



HAL
open science

Décomposition en courants caractéristiques. Application à l'analyse de SER.

Yoann Morel

► **To cite this version:**

Yoann Morel. Décomposition en courants caractéristiques. Application à l'analyse de SER.. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2005. Français. NNT : . tel-00011512

HAL Id: tel-00011512

<https://theses.hal.science/tel-00011512>

Submitted on 1 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**THESE DE DOCTORAT
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Présentée par

Yoann Morel

**pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE DE CACHAN**

Domaine :

Mathématiques appliquées

Sujet de la thèse :

**DECOMPOSITION EN COURANTS CARACTERISTIQUES.
APPLICATION A L'ANALYSE DE SER**

Thèse présentée et soutenue à Cachan le 10 novembre 2005 devant le jury composé de :

Directeur de thèse : Daniel Bouche

Rapporteurs : Abderrahmane Bendali
Marc Lenoir

Examineurs : Francis Collino
Eric Duceau
Gerard Leflour
Olivier Vacus

CMLA, ENS CACHAN
61, avenue du Président Wilson, 94235 CACHAN Cedex (France)

CEA/CESTA
BP 2
33114 LE BARP (France)

Remerciements

De nombreuses personnes ont contribué plus ou moins directement à ce travail : sa mise en route, son déroulement et finalement son aboutissement.

Je tiens tout d'abord à remercier Olivier Vacus, initiateur de cette thèse, et avec qui j'ai eu plaisir à travailler pendant ces trois années.

Je suis également extrêmement reconnaissant à Daniel Bouche pour avoir accepté de diriger ce travail.

Abderrahmane Bendali et Marc Lenoir ont accepté de rapporter sur cette thèse. Je les en remercie pleinement, pour le temps qu'ils y ont consacré et l'intérêt qu'ils ont manifesté à son égard.

Cette thèse s'est déroulée au CEA / CESTA, au sein du service furtivité (SFUR). Je tiens ici à remercier l'ensemble du groupe de conception de la furtivité (GCF) pour avoir fait en sorte que ce travail se passe dans de très bonnes conditions, ainsi que l'ensemble du groupe de mesure électromagnétique (GME) pour les connaissances "extra" mathématiques et modélisations qu'ils ont su me distiller au cours de ces trois années.

Je remercie en particulier Sylvan Morvan pour les nombreuses discussions au cours desquelles les modélisations et mesures électromagnétiques ont si souvent été révolutionnées ... l'espace de quelques instants.

Je tiens à remercier Francis Collino, pour son aide dans les débuts de ce travail, puis pour les nombreuses discussions sur différents points de cette thèse.

Enfin, je remercie de tout mon cœur toutes les personnes qui m'ont permis de débiter cette thèse, pendant mes 24 années précédentes...mes parents, amis, anciens professeurs, ainsi qu'à toutes celles qui ont permis son bon déroulement, durant ces 3 années qui ont suivies.



Table des matières

Notations générales	11
I Résumé et principaux résultats	13
Introduction	17
1 Introduction générale	17
2 SER d'une cible et problématique "furtivité"	17
2.1 Les différentes zones fréquentielles	19
2.2 Les outils "haute fréquence"	19
2.3 Les lacunes BF	22
3 La sphère et les harmoniques sphériques	24
4 Généralisation de la décomposition modale à des objets quelconques	24
5 Introduction aux courants caractéristiques de Harrington et Mautz	25
6 Objectifs et plan détaillé	26
I Cadre mathématique	29
1 Cadre usuel - Méthodes intégrales	29
1.1 Cadre fonctionnel	30
1.2 Représentations intégrales des champs	33
1.3 Equations intégrales	35
1.4 Champs lointains	36
1.5 Opérateur de scattering et de champ lointain	38
2 Reformulation du problème. Espace $W_H(\Omega)$	44
2.1 Introduction de l'espace $W_H(\Omega)$	44
2.2 Existence et unicité	44
2.3 Représentation intégrale de la solution dans $W_H(\Omega)$	45
2.4 Caractérisation des solutions	48
2.5 Champs lointains	49

TABLE DES MATIÈRES

II	Cas d'un objet parfaitement conducteur	53
1	Application du cadre $W_H(\Omega)$ à des objets PEC	55
1.1	Expression des opérateurs de scattering et de champ lointain	55
1.2	Diagonalisation de l'opérateur de scattering	57
1.3	Définition des Courants caractéristiques	58
1.4	Courants caractéristiques et MFIE	62
1.5	Retour aux problèmes dans $W_{S^+}(\Omega)$ et $W_{S^-}(\Omega)$	66
1.6	Décomposition sur la base des courants caractéristiques	67
1.6.1	Décomposition d'un courant	67
1.6.2	Décomposition de la SER	69
1.6.3	Relation de réciprocité	70
1.7	Résumé et intérêt de la décomposition en courants caractéristiques	70
1.8	Courants et champs lointains caractéristiques d'une sphère conductrice	71
2	Cas d'objets moins réguliers	75
2.1	Surfaces lipschitziennes	76
2.2	Surfaces ouvertes	78
III	Calcul numérique de courants caractéristiques	81
1	Formulation variationnelle de l'EFIE	81
2	Cas d'un objet avec symétrie de révolution	82
2.1	Description de la géométrie	83
2.2	Discrétisation de la géométrie	84
2.3	Espace d'approximation	84
2.4	Calcul de la matrice élémentaire	85
2.5	Décomposition de l'opérateur d'impédance approximé	86
3	Cas 3-D général	87
4	Approximation numérique des valeurs caractéristiques	89
5	Cas de la sphère : Validation de la chaîne de calcul	93
6	Influence de la finesse du maillage sur la convergence des résultats	93
7	Cas d'une surface ouverte	100
IV	Applications de la décomposition en courants caractéristiques	103
1	Préliminaires et conventions utilisées	103
1.1	Les polarisations	104
1.2	La SER monostatique et les SER monostatiques caractéristiques	105
2	Amande Nasa	107
2.1	Décomposition en éléments caractéristiques de l'amande	108
2.2	Identification du courant effectif	109
2.3	Influence de la fréquence	111
3	Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône	114
3.1	Le cône de référence et sa DCC	116

3.1.1	La DCC du cône de référence	116
3.1.2	Analyse modale du cône	117
3.2	Comparaison cône droit / cône sphère / cône droit sans pointe	121
3.2.1	Influence de la pointe en zone de résonance : Comparaison cône / cône tronqué	122
3.2.2	Comparaison cône / cône-sphère	126
3.3	Contrôle passif de la SER du cône	129
4	Conclusion sur les applications	133
 V Contrôle et optimisation d'antennes		135
1	Optimisation de la puissance rayonnée	137
2	Synthèse de diagramme d'antenne	138
3	Alimentation adaptée de l'antenne	139
 VI Généralisation à des objets impédants		143
1	Première extension : cas d'un objet avec une impédance purement imaginaire	144
1.1	Formulation intégrale	144
1.2	Modes caractéristiques d'un objet sans pertes	145
2	Généralisation au cas d'un objet avec condition d'impédance	146
2.1	Formulation du problème - Isométrie	147
2.2	Décomposition spectrale et éléments caractéristiques	158
2.3	Application - Le cas d'un objet sphérique	158
2.3.1	Expression des champs et de $\tilde{\mathcal{U}}$	158
2.3.2	Décomposition spectrale	161
3	Limites de la méthode	162
 VII Application au problème inverse		165
1	Problème inverse pour la diffraction d'ondes acoustiques	165
1.1	Problème direct - Factorisation de l'opérateur de champ lointain	165
1.2	Éléments caractéristiques de l'objet	170
1.3	Caractérisation de $H^{-1/2}(\Gamma)$ à partir des éléments caractéristiques	171
1.4	Méthode de Factorisation d'A. Kirsh et Linear Sampling Method	175
1.4.1	Méthode de factorisation d'A. Kirsh	175
1.4.2	Lien entre la Linear Sampling Method et la méthode de Facto- risation	175
1.5	Caractérisation géométrique de l'objet à l'aide des éléments caractéristiques	177
2	De l'acoustique à l'électromagnétisme	178
2.1	Lien entre les formulations $H(\mathbf{rot})$ et H^1	179
2.2	Lien entre le potentiel de simple couche et l'opérateur d'EFIE	180
3	Problème inverse pour Maxwell	181
3.1	Caractérisation de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ à l'aide des éléments caractéristiques	181

TABLE DES MATIÈRES

3.2	Caractérisation géométrique de l'objet	184
3.3	Application à la reconstruction d'une sphère	185
4	Mise en oeuvre numérique	186
4.1	Discrétisation	187
4.2	Méthode numérique de reconstruction de l'objet	189
5	Application numérique	189
5.1	Données complètes	190
5.2	Données incomplètes	191
 VIII Conclusion et perspectives		195
 Annexe		198
 A Formules de représentation intégrale et champs lointains		199
A - 1	Dérivation des formules de représentation intégrale	199
A - 2	Calcul des champs lointains	201
 B Nature des opérateurs intégraux surfaciques		203
B - 1	Décomposition de Helmholtz	203
B - 2	Opérateur d'EFIE	204
B - 3	Formulation coercive de l'EFIE	206
B - 4	Opérateur de MFIE	208
 C Inversibilité de T_R		209
C - 1	Inversion directe de T_R	209
C - 2	Alternative à l'inversibilité de T_R	211
 D Projecteurs de Calderon		215
 E La sphère ...		219
E - 1	Harmoniques sphériques et harmoniques sphériques vectorielles	219
E - 2	Expression des champs	220
E - 2 .1	Cas général - Potentiels de Debye	220
E - 2 .2	Cas d'une sphère PEC	221
E - 3	Diagonalisation de l'opérateur d'impédance T	221
E - 4	Espace W_H et harmoniques sphériques	222
E - 5	Fréquences de résonance pour la sphère	225
 Références		227

Notations générales

$f :=$	définition de la variable ou fonction f
Ω, Ω^-	ouvert borné (objet responsable de la diffraction)
Ω^{ext}, Ω^+	l'ouvert complémentaire de Ω dans \mathbb{R}^3
$\Gamma = \partial\Omega = \partial\Omega^{ext}$	la surface de l'objet
\mathbf{n}	la normale sortante (orientée de Ω vers Ω^{ext}) à Γ
S	la sphère unité de \mathbb{R}^3
S_R	la sphère de rayon R (de centre O)
$H^s(\Omega), H^s(\Gamma)$	les espaces de Sobolev usuels ($s \in \mathbb{R}$), vectoriels ou scalaires
$V, (V)^3$	on notera indifféremment les espaces de vecteurs et de scalaires, lorsqu'il n'y a pas de confusion possible (dans quel cas on adoptera la notation $(V)^3$)
$L^2(S), L_t^2(S)$	espace des champs (tangentiels) de carré intégrable
$H(\mathbf{rot}, \Omega), H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega)$	espace des champs de vecteurs de carré (localement) intégrable, dont le rotationnel est de carré (localement) intégrable
$\mathcal{R}(A)$	image de l'opérateur A
DCC	“Décomposition en Courants caractéristiques”
BF, HF	basse fréquence, haute fréquence
PEC	“Perfectly Electrically Conducting” (objet) : objet supposé parfaitement conducteur
SER	“Surface Equivalente Radar”, aussi désignée par “signature radar”
$\hat{x}, \hat{y}, \hat{d} \dots$	les vecteurs unitaires : $x/ x , y/ y , d/ d \dots$

D'une manière générale les champs de vecteurs seront notés en caractères gras : $\mathbf{E}, \mathbf{J}, \mathbf{M}, \dots$



I Résumé et principaux résultats

Ce travail de thèse, effectué au CEA / CESTA porte sur la diffraction d'ondes électromagnétiques.

Les applications en termes d'étude de la Surface Equivalente Radar (SER) d'un objet sont à l'origine de ces recherches.

Etant donnée une onde incidente sur l'objet, la détermination des courants induits à sa surface, des champs diffractés puis, par la suite, de leur comportement à l'infini, est un problème couramment abordé dans la littérature. De plus, pour des longueurs d'onde comparables à la taille de l'objet, ces grandeurs peuvent maintenant être évaluées numériquement par des méthodes à la fois rapides et précises.

Pour des fréquences élevées, ces méthodes numériques sont limitées par des problèmes de temps de calcul et de place mémoire. De nombreuses méthodes, dites asymptotiques, inventées pour dépasser ce problème, ont donné lieu par la même occasion à des théories physiques permettant la compréhension et l'explication de l'interaction onde électromagnétique - objet.

Au contraire, pour des fréquences plus faibles, en particulier en zone de résonance ou la taille de l'objet et la longueur d'onde sont du même ordre de grandeur, les phénomènes produits sur la surface de l'objet, et en particulier leur effet sur le champ diffracté et la SER, demeurent assez mal compris et maîtrisés.

La notion de courants caractéristiques, initialement introduite par Harrington et Mautz dans les années 70 dans le cas d'objets parfaitement conducteurs, permet la décomposition d'un courant induit quelconque en courants "élémentaires". Cette décomposition semble alors particulièrement adaptée à l'étude de la SER de l'objet, grâce notamment à des propriétés d'orthogonalité des champs lointains rayonnés. Cette décomposition modale permet alors d'identifier directement les composantes d'un courant (les zones sollicitées sur l'objet) à celles de son champ rayonné.

Après avoir introduit le cadre mathématique adapté à notre étude dans le premier chapitre, nous revenons au chapitre II sur cette décomposition modale proposée par Harrington et Mautz. Nous fournissons dans ce chapitre les résultats mathématiques nécessaires à la bonne compréhension et utilisation de cette décomposition. La discrétisation et les applications, notamment en termes d'analyse et de contrôle de SER, puis d'analyse de rayonnement d'antenne, sont ensuite présentées respectivement dans les chapitres III, IV et V.

L'introduction de ce cadre mathématique permet de donner une première généralisation de ce type de décomposition à des objets modélisés par une condition d'impédance. Le chapitre VI fournit ainsi les premiers résultats, à notre connaissance, généralisant la notion d'éléments caractéristiques d'un objet, jusqu'ici limitée à des objets supposés conducteurs.

I Résumé et principaux résultats

Ces courants et champs caractéristiques fournissent de plus un outil théorique intéressant, de par les bases fonctionnelles adaptées à l'étude de la diffraction qu'ils constituent.

L'application au problème inverse, i.e. la reconstruction de la surface de l'objet à partir de la connaissance des champs lointains diffractés, est présentée au chapitre VII et donne un exemple d'utilisation théorique de ces modes caractéristiques.

Les résultats principaux et originaux de ce travail sont :

- le théorème 5, chapitre II (page 57) qui exprime l'opérateur de scattering sous la forme d'une transformée de type transformation de Cayley; cette transformation permet de ramener l'étude de la diffraction à un unique opérateur, qui plus est compact et auto-adjoint.

Les décompositions spectrales reposeront alors principalement sur cet opérateur.

- la définition 3, chapitre II (page 59) : la définition rigoureuse des courants caractéristiques; par la suite, le théorème 7 (p. 59), énonçant les résultats établis portant sur les familles de courants et de champs caractéristiques.
- le chapitre IV : les familles d'éléments caractéristiques sont utilisées pour l'étude, puis le contrôle de SER.

On montre ainsi que les familles d'éléments caractéristiques permettent de donner une méthodologie d'analyse et de contrôle de SER.

- le théorème 25, page 182, montrant la propriété de la famille des courants caractéristiques de former une base de Riesz de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. Ce résultat est central pour la méthode de traitement du problème inverse que nous présentons par la suite. Il permet d'étendre la méthode introduite par A. Kirsh dans le cas de la diffraction d'ondes acoustiques, dite méthode de factorisation, au problème inverse électromagnétique.

Introduction

1 Introduction générale

Nous traitons de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un objet. Notre étude porte sur la diffraction engendrée par l'objet lorsqu'on l'éclaire par une onde électromagnétique. En pratique, cette onde électromagnétique est généralement produite par un radar ou une antenne. Cette onde incidente donne naissance à des densités surfaciques de courants, électriques et magnétiques, qui, à leur tour, produisent une onde diffractée. Une grandeur intéressante appelée Surface Équivalente Radar (SER), et définie comme le ratio des puissances de ces deux ondes, diffractée et incidente, permet d'évaluer la signature radar de l'objet.

La SER est une grandeur fondamentale dans l'étude de la discrimination radar de cibles, en vue d'applications militaires (branche principale d'investigation de la Direction des Applications Militaires du CEA) et civiles (contrôle du trafic aérien par exemple).

L'introduction des courants électriques et magnétiques surfaciques permet de rendre compte de l'interaction onde électromagnétique / objet.

L'analyse du rayonnement d'un objet repose alors assez naturellement sur l'étude de ces courants. Ce sont les phénomènes physiques sur lesquels peut intervenir le concepteur de l'objet, et ainsi jouer sur sa SER.

Pour des fréquences élevées, de nombreux modèles théoriques, dits asymptotiques (initialement développés en réponse aux problèmes numériques qui se posent dans ces domaines fréquentiels), permettent de décrire ces phénomènes.

Au contraire, pour des fréquences plus faibles, tandis que l'évaluation numérique de ces grandeurs peut maintenant se faire par des méthodes à la fois rapides et précises, la description et la compréhension des phénomènes sur la surface de l'objet sont bien plus délicates.

2 SER d'une cible et problématique "furtivité"

Initialement, la SER d'un objet est définie à partir d'un bilan de puissance dans une problématique radar. Un radar travaillant à la fréquence f (ou à une longueur d'onde $\lambda = c/f$, c étant la vitesse de la lumière) émet une puissance P_e dont une certaine partie atteint l'objet ; par la suite, l'objet en rétrodiffuse une partie, et au final, une puissance P_r pourra être captée par le radar.

Introduction

En détaillant ces trajets et les différentes pertes de puissance les accompagnant on obtient une relation, dite équation du radar, qui fait intervenir explicitement un coefficient de proportionnalité entre la puissance émise et celle reçue par le radar : ce coefficient noté σ , homogène à une surface (mètres carrés), est, par définition, la surface équivalente radar (SER) de l'objet.

Cette équation s'écrit :

$$P_r = \underbrace{P_e G_e \frac{1}{4\pi D^2} \sigma \frac{1}{4\pi D^2} G_r \frac{\lambda^2}{4\pi}}_{P_2} P_1$$

avec les grandeurs

- P_r, P_e : puissances reçue et émise,
- G_e, G_r : gains d'antenne à l'émission et à la réception,
- D : la distance radar - cible,

et où, en détaillant successivement, P_1 désigne la puissance reçue par la cible, et P_2 celle revenant au niveau du radar après diffraction par l'objet (et donc un aller-retour radar /cible).

La SER σ ainsi exprimée ne dépend alors que de l'objet. Néanmoins cette dépendance est forte, et se fait au travers d'une grande diversité de paramètres.

Nous verrons par la suite que la SER d'un objet s'exprime aussi en fonction des champs diffractés par celui-ci, et en particulier, en fonction de ses caractéristiques.

La "problématique furtivité" peut alors se résumer ainsi : étant donné une configuration radar-cible, minimiser la puissance reçue par le radar en présence de la cible, i.e. sa SER σ .

Soit $\sigma := \sigma(f, \Gamma, \hat{x}^i, p^i, \hat{x}^r, p^r)$ la SER de l'objet, alors ce problème de minimisation peut s'exprimer, par exemple, suivant :

$$\min \left\{ \int_{f \in [f_{min}, f_{max}]} \iint_{(\hat{x}^i, \hat{x}^r) \in \Omega^i \times \Omega^r} |\sigma(f, \Gamma, \hat{x}^i, p^i, \hat{x}^r, p^r)|^2 d\hat{x}^i d\hat{x}^r df ; \Gamma \in \Lambda_{adm}, z \in Z_{adm} \right\}, \quad (1)$$

où :

- $[f_{min}, f_{max}]$, $f_{min} \leq f_{max}$ est la bande fréquentielle d'intérêt ;
- Ω^i et Ω^r sont des sous-ensembles de la sphère unité ; par exemple, en pratique, l'intérêt est souvent porté au cas $\Omega^i = \Omega^r = \{|\theta| \leq \theta_{max}, |\varphi| \leq \varphi_{max}\}$, pour de faibles θ_{max} et φ_{max} (SER monostatique dans l'axe) ;
- Λ_{adm} constitue l'ensemble des géométries admissibles pour l'objet, imposé par diverses contraintes autres que le rayonnement électromagnétique : contraintes mécaniques, thermiques, aérodynamiques, ... suivant le cahier des charges, les contraintes globales ;
- Z_{adm} définit l'ensemble des impédances admissibles ; en pratique, l'impédance $z(x)$, définie en tout x de la surface Γ de l'objet, peut-être réalisée par différents traitements de la surface, par l'utilisation de matériaux aux propriétés particulières, ... Cet ensemble Z_{adm} se trouve ainsi être lui-même soumis à des contraintes qui découlent de celles sur la géométrie.

Pour un ensemble plus "large" d'objets, l'impédance de surface z peut être remplacée par un modèle plus précis prenant en compte les caractéristiques électromagnétiques du ou des matériaux constituant (ou seulement recouvrant) l'objet.

Cette liste de contraintes n'est bien sûr pas exhaustive.

Dans un contexte global, de manière à répondre à toutes ces contraintes (qui peuvent se révéler plus importantes que la contrainte même de furtivité : un avion furtif se doit avant tout d'être en mesure de voler...), le problème de minimisation précédent peut être formalisé en inversant la fonctionnelle à minimiser et les contraintes. On peut ainsi chercher à optimiser la forme (par exemple) de l'objet par rapport à des critères mécaniques, aérodynamiques ... sous la contrainte d'une certaine caractéristique en terme de SER (voir [68] par exemple).

2.1 Les différentes zones fréquentielles

Un paramètre essentiel dans l'étude de la diffraction d'ondes électromagnétiques est la fréquence à laquelle on se place pour étudier les phénomènes. En effet, selon la fréquence, les difficultés qui apparaissent dans l'étude peuvent être de nature différente.

On est amené à considérer trois "zones fréquentielles" distinctes :

- la zone des basses fréquences (BF), ou encore zone de Rayleigh, dans laquelle la SER de l'objet croît en λ^4 ,
- la zone dite de résonance ; historiquement, la fréquence de résonance est la fréquence à laquelle la SER est maximale. L'étude dans cette zone est complexe, en comparaison des domaines BF et HF, aucun modèle ne permet de décrire le comportement des champs rayonnés et de la SER,
- la zone des hautes fréquences (HF), on atteint assez rapidement dans cette zone un comportement asymptotique ; des méthodes reposant justement sur des développements asymptotiques peuvent être utilisées (cf. paragraphe ci-dessous).

Ces trois zones se distinguent clairement sur la SER monostatique d'un objet. On les représente figure 1, pour la SER monostatique d'un cône.

2.2 Les outils "haute fréquence"

Lorsque la fréquence est suffisamment élevée, c'est-à-dire que la longueur d'onde de l'onde incidente est faible comparée à la taille de l'objet (objet électriquement grand), de nombreuses méthodes permettent de donner des approximations du comportement des champs électromagnétiques.

La plus connue, et sûrement la plus ancienne, est l'optique géométrique. Elle décrit le comportement des ondes comme celui de rayons se propageant en ligne droite (dans le vide) et interagissant de manière simple avec l'objet. Ceci n'est valable que dans des domaines très haute fréquence (initialement dans les fréquences du domaine visible).

Les développements asymptotiques plus récents permettent alors de retrouver l'optique géométrique comme premier ordre dans les développements. On peut citer la théorie géométrique

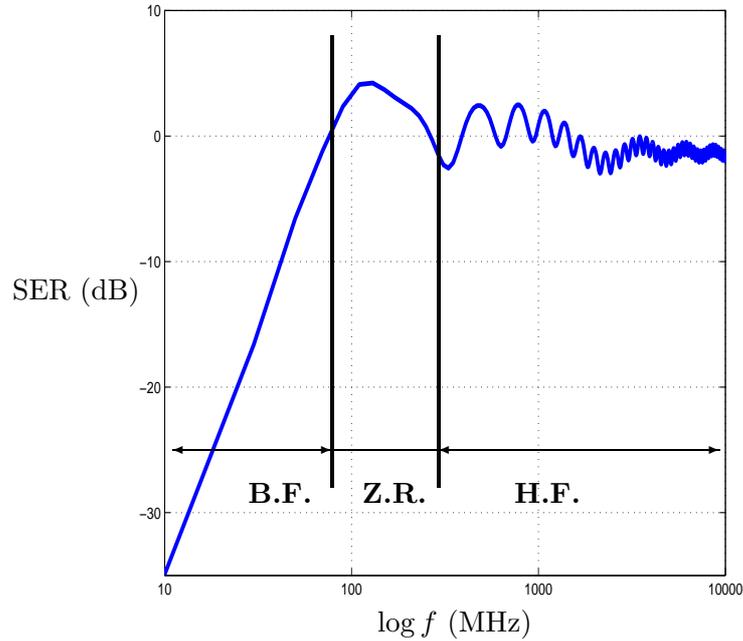


FIG. 1 – SER monostatique d’un cône en fonction de la fréquence (en MHz), et définition des trois zones principales : la basse fréquence, la zone de résonance, et la haute fréquence.

de la diffraction (TGD), et la théorie physique de la diffraction (TPD) par exemple, voir [10], [54].

Un autre modèle, très utilisé en pratique, est celui de points brillants. L’imagerie radar se base sur ce modèle et permet d’extraire des champs lointains rayonnés par un objet, un ensemble de contributeurs principaux localisés sur l’objet.

Cet ensemble de contributeur caractérise alors l’objet, d’un point de vue électromagnétique, dans la configuration étudiée (directions de l’onde incidente et d’observation, et fréquence).

Modèle de points brillants Le modèle de points brillants repose sur le principe suivant : l’onde diffractée par un objet se comporte, suffisamment loin de celui-ci, comme une onde sphérique (voir paragraphe I-1.4). La source de cette onde sphérique est située sur l’objet, ou dans son voisinage. Ce centre, dénommé point brillant, apparaît ainsi comme le contributeur principal au rayonnement de l’objet.

Pour des objets complexes, ce modèle de points brillants permet de décomposer l’objet diffractant en une collection de sources situées sur l’objet ou dans son voisinage ; chacun de ces points étant affecté d’un coefficient de pondération désignant son “degré de prépondérance”.

Plus explicitement, si $\sigma(f, \hat{d})$ est la SER monostatique de l’objet dans la direction \hat{d} et à la

fréquence f , la décomposition en points brillants s'écrit :

$$\sigma(f, \hat{d}) = \sum_n a_n(f, \hat{d}) e^{\frac{2i\pi}{c} f \hat{d} \cdot x_n}, \quad (2)$$

où x_n désigne justement la position de ces points dans l'espace. L'analyse de l'objet consiste alors à rechercher, pour une direction \hat{d} et une fréquence f (soit un vecteur d'onde $\vec{k} = \frac{2\pi f}{c} \hat{d}$) les amplitudes a_n et les localisations x_n (aussi appelées centre de phase).

L'utilisation de ce modèle présuppose des principes de stationnarités et des indépendances concernant les contributeurs. De plus, des problèmes de résolution, directement liés à l'analyse de Fourier sous-jacente, vont limiter la méthode.

On précise maintenant ces difficultés, qui vont grandement limiter la méthode en basse fréquence.

On note tout d'abord que l'expression (2) est la transformée de Fourier de la SER $\sigma(f, \hat{d})$, avec cependant des coefficients de Fourier dépendant des paramètres f et \hat{d} .

En pratique, pour atteindre les grandeurs a_n et x_n à une fréquence f_0 et une direction \hat{d}_0 , on se donne une bande fréquentielle $[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]$ de largeur Δf , et un angle solide Ω caractérisé par une ouverture $\Delta \hat{d}$, sur lesquels les coefficients du développement (2) vont être supposés constants :

$$\forall f \in [f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}], \forall \hat{d} \in \Omega, a_n(f, \hat{d}) \sim a_n. \quad (3)$$

Cette hypothèse permet alors la réécriture de (2) selon

$$\sigma(f, \hat{d}) = \sum_n a_n e^{\frac{2i\pi}{c} f \hat{d} \cdot x_n}. \quad (4)$$

Cette expression permet alors de remonter aux coefficients souhaités par transformée de Fourier inverse dans le pavé $[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}] \times \Omega$.

L'hypothèse principale dans cette méthode d'analyse est un principe de stationnarité des phénomènes : on suppose que dans le domaine $[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}] \times \Omega$ les phénomènes varient peu pour que l'approximation (3) soit valide.

Réponse impulsionnelle d'un objet La réponse impulsionnelle (RI) d'un objet correspond à l'exploitation du modèle de points brillants exposé ci-dessus, dans une bande fréquentielle $[f_{min}, f_{max}]$ et une ouverture angulaire réduite à une direction.

On présente figure 2 la réponse impulsionnelle d'un cône parfaitement conducteur dans l'axe, i.e. pour des directions d'incidence et d'observation confondues avec l'axe du cône.

On observe sur cette réponse impulsionnelle les contributions successives à la SER : la diffraction de la pointe, la simple diffraction sur l'arête de fond du cône, puis des diffractions multiples. Ces contributions sont illustrées sur la figure 3 ci-dessous (voir [8], [10]).

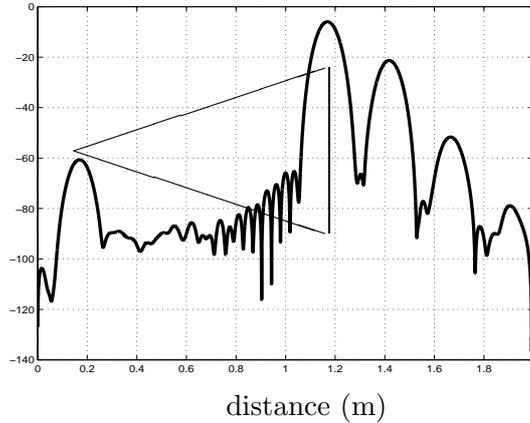


FIG. 2 – Réponse impulsionnelle d’un cône

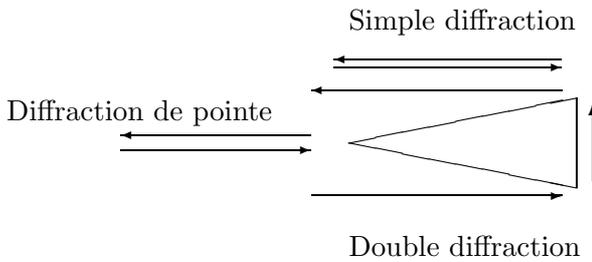


FIG. 3 – Interprétation en termes de rayons de la RI du cône en incidence axiale, donnée figure 2

Imagerie radar La RI d’un objet s’effectue dans une direction fixe. On peut reprendre la démarche précédente dans un secteur angulaire donné. On obtient de cette façon une “réponse impulsionnelle 2-D”, ou encore une image de l’objet. Cette image, en 2-D dans le plan d’incidence, fournit à proprement parler les amplitudes a_n et les centres x_n du développement (4).

On obtient, en reprenant l’exemple précédent du cône, l’image 4.

On retrouve dans ce cas simple les contributeurs introduits dans le paragraphe précédent ; l’arête de fond du cône apparaissant cette fois plus clairement.

2.3 Les lacunes BF

La méthode d’imagerie, à une fréquence f_0 et une incidence θ_0 , présentée précédemment nécessite la connaissance du champ diffracté par l’objet sur une bande fréquentielle $[f_0 - \frac{\Delta f}{2}, f_0 + \frac{\Delta f}{2}]$ et sur un secteur angulaire $[\theta_0 - \frac{\Delta \theta}{2}, \theta_0 + \frac{\Delta \theta}{2}]$.

Les choix de la largeur de bande fréquentielle Δf et de celle angulaire $\Delta \theta$ déterminent la résolution de l’image finale, i.e. la taille d’une cellule élémentaire dans l’image.

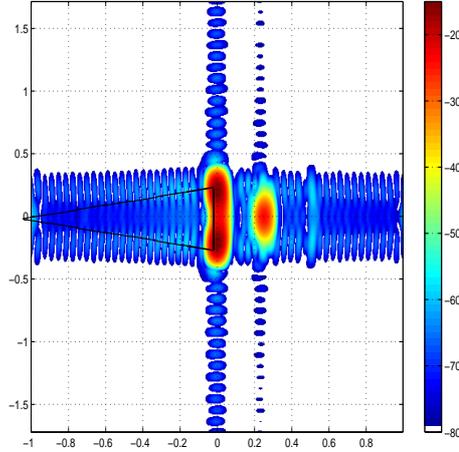


FIG. 4 – Image d'un cône.

Plus précisément, l'utilisation de la transformée de Fourier implique des relations de type relation d'incertitude : pour une bande fréquentielle (resp. angulaire) de largeur Δf (resp. $\Delta\theta$) balayée par pas δf (resp. $\delta\theta$), on a les relations :

$$\delta x \Delta f = C^{te} , \delta y \Delta\theta = C^{te} , \delta f \Delta x = C^{te} , \delta\theta \Delta y = C^{te} ,$$

où δx et δy désignent les pas en x et y , respectivement, et Δx et Δy les tailles en x et y de l'image.

Ainsi, sous peine d'obtenir une résolution ne permettant pas de distinguer ne serait-ce que l'objet, une largeur de bande minimum est nécessaire.

Ce facteur devient alors vite limitant lorsque la fréquence d'intérêt f_0 diminue ; en effet on a la borne $\Delta f < 2 f_0$ de manière à ne considérer que des fréquences positives.

A titre d'illustration l'image figure 4 a été réalisée à la fréquence centrale $f_0 = 3$ GHz, avec une largeur de bande $\Delta\theta = 2$ GHz. La cellule de résolution dans l'image 4 a environ 5 cm de côté, qui est honorable vis-à-vis de la taille du cône (1m de hauteur, 50 cm de diamètre).

Inversement, la relation $f_0 - \frac{\Delta f}{2} > 0$ conduit à la fréquence minimale $f_0 = 1$ GHz, si on fixe la résolution δx à 10 cm (par exemple, soit $1/10^{eme}$ de la longueur du cône).

A la limite, pour des fréquences $f_0 < 100$ MHz, la résolution correspondante est supérieure à la taille du cône, et il devient impossible de discerner des phénomènes provenant de zones différentes sur le corps du cône.

On note de plus que cette méthode d'imagerie repose sur un principe de stationnarité des phénomènes ; c'est l'hypothèse permettant la reformulation (4). Cette hypothèse est mise en défaut lorsque la fréquence diminue, et particulièrement à partir de la zone dite de résonance, et en deçà (voir figure 1).

La méthode présentée jusqu'ici utilise comme point de départ le signal reçu, la SER monostatique, et permet son analyse par des méthodes de décomposition usuelles (ici, l'analyse de Fourier, mais on peut imaginer utiliser d'autres types d'analyse : ondelettes, méthodes spectrales...).

En particulier, la nature physique des phénomènes en jeu, propagation d'ondes électromagnétiques régies par les équations de Maxwell, n'est que très peu utilisée.

Nous allons maintenant introduire une méthode théorique, reposant sur des solutions explicites du problème de la diffraction par un objet très particulier : la sphère.

3 La sphère et les harmoniques sphériques

La sphère est un cas d'étude qui permet d'exhiber des solutions explicites. En effet, dans ce cas, la méthode de séparation des variables peut-être utilisée, et fournit une base de fonctions définies sur la sphère. Les éléments de cette base sont les harmoniques sphériques, et constituent ainsi une base pour l'ensemble des courants induits sur la sphère.

En tant que base, les harmoniques sphériques peuvent par la suite être utilisées pour tout autre objet, en considérant par exemple la sphère minimale à l'objet (sphère de plus petit rayon contenant l'objet), et en y projetant les champs recherchés.

Une des principales difficultés de cette utilisation provient alors de la continuité de ces développements à l'intérieur même de la sphère minimale, et tout particulièrement jusqu'à la surface de l'objet.

Malheureusement les objets rencontrés ne sont pas sphériques, et l'utilisation des harmoniques sphériques est d'autant moins adaptée que l'objet étudié s'éloigne d'une sphère ; le cas d'un fil, par exemple, d'un cône ou encore de l'amande NASA présentés dans ce document, ou plus généralement de tout objet "complexe" (avion, antenne, ...).

4 Généralisation de la décomposition modale à des objets quelconques

La recherche d'une base de courants adaptée à la décomposition des courants induits, telle que celle des harmoniques sphériques pour la sphère, est un problème qui a suscité de nombreuses recherches et travaux.

Nous verrons dans le chapitre I que l'on peut définir un opérateur T reliant l'excitation imposée à l'objet (illumination par une onde incidente, alimentation par générateurs de tension, ...) au courant électrique induit sur la surface de l'objet. On désignera par opérateur d'EFIE cet opérateur, pour des raisons qui apparaîtront clairement dans le chapitre I.

Dans le cas d'une sphère, cet opérateur est diagonal dans les bases d'harmoniques sphériques. De nombreux travaux, partant de ce constat, se basent sur cet opérateur pour fournir une base de courants induits.

En particulier les travaux suivants vont dans ce sens :

- dans [69], l'auteur utilise le fait que l'opérateur d'EFIE est normal pour certaines géométries (sphère, cylindre, tore). Cette propriété n'est néanmoins pas démontrée dans le cas général.

- dans [33], une étude générique des problèmes d’antenne est menée. Ces problèmes aboutissent directement à celui de fournir une base de courants sur la surface de l’antenne. Comme un critère principal dans une problématique antenne est celui de la distribution angulaire de la puissance rayonnée, l’auteur propose de procéder à la décomposition en valeurs singulières (SVD) de l’opérateur de rayonnement (opérateur qui relie les courants sur la surface de l’objet aux champs qu’ils rayonnent infiniment loin). Cette SVD fournit des bases orthogonales de champs lointains rayonnés et de courants. La base de courant ainsi formée présente l’inconvénient majeur de ne rendre compte que de la “partie rayonnement” (en d’autres termes, et comme nous le verrons plus tard, ces bases sont construites uniquement à partir de la partie imaginaire de l’opérateur d’EFIE, l’information portée par sa partie réelle n’intervenant pas).
- dans [23], on préfère considérer la SVD de T , c’est-à-dire les éléments propres des opérateurs T^*T et de TT^* ; cette démarche n’est pas applicable dans le cas général (i.e. en dimension infinie) car l’opérateur T n’est pas un opérateur compact. Néanmoins, appliquée sur la matrice de l’opérateur d’EFIE discrétisé, cette méthode fournit une base discrète de courants qui peut être utilisée pour décomposer le courant induit [24], [25].
- l’opérateur d’EFIE T est, dans la terminologie de [11], un opérateur dissipatif à partie imaginaire compacte (cela sera démontré par la suite). Ainsi, si l’opérateur T n’a pas des propriétés suffisantes pour être diagonalisable dans une base orthonormale, on pourrait démontrer que sa famille de vecteurs propres est, sous certaines conditions, complète dans l’espace des courants électriques (on renvoie à [11] pour une étude plus précise sur la décomposition spectrale de tels opérateurs). Néanmoins, en pratique, l’utilisation d’une base non-orthogonale n’est pas aisée; la résolution de systèmes linéaires est encore nécessaire par la suite lorsque l’on s’intéresse à la recomposition d’éléments sur cette base.

En somme, des applications de base de courants existent (voir aussi le paragraphe “publications relatives aux courants caractéristiques”, dans la liste de références bibliographiques de ce mémoire), mais l’étude et la justification mathématique d’une telle base manquent.

L’objectif de cette thèse est de fournir cette théorie.

Une autre base de courant a été introduite par R.J. Garbacz, puis par J.R. Harrington et R.J. Mautz au début des années 70 :

5 Introduction aux courants caractéristiques de Harrington et Mautz

Initialement introduite par R.J. Garbacz, dans [14], J.R. Harrington et R.J. Mautz ont par la suite repris cette théorie des courants caractéristiques, dans les deux articles [16] et [17].

Selon Garbacz, il doit exister pour tout objet conducteur de forme quelconque une base analogue à celle formée par les harmoniques sphériques pour la sphère. Ces travaux s’orientent donc vers une généralisation des harmoniques sphériques.

Par la suite, Harrington et Mautz formalisent cette idée à partir de manipulations sur

l'opérateur d'EFIE, permettant, entre autre, le calcul numérique de ces courants élémentaires [17].

Les travaux de ces deux auteurs montrent surtout l'intérêt, dans l'étude de la diffraction par un objet conducteur de géométrie quelconque, de cette base de courants. Ceux-ci pourraient permettre, à l'image du modèle de points brillants, ou encore des séries de Mie utilisant les harmoniques sphériques, de décomposer la SER d'un objet en contributions distinctes.

A l'image plus particulièrement des points brillants, une source sur l'objet est alors immédiatement identifiable pour chacune de ces contributions.

Malheureusement, et au contraire des harmoniques sphériques, certains résultats mathématiques nécessaires à la bonne définition, puis utilisation de cette base manquent.

De plus cette décomposition n'est valable que pour des objets supposés parfaitement conducteurs.

6 Objectifs et plan détaillé

On cherche à généraliser les possibilités de décomposition modale de la sphère aux objets de forme quelconque. Plus précisément, on cherche une famille de courants sur l'objet ayant des propriétés similaires à celles des harmoniques sphériques sur la sphère, à savoir des propriétés :

- de densité dans l'espace (fonctionnel) des courants,
- d'orthogonalité,
- de densité des champs rayonnés à l'infini associés,
- et d'orthogonalité de ces champs rayonnés.

Notre approche utilise essentiellement la notion d'opérateur de scattering. Cet opérateur relie les ondes solutions des équations de Maxwell dites entrantes, à leurs homologues dites sortantes. Pour des objets parfaitement conducteur, cet opérateur est unitaire. Cette propriété, fondamentale dans l'étude de la diffraction par des objets PEC, va nous permettre, via une transformée Cayley, de factoriser l'opérateur de scattering à l'aide exclusivement d'un opérateur auto-adjoint.

La décomposition modale recherchée repose ensuite sur la décomposition spectrale de cet opérateur.

Nous précisons ci-dessous le contenu des différents chapitres.

- **chapitre I** : L'étude mathématique générale du problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques, en particulier, l'introduction des méthodes intégrales qui constituent le "support" mathématique de l'étude.
- **chapitre II** : On applique les méthodes générales du premier chapitre aux cas d'objets PEC.

Dans ce cas particulier, le cadre général introduit permet de fournir des expressions intéressantes de certains opérateurs fondamentaux de la diffraction d'ondes. On montrera ainsi que toute l'étude de la diffraction se ramène dans ce cas à celle d'un seul opérateur, compact et auto-adjoint. Cet opérateur permet alors l'introduction d'une base orthogonale

d'éléments propres. Basés sur ces éléments, on définira alors successivement les valeurs, champs lointains, et courants caractéristiques de l'objet. L'utilisation du cadre développé dans le premier chapitre permet de montrer rigoureusement les résultats de densité et d'orthogonalité souhaités.

- **chapitre III et IV** : Après avoir présenté le mode opératoire numérique pour calculer des approximations de ces éléments caractéristiques (chapitre III), on présente des exemples d'utilisation et d'application pratiques de cette décomposition modale (chapitre IV). On s'intéresse dans un premier temps à l'analyse d'un objet vis-à-vis de sa DCC, et au problème concret de l'identification de la "partie de l'objet" principalement sollicitée pour le rayonnement dans une direction donnée. La caractérisation de ce rayonnement est étudiée au travers de la SER de l'objet.

On propose alors, sur une autre géométrie, à partir de la DCC de l'objet, de fournir quelques méthodes simples de traitement de la surface de l'objet, en vue de la diminution de sa SER monostatique dans un secteur angulaire donné.

- **chapitre V** : La DCC est indépendante de l'excitation, ou plus généralement des courants sur l'objet. L'analyse menée dans le chapitre IV peut ainsi être utilisée dans le cas d'objets directement excités par une alimentation propre, et non pas par le biais d'une onde électromagnétique incidente (i.e. des antennes).

On regarde ainsi dans ce chapitre l'intérêt de cette décomposition pour l'étude d'antennes.

- **chapitre VI** : Si la DCC pour des objets PEC a été introduite il y a déjà quelques dizaines d'années (au début des années 70), elle a toujours été restreinte à ce type d'objet.

Le cadre mathématique établi au chapitre II se généralise simplement au cas d'objets sans pertes. Cette généralisation n'est malheureusement plus valable pour des objets à pertes.

On propose ensuite une généralisation à des objets modélisés par une condition de type impédance.

En particulier, on cherche alors à réintroduire des opérateurs conservatifs (unitaires), ce qui revient, physiquement, à introduire les pertes directement dans les grandeurs qui nous intéressent.

- **chapitre VII** : Enfin, les bases exhibées de courants et champs caractéristiques sont aussi, à l'image des harmoniques sphériques sur la sphère, un outil d'intérêt théorique.

L'utilisation de ces bases permet de caractériser naturellement l'ensemble des champs diffractés ; à partir de cette caractérisation, on peut remonter à l'objet responsable de la diffraction.

On propose ainsi une méthode de traitement du problème inverse de la diffraction d'ondes électromagnétiques par des objets PEC.

Cette méthode étend la méthode dite de factorisation, introduite par A. Kirsh [55] dans le cadre de la diffraction d'ondes acoustiques.

I Cadre mathématique

Nous commençons par introduire le cadre mathématique général adapté au problème aux limites extérieurs pour les équations de Maxwell. Notre approche du problème repose sur les méthodes dites d'équations intégrales. Celles-ci permettent de ramener le problème de la diffraction en domaine non borné, à un problème posé exclusivement sur la frontière de l'objet diffractant.

On comprend ainsi aisément l'intérêt de ces méthodes, déjà d'un point de vue numérique. De plus, leur apport théorique est aussi conséquent. L'expression des champs lointains, paragraphe 1.4, se déduit par exemple immédiatement des formules de représentation intégrale.

Dans un premier temps nous rappelons le cadre général usuel.

Par la suite, dans la deuxième partie, nous donnons un cadre moins usuel, au travers d'un espace de solution plus grand (espace W_H , paragraphe 2). Ce cadre se trouve alors mieux adapté à l'étude des opérateurs que nous proposons, principalement l'opérateur de scattering et de champ lointain. De même que dans le cadre "usuel", nous fournissons les représentations intégrales associées et les champs lointains qui en découlent.

Ce cadre particulier sera utilisé par la suite dans les chapitres II et VI, respectivement l'application au cas d'objets conducteurs et d'objets modélisés par une condition d'impédance.

1 Cadre usuel - Méthodes intégrales

On s'intéresse à la diffraction d'ondes électromagnétiques par un objet Ω , ouvert borné de \mathbb{R}^3 , de surface Γ quelconque régulière (C^∞)¹ (voir figure I.1).

On notera Ω^+ l'ouvert complémentaire de Ω dans \mathbb{R}^3 : $\Omega^+ = \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$.

L'onde incidente $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ sur l'objet, à la fréquence² k , engendre l'onde diffractée $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$. Le champ total résultant est alors donné par la superposition

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i) + (\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s).$$

L'onde diffractée $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ vérifient les équations de Maxwell dans Ω^+ ,

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}^s - ik\eta_0 \mathbf{H}^s = 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}^s + ik\eta_0^{-1} \mathbf{E}^s = 0, \end{cases} \quad (1)$$

avec $\eta_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ l'impédance du vide, et la condition sur le bord Γ de la forme générale

$$\mathcal{B}(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) = c, \text{ sur } \Gamma, \quad (2)$$

¹Par souci de simplicité, on renvoie au chapitre II, section 2 pour le cas de surfaces moins régulières.

²Par abus de langage, on confondra le nombre d'onde k et la fréquence $f = \frac{c}{2\pi}k$.

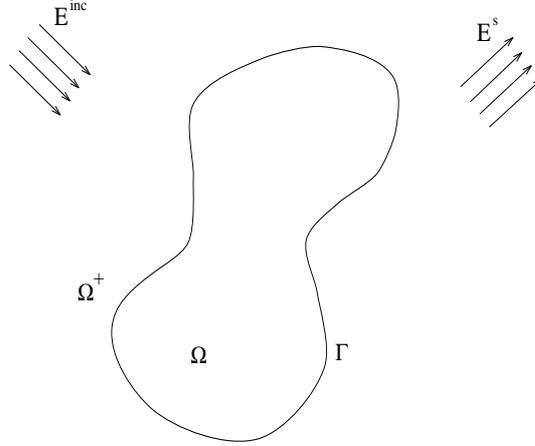


FIG. I.1 – Notations générales

où c est la donnée du problème. Dans le cas d'un objet parfaitement conducteur, par exemple, on a

$$\mathcal{B}_1(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}), \text{ et } c = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma}^i \times \mathbf{n}), \quad (3)$$

tandis que le cas d'un objet modélisé par une condition d'impédance donne lieu à

$$\mathcal{B}_2(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}) + \eta \mathbf{H}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}, \text{ et } c = -\left[\mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma}^i \times \mathbf{n}) + \eta \mathbf{H}|_{\Gamma}^i \times \mathbf{n} \right], \quad (4)$$

où η désigne l'impédance de l'objet. Les conditions au bord (3) et (4) seront les deux conditions que nous étudierons par la suite.

Le problème étant posé en domaine non borné, on doit de plus, afin d'assurer l'unicité de la solution, ajouter une condition de décroissance à l'infini sur les champs diffractés \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s . La condition de radiation à l'infini

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\eta_0 \mathbf{H}^s \times \frac{x}{|x|} - \mathbf{E}^s \right) = 0, \quad (5)$$

est la plus classiquement utilisée. C'est la condition de radiation de Silver-Müller, aussi dite condition de radiation sortante, pour des raisons qui apparaîtront clairement par la suite.

On posera $\hat{x} = x/|x|$, vecteur unitaire de même direction que le vecteur x : $\hat{x} \in S$, où S est la sphère unité de \mathbb{R}^3 .

1.1 Cadre fonctionnel

On impose aux champs électriques et magnétiques d'être, localement, de carré intégrable (ce qui correspond à l'hypothèse physique de champs d'énergie finie dans tout domaine borné) : $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R}^3))^2$. Les équations de Maxwell (1) impliquent alors que le rotationnel de ces champs se trouvent dans le même espace.

On est ainsi amené à considérer l'espace

$$H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \overline{\Omega}) = \{f \in H(\mathbf{rot}, D); \forall D \subset \Omega, D \text{ borné}\}, \quad (6)$$

avec,

$$H(\mathbf{rot}, D) := \{f \in L^2(D); \mathbf{rot} f \in L^2(D)\},$$

adapté à la recherche des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} solutions du problème extérieur (en espace non-borné). Pour l'étude du problème intérieur, l'espace $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ peut-être directement considéré, les problèmes de décroissance à l'infini ne se posant pas.

On introduit par la même occasion l'espace

$$H_{\text{loc}}(\text{div}, \Omega) = \{f \in H(\text{div}, D); \forall D \subset \Omega, D \text{ compact}\},$$

où $H(\text{div}, D)$ est défini de manière similaire à $H(\mathbf{rot}, D)$, la divergence remplaçant le rotationnel.

Les conditions au bord (3) et (4) font intervenir les traces tangentielles des champs électriques et magnétiques. Afin de définir les espaces de traces adéquats, on commence par introduire certains opérateurs différentiels surfaciques (voir [2] par exemple).

On notera par la suite (f, g) le produit scalaire $L^2(\Gamma)$ usuel :

$$(f, g) := \int_{\Gamma} f \cdot \bar{g}.$$

Gradient surfacique Soit φ une fonction définie sur la surface Γ , et $\tilde{\varphi}$ un relèvement de φ dans un voisinage de Γ . Alors le gradient surfacique (tangentiel) de φ est défini par :

$$\begin{aligned} \nabla_{\Gamma} \varphi &:= \nabla \tilde{\varphi}|_{\Gamma} - (\nabla \tilde{\varphi}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}) \mathbf{n} \\ &= \mathbf{n} \times (\nabla \tilde{\varphi}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}). \end{aligned} \quad (7)$$

Divergence surfacique La divergence surfacique d'un champ de vecteur \mathbf{u} défini sur Γ est alors définie comme le transposé du gradient surfacique :

$$\forall \varphi \in C^{\infty}(\Gamma), (\text{div}_{\Gamma} \mathbf{u}, \varphi) := (\mathbf{u}, \nabla_{\Gamma} \varphi). \quad (8)$$

Rotationnels surfaciques On définit le rotationnel surfacique scalaire d'un champ de vecteur \mathbf{u} défini et tangentiel sur Γ par

$$\text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{rot} \tilde{\mathbf{u}}|_{\Gamma}, \quad (9)$$

où \mathbf{rot} est le rotationnel usuel (volumique), et $\tilde{\mathbf{u}}$ un relèvement de \mathbf{u} dans un voisinage de Γ .

Le rotationnel surfacique vectoriel est alors défini comme l'adjoint du rotationnel scalaire :

$$\forall \mathbf{u} \in C^{\infty}(\Gamma), (\mathbf{rot}_{\Gamma} \varphi, \mathbf{u}) := (\varphi, \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u}). \quad (10)$$

On montre alors (voir [2], [45], par exemple) que les opérateurs ∇_{Γ} et \mathbf{rot}_{Γ} définis en (7) et (10), respectivement, se prolongent en des opérateurs linéaires et continus (en particulier indépendants des relèvements choisis) :

$$\nabla_{\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_t^{-1/2}(\Gamma) \text{ et } , \mathbf{rot}_{\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_t^{-1/2}(\Gamma).$$

I Cadre mathématique

De la même façon leurs adjoints div_Γ et rot_Γ , définis en (8) et (9), se prolongent continûment sur les espaces :

$$\text{div}_\Gamma : H_t^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{et} \quad , \quad \text{rot}_\Gamma : H_t^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma).$$

On a utilisé ici les espaces de Sobolev usuels d'ordre $\pm 1/2$: $H^{\pm 1/2}(\Gamma)$, ainsi que les espaces tangentiels correspondant :

$$H_t^s(\Gamma) := \{ \mathbf{u} \in H^s(\Gamma) ; \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \} ,$$

pour $s = \pm 1/2$, ou plus généralement pour $|s| \leq 1/2$.

Espaces de traces D'après les conditions (3) et (4) sur la surface Γ , un intérêt tout particulier est porté aux traces des champs électromagnétiques, soit aux traces des champs de $H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$. On introduit les applications :

$$\pi_\Gamma : f \in H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \mapsto \mathbf{n} \times (f|_\Gamma \times \mathbf{n}) ,$$

et,

$$\pi_\tau : f \in H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \mapsto f|_\Gamma \times \mathbf{n} ,$$

ainsi que

$$\gamma_n : f \in H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega) \mapsto \mathbf{n} \cdot f|_\Gamma .$$

Pour $\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}, D)$ et $\mathbf{F} \in H^1(D)$, la formule de Green

$$\int_D \mathbf{E} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{F} - \mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \mathbf{F} = \int_\Gamma \pi_\tau \mathbf{E} \cdot \pi_\Gamma \mathbf{F} = \int_\Gamma \pi_\Gamma \mathbf{E} \cdot \pi_\tau \mathbf{F} ,$$

montre que $\pi_\tau \mathbf{E}$ ainsi que $\pi_\Gamma \mathbf{E}$ sont dans $H^{-1/2}(\Gamma)$. De même, pour $\mathbf{E} \in H(\text{div}, D)$ et $u \in H^1(D)$, la formule de Green portant sur la divergence

$$\int_D u \text{div} \mathbf{E} + \nabla u \cdot \mathbf{E} = \int_\Gamma u \gamma_n \mathbf{E} ,$$

montre cette fois que $\gamma_n \mathbf{E} \in H^{-1/2}(\Gamma)$.

Soit maintenant $\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}, D)$, alors, grâce à la relation $\text{div} \mathbf{rot} = 0$, on a aussi $\mathbf{rot} \mathbf{E} \in H(\text{div}, D)$, et ainsi $\gamma_n \mathbf{rot} \mathbf{E} \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Or, d'après la définition du rotationnel surfacique scalaire :

$$\gamma_n \mathbf{rot} \mathbf{E} = \text{rot}_\Gamma \mathbf{E} = \text{div}_\Gamma (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) = \text{rot}_\Gamma (\pi_\Gamma \mathbf{E}) ,$$

soit donc $\text{rot}_\Gamma (\pi_\Gamma \mathbf{E}) \in H^{-1/2}(\Gamma)$. Cette relation nous conduit à définir l'espace

$$H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma) = \left\{ f \in H^{-1/2}(\Gamma) ; f \cdot \mathbf{n} = 0, \text{rot}_\Gamma f \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\} .$$

De même que précédemment, si $\mathbf{E} \in H(\mathbf{rot}, D)$, alors $\text{div}_\Gamma (\gamma_\tau \mathbf{E}) = \text{rot}_\Gamma \mathbf{E} = \gamma_n \mathbf{rot} \mathbf{E} \in H^{-1/2}(\Gamma)$, et on introduit l'espace

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) = \left\{ f \in H^{-1/2}(\Gamma) ; f \cdot \mathbf{n} = 0, \text{div}_\Gamma f \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\} .$$

Le lemme suivant donne plus précisément l'intérêt de ces espaces (voir [66], [2], par exemple) :

Lemme 1 *Les applications π_Γ et π_τ sont linéaires, continues et surjectives de $H(\mathbf{rot}, D)$ dans les espaces $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ et $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ respectivement.*

Etant donnés ces espaces, on peut maintenant citer le théorème d'existence et d'unicité pour les équations de Maxwell :

Théorème 1 *Soit $k > 0$, et $c \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, alors il existe une unique solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) des équations de Maxwell (1), vérifiant la condition de radiation (5) et une des deux conditions au bord (2) ou (4) avec $\Re(\eta) < 0$.*

On renvoie, par exemple, à [67, Th. 3.1.1], à [2], ou encore à [30] traitant particulièrement du problème avec impédance, pour la démonstration de ce théorème. On donne aussi en annexe B - 3 une démonstration dans le cas d'un objet parfaitement conducteur, en exhibant une formulation intégrale coercive du problème (1).

On peut maintenant considérer la représentation intégrale de ces champs.

1.2 Représentations intégrales des champs

On sait que les champs diffractés \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s admettent la représentation intégrale, connue sous le nom de formule de Stratton-Chu (cf. [28], ou [1, théorème 6.6], par exemple, et Annexe A - 1) :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s &= i\eta_0 \tilde{T} \mathbf{J}^s + \tilde{K} \mathbf{M}^s \\ \mathbf{H}^s &= -\tilde{K} \mathbf{J}^s + i\eta_0^{-1} \tilde{T} \mathbf{M}^s \end{aligned} \quad , \text{ dans } \Omega, \quad (11)$$

où les courants \mathbf{J}^s et \mathbf{M}^s sont donnés par

$$\begin{cases} \mathbf{J}^s = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}^s \\ \mathbf{M}^s = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^s \end{cases},$$

et les potentiels \tilde{T} et \tilde{K} sont définis selon

$$\begin{cases} \tilde{T} \mathbf{J}(x) = k \int_{\Gamma} \left(G(x, y) \mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x, y) \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) \right) ds(y), \\ \tilde{K} \mathbf{J}(x) = \int_{\Gamma} \nabla_y G(x, y) \times \mathbf{J}(y) ds(y), \end{cases} \quad (12)$$

ou encore, sous une forme plus condensée,

$$\begin{cases} \tilde{T} \mathbf{J}(x) = \frac{1}{k} \mathbf{rot rot} \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) ds(y) \\ \tilde{K} \mathbf{J}(x) = -\mathbf{rot} \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) ds(y). \end{cases} \quad (13)$$

Ces potentiels font intervenir le noyau de Green “sortant”

$$G(x, y) = \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|},$$

solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3 .

On s'intéresse plus particulièrement aux courants totaux sur l'objet (courants physiquement observables), par opposition aux courants diffractés \mathbf{J}^s et \mathbf{M}^s .

On rappelle pour cela que l'onde incidente sur Ω se doit d'être une solution entière des équations de Maxwell (1), i.e. solution du système de Maxwell

$$\begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{E}^i - ik\eta_0 \mathbf{H}^i = 0 \\ \mathbf{rot} \mathbf{H}^i + ik\eta_0^{-1} \mathbf{E}^i = 0, \end{cases} \quad \text{dans } \mathbb{R}^3,$$

En d'autres termes, cette onde est générée indépendamment de tout obstacle, et est ainsi censée pouvoir exister et se propager en espace libre. Cette onde incidente est donc, en particulier, solution de (1) dans Ω . Le théorème de représentation intégrale s'applique alors suivant (cf. [1, théorème 6.2]),

$$\begin{aligned} i\eta_0 \tilde{T} \mathbf{J}^i + \tilde{K} \mathbf{M}^i &= \begin{cases} -\mathbf{E}^i & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Omega^+ \end{cases} \\ -\tilde{K} \mathbf{J}^i + i\eta_0^{-1} \tilde{T} \mathbf{M}^i &= \begin{cases} -\mathbf{H}^i & \text{dans } \Omega \\ 0 & \text{dans } \Omega^+ \end{cases}, \end{aligned} \quad (14)$$

avec,

$$\begin{cases} \mathbf{J}^i &= \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}^i \\ \mathbf{M}^i &= -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^i \end{cases}.$$

En ajoutant (11) et (14), on aboutit alors à une formulation intégrale en courant total :

$$\begin{cases} \mathbf{E}^s = i\eta_0 \tilde{T} \mathbf{J} + \tilde{K} \mathbf{M} \\ \mathbf{H}^s = -\tilde{K} \mathbf{J} + i\eta_0^{-1} \tilde{T} \mathbf{M} \end{cases}, \quad \text{dans } \Omega^+, \quad (15)$$

avec les courants totaux,

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}^s + \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}^i \\ \mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^i - \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}^s. \end{cases} \quad (16)$$

Remarque 1 On définit, pour un vecteur p de \mathbb{R}^3 , les champs électromagnétiques

$$\mathbf{E}_{m,y}(x) = \mathbf{rot}_x p G(x, y), \quad \mathbf{H}_{m,y}(x) = \frac{1}{ik} \mathbf{rot} \mathbf{E}_{m,y}(x),$$

et,

$$\mathbf{H}_{e,y}(x) = \mathbf{rot}_x pG(x, y), \quad \mathbf{E}_{e,y}(x) = -\frac{1}{ik} \mathbf{rot} \mathbf{H}_{e,y}(x).$$

Les champs $(\mathbf{E}_{m,y}, \mathbf{H}_{m,y}(x))$ et $(\mathbf{E}_{e,y}, \mathbf{H}_{e,y}(x))$ sont, respectivement, les champs d'un dipôle magnétique et électrique, de moment p , et situé en $y \in \mathbb{R}^3$.

De cette façon, les formules de Stratton-Chu (15), avec l'expression des potentiels intégraux (13), sont une "représentation dipolaire" de l'objet diffractant : chaque point y de la surface de celui-ci se comporte comme la somme d'un dipôle électrique situé en y et de moment $\mathbf{J}(y)$ et d'un dipôle magnétique situé en y et de moment $\mathbf{M}(y)$.

On note que, dans le cas d'un objet PEC, les courants électriques sont des courants physiques, tandis que les courants magnétiques sont des grandeurs mathématiques introduites de manière à rendre le problème symétrique.

1.3 Equations intégrales

Les formules de représentation intégrale (15) permettent de ramener le problème de la diffraction à celui de la détermination des deux courants \mathbf{J} et \mathbf{M} , éléments de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. On utilise pour cela les traces tangentielles des opérateurs intégraux.

On introduit les opérateurs intégraux définis sur la surface Γ

$$\begin{cases} T\mathbf{J}(x) = \mathbf{n} \times \left(k \int_{\Gamma} \left(G(x, y) \mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G(x, y) \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) \right) dy \times \mathbf{n} \right), \\ K\mathbf{J}(x) = \left(\int_{\Gamma} \mathbf{n} \times (\nabla_y G(x, y) \times \mathbf{J}(y)) dy \right) \times \mathbf{n}, \end{cases} \quad (17)$$

ainsi que

$$\begin{cases} T_n \mathbf{J}(x) = k \int_{\Gamma} \left(G(x, y) (\mathbf{J}(y) \cdot \mathbf{n}_x) + \frac{1}{k^2} \partial_{n_x} G(x, y) \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) \right) dy, \\ K_n \mathbf{J}(x) = \int_{\Gamma} ((\mathbf{n}_x - \mathbf{n}_y) \times \nabla_y G(x, y) \cdot \mathbf{J}(y) - G(x, y) \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{J}(y)) dy. \end{cases} \quad (18)$$

On a alors les relations de traces tangentielles et normales (voir [2], par exemple) :

Lemme 2 (Sauts des potentiels) Soit $x \in \Gamma$. Alors on a (en notant $\Omega^- = \Omega$, par commodité de notation),

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow x} \mathbf{n}(x) \times \left(\tilde{T} \mathbf{J}(y) \times \mathbf{n}(x) \right) &= T\mathbf{J}(x) \\ \lim_{y \in \Omega^{\pm} \rightarrow x} \mathbf{n}(x) \times \left(\tilde{K} \mathbf{J}(y) \times \mathbf{n}(x) \right) &= K\mathbf{J}(x) \pm \frac{1}{2} \mathbf{n}(x) \times \mathbf{J}(x), \end{aligned}$$

pour les traces tangentielles, tandis que pour les traces normales :

$$\begin{aligned} \lim_{y \in \Omega^\pm \rightarrow x} \mathbf{n}(x) \cdot \tilde{T}\mathbf{J}(y) &= \mp \frac{1}{2k\eta_0} \operatorname{div}_\Gamma \mathbf{J}(x) + T_n \mathbf{J}(x) \\ \lim_{y \rightarrow x} \mathbf{n}(x) \cdot \tilde{K}\mathbf{J}(y) &= K_n \mathbf{J}(x). \end{aligned}$$

On écrit alors les sauts des potentiels (15) sur $\Gamma^+ = \Gamma \cap \overline{\Omega^+}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{|\Gamma}^s(x) \times \mathbf{n}) &= i\eta_0 T \mathbf{J}(x) + K \mathbf{M}(x) + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M}(x) \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{|\Gamma}^s(x) \times \mathbf{n}) &= -K \mathbf{J}(x) + i\eta_0^{-1} T \mathbf{M}(x) - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{J}(x) \end{aligned}, \quad \forall x \in \Gamma. \quad (19)$$

En combinant la définition des courants (16) et l'expression des sauts des champs (19), on obtient l'équation,

$$\mathcal{Z}u = g^i, \quad (20)$$

où :

– \mathcal{Z} est l'opérateur

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} T & K - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \\ K - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times & T \end{pmatrix}, \quad (21)$$

– u la nouvelle inconnue

$$u = \begin{pmatrix} \sqrt{i\eta_0} \mathbf{J} \\ \sqrt{i\eta_0}^{-1} \mathbf{M} \end{pmatrix}, \quad (22)$$

– et g^i la donnée du problème

$$g^i = \begin{pmatrix} -\sqrt{i\eta_0}^{-1} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{|\Gamma}^i \times \mathbf{n}) \\ \sqrt{i\eta_0} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{|\Gamma}^i \times \mathbf{n}) \end{pmatrix}. \quad (23)$$

1.4 Champs lointains

En développant, pour $|x| \rightarrow \infty$, les champs diffractés (15), on obtient l'expression des champs lointains (à l'objet) (voir Annexe A - 2, ou [1, théorème 6.8, p. 164]),

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(x) &= \sqrt{i\eta_0} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \\ \mathbf{H}^s(x) &= \sqrt{i\eta_0}^{-1} \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \hat{x} \times \mathbf{e}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \end{aligned} \quad (24)$$

Le champ $\mathbf{e}(\hat{x}) \in L_t^2(S) := \{f \in L^2(S); f(\hat{x}) \cdot \hat{x} = 0, \forall \hat{x} \in S\}$ est le champ lointain associé aux champs diffractés \mathbf{E}^s et \mathbf{H}^s . On est alors amené à définir l'opérateur de rayonnement qui, aux courants électriques et magnétiques sur l'objet (i.e. u), associe le champ rayonné à l'infini :

$$A_\infty : \begin{cases} (H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma))^2 & \rightarrow L_t^2(S) \\ u & \mapsto A_\infty(u; \hat{x}) = \mathbf{e}(\hat{x}), \end{cases}$$

où u est l'inconnue du problème, définie en (22), selon

$$A_\infty(\mathbf{J}, \mathbf{M}; \hat{x}) = a_\infty \mathbf{J}(\hat{x}) - i\hat{x} \times a_\infty \mathbf{M}(\hat{x}) \quad (25)$$

avec

$$a_\infty \mathbf{J}(\hat{x}) = \frac{k}{4\pi} \int_\Gamma \hat{x} \times (\mathbf{J}(y) \times \hat{x}) e^{-ik\hat{x}\cdot y} dy. \quad (26)$$

L'opérateur a_∞ associe à un courant électrique \mathbf{J} le champ qu'il rayonne à l'infini. Dans le cas d'un objet supposé parfaitement conducteur, les courants magnétiques sont nuls et a_∞ coïncide avec l'opérateur de rayonnement A_∞ .

Dans ce cas, on sait de plus que tout courant électrique non nul rayonne à l'infini une énergie non nulle.

Plus précisément, on a (cf. [1, Th. 7.4]),

Lemme 3 *Soit $k > 0$ une fréquence ne correspondant pas à une fréquence de résonance du problème intérieur. Alors l'opérateur de rayonnement $a_\infty : H_{div}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L_t^2(S)$ est injectif.*

Les champs admettant un développement asymptotique du type (24) sont appelés champs sortants.

D'une manière analogue, on peut s'intéresser à la solution entrante du problème de diffraction extérieur, i.e. à la solution de (1) avec la condition au bord (3) ou (4), et la condition de radiation à l'infini entrante,

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\eta_0 \mathbf{H} \times \frac{x}{|x|} + \mathbf{E} \right) = 0. \quad (27)$$

Les expressions des champs sous forme de potentiels restent alors valides en remplaçant simplement le noyau de Green "sortant" par son homologue "entrant"

$$G^-(x, y) := \frac{e^{-ik|x-y|}}{4\pi|x-y|} = \overline{G(x, y)}.$$

Le comportement asymptotique des solutions entrantes est alors analogue à (24), avec cette fois une dépendance radiale en $\frac{e^{-ik|x|}}{|x|}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(x) &= \sqrt{i\eta_0} \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right) \\ \mathbf{H}^s(x) &= -\sqrt{i\eta_0}^{-1} \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \hat{x} \times \mathbf{e}(\hat{x}) + O\left(\frac{1}{|x|^2}\right). \end{aligned} \quad (28)$$

Les conditions de radiation à l'infini (5) et (27) "divisent en 2" l'espace des solutions au problème de diffraction :

- les solutions sortantes, qui divergent de l'obstacle vers l'infini (en $\exp(ikr)/r$),

– les solutions entrantes, qui convergent de l’infini vers l’obstacle (en $\exp(-ikr)/r$).

Ce “découpage” se comprend plus aisément dans le domaine temporel, où ces deux types d’ondes sont les solutions du problème de Maxwell posé en temps pour un temps $t \in]-\infty, 0]$ et $t \in [0, +\infty[$, respectivement. Les champs lointains s’obtiennent alors comme la limite des champs lorsque $t \rightarrow \pm\infty$ (principe d’amplitude limite, voir [5]).

L’opérateur de scattering est l’opérateur qui relie entre eux les champs lointains associés à ces deux types de solutions.

1.5 Opérateur de scattering et de champ lointain

Ce paragraphe est dédié à la définition de deux opérateurs fondamentaux : l’opérateur de scattering, et celui de champ lointain.

Initialement introduit dans [5], l’opérateur de scattering est défini à partir du problème en temps (en l’occurrence pour le problème de Dirichlet ou de Neumann associé à l’équation de Helmholtz).

Néanmoins, dans [31], il est montré que cet opérateur de scattering satisfait à une relation dans laquelle seuls les champs à l’infini des solutions entrantes et sortantes sont présents. Ceci mène alors à la définition de l’opérateur de scattering comme étant l’opérateur qui au champ lointain d’une onde entrante associe le champ lointain de l’onde sortante correspondante.

Avec les notations utilisées jusqu’ici, cet opérateur se formule suivant :

$$\mathcal{S} : \begin{cases} L^2(S) & \rightarrow L^2(S) \\ \check{\mathbf{e}}^- & \mapsto \mathbf{e}^+, \end{cases} \quad (29)$$

avec $\check{\mathbf{e}}^-(\hat{x}) = \mathbf{e}^-(-\hat{x})$, pour tout $\hat{x} \in S$.

Formellement, si \mathbf{e}^- est le champ lointain d’une onde entrante, et W l’opérateur de symétrie (i.e. $W\mathbf{e}(\hat{x}) = \mathbf{e}(-\hat{x})$), alors on a

$$\mathbf{e}^+ = \mathcal{S}\check{\mathbf{e}}^- = A_\infty (\overline{A_\infty})^{-1} W^{-1}\mathbf{e}^-.$$

On sait que l’image de l’opérateur de rayonnement A_∞ est un sous-espace strict de $L^2(S)$ (on peut montrer, voir partie V, “Application au problème inverse”, que ce sous-espace caractérise même complètement l’objet responsable de la diffraction). Il en est alors de même pour son conjugué :

$$\overline{A_\infty} : \mathbf{e} \mapsto \overline{A_\infty}\mathbf{e} := \overline{A_\infty}\bar{\mathbf{e}}.$$

Ainsi, la définition (29) peut sembler un peu rapide, de par le fait que l’opérateur de scattering n’est, à priori, pas défini dans tout $L^2(S)$.

Nous montrerons plus loin que l’on peut étendre la définition de \mathcal{S} à $L^2(S)$ tout entier, en fournissant une expression explicite de cet opérateur. On verra de la même façon que, si son

image ne saurait être $L^2(S)$ tout entier, elle forme néanmoins un sous-espace dense de $L^2(S)$ (voir théorème 5 et la remarque 7 qui suit, page 57).

En admettant pour le moment ce dernier point, on peut donner la propriété fondamentale de l'opérateur de scattering.

Théorème 2 *Soit \mathcal{S} l'opérateur de scattering associé à un objet parfaitement conducteur. Alors \mathcal{S} est un opérateur unitaire.*

Démonstration On considère une onde entrante incidente sur l'objet $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$, i.e. satisfaisant à la condition de radiation entrante de Silver-Müller :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| \left(\mathbf{E}^{inc} + \eta_0 \mathbf{H}^{inc} \times \frac{x}{|x|} \right) = 0.$$

Soit S_R la sphère de rayon R , R étant suffisamment grand pour que $\Omega \subset S_R$, et (\mathbf{E}, \mathbf{H}) et (F, G) deux solutions des équations de Maxwell. L'application de la formule de Green à ces deux couples s'écrit :

$$\int_{S_R} [(\mathbf{E} \times \hat{x}) \cdot G] - [(F \times \hat{x}) \cdot \mathbf{H}] = - \int_{\Gamma} [(\mathbf{E} \times \mathbf{n}) \cdot G] - [(F \times \mathbf{n}) \cdot \mathbf{H}].$$

En choisissant $F = \overline{\mathbf{E}}$ et $G = \overline{\mathbf{H}}$, en introduisant la condition de conducteur parfait $\mathbf{E} \times \mathbf{n} = 0$ sur Γ , et en décomposant les champs en composantes incidente et diffractée, on obtient :

$$\Re \int_{S_R} [(\mathbf{E}^{inc} + \mathbf{E}^s) \times \hat{x}] \cdot \overline{[\mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^s]} = 0,$$

que l'on réécrit sous la forme :

$$\Re \int_{S_R} [\mathbf{E}^{inc} \times \hat{x} - \eta_0 \mathbf{H}^{inc} + \mathbf{E}^s \times \hat{x} + \eta_0 \mathbf{H}^s] \cdot \overline{[\mathbf{H}^{inc} + \mathbf{H}^s]} + \eta_0 |\mathbf{H}^{inc}|^2 - \eta_0 |\mathbf{H}^s|^2 = 0.$$

En utilisant la condition de radiation de Silver-Müller entrante pour $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$ et sortante pour $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$, le premier terme s'annule pour $R \rightarrow \infty$; on obtient alors au final :

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |\mathbf{H}^{inc}|^2 = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{S_R} |\mathbf{H}^s|^2,$$

qui est la relation souhaitée. □

Le lemme 2 est la traduction mathématique de la propriété de conservation de l'énergie pour un objet PEC : en l'absence de pertes, l'énergie fournie à l'objet se retrouve intégralement dans le champ rayonné à l'infini :

$$\| \mathbf{e}^- \|_{L^2(S)} = \| \mathbf{e}^+ \|_{L^2(S)}.$$

Cette propriété est fondamentale dans le cas d'un objet PEC.

I Cadre mathématique

L'opérateur de scattering relie les solutions de deux problèmes différents (dans le formalisme utilisé jusqu'ici), celui entrant et son homologue sortant. Nous allons maintenant introduire l'opérateur de champ lointain, intimement lié à celui de scattering, qui permet de relier le champ lointain diffracté directement à l'onde incidente sur l'objet.

Soit p et d deux vecteurs unitaires de \mathbb{R}^3 , et \mathbf{E}^i l'onde plane, de polarisation p et se propageant dans la direction d (voir IV-1.1, page 104),

$$\mathbf{E}^i(x) = p e^{ikx \cdot d}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^3.$$

On note $\mathbf{e}(\hat{x}; p, d)$ le champ lointain de l'onde sortante diffractée suite à l'illumination de l'objet Ω par l'onde incidente \mathbf{E}^i .

Soit maintenant g un élément de $L^2(S)$, alors on définit l'opérateur de champ lointain selon :

$$F : \begin{cases} L^2(S) & \rightarrow L^2(S) \\ g & \mapsto Fg(\hat{x}) = \int_S \mathbf{e}(\hat{x}; g(\hat{d}), \hat{d}) ds(\hat{d}). \end{cases} \quad (30)$$

D'après le principe de superposition, on peut d'ores et déjà interpréter cet opérateur comme celui qui à un "paquet" d'ondes planes incident sur l'objet, de distribution g , i.e. une onde incidente de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}_g^{inc}(x) & = \int_S g(\hat{d}) e^{ikx \cdot \hat{d}} ds(\hat{d}) \\ \mathbf{H}_g^{inc}(x) & = \frac{1}{\eta_0} \int_S (\hat{d} \times g(\hat{d})) e^{ikx \cdot \hat{d}} ds(\hat{d}), \end{cases} \quad (31)$$

associe le champ lointain diffracté (sortant) Fg . L'onde $(\mathbf{E}_g^{inc}, \mathbf{H}_g^{inc})$ est une onde dite de Herglotz, nous reviendrons plus en détail sur ce type d'onde par la suite.

Cet opérateur de champ lointain est fondamental dans de nombreuses méthodes de traitement du problème inverse de la diffraction, car il fait directement le lien entre l'excitation de l'objet et sa réponse (dans ce cas supposée connue).

On a le résultat fondamental suivant. Ce résultat est prouvé dans [59] pour l'opérateur de champ lointain associé à la diffraction d'ondes par un milieu inhomogène. On reprend ici la démonstration de ce résultat fondamental, adaptée à la condition aux limites d'impédance.

Théorème 3 *Soit F l'opérateur de champ lointain associé à un objet parfaitement conducteur. Alors F est un opérateur compact et normal dans $L_t^2(S)$.*

Pour démontrer ce théorème, on utilise deux résultats intermédiaires.

Lemme 4 *Soit $(\mathbf{E}_1^s, \mathbf{H}_1^s)$ et $(\mathbf{E}_2^s, \mathbf{H}_2^s)$ deux ondes diffractées sortantes, de champ lointain respectif \mathbf{E}_1^∞ et \mathbf{E}_2^∞ ; alors*

$$\int_\Gamma \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1^s \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_2^s} - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_2^s} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_1^s = -2ik \int_S \mathbf{E}_1^\infty \cdot \overline{\mathbf{E}_2^\infty}.$$

Démonstration On utilise la formule de Green vectorielle dans un domaine B borné, de frontière ∂B :

$$\int_B E \cdot \Delta F - F \cdot \Delta E = \int_{\partial B} \mathbf{n} \times E \cdot \mathbf{rot} F - \mathbf{n} \times F \cdot \mathbf{rot} E,$$

que l'on applique à $E = \mathbf{E}_1^s$ et $F = \overline{\mathbf{E}}_2^s$ dans le domaine $D_R = \{x \in \Omega^+, |x| \leq R\}$. Cela nous fournit, à l'aide des équations de Maxwell :

$$\begin{aligned} 0 = \int_{D_R} \mathbf{E}_1^s \cdot \Delta \overline{\mathbf{E}}_2^s - \overline{\mathbf{E}}_2^s \cdot \Delta \mathbf{E}_1^s &= - \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_1^s \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}}_2^s - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}_2^s \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}_1^s \\ &+ \int_{S_R} \hat{x} \times \mathbf{E}_1^s \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}}_2^s - \hat{x} \times \overline{\mathbf{E}}_2^s \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}_1^s. \end{aligned}$$

En utilisant maintenant le développement asymptotique

$$\hat{x} \times \mathbf{E}_1^s \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}}_2^s - \hat{x} \times \overline{\mathbf{E}}_2^s \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}_1^s = -\frac{2ik}{|x|^2} \mathbf{E}_1^\infty(\hat{x}) \cdot \overline{\mathbf{E}}_2^\infty(\hat{x}) + O(|x|^{-3}), \quad |x| \rightarrow \infty,$$

et en passant à la limite pour $R \rightarrow \infty$ on obtient la relation souhaitée. □

Lemme 5 Soit $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s)$ une onde sortante, de champ lointain \mathbf{E}^∞ , et $(\mathbf{E}_g^i, \mathbf{H}_g^i)$ une onde de Herglotz de noyau g ; alors

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}}_g^i - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}_g^i \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}^s = -4i\pi k \int_S \mathbf{E}^\infty \cdot \overline{g}.$$

Démonstration On utilise la définition de l'onde de Herglotz (31), on a alors

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^s \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{E}}_g^i &= -k^2 \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^s(x) \cdot \int_S \hat{d} \times \overline{g(\hat{d})} e^{-ikx \cdot \hat{d}} ds(\hat{d}) ds(\hat{x}) \\ &= k^2 \int_S \overline{g(\hat{d})} \cdot \left(\hat{d} \times \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}^s(x) e^{-ikx \cdot \hat{d}} ds(\hat{x}) \right) ds(\hat{d}), \end{aligned}$$

et, de la même façon,

$$- \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}}_g^i \cdot \mathbf{rot} \mathbf{E}^s = k^2 \int_S \overline{g(\hat{d})} \cdot \left(\hat{d} \times \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \times \mathbf{E}^s(x)) \times \hat{d} e^{-ikx \cdot \hat{d}} ds(\hat{x}) \right) ds(\hat{d}).$$

On obtient alors le lemme en additionnant ces deux termes, et en utilisant la relation asymptotique

$$\mathbf{E}^\infty = A_\infty(\mathbf{J}, \mathbf{M}; \hat{x}),$$

avec $\mathbf{J} = -\mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}$ et $\mathbf{M} = \mathbf{n} \times \mathbf{E}_{|\Gamma}$. □

On revient maintenant à la démonstration du théorème 3.

Démonstration du théorème 3 Le champ lointain $\mathbf{e}(\cdot; p, \hat{d})$ est un champ infiniment régulier sur la sphère unité; cette régularité implique que l'opérateur de champ lointain, opérateur de noyau \mathbf{e} , est un opérateur compact.

Soit maintenant $h, g \in L^2(S)$, $(\mathbf{E}_h^i, \mathbf{H}_h^i)$ et $(\mathbf{E}_g^i, \mathbf{H}_g^i)$ deux ondes de Herglotz de noyau respectif h et g , et $(\mathbf{E}_h^s, \mathbf{H}_h^s)$ et $(\mathbf{E}_g^s, \mathbf{H}_g^s)$ les ondes diffractées correspondantes à l'illumination de l'objet Ω , parfaitement conducteur, par $(\mathbf{E}_h^i, \mathbf{H}_h^i)$ et $(\mathbf{E}_g^i, \mathbf{H}_g^i)$, respectivement.

D'après la formule de Green vectorielle, on remarque tout d'abord que

$$\int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_h^i \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_g^i} - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_g^i} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_h^i = 0,$$

les ondes de Herglotz étant solution des équations de Maxwell dans tout \mathbb{R}^3 . Soit $\mathbf{E}_g = \mathbf{E}_g^i + \mathbf{E}_g^s$ et $\mathbf{E}_h = \mathbf{E}_h^i + \mathbf{E}_h^s$ les champs électriques totaux, vérifiant la condition aux limites de conducteur parfait $\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma} = 0$, alors, on a :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_h \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_g} - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_g} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_h = \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_g^i \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_h^s} - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_h^s} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_g^i \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_g^s \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_h^s} - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_h^s} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_g^s \\ &\quad + \int_{\Gamma} \mathbf{n} \times \mathbf{E}_g^s \cdot \text{rot } \overline{\mathbf{E}_h^i} - \mathbf{n} \times \overline{\mathbf{E}_h^i} \cdot \text{rot } \mathbf{E}_g^s. \end{aligned}$$

En utilisant alors les lemmes 4 et 5, et le fait que $\mathbf{E}_g^{\infty} = Fg$ et $\mathbf{E}_h^{\infty} = Fh$, par définition de l'opérateur de champ lointain, l'équation précédente s'écrit

$$(Fg, Fh) = -2\pi(Fg, h) - 2\pi(g, Fh),$$

soit la relation,

$$F^*F = -2\pi(F + F^*). \quad (32)$$

De plus, d'après le théorème de réciprocité (voir lemme 13, ou [1]), on a la relation simple entre F et son adjoint F^* :

$$F^*g = \overline{WF\overline{g}}.$$

avec l'opérateur de symétrie $W : \mathbf{e}(\hat{x}) \mapsto \mathbf{e}(-\hat{x})$. Soit $g, h \in L_t^2(S)$, alors

$$\begin{aligned} (F^*g, F^*h) &= (\overline{WF\overline{g}}, \overline{WF\overline{h}}) \\ &= (WF\overline{h}, WF\overline{g}) \\ &= (F\overline{W}h, F\overline{W}g) \end{aligned}$$

en utilisant le fait que W est une isométrie. La relation (32) nous fournit alors

$$\begin{aligned} (F^*g, F^*h) &= -2\pi [(F\overline{W}h, F\overline{W}g) + (F\overline{W}h, F\overline{W}g)] \\ &= -2\pi [(g, \overline{WF\overline{h}}) + (\overline{WF\overline{g}}, h)] \end{aligned}$$

soit, au final

$$(F^*g, F^*h) = -2\pi(g, F^*h) + (F^*g, h),$$

ou encore la relation analogue à (32) :

$$FF^* = -2\pi(F + F^*) = F^*F,$$

c'est-à-dire que F est un opérateur normal. □

Remarque 2 *Si on suppose, d'une manière un peu plus générale, que la surface de l'objet est modélisée par une condition d'impédance, i.e. une relation du type*

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}) + z(\mathbf{H}|_{\Gamma} \times \mathbf{n}) = 0,$$

alors le théorème 3 reste valable si l'impédance z vérifie $\Re(z) = 0$, i.e. si la diffraction est supposée sans pertes.

Ces deux opérateurs fondamentaux dans l'étude de la diffraction sont en fait simplement reliés :

Lemme 6 *Soit \mathcal{S} et F les opérateurs de scattering et de champ lointain associés à l'objet Ω , et à la fréquence d'étude k . Alors on a :*

$$\mathcal{S} = I - \frac{k}{4\pi}F.$$

La démonstration de ce résultat sera donnée un peu plus tard, après une étude plus précise de l'opérateur de scattering (en particulier de sa diagonalisation).

Ce lemme fournit une autre propriété intéressante de l'opérateur de scattering, à savoir qu'il peut s'écrire sous la forme d'une perturbation compacte d'un isomorphisme (ici l'identité).

Le lemme 6 montre de plus que l'on peut, à priori, s'intéresser indifféremment à l'un ou l'autre de ces deux opérateurs. On privilégiera dans les chapitres II à IV l'opérateur de scattering \mathcal{S} . On introduira à cette fin, dans la section suivante, un cadre mathématique un peu plus général qui va nous permettre, entre autre, de considérer cet opérateur de scattering \mathcal{S} comme un opérateur reliant deux "composantes" de la solution d'un unique problème, au lieu d'un opérateur reliant les solutions de deux problèmes distincts (les problèmes entrants et sortants).

On présentera, au chapitre VII, une méthode alternative permettant d'aboutir aux décompositions souhaitées basée justement sur l'opérateur de champ lointain.

2 Reformulation du problème. Espace $W_H(\Omega)$.

Jusqu'ici, nous avons considéré le problème extérieur "classique" avec condition de radiation entrante ou sortante. On s'intéresse particulièrement dans notre étude aux champs lointains rayonnés, et donc, assez naturellement, à l'opérateur de scattering \mathcal{S} défini par (29). En particulier, le lemme 2 va nous permettre de définir des éléments caractéristiques en tant qu'éléments propres de \mathcal{S} .

Une difficulté dans l'étude de l'opérateur de scattering se trouve dans le fait que cet opérateur relie entre elles les solutions de deux problèmes distincts : les problèmes entrants et sortants.

Nous allons maintenant introduire une nouvelle condition de radiation qui va avoir comme conséquence de "relâcher" les deux conditions de radiation vues jusqu'ici, et, par la suite, de pouvoir considérer les champs lointains entrants et sortants comme le développement asymptotique de la solution d'un seul problème.

2.1 Introduction de l'espace $W_H(\Omega)$

Nous introduisons maintenant une formulation "faible" de la condition de radiation à l'infini, dite condition de Herglotz,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} (|\mathbf{E}|^2 + \eta_0 |\mathbf{H}|^2) < \infty. \quad (33)$$

Cette condition permet de considérer des champs électriques et magnétiques comportant à la fois une composante sortante et une composante entrante (voir [32]).

On définit l'espace des champs diffractés vérifiant la condition de Herglotz (33) par

$$W_H(\Omega) = \left\{ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ vérifiant les équations de Maxwell (1) dans } \Omega ; \right. \\ \left. (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait la condition de Herglotz (33) à l'infini} \right\},$$

muni de la norme

$$\begin{aligned} \|(\mathbf{E}, \mathbf{H})\|_H^2 &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} |\mathbf{E}|^2 + \eta_0 |\mathbf{H}|^2 \\ &= \|\mathbf{E}^\infty\|_{L^2(S)}^2. \end{aligned}$$

2.2 Existence et unicité

De même que pour l'espace $W_H(\Omega)$, on peut définir les espaces des champs vérifiant la condition de radiation entrante ou sortante, c'est-à-dire les espaces :

$$W_{S^-}(\Omega) = \left\{ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ vérifiant les équations de Maxwell (1) dans } \Omega ; \right. \\ \left. (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait la condition de radiation entrante (27) à l'infini} \right\},$$

et

$$W_{S^+}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ vérifiant les équations de Maxwell (1) dans } \Omega ; \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait la condition de radiation sortante (5) à l'infini} \end{array} \right\}.$$

Nous verrons lors du calcul explicite des champs lointains associés aux éléments de W_H que ceux-ci se décomposent en une somme d'un champ entrant et d'un champ sortant (voir paragraphe 2.5). De plus, soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) une onde à la fois entrante et sortante, i.e. $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (W_{S^+}(\Omega) \cap W_{S^-}(\Omega))^2$, alors les conditions de radiation (5) et (27) nous donnent des champs lointains \mathbf{E}^∞ et \mathbf{H}^∞ identiquement nuls dans $L^2(S)$. Le lemme de Rellich entraîne donc que les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sont aussi identiquement nuls dans Ω .

En résumé, on vient à la décomposition (cf. [32])

$$W_H(\Omega) = W_{S^-} \oplus W_{S^+}, \quad (34)$$

la somme étant de plus orthogonale pour le produit scalaire

$$((\mathbf{E}, \mathbf{H}), (\mathbf{E}', \mathbf{H}'))_{W_H} = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{E}'} + \eta_0 \mathbf{H} \cdot \overline{\mathbf{H}'},$$

qui induit la norme de W_H .

L'existence et l'unicité de la solution dans W_H , pour une condition au bord donnée (\mathcal{B}_1 ou \mathcal{B}_2 , par exemple, cf. (3) et (4)), provient alors de l'existence et de l'unicité des solutions dans W_{S^+} et W_{S^-} .

De la même façon que dans (11), cette solution est représentable sous forme de potentiels faisant intervenir la fonction de Green, ou des combinaisons linéaires de ces potentiels.

2.3 Représentation intégrale de la solution dans $W_H(\Omega)$

On cherche un couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de $W_H(\Omega^+)$, i.e. solution des équations de Maxwell (1) dans Ω^+ , et satisfaisant à la condition de Herglotz à l'infini (33). On se ramène alors à un problème dans tout l'espace en imposant la nullité des champs à l'intérieur de l'objet :

$$\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0 \text{ dans } \Omega.$$

Cette condition revient à choisir le couple $(\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s) = -(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ comme onde diffractée solution du problème intérieur associé. Ce choix est toujours possible, excepté pour un ensemble dénombrable de fréquences (les fréquences de résonances du problème intérieur, voir [2] par exemple).

Assez classiquement (voir [4] par exemple), on peut montrer que le couple (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est solution

du système dans \mathbb{R}^3 (au sens des distributions) :

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -ik\eta_0 \left(\mathbf{J}\delta_\gamma + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{J}\delta_\gamma) \right) + \nabla \times (\mathbf{M}\delta_\gamma), \\ \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} = -ik\eta_0 \left(\mathbf{M}\delta_\gamma + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{M}\delta_\gamma) \right) - \nabla \times (\mathbf{J}\delta_\gamma), \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\eta_0}{ik} \nabla \cdot (\mathbf{J}\delta_\gamma), \\ \nabla \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{ik\eta_0} \nabla \cdot (\mathbf{M}\delta_\gamma), \end{cases} \quad (35)$$

où δ_Γ est la mesure de Dirac supportée par la surface Γ , et avec les courants surfaciques électriques et magnétiques

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_\Gamma \\ \mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_\Gamma. \end{cases} \quad (36)$$

La solution générale du système précédent (35) s'écrit sous la forme (tout aussi générale),

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^p) + (\mathbf{E}^g, \mathbf{H}^g), \quad (37)$$

où, $(\mathbf{E}^p, \mathbf{H}^p)$ est une solution particulière de (35) et $(\mathbf{E}^g, \mathbf{H}^g)$ est une solution entière des équations de Maxwell (i.e. une solution de (35) homogène, c'est-à-dire une solution des équations de Maxwell dans tout \mathbb{R}^3).

Une solution particulière de (35) peut être obtenue en considérant les formules de représentations intégrales (11), ou des combinaisons linéaires de ces formules. On fait ici le choix (ce choix reste pour le moment arbitraire)

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^p &= i\eta_0 \tilde{T}_R \mathbf{J} + \tilde{K}_R \mathbf{M} \\ \mathbf{H}^p &= -\tilde{K}_R \mathbf{J} + i\eta_0^{-1} \tilde{T}_R \mathbf{M}, \end{aligned}$$

où les potentiels \tilde{T}_R et \tilde{K}_R sont obtenus à partir des potentiels (12) en remplaçant le noyau de Green $G(x, y)$ par sa partie réelle

$$\Re(G(x, y)) = \cos(k|x - y|)/4\pi|x - y|.$$

Par construction, cette solution satisfait le système (35) ainsi que la condition de radiation à l'infini (33). La solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) recherchée satisfait à elle (par hypothèse) à la condition de Herglotz (33).

L'inégalité triangulaire appliquée au champ électrique \mathbf{E}^g (la même relation ayant évidemment lieu pour le champ magnétique \mathbf{H}^g), s'écrit

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} |\mathbf{E}^g| = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} |\mathbf{E} - \mathbf{E}^p| \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{B_R} |\mathbf{E}| + |\mathbf{E}^p| < \infty,$$

et nous permet alors d'en déduire que la solution générale $(\mathbf{E}^g, \mathbf{H}^g)$ dans (37) vérifie de même la condition de radiation de Herglotz (33).

Afin d'expliciter cette solution générale, on introduit d'abord un type particulier d'ondes.

Définition 1 On appelle onde de Herglotz toute onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E} = \int_S \gamma(\hat{y}) e^{ik\hat{y}\cdot x} ds(\hat{y}) \\ \mathbf{H} = \frac{1}{ik} \mathbf{rot} \mathbf{E} = \frac{1}{\eta_0} \int_S (\hat{y} \times \gamma(\hat{y})) e^{ik\hat{y}\cdot x} ds(\hat{y}) \end{cases}$$

où $\gamma \in L_t^2(S)$ est le noyau de Herglotz de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

On se réfère à [1] ou encore à [32] pour de plus amples développements concernant ce type particulier d'ondes.

On applique alors [1, théorème 6.30], qui fait le lien entre les solutions entières des équations de Maxwell (solutions dans tout \mathbb{R}^3) et les ondes de Herglotz.

Théorème 4 Une solution entière (\mathbf{E}, \mathbf{H}) des équations de Maxwell satisfait à la condition de radiation de Herglotz (33) si et seulement si (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est une onde de Herglotz.

La solution générale $(\mathbf{E}^g, \mathbf{H}^g)$ est ainsi une onde de Herglotz, c'est-à-dire s'écrivant sous la forme

$$\begin{cases} \mathbf{E}^g(x) = \frac{ik\sqrt{i\eta_0}}{4\pi} \int_S \gamma(\hat{y}) e^{ik\hat{y}\cdot x} d\hat{y} \\ \mathbf{H}^g(x) = \frac{ik}{4\pi\sqrt{i\eta_0}} \int_S (i\hat{y} \times \gamma(\hat{y})) e^{ik\hat{y}\cdot x} d\hat{y} \end{cases}$$

où γ est un champ tangent à la sphère unité S , et de carré intégrable ($\gamma \in L_t^2(S)$).

Remarque 3 La divergence de l'onde de Herglotz, $\mathbf{div} \mathbf{E}^g$, est une onde de Herglotz (scalaire) de noyau $\hat{y} \cdot g(\hat{y})$. Ainsi, la condition noyau de Herglotz tangentiel est équivalente à la condition de divergence nulle du champ électrique $\mathbf{div} \mathbf{E}^g = 0$.

En résumé, on peut écrire la solution de notre problème sous la forme,

$$\begin{cases} \mathbf{E} = i\eta_0 \tilde{T}_r \mathbf{J} + \tilde{K}_r \mathbf{M} + \frac{ik\sqrt{i\eta_0}}{4\pi} \int_S \gamma(\hat{y}) e^{ik\hat{y}\cdot x} d\hat{y} \\ \mathbf{H} = -\tilde{K}_r \mathbf{J} + i\eta_0^{-1} \tilde{T}_r \mathbf{M} + \frac{ik}{4\pi\sqrt{i\eta_0}} \int_S (i\hat{y} \times \gamma(\hat{y})) e^{ik\hat{y}\cdot x} d\hat{y}. \end{cases} \quad (38)$$

L'expression de la solution du problème dans $W_H(\Omega)$ fait donc maintenant intervenir trois inconnues : les courants \mathbf{J} et \mathbf{M} (respectivement électriques et magnétiques), et le noyau de Herglotz γ , au lieu des deux seuls courants pour la formulation dans $W_{S^+}(\Omega)$ (ou $W_{S^-}(\Omega)$).

Nous allons maintenant voir que ces inconnues sont nécessairement liées.

2.4 Caractérisation des solutions

La solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) doit s'annuler dans Ω . Cette condition est équivalente à l'annulation des traces tangentielles intérieures des deux champs :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma^-} \times \mathbf{n}) = \mathbf{n} \times (\mathbf{H}|_{\Gamma^-} \times \mathbf{n}) = 0.$$

Les conditions de saut sur $\Gamma^- = \overline{\Omega} \cap \Gamma$, similaires à (19), portant cette fois sur les champs à l'intérieur de Ω nous donnent alors les relations,

$$\begin{aligned} 0 &= \mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma^-}(x) \times \mathbf{n}) \\ &= i\eta_0 T_R \mathbf{J}(x) + K_R \mathbf{M}(x) + \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^g(x) \times \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M}(x) \\ 0 &= \mathbf{n} \times (\mathbf{H}|_{\Gamma^-}(x) \times \mathbf{n}) \\ &= -K_R \mathbf{J}(x) + i\eta_0^{-1} T_R \mathbf{M}(x) + \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^g(x) \times \mathbf{n}) + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{J}(x) \end{aligned} \quad (39)$$

On a utilisé ici la notation, pour $x \in \Gamma$,

$$\mathbf{E}|_{\Gamma^-}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \mathbf{E}(y) \quad \text{et} \quad \mathbf{H}|_{\Gamma^-}(x) = \lim_{y \rightarrow x, y \in \Omega} \mathbf{H}(y).$$

On introduit alors la décomposition de l'opérateur \mathcal{Z} défini en (21),

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + i\mathcal{Z}_I, \quad (40)$$

où \mathcal{Z}_R (resp. \mathcal{Z}_I) est l'opérateur obtenu en remplaçant le noyau de Green $G(x, y)$ par sa partie réelle (resp. imaginaire) dans l'opérateur \mathcal{Z} :

$$\mathcal{Z}_R = \begin{pmatrix} T_R & K_R - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \\ K_R - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times & T_R \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{Z}_I = \begin{pmatrix} T_I & K_I \\ K_I & T_I \end{pmatrix}.$$

En introduisant cette décomposition dans la relation (39), puis en utilisant la définition de l'opérateur de champ lointain (25), on obtient l'équation qui relie l'inconnue u définie en (22) et le noyau de Herglotz γ (ou de manière équivalente \mathbf{J} , \mathbf{M} et γ),

$$\mathcal{Z}_R u + iA_\infty^* \gamma = 0, \quad \text{avec} \quad u = \begin{pmatrix} \sqrt{i\eta_0} \mathbf{J} \\ \sqrt{i\eta_0}^{-1} \mathbf{M} \end{pmatrix}. \quad (41)$$

On a utilisé ici l'opérateur adjoint de l'opérateur de rayonnement :

$$A_\infty^* : \begin{cases} L^2(S) & \rightarrow (H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma))^2 \\ \gamma & \mapsto \begin{pmatrix} a_\infty^* \gamma \\ -i a_\infty^* \end{pmatrix}, \end{cases}$$

avec, pour tout $\gamma \in L_t^2(S)$,

$$a_\infty^* \gamma(y) = \frac{k}{4\pi} \mathbf{n}_y \left(\times \int_S \gamma(\hat{x}) e^{ik\hat{x}\cdot y} ds(\hat{x}) \times \mathbf{n}_y \right).$$

Remarque 4 Les relations de traces extérieures des champs s'écrivent, d'une manière analogue à (39),

$$\begin{cases} \mathbf{n} \times (\mathbf{E}|_{\Gamma^+}(x) \times \mathbf{n}) &= i\eta_0 T_R \mathbf{J}(x) + K_R \mathbf{M}(x) + \mathbf{n} \times (\mathbf{E}^g(x) \times \mathbf{n}) + \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{M}(x), \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}|_{\Gamma^+}(x) \times \mathbf{n}) &= -K_R \mathbf{J}(x) + i\eta_0^{-1} T_R \mathbf{M}(x) + \mathbf{n} \times (\mathbf{H}^g(x) \times \mathbf{n}) - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times \mathbf{J}(x). \end{cases}$$

Ainsi, imposer l'annulation des champs à l'intérieur de l'objet Ω est formellement équivalent à considérer les courants électriques et magnétiques

$$\begin{cases} \mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma^+} \\ \mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma^+}, \end{cases}$$

ce qui est bien cohérent avec la définition (36).

Considérons à présent l'expression des champs lointains associés aux champs \mathbf{E} et \mathbf{H} ainsi construits.

2.5 Champs lointains

De même que pour des champs sortants, on peut expliciter le comportement asymptotique des champs (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de $W_H(\Omega)$. On définit pour cela les champs

$$\begin{cases} \mathbf{e}^+(\hat{x}) = \frac{\sqrt{i\eta_0}}{2} (A_\infty(u; \hat{x}) + \gamma(\hat{x})) \\ \mathbf{e}^-(\hat{x}) = \frac{\sqrt{i\eta_0}}{2} (A_\infty(u; -\hat{x}) - \gamma(-\hat{x})). \end{cases} \quad (42)$$

On a alors,

Lemme 7 Soit les champs

$$\begin{cases} \mathbf{E}^\infty(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}^+(\hat{x}) + \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}^-(\hat{x}), \\ \eta_0 \mathbf{H}^\infty(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \hat{x} \times \mathbf{e}^+(\hat{x}) - \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \hat{x} \times \mathbf{e}^-(\hat{x}). \end{cases} \quad (43)$$

I Cadre mathématique

Alors, \mathbf{E}^∞ et \mathbf{H}^∞ sont les champs lointains de l'onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dans le sens où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{R \leq x \leq 2R} |\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}^\infty(x)|^2 dx = 0,$$

et,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{R \leq x \leq 2R} |\mathbf{H}(x) - \mathbf{H}^\infty(x)|^2 dx = 0.$$

On se réfère à [37] pour la démonstration complète de ce lemme. On donne néanmoins en annexe A - 2 les éléments du calcul asymptotique permettant d'obtenir formellement l'expression des champs lointains (42). On note alors que, contrairement aux formulations usuelles (i.e. dans W_{S^\pm}) où les comportements asymptotiques sont uniformes sur la sphère unité S , ces développements sont valables dans le sens "faible" donné dans le lemme 7. Les détails sur ce type de convergence asymptotique peuvent être trouvés dans, par exemple, [32].

Ces champs contiennent, comme annoncé, une "composante" sortante (élément de W_{S^+}) et une composante entrante (élément de W_{S^-}). On retrouve ainsi la décomposition (34).

Remarque 5 (Opérateur de perturbation) *On sait que d'une manière générale l'opérateur de scattering peut se décomposer suivant la somme $S = -I + P$, où P est l'opérateur, dénommé "opérateur de perturbation" dans la littérature, qui au champ incident sur l'objet associe le champ lointain diffracté (cf. [14], [16]).*

D'après (42), on peut écrire $\mathbf{e}^+ = -\mathbf{e}^- + \sqrt{i\eta_0} A_\infty(\mathbf{J}_1, \mathbf{M}_1; \hat{x})$, ce qui correspond bien à la décomposition annoncée de l'opérateur de scattering, où

$$P : \mathbf{e}^-(-\hat{x}) \mapsto A_\infty(u; \hat{x}),$$

est un opérateur compact grâce aux propriétés de régularisation de l'opérateur de rayonnement A_∞ . Cet opérateur de perturbation coïncide avec l'opérateur de champ lointain, défini dans le 1.5 : $P = \frac{k}{4\pi} F$.

On retrouve de cette façon que l'opérateur de champ lointain est compact dans $L^2(S)$.

Remarque 6 (Pertes) *D'après (42), la puissance dissipée \mathcal{P}_d est*

$$\mathcal{P}_d = \|\mathcal{S}\mathbf{e}^-\| - \|\mathbf{e}^-\| = \|\mathbf{e}^+\|^2 - \|\mathbf{e}^-\|^2 = 2\eta_0 \Re e(A_\infty u, \gamma), \quad (44)$$

qui montre ainsi la "perturbation" de l'opérateur de scattering \mathcal{S} : \mathcal{S} n'est plus unitaire.

Grâce à (41), ces pertes se réécrivent

$$\mathcal{P}_d = -2\eta_0 \Im m(u, \mathcal{Z}_R u),$$

soit,

$$\mathcal{P}_d = -2\eta_0 \Im m(\mathbf{n} \times \mathbf{M}, \mathbf{J}).$$

2 Reformulation du problème. Espace $W_H(\Omega)$.

Ainsi donc, dans le cas d'un objet parfaitement conducteur, pour lequel $\mathbf{M} = 0$, la diffraction par l'objet s'effectue sans perte, et \mathcal{S} est unitaire, d'après (44).

Dans le cas d'un objet modélisé par une condition d'impédance du type

$$\mathbf{n} \times \mathbf{M} - i\eta\mathbf{J} = 0,$$

avec $\eta = z/\eta_0$ l'impédance relative de la surface de l'objet, les pertes s'estiment suivant

$$\mathcal{P}_d = 2\Re(\eta) \|\mathbf{J}\|^2,$$

qui sont simplement les pertes (par effet Joule) dues à la partie purement résistive de l'impédance du revêtement de l'objet.

Aucune condition particulière sur le bord de l'objet n'a été imposée jusque là. Le prochain chapitre traite de la condition aux limites de conducteur parfait.

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

On étudie maintenant le cas particulier d'un objet parfaitement conducteur (PEC).

On débute ce chapitre par l'introduction de cette condition dans les développements généraux du chapitre précédent. La prise en compte de cette condition va alors nous permettre de fournir des expressions particulières des divers opérateurs introduits jusqu'à présent : les opérateurs de scattering et de champ lointain en particulier. Nous verrons que ces expressions reposent sur un seul opérateur, possédant de plus des propriétés remarquables de régularité et de symétrie.

Ces propriétés permettent alors de définir une base de champs de champs lointains rayonnés par l'objet. Par la suite, à partir de cette famille de champs, on définit une base de courants sur la surface de l'objet.

L'expression des courants et champs diffractés sous la forme de développements modaux découle alors directement de l'utilisation de ces bases, désignées par bases caractéristiques. Ces développements permettent, entre autre, de découpler les variables correspondant à l'excitation de celles correspondant à l'observation. Ce point sera développé lors de l'utilisation de ces bases pour reconstruire le courant induit, le champ diffracté ou encore la SER de l'objet.

On donnera enfin, à la fin de ce chapitre, les éléments permettant d'étendre cette théorie de décomposition à des objets dont la surface est moins régulière, ou encore à des objets infiniment fins.

La condition PEC en électromagnétisme

De tels objets se modélisent par la condition au bord (I-3) introduite dans le chapitre I. Cette condition fournit le comportement de la composante tangentielle du champ électrique total sur la surface de l'objet :

$$\mathbf{E}_{tang}^{total} := \mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_{|\Gamma}^{total} \times \mathbf{n} \right) = 0.$$

C'est un cas particulier important dans l'étude de la diffraction car :

- i) la majorité des objets rencontrés dans les applications sont métalliques, comme première approximation ;
- ii) c'est un cas d'étude simple ; de nombreuses propriétés y sont aisées à manipuler (isométrie, conservation de l'énergie, compacité de certains opérateurs ...) ; la recherche de propriétés générales sur la diffraction (physiques, mathématiques, numériques...) doit assez logiquement débiter avec ce cas ;

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

iii) en BF, zone qui nous intéresse particulièrement, tout objet peut-être considéré, en première approximation, comme un objet conducteur ; l'approximation étant d'autant meilleure que la fréquence est faible.

On précise tout d'abord le point iii) par deux exemples.

On considère un objet constitué d'un noyau parfaitement conducteur recouvert d'un matériau de caractéristiques électromagnétiques ε_r , μ_r , et σ (respectivement, sa permittivité électrique, sa perméabilité magnétique, et sa conductivité). La modélisation de la diffraction à l'aide d'une condition de type impédance (I-4) :

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) + \eta \mathbf{H} \times \mathbf{n} = 0,$$

fait intervenir l'impédance

$$\eta = \sqrt{\frac{i\omega\mu_r}{i\omega\varepsilon_r + \sigma/\varepsilon_0}} i \tan(ke\sqrt{\varepsilon_r\mu_r}),$$

où w est la pulsation de l'onde incidente, $w = k/\sqrt{\varepsilon_0\mu_0}$.

De la même façon, l'empilement de deux couches de matériaux de caractéristiques relatives $(\varepsilon_i, \mu_i, \sigma_i)$, et d'épaisseur e_i , pour $i = 1, 2$, le matériau 1 étant celui situé du côté du vide, donne lieu à l'impédance de surface

$$\eta = iZ_1 \frac{Z_2 \tan(ke_2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}) + Z_1 \tan(ke_1\sqrt{\varepsilon_1\mu_1})}{Z_1 - Z_2 \tan(ke_2\sqrt{\varepsilon_2\mu_2}) \tan(ke_1\sqrt{\varepsilon_1\mu_1})},$$

où on a posé

$$Z_i = \sqrt{\frac{i\omega\mu_i}{i\omega\varepsilon_i + \sigma_i/\varepsilon_0}}.$$

On voit ainsi clairement que l'impédance de surface η tend vers 0 avec la fréquence, à épaisseur de matériau et caractéristiques électromagnétiques constantes (soit $ke\sqrt{\varepsilon\mu} \rightarrow 0$).

Pour compenser la baisse de fréquence, il apparaît alors nécessaire d'augmenter l'épaisseur de la couche de matériau utilisé, ce qui se révèle, en pratique, très rapidement limité.

A la limite, $\eta \rightarrow 0$, et on retrouve la condition de conducteur parfait (I-3).

Ces deux exemples montrent que dans le domaine des basses fréquences, les matériaux absorbants ne sont pas très efficaces, et ce d'autant plus que la fréquence est faible.

D'une manière plus générale, à fréquence donnée (pas nécessairement basse), les grandeurs caractéristiques du matériau constituant l'objet sont l'épaisseur de peau δ

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{w\mu\sigma}},$$

son impédance (en volume cette fois) $Z_m = (1 - i)w\mu\delta/2$, ainsi que le nombre d'onde dans le matériau $k_m = (1 + i)/\delta$.

L'épaisseur de peau correspond à la distance dans le matériau pour laquelle les champs décroissent d'un facteur $1/e$, i.e. on peut considérer que les champs électromagnétiques sont identiquement nuls après une distance de quelques δ de la surface extérieure de l'objet.

L'indice du matériau est $n = \sqrt{\mu_r \varepsilon_r}$. On peut alors montrer que pour des matériaux de fort indice : $\eta = |n|^{-1} \rightarrow 0$, les champs $(\mathbf{E}^\eta, \mathbf{H}^\eta)$ vérifient,

- au premier ordre, la condition de conducteur parfait : $\mathbf{n} \times \mathbf{E}^\eta = 0$,
- au deuxième ordre, la condition d'impédance (I-4),
- aux ordres suivants en η , les champs électriques et magnétiques sont reliés par une condition plus compliquée, dans laquelle intervient les dérivés de ces champs ainsi que les caractéristiques de la surface (courbure ...).

Ces résultats sont démontrés, et largement étudiés, dans [70].

Nous passons ainsi à l'étude des objets parfaitement conducteurs.

1 Application du cadre $W_H(\Omega)$ à des objets PEC

Dans ce cas particulier, les développements précédents vont permettre d'exprimer les deux opérateurs fondamentaux, opérateur de scattering et de champ lointain (cf. section I-1.5), à l'aide d'un seul opérateur. L'étude de la diffraction dans ce cas se ramène alors à celle de cet opérateur particulier.

Les particularités du cas PEC se retrouvent au travers des propriétés remarquables que possède cet opérateur.

On commence tout d'abord par particulariser le cadre général développé dans le chapitre I.

1.1 Expression des opérateurs de scattering et de champ lointain

On commence par appliquer directement les développements du chapitre précédent. Le cas d'un objet conducteur se traduit mathématiquement par des courants magnétiques nuls à la surface de l'objet :

$$\mathbf{M} = 0.$$

Le problème de la diffraction se réduit alors à la seule détermination des courants électriques,

$$\tilde{\mathbf{J}} = \sqrt{i\eta_0} \mathbf{J} = \sqrt{i\eta_0} \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_T. \quad (1)$$

et le système d'équations intégrales (I-20) se réécrit

$$\mathcal{Z}u = \begin{pmatrix} T & K - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times \\ K - \frac{1}{2}\mathbf{n} \times & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ 0 \end{pmatrix} = g^i, \quad (2)$$

où g^i est le second membre défini en (I-23).

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

La première équation du système (2) est l'équation d'EFIE (pour Electric Field Integral Equation), tandis que la deuxième est l'équation de MFIE (pour Magnetic Field Integral Equation).

L'opérateur de rayonnement devient, d'après les relations (25) et (26) du chapitre précédent,

$$A_\infty(u; \hat{x}) = a_\infty \tilde{\mathbf{J}}(\hat{x}), \quad (3)$$

et, en notant π_S l'application : $\mathbf{u} \in S \mapsto \hat{x} \times \mathbf{u}$, le système (I-41) se réécrit maintenant

$$\begin{cases} T_R \tilde{\mathbf{J}} + ia_\infty^* \gamma = 0 \\ (K_R - \frac{1}{2} \mathbf{n} \times) \tilde{\mathbf{J}} + ia_\infty^* \pi_S \gamma = 0. \end{cases} \quad (4)$$

Nous allons nous concentrer par la suite sur la première équation de ce système. Ces deux équations sont en fait équivalentes (redondantes) ; nous reviendrons sur ce point au paragraphe 1.4.

Nous allons pour cela avoir besoin du résultat intermédiaire suivant :

Lemme 8 *L'opérateur T_R est un isomorphisme de $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ dans son dual $H_{rot}^{-1/2}(\Gamma)$, excepté pour un ensemble discret de fréquences \mathcal{K} tel que $\mathcal{K} = \mathcal{K}_R \cup \mathcal{K}_{int}$, où \mathcal{K}_{int} est la famille des fréquence de résonance du problème intérieur associé.*

La démonstration de ce lemme est donnée en annexe B - 4 .

De la première équation du système (4), et en utilisant le fait que l'opérateur T_R est inversible (cf. Annexe B - 4), il vient

$$\tilde{\mathbf{J}} = -i T_R^{-1} a_\infty^* \gamma. \quad (5)$$

Cette dernière relation, introduite dans l'expression des champs lointains (I-42), nous permet d'écrire,

$$\begin{cases} \mathbf{e}^+(\hat{x}) = \frac{\sqrt{i\eta_0}}{2} (-ia_\infty T_R^{-1} a_\infty^* + I) \gamma(\hat{x}) \\ \mathbf{e}^-(\hat{x}) = \frac{\sqrt{i\eta_0}}{2} (-ia_\infty T_R^{-1} a_\infty^* - I) \gamma(-\hat{x}); \end{cases} \quad (6)$$

où I est l'identité dans $L^2(S)$. Par substitution, on peut finalement relier les champs lointains sortants \mathbf{e}^+ aux champs lointains entrants \mathbf{e}^- :

$$\mathbf{e}^+(\hat{x}) = -(I - i\chi) (I + i\chi)^{-1} \mathbf{e}^-(-\hat{x}), \quad (7)$$

où l'opérateur χ est défini suivant,

$$\chi = a_\infty T_R^{-1} a_\infty^*. \quad (8)$$

On a ainsi montré la factorisation de l'opérateur de scattering :

Théorème 5 *L'opérateur de scattering admet la décomposition de Cayley*

$$\mathcal{S} = -(I - i\chi) (I + i\chi)^{-1}. \quad (9)$$

L'opérateur de scattering apparaît comme la transformée de Cayley (cf. [7]) de l'opérateur symétrique χ . On retrouve ici le fait que dans le cas d'un objet parfaitement conducteur, l'opérateur de scattering est unitaire : la diffraction par un objet parfaitement conducteur est un phénomène conservatif.

Remarque 7 *L'opérateur χ est un opérateur défini sur $L^2(S)$ tout entier, et est d'image dense dans $L^2(S)$. Ainsi, le théorème 9 montre aussi que l'opérateur de scattering \mathcal{S} est bien un opérateur unitaire de $L^2(S)$ dans lui-même (voir paragraphe "opérateur de scattering et de champ lointain").*

1.2 Diagonalisation de l'opérateur de scattering

Le paragraphe précédent permet de ramener l'étude de l'opérateur de scattering à celle de l'opérateur χ , pour lequel on va pouvoir appliquer des théories spectrales classiques.

On précise tout d'abord pour l'opérateur χ :

Lemme 9 *Soit $k > 0$ une fréquence telle que $k \notin \mathcal{K}$, alors l'opérateur χ , défini en (8), est un opérateur compact et auto-adjoint dans $L^2(S)$.*

Démonstration On rappelle que $\chi = a_\infty T_R^{-1} a_\infty^*$. L'opérateur T_R étant un opérateur symétrique réel, on en déduit que χ est, par construction, un opérateur auto-adjoint.

Les opérateurs a_∞ et a_∞^* sont des opérateurs intégraux de noyau respectif e^{ikr} et e^{-ikr} , qui sont infiniment réguliers ; ce sont donc des opérateurs régularisants. L'opérateur χ est par suite aussi régularisant, et en particulier compact dans $L^2(S)$. □

A partir de ce lemme on peut maintenant définir une première famille d'éléments caractéristiques de l'objet :

Définition 2 *On appelle champ (lointain) caractéristique de l'objet Ω à la fréquence $k \notin \mathcal{K}$, toute fonction propre de l'opérateur compact et auto-adjoint χ :*

$$\chi \mathbf{e}_n = \nu_n \mathbf{e}_n.$$

La valeur propre ν_n est la valeur caractéristique associée.

On a alors le théorème :

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

Théorème 6 *L'ensemble des champs caractéristiques d'un objet est une base orthogonale de $L^2_t(S)$, formée de champs infiniment réguliers, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{e}_n \in L^2(S) \cap C^\infty(S).$$

L'opérateur de scattering est de plus diagonal dans cette même base :

$$\mathcal{S}\mathbf{e}_n = s_n \mathbf{e}_n,$$

avec les valeurs propres

$$s_n = -\frac{1 - i\nu_n}{1 + i\nu_n}.$$

Démonstration D'après le lemme 9, χ est compact et auto-adjoint ; il en découle que χ est diagonalisable dans une base orthonormale formée de fonctions propres : les champs caractéristiques \mathbf{e}_n .

L'opérateur de rayonnement a_∞ , opérateur intégral de noyau infiniment régulier e^{ikr} , est un opérateur régularisant, i.e. $a_\infty : H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow C^p(S)$, $\forall p \in \mathbb{N}$; il en va de même de son adjoint a_∞^* . Basé sur ces opérateurs, et grâce au lemme 8, l'opérateur χ est aussi un opérateur régularisant, d'où on déduit les propriétés de régularité de ces champs propres.

On applique maintenant l'expression de l'opérateur de scattering (9) à ces champs propres suivant :

$$\mathcal{S}(I + \chi)\mathbf{e}_n = -(I - \chi)^{-1}\mathbf{e}_n,$$

soit

$$(1 + i\nu_n)\mathcal{S}\mathbf{e}_n = -(1 - i\nu_n)\mathbf{e}_n.$$

En d'autres termes, la base $\{\mathbf{e}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ diagonalise l'opérateur de scattering :

$$\mathcal{S}\mathbf{e}_n = s_n \mathbf{e}_n,$$

avec les valeurs propres données par

$$s_n = -\frac{1 - i\nu_n}{1 + i\nu_n}.$$

□

Nous allons maintenant voir que chacun de ces champs lointains caractéristiques correspond exactement au rayonnement d'un courant particulier sur l'objet.

1.3 Définition des Courants caractéristiques

On cherche maintenant à introduire des éléments caractéristiques définis sur l'objet, par opposition aux champs lointains caractéristiques définis sur la sphère unité, et qui forment une base orthonormale intrinsèque de $L^2(S)$. On revient pour cela à la surface de l'objet, et on remarque tout d'abord que d'après la définition de χ , on a

$$\mathcal{R}(\chi) \subset \mathcal{R}(a_\infty),$$

$\mathcal{R}(A)$ désignant l'image de l'opérateur A . Ainsi, la suite des champs lointains caractéristiques est en fait une suite de $\mathcal{R}(a_\infty)$. En d'autres termes, chaque champ caractéristique correspond au rayonnement d'un certain courant sur la surface de l'objet. On va donc pouvoir associer à la suite de champs lointains caractéristiques, une suite de courants sur l'objet.

Plus précisément, on construit cette suite de courants selon :

Définition 3 Soit \mathbf{e}_n (resp. ν_n) la suite de champs lointains (resp. valeurs) caractéristiques de l'objet Ω . On définit alors la suite de courants :

$$\mathbf{J}_n = \frac{1}{\nu_n} T_R^{-1} a_\infty^* \mathbf{e}_n.$$

La suite \mathbf{J}_n est la suite de courants caractéristiques de Ω , associée à la suite de valeurs caractéristiques ν_n .

L'intérêt de cette famille de courants caractéristiques réside dans le résultat suivant.

Théorème 7 Soit $k \notin \mathcal{K}_{int}$, et \mathbf{J}_n (resp. ν_n) la suite des courants (resp. valeurs) caractéristiques de l'objet Ω . Alors, la famille $\{\mathbf{J}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme un système dense dans $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$, de courants qui rayonnent à l'infini les champs lointains caractéristiques, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_\infty \mathbf{J}_n = \mathbf{e}_n.$$

Les courants caractéristiques sont de plus solutions de l'équation aux valeurs propres généralisées

$$T_R \mathbf{J}_n = \lambda_n T_I \mathbf{J}_n,$$

où on a posé $\lambda_n = 1/\nu_n$.

On retrouve dans ce théorème les courants caractéristiques initialement introduits par Garbacz [14], puis formalisés par la suite par Harrington et Mautz [16] (voir introduction, paragraphe 5). Ce théorème résume ainsi les principales propriétés des éléments caractéristiques.

Démonstration Soit d'abord une fréquence $k \notin \mathcal{K}$. Pour de telles fréquences et d'après le lemme 8, l'opérateur χ est bien défini. On a alors, d'après l'équation caractéristique de la définition 2 vérifiée par les \mathbf{e}_n , et la définition (8) de l'opérateur χ , pour tout entier n ,

$$\begin{aligned} a_\infty \mathbf{J}_n &= \frac{1}{\nu_n} a_\infty T_R^{-1} a_\infty^* \mathbf{e}_n \\ &= \frac{1}{\nu_n} \chi \mathbf{e}_n \\ &= \mathbf{e}_n. \end{aligned} \tag{10}$$

Les fonctions propres \mathbf{e}_n sont donc les champs lointains associés aux courants \mathbf{J}_n introduits dans la définition 3.

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

Lorsque la fréquence $k \in \mathcal{K}_R$, l'opérateur T_R n'est plus un isomorphisme. On peut néanmoins étendre les résultats pour ces fréquences en considérant l'opérateur T_α de noyau

$$G_\alpha = G_R + \alpha G_I,$$

pour un paramètre α réel tel que T_α soit inversible. On peut alors reprendre intégralement les développements effectués jusqu'ici en substituant T_R par T_α .

Ce point est précisé en annexe C - 2, où on montre, en particulier, que les résultats obtenus ainsi sont indépendants du paramètre α .

D'après le lemme 3, on sait que l'opérateur de rayonnement a_∞ est injectif de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans $L^2(S)$: excepté à certaines fréquences (les fréquences de résonance interne) tout courant électrique non nul sur l'objet rayonne de l'énergie à l'infini. De cette propriété d'injectivité, on déduit que son opérateur adjoint $a_\infty^* : L^2(S) \rightarrow (H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma))' = H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ a une image dense dans $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$. L'opérateur T_R étant un isomorphisme de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, on peut de plus conclure que la densité des champs lointains $\{\mathbf{e}_n\}$ dans $L^2(S)$ entraîne celle des courants caractéristiques $\{\mathbf{J}_n\}$ dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, à l'aide de la définition 3.

On peut en fait être plus précis : grâce au lemme 10, l'ensemble $\{\mathbf{J}_n\}$ forme une base ortho-normée de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, pour le produit scalaire induit par T_I

$$\langle \mathbf{J}, \mathbf{J}' \rangle = (a_\infty \mathbf{J}, a_\infty \mathbf{J}')_{L^2(S) \times L^2(S)}. \quad (11)$$

D'après (10) et la définition 3, ces courants sont solutions de l'équation,

$$\nu_n T_R \mathbf{J}_n = a_\infty^* a_\infty \mathbf{J}_n. \quad (12)$$

Le lemme suivant termine la démonstration, en énonçant la relation entre la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE et l'opérateur de rayonnement.

□

Lemme 10 *L'opérateur T_I admet la factorisation*

$$T_I = a_\infty^* a_\infty.$$

Ainsi, T_I est un opérateur auto-adjoint, positif et compact. De plus, si k n'est pas une fréquence de résonance du problème intérieur, T_I est aussi défini positif.

Ce lemme énonce, mathématiquement, le lien entre la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE et la puissance rayonnée à l'infini : si J est un courant électrique quelconque, alors la puissance qu'il rayonne à l'infini est

$$\mathcal{P}_\infty(J) = \|a_\infty J\| = \sqrt{(T_I J, J)} = \sqrt{\Im(T J, J)}.$$

Démonstration Cette factorisation découle de la décomposition du sinus cardinal en ondes planes :

$$\frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} = \frac{k}{(4\pi)^2} \int_S e^{ik\hat{z}\cdot(x-y)} ds(\hat{z}).$$

Soit maintenant \mathbf{J} et \mathbf{J}' deux courants dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, alors, en utilisant l'égalité précédente, on a

$$\begin{aligned} (T_I \mathbf{J}, \mathbf{J}') &= k \iint_{S \times S} \frac{\sin(k|x-y|)}{|x-y|} \left[\mathbf{J}(x) \cdot \overline{\mathbf{J}'(y)} - \frac{1}{k^2} \text{div}_\Gamma \mathbf{J}(x) \text{div}_\Gamma \overline{\mathbf{J}'(y)} \right] ds(x) ds(y) \\ &= \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_S \left[\mathbf{AJ}(\hat{z}) \cdot \overline{\mathbf{AJ}'(\hat{z})} - (\mathbf{AJ}(\hat{z}) \cdot \hat{z}) \overline{(\mathbf{AJ}'(\hat{z}) \cdot \hat{z})} \right] ds(\hat{z}), \end{aligned}$$

où on a posé

$$\mathbf{AJ}(\hat{z}) = \int_S \mathbf{J}(\hat{x}) e^{-ik\hat{x}\cdot\hat{z}} ds(\hat{x}).$$

En utilisant la décomposition orthogonale

$$\mathbf{AJ}(\hat{z}) = (\mathbf{AJ}(\hat{z}) \cdot \hat{z}) \hat{z} + \hat{z} \times (\mathbf{AJ}(\hat{z}) \times \hat{z}),$$

on obtient finalement

$$(T_I \mathbf{J}, \mathbf{J}') = \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_S [\hat{z} \times (\mathbf{AJ}(\hat{z}) \times \hat{z})] \cdot \overline{[\hat{z} \times (\mathbf{AJ}'(\hat{z}) \times \hat{z})]}.$$

Or, d'après la définition (26) de l'opérateur de rayonnement a_∞ , on a

$$\hat{z} \times (\mathbf{AJ}(\hat{z}) \times \hat{z}) = \frac{4\pi}{k} a_\infty \mathbf{J}(\hat{z}),$$

d'où on déduit finalement la relation

$$(T_I \mathbf{J}, \mathbf{J}') = (a_\infty \mathbf{J}, a_\infty \mathbf{J}') = (a_\infty^* a_\infty \mathbf{J}, \mathbf{J}'),$$

qui, étant valable pour tout \mathbf{J}, \mathbf{J}' , nous fournit la factorisation du lemme 10.

L'application directe de cette décomposition fournit

$$(T_I \mathbf{J}, \mathbf{J}) = \|a_\infty \mathbf{J}\|^2 \geq 0, \quad \forall \mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma),$$

et montre que T_I est un opérateur positif. La stricte positivité est alors équivalente à l'injectivité de a_∞ , qui est acquise dès lors que l'on se place en dehors de l'ensemble des fréquences de résonance du problème intérieur. □

Le lemme 10 permet de ramener l'équation (12) à l'équation aux valeurs propres ne faisant intervenir que l'opérateur d'impédance (ou opérateur d' EFIE), scindé en partie réelle et imaginaire :

$$T_R \mathbf{J}_n = \lambda_n T_I \mathbf{J}_n, \tag{13}$$

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

avec $\lambda_n = 1/\nu_n$, que l'on désignera par équation caractéristique, et qui est à la base du calcul de décomposition en courants caractéristiques.

Le lemme 10 montre, pour presque toute fréquence, que T_I est de plus un opérateur défini positif, et permet de définir le produit scalaire (11) selon :

$$\langle \mathbf{J}, \mathbf{J}' \rangle = (T_I \mathbf{J}, \mathbf{J}')_{H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma) \times H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)} = (a_\infty \mathbf{J}, a_\infty \mathbf{J}')_{L^2(S) \times L^2(S)}, \quad (14)$$

qui montre de nouveau l'intérêt de ne laisser intervenir que l'opérateur d'EFIE.

Remarque 8 *Les développements présentés jusqu'ici sont basés sur la décomposition en parties réelle et imaginaire du noyau de Green : $G = G_R + iG_I$, et les décompositions des opérateurs intégraux qui en découlent.*

En fait, on peut tenir le même raisonnement sur des combinaisons linéaires quelconques du noyau de Green et de son conjugué. Ainsi, on peut montrer (cf. annexe C - 2) que le choix du noyau $G_\alpha = G_R + \alpha G_I$ dans la solution particulière (2.3) pour un complexe α quelconque (toutefois différent de $\pm i$, dans quel cas on retombe sur les solutions entrantes ou sortantes) permet d'aboutir au même résultat, indépendamment du choix de α .

Cette alternative permet de contourner le problème des fréquences irrégulières pour T_R : en fin de compte, seuls les fréquences de résonance du problème intérieur restent réellement critiques...

1.4 Courants caractéristiques et MFIE

Jusqu'à maintenant, on a privilégié l'opérateur d'EFIE, c'est-à-dire les expressions et développements reliant le champ électrique au courant électrique. Il est aussi possible d'utiliser l'équation en champ magnétique, la MFIE, reliant le champ magnétique au courant électrique.

On rappelle que la MFIE est donnée par la deuxième équation du système (4).

On s'intéresse ainsi plus particulièrement dans ce paragraphe à l'opérateur de MFIE, et on montre que celui-ci se "diagonalise" de la même façon que l'opérateur d'EFIE (c'est-à-dire donne lieu à une équation du type équation aux valeurs propres généralisées, similaire à celle portant sur l'EFIE). On a en effet le choix, pour un objet parfaitement conducteur, c'est à dire lorsque les courants magnétiques \mathbf{M} sont nuls, entre les deux représentations et équations intégrales : en champ électrique ou en champ magnétique.

Notons qu'une troisième stratégie est aussi possible, celle de combiner ces deux dernières équations pour obtenir des équations de type CFIE (pour Combined Field Integral Equation), voir [1], [4], ou encore [42].

Cette troisième méthode peut permettre, entre autre, de mettre l'équation intégrale étudiée dans le cas d'un objet PEC sous la forme $I + \mathcal{C}$, où \mathcal{C} est un opérateur compact. De cette façon, le problème de la diffraction dépend de la théorie de Riesz-Fredholm. Cela fournit tout d'abord

une alternative à la démonstration de l'existence et l'unicité dans le cas d'objet PEC, et permet de ramener le problème à un cadre plus adapté, notamment en vue du traitement numérique (voir [1, th. 6.19]).

On s'intéresse plus précisément dans ce paragraphe, comme annoncé, à l'opérateur de MFIE. Les mêmes développements que dans les paragraphes précédents, en privilégiant cette fois l'opérateur de MFIE, permettent d'aboutir à un équivalent du théorème 7.

On propose ici une manière quelque peu différente de procéder, en utilisant les résultats précédents portant sur l'opérateur d'EFIE. On va montrer ainsi que, une fois les résultats établis sur l'opérateur d'EFIE, ceux sur l'opérateur de MFIE en découlent.

On commence pour cela par introduire la notion d'excitation caractéristique.

Définition 4 Soit \mathbf{e}_n et λ_n les champs lointains et valeurs caractéristiques de l'objet Ω . On appelle excitation caractéristique, l'onde de Herglotz $(\mathbf{E}_n^g, \mathbf{H}_n^g)$ de noyau $\gamma_n = (\lambda_n + i)\mathbf{e}_n$, soit, pour tout $x \in \mathbb{R}^3$,

$$\begin{cases} \mathbf{E}_n^g(x) &= \frac{ik\eta_0}{4\pi}(\lambda_n + i) \int_S \mathbf{e}_n(\hat{z}) e^{ik\hat{z}\cdot x} ds(\hat{z}) \\ \mathbf{H}_n^g(x) &= \frac{i\eta_0}{4\pi}(\lambda_n + i) \int_S (\hat{z} \times \mathbf{e}_n(\hat{z})) e^{ik\hat{z}\cdot x} ds(\hat{z}). \end{cases} \quad (15)$$

L'intérêt de ces excitations caractéristiques réside dans la propriété suivante.

Lemme 11 Soit $(\mathbf{E}_n^g, \mathbf{H}_n^g)$ l'onde incidente sur l'objet Ω . Alors le courant créé sur la surface Γ est le courant caractéristique \mathbf{J}_n , et le champ lointain rayonné est le champ caractéristique \mathbf{e}_n .

Démonstration L'excitation réellement prise en compte pour la diffraction de l'onde incidente $(\mathbf{E}_n^g, \mathbf{H}_n^g)$ par l'objet Ω est la trace sur la surface $\Gamma = \partial\Omega$ de l'objet du champ électrique incident. Cette trace s'écrit

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_{n|_{\Gamma}}^g \times \mathbf{n} \right) = i\eta_0 \mathbf{n} \times \left(\frac{k}{4\pi} \int_S \mathbf{e}_n(\hat{z}) e^{ik\hat{z}\cdot x} ds(\hat{z}) \times \mathbf{n} \right),$$

soit, en utilisant la définition (I-26) de l'opérateur de rayonnement a_∞ ,

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_{n|_{\Gamma}}^g \times \mathbf{n} \right) = i\eta_0(\lambda_n + i)a_\infty^* \mathbf{e}_n.$$

Soit maintenant (\mathbf{E}, \mathbf{H}) les champs diffractés résultant à cette illumination, alors on a la représentation intégrale

$$\mathbf{E} = i\eta_0 \tilde{T} \mathbf{J}; \quad \mathbf{H} = -\tilde{K} \mathbf{J},$$

où $\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}_{|\Gamma}$ est le courant électrique à déterminer. L'équation en champ électrique (EFIE) s'écrit alors

$$\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_{n|_{\Gamma}}^g \times \mathbf{n} \right) = i\eta_0(\lambda_n + i)a_\infty^* \mathbf{e}_n = i\eta_0 T \mathbf{J}.$$

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

On conclut alors que $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n$ grâce au lemme 10 utilisé suivant

$$\begin{aligned} T\mathbf{J}_n &= (\lambda_n + i)T_I\mathbf{J}_n \\ &= (\lambda_n + i)a_\infty^*a_\infty\mathbf{J}_n \\ &= (\lambda_n + i)a_\infty^*\mathbf{e}_n \\ &= T\mathbf{J}, \end{aligned}$$

et grâce à l'injectivité de l'opérateur d'EFIE T (en dehors de l'ensemble des fréquences de résonance). □

La démonstration précédente ne s'appuie à nouveau que sur l'opérateur d'EFIE. Si on s'intéresse plus spécialement au champ magnétique, on aboutit alors la diagonalisation de l'opérateur de MFIE.

On montre tout d'abord un résultat intermédiaire sur la factorisation de la partie imaginaire de l'opérateur de MFIE, analogue de la factorisation donnée dans le lemme 10 pour la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE.

Lemme 12 *L'opérateur K_I admet la factorisation*

$$K_I = -ia_\infty^*\pi_S a_\infty.$$

En particulier, K_I est un opérateur compact et auto-adjoint.

Démonstration Soit $J, J' \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, alors on a

$$(K_I J, J') = \iint_{\Gamma \times \Gamma} \left(\nabla_\Gamma \frac{\sin(k|x-y|)}{4\pi|x-y|} \times J(y) \right) \cdot \overline{J'(x)} ds(x) ds(y),$$

soit, en utilisant la décomposition du sinus cardinal en ondes planes (cf. la démonstration du lemme 10, page 60),

$$\begin{aligned} (K_I J, J') &= \frac{k}{(4\pi)^2} \int_S \left(\int_\Gamma \nabla_\Gamma y e^{-iky \cdot \hat{z}} \times J(y) ds(y) \right) \cdot \int_\Gamma \overline{J'(x) e^{-ikx \cdot \hat{z}}} ds(x) ds(\hat{z}) \\ &= \frac{k^2}{(4\pi)^2} \int_S \left(-i\hat{z} \times \int_\Gamma J(y) e^{-iky \cdot \hat{z}} ds(y) \cdot \int_\Gamma \overline{J'(x) e^{-ikx \cdot \hat{z}}} ds(x) \right) ds(\hat{z}) \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} (K_I J, J') &= \int_S (-i\hat{z} \times a_\infty J(\hat{z})) \cdot \overline{a_\infty J'(\hat{z})} ds(\hat{z}), \\ &= (-i\pi_S a_\infty \mathbf{J}, a_\infty \mathbf{J}') = -i(a_\infty^* \pi_S a_\infty \mathbf{J}, \mathbf{J}'), \end{aligned}$$

qui, étant valide indifféremment pour tout J, J' de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, montre la décomposition annoncée dans le lemme 12.

□

On remarque néanmoins que, au contraire de la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE, K_I est de signe arbitraire, et ainsi ne correspond pas directement une puissance.

On peut maintenant énoncer le résultat sur la “diagonalisation” de l'opérateur de MFIE, analogue formel du théorème 7.

Théorème 8 *Les suites de courants caractéristiques \mathbf{J}_n et de valeurs caractéristiques λ_n satisfont à l'équation aux valeurs propres généralisées :*

$$(K + \frac{1}{2}\mathbf{n}\times)\mathbf{J}_n = \lambda_n K_I \mathbf{J}_n. \quad (16)$$

Démonstration On considère l'objet Ω éclairé par l'onde incidente de Herglotz $(\mathbf{E}_n^g, \mathbf{H}_n^g)$ donnée dans la définition 4. D'après le lemme 11, le courant électrique induit est justement le courant caractéristique d'ordre n , \mathbf{J}_n . Ainsi, le champ diffracté dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ s'écrit :

$$\mathbf{E} = i\eta_0 \tilde{T} \mathbf{J}_n; \quad \mathbf{H} = -\tilde{K} \mathbf{J}_n.$$

La projection sur le plan tangent à Γ nous fournit alors, grâce au relation de trace des opérateurs (voir lemme 2),

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}) &= (-K + \frac{1}{2}\mathbf{n}\times)\mathbf{J}_n \\ &= \mathbf{n} \times \mathbf{J}_n + \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{n|\Gamma}^g \times \mathbf{n}), \end{aligned} \quad (17)$$

tandis que la trace du champ magnétique incident s'écrit, à l'aide du lemme 12 :

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_{n|\Gamma}^g \times \mathbf{n}) &= -(\lambda_n + i)a_\infty^* \pi_S \mathbf{e}_n \\ &= -(\lambda_n + i)a_\infty^* \pi_S a_\infty \mathbf{J}_n = (\lambda_n + i)K_I \mathbf{J}_n. \end{aligned} \quad (18)$$

Au final, en substituant $K = K_R + iK_I$, on obtient l'équation (16) pour chaque courant caractéristique \mathbf{J}_n , en substituant la trace tangentielle de l'onde de Herglotz dans les deux relations précédentes (17) et (18).

□

Remarque 9 *La démonstration du théorème 8 peut se faire en utilisant les projecteurs de Calderon. Cette alternative est présentée en annexe C - 2 .*

On démontre ainsi la réciproque du théorème 8 : tout courant \mathbf{J}_n solution de l'équation aux valeurs propres généralisées (16) est solution de l'équation similaire portant sur l'opérateur d'EFIE donnée dans le théorème 7, avec la même valeur propre λ_n . (voir lemme 31 en annexe C - 2).

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

1.5 Retour aux problèmes dans $W_{S^+}(\Omega)$ et $W_{S^-}(\Omega)$

On se replace maintenant dans le cadre initial : on considère un objet parfaitement conducteur, et on s'intéresse aux champs diffractés sortants $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (W_{S^+}(\Omega))^2$ (i.e. solutions des équations de Maxwell (1) dans l'extérieur Ω^+ de l'objet Ω , et satisfaisant à la condition de radiation sortante de Silver-Müller (5)).

Soit \mathbf{E}^s le champ électrique diffracté, alors

$$\mathbf{E}^s = i\eta_0 \tilde{T} \mathbf{J},$$

avec le courant électrique \mathbf{J} , solution de l'équation (EFIE)

$$-\mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_{|r}^i \times \mathbf{n} \right) = i\eta_0 T \mathbf{J} = i\eta_0 (T_R + iT_I) \mathbf{J}. \quad (19)$$

La formulation précédente nous avait amené à considérer le noyau de Herglotz γ de la solution entière des équations de Maxwell. D'après (I-39), et l'expression du champ électrique de Herglotz

$$\mathbf{E}^g(x) = \frac{ik\sqrt{i\eta_0}}{4\pi} \int_S \gamma(\hat{y}) e^{ik\hat{y} \cdot x} d\hat{y} = i\sqrt{i\eta_0} a_\infty^* \gamma, \quad (20)$$

on peut identifier le noyau de Herglotz à

$$\gamma = a_\infty \tilde{\mathbf{J}} = \sqrt{i\eta_0} a_\infty \mathbf{J}. \quad (21)$$

En revenant à l'expression des champs lointains (I-42), on retrouve alors

$$\begin{cases} \mathbf{e}^+(\hat{x}) = a_\infty \mathbf{J}(\hat{x}) \\ \mathbf{e}^-(\hat{x}) = 0. \end{cases} \quad (22)$$

Ainsi, si on considère le problème sortant émanant du courant caractéristique d'ordre n , \mathbf{J}_n , alors le champ lointain sortant est exactement le champ lointain caractéristique d'ordre n (et le champ lointain entrant est nul).

De la même façon, en considérant le problème de diffraction en terme d'ondes entrantes, c'est à dire $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (W_{S^-}(\Omega))^2$, on aboutirait au noyau de Herglotz

$$\gamma(\hat{x}) = -a_\infty \tilde{\mathbf{J}}(\hat{x}) = -\sqrt{i\eta_0} a_\infty \mathbf{J}(\hat{x}). \quad (23)$$

puis aux champs lointains,

$$\begin{cases} \mathbf{e}^+(\hat{x}) = 0 \\ \mathbf{e}^-(\hat{x}) = a_\infty \mathbf{J}(-\hat{x}). \end{cases} \quad (24)$$

Ainsi, si $\mathbf{J} = \mathbf{J}_n$, le champ lointain entrant est exactement le champ lointain caractéristique d'ordre n .

De cette façon, le cadre "ondes entrantes et sortantes" (i.e. W_H) n'est qu'un intermédiaire dans les développements. Les résultats de décomposition obtenus ont bien un sens dans les cadres classiques "entrant" ou "sortant".

1.6 Décomposition sur la base des courants caractéristiques

On utilise maintenant la base formée par l'ensemble des courants caractéristiques pour reconstruire un courant électrique quelconque, puis la SER de l'objet. Cette reconstruction est bien possible pour tout courant J de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, d'après le théorème 7.

On montre de plus dans ce paragraphe un atout important de la base des courants caractéristiques : bien que non directement orthogonale dans le cas général, cette base permet de fournir une décomposition simple de la diffraction par l'objet Ω . C'est la propriété d'orthogonalité à l'infini (orthogonalité de la base des champs lointains caractéristiques) qui permet de "rattraper" cette lacune.

On aboutit ainsi à une décomposition simple des courants induits et champs diffractés permettant, entre autre, de faire intervenir directement le couplage entre l'excitation et le courant caractéristique d'ordre n .

1.6.1 Décomposition d'un courant

Soit G l'excitation à laquelle est soumis l'objet parfaitement conducteur. G est soit la trace d'un champ électrique incident, $G = -\pi_{\Gamma} \mathbf{E}^{inc}$, soit une excitation directe et localisée sur l'objet (par un générateur par exemple), ou encore, bien évidemment, la superposition de ces deux sources.

L'EFIE (19) s'écrit

$$i\eta_0 T\mathbf{J} = G. \quad (25)$$

et on cherche alors le courant électrique \mathbf{J} , et, plus précisément, sa décomposition sur la base de courants caractéristiques \mathbf{J}_n . Soit, d'une manière générale, les coefficients α_n de la série

$$\mathbf{J} = \sum_n \alpha_n \mathbf{J}_n.$$

L'application de l'opérateur d'EFIE T , puis la projection sur \mathbf{J}_p , pour un entier p quelconque, nous fournit :

$$\begin{aligned} -i\eta_0^{-1} (G, \mathbf{J}_p) &= (T\mathbf{J}, \mathbf{J}_p) = \sum_n \alpha_n (T\mathbf{J}_n, \mathbf{J}_p) \\ &= \sum_n \alpha_n (i + \lambda_n) (T_I \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_p), \end{aligned}$$

soit, en utilisant le lemme 10, qui implique $(T_I \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_p) = (\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_p)$ et l'orthogonalité de la base $\{\mathbf{e}_n\}$, on obtient finalement

$$\forall p \in \mathbb{N}, \alpha_p = \frac{1}{i\eta_0 \|\mathbf{e}_p\|^2} \frac{(G, \mathbf{J}_p)}{i + \lambda_p}.$$

Ainsi, le courant induit par l'excitation G se développe suivant

$$\mathbf{J} = \frac{1}{i\eta_0} \sum_n \frac{(\mathbf{E}_t^i, \mathbf{J}_n)}{1 + i\lambda_n} \mathbf{J}_n, \quad (26)$$

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

où on a préalablement supposé la normalisation des courants caractéristiques suivant la norme du champ rayonné à l'infini

$$\langle \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_n \rangle = (T_I \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_n) = \|a_\infty \mathbf{J}_n\|^2 = \|\mathbf{e}_n\|^2 = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (27)$$

la deuxième égalité provenant de la factorisation donnée dans le lemme 10.

Remarque 10 *D'après les théorèmes 6 et 7, le lemme 10, et la normalisation (27), la famille \mathbf{J}_n est orthonormale par rapport au produit scalaire induit par T_I :*

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, \quad \langle \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_m \rangle := (T_I \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_m) = \delta_{n,m}.$$

Ainsi, on a directement la décomposition d'un courant J quelconque sur la base \mathbf{J}_n , par la formule de Picard :

$$J = \sum_n \langle J, \mathbf{J}_n \rangle \mathbf{J}_n = \sum_n (T_I J, \mathbf{J}_n) \mathbf{J}_n.$$

On retrouve alors la décomposition (26) grâce au fait que T_I est auto-adjoint, à la relation $T_I \mathbf{J}_n = (\lambda_n + i)^{-1} T \mathbf{J}_n$, et à l'EFIE (25).

On peut aussi s'intéresser au courant produit à la surface de l'objet par une alimentation directe sous forme de générateurs de tension.

Dans le cas d'un générateur de tension localisé (idéalement) en un point x_0 sur l'objet, une bonne approximation (voir [35]) pour le calcul du courant électrique total consiste à considérer que l'objet est éclairé par une onde incidente qui n'existe qu'au voisinage de la source x_0 est que cette source est infiniment petite, i.e.

$$G(x) = V_0 \delta(x - x_0).$$

La généralisation au cas d'une alimentation quelconque sur l'objet, définie par la tension $U(x)$ pour $x \in \Gamma$, nous fournit l'expression de la décomposition du courant total en courants caractéristiques

$$\mathbf{J} = \sum_n \frac{(U, \mathbf{J}_n)}{1 + i\lambda_n} \mathbf{J}_n. \quad (28)$$

Ces deux décompositions montrent l'intérêt de l'analyse en courants caractéristiques en termes d'analyse

- de SER : décomposition de la SER d'un objet en contributions élémentaires, (voir le paragraphe suivant, pour plus de détails),
- d'antennes : décomposition de diagrammes de rayonnement en contributions élémentaires, et paramétrisation par exemple vis-à-vis de la "fonction d'alimentation" $U(x)$,
- d'objets actifs : superposition d'un éclairage lointain $\mathbf{E}^i(x)$ et d'une alimentation localisée sur l'objet $U(x)$.

1.6.2 Décomposition de la SER

De la même façon, après avoir décomposé le courant induit sur la surface de l'objet, et par linéarité du problème, on peut décomposer les champs diffractés dans l'espace, les champs lointains, et la SER.

L'application directe de l'opérateur de rayonnement a_∞ au développement du courant sur la base des courants caractéristiques (26) fournit immédiatement :

$$\begin{aligned} \mathbf{e} = a_\infty \mathbf{J} &= \frac{1}{i\eta_0} \sum_n \frac{(\mathbf{E}_t^i, \mathbf{J}_n)}{i + \lambda_n} a_\infty \mathbf{J}_n \\ &= \frac{1}{i\eta_0} \sum_n \frac{(\mathbf{E}_t^i, \mathbf{J}_n)}{i + \lambda_n} \mathbf{e}_n. \end{aligned}$$

Pour un calcul de SER, le champ incident est, par définition (voir [8]), une onde plane

$$\mathbf{E}^i(x; d, p) = p e^{ikx \cdot d}, \quad \mathbf{H}^i(x; d, p) = (d \times p) e^{ikx \cdot d},$$

polarisée suivant p , et se propageant dans la direction d . On peut alors expliciter les coefficients du développement précédent :

$$\begin{aligned} (\mathbf{E}_t^i, \mathbf{J}_n) &= p \int_\Gamma e^{ikx \cdot d} \mathbf{J}_n(x) ds(x) \\ &= p \left(\overline{a_\infty \mathbf{J}_n} - \left(d \cdot \int_\Gamma e^{ikx \cdot d} \mathbf{J}_n(x) ds(x) \right) d \right) \\ &= p \overline{a_\infty \mathbf{J}_n}, \end{aligned} \tag{29}$$

en utilisant le fait que \mathbf{J}_n est un courant réel et tangent, et que la famille (d, p, k) forme une base orthogonale de \mathbb{R}^3 . Ainsi, le champ lointain rayonné par l'objet, dans la direction d^r et la polarisation p^r , lorsque celui-ci est illuminé par une onde plane qui se propage dans la direction d^i avec la polarisation p^i , est

$$\begin{aligned} p^r \cdot \mathbf{e}(d^r; d^i, p^i) &= \frac{1}{i\eta_0} \sum_n \frac{1}{1 + i\lambda_n} (\mathbf{E}^i(\cdot; d^i, p^i), \mathbf{J}_n) \overline{(\mathbf{E}^i(\cdot; d^r, p^r), \mathbf{J}_n)} \\ &= \frac{1}{i\eta_0} \sum_n \frac{1}{1 + i\lambda_n} (p^r \cdot \mathbf{e}_n(d^r)) \overline{(p^i \cdot \mathbf{e}_n(d^i))}. \end{aligned} \tag{30}$$

La SER de l'objet est finalement donnée par

$$SER(d^r, p^r; d^i, p^i) = |p^r \cdot \mathbf{e}(d^r; d^i, p^i)|^2. \tag{31}$$

La formule (30) permet donc bien de décomposer la SER sur, exclusivement, la base de champs lointains caractéristiques. Le développement des coefficients (29) explicite la notion de coefficients de couplage "onde incidente - courant caractéristique d'ordre n " annoncée pour les coefficients α_n .

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

1.6.3 Relation de réciprocité

A partir de l'expression précédente du champ lointain rayonné, on démontre la relation de réciprocité (cf. [1, Th. 6.28]). Cette relation exprime le lien entre les champs diffractés obtenus en "chemin inverse" : le lien entre le champ observé dans une direction d^r suite à une illumination dans la direction d^i , et le champ observé dans la direction d^i suite à une illumination dans la direction d^r .

Ce point donne ainsi une première idée de l'intérêt théorique pour l'étude de la diffraction par un objet PEC, que peut présenter la décomposition en éléments caractéristiques.

En effet, la formule (30) (et (31) pour la SER) donne une décomposition de la SER dans laquelle les paramètres (angle et polarisation) d'incidence et d'observation sont découplés ; ceci permet de retrouver immédiatement le théorème de réciprocité.

Lemme 13 *Le champ électrique diffracté $\mathbf{e}(d^r; d^i, p^i)$ par un objet parfaitement conducteur illuminé par une onde plane de direction d^i et de polarisation p^i satisfait, à l'infini, la relation :*

$$p^r \cdot \mathbf{e}(d^r; d^i, p^i) = p^i \cdot \mathbf{e}(-d^i; -d^r, p^r),$$

pour tout $d^i, d^r \in S$, et tout $p^i, p^r \in \mathbb{R}^3$.

Démonstration Il suffit d'utiliser la relation (30), en remarquant que $\overline{\mathbf{e}_n(d)} = \mathbf{e}_n(-d)$. □

1.7 Résumé et intérêt de la décomposition en courants caractéristiques

Nous avons tout d'abord exhibé trois suites d'éléments caractéristiques pour un objet PEC : des courants, des champs lointains, ainsi qu'une suite de valeurs propres réelles associées.

L'intérêt principal de ces éléments caractéristiques est la décomposition modale des différentes grandeurs "diffractées" : champ, courant, SER, ..., dans laquelle intervient explicitement le couplage excitation / mode d'ordre n .

Ces couplages sont de plus pondérés par la valeur caractéristique λ_k . En tant qu'inverses des valeurs propres d'un opérateur régularisant, ces valeurs caractéristiques ne peuvent s'accumuler qu'en l'infini.

Plus précisément, concernant la vitesse de croissance de ces valeurs, on utilise le lemme suivant [12, lemme A.4].

Lemme 14 *Soit Γ une variété régulière de dimension N , et soit A un opérateur compact et auto-adjoint de $L^2(\Gamma)$ dans $H^s(\Gamma)$, pour un réel $s > 0$. Soit $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ la suite des valeurs propres de A , alors il existe une constante $C > 0$ telle que*

$$a_k \leq \frac{C}{k^{\frac{s}{N}}}, \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Dans notre cas, l'opérateur χ est un opérateur régularisant, i.e $\chi : L^2(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma)$, pour tout entier s . Ainsi, d'après le lemme 14, la suite des valeurs propres ν_n de χ décroît vers 0 plus rapidement que toute puissance de n , et, d'après la relation $\lambda_n = 1/\nu_n$, les valeurs caractéristiques tendent vers l'infini de la même façon.

Pour expliciter l'intérêt de ce dernier point, on revient sur l'équation caractéristique :

$$(T_R \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_n) = \lambda_n (T_I \mathbf{J}_n, \mathbf{J}_n),$$

soit, en utilisant le lemme 10, et le fait que T_R est un opérateur continu :

$$|\lambda_n| \|a_\infty \mathbf{J}_n\|^2 = |\lambda_n| \|\mathbf{e}_n\|^2 \leq \|T_R\| \|\mathbf{J}_n\|^2.$$

De cette façon, si on considère la famille de courants caractéristiques normalisés $\tilde{\mathbf{J}}_n = \mathbf{J}_n / \|\mathbf{J}_n\|$, alors les champs lointains qui leur sont associés décroissent, en norme, inversement proportionnellement à $\sqrt{|\lambda_n|}$.

Ainsi, la puissance rayonnée par un courant caractéristique \mathbf{J}_n décroît aussi vers 0 plus rapidement que toute puissance de n . On s'attend alors numériquement à ce qu'un faible nombre de courants caractéristiques (du moins faible vis-à-vis du nombre de degré de liberté par exemple) suffisent à reconstruire complètement n'importe quel courant sur l'objet.

On reviendra plus précisément sur ce dernier point, sur le comportement en norme du courant ou du champ lointain caractéristique (suivant la normalisation arbitraire retenue), dans le chapitre VII.

On montrera que l'on a en fait l'équivalence $\|\mathbf{J}_n\| \sim \sqrt{|\lambda_n|} \|\mathbf{e}_n\|$, et que, ainsi, on a le ratio

$$\sqrt{\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}} \sim \frac{\text{Puissance rayonnée par le mode } n}{\text{Puissance rayonnée par le premier mode}}.$$

Ce ratio pourra ainsi permettre de déterminer le nombre de modes à calculer et utiliser pour obtenir une approximation "correcte" des champs lointains rayonnés.

On donne maintenant une première illustration de ces éléments caractéristiques dans le cas d'une géométrie très particulière : une sphère parfaitement conductrice.

1.8 Courants et champs lointains caractéristiques d'une sphère conductrice

On considère une sphère de rayon a , excitée à la fréquence k . Dans ce cas particulier, on va pouvoir exhiber analytiquement les familles de courants et de champs lointains caractéristiques.

On sait en effet que, pour une telle géométrie, l'opérateur d'EFIE est un opérateur normal (voir [9]). Il en découle que les opérateurs T_R et T_I commutent, et, par suite, sont diagonalisables simultanément (i.e. dans une même base orthonormée). La base des harmoniques sphériques vectorielles, qui diagonalisent déjà l'opérateur d'EFIE, va alors permettre d'exprimer cette base de diagonalisation simultanée.

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

Soit les harmoniques sphériques vectorielles :

$$\begin{cases} u_{n,m}(\hat{x}) &= d_{n,m} \nabla_S Y_n^m(\hat{x}) \\ v_{n,m}(\hat{x}) &= d_{n,m} \hat{x} \times \nabla_S Y_n^m(\hat{x}), \end{cases} \quad (32)$$

avec les coefficients de normalisation

$$d_{n,m} = \sqrt{\frac{1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!(2n+1)}{(n+|m|)!n(n+1)}}.$$

Soit j_n , y_n , et $h_n^{(1)}$ les fonctions de Bessel, Neumann et Hankel de première espèce sphériques, respectivement ; on pose

$$\begin{aligned} J_n &= ka j_n(ka), & J'_n &= (ka j_n(ka))' \\ Y_n &= ka y_n(ka), & Y'_n &= (ka y_n(ka))' \\ H_n &= ka h_n^{(1)}(ka), & H'_n &= (ka h_n^{(1)}(ka))'. \end{aligned}$$

Les fonctions J_n , Y_n , et H_n sont, respectivement, les fonctions de Ricatti-Bessel, Ricatti-Neumann, et Ricatti-Hankel.

Opérateur d'EFIE On a les relations de diagonalisation :

$$\begin{cases} T u_{n,m} &= i J'_n H'_n u_{n,m} \\ T v_{n,m} &= i J_n H_n v_{n,m}, \end{cases} \quad (33)$$

soit, après quelques simples manipulations algébriques

$$\begin{cases} T_R u_{n,m} &= -J'_n Y'_n u_{n,m} \\ T_R v_{n,m} &= -J_n Y_n v_{n,m} \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} T_I u_{n,m} &= (J'_n)^2 u_{n,m} \\ T_I v_{n,m} &= (J_n)^2 v_{n,m}. \end{cases} \quad (34)$$

L'opérateur T_I apparaît ici clairement comme un opérateur défini positif, aux fréquences de résonance du problème intérieur près, c'est-à-dire les fréquences réelles k telles que, pour un certain entier n_0

$$J_{n_0} = 0 \quad \text{ou} \quad J'_{n_0} = 0.$$

On aboutit alors à l'équation aux valeurs propres généralisées :

$$\begin{cases} T_R u_{n,m} &= \lambda_n^u T_I u_{n,m} \\ T_R v_{n,m} &= \lambda_n^v T_I v_{n,m}, \end{cases} \quad (35)$$

avec les valeurs propres

$$\begin{cases} \lambda_n^u &= -\frac{Y'_n}{J'_n} \\ \lambda_n^v &= -\frac{Y_n}{J_n}. \end{cases} \quad (36)$$

En utilisant les développements asymptotiques des fonctions de Ricatti-Bessel, Ricatti-Neumann, et de leur dérivée (voir en annexe, relations (C-6) et C-7)), on obtient

$$\begin{cases} \lambda_n^u \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}{(ka)^{2n}} \\ \lambda_n^v \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n+1)[(2n-1)!!]^2}{(ka)^{2n}}. \end{cases}$$

Ces expressions montrent que la vitesse de croissance des valeurs caractéristiques est factorielle. On retrouve ainsi, dans le cas particulier de la sphère, la vitesse de croissance annoncée grâce au lemme 14.

Opérateur de MFIE L'opérateur K de MFIE n'est pas directement diagonal dans la base des harmoniques sphériques vectorielles ; néanmoins on a les relations

$$\begin{cases} K u_{n,m} = \left(-\frac{1}{2} + iJ_n H_n'\right) v_{n,m} \\ K v_{n,m} = \left(\frac{1}{2} + iJ_n' H_n\right) u_{n,m}, \end{cases} \quad (37)$$

et ainsi

$$\begin{cases} \left(K_R + \frac{1}{2}\hat{x} \times\right) u_{n,m} = -J_n Y_n' v_{n,m} \\ \left(K_R + \frac{1}{2}\hat{x} \times\right) v_{n,m} = -J_n' Y_n u_{n,m} \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} K_I u_{n,m} = J_n J_n' v_{n,m} \\ K_I v_{n,m} = J_n J_n' u_{n,m}. \end{cases} \quad (38)$$

De même que pour l'opérateur d'EFIE, on écrit au final l'équation aux valeurs propres généralisées :

$$\begin{cases} \left(K_R + \frac{1}{2}\hat{x} \times\right) u_{n,m} = \lambda_n^u K_I u_{n,m} \\ \left(K_R + \frac{1}{2}\hat{x} \times\right) v_{n,m} = \lambda_n^v K_I v_{n,m}, \end{cases} \quad (39)$$

où les valeurs propres λ_n^u et λ_n^v sont données par les relations (36).

Opérateur de rayonnement De même que pour l'opérateur d'EFIE, l'opérateur de rayonnement a_∞ est ici directement diagonal :

$$\begin{cases} a_\infty u_{n,m} = iJ_n' u_{n,m} \\ a_\infty v_{n,m} = iJ_n v_{n,m}. \end{cases} \quad (40)$$

En comparant avec les relations (34) pour l'opérateur T_I , et (38) pour l'opérateur K_I , on retrouve ainsi les factorisations du lemme 10 et du lemme 12, à savoir

$$T_I = a_\infty^* a_\infty, \quad K_I = -i a_\infty^* \pi_S a_\infty.$$

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

On s'aperçoit ainsi que, dans le cas de la sphère, les champs lointains et les courants caractéristiques coïncident. On représente figure II.1 les premiers courants (et donc aussi champs lointains) caractéristiques de la sphère.

Remarque 11 *On retrouve de plus qu'un courant associé à une fréquence de résonance du problème intérieur ne rayonne pas d'énergie à l'infini. En effet, d'après les expressions (33), une fréquence k est une fréquence de résonance pour une sphère de rayon a si il existe un entier n_0 tel que $J_{n_0}(ka) = 0$ ou $J_{n_0}'(ka) = 0$ (on rappelle que les fonctions de Hankel ne s'annulent pas sur l'axe réel). Alors, d'après les relations (40) les courants associés, i.e. les courants qui forment le noyau de T , sont aussi dans le noyau de l'opérateur de rayonnement a_∞ .*

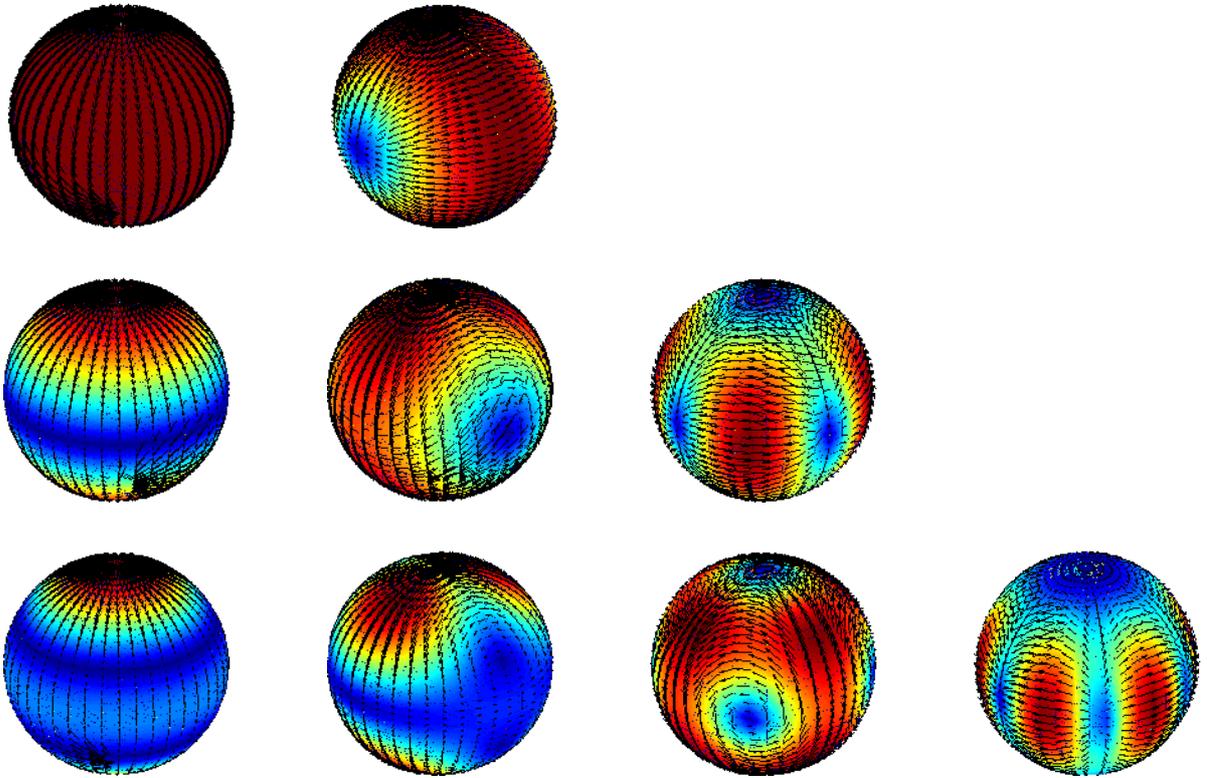


FIG. II.1 – Premières harmoniques sphériques vectorielles (d'ordre n , en ligne, et de degré m en colonne)

Approximation de la SER On s'intéresse au nombre de modes à utiliser pour approximer correctement la SER monostatique de la sphère. Le paramètre principal qui intervient dans les développements précédents est le produit $ka = 2\pi a/\lambda$, où λ est la longueur d'onde ; il caractérise la taille de l'objet (ici la sphère) en terme de longueur d'onde.

La SER est définie comme le module du champ lointain, lorsque l'objet est éclairé par une onde incidente plane ($\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc}$). Dans ce cas, le courant sur la sphère s'écrit

$$\mathbf{J} = \sum_{n>0} \sum_{|m|\leq n} \alpha_{n,m} u_{n,m} + \beta_{n,m} v_{n,m},$$

avec les coefficients (voir paragraphe 1.6.1)

$$\alpha_{n,m} = \frac{(\mathbf{E}^{inc}, u_{n,m})}{1 + i\lambda_n^u} \quad \text{et} \quad \beta_{n,m} = \frac{(\mathbf{E}^{inc}, v_{n,m})}{1 + i\lambda_n^v}.$$

La SER σ se développe alors par la suite suivant :

$$\begin{aligned} \sigma &= |\mathbf{E}_\infty^s|^2 = |a_\infty \mathbf{J}|^2 \\ &= \left| \sum_{n>0} \sum_{|m|\leq n} J'_n \alpha_{n,m} u_{n,m} + J_n \beta_{n,m} v_{n,m} \right|^2, \end{aligned} \quad (41)$$

grâce aux relations (40). L'expression (41) de la SER est plus connue sous le nom de série de Mie ; ces séries sont largement détaillées dans [8] par exemple.

La SER monostatique de la sphère, en fonction de λ/a est présentée figure II.2. Dans le domaine des basses fréquences, $\lambda \leq a/5$, un seul mode suffit pour décrire la SER ; leur nombre doit ensuite croître avec la fréquence pour obtenir une "bonne" approximation de la SER.

La troncature de la série de Mie est prise pour, assez classiquement, $E(x)$ désignant la partie entière de x ,

$$N = 2 E(ka).$$

2 Cas d'objets moins réguliers

Jusqu'ici, tous les développements présentés prenaient en compte la diffraction d'ondes électromagnétiques par un ouvert borné (donc d'intérieur non vide) et de surface régulière (disons de classe C^2 ou $C^{1,\alpha}$, $\alpha > 0$).

Lorsque la surface Γ est moins régulière, des problèmes apparaissent.

En effet, l'analyse du problème de la diffraction d'ondes repose fondamentalement sur la notion de trace, particulièrement tangentielle, des champs électromagnétiques.

Comme vu jusqu'à présent, ce sont des champs de $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ et par conséquent, pour des surfaces régulières, voient leur trace tangentielle dans l'espace $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. De plus, dans ce cas, l'application "trace tangentielle" est continue et surjective dans ces espaces (résultat initialement montré dans [40] pour une surface infiniment régulière).

On rappelle la définition dans le cas d'une surface régulière :

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) := \left\{ \mathbf{u} \in H_t^{-1/2}(\Gamma) \mid \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\},$$

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

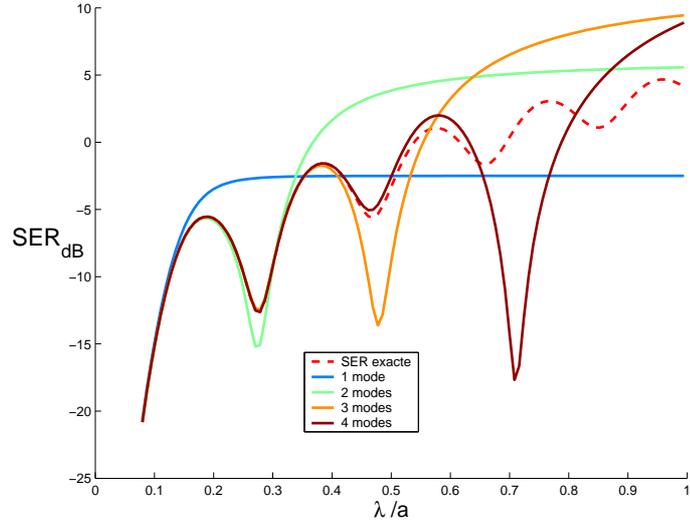


FIG. II.2 – SER monostatique de la sphère, en fonction du paramètre λ/a , exacte et approchée avec n modes, $n = 1 \dots 4$.

avec l'espace des champs tangents

$$H_t^{-1/2}(\Gamma) := \left\{ \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma) \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \right\} .$$

La définition de cet espace de champs tangents est la source de complications lorsque la surface manque de régularité.

En effet, pour une surface Γ admettant des discontinuités de courbure, des surfaces polyhédriques, ou plus généralement pour des surfaces lipschitziennes, le vecteur normal sortant \mathbf{n} à la surface est discontinu, et on a seulement $\mathbf{n} \in L^\infty(\Gamma)$. Dans ce cas, pour un vecteur \mathbf{u} de régularité $H^{-1/2}(\Gamma)$, le produit scalaire $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}$ n'a plus, a priori, de sens, non plus que la définition précédente.

De la même façon, la considération de surfaces ouvertes (régulières ou non) entraîne aussi ses complications : si la surface Γ est d'intérieur vide, et $\partial\Gamma$ désigne le bord de Γ , $\partial\Gamma$ est une variété de dimension 1 de \mathbb{R}^3 , alors les difficultés constatées précédemment apparaissent de manière identique au voisinage de $\partial\Gamma$.

Dans les deux prochains paragraphes, on donne un cadre fonctionnel adapté à l'étude de la diffraction par ces surfaces. On se réfère principalement à [45], [41], [43] pour l'étude en présence d'ouverts lipschitziens, et à [47] pour des surfaces ouvertes.

2.1 Surfaces lipschitziennes

Soit les espaces de Hilbert

$$\begin{aligned} H_{\parallel}^{1/2} &:= \pi_{\Gamma} (H^{1/2}(\Gamma)) \\ H_{\perp}^{1/2} &:= \pi_{\tau} (H^{1/2}(\Gamma)) , \end{aligned}$$

avec les applications

$$\pi_\Gamma : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{n} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{n}) , \quad \pi_\tau : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{u} \times \mathbf{n} .$$

Ces espaces coïncident lorsque Γ est suffisamment régulière.

On note alors $H_{\parallel}^{-1/2}$ et $H_{\perp}^{-1/2}$ leurs espaces duaux respectifs, $L_t^2(\Gamma)$ étant pris comme espace pivot.

A l'aide de ces espaces, on peut maintenant s'intéresser de plus près à l'opérateur gradient surfacique ∇_Γ ; l'opérateur

$$\nabla_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\perp}^{-1/2} ,$$

est continu, vérifie $\text{Ker}(\nabla_\Gamma) = \mathbb{R}$ (voir [45, Corol. 3.7]) et, pour une certaine constante $C > 0$,

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma) \setminus \mathbb{R}} \leq C \|\nabla_\Gamma u\|_{H_{\perp}^{-1/2}} .$$

On renvoie à [45] pour la démonstration de ces propriétés.

On en déduit que, si on définit l'espace

$$H_{\star}^{-1/2}(\Gamma) := \left\{ u \in H^{-1/2}(\Gamma) , (u, 1) = 0 \right\} ,$$

alors, la divergence surfacique

$$\text{div}_\Gamma : H_{\perp}^{1/2} \rightarrow H_{\star}^{-1/2}(\Gamma) ,$$

est continue et surjective. Par conséquent, le laplacien surfacique (ou encore opérateur de Laplacien-Beltrami, voir [4] par exemple) $\Delta_\Gamma := \text{div}_\Gamma \nabla_\Gamma : H^1(\Gamma) \rightarrow H_{\star}^{-1/2}(\Gamma)$ est un opérateur linéaire et continu.

On est maintenant à même de définir l'espace de trace approprié :

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) := \left\{ \mathbf{u} \in H_{\perp}^{1/2} , \text{div}_\Gamma \mathbf{u} \in H^{-1/2} \right\} .$$

On montre alors :

Théorème 9 *Soit $k > 0$ tel que $k \notin \mathcal{K}_{\text{int}}$, alors l'opérateur d'EFIE T est un isomorphisme de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans son dual $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration On procède comme en annexe B - 3 : le cadre fonctionnel introduit dans ce paragraphe permet de donner la décomposition de Helmholtz $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ (voir [41] ou [46] dans le cas de surfaces lipschitziennes ou polyédriques).

D'une manière plus générale, cette décomposition s'écrit :

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) = V \oplus W ,$$

la somme étant directe, et où W est un espace de champs à divergence nulle, i.e. $W \subset \text{Ker}(\text{div}_\Gamma)$ (à un espace de dimension finie près), et V s'injecte compactement dans $L^2(\Gamma)$.

A l'aide de cette décomposition de Helmholtz, on montre ensuite que le théorème 24 est alors toujours valide : l'opérateur d'EFIE est un opérateur de type Fredholm, d'indice 0.

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

On termine alors la démonstration en précisant que T est, à un ensemble discret près de fréquences, les fréquences de résonance du problème intérieur associé, un opérateur injectif (cf. [2], [4], [47, Corol. 3.3]).

□

La suite des développements menant aux éléments caractéristiques peut alors être reconduite.

2.2 Surfaces ouvertes

De même, le traitement des surfaces ouvertes demande une attention toute particulière aux espaces fonctionnels, en particulier de trace, utilisés.

On considère un objet PEC de \mathbb{R}^3 , d'épaisseur infiniment fine. On désigne par Γ cette surface ouverte, orientable, et simplement connexe.

De manière à se ramener à un cadre "plus usuel", on considère Γ comme une partie de la frontière $\partial\Omega$ d'un ouvert connexe $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. On désigne alors par \mathbf{n} la normale à Γ qui coïncide avec la normale sortante à $\partial\Omega$.

On introduit alors les espaces

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\Gamma) &:= \{u|_{\Gamma}, u \in H^{1/2}(\partial\Omega)\} \\ H^{1/2}(\Gamma)^{\bullet} &:= \{u \in H^{1/2}(\Gamma), \text{supp } u \subseteq \Gamma\}, \end{aligned}$$

puis, leurs espaces duaux respectifs $H^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet}$ et $H^{-1/2}(\Gamma)$, avec l'espace pivot $L^2(\Gamma)$.

On définit alors les espaces basés sur la divergence et le rotationnel surfaciques :

$$\begin{aligned} H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) &:= \{\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma), \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{div}_{\Gamma} \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)\} \\ H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma) &:= \{\mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma), \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0, \text{rot}_{\Gamma} \mathbf{u} \in H^{-1/2}(\Gamma)\}, \end{aligned}$$

ainsi que l'espace $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet}$, dual de $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

On aboutit finalement au théorème (voir [47, cor. 3.6])

Théorème 10 *L'opérateur d'EFIE, $T : H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet} \rightarrow \left(H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet}\right)' = H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ est un isomorphisme.*

On revient maintenant sur l'opérateur $\chi = a_{\infty} T_R^{-1} a_{\infty}^*$.

Tout d'abord, compte tenu que, d'une part, tout champ de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet}$ peut se prolonger par zéro en un champ de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial D)$, et que, d'autre part, l'opérateur de rayonnement $a_{\infty} : H_{\text{div}}^{-1/2}(\partial D) \rightarrow L^2(S)$ est injectif, on déduit que $a_{\infty} : H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)^{\bullet} \rightarrow L^2(S)$ est aussi injectif.

De même on peut montrer que, mis à part pour quelques géométries particulières, certains plans par exemple, les opérateurs de champ lointain F et de rayonnement a_{∞} ont une image dense dans $L^2(S)$.

De cette façon, à l'exception de ces quelques géométries particulières (voir [65] ou [64] par exemple), l'opérateur de champ lointain est un opérateur normal, que l'on peut factoriser à l'aide de l'opérateur χ suivant la relation

$$F = \chi (I + i\chi)^{-1} .$$

Par la suite, la diagonalisation de F , équivalent à celle de χ , nous fournit les champs lointains caractéristiques, puis grâce à la définition de χ et la factorisation de la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE T_I donnée dans le lemme 10, on obtient la suite des courants caractéristiques, aussi solution de l'équation aux valeurs caractéristiques (II-13).

En résumé, les familles d'éléments caractéristiques, valeurs, courants, et champs lointains, se définissent, formellement, de manière analogue pour des objets bornés, réguliers et d'intérieur non vide, que pour des objets lipschitziens, ou encore des surfaces ouvertes (objet d'intérieur vide).

Une attention particulière doit être portée au cadre fonctionnel théorique lors de l'étude de tels objets.

On note pour finir que la plupart des domaines qui interviennent en pratique sont lipschitziens.

II Cas d'un objet parfaitement conducteur

III Calcul numérique de courants caractéristiques

On passe maintenant à la mise en oeuvre numérique de la théorie des courants caractéristiques.

Le calcul numérique de courants caractéristiques repose en premier lieu sur le calcul d'une approximation de l'opérateur d'impédance T (cf (17)). Ce calcul apparaît dans de nombreux codes d'électromagnétisme.

On commence ce chapitre par le rappel de la formulation variationnelle de l'EFIE, qui est à la base des calculs numériques effectués.

Nous traitons ensuite des deux types de géométries les plus rencontrées en pratique, les formes axisymétriques et celles purement 3-D (i.e. n'admettant pas de symétrie particulière). Pour chacune de ces géométries une approche spécifique est employée.

Le calcul des courants caractéristiques de l'objet repose ensuite sur la résolution d'une équation aux valeurs propres généralisées. Cette équation fait intervenir l'opérateur d'EFIE décomposé suivant la décomposition du noyau de Green en parties réelle et imaginaire. Cette décomposition va aussi dépendre de la méthode de calcul numérique utilisée. Nous précisons ce point pour les deux codes de calcul, axisymétrique et 3-D.

1 Formulation variationnelle de l'EFIE

On rappelle l'expression de l'opérateur d'EFIE, pour $\mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$,

$$\tilde{T}\mathbf{J}(x) = k \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) ds(y) + \frac{1}{k} \nabla \int_{\Gamma} G(x, y) \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) ds(y) \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma,$$

soit, en prenant la trace tangentielle :

$$T\mathbf{J}(x) = \mathbf{n} \times \left(\tilde{T}\mathbf{J}(x)|_{\Gamma} \times \mathbf{n} \right) = k \int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{J}(y) ds(y) + \frac{1}{k} \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) ds(y).$$

La formulation variationnelle s'écrit alors, pour tout \mathbf{J}, \mathbf{J}' de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, en utilisant la relation de transposition $(\nabla_{\Gamma})^* = -\text{div}_{\Gamma}$,

$$(T\mathbf{J}, \mathbf{J}') = k \iint_{\Gamma \times \Gamma} G(x, y) \left(\mathbf{J}(x) \bar{\mathbf{J}}'(y) - \frac{1}{k^2} \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(x) \text{div}_{\Gamma} \bar{\mathbf{J}}'(y) \right). \quad (1)$$

III Calcul numérique de courants caractéristiques

La formulation variationnelle (1) est aussi connue sous le nom de principe de réaction de Rumsey.

Soit \mathbf{E}^i le champ électrique incident sur l'objet, on est alors amené à résoudre le problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } \mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \text{ tel que ,} \\ \forall \mathbf{J}' \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) , (T\mathbf{J}, \mathbf{J}') = -\frac{1}{i\eta_0} (\mathbf{E}^i, \mathbf{J}') . \end{array} \right.$$

Remarque 12 *D'une manière un peu plus générale, la formulation variationnelle associée à l'EFIE peut s'écrire, si on suppose la donnée \mathbf{E}_t^i dans H_{rot}^s , pour un certain réel s ,*

$$\text{trouver } \mathbf{J} \in H_{\text{div}}^s(\Gamma) \text{ tel que , } \forall \mathbf{J}' \in H_{\text{div}}^{-1-s}(\Gamma) , (T\mathbf{J}, \mathbf{J}') = -\frac{1}{i\eta_0} (\mathbf{E}_t^i, \mathbf{J}') ,$$

l'opérateur d'EFIE étant alors considéré comme un opérateur allant de $H_{\text{div}}^s(\Gamma)$ dans $H_{\text{rot}}^s(\Gamma)$. Le cas $s = -1/2$ offre l'avantage d'être symétrique, et est le point de départ le plus naturel pour l'étude de l'EFIE.

En vue d'appliquer une méthode de moments, on introduit deux espaces de dimension finie N , $H_N^1 = \text{Vect} \{V_n\}_{n=1..N}$ et $H_N^2 = \text{Vect} \{W_n\}_{n=1..N}$. Ces espaces sont engendrés par leur base respective $\{V_n\}$ et $\{W_n\}$ d'éléments finis et de fonctions tests.

L'approximation de l'opérateur d'EFIE dans les bases $\{V_n\}$ et $\{W_n\}$ s'écrit alors sous la forme matricielle

$$[T_{i,j}] = (TV_i, W_j) ; i, j = 1..N .$$

C'est cette démarche que nous allons expliciter dans les deux paragraphes suivants, dans le cas d'un objet admettant un axe de révolution puis dans le cas général d'un objet 3-D sans symétrie particulière. Une difficulté directement liée aux choix des bases $\{V_n\}$ et $\{W_n\}$ reste néanmoins : la décomposition appropriée de la matrice $(T_{i,j})$ en $(T_{R_{i,j}})$ et $(T_{I_{i,j}})$, en vue de la résolution numérique de l'équation caractéristique (II-13).

Des calculs distincts de T_R et de T_I , effectués séparément, le noyau de Green étant remplacé par sa partie réelle (le cosinus cardinal) pour T_R , et par sa partie imaginaire (le sinus cardinal) pour T_I , permettent d'obtenir directement ces approximations matricielles. Néanmoins, cette méthode demande deux calculs du même type que celui complet de l'opérateur d'EFIE.

On présente ici comment, à partir du calcul "usuel" d'une approximation de l'opérateur d'EFIE, on peut finalement séparer les opérateurs T_R et T_I .

2 Cas d'un objet avec symétrie de révolution

On considère tout d'abord un objet parfaitement conducteur admettant une symétrie de révolution autour de l'axe Oz (voir figure III.1).

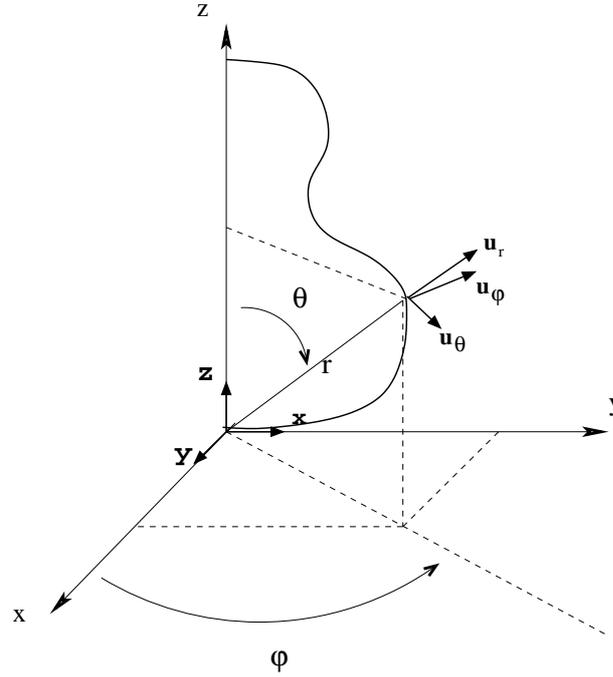


FIG. III.1 – Géométrie et variables d'un objet avec symétrie de révolution

2.1 Description de la géométrie

La première étape du calcul numérique est la description de la géométrie. Pour un objet avec symétrie de révolution autour d'un axe, cette description se résume à celle de sa génératrice. On définit pour cela les variables (voir figure III.1) :

- t : l'abscisse curviligne le long de la génératrice de la géométrie, ramenée au segment $[0, 1]$,
- $\rho(t)$: la distance à l'axe d'invariance du point de la génératrice d'abscisse curviligne t ,
- ϕ : l'angle de rotation autour de l'axe principal.

A l'aide de ces variables, la fonction

$$F : \begin{cases} [0, 1] \times [0, 2\pi] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, \phi) & \mapsto F(t, \phi) = (\rho(t) \cos \phi, \rho(t) \sin \phi, z(t)) \end{cases}, \quad (2)$$

permet de décrire complètement la géométrie de l'objet dans \mathbb{R}^3 .

On utilisera aussi les vecteurs unitaires tangents à la surface de l'objet (voir figure III.1) :

$$\begin{cases} u_\theta(t, \phi) & = \frac{\partial F}{\partial t}(t, \phi) \\ u_\phi(t, \phi) & = \frac{\partial F}{\partial \phi}(t, \phi). \end{cases}$$

2.2 Discrétisation de la géométrie

En premier lieu, la génératrice est transformée en une ligne polygonale (figure III.2), afin d'être facilement manipulable numériquement. Chaque segment $\Gamma_i = [x_i, x_{i+1}]$ de cette discrétisation a ses deux extrémités x_i et x_{i+1} sur la génératrice.

Le pas h du maillage est défini comme la longueur du plus grand segment Γ_i :

$$h = \max_i |\Gamma_i| = \max_i \|x_{i+1} - x_i\| .$$

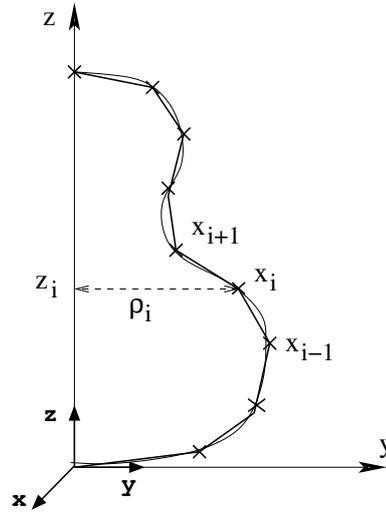


FIG. III.2 – Discrétisation de la génératrice de l'objet

2.3 Espace d'approximation

Il s'agit maintenant de définir les espaces d'approximation H_N^1 et H_N^2 , adaptés à ce type particulier de géométrie.

De manière à utiliser la symétrie de révolution de l'objet (2π -périodicité suivant ϕ), on développe tout d'abord le courant \mathbf{J} en série de Fourier selon

$$\mathbf{J}(\sigma, \phi) = \sum_m \left(\mathbf{J}_m^\theta(\sigma) + \mathbf{J}_m^\phi(\sigma) \right) e^{im\phi} . \quad (3)$$

où \mathbf{J}_m^θ et \mathbf{J}_m^ϕ sont les composantes suivant les vecteurs tangents unitaires u_θ et u_ϕ . Numériquement, une première troncature doit ici être introduite dans la série de Fourier. On ne considérera ainsi que les M premiers harmoniques du courant recherché.

On précise maintenant les espaces d'approximations

$$H_N = H_N^1 = H_N^2 = \text{Vect} \{V_N\} ,$$

avec

$$V_N = \left\{ \mathbf{J}_{m,j}^\theta = f_j^\theta(t) e^{im\phi} u_\theta, \mathbf{J}_{m,j}^\phi = f_j^\phi(t) e^{im\phi} u_\phi; j = 1..N, m = 1..M \right\}, \quad (4)$$

Les fonctions f_k^θ et f_k^ϕ peuvent être des fonctions réelles, fonctions constantes par morceaux, fonctions chapeaux (continues et C^1 par morceaux ...). On fait ici le choix de fonctions en chapeau

$$T(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq -1, \\ t + 1 & \text{si } -1 \leq t \leq 0, \\ -t + 1 & \text{si } 0 \leq t \leq 1, \\ 0 & \text{si } 1 \leq t, \end{cases}$$

pondérées par la distance à l'axe de symétrie pour pour les fonctions f_k^θ :

$$f_k^\theta(t) = \frac{1}{\rho(t)} T(t - x_k),$$

tandis que les fonctions f_k^ϕ sont simplement choisies constante par morceaux :

$$f_k^\phi = \Delta_{[x_i, x_{i+1}]},$$

où Δ_I est la fonction caractéristique du segment I , et les x_k sont les sommets de l'approximation polygonale de la génératrice (voir figure III.2).

On est ainsi ramené à déterminer les inconnues $I_{m,k}^\theta$ et $I_{m,k}^\phi$ du développement :

$$\mathbf{J}(t, \phi) = \sum_{m=1}^M e^{im\phi} \sum_{k=1}^N I_{m,k}^\theta f_k^\theta(t) u_\theta(t, \phi) + I_{m,k}^\phi f_k^\phi(t) u_\phi(t, \phi).$$

2.4 Calcul de la matrice élémentaire

Avec les notations précisées dans le paragraphe précédent, l'approximation de l'opérateur d'impédance se réduit aux calculs

$$\left(e^{in\phi} f_k^p u_p, T(e^{im\phi} f_l^q u_q) \right), \text{ pour } \{p, q\} \in \{\theta, \phi\}, \{n, m\} \in [1, M]^2 \text{ et } \{k, l\} \in [1, N]^2.$$

On remarque aussi que l'orthogonalité des modes de Fourier induit les relations

$$\left(e^{in\phi} f_k^p u_p, T(e^{im\phi} f_l^q u_q) \right) = 0, m \neq n,$$

l'approximation de l'opérateur d'impédance étant ainsi représentée dans l'espace H_N par une matrice diagonale par bloc :

$$[T] = \begin{bmatrix} [T_0] & & & \\ & [T_1] & & \\ & & \ddots & \\ & & & [T_N] \end{bmatrix}$$

III Calcul numérique de courants caractéristiques

avec, pour $m = 0 \dots M$, les blocs diagonaux de la forme

$$[T_m] = \begin{bmatrix} [T_m^{tt}] & [T_m^{t\phi}] \\ [T_m^{\phi t}] & [T_m^{\phi\phi}] \end{bmatrix}.$$

Plus précisément, on peut expliciter les expressions précédentes (on renvoie à [18] pour le détail des calculs),

$$\begin{aligned} [T_m^{tt}]_{ij} &= k \iint \left\{ f_i^\theta(\sigma') f_j^\theta(\sigma) \left(\sin v \sin v' \frac{g_{n+1} + g_{n-1}}{2} + \cos v \cos v' g_n \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{k^2} (f_i^\theta)'(\sigma') (f_j^\theta)'(\sigma) g_n \right\} d\sigma d\sigma' \\ [T_m^{t\phi}]_{ij} &= ik \iint \left\{ f_i^\theta(\sigma') f_j^\phi(\sigma) \sin v' \frac{g_{n+1} - g_{n-1}}{2} - \frac{1}{k^2} \frac{m}{\sigma} (f_i^\theta)'(\sigma') f_j^\phi(\sigma) g_n \right\} d\sigma d\sigma' \\ [T_m^{\phi t}]_{ij} &= -ik \iint \left\{ f_i^\phi(\sigma') f_j^\theta(\sigma) \sin v \frac{g_{n+1} - g_{n-1}}{2} - \frac{1}{k^2} \frac{m}{\sigma'} f_i^\phi(\sigma') (f_j^\theta)'(\sigma) g_n \right\} d\sigma d\sigma' \\ [T_m^{\phi\phi}]_{ij} &= k \iint \left\{ f_i^\phi(\sigma') f_j^\phi(\sigma) \sin v \frac{g_{n+1} + g_{n-1}}{2} - \frac{1}{k^2} \frac{m^2}{\sigma\sigma'} f_i^\phi(\sigma') f_j^\phi(\sigma) g_n \right\} d\sigma d\sigma' \end{aligned} \quad (5)$$

où g_n est la transformée de Fourier du noyau de Green :

$$g_n := g_n(t, t') = \int_0^\pi \frac{e^{ikR(t, t', \phi)}}{R(t, t', \phi)} \cos n\phi d\phi,$$

avec,

$$R(t, t', \phi) = \left[(\rho(t) - \rho(t'))^2 + (z(t) - z(t'))^2 + 4\rho(t)\rho(t') \sin^2 \phi / 2 \right].$$

Les développements présentés jusqu'ici permettent de calculer une approximation de l'opérateur d'EFIE ; comme souligné précédemment, il reste maintenant à décomposer la matrice obtenue suivant la décomposition du noyau de Green en partie réelle et imaginaire.

2.5 Décomposition de l'opérateur d'impédance approximé

La décomposition du noyau de Green en cosinus/sinus correspond maintenant à la même décomposition complexe de ces coefficients de Fourier :

$$g_n = g_n^R + ig_n^I.$$

On identifie finalement, grâce aux expressions (5), les termes souhaités :

$$[T_{I_m}] = -i\Re \begin{bmatrix} [T_m^{tt}] & 0 \\ 0 & [T_m^{\phi\phi}] \end{bmatrix} + \Im \begin{bmatrix} 0 & [T_m^{t\phi}] \\ [T_m^{\phi t}] & 0 \end{bmatrix}$$

et,

$$[T_{R_m}] = i\Im m \begin{bmatrix} [T_m^{tt}] & 0 \\ 0 & [T_m^{\phi\phi}] \end{bmatrix} + \Re e \begin{bmatrix} 0 & [T_m^{t\phi}] \\ [T_m^{\phi t}] & 0 \end{bmatrix}.$$

On vérifie tout d'abord que l'identité

$$[T] = [T_R] + i[T_I],$$

est bien respectée, et que de plus les matrices $[T_R]$ et $[T_I]$ ainsi construites sont hermitiennes.

L'approximation des valeurs caractéristiques λ_n^N et des courants caractéristiques J_n^N s'obtient alors en résolvant l'équation matricielle aux valeurs propres généralisées :

$$[T_R] J_n^N = \lambda_n^N [T_I] J_n^N. \quad (6)$$

3 Cas 3-D général

Dans le cas plus général d'un objet 3-D, (ou du moins, traité sans prendre en compte les éventuelles symétries et/ou invariances par rotation), l'approximation numérique peut aussi être menée en utilisant une méthode de type méthode des moments.

Le déroulement des calculs est le même que pour un objet axisymétrique.

La discrétisation complète de la géométrie est cette fois nécessaire (voir figure III.3, par exemple, pour la discrétisation de la surface de l'amande, objet que l'on étudiera plus spécifiquement par la suite).

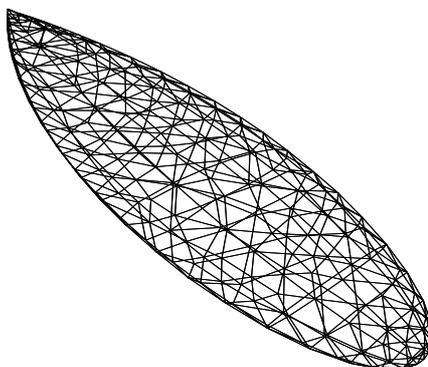


FIG. III.3 – Discrétisation de la surface à l'aide de 524 triangles.

Pour mener ces calculs, nous avons utilisé la famille classique d'éléments finis (surfaiques) de Rao-Wilton-Glisson (RWG), qui coïncident avec la famille d'éléments finis de Raviart-Thomas de plus bas-degré.

On rappelle ici leur définition (voir [34] pour plus de détails) : ce sont des éléments d'arête définis sur l'arête a_k , commune aux deux triangles T_k^+ et T_k^- de sommet respectif S^+ et S^-

III Calcul numérique de courants caractéristiques

opposé à l'arête k (voir figure III.4), et définis par :

$$f_k(M) = \begin{cases} \frac{l_k}{2A_k^+} \overrightarrow{S^+M}, & \text{si } M \in T_k^+ \\ -\frac{l_k}{2A_k^-} \overrightarrow{S^-M}, & \text{si } M \in T_k^- \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

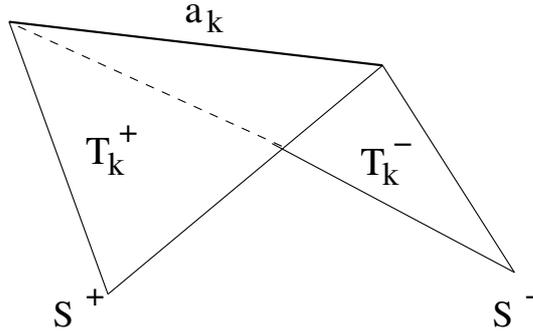


FIG. III.4 – Géométrie et notations pour la définition des éléments finis surfaciques RWG

où l_k désigne la longueur de l'arête k .

Ces fonctions de base présentent notamment les propriétés remarquables (voir [34]) :

– la divergence surfacique est constante par triangle :

$$\operatorname{div}_\Gamma f_k = \pm \frac{l_k}{A_k},$$

– la composante normale à l'arête k dans chaque triangle est continue au franchissement de celle-ci ; elle est de plus nulle sur les autres arêtes,

– elles sont purement réelles.

La dernière propriété nous intéresse spécialement pour notre étude, la décomposition de l'opérateur d'EFIE discrétisé sera alors immédiate.

En effet, on applique la méthode de Galerkin, de manière identique au cas d'objets de révolution présentés dans le paragraphe précédent, en vue d'approximer l'opérateur d'impédance. L'espace d'approximation est alors

$$V_N = \{f_k ; k = 1 \dots N\}, \quad (7)$$

où N est le nombre d'arêtes du maillage (ou $2N/3$ est le nombre de triangles utilisés pour la discrétisation de la surface, s'il s'agit d'une surface fermée). L'opérateur d'EFIE s'approxime alors dans cet espace selon :

$$T_{i,j} := (Tf_i, f_j) = \iint_{T_i^\pm \times T_j^\pm} G(x,y) \left[f_i(x) \cdot f_j(y) - \frac{1}{k^2} \operatorname{div}_\Gamma f_i(x) \operatorname{div}_\Gamma f_j(y) \right] ds(x) ds(y). \quad (8)$$

La décomposition de l'opérateur d'impédance s'écrit alors simplement

$$\begin{cases} T_R &= \Re e(T) = \frac{1}{2}(T + T^*) \\ T_I &= \Im m(T) = \frac{1}{2i}(T - T^*), \end{cases}$$

avec T^* la matrice transposée-conjuguée de T . On est alors ramené, de même que dans le paragraphe précédent, à résoudre l'équation matricielle aux valeurs propres généralisées (6). Cette équation présente ici l'avantage de ne faire intervenir que des matrices symétriques et réelles.

On présente dans le paragraphe suivant quelques résultats portant sur la convergence des valeurs et vecteurs propres approchés, vers les valeurs et vecteurs propres théoriques.

4 Approximation numérique des valeurs caractéristiques

On s'intéresse dans ce paragraphe à la convergence des valeurs propres théoriques de l'équation (II-13) avec celles calculées numériquement, à l'aide par exemple d'une des deux méthodes précédentes (axisymétrique ou 3-D), c'est-à-dire les valeurs propres de l'équation (4).

On considère dans un premier temps le problème de l'approximation numérique des valeurs propres "classiques" d'un opérateur T , linéaire, compact et auto-adjoint. Soit donc $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ la suite de valeurs propres de T , ordonnée en une suite de module décroissant ,

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots |\lambda_n| \geq \dots .$$

On définit son approximation dans l'espace $V_N = \text{Vect} \{f_i ; i = 1 \dots N\}$, de dimension $N < \infty$, par

$$T_N = \begin{cases} V_N & \rightarrow V_N \\ x = \sum_{i=1}^N x_i f_i & \mapsto T_N x = \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N T_{i,j}^N x_j \right) f_i, \end{cases} \quad (9)$$

où $T_{i,j}^N$ est la représentation matricielle de T_N dans V_N ,

$$T_{i,j}^N = (T f_i, f_j) , \quad (10)$$

introduite précédemment dans les deux cas de figure particuliers, objet axisymétrique et 3-D général.

On note P_N la projection orthogonale de V sur V_N , de telle sorte que l'opérateur

$$\tilde{T}_N = P_N T P_N ,$$

soit une extension de T_N à l'espace V entier :

$$\tilde{T}_N x = T_N x , \forall x \in V_N .$$

III Calcul numérique de courants caractéristiques

et $\{\lambda_n^N\}_{n \in \mathbb{N}}$ les valeurs propres de T_N , ordonnées de la même façon que leurs homologues continues $\{\lambda_n^N\}_{n \in \mathbb{N}}$.

On a alors le théorème suivant, dû à Lidskii (voir [3]) dans le cas d'opérateurs symétriques en dimension finie :

Théorème 11 Soit D_N l'opérateur différence : $D_N = \tilde{T}_N - T$, défini sur V , et d_n^N ses valeurs propres. Alors, on a la majoration uniforme :

$$\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^N|^p \leq \sum_n |d_n^N|^p, \quad (11)$$

pour N et p deux entiers quelconques.

Démonstration L'opérateur D_N est par construction un opérateur compact et auto-adjoint ; soit d_n^N sa suite de valeurs propres, et ψ_n^N sa base orthonormale de diagonalisation.

On introduit l'opérateur, défini sur $[0, 1]$ dans \mathcal{V} ,

$$L(x) = T + x D_N, \quad (12)$$

de telle façon que $L(0) = T$, et $L(1) = \tilde{T}_N$. Soit $\mu_n(x)$ ses valeurs propres, ordonnées en une suite de module croissant. L'opérateur L est un opérateur analytique, compact et auto-adjoint sur le segment $[0, 1]$; il en découle que les $\mu_n(x)$ sont des fonctions continues et analytiques par morceaux sur $[0, 1]$, avec, en particulier, $\mu_n(0) = \lambda_n$ et $\mu_n(1) = \lambda_n^N$. Soit $\phi_n(x)$ les fonctions propres (orthonormales) de L au point x :

$$L(x) \phi_n(x) = \mu_n(x) \phi_n(x). \quad (13)$$

Ces fonctions sont alors aussi des fonctions analytiques par morceaux sur $[0, 1]$. En fait, les points de discontinuité des ϕ_n et de discontinuité des dérivées des μ_n proviennent du réordonnement particulier des valeurs propres en chaque point x : lorsque deux valeurs propres se "croisent" en un point x_0 de $[0, 1]$, un point anguleux peut apparaître ...

Soit maintenant n un entier quelconque, ces points anguleux restent dénombrables sur le segment $[0, 1]$, et, en dehors de cette ensemble de points, on obtient en dérivant (13) :

$$D_N \phi_n(x) + L(x) \phi_n'(x) = \mu_n'(x) \phi_n(x) + \mu_n(x) \phi_n'(x),$$

soit encore,

$$(D_N - \mu_n'(x)) \phi_n(x) + (L(x) - \mu_n(x)) \phi_n'(x) = 0, \quad (14)$$

et, en projetant sur ϕ_n , et en utilisant d'une part l'orthogonalité des ϕ_n et, d'autre part, la symétrie de L :

$$\mu_n'(x) = (D_N \phi_n(x), \phi_n(x)). \quad (15)$$

Puisque les μ_n sont continus sur $[0, 1]$, on se ramène aux valeurs propres de notre problème en intégrant la relation (15) précédente :

$$\begin{aligned} \lambda_n - \lambda_n^N = \mu_n(1) - \mu_n(0) &= \int_0^1 \mu_n'(x) dx \\ &= \int_0^1 (D_N \phi_n(x), \phi_n(x)) dx. \end{aligned} \quad (16)$$

En utilisant la base propre, orthonormale, ψ_n de D_N , on a alors,

$$\begin{aligned} (D_N \phi_n(x), \phi_n(x)) &= \sum_i (D_N \phi_n(x), \psi_i) (\psi_i, \phi_n(x)) \\ &= \sum_i d_i^N |(\phi_n(x), \psi_i)|^2, \end{aligned} \tag{17}$$

soit donc,

$$\lambda_n - \lambda_n^N = \sum_i \sigma_{n,i} d_i^N,$$

avec

$$\sigma_{n,i} = \int_0^1 (\phi_n(x), \psi_i) .$$

L'orthonormalité des bases ϕ_n et ψ_n donne alors la relation

$$\sum_i \sigma_{n,i} = \sum_n \sigma_{n,i} = 1 .$$

Ainsi le vecteur $(\lambda_1 - \lambda_1^N, \lambda_2 - \lambda_2^N, \dots, \lambda_n - \lambda_n^N, \dots)$ se trouve dans l'ensemble d'enveloppe polygonale convexe constituée des sommets obtenus en considérant toutes les permutations du vecteur $(d_1^N, d_1^N, \dots, d_n^N, \dots)$. On a ainsi, si ϕ est une fonction réelle convexe,

$$\sum_n \phi(\lambda_n - \lambda_n^N) \leq \sum_n \phi(d_n^N) .$$

En utilisant la fonction convexe $\phi_t = |t|^p$, pour un entier positif p , on obtient l'inégalité annoncée dans le théorème. □

De ce théorème, on déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 1 *On suppose de plus que les espaces d'éléments finis utilisés forme une suite d'espaces emboîtés, dense dans V :*

$$\forall n \in \mathbb{N}, V_N \subset V_{N+1} \text{ et } \overline{\cup_N V_N} = V .$$

Alors, les λ_n^N convergent uniformément vers les valeurs propres théoriques λ_n .

Démonstration Soit \tilde{V}_N le sous-espace vectoriel de V_N stable par T :

$$\tilde{V}_N = \{x \in V_N ; T x \in V_N\} ,$$

et σ l'injection croissante de \mathbb{N} définie par :

$$\sigma(N) = \dim \tilde{V}_N .$$

III Calcul numérique de courants caractéristiques

On a alors l'inclusion $\tilde{V}_N \subset \text{Ker } D_N$, par définition de D_N et de \tilde{T}_N . De plus, on a par hypothèse $\overline{\cup_N \tilde{V}_N} = V$, et donc, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\exists N_0 \in \mathbb{N}, \forall x \in V_N, T x \in V_{N_0}.$$

En d'autres termes, on a aussi l'inclusion $V_N \in \tilde{V}_{N_0}$, et donc la relation de densité :

$$\overline{\cup_N \tilde{V}_N} = V,$$

et par suite,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sigma(N) = \infty.$$

La série majorante dans le théorème 11 peut dans un premier temps se réécrire

$$\sum_n |d_n^N|^p = \sum_{n=\sigma(N)+1}^{\infty} |d_n^N|^p,$$

les d_n^N étant correctement ordonnés pour cela. De plus, $D_N = \tilde{T}_N - T$ est un opérateur régularisant, ainsi, ses valeurs propres tendent exponentiellement vers 0 :

$$d_n^N = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) \text{ pour tout entier } \alpha,$$

ce qui implique que la série $\sum_n |d_n^N|^p$ converge, et que de cette manière son reste tend vers 0. Au final, on obtient

$$\sum_n |\lambda_n - \lambda_n^N|^p \rightarrow 0, N \rightarrow \infty, \forall p \in \mathbb{N}.$$

□

On revient maintenant à notre problème initial : les valeurs propres généralisées de l'équation (II-13). Ce sont les valeurs propres de l'opérateur $T = T_R^{-1} T_I$ (T_R étant un opérateur inversible, voir annexe B - 4). On définit alors les deux approximations suivantes de T :

$$T_N^1 = (T_R^N)^{-1} T_I^N,$$

et

$$T_N^2 = (T_R^{-1} T_I)^N,$$

et $\lambda_n^{1,N}$ et $\lambda_n^{2,N}$ leurs valeurs propres respectives.

Le théorème 11, et le corollaire 1, précédent permettent d'affirmer que les $\lambda_n^{2,N}$ convergent vers les valeurs propres théoriques λ_n de notre problème.

De plus, les opérateurs T_N^1 et T_N^2 constituent tous les deux une approximation de l'opérateur T . On peut alors leur appliquer le théorème 11, qui montre que l'on a convergence des valeurs propres $\lambda_n^{1,N}$ vers les $\lambda_n^{2,N}$. En fin de compte, les valeurs propres calculées numériquement à partir de l'équation (6) convergent vers les valeurs propres théoriques de l'équation (II-13), si l'espace de discrétisation (espace d'éléments finis) est construit de manière à "remplir" l'espace de départ (ici $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$).

5 Cas de la sphère : Validation de la chaîne de calcul

On commence par valider notre chaîne de calcul des éléments caractéristiques d'un objet sur le cas particulier d'un objet sphérique.

Pour cela, on considère une sphère conductrice (PEC), et on calcule numériquement la décomposition en courants caractéristiques. On compare ces résultats avec ceux, analytiques, du paragraphe II - 1.8.

La sphère utilisée ici a un rayon $R = 1m$, et est discrétisée à l'aide d'un maillage surfacique comprenant 500 triangles (soit 750 degrés de liberté). La fréquence d'étude est $f = 200$ MHz, soit une longueur d'onde $\lambda = 1,5m$. On se place ainsi en zone de résonance, zone qui nous intéresse plus spécialement pour nos applications.

On présente figure III.5 la comparaison des valeurs caractéristiques approximées avec les valeurs théoriques.

On retrouve de la même façon les harmoniques sphériques vectorielles de la sphère présentées figure II.1.

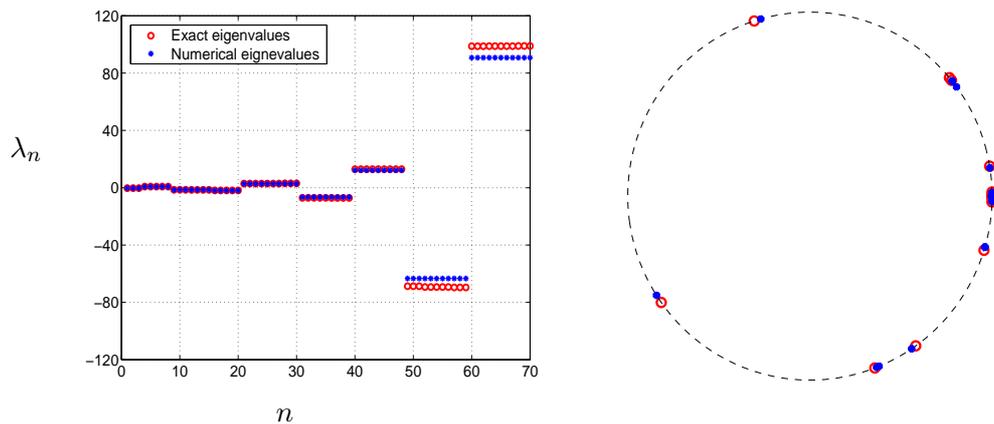


FIG. III.5 – Comparaison des valeurs caractéristiques théoriques (rouge) et approximées (bleu) dans le cas d'une sphère. Représentation linéaire (gauche) des λ_k , et distribution sur le cercle unité des s_k (droite).

On retrouve de la même façon les courants caractéristiques de la sphère, qui ne sont rien d'autre que les harmoniques sphériques vectorielles présentés figure II.1.

6 Influence de la finesse du maillage sur la convergence des résultats

L'exemple précédent de la sphère a permis, dans un premier temps, de vérifier la chaîne de calcul utilisée pour approximer numériquement la décomposition en courants caractéristiques d'un objet 3-D quelconque.

III Calcul numérique de courants caractéristiques

On illustre maintenant, dans le cas d'une géométrie pyramidale, la convergence des résultats numériques de DCC, en fonction de la finesse du maillage utilisé, et de la fréquence d'étude.

On considère pour cela une pyramide, dont la base est carrée, de côté 1m, et de hauteur 1m. Afin de calculer la décomposition en courants caractéristiques de la pyramide, on utilise 7 maillages différents, comportant respectivement 6, 54, 150, 600, 1350, 2400, 3750 triangles (soit 9, 81, 225, 900, 2025, 3600, 5625 degrés de liberté). Les différents maillages utilisés de la pyramide sont donnés figure III.6.

Les calculs de décomposition en courants caractéristiques sont de plus effectués aux trois fréquences 150MHz, 300MHz, et 500MHz, soit pour les longueurs d'onde : $\lambda = 2$ m, 1 m, 60 cm.

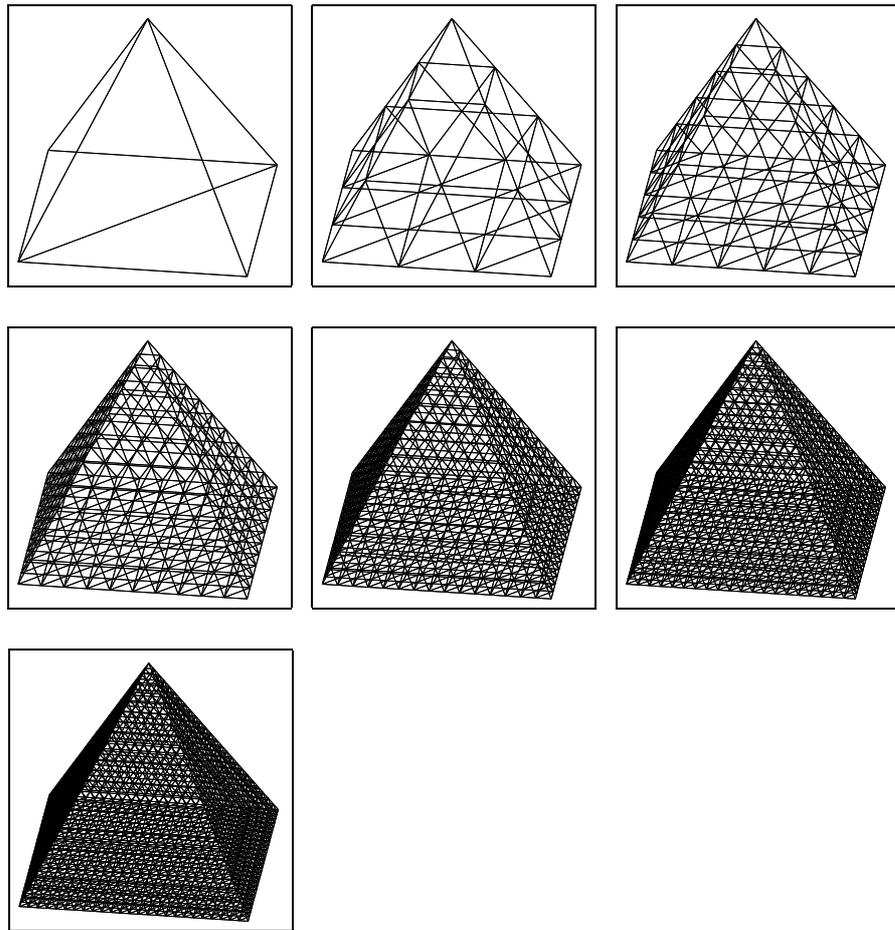


FIG. III.6 – Maillages de la pyramide, avec 9, 81, 225, 900, 2025, 3600, 5625 degrés de liberté.

Convergence des valeurs caractéristiques On commence par comparer les valeurs caractéristiques. On compare directement figure III.7 les valeurs approximées pour chaque maillage, et aux trois fréquences différentes. La figure III.8 représente quant à elle l'erreur relative commise, en décibels, sur ces approximations, soit, si λ_n^m est la $n^{\text{ième}}$ valeur propre calculée avec le

6 Influence de la finesse du maillage sur la convergence des résultats

$m^{\text{ième}}$ maillage,

$$\varepsilon_{m,dB}^{\lambda} = 10 \log_{10} \left| \frac{\lambda_n^m - \lambda_n^{m-1}}{\lambda_n^m} \right|.$$

On s'aperçoit alors que le maillage utilisé donnant lieu à une erreur relative maximum inférieure à 10 dB, sur les quinze premières valeurs, correspond à un rapport $\lambda/h \sim 6$. Ces résultats sont résumés dans le tableau III.1. Ce critère est celui généralement admis et utilisé pour le calcul du courant ou de la SER sur un objet.

f (MHz)	λ (m)	nddl	rapport λ/h
150	2	81	6.6
300	1	225	5.5
500	0.6	900	6.6

TAB. III.1 – Rapport λ/h fournissant une erreur relative sur le calcul des valeurs caractéristiques inférieure à 10 dB.

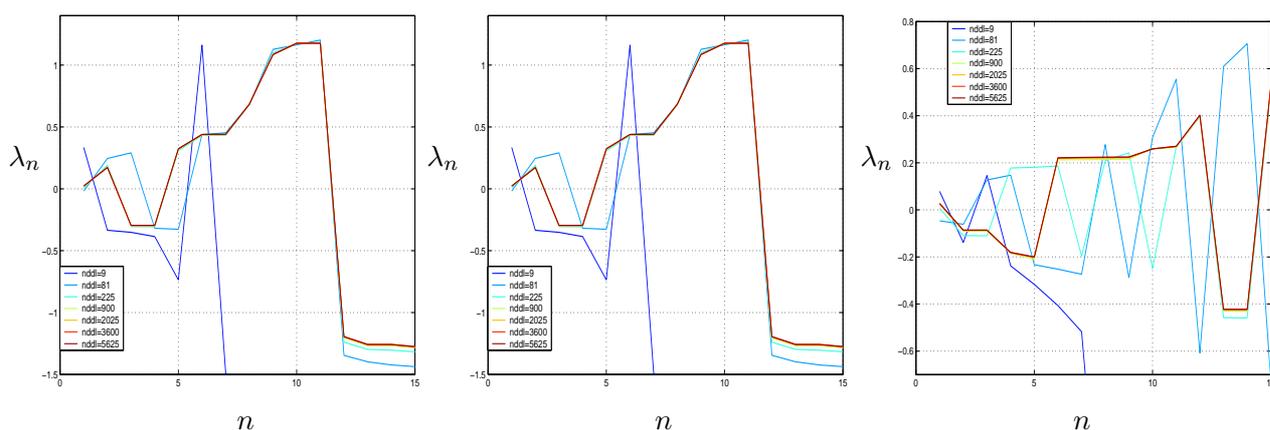


FIG. III.7 – Comparaison des 15 premières valeurs caractéristiques approximées avec les différents maillages, aux fréquences $f=150, 300, 500$ MHz (de gauche à droite).

Convergence de la SER On s'intéresse par la suite à la qualité de l'approximation de la SER de l'objet. On compare ici la qualité de l'approximation de la SER monostatique complète, i.e. sur toute la plage angulaire : sur $[0, 180]$, et dans les deux polarisations H et V (voir le paragraphe IV-1.1 suivant pour la définition exacte des polarisations).

On représente figures III.9 et III.10 ces comparaisons, respectivement en polarisation V et H. De la même façon que pour les valeurs caractéristiques on superpose dans un premier temps les SER monostatiques (graphiques de gauche dans les figures III.9 et III.10), puis, pour plus de détails, on étudie ensuite l'erreur relative en décibels lors de l'approximation de la SER : soit σ_m

III Calcul numérique de courants caractéristiques

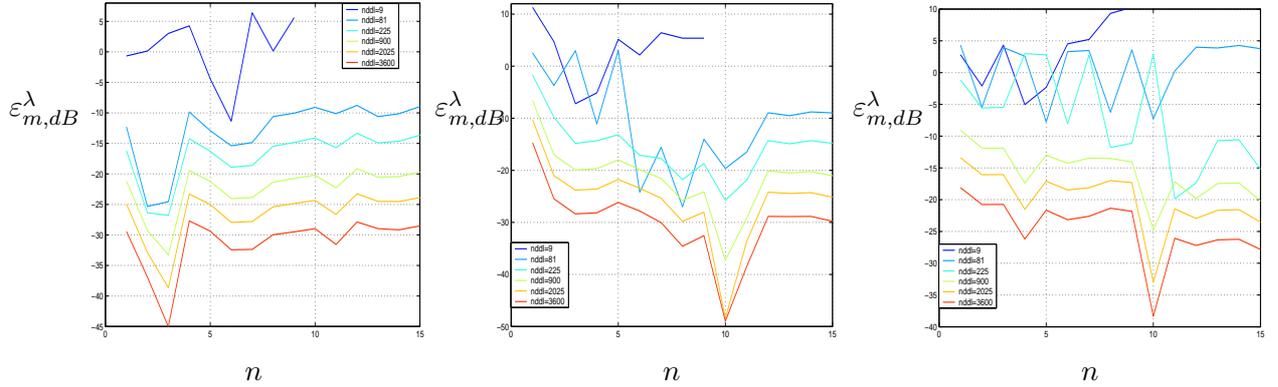


FIG. III.8 – Comparaison de l’erreur relative en dB, des 15 premières valeurs caractéristiques.

la SER monostatique calculée à l’aide du maillage m , alors les graphiques de droite des figures III.9 et III.10 représentent les grandeurs

$$\varepsilon_{m,dB}^{\sigma}(\theta) = 10 \log_{10} \left| \frac{\sigma_m(\theta) - \sigma_{m-1}(\theta)}{\sigma_m(\theta)} \right|.$$

On retrouve les mêmes résultats que lors de l’étude de l’approximation des valeurs caractéristiques, résultats confinés dans le tableau III.1.

Remarque 13 *L’approximation de la SER est toujours moins bonne dans les “creux” de SER, les angles auxquels la SER est minimale. Pour ces valeurs angulaires, l’énergie diffractée est donc très faible, et la décomposition en éléments caractéristiques de la SER donne lieu à une série de termes de signe alterné lentement convergente...*

Ceci n’est néanmoins pas très gênant en pratique, surtout dans une problématique “furtivité”, i.e. réduction de SER (où on s’intéresse surtout au maxima de SER).

Convergence des courants On présente, à titre d’exemple, figure III.11, le comportement numérique du courant caractéristique d’ordre 1, \mathbf{J}_1 , avec le raffinement du maillage de la pyramide, à la fréquence 150 MHz.

A cette fréquence, le deuxième maillage proposé est suffisant pour calculer les premières valeurs caractéristiques et la SER monostatique complète avec une erreur inférieure à 10 dB.

La figure III.11 montre qu’avec ce même maillage, l’approximation du premier courant caractéristique reste encore assez grossière.

6 Influence de la finesse du maillage sur la convergence des résultats

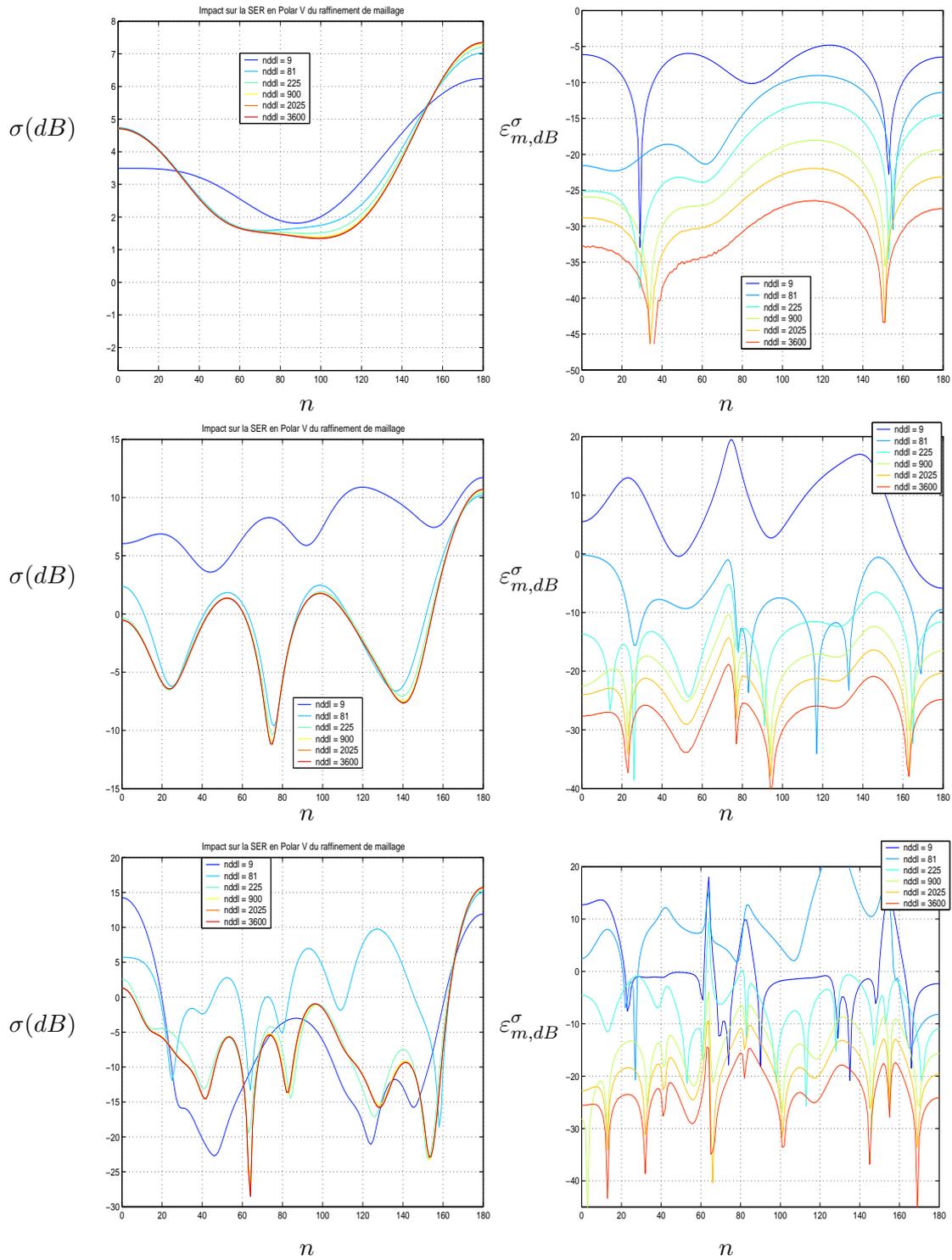


FIG. III.9 – Convergence quand le pas de maillage tend vers 0 de l'approximation avec 20 modes caractéristiques de la SER monostatique, en polarisation V.

III Calcul numérique de courants caractéristiques

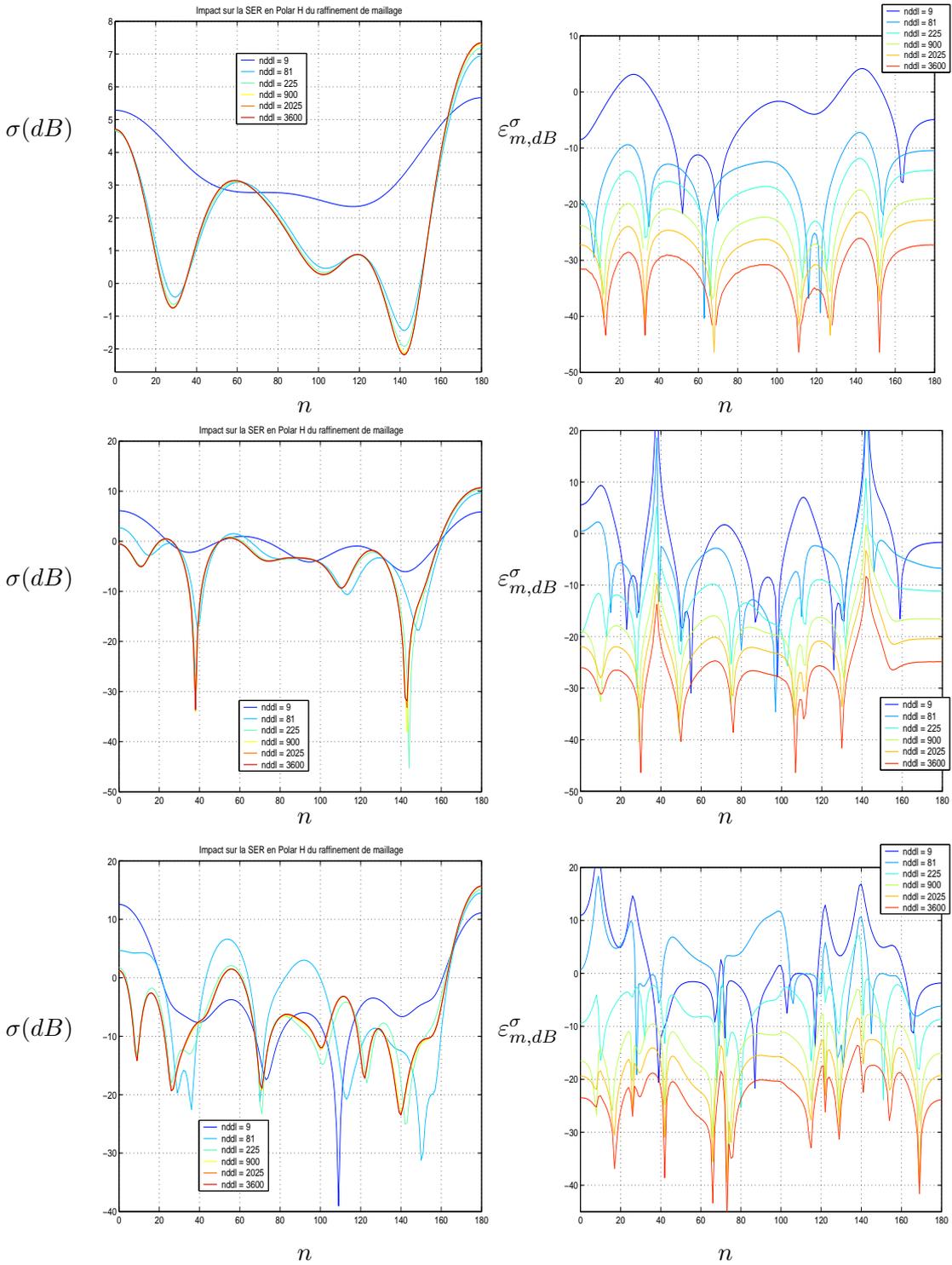


FIG. III.10 – Convergence quand le pas de maillage tend vers 0 de l'approximation avec 20 modes caractéristiques de la SER monostatique, en polarisation H.

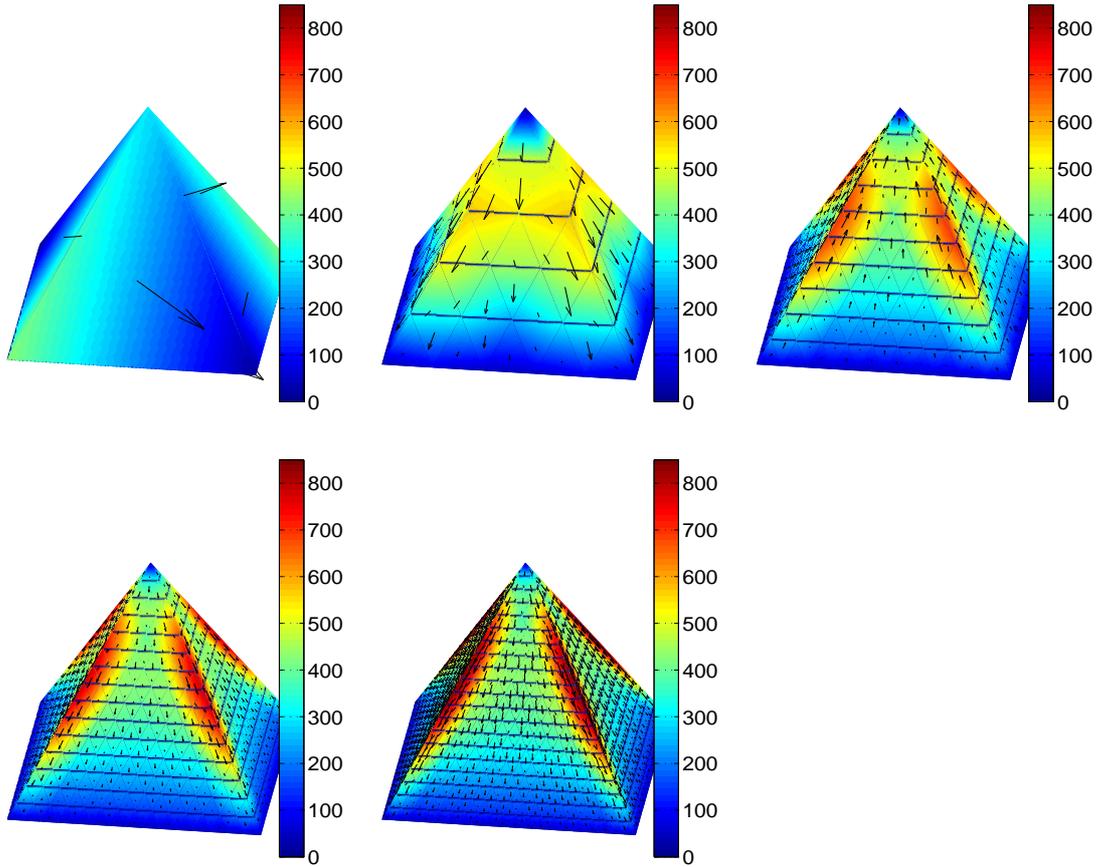


FIG. III.11 – Comportement de premier courant caractéristique, vis-à-vis du raffinement de maillage, pour, respectivement, $nddl= 6, 54, 150, 600, 1350,$ et 2400 .

7 Cas d'une surface ouverte

On présente dans cette section la DCC d'une surface ouverte : une plaque rectangulaire, voir figure III.12. Cette application fait suite au paragraphe 2.2.

On utilise ici une plaque rectangulaire de largeur $l = 1m$, de longueur $L = 3m$, et d'épaisseur nulle. On se place à la fréquence d'étude $f = 100MHz$, soit $\lambda = 3m = L$.

Cette plaque maillée à l'aide de 638 triangles, soit 994 degrés de liberté. Ce maillage comprend ainsi 74 arêtes "vives", i.e. 74 arêtes de bord, n'appartenant qu'à un seul triangle.

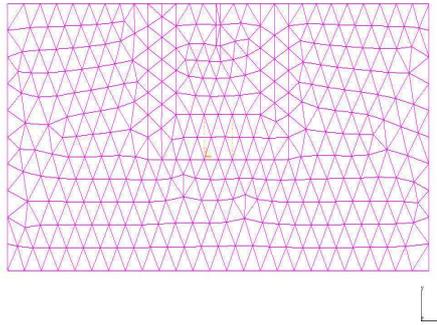


FIG. III.12 – Maillage de la plaque rectangulaire.

Le traitement numérique d'une surface ouverte est particulier.

Supposons cette surface maillée à l'aide de N_T triangles, et présentant N_a arêtes ($N_a \geq 3N_T/2$, l'égalité ayant lieu pour les surfaces fermées).

Soit a_k une arête de bord, pour un certain entier k . En utilisant les notations de la figure III.4, les triangles T_k^+ et T_k^- sont confondus, et la fonction de base f_k associée à l'arête k prend des valeurs opposées sur chacun de ces deux triangles (on rappelle que ces deux triangles constituent exactement le support de f_k). Ainsi, pour tout entier i , le coefficient $T_{i,k}$ s'annule, et finalement le courant $\mathbf{J} = f_k$ est courant propre associé à une valeur propre nulle. Ce courant (qui, de la même façon, ne rayonne pas d'énergie, i.e. $a_\infty f_k = 0$) ne doit évidemment pas être pris en compte dans la décomposition en courants caractéristiques.

Ceci revient, en rappelant que les fonctions de base f_k correspondent en fait à des flux d'arête, à rappeler la conservation du courant sur la surface de l'objet : aucun courant ne peut "sortir de l'objet".

Ainsi, le calcul numérique des éléments caractéristiques d'une surface ouverte se conduit de la même façon que pour un objet d'intérieur non vide (et régulier). Seul les l premiers courants propres, où l est le nombre d'arête de bord du maillage (et en supposant que les courants sont ordonnés par module de valeur propre croissant) ne doivent pas être pris en compte par la suite.

On présente figure III.13 les premiers courants caractéristiques de cette plaque rectangulaire.

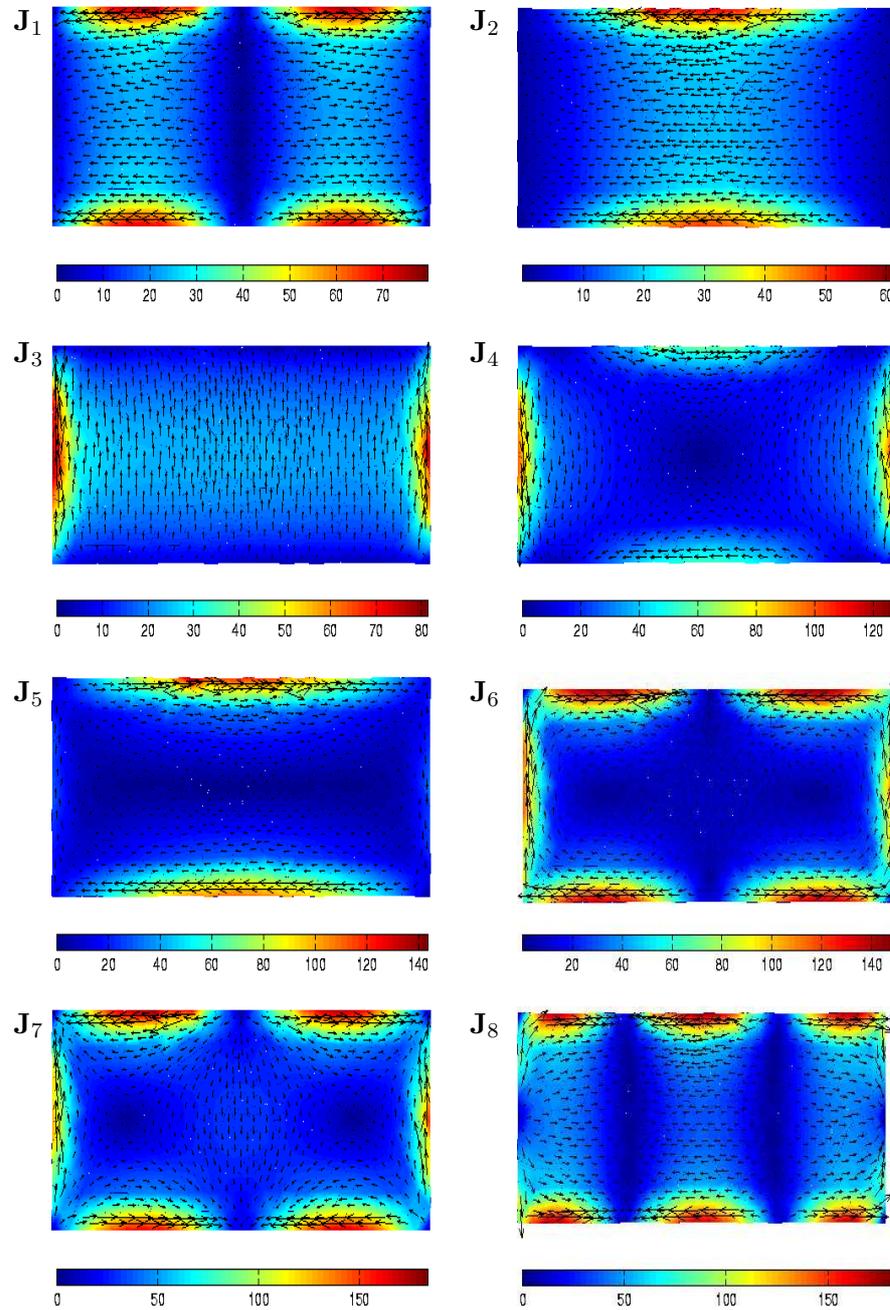


FIG. III.13 – Premiers courants caractéristiques d'une plaque rectangulaire (infiniment fine), à la fréquence $f = 100\text{MHz}$, soit $\lambda = L = 3\text{m}$.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

Nous présentons dans ce chapitre les applications principales de la théorie des éléments caractéristiques.

Nous commençons par illustrer cette méthode de décomposition modale, en exhibant les premiers courants caractéristiques de l'amande NASA métallique. C'est un objet de référence, classiquement utilisé en SER comme cas d'intercomparaison calculs-calculs ou calculs-mesures. L'amande NASA est un objet purement 3-D, i.e. n'admettant pas de symétrie de révolution.

On présente de plus, conjointement à chacun des courants caractéristiques, leur contribution à la SER.

On notera que, à notre connaissance, aucun calcul de courants caractéristiques sur des objets 3-D n'apparaît dans la littérature. Seuls des objets filaires ou axisymétriques ont été traités.

A partir de cette décomposition, on montre alors qu'il est possible de "trier" les modes caractéristiques qui influent significativement sur la SER dans un secteur donné. D'après les propriétés de ces modes on peut alors directement identifier le courant sur la surface de l'amande qui produit le rayonnement observé dans un secteur donné.

L'étude effectuée sur l'amande montre l'intérêt de la DCC en terme d'analyse de SER.

Nous proposons ensuite l'analyse de la SER d'un objet canonique : le cône. Nous reprenons alors l'étude faite sur l'amande et l'appliquons à l'étude de la SER d'un cône en zone de résonance (pour une longueur d'onde égale à la hauteur du cône).

On note cette fois que si le cône, en tant qu'objet canonique, est une forme dont la SER a été largement étudiée dans la littérature (voir [8], [13] par exemple), son étude en zone de résonance reste délicate.

On compare en particulier dans cette étude l'influence sur la SER de la pointe du cône et celle de la singularité de la géométrie au niveau du fond du cône (arête de raccordement corps du cône / disque de fond).

On fournit finalement quelques méthodes simples de traitement passif d'un cône aboutissant à une réduction significative de SER en secteur avant.

1 Préliminaires et conventions utilisées

On s'intéresse à l'étude de la diffraction par un obstacle, en vue de l'analyse, principalement, de sa SER monostatique.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

La SER monostatique d'un objet quantifie la puissance que ce dernier diffracte dans la direction même dans laquelle il est illuminé ; on parle aussi d'énergie rétro-propagée par l'objet.

La SER monostatique est une grandeur fondamentale, par exemple, dans une problématique radar : bien souvent, pour des raisons pratiques, le même radar est utilisé à l'émission et à la réception, ou encore lorsque l'objet se trouve à grande distance de l'ensemble du système radar utilisé (configuration de très faible bistatisme, soit, en première approximation, du monostatisme).

La puissance diffractée par l'objet dépend évidemment de la puissance fournie par l'éclairage de ce dernier, au travers de l'onde électromagnétique incidente sur l'objet (supposée maîtrisée et connue par l'utilisateur). A puissance égale, une infinité d'ondes incidentes peuvent être définies et, a priori, utilisées.

Le but de cette partie est de préciser les grandeurs finales étudiées (les différentes SER auxquelles on peut s'intéresser sur un objet) ainsi que les définitions et conventions utilisées pour les ondes incidentes sur l'objet.

1.1 Les polarisations

On s'intéresse ici principalement à l'analyse de la SER d'objets 3-D. Comme vu précédemment, la SER σ est définie pour des ondes incidentes planes (cf. [8]) :

$$\mathbf{E}_{d^i, p^i}^i = p^i e^{ikx \cdot d^i} ; \mathbf{H}_{d^i, p^i}^i = \frac{1}{ik\eta_0} \text{rot } \mathbf{E}_{d^i, p^i}^i, \quad (1)$$

où $p^i \in \mathbb{R}^3$ est la polarisation de l'onde, et $\hat{d}^i \in S$ sa direction d'incidence sur l'objet. Par linéarité des équations de Maxwell, l'étude pour toute polarisation se ramène à celle de deux polarisations p_1 et p_2 telles que (\hat{d}^i, p_1, p_2) forme un repère orthonormal de \mathbb{R}^3 .

On choisit la convention de la figure IV.1 pour ces deux polarisations, pour lesquelles on parlera de polarisation H et V (pour Horizontale et Verticale, le champ électrique étant pris comme référence) par la suite.

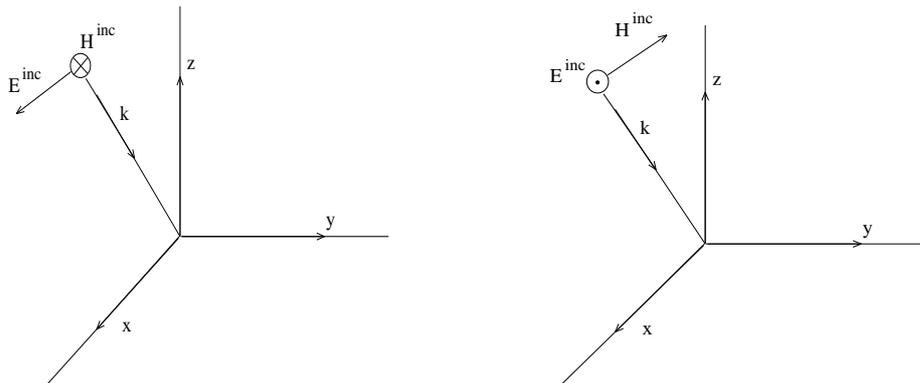


FIG. IV.1 – Définition des polarisations horizontale, ou polarisation H, et verticale, ou polarisation V (resp. gauche et droite).

1.2 La SER monostatique et les SER monostatiques caractéristiques

Soit J_{d^i, p^i} le courant induit sur la surface de l'objet par l'onde plane incidente (1); alors la SER de l'objet dans la direction d^r et la polarisation p^r est, par définition,

$$SER(d^i, p^i; d^r, p^r) = |p^r \cdot a_\infty J_{d^i, p^i}(d^r)|^2.$$

On cherche ici à utiliser la base des courants caractéristiques pour décomposer, puis étudier, cette SER.

On rappelle tout d'abord (voir section II-1.6) la décomposition du courant J induit sur la surface de l'objet lorsque celui-ci est éclairé par une onde incidente $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$ (donnée en (1), par exemple), sur la base des courants caractéristiques \mathbf{J}_n :

$$J_{d^i, p^i} = \sum_n \alpha_n(d^i, p^i) \mathbf{J}_n,$$

avec les coefficients modaux

$$\alpha_n(d, p) = \frac{1}{i\eta_0} \frac{(\mathbf{E}_{d, p}^i, \mathbf{J}_n)}{i + \lambda_n}.$$

Le champ lointain rayonné dans la direction d^r est alors immédiatement donné par

$$\mathbf{e}(d^r; d^i, p^i) = \sum_n \alpha_n(d^i, p^i) a_\infty \mathbf{J}_n(d^r) = \sum_n \alpha_n(d^i, p^i) \mathbf{e}_n(d^r),$$

et la SER par

$$SER(d^i, p^i; d^r, p^r) = |p^r \cdot \mathbf{e}(d^r; d^i, p^i)|^2,$$

lorsque l'onde incidente est une onde plane (1).

On s'intéresse par la suite plus particulièrement à la SER monostatique de l'objet, c'est-à-dire à la SER calculée pour des directions d'éclairage et d'observation confondues :

$$\sigma(d, p^i, p^r) := SER(d, p^i; d, p^r). \quad (2)$$

La SER monostatique σ se décompose alors sur les éléments caractéristiques suivants (voir section II-1.6)

$$\sigma(d, p^i, p^r) = \left| \sum_n \sigma_n(d, p^i, p^r) \right|^2 \quad (3)$$

avec

$$\sigma_n(d, p^i, p^r) := \frac{(p^i \cdot \mathbf{e}_n(d)) \overline{(p^r \cdot \mathbf{e}_n(d))}}{i + \lambda_n}. \quad (4)$$

On notera, et on étudiera particulièrement par la suite, ces SER monostatiques élémentaires σ_n , que l'on désignera par SER (monostatiques) caractéristiques.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

Soit p une polarisation quelconque et p' tels que le repère (d, p, p') soit orthonormal ; on distingue alors dans la SER monostatique (2) les SER, dites polarisations principales et croisées (aussi désignées co-polar et cross-polar), dans la direction d et la polarisation p ,

$$\begin{cases} \sigma_{\parallel}(d, p) = \sigma(d, p, p) \\ \sigma_{\perp}(d, p) = \sigma(d, p, p'). \end{cases} \quad (5)$$

En général, les polarisations croisées sont plus faibles que les polarisations principales, notamment dans le cas d'objets convexes (c'est-à-dire n'engendrant pas de réflexions multiples), ce qui sera le cas des objets que l'on étudiera par la suite.

On limitera ainsi notre étude de la SER monostatique aux deux polarisations principales :

$$\sigma_{\parallel}(d, p) = \left| \sum_n \sigma_{n,\parallel}(d, p) \right|^2,$$

avec les conventions de polarisations définies figure IV.1.

2 Amande Nasa

La géométrie de l'amande, ainsi que le maillage utilisé pour les calculs, sont représentés figure IV.2. La définition exacte de cette géométrie peut-être trouvée sur le site internet : <http://www.arl.hpc.mil/PET/cta/cea/emcc/benchmark> . La longueur de l'amande est $L = 25\text{cm}$.

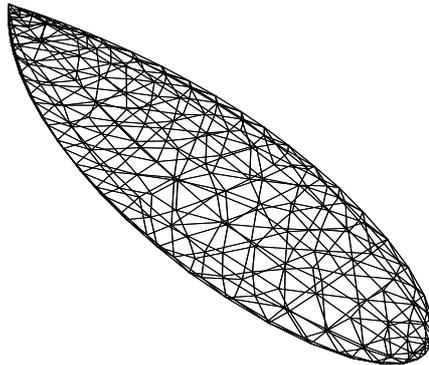


FIG. IV.2 – L'amande NASA maillée à l'aide de 524 triangles (soit 786 degrés de liberté).

Notre but dans cette partie est, dans un premier temps, de montrer les résultats numériques de décomposition en éléments caractéristiques sur un objet purement 3-D (sans symétrie particulière).

Dans un deuxième temps, on cherche à donner une analyse des champs rayonnés par l'amande (i.e. de sa SER) directement liée à l'étude des sollicitations sur la surface de l'amande, i.e. les courants caractéristiques prépondérants.

On s'intéresse ici particulièrement à la SER monostatique de l'objet. La démarche suivie est néanmoins applicable similairement à l'étude de la SER bistatique, ou encore à tout autre grandeur liée au rayonnement de l'amande ; la quantité de données s'en retrouvent simplement augmentée en conséquence. La même méthodologie peut aussi être appliquée à l'étude du rayonnement direct d'un objet, i.e. lorsque celui-ci possède une alimentation propre en énergie et se comporte ainsi comme une antenne (voir chapitre suivant).

L'analyse de l'amande (en termes de diffraction) s'effectue alors comme suit :

- calcul des courants et valeurs caractéristiques,
- calcul des champs caractéristiques associés et plus spécialement de leur contribution à la SER monostatique (calcul des SER monostatiques caractéristiques),
- identification des courants à fort rayonnement dans le secteur d'intérêt,
- calcul du courant "effectif" responsable du rayonnement en secteur avant, c'est-à-dire de la somme convenablement pondérée des courants identifiés au point précédent.

2.1 Décomposition en éléments caractéristiques de l'amande

Tout d'abord, les valeurs caractéristiques, figure IV.3 : elles nous montrent que seul un faible nombre (une dizaine) de modes caractéristiques vont être nécessaires à l'analyse et la à description de la diffraction par l'amande.

Pour préciser ce point, on représente figure IV.4, le ratio $\sqrt{|\lambda_n|/|\lambda_1|}$. On rappelle alors (voir paragraphe I-1.7) que ce ratio traduit le rapport des puissances rayonnées par le mode d'ordre 1 et celui d'ordre n . D'après la figure IV.4, la puissance rayonnée par le dixième mode est environ dix fois plus faible que celle du premier mode, tandis que le trentième mode ne rayonne plus qu'un centième de la puissance du premier.

L'illustration de ce point est donnée figure IV.5, où la SER de l'amande est comparée à celle approximée à partir de quelques modes caractéristiques ; avec une vingtaine de modes, l'erreur sur la SER monostatique sur la plage angulaire $[0 : 180]$ n'excède pas le dixième de dB.

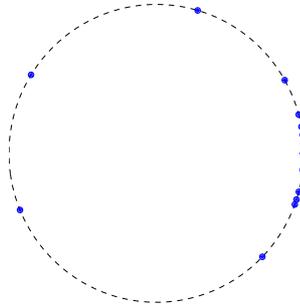


FIG. IV.3 – Distribution sur le cercle unité des valeurs caractéristiques, à la fréquence $f = 1200MHz$ ($\lambda = L = 25cm$).

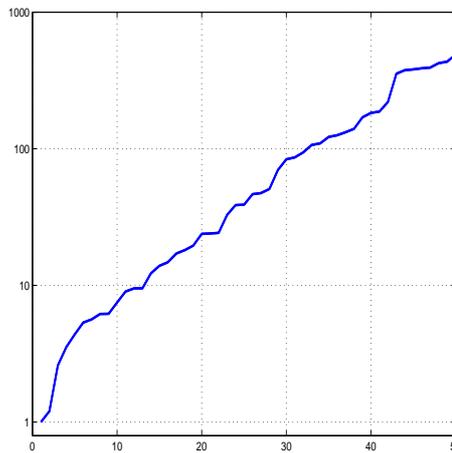


FIG. IV.4 – Ratio $\sqrt{|\lambda_n|/|\lambda_1|}$ en fonction de n , à la fréquence $f = 1200MHz$ ($\lambda = L = 25cm$).

On donne ensuite la décomposition en courants caractéristiques de l'amande à proprement parler, figure IV.6 : les 5 premiers courants sont représentés sur la surface de l'amande.

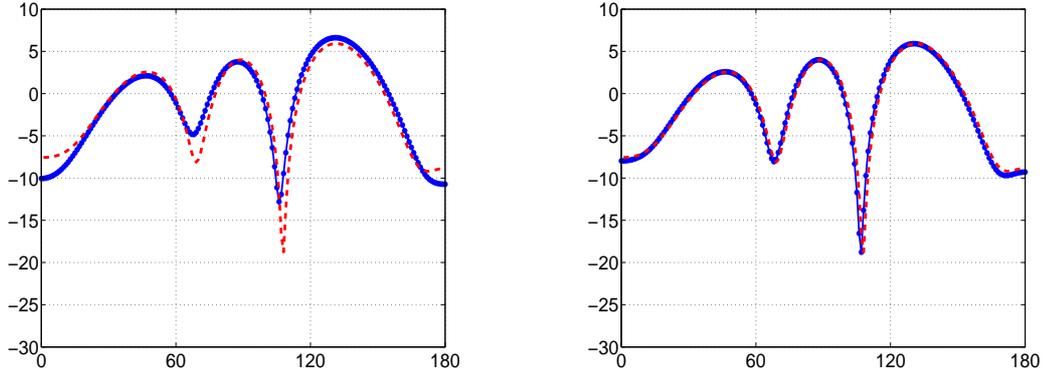


FIG. IV.5 – Approximation de la SER monostatique de l’amande, à la fréquence $f = 1200 \text{ MHz}$, à l’aide des 5 premiers courants (gauche), puis des 17 premiers (droite) L’erreur commise sur la SER monostatique approximée avec 17 modes est de l’ordre de 0,1 dB ($\lambda = L = 25\text{cm}$).

A chacun de ces courants est associé un champ lointain caractéristique (un champ propre de l’opérateur de scattering), qui est représenté sur cette même figure.

Cette représentation permet d’identifier les zones principales de rayonnement de chacun de ces courants.

En termes de diffraction dans le secteur angulaire axial, la figure IV.6 permet d’identifier les courants \mathbf{J}_3 , \mathbf{J}_4 et \mathbf{J}_5 comme ceux principalement impliqués.

On a de plus utilisé comme convention de normalisation, la normalisation des champs à l’infini, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \mathbf{J}_n \text{ tel que } \|a_\infty \mathbf{J}_n\|^2 = \|\mathbf{e}_n\|^2 = 1.$$

Ainsi, d’après I-1.7, on s’attend à avoir $\|\mathbf{J}_n\| \sim \sqrt{|\lambda_n|} \rightarrow \infty, n \rightarrow \infty$. On peut observer cette croissance sur les premiers courants présentés figure IV.6.

2.2 Identification du courant effectif

Les remarques et constats précédents permettent de “dégager” d’un courant total sur l’amande la composante “efficace” vis-à-vis du rayonnement dans un secteur angulaire.

La méthode se formalise comme suit. Étant donné un courant J et sa décomposition en courants caractéristiques :

$$J = \sum_n \alpha_n \mathbf{J}_n,$$

on extrait le courant efficace suivant

$$J_{\text{eff}} = \sum_{n \in I} \alpha_n \mathbf{J}_n,$$

où $I \subset \mathbb{N}$ tel que, ε étant fixé,

$$\forall p \notin I, |\mathbf{e}_p(\hat{x})| \leq \varepsilon, \forall \hat{x} \in \Theta,$$

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

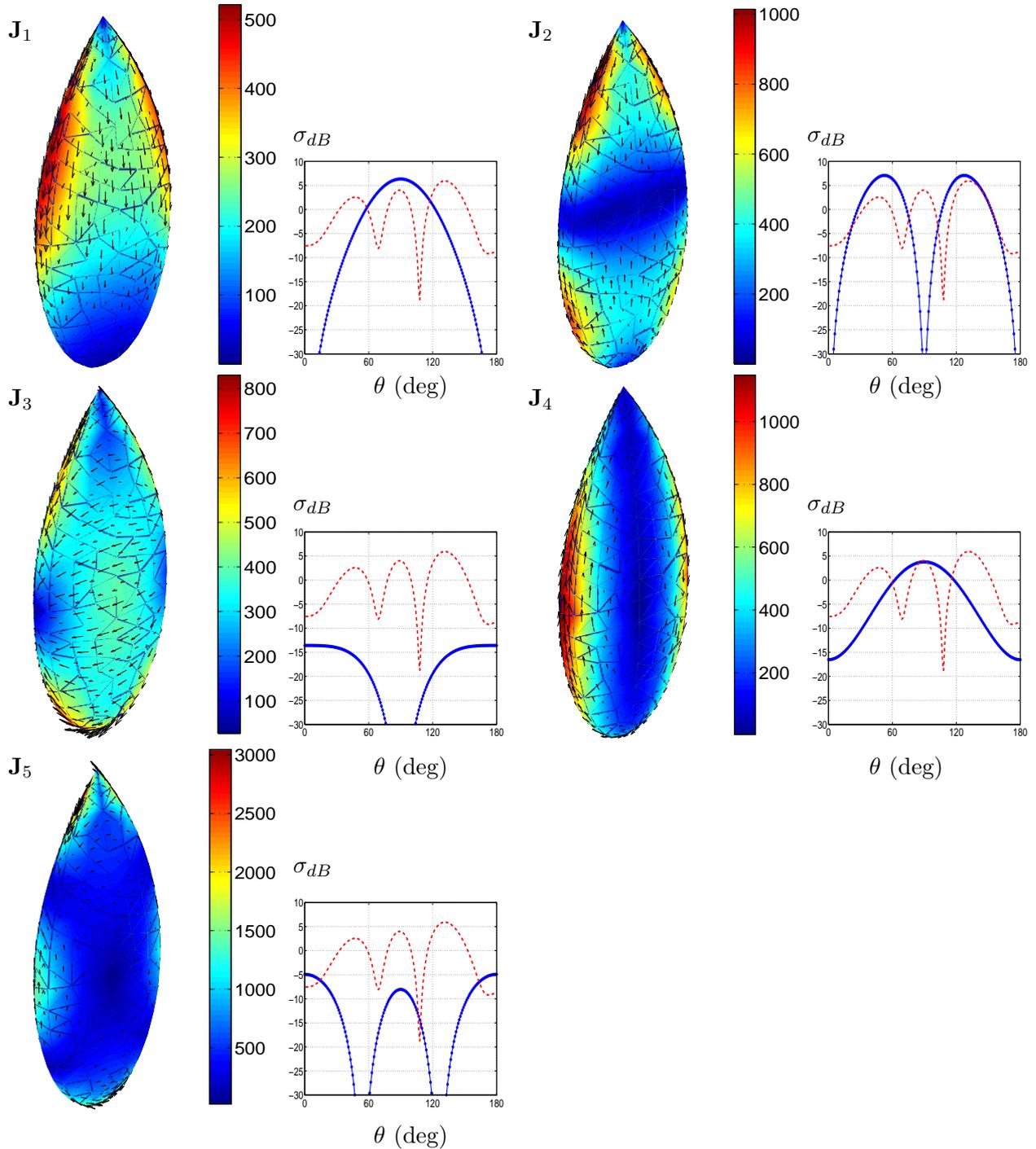


FIG. IV.6 – Cinq premiers courants caractéristiques de l'amande et leur contribution respective à la SER monostatique : SER monostatique totale de l'amande (pointillés rouge) et SER monostatique caractéristique (bleu), à la fréquence $f = 1200 \text{ MHz}$ ($\lambda = L = 25 \text{ cm}$).

et $\Theta \subset S$ désigne l'angle solide d'intérêt.

On présente le résultat de cette démarche sur les figures IV.7 et IV.8, où l'angle solide Θ considéré est réduit aux secteurs angulaires $[0 : 50]$, puis $[0 : 30]$, respectivement.

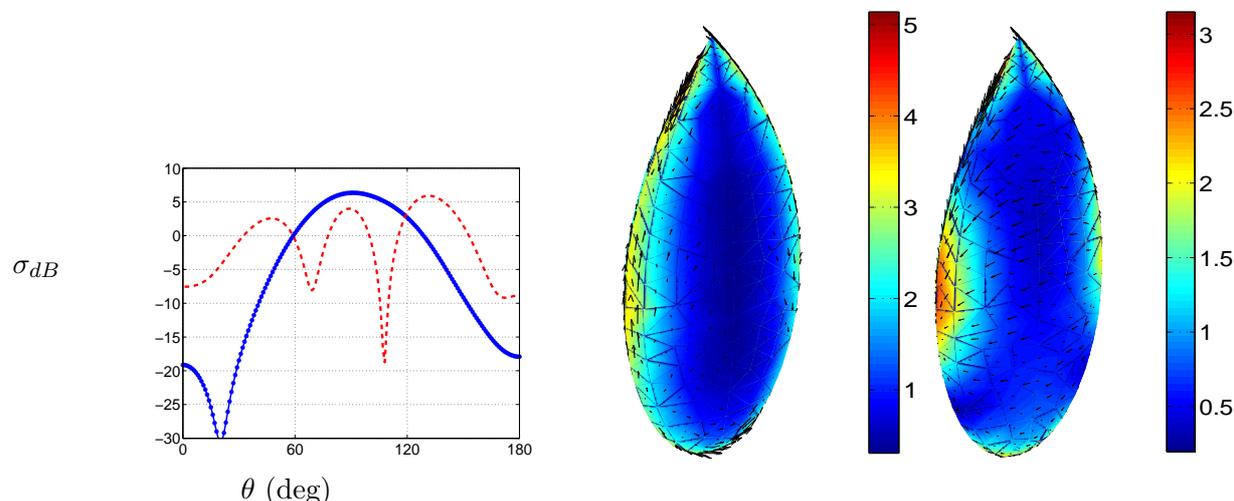


FIG. IV.7 – Identification de la composante du courant total (au milieu) qui rayonne principalement dans l'axe de l'amande (courant reconstruit de droite). La direction axiale d'intérêt est ici restreinte au secteur $[0 : 50]$ deg. Le graphique de gauche montre la SER monostatique exacte de l'amande (pontillés rouges), et la SER calculée à partir du courant total auquel on a soustrait le courant "effectif" identifié. Ce courant effectif est ici une combinaison des courants caractéristiques 3, 4 et 5.

2.3 Influence de la fréquence

On finit l'étude sur l'amande en illustrant l'augmentation du nombre de courants à prendre en compte quand la fréquence augmente. On représente figure IV.9 la répartition des valeurs caractéristiques de l'amande, sur le cercle unité, aux fréquences $f = 120, 240, 600, 1200$, et $2400 MHz$.

De même que précédemment, on s'intéresse à l'évolution du ration $\sqrt{|\lambda_n(f)|/|\lambda_1(f)|}$, qui décrit, quantitativement, la décroissance de la puissance rayonnée du mode d'ordre n , comparé au premier mode, à la fréquence f (voir section I-1.7). On observe alors figure IV.10 que la croissance est d'autant moins rapide que la fréquence augmente, ce qui traduit la nécessité de prendre en compte de plus en plus de modes afin de conserver un niveau d'approximation constant.

On précise alors dans le tableau IV.1 le nombre de modes nécessaires, en fonction de la fréquence, pour approximer la SER monostatique de l'amande au dixième de dB près. Nous avons déjà vu que, à la fréquence $f = 1200MHz$, dix sept modes suffisaient (voir figure IV.5).

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

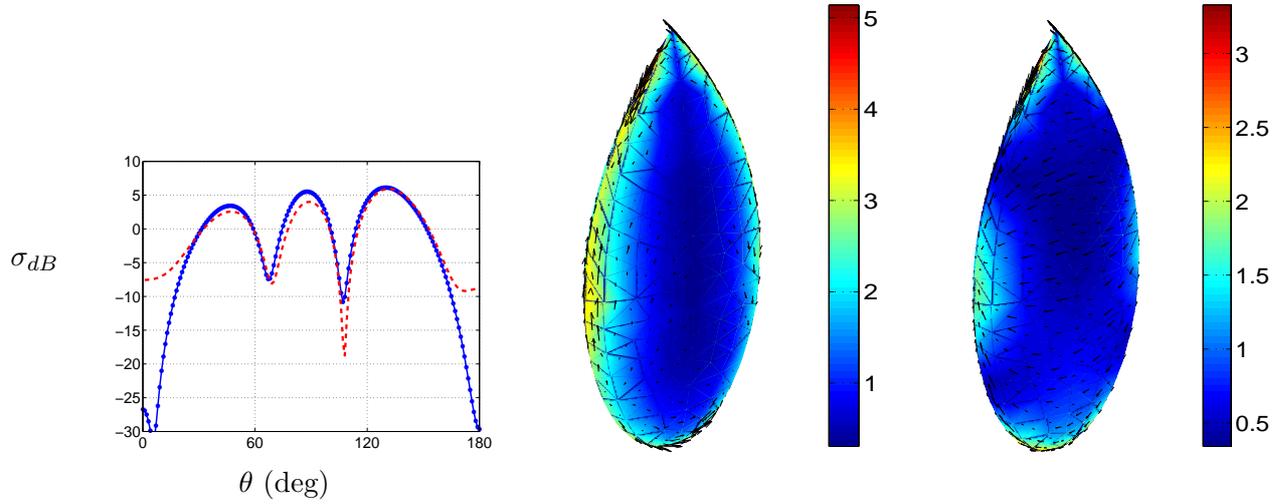


FIG. IV.8 – Même figure que la précédente, avec cette fois une ouverture angulaire axiale restreinte à $[0 : 30]$ deg. Le courant efficace est cette fois une combinaison linéaire des courants caractéristiques 3 et 5 seulement.

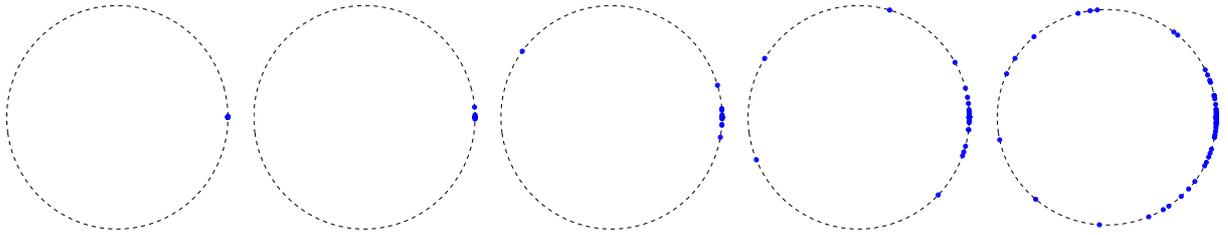


FIG. IV.9 – Distribution sur le cercle unité des valeurs caractéristiques de l'amande, aux fréquences (de gauche à droite) $f = 120, 240, 600, 1200,$ et 2400 MHz (resp. $\lambda/L = 10, 5, 2, 1, 0.5$).

fréquence (MHz)	Nombre de modes
120	3
240	3
600	8
1200	17
2400	48

TAB. IV.1 – Nombre de modes caractéristiques nécessaires pour l'approximation de la SER monostatique de l'amande, à 0,1 dB près, en fonction de la fréquence.

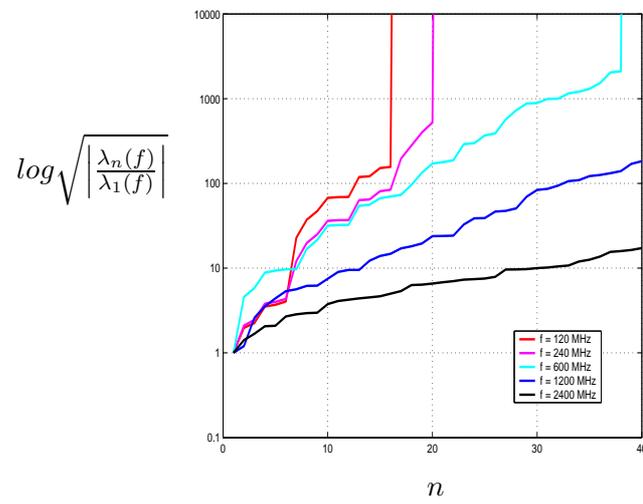


FIG. IV.10 – Ratio $\sqrt{|\lambda_n|/|\lambda_1|}$, aux fréquences $f= 120, 240, 600, 1200, 2400$ MHz.

3 Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône

On considère maintenant un objet canonique : un cône de hauteur unitaire $h = 1$ m et de demi-angle au sommet 14° , soit une base circulaire de 50 cm de diamètre.

On s'intéresse tout particulièrement à la réduction de la SER de cet objet. Comme la SER d'un objet représente l'énergie rerayonnée par l'objet, cette grandeur ne peut, en toute logique (conservation de l'énergie), être diminuée significativement pour tout angle d'incidence et d'observation.

On se restreindra alors à la diminution de la SER dans le secteur avant du cône, dans la bande angulaire relativement large $[0, 50]$.

L'étude, puis la recherche de moyen de réduction, de la SER d'un objet est un sujet abondamment traité dans la littérature, ne serait-ce que pour des objets canoniques, voir [49], [8] par exemple.

On distingue deux étapes pour traiter ce problème :

- la détermination du courant sur la surface effectivement responsable du comportement du champ rayonné (ou de la SER) que l'on souhaite contrôler, voir par exemple [49], ou [33] dans lequel ce problème est traité, avec une approche "optimisation" ; on utilisera logiquement ici la base des courants caractéristiques et la méthodologie présentée dans le paragraphe précédent sur l'amande,
- puis, après identification, le contrôle à proprement parler de ce courant ; ce contrôle doit évidemment conduire à celui de la SER dans le secteur souhaité.

Nous n'entrerons pas dans les détails sur ce dernier point, mais fournirons néanmoins quelques exemples simples de traitements de la surface de l'objet. Ces exemples serviront d'illustrations à cette méthode d'analyse, basée sur la décomposition en courants caractéristiques.

On considère donc un cône, de hauteur $h = 1$ m, à la fréquence $f = 300$ MHz (soit un rapport $\lambda/h = 1$), c'est à dire en zone de résonance. On cherche à réduire sa SER dans le secteur $[0, 50]$, la direction 0 correspondant à l'axe de révolution du cône.

La figure IV.11 présente la géométrie ainsi que le maillage utilisés pour mener les calculs numériques.

On commence cette étude par l'illustration de la difficulté de l'analyse "courants électriques sur l'objet / champ lointain diffracté dans un secteur angulaire donné".

Pour ce faire, on présente figure IV.12 le résultat "brut" du calcul du courant électrique induit sur la surface du cône pour quelques directions d'incidence dans le secteur qui nous intéresse. Au vu de ces résultats directs, le contrôle de la SER du cône dans le secteur angulaire précisé ($[0, 45]$ sur la figure IV.12) semble passer par le contrôle du courant électrique induit sur le corps du cône, tandis que celui sur son fond paraît être de moindre importance.

La première étape de notre analyse est le calcul de la décomposition en courants caractéristiques, similairement à celle réalisée sur l'amande NASA. Cette décomposition permettra de mettre en avant certains courants aux comportements spécifiques, prépondérants pour le rayonnement dans le secteur d'intérêt.

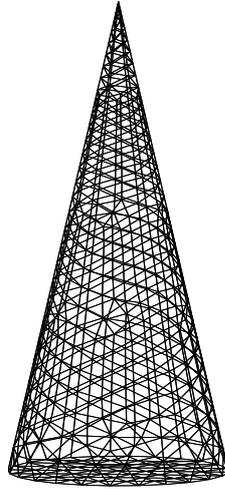


FIG. IV.11 – Géométrie et maillage du cône de référence (990 triangles, 1485 degrés de liberté).

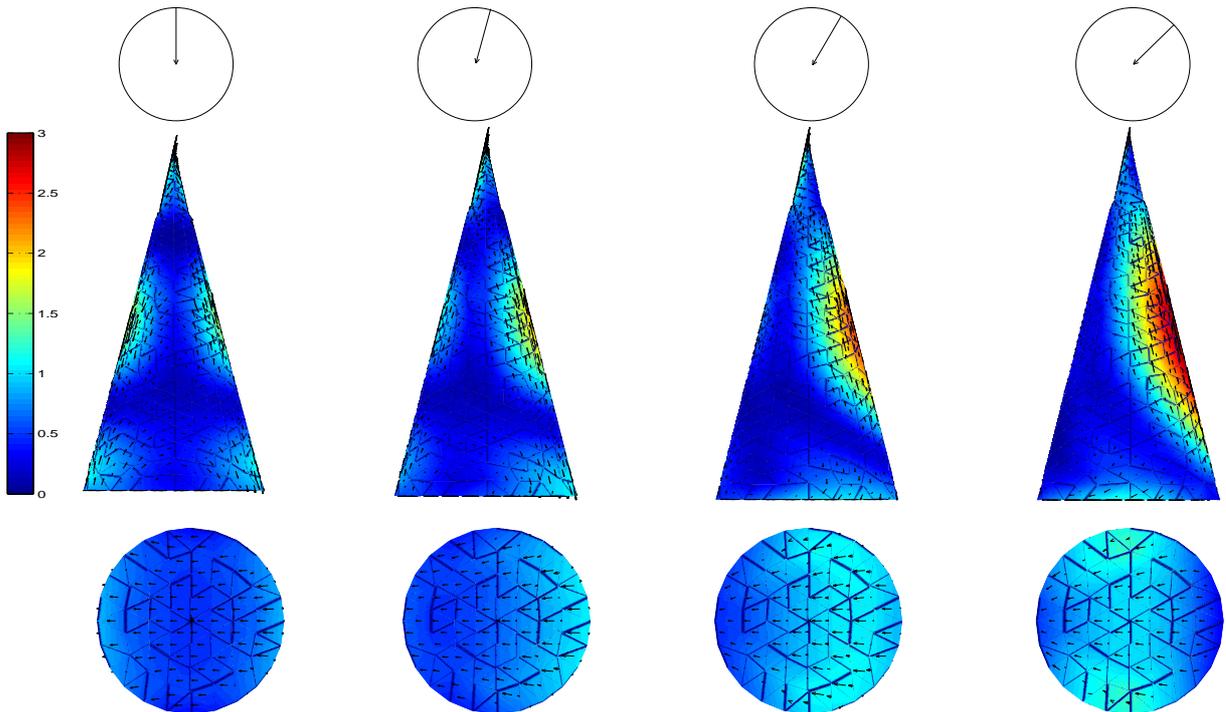


FIG. IV.12 – Courant total induit sur le cône droit, à la fréquence 300 MHz, aux incidences 0, 15, 30, 45 deg., en polarisation H .

3.1 Le cône de référence et sa DCC

On représente, figure IV.13, la répartition des valeurs caractéristiques sur le cercle unité.

A partir de cette représentation, on peut estimer a priori à une dizaine le nombre de modes à prendre en compte dans l'étude de la diffraction. On vérifie ce point, figure IV.14, sur laquelle la SER monostatique du cône est approximée à l'aide de 10, puis 20 modes caractéristiques.

On s'aperçoit que si les seuls 10 premiers modes sont insuffisants pour rendre une approximation "correcte" de la SER monostatique du cône droit (une vingtaine semble déjà plus judicieux), ils suffisent néanmoins à la description qualitative de cette même SER.

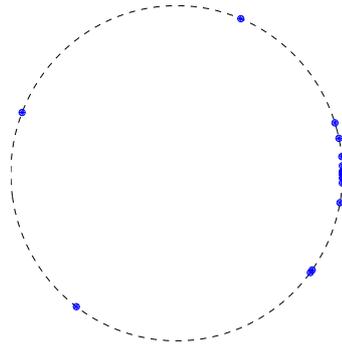


FIG. IV.13 – Répartition des valeurs caractéristiques de \mathcal{S} sur le cercle unité.

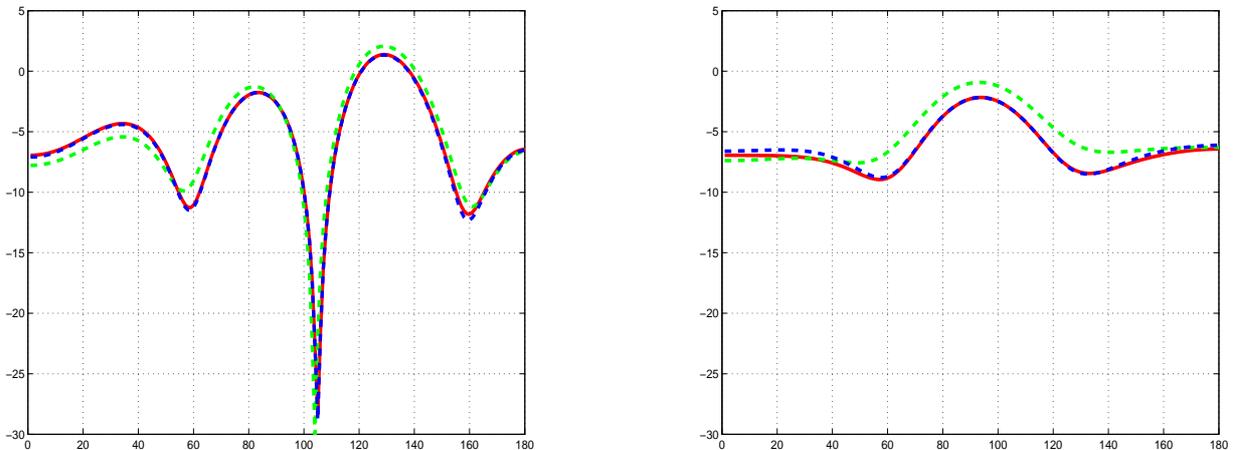


FIG. IV.14 – Approximation de la SER du cône droit (rouge) avec 10 CCs (pointillés verts), puis 20 CCs (pointillés bleus), en polarisation H et V (resp. gauche et droite).

3.1.1 La DCC du cône de référence

On présente sur les figures IV.15 et IV.16 la DCC du cône, i.e. ses premiers courants caractéristiques, ainsi que les SER monostatiques caractéristiques associées dans les deux polarisations H et V.

3 Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône

Les quatre premiers modes sont représentés figure IV.15, les cinq suivants figure IV.16. Ces modes sont donnés en ligne, les modes multiples (ici de multiplicité double au maximum) sont logiquement associés (couple de courants \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 , \mathbf{J}_5 et \mathbf{J}_6 , puis \mathbf{J}_8 et \mathbf{J}_9). Ces courants caractéristiques sont associés à une même valeur caractéristique et forment une base d'un sous-espace propre de dimension deux.

D'après l'invariance de la géométrie par rotation autour de son axe, il est complètement arbitraire de considérer plus particulièrement un de ces courants. On les associera donc, et on donnera la SER monostatique caractéristique du sous-espace propre. Avec les notations introduites dans la décomposition de la SER (3), puis la définition des SER caractéristiques (4), les SER monostatiques alors étudiées sont

$$\sigma_n = \frac{1}{i + \lambda_n} \sum_{m \in I_n} \sigma_{n,m},$$

où

$$\sigma_{n,m} := (p^i \cdot \mathbf{e}_m(d)) \overline{(p^r \cdot \mathbf{e}_m(d))},$$

et I_n contient l'ensemble des indices des modes caractéristiques d'un même sous-espace propre.

On représente ainsi, figure IV.15 et IV.16, en ligne, les courants et les SER monostatiques σ_n caractéristiques associés dans les deux polarisation, H et V (resp. à gauche et droite).

3.1.2 Analyse modale du cône

A partir des figures IV.15 et IV.16, on peut donner quelques interprétations de chacun de ces courants caractéristiques.

Modes 1 et 2 Les deux premiers courants caractéristiques, \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , sont des courants longitudinaux (voir figure IV.15) ; ils se propagent le long de la génératrice du cône. On peut ainsi écrire,

$$\mathbf{J}_i(x, y, z) = \mathbf{n} \times (f_i(z) \hat{\mathbf{z}} \times \mathbf{n}), \quad i = 1, 2,$$

où $\hat{\mathbf{z}}$ est le vecteur directeur de l'axe du cône, f_i une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} (de type oscillante), et \mathbf{n} la normale sortante à la surface du cône. On calcule alors les deux premiers champs lointains caractéristiques correspondants :

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i(\hat{\mathbf{x}}) &= -\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} \times \int_{\Gamma} \mathbf{J}_i(x, y, z) e^{-ik \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dy \\ &= -\hat{\mathbf{x}} \times \hat{\mathbf{x}} \times \left[\hat{\mathbf{z}} \times \int_{\Gamma} f_i(z) \mathbf{n}_y \times \mathbf{n}_y e^{-ik \hat{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{y}} dy \right]. \end{aligned}$$

On aboutit ainsi, dans l'axe du cône, à :

$$\mathbf{e}_i(\pm \hat{\mathbf{z}}) = 0, \quad i = 1, 2.$$

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

Modes 3 et 4 Comme remarqué précédemment, ces deux courants sont l'image l'un de l'autre par une rotation de 90 ; ils constituent une base d'un sous-espace propre de dimension 2.

Ces courants sont prépondérants dans la SER du cône en secteur axial, dans les deux polarisations H et V.

Modes 5, 6, 8 et 9 Ces courants sont des contributeurs secondaires (ou d'ordre plus élevés) à la SER du cône dans le secteur avant, dans les deux polarisations.

On peut aussi, par exemple, noter l'importante contribution de ces courants et de celle du deuxième courant caractéristique en tant que contributeur principal à la SER en polarisation H, autour de l'angle 90.

Mode 7 De la même façon que pour les deux premiers courants, le septième courant est de la forme (voir figure IV.16)

$$\mathbf{J}_7 = f_7(z)\hat{z} \times \mathbf{n},$$

et ainsi ne rayonne pas dans l'axe, i.e.

$$\mathbf{e}_7(\pm\hat{z}) = 0.$$

On peut ainsi d'ores et déjà identifier des courants qui ne vont pas contribuer au rayonnement dans l'axe, i.e. \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 , \mathbf{J}_7 , des contributeurs principaux \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 , puis des contributeurs d'ordre plus élevé : \mathbf{J}_5 , \mathbf{J}_6 , \mathbf{J}_8 , \mathbf{J}_9 , ...

On pourrait de la même façon identifier les composantes prépondérantes pour le rayonnement dans toute autre direction. Il en est de même pour l'étude du rayonnement bistatique, i.e. lorsque les angles d'incidence et d'observation diffèrent.

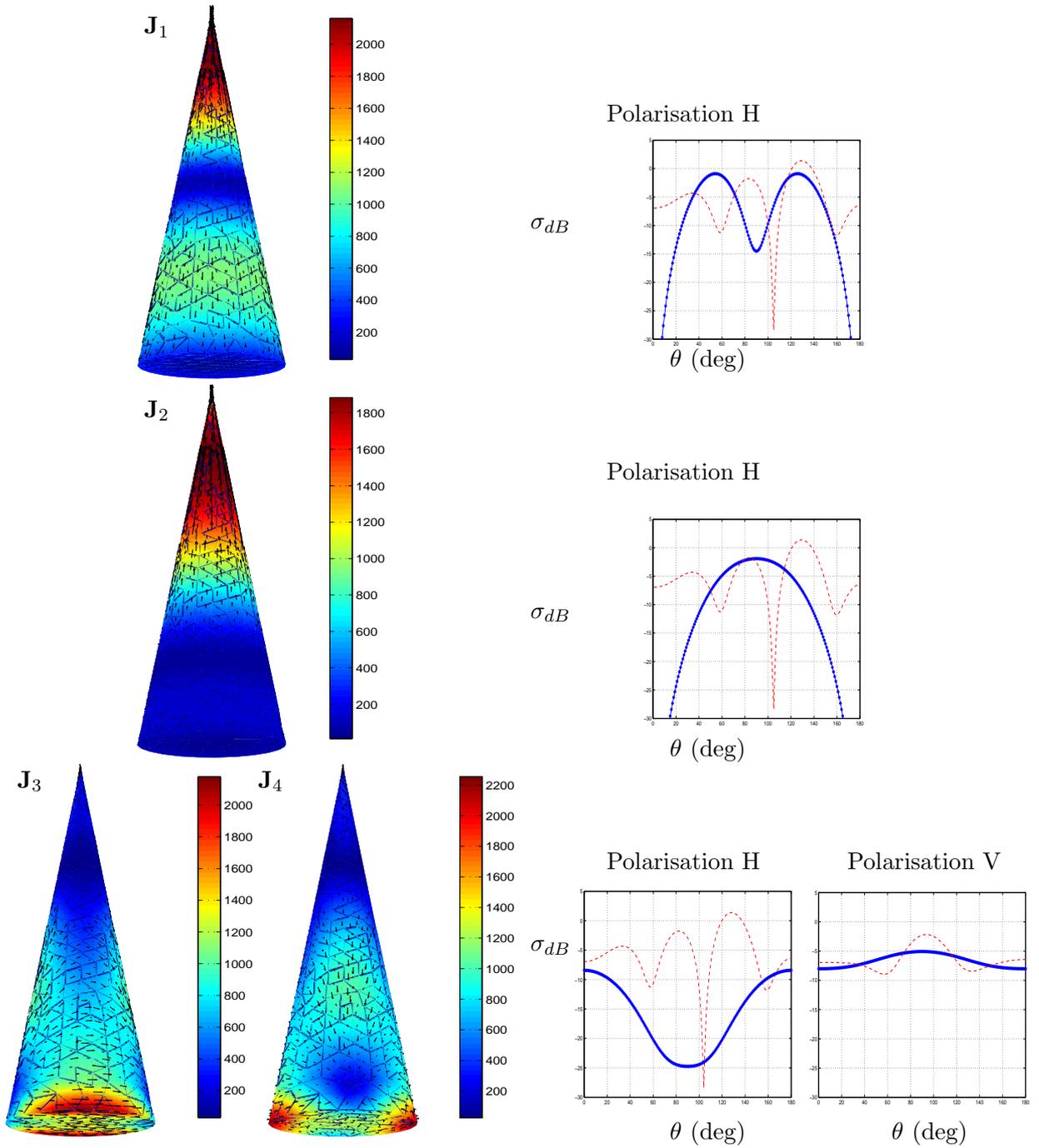


FIG. IV.15 – Premiers courants caractéristiques du cône droit, SER monostatique totale (pointillés rouge) et SER monostatiques caractéristiques associées (bleu).

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

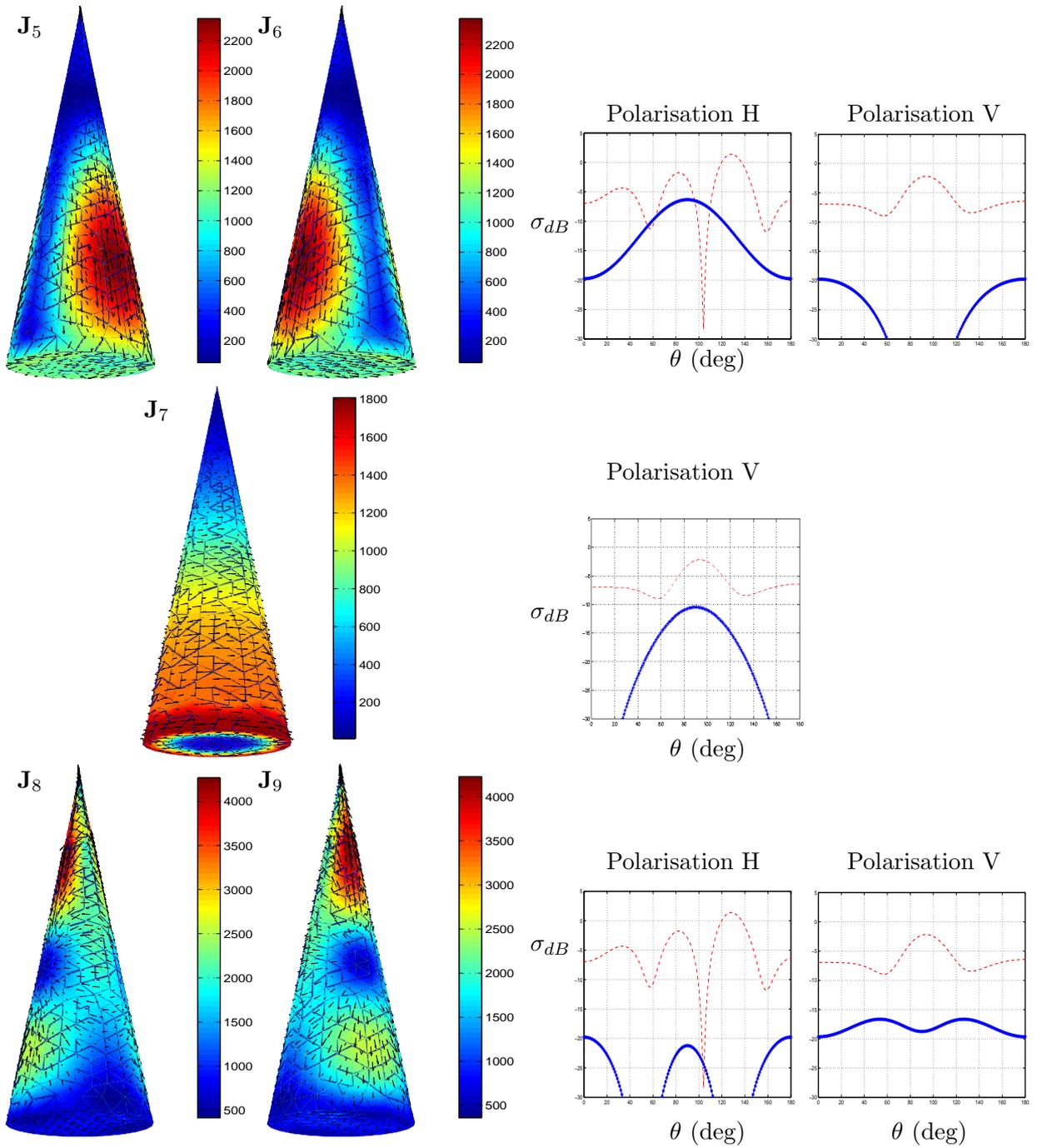


FIG. IV.16 – Premiers courants caractéristiques du cône droit , et SER monostatique associée (suite).

3.2 Comparaison cône droit / cône sphère / cône droit sans pointe

On illustre dans ce paragraphe l'intérêt de la DCC en terme d'identification, sur la surface de l'objet, des zones sollicitées vis-à-vis d'un rayonnement particulier. On identifie ainsi des zones principalement sollicitées sur l'objet, ainsi que la nature des courants prépondérants circulants dans ces zones.

On compare tout d'abord trois géométries grâce à l'utilisation de la DCC :

- le cône droit (ou cône de référence, présenté dans le paragraphe précédent),
- le cône tronqué : le cône droit auquel on a “coupé” la pointe, de manière à étudier la contribution de la diffraction de la pointe (contribution importantes dans le domaines des hautes fréquences, voir [8], [10] par exemple),
- le cône-sphère : le fond est “arrondi” (contribution, dite “d'arrête”, importante en haute fréquence).

On étudie ainsi d'une part l'influence d'une perturbation de la géométrie, la perturbation restant faible devant la longueur d'onde, dans la comparaison cône / cône tronqué.

D'autre part, on étudie l'influence en zone de résonance d'un “lissage” de la géométrie. Dans les domaines hautes fréquences, cette modification induit des changements conséquents des champs rayonnés, car elle élimine une singularité de la géométrie.

L'influence de ces modifications sur la SER est illustrée figure IV.19.

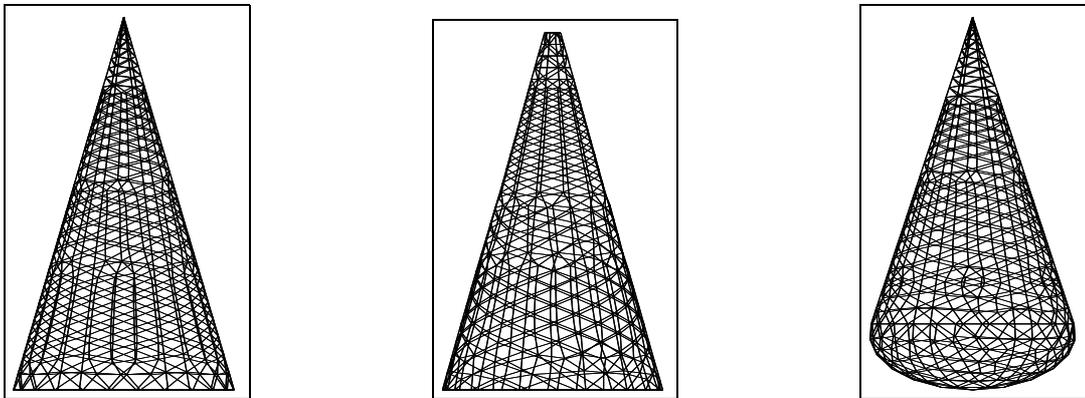


FIG. IV.17 – Maillage du cône droit, cône tronqué et du cône sphère.

On commence par comparer les valeurs caractéristiques pour chacune des géométries. Leur distribution est donnée figure IV.18. Ces distributions sont sensiblement identiques pour les trois formes de cône ; chaque mode caractéristique du cône de référence devrait par conséquent avoir son “équivalent” sur les deux autres géométries et rayonner de manière comparable (en énergie).

On poursuit cette étude comparative en s'intéressant directement aux modes caractéristiques. On sépare pour cela les comparaisons cône /cône tronqué et cône /cône-sphère.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

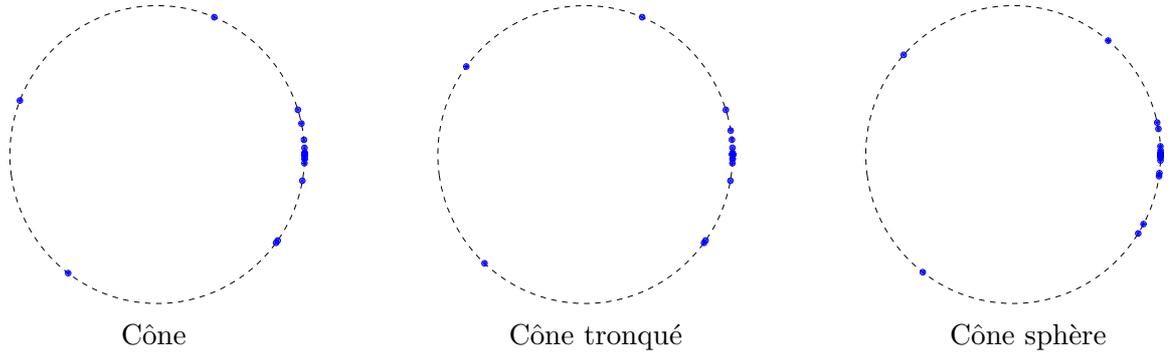


FIG. IV.18 – Répartition sur le cercle unité des valeurs caractéristiques de \mathcal{S} pour les trois géométries coniques.

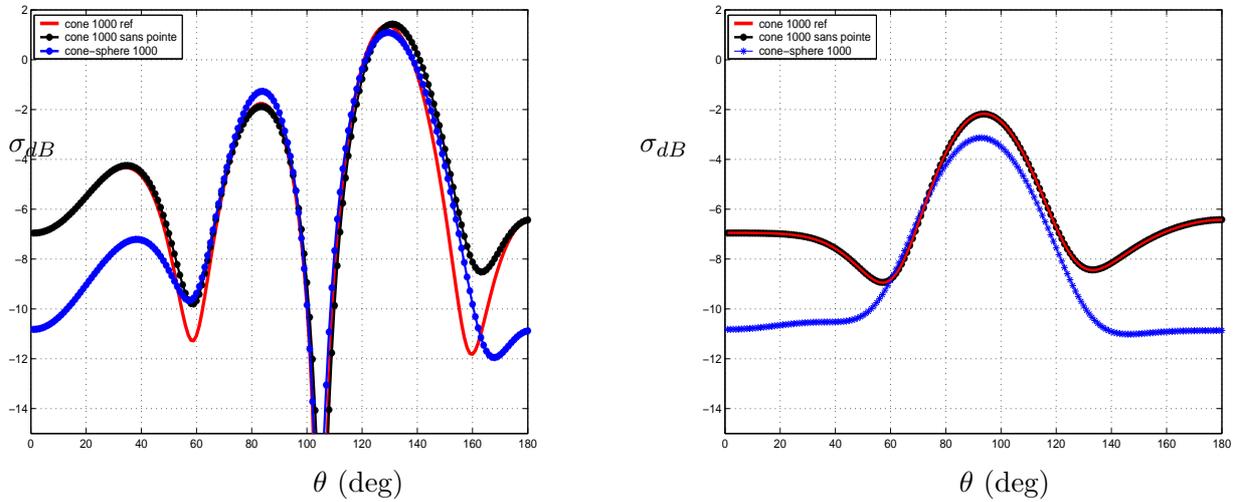


FIG. IV.19 – SER monostatiques comparées des trois cônes, en polarisation H (gauche) et V (droite)

3.2.1 Influence de la pointe en zone de résonance : Comparaison cône / cône tronqué

On s'intéresse maintenant tout spécifiquement à l'influence de la pointe du cône.

Dans les domaines hautes fréquences, cette singularité de la géométrie est un contributeur secondaire pour la diffraction, voir paragraphe -2.2, ou [10], [8] par exemple.

La comparaison de la SER de ces deux géométries coniques est présentée sur la figure IV.20. On s'aperçoit que l'influence de la pointe est faible en zone de résonance (la fréquence d'étude est $f = 300$ MHz, soit $\lambda = 1m = h$) : le détail précis de la singularité devient trop faible pour être "vu" par l'onde incidente.

D'une manière générale, les singularités de la géométrie sont d'autant plus prépondérantes dans la signature radar de l'objet que la longueur d'onde est courte (fréquence élevée). Au contraire, plus la longueur d'onde de l'excitation est grande vis-à-vis de la taille de l'objet, plus

3 Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône

les détails fins de la géométrie sont sans conséquence notable sur la SER.

La figure IV.20 illustre ce point.

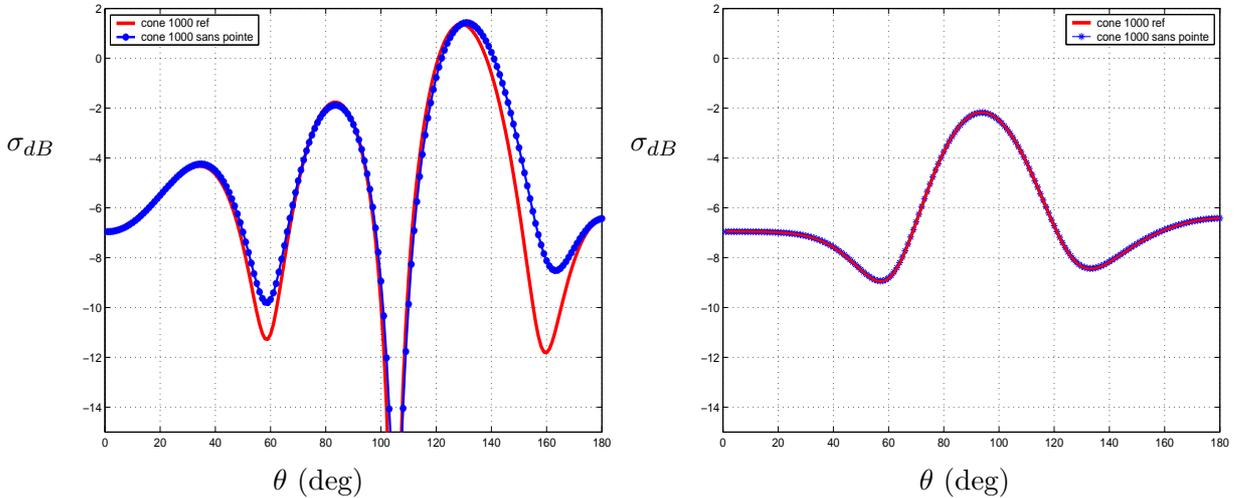


FIG. IV.20 – Comparaison des SER cône / cône sans pointe.

On présente sur la figure IV.21 l'analyse des différences entre le cône de référence et celui tronqué, grâce à la décomposition en courants caractéristiques calculée sur chacun d'eux.

Comme attendu, les courants caractéristiques perturbés par la modification de la géométrie sont ceux qui étaient importants sur la zone modifiée de celle-ci. Dans ce cas, seul les deux premiers courants sont forts au niveau de la pointe du cône ; les champs lointains caractéristiques associés sont les seuls modifiés.

Les autres modes restent imperturbés, de même que leur champ lointain associé, et les SER caractéristiques.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

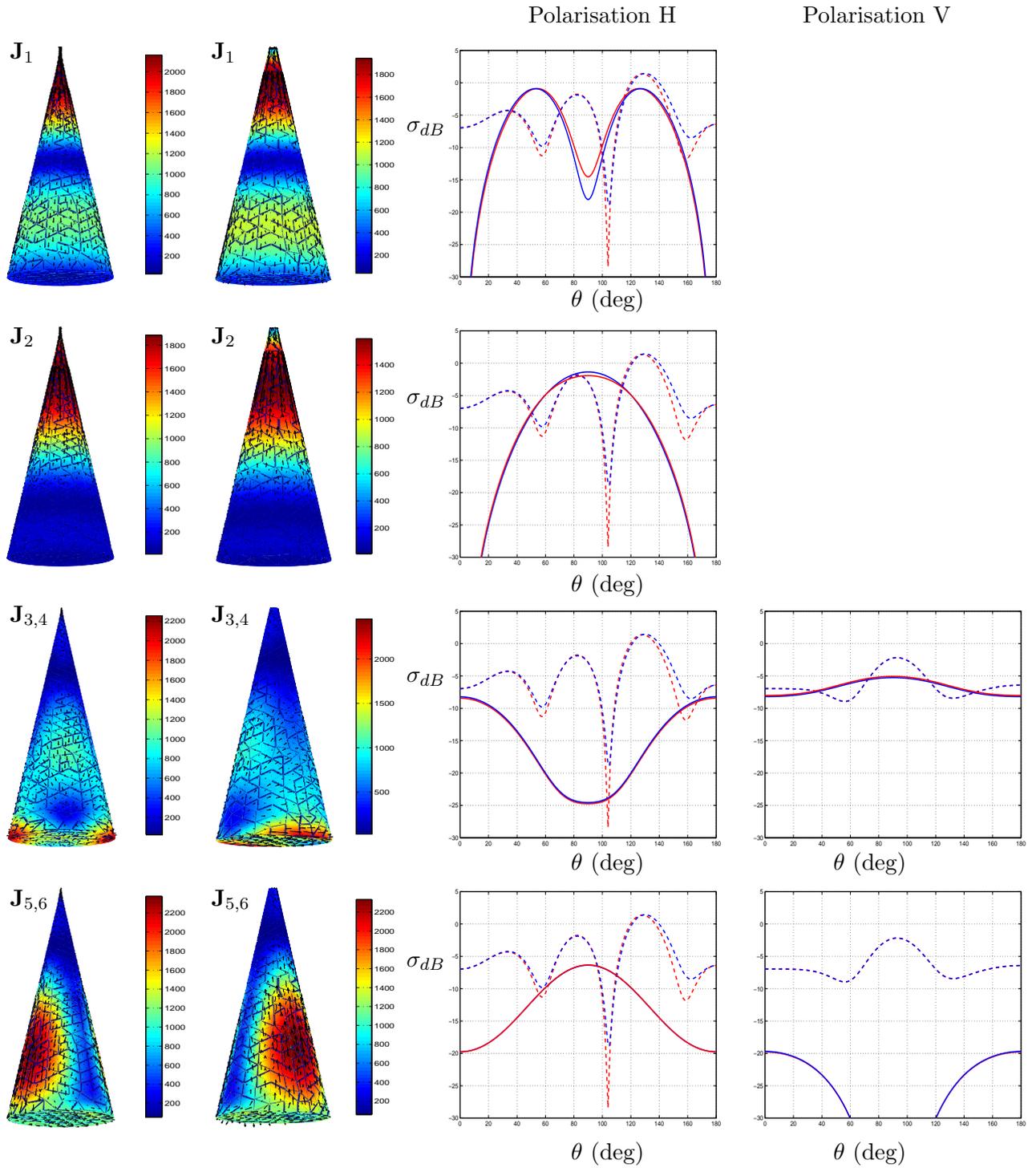


FIG. IV.21 – Comparaison courant / SER caractéristique associée pour cône /cône sans pointe.

3 Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône

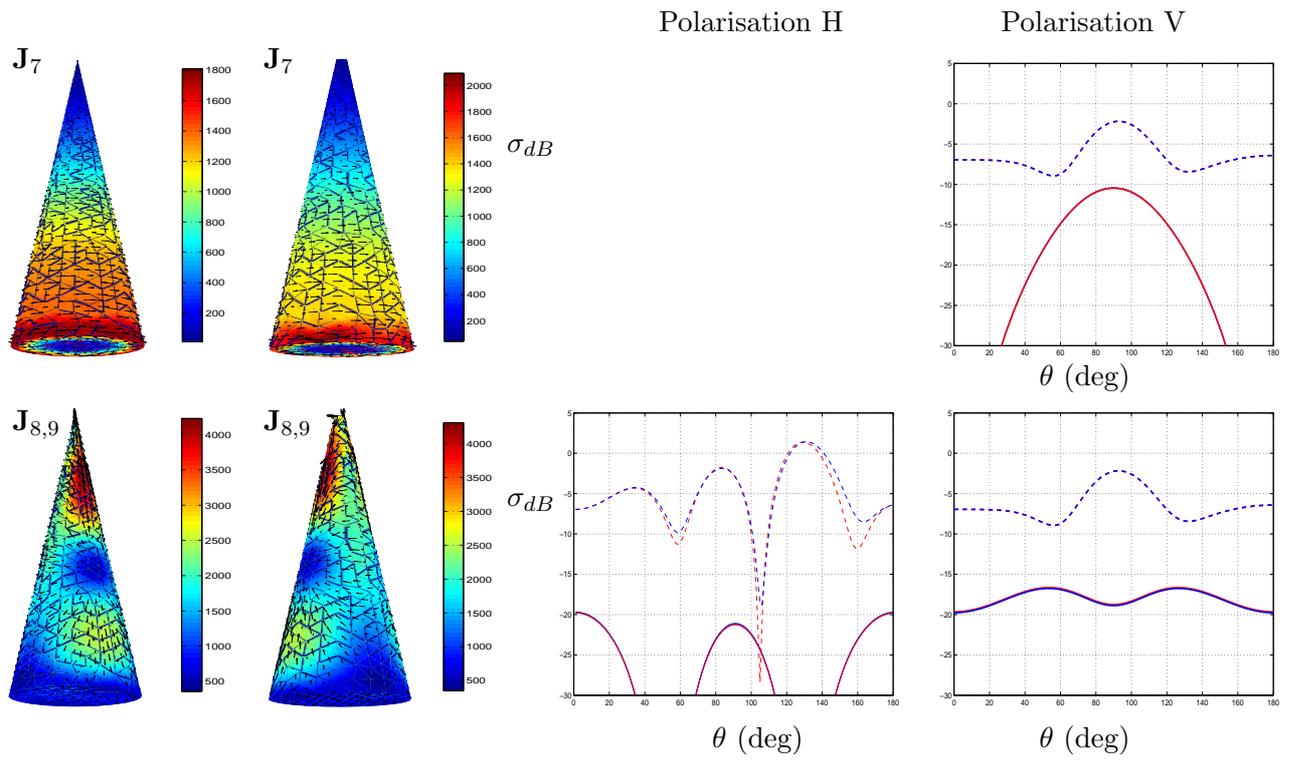


FIG. IV.22 – Comparaison courant / SER caractéristique associée pour cône /cône sans point (suite) .

3.2.2 Comparaison cône / cône-sphère

On reprend la même étude que dans le paragraphe précédent, le cône-sphère remplaçant le cône tronqué.

Dans ce cas, l'écart sur la SER est bien plus prononcé entre ces deux formes coniques, voir figure IV.23.

On rappelle que pour des fréquences plus élevées, la singularité de la géométrie due à l'arête de fond du cône droit est un contributeur important à la SER. Le "lissage" effectué lors du passage du cône au cône-sphère influe ainsi nettement sur la SER.

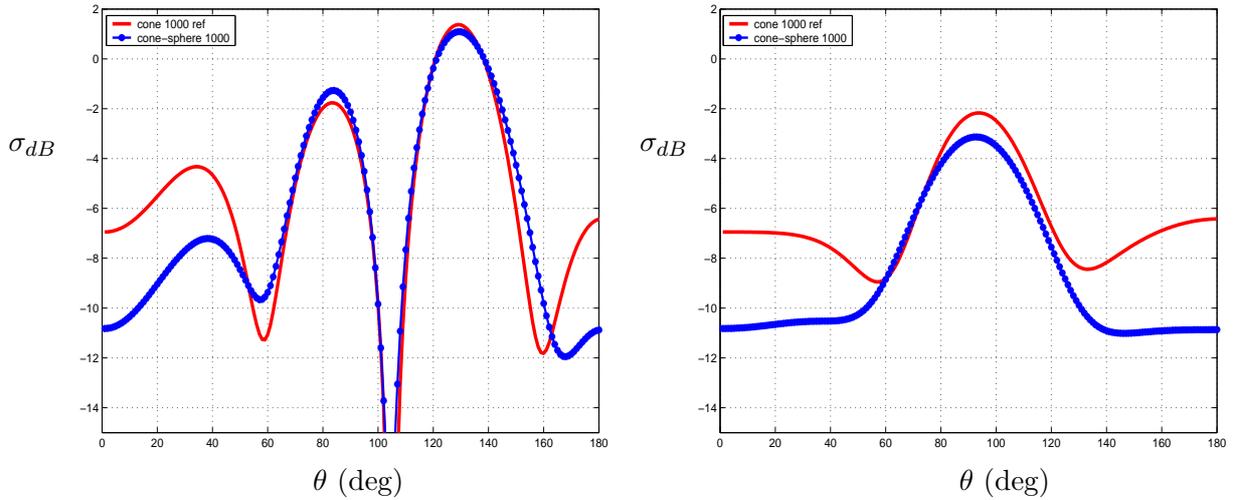


FIG. IV.23 – Comparaison des SER monostatiques du cône de référence (rouge) et du cône-sphère (bleu), en polarisation H (gauche) et V (droite).

On présente figures IV.24 et IV.25 les courants caractéristiques des deux cônes, ainsi que leur SER monostatique caractéristique associée (polarisation H et V, resp. gauche et droite).

Les modes précédemment désignés comme modes de pointe (les courants de forte intensité au niveau de la pointe du cône) ne sont pas perturbés par la différence de géométrie. D'une manière plus générale, les courants sont d'autant moins perturbés par le changement de géométrie, qu'ils sont de distribution faible au niveau de ce changement. C'est le cas des courants \mathbf{J}_1 , \mathbf{J}_2 , \mathbf{J}_8 et \mathbf{J}_9 .

Ceux restants, les courants \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 (toujours courants propres multiples) et \mathbf{J}_7 sont sensiblement perturbés, ainsi que leur rayonnement caractéristique.

Les courants \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 sont particulièrement importants au niveau de la base du cône, ou de la jonction cône /sphère. Ceux-ci sont donc principalement responsables des variations de SER observées entre ces deux cônes :

- une diminution globale en polarisation H,
- une diminution conséquente en secteur avant (~ 5 dB sur le secteur $[0, 30]$), en polarisation V.

3 Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône

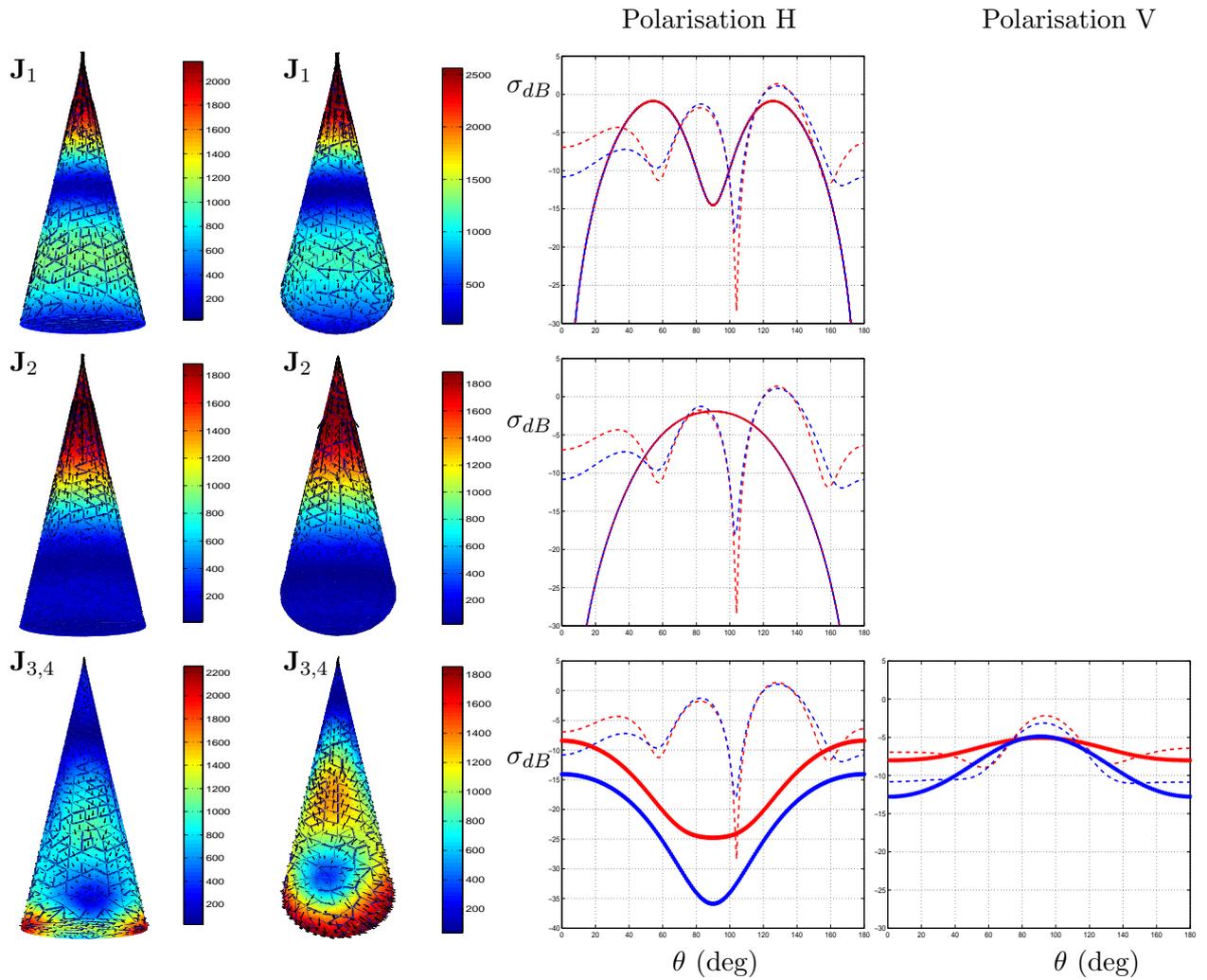


FIG. IV.24 – Comparaison courant / SER caractéristique associée pour cône /cône sphère.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

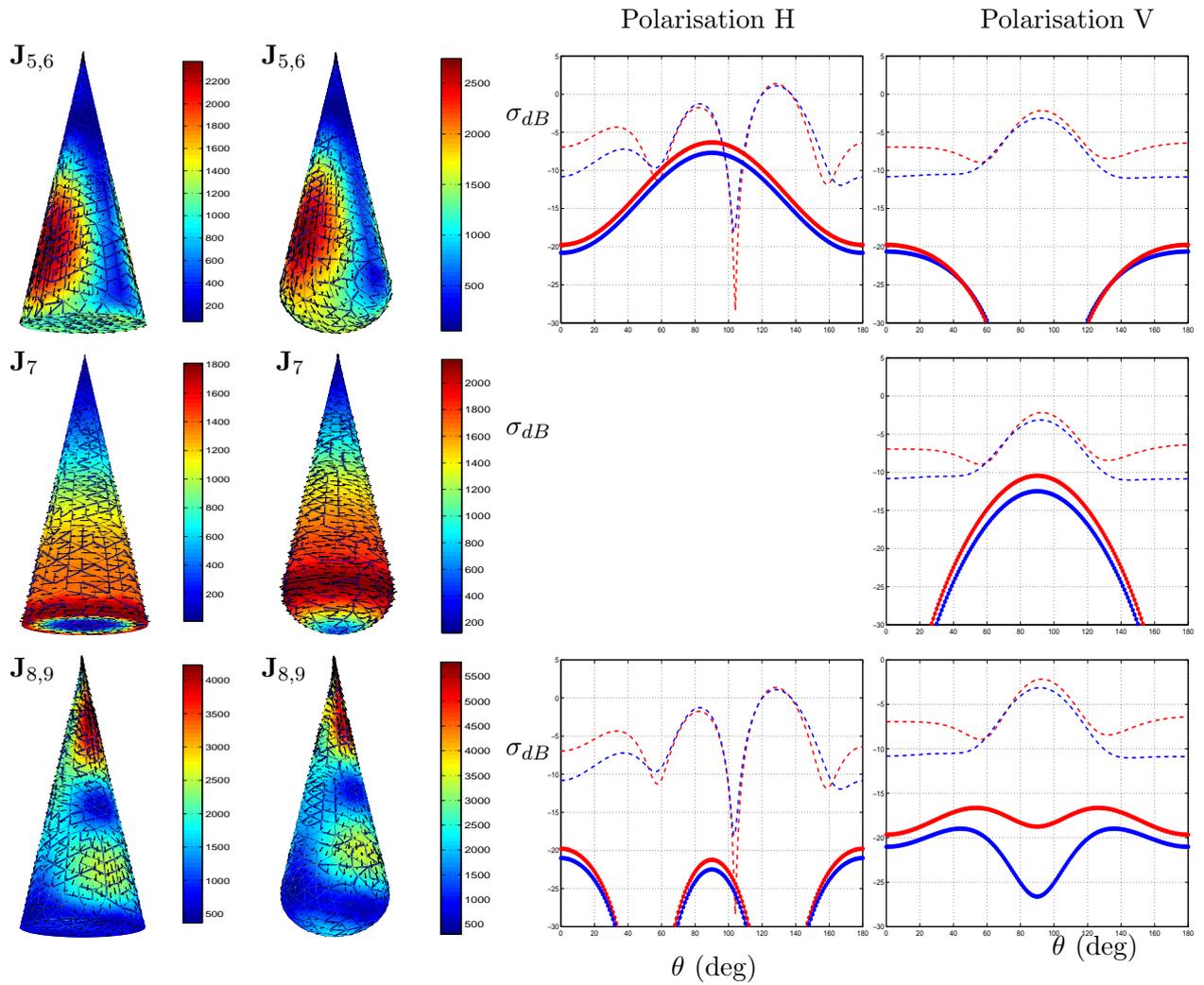


FIG. IV.25 – Comparaison courant / SER caractéristique associée pour cône / cône sphère (Suite).

3.3 Contrôle passif de la SER du cône

On propose trois traitements simples de la surface du cône permettant une réduction significative de sa SER en secteur avant. On définit ce secteur avant comme la bande angulaire $[0, 50]$, relativement large.

Étant donné la symétrie de révolution, le traitement doit nécessairement respecter la même symétrie ; on rappelle pour cela que les axes “x et y” utilisés jusqu’ici sont définis à une convention, arbitraire pour le moment, d’orientation près. Ainsi, par exemple, il n’y a pas lieu de faire une distinction entre les courants \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 du cône droit, cf. figure IV.15, qui sont l’image l’un de l’autre par une rotation de 90 (ces deux courants forment une base d’un espace propre de dimension 2, toute combinaison linéaire de ces derniers fournirait par ailleurs deux autres vecteurs de base de ce sous-espace).

Remarque 14 *Pour être plus précis, l’opérateur d’EFIE commute avec le groupe des rotations autour de l’axe z. De cette façon, chaque courant caractéristique est défini à une rotation autour de l’axe z près, en d’autres termes un courant caractéristique ayant subi une rotation quelconque autour de l’axe z est encore un courant caractéristique.*

La donnée de l’excitation, c’est-à-dire de la direction d’illumination de l’onde incidente (plus précisément du plan d’incidence), permet de fixer par la suite une convention absolue pour le repère (x, y, z) .

De cette façon, le contrôle passif d’un cône se limite à choisir des bandes circulaires ayant une impédance complexe à partie réelle positive ou nulle.

On se penche maintenant plus particulièrement sur la décomposition en courants caractéristiques du cône droit, figures IV.15 et IV.16

Le rayonnement dans le secteur avant du cône peut être attribué de manière prépondérante aux six premiers courants :

- les deux premiers modes pour le secteur angulaire $[40, 60]$,
- les deux suivants (\mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4) pour le secteur avant $[0, 30]$,
- les contributions secondaires (\mathbf{J}_5 et \mathbf{J}_6) pour le secteur $[0, 30]$.

Les courants \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 sont localisés sur l’arête de base du cône ; leur contribution est ainsi fortement modifiée lors du passage de cône droit au cône sphère, i.e. au cône à fond sphérique, puisque la singularité de la géométrie disparaît. On renvoie au paragraphe précédent, sur l’intercomparaison cône - cône-sphère, pour plus de détails sur ce point.

Ainsi, le choix du cône sphère est plus judicieux pour la réduction de la SER. C’est la forme de base que nous adopterons.

On observe que le changement cône - cône sphère modifie peu les courants caractéristiques ; les courants prépondérants restent localisés sur le fond du cône.

Un comportement du même ordre peut être observé pour les composantes \mathbf{J}_5 et \mathbf{J}_6 .

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

Les figures IV.26 et IV.27 s'intéressent d'un peu plus près au comportement de ces courants sur la partie sphérique du cône. Leur traitement doit permettre le contrôle du rayonnement en secteur avant du cône.

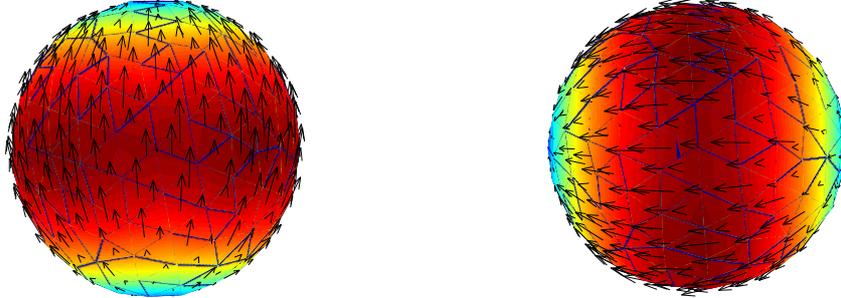


FIG. IV.26 – Courants caractéristiques 3 et 4 du cone-sphère, vue de dessous (fond du cône).

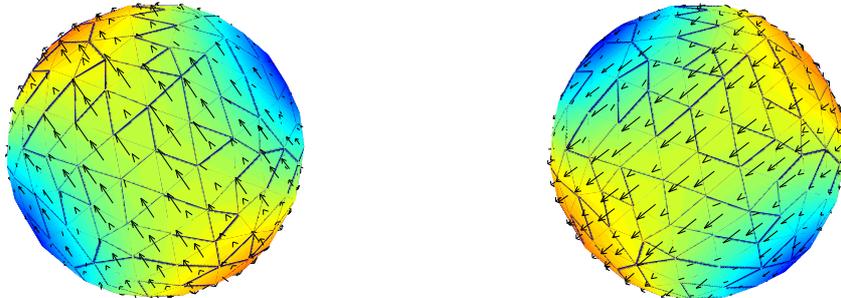


FIG. IV.27 – Courants caractéristiques 5 et 6 du cone-sphère, vue de dessous (fond du cône).

A partir des observations précédentes et des représentations plus précises, figures IV.26 et IV.27, du comportement de ces courants sur le fond du cône, on propose les modes de contrôle suivants :

- considérer un cône sphère dont la partie sphérique est absorbante, voir figure IV.28 ;
- la même configuration que précédemment, mais avec simplement une “bande” impédante ; à partir des observations précédentes (en particulier du comportement de ces courants sur le fond, figures IV.26 et IV.27), ce traitement devrait être directement comparable au précédent, car “coupant” ces courants de fond (\mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4). C’est ce que l’on observe figure IV.29,
- en vue d’une meilleure réduction de SER, et sur une bande angulaire plus large, le contrôle des deux premiers courants, \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , se révèle tout aussi nécessaire (contrôle des contributions secondaires purement axiales). Ces courants sont de nature longitudinale sur le corps du cône (ils se propagent le long de la génératrice du cône) et oscillante. Pour dissiper au maximum ces deux modes, on a recourt à deux bandes impédantes situées aux ventres de ces deux modes, voir figure IV.30 ;

3 Application au contrôle de SER d'un objet canonique : le cône

- pour finir, on combine ces traitements pour obtenir un cône qui, après traitement, voit sa SER monostatique en secteur avant dans une bande assez large $([0, 50])$ et dans les deux polarisations diminuer significativement, voir figure IV.30.

Les impédances z considérées ici sont toutes réelles pures et unitaires, i.e. $z = 1$. Le cône ainsi obtenu est un cône parfaitement conducteur sur lequel sont “collés” quelques bandes absorbantes.

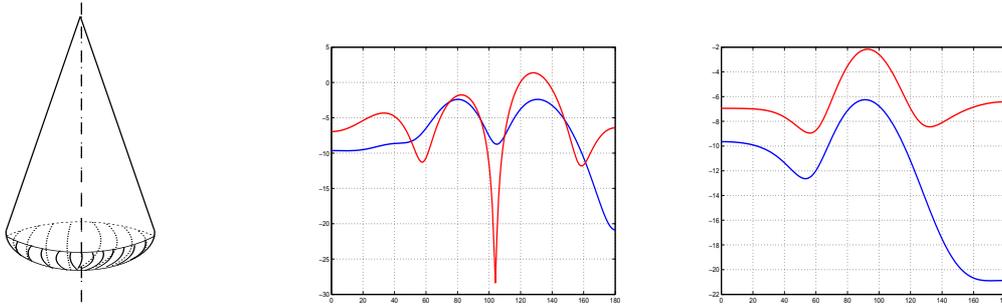


FIG. IV.28 – Cône-sphère avec impédance de fond.

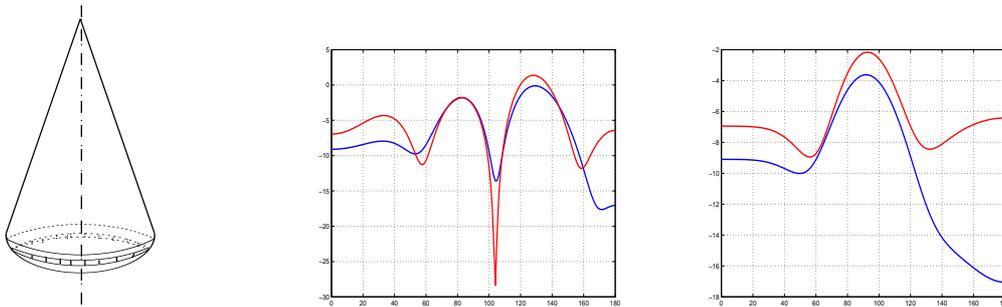


FIG. IV.29 – Cône-sphère avec bande impédante de fond.

Les traitements proposés sur les figures IV.28 et IV.29 produisent les effets attendus sur la SER, i.e. une diminution en secteur avant. Cette diminution reste néanmoins assez modeste.

L'effet du traitement présenté figure IV.29 est directement comparable à celui proposé figure IV.28. Ce résultat était celui escompté, suite à l'analyse plus précise du comportement des courants prépondérants sur le fond du cône.

Les traitements proposés figures IV.30 et IV.31 fournissent les résultats souhaités sur la SER : une réduction de la SER (significative, de l'ordre de 10 dB) sur le secteur angulaire $[0, 50]$.

On remarque que le contrôle seul des courants \mathbf{J}_1 et \mathbf{J}_2 , qui ne contribuent pas dans l'axe, diminue significativement la SER dans l'axe. On peut expliquer ce résultat en remarquant que le traitement utilisé dans ce cas influe aussi sur les courants \mathbf{J}_3 et \mathbf{J}_4 qui ont un comportement non négligeable sur le corps du cône.

IV Applications de la décomposition en courants caractéristiques

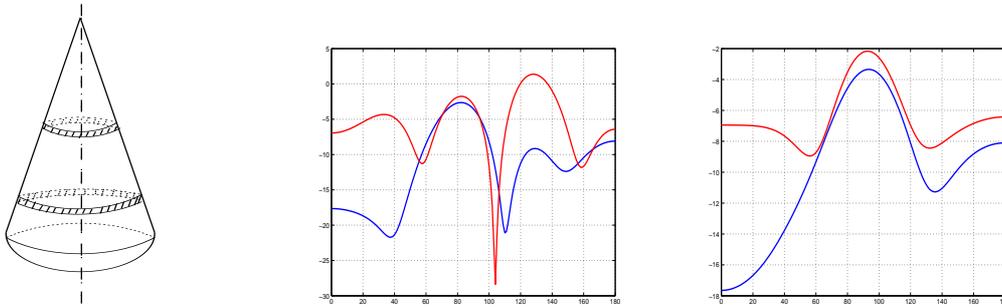


FIG. IV.30 – Cône-sphère avec bande impédante sur le corps.

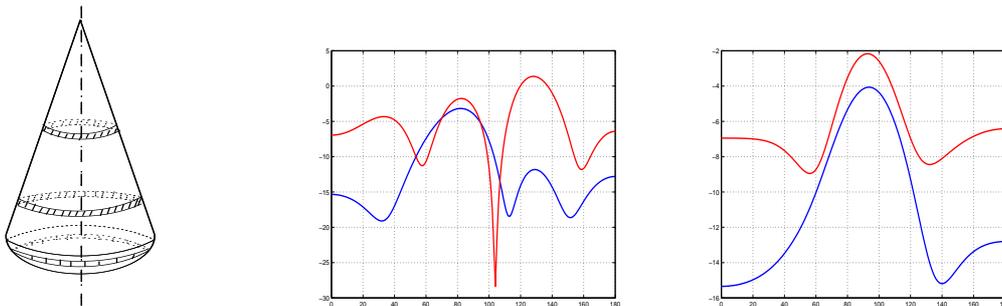


FIG. IV.31 – Superposition des modes de contrôle précédents du cône-sphère.

4 Conclusion sur les applications

Dans ce chapitre, après avoir exhibé des modes caractéristiques sur un objet purement 3-D (l'amande NASA), puis avec symétrie de révolution (le cône), on s'est intéressé à l'application de ces décompositions pour :

- l'identification sur la surface de l'objet de la (des) zone(s) réellement sollicitée(s) pour la diffraction monostatique dans un secteur angulaire privilégié ;
- puis par la suite, au travers de l'étude d'un cône et de deux "variantes" proches, le cône tronqué et le cône-sphère, l'analyse en terme de SER de ces éléments caractéristiques.

L'analyse, dans le cas du cône tout particulièrement, nous a permis de montrer l'intérêt pratique de cette base de courants. Ceux-ci permettent en effet dans un premier temps, et tout particulièrement à basse fréquence, de diminuer conséquemment le nombre de paramètres à manipuler (dans nos cas étudiés, quelques modes, une dizaine...) et dans un deuxième temps de fournir des éléments simples et intuitifs d'analyse. En effet, une fois la décomposition effectuée, chaque grandeur observable (SER, champ lointain, voire aussi champ proche...) se trouve être directement liée à une cause sur l'objet : un courant.

Ce courant étant de plus intrinsèque à l'objet (il ne dépend que de la géométrie de l'objet, et non pas de l'excitation, onde incidente ou alimentation), il constitue une composante "dans l'absolu" du phénomène observé.

Cette définition intrinsèque à l'objet est un point fort de cette décomposition. Rappelons à ce titre que la méthode des points brillants, méthode abondamment utilisée pour des fréquences plus élevées, souffre de cette dépendance vis-à-vis de l'excitation et de l'observation.

L'analyse et le contrôle de la SER du cône présentés dans le paragraphe précédent est, à notre connaissance, la première méthode proposée permettant ce type de traitement à la fois simple et rapide dans des domaines basses fréquences, à l'instar des méthodes hautes fréquences (points brillants, tracés de rayon, TGD, ...), qui se trouvent être inadaptées à des fréquences plus faibles (en zone de résonance en particulier).

V Contrôle et optimisation d'antennes

Une propriété fondamentale des éléments caractéristiques est qu'ils sont intrinsèques à l'objet (à une fréquence donnée). En particulier, ils ne dépendent pas de l'excitation à laquelle on soumet l'objet.

On a appliqué, au chapitre précédent, la DCC à l'étude de la diffraction par un objet, i.e. l'étude du rayonnement généré par un objet lorsque celui-ci est illuminé par une onde électromagnétique incidente. Nous avons vu que, dans ce cas, l'excitation réellement prise en compte est la trace sur la surface de l'objet de l'onde incidente.

Dans ce chapitre, on s'intéresse à un problème de nature très proche : l'étude du rayonnement d'une antenne. Ce problème diffère du précédent, étudié jusqu'ici, seulement par la nature de l'excitation fournie à l'objet. Comme nous l'avons déjà brièvement introduit en II-1.6.1, l'étude des champs émis par une antenne est identique à celle des champs diffractés par un objet, la donnée étant maintenant une "fonction alimentation", définie sur la surface de l'objet.

Dans le cas où l'antenne est alimentée par N générateurs de tension localisés (idéalement) aux points $x_i \in \Gamma$, $i = 1 \dots N$ et d'amplitude respective V_i , l'excitation de l'antenne peut être modélisé, en première approximation par la distribution

$$G(x) = \sum_{i=1}^N V_i \delta(x - x_i).$$

De cette façon, l'étude des champs diffractés par un objet menées précédemment peut être reconduite, en substituant les (traces) des ondes planes incidentes par la fonction d'alimentation $G(x)$ ci-dessus.

Dans la plupart des cas, une antenne est en contact avec un support de taille bien supérieure.

Dans le domaine des hautes fréquences, lorsque la longueur d'onde est faible devant la taille de l'antenne considérée, le principe de localisation des phénomènes permet d'étudier l'antenne seule, puis de considérer que sa mise en situation sur son support ne modifie pas son comportement.

Inversement, pour des basses fréquences, lorsque la longueur d'onde est de la taille de l'antenne considérée, voire inférieure, l'étude doit être menée en situation : l'ensemble support + antenne doit être globalement prise en compte.

On propose ainsi dans ce chapitre de mettre en oeuvre la décomposition en courants caractéristiques, et de montrer l'intérêt de cet outil de décomposition modale pour l'analyse du rayonnement d'antenne.

Un problème courant en matière d'étude d'antennes est le suivant : étant donné un diagramme de rayonnement, quelle est l'alimentation à fournir à une antenne (toujours supposée

V Contrôle et optimisation d'antennes

parfaitement conductrice) de manière à obtenir un diagramme de rayonnement souhaité (i.e. des champs lointains rayonnés donnés).

On montrera ainsi que, par exemple, le problème de la détermination de l'alimentation optimale vis-à-vis de certains critères (puissance totale rayonnée, directivité de l'antenne, ...) peuvent être traité en utilisant les bases d'éléments caractéristiques.

On donne ci-dessous les différentes grandeurs de prime intérêt :

- la directivité

$$D(\hat{x}) := |e(\hat{x})|^2 / \|e\|^2$$

quantifie la quantité d'énergie rayonnée par l'antenne dans la direction \hat{x} ;

- la directivité efficace

$$G(\hat{x}) := |e(\hat{x})|^2 / \|\mathbf{J}\|^2$$

quantifie la quantité d'énergie rayonnée la direction \hat{x} par rapport à l'énergie dissipée au niveau de l'antenne ;

- le facteur de qualité pour un courant

$$Q(\mathbf{J}) := \|\mathbf{J}\| / \|\mathbf{e}\|$$

rend compte de l'énergie totale rayonnée par un courant,

- et le rendement de l'antenne

$$\mathcal{R}(\mathbf{J}) = \frac{\mathcal{P}_F}{\mathcal{P}_R} = \frac{\text{Puissance fournie à l'antenne}}{\text{Puissance rayonnée à l'infini}}.$$

De la même façon, on peut consacrer l'étude à un secteur angulaire particulier $\hat{\theta}$. Dans ce cas, on introduit la fonction caractéristique α du secteur angulaire :

$$\alpha(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{dans un certain angle solide } \hat{\theta}, \\ 0 & \text{ailleurs,} \end{cases}$$

et on considère les grandeurs introduites précédemment pondérées par la fonction caractéristique de $\hat{\theta}$:

$$D[\alpha] = \|\alpha e(\hat{x})\|^2 / \|\mathbf{J}\|^2$$
$$\mathcal{R}_\alpha(\mathbf{J}) = \frac{\mathcal{P}_F}{\mathcal{P}_R^\alpha} = \frac{\mathcal{P}_F}{\|\alpha e(\hat{x})\|^2}.$$

1 Optimisation de la puissance rayonnée

On s'intéresse ici au courant sur l'antenne qui permet de maximiser la puissance rayonnée, à puissance fournie constante. La puissance rayonnée étant définie globalement (intégrale sur toute la sphère à l'infini du champ lointain), aucune notion de directivité n'est pour le moment prise en compte.

On rappelle tout d'abord la formule de Green, D désignant un ouvert quelconque de \mathbb{R}^3 borné, de frontière ∂D (supposée régulière, C^2 au moins) de normale sortante \mathbf{n} ,

$$\int_D (\mathbf{rot} U \cdot V - \mathbf{rot} V \cdot U) dx = \int_{\partial D} (\mathbf{n} \times (U \times \mathbf{n})) \cdot (V \times \mathbf{n}) ds. \quad (1)$$

On applique cette formule pour les champs de vecteurs $U = \mathbf{E}$ et $V = \overline{\mathbf{H}}$, dans l'ouvert $D_R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| < R\}$ de frontière $\partial D_R = \Gamma \cup \Gamma_R = \Gamma \cup \{x \in \mathbb{R}^3; \|x\| = R\}$, et on utilise la définition (16) des courants électriques :

$$\begin{aligned} \int_{D_R} (\mathbf{rot} \mathbf{E} \cdot \overline{\mathbf{H}} - \mathbf{rot} \overline{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{E}) dx &= ik\eta_0 \int_{D_R} (\mu_0 |H|^2 - \varepsilon_0 |E|^2) dx \\ &= \int_{\Gamma} \mathbf{E}_t^i \cdot \overline{\mathbf{J}} ds + \int_{\Gamma_R} (\hat{x} \times (\mathbf{E} \times \hat{x})) \cdot (\overline{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}) ds, \end{aligned} \quad (2)$$

la première égalité provenant des équations de Maxwell (1).

On utilise maintenant la relation reliant les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} infiniment loin de l'objet

$$\mathbf{E}(x) = \eta_0 \hat{x} \times \mathbf{H}(x), \quad \text{pour } x \rightarrow \infty,$$

dans l'intégrale sur Γ_R de la deuxième égalité de (2), qui se réécrit finalement à l'infini

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma_R} (\hat{x} \times (\mathbf{E} \times \hat{x})) \cdot (\overline{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}) ds = \frac{1}{\eta_0} \int_S |\mathbf{E}^\infty|^2 = \frac{1}{\eta_0} \|\mathbf{E}^\infty\|^2. \quad (3)$$

Le terme intégré sur la surface de l'objet Γ peut quant à lui se réécrire

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{E}_t^i \cdot \overline{\mathbf{J}} ds &= (\mathbf{E}_t^i, \mathbf{J}) = i\eta_0 (T\mathbf{J}, \mathbf{J}) \\ &= i\eta_0 (T_R \tilde{\mathbf{J}}, \mathbf{J}) + \frac{1}{\eta_0} (T_I \tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{J}}) \\ &= i\eta_0 (T_R \mathbf{J}, \mathbf{J}) + \frac{1}{\eta_0} \|a^\infty \mathbf{J}\|^2. \end{aligned}$$

On aboutit ainsi à la relation

$$(T_R \mathbf{J}, \mathbf{J}) = k \int_{D_R} (\mu_0 |H|^2 - \varepsilon_0 |E|^2) dx,$$

tandis que, en terme de bilan de puissance, on peut écrire

$$\mathcal{P}_F = \mathcal{P} + \mathcal{P}_R, \quad (4)$$

où,

V Contrôle et optimisation d'antennes

- \mathcal{P}_F est la puissance fournie à l'antenne,
- \mathcal{P}_R est la puissance rayonnée à l'infini,
- \mathcal{P} est une autre puissance définie suivant,

$$\mathcal{P} = k \int_{D_R} (\mu_0 |H|^2 - \varepsilon_0 |E|^2) dx.$$

Si on s'intéresse à la maximisation de l'énergie rayonnée par un certain courant, on est amené à considérer la maximisation du rendement de l'antenne introduit précédemment, soit

$$\max \mathcal{R}(\mathbf{J}) = \max \left| \frac{\mathcal{P}_R}{\mathcal{P}_F} \right| = \frac{1}{\eta_0} \left| \frac{1}{1 - i \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_R}} \right| = \frac{1}{\eta_0} \left| \frac{1}{\sqrt{1 + \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_R} \right|^2}} \right|.$$

La maximisation ci-dessus revient en fin de compte à la minimisation

$$\min \left| \frac{\mathcal{P}}{\mathcal{P}_R} \right| = \min \left| \frac{(T_R \mathbf{J}, \mathbf{J})}{(T_I \mathbf{J}, \mathbf{J})} \right|.$$

Ce quotient à minimiser est connu sous le nom de quotient de Rayleigh. Le minimum de ce quotient est atteint en \mathbf{J}_1 , le courant caractéristique associé à la valeur caractéristique λ_1 de plus faible module, et sa valeur est λ_1 .

D'après ce qui précède, la manière optimale d'alimenter une antenne, en terme de puissance rayonnée, est celle qui permet d'obtenir un courant égal au premier courant caractéristique (le courant caractéristique associé à la valeur propre de plus petit module).

2 Synthèse de diagramme d'antenne

La base de courants caractéristiques constitue une base intéressante pour l'approximation d'un courant quelconque sur un objet.

L'approximation d'un diagramme de rayonnement souhaité par l'intermédiaire des premiers courants caractéristiques permet de se restreindre à des courants qui rayonnent une puissance conséquente à l'infini.

Le compromis puissance rayonnée / diagramme de rayonnement bien approché se retrouve alors dans le choix du nombre de courants caractéristiques utilisés dans le développement du courant recherché : d'une part, plus un grand nombre de courants caractéristiques est utilisé dans l'approximation du diagramme souhaité, plus ce dernier sera bien approché, mais d'un autre côté, plus un grand nombre de courants à "faible rayonnement" (associés à un facteur de qualité faible) devront être excités. Ce dernier point se traduit facilement en termes de baisse de rendement de l'antenne.

On se donne un diagramme de rayonnement $\mathbf{e}(\hat{x})$, défini pour tout \hat{x} de la sphère unité S . On suppose que ce diagramme est celui d'un certain courant $\tilde{\mathbf{J}}$ que l'on souhaite alors approcher.

Soit $[\tilde{\mathbf{J}}_i]_{i=1..n}$ la discrétisation de ce courant sur la surface de l'objet. On introduit de la même façon la matrice $[\mathbf{J}] = (j_{p,q}) ; p = 1..n, q = 1..N$ des N premiers courants caractéristiques, telle que

$$[T_R] [\mathbf{J}] = \text{diag}(\lambda_k) [T_I] [\mathbf{J}] ,$$

et la matrice

$$[\mathbf{J}'] = \left(\frac{j_{p,q}}{\sqrt{i + \lambda_q}} \right) ; p = 1..n, q = 1..N ,$$

des courants caractéristiques pondérés par rapport à la valeur propre à laquelle ils sont associés. On notera $[X] = (x_k)_{k=1..n}$ l'excitation à déterminer. D'après la décomposition (26), le problème de l'approximation du diagramme de rayonnement $e(\hat{x})$ se formule suivant le problème de minimisation

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \left\| \tilde{\mathbf{J}} - \sum_{k=1}^N \frac{(X, \mathbf{J}_k)}{1 + i\lambda_k} \mathbf{J}_k \right\| . \quad (5)$$

Avec les notations introduites précédemment, ce problème peut se réécrire selon

$$\min_{X \in \mathbb{R}^n} \left\| [\tilde{\mathbf{J}}] - [A] [X] \right\| , \quad (6)$$

avec la matrice carrée (de dimension $n \times n$) symétrique et réelle

$$[A] = [\mathbf{J}']^t [\mathbf{J}'] ,$$

où ${}^t A$ désigne la matrice transposée de A .

L'utilisation de la base des courants caractéristiques dans ce problème d'optimisation permet ainsi de se ramener à la minimisation d'une forme quadratique.

3 Alimentation adaptée de l'antenne

Avec ce qui précède, on sait déterminer le courant électrique sur la surface de l'antenne qui produit un diagramme de rayonnement souhaité (ou s'en approche, suivant le réalisme dont fait preuve le diagramme recherché). La difficulté qui suit est, en général, de savoir quelle excitation fournir à l'antenne de manière à produire ce courant.

L'intérêt dans l'utilisation de la base de courants caractéristiques réside alors aussi dans le fait que l'excitation qui permet de produire un courant caractéristique particulier est connue.

D'après la définition 4 et le lemme qui suit (paragraphe 1.4, du chapitre II) , l'excitation à fournir à l'antenne de manière à produire le courant caractéristique d'ordre n (et ainsi le champ rayonné caractéristique d'ordre n) est donnée par

$$G_n = i\eta_0(\lambda_n + i)T_I \mathbf{J}_n = i\eta_0(\lambda_n + i)a_\infty^* \mathbf{e}_n .$$

V Contrôle et optimisation d'antennes

De cette façon, si on veut créer le courant

$$\mathbf{J} = \sum_n \alpha_n \mathbf{J}_n,$$

pour certains coefficients $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}$ (en pratique, presque tous nuls, voir chapitre précédent), l'alimentation à fournir à l'antenne est alors simplement, par linéarité,

$$G = \sum_n \alpha_n G_n = i\eta_0 \sum_n \alpha_n (\lambda_n + i) T_I \mathbf{J}_n.$$

On retrouve sur les termes de ce développement un premier commentaire donné précédemment, en observant que la puissance à fournir pour exciter le courant d'ordre n , varie comme la valeur propre λ_n , où on rappelle que λ_n est une suite croissante exponentiellement avec n .

En résumé, l'alimentation de l'antenne pour obtenir un diagramme souhaité répond au compromis :

- le nombre de modes utilisés dans l'approximation du diagramme de rayonnement souhaité, qui fixe la qualité de l'approximation de ce diagramme,
- la puissance à fournir à l'antenne pour exciter ces modes (gain ou facteur de qualité de l'antenne).

Plus un grand nombre de modes est utilisé, meilleur sera l'approximation du diagramme de rayonnement ; en contrepartie, plus importante sera la puissance à fournir à l'antenne pour exciter les modes d'ordre plus élevés.

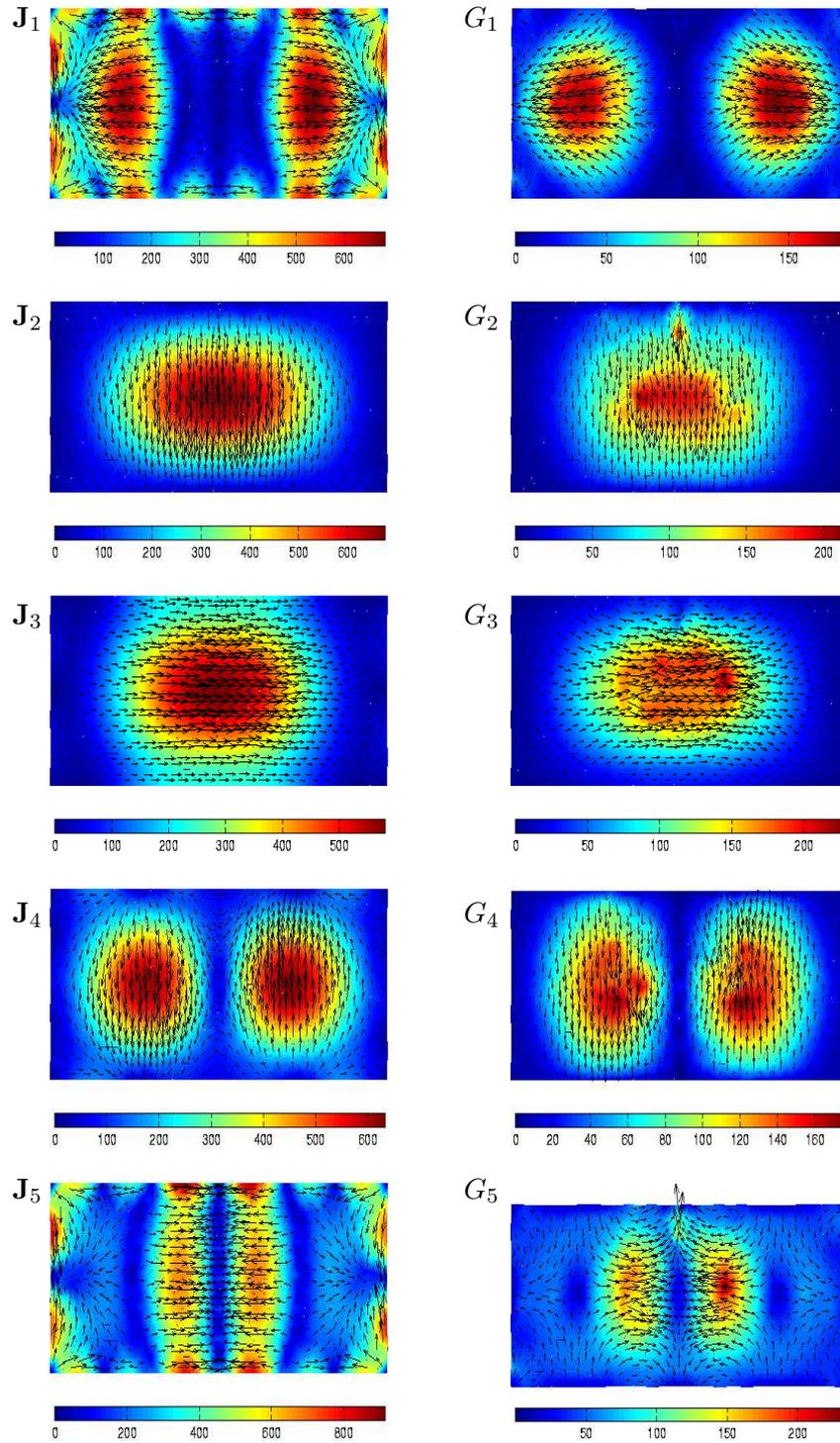


FIG. V.1 – Premiers courants caractéristiques (gauche) d'une antenne patch rectangulaire (infiniment fine), et alimentations caractéristiques associées (droite), à la fréquence $f = 300$ MHz ($\lambda = l = 1$ m).

VI Généralisation à des objets impédants

On s'intéresse maintenant au cas d'un objet dont la surface est modélisée par une condition d'impédance. Cette condition se formule par

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_{|\Gamma} \times \mathbf{n}) + \eta \mathbf{H}_{|\Gamma} \times \mathbf{n} = 0, \quad (1)$$

sur le bord de l'objet. Le coefficient η désigne l'impédance (complexe) de l'objet. Pour $|\eta| \rightarrow 0$, on retrouve la condition de conducteur parfait, tandis que si $|\eta|$ tend vers l'infini on obtient une condition de type conducteur magnétique parfait. En ce sens, la condition aux limites de conducteur parfait considérée jusqu'ici est un cas particulier, ou cas limite, de la condition d'impédance que l'on se propose maintenant d'étudier.

Les résultats précédents concernant les champs lointains et courants caractéristiques reposent sur la conservation de la puissance rayonnée, qui se traduit formellement par l'unitarité de l'opérateur de scattering \mathcal{S} . Cette conservation, qui a bien lieu dans le cas d'un objet parfaitement conducteur, n'est en général plus valable pour un objet dont la surface est modélisée par une condition aux limites de type impédance.

Toutefois, les pertes sont dans ce cas directement liées à la partie réelle de l'impédance de surface η .

Dans le cas où l'impédance est purement imaginaire, on se retrouve de nouveau face à un problème conservatif. Dans ce cas, les développements faits précédemment s'étendent assez naturellement. On définit ainsi les modes caractéristiques de l'objet : les champs lointains ainsi que les courants, électriques et magnétiques, caractéristiques.

Pour une impédance η complexe quelconque (en particulier non purement imaginaire), le problème ne peut plus être abordé de la même façon.

Le problème n'est plus conservatif, par conséquent l'opérateur de scattering n'est plus unitaire : sa décomposition spectrale ne fournit plus de bases orthogonales comme dans le cas conducteur, ou plus généralement sans pertes.

On introduit alors un opérateur \mathcal{U} plus général que celui de scattering, de manière à prendre en compte aussi les phénomènes produits sur la surface de l'objet.

La décomposition spectrale de cet opérateur, construit pour être unitaire, devrait permettre de généraliser la notion d'éléments caractéristiques des cas sans pertes.

Malheureusement, la prise en considération des courants surfaciques sur l'objet entraîne des difficultés vis-à-vis de la régularité des champs étudiés ; dans le cas conducteur, ces difficultés nous avaient mené à travailler exclusivement sur les champs lointains (par l'intermédiaire entre autre de l'opérateur de scattering), puis à revenir après coup sur les courants.

VI Généralisation à des objets impédants

De cette façon, on ne peut être assuré de l'existence des familles d'éléments recherchés.

Nous introduisons alors la décomposition de Helmholtz des courants surfaciques. Par le biais de cette décomposition, on peut correctement adapter l'opérateur "de scattering généralisé" \mathcal{U} introduit précédemment en un opérateur $\tilde{\mathcal{U}}$ possédant à la fois les propriétés requise d'unitarité et de régularité (en particulier de compacité).

Plus précisément, cet opérateur est de type Fredholm, et on montre (théorème 14) qu'il existe un opérateur compact et normal \mathcal{K} tel que

$$\tilde{\mathcal{U}} = I - \mathcal{K}.$$

La définition des éléments caractéristiques de l'objet repose alors sur la décomposition spectral de cet opérateur \mathcal{K} .

1 Première extension : cas d'un objet avec une impédance purement imaginaire

1.1 Formulation intégrale

On introduit les courants électriques et magnétiques,

$$\begin{cases} \tilde{\mathbf{J}} = \sqrt{i\eta_0} \mathbf{n} \times \mathbf{H} \\ \tilde{\mathbf{M}} = -\sqrt{i\eta_0}^{-1} \mathbf{n} \times \mathbf{E}. \end{cases}$$

Alors, la condition d'impédance (1) se réécrit

$$\mathbf{n} \times \tilde{\mathbf{M}} - i\eta \tilde{\mathbf{J}} = 0.$$

En utilisant le fait que ces courants sont tangents à la surface de l'objet, on peut alors écrire les relations,

$$\begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n} \times \\ \mathbf{n} \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} \eta \tilde{\mathbf{J}} \\ \eta^{-1} \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

L'opérateur d'impédance \mathcal{Z} s'écrit alors, pour tout couple de courants vérifiant la condition d'impédance, c'est-à-dire vérifiant les relations (2) (voir (I-21), page 36 pour l'expression de \mathcal{Z} dans le cas général)

$$\mathcal{Z} \begin{pmatrix} \mathbf{J} \\ M \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T & K \\ K & T \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{n} \times \\ \mathbf{n} \times & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \quad (3)$$

1 Première extension : cas d'un objet avec une impédance purement imaginaire

soit,

$$\mathcal{Z} = \begin{pmatrix} T + \frac{1}{2}i\eta \mathbf{n} \times & K \\ K & T + \frac{1}{2}i\eta^{-1} \mathbf{n} \times \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Si on décompose maintenant l'impédance en partie réelle et imaginaire

$$\eta = \eta_R + i\eta_I,$$

l'opérateur d'impédance se décompose à son tour suivant

$$\begin{aligned} \mathcal{Z} &= \mathcal{Z}_R + i \mathcal{Z}_I \\ &= \begin{pmatrix} T_R - \frac{1}{2}\eta_I & K_R \\ K_R & T_R + \frac{\eta_I}{2|\eta|} \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} T_I + \frac{1}{2}\eta_R & K_I \\ K_I & T_I + \frac{\eta_R}{2|\eta|} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5)$$

où les opérateurs T_R , T_I , K_R et K_I sont obtenus en considérant la décomposition complexe du noyau de Green (voir chapitre I). L'opérateur \mathcal{Z}_R est ainsi de nouveau un opérateur symétrique. On remarque alors que, en combinant le lemme 10 et le lemme 12 (chapitre II), la partie imaginaire \mathcal{Z}_I admet la factorisation :

Lemme 15 *On a la factorisation :*

$$\mathcal{Z}_I := \begin{pmatrix} T_I & K_I \\ K_I & T_I \end{pmatrix} = A_\infty^* A_\infty.$$

En particulier, l'opérateur \mathcal{Z}_I est un opérateur compact, auto-adjoint, et positif.

Ce lemme se traduit à son tour par le bilan de puissance :

$$\left(\mathcal{Z}_I \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{J}} \\ \tilde{\mathbf{M}} \end{pmatrix} \right) = \left\| A_\infty(\tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{M}}) \right\|^2 + \frac{1}{2}\eta_R \left(\left\| \tilde{\mathbf{J}} \right\|^2 + \frac{1}{2|\eta|} \left\| \tilde{\mathbf{M}} \right\|^2 \right), \quad (6)$$

et laisse apparaître, d'une part la puissance rayonnée à l'infini par le couple de courants $(\tilde{\mathbf{J}}, \tilde{\mathbf{M}})$, et d'autre part un terme de pertes, proportionnel à la partie réelle de l'impédance (résistivité de l'objet).

1.2 Modes caractéristiques d'un objet sans pertes

On suppose maintenant l'absence de pertes au niveau de l'objet, c'est-à-dire que l'impédance est purement imaginaire (purements inductive et/ou capacitive), les développements effectués dans les paragraphes (II-1.1), (II-1.2) et (II-1.3) restent alors valables.

VI Généralisation à des objets impédants

Comme dans le cas conducteur, l'opérateur de scattering se définit comme la transformée de Cayley d'un opérateur symétrique (grâce à la symétrie de \mathcal{Z}_R) ; il est ainsi unitaire, ce qui est équivalent à l'absence de pertes.

D'après (6), l'opérateur \mathcal{Z}_I est de nouveau défini et positif, et nous restitue les propriétés d'orthogonalité des champs lointains.

On définit alors les courants caractéristiques $u_n = \begin{pmatrix} \mathbf{J}_n \\ \mathbf{M}_n \end{pmatrix}$, comme les solutions de l'équation caractéristique

$$\mathcal{Z}_R u_n = \lambda_n \mathcal{Z}_I u_n. \quad (7)$$

Néanmoins, deux difficultés subsistent :

- l'opérateur de rayonnement A_∞ n'est pas injectif de $(H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma))^2$ dans $L^2(S)$; cette propriété était nécessaire pour former, à partir de la base de champs lointains \mathbf{e}_n , la famille dense des courants caractéristiques \mathbf{J}_n : la densité de la famille u_n n'est plus assurée. Pour pallier cette lacune, on peut ne considérer que les couples de courants (\mathbf{J}, \mathbf{M}) vérifiant la condition d'impédance (1), soit le sous-espace fermé de V de $(H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma))^2$:

$$V := \{(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \in (H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma))^2 ; \mathbf{n} \times \mathbf{M} - i\eta \mathbf{J} = 0\}.$$

De cette façon, on récupère l'injectivité de l'opérateur de rayonnement $A_\infty : V \rightarrow L^2(S)$ (voir e.g. [4]). Néanmoins la difficulté est alors, à l'étape numérique, de construire un espace d'approximation V_n de V , les espaces d'approximations usuels n'étant pas stables par $\mathbf{J} \rightarrow \mathbf{n} \times \mathbf{J}$.

- ces développements se restreignent à des objets modélisés par une condition d'impédance, avec une impédance η : isotrope, constante sur tout l'objet, et purement imaginaire.

Nous n'avons pas poussé plus loin l'étude du cas sans pertes. Nous avons recherché une manière de généraliser le cadre introduit dans le chapitre I à des impédances quelconques.

Ce cadre repose fondamentalement sur l'unitarité de l'opérateur de scattering (ou la normalité de l'opérateur de champ lointain). Nous allons ainsi être amenés à définir une application plus "générale" que l'opérateur de scattering (qui perd sa propriété d'isométrie en présence de pertes), afin de prendre en compte ces dissipations. Cette opérateur, ainsi construit, sera alors à nouveau unitaire, ce qui permettra d'introduire des décompositions spectrales, comme dans le cas conducteur.

2 Généralisation au cas d'un objet avec condition d'impédance

Suite à ce qui précède, on recherche une décomposition en éléments caractéristiques (champs lointains, courants électriques et/ou magnétiques) du problème extérieur de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un objet dont la surface est modélisée par une condition d'impédance.

Après avoir introduit deux nouveaux champs de vecteurs tangents à la surface Γ de l'objet, qui vont nous permettre en premier lieu de considérer une nouvelle application isométrique (un opérateur de scattering généralisé), nous verrons que la propriété de compacité sous-jacente à

l'opérateur de scattering du cas PEC (via une transformation de type Cayley) ne peut être retrouvée.

Une décomposition de Helmholtz appliquée aux champs tangents à Γ devrait alors permettre de rétablir ceci ...

2.1 Formulation du problème - Isométrie

On considère toujours le problème extérieur de la diffraction : soit (\mathbf{E}, \mathbf{H}) les champs satisfaisant au système de Maxwell dans $\Omega^{ext} = \mathbb{R}^3 \setminus \Omega$, Ω désignant l'ouvert borné représentant l'objet :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} - ik \mathbf{H} = 0 \\ \nabla \times \mathbf{H} + ik \mathbf{E} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

avec maintenant la condition d'impédance sur la surface Γ

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E} \times \mathbf{n}) + z \mathbf{H} \times \mathbf{n} = G, \quad (9)$$

où G est la donnée du problème, par exemple

$$G = -\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^{inc} \times \mathbf{n}) - z \mathbf{H}^{inc} \times \mathbf{n},$$

lorsque l'excitation est fournie par une onde incidente $(\mathbf{E}^{inc}, \mathbf{H}^{inc})$, et z l'impédance de l'obstacle Ω , telle que

$$\Re(z) > 0. \quad (10)$$

Ce problème étant posé en domaine non borné, on doit y ajouter une condition de décroissance des champs à l'infini. On choisit la condition, dite de Herglotz,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{D_R} |\mathbf{E}|^2 + |\mathbf{H}|^2 < \infty, \quad (11)$$

où $D_R = \{x \in \Omega; |x| \leq R\}$. On notera par la suite $W_H(\Omega)$ l'espace des ondes de Herglotz :

$$W_H(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ solution des équations de Maxwell (8) dans } \Omega; \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait la condition de radiation de Herglotz (11)} \end{array} \right\}.$$

On rappelle tout d'abord l'intérêt de l'espace W_H , donné par le comportement asymptotique particulier suivant. Soit $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in W_H(\Omega)$, alors il existe $(\mathbf{e}^{in}, \mathbf{e}^{out}) \in (L_t^2(\Gamma))^2$, tel que les champs (\mathbf{E}, \mathbf{H}) admettent un comportement à l'infini du type (voir [37] ou [32])

$$\begin{cases} \mathbf{E}_\infty(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}^{out}(\hat{x}) + \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}^{in}(\hat{x}) \\ \mathbf{H}_\infty(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \hat{x} \times \mathbf{e}^{out}(\hat{x}) - \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \hat{x} \times \mathbf{e}^{in}(\hat{x}), \end{cases} \quad (12)$$

VI Généralisation à des objets impédants

dans le sens où

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{C_R} |\mathbf{E} - \mathbf{E}_\infty|^2 = 0, \quad (13)$$

et

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{C_R} |\mathbf{H} - \mathbf{H}_\infty|^2 = 0. \quad (14)$$

avec $\hat{x} = x/|x| \in S$ la sphère unité, et la couronne $C_R = \{x; R \leq x \leq 2R\}$. Le champ \mathbf{e}^{in} (resp. \mathbf{e}^{out}) est le champ lointain entrant (resp. sortant) associé à l'onde électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) .

La décomposition en éléments caractéristiques pour un objet parfaitement conducteur repose principalement sur l'unitarité de l'opérateur de scattering défini selon

$$\mathcal{S} : \begin{cases} L_t^2(S) & \rightarrow L_t^2(S) \\ \check{\mathbf{e}}^{in} & \mapsto \mathbf{e}^{out}, \end{cases} \quad (15)$$

où $\check{\mathbf{e}}^{in}(\hat{x}) = \mathbf{e}^{in}(-\hat{x})$ pour tout $\hat{x} \in S$.

La condition d'impédance (9) est dissipative : l'opérateur de scattering ainsi défini n'est plus unitaire. La relation d'isométrie de [37], à la base de la formulation EID, permet d'étendre l'opérateur de scattering de manière à prendre en compte les pertes sur la surface de l'objet (pertes par effet Joule).

On introduit pour ce faire les champs de vecteurs tangents

$$\begin{cases} G^{in} & = \mathbf{E}_t + z \mathbf{H} \times \mathbf{n} \\ G^{out} & = \mathbf{E}_t - \bar{z} \mathbf{H} \times \mathbf{n}, \end{cases} \quad (16)$$

qui vont permettre de rendre compte de ces dissipations.

Plus précisément, si l'impédance de l'objet s'écrit $z = z_r + i z_i$, on a la relation d'isométrie donnée dans le lemme suivant.

Lemme 16 (Lemme d'isométrie) *Soit G^{in} , G^{out} , \mathbf{e}^{in} et \mathbf{e}^{out} définis comme précédemment, alors on a*

$$\|\mathbf{e}^{out}\|_{L^2(S)}^2 + \frac{1}{4z_r} \|G^{out}\|_{L^2(\Gamma)}^2 = \|\mathbf{e}^{in}\|_{L^2(S)}^2 + \frac{1}{4z_r} \|G^{in}\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (17)$$

Démonstration On part de la formule de Green dans un ouvert borné D , de frontière ∂D orienté par sa normale sortante ν ,

$$I(U, V, D) := \int_D \mathbf{rot} U \cdot V - \mathbf{rot} V \cdot U = \int_{\partial D} (\nu \times (U \times \nu)) \cdot (V \times).$$

A l'aide des équations de Maxwell, on calcule ensuite

$$\begin{aligned} I(\mathbf{E}, \overline{\mathbf{H}}, \Omega^{ext} \cap B_R) &= ik \int_{\Omega^{ext} \cup B_R} \eta_0 |\mathbf{H}|^2 - \eta_0^{-1} |\mathbf{E}|^2 \\ &= \int_{\Gamma \cup S_R} (\nu \times (\mathbf{E} \times \nu)) \cdot (\overline{\mathbf{H}} \times \nu) , \end{aligned}$$

où B_R est la boule de rayon R et S_R la sphère de même rayon. La partie réelle de cette équation nous fournit alors la relation

$$\begin{aligned} \Re e (I(\mathbf{E}, \overline{\mathbf{H}}, \Omega^{ext} \cap B_R)) &= \Re e \left(\int_{\Gamma \cup S_R} (\nu \times (\mathbf{E} \times \nu)) \cdot (\overline{\mathbf{H}} \times \nu) \right) \\ &= \Re e \left(\int_{\Gamma} \mathbf{E}_t \cdot (\overline{\mathbf{H}} \times \mathbf{n}) \right) + \Re e \left(\int_{S_R} (\hat{x} \times (\mathbf{E} \times \hat{x})) \cdot (\overline{\mathbf{H}} \times \hat{x}) \right) \\ &= 0 . \end{aligned}$$

On utilise maintenant l'égalité, pour deux vecteurs a et b et un complexe y quelconques,

$$\begin{aligned} \|a + yb\|^2 - \|a - \overline{y}b\|^2 &= 2 \Re e(a, yb) + 2 \Re e(a, \overline{y}b) \\ &= 4 \Re e(y) \Re e(a, b) , \end{aligned}$$

qui nous permet d'écrire, en choisissant $y = z$, l'impédance de l'objet, sur $L^2(\Gamma)$ et $y = \eta_0$, l'impédance à l'infini (impédance du vide) sur $L^2(S_R)$,

$$\begin{aligned} \Re e (I(\mathbf{E}, \overline{\mathbf{H}}, \Omega^{ext} \cap B_R)) &= \frac{1}{4 \Re e(z)} \left(\|G^{in}\|_{L^2(\Gamma)}^2 - \|G^{out}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\eta_0} \left(\|\mathbf{E}_t + \eta_0 \mathbf{H}\|_{L^2(S_R)}^2 - \|\mathbf{E}_t - \eta_0 \mathbf{H}\|_{L^2(S_R)}^2 \right) . \end{aligned}$$

On calcule finalement la limite

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_R^{2R} \Re (I(\mathbf{E}, \overline{\mathbf{H}}, \Omega^{ext} \cap B_R)) ,$$

qui, à l'aide de la condition de Herglotz (11), nous permet d'aboutir à la relation (17) :

$$\frac{1}{4\eta_r} \|G^{in}\|^2 + \|\mathbf{e}^{in}\|^2 = \frac{1}{4\eta_r} \|G^{out}\|^2 + \|\mathbf{e}^{out}\|^2 .$$

□

Soit Z l'espace

$$Z = L^2(S) \times L^2(\Gamma) , \tag{18}$$

VI Généralisation à des objets impédants

muni de la norme adaptée à l'isométrie (17) :

$$\left\| \begin{pmatrix} e \\ G \end{pmatrix} \right\|_Z^2 = \|e\|_{L^2(S)}^2 + \frac{1}{4z_r} \|G\|_{L^2(\Gamma)}^2. \quad (19)$$

La relation d'isométrie va alors nous permettre d'introduire un opérateur \mathcal{U} , unitaire dans Z :

$$\left\| \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{out} \\ G^{out} \end{pmatrix} \right\|_Z = \left\| \mathcal{U} \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{in} \\ G^- \end{pmatrix} \right\|_Z = \left\| \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{in} \\ G^{in} \end{pmatrix} \right\|_Z.$$

Pour définir un tel opérateur, on est amené à considérer le problème : soit $(G^{in}, \mathbf{e}^{in}) \in Z$, trouver $(G^{out}, \mathbf{e}^{out}) \in Z$ défini par :

$$\begin{cases} G^{out} &= \mathbf{E}_t - \bar{z} \mathbf{H} \times \mathbf{n} \\ \mathbf{e}^{out}(\hat{x}) &= \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[|x| e^{-ik|x|} (\mathbf{H}(x) \times \hat{x} - \mathbf{E}(x)) \right], \end{cases} \quad (20)$$

où l'onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) vérifie

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ vérifie le système de Maxwell (1)} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait la condition à l'infini de Herglotz (11)} \\ \mathbf{E}_t + z \mathbf{H} \times \mathbf{n} = G^{in} \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} \left[|x| e^{ik|x|} (\mathbf{H} \times \hat{x} - \mathbf{E}(x)) \right] = \mathbf{e}^{in}(\hat{x}) \text{ sur } S. \end{cases} \quad (21)$$

On a alors,

Théorème 12 Soit $(G^{in}, \mathbf{e}^{in}) \in Z$. Alors, il existe une onde unique $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega))^2$ solution de (21).

Démonstration

• **Unicité** C'est une conséquence du lemme d'isométrie : soit $G^{in} = 0$ et $\mathbf{e}^{in} = 0$, alors le lemme 16 nous fournit immédiatement $G^{out} = 0$ et $\mathbf{e}^{out} = 0$.

De plus, $\mathbf{e}^{in} = 0$ entraîne que l'onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est une onde sortante, i.e. une onde satisfaisant la condition de Silver-Müller sortante. Le lemme de Rellich, grâce à $\mathbf{e}^{out} = 0$, entraîne alors $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = 0$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \Gamma$. Enfin, par définition de G^{in} et de G^{out} , on a $\mathbf{E}_t = \mathbf{H}_t = 0$ sur Γ ; on en déduit que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est identiquement nulle dans tout \mathbb{R}^3 .

• **Existence** On va construire une solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de (21). Soit le domaine borné $D_R = \Omega \cap B_R = \Omega \cap \{x \in \mathbb{R}^3; |x| \leq R\}$, de frontière $\partial D_R = \Gamma \cup S_R$, avec $S_R = \{x \in \mathbb{R}^3; |x| = R\}$ la

2 Généralisation au cas d'un objet avec condition d'impédance

sphère de rayon R . Les formules de Stratton-Chu, appliquées à une solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) quelconque des équations de Maxwell dans le domaine borné D_R , s'écrivent :

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(x) - \mathbf{E}_R(x) &= \mathbf{rot} \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy - \frac{1}{ik} \mathbf{rot rot} \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}(y)) G(x, y) dy \\ \mathbf{H}(x) - \mathbf{H}_R(x) &= \mathbf{rot} \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}(y)) G(x, y) dy + \frac{1}{ik} \mathbf{rot rot} \int_{\Gamma} (\mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy\end{aligned}\quad (22)$$

où \mathbf{n} est la normale sortante à Ω sur Γ , et,

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R(x) &= -\mathbf{rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy + \frac{1}{ik} \mathbf{rot rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}(y)) G(x, y) dy \\ \mathbf{H}_R(x) &= -\mathbf{rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}(y)) G(x, y) dy - \frac{1}{ik} \mathbf{rot rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy.\end{aligned}\quad (23)$$

Ces deux derniers termes se réécrivent, à l'aide du théorème de Stokes et des équations de Maxwell (voir par exemple [1], Th. 6.6),

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_R(x) &= \mathbf{rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy - \nabla \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \cdot \mathbf{H}(y)) G(x, y) dy \\ &\quad + ik \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}(y)) G(x, y) dy \\ &= \mathbf{rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy + \int_{S_R} \mathbf{E}(y) (\nabla G(x, y) \cdot \hat{\mathbf{y}}) \\ &\quad + ik \int_{S_R} G(x, y) (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}(y)) \\ &= \mathbf{rot} \int_{S_R} (\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{E}(y)) G(x, y) dy + \int_{S_R} \mathbf{E}(y) \left[\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) - ikG(x, y) \right] dy \\ &\quad + ik \int_{S_R} G(x, y) [\hat{\mathbf{y}} \times \mathbf{H}(y) + \mathbf{E}(y)] dy \\ &= I_1 + I_2 + I_3.\end{aligned}\quad (24)$$

Le noyau de Green décroît à l'infini selon

$$\begin{cases} \nabla_y G(x, y) \times \hat{\mathbf{y}} &= O(|y|^{-2}) \\ \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}_y}(x, y) - ikG(x, y) &= O(|y|^{-2}), \end{cases}\quad (25)$$

VI Généralisation à des objets impédants

pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, uniformément pour $y \in S_R$. On suppose de plus maintenant que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) satisfait la condition de Herglotz à l'infini (11); on a alors pour I_1 et I_2 ,

$$I_1 = - \int_{S_R} \mathbf{E}(y) [\nabla_y G(x, y) \times \hat{y}] dy \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0, \quad (26)$$

et de même,

$$I_2 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0. \quad (27)$$

La limite de la troisième intégrale, I_3 , s'écrit quant à elle :

$$I_3 \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{ik}{4\pi} \int_S e^{ikx \cdot y} \mathbf{e}^{in}(y) dy, \quad (28)$$

avec S la sphère unité de \mathbb{R}^3 . Le calcul de la limite de $\mathbf{H}_R(x)$ peut se conduire de la même façon, et fournit

$$\mathbf{H}_R(x) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} \frac{ik}{4\pi} \int_S e^{ikx \cdot y} [\hat{y} \times \mathbf{e}^{in}(y)] dy, \quad (29)$$

Au vue de ces développements, on construit finalement l'onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) suivant

$$(\mathbf{E}, \mathbf{H}) = (\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out}) + (\mathbf{E}^H(\mathbf{e}^{in}), \mathbf{H}^H(\mathbf{e}^{in})), \quad (30)$$

où $(\mathbf{E}^H(\mathbf{e}^{in}), \mathbf{H}^H(\mathbf{e}^{in}))$ est une onde de Herglotz de noyau le champ lointain entrant \mathbf{e}^{in} (voir [1], [32] par exemple),

$$\begin{cases} \mathbf{E}^H(\mathbf{e}^{in}) &= \frac{ik}{4\pi} \int_S e^{ikx \cdot y} \mathbf{e}^{in}(y) dy \\ \mathbf{H}^H(\mathbf{e}^{in}) &= \frac{ik}{4\pi} \int_S e^{ikx \cdot y} [\hat{y} \times \mathbf{e}^{in}(y)] dy. \end{cases} \quad (31)$$

et $(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out})$ est la solution (unique) du problème "classique" sortant :

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^{ext}))^2 \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ vérifie le système de Maxwell (1),} \\ \mathbf{E}_t + z\mathbf{H} \times \mathbf{n} = G' \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (\mathbf{H} \times \hat{x} - \mathbf{E}) = 0, \end{cases} \quad (32)$$

2 Généralisation au cas d'un objet avec condition d'impédance

la condition à l'infini étant la condition usuelle dite de Silver-Müller sortante, et où on a posé

$$G' = G^{in} - \mathbf{n} \times \left(\mathbf{E}_{|\Gamma}^H(\mathbf{e}^{in}) \times \mathbf{n} \right) - z \mathbf{H}_{|\Gamma}^H(\mathbf{e}^{in}) \times \mathbf{n}.$$

L'onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) défini par (30)-(32) est ainsi une solution du problème (21).

De plus, l'onde de Herglotz $(\mathbf{E}^H(\mathbf{e}^{in}), \mathbf{H}^H(\mathbf{e}^{in}))$ est infiniment régulière dans tout \mathbb{R}^3 , il en découle, d'après (30) que (\mathbf{E}, \mathbf{H}) a au moins la même régularité que sa composante purement sortante $(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out})$ donnée par (32), soit $(\mathbf{E}, \mathbf{H}) \in (H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^{ext}))^2$.

□

• **Champ Sortant de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) :** On se tourne maintenant vers le lien entre les champs lointains sortants et entrants de ces solutions. Le champ \mathbf{E}^{out} , solution de (32), admet le comportement à l'infini (voir [1], [4], par exemple) :

$$\mathbf{E}^{out}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} A_{\infty}(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out}; \hat{x}) + O(|x|^{-2}), \text{ pour } |x| \rightarrow \infty, \quad (33)$$

avec ,

$$A_{\infty}(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out}; \hat{x}) = \frac{ik}{4\pi} \hat{x} \times \int_{\Gamma} \{ \mathbf{n}(y) \times \mathbf{E}^{out}(y) + [\mathbf{n}(y) \times \mathbf{H}^{out}(y)] \times \mathbf{n}(y) \} e^{-ik\hat{x}\cdot y} dy, \quad (34)$$

tandis que, avec la notation $\check{\mathbf{e}}^{in}(\hat{x}) = \mathbf{e}^{in}(-\hat{x})$,

$$\mathbf{E}_{\infty}^H(x) = \frac{1}{2} \left(\mathbf{e}^{in}(\hat{x}) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} - \check{\mathbf{e}}^{in}(\hat{x}) \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \right), \quad (35)$$

est le champ lointain de \mathbf{E}^H dans le sens

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_{C_R} |\mathbf{E}^H - \mathbf{E}_{\infty}^H|^2 = 0. \quad (36)$$

On arrive ainsi à l'expression du champ lointain sortant de (\mathbf{E}, \mathbf{H}) solution de (21) :

$$\lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| e^{-ik|x|} (\mathbf{H} \times \hat{x} + \mathbf{E}) = \mathbf{e}^{out}, \quad (37)$$

avec

$$\mathbf{e}^{out} = -\check{\mathbf{e}}^{in} + A_{\infty}(\hat{x}). \quad (38)$$

Le théorème précédent nous permet alors de définir l'opérateur

$$\mathcal{U} : \begin{cases} L^2(S) \times L^2(\Gamma) & \rightarrow L^2(S) \times L^2(\Gamma) \\ \begin{pmatrix} \check{\mathbf{e}}^{in} \\ G^{in} \end{pmatrix} & \mapsto \mathcal{U} \begin{pmatrix} \check{\mathbf{e}}^{in} \\ G^{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{out} \\ G^{out} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (39)$$

qui est, par construction, unitaire dans l'espace $Z = L^2(S) \times L^2(\Gamma)$ muni de la norme (19).

Au vue de ces développements, on peut préciser pour l'opérateur \mathcal{U} :

VI Généralisation à des objets impédants

Théorème 13 *L'opérateur \mathcal{U} est un opérateur linéaire, continu de Z dans lui-même. \mathcal{U} est de plus un isomorphisme, unitaire lorsque Z est muni de la norme (19).*

Démonstration

• **Continuité de \mathcal{U}** : La représentation intégrale (30) de la solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) de (21) se décompose en deux termes :

- $(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out})$: la solution sortante du problème “classique” d’impédance ; on sait que ce problème est bien posé : l’onde $(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out})$ dépend continûment de la donnée G^{in} sur le bord Γ de l’objet ;
- $(\mathbf{E}^H, \mathbf{H}^H)$: une onde de Herglotz, solution entière (i.e. dans tout \mathbb{R}^3) des équations de Maxwell ; ces champs sont analytiques dans \mathbb{R}^3 , et dépendent aussi continûment du noyau \mathbf{e}^{in} (en tant que transformée de Fourier du noyau \mathbf{e}^{in} tangent et de carré intégrable).

Ainsi, au total, l’onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) dépend continûment des deux paramètres $(G^{in}, \mathbf{e}^{in})$, et, par suite, il en est de même du couple $(G^{out}, \mathbf{e}^{out})$.

• **Inversibilité de \mathcal{U}** : Soit $(\mathbf{e}^{out}, G^{out}) \in Z$. On cherche alors $(G^{in}, \mathbf{e}^{in})$ définis par

$$\begin{cases} G^{in} = \mathbf{E}_t + z\mathbf{H} \times \mathbf{n} \text{ sur } \Gamma \\ \mathbf{e}^{in} = \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| e^{ik|x|} (\mathbf{H} \times \hat{x} - \mathbf{E}), \text{ à l'infini,} \end{cases} \quad (40)$$

où (\mathbf{E}, \mathbf{H}) est solution de

$$\begin{cases} (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ vérifie le système de Maxwell (1)} \\ (\mathbf{E}, \mathbf{H}) \text{ satisfait la condition à l'infini de Herglotz (11)} \\ \mathbf{E}_t - \bar{z}\mathbf{H} \times \mathbf{n} = G^{out} \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} [|x| e^{-ik|x|} (\mathbf{H} \times \hat{x} + \mathbf{E}(x))] = \mathbf{e}^{out}(\hat{x}) \text{ sur } S. \end{cases} \quad (41)$$

La démonstration du théorème 12 peut alors être adaptée et utilisée. Pour ce faire, la solution sortante $(\mathbf{E}^{out}, \mathbf{H}^{out})$ doit être remplacée par celle $(\mathbf{E}^{in}, \mathbf{H}^{in})$ du problème d’impédance entrant :

$$\begin{cases} (\mathbf{E}^{in}, \mathbf{H}^{in}) \text{ vérifie le système de Maxwell (1),} \\ \mathbf{E}_t^{in} - \bar{z}\mathbf{H}^{in} \times \mathbf{n} = G'' \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (\mathbf{E} \times \hat{x} + \mathbf{H}) = 0, \end{cases} \quad (42)$$

où la condition à l’infini est la condition de Silver-Müller entrante, et

$$G'' = G^{out} - [\mathbf{n} \times (\mathbf{E}^H(\mathbf{e}^{out}) \times \mathbf{n}) - \bar{z}\mathbf{H}^H(\mathbf{e}^{out}) \times \mathbf{n}],$$

2 Généralisation au cas d'un objet avec condition d'impédance

avec $(\mathbf{E}^H(\mathbf{e}^{out}), \mathbf{H}^H(\mathbf{e}^{out}))$ une onde de Herglotz de noyau $\mathbf{e}^{out} \in L_t^2(S)$. Ce problème entrant est lui aussi bien posé (voir [1]), et permet d'aboutir à un couple unique $(G^{in}, \mathbf{e}^{in}) = \tilde{\mathcal{U}}^{-1}(G^{out}, \mathbf{e}^{out})$.

□

On introduit maintenant les courants électriques et magnétiques par, respectivement,

$$\mathbf{J} = \mathbf{n} \times \mathbf{H}|_{\Gamma} \quad \text{et} \quad \mathbf{M} = -\mathbf{n} \times \mathbf{E}|_{\Gamma}. \quad (43)$$

Les champs G^{in} et G^{out} se réécrivent alors, en fonction des courants,

$$\begin{cases} G^{in} &= \mathbf{n} \times \mathbf{M} - z \mathbf{J} \\ G^{out} &= \mathbf{n} \times \mathbf{M} + \bar{z} \mathbf{J}, \end{cases} \quad (44)$$

d'où il vient la relation simple reliant G^{out} à G^{in} :

$$G^{out} = G^{in} + 2z_r \mathbf{J}. \quad (45)$$

Dans le cas d'un objet conducteur, l'opérateur de scattering est un opérateur de type Fredholm :

$$\mathcal{S} = I + K, \quad (46)$$

I représentant l'identité dans $L_t^2(S)$, et K étant un opérateur compact. Cette propriété permet de définir une base de diagonalisation de \mathcal{S} de $L_t^2(S)$.

La relation (45), reliant les champs G^{in} et G^{out} , montre que dans le cas général cette propriété ne peut avoir lieu pour l'isométrie \mathcal{U} . En effet, par définition, G^{in} et G^{out} sont des champs de $L_t^2(S)$, propriété nécessaire pour l'obtention de l'isométrie (17), tandis que les courants électriques \mathbf{J} ont une régularité $H_{\text{div}}^{(-1/2)}(\Gamma)$ (en tant que traces tangentielles de champs à régularité $H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$).

De manière à se ramener à une décomposition de \mathcal{U} de la forme (46), on commence par appliquer la décomposition de Helmholtz aux différents champs de vecteurs, tangentiels à Γ :

$$\begin{cases} G^{in} &= G_{\nabla}^{in} + G_{\mathbf{rot}}^{in} \\ G^{out} &= G_{\nabla}^{out} + G_{\mathbf{rot}}^{out} \end{cases} \quad (47)$$

et, de même pour les courants :

$$\begin{cases} \mathbf{J} &= \mathbf{J}_{\nabla} + \mathbf{J}_{\mathbf{rot}} \\ \mathbf{M} &= \mathbf{M}_{\nabla} + \mathbf{M}_{\mathbf{rot}}. \end{cases} \quad (48)$$

VI Généralisation à des objets impédants

A partir de ces décompositions, on a alors :

$$\begin{cases} G_{\nabla}^{out} &= G_{\nabla}^{in} + 2 z_r \mathbf{J}_{\nabla} = (I + \mathcal{B}_{\nabla}) G_{\nabla}^{in} \\ G_{\mathbf{rot}}^{out} &= G_{\mathbf{rot}}^{in} + 2 z_r \mathbf{J}_{\mathbf{rot}} = (I + \mathcal{B}_{\mathbf{rot}}) G_{\mathbf{rot}}^{in}, \end{cases} \quad (49)$$

avec les opérateurs

$$\mathcal{B}_{\nabla} : L_t^2(\Gamma) \rightarrow \nabla_{\Gamma} \left(H^{3/2}(\Gamma) \right), \text{ et } \mathcal{B}_{\mathbf{rot}} : L_t^2(\Gamma) \rightarrow \mathbf{rot}_{\Gamma} \left(H^{1/2}(\Gamma) \right). \quad (50)$$

Ces écritures font apparaître clairement le problème de régularité énoncé précédemment comme un problème particulier à la composante rotationnelle de G^{out} . L'opérateur \mathcal{B}_{∇} est compact en tant qu'opérateur de $L_t^2(\Gamma)$ dans lui-même, donc, une décomposition analogue à (46) est valide pour les composantes divergentielles. Il n'en va pas de même pour les composantes rotationnelles.

Ce raisonnement montre que, si on définit maintenant le champ G^{out} composante par composante suivant

$$\begin{cases} G_{\nabla}^{out} &= G_{\nabla}^{in} + 2 z_R \mathbf{J}_{\nabla} \\ G_{\mathbf{rot}}^{out} &= -\frac{z}{\bar{z}} G_{\mathbf{rot}}^{in} + 2 \frac{z_r}{\bar{z}} \mathbf{n} \times \mathbf{M}_{\nabla}, \end{cases} \quad (51)$$

alors le problème de différence de régularité entre les deux composantes disparaît.

Ainsi, à partir de la définition (44) des champs G^{in} et G^{out} , et des décompositions de Helmholtz (47) et (48), on définit \tilde{G}^{out} selon :

$$\tilde{G}^{out} := G_{\nabla}^{out} - \frac{z}{\bar{z}} G_{\mathbf{rot}}^{out}. \quad (52)$$

De cette façon, la relation (49) s'écrit maintenant

$$\tilde{G}^{out} = G^{in} + 2 z_R \mathbf{J}_{\nabla} - \frac{2 z_R}{\bar{z}} \mathbf{n} \times \mathbf{M}_{\nabla} := (I + \tilde{\mathcal{B}}) G^{in}, \quad (53)$$

où,

$$\tilde{\mathcal{B}} : \begin{cases} L_t^2(\Gamma) &\rightarrow \nabla_{\Gamma} \left(H^{3/2}(\Gamma) \right) \\ G^{in} &\mapsto 2 z_R \mathbf{J}_{\nabla} - \frac{2 z_R}{\bar{z}} \mathbf{n} \times \mathbf{M}_{\nabla}, \end{cases} \quad (54)$$

est maintenant un opérateur compact dans $L^2(\Gamma)$. On définit alors l'opérateur

$$\tilde{\mathcal{U}} : \begin{cases} Z &\rightarrow Z \\ \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{in} \\ G^{in} \end{pmatrix} &\mapsto \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}^{out} \\ \tilde{G}^{out} \end{pmatrix}, \end{cases} \quad (55)$$

où $\tilde{\mathbf{e}}^{out}(\hat{x}) = -\mathbf{e}^{out}(-\hat{x})$, pour tout $\hat{x} \in S$.

Grâce à l'orthogonalité de la décomposition de Helmholtz, on remarque tout d'abord que

$$\left\| \tilde{G}^{out} \right\|_{L^2_i(S)} = \left\| G^{out} \right\|_{L^2_i(S)}, \quad (56)$$

et ainsi que l'application $\tilde{\mathcal{U}}$ conserve les propriétés de \mathcal{U} données dans le théorème (13).

On a de plus pour $\tilde{\mathcal{U}}$:

Théorème 14 *L'opérateur $\tilde{\mathcal{U}}$ est un opérateur linéaire, continu, inversible et unitaire dans Z , muni de la norme (19). $\tilde{\mathcal{U}}$ se décompose de plus suivant*

$$\tilde{\mathcal{U}} = I + \mathcal{K}, \quad (57)$$

où I est l'identité dans Z , et \mathcal{K} est un opérateur compact et normal dans Z .

Démonstration D'après le théorème 13, on a

$$\mathcal{U}\mathcal{U}^* = \mathcal{U}^*\mathcal{U} = I,$$

soit, en utilisant l'expression annoncée de \mathcal{U} ,

$$(I + \mathcal{K})(I + \mathcal{K})^* = (I + \mathcal{K})^*(I + \mathcal{K}),$$

et au final, après développement, $\mathcal{K}\mathcal{K}^* = \mathcal{K}^*\mathcal{K}$.

On a de plus montré, avec les quelques manipulations précédentes que d'une part,

$$\tilde{\mathbf{e}}^{out}(\hat{x}) = -\mathbf{e}^{out}(-\hat{x}) = \mathbf{e}^{in}(\hat{x}) - A_\infty(\hat{x}),$$

et que d'autre part

$$\tilde{G}^{out} = \tilde{G}_{\nabla}^{out} + \tilde{G}_{\mathbf{rot}}^{out},$$

avec, pour chaque composante,

$$\begin{cases} \tilde{G}_{\nabla}^{out} = G_{\nabla}^{in} + 2\eta_R \mathbf{J}_{\nabla} \\ \tilde{G}_{\mathbf{rot}}^{out} = G_{\mathbf{rot}}^{in} + 2\eta_R \mathbf{n} \times \mathbf{M}_{\nabla}. \end{cases}$$

Ainsi, on peut finalement résumer les relations précédentes selon

$$(\tilde{\mathcal{U}} - I) \begin{pmatrix} \mathbf{e}^{in} \\ G^{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A_\infty(\mathbf{J}, \mathbf{M}) \\ 2z_R \mathbf{J}_{\nabla} - \frac{2z_R}{\bar{z}} \mathbf{n} \times \mathbf{M}_{\nabla} \end{pmatrix} \in W,$$

avec

$$W = C^\infty(S) \times \nabla_\Gamma \left(H^{3/2}(\Gamma) \right),$$

qui s'injecte compactement dans Z .

□

VI Généralisation à des objets impédants

2.2 Décomposition spectrale et éléments caractéristiques

On peut alors appliquer les théories spectrales concernant de tels opérateurs (voir [6], [3]) :

Définition 5 On appelle éléments caractéristiques, associés à l'objet Ω d'impédance η , les valeurs propres λ_n et les vecteurs propres f_n de l'opérateur $\tilde{\mathcal{U}}$:

$$\tilde{\mathcal{U}}f_n = \lambda_n f_n. \quad (58)$$

Les courants caractéristiques, électriques et magnétiques, de Ω sont alors donnés par :

$$\begin{cases} \mathbf{J}_n &= \frac{1}{2z_R} \left(\lambda_n G_{n,\nabla} - \lambda_n \frac{\bar{z}}{z} G_{n,\mathbf{rot}} - G_n \right) \\ \mathbf{M}_n &= \frac{z}{2z_R} \left(\lambda_n G_{n,\nabla} - \lambda_n \frac{\bar{z}}{z} G_{n,\mathbf{rot}} + \frac{\bar{z}}{z} G_n \right), \end{cases} \quad (59)$$

où $f_n = (\mathbf{e}_n, G_n) = (\mathbf{e}_n, G_{n,\nabla} + G_{n,\mathbf{rot}})$.

2.3 Application - Le cas d'un objet sphérique

2.3.1 Expression des champs et de $\tilde{\mathcal{U}}$

On commence par introduire les différentes grandeurs et fonctions qui vont permettre d'exprimer les champs électromagnétiques diffractés par une sphère de rayon a .

On écrit tout d'abord les champs \mathbf{E} et \mathbf{H} sous la forme générale de potentiels de Debye :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{rot}(xw(x)) + \frac{i}{k} \mathbf{rot} \mathbf{rot}(xv(x)) \\ \mathbf{H}(x) = -\frac{i}{k} \mathbf{rot} \mathbf{rot}(xw(x)) + \mathbf{rot}(xv(x)). \end{cases} \quad (60)$$

Ces potentiels de Debye, $v(x)$ et $w(x)$, peuvent quant à eux se développer sur la base des harmoniques sphériques $\{Y_n^m, n \geq 0, |m| \leq n\}$ (voir annexe E - 1) :

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left(w_{n,m}^{(1)} h_n^{(1)}(k|x|) + w_{n,m}^{(2)} h_n^{(2)}(k|x|) \right) Y_n^m(\hat{x}), \\ v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left(v_{n,m}^{(1)} h_n^{(1)}(k|x|) + v_{n,m}^{(2)} h_n^{(2)}(k|x|) \right) Y_n^m(\hat{x}), \end{aligned} \quad (61)$$

où $h_n^{(1)}$ et $h_n^{(2)}$ désignent respectivement les fonctions de Hankel de première et deuxième espèce. Ce choix correspondant directement à l'espace $W_H(\Omega^{ext})$: les coefficients sur $h_n^{(1)}$ désignant une onde sortante, ceux sur les $h_n^{(2)}$ une onde entrante, et ainsi au total une onde admettant une composante sortante et une composante entrante (cf. comportement asymptotique (12),(13)).

2 Généralisation au cas d'un objet avec condition d'impédance

Les champs (\mathbf{E} , \mathbf{H}) ainsi formés ont alors pour composante tangentielle, sur une sphère de rayon a :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(a\hat{r}) = & -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[w_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)}(ka) + w_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)}(ka) \right] \hat{r} \times \nabla Y_n^m \\ & + \frac{i}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[v_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)'}(ka) + v_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \nabla Y_n^m, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t(a\hat{r}) = & -\frac{i}{k\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[w_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)'}(ka) + w_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \nabla Y_n^m \\ & -\frac{1}{k\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[v_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)}(ka) + v_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)}(ka) \right] \hat{r} \times \nabla Y_n^m, \end{aligned} \quad (63)$$

où on a posé,

$$\zeta_n^{(1,2)}(t) = t h_n^{(1,2)}(t).$$

A partir de ces expressions, on peut expliciter les champs lointains entrants et sortants, obtenus en laissant tendre $a \rightarrow \infty$ dans les dernières égalités

$$\begin{cases} \mathbf{e}^{in} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} (\mathbf{e}_{n,m}^{in,w} \hat{x} \times \nabla Y_n^m + \mathbf{e}_{n,m}^{in,v} \nabla Y_n^m) \\ \mathbf{e}^{out} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} (\mathbf{e}_{n,m}^{out,w} \hat{x} \times \nabla Y_n^m + \mathbf{e}_{n,m}^{out,v} \nabla Y_n^m), \end{cases} \quad (64)$$

ainsi que, par combinaison de (62) et (63), les champs G^{in} et G^{out} :

$$\begin{aligned} G^{in} &:= \mathbf{E}_t(a\hat{r}) + z\mathbf{H}(a\hat{r}) \times \hat{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} (G_{n,m}^{in,w} \hat{r} \times \nabla Y_n^m + G_{n,m}^{in,v} \nabla Y_n^m) \\ G^{out} &:= \mathbf{E}_t(a\hat{r}) - \bar{z}\mathbf{H}(a\hat{r}) \times \hat{r} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} (G_{n,m}^{out,w} \hat{r} \times \nabla Y_n^m + G_{n,m}^{out,v} \nabla Y_n^m). \end{aligned} \quad (65)$$

Les coefficients de Fourier de ces développements sont donnés par

$$\begin{cases} k \mathbf{e}_{n,m}^{in,w} &= - (i)^{n+1} w_{n,m}^{(2)} \\ k \mathbf{e}_{n,m}^{in,v} &= (i)^{n+1} v_{n,m}^{(2)} \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} k \mathbf{e}_{n,m}^{out,w} &= - (-i)^{n+1} w_{n,m}^{(1)} \\ k \mathbf{e}_{n,m}^{out,v} &= - (-i)^{n+1} v_{n,m}^{(1)}, \end{cases} \quad (66)$$

VI Généralisation à des objets impédants

pour les champs lointains et,

$$\left\{ \begin{array}{l} k G_{n,m}^{in,w} = -w_{n,m}^{(1)} \left[\zeta_n^{(1)}(ka) - iz \zeta_n^{(1)'}(ka) \right] - w_{n,m}^{(2)} \left[\zeta_n^{(2)}(ka) - iz \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \\ k G_{n,m}^{in,v} = -v_{n,m}^{(1)} \left[z \zeta_n^{(1)}(ka) - i \zeta_n^{(1)'}(ka) \right] - v_{n,m}^{(2)} \left[z \zeta_n^{(2)}(ka) - i \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \\ k G_{n,m}^{out,w} = -w_{n,m}^{(1)} \left[\zeta_n^{(1)}(ka) + i \bar{z} \zeta_n^{(1)'}(ka) \right] - w_{n,m}^{(2)} \left[\zeta_n^{(2)}(ka) + i \bar{z} \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \\ k G_{n,m}^{out,v} = v_{n,m}^{(1)} \left[\bar{z} \zeta_n^{(1)}(ka) + i \zeta_n^{(1)'}(ka) \right] + v_{n,m}^{(2)} \left[\bar{z} \zeta_n^{(2)}(ka) + i \zeta_n^{(2)'}(ka) \right], \end{array} \right. \quad (67)$$

pour G^{in} et G^{out} .

L'opérateur \mathcal{U} se réduit dans la base des harmoniques sphériques vectorielles à une suite de matrice de taille 2×2 :

$$\tilde{\mathcal{U}} = \oplus \tilde{\mathcal{U}}_{n,m}^{v,w}, \quad (68)$$

où,

$$\mathcal{U}_{n,m}^v : \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{n,m}^{in,v} \\ G_{n,m}^{in,v} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_{n,m}^{out,v} \\ \tilde{G}_{n,m}^{+,v} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \mathcal{U}_{n,m}^w : \begin{pmatrix} \mathbf{e}_{n,m}^{in,w} \\ G_{n,m}^{in,w} \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{e}}_{n,m}^{out,w} \\ \tilde{G}_{n,m}^{+,w} \end{pmatrix}. \quad (69)$$

Tout calcul fait, on obtient les expressions explicites :

$$\mathcal{U}_{n,m}^v = \frac{1}{\Delta^v} \begin{bmatrix} -i \zeta_n^{(2)'}(ka) + z \zeta_n^{(2)}(ka) & i^{n+1} \\ -4z_r (-i)^{n+1} & i \zeta_n^{(1)'}(ka) + \bar{z} \zeta_n^{(1)}(ka) \end{bmatrix}, \quad (70)$$

et,

$$\mathcal{U}_{n,m}^w = \frac{1}{\Delta^w} \begin{bmatrix} \zeta_n^{(2)}(ka) - iz \zeta_n^{(2)'}(ka) & -i^{n+1} \\ 4z_r \frac{z}{\bar{z}} (-i)^{n+1} & -\frac{z}{\bar{z}} \zeta_n^{(1)}(ka) - iz \zeta_n^{(1)'}(ka) \end{bmatrix}, \quad (71)$$

avec,

$$\Delta^v = i \zeta_n^{(1)'}(ka) - z \zeta_n^{(1)}(ka) \quad \text{et} \quad \Delta^w = \zeta_n^{(1)}(ka) - iz \zeta_n^{(1)'}(ka). \quad (72)$$

On peut alors calculer les limites de ces matrices, pour des modes sphériques d'ordre élevé. On obtient, au premier ordre

$$\mathcal{U}_{n,m}^v(\eta) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2i^n (ka)^{n+2}}{(2n+1)!!} \\ \frac{8(ka)^{n+2} z_r (-i)^n}{(2n+1)!!} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (73)$$

et,

$$\mathcal{U}_{n,m}^w(\eta) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & \frac{2i^n (ka)^{n+2}}{z(2n+1)!!} \\ \frac{8(ka)^{n+2}(-i)^n}{\bar{z}(2n+1)!!} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (74)$$

On retrouve ainsi l'identité pour les modes d'ordres élevés, ce qui traduit la compacité de l'opérateur $\mathcal{K} = \tilde{\mathcal{U}} - I$.

2.3.2 Décomposition spectrale

Soit $f_{n,m}^v$, $g_{n,m}^v$, $f_{n,m}^w$ et $g_{n,m}^w$ les vecteurs propres respectifs de $\mathcal{U}_{n,m}^v$ et $\mathcal{U}_{n,m}^w$, associés aux valeurs propres $\lambda_n^{f,v}$, $\lambda_n^{g,v}$, $\lambda_n^{f,w}$ et $\lambda_n^{g,w}$.

On a, par exemple pour $f_{n,m}^v$,

$$f_{n,m}^v = \begin{bmatrix} \alpha_{n,m}^v \\ \beta_{n,m}^v \end{bmatrix}, \quad (75)$$

et de même pour $g_{n,m}^v$, $f_{n,m}^w$ et $g_{n,m}^w$, de telle façon que

$$\tilde{\mathcal{U}} \begin{bmatrix} \alpha_{n,m}^v \nabla Y_n^m \\ \beta_{n,m}^v \nabla Y_n^m \end{bmatrix} = \lambda_n^{f,v} \begin{bmatrix} \alpha_{n,m}^v \nabla Y_n^m \\ \beta_{n,m}^v \nabla Y_n^m \end{bmatrix}. \quad (76)$$

On suppose ces vecteurs propres normalisés suivant la norme introduite dans l'espace Z , i.e.

$$\|f_{n,m}^v\|_Z^2 = |\alpha_{n,m}^v|^2 + \frac{1}{4z_r} |\beta_{n,m}^v|^2 = 1. \quad (77)$$

Le module $|\alpha_{n,m}^v|$ correspond à la norme du champ rayonné associé au mode $f_{n,m}^v$, tandis que le module $|\beta_{n,m}^v|$ quantifie l'énergie dissipée au niveau de la surface de l'objet.

La même analyse que celle effectuée sur les valeurs propres de l'opérateur de scattering dans le cas PEC peut-être reconduite sur les valeurs propres de $\tilde{\mathcal{U}}$,

- i) $\lambda_n \rightarrow 1$: l'objet est "transparent" vis-à-vis du mode n ; ce dernier ne contribue pas (peu) au rayonnement de l'objet ;
- ii) $\lambda_n \rightarrow -1$: on a dans ce cas $e^{out} = -e^{in}$, et on s'approche d'un phénomène de réflexion totale ; le mode associé est prépondérant en terme de rayonnement.

D'après le théorème 14, les valeurs propres λ_n ne peuvent admettre d'autre point d'accumulation que 1. Ainsi, seul un nombre fini de modes pourra être pris en compte en pratique pour approximer, à une précision donnée, les courants et champs lointains diffractés par l'objet.

On illustre, figure VI.1, le comportement de la suite de valeurs propres λ_n lorsque la fréquence croît. En très basse fréquence ($\lambda = 4a$, cercle de gauche de la figure VI.1), seul deux modes contribuent en première approximation ; un nombre bien plus conséquent de modes contribuent ensuite à des fréquences plus élevés (jusqu'à $\lambda = a/3$, sur le cercle de droite de la figure VI.1).

Ce mode de représentation et d'analyse ne permet pas de rendre compte des dissipations.

VI Généralisation à des objets impédants

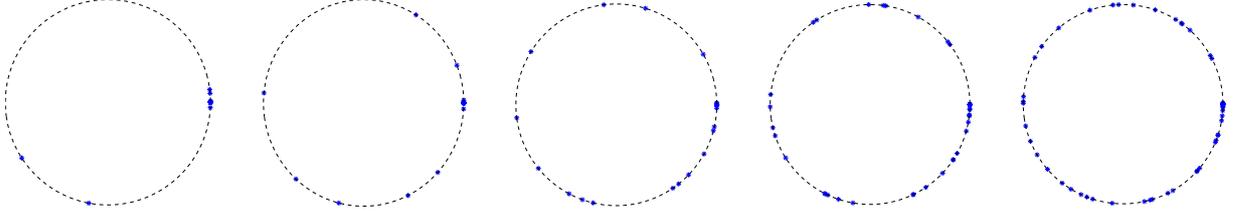


FIG. VI.1 – Distribution des valeurs caractéristiques, λ_n pour une impédance $z = i$, aux fréquences (de gauche à droite) $ka = \frac{\pi}{2}, \pi, 2\pi, 4\pi, 6\pi$ (soit $\lambda = 4a, 2a, a, \frac{a}{2}, \frac{a}{3}$, où a est le rayon de la sphère).

Soit θ_n la suite d'angles telle que $\lambda_n = e^{i\theta_n}$; on considère maintenant (et représente figure VI.2) la suite de valeurs

$$\gamma_{n,m}^v = e^{i\theta_n} |\alpha_{n,m}^v|. \quad (78)$$

Cette suite permet alors de compte de l'importance de chacun des modes à la fois en termes de rayonnement et de dissipation.

En effet, en regardant ces valeurs caractéristiques $\gamma_{n,m}$, on peut maintenant compléter l'analyse précédente :

- i) et ii) $\gamma_{n,m} \rightarrow \pm 1$: idem i) et ii) ci-dessus ;
- iii) $\gamma_{n,m} \rightarrow 0$: le mode associé est totalement dissipé sur la surface de l'objet ne rayonne pas d'énergie à l'infini, i.e. $\mathbf{e}_{n,m} = 0$.

On représente sur la figure VI.2 ces valeurs propres $\gamma_{n,m}$. On représente sur cette figure les "trajectoires", à une fréquence fixée, de ces valeurs propres obtenue en faisant varier l'impédance dans l'intervalle $z \in [0, 2]$, i.e. en augmentant la résistivité de l'objet.

Les valeurs propres présente alors deux types de comportement, lorsque la résistivité augmente :

- certaines s'accumulent en zéro ; elles correspondent à des modes totalement dissipés,
- les autres valeurs se dirrigent vers le cercle unité (i.e. ont un module $\gamma_{n,m} \rightarrow 1$) ; en effet, lorsque l'impédance est grande, la condition d'impédance tend vers une condition de type conducteur magnétique parfait (soit $\mathbf{H}_t = 0$ sur Γ , condition antagoniste de celle conducteur électrique parfait $\mathbf{E}_t = 0$ sur Γ).

Enfin, on regarde le comportement de ces suites de valeurs lorsque la fréquence augmente ; le constat est le même que dans le cas PEC, un nombre faible de modes est à prendre en compte pour des fréquences faibles (zone de résonance et en deçà), tandis que ce nombre augmente ensuite avec la fréquence.

3 Limites de la méthode

Les développements présentés ici généralisent la théorie des courants caractéristiques jusque là réservée aux objets conducteurs.

On relève néanmoins deux limitations principales de cette méthode :

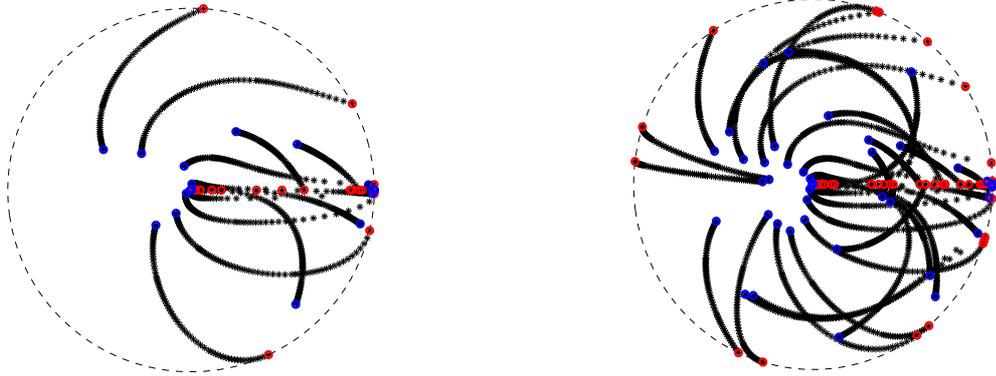


FIG. VI.2 – “Trajectoires” des valeurs caractéristiques, lorsque l’impédance parcourt l’intervalle réel de $z = 0$ (rouge) à $z = 2$ (bleu), aux fréquences $ka = \frac{\pi}{2}$ (gauche) et $ka = 2\pi$ (droite). Balayage en impédance (superposition des tracés) : $z = 0 \dots 2$, aux fréquences (de gauche à droite) $\lambda = 2a$, $\lambda = a$, $\lambda = a/2$ (sphère de rayon a).

- numériquement, les calculs sont plus “lourds” : les maillages de la sphère et de l’objet sont nécessaires, les calculs G_n^{out} et \mathbf{e}_n^{out} suivis de la décomposition de Helmholtz discrète des “ G_n^{out} ”, puis la diagonalisation de la matrice ainsi construite. Une décomposition de Helmholtz est de plus à nouveau nécessaire pour remonter au courants.
- la théorie proposée ici se limite à des objets ayant une impédance z constante sur tout l’objet ; si tel n’était pas le cas, on n’est plus assuré de la commutativité de z et des opérateurs ∇_Γ et \mathbf{rot}_Γ , et donc de la compacité de l’opérateur $\mathcal{U} - I$.

VII Application au problème inverse

1 Problème inverse pour la diffraction d'ondes acoustiques

On présente dans cette partie la méthode de décomposition en éléments caractéristiques dans le cadre de la diffraction d'ondes acoustiques.

Tous les développements effectués pour l'électromagnétisme se transpose formellement en acoustique, à savoir :

- la définition des opérateurs de scattering \mathcal{S} , et de champ lointain F ,
- l'introduction de l'espace $W_H(\Omega)$, qui permet de considérer des ondes ayant à la fois une composante entrantes et une composante sortantes,
- et, finalement, l'expression de l'opérateur de scattering sous la forme d'une transformation de Cayley ne laissant plus qu'intervenir un opérateur \mathcal{K} , compact et auto-adjoint.

Comme énoncé dans le lemme 6, les opérateurs de scattering et de champ lointain sont intimement liés. On donne ainsi dans cette partie, une alternative à la méthode proposée en électromagnétisme, basée cette fois sur l'opérateur de champ lointain F . Cette opérateur étant un opérateur normal (propriété équivalente à l'unitarité de \mathcal{S}), voir lemme 3, et compact (voir [1]), on va pouvoir de la même façon fournir une base orthonormale de $L^2(S)$, formée à partir de l'ensemble de ces champs propres.

1.1 Problème direct - Factorisation de l'opérateur de champ lointain

On s'intéresse ici à la diffraction d'ondes acoustiques par un objet borné de \mathbb{R}^3 . Soit Ω l'ouvert borné, de normale sortante \mathbf{n} , représentant cet objet. On note Ω^{ext} l'ouvert complémentaire de Ω dans \mathbb{R}^3 . Le problème extérieur de la diffraction d'ondes acoustiques, en régime harmonique, est celui de la détermination de l'onde diffractée $u \in H_{loc}^1(\Omega^{ext})$, solution de l'équation de Helmholtz scalaire

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad \text{dans } \Omega^{ext}, \quad (1)$$

et satisfaisant à la condition de radiation à l'infini

$$\partial_r u - iku = O(r^{-2}), \quad r = |x| \rightarrow \infty. \quad (2)$$

On considère de plus la condition de Dirichlet sur la surface de l'objet :

$$u|_{\Gamma} = f \quad \text{sur } \Gamma, \quad (3)$$

VII Application au problème inverse

où $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ est la donnée du problème (excitation). Cette condition est l'analogie acoustique de la condition de conducteur (électrique) parfait, tandis que la condition, dite de Neumann :

$$(\partial_{\mathbf{n}}u)|_{\Gamma} = f \text{ sur } \Gamma,$$

pour $f \in H^{-1/2}(\Gamma)$, correspond quant à elle à une condition de type conducteur magnétique parfait (i.e. $\mathbf{n} \times \mathbf{H} = 0$).

La condition à l'infini (2) est la condition de radiation de Sommerfeld, analogue scalaire de la condition de radiation de Silver-Müller sortante (on peut montrer que la condition de Silver-Müller sur les champs de vecteurs est équivalente à celle de Sommerfeld appliquée à chaque composante).

On peut déjà citer le théorème d'existence et d'unicité du problème de Dirichlet (voir [1], [2], par exemple).

Théorème 15 *Soit $k > 0$; alors le problème de Dirichlet, i.e. le problème (1), (2), et (3), admet une unique solution.*

De manière complètement similaire à l'électromagnétisme, la solution u du problème de Dirichlet peut se représenter sous forme intégrale. On introduit pour cela le potentiel de simple couche :

$$\tilde{S}\varphi(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y), \quad (4)$$

où on a gardé la même notation pour le noyau de Green G (ou solution fondamentale de l'équation de Helmholtz dans \mathbb{R}^3) :

$$G(x, y) := \frac{e^{ik|x-y|}}{4\pi|x-y|}.$$

Soit $\varphi = \partial_n u|_{\Gamma}$, alors

$$u(x) = \tilde{S}\varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Gamma, \quad (5)$$

est l'unique solution du problème de Dirichlet (1), (2), et (3). Ainsi, pour déterminer le champ diffracté u dans tout l'espace, il reste seulement à déterminer l'inconnue φ . Ce point peut-être réalisé en prenant la trace du potentiel de simple couche $\tilde{S}\varphi$, et en utilisant la condition au bord (3). On obtient l'équation intégrale

$$u|_{\Gamma} = f = S\varphi,$$

où on a introduit l'opérateur de simple couche, défini pour $x \in \Gamma$ par,

$$S\varphi(x) = \int_{\Gamma} G(x, y) \varphi(y) ds(y).$$

On a alors les résultats classiques (voir [1], [2], par exemple) :

Théorème 16 *Soit $k > 0$ une fréquence qui ne corresponde pas à une fréquence de résonance du problème de Dirichlet intérieur (i.e. une valeur propre du laplacien Dirichlet dans Ω). Alors, l'opérateur de simple couche S est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.*

1 Problème inverse pour la diffraction d'ondes acoustiques

Soit S_0 le potentiel de simple couche surfacique S pris à la fréquence $k = 0$, alors S_0 est un opérateur continu et coercif dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, i.e.

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma), (S_0\varphi, \varphi) \geq C \|\varphi\|_{-1/2}^2.$$

De plus l'opérateur différence résultant, $S_d = S - S_0$, est un opérateur compact de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

Démonstration Les deux premières assertions sont classiques, on renvoie à [2] par exemple.

Les opérateurs S et S_0 sont des opérateurs intégraux de noyau respectif G et $G_0 = (4\pi r)^{-1}$. Ces deux noyaux ont la même singularité en l'origine; ainsi l'opérateur S_d , de noyau $G - G_0$ n'est plus singulier. L'opérateur S_d est alors un opérateur continu de $H^s(\Gamma)$ dans $H^{s+2}(\Gamma)$, et en particulier compact dans $H^s(\Gamma)$. □

A partir de la représentation intégrale (5), avec le potentiel de simple couche (4), on peut développer asymptotiquement le champ diffracté u :

$$u(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} u_\infty(\hat{x}) + O(|x|^{-2}), |x| \rightarrow \infty,$$

avec $\hat{x} = x/|x|$. u_∞ est le champ lointain de l'onde u , et s'exprime en fonction de l'inconnue φ suivant :

$$u_\infty(\hat{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma} \varphi(y) e^{-ik\hat{x}\cdot y} ds(y). \quad (6)$$

Ce développement asymptotique permet d'introduire l'opérateur de rayonnement a_∞ qui à φ associe le champ lointain diffracté :

$$a_\infty : \begin{cases} H^{-1/2}(\Gamma) & \rightarrow L^2(S) \\ \varphi & \mapsto a_\infty\varphi = u_\infty. \end{cases}$$

De même qu'en électromagnétisme, où la SER de l'objet était la grandeur finale d'intérêt, on s'intéresse plus particulièrement à la diffraction d'ondes planes, c'est-à-dire le cas où la donnée f sur la surface est la trace de l'onde incidente

$$u^i(x, \hat{d}) = e^{ikx\cdot\hat{d}},$$

\hat{d} désignant la direction de propagation de l'onde.

Remarque 15 *L'étude de la diffraction par des ondes planes est en fait des plus générales. On peut en effet montrer que l'ensemble $\{\exp(ikx\cdot\hat{d})|_{x\in\Gamma}, \hat{d} \in S\}$ des traces sur Γ d'ondes planes est dense dans $H^{1/2}(\Gamma)$.*

Ce résultat est en effet équivalent à l'injectivité de l'opérateur de rayonnement $a_\infty : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow L^2(S)$ (qui entraîne alors la densité de l'image de son adjoint $a_\infty^ : L^2(S) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$), qui a bien lieu dès lors que l'on se place à une fréquence ne correspondant pas à une fréquence de résonance du problème de Dirichlet intérieur (voir [1]).*

VII Application au problème inverse

On notera $u_\infty(\hat{x}, \hat{d})$ le champ lointain dans la direction \hat{x} , de l'onde diffractée u suite à l'illumination de l'objet par l'onde plane $u^i(\cdot, \hat{d})$. On rappelle alors la définition de l'opérateur de champ lointain F :

$$F : \begin{cases} L^2(S) & \rightarrow L^2(S) \\ g & \mapsto Fg(\hat{x}) = \int_{\Gamma} u_\infty(\hat{x}, \hat{d}) g(\hat{d}) ds(\hat{d}). \end{cases}$$

D'après le principe de superposition (utilisant la linéarité de l'équation de Helmholtz), Fg est le champ lointain de l'onde diffractée u lorsque l'objet est éclairé par l'onde incidente

$$u_g^i(x) = \int_S g(\hat{d}) e^{ikx \cdot \hat{d}}. \quad (7)$$

L'onde incidente (7) est une onde de Herglotz. Elle est solution de l'équation de Helmholtz dans tout \mathbb{R}^3 , et peut-être vue comme un "paquet" (superposition) d'ondes planes, de densité g .

On revient maintenant à l'équation intégrale satisfaite par l'onde diffractée u , suite à l'illumination de l'objet par l'onde de Herglotz u_g^i , soit

$$u|_{\Gamma} = u_g^i|_{\Gamma} = S\varphi,$$

pour un certain $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ à déterminer. On remarque alors que la trace sur Γ de l'onde de Herglotz u_g^i s'exprime simplement en fonction de l'opérateur de rayonnement a_∞ et de son noyau g , et permet alors de réécrire l'équation intégrale précédente sous la forme

$$S\varphi = -\frac{4\pi}{k} a_\infty^* g, \quad (8)$$

après transposition de (6). Cette expression permet de faire intervenir explicitement le noyau de Herglotz de l'onde incidente. On introduit maintenant la décomposition du noyau de Green

$$G(x, y) = G_R(x, y) + G_I(x, y) := \frac{\cos(k|x - y|)}{4\pi|x - y|} + i \frac{\sin(k|x - y|)}{4\pi|x - y|},$$

et la décomposition du potentiel surfacique de simple couche qui en découle

$$S = S_R + iS_I,$$

où S_R (resp. S_I) est défini de manière identique à S avec le noyau de Green remplacé par sa partie réelle G_R (resp. imaginaire G_I).

On a tout d'abord, concernant la partie imaginaire de S , la décomposition, analogue formelle de celle portant sur la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE.

Lemme 17 *L'opérateur S_I admet la factorisation*

$$S_I = a_\infty^* a_\infty.$$

Ainsi, S_I est un opérateur positif, compact et auto-adjoint, et, si la fréquence k ne correspond pas à une fréquence de résonance du problème intérieur, S_I est de plus défini positif (strictement positif).

Démonstration La démonstration, basée sur la décomposition en ondes planes du sinus cardinal, est directement similaire à celle portant sur la partie imaginaire de l'opérateur d'EFIE, T_I . □

On poursuit de même avec l'opérateur S_R :

Lemme 18 *L'opérateur S_R est un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans son dual $H^{1/2}(\Gamma)$, excepté pour un ensemble discret \mathcal{K} de fréquences.*

Démonstration La démonstration peut ici aussi être calquée sur celle du résultat analogue portant la partie réelle de l'opérateur d'EFIE, T_R .

On peut néanmoins remarquer que, dans ce cas, et grâce au théorème 16, l'opérateur S_R est directement coercif à la fréquence $k = 0$ (on a dans ce cas $S_R(k = 0) = S_0$), tandis que, en électromagnétisme, l'opérateur T n'est pas défini en statique. □

Après ces deux résultats préliminaires, on peut maintenant s'intéresser de plus près à l'opérateur de champ lointain F .

Théorème 17 *Soit $k > 0$ une fréquence telle que $k \notin \mathcal{K}$, et χ l'opérateur*

$$\chi = a_\infty S_R^{-1} a_\infty^*. \quad (9)$$

Alors χ est un opérateur compact et auto-adjoint dans $L^2(S)$; l'opérateur de champ lointain admet alors de plus la factorisation

$$F = \frac{4i\pi}{k} \chi (I + i\chi)^{-1}, \quad (10)$$

où I représente l'identité dans $L^2(S)$.

Démonstration L'opérateur de rayonnement a_∞ est un opérateur intégral de noyau e^{ikr} infiniment régulier. Il en découle que a_∞ est un opérateur régularisant, et en particulier compact, dans $L^2(S)$. Il en est de même de son adjoint a_∞^* , opérateur intégral de noyau e^{-ikr} , puis de l'opérateur χ , grâce au lemme 18. L'opérateur S_R est de plus un opérateur réel et symétrique, donc auto-adjoint; cette propriété se transmet alors, par construction, à l'opérateur χ .

Soit maintenant $g \in L^2(S)$; on s'intéresse tout d'abord à l'équation intégrale (8). Cette équation se réécrit, en utilisant le lemme 17,

$$S\varphi = (S_R + iS_i)\varphi = -\frac{4\pi}{k} a_\infty^* g,$$

soit, grâce au lemme 18,

$$\varphi + iS_R^{-1} a_\infty^* a_\infty \varphi = -\frac{4\pi}{k} S_R^{-1} a_\infty^* g,$$

VII Application au problème inverse

puis, en y appliquant l'opérateur de rayonnement a_∞ , et en utilisant la définition (9) de l'opérateur χ ,

$$(I + i\chi)a_\infty\varphi = -\frac{4\pi}{k}\chi g.$$

Par définition de l'opérateur de champ lointain F , on a finalement

$$Fg = a_\infty\varphi = -\frac{4\pi}{k}\chi(I + i\chi)^{-1}g,$$

pour tout $g \in L^2(S)$, qui nous délivre la décomposition (10) annoncée. □

1.2 Éléments caractéristiques de l'objet

Le théorème 17 nous fournit une expression de l'opérateur de champ lointain à partir, exclusivement, d'un opérateur compact et auto-adjoint. Cet opérateur permet tout d'abord de définir un ensemble de champs lointains formant une base hilbertienne de $L^2(S)$.

Définition 6 Soit χ l'opérateur défini dans la section précédente. On appelle champ lointain caractéristique de l'objet Ω , à la fréquence k , les champs e_n vecteurs propres de χ :

$$\chi e_n = \nu_n e_n, \forall n \in \mathbb{N}.$$

La suite $\{\nu_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ constitue l'ensemble des valeurs caractéristiques de Ω .

Conséquence directe du théorème 17, ces champs lointains ont la propriété :

Lemme 19 L'ensemble des champs lointains caractéristiques associés à l'objet Ω forme une base orthonormée de $L^2(S)$. L'opérateur de champ lointain F est de plus diagonal dans cette base :

$$F e_n = \gamma_n e_n,$$

avec les valeurs propres

$$\gamma_n = -\frac{4\pi}{k} \frac{\nu_n}{1 + i\nu_n}.$$

De ces champs lointains caractéristiques, on peut maintenant se ramener à l'ensemble des courants (la terminologie est utilisée par analogie avec l'électromagnétisme, en fait, l'ensemble des distributions φ_n) qui rayonnent ces champs lointains particuliers.

Définition 7 Soit la suite φ_n définie selon

$$\varphi_n = \lambda_n S_R^{-1} a_\infty^* e_n, \forall n \in \mathbb{N},$$

avec $\lambda_n = 1/\nu_n$. La suite $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite d'éléments (courants) caractéristiques de l'objet Ω , associés aux valeurs caractéristiques λ_n .

On donne maintenant les principales propriétés de cette famille caractéristique.

Théorème 18 *Soit $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ les ensembles d'éléments caractéristiques de Ω . Alors la famille $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille dense dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, formée de fonctions infiniment régulières sur la surface Γ , et qui rayonnent à l'infini les champs lointains caractéristiques, i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_\infty \varphi_n = e_n.$$

Les courants caractéristiques φ_n sont de plus solutions de l'équation aux valeurs propres généralisées :

$$S_R \varphi_n = \lambda_n S_I \varphi_n.$$

Les φ_n sont l'analogie formelle des courants caractéristiques \mathbf{J}_n en électromagnétisme. Le théorème 18 montre alors que ces deux familles ont les mêmes propriétés.

Démonstration Elle se fait de manière rigoureusement analogue à celle présentée sur les courants caractéristiques. □

On obtient de cette façon une famille de distributions caractéristiques φ_n , analogue des courants caractéristiques introduits et étudiés dans le cadre de la diffraction d'ondes électromagnétiques par un objet parfaitement conducteur.

La propriété fondamentale utilisée ici, comme dans le cas d'un objet PEC en électromagnétique, et la conservation de l'énergie incidente - diffractée.

Le cas d'une condition de type Neumann sur la surface de l'objet se traite de la même façon, et permet d'aboutir à des résultats similaires.

On notera que la démarche présentée ici, différente de celle utilisée dans le cas Maxwell, est, réciproquement, complètement transposable aux ondes électromagnétiques.

Cette approche, privilégiant l'opérateur de champ lointain F plutôt que celui de scattering S , est une approche plus usuelle dans une problématique "problème inverse".

En effet, cet opérateur contient l'ensemble des champs diffractés par l'objet, suite à des illuminations onde plane. Cet ensemble constitue, en général, la donnée du problème inverse : la reconstruction de l'objet (ou sa surface) à partir de la connaissance de ses champs lointains diffractés.

On renvoie à, entres autres, [1], [55], [58], [60].

1.3 Caractérisation de $H^{-1/2}(\Gamma)$ à partir des éléments caractéristiques

Nous avons vu dans le théorème 18 que la famille des éléments caractéristiques forme une base de $H^{-1/2}(\Gamma)$, dans le sens où tout élément de $H^{-1/2}(\Gamma)$ se décompose uniquement sur cette famille (base de Schauder).

VII Application au problème inverse

Cette famille d'éléments caractéristiques n'est pas en générale directement orthogonale (excepté pour quelques géométries particulières, la sphère par exemple).

On peut néanmoins montrer que cette famille forme une base d'une classe un plus plus générale que celle des bases orthonormales, à savoir une base de Riesz.

On rappelle tout d'abord la définition de telles bases :

Définition 8 Soit $\{f_n\}$ une famille dans une espace de Hilbert séparable \mathcal{H} . On dit que $\{f_n\}$ est une base de Riesz de \mathcal{H} si la famille $\{f_n\}$ est équivalente à une famille orthonormée de \mathcal{H} , i.e. $\{f_n\}$ est l'image par un opérateur A linéaire, borné, inversible et d'inverse bornée, d'une base orthonormale $\{e_n\} : \forall n \in \mathbb{N}, f_n = Ae_n$.

Les bases de Riesz forment une classe de base, dans les espaces de Hilbert, un peu plus générale que les bases orthonormales. Elles partagent la propriété, fondamentale dans notre étude :

Théorème 19 Soit $\{f_n\}$ une base de Riesz de \mathcal{H} . Alors, il existe deux constantes $a, b > 0$ telles que, pour tout $f \in \mathcal{H}$,

$$\exists (\alpha_n) \in \mathbb{C}; f = \sum_n \alpha_n f_n,$$

avec,

$$a \sum_n |\alpha_n|^2 \leq \|f\|^2 \leq b \sum_n |\alpha_n|^2.$$

Cette propriété, triviale dans le cas d'une base orthonormée (dans quel cas on a $a = b = 1$, d'après l'égalité de Parseval), permet de définir la norme équivalente sur $\mathcal{H} : \|f\|^2 = \sum_n |\alpha_n|^2$.

On renvoie à [11, Chap. VI] pour de plus amples détails sur les bases, en particulier non-orthogonale, dans les espaces de Hilbert.

On montre alors le résultat intéressant sur la famille d'éléments caractéristiques $\{\varphi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, permettant de caractériser l'espace $H^{-1/2}(\Gamma)$. La démonstration de ce théorème provient originalement de [55]; nous en donnons une version ici, notre but étant par la suite de l'étendre au cas d'ondes électromagnétiques.

Théorème 20 La famille $\{\tilde{\varphi}_n := \varphi_n / \sqrt{i + \lambda_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ forme une base de Riesz de $H^{-1/2}(\Gamma)$.

Ce résultat a été initialement démontré (à quelques variantes près) par A. Kirsch dans [55].

Nous reprenons ici cette démonstration, quelque peu simplifiée par rapport à sa version originale, car elle constitue un résultat fondamental sur la famille d'éléments caractéristiques.

Ce résultat est de plus le point essentiel de la méthode de traitement du problème inverse qui va suivre; la difficulté de la transposition au problème inverse électromagnétique y est complètement contenu.

Démonstration du théorème 20 :

On remarque tout d'abord que

$$\forall n, m \in \mathbb{N}, (S\tilde{\varphi}_n, \tilde{\varphi}_m) = s_n \delta_{n,m}, \quad (11)$$

avec la suite complexe

$$s_n = \sqrt{\frac{\lambda_n + i}{\lambda_n - i}},$$

telle que

$$|s_n| = 1, \text{ et } s_n \rightarrow 1, n \rightarrow \infty.$$

On commence par montrer que la famille $\{\tilde{\varphi}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée. Supposons en effet que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que, pour une certaine sous-suite $\tilde{\varphi}_n$ (aussi notée $\tilde{\varphi}_n$), on ait $\|\tilde{\varphi}_n\| \rightarrow \infty$. On définit alors la suite $\hat{\varphi}_n = \tilde{\varphi}_n / \|\tilde{\varphi}_n\|$. La suite $\hat{\varphi}_n$ est normée (donc bornée) et admet par conséquent un point d'accumulation faible dans $H^{-1/2}(\Gamma)$: $\tilde{\varphi}_n \rightharpoonup \hat{\varphi}$, à une autre sous-suite près.

On a alors, d'après la relation (11),

$$|(S\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n)| = \frac{|s_n|}{\|\tilde{\varphi}_n\|^2} = \frac{1}{\|\tilde{\varphi}_n\|^2} \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, pour $n \rightarrow \infty$, $(S\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow 0$, et donc $\Im m(S\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) = (S_I \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow 0$. Or, d'après le lemme 17, on a $(S_I \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow (S_I \hat{\varphi}, \hat{\varphi}) = \|a_\infty \hat{\varphi}\|_{L^2(S)} = 0$. On en déduit que, si k n'est pas une fréquence de résonance du problème intérieur, $\hat{\varphi} = 0$.

Maintenant, grâce au théorème 16, on peut réécrire la relation (11) suivant $(S\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) = (S_0 \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) + (S_d \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n)$, où, S_d étant un opérateur compact, $(S_d \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$, et, pour tout entier n , $(S_0 \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \geq C \|\hat{\varphi}_n\|^2 = C > 0$.

On obtient ainsi à la limite

$$(S\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) = (S_0 \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) + (S_d \hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow C > 0,$$

qui est contradictoire avec $(S\hat{\varphi}_n, \hat{\varphi}_n) \rightarrow 0$.

Soit maintenant n_0 un entier tel que

$$\forall n \geq n_0, \Re e(s_n) \geq \frac{1}{2},$$

et le sous-espace vectoriel

$$V_{n_0} = \left\{ \varphi \in H^{-1/2}(\Gamma); (S\varphi, \tilde{\varphi}_n) = 0, \forall n < n_0 \right\}.$$

On montre tout d'abord que la famille $\{\tilde{\varphi}_n; n \geq n_0\}$ est dense dans V_{n_0} . Soit pour cela $\varphi \in V_{n_0}$; alors, d'après la densité des éléments caractéristiques φ_n dans $H^{-1/2}(\Gamma)$, et donc de la famille $\tilde{\varphi}_n$, il existe une suite de coefficients $(\alpha_j^{(n)}) \in \mathbb{C}, j = 1, \dots, n, n \in \mathbb{N}$, telle que

$$\sum_j \alpha_j^{(n)} \tilde{\varphi}_j = \sum_{j < n_0} \alpha_j^{(n)} \tilde{\varphi}_j + \sum_{j \geq n_0} \alpha_j^{(n)} \tilde{\varphi}_j \rightarrow \varphi, n \rightarrow \infty.$$

VII Application au problème inverse

Par application du potentiel de simple couche S et projection sur $\tilde{\varphi}_l$, $l < n_0$, on obtient alors

$$\begin{aligned} \sum_{j < n_0} \alpha_j^{(n)} \underbrace{(S\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_l)}_{= s_j \delta_{j,l}} + \sum_{j \geq n_0} \alpha_j^{(n)} \underbrace{(S\tilde{\varphi}_j, \tilde{\varphi}_l)}_{= 0} &\rightarrow \underbrace{(S\varphi, \tilde{\varphi}_l)}_{= 0}, \\ &= s_j \delta_{j,l} \qquad \qquad \qquad = 0 \qquad \qquad \qquad = 0 \end{aligned}$$

qui montre que $\alpha_j^{(n)} \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, pour tout $l < n_0$, et donc que la famille $\{\tilde{\varphi}_n; n \geq n_0\}$ est dense dans V_{n_0} .

On montre maintenant que la partie réelle du potentiel de simple couche, S_R , est coercive sur V_{n_0} :

$$\exists C > 0, \forall \varphi \in V_{n_0}, \Re(S\varphi, \varphi) = (S_R\varphi, \varphi) \geq C\|\varphi\|^2. \quad (12)$$

Supposons pour cela, à nouveau, le contraire, i.e. il existe une suite $(\psi^n) \subset V_{n_0}$, telle que $\|\psi^n\| = 1$, et

$$(S_R\psi^n, \psi^n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

D'après le résultat de densité précédent, ψ^n est de la forme

$$\psi^n = \sum_{j \geq n_0} \alpha_j^n \tilde{\varphi}_j, (\alpha_j^n) \in \mathbb{C}.$$

La relation d'orthogonalité (11) nous fournit alors

$$(S\psi^n, \psi^n) = \sum_{j \geq n_0} s_j |\alpha_j^n|^2,$$

puis, on prenant la partie réelle

$$(S_R\psi^n, \psi^n) = \sum_{j \geq n_0} \Re(s_j) |\alpha_j^n|^2 \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

Comme pour $j \geq n_0$, on a $\Re(s_j) \geq 1/2$, on peut en déduire que $\sum_{j \geq n_0} |\alpha_j^n|^2 \rightarrow 0$ et donc que

$$(S\psi^n, \psi^n) \rightarrow 0, n \rightarrow \infty.$$

En procédant comme au premier point de cette démonstration, on s'aperçoit que cette dernière relation est impossible compte tenu du fait que $\|\psi^n\| = 1$.

D'après ce qui précède, la famille $\{\tilde{\varphi}_n / \Re(s_n)\}$ forme une base orthonormale de V_{n_0} , pour le produit scalaire $\langle \varphi, \psi \rangle = (S_R\varphi, \psi)$ et le théorème 20 est immédiat dans V_{n_0} , car d'après la relation de coercivité (12), le produit scalaire \langle, \rangle est équivalent au produit scalaire initial.

Il reste alors à remarquer que $H^{-1/2}(\Gamma)$ se décompose suivant la somme directe : $H^{-1/2}(\Gamma) = V_0 \oplus V_{n_0}$, où V_0 est le sous-espace de dimension finie, $V_0 = \text{Vect}\{\tilde{\varphi}_n, n < n_0\}$, ce qui permet d'étendre immédiatement le résultat à $H^{-1/2}(\Gamma)$ tout entier. □

1.4 Méthode de Factorisation d'A. Kirsh et Linear Sampling Method

1.4.1 Méthode de factorisation d'A. Kirsh

On vient de montrer, théorème 17, la factorisation de l'opérateur de champ lointain sous la forme

$$F = \frac{4i\pi}{k} \chi (I + i\chi)^{-1},$$

où $\chi = a_\infty S_R^{-1} a_\infty^*$ est un opérateur compact et auto-adjoint.

En fait, sans introduire la décomposition complexe de l'opérateur de simple couche $S = S_R + iS_I$, on peut démontrer (voir la démonstration du théorème 17) la factorisation

$$F = -a_\infty S^{-1} a_\infty^*. \quad (13)$$

Soit G l'opérateur $G : f \mapsto u_\infty$, où u_∞ est le champ lointain de l'onde diffractée solution du problème de Dirichlet avec la donnée sur le bord $f \in H^{1/2}(\Gamma)$.

La méthode de factorisation de Kirsh [55] repose sur la factorisation de l'opérateur de champ lointain suivant

$$F = -GS^*G^*. \quad (14)$$

Cette factorisation est équivalente à celle que nous manipulons, i.e. la relation (13) ci-dessus, en remarquant que l'opérateur G associe à $f \in H^{1/2}(\Gamma)$ le champ lointain $a_\infty \varphi$ telle que $S\varphi = f$. Ces deux opérateurs sont donc reliés simplement par l'intermédiaire du potentiel de simple couche S suivant la relation

$$G = a_\infty S^{-1}. \quad (15)$$

La relation (14) permet par la suite de démontrer l'égalité des images :

$$\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}\left((FF^*)^{1/4}\right),$$

et ainsi de caractériser l'image de G dans $L^2(S)$ à partir de la connaissance des éléments spectraux de F . On note que, le potentiel de simple couche S étant un isomorphisme, les images de G et de a_∞ coïncident grâce à (15) : $\mathcal{R}(G) = \mathcal{R}(a_\infty)$.

L'utilisation des éléments caractéristiques φ_n , e_n , et des valeurs λ_n permet de caractériser, à l'aide du théorème 20, l'image de l'opérateur de champ lointain d'une part et, d'autre part, l'image de l'opérateur de rayonnement a_∞ .

On présente ce point dans le paragraphe 1.5 suivant ; en particulier, on retrouve les résultats de [55], le point clé restant de toute façon le théorème 20 énoncé précédemment et déjà présent dans [55].

1.4.2 Lien entre la Linear Sampling Method et la méthode de Factorisation

La méthode de factorisation initialement proposée par A. Kirsh et la Linear Sampling Method (LSM) [60] sont deux méthodes de traitement du problème inverse assez proches.

VII Application au problème inverse

La méthode de factorisation, que nous reprenons dans ce chapitre, caractérise l'objet à déterminer à l'aide de l'image de l'opérateur $(FF^*)^{1/4}$. Cela revient à considérer l'équation

$$(FF^*)^{1/4} g_z = b_z, \quad (16)$$

z désignant un point de l'espace \mathbb{R}^3 , g_z la fonction inconnue à déterminer, et b_z un second membre particulier. Une condition nécessaire pour que cette équation soit solvable est $b_z \in \mathcal{R}\left((FF^*)^{1/4}\right)$. Nous verrons dans le paragraphe suivant que le champ particulier $b_z(\hat{x}) := e_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}$ satisfait cette condition si et seulement si le point z est situé dans l'objet. Ainsi, la résolution de (16) permet de déterminer les points z de l'objet comme les points z tels que g_z solution de (16) existe, i.e.

$$\{z \in \mathbb{R}^3 ; \|g_z\| < \infty\}. \quad (17)$$

Ce point est explicité dans le paragraphe 1.5.

La LSM ressemble largement à la méthode de factorisation. Plus précisément, et en gardant les mêmes notations que précédemment, la LSM repose sur la solvabilité de l'équation

$$Fg_z = e_z. \quad (18)$$

On peut montrer en effet (voir [60], [61], [63], et les références qui y sont faites) que pour tout point z extérieur à l'objet, on a nécessairement $\|g_z\| = \infty$. La LSM tire son nom du fait que l'on va alors échantillonner l'espace dans lequel on recherche l'objet, puis pour chacun de ces points d'échantillonnage résoudre l'équation linéaire (18).

Une des difficultés majeures inhérente à la LSM est que l'on conserve le caractère "mal posé" du problème inverse : celui se retrouve dans la compacité de l'opérateur de champ lointain F , et ainsi dans la difficulté pratique de la résolution de l'équation (18), voir [61]. L'équation (18) n'admet, en général pas de solution. On peut alors montrer [60, Th. 2.2] l'existence d'une solution approchée g_z^ε telle que,

$$\|Fg_z^\varepsilon - e_z\| \leq \varepsilon,$$

pour un petit paramètre ε , indépendant de z , et qui vérifie $\|g_z^\varepsilon\| \rightarrow \infty$, $z \rightarrow \Gamma$, $z \in \Omega$. L'application pratique de la LSM nécessite ainsi une étape de régularisation, de manière à déterminer la solution approchée g_z^ε .

La méthode de factorisation ne présente pas cet inconvénient, et peut alors être vue comme une régularisation de la LSM.

Signalons néanmoins que si la méthode de factorisation est restreinte à des problèmes conservatifs (objet avec condition de Dirichlet ou de Neumann exclusivement), la LSM s'applique à des objets avec, indifféremment, condition de Dirichlet, Neumann, ou mixte (condition de Robin ou de Fourier).

Nous revenons maintenant à la méthode de factorisation. Nous allons montrer le résultat (17) défini à partir de l'équation (16), en utilisant les propriétés des éléments caractéristiques de l'objet.

1.5 Caractérisation géométrique de l'objet à l'aide des éléments caractéristiques

On s'intéresse maintenant au problème inverse à proprement parler : la détermination de l'objet responsable de la diffraction, à partir de la connaissance des champs lointains diffractés dans la direction $\mathbf{e}(\hat{x}; \hat{d}, p)$ suite à une illumination onde plane dans la direction \hat{d} et la polarisation p pour des directions $\hat{x}, \hat{d} \in S$, et $p \in \mathbb{R}^3$.

La connaissance de ces champs lointains diffractés dans toutes les directions d'observation et d'incidence équivaut à celle de l'opérateur de champ lointain F .

On montre plus particulièrement dans cette partie que l'utilisation des éléments caractéristiques, i.e.

$$\{\mathbf{e}_n, \varphi_n, \lambda_n, n \in \mathbb{N}\},$$

permet une caractérisation naturelle de l'image de l'opérateur de rayonnement a_∞ . Cette caractérisation permet alors à son tour de caractériser le domaine Ω , responsable de la diffraction, par rapport à ces champs et valeurs caractéristiques.

D'après le théorème 20, on a une caractérisation immédiate de l'image de l'opérateur de rayonnement :

Théorème 21 *Soit \mathbf{e}_n et λ_n les champs et valeurs caractéristiques de l'objet Ω . Alors l'image de l'opérateur de rayonnement a_∞ est donnée par :*

$$\mathcal{R}(a_\infty) = \left\{ \mathbf{e} = \sum_n \alpha_n \mathbf{e}_n; \alpha_n \in \mathbb{C}, \sum_n |i + \lambda_n| |\alpha_n|^2 < \infty \right\}. \quad (19)$$

Démonstration On a, par définition de l'image,

$$\mathbf{e} = \sum_n \alpha_n \mathbf{e}_n \in \mathcal{R}(a_\infty) \iff \varphi = \sum_n \alpha_n \varphi_n \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

et, d'après le théorème 20,

$$\varphi = \sum_n \alpha_n \varphi_n \in H^{-1/2}(\Gamma) \iff \sum_n \frac{|\alpha_n|^2}{|\gamma_n|} < \infty.$$

En substituant $\gamma_n = 1/i + \lambda_n$, on obtient (19). □

De manière à aboutir à la caractérisation souhaitée, il nous reste à exhiber un champ lointain particulier de $\mathcal{R}(a_\infty)$. Ce champ nous est donné en considérant le champ produit par un dipôle.

Théorème 22 *Soit $z \in \mathbb{R}^3$, alors on définit :*

$$\mathbf{e}_z(\hat{x}) = e^{-ikz \cdot \hat{x}}, \hat{x} \in S_3, \quad (20)$$

Alors, $\mathbf{e}_z \in \mathcal{R}(a_\infty)$ si et seulement si $z \in \Omega$.

VII Application au problème inverse

Démonstration On commence par le cas $z \in \Omega$. Soit

$$v_z(x) = \Phi(x, y), \forall x \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega.$$

Alors v_z est solution du problème de Dirichlet sortant, avec comme condition au bord $f = v_z|_{\Gamma} \in H^{1/2}(\Gamma)$. On a de plus, pour le champ lointain de v_z ,

$$v_{z,\infty}(\hat{x}) = \mathbf{e}_z(\hat{x}), \forall \hat{x} \in S_3,$$

ce qui prouve que $\mathbf{e}_z \in \mathcal{R}(a_\infty)$.

Soit maintenant $z \notin \Omega$, et supposons qu'il existe $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ telle que $\mathbf{e}_z = a_\infty \varphi$. Soit v la solution du problème de Dirichlet :

$$\begin{cases} \Delta v + k^2 v = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega} \\ \partial_r v - ikv = 0, |x| \rightarrow \infty \\ v|_{\Gamma} = S^{-1}\varphi & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

Alors, comme \mathbf{e}_z est aussi le champ lointain de la solution fondamentale $\Phi(\cdot, z)$, d'après le lemme de Rellich, on doit avoir $v = \Phi(\cdot, z)$ dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$, en particulier au point $x = z \notin \Omega$. Ceci est impossible car v est une fonction analytique dans $\mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$. □

On arrive alors à la caractérisation de du domaine Ω en terme de ces champs et valeurs caractéristiques :

Théorème 23 Soit \mathbf{e}_n et λ_n les champs et valeurs caractéristiques de l'objet Ω . Alors on a :

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{R}^3 ; \sum_n |i + \lambda_n| |(e_z, \mathbf{e}_n)|^2 < \infty \right\}. \quad (21)$$

On est alors vite tenté d'arriver à la même conclusion pour Maxwell.

Néanmoins, le passage Helmholtz scalaire \rightarrow Maxwell présente certaines difficultés non négligeables. On rappelle certaines de ces difficultés dans le paragraphe suivant.

2 De l'acoustique à l'électromagnétisme

Quoique très proche, les problèmes de propagation d'ondes acoustiques et électromagnétiques présentent quelques différences dignes importantes sur le plan théorique.

- Si, dans un premier temps, les équations de Maxwell peuvent se ramener à une équations de Helmholtz vectorielle pour chacun des deux champs, électrique et magnétique, la condition de divergence ne doit pas être oubliée. Cela nécessite d'introduire la condition $\text{div } \mathbf{E}$ dans les conditions aux limites : sur Γ et à l'infini pour le problème extérieur (voir la formulation (23), ci-dessous).

- Par la suite, une fois traité le problème de la divergence, la compacité de l'injection de $H^1 \hookrightarrow L^2$ est problématique : l'injection $H(\mathbf{rot}) \hookrightarrow L^2$ n'est pas compacte. Cette difficulté peut toutefois être contournée en considérant des champs plus réguliers sur la surface. En effet, on a (voir [4, Cor. 5, Ch. 2])

$$\left(H(\operatorname{div}, \Omega) \cap H(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \left\{ \mathbf{E}; \pi_{\Gamma} \mathbf{E} \in H^{1/2}(\Gamma) \right\} \right) = H^1(\Omega),$$

(et plus généralement, pour un domaine Ω régulier $(C^{k+1,1})$,

$$\left\{ \mathbf{E} \in L^2(\Omega); \mathbf{rot} \mathbf{E} \in H^k(\Omega), \operatorname{div} \mathbf{E} \in H^k(\Omega), \pi_{\Gamma} \mathbf{E} \in H_t^{k+1/2}(\Gamma) \right\} \subset H^{k+1}$$

et on récupère ainsi la compacité perdue. On obtient de cette façon, le lemme 20.

- Dans un troisième temps, il y a certaines difficultés liées aux traces des éléments de $H(\mathbf{rot})$ et H^1 .

Le cadre fonctionnel de l'équation de Helmholtz scalaire s'appuie sur le triplet : $H^{1/2} \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow H^{-1/2}$, avec injections continues et compactes. Ceci ne se transpose pas aux espaces de traces tangentielles des éléments de $H(\mathbf{rot})$, i.e. $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ et $H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, pour lesquels, en particulier, les inclusions $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) \not\subset L^2$ et $H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Gamma) \not\subset L^2$ n'ont pas lieu.

Cette fois, une décomposition de type décomposition Helmholtz peut fournir un outil adapté lorsque la difficulté se présente. Cette décomposition s'écrit $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) = V \oplus W$, où W est un espace de champs à divergence nulle (i.e. $W \subset \operatorname{Ker} \operatorname{div}_{\Gamma}$), et V un sous-espace de champ plus réguliers qui permet de retrouver la compacité des injections : $V \hookrightarrow L^2 \hookrightarrow V'$.

2.1 Lien entre les formulations $H(\mathbf{rot})$ et H^1

Les équations de Maxwell se formulent assez naturellement dans un cadre $H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^{ext})$ (voir chapitre I).

On rappelle cette formulation, dans laquelle on a substitué le champ magnétique \mathbf{H} au profit du champ électrique \mathbf{E} :

- Formulation $H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^{ext})$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \in H_{loc}(\mathbf{rot}, \Omega^{ext}) \text{ tel que} \\ \mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega^{ext} \\ \pi_{\Gamma} \mathbf{E} = c \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (\mathbf{rot} \mathbf{E} \times \hat{x} - ik \mathbf{E}) = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

Néanmoins, l'identité vectorielle $\Delta = \nabla \operatorname{div} - \mathbf{rot} \operatorname{rot}$ permet de faire le lien entre cette formulation et l'équation de Helmholtz (vectorielle) qui, elle, s'exprime classiquement dans un cadre $H_{loc}^1(\Omega)$.

VII Application au problème inverse

On note néanmoins que si la condition de divergence nulle du champ électrique est implicite dans le problème (22) (grâce à l'identité vectorielle $\operatorname{div} \mathbf{rot} = 0$), elle ne l'est plus dans la formule "Helmholtz" et doit être rajoutée dans les conditions aux limites.

- Formulation $H_{loc}^1(\Omega)$ pour Maxwell :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E} \in H_{loc}^1(\Omega^{ext}) \text{ tel que} \\ \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0 \text{ dans } \Omega^{ext} \\ \pi_{\Gamma} \mathbf{E} = c \text{ sur } \Gamma \\ \operatorname{div} \mathbf{E} = 0 \text{ sur } \Gamma \\ \lim_{|x| \rightarrow \infty} |x| (\hat{x} \operatorname{div} \mathbf{E} - ik \mathbf{E}) = 0 \end{array} \right. \quad (23)$$

On a alors (voir [66], par exemple),

Lemme 20 *On suppose que la donnée c des problèmes (22) et (23) a une régularité au moins $H_t^{1/2}(\Gamma)$, alors les problèmes (22) et (23) sont équivalents.*

2.2 Lien entre le potentiel de simple couche et l'opérateur d'EFIE

En gardant les notations S pour le potentiel de simple couche acoustique, et T pour l'opérateur d'EFIE, on a la relation

$$T\mathbf{J} = S\mathbf{J} + \frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} S \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J} \quad (24)$$

soit, en utilisant la relation de transposition $(\nabla_{\Gamma})^* = -\operatorname{div}_{\Gamma}$,

$$(T\mathbf{J}, \mathbf{J}) = (S\mathbf{J}, \mathbf{J}) - \frac{1}{k^2} (S \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}, \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}). \quad (25)$$

C'est la formulation variationnelle déjà utilisée pour, entre autre, l'approximation numérique de l'EFIE.

Cette formulation variationnelle laisse apparaître deux difficultés dans l'étude de l'EFIE :

- la présence des termes en divergence (charges électriques) est responsable d'une régularité amoindrie,

- la différence de signe entre les deux termes de l'EFIE ne permet de considérer aucun des termes comme une perturbation compacte de l'autre.

Cette propriété de l'opérateur du potentiel de simple couche, de pouvoir s'écrire sous la forme d'une perturbation compacte d'un opérateur coercif (c'est à dire S est un opérateur de type Fredholm), est la propriété fondamentale utilisée pour démontrer le théorème 20.

Nous allons néanmoins voir que les résultats présentés précédemment en acoustique peuvent s'étendre à la diffraction d'ondes électromagnétiques.

L'outil essentiel pour arriver à ce résultat est la décomposition de Helmholtz (voir [67], [4], [43], entre autres) de l'espace des courants $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.

La décomposition de Helmholtz permet d'isoler la composante régulière d'un élément de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, aboutissant à une approche intéressante vis-à-vis du point i) ci-dessus, et permet de plus de combler les lacunes de l'opérateur d'EFIE annoncées au point ii).

En effet, nous allons voir que, grâce à cette décomposition, l'opérateur T est lui-aussi un opérateur de type Fredholm (d'indice nul).

3 Problème inverse pour Maxwell

3.1 Caractérisation de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ à l'aide des éléments caractéristiques

On suppose toujours la surface de l'objet régulière (disons C^2). On énonce tout d'abord la décomposition de Helmholtz de l'espace $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Lemme 21 *On a la somme directe*

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) = V \overset{\perp}{\oplus} W,$$

avec les espaces $V = \nabla_{\Gamma} (H^{3/2}(\Gamma))$ et $W = \mathbf{rot}_{\Gamma} (H^{1/2}(\Gamma))$, la somme étant orthogonale pour le produit scalaire $L^2(\Gamma)$.

On a de plus, $V \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ avec injection continue et compacte.

La décomposition de Helmholtz est un outil adapté à l'étude de la diffraction d'onde par un objet de surface quelconque, et particulièrement pour l'étude de l'EFIE.

En effet, le lemme 21 montre que chaque courant de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ se décompose en une composante à divergence nulle, et une composante plus régulière.

D'après la relation (25) et le théorème 16, on est tenté d'introduire la forme bilinéaire coercive dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$:

$$(T_0 \mathbf{J}, \mathbf{J}') = (S_0 \mathbf{J}, \mathbf{J}') + \frac{1}{k^2} (S_0 \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}, \text{div}_{\Gamma} \mathbf{J}'), \quad (26)$$

et, de même que pour le potentiel de simple couche en acoustique, de s'intéresser à la somme ou la différence $T \pm T_0$. On pose $S^{\pm} = S \pm S_0$, et, de même, $T^{\pm} = T \pm T_0$.

Soit, à l'aide du lemme 21, $\mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, $\mathbf{J} = \nabla_{\Gamma} \varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi$, où $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, alors on a

$$\begin{aligned} (T^{\pm} \mathbf{J}, \mathbf{J}) = & (S^{\pm} \nabla_{\Gamma} \varphi, \nabla_{\Gamma} \varphi) + (S^{\pm} \nabla_{\Gamma} \varphi, \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi) + (S^{\pm} \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi, \nabla_{\Gamma} \varphi) \\ & + (S^{\pm} \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi, \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi) - \frac{1}{k^2} (S^{\mp} \Delta_{\Gamma} \varphi, \Delta_{\Gamma} \varphi) \end{aligned} \quad (27)$$

Les trois premières formes bilinéaires du membre de droite sont continues sur $(H^{1/2}(\Gamma))^2$. Plus spécifiquement, ce sont des formes agissant sur, respectivement, $V \times V$, $V \times W$, et $W \times V$. Grâce

VII Application au problème inverse

à la compacité des injections $V \hookrightarrow L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$, ces trois formes sont ainsi compactes dans tous les cas (i.e. S^+ et S^- sont compactes).

La difficulté apparaît ensuite clairement pour les deux dernières : si S^- est un opérateur compact de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{1/2}(\Gamma)$ (il est en fait continu de $H^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H^{3/2}(\Gamma)$), le noyau de S^+ a la même singularité en l'origine que le noyau de S . Par conséquent, les formes reposant sur S^- sont compactes, tandis que celles reposant sur S^+ sont simplement continues.

L'expression (27) montre ainsi clairement la discordance entre les termes en gradient et ceux en rotationnels : si les formes associées aux opérateurs $T^+ : \nabla_\Gamma H^{3/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ et $T^- : \mathbf{rot}_\Gamma H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ sont toutes les deux compactes, aucune des deux ne l'est sur $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ tout entier.

On est ainsi amené à définir, pour pallier ce problème, l'isomorphisme :

$$\Theta : \begin{cases} H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) & \rightarrow H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \\ \mathbf{J} = \nabla_\Gamma \varphi + \mathbf{rot}_\Gamma \psi & \mapsto \Theta \mathbf{J} = \nabla_\Gamma \varphi - \mathbf{rot}_\Gamma \psi. \end{cases} \quad (28)$$

Plus précisément, on a alors (voir annexe B - 3) :

Théorème 24 *Il existe une forme bilinéaire \mathcal{R} compacte sur $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ et une constante $C > 0$ telles que :*

$$\forall \mathbf{J} \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma), \quad |(T\mathbf{J}, \Theta\mathbf{J}) + \mathcal{R}(\mathbf{J}, \mathbf{J})| \geq C \|\mathbf{J}\|^2.$$

On rappelle que la famille des courants caractéristiques est dense dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, i.e. si on pose $V_n = \text{Vect} \{\mathbf{J}_1, \dots, \mathbf{J}_n\}$, l'espace engendré par les n premiers courants, alors on a

$$\overline{\bigcup_n V_n} = H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma).$$

Nous avons de plus vu que dans le cas d'un objet sphérique la famille des courants caractéristiques forme de plus une base de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. On rappelle que cette propriété implique, pour tout $J \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, l'existence d'une suite de coefficients (α_n) telle que

$$J = \sum_n \alpha_n \mathbf{J}_n,$$

la limite étant à prendre au sens de la convergence en norme, i.e.

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left\| J - \sum_{n=1}^N \alpha_n \mathbf{J}_n \right\| = 0.$$

La propriété pour une famille de former une base est plus forte que celle de densité.

Théorème 25 *On suppose que la surface Γ est telle que la famille $\{\mathbf{J}_n\}$ des courants caractéristiques forme une base de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, alors, pour toute fréquence $k \notin \mathcal{K}_{\text{int}}$, la famille $\{\tilde{\mathbf{J}}_n\}$ forme une base de Riesz de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.*

Démonstration On remarque tout d'abord que l'on a la relation "d'orthogonalité", analogue à celle obtenue en acoustique avec le potentiel de simple couche :

$$|(T\tilde{\mathbf{J}}_n, \tilde{\mathbf{J}}_m)| = \delta_{nm}, \quad \forall n, m \in \mathbb{N}. \quad (29)$$

Comme la famille $\{\mathbf{J}_n\}$ est, par hypothèse une base de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, il en est de même pour la famille $\{\tilde{\mathbf{J}}_n\}$, et pour montrer le résultat, il est alors suffisant de montrer (voir [11, Th. 2.2, Ch. VI], ou encore [9, Annexe 3, Th. 1]) que la famille $\{\tilde{\mathbf{J}}_n\}$ est presque normée, i.e.

$$\exists a, b > 0, \quad a \leq \|\tilde{\mathbf{J}}_n\| \leq b, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (30)$$

La borne inférieure est immédiate, compte tenu de la relation d'orthogonalité (29), et de la continuité de T :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad |(T\tilde{\mathbf{J}}_n, \tilde{\mathbf{J}}_n)| = 1 \leq \|T\| \|\tilde{\mathbf{J}}_n\|^2.$$

On passe maintenant à la borne supérieure de l'inégalité (30).

Supposons pour cela qu'elle n'existe pas, soit $\|\tilde{\mathbf{J}}_n\| \rightarrow \infty$ à une sous-suite près (aussi notée $\tilde{\mathbf{J}}_n$ par simplicité de notation). On définit alors la suite normée $\hat{\mathbf{J}}_n = \|\tilde{\mathbf{J}}_n\|^{-1}\tilde{\mathbf{J}}_n$. Cette suite admet alors un point d'accumulation faible $\hat{\mathbf{J}} : \hat{\mathbf{J}}_n \rightharpoonup \hat{\mathbf{J}}$, faiblement dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.

D'après la relation (29), on a tout d'abord,

$$|(T\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n)| = \frac{1}{\|\tilde{\mathbf{J}}_n\|^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad (31)$$

puis, grâce au lemme 10

$$\Im(T\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n) = (T_I\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n) \rightarrow (T_I\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{J}}) = 0,$$

d'ou en déduit que $\hat{\mathbf{J}} = 0$, en utilisant une nouvelle fois le lemme 10, lorsque $K \notin \mathcal{K}_{\text{int}}$.

On utilise alors le lemme 21 pour décomposer les courants $\hat{\mathbf{J}}_n$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \exists(\varphi_n, \psi_n) \in H^{3/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma), \quad \hat{\mathbf{J}}_n = \nabla_{\Gamma}\varphi_n + \mathbf{rot}_{\Gamma}\psi_n,$$

avec, par continuité de l'isomorphisme Θ :

$$\exists C > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|\Theta\hat{\mathbf{J}}_n\| \leq C\|\hat{\mathbf{J}}_n\| = C.$$

La famille $\{\hat{\mathbf{J}}_n\}$ étant une famille normée, dense dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, elle forme une base de Riesz de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ (voir [11, Th. 2.2, Ch. VI]). Ainsi, pour tout entier n , il existe une suite $(\alpha_p^{(n)})_p$ telle que

$$\Theta\hat{\mathbf{J}}_n = \sum_p \alpha_p^{(n)}\hat{\mathbf{J}}_p, \quad (32)$$

avec, d'après le théorème 19, pour tout entier n ,

$$\sum_p |\alpha_p^{(n)}|^2 \leq a^{-1}\|\Theta\hat{\mathbf{J}}_n\|^2 \leq a^{-1}C. \quad (33)$$

VII Application au problème inverse

Soit $u_n = (T\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n)$; d'après le développement (32), convergent dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, et la relation d'orthogonalité (29), on a

$$u_n = \sum_p \overline{\alpha_p^{(n)}} (T\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_p) = \overline{\alpha_p^{(n)}} (T\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n).$$

L'inégalité (33) peut s'écrire, pour tout entier n ,

$$|\alpha_n^{(n)}|^2 + \sum_{p \neq n} |\alpha_p^{(n)}|^2 \leq a^{-1}C,$$

ce qui implique, en particulier,

$$\forall n \in \mathbb{N}, |\alpha_n^{(n)}|^2 \leq a^{-1}C.$$

Au final, on en déduit, grâce à (31), que

$$|u_n| = |(T\hat{\mathbf{J}}_n, \Theta\hat{\mathbf{J}}_n)| \leq \sqrt{C/a} (T\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n) = \frac{\sqrt{C/a}}{\|\tilde{\mathbf{J}}_n\|^2} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty. \quad (34)$$

Cette dernière relation est alors incompatible avec le théorème 24, car, d'après la compacité de \mathcal{R} et le fait que $(\hat{\mathbf{J}}_n)$ est une suite s'accumulant faiblement en 0, on a :

$$\mathcal{R}(\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n) \rightarrow \mathcal{R}(\hat{\mathbf{J}}, \hat{\mathbf{J}}) = 0,$$

soit, grâce à (34), la contradiction

$$C\|\hat{\mathbf{J}}_n\|^2 = C \leq |u_n + \mathcal{R}(\hat{\mathbf{J}}_n, \hat{\mathbf{J}}_n)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Ainsi, la famille $\{\tilde{\mathbf{J}}_n\}$ est une famille bornée, dense dans $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, et ainsi, en utilisant [11, Th. 2.2, Ch. VI] une nouvelle fois, $\{\tilde{\mathbf{J}}_n\}$ est une base de Riesz de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. □

3.2 Caractérisation géométrique de l'objet

Les développements du paragraphe 1.5 sont maintenant directement transposable.

Soit $p \in \mathbb{R}^3$, et $e_z \in L^2(S)$ défini par

$$e_z(\hat{x}) = (\hat{x} \times p) \times \hat{x} e^{-ik\hat{x} \cdot z}.$$

Le champ e_z est le champ lointain du champ rayonné par un dipôle localisé au point $z \in \mathbb{R}^3$, et de moment $p \in \mathbb{R}^3$. L'expression des champs rayonnés dans tout l'espace par un tel dipôle est donnée dans la remarque 1, page 34.

Le théorème 22 se transpose alors directement en électromagnétisme, et permet d'obtenir la caractérisation, analogue formelle du théorème 23 :

Théorème 26 *Soit \mathbf{e}_n et λ_n les champs et valeurs caractéristiques de l'objet Ω . Alors on a :*

$$\Omega = \left\{ z \in \mathbb{R}^3; \sum_n |i + \lambda_n| |(e_z, \mathbf{e}_n)|^2 < \infty \right\}. \quad (35)$$

3.3 Application à la reconstruction d'une sphère

On cherche à calculer la fonction $W : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$:

$$W(z, p) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} |\lambda_n^u + i| |(\mathbf{e}(\cdot; z, p), U_n^m)|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} |\lambda_n^v + i| |(\mathbf{e}(\cdot; z, p), V_n^m)|^2$$

avec les valeurs caractéristiques données en (II-36), on a tout d'abord

$$\begin{cases} \lambda_n^u + i = i \frac{H'_n}{J'_n} \\ \lambda_n^v + i = i \frac{H_n}{J_n} \end{cases}$$

Soit $\alpha_n^m(z, p) := |(\mathbf{e}(\cdot; z, p), U_n^m)|$ et $\beta_n^m(z, p) := |(\mathbf{e}(\cdot; z, p), V_n^m)|$, alors

$$\begin{cases} \alpha_n^m(z, p) = ik \frac{(-i)^n}{\sqrt{n(n+1)}} (\overline{M_n^m(z)} \cdot p) \\ \beta_n^m(z, p) = \frac{(-i)^n}{\sqrt{n(n+1)}} (\mathbf{rot} \overline{M_n^m(z)} \cdot p), \end{cases}$$

ou, de manière équivalente,

$$\begin{cases} \alpha_n^m(z, p) = ik \frac{(-i)^n}{|z|} \psi_n(k|z|) (\overline{V_n^m(\hat{z})} \cdot p) \\ \beta_n^m(z, p) = \frac{(-i)^n}{|z|} (\psi'_n(k|z|) \overline{U_n^m(\hat{z})} \cdot p - j_n(k|z|) \sqrt{n(n+1)} \overline{Y_n^m(\hat{z})} (\hat{z} \cdot p)), \end{cases}$$

D'après les relations

$$\sum_{m=-n}^n |U_n^m(\hat{z}) \cdot p|^2 = \sum_{m=-n}^n |U_n^m(\hat{z}) \cdot p|^2 = \frac{2n+1}{8\pi} \|\hat{z} \times p\|^2$$

on calcule les coefficients

$$\begin{cases} \alpha_n(z, p) := \sum_{|m| \leq n} |\alpha_n^m(z, p)|^2 = \frac{2n+1}{8\pi|z|^2} J_n(k|z|)^2 \|\hat{z} \times p\|^2 \\ \beta_n(z, p) := \sum_{|m| \leq n} |\beta_n^m(z, p)|^2 = \frac{2n+1}{8\pi|z|^2} J'_n(k|z|)^2 \|\hat{z} \times p\|^2 + 2n(n+1) j_n(k|z|)^2 (\hat{z} \cdot p)^2. \end{cases}$$

Au final, on obtient

$$W(z, p) = \sum_n \left| \frac{H'_n}{J'_n} \right| \alpha_n(z, p) + \left| \frac{H_n}{J_n} \right| \beta_n(z, p)$$

VII Application au problème inverse

D'après les comportements asymptotiques des fonctions de Bessel, on a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_n(z, p) \left| \frac{H'_n}{J'_n} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\|\hat{z} \times p\|^2}{8\pi k|z|} \left(\frac{|z|}{a} \right)^{2n+1} \\ \beta_n(z, p) \left| \frac{H_n}{J_n} \right| \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{(2n+1)^2}{8\pi k a (k|z|)^2} \left(\frac{|z|}{a} \right)^{2n} \left(\frac{1}{4} \|\hat{z} \times p\|^2 + \frac{1}{2} (\hat{z} \cdot p)^2 \right) \end{array} \right.$$

et la série $W(z, p)$ est convergente si et seulement si $|z| < a$, c'est-à-dire si le point z est dans la sphère de rayon a .

La figure VII.1 montre l'évolution de la fonction W en fonction de $|z|$, pour les fréquences $k = 3$, $k = 10$, $k = 30$, et $k = 50$. A chaque fréquence, le seuil $|z| = a$ apparaît nettement. De plus, on peut noter que plus la fréquence est élevée, plus ce seuil est marqué ; il semblerait que la reconstruction d'un objet gagne en netteté lorsque la fréquence augmente. En contrepartie, un plus grand volume de données sera nécessaire. Cela laisse supposer un compromis qualité de la reconstruction / nombre de points mesure.

La figure VII.2 illustre la fonction W dans le plan $z = 0$.

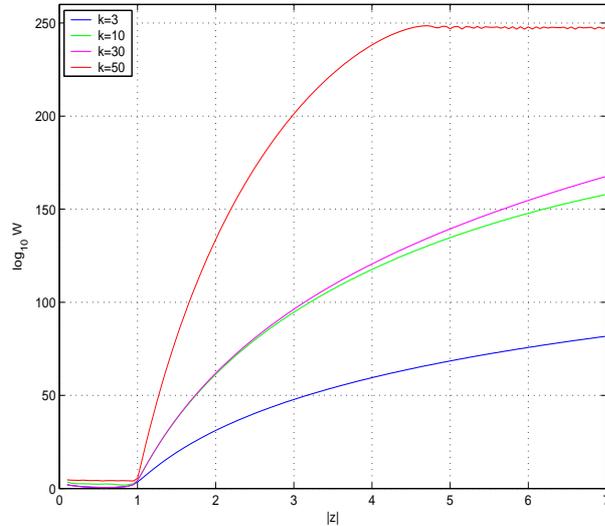
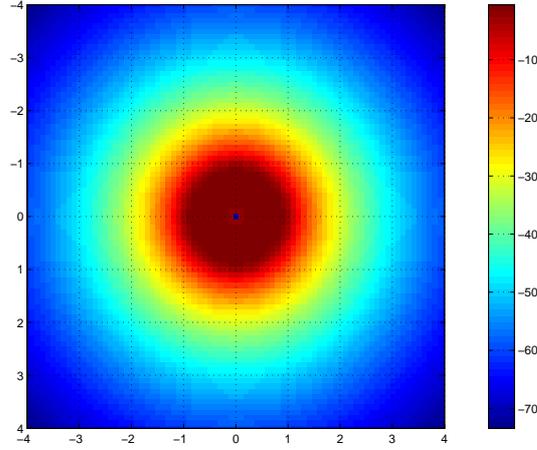


FIG. VII.1 – Fonction W en fonction de $|z|$.

4 Mise en oeuvre numérique

On détaille dans cette partie le calcul des éléments caractéristiques (\mathbf{e}_n) et (λ_n) de l'objet Ω (à déterminer).


 FIG. VII.2 – Fonction W en fonction de z dans le plan (x, y) .

On rappelle que ces éléments sont les éléments propres issus de la diagonalisation de l'opérateur de champ lointain F .

L'opérateur de champ lointain F permet de ramener la détermination des éléments caractéristiques \mathbf{e}_n et λ_n à un problème de diffraction d'ondes planes.

On précise dans cette partie la construction de l'opérateur F à partir de la connaissance des champs lointains diffractés par l'objet lorsque celui-ci est éclairé par des ondes planes.

4.1 Discrétisation

Soit \mathcal{T}_h un maillage de la sphère unité, avec un pas $h = \max_{T \in \mathcal{T}_h} \text{diam}(T)$, et soit $\hat{x}_i, i = 1..N$ les sommets de ce maillage (voir figure VII.3).

En utilisant l'approximation numérique de l'intégral sur la sphère unité

$$\int_{S_3} g(\hat{x}) ds(\hat{x}) \sim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \int_T g(\hat{x}) ds(\hat{x}) \sim \sum_{T \in \mathcal{T}_h} \sum_{\hat{x}_i \in T} \frac{|T|}{3} g(\hat{x}_i) = \sum_{i=1}^N w_i g(\hat{x}_i),$$

avec les poids

$$w_i = \sum_{T \in \mathcal{T}_h; \hat{x}_i \in T} |T|/3$$

où $|T|$ est l'aire du triangle T , on discrétise l'opérateur de champ lointain F suivant

$$Fg(\hat{x}_i) \sim \sum_{j=1}^N w_j \mathbf{e}(\hat{x}_i; g_j, \hat{x}_j), i = 1..N, \quad (36)$$

avec $g_i = g(\hat{x}_i), i = 1..N$. Soit $(\hat{x}_i, \hat{\theta}_i, \hat{\varphi}_i)$ la base orthonormale sphérique, au point \hat{x}_i , et

$$\mathbf{e}(\hat{x}_i; g_j, \hat{x}_j) = e^\theta(\hat{x}_i; g_j, \hat{x}_j) \hat{\theta}_i + e^\varphi(\hat{x}_i; g_j, \hat{x}_j) \hat{\varphi}_i,$$

VII Application au problème inverse

la décomposition du champ lointain sur cette base. Le théorème de réciprocité (cf. lemme 13, paragraphe II-1.6.3) :

$$p \cdot \mathbf{e}(\hat{x}; q, \hat{z}) = q \cdot \mathbf{e}(-\hat{z}; p, -\hat{x}), \forall p, q \in \mathbb{R}^3, \forall \hat{x}, \hat{z} \in S_3,$$

nous permet de réexprimer cette décomposition selon

$$\mathbf{e}(\hat{x}_i; g_j, \hat{x}_j) = \left(g_j \cdot \mathbf{e}(-\hat{x}_j; \hat{\theta}_i, -\hat{x}_i) \right) \hat{\theta}_i + \left(g_j \cdot \mathbf{e}(-\hat{x}_j; \hat{\varphi}_i, -\hat{x}_i) \right) \hat{\varphi}_i,$$

puis, en utilisant de même la décomposition $g_j = g_j^\theta \hat{\theta}_j + g_j^\varphi \hat{\varphi}_j$,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(\hat{x}_i; g_j, \hat{x}_j) = & \left(g_j^\theta e^\theta(-\hat{x}_j; \hat{\theta}_i, -\hat{x}_i) - g_j^\varphi e^\varphi(-\hat{x}_j; \hat{\varphi}_i, -\hat{x}_i) \right) \hat{\theta}_i \\ & + \left(g_j^\theta e^\theta(-\hat{x}_j; \hat{\varphi}_i, -\hat{x}_i) - g_j^\varphi e^\varphi(-\hat{x}_j; \hat{\varphi}_i, -\hat{x}_i) \right) \hat{\varphi}_i, \end{aligned}$$

où on a utilisé les relations géométriques,

$$\hat{\theta}(-\hat{x}) = \hat{\theta}(\hat{x}), \hat{\varphi}(-\hat{x}) = -\hat{\varphi}(\hat{x}), \forall \hat{x} \in S_3.$$

Finalement l'approximation (36) se réécrit sous la forme :

$$Fg(\hat{x}_j) \sim (E_\infty G)_j,$$

où $G = [g_i^\theta, g_i^\varphi]_{i=1..N}$ et E_∞ est la matrice :

$$E_\infty = \begin{bmatrix} E_\infty^{\theta,\theta} & E_\infty^{\theta,\varphi} \\ E_\infty^{\varphi,\theta} & E_\infty^{\varphi,\varphi} \end{bmatrix},$$

avec les blocs

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_\infty^{\theta,\theta})_{i,j} = w_j e^\theta(-\hat{x}_j; \hat{\theta}_i, -\hat{x}_i) \\ (E_\infty^{\theta,\varphi})_{i,j} = -w_j e^\varphi(-\hat{x}_j; \hat{\theta}_i, -\hat{x}_i) \\ (E_\infty^{\varphi,\theta})_{i,j} = w_j e^\theta(-\hat{x}_j; \hat{\varphi}_i, -\hat{x}_i) \\ (E_\infty^{\varphi,\varphi})_{i,j} = -w_j e^\varphi(-\hat{x}_j; \hat{\varphi}_i, -\hat{x}_i), \end{array} \right.$$

ou encore, en appliquant à nouveau le théorème de réciprocité ,

$$\left\{ \begin{array}{l} (E_\infty^{\theta,\theta})_{i,j} = w_j e^\theta(\hat{x}_i; \hat{\theta}_j, \hat{x}_j) \\ (E_\infty^{\theta,\varphi})_{i,j} = w_j e^\theta(\hat{x}_i; \hat{\varphi}_j, \hat{x}_j) \\ (E_\infty^{\varphi,\theta})_{i,j} = w_j e^\varphi(\hat{x}_i; \hat{\theta}_j, \hat{x}_j) \\ (E_\infty^{\varphi,\varphi})_{i,j} = w_j e^\varphi(\hat{x}_i; \hat{\varphi}_j, \hat{x}_j). \end{array} \right.$$

Les éléments propres \mathbf{e}_n^N et γ_n^N

$$E_\infty \mathbf{e}_n^N = \gamma_n^N \mathbf{e}_n^N, \forall n = 1..N,$$

sont une approximation des champs et valeurs caractéristiques.

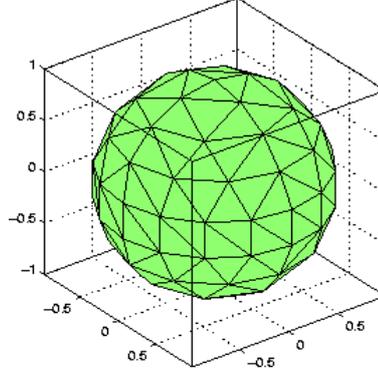


FIG. VII.3 – Maillage de la sphère unité avec 160 triangles et 82 sommets

A partir des champs et valeurs caractéristiques, le théorème 26 permet maintenant de reconstruire l'objet.

4.2 Méthode numérique de reconstruction de l'objet

On considère une grille du domaine dans lequel on cherche à reconstruire l'objet. Pour chaque point z_i de cette grille, on calcule alors

$$V_N(z_i) = \sum_{n=1}^N V_n^N(z_i),$$

avec

$$V_n^N(z_i) = |\gamma_n^N|^{-1} |(\mathbf{e}_e(\cdot, z_i, p), \mathbf{e}_n^N)|^2.$$

Le théorème 26 énonce alors le fait que la fonction $W(z_i) = (V(z_i))^{-1}$ doit s'annuler en dehors de l'objet, i.e. lorsque $z_i \notin \mathcal{O}$.

L'objet peut alors être reconstruit en considérant l'ensemble

$$\{z_i; W(z_i) \leq C\},$$

où la constante C est à déterminer. On choisira numériquement cette constante C comme celle qui, empiriquement, permet de s'approcher au mieux de la géométrie initiale.

5 Application numérique

On présente maintenant la reconstruction de l'amande NASA, dont nous avons déjà calculé et étudié les courants caractéristiques au chapitre IV. On rappelle la géométrie de l'amande figure VII.4.

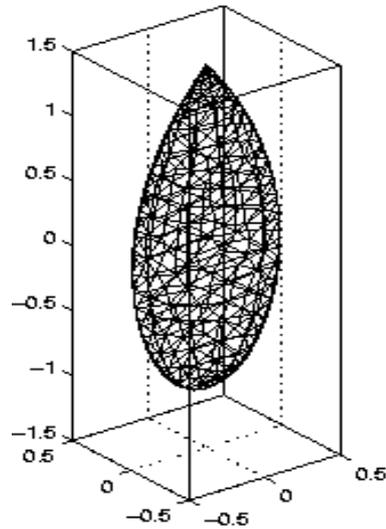


FIG. VII.4 – Géométrie et maillage de l'amande

5.1 Données complètes

Dans un premier temps, on se donne les champs diffractés par l'amande pour un ensemble de directions uniformément réparties sur la sphère unité.

Ces données proviennent de calculs directs des champs diffractés par l'amande. Pour effectuer ces calculs, on utilise le maillage de la sphère unité de la figure VII.5. Ce maillage comporte 160 éléments et 82 noeuds. Chacun de ces noeuds correspond à une direction utilisée en incidence et en observation.

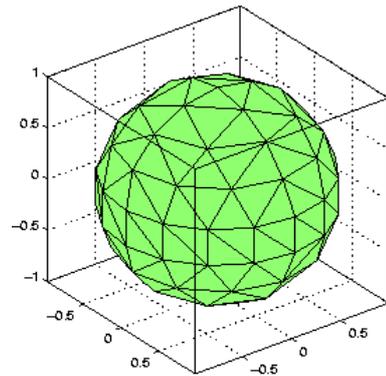


FIG. VII.5 – Maillage de la sphère unité avec 160 triangles et 82 sommets

La diagonalisation de l'approximation de l'opérateur de champ lointain F (suivant par exemple la méthode décrite au paragraphe précédent) permet d'obtenir une approximation des champs et valeurs caractéristiques.

On compare sur la figure VII.6 les valeurs caractéristiques exactes (obtenues par un calcul

numérique direct sur l'opérateur d'EFIE, voir chapitre IV) de l'opérateur de scattering à leurs approximations obtenues par cette méthode.

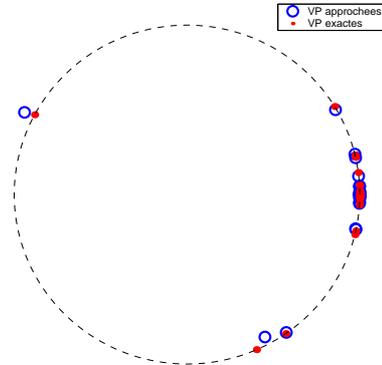


FIG. VII.6 – Approximation des valeurs propres de l'opérateur de scattering.

On représente finalement la fonction $W(z)$ sur la figure VII.7. On s'aperçoit sur cette figure que la fonction $W(z)$ s'annule effectivement dès que le point z devient extérieur à l'amande.

La reconstruction complète de l'amande est donnée figure VII.8.

5.2 Données incomplètes

La répartition uniforme des directions d'illuminations et d'observations de l'objet n'est pas une configuration de mesure, en général, accessible en pratique.

On présente dans ce paragraphe les reconstructions de l'amande qu'on obtient si on limite les données à une portion de la sphère unité.

On se donne ainsi deux configurations de mesure restreintes, comportant respectivement 13 et 18 directions. Ces configurations sont illustrées sur les figures VII.9 et VII.11.

Les reconstructions de l'amande obtenues sont présentées sur les figures VII.10 et VII.12 suivantes.

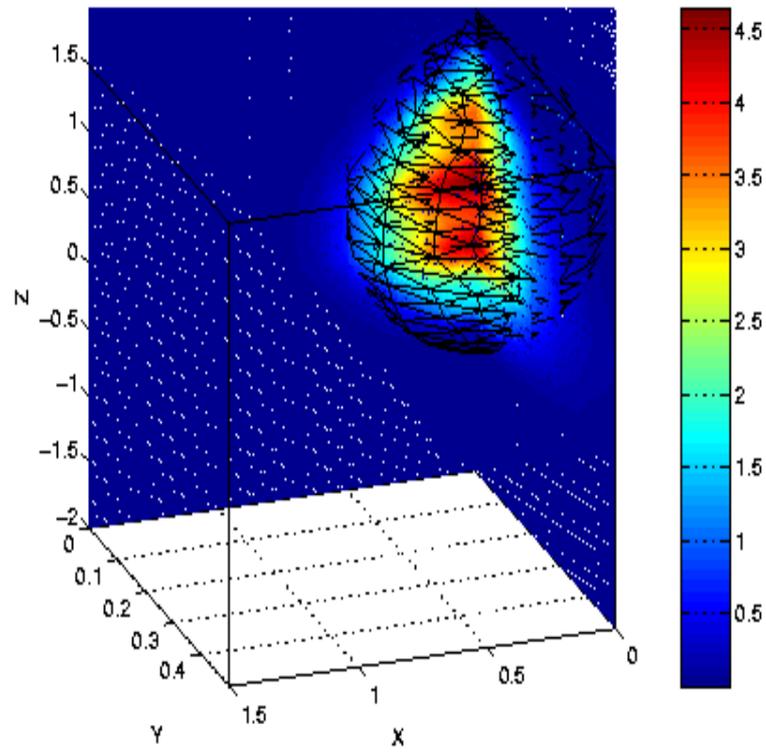


FIG. VII.7 – Fonction $W(z)$.

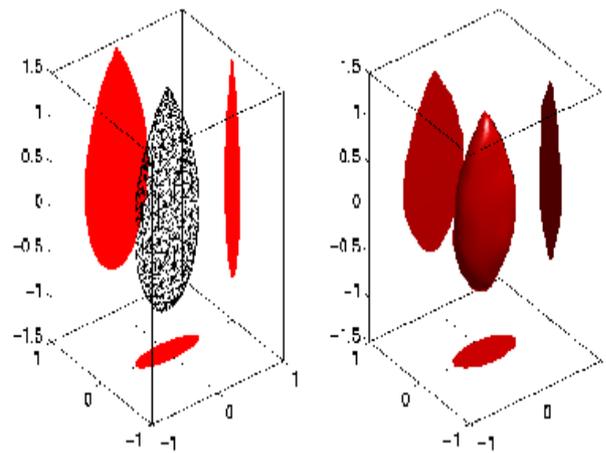


FIG. VII.8 – Amande initiale et sa reconstruction.

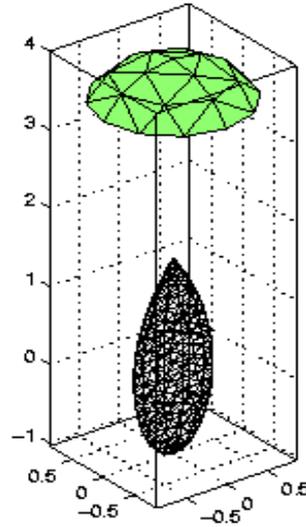


FIG. VII.9 – Configuration de mesure ; la sphère unité est réduite à 13 points.

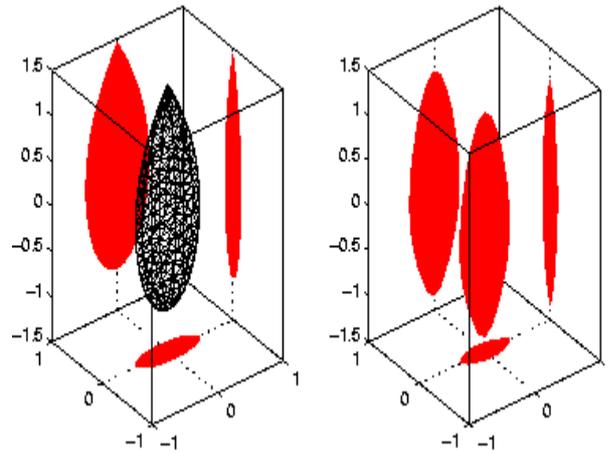


FIG. VII.10 – Amande initiale et sa reconstruction en configuration incomplète.

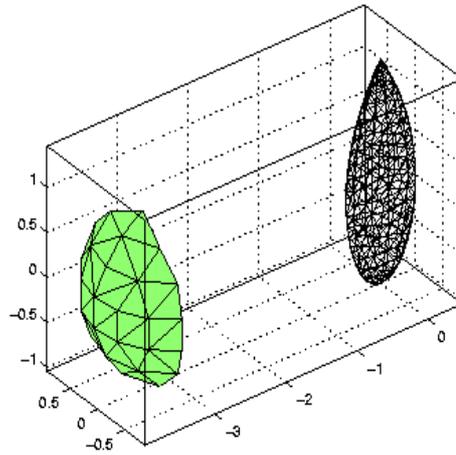


FIG. VII.11 – Configuration de mesure ; la sphère unité est réduite à 18 points.

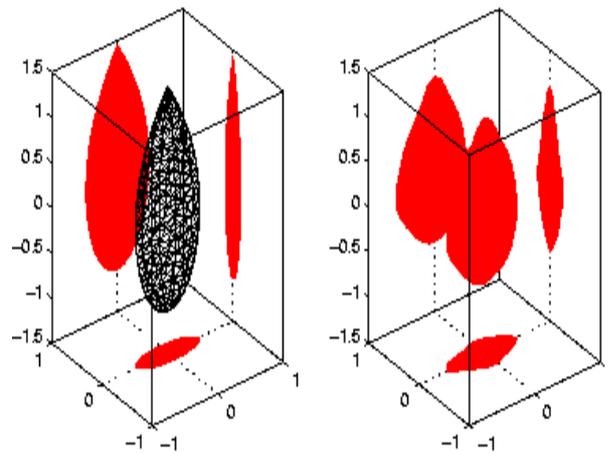


FIG. VII.12 – Amande initiale et sa reconstruction en configuration incomplète.

VIII Conclusion et perspectives

L'objectif de cette thèse était la recherche d'une base de décomposition des courants induits sur la surface d'un objet "adaptée" à l'étude de SER. Les travaux de Garbacz [14], Harrington et Mautz [16] introduisaient pour cela, il y a une trentaine d'années, une idée intéressante pour des objets parfaitement conducteurs : la méthode de décomposition en courants caractéristiques.

Nous avons dans un premier temps (chapitres I et II) détaillé le cadre mathématique et les développements adéquats à la bonne définition de ces éléments caractéristiques. Des propriétés essentielles des familles d'éléments caractéristiques ainsi construites ont pu alors être démontrées (complétude, orthonormalité...).

Dans un deuxième temps (chapitre VI) et grâce au cadre mathématique introduit pour traiter des objets conducteurs, nous avons donné une première généralisation de la notion de modes caractéristiques associés à des objets impédants.

Enfin, l'étude mathématique développée dans cette thèse montre aussi que les éléments caractéristiques sont des éléments "essentiels" dans l'étude de la diffraction d'ondes par un objet conducteur. Par exemple, la méthode de traitement du problème inverse de A. Kirsch [55] reposant sur la décomposition spectrale de l'opérateur de champ lointain peut être réécrite simplement à l'aide des éléments caractéristiques. Nous avons détaillé ce point dans le chapitre VII.

Les applications numériques présentées ici (chapitres IV et V) illustrent l'intérêt pratique des courants caractéristiques, en termes d'analyse et de contrôle de SER principalement.

Perspectives On donne maintenant une liste (non exhaustive) de directions de recherche qui pourraient poursuivre ce travail :

- **Calculs numériques pour des objets impédants.** L'intérêt pratique de cette décomposition modale apparaissant maintenant clairement, l'envie est forte de pouvoir regarder comment les modes d'un objet sont perturbés lorsqu'on joue sur l'impédance de l'objet, i.e. lorsqu'on tente de les "piloter".
La mise en œuvre numérique de la décomposition modale proposée au chapitre VI pour des objets impédants reste pour cela à effectuer.
- **Généralisation à des impédances quelconques.** Néanmoins, la généralisation proposée au chapitre VI souffre d'une restriction assez forte : l'impédance surfacique de l'objet est supposée constante sur tout le corps de celui-ci.
Il serait intéressant d'étendre ce résultat au cas d'impédance variable.

- **Imagerie “par modes caractéristiques”.** Pour des fréquences élevées, on arrive à extraire de mesures des champs diffractés par un objet les points brillants sur l’objet. En basse fréquence cette notion de points brillants localisés est mise en défaut. On a vu au chapitre VII (“problème inverse”) que à partir de mesures des champs lointains diffractés, on savait remonter aux champs lointains caractéristiques. L’étape qui devrait maintenant et logiquement suivre est celle permettant de remonter directement aux contributions sur l’objet, i.e. aux courants caractéristiques, à partir de la connaissance de l’ensemble des champs lointains diffractés.

Des travaux sont en cours sur ce sujet.

- **Utilisation des modes caractéristiques pour la mesure et caractérisation de SER.** La basse fréquence induit de nombreuses difficultés sur les mesures de SER en chambre anéchoïque. L’utilisation des modes caractéristiques peut là encore apporter un outil théorique intéressant.

Une optimisation de la configuration de mesure (position et nombre des antennes émetrices et réceptrices) peut-être effectuée pour un objet donné. Cette optimisation peut se faire par exemple par rapport à un critère ratio signal sur bruit maximal.

De la caractérisation de SER peut aussi être envisagée, caractérisation en termes d’éléments caractéristiques par exemple, ne nécessitant pas la mesure de la SER complète de l’objet.

Annexe A

Formules de représentation intégrale et champs lointains

A - 1 Dérivation des formules de représentation intégrale

Plusieurs méthodes permettent de dériver les formules de représentation intégrale de la forme (I - 15). Nous présentons ici un calcul formel basé exclusivement sur les équations de Maxwell. On rappelle tout d'abord les équations de Maxwell dans le vide, en présence de sources de courant \mathbf{J} et de charge ρ :

$$\begin{cases} \nabla \times \mathbf{E} = -i\omega\mu_0\mathbf{H} \\ \nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega\varepsilon_0\mathbf{E}, \end{cases} \quad (\text{A-1})$$

et les équations de conservation,

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \end{cases} \quad (\text{A-2})$$

Cette dernière équation nous permet d'écrire le champ magnétique sous forme d'un potentiel vecteur :

$$\mathbf{B} = \mu_0 \nabla \times \mathbf{A}. \quad (\text{A-3})$$

On peut alors écrire

$$\nabla \times (\mathbf{E} + i\omega\mathbf{A}) = 0, \quad (\text{A-4})$$

soit cette fois l'existence d'un potentiel scalaire ϕ tel que,

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi - i\omega\mathbf{A}. \quad (\text{A-5})$$

Ces deux potentiels \mathbf{A} et ϕ ne sont pas ici définis de manière unique : \mathbf{A} est défini à un gradient près, tandis que ϕ l'est à une constante près. On retrouve l'unicité de ces deux potentiels en imposant une condition supplémentaire, dite condition de jauge de Lorentz,

$$i\omega\phi + c^2 \nabla \cdot \mathbf{A} = 0. \quad (\text{A-6})$$

A Formules de représentation intégrale et champs lointains

Finalement les champs électriques et magnétiques s'expriment par, en fonction uniquement du potentiel vecteur \mathbf{A} ,

$$\begin{cases} \mathbf{E} = -iw\mathbf{A} + \frac{c^2}{iw}\nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) \\ \mathbf{H} = \frac{1}{\mu_0}\nabla \times \mathbf{A}. \end{cases} \quad (\text{A-7})$$

On cherche alors l'expression du potentiel magnétique \mathbf{A} . D'après les équations de Maxwell, on a

$$\begin{aligned} \mu_0\nabla \times \mathbf{H} &= \mu_0\mathbf{J} + iw\varepsilon_0\mu_0\mathbf{E} = \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \Delta\mathbf{A} \\ &= \frac{iw}{c^2}\mathbf{E} - k^2\mathbf{A} - \Delta\mathbf{A}. \end{aligned} \quad (\text{A-8})$$

Au total, le potentiel \mathbf{A} est solution de l'équation de Helmholtz vectorielle. On peut de la même façon démontrer que le potentiel scalaire satisfait l'équation de Helmholtz scalaire

$$\Delta\phi + k^2\phi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}. \quad (\text{A-9})$$

On introduit maintenant la solution fondamentale de l'équation de Helmholtz : la fonction scalaire G telle que

$$\Delta G + k^2G = \delta, \quad (\text{A-10})$$

où δ est la masse de Dirac en l'origine. On peut ainsi développer les potentiels suivant,

$$\begin{aligned} \phi(x) &= -\frac{1}{\varepsilon_0}G * \rho = -\frac{1}{\varepsilon_0} \int_D \rho(y)G(x-y) dy \\ \mathbf{A}(x) &= -\mu_0G * \mathbf{J} = -\mu_0 \int_D \mathbf{J}(y)G(x-y) dy, \end{aligned} \quad (\text{A-11})$$

où D est le domaine contenant les sources de courant et de charge, et $f * g$ désigne le produit de convolution des distributions f et g . Finalement, on retrouve l'opérateur d'EFIE dans l'expression du champ électrique :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x) &= -iw\mathbf{A}(x) - \nabla\phi(x) \\ &= ik\eta_0 \int_D \left[G(x-y)\mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2}\nabla G(x-y)\nabla\mathbf{J}(y) \right] dy \\ &= i\eta_0\tilde{T}\mathbf{J}(x), \end{aligned} \quad (\text{A-12})$$

et celui de MFIE dans l'expression du champ magnétique,

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(x) &= -\nabla \times \int_D G(x-y)\mathbf{J}(y) dy \\ &= -\tilde{K}\mathbf{J}(x). \end{aligned} \quad (\text{A-13})$$

Maintenant, si les courants sont uniquement surfaciques, i.e.

$$\mathbf{J} := \mathbf{J}\delta_\Gamma,$$

avec δ_Γ la mesure de Dirac portée par la surface Γ , on obtient les expressions

$$\begin{cases} \mathbf{E} &= i\eta_0\tilde{T}\mathbf{J} \\ \mathbf{H} &= -\tilde{K}\mathbf{J}, \end{cases} \quad (\text{A-14})$$

avec les potentiels définis en (I - 12).

De la même façon, le cas où les courants magnétiques ne sont pas nuls, et les courants électriques nuls, peut être obtenu en considérant la transformation $\mathbf{E} \longleftrightarrow -\mathbf{H}$, $\mathbf{J} \longleftrightarrow \mathbf{M}$, $\varepsilon_0 \longleftrightarrow \mu_0$. On obtient ainsi

$$\begin{cases} \mathbf{H} &= i\eta_0^{-1}\tilde{T}\mathbf{M} \\ \mathbf{E} &= \tilde{K}\mathbf{M}. \end{cases} \quad (\text{A-15})$$

Au final, le cas général est obtenu par superposition des deux précédents. On retrouve ainsi le système (15)

$$\begin{cases} \mathbf{E}^s &= i\eta_0\tilde{T}\mathbf{J} + \tilde{K}\mathbf{M} \\ \mathbf{H}^s &= -\tilde{K}\mathbf{J} + i\eta_0^{-1}\tilde{T}\mathbf{M}. \end{cases} \quad (\text{A-16})$$

A - 2 Calcul des champs lointains

Les expressions des champs lointains sont obtenus par les développements asymptotiques des formules de représentation intégrales précédentes.

Ces développements asymptotiques reposent principalement sur les relations (voir [1, p. 159]), lorsque $|x| \rightarrow \infty$,

$$\mathbf{rot}_x(G(x,y)a(y)) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \left(ik\hat{x} \times a(y)e^{-ik\hat{x}\cdot y} + O\left(\frac{\|a\|_{L^2(S)}}{|x|^2}\right) \right), \quad (\text{A-17})$$

$$\mathbf{rot}_x(\nabla_x G(x,y)a(y)) = \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \left(\hat{x} \times (a(y) \times \hat{x})e^{-ik\hat{x}\cdot y} + O\left(\frac{\|a\|_{L^2(S)}}{|x|^2}\right) \right),$$

valables uniformément en y . On rappelle l'expression équivalente suivante des potentiels intégraux

$$\begin{cases} \tilde{T}\mathbf{J}(x) &= \frac{1}{k} \nabla_x \times \left(\nabla_x \times \int_\Gamma G(x,y)\mathbf{J}(y) dy \right), \\ \tilde{K}\mathbf{J}(x) &= -\nabla_x \times \int_\Gamma G(x,y)\mathbf{J}(x) dy, \end{cases} \quad (\text{A-18})$$

A Formules de représentation intégrale et champs lointains

qui se révèle alors d'une grande praticité, au vue des formules (A-17). En combinant ainsi ces relations, on peut ainsi développer les potentiels pour $|x| \rightarrow \infty$ suivant :

$$\begin{cases} \tilde{T}\mathbf{J}(x) = k \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \int_{\Gamma} (\hat{x} \times (\mathbf{J}(y) \times \hat{x}) e^{-ik\hat{x}\cdot y} dy) + 0 \left(\frac{1}{|x|^2} \right), \\ \tilde{K}\mathbf{J}(x) = -ik \frac{e^{ik|x|}}{4\pi|x|} \int_{\Gamma} (\hat{x} \times \mathbf{J}(y)) e^{-ik\hat{x}\cdot y} dy + 0 \left(\frac{1}{|x|^2} \right). \end{cases} \quad (\text{A-19})$$

Soit en utilisant la définition de l'opérateur de champ lointain (26),

$$\begin{cases} \tilde{T}\mathbf{J}(x) = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(a^{\infty}\mathbf{J}(\hat{x}) + 0 \left(\frac{1}{|x|^2} \right) \right), \\ \tilde{K}\mathbf{J}(x) = -i \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \left(\hat{x} \times a^{\infty}\mathbf{J}(\hat{x}) + 0 \left(\frac{1}{|x|^2} \right) \right). \end{cases} \quad (\text{A-20})$$

De la même façon, si on ne considère que la partie en cosinus du noyau de Green, on obtient

$$\begin{cases} \tilde{T}_R\mathbf{J}(x) = \frac{1}{2} \left[a^{\infty}\mathbf{J}(\hat{x}) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + a^{\infty}\mathbf{J}(-\hat{x}) \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \right] + 0 \left(\frac{1}{|x|^2} \right) \\ \tilde{K}_R\mathbf{J}(\hat{x}) = -\frac{i}{2} \hat{x} \times \left[a^{\infty}\mathbf{J}(\hat{x}) \frac{e^{ik|x|}}{|x|} + a^{\infty}\mathbf{J}(-\hat{x}) \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \right] + 0 \left(\frac{1}{|x|^2} \right). \end{cases} \quad (\text{A-21})$$

Les développements (A-21) exhibent bien le comportement "symétrique" à l'infini des champs construits à l'aide exclusivement de la partie réelle des potentiels intégraux. C'est cette observation qui nous a conduit à choisir dans le chapitre II les champs

$$\mathbf{E}^p = i\eta_0 \tilde{T}_R\mathbf{J}, \quad \mathbf{H} = -\tilde{K}_R\mathbf{J},$$

comme solution particulière du système de Maxwell. D'autres solutions particulières peuvent évidemment convenir, comme montré en annexe C - 2, où des combinaisons linéaires des parties réelles et imaginaires des potentiels sont envisagées.

Annexe B

Nature des opérateurs intégraux surfaciques

On s'intéresse ici tout spécialement aux deux opérateurs intégraux surfaciques T et K .

Le problème de la diffraction d'ondes électromagnétiques est posé, naturellement, dans l'espace $H(\mathbf{rot})$ (voir paragraphe I - 1.1). L'utilisation des opérateurs surfaciques T et K repose alors sur les espaces du type $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ et $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

On commence par introduire la décomposition de Helmholtz de ces deux espaces de trace. Cette décomposition se révèle être d'un intérêt particulier lors de l'étude des opérateurs intégraux surfaciques.

La nature de ces opérateurs (continuité, régularité) apparaît alors clairement.

B - 1 Décomposition de Helmholtz

On rappelle tout d'abord la décomposition de Helmholtz On renvoie à [38] pour les détails, dans le cas d'une surface régulière (difféomorphe à la sphère unité S , ou à [43], [46] pour des surfaces seulement lipschitziennes (voir des polyèdres lipschitziens).

Lemme 22 *Soit Γ une surface régulière, difféomorphe à la sphère unité S , alors on a*

$$H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) = \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma), \quad (\text{B-1})$$

et de même,

$$H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma) = \nabla_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \oplus \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma). \quad (\text{B-2})$$

Les deux sommes sont de plus directes et orthogonales pour le produit scalaire $L^2(\Gamma)$ qui s'étend continûment en produit de dualité $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) - H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Remarque 16 *Soit $u \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, $u = \nabla_{\Gamma} \phi + \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi$, et $u' \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, $u' = \nabla_{\Gamma} \phi' + \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi'$, avec, selon le lemme 22, $\phi, \psi' \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $\psi, \phi' \in H^{1/2}(\Gamma)$. Alors on a*

$$(u, u')_{L^2(\Gamma)} = -(\Delta_{\Gamma} \phi, \phi')_{H^{-1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)} + (\psi, \Delta_{\Gamma} \psi')_{H^{1/2}(\Gamma) \times H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

De cette façon, le produit scalaire $L^2(S)$ de deux distributions de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \times H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ se ramène au produit de dualité $H^{1/2} - H^{-1/2}$. On retrouve ainsi, grâce à la décomposition de Helmholtz, que le produit scalaire $L^2(S)$ s'étend en produit de dualité $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) - H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

B - 2 Opérateur d'EFIE

Lemme 23 *L'opérateur d'EFIE se décompose suivant :*

$$T = (A + B) + R,$$

où,

$$\begin{cases} A : \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \rightarrow \nabla_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \\ B : \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \\ R : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+2}(\Gamma). \end{cases}$$

Ainsi, l'opérateur T apparaît clairement comme un opérateur continu de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans son dual $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Démonstration Soit $\psi \in H^{1/2}$, alors

$$\begin{aligned} T\mathbf{rot}_{\Gamma} \psi &= \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} G(x, y) \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi(y) ds(y) \times \mathbf{n} \right) \\ &= \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} \mathbf{rot}_{\Gamma} {}_y G(x, y) \psi(y) ds(y) \times \mathbf{n} \right) \\ &= \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} \mathbf{n}_y \times \nabla_y G(x, y) \psi(y) ds(y) \times \mathbf{n} \right) \\ &= -\mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} \mathbf{n}_y \times \nabla_x G(x, y) \psi(y) ds(y) \times \mathbf{n} \right). \end{aligned}$$

On décompose ensuite \mathbf{n}_y en $\mathbf{n}_x + (\mathbf{n}_y - \mathbf{n}_x)$, ce qui nous donne

$$T\mathbf{rot}_{\Gamma} \psi = \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \psi(y) ds(y) + \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} (\mathbf{n}_y - \mathbf{n}_x) \times \nabla_x G(x, y) \psi(y) ds(y) \times \mathbf{n} \right).$$

Le premier terme est dans $\nabla_{\Gamma} H^{3/2}$, tandis que le second définit un opérateur continu de H^s dans H^{s+2} (la singularité du noyau de l'opérateur correspondant étant simplement une discontinuité en 0). En notant $B\mathbf{rot}_{\Gamma} \varphi$ et $R_1\mathbf{rot}_{\Gamma} \varphi$ ces deux termes, on obtient la décomposition annoncée pour les composantes rotationnelles de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.

On procède de la même façon sur les gradients. Soit $\varphi \in H^{1/2}$, alors

$$\begin{aligned} T\nabla_{\Gamma} \varphi &= -\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} G(x, y) \nabla_{\Gamma} \varphi(y) ds(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_{\Gamma} \int_{\Gamma} G(x, y) \Delta_{\Gamma} \varphi(y) ds(y) \right) \\ &= \nabla_{\Gamma} \left(\int_{\Gamma} G(x, y) \left(I + \frac{1}{k^2} \Delta_{\Gamma} \right) \varphi(y) ds(y) \right) + R_2 \varphi. \end{aligned}$$

Le premier terme, notée $A\nabla_{\Gamma} \psi$, est dans $\nabla_{\Gamma} H^{1/2}$, lorsque $\varphi \in H^{3/2}$; le deuxième terme :

$$R_2 \varphi = -\mathbf{n} \times \mathbf{n} \times \int_{\Gamma} (\mathbf{n}_y \times \mathbf{n}_y - \mathbf{n}_x \times \mathbf{n}_x) \times \nabla_x G(x, y) \varphi(y) dy,$$

est du même ordre que l'opérateur R_1 précédent, et est donc continu de H^s dans H^{s+2} .

Finalement, en posant $R = R_1 + R_2$, on obtient la décomposition de l'opérateur d'EFIE.

On peut aussi noter que dans le cas où la surface Γ a une courbure isotrope, on a simplement $R = R_1 = R_2 = 0$: les sous-espaces de la décomposition de Helmholtz sont stables par l'opérateur d'EFIE. C'est ce qu'on retrouve dans le cas particulier de la sphère, où T est directement diagonal dans la base des harmoniques sphériques (voir paragraphe II - 1.8) et annexe E - 1 ci-après. \square

Tout comme en acoustique, pour le potentiel de simple couche, on peut faire apparaître dans l'opérateur d'EFIE une partie coercive.

Lemme 24 *L'opérateur*

$$\Lambda \mathbf{J}(x) = \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} \left[G_k(x, y) \mathbf{J}(y) - \frac{1}{k^2} \nabla_x G_k(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) \right] ds(y) \times \mathbf{n} \right),$$

avec le noyau $G_k(x, y) = e^{-k|x-y|}/|x-y|$, est coercif dans $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, i.e.,

$$\exists C > 0, \forall \mathbf{J} \in H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma), (\Lambda \mathbf{J}, \mathbf{J}) \geq C \|\mathbf{J}\|^2.$$

Démonstration D'après [2, Th. 5.6.5], l'opérateur $S_k : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ défini par

$$S_k \varphi(x) = \int_{\Gamma} G_k(x, y) \varphi(y) ds(y),$$

est coercif sur $H^{-1/2}(\Gamma)$, i.e. $(S_k \varphi, \varphi) \geq C \|\varphi\|^2$. On obtient alors directement la relation de coercivité

$$\begin{aligned} (\Lambda \mathbf{J}, \mathbf{J}) &= (S_k \mathbf{J}, \mathbf{J}) + \frac{1}{k^2} (S_k \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}, \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}) \\ &\geq \|\mathbf{J}\|_{H^{-1/2}}^2 + \frac{1}{k^2} \|\operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}\|_{H^{-1/2}}^2 \\ &\geq \min(1, k^{-2}) \|\mathbf{J}\|_{H_{\operatorname{div}}^{-1/2}}. \end{aligned}$$

\square

En acoustique, le potentiel de simple couche peut s'écrire comme une perturbation compacte d'un opérateur coercif. Cette propriété ne s'étend malheureusement pas aussi simplement à l'opérateur d'EFIE. On obtient néanmoins un résultat du même ordre si on privilégie l'un ou l'autre des deux sous-espaces de la décomposition de Helmholtz (B-1).

Lemme 25 *On a $T + \Lambda = (A' + B') + R'$, où*

$$\begin{cases} A' : \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \rightarrow \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \\ B' : \operatorname{rot}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \operatorname{rot}_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \\ R' : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+2}(\Gamma). \end{cases}$$

Ainsi, l'opérateur $T + \Lambda$ est continu de $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) \cap H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Gamma) = H^{1/2}$, et compact de $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) \cap \nabla_{\Gamma} H^{3/2}$ dans $H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Démonstration On a

$$(T + \Lambda) = \mathbf{n} \times \left(\int_{\Gamma} \left[G_1(x, y) \mathbf{J}(y) + \frac{1}{k^2} \nabla_x G_2(x, y) \operatorname{div}_{\Gamma} \mathbf{J}(y) \right] ds(y) \times \mathbf{n} \right),$$

avec

$$G_1(x, y) := G(x, y) + G_k(x, y), \quad G_2(x, y) := G(x, y) - G_k(x, y).$$

Le noyau G_1 a la même singularité que G (et G_k), tandis que le noyau G_2 n'est plus singulier, régularisant ainsi le terme en divergence. On peut alors procéder de même que pour la démonstration du lemme 23; l'opérateur B' est similaire à B (avec le noyau G_1), et $A' : \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \rightarrow \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma)$, la singularité du terme en divergence ayant disparue. \square

De même, on peut s'intéresser à de la régularité sur la composante rotationnelle.

Lemme 26 On a $T - \Lambda = (A'' + B'') + R''$, où

$$\begin{cases} A'' : \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \rightarrow \nabla_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \\ B'' : \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{7/2}(\Gamma) \\ R'' : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+2}(\Gamma). \end{cases}$$

Ainsi, l'opérateur $T - \Lambda$ est continu de $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, et compact de $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) \cap \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{1/2}$ dans $H_{\operatorname{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Démonstration On procède comme au lemme 25 précédent, en interchangeant les deux noyaux G_1 et G_2 . Le terme en divergence reste du même ordre que pour l'opérateur d'EFIE initial, le résultat du lemme 23 sur les composantes gradients reste inchangé, A' et A sont du même ordre. On gagne ici en régularité sur les champs rotationnels. \square

B - 3 Formulation coercive de l'EFIE

En regroupant les résultats du paragraphe précédent, on peut finalement aboutir à une formulation intéressante de l'EFIE, utilisant la décomposition de Helmholtz de $H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma)$. On introduit pour cela l'opérateur

$$\Theta : \begin{cases} H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) & \rightarrow H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma) \\ \mathbf{J} = \nabla_{\Gamma} \varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi & \mapsto \Theta \mathbf{J} = -\nabla_{\Gamma} \varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi. \end{cases} \quad (\text{B-3})$$

Lemme 27 Il existe un opérateur \mathcal{R} compact et une constante $C > 0$, tels que,

$$\forall \mathbf{J} \in H_{\operatorname{div}}^{-1/2}(\Gamma), \quad |(T\mathbf{J}, \Theta\mathbf{J}) + (\mathcal{R}\mathbf{J}, \mathbf{J})| \geq C \|\mathbf{J}\|^2.$$

Démonstration D'après les lemmes 23, 25, et 26, si $\mathbf{J} = \nabla_{\Gamma} \varphi + \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi \in H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, $\varphi \in H^{3/2}(\Gamma)$ et $\psi \in H^{1/2}(\Gamma)$, alors l'opérateur d'EFIE s'écrit

$$T\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -\Lambda & 0 \\ 0 & \Lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \nabla_{\Gamma} \varphi \\ \mathbf{rot}_{\Gamma} \psi \end{pmatrix} + \mathcal{R}\mathbf{J},$$

où \mathcal{R} est un opérateur compact. □

On en déduit alors le corollaire, d'après [44, Th. 4].

Corollaire 2 *L'opérateur d'EFIE, T , est un opérateur de type Fredholm, d'indice 0.*

Pour des opérateurs de type Fredholm, on sait que, en particulier, la surjectivité est acquise dès lors que l'injectivité a lieu. C'est donc le cas pour l'opérateur d'EFIE qui est injectif en dehors de l'ensemble (dénombrable) des fréquences de résonance, et qui est donc par conséquent un isomorphisme pour de telles fréquences.

Cette propriété est un peu plus forte : Soit $c \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, par exemple $c = -\pi_{\Gamma} \mathbf{E}^{inc}$ avec \mathbf{E}^{inc} un champ électrique incident sur l'objet, alors on peut préciser pour le théorème 1 la continuité de la solution vis-à-vis de la donnée c .

On utilise pour cela un résultat abstrait.

Théorème 27 *Soit \mathcal{H} un espace de Hilbert séparable, et a une forme sesquilinéaire continue sur \mathcal{H} . On suppose qu'il existe une constante positive α , un isomorphisme $\Theta : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$, et une forme sesquilinéaire compact sur \mathcal{H} tels que*

$$\forall u \in \mathcal{H}, |a(u, \Theta u)| \geq \alpha \|u\|_{\mathcal{H}} - |c(u, u)|, \tag{B-4}$$

et on suppose de plus que

$$\forall 0 \neq u \in \mathcal{H} \sup_{v \in \mathcal{H}} |a(u, v)| > 0. \tag{B-5}$$

Alors, le problème variationnel, pour la donnée $c \in \mathcal{H}'$, $a(u, v) = (f, v)$, $\forall v \in \mathcal{H}$, admet une unique solution vérifiant de plus, pour une certaine constante $C > 0$,

$$\|u\|_{\mathcal{H}} \leq C \|f\|_{\mathcal{H}'}.$$

On renvoie à [48] pour la démonstration de ce théorème un peu plus général que le lemme de Lax-Milgram (voir aussi [2, Th 2.5.8] et [2, Th. 5.4.5]) par exemple, en particulier par la présence de l'isomorphisme Θ (réduit à l'identité pour le lemme de Lax-Milgram).

On aboutit, en appliquant ce théorème à l'opérateur d'EFIE, avec l'isomorphisme Θ défini en (B-3), et à l'aide du lemme 27, au lemme :

B Nature des opérateurs intégraux surfaciques

Lemme 28 Soit $c \in H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$ la donnée du problème extérieur de la diffraction à la fréquence $k > 0$ ne correspondant pas à une fréquence de résonance du problème intérieur. Alors il existe $C > 0$ tel que

$$\|J\|_{H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)} \leq C \|c\|_{H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)}, \quad (\text{B-6})$$

On en déduit que le problème de Maxwell extérieur (1) pour un objet PEC est bien posé :

$$\exists C' > 0, \|\mathbf{E}\|_{H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)} \leq C' \|c\|_{H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)} \quad \text{et} \quad \|\mathbf{H}\|_{H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)} \leq C' \|c\|_{H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (\text{B-7})$$

Démonstration C'est une conséquence directe des résultats précédents. Seule l'injectivité (B-5) reste à préciser. C'est l'injectivité de l'opérateur d'EFIE, qui est bien acquise dès lors que l'on se place à une fréquence k ne correspondant pas à une fréquence de résonance du problème intérieur. On obtient alors l'estimation a priori (B-6).

L'utilisation de la continuité des opérateurs \tilde{K} et $\tilde{T} : H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{loc}}(\mathbf{rot}, \Omega)$ fournit alors les estimations (B-7). □

Ces résultats montre qu'il est possible de réécrire l'EFIE sous une forme adéquate au traitement numérique. Une difficulté qui persiste alors, lors de la mise en oeuvre numérique, provient du fait que, si $(X_n)_n$ est une famille d'espace d'éléments finis, i.e. $X_n \subset H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, et $\overline{\cup X_n} = H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$, alors la décomposition de Helmholtz discrète $X_n = V_n \oplus W_n$ n'est pas nécessairement stable dans X_n (voir [43], [46], [47], [67]...).

B - 4 Opérateur de MFIE

De la même façon que pour l'opérateur d'EFIE, l'opérateur de MFIE, $K : H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, admet une écriture adaptée à la décomposition de Helmholtz de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ donnée dans le lemme 22.

Lemme 29 L'opérateur de MFIE se décompose suivant $K = A + R$, où

$$\begin{cases} A : \mathbf{rot}_{\Gamma} H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \nabla_{\Gamma} H^{3/2}(\Gamma) \\ R : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s+2}(\Gamma). \end{cases}$$

Ainsi, l'opérateur de MFIE est continu de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H_{\text{rot}}^{1/2}(\Gamma)$, et compact de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ dans $H_{\text{rot}}^{-1/2}(\Gamma)$, ainsi que dans chaque sous espace de la décomposition de Helmholtz de $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$ donnée dans le lemme 22.

Annexe C

Inversibilité de T_R

On s'intéresse dans cette partie à l'inversibilité de l'opérateur T_R . Dans un premier temps, on démontre via le théorème de Steinberg sur les familles méromorphes d'opérateurs que, à une suite de fréquence dénombrable près (englobant les fréquences de résonance du problème intérieur), l'opérateur T_R est bien inversible.

En fait, au vue de l'équation aux valeurs propres généralisées que l'on cherche finalement à résoudre, on peut s'apercevoir que l'opérateur T_R peut être remplacé par une combinaison linéaire du type $T_R + \alpha T_I$ avec un complexe α à priori quelconque. Ce raisonnement est abordé dans la deuxième sous-section, et permet de montrer que, au final, seul les fréquences de résonance du problème intérieur restent critiques dans la définition des valeurs et courants caractéristiques.

C - 1 Inversion directe de T_R

On note $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2$, l'union de l'ensemble des fréquences de résonance du problème intérieur (réelles et positives), et de l'ensemble des résonances du problème extérieur (à partie imaginaire négative).

Pour $k \notin \mathcal{R}$ l'opérateur d'impédance est un opérateur inversible. On peut alors définir l'opérateur $P(k)$, pour une fréquence $k \notin \mathcal{R}$, suivant

$$P(k) = -iT(k)^{-1}T_I(k),$$

de telle sorte que

$$T_R = T(k)(I + P(k)).$$

L'opérateur d'impédance T étant inversible, l'étude de T_R^{-1} se ramène à celle de $I + P$. On commence par l'opérateur T_I ; son noyau peut se développer en série suivant :

$$\frac{\sin(k|x-y|)}{|x-y|} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} k^{2n+1} |x-y|^{2n}. \quad (\text{C-1})$$

Ainsi, T_I peut s'écrire sous la forme $\sum_n A_n k^n$, avec des opérateurs A_n bornés et un rayon de convergence infini pour la série : T_I est un opérateur analytique sur \mathbb{C} tout entier.

D'un autre côté, l'opérateur d'impédance T est inversible, d'inverse bornée, sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$.

On en déduit que l'opérateur $P(k)$ est un opérateur méromorphe sur \mathbb{C} , et donc analytique sur $\mathbb{C} \setminus \mathcal{R}$. On cherche alors à appliquer alors le théorème de Steinberg ([36]) à la famille d'opérateurs $I + P(k)$:

Théorème 28 (Steinberg) Soit $P(k)$ une famille holomorphe dans un ouvert $D \subset \mathbb{C}$ d'opérateurs compacts dans l'ensemble des opérateurs bornés dans H , où H est un espace de Banach. On a alors l'alternative suivante :

- l'opérateur $I + P(k)$ n'est jamais inversible,
- il existe $k_0 \in D$ tel que $I + P(k_0)$ est inversible. Dans ce cas, il est justifié de poser $M(k) = (I + P(k))^{-1}$: il existe un ensemble isolés \mathcal{R} de D tel que $\{M(k)\}$ est sur $D \setminus \mathcal{R}$ une famille analytique d'opérateurs bornés sur H .

La famille $\{M(k)\}$ est sur D une famille méromorphe d'opérateurs bornés de H . De plus l'ensemble de pôles de $M(k)$ n'admet pas de point d'accumulation (excepté éventuellement l'infini).

Ce théorème montre ainsi, à l'aide de ce qui précède, que $T_R(k)$ est un opérateur presque partout inversible si il existe au moins une fréquence à laquelle il l'est. Afin de montrer ce dernier point, on introduit tout d'abord le

Lemme 30 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors la forme sesquilinéaire

$$a_\alpha(p, q) := \iint_{\Gamma \times \Gamma} \frac{e^{\alpha|x-y|}}{|x-y|} p(x) \overline{q(y)} dx dy ,$$

définit un produit scalaire sur $H^{-1/2}(\Gamma)$, auquel on peut associer la norme

$$\|p\|_\alpha = (a_\alpha(p, p))^{1/2} .$$

On renvoie à [4] pour une démonstration complète de ce lemme, duquel on déduit facilement

Corollaire 3 Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, alors

$$\|\mathbf{J}\|_{\alpha, \text{div}_\Gamma} := \left(\|J\|_\alpha^2 + \|\text{div}_\Gamma \mathbf{J}\|_\alpha^2 \right)^{1/2}$$

définit une norme sur $H_{\text{div}}^{-1/2}(\Gamma)$.

Soit maintenant $k = i\alpha$ une fréquence purement imaginaire, alors on a l'identité

$$\cos(k|x-y|) = \frac{1}{2} \left(e^{\alpha|x-y|} + e^{-\alpha|x-y|} \right) ,$$

de laquelle il découle la relation de coercivité pour T_R :

$$(T_R \mathbf{J}, \mathbf{J}) = i \left(\alpha \|\mathbf{J}\|_{\alpha, \text{div}_\Gamma} + \frac{1}{\alpha} \|\mathbf{J}\|_{-\alpha, \text{div}_\Gamma} \right) ,$$

qui montre que T_R est un opérateur inversible sur l'axe imaginaire (privé toutefois de l'origine). La deuxième alternative du théorème de Steinberg nous délivre alors le résultat sur l'inversibilité de T_R .

C - 2 Alternative à l'inversibilité de T_R

On montre dans cette annexe que les fréquences irrégulières propres à T_R constituent en fait un "faux problème" dans le raisonnement menant aux courants caractéristiques .
 Pour ce faire, on rappelle tout d'abord le système différentiel vérifié par le champ électrique, valable au sens des distributions,

$$\begin{cases} \Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = -ik\eta_0 \left(\mathbf{J}\delta_\gamma + \frac{1}{k^2} \nabla \nabla \cdot (\mathbf{J}\delta_\gamma) \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\eta_0}{ik} \nabla \cdot (\mathbf{J}\delta_\gamma), \end{cases} \quad (\text{C-2})$$

auquel on ajoute la condition de radiation à l'infini de Herglotz

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{r} \int_{S_r} |\mathbf{E}|^2 < \infty. \quad (\text{C-3})$$

On reprend la démarche suivie dans les chapitres I et II : on recherche la solution générale de ce système sous la forme

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^p + \mathbf{E}^g,$$

où \mathbf{E}^p est une solution particulière du système (C-2) et \mathbf{E}^g une solution entière de (C-2) (i.e. solution (C-2) homogène). On procède alors comme dans la section I-1.2, et on choisit une solution particulière s'exprimant sous forme d'un potentiel.

Soit α un complexe quelconque, on introduit alors la décomposition du noyau de Green :

$$G_\alpha = G_R + \alpha G_I := \Re(G) + \alpha \Im(G),$$

et on considère la solution particulière

$$E^p = i\eta_0 T_\alpha \mathbf{J},$$

où l'opérateur T_α étant obtenu à partir de T en remplaçant le noyau de Green usuel G par G_α , de telle façon que

$$T_\alpha = T_R + \alpha T_I.$$

La solution particulière \mathbf{E}^p est bien solution du système différentiel (C-2), et vérifie de plus la condition de décroissance à l'infini de Herglotz (C-3). La solution entière s'écrit toujours sous la forme d'une onde de Herglotz :

$$\mathbf{E}^g(x) = \frac{ik\sqrt{i\eta_0}}{4\pi} \int_S \gamma(\hat{y}) e^{ik\hat{y} \cdot x} d\hat{y},$$

le noyau de Herglotz γ étant a priori différent de celui utilisé dans la section I-1.2. On suit alors le même cheminement que dans la section I-1.2, on arrive à une relation similaire sur la surface Γ reliant le courant électrique au noyau de Herglotz

$$T_\alpha \mathbf{J} + ia_\infty^* \gamma = 0,$$

C Inversibilité de T_R

d'une part, et aux expressions des champs lointains dans lesquelles intervient explicitement le paramètre α ,

$$\begin{cases} \mathbf{e}^+ = \frac{1}{2} [(1 - i\alpha)a_\infty \mathbf{J} + \gamma] \\ \check{\mathbf{e}}^- = \frac{1}{2} [(1 + i\alpha)a_\infty \mathbf{J} - \gamma] . \end{cases}$$

En éliminant le courant \mathbf{J} des trois dernières relations, on peut écrire l'opérateur de scattering sous la forme

$$S = [-i(1 - i\alpha)K + I] [-i(1 - i\alpha)K - I]^{-1} ,$$

avec l'opérateur

$$K_\alpha = a_\infty T_\alpha^{-1} a_\infty^* .$$

Cet opérateur K_α est toujours compact, et auto-adjoint, à condition de restreindre α à la droite réelle. Soit donc $\alpha \in \mathbb{R}$, on peut diagonaliser K_α selon

$$K_\alpha v_n = k_n v_n ,$$

soit, en posant

$$\mathbf{J}_n = \frac{1}{k_n} T_\alpha^{-1} a_\infty^* v_n ,$$

qui est équivalent à

$$v_n = a_\infty \mathbf{J}_n ,$$

on remarque que les courants \mathbf{J}_n satisfont l'équation

$$T_R \mathbf{J}_n = \lambda_n T_I \mathbf{J}_n ,$$

avec

$$\lambda_n = \frac{1 - \alpha k_n}{k_n} .$$

Les \mathbf{J}_n sont les courants caractéristiques déjà exhibés, et on a alors, par définition,

$$v_n = a_\infty \mathbf{J}_n = \mathbf{e}_n ,$$

qui sont les champs propres de l'opérateur de scattering associés aux valeurs propres

$$\begin{aligned} s_n &= -\frac{1 - i(1 - i\alpha)k_n}{1 + i(1 + i\alpha)k_n} \\ &= -\frac{\lambda_n - i}{\lambda_n + i} . \end{aligned}$$

On retrouve de cette manière les résultats énoncés précédemment, indépendamment du réel α .

En effet, soit maintenant une fréquence k réelle, alors, soit

- $T_R(k)$ est inversible,
- soit $T_R(k)$ n'est pas inversible; dans ce cas, il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $T_\alpha = T_R + \alpha T_I$ soit inversible, auquel cas on applique le raisonnement exposé précédemment.

Dans tous les cas, les valeurs et courants caractéristiques sont bien définis par l'équation aux valeurs propres généralisées (II-13), pour toute fréquence ne correspondant pas à une fréquence de résonance du problème intérieur.

La sphère On illustre ce qui précède dans le cas d'une sphère parfaitement conductrice, de rayon a .

Dans le cas d'un objet sphérique, on a les relations (on renvoie au paragraphe II-1.8),

$$\begin{cases} T_R u_{n,m} = -J'_n Y'_n u_{n,m} \\ T_R v_{n,m} = -J_n Y_n v_{n,m} \end{cases} \quad \text{et,} \quad \begin{cases} T_I u_{n,m} = (J'_n)^2 u_{n,m} \\ T_I v_{n,m} = (J_n)^2 v_{n,m} \end{cases} \quad (\text{C-4})$$

avec

$$\begin{aligned} J_n &= ka j_n(ka), & J'_n &= (ka j_n(ka))' \\ Y_n &= ka y_n(ka), & Y'_n &= (ka y_n(ka))'. \end{aligned}$$

où j_n et y_n représentent respectivement les fonctions de Bessel et de Neumann sphériques. Les fonctions J_n , Y_n , et H_n sont, respectivement, les fonctions de Ricatti-Bessel, Ricatti-Neumann, et Ricatti-Hankel.

L'ensemble des fréquences de résonance d'une sphère de rayon a est alors clairement l'ensemble

$$\mathcal{K}_{int} = \{k; \exists n \in \mathbb{N}, J_n(ka) J'_n(ka) = 0\},$$

tandis que les fréquences auxquelles l'opérateur T_R n'est pas inversible est

$$\mathcal{K}_R = \mathcal{K}_{int} \cup \{k; \exists n \in \mathbb{N}, Y_n(ka) Y'_n(ka) = 0\}.$$

Soit maintenant $k \in (\mathcal{K}_R \setminus \mathcal{K}_{int})$, et $T_\alpha = T_R + \alpha T_I$; alors on a

$$\begin{cases} T_\alpha u_{n,m} = -J'_n (Y'_n - \alpha J'_n) u_{n,m} \\ T_\alpha v_{n,m} = -J_n (Y_n - \alpha J_n) v_{n,m}. \end{cases} \quad (\text{C-5})$$

Ainsi, lorsque $k \in \mathcal{K}_{int}$, l'opérateur T_α n'est jamais inversible.

Soit maintenant une fréquence $k \in \mathbb{R}$, telle que $k \notin \mathcal{K}_{int}$, et soit, dans un premier temps,

$$f_n(\alpha) = Y_n - \alpha J_n.$$

On rappelle tout d'abord les développements asymptotiques des fonctions de Ricatti-Bessel, Ricatti-Neumann (cf. [1, p. 29]) :

$$\begin{cases} J_n(ka) = \frac{(ka)^{n-1}}{(2n+1)!!} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \\ Y_n(ka) = -\frac{(2n-1)!!}{(ka)^{n+1}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \end{cases} \quad (\text{C-6})$$

A partir de ces développements, on calcule

$$f_n(\alpha) = - \left[\frac{(2n-1)!!}{(ka)^{n+1}} + \alpha \frac{(ka)^{n-1}}{(2n+1)!!} \right] \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right) \right),$$

où on a utilisé la notation

$$(2n+1)!! = 1 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (2n+1),$$

ainsi que les relations

$$\begin{cases} J'_n = \frac{1}{2n+1} ((n+1)J_{n-1} - nJ_{n+1}) \\ Y'_n = \frac{1}{2n+1} ((n+1)Y_{n-1} - nY_{n+1}) . \end{cases} \quad (\text{C-7})$$

Ainsi, pour tout réel $M > 0$,

$$\forall |\alpha| \leq M, \exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, f_n(\alpha) < 0,$$

et seul les N premiers ordres sont à étudier. Soit pour cela le polynôme

$$P_N(x) = \prod_{n=1}^N f_n(x) = \prod_{n=1}^N (Y_n - xJ_n) .$$

P_N est un polynôme de degré N (en x), et admet par conséquent au plus N racines distinctes.

On procède de manière identique pour la deuxième suite de valeurs propres $f'_n(\alpha) = Y'_n - \alpha J'_n$, puis avec le polynôme $P'_n(x)$ similaire à P_n .

Au final, tout réel α distinct des racines de P_n et P'_n satisfait au problème, i.e. rend l'opérateur T_α inversible.

Annexe D

Projecteurs de Calderon

On donne dans cette annexe le lien entre les opérateurs intégraux utilisés jusqu'ici et les projecteurs (ou formules) de Calderon.

On montre en particulier que, de cette façon, les diagonalisations des opérateurs de EFIE et de MFIE sont équivalentes, et se déduisent l'une de l'autre simplement.

On rappelle tout d'abord l'expression de l'opérateur d'impédance "général", qui à un couple de courants (\mathbf{J}, \mathbf{M}) associe les traces tangentielles sur la surface Γ des champs électriques et magnétiques correspondant : (cf. (I-21))

$$\mathcal{Z} = \begin{bmatrix} T & K - \frac{1}{2}\mathbf{n}\times \\ K - \frac{1}{2}\mathbf{n}\times & T \end{bmatrix}. \quad (\text{D-1})$$

L'opérateur \mathcal{Z} est un projecteur. Plus précisément, si $\pi_\Gamma : \mathbf{u} \mapsto \mathbf{n} \times \mathbf{u}$ et Π désigne l'opérateur

$$\Pi = \begin{bmatrix} 0 & -\pi_\Gamma \\ -\pi_\Gamma & 0 \end{bmatrix},$$

alors l'opérateur

$$-\Pi\mathcal{Z} = (-\Pi\mathcal{Z})^2, \quad (\text{D-2})$$

est un projecteur. Si on réintroduit maintenant la décomposition de l'opérateur \mathcal{Z} correspondant à la décomposition complexe du noyau de Green :

$$\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_R + i\mathcal{Z}_I := \begin{bmatrix} T_R & K_R - \frac{1}{2}\mathbf{n}\times \\ K_R - \frac{1}{2}\mathbf{n}\times & T_R \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} T_I & K_I \\ K_I & T_I \end{bmatrix}.$$

avec les opérateurs T_R , T_I , K_R et K_I définis dans le chapitre I, alors la relation (D-2) nous fournit

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_R\Pi\mathcal{Z}_R - \mathcal{Z}_I\Pi\mathcal{Z}_I = -\mathcal{Z}_R \\ \mathcal{Z}_R\Pi\mathcal{Z}_I - \mathcal{Z}_I\Pi\mathcal{Z}_R = -\mathcal{Z}_I. \end{cases} \quad (\text{D-3})$$

D Projecteurs de Calderon

On peut raisonner de la même façon en considérant le problème entrant de la diffraction. Cela revient à changer le noyau de Green par son conjugué, et à considérer l'opérateur $\bar{\mathcal{Z}} = \mathcal{Z}_R - i\mathcal{Z}_I$. La relation (D-2) nous fournit alors dans ce cas les égalités

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_R \Pi \mathcal{Z}_R + \mathcal{Z}_I \Pi \mathcal{Z}_I = -\mathcal{Z}_R \\ \mathcal{Z}_R \Pi \mathcal{Z}_I - \mathcal{Z}_I \Pi \mathcal{Z}_R = -\mathcal{Z}_I. \end{cases} \quad (\text{D-4})$$

Au final, on a les relations

$$\begin{cases} \mathcal{Z}_R \Pi \mathcal{Z}_R = -\mathcal{Z}_R \\ \mathcal{Z}_I \Pi \mathcal{Z}_I = 0. \end{cases} \quad (\text{D-5})$$

On peut de plus montrer la relation (voir [37]),

$$\mathcal{Z}_I \Pi \mathcal{Z}_R^* = \mathcal{Z}_I. \quad (\text{D-6})$$

Ces trois dernières relations nous fournissent succesivement, en revenant aux opérateurs intégraux surfaciques T et K ,

$$\begin{cases} K_R \pi_\Gamma T_R + T_R \pi_\Gamma K_R = 0 \\ T_R \pi_\Gamma T_R + K_R \pi_\Gamma K_R = K_R, \end{cases} \quad (\text{D-7})$$

et,

$$\begin{cases} K_I \pi_\Gamma T_I + T_I \pi_\Gamma K_I = 0 \\ T_I \pi_\Gamma T_I + K_I \pi_\Gamma K_I = 0, \end{cases} \quad (\text{D-8})$$

puis, en utilisant cette fois (D-6)

$$\begin{cases} K_I \pi_\Gamma T_R + T_I \pi_\Gamma K_R = \frac{1}{2} T_I \\ T_I \pi_\Gamma T_R + K_I \pi_\Gamma K_R = \frac{1}{2} K_I. \end{cases} \quad (\text{D-9})$$

On réécrit la première équation du système précédent (on remarque que les deux équations sont équivalentes, en utilisant par exemple les lemmes 10 et 12)

$$K_I \pi_\Gamma T_R + T_I \pi_\Gamma \left(K_R + \frac{1}{2} \pi_\Gamma \right) = 0, \quad (\text{D-10})$$

en utilisant la relation $\pi_\Gamma^2 = -I$. Ainsi, soit \mathbf{J}_n un courant vérifiant l'équation aux valeurs propres généralisées

$$T_R \mathbf{J}_n = \lambda_n T_I \mathbf{J}_n, \quad (\text{D-11})$$

alors, d'après (D-9) et (D-8), on dérive l'équation

$$T_I \pi_\Gamma \left(\lambda_n K_I \mathbf{J}_n + \left(K_R + \frac{1}{2} \pi_\Gamma \right) \mathbf{J}_n \right) = 0,$$

soit aussi, d'après l'injectivité de T_I (cf. lemme 10) et de π_Γ (qui est un isomorphisme),

$$\left(K_R + \frac{1}{2}\pi_\Gamma\right) \mathbf{J}_n = \lambda_n K_I \mathbf{J}_n. \quad (\text{D-12})$$

On peut montrer de cette façon que, réciproquement, si \mathbf{J}_n satisfait l'équation valeurs propres généralisées portant sur l'opérateur de MFIE (D-12) alors il vérifie aussi celle posée sur l'opérateur d'EFIE (D-11), et ce, avec une valeur propre identique.

D'une manière un peu plus générale, la première équation du système (D-9) nous délivre la relation :

$$K_I \pi_\Gamma = -T_I \pi_\Gamma \left(K_R + \frac{1}{2}\pi_\Gamma\right) T_R^{-1},$$

puis, en utilisant la première équation du système (D-8) :

$$T_I \pi_\Gamma \left(K_R + \frac{1}{2}\pi_\Gamma\right) T_R^{-1} T_I = T_I \pi_\Gamma H_I.$$

L'injectivité des opérateurs T_I et π_Γ entraîne finalement le résultat

Lemme 31 *On a la relation :*

$$T_R^{-1} T_I = \left(K_R + \frac{1}{2}\pi_\Gamma\right)^{-1} K_I.$$

Annexe E

La sphère ...

On considère un objet parfaitement conducteur, de géométrie sphérique. Cette géométrie particulière va nous permettre de donner une expression analytique des courants caractéristiques, ainsi que de s'intéresser au problème induit par les fréquences de résonance du problème intérieur. On verra ainsi que la notion de courants caractéristiques à un objet coïncide avec les harmoniques sphériques, et que, de plus, la présence de fréquences de résonance intérieur ne nuit pas à la généralité de leur définition.

On propose ici deux alternatives au calcul des courants caractéristiques :

- tout d'abord, la grande particularité de la sphère permet de diagonaliser directement l'opérateur d'impédance T , et, qui plus est, de diagonaliser simultanément sa partie réelle et imaginaire T_R et T_I respectivement (en fait, dans le cas d'un objet sphérique, on sait que l'opérateur d'impédance est normal : $T^*T = TT^*$; une conséquence directe de cette propriété est que les opérateurs T_R et T_I commutent, d'où la diagonalisation simultanée de ceux-ci) ;
- on s'appliquera par la suite à développer le cadre fonctionnel $W_H(\Omega)$, et la notion d'ondes entrantes / sortantes associée au problème de la diffraction par un objet sphérique.

E - 1 Harmoniques sphériques et harmoniques sphériques vectorielles

On rappelle dans cette partie les différentes fonctions spéciales et champs de vecteur qui sont nécessaires à l'étude de la diffraction par un objet sphérique.

On considère tout d'abord l'ensemble des harmoniques sphériques :

$$\{Y_n^m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}; |m| \leq n\} . \quad (\text{E-1})$$

Cette famille forme un système orthonormal dense dans $L^2(S)$. Ces harmoniques sphériques ont pour expression :

$$Y_n^m(\hat{x}) = \alpha_{n,m} P_n^{|m|}(\cos \theta) e^{im\phi} , \quad (\text{E-2})$$

où

$$\hat{x} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \phi \end{vmatrix}$$

est un vecteur unitaire dirigé selon (θ, ϕ) en coordonnées sphériques, et

$$\alpha_{n,m} = \sqrt{\frac{2n+1}{4\pi} \frac{(n-|m|)!}{(n+|m|)!}},$$

est un coefficient de normalisation, et les $P_n^{|m|}$ sont les polynômes de Legendre modifiés :

$$P_n^{|m|}(t) = (1-t^2)^{m/2} \frac{d^m P_n(t)}{dt^m}, \quad (\text{E-3})$$

et les P_n sont les polynômes de Legendre :

$$P_n(t) = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(1-t^2)^n]. \quad (\text{E-4})$$

A partir de cette première famille on construit celle des harmoniques sphériques vectorielles :

$$\{U_n^m = \nabla Y_n^m, V_n^m = \hat{x} \times \nabla Y_n^m, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}; |m| \leq n\}, \quad (\text{E-5})$$

qui constitue quant à elle un système orthogonal dense dans $L_t^2(S)$, où

$$L_t^2(S) = \{u \in L^2(S); u \cdot \hat{x} = 0\},$$

est l'espace des champs de vecteurs (à valeurs complexes) tangentiels et de carré intégrable sur la sphère unité.

E - 2 Expression des champs

E - 2 .1 Cas général - Potentiels de Debye

D'une manière générale, toute solution (\mathbf{E}, \mathbf{H}) des équations de Maxwell peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{cases} \mathbf{E}(x) = \mathbf{rot}(xw(x)) + \frac{i}{k} \mathbf{rot rot}(xv(x)) \\ \mathbf{H}(x) = -\frac{i}{k\eta_0} \mathbf{rot rot}(xw(x)) + \frac{1}{\eta_0} \mathbf{rot}(xv(x)), \end{cases} \quad (\text{E-6})$$

où v et w sont deux solutions quelconques de l'équation de Helmholtz scalaire :

$$\Delta u(x) + k^2 u(x) = 0.$$

Ces deux fonctions scalaires u et v sont les potentiels de Debye associés à l'onde électromagnétique (\mathbf{E}, \mathbf{H}) . Ils peuvent à leur tour être développés sur la base des harmoniques sphériques selon

$$\begin{cases} v(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} v_{n,m} \chi_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x}) \\ w(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} w_{n,m} \chi_n(k|x|) Y_n^m(\hat{x}), \end{cases} \quad (\text{E-7})$$

E - 3 Diagonalisation de l'opérateur d'impédance T

où χ_n représente une des quatre fonctions spéciales sphériques : j_n , y_n , $h_n^{(1)}$, ou $h_n^{(2)}$ (désignées respectivement par fonctions de Bessel, Neumann, et Hankel de première et deuxième espèce). Les solutions exprimées à l'aide des fonctions de Bessel j_n sont des solutions entières (i.e. dans tout \mathbb{R}^3) des équations de Maxwell, tandis que celle exprimées à partir des fonctions de Hankel de première espèce (resp. seconde espèce) désignent des solutions sortantes (resp. entrantes).

Soit maintenant une onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) exprimée sous forme de potentiels de Debye (E-6) admettant les développements sphériques (E-7), alors la trace tangentielle sur la sphère de rayon a des champs s'écrit :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(a\hat{r}) &= \lim_{x \rightarrow a\hat{r}} \hat{r} \times (\mathbf{E}(x) \times \hat{r}) \\ &= -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} w_{n,m} [ka\chi_n(ka)] \hat{r} \times \nabla_{S_a} Y_{n,m} \\ &\quad + \frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} v_{n,m} [ka\chi_n(ka)]' \nabla_{S_a} Y_{n,m} \end{aligned} \tag{E-8}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t(a\hat{r}) &= \lim_{x \rightarrow a\hat{r}} \hat{r} \times (\mathbf{H}(x) \times \hat{r}) \\ &= -\frac{i}{k\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} w_{n,m} [ka\chi_n(ka)] \nabla_{S_a} Y_{n,m} \\ &\quad - \frac{1}{k\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} v_{n,m} [ka\chi_n(ka)]' \hat{r} \times \nabla_{S_a} Y_{n,m}. \end{aligned}$$

Ces expressions sont aussi celles des courants électriques et magnétiques induits sur la sphère de rayon a .

E - 2 .2 Cas d'une sphère PEC

E - 3 Diagonalisation de l'opérateur d'impédance T

Suite au paragraphe précédent, on s'intéresse tout particulièrement à l'expression de l'opérateur T dans la base des harmoniques sphériques $U_{n,m}$ et $V_{n,m}$.

D'après [29], l'opérateur d'impédance T est diagonal dans cette base. Plus précisément, on a :

$$TU_n^m = \nu_n^u U_n^m \tag{E-9}$$

$$TV_n^m = \nu_n^v V_n^m,$$

avec les valeurs propres

$$\begin{aligned} \nu_n^u &= i[ka j_n(ka)]' [ka h_n^{\{1\}}(ka)], \\ \nu_n^v &= i j_n(ka) h_n^{\{1\}}(ka). \end{aligned} \tag{E-10}$$

Les opérateurs T_R et T_I peuvent s'écrire comme la décomposition hermitienne de T . Si T^* est l'opérateur adjoint de T , on a

$$T_R = \frac{1}{2} (T + T^*) , \text{ et } T_I = \frac{1}{2i} (T - T^*) . \quad (\text{E-11})$$

T^* est l'opérateur intégral de noyau $\overline{G}(x, y)$. La relation de conjugaison $\overline{Y_n^m} = Y_n^{-m}$ permet alors d'aboutir aux relations

$$\begin{cases} T_R U_n^m = \lambda_n^u T_I U_n^m , \\ T_R V_n^m = \lambda_n^v T_I V_n^m . \end{cases} \quad (\text{E-12})$$

avec

$$\begin{cases} \lambda_n^u = \frac{\Re e(\nu_n^u)}{\Im m(\nu_n^u)} = -\frac{[k a y_n(k a)]'}{[k a j_n(k a)]'} , \\ \lambda_n^v = \frac{\Re e(\nu_n^v)}{\Im m(\nu_n^v)} = -\frac{y_n(k a)}{j_n(k a)} . \end{cases} \quad (\text{E-13})$$

Les relations (E-12) sont les expressions de l'équation aux valeurs propres généralisées définissant les courants caractéristiques \mathbf{J}_n exprimées dans la base des harmoniques sphériques.

On retrouve ainsi que pour une sphère PEC, les courants caractéristiques coïncident donc avec les harmoniques sphériques.

E - 4 Espace W_H et harmoniques sphériques

On cherche ici à développer le cadre fonctionnel $W_H(\Omega)$, dans le cas où l'objet diffractant est une sphère de rayon a : $\Gamma = \partial\Omega = S$.

On reprend l'expression des champs (\mathbf{E} , \mathbf{H}) exprimés sous la forme de potentiels de Debye (E-6), potentiels que l'on développe par la suite sur les harmoniques sphériques. On adopte alors le choix particulier dans l'expression de ces développements :

$$\begin{aligned} w(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left(w_{n,m}^{(1)} h_n^{(1)}(k|x|) + w_{n,m}^{(2)} h_n^{(2)}(k|x|) \right) Y_n^m(\hat{x}) , \\ v(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left(v_{n,m}^{(1)} h_n^{(1)}(k|x|) + v_{n,m}^{(2)} h_n^{(2)}(k|x|) \right) Y_n^m(\hat{x}) . \end{aligned} \quad (\text{E-14})$$

De cette façon, les champs (\mathbf{E} , \mathbf{H}) sont la somme d'ondes entrantes (termes en $h_n^{(2)}$) et d'ondes sortantes (termes en $h_n^{(1)}$). Dans un premier temps, on s'intéresse justement à l'expression de ces champs lointains. A cette fin, on développe l'expression (E-8) des champs \mathbf{E} et \mathbf{H} à l'aide

de l'expression des potentiels de Debye (E-14). Sur une sphère de rayon a , on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t(a\hat{r}) = & -\frac{1}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[w_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)}(ka) + w_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)}(ka) \right] \hat{r} \times \nabla Y_n^m \\ & + \frac{i}{k} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[v_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)'}(ka) + v_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \nabla Y_n^m, \end{aligned} \quad (\text{E-15})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t(a\hat{r}) = & -\frac{i}{k\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[w_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)'}(ka) + w_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)'}(ka) \right] \nabla Y_n^m \\ & - \frac{1}{k\eta_0} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left[v_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)}(ka) + v_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)}(ka) \right] \hat{r} \times \nabla Y_n^m, \end{aligned} \quad (\text{E-16})$$

où on a posé,

$$\zeta_n^{(1,2)}(t) = t h_n^{(1,2)}(t).$$

A l'aide des développements asymptotiques des fonctions de Hankel de première et de deuxième espèce et de leur dérivée, lorsque $t \rightarrow \infty$:

$$h_n^{(1,2)}(t) = \frac{(\pm i)^{n+1}}{t} e^{\pm it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad (\text{E-17})$$

et,

$$\left(h_n^{(1,2)} \right)'(t) = \frac{(\pm i)^n}{t} e^{\pm it} \left(1 + O\left(\frac{1}{t}\right) \right), \quad (\text{E-18})$$

on obtient finalement l'expression des champs lointains entrants et sortants associés à l'onde (\mathbf{E}, \mathbf{H}) en faisant tendre $a \rightarrow \infty$ dans (E-15) et (E-16) :

$$\mathbf{E}(x) \Big|_{|x| \rightarrow \infty} = \frac{e^{ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}^-(\hat{x}) + \frac{e^{-ik|x|}}{|x|} \mathbf{e}^+(\hat{x}) \quad (\text{E-19})$$

avec,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}^- &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left(\mathbf{e}_{n,m}^{in,w} \hat{x} \times \nabla Y_n^m + \mathbf{e}_{n,m}^{in,v} \nabla Y_n^m \right) \\ \mathbf{e}^+ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} \left(\mathbf{e}_{n,m}^{out,w} \hat{x} \times \nabla Y_n^m + \mathbf{e}_{n,m}^{out,v} \nabla Y_n^m \right), \end{aligned} \quad (\text{E-20})$$

pour les champs lointains, respectivement entrants et sortants, avec les coefficients de Fourier,

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{n,m}^{in,w} &= -\frac{1}{k} (i)^{n+1} w_{n,m}^{(2)}, \\ \mathbf{e}_{n,m}^{in,v} &= \frac{1}{k} (i)^{n+1} v_{n,m}^{(2)}, \\ \mathbf{e}_{n,m}^{out,w} &= -\frac{1}{k} (-i)^{n+1} w_{n,m}^{(1)}, \\ \mathbf{e}_{n,m}^{out,v} &= -\frac{1}{k} (-i)^{n+1} v_{n,m}^{(1)}. \end{aligned} \quad (\text{E-21})$$

De manière à expliciter l'opérateur de scattering, on précise tout d'abord

$$\check{\mathbf{e}}^-(\hat{x}) = \mathbf{e}^-(-\hat{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{|m| \leq n} (\check{\mathbf{e}}_{n,m}^{in,w} \hat{x} \times \nabla Y_n^m + \check{\mathbf{e}}_{n,m}^{in,v} \nabla Y_n^m), \quad (\text{E-22})$$

avec

$$\check{\mathbf{e}}_{n,m}^{in,w} = -(-1)^n \mathbf{e}_{n,m}^{in,w} = -\frac{1}{k} (-i)^{n+1} w_{n,m}^{(2)}, \quad (\text{23-a})$$

$$\check{\mathbf{e}}_{n,m}^{in,v} = (-1)^n \mathbf{e}_{n,m}^{in,v} = -\frac{1}{k} (-i)^{n+1} v_{n,m}^{(2)}. \quad (\text{23-b})$$

Pour expliciter l'opérateur de scattering, il reste maintenant à introduire la condition de conducteur parfait $\mathbf{E}_t(a\hat{r}) = 0$ sur la sphère de rayon a . Cette condition, associée à l'expression (E-15) du champ électrique tangentiel, nous délivre les relations sur les coefficients $w_{n,m}^{(1)}$ et $w_{n,m}^{(2)}$ d'une part, et $v_{n,m}^{(1)}$ et $v_{n,m}^{(2)}$ d'autre part :

$$\begin{cases} w_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)}(ka) + w_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)}(ka) = 0. \\ v_{n,m}^{(1)} \zeta_n^{(1)'}(ka) + v_{n,m}^{(2)} \zeta_n^{(2)'}(ka) = 0, \end{cases} \quad \text{pour tout entiers } n, m; |m| \leq n. \quad (\text{24})$$

Pour un objet sphérique, l'opérateur de scattering se décompose alors suivant

$$S = \oplus S_{n,m}^{v,w}, \quad (\text{25})$$

où,

$$\begin{cases} S_{n,m}^v : \check{\mathbf{e}}_{n,m}^{in,v} \mapsto \mathbf{e}_{n,m}^{out,v}, \\ S_{n,m}^w : \check{\mathbf{e}}_{n,m}^{in,w} \mapsto \mathbf{e}_{n,m}^{out,w}, \end{cases} \quad (\text{26})$$

avec les expressions analytiques

$$\begin{cases} S_{n,m}^v = -\frac{\zeta_n^{(2)'}(ka)}{\zeta_n^{(1)'}(ka)}, \\ S_{n,m}^w = -\frac{\zeta_n^{(2)}(ka)}{\zeta_n^{(1)}(ka)}. \end{cases} \quad (\text{27})$$

On vérifie ainsi que S est unitaire (on rappelle que $\zeta_n^{(2)}(ka) = \overline{\zeta_n^{(1)}(ka)}$, ainsi donc $|S_{n,m}^v| = |S_{n,m}^w| = 1$), et de plus que S est diagonale dans la base des harmoniques sphériques vectorielles. On peut alors, à partir de ces résultats, remonter à l'opérateur d'impédance T et aux courants caractéristiques de la sphère, et retrouver les résultats donnés dans le paragraphe (E - 3) précédent.

E - 5 Fréquences de résonance pour la sphère

D'après les développements précédents, l'ensemble des fréquences de résonance pour une sphère conductrice de rayon a est

$$\mathcal{K}_{int} = \{k ; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } J_n(ka) J'_n(ka) = 0\} .$$

Supposons que $k \in \mathcal{K}_{int}$, et $J_{n_0}(ka) = 0$, alors les $2n + 1$ harmoniques sphériques $U_{n_0}^m$, $m = -n \dots n$ constituent le noyau de T :

$$TU_{n_0}^m = 0, \forall |m| \leq n . \quad (28)$$

Nous avons vu que dans ce cas là, ces harmoniques sphériques appartiennent aussi aux noyaux de T_R et T_I (et donc aussi de a_∞ d'après le lemme 10, et par conséquent ne rayonne pas d'énergie à l'infini), i.e.

$$T_R U_{n_0}^m = T_I U_{n_0}^m = 0 .$$

Ainsi, l'équation aux valeurs propres généralisées est toujours satisfaite pour ces courants, qui sont ainsi associés à une valeur caractéristique nulle.

La définition des courants caractéristiques d'une sphère conductrice est ainsi valable indépendamment de la fréquence $k > 0$.

Bibliographie

Ouvrages généraux

- [1] D. Colton, R. Kress. *Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory*. Springer Verlag, 1992.
- [2] J.C. Nédélec. *Acoustic and electromagnetic equations*. Springer, 2001.
- [3] Kato. *Perturbation theory for linear operators*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1976.
- [4] Michel Cessenat, *Mathematical method in electromagnetism*. No. 41, Series on Advances in Mathematics for Applied Sciences, World-Scientific, Singapore, 1996
- [5] P. Lax, R. Philipps. *Scattering theory*. Academic Press, 1967
- [6] R. Dautray, J-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique*. Vol. 5, Masson, 1998.
- [7] K. Yosida. *Functionnal analysis*. Sixth Edition, Springer-Verlag, 1980.
- [8] G.T. Ruck, et al. *Radar Cross Section Handbook*. Plenum Press, 1970.
- [9] A.G. Ramm. *Scattering by obstacle*. Reidel, Dordrecht, 1986
- [10] D. Bouche, F. Mollinet. *Méthodes asymptotiques en électromagnétisme*. Springer-Verlag, 1994.
- [11] I.C. Gohberg, M.G. Krejn. *Introduction à la théorie des opérateurs linéaires non auto-adjoints dans un espace de hilbertien*. Dunod, Paris, 1971.
- [12] G. Grubb. *Functionnal calculus of pseudo-differential boundary problems*. Birkhäuser, 1986.
- [13] Bowman et al. *Methods of Radar Cross Section Analysis*. Academic Press, 1968.

Publications relatives aux courants caractéristiques

- [14] R.J. Garbacz. *A Generalized Expansion for Radiated and Scattered Fields*. PhD thesis, Ohio State Univ., Columbus, 1968
- [15] R.J. Garbacz, R.H. Turpin. *A generalized expansion for radiated and scattered fields*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. AP-19, No. 3, 1971.
- [16] R.F. Harrington, J.R. Mautz. *Theory of characteristic modes for conducting bodies*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. AP-19, No. 5, 1971.

BIBLIOGRAPHIE

- [17] R.F. Harrington, J.R. Mautz. *Computation of characteristic modes for conducting bodies*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. AP-19, No. 5, 1971.
- [18] R.F. Harrington, J.R. Mautz. *Radiation and scattering from bodies of revolution*. Appl. Sci. Res., vol. 20, pp 405-435, June 1969.
- [19] E.H. Newman. *Small antenna location using characteristic modes*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. AP-27, No. 5, 1980.
- [20] B.A. Austin, K.P. Murray. *The application of characteristic-mode techniques to vehicle-mounted NVIS antennas*. IEEE Antennas and Propagation Magazine, Vol. 40, No. 1, 1998.
- [21] A. El-Hajj, K.Y. Kabalan, S. Khoury. *Electromagnetic radiation and scattering at the university of Beirut*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. 39, No. 3, 1997.
- [22] N. Inagaki, and R.J. Garbacz. *Eigenfunctions of composite hermitian operators with application to discrete and continuous radiating systems*. IEEE Trans. on Ant. and Prop., Vol. AP-30, 1982.
- [23] N. Inagaki. *Eigenfunctions of hermitian iterated operator and its application to numerical analysis*. Dig. Int. Symp. Ant. Prop., Japan, 1978.
- [24] D. Liu, R.J. Garbacz, D.M. Pozar. *Antenna synthesis and optimization using generalized characteristic modes*. IEEE Trans. on Ant. and Prop., Vol. 38, 1990.
- [25] D.M. Pozar. *Antenna synthesis and optimization using weighted Inagaki Modes*. IEEE Transaction on Antennas and Propagation, Vol. AP-32, No. 2, 1984.
- [26] J. Heinstadt. *New approximation technique for current distribution in microstrip array antennas*. Electronics Letters, Vol. 29, No. 21, 1993.
- [27] J.M. Bowen, W.C. Chew, P.E. Mayes, J.M. Song. *A study of current basis functions for antenna modeling*. IEEE, 1996.

Autres Publications

- [28] J.A. Stratton, L.J. Chu. *Diffraction theory of electromagnetic waves*. Physical Review, Vol. 56, 1939.
- [29] G. C. Hsiao, R. E. Kleinman. *Mathematical foundations for error estimation in numerical solutions of integral equations in electromagnetics*. IEEE Transactions on antennas and propagation, Vol. 45, NO. 3, March 1997.
- [30] D. Colton, R. Kress. *The impedance boundary value problem for the time harmonic Maxwell equations*. Math. Meth. in the Appl. Sci. 3, 1981.
- [31] P. Lax, R. Philipps. *Decaying modes for the wave equation in the exterior of an obstacle*. Comm. Pure Appl. Math., Vol. XXII, 1969.
- [32] P. Hartman, C. Wilcox. *On solution of the Helmholtz equation in exterior domains*. Math. Zeitschr. 75, 228-255 (1961).
- [33] T.S. Angell, A. Kirsh et R.E. Kleinman. *Antenna control and optimization*. Proc. IEEE, Vol. 79, NO. 10, Octobre 1991.

-
- [34] S.M. Rao, D.R. Wilton et A.W. Glisson. *Electromagnetic scattering by surfaces of arbitrary shape*. IEEE Transactions on antennas and propagation, Vol. AP-30, NO. 3, May 1982.
- [35] F.M. Tesche, M.V. Ianoz, T. Karlsson. *EMC. Analysis methods and computational models*.
- [36] Steinberg, *Meromorphic families of operators ...*
- [37] F. Collino, B. Despres *Integral equation via saddle point problems for time-harmonic Maxwell's equations*. Journal of Computational and Applied Mathematics 150 (2003) pp. 157-192.
- [38] A. de La Bourdonnaye, *Décomposition de $H_{div}^{-1/2}(\Gamma)$ et nature de l'opérateur de Stecklov-Poincaré du problème extérieur de l'électromagnétisme*. Note au C.R.A.S., t. 316, Série I, (1993) pp. 369-372.
- [39] A. de La Bourdonnaye, *Some formulation coupling finite element and integral equation methods for Helmholtz equation and electromagnetism*. Num. Math. 69, (1995) pp. 257-268.
- [40] L. Paquet, *Problèmes mixtes pour le système de Maxwell*. Annales Facultés des Sciences de Toulouse, Vol. IV, 1982.
- [41] A. Buffa, M. Costabel, and C. Schwab. *Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains*. (preprint, to appear in Numerische Mathematik).
- [42] A. Buffa, R. Hiptmair. *A coercive combined field integral equation for electromagnetic scattering*. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 42, No. 2, 2004.
- [43] A. Buffa, R. Hiptmair, T. von Petersdorff, and C. Schwab. *Boundary Element Methods for Maxwell Equations in Lipschitz Domains*. Universität Tübingen, Research report 2001-05, 2005.
- [44] A. Buffa, R. Hiptmair, *Galerkin Boundary Element Methods for Electromagnetic Scattering*. preprint.
- [45] A. Buffa, M. Costabel, D. Sheen, *On traces for $H(\mathbf{rot}, \Omega)$ in Lipschitz domains*. Preprint, submitted to JMMA.
- [46] R. Hiptmair, and C. Schwab. *Natural BEM for the electric field integral equation of polyhedra*. Technical report 2001-04, SAM-ETH, 2001.
- [47] A. Buffa, and S.A. Christiansen. *The electric field integral equation on Lipschitz screens : definition and numerical approximation*. Technical report 1216, Institute of Numerical Analysis C.N.R., Pavia, Italy, 2001.
- [48] S. Hildebrandt, and E. Wienholtz. *Constructive proofs of representation theorems in separable Hilbert space*. Comm. Pure Appl. Maths, XVII, pp. 369-373.
- [49] H. Unz. *Determination of a current distribution over a cone surface which will produce a prescribed radiation pattern*. IRE Trans. on Ant. and Prop., April 1958.
- [50] C.J. Bouwkamp, and N.G. De Bruijn. *The problem of optimum antenna current distribution*. Philips Research Reports 1 (1946) 135-158.

BIBLIOGRAPHIE

Imagerie, points brillants, ...

- [51] C. Pouit. *Imagerie Radar à grande bande passante*. Communication au Colloque Int. sur le Radar, organisé par la SEE, Paris, 4-8 décembre 1978.
- [52] C. Pouit. *Caractérisation des échos Radar sur les aéronefs*. La Recherche aérospatiale, No. 2, 1980.
- [53] F. Le Chevalier. *Signatures des cibles et des fonds et traitements des signaux radar*. La Recherche aérospatiale, No. 1, 1986.
- [54] J. B. Keller. *Rays, Waves and asymptotic*. Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 84, No. 5, 1978.

Problème inverse

- [55] A. Kirsh. *Characterization of the shape of the scattering obstacle by the spectral data of the far field operator*. preprint, 1998.
- [56] A. Kirsh. *The MUSIC-algorithm and the factorisation method in inverse scattering theory for inhomogeneous media*. preprint, 2002.
- [57] M. Cheney. *The linear sampling method and the music algorithm*. preprint, 2003.
- [58] D. Colton, and R. Kress. *Eigenvalues of the far field operator for the Helmholtz equation in an absorbing medium*. SIAM J. Appl. Math., Vol. 55, No. 6, 1995.
- [59] D. Colton, and R. Kress. *Eigenvalues of the far field operator and inverse scattering theory*. SIAM J. Math. Anal., Vol. 26, No. 3, pp. 601-615, May 1995.
- [60] D. Colton, H. Hadar, and P. Monk. *The linear sampling method for solving the electromagnetic inverse scattering problem*. SIAM J. Sci. Comput., Vol. 24, No. 3, pp. 719-731, 2002.
- [61] D. Colton, K. Gieberman, and P. Monk. *A regularized sampling method for solving three-dimensional inverse scattering problems*. SIAM, J. Sci. Comp., Vol 21, No. 6, 2000.
- [62] F. Collino, M'B. Fares, and H. Haddar. *On the validation of the linear sampling method in electromagnetic inverse scattering problems*. Rapport de recherche INRIA No. 4665, 2002.
- [63] T. Arens. *Why linear sampling works*. Inverse Problem 20, 2004.
- [64] F. Cakoni, D. Colton, and E. Darrigrand. *The inverse electromagnetic scattering problem for screens*. Inverse Problem 19, 2003.
- [65] A. Kirsh, S. Ritter. *A linear sampling method for inverse scattering from an open arc*. Inverse Problem 16, 2000.

Thèses

- [66] C. Labreuche. *Problèmes inverses en diffraction d'ondes basés sur la notion de résonance*. Thèse de l'Université de Paris IX, 1997.

- [67] Snorre H. Christiansen. *Résolution des équations intégrales pour la diffraction d'ondes acoustiques et électromagnétiques. Stabilisation d'algorithmes itératifs et aspects de l'analyse numérique.* Thèse de l'École Polytechnique, 2002.
- [68] F. Carrere. *Optimisation de formes en aérodynamique hypersonique avec contraintes géométriques et furtivité électromagnétique.* Thèse de l'Université de Bordeaux I, 1994.
- [69] D. Beckers. *Finite Antenna Arrays : An eigencurrent Approach.* PhD thesis, Technische Universiteit Eindhoven.
- [70] T. Cluchat. *Validité de la condition d'impédance.* Thèse de l'Université de Bordeaux, 1992.

Publications relatives à cette thèse

- [71] Y. Morel, S. Morvan, O. Vacus. *Courants caractéristiques et analyse de SER.* CRAS, C.R. Mécanique, 332, pp. 189-194 (2004)
- [72] D. Bouche, F. Collino, Y. Morel, and O. Vacus. *Characteristic current decomposition and RCS analysis (I) : Scattering by conducting bodies.* soumis Journal of Computational and Applied Mathematics (2004)
- [73] Y. Morel, F. Collino. *Characteristic current decomposition and RCS analysis (II).* en préparation
- [74] Y. Morel, F. Collino. *The factorisation method for inverse electromagnetic scattering.* en préparation.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE
