



HAL
open science

Etude de jonctions entre canaux de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire

Manuel Aranzana

► **To cite this version:**

Manuel Aranzana. Etude de jonctions entre canaux de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. Physique mathématique [math-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2005. Français. NNT: . tel-00011553

HAL Id: tel-00011553

<https://theses.hal.science/tel-00011553>

Submitted on 7 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



THÈSE de DOCTORAT de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité : Physique Théorique

présentée par

Manuel ARANZANA

pour obtenir le grade de DOCTEUR de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

**ETUDE DES JONCTIONS ENTRE CANAUX DE BORD
DE L'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE**

Soutenue le 8 décembre 2005
devant le jury composé de :

M. Benoît Douçot	Rapporteur
M. Vincent Pasquier	Rapporteur
M. Alain Comtet	Président
M. Patrice Roche	Examineur
M. Thierry Jolicoeur	Directeur de thèse

PARIS

UNIVERSITÉ PARIS VI - PIERRE ET MARIE CURIE
U.F.R. SCIENTIFIQUE JUSSIEU

THÈSE

Présentée
pour obtenir

Le grade de

DOCTEUR EN SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI - PIERRE ET MARIE CURIE

Spécialité Physique Théorique

Par

Manuel ARANZANA

SUJET :

**ETUDE DE JONCTIONS ENTRE CANAUX DE BORD
DE L'EFFET HALL QUANTIQUE FRACTIONNAIRE.**

Soutenue le 8 décembre 2005 devant la Commission d'examen

Alain Comtet
Benoît Douçot, rapporteur
Thierry Jolicoeur, directeur de thèse
Vincent Pasquier, rapporteur
Patrice Roche

"Celui qui vole 600 dollars a une chance de s'en tirer, mais celui qui vole 600 millions de dollars, il n'y a que lorsqu'on le croit mort que la police renonce à le rechercher"

Hans Gruber

Remerciements

Ce travail a été effectué au Laboratoire Pierre Aigrain du département de Physique de l'Ecole Normale Supérieure, mes premiers remerciements vont donc naturellement à son directeur, Claude Delalande, pour son accueil chaleureux et les conditions de travail idéales dont j'ai pu bénéficier.

Je suis très reconnaissant envers Benoît Douçot, Vincent Pasquier, Alain Comtet et Patrice Roche d'avoir accepté de participer à ce jury de thèse, d'avoir corrigé mon manuscrit et d'en avoir discuté de manière si fructueuse.

Cette thèse a été encadrée par Thierry Jolicœur, qui par sa clairvoyance, sa clarté et son pragmatisme m'a donné le modèle d'un grand théoricien. Ce travail n'aura pas non plus, pu voir le jour sans le soutien quotidien de Nicolas Regnault à qui je dois beaucoup à bien des égards. Un grand merci à tous les deux pour votre disponibilité et votre gentillesse de tous les instants. Enfin, un grand merci à Christiano Ciutti qui m'a donné l'opportunité de diversifier ma recherche dans une atmosphère d'enthousiasme, de bonne humeur et de disponibilité totale.

Je tiens également à remercier toute l'équipe expérimentale. Merci à Christian Glattli, qui malgré ses nombreuses responsabilités a toujours été disponible pour répondre à mes interrogations. Merci à Jean-Marc Berroir et à Bernard Placais avec qui j'ai peu travaillé mais qui ont toujours été de bons conseils et qui ont toujours proposé leur aide. Enfin, vous avez tous contribué à l'ambiance chaleureuse et amicale qui règne au sein de cette équipe.

Je ne peux manquer de remercier chaleureusement mon fidèle acolyte, Gwendal Fève, qui depuis 8 ans partage la même passion pour la physique et la fête. Merci pour ton soutien tant logistique qu'intellectuel, sans lesquels rien n'aurait été possible. Tu resteras celui qui a donné un visage plus ludique et plus poilu à la physique. Un grand merci également à Julien Gabelli pour son amitié et sa fougue de tous les instants qui ont très clairement contribué au bon déroulement de cette thèse.

Je remercie enfin tous les membres passés et présents, qui ont tous égayés ces trois années : Adrien Bachtold, Takis Kontos, Bertrand Bourlon, Gao Bo, Adrien Mahé, Julien Chaste, Lorenz Hermann.

Anne Matignon m'a toujours soutenu et supporté dans les démarches administratives pour lesquels je suis un peu réticent et je l'en remercie.

Merci à tous les membres de ce laboratoire avec qui je n'ai pas particulièrement travaillé mais avec qui j'ai partagé des moments conviviaux : Pascal Morfin, David Darson, Arnaud Labourt-Ibarre, Arnaud Verger, Ivan Favero, Duc Phong Nguyen, Carole Diederichs, Sebastien Berger, Aleksandar Jancovic.

L'essentiel des gens qui ont eu un rôle déterminant dans ce parcours n'appartiennent pas à l'univers de la physique : merci tout d'abord à mes parents qui m'ont toujours stimulé et permis de faire les meilleurs choix. Merci à Zélie pour son soutien indéfectible en toutes circonstances et pour son avis toujours lucide. Enfin, tout ce travail n'aura pas été possible sans sa contrepartie plus ludique dont les principaux piliers se reconnaîtront...

Table des matières

1	Introduction.	11
2	Présentation de l'effet Hall quantique	15
2.1	Réalisation du gaz bidimensionnel d'électrons	15
2.1.1	Intérêt des gaz bidimensionnels	15
2.1.2	Rappel sur les semi-conducteurs	16
2.1.3	Croissance des hétérostructures	17
2.1.4	Hétérojonction GaAs/AlGaAs	17
2.1.5	Propriétés du gaz bidimensionnel obtenu	18
2.2	Mouvement classique de l'électron	19
2.2.1	Electron dans un champ magnétique.	19
2.2.2	Electron dans un champ magnétique et électrique.	20
2.2.3	Tenseur de conductivité.	21
2.2.4	Modèle de Drude.	22
2.2.5	Mesures de conductivité.	22
2.3	Effet Hall quantique entier	23
2.3.1	Mise en évidence expérimentale	23
2.3.2	Spécificité de l'effet Hall	25
2.4	Mouvement quantique de l'électron	26
2.4.1	Hamiltonien quantique et relations de commutation.	26
2.4.2	Niveaux de Landau	27
2.4.3	Pseudo-moment	27
2.4.4	Etats dégénérés dans le plan	28
2.4.5	Localisation des électrons	29
2.5	Electrons quantiques dans un champ extérieur	31
2.5.1	Champ électrique uniforme	31
2.5.2	Délocalisation des électrons	32
2.5.3	Dynamique du bord du système	32
2.5.4	Relations de dispersion à une particule	36
2.5.5	Electrons balistiques	36
2.5.6	Courant au bord	36
2.5.7	Mesures du courant	37
2.6	Effet Hall Quantique Fractionnaire.	39
2.6.1	Mise en évidence expérimentale	39
2.6.2	Rôle des interactions	40
2.6.3	Limite de champs magnétique fort	41
2.6.4	Restrictions sur l'Hamiltonien	42
2.6.5	Particularités de l'Hamiltonien	43
2.6.6	Cristal de Wigner et CDW	43

2.6.7	Diagonalisation exacte	44
2.6.8	Méthode variationnelle	44
2.6.9	Excitations du système	46
2.7	Systèmes de fermions unidimensionnels et états de bord	46
2.7.1	Théorie des champs libres	48
2.7.2	Interactions : la g-ologie	50
2.8	Bosonisation : une première approche	51
2.8.1	Particularité de la dimension $D = 1$	51
2.8.2	Le boson libre en dimension $D = 1$	52
2.8.3	Représentation du champ de fermions par des bosons	54
2.9	Détails de la procédure de bosonisation	54
2.9.1	Opérateurs de vertex	54
2.9.2	Bosonisation de l'Hamiltonien électronique libre	57
2.9.3	Facteurs de Klein	58
2.9.4	Bosonisation des interactions	59
2.10	Solution exacte du modèle de Tomonaga-Luttinger	60
2.10.1	Renormalisation du champ et de la vitesse	60
2.10.2	Mélange des champs droits et gauches	61
2.10.3	Fonctions de corrélations	62
2.11	Liquide de Tomonaga-Luttinger chiral	62
2.11.1	Théorie hydrodynamique de Wen	62
2.11.2	Bosonisation des fermions chiraux	65
2.12	Conclusion	65
3	Effet tunnel étendu.	67
3.1	Transport électronique dans un liquide de Luttinger chiral	67
3.1.1	Effet tunnel et non-linéarités	68
3.1.2	Expériences de transport tunnel	71
3.1.3	Transport à travers un point de contact quantique	72
3.1.4	Expériences sur bords clivés	74
3.1.5	Conductance tunnel à $\nu = 1/3$	76
3.2	La jonction tunnel étendue	80
3.2.1	Expérience d'effet tunnel étendu	80
3.2.2	Principe de l'étude	85
3.3	Géométrie et cinématique de l'effet tunnel étendu	86
3.3.1	Hamiltonien du système	86
3.3.2	Discussion à propos des interactions	89
3.3.3	Effet tunnel résonnant	89
3.4	Traitement perturbatif	90
3.4.1	Courant tunnel en représentation d'interaction	90
3.4.2	Introduction des potentiels chimiques	91
3.4.3	Propagateurs bosonisés	93
3.4.4	Propagateurs de Matsubara	95
3.4.5	Densité spectrale	97
3.5	Résultats	98
3.5.1	Effet tunnel non-résonnant	98
3.5.2	Effet tunnel résonnant	100
3.6	Température finie	101
3.7	Calcul du bruit.	102
3.7.1	Courant et densité spectrale	102

3.7.2	Puissance de bruit	103
3.7.3	Bruit à tension nulle	104
3.7.4	Bruit à tension non-nulle	105
3.8	Conclusion	105
4	Jonction étendue en coin	107
4.1	La jonction étendue en coin	107
4.1.1	Réalisation expérimentale	107
4.1.2	Apparition de l'effet Hall	109
4.2	Spectre à une particule	112
4.2.1	Canaux contre-propageant	112
4.2.2	Croisement des niveaux	115
4.2.3	Canaux co-propageant	116
4.3	Propriétés de transport tunnel des canaux contre-propageant	118
4.3.1	Transport en l'absence d'interaction coulombienne	118
4.3.2	Phase incommensurable	120
4.3.3	Phase commensurable	121
4.3.4	Résultats à moment k_0 nul	122
4.3.5	Résultats à moment k_0 non-nul	125
4.4	Rôle des interactions et transition C-IC	125
4.4.1	Bosonisation de l'Hamiltonien	125
4.4.2	Théorie de sine-Gordon	126
4.4.3	Transition de phase commensurable-incommensurable	127
4.5	Modèle effectif des canaux de bord co-propageant.	128
4.5.1	Théorie bosonisée	129
4.5.2	Hamiltonien tunnel et bosonisation.	131
4.5.3	Calcul perturbatif	131
4.6	Conclusion	136
5	Profil de densité et excitations des canaux de bords	139
5.1	Théorie de jauge des fluides de Hall	139
5.1.1	Phase statistique et phase de Berry	139
5.1.2	Anyons	140
5.1.3	Théorie de Chern-Simons Ginzburg-Landau	141
5.1.4	Propriétés du fluide de Hall	143
5.1.5	Equations du mouvement	145
5.2	Jonction étendue sans effet tunnel	146
5.3	Traitement par bosonisation	146
5.4	Equations de Chern-Simons pour la jonction étendue	148
5.5	Profil de densité des bords	150
5.6	Vitesses des modes de bord	152
5.7	Reconstruction dissymétrique des bords	155
5.8	Conclusion	157
6	Conclusion.	159

Chapitre 1

Introduction.

Depuis sa découverte par von Klitzing en 1980, l'effet Hall quantique constitue un domaine d'étude reconnu pour sa diversité théorique et expérimentale. Cette recherche se situe au confluent de la physique théorique des fermions fortement corrélés en dimensions $D = 2$ et $D = 1$ et de la physique mésoscopique.

Von Klitzing *et al.* ont découvert que la conductivité de Hall mesurée dans un gaz bidimensionnel d'électrons soumis à un fort champ magnétique est quantifiée en multiples de e^2/h . C'est l'effet Hall entier aux caractéristiques particulièrement remarquables. En effet, la résistance de Hall ne dépend que des constantes fondamentales e et h et non pas des caractéristiques du système dans lequel il se manifeste (constante diélectrique, taille de l'échantillon), ce qui a ouvert la voie à des expériences de métrologie extrêmement précises. De plus, le courant qui traverse une barre de Hall est très peu dissipatif. Ces effets étonnants s'expliquent très bien par l'existence de gaps d'énergie entre les niveaux de Landau du spectre à un corps du système et par le rôle du désordre.

A contrario, l'effet Hall fractionnaire découvert par Tsui et Stormer, avec sa conductivité quantifiée en *fractions* de e^2/h est rapidement apparu comme un problème à N corps ¹ beaucoup plus complexe à interpréter et par conséquent plus fructueux pour la théorie. L'existence d'un gap est également essentielle mais il n'est pas de même nature que dans l'effet Hall entier. Dans ce cas, le gap doit apparaître comme une conséquence de l'interaction de Coulomb entre électrons dégénérés en énergie. Au cours des tentatives de résolution de cette problématique complexe, Laughlin a produit une théorie très novatrice en écrivant *ab initio* une fonction d'onde à N corps pour le fondamental du système de fermions fortement corrélés. Cette théorie explique les propriétés essentielles de l'effet Hall fractionnaire. Elle fait apparaître l'existence de quasi-particules de charges fractionnaires et des gaps d'énergie associés. Il a été également remarqué que la diagonalisation exacte de systèmes de petite taille fournissait une méthode très efficace pour la compréhension de systèmes macroscopiques.

A la suite de ces travaux fondateurs, de nouveaux concepts ou des idées jusque-là abstraites ont trouvé un champ d'application accessible aux expériences. On peut ainsi citer la possibilité de modifier la statistique des particules en leur attachant des tubes de flux fictifs qui a conduit à l'existence d'*anyons* i.e. de particules de statistique intermédiaire entre fermions et bosons. Cette spécificité de la dimension $D = 2$ est à la base de la théorie de champ moyen de Chern-Simons qui considère le fluide de Hall fractionnaire comme un condensat de Bose-Einstein de bosons composites. A partir des fermions composites, les états hiérarchiques de l'effet Hall fractionnaire apparaissent comme des états d'effet Hall entier de ces fermions composites. De nombreuses anomalies expérimentales aux facteurs de remplissage comme $\nu = 5/2$ ou $\nu = 3/8$, et en particulier à $\nu = 1/2$ ont pu aussi être comprises par ces techniques.

¹Le système est dit à N corps ou en interaction forte lorsque l'énergie des interactions n'est pas négligeable devant l'énergie cinétique. C'est le cas dans l'effet Hall fractionnaire comme nous le verrons au chapitre II.

Dans les théories précédentes, le degré de liberté de spin a été négligé en supposant que les électrons sont polarisés de spin, ce qui permet d'expliquer les propriétés essentielles de l'effet Hall fractionnaire. Dans la réalité, l'effet Zeeman n'est pas très important aux valeurs typiques du champ magnétique et l'effet du spin est observé expérimentalement. Ce dernier participe de la richesse du phénomène et a conduit à la théorie des systèmes de bilayers en régime d'effet Hall fractionnaire qui fait apparaître des excitations topologiques : les *skyrmions*.

Dans l'effet Hall entier, les bords jouent un rôle fondamental mais correspondent à des états à une particule. Dans le régime fractionnaire, les électrons subissent de fortes interactions. Ces interactions à l'intérieur de l'échantillon i.e. loin des bords donnent naissance à des états de volume qui sont à la base des théories précédentes. L'effet des interactions à longue distance sur le bord peut, dans des échantillons réels, donner lieu à la formation de structures de bandes qui apparaissent comme une reconstruction du bord par les interactions. Dans les cas où ces structures n'apparaissent pas, le bord du fluide de Hall au remplissage $\nu = 1/m$ (m entier impair), est un système de fermions en interaction en dimension $D = 1$. L'effet du champ magnétique conduit les excitations à se propager dans un sens unique le long du bord : elles sont décrites par la théorie de Tomonaga-Luttinger *chirale*. La chiralité supprime toute possibilité de rétro-diffusion et les excitations sont cohérentes sur des longueurs macroscopiques. Les bords d'un fluide de Hall constituent ainsi un exemple unique de système de fermions unidimensionnels quasi-idéaux en interaction forte.

Les propriétés très spécifiques du bord ont provoqué un grand nombre d'études expérimentales dans les barres de Hall où le fluide de Hall est emprisonné dans un échantillon de forme rectangulaire. Les deux extrémités de la barre sont généralement connectées à des réservoirs électroniques et les électrons dérivent le long des deux bords longitudinaux, en sens opposés, formant deux liquides de Luttinger chiraux. Les expériences de transport par effet tunnel constituent une manière intéressante de tester la nature des bords du fluide de Hall et de vérifier la validité de la théorie de Luttinger chirale. Au-delà de la simple barre de Hall, la géométrie du point de contact quantique, où les deux bords sont rapprochés l'un de l'autre en un point unique, s'est révélée très fructueuse pour l'étude du transport sur les bords. Elle a permis en particulier l'étude de l'effet tunnel *localisé* en un point entre les deux bords, validant la théorie des liquides de Luttinger chiraux pour la description des bords aux remplissages $\nu = 1/m$.

Ces dernières années, les progrès des techniques de réalisation d'échantillons ont favorisé la création de structures beaucoup plus exotiques dans lesquelles deux bords sont très proches (séparés de ~ 100 Å sur des distances macroscopiques ($\sim 100\mu\text{m}$)). La présence d'une barrière de potentiel très longue et fine séparant deux fluides de Hall distincts est la manière la plus simple de réaliser ces jonctions quantiques étendues. Mais, des géométries plus élaborées permettent que le facteur de remplissage de chacun des deux fluides de Hall, et que la *chiralité* des bords, soit choisi indépendamment ! Dans ces jonctions quantiques étendues, les interactions entre les bords des deux fluides distincts sont bien plus importantes que dans la géométrie du point de contact quantique. L'effet tunnel est susceptible de se produire tout le long de la jonction, et l'interaction de Coulomb entre les deux bords ne peut pas être négligée. Ces structures apparaissent comme très riches de phénomènes nouveaux tant du point de vue expérimental que théorique.

Au cours de cette thèse, nous avons étudié certains aspects de ces jonctions quantiques étendues en régime d'effet Hall fractionnaire. Dans une première partie, je résumerai les principaux points théoriques des états de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire. J'exposerai avec soin la théorie des liquides de Luttinger chiraux, qui est l'outil théorique central de ces travaux.

Puis, je détaillerai, dans une seconde partie, l'étude du transport tunnel à travers une jonction quantique étendue de longueur finie, séparant deux fluides de Hall à remplissage $\nu = 1/m$ identiques, lorsque les interactions coulombiennes à longue distance sont présentes. Je réaliserai un calcul perturbatif du courant et du bruit tunnel à température finie, basé sur la théorie des liquides de Luttinger chiraux et de la bosonisation. J'obtiendrai la valeur du courant tunnel et du

bruit en fonction de la différence de potentiel appliquée entre les bords, du facteur de remplissage, de la longueur de la barrière et de la température. Je discuterai les différents régimes de courant en fonction des quatre paramètres précédents, et mettrai en évidence, outre les non-linéarités typiques du transport dans les liquides de Luttinger, des effets de seuil et des oscillations liés au caractère étendu de la jonction.

La troisième partie sera consacrée à l'étude des propriétés de transport tunnel d'une jonction quantique étendue dans une géométrie en coin. Cette géométrie où deux plans électroniques sont à 90° l'un de l'autre conduit à la formation d'une jonction quantique étendue entre canaux de bords de deux fluides de Hall de remplissages et de chiralités indépendants. Je discuterai en premier lieu la relation de dispersion à *une particule* de ce système suivant les chiralités relatives des deux bords. La relation de dispersion conduit à l'apparition d'un paramètre supplémentaire (l'incommensurabilité du système) par rapport à la jonction quantique étendue précédemment étudiée. Dans le cas contre-propageant, je calculerai la conductance différentielle tunnel en l'absence d'interaction et à remplissage entier. Je mettrai en évidence deux régimes distincts de transport. En présence d'interactions coulombiennes, la méthode de bosonisation montre que le système est décrit par un Hamiltonien de sine-Gordon avec un terme d'incommensurabilité. Il apparaît une transition de phase de type commensurable-incommensurable en fonction de la force des interactions et du paramètre d'incommensurabilité. Dans le cas inédit de canaux co-propageant, je montrerai par bosonisation que le système est décrit par un Hamiltonien de sine-Gordon *chiral*. Je calculerai perturbativement le courant tunnel entre les bords en fonction des facteurs de remplissage distincts des deux bords, de l'interaction de Coulomb à travers la jonction et de la longueur de la barrière. Je mettrai en évidence différents régimes en fonction des paramètres précédents.

Dans la dernière partie, j'étudierai la jonction quantique étendue du chapitre III dans un régime d'interaction où l'intensité de l'interaction de Coulomb à travers la jonction est plus importante qu'à l'intérieur de chaque fluide de Hall en l'absence d'effet tunnel. Cette situation correspond simplement au cas où la constante diélectrique de la jonction est plus faible que celle des gaz d'électrons qui constituent les deux fluides de Hall. J'appliquerai la théorie $2 + 1$ du champ moyen de Chern-Simons pour déterminer le profil de densité électronique des bords en fonction de la force des interactions et de l'excès de charge au bord. Je résoudrai numériquement le système d'équations aux dérivées partielles de Chern-Simons. Je calculerai ensuite par la méthode RPA, les excitations élémentaires des bords. Je mettrai en évidence une brisure de symétrie en fonction de l'intensité de l'interaction à travers la jonction. Lorsque l'interaction est suffisamment forte, les deux bords sont reconstruits de manière dissymétrique par rapport à la barrière.

Chapitre 2

Présentation de l'effet Hall quantique

L'effet Hall repose sur la dynamique d'électrons bidimensionnels dans un champ magnétique. Dans ce chapitre, nous résumons quelques propriétés centrales de ces électrons et de l'effet Hall quantique. Nous présentons en premier lieu les systèmes d'électrons bidimensionnels puis le mouvement cyclotron. Des résultats expérimentaux historiques font ensuite apparaître l'effet Hall entier dont nous détaillerons les propriétés remarquables. Cet effet ne se comprend que par le traitement quantique du mouvement électronique et nous insisterons sur les propriétés de transport des bords du système électronique. L'effet Hall fractionnaire se manifeste dans des expériences plus poussées et apparaît comme un effet à N corps dont nous énumérerons quelques caractéristiques. Nous détaillerons enfin la théorie des liquides de Tomonaga-Luttinger chiraux qui décrit la dynamique au bord du système électronique dans les conditions de l'effet Hall fractionnaire. Cette théorie est en effet centrale pour les travaux que nous exposerons aux chapitres suivants.

2.1 Réalisation du gaz bidimensionnel d'électrons

Les progrès récents dans le domaine des conducteurs mésoscopiques reposent largement sur la possibilité de réalisation expérimentale de systèmes électroniques confinés à l'interface de deux semi-conducteurs. Ces systèmes électroniques bidimensionnels sont les célèbres gaz bidimensionnels d'électrons (2-DEG).

2.1.1 Intérêt des gaz bidimensionnels

Dans un semi-conducteur massif tridimensionnel non dopé, la concentration en porteurs libres est très faible (de l'ordre de $n_e = 10^{11}/\text{cm}^3$). Ce nombre d'électrons libres peut être augmenté en introduisant des dopants au cours de la croissance du matériau, c'est à dire des impuretés (par exemple, le silicium (Si) dans l'Arseniure de Gallium (GaAs)). Ces impuretés vont en effet s'ioniser, libérant ainsi un électron dans le cas de donneurs (dopage n), ou, au contraire, en libérant un trou pour les accepteurs (dopage p). Cette augmentation du nombre de porteurs libres contribue à augmenter la conductivité du matériau. Toutefois, la conductivité même à basse température est limitée par la diffusion des porteurs libres par ces impuretés ionisées. Le nombre croissant de dopants augmente mécaniquement le nombre de porteurs mais tout autant celui de centres diffuseurs. La solution des hétérojonctions à modulation de dopage [1] consiste à séparer spatialement les porteurs libres des impuretés ionisées, ce qui permet de réduire énormément la diffusion [2, 3]. Lors d'un processus diffusif, le temps de relaxation dû aux défauts et aux impuretés est mesuré par la mobilité. En présence d'un champ électrique extérieur

appliqué, les électrons acquièrent en regime stationnaire, une vitesse de dérive dans la direction du champ appliqué. La mobilité est définie comme le rapport entre cette vitesse et le champ électrique. Séparer les porteurs libres des impuretés permet donc d'accroître la mobilité. C'est sur ce principe que sont constitués les gaz bidimensionnels d'électrons à partir d'hétérojonctions à modulation de dopage que nous allons maintenant décrire.

2.1.2 Rappel sur les semi-conducteurs

On peut réaliser des systèmes électroniques bidimensionnels de grande qualité en utilisant du Gallium et de l'Arsenic (Ga trivalent et As pentavalent), ainsi que de l'aluminium (Al, trivalent). L'Arseniure de Gallium (GaAs) fait partie des composés dits "III-V". Il est tétravalent en moyenne et cubique (comme le sulfure de zinc (ZnS)); chaque atome de Ga est entouré de quatre voisins d'As. Dans un cristal parfait, la bande de valence est complètement remplie d'électrons et la bande de conduction est complètement vide (cf Fig. 2.1). Le potentiel chimique de ce cristal se trouve entre la bande de valence et de conduction. Le gap d'énergie entre ces bandes est 1.42 eV pour GaAs à 300K et 1.52 eV à 2K. Ces gaps d'énergie sont beaucoup plus grands que l'énergie thermique $k_B T$ à température ambiante (25 meV à 300K) et ces cristaux se comportent comme des isolants. Le composé $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, obtenu en remplaçant certains atomes de Ga par des atomes de Al, possède la même structure cristalline, mais il possède un gap encore plus grand (cf Fig. 2.1). Le gap d'énergie pour la proportion de Al usuelle $x = 0.33$ est 1.85 eV à 300K et 1.97 eV à 2K.

Ces composés acquièrent le statut de semi-conducteurs une fois dopés par des donneurs ou des accepteurs. Considérons d'abord un donneur unique comme un atome de Si. Il va s'ioniser et libérer un électron dans le cristal parfait. Cet électron va donc occuper un état de la bande de conduction, et il peut se déplacer dans le cristal. Cependant l'atome donneur, privé d'un de ses électrons, est chargé positivement. L'électron libre est capturé par l'ion donneur quand la température est suffisamment basse. Ils forment un état lié dont l'énergie peut être calculée comme l'énergie de liaison de l'électron dans l'atome d'hydrogène, avec une masse effective et une constante diélectrique relatives à l'électron dans la bande de conduction. L'état lié de plus basse énergie se trouve donc sous la bande de conduction, à $E_d \approx 20\text{meV}$ de cette bande. A température ambiante, le donneur est donc complètement ionisé.

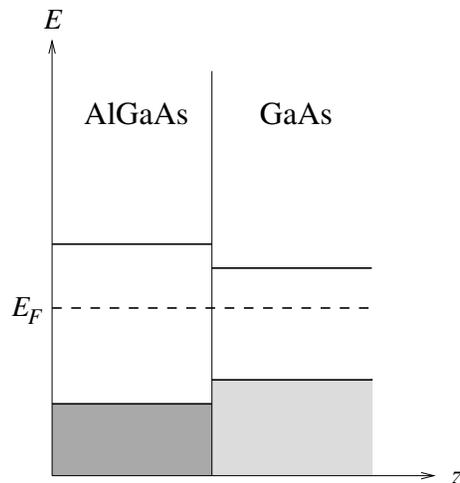


FIG. 2.1 – Niveaux d'énergie de l'hétérojonction $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ sans donneur. E_F est le potentiel chimique.

2.1.3 Croissance des hétérostructures

La manière la plus commune de réaliser ces cristaux est la technique dite d'épitanie par jet moléculaire (MBE pour molecular-beam epitaxy). Le principe de cette technique consiste à envoyer des atomes ou des molécules sur un substrat monocristallin chauffé à une température adéquate (600°C pour GaAs). Les flux atomiques et moléculaires sont obtenus à partir de cellules d'évaporation contenant les matériaux très purs. La réalisation de structures de qualité repose sur la faible différence de paramètres de maille entre les cristaux, ce qui est le cas pour GaAs et $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. La croissance du cristal est réalisée couche atomique par couche atomique. On fait d'abord croître le GaAs sur un substrat de même nature. A un certain point du processus de croissance, il est possible de modifier la composition de sorte que l'on passe de GaAs à $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Ce type de structure est appelée une hétérojonction. On peut représenter le diagramme de bandes de cette hétérojonction sans donneur quand les deux cristaux sont parfaits (cf. Fig. 2.1).

2.1.4 Hétérojonction GaAs/AlGaAs

Ce type de structure ne devient intéressant qu'à partir du moment où le $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ est dopé avec les donneurs Si. A température nulle, l'énergie de Fermi dans $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ se trouve juste au-dessus des états liés des donneurs, qui se trouvent eux-mêmes au-dessus de la bande de conduction de GaAs. Il se produit donc un transfert naturel des électrons liés aux donneurs de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ vers les niveaux vides de la bande de conduction de GaAs. Ce transfert de charges produit une polarisation électrique à travers la jonction : GaAs est chargé négativement alors que $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ est chargé positivement. Le champ électrique associé à cette polarisation courbe les niveaux d'énergie (cf Fig. 2.2) de la bande de conduction et de valence des deux cristaux. Cette modification de la structure énergétique conduit à l'équilibre des populations électroniques de part et d'autre de la jonction. La structure de bande obtenue est représentée à la Fig. (2.2). On constate que la courbure des niveaux d'énergie conduit à ce que le bas de

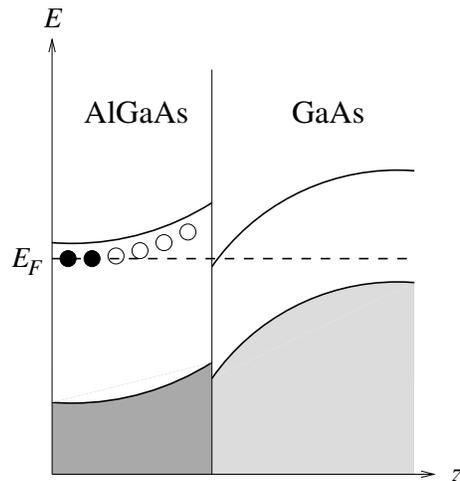


FIG. 2.2 – Niveaux d'énergie de l'hétérojonction GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ avec donneurs. La polarisation induite courbe les niveaux et crée la couche d'inversion dans le GaAs où sont piégés les électrons transférés. La bande de conduction de GaAs passe en effet sous le niveau de Fermi E_F et crée un puits de potentiel triangulaire.

la bande de conduction de GaAs passe sous le niveau de Fermi. Les électrons peuplant cette partie de la bande de conduction du GaAs se nomment les électrons de la couche "d'inversion".

On peut montrer que le champ électrique à travers la couche d'inversion est constant et donc que le potentiel électrique associé est linéaire, alors qu'il est extrêmement élevé du côté du $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$. Cette caractéristique conduit à un potentiel de confinement triangulaire pour les électrons de la couche d'inversion. On note z la direction de croissance des cristaux, xy est le plan perpendiculaire à z . Le calcul des fonctions d'onde propres de ce puit de potentiel triangulaire montre que des états liés se forment le long de la direction z alors que le mouvement des électrons est libre dans le plan xy . Dans ce type de structure, la différence d'énergie entre les niveaux des états liés, due au confinement suivant l'axe z , est suffisamment élevée pour que tous les électrons occupent seulement le niveau le plus bas. Ainsi le mouvement des électrons le long de la direction z est complètement gelé et les électrons ne se déplacent librement que dans le plan xy . L'épaisseur de cette couche électronique, le long de la direction z est typiquement de l'ordre de 100\AA pour des échantillons dont la taille dans les directions x et y est de l'ordre du μm . On a ainsi réalisé un gaz bidimensionnel d'électrons. On peut ainsi résumer le principe des hétérostructures à modulation de dopage : on fait croître successivement un matériau à grand gap dopé de type n , et un matériau de gap plus faible non dopé ; il se crée donc à l'interface de ces deux matériaux un puit de potentiel qui piège les électrons libérés par les dopants localisés dans le matériau de grand gap. Le type de dopage, ainsi que les types de cristaux utilisés conduisant à la formation du gaz bidimensionnel sont multiples mais le principe général est celui décrit ci-dessus. On peut également fabriquer des hétérojonctions de matériaux II-VI ($\text{CdTe}/\text{HgCdTe}$) ou encore IV-IV (Si/Ge). Notons enfin qu'historiquement, ce sont les transistors à effet de champ de type MOS dans le silicium (Si MOSFET) qui permirent la réalisation des premiers gaz bidimensionnels d'électrons.

2.1.5 Propriétés du gaz bidimensionnel obtenu

Dans les hétérojonctions GaAs/AlGaAs que nous étudions, les électrons bidimensionnels apparaissent du côté du GaAs, et les donneurs chargés positivement sont localisés de l'autre côté de la jonction. On a réussi à séparer spatialement les porteurs libres des impuretés ionisées. L'effet du potentiel aléatoire des impuretés sur les électrons est très faible, et on peut ainsi réaliser des échantillons avec une très grande mobilité. Dans un semi-conducteur massif tridimensionnel dopé de concentration en porteurs de $10^{17}/\text{cm}^3$, la mobilité est de l'ordre de $10^4\text{cm}^2/\text{Vs}$. En revanche, dans un gaz bidimensionnel d'électrons de concentration en porteur de $10^{12}/\text{cm}^2$ sur une épaisseur de 100\AA (ce qui correspond à une densité tridimensionnelle de $10^{18}/\text{cm}^3$), la mobilité est de $10^6\text{cm}^2/\text{Vs}$ et peut être portée à $10^7\text{cm}^2/\text{Vs}$. Notons que la densité électronique est fixée automatiquement au moment de la croissance des cristaux. On peut néanmoins la modifier en posant une électrode métallique (une grille) près de l'interface. Cela permet de créer un champ électrique perpendiculaire à la jonction. En faisant varier le potentiel électrique appliqué à cette grille, il est possible d'ajuster la densité électronique n_e dans des proportions allant de $2 \times 10^{11}/\text{cm}^2$ ou $2 \times 10^{12}/\text{cm}^2$ (densité typique de gaz bidimensionnels de GaAs/AlGaAs) à des densités beaucoup plus faibles ($10^4/\text{cm}^2$).

Dans de telles structures la distance moyenne entre électrons voisins est de l'ordre de 10 nm . Le nombre d'onde de Fermi est donc de 0.1 nm^{-1} . Cette valeur est négligeable devant la taille de la zone de Brillouin ($\approx 10\text{nm}^{-1}$) et les électrons occupent le bas de la bande de conduction. La longueur d'onde des électrons est beaucoup plus grande que la constante de réseau du semi-conducteur. Ainsi, le potentiel périodique du cristal est moyenné et ne joue pas de rôle sur la détermination des fonctions propres du système. Son effet est complètement pris en compte dans une renormalisation de la masse des électrons. L'influence du potentiel sur la dynamique des électrons est en effet contenue dans une masse effective m_e^* des électrons ($m_e^* = 0.067m_e$ dans le GaAs). En négligeant l'effet du réseau cristallin, les gaz bidimensionnels sont considérés comme isotropes dans le plan xy . Dans l'étude de l'effet Hall, les électrons sont considérés

comme polarisés de spin et il est souvent justifié de négliger l'indice de spin dans le traitement de ce type de phénomène ; c'est la convention que nous adopterons dans la suite. On peut donc considérer le 2-DEG sous champ magnétique comme un système isotrope où des électrons, dont le degré de liberté de spin est gelé, se déplacent dans un plan, sont soumis uniquement à un potentiel aléatoire dû aux impuretés et se repoussent mutuellement par l'interaction coulombienne.

Commençons maintenant la description de l'effet Hall quantique par l'introduction d'un champ magnétique appliqué perpendiculairement au gaz bidimensionnel d'électrons

2.2 Mouvement classique de l'électron

2.2.1 Electron dans un champ magnétique.

Considérons un gaz bidimensionnel d'électrons situé dans le plan xy . Un champ magnétique est appliqué suivant l'axe z . Les coordonnées suivant l'axe z de la position \mathbf{r} de l'électron et de sa vitesse \mathbf{v} sont nulles. Les coordonnées du champs magnétique sont $\mathbf{B} = (0, 0, B)$. On note, à partir d'ici, m la masse effective de l'électron et $q_e = -e$ sa charge, avec $e > 0$. L'électron est soumis à la force de Lorentz et son équation du mouvement est donc :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = q_e \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.1)$$

Cette équation découle du Lagrangien

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + q_e \mathbf{v} \mathbf{A} \quad (2.2)$$

avec \mathbf{A} le potentiel-vecteur correspondant au champ magnétique \mathbf{B} ¹. En effet, les équations d'Euler-Lagrange pour la composante x conduisent à

$$m \ddot{x} = q_e v_y B \quad (2.3)$$

En procédant de même pour la composante y , on retrouve bien (2.2). On déduit de ce Lagrangien le moment canonique \mathbf{p} et l'Hamiltonien \mathcal{H} :

$$\mathbf{p} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{v}} = m \mathbf{v} + q_e \mathbf{A} \quad (2.4)$$

et

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - q_e \mathbf{A})^2 \quad (2.5)$$

A partir de (2.1), il est relativement facile de déterminer les solutions des équations du mouvement. En formant, par exemple, la quantité $z = x + iy$ (à ne pas confondre avec la coordonnée z qui ne joue ici aucun rôle), le système d'équations (2.1) se réécrit

$$\ddot{z} = -\frac{iq_e B}{m} \dot{z} \quad (2.6)$$

La solution analytique des équations du mouvement s'obtient par intégration directe :

$$\begin{aligned} \dot{z} &= \dot{z}_0 e^{i\omega_c t} \\ z &= -\frac{i}{\omega_c} \dot{z}_0 (e^{i\omega_c t} - 1) + z_0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

¹La relation $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ est satisfaite si on se place en particulier dans la jauge de Landau $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$.

avec \dot{z}_0 la vitesse initiale, z_0 la position initiale et la pulsation cyclotron² $\omega_c = |q_e|B/m$. Le mouvement classique suit des orbites cyclotrons, dont la trajectoire est un cercle de centre $\mathbf{R} = (X, Y, 0)$ et de rayon $r_0 = m\sqrt{\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2}/|q_e|B$. Ces deux paramètres sont déterminés par les conditions initiales. On peut ainsi exprimer la position et la vitesse de l'électron comme :

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= \mathbf{R} + r_0(\cos(\omega_c t), \sin(\omega_c t), 0) \\ \mathbf{v} &= r_0\omega_c(-\sin(\omega_c t), \cos(\omega_c t), 0)\end{aligned}\tag{2.8}$$

Dans les coordonnées $(\zeta, \eta, 0)$ relatives au centre de l'orbite cyclotron, la solution devient :

$$\begin{aligned}\mathbf{r} &= (X + \zeta, Y + \eta, 0) \\ \mathbf{v} &= \omega_c(-\eta, \zeta, 0)\end{aligned}\tag{2.9}$$

On peut également déterminer les coordonnées du moment canonique, en choisissant l'expression du potentiel-vecteur dans la jauge symétrique $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$:

$$\mathbf{p} = \frac{1}{2}q_e B(-Y + \eta, X - \zeta, 0)\tag{2.10}$$

L'énergie cinétique est donnée³ par $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\omega_c^2 r_0^2$. On peut enfin utiliser les coordonnées polaires pour déterminer la composante suivant la direction z du moment angulaire L :

$$L_z = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} \Big|_z = \frac{1}{2}q_e B(R^2 - r_0^2)\tag{2.11}$$

Nous avons ainsi complètement déterminé la dynamique d'un électron classique bidimensionnel dans un champ magnétique perpendiculaire au 2-DEG.

2.2.2 Electron dans un champ magnétique et électrique.

Nous rajoutons un champ électrique constant et uniforme \mathbf{E} dans la direction x , ce qui peut correspondre, comme nous le verrons plus bas, à un potentiel de confinement linéaire dû aux bords de l'échantillon suivant la direction y . Les coordonnées du champ électrique sont donc $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$. L'électron est maintenant soumis à la force de Lorentz suivante :

$$m \frac{d^2}{dt^2} \mathbf{r} = q_e (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})\tag{2.12}$$

Le traitement similaire à celui que l'on vient de réaliser conduit à l'expression suivante de la vitesse :

$$\mathbf{v} = (-r_0\omega_c \sin(\omega_c t), r_0\omega_c \cos(\omega_c t) + v_0, 0)\tag{2.13}$$

avec $v_0 = -E/B$ que l'on appelle la vitesse de dérive. On constate que le mouvement résulte de la superposition du mouvement cyclotron décrit précédemment et d'un mouvement de dérive à la vitesse constante $\mathbf{v} = \mathbf{E} \times \mathbf{B}/B^2$ perpendiculaire à la fois au champ magnétique et au champ électrique. Cette dérive à lieu le long des bords de l'échantillon. En effet, en l'absence d'impuretés, le potentiel électrostatique que subit l'électron est uniforme au centre de l'échantillon et s'incurve très fortement pour produire les parois de confinement que constituent les bords. Cette variation spatiale du potentiel $U(x, y)$ est liée à un champ électrique $\mathbf{E} = -\nabla(U)$ perpendiculaire au bord rectiligne concerné. Dans notre traitement, ce champ électrique dû au bord est dirigé suivant la direction x , produisant un mouvement de dérive suivant la direction y i.e. le long du bord. On peut observer les orbites cyclotron et les états de bord classiques respectivement au centre et sur le bord de la barre de Hall de longueur L et de largeur W à la Fig. (2.3).

²Dans notre traitement $q_e < 0$, la valeur absolue et le signe sont justifiés.

³En utilisant $\zeta^2 + \eta^2 = r_0^2$.

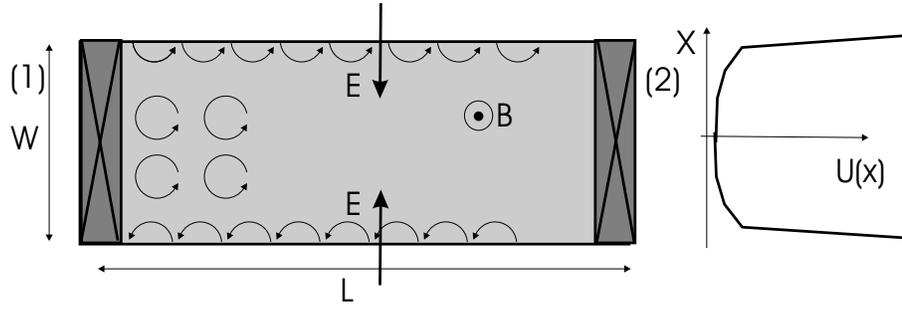


FIG. 2.3 – Description classique de la barre de Hall : (1) la barre de Hall de longueur L et de largeur W . On observe les orbites cyclotrons des électrons au centre de l'échantillon. Ces électrons ne se propagent pas. Les bords sont définis par un potentiel électrostatique $U(x)$ auquel est associé le champ \mathbf{E} qui conduit les électrons à dériver perpendiculairement à \mathbf{E} et à \mathbf{B} . Les électrons au bord de l'échantillon se propagent. (2) profil de potentiel $U(x)$ des bords de l'échantillon.

2.2.3 Tenseur de conductivité.

Le champ électrique précédent provient donc du potentiel de confinement auquel est soumis le gaz bidimensionnel aux bords de l'échantillon et il est imposé par l'électrostatique du système. En revanche, un champ électrique supplémentaire ajustable est systématiquement présent dans les expériences de transport. Considérons donc un champ électrique extérieur appliqué suivant la direction y . On peut écrire la relation entre ce champ électrique et le courant, en introduisant la densité de courant \mathbf{i} et le tenseur de conductivité σ :

$$\mathbf{i} = \sigma \cdot \mathbf{E} \quad (2.14)$$

Les relations entre composantes s'écrivent :

$$\begin{aligned} i_x &= \sigma_{xx}E_x + \sigma_{xy}E_y \\ i_y &= \sigma_{yx}E_x + \sigma_{yy}E_y \end{aligned} \quad (2.15)$$

Compte tenu de l'isotropie du système, nous obtenons les simplifications $\sigma_{xx} = \sigma_{yy}$ et $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx}$. La première quantité est la conductivité longitudinale, la seconde est la conductivité de Hall. Les relations (2.15) entre la densité de courant et le champ électrique peuvent également s'exprimer *via* le tenseur de résistivité, i.e. l'inverse du tenseur de conductivité :

$$\begin{aligned} E_x &= \rho_{xx}i_x + \rho_{xy}i_y \\ E_y &= \rho_{yx}i_x + \rho_{yy}i_y \end{aligned} \quad (2.16)$$

avec la résistivité longitudinale

$$\rho_{xx} = \rho_{yy} = \frac{\sigma_{xx}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.17)$$

et la résistivité de Hall

$$\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -\frac{\sigma_{xy}}{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{xy}^2} \quad (2.18)$$

On peut calculer analytiquement le tenseur de conductivité d'un tel système en l'absence de diffusion par des impuretés. La densité de courant est donnée par :

$$\mathbf{i} = n_e q_e \mathbf{v} = (0, -n_e q_e E/B, 0) \quad (2.19)$$

A partir de (2.14) on déduit les composantes $\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = 0$, $\sigma_{xy} = -\sigma_{yx} = n_e q_e / B$. La résistance de Hall s'en déduit immédiatement en prenant l'inverse de la matrice de conductivité $\rho_{xx} = \rho_{yy} = 0$, $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = -B/n_e q_e$. La résistivité longitudinale est donc nulle, et la résistivité de Hall varie linéairement avec le champ magnétique appliqué et l'inverse de la densité.

2.2.4 Modèle de Drude.

Dans un échantillon réel, le 2-DEG contient des impuretés et les porteurs sont soumis à des processus de diffusion élastiques et inélastiques. A champ magnétique de faible intensité, et en régime stationnaire, le taux auquel les électrons reçoivent un moment cinétique *via* le champ extérieur, est exactement égal au taux auquel ils perdent du moment cinétique par diffusion par les impuretés.

$$\left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]_{diffusion} = \left[\frac{d\mathbf{p}}{dt} \right]_{champ} \quad (2.20)$$

En faisant intervenir le temps de relaxation dû aux impuretés τ , les équations du mouvement des électrons en régime permanent deviennent

$$\frac{m\mathbf{v}}{\tau} = q_e [\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}] \quad (2.21)$$

Ce système d'équations et l'expression $\mathbf{i} = n_e q_e \mathbf{v}$ conduisent à l'expression de E_x en fonction de i_x et i_y .

$$E_x = m/n_e \tau q_e^2 i_x + B/n_e q_e i_y \quad (2.22)$$

Le tenseur de résistivité est alors

$$\begin{aligned} \rho_{xx} &= \rho_{yy} = m/n_e q_e^2 \tau \\ \rho_{xy} &= -\rho_{yx} = B/n_e q_e \end{aligned} \quad (2.23)$$

Ces deux dernières équations fournissent les résistivités de Drude. Ce modèle simple mais plus réaliste que le précédent prédit donc que la résistivité longitudinale est constante alors que la résistivité de Hall croît linéairement avec le champ magnétique.

2.2.5 Mesures de conductivité.

Ces quantités jouent un rôle fondamental dans la découverte et l'étude de l'effet Hall quantique. Elles sont mesurées par le dispositif représenté à la Fig. (2.4). Le courant I traverse un échantillon rectangulaire et on mesure les différences de potentiel appliquées $V_L = V_{AB}$ et $V_H = V_{AC}$ par les électrodes⁴. Notons que dans cette situation le champ électrique extérieur est appliqué suivant les direction x et y , contrairement au traitement précédent. Si on suppose que le courant est uniforme dans la direction x , $i_y = I/W$ et $i_x = 0$, où W est la largeur de l'échantillon. Les composantes du champ électrique sont données par $E_y = V_{AB}/L$ et $E_x = V_{AC}/W$. L est la distance entre les électrodes A et B . A partir de là, il est clair que $\rho_{yy} = V_{AB}W/IL$ et $\rho_{xy} = V_{AC}/I = R_H$. Remarquons que la résistivité de Hall est identique à la résistance de Hall V_{AC}/I et qu'elle est indépendante des dimensions de l'échantillon. On peut maintenant mesurer le tenseur de conductivité d'un tel système en l'absence de diffusion par des impuretés. Dans la pratique, ces relations sont également utilisées pour caractériser la densité de porteur n_e de l'échantillon considéré en mesurant la résistance de Hall à champ magnétique donné.

⁴ $q_e V_{AB} = \mu_B - \mu_A$ et $q_e V_{AC} = \mu_C - \mu_A$

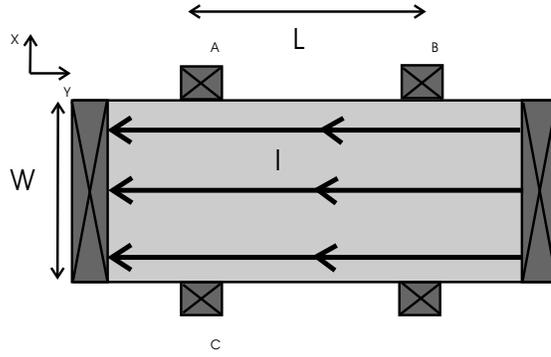


FIG. 2.4 – Barre de Hall et électrodes pour mesurer le tenseur de résistivité.

2.3 Effet Hall quantique entier

2.3.1 Mise en évidence expérimentale

D'après la théorie de Drude qui semble réaliste au niveau classique, les résistivités longitudinale et de Hall sont données respectivement par $\rho_{xx} = \rho_{yy} = m/n_e q_e^2 \tau$, $\rho_{xy} = -\rho_{yx} = B/n_e q_e$ dans un champ magnétique faible. La résistivité de Hall décroît donc de manière inversement proportionnelle à la densité électronique, et elle ne dépend pas du temps de relaxation τ lié aux impuretés. Expérimentalement, à champs magnétique faible, la résistivité diagonale est effectivement approximativement constante et la résistivité de Hall augmente linéairement avec le champ. Le comportement réel en régime de champ magnétique fort est toutefois bien différent. Nous voyons à la Fig. (2.5), les résultats de l'expérience de Wakabayashi *et al.* en 1978 [4]. Ils

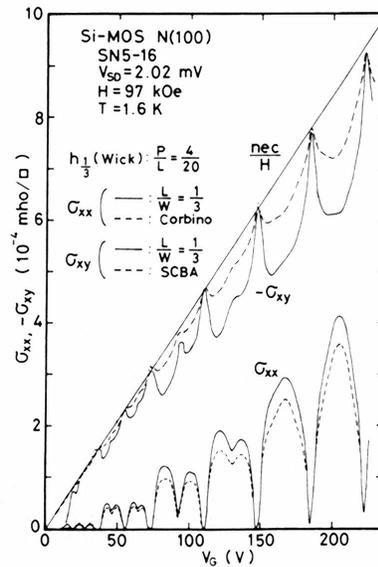


FIG. 2.5 – Conductivités longitudinale et de Hall en fonction de la tension de grille, donc de la densité électronique. Il apparaît des régions où la conductivité longitudinale σ_{xx} est très fortement réduite, simultanément la conductivité de Hall σ_{xy} s'approche de $n_e |q_e| / B$.

ont mesurés les conductivité σ_{xx} et σ_{xy} dans un échantillon de Si-MOS. Ces résultats montrent

qu'il existe des régions où la conductivité diagonale devient très faible ; alors que simultanément, la conductivité de Hall se rapproche de $n_e|q_e|/B$, c'est à dire l'inverse de ρ_{xy} dans la théorie de Drude.

Par ailleurs, von Klitzing *et al* ont réalisé des mesures très précises du tenseur de résistivité dans un échantillon de Si-MOS en 1980 [5]. Ils ont obtenu les résultats des Fig. (2.6), (2.7). Ici, le champ magnétique est maintenu constant alors que la densité électronique varie par application d'un potentiel électrostatique *via* une grille posée sur l'échantillon. Ils mettent en évidence deux caractéristiques majeures. D'une part, la résistivité longitudinale oscille fortement avec des minima quasi-nuls (cf. Fig. 2.6) alors que des plateaux apparaissent dans la résistivité de Hall qui reste alors constante quand la densité varie (cf. Fig. 2.7). Ces régions de plateaux coïncident

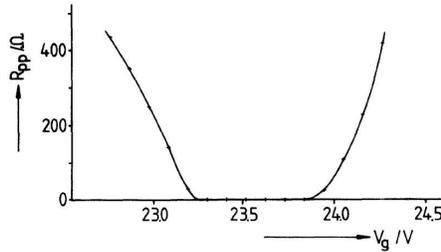


FIG. 2.6 – Résistivité longitudinale ρ_{xx} en fonction du potentiel de grille, et donc de la densité électronique. On observe l'oscillation de la résistivité jusqu'à l'annulation.

avec l'annulation de la résistivité longitudinale. Les oscillations de la résistivité longitudinale sont des oscillations de Shubnikov-deHaas. D'autre part, la valeur de la résistivité de Hall dans la région des plateaux est exactement donnée par h/e^2 divisé par un entier (cf. Fig. 2.7). Cela signifie que la conductivité de Hall σ_{xy} est quantifié en multiple de ce que l'on appelle le quantum de conductance e^2/h . Cet effet est, à ce titre, qualifié d'effet Hall quantique entier (EHQE).

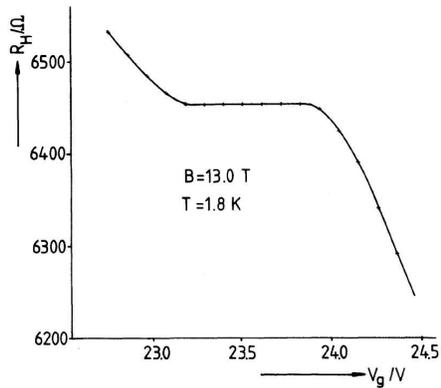


FIG. 2.7 – Résistivité de Hall ρ_{xy} en fonction du potentiel de grille, et donc de la densité électronique. On observe la formation d'un plateau aux valeurs de tension de grille correspondant à l'annulation de ρ_{xx} . La valeur de la résistivité de Hall à ce plateau est $\rho_{xy} \approx h/4e^2$ ($h/e^2 = 25812\Omega$).

Il est important de souligner que la découverte de la quantification de la conductivité de Hall a ouvert la voie à des mesures extrêmement précises de la valeur de la constante physique e^2/h . La valeur obtenue à partir des plateaux découverts par von Klitzing coïncide avec la valeur de e^2/h , obtenue de manière indépendante avec une précision de cinq chiffres significatifs. Les

raisons qui expliquent une telle particularité tiennent à la bidimensionnalité du système. Comme on l'a vu précédemment, dans ce type de système $\rho_{xy} = R_H$; pour obtenir la résistivité de Hall, il suffit de mesurer précisément la différence de potentiel appliqué et le courant mais pas les dimensions de l'échantillon, comme c'est souvent le cas dans les expériences de métrologie. De plus, comme σ_{xx} et ρ_{xx} s'annulent au niveau des plateaux, il n'est pas nécessaire de positionner les électrodes A et C perpendiculairement au courant. Sans ces deux caractéristiques la mesure précise de l'effet Hall serait presque impossible. Il a vite été montré que ces caractéristiques se retrouvaient dans d'autres systèmes et en particulier dans les hétérojonctions de GaAs/AlGaAs. Dans la plupart des expériences réalisées à partir de ces hétérojonctions, la densité électronique est maintenue constante et les grandeurs σ_{xy} et ρ_{xy} sont mesurées dans un champ magnétique variable. Les plateaux se forment presque exclusivement dans la région de fort champ ce qui donne des courbes expérimentales comme montrées à la Fig. (2.8). On voit sur ces résultats que ρ_{xy} présente un profil en marche d'escalier. On constate que la conductivité de Hall à température très faible est quantifiée en multiple de e^2/h , et la résistivité diagonale s'annule dans la zone des plateaux. En réalisant des mesures beaucoup plus précises, les caractéristiques suivantes ont été mises en évidence. Les différences de valeur entre différents échantillons, entre différent types de substrat (Si MOSFET ou hétérojonctions à base de GaAs), et les différences entre les plateaux sont inférieures à 10^{-10} de la valeur quantifiée des plateaux.

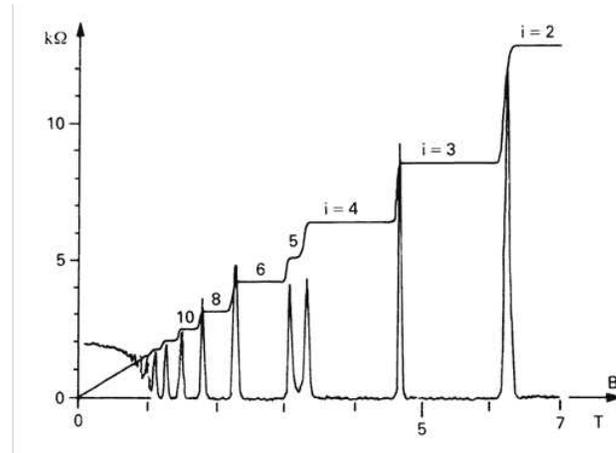


FIG. 2.8 – La résistivité de Hall varie par plateaux avec le champ magnétique, elle est quantifiée en h/ie^2 avec i entier. La résistivité longitudinale est à peu près constante à champ faible, elle oscille fortement à fort champ (SdH), ses minima sont quasi-nuls et coïncident avec les plateaux de la résistance de Hall.

2.3.2 Spécificité de l'effet Hall

Par ailleurs, on peut comparer la valeur absolue de la résistivité de Hall avec une résistance étalon. Un certain nombre de laboratoires conservent en effet ces résistances étalon. La méthode la plus fiable pour calibrer une résistance est la méthode dite de "cross-capacitor". La capacité d'un condensateur peut être déterminée par la mesure de ses dimensions géométriques. L'impédance en régime alternatif (AC) d'un condensateur est homogène à une résistance, on peut donc l'utiliser pour calibrer le quantum de résistance. Cette méthode ne permet la calibration qu'à une précision relative de 10^{-8} . Par conséquent, on ne peut pas déterminer la valeur de e^2/h par effet Hall avec une précision supérieure à cette valeur. La valeur $R_K = R_{K-90} = 25812.807\Omega \simeq h/e^2$ est la valeur officielle de la résistance quantifiée de Hall, prônée par l'"International Metrology Committee" en 1988 et déterminée par la méthode capacitive précédente. Sur la Fig. (2.9), on

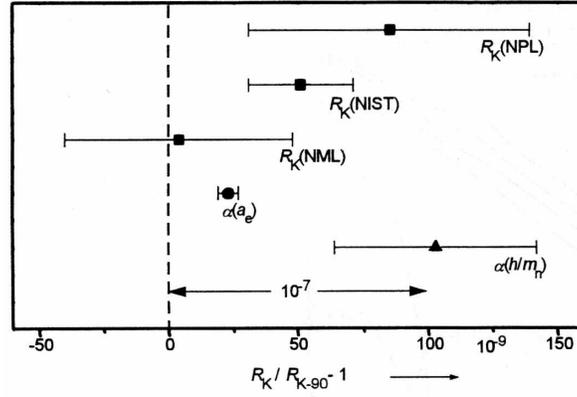


FIG. 2.9 – Différences de mesures de la résistivité de Hall par rapport à $R_{K-90} = 25812.807\Omega$ et normalisée par R_{K-90}

peut voir les écarts à cette valeur, mesurés par effet Hall [6]. $R_K(NPL)$ est la valeur obtenue par "National Physical Laboratory" en Grande-Bretagne, $R_K(NIST)$ est la valeur obtenue par le "National Institute of Standards and Technology" et $R_K(NML)$ est la valeur obtenue par le "National Measurement Laboratory" en Australie. On y voit également la valeur de h/e^2 déduite de la constante de structure fine $\alpha = e^2/ch$, $\alpha(a_e)$. Ce graphique montre clairement les limites dans la détermination de h/e^2 par effet Hall. Ainsi, actuellement on considère la valeur $R_K = R_{K-90}$ comme étant le quantum h/e^2 .

2.4 Mouvement quantique de l'électron

Les résultats expérimentaux concernant la conductance de Hall indiquent clairement que le traitement classique du mouvement de l'électron est insuffisant pour décrire la richesse du phénomène. Il est nécessaire de procéder à la résolution quantique du problème.

2.4.1 Hamiltonien quantique et relations de commutation.

Nous commençons par traiter la situation où aucun champ électrique extérieur n'est appliqué. Le système est alors isotrope. Cette situation correspond au système d'électrons dans le 2-DEG loin des parois de confinement de l'échantillon qui bordent le gaz. Les électrons sont alors dans la *volume* par opposition au bord. L'Hamiltonien quantique à une particule \mathcal{H} est obtenu à partir de celui de la mécanique classique (2.4) :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m}(\mathbf{p} - q_e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 \quad (2.24)$$

Ici, \mathbf{r} est l'opérateur de position et \mathbf{p} est l'opérateur de moment canonique. Ils vérifient les relations de commutations canoniques $[p_\mu, r_\nu] = -i\hbar\delta_{\mu,\nu}$ avec $\mu, \nu = x, y, z$. C'est la présence de l'opérateur vecteur-potentiel $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ qui empêche le moment canonique de commuter avec l'Hamiltonien⁵. Comme dans le cas classique, l'opérateur moment canonique \mathbf{p} n'est pas proportionnel à l'opérateur vitesse \mathbf{v} . D'après l'équation de Heisenberg

$$\mathbf{v} = (i/\hbar)[H, \mathbf{r}] = (1/m)(\mathbf{p} - q_e\mathbf{A}) \quad (2.25)$$

⁵Dans la jauge symétrique $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$ on obtient $[p_x, A_y] = B/2[p_x, x]$ et $[p_y, A_x] = -B/2[p_y, y]$. Les relations de commutation sont alors $[p_\mu, A_\nu] = -i\hbar B/2\epsilon_{\mu,\nu}$.

Introduisons à présent l'opérateur moment dynamique $\vec{\pi} = m\mathbf{v} = \mathbf{p} - q_e\mathbf{A}$. Il obéit aux relations de commutations suivantes :

$$[\pi_\mu, \pi_\nu] = i\hbar q_e B \epsilon_{\mu,\nu} = -i \frac{\hbar^2}{l^2} \epsilon_{\mu,\nu} \quad (2.26)$$

avec la longueur magnétique⁶ $l = \sqrt{\hbar/|q_e|B}$. $\epsilon_{\mu,\nu}$ est le tenseur complètement anti-symétrique de Levi-Civita avec $\mu, \nu = x, y$ et $\epsilon_{x,y} = 1$. Ce moment dynamique $\vec{\pi}$ ne commute pas non plus avec l'Hamiltonien \mathcal{H} .

2.4.2 Niveaux de Landau

L'Hamiltonien (2.24) s'exprime donc seulement en fonction du moment dynamique :

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \vec{\pi}^2 \quad (2.27)$$

Il est plus commode de considérer, au lieu de l'habituelle paire d'opérateurs canoniques (\mathbf{r}, \mathbf{p}) , la paire correctement normalisée (π_x, π_y) . En effet, la relation de commutation $[\pi_\mu, \pi_\nu] = -i \hbar^2 / l^2 \epsilon_{\mu,\nu}$ autorise le choix de ces opérateurs canoniques. L'Hamiltonien s'exprime donc comme une combinaison linéaire de π_x^2 et de π_y^2 , ce qui lui confère la même structure algébrique qu'un oscillateur harmonique unidimensionnel. On s'inspire alors du traitement de ce problème classique en introduisant les opérateurs création-annihilation a^\dagger et a qui vérifient $[a, a^\dagger] = 1$ et

$$\begin{aligned} a &= \frac{l}{\sqrt{2\hbar}} (\pi_x - i\pi_y) \\ a^\dagger &= \frac{l}{\sqrt{2\hbar}} (\pi_x + i\pi_y) \end{aligned} \quad (2.28)$$

L'Hamiltonien devient alors :

$$\mathcal{H} = \hbar\omega_c \left(a^\dagger a + \frac{1}{2} \right) \quad (2.29)$$

Comme dans l'oscillateur harmonique, les valeurs des énergies propres ϵ sont discrètes et sont indicées par un entier n

$$\epsilon_n = \hbar\omega_c (n + 1/2) \quad (2.30)$$

Ces états d'énergie discrète sont appelés les niveaux de Landau (cf. Fig. 2.10) pour les électrons du *volume* i.e. loin des bords de l'échantillon. Ces états sont spatialement dégénérés en énergie. Pour s'en rendre compte, introduisons les opérateurs X et Y de coordonnées du centre de l'orbite cyclotron, par analogie au cas classique.

2.4.3 Pseudo-moment

Les coordonnées du centre de l'orbite cyclotron sont définies par les relations :

$$\mathbf{r} = \left(X + \frac{l^2}{\hbar} \pi_y, Y - \frac{l^2}{\hbar} \pi_x, 0 \right) \quad (2.31)$$

Les opérateurs X et Y obéissent aux relations de commutations⁷ $[X, Y] = il^2$. En l'absence de champ magnétique, l'opérateur de moment \mathbf{p} est le générateur des translations. L'opérateur de translation commute avec l'Hamiltonien, il est donc évident qu'en présence d'un champ magnétique extérieur le moment canonique \mathbf{p} n'est plus générateur des translations, alors que le

⁶Dans notre traitement $q_e < 0$, la valeur absolue et le signe se justifient alors dans (2.26)

⁷En effet, $(X, Y, 0) = (x - \frac{l^2}{\hbar} \pi_y, y + \frac{l^2}{\hbar} \pi_x, 0)$ et on remarque que $[\pi_\mu, r_\nu] = [p_\mu, r_\nu]$.

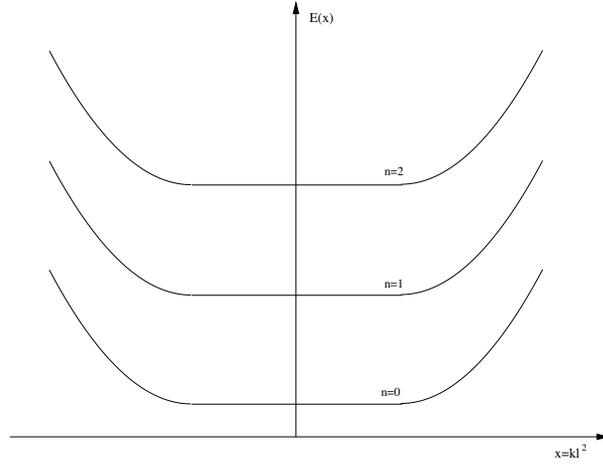


FIG. 2.10 – Niveaux de Landau. Au centre de la figure, les niveaux correspondent à la situation sans champ extérieur i.e. sans potentiel de confinement. On est alors dans le *volume*. Sur les cotés, le potentiel de confinement parabolique courbe les niveaux, qu’occupent alors les états de bord.

système est invariant par translation. Le moment dynamique $\vec{\pi}$ introduit précédemment ne peut pas non plus engendrer les translations car il ne commute pas avec l’Hamiltonien (2.27). Le générateur des translations convenable est appelé le pseudo-moment \mathbf{K} :

$$\mathbf{K} = \mathbf{p} - q_e \mathbf{A} + q_e \mathbf{B} \times \mathbf{r} \quad (2.32)$$

Cet opérateur commute avec $\pi = \mathbf{p} - q_e \mathbf{A}$, et donc avec l’Hamiltonien (2.24)⁸. Les opérateurs X et Y sont reliés aux opérateurs de pseudo-moment $K_x = -q_e B Y$ et $K_y = q_e B X$, et donc commutent avec π . En conséquence, ils commutent également avec l’Hamiltonien et les niveaux de Landau sont dégénérés par rapport à la liberté de choix de X et de Y .

2.4.4 Etats dégénérés dans le plan

Nous pouvons maintenant étudier plus en détails la liberté de choix de X et Y . Compte tenu de l’isotropie du système, nous choisissons pour cela la jauge symétrique $\mathbf{A} = (-By/2, Bx/2, 0)$, l’opérateur de moment angulaire suivant z s’exprime alors de la manière suivante :

$$L_z = \frac{l^2}{2\hbar}(\pi_x^2 + \pi_y^2) - \frac{\hbar}{2l^2}(X^2 + Y^2) \quad (2.33)$$

Notons que ces résultats sont cohérents avec ceux trouvés lors du traitement classique (2.11) avec $R^2 = X^2 + Y^2$ et $r_0^2 = (l^2/\hbar)^2(\pi_x^2 + \pi_y^2)$. Ce terme est proportionnel à l’énergie cinétique, i.e. à l’Hamiltonien et l’autre s’exprime en fonction de X et Y . Comme L_z commute avec l’Hamiltonien, ses valeurs propres peuvent être utilisées pour indiquer les états dégénérés d’un même niveau de Landau et obtenir des fonctions d’onde propres de l’Hamiltonien et du moment cinétique. Introduisons les opérateurs création-annihilation b^\dagger et b avec $[b, b^\dagger] = 1$:

$$\begin{aligned} b &= \frac{1}{\sqrt{2}l}(X + iY) \\ b^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}l}(X - iY) \end{aligned} \quad (2.34)$$

⁸Comme $K_x \equiv \pi_x - (q_e B)y = \pi_x + (\hbar/l^2)y$ et $K_y \equiv \pi_y - (\hbar/l^2)x$, on obtient $[K_x, \pi_x] = 0$ et $[K_x, \pi_y] = -i\hbar q_e B + i\hbar q_e B = 0$.

Dès lors, nous obtenons :

$$L_z = \hbar(a^\dagger a - b^\dagger b) \quad (2.35)$$

On en conclut qu'un état électronique est décrit par un ket $|n, m\rangle$ avec $n, m \geq 0$. Il s'agit d'un vecteur propre de $a^\dagger a$ et $b^\dagger b$ ⁹ :

$$\begin{aligned} a^\dagger a |n, m\rangle &= n |n, m\rangle \\ b^\dagger b |n, m\rangle &= m |n, m\rangle \end{aligned} \quad (2.36)$$

Les valeurs propres de L_z sont $\hbar(n - m)$. Revenons à l'expression des opérateurs création-annihilation en fonction de opérateurs coordonnées de \mathbf{r} .

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\sqrt{2}l} \left[-\frac{i}{2}(x - iy) - il^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \\ b &= \frac{1}{\sqrt{2}l} \left[\frac{1}{2}(x + iy) + l^2 \left(\frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \end{aligned} \quad (2.37)$$

La fonction d'onde $|0, 0\rangle$ du fondamental en représentation de coordonnées $\psi_{0,0}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{r} | 0, 0 \rangle$ est obtenue en résolvant l'équation $a|0, 0\rangle = b|0, 0\rangle = 0$. On peut utiliser les coordonnées complexes $z = (x - iy)/l$ et $z^* = (x + iy)/l$.

$$\psi_{0,0}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} e^{-|z|^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}l} e^{-r^2/4l^2} \quad (2.38)$$

On détermine les fonctions d'onde des autres états par :

$$\psi_{n,m}(\mathbf{r}) = \frac{(a^\dagger)^n (b^\dagger)^m}{\sqrt{n!} \sqrt{m!}} \psi_{0,0}(\mathbf{r}) \quad (2.39)$$

Ainsi, les états propres de l'Hamiltonien et du moment cinétique s'expriment par des polynômes de Laguerre. Ces états à une particule décrivent des électrons de *volume* pour lesquels nous pouvons calculer la moyenne d'observables intéressantes.

2.4.5 Localisation des électrons

Nous nous restreignons aux fonctions d'onde du niveau de Landau le plus bas :

$$\psi_{0,m}(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^m m!} l} z^m e^{-|z|^2/4} = \frac{1}{\sqrt{2\pi 2^m m!} l} \left(\frac{x - iy}{l} \right)^m e^{-r^2/4l^2} \quad (2.40)$$

Cette fonction d'onde représente un électron localisé sur une couronne comme le montre la Fig. (2.11). Le maximum de densité de probabilité de $|\psi_{0,m}(\mathbf{r})|^2$ se trouve sur une couronne centrée sur l'origine, de rayon $\sqrt{2ml}$; l'extension radiale de la fonction d'onde est de l'ordre de l . La valeur moyenne de \mathbf{r}^2 est $\langle 0, m | \mathbf{r}^2 | 0, m \rangle = 2(m + 1)l^2$. Il est important de ne pas confondre le cercle en question avec l'orbite cyclotron classique. En effet, les calculs de moment angulaire et d'énergie montrent clairement que le rayon cyclotron pour le premier niveau de Landau est l . L'état $|0, m\rangle$ est une combinaison linéaire de différentes orbites cyclotron de rayon l et dont les centres sont placés sur un cercle de rayon $\sqrt{2ml}$ (cf. Fig. 2.12). Considérons maintenant un système de forme circulaire d'aire $S = \pi R^2$, les états pour lesquels $2ml^2 > R^2$ peuvent être négligés. Ainsi, le nombre total d'états à un électron dans le premier niveau de Landau est $S/2\pi l^2$. Autrement dit, il y a un état électronique par unité d'aire $2\pi l^2$. Ceci est également vrai pour les niveaux de Landau supérieurs; dans un système d'aire S , chaque niveau de Landau à

⁹ m est ici la valeur propre de L_z et n'a rien à voir avec une masse.

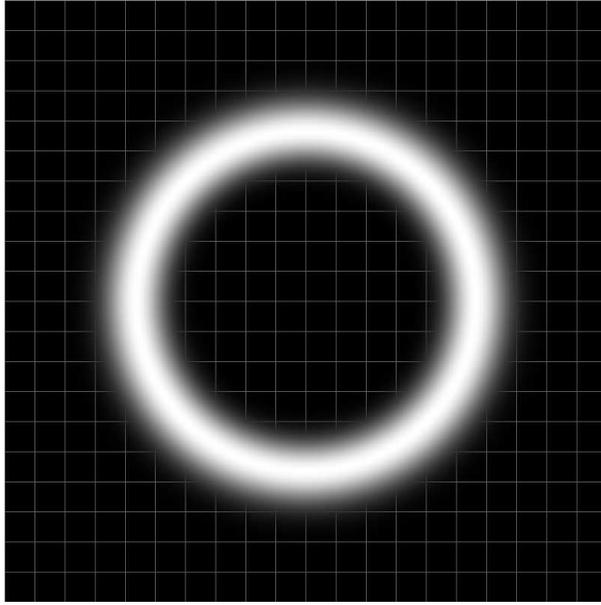


FIG. 2.11 – Densité de probabilité $|\psi_{0,m}(\mathbf{r})|^2$ pour $m = 16$

une dégénérescence de $S/2\pi l^2$. Le flux magnétique qui passe à travers l'aire élémentaire $2\pi l^2$, occupée par un électron¹⁰, est $2\pi l^2 B = h/|q_e| = \phi_0$. On peut donc associer un quantum de flux ϕ_0 à un état électronique pour chaque niveau de Landau. Notons une caractéristique très

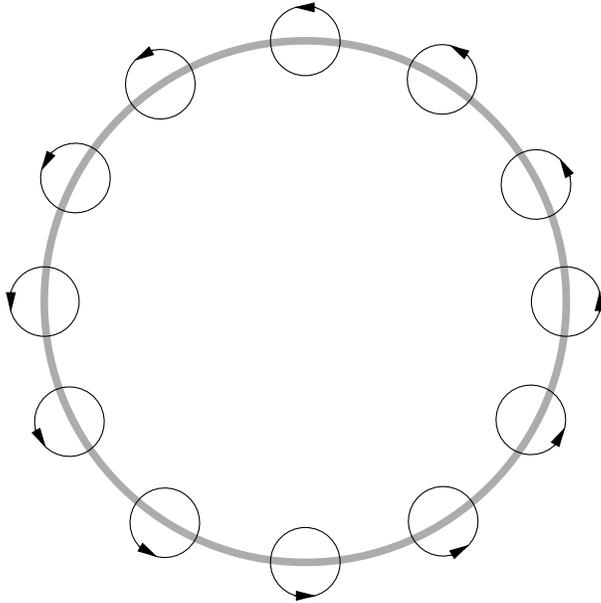


FIG. 2.12 – Image classique associée à 2.11

spécifique des fonctions d'onde du niveau de Landau le plus bas. La représentation en notation complexe (2.40) est en effet composée d'un monôme en z à la puissance m et d'une composante exponentielle indépendante de m . Toutes les fonctions d'onde de ce niveau étant dégénérées,

¹⁰Nous avons supposé que les électrons sont polarisés de spin. C'est la raison pour laquelle chaque état est associé à un électron.

n'importe quelle combinaison de ces fonctions d'onde est encore une fonction propre de \mathcal{H} à la même énergie propre. Ainsi, la fonction d'onde suivante est une fonction propre du niveau de Landau le plus bas

$$\psi(\mathbf{r}) = f(z)e^{-|z|^2/4} \quad (2.41)$$

avec $f(z)$ un polynôme arbitraire en z . La seule restriction tient au fait que le système étant de taille finie, le degré M du polynôme $f(z)$ est contraint par la relation $M \leq R^2/2l^2$.

2.5 Electrons quantiques dans un champ extérieur

2.5.1 Champ électrique uniforme

Etudions maintenant les fonctions propres du problème précédent auquel on ajoute un champ électrique uniforme $\mathbf{E} = (E, 0, 0)$ le long de l'axe x . Le traitement *via* le moment angulaire n'est plus possible dans la mesure où celui-ci n'est plus conservé. Le choix de la jauge symétrique n'est alors pas judicieux. Le système est invariant par translation suivant l'axe y , on peut donc choisir plutôt la jauge de Landau $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ et l'Hamiltonien devient

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2m} \left(\pi_x^2 + (\pi_x - q_e Bx)^2 \right) - q_e E x \quad (2.42)$$

Le dernier terme est le potentiel électrique auquel est soumis l'électron dans le champ \mathbf{E} . L'invariance par translation assure que le moment suivant la direction y est conservé dans cette jauge, il est alors possible de chercher des fonctions propres sous forme d'une onde plane et d'une fonction χ de variables séparées :

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_y y} \chi(x) \quad (2.43)$$

La fonction $\chi(x)$ obéit à l'équation de Schrodinger réduite

$$\left[\frac{1}{2m} \left(\pi_x^2 + (\hbar k_y - q_e Bx)^2 \right) - q_e E x \right] \chi(x) = \epsilon \chi(x) \quad (2.44)$$

ici L est la longueur du système suivant l'axe y et ϵ est l'énergie propre. En introduisant la coordonnée du centre de l'orbite cyclotron $X_k = -k_y l^2 + e E m l^4 / \hbar^2 = (\hbar k_y + m E / B) / q_e B$:

$$\left[\frac{1}{2m} \pi_x^2 + \frac{m \omega_c^2}{2} (x - X_k)^2 \right] \chi(x) = \left[\epsilon + q_e E X_k - \frac{m}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 \right] \chi(x) \quad (2.45)$$

Une fois encore, nous reconnaissons l'équation de Schrodinger de l'oscillateur harmonique, dont le potentiel est centré sur la position X_k . Il est crucial de noter que le centre du potentiel est une fonction linéaire en k_y . Les fonctions propres χ s'écrivent à l'aide des polynômes de Hermite $H_n(x) = (-1)^n \exp(x^2) \frac{d^n}{dx^n} \exp(-x^2)$:

$$\chi_n(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \right)^{1/4} \left(\frac{1}{2^n n! l} \right)^{1/2} e^{-(x-X_k)^2/2l^2} H_n \left(\frac{x-X_k}{l} \right) \quad (2.46)$$

La valeur propre de cet état est :

$$\epsilon_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - q_e E X_k + \frac{m}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 \quad (2.47)$$

Les niveaux de Landau apparaissent comme précédemment avec des termes supplémentaires. Le terme proportionnel à X_k courbe les niveaux dans un diagramme d'énergie propre en fonction du centre de l'orbite cyclotron (cf Fig. 2.10). Ces états électroniques dus à un champ électrique extérieur sont les états de *bord*. Pour ces états, la dégénérescence en énergie des états de *volume* est donc levée et on peut les indiquer par la valeur propre de X_k .

2.5.2 Délocalisation des électrons

La fonction d'onde propre totale $\psi_n(\mathbf{r}) = \frac{1}{\sqrt{L}} e^{ik_y y} \chi_n(x)$ est localisée sur la distance $\sqrt{2n+1}l$ suivant la direction x . Elle est en revanche délocalisée suivant la direction y i.e. le long d'une équipotentielle du champ électrique. La valeur moyenne des opérateurs de vitesse dans cet état est :

$$\langle \psi | v_x | \psi \rangle = \langle \psi | \frac{\pi_x}{m} | \psi \rangle = 0 \quad (2.48)$$

et

$$\begin{aligned} \langle \psi(x, y) | v_y | \psi(x, y) \rangle &= \langle \psi(x, y) | \frac{\pi_y - q_e B x}{m} | \psi(x, y) \rangle \\ &= \langle \chi(x) | \frac{q_e B (X - x)}{m} | \chi(x) \rangle \\ &= \frac{1}{q_e B} \langle \chi(x) | \frac{\partial \mathcal{H}_x}{\partial X} | \chi(x) \rangle \\ &= \frac{1}{q_e B} \frac{\partial \epsilon(X)}{\partial X} \end{aligned} \quad (2.49)$$

Compte tenu du choix de champ électrique, on obtient une vitesse suivant la direction y

$$\langle \psi | v_y | \psi \rangle = -\frac{E}{B} \quad (2.50)$$

Ainsi les électrons dérivent perpendiculairement au champ électrique exactement comme dans le cas classique. Dans l'expression de l'énergie (2.47), le premier terme est l'énergie cinétique du mouvement cyclotron, le second est l'énergie potentielle due au champ électrique, et le dernier terme vient de l'énergie cinétique de dérive à la vitesse $\frac{E}{B}$. L'énergie a exactement la même forme que dans le cas classique excepté le fait que l'énergie cyclotron est quantifiée.

2.5.3 Dynamique du bord du système

Les états électroniques aux bords de l'échantillon jouent un rôle très important dans l'effet Hall. Les bords de l'échantillon correspondent à un potentiel de confinement $U(x, y)$. On suppose que ce potentiel est uniforme le long de la direction y et qu'il varie suivant x . Nous choisissons $U(x, y) = U(x) = 0$ pour $x < 0$ et $U(x) > 0$ pour $x > 0$. Ce potentiel correspond à un champ électrique $\mathbf{E} = -\nabla U(x) = (E(x), 0, 0)$. Les électrons au bord de l'échantillon sont donc soumis à un champ électrique orienté comme précédemment. Le choix de la jauge de Landau est donc toujours approprié pour ce problème. Le moment le long de la direction y est conservé et les états propres ont une structure d'onde plane suivant cette direction.

Dans un premier temps, considérons le cas où le potentiel de confinement varie de manière douce par rapport à la longueur magnétique l , le long de la direction x . Ici, c'est le gradient du potentiel de confinement $U(x)$ qui joue le rôle du champ électrique appliqué. On peut développer le potentiel en série de Taylor autour du centre de chaque orbite cyclotron X . Il est alors possible de négliger les termes d'ordre deux et plus, sur la distance $\delta x = \sqrt{2n+1}l$, en raison du caractère 'doux' du potentiel.

Le champ électrique est donc approximativement constant $E(x) \approx E$ et nous pouvons utiliser les fonctions d'ondes déterminées précédemment (2.46) comme une bonne approximation des véritables fonctions propres au bord de l'échantillon. Ces fonctions correspondent à des états électroniques délocalisés le long de la direction y i.e. le long du bord du système et localisés sur la distance δx dans la direction x . L'énergie propre est donnée par l'expression

$$\epsilon_n = \hbar \omega_c \left(n + \frac{1}{2} \right) - q_e E X_k + \frac{m}{2} \left(\frac{E}{B} \right)^2 \quad (2.51)$$

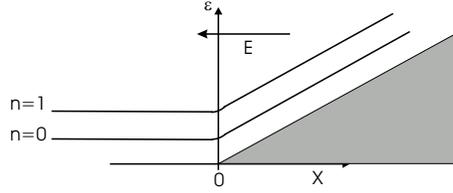


FIG. 2.13 – Les deux premiers niveaux de Landau au bord d'un échantillon de potentiel de confinement $U(x)$ linéaire (en gris). Le champ électrique associé \mathbf{E} est constant, et les niveaux de Landau sont linéaires en X_k .

Lorsque le centre de l'orbite cyclotron se déplace dans le sens du potentiel de confinement croissant, l'énergie propre de l'état électronique correspondant augmente et provoque la courbure des niveaux de Landau. Plus l'électron est plongé dans le bord, plus son énergie est élevée (cf Fig. 2.13).

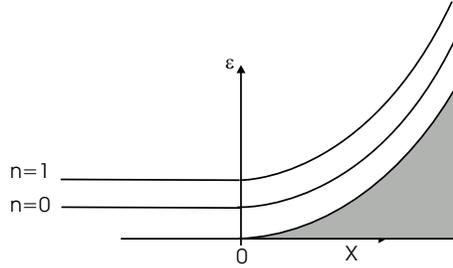


FIG. 2.14 – Les deux premiers niveaux de Landau au bord d'un échantillon de potentiel de confinement $U(x)$ linéaire (en gris). Le champ électrique associé \mathbf{E} est constant, et les niveaux de Landau sont linéaires en X_k .

Quand le potentiel varie de manière plus brutale, il faut alors prendre en compte le terme d'ordre deux du développement en série de Taylor. Quand le potentiel est quadratique, ou quand on se restreint aux termes d'ordre deux, l'équation de Schrodinger est toujours celle d'un oscillateur harmonique, dont on peut déterminer les solutions propres de manière analytique. La fonction d'onde est alors donnée par une expression du même type que (2.46) avec une dépendance de l'énergie propre en X_k un peu plus compliquée (cf Fig. 2.14). Enfin, quand le potentiel varie encore plus brutalement, les solutions analytiques simples n'existent plus, et seul le traitement numérique est possible. Le potentiel infiniment abrupt (cf Fig. 2.16) est la seule exception qui admette une résolution analytique [8]. Quand $X_k = 0$ pour le niveau de Landau le plus bas, la fonction d'onde s'annule au niveau de la barrière $\psi(x_0 = 0)$, elle ne s'annule pas pour $x < 0$. L'énergie propre s'exprime sous la forme $\epsilon = \hbar\omega_c(\nu(X_k) + \frac{1}{2})$ avec la fonction $\nu(X_k)$ croissante en fonction de X_k . Le niveau de Landau le plus bas correspond à des états d'énergie $\hbar\omega_c/2$ pour $X_k < -l$, qui remontent à la valeur $3\hbar\omega_c/2$ pour $X_k = 0$. Lorsque $X_k \gg 0$, l'énergie diverge (cf Fig. 2.15).

Ces traitements se concluent tous par le fait que l'énergie de l'électron augmente quand le centre de son orbite cyclotron approche du potentiel de confinement du bord. Cette caractéristique peut s'interpréter clairement. Considérons le problème précédent avec un potentiel de confinement infiniment haut et abrupt $U(x) = 0$ si $x < 0$ et $U(x) = \infty$ pour $x \geq 0$. L'Hamiltonien réduit \mathcal{H}_x auquel est soumis la fonction $\chi(x)$ est alors

$$\mathcal{H}_x = \frac{1}{2m}\pi_x^2 + \frac{m\omega_c}{2}(x - X_k)^2 + U(x) \quad (2.52)$$

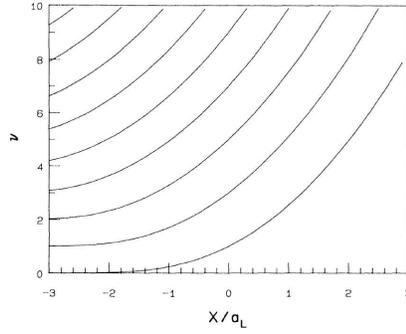


FIG. 2.15 – Partie variable ($\nu(X)$) des valeurs propres ($\epsilon = \hbar\omega_c(\nu(X) + 1/2)$) en fonction de $X = X_k$, le centre de l’orbite cyclotron, pour un mur infiniment haut. Ici, $X = 0$ correspond au bord, $X < 0$ correspond au *volume* et $X > 0$ est le mur. a_L est la longueur magnétique.

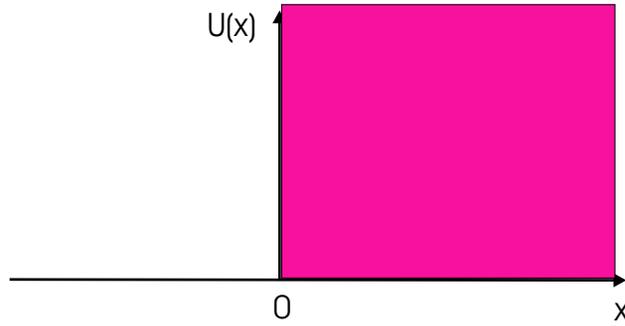


FIG. 2.16 – Potentiel de confinement infini pour $x \geq 0$ (le bord de l’échantillon) et nul dans le 2-DEG pour $x \leq 0$.

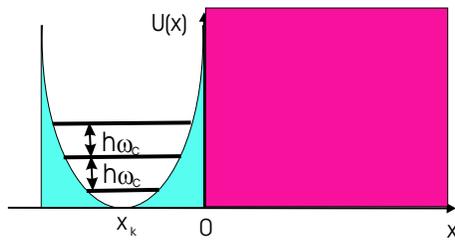


FIG. 2.17 – Potentiel effectif senti par un électron soumis à un champ \mathbf{B} en présence d’un mur de potentiel infini localisé en $x \geq 0$. Le potentiel parabolique est dû au champ magnétique et est centré en X_k . Pour $X_k \ll 0$ (dans le volume), l’électron est essentiellement soumis au potentiel parabolique, il ne sent pas la présence du mur, ses niveaux d’énergie les plus bas sont ceux d’un oscillateur harmonique et donnent naissance aux niveaux de Landau dégénérés en énergie.

avec $X_k = -k_y l^2$. Il s'agit de l'Hamiltonien d'une particule soumise à un potentiel infini en

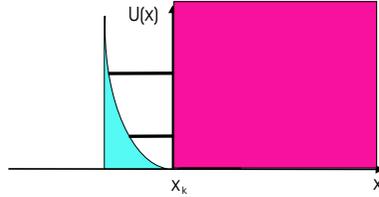


FIG. 2.18 – Potentiel effectif ressenti par un électron soumis à un champ \mathbf{B} en présence d'un mur de potentiel $U(x)$ infini localisé en $x \geq 0$. Le potentiel parabolique est dû au champ magnétique et est centré en X_k . Pour $X_k = 0$ (au voisinage du mur), l'électron est soumis au potentiel parabolique et au mur infini, il ressent la présence du mur et est davantage contraint énergétiquement. Les niveaux d'énergie les plus bas sont plus élevés que précédemment et correspondent au début de la courbure des niveaux de Landau au voisinage du potentiel de confinement.

$x \geq 0$ et à un potentiel parabolique centré sur X_k . La superposition de ces deux potentiels explique bien l'évolution de l'énergie propre de cet Hamiltonien en fonction de la valeur de X_k . Si $X_k \ll 0$, la particule est soumise essentiellement au potentiel parabolique et le mur infini ne modifie le potentiel parabolique que pour des valeurs très élevées de l'énergie. La détermination des énergies les plus basses du système n'est pas affectée par le potentiel infini et les énergies propres sont celles de l'oscillateur harmonique i.e. les niveaux de Landau dégénérés (cf Fig. 2.17). Classiquement, l'électron réalise une orbite cyclotron autour de X_k . Si $X_k \approx 0$, les deux potentiels sont superposés et le potentiel résultant est une demi-parabole bordée par un mur infini. Ce problème est plus contraint que dans le cas précédent et les niveaux d'énergie de ce puit de potentiel seront plus élevés. Cela correspond à la courbure des niveaux de Landau au voisinage du potentiel infini (cf Fig. 2.18) et l'électron classique ressent l'effet du bord puisque le centre de son orbite cyclotron est au pied du mur, l'électron se propage le long du mur. Enfin, si $X_k \gg 0$, le potentiel résultant de la superposition est une cuvette de potentiel très élevée due à l'intersection de la partie haute du potentiel parabolique et du mur infini. La détermination des énergies propres de ce puit de potentiel conduit à des valeurs très élevées mêmes pour les énergies les plus basses. Cela correspond au comportement asymptotique des niveaux de Landau (cf Fig. 2.19). Le centre de l'orbite cyclotron de l'électron classique est très profondément enfoncé à l'intérieur du mur et l'électron est localisé le long du mur où il se propage avec une importante énergie cinétique. Remarquons que dans les cas où $X_k > 0$, l'électron correspondant n'est jamais localisé dans le mur infini et sa fonction d'onde s'annule en $x = 0$. C'est le centre de l'orbite cyclotron de l'électron classique associé qui se trouve à l'intérieur du mur.

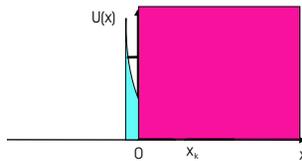


FIG. 2.19 – Potentiel effectif ressenti par un électron soumis à un champ \mathbf{B} en présence d'un mur de potentiel infini localisé en $x \geq 0$. Le potentiel parabolique est dû au champ magnétique et est centré en X_k . Pour $X_k \gg 0$ (centre de l'orbite cyclotron classique à l'intérieur du mur), l'électron est soumis au potentiel parabolique et au mur infini, il ressent très fortement la présence du mur et est très contraint en énergie. Les niveaux d'énergie les plus bas sont très élevés et correspondent aux niveaux de Landau très haut dans le potentiel de confinement (cf Fig. 2.15).

2.5.4 Relations de dispersion à une particule

Ces diagrammes d'énergie peuvent être interprétés de manière plus pertinente du point de vue de la dynamique des électrons. Nous avons noté que $X_k = -k_y l^2$, il est donc parfaitement équivalent de tracer la dépendance des niveaux de Landau en X_k/l ou en $k_y l$. Dans ce dernier cas, cela signifie que l'on obtient l'énergie propre d'un état électronique de moment k_y en fonction de k_y . Le diagramme d'énergie obtenu est alors la relation de dispersion à une particule des électrons de ce problème. On peut donc construire très simplement la relation de dispersion du système à partir de cette technique. Notons que le signe de k_y n'a pas directement d'interprétation en terme de propagation électronique puisque la vitesse moyenne de l'électron suivant y dans le cas particulier du champ électrique uniforme est indépendante de k_y (2.50).

2.5.5 Electrons balistiques

Considérons un système bidimensionnel d'électrons comme à la Fig. (2.20). Les bords à gauche et à droite de l'échantillon sont connectés à des électrodes de potentiel (respectivement) μ_1 et μ_2 et les bords supérieurs et inférieurs sont définis par des potentiels de confinement infiniment hauts. Le système est soumis à un champ magnétique perpendiculaire au plan électronique et les électrons se mettent à dériver le long des bords avec des vitesses opposées. On considère la situation où le potentiel de Fermi se trouve entre deux niveaux de Landau, le système est alors au milieu d'un plateau de l'effet Hall quantique. Les niveaux de Fermi dans les réservoirs de gauche et de droite peuvent être différents. Par exemple, le niveau de Fermi dans l'électrode de gauche μ_1 peut être plus élevé que celui dans l'électrode de droite μ_2 (cf Fig. 2.20 b). Dans ce cas, les états de bord supérieurs de l'échantillon sont peuplés jusqu'à l'énergie μ_1 alors que ceux du bord inférieur ne le sont que jusqu'à μ_2 . Quand un électron du bord supérieur possède une énergie plus grande que μ_2 , il va immédiatement être transporté jusqu'à l'électrode de droite et être absorbé par celle-ci. Par ailleurs, les électrons dont l'énergie est inférieure à μ_1 occupent en permanence les états du bord supérieur. Cette distribution hors-équilibre n'est jamais rééquilibrée dans un système idéal. En effet, la diffusion d'un bord vers l'autre est très défavorable ; le recouvrement des fonctions d'onde des bords supérieurs et inférieurs est exponentiellement faible en raison de la distance macroscopique qui les séparent et il n'y a pratiquement pas de diffusion des uns vers les autres. Ainsi, les électrons qui peuplent les états d'un bord jusqu'au niveau de Fermi vont continuer à se propager dans une seule direction. La rétro-diffusion d'un bord vers l'autre est encore très difficile lorsque des impuretés empêchent la conservation du moment le long des bords. La fonction d'onde électronique à une extension de seulement l autour d'une équipotentielle. Ainsi, même si les équipotentielles qui définissent les bords sont très ondulées, il suffit qu'elles soient séparées d'une distance beaucoup plus grande que l pour que le recouvrement des fonctions d'onde de deux bord à la même énergie soit exponentiellement faible. Les électrons qui occupent des états de bord sont donc *balistiques* sur des distances macroscopiques ($\approx 100\mu\text{m}$) malgré les impuretés. Cette propriété essentielle explique que les canaux des bord sont considérés comme des exemples uniques de systèmes quantiques quasi-idéaux.

2.5.6 Courant au bord

Considérons un système bidimensionnel d'électrons tel que représenté à la Fig. (2.4). Les bords supérieurs et inférieurs de l'échantillon sont connectés à des électrodes et les bords latéraux sont définis par des potentiels de confinement infiniment haut.

Le système est soumis à un champ magnétique perpendiculaire au plan électronique et les électrons se mettent à dériver le long des bords. On peut alors calculer le courant sur l'un des bords, quand les états de bord à un électron sont occupés jusqu'à l'énergie μ . On peut reprendre le traitement précédent dans la jauge de Landau, $\mathbf{A} = (0, Bx, 0)$ et la valeur moyenne

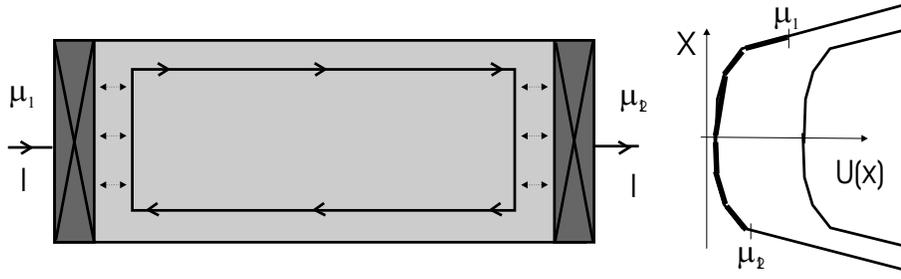


FIG. 2.20 – (a) échantillon avec des bords idéaux : le bord supérieur est en équilibre avec un réservoir de potentiel chimique μ_1 , celui d'en bas avec le réservoir de potentiel chimique μ_2 , (b) potentiels chimiques et niveaux de Landau sur un diagramme de profil de potentiel de la barre de Hall.

de l'opérateur vitesse d'un état de *bord* $\psi(x, y)$ est alors :

$$\langle \psi(x, y) | v_y | \psi(x, y) \rangle = \frac{1}{q_e B} \frac{\partial \epsilon(X_k)}{\partial X_k} \quad (2.53)$$

Le courant électrique porté par cet état est donc $j = (e/L)v_y$, c'est à dire le courant porté par un électron. Si l'on veut calculer le courant total des états de *bord* entre une origine d'énergie arbitraire ϵ_0 et le niveau de Fermi μ , on doit sommer la contribution de chaque état dont la coordonnée X_k vérifie $\epsilon_0 < \epsilon(X_k) < \mu$. Comme X_k est proportionnel au moment dans la direction y , le courant pour chaque niveau de Landau est le suivant :

$$I = \sum_{X_k} \frac{q_e}{L} v_y = \frac{L_y}{2\pi l^2} \int dX_k \frac{q_e}{L} v_y = \frac{q_e}{h} \int dX_k \frac{d\epsilon}{dX_k} = \frac{q_e}{h} (\mu - \epsilon_0) \quad (2.54)$$

Nous obtenons ainsi un courant linéaire en l'énergie de Fermi du système. Comme on l'a calculé précédemment (section 2.5.5), cette distribution hors-équilibre *permanente* permet de définir le courant au bord en choisissant une origine commune de l'énergie. Ce courant est conservé le long du bord, et le courant injecté dans le coin en haut à gauche de l'échantillon (cf Fig. 2.20) se propage de manière continue le long du bord supérieur, même dans une région contenant un diffuseur. On peut donc considérer les bords supérieurs et inférieurs comme des fils parfaits et mesurer leur potentiel électrochimique. La différence de potentiel entre les électrodes reliées à ces canaux est reliée tension de Hall : $\mu_C - \mu_A = q_e V_{AC}$. Le courant total à travers l'échantillon est la différence entre les courants des bords supérieurs et inférieurs. La conductance de Hall s'avère alors être $\sigma_{xy} = -e^2/h$ par niveau de Landau, nous obtenons alors la valeur attendue pour l'effet Hall quantique.

2.5.7 Mesures du courant

Considérons maintenant le système (cf Fig. 2.21). Chaque électrode (de gauche et de droite) est un réservoir d'électrons à une température et un potentiel donnés ; leurs potentiels chimiques sont donc bien définis (respectivement μ_1 et μ_4). Chaque électrode est couplée au système bidimensionnel. Dans le gaz bidimensionnel, les électrons dérivent le long des bords et les électrodes de mesure de potentiel ($\mu_5, \mu_6, \mu_3, \mu_2$) n'injectent ni ne prélèvent de courant. Elles sont en équilibre avec le bord et leurs potentiels chimiques relatifs au même bord seront donc identiques. Par exemple, au bord supérieur, les deux électrodes sont au même potentiel chimique : $\mu_5 = \mu_6 = \mu_A$. De la même manière, au bord inférieur $\mu_2 = \mu_3 = \mu_B$, avec μ_A et μ_B les potentiels chimiques du bord supérieur et inférieur.

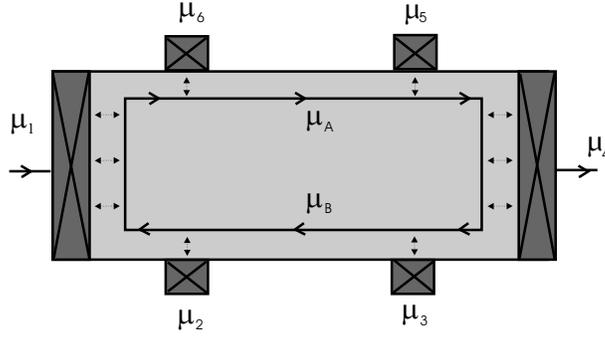


FIG. 2.21 – Echantillon dans la configuration d’une expérience de transport.

Supposons que l’électrode de gauche soit à un potentiel chimique μ_1 supérieur à celui de l’électrode de droite μ_4 . L’origine des énergies E_0 est choisie de sorte qu’elle coïncide avec μ_4 et on ne prend pas en compte les états de bord d’énergie inférieure à μ_4 , puisqu’ils sont toujours occupés dans le gaz et les électrodes.

Considérons d’abord l’électrode de gauche. Les électrons avec une énergie comprise entre μ_1 et μ_4 entrent dans le système bidimensionnel avec une certaine valeur moyenne statistique¹¹ T_1 et sont réfléchis dans l’électrode avec la valeur moyenne $R_1 = N - T_1$. N est le nombre d’états de bords impliqués i.e. le nombre de niveaux de Landau sous le niveau de Fermi. Les électrons injectés dans le système bidimensionnel occupent dans l’état de bord supérieur, et se propagent le long du bord. Par ailleurs, les électrons sur le bord inférieur qui ont une énergie entre μ_4 et μ_B se propagent le long du bord vers l’électrode de gauche, entrent dans cette électrode avec la probabilité T'_1 et sont réfléchis avec la probabilité $R'_1 = N - T'_1$. Ces électrons réfléchis ne peuvent pas rester dans l’état de bord inférieur en raison de la chiralité des canaux, donc ils se retrouvent dans le bord supérieur. En conséquence, le courant sur le bord supérieur est donné par la somme de ces deux contributions :

$$I_1 = \frac{e}{h} T_1 (\mu_1 - \mu_4) + \frac{e}{h} R'_1 (\mu_B - \mu_4) \quad (2.55)$$

Jusqu’à présent nous avons différencié T_1 et T'_1 , mais nous allons dorénavant les supposer identiques pour la clarté des formules. On utilise la relation entre le courant et le potentiel chimique (2.54) et le fait que le bord supérieur est en équilibre au potentiel chimique μ_A ; on obtient alors

$$I_1 = \frac{e}{h} N (\mu_A - \mu_4) \quad (2.56)$$

On peut faire le même raisonnement pour l’électrode de droite, mais dans ce cas aucun courant n’est injecté à partir de l’électrode, donc le courant dans le bord inférieur n’est constitué que la partie du courant réfléchi en provenance de l’électrode supérieure. Ainsi,

$$I_2 = \frac{e}{h} R_2 (\mu_A - \mu_4) = \frac{e}{h} N (\mu_B - \mu_4) \quad (2.57)$$

On détermine μ_A , μ_B et $I = I_1 - I_2$ à partir des équations précédentes.

$$\mu_A = \mu_4 + \frac{NT_1}{N^2 - R_1 R'_1} (\mu_1 - \mu_4) \quad (2.58)$$

¹¹Cette valeur s’interprète comme une probabilité mais peut être supérieure à 1, il vaut donc mieux parler de coefficients de moyenne statistique. Dans la suite de cette section, on utilisera abusivement le terme de probabilité avec cette réserve.

et

$$\mu_B = \mu_A + \frac{R_2 T_1}{N^2 - R_1 R_2} (\mu_1 - \mu_4) \quad (2.59)$$

Ainsi :

$$I = \frac{e}{h} \frac{N T_1 T_2}{N^2 - R_1 R_2} (\mu_1 - \mu_4) \quad (2.60)$$

La tension de Hall est donnée par $V_H = (\mu_A - \mu_B)/e = (h/e^2)(I/N)$ et on trouve bien la quantification attendue. L'effet Hall quantique est caractérisé par un courant non dissipatif; or les potentiels chimiques des courants des électrodes ont une différence finie $\mu_1 - \mu_4$. Il se produit donc de la dissipation quelque part. Si on considère la situation où la résistance de contact est faible, alors la dissipation se produit essentiellement en deux endroits : au coin inférieur gauche, où les électrons du réservoir avec l'énergie jusqu'au potentiel μ_1 s'écoulent dans les états de bord, qui contiennent des électrons d'énergie jusqu'à μ_B . L'autre endroit est le coin supérieur droit, où les électrons des états de bord d'énergie jusqu'à μ_A vont dans l'électrode qui a le potentiel μ_4 . Il a été démontré expérimentalement que la chaleur est dissipée en ces points [46].

2.6 Effet Hall Quantique Fractionnaire.

2.6.1 Mise en évidence expérimentale

Les progrès des techniques cryogéniques ainsi que l'usage d'hétérojonctions de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ de mobilité bien plus grande que les Si-MOS ont permis aux expérimentateurs de réaliser des mesures plus propres de conductivités longitudinale et de Hall. Grâce ces techniques, ils ont eu la surprise de découvrir de nouveaux plateaux correspondant à une conductivité de Hall en fraction de e^2/h . A la Fig. (2.22), sont reproduits les résultats de Tsui *et al.* obtenus en 1982

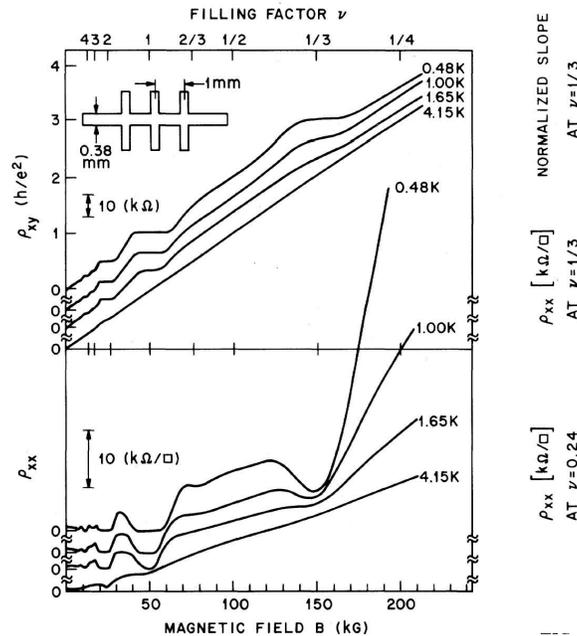


FIG. 2.22 – Résistivités diagonale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué.

[9]. On observe que la résistivité diagonale est toujours finie, et que les plateaux de la résistivité de Hall ne sont pas très visibles. Toutefois, ce résultat montre clairement une tendance à la

formation de plateaux où la conductivité de Hall est quantifiée en $1/3$ et $2/3$ de e^2/h ¹². Ces caractéristiques furent effectivement observées sans aucune ambiguïté à plus basse température [10]. Sur la Fig. (2.23) il apparaît de très nombreux plateaux dans la résistivité de Hall en fonction du champ magnétique à densité n_e fixée. Les premiers plateaux correspondent à une conductivité en multiple entier de e^2/h comme nous l'avons vu dans l'effet Hall quantique entier mais les plateaux suivants se produisent à des fractions rationnelles de e^2/h de dénominateur impair. La formation de ces plateaux ainsi que l'annulation de la résistivité longitudinale pour ces mêmes valeurs du champ correspondent à l'effet Hall quantique fractionnaire (FQHE).

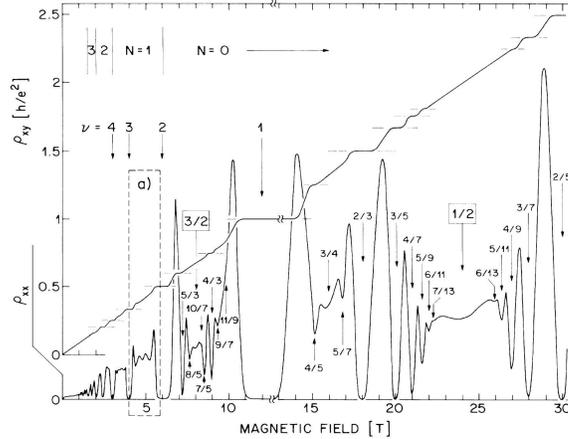


FIG. 2.23 – Résistivités diagonale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué.

Notons que les valeurs de champ magnétique auxquelles se produisent ces plateaux de conductance lorsque la densité est fixée, peuvent être mesurées par le facteur de remplissage de Landau $\nu = N_e/(S/2\pi l^2)$ où N_e est le nombre total d'électrons dans le système. Le facteur de remplissage est le nombre d'électrons divisés par le nombre d'états accessibles dans un niveau de Landau. Il mesure donc le nombre de niveaux de Landau occupés¹³. Comme $\nu = n_e 2\pi l^2 = 2\pi\hbar n_e/|q_e|B$, on peut transposer les valeurs du champ \mathbf{B} en valeur du facteur de remplissage. A densité fixée, les valeurs du champ pour lesquelles se produisent les plateaux dans la conductance de Hall de l'effet Hall entier correspondent aux valeurs de ν entières et pour l'effet Hall fractionnaire, les plateaux apparaissent à des fractions de dénominateur impair comme indiqués sur la Fig. (2.23). C'est également à ces valeurs de ν que se produisent la réduction de résistivité longitudinale. On peut toutefois observer à la Fig. (2.24) quelques anomalies par rapport à cette règle, avec des réductions de résistivité à des fractions dites exotiques comme $\nu = 3/8$ ou $\nu = 3/10$ qui illustrent la complexité du phénomène. L'effet Hall fractionnaire le plus typique se produit à $\nu = 1/3$ ou $\nu = 2/3$ et ces expériences mettent clairement en évidence les manquements de la théorie quantique à un corps. Seule la prise en compte des interactions entre électrons allait permettre d'interpréter ce phénomène.

2.6.2 Rôle des interactions

Les résultats surprenants de l'EHQF concernant les fractions $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$ apparaissent à champ magnétique suffisamment élevé (ou réciproquement, à densité électronique suffisamment basse) pour que les facteurs de remplissage soient inférieurs à 1. Dans ces conditions, les électrons n'occupent que partiellement le premier niveau de Landau. Il y a précisément un électron pour

¹²Ce qui correspond à une résistivité de $1.5h/e^2$ et de $3h/e^2$

¹³ $\nu = 1/2$ correspond au premier niveau de Landau à moitié plein.

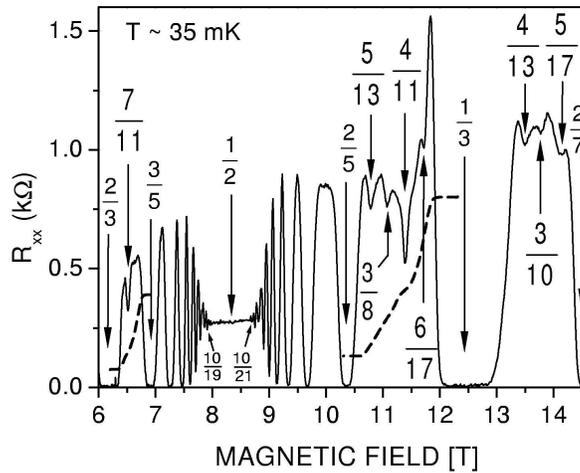


FIG. 2.24 – Résistivités diagonale et de Hall en fonction du champ magnétique appliqué.

3 états électroniques à un corps à $\nu = 1/3$. Or, loin des bords, les états occupés sont les états de *volume* qui présentent une dégénérescence totale en énergie. Il est alors clair que l'interaction coulombienne entre ces électrons est susceptible de lever la dégénérescence entre états et doit être prise en compte pour tenter d'interpréter la formation de plateaux aux fractions $\nu = 1/3$ et $\nu = 2/3$. Le traitement de l'EHQF apparaît alors comme un problème à N corps nécessairement plus complexe que l'effet Hall quantique entier qui s'explique *via* la résolution de l'équation de Schrödinger à une particule et le rôle du désordre.

2.6.3 Limite de champs magnétique fort

Nous allons donc considérer un système bidimensionnel d'électrons sans potentiel de confinement latéral i.e. sans champ électrique. On est dans la situation de la section 2.4. En présence d'un champ magnétique perpendiculaire au plan électronique, il se forment des niveaux de Landau. Chacun d'entre eux est indicé par n et est constitué d'états de volume qui sont tous dégénérés à l'énergie $\hbar\omega_c(n + 1/2)$. Deux électrons aux positions \mathbf{r} et \mathbf{r}' interagissent *via* l'interaction de Coulomb $V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = q_e^2/4\pi\epsilon|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ que nous avons négligée jusqu'ici. L'ordre de grandeur de l'interaction coulombienne est $V_0 \propto q_e^2/4\pi\epsilon l$ avec ϵ la constante diélectrique de $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, soit $V_0 \propto \sqrt{B}$. La séparation entre les niveaux de Landau est $\hbar\omega_c \propto B$. Dans la limite de fort champs magnétique, l'énergie cinétique $(n + 1/2)\hbar\omega_c$ tend donc à dominer le terme d'interaction coulombienne V_0 .

Dans les gaz bidimensionnels des hétérojonctions $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, pour un champ $B \sim 10\text{T}$, $V_0 \sim 150\text{K}$, et $\hbar\omega_c \sim 200\text{K}$. Le terme d'interaction devient effectivement sous-dominant par rapport à l'énergie cyclotron. Lorsque l'on néglige les interactions, le fondamental est constitué des électrons qui occupent les niveaux de Landau dans l'ordre croissant. Dans le régime de champ fort, le terme d'interaction coulombienne apparaît comme un terme correctif à l'énergie du fondamental et il est légitime de considérer que le fondamental du système en interaction ne sera pas dramatiquement modifié par rapport au cas sans interaction. Ainsi, dans le cas d'un facteur de remplissage $\nu = 1$, le fondamental sera obtenu en remplissant totalement le premier niveau de Landau, même en présence d'interactions. Naturellement, l'interaction mélange les états des électrons appartenant à différents niveaux de Landau, mais la proportion de niveaux supérieurs mélangés avec le premier est de l'ordre de $1/\sqrt{B}$ et peut être négligée dans la limite de champ magnétique fort. Ainsi, le mélange des différents niveaux de Landau ne joue pas un

rôle central dans l'effet Hall quantique fractionnaire. Nous allons donc traiter cet effet dans la limite où la séparation entre niveaux de Landau $\hbar\omega_c$ est considérée comme infinie, et le mélange entre états de différents niveaux est négligeable. Nous pouvons maintenant écrire l'Hamiltonien du système.

2.6.4 Restrictions sur l'Hamiltonien

Les fonctions d'onde à une particule des états de *volume* $\psi_{n,X_k}(\mathbf{r})$ peuvent être indicées par l'indice n du niveau de Landau ainsi que par X_k la valeur propre de l'opérateur de coordonnée du centre de l'orbite cyclotron. Dans le formalisme de seconde quantification, les opérateurs d'annihilation et de création associés aux fonctions d'onde $\psi_{n,X_k}(\mathbf{r})$ sont notés a_{n,X_k} et a_{n,X_k}^\dagger . L'Hamiltonien du système d'électrons de *volume* soumis à l'interaction coulombienne est la somme de l'Hamiltonien cinétique \mathcal{H}_{Kin} (2.29) et du terme d'interaction \mathcal{H}_{Int} .

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Kin} + \mathcal{H}_{Int} \quad (2.61)$$

avec

$$\mathcal{H}_{Kin} = \sum_n \sum_{X_k} \left(n + \frac{1}{2} \right) \hbar\omega_c a_{n,X_k}^\dagger a_{n,X_k} \quad (2.62)$$

et

$$\mathcal{H}_{Int} = \sum_{n_i, X_{k,i}} \left(A_{n_i, X_{k,i}} \right) a_{n_1, X_{k,1}}^\dagger a_{n_2, X_{k,2}}^\dagger a_{n_3, X_{k,3}} a_{n_4, X_{k,4}} \quad (2.63)$$

avec

$$A_{n_i, X_{k,i}} = \int d^2\mathbf{r}_1 d^2\mathbf{r}_2 \psi_{n_1, X_{k,1}}^*(\mathbf{r}_1) \psi_{n_2, X_{k,2}}^*(\mathbf{r}_2) \frac{q_e^2}{4\pi\epsilon} \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \psi_{n_3, X_{k,3}}(\mathbf{r}_2) \psi_{n_4, X_{k,4}}(\mathbf{r}_1) \quad (2.64)$$

Cette expression est générale, et dans la limite de fort champs magnétique dans laquelle nous nous plaçons, nous pouvons réduire la taille de l'espace de Hilbert à un espace de Hilbert restreint pour lequel le nombre d'électrons dans chaque niveau de Landau est constant. Quand le facteur de remplissage ν n'est pas un entier, les $n = [\nu]$ (le plus grand entier inférieur à ν) premiers niveaux de Landau sont entièrement remplis et considérés comme inertes. Le niveau de Landau suivant est partiellement rempli avec $N_e(\nu - n)/\nu$ électrons. Le terme d'énergie cinétique peut alors être supprimé. En effet, en supposant que les états de différents niveaux ne sont pas mélangés par les interactions, les éléments de matrices de \mathcal{H}_{Kin} sont constants et égaux dans n'importe quelle base de l'espace de Hilbert restreint. De plus, à part les électrons du dernier niveau, tous les autres donnent des éléments de matrice de \mathcal{H}_{Int} constants dans cet espace et peuvent être supprimés de la sommation. Ainsi, après ces simplifications, l'Hamiltonien effectif est réduit au terme d'interaction entre états du dernier niveau et ne dépend pas de la partie entière du facteur de remplissage¹⁴. On peut conserver dans l'Hamiltonien effectif uniquement les fonctions d'onde appartenant au même niveau de Landau n , et supprimer cet indice. A partir d'ici, nous considérerons un unique niveau de Landau et tout se passe comme si $\nu \leq 1$.

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_{Int} = \sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_3} \sum_{X_4} A_{X_1, X_2, X_3, X_4} a_{X_1}^\dagger a_{X_2}^\dagger a_{X_3} a_{X_4} \quad (2.65)$$

On peut également réduire davantage l'Hamiltonien effectif de l'EHQF en prenant en compte la symétrie électrons-trous. Introduisons les opérateurs conjugués de a_X et a_X^\dagger , respectivement b_X^\dagger

¹⁴Ceci est vrai aux constantes précédentes près qui ne font que renormaliser l'énergie totale du système

et b_X , qui sont les opérateurs de création et d’annihilation d’un trou dans le niveau de Landau correspondant. A l’exception de termes constants l’Hamiltonien précédent s’écrit :

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_{Int} &= \sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_3} \sum_{X_4} A_{X_1, X_2, X_3, X_4} b_{X_4}^\dagger b_{X_3}^\dagger b_{X_2} b_{X_1} \\ &= \sum_{X_1} \sum_{X_2} \sum_{X_3} \sum_{X_4} A_{X_1, X_2, X_3, X_4} b_{X_1}^\dagger b_{X_2}^\dagger b_{X_3} b_{X_4}\end{aligned}\tag{2.66}$$

Nous avons utilisé l’égalité entre \mathcal{H}_{Int} et son hermitique conjugué et $A_{X_1, X_2, X_3, X_4} = A_{X_1, X_2, X_3, X_4}^*$. L’Hamiltonien obtenu pour les trous à exactement la même forme que pour les électrons. Ceci constitue la symétrie électrons-trous. Un système électronique avec un facteur de remplissage électronique ν est également un système avec un facteur de remplissage de trous $1 - \nu + 2[\nu]$. Par conséquent, l’Hamiltonien (2.65) décrit aussi le système de trous avec un facteur de remplissage $1 - \nu + 2[\nu]$. Cette symétrie permet d’affirmer qu’un système de ν électrons se comportent comme un système de $1 - \nu + 2[\nu]$ trous. Grâce aux simplifications précédentes, il suffit donc d’étudier le système électronique à des facteurs de remplissage $\nu \leq 1/2$. Cette symétrie est bien visible sur les Fig. (2.23), (2.24) où la résistivité longitudinale est symétrique par rapport à $\nu = 1/2$.

2.6.5 Particularités de l’Hamiltonien

Nous allons donc considérer l’Hamiltonien (2.65), qui se résume uniquement à un terme d’interaction, pour un facteur de remplissage $\nu \leq 1$. En premier lieu, il convient de déterminer le fondamental de ce système. Dans le cas des électrons dans un métal, l’énergie cinétique domine le terme d’interaction et le problème peut être traité en perturbation. Ici, l’énergie cinétique domine bien le terme d’interaction mais constitue un terme constant dans la limite de fort champs ; elle n’est donc pas prise en compte dans la détermination du fondamental. En conséquence, \mathcal{H}_{Int} est le seul terme de l’Hamiltonien et l’approche perturbative n’a pas de sens. La seule manière de traiter un tel problème est donc de trouver *ex nihilo* l’état propre de l’Hamiltonien \mathcal{H}_{Int} qui possède la plus petite énergie.

On peut penser que la détermination de ce fondamental est très simple. Il s’agit simplement de l’état qui minimise le terme d’interaction entre électrons. Cet état est obtenu en séparant spatialement les électrons autant que possible, pour une densité fixée. Toutefois ce fondamental n’est pas correct pour l’Hamiltonien (2.65), comme nous le verrons par la suite. La détermination du fondamental d’un système pour lequel le traitement perturbatif n’est pas possible et où le fondamental intuitif n’est pas correct, ne peut se faire que par diagonalisation exacte (i.e. numérique) de l’Hamiltonien ou par méthode variationnelle.

2.6.6 Cristal de Wigner et CDW

Examinons brièvement l’état naïf que l’on vient d’évoquer et qui correspond à la détermination intuitivement simple du fondamental . Il s’agit simplement de l’état qui minimise le terme d’interaction entre électrons. Cet état est obtenu en séparant spatialement autant que possible les électrons, pour une densité fixée. C’est ce que l’on obtient lorsque l’on place les électrons sur un réseau régulier. Dans le cas présent, le réseau est triangulaire, et l’état obtenu en plaçant les électrons sur ce réseau pour qu’ils minimisent leur énergie de répulsion est appelé un cristal de Wigner. Quand le facteur de remplissage $\nu \rightarrow 0$, il s’agit d’une onde de densité de charge (ou Charge Density Wave (CDW)). Il s’avère que cette onde de densité apparaît également comme une solution auto-cohérente du traitement du problème de départ par l’approximation de Hartree-Fock . Cet état à longtermes été pressenti comme étant le fondamental du système de Hall fractionnaire, en particulier à $\nu = 1/3$ mais cela n’est en réalité pas le cas.

2.6.7 Diagonalisation exacte

Dans la limite de fort champ, l'Hamiltonien \mathcal{H}_{Int} pour un système de taille donné S est représenté par une matrice de dimension finie N_H . La diagonalisation exacte consiste à écrire cette matrice dans une base de l'espace de Hilbert considéré et d'en déterminer les éléments propres numériquement. Il y a $N_\phi = S/2\pi l^2$ états électroniques à un électron ¹⁵. S'il y a N_e électrons dans le système, le nombre total N_H d'états à N corps indépendants est $N_H = C_{N_\phi}^{N_e}$. Comme N_H croît comme $N_e!$, il est impossible de traiter numériquement le problème avec plus d'une dizaine d'électrons. Cette méthode a toutefois l'avantage de déterminer non seulement le fondamental mais aussi les états excités et le spectre. Les résultats numériques obtenus par cette méthode mettent en évidence deux caractéristiques majeures dans le cas typique de $\nu = 1/3$.

Tout d'abord l'état fondamental du système à $\nu = 1/3$ est un état liquide pour lequel il n'apparaît pas de paramètre d'ordre à longue distance dans la densité électronique. Il ne s'agit donc pas du cristal de Wigner ou d'une onde de densité de charge. Les résultats numériques montrent également que l'état fondamental à $\nu = 1/3$ est un état incompressible : il y a un gap d'énergie dans le spectre d'excitation autour de cet état comme on peut le voir à la Fig. (2.25). La diagonalisation exacte du problème permet de conclure que le fondamental du système de

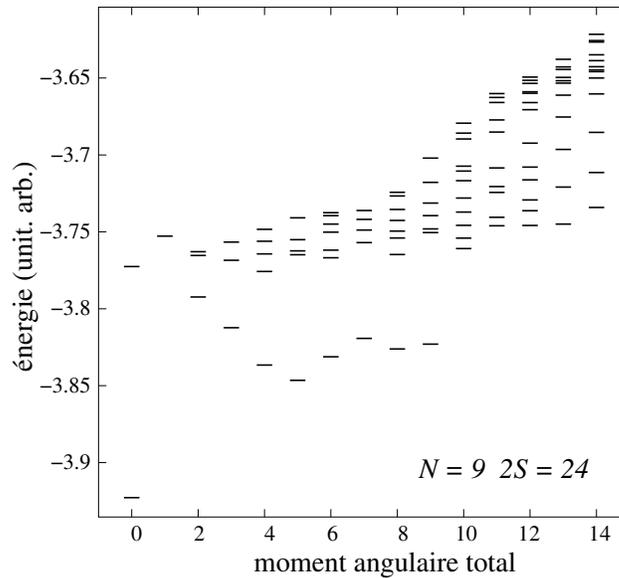


FIG. 2.25 – Spectre d'excitation d'un système de électrons sur une sphère.

Hall fractionnaire à $\nu = 1/3$ est un état liquide incompressible.

2.6.8 Méthode variationnelle

Une autre méthode permet de déterminer analytiquement le fondamental de l'Hamiltonien (2.65). Elle consiste à choisir une fonction d'onde d'essai ψ_α dépendant d'un paramètre α , comme candidat pour le fondamental. On calcule ensuite la valeur moyenne de l'Hamiltonien $\langle \psi_\alpha | \mathcal{H} | \psi_\alpha \rangle / \langle \psi_\alpha | \psi_\alpha \rangle$. L'énergie de cet état est toujours supérieure ou égale à l'énergie du fondamental. Il convient ensuite de faire varier α pour obtenir le minimum de la valeur moyenne ; la fonction d'onde correspondante est alors approximativement la fonction d'onde du fondamental. Il est évident que le choix de la fonction d'essai est essentiel dans cette approche.

¹⁵On est, en effet, dans le premier niveau de Landau.

Caractéristiques de la fonction d'onde de Laughlin

Dans ce cadre, Laughlin a posé une fonction d'essai sur la base d'une série de simplifications et de remarques. Dans la jauge symétrique, une fonction d'onde propre électronique à un corps est donnée par (2.40) :

$$\psi(\mathbf{r}) = f(z)e^{-|z|^2/4} \quad (2.67)$$

où f est une fonction polynômiale quelconque. La fonction d'onde à N_e électrons peut s'exprimer comme combinaison linéaire de déterminants de Slater à partir de la base des fonctions à un corps

$$\psi_\alpha(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{N_e}) = F(z_1, z_2 \dots z_{N_e}) e^{-\sum_i |z_i|^2/4} \quad (2.68)$$

avec $F(z_1, z_2 \dots z_{N_e})$ un polynôme à plusieurs variables $z_1, z_2 \dots z_{N_e}$ correspondant aux positions des électrons 1, 2 ... N_e . En particulier, on peut choisir la base des fonctions à un corps déjà vues (2.40). Le terme général de cette fonction F est de la forme $a \prod_i z_i^{m_i}$ où a est un coefficient. Ce terme correspond à un état où l'électron i possède un moment angulaire fixé à $\hbar m_i$. Le déterminant de Slater a donc un moment angulaire total $M\hbar = \sum_i m_i \hbar$. Comme l'Hamiltonien \mathbf{H}_{Int} conserve le moment angulaire total, on peut diagonaliser simultanément l'Hamiltonien et l'opérateur de moment angulaire total. On peut donc restreindre la fonction d'essai de sorte que chaque terme du polynôme $F(z_1, z_2 \dots z_{N_e})$ ait le même degré total M . F sera donc choisi comme un polynôme homogène. Enfin, étant une fonction d'onde à N_e corps *fermioniques*, ψ_α doit être totalement antisymétrique.

En plus de ces simplifications, il est évident que l'interaction coulombienne a tendance à séparer les électrons les uns des autres au maximum et que la fonction d'onde s'annulera lorsque les positions de deux électrons coïncident. On peut ainsi supposer que le polynôme $F(z_1, z_2 \dots z_{N_e})$ est une fonction de la distance inter-électronique $(z_i - z_j)$ seulement. Avec une fonction de cette forme, nous ne prenons pas en compte les corrélations à 3 corps ou plus.

Fonction d'onde de Laughlin

En regroupant toutes ces restrictions, Laughlin a proposé une fonction d'essai qui ne contient qu'un paramètre entier $\alpha = q$, forcément impair :

$$\psi_q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \dots \mathbf{r}_{N_e}) = \prod_{1 \leq i < j \leq N_e} (z_i - z_j)^q e^{-\sum_i |z_i|^2/4} \quad (2.69)$$

Observons à la Fig. (2.26) la densité électronique de cette fonction d'onde. Elle est uniforme sur

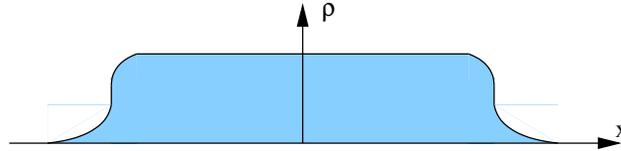


FIG. 2.26 – Densité électronique du fondamental du système de Hall à $\nu = 1/3$.

une galette de rayon de $\sqrt{2(M+1)}l$. Dans la partie polynômiale de cette fonction d'onde, chaque terme z_i a un degré maximal de $M = (N_e - 1)q$. M est le moment angulaire maximal que l'électron de coordonnée z_i peut posséder, dans ce cas son orbite est centrée sur l'origine avec un rayon de $\sqrt{2(M+1)}l$. Dans l'état de Laughlin, tous les électrons sont à l'intérieur de ce cercle. L'aire de cette orbite est $S = 2(M+1)\pi l^2$. La densité électronique est uniforme à l'intérieur de cette orbite. Le facteur de remplissage est $\nu = 2\pi l^2 N_e / S = N_e / (M+1) = N_e / ((N_e - 1)q + 1) \simeq 1/q$ dans la

limite $N_e \rightarrow \infty$. Ainsi, le paramètre libre de la fonction d'essai (2.69) est en fait complètement déterminé par le remplissage, à la fraction magique $\nu = 1/q$, avec q impair

Cette fonction d'onde de Laughlin est une très bonne approximation du vrai fondamental du système, mais n'est pas exactement la fonction d'onde de ce fondamental. On peut donc comprendre les propriétés de l'état d'effet Hall quantique fractionnaire à partir de cette fonction d'onde ; en n'oubliant pas qu'elle décrit un état légèrement différent du fondamental exact. Cette fonction est très utile pour comprendre les propriétés essentielles du volume du fluide de Hall. Nous ne détaillerons pas ici les propriétés complexes et fascinantes de ce fluide¹⁶ mais nous évoquerons simplement l'incompressibilité du système au remplissage magique pour justifier la pertinence de l'étude des bords.

2.6.9 Excitations du système

Le fondamental du système i.e. l'état de Hall quantique fractionnaire est un état liquide incompressible. L'aire du système peut être modifiée de la quantité $2\pi l^2$ en introduisant un quantum de flux mais cette opération nécessite une quantité d'énergie finie. Il n'est donc pas possible de produire un changement infinitésimal du système en modifiant infinitésimalement la pression. En effet, il n'y a pas de phonons acoustiques capables de supporter de telles excitations dans un fluide de Hal et les modes d'excitations collectives du système ont un gap d'énergie. Ainsi les excitations collectives du système sont dites gappées. Les seules excitations qui ne changent pas la densité du système sont donc obtenues par création de paires quasi-électrons quasi-trous. Quand le moment k de ces excitations devient très faible, i.e. dans la limite basse énergie, et grande longueur d'onde, c'est une onde de densité qui décrit mieux ces excitations, plutôt qu'un état lié. Son énergie d'excitation est la somme des énergies d'excitation des deux quasi-particules et de l'énergie d'interaction entre elles. Dans le volume du fluide incompressible, il n'existe donc que des excitations gappées. Il en est pas de même pour les bords de ce système qui peuvent supporter des excitations d'énergie infiniment basse. Ce sont ces considérations qui conduisent à s'intéresser aux états de bord du système.

2.7 Systèmes de fermions unidimensionnels et états de bord

Un système d'électrons en interaction en dimension $D = 2$ ou $D = 3$ se traite par la théorie des liquides de Fermi. L'image du liquide de Fermi est basée sur l'existence d'excitations de type quasi-électrons quasi-trous dont le temps de vie devient infini quand l'énergie approche l'énergie de Fermi. En effet, le temps de vie de ces excitations varie comme $|k - k_f|^{-2}$ quand k approche du moment de Fermi k_f (ou comme $|E - E_f|^{-2}$ quand $E \rightarrow E_f$). Cette caractéristique est cruciale dans le succès de cette théorie. Les quasi-électrons (resp. quasi-trous) peuvent être associées à des électrons (trous) libres et cette association est univoque. En partant du système sans interactions, on branche de manière adiabatique les interactions et les électrons (trous) deviennent des quasi-électrons (quasi-trous)¹⁷. En prenant en compte l'existence de ces excitations de basse énergie, Landau a pu ainsi rendre compte d'une variété de phénomènes dans les métaux en présence d'interactions non-négligeables. En revanche, cette théorie n'est pas valable pour des électrons unidimensionnels. Ceci est une conséquence directe de la structure particulière de l'espace des phases en dimension $D = 1$. La surface de Fermi est constituée de seulement deux points (cf Fig. 2.27) à $\pm k_f$ au lieu d'une ligne ($D = 2$) ou d'une surface ($D = 3$). Cette structure particulière conduit, entre autres, à la disparition de la correspondance univoque entre l'électron libre et l'excitation obtenue en branchant progressivement les interactions. Il apparaît

¹⁶Une étude complète des propriétés des fluides de Laughlin est réalisée dans [11]

¹⁷L'image des liquides de Fermi est démontrée rigoureusement comme théorie de perturbation à N corps dans [12]

également des excitations électrons-trous autour des points de Fermi $\pm k_f$ avec un moment q très faible ($q \ll k_f$) ou entre les deux points de Fermi à *travers* la mer de Fermi. Cette excitation de moment $q \approx 2k_f$ fait apparaître une zone interdite pour les excitations électrons-trous ($0 < q < 2k_f$). Enfin, il se produit une séparation de spin et de charge, i.e. l'apparition d'excitations élémentaires bosoniques de spin et de charge à des vitesses différentes. Le modèle des liquides de Fermi n'est alors pas adéquat pour les systèmes électroniques unidimensionnels en interaction, même si certaines propriétés des excitations neutres de ces systèmes peuvent être partiellement expliquées par la théorie de Landau. Historiquement, deux approches centrées sur le modèle de Tomonaga-Luttinger sont venues éclairer la physique des électrons unidimensionnels en interaction. La première repose sur la technique de bosonisation, l'autre approche complémentaire de ce problème est basé sur la classification dite de la g -ologie et l'usage du groupe de renormalisation.

L'état de bord fractionnaire

Les réalisations expérimentales de systèmes de fermions à $D = 1$ ne sont pas aisées et la validation expérimentale de la théorie de Tomonaga-Luttinger était en suspens, jusqu'à la découverte des états de Hall fractionnaires. Au chapitre IV, nous passons en revue les résultats expérimentaux qui valident la théorie des liquides de Luttinger *via* les états de bord fractionnaire. Considérons un système de Hall incompressible, comme un fluide de Hall à $\nu = 1/3$, s'étendant jusqu'au bord de l'échantillon. Il ne peut exister d'excitations de basse énergie qu'au bord du système car les excitations de volume sont gappées comme on l'a vu à la section 2.6.9. L'étude du bord revient à l'étude des excitations basse énergie du système. Les bords du fluide de Hall au remplissage *magique* $\nu = 1/m$ (m entier impair), est un système de fermions en interaction en dimension $D = 1$. L'effet du champ magnétique conduit les excitations à se propager dans un sens unique le long du bord. La chiralité et la localisation des fonctions d'onde des états de bord supprime toute possibilité de rétro-diffusion et les excitations sont cohérentes sur des longueurs macroscopiques. Les bords d'un fluide de Hall constituent ainsi un exemple unique de système de fermions unidimensionnels quasi-idéaux en interaction forte. Ils se comportent donc différemment de systèmes électroniques unidimensionnels où les excitations se propagent dans les deux sens possibles. Cette description particulière d'un système d'électrons unidimensionnels en interaction au bord de l'échantillon se fait au moyen de la théorie du liquide de Tomonaga-Luttinger *chiral* notée χ LL.

Liquide de Tomonaga-Luttinger

Le modèle de Tomonaga-Luttinger est très proche du modèle de Tomonaga-Luttinger chiral que nous verrons par la suite, et il a joué un rôle majeur dans l'étude des systèmes unidimensionnels. Dans toute la suite du traitement, on se placera dans le système d'unités $\hbar = c = 1$. La résolution de ce modèle repose d'une part, sur le fait que la relation de dispersion des fermions libres à $D = 1$, originellement quadratique (modèle de fermions libres sur réseau en liaison fortes), est *linéarisée* autour des deux points de Fermi $\pm k_f$ (cf Fig. 2.27) et d'autre part sur l'absence de termes Umklapp et de rétro-diffusion (seule la diffusion en avant est prise en compte). Ces termes seront explicités dans le traitement de la g -ologie. Enfin, cette théorie s'exprime de manière particulièrement élégante en coordonnées complexes et en temps Euclidien (i.e. imaginaire). En termes de coordonnées spatiales x et temporelle $\tau = it$, ces coordonnées complexes sont définies comme

$$\begin{aligned} z &= -i(x - vt) = v\tau - ix \\ \bar{z} &= i(x + vt) = v\tau + ix \end{aligned} \tag{2.70}$$

avec v la vitesse de Fermi, paramètre déterminé expérimentalement. Les dérivées vérifient :

$$\begin{aligned}\partial_z &= -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{v}\partial_t - \partial_x\right) & \partial_x &= -i(\partial_z - \partial_{\bar{z}}) \\ \partial_{\bar{z}} &= -\frac{i}{2}\left(\frac{1}{v}\partial_t + \partial_x\right) & \partial_t &= iv(\partial_z + \partial_{\bar{z}})\end{aligned}\quad (2.71)$$

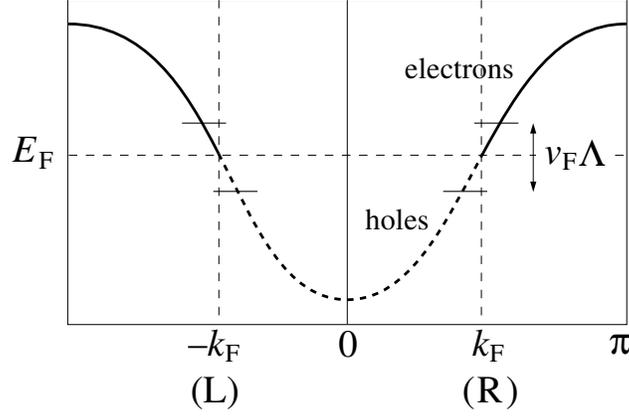


FIG. 2.27 – Relation de dispersion typique à $D = 1$ pour des fermions libres sur réseau avec liaisons fortes entre plus proches voisins. La surface de Fermi est restreinte aux deux points $\pm k_f$, et la relation de dispersion est linéaire au voisinage de ces points

2.7.1 Théorie des champs libres

On considère le système composé d'électrons à une dimension sur réseau sans interaction et on définit la théorie du champ correspondante (à basse énergie). Cela est possible car les différentes échelles de moment intervenant dans cette théorie libre sont découplées. L'Hamiltonien microscopique prend la forme suivante

$$\mathcal{H}_{Kin} = \sum_k \varepsilon(k) c^\dagger(k) c(k) \quad (2.72)$$

avec $c(k)$ l'opérateur d'annihilation d'électron de moment k (le spin n'est pas pris en compte pour l'instant). La théorie à basse énergie s'exprime simplement en fonction de opérateurs de création et d'annihilation au voisinage des points de Fermi (cf Fig. 2.27) :

$$\begin{aligned}\alpha(k) &= c(k_f + k) \\ \alpha(-k) &= c(-k_f - k) \\ \beta(k) &= c^\dagger(k_f - k) \\ \beta(-k) &= c^\dagger(-k_f + k)\end{aligned}\quad (2.73)$$

où k est positif. Les opérateurs $\alpha(k)$ et $\beta(k)$ annihilent électrons et trous autour du point de Fermi droit ($k > 0$) et gauche ($k < 0$) L'Hamiltonien libre prend alors la forme suivante

$$\mathcal{H}_{Kin} = \int \frac{dk}{2\pi} v |k| \{ \alpha^\dagger(k) \alpha(k) + \beta^\dagger(k) \beta(k) \} \quad (2.74)$$

L'énergie et les moments sont dorénavant définis à partir des points de Fermi du système. Le fait de considérer la limite continue revient en fait à intégrer la théorie microscopique sur les

grands moments pour obtenir une théorie effective de basse énergie autour des vecteur d'onde ($\pm k_f$). En espace réel, cette procédure revient à introduire les champs ψ_R et ψ_L qui varient peu et tels que l'opérateur d'annihilation au site n ($x = na$)¹⁸ est¹⁹

$$\frac{c_x}{\sqrt{a}} = \psi_R(x) e^{ik_f x} + \psi_L(x) e^{-ik_f x} \quad (2.75)$$

Le facteur \sqrt{a} permet aux champs de vérifier les relations d'anticommutation correctes et contient leur dimension :

$$\begin{aligned} \{\psi_R(x), \psi_R^\dagger(x')\} &= \delta(x - x') \\ \{\psi_L(x), \psi_L^\dagger(x')\} &= \delta(x - x') \\ \{\psi_R(x), \psi_L^\dagger(x')\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.76)$$

Séparation des champs droit et gauche

Les champs continus peuvent être développés en modes de la manière suivante

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} [e^{ikx} \alpha(k) + e^{-ikx} \beta^\dagger(k)] \\ \psi_L(x) &= \int_{k<0} \frac{dk}{2\pi} [e^{ikx} \alpha(k) + e^{-ikx} \beta^\dagger(k)] \end{aligned} \quad (2.77)$$

L'évolution temporelle de $\alpha(k)$ et de $\beta(k)$ est obtenue en les multipliant par la phase $e^{-iv|k|t}$. Si on réexprime ces variables spatio-temporelles en fonction de coordonnées complexes (2.70), le développement en mode pour les champs évoluant au cours du temps est alors

$$\begin{aligned} \psi_R(z) &= \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} [e^{-kz} \alpha(k) + e^{kz} \beta^\dagger(k)] \\ \psi_L(\bar{z}) &= \int_{k<0} \frac{dk}{2\pi} [e^{k\bar{z}} \alpha(k) + e^{-k\bar{z}} \beta^\dagger(k)] \end{aligned} \quad (2.78)$$

Le champ droit ψ_R dépend uniquement de la coordonnée de propagation vers la droite z , alors que le champ gauche ψ_L ne dépend que de la coordonnée de propagation vers la gauche \bar{z} . Le développement en mode (2.77) est trompeur à un égard : il laisse penser que les vecteurs d'onde positifs sont connexes aux vecteurs d'onde négatifs dans l'espace des moments, ce qui n'est pas le cas (ils sont séparés d'à peu près $2k_f$). Ainsi, les modes se propageant vers la droite et la gauche sont clairement bien séparés. Les électrons gauches et droits subissent des fluctuations de densité

$$\rho_R(x) = \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x) \quad \rho_L(x) = \psi_L^\dagger(x) \psi_L(x) \quad (2.79)$$

La densité électronique totale (par rapport au fondamental du système) est donnée par $n_{\text{tot.}} = \rho_R + \rho_L$.

Analogie avec l'équation de Dirac

Il devient assez simple d'exprimer l'Hamiltonien continu (2.74) en fonction des champs ψ_R et ψ_L :

$$\mathcal{H}_{Kin} = -iv \int dx [\psi_R^\dagger \partial_x \psi_R - \psi_L^\dagger \partial_x \psi_L] \quad (2.80)$$

¹⁸ a est le cut-off ultra-violet naturel du système i.e. la maille élémentaire du réseau microscopique.

¹⁹Nous utilisons les indices L et R pour désigner les champs se propageant à gauche (dépendant uniquement de $x + vt$) et à droite (dépendant de $x - vt$)

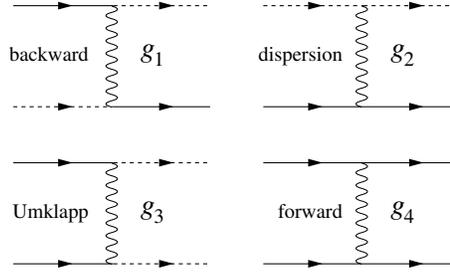


FIG. 2.28 – Les quatre processus de diffusion d'électrons droits (traits continus) et gauches (traits pointillés) à $D = 1$: (i) g_4 est l'amplitude de la diffusion vers l'avant ; (ii) g_2 de la dispersion (diffusion d'électrons gauches vers des électrons droits) ; (iii) g_1 pour la rétro-diffusion (chaque électron change de branche mais conserve son spin) ; (iv) g_3 concerne la diffusion Umklapp (deux électrons gauches deviennent droits et vice-versa ; n'est possible qu'à demi-remplissage car la conservation du moment du cristal doit être assurée). Les indices de spin ont été supprimés, mais les processus g_1 and g_3 ne concernent que les électrons de spin opposés.

Ceci est exactement l'Hamiltonien de Dirac. En effet, en dimension (1+1), les matrices de Dirac peuvent être restreintes à deux dimensions, par exemple

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.81)$$

et le spineur de Dirac à deux composantes est

$$\Psi = \begin{pmatrix} \psi_R \\ \psi_L \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

La densité lagrangienne de Dirac – avec terme de masse – est

$$\mathcal{L}_D = i\bar{\Psi}(\gamma^0\partial_t - v\gamma^1\partial_x)\Psi - m\bar{\Psi}\Psi \quad (2.83)$$

La densité hamiltonienne canonique obtenue à partir de ce Lagrangien est donc

$$H_D = -iv[\psi_R^\dagger\partial_x\psi_R - \psi_L^\dagger\partial_x\psi_L] + m(\psi_R^\dagger\psi_L - \psi_L^\dagger\psi_R) \quad (2.84)$$

ce qui correspond à (2.80) dans le cas de masse nulle. Rajouter un terme de masse à l'Hamiltonien conduit à l'ouverture d'un gap de $2m$ à l'énergie de Fermi. En revanche, rajouter un terme du type

$$\mathcal{H}' = \psi_R^\dagger\psi_R + \psi_L^\dagger\psi_L = \rho_R + \rho_L \quad (2.85)$$

conduit simplement à un décalage du potentiel chimique i.e. à une modification de la valeur de k_f . Ceci nécessite bien sûr une redéfinition des modes droits et gauches, mais l'Hamiltonien final sera toujours de la forme (2.80), avec une vitesse modifiée v' .

2.7.2 Interactions : la g-ologie

Les interactions à deux corps entre électrons à $D = 1$ (pour une seule bande) prennent la forme générale

$$\mathcal{H}_{Int} = \frac{1}{2} \sum_{\sigma,\sigma'} \sum_{k_1,k_2,k_3} V_{\sigma,\sigma'}(k_1,k_2,k_3) c_\sigma^\dagger(k_1) c_{\sigma'}^\dagger(k_2) c_{\sigma'}(k_3) c_\sigma(k_4) \quad (2.86)$$

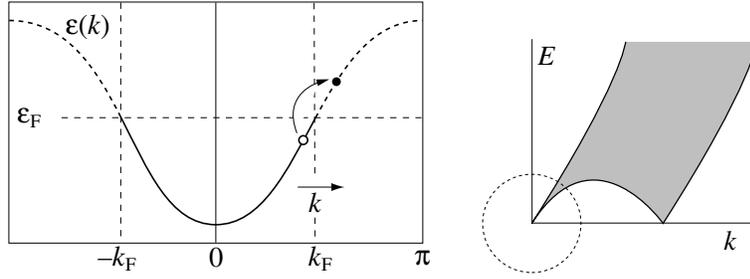


FIG. 2.29 – Excitations particule-trou à $D = 1$.

où nous avons rétabli les indices de spin $(\sigma, \sigma') = (\uparrow, \downarrow)$. A basse énergie, les processus de diffusion sont naturellement restreints au voisinage du niveau de Fermi et sont de quatre types distincts. Toutes les interactions microscopiques possibles évoluent sous le flot du groupe de renormalisation pour donner des interactions irrelevantes ou l'un des quatre termes de la gologie décrits à la Fig. (2.28). Exprimés en termes de champs continus, les densités hamiltoniennes correspondantes sont :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}_1 &= v g_1 \sum_{\sigma} \psi_{R\sigma}^{\dagger} \psi_{L\sigma} \psi_{L-\sigma}^{\dagger} \psi_{R-\sigma} \\
\mathcal{H}_2^c &= v g_{2,c} (\rho_{R\uparrow} + \rho_{R\downarrow}) (\rho_{L\uparrow} + \rho_{L\downarrow}) \\
\mathcal{H}_2^s &= v g_{2,s} (\rho_{R\uparrow} - \rho_{R\downarrow}) (\rho_{L\uparrow} - \rho_{L\downarrow}) \\
\mathcal{H}_3 &= \frac{1}{2} v g_3 \sum_{\sigma} \psi_{R\sigma}^{\dagger} \psi_{R-\sigma}^{\dagger} \psi_{L\sigma} \psi_{L-\sigma} + \text{H.c.} \\
\mathcal{H}_4^c &= \frac{1}{2} v g_{4,c} [(\rho_{R\uparrow} + \rho_{R\downarrow})^2 + (\rho_{L\uparrow} + \rho_{L\downarrow})^2] \\
\mathcal{H}_4^s &= \frac{1}{2} v g_{4,s} [(\rho_{R\uparrow} - \rho_{R\downarrow})^2 + (\rho_{L\uparrow} - \rho_{L\downarrow})^2]
\end{aligned} \tag{2.87}$$

Remarquons que $g_{2,\mu}$ et $g_{4,\mu}$ sont des interactions densité-densité ce qui apparaîtra plus clairement en espace réel. Lorsque ces deux couplages sont les seuls non-nuls (i.e., $g_1 = g_3 = 0$), le modèle obtenu est le modèle de Tomonaga-Luttinger qui sera résolu exactement par bosonisation. La forme bosonisée de ces interactions sera déterminée à la section 2.9.4.

2.8 Bosonisation : une première approche

2.8.1 Particularité de la dimension $D = 1$

L'idée fondamentale de la bosonisation est la suivante. Les excitations électrons-trous sont fondamentalement bosoniques, et l'essentiel du spectre (si ce n'est la totalité) du gaz d'électrons peut être décrit par ces excitations. Cette question a d'abord été évoquée par F. Bloch en 1934, mais c'est Tomonaga qui réalisa en 1950 que cela ne pouvait être valable qu'en dimension $D = 1$. Ceci tient à une raison simple : considérons la Fig. (2.29). Sur la gauche, nous avons représenté la création d'une paire électrons-trous de moment k . Sur la droite se trouve le spectre des excitations électrons-trous de la mer de Fermi : l'énergie de la paire est représentée en fonction du moment de cette paire (les deux étant mesurés par rapport au point de Fermi). La relation de dispersion à une particule est linéaire au voisinage du niveau de Fermi, et les paires électrons-trous créées à ce voisinage ont une relation de dispersion très étroite correspondant à une quasi-particule de moment presque nul : ces paires peuvent se propager de manière cohérente. Autrement dit, la particule et le trou ont pratiquement la même vitesse de groupe à basse énergie et se propagent ensemble. Chaque excitation électrons-trous conduit à la formation d'une paire se propageant de manière cohérente : il s'agit d'une nouvelle particule.

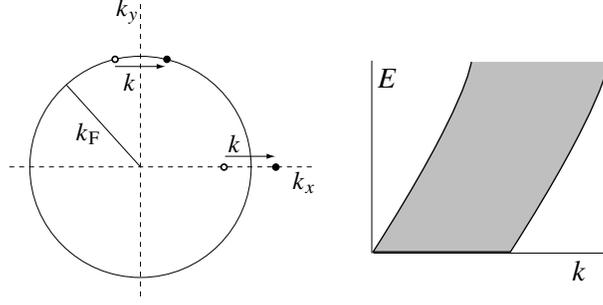


FIG. 2.30 – Excitations particule-trou à $D = 2$.

A la Fig.(2.30), la situation correspondante en dimension $D = 2$ est représentée, avec une surface de Fermi circulaire. Il apparaît alors clairement qu’une paire électron-trou de moment k possède un spectre d’énergie continu à partir de zéro. Ainsi, le spectre électron-trou est continu et les interactions ne peuvent plus former une paire se propageant de manière cohérente aussi facilement. Dans tous les cas, définir une théorie en termes d’excitations bosoniques est beaucoup moins évident en dimension supérieure à 1.

A la limite de basse énergie, les excitations électrons-trous en dimension $D = 1$ sont exactement cohérentes et donc, les fluctuations des densités $\rho_{R\sigma}$ et $\rho_{L\sigma}$ créent des particules qui se propagent. On peut alors se demander si tout opérateur peut être exprimé en fonction de $\rho_{R\sigma}$ et $\rho_{L\sigma}$, en particulier les opérateurs de création et d’annihilation d’une particule unique. Cela est effectivement possible comme nous le verrons par la suite. Le champs fermionique droit peut effectivement s’exprimer comme

$$\psi_{R\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp[2\pi i \int^x dx' \rho_{R\sigma}(x')] \quad (2.88)$$

Dans le reste de ce chapitre nous prouverons que l’équation (2.126) est équivalente à ce qui précède.

2.8.2 Le boson libre en dimension $D = 1$

Prenons le temps de définir exactement le boson libre en dimension $D = 1$. Ceci peut être fait à partir du Lagrangien. Pour un champ de boson sans masse φ le Lagrangien est

$$L_0 = \frac{1}{2} \int dx \left[\frac{1}{v} (\partial_t \varphi)^2 - v (\partial_x \varphi)^2 \right] \quad (2.89)$$

où v est la vitesse des bosons. L’Hamiltonien correspondant est alors

$$\mathcal{H}_{Kin} = \frac{1}{2} v [\Pi^2 + (\partial_x \varphi)^2] \quad \Pi = \frac{1}{v} \partial_t \varphi \quad (2.90)$$

avec Π le champ conjugué de φ ; les deux champs obéissent aux relations de commutation canoniques

$$\begin{aligned} [\varphi(x), \Pi(x')] &= i\delta(x - x') & [\varphi(x), \varphi(x')] &= 0 \\ [\Pi(x), \Pi(x')] &= 0 & [\Pi(x), \varphi(x')] &= 0 \end{aligned} \quad (2.91)$$

La décomposition en modes pour les champs φ et Π sur la ligne infinie est

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{v}{2\omega(k)}} [b(k) e^{ikx} + b^\dagger(k) e^{-ikx}] \\ \Pi(x) &= \int \frac{dk}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega(k)}{2v}} [-ib(k) e^{ikx} + ib^\dagger(k) e^{-ikx}] \end{aligned} \quad (2.92)$$

avec $\omega(k) \equiv v|k|$. Les opérateurs de création et d'annihilation vérifient les règles de commutation

$$[b(k), b^\dagger(k')] = 2\pi\delta(k - k') \quad (2.93)$$

et l'Hamiltonien peut être exprimé comme

$$\mathcal{H}_{Kin} = \int \frac{dk}{2\pi} \omega(k) b^\dagger(k) b(k) \quad (2.94)$$

Le fondamental (le vide) $|0\rangle$ est détruit par tous les $b(k)$, et possède une énergie nulle par convention. Comme les fermions, les bosons en dimension $D = 1$ se déplacent soit vers la gauche soit vers la droite. Ainsi l'évolution temporelle des opérateurs d'annihilation s'obtient en les multipliant par la phase $e^{-iv|k|t}$, lorsque le boson est sans masse. Il est alors possible de procéder à une séparation en partie droite et gauche (du point de vue de la propagation). On écrit

$$\varphi(x, t) = \phi_R(x - vt) + \phi_L(x + vt) \quad (2.95)$$

avec

$$\begin{aligned} \phi_R(z) &= \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} [b(k) e^{-kz} + b^\dagger(k) e^{kz}] \\ \phi_L(\bar{z}) &= \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} \frac{1}{\sqrt{2k}} [\bar{b}(k) e^{-k\bar{z}} + \bar{b}^\dagger(k) e^{k\bar{z}}] \end{aligned} \quad (2.96)$$

Les variables z and \bar{z} sont définies par l'éq. (2.70). Remarquons que les vecteurs d'onde ne prennent que des valeurs positives car nous avons posé $\bar{b}(k) \equiv b(-k)$.

Le champ dual

Il est commun d'introduire le boson *dual* $\vartheta(x, t)$, par la relation $\partial_x \vartheta = -\Pi = -\frac{1}{v} \partial_t \varphi$. En termes de bosons droits et gauches ϕ_R and ϕ_L , cela devient (cf éq. (2.71))

$$\begin{aligned} \partial_x \vartheta &= -\frac{1}{v} \partial_t \varphi \\ &= -i(\partial_z + \partial_{\bar{z}})(\phi_R + \phi_L) \\ &= -i(\partial_z - \partial_{\bar{z}})(\phi_R - \phi_L) \\ &= \partial_x(\phi_R - \phi_L) \end{aligned} \quad (2.97)$$

et donc $\theta = \phi_R - \phi_L$, modulo une constante additive que l'on impose nulle. On peut alors écrire

$$\phi_R = \frac{1}{2}(\varphi + \vartheta) \quad \phi_L = \frac{1}{2}(\varphi - \vartheta) \quad (2.98)$$

si l'on désire une définition de ϕ_R et ϕ_L qui soit indépendante de la décomposition en mode. Comme ϑ a une expression non-locale en termes de Π (i.e., il s'exprime à partir d'une intégrale spatiale), l'expression précédente manifeste bien le fait que les parties droites et gauches ϕ_R et ϕ_L ne sont pas de véritables champs locaux par rapport à φ . La définition de ϑ à partir de Π implique les relations de commutations à temps coïncidant

$$[\varphi(x), \vartheta(x')] = -i\theta(x - x') \quad (2.99)$$

où $\theta(x)$ est la fonction de Heaviside (à ne pas confondre avec ϑ) ce qui souligne le caractère non local de la relation entre φ et ϑ (le commutateur est non-nul même à grande distance).

2.8.3 Représentation du champ de fermions par des bosons

Procédons maintenant à une dérivation heuristique et incomplète des formules de bosonisation. L'idée de base est la suivante (nous négligeons l'indice de spin pour le moment) : la densité électronique $n_{\text{tot.}}$ étant bilinéaire en les champs électroniques, elle possède une statistique de Bose. On peut supposer qu'elle est proportionnelle à la dérivée d'un champ bosonique.

$$\varphi(x) = \lambda \int_x^\infty dy n_{\text{tot.}}(y) \quad n_{\text{tot.}}(x) = -\frac{1}{\lambda} \partial_x \varphi(x) \quad (2.100)$$

où λ est une constante à déterminer. Créer un fermion à la position x' augmente φ de λ quand $x < x'$. Ceci a exactement le même effet que l'opérateur

$$\exp[-i\lambda \int_{-\infty}^{x'} dy \Pi(y)] \quad (2.101)$$

qui agit comme un opérateur de décalage pour $\varphi(x)$ quand $x < x'$, en raison des relations de commutation

$$[\varphi(x), \int_{-\infty}^{x'} dy \Pi(y)] = \begin{cases} i & (x < x') \\ 0 & (x > x') \end{cases} \quad (2.102)$$

Ainsi, l'opérateur de création $\psi_R^\dagger(x')$ ou $\psi_L^\dagger(x')$ peut être représenté par l'opérateur précédent multiplié par un opérateur qui commute avec φ ($e^{i\alpha\varphi}$, par exemple). Ce terme supplémentaire doit être choisi de sorte que ψ_R^\dagger ne dépende que de $x - vt$, et ψ_L^\dagger que de $x + vt$. Les décompositions gauche-droite (2.95) et (2.98) sont utiles ici. Comme

$$\Pi = \frac{1}{v} \partial_t \varphi = -\partial_x \vartheta \quad (2.103)$$

nous avons

$$-i\lambda \int_{-\infty}^{x'} dy \Pi(y) = i\lambda \vartheta(x') \quad (2.104)$$

à partir desquels on obtient des champs se déplaçant exclusivement à droite ou à gauche en ajoutant ou soustrayant $-\frac{1}{2}i\alpha\varphi(x')$. Ainsi, un Ansatz raisonnable pour obtenir une représentation bosonique de l'opérateur de création d'électron est

$$\psi_R^\dagger(x) = A e^{2i\lambda\phi_R(x)} \quad \psi_L^\dagger(x) = A e^{-2i\lambda\phi_L(x)} \quad (2.105)$$

où les constantes A et λ restent à déterminer, par exemple en imposant les relations d'anticommutation (2.76). C'est ce que nous ferons plus loin.

Les états à un électron $\psi_R^\dagger|0\rangle$, étant engendrés par des exponentielles d'opérateur de création de bosons ; ce sont des *états cohérents* du champ de boson ϕ_R . D'autre part, les excitations bosoniques élémentaires sont des fluctuations collectives de densité (ou de spin) i.e des excitations électrons-trous.

2.9 Détails de la procédure de bosonisation

2.9.1 Opérateurs de vertex

Avant de déterminer les constantes A et λ de (2.105), examinons précisément l'opérateur exponentiel $e^{i\alpha\phi_R}$ (un tel opérateur est appelé opérateur de *vertex*). Comme ϕ_R est soumis à des fluctuations, les puissances ou des fonctions encore plus compliquées de ϕ_R doivent être définies avec précision afin de ne pas diverger en valeur moyenne. La prescription usuellement utilisée est appelée l'*ordre normal* et consiste à développer ϕ_R en modes et à placer tous les opérateurs

d'annihilation à droite des opérateurs de création. Ainsi, l'opérateur exponentiel possède la définition précise suivante :

$$: e^{i\alpha\phi_R(x-vt)} := e^{i\alpha Q} \exp\left[i\alpha \sum_{n>0} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} b_n^\dagger e^{kz}\right] \exp\left[i\alpha \sum_{n>0} \frac{1}{\sqrt{4\pi n}} b_n e^{-kz}\right] e^{-i\alpha P(x-vt)/2L} \quad (2.106)$$

P est considéré comme un opérateur d'annihilation car le fondamental bosonique $|0\rangle$ possède le moment nul. La notation $: A :$ signifie que l'opérateur A est ordonné normalement.

En raison de l'ordre normal, les opérateurs de vertex ne se multiplient pas comme des exponentielles ordinaires. A la place, nous utiliserons plutôt la relation

$$: e^{i\alpha\phi_R(z)} :: e^{i\beta\phi_R(z')} :=: e^{i\alpha\phi_R(z)+i\beta\phi_R(z')} : e^{-\alpha\beta\langle\phi_R(z)\phi_R(z')\rangle} \quad (2.107)$$

où $\langle\phi_R(z)\phi_R(z')\rangle$ est simplement la valeur moyenne par rapport au fondamental si le terme de gauche est un produit ordinaire, ou une fonction de Green s'il s'agit d'un produit ordonné normalement. Ceci est une formule très importante, que l'on démontre par la formule de Campbell-Baker-Hausdorff (CBH) :

$$e^A e^B = e^{A+B} e^{\frac{1}{2}[A,B]} \quad ([A,B] = \text{const.}) \quad (2.108)$$

Considérons par exemple, un simple oscillateur harmonique a et deux opérateurs

$$A = \alpha a + \alpha' a^\dagger \quad B = \beta a + \beta' a^\dagger \quad (2.109)$$

la formule CBH permet la combinaison des exponentielles normalement ordonnées :

$$\begin{aligned} : e^A :: e^B : &= e^{\alpha' a^\dagger} e^{\alpha a} e^{\beta' a^\dagger} e^{\beta a} \\ &= e^{\alpha' a^\dagger} e^{\beta' a^\dagger} e^{\alpha a} e^{\beta a} e^{\alpha\beta'} \\ &= : e^{A+B} : e^{\langle 0|AB|0\rangle} \end{aligned} \quad (2.110)$$

Les deux dernières égalités sont aussi valables si (a, a^\dagger) est remplacé dans le même ordre, par la paire (p, q) d'opérateurs canoniques conjugués ($[q, p] = i$). Cela s'applique aussi à une collection d'opérateurs indépendants, tels que les champs bosoniques ϕ_R ou ϕ_L . Enfin, ces formules sont encore valables pour un produit ordonné dans le temps comme pour le produit normal, à condition de remplacer $\langle 0|AB|0\rangle$ par un produit ordonné dans le temps. Ainsi, l'identité (2.107) est prouvée et dorénavant, nous ne marquerons plus le symbole d'ordonnement normal pour les opérateurs de vertex.

Il nous reste à calculer la fonction de Green $\langle\phi_R(z)\phi_R(z')\rangle$. Ceci peut être réalisé de différentes manières. Par exemple, on peut utiliser le développement en modes [14] et prendre la limite $L \rightarrow \infty$:

$$\begin{aligned} \langle\phi_R(z)\phi_R(0)\rangle &= -\frac{i}{2L}(vt-x) + \frac{1}{4\pi} \sum_{n>0} \frac{1}{n} e^{-2\pi n z/L} \\ &= -\frac{z}{2L} - \frac{1}{4\pi} \ln \frac{2\pi z}{L} \\ &\rightarrow -\frac{1}{4\pi} \ln z + \text{const.} \quad (L \rightarrow \infty) \end{aligned} \quad (2.111)$$

Nous allons adopter la normalisation

$$\langle\phi_R(z)\phi_R(z')\rangle = -\frac{1}{4\pi} \ln(z-z') \quad (2.112)$$

et supprimer le terme constant, qui ne fait que définir une échelle de longueur. On obtient de la même manière

$$\langle \phi_L(\bar{z})\phi_L(\bar{z}') \rangle = -\frac{1}{4\pi} \ln(\bar{z} - \bar{z}') \quad (2.113)$$

Une autre manière de calculer la fonction de Green du boson est de noter que la fonction de Green non-chirale $\mathcal{G}(x, \tau) = \langle \varphi(x, \tau)\varphi(0, 0) \rangle$ doit vérifier l'équation de Poisson à $D = 2$

$$\nabla^2 \mathcal{G} = \delta(x)\delta(v\tau) \quad (2.114)$$

en espace Euclidien. La solution de cette équation en coordonnées polaires (modulo une constante à déterminer par le théorème de Gauss) :

$$\mathcal{G}(x, v\tau) = -\frac{1}{4\pi} \ln(x^2 + v^2\tau^2) = -\frac{1}{4\pi} \ln(z\bar{z}) \quad (2.115)$$

Le résultat est alors équivalent à celui que l'on peut inférer à partir de la décomposition en modes, sachant que

$$\langle \varphi(x, \tau)\varphi(0, 0) \rangle = \langle \phi_R(z)\phi_R(0) \rangle + \langle \phi_L(\bar{z})\phi_L(0) \rangle \quad (2.116)$$

La formule (2.107) peut être réécrite

$$e^{i\alpha\phi_R(z)} e^{i\beta\phi_R(z')} = e^{i\alpha\phi_R(z)+i\beta\phi_R(z')} (z - z')^{\alpha\beta/4\pi} \quad (2.117)$$

Nous sommes maintenant en mesure de démontrer l'équivalence bosons-fermions au niveau des relations de (anti)commutation. En réalité, il est plus simple de déterminer les constantes A et λ de (2.105) en comparant les fonctions de Green plutôt que de simplement considérer les (anti)commutateurs à temps coïncidant (ceci permet d'éviter les singularités à temps coïncidant). Le propagateur électronique est calculé à partir du développement en modes (2.77)²⁰ :

$$\begin{aligned} \langle \psi_R(z)\psi_R^\dagger(z') \rangle &= \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} \int_{q>0} \frac{dq}{2\pi} \langle 0|\alpha(k)\beta^\dagger(q)|0 \rangle e^{-kz+qz'} \\ &= \int_{k>0} \frac{dk}{2\pi} e^{-k(z-z')} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z - z'} \end{aligned} \quad (2.118)$$

où nous avons supposé que $\tau > \tau'$, ce qui assure la convergence de l'intégrale et découle du produit ordonné dans le temps. Ainsi,

$$\langle \psi_R^\dagger(z)\psi_R(z') \rangle = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{z - z'} \quad (2.119)$$

L'anticommutateur correct est obtenu en prenant la limite des temps coïncidant :

$$\begin{aligned} \{\psi_R(x, 0), \psi_R^\dagger(x', 0)\} &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\langle \psi_R(\varepsilon - ix)\psi_R^\dagger(-ix') \rangle + \langle \psi_R^\dagger(\varepsilon - ix')\psi_R(-ix) \rangle) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(\frac{1}{\varepsilon - i(x - x')} + \frac{1}{\varepsilon - i(x' - x)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{2\varepsilon}{(x - x')^2 + \varepsilon^2} = \delta(x - x') \end{aligned} \quad (2.120)$$

(ψ_R ou ψ_L avec un seul argument sont des fonctions de z ou \bar{z}). On vérifie aisément que la fonction de Green (2.118) en espace-temps possède l'expression attendu en espace réciproque (moment-fréquence) :

$$\frac{1}{2\pi} \frac{1}{z - z'} \longrightarrow \frac{1}{\omega - v|k|} \quad (2.121)$$

²⁰Ce calcul à été réalisé avec le formalisme des intégrales de chemin dans [13].

Pour démontrer (2.105) et fixer les valeurs de A et λ , on doit calculer

$$\langle \psi_R(z) \psi_R^\dagger(z') \rangle = A^2 \langle e^{-2i\lambda\phi_R(z)} e^{2i\lambda\phi_R(z')} \rangle \quad (2.122)$$

A partir de la relation (2.117)

$$\begin{aligned} \langle \psi_R(z) \psi_R^\dagger(z') \rangle &= A^2 \langle e^{-2i\lambda(\phi_R(z) - \phi_R(z'))} \rangle (z - z')^{-\lambda^2/\pi} \\ &= A^2 (z - z')^{-\lambda^2/\pi} \end{aligned} \quad (2.123)$$

Notons que la valeur moyenne ordonnée normalement

$$\langle e^{-i\alpha\phi_R(z) - i\beta\phi_R(z')} \rangle \quad (2.124)$$

est non-nulle seulement si $\alpha + \beta = 0$. Ceci peut être inféré à partir de l'action de l'opérateur de mode zéro Q :

$$\langle 0 | e^{i(\alpha+\beta)Q} e^{-i(\alpha+\beta)P/2L} | 0 \rangle \quad (2.125)$$

s'annule si $\alpha + \beta \neq 0$, car l'exponentiel de Q agissant sur $|0\rangle$ conduit à un autre état propre de P , avec la valeur propre $\alpha + \beta$; cet état est orthogonal à $|0\rangle$. La condition $\alpha + \beta = 0$ est appelée condition de neutralité.²¹ En comparant (2.123) avec (2.118), on conclut que la constante λ doit être $\sqrt{\pi}$ et que A doit être $1/\sqrt{2\pi}$. Les formules de bosonisation correctes sont alors

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_R(x)} & \psi_R^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_R(x)} \\ \psi_L(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_L(x)} & \psi_L^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_L(x)} \end{aligned} \quad (2.126)$$

2.9.2 Bosonisation de l'Hamiltonien électronique libre

les formules de bosonisation (2.126) sont la base de la transformation fermions–bosons utilisée pour de nombreux opérateurs. Toutefois, ce processus est souvent subtil, dans la mesure où l'ordre normal de ces opérateurs est indispensable. Prenons par exemple les densités de fermions chiraux ρ_R et ρ_L . L'ordre normal peut être construit à partir du développement en modes. Mais il existe une manière plus courte et élégante de procéder que l'on désigne par *le développement en produit d'opérateurs* (OPE ou point-splitting en anglais) et que l'on définit comme

$$\rho_R(z) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [\psi_R^\dagger(z + \varepsilon) \psi_R(z) - \langle \psi_R^\dagger(z + \varepsilon) \psi_R(z) \rangle] \quad (2.127)$$

où ε est pris à temps positif (de sorte à apparaître comme ici, après ordonnement dans le temps). Cette limite doit être prise après avoir appliqué les formules de bosonisation et la relation (2.107) :

$$\begin{aligned} \rho_R &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [e^{i\sqrt{4\pi}\phi_R(z+\varepsilon)} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_R(z)} - \frac{1}{\varepsilon}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [e^{i\sqrt{4\pi}[\phi_R(z+\varepsilon) - \phi_R(z)]} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}] \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} [e^{i\varepsilon\sqrt{4\pi}\partial_z\phi_R(z)} \frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon}] \\ &= \frac{1}{2\pi} i\sqrt{4\pi}\partial_z\phi_R = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\partial_z\varphi \end{aligned} \quad (2.128)$$

nous avons procédé à un développement de Taylor à la dernière ligne. On fait de même pour la densité gauche, sauf que le signe est opposé et

$$\rho_R = \frac{i}{\sqrt{\pi}}\partial_z\varphi \quad \rho_L = -\frac{i}{\sqrt{\pi}}\partial_{\bar{z}}\varphi \quad (2.129)$$

²¹Cette terminologie provient de l'analogie avec le gaz de Coulomb à $D = 2$ en mécanique statistique.

(notons que $\partial_z \phi_R = \partial_z \varphi$ et $\partial_{\bar{z}} \phi_L = \partial_{\bar{z}} \varphi$).

La même procédure de développement en produit d'opérateurs Eq. (2.128) est utilisée pour démontrer l'équivalence entre l'Hamiltonien électronique (2.80) et l'Hamiltonien bosonique (2.90), sauf qu'il faut développer aux ordres supérieurs. Précisément, une expression du type $\psi_R^\dagger \partial_x \psi_R$ doit être évaluée comme

$$\psi_R^\dagger \partial_x \psi_R = -i \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \{ \psi_R^\dagger(z + \varepsilon) \partial_z \psi_R(z) - \langle \psi_R^\dagger(z + \varepsilon) \partial_z \psi_R(z) \rangle \} \quad (2.130)$$

La limite est évaluée en utilisant les OPE suivants (à l'ordre ε^2), obtenues à partir des formules de bosonisation et de la relation (2.107) :

$$\begin{aligned} \psi_R(z') \psi_R^\dagger(z) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} + i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_z \varphi + i \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi}} \partial_z^2 \varphi - \varepsilon (\partial_z \varphi)^2 \\ \psi_R^\dagger(z') \psi_R(z) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} - i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_z \varphi - i \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi}} \partial_z^2 \varphi - \varepsilon (\partial_z \varphi)^2 \\ \psi_L(z') \psi_L^\dagger(\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi\bar{\varepsilon}} - i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\bar{z}} \varphi - i \frac{\bar{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi}} \partial_{\bar{z}}^2 \varphi - \bar{\varepsilon} (\partial_{\bar{z}} \varphi)^2 \\ \psi_L^\dagger(\bar{z}') \psi_L(\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi\bar{\varepsilon}} + i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\bar{z}} \varphi + i \frac{\bar{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi}} \partial_{\bar{z}}^2 \varphi - \bar{\varepsilon} (\partial_{\bar{z}} \varphi)^2 \end{aligned} \quad (2.131)$$

avec $\varepsilon = z' - z$ et $\bar{\varepsilon} = \bar{z}' - \bar{z}$, et les champs du membre de droite sont considérés comme des fonctions de (z, \bar{z}) seulement, la dépendance en (z', \bar{z}') est exclusivement contenue dans les puissances de ε et $\bar{\varepsilon}$. La limite (2.130) est obtenue en dérivant par rapport à z ou \bar{z} les développements précédents. On obtient alors

$$\begin{aligned} \psi_R(z') \psi_R^\dagger(z) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} + i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_z \varphi + i \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi}} \partial_z^2 \varphi - \varepsilon (\partial_z \varphi)^2 \\ \psi_R^\dagger(z') \psi_R(z) &= \frac{1}{2\pi\varepsilon} - i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_z \varphi - i \frac{\varepsilon}{\sqrt{4\pi}} \partial_z^2 \varphi - \varepsilon (\partial_z \varphi)^2 \\ \psi_L(z') \psi_L^\dagger(\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi\bar{\varepsilon}} - i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\bar{z}} \varphi - i \frac{\bar{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi}} \partial_{\bar{z}}^2 \varphi - \bar{\varepsilon} (\partial_{\bar{z}} \varphi)^2 \\ \psi_L^\dagger(\bar{z}') \psi_L(\bar{z}) &= \frac{1}{2\pi\bar{\varepsilon}} + i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_{\bar{z}} \varphi + i \frac{\bar{\varepsilon}}{\sqrt{4\pi}} \partial_{\bar{z}}^2 \varphi - \bar{\varepsilon} (\partial_{\bar{z}} \varphi)^2 \end{aligned} \quad (2.132)$$

En procédant à une substitution évidente, l'Hamiltonien (2.80) devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{Kin} &= -v \int dx [(\partial_z \varphi)^2 + (\partial_{\bar{z}} \varphi)^2] \\ &= \pi v \int dx (\rho_R^2 + \rho_L^2) \end{aligned} \quad (2.133)$$

ce qui est précisément l'Hamiltonien de boson (2.90), après avoir utilisé les relations (2.71). Ainsi l'équivalence entre un boson libre et un fermion libre est démontrée au niveau de l'Hamiltonien. Remarquons que nous n'avons pas démontré l'équivalence au niveau des Lagrangiens. De plus, une preuve rigoureuse de la bosonisation ne peut se faire qu'au niveau du spectre. Nous laisserons de côté ces deux points qui dépassent le cadre de ce manuscrit. L'équivalence spectrale des bosons et des fermions est toutefois traitée dans [14].

2.9.3 Facteurs de Klein

On peut supposer que l'on a plusieurs espèces fermioniques, indicées par des lettres grecques : $\psi_{R\mu}$. La bosonisation exige alors un nombre égal d'espèces bosoniques $\phi_{R\mu}$ et les formules (2.126)

demeurent valables, excepté le fait qu'elles ne fournissent pas les relations de commutation entre les différentes espèces. En réalité, ce problème survient également pour une espèce unique dans la mesure où les fermions droits et gauches ψ_R et ψ_L doivent anticommuer, alors que les champs ϕ_R et ϕ_L commutent.²² Une solution consiste à introduire un facteur d'anticommutation supplémentaire, les fameux *facteurs de Klein*, dans les formules de bosonisation :

$$\begin{aligned}\psi_{R\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\eta_\mu e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_{R\mu}(x)} & \psi_{R\mu}^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\eta_\mu e^{i\sqrt{4\pi}\phi_{R\mu}(x)} \\ \psi_{L\mu}(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{\eta}_\mu e^{i\sqrt{4\pi}\phi_{L\mu}(x)} & \psi_{L\mu}^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\bar{\eta}_\mu e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_{L\mu}(x)}\end{aligned}\quad (2.134)$$

Les facteurs de Klein η_μ and $\bar{\eta}_\mu$ sont Hermitiens et vérifient l'algèbre de Clifford :

$$\{\eta_\mu, \eta_\nu\} = \{\bar{\eta}_\mu, \bar{\eta}_\nu\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad \{\eta_\mu, \bar{\eta}_\nu\} = 0 \quad (2.135)$$

Les facteurs de Klein agissent sur un espace de Hilbert distinct de l'espace de Hilbert des bosons générés par les modes [14]. Cette expansion de l'espace de Hilbert doit être compensé, en quelque sorte, en "fixant une jauge" : l'Hamiltonien doit être diagonal dans cet espace des facteurs de Klein ainsi que les observables physiques. Ainsi, un état propre de Klein est choisi et le reste de l'espace de Hilbert de Klein s'en découple.

2.9.4 Bosonisation des interactions

On peut finalement se tourner vers les quatre interactions de base de la g-ologie (2.28). Pour ceci, il convient d'introduire le spin : nous avons besoin de deux bosons φ_\uparrow et φ_\downarrow . Le champ de boson peut être combiné en composantes de spin et de charge :

$$\varphi_c = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\uparrow + \varphi_\downarrow) \quad \varphi_s = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_\uparrow - \varphi_\downarrow) \quad (2.136)$$

et de même pour les composantes chirales $\phi_{Rc,s}$ et $\phi_{Lc,s}$.

Le terme d'interaction (g_2) est assez simple à bosoniser, dans la mesure où il ne fait intervenir que des opérateurs de densité :

$$\mathcal{H}_2^c = \frac{vg_{2,c}}{\pi} \sum_{\sigma,\sigma'} \partial_z \varphi_\sigma \partial_{\bar{z}} \varphi_{\sigma'} = \frac{2vg_{2,c}}{\pi} \partial_z \varphi_c \partial_{\bar{z}} \varphi_c \quad (2.137)$$

et de même pour les interactions de spin :

$$\mathcal{H}_2^s = \frac{2vg_{2,s}}{\pi} \partial_z \varphi_s \partial_{\bar{z}} \varphi_s \quad (2.138)$$

De même, les termes en avant (g_4) sont

$$\begin{aligned}\mathcal{H}_4^c &= -\frac{vg_{4,c}}{2\pi} [(\partial_z \varphi_\uparrow + \partial_z \varphi_\downarrow)^2 + (\partial_{\bar{z}} \varphi_\uparrow + \partial_{\bar{z}} \varphi_\downarrow)^2] \\ &= -\frac{vg_{4,c}}{\pi} [(\partial_z \varphi_c)^2 + (\partial_{\bar{z}} \varphi_c)^2]\end{aligned}\quad (2.139)$$

et

$$\mathcal{H}_4^s = -\frac{vg_{4,s}}{\pi} [(\partial_z \varphi_s)^2 + (\partial_{\bar{z}} \varphi_s)^2] \quad (2.140)$$

²²Ceci est vrai avec des conditions aux limites périodiques. Sur la ligne infinie, avec conditions aux limites nulles en $x = \pm\infty$, ce n'est plus vrai et $[\phi_R(x), \phi_L(x')] = \frac{1}{4}i$. Cette relation assure l'anticommutation $\{\psi_R(x), \psi_L(x')\} = 0$.

2.10 Solution exacte du modèle de Tomonaga-Luttinger

2.10.1 Renormalisation du champ et de la vitesse

L'intérêt de la bosonisation repose sur sa capacité à représenter les interactions entre fermions, précisément \mathcal{H}_2 et \mathcal{H}_4 , comme des termes sans interactions pour l'Hamiltonien bosonique. Le modèle électronique continu défini par la densité Hamiltonienne

$$\mathcal{H}_{\text{T.L.}} = \mathcal{H}_{Kin} + \mathcal{H}_{2,c} + \mathcal{H}_{2,s} + \mathcal{H}_{4,c} + \mathcal{H}_{4,s} \quad (2.141)$$

est appelé le modèle de Tomonaga-Luttinger. La partie libre \mathcal{H}_{Kin} apparaît comme la somme de théories libres de bosons pour le spin et la charge, avec la même vitesse v . Comme on l'a vu précédemment à la section 2.9.4, chaque terme d'interaction est exprimé soit en termes de bosons de spin ou de bosons de charge. Ainsi, l'Hamiltonien total est la somme d'un Hamiltonien de spin et de charge i.e., les deux secteurs (charge et spin) sont complètement découplés :²³

$$\mathcal{H}_{\text{T.L.}} = \mathcal{H}_c + \mathcal{H}_s \quad (2.142)$$

Quand on l'exprime en terme de bosons de charge et de spin – plus précisément, en termes de champs conjugués Π_μ et de $\partial_x \varphi_\mu$ – l'Hamiltonien de chaque secteur devient

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\mu &= \mathcal{H}_0^\mu + \mathcal{H}_2^\mu + \mathcal{H}_4^\mu \quad \text{avec} \\ \mathcal{H}_{0,\mu} &= \frac{1}{2}v[\Pi_\mu^2 + (\partial_x \varphi_\mu)^2] \\ \mathcal{H}_{2,\mu} &= -\frac{vg_{2,\mu}}{2\pi}[\Pi_\mu^2 - (\partial_x \varphi_\mu)^2] \\ \mathcal{H}_{4,\mu} &= \frac{vg_{4,\mu}}{2\pi}[\Pi_\mu^2 + (\partial_x \varphi_\mu)^2] \end{aligned} \quad (2.143)$$

avec $\mu = c, s$. En combinant ces expressions, on trouve

$$\mathcal{H}_\mu = \frac{1}{2}v_\mu[K_\mu \Pi_\mu^2 + \frac{1}{K_\mu}(\partial_x \varphi_\mu)^2] \quad (2.144)$$

où

$$K_\mu = \sqrt{\frac{\pi - g_{2,\mu} + g_{4,\mu}}{\pi + g_{2,\mu} + g_{4,\mu}}} \quad v_\mu = v\sqrt{(1 + \frac{g_{4,\mu}}{\pi})^2 - (\frac{g_{2,\mu}}{\pi})^2} \quad (2.145)$$

La constante K_μ est simplement une renormalisation du champs φ_μ . Cela apparaît plus clairement dans le Lagrangien associé :

$$L_\mu = \frac{1}{2K_\mu} \int dx \left[\frac{1}{v_\mu}(\partial_t \varphi_\mu)^2 - v_\mu(\partial_x \varphi_\mu)^2 \right] \quad (2.146)$$

L'Hamiltonien (2.144) peut être réexprimé sous forme canonique (2.90) simplement en introduisant les opérateurs renormalisés

$$\varphi'_\mu = \frac{1}{\sqrt{K_\mu}}\varphi_\mu \quad \Pi'_\mu = \sqrt{K_\mu}\Pi_\mu \quad (2.147)$$

qui obéissent encore aux relations de commutation canoniques. Remarquons que nous avons supposé que les couplages $g_{2,\mu}$ et $g_{4,\mu}$ ne dépendent pas du moment k . Cela n'est toutefois pas nécessaire : les solutions précédentes du modèle de Tomonaga-Luttinger peuvent être redérivées

²³Ceci est vrai pour les champs mais pas exactement au niveau du spectre où les choses sont un peu plus compliquées. Il est, en effet manifeste que les nombres d'excitations de spin et de charge ne sont pas indépendants, car le nombre total d'électrons est conservé.

avec des couplages $g_{2,\mu}(k)$ and $g_{4,\mu}(k)$ dépendants du moment k , et ce pour la simple raison que l'Hamiltonien bosonique est quadratique et que les différents moments sont donc découplés. En particulier, les formules précédentes pour la renormalisation de la vitesse peuvent servir pour écrire la relation de dispersion des excitations de charge :

$$\omega(k) = v_c |k| = v |k| \sqrt{\left(1 + \frac{g_{4,\mu}(k)}{\pi}\right)^2 - \left(\frac{g_{2,\mu}(k)}{\pi}\right)^2} \quad (2.148)$$

Par souci de simplicité, nous ne prendrons pas en compte une telle dépendance qui réapparaîtra toutefois dans les chapitres suivants.

2.10.2 Mélange des champs droits et gauches

Les perturbations $\mathcal{H}_{2,\mu}$ de (2.143) mélangent les bosons droits et gauches. On s'attend alors à ce que les nouveaux états propres soient des combinaisons linéaires des excitations droites et gauches. En effet, la renormalisation du champ φ ($\varphi' = \varphi/\sqrt{K}$) implique une renormalisation inverse de son moment conjugué Π – et donc du champs dual ϑ – de façon à préserver les relations de commutation canoniques : $\vartheta' = \vartheta\sqrt{K}$ (nous négligeons les indices de spin/charge pour l'instant). Donc, les bosons droits et gauches ϕ_R et ϕ_L ne sont pas simplement renormalisés par K , ils sont mélangés :

$$\begin{aligned} \phi_R &= \frac{1}{2}(\varphi + \vartheta) \rightarrow \phi'_R = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\varphi + \sqrt{K}\vartheta\right) \\ \phi_L &= \frac{1}{2}(\varphi - \vartheta) \rightarrow \phi'_L = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{K}}\varphi - \sqrt{K}\vartheta\right) \end{aligned} \quad (2.149)$$

Si on exprime les anciens bosons droits et gauches (ϕ_R et ϕ_L) en terme des nouveaux (ϕ'_R et ϕ'_L) et si on définit ξ comme $K = e^{2\xi}$, on trouve

$$\begin{aligned} \phi_R &= \cosh \xi \phi'_R + \sinh \xi \phi'_L \\ \phi_L &= \sinh \xi \phi'_R + \cosh \xi \phi'_L \end{aligned} \quad (2.150)$$

En terme de développement en modes, le mélange des états droit-gauche est une transformation de Bogoliubov des opérateurs de création et d'annihilation :

$$\begin{aligned} b_n &= \cosh \xi b'_n + \sinh \xi \bar{b}'_n{}^\dagger \\ \bar{b}_n &= \sinh \xi b'_n{}^\dagger + \cosh \xi \bar{b}'_n \end{aligned} \quad (2.151)$$

Ainsi, le champs de fermions $\psi_{R\uparrow}$, un champs ne se propageant que vers la droite dans le système sans interactions devient un mélange de champs se propageant à droite et à gauche dans le modèle de Tomonaga-Luttinger, si $K_\mu \neq 1$ (i.e., si $g_{2,\mu} \neq 0$). Considérons par exemple le cas $K_s = 1$, $K_c \neq 1$:

$$\begin{aligned} \psi_{R\uparrow}(x, \tau) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \eta_\uparrow e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_{R\uparrow}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \eta_\uparrow e^{-i\sqrt{2\pi}\phi_{Rc}} e^{-i\sqrt{2\pi}\phi_{Rs}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \eta_\uparrow e^{-i\sqrt{2\pi} \cosh \xi \phi_{R'c}} e^{-i\sqrt{2\pi} \sinh \xi \phi_{L'c}} e^{-i\sqrt{2\pi}\phi_{Rs}} \end{aligned} \quad (2.152)$$

C'est le résultat auquel on s'attend, dans la mesure où les interactions \mathcal{H}_2 entourent l'électron libre d'un nuage d'électrons droits *et* gauches.

2.10.3 Fonctions de correlations

Fonctions de Green

Une fois que l'on a réalisé la renormalisation (2.145), le calcul de quantités physiques (fonctions de corrélations) est simple, au moins en espace réel. La fonction de Green à une particule

$$G_{\uparrow}(x, \tau) = \langle c_{\uparrow}(x, \tau) c_{\uparrow}^{\dagger}(0, 0) \rangle \quad (2.153)$$

A moment proche de zéro, en termes de champs continus, cela devient²⁴

$$G_{\uparrow}(x, \tau) = \langle \psi_{R\uparrow}(x, \tau) \psi_{R\uparrow}^{\dagger}(0, 0) \rangle + \langle \psi_{L\uparrow}(x, \tau) \psi_{L\uparrow}^{\dagger}(0, 0) \rangle \quad (2.154)$$

Considérons uniquement la partie se propageant à droite, dans le cas $K_s = 1$ et $K_c \neq 1$ pour simplifier. En utilisant l'équation (2.152), cela devient

$$\begin{aligned} \langle \psi_{R\uparrow}(x, \tau) \psi_{R\uparrow}^{\dagger}(0, 0) \rangle &= \frac{1}{2\pi} \langle e^{-i\sqrt{2\pi} \cosh \xi \phi_{R'c}(z_c)} e^{i\sqrt{2\pi} \cosh \xi \phi_{R'c}(0)} \rangle \\ &\quad \times \langle e^{i\sqrt{2\pi} \sinh \xi \phi_{L'c}(\bar{z}_c)} e^{-i\sqrt{2\pi} \sinh \xi \phi_{L'c}(0)} \rangle \\ &\quad \times \langle e^{-i\sqrt{2\pi} \phi_{R's}(z_s)} e^{i\sqrt{2\pi} \phi_{R's}(0)} \rangle \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(v_c \tau - ix)^{\frac{1}{2} \cosh^2 \xi}} \frac{1}{(v_c \tau + ix)^{\frac{1}{2} \sinh^2 \xi}} \frac{1}{(v_s \tau - ix)^{1/2}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(v_c \tau - ix)^{1/2}} \frac{1}{|v_c \tau - ix|^{\theta_c}} \frac{1}{(v_s \tau - ix)^{1/2}} \end{aligned} \quad (2.155)$$

où la différence de vitesse entre la charge et le spin réclame une distinction entre les coordonnées complexes de spin et de charge (z_s et z_c). Nous avons introduit l'exposant²⁵

$$\theta_c = \frac{1}{4} \left(K_c + \frac{1}{K_c} - 2 \right) \quad (2.156)$$

En prenant la transformée de Fourier en temps et en espace, la fonction de Green conduit à un terme spectral étendu,²⁶ comme illustré à la Fig. (2.31). Cette densité spectrale a une singularité algébrique au voisinage $\omega = \pm v_c q$ et $\omega = v_s q$, avec des exposants liés à θ_c . A partir de cette fonction spectrale, il peut être montré que la distribution en fonction du moment $n(k)$ a une singularité algébrique au niveau de Fermi :

$$n(k) = n(k_f) - \text{const.} \times \text{sgn}(k - k_f) |k - k_f|^{\theta_c} \quad (2.157)$$

et la densité d'état à une particule également : $N(\omega) \sim |\omega|^{\theta_c}$. A près avoir détaillé le traitement du liquide de Luttinger, nous pouvons considérer la théorie des liquides de Luttinger chiraux qui repose largement sur les mêmes principes.

2.11 Liquide de Tomonaga-Luttinger chiral

2.11.1 Théorie hydrodynamique de Wen

Nous considérons ici la situation idéale où l'état de Hall fractionnaire est réalisé au niveau du bord. Nous allons montrer que le bord est décrit par un modèle de Luttinger chiral, très

²⁴Il apparaît une singularité au voisinage de $k = 2k_f$ si $K < 1$.

²⁵On trouve aussi la notation $\gamma_c = \frac{1}{2}\theta_c$, de même que $\alpha_c = \theta_c$.

²⁶Un calcul détaillé de la densité spectrale à partir de la fonction de Green en espace et temps a été réalisé dans [15]

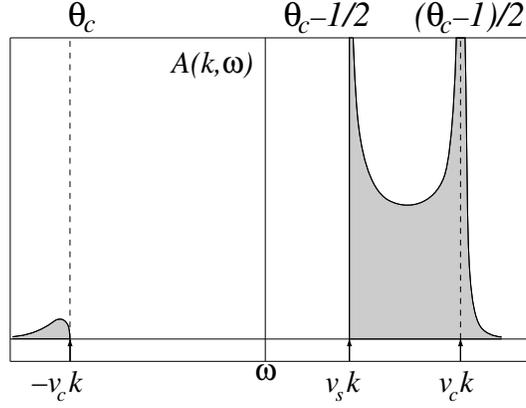


FIG. 2.31 – Fonction de densité spectrale $A(k, \omega)$ typique du modèle de Tomonaga-Luttinger, avec $K_s = 1$. Les exposants que l'on voit en haut correspondent aux trois singularités : $(\omega + v_c q)^{\theta_c}$, $(\omega - v_s q)^{\theta_c - 1/2}$ et $(\omega - v_c q)^{(\theta_c - 1)/2}$.

proche du modèle de Luttinger décrit précédemment. La relation entre les deux a été démontrée par Wen, qui suppose seulement qu'il existe une séparation nette entre un liquide de facteur de remplissage uniforme et le vide où le facteur de remplissage est nul. Wen a utilisé l'action effective afin d'obtenir l'Hamiltonien du bord. On considère deux axes x et y au bord de l'échantillon comme sur la Fig. (2.32). Dans la région $y < 0$, se trouve le système de Hall fractionnaire à un remplissage ν le rendant incompressible, alors que la région $y > 0$ correspond au vide. L'incompressibilité de l'état de Hall fractionnaire est responsable du gap des excitations du volume et donc les seules excitations de basse énergie du système sont restreintes au bord où la séparation entre le liquide de Hall et le vide peut se déformer. Considérons alors une excitation responsable de la déformation de la ligne de séparation originellement d'équation $y = 0$ qui devient alors $y = f(x)$. Il y a donc un excès d'électron au bord. La densité électronique en excès (associée à la déformation du bord) par unité de longueur est alors :

$$\rho(x) = \frac{\nu}{2\pi l^2} f(x) \quad (2.158)$$

où on reconnaît la relation $n_e = \nu/(2\pi l^2)$ (cf section 2.6.1. Il est possible de calculer l'énergie accompagnant cette déformation. Si le potentiel de confinement au bord de l'échantillon est $U(y)$, pour une excitation de basse énergie, on peut approximer $U(y)$ par une fonction linéaire en y . La variation d'énergie sur l'intervalle de longueur Δx est alors :

$$\delta E = \frac{1}{2} \{U(f(x)) - U(0)\} \rho(x) \Delta x \quad (2.159)$$

Les électrons du bord se propagent dans un seul sens et ont une vitesse :

$$v = \frac{1}{|q_e|B} \frac{\partial U}{\partial y} \quad (2.160)$$

Avec $U(y) = |q_e|Bvy$, l'énergie potentielle totale due à cette déformation est donc :

$$E = \frac{2\pi\hbar v}{2\nu} \int dx \rho(x)^2 \quad (2.161)$$

En mécanique quantique $\rho(x)$ devient un opérateur et l'Hamiltonien est donné par l'énergie E .

$$\mathcal{H} = \frac{\pi v}{\nu} \int dx \rho(x)^2 \quad (2.162)$$

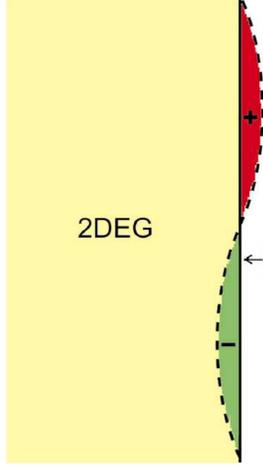


FIG. 2.32 – Onde de densité du bord d’un fluide de Hall quantique fractionnaire (plasmon). Quand il y a aucune perturbation de densité, la frontière est une ligne droite. En présence d’un plasmon, il apparaît un excès de charge par endroits et un défaut ailleurs.

Il nous reste maintenant à déterminer les relations de commutation entre ces opérateurs. Considérons l’Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H}' = \mathcal{H} - \int dx \mu(x) \rho(x) \quad (2.163)$$

Cette perturbation induit un courant dans le système, et si l’on est dans le cas de l’effet Hall quantique fractionnaire, $\frac{\partial \mu}{\partial x}$ se comporte comme un champ électrique dans la direction x , de sorte que le courant s’écoule dans la direction y , avec une densité de courant $j_y(x)$ donnée par :

$$j_y(x) = \nu \frac{\partial \mu}{\partial x} \quad (2.164)$$

Cette densité obéit à la loi de conservation :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial j_x(x, t)}{\partial x} = j_y(x, t) \quad (2.165)$$

Par ailleurs, l’équation de Heisenberg donne :

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{i}{\hbar} [H, \rho(x, t)] - \frac{i}{\hbar} \int dx' \mu(x') [\rho(x'), \rho(x)] \quad (2.166)$$

Ces deux équations doivent être identiques pour n’importe quelle fonction $\mu(x)$, donc le second terme doit être le même, et nous obtenons la relation :

$$[\rho(x'), \rho(x)] = -\frac{i\nu}{2\pi} \frac{d}{dx'} \delta(x - x') \quad (2.167)$$

qui s’écrit en transformée de Fourier :

$$[\rho_k, \rho_{-k'}] = \delta_{k, k'} \frac{\nu k}{2\pi} \quad (2.168)$$

Cette relation est l’algèbre de Kac-Moody du liquide de Luttinger, il faut toutefois noter le facteur de remplissage de l’état de Hall fractionnaire ν qui apparaît ici. A cette différence près, l’état de bord est essentiellement décrit par le même Hamiltonien que le liquide de Tomonaga-Luttinger. La bosonisation s’impose naturellement pour résoudre un tel système²⁷.

²⁷En toute rigueur, le traitement exact du problème se fait sur une distance finie L (cf [16]).

2.11.2 Bosonisation des fermions chiraux

On pose alors, comme précédemment :

$$\rho = \frac{\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \partial_x \phi = -\frac{i\sqrt{\nu}}{\sqrt{\pi}} \partial_z \phi \quad (2.169)$$

et l'Hamiltonien pour les excitations de bord se propageant vers la droite (i.e. ne dépendant que de z) est

$$\mathcal{H} = -v \int (\partial_z \phi_R)^2 \quad (2.170)$$

On retrouve exactement la même forme bosonique qu'à la section précédente. L'électron au bord doit alors être représenté par un champ $\psi(x)$ tel que

$$[\rho(x), \psi(x')] = -\delta(x - x') \psi(x) \quad (2.171)$$

En calculant le développement en produits d'opérateurs de ρ avec $e^{-i\alpha\phi}$, on détermine que la représentation correcte de ψ est

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi/\sqrt{\nu}} \quad (2.172)$$

Précisément, nous obtenons les relations de bosonisations des opérateurs d'électrons

$$\begin{aligned} \psi_R(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_R(x)/\sqrt{\nu}} & \psi_R^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_R(x)/\sqrt{\nu}} \\ \psi_L(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_L(x)/\sqrt{\nu}} & \psi_L^\dagger(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_L(x)/\sqrt{\nu}} \end{aligned} \quad (2.173)$$

A partir de là, on trouve la fonction de Green à une particule

$$G(x, t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{(x - vt)^{1/\nu}} \quad (2.174)$$

Remarquons qu'elle correspond au propagateur de l'électron libre uniquement dans le cas $\nu = 1$, i.e., quand le premier niveau de Landau est totalement rempli. Même dans le cas fractionnaire, le système de bord est un liquide de Luttinger si $m = 1/\nu > 1$, en fait, c'est un liquide de Luttinger *chiral* (χ LL). La fonction de Green dans l'espace moment-fréquence est

$$G(k, \omega) \propto \frac{(\omega + vk)^{m-1}}{\omega - vk} \quad (2.175)$$

et la densité d'état au voisinage du niveau de Fermi est alors

$$N(\omega) \propto |\omega|^{m-1} \quad (2.176)$$

Après avoir détaillé la théorie des liquides de Luttinger chiraux, nous pouvons examiner différents aspects expérimentaux des canaux de bord fractionnaires.

2.12 Conclusion

Nous avons passé en revue les principales propriétés des électrons bidimensionnels dans un champ magnétique. Nous avons décrit l'apparition de l'effet Hall quantique entier puis fractionnaire en insistant sur l'importance des bords. Dans le cas des fractions magiques $\nu = 1/m$, Wen a montré que chaque bord est décrit par la théorie des liquides de Luttinger chiraux. La dynamique du système unidimensionnel de fermions chiraux en interaction s'exprime par un boson libre unique *via* la technique de bosonisation. Les modes de propagation droits et gauches sont mélangés par les interactions et les fonctions de corrélations du modèle initial sont renormalisées par les interactions. Nous pouvons maintenant appliquer cette théorie à des situations expérimentales réalistes, et à des expériences de transport par effet tunnel en particulier.

Chapitre 3

Effet tunnel étendu.

Les bords d'un fluide de Hall sont décrits par la théorie des liquides de Luttinger chiraux. Dans ce chapitre, nous confrontons cette théorie aux expériences de transport par effet tunnel sur les bords. Dans une première section, nous détaillons les systèmes utilisés dans ce type d'expérience. Nous observons des résultats expérimentaux qui valident la théorie des liquides de Luttinger. Puis, nous examinons une nouvelle structure : la jonction tunnel étendue. Des mesures de conductance tunnel font apparaître des caractéristiques inexplicées, et dans la troisième section, nous appliquons le formalisme des liquides de Luttinger à cette situation expérimentale. Nous calculons le courant tunnel perturbativement dans différents régimes de remplissage des bords et d'interaction. Enfin, nous calculons le bruit associé au courant tunnel.

3.1 Transport électronique dans un liquide de Luttinger chiral

Cette section traite du transport électronique dans un liquide de Tomonaga-Luttinger chiral (ou χ LL). Comme nous l'avons vu précédemment, le χ LL est un modèle particulièrement simple de conducteur métallique fortement corrélé à $D = 1$. Plus précisément, il s'agit d'un conducteur métallique unidimensionnel dont les excitations élémentaires se propagent dans un sens unique. Le canal de bord d'un fluide de Hall fractionnaire incompressible est la réalisation expérimentale d'un tel système. Le χ LL se distingue d'un métal habituel (à $D = 3$) par l'absence de pôle dans la densité spectrale à une particule. A la place du pôle habituel, la théorie des χ LL prédit une dépendance en loi de puissance en fonction du moment ou de la fréquence (comme on l'a vu au chapitre précédent). Cela signifie que lorsque l'on injecte (ou que l'on enlève) par effet tunnel un électron dans un liquide de Luttinger, on observe un comportement en loi de puissance (cf Fig. 3.1, par exemple) du courant tunnel et de la conductance différentielle en fonction de l'énergie. Dans ces expériences, l'énergie peut être ajustée soit par la différence de potentiel appliquée (comme dans une expérience de transport classique) soit par la température (comme dans une expérience de transport par activation thermique). Les bords de fluide de Hall fractionnaire aux remplissages magiques sont des systèmes très propres qui permettent de valider expérimentalement le modèle des χ LL pour plusieurs raisons. En premier lieu, les bords sont réalisés expérimentalement à partir des techniques de croissance MBE, qui autorisent des géométries à une précision atomique. Cette précision concerne aussi bien la formation du système électronique lui-même que la réalisation de la barrière tunnel. Ensuite, la nature du χ LL peut être modifiée uniquement en faisant varier le champ magnétique i.e. le facteur de remplissage du fluide de Hall fractionnaire. Cette souplesse permet la réalisation expérimentale de différents liquides de Luttinger chiraux. Enfin, les modes de propagation des bords droit (R) et gauche (L) d'un échantillon de Hall sont spatialement séparés par une distance macroscopique, ce qui conduit à une suppression exponentiellement faible de la rétrodiffusion de l'un dans l'autre. La cause principale de localisation est donc supprimée et les modes de bord sont des systèmes

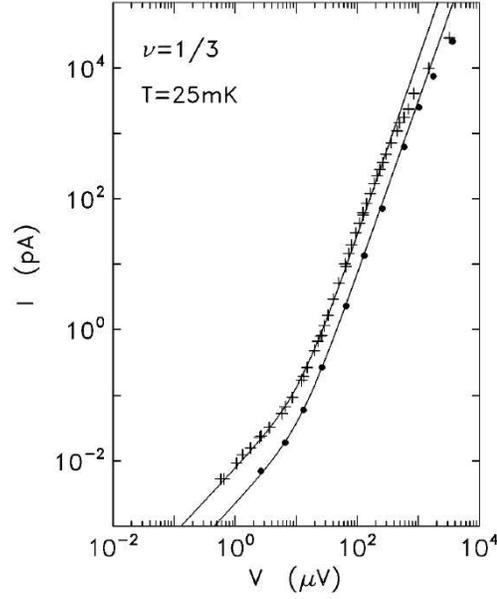


FIG. 3.1 – Caractéristique courant-tension $I_{\mathcal{T}}(V)$ pour l’effet tunnel de GaAs métal dopé n vers un canal de bord fractionnaire à $\nu = 1/3$; (+) échantillon 1.1 à $B = 13.4T$, (•) échantillon 2, à $B = 10.8T$. Les courbes en traits pleins représentent les fits théoriques avec $g = 2.7$ et $g = 2.65$ respectivement [17].

balistiques presque idéaux. Pour toutes ces raisons, les expériences de transport tunnel sur les bords de fluide de Hall constituent un outil unique de validation de la théorie de Luttinger.

3.1.1 Effet tunnel et non-linéarités

Une caractéristique unique du χ LL idéal est l’universalité de la valeur de l’exposant g de l’effet tunnel électronique ou *exposant anormal*. g est défini dans les expériences d’effet tunnel dans un χ LL par $I_{\mathcal{T}} \propto V^g$ où $I_{\mathcal{T}}$ est la courant tunnel en réponse à la tension appliquée V . Pour un fluide de Hall fractionnaire incompressible aux fractions magiques de Laughlin $\nu = 1/m$, la valeur de g est uniquement déterminée par les interactions au sein du fluide et prend une valeur universelle donnée par m . Par exemple, pour un fluide de Laughlin à $\nu = 1/3$, $g = 3$ exactement (cf Fig. 3.1) [18, 19, 20, 21, 22].

Les expériences de transport d’effet tunnel électronique dans les χ LL peuvent être réalisées en plaçant des contacts des deux cotés d’une barrière tunnel (cf Fig. 3.5 b). Plusieurs types de mesures peuvent être réalisées : (i) une mesure directe du courant tunnel $I_{\mathcal{T}}$ à travers la barrière en fonction d’une différence de potentiel V appliquée de part et d’autre de la barrière, afin de déterminer la caractéristique $I_{\mathcal{T}}(V)$. La théorie conduit à $I_{\mathcal{T}} \propto V^g$, ce qui traduit la loi de puissance de la densité d’état du χ LL $N(\omega) \propto \omega^{g-1}$ (cf 2.176). (ii) une mesure de la conductance différentielle, $dI_{\mathcal{T}}/dV \propto V^g$ et (iii) une mesure à différence de potentiel nulle ($V = 0$) de la conductance linéaire tunnel $G_{\mathcal{T}}$ en fonction de la température T , $G_{\mathcal{T}} \propto T^{g-1}$ qui traduit encore la loi en puissance de la densité d’état.

Expérimentalement, nous le verrons ci-dessous, ces différentes observables mesurées en fonction de V ou de T obéissent à une loi de puissance d’exposant g universel, comme le prédit la théorie. Ces résultats constituent des preuves très significatives de la validité de la théorie. Il est donc nécessaire de déterminer le courant tunnel $I_{\mathcal{T}}$ dans des conditions où l’échelle d’énergie

est fixée soit par V ($E = eV$) soit par T ($E = k_b T$). Avant d'examiner les résultats de ces expériences, revenons brièvement sur la dérivation théorique de ces non-linéarités.

Effet tunnel ponctuel

Le courant tunnel ponctuel est habituellement calculé en perturbation [24]. On peut s'intéresser au cas de l'effet tunnel entre un métal GaAs fortement dopé n à $D = 3$ et un canal de bord de l'effet Hall fractionnaire. La direction x est la direction le long de la barrière tunnel alors que y est perpendiculaire à la barrière. Considérant l'opérateurs $c_{L,R}$ qui annihile un électron d'un coté (L ou R) de la barrière tunnel à l'instant t au point de coordonnée (x, y) , et l'opérateur de création $c_{R,L}^\dagger$ qui en crée un autre de l'autre coté (R ou L) de la barrière à un instant t' au point de coordonnée (x', y') . L'élément de matrice de l'effet tunnel est lié à l'opérateur $c_L(x, y, t)c_R^\dagger(x', y', t')$. L'effet tunnel assure la conservation du moment longitudinal à la barrière. En particulier, un système parfaitement propre et sans impuretés, invariant par translation suivant la direction longitudinale x n'autorise pas l'effet tunnel à moment longitudinal non-nul. Une manière d'assurer l'effet tunnel à moment longitudinal non-nul est d'introduire des impuretés qui ne conservent pas le moment. La présence d'impuretés et de défauts ponctuels favorisent l'effet tunnel ponctuel (i.e. sur des distances $\leq l$). On fait l'approximation que l'effet tunnel à lieu en un seul point de la barrière : $(x, y, t) = (0, y_L, t)$ et $(x', y', t') = (0, y_R, t')$ avec $y_R - y_L = b$ la largeur de la barrière. On incorpore également la largeur b dans l'amplitude tunnel \mathcal{T} ce qui permet de supprimer la coordonnée y et on choisit $t = 0$. Enfin, dans ce modèle simplifié, on décide de ne pas tenir compte de l'interaction coulombienne.

Courant tunnel non-linéaire

Le traitement perturbatif standard du courant tunnel ponctuel [16, 23, 24] conduit à la formule :

$$I_{\mathcal{T}}(t) = e\mathcal{T}^2 \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t') \times \left\{ e^{i \int_t^{t'} eV(t'') dt''} \langle [A(t), A^\dagger(0)] \rangle - e^{-i \int_t^{t'} eV(t'') dt''} \langle [A^\dagger(t), A(0)] \rangle \right\} \quad (3.1)$$

avec $A(t) = c_R(0, t)c_L^\dagger(0, t)$. En l'absence d'interaction les fonctions de corrélations $\langle A(t)A^\dagger(0) \rangle$ et $\langle A^\dagger(0)A(t) \rangle$ ne font intervenir que les propagateurs des bords des fluides de Laughlin à $\nu = 1/m$ avec $g = m$

$$\langle c_{L,R}^\dagger(x, t)c_{L,R}(0, 0) \rangle \propto (x \pm v_{L,R}t)^{-g_{L,R}} e^{\mp(i/\nu_{L,R})k_F x} \quad (3.2)$$

et les valeurs des fonctions de corrélation sont

$$\langle A(t)A^\dagger(0) \rangle = \frac{1}{a_R a_L} \frac{1}{[-\omega_L(t - i\delta)]^{g_L}} \frac{1}{[\omega_R(t - i\delta)]^{g_R}} \quad (3.3)$$

et

$$\langle A^\dagger(0)A(t) \rangle = \frac{1}{a_R a_L} \frac{1}{[-\omega_L(t + i\delta)]^{g_L}} \frac{1}{[\omega_R(t + i\delta)]^{g_R}} \quad (3.4)$$

$$\langle A(x, t)A^\dagger(0, 0) \rangle = a_R^{g_R-1} a_L^{g_L-1} \times \frac{1}{[x - v_L(t - i\delta)]^{g_L}} \frac{1}{[x + v_R(t - i\delta)]^{g_R}} \times e^{(i/\nu_R)k_F x} e^{(i/\nu_L)k_F x} \quad (3.5)$$

$$\langle A^\dagger(0, 0)A(x, t) \rangle = a_R^{g_R-1} a_L^{g_L-1} \times \frac{1}{[x - v_L(t + i\delta)]^{g_L}} \frac{1}{[x + v_R(t + i\delta)]^{g_R}} \times e^{(i/\nu_R)k_F x} e^{(i/\nu_L)k_F x} \quad (3.6)$$

Le courant tunnel à température nulle est alors donné par

$$I_{\mathcal{T}}(V) = -2eT^2 \mathbf{Im} \left[-i \frac{\pi}{(g_L + g_R - 1)!} \int d\omega \times f(\omega, t) \frac{a_L^{g_L-1} a_R^{g_R-1}}{v_L^{g_L} v_R^{g_R}} \omega^{g_L+g_R-1} \right] \quad (3.7)$$

où $f(\omega, t)$ est définie par

$$e^i \int_t^{t'} e^{V(t'')} dt'' = \int d\omega f(\omega, t) e^{i\omega(t-t')} \quad (3.8)$$

Pour une différence de potentiel continue (courant DC) l'expression (3.7) se simplifie en :

$$I_{\mathcal{T}}(V) = -2eT^2 \mathbf{Im} \left[-i \frac{\pi}{(g_L + g_R - 1)!} \frac{a_L^{g_L-1} a_R^{g_R-1}}{v_L^{g_L} v_R^{g_R}} V^{g_L+g_R-1} \right] \quad (3.9)$$

Calcul à température finie

A température finie, le traitement précédent impose le calcul des fonctions de corrélation à température finie, ce qui conduit à

$$I_{\mathcal{T}} = 2eT^2 \frac{a_L^{g_L-1} a_R^{g_R-1}}{v_L^{g_L} v_R^{g_R}} V^{g_L+g_R-1} (2\pi T)^{g_L+g_R-1} \times B(g - i\omega/2\pi T, g - i\omega/2\pi T) \times \frac{\sin \pi(g + i\omega/2\pi T)}{\cos \pi g} \quad (3.10)$$

avec $g = (g_L + g_R)/2$, et B est la fonction Béta d'Euler.

On obtient une expression explicite du courant DC dans la limite $eV \ll k_b T$. $I_{\mathcal{T}}$ est alors linéaire en V et admet un loi de puissance pour T :

$$I_{\mathcal{T}} \propto eVT^{g_L+g_R-2} \quad (3.11)$$

Dans la limite duale $eV \gg k_b T$, le courant admet une loi de puissance en V :

$$I_{\mathcal{T}} \propto \frac{a_L^{g_L-1} a_R^{g_R-1}}{v_L^{g_L} v_R^{g_R}} \frac{\pi}{\Gamma(2g)} T^{g_L+g_R-1} \left(\frac{eV}{2\pi T} \right)^{g_L+g_R-1} \propto (eV)^{g_L+g_R-1} \quad (3.12)$$

$\Gamma(s)$ est la fonction Gamma d'argument s ; nous avons posé $k_b = 1$ pour simplifier. Les conductances différentielles correspondant à ces deux limites sont respectivement :

$$\frac{dI_{\mathcal{T}}}{dV} \propto T^{g_L+g_R-2} \quad (eV \ll k_b T) \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

$$\frac{dI_{\mathcal{T}}}{dV} \propto (eV)^{g_L+g_R-2} \quad (eV \gg k_b T) \quad (3.15)$$

La variable adimensionnée $x = eV/2\pi T$ apparaît naturellement et la condition de cross-over est approximativement $x \approx 1$. Dans la limite ($x < 1$), l'échelle d'énergie de l'effet tunnel est déterminée par l'énergie thermique et le courant est linéaire en fonction de la tension V alors qu'il obéit à une loi de puissance en la température $I_{\mathcal{T}} \propto T^{g_L+g_R-2}$.

Dans la situation opposée ($x > 1$), l'échelle d'énergie est déterminée par eV , $I_{\mathcal{T}}$ est non-linéaire en V , et $I_{\text{tun}} \propto V^{g_L+g_R-1}$. En ce qui concerne la conductance différentielle G_{tun} ; elle est indépendante de V et proportionnelle à $T^{g_L+g_R-2}$ pour $x < 1$; elle est de la forme $G_{\text{tun}} \propto V^{g_L+g_R-2}$ pour $x > 1$ [16].

3.1.2 Expériences de transport tunnel

La caractéristique physique la plus remarquable qui distingue un liquide de Luttinger chiral, d'un liquide de Fermi est le comportement à basse énergie, quand un électron est ajouté ou enlevé du système à une énergie proche de l'énergie de Fermi. Il se produit une catastrophe d'orthogonalité entre l'état formé de la particule ajoutée ou enlevée de l'état fondamental de N électrons fortement corrélés et le fondamental des $N + 1$ (ou $N - 1$) électrons. Cette catastrophe donne lieu à une réduction de l'effet tunnel suivant une loi de puissance quand l'énergie approche la surface de Fermi. Les expériences d'effet tunnel constituent donc une manière intéressante d'étudier ces propriétés de basse énergie. L'avantage de ces expériences de transport réside dans le contrôle très précis des basses énergies, fixées soit par la différence de potentiel avec une précision allant jusqu'au μeV , soit par la température avec une précision de $25mK$ ($\approx 2.15\mu eV$). Ces échelles d'énergie sont 2 à 3 ordres de grandeur plus petites que les autres énergies caractéristiques du système : l'énergie de Fermi ($E_F \sim 4$ meV) ou le gap de quasi-particule ($\sim 0.1 - 1$ meV) de l'état de Hall fractionnaire à $\nu = 1/3$. Les mesures de transport de l'effet tunnel électronique doivent satisfaire à quelques conditions pour permettre de mettre en évidence les caractéristiques typiques des χ LL. Il faut en particulier (i) que les non-linéarités observées dans les relations $I_{\mathcal{T}}(V)$ soient dues à la densité d'état tunnel $N(\omega)$ et non à une dépendance en énergie des éléments de matrice de la barrière tunnel ; (ii) qu'il existe une loi de puissance dans la caractéristique $I_{\mathcal{T}}(V)$ sur une plage de valeurs suffisamment grande pour la distinguer d'autres lois (exponentielle, d'Arrhenius, de saut avec des échelles variables) ; (iii) qu'il y ait cohérence entre les valeurs de l'exposant anormal déterminées indépendamment par la relation $I_{\mathcal{T}}(V)$, par la dépendance en température de la conductance linéaire $G_{\mathcal{T}}$ à basse tension et par la conductance différentielle $dI_{\mathcal{T}}/dV$; (iv) que l'exposant g soit dans la gamme $\sim 1.5 - 4$. En dessous de 1.5, des non-linéarités résiduelles viennent perturber la détermination de la valeur de g , au dessus de 4 le courant est trop bruité et la plage de tension ou de température accessible est trop restreinte.

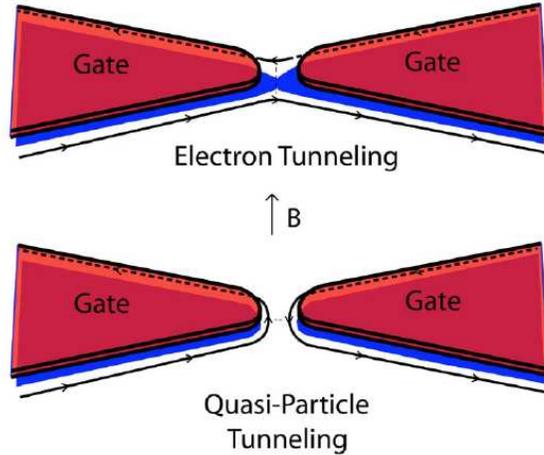


FIG. 3.2 – Géométrie du point de contact quantique. La partie grisée représente la barrière de potentiel électrostatique dans le 2-DEG . (en haut) Des électrons passent d'un bord à l'autre à travers la barrière électrostatique par effet tunnel. (en bas) des quasi-particules passent à travers le 2-DEG par effet tunnel.

Différentes configurations expérimentales

Deux géométries distinctes ont été utilisées pour étudier les χ LL *via* l'effet tunnel dans les canaux de bord des fluides de Hall ; la géométrie du contact ponctuel quantique (QPC) et la géométrie de croissance sur bord clivé (CEO). La formation d'un QPC repose sur l'utilisation d'une paire d'électrodes déposées sur l'hétérostructure de GaAs/AlGaAs et séparées de $\sim 100nm$. L'application d'une tension négative entre ces électrodes et le 2-DEG, déforme les canaux de bords et les rapproche en un point comme le montre la Fig. (3.2). Dans la géométrie CEO, on fait croître une fine barrière tunnel de $Al_xGa_{1-x}As$ d'épaisseur de l'ordre de la longueur magnétique ($\sim l$) dans la direction cristallographique (011) i.e. perpendiculairement à la direction de croissance initiale (100), comme on peut le voir à la fig. (3.5) La présence de cette barrière interrompt le plan électronique du 2-DEG, et crée un bord très abrupt avec une précision atomique. Chaque méthode possède des avantages et des inconvénients. Dans le QPC, en raison

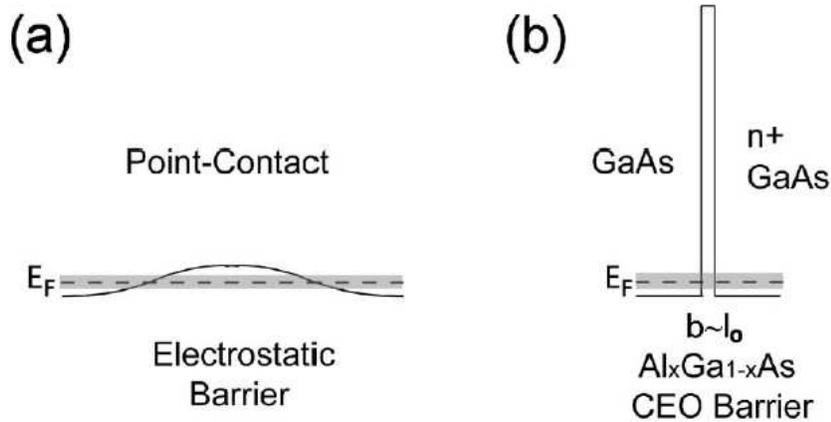


FIG. 3.3 – Barrières tunnel pour (a) le point de contact quantique, (b) un barrière obtenue par croissance sur bord clivé (barrière de largeur $b \sim l$). A $B = 10T$, la longueur magnétique $l \sim 8nm$

d'une importante séparation spatiale entre les grilles métalliques et le 2-DEG, le tracé des bords du 2-DEG est nécessairement très arrondi. La barrière tunnel est donc basse, épaisse et arrondie (cf Fig. 3.3 a), ce qui n'autorise qu'une faible gamme d'énergie pour étudier la dépendance de la densité d'état du χ LL en fonction de l'énergie. En revanche, cette géométrie a l'avantage d'offrir une grande souplesse d'utilisation : on peut modifier la forme et la largeur de la barrière de manière réversible en faisant varier la tension sur les grilles. Ceci permet d'observer l'effet tunnel d'électrons *et* de quasi-particules (cf Fig. 3.2). La technique CEO conduit à la formation d'une barrière fine, très haute dont le tracé est très bien défini (cf Fig. 3.3b). Cette barrière conduit à des éléments de matrice de l'effet tunnel indépendants de l'énergie dans la gamme d'énergie considérée. Cette propriété permet l'étude propre et directe de la densité d'état. L'inconvénient majeur de cette structure est sa rigidité au sein d'un échantillon. Le coefficient tunnel dépend de la largeur de la barrière, il faut donc créer différentes barrières avec des largeurs différentes. Enfin, jusqu'à présent, seul l'effet tunnel électronique a été observé dans ces structures.

3.1.3 Transport à travers un point de contact quantique

Miliken *et al.* [25] ont été les premiers à réaliser des expériences d'effet tunnel entre deux bords à $\nu = 1/3$ dans une géométrie de point de contact quantique. Ils ont remarqué différentes

indications d'un comportement différent de celui d'un liquide de Fermi. En particulier, ils ont observé une différence nette, à basse température, entre les résonances tunnel de deux bords à $\nu = 1/3$ et à $\nu = 1$. Sur Fig. (3.4), on voit que, dans les deux cas, les résonances apparaissent quand le QPC a été ouvert en augmentant progressivement la tension négative appliquée, le facteur de remplissage étant réglé par ajustement du champ magnétique. Dans le cas $\nu = 1$ les résonances deviennent indépendantes de la température en-dessous de $100mK$ mais à $\nu = 1/3$, les résonances sont sensibles à une décroissance de la température de $172mK$ à $41mK$. En particulier, la largeur des pics décroît significativement avec la température, en accord avec une fonction de type $T^{2/3}$, comme la théorie le prédit [26]. On observe également des non-linéarités dans les pieds (donc hors-résonance) des pics de résonance, en accord qualitatif avec la théorie.

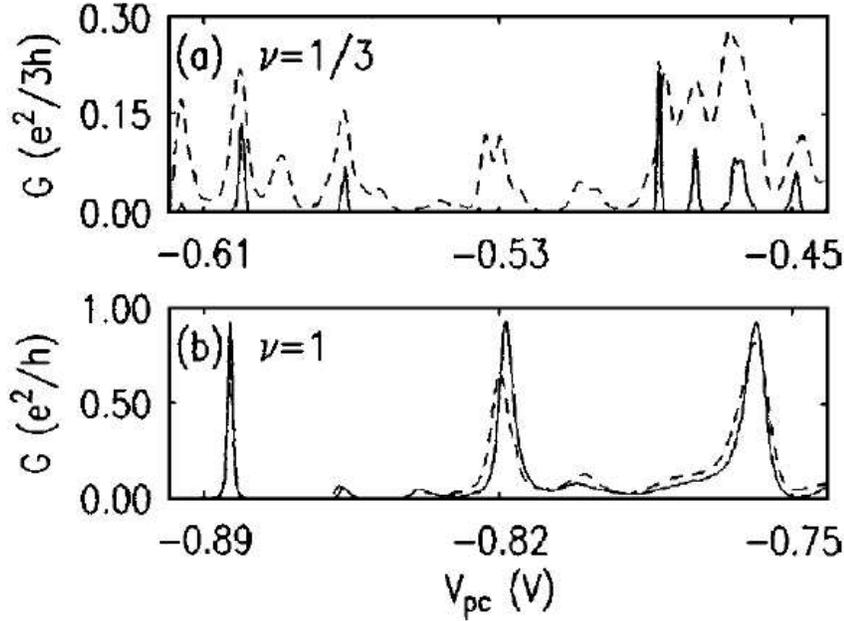


FIG. 3.4 – Conductance en fonction de la tension de grille appliquée au point de contact quantique (a) au plateau $\nu = 1/3$ à $T = 41mK$ (traits pleins) et à $T = 172mK$ (traits pointillés) (b) au plateau $\nu = 1$ à $T = 42mK$ (traits pleins) et à $T = 101mK$ (traits pointillés)

Au-delà de ces aspects, il n'est pas du tout évident d'extraire des informations quantitatives de ce genre d'expériences. Dans la géométrie du QPC, la barrière tunnel étant basse et étendue, seule une gamme d'énergie limitée est accessible à l'expérience. Hors de cette gamme, d'importantes distorsions des caractéristiques de l'effet tunnel compliquent la détermination de la densité d'état. En conséquence, en observant l'effet tunnel hors-résonance dans une gamme de température variant de 2 – 3 ordres de grandeur, il est difficile de clairement différencier une dépendance en température en loi de puissance (T^4) [26] d'une loi de saut à échelle variable plus conventionnelle ($e^{(T_g/T)^{1/2}}$ ou $e^{(T_g/T)^{1/3}}$). La détermination d'une forme précise de la dépendance de la largeur de raie des résonances pose aussi des problèmes [27]. Enfin, certains aspects de ces résultats se sont avérés difficiles à reproduire [28, 29]. Malgré ces limitations, les expériences de Miliken *et al.* [25] ont fourni une première démonstration du fait que les canaux de bords fractionnaires à $\nu = 1/3$ ne sont pas des liquides de Fermi.

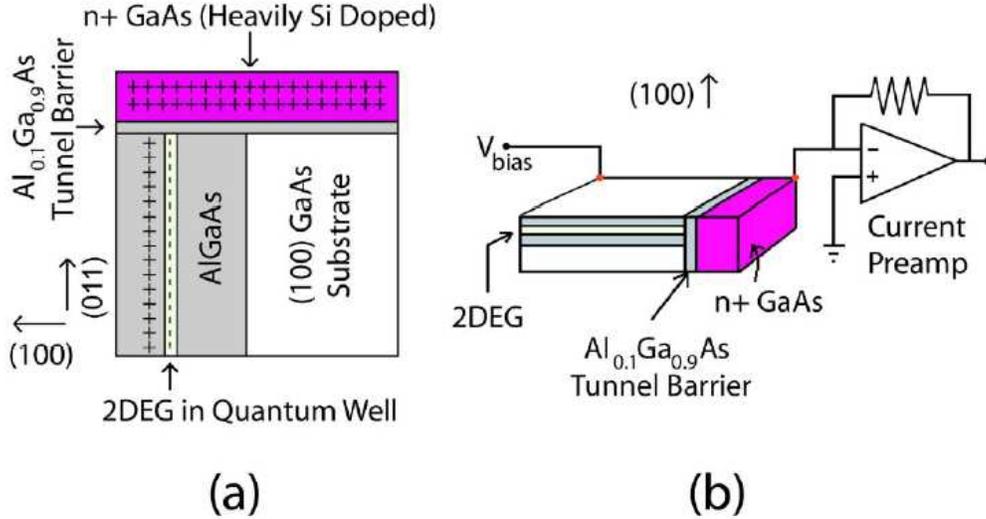


FIG. 3.5 – Echantillon réalisé par la technique de croissance sur bords clivés.(a) géométrie de l'échantillon avec la barrière tunnel de $\text{Al}_{0.1}\text{Ga}_{0.9}\text{As}$ déposée par MBE sur bord d'un échantillon habituel (croissance suivant la direction (100)) préalablement clivé suivant la direction (011). On peut également voir le GaAs métal dopé n . (b) schéma du dispositif de mesure du courant tunnel.

3.1.4 Expériences sur bords clivés

Des avancées majeures ont été réalisées en observant clairement une loi de puissance à la fois dans les caractéristiques $I_T(V)$ et dans la conductance différentielle en fonction de la température, en utilisant la technique CEO [17, 30, 31, 32]. Les échantillons de ce type sont fabriqués par un processus à deux étapes décrit ci-dessous. La possibilité de réaliser des barrières abruptes très hautes et fines, avec un excellent contrôle sur la largeur a ouvert de nouvelles perspectives expérimentales dans l'étude des χLL .

Pfeiffer *et al.* [30] ont été les premiers à utiliser la technique de CEO pour réaliser une croissance par MBE sur le plan (011) de $\text{GaAs}/\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}$, préalablement cleavé. Cette seconde croissance se produit après une première croissance classique selon la direction habituelle (100), et après un clivage *in situ* suivant la direction (011) (cf Fig. 3.5). Dans cette géométrie, l'effet tunnel a lieu à partir d'un métal GaAs dopé n à $D = 3$ que l'on a fait croître sur le plan (011). Les électrons arrivent dans un canal de bord d'un fluide de Hall fractionnaire d'un 2-DEG contenu dans un puit quantique dans le plan (100).

Dans la mesure où les plans (100) et (011) sont perpendiculaires, la seconde croissance exploite la troisième dimension, dont on voit quelques exemples sur la Fig. (3.6). En combinant ce type de croissance dans les deux directions et en modulant le dopage, il est possible de fabriquer un fil quantique à $D = 1$ pour lequel les parois de confinement sont uniformes à une précision atomique. En utilisant ces procédés qui permettent de réaliser des fils quantiques avec de largeur parfaitement contrôlée, il est également possible d'échanger les rôles joués par GaAs et $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ afin de former des barrières d'énergie perpendiculaires (cf Fig. 3.7, 3.8). Il est donc possible de faire croître des structures dans lesquelles l'effet tunnel se produit entre différents 2-DEGs situés dans le plan (011) (cf Fig. 3.7). C'est une géométrie que nous étudierons en détail plus loin. L'effet tunnel peut aussi se produire entre deux 2-DEG appartenant séparément aux

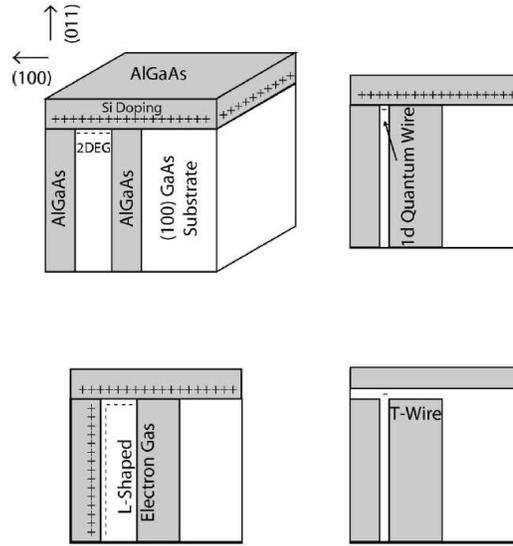


FIG. 3.6 – Différents échantillons atypiques créés par la technique CEO. Dans le sens anti-trigonométrique à partir d'en haut à gauche : 2-DEG déposé sur le plan (011), fil quantique à $D = 1$, fil en T et 2-DEG en L. Les gaz d'électrons sont représentés par des pointillés.

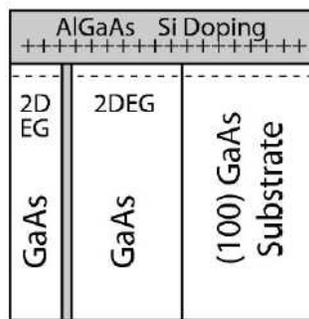


FIG. 3.7 – Echantillon réalisé à partir de la technique CEO permettant l'effet tunnel de 2-DEG vers 2-DEG dans le plan (011). La direction (100) est l'horizontale et (011) la verticale dans le plan de la feuille. Les gaz d'électrons sont représentés par des pointillés.

plans (100) et (011) à travers une barrière dans le plan (011) (cf Fig. 3.8).

Les échantillons utilisés par Chang *et al.* [17] pour tester la validité de la théorie des χ LL correspondent à la Fig (3.5). Le bord abrupt est formé par un clivage *in situ* dans la direction (011), puis par la croissance d'une fine barrière suivie par 15nm de GaAs non dopé puis le GaAs métal fortement dopé n. La barrière de potentiel, résultant d'une discontinuité dans la structure de bande entre le AlGaAs et le GaAs, impose un potentiel abrupt à l'atome près d'une hauteur de 100 meV par rapport au bas de la bande de conduction à $x = 0.1$ et même plus quand $x > 0.1$. Le 2-DEG à grande mobilité du plan (100) se termine dans la direction (011) par cette barrière abrupte, ce qui donne naissance à un potentiel de confinement des bord très abrupt et complètement opposée au tracé diffus obtenu par les grilles du QPC. La largeur de la barrière est comprise entre 5nm et 25nm et sa hauteur est de l'ordre de 75 meV au-dessus du potentiel chimique du 2-DEG. Elle est donc bien au-dessus de l'énergie de Fermi du système $E_f \sim 4$ meV (cf Fig. 3.3).

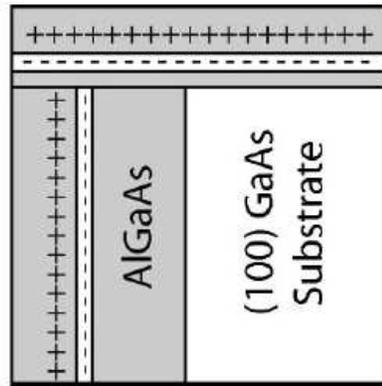


FIG. 3.8 – Echantillon réalisé à partir de la technique CEO permettant l'effet tunnel de 2-DEG vers 2-DEG du plan (011) vers le plan (100). La direction (100) est l'horizontale et (011) la verticale dans le plan de la feuille. Les gaz d'électrons sont représentés par des pointillés.

3.1.5 Conductance tunnel à $\nu = 1/3$

Les résultats suivants sont dus à Chang *et al.* [17]. Ils ont clairement montré la dépendance en loi de puissance de $I_{\mathcal{T}}(V)$ de l'effet tunnel d'électrons dans un canal de bord fractionnaire. En utilisant la technique CEO, les auteurs ont étudié la conductance linéaire $G_{\mathcal{T}}$, la caractéristique courant-tension $I_{\mathcal{T}}(V)$, et la conductance différentielle $dI_{\mathcal{T}}/dV$, de l'effet tunnel électronique entre le GaAs métal dopé n et divers fluide de Hall incompressibles dans la géométrie des Fig. (3.5, 3.9). Les expériences ont été menées sur deux échantillons distincts de densité électronique $n = 1.1 \times 10^{11} \text{cm}^{-1}$ (échantillon 1.1) et $n = 2.0 \times 10^{11} \text{cm}^{-1}$ (échantillon 2). Pour l'effet tunnel dans un canal de bord à la fraction $\nu = 1/3$, ils ont obtenu $I_{\mathcal{T}} \propto V^{2.7 \pm 0.06}$ et $G_{\mathcal{T}} \propto T^{1.7 \pm 0.08}$. Ces résultats conduisent à la même valeur de $g \approx 2.7$. En revanche, l'effet tunnel vers un canal de bord à $\nu = 1$ a fourni une relation $I_{\mathcal{T}}(V)$ quasi-linéaire, et des valeurs de $G_{\mathcal{T}}$ indépendantes de la température. Ces résultats indiquent que le canal de bord fractionnaire à $\nu = 1/3$ se comporte conformément à la théorie des χ LL, alors que le canal de bord à $\nu = 1$ se comporte comme un liquide de Fermi.

Examinons plus en détail ces résultats. A la Fig. (3.9), nous voyons la résistance longitudinale (R_{xx}), la résistance de Hall (R_{xy}), et la conductance tunnel $G_{\mathcal{T}}$ en fonction du champ magnétique et de la température pour l'échantillon représenté à la Fig. (3.5). L'effet Hall fractionnaire à $\nu =$

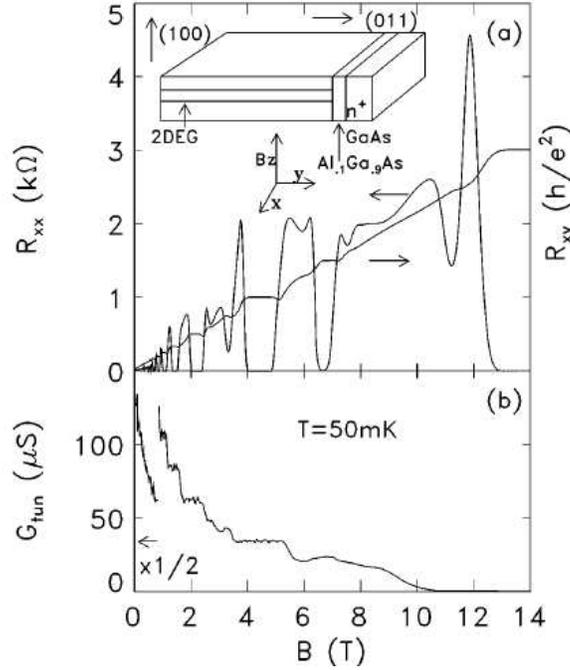


FIG. 3.9 – (a) Résistance longitudinale (R_{xx}) et résistance de Hall, (b) conductance linéaire ($G_{\mathcal{T}}$) à basse tension appliquée, en fonction du champs magnétique dans les expériences de Chang *et al.* [17]. La température est de 50mK.

$1/3$ se produit pour $B=13.4T$. La conductance $G_{\mathcal{T}}$ chute brutalement après 9.5T. Pour voir la contribution de la densité d'état dans la réduction du courant de la Fig. (3.9), les caractéristiques $I_{\mathcal{T}}(V)$ ont été représentées en échelle log-log pour des échantillons de même géométrie mais de facteur de remplissage $\nu = 1/3$ (cf Fig. 3.10). Les champs magnétiques correspondants sont 13.4 T et 10.8 T, à une température de 25mK. Pour une tension inférieure à $\sim 12\mu V$ l'effet tunnel est dominé par la température ($k_bT/e \sim 2.15\mu V$) et $I_{\mathcal{T}}(V)$ est linéaire. Au dessus de la tension de cross-over de $6k_bT/e \sim 12\mu V$, la caractéristique $I_{\mathcal{T}}(V)$ suit une loi de puissance $I_{\mathcal{T}} \propto V^g$ avec $g \approx 2.7 \pm 0.06$ et 2.65 ± 0.06 . La loi en puissance est visible sur un ordre de grandeur en V et trois en $I_{\mathcal{T}}$. Ce comportement en puissance est la prédiction principale de la théorie des χ LL. Nous pouvons ensuite voir que la tension de cross-over entre le comportement linéaire et non-linéaire suit une loi d'échelle en température, en représentant les caractéristiques $I_{\mathcal{T}}(V)$ entre 26 et 840mK (cf Fig. 3.11a) et les courbes normalisées par les valeurs à 26mK (cf Fig. 3.11b). Tous les points se positionnent sur une courbe universelle comme attendu [26].

A la Fig. (3.12), nous avons représenté la conductance différentielle $dI_{\mathcal{T}}/dV$, mesurée indépendamment. L'accord avec la théorie est également très bon. Les courbes en traits pleins représentent les dérivées $dI_{\mathcal{T}}/dV$ des courbes théoriques de la Fig. (3.10). On observe une loi de puissance avec des exposants de 1.75 ± 0.08 et 1.5 ± 0.08 . Ces loi sont observées sur plus d'un ordre de grandeur en T et deux ordres de grandeur en $G_{\mathcal{T}}$. Les exposants obtenus sont très proches de ceux déterminés à partir des courbes $I_{\mathcal{T}}(V)$ et $dI_{\mathcal{T}}/dV$. Enfin, une ultime vérification consiste à tracer une loi d'Arrhenius de $\log_{10}(G_{\mathcal{T}})$ en fonction de $1/T$, de même que diverses fonctions avec "sauts variables" pour l'échantillon 1.1. A la Fig. (3.13) on constate que ni un processus thermiquement activé ni la variation d'énergie de la barrière, ni des "sauts variables" ne sont appropriés.

A la Fig. (3.14), nous avons représenté les caractéristiques $I_{\mathcal{T}}(V)$ pour un échantillon à

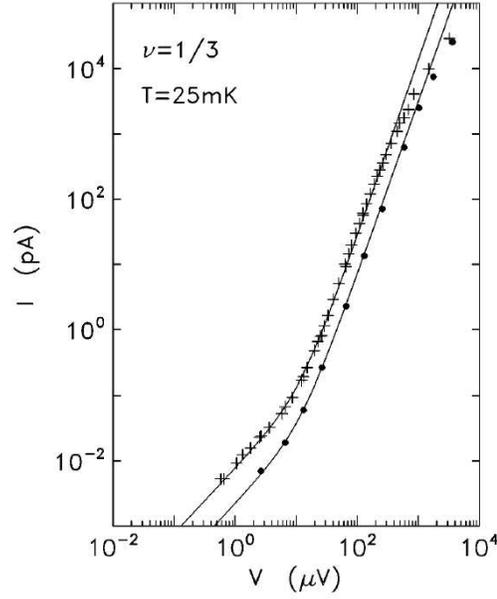


FIG. 3.10 – Caractéristique courant-tension $I_{\mathcal{T}}(V)$ pour l’effet tunnel de GaAs dopé n (noté n^+ sur le schéma) vers un canal de bord fractionnaire à $\nu = 1/3$. Les croix font référence à l’échantillon 1.1 à $B = 13.4T$ et les points à l’échantillon 2, à $B = 10.8T$. Les courbes en traits pleins représentent les fits théoriques avec $g = 2.7$ et $g = 2.65$ respectivement [17]

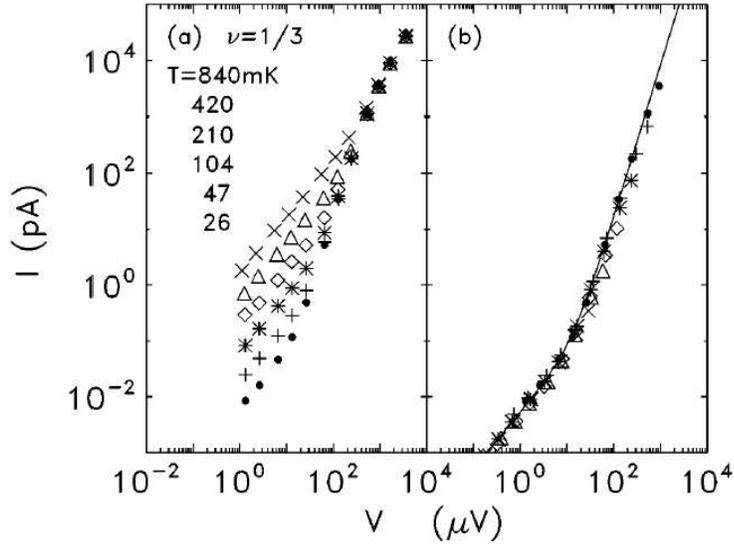


FIG. 3.11 – Evolution de la caractéristiques ($I_{\mathcal{T}}(V)$) en fonction de la température à $\nu = 1/3$: (a) graph log-log de ($I_{\mathcal{T}}(V)$) à différentes températures, (b) $I_{coll}(V') = I_{\mathcal{T}}(V)[G_{\mathcal{T}}(T_0)/G_{\mathcal{T}}(T)]_{V \rightarrow 0}$, avec $T_0 = 26\text{mK}$ et $V' = VT/T_0$ [17].

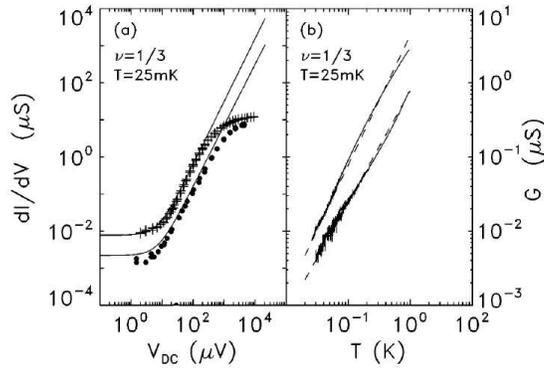


FIG. 3.12 – $dI_{\mathcal{T}}/dV$ en fonction de la tension et de la température, à basse tension : (a) $dI_{\mathcal{T}}/dV$ pour les échantillons 1.1 (croix) et 2 (points) à $\nu = 1/3$ et $T = 25\text{mK}$. Les courbes en traits pleins sont les $dI_{\mathcal{T}}/dV$ théoriques obtenues à partir de 3.10 (b) Dépendance en température de $dI_{\mathcal{T}}/dV$ pour 1.1 (en haut) et 2 (en bas) à $V = 4.97\mu\text{V}$ et $V = 2.64\mu\text{V}$. Les lignes en traits pleins sont les courbes théoriques pour $g - 1 = 1.75$ et 1.5 [17].

$\nu = 1$. Contrairement au comportement à $\nu = 1/3$, $I_{\mathcal{T}}(V)$ est quasi-linéaire. Remarquons que

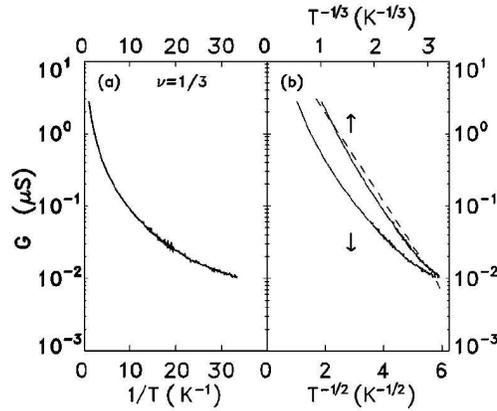


FIG. 3.13 – Données de fig. 3.12, tracées en loi (a) d'Arrhenius $G_{\mathcal{T}} \propto e^{-(T_0/T)^{1/2}}$, (b) "sauts variables" $G_{\mathcal{T}} \propto e^{-(T_0/T)^{1/3}}$. L'absence de ligne droite indique que ces lois ne sont pas adéquates pour décrire les données [17].

pour l'effet tunnel à $\nu = 1$, ces expériences indiquent que le bord du fluide Hall se comporte comme un liquide de Fermi *chiral*. Ceci est un rare exemple de système fortement corrélé à $D = 1$ avec un comportement de type liquide de Fermi plutôt que liquide de Luttinger. En conclusions, les résultats expérimentaux présentés ici attestent que le liquide de Luttinger chiral est un modèle fiable des canaux de bord en regime d'effet Hall fractionnaire. Nous pouvons maintenant utiliser les χLL dans des configurations plus exotiques afin de décrire des phénomènes de transport nouveaux.

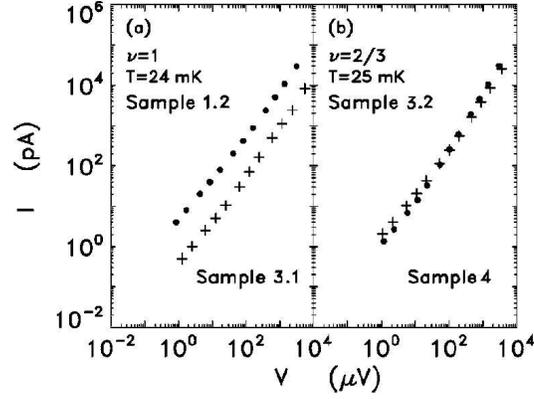


FIG. 3.14 – $I_T(V)$ à (a) $\nu = 1$ et (b) $\nu = 2/3$; $B = 4.8T$ (croix) et $B = 8.5T$ (points) [17].

3.2 La jonction tunnel étendue

Les canaux de bords dans le régime d'effet Hall quantique fractionnaire (EHQF) sont de très intéressants exemples de systèmes quantiques unidimensionnels en interaction forte. Les modes de propagation des bords droit (R) et gauche (L) d'un échantillon de Hall sont spatialement séparés par une distance macroscopique, ce qui conduit à une suppression exponentiellement faible de la rétrodiffusion de l'un dans l'autre. La cause principale de localisation est donc supprimée et les modes de bord sont des systèmes balistiques presque idéaux. Un travail considérable à été consacré à l'étude exclusive de cette seule propriété [16]. Une géométrie particulièrement intéressante est obtenue lorsque l'on réalise une constriction du gaz bidimensionnel : c'est le point de contact quantique. Le potentiel électrostatique créé par une électrode en regard du gaz permet de rapprocher localement les deux canaux de bord, rendant alors possible l'effet tunnel exactement en ce point du fluide [16]. Dernièrement, les progrès réalisés dans les techniques de croissance sur bord clivé ont permis la fabrication d'échantillons pour lesquels l'effet tunnel à lieu le long d'une barrière de longueur mésoscopique, séparant deux 2-DEG (cf Fig. 3.15). Kang *et al.* [33, 34] ont réalisé une étude expérimentale détaillée de la conductance de ce nouveau type de structure.

3.2.1 Expérience d'effet tunnel étendu

Configuration de la jonction tunnel étendue

Les échantillons utilisés sont constitués de deux 2-DEG séparés par une barrière de $100 \mu\text{m}$ de longueur et de 8.8 nm de largeur avec une précision atomique (cf Fig. 3.15a, b). Kang *et al.* ont utilisé la technique de CEO pour réaliser une croissance par MBE sur le plan (011) de GaAs/ $\text{Al}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$, préalablement clivé. Cette seconde croissance se produit après une première croissance classique selon la direction habituelle (100) alternant GaAs, AlGaAs (la barrière proprement dite) puis GaAs et après un clivage *in situ* suivant la direction (011) (cf Fig. 3.15 a). Ils ont alors obtenu deux 2-DEG dans le plan (100) séparés par une barrière de potentiel très haute ($\sim 370\text{meV}$ au-dessus du niveau de Fermi) (cf Fig. 3.15 a). Dans le régime d'effet Hall quantique, il se forme des modes de conduction le long de la barrière : ce sont les canaux de bords contrepropageant de part et d'autres de la barrière (cf Fig. 3.16).

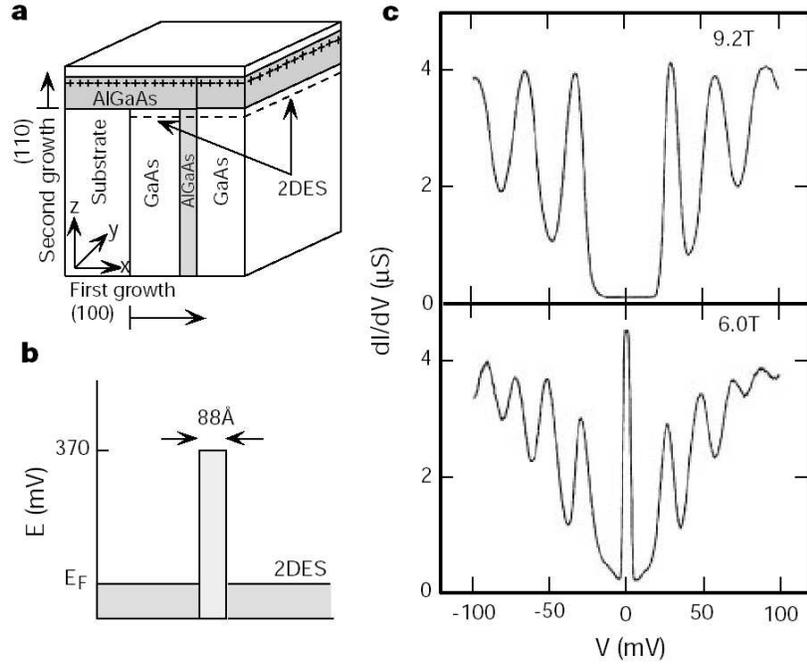


FIG. 3.15 – Structure et conductance différentielle de la barrière tunnel étendue. (a) La première croissance, qui a lieu sur un substrat de GaAs selon la direction (100), est constituée d’une couche de $13\mu\text{m}$ de GaAs non dopé, d’une couche de 88 \AA de $\text{Al}_{0.1}\text{Ga}_{0.9}\text{As}/\text{AlAs}$ non dopé suivie d’une couche de $14\mu\text{m}$ de GaAs non dopé. Cet échantillon est ensuite clivé suivant le plan (110) dans un appareil à MBE et on fait croître sur le bord clivé, une couche de 3500 \AA de AlGaAs dopé n par des atomes de Si à une distance de 500 \AA du bord extérieur. Les électrons des Si migrent uniquement les couches de GaAs et forment deux 2-DEG de $13\mu\text{m}$ et $14\mu\text{m}$, séparés par une barrière de $\text{Al}_{0.1}\text{Ga}_{0.9}\text{As}/\text{AlAs}$ de 88 \AA de large et 370meV de hauteur. Les deux 2-DEG sont reliés à des contacts loin de la zone où a lieu l’effet tunnel. (b) Diagramme de bande schématique du système. Les expériences sont menées sur deux échantillons distincts de densité électronique $n = 1.1 \times 10^{11}\text{cm}^{-2}$ et $n = 2.0 \times 10^{11}\text{cm}^{-2}$. La mobilité des 2-DEG est estimée à $\sim 1 \times 10^5\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$. (c) Conductance différentielle pour le second échantillon. Ces conductance sont mesurées en régime AC à basse fréquence (et de $10\mu\text{V}$ d’amplitude) avec une différence de potentiel DC V_{bias} appliquée de part et d’autre de la barrière. Les échantillons sont mesurés à 300mK [33].

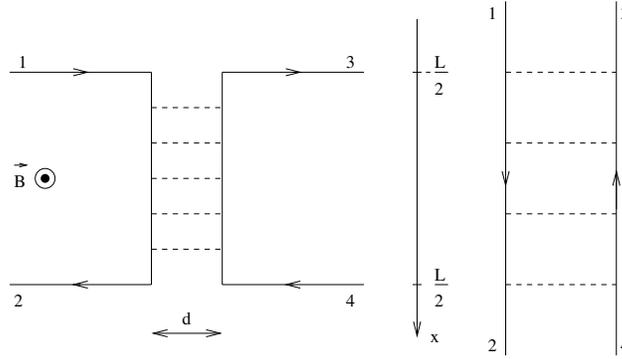


FIG. 3.16 – Schémas de la barrière de longueur L avec les canaux de bords et l’effet tunnel de l’un vers l’autre sur la longueur de la barrière. A gauche, la géométrie des échantillons de Kang *et al.*, à droite une géométrie topologiquement équivalente.

Plateaux de conductance étendus

Les auteurs ont mesuré la conductance différentielle $dI_{\mathcal{T}}/dV_{bias}$ liée à l’effet tunnel en fonction de la différence de potentiel V_{bias} appliquée entre les deux gaz et de l’intensité du champ magnétique B . pour cela, ils ont imposé une différence de potentiel V_{bias} entre les réservoirs 1 et 4. Pour obtenir la conductance différentielle, ils ont rajouté une différence de potentiel AC de $10\mu\text{V}$ d’amplitude et de basse fréquence ; ils ont mesuré le courant entre les fils 1 et 4 en refermant le circuit *via* les réservoirs 1 et 4. La partie variable du courant est la conductance différentielle de la barrière tunnel. Cette méthode différentielle est plus précise que la différentiation numérique. Sur la Fig. (3.15c) nous voyons $dI_{\mathcal{T}}/dV_{bias}$ à $B = 9.2\text{T}$ et $B = 6.0\text{T}$. A $B = 9.2\text{T}$, $dI_{\mathcal{T}}/dV_{bias}$ est nulle à $V_{bias} = 0$ et des pics de conductance régulièrement espacés apparaissent au-delà d’un seuil de tension appliquée. Chaque pic représente la contribution supplémentaire de canaux de bords des niveaux de Landau successifs à l’effet tunnel à travers la barrière. Ces pics de conductance sont séparés d’une énergie, à peu près constante, de l’ordre de l’énergie cyclotron $\hbar\omega_c$ ($\sim 17\text{meV}$ à 10T). La plupart des traces dI/dV_{bias} à différentes valeurs du champs magnétique ont la même allure. En revanche, pour certaines valeurs du champ, il n’y a pas de tension de seuil et il apparaît un pic de conductance très abrupt et fin à $V_{bias} = 0$ (cf Fig. 3.15d). Sur la Fig. (3.17), nous voyons $dI_{\mathcal{T}}/dV_{bias}$ en fonction du facteur de remplissage, $\nu = n_e h / |q_e| B$, et de la tension normalisée, $eV_{bias} / \hbar\omega_c$. Les points bleus et rouges représentent respectivement les faibles et grandes valeurs de $dI_{\mathcal{T}}/dV_{bias}$. On observe des régions où $dI_{\mathcal{T}}/dV_{bias} \approx 0$, en particulier autour de $V_{bias} \approx 0$ pour des facteurs de remplissage $\nu < 1$. On observe les mêmes extinctions de conductance à tension nulle autour $\nu \sim 2$. En revanche, pour $\nu = 1.2 - 1.5$ et $2.2 - 2.5$, un plateau de conductance très fin domine à $V_{bias} = 0$. Les positions des pics de conductance varient à peu près linéairement aux facteurs de remplissage plus élevés et constituent des branches de maxima qui rejoignent les plateaux à $V_{bias} = 0$. Ces plateaux de conductance à $V_{bias} = 0$ semblent résister à l’interprétation théorique, contrairement aux autres caractéristiques de cette Fig. (3.17). En effet, ces plateaux de conductance occupent des plages étendues de facteur de remplissage $\nu = 1.2 - 1.5$ et $2.2 - 2.5$ et la valeur de la conductance sur ces plateaux est $\sim 0.01e^2/h$ i.e. bien plus faible que le quantum de conductance.

Interprétation à un corps

Par analogie avec le transport dans les canaux de bords de l’effet Hall entier, considérons l’effet tunnel entre ces deux 2-DEG en termes d’états de bords. Nous choisissons la direction y longitudinale à la barrière et la direction x perpendiculaire à la barrière. Les états de bords des

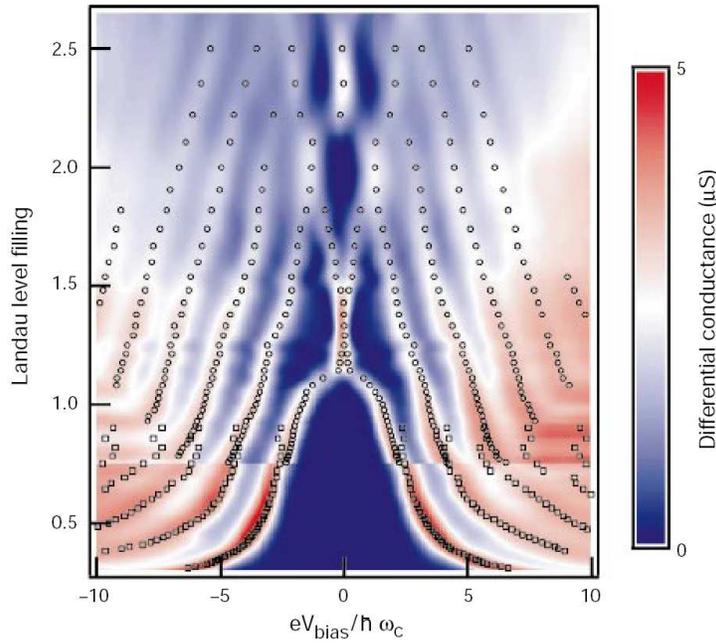


FIG. 3.17 – Conductance différentielle tunnel de l'échantillon. Le facteur de remplissage de Landau ν et la tension normalisée $eV_{bias}/\hbar\omega_c$ qui forment les axes, donnent un caractère universelle à ces données qui regroupent les résultats des deux échantillons. Les maxima sont représentés par des cercles et des carrés. Les régions en bleu correspondent aux zones de conductance minimale (~ 0), en rouge pour la conductance maximale ($\sim 10^{-6}\Omega^{-1}$)[33].

deux 2-DEG se forment le long de la barrière suivant la direction y et sont les mêmes que pour un 2-DEG simple (cf section 2.10). A la Fig. (3.18), nous voyons l'énergie $E(x)$ des niveaux de Landau en fonction de la position x : $E(x)$ correspond à l'énergie d'un électron dont le centre de l'orbite cyclotron est située en x . Comme $x = -k_y l_o^2$, le diagramme d'énergie (cf Fig. 3.18) est aussi la relation de dispersion à *une particule* des électrons se propageant *le long* de la barrière avec la vitesse $v = \hbar^{-1}dE/dk_y = \hbar^{-1}l_o^2 dE(x)/dx$. Les électrons du bord gauche (L) de la barrière se propagent en sens opposés de ceux du bord droit (R). A chaque intersection des relations de dispersion des bords L et R, il existe deux états de bord dégénérés, de sens de propagation opposés et de même vecteur d'onde k_y . Par exemple, l'intersection entre le premier niveau de Landau de chacun des 2-DEG a lieu uniquement à $k_y = 0$. La dégénérescence à l'intersection des niveaux de Landau est levée par l'ouverture de petits gaps d'énergie dus à l'effet tunnel des électrons des états droits vers les états gauches et réciproquement. Ces gaps séparent en fait les combinaisons symétriques et antisymétriques des fonctions d'onde correspondant à ces états (cf Fig. 3.18). Le transport *le long* de la barrière dépend crucialement de la position de l'énergie de Fermi par rapport à ces relations de dispersion à une particule. Dans l'expérience de Kang, il suffit de modifier le champ magnétique (et donc le facteur de remplissage) pour déplacer les relations de dispersion par rapport à l'énergie de Fermi. Commençons par considérer le cas où le niveau de Fermi se trouve sous le maximum de la branche la plus basse de Fig. (3.18) à E_1 , par exemple. Les électrons des deux 2-DEG suivent deux chemins séparés spatialement, de sens opposé le long de la jonction comme représenté à l'insert A de Fig. (3.18). Ils se propagent le long de la barrières mais ils possèdent des valeurs de k_y différentes et ne sont pratiquement pas couplés. L'effet tunnel à travers la barrière est alors quasiment négligeable, ce qui correspond à l'absence de conductance à $V_{bias} = 0$ pour les faibles facteurs de remplissage. Quand le niveau

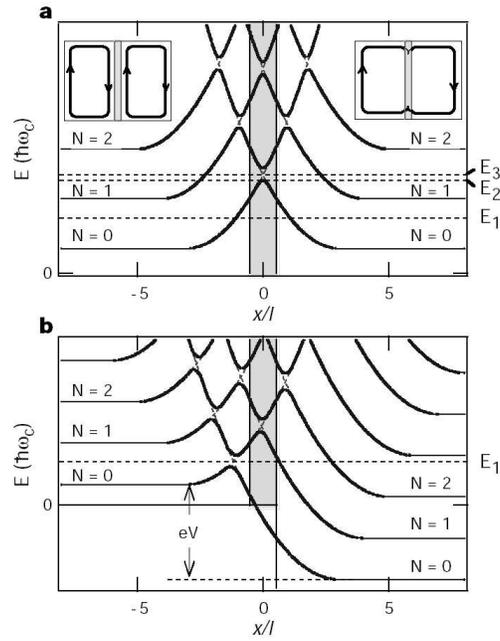


FIG. 3.18 – Niveaux de Landau au voisinage de la barrière (a) $V_{bias} = 0$, loin de la barrière les niveaux sont plats; l'énergie croit de manière quadratique quand les électrons se rapprochent de la barrière. L'effet tunnel ouvre de petits gaps d'énergie aux points d'anti-croisement de ces niveaux. (b) Même figure avec $eV_{bias} \sim 2\hbar\omega_c$ [33]

de Fermi atteint le premier maximum en E_2 , les états de bord des deux cotés de la barrière ont des vecteurs d'onde identiques et sont fortement couplés i.e. le système est à *la résonance* ce qui conduit à un effet tunnel important. En réalité, la localisation des fonctions d'onde à très peu changée par rapport à l'insert A de Fig. (3.18), mais le couplage entre les deux bords à considérablement augmenté en raison de l'équivalence des moments k_y . L'effet tunnel observé à coïncidence des moments k_y est qualifié d'effet tunnel *résonnant*. Pour cette valeur précise de E_F , le pic de conductance est fini comme les pics de conductance que l'on observe sur les données expérimentales à $V_{bias} = 0$. D'après les relations de dispersion de Fig. (3.18), les états de bord du second niveau de Landau ($N = 1$) sont également occupés pour ces facteurs de remplissage mais ne sont pas couplés.

Insuffisances du modèle

Quand le niveau de Fermi est légèrement au-dessus de cette position critique, et se trouve dans le gap, les électrons ne peuvent plus se propager *le long* de la barrière, comme on le voit sur l'insert B de Fig. (3.18). Le couplage entre les électrons des deux 2-DEG devrait disparaître et l'effet tunnel devrait être nul. Ceci soulève une question intéressante : si les électrons ne peuvent plus se propager le long de la barrière, et qu'en raison de la chiralité des canaux de bords, ils ne peuvent pas être rétro-diffusés, on pourrait penser qu'ils *doivent* traverser la barrière par effet tunnel. Cela devrait conduire à un pic de conductance de $\sim e^2/h$, ce qui est deux ordres de grandeur supérieur à ce qui est observé. Le modèle exact de diffusion et d'effet tunnel à ces valeurs de l'énergie E_F n'est pas clair mais il est certain que ce modèle simple ne rend pas compte des résultats expérimentaux. Le pic de conductance à $V_{bias} = 0$ persiste en effet sur une plage de facteurs de remplissage $1.2 < \nu < 1.5$, au lieu de n'exister qu'en une seule valeur de ν et sa valeur est deux ordres de grandeur inférieure à la valeur naïvement attendue.

Loin de $V_{bias} = 0$, l'allure complexe de Fig. (3.18) s'explique bien. A tension finie, un des deux diagrammes de Landau de Fig. (3.17) est décalé en bloc par rapport à l'autre de l'énergie eV_{bias} , comme on le voit à Fig. (3.18). Cela conduit à un décalage dans le croisement des niveaux et les conditions de conduction sont décalées en conséquence. Par exemple, quand $E_F = E_1$ à la Fig. (3.18a), l'effet tunnel est nul en raison de l'absence de couplage entre les états de bord. A la Fig. (3.18b) l'application de eV_{bias} a décalé l'intersection de sorte qu'elle se produit à E_1 . Cela favorise énormément le couplage entre les deux 2-DEG comme à la valeur $E_F = E_2$ de Fig. (3.18a) et fournit l'explication du décalage de la figure de conductance avec V_{bias} croissant pour des valeurs de ν plus faibles (cf Fig. 3.17).

Même si certaines caractéristiques des résultats expérimentaux sont claires, le modèle simple à une particule ne parvient pas à rendre compte de toute la complexité du phénomène de l'effet tunnel étendu. Beaucoup de travaux théoriques ont tenté de compléter la compréhension de ces résultats [35, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 44].

3.2.2 Principe de l'étude

Dans ce chapitre nous exposons le calcul *perturbatif* du courant tunnel entre deux canaux de bord contrepropageant. Chacun de ces canaux est décrit par un liquide de Luttinger chiral ; nous étudions la situation où les deux liquides sont caractérisés par le même exposant anormal g . La valeur de l'exposant anormal g du χ_{LL} est dictée par la physique du volume du fluide de Hall fractionnaire. L'exposant anormal intervient dans l'expression de la fonction de corrélation de la particule qui subit l'effet tunnel. Nous supposons que l'effet tunnel à lieu le long d'une barrière étendue avec une amplitude constante. La géométrie de l'effet tunnel étendu est potentiellement riche de nouveaux phénomènes d'interférences qui n'existent pas dans l'effet tunnel localisé en *un point*. Par exemple, Ho a mis en avant l'existence de courants oscillants entre canaux à $\nu = 1$ en l'absence de tension alternative (AC) [45]. Ce phénomène s'interprète simplement par

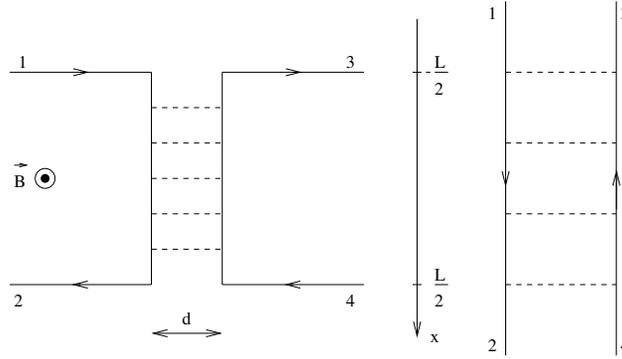


FIG. 3.19 – Schémas de la barrière de longueur L avec les canaux de bords et l’effet tunnel de l’un vers l’autre sur la longueur de la barrière. A gauche, la géométrie des échantillons de Kang *et al.*, à droite une géométrie topologiquement équivalente.

une image classique : les électrons du bord droit rebondissent le long de la barrière jusqu’à ce qu’il la traverse par effet tunnel. Une fois sur le bord gauche, ces électrons se propagent en décrivant des orbites cyclotron comme précédemment mais en sens opposé. Si la barrière est suffisamment longue, l’effet tunnel se produira de nouveau et les électrons apparaissent du côté droit où ils se propagent en sens opposé. Ainsi, dans le cas limite où la barrière est de longueur infinie, les électrons sont piégés le long de la barrière et oscillent entre le bord droit et gauche (cf Fig. 3.20). Nous allons montrer que dans le régime d’EHQF, il apparaît une structure non-triviale de résultats mélangeant les non-linéarités attendues dues au χ LL et les interférences dues à la cohérence du transport à travers la barrière étendue. Nous traiterons également la situation d’interaction forte entre les modes de propagation L et R, qui rentre dans le même cadre de traitement théorique. Dans ce dernier cas, l’exposant anormal g prend alors des valeurs non-universelles dictées par la nature de l’interaction, même pour les modes de Hall à facteur de remplissage entier. Nous obtiendrons le courant et le bruit associé pour une jonction tunnel étendue, en fonction de la longueur de la barrière, de la température, de l’interaction coulombienne à longue distance entre les bords L et R et du remplissage entier ou fractionnaire à $\nu = 1/m$ (m entier impair).

3.3 Géométrie et cinématique de l’effet tunnel étendu

La géométrie que l’on considère est illustrée sur la Fig. (3.19). Il s’agit d’une barrière étendue dont la hauteur demeure constante sur une longueur L . Cette barrière sépare deux 2-DEG. Il s’agit de la géométrie de l’échantillon étudié par Kang *et al.* Dans le régime d’effet Hall quantique, il se forme des modes de conduction le long de la barrière : ce sont les canaux de bords contre-propageant.

3.3.1 Hamiltonien du système

Etablissons d’abord la cinématique de l’effet tunnel étendu en raisonnant sur le cas d’un facteur de remplissage $\nu = 1$. Ceci correspond au cas étudié par Ho [45]. Les niveaux de Landau sont dégénérés dans le volume et leur énergie augmente au voisinage de la barrière. Ce phénomène s’applique des deux côtés de la barrière. Les niveaux de Landau de deux côtés se croisent à l’intérieur de la barrière (cf Fig. 3.21), région classiquement interdite, et l’effet tunnel va donner lieu à l’ouverture de gaps (cf Fig. 3.22). Cet effet est expliqué très clairement par une simple théorie effective à une particule, comme nous l’avons détaillé dans la section (3.2.1). On introduit

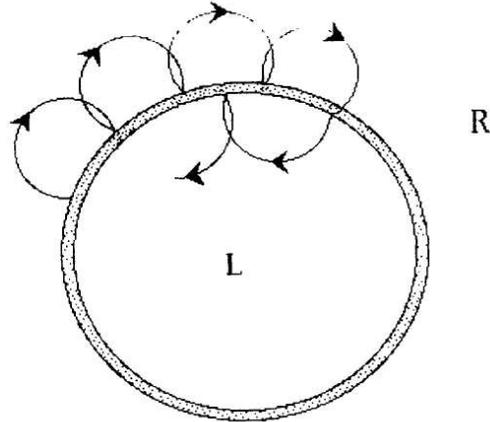


FIG. 3.20 – Image classique d’un électron piégé le long d’une barrière tunnel comme dans une géométrie de longueur infinie. L’électron oscille infiniment entre le bord intérieur (L) et extérieur (R) [45].

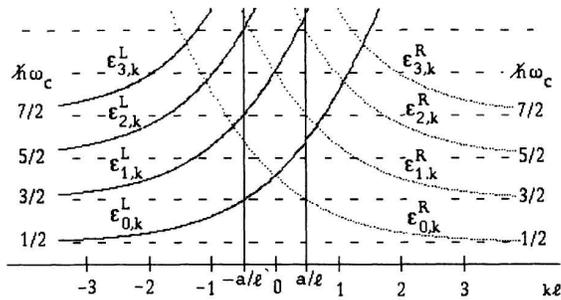


FIG. 3.21 – Spectre à une particule du système de Hall dans la géométrie de Kang *et al.*, dans la limite où la barrière est infiniment longue et haute. Le système est invariant par translation dans la direction x , le spectre peut être indicé par le moment k longitudinal et l’indice de Landau n . Dans ce cas limite, le spectre est la superposition des spectres habituels des systèmes de Hall L (traits pleins) et R indépendants (traits pointillés), au voisinage d’un mur de potentiel infini (cf Fig. 2.15). Ces spectres s’incurvent au voisinage de la barrière et se croisent, en particulier à $k = 0$. La largeur de la barrière est $d = 2a$, l est la longueur magnétique [45].

les champs des électrons chiraux se propageant vers la droite ψ_R et vers la gauche ψ_L ; ce sont les modes relevant lorsque le facteur de remplissage $1 \leq \nu \leq 2$. Ce sont les états de bords contre-propageant [24]. L'énergie cinétique due au potentiel de confinement est alors :

$$\mathcal{H}_{kin} = -iv \int dx (\psi_R^\dagger \partial_x \psi_R - \psi_L^\dagger \partial_x \psi_L), \quad (3.16)$$

avec v la vitesse de dérive le long de la barrière. Les modes L ont une énergie $\epsilon_L(k) = -vk$ et les modes R une énergie $\epsilon_R(k) = vk$. Ces relations de dispersion se croisent à $k = 0$ pour une énergie nulle (cf Fig. 3.21). C'est en ce point que l'effet tunnel se manifeste le plus fortement. L'effet tunnel à travers la barrière peut être décrit par un Hamiltonien mélangeant ces modes :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \mathcal{T} \int_{-L/2}^{+L/2} dx (\psi_R^\dagger(x) \psi_L(x) + \psi_L^\dagger(x) \psi_R(x)). \quad (3.17)$$

où \mathcal{T} est l'amplitude tunnel, supposée constante le long de la barrière. La coordonnée x est définie le long de la barrière comme sur la Fig. (5.3). Ainsi, les modes existent pour toutes les valeurs de x et l'effet tunnel n'a lieu que dans l'intervalle $[-L/2, +L/2]$. Cet Hamiltonien peut être considéré comme un terme de masse du champ de fermions pour une barrière de longueur infinie. Cette masse donne naissance à un gap dans le spectre d'excitations des fermions libres. La conséquence de ce gap est qu'il existe un intervalle de valeurs de l'énergie pour lesquelles il n'y a pas de solutions propagatives mais des solutions évanescentes le long de la barrière (cf Fig. 3.22). Ce phénomène se reproduit à l'intersection des niveaux de Landau plus élevés [33]. Le problème défini par $\mathcal{H}_{kin} + \mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ est une théorie de fermions libres qui a été étudiée exactement [45]. Les propriétés de transport de ce système peuvent être obtenues par une approche à la Landauer. Malheureusement une telle simplicité dans le formalisme n'est plus possible dans le régime fractionnaire : dans ce cas les opérateurs d'électrons sont décrits par la théorie des χ LL et plus par la théorie libre Eq.(3.16). L'Hamiltonien adéquat est donné par (2.170).

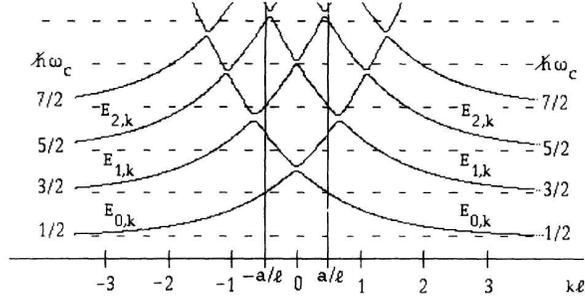


FIG. 3.22 – Les points d'intersection de la Fig. (3.21) s'ouvrent en petits gaps quand la hauteur de la barrière devient finie, autorisant l'effet tunnel du système L vers R et réciproquement. Loin de la barrière (i.e. dans le volume) le spectre est inchangé [45].

$$\mathcal{H}_{kin} = \frac{\pi v}{\nu} \int dx (\rho_R^2 + \rho_L^2) \quad (3.18)$$

avec $\rho_R(x) =: \psi_R^\dagger(x) \psi_R(x)$: l'opérateur de densité électronique du mode R décrivant les fluctuations de densités au point x et $\rho_L(x) =: \psi_L^\dagger(x) \psi_L(x)$: défini de la même manière pour le mode L . Nous nous intéressons au cas sans interactions à travers la barrière, de sorte que les χ LL sont découplés et que toutes les propriétés des fonctions de corrélations sont connues. Nous

continuons d'utiliser l'Hamiltonien Eq.(3.17) que nous traiterons de manière perturbative, afin d'obtenir la caractéristique $I_{\mathcal{T}}(V)$ du système. Considérons d'abord un seul bord traité comme un fluide de Hall fractionnaire de remplissage $\nu = 1/m$, m impair. Un unique boson chiral est alors suffisant pour décrire la théorie du χ LL correspondante. Le fluide de Hall détermine la valeur de l'exposant anormal g qui caractérise les corrélations au bord. On considère ici l'effet tunnel entre deux 2-DEG différents, les opérateurs ψ_R et ψ_L doivent alors être pris comme des opérateurs *électroniques*¹. Contrairement à l'effet tunnel ponctuel dans un QPC [22], la version bosonisée de la théorie ne peut pas être traitée exactement dans la mesure où le terme d'effet tunnel n'est plus ici un opérateur de bord. Nous ne pouvons alors réaliser qu'un traitement perturbatif.

3.3.2 Discussion à propos des interactions

Dans les échantillons utilisés expérimentalement, on peut s'attendre à avoir des effets d'interaction coulombienne le long et à travers de la barrière, que l'on peut décrire par le type d'Hamiltonien suivant :

$$H_{Coulomb} = \int dydx V_1(x-y)[\rho_R(x)\rho_R(y) + \rho_L(x)\rho_L(y)] + 2 \int dxdy V_2(x-y)\rho_R(x)\rho_L(y), \quad (3.19)$$

Ce terme est probablement important dans les structures étudiées par Kang *et al.* où la largeur de la barrière est plus petite que la longueur magnétique. Nous allons montrer que les modes propres sont un mélange des modes de propagations L et R découplés. L'étude de l'effet tunnel peut alors être réalisée de manière standard, simplement en redéfinissant la valeur du paramètre de Luttinger g . Ainsi les résultats de notre calcul perturbatif de courant tunnel s'appliquent au cas des bords en interactions si on utilise la valeur de g appropriée. Ainsi, Mitra et Girvin ont estimé la valeur de $g \approx 0.6 - 0.7$ dans les structures étudiées dans les refs.([33, 34]). Cette valeur est un exemple de ce que l'on peut espérer dans le régime de Hall entier, quand les interactions détruisent la quantification de g par la physique du volume.

3.3.3 Effet tunnel résonnant

Remarquons que ce type de calcul perturbatif à été réalisé dans diverses études d'effet tunnel et constitue un outil valable pour réaliser la spectroscopie des échantillons de dimensionnalités réduites en régime d'effet Hall quantique [47, 50, 51, 52, 55, 72]. Dans un échantillon soumis à un champ magnétique, les états de bords seront peuplés jusqu'à un certain niveau de Fermi. Nous considérons la situation symétrique où le niveau de Fermi est le même des deux cotés de la barrière. Appliquer une différence de potentiel conduit à une différence entre ces niveaux de Fermi. Le champ magnétique extérieur peut être réglé de sorte que les points de Fermi se croisent en $k = 0$. C'est la situation observée d'abord par Kang *et al.* lorsque se produit un pic de conductance à différence de potentiel nulle. Les relations de dispersions si particulières conduisent à des contraintes spéciales sur la cinématique dans le cas d'une barrière étendue. En effet, quand la longueur de celle-ci tend vers l'infini, le moment le long de la barrière devient une quantité conservée au cours de l'effet tunnel (ce qui n'est pas le cas dans l'effet tunnel ponctuel). De même, la conservation de l'énergie au cours de l'effet tunnel implique que seuls les états à l'intersection des relations de dispersion des modes L et R pourront subir l'effet tunnel. Lorsque le vecteur d'onde de Fermi est non-nul (par rapport au vide défini par les eqs (3.18, 3.17)), il est nécessaire d'avoir une différence de potentiel finie eV afin d'obtenir l'effet tunnel. Ce seuil de voltage tendra vers 0 si le facteur de remplissage est réglé au niveau du point de dégénérescence $k_f = 0$.

¹Nous avons vu à la section 3.1.2 que l'effet tunnel de quasi-particules n'existe qu'à l'intérieur du même 2-DEG.

3.4 Traitement perturbatif

3.4.1 Courant tunnel en représentation d'interaction

Nous appliquons ici le formalisme habituel de l'effet tunnel à notre système. Le courant tunnel est la conséquence d'une situation hors-équilibre où le potentiel chimique μ_L du bord L est porté à une valeur différente de μ_R par différence de potentiel V . Ainsi, $eV = \mu_L - \mu_R$. Le courant s'exprime à partir de la dérivée par rapport au temps, du nombre de particules $\hat{N}_L = \int dx (\psi_L^\dagger(x)\psi_L(x))$ du bord L , par exemple. Ainsi, le courant tunnel moyen est donné par l'expression :

$$I_{\mathcal{T}}(t) = -e\langle \dot{N}_L(t) \rangle, \quad (3.20)$$

avec $e > 0$ la charge électrique élémentaire. Notons que dans tout le traitement nous avons posé $\hbar = 1$ et $k_B = 1$. L'Hamiltonien total est donné par :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_{Coulomb} + \mathcal{H}_{\mathcal{T}}, \quad (3.21)$$

dans cette expression \mathcal{H}_L et \mathcal{H}_R sont les Hamiltoniens des χ LL de chaque coté de la jonction. Nous allons traiter $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ comme une perturbation de $\mathcal{H}_0 = \mathcal{H}_L + \mathcal{H}_R + \mathcal{H}_{Coulomb}$ et nous ne conserverons que le terme dominant. Le développement standard au premier ordre nécessite l'évaluation de :

$$\dot{N}_L = i[\mathcal{H}, \hat{N}_L] = i[\mathcal{H}_{\mathcal{T}}, \hat{N}_L] \quad (3.22)$$

La dernière égalité découle directement du fait qu'en l'absence de courant tunnel, \mathcal{H}_L , \mathcal{H}_R et $\mathcal{H}_{Coulomb}$ conservent séparément le nombre de particules \hat{N}_L et \hat{N}_R ; ils commutent donc avec \hat{N}_L . Il est utile de réexprimer \hat{N}_L et $\mathcal{H}_{\mathcal{T}}$ en fonction des opérateurs création $c^\dagger(k)$ et annihilation d'électrons $c(k)$.

$$\hat{N}_L = \sum_q c_L^\dagger(q)c_L(q) \quad (3.23)$$

De même :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{T}} = \sum_{k,p} \{ \mathcal{T}_{kp} c_R^\dagger(k)c_L(p) + \mathcal{T}_{kp}^* c_L^\dagger(p)c_R(k) \} \quad (3.24)$$

avec \mathcal{T}_{kp} l'amplitude de probabilité qu'un électron de moment p du système L soit diffusé dans un état de moment k du système R par effet tunnel. Il faut enfin préciser les relations d'anticommutation de ces opérateurs : $\{c_L(p), c_L^\dagger(k)\} = \{c_R(p), c_R^\dagger(k)\} = \delta_{k,p}$. Tous les autres anticommuteurs sont nuls. Nous pouvons maintenant évaluer l'expression (3.22) :

$$\dot{N}_L = i \sum_{k,p} \sum_q \left\{ \mathcal{T}_{kp} [c_R^\dagger(k)c_L(p), c_L^\dagger(q)c_L(q)] + \mathcal{T}_{kp}^* [c_L^\dagger(p)c_R(k), c_L^\dagger(q)c_L(q)] \right\} \quad (3.25)$$

Par réarrangement des opérateurs, le premier terme devient :

$$\begin{aligned} [c_R^\dagger(k)c_L(p), c_L^\dagger(q)c_L(q)] &= c_R^\dagger(k)c_L(p)c_L^\dagger(q)c_L(q) - c_L^\dagger(q)c_L(q)c_R^\dagger(k)c_L(p) \\ &= c_R^\dagger(k)c_L(p)\delta_{p,q} - c_R^\dagger(k)c_L^\dagger(q)c_L(p)c_L(q) - c_L^\dagger(q)c_L(q)c_R^\dagger(k)c_L(p) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Les deux derniers termes se simplifient par application des relations d'anticommutations et $[c_R^\dagger(k)c_L(p), c_L^\dagger(q)c_L(q)] = c_R^\dagger(k)c_L(p)\delta_{p,q}$. De même, on calcule aisément :

$$[c_L^\dagger(p)c_R(k), c_L^\dagger(q)c_L(q)] = -c_L^\dagger(p)c_R(k)\delta_{p,q} \quad (3.27)$$

Ainsi, en regroupant ces termes :

$$\dot{N}_L = i \sum_{k,p} \{ \mathcal{T}_{kp} c_R^\dagger(k)c_L(p) - \mathcal{T}_{kp}^* c_L^\dagger(p)c_R(k) \} \quad (3.28)$$

Il reste maintenant à calculer la valeur moyenne $\langle \dot{N}_L(t) \rangle$ par théorie des perturbations. La première étape consiste à évaluer la valeur moyenne de l'opérateur \dot{N}_L au cours du temps :

$$\langle \dot{N}_L(t) \rangle = \langle \psi | e^{i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_T)t} \dot{N}_L e^{-i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_T)t} | \psi \rangle \quad (3.29)$$

Nous avons ici utilisé la représentation de Heisenberg pour l'évolution temporelle de l'opérateur et pour la fonction d'onde $|\psi\rangle$ du fondamental du système non perturbé².

L'étape suivante consiste à passer en représentation d'interaction, dans laquelle le terme \mathcal{H}_T est considéré comme une perturbation de l'Hamiltonien \mathcal{H}_0 .

$$\langle \dot{N}_L(t) \rangle = \langle \psi | \mathcal{U}^\dagger(t) e^{i\mathcal{H}_0 t} \dot{N}_L e^{-i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{U}(t) | \psi \rangle \quad (3.30)$$

et l'opérateur d'évolution :

$$\mathcal{U}(t) = T e^{\{-i \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{H}_T(t')\}} \quad (3.31)$$

avec T , l'opérateur d'ordonnement dans le temps. $\mathcal{U}(t)$ obéit à l'équation de Dyson intégrée :

$$e^{-i(\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_T)t} = e^{-i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{U}(t) \quad (3.32)$$

Dans ce formalisme, les opérateurs évoluent au cours du temps suivant l'Hamiltonien libre, c'est à dire de la façon suivante :

$$\dot{N}_L(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \dot{N}_L e^{-i\mathcal{H}_0 t} \quad (3.33)$$

et

$$\mathcal{H}_T(t) = e^{i\mathcal{H}_0 t} \mathcal{H}_T e^{-i\mathcal{H}_0 t} \quad (3.34)$$

On peut maintenant procéder au développement au premier ordre des termes $\mathcal{U}(t)|\psi\rangle$:

$$\mathcal{U}(t)|\psi\rangle = [1 - i \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{H}_T(t')] |\psi\rangle \quad (3.35)$$

et

$$\langle \psi | \mathcal{U}^\dagger(t) = \langle \psi | [1 + i \int_{-\infty}^t dt' \mathcal{H}_T(t')] \quad (3.36)$$

Ainsi :

$$\langle \dot{N}_L(t) \rangle = \langle \psi | \dot{N}_L - i \int_{-\infty}^t dt' [\dot{N}_L(t), \mathcal{H}_T(t')] | \psi \rangle \quad (3.37)$$

Nous obtenons alors la formule suivante :

$$I_T(t) = ie \int_{-\infty}^t dt' \langle [\dot{N}_L(t), \mathcal{H}_T(t')] \rangle, \quad (3.38)$$

3.4.2 Introduction des potentiels chimiques

Une étape importante de ce calcul consiste à insérer les potentiels chimiques μ_L et μ_R relatifs aux deux cotés de la jonction. Les Hamiltoniens \mathcal{H}_R et \mathcal{H}_L utilisés jusque ici ne contiennent *pas* les potentiels chimiques des systèmes L et R . Les énergies sont mesurées sur l'échelle déterminée précédemment (section 3.3.1) et non pas par rapport aux potentiels chimiques. Nous allons maintenant inclure ces potentiels chimiques dans les termes d'évolution temporelle de façon à

²Ici, le fondamental est celui où les mers de Fermi des systèmes L et R sont peuplés jusqu'à l'énergie de Fermi à température nulle, et suivant la distribution de Fermi-Dirac à température finie. En introduisant les potentiels chimiques, comme nous le ferons par la suite, nous allons donc décaler l'origine de ce fondamental et le décaler en énergie.

ce que les énergies soient mesurées par rapport aux potentiels chimiques de chaque système. Cette procédure standard permet d'obtenir directement le courant en fonction de la différence de potentiel appliquée entre les deux systèmes L et R . On définit alors les Hamiltoniens \mathcal{K}_R et \mathcal{K}_L par rapport aux potentiels chimiques.

$$\begin{aligned}\mathcal{K}_R &= \mathcal{H}_R - \mu_R \hat{N}_R \\ \mathcal{K}_L &= \mathcal{H}_L - \mu_L \hat{N}_L \\ \mathcal{K}_0 &= \mathcal{K}_R + \mathcal{K}_L + \mathcal{H}_{Coulomb}\end{aligned}\quad (3.39)$$

Pour un système libre, cette redéfinition donne $\mathcal{K}_R = \sum_k (\epsilon_R - \mu_R) c_R^\dagger(k) c_R(k)$ alors que $\mathcal{H}_R = \sum_k \epsilon_R c_R^\dagger(k) c_R(k)$. Comme les opérateurs \hat{N}_L et \hat{N}_R commutent avec \mathcal{K}_0 , nous pouvons scinder les termes apparaissant dans les exponentielles des expressions (3.33,3.34) :

$$\dot{N}_L(t) = e^{i\mathcal{K}_0 t} (e^{it(\mu_L \hat{N}_L + \mu_R \hat{N}_R)} \dot{N}_L e^{-it(\mu_L \hat{N}_L + \mu_R \hat{N}_R)}) e^{-i\mathcal{K}_0 t} \quad (3.40)$$

$$\mathcal{H}_T(t') = e^{i\mathcal{K}_0 t'} (e^{it'(\mu_L \hat{N}_L + \mu_R \hat{N}_R)} \mathcal{H}_T e^{-it'(\mu_L \hat{N}_L + \mu_R \hat{N}_R)}) e^{-i\mathcal{K}_0 t'} \quad (3.41)$$

Evaluons cette dernière égalité en considérant l'expression (3.24). Notons que $c_R(k)$ commute avec \hat{N}_L et $c_L(p)$ avec \hat{N}_R . On peut réécrire la partie entre parenthèses de (3.41) :

$$\mathcal{H}_T(t') = e^{i\mathcal{K}_0 t'} \sum_{k,p} (\mathcal{T}_{kp} e^{it' \mu_R \hat{N}_R} c_R^\dagger(k) e^{-it' \mu_R \hat{N}_R} e^{it' \mu_L \hat{N}_L} c_L(p) e^{-it' \mu_L \hat{N}_L} + \text{h.c.}) e^{-i\mathcal{K}_0 t'} \quad (3.42)$$

On peut maintenant calculer les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned}e^{it' \mu_R \hat{N}_R} c_R^\dagger(k) e^{-it' \mu_R \hat{N}_R} &= e^{it' \mu_R} c_R^\dagger(k) \\ e^{it' \mu_L \hat{N}_L} c_L(p) e^{-it' \mu_L \hat{N}_L} &= e^{it' \mu_L} c_L(p)\end{aligned}\quad (3.43)$$

Enfin, en faisant agir les opérateurs d'évolution $e^{i\mathcal{K}_0 t'}$ et $e^{-i\mathcal{K}_0 t'}$ à gauche et à droite de (3.42), nous obtenons :

$$\mathcal{H}_T(t') = \sum_{k,p} (\mathcal{T}_{kp} e^{i(\mu_R - \mu_L)t'} e^{i\mathcal{K}_0 t'} c_R^\dagger(k) e^{-i\mathcal{K}_0 t'} e^{i\mathcal{K}_0 t'} c_L(p) e^{-i\mathcal{K}_0 t'} + \text{h.c.}) \quad (3.44)$$

L'évolution temporelle des opérateurs création-annihilation permet de réécrire $\mathcal{H}_T(t')$ comme :

$$\mathcal{H}_T(t') = \sum_{k,p} (\mathcal{T}_{kp} e^{i(\mu_R - \mu_L)t'} c_R^\dagger(k, t') c_L(p, t') + \text{h.c.}) \quad (3.45)$$

En suivant exactement les lignes de la démonstration précédente, nous pouvons calculer l'évolution de $\dot{N}_L(t)$ à partir de la définition de (3.28). On obtient alors :

$$\dot{N}_L(t) = \sum_{k,p} (\mathcal{T}_{kp} e^{i(\mu_R - \mu_L)t'} c_R^\dagger(k, t') c_L(p, t') - \text{h.c.}) \quad (3.46)$$

En réintroduisant ces opérateurs dans l'expression (3.38)

$$I_T(t) = -e \int_{-\infty}^t dt' \langle [\sum_{k,p} (\mathcal{T}_{kp} e^{i(\mu_R - \mu_L)t'} c_R^\dagger(k, t') c_L(p, t') - \text{h.c.}), \sum_{k',p'} (\mathcal{T}_{k'p'} e^{i(\mu_R - \mu_L)t'} c_R^\dagger(k', t') c_L(p', t') + \text{h.c.})] \rangle \quad (3.47)$$

En posant $A(t) = \sum_{k,p} c_R^\dagger(k, t) c_L(p, t)$ et en remarquant que $\mu_R - \mu_L = -eV$, l'expression précédente se simplifie en :

$$I_T(t) = -e \int_{-\infty}^t dt' \langle [e^{-ieVt} A(t) - e^{ieVt} A^\dagger(t), e^{-ieVt'} A(t') + e^{ieVt'} A^\dagger(t')] \rangle \quad (3.48)$$

$$I_{\mathcal{T}}(t) = -e \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') (e^{-ieV(t-t')} \langle [A(t), A^\dagger(t')] \rangle - e^{ieV(t-t')} \langle [A^\dagger(t), A(t')] \rangle + e^{-ieV(t+t')} \langle [A(t), A(t')] \rangle - e^{ieV(t+t')} \langle [A^\dagger(t), A^\dagger(t')] \rangle) \quad (3.49)$$

Les deux premiers termes correspondent à l'effet tunnel normal mais les deux derniers sont les termes de l'effet tunnel Josephson. Cet effet ne se manifeste pas dans le système que l'on considère et on n'en tient pas compte³. La partie normale du courant $I_{\mathcal{T}}(t)$ est donc :

$$I_{\mathcal{T}}(t) = -e \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') (e^{-ieV(t-t')} \langle [A(t), A^\dagger(t')] \rangle - e^{ieV(t-t')} \langle [A^\dagger(t), A(t')] \rangle) \quad (3.50)$$

Par définition, le propagateur retardé des opérateurs A et A^\dagger s'écrit : $X_{Ret}(t) = -i\theta(t) \langle [A(t), A^\dagger(0)] \rangle$. Nous constatons que la transformée de Fourier de ce propagateur est :

$$i\widehat{X}_{Ret}(-eV) = \int_{-\infty}^{\infty} dt' \theta(t-t') (e^{ieV(t-t')} \langle [A(t), A^\dagger(t')] \rangle) \quad (3.51)$$

$$I_{\mathcal{T}}(t) = -ie[\widehat{X}_{Ret}(-eV) - \widehat{X}_{Adv}(-eV)] \quad (3.52)$$

avec \widehat{X}_{Adv} le propagateur avancé des opérateurs A et A^\dagger ; les relations usuelles entre propagateurs avancés et retardés conduisent à $\widehat{X}_{Adv}^* = \widehat{X}_{Ret}$. On obtient alors :

$$I_{\mathcal{T}} = -2e\mathcal{T}^2 \mathbf{Im}[\widehat{X}_{Ret}(-eV)] \quad (3.53)$$

En notant $A(t) = \int_{-L/2}^{L/2} dx A(t, x)$

$$I_{\mathcal{T}} = -2e\mathcal{T}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} dx dy \mathbf{Im}[\widetilde{X}_{ret}(\frac{-eV}{\hbar}, x-y)] \quad (3.54)$$

avec $X_{ret}(t-t', x-y) = -i\theta(t-t') \langle [A(t, x), A^\dagger(t', y)] \rangle$ le propagateur retardé de l'opérateur local de tunnel $A(t, x) = c_L(x, t)c_R^\dagger(x, t)$.

3.4.3 Propagateurs bosonisés

Avec l'expression (3.54), le problème revient à calculer les fonctions de corrélations de $A(t, x)$. En raison de l'interaction coulombienne longue distance entre les systèmes L et R , les propagateurs de l'opérateur tunnel ne peuvent se calculer que par technique de bosonisation.

Bords sans interaction

Lorsque les χ LL des bords droits et gauches ne sont pas couplés par interaction coulombienne à travers la barrière, le calcul des fonctions de Green $G^>(x, t)$ et $G^<(x, t)$ est relativement simple puisque les opérateurs des fermions droits et gauches anticommulent. On en déduit immédiatement que

$$G^>(x, t) = \langle A(x, t)A^\dagger(0, 0) \rangle \quad (3.55)$$

et

$$G^>(x, t) = \langle c_L(x, t)c_R^\dagger(x, t)c_R(0, 0)c_L^\dagger(0, 0) \rangle = \langle c_L(x, t)c_L^\dagger(0, 0) \rangle \langle c_R^\dagger(x, t)c_R(0, 0) \rangle \quad (3.56)$$

Le calcul de ces fonctions de Green donne :

$$G^>(x, t) = \frac{a^{g-2}}{4\pi^2} \frac{e^{ik_f x}}{(\alpha + i(x + v_f t))^g} \frac{e^{ik_f x}}{(\alpha - i(x - v_f t))^g} \quad (3.57)$$

³L'évaluation de ces opérateurs conduit à des contributions négligeables au courant final [56].

Bords en interaction

Nous considérons ici que le système est dans la géométrie (b) de Fig. (3.19) i.e. les bords des deux 2-DEG sont parallèles et l'effet tunnel se produit sur une région de longueur finie L^4 . Dans ce cas, le problème non-perturbé i.e. sans effet tunnel est invariant par translation. Si on considère la situation où l'interaction coulombienne longue distance couple les modes des bords droits et gauches par l'Hamiltonien (3.19), le problème sans effet tunnel s'exprime simplement en modes de Fourier :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{kin} + \mathcal{H}_{int} &= \sum_{k>0} \left(\frac{2\pi v}{e^2\nu} + \tilde{V}_1(k) \right) \times \\ &\times [\rho_L(k)\rho_L(-k) + \rho_R(k)\rho_R(-k)] + \\ &+ \sum_{k>0} \tilde{V}_2(k) (\rho_L(k)\rho_R(-k) + \rho_R(k)\rho_L(-k)). \end{aligned} \quad (3.58)$$

Cet Hamiltonien est exactement l'Hamiltonien de Tomonaga-Luttinger⁵ étudié à la section 2.9.4, dans le cas où les couplages g_2 et g_4 (ici respectivement $\tilde{V}_1(k)$ et $\tilde{V}_2(k)$), dépendent du moment k . Comme nous l'avons déjà vu en détail, cette forme quadratique peut être diagonalisée par une transformation de Bogolyubov :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_L(k) &= \cosh \theta_k \rho_L(k) + \sinh \theta_k \rho_R(k), \\ \tilde{\rho}_R(k) &= \cosh \theta_k \rho_R(k) + \sinh \theta_k \rho_L(k), \end{aligned} \quad (3.59)$$

avec :

$$\tanh 2\theta_k = \frac{\tilde{V}_2(k)}{2\pi v / (e^2\nu) + \tilde{V}_1(k)}. \quad (3.60)$$

Le problème initial devient alors simplement celui d'un boson libre :

$$\frac{2\pi}{e^2\nu} \sum_{k>0} v_k [\tilde{\rho}_L(k)\tilde{\rho}_L(-k) + \tilde{\rho}_R(k)\tilde{\rho}_R(-k)], \quad (3.61)$$

où nous avons posé :

$$v_k^2 = \left(v + \frac{e^2\nu}{2\pi} \tilde{V}_1(k) \right)^2 - \left(\frac{e^2\nu}{2\pi} \tilde{V}_2(k) \right)^2. \quad (3.62)$$

Le courant tunnel s'exprime à travers les fonctions de Green :

$$I = 2e\mathcal{T}^2 \mathbf{Im} \int -i\Theta(t) [G^>(t) - G^<(t)] e^{-ieVt} dt, \quad (3.63)$$

avec $G^>(t) = \langle A(t)A^\dagger(0) \rangle$ et $G^<(t) = \langle A^\dagger(0)A(t) \rangle$. Comme précédemment l'opérateur A est l'opérateur de l'effet tunnel électronique $A(t) = \int dx \psi_L^\dagger(x, t)\psi_R(x, t)$. La fonction de corrélation de A devra être évalué à partir de l'Hamiltonien invariant par translation (3.58). Cela se calcule simplement dans la mesure où la vitesse v_k et l'angle θ_k de la rotation de Bogolyubov ne dépendent pas de k en première approximation : $\theta_k \approx \theta$ et $v_k \approx v_0$. Dans ce cas, l'opérateur de tunnel électronique s'exprime uniquement à partir d'un boson libre :

$$\psi_L^\dagger \psi_R \propto e^{2ik_F x} e^{i\tilde{\phi}(\cosh \theta - \sinh \theta)/\sqrt{\nu}}, \quad (3.64)$$

avec $\tilde{\phi} = \tilde{\phi}_L + \tilde{\phi}_R$ et $\tilde{\rho}_{L,R} = \frac{e\sqrt{\nu}}{2\pi} \partial_x \tilde{\phi}_{L,R}$. Les fonctions de Green peuvent être calculées exactement comme dans le cas sans interaction, avec la différence que l'exposant anormal n'est plus quantifié

⁴Cette situation est donc différente du montage expérimental de Kang.

⁵Nous avons simplement introduit la charge e dans les opérateurs de densité, d'où le terme en $1/e^2$ dans la partie cinétique. Ceci permet de traiter des interactions \tilde{V} qui ne dépendent pas de la charge.

par la physique du volume mais il est renormalisé par les interactions entre les bords : le facteur $(\cosh \theta - \sinh \theta)$ dépend de \tilde{V}_1 et de \tilde{V}_2 . Ainsi toutes les quantités peuvent être calculées comme si les espèces chirales de deux cotés de la barrière étaient les excitations de liquides de Luttinger chiraux *indépendants* d'exposant anormal g et de vitesse v_f dont les fonctions de Green sont données par :

$$\langle c_L(x, t) c_L^\dagger(0, 0) \rangle = \frac{a^{g-1}}{2\pi} \frac{e^{-ik_f x}}{(\alpha + i(x + v_f t))^g} \quad (3.65)$$

$$\langle c_R^\dagger(x, t) c_R(0, 0) \rangle = \frac{a^{g-1}}{2\pi} \frac{e^{-ik_f x}}{(\alpha - i(x - v_f t))^g} \quad (3.66)$$

Ainsi la fonction de Green retardée $\tilde{X}_{ret}(\omega, x)$ est donnée par :

$$\tilde{X}_{ret}(\omega, x) = \int -i\theta(t)[G^>(x, t) - G^<(x, t)]e^{i\omega t} \quad (3.67)$$

avec $G^<(x, t) = \langle A^\dagger(0, 0)A(x, t) \rangle$ et

$$G^<(x, t) = \frac{a^{2g-2}}{4\pi^2} \frac{e^{ik_f x}}{(\alpha - i(x + v_f t))^g} \frac{e^{ik_f x}}{(\alpha + i(x - v_f t))^g} \quad (3.68)$$

Le courant tunnel s'exprime de manière plus élégante *via* la calcul des propagateurs de Matsubara associés aux fonctions de Green $G^>(x, t)$ et $G^<(x, t)$.

3.4.4 Propagateurs de Matsubara

Nous allons maintenant calculer :

$$\int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} dx dy \mathbf{Im}[\tilde{X}_{ret}(\omega, x - y)] \quad (3.69)$$

La technique classique dans une telle situation consiste à d'abord évaluer la fonction de Green de Matsubara $\tilde{X}_{ret}(i\omega, x)$ de laquelle on déduira par la suite 3.69. En faisant intervenir les fréquences de Matsubara bosoniques.

$$\tilde{X}_{ret}(i\omega, x) = - \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle T_\tau A(x, \tau) A^\dagger(0, 0) \rangle \quad (3.70)$$

Ici, T_τ est l'opérateur d'ordonnement dans le temps complexe τ . Les propriétés d'anticommutations réelles ou effectives détaillées à la sous-section précédente des opérateurs fermioniques c_L et c_R permettent de transformer (3.70) en :

$$\tilde{X}_{ret}(i\omega, x) = - \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \langle T_\tau c_L(x, \tau) c_L^\dagger(0, 0) \rangle \langle T_\tau c_R^\dagger(x, \tau) c_R(0, 0) \rangle \quad (3.71)$$

En identifiant les propagateurs de Matsubara $\mathcal{G}_L(x, \tau) = \langle T_\tau c_L(x, \tau) c_L^\dagger(0, 0) \rangle$ et $\mathcal{G}_R(-x, -\tau) = \langle T_\tau c_R^\dagger(x, \tau) c_R(0, 0) \rangle$, l'expression précédente peut être écrite en transformée de Fourier avec la convention d'écriture $f(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \tilde{f}(k)$.

$$\tilde{X}_{ret}(i\omega, x) = + \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}_L(x, \tau) \mathcal{G}_R(-x, -\tau) \quad (3.72)$$

$$\tilde{X}_{ret}(i\omega, x) = + \int \frac{dk dk'}{4\pi^2} e^{-i(k-k')x} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n \tau} \mathcal{G}_L(k', \tau) \mathcal{G}_R(k, -\tau) \quad (3.73)$$

L'étape suivante consiste à intégrer sur les variables spatiales :

$$\int_{-L/2}^{L/2} dx \int_{-L/2}^{L/2} dx' \tilde{X}_{ret}(i\omega, x - x') = \int \frac{dkdk'}{\pi^2} \frac{\sin^2[(k - k')L/2]}{(k - k')^2} \int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \tau) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, -\tau) \quad (3.74)$$

Il reste maintenant à transformer l'intégrale sur le temps imaginaire en somme discrète sur les fréquences de Matsubara :

$$\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \tau) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, -\tau) = \frac{1}{\beta} \sum_{ip_n} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', ip_n) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, ip_n - i\omega_n) \quad (3.75)$$

Il suffit de transformer cette somme en une intégrale de Cauchy sur le contour représenté à la

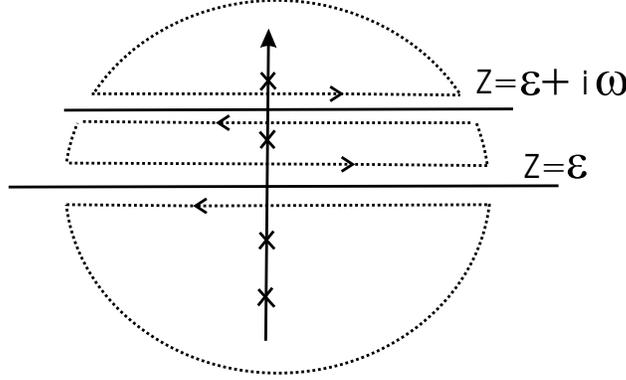


FIG. 3.23 – Contour d'intégration autour des fréquences de Matsubara.

Fig. (3.23) Les pôles de la fonction de Fermi-Dirac à température $T = 1/\beta$ s'avèrent être les fréquences de Matsubara $n_f(z) = 1/(1 + \exp(\beta z))$.

$$\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \tau) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, -\tau) = \int \frac{dz}{2i\pi} n_f(z) \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', z) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, z - i\omega_n) \quad (3.76)$$

Cette expression une fois calculée et factorisée donne l' expression :

$$\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \tau) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, -\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{\pi} n_f(\epsilon) \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \epsilon + i\omega_n) \{\mathbf{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{R}, Ret}(k, \epsilon))\} + \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \epsilon - i\omega_n) \{\mathbf{Im}(\mathcal{G}_{\mathcal{L}, Ret}(k', \epsilon))\} \quad (3.77)$$

On procède maintenant au prolongement analytique $i\omega_n \rightarrow \omega + i\delta$:

$$\int_0^\beta d\tau e^{i\omega_n\tau} \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \tau) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, -\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n_f(\epsilon) \{A_L(k', \epsilon) \mathcal{G}_{\mathcal{R}}(k, \epsilon - \omega - i\delta) + A_R(k, \epsilon) \mathcal{G}_{\mathcal{L}}(k', \epsilon + \omega + i\delta)\} \quad (3.78)$$

et lorsque l'on prend la partie imaginaire de cet objet et que l'on effectue le changement de variable $\epsilon \rightarrow \epsilon + \omega$, on obtient :

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\epsilon}{2\pi} n_f(\epsilon) A_R(k, \epsilon) A_L(k', \epsilon + \omega) A_R(k, \epsilon) \{n_f(\epsilon - eV) - n_f(\epsilon)\} \quad (3.79)$$

Cette procédure mène à une formule compacte pour le courant tunnel :

$$I_T = e\mathcal{T}^2 \int \frac{dkdk'}{4\pi^2} \frac{\sin^2[(k - k')L/2]}{(k - k')^2} \int \frac{d\epsilon}{2\pi} A_R(k, \epsilon) A_L(k', \epsilon - eV) \{n_f(\epsilon - eV) - n_f(\epsilon)\}. \quad (3.80)$$

Dans cette équation, $n_f(\epsilon) = 1/(1 + \exp(\beta\epsilon))$ est la fonction de Fermi-Dirac à la température T ($\beta = 1/T$) et $A_R(k, \omega)$ (resp. $A_L(k, \omega)$) est la densité spectrale chirale du liquide de Luttinger se propageant vers la droite R (resp. vers la gauche L).

3.4.5 Densité spectrale

La densité spectrale s'obtient en prenant la partie imaginaire de la fonction de Green retardée :

$$A_{R,L}(k, \omega) = -2 \mathbf{Im} \int \int \frac{dt dx}{4\pi^2} e^{i\omega t - ikx} \left[-i\theta(t) \langle \{ \psi_{R,L}(x, t), \psi_{R,L}^\dagger(0, 0) \} \rangle_\beta \right], \quad (3.81)$$

ici, nous avons calculé la moyenne thermique $\langle \rangle_\beta$ dans l'ensemble grand canonique comprenant les potentiels chimiques $\mu_{L,R}$. La procédure exacte consiste à d'abord évaluer les transformées de Fourier dans l'espace et le temps de la fonction de Green $G_{R,L}^>$ des excitations se propageant vers la droite et la gauche ; ensuite les densités spectrales se déduisent de l'identité suivante valable à température finie :

$$G_{R,L}^>(k, \omega) = (1 - n_f(\omega)) A_{R,L}(k, \omega). \quad (3.82)$$

Les fonctions de Green pour un liquide de Luttinger chiral sont données par les expressions suivantes

$$G_{R,L}^>(k, \omega) = \alpha^{g-1} \int \int \frac{dt dx}{4\pi^2} e^{i\omega t - ikx} e^{\mp ik_f x} \frac{(\pi T)^g}{[i \sinh(\pi T(vt \mp x))]^g}, \quad (3.83)$$

où g est le paramètre du liquide de Luttinger [24], k_f est le vecteur d'onde de Fermi et α est un cut-off microscopique. Dans le cas d'effet tunnel *électronique*, l'exposant anormal est donné par $g = 1/\nu = m$ si les deux fluides de EHQF ont des facteurs de remplissage $\nu = 1/m$. Ceci décrit la situation où la barrière sépare deux gaz d'électrons distincts. Nous considérons la situation simple où les facteurs de remplissage sont les mêmes de part et d'autre de la barrière. Si l'on s'intéresse à l'effet tunnel en prenant en compte les interactions à travers la barrière, alors g n'est plus quantifié et dans un système de Hall entier, il peut être plus petit que un (en raison des interactions répulsives). La transformée de Fourier des fonctions spectrales peut être calculée [57] :

$$G_{R,L}^>(k, \omega) = \left(\frac{2\pi\alpha}{v\beta} \right)^{g-1} e^{\beta\omega/2} B\left(\frac{g}{2} + i\frac{\beta\omega}{2\pi}, \frac{g}{2} - i\frac{\beta\omega}{2\pi} \right) \delta(\omega + v(k_f \mp k)). \quad (3.84)$$

Cette formule conduit directement à une forme compacte des densités spectrales :

$$A_{R,L}(k, \omega) = 2 \left(\frac{2\pi\alpha}{v\beta} \right)^{g-1} \cosh\left(\frac{1}{2}\beta\omega \right) B\left(\frac{g}{2} + i\frac{\beta\omega}{2\pi}, \frac{g}{2} - i\frac{\beta\omega}{2\pi} \right) \delta(\omega + v(k_f \mp k)), \quad (3.85)$$

où $B(x, y)$ est la fonction Beta d'Euler. Dans la limite de température nulle, la formule (3.85) redonne la fonction de densité spectrale d'un liquide de Luttinger usuelle à température nulle :

$$A_{R,L}(k, \omega) = \alpha^{g-1} \frac{2\pi}{\Gamma(g)} |k \mp k_f|^{g-1} \delta(\omega + v(k_f \mp k)). \quad (3.86)$$

La fonction spectrale peut être réexprimée si on définit l'énergie de Fermi $\varepsilon_f = vk_f$ et ses propriétés d'échelle sont alors :

$$A_{R,L}(k, \omega) = \left(\frac{T}{\varepsilon_f} \right)^{g-1} F_g(\omega/T) \delta(\omega + \varepsilon_f + \mp vk), \quad (3.87)$$

avec la fonction d'échelle :

$$F_g(z) = (\alpha k_f)^{g-1} \cosh(z/2) B\left(\frac{g}{2} + i\frac{z}{2\pi}, \frac{g}{2} - i\frac{z}{2\pi} \right). \quad (3.88)$$

Remarquons que la loi d'échelle en ω/T est détruite par le pré-facteur $\left(\frac{T}{\varepsilon_f} \right)^{g-1}$, quand $g \neq 1$. La fonction d'échelle F est représentée sur la Fig.(3.24).

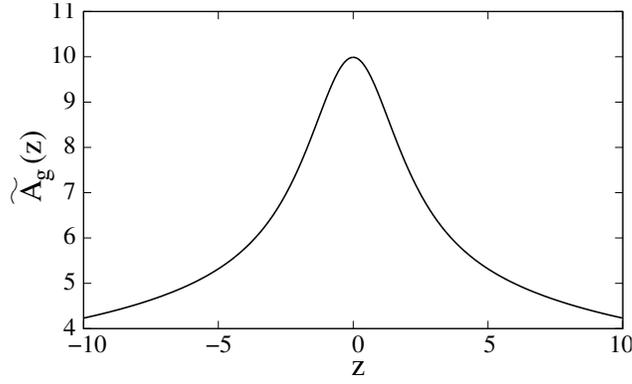


FIG. 3.24 – Fonction d'échelle $F(z, g)$ d'un liquide de Luttinger chiral Luttinger en fonction de la variable d'échelle $z = \omega/T$ pour $g=0.7$.

3.5 Résultats

La formule Eq.(3.80) fournit la valeur du courant tunnel pour une barrière de longueur L , un paramètre d'interaction g , une tension appliquée eV et une température non-nulle. Il est plus pratique d'utiliser des variables réduites a-dimensionnées : la longueur $\bar{L} = Lk_f$ et la différence de potentiel appliquée $\bar{v} = eV/(2\varepsilon_f)$, avec $\varepsilon_f = vk_f$. Nous nous intéressons d'abord à la limite de température nulle. Le courant tunnel s'écrit alors comme :

$$I_T = I_0 \bar{L}^2 \int_{-\bar{v}}^{+\bar{v}} du \frac{\sin^2[(1+u)\bar{L}]}{(1+u)^2 \bar{L}^2} (\bar{v}^2 - u^2)^{g-1}, \quad (3.89)$$

nous avons défini une échelle de courant $I_0 = eT^2(\alpha k_f)^{2g-2}/8\pi\varepsilon_f\Gamma(g)^2$. Le moment k_f correspond au moment de Fermi à différence de potentiel nulle ; on peut également le voir comme la moyenne des moment de Fermi L et R lorsque l'on impose une différence de potentiel. En particulier, k_f rest fixe quand la tension varie. Dans le cas $g = 1$, l'intégrale de l'équation Eq.(3.89) se calcule à l'aide de la fonction Sinus intégral [58] :

$$\frac{I_T}{I_0} = \bar{L} [Si(2\bar{L}(\bar{v} + 1)) + Si(2\bar{L}(\bar{v} - 1))] - \frac{1 - \cos(2\bar{L}(\bar{v} + 1))}{2(\bar{v} + 1)} - \frac{1 - \cos(2\bar{L}(\bar{v} - 1))}{2(\bar{v} - 1)}. \quad (3.90)$$

3.5.1 Effet tunnel non-résonnant

La discussion qui suit traite du cas $k_f \neq 0$. Ceci signifie que, sans voltage appliqué, les deux points de Fermi sont simultanément soit en-dessous soit au-dessus du point $k = 0$ où l'effet tunnel est maximal, i.e. où les relations de dispersion se coupent. Dans ce cas l'effet tunnel est supprimé jusqu'à un certain seuil de tension appliquée. La formule Eq.(3.89) manifeste cet effet ; si la longueur de la barrière tend vers l'infini, la fonction sinus dans l'intégrand de la formule Eq.(3.89) tend vers une distribution delta de Dirac. Le courant est alors non nul au-delà du seuil de voltage $|eV| > 2vk_f$. Ceci traduit simplement la conservation du moment dans la limite $L \rightarrow \infty$ qui est une contrainte drastique pour l'effet tunnel. Lorsque les valeurs de la longueur L sont grandes mais finies, cet effet de seuil est lissé ; il disparaît dans la limite du point de contact quantique $L \rightarrow 0$. Dans toute la suite le cas correspondant à $k_f \neq 0$ sera le cas non-résonnant. Dans le cas contraire, $k_f = 0$, l'effet tunnel peut apparaître pour une différence de potentiel infinitésimale. Ce cas résonant sera traité dans le paragraphe suivant. Dans les réalisations expérimentales, le cas résonant ne peut être visible que par un réglage très fin du champ magnétique. Dans les expériences de Kang *et al.* k_f parcourt une plage étendue de valeurs

pour laquelle l'effet tunnel résonnant se manifeste. Ceci se traduit par un pic de conductance à voltage nul. Une telle plage de valeurs pour l'effet tunnel ne peut pas être décrite par le modèle que nous développons ici, où un seul point satisfait les conditions de résonance. En effet, le courant tunnel sous le seuil est de l'ordre de $O(L^0)$ et croît comme $O(L)$ au-dessus. Sous le seuil la limite $L \rightarrow \infty$ donne :

$$I_{\mathcal{T}}/I_0 = \left(\frac{eV}{2\varepsilon_f}\right)^{2g-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{\Gamma(g)}{\Gamma(g+1/2)} {}_2F_1\left(1, \frac{3}{2}; g + \frac{1}{2}; \left(\frac{eV}{2\varepsilon_f}\right)^2\right), \quad (3.91)$$

avec ${}_2F_1$ la fonction hypergéométrique [58]. Au-dessus du seuil, le courant est donné par la formule :

$$I_{\mathcal{T}}/I_0 = \pi k_f L \left(\left(\frac{eV}{2\varepsilon_f}\right)^2 - 1 \right)^{g-1}. \quad (3.92)$$

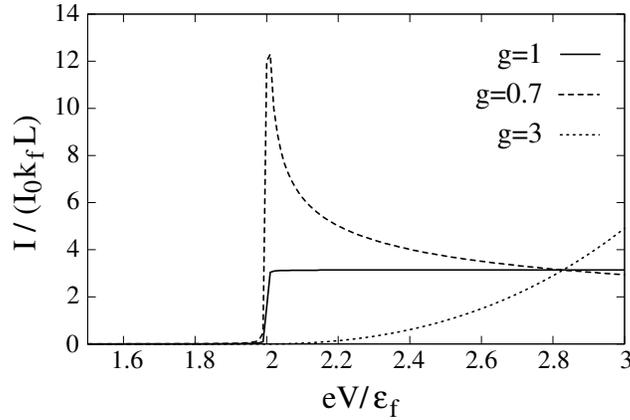


FIG. 3.25 – Courant tunnel en fonction de eV/ε_f pour : $g = 3$, (pointillés) $g = 1$ (traits pleins), $g = 0.7$ (tirets) pour une barrière de longueur $k_f L = 1000$.

Nous avons représenté certaines courbes des caractéristiques $I_{\mathcal{T}}(V)$ à la Fig. (3.25) dans le cas d'une barrière très longue $k_f L \gg 1$. Dans le cas de l'EHQF, nous avons choisi le paramètre de Luttinger $g = 3$ pour l'effet tunnel entre deux liquides de remplissage $\nu = 1/3$. Le cas $g = 1$ se rapporte à des fermions libres ; on observe l'apparition d'un courant de saturation i.e. $I_{\mathcal{T}}$ devient de l'ordre de $O(L)$ indépendamment de V . Enfin nous avons tracé la caractéristique $I_{\mathcal{T}}(V)$ pour un paramètre de Luttinger $g < 1$, ce qui correspond au cas des modes de bord avec interactions à travers la barrière. On note le pic de courant très prononcé à la valeur du seuil de voltage. Le courant au voisinage de cette valeur se comporte en effet comme $\sim (eV - 2\varepsilon_f)^{g-1}$ dans la limite des grands L . Pour $V \rightarrow 0$, le courant se comporte comme V^{2g-1} .

Dans le cas d'une barrière de longueur finie, avec $k_f L$ de l'ordre de l'unité, les singularités dues à la cinématique sont lissées. Les courbes représentatives de ces phénomènes sont représentées à la Fig.(3.26). Le comportement à faible V demeure inchangé par rapport au cas précédent mais on peut noter la présence d'oscillations due à la structure de diffraction créée par la barrière qui se comporte comme un interféromètre. Remarquons que dans le cas où $g < 1$, le comportement algébrique du courant en V^{2g-1} ne se manifeste qu'à faible voltage. La fig. (3.26) montre un zoom de la situation à $g = 0.7$ à très faible voltage : on peut observer la non-linéarité typique d'un liquide de Luttinger et la figure d'interférence superposée. La période des oscillations de la variable adimensionnée du voltage $eV/2\varepsilon_f$ est $2\pi/(k_f L)$. La fig. (3.27) montre le courant tunnel en fonction de la longueur de la barrière pour un voltage fixé ($eV/\varepsilon_f = 0.1$) et différentes valeurs

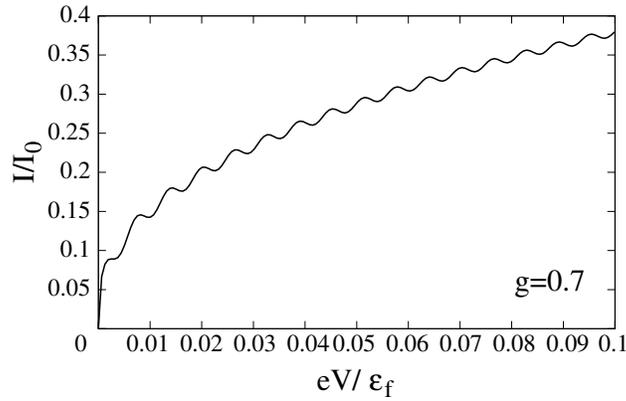


FIG. 3.26 – Courant tunnel en fonction de eV/ε_f pour $g = 0.7$ avec une longueur de barrière suffisamment faible pour faire apparaître des oscillations.

du paramètre d'interaction g . Il apparaît un courant de saturation pour des longueurs de l'ordre de la centaine de longueur de Fermi λ_f quand la différence de potentiel appliqué est inférieure à la valeur du seuil. On note aussi la présence d'un phénomène de battements. Les oscillations rapides sont dues aux interférences de L et de la longueur d'onde de Fermi ; les oscillations lentes sont contrôlées par l'échelle de voltage $eV/2\varepsilon_f$ qui est fixée à 0.1. Nous n'avons pas représenté le cas $g = 3$ qui a la même forme mais une valeur du courant très faible exprimée en I_0 .

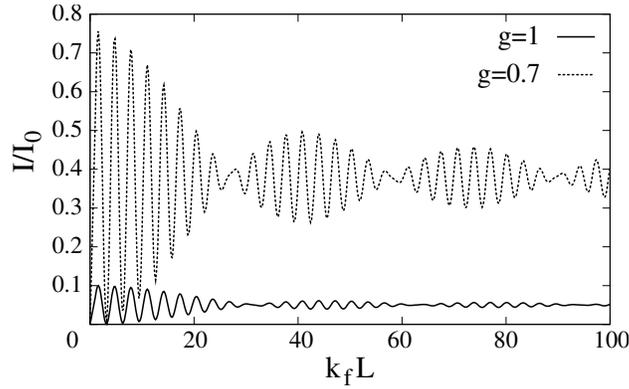


FIG. 3.27 – Courant tunnel en fonction de $k_f L$ pour $g = 0.7$ et $g = 1$ avec une tension normalisée $eV/\varepsilon_f = 0.1$.

3.5.2 Effet tunnel résonnant

Intéressons nous maintenant au cas $k_f = 0$ que l'on peut obtenir en réglant le champs magnétique extérieur appliqué. Cela signifie qu'en l'absence de différence de potentiel, les niveaux de Fermi des modes L et R coïncident exactement à $k = 0$. Le courant tunnel obtenu à partir de notre calcul perturbatif est plus simple que précédemment car l'énergie de Fermi disparaît des formules :

$$I_T = \frac{eT^2}{\Gamma(g)^2} \frac{L^2}{8\pi\alpha v} \left(\frac{\alpha eV}{2v} \right)^{2g-1} f_g\left(\frac{eVL}{2v}\right), \quad (3.93)$$

avec la fonction auxiliaire $f_g(x)$ donnée par :

$$f_g(x) = \int_{-1}^{+1} dt (1-t^2)^{g-1} \frac{\sin^2(xt)}{(xt)^2}. \quad (3.94)$$

Cette fonction décroît en π/x pour de grandes valeurs de x , et pour n'importe quelle valeur de g , elle prend une valeur non nulle à l'origine. Cela signifie que $I_T \propto V^{2g-1}$ si $eVL/v \ll 1$ et $I \propto V^{2g-2}$ quand $eVL/v \gg 1$. Pour une valeur typique de $g = 0.7$, cela signifie que le courant se comporte comme $V^{0.4}$ à l'origine avant de se comporter comme $V^{-0.6}$ pour des valeurs plus grandes. La singularité typique des liquides de Luttinger sont encore présentes, les oscillations due au terme k_f ont disparu. Le cas $g = 0.7$ montre que des interactions fortes dans un problème où l'intensité de l'effet tunnel est faible conduisent à une conductance divergente à voltage nul.

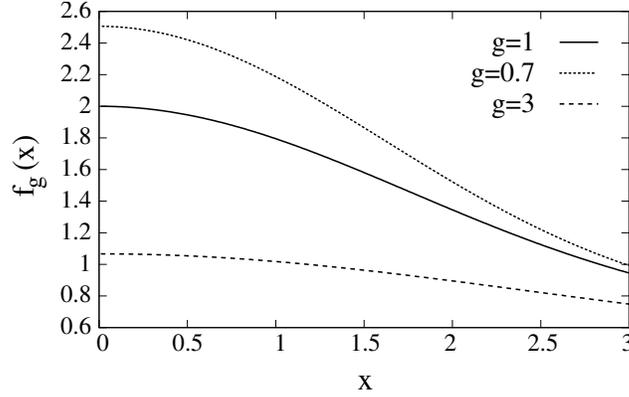


FIG. 3.28 – Fonction auxiliaire régissant le cross-over entre les régimes de barrière infinie et courtes pour différentes valeurs de g .

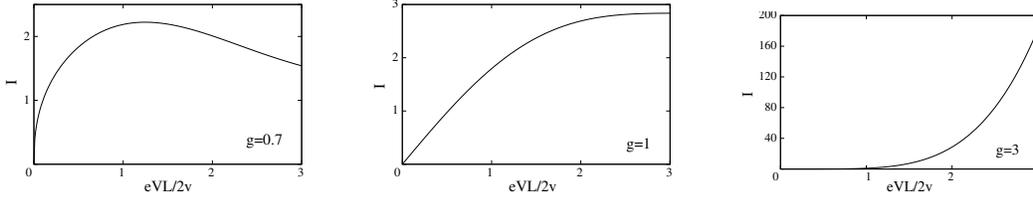


FIG. 3.29 –

3.6 Température finie

Enfin, les calculs que nous avons menés peuvent être étendus au cas de la température non-nulle en utilisant les fonctions spectrales à température finie. En définissant le paramètre de température réduite $z = \beta\varepsilon_f$, on obtient :

$$I = \frac{eT^2}{8\pi\varepsilon_f} \frac{(\alpha k_f)^{2g-2}}{\Gamma(g)^2} \left(\frac{2\pi}{z}\right)^{2g-2} \frac{\Gamma(g)^2}{4\pi^2} \bar{L}^2 \int du \frac{\sin^2[(1+u)\bar{L}]}{(1+u)^2 \bar{L}^2} e^{zu} (1 + e^{-z(u+\bar{v})}) (1 + e^{-z(u-\bar{v})}) \times \\ \times B\left(\frac{g}{2} + i\frac{z}{2\pi}(u+\bar{v}), \frac{g}{2} - i\frac{z}{2\pi}(u+\bar{v})\right) B\left(\frac{g}{2} + i\frac{z}{2\pi}(\bar{v}-u), \frac{g}{2} - i\frac{z}{2\pi}(\bar{v}-u)\right) \quad (3.95)$$

On s'attend à un lissage des courbes dû à l'élévation de température, ainsi qu'à un comportement identique aux cas précédent en ce qui concerne la caractéristique de seuil.

3.7 Calcul du bruit.

On peut maintenant calculer la densité spectrale de puissance de bruit i.e. le bruit en fonction de la fréquence ω

$$S(\omega) = \int dt e^{i\omega t} S(t) \quad (3.96)$$

La première contribution non-nulle à cette puissance de bruit est donnée par :

$$S(\omega) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \langle \{I(t), I(0)\} \rangle dt \quad (3.97)$$

On peut calculer cette quantité (typique du transport AC) en fonction du courant tunnel à fréquence nulle i.e. du courant DC déjà évalué. Il existe pour cela un traitement au premier ordre en représentation d'interaction [59, 60, 61].

3.7.1 Courant et densité spectrale

Repartons de l'expression du courant tunnel déjà établie :

$$I_{\mathcal{T}}(V) = 2e\mathcal{T}^2 \mathbf{Im}[\widehat{X}_{Ret}(-eV)] \quad (3.98)$$

avec

$$\widehat{X}_{Ret}(\omega) = -i \int_{-\infty}^{\infty} dt \theta(t) (e^{i\omega t} \langle [A(t), A^\dagger(0)] \rangle_\beta) \quad (3.99)$$

et $A(t) = \sum_{k,p} c_R^\dagger(k,t) c_L(p,t)$. Les transformations habituelles conduisent à :

$$\mathbf{Im}[\widehat{X}_{Ret}(\omega)] = \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{i\omega t} \langle [A(t), A^\dagger(0)] \rangle_\beta) \quad (3.100)$$

Rappelons que la moyenne utilisée ici est la moyenne thermique.

$$\langle A(t)A^\dagger(0) \rangle_\beta = Tr(e^{-\beta K} A(t)A^\dagger(0)) \quad (3.101)$$

En raison de la propriété de cyclicité de la trace, les équivalences suivantes sont assez simples à établir :

$$\begin{aligned} \langle A(t)A^\dagger(0) \rangle_\beta &= Tr(A^\dagger(0)e^{-\beta K} A(t)) \\ &= Tr(e^{-\beta K} e^{\beta K} A^\dagger(0)e^{-\beta K} A(t)) \\ &= Tr(e^{-\beta K} A^\dagger(i\beta)A(t)) \\ &= \langle A^\dagger(0)A(t-i\beta) \rangle_\beta \end{aligned} \quad (3.102)$$

On prend la transformée de Fourier du propagateur, et on obtient l'identité suivante, très utile :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{i\omega t} \langle A(t)A^\dagger(0) \rangle_\beta) &= \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{i\omega t} \langle A^\dagger(0)A(t-i\beta) \rangle_\beta) \\ &= e^{-\omega\beta} \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{i\omega t} \langle A^\dagger(0)A(t) \rangle_\beta) \end{aligned} \quad (3.103)$$

Donc

$$\mathbf{Im}[\widehat{X}_{Ret}(\omega)] = (1 - e^{\omega\beta}) \int_{-\infty}^{\infty} dt (e^{i\omega t} \langle A(t)A^\dagger(0) \rangle_\beta) \quad (3.104)$$

Par ailleurs, on peut insérer la relation d'identité de la base $|\mathbf{n}\rangle = |E_n, N_1, N_2\rangle$ des états propres de l'opérateur K , qui diagonalise également la matrice densité de l'ensemble grand-canonique, on obtient alors :

$$\begin{aligned}
\langle A^\dagger(t)A(0)\rangle_\beta &= \frac{1}{Z} \sum_n \langle \mathbf{n} | e^{-\beta K} A^\dagger(t)A(0) | \mathbf{n} \rangle \\
&= \sum_{n,m,p} Z^{-1} \langle \mathbf{n} | e^{-\beta K} | \mathbf{m} \rangle \langle \mathbf{m} | A^\dagger(t) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | A(0) | \mathbf{n} \rangle \\
&= \sum_{n,p} \rho_n e^{-iE_n t} e^{iE_p t} \langle \mathbf{n} | A^\dagger(0) | \mathbf{p} \rangle \langle \mathbf{p} | A(0) | \mathbf{n} \rangle \\
\langle A^\dagger(t)A(0)\rangle_\beta &= \sum_{n,m} \rho_n e^{-iE_n t} e^{iE_m t} |\langle \mathbf{m} | A | \mathbf{n} \rangle|^2
\end{aligned} \tag{3.105}$$

De même,

$$\langle A(0)A^\dagger(t)\rangle_\beta = \sum_{n,m} \rho_m e^{iE_n t} e^{-iE_m t} |\langle \mathbf{m} | A | \mathbf{n} \rangle|^2 \tag{3.106}$$

Ici $\rho_n = Z^{-1} e^{-E_n/k_b T}$. On peut maintenant utiliser comme définition de la fonction spectrale $\mathcal{A}(\omega)$

$$\mathcal{A}(\omega) = 2\pi \sum_{n,m} (\rho_n + \rho_m) |\langle \mathbf{m} | A | \mathbf{n} \rangle|^2 \delta(\omega + E_n - E_m) \tag{3.107}$$

De l'identité précédente, on déduit facilement après intégration sur le temps $\mathbf{Im}[\widehat{X}_{Ret}(\omega)]$ et $I_{\mathcal{T}}(-\omega/e)$ as a function of $\mathcal{A}(\omega)$

$$\frac{I_{\mathcal{T}}(-\omega/e)}{(1 - e^{\omega\beta})} + \frac{I_{\mathcal{T}}(\omega/e)}{(1 - e^{-\omega\beta})} = 2e\mathcal{T}^2 \mathcal{A}(\omega) \tag{3.108}$$

Le courant est antisymétrique en fonction de la différence de potentiel appliquée ou de ω

$$I_{\mathcal{T}}(-\omega/e) \frac{e^{\omega\beta} - e^{-\omega\beta}}{(2 - e^{-\omega\beta} - e^{\omega\beta})} = 2e\mathcal{T}^2 \mathcal{A}(\omega) \tag{3.109}$$

Les transformations usuelles $\coth(\omega\beta) = 2 \coth^2(\omega\beta/2) - 1$ et $\sinh(\omega\beta) = 2 \coth(\omega\beta/2) \sinh(\omega\beta/2)$. Finalement,

$$I_{\mathcal{T}}(V) = 2e\mathcal{T}^2 \tanh(-eV/2k_b T) \mathcal{A}(-eV) \tag{3.110}$$

3.7.2 Puissance de bruit

Il est possible un calcul du même type en partant de

$$S(\omega) = e^2 \mathcal{T}^2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t) \langle \{A(t), A^\dagger(0)\} \rangle_\beta \tag{3.111}$$

A partir du calcul de $\langle A(0)A^\dagger(t)\rangle_\beta$ et de $\langle A^\dagger(t)A(0)\rangle_\beta$ on obtient :

$$\langle A(0)A^\dagger(t)\rangle_\beta + \langle A^\dagger(t)A(0)\rangle_\beta = e^{-ieVt} \sum_{n,m} (\rho_n e^{-i(E_n - E_m)t} + \rho_m e^{i(E_n - E_m)t}) |\langle \mathbf{m} | A | \mathbf{n} \rangle|^2 \tag{3.112}$$

Après intégration sur le temps de $\cos(\omega t) \langle \{A(t), A^\dagger(0)\} \rangle_\beta$, on trouve

$$\begin{aligned}
S(\omega) &= e^2 \mathcal{T}^2 \sum_{n,m} \pi (\rho_n [\delta(\omega - eV - E_n + E_m) + \delta(\omega + eV - E_n + E_m)] \\
&+ \rho_m [\delta(\omega - eV + E_n - E_m) + \delta(\omega + eV + E_n - E_m)]) |\langle \mathbf{m} | A | \mathbf{n} \rangle|^2
\end{aligned} \tag{3.113}$$

Les variables n et m de la double somme étant muettes, on trouve finalement :

$$S(\omega, eV) = \frac{e^2 \mathcal{T}^2}{2} \sum_{\pm} \mathcal{A}(-eV \pm \omega) \quad (3.114)$$

Du calcul de $I_{\mathcal{T}}(V)$ il est alors évident que :

$$S(\omega, eV) = \frac{e}{2} \sum_{\pm} \coth\left(\frac{eV \pm \omega}{2k_b T}\right) I(eV \pm \omega) \quad (3.115)$$

Une observable intéressante est la conductance linéaire $G_{\mathcal{T}}(\omega, eV)$. Le traitement standard conduit à la formule de Kubo, que l'on peut exprimer de la manière suivante :

$$\frac{2\omega}{e} \mathbf{Re} G_{\mathcal{T}}(\omega, eV) = I(eV + \omega) - I(eV - \omega) \quad (3.116)$$

A partir de cette équation et de Eq.(3.115), la puissance de bruit à fréquence nulle s'exprime en fonction de la conductance à fréquence finie :

$$S(0, eV) + S(0, -eV) = 2eV \coth\left(\frac{eV}{2k_b T}\right) \mathbf{Re} G_{\mathcal{T}}(eV, 0) \quad (3.117)$$

Il est également très facile de déduire la puissance de bruit à fréquence nulle à partir de :

$$S(0, eV) = e \coth\left(\frac{eV}{2k_b T}\right) I(eV)_{T=0K} \quad (3.118)$$

ce qui devient, à température nulle :

$$S(0, eV) = eI(eV)_{T=0K} \quad (3.119)$$

La puissance de bruit à fréquence nulle est donc égale au courant tunnel à la charge de l'électron près, ce qui est normal car nous nous intéressons à l'effet tunnel électronique.

3.7.3 Bruit à tension nulle

On examine maintenant le cas $V = 0$. Les équations (3.116) et (3.115) permettent de déduire que la puissance de bruit à tension nulle s'exprime à partir de la conductance à fréquence finie :

$$S(\omega, 0) = \omega \coth\left(\frac{\omega}{2k_b T}\right) \mathbf{Re} G_{\mathcal{T}}(\omega, 0). \quad (3.120)$$

La formule (3.120) constitue le célèbre théorème de *fluctuation-dissipation*. Dans la limite basse température de Eq.(3.97), le bruit devient :

$$S(\omega, 0) = eI(\omega)_{T=0K} \quad (3.121)$$

La puissance de bruit manifeste donc les mêmes dépendances en la longueur et les interactions que le courant tunnel. Précisément, dans le cas non-résonnant, le bruit dans la limite de grand L , est nul jusqu'à un certain seuil de fréquence $\omega \sim \varepsilon_f$, comme l'était le courant I_t . Pour des fréquences $\omega \rightarrow 0$, le bruit se comporte comme ω^{2g-1} , en revanche, dans la limite $\omega \rightarrow \infty$ le bruit à un comportement asymptotique $S(\omega, 0) \sim \omega^{2g-2}$. Les non-linéarités typiques de χ LL sont donc présentes. Lorsque la barrière est de longueur finie, ces non-linéarités sont atténuées et des oscillations supplémentaires apparaissent, comme en (3.5.1).

Dans le cas résonnant, les non-linéarités du χ LL sont encore présentes mais les oscillations disparaissent.

3.7.4 Bruit à tension non-nulle

Quand, à la fois $\omega \neq 0$ et $V \neq 0$, la puissance de bruit est donnée par Eq.(3.115). On ne discutera ici que la limite de température nulle. Il apparaît deux régimes distincts que nous appelons régime de *basse fréquence*, quand ($\omega \ll eV$), et régime de *haute fréquence*, pour ($\omega \gg eV$). Dans la limite basse fréquence, on peut réaliser le développement de Eq.(3.115) en fonction ω/eV . Le bruit est alors donné par une formule analogue à(3.118) ; à l'ordre deux en ω/eV :

$$S(\omega, eV) = eI(\omega, eV) + o(\omega/eV) \quad (3.122)$$

On retrouve l'expression habituelle du bruit de grenaille. Dans la limite duale de haute fréquence :

$$S(\omega, eV) = \frac{e}{2} (I(eV + \omega) - I(eV - \omega)) \quad (3.123)$$

On peut remarquer la singularité se produisant à $\omega = eV$. En effet, pour des valeurs de ω juste en-dessous de eV , $\omega = eV^-$,

$$S(\omega, \omega) = -\frac{e}{2}I(2\omega) \quad (3.124)$$

alors que juste au-dessus de eV , $\omega = eV^+$, Eq.(3.115) devient

$$S(\omega, \omega) = \frac{e}{2}I(2\omega) \quad (3.125)$$

La singularité à $\omega = eV$, ne dépend ni des interactions (g) ni de la longueur de l'échantillon (L). Nous avons ainsi obtenu le courant tunnel et le bruit associé pour une jonction tunnel étendue, en fonction de la longueur de la barrière, de la température, de l'interaction coulombienne à longue distance entre les bords L et R et du remplissage entier ou fractionnaire à $\nu = 1/m$.

3.8 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons détaillé le calcul perturbatif du courant tunnel dans les jonctions quantiques étendues. Ce travail s'inscrit dans la continuité de nombreuses tentatives d'interprétation théorique des résultats expérimentaux de Kang *et al.*. Nos résultats prennent en compte les paramètres naturels du problème : la longueur de la jonction, le facteur de remplissage (entier ou fractionnaire), la force des interactions et la température. Nous avons discuté le rôle de ces quantités dans les différents régimes de transport tunnel. La comparaison directe de nos résultats à l'expérience est difficile car le facteur de remplissage est restreint aux valeurs $\nu = 1/m$. Nous observons les non-linéarités typiques des χ LL et des effets d'interférence quantique liés au caractère étendu de la barrière. Il est intéressant de constater qu'à remplissage entier des deux canaux de bord de la jonction, les interactions *jouent* un rôle et sont responsables de la non-linéarité de la caractéristique $I_{\mathcal{T}}(V)$.

Il serait intéressant de poursuivre ce travail en appliquant ce formalisme à des situations expérimentales où les interactions entre canaux de bord ne sont pas négligeables. Le rôle du désordre dans ces structures est également un point obscur. Enfin, l'extension naturelle de ces travaux se trouve dans l'étude de jonctions étendues plus souples dans le choix des facteurs de remplissage et de la chiralité de chaque canal de bord. Des structures offrant ces caractéristiques ont été réalisées expérimentalement. Nous en faisons l'étude au chapitre suivant.

Chapitre 4

Jonction étendue en coin

Dans ce chapitre nous étudions les propriétés de transport d'une structure plus complexe et plus riche que la jonction tunnel étendue. Il s'agit de la jonction étendue *en coin* développée par Grayson *et al.*. La jonction étendue en coin est constituée de deux 2-DEG à 90° l'un de l'autre. Cette structure permet la réalisation de canaux de bords parallèles appartenant à deux fluides de Hall distincts aux facteurs de remplissage magiques quelconques. Ces canaux peuvent supporter des excitations co-propageantes ou contrepropageantes. En premier lieu, nous présentons les caractéristiques étonnantes de cette nouvelle structure. Nous souhaitons ensuite étudier le courant tunnel apparaissant entre ces canaux dans différentes configurations. Pour cela, nous déterminons d'abord les relations de dispersion à un corps de ce système dans le cas contre-propageant puis co-propageant. Contrairement au chapitre précédent, l'effet tunnel résonnant se produit essentiellement autour d'un moment non-nul k_0 . Dans le cas contre-propageant, nous calculons la conductance différentielle de l'effet tunnel en l'absence d'interaction et à remplissage entier et nous mettons en évidence deux régimes de transport distincts. Lorsque l'on prend en compte les interactions, ces deux régimes s'étendent en deux phases distinctes : il apparaît une transition de phase commensurable-incommensurable contrôlée par la force des interactions et la valeur de k_0 . Enfin, nous déterminons le courant tunnel entre deux canaux co-propageant à remplissages magiques *distincts*. Nous remarquons que le système se simplifie en un modèle effectif constitué d'une seule espèce fermionique chirale de remplissage fractionnaire. Nous appliquons le formalisme du chapitre précédent pour déterminer la valeur du courant tunnel.

4.1 La jonction étendue en coin

Nous allons maintenant examiner un nouveau type de structure créée par Grayson *et al.* [32] qui présente des similitudes avec la jonction tunnel étendue mais qui est susceptible de faire apparaître des phénomènes encore plus riches.

4.1.1 Réalisation expérimentale

Leur échantillon est un puit quantique d'hétérojonction en coin (CQW), fabriqué en réalisant une croissance sur une hétérojonction GaAs/AlGaAs clivé *ex-situ* en coin. Le clivage *ex-situ* consiste à extraire l'échantillon du flux moléculaire, à le cliver puis à le repositionner dans la cellule de MBE. Ce clivage permet de former un substrat en coin (i.e. à 90°) avec une résolution atomique. Il existe deux géométries qui exposent les plans orthogonaux de la classe $\{110\}$. On peut soit cliver un substrat (110) de GaAs dans le plan orthogonal $(1\bar{1}0)$ (cf Fig. 4.1, type I), soit prendre un substrat (001) de GaAs et le cliver deux fois suivant les plans (110) et $(1\bar{1}0)$ (cf Fig. 4.1, type II). Dans les deux cas, le coin partagé par les plans (110) et $(1\bar{1}0)$ sert de substrat pour la seconde croissance ; il est monté en face du flux de molécules. Dorénavant, (110) est appelé la

face s et $(\bar{1}\bar{1}0)$ la face p (pour 'substrat' et 'pré-clivé', respectivement pour les échantillons de type 1).

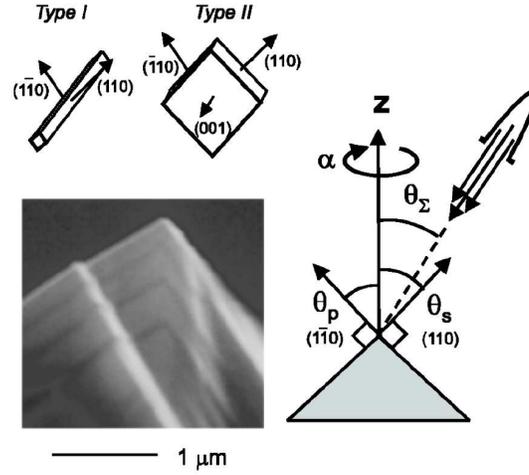


FIG. 4.1 – (En haut) Substrat clivé en coin : Type I à partir d'un wafer (110) , Type II à partir d'un wafer (001) . (En bas) Image SEM des couches que l'on a fait croître sur le coin. (A droite) Schéma de la géométrie de croissance : axe de rotation \hat{z} , angle de la source θ_Σ , angle du substrat θ_s , et angle pré-clivé θ_p .

On fait croître les couches supplémentaires par technique de MBE. L'axe \hat{z} sur la Fig. (4.1) est l'axe de rotation du substrat ainsi que l'axe autour duquel les sources de molécules sont positionnées, symétriquement, à un angle azimutal de $\theta_\Sigma = 33^\circ$. Le flux moléculaire est d'abord calibré par RHEED (Reflected High Energy Electron Diffraction) sur un substrat plat. Le substrat en coin est monté de sorte que les faces s et p fassent des angles $\theta_s = 90^\circ - \theta_p = 45^\circ$ avec \hat{z} . Une rotation continue autour de l'axe \hat{z} assure que le flux incident sur la face s aura une composante oscillante dont la moyenne est nulle et une composante constante égale au flux Φ_0 (calibré par RHEED) projeté sur la surface inclinée, $\Phi_s = \Phi_0 \cos(\theta_s)$. Réciproquement, la face p verra un flux moyen de $\Phi_p = \Phi_0 \cos(\theta_p) = \Phi_0 \sin(\theta_s)$. Le résultat majeur du groupe de Grayson est, qu'en dépit des fluctuations de flux dues à la rotation, il arrive à faire croître un cristal de bonne qualité sur les faces inclinées du substrat en coin.

Sur les photographies prises par SEM (cf Fig. 4.1, 4.2), on peut observer un échantillon créé par cette technique. A partir des valeurs de flux calibrées par RHEED, les trois bandes sombres sur la face gauche p (resp. droite s) de l'échantillon sont des couches de 810\AA (560\AA) de AlAs séparées par des couches plus fines de GaAs/AlGaAs d'épaisseur variable : 1620\AA , 1620\AA et 2430\AA (resp. 1120\AA , 1120\AA , et 1680\AA) dans le sens de la surface vers l'intérieur. L'angle abrupt de 90° est conservé, même après cette seconde croissance. La structure formée est une hétérojonction CQW, analogue aux hétérojonctions qui produisent le 2DEG dans les structures planes. Il s'agit d'une hétérojonction de AlGaAs/GaAs avec une couche de base de GaAs. Il y a ensuite, sur chaque face, 1200\AA de $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$, dopé n par du Si, 3000\AA de $\text{Al}_{0.3}\text{Ga}_{0.7}\text{As}$, et une couche supérieure de 100\AA de GaAs (cf Fig. 4.3 insert). L'échantillon est électriquement relié aux instruments de mesures par des plots d'indium positionnés loin de la zone du coin (cf Fig. 4.4). En réalisant des mesures à quatre points de la résistance longitudinale des deux faces à 350 mK (cf Fig. 4.3), Grayson *et al.* ont pu mesurer indépendamment les densités de deux faces : $n_s = 1.07 \times 10^{11}\text{ cm}^{-2}$ et $n_p = 1.30 \times 10^{11}\text{ cm}^{-2}$. On observe à la Fig. (4.3) des minima de résistance longitudinale dus à l'effet Hall quantique fractionnaire à $\nu = 2/3$ à 350 mK . Ceci

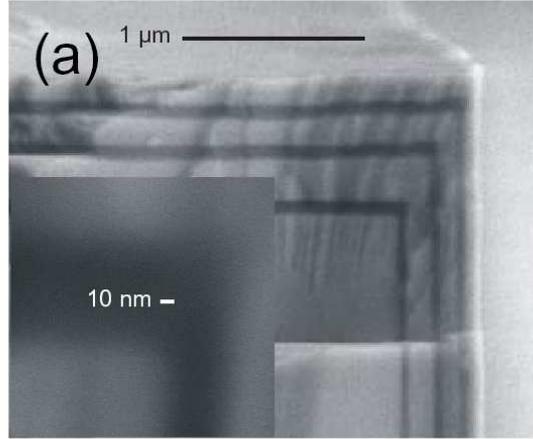


FIG. 4.2 – Image SEM des couches que l'on a fait croître sur le coin. Le coin est plus abrupt que la résolution de 10nm du microscope.

qui atteste que chaque face a une mobilité de l'ordre de $\mu \approx 5 \times 10^5 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. On notera la

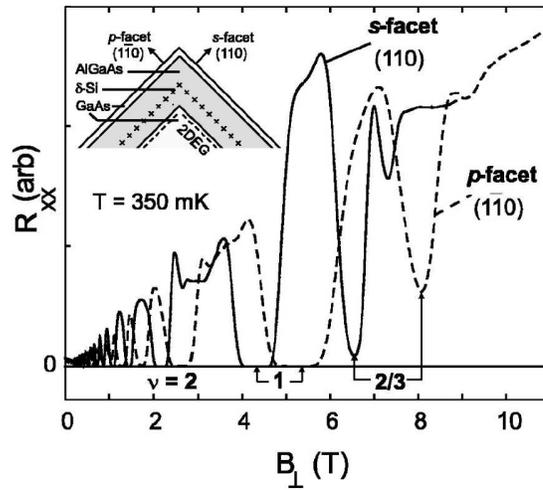


FIG. 4.3 – R_{xx} pour les deux faces, avec $n_s = 1.07 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$, $n_p = 1.30 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Minima de l'effet Hall fractionnaire à $\nu = 2/3$ qui attestent de la qualité de l'échantillon. Insert : structure de l'hétérojonction pliée à 90° .

configuration des contacts de la résistance quatre-points $R_{i-j,k-l}$ avec le courant mesuré entre $i - j$ et la tension mesurée entre $k - l$.

4.1.2 Apparition de l'effet Hall

En présence d'un champ magnétique incliné d'un angle θ par rapport à la normale du substrat (cf Fig. 4.4, à gauche), le facteur de remplissage relatif des deux systèmes ν_s/ν_p peut être modifié

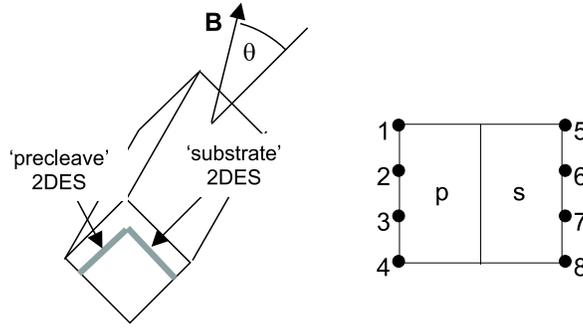


FIG. 4.4 – Schéma de la jonction en coin avec les 2-DEG du substrat et de la face clivée (à gauche) et une vue d’au-dessus avec les contacts (à droite).

par l’angle θ :

$$\frac{\nu_s}{\nu_p} = \frac{n_s/B\cos(\theta)}{n_p/B\sin(\theta)} = \frac{n_s}{n_p}\tan(\theta) \quad (4.1)$$

La bonne qualité de l’hétérojonction se manifeste par le fait que des minima d’effet Hall quantique fractionnaire apparaissent dans la résistivité longitudinale des canaux de bord des deux faces en dessous de 1 K. Pour des angles $0^\circ < \theta < 90^\circ$ ($\nu_s/\nu_p > 0$), les excitations des canaux de bords se propagent le long du coin, en sens opposé, comme dans une structure plane classique. Notons que les facteurs de remplissage peuvent être choisis arbitrairement. En revanche, pour $0^\circ > \theta > -90^\circ$ ($\nu_s/\nu_p < 0$), la composante normale du champ magnétique de la face clivée *change de signe*, ce qui conduit à la formation de canaux de bords *co-propageant* de facteurs de remplissage arbitraires, modifiables simplement en inclinant l’échantillon dans le champ magnétique. Dans ces structures on peut donc choisir la valeur du facteur de remplissage de chaque fluide de Hall mais aussi la chiralité de chacun d’eux. Il suffit de faire varier l’inclinaison de l’échantillon par rapport au champ magnétique, ce qui offre une grande souplesse d’utilisation. Ces structures sont donc potentiellement bien plus riches que le 2-DEG habituel où la structure planaire impose le même facteur de remplissage et la même chiralité dans tout l’échantillon.

Canaux contre-propageant

Les mesures de Hall ont d’abord été effectuées dans le régime $\nu_s/\nu_p > 0$. Sur la Fig. (4.5), en haut, nous voyons $R_{xx}^p = R_{1-4,2-3}$ et $R_{xx}^s = R_{5-8,6-7}$ pour $\nu_s/\nu_p = +1/3$. Ceci correspond à un champ magnétique incliné d’un angle de $\theta = +21.6^\circ$. Les minima de la série $(\nu_s : \nu_p) = (1 : 3)$, $(\frac{2}{3} : 2)$, $(\frac{1}{3} : 1)$ s’annulent pour les deux traces R_{xx} . Cette caractéristique typique de l’effet Hall fractionnaire valide l’utilisation de l’image des canaux de bord pour ces champs. L’insert de la Fig. (4.5) montre un schéma du cas (1 : 3), avec le signe de la composante normale du champ dans chaque région. Sur la Fig. (4.5), en bas, $R_{xy}^s = R_{2-6,7-5}$ et $R_{xy}^p = R_{2-6,3-1}$ sont représentées avec la résistance à quatre points du coin $R_c = R_{2-6,1-5}$. Comme le contact 2 fournit du courant aux contacts de tension 4 et 8, la résistance à quatre points $R'_c = R_{2-6,4-8}$ est trivialement nulle. En regardant bien, R_c est juste la différence entre deux résistances de Hall, $R_c = |R_{xy}^s| - |R_{xy}^p|$ ce qui confirme l’image de Landauer-Büttiker (section 2.5.7) où les canaux de bords s’équilibrent complètement en atteignant le contact 1.

Canaux co-propageant

On examine ensuite le cas $\nu_s/\nu_p < 0$. Ce régime correspond à la situation inédite où la composante normale du champ à travers la face clivée change de signe. Les canaux de bord de

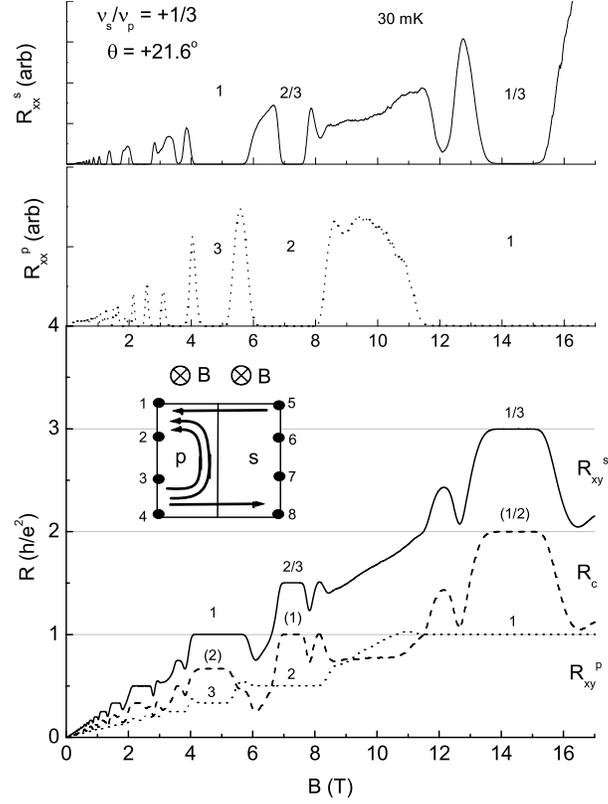


FIG. 4.5 – Graphiques de $R_{xx}^s = R_{5-8,6-7}$ (en haut), $R_{xx}^p = R_{1-4,2-3}$ (milieu), $R_{xy}^s = R_{2-6,7-5}$, $R_c = R_{2-6,1-5}$, et $R_{xy}^p = R_{2-6,3-1}$ (en bas). Ces mesures sont réalisées sur la jonction en coin à un champ magnétique incliné tel que $\nu_s/\nu_p = +1/3$. $n_s = 1.07 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ et $n_p = 1.30 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Plateaux de R_{xy} et R_c indiqués par le nombre quantique, n tel que $R = h/nc^2$. La figure d'en-bas démontre la prédiction de la théorie de Landauer-Büttiker $R_c = |R_{xy}^s| - |R_{xy}^p|$.

cette face changent de chiralité en conséquence ((cf Fig. 4.6), insert). A la Fig. (4.6), en haut, on voit $R_{xx}^p = R_{1-4,2-3}$ et $R_{xx}^s = R_{5-8,6-7}$ pour $\nu_s/\nu_p = -1/2$, ce qui correspond à un champ B à un angle de $\theta = -30.2^\circ$. On observe également des minima de résistivité longitudinale à $(\nu_s : \nu_p) = (2 : 4)$ et $(1 : 2)$. Dans cette configuration nouvelle, les canaux de bord co-propageant le long de la jonction en coin de longueur $L = 3.2\text{mm}$. Ils s'équilibrent complètement, ce qui signifie que les potentiels aux contacts 4 et 8 sont égaux et que $R'_c = R_{2-6,4-8} = 0$. La seule résistance non-triviale est encore $R_c = R_{2-6,1-5}$. Par rapport au régime de canaux contre-propageant, R_{xy}^p a changé de signe et R_c est maintenant la *somme* des R_{xy} : $R_c = |R_{xy}^s| + |R_{xy}^p|$. Notons que dans une structure planaire, aucune résistance à quatre points ne peut être *plus grande* que la plus grande des résistances R_{xy} ; un nouveau régime de validité pour le formalisme de Landauer-Büttiker a ainsi été démontré. Ces expériences mettent donc à jour de nouvelles structures potentiellement riches de phénomènes inédits.

Dans ce chapitre, nous étudions ces jonctions en coin dans une configuration légèrement différente de celle proposée par Grayson *et al.*. En effet, nous supposons qu'il n'y a pas de contact direct entre les deux 2-DEG au niveau de la jonction en coin mais qu'ils sont séparés par une fine barrière de potentiel, de largeur uniforme et très haute. Cette configuration, qui n'a *pas* été réalisée expérimentalement, est le modèle de jonction tunnel étendue, étudiée dans le chapitre précédent. On suppose toutefois ici que la barrière tunnel sépare deux 2-DEG à 90° et non plus deux 2-DEG coplanaires. Cette hypothèse est raisonnable car elle apparaît comme l'étape suivante des réalisations expérimentales de Grayson *et al.*. Notons que des travaux théoriques, s'appuyant sur les échantillons de Grayson, font également cette hypothèse [71, 72]. Nous allons tout d'abord établir les relations de dispersion à une particule de ce système dans le cas de canaux contre-propageant le long de la barrière, puis dans le cas co-propageant. Nous nous intéresserons ensuite aux propriétés de transport tunnel à travers une telle jonction tunnel étendue en coin. Dans le cas contre-propageant, nous mettrons en évidence une transition de phase commensurable-incommensurable (IC) en fonction de la force des interactions à travers la barrière lorsque le facteur de remplissage est identique et entier pour les deux fluides de Hall ; dans le cas co-propageant nous réaliserons un calcul *perturbatif* du courant tunnel en présence d'interactions lorsque les facteurs de remplissage des deux fluides sont magiques.

4.2 Spectre à une particule

Le modèle que nous considérons consiste en deux systèmes électroniques unidimensionnels de longueur finie L , sans interaction, parallèles à la direction y et placés dans le plan YZ aux positions z_L et z_R . La barrière de potentiel qui les séparent est supposée de hauteur finie et uniforme dans la région $|y| < L/2$. Dans cette région les deux liquides de Luttinger sont donc couplés par effet tunnel. Le potentiel est infini ailleurs. Nous allons commencer par déterminer la relation de dispersion à une particule d'un tel système. Comme nous l'avons fait pour la barrière tunnel étendue du chapitre précédent, il convient de considérer d'abord la géométrie où la barrière séparant les deux 2-DEG est de hauteur infinie. L'expression du potentiel-vecteur \mathbf{A}^1 est maintenant est maintenant différente dans chacun de deux 2-DEG, et la résolution de l'équation de Schrödinger conduit à des niveaux de Landau légèrement différents de la section 2.4.

4.2.1 Canaux contre-propageant

Nous traitons le cas de deux 2-DEG avec des composantes normales du champ de même signe pour chacun des 2-DEG (cf Fig. 4.7). Dans notre géométrie, le champ magnétique est de la forme $\mathbf{B} = (B_x, 0, -B_z)$. Le potentiel-vecteur associé est choisi comme $\mathbf{A} = (0, -B_z x - B_x z, 0)$

¹ $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

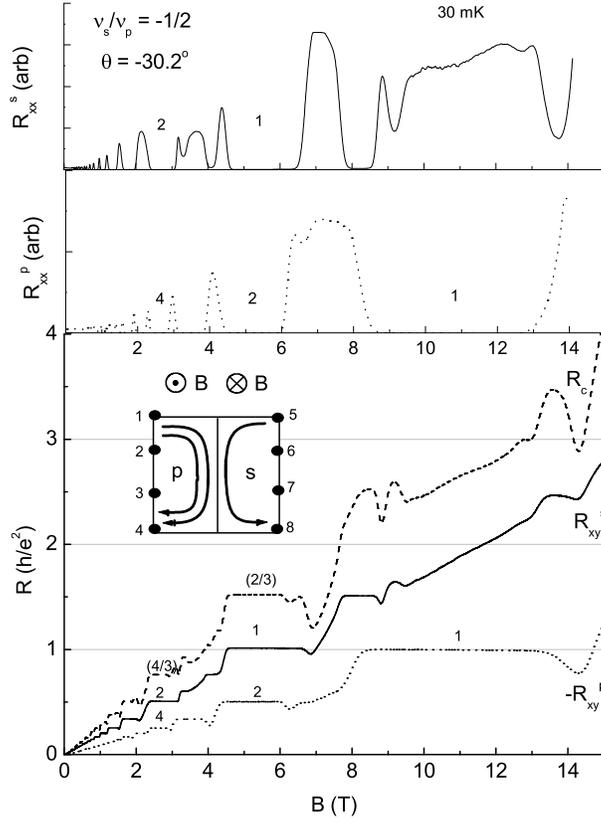


FIG. 4.6 – Graphiques de $R_{xx}^s = R_{5-8,6-7}$ (en haut), $R_{xx}^p = R_{1-4,2-3}$ (milieu), $R_{xy}^s = R_{2-6,7-5}$, $R_c = R_{2-6,1-5}$, et $R_{xy}^p = -R_{2-6,3-1}$ (en bas). Ces mesures sont réalisées sur la jonction en coin à un champ magnétique tel que $\nu_s/\nu_p = -1/2$. $n_s = 1.15 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$ et $n_p = 1.25 \times 10^{11} \text{ cm}^{-2}$. Plateaux de R_{xy} et R_c indiqués par le nombre quantique, n tel que $R = h/ne^2$. La figure d'en bas démontre la prédiction de la théorie de Landauer-Büttiker $R_c = |R_{xy}^s| + |R_{xy}^p|$

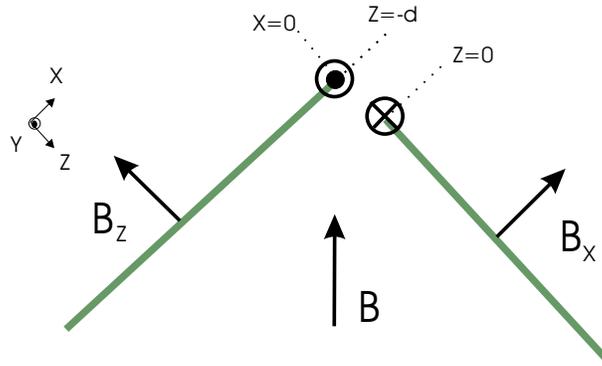


FIG. 4.7 – Géométrie du système étudié. Les deux 2-DEG sont respectivement dans les plans XY (2-DEG de gauche, L) et YZ (2-DEG de droite, R). Le champ magnétique \mathbf{B} est orienté de sorte que la composante normale à chaque 2-DEG conduit à la formation des canaux contre-propageant dans la direction y . La barrière tunnel est réalisée par l'absence de 2-DEG entre les deux plans orthogonaux et correspond pour chacun des deux 2-DEG à un mur abrupt de hauteur infini. Les canaux se forment aux positions $(x_L, z_L) = (0, -d)$ et $(x_R, z_R) = (0, 0)$.

avec $B_x > 0$ et $B_z > 0$. Déterminons maintenant les éléments propres de l'Hamiltonien associé à une telle situation. Dans le gaz d'électrons situé sur la gauche, les électrons se déplacent dans le plan XY , les fonctions d'onde ne dépendent que de x et de y et la variable z est gelée $z = z_L$. L'équation de Schrodinger est donc :

$$\left[\frac{\pi_x^2}{2m} + \frac{(\pi_y - q_e B_z x - q_e B_x z_L)^2}{2m} + U(x) \right] \psi_L(x, y) = \epsilon_L \psi_L(x, y) \quad (4.2)$$

avec $U(x)$ le potentiel de confinement correspondant au bord droit du système. $U(x)$ est un mur de hauteur infinie situé à l'abscisse $x = 0$. L'invariance par translation le long de la direction y permet d'exprimer les solutions sous forme factorisée d'une onde plane et d'une fonction de x uniquement :

$$\psi_L(x, y) = e^{ik_L y} \chi_L(x) \quad (4.3)$$

La pulsation cyclotron du système de gauche est $\omega_L = |q_e| B_z / m$ et le centre de l'orbite cyclotron a pour coordonnées $X_k = (\hbar k_L - q_e B_x z_L) / q_e B_z$. La composante transverse $\chi_L(x)$ vérifie :

$$\left[\frac{\pi_x^2}{2m} + \frac{m\omega_L^2}{2} (x - X_k)^2 + U(x) \right] \chi_L(x) = \epsilon_L \chi_L(x) \quad (4.4)$$

Compte tenu de notre choix de coordonnées, nous avons $z_L = -d$, ce qui conduit à un centre de l'orbite cyclotron :

$$X_k = \frac{\hbar k_L + q_e B_x d}{q_e B_z} \quad (4.5)$$

Dans le gaz bidimensionnel droit, les électrons se déplacent dans le plan YZ , et la fonction d'onde électronique ne dépend que de y et z . La variable x est gelée et $x = 0$. L'équation de Schrodinger est alors :

$$\left[\frac{\pi_z^2}{2m} + \frac{(\pi_y - q_e B_x z)^2}{2m} + U(z) \right] \psi_R(y, z) = \epsilon_R \psi_R(y, z) \quad (4.6)$$

avec $U(z)$ le potentiel de confinement associé au bord gauche du système droit. $U(z)$ est un mur de hauteur infinie situé à la cote $z = z_R = 0$. L'invariance par translation le long de la direction y permet d'exprimer les solutions sous la forme factorisée d'une onde plane et d'une fonction de z uniquement :

$$\psi_R(y, z) = e^{ik_R y} \chi_R(z) \quad (4.7)$$

La pulsation cyclotron à droite est $\omega_R = |q_e| B_x / m$ et le centre de l'orbite cyclotron $Z_k = \hbar k_R / q_e B_x$. La fonction transverse $\chi_R(z)$ vérifie l'équation suivante :

$$\left[\frac{\pi_z^2}{2m} + \frac{m\omega_R^2}{2} (z - Z_k)^2 + U(z) \right] \chi_R(z) = \epsilon_R \chi_R(z) \quad (4.8)$$

Notre choix de coordonnées nous a conduit à $x = 0$, ce qui correspond à une orbite cyclotron centrée sur $Z_k = \hbar k_R / q_e B_x$. La détermination des valeurs propres des deux Hamiltoniens (4.3, 4.8) a été réalisée par [8] pour n'importe quelle valeur de X_k et Z_k (cf Fig. 4.8). Nous avons détaillé ce traitement à la section (2.5.3). Les énergie propres sont :

$$\epsilon_{L,R} = \hbar \omega_{L,R} (\nu_{L,R} + \frac{1}{2}) \quad (4.9)$$

avec ν_L et ν_R deux fonctions respectivement de $X_k / l_L = k_L l_L + dl_L / l_R^2$ et $Z_k / l_R = k_R l_R$. Notons que ces deux fonctions sont celles employées par MacDonald et n'ont rien à voir avec les facteurs de remplissage ν . Avec ces notations l_L et l_R sont les longueurs magnétiques associées à chaque système : $l_L = \sqrt{\hbar / |q_e| B_z}$ et $l_R = \sqrt{\hbar / |q_e| B_x}$.

²Remarquons que l'axe z est orienté à l'opposé du choix habituel.

4.2.2 Croisement des niveaux

On cherche maintenant la valeur k_0 de k où les relations de dispersion se croisent i.e. la valeur de k pour lesquelles se produit l'effet tunnel résonnant. Dans le cas symétrique où $B_x = B_z$, les deux paramètres sont égaux ($l_L = l_R$, $\omega_L = \omega_R = \omega_c$). Les deux spectres sont donc exactement symétriques autour de la droite d'équation $k = k_0 = -q_e B_x d / 2\hbar$ (cf Fig. 4.9). Le croisement des relations de dispersion se produit, pour le premier niveau de Landau, à la valeur $k = k_0$ et l'énergie vaut $\hbar\omega_c(\lambda + \frac{1}{2})$ avec $\lambda > 1$ [8]. Une légère déviation autour du cas symétrique peut

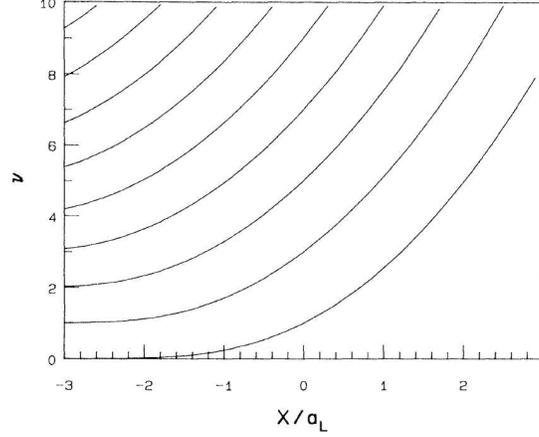


FIG. 4.8 – Valeurs propres ($\varepsilon = \hbar\omega_c(\nu(X) + 1/2)$) en fonction de X , le centre de l'orbite cyclotron, pour un mur infiniment haut. Ici, $X = 0$ correspond au bord, $X > 0$ correspond au *bulk* et $X < 0$ est le mur. a_L est la longueur magnétique.

être traité perturbativement en résolvant :

$$\epsilon_L(k) = \epsilon_R(k) \quad (4.10)$$

$$\hbar\omega_L(\nu_L(k) + \frac{1}{2}) = \hbar\omega_R(\nu_R(k) + \frac{1}{2}) \quad (4.11)$$

On peut linéariser les fonctions $\nu_{L,R}$ autour de $k = -q_e B_x d / 2\hbar = k_0$ pour le premier niveau de Landau :

$$\nu_L(k) = \lambda + \left(\frac{\partial \nu_L}{\partial k} \right)_{k=k_0} (kl_L - k_0 l_L) \quad (4.12)$$

$$\nu_R(k) = \lambda + \left(\frac{\partial \nu_R}{\partial k} \right)_{k=k_0} (kl_R - k_0 l_R) \quad (4.13)$$

et on réalise l'approximation $\left(\frac{\partial \nu_L}{\partial k} \right)_{k=k_0} \approx \frac{v}{\omega_L}$ et $\left(\frac{\partial \nu_R}{\partial k} \right)_{k=k_0} \approx -\frac{v}{\omega_R}$. Enfin, en remplaçant (4.12, 4.13) dans (4.11) on obtient la nouvelle valeur k'_0 du croisement :

$$k'_0 = \left(\lambda + \frac{1}{2} \right) \frac{\omega_R - \omega_L}{2v} - \frac{q_e B_x d}{2\hbar} \quad (4.14)$$

Cet effet d'intersection des branches du premier niveau de Landau à une valeur de k non-nulle est inédite par rapport au cas planaire (cf Fig. 4.9). Des intersections entre branches de *différents* niveaux de Landau se produisent, mais ne participent que très faiblement au courant tunnel à travers la jonction tunnel étendue. Ici, la situation est différente, car l'intersection a lieu au point où l'effet tunnel est maximal. Cela est dû au flux de la composant x du champ magnétique

lors de la circulation d'un électron de moment k d'un plan à l'autre par effet tunnel. Cet effet peut être inclus dans un décalage de l'énergie par rapport au moment canonique. Les relations de dispersion deviennent alors :

$$\begin{aligned}\epsilon_R(k) &= -\hbar v(k + 2k_0) \\ \epsilon_L(k) &= \hbar vk\end{aligned}\tag{4.15}$$

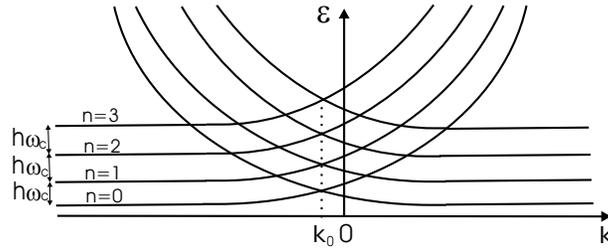


FIG. 4.9 – Relations de dispersion de deux canaux contre-propageant (1er niveau de Landau) représenté en fonction de la même valeur du moment k . On notera l'existence d'une valeur k_0 où les deux branches se coupent.

4.2.3 Canaux co-propageant

La situation précédente est le cas habituel des canaux de bord de chiralités opposées séparés par une barrière de potentiel. La géométrie de notre échantillon permet toutefois aux électrons de se propager dans le même sens le long des bords. Cette situation peut être réalisée en faisant varier l'orientation du champs magnétique (cf Fig. 4.10). Ici, on le choisit tel que $\mathbf{B} = (B_x, 0, B_z)$ avec $B_x > 0$ et $B_z > 0$. Le potentiel-vecteur associé est choisi comme $\mathbf{A} = (0, B_z x - B_x z, 0)$. On va de nouveau résoudre les deux équations de Schrodinger associées à cette situation. Dans

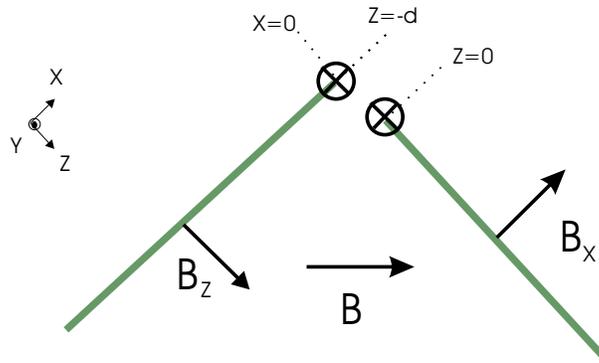


FIG. 4.10 – Géométrie du système étudié. Les deux 2-DEG sont respectivement dans les plans XY (2-DEG de gauche, L) et XZ (2-DEG de droite, R). Le champ magnétique \mathbf{B} est orienté de sorte que la composante normale à chaque 2-DEG conduit à la formation des canaux de bords co-propageant dans la direction y . La barrière tunnel est réalisée par l'absence de 2-DEG entre les deux plans orthogonaux et correspond pour chacun des deux 2-DEG à un mur abrupt de hauteur infini. Les canaux se forment aux positions $(x_L, z_L) = (0, -d)$ et $(x_R, z_R) = (0, 0)$.

le gaz d'électrons situé sur la gauche, les électrons se déplacent dans le plan XY, les fonctions

d'onde ne dépendent que de x et de y et z est gelé. Le même traitement conduit à une équation de Schrodinger réduite de :

$$\left[\frac{\pi_x^2}{2m} + \frac{m\omega_L^2}{2}(x - X_k)^2 + U(x) \right] \chi_L(x) = \epsilon_L \chi_L(x) \quad (4.16)$$

La pulsation cyclotron du système de gauche est $\omega_L = |q_e|B_z/m$. Compte tenu de notre choix de coordonnées, nous avons $z_L = -d$, ce qui conduit à un centre de l'orbite cyclotron :

$$X_k = \frac{-\hbar k_L - q_e B_x d}{q_e B_z} \quad (4.17)$$

De même, dans le gaz bidimensionnel droit, tout se passe comme dans le cas contre-propageant. La pulsation cyclotron à droite est $\omega_R = |q_e|B_x/m$. Notre choix de coordonnées nous conduit à $x = 0$, ce qui correspond à une orbite cyclotron centrée sur $Z_k = \hbar k_R/q_e B_x$. L'Hamiltonien réduit prend alors la forme suivante :

$$\left[\frac{\pi_z^2}{2m} + \frac{m\omega_R^2}{2}(z - Z_k)^2 + U(z) \right] \chi_R(z) = \epsilon_R \chi_R(z) \quad (4.18)$$

Remarquons que l'axe z est orienté à l'opposé du choix habituel et que l'orbite cyclotron du système de gauche à une dépendance en k_L opposée au cas contre-propageant. Dans le cas co-propageant, la situation est purement symétrique lorsque $d = 0$; ce qui conduit à ce que les deux relations de dispersion en fonction du même $k = k_R = k_L$ (conservation du moment par effet tunnel) soient exactement superposées pour tout k . Dans le cas physique où $d \neq 0$, les deux relations de dispersion en fonction du même $k = k_R = k_L$ sont décalées sur l'axe des abscisses. Elles ne se coupent qu'en un seul point (pour le premier niveau de Landau). On peut adopter le *toy-model* suivant pour approcher analytiquement les relations de dispersion du premier niveau de Landau i.e. considérer un comportement asymptotique en demi-parabole :

$$\epsilon_L(X_k) = \begin{cases} \frac{3\hbar\omega_L}{2} + \hbar\omega_L \left(\frac{X_k}{l_L} \right)^2 & X_k > 0 \\ \frac{\hbar\omega_L}{2} & X_k \ll 0 \end{cases} \quad (4.19)$$

et

$$\epsilon_R(Z_k) = \begin{cases} \frac{\hbar\omega_R}{2} & Z_k \gg 0 \\ \frac{3\hbar\omega_R}{2} + \hbar\omega_R \left(\frac{Z_k}{l_R} \right)^2 & Z_k < 0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Précisons que la forme asymptotique en demi-parabole est fautive mais facilite le raisonnement qui reste vrai même pour une croissance moins brutale à l'infini. A partir de ces équations et des relations entre X_k , Z_k et k , nous pouvons réécrire :

$$\epsilon_L(k) = \begin{cases} \frac{3\hbar\omega_L}{2} + \hbar\omega_L ((\hbar km + \omega_R d)/l_L \omega_L)^2 & k < -\omega_R d/m\hbar \\ \frac{\hbar\omega_L}{2} & k \gg -\omega_R d/m\hbar \end{cases} \quad (4.21)$$

et

$$\epsilon_R(k) = \begin{cases} \frac{\hbar\omega_R}{2} & k > 0 \\ \frac{3\hbar\omega_R}{2} + \hbar\omega_R (\hbar km/l_R \omega_R)^2 & k \ll 0 \end{cases} \quad (4.22)$$

Les comportements asymptotiques de ces relations de dispersion indiquent clairement qu'il y a intersection en un point unique dès que $\omega_R \neq \omega_L$. Pour $k \rightarrow -\infty$, nous avons $\epsilon_R(k) \sim (\hbar km)^2/\omega_R$

et $\epsilon_L(k) \sim (\hbar km)^2/\omega_L$. Si $\omega_L > \omega_R$, on en déduit que $\epsilon_L < \epsilon_R$. Lorsque $k \rightarrow \infty$, $\epsilon_R(k) \sim \hbar\omega_R$ et $\epsilon_L(k) \sim \hbar\omega_L$ i.e. $\epsilon_L > \epsilon_R$. Il apparaît donc un point d'intersection entre ces deux relations de dispersion indépendamment de la valeur de d (cf Fig. 4.11). Notons que même si notre *toy-model* ne correspond pas exactement à la fonction ν de MacDonald, il suffit que celle-ci ait une divergence plus brutale que linéaire, ce qui est évidemment le cas, pour que le point d'intersection apparaisse. On peut observer les relations de dispersion des canaux co-propageant à la Fig. (4.11)

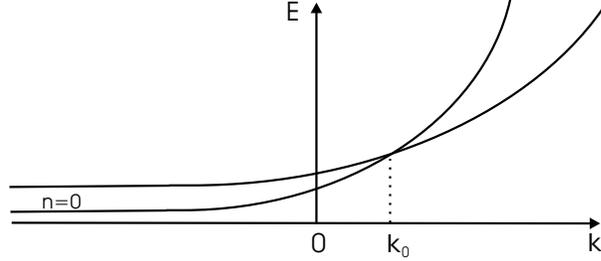


FIG. 4.11 – Relations de dispersion de deux canaux co-propageant (1er niveau de Landau) représenté en fonction de la même valeur du moment k . On notera l'existence d'une valeur k_0 où les deux branches se coupent lorsque les composantes du champ magnétique sont différentes.

4.3 Propriétés de transport tunnel des canaux contre-propageant

Les relations de dispersion à une particule mettent en avant l'existence d'un point d'intersection dans le premier niveau de Landau. Dans le cas contre-propageant comme dans le cas co-propageant, la cinématique des électrons des bords de la jonction étendue en coin favorise l'effet tunnel à une valeur donnée k_0 du moment. Nous allons maintenant étudier le courant associé à ce phénomène en considérant d'abord des canaux de bord contre-propageant relatifs à deux fluides de Hall de même remplissage entier. Pour cela, nous supposons d'abord que l'intensité de l'interaction coulombienne est négligeable, puis nous verrons ensuite qu'elle produit une transition de phase.

4.3.1 Transport en l'absence d'interaction coulombienne

Nous allons utiliser le formalisme de diffusion cohérente pour déterminer les propriétés de transport de l'effet tunnel. Dans cette approche, on définit une région (les fils) dans laquelle l'effet tunnel ne se produit pas et où des états diffusifs peuvent être définies ($|y| > L/2$) avec les relations de dispersion $\epsilon_R(k)$ et $\epsilon_L(k)$. On note ces fils de 1 à 4 (cf Fig. 4.12). Dans le formalisme de seconde quantification, l'Hamiltonien du système dans les fils est décrit par :

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=R,L} \int \frac{dk}{2\pi} \epsilon_{\alpha}(k) c_{\alpha}^{\dagger}(k) c_{\alpha}(k) \quad (4.23)$$

La région où se produit l'effet tunnel ($|y| < L/2$) agit comme un centre diffuseur dont on veut calculer les coefficients de transmission. Le système est alors décrit par l'Hamiltonien suivant :

$$\mathcal{H} = \sum_{\alpha=R,L} \int \frac{dk}{2\pi} \epsilon_{\alpha}(k) c_{\alpha}^{\dagger}(k) c_{\alpha}(k) + \int \frac{dk}{2\pi} \int \frac{dp}{2\pi} [\mathcal{T}_{k,p} c_R^{\dagger}(k) c_p(p) + \text{h.c}] \quad (4.24)$$

Il y a une manière simple de représenter cet Hamiltonien par une matrice 2×2 dans la région d'interaction dans le formalisme de première quantification et en transformée de Fourier. On

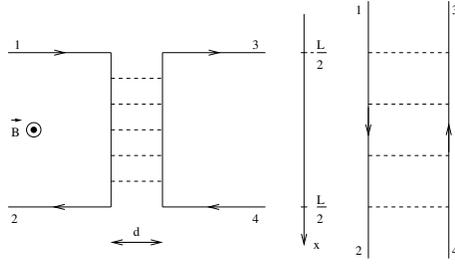


FIG. 4.12 – Géométrie de la barrière. Les fils 1 et 4 sont loin de la zone d'interaction tunnel et sont reliés à des réservoirs. Le diffuseur est la zone d'interaction tunnel (au centre). A gauche, on voit un géométrie topologiquement équivalente.

suppose la barrière très longue, l'invariance par translation le long des bords conduit à la conservation du moment durant l'effet tunnel. Le coefficient tunnel $\mathcal{T}_{k,p}$ est donc constant et diagonal³. Il s'agit donc d'une géométrie un peu inhabituelle où il faut envisager des réservoirs à l'infini reliés par des fils de dispersion usuelle à une barrière de longueur quasi-infinie. La base dans laquelle on exprime l'Hamiltonien est la base des fonctions d'onde sous forme de spineurs à deux composantes $(c_R(k), c_L(k))$,

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} \epsilon_R(k) & \mathcal{T} \\ \mathcal{T} & \epsilon_L(k) \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

Le courant à travers la barrière tunnel est donné par la formule de Büttiker multi-terminaux :

$$I_{\mathcal{T}} = \frac{2e}{\hbar} \sum_{m=1,2n=3,4} \int d\epsilon T_{m,n}(\epsilon) [f_L(\epsilon) - f_R(\epsilon)] \quad (4.26)$$

avec $T_{m,n}(\epsilon)$ qui est le carré des coefficients de transmission $t_{m,n}(\epsilon)$ pour les électrons à l'énergie ϵ venant du fil m et diffusé dans le fil n ($T_{m,n}(\epsilon) = |t_{m,n}(\epsilon)|^2$). On calcule ces coefficients en égalisant les états diffusifs d'énergie ϵ , aux états propres de l'Hamiltonien (4.25) dans la région tunnel. La matrice est diagonalisée de manière très simple et conduit aux relations de dispersion des modes propres a_+ and a_- :

$$\epsilon_{\pm}(k) = \frac{1}{2} [\epsilon_R(k) + \epsilon_L(k) \pm \mathcal{T} \sqrt{1+r^2}] \quad (4.27)$$

avec $r = \frac{\epsilon_R(k) - \epsilon_L(k)}{2\mathcal{T}}$.

Dans la base des spineur initiale, les modes propres a_+ et a_- s'expriment comme :

$$a_+ = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

$$a_- = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \\ -\sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_- \\ v_- \end{pmatrix} \quad (4.29)$$

³Cela n'est pas le cas en toute rigueur et l'effet de la longueur L finie apparait *via* un sinus cardinal comme dans le chapitre précédent.

Pour obtenir les coefficients de transmission à l'énergie ϵ , nous allons égaliser les fonctions d'ondes à deux composantes dans les trois zones spatiales :

$$\psi_\epsilon(y)|_{y < -\frac{L}{2}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_L^+ y} + \begin{pmatrix} 0 \\ t_{1,4} \end{pmatrix} e^{ik_R^+ y} \quad (4.30)$$

$$\psi_\epsilon(y)|_{y > +\frac{L}{2}} = \begin{pmatrix} t_{1,2} \\ 0 \end{pmatrix} e^{ik_L^- y} \quad (4.31)$$

$$\psi_\epsilon(y)|_{|y| < \frac{L}{2}} = d_+ \begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix} e^{ik_+ y} + d_- \begin{pmatrix} u_- \\ v_- \end{pmatrix} e^{ik_- y} \quad (4.32)$$

Les vecteurs d'onde $k_{L,R}^\pm$ sont solutions de $\epsilon \equiv \epsilon_{L,R}(k_{L,R}^\pm)$ avec des vitesses de groupe respectivement positive et négative $v_{L,R} = \frac{1}{\hbar} \partial_k \epsilon_{L,R}(k)$. Les relations de dispersion dans la région de couplage conduisent à $\epsilon \equiv \epsilon_\pm(k_\pm)$. De manière générale, la continuité des fonctions d'onde à $y = +\frac{L}{2}$ et $y = -\frac{L}{2}$ pour les modes inférieurs et supérieurs conduisent à :

$$t_{1,2} e^{+ik_L^- \frac{L}{2}} = e^{+i(k_+ + k_- - k_L^+) \frac{L}{2}} \left[\frac{u_- v_+ - u_+ v_-}{(u_- v_+ e^{+i(k_+ - k_-) \frac{L}{2}} - u_+ v_- e^{-i(k_+ - k_-) L})} \right] \quad (4.33)$$

Le même calcul pour $t_{1,4}$ conduit au coefficient de transmission tunnel :

$$t_{1,4} e^{-ik_R^+ \frac{L}{2}} = 2iv_- v_+ \sin[(k_+ - k_-) \frac{L}{2}] \left[\frac{e^{-ik_L^+ \frac{L}{2}}}{(u_- v_+ e^{+i(k_+ - k_-) \frac{L}{2}} - u_+ v_- e^{-i(k_+ - k_-) \frac{L}{2}})} \right] \quad (4.34)$$

4.3.2 Phase incommensurable

Nous pouvons maintenant traiter notre problème et déterminer la conductance tunnel. Pour une valeur donnée de l'énergie ϵ , les valeurs propres de l'Hamiltonien dans la région d'interaction :

$$\epsilon_\pm(k) = -\hbar v \frac{\delta}{2} \pm \mathcal{T} \sqrt{1 + \left(\frac{\hbar v}{2\mathcal{T}}\right)^2 (2k + \delta)^2} = \epsilon \quad (4.35)$$

L'existence d'un gap conduit à deux comportements complètement différents. Quand l'énergie se trouve hors du gap i.e. quand $(\frac{\hbar v \delta}{2} + \epsilon) > \mathcal{T}$, les équations $\epsilon_\pm(k_\pm) = \epsilon$ conduisent à deux solutions pour $\epsilon_+(k_+) = \epsilon$ et il n'y a pas de solution pour $\epsilon_-(k_-) = \epsilon$. Deux modes '+' supportent donc les fonctions d'ondes dans la zone d'interaction. Les deux solutions pour les branches + conduisent aux valeurs :

$$r_+ = \sqrt{\left(\frac{\hbar v \delta}{2\mathcal{T}} + \frac{\epsilon}{\mathcal{T}}\right)^2 - 1} = r = -r_- \quad (4.36)$$

Finalement, nous obtenons :

$$\begin{pmatrix} u_+ \\ v_+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \end{pmatrix} \quad (4.37)$$

$$\begin{pmatrix} u_- \\ v_- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \\ \sqrt{\frac{1}{2} \left(1 + \frac{r}{\sqrt{1+r^2}}\right)} \end{pmatrix} \quad (4.38)$$

Le calcul des coefficients $t_{1,2}$ et $t_{1,4}$ permet d'obtenir $T(\epsilon) = |t_{14}|^2$, et l'application de la formule de Büttiker entre les contacts 1, 2, 3 et 4 avec respectivement les potentiels chimiques $\mu_1 = \mu_2 + eV$, $\mu_2 = \mu_3 = \mu_4$, donne la conductance linéaire à température nulle.

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sin^2\left[\frac{L}{\hbar v} \sqrt{(\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2})^2 - \mathcal{T}^2}\right]}{\sin^2\left[\frac{L}{\hbar v} \sqrt{(\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2})^2 - \mathcal{T}^2}\right] + \left(\frac{\epsilon_f}{\mathcal{T}} + \frac{\hbar v \delta}{2\mathcal{T}}\right)^2 - 1} \quad (4.39)$$

Avant de traiter le cas commensurable, examinons l'autre cas où l'énergie tombe en dehors du gap, i.e. quand $(\frac{\hbar v \delta}{2} + \epsilon) < -\mathcal{T}$, les équations $\epsilon_{\pm} = \epsilon$ donnent deux solutions pour $\epsilon_- = \epsilon$ et pas de solutions pour $\epsilon_+ = \epsilon$. Donc seulement deux modes '-' décrivent les fonctions d'onde dans la zone d'interaction. Le signe global des coefficients n'est pas modifié, et on obtient la même valeur de la conductance :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sin^2\left[\frac{L}{\hbar v} \sqrt{(\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2})^2 - \mathcal{T}^2}\right]}{\sin^2\left[\frac{L}{\hbar v} \sqrt{(\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2})^2 - \mathcal{T}^2}\right] + \left(\frac{\epsilon_f}{\mathcal{T}} + \frac{\hbar v \delta}{2\mathcal{T}}\right)^2 - 1} \quad (4.40)$$

4.3.3 Phase commensurable

Considérons maintenant le cas où $|(\frac{\hbar v \delta}{2} + \epsilon)| < \mathcal{T}$, i.e quand l'énergie ϵ se trouve à l'intérieur du gap. Résoudre les équations $\epsilon_{\pm}(k_{c,\pm}) = \epsilon$ conduit à deux solutions dégénérées en énergie :

$$r_+ = i\sqrt{1 - \left(\frac{\hbar v \delta}{2} + \epsilon\right)^2} = ir = -r_- \quad (4.41)$$

$$k_{+,c} = \frac{i\mathcal{T}}{\hbar v} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\hbar v \delta}{2} + \epsilon\right)^2} - \frac{\delta}{2} \right) \quad (4.42)$$

$$k_{-,c} = \frac{-i\mathcal{T}}{\hbar v} \left(\sqrt{1 - \left(\frac{\hbar v \delta}{2} + \epsilon\right)^2} + \frac{\delta}{2} \right) \quad (4.43)$$

Ces deux solutions imaginaires nous poussent à recalculer les vecteurs propres de l'Hamiltonien. Après quelques calculs, nous suivons le même cheminement que précédemment en évaluant $t_{1,4}$, $t_{1,2}$ et en appliquant la formule de Büttiker. Nous obtenons la valeur suivante de la conductance tunnel à température nulle, et dans la limite de tension nulle :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sinh^2\left(\frac{L}{\hbar v} \sqrt{\mathcal{T}^2 - (\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2})}\right)}{\sinh^2\left(\frac{L}{\hbar v} \sqrt{\mathcal{T}^2 - (\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2})}\right) + \left(\frac{\epsilon_f}{\mathcal{T}} + \frac{\hbar v \delta}{2\mathcal{T}}\right)^2 - 1} \quad (4.44)$$

$G_{\mathcal{T}}$ dépend de 3 paramètres indépendants : $\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2}$ qui conduit à des oscillations de $G_{\mathcal{T}}$, le coefficient tunnel \mathcal{T} qui conduit également à des oscillations et la longueur de la barrière L . La dépendance oscillatoire de $G_{\mathcal{T}}$ en $\epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2}$ peut être modulée en modifiant le champs magnétique appliqué par δ ou par l'énergie de Fermi ϵ_f , ce qui conduit au même résultat. Compte tenu du rôle symétrique joué par l'énergie de Fermi et le flux magnétique, nous allons d'abord nous intéresser à la conductance sans flux.

4.3.4 Résultats à moment k_0 nul

La situation que l'on traite ici est exactement similaire au système du chapitre précédent mais dans une limite différente. Dans le chapitre précédent, nous avons calculé le courant tunnel pour des valeurs de \mathcal{T} faibles (en perturbation) et pour toute différence de potentiel. Ici, nous calculons les propriétés de transport pour un gap tunnel quelconque, donc arbitrairement grand mais la tension appliquée est nécessairement faible puisqu'on regarde la conductance linéaire. On adopte la convention suivante : quand l'énergie de Fermi tombe exactement au milieu du gap, on redéfinit le zéro d'énergie de sorte que $\epsilon_f = 0$ et $\alpha = 0$. On peut maintenant voir apparaître différents régimes de la conductance tunnel en fonction des valeurs relatives des différents paramètres : $L_{\mathcal{T}} = \frac{\pi\hbar v}{\mathcal{T}}$ qui mesure l'intensité de l'effet tunnel, L la longueur de la région de couplage tunnel, et $1 - \alpha^2 = 1 - (\frac{\epsilon_f}{\mathcal{T}})^2$ où $\alpha = \frac{\epsilon_f}{\mathcal{T}}$ mesure la force du couplage par rapport à l'énergie de Fermi du système. La conductance en fonction de ces variables devient :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\sqrt{1 - \alpha^2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\sqrt{1 - \alpha^2}\right) + 1 - \alpha^2} \quad (4.45)$$

Si on s'intéresse aux valeurs de $L_{\mathcal{T}}$ par rapport à L , il apparaît un régime d'effet tunnel faible ($L_{\mathcal{T}} \gg L$) distinct du régime d'effet tunnel fort ($L_{\mathcal{T}} \ll L$). De plus, on dit que le système est à la *resonance* quand l'énergie de Fermi est faible devant \mathcal{T} , i.e. $\alpha \approx 0$; le système est alors dans la phase commensurable pour n'importe quelle valeur non-nulle du coefficient tunnel \mathcal{T} . Autrement, le système est dans la phase incommensurable, il est hors *resonance*. Ainsi la conductance pour $\alpha \approx 0$ se simplifie en :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right) + 1} \quad (4.46)$$

Dans la limite de d'effet tunnel fort, la conductance linéaire oscille en fonction de L avec la longueur d'onde $L_{\mathcal{T}}$ et l'amplitude qui est le quantum de conductance $\frac{2e^2}{h}$. Ce régime peut être réalisé en construisant une région de couplage tunnel très longue. Cela correspond à une zone où l'électron a une très forte probabilité d'être piégé le long de la barrière. Si on augmente (diminue) la hauteur de la barrière il se produit une diminution (augmentation) de la valeur du coefficient tunnel. En conséquence, il est possible, de choisir une échelle de longueur effective pour obtenir de l'effet tunnel cohérent entre les fils 1 et 4.

A l'inverse, le régime d'effet tunnel faible est obtenu dès que la barrière est très courte ou que le coefficient tunnel est très faible $L_{\mathcal{T}} \gg L$, la conductance est alors :

$$G_{\mathcal{T}} \sim \frac{e^2}{h} \left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right)^2 \quad (4.47)$$

En fonction des paramètres initiaux la conductance devient :

$$G_{\mathcal{T}} \sim \frac{e^2}{h} \left(\frac{\mathcal{T}L}{\hbar v}\right)^2 \quad (4.48)$$

Dans ce régime, nous retrouvons la dépendance habituelle en \mathcal{T}^2 de la conductance tunnel à travers une barrière unidimensionnelle. Les électrons ne ressentent pas l'effet tunnel étendu et se comportent comme si la barrière était ponctuelle. La phase incommensurable (limite hors-resonance) est obtenue pour des valeurs de $\alpha \gg 1$. Ceci correspond à de valeurs élevées de l'énergie de Fermi comparées à \mathcal{T} ($\epsilon_f \gg \mathcal{T}$) ou, à l'inverse à des valeurs très faibles ($\epsilon_f \ll -\mathcal{T}$),

i.e. le système est en dehors du gap. Pour cette phase, on doit utiliser l'autre formule de la conductance :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sin^2\left[\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\sqrt{\alpha^2 - 1}\right]}{\sin^2\left[\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\sqrt{\alpha^2 - 1}\right] + \alpha^2 - 1} \quad (4.49)$$

Dans la limite hors-résonance, nous obtenons :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{1}{\alpha^2} \sin^2\left(\alpha \frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right) \quad (4.50)$$

En fonction des paramètres originaux, cela devient :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{e^2}{h} \frac{\mathcal{T}^2}{\epsilon_f^2} \sin^2\left(\alpha \frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right) \quad (4.51)$$

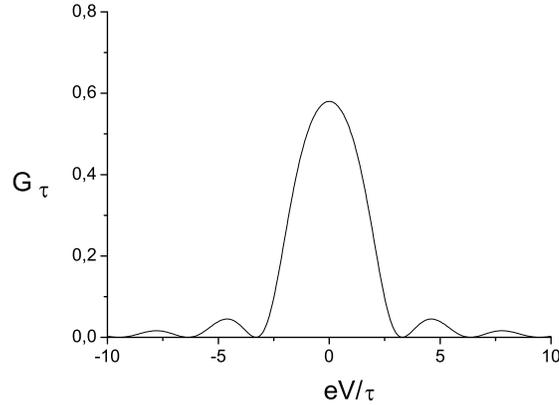


FIG. 4.13 – Conductance différentielle en fonction de ϵ_f/\mathcal{T} for $L/L_{\mathcal{T}} = 1$

On voit ici que la conductance, dans la phase incommensurable, suit un comportement oscillatoire en L identique avec une longueur d'onde $L_{\mathcal{T}}$ avec en plus, un amortissement en $\frac{1}{\epsilon_f^2}$. Ce comportement traduit la très faible probabilité qu'un électron d'énergie hors du gap puisse subir l'effet tunnel. Rapporté à la valeur des pics de résonance, la conductance hors résonance est plusieurs ordres de grandeur en dessous. Comme précédemment, la conductance peut être modulée en ajustant l'échelle de longueur effective $L_{\mathcal{T}}$. Finalement, à la limite des deux comportements $\alpha \approx 1$,

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{2e^2}{h} \frac{\sinh^2\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\sqrt{1 - \alpha^2}\right)}{\sinh^2\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\sqrt{1 - \alpha^2}\right) + 1 - \alpha^2} \quad (4.52)$$

On peut développer le sinh et simplifier la formule pour obtenir la valeur de la conductance à la transition de phase :

$$G_{\mathcal{T}} = \frac{e^2}{h} \frac{\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right)^2}{\left(\frac{\pi L}{L_{\mathcal{T}}}\right)^2 + 1} \quad (4.53)$$

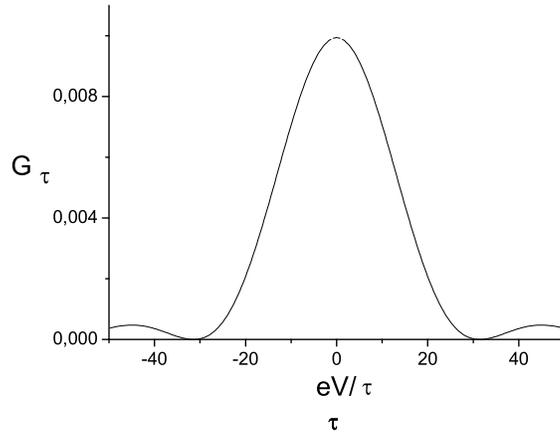


FIG. 4.14 – Conductance différentielle en fonction de ϵ_f/\mathcal{T} for $L/L_T = 0.1$

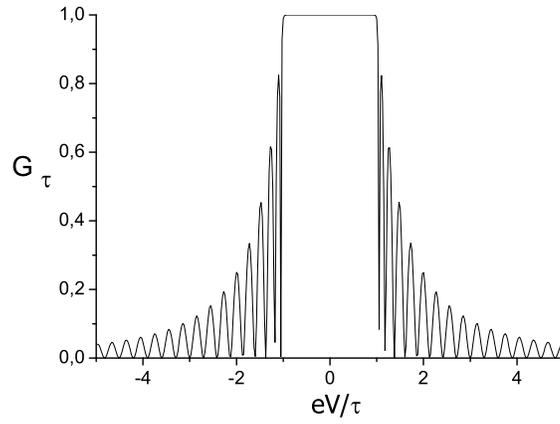


FIG. 4.15 – Conductance différentielle en fonction de ϵ_f/\mathcal{T} for $L/L_T = 10$

4.3.5 Résultats à moment k_0 non-nul

Quand on prend en compte le flux, il n'y a qu'un changement mineur dans la mesure où ce flux ne fait que décaler l'énergie de Fermi $\epsilon_f \rightarrow \epsilon_f + \frac{\hbar v \delta}{2}$. Cette caractéristique permet de faire varier la conductance en modifiant le champs magnétique appliqué au lieu de modifier l'énergie de Fermi du système. Il y a donc un double effet du flux, il peut faire passer le système de la résonance à l'absence de résonance, il traduit également les effets d'interférence quantique *via* les caractéristiques oscillatoires de la conductance.

4.4 Rôle des interactions et transition C-IC

Dans le cas précédent très simple à remplissage entier, nous avons vu que l'existence d'une valeur de k_0 non-nulle autour de laquelle sont linéarisées les relations de dispersion des électrons des deux fluides de Hall conduit à l'apparition de deux phases distinctes. Nous allons montrer que cette transition de phase subsiste toujours quand on rajoute les interactions.

4.4.1 Bosonisation de l'Hamiltonien

On considère maintenant l'effet des interactions en rajoutant un Hamiltonien pour l'interaction coulombienne inter et intra-canaux. L'Hamiltonien total apparaît alors comme :

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_o + \mathcal{H}_{int} + \mathcal{H}_T \quad (4.54)$$

avec :

$$\mathcal{H}_o = -iv_0 \int dy (\psi_R^\dagger \partial_y \psi_R - \psi_L^\dagger \partial_y \psi_L) \quad (4.55)$$

$$\mathcal{H}_{int} = \int dy_1 dy_2 [V(y_1 - y_2)(\rho_R(y_1)\rho_R(y_2) + \rho_L(y_1)\rho_L(y_2)) + 2V(y_1 - y_2)\rho_R(y_1)\rho_L(y_2)] \quad (4.56)$$

$$\mathcal{H}_T = T \int_{-L/2}^{L/2} dy (e^{2ik_0 y} \psi_R^\dagger \psi_L + e^{-2ik_0 y} \psi_L^\dagger \psi_R) \quad (4.57)$$

les opérateurs ψ_R and ψ_L sont les opérateurs des électrons chiraux des bords se propageant vers la droite et la gauche. $\rho_R =: \psi_R^\dagger \psi_R$: et $\rho_L =: \psi_L^\dagger \psi_L$: sont les opérateurs de densité électronique ordonnés normalement correspondants. Nous ne supposons pas de forme précise pour l'interaction coulombienne. Comme au chapitre précédent, nous supposons que l'interaction à lieu tout le long des canaux de bord et pas seulement dans la zone d'interaction tunnel. Appliquons maintenant la procédure usuelle de bosonisation :

$$\psi_R = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\sqrt{4\pi}\phi_R} \quad (4.58)$$

$$\psi_L = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\sqrt{4\pi}\phi_L} \quad (4.59)$$

Ici, ϕ_R et ϕ_L sont les champs bosoniques chiraux. Il est très pratique d'introduire les champs conjugués : $\varphi = \phi_R + \phi_L$ et $\vartheta = \phi_R - \phi_L$. Avec ces conventions de bosonisations, nous avons montré précédemment que

$$\rho_R(x) = i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_z \phi_R \quad \rho_L(x) = -i \frac{1}{\sqrt{\pi}} \partial_z \phi_L \quad (4.60)$$

En fonction du boson non-chiral et de son moment conjugué, ces relations s'exprime comme

$$\rho_R(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\Pi - \partial_x\varphi) \quad \rho_L(x) = -\frac{1}{\sqrt{4\pi}}(\Pi + \partial_x\varphi) \quad (4.61)$$

avec $\Pi = \frac{1}{v_0}\partial_t\varphi(y) = -\nabla(\vartheta)$ le moment conjugué du champ φ .

En supposant une interaction de Coulomb locale $V(y_1 - y_2) = V_0\delta(y_1 - y_2)$, la version bosonisée des Hamiltoniens $\mathcal{H}_{Kin} + \mathcal{H}_{int}$ est alors :

$$\mathcal{H}_{Kin} + \mathcal{H}_{int} = \frac{v_0}{2} \int dx \left\{ \Pi^2 + (\partial_x\varphi)^2 \right\} + \frac{V_0}{2\pi} \int dx \left\{ \Pi^2 + (\partial_x\varphi)^2 \right\} - \frac{V_0}{2\pi} \int dx \left\{ \Pi^2 - (\partial_x\varphi)^2 \right\} \quad (4.62)$$

On peut achever la procédure de bosonisation en réécrivant :

$$\mathcal{H} = \frac{v}{2} \int dy \left\{ K\Pi^2 + \frac{1}{K}(\partial_x\varphi)^2 \right\} + \frac{\mathcal{T}}{\pi} \int_{-L/2}^{L/2} \cos(\sqrt{4\pi}\varphi + 2k_0y) \quad (4.63)$$

avec

$$\begin{aligned} v &= v_0\sqrt{1 + \frac{2V_0}{\pi}} \\ K(k) &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2V_0}{\pi}}} \end{aligned} \quad (4.64)$$

Ainsi, on peut formuler la théorie de fermions avec interaction précédente uniquement à partir d'une phase φ ; le modèle devient alors une théorie du champ libre de bosons avec une relation de dispersion linéaire et un terme de sine-Gordon ⁴. Notons que si on considère des interactions à longue distance, dans les situations réalistes, on peut faire l'approximation que la partie cinétique de l'Hamiltonien décrit une théorie de bosons libres avec une relation de dispersion linéaire, une vitesse renormalisée $v(k) \approx v$ et également un paramètre de Luttinger renormalisé $K(k) \approx K$. Mitra and Girvin [36] ont estimé la valeur de $K \approx 0.6 - 0.7$ dans les structures étudiées dans [33, 34]. Ainsi, en renormalisant la valeur des champs $(1/\sqrt{K})\varphi \rightarrow \varphi$ et $(\sqrt{K}\Pi \rightarrow \Pi$, en réalisant la translation suivante de la variable $\varphi = \varphi - 2k_0y$, et en considérant la barrière comme infiniment longue, on peut réexprimer l'Hamiltonien total en espace réel comme :

$$\mathcal{H} = \frac{v}{2} \int dy \left\{ \Pi^2 + (\partial_x\varphi - 2k_0)^2 + 2\mu \cos(\beta\varphi) \right\} \quad (4.65)$$

avec $\beta = \sqrt{4\pi K}$ et $\mu = \frac{\mathcal{T}}{\pi v_0\sqrt{1 + \frac{2V_0}{\pi}}}$.

4.4.2 Théorie de sine-Gordon

Considérons d'abord la situation où $k_0 = 0$, l'Hamiltonien 4.65 se réduit à l'Hamiltonien de sine-Gordon. C'est un modèle qui est l'un des plus étudiés de la théorie quantique des champs. Il est totalement intégrable [15]. D'après les relations précédentes il est clair que le régime de couplage *fort* du système initial d'électrons ($V_0 \rightarrow \infty$) est transformé par bosonisation en régime de couplage *faible* du modèle de sine-Gordon ($\beta \rightarrow 0$). Cet Hamiltonien est subit le flot du groupe de renormalisation. Si $\beta^2 = 8\pi$, le terme de sine-Gordon est *marginal*, et on pourrait naïvement penser qu'il est *irrelevant* si $\beta^2 > 8\pi$ et *relevant* si $\beta^2 < 8\pi$ en qu'il conduit à un gap des excitations de cette théorie. En réalité, les choses sont un peu plus compliquées car à $\mu = 0$,

⁴Dans la limite de longueur de barrière L infinie.

il n'y a pas qu'un *point* fixe mais une *ligne* de points fixes paramétrée par β^2 . Il en ressort que β^2 est soumis au flot du groupe de renormalisation loin de cette ligne et que l'on doit considérer les équations couplées du groupe de renormalisation

$$\frac{d\beta^2}{dt} = -\pi\beta^4\mu^2 \quad \frac{d\mu}{dt} = -2\mu\left(\frac{\beta^2}{8\pi} - 1\right) \quad (4.66)$$

Ces équations sont obtenues en réalisant les produits d'opérateurs à courte distance. Le flot du groupe de renormalisation est représenté à la Fig. (4.16). On vérifie aisément qu'en partant d'un couplage μ faible, le système évolue vers le couplage fort lorsque (μ est alors *marginalelement relevant*) alors qu'il évolue vers $\mu = 0$ si (μ est alors *marginalelement irrelevant*). On va assister à l'ouverture d'un gap si on part d'un μ infinitésimal et $\beta^2 < 8\pi$. Le terme de sine-Gordon est alors relevant et conduit à une théorie massive. On montre par argument de dimension d'échelle que, le gap μ_r est renormalisé comme $\mu_r = \mu^{1/(1-\beta^2/8\pi)}$. Il peut être intéressant de rappeler quelques propriétés du modèle de sine-Gordon, qui est exactement soluble [62, 63]. Le spectre de ce modèle est constitué de breathers (B_n), de solitons et d'antisolitons. Les breathers sont des états liés d'un soliton et d'un antisoliton et ils occupent des états discrets dans le spectre. Les breathers sont en dessous de la partie continue du spectre due aux solitons. Le premier de ces état lié B_1 coïncide avec le boson fondamental de (4.65). Le nombre des breathers est donné par $n = 1, 2, 3, \dots < 1/\xi$, avec $\xi = \beta^2/(1 - \beta^2)$. On peut remarquer que même pour une interaction V_0 infinitésimale, il existe au moins un breather. Les masses des breather i.e. les gaps dans le spectre sont données par

$$m = 2M \sin\left(\frac{\pi\xi}{2}\right) \quad (4.67)$$

où M est la masse du soliton. M est reliée au paramètre μ *via*

$$\mu = \frac{\Gamma(\beta^2)}{\pi\Gamma(1 - \beta^2)} \left[M \frac{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{1 + \xi}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{\xi}{2}\right)} \right]^{2-2\beta^2} \quad (4.68)$$

On peut remarquer que lorsque $\beta \rightarrow 0$, $M \sim \mu v^2/\beta^2 \rightarrow \infty$ et $m \sim v^2(\mu/\beta^2)\beta^4 \sim \mathcal{T}$. En d'autres termes, dans la limite de fort couplage $V_0 \rightarrow \infty$ du modèle initial de fermions, le soliton devient très massif et conduit à une très forte augmentation du gap de bande. La masse du breather le plus léger approche la valeur du coefficient du cosinus. Cela correspond au fait qu'en l'absence d'interaction coulombienne ($V_0 = 0$), la valeur exacte du gap du spectre à *une particule* est \mathcal{T} .

4.4.3 Transition de phase commensurable-incommensurable

Avec le terme incommensurable $k_0 \neq 0$, il apparaît en développant le carré dans le terme cinétique, un terme en $-4k_0\partial_x\varphi$ ⁵. Lorsque $\beta^2 < 8\pi$, on comprend qualitativement l'apparition d'une transition de phase par la compétition entre ce terme en $\partial_x\varphi$ qui privilégie une configuration du boson fondamental spatialement uniforme, alors que le terme de sine-Gordon favorise l'apparition de configuration classique non-uniforme $\langle\varphi\rangle \neq 0$. Ce changement de configuration du fondamental est connue sous le nom de transition de phase commensurable-incommensurable (C-IC), qui se produit pour $k_0 \neq 0$ et $\beta^2 < 8\pi$.

L'apparition d'un terme de la forme d'incommensurabilité $-4k_0 \int dx \partial_x \varphi$ dans l'Hamiltonien de sine-Gordon conduit donc à une transition de phase bien connue [66, 65]. Ce terme correspond pour le système fermionique initial à un potentiel chimique. A $k_0 = 0$, le potentiel chimique supplémentaire est nul, et le potentiel chimique du système est au milieu du gap. Cela correspond à la situation déjà explicitée. Tant que k_0 est suffisamment faible, le potentiel chimique du système

⁵La terme constant $4k_0^2$ ne fait que renormaliser le zéro d'énergie et peut être négliger.

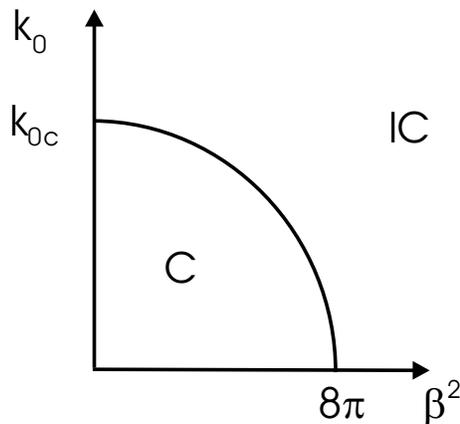


FIG. 4.16 – Courbe critique de la transition de phase commensurable (C)- incommensurable (IC). Dans la phase commensurable, la conductance est très élevée; elle est exponentiellement réduite dans la phase incommensurable.

est dans le gap du modèle de sine-Gordon. Le système est alors dans la phase commensurable et la première excitation est encore gappée. La physique est sensiblement la même qu'à $k_0 = 0$, avec une valeur du gap réduite par l'augmentation du potentiel chimique. Pour une valeur de $-4k_0\partial_x\varphi$ comparable à 2μ , le potentiel chimique atteint l'énergie du soliton de plus basse énergie. Les excitations ne sont plus gappées et le fondamental est modifié. La transition se produit pour une valeur de k_0 critique de l'ordre de μ ($k_{0,c} = 2\mu$). On peut donc tracer le diagramme de phase en fonction de β et de k_0 (cf Fig. 4.16). A partir de ce point, l'énergie de Fermi du système coupe la branche supérieure de la relation de dispersion du système fermionique initial, et la branche supérieure est partiellement remplie, ce qui correspond à l'apparition d'un vecteur d'onde de Fermi non-nul k'_f . La région avec $k'_f = 0$ est la phase commensurable, qui est gappée tandis que $k'_f \neq 0$ est la phase incommensurable, non-gappée. Ceci est une transition de phase quantique qui se produit dans beaucoup d'autres systèmes [66, 65]. Dans les systèmes bidimensionnels, cette transition se produit entre une phase avec une symétrie discrète (phase C) et une phase de symétrie continue (phase IC). C'est une situation très intéressante qui illustre le théorème de Mermin-Wagner, et qui a été observée dans des monocouches gazeuses adsorbées sur des solides [64].

Les propriétés de la phase commensurable ont déjà été évoquées. Dans la phase incommensurable, il apparaît un vecteur d'onde de Fermi non-nul $k'_f \neq 0$. On peut donc redéfinir une théorie linéarisée autour de ces points de Fermi $\pm k'_f$, et déduire le comportement à longue distance des fonctions de corrélations du système initial à partir des excitations de basse énergie autour de ces nouveaux points de Fermi. Il est ainsi possible de bosoniser à nouveau le système fermionique linéarisé autour de $\pm k'_f$. En suivant [66], on obtient le nouveau paramètre de Luttinger K' , à partir duquel on peut déterminer les fonctions de corrélations du système. K' dépend des variables originales β , μ et k_0 mais il tend vers une valeur universelle $K' = 1/2$, lorsque le système s'approche de la valeur $k_{0,c}$, par la phase incommensurable. Il serait intéressant de calculer des quantités pertinentes du point de vue du transport dans la jonction tunnel en coin à partir de cette théorie effective dans la phase incommensurable.

4.5 Modèle effectif des canaux de bord co-propageant.

Les excitations de basse énergie des canaux de bord de deux fluides de Hall à remplissage $\nu_m = 1/m$, m impair et se propageant dans le même sens le long d'une barrière de potentiel

étendue sont similaires à celles qui apparaissent dans le cas contre-propageant. Nous considérons la situation où deux fluides de Hall de remplissage fractionnaire *distincts* sont séparés par une barrière de potentiel abrupte, de longueur L . Ces deux fluides résultent d'une orientation du champ magnétique conduisant à la formation d'excitations de bord chirales se propageant dans le même sens (que l'on suppose être vers les x positifs i.e. les opérateurs ne dépendent que de $x - vt$), dans la géométrie de la jonction étendue en coin de Grayson *et al.* (cf Fig. 4.10). Les relations de dispersion à une particule de ces deux systèmes lorsque la barrière est de hauteur infinie i.e. les deux fluides de Hall sont indépendants, se coupent pour une valeur commune du moment $k = k_0$ (cf Fig. 4.11). On peut alors procéder à une linéarisation de ces relations autour de k_0 , conduisant à la détermination de deux vitesses de Fermi différentes, et à une description des canaux de bords de ces deux fluides par la théorie des liquides de Luttinger chiraux de même chiralité, indicés R_1 et R_2 . Ces χ LL sont caractérisés par deux vitesses de Fermi, v_{f1} et v_{f2} , et par deux facteurs de remplissage $\nu_1 = 1/m_1$ et $\nu_2 = 1/m_2$ avec m_1, m_2 deux entiers impairs distincts. Dans une situation plus réaliste, la barrière de potentiel est de hauteur finie, autorisant l'effet tunnel entre les deux canaux de bord co-propageant. Comme dans le cas de la géométrie de la jonction tunnel étendue, l'effet tunnel se produit à des valeurs de k voisines de k_0 . Enfin, on peut s'attendre à des effets non-négligeables de l'interaction coulombienne à travers la barrière tunnel. Nous commencerons par établir la dynamique du système de deux χ LL de même chiralité à remplissages et vitesses de Fermi différents, couplés par l'interaction coulombienne à travers la barrière. Nous examinerons ensuite de manière *perturbative* le courant tunnel entre les deux χ LL.

4.5.1 Théorie bosonisée

Ces deux χ LL de même chiralité peuvent être décrits par deux bosons chiraux *via* la technique de bosonisation, contrairement au cas de χ LL de chiralités opposées où un boson unique est suffisant pour déterminer la dynamique du système. En introduisant les densités électroniques $\rho_\alpha(x) = :\psi_\alpha^\dagger(x)\psi_\alpha(x): = \sqrt{\nu_\alpha} \partial_x \phi_\alpha(x)/(2\pi)$ où $\alpha = R_1, R_2$, $\psi_\alpha^\dagger(x)$ est l'opérateur de création d'électron du χ LL α , on peut écrire l'Hamiltonien libre du système comme la somme de plusieurs contributions :

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{R_1/R_2} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \hbar v_{F_1/F_2} + \frac{\nu_{1/2}}{2\pi} V_0 \right\} \left[\partial_x \phi_{R_1/R_2} \right]^2 \\ \mathcal{H}_{int} &= \frac{\sqrt{\nu_1 \nu_2}}{4\pi^2} V_0 \partial_x \phi_{R_1} \partial_x \phi_{R_2} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Le premier Hamiltonien est composé de la partie libre de l'Hamiltonien ainsi que de la contribution de l'interaction coulombienne intra-canal. Ces deux contributions se factorisent en la somme de la vitesse de Fermi v_F et du terme d'interaction $\nu_\alpha V_0/(2\pi\hbar)$ qui domine la vitesse de Fermi dans la limite basse énergie ou longue distance. Notons que nous travaillons ici avec une interaction coulombienne ponctuelle pour plus de clarté. Le second Hamiltonien est le terme d'interaction coulombienne inter-canal. La chiralité des champs bosoniques apparaît dans les relations de commutation canoniques : $[\phi_\alpha(x), \phi'_\alpha(x')] = i\pi \text{sign}(x - x') \delta_{\alpha, \alpha'}$. On peut noter la différence avec les relations de commutation canoniques des champs de chiralités opposées. L'Hamiltonien total $\mathcal{H}_{tot} = \mathcal{H}_{R_1} + \mathcal{H}_{R_2} + \mathcal{H}_{int}$ étant quadratique en les champs $\phi_{R_1}(x)$ et $\phi_{R_2}(x)$, il sera possible de le diagonaliser en utilisant une transformation de Bogoliubov. Cela consiste à trouver de nouveaux champs, exprimés en fonction de $\phi_{R_1}(x)$ et $\phi_{R_2}(x)$, qui diagonalisent l'Hamiltonien total et, également, qui vérifient les relations de commutation canoniques bosoniques. Nous allons appliquer ce programme en réécrivant \mathcal{H}_{tot} en fonction des champs diagonaux, que l'on nomme $\phi_a(x)$ et $\phi_b(x)$:

$$\mathcal{H}_{tot} = \frac{\hbar}{4\pi} \left\{ v_a (\partial_x \phi_a)^2 + v_b (\partial_x \phi_b)^2 \right\} \quad (4.70)$$

Il convient ensuite d'identifier les champs ϕ_a et ϕ_b en fonction de ϕ_{R_1} et ϕ_{R_2} ; les relations de commutations permettent de déterminer la constante de normalisation globale des champs diagonaux. Dans le cas présent, la détermination exacte de ϕ_a et ϕ_b est possible mais l'expression obtenue n'est pas très élégante. Il vaut mieux commencer par considérer que le terme d'interaction coulombienne domine très largement les vitesses de Fermi, on peut alors faire l'approximation $v_{F_1} \approx v_{F_2} \approx 0$. On obtient les valeurs suivantes des champs diagonaux :

$$\begin{aligned}\phi_a &= \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}} \phi_{R_1} + \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}} \phi_{R_2} \\ \phi_b &= \sqrt{\frac{\nu_2}{\nu_1 + \nu_2}} \phi_{R_1} - \sqrt{\frac{\nu_1}{\nu_1 + \nu_2}} \phi_{R_2}\end{aligned}\tag{4.71}$$

Les relations de commutations vérifiées par ces champs sont alors :

$$\begin{aligned}[\phi_a(x), \phi_a(x')] &= i\pi \text{sign}(x - x') \\ [\phi_b(x), \phi_b(x')] &= i\pi \text{sign}(x - x') \\ [\phi_a(x), \phi_b(x')] &= 0\end{aligned}\tag{4.72}$$

On en déduit les valeurs de vitesses normalisées

$$\begin{cases} v_a = (\nu_1 + \nu_2) \frac{V_0}{2\pi\hbar} \\ v_b = 0 \end{cases}\tag{4.73}$$

On peut maintenant aller à l'ordre supérieur en $\frac{v_{F_1} + v_{F_2}}{V_0} \sim \varepsilon$. Les modes diagonaux deviennent alors :

$$\begin{aligned}\phi_a &= \frac{1}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} \{(\sqrt{\nu_1} + \varepsilon\sqrt{\nu_2})\phi_{R_1} + (\sqrt{\nu_2} - \varepsilon\sqrt{\nu_1})\phi_{R_2}\} \\ \phi_b &= \frac{1}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} \{(\sqrt{\nu_2} - \varepsilon\sqrt{\nu_1})\phi_{R_1} - (\sqrt{\nu_1} + \varepsilon\sqrt{\nu_2})\phi_{R_2}\}\end{aligned}\tag{4.74}$$

Les relations de commutations canoniques sont également vérifiées :

$$\begin{aligned}[\phi_a(x), \phi_a(x')] &= i\pi \text{sign}(x - x') \\ [\phi_b(x), \phi_b(x')] &= i\pi \text{sign}(x - x') \\ [\phi_a(x), \phi_b(x')] &= O(\varepsilon^2)\end{aligned}\tag{4.75}$$

et les vitesses renormalisées :

$$\begin{cases} v_a = (\nu_1 + \nu_2) \frac{V_0}{2\pi\hbar} + \frac{\nu_1 v_{F_1} + \nu_2 v_{F_2}}{(\nu_1 + \nu_2)} \\ v_b = \frac{\nu_1 v_{F_2} + \nu_2 v_{F_1}}{(\nu_1 + \nu_2)} \end{cases}\tag{4.76}$$

et la valeur précise de ε est alors $\frac{\sqrt{\nu_1\nu_2}}{(\nu_1 + \nu_2)} \left(\frac{v_{F_1} - v_{F_2}}{v_a - v_b} \right)$. Nous avons ainsi déterminé, au premier ordre en ε , les champs qui diagonalisent l'Hamiltonien \mathcal{H}_{tot} , et les relations de commutations montrent que ces champs sont chiraux de même chiralité.

4.5.2 Hamiltonien tunnel et bosonisation.

Nous pouvons maintenant traiter l'Hamiltonien de l'effet tunnel \mathcal{H}_{tun} en perturbation.

$$\mathcal{H}_{tun} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left\{ t \psi_{R_1}^\dagger \psi_{R_2} + H.c. \right\} . \quad (4.77)$$

C'est le même formalisme que celui que nous avons développé dans le chapitre précédent. Nous pouvons exprimer cet Hamiltonien en fonction des champs ϕ_{R_1} et ϕ_{R_2} , à l'aide des formules de bosonisation.

$$\psi_\alpha(x) = \frac{\mathcal{F}_\alpha}{2\pi} : \exp \left\{ -i \sqrt{\frac{4\pi}{\nu_\alpha}} \phi_\alpha(x) + ik_\alpha x \right\} : \quad (4.78)$$

Notons la présence des facteurs de Klein \mathcal{F}_α qui assurent l'anticommutation des fermions ψ_α . Avec ces formules de bosonisation, l'Hamiltonien tunnel devient :

$$\mathcal{H}_{tun} = \frac{1}{2\pi} 2|t| \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \cos \left(\frac{\phi_n}{\sqrt{\tilde{\nu}}} + k_f x \right) \quad (4.79)$$

où nous avons posé $k_f = k_2 - k_1$, $\tilde{\nu} = \frac{\nu_1 \nu_2}{\nu_1 + \nu_2}$ et $\phi_n = \frac{1}{\sqrt{\nu_1 + \nu_2}} \{ \sqrt{\nu_2} \phi_{R_1} - \sqrt{\nu_1} \phi_{R_2} \}$. Le système est donc décrit par un Hamiltonien de sine-Gordon *chiral*, dont les propriétés sont différentes de l'Hamiltonien de sine-Gordon déjà traité. Nous ne détaillerons pas ce modèle qui est traité dans [68, 67]. Le résultat très utile à remarquer est la relation entre ϕ_n et ϕ_a, ϕ_b .

$$\phi_n = \phi_b - \varepsilon \phi_a \quad (4.80)$$

4.5.3 Calcul perturbatif

Nous suivons toujours le même cheminement qu'au chapitre précédent et nous calculons l'opérateur tunnel :

$$A(x, t) = \frac{1}{2\pi} e^{ik_f x} : e \left\{ i \sqrt{\frac{4\pi}{\tilde{\nu}}} \phi_n(x, t) \right\} : \quad (4.81)$$

De même, on détermine :

$$A^\dagger(x', 0) = \frac{1}{2\pi} e^{-ik_f x'} : e \left\{ -i \sqrt{\frac{4\pi}{\tilde{\nu}}} \phi_n(x', 0) \right\} : \quad (4.82)$$

Et d'après la formule du chapitre 3.3.1, la valeur du courant tunnel en perturbation est :

$$I_{tun} = -2e\mathcal{T}^2 \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} dx dy \mathbf{Im} \left[\tilde{X}_{ret} \left(\frac{-eV}{\hbar}, x - y \right) \right] \quad (4.83)$$

avec $X_{ret}(x - y, t - t') = -i\theta(t - t') \langle [A(x, t), A^\dagger(x', 0)] \rangle$ le propagateur retardé de l'opérateur local de tunnel $A(x, t) = \psi_{R_1}(x, t) \psi_{R_2}^\dagger(x, t)$. L'évaluation de cette intégrale peut se faire suivant les lignes précédemment suivies. Nous pouvons d'abord calculer la différence des fonctions de Green $\langle [A(x, t), A^\dagger(0, t')] \rangle$ en utilisant les formules de bosonisation pour le calcul des fonctions de Green :

$$\langle [A(x, t), A^\dagger(0, t')] \rangle \approx \frac{1}{4\pi^2} e^{ik_f X} \left\{ \frac{1}{[\alpha - i(x - v_b t)]^{1/\tilde{\nu}}} - \frac{1}{[\alpha + i(x - v_b t)]^{1/\tilde{\nu}}} \right\} \quad (4.84)$$

avec $X = x - x'$ et α le cut-off ultra-violet. Cette formule mérite d'être éclaircie par le calcul de :

$$\langle \phi_n(x, t) \phi_n(x', 0) \rangle = \langle \phi_b(x, t) \phi_b(x', 0) \rangle + \varepsilon^2 \langle \phi_a(x, t) \phi_a(x', 0) \rangle \quad (4.85)$$

Dans notre procédure, les termes d'ordres ε^2 ont été négligés depuis le début ; ici on se retrouve donc uniquement à évaluer le propagateur retardé du boson ϕ_b associé à un fermion chiral *fictif* de facteur de remplissage $1/\tilde{\nu}$, à la vitesse v_b et au moment k_f . En utilisant ce propagateur, on retrouve bien la formule 5.8 On peut maintenant calculer :

$$\begin{aligned} A_R(k, \omega) &= -2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dx dy \mathbf{Im} \left(\left\{ -i\theta(t-t') \left(\langle A(t, x), A^\dagger(0, x') \rangle - \langle A^\dagger(0, x') A(t, x) \rangle \right) \right\} \right) \\ &= \frac{2\pi}{\Gamma(1/\tilde{\nu})} |k - k_f|^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} \delta(\omega + v_b(k_f - k)) \end{aligned} \quad (4.86)$$

On prend ensuite la transformée de Fourier inverse de $A_R(k, \omega)$ sur l'espace, notée $\tilde{A}_R(x, \omega) = \frac{2\pi}{\Gamma(1/\tilde{\nu})} \left(\frac{\omega}{v_b}\right)^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} e^{i(k_f + \frac{\omega}{v_b})x}$ et $I_{tun} \sim \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} dx dy \tilde{A}_R(x - x', \omega)$. Nous obtenons ainsi la formule finale exprimant le courant tunnel :

$$I_{tun} = e\mathcal{T}^2 \frac{2\pi}{\Gamma(1/\tilde{\nu})} \left(\frac{\omega}{v_b}\right)^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} L^2 \sin_c^2 \left[\left(k_f + \frac{\omega}{v_b}\right) \frac{L}{2} \right] \quad (4.87)$$

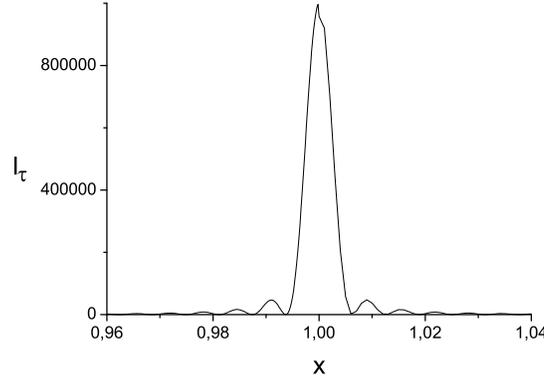


FIG. 4.17 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 1000$. $\frac{1}{\tilde{\nu}} = 2$

On peut maintenant, à l'instar de ce que nous avons déjà réalisé précédemment, distinguer le cas non-résonnant qui correspond à une valeur non-nulle du moment de Fermi effectif du système $k_f \neq 0$. Dans ce cas, le courant tunnel s'exprime simplement en fonction de trois grandeurs typiques : l'énergie de Fermi effective $\epsilon_f = v_b k_f$, la longueur adimensionnée $y = k_f L$ et la tension adimensionnée $x = eV/\epsilon_f$.

$$I_{tun} = e\mathcal{T}^2 (\alpha k_f)^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} \frac{2\pi}{\Gamma(1/\tilde{\nu})} x^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} y^2 \sin_c^2 \left[\frac{y}{2}(1-x) \right] \quad (4.88)$$

Dans le cas résonnant, qui correspond à la situation physique que nous étudions ici, avec $k_f = k_2 - k_1 = 0$, le courant tunnel devient, en posant $x = \frac{eVL}{2v_b}$:

$$I_{tun} = 4e\mathcal{T}^2 \frac{2\pi}{\Gamma(1/\tilde{\nu})} \left(\frac{2\alpha}{L}\right)^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} x^{\frac{1}{\tilde{\nu}}-1} \sin_c^2(x) \quad (4.89)$$

On peut considérer trois cas concrets illustrés par les figures (cf Fig. 4.18, 4.19, 4.20), correspondant aux deux canaux contre-propageant aux remplissage entier $\nu_1 = \nu_2 = 1$, i.e. $\frac{1}{\tilde{\nu}} = 2$

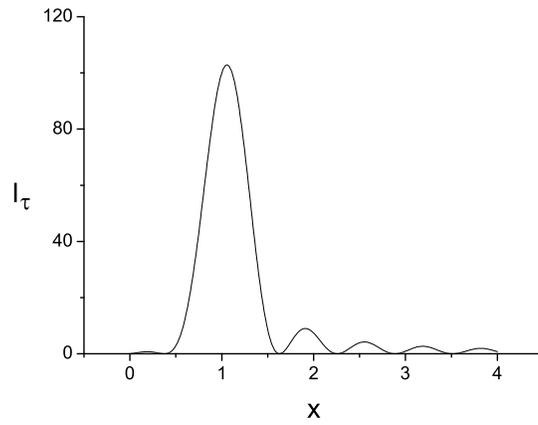


FIG. 4.18 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 10$. $\frac{1}{\nu} = 2$

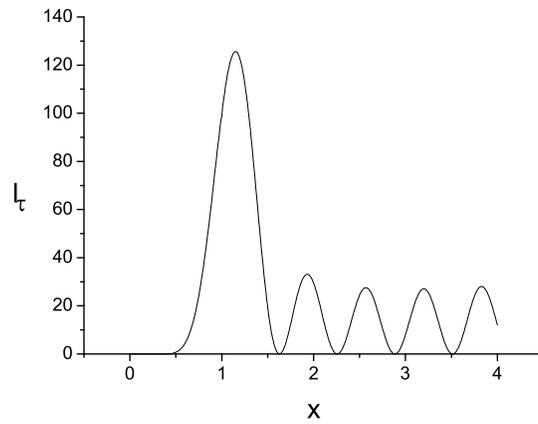


FIG. 4.19 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 10$. $\frac{1}{\nu} = 4$

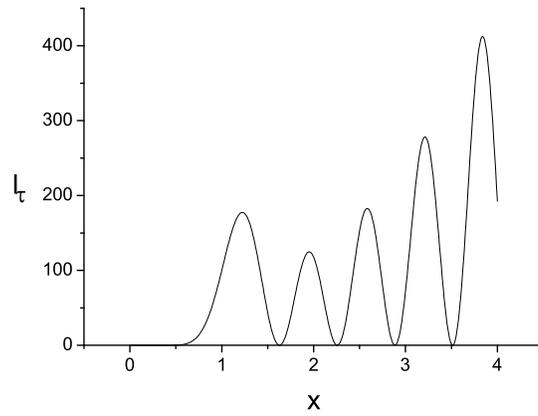


FIG. 4.20 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 10$. $\frac{1}{\nu} = 6$

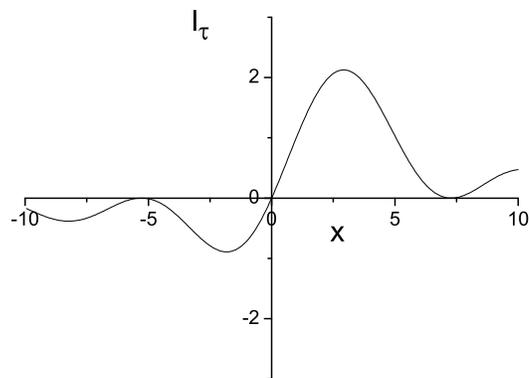


FIG. 4.21 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 1$. $\frac{1}{\nu} = 2$

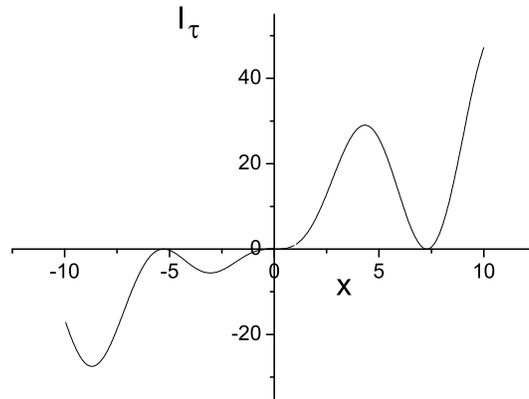


FIG. 4.22 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 1$. $\frac{1}{\nu} = 2$

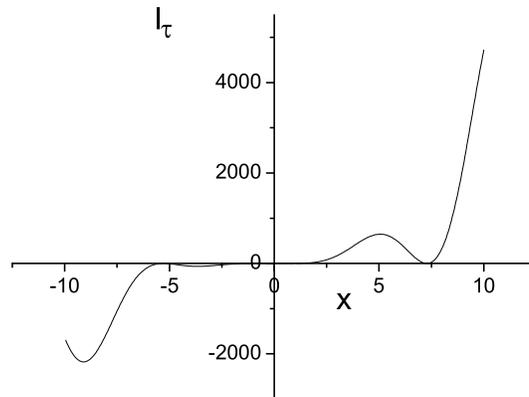


FIG. 4.23 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 1$. $\frac{1}{\nu} = 6$

(cf Fig. 4.18), aux remplissages fractionnaires égaux $\nu_1 = \nu_2 = 1/3$, i.e. $\frac{1}{\nu} = 6$ (cf Fig. 4.20) et aux remplissages distincts $\nu_1 = 1, \nu_2 = 1/3$, i.e. $\frac{1}{\nu} = 4$ (cf Fig. 4.19). sur ces trois cas typiques, on note la présence d'oscillations qui traduisent la cohérence du transport tunnel à travers la barrière, ainsi que les comportement asymptotiques en loi de puissance typiques des χ_{LL} .

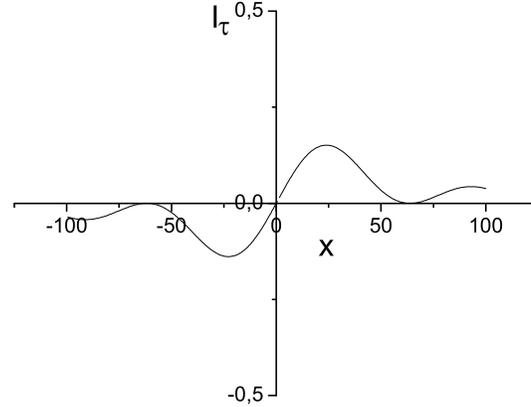


FIG. 4.24 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la tension normalisée x , avec une longueur de barrière normalisée $y = 0.1$. $\frac{1}{\nu} = 2$

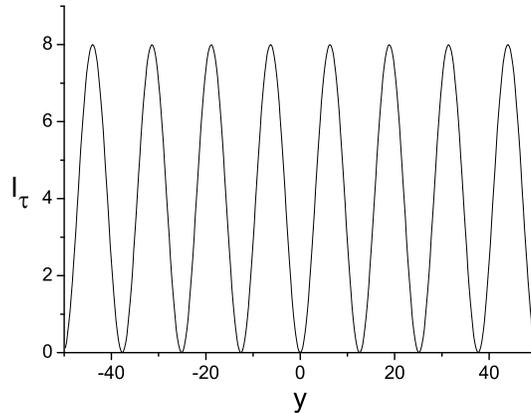


FIG. 4.25 – Courant tunnel dans le cas non résonnant en fonction de la longueur normalisée y , avec une tension normalisée $x = 0.5$. $\frac{1}{\nu} = 2$

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons étudié les propriétés de transport tunnel des jonctions étendues en coin. Ces jonctions permettront l'effet tunnel entre les modes de bords de deux fluides de Hall distincts séparés par une barrière de longueur macroscopique mais de très faible largeur. Dans ces structures, le facteur de remplissage et la chiralité de chaque fluide est modifiable

indépendamment par l'expérimentateur, ouvrant un champ d'investigation expérimental très large. Nous avons déterminé les relations de dispersion de cette structure dans les deux configurations de chiralité distinctes. Dans les deux cas, l'effet tunnel se produit majoritairement autour d'une valeur non-nulle k_0 du moment longitudinal à la barrière. Dans le cas habituel de canaux contre-propageant, nous avons déterminé deux régimes de conductance par la théorie de Landauer-Büttiker, dans le cas de remplissages entiers sans interactions. Ces deux phases distinctes subsistent lorsque l'on prend en compte les interactions et il apparaît une transition de phase commensurable-incommensurable en fonction de la force des interactions et de la valeur de k_0 . Dans la phase commensurable, le système est gappé et la conductance tunnel est favorisée. Dans la phase incommensurable, le système n'a plus de gap, la conductance est très atténuée. Nous avons également calculé le courant tunnel entre canaux co-propageant à des remplissages distincts. Le système est décrit par un modèle de sine-Gordon *chiral* et le courant en perturbation s'exprime très simplement à partir d'un modèle de fermions chiraux libres, avec un remplissage et un paramètre de Luttinger effectif. Ces résultats mettent en évidence la richesse de ces structures. Ils sont inédits et appellent à une confrontation expérimentale.

Il serait intéressant de poursuivre ces travaux en calculant les propriétés d'échelle de la longueur de la barrière i.e. en déterminant une équation de flot supplémentaire au modèle de sine-Gordon, indiquant l'évolution couplée de la longueur de la barrière en fonction des autres paramètres sous le flot du groupe de renormalisation. La technique de bosonisation est un outil central dans l'étude de ces systèmes. Au chapitre suivant, nous décrirons une situation très simple où la bosonisation invalide la théorie des liquides de Luttinger.

Chapitre 5

Profil de densité et excitations des canaux de bords

Considérons une jonction étendue entre deux fluides de Hall (cf Fig. 5.3). En l'absence d'effet tunnel, les interactions à travers la barrière mélangent les états de bord de chiralités opposées qui circulent le long de la jonction. Pour déterminer les profils de densité électronique des bords du système, nous utilisons la théorie de champ moyen de Chern-Simons pour des fluides de Hall à remplissage identiques $\nu = 1/(2n + 1)$. Nous déterminons les excitations élémentaires de ce système par la méthode RPA. Dans ce cadre, il apparaît une instabilité lorsque l'interaction inter-canaux est suffisamment forte. Nous démontrons dans ce chapitre que lorsque l'interaction est suffisamment forte, il se produit une reconstruction des bords dissymétrique par rapport à la barrière. La distribution de charge n'est plus symétrique par rapport à la barrière. La recherche des états excités autour de ce nouveau fondamental est laissé pour des travaux futurs. Nous allons commencer par exposer le principe de la théorie de Chern-Simons, nous utiliserons ensuite cette théorie pour déterminer *numériquement* les profils de densité des canaux de bord en fonction de l'intensité des interactions et de la charge en excès au bord. Nous déterminerons les excitations de basse énergie du système par la méthode RPA. Nous mettrons en évidence l'apparition d'une instabilité dans la relation de dispersion du système. Enfin, nous déterminerons le vrai fondamental du système lorsque l'interaction inter-canaux est suffisamment intense.

5.1 Théorie de jauge des fluides de Hall

Les interactions non-locales peuvent être exprimées *via* un champ de jauge et des interactions locales. Dans le cadre des systèmes bidimensionnels d'électrons, le champ de jauge de Chern-Simons joue un rôle central pour les fluides de Hall quantique car il modifie la statistique des particules.

5.1.1 Phase statistique et phase de Berry

Le facteur de phase lié à la statistique apparaît lorsque deux particules sont échangées ; il est alors donné par $e^{i\vartheta}$ dans la fonction d'onde à deux corps. Les particules sont des bosons lorsque $\vartheta = 2\pi n$ et des fermions lorsque $\vartheta = (2n + 1)\pi$. Pour un système invariant sous la symétrie d'inversion temporelle ou spatiale, on a $e^{i\vartheta} = e^{-i\vartheta}$; la statistique est alors restreinte aux fermions ou aux bosons. En revanche, dans un système bidimensionnel en présence d'un champ magnétique, ces symétries ne sont plus respectées, ce qui autorise l'existence de particules avec des facteurs de phase statistique différents de $(2n + 1)\pi$ ou $2n\pi$; ces particules sont des *anyons*.

Un autre facteur de phase apparaît quand une particule chargée tourne autour d'un flux magnétique i.e. qu'un potentiel-vecteur \mathbf{A} circule le long d'une courbe fermée \mathcal{C} contenant ce flux. Ce facteur est la phase de Berry en présence d'un champ magnétique donnée par :

$$\frac{|q_e|}{\hbar} \oint_{\mathcal{C}} \mathbf{A} d\mathbf{r} = 2\pi \frac{\phi}{\phi_0} \quad (5.1)$$

avec $\phi_0 = h/|q_e|$ le quantum de flux, et ϕ le flux magnétique à travers la surface \mathcal{C} . Comme on le voit à la (cf Fig. 5.1), l'échange de deux particules est équivalent à la demi-rotation de l'une autour de l'autre¹ et donc la demi-valeur de la phase de Berry précédente apparaît. Si

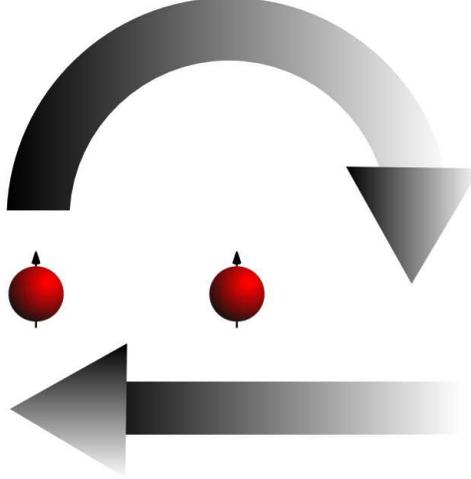


FIG. 5.1 – L'échange de deux particules revient à $D = 2$, dans un système invariant par translation à réaliser un demi-tour de l'une autour de l'autre puis à translater l'ensemble du diamètre du demi-cercle. La phase de Berry correspondant à un tour complet d'une particule dans un flux magnétique, la moitié de sa valeur est attribuée à *chaque* particule lors de l'échange i.e. à la fonction d'onde décrivant les deux particules.

chaque particule subit le flux $\phi = \theta/\pi$ (en unités de flux ϕ_0) lors de cette transformation, le facteur de phase $e^{i\theta}$ est affecté à chacune d'elle lors de l'échange. Quand le facteur de phase statistique initial de la particule est $e^{i\vartheta}$, l'influence de ce facteur supplémentaire conduit à un terme de phase total de $e^{i(\vartheta+\theta)}$. En utilisant la phase de Berry, il est donc possible de changer la statistique des particules.

5.1.2 Anyons

En dimension $D = 2$, on peut en particulier utiliser un potentiel-vecteur spécial pour modifier la statistique des particules. Il suffit pour cela d'attacher q tubes de flux à chaque particule. Un tube de flux correspond à un solénoïde de longueur infinie suivant la direction perpendiculaire au système bidimensionnel et localisé exactement à la position de la particule. Lorsque les particules sont des fermions, le champ magnétique correspondant aux tubes de flux attachés à la particule j n'est jamais ressenti par les autres particules en raison du principe de Pauli. En revanche, le fait d'attacher les tubes de flux correspond à faire apparaître un potentiel-vecteur singulier \mathbf{a} et la particule j subit l'effet du potentiel-vecteur \mathbf{a}_j relatif aux tubes de flux des autres particules

$$\mathbf{a}_j(\mathbf{r}) = q\phi_0 \sum_{i \neq j} \nabla_j \text{Arg}(z - z_i) \quad (5.2)$$

¹Si le système est invariant par translation, ce qui est le cas ici.

où z_i et z sont les coordonnées complexes associées à \mathbf{r}_i et \mathbf{r} . On peut maintenant procéder à l'échange de deux de ces objets composés d'une particule et des q tubes de flux attachés à elle et regarder le déphasage obtenu. On considère la fonction d'onde à deux corps Ψ de deux électrons i et j .

$$\Psi_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_i)\psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_j) - \psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_i)\psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_j)] \quad (5.3)$$

Les fonctions d'onde à un corps $\psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_i)$ et $\psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_j)$ correspondent, par exemple, à des électrons initialement localisés en \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 . Lorsque l'on échange adiabatiquement les positions \mathbf{R}_1 et \mathbf{R}_2 la fonction d'onde $\Psi_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ change en $\Psi_{\mathbf{R}_2, \mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = -\Psi_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j)$ en l'absence des tubes de flux attachés afin de respecter la statistique fermionique. Lorsque q tubes de flux sont attachés à chaque électron, le flux subit par une particule dans sa demi-rotation autour de l'autre est $\phi = q\phi_0/2$ et il apparaît une contribution supplémentaire $q\pi/2$ à la phase statistique π . Lorsque l'on fait le choix du potentiel-vecteur précédent, la fonction d'onde est modifiée comme

$$\Psi_{\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_i, \mathbf{r}_j) = \frac{1}{\sqrt{2}} [\psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_i)\psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_j) - \psi_{\mathbf{R}_2}(\mathbf{r}_i)\psi_{\mathbf{R}_1}(\mathbf{r}_j)] \times e^{i\frac{q}{2}\text{Arg}(z_j - z_i)} \quad (5.4)$$

Nous avons ainsi réalisé une procédure d'attachement de tubes de flux aux électrons qui ne modifie que la phase des fonctions d'onde et qui correspond à l'introduction d'un terme supplémentaire dans le potentiel-vecteur du système. Il faut donc voir l'adjonction de ces tubes de flux aux électrons comme une transformation de jauge mais une transformation de jauge *singulière* [82]. Elle conduit à la modification de la statistique des particules formées par l'électron et ses tubes de flux attachés. Ces particules à la statistique exotique sont appelées des *anyons* et ne sont réalisable qu'en $D = 2$. Nous allons maintenant voir en quoi cette procédure permet de décrire les fluides de Hall.

5.1.3 Théorie de Chern-Simons Ginzburg-Landau

Le point de départ de cette théorie est l'Hamiltonien de fermions initiaux

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = & \int d^2\mathbf{r} \psi^\dagger(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q_e\mathbf{A})^2 + q_e A_0(\mathbf{r}) \right] \psi(\mathbf{r}) \\ & + \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r}' \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}') V(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

où ψ^\dagger , ψ sont les opérateurs de création et d'annihilation électroniques, et A_0 est la composante électrostatique du potentiel-vecteur. Nous allons maintenant effectuer le changement de jauge précédent. Nous considérons que les électrons qui se trouvent aux positions r_i sont des objets composés d'un anyon décrit par le champ φ auquel est attaché q tubes de flux (cf Fig. 5.2). Le

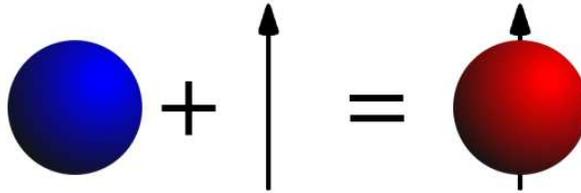


FIG. 5.2 – Formation d'un électron (en rouge) par adjonction d'un tube de flux à un anyon de statistique bosonique (en bleu).

champ magnétique dû aux tubes d'un électron n'est jamais ressenti par les autres particules en raison du principe d'exclusion de Pauli. Cette procédure revient à introduire le champ de jauge de Chern-Simons \mathbf{a} défini comme

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})|_z = -q\phi_0 \sum_i \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_i) \quad (5.6)$$

On peut réécrire cette condition explicitement en donnant la valeur de \mathbf{a} en \mathbf{r}_j :

$$\mathbf{a}(\mathbf{r}_j) = -q\phi_0 \sum_{i \neq j} \nabla_i \text{Arg}(\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i) \quad (5.7)$$

Lorsque les électrons ont une distribution continue de densité $\rho(\mathbf{r})$, on peut modifier la définition précédente en un champ moyen de Chern-Simons :

$$\nabla \times \mathbf{a}(\mathbf{r})|_z = -2\theta\rho(\mathbf{r}) \quad (5.8)$$

et

$$\nabla \cdot \mathbf{a} = 0 \quad (5.9)$$

Il convient ensuite de remplacer le gradient $-i\hbar\nabla$ dans l'Hamiltonien par la dérivée covariante $-i\hbar\nabla - q_e\mathbf{a}$. Par cette procédure, nous avons considéré de nouvelles particules auxquelles sont attachés des tubes de flux fictifs pour former les électrons initiaux. La statistique de ces particules sera *in fine* déterminée par θ , qui est ici une constante.

Considérons le cas où la valeur moyenne du flux du champ de jauge $\langle \nabla \times \mathbf{a} \rangle$ compense exactement le champ magnétique $\mathbf{B} = \langle \nabla \times \mathbf{A} \rangle$. Cette condition est donnée par

$$2\theta\bar{\rho} = B \quad (5.10)$$

où $\bar{\rho}$ est la densité électronique moyenne du fluide. On peut écrire le facteur de remplissage comme $\nu = \bar{\rho}/(B/2\pi)$ et il suffit alors de choisir $\theta = \pi\nu^{-1}$ pour satisfaire (5.10). Quand $\nu = 1/(2n + 1)$ i.e. aux fractions magiques de Laughlin, $\theta = (2n + 1)\pi$ est un multiple entier impair de π et la particule créée par l'adjonction de ces $(2n + 1)$ tubes de flux de Chern-Simons est un boson². L'Hamiltonien électronique original (5.5) devient

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \int d^2\mathbf{r} \varphi^*(\mathbf{r}) \left[\frac{1}{2m} (-i\hbar\nabla - q_e\mathbf{A} - q_e\mathbf{a}(\mathbf{r}))^2 + q_e A_0(\mathbf{r}) \right] \varphi(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{1}{2} \int d^2\mathbf{r}' \int d^2\mathbf{r} \rho(\mathbf{r}') V_c(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.11)$$

Nous allons considérer la fonction de partition associée à cet Hamiltonien, $Z = \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}}$, à température finie $\beta = 1/k_b T$. Cette fonction de partition peut-être exprimée comme une intégrale fonctionnelle sur le temps imaginaire τ , $0 \leq \tau \leq \beta$:

$$\begin{aligned} Z &= \text{Tr} e^{-\beta\mathcal{H}} \\ &= \int \mathcal{D}[\varphi, \varphi^*] \exp[-\mathcal{S}_0(\varphi, \varphi^*, A_0, \mathbf{A} + \mathbf{a})] \end{aligned} \quad (5.12)$$

où $\mathcal{D}[\varphi, \varphi^*]$ représente la mesure de l'intégrale fonctionnelle sur φ, φ^*

$$\mathcal{S}_0(\varphi, \varphi^*, A_0, \mathbf{A} + \mathbf{a}) = \int_0^\beta d\tau \int d^2\mathbf{r} \mathcal{L}_0(\varphi, \varphi^*, A_0, \mathbf{A} + \mathbf{a}) \quad (5.13)$$

²La phase statistique ϑ de ces anyons vérifie $\vartheta + (2n + 1)\pi = (2m + 1)\pi$. Ce sont donc forcément des bosons.

avec

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_0(\varphi, \varphi^*, A_0, \mathbf{A} + \mathbf{a}) &= \varphi^* \left(\frac{\partial}{\partial \tau} + q_e A_0 \right) \varphi + \frac{\hbar^2}{2m} \varphi^* \left(-i\nabla - \frac{q_e}{\hbar} (\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right)^2 \varphi \\ &+ \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r}' \int d^2 \mathbf{r} \rho(\mathbf{r}') V_c(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

Enfin, la condition (5.8) peut être assurée *via* un champ a_0 qui apparaît comme un multiplicateur de Lagrange dans l'action supplémentaire.

$$Z \rightarrow \int \mathcal{D}[\varphi, \varphi^*, a_0, \mathbf{a}] \exp \left[\int_0^\beta d\tau \int d^2 \mathbf{r} q_e a_0 \left(-\frac{1}{2\theta} (\nabla \times \mathbf{a})_z - \rho \right) - \mathcal{L}_0 \right] \quad (5.15)$$

La validité de cette transformation est immédiate : lorsque l'on intègre a_0 dans l'intégrale fonctionnelle, seules les valeurs de \mathbf{a} vérifiant (5.8) contribuent. On peut recombinaer a_0 avec \mathbf{a} pour former un vecteur (a_0, a_x, a_y) et on note que ce vecteur apparaît toujours comme sommé avec le vecteur-potentiel (A_0, A_x, A_y) . On peut réécrire la première partie de cette action sous une forme invariante de jauge.

$$\mathcal{S}_{CS} = \int_0^\beta d\tau \int d^2 \mathbf{r} \frac{q_e}{4\theta} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_\rho \quad (5.16)$$

avec $\epsilon^{\mu\nu\rho}$, le tenseur de Levi-Civita i.e. le tenseur complètement antisymétrique, avec $\mu, \nu, \rho = 0, x, y$ et $\epsilon^{0,x,y} = 1$. La règle de sommation implicite d'Einstein sur les indices répétés s'applique ici. On appelle cette action le terme de Chern-Simons et la contribution $q_e a_0 \rho$ est intégrée dans le terme cinétique de \mathcal{L}_{Tot} ³. Le Lagrangien total \mathcal{L}_{Tot} s'écrit donc (en temps réel t)

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Tot} &= \varphi^* \left(-i \frac{\partial}{\partial t} + q_e a_0 + q_e A_0 \right) \varphi - \frac{\hbar^2}{2m} \varphi^* \left(\nabla - i \frac{q_e}{\hbar} (\mathbf{A} + \mathbf{a}) \right)^2 \varphi \\ &+ \frac{1}{2} \int d^2 \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') V_c(\mathbf{r}' - \mathbf{r}) \rho(\mathbf{r}) \\ &+ \frac{q_e}{4\theta} \epsilon^{\mu\nu\rho} a_\mu \frac{\partial}{\partial x_\nu} a_\rho \end{aligned} \quad (5.17)$$

5.1.4 Propriétés du fluide de Hall

Avant de déduire de l'action totale les équations du mouvement pour le système, nous allons déterminer en quoi cette action est appropriée pour décrire le fluide de Hall fractionnaire. Au facteur de remplissage $1/q$, il y a q tubes de flux par électron. Dans ce cas, on peut considérer les électrons comme de particules composites avec un flux $q\phi_0$ dans le sens opposé au champ magnétique \mathbf{B} dont la somme des contributions annule ce champ extérieur. Le système apparaît alors comme un ensemble de bosons composites en interaction dans un champ magnétique nul. En champ moyen, la seule interaction que ressentent les bosons composites est l'interaction coulombienne répulsive. Or, un système de bosons bidimensionnels en interaction répulsive à température nulle réalise un condensat de Bose-Einstein. Dans cette théorie de champ moyen, le fluide de Hall fractionnaire à remplissage magique est considéré comme un condensat de Bose-Einstein de bosons composites. Dans un tel condensat la densité des bosons est uniforme, ce qui est cohérent avec le remplacement des tubes de flux par un champ moyen uniforme. Nous allons maintenant discuter l'apparition de l'effet Hall quantique fractionnaire dans le condensat

³On a déduit φ en faisant une transformation unitaire sur ψ . Il apparaît alors que $\rho = \psi^\dagger \psi = \varphi^* \varphi$.

de Bose. Le condensat de Bose est un état superfluide de bosons chargé, il se comporte donc comme la phase supraconductrice d'un métal, qui peut être considérée un condensat de Bose de paires de Cooper. La spécificité de la supraconductivité est l'apparition d'un courant permanent et de l'effet Meissner. On peut donc s'attendre à observer ces effets dans notre système de bosons composites. Le courant permanent signifie qu'il n'y a pas de chute de tension le long de la direction du courant ; il correspond donc à la résistivité diagonale nulle de l'effet Hall quantique fractionnaire. Les bosons composites ont non seulement une charge mais également des tubes de flux fictifs qui leur sont attachés. Le flux de ces tubes crée une différence de potentiel électrique le long de la direction perpendiculaire à ce flux, par effet inductif. C'est cela qui donne naissance à l'effet Hall. Calculons la résistance de Hall dans ce formalisme. La densité des bosons composites n_e et leur charge q_e , sont les mêmes que celles des électrons initiaux. Si on considère la vitesse moyenne des bosons \mathbf{v} , la densité de courant est alors

$$\mathbf{i} = n_e q_e \mathbf{v} \quad (5.18)$$

et le flux fictif s'écoule avec la même vitesse. Calculons la force électromotrice induite par ce flux, en plaçant un fil fictif perpendiculaire au courant et en déterminant la force subie par une charge dans le fil. Dans un système de coordonnées lié à un repère mobile à la vitesse \mathbf{v} , le fil se déplace à une vitesse $-\mathbf{v}$. Une charge dans ce fil en mouvement subit la force de Lorentz due au flux fictif, qui est statique dans le repère choisit. Cette force de Lorentz donne lieu à une force électromotrice induite et le champ électrique induit est

$$\mathbf{E} = -\mathbf{v} \times \mathbf{B}_\phi \quad (5.19)$$

Ici, le champ magnétique \mathbf{B}_ϕ est le champ moyen dû au flux fictif et est donné par

$$\mathbf{B}_\phi = -n_e q \phi_0 \mathbf{z} \quad (5.20)$$

En remplaçant ces deux termes dans (5.18), et on obtient

$$\mathbf{E} = q \frac{h}{q_e^2} \mathbf{i} \times \mathbf{z} \quad (5.21)$$

Ce résultat donne la conductivité de Hall correcte

$$\sigma_{xy} = -\frac{1}{q} \frac{q_e^2}{h} \quad (5.22)$$

Enfin, l'incompressibilité du fluide de Hall est la conséquence de l'effet Meissner. Cet effet est le phénomène par lequel le champ magnétique est expulsé du superfluide. Dans notre système, un fort champ magnétique est appliqué, mais dans l'approximation du champ moyen, ce champ extérieur est exactement annulé par les tubes de flux. Le champ moyen des tubes de flux est proportionnel à la densité de particules, donc un changement de la densité correspond à l'apparition d'un champ magnétique dans le système. Or l'effet Meissner garantit qu'il n'y a aucun champ magnétique dans le fluide donc la densité des particules est toujours constante et la compressibilité est nulle. Quand un champ magnétique est rajouté au système, il intervient comme un flux quantifié c'est à dire un *vortex*. Ces vortex correspondent aux quasi-particules de l'effet Hall fractionnaire.

Nous pouvons maintenant utiliser la fonction de partition (5.15), pour obtenir une action effective pour les excitations de basse énergie du système. Il suffit pour cela de considérer la valeur minimale de l'action et de regarder les petites fluctuation autour de cette action effective. Cette méthode du col revient à déterminer en premier lieu les solutions classiques de l'action S , en appliquant les lois d'Euler-Lagrange.

5.1.5 Equations du mouvement

Il est commode d'utiliser la décomposition polaire du champ bosonique

$$\varphi = \sqrt{\rho} e^{i\theta} \quad (5.23)$$

en introduisant le champ de densité électronique ρ et le champ de phase θ . A partir d'ici, θ désigne donc un champ qui n'est pas immédiatement relié aux phases statistique et de Berry. Le champ de vitesses apparaît alors naturellement avec $i = x, y$

$$v_i = \frac{\hbar}{m} \partial_i \theta - \frac{q_e}{m} (a_i + A_i) \quad (5.24)$$

Ces nouveaux champs permettent de réexprimer le Lagrangien. En effet, le premier terme de (5.17) se transforme simplement en

$$\rho \partial_t \theta - \frac{i}{2} \partial_t \rho - q_e (a_0 + A_0) \quad (5.25)$$

Le second terme fait intervenir la dérivée covariante $D = \nabla - i \frac{q_e}{\hbar} (\mathbf{a} + \mathbf{A})$ et se transforme en

$$\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m} \varphi^* D^2 \varphi &= -\frac{\hbar^2}{2m} \left\{ \sqrt{\rho} \Delta \sqrt{\rho} - \rho (\nabla \theta - \frac{q_e}{\hbar} (\mathbf{a} + \mathbf{A}))^2 + i \Delta \theta \rho \right. \\ &\quad \left. + 2i \sqrt{\rho} \nabla \sqrt{\rho} \cdot \nabla \theta - i \frac{q_e}{\hbar} (\mathbf{a} + \mathbf{A}) \nabla \rho - i \frac{q_e}{\hbar} \rho \nabla (\mathbf{a} + \mathbf{A}) \right\} \end{aligned} \quad (5.26)$$

Après élimination des termes topologiques et regroupement des termes

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \varphi^* D^2 \varphi = \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \sqrt{\rho})^2 + \frac{m\rho}{2} v^2 \quad (5.27)$$

Le Lagrangien total devient alors

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{Tot} &= \rho \partial_t \theta - \frac{i}{2} \partial_t \rho + q_e (a_0 + A_0) \rho + \frac{\hbar^2}{2m} (\nabla \sqrt{\rho})^2 \\ &\quad + \frac{m\rho}{2} v^2 + \frac{q_e \bar{\rho}}{2B} \varepsilon^{ijk} a_i \partial_j a_k + \rho U + \int \rho(\mathbf{r}) V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' \end{aligned} \quad (5.28)$$

U est simplement un potentiel électrostatique extérieur qui correspond au potentiel de confinement de l'échantillon, par exemple. Il est facile d'obtenir le système d'équations d'Euler-Lagrange pour les champs ρ, θ, a_0 et a_i ⁴

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \theta = -\frac{1}{2} m v^2 + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\Delta \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} - q_e (a_0 + A_0) - U(\mathbf{r}) - \int V_c(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' \\ \partial_t \rho = -\hbar \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \\ \bar{\rho} - \rho = -\frac{m \bar{\rho}}{q_e B} \varepsilon^{ij} \partial_i v_j \\ \varepsilon^{ij} \rho v_j = -\frac{\bar{\rho}}{2B} \left(\frac{m}{q_e} \partial_t v_i - \frac{\hbar}{q_e} \partial_t \nabla_i \theta - \partial_i a_0 \right) \end{array} \right. \quad (5.29)$$

Ces équations aux dérivées partielles constituent la forme hydrodynamique des équations de champ moyen de Chern-Simons. Nous les utiliserons pour décrire l'interaction de deux fluides de Hall fractionnaires. Considérons maintenant la géométrie de la jonction étendue.

⁴Pour la troisième équation, nous avons utilisé la relation 5.24 et le fait que $\varepsilon^{ij} \partial_i A_j = B$.

5.2 Jonction étendue sans effet tunnel

On considère une jonction étendue entre deux fluides de Hall (cf Fig. 5.3). Nous nous plaçons dans la situation où la barrière de potentiel est suffisamment haute pour que l'effet tunnel soit négligeable. On suppose en revanche que sa constante diélectrique permet les interactions à travers la barrière. Cette constante peut être différente de celle des deux 2-DEG et le préfacteur de l'interaction coulombienne est différent suivant que l'on considère l'interaction d'un fluide de Hall sur lui-même ou sur l'autre. Nous savons que les états de bord de chiralités opposées qui circulent le long de la jonction sont mélangés par l'interaction inter-canaux. On se place dans le cas où les fluides de Hall sont à remplissage magiques identiques $\nu = 1/(2n + 1)$. L'approche naturelle d'un tel problème est le traitement par bosonisation .

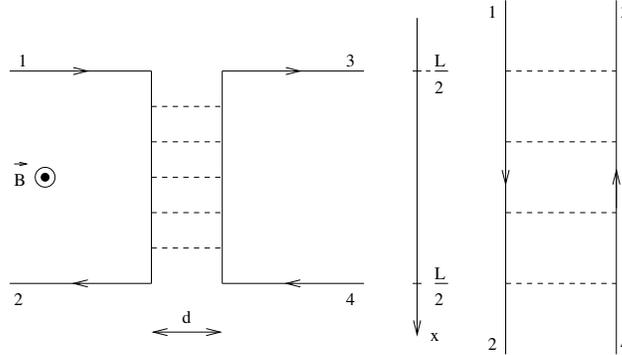


FIG. 5.3 – Deux 2-DEG séparés par une jonction étendue, en présence d'un champ magnétique. Les interactions à travers la barrière conduisent à un mélange des états de bord contre-propageants.

5.3 Traitement par bosonisation

Comme nous l'avons déjà vu, l'approche naturelle pour traiter le problème de la barrière étendue en régime d'effet Hall fractionnaire magique est la bosonisation de l'Hamiltonien. On suppose que le gaz bidimensionnel est complètement polarisé de spin, et que le champ magnétique appliqué conduit à un facteur de remplissage de $\nu = 1/(2n + 1)$ du plus bas niveau de Landau. Un seul bord à ce facteur de remplissage peut être décrit par un unique boson chiral [77]. Lorsque la jonction est infiniment longue, l'invariance par translation assure la conservation du moment et on peut utiliser le moment conservé pour indiquer les états électroniques, comme on l'a déjà vu. En l'absence d'effet tunnel, seules les interactions couplent les modes de bord contre-propageant. L'Hamiltonien pour les modes découplés est alors :

$$\mathcal{H}_{kin} = \sum_{k>0} \left(\frac{2\pi v}{q_e^2 \nu} \right) [\rho_L(k)\rho_L(-k) + \rho_R(k)\rho_R(-k)]. \quad (5.30)$$

Ici, v est la vitesse des modes de bord et les opérateurs $\rho_{L/R}(k)$ sont les densités électroniques de chaque côté de la barrière. On prend maintenant en compte les interactions coulombiennes en rajoutant une contribution intra-canaux et inter-canaux, $\tilde{V}_1(k)$ et $\tilde{V}_2(k)$ respectivement [24]. Cela conduit à l'Hamiltonien :

$$\mathcal{H}_{tot} = \sum_{k>0} \left(\frac{2\pi v}{q_e^2 \nu} + \tilde{V}_1(k) \right) [\rho_L(k)\rho_L(-k) + \rho_R(k)\rho_R(-k)] + \sum_{k>0} \tilde{V}_2(k) (\rho_L(k)\rho_R(-k) + \rho_R(k)\rho_L(-k)). \quad (5.31)$$

Comme les modes droits et gauches sont couplés, une transformation de Bogolyubov diagonalise cette forme quadratique :

$$\begin{aligned}\tilde{\rho}_L(k) &= \cosh \theta_k \rho_L(k) + \sinh \theta_k \rho_R(k), \\ \tilde{\rho}_R(k) &= \cosh \theta_k \rho_R(k) + \sinh \theta_k \rho_L(k),\end{aligned}\tag{5.32}$$

avec :

$$\tanh 2\theta_k = \frac{\tilde{V}_2(k)}{2\pi v / (q_e^2 \nu) + \tilde{V}_1(k)}.\tag{5.33}$$

Le problème initial devient alors celui d'un boson unique :

$$\frac{2\pi}{q_e^2 \nu} \sum_{k>0} v_k [\tilde{\rho}_L(k) \tilde{\rho}_L(-k) + \tilde{\rho}_R(k) \tilde{\rho}_R(-k)],\tag{5.34}$$

avec la vitesse des modes couplés dépendant de k :

$$v_k^2 = (v + \frac{q_e^2 \nu}{2\pi} \tilde{V}_1(k))^2 - (\frac{q_e^2 \nu}{2\pi} \tilde{V}_2(k))^2.\tag{5.35}$$

Il apparaît alors clairement qu'il peut se produire une instabilité si l'interaction inter-canaux V_2 est suffisamment intense. Si on considère par exemple, une forme d'interaction coulombienne à longue distance

$$V_i(y - y') = \frac{q_e^2}{\varepsilon_i} \frac{1}{\sqrt{(y - y')^2 + d_i^2}}\tag{5.36}$$

avec $i = 1, 2$, ε_1 la constante diélectrique relative des deux 2-DEG supposés identiques et ε_2 celle de la barrière. Afin d'éviter une divergence UV de l'interaction, d_1 est un cut-off microscopique du 2-DEG et $d_2 = d$ est la largeur de la barrière. Les transformées de Fourier de ce type d'interaction ont une forme connue

$$\tilde{V}_i(k) \propto K_0(kd_i)\tag{5.37}$$

avec K_0 la fonction de Bessel modifiée. Dans la limite de basse énergie $k \rightarrow 0$,

$$\tilde{V}_i(k) \sim -\ln(|k|d_i)\tag{5.38}$$

Si on construit la barrière avec un matériau tel que $\varepsilon_2 < \varepsilon_1$ ⁵, on obtient le comportement asymptotique

$$(\frac{q_e^2 \nu}{2\pi} \tilde{V}_2(k))^2 \gg (v + \frac{q_e^2 \nu}{2\pi} \tilde{V}_1(k))^2\tag{5.39}$$

Dans cette limite, la vitesse des excitations devient imaginaire. L'apparition de fréquences imaginaires dans la relation de dispersion traduit la présence d'une instabilité. Pour le système des canaux de bords couplés par cette interaction, le fondamental autour duquel on regarde le spectre de basse énergie n'est pas le fondamental correct. Cela signifie que la théorie des χ LL n'est pas valable dans cette situation. En effet, la technique de bosonisation revient à tronquer certains opérateurs de la théorie initiale comme on l'a vu à la section 5.31, ce qui conduit à l'instabilité. Ces opérateurs ne sont pas tous négligeables dans la situation présente, et contribuent à la détermination exacte du fondamental du système. Cet effet ne se produit bien sûr pas dans les barres de Hall usuelles où ce type d'interaction coulombienne a lieu entre les modes droits et gauches à *travers* le fluide de Hall⁶ : cette situation a été étudié en détails par Zülicke et MacDonald [80]. Ce n'est pas la cas dans notre jonction étendue et tout le traitement précédent est mis en défaut car la forme quadratique obtenue par bosonisation n'est plus définie positive. Nous devons donc procéder à une analyse microscopique plus fine pour trouver le vrai fondamental du système.

⁵Avec $\varepsilon_1 = \varepsilon_{GaAs} = 11.7$, il suffit de choisir un matériau de $\varepsilon_2 \approx 1$ pour être très largement dans le régime souhaité. Une barrière en vide ou en air convient parfaitement.

⁶On a alors évidemment $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$, et l'instabilité n'apparaît jamais.

5.4 Equations de Chern-Simons pour la jonction étendue

Pour déterminer le fondamental de la jonction étendue, nous utilisons la théorie de champ moyen de Chern-Simons [81]. Ce champ moyen rend compte des caractéristiques essentielles des fluides de Hall incompressibles aux remplissages $\nu = 1/(2n + 1)$. Orgad and Levit [79] ont montré que grâce à cette théorie, il est possible de décrire correctement le couplage des modes de bord par les interactions à travers une barre de Hall. C'est précisément ce couplage qui conduit à une instabilité lors du traitement par la méthode de bosonisation comme on l'a vu précédemment. Nous suivrons la même approche pour traiter la géométrie de la jonction étendue. Chaque fermion est remplacé par un boson attaché à $2n + 1$ quanta de flux *via* le champ de jauge de Chern-Simons. L'état fondamental incompressible à $\nu^{-1} = 2n + 1$ est alors un condensat de Bose de ces bosons fictifs. Il y a donc deux fluides de Hall distincts paramétrés par $\varphi_a = \sqrt{\rho_a} e^{i\theta_a}$, $a = l, r$ de chaque coté de la jonction, avec φ_a les opérateurs d'annihilation bosoniques. Nous utilisons les unités $\hbar = c = 1$. Il est également pratique d'utiliser des grandeurs adimensionnées en mesurant les longueurs en unité de longueur magnétique $\ell = 1/\sqrt{|q_e|B}$, le temps en inverse de la pulsation cyclotron $\omega_c = |q_e|B/m$, les énergies en unité de ω_c ⁷

Nous nous intéressons à la situation symétrique où les deux fluides de Hall ont la même densité, il est alors commode de mesurer la densité dépendant de la position en unité de sa valeur dans le volume $\rho_{vol} = \nu/(2\pi) = \bar{\rho}$. En plus des champs de bosons φ_a , la théorie de Chern-Simons requiert l'introduction de deux champs de jauge statistiques à deux dimensions spatiales \mathbf{a}_a et une dimension temporelle a_{0a} . Le champ magnétique extérieur est appliqué suivant l'axe z : $\nabla \times \mathbf{A} = B\hat{\mathbf{z}}$. Les champs de vitesse sont définis par :

$$\mathbf{v}_a = \nabla\theta_a + \mathbf{a}_a + \mathbf{A}_a. \quad (5.40)$$

Les équations de champ moyen donnent des relations locales, valables séparément des deux côtés la barrière. Ce sont les équations liées aux tubes de flux attachés :

$$\nabla \times \mathbf{a}_a = -\rho_a. \quad (5.41)$$

Il y a également des relations entre les champ électriques de Chern-Simons et les courants, qui peuvent s'écrire en fonction des vitesses et des phases :

$$\partial_t \nabla\theta_a - \partial_t \mathbf{v}_a - \nabla a_{0a} = \rho_a \mathbf{v}_a \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.42)$$

Finalement, la partie électrostatique du problème est contenue dans les équations du mouvement pour les phases θ_a :

$$\partial_t \theta_a = -\frac{1}{2} \mathbf{v}_a^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial_t^2 \sqrt{\rho_a}}{\sqrt{\rho_a}} + a_{0a} - V(x) - \rho_a - \frac{\nu}{2\pi} \int \sum_b V_{ab}(\mathbf{r} - \mathbf{r}') (\rho_b(\mathbf{r}') - 1) d^2 \mathbf{r}'. \quad (5.43)$$

Cette dernière équation contient $U(x)$ qui est le potentiel à un corps du à la barrière entre les deux cotés de la jonction. Comme cette jonction est orientée suivant la direction y , ce potentiel dépend juste de x . On considère simplement U comme étant infini dans la barrière et nul ailleurs. Nous avons également ajouté un potentiel d'interaction répulsif δ qui est usuellement ajouté pour assurer que les bosons sont à coeur durs, ce qui conduit au coefficient ρ_a . Finalement le couplage entre les deux liquides de Hall apparaît uniquement *via* l'interaction électrostatique à travers la barrière. Cela est décrit par les coefficients d'interaction hors-diagonaux $V_{rl} = V_{lr}$. Nous ne prenons pas en compte l'effet tunnel et ce terme est le seul par lequel les deux gouttelettes de

⁷On obtient alors les conversions suivantes $\partial_x \rightarrow \partial_x l^{-1}$, $\partial_t \rightarrow \partial_t \omega_c$, $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}l$, $v \rightarrow v l \omega_c$ et $-q_e a_0 \rightarrow m l \omega_c a_0$. On a toujours $\omega_c = -q_e B/m$.

Hall communiquent. L'interaction coulombienne à l'intérieur de chaque gouttelette est donnée par :

$$V_{rr} = V_{ll} = \frac{1}{\hbar\omega_c} \frac{q_e^2}{\varepsilon\ell} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.44)$$

avec $\varepsilon = \varepsilon_1$ la constante diélectrique identique pour chaque fluide. La force des interactions peut être caractérisée par la constante $\lambda_c = q_e^2/(\varepsilon\ell\hbar\omega_c)$ qui est faible quand on est dans les conditions de l'effet Hall quantique fractionnaire, i.e. quand les interactions mélangent faiblement les niveaux de Landau. Il est évident que l'interaction à travers la barrière n'est pas si simple si on considère le cas d'une constante diélectrique de la barrière $\varepsilon_2 = \varepsilon'$ différente de celle des fluides $\varepsilon' \neq \varepsilon$. La description précise du potentiel d'interaction dépend la géométrie exacte de l'échantillon. Nous ne réaliserons pas ici une modélisation d'un échantillon précis et nous essayons juste de mettre en évidence le comportement du système en présence d'une instabilité comme nous l'avons déjà vu. Pour cela, nous utilisons le même potentiel de Coulomb qu'à l'eq.(5.44) avec une pré-constante globale différente. L'interaction à travers la barrière est alors :

$$V_{rl} = V_{lr} = \frac{1}{\hbar\omega_c} \frac{q_e^2}{\varepsilon'\ell} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \lambda_{ac} \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (5.45)$$

avec la constante $\lambda_{ac} = q_e^2/(\varepsilon'\ell\hbar\omega_c)$. Cette approximation est crédible quand on considère des états électroniques des bords de la jonction étendue. Ils interagissent directement à travers la barrière avec une interaction dont la forme est très proche de V_{rl} i.e. il n'y pratiquement pas de contribution supplémentaire venant des fluides avec une constante diélectrique différente ε .

Nous pouvons réécrire ce système d'équation sous la forme plus compacte :

$$\left\{ \begin{array}{l} 1 - \rho = \varepsilon^{ij} \partial_i v_j \\ \partial_t \partial_i \theta - \partial_t v_i - \partial_i a_0 = \varepsilon^{ij} \rho v_j \\ \partial_t \rho = -\partial_i (\rho \mathbf{v}) \\ \partial_t \theta = -\frac{1}{2} v_i^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial_i^2 \sqrt{\rho}}{\sqrt{\rho}} + a_0 - U(\mathbf{r}) - \frac{\nu}{2\pi} \int V(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \rho(\mathbf{r}') d^2 \mathbf{r}' \end{array} \right. \quad (5.46)$$

Nous recherchons maintenant des solutions aux équations de champ moyen, avec invariance par translation le long de la barrière; toutes les quantités sont donc des fonctions de x uniquement. De même, la vitesse suivant la direction x est nulle ($v_x = 0$). Cela permet de simplifier l'intégrale de Coulomb dans (5.43) en intégrant suivant la coordonnée y .

$$\int d^2 r' \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} (\rho_a(r') - 1) \simeq -2 \ln L \left(\int dx' (\rho_a(x') - 1) \right) - 2 \int dx' \ln |x - x'| (\rho_a(x') - 1). \quad (5.47)$$

Nous avons supposé ici que la longueur de la barrière L suivant y , est bien plus grande que la largeur de la zone où la densité électronique est différente de celle du volume. Nous vérifierons que le phénomène que l'on cherche à décrire se passe effectivement sur quelques longueurs magnétiques.

Pour résoudre ces équations de champ moyen, on se place d'abord dans la jauge de Landau $\mathbf{A} = (0, Bx)$ et $\mathbf{a}_a = (0, a_{ya})$. Avec ce choix de jauge, les angles θ_a sont contraints d'être des fonctions linéaires de la coordonnée y comme du temps : $\theta_a = -\mu_a t - x_a y$. Pour une valeur donnée de x_a , on impose la condition que la densité tende vers sa valeur uniforme dans le volume du fluide quand on s'éloigne de la barrière. Cette contrainte assure que les solutions classiques que l'on va obtenir des équations de Chern-Simons concernent bien les bords de la barrière. En effet, la théorie de Chern-Simons décrivant l'ensemble des deux fluides de Hall couplés à travers une

barrière abrupte de potentiel infini, les solutions obtenues sans cette contrainte pourraient être relatives à des états du volume. Cela fixe également la valeur du potentiel chimique μ_a . Pour une barrière avec un seul bord, la quantité correspondante x_0 peut être vue comme la charge en excès par unité de longueur le long du bord[79, 83]. Cette propriété est encore vraie dans le cas d'une jonction étendue : l'indice l renvoie au coté gauche $x < 0$ et r à $x > 0$. En utilisant l'équation de flux (5.41), on trouve

$$\int_{-\infty}^0 dx'(\rho_l x' - 1) = +x_l \quad \text{and} \quad \int_0^{+\infty} dx'(\rho_r(x') - 1) = -x_r. \quad (5.48)$$

Nous nous sommes placés dans le cas où la charge en excès est symétrique avec $x_l = -x_r$. Cela signifie que le système non perturbé (sans interaction à travers la barrière) a le même remplissage que les deux cotés séparément. Les solutions que l'on va obtenir sont donc une famille de solutions à un seul paramètre $X = -x_r = +x_l$.

Si les intégrales de Coulomb sont évaluées comme dans Eq.(5.47), les termes constants conduisent à une renormalisation des potentiels chimiques par une constante additive en $\ln L$. Il apparaît alors naturel d'introduire les potentiels chimiques décalés à partir desquels nous exprimerons tous les résultats :

$$\tilde{\mu}_{r,l} = \mu_{r,l} + 2(\lambda_c + \lambda_{ac})X \ln L \quad (5.49)$$

Le système d'équations à résoudre se simplifie en deux sous-systèmes définis sur les deux demi-droites $x > 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x v_{yr}(x) = 1 - \rho_r(x) \\ \partial_x a_{0r}(x) = \rho_r(x) v_{yr}(x) \\ \partial_t \rho_r(x) = -\partial_x(\rho_r(x) v_{yr}(x)) \\ \tilde{\mu}_r = \frac{1}{2} v_{yr}^2(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 \sqrt{\rho_r}}{\sqrt{\rho_r}} - a_{0r}(x) + \rho_r(x) \\ \quad - 2\lambda_c \int_0^\infty (\rho_r(x') - 1) \ln |x - x'| dx' \\ \quad - 2\lambda_{ac} \int_{-\infty}^0 (\rho_l(x') - 1) \ln |x - x'| dx' \end{array} \right. \quad (5.50)$$

et $x < 0$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_x v_{yl}(x) = 1 - \rho_l(x) \\ \partial_x a_{0l}(x) = \rho_l(x) v_{yl}(x) \\ \partial_t \rho_l(x) = -\partial_x(\rho_l(x) v_{yl}(x)) \\ \tilde{\mu}_l = \frac{1}{2} v_{yl}^2(x) - \frac{1}{2} \frac{\partial_x^2 \sqrt{\rho_l}}{\sqrt{\rho_l}} - a_{0l}(x) + \rho_l(x) \\ \quad - 2\lambda_c \int_{-\infty}^0 (\rho_l(x') - 1) \ln |x - x'| dx' \\ \quad - 2\lambda_{ac} \int_0^\infty (\rho_r(x') - 1) \ln |x - x'| dx' \end{array} \right. \quad (5.51)$$

Les deux systèmes d'équations ne sont couplés que par le terme intégral proportionnel à λ_{ac} dans la dernière équation.

5.5 Profil de densité des bords

Nous avons résolu numériquement le système d'équations précédent pour les quantités ρ_a , v_{ya} et a_{0a} . Avec l'expression particulière des phases θ_a , les équations (5.50,5.51) peuvent être

considérées comme un problème aux valeurs propres non-linéaire en ρ_a (vecteur propre) et $\tilde{\mu}_{1,2}$ (valeur propre). Pour cela, nous avons ramené la résolution du système d'équation aux dérivées partielles couplées (5.50,5.51) à un problème aux valeurs propres sur ρ_a en injectant les deux premières équations de (5.50,5.51) dans la quatrième. La troisième équation est nulle en régime permanent et on peut réécrire le problème initial sous la forme

$$\tilde{\mu}_a \rho_a = \mathcal{H}_a(\rho_r, \rho_l) \quad (5.52)$$

$\mathcal{H}_a(\rho_r, \rho_l)$ est un opérateur non-local et non-linéaire en ρ_r et ρ_l qui s'interprète comme un Hamiltonien. Pour trouver les fonctions ρ_r et ρ_l qui vérifient ces deux équations aux valeurs propres, nous avons utilisé la méthode de relaxation (un ansatz dicté par la symétrie $v_{xa} = 0$). Cette méthode part d'une fonction test $\rho_{0,a}$ pour chacun des bords. On la normalise en utilisant $\int_0^W \rho_{0,r}(x) dx = W - x_r$ pour $\rho_{0,r}$ et une équation équivalente pour $\rho_{0,l}$. On évalue ensuite a_{0a} et v_{ya} , à partir des deux premières équations de (5.50,5.51). On calcule enfin $\mathcal{H}_a(\rho_{0r}, \rho_{0l})$. Si ρ_{0r} est fonction propre de $\mathcal{H}_r(\rho_{0r}, \rho_{0l})$, on aura automatiquement $\tilde{\mu}_r \int_0^W \rho_{0r}(x) dx = \int_0^W \mathcal{H}_r(\rho_{0r}, \rho_{0l}) dx$. La quantité $\tilde{\mu}_{0r} = \int_0^W \mathcal{H}_r(\rho_{0r}, \rho_{0l}) dx / (W - x_r)$ est donc forcément supérieure à $\mathcal{H}_r(\rho_{0r}, \rho_{0l})$ et on incrémente l'algorithme en définissant une nouvelle fonction d'essai

$$\rho_{1,r} = \rho_{0,r} e^{-dt(\tilde{\mu}_{0r} - \mathcal{H}_r(\rho_{0r}, \rho_{0l}))} \quad (5.53)$$

Nous avons réalisé deux programmes identiques en Matlab ainsi qu'en C/C++ afin d'implémenter cette méthode. Les quantités $\tilde{\mu}_{1,2}$ sont déterminées une fois que l'on a fixé les paramètres λ_c , λ_{ac} et X . Notre résultat principal est que lorsque les interactions à travers la barrière sont suffisamment fortes, il apparaît une bifurcation dans les solutions de champ moyen et nous obtenons des solutions asymétriques pour des valeurs de $\tilde{\mu}_r$ et $\tilde{\mu}_l$ différentes (cf Fig.5.4).

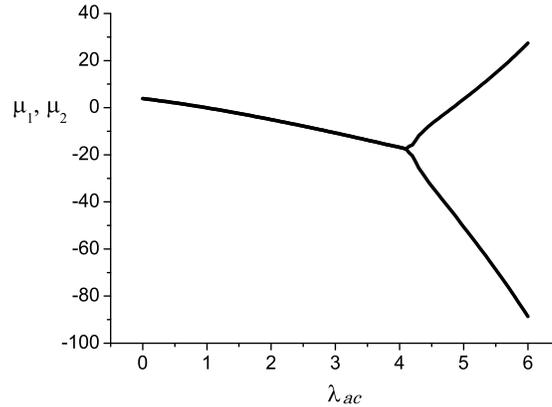


FIG. 5.4 – Potentiels chimiques de deux bords en fonction de λ_{ac} avec $\lambda_c = 0.03$. La bifurcation des courbes traduit l'apparition de la disymétrie.

Pour ces valeurs des potentiels chimiques, nous avons obtenu les densités ρ_r et ρ_l en fonction du paramètre X , des constantes de couplages λ_c et λ_{ac} . Quand λ_{ac} est faible nous obtenons des profils de densité symétriques par rapport à la barrière qui ressemblent beaucoup à ce que l'on trouve pour un bord unique le long d'une barrière. L'interaction intra-canaux ne fait que renormaliser le profil de densité des bords. Un exemple typique est représenté à la Fig.(5.5). Ces profils de densité ont déjà été étudiés [79, 83] dans le cas d'un bord unique. Il apparaît un

excès de densité électronique le long du bord uniquement quand la coordonnée X est négative et suffisamment grande. A la Fig.(5.5) nous avons représenté les solutions correspondants aux paramètres $X = -1$, $\lambda_c = 0.03$ et $\lambda_{ac} = 2$.

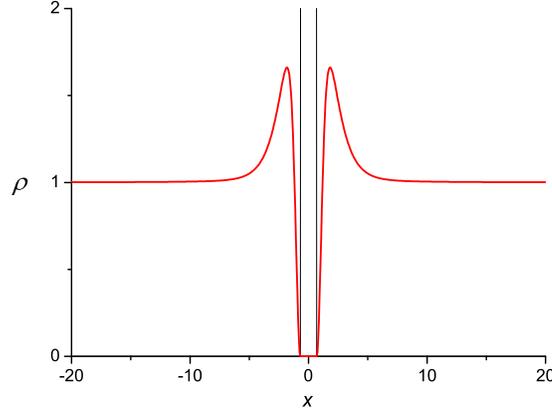


FIG. 5.5 – Profil de densité pour une jonction étendue en supposant la couplage $\lambda_{ac} = 2$, en fonction de la position x par rapport à la barrière. Le paramètre de charge en excès est $X = -1$.

5.6 Vitesses des modes de bord

Comme nous étudions le cas d'un simple fluide de Hall au remplissage $\nu = 1/(2n + 1)$, il existe un mode de propagation chiral à chaque bord de la jonction quand il n'y a pas de couplage entre les deux fluides. Lorsque nous sommes dans la situation de brisure de symétrie mentionnée plus haut, il est naturel de se demander ce que deviennent ces excitations. Pour étudier ces modes qui se propagent le long des canaux de bord reconstruits, nous utilisons la méthode RPA en linéarisant les équations du mouvement obtenues précédemment. Si on considère les petites déviations par rapport à l'équilibre $\delta\rho_a$, δa_{0a} , $\delta\mathbf{a}_a$, $\delta\mathbf{v}_a$ et $\delta\theta_a$, nous obtenons le système couplé suivant :

$$\nabla \times \delta\mathbf{a}_a = -\delta\rho_a. \quad (5.54)$$

$$\partial_t \nabla \delta\theta_a - \partial_t \delta\mathbf{v}_a - \nabla \delta a_{0a} = \delta\rho_a \mathbf{v}_a \times \hat{\mathbf{z}} + \rho_a \delta\mathbf{v}_a \times \hat{\mathbf{z}}. \quad (5.55)$$

$$\partial_t \delta\theta_a = -v_{ya} \delta v_{ya} + F(\rho_a) + \frac{1}{4} \frac{\partial_i^2 (\delta\rho_a / \sqrt{\rho_a})}{\sqrt{\rho_a}} + \delta a_{0a} - \delta\rho_a - \frac{\nu}{2\pi} \int \sum_b V_{ab}(r-r') \delta\rho_b(r') d^2 r', \quad (5.56)$$

avec $F(\rho) = -(\partial_i^2 \sqrt{\rho}) / (4\rho^{3/2})$. Pour trouver une solution de ces équations RPA, on peut remarquer que la dérivée des équations de champ moyen (eqs. 5.50, 5.51) par rapport à un paramètre extérieur comme x_r ou x_l est formellement analogue aux RPA précédentes. Nous allons donc utiliser un ansatz avec une dépendance harmonique en le temps dans la propagation le long de la barrière et dont la dépendance en x est choisie de la manière suivante pour le côté $x > 0$:

$$\begin{cases} \delta\rho_r(x, y) &= \partial_{x_r} \rho_r(x) \cos(ky - \omega t), \\ \delta v_{yr}(x, y) &= \partial_{x_r} v_{yr}(x) \cos(ky - \omega t), \\ \delta a_{0r}(x, y) &= \partial_{x_r} a_{0r}(x) \cos(ky - \omega t), \\ \delta\theta_r(y) &= -\frac{1}{k} \sin(ky - \omega t), \end{cases} \quad (5.57)$$

et pour le côté $x < 0$:

$$\begin{cases} \delta\rho_l(x, y) &= \partial_{x_l}\rho_l(x) \cos(k'y - \omega t), \\ \delta v_{yl}(x, y) &= \partial_{x_l}v_{yl}(x) \cos(k'y - \omega t), \\ \delta a_{0l}(x, y) &= \partial_{x_l}a_{0l}(x) \cos(k'y - \omega t), \\ \delta\theta_l(y) &= -\frac{1}{k} \sin(k'y - \omega t). \end{cases} \quad (5.58)$$

Dans ces solutions d'essai, les fonctions ρ_a, a_{0a}, v_{ya} sont solutions des équations de champ moyen. Nous choisissons les fonctions d'essais définies en tout point du système comme ⁸

$$\begin{cases} \delta\rho(x, y) &= \alpha\delta\rho_r(x, y)\Theta(x) + \beta\delta\rho_l(x, y)\Theta(-x), \\ \delta v_y(x, y) &= \alpha\delta v_{yr}(x, y)\Theta(x) + \beta\delta v_{yl}(x, y)\Theta(-x), \\ \delta a_0(x, y) &= \alpha\delta a_{0r}(x, y)\Theta(x) + \beta\delta a_{0l}(x, y)\Theta(-x), \\ \delta\theta(x, y) &= \alpha\delta\theta_r(y)\Theta(x) + \beta\delta\theta_l(y)\Theta(-x), \end{cases} \quad (5.59)$$

En effet

$$\begin{aligned} \partial_{x_1}(\delta v_{y1}) &= \partial_{x_1}(\partial_x v_{y1}(x)) \cos(ky - \omega t) \\ &= \partial_{x_1}(1 - \rho(x)) \cos(ky - \omega t) \\ &= -\delta\rho_1(x) \end{aligned} \quad (5.60)$$

En procédant de la même manière pour δv_{y2} à $x < 0$, on montre que $\delta v_{y2} = \partial_{x_2}v_{y2}(x) \cos(k'y - \omega t)$ satisfait l'équation correspondante.

De plus,

$$\partial_t(\partial_x\theta) - \partial_t(0) - \partial_{x_1}(\partial_x a_0(x)) \cos(ky - \omega t) = v_{y1}(x)\partial_{x_2}\rho(x) \cos(ky - \omega t) + \rho(x)\partial_{x_1}v_y(x) \cos(ky - \omega t) \quad (5.61)$$

$$\Leftrightarrow \partial_{x_1}(-\partial_x a_0(x)) = \partial_{v_{y1}\rho(x)}$$

On procède de même pour $x < 0$ et on constate que

Enfin, en remarquant que

$$\int_0^\infty \frac{\cos(xy)}{\sqrt{x^2 + a^2}} dx = K_0(ay) \quad (5.62)$$

pour $Re(a) > 0$ on calcule facilement lorsque $L \rightarrow \infty$

$$\int_{-L/2}^{L/2} \frac{\cos(ky' - \omega t)}{\sqrt{((x - x')^2 + (y - y')^2)}} dy' \rightarrow 2 \cos(ky - \omega t) K_0(k|x - x'|) \quad (5.63)$$

Ainsi, pour la dernière équation nous obtenons à $x > 0$

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\omega}{k} \cos(ky - \omega t) &= -\alpha v_y(x)\partial_{x_1}(v_y(x)) \cos(ky - \omega t) + f(\rho, \delta\rho) - \alpha \frac{k^2 \partial_{x_1}\rho(x) \cos(ky - \omega t)}{4\rho(x)} \\ &+ \alpha \partial_{x_1}a_0(x) \cos(ky - \omega t) - \alpha \partial_{x_1}\rho(x) \cos(ky - \omega t) - \\ &- \alpha \lambda_c \int_{-L/2}^{L/2} \int_0^\infty \frac{\cos(ky' - \omega t)}{\sqrt{((x - x')^2 + (y - y')^2)}} \partial_{x_1}\rho(x') dx' dy' \\ &- \beta \lambda_{ac} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-\infty}^0 \frac{\cos(ky' - \omega t)}{\sqrt{((x - x')^2 + (y - y')^2)}} \partial_{x_2}\rho(x') dx' dy' \end{aligned} \quad (5.64)$$

⁸Ici, la fonction $\Theta(x)$ désigne la fonction de Heavyside qui vaut 1 si $x > 0$, 0 sinon. Elle permet de définir par morceaux les solutions dans tout le plan.

En utilisant la forme asymptotique de la fonction de Bessel modifiée dans la limite de basse énergie $K_0(k|x-x'|) = \ln \frac{2e^{-\gamma}}{k|x-x'|}$, on obtient

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\omega}{k} &= \alpha \partial_{x_1} \left\{ -\frac{1}{2} v_y^2(x) + a_0(x) - \rho(x) \right\} + \alpha f(\rho, \delta\rho) \\ &\quad - 2\alpha\lambda_c \int_0^\infty \frac{2e^{-\gamma}}{k|x-x'|} \partial_{x_1} \rho(x') dx' dy' \\ &\quad - \beta\lambda_{ac} \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{-\gamma}}{k|x-x'|} \partial_{x_2} \rho(x') dx' + o(k) \end{aligned} \quad (5.65)$$

On cherche à faire apparaître la dérivée de $-\tilde{\mu}_1$ par rapport à x_1 , pour cela, il convient de séparer les termes en k et en $x-x'$ dans les intégrales. Il faut également rajouter et soustraire un terme de la forme $2\alpha\lambda_{ac} \int_{-\infty}^0 \ln|x-x'| \partial_{x_1} \rho(x') dx'$, puis regrouper tout les termes qui apparaissent comme une dérivée de x_1

$$\begin{aligned} \alpha \frac{\omega}{k} &= \alpha \partial_{x_1} \{-\tilde{\mu}_1\} - 2\alpha\lambda_c \int_0^\infty \frac{2e^{-\gamma}}{|k|} \partial_{x_1} \rho(x') dx' \\ &\quad - 2\beta\lambda_{ac} \int_{-\infty}^0 \frac{2e^{-\gamma}}{k} \partial_{x_2} \rho(x') dx' \\ &\quad + 2\beta\lambda_{ac} \int_{-\infty}^0 \ln|x-x'| \partial_{x_2} \rho(x') dx' \end{aligned} \quad (5.66)$$

$$- 2\alpha\lambda_{ac} \int_{-\infty}^0 \ln|x-x'| \partial_{x_1} \rho(x') dx' \quad (5.67)$$

De plus, on constate que

$$\int_0^\infty \partial_{x_1} \rho(x') dx' = -1 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^0 \partial_{x_2} \rho(x') dx' = +1 \quad (5.68)$$

Si on suppose que la taille de l'échantillon dans la direction y est de l'ordre de W , et que l'on se place dans la limite asymptotique $k \ll W^{-1}$, on obtient alors $-\ln(k) \gg \ln(W) \gg \ln|x-x'|$, on peut alors négliger les deux dernières intégrales par rapport à la deuxième dans Et finalement pour $x > 0$

$$\alpha \frac{\omega}{k} = \alpha \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_1} - 2\lambda_c \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} \right) + 2\beta\lambda_{ac} \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} + \quad (5.69)$$

On procède de la même manière pour $x < 0$ et on obtient :

$$\beta \frac{\omega}{k} = \beta \left(-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_2} + 2\lambda_c \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} \right) - 2\alpha\lambda_{ac} \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} \quad (5.70)$$

Dans le cas où $\lambda_{ac} = 0$, les modes des deux cotés sont découplés, la situation est symétrique et $-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_1} = \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_2} = v$. Chacune de deux relations de dispersion est valable et décrit les excitations chirales usuelles avec les valeurs de la vitesse données par les formules de bosonisation ⁹ Chacune de ces excitations est localisée d'un coté ou l'autre de la barrière. Lorsque l'on prend en compte l'interaction à travers la barrière, les solutions de la RPA doivent satisfaire les équations pour

⁹Notons que la transformée de Fourier $\sim -\ln k$ dans la limite basse énergie.

toutes les valeurs de x , et en particulier les relations de dispersion à droite et à gauche de la barrière doivent être égales. Dans le cas dissymétrique, les vitesses nues $-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_1} = v_1$ et $-\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_2} = -v_2$ ¹⁰ ne sont plus forcément égales et l'égalisation de relations pour $x > 0$ et $x < 0$ conduit à

$$\left(v_1 - 2\lambda_c \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} \right) + 2\frac{\beta}{\alpha} \lambda_{ac} \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} = - \left(v_2 - 2\lambda_c \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} \right) - 2\frac{\alpha}{\beta} \lambda_{ac} \ln \frac{|k|}{2e^{-\gamma}} \quad (5.71)$$

Cela revient à résoudre

$$\frac{2\alpha\beta}{\alpha^2 + \beta^2} = \frac{-2\lambda_{ac} \ln |k|}{\tilde{v} - 2\lambda_c \ln |k|} \quad (5.72)$$

où $\tilde{v} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ et où on a omis les termes en constantes d'Euler pour simplifier. Dans le cas symétrique où $\lambda_{ac} \leq \lambda_c$, cette relation est vérifiée pour $a = \cosh(\theta_k)$ et $b = \sinh(\theta_k)$ ou l'inverse, avec $\tanh(2\theta_k) = \frac{-2\lambda_{ac} \ln |k|}{v - 2\lambda_c \ln |k|}$, ce qui est l'habituelle transformation de Bogolyubov de la bosonisation. Les relations de dispersion sont égales à droite et à gauche et prennent deux valeurs distinctes pour les deux solutions

$$\begin{aligned} \frac{\omega}{k} &= \sqrt{(v - 2\lambda_c \ln |k|)^2 - (2\lambda_{ac} \ln |k|)^2} \\ \frac{\omega}{k} &= -\sqrt{(v - 2\lambda_c \ln |k|)^2 - (2\lambda_{ac} \ln |k|)^2} \end{aligned} \quad (5.73)$$

Dans le cas où $\lambda_{ac} > \lambda_c$, la technique précédente n'est plus adaptée car on voit aisément que la même transformation conduit à $\tanh(2\theta_k) > 1$, ce qui correspond à une relation de dispersion avec composantes imaginaires.

5.7 Reconstruction dissymétrique des bords

Lorsque l'on considère des régimes de fortes interactions à travers la barrière, nous observons une distribution de charge asymétrique des solutions des équations de Chern-Simons en champ moyen. Il y a bien sur deux solutions symétriques l'une de l'autre à travers la barrière mais les fluctuations quantiques du système en sélectionne une particulière. Numériquement nous avons légèrement perturbé la situation symétrique pour engendrer cette brisure spontanée de symétrie. Avec notre choix d'interactions, cette brisure de symétrie apparaît à partir d'une valeur $\lambda_{ac} \simeq 4.5$ qui est essentiellement indépendante de la charge en excès X dans la gamme étudiée $-2 < X < +2$. La distribution de charge a maintenant une forme complexe comme on le voit à la Fig.(5.6). De même, la distribution de courant acquiert une forme dissymétrique indiquée en pointillés sur ces figures (cf Fig. 5.7, 5.8).

On constate qu'il apparaît une bifurcation dans les solutions de champ moyen et nous obtenons des solutions asymétriques pour des valeurs de $\tilde{\mu}_r$ et $\tilde{\mu}_l$ différentes (cf Fig.5.4). Toutefois, contrairement à ce qui est prédit par les relations de dispersion, la bifurcation que l'on met en évidence n'apparaît que pour des valeurs de $\lambda_{ac} \sim 100\lambda_c$. Il existe donc toute une gamme de valeurs de $\lambda_{ac} \geq \lambda_c$, telles que la relation de dispersion est instable. Lorsque $100\lambda_c \geq \lambda_{ac} \geq \lambda_c$, la technique de détermination du fondamental par la théorie de Chern-Simons n'est pas à même de déterminer la vraie nature de l'instabilité. Ce point est actuellement en cours d'étude.

¹⁰ $v_2 > 0$

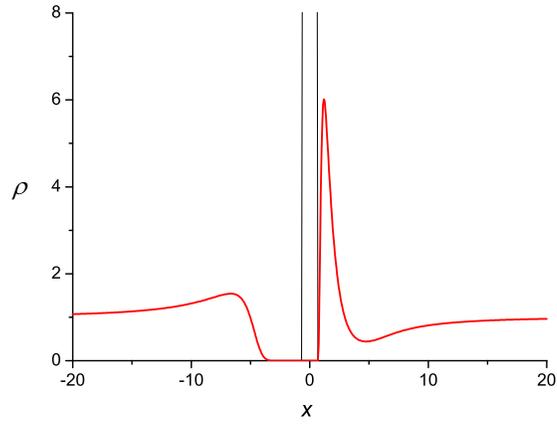


FIG. 5.6 – Profil de densité pour une jonction étendue en supposant le couplage fort $\lambda_a c = 6$, en fonction de la position x par rapport à la barrière. Le paramètre de charge en excès est $X = -1$.

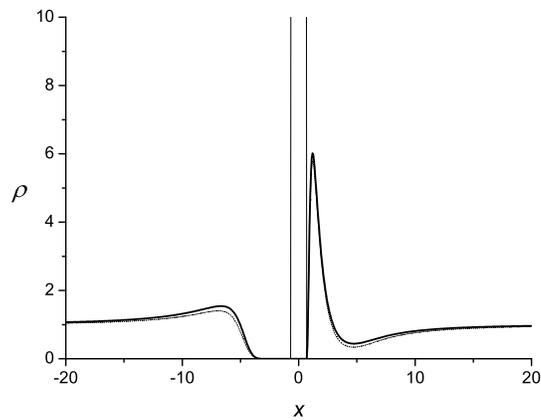


FIG. 5.7 – Deux profils de densité dissymétriques pour $X = -1$ (traits pleins) et $X = +1$ traits pointillés, en fonction de la position x par rapport à la barrière.

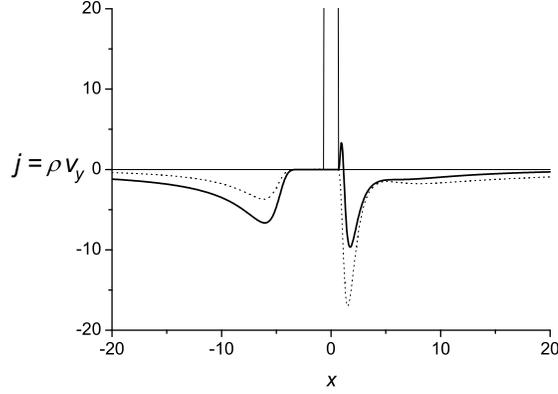


FIG. 5.8 – Deux profils de courants dissymétriques pour $X = -1$ (traits pleins) et $X = +1$ traits pointillés, en fonction de la position x par rapport à la barrière.

5.8 Conclusion

Nous avons donc utilisé la théorie de champ moyen de Chern-Simons pour la jonction étendue afin de déterminer les profils de densité électronique des bords en fonction de la charge en excès et de la force des interactions. Nous avons produit les excitations et la relation de dispersion du système par la méthode RPA. Nous avons démontré qu'en présence d'une interaction inter-edge suffisamment forte, la relation de dispersion obtenue par cette technique autant que l'approche naturelle de bosonisation du problème de deux fluides de Hall couplés à remplissage identiques $\nu = 1/(2n + 1)$ est mise en défaut. Il apparaît une instabilité lorsque l'interaction inter-canaux est suffisamment forte. Nous avons mis en évidence, lorsque l'interaction est suffisamment forte, la reconstruction dissymétrique des bords par rapport à la barrière. La distribution de charge n'est plus symétrique par rapport à la barrière. Nous n'avons pas encore déterminé la nature des excitations autour de ce nouveau fondamental. Nous n'avons pas résolu la nature du fondamental pour la gamme de valeur du paramètre $100\lambda_c \geq \lambda_{ac} \geq \lambda_c$. Ces deux points sont en cours d'étude. Il est raisonnable de penser que l'abandon de l'hypothèse d'invariance par translation le long de la jonction permettra de les résoudre.

Chapitre 6

Conclusion.

Dans ce mémoire, nous avons présenté quelques travaux sur de nouveaux effets mésoscopiques de la physique des canaux de bord de l'effet Hall fractionnaire. Dans ce domaine très actif tant du point de vue expérimental que théorique, nous avons axé notre travail théorique sur l'exploitation expérimentale de nos résultats. Les travaux que nous avons réalisés sont en effet motivés soit par des expériences déjà réalisées, soit par des expériences à venir avec des structures riches de phénomènes nouveaux. Au remplissage magique de Laughlin $\nu = 1/(2m+1)$, nous avons rappelé au chapitre II que les canaux de bords sont habituellement décrits par la théorie des liquides de Luttinger chiraux. Aux chapitres III et IV, nous avons étudié les propriétés de transport tunnel de nouvelles structures mésoscopiques : les jonctions tunnel étendues. Au chapitre V, nous avons montré que dans ces structures, les interactions peuvent conduire à une dramatique reconstruction dissymétrique des canaux de bords, invalidant la théorie de Luttinger dans son acception usuelle.

Au chapitre III, nous avons détaillé l'étude du transport tunnel dans une jonction quantique étendue séparant deux fluides de Hall à remplissage $\nu = 1/m$ identiques, et où les interactions coulombiennes à longue distance sont présentes. Nous avons réalisé un calcul perturbatif du courant et du bruit tunnel à température finie, basé sur la théorie des liquides de Luttinger chiraux et de la bosonisation. Nous avons obtenu la valeur du courant tunnel et du bruit en fonction de la différence de potentiel appliquée, du facteur de remplissage, de la longueur de la barrière et de la température. Nous avons mis en évidence, outre les non-linéarités typiques du transport dans les liquides de Luttinger, des effets de seuil et des oscillations liés au caractère étendu de la jonction. Ces résultats viennent compléter une longue liste de travaux théoriques, en fournissant un cadre plus complet prenant en compte la longueur, la température, la force des interactions longue distance et le remplissage. Nous pouvons envisager de poursuivre l'étude de cette structure en nous intéressant aux effets du désordre sur le transport.

Au chapitre IV, nous avons étudié les propriétés de transport tunnel d'une jonction quantique étendue dans une géométrie en coin. Cette géométrie où deux plans électroniques sont à 90° l'un de l'autre conduit à la formation d'une jonction quantique étendue entre canaux de bords de deux fluides de Hall de remplissages et de chiralités indépendants. Nous avons d'abord discuté la relation de dispersion à *une particule* de ce système suivant les chiralités relatives des deux bords. Dans le cas contre-propageant, nous avons calculé la conductance différentielle tunnel en l'absence d'interaction et à remplissage entier. Nous avons mis en évidence deux régimes distincts de transport. En présence d'interaction coulombienne, nous avons montré qu'il apparaît une transition de phase de type commensurable-incommensurable en se basant sur une analyse du diagramme de flot du groupe de renormalisation pour ce système. Dans le cas inédit de canaux co-propageant, nous avons montré que le système est décrit par un Hamiltonien de sine-Gordon *chiral*. Nous avons calculé perturbativement le courant tunnel entre les bords en fonction des facteurs de remplissage distincts des deux bords, de l'interaction de Coulomb à travers la

jonction et de la longueur de la barrière. Nous avons mis en évidence différents régimes en fonction des paramètres précédents. Ces résultats comptent parmi les premiers concernant les jonctions étendues en coin et montrent l'impressionnante variété de phénomènes distincts qui apparaissent dans ces structures.

Dans le chapitre V, nous avons étudié la jonction quantique étendue du chapitre II dans un régime d'interaction où l'intensité de l'interaction de Coulomb à travers la jonction est plus importante qu'à l'intérieur de chaque fluide de Hall en l'absence d'effet tunnel. Nous avons alors appliqué la théorie de champ moyen de Chern-Simons afin de déterminer les profils de densité des bords en fonction des interactions et des excès de charge. Nous avons résolu numériquement le système d'équations aux dérivées partielles du mouvement de Chern-Simons. Nous avons calculé ensuite par la méthode RPA, les excitations élémentaires des bords. La relation de dispersion ainsi obtenue, de même que la technique usuelle de bosonisation appliquée au calcul de la relation de dispersion du système, mettent en évidence l'apparition d'une instabilité lorsque l'interaction inter-canaux devient plus intense que l'interaction intra-canaux. Lorsque l'interaction est suffisamment forte, il apparaît une brisure de symétrie en fonction de l'intensité de l'interaction à travers la jonction. Les deux bords sont reconstruits de manière dissymétrique par rapport à la barrière. Ce travail s'inscrit dans la thématique de la reconstruction des canaux de bord par les interactions en présentant un effet inattendu et spectaculaire dont la signature apparaît pourtant clairement sur la formule de bosonisation usuelle. Cet effet réaliste dans les jonctions quantiques étendues est toutefois difficile à mettre en évidence expérimentalement.

Bibliographie

- [1] L. Esaki and R. Tsu, *Internal Report RC 2418*, IBM Research, March 26th, (1969).
- [2] B. Etienne and V. Thierry-Mieg, *Appl. Phys. Lett.***52**, 1237 (1988).
- [3] Frank Stern, *Appl. Phys. Lett.***43**, 974 (1983).
- [4] J. Wakabayashi et S. Kawaji, *J. Phys. Soc. Jpn***44**, 1839 (1978).
- [5] K. Von Klitzing, G. Dorda et M/ Pepper *Phys. Rev. Lett***45**, 494 (1980).
- [6] E. Braun, B. Schumacher et P. Warnecke, Precision Measurements of the Quantum Hall effect in *High Magnetic Fields in the Physics of Semi-conductors II*, ed. by G. Landwehr, W. Ossau (World Scientific, Singapore 1997).
- [7] S. Datta, *Electronic transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [8] A.H. MacDonald, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 220 (1984)
- [9] D.C. Tsui, H.L. Stormer et A.C. Gossard *Phys. Rev. Lett***48**, 1559 (1982).
- [10] R. Willett, J.P. Eisenstein, H.L. Stormer, D.C. Tsui, A.C. Gossard et J. English *Phys. Rev. Lett***59**, 1776 (1987).
- [11] D. Yoshioka, *The Quantum Hall Effect* (Springer, New York, 1998).
- [12] A. A. Abrikosov, L. P. Gorkov, et I.E. Dzyaloshinskii, *Methods of Quantum Field Theory in Statistical Physics* (Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1963).
- [13] P. D. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal Field Theory* (Springer Verlag, New York, 1997)
- [14] David Sénéchal, "An introduction to bosonization", e-print cond-mat/9908262.
- [15] A. Gogolin, A. Nersesyan, and A. Tsvelik, *Bosonization and Strongly Correlated Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1998).
- [16] A. M. Chang, *Rev. Mod. Phys.* **75**, 1449 (2003).
- [17] A. M. Chang, L. N. Pfeiffer and K. W. West, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2538 (1996).
- [18] Blok B. et X.G.Wen A. M. Chang, *Phys. Rev. B.* **42**, 8133 (1990).
- [19] Blok B. et X.G.Wen A. M. Chang, *Phys. Rev. B.* **42**, 8145 (1990).
- [20] Frohlich J. et A. Zee, *Nucl. Phys. B.* **364**, 517 (1991).
- [21] Wen X.G., *Int. J. Mod. Phys. B* **6**, 1711 (1992).
- [22] Wen X.G., *Adv. Phys.* **44**, 405 (1995).
- [23] Schrieffer J.R., D.J. Scalapino et J.W. Wilkens, *Phys. Rev. Lett.* **10**, 336 (1963).
- [24] X.G. Wen, *Phys. Rev. B***44**, 5708 (1991).
- [25] Miliken F.P., C.P. Umbach et R.A. Webb J.R., *Solid State Commun.* **97**, 309 (1996).
- [26] K. Moon, H. Yi, C.L. Kane, S.M. Girvin et M.P.A Fisher, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 4383 (1993).

- [27] Maasilta I.J. et V.J. Goldman, Phys. Rev. B. **55**, 4081 (1997).
- [28] Alphenar B.W. *et al.*, 1995 unpublished.
- [29] Kouwenhoven L.P. et P.L. McEuen, 1995 unpublished.
- [30] Pfeiffer L. N., K. W. West, H.L Stormer, J.P. Eisenstein, K.W. Baldwin, D. Gershoni et J. Spector, Appl. Phys. Lett. **56**, 1697 (1990).
- [31] Levi B.G., Phys. Today **49**, 9 (1996).
- [32] Grayson M., C. Kurdak, D.C. Tsui, S. Parihar, S. Lyon et M.Shayegan, Solid-State Electron. **40**, 233 (1996).
- [33] W. Kang, H. L. Stormer, L. N. Pfeiffer, K. W. Baldwin, and K. W. West, Nature **403**, 59 (2000).
- [34] I. Yang, W. Kang, K. W. Baldwin, L. N. Pfeiffer, and K. W. West, Phys. Rev. Lett. **92**, 056802 (2004).
- [35] Y. Takagaki and K. H. Ploog, Phys. Rev. **B62**, 3766 (2000).
- [36] A. Mitra and S. M. Girvin, Phys. Rev. **B64**, 041309 (2001).
- [37] H. C. Lee and S. R. Eric Yang, Phys. Rev. **B63**, 193308 (2001).
- [38] M. Kollar and S. Sachdev, Phys. Rev. **B65**, 121304 (2002).
- [39] S. Nonoyama and G. Kirczenow, Phys. Rev. **B66**, 155334 (2002).
- [40] S. Nonoyama and G. Kirczenow, Physica **E18**, 120 (2003).
- [41] E.-A. Kim and E. Fradkin, Phys. Rev. Lett. **91**, 156801 (2003).
- [42] E.-A. Kim and E. Fradkin, Phys. Rev. **B67**, 045317 (2003).
- [43] I. Yang, W. Kang, L.N. Pfeiffer, K.W. Baldwin, K.W. West, E. Kim, and E. Fradkin, "A quantum Hall line junction with impurities as a multi-slit Luttinger liquid interferometer", e-print cond-mat/0407641.
- [44] I. Yang, W. Kang, L.N. Pfeiffer, K.W. Baldwin, and K.W. West, "Tunneling between Two Quantum Hall Droplets", e-print cond-mat/0408616.
- [45] T. L. Ho, Phys. Rev. **B50**, 4524 (1994).
- [46] S. Datta, *Electronic transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge University Press, Cambridge, 1995).
- [47] M. Governale, M. Grifoni, and G. Schön, Phys. Rev. **B62**, 15996 (2000).
- [48] S. Renn and D. P. Arovas, Phys. Rev. **B51**, 16832 (1995).
- [49] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. **B56**, 15231 (1997).
- [50] D. Boese, M. Governale, A. Rosch, and U. Zülicke, Phys. Rev. **B64**, 085315 (2001).
- [51] U. Zülicke and M. Governale, Phys. Rev. **B65**, 205304 (2002).
- [52] U. Zülicke, E. Shimshoni, and M. Governale, Phys. Rev. **B65**, 241315 (2002).
- [53] U. Zülicke and E. Shimshoni, Phys. Rev. Lett. **90**, 026802 (2003).
- [54] U. Zülicke and E. Shimshoni, Phys. Rev. **B69**, 085307 (2004).
- [55] E. Papa and A. H. MacDonald, Phys. Rev. Lett. **93**, 126801 (2004).
- [56] G. D. Mahan, *Many-particle Physics* (Plenum, New York, 1990), p. 788.
- [57] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, series and Product* (Academic Press, New York, 1965) 3.314.
- [58] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions* (Plenum, New York, 1990).

- [59] A. J. Dahm, A. Denenstien, D. N. Langenberg, W. H. Parker, D. Rogovin, and D. J. Scalapino, Phys. Rev. Lett. **22**, 1416 (1969).
- [60] D. Rogovin and D. J. Scalapino, Ann. Phys. (N. Y.) **86**, 1 (1974).
- [61] H. Lee and L. S. Levitov, Phys. Rev. **B53**, 7383 (1996).
- [62] R. Rajaraman, *Solitons and Instantons* (North Holland, New York, 1987).
- [63] S. Lukyanov, et A. Zamolodchikov, Nucl. Phys. **B493**, 571 (1997).
- [64] H. J. Schulz, Phys. Rev. **B22**, 5274 (1980).
- [65] R. Chitra et T. Giamarchi, Phys. Rev. **B55**, 5816 (1997).
- [66] A. Furusaki et S. C. Zhang, Phys. Rev. **B60**, 1175 (1999).
- [67] J. D. Naud, L. P. Pryadko, et S. L. Sondhi, Phys. Rev. **B63**, 115301 (2001).
- [68] J. D. Naud, L. P. Pryadko, et S. L. Sondhi, Nucl. Phys. **B565**, 572 (2000).
- [69] S. Renn and D. P. Arovas, Phys. Rev. **B51**, 16832 (1995).
- [70] C. L. Kane and M. P. A. Fisher, Phys. Rev. **B56**, 15231 (1997).
- [71] U. Zülicke and E. Shimshoni, Phys. Rev. Lett. **90**, 026802 (2003).
- [72] U. Zülicke and E. Shimshoni, Phys. Rev. **B69**, 085307 (2004).
- [73] M. Aranzana, N. Regnault, and Th. Jolicœur, Phys. Rev. **B72**, 085318 (2005).
- [74] W. C. Lee, N. A. Sinitsyn, E. Papa, and A. H. MacDonald, "Edge magnetoplasmons in quantum Hall junctions", e-print condmat/0507227.
- [75] M. Grayson, D. Schuh, M. Huber, N. Bichler, G. Abstreiter, L. Hoeppe, J. Smet, and K. von Klitzing, Physica E **22**, 181 (2004).
- [76] M. Grayson, D. Schuh, M. Huber, N. Bichler, and G. Abstreiter, Appl. Phys. Lett. **86**, 032101 (2005).
- [77] X. G. Wen, Phys. Rev. **B41**, 12838 (1990) ; Phys. Rev. Lett. **64**, 2206 (1990).
- [78] Y. Oreg and A. M. Finkelstein, Phys. Rev. Lett. **74**, 3668 (1995).
- [79] D. Orgad and S. Levit, Phys. Rev. **B53**, 7964 (1996).
- [80] U. Zülicke and A. H. MacDonald, Phys. Rev. **B54**, 16813 (1996).
- [81] S. C. Zhang, T. H. Hansson, and S. Kivelson, Phys. Rev. Lett. **62**, 82 (1988).
- [82] N. Nagaosa and M. Kohmoto, Phys. Rev. Lett. **75**, 4294 (1995).
- [83] J. M. Leinaas and S. Viefers, Nucl. Phys. **B520**[FS], 675 (1998).

Etude de jonctions entre canaux de bord de l'effet Hall quantique fractionnaire.

Dans cette thèse, nous traitons de l'interaction entre deux états de bord dans le régime de l'effet Hall fractionnaire. Nous nous sommes appuyés sur les réalisations expérimentales récentes de structures (les jonctions quantiques étendues) qui favorisent largement ces interactions.

Nous avons d'abord introduit l'effet Hall quantique en mettant l'accent sur la physique des états de bords.

Nous avons ensuite étudié le transport tunnel à travers une jonction quantique étendue, en considérant les bords comme des liquides de Luttinger chiraux. Nous exposons différents régimes de courant en fonction de la longueur de la jonction, la force des interactions, le facteur de remplissage et la température. Nous calculons également le bruit associé à ce courant.

Nous avons généralisé ces résultats à une jonction en coin, dans laquelle les canaux de bord peuvent être contre ou copropageant. Dans le cas contre-propageant, il apparaît une transition de phase commensurable-incommensurable en fonction des interactions et d'un paramètre supplémentaire. Dans le cas co-propageant, nous calculons le courant tunnel en perturbation dans un modèle de sine-Gordon chiral.

Enfin, nous déterminons les profils de densité des bords et les excitations. Nous mettons en évidence l'apparition d'une instabilité dans ces jonctions quand l'interaction entre les bords est trop forte. La théorie de Chern-Simons montre qu'il se produit alors une reconstruction des bords par les interactions.

Mots-clés : Effet Hall fractionnaire, physique mésoscopique, liquide de Luttinger, bosonisation, jonctions quantiques, Chern-Simons.

Study of edge channels junctions in the fractional quantum Hall regime.

In this thesis, we deal with interactions between edge states in Fractional quantum Hall effect. Our work is grounded on recent experimental realizations of structures -quantum line junctions- in which this effect is enhanced.

We first introduce the quantum Hall effect emphasizing the edge states description.

Then, we calculate the tunnel current trough such a junction by considering the Luttinger liquid theory. We discuss various regimes of current by varying the junction length, the strength of the interactions, the filling factor and the temperature. We also calculate the associated noise.

In a third part, we extend this study to a corner junction, where edge channels can be either counter-propagating or co-propagating. In the counter-propagating case, there is a commensurable-incommensurable phase transition as a function of the strength of the interactions and of an additionnal parameter : the incommensurability. In the co-propagating case, we calculate the tunnel current perturbatively, from a chiral sine-Gordon model.

Eventually, we obtain the density profiles and the elementary excitations of the system. We evidence an instability in the dispersion relation of these junctions when the inter-edge interaction is strong enough. The mean field Chern-Simons theory predicts an edge reconstruction by the interactions.

Keywords : Fractionary Quantum Hall effect, mesoscopic physics, Luttinger liquid, bosonization, quantum Hall line junction, Chern-Simons.