valeurs modales pour le système vibrant dans l'air

Nous supposons dans ce paragraphe que le couplage entre les modes introduit par la charge acoustique est négligeable et que la vibration est faiblement amortie. Le schéma modal est peu modifié par rapport à celui du système *in vacuo* conservatif associé. La fréquence propre du mode (m, n) *in vacuo* et non dissipatif est notée ω_{mn} . Lorsqu'on tient compte des pertes internes et du couplage avec l'air cette fréquence propre devient $\omega_{mn} + \delta\omega_{mn}$. $\delta\omega_{mn}$ est supposé petit devant ω_{mn} et s'obtient par un calcul à l'ordre 1 analogue à celui mené au paragraphe 6.2.2.

◇ Fréquence propre du système conservatif *in vacuo* La fréquence ω_{mn} du mode (m, n) est la solution de l'équation de dispersion déduite de 7.1, soit :

$$H(\omega) = -\rho_s\omega^2 + D(k_m^2 + k_n^2)^2 = -\rho_s\omega^2 + Dk_{mn}^4 = 0$$

Il vient alors :

$$\omega_{mn} = \sqrt{D/\rho_s} k_{mn}^2 \quad (7.11)$$

◇ Valeurs dans l'air en négligeant le couplage intermodal L'équation du mouvement libre de la plaque *avec frottements internes et couplée au fluide* s'obtient à partir de l'équation 7.1 en ajoutant au second membre l'action de la pression acoustique et en remplaçant le coefficient de rigidité D par sa valeur complexe. Il vient :

$$(\bar{D}\nabla^4 + \rho_s \frac{\partial^2}{\partial t^2})w = -2p_0 \quad (7.12)$$

Lorsqu'on néglige le couplage intermodal, la matrice Z_1 est diagonale. La pression acoustique devient :

$$p_0 = j\omega \sum_{m,n} Z_{mnmn} W_{mn} w_{mn}$$

L'équation 7.12 peut alors être projetée sur la base des modes propres *in vacuo* w_{mn} . Le calcul de perturbation à l'ordre 1 en $\delta\omega_{mn}$ s'écrit alors :

$$\left. \frac{\partial H}{\partial \omega} \right|_{\omega_{mn}} \delta\omega_{mn} = -2\rho_s \omega_{mn} \delta\omega_{mn} = -j\delta D k_{mn}^4 - 2j\omega_{mn} Z_{mnmn}(\omega_{mn})$$

Le facteur 2 devant Z_{mnmn} provient de la différence entre la définition de l'impédance de rayonnement du piston et la définition de l'impédance intermodale. La première relie la différence de pression $p^+ - p_-$ à la vitesse vibratoire alors que la deuxième concerne uniquement p^+ . En utilisant l'expression 7.11 de ω_{mn} , il vient alors :

$$\delta\omega_{mn} = j\frac{\delta}{2}\omega_{mn} + j\frac{Z_{mnmn}}{\rho_s}$$

Nous écrivons l'impédance comme la somme de ses parties active et réactives :

$$Z_{mnmn} = R_{mn} + jX_{mn}$$

pour en déduire les valeurs au premier ordre de la fréquence et du facteur d'amortissement propre du système amorti vibrant dans l'air :

$$\omega'_{mn} = \omega_{mn} - \frac{X_{mn}}{\rho_s} \quad \text{et} \quad \alpha'_{mn} = (\delta/2)\omega_{mn} + \frac{R_{mn}}{\rho_s} \quad (7.13)$$

On retrouve des expressions similaires à celles obtenues pour le piston au facteur 2 près. Les mêmes conclusions peuvent être tirées :

- le terme réactif de l'impédance de rayonnement fait baisser (*cf.* discussion ci-dessous) la fréquence modale *proportionnellement* à la pression statique,
- le terme résistif ajoute de l'amortissement à la vibration modale.

Les variations des fréquences et facteurs d'amortissement propres en fonction de la pression statique sont analogues à celles présentées pour le piston en figure 6.4

◇ Discussion sur le signe de X_{mnmn} Le signe de la partie réactive de l'impédance modale de rayonnement peut être déduit de l'expression 7.8. Les déplacements modaux sont réels et par suite

$$\tilde{w}_{mn}(\gamma_x, \gamma_y) \tilde{w}_{mn}(-\gamma_x, -\gamma_y) = |\tilde{w}_{mn}(\gamma_x, \gamma_y)|^2$$

et il vient alors

$$Z_{mnmn} = \frac{\rho_0 c k}{4\pi^2 N_{mn}} \iint_{-\infty}^{+\infty} |\tilde{w}_{mn}(\gamma_x, \gamma_y)|^2 1/\beta(\gamma_x, \gamma_y) d\gamma_x d\gamma_y$$

La valeur de X_{mnmn} correspond à la double intégration sur le domaine où β est complexe c'est à dire l'extérieur du cercle de rayon $k = \omega_{mn}/c$. La valeur de β qui possède un sens physique (ondes de pression en $e^{-j\beta z}$ évanescentes) vaut alors

$$\beta = -j\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 - k^2}$$

ce qui conduit à la valeur de la partie réactive de l'impédance :

$$X_{mnmn} = \frac{\rho_0 c k}{4\pi^2 N_{mn}} \iint_{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 > k^2} \frac{|\tilde{w}_{mn}(\gamma_x, \gamma_y)|^2}{\sqrt{\gamma_x^2 + \gamma_y^2 - k^2}} d\gamma_x d\gamma_y$$

Le signe toujours positif du facteur d'intégration assure la relation :

$$X_{mnmn} > 0$$

La partie réactive de l'impédance modale de rayonnement est toujours positive; la prise en compte du rayonnement conduit à une *masse ajoutée* et la fréquence propre dans l'air est *plus faible* que la fréquence propre *in vacuo*.

7.2.5 Conclusion sur l'application aux plaques

Compte tenu des conclusions du paragraphe précédent (expressions 7.13) la technique de mesure telle que décrite dans le principe général (§ 6.2.4 du § 6.2) s'applique aux plaques minces en flexion. Nous la rappelons ici succinctement.

Les fréquences et facteurs d'amortissement propres sont mesurés à des pressions statiques P_0 décroissantes. La pente de la droite $\omega_{mn}(P_0)$ fournit la partie réactive de l'impédance de rayonnement. La valeur interpolée à $P_0 = 0$ est la pulsation *in vacuo*. La pente de la droite $\alpha_{mn}(P_0)$ fournit la partie résistive de l'impédance de rayonnement. La valeur interpolée à $P_0 = 0$ donne accès à l'angle de perte interne du matériau.

Les hypothèses qui autorisent ces conclusions pour l'étude acoustique des plaques minces sont les suivantes :

- Régime linéaire en acoustique et en mécanique
- L'air est un gaz parfait
- La plaque au repos est une paroi infiniment rigide (impédance de paroi $\gg \rho_0 c$)
- L'air est un fluide léger et le couplage intermodal est négligeable
- Les modes de vibrations sont peu amortis

7.3 Grandeurs acoustiques déduites de la mesure expérimentale

La mesure des paramètres modaux (fréquence et facteur d'amortissement) à des pressions statiques décroissantes permet d'obtenir la valeur des impédances modales de rayonnement. Nous pouvons en déduire, pour chacun des modes (m, n) de vibration, des grandeurs acoustiques utilisées habituellement pour caractériser le champ rayonné :

- le facteur de rayonnement modal σ_{mn} ,
- le facteur de perte par rayonnement η_{mn} .

À ces grandeurs, nous ajoutons le *rendement acoustique* modal μ_{mn} qui caractérise la proportion d'énergie dissipée sous forme acoustique.

7.3.1 Facteur de rayonnement

Lorsqu'on tient compte de l'action du fluide d'un côté (p^+) et de l'autre (p^-) de la plaque, l'impédance de rayonnement vaut $Z_{mn} = 2Z_{mnmn} = R_{mn} + jX_{mn}$.

Le facteur de rayonnement est la quantité adimensionnelle :

$$\sigma_{mn} = R_{mn}/(\rho_0 c) \quad (7.14)$$

◇ Remarque et interprétation physique

Le facteur de rayonnement global de la plaque $\sigma_r(\omega)$ traduit l'efficacité du transfert d'énergie vers le champ acoustique. Cette signification physique apparaît dans l'expression de σ_r sous forme d'un rapport énergétique :

$$\sigma_r(\omega) = \frac{\mathcal{P}_r}{\rho_0 c S \langle \dot{w}^2 \rangle_S}$$

\mathcal{P}_r est la puissance active rayonnée, calculée sur une surface fermée entourant la source et le terme au dénominateur est la puissance mécanique moyenne communiquée au fluide à la surface de la plaque. Ce rapport est largement inférieur à l'unité en basse fréquence et devient de l'ordre de l'unité au delà de la fréquence de coïncidence, caractéristique de la plaque étudiée. Le facteur de rayonnement modal des plaques minces en flexion, bafflées, simplement supportées sur leur pourtour est étudié en détail par Wallace (1972).

Lien avec le facteur de rayonnement modal. Le facteur de rayonnement global de la plaque est fonction de la réponse vibratoire de chacun des modes et de leur facteur de rayonnement modal. Son expression en négligeant le couplage intermodal est donnée dans Lesueur (88) par :

$$\sigma_r(\omega) = \frac{\sum_{m,n} A_{mn}(\omega)^2 N_{mn} \sigma_{mn}}{\sum_{p,q} A_{pq}(\omega)^2 N_{pq}} \quad (7.15)$$

$A_{mn}(\omega)$ Amplitude vibratoire (réponse) du mode (m, n) à la pulsation ω

N_{mn} Norme du mode (m, n)

σ_{mn} Facteur de rayonnement du mode (m, n)

Cette expression montre que le facteur de rayonnement global est fonction de la fréquence et du type d'excitation par l'intermédiaire des $A_{mn}(\omega)$. En revanche les facteurs de rayonnement modaux sont *indépendants* de l'excitation. Lorsque les modes sont bien séparés, la contribution des autres modes à la fréquence propre du mode m, n est faible car la réponse de ces modes $A_{pq}(\omega_{mn})$ est petite comparée à $A_{mn}(\omega_{mn})$. En négligeant ces contributions il vient :

$$\sigma_r(\omega_{mn}) \approx \sigma_{mn}$$

7.3.2 Facteur de perte par rayonnement et rendement acoustique

Le facteur de perte par rayonnement global est défini comme le rapport entre la puissance acoustique et la puissance mécanique de vibration, soit :

$$\eta(\omega) = \frac{\mathcal{P}_r}{\omega \rho_s S \langle \dot{w}^2 \rangle_S} \quad (7.16)$$

C'est à dire pour un mode (m, n) de vibration :

$$\eta_{mn} = \frac{R_{mn}}{\omega_{mn} \rho_s} \quad (7.17)$$

En reportant cette valeur dans l'expression 7.13 du facteur d'amortissement dans l'air, il vient

$$\alpha'_{mn} = \omega_{mn}(\delta + \eta_{mn})/2$$

η_{mn} s'interprète alors naturellement comme un *angle de perte de rayonnement*.

Le *rendement acoustique* mesure la proportion de puissance dissipée sous forme acoustique dans la puissance dissipée totale, qui comprend également les pertes internes. Son expression est

$$\mu_{mn} = \frac{\delta\alpha}{\alpha'_{mn}} = \frac{\alpha'_{mn} - \alpha_{mn}}{\alpha'_{mn}} = \frac{\eta_{mn}}{\delta + \eta_{mn}} \quad (7.18)$$

μ_r mesure la proportion de la contribution acoustique à l'angle de perte total. C'est une caractéristique qui dépend du matériau et de l'efficacité de la structure pour rayonner. En haute fréquence, où le transfert acoustique est efficace, les valeurs de rendement acoustique seront plus importantes, cependant, sa valeur ne sera significative que pour des matériaux faiblement amortis (angle de perte interne δ faible). C'est le cas pour les métaux que nous avons étudiés : acier et aluminium pour lesquels les angles de perte interne sont de l'ordre respectivement de $5 \cdot 10^{-4}$ et 10^{-4} (Ungar, 1992).

7.3.3 Fréquence de coïncidence

Le phénomène de coïncidence apparaît lorsque la structure mécanique est dispersive pour les ondes de flexion. Il caractérise l'interaction entre une onde plane sinusoïdale de flexion et le milieu fluide. Pour une plaque mince *infinitement étendue*, la fréquence critique ou de *coïncidence* f_c sépare deux domaines de fréquences :

- $f < f_c$ où l'onde de vibration ne produit pas d'onde acoustique.
L'effet du milieu est du type inertiel (masse ajoutée),
- $f > f_c$ où de l'énergie est transmise sous forme de rayonnement.

Le phénomène existe pour une plaque finie et se traduit par un rayonnement du type plaque infinie pour $f \gg f_c$ et un rayonnement faible mais non nul pour les fréquences $f \ll f_c$. Le transfert d'énergie sera maximal pour $f \approx f_c$.

Ce transfert d'énergie est quantifié par la valeur σ_r du facteur de rayonnement qui est donc maximal pour $f \approx f_c$. Nous pouvons ainsi comparer la valeur obtenue expérimentalement (par l'intermédiaire de σ_r) avec la valeur théorique de f_c qui dépend du matériau et de l'épaisseur de la plaque. L'allure de la fonction $\sigma_r(\omega)$ pour une plaque bafflée simplement supportée est donnée dans l'ouvrage de L. L. Beranek (1992) et reprise par Fahy (1997).

◇ Expression de la fréquence de coïncidence La fréquence de coïncidence vaut

$$f_c = \frac{c^2}{2\pi} \sqrt{\frac{\rho_s}{D}} \quad (7.19)$$

c est la célérité du son, ρ_s la masse surfacique du matériau et D la rigidité du matériau. Les relations $D \sim h^3$ et $\rho_s \sim h$ montrent que

$$f_c \sim 1/h$$

La fréquence de coïncidence sera d'autant plus élevée que la plaque est mince. Le son produit par une plaque plus mince contient une plus grande proportion d'aigus. Pour les tables d'harmonie des instruments de musique il faut chercher à obtenir f_c le plus bas possible, c'est à dire à utiliser des matériaux raides et légers.

◇ Signification physique La signification physique de la fréquence de coïncidence apparaît sur la figure 7.2. L'adaptation des fronts d'onde implique une relation entre la longueur d'onde

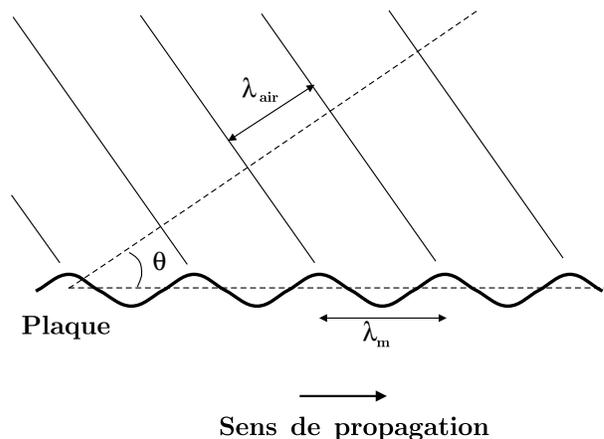


FIG. 7.2: Adaptation entre le front de l'onde de flexion sinusoïdale dans une plaque infinie et le front de l'onde plane acoustique générée. La longueur d'onde dans l'air est plus faible que la longueur d'onde λ_m dans le matériau.

λ_m dans la plaque, la longueur d'onde λ_{air} dans le milieu fluide et θ l'angle entre la direction de propagation des ondes aériennes et le plan de la plaque, soit

$$\lambda_{air} = \lambda_m \cos \theta \quad (7.20)$$

Les nombres d'onde correspondant vérifient donc $k_{air} \geq k_m$. La représentation figure 7.3 des lois de dispersion dans l'air et dans la plaque permet de conclure à l'existence de la fréquence limite f_c . Pour $f \geq f_c$ la relation $k_{air} \geq k_m$ est vérifiée alors que pour $f \leq f_c$ l'adaptation des fronts d'onde est impossible. Il ne peut pas y avoir rayonnement acoustique dans ces conditions.

Remarques :

– Cette analyse n'est valable que pour un fluide léger puisque nous avons supposé impli-

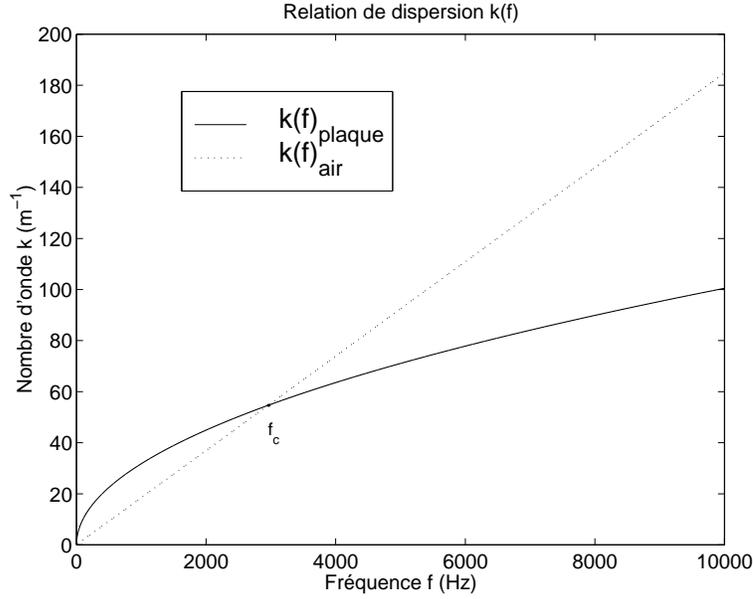


FIG. 7.3: Relations de dispersion $k(f)$ pour une plaque en acier d'épaisseur 4 mm et pour l'air. $f_c = 2957$ Hz. Pour $f > f_c$ une onde propagative plane sinusoïdale de flexion dans la plaque génère un rayonnement acoustique. Ce n'est pas le cas si $f < f_c$.

citement que le nombre d'onde de flexion dans la plaque couplée au fluide restait égal au nombre d'onde *in vacuo*.

- Nous n'avons considéré que des ondes de flexion *propagatives* dans la plaque. Des solutions évanescentes qui donnent lieu à un rayonnement acoustique existent néanmoins (Lesueur, 1988). Elles n'interviennent pas dans la description modale que nous avons adoptée.

◇ Expression du facteur de rayonnement global en fonction de f_c Le transfert d'énergie vers le champ acoustique rayonné est maximal lorsque $f \approx f_c$. Cette propriété nous permet de rechercher expérimentalement la valeur de f_c comme la fréquence du mode pour lequel le facteur de rayonnement σ_{mn} est le plus fort. Au delà de cette fréquence, la valeur de $\sigma_{mn} = \sigma_r(\omega_{mn})$ est comparable à celle de la plaque infinie.

La valeur du facteur de rayonnement global pour une plaque infini est donnée par :

$$\sigma_r(\omega) = \frac{1}{(1 - \omega_c/\omega)^{1/2}} \quad (7.21)$$

où $\omega_c = 2\pi f_c$ est la pulsation de coïncidence. Cette expression traduit deux effets d'angle θ entre la direction de propagation acoustique et la direction de propagation dans la plaque. Le premier de ces effets est lié à la continuité des vitesses transverses à la surface de la plaque (son impédance est très grande devant $\rho_0 c$). L'équation d'Euler s'écrit alors, à la surface

$$jk \sin \theta p_0 = j\omega \rho_0 \dot{w} \quad (7.22)$$

w est le déplacement transverse de la plaque. p_0 est la pression acoustique à la surface. La valeur du facteur de rayonnement s'en déduit

$$\sigma_r = \frac{1}{\sin \theta}$$

L'autre effet d'angle est lié à l'adaptation des fronts d'onde que nous avons écrit en 7.20. Soit

$$\cos \theta = \frac{\lambda_{air}}{\lambda_m} = \frac{k_m}{k_{air}} = \left(\frac{\omega_c}{\omega}\right)^{1/2} \quad (7.23)$$

L'expression 7.21 est obtenue lorsqu'on rapproche 7.22 et 7.23.

7.4 Résultats pour une plaque en acier

Les mesures obtenues pour cette plaque permettent de vérifier les variations de l'impédance de rayonnement en fonction de la pression statique. Les résultats concernant le facteur de rayonnement peuvent être commentés par comparaison avec le modèle plaque infinie. Les mesures extrapolées à pression nulle fournissent un ordre de grandeur des pertes internes.

7.4.1 Caractéristiques de la plaque

Les caractéristiques de cette plaque en acier sont regroupées ci-dessous :

- Masse : 5.46 kg
- Masse volumique : $\rho_m = 7800 \text{ kgm}^{-3}$
- Masse surfacique : $\rho_s = 31.2 \text{ kgm}^{-2}$
- Dimensions : 350.5x500x4mm
- Module d'Young : $2.1e11 \text{ Nm}^{-2}$
- Coefficient de Poisson $\nu = 0.27$
- Fréquence de coïncidence $f_c = 2957 \text{ Hz}$
- Espacement intermodal moyen : 71 Hz. Il se calcule à partir de l'équation de dispersion en comptant le nombre de vecteur d'onde possible entre k et $k + \delta k$ (Weinreich, 1995). La valeur pour une plaque en flexion est constante et vaut $\Delta(f) = \frac{2}{S} \left(\frac{D}{\rho_s}\right)^{1/2}$. Ce calcul permet de connaître *a priori* le nombre de modes de flexion détectables dans la bande de fréquence étudiée. Ce nombre est aussi le nombre de points où sont calculées les grandeurs acoustiques. Pour la plaque en acier, cela conduit à quelques 250 modes dans la bande 0-20000 Hz. Dans la pratique, ce le nombre de modes mesuré est inférieur à

cette valeur car les modes qui émergent peu du bruit de fond ne sont pas pris en compte dans l'analyse. L'espacement intermodal moyen sur l'ensemble des modes analysés pour la plaque en acier vaut 123 Hz. L'espacement est de l'ordre de 70 Hz pour le début de la bande de fréquence mais approche les 180 Hz pour la bande des 15000-20000 Hz. En effet, les amortissements sont plus forts dans cette dernière et les modes dont l'amplitude est faible ne sont pas mesurables avec suffisamment de précision.

7.4.2 Dispositions expérimentales et traitements spécifiques

La plaque est suspendue à l'aide d'un fil de nylon. Celui-ci est attaché par une petite perforation ($\varnothing = 1 \text{ mm}$). Le point d'accrochage est situé au milieu du bord supérieur comme indiqué sur la figure 7.4.

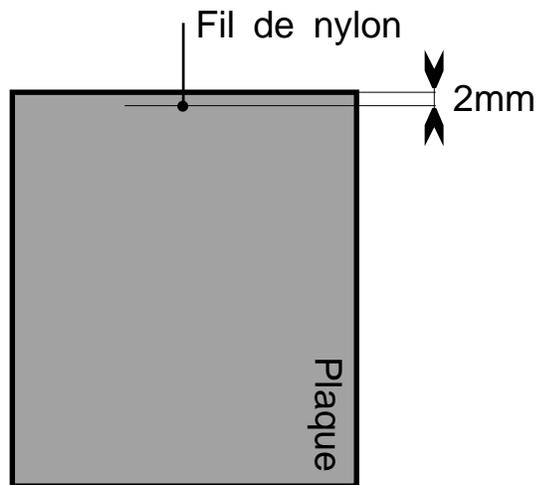


FIG. 7.4: Point d'accrochage de la plaque en acier.

L'étude est menée dans le domaine des fréquences audibles 0-20000 Hz. Une recherche préalable des pics spectraux est effectuée à l'aide de la transformée de Fourier. La méthode de traitement matrix pencil est ensuite appliquée pour chaque pic, après filtrage RIF de bande passante 60 Hz. La méthode matrix pencil permet d'automatiser le traitement puisque plusieurs pics peuvent se trouver compris dans la bande passante. Lorsqu'une seule composante est présente dans la bande passante, les résultats entre la méthode "de Hilbert" et matrix pencil montrent une concordance au minimum de l'ordre du % sur les amortissements et souvent bien meilleure.

7.4.3 Variations des valeurs modales avec la pression statique

Nous présentons ici les résultats expérimentaux concernant trois modes de vibrations, aux fréquences respectives :

- 173 Hz ($\ll f_c$) - 2783 Hz ($\approx f_c$) - 9704 Hz ($\gg f_c$)

Nous rappelons la valeur théorique de la fréquence de coïncidence $f_c = 2957$ Hz. La figure 7.5 présente les variations de la fréquence modale avec la pression statique P_0 et la figure 7.6, les variations du facteur d'amortissement avec P_0 . Seuls les écarts à la valeur à pression nulle (extrapolée) sont représentés.

La linéarité des dépendances des paramètres modaux avec la pression statique est correctement vérifiée : les coefficients de régression des droites tracées en pointillés sont tous supérieurs à 0.95.

La décroissance de la fréquence avec P_0 traduit l'effet de masse ajoutée par le rayonnement. Les variations mesurées sont de l'ordre de 0.1%.

La croissance des facteurs d'amortissement avec P_0 traduit l'amortissement ajouté. Les variations mesurées sont de l'ordre de 5% pour le mode à 173 Hz mais sont supérieures à 50% pour les deux autres. Ces résultats montrent l'importance de l'amortissement ajouté pour les fréquences supérieures à f_c , domaine où la plaque rayonne efficacement.

L'observation de la variation de fréquence et d'amortissement pour les modes à 2783 Hz et 9704 Hz montre que la dispersion des mesures est plus importante pour les pressions statiques les plus élevées. Cette constatation peut être rapprochée des conclusions théoriques du paragraphe 5 : lorsque α augmente, la variance des estimateurs augmente. Pour obtenir des mesures plus fiables, nous avons calculé la pente de régression sur les 7 premières valeurs de pressions.

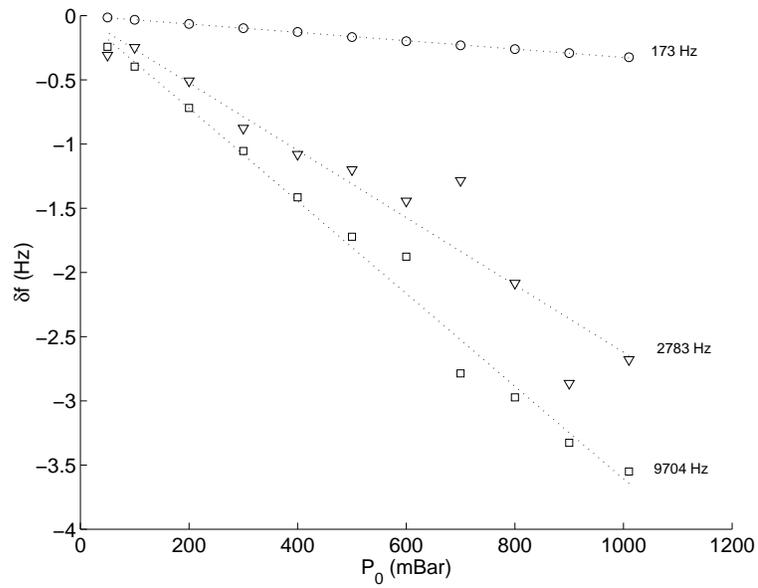


FIG. 7.5: Variation de la fréquence modale en fonction de la pression statique. Le point de référence est pris pour $P_0 = 0$. Les modes étudiés se trouvent respectivement à 173, 2783 et 9704 Hz.

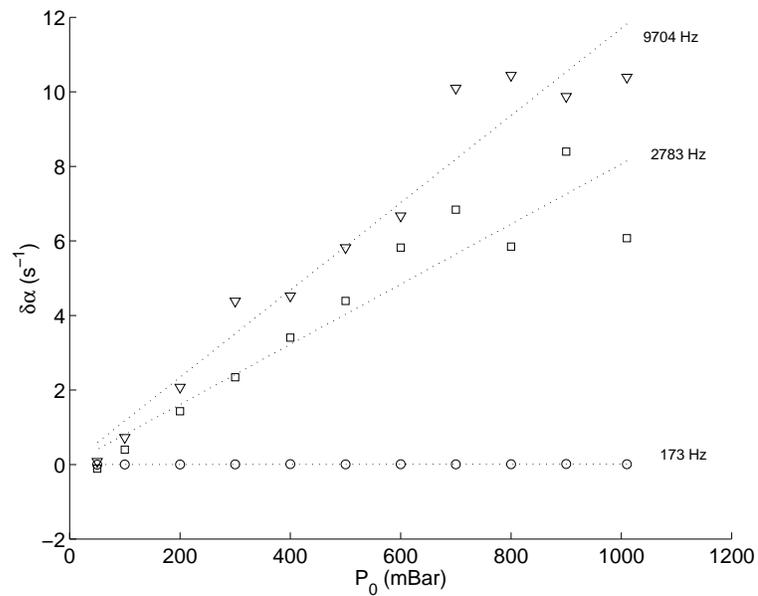


FIG. 7.6: Variation du facteur d'amortissement modal en fonction de la pression statique. Le point de référence est pris pour $P_0 = 0$. Les modes étudiés se trouvent respectivement à 173, 2783 et 9704 Hz.

7.4.4 Quantités acoustiques mesurées

◇ Facteur de rayonnement modal

Sauf pour la première figure (figure 7.7) les facteurs de rayonnement modaux sont représentés en dB en fonction de la fréquence normalisée à la fréquence de coïncidence f_c .

<p>L'expression du facteur de rayonnement en dB est donnée par</p> $10 \log \sigma_r$ <p>en référence à son écriture sous forme d'un rapport énergétique. Par extension nous choisissons de représenter la partie imaginaire de l'impédance normalisée à $\rho_0 c$, x_r en dB sous la forme $10 \log x_r$</p>

L'échelle des fréquences est choisie linéaire pour représenter les valeurs mode à mode en raison de l'espacement intermodal, qui reste du même ordre de grandeur sur l'ensemble de la bande de fréquence étudiée. L'échelle des fréquences est en revanche choisie logarithmique pour les représentations moyennées afin de juger du type de variation en dB/octave.

Sur les figure 7.7 et 7.8 nous avons représenté la partie réelle de l'impédance de rayonnement modale, normalisée à $\rho_0 c$. Cette grandeur est aussi *le facteur de rayonnement modal*. Les valeurs données correspondent au rayonnement dans un seul demi-espace, ce qui permet de les comparer avec le résultat 7.21 obtenu pour une plaque infinie.

Les mesures pour la plaque finie concordent à ± 3 dB près avec l'expression théorique du facteur de rayonnement pour $f > 1.2f_c$. La forme générale de la variation de σ_r avec la fréquence est caractéristique du rayonnement des structures planes : la valeur décroît rapidement (en f^4) pour $f < f_c$ et devient de l'ordre de 1 pour $f > f_c$.

Notons que parmi les modes trouvés, il peut également exister des modes longitudinaux. Ce ne sont pas des modes de flexion et leur rayonnement acoustique est différent de ceux-ci. Les fréquences des premiers modes longitudinaux, respectivement dans la longueur et la largeur de la plaque sont situées à 5064 Hz et 7234 Hz.

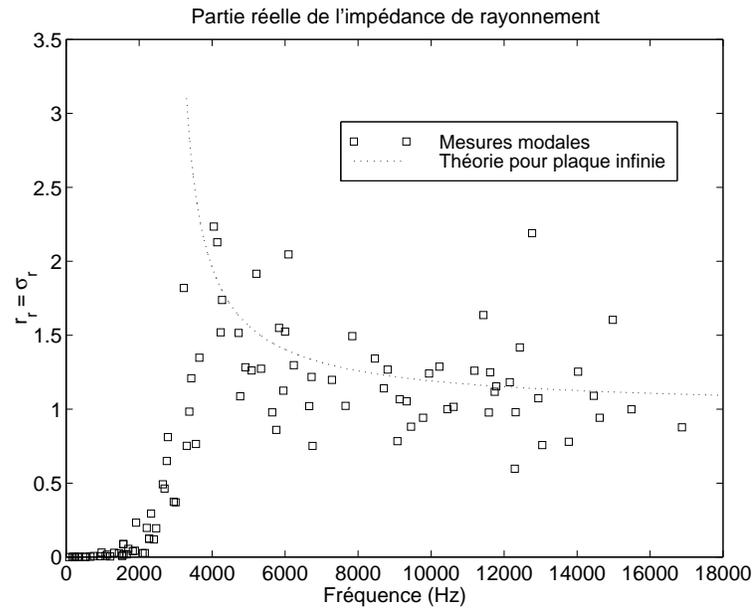


FIG. 7.7: Partie réelle r_r de l'impédance de rayonnement normalisée à $\rho_0 c$ pour une plaque mince en acier. Cette grandeur est également *le facteur de rayonnement modal de la plaque*. Le trait pointillé correspond à la valeur théorique de ce facteur pour la plaque en acier de même épaisseur mais de dimensions infinies.

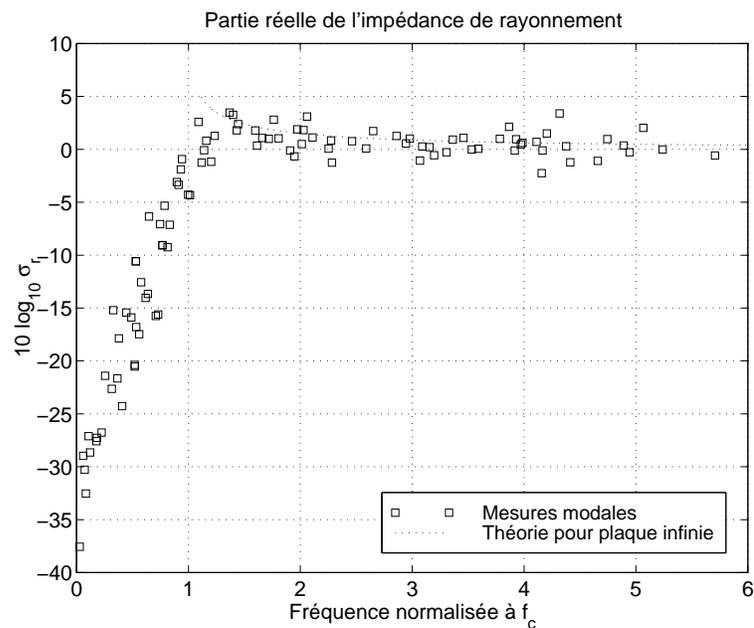


FIG. 7.8: Facteur de rayonnement modal de plaque en acier, représenté en dB. Le trait pointillé correspond à la valeur théorique de ce facteur pour la plaque en acier de même épaisseur mais de dimensions infinies. L'échelle des fréquences est normalisée à la fréquence de coïncidence théorique de cette plaque : 2957 Hz.

◇ Facteur de rayonnement en représentation moyennée

La moyenne est effectuée sur 10 modes. La bande de fréquence couverte par ces 10 modes reste du même ordre de grandeur mais tend à augmenter lorsque la fréquence augmente. Sa valeur est comprise entre 700 et 1000 Hz pour $f < f_c$ et entre 1200 et 2000 Hz pour la bande de fréquences $f > f_c$. Cette différence n'occasionne pas de difficulté d'interprétation car les variations de σ_r pour $f > f_c$ sont lentes.

Cette représentation permet de juger plus aisément du type de comportement avec la fréquence. Dans la bande des fréquences $f < f_c$ on peut distinguer deux parties :

- pour $f_c/2 < f < f_c$, la pente est de 12 dB/octave. Cette valeur est celle trouvée pour le piston oscillant non bafflé (Shenderov, 1988; Fahy, 1997). Elle correspond à une variation du facteur de rayonnement en f^4 .
- pour $f < f_c/2$, la pente est de 6 dB/octave, ce qui correspond à une variation en f^2

Dans la bande des fréquences $f > f_c$ on observe une valeur décroissante tendant asymptotiquement vers 0 dB. Cette tendance est comparable à celle obtenue pour la plaque infinie. Le facteur de rayonnement maximum est trouvé pour le mode à 4045 Hz, soit pour $f/f_c = 1.37$. La valeur du facteur de rayonnement maximum est comparable à celle donnée pour une plaque bafflée (Beranek et Ver, 1992) par la formule :

$$\sigma_r^{\text{MAX}} \approx \sqrt{\frac{P}{2\lambda_c}} \quad (7.24)$$

où λ_c est la longueur d'onde de coïncidence et P le périmètre de la plaque. Appliquée dans notre cas cette formule donne :

$$\sigma_r^{\text{MAX}} = 1.9$$

et notre valeur maximum vaut 2.23 ce qui est très bonne concordance.

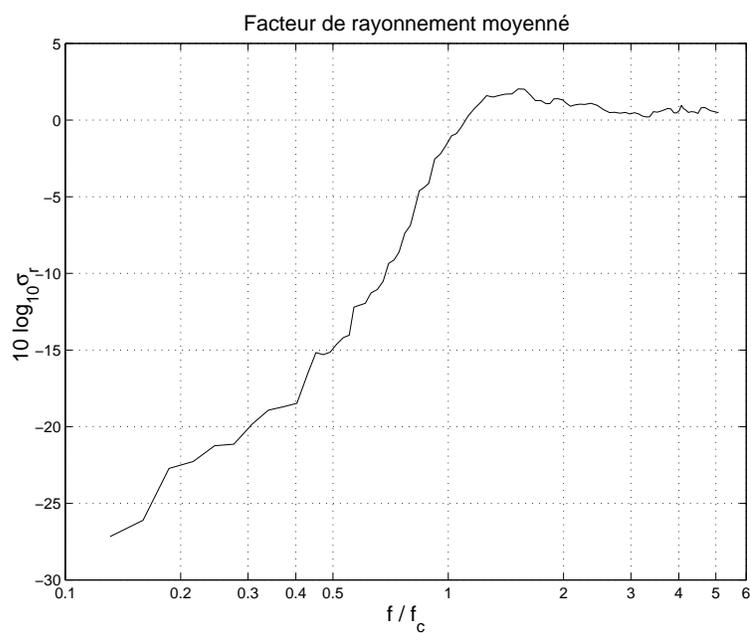


FIG. 7.9: Facteur de rayonnement en dB, moyenné sur 10 modes

◇ Masse ajoutée et partie réactive de l'impédance de rayonnement

La figure 7.10 montre la partie réactive de l'impédance de rayonnement, normalisée à l'impédance caractéristique de l'air, pour chacun des modes de vibration.

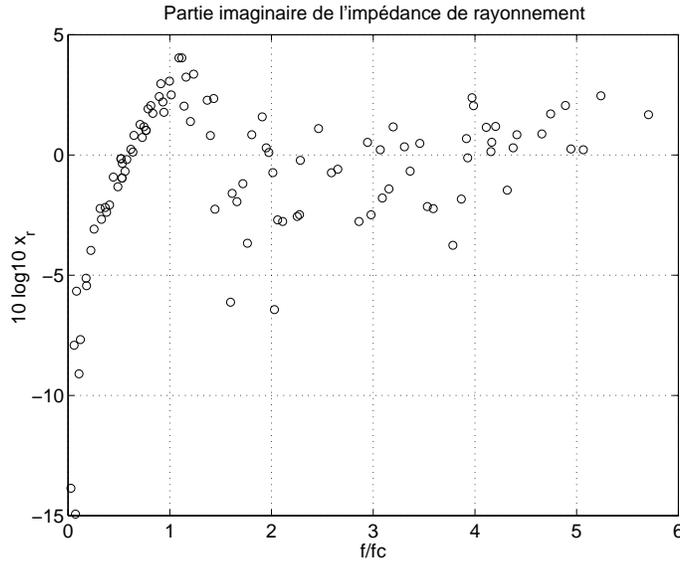


FIG. 7.10: Partie imaginaire x_r de l'impédance de rayonnement normalisée à $\rho_0 c$. L'échelle des fréquences est normalisée à la fréquence de coïncidence f_c .

Pour $f < f_c$ le comportement est comparable à celui du piston plan : le régime de fonctionnement est inertiel et x_r est proportionnel à la fréquence (cf. figure 7.11). Le maximum de x_r est atteint pour le mode à 3304 Hz, soit un rapport $f/f_c = 1.1$. La valeur de f_c calculée théoriquement s'accorde bien avec les mesures expérimentales.

La représentation moyennée sur 10 modes de la masse ajoutée et de x_r est donnée figure 7.11. La quantité $x_r/(ka)$ représente la masse ajoutée par unité de surface et par unité de dimension caractéristique de la plaque. Ici, cette dimension est :

$$a = \sqrt{S} = 42 \text{ cm}$$

où S désigne la surface de la plaque.

Pour $f < f_c$, x_r croît avec la fréquence f avec une pente de 3 dB/octave, c'est à dire proportionnellement à f . Autour $f \approx 1.5f_c$, on observe une décroissance de -6 dB/octave. Le comportement pour $f > 2f_c$ présente des minima et des maxima. Ces résultats peuvent être rapprochés des résultats théoriques donnés pour des pistons circulaires oscillants bafflé et non bafflé (Shenderov, 1988). La dépendance de x_r en basse fréquence caractérise un comportement inertiel et en haute fréquence, x_r n'est pas une fonction monotone de la fréquence.

Le comportement de $x_r/(ka)$, la masse ajoutée, fait clairement apparaître la limite du régime

de comportement inertiel en $f = f_c$. Au dessous de la fréquence de coïncidence, l'air se comporte comme un fluide incompressible alentour de la plaque : $x_r/(ka)$ est indépendant de la fréquence. Cette masse ajoutée correspond à une colonne d'air équivalente de l'ordre de $0.1a$, où a est la dimension caractéristique de la plaque. Comme point de comparaison, nous ne disposons pas de valeurs pour un piston rectangulaire non bafflé. Nous nous limitons à donner les valeurs dans les cas suivants :

- pour le piston carré bafflé, la colonne d'air équivalente a pour hauteur $0.3a$ où a est le côté du carré (Morse et Ingard, 1968),
- pour le piston circulaire bafflé, cette colonne d'air a pour hauteur $0.85a$ où a est le rayon du piston,
- pour le piston circulaire non bafflé, cette colonne d'air a pour hauteur $0.4a$.

Remarque. Le passage du piston circulaire bafflé au non bafflé correspond à un coefficient multiplicateur de 0.47. Lorsqu'on applique ce coefficient au piston carré, il vient une hauteur de colonne d'air de $0.13a$. Cette valeur est proche de notre ordre de grandeur.

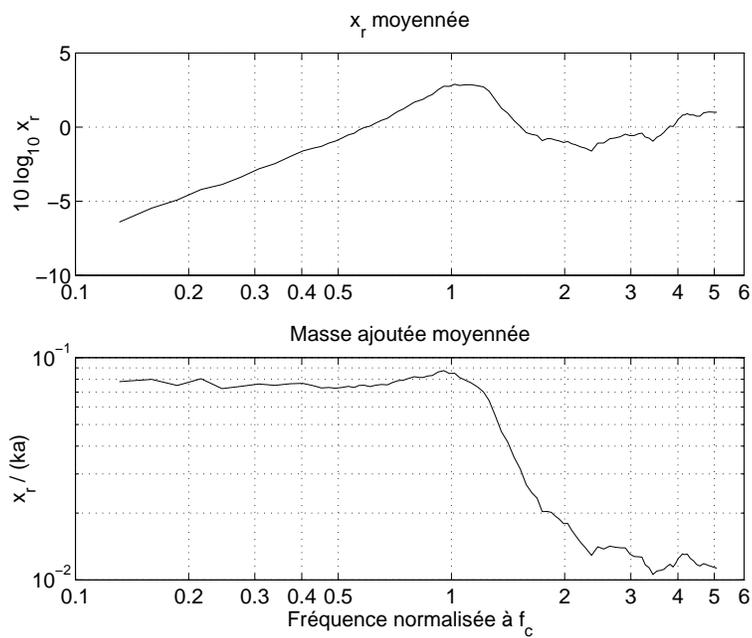


FIG. 7.11: Partie imaginaire de l'impédance de rayonnement (en dB) et masse ajoutée en fonction de la fréquence. Les valeurs sont moyennées sur 10 modes. Les grandeurs représentées sont sans dimension.

◇ Pertes internes

Par extrapolation des fonctions $\alpha_{mn}(P_0)$ à $P_0 = 0$ (ordonnée à l'origine) nous obtenons le graphe des facteurs d'amortissement modaux *in vacuo*. Ceux-ci sont représentés en fonction des fréquences modales. La figure 7.12 décrit *les pertes internes* mode à mode.

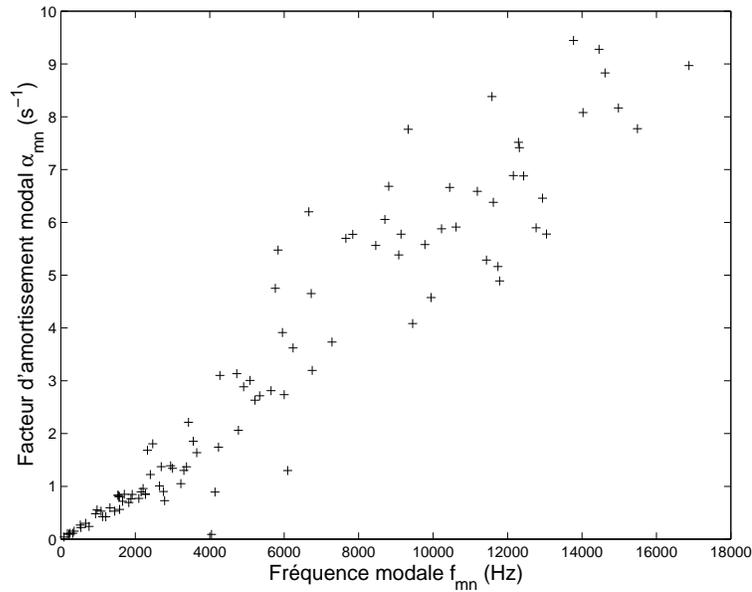


FIG. 7.12: Facteurs d'amortissements modaux en fonction des fréquences modales.

Les facteurs d'amortissements sont sensiblement proportionnels à la fréquence : le coefficient de régression linéaire sur les points $\alpha_{mn}(f_{mn})$ vaut 0.953. Cette dépendance linéaire des facteurs d'amortissement avec la fréquence confirme l'hypothèse d'un facteur de perte interne sensiblement indépendant de la fréquence dans la zone de fréquence étudiée.

La dispersion des mesures est plus importante pour $f > f_c$. Cette dispersion peut se comprendre à la lumière des résultats concernant les incertitudes sur les valeurs estimées. Les amortissements sont plus forts pour $f > f_c$ en raison de l'amortissement ajouté par le rayonnement. La variabilité des mesures d'amortissement est donc plus importante et il en résulte des erreurs plus importantes sur la valeurs de l'ordonnée à l'origine de la droite de régression $\alpha_{mn}(P_0)$. Cette explication est cohérente avec l'observation suivante : la dispersion n'augmente significativement pour $f \gg f_c$. Dans cette zone de fréquence l'amortissement ajouté par le rayonnement est plus important que l'amortissement dû aux pertes internes et cet amortissement ajouté est peu dépendant de la fréquence ($\sigma_{mn} \approx 1$).

Pour évaluer plus précisément le comportement de $\alpha_{mn}(f_{mn})$, la figure 7.13 présente les résultats pris en moyenne glissante sur 30 modes. Ce nombre important, qui couvre une bande de fréquence de l'ordre de 2500-3000 Hz, est justifié par la lenteur de la variation de la fonction

$\alpha_{mn}(P_0)$.

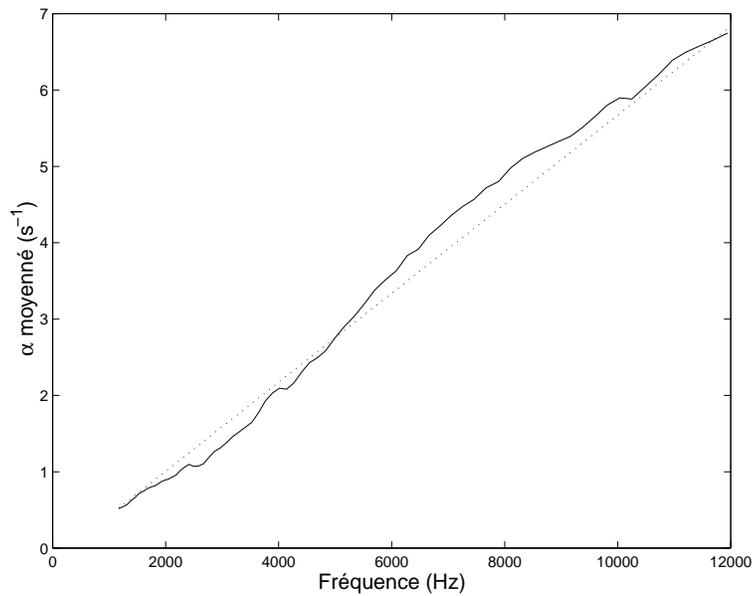


FIG. 7.13: Facteur d'amortissement moyenné sur 30 valeurs modales. En pointillé, les valeurs correspondant à la prédiction de la régression linéaire sur les données de la figure 7.12

Ce graphe confirme plus nettement l'hypothèse d'un facteur de perte indépendant de la fréquence dans la zone de fréquence étudiée. La valeur de ce facteur de perte déduite de la régression linéaire sur $\alpha_{mn}(f_{mn})$ est :

$$\delta = 1.85 \cdot 10^{-4}$$

Ce facteur est un peu inférieur aux valeurs fournies dans la littérature, qui sont de l'ordre de $5 \cdot 10^{-4}$ (Ungar, 1992). En outre, A. Carraciolo (1993) après un travail sur la même plaque mais avec des moyens d'investigation différents (analyse modale) obtient des résultats voisins ($1.67 \cdot 10^{-4}$).

◇ Facteur de perte par rayonnement et rendement acoustique

Le facteur de perte par rayonnement est obtenu à partir de la mesure de σ_{mn} et de la masse surfacique de la plaque grâce à la formule 7.17. Ces mesures sont données mode à mode en dB.

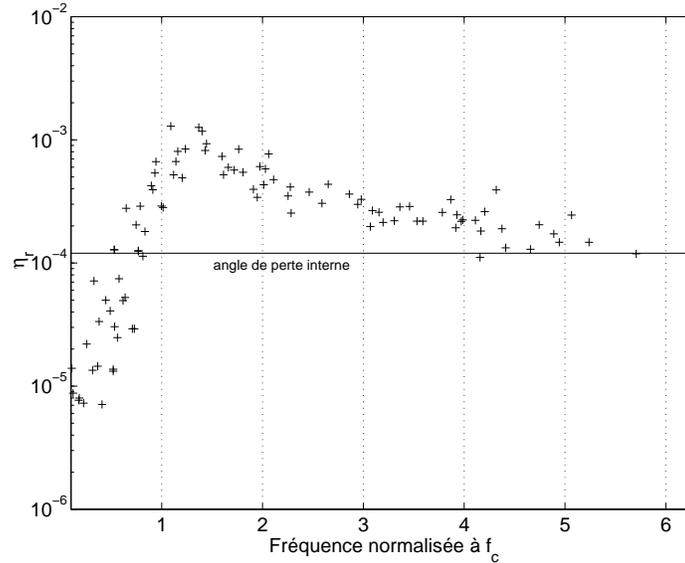


FIG. 7.14: Facteur de perte par rayonnement pour une plaque en acier. Ce facteur est l'équivalent d'un angle de perte acoustique.

Le facteur de perte par rayonnement est maximum pour le mode à 3220 Hz. Cette valeur est voisine de la fréquence de coïncidence théorique. A cette fréquence, η_r est plus de 10 fois supérieur à δ . Pour $f \gg f_c$ le facteur de perte interne se rapproche asymptotiquement de δ par valeur supérieure. En haute fréquence, l'énergie dissipée est *également partagée* entre les pertes internes et le rayonnement acoustique.

La figure 7.15 qui suit est une alternative pour présenter les résultats précédents. Le rendement acoustique donne la proportion d'énergie dissipée par transfert vers le champ acoustique dans l'énergie dissipée totale.

Les valeurs de rendement approche les 100% pour les fréquences légèrement supérieure à la fréquence de coïncidence. A ces fréquences, la dissipation d'énergie est pratiquement entièrement due à la contribution acoustique. Pour $f \gg f_c$ le rendement prend des valeurs proches de 50% ce qui correspond à la conclusion précédente concernant le facteur de perte par rayonnement. Cette tendance asymptotique vers $\mu_r = 0.5$ est confirmée par la représentation prise en moyenne sur 10 modes (figure 7.16).

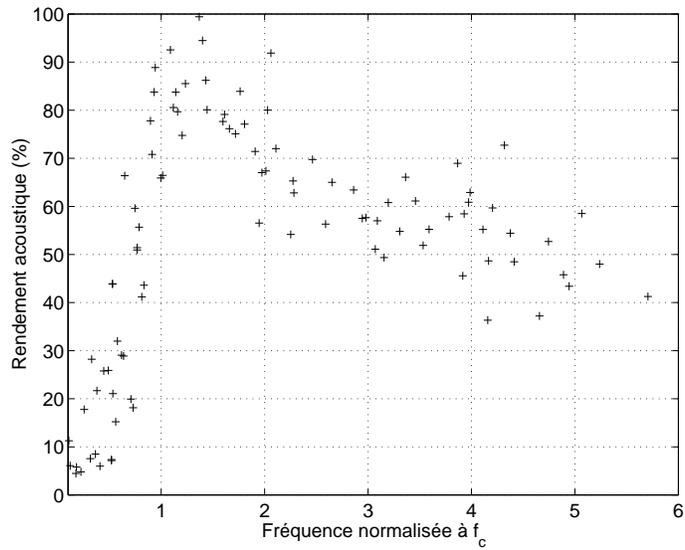


FIG. 7.15: Rendement acoustique pour une plaque en acier en fonction de la fréquence. Chacune des valeurs est relative à un mode de vibration.

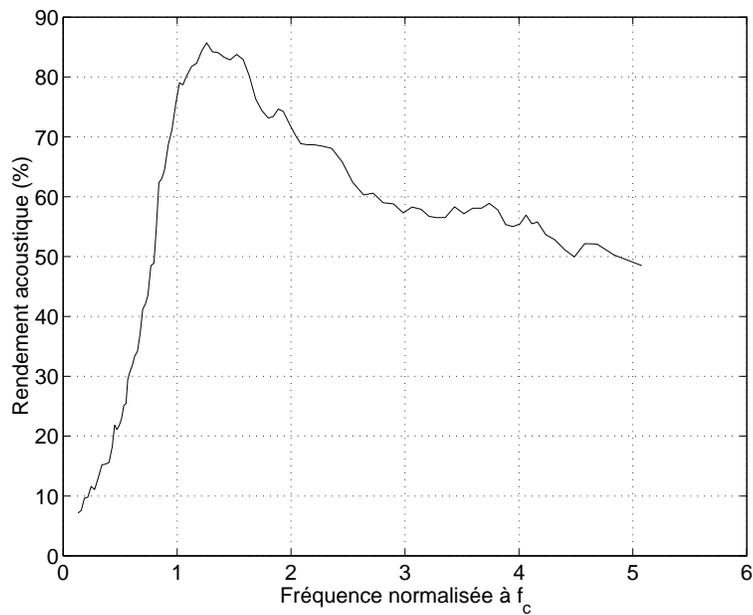


FIG. 7.16: Rendement acoustique pour une plaque en acier, pris en moyenne sur 10 modes.

7.4.5 Synthèse sur ce cas expérimental

Nous synthétisons les résultats précédent en décrivant le comportement de l'impédance de rayonnement pour différentes zones de fréquence. Ce comportement est déduit des valeurs prises en moyenne sur les modes de vibration. Il est décrit de la manière suivante :

- pour la partie réelle normalisée $r_r = \sigma_r$, nous distinguons trois zones de fréquence :
 - $f < 0.5f_c$: la pente est de 6 dB/octave,
 - $0.5f_c < f < f_c$: la pente est de 12 dB/octave
 - $f > 1.5f_c$: $\sigma_r = 1/\sqrt{1 - f_c^2/f^2}$ (expression pour la plaque infinie)

la valeur maximum est donnée par $\sqrt{P/(2\lambda_c)}$ où P est le périmètre de la plaque et λ_c la longueur d'onde de coïncidence. Cette valeur est atteinte pour $f \approx 1.4f_c$

- pour la partie imaginaire normalisée x_r , dans la zone de fréquence $f < f_c$ le comportement est du type inertiel. Il correspond à une masse ajoutée constante de l'ordre de $x_r/(ka) = 0.1$ où $a = \sqrt{S}$ est la dimension caractéristique de la plaque. Le comportement trouvé pour $f > f_c$ est moins clair. La masse ajoutée est grossièrement divisée par 10 entre f_c et $2f_c$ puis reste constante dans le reste de notre bande d'étude (ici jusqu'à $5f_c$)

7.5 Application à une plaque en aluminium

L'objectif de ce paragraphe est d'évaluer sur une plaque métallique en aluminium qui présente à la fois une fréquence de coïncidence différente et des pertes internes différentes, le degré de généralité des conclusions données pour la plaque en acier.

7.5.1 Caractéristiques de la plaque

Les caractéristique de cette plaque en aluminium sont :

- Masse : 1.72 kg
- Masse volumique : $\rho_m = 2.71 \cdot 10^3 \text{ kgm}^{-3}$
- Masse surfacique : $\rho_s = 13.6 \text{ kgm}^{-2}$
- Dimensions : 285x445x5mm
- Module d'Young : $7.410^{10} \text{ Nm}^{-2}$

- Coefficient de Poisson $\nu = 0.3$
- Fréquence de coïncidence $f_c = 2360$ Hz
- Espacement intermodal moyen : 123 Hz.

7.5.2 Résultats sur l'impédance de rayonnement

Nous présentons ici deux graphes. Le premier est facteur de rayonnement modal en fonction de la fréquence normalisée à la fréquence de coïncidence. Le deuxième présente sur la même figure les valeurs moyennées sur 10 modes du facteur de rayonnement et de la masse ajoutée.

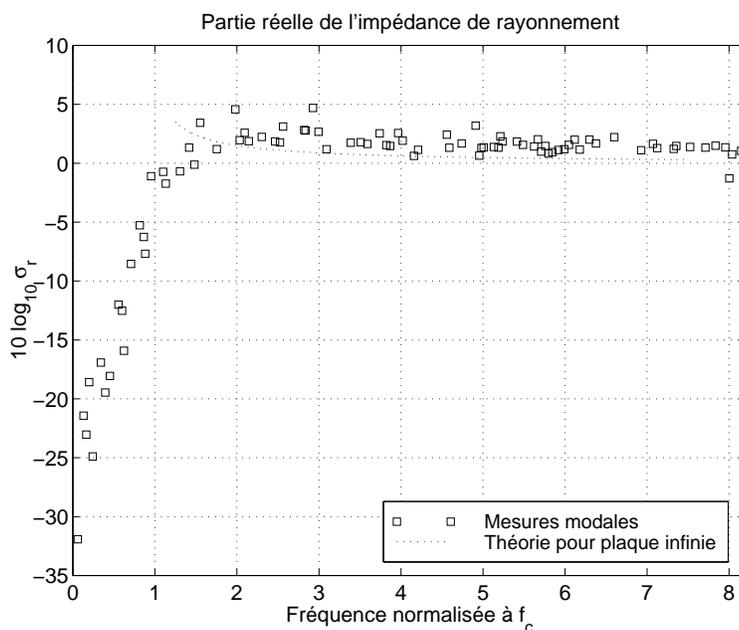


FIG. 7.17: Partie réelle de l'impédance de rayonnement normalisée à $\rho_0 c$, pour une plaque en aluminium. Le pointillé indique la valeur théorique pour la plaque infinie.

L'allure de cette courbe présentée figure 7.17 est analogue à celle trouvée pour la plaque en acier. Nous relevons cependant certaines différences. Le facteur de rayonnement est plus élevé dans la bande $f > f_c$ que dans le cas de l'acier. La plupart des valeurs modales sont situées *au dessus* de la valeur théorique. Il tend moins vite vers la valeur 1 pour $f \gg f_c$. Le maximum du facteur de rayonnement est obtenu pour le mode à 4750 Hz, soit $2f_c$ contre $1.4f_c$ pour la plaque en acier. Ce maximum vaut 2.3. Il est là aussi en bonne concordance avec la valeur donnée par l'équation 7.24 : 2.25.

La figure 7.18 permet de comparer les comportements globaux. Les similitudes puis les

différences avec les résultats relatifs à la plaque en acier sont énumérés ci-dessous :

- les allures d'ensemble sont comparables, tant pour la partie active que pour la partie de masse ajoutée
- le facteur de rayonnement croît de -12 dB/octave dans la bande $[0.5f_c, f_c]$,
- la valeur de σ_r pour $f = f_c$ est de l'ordre de $-3dB$,
- la colonne d'air équivalente est dans les deux cas de hauteur $\approx 0.1a$ où a désigne la dimension caractéristique de la plaque,
- la masse ajoutée commence à décroître pour $f = f_c$ et tend vers une valeur constante pour $f \gg f_c$. Cette valeur est 10 fois inférieure à celle dans la bande $f < f_c$,
- la valeur du facteur de rayonnement est plus importante pour la plaque en aluminium dans la région $f > f_c$ que pour la plaque en acier. Son rayonnement est plus efficace de 2 ou 3 dB.
- le comportement du facteur de rayonnement pour la plaque d'aluminium dans la région $f < 0.5f_c$ ne semble pas s'infléchir, contrairement au cas de la plaque en acier. Mais le petit nombre de modes correspondant à cette région ne permet pas de conclure définitivement.

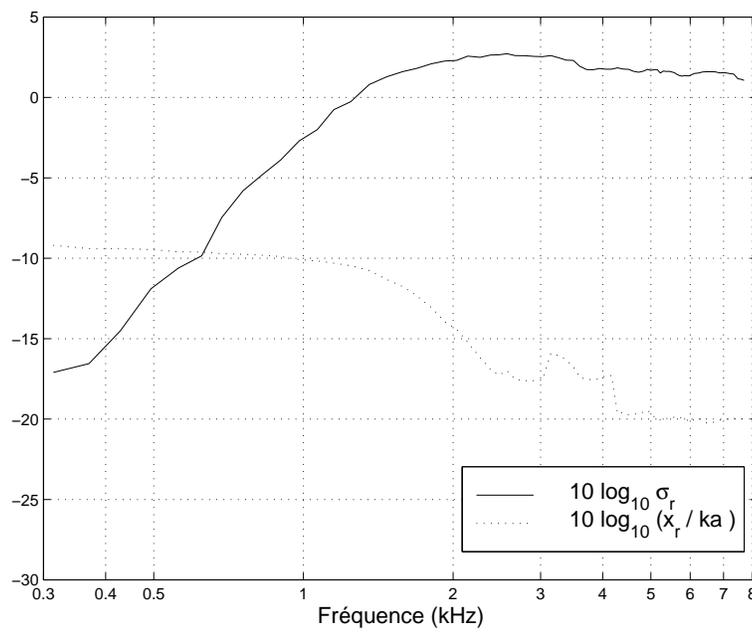


FIG. 7.18: Parties réelle r_r et masse ajoutée $x_r/(ka)$ moyennées sur 10 modes.

7.5.3 Résultats sur les pertes internes

Ceux-ci constituent un complément. Le graphe des facteurs d'amortissement modaux en $P_0 = 0$ en fonction des fréquences modales est donné figure 7.19. Deux facteurs contribuent à la grande dispersion des points : d'une part la faiblesse des amortissements internes qui peuvent être masqués par la dissipation d'énergie dans les suspensions et d'autre part l'incertitude sur les valeurs estimées (*cf.* le paragraphe sur les pertes internes pour la plaque en acier).

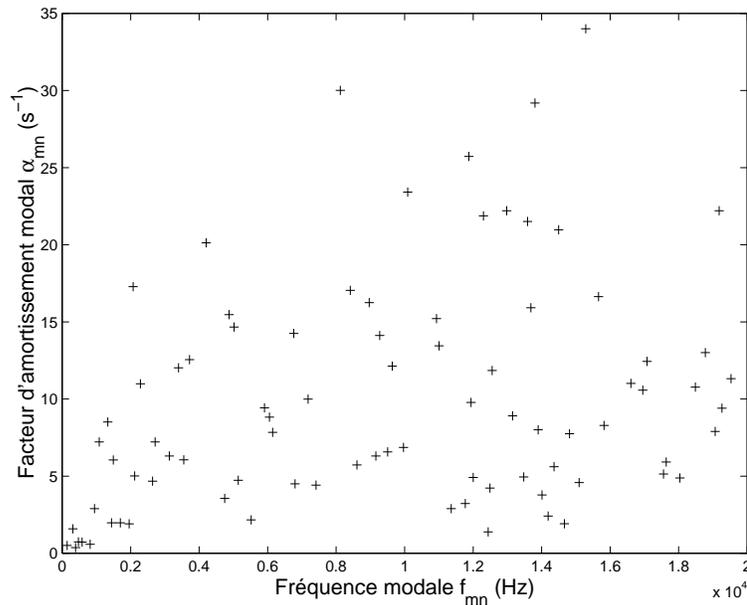


FIG. 7.19: Facteurs d'amortissements modaux en fonction des fréquences modales.

Le facteur de perte trouvé par régression linéaire vaut :

$$\delta = 1.2 \cdot 10^{-4}$$

. En raison de la grande dispersion des mesures, il faut rester prudent sur la précision de cette valeur mais c'est un ordre de grandeur cohérent avec les valeurs données par d'autres auteurs (Ungar, 1992).

7.6 Résultats obtenus dans le cadre de la commission C. Valor.

La commission C. Valor de Validation des Progiciels de calcul VibroAcoustique SFM-SFA⁴ a rassemblé des industriels et des chercheurs dans le but de valider les progiciels de calcul du rayonnement acoustique de structure. Les comparaisons ont portées sur les résultats issus de

4. Société Française des Mécaniciens, Société Française d'Acoustique

différents modèles de calcul et sur des résultats expérimentaux relatifs à des structures simples. La synthèse des résultats de cette commission est disponible dans le rapport à diffusion publique (Valor, 1996).

Les résultats étaient transmis de manière *indépendante* à la commission par chaque équipe, sans connaissance préalable des résultats des autres participants.

7.6.1 Cas expérimental E.1.1 de la commission C. Valor

Nous avons participé à la commission C. Valor dans le cadre du cas test expérimental E.1.1. Ce cas test dont la description suit, porte sur l'étude du rayonnement d'une plaque en aluminium :

◇ Structure

- Plaque rectangulaire
- Dimensions : $0.6 \times 0.4 \times 0.006$ m
- Masse ≈ 4 kg

◇ Matériau

- Aluminium (AU2GN)
- masse volumique $\rho = 2800$ kg m⁻³
- module d'Young $E = 0.74 \cdot 10^{11}$ Pa
- coefficient de Poisson $\nu = 0.3$

◇ Fluide

- Air
- masse volumique $\rho = 1.3$ kg m⁻³
- Vitesse des ondes acoustiques $c = 340$ m s⁻¹

◇ Fréquence de coïncidence $f_c \approx 2000$ Hz

◇ Hypothèses de comportement mécanique

- plaque libre-libre, non bafflée, suspendue en 2,3 ou 4 points (au choix) dans un plan vertical, avec ses plus grands côtés horizontaux
- pas de dissipation induite par le système de suspension
- reconstitution d'un couplage plaque-espace libre infini
- excitation ponctuelle au centre de la plaque
- le bruit mesuré doit être dû au seul bruit rayonné par la plaque

7.6.2 Éléments du montage expérimental

Les techniques expérimentales utilisées ont été détaillées dans le chapitre 6. Nous donnons ici les particularités relatives au montage de la plaque d'aluminium étudiée dans le cadre de la commission.

- ◇ **Suspension** La plaque est suspendue en deux points situés en $(x = 0.2 \text{ m}, y = 0.4 \text{ m})$ et en $(x = 0.4 \text{ m}, y = 0.4 \text{ m})$ avec les coordonnées définies sur la figure 7.20.

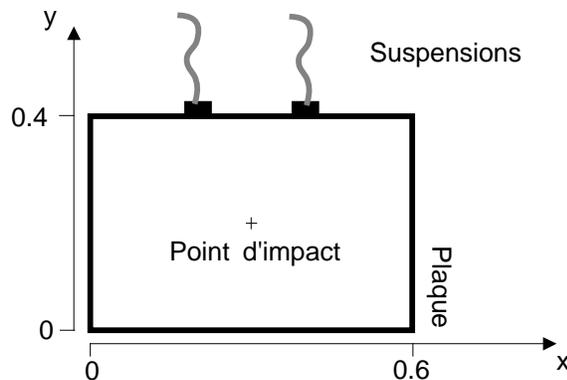


FIG. 7.20:

- ◇ **Excitation et capture du signal** La plaque est excitée par impact, au centre de la plaque, à l'aide du marteau d'impact DYTRAN. Le signal vibratoire est capté par l'accéléromètre B&K 4374.

7.6.3 Comparaison avec les résultats des autres expérimentateurs

Les résultats présentés concernent le facteur de rayonnement. Nous comparons nos valeurs modales σ_{mn} avec les valeurs continues $\sigma(\omega)$ prises en ω_{mn} obtenues d'une part à l'ONERA et d'autre part à l'INRS. Deux graphes présentent les résultats comparés : un pour la bande 0-1000 Hz et l'autre pour la bande 0-5000 Hz.

Les expérimentations de l'ONERA et de l'INRS fournissent des résultats comparables à quelques dB près (différences max de l'ordre de 5 à 6 dB). Nos valeurs se trouvent également dans cette fourchette d'erreur. Au delà de 1000 Hz les mesures de l'INRS sont le plus souvent quelques dB en dessous de celles de l'ONERA. Nos valeurs sont le plus souvent très proches de celles obtenues à l'INRS.

7.7 Conclusion

La mesure des paramètres modaux à des pressions statiques décroissantes donne accès à la valeur de l'impédance de rayonnement pour chacun des modes sous l'hypothèse de pouvoir négliger le couplage entre les équations modales *in vacuo* du mouvement introduit par le rayonnement. A partir des valeurs d'impédance, il est possible d'obtenir des grandeurs acoustiques caractéristiques : facteur de rayonnement, masse ajoutée par le rayonnement, facteur de perte par rayonnement et rendement acoustique. Un ordre de grandeur des pertes internes est également trouvé.

La comparaison entre les résultats pour deux plaques différentes (acier et aluminium) fait ressortir les comportements généraux :

- un facteur de rayonnement modal σ_{mn} est petit devant 1 pour les fréquences inférieures à la fréquence de coïncidence et devient de l'ordre de l'unité pour les fréquences supérieures,
- pour les fréquences inférieures à la fréquence de coïncidence, la masse ajoutée par le rayonnement est équivalente à une colonne d'air de hauteur $0.1a$ où a désigne la dimension caractéristique de la plaque (racine carrée de sa surface). Cette masse ajoutée devient faible pour les fréquences supérieures à la fréquence de coïncidence,
- la valeur du facteur de rayonnement pour les fréquences supérieures à la fréquence de coïncidence est comparable à son expression théorique pour une plaque infinie.
- le rendement acoustique devient de l'ordre de 50% pour les hautes fréquences (\gg devant la fréquence de coïncidence).

Cette mise en évidence du point de vue qualitatif et quantitatif du phénomène de coïn-

FIG. 7.21: Courbes de facteur de rayonnement obtenues par des mesures à l'ONERA (pointillés) et à l'INRS (traits pleins) comparées aux points obtenus par la méthodes par mise sous vide (notés par des "*").

cidence pour des plaques métalliques constitue une première validation de notre méthode expérimentale. Une autre validation quantitative est fournie par la comparaison de nos mesures avec celles obtenues de manière indépendante par d'autres équipes. Notre méthode, bien que ne reproduisant pas les conditions de champ libre (espace infini) donne des résultats comparables à ceux trouvés par l'INRS et ONERA par des techniques intensimétriques en chambre sourde.

Chapitre 8

Application à la guitare classique

Résumé

La mesure du rendement acoustique de la guitare classique fournit une caractérisation énergétique de l'instrument. Cette caractérisation prend son sens lorsqu'on sait combien les luthiers et les guitaristes sont attentifs à la puissance sonore. Cette étude, qui est un prélude à celle de l'instrument complet, porte sur la vibration de la corde de Mi grave. Les fréquences et les amortissements de chaque partiel sont estimés à des pressions décroissantes. Deux comportements — croissant et décroissant — des facteurs d'amortissement en fonction de la pression statique sont mis en évidence. Une interprétation de ces résultats est donnée, selon que l'impédance au chevalet est dominée par ses éléments actifs ou réactifs. Les rendements acoustiques de chaque partiel sont alors obtenus, qui montrent des résultats compris entre 20 et 60 % pour la plupart d'entre eux.

8.1 Introduction

La guitare classique moderne existe depuis environ un siècle dans sa forme actuelle, tant du point de vue de sa morphologie que de son esthétique sonore. Ses principales caractéristiques de facture ont été stabilisées par le luthier espagnol Antonio de Torres. Citons notamment le corps élargi qui donne plus de volume à la caisse de résonance et le barrage en éventail de la table d'harmonie (raidisseurs en bois collés à l'arrière). Ces deux caractéristiques confèrent à la guitare de A. de Torres une puissance de jeu accrue par rapport aux instruments antérieurs et un timbre plus riche et plus rond. Ces qualités de sonorité ont inspiré les compositeurs et les virtuoses. Un historique très complet est disponible dans (Evans et Evans, 1977). Depuis lors, l'interprétation des oeuvres écrites pour guitare et orchestre, parfois dans des salles de grand volume, rend les solistes très attentifs à la puissance sonore de l'instrument.

L'étude du rendement acoustique de la guitare est un moyen d'approcher cette question : connaître la proportion d'énergie rayonnée sous forme acoustique donne une indication sur l'efficacité sonore de l'instrument.

L'acoustique des instruments de musique à corde et leurs propriétés mécaniques constitue depuis de nombreuses années un riche sujet de recherche. L'étude du violon (Cremer, 1985; Hutchins et Benade, 1997) et, dans une moindre mesure, de la guitare, a donné lieu à des approches diverses. Parmi les moyens d'investigation on peut citer les travaux sur la corde vibrante d'un point de vue de la modélisation et de l'expérimentation (Valette et Cuesta, 1993) et sur la vibration des plaques minces en bois (Ross et Rossing, 1979; Rossing, 1982). Les vibrations de l'instrument complet, cordes montées et accordées, ont été étudiées expérimentalement par des méthodes de visualisation holographique des modes de vibration (Jansson, 1971; Richardson et Roberts, 1983). Les couplages mécaniques et acoustiques des vibrations de la corde et du corps de l'instrument s'opèrent au travers du chevalet, des éclisses et de la cavité. Ces couplages sont difficiles à modéliser avec précision sur une large gamme de fréquence en raison du nombre de paramètres qui entrent en jeu (la disposition du barrage en étant un exemple frappant par sa diversité) mais il existe néanmoins des modèles à constantes localisées (Caldersmith, 1978; Cristensen, 1982) qui rendent compte du comportement de l'instrument à basses fréquences (< 300 Hz). L'étude qualitative du couplage des modes de vibration transverses et longitudinaux de la corde avec les modes de vibrations de la table d'harmonie et/ou avec les modes de vibration des autres cordes par l'intermédiaire du chevalet permet une compréhension de phénomènes observés pour la guitare et pour d'autres instruments à cordes libres munis d'un chevalet comme par exemple le piano. Une étude générale de ces couplages est développée dans (Weinreich, 1977) avec application au phénomène de double décroissance des notes de piano et vaut également pour la guitare, pour laquelle le phénomène est également noté dans (Jansson, 1983).

L'objectif de nos expérimentations est d'obtenir une mesure du rendement acoustique de la guitare, c'est à dire de la proportion d'énergie rayonné sous forme acoustique dans l'énergie dissipée totale. Strong (1982) utilise l'holographie acoustique pour caractériser le rayonnement de la guitare du point de vue énergétique. Un autre moyen d'obtenir des mesures énergétiques globales du rayonnement acoustique de structure vibrante est l'intensimétrie qui utilise en général des sondes intensimétriques placées au voisinage de la surface vibrante. Cette technique a été notamment appliquée au piano (Suzuki, 1986) et à la guitare (Lai et Burgess, 1990). Complétée par des mesures de vibration (force et vitesse à la surface) qui donnent accès à la puissance mécanique, elle permet d'obtenir des valeurs de rendements acoustiques. (Lai et Burgess, 1990) obtient ainsi des valeurs de 12% et 14% de rendement acoustique pour les tables d'harmonie de deux guitares différentes. Ces mesures ne tiennent pas compte du rayonnement de la rose.

Notre technique, qui utilise la mise sous vide des structures vibrantes, présente l'avantage de ne nécessiter qu'un seul capteur suivi d'une chaîne d'échantillonnage et de traitement. La

structure est étudiée en vibration libre ce qui limite les causes de dissipation par contact avec les instruments de mesure (une tête d'impédance par exemple). Le montage de mesure est décrit au paragraphe 8.3 et les algorithmes de traitement ont été détaillés dans le chapitre I.

Cependant, pour valider des mesures effectuées lorsque la guitare est soumise à une dépression ambiante (typiquement 1 à 10 mB), il est nécessaire de vérifier que la variation des paramètres mécaniques et la composition chimique des bois de lutherie reste limitée lors de ces expériences. Cette vérification a fait l'objet d'une expérimentation préliminaire sur une verge encastrée en épicéa.

Les résultats des expérimentations sur la guitare, présentés ensuite, concernent uniquement la corde de Mi grave. Ils demanderaient à être généralisés à tout l'instrument pour donner des points de comparaison.

8.2 Étude préliminaire d'une verge encastrée en épicéa

L'objectif de cette étude préliminaire est de détecter les éventuelles modifications des caractéristiques mécaniques lors de la mise sous vide pour des structures en bois. Elle est menée sur une éprouvette en épicéa.

La composition chimique de ce matériau, et en particulier la proportion d'eau qu'il contient, est susceptible de se modifier lors de la mise sous vide. L'humidité recelée se trouve sous deux formes. Le bois est constitué de cellules poreuses remplies d'air à humidité ambiante et contient d'autre part de l'humidité chimisorbée dans les fibres, c'est à dire des molécules d'eau liées chimiquement à la lignine qui compose les parois des cellules. Lorsque l'air est évacué, l'humidité contenue dans les cellules est évacuée vers l'extérieur et des forces de diffusion s'exercent sur les molécules liées qui tendent à rompre les liaisons. L'épicéa étudié ici est un bois de lutherie. Il a été stocké plusieurs années pour assurer le séchage et ne devrait pas posséder plus de 10% d'humidité relative.

D'autre part des contraintes peuvent apparaître sur les parois des cellules par différence de pression intérieure/extérieure lors de la mise sous vide. Les valeurs des modules d'élasticité, qui est reliée fortement à la disposition et à la forme géométrique des cellules (Kahle et Woodhouse, 1994), pourraient être affectée.

L'étude dont les résultats sont rapportés ci-dessous apporte une réponse globale à ces questions. Une estimation précise des fréquences et facteurs d'amortissement pour les modes de vibrations de verges encastrées en épicéa permet de détecter si ces valeurs sont modifiées lors de la mise sous vide.

8.2.1 Description de l'expérience

L'étude expérimentale porte sur une verge encastrée en épicéa (origine : Forêt Noire) dont les dimensions sont précisées sur la figure 8.1.

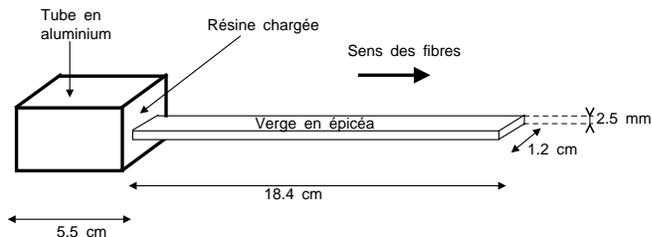


FIG. 8.1: Verge encastrée en épicéa.

L'éprouvette est fortement maintenue sur le côté de la cuve, fixée par un serre-joint. L'excitation est assurée par le marteau d'impact DYTRAN 5800SL. Le point d'impact est situé sur la partie terminale de l'éprouvette. Les signaux de vibration sont captés par un accéléromètre Brüel et Kjaer 4374 (poids 0.65 g) placé le plus près possible de l'encastrement.

- ◇ **Réalisation de l'encastrement** Celui-ci est réalisé conformément à une technique mise au point par S. Vaiedelich (1995) (Vaiedelich, 1995). Un tube creux en acier de section carrée (25mm×25mm) est rempli d'une résine polyester chargée par un mélange de fonte pulvérisée et de silice colloïdale. Le corps d'épreuve en épicéa est préalablement maintenu centré à l'intérieur du tube creux, sa longueur disposée parallèlement à la l'axe du tube. De cette manière, après séchage, l'éprouvette en bois se trouve prise dans un bloc de résine dense et dur sans écrasement.
- ◇ **Déroulement de l'expérimentation** L'expérimentation consiste à mesurer des signaux issus de la vibration libre de la verge encastrée et comprend plusieurs étapes :
 1. Mesures (1) et (2) à pression atmosphérique, à 15 minutes d'intervalle
 2. Descente rapide jusqu'à 40 mbar. Mesures (3) à (10) toutes les 15 minutes à 40 mbar.
 3. Pompage pendant 24 h. La pression est alors maintenue basse, aux environs du mbar.
 4. Mesures (11) à (21) prises en remontant de la pression nulle à la pression atmosphérique par pas de 100mbar.

8.2.2 Traitement des données

Le tableau 8.1 ci-dessous transcrit les résultats fournis par les deux méthodes de traitement du signal décrites dans la partie I : la méthode fondée sur la transformation de Hilbert et la méthode matrix-pencil.

Hilbert				
f (Hz)	α (s ⁻¹)	$\delta\alpha/\alpha$ (%)	A ₀	Err (dB)
1174.68	4.14e+001	0.1	5.24e+002	-27.7
Matrix pencil				
f (Hz)	α (s ⁻¹)	$\delta\alpha/\alpha$ (%)	A ₀	Energie (dB)
1173.94	5.80e+001	56.4	4.53e+002	0.0
1177.92	2.84e+001	58.4	1.81e+002	-4.9
1158.86	4.75e+001	420.9	9.84	-32.4
1108.55	8.54e+001	633.5	2.35	-47.3
1136.82	1.01e+001	999.0	2.40e-001	-58.2

TAB. 8.1: Résultats des estimations modales par deux méthodes ("Hilbert" et matrix pencil) pour le mode à 1174 Hz d'une verge encastrée en épicéa vibrant à pression atmosphérique. $\delta\alpha/\alpha$ est l'incertitude relative sur les amortissements. Les composantes sont classées par ordre décroissant d'énergie, comptée en dB par rapport à la composante la plus forte.

Les deux méthodes sont concordantes à 0.2 % pour les fréquences mais divergent sur l'estimation du facteur d'amortissement (40 % si on se réfère à la première composante matrix pencil). La lecture de l'énergie des composantes montre que matrix pencil décompose la vibration sur deux composantes proches (l'énergie de la troisième se situe presque 30 dB plus bas). Cependant, le calcul des incertitudes nous indique le peu de fiabilité de ces résultats.

L'amplitude instantanée du mode et des composantes trouvées par "Hilbert" et matrix pencil sont représentées en dB sur la figure 8.2. La décroissance du signal, comparée à la décroissance synthétisée à partir des estimations "Hilbert", apparaît comme légèrement non linéaire : la courbe synthétique est superposable à la courbe expérimentale au début de la décroissance alors que dans la partie finale le facteur d'amortissement réel prend manifestement des valeurs plus faibles. L'énergie du signal d'erreur entre le signal mesuré et le signal reconstitué est alors de -28 dB par rapport à l'énergie du signal mesuré.

L'algorithme matrix pencil décompose le signal en deux composantes principales mais, compte tenu de l'incertitude de plus de 50% sur les valeurs de facteur d'amortissement, cette décomposition apparaît comme un artifice lié au modèle de signal (somme de sinus amortis). Cette remarque est motivée par deux arguments supplémentaire :

- l'application de matrix pencil à un signal synthétique composé d'une exponentielle complexe dont la décroissance est faiblement non linéaire et d'un bruit additif fournit des résultats comparables,
- le déplacement des verges dans l'air s'accompagne d'un frottement visqueux dans l'air dont certains effets sont non linéaires pour les amplitudes fortes (décollement, tourbillons, turbulences).

Les effets non linéaires liés à la présence du fluide diminuent avec la pression acoustique (Valette, 1994). Pour appuyer la deuxième hypothèse nous faisons figurer sur la figure 8.3 les décroissances comparées du même mode de vibration à 1177 Hz à la pression atmosphérique et à 40 mbar. Les amplitudes à l'origine ont été ajustées à 0 dB pour rendre la lecture commode mais elles sont peu différentes (2 dB). La décroissance à $P_0 = 40$ mbar présente un comportement non linéaire moins marqué.

Ce comportement légèrement non linéaire est observé pour la plupart des décroissances modales. Les incertitudes sur les résultats fournis par l'estimation matrix pencil nous ont conduit à utiliser la méthode fondée sur l'analyse de Hilbert dans ce cas expérimental. La faiblesse de la non linéarité nous permet de comparer les valeurs de facteur d'amortissement pour les mesures successives décrites au paragraphe 8.2.1.

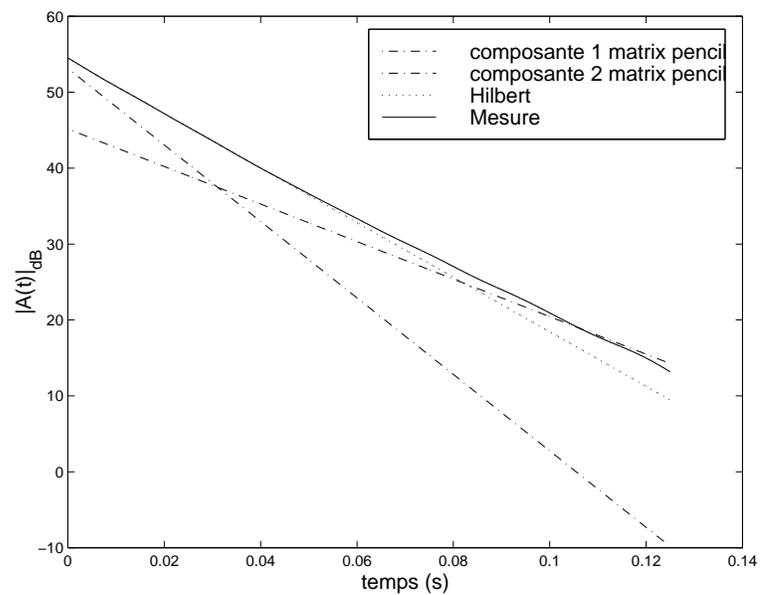


FIG. 8.2: Décroissance du mode de vibration à 1177 Hz d'une verge en épicéa. Les décroissances synthétisées à partir des estimations par matrix pencil et par "hilbert" sont représentées.

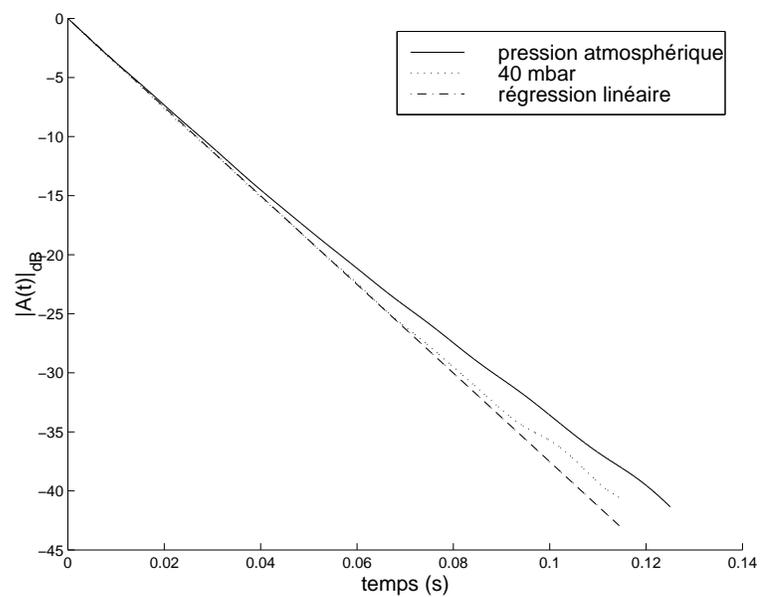


FIG. 8.3: Décroissances du mode à 1177 Hz d'une verge en épicéa environnée d'air à pression atmosphérique et à 40 mbar. La régression linéaire sur la décroissance à 40 mbar est tracée.

8.2.3 Résultats et discussion

Les 4 premières fréquences modales de l'éprouvette sont 67 Hz, 419 Hz, 1173 Hz et 2242 Hz. Les résultats ci-dessous concernent les modes à 420 Hz et 1173 Hz qui présentent, du fait du point d'excitation et du poids du marteau d'impact, les rapports signaux à bruit les plus favorables.

Les faibles dimensions de l'éprouvette par rapport à la longueur d'onde des premiers modes de vibration lui confèrent un comportement acoustique essentiellement dipolaire. La puissance acoustique délivrée par un dipôle est donnée par (Bruneau, 1983)

$$\mathcal{P} = \rho_0 c k^4 (Qd)^2 / 24\pi$$

où Q désigne le débit volumique et d la distance entre les deux sources. Un ordre de grandeur rapide pour une déflexion de 1 mm, à la fréquence de 67 Hz nous donne :

$$Q \approx S \times 10^{-3} \times 2f = 3 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3 \text{ s}^{-1}$$

$$\mathcal{P} \approx 10^{-12} \text{ W}$$

Cet ordre de grandeur de puissance acoustique est faible puisqu'il est voisin du seuil audible. D'autre part la durée caractéristique de la décroissance du signal liée à cette perte d'énergie peut être obtenue en évaluant l'énergie potentielle de flexion par unité de longueur:

$$\mathcal{E} = 1/2 EI \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2$$

où E son module d'Young, I son inertie de flexion et $w(x)$ son déplacement transversal. En supposant ce déplacement parabolique $w(x) = 10^{-3}(x/L)^2$ où L est la longueur de la barre et en se référant à des valeurs typiques pour module d'élasticité de l'épicéa ($E = 10 \text{ GPa}$) nous trouvons :

$$\mathcal{E} \times L \approx 0.1 \text{ } \mu\text{J} \text{ pour l'énergie élastique,}$$

$\tau \approx 10^5 \text{ s}$ pour la durée caractéristique de la décroissance énergétique liée au pertes acoustiques.

Le mécanisme d'amortissement lié au rayonnement acoustique peut être négligé. Les seuls effets acoustiques sont inertiels (masse ajoutée). L'amortissement mesuré résulte des contributions dissipatives des pertes internes et des frottements visqueux dans l'air.

◇ Correction de température

La masse ajoutée est proportionnelle à l'impédance caractéristique de l'air $\rho_0 c$ donc à la pression statique et à la *racine carrée* de la température. La présence de cette masse ajoutée

modifie les fréquences modales par rapport à leur valeur *in vacuo*. Ce paragraphe illustre la nécessité de corriger les mesures de fréquence modale pour tenir compte de variations de température pourtant faibles (quelques degrés Celsius).

Le graphique 8.4 montre les variations de la fréquence modale du mode de vibration situé près de 420 Hz suivant les 21 points de mesure définis dans le paragraphe 8.2.1 et non corrigées des effets de la température.

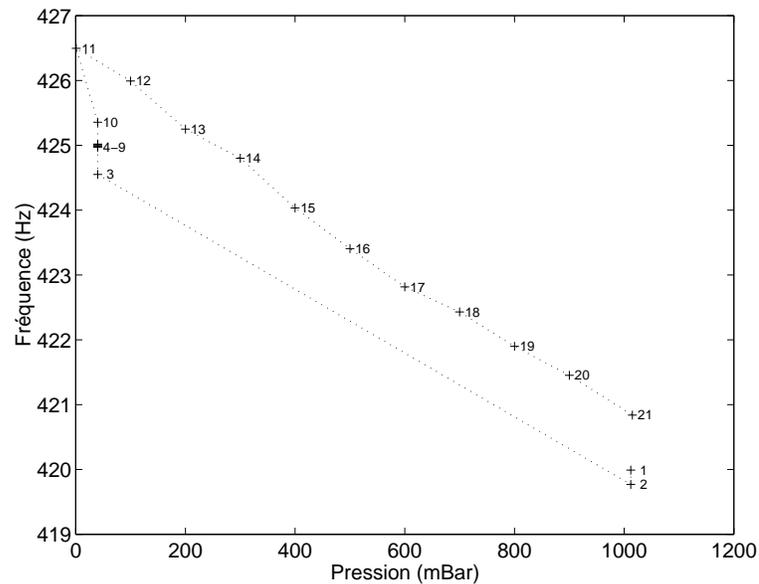


FIG. 8.4: Variation de la fréquence du mode à 420 Hz

L'expérimentation s'est déroulée à des températures comprises entre 32 et 35°C. Dans une première phase (points 1-10), la température se situait près de 32°C et dans une deuxième phase, le lendemain (points 11-21), à des températures supérieures ($\approx 34^\circ\text{C}$). La dépendance de la fréquence en fonction de la pression statique est assimilable à une droite décroissante (points 11-21). Ce résultat est analogue à celui obtenu pour les plaques métalliques et traduit un effet de masse ajoutée par l'air (*cf.* § 6.2.2 et § 7.4.3). La variation de fréquence entre la pression atmosphérique et $P_0 = 40$ mbar est comparable lorsqu'on met en dépression (points 2-3) ou lorsqu'on remonte en pression (points 11-21).

Les valeurs de la figure 8.5 sont ajustées par rapport à une température de référence de 30°C : chaque fréquence $f(P_0)$ devient $f(P_0)\sqrt{303/T_0}$, où T_0 est la température de mesure en kelvins. Nous constatons alors que l'écart entre les fréquences à la montée et à la descente évoqué plus haut est expliqué par la différence de température.

La variation entre la fréquence modale à pression atmosphérique et la fréquence modale à pression nulle est de l'ordre de 1.5 %. La masse ajoutée équivalente correspond deux lames d'air de hauteur 1.3 mm placées de chaque côté de l'éprouvette. Cette valeur est inférieure aux résultats concernant les plaques pour lesquelles cette hauteur est de l'ordre de $0.1\sqrt{S}$ (qui vaudrait 4.5 mm pour l'éprouvette). Elle est en revanche comparable, si on tient compte des deux faces, à l'épaisseur de l'éprouvette (2.5 mm), ce qui peut suggérer que la masse ajoutée correspond au volume d'air enfermé dans les cellules du bois. Celles-ci sont légèrement poreuses (*cf.* par exemple la thèse de D. Douau (1986)) mais nous ne connaissons pas le temps caractéristique du vidage des cellules.

Les résultats concernant le mode à 1173 Hz sont portés figure 8.6 (avec correction de température) et sont analogues à ceux du mode à 420 Hz. Les variations de fréquence correspondent alors à une hauteur d'air équivalente de 1.1 mm pour la masse ajoutée, ce qui est proche de la valeur obtenue pour le mode à 420 Hz.

La conclusion de ces observations est la suivante. Les petites variations de fréquence observées sont imputables à la masse ajoutée par le l'air environnant. Le schéma modal de la verge encastree en épicea dans le vide reste identique — à ces petites variations près — au schéma modal de la même verge vibrant dans l'air.

|| La mise en atmosphère raréfiée n'altère pas de manière significative les paramètres élastiques de l'épicea. ||

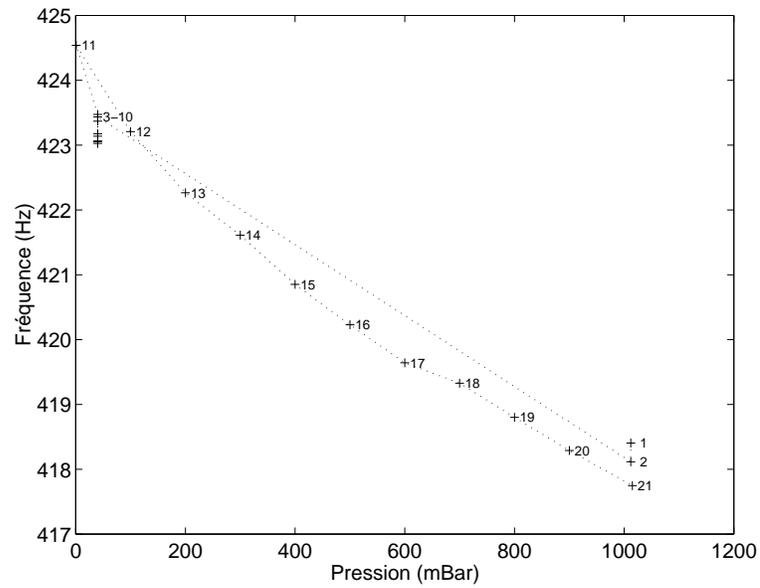


FIG. 8.5: Variation de la fréquence du mode à 420 Hz avec correction de température.

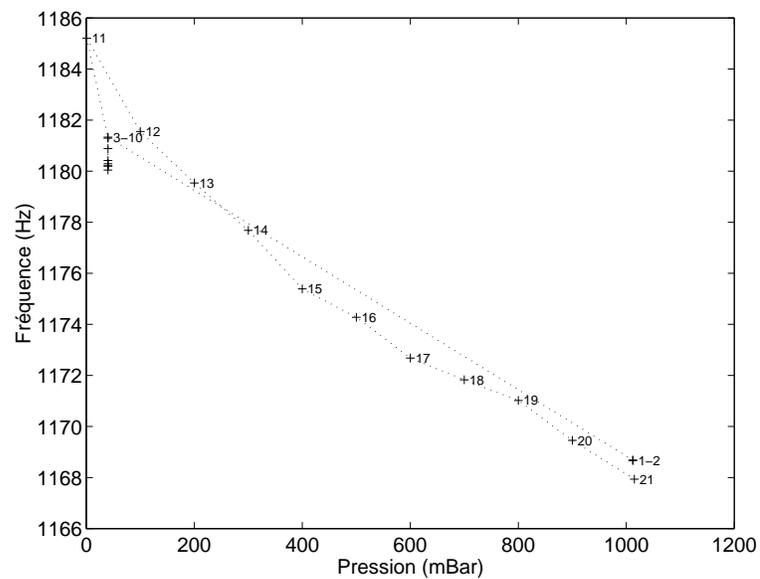


FIG. 8.6: Variation de la fréquence du mode à 1173 Hz avec correction de température.

- ◇ Résultats pour les facteurs d'amortissement Nous cherchons maintenant à savoir si la mise en atmosphère raréfiée altère les propriétés dissipatives du bois : l'ordre de grandeur des pertes internes varie-t-il avec la pression ?

Contrairement aux fréquences, nous n'apporterons pas de correction de température puisque nous avons montré que les amortissements liés au rayonnement acoustique sont très faibles. Les amortissements structuraux et visqueux dépendent de la température mais les variations de celle-ci, exprimée en kelvins, ne sont pas supérieures à 1% tandis que nous nous intéressons à des variations de facteur d'amortissement qui sont de l'ordre de 10 % à 20%.

Les figures 8.7 et 8.8 décrivent les variations du facteur d'amortissement modal, respectivement pour le mode à 420 Hz et pour le mode à 1173 Hz, pour les points de mesure 1 à 21. Les deux graphes sont analogues du point de vue du comportement global : les amortissements restent comparables lorsqu'on descend en atmosphère raréfiée (1-2 puis 3-10) puis ils deviennent plus faibles lorsque l'éprouvette est maintenue sous vide pendant plusieurs heures (10-11). Les mesures d'amortissement lorsque la pression augmente vers la pression atmosphérique (11-21) sont plus dispersées mais restent inférieures à la mesure faite en descendant. Le point 16 de la figure 8.8 reste inexplicable.

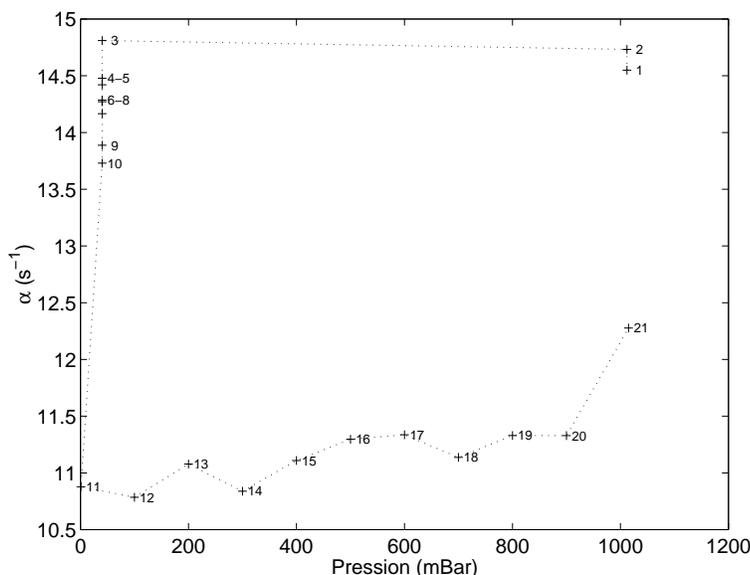


FIG. 8.7: Variation du facteur d'amortissement pour le mode à 420 Hz.

Une explication possible du phénomène global observé est la désorption d'humidité dans le bois. En effet, le bois perd beaucoup plus vite l'humidité qu'il ne la regagne. Les résultats d'une expérimentation de R. Fryxell (1965 et réimpression en 1990) fournissent des temps caractéristiques : une dizaine d'heure pour perdre l'humidité et 10 à 15 semaines pour la regagner. Notre expérience indique que les amortissements sont plus faibles lorsque le bois est plus sec.

Sur le temps que dure une expérience de vibration à différentes pressions statiques (environ 2h), les amortissements ne varient pas plus que de quelques centièmes. Cette variation atteint 20 à 40 % lorsque la station sous atmosphère raréfiée se prolonge au delà d'une dizaine d'heures.

- ◇ Conclusion pour l'étude de la guitare D'après les expériences menées sur l'éprouvette en épicéa, les paramètres d'élasticité du bois ne sont pas modifiés par la mise sous vide. Le déplacement des fréquences ne résulte que de la variation de masse ajoutée par l'air. Les mécanismes dissipatifs sont plus sensibles à la mise en atmosphère raréfiée mais la variation n'excède pas quelques % lorsque l'expérience est menée en quelques heures. Pour comparaison, les facteurs d'amortissement mesurés pour la guitare, tels qu'ils sont présentés dans le paragraphe qui suit, varient de quelques dizaines de % entre l'air et le vide.

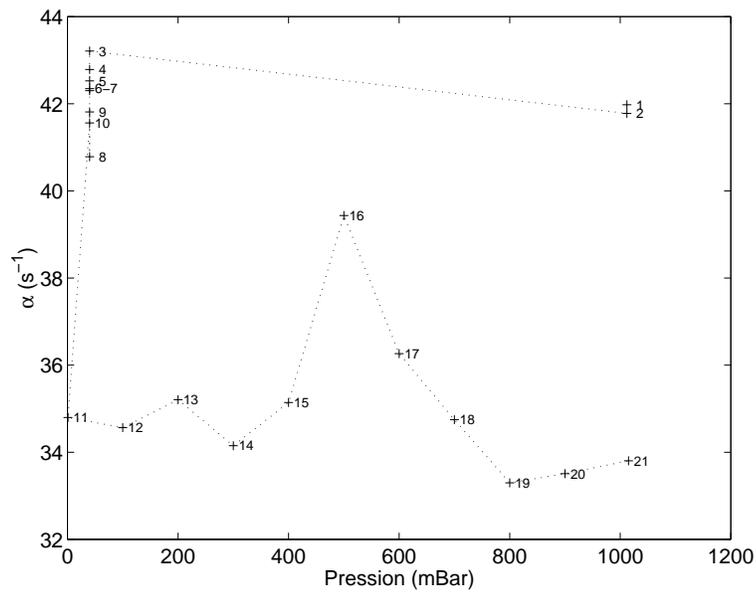


FIG. 8.8: Variation du facteur d'amortissement pour le mode à 1173 Hz.

8.3 Montage expérimental pour la guitare

Ce paragraphe décrit les éléments du montage qui n'ont pas été présentés dans le chapitre 6. Le montage expérimental de mesure sous vide des vibrations au chevalet de la guitare est schématisé sur la figure 8.9. La guitare est suspendue dans l'enceinte à vide, maintenue par

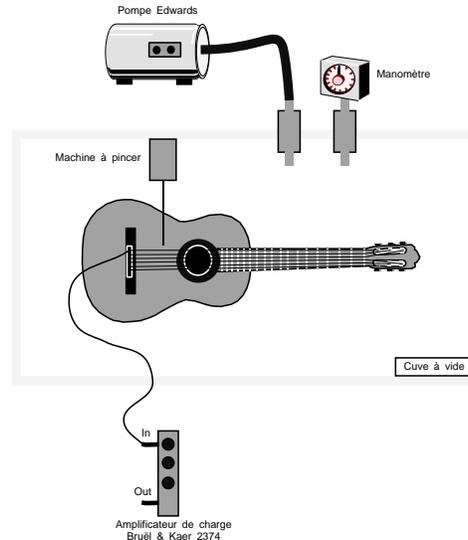


FIG. 8.9: Montage expérimental pour la capture des signaux vibratoires au chevalet de la guitare. L'expérimentation s'effectue à des pressions ambiantes décroissantes contrôlées par le manomètre.

des mâchoires au niveau de la tête. Son manche est horizontal et sa table d'harmonie dans un plan vertical. Elle est pincée par un plectre mis en mouvement à l'intérieur de l'enceinte par un petit moteur. Les signaux captés sont l'accélération au chevalet et la force exercée par la corde au chevalet. L'accéléromètre Knowles BU-1771 est choisi en raison de son poids faible (0.3 g). Les signaux étudiés sont compris dans la bande 0-2000 Hz pour laquelle l'accéléromètre ne présente pas de variation significative de sensibilité.

- ◇ Capteur de force adapté au chevalet Le chevalet de la guitare est creusé par une gorge d'environ 1.5mm dans laquelle vient se loger le sillet. Les cordes reposent sur ce dernier et c'est par son intermédiaire que les efforts sont transmis vers la table d'harmonie. Le capteur de force que nous avons élaboré présente le même profil que le sillet et s'engage à sa place dans la gorge, au niveau de la corde que nous mesurons. Sa géométrie et son placement sont précisés sur les figures 8.10 et 8.11.
- ◇ Technologie du capteur Le capteur de force est réalisé à l'aide de céramiques piézoélectriques bimorphes. Les deux barreaux qui le composent sont assemblés en inversant les po-

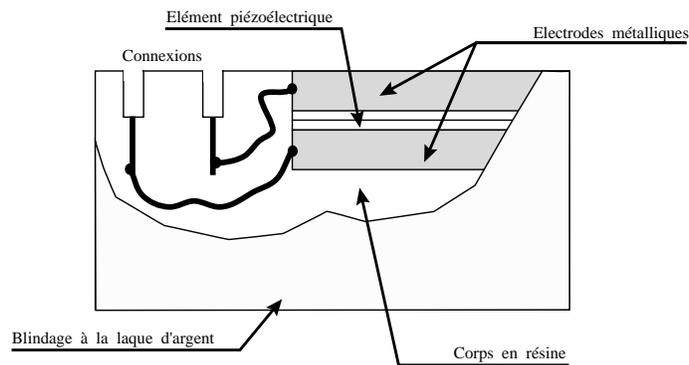


FIG. 8.10: Capteur de force. Les connexions, les électrodes et l'élément piézoélectrique sont moulés dans une résine très dense. Les électrodes et l'élément piézoélectrique sont assemblés par collage. L'électrode supérieure est connectée au blindage.

larités et montés en série. De cette manière, le capteur n'est pratiquement pas sensible à la flexion et est sensible à la compression. Les céramiques sont de fabrication PHILIPS et sont référencées sous l'appellation PXE5. Une contrainte verticale (par rapport à la figure 8.10) fait apparaître des charges sur les électrodes. La conversion de la variation de charge en variation de tension est assurée par un amplificateur de charge Bruël et Kjaer (n° 2635).

La calibration d'un tel capteur nécessite un matériel de précision dont ne disposons pas au laboratoire. l'ordre de grandeur de sa sensibilité, 3.5 pC/g , a été obtenu lors de précédents travaux (David, 1993).

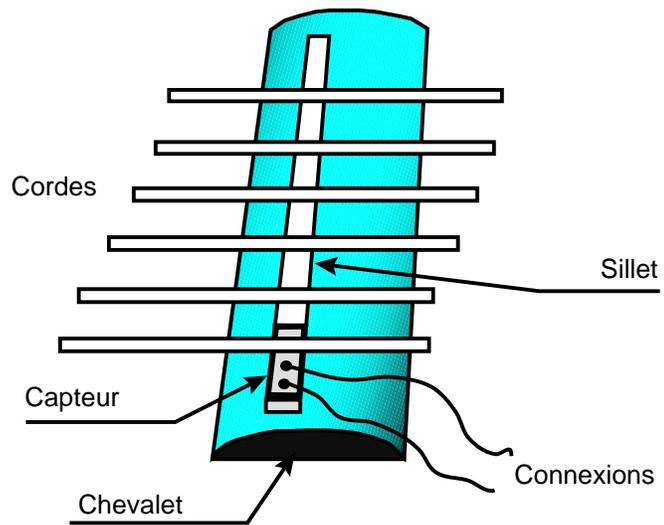


FIG. 8.11: Placement du capteur de force sur le chevalet, dans la rainure réservée au sillet.

8.4 Caractérisation des signaux vibratoires de corde

Dans ce paragraphe et les suivants, nous présentons des résultats de mesure concernant la corde de Mi grave d'une guitare classique. Ceci ne constitue qu'une première approche. Une investigation pour l'ensemble des 6 cordes et pour plusieurs guitares permettrait d'évaluer la généralité des résultats obtenus. Cette étude met en évidence des différences entre l'application de la méthode aux plaques en vibration libre et l'application à la guitare.

Nous avons choisi de présenter successivement les résultats expérimentaux et les modélisations et interprétations physiques qui leur sont reliées.

8.4.1 Spectre

La figure 8.12 présente le spectre du signal de force capté au chevalet. La corde de Mi1 (ou mi grave) mise en jeu a une fréquence fondamentale d'environ 82 Hz. Le rapport signal à bruit est de l'ordre de 40 dB. Le spectre observé est un spectre quasi-harmonique : les pics

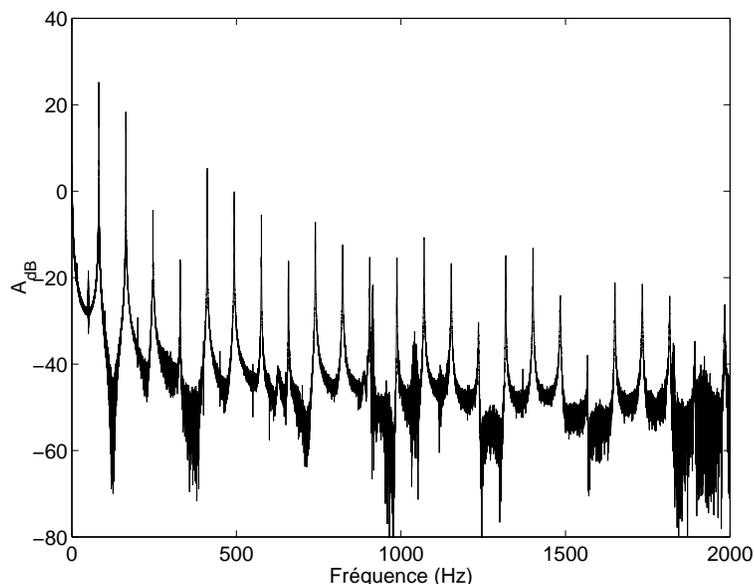


FIG. 8.12: Spectre du signal de force capté au chevalet de la guitare. La corde jouée est le Mi grave.

du spectre, encore appelés *partiels*, sont situés à des fréquences dont le rapport à celle du fondamental est proche d'un entier. Le point de pincement est situé à 19 cm du chevalet, ce qui représente entre $1/3$ et $1/4$ de la longueur totale de la corde (65 cm et $19/65 = 0.29$). la réjection intervient sur les 3 et le 4ème mode de vibration de la corde, ce qui explique l'allure du spectre (harmoniques 3 et 4 et leur multiples plus faibles).

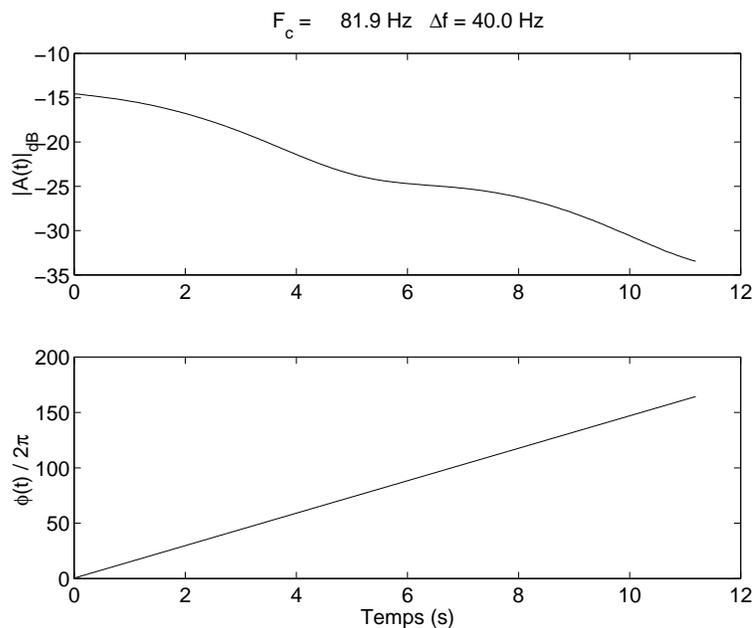


FIG. 8.13: Amplitude et phase instantanées du premier partiel (82 Hz) obtenues par filtrage RIF de fréquence centrale 81.9 Hz et de bande passante 40 Hz. L'échelle en dB-newtons.

La figure 8.13 renseigne sur la forme d'onde correspondant au premier partiel (82 Hz). La modulation de l'enveloppe du signal montre que plusieurs composantes contribuent au premier pic du spectre. Cette propriété caractéristique vaut pour la plupart des partiels et a motivé l'emploi de la méthode matrix pencil (*cf.* chapitre 4) afin d'estimer finement les paramètres de chaque composante et leur variation avec la pression statique.

8.4.2 Inharmonicité

Une particularité des instruments à cordes à son non entretenu, tels le piano, le clavecin ou la guitare, est de présenter des modes de vibration de corde légèrement inharmoniques : la fréquence des modes n'est pas exactement un multiple de la fréquence fondamentale f_0 . Cette inharmonicité influe par exemple sur la technique d'accord des pianos (Fletcher et Rossing, 1998; Kent, 1982) et peut être mise en évidence expérimentalement (Morse et Ingard, 1968; Boutillon *et al.*, 1984). L'étude théorique de cette inharmonicité pour une corde isolée couplée à un chevalet met en évidence deux contributions : une contribution proportionnelle à n^2 , où n est le rang de l'harmonique, due à la raideur de la corde et une contribution liée à la mobilité du chevalet (Morse et Ingard, 1968).

La mesure de l'inharmonicité de la corde de Mi grave est donnée figure 8.14, où est représentée, en fonction de n^2 , la fréquence de la composante la plus importante de chaque partiel, estimée par matrix pencil et normalisée à nf_0 . La représentation en fonction de n^2

a été adoptée ici en référence à l'expression de la contribution liée à la raideur dans le cas d'une corde monofilament alors que la corde de Mi1 est une corde filée, ce qui signifie qu'elle comporte une âme en nylon spiralée de métal.

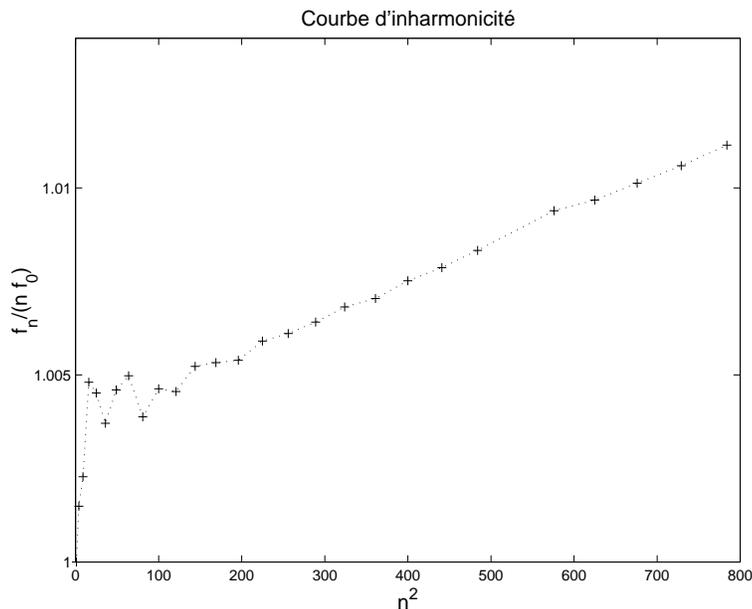


FIG. 8.14: Inharmonicité de la note Mi1 de la première corde de guitare (pincée à vide). La proportionnalité par rapport à n^2 traduit un effet dû à la raideur de la corde.

D'après cette figure, l'inharmonicité mesurée n'excède pas 1% et nous pourrions la considérer comme une perturbation à l'ordre 1. L'équation de propagation d'une corde souple (non munie de raideur) est une équation de d'Alembert classique :

$$\rho_L \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (8.1)$$

w déplacement transverse

ρ_L masse linéique

T_0 tension au repos

La valeur des fréquences modales pour une corde fixée au deux extrémités, $x = 0$ et $x = L$, s'obtient en cherchant des solutions comme superposition d'ondes progressive et rétrograde de la forme $w_0 e^{j(\omega t - kx)}$. La condition $w = 0$ en $x = 0$ conduit à la forme

$$w(x, t) = w_0 \sin(kx) e^{j\omega t}$$

et la condition en $x = L$ conduit à une quantification du nombre d'onde sous la forme

$$k_n = \frac{n\pi}{L} \quad (8.2)$$

où L désigne la longueur de corde. L'équation de dispersion tirée de 8.1 s'écrit

$$H(\omega) = \rho_L \omega^2 - T_0 k^2 = 0 \quad (8.3)$$

et fournit les pulsations modales

$$\omega_n = k_n \sqrt{\frac{T_0}{\rho_L}} = \frac{n\pi}{L} \sqrt{\frac{T_0}{\rho_L}} \quad (8.4)$$

La prise en compte de la raideur dans l'équation du mouvement conduit à introduire un terme supplémentaire dans le terme de gauche de l'équation 8.1 :

$$-EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}$$

E module d'Young

$I = \pi d^4 / 64$ inertie de flexion de la section droite, avec d diamètre de la corde cylindrique

Cette force de rappel supplémentaire, dont l'expression est établie pour une corde monofilament, traduit l'existence d'un effort tranchant s'exerçant sur un petit élément de corde et qui compense le moment de flexion. Nous obtenons la perturbation au premier ordre des pulsations modales en cherchant la solution $\omega = \omega_n + \delta\omega$ de la nouvelle équation de dispersion soit :

$$H(\omega) = \rho_L \omega^2 - T_0 k^2 = EI k^4 \quad (8.5)$$

Au premier ordre en $\delta\omega$ il vient :

$$2\rho_L \omega_n \delta\omega = EI k_n^4$$

soit finalement

$$\delta\omega = \omega_n \times B n^2 \quad \text{avec} \quad B = \frac{EI \pi^2}{2T_0 L^2} \quad (8.6)$$

Les ordres de grandeur des différents paramètres pour la corde étudiée sont :

$$T_0 = 73 \text{ N}$$

$$\rho_L = 6.3 \cdot 10^{-3} \text{ kg m}^{-3}$$

$E = 4 \text{ GPa}$: cette valeur est un module d'Young équivalent déduit de mesures d'élasticité (produit ES où S est l'aire d'une section droite) effectuées par A. Chaigne (Chaigne, 1991) et de la valeur du diamètre de la corde $\approx 1 \text{ mm}$.

$I = 1.2 \cdot 10^{-14} \text{ m}^4$ (avec 0.7 mm pour valeur de d le diamètre du coeur en nylon, mesuré au pied à coulisse)

Nous trouvons alors un coefficient théorique B d'inharmonicité qui vaut

$$B = 7.5 \cdot 10^{-6}$$

Cette valeur doit être considérée comme un ordre de grandeur car l'élasticité des cordes peut varier de $\pm 20\%$ et la mesure du diamètre du coeur en nylon est sujette à des écarts de $\pm 10\%$ environ.

Nous observons sur la figure 8.14 que la partie des points pour $n^2 > 200$, c'est à dire au delà du 12ème partiel, un comportement de l'inharmonicité proportionnel à n^2 . Il est surprenant de constater que le formalisme développé ici et qui s'applique à des cordes monofilament donne des ordres de grandeurs cohérents avec la mesure de B par régression linéaire pour la corde filée de Mi1. La valeur du coefficient de régression linéaire $f_n/(nf_0)$ en fonction de n^2 , effectuée sur ces partiels au delà du rang 12, vaut en effet :

$$B_{\text{mesuré}} = 9.6 \cdot 10^{-6}$$

Ce résultat est du bon ordre de grandeur :

|| pour les fréquences au delà du 12ème partiel (≈ 1000 Hz), l'inharmonicité est ||
|| gouvernée par la raideur. ||

En deçà de ce partiel, l'inharmonicité n'est plus dominée par les effets de raideur. Une autre perturbation connue provient de la mobilité du chevalet (Morse et Ingard, 1968). Son expression peut être trouvée en considérant la force transversale exercée sur le chevalet :

$$F_L = -T_0 \frac{\partial w}{\partial x}$$

ce qui permet d'écrire l'admittance au chevalet :

$$Y_L = \frac{j\omega w(L, t)}{F_L(t)} = -j\omega \frac{\tan(kL)}{kT_0}$$

En supposant que ce calcul est une perturbation à l'ordre 1, c'est à dire que

$$|Y_L k T_0 / \omega| = |Y_L Z_c| \ll 1$$

($Z_c = \sqrt{\rho_L T_0}$ est l'impédance mécanique caractéristique de la corde), le nombre d'onde du mode n devient $k = k_n + \delta k$ avec

$$\tan kL = jZ_c Y_L$$

qui, développé au premier ordre en δk fournit :

$$(1 + \tan^2(k_n L)) L \delta k = L \delta k = jZ_c Y_L(\omega_n)$$

Le lien au premier ordre entre les variations du nombre d'onde et de la pulsation est obtenu à partir de l'équation du mouvement 8.1 :

$$\delta\omega = c\delta k$$

où $c = \sqrt{T_0/\rho_L}$ est la célérité des ondes de flexion dans la corde souple. Il vient finalement, en fonction de la pulsation propre fondamentale $\omega_0 = \pi c/2L$:

$$\delta\omega = jY_L T_0/L = j \frac{\omega_0}{\pi} Z_c Y_L \quad (8.7)$$

Ce résultat explique pourquoi la courbe d'inharmonicité est dominée par la raideur pour les fréquences hautes. En effet, si nous considérons l'effet sur les fréquences, il vient d'après 8.7

$$f_n/(nf_0) = 1 + \text{Re}(\delta\omega)/\omega_n = 1 - Z_c \text{Im}Y_L/(n\pi)$$

L'inharmonicité liée à la mobilité est inversement proportionnelle au rang de l'harmonique. Un ordre de grandeur de Y_L est $5 \cdot 10^{-2} \text{ ms}^{-1}/\text{N}$ (Radier, 1985). Ce qui donne une inharmonicité de 0.1 % pour l'harmonique de rang 10. Quoiqu'un peu élevée cette valeur est du bon ordre de grandeur.

La relation 8.7 traduit également la manière dont le couplage de la corde avec la table d'harmonie modifie ses fréquences propres : si la mobilité de la table est massique (comme par exemple après une résonance) la fréquence propre est *plus haute* que dans le cas non perturbé. Dans le cas où le comportement de la table d'harmonie et du chevalet est du type raideur (ressort), c'est l'inverse qui se produit et la fréquence propre est plus basse. La partie réelle de Y_L amène un $\delta\omega$ complexe, qui traduit *la dissipation* d'énergie.

8.4.3 Facteur d'amortissement en fonction de la fréquence

Nous voulons ici donner une idée du comportement global des facteurs d'amortissement modaux en fonction de la fréquence modale. La figure 8.15 représente ces données en échelle logarithmique pour pouvoir juger de la dépendance en fréquence. Ce graphe montre une bonne

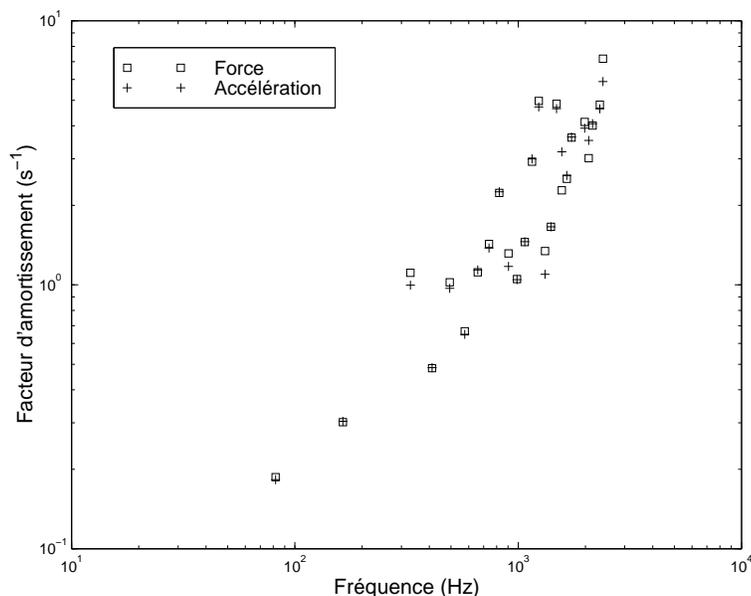


FIG. 8.15: Facteurs d'amortissement des partiels en fonction de la fréquence. Les résultats correspondants au signal de force et d'accélération sont présentés. Les valeurs sont estimées par matrix pencil et seule la composante la plus forte est conservée.

cohérence entre les mesures d'accélération et de force. Le facteur d'amortissement est *quasi-proportionnel* à la fréquence dans la plage étudiée : la régression linéaire sur les logarithmes correspondants fournit la valeur 0.997.

8.5 Digression sur le nombre de composantes par partiel

Obtenir une évaluation du nombre de composantes par partiel nous donne des informations sur la physique du système (combien de degré de liberté faut-il considérer?). Ces informations peuvent guider le choix d'un système de mesure ou d'un modèle de synthèse.

Si nous considérons comme ponctuel le point d'attache de la corde au niveau du chevalet alors la matrice d'admittance Y_L est 3×3 , traduisant ainsi les trois degrés de liberté du système en translation. Si nous abandonnons cette hypothèse, d'autant moins réaliste que le système de mesure nous impose un certain encombrement, alors il nous faut supposer 3 degrés de liberté supplémentaires pour un solide en rotation et la matrice Y_L est 6×6 (Boutillon

, 1989). En se référant par exemple au traitement matriciel des systèmes "corde couplée à un chevalet" (Weinreich, 1977), il peut apparaître pour un partiel donné de rang n jusqu'à 6 fréquences propres distinctes, toutes proches à l'ordre 1 de la fréquence f_n de ce partiel lorsque la corde est fixée à son extrémité. Dans la pratique, la plupart des auteurs (Fletcher et Rossing, 1998; Jansson, 1983; Lambourg et Chaigne, 1993) se limitent à deux composantes et utilisent une matrice Y_L de dimension 2×2 correspondant aux deux directions transverses respectivement perpendiculaire et parallèle à la table d'harmonie.

Nous voulons ici étudier cette hypothèse du point de vue de la structure du signal : peut-on raisonnablement décrire la forme d'onde temporelle d'un partiel à l'aide de deux composantes sinusoïdales amorties ?

8.5.1 Critère empirique sur l'énergie des composantes

L'estimation par la méthode matrix pencil fournit un nombre de composantes par partiel largement surestimé. Comme conséquence, l'énergie des composantes les plus faibles est en général à un niveau largement inférieur à celui de la composante la plus forte : de l'ordre de grandeur de -30 dB si on se réfère par exemple aux tableau de résultats du paragraphe 4.6.2 dans le chapitre 4). Ces composantes faibles peuvent être assimilées à une décomposition du bruit.

Le critère de sélection des composantes significatives est défini de la manière empirique suivante : nous comptons le nombre de composantes dont l'énergie est supérieure à -20 dB en référence à la composante la plus forte. L'énergie d'un signal est définie comme la somme des carrés des échantillons du signal.

La figure 8.16 montre les résultats obtenus pour chaque partiel (harmonique) du signal de force et d'accélération pour une vibration à pression atmosphérique. Ces résultats sont dans l'ensemble peu variables : pour 85 % des partiels nous observons soit une différence de 1 sur le nombre de composantes soit pas de différence. Les histogrammes de répartition du nombre de composantes sont donnés sur la figure 8.17. Il apparaît clairement que le nombre de composantes le plus fréquent est 2. Cette valeur est confirmée par une étude plus globale menée sur 20 signaux (10 de force et 10 d'accélération à 10 pressions différentes) dont les résultats sont reportés sur la figure 8.18. Les ordres de grandeur sont analogues : 50 à 60% des partiels présentent deux composantes principales détectées par ce critère.

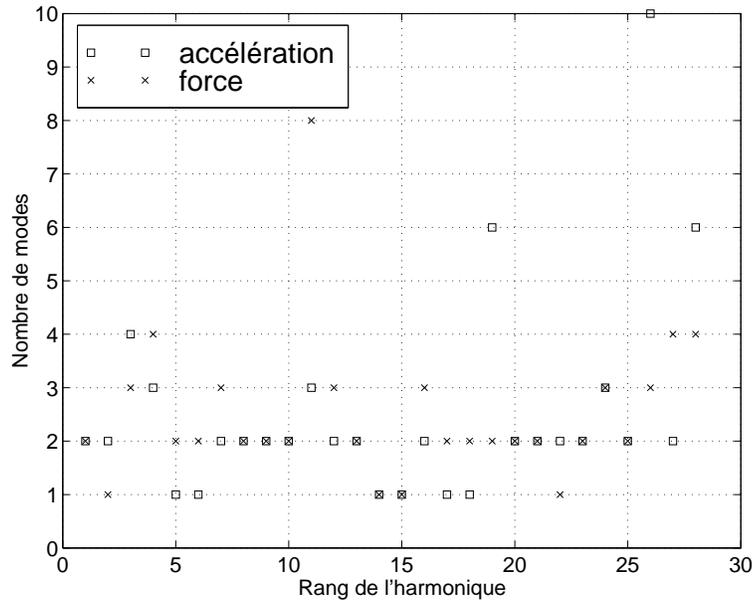


FIG. 8.16: Nombre de composantes estimées par matrix pencil dont l'énergie est comprise entre 0 et -20dB par rapport à la composante d'énergie maximale. L'étude porte sur chaque partiel du signal de force (□) et du signal d'accélération (×)

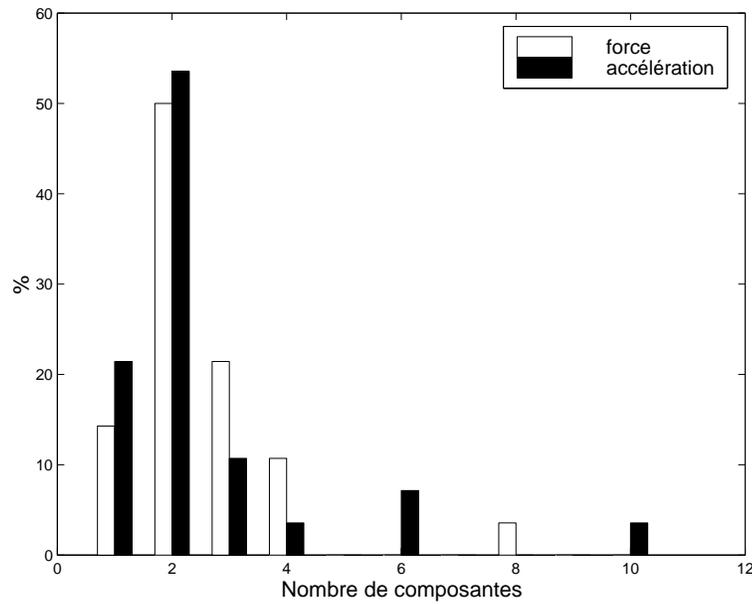


FIG. 8.17: Histogrammes du nombre de composantes trouvés, pour le signal d'accélération et pour le signal de force.

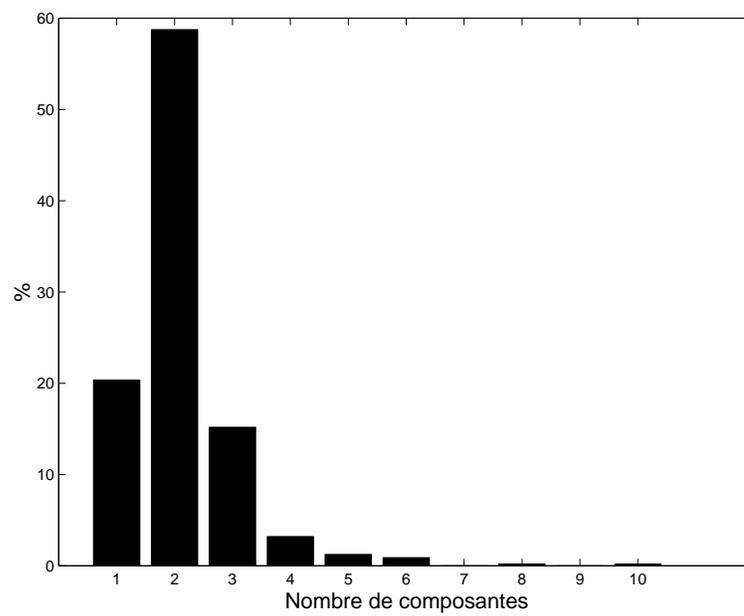


FIG. 8.18: Histogramme du nombre de composantes trouvées pour les 28 premiers partiels de la corde de Mi grave et sur un ensemble de 20 signaux (10 d'accélération et 10 de force).

8.5.2 Critère empirique sur l'erreur de reconstruction

Nous définissons ici un critère empirique basé sur l'erreur de reconstruction du signal. Cette erreur est définie comme l'énergie (donnée en dB par référence à l'énergie du signal) de la différence entre le signal mesuré $x[n]$ et le signal synthétique $y[n]$ reconstitué à partir des composantes $y_k[n]$ trouvées par matrix pencil, soit :

$$\epsilon_{dB}(M) = 10 \log \frac{\sum_n |x[n] - y[n]|^2}{\sum_n |x[n]|^2}$$

avec

$$y[n] = \sum_{k=1}^M y_k[n]$$

Les composantes y_k sont ordonnées par ordre décroissant d'énergie. Bien entendu, L'erreur de reconstruction diminue lorsque le nombre M de composantes utilisées pour synthétiser le signal augmente. L'allure de l'erreur de reconstruction en fonction du nombre de composantes est donné figure 8.19, dans le cas du premier partiel de la corde de Mi grave. L'erreur de

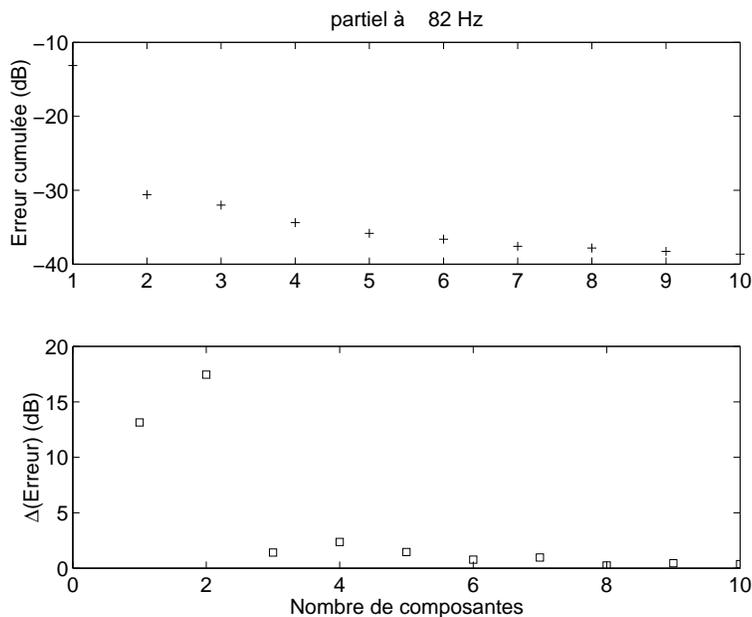


FIG. 8.19: Erreur de reconstruction en fonction du nombre de composantes. Elle est mesurée en dB par rapport à l'énergie du signal. L'erreur diminue toujours lorsqu'on augmente ce nombre mais elle ne diminue plus *sensiblement* lorsque ce nombre est supérieur à 2, ainsi que l'illustre la courbe de gain sur l'erreur lorsqu'on passe de n à $n+1$ composantes.

reconstruction est une fonction monotone décroissante de M : le signal est toujours mieux reconstruit (au sens des moindres carrés) quand on ajoute une composante. Cependant, dans le cas du partiel à 82 Hz, ajouter une composante lorsque $M \geq 2$ n'améliore pas *sensiblement* l'erreur.

Le critère proposé ici est un critère empirique fondé sur ce résultat. Le nombre de composantes sera la valeur de M au delà de laquelle l'amélioration de l'erreur de reconstruction n'excède jamais 5dB. Pour le partiel à 82 Hz, cette définition amène une détermination du nombre de composantes $M = 2$ (figure 8.20).

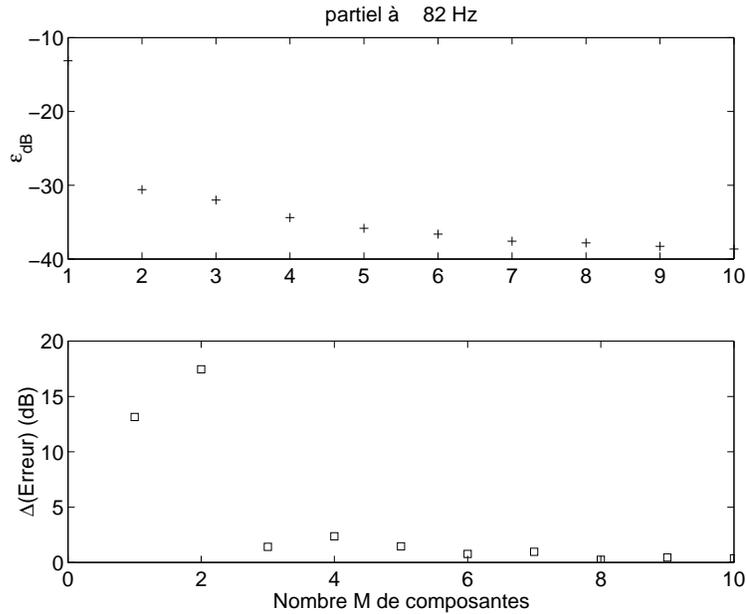


FIG. 8.20: Erreur de reconstruction ϵ_{dB} en fonction du nombre de composantes, mesurée en dB par rapport à l'énergie du signal et gain en dB sur cette erreur lorsqu'on passe de n composantes à $n+1$ composantes pour modéliser le signal. L'erreur diminue toujours lorsqu'on augmente le nombre de composantes du modèle mais elle ne diminue plus *sensiblement* lorsque ce nombre est supérieur à 2.

L'histogramme des résultats obtenus en considérant les 28 premiers partiels d'un ensemble de 20 signaux (Mi grave) est donné 8.21. Le nombre de composantes *le plus fréquent*, estimé par le critère sur l'erreur de reconstruction à 5 dB est $M = 2$. Le maximum de l'histogramme en $M = 2$ est moins marqué que pour le critère empirique sur l'énergie des composantes. En outre, les résultats peuvent varier si le seuil est modifié : si le seuil est fixé à 10 dB par exemple, nous trouvons une majorité d'estimation à $M = 1$. C'est un inconvénient de ce critère dont la définition est liée aux caractéristiques des données. Le seuil doit être fixé après caractérisation de l'erreur de reconstruction. Il est toutefois intéressant de constater que la fréquence d'un nombre 3 de composantes est devenue significative (30% des cas) ce qui correspond à une matrice de mobilité 3×3 (trois degrés de liberté de translation du point d'accroche de la corde).

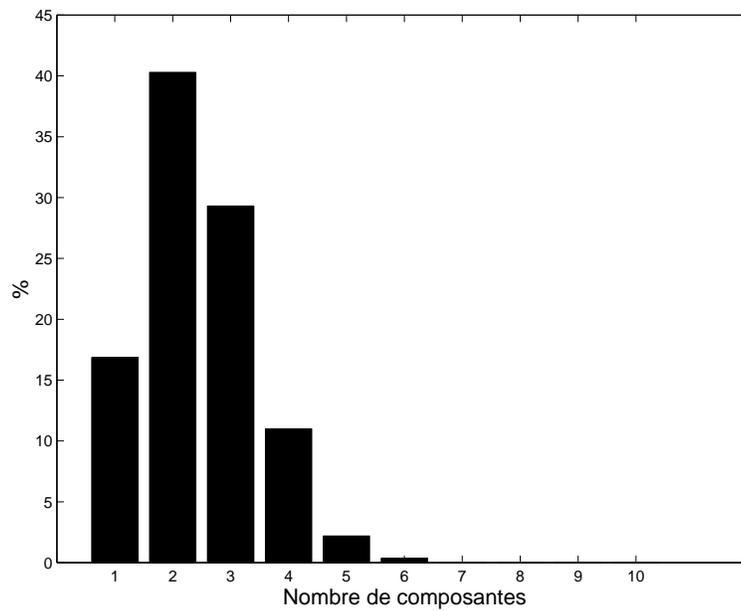


FIG. 8.21: Histogramme du nombre de composantes déterminé par un critère empirique sur l'erreur de reconstruction. Le calcul est mené sur les 28 premiers partiels de la corde de Mi grave et sur un ensemble de 20 signaux.

8.5.3 Application des critères d'information

Une présentation théorique de ces critères se trouve dans la partie I au paragraphe 4.6. Ces critères sont destinés à remplacer l'appréciation subjective sur laquelle sont basés les critères empiriques. Ils sont performants dans le cas de signaux synthétiques pour lesquels le bruit additif est blanc. Leur application s'est révélée délicate dans le cas des signaux réels, notamment en raison du filtrage qui précède le traitement des données (*cf.* § 4.6). Les critères testés (AIC et MDL) surestiment largement le nombre de modes : les valeurs sont toutes supérieures à 4 et oscillent plutôt entre 10 et 20. Dans l'analyse, 20 est le nombre de composantes du modèle, c'est donc la valeur maximale de M . Le critère AIC surestime par ailleurs davantage que le critère MDL, ce qui est un résultat connu (Schwartz, 1978).

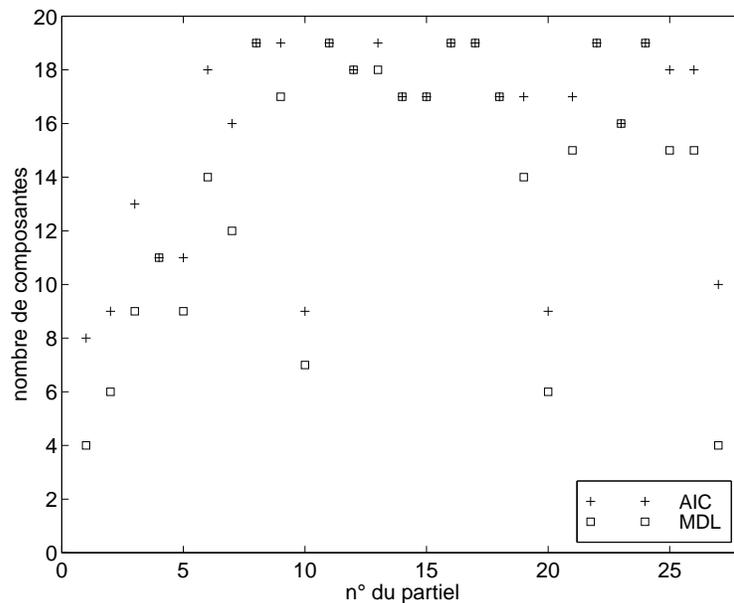


FIG. 8.22: Nombre de composantes trouvées par les critères AIC et MDL. Le signal traité est le signal d'accélération à la pression atmosphérique. 20 est le nombre de composantes du modèle de signal dans l'analyse matrix pencil, on ne peut donc trouver un nombre de composantes supérieur par l'application des critères.

8.5.4 Conclusion sur le nombre de composantes par partiel

Les deux critères empiriques, définis sur l'un sur l'énergie des composantes et l'autre sur l'erreur de reconstruction sont concordants : le nombre le plus fréquent de composantes qui composent un partiel est $M = 2$. L'application des critères informationnels est rendue difficile par la présence d'un bruit additif qui n'est pas blanc et ils ne fournissent pas de valeurs vraisemblables de M . L'adaptation du prétraitement des données afin d'améliorer l'application de ces critères dépasse le cadre du présent travail.

Le résultat obtenu le plus fréquent, $M = 2$ est intéressant du point de vue de la mesure et du point de vue de la synthèse. Il conforte l'hypothèse d'une matrice de mobilité bidimensionnelle au point d'attache de la corde sur le chevalet ce qui permet, pour la mesure de cette mobilité, de limiter l'instrumentation à deux accéléromètres. Il vient également appuyer les modèles de synthèse temps-réel à deux filtres (Bradley, Cheng, et Stonick, 1995).

8.6 Résultats expérimentaux - Rendements acoustiques entre 80 et 2500 Hz

Ce paragraphe présente les résultats expérimentaux relatifs à la mise en atmosphère raréfiée d'une guitare en mode de jeu sur sa corde la plus grave (Mi1). Cette guitare est une guitare classique d'étude de marque Suzuki. Nous exposons d'abord les résultats expérimentaux concernant la variation des paramètres modaux en fonction de la pression statique et un modèle qui permet de les expliquer qualitativement. Nous en déduisons une mesure du rendement acoustique pour les 27 premiers partiels. Notons que cette étude se base uniquement sur les estimations de fréquence et facteur d'amortissement de la composante *de plus forte énergie* trouvée par matrix pencil.

8.6.1 Variation des fréquences avec la pression

La variation des fréquences modales avec la pression statique pour une corde de guitare se révèle différent de celui observé pour les plaques. Le comportement en "cloche inversée" tel qu'il apparaît sur les figures 8.23 et 8.24 suivantes est rencontré pour l'ensemble des partiels à l'exception du 3 et du 26. La fréquence modale estimée par matrix pencil présente un minimum pour une pression statique de l'ordre de $P_0 = 800$ mbars ou $P_0 = 900$ mbars. Les valeurs estimées à partir du signal de force et à partir du signal d'accélération possèdent une très bonne cohérence.

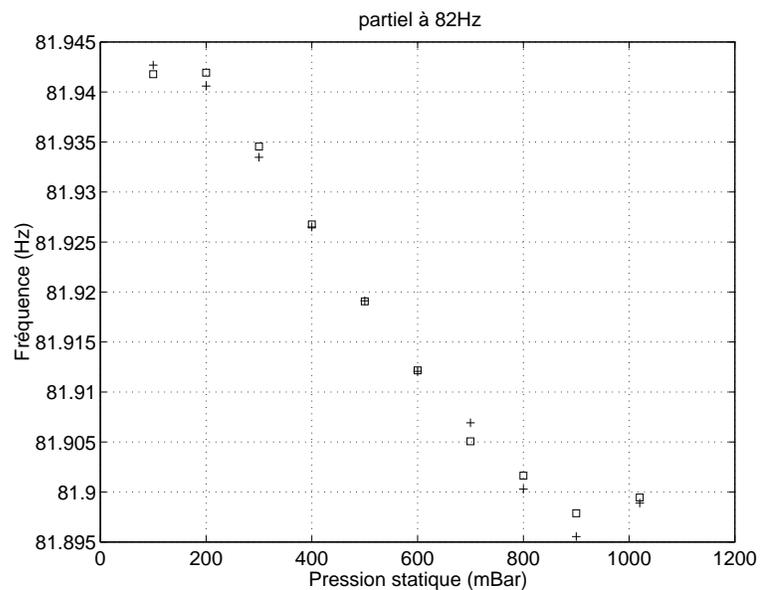


FIG. 8.23: Variation de la fréquence de la composante principale du premier partiel. Il s'agit du fondamental de la vibration de la corde, aux environs de 82.5 Hz (Mi grave). '+' : valeurs trouvées pour le signal d'accélération. '□' : valeurs trouvées pour le signal de force.

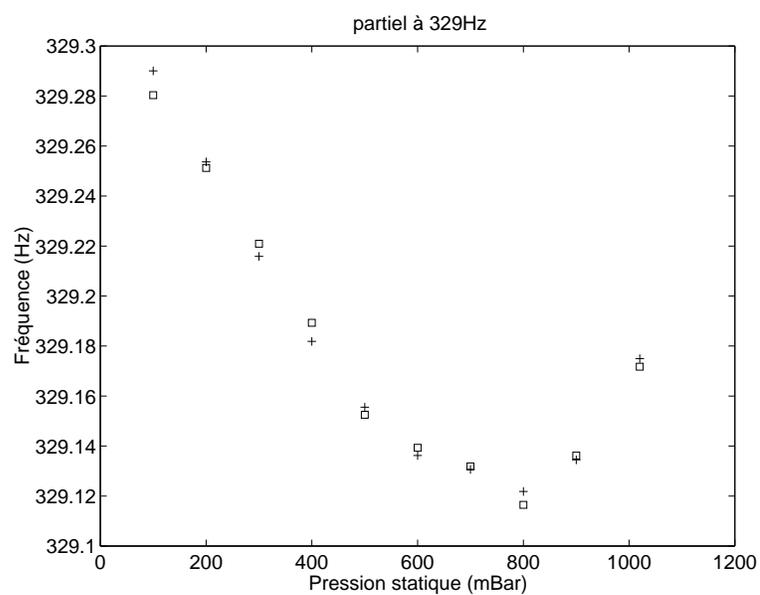


FIG. 8.24: Variation de la fréquence de la composante principale du quatrième partiel, aux environs de 329 Hz. '+' : valeurs trouvées pour le signal d'accélération. '□' : valeurs trouvées pour le signal de force.

8.6.2 Variation des amortissements avec la pression

Les courbes donnant le facteur d'amortissement $\alpha(P_0)$ en fonction de la pression sont de 3 types :

1. figure 8.25 : une variation quasi-linéaire (les coefficients de corrélation sont très proches de 1) croissante, de la forme $\alpha(P_0) = \alpha_0 + \beta P_0$. Les partiels qui suivent cette loi sont les plus nombreux : 1,2,4,6,7,8,9,14,15,16,17,18,19,21,23,24,25 et 27.
2. figure 8.26 : une variation monotone décroissante du facteur d'amortissement avec la pression statique. Les partiels qui suivent cette loi sont les partiels de rang 10,12,13 et 20.
3. figure 8.27 : une variation décroissante qui passe par un minimum puis croissante jusqu'à la pression atmosphérique. C'est le cas pour les partiels 5 et 11.

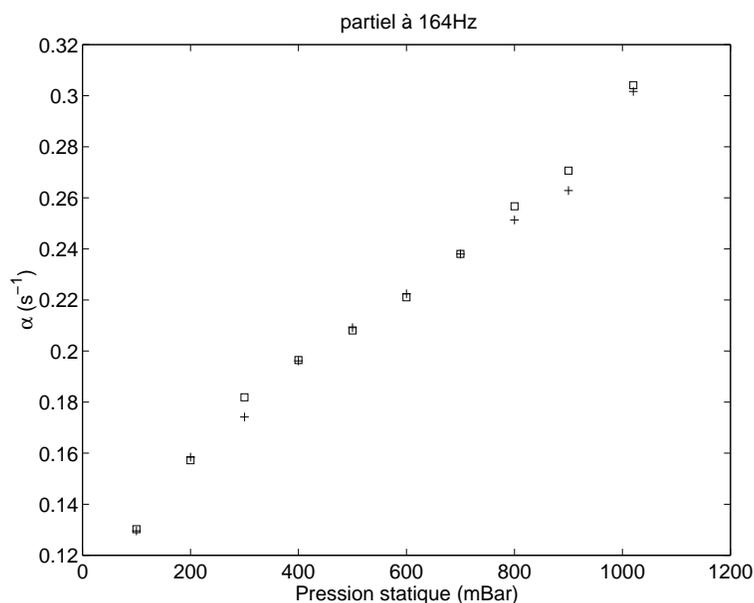


FIG. 8.25: Variation du facteur d'amortissement de la composante principale du deuxième partiel, aux environs de 164 Hz. '+' : valeurs trouvées pour le signal d'accélération. '□' : valeurs trouvées pour le signal de force.

Les partiels non cités précédemment (3,22,26) présentent des résultats non cohérents entre les valeurs obtenues pour le signal de force et le signal d'accélération. Ils n'ont pas été conservés pour la mesure du rendement.

8.6 Résultats expérimentaux - Rendements acoustiques entre 80 et 2500 Hz 201

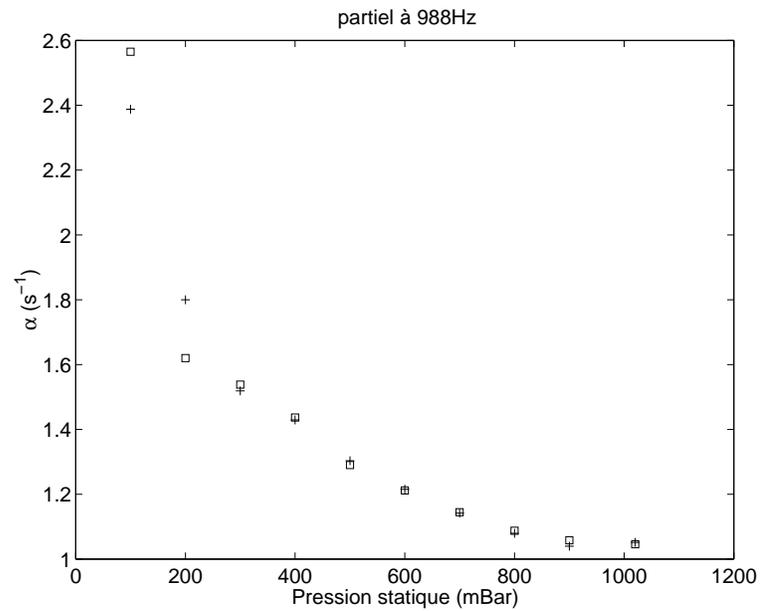


FIG. 8.26: Variation du facteur d'amortissement de la composante principale du douzième partiel, aux environs de 988 Hz. '+' : valeurs trouvées pour le signal d'accélération. '□' : valeurs trouvées pour le signal de force.

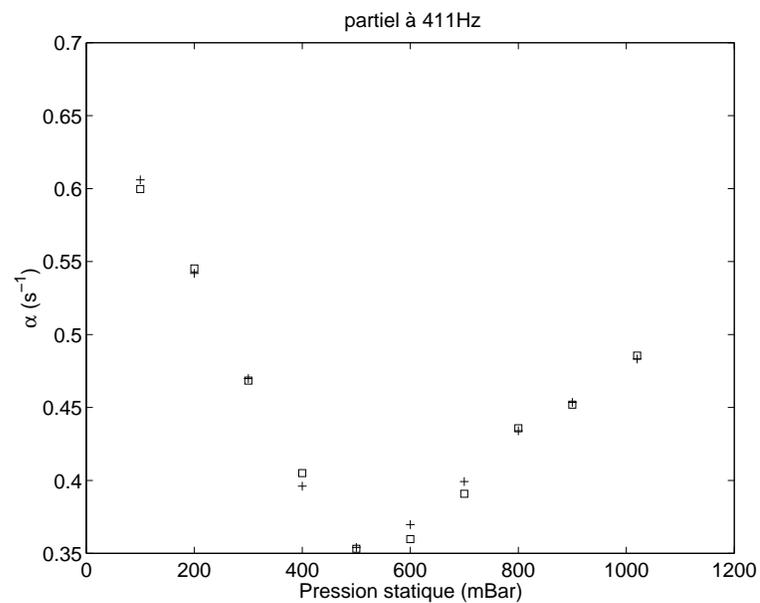


FIG. 8.27: Variation du facteur d'amortissement de la composante principale du cinquième partiel, aux environs de 411 Hz. '+' : valeurs trouvées pour le signal d'accélération. '□' : valeurs trouvées pour le signal de force.

8.6.3 Ordre de grandeur des termes de perte interne et visqueux

Dans notre analyse, les termes de perte sont représentés par une perturbation imaginaire à l'ordre 1 de la pulsation modale ω_n du système non dissipatif. Nous rappelons l'expression de la perturbation à l'ordre 1 de la pulsation modale obtenue au paragraphe 8.4 :

$$\delta\omega = \omega_n B n^2 + j \frac{\omega_0}{\pi} Z_c Y_L \quad (8.8)$$

B coefficient d'inharmonicité, sans dimension

n rang du partiel

Y_L admittance au chevalet

Z_c impédance mécanique caractéristique de la corde

Cette expression rassemble les effets de raideur de la corde (coefficient B , cf. équation 8.6) et les effets liés à la mobilité faible mais non nulle au chevalet (terme en Y_L , cf. équation 8.7).

Nous montrons ci-dessous que les termes complémentaires de pertes —pertes viscoélastiques dans la corde et des pertes par frottement visqueux dans l'air— n'apportent pas de contribution significative dans notre cas.

◇ viscoélasticité Les pertes viscoélastiques dans la corde sont représentées par un angle de perte δ entrant dans l'écriture du module d'Young complexe :

$$\underline{E} = E(1 + j\delta)$$

avec un ordre de grandeur de cet angle de perte fourni par des mesures effectuées à l'aide d'un viscoanalyseur par A. Chaigne (1991) :

$$\delta \approx 10^{-2}$$

D'après l'expression du terme $\delta\omega$ dû à la raideur de la corde (équation 8.6), l'introduction d'une partie imaginaire du module d'Young conduit à une partie imaginaire de la perturbation $\delta\omega$ d'expression :

$$\delta\omega = j\omega_n(Bn^2)\delta$$

Cette partie imaginaire traduit un amortissement proportionnel à ω_n et à n^2 . Le facteur d'amortissement relatif à ce mécanisme de perte varie donc comme n^3 . Pour le fondamental ω_0 , son ordre de grandeur se mesure à partir de la valeur de l'inharmonicité $B = 9.6 \cdot 10^{-6}$ trouvée précédemment,

$$\alpha_{\text{visc}} = 5.0 \cdot 10^{-5} \text{ s}^{-1}$$

Cet ordre de grandeur est très faible devant les ordres de grandeur des amortissements relevés pour les partiels de corde (de l'ordre de 0.1 pour le fondamental). Pour $n = 30$, ce facteur d'amortissement (qui vaut alors $\approx 1.3 \text{ s}^{-1}$) reste négligeable (l'ordre de grandeur des amortissements mesurés est alors supérieur à 10).

- ◇ Frottement visqueux Pour le frottement visqueux, nous adoptons une expression calculée par Stokes (1922) pour un écoulement laminaire périodique autour d'un cylindre. Cette expression est reprise dans Fletcher (1977) et se traduit par des pertes supplémentaires, c'est à dire une partie imaginaire dans $\delta\omega$:

$$\delta\omega_{\text{visqueux}} = j\left(\frac{2\pi\mu}{\rho_L} + \frac{2\pi r}{\rho_L} \sqrt{2\rho_0\mu\omega_n}\right) \quad (8.9)$$

$\mu = 1.85 \cdot 10^{-5}$ kg/m.s est le coefficient de viscosité ou viscosité dynamique, qui est indépendant de la pression statique (Landau et Lifchitz, 1989).

$r \approx 1$ mm rayon de la corde

$\rho_L = 6.3 \cdot 10^{-3}$ kg/m³ masse linéique de la corde

$\rho_0 = 1.3$ kg/m³ masse volumique de l'air

Le facteur d'amortissement relatif à ce mécanisme de pertes varie en $\sqrt{\omega}$. Le terme basse fréquence de l'expression 8.10 à pour ordre de grandeur

$$\frac{2\pi\mu}{\rho_L} = 1.9 \cdot 10^{-2} \text{s}^{-1}$$

Le temps caractéristique de la décroissance vaut ≈ 50 s. Comme les amortissements mesurés varient proportionnellement à ω , ce mécanisme de perte pourra toujours être négligé.

- ◇ Effet de la pression acoustique Comme dans le cas des verges, les dimensions caractéristiques de la corde sont faibles devant les longueurs d'onde acoustique. Le comportement acoustique de la corde est dipolaire et nous négligerons son rayonnement acoustique. En revanche, l'air environnant à un effet inertiel de masse ajoutée dont il faut tenir compte dans l'expression de la variation $\delta\omega$ des ω_n .

8.6.4 Interprétations à l'aide de l'admittance au chevalet

Dans le cas des plaques, l'énergie acoustique rayonnée par un mode influe directement sur son évolution temporelle : la durée de la décroissance diminue en proportion inverse de la puissance acoustique dissipée. La vibration d'une corde, si on la suppose parfaitement fixée à ces deux extrémités, est peu amortie par la présence de l'air par comparaison avec la même corde montée sur la guitare. La majeure partie de la dissipation énergétique lors de la vibration de la corde est liée au transfert d'énergie vers le chevalet, ainsi que l'indiquent les ordres de grandeurs trouvés pour les autres mécanismes de pertes, mentionnés plus haut. La décroissance dépend donc de la manière dont la corde est *couplée* au corps de l'instrument. Celui-ci, en raison de ses dimensions et de la caisse de résonance, sert de "radiateur" acoustique. C'est donc son comportement vibratoire (fréquence et forme des modes, amortissements) qui est potentiellement le plus sensible aux variations de pression statique. L'admittance mécanique au chevalet Y_L traduit le type du couplage (raideur, masse, amortisseur) entre la corde et

le corps de l'instrument. L'interprétation des variations non monotones des fréquences et facteurs d'amortissement en fonction de la pression statique que nous proposons ici, s'appuie sur l'expression de la perturbation à l'ordre 1 de ces paramètres modaux en fonction de Y_L .

L'équation 8.8 peut être réécrite en séparant la partie imaginaire de $\delta\omega$ qui sont liées respectivement à l'amortissement et à la fréquence. Compte-tenu des considérations d'ordre de grandeur précédentes nous obtenons :

$$\delta\omega = \omega_n B n^2 - \text{Im}(Y_L) T_0/L - \Delta + j \text{Re}(Y_L) T_0/L \quad (8.10)$$

Δ est le terme lié à la masse ajoutée par l'air, qui tend à *diminuer* la fréquence à pression atmosphérique.

◇ Décomposition de Y_L

La table d'harmonie supposée plane, est mise en mouvement par une force ponctuelle au point d'attache de la corde sur le chevalet qui s'écrit

$$F(t) = F_0 e^{j\omega t}$$

δS est une petite surface entourant le point d'attache. En supposant que le régime mécanique de fonctionnement est linéaire, l'équation du mouvement en ce point s'écrit sous forme complexe :

$$Z(\omega)(j\omega w) = -p_0 \delta S + F_0 \quad (8.11)$$

$Z(\omega)$ est l'impédance mécanique *in vacuo* au point d'attache qui rassemble les termes d'inertie en $\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}$, de frottement interne en $\frac{\partial w}{\partial t}$ et de force de rappel élastique qui résulte de l'action des éléments de surface voisins

w déplacement transverse au point d'attache

p_0 résultante de la pression acoustique pariétale qui agit sur δS

Notons que cette présentation peut être généralisée pour un déplacement quelconque (tridimensionnel), mais les impédances qui suivent sont alors des matrices. Cette description sous forme d'impédance permet un traitement théorique élégant lorsque la structure est décrite par ses modes propres (Lesueur, 1988).

La pression acoustique et la vitesse sont liée par l'impédance de rayonnement Z_r

$$p_0 = Z_r(\omega)(j\omega w)$$

Il est commode ici de définir une grandeur acoustique homogène à une impédance mécanique soit :

$$Z_a = Z_r \delta S$$

ce qui amène l'expression de l'admittance mécanique au chevalet sous la forme :

$$Y_L(\omega) = \frac{j\omega w}{F_0} = \frac{1}{Z(\omega) + Z_a(\omega)} \quad (8.12)$$

Z_a est proportionnelle à l'impédance caractéristique de l'air $\rho_0 c$ donc à la pression statique P_0 (cf. paragraphe 6). Nous trouvons ainsi une expression de l'admittance au chevalet en fonction de la pression statique sous la forme :

$$Y_L = \frac{1}{Z_L} = \frac{1}{R + jX} \quad \text{avec} \quad (8.13)$$

$$R = R_0 (1 + \beta_r P_0) \quad (8.13)$$

$$X = X_0 (1 + \beta_x P_0) \quad (8.14)$$

R_0 , X_0 , β_r et β_x sont des fonctions de ω . Notons que la réactance de rayonnement peut ici être de signe positif (masse ajoutée) ou négatif (raideur) en raison de la présence de la caisse de résonance de la guitare.

- ◇ Interprétation de la courbe $f_n(P_0)$ Les courbes $f_n(P_0)$ présentées figure 8.23 et 8.24 traduisent la variation de la fréquence modale de corde en fonction de la pression statique. La variation $-\Delta$ (cf. équation 8.10) de cette fréquence relative à la masse ajoutée par l'air environnant est proportionnelle à la pression statique soit :

$$\delta f_{\text{inert}} = -\Delta = -bP_0$$

Le signe négatif traduit la tendance des fréquences à diminuer avec la masse ajoutée par l'air. C'est le comportement observé pour des pressions statiques inférieures à 500 mbars.

Entre 600 mbars et la pression atmosphérique le comportement observé n'est plus monotone et la fréquence modale passe par un minimum. Un autre terme qui contribue à la variation de la fréquence f_n est la partie imaginaire de l'admittance au chevalet. Ce terme, déduit de l'équation 8.10, vaut :

$$\delta f_{\text{chev}} = -\text{Im}(Y_L) \frac{T_0}{2\pi L} = \frac{T_0}{2\pi L} \frac{X}{R^2 + X^2} \quad (8.15)$$

$R = R_0(1 + \beta_r P_0)$ partie réelle de l'impédance au chevalet

$X = X_0(1 + \beta_x P_0)$ partie imaginaire de l'impédance au chevalet L'estimation des valeurs de β_x et β_r nécessite une mesure de l'impédance au chevalet de la guitare, suffisamment précise pour évaluer ses variations avec la pression. Ce travail n'est pas réalisé dans le cadre de cette étude et nous nous bornons à constater que la fonction δf_{chev} ne varie pas de manière monotone avec la pression.

- ◇ Interprétation des $\alpha_n(P_0)$ Les courbes $\alpha_n(P_0)$ présentées figure 8.25 et 8.26 et 8.27 traduisent la variation des facteurs d'amortissement α_n des modes de corde en fonction de la

pression statique. Cette variation, d'après les ordres de grandeur des autres types de pertes donnés plus haut, dépend essentiellement de l'admittance au chevalet (équation 8.10) :

$$\delta\alpha = \operatorname{Re}(Y_L)T_0/L = \frac{T_0}{L} \frac{R}{R^2 + X^2} \quad (8.16)$$

Nous pouvons alors séparer deux types de comportement selon que le terme dominant de l'impédance au chevalet est dominé par sa partie réactive R ou sa partie active X .

Si l'impédance Z_L au chevalet est *dominée par sa partie réactive*, c'est à dire $|X| \gg |R|$ alors l'expression 8.16 précédente devient

$$\delta\alpha = \frac{T_0}{L} \frac{R}{X^2} \quad (8.17)$$

Les variations observées de α_n sont supérieures à 10%. Compte tenu de la variation de fréquence, qui n'excède pas 0.1%, ce $\delta\alpha$ est imputable à la partie active R . En supposant les variations de X avec la pression négligeables devant celles de R , il vient

$$\delta\alpha = \frac{T_0}{L} \frac{R_0(1 + \beta_r P_0)}{X_0^2} \quad (8.18)$$

L'admittance au chevalet a alors un effet *d'amortissement ajouté*. C'est l'effet que nous observons le plus fréquemment.

Si l'impédance au chevalet est *dominée par sa partie active*, c'est à dire si $|R| \gg |X|$ alors l'expression devient :

$$\delta\alpha = \frac{T_0}{L} \frac{1}{R} = \frac{T_0}{L} \frac{1}{R_0(1 + \beta_r P_0)} \quad (8.19)$$

Les amortissements *diminuent* lorsque la pression *augmente*. Ce résultat, surprenant de prime abord, se comprend à partir d'une interprétation relative à la manière dont la corde et le chevalet sont couplés mécaniquement. La dépendance de $\delta\omega$ en Y_L traduit la situation physique suivante : l'impédance caractéristique de la corde est très faible devant l'impédance mécanique présentée par le chevalet et la corde impose une *force* au chevalet et de la table d'harmonie. Si l'impédance est du type résistif R , c'est à dire se conduit comme un amortisseur, alors la vitesse du chevalet est proportionnelle à $1/R$. Lorsque la pression augmente, la proportion d'énergie dissipée sous forme acoustique augmente et R augmente mais la vitesse (ou l'amplitude de déplacement) diminue. L'énergie mécanique de la corde dissipée au niveau du chevalet est proportionnelle à R mais aussi à la vitesse au carré donc à $1/R^2$. Cette interprétation correspond au résultat donné en 8.19.

Dans le cas d'une impédance au chevalet dominée par ces éléments actifs, l'augmentation de la proportion d'énergie dissipée sous forme acoustique conduit à des déplacements plus faibles au chevalet et à une puissance totale dissipée à l'extrémité de la corde plus faible.

Le dernier cas de variation de α_n observé (figure 8.27) peut être expliqué par un comportement intermédiaire entre les deux comportements précédents.

8.6.5 Estimation du rendement acoustique

Pour estimer le rendement acoustique, c'est à dire la proportion de l'énergie consommée sous forme acoustique, il est nécessaire d'évaluer la contribution acoustique à R , la partie active de l'impédance de rayonnement. L'expression du rendement acoustique est alors :

$$\eta_r = \frac{\beta_r P_{\text{atm}}}{1 + \beta_r P_{\text{atm}}} \quad (8.20)$$

où P_{atm} désigne la pression atmosphérique. Pour les deux comportements — impédance au chevalet réactive ou active —, il est possible d'évaluer β_r par régression linéaire, respectivement sur les courbes $\alpha_n(P_0)$ ou $1/\alpha_n(P_0)$.

Les résultats obtenus par cette régression sont donnés figure 8.28. Les rendements sont pour la plupart entre 20 et 60%. Les trois plus faibles correspondent à des impédances au chevalet dominées par la partie active.

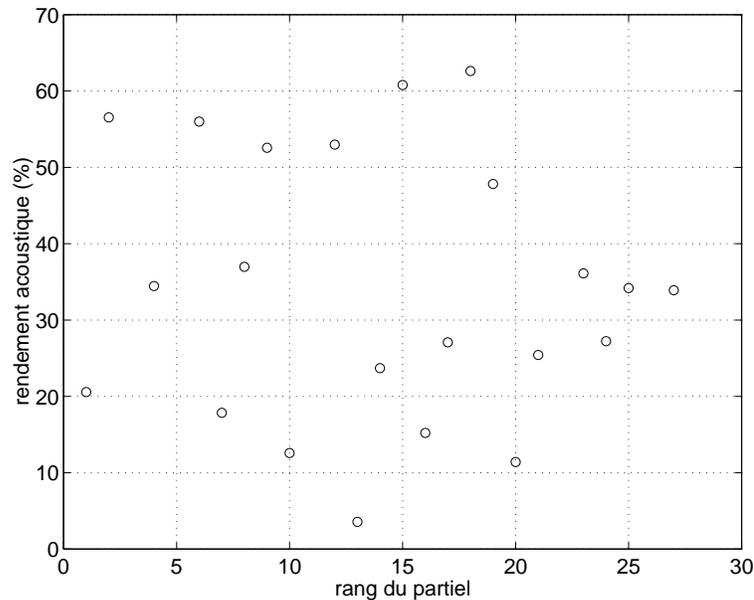


FIG. 8.28: Rendement acoustique estimé par mise sous vide pour les 27 premiers partiels de la corde du Mi grave.

8.7 Discussion

Après les résultats obtenus sur les plaques, cette première étude sur une corde de guitare a montré des comportements de fréquence et facteurs d'amortissement en fonction de la pression statique surprenants — car non monotones. L'hypothèse d'une variation significative des paramètres mécaniques du bois en atmosphère raréfiée étant écartée après les tests menés

sur une verge encastrée en épicéa, nous proposons un modèle qui explique les différentes courbes observées. Ce modèle s'appuie sur une description du couplage corde-chevalet en termes d'admittance mécanique. Cette interprétation, qui demanderait pour être confirmée une mesure d'admittance en fonction de la pression statique, permet toutefois d'expliquer pourquoi, pour certains partiels de corde, les amortissements sont plus forts dans le vide que dans l'air.

Une mesure de l'admittance pourrait être effectuée par excitation directe (marteau d'impact) sur le chevalet. Cette méthode, que nous n'avons pas mis en oeuvre par souci d'étudier l'instrument globalement, permettrait d'obtenir une mesure de l'admittance à des fréquences autres que celles des partiels de corde. On peut ainsi imaginer étudier l'évolution en fonction de la pression statique des modes propres de la structure complexe que constitue la guitare. Pour les modes à basse fréquences, faisant intervenir un couplage avec le fonctionnement acoustique de la cavité, il est probable que l'on observe des variations significatives.

A partir de nos données, nous avons extrait le rendement acoustique de chaque partiel de la note de mi grave. Là encore, le résultat est inattendu : les valeurs sont toutes supérieures à 10% et elles peuvent atteindre jusqu'à 60%. Si des mesures ultérieures permettent de généraliser ces ordres de grandeur à tout l'instrument les conséquences pour la facture sont intéressantes : les espoirs de pouvoir augmenter ce rendement sont certainement assez faibles si sa valeur est autour de 50%.

Cette étude trouve également d'autres prolongement en direction des problématiques de facture. Nous pensons par exemple à une comparaison de différents jeu de corde ou encore à l'étude de l'effet du vieillissement des cordes filées, qui deviennent rapidement inutilisables (trop amorties). L'effet du vernis pourrait être étudié, d'une part du point de vue de ses effets acoustiques et d'autre part de ses effets pour l'hygrométrie du bois. Enfin une étude comparée de plusieurs guitares permettrait de déterminer s'il existe un lien entre la qualité des instruments et leur rendement acoustique

Chapitre 9

Étude acoustique de la restauration du carillon de Perpignan

Résumé

Pour évaluer l'effet acoustique de la restauration du carillon historique de Perpignan, nous avons effectué quatre séries de mesures à différents stades du processus. À chacune de ces phases, nous avons mesuré les paramètres modaux relatifs à chaque cloche. La procédure, qui comprend une mesure précise des amortissements est largement automatisée et pourrait être incluse facilement dans le processus de facture, ce qui correspond à une attente des facteurs. Parmi les principaux résultats de cette étude, citons l'effet négligeable du sablage sur les fréquences des partiels de cloches et le gain moyen d'environ 15% sur les facteurs d'amortissement. Nous relevons également une légère différence de fréquence entre les cloches suspendues et posées (retournées).

9.1 Introduction

Les 42 cloches du carillon historique de Perpignan ont été fabriquées par Bollée aux alentours de 1870. La restauration de ce carillon comprenait notamment la dépose et le sablage de la majeure partie des cloches afin de les débarrasser d'une couche d'oxyde de

cuire assez épaisse, le remplacement des claviers manuels et électriques et des transmissions associées et la remise en état des abats-son du clocher. Cette dernière visant surtout à leur redonner leur mobilité perdue : une commande manuelle permettait au carillonneur de jouer abats-son ouverts ou fermés.

9.1.1 Objectif de la mesure

Cette étude nous a été commandée par la D.R.A.C¹ Languedoc-Roussillon dans le cadre de la mission de restauration établie par les services nationaux responsables de la conservation du patrimoine musical.

L'objectif recherché dans l'étude acoustique menée en parallèle du processus de restauration était d'évaluer, par des mesures aussi précises que possibles, les modifications de fréquence et d'amortissement des principaux partiels de chacune des cloches. Les mesures effectuées nécessitent, à cause de leur nombre, une automatisation poussée dans l'estimation des paramètres mais doivent également permettre de détecter une modification de l'ordre du dixième de demi-ton (soit 0.6% de précision sur les fréquences).

9.1.2 Intérêt pour la facture

La facture des cloches de carillon est un travail artisanal dont une partie importante consiste, après démoulage, à ajuster la fréquence des partiels pour accorder la cloche. Cette opération s'effectue par un tournage sélectif de la cloche pour ôter de la masse métallique à des endroits choisis à l'intérieur de la cloche. Elle s'accompagne de mesures de fréquence, souvent menées en régime forcé au pot vibrant partiel par partiel. Le spectre inharmonique de la cloche rend difficile voire illusoire l'utilisation d'accordeurs bon marché du commerce car ceux-ci sont adaptés aux instruments harmoniques, c'est à dire accordés sur une séquence de partiels multiples d'un fondamental. Bien que ces moyens n'étaient pas disponibles en 1870, il est remarquable de constater que les cloches fondues par Bollée ont été ensuite ajustées en fréquence par tournage de leur profil intérieur.

En outre, les facteurs expriment souvent le souhait de connaître les amortissements relatifs des partiels, bien que le moyen de les contrôler n'ait pas encore été défini. Le programme d'estimation qui nous a servi pour répondre au cahier des charges de cette étude constitue une première étape vers la réalisation de cet objectif. La méthode automatique d'estimation des fréquences et facteur d'amortissement mise en oeuvre est aisément transposable en une application autonome et utilisable sur un micro-ordinateur muni d'une simple carte-son.

Le facteur chargé de la restauration attendait aussi des indications quant à l'influence

1. Direction Régionale des Affaires Culturelles

de celle-ci sur l'accord des cloches. L'oxyde de cuivre, qui s'est développé en couche épaisse au cours du temps, parfois jusqu'au millimètre, pouvait-il avoir modifié les caractéristiques mécaniques des cloches?

9.2 Déroulement des opérations, matériel et traitement

Le processus de restauration s'est déroulé en 4 phases pour lesquelles nous avons chaque fois effectué une série de mesures. Ces différentes étapes sont les suivantes

1. mesure de vibration de chacune des cloches du carillon sur site, dans le clocher de la cathédrale Saint-Jean Baptiste de Perpignan.
2. mesure des cloches déposées chez le facteur (Entreprise France Carillon à Hérépian, 34). Les cloches sont alors retournées et posées sur le sol en béton de l'atelier.
3. mesure chez le facteur, dans la même configuration que précédemment, mais *après sablage* (projection de sable sous haute pression pour enlever la couche d'oxyde).
4. mesure des cloches remises en place dans le clocher.

Ces mesures ont été réalisées à l'aide de l'accéléromètre Bruël et Kjaer 2374 et de l'amplificateur de charge 2635 du même fabricant. L'accéléromètre était collé à l'aide colle cyanolite (après un décapage local lors de la première mission). Il est placé à l'extérieur du profil, en vis en vis du choc par le battant. Lors des missions chez le facteur, nous avons également utilisé le battant des cloches pour les mettre en vibration. L'enregistrement des signaux a été effectué sur D.A.T.

Le traitement des données a été réalisé à l'aide d'un programme largement automatisé dont l'élément central est la méthode matrix pencil décrite dans la première partie. La précision obtenue sur les fréquences ($\approx 0.1\%$) et les amortissements (quelques %) excède les spécifications requises.

9.3 Résultats

9.3.1 Accord des cloches

La figure 9.1 montre les mesures d'accord relatives aux 6 premiers partiels. Cette figure donne une idée globale de la configuration spectrale du carillon. Les courbes de tempérament égal sont indiquées en pointillés et la référence de ce tempérament est calculée à l'aide d'une

moyenne sur le deuxième partiel (le fondamental). Le diapason de ce tempérament est trouvé égal à

$$431.5\text{Hz}$$

Par ailleurs ce tempérament est très bien respecté sur le fondamental, à l'exception des 2 ou 3 cloches les plus aiguës, puisque la pente de la courbe $10\log(f)$ trouvée par régression linéaire vaut 0.252 contre 0.251 pour le tempérament égal ($\log(2)/12$). Les partiels sont très bien alignés sur la série

- 0.5 : bourdon,
- 1 : fondamental ou prime,
- $5/2 / \sqrt[12]{2}$: tierce mineure,
- 1.5 : quinte,
- 2 : octave,
- 2.5 : dixième.

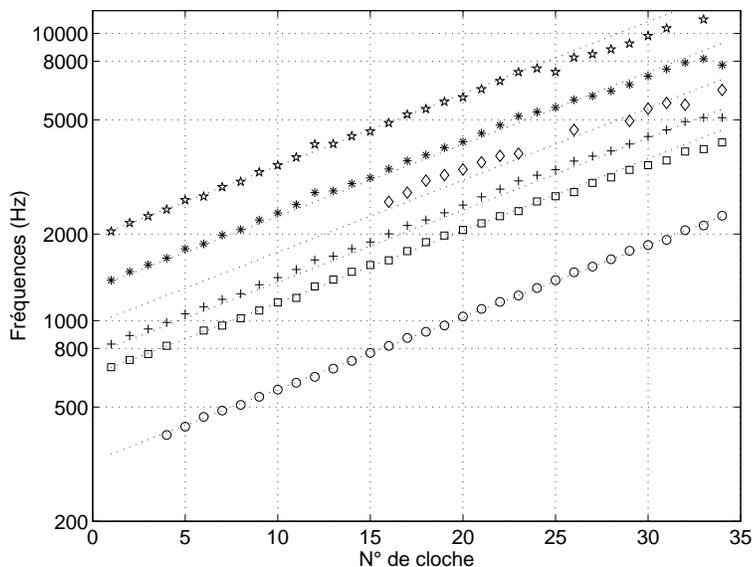


FIG. 9.1: Fréquences des 6 premiers partiels des 34 cloches supérieures du carillon. Le tempérament égal est indiqué en pointillé avec un diapason de 431.5 Hz. Le numéro des cloches correspond à la montée de la gamme chromatique à partir de la cloche la plus grave de cette série (Fa à 686 Hz)

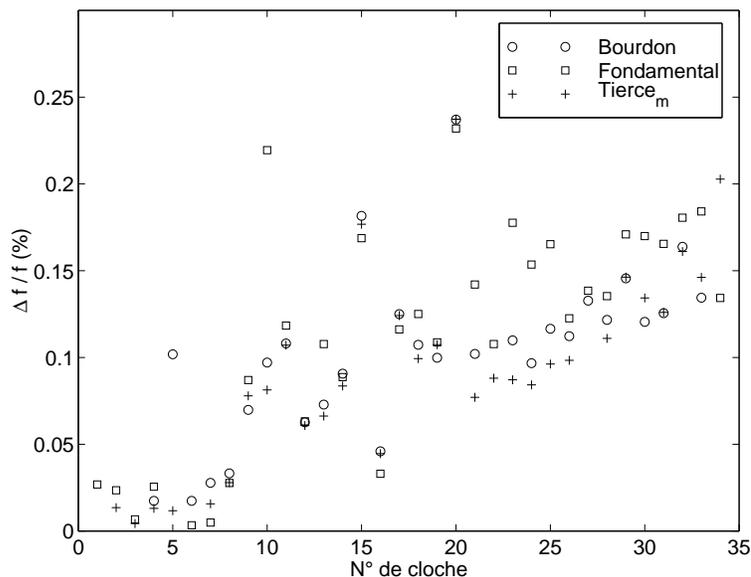


FIG. 9.2: Différences entre les fréquences de la cloche suspendue et posée retournée. Les trois premiers partiels sont représentés. La fréquence des partiels est systématiquement plus élevée lorsque la cloche est suspendue. Les signaux traités sont ceux des missions respectivement 1 et 2.

9.3.2 Différences selon la position de la cloche

Les figures 9.2 et 9.3 présentent la différence relative (en %) de fréquence entre la fréquence des 3 premiers partiels (bourdon, fondamental et tierce mineure) lorsque la cloche est suspendue dans le carillon et lorsqu'elle est posée chez le fondeur. La première figure montre cette différence avant restauration et la deuxième après abrasion de la couche d'oxyde par sablage.

Ces deux figures montrent que les fréquences propres de la cloche suspendue sont systématiquement légèrement supérieures (de l'ordre de 0.2%) aux fréquences propres de la cloche posée. En outre, nous observons un effet inattendu de la restauration : la différence relative entre les fréquences croît avec le rang du partiel avant restauration alors qu'elle est sensiblement constante après restauration. Nous constatons également qu'après restauration l'ensemble des partiels présentent une différence relative comparable. Une explication possible de ce résultat tient dans une mise en place des cloches probablement plus homogène après restauration qu'après plus d'un siècle d'usage dans le clocher où il est soumis aux intempéries.

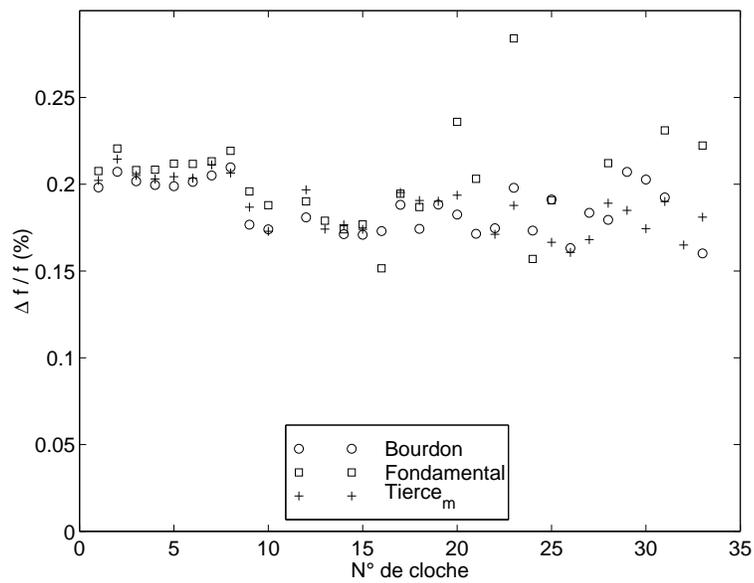


FIG. 9.3: Différences entre les fréquences de la cloche suspendue et posée. Les trois premiers partiels sont représentés. Les signaux traités sont ceux des missions respectivement 4 et 3.

9.3.3 Différences entre avant et après restauration

Les résultats montrés dans ce paragraphe permettent d'évaluer l'effet de la restauration sur la fréquence et le facteur d'amortissement des partiels de cloches.

- ◇ Fréquence des partiels Pour la majorité des partiels de cloche, les différences de fréquence

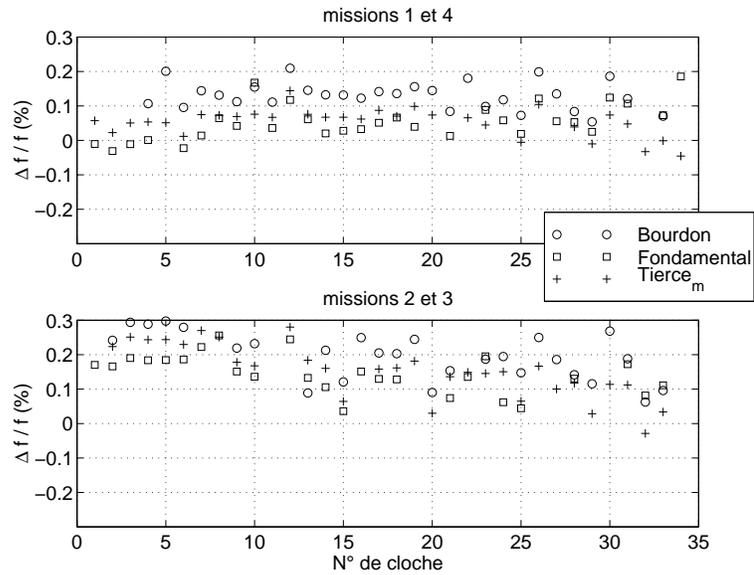


FIG. 9.4: Différences entre les fréquences mesurées *avant* et *après* restauration. $\Delta f = f_{\text{avant}} - f_{\text{après}}$

observées sont positives : avant restauration la fréquence est plus haute qu'après sablage. Une étude plus détaillée, qui prendrait notamment en compte l'influence de la température, et faisant appel à des techniques de simulation serait nécessaire pour interpréter les résultats.

◇ Amortissement des partiels

La figure 9.5 montre la différence entre les facteurs d'amortissement des trois premiers partiels mesurés avant et après restauration. Ces différences sont d'un ordre de grandeur important, compris entre 10% et 50% pour la plupart des cloches. Ces différences sont positives

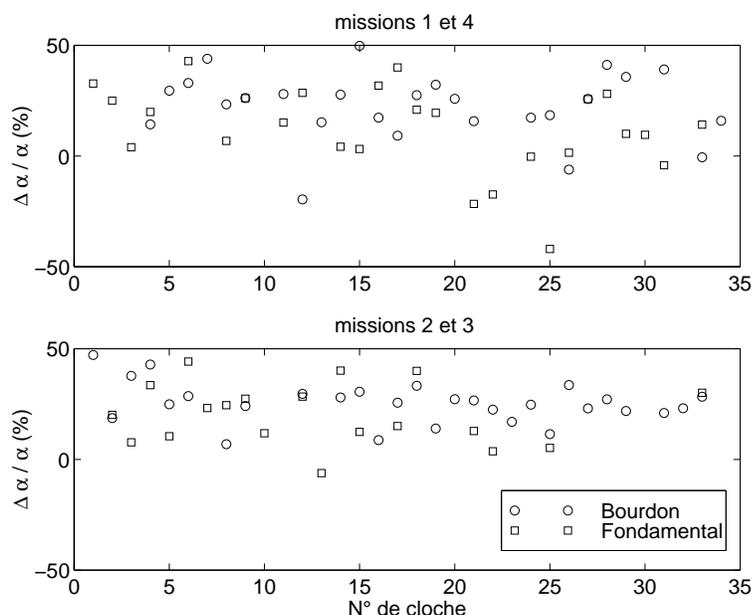


FIG. 9.5: Différences entre les amortissements mesurés *avant* et *après* restauration. $\Delta\alpha = \alpha_{\text{avant}} - \alpha_{\text{après}}$

pour la majeure partie du carillon : les vibrations sont moins amorties après restauration. Les ordres de grandeur moyens sont très cohérents entre les mesures réalisées dans le clocher et les mesures chez le fondeur.

La moyenne de la différence relative sur les amortissements entre les missions 1 et 4 (dans le clocher) vaut :

24% sur le bourdon et 14% sur le fondamental.

La même moyenne mais cette fois pour les missions 2 et 3 (chez le fondeur) s'établit à 26% sur le bourdon et 14% sur le fondamental.

9.4 Conclusions

Comme il était souhaitable, le processus de restauration n'a pas modifié de manière sensible les fréquences de résonance des cloches. Cependant, la restauration a eu un effet sur la durée du son, un peu plus longue après sablage.

Le programme de calcul, réalisé en langage MATLAB et déjà automatisé dans sa phase d'estimation peut être aisément transposé dans un langage compilé et devenir une application autonome destinée à la facture.

Une interprétation des résultats observés — diminution des amortissements et légère diminution des fréquences après sablage, fréquences un peu supérieures de la cloche suspendue par rapport à la cloche posée — nécessiterait une étude plus poussée, s'appuyant des modèles théoriques de vibration de coques et/ou des simulations numériques.

Chapitre 10

Conclusion

L'idée principale sur laquelle repose notre expérimentation est d'ôter aux structures mesurées la possibilité de s'exprimer acoustiquement (ou musicalement s'il s'agit d'instruments). La méthode expérimentale, qui réalise ce bâillonnement par des mesures en atmosphère raréfiée et les caractérisations acoustiques obtenues pour les plaques, la guitare ou les cloches constituent le principal apport de ce travail.

Notre procédure s'applique à des structures dont le comportement mécanique est linéaire et dont la vibration se décompose en composantes modales peu amorties. L'amortissement de chacune de ces composantes traduit la dissipation énergétique au cours de la vibration. La mesure des vibrations dans l'air et dans une atmosphère à pression statique faible a permis de séparer les contributions de pertes énergétiques relatives au frottement interne et au rayonnement acoustique.

Une partie importante du travail effectué a porté sur l'établissement et la validation d'un protocole de mesure. Les techniques de traitement du signal non paramétrique et paramétrique pour l'estimation de fréquences et facteur d'amortissement modaux y ont tenu une large place. Nous disposons à l'issue de ce travail de deux méthodes différentes — l'une est fondée sur la transformée de Hilbert et l'autre s'appuie sur l'algorithme matrix pencil — qui permettent à la fois la caractérisation du signal, le traitement automatique et la séparations de plusieurs composantes proches en fréquence, qui se révèle cruciale dans l'étude des signaux de guitare et de cloches. La précision atteinte permet de mesurer les faibles écarts de fréquence (inférieure au millième) qui sont observés dans nos mesures. Celles-ci portent en effet sur l'estimation *de variations fines* entre paramètres modaux : variations avec la pression statique pour les plaques et la guitare et différences entre avant et après restauration pour les cloches. L'étude concourante des incertitudes relatives à chacune des méthodes permet d'évaluer leur performances respectives mais aussi donner des indices sur la fiabilité des résultats.

L'étude des plaques métalliques minces constitue une validation de ces techniques expérimentales. Ces matériaux homogènes, isotropes et dont les caractéristiques mécaniques sont

connues permettent une comparaison avec des résultats théoriques. Nous avons vérifié la dépendance linéaire en pression statique des masses et des amortissements ajoutés et le bon ordre de grandeur de la fréquence de coïncidence des plaques étudiées. Les courbes déduites de l'expérimentation pour les facteurs de rayonnement et la masse ajoutée de rayonnement mode par mode (ou d'impédances acoustiques modales), menées sur une plage de fréquence atteignant les 20000 Hz, sont cohérentes avec le comportement acoustique attendu pour ces plaques. Nos mesures de facteur de rayonnement sur une plaque d'aluminium et celles obtenues par deux autres équipes d'expérimentateurs indépendantes sur cette même plaque montrent des résultats voisins.

La vibration de la corde de Mi grave d'une guitare et l'évaluation de l'effet acoustique de la restauration du carillon historique de la cathédrale de Perpignan constituent des applications particulières.

Pour la guitare nous avons mis en évidence plusieurs comportements possibles de la vibration en atmosphère raréfiée. Notamment, lorsque le comportement mécanique du chevalet au point d'attache de la corde est celui d'un amortisseur, la vibration dure moins longtemps sous vide que dans l'air, ce qui constitue un résultat inattendu de prime abord. Nous avons pu mesurer des rendements acoustiques des 28 premiers partiels de la corde et les valeurs trouvées sont comprises entre 15 et 60%. Cette étude doit être généralisée au six cordes de la guitare ainsi qu'à plusieurs instruments afin d'évaluer la généralité des résultats obtenus.

La deuxième application en acoustique musicale concerne le carillon de Perpignan, qui a fait l'objet d'une restauration minutieuse. Celle-ci visait notamment à enlever la couche d'oxyde recouvrant les cloches et notre étude avait pour objectif de mesurer les différences entre les paramètres modaux avant et après restauration. Notre étude a conclu à l'innocuité du sablage des cloches sur les fréquences propres mais à un gain de 15 à 20% sur les amortissements, qui sont plus faibles après la restauration.

◇ Perspectives

Les perspectives ouvertes à la suite de ce travail sont de plusieurs ordres : l'affiner et le compléter, l'appliquer à d'autres instruments (violon, piano) et à des problématiques de facture, ou encore explorer des voies transversales que nous n'avons qu'effleuré au cours de cette étude.

Pour compléter le travail réalisé sur la guitare, des mesures de variation de l'admittance au chevalet avec la pression statique nous permettraient de valider le modèle proposé. De plus, nous pourrions grâce à de telles mesures, séparer l'influence des modes structurels de celle des modes de résonance acoustique de la cavité sur le comportement vibratoire du corps de l'instrument. Une analyse plus poussée pourrait s'appuyer sur la mise sous vide de plaques de

bois ainsi que de corde montée sur banc immobile. Une telle étude sur les plaques permettrait d'évaluer l'influence du vernis sur le comportement acoustique et hygrométrique des bois de lutherie. Il serait également possible de comparer le comportement mécanique de ces bois avec des matériaux composites de substitution. L'amortissement lié au vieillissement rapide des cordes filées de guitare, qui est une préoccupation des facteurs et des musiciens, pourrait être étudié au moyen des techniques développées.

Les outils de traitement de signal mis en oeuvre sont aisément transposables pour une utilisation courante en facture instrumentale : la demande des facteurs de cloches concernant la mesure précise des fréquences et décroissances des partiels de l'instrument en est un exemple. Un logiciel d'aide à l'accordage des pianos est également envisageable sachant que les 2 ou 3 cordes composant une note sont réglées à des fréquences voisines pour éviter une décroissance trop rapide du son.

L'emploi de techniques de traitement de signal paramétriques nous suggère également deux applications liées à la modélisation du signal. La première concerne le calcul de la variance de l'estimateur matrix pencil qui peut servir, comme dans le cas des verges encastrées, d'indicateur de linéarité pour la décroissance. La deuxième est relative à l'évaluation du nombre de composantes élémentaires contenues dans un signal modal. La propriété des pôles du signal "retourné" qui se trouvent hors du cercle unité et se distinguent ainsi des composantes liées au bruit peut être exploitée de manière plus systématique pour connaître le nombre de degrés de liberté d'un système physique linéaire.

Les interrogations qui ont suscité cette étude sont liées à des problématiques d'acoustique musicale : combien une guitare dépense t-elle d'énergie acoustique ? Le rendement acoustique est-il un critère de qualité des instruments ? Si nous savons maintenant que le Mi grave de la guitare a un rendement acoustique de l'ordre de quelques dizaines de %, l'étude mérite d'être généralisée à tout l'instrument. Nous avons alors la possibilité de comparer des instruments en bois de qualité différentes ou encore des instruments en bois et en composite. La famille des instruments à corde nous fournit de multiples autres sujets d'étude : le rendement acoustique du piano est-il meilleur que celui de la guitare ?

Annexe A

Démonstration du théorème de Cramer-Rao

Soit \mathbf{x} un vecteur aléatoire de dimension N qui représente les données de l'expériences. La densité de probabilité de ce vecteur est la fonction $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$, paramétrée par $\boldsymbol{\theta}$. Son logarithme népérien, noté

$$L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \ln f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$$

est la Log-vraisemblance et le gradient de $L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ par rapport à $\boldsymbol{\theta}$ est la fonction :

$$s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \frac{\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})}{f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})}$$

La fonction $s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ est un vecteur aléatoire dont l'espérance mathématique est nulle :

$$\mathbf{E} s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) = \int f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) L(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) d\mathbf{x} = \int \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\theta}} f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) d\mathbf{x} = 0 \quad (\text{A.1})$$

Soit maintenant $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ un estimateur sans biais de $\boldsymbol{\theta}$. Alors il vérifie

$$\mathbf{E} \hat{\boldsymbol{\theta}} = \boldsymbol{\theta} \quad (\text{A.2})$$

et on démontre alors à l'aide de A.1:

$$\mathbf{E} s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T = 0 \quad (\text{A.3})$$

On construit le vecteur \mathbf{V} défini par

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta} \\ s(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x}) \end{bmatrix}$$

dont la matrice des covariances est définie positive et vaut

$$\mathbf{Q} = \mathbf{E} \mathbf{V} \mathbf{V}^T$$

ce qui d'après les propriétés A.2 et A.3 peut encore s'écrire :

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (\text{A.4})$$

où la matrice \mathbf{C} est la matrice des covariances de l'erreur sur les paramètres soit :

$$\mathbf{C} = \mathbf{E}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta})^T$$

et \mathbf{J} est la matrice d'information de Fisher définie comme la matrice de covariance du vecteur $\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})$ soit :

$$\mathbf{J}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{E}\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})\mathbf{s}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{x})^T$$

On vérifie facilement que

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{J}^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{I} \\ \mathbf{I} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{J}^{-1} & \mathbf{I} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{C} - \mathbf{J}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J} \end{bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

D'après ce résultat, la matrice \mathbf{Q} est semblable à la matrice du membre de droite de l'équation A.5. Cette dernière est donc définie positive et par suite on a la propriété A.6 qui constitue le théorème.

$$\mathbf{C} \geq \mathbf{J}^{-1}$$

(A.6)

□

Annexe B

Borne de Cramer-Rao pour une somme d'exponentielles complexes

Le calcul qui suit permet de programmer le calcul de la BCR pour l'estimation des paramètres $(A_k, \Phi_k, \alpha_k, \omega_k)$ dans le cas général pour M composantes complexes, c'est à dire pour un signal de la forme :

$$x[n] = \sum_{k=1}^M b_k z_k^n + w[n] \quad , \quad n = 0, 1 \dots N - 1 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} z_k = e^{-\alpha_k + i\omega_k} \\ b_k = A_k e^{i\Phi_k} \end{cases}$$

$w[n]$ est un bruit complexe blanc, gaussien et centré; de variance $2\sigma^2$. Il est à noter que le calcul mène à un résultat analytique dans le cas simple $M = 1$.

B.1 Prémices du calcul

B.1.1 Expression de la BCR

On rappelle que la BCR est la borne inférieure de la variance pour les estimateurs des paramètres et s'obtient comme les termes diagonaux de l'inverse de la matrice d'information de Fisher.

\mathbf{x} est le vecteur aléatoire constitué des échantillons de signal :

$$\mathbf{x} = (x[0], x[1], \dots, x[N - 1])^T$$

La densité de probabilité de ce vecteur sera notée $f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ paramétrée par le vecteur de paramètre

$$\boldsymbol{\theta} = (\theta_i)_{i=1 \dots 4M}^T = (\dots, A_i, \Phi_i, \alpha_i, \omega_i, \dots)^T$$

Cette densité de probabilité est une densité de probabilité conditionnelle qu'on trouve également notée $f(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$.

Le terme J_{ij} de la matrice de Fisher vaut :

$$J_{ij} = -\mathbf{E} \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$$

où $\mathcal{L} = \ln f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x})$ est la fonction Log-vraisemblance. La BCR pour le paramètre θ_i vaut alors

$$BCR_i = (J^{-1})_{ii}$$

B.1.2 Expression de la densité de probabilité

La densité de probabilité du bruit $w \in \mathbb{C}$ est celle d'un vecteur aléatoire gaussien (w_R, w_I) où w_R et w_I sont les parties réelle et imaginaire de w , supposée centrées, gaussiennes et indépendantes, de variances identiques σ^2 , soit finalement :

$$f(w) = \frac{1}{\pi(2\sigma^2)} e^{-\frac{w_R^2 + w_I^2}{2\sigma^2}}$$

en utilisant l'expression

$$w[n] = x[n] - \bar{x}_n$$

où $\bar{x}_n = \mathbf{E}x[n]$, on trouve alors la densité de probabilité du vecteur \mathbf{x} comme

$$f_{\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^N (2\sigma^2)^N} \prod_{n=0}^{N-1} e^{-\frac{|x[n] - \bar{x}_n|^2}{2\sigma^2}}$$

B.2 Calculs et résultat général

Il est commode d'introduire le vecteur colonne

$$\boldsymbol{\epsilon} = \bar{\mathbf{x}} - \mathbf{x}$$

qui permet d'exprimer simplement la fonction Log-vraisemblance

$$\mathcal{L} = -N \ln 2\pi\sigma^2 - \frac{\boldsymbol{\epsilon}^\dagger \boldsymbol{\epsilon}}{2\sigma^2}$$

Les termes la matrice de Fisher s'écrivent alors

$$J_{ij} = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}^\dagger}{\partial \theta_j} \frac{\partial \boldsymbol{\epsilon}}{\partial \theta_i} \right) = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}^\dagger}{\partial \theta_j} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta_i} \right)$$

Pour chaque composante il faut estimer 4 grandeurs. La matrice de Fisher de dimension $4M \times 4M$ se partitionne donc naturellement sous la forme d'une matrice bloc à l'aide de matrices \mathbf{M}_{kl} de dimension 4×4 telles que :

$$J = \frac{1}{\sigma^2} \operatorname{Re} [M_{kl}]_{k,l=1 \dots M}$$

On introduit les grandeurs

$$\mathbf{e}_k = (1 \ z_k \ \dots \ z_k^{N-1})^T$$

$$\mathbf{N} = \text{diag}(0 \ 1 \ \dots \ N - 1)$$

pour construire les formes quadratiques suivantes :

$$Q_0 = e^{j(\Phi_k - \Phi_l)} \mathbf{e}_l^\dagger \mathbf{e}_k$$

$$Q_1 = e^{j(\Phi_k - \Phi_l)} \mathbf{e}_l^\dagger \mathbf{N} \mathbf{e}_k$$

$$Q_2 = e^{j(\Phi_k - \Phi_l)} \mathbf{e}_l^\dagger \mathbf{N}^2 \mathbf{e}_k$$

On peut exprimer les 10 différents types de termes de la matrice de Fisher grâce à ces grandeurs. Les résultats sont regroupés dans le tableau 4×4 suivant, qui contient les valeurs de

$$M_{kl} = \left(\frac{\partial \bar{\mathbf{x}}^\dagger}{\partial \theta_{l,p}} \frac{\partial \bar{\mathbf{x}}}{\partial \theta_{k,r}} \right)_{p,r=1 \dots 4}$$

$\theta_{k,r} \setminus \theta_{l,p}$	A_l	Φ_l	α_l	ω_l
A_k	Q_0	$-j A_l Q_0$	$-A_l Q_1$	$-j A_l Q_1$
Φ_k	$-j A_k Q_0^\dagger$	$A_k A_l Q_0$	$-j A_k A_l Q_1$	$A_k A_l Q_1$
α_k	$-A_k A_l Q_1^\dagger$	$-j A_k A_l Q_1^\dagger$	$A_k A_l Q_2$	$j A_k A_l Q_2$
ω_k	$-j A_k A_l Q_1^\dagger$	$A_k A_l Q_1^\dagger$	$j A_k A_l Q_2^\dagger$	$A_k A_l Q_2$

Cette expression permet de calculer la matrice de Fisher et une inversion numérique donne accès aux valeurs de la BCR. On peut remarquer pour compléter que les sous matrices M_{kl} se décomposent en :

$$M_{kl} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q_0 & -j Q_0 & -Q_1 & -j Q_1 \\ -j Q_0^\dagger & Q_0 & -j Q_1 & Q_1 \\ -Q_1^\dagger & -j Q_1^\dagger & Q_2 & j Q_2 \\ -j Q_1^\dagger & Q_1^\dagger & j Q_2^\dagger & Q_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_l & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_l & 0 \\ 0 & 0 & 0 & A_l \end{bmatrix}$$

Ce qui permet de décomposer la matrice de Fisher sous la forme :

$$\mathbf{J} = \mathbf{A} \mathbf{Q} \mathbf{A}$$

où \mathbf{Q} est une matrice composée à l'aide des formes quadratiques et où la matrice \mathbf{A} est diagonale définie par :

$$\mathbf{A} = \text{diag}(1 \ A_1 \ A_1 \ A_1 \ 1 \ A_2 \ A_2 \ A_2 \ \dots \ 1 \ A_M \ A_M \ A_M)$$

Cette nouvelle expression a deux avantages :

- la matrice inverse s'écrit simplement $\mathbf{J}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{Q}^{-1} \mathbf{A}^{-1}$ ce qui évite des problèmes de conditionnement de \mathbf{J} lorsque les amplitudes sont trop différentes.

- On constate sur cette dernière expression que la BCR pour un paramètre de la composante k sera indépendant des A_l pour $l \neq k$ et sera proportionnelle à $1/A_k^2$ pour Φ_k, α_k et ω_k

On constate par ailleurs que l'expression des formes quadratiques garantit l'indépendance de la BCR à des déplacements globaux en fréquence et en phase (*i.e.* ne dépend que des différences $\omega_k - \omega_l$ et $\Phi_k - \Phi_l$)

B.3 Résultat pour une composante

La matrice de Fisher se réduit à la seule sous-matrice M_{11} qui n'a que des termes réels. Les formes quadratiques se réduisent à :

$$Q_0 = \frac{1 - e^{-2\alpha_1 N}}{1 - e^{-2\alpha_1}}$$

$$Q_1 = \sum_{n=0}^{N-1} n e^{-2\alpha_1 n}$$

$$Q_2 = \sum_{n=0}^{N-1} n^2 e^{-2\alpha_1 n}$$

La matrice est inversible analytiquement et on trouve :

- la BCR en A vaut

$$(J^{-1})_{11} = \sigma^2 \frac{Q_2}{Q_0 Q_2 - Q_1^2}$$

- la BCR en Φ vaut

$$(J^{-1})_{22} = \frac{\sigma^2}{A_1^2} \frac{Q_2}{Q_0 Q_2 - Q_1^2}$$

- les BCR en α et en ω sont identiques et valent

$$(J^{-1})_{33} = \frac{\sigma^2}{A_1^2} \frac{Q_0}{Q_0 Q_2 - Q_1^2}$$

Références

- Akaike, H. (1970). Statistical predictor identification. *Annals of the Institute of Statistical Mathematics* 22, 203–217.
- Akaike, H. (1974). A new look at statistical model identification. *IEEE Transactions on Automatic Control AC-19*(Decembre), 716–723.
- Askenfelt, A. (Ed.) (1990). *Five lectures on the acoustics of the piano*. Stockholm: Royal Swedish Academy of Music.
- Atal, B. S. (1970). Speech analysis and synthesis by linear prediction of the speech wave. *Journal of Acoustical Society of America* 50, 637–655.
- Belikovitch, V. (1993). Approximation of experimental data by exponential function. *Radiophysics and Quantum electronics* 36(12), 831–5.
- Ben Mariem, J. (1984). *Etude du couplage élastoacoustique par une méthode d'éléments finis de surface*. Doctorat de 3ème cycle, Université de Technologie de Compiègne.
- Beranek, L. L. et I. L. Ver (1992). *Noise and Vibration Control Engineering*. New York: John Wiley & Sons.
- Blackman, R. B. et J. W. Tukey (1958). *The Measurement of Power Spectra*. New York: Dover.
- Boutillon, X. (1989). Measurement of the three-dimensional admittance at a violin bridge. In *13th ICA*, Belgrade.
- Boutillon, X. (1991). Analytical investigation of the flattening effect : the reactive power balance rule. *Journal of Acoustical Society of America* 90(2), 754–763.
- Boutillon, X., J.-C. Radier, C. Valette, et M. Castellengo (1984). Etude expérimentale des cordes pourvues de raideur. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences de Paris, Série II* 298, 815–820.
- Bradley, K., M.-H. Cheng, et V. Stonick (1995). Automated analysis and computationally efficient synthesis of acoustic guitar strings and body. In *IEEE ASSP Workshop on Applications of Signal Processing to Audio and Acoustics*, New Paltz, NY, USA, pp. 238–41. IEEE.
- Brigham, E. O. (1988). *The Fast Fourier Transform* (1 ed.). PRENTICE HALL SIGNAL PROCESSING. Englewood Cliffs, New Jersey 07632: Prentice Hall.

- Bruneau, M. (1983). *Introduction aux théories de l'acoustique*. Le Mans: Université du Maine.
- Caldersmith, G. (1978). Guitar as a reflex enclosure. *Journal of Acoustical Society of America* 63, 1566–1575.
- Caracciolo, A. (1995). *Transferts d'énergie dans les plaques: Application à la table d'harmonie d'un clavecin*. Acoustique, Paris VI Jussieu.
- Caracciolo, A. et C. Valette (1995). Damping mechanisms governing plate vibration. *Acta Acustica* 3(5), 393–404.
- Chaigne, A. (1991). Viscoelastic properties of nylon guitar strings. *Catgut Acoustical Society Journal* 1(7), 21–27.
- Charbit, M. (1996). *Éléments de théorie du signal: aspects aléatoires* (1 ed.). Collection pédagogique de Télécommunication. Paris: ellipses.
- Christensen, R. M. (1982). *Theory of viscoelasticity: an introduction* (2 ed.). New York: Academic Press.
- Claerbout, J. (1976). *Fundamentals of Geophysical Data Processing*. New York: McGraw-Hill.
- Cremer, L. (1985). *The physics of the violin* ä. Cambridge Massachusetts USA, London UK: MIT Press.
- Cristensen, O. (1982). Qualitative model for low frequency guitar function. *Journal of Guitar Acoustics* 6, 10–25.
- Crocker, M. J. (1997). *Encyclopedia of Acoustics*. New York: John Wiley & Sons.
- Cuesta, C. (1990). *Corde vibrante isolée mécaniquement, amortissements, non-linéarités: application au clavecin et à la tampoura*. Thèse de doctorat, Université du Maine.
- David, B. (1993). Etude préliminaire à la mesure du rendement acoustique des instruments à corde. Technical report, DEA d'Acoustique Appliquée, Université du Maine.
- David, B. (1995). Using vacuum to measure the acoustical efficiency. In S.F.A. (Ed.), *ISMA*, Dourdan, France, pp. 379–385.
- Davies, H. G. (1969). Acoustic radiation from fluid loaded rectangular plates. Technical Report 71476-1, MIT Acoustics and Vibration Laboratory.
- Davies, H. G. (1971). Low frequency random excitation of water loaded rectangular plates. *Journal of Sound and Vibration* 15(1).
- Dhatt, G. et G. Touzot (1981). *Une présentation de la méthode des éléments finis*. Paris: Malome S.A.E Editeur.
- Douau, D. (1986). *Évaluation des propriétés acoustiques, mécaniques et structurelles des bois de tables d'harmonie de guitare; leur influence sur le timbre de l'instrument*. Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Maine.

- Doutaut, V. (1996). *Etude expérimentale et simulations numériques d'instruments de percussion à clavier*. Ph. D. thesis, Ecole Nationale Supérieure des Télécommunications.
- Duvaut, P. (1991). *Traitement du signal - Concepts et applications*. Paris: Hermès.
- Evans, T. et M. A. Evans (1977). *Guitars : music, history, construction and players from the Renaissance to the rock*. London: Paddington Press Ltd.
- Fahy, F. J. (1997). Acoustic interaction between structures and fluids. In M. J. Crocker (Ed.), *Encyclopedia of Acoustics*, Volume 1, pp. 135–152. John Wiley & Sons.
- Flandrin, P. (1993). *Temps-fréquence* (1 ed.). Traité des nouvelles technologies, traitement du signal. Paris: Hermès.
- Fletcher, N. H. (1977). Design and performance of harpsichords. *Acustica* 37.
- Fletcher, N. H. et T. D. Rossing (1998). *The Physics of Musical Instruments* (2 ed.). New-York: Springer-Verlag.
- Fryxell, R. (1990). Further studies of "moisture breathing" by wood. *Catgut Acoustical Society Journal* 1(5), 37–38.
- Golub, G. H. et V. Pereyra (1973). The difference of pseudo-inverses and non-linear least squares problems whose variables separate. *SIAM Journal on numerical analysis* (10), 413–432.
- Guyader, J. L., C. Boisson, et C. Lesueur (1988). Méthode des coefficients d'influence énergétiques. In C. Lesueur (Ed.), *Rayonnement acoustique des structures*, pp. 317–348. Paris: Eyrolles.
- Hafemeister, L. (1994). *Détection, estimation de phénomènes d'onde en analyse d'image. Application aux surfaces marines*. Ph. D. thesis, Paris XI.
- Hayes, M. H. (1996). Signal modeling. In *Statistical Signal Processing and Modeling*, pp. 129–131. John Wiley & Sons.
- Haykin, S. (1985). Radar array processing for angle of arrival estimation. In S. Haykin (Ed.), *Array Signal Processing*. Prentice-Hall.
- Heuven, E. W. V. (1949). *Acoustical measurements on church-bells and carillons*. Ph. D. thesis, S-GRAVENHAGE/DE GEBROEDERS VAN CLEEF.
- Hildebrand, F. B. (1956). *Introduction to Numerical Analysis*. New York: McGraw-Hill.
- Hille, E. (1959). *Analytic function theory*. Boston: Ginn.
- Hua, Y. (1987). *On techniques for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise*. Ph. D. thesis, Syracuse Univ.
- Hua, Y. (1988). Perturbation analysis of tk method for harmonic retrieval problems. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-36*(Feb.), 228–240.
- Hua, Y. et T. Sarkar (1990). Matrix pencil method for estimating parameters of exponentially damped/undamped sinusoids in noise. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-38*, 814–824.

- Hutchins, C. M. et V. Benade (Eds.) (1997). *Research Papers in Violin Acoustics*. Acoustical Society of America.
- Jacobsen, F. (1980). Measurement of sound intensity. Technical Report 28, Technical University of Denmark.
- Jansson, E. V. (1971). A study of acoustical and hologram interferometric measurements on the top plate vibrations of the guitar. *Acustica* 25, 95–100.
- Jansson, E. V. (1983). *Function, construction and quality of the guitar*. Stockholm: Royal Swedich Academy of Music.
- Junger, M. C. et D. Feit (1993). *Sound, Structures and Their Interaction* (2 ed.). Acoustical Society of America.
- Kahle, E. et J. Woodhouse (1994). The influence of cell geometry on the elasticity of softwood. *Journal of Materials Science* 29, 1250–1259.
- Kent, E. L. (1982). Influence of irregular partterns in the inharmonicity of piano-tone partials upon tuning practice. *Das Musikinstrument* 31, 1008–1013.
- Kumaresan, R. (1982). *Estimating the parameters of exponentially damped or undamped sinusoidal signals in noise*. signal processing, University of Rhode Island.
- Kumaresan, R. (1993). Spectral analysis. In *Handbook for Digital Signal Processing* (1 ed.), pp. 1143–241. New York: John Wiley & Sons.
- Lai, J. C. S. et M. A. Burgess (1990). Radiation efficiency of acoustic guitars. *Journal of Acoustical Society of America* 88(3), 1222–1227.
- Lambourg, C. (1997). *Modèle temporel pour la simulation numérique des plaques vibrantes. Application à la synthèse sonore*. Ph. D. thesis, Telecom Paris.
- Lambourg, C. et A. Chaigne (1993). Measurements and modeling of the admittance matrix at the bridge in guitars. In *SMAC*, Stockolm. Royal Swedish Academy of Music.
- Landau, L. et E. Lifchitz (1989). *Physique théorique 6, mécanique des fluides* (2 ed.). Moscou: Editions Mir.
- Lang, S. W. et J. H. McClellan (1980). Frequency estimation with maximum entropy spectral estimators. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-28*(Dec.), 716–724.
- Laroche, J. (1993). The use of the matrix pencil method for the spectrum analysis of musicals signals. *Journal of the Acoustical Society of America* 94(4), 1958–65.
- Lesueur, C. (1988). *Rayonnement acoustique des structures*. Eyrolle.
- Lyons, R. H. (1975). *Statistical Energy Analysis of dynamical systems*. Boston: The M.I.T. Press.
- Lyons, R. H. et G. Maidanik (1962). Power flow between linearly coupled oscillators. *Journal of Acoustical Society of America* 34(5), 623–639.

- Marple, S. L. (1987a). *Digital Spectral Analysis with Applications* (1 ed.). Prentice-Hall signal processing series. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Marple, S. L. (1987b). Simultaneous exponential parameter estimation. In *Digital Spectral Analysis with Applications* (1 ed.), pp. 306–307. Englewood Cliffs: Prentice-Hall.
- Mitra, S. K. et J. F. Kaiser (1993). *Handbook for digital signal processing* (1 ed.). John Wiley & Sons.
- Morse, P. M. et K. U. Ingard (1968). *Theoretical Acoustics*. New York: McGraw Hill.
- Nashif, A. D. (1985). *Vibration Damping* (1 ed.), Volume 1. New York: Wiley & Sons.
- Owsley, N. L. (1985). Sonar array processing. In S. Haykin (Ed.), *Array Signal Processing*. Prentice-Hall.
- Parzen, E. (1977). Multiple time series modeling: determining the order of approximating autoregressive schemes. In P. R. Krishnaiah (Ed.), *Multivariate Analysis*, Volume IV, pp. 283–295. New York: North Holland Publishing Co.
- Pavic, G. (1977). Measurement of sound intensity. *Journal of Sound and Vibration* 51(4), 533–545.
- Pisarenko, V. F. (1973). The retrieval of harmonics from a covariance function. *Geophysics J. Roy. Astron. Soc.* 33, 347–366.
- Pope, L. D. et R. C. Leibowitz (1974). Intermodal coupling coefficients for a fluid-loaded rectangular plate. *Journal of Acoustical Society of America* 56(2), 408–413.
- Prony, R. (1795). Essai expérimental et analytique. *Anales de l'Ecole Polytechnique* 1(2), 24–76.
- Radier, J.-C. (1985). *Approche du fonctionnement mécanique et acoustique de la guitare*. Thèse de doctorat 3ème cycle, Université du Maine.
- Regalia, P. A. (1993). Special filter design. In S. Mitra et J. Kaiser (Eds.), *Handbook for Digital Signal Processing*, pp. 907–979. John Wiley & Sons.
- Richardson, B. et G. Roberts (1983). The adjustment of mode frequencies in guitars: A study by means of holographic interferometry and finite element analysis. In R. S. A. o. Music (Ed.), *SMAC 83*, Stockholm, pp. 285–302.
- Rissanen, J. (1978). Modeling of shortest data description. *Automatica* 14, 465–471.
- Rohloff, E. (1940). Internal friction and damping of violin vibrations. *Annalen der Physik* 5(38).
- Ross, R. et T. D. Rossing (1979). Plate vibrations and resonances of classical and folk guitars. *Journal of Acoustical Society of America* 65(72).
- Rossing, T. D. (1982). Plate vibrations and applications to guitars. *Journal of Guitar Acoustics* 6, 65–73.

- Roy, R., A. Paulraj, et T. Kailath (1986). Estimation of signal parameters via rotational invariance techniques - esprit. *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Processing ASSP-38*(Oct.), 1340–1342.
- Sandman, B. E. (1975). Motion of three layered elastic-viscoelastic plate under fluid loading. *Journal of Acoustical Society of America* 57(5), 1097–1107.
- Saramäki, T. (1993). Finite impulse response filter design. In *Handbook for Digital Signal Processing*, pp. 155–277. New York: John Wiley & Sons.
- Scharf, L. L. (1991). *Statistical Signal Processing* (1 ed.). Electrical and Computer Engineering. New York: Addison-Wesley.
- Schmidt, R. (1979). Multiple emitter location and signal parameter estimation. In *RADC Spectrum Estimation Workshop*, pp. 243–258.
- Schoenberger, M. (1984). Proc. ieee spec. issue seismic signal process.
- Schuster, A. (1898). On the investigation of hidden periodicities with application to a supposed 26 days period of meteorological phenomena. *Terrestrial Magnetism* 3(March), 13–41.
- Schwartz, G. (1978). Estimating the dimension of a model. *Annals of statistics* 6(2), 465–471.
- Shenderov, E. L. (1988). Sound radiation by an un baffled oscillating disk. *Sov. Phys. Acoust.* 34, 191–198.
- Simpson, H. M., A. Sosin, et D. F. Johnson (1972). Contribution of defect dragging to dislocation damping. *Physical Review* 4, 1382–1401.
- Stokes, G. G. (1851). On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulum. *Trans. Cambridge. Phil. Soc.* 9.
- Strong, W., T. Beyer, D. Bowen, E. Williams, et J. Maynard (1982). Studying a guitar's radiation properties with nearfield holography. *Journal of Guitar Acoustics* (6), 59–59.
- Suzuki, H. (1986). Vibration and sound radiation of a piano soundboard. *Journal of Acoustical Society of America* 80(6), 1573–1582.
- Tufts, D. W. et R. Kumaresan (1980). Improved spectral resolution ii. In *IEEE conf. on Acoust. Speech and Signal Processing*, Denver, CO, pp. 592–597.
- Tufts, D. W., R. Kumaresan, et I. Kirsteins (1982). Data adaptative signal estimation by singular value decomposition of a data matrix. In *IEEE, Spec. Issue Spec. Estim.*, Volume 70, pp. 684–685.
- Ungar, E. E. (1992). Structural damping. In L. L. Beranek et I. L. Ver (Eds.), *Noise and Vibration Control Engineering*. New York: John Wiley & Sons.
- Vaiedelich, S. (1995, Juin 1995). Matériaux composites et bois de pernambouc : essai de caractérisation. D.e.s.s., Laboratoire de chimie appliquée de l'Université de Toulon.

- Valette, C. (1994, décembre 1994). Cours du d.e.a. atiam. Technical report, Laboratoire d'Acoustique Musicale.
- Valette, C. et C. Cuesta (1993). *Mécanique de la corde vibrante*. Paris: Hermès.
- Valimaki, V., J. Huopaniemi, M. Karjalainen, et Z. Janosy (1996). Physical modeling of plucked string instruments with application to real-time sound synthesis. *Journal of the Audio Engineering Society* 44(5), 331–53.
- Valor, C. (1996, Novembre 96). Commission de validation des progiciels de calcul vibroacoustique. résultats de références pour le rayonnement acoustique des plaques. Technical report, Société Française des Mécaniciens.
- Van Blaricum, M. L. et R. Mittra (1978). Problems and solutions associated with prony's method for processing transient data. *IEEE Trans. Antennas Propagat.* AP-26, 174–182.
- Wallace, C. E. (1972). Radiation resistance of a rectangular panel. *Journal of Acoustical Society of America* 53, 946–952.
- Wax, M. et T. Kailath (1985). Detection of signals by information theoretic criteria. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech and Signal Processing ASSP-32*(2), 387–392.
- Weinreich, G. (1977). Coupled piano strings. *Journal of the Acoustical Society of America* 62, 1474.
- Weinreich, G. (1995). Vibration and radiation of structures with application to string and percussion instrument. In A. Hirschberg, J. Kergomard, et G. Weinreich (Eds.), *Mechanics of musical instruments*. Udine: Springer-Verlag.
- Weinreich, G. et E. B. Arnold (1980). Method for measuring acoustic radiation fields. *Journal of Acoustical Society of America* 68(2), 404–411.
- Yule, G. U. (1927). On a method of investigating periodicities in disturbed series, with special reference to wolfer's sunspot numbers. *Philos. Trans. R. Soc. London, ser. A* 226(July), 267–298.
- Zener, C., W. Otis, et R. Nuckoll (1938). Internal friction in solids. *Physical Review* 53.