



**HAL**  
open science

# Méthodologie de synthèse de lois de commandes non-linéaires et robustes : Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Fabien Lavergne

► **To cite this version:**

Fabien Lavergne. Méthodologie de synthèse de lois de commandes non-linéaires et robustes : Application au suivi de trajectoire des avions de transport. Automatique / Robotique. Université Paul Sabatier - Toulouse III, 2005. Français. NNT: . tel-00011557

**HAL Id: tel-00011557**

**<https://theses.hal.science/tel-00011557>**

Submitted on 8 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# ■ Thèse

Préparée au Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS

En vue de l'obtention du Doctorat de l'Université Paul Sabatier de Toulouse

Spécialité : Systèmes Automatiques

Par **Fabien Lavergne**

Méthodologie de synthèse de lois de commandes non-linéaires et robustes : Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Soutenue le 21 octobre 2005 devant le jury :

Président	M. COURDESSES
Directeurs de thèse	G. GARCIA S. TARBOURIECH
Examineurs	J. DAAFOUZ M. JEANNEAU S. MONDIE-CUZANGE F. VILLAUME
Membre invité	P. MENARD



# Méthodologie de synthèse de lois de commande non- linéaires et robustes :

Application au suivi de trajectoire des avions de  
transport



**Responsables de thèse :**

**Germain GARCIA**  
LAAS-CNRS (MAC)

**Sophie TARBOURIECH**  
LAAS-CNRS (MAC)

**Fabrice VILLAUME**  
Airbus-France (EYCDR)

## Avant-propos

Le présent document a pour but de **synthétiser** trois ans et demi de travail effectué au LAAS-CNRS et à Airbus-France. Comme tout doctorant confronté à l'exercice de l'écriture du mémoire de thèse, il m'a donc fallu extraire de ces trois années et demi les sujets d'études et autres informations qui soient les plus susceptibles d'intéresser et de fournir un cadre homogène au lecteur. Ainsi, de nombreux défis techniques résolus et autres problèmes restés en suspens ne figurent pas dans ce mémoire. Ces travaux de recherche continuent par ailleurs à vivre : chaque jour apporte son lot de nouvelles questions inattendues et de réponses pratiques ou théoriques.

Le temps de travail associé à cette thèse a été partagé (par contrat) de la manière suivante :

- 80% à Airbus-France
- 20% au LAAS-CNRS

Cette répartition apparaît en filigrane tout au long du mémoire, l'aspect applicatif de la thèse étant au cœur des exigences du sujet. Toutefois, l'aspect théorique n'a pas été négligé et de nouvelles approches sont proposées.

Les objectifs de cette thèse sur la « méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes : application au suivi de trajectoire des avions de transport » sont ambitieux. En effet, il s'agit à la fois de synthétiser des lois de commande automatique du vol ayant au minimum les mêmes performances que celles actuellement embarquées sur avion et de simplifier leur processus d'élaboration.

La nouveauté et l'intérêt du travail présenté dans ce mémoire résident dans le fait qu'il vise à établir **une méthode standard d'élaboration des lois de commande**. La conséquence visée est de permettre à Airbus de limiter ses cycles de développement de lois et à ses ingénieurs de mieux maîtriser leur processus de développement (définition de potentiomètres physiques, mise en avant de solutions prêtes à l'emploi en cas de modification de lois, etc.).

La standardisation vise donc la méthodologie de synthèse de lois de commande entre différents avions mais aussi, si possible, au sein du pilote automatique lui-même entre ses différents modes. Là aussi, le but est de rendre les lois de référence suffisamment robustes et physiques pour être facilement utilisables et compréhensibles.

Par ailleurs, ce travail s'inscrit dans un processus plus large d'ouverture du champ d'application des lois de pilotage/guidage aux phases très non-linéaires, c'est-à-dire à proximité du sol (arrondi et décrochage, dérotation, roulage et freinage, rotation, décollage automatique), initié par de précédents travaux ([43], [44] et [213]). Le réglage de lois pour ces phases de vol était jusqu'à maintenant long et empirique, rendant leur automatisation complète difficile. L'utilisation de techniques non-linéaires a permis et permettra ainsi d'étendre le domaine d'automatisation du pilotage/guidage des avions de transport.

## **Remerciements**

Un nombre important de personnes ont contribué directement ou indirectement à la réussite de cette thèse. Je m'excuse d'avance pour ceux que j'ai certainement oubliés. Je tiens à vous remercier tous profondément pour m'avoir supporté (dans le bon sens du terme, bien entendu !) durant ma thèse. Que ce soit dans le cadre professionnel ou personnel, vous avez tous su être critiques, patients, à l'écoute, et cela bien au-delà de vos seules obligations. Dans ce mémoire il y a un peu de chacun de vous. Merci encore et à charge de revanche...

### **Remerciements spéciaux**

Jamal Daafouz, Sabine Mondié-Cuzange.

### **Remerciements concernant les personnes côtoyées à Airbus**

Jean-Jaques Aubert, Grégoire Blanc, François Bommier, Alain Bonnal, François Bouleux, Philippe Braesch, Marie-Claire Carrouaille, Daniel Cazy, David Chabé, Eric Charignon, Alexandre Colomer, Emmanuel Cortet, Christine Cuminal, Françoise Damecour, Thibault Debar, Martin Delporte, Gina Dieu, Arnauld Douay, Régine Dunyach, Jean Duprez, Pierre Fabre, Sébastien Freissinet, François Garavel, Eric Godard, Cédrik Harang, Jean-Philippe Harcaut, Matthieu Jeanneau, Eric Jeanpierre, Chiheb Kossentini, Boris Kozlow, Kristen Lagadec, Serge Laporte, Mohamed Mameri, Christian Marc, Stéphane Marcy, Philippe Ménard, Christophe Merlini, Philippe Orechia, Sylvie Périssé, Fabien Perrin, Marie-Odile Plantecoste, Guilhem Puyou, Nathalie Raimbault, Anaïs Reverse, Françoise Ribaut, Claude Sarraméa, Frédéric Saudejaud, Jean Serrat, Jean-Remi Si-Larbi, Simon Schmitt, Josiane Tarazona, Pascal Traverse, Alain Vérissel, Fabrice Villaumé, Jean-Louis Voide, Nadja Wokurka, Didier Zadrozynski.

### **Remerciements concernant les personnes côtoyées au LAAS-CNRS**

José Aguilar, Gérard Authié, Marie-Dominique Cabanne, Michel Courdresses, Brigitte Ducrocq, Eliane Dufour, Germain Garcia, Christophe Prieur, Sophie Tarbouriech, Louise Travé-Massuyès, Véronique Villemur.

### **Remerciements concernant les personnes côtoyées à l'ENAC**

Karim Achaïbou, Robert Aladenyse, André Barkat, Claude Fortin, Myriam Mérou, Thierry Miquel, Félix Mora-Camino, Yves Plays.

### **Remerciements personnels**

David Besnier, Arlette Bourgeat, Pierre Bourgeat, Pierrick Bourgeat, Nicolas Fagedet, Christiane Grousse, Edmond Grousse, Frédéric Grousse, Catherine Lavergne, Hervé Lavergne, Marguerite Lavergne, René Lavergne, Nadège Mingat, Sarah Nichilo, Philippe Paimblanc, Estelle Seyeux, Thierry Vidonne.

Je souhaite dédier ce mémoire de thèse à Marie-Laure et à sa famille...

# SOMMAIRE GENERAL

<b>AVANT-PROPOS</b> .....	<b>2</b>
<b>REMERCIEMENTS</b> .....	<b>3</b>
<b>SOMMAIRE GENERAL</b> .....	<b>4</b>
<b>LEXIQUE</b> .....	<b>7</b>
<b>1 INTRODUCTION AU SUJET DE THESE</b> .....	<b>9</b>
1.1 CONTEXTE INDUSTRIEL : ETAT DES LIEUX DU PILOTE AUTOMATIQUE D'UN AVION DE TYPE AIRBUS .....	9
1.2 CONTEXTE ACADEMIQUE.....	10
1.3 CONTRIBUTIONS DU TRAVAIL DE THESE .....	10
1.4 PLAN DU MEMOIRE .....	11
<b>2 TECHNIQUES, METHODES ET OUTILS</b> .....	<b>13</b>
2.1 TECHNIQUES D'AUTOMATIQUE.....	13
2.1.1 <i>Introduction au besoin en lois de commande non-linéaires</i> .....	13
2.1.2 <i>Techniques d'automatique non-linéaire</i> .....	14
2.1.2.1 Introduction.....	14
2.1.2.2 Différents types de techniques de commande non-linéaire.....	16
2.1.2.3 Conclusion .....	21
2.1.3 <i>Eléments d'approfondissement sur l'inversion de la dynamique</i> .....	22
2.1.3.1 Introduction.....	22
2.1.3.2 Synthèse des problèmes spécifiques à la commande non-linéaire inverse et solutions .....	22
2.1.3.3 Cas des systèmes non affines en la commande.....	25
2.1.3.4 Placement de pôles linéaire après inversion de la dynamique .....	25
2.1.3.5 Exemple illustratif de commande non-linéaire inverse en linéaire .....	29
2.1.3.6 Conclusion .....	37
2.2 CONTRIBUTION A LA COMMANDE NON-LINEAIRE ROBUSTE : LA COMMANDE RMI (ROBUST MULTI-INVERSION) .....	38
2.2.1 <i>Introduction</i> .....	38
2.2.2 <i>Position du problème</i> .....	39
2.2.3 <i>Résultats préliminaires</i> .....	42
2.2.4 <i>Propriétés de stabilité et de performances robustes du RMI</i> .....	44
2.2.5 <i>Commentaires</i> .....	54
2.2.6 <i>Robustesse aux dynamiques des actionneurs : de la nécessité de mesurer U</i> .....	55
2.2.7 <i>Exemples illustratifs</i> .....	56
2.2.7.1 Exemple introductif : Robustesse à l'erreur de modèle pour différents types de lois de commande non-linéaires basées sur l'inversion de la dynamique .....	56
2.2.7.2 Robustesse au retard dans la chaîne de commande.....	60
2.2.7.3 Robustesse à la saturation en position d'actionneur .....	62
2.2.7.4 Robustesse à la saturation en vitesse (rate-lim) d'actionneur.....	63
2.2.7.5 Robustesse à des incertitudes multiples .....	64
2.2.8 <i>Conclusion sur la commande RMI</i> .....	65
2.3 TECHNIQUES DE MODELISATION ET D'IDENTIFICATION .....	66
2.3.1 <i>Introduction au besoin d'outils de modélisation et d'identification non-linéaires</i> .....	66
2.3.2 <i>Comparaison des techniques de modélisation et d'identification retenues</i> .....	67
2.3.2.1 Modélisation et identification par approximation polynomiale .....	67
2.3.2.2 Modélisation et identification par réseau de neurones .....	69
2.3.2.3 Conclusion .....	72
2.3.3 <i>Le logiciel de modélisation automatique « ResOsma »</i> .....	73
2.3.3.1 ResOsma1 : L'interface avec les outils Airbus .....	73
2.3.3.2 Neuronisation : Le cœur du logiciel de modélisation automatique.....	74
2.3.3.3 ResOsma_library .....	77
2.3.3.4 ResOsma en quelques chiffres .....	80
2.3.3.5 Exemple d'exécution de la fonction Neuronisation.....	80
2.3.4 <i>Conclusion sur le besoin d'outils de modélisation et d'identification non-linéaires</i> .....	83

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

<b>3</b>	<b>APPLICATIONS</b>	<b>85</b>
3.1	INTRODUCTION	85
3.2	PRESENTATION DU SYSTEME AVION	86
3.2.1	<i>Introduction</i>	86
3.2.2	<i>Equations dynamiques</i>	86
3.2.3	<i>Equations cinématiques</i>	88
3.2.3.1	Equations longitudinales	88
3.2.3.2	Equations latérales	89
3.2.4	<i>Cas particuliers de l'avion en effet de sol</i>	90
3.2.5	<i>Conclusion</i>	91
3.3	LOIS DE COMMANDE DE VOL	92
3.3.1	<i>Proposition</i>	92
3.3.1.1	Commande dans le plan longitudinal	92
3.3.1.2	Commande dans le plan latéral	114
3.3.2	<i>Résultats de robustesse pour une loi de type décollage automatique</i>	121
3.3.2.1	Introduction	121
3.3.2.2	Robustesse de la loi nominale	122
3.3.2.3	Robustesse de la loi moyenne	123
3.3.2.4	Robustesse de la loi extrême 1	124
3.3.2.5	Robustesse de la loi extrême 2	125
3.3.2.6	Robustesse de la loi extrême 3	126
3.3.2.7	Robustesse de la loi extrême 4	127
3.3.2.8	Robustesse de la loi pour un avion "impilotable"	128
3.3.2.9	Mesures réduites	129
3.3.2.10	Conclusion	131
3.4	LOIS DE PILOTAGE AUTOMATIQUE / AUTOPOUSSEE	132
3.4.1	<i>Introduction</i>	132
3.4.2	<i>Pilotage automatique longitudinal</i>	132
3.4.3	<i>Pilotage automatique latéral</i>	133
3.4.4	<i>Automanette</i>	134
3.4.5	<i>Stabilité et performances robustes des lois proposées</i>	135
3.4.6	<i>Conclusion</i>	135
3.5	TRAJECTOIRES DE REFERENCE POUR L'ARRONDI A L'ATTERRISSAGE	136
3.5.1	<i>Introduction aux trajectoires d'arrondi</i>	136
3.5.1.1	Contexte de l'étude	136
3.5.1.2	Trajectoires de référence pour l'arrondi automatique : Pourquoi et comment ?	136
3.5.1.3	Cahier des charges des trajectoires d'arrondi	137
3.5.2	<i>Comparaison de trajectoires de référence innovantes</i>	138
3.5.2.1	Trajectoire exponentielle-affine améliorée	138
3.5.2.2	Trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée »	146
3.5.2.3	Trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée »	149
3.5.2.4	Récapitulatif des trajectoires proposées	154
3.5.3	<i>Outil d'aide à la conception des trajectoires d'arrondi</i>	155
3.5.3.1	Principe	155
3.5.3.2	Exemple de l'arrondi de l'A340-300	155
3.5.3.3	Conclusion sur l'outil proposé	158
3.5.4	<i>Conclusion sur les trajectoires de référence</i>	159
3.6	DEMONSTRATION STATISTIQUE DE ROBUSTESSE POUR LA CERTIFICATION DU PILOTE AUTOMATIQUE D'ATTERRISSAGE (ANALYSE DE TYPE MONTE-CARLO)	160
3.6.1	<i>Introduction à la certification</i>	160
3.6.2	<i>Contraintes de certification et cas de test</i>	160
3.6.3	<i>Résultats obtenus</i>	161
3.6.3.1	Exemple de STR	161
3.6.3.2	Résultats statistiques	164
3.6.4	<i>Conclusion sur la "certificabilité" du pilote automatique développé</i>	168
<b>4</b>	<b>BILAN DE LA THESE ET PERSPECTIVES</b>	<b>169</b>
<b>5</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE</b>	<b>171</b>

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

<b>6</b>	<b>ANNEXES</b>	<b>179</b>
6.1	ROBUSTESSE DANS LE CADRE NON-LINEAIRE	179
6.1.1	<i>Introduction</i>	179
6.1.2	<i>Analyse de robustesse par l'analyse des bifurcations</i>	179
6.1.3	<i>Commande non-linéaire robuste par backstepping (resp. forwarding)</i>	179
6.1.4	<i>Commande par régime glissant</i>	181
6.1.5	<i>Conclusion</i>	182
6.2	COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES LONGITUDINAUX EN EFFET DE SOL	183
6.2.1	<i>Coefficient de portance</i>	183
6.2.2	<i>Coefficient de traînée</i>	184
6.2.3	<i>Coefficient de moment</i>	185
6.3	EVALUATION NUMERIQUE DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES: EXEMPLE DE L'A321 EN LONGITUDINAL (CONFIGURATION 5)	186
6.3.1	<i>Coefficient de portance</i>	186
6.3.2	<i>Coefficient de traînée</i>	187
6.3.3	<i>Coefficient de moment</i>	188
6.4	DETAIL DES CALCULS DE GENERATION DE TRAJECTOIRE	189
6.4.1	<i>Equations régissant la trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée »</i>	189
6.4.2	<i>Equations régissant la trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée »</i>	192
6.4.2.1	<i>Intégration des équations en facteur de charge</i>	192
6.4.2.2	<i>Définition des variables inconnues par exploitation des conditions aux limites</i>	195
6.4.2.3	<i>Contraintes pour le respect des règles de causalité</i>	198
6.5	PREMIERS TRAVAUX SUR LE LONGITUDINAL	202
6.5.1	<i>Introduction</i>	202
6.5.2	<i>Principes de base</i>	202
6.5.2.1	<i>Résultats</i>	202
6.5.2.2	<i>Enseignements</i>	203
6.5.3	<i>Synthèse d'une première autopoussée</i>	205
6.5.4	<i>Loi en vitesse de tangage (q)</i>	208
6.5.4.1	<i>Principes de base</i>	208
6.5.4.2	<i>Etude des grandes boucles</i>	211
6.5.4.3	<i>Conclusion sur la loi en q</i>	219
6.5.5	<i>Loi en facteur de charge par inversion directe de l'équation de portance</i>	220
6.5.6	<i>Loi en facteur de charge au poste de pilotage</i>	220
6.5.7	<i>Loi en facteur de charge au poste de pilotage et au centre de gravité</i>	224
6.5.8	<i>Commande par boucles imbriquées facteur de charge / incidence</i>	227
6.5.9	<i>Conclusion</i>	231
6.6	RESULTATS STATISTIQUES BRUTS OBTENUS SOUS SIMPA EN PHASE D'ATTERRISSAGE	232
6.6.1	<i>Pilote automatique certifié de l'A340-300</i>	232
6.6.2	<i>Pilote automatique RMI pour l'A340-300</i>	238
	<b>SOMMAIRE DETAILLE</b>	<b>245</b>

## Lexique

$\alpha$  : Incidence de l'avion  
 $b$  : Bras levier équivalent entre les moteurs et le centre de gravité de l'avion  
 $\beta$  : Dérapage de l'avion  
*BETARO* : Dérapage-sol de l'avion à l'impact  
 $c$  : Indice désignant une consigne  
*CAS* : Calibrated Air Speed (vitesse conventionnelle)  
*CDVE* : Commandes De Vol Electriques  
*CG* : Centre de Gravité  
*Cl* : Coefficient aérodynamique de moment de roulis  
*Cm* : Coefficient aérodynamique de moment de tangage  
*Cn* : Coefficient aérodynamique de moment de lacet  
 $C_n^p$  : Combinaison de  $p$  éléments parmi  $n$   
*Cx* : Coefficient aérodynamique de force de traînée  
*Cy* : Coefficient aérodynamique de force latérale  
*Cz* : Coefficient aérodynamique de force de portance  
 $D_{flare}$  : Distance au sol entre le début de l'arrondi et le point de touché des roues  
 $d_k$  : Degré relatif de la sortie d'indice  $k$   
 $\Delta F$  : Erreur de modélisation sur  $F$   
 $\Delta G$  : Erreur de modélisation sur  $G$   
 $\delta_i$  : Braquage de gouvernes quelconques  
 $\delta_l$  : Braquage des ailerons  
 $\delta_m$  : Braquage de la gouverne de profondeur  
 $\Delta_m$  : Erreur de modélisation entrées-sorties du système  
 $\delta_n$  : Braquage de la gouverne de direction  
 $dp_{equi}$  : Braquage du manche latéral  
 $\delta_{PHR}$  : Braquage du PHR  
 $\Delta_{RMI}$  : Estimateur de l'erreur de modélisation entrées-sorties du système  
 $\delta_p$  : Braquage des spoilers  
 $\Delta Y$  : Ecart métrique latéral de l'avion par rapport à ses aides radio-électriques (loc par exemple)  
*EPR* : Exhaust Pressure Ratio (rapport de pressions entre la sortie et l'entrée du moteur)  
 $g$  : Constante de gravité universelle  
 $\gamma$  : Pente de l'avion  
*GS* : Ground Speed (vitesse de l'avion projetée au sol)  
 $h_{RA}$  : Hauteur de l'avion mesurée au Radio-Altimètre  
 $h_{TP}$  : Hauteur du Train Principal de l'avion  
*HTPS* : Hauteur du Train Principal au Seuil de piste  
 $I_x$  ou  $I_{xx}$  : Inertie principale de roulis  
 $I_{xz}$  : Inertie croisée roulis-lacet  
 $I_y$  ou  $I_{yy}$  : Inertie principale de tangage  
 $I_z$  ou  $I_{zz}$  : Inertie principale de lacet  
*IM* : Incertitudes Multiples  
*IP* : Intégrateur de Précision  
 $l$  : Corde aérodynamique moyenne  
*LD* : Lift dumper  
*loc* : LOCALizer (aide radio-électrique matérialisant l'axe de piste)  
 $m$  : Taille de l'entrée  $U$   
 $m$  : Masse  
*Mach* : Nombre de Mach  
 $n$  : Taille de l'état  $X$   
*NI* : Vitesse de rotation du corps basse pression du moteur (fan)  
*NLI* : Non-Linéaire Inverse (commande)  
 $N_x$  : Facteur de charge longitudinal  
 $N_y$  : Facteur de charge latéral  
 $N_z$  : Facteur de charge vertical  
 $N_{zposte}$  :  $N_z$  au poste de pilotage

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

$\omega$  : Pulsation d'un filtre linéaire  
 $p$  : Taille de la sortie  $Y$   
 $p$  : Vitesse de roulis  
 $PA$  : Pilote Automatique  
 $PCM$  : Paramètre de Conduite Moteur  
 $\phi$  : Assiette latérale  
 $PHR$  : Plan Horizontal Réglable  
 $\psi$  : Cap  
 $q$  : Vitesse de tangage  
 $QFU$  : Orientation magnétique de la piste  
 $r$  : Vitesse de lacet  
 $\rho$  : Densité de l'air  
 $RMI$  : Robust Multi-Inversion  
 $s$  : Opérateur de Laplace  
 $S$  : Surface aérodynamique de référence  
 $t$  : temps  
 $T$  : Poussée nette des moteurs  
 $\tau$  : Incidence moyenne des moteurs  
 $\tau$  : Constante de temps d'un filtre linéaire  
 $\theta$  : Assiette longitudinale  
 $TAS$  : True Air Speed (vitesse vraie)  
 $TD$  : Touch Down (impact à l'atterrissage)  
 $TP$  : Train Principal  
 $TK$  : TracK (route de l'avion)  
 $TPR$  : Thrust Pressure Ratio (rapport entre la poussée et la pression à l'entrée du moteur)  
 $U$  : Entrée du système (variable de commande)  
 $V$  : Vitesse air  
 $V$  : Voteur  
 $V_c$  : Vitesse conventionnelle  
 $VsIg$  : Vitesse de décrochage sous 1g  
 $V_x$  : Vitesse sol dans l'axe longitudinal  
 $V_z$  : Vitesse ascensionnelle  
 $V_{ztd}$  : Vitesse ascensionnelle à l'impact  
 $VZTP$  : Vitesse ascensionnelle du Train Principal  
 $X$  : Etat du système  
 $x_{cg}$  : Position longitudinale du centre de gravité  
 $Xtd$  : Position de l'avion sur la piste au point de touché des roues  
 $XTP$  : Position longitudinale moyenne du Train Principal à l'impact  
 $Y$  : Sortie du système (variable d'observation)  
 $YTP$  : Position latérale moyenne du Train Principal à l'impact  
 $z$  : Amortissement d'un filtre linéaire  
 $Z$  : Etat des dynamiques internes du système  
 $Z_0$  : Hauteur de déclenchement de l'arrondi  
 $Z_p$  : Altitude-pression

# 1 Introduction au sujet de thèse

Ce mémoire de thèse vise à présenter une « méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes », c'est-à-dire une nouvelle méthode de commande automatique des systèmes apportant des propriétés particulières. Son « application au suivi de trajectoire des avions de transport » ainsi que son co-financement par Airbus-France le destinent principalement à traiter de la commande automatique du vol et du pilote automatique. L'application phare dans ce domaine étant l'atterrissage automatique, il n'est pas étonnant que ce sujet de thèse ait vite pris la dénomination officieuse d'« autoland robuste ». Définissons donc dès maintenant les contours de l'environnement technique et de recherche afférent à notre sujet...

## 1.1 Contexte industriel : état des lieux du pilote automatique d'un avion de type Airbus

Le **système** placé communément sous le nom de pilote automatique vise à **guider** l'avion, c'est-à-dire **asservir la position de son centre de gravité** dans les trois dimensions. On parle dans ce cas de **grandes boucles** entre la **trajectoire** désirée et la trajectoire réellement obtenue.

Les grandes boucles viennent solliciter des **petites boucles** entre l'**attitude** désirée et celle réellement obtenue. Le rôle des petites boucles est de **piloter** l'avion, c'est-à-dire d'**asservir sa position autour de son centre de gravité**. Les **lois manuelles**, ou **lois de commande de vol**, i.e. les lois de pilotage actives lorsque le pilote sollicite les organes de pilotage tels que le manche, sont de type petite boucle. Le pilote réalise alors lui-même la grande boucle. Pour plus d'informations, le lecteur pourra se référer à [19], [114], [148], [165], [167] et [168].

Etant donné leur caractère critique vis-à-vis de la sécurité du vol, le pilote automatique et les lois manuelles répondent à des exigences sévères définies par les autorités de **certification** (Federal Aviation Authorities aux Etats-Unis, Joint Airworthiness Authorities en Europe, etc.). La précision et la **robustesse** de ces systèmes de commande sont dûment démontrées. Rappelons que, depuis l'A300, tous les avions de la famille Airbus ont été certifiés pour l'atterrissage automatique.

Malgré l'expérience réussie accumulée depuis une quarantaine d'années, le réglage du pilote automatique dans certaines phases de vol non-linéaires reste délicat et itératif. En effet, les méthodes utilisées jusqu'à maintenant sont basées sur des modèles linéaires de la mécanique du vol et sont donc difficiles à adapter pour un contrôle fin et systématique de l'avion dans de telles phases. Aujourd'hui néanmoins, les méthodes de commande non-linéaire offrent l'opportunité de :

- synthétiser des lois de commande sur des modèles non-linéaires, et donc plus représentatifs de l'avion;
- produire des lois de commande génériques, portables d'un avion à un autre.

Des études passées ([43], [44] et [213]) ont montré l'intérêt des lois de commande non-linéaires. Néanmoins, l'absence de garanties théoriques de robustesse en stabilité et en performances constitue le handicap important de telles techniques.

Etant données les contraintes techniques du sujet de thèse alliées à la volonté d'Airbus d'améliorer sans cesse la **sécurité** des vols, il est apparu nécessaire de développer de nouvelles méthodes liées à l'utilisation de lois de commande non-linéaires. Un travail de fond a donc été engagé en partant d'une remise à plat des techniques utilisées à Airbus et dans le monde de la recherche. La création d'un sujet de thèse sur la commande non-linéaire robuste pour l'aviation commerciale en est la manifestation la plus significative. Celle-ci doit permettre à Airbus de maintenir sa longueur d'avance en matière de systèmes automatiques en anticipant les exigences liées aux caractéristiques des avions de demain.

## 1.2 Contexte académique

Cette étude doit permettre au LAAS-CNRS de partager les problématiques scientifiques de l'industriel et d'étalonner ses techniques sur des problèmes concrets. Ici encore, un point complet du contexte international de recherche en commandes de vol est proposé dans [19].

Le directeur industriel de la thèse, Fabrice Villaumé, a eu à étudier des solutions mettant en œuvre la méthode d'inversion de la dynamique (autrement appelée commande non-linéaire inverse ou encore commande NLI), par le biais de deux thèses traitant des lois de pilotage-guidage au sol et réalisées par Fabrice Villaumé ([213]) puis Jean Duprez ([43], [44]).

Ces travaux ont été réalisés en collaboration avec le LAAS-CNRS. Ils ont fait apparaître un intérêt certain de la commande non-linéaire inverse pour différentes raisons :

- Sous réserve d'une modélisation complète du problème, le système obtenu est portable d'un type d'avion à un autre. Il nécessite un réglage « simple », sans commune mesure avec l'établissement fastidieux de matrices de gains compatibles avec le type d'avion piloté. Or l'utilisation de techniques de commande linéaire à gains séquencés impose le réglage de ces matrices de gains en plusieurs points du domaine de vol. La commande non-linéaire permettrait donc de gagner du temps dans le processus de développement des lois de commande.
- Outre cette portabilité, les lois de commande obtenues sont explicites et peuvent être écrites analytiquement, ce qui facilite la compréhension du comportement de l'avion en boucle fermée.
- Par ailleurs, la possibilité de dégager un nombre réduit de paramètres réglables dont l'influence physique est claire et découplée permettrait d'accélérer le cycle de réglage d'une loi.
- La commande non-linéaire inverse semble fonctionner dans un large domaine de conditions opérationnelles et ses résultats paraissent tout-à-fait satisfaisants, bien que de nombreuses questions sur sa robustesse restent en suspens.

Toutefois, il faut préciser que les techniques non-linéaires sont dépourvues d'outils complets permettant d'analyser la robustesse des lois de commande non-linéaires ou de réaliser leur synthèse robuste.

Compte-tenu de ce qui précède, il est apparu à la fois intéressant et nécessaire d'étudier une **méthodologie de synthèse de lois de commande robustes et non-linéaires**. Cette étude est particulièrement orientée vers le **suivi de trajectoire** (pilote automatique) et non pas vers le pilotage pur (lois manuelles) bien que le premier nécessite le deuxième dans la philosophie de conception des lois de commande d'Airbus.

## 1.3 Contributions du travail de thèse

Le sujet de thèse proposé a pour but d'intégrer la synthèse de lois de commande de type non-linéaire à un processus industriel réel. De plus, dans le cadre qui est le nôtre, c'est-à-dire celui des avions de transport, la robustesse des lois de commande obtenues est une caractéristique indispensable. Les techniques, méthodes et outils développés doivent donc à la fois respecter les contraintes techniques de conception de lois de commande d'Airbus (mesures disponibles, objectifs de pilotage / sorties régulées, architecture en boucles successives avec petites boucles communes entre les lois manuelles et le pilote automatique, contraintes en terme de temps de réponse, de dépassement et de réponse initiale, limitation des sollicitations d'actionneurs, protection du domaine de vol, etc.) et innover dans le sens d'une meilleure sécurité des vols et d'une meilleure efficacité économique.

Dans ce contexte, le premier apport de la thèse a été la mise au point d'une structure de correcteurs non-linéaires qui soit robuste aux erreurs de modèles sans nécessiter le classique intégrateur de précision (avec toutes les conséquences bénéfiques en cas de non-linéarités d'actionneurs) (cf. §2.2).

## **Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**

### **Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Cette structure a ensuite à la fois permis et nécessité de mettre en place une nouvelle architecture de lois de commande (cf. §3.3 et §3.4). Cette architecture est générique pour tout type d'avions de transport (pour lesquels les mouvements longitudinaux et latéraux sont relativement découplés). La propriété de généralité est une propriété forte qui a été favorisée par l'usage de la commande non-linéaire.

D'autre part, notre travail a permis de définir de nouvelles trajectoires de référence pour l'arrondi automatique (cf. §3.5). Ces trajectoires mettent en avant les principaux degrés de liberté permettant un réglage fin suivant les contraintes propres de l'avion à l'atterrissage et l'avis des pilotes.

Une des contributions importantes de la thèse réside aussi dans l'effort réalisé dans le domaine de la validation. En effet, les lois de commande proposées ont été validées sur simulateur certifié aux limites voire au-delà de leur domaine opérationnel. Les tests ainsi mis en œuvre ont été pris parmi ceux utilisés pour la certification des pilotes automatiques d'Airbus (cf. §3.6) et d'autres ont été mis au point pour explorer les propriétés de robustesse des lois jusqu'en dehors du domaine opérationnel (cf. §3.3).

Enfin, l'utilisation de lois de commande non-linéaire a aussi imposé la création de modèles non-linéaires embarquables. Nous avons ainsi proposé des algorithmes de modélisation non-linéaire compacte par réseaux de neurones et de nouvelles techniques afférentes (cf. §2.3). L'utilisation de modèles neuronaux à Airbus s'est d'ailleurs rapidement étendue à d'autres applications imprévues au début de la thèse (estimation et simulation).

## **1.4 Plan du mémoire**

Ce mémoire comporte deux parties principales : la première est dédiée aux techniques, méthodes et outils. Tout d'abord, elle comporte des informations relatives aux techniques d'automatique existantes et à celle développée pendant la thèse. Comme de plus, on ne peut faire d'automatique sans activité préliminaire de modélisation et d'identification, une autre sous-partie traite de modélisation non-linéaire et de réseaux de neurones.

La deuxième partie présente les applications développées pendant la thèse dans le cadre aéronautique.

Chaque sous-partie est importante pour la compréhension globale. Pour ceux qui souhaiteraient faire une lecture rapide et synthétique du mémoire, un accent a été mis sur la consistance des introductions et conclusions partielles. Pour ceux qui, au contraire, souhaiteraient approfondir leur lecture, des annexes permettront d'élargir le champ de la réflexion.



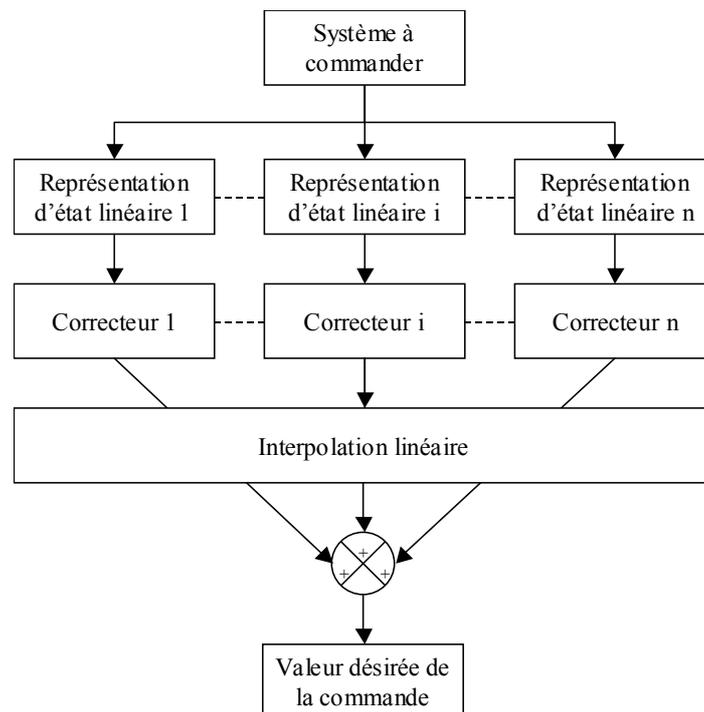
## 2 Techniques, méthodes et outils

### 2.1 Techniques d'automatique

#### 2.1.1 Introduction au besoin en lois de commande non-linéaires

L'automaticien cherche usuellement à transformer le système étudié, qu'il soit linéaire ou non-linéaire, en un système corrigé linéaire. Pour ce faire, il existe deux possibilités :

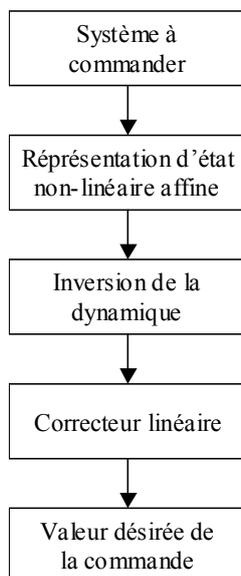
- 1) Soit l'on considère une approximation linéarisée tangente du système étudié sur laquelle on définit une loi de commande linéaire, comme suit :



*2.1.1.a : Synthèse de correcteurs linéaires pour des systèmes complexes (séquencement de gains)*

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

- 2) Soit l'on considère le système étudié tel qu'il est sur lequel on définit une loi de commande non-linéaire mais linéarisante.



*2.1.1.b : Synthèse d'un correcteur de type non-linéaire inverse (cf. §2.1.2.2.4)*

L'intérêt de la première solution est qu'elle permet d'étudier un système linéarisé tangent, simple à manipuler et à analyser. Malheureusement, comme pour toute approximation, la validité de cette technique est limitée.

L'intérêt de la deuxième solution est sa validité sur un domaine plus étendu au prix d'une plus grande difficulté de manipulation et d'analyse.

Dans le cadre de l'aviation de transport, le système avion est un système non-linéaire à paramètres variants. Historiquement, quand les lois de commande ont commencé à être développées pour fonctionner en plusieurs points du domaine de vol, il a fallu trouver une technique pour assurer une bonne cohabitation et une bonne transition entre les correcteurs. Les lois de commande actuelles sont donc basées sur du séquençage de gain, même si les techniques utilisées pour obtenir les gains ont fortement évoluées en quarante ans (du PID à la synthèse  $H_\infty$ ).

Afin d'étendre la validité des lois et de réaliser des lois de commande génériques, Airbus a décidé plus récemment d'investiguer le champ de la commande non-linéaire. De par ses propriétés, elle apparaît comme une alternative crédible à la commande linéaire avec séquençage de gains. Néanmoins, des inconvénients sérieux, tels que la difficulté de la démonstration de stabilité, l'absence de résultats sur la robustesse et l'inadéquation des lois de commande non-linéaires aux processus à non-minimum de phase, constituaient un frein important à son application dans le domaine de l'aéronautique civile. Le travail présenté ici tente d'apporter des solutions à ces inconvénients.

## 2.1.2 Techniques d'automatique non-linéaire

### 2.1.2.1 Introduction

La commande non-linéaire a réellement commencé à émerger au début des années 80. L'idée fondatrice de ce type de commande relève d'un constat simple : un système physique n'est jamais totalement linéaire. Donc, si l'on désire le commander finement, il faut commencer par le modéliser tel qu'il est, c'est-à-dire de manière non-linéaire.

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

On peut ainsi, par exemple, représenter le système étudié par des équations d'état entièrement non-linéaires ou non-linéaires affines (forme plus restrictive mais pleinement adaptée au problème aéronautique) de type :

$$\begin{cases} \dot{X} = A(X) + B(X).U \\ Y = C(X) \end{cases} \quad (1)$$

où  $U \in \mathfrak{R}^m$  est l'entrée du système, autrement appelée variable de commande,  $X \in \mathfrak{R}^n$  est l'état du système et  $Y \in \mathfrak{R}^p$  est la sortie du système, autrement appelée variable d'observation.

D'autres modélisations existent. Dans le cadre des modèles fondés sur les concepts de l'intelligence artificielle, le système est décrit par une base de règles. On peut aussi substituer au modèle d'état un modèle par réseau de neurones dynamique, de type boîte noire.

La diversité des formes de modélisation non-linéaire traduit directement la différence de maturité entre l'automatique linéaire et l'automatique non-linéaire. En effet, pour la première, les outils d'analyse de stabilité, rapidité, précision et robustesse et les méthodes permettant d'obtenir ces performances sont aujourd'hui quasiment généralisées. Par contre, dans le cas de la commande non-linéaire, les outils d'analyse et méthodes de synthèse sont parcellaires ou complexes.

La raison de la différence de complexité entre les cadres linéaire et non-linéaire réside dans la grande difficulté voire l'impossibilité de résoudre des équations différentielles autres que linéaires à coefficients constants. Or on ne peut garantir aisément la stabilité et les performances d'un système sans résoudre ces équations. Notons que l'obtention de fonctions de Lyapunov permet de s'affranchir de la résolution des équations différentielles mais que celle-ci est malaisée dans un cadre général non-linéaire ou non-linéaire affine.

De même, on ne peut utiliser les transformées de Laplace ou en  $z$  que dans les cas linéaires. Ces outils sont très pratiques pour l'analyse des systèmes et font aussi défaut à l'automatique non-linéaire.

Ainsi, si l'idée fondatrice de la commande non-linéaire est intuitive, on se rend rapidement compte que son application n'est pas évidente. Toutefois, si l'on juge souvent négativement les lois de commande non-linéaires, il ne faut pas oublier de faire de même pour les lois de commande linéaires des systèmes complexes. En effet, il faut généralement se ramener à de l'interpolation linéaire entre correcteurs (séquencement de gains) si l'on souhaite commander ce type de systèmes dans l'intégralité de leur domaine de fonctionnement. Or, entre deux points de linéarisation d'un système séquencé, on perd totalement la certitude de la validité des analyses faites aux points de linéarisation ([55]). En d'autres termes, cela signifie qu'en dehors du voisinage des points de fonctionnement où ont été synthétisés les correcteurs linéaires séquencés, on n'a aucune raison de conserver les propriétés obtenues aux points de synthèse.

Il faut donc relativiser le jugement souvent négatif à l'encontre des lois de commande non-linéaires en considérant le point de vue suivant :

- Les propriétés des correcteurs non-linéaires couvrent un domaine de fonctionnement étendu mais sont difficiles à démontrer.
- Les correcteurs linéaires ont d'excellentes propriétés, qui plus est garanties, au voisinage du point du domaine de fonctionnement où ils ont été synthétisés mais ne présentent aucune garantie en dehors de ce voisinage.

Aujourd'hui, et depuis plus d'un quart de siècle, de nombreux chercheurs tentent de résoudre les problèmes posés par l'analyse et la synthèse robuste des systèmes non-linéaires. Ils partent du principe que, s'ils réussissent à démontrer en un point de fonctionnement une propriété d'un système muni d'une loi de commande non-linéaire, celle-ci sera valable pour un domaine étendu autour du point de fonctionnement considéré.

De nombreuses techniques de commande non-linéaire ont ainsi été développées depuis le début des années 80 dont quelques-unes sont décrites ci-dessous.

## 2.1.2.2 Différents types de techniques de commande non-linéaire

### 2.1.2.2.1 La commande floue

La commande floue ([207]) est basée sur la théorie des possibilités, qui est proche de la théorie des probabilités à une nuance importante près :

- Dans la théorie des probabilités, les fonctions d'appartenance sont booléennes, i.e. une variable quelconque  $x$  appartient à un ensemble  $S$  ou n'appartient pas à cet ensemble  $S$ , et ce sans valeur intermédiaire.
- Dans la théorie des possibilités, les fonctions d'appartenance sont continues, i.e. une variable quelconque  $x$  peut appartenir plus ou moins à un ensemble  $S_i$ . Néanmoins, la somme des fonctions d'appartenance de  $x$  aux ensembles  $S_i$  vaut toujours 1.

La commande floue est particulièrement adaptée à la commande de systèmes non-linéaires complexes mal modélisés mais pour lesquels une grande expertise humaine existe.

Certains types de commande floue sont ainsi entièrement définis par des règles floues tirées de l'expertise humaine (Mamdani) quand d'autres présentent des approches mixtes, assimilable à une interpolation floue entre des correcteurs analytiques locaux (Sugeno).

La commande floue est parfaitement applicable à des systèmes dont le comportement désiré est décrit de manière plus qualitative que quantitative. Elle peut être appliquée rapidement (selon la quantité de règles floues à implémenter) et donne des résultats souvent spectaculaires. Néanmoins, il est impossible d'utiliser ce type de techniques dans le but de garantir la stabilité ou les performances (et encore moins leur robustesse !).

Il est donc tout-à-fait inconcevable d'utiliser la commande floue dans le cadre de l'aéronautique civile.

### 2.1.2.2.2 La commande neuronale

De nombreux types de commande utilisant les réseaux de neurones existent. On citera comme applications : [31], [32], [45], [85], [103], [104], [110], [153], [201] et [202]. Il existe deux grandes familles de commande neuronale:

#### 1°/ Commande neuronale déterministe

Ce type de commande reprend exactement le principe de l'inversion de la dynamique (cf. §2.1.2.2.4) où le modèle est entièrement donné par un réseau de neurones statique ou récurrent dont l'apprentissage est effectué hors ligne. Il s'agit donc d'une commande classique dont le modèle du système à commander est simplement de type « boîte noire ».

Cette approche est envisageable dans notre étude bien que nous ayons préféré une modélisation « boîte grise » en ne modélisant par réseaux de neurones que certains gains apparaissant dans les équations de la mécanique du vol (cf. §2.3 et §3.3.1). En effet, contrairement à l'approche « boîte noire », l'approche « boîte grise » permet de conserver la structure analytique générale du système à commander et donc un meilleur sens physique pour la synthèse des lois de commande.

#### 2°/ Commande neuronale adaptative

Le principe de cette commande est le même que précédemment, à ceci près que le réseau de neurones considéré apprend « en ligne » et que le modèle de synthèse de la loi devient donc adaptatif. Dans la littérature, on peut trouver des variantes de cette commande se basant sur une commande non-linéaire inverse classique, doublée d'une correction adaptative de l'erreur d'inversion par des techniques neuronales. On retrouve ici aussi une forme d'opposition entre les démarches « boîte noire » et « boîte grise ».

## **Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Bien qu'elle présente de nombreux avantages pratiques, cette approche adaptative est inconcevable dans le cas de l'aéronautique civile. En effet, il n'existe absolument aucune preuve dans aucun cas de la stabilité ni de la robustesse pour ces techniques neuronales. Par ailleurs, même si cette technique pourrait être intéressante pour certaines applications (reconfiguration après panne, perte de surface de contrôle, etc.), il semble impossible d'en convaincre les autorités de certification à l'heure actuelle.

En conclusion, les réseaux de neurones sont un outil puissant et très souple permettant d'entrevoir de nombreuses applications. Toutefois, le concepteur doit accepter de perdre la connaissance physique de tout ou partie de son système. Les applications déterministes, et de type boîte grise, paraissent adaptées à notre problématique, puisqu'elles permettent de conserver une représentation analytique pour la partie du système que l'on connaît, et d'utiliser les réseaux de neurones pour modéliser celle qu'il est difficile de décrire analytiquement de manière satisfaisante.

### 2.1.2.2.3 Commande plate

La commande plate ([56], [57] et [58]) est une commande non-linéaire s'appliquant à une certaine classe de systèmes : les **systèmes différentiellement plats**.

Un système est dit différentiellement plat s'il existe un ensemble de variables indépendantes, nommées **sorties plates**, telles que toute autre variable endogène (y compris les variables d'entrées) est fonction de ces sorties plates et de leurs dérivées successives. Plus précisément, le système :

$$\dot{X} = f(X, U)$$

est différentiellement plat s'il existe un ensemble de variables nommées sorties plates, de la forme :

$$Y = h(X, U, \dot{U}, \ddot{U}, \dots, U^{(p)})$$

tel que :

$$\begin{cases} X = \alpha(Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(q)}) \\ U = \beta(Y, \dot{Y}, \ddot{Y}, \dots, Y^{(q+1)}) \end{cases}$$

Ce système est alors dit « Lie-Bäcklund équivalent » au système trivial suivant :

$$\dot{v} = Y^{(q+1)}$$

où  $v$  est la nouvelle entrée (correspondant à un système linéaire et découplé entrées-sorties).

Ce type de lois de commande possède des propriétés intéressantes. En effet la commande plate, qui asservit la trajectoire des sorties plates du système, est parfaitement adaptée au suivi de trajectoires. Ceci serait idéal dans le cadre de notre sujet de thèse si toutefois il était possible de choisir cette sortie plate. Or, au mieux elle est imposée par les équations régissant le système étudié, au pire elle n'existe pas et alors l'application de cette technique devient caduque. Par ailleurs, dans le cas où le système est plat, il faut encore exhiber ses sorties plates. Or elles n'ont pas toujours une réelle signification physique. La recherche des sorties plates peut donc échouer alors même que le système est plat.

Pour la commande de l'avion, il a été démontré que le système est plat. Malheureusement, ses sorties plates sont incompatibles avec les objectifs de pilotage d'un avion de ligne de type Airbus. Il reste que dans le cadre du pilotage d'UAV (Unmanned Aerial Vehicle), pour lesquels les sensations de pilotage ne sont pas un critère d'acceptabilité des lois de pilotage, la commande plate paraît être adaptée. Par ailleurs, la commande plate n'a pas de propriété particulière de robustesse ni de méthode de synthèse robuste ou d'analyse de robustesse associée. Ceci constitue un frein *a priori* dans le cadre spécifique de notre étude.

Au final, la commande plate est une technique très pointue et efficace. Elle est intéressante pour l'utilisation que l'on peut en faire sur tout type de système non-linéaire dès l'instant où il est différentiellement plat et où les contraintes en terme de robustesse sont faibles. Toutefois, dans le cadre particulier des systèmes non-linéaires affines, il existe un type de commande dont la synthèse est plus souple et dont les avantages sont comparables : la commande non-linéaire inverse.

### **2.1.2.2.4 Commande linéarisante par bouclage entrées-sorties (ou commande non-linéaire inverse ou encore inversion de la dynamique)**

Il s'agit de la commande non-linéaire la plus populaire actuellement. Les travaux initiaux sont principalement dus à Alberto Isidori (notamment [91] et [92]). Depuis, les applications de cette technique à l'aéronautique ont été nombreuses ([9], [28], [30], [46], [70], [73], [74], [88], [89], [95], [114], [127], [128], [138], [139], [149], [150], [179], [180], [181], [185], [186], [187], [188], [189], etc.). Ces applications concernent principalement des lois de pilotage uniquement (en vitesse angulaire) et des tentatives de robustification non-généralisables.

L'inversion de la dynamique s'appuie sur des représentations d'état de type non-linéaire affine ou pseudo-affine. Ces représentations d'état sont non-linéaires par rapport à l'état du système, et affines par rapport aux commandes. Ainsi, dans le cas d'une représentation d'état non-linéaire affine, on représente le système par (1). Si le système est gouvernable, en dérivant successivement les éléments de  $Y$  par rapport au temps, on obtient la représentation entrées-sorties du système (1) comme suit :

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= \begin{bmatrix} Y_1^{(d_1)}(U) \\ \vdots \\ Y_p^{(d_p)}(U) \end{bmatrix} \\ &= F(X) + G(X)U \end{aligned} \quad (2)$$

où  $d_k$  est le degré relatif de chaque sortie.

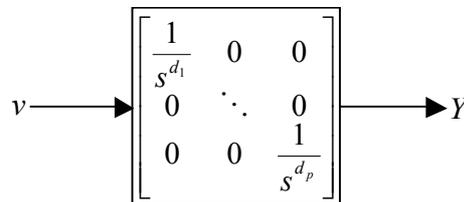
Sous réserve que  $G$  soit de rang plein ( $p$ ), le retour d'état découplant et linéarisant pour ce système est de la forme :

$$U = G^*(X).(v - F(X)) \quad (3)$$

où  $G^*$  représente l'inverse de  $G$  si  $m=p$  ou une pseudo-inverse à droite de  $G$  si  $m>p$ . Le système (2) associé à la loi de commande (3) équivaut au système linéaire et découplé suivant :

$$\tilde{Y} = v \quad (4)$$

que l'on peut représenter comme suit :



2.1.2.2.4.a : Système non-linéaire après inversion de la dynamique (Mise en avant de la linéarisation et du découplage)

Le système (2) est donc inversible statiquement si  $G$  est inversible (ou pseudo-inversible). Par ailleurs, il faut que :

$$\sum_{k=1}^p d_k = n$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Il existe alors un difféomorphisme  $X=\phi(\xi)$  tel que :

$$\xi = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_1^{(d_1)} \\ \vdots \\ Y_p \\ \vdots \\ Y_p^{(d_p)} \end{bmatrix}$$

Dans le cas contraire, i.e. dans le cas où :

$$\sum_{k=1}^p d_k < n$$

le système de référence présente des dynamiques internes non-linéaires (définies par la dérivée d'états notés  $Z$ ). Ces dynamiques internes (notamment la dynamique des zéros) sont non-linéaires dans le cas général et peuvent être instables. Leur stabilité est fondamentale car sinon elles rendent le système inversé muni de son correcteur amont instable. Toutefois, dans le cadre spécifique des systèmes à non-minimum de phase (dynamique des zéros instable), il existe des techniques permettant, dans certains cas, de ne pas compenser les zéros instables et donc de ne pas déstabiliser l'ensemble du système ([91]).

Quelque soit les propriétés des dynamiques internes, elles n'ont aucune influence sur  $Y$  qui ne dépend toujours que de  $v$ . Dans ce cas, le vecteur  $\xi$  est défini comme suit :

$$\xi = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_1^{(d_1)} \\ \vdots \\ Y_p \\ \vdots \\ Y_p^{(d_p)} \\ Z_1 \\ \vdots \\ Z_{n-\sum_{k=1}^p d_k} \end{bmatrix}$$

Une fois le système de départ linéarisé et découplé, on peut lui appliquer tout type de commande linéaire. Il est par exemple possible de calculer une commande  $v$  de manière à placer des dynamiques linéaires exponentiellement stables pour  $Y$  (cf. §2.1.3.4 par exemple).

L'inversion de la dynamique paraît séduisante dans son principe. En effet, il s'agit d'une commande non-linéaire mais linéarisante. Cette technique est analytique et permet d'imposer les sorties régulées et les dynamiques que l'on souhaite y associer. Elle sert par ailleurs de base à deux techniques de commande non-linéaire à stabilité robuste s'appliquant à des systèmes triangulaires : le backstepping et le forwarding ([111]). Enfin, le volume de publication sur le sujet a constitué une base d'étude solide pour la thèse, notamment sur le plan applicatif à Airbus même ([43], [44], [213], projet REAL, projet GARTEUR).

## **Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**

### **Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Pour toutes ces raisons, nous avons choisi de poursuivre notre étude en nous basant sur la commande non-linéaire inverse. Nous explicitons donc l'utilisation de cette technique dans les parties suivantes.

### **2.1.2.3 Conclusion**

Comme on a pu le voir dans cette partie, la technique d'inversion de la dynamique paraît être la plus adaptée à notre étude. C'est une technique assez calculatoire et qui connaît quelques limitations. Par exemple, dans le cadre linéaire, elle est strictement équivalente à un retour d'état découplant entrées-sorties et en reprend donc les limitations connues.

Il n'existe pas de technique standard de synthèse face un problème précis dans le cas non-linéaire. Un minimum d'expertise est donc nécessaire pour synthétiser des lois de commande non-linéaires inverses satisfaisantes. Celle-ci peut d'ailleurs être facilitée par l'analyse des différents modèles tangents disponibles. Par ailleurs, l'écriture analytique des équations différentielles du processus à commander n'exempte en aucun cas le concepteur d'une connaissance parfaite de la physique le régissant. Sans cette connaissance, il y a de fortes chances que la loi de commande synthétisée soit mal adaptée.

## 2.1.3 Eléments d'approfondissement sur l'inversion de la dynamique

### 2.1.3.1 Introduction

Dans la partie précédente, nous avons brièvement présenté et comparé différentes techniques de commande non-linéaire. Nous avons ainsi justifié le choix d'utiliser les techniques de commande inverse pour notre étude. Dans cette partie, nous approfondissons les techniques liées à la commande linéarisante et découplante (cas problématiques, synthèse d'un correcteur amont, etc.).

### 2.1.3.2 Synthèse des problèmes spécifiques à la commande non-linéaire inverse et solutions

#### 2.1.3.2.1 Non-inversibilité globale de $G$ ( $G^{-1}$ n'existe pas $\forall X \in \mathcal{X}^n$ )

##### 2.1.3.2.1.1 Cas où $\text{rang}(G) < p$

Dans ce cas, l'algorithme d'inversion statique de la dynamique présenté dans la partie précédente ne s'applique pas. On peut toutefois appliquer un algorithme de commande non-linéaire inverse dynamique, qui englobe l'algorithme statique. Voici cet algorithme :

1.  $F$  et  $G$  sont calculés selon la méthode décrite précédemment (§2.1.2.2.4) :
  - Si  $G^*$  existe, on applique la loi de commande (3) et on sort de l'algorithme.
  - Si  $G^*$  n'existe pas on passe à l'étape 2.
2. On calcule tout d'abord le noyau de  $G$  :

$$\text{Ker}[G(X)] = G_1(X)$$

Si  $r = \text{rang}(G)$ , on a donc  $G_1(X) \in \mathcal{R}^{m \times (m-r)}$ . On calcule ensuite  $G_2$  tel que  $[G_1, G_2]$  soit inversible, avec  $G_2 \in \mathcal{R}^{m \times r}$ . Enfin, on pose :

$$\begin{cases} U = G_1(X) \cdot v_1 + G_2(X) \cdot \lambda \\ \dot{\lambda} = v_2 \end{cases}$$

avec  $\dim([v_1', v_2']) = m$ .  $\lambda$  est donc un vecteur d'état supplémentaire. Son apparition correspond physiquement à l'ajout d'intégrateurs en entrée du système.

3. Ensuite, par un changement de variable, on ré-écrit ce système augmenté sous la forme (1) et on réitère l'algorithme.

Le système étudié est inversible dynamiquement si et seulement si cet algorithme converge. Le cas échéant, il converge en  $n$  itérations au plus.

##### 2.1.3.2.1.2 Cas où $m > p$

Dans ce cas, le concepteur de lois a trois choix possibles :

- Rajouter des sorties régulées.
- Créer une cinématique de commande pour réduire  $m$ .
- Utiliser pour le calcul de  $G^*$  une pseudo-inversion (à droite). Si le rang de  $G$  est inférieur à  $p$ , on peut alors se ramener au cas 2.1.3.2.1.1.

### **2.1.3.2.1.3 Cas où $m < p$**

Dans ce cas le découplage des sorties n'est pas possible et l'inversion ne peut donc pas être utilisée. Une solution pour le concepteur est de diminuer le nombre de sorties régulées.

### 2.1.3.2.2 Non-inversibilité locale de $G$ ( $\exists X \in \mathcal{R}^n / \text{rang}(G) < p$ )

$G$  peut rencontrer des singularités dans son domaine de définition. C'est un phénomène annonciateur d'une inversion d'efficacité des commandes ou d'une modification de nature des couplages entrées-sorties du système naturel. Le système à commander change de nature autour de cette singularité (signe de l'efficacité des commandes, degrés relatifs du système, etc.) et les techniques classiques d'automatique ne s'appliquent plus. Pour plus d'information sur le sujet, il faut consulter la théorie des bifurcations (cf. annexe §6.1.2) ou des systèmes hybrides.

Dans un cadre applicatif, il faut veiller à ne pas se rapprocher de la singularité, qui plus est avec certaines marges. En effet, la singularité rencontrée par le système n'est pas nécessairement située dans la même hypersurface de l'état et des paramètres que la singularité rencontrée par le modèle du système.

### 2.1.3.2.3 Cas des systèmes à non-minimum de phase ou non strictement propres

Les systèmes à non-minimum de phase ou non strictement propres (équivalent dans le cas linéaire à des systèmes où la matrice  $D$  n'est pas nulle) ont la particularité de présenter des dynamiques internes une fois inversés. Ceci résulte de l'apparition prématurée de la commande dans le processus de dérivation successive des sorties. Le degré relatif d'une des sorties au moins est donc plus faible que ce qu'il serait en l'absence de zéros. Il en résulte une loi qui commande une sous-dynamique non-représentative et d'ordre insuffisant par rapport à la dynamique réelle à commander.

Ce type de système est non-inversible, soit parce que son inverse est instable (système à non-minimum de phase) soit parce que l'un au moins de ses degrés relatifs est nul (système non strictement propre). Nous proposons donc d'augmenter le système naturel (1) comme suit :

$$\begin{cases} U = \chi + \kappa \\ \dot{\chi} = \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_i}\right)_{1 \leq i \leq m} \cdot \kappa \end{cases}$$

avec :

$$\text{diag}\left(\frac{1}{\tau_i}\right)_{1 \leq i \leq m} = \begin{bmatrix} 1/\tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\tau_m \end{bmatrix}$$

On se ramène ensuite par un changement de variable ( $[X; \chi] \rightarrow X$ ) à un système de type (1). Ce système présente la particularité de n'être à l'équilibre que lorsque sa commande est nulle. On parlera plus loin de « commande à moyenne nulle ». Ainsi, on peut tenter à nouveau de dériver successivement chaque composante de  $Y$ . A chaque fois que l'on fait apparaître la commande de manière jugée prématurée, on peut alors négliger cette contribution de la commande (puisqu'elle est à moyenne nulle) et monter à l'ordre supérieur.

Attention toutefois, la valeur des  $\tau_i$  est alors prépondérante pour assurer la stabilité des dynamiques internes. En particulier,  $\tau_i > 0$  n'implique pas nécessairement la stabilité de la loi de commande. Par ailleurs, l'inversion de la dynamique est alors inexacte et le placement de pôle éventuel qui s'ensuivrait est donc approximatif. Pour plus d'information, le lecteur pourra se reporter à l'exemple du paragraphe 2.1.3.5.4.

### 2.1.3.3 Cas des systèmes non affines en la commande

Soit un système non-linéaire qui puisse être décrit par l'équation entrées-sorties suivante :

$$\tilde{Y} = E(X, U)$$

Lorsque  $E$  est une fonction continûment dérivable de  $U$ , on peut réécrire ce système sous une forme équivalente à (2). Pour cela, on utilise une linéarisation tangente autour d'une entrée de référence  $U_{ref}$  :

$$\begin{cases} F(X) = E(X, U_{ref}) - \frac{\partial E(X, U_{ref})}{\partial U} U_{ref} \\ G(X) = \frac{\partial E(X, U_{ref})}{\partial U} \end{cases}$$

Ce système est inversible tant que  $G$  reste de signe constant (voir §2.1.3.2.2 dans le cas contraire). Pour améliorer la précision de l'inversion, on peut parfaitement donner à  $U_{ref}$  une valeur filtrée de  $U$ . A noter que cette approche ressemble fort à celle proposée au chapitre précédent bien que le problème à traiter ici soit très différent.

### 2.1.3.4 Placement de pôles linéaire après inversion de la dynamique

Les lois de commande aéronautiques répondent à un cahier des charges strict spécifiant notamment des critères de temps de réponse et de dépassement. Après linéarisation et découplage, il est donc assez naturel de tenter de placer une dynamique linéaire. L'ordre de la dynamique à placer et les exigences de performances varient selon la sortie considérée.

Afin de simplifier le réglage des lois en limitant le nombre de gains dans la chaîne de commande linéaire, on se propose de placer de manière systématique des dynamiques d'ordre  $d_k$  pour chaque sortie régulée. Ces dynamiques correspondent à la mise en série de  $d_k$  filtres du premier ordre de constante de temps  $1/\omega_k$ . Cette démarche permet alors, une fois le correcteur synthétisé, de n'avoir qu'un gain à régler par sortie régulée. Le temps de développement/réglage/validation est alors nettement réduit et ces activités facilitées.

A noter que c'est cette démarche qui a été retenue pour le réglage de notre pilote automatique (cf. §3). Bien entendu, d'autres démarches auraient pu être proposées (enchaînement d'un premier ordre et d'autres premiers ordres de constante de temps plus faible, utilisation de seconds ordres plus ou moins amortis, etc.). Néanmoins, comme nous avons disposé de marges de réglage suffisantes lors de notre synthèse, ce principe de placement a été conservé. La fonction de transfert souhaitée pour chaque chaîne est alors :

$$\frac{Y_k}{Y_{k_c}} = \frac{1}{\left(1 + \frac{s}{\omega_k}\right)^{d_k}}$$

avec  $s$  l'opérateur de Laplace.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Ceci équivaut au filtre suivant :

$$\frac{Y_k}{Y_{k_c}} = \frac{\omega_k^{d_k}}{\sum_{l=0}^{d_k} C_{d_k}^l \cdot \omega_k^l \cdot s^{d_k-l}}$$

De même, ce filtre peut s'exprimer sous la forme d'une équation différentielle linéaire exponentiellement stable d'ordre  $d_k$  comme suit :

$$Y_k^{(d_k)} = -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot Y_k^{(d_k-1)} - \dots - C_{d_k}^{d_k-1} \cdot \omega_k^{d_k-1} \cdot Y_k^{(1)} + C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot (Y_{k_c} - Y_k)$$

La valeur de la consigne  $v$  à donner au système linéaire découplé (4) pour assurer un contrôle exponentiellement stable des sorties régulées par placement de pôles réels d'ordre  $d_k$  (correspondant à  $p$  chaînes découplées de filtres linéaires du premier ordre) est donc :

$$v = \begin{bmatrix} Y_1^{(d_1)} \\ \vdots \\ Y_k^{(d_k)} \\ \vdots \\ Y_p^{(d_p)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot Y_1^{(d_1-1)} - \dots - C_{d_1}^{d_1-1} \cdot \omega_1^{d_1-1} \cdot Y_1^{(1)} + C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot (Y_{1_c} - Y_1) \\ \vdots \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot Y_k^{(d_k-1)} - \dots - C_{d_k}^{d_k-1} \cdot \omega_k^{d_k-1} \cdot Y_k^{(1)} + C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot (Y_{k_c} - Y_k) \\ \vdots \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot Y_p^{(d_p-1)} - \dots - C_{d_p}^{d_p-1} \cdot \omega_p^{d_p-1} \cdot Y_p^{(1)} + C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot (Y_{p_c} - Y_p) \end{bmatrix} \quad (5)$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Dans le cas où l'inversion de la dynamique ne fait apparaître aucune dynamique interne, le système (1) est donc équivalent au système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{d_1-1} \\ \dot{\xi}_{d_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l-1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l-1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot \xi_{d_1} - \dots - C_{d_1}^{d_1-1} \cdot \omega_1^{d_1-1} \cdot \xi_2 + C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot (Y_{1c} - \xi_1) \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+2} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot \xi_{d_k} - \dots - C_{d_k}^{d_k-1} \cdot \omega_k^{d_k-1} \cdot \xi_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+2} + C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot \left( Y_{k_c} - \xi_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+1} \right) \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+2} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots - C_{d_p}^{d_p-1} \cdot \omega_p^{d_p-1} \cdot \xi_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+2} + C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot \left( Y_{p_c} - \xi_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+1} \right) \end{bmatrix} \quad (6)$$

qui est un système exponentiellement stable.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Dans le cas où il y a des dynamiques internes, le système équivalent est le même que précédemment (exponentiellement stable par construction), augmenté des dynamiques internes (stables par définition de l'inversion de la dynamique) :

$$\begin{bmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{d_1-1} \\ \dot{\xi}_{d_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l-1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l-1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ \dot{\xi}_{1+\sum_{l=1}^p d_l} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot \xi_{d_1} - \dots - C_{d_1}^{d_1-1} \cdot \omega_1^{d_1-1} \cdot \xi_2 + C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot (Y_{1c} - \xi_1) \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+2} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot \xi_{d_k} - \dots - C_{d_k}^{d_k-1} \cdot \omega_k^{d_k-1} \cdot \xi_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+2} + C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot \left( Y_{kc} - \xi_{\sum_{l=1}^k d_l-d_k+1} \right) \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+2} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots - C_{d_p}^{d_p-1} \cdot \omega_p^{d_p-1} \cdot \xi_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+2} + C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot \left( Y_{pc} - \xi_{\sum_{l=1}^p d_l-d_p+1} \right) \\ f_{1+\sum_{l=1}^p d_l}(t, \xi) \\ \vdots \\ f_n(t, \xi) \end{bmatrix} \quad (7)$$

Au final, les deux systèmes sans dynamique interne (6) et avec dynamiques internes stables (7), munis de lois de commande stabilisantes (de type (5) par exemple) sont identiques fonctionnellement.

### 2.1.3.5 Exemple illustratif de commande non-linéaire inverse en linéaire

La commande non-linéaire inverse est souvent difficile à appréhender pour les experts de la commande linéaire. Le but de cette partie est donc de faire un pont entre les techniques linéaires et non-linéaires.

#### 2.1.3.5.1 Mise en avant des propriétés de découplage

Soit le système défini par la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

Ce système possède deux entrées et deux sorties couplées. L'équation entrées-sorties de ce système est la suivante :

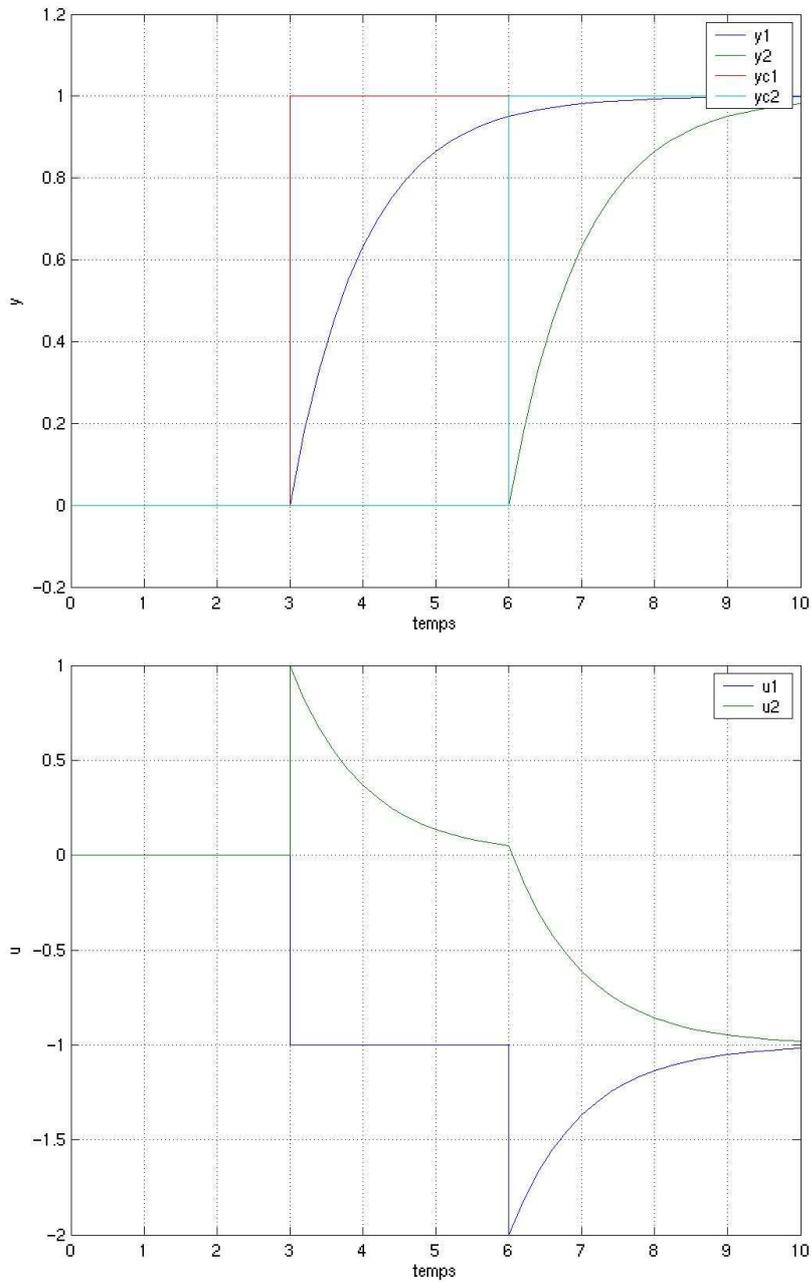
$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} U$$

Ce système est inversible car  $G$  est inversible. Par ailleurs, il ne comporte pas de dynamique interne puisque la somme de ses degrés relatifs (1+1) est égale à l'ordre du système. Si l'on souhaite imposer pour les deux sorties un comportement découplé du premier ordre avec une constante de temps  $\tau=1$ , on peut écrire une loi de commande de type (3) comme suit :

$$U = G^* \left( \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (Y_c - Y) - F \right)$$

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

La réponse du système corrigé est alors la suivante :



*2.1.3.5.1.a : Sortie et commande du système découplé*

On a donc bien découplé et placé la dynamique désirée.

### 2.1.3.5.2 Cas sans dynamique interne

Pour cette étude on considère un système dont une représentation d'état serait :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

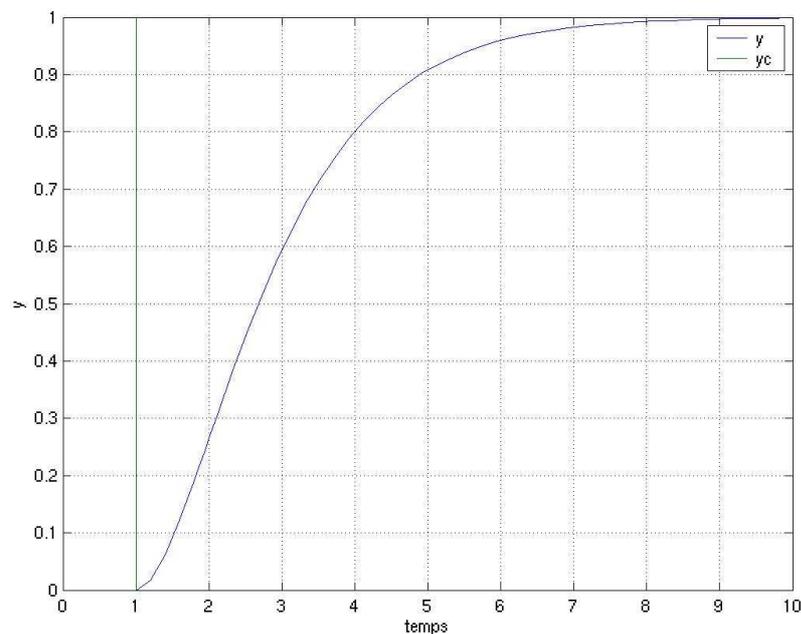
L'équation entrées-sorties de ce système est la suivante :

$$\tilde{Y} = \begin{bmatrix} -1 & -1 \end{bmatrix} X + U \quad (8)$$

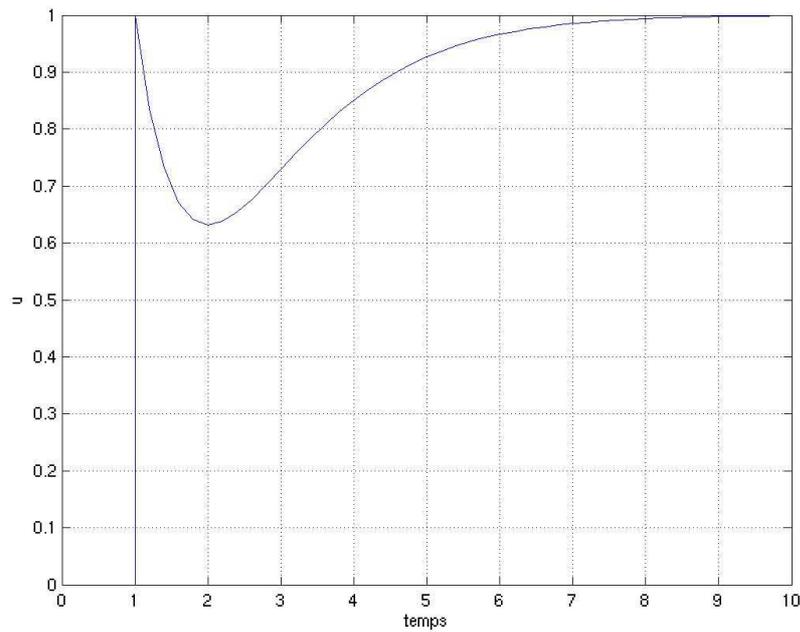
Ce système est inversible car  $G$  est inversible. Par ailleurs, il ne comporte pas de dynamique interne puisque son degré relatif (2) est égale à l'ordre du système. Si l'on souhaite imposer pour la sortie un comportement du deuxième ordre sur-amorti avec une pulsation  $\omega=1$ , on peut écrire une loi de commande de type (3) comme suit :

$$U = G^* \left( Y_c - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} X - F \right)$$

La réponse du système corrigé est alors la suivante :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



2.1.3.5.2.a : Sortie et commande du système corrigé

On a donc bien placé la dynamique désirée.

### 2.1.3.5.3 Cas avec dynamique interne

Pour cette partie on a un système linéaire représenté comme suit :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

L'équation entrées-sorties de ce système est strictement la même que précédemment :

$$\tilde{Y} = [-1 \quad -1] X + U$$

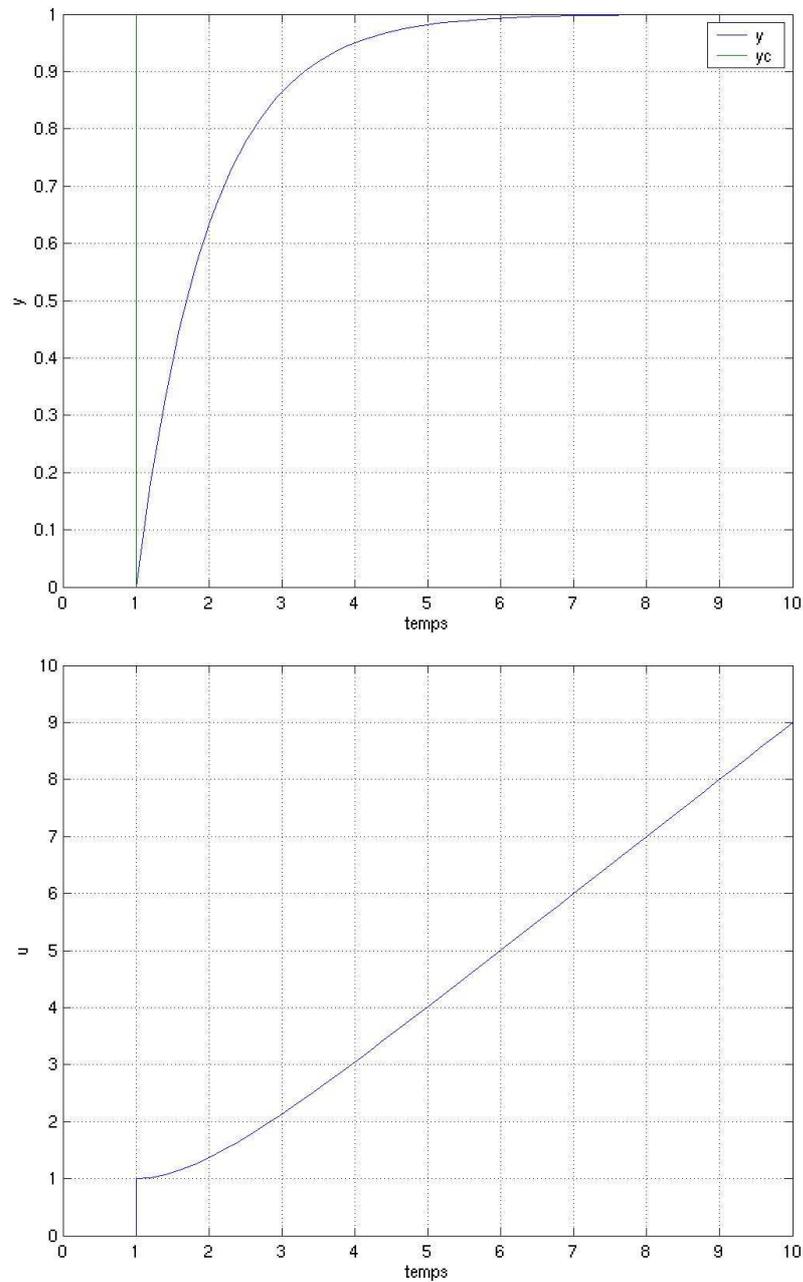
Ce système est inversible car  $G$  est inversible. Par contre, il comporte une dynamique interne puisque la somme de ses degrés relatifs (1) est inférieure à l'ordre du système (2). Si l'on souhaite imposer pour la sortie un comportement du premier ordre avec une constante de temps  $\tau=1$ , on peut écrire une loi de commande de type (3) comme suit :

$$U = G^* (Y_c - Y - F)$$

On voit alors apparaître un pôle en zéro correspondant à la dynamique interne (car  $X_i$  est l'intégrale de  $Y$ ). En effet, par rapport au §2.1.3.5.2, on commande ici ce système en vitesse. Sa position diverge donc pour une vitesse donnée.

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

La réponse du système corrigé est la suivante :



*2.1.3.5.3.a : Sortie et commande du système corrigé*

On a donc bien placé la dynamique désirée. Toutefois, la dynamique interne (pôle en zéro) est instable. On remarque que, entre le §2.1.3.5.2 et celui-ci, la seule différence entre les lois de commande concerne le correcteur linéaire.

### 2.1.3.5.4 Cas d'un système à non-minimum de phase

Pour cette partie on considère un système représenté par :

$$\begin{cases} \dot{X} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} X + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \\ Y = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} X \end{cases}$$

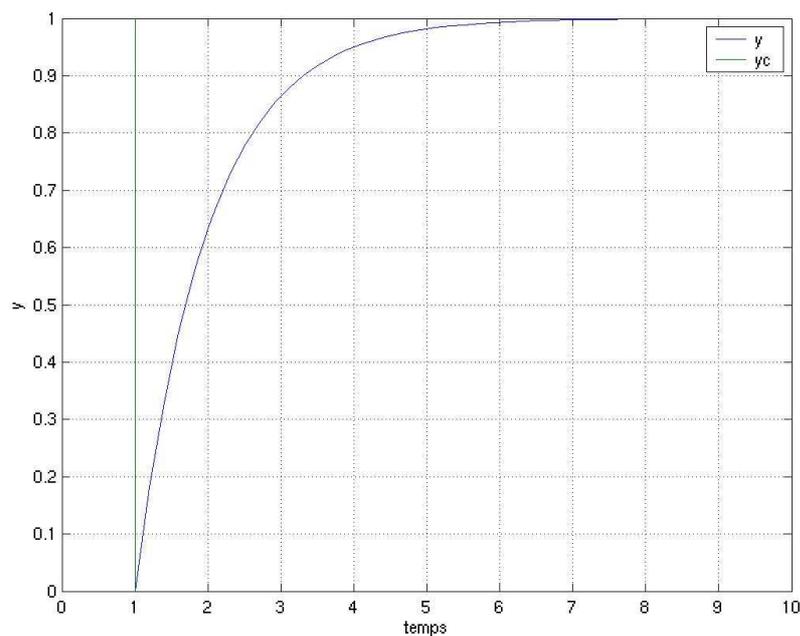
On remarque la présence d'un "zéro instable" en 1. L'équation entrées-sorties de ce système est la suivante :

$$\tilde{Y} = [1 \quad 2] X - U$$

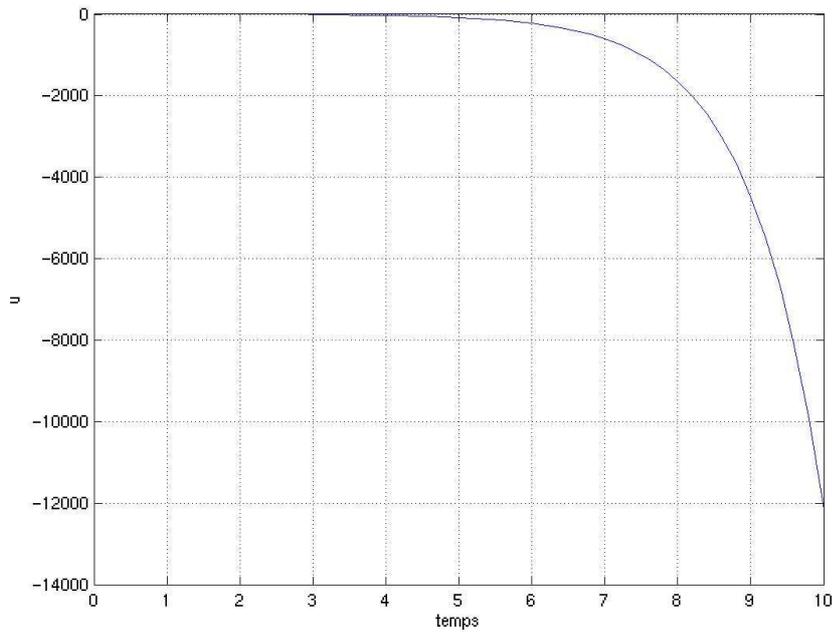
Ce système est inversible mais présente une dynamique interne due à la présence du "zéro instable". Si l'on souhaite imposer pour la sortie un comportement du premier ordre avec une constante de temps  $\tau=1$ , on peut écrire (sans trop d'espoir tout de même !) une loi de commande de type (3) comme suit :

$$U = G^* \cdot (Y_c - Y - F)$$

La réponse du système ainsi corrigé est alors la suivante :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*2.1.3.5.4.a : Sortie et commande du système corrigé*

On constate que, malgré la présence du zéro, le placement de la dynamique désirée est obtenu. La réponse en  $y$  est parfaite ! Néanmoins, en regardant la commande, on se rend rapidement compte de la divergence du système global... Cette réaction n'est pas acceptable.

Pour contrer ce problème, on se réfère à la partie 2.1.3.2.3 et on pose:

$$\begin{cases} U = \chi + \kappa \\ \dot{\chi} = \frac{\kappa}{\tau} \end{cases}$$

On pose le changement de variable suivant :

$$\sigma = \begin{bmatrix} X \\ \chi \end{bmatrix}$$

Le système que l'on souhaite commander est donc équivalent, après le changement de variable proposé, à :

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sigma + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1/\tau \end{bmatrix} \kappa \\ Y = [1 \quad -1 \quad 0] \sigma \end{cases}$$

Si on dérive la sortie de ce système une première fois, on obtient :

$$\dot{Y} = [1 \quad 2 \quad -1] \sigma - \kappa \tag{9}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Etant donné le non-minimum de phase observé et vu que, par construction,  $\kappa$  est à moyenne nulle, on procède à l'approximation suivante :

$$\dot{Y} \approx [1 \quad 2 \quad -1]\sigma$$

Afin de faire tout de même apparaître la commande, on dérive  $Y$  une fois supplémentaire. On obtient alors :

$$\ddot{Y} \approx [-2 \quad -1 \quad 2]\sigma + (2 - 1/\tau)\kappa$$

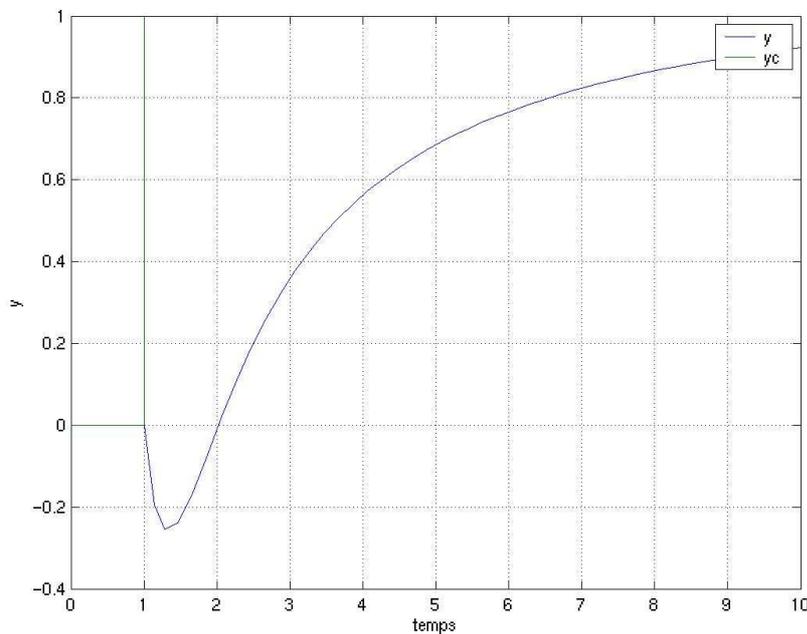
On voit clairement dans ce cas que, pour  $\tau < 1/2$ , l'efficacité apparente de la commande sera de même signe qu'en (9). Une telle loi de commande sera donc instable comme précédemment. Si, par contre, on choisit  $\tau > 1/2$ , on peut se dégager du problème de non-minimum de phase. On propose de choisir  $\tau = 2/3$  ce qui implique que l'équation entrées-sorties de ce système est donnée par :

$$\ddot{Y} \approx [-2 \quad -1 \quad 2]\sigma + \frac{\kappa}{2}$$

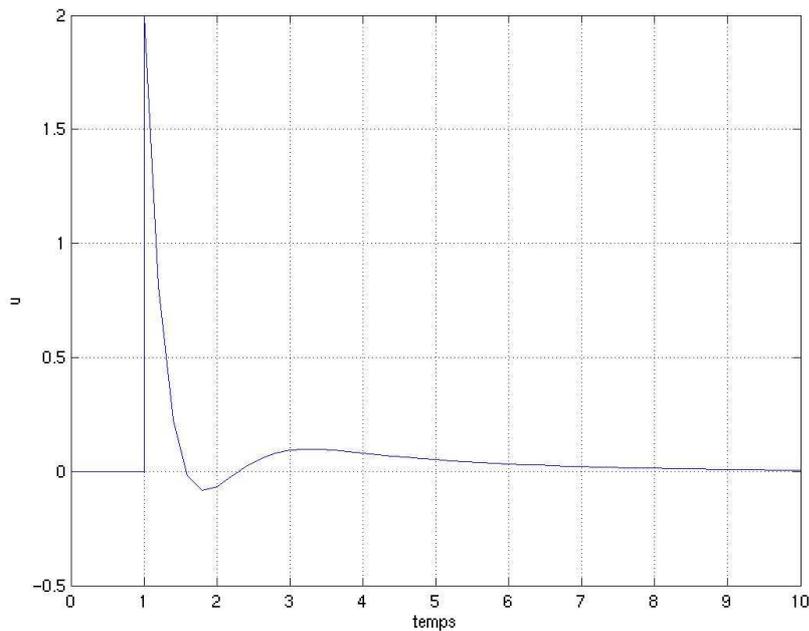
Si l'on souhaite imposer pour la sortie un comportement du second ordre sur-amorti avec une pulsation  $\omega = 1$ , on peut écrire une loi de commande de type (3) comme suit :

$$U = G^* \cdot (Y_c - [3 \quad 3 \quad -2]\sigma - F)$$

On ne cherche pas, avec cette loi, à contrer le non-minimum de phase. Le placement de la dynamique n'est donc pas parfait. Toutefois, il est toujours plus acceptable qu'une instabilité pure... La réponse du système approximativement corrigé est la suivante :



## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



2.1.3.5.4.b : Sortie et commande du système corrigé

La réponse obtenue pour le système corrigé est donc un compromis entre le non-minimum de phase et la dynamique attendue. L'impossibilité de proposer une méthode systématique de réglage des constantes de temps du système augmenté dans le cas non-linéaire reste néanmoins un handicap certain.

### 2.1.3.6 Conclusion

Cette partie avait pour but de proposer au concepteur de lois désireux d'utiliser l'inversion de la dynamique des méthodes pour faire face aux problèmes généraux de l'automatique. Ces méthodes fonctionnent tant que le modèle du système à commander, que le concepteur possède, est parfait. Mais que se passe-t-il lorsque ce n'est pas le cas (i.e. dans le cas général) ?

Cette question fait émerger la problématique de robustesse d'une loi dans son environnement réel de fonctionnement. Nous l'abordons plus en détail ci-dessous.

## 2.2 Contribution à la commande non-linéaire robuste : La commande RMI (Robust Multi-Inversion)

### 2.2.1 Introduction

L'un des éléments essentiels dont le concepteur de lois de commande doit tenir compte réside dans les propriétés de robustesse de celles-ci, aussi bien vis-à-vis des incertitudes de modélisation que des perturbations exogènes. En effet, malgré les incertitudes ou perturbations rencontrées, le système corrigé doit satisfaire des critères de stabilité voire, en général, de performances.

Les incertitudes peuvent principalement provenir d'erreurs ou d'approximations volontaires ou non de modélisation, de variations de paramètres ou encore de problèmes de précision numérique. Tous ces phénomènes induisent des écarts potentiellement importants entre le comportement réel d'un système et de son modèle simulé. Afin d'éviter ou au moins de minimiser ces écarts, plusieurs techniques regroupées sous l'appellation de "commande robuste" ont été mises en œuvre ([219]).

Depuis une vingtaine d'années, le développement de la commande robuste a connu un essor considérable dans le cadre des systèmes linéaires, comme en témoigne l'abondante littérature sur le sujet. On peut distinguer deux classes parmi les méthodes proposées :

- La première regroupe les méthodes dites fréquentielles, où l'incertitude est considérée comme non-structurée, c'est-à-dire qu'aucune information n'est disponible sur la façon dont elle affecte le système. Les mesures de robustesse associées apparaissent comme l'extension de concepts classiques tels que marges de gain, marges de phase et fonctions de sensibilité. Dans cette classe ([219]), on peut en particulier inclure la commande LQG/LTR, l'approche  $H_\infty$ , l'optimisation  $H_2/H_\infty$ , etc.
- Une deuxième classe de méthodes de commande robuste est constituée par les approches dites temporelles où l'incertitude est structurée, c'est-à-dire qu'elle est supposée affecter le modèle suivant une représentation particulière. Ces méthodes peuvent faire appel à la théorie de Lyapunov, comme par exemple l'approche quadratique ([20], [36]) ou encore aux approches de type polynomial ([22]).

L'étude de la robustesse d'un système peut s'effectuer :

- Du point de vue de l'analyse : les incertitudes sont considérées *a posteriori* et les méthodes associées permettent d'analyser la robustesse du système corrigé relativement à certains critères. Dans ce contexte, on s'intéresse à déterminer l'ensemble des incertitudes maximales admissibles que le système peut supporter sans dégrader la stabilité et les performances.
- Du point de vue de la synthèse : les incertitudes sont considérées *a priori* dès la phase de conception de la loi de commande. Dans ce contexte, des méthodes de synthèse multi-objectifs sont mises en œuvre (cf. thèse de Guilhem Puyou, Airbus-France ONERA, dont le mémoire est à paraître).

La plupart des travaux décrivant des méthodes et techniques d'analyse et de synthèse robuste sont dédiés aux systèmes linéaires :  $\mu$ -analyse et  $\mu$ -synthèse ([182]), synthèse  $H_\infty$ , LQG/ $H_2$ , stabilité quadratique ([26]), etc. Un certain nombre de ces approches peut être étendu lorsque l'on considère des systèmes linéaires soumis à certains types de non-linéarités (non-linéarités de secteur par exemple) ([105], [203] et [204]). Dans le contexte des systèmes non-linéaires, peu de résultats sont disponibles dans la littérature. On peut citer, par exemple, l'analyse de robustesse via l'analyse des bifurcations (cf. §6.1.2), la génération récursive de fonctions de Lyapunov par le backstepping (cf. §6.1.3) ou la commande par régime glissant (cf. §6.1.4).

C'est avec l'objectif de proposer une méthode de commande robuste basée sur l'inversion de la dynamique que nous avons développé la commande RMI (Robust Multi-Inversion).

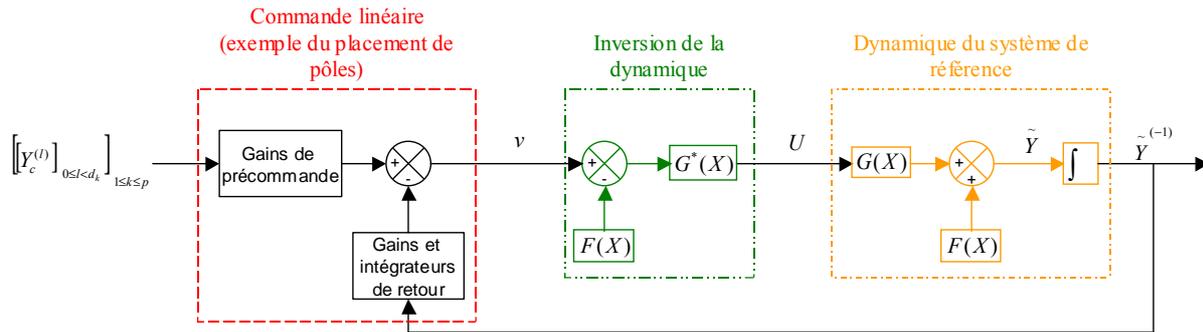
## 2.2.2 Position du problème

Le principe de la commande RMI est de robustifier l'inversion de la dynamique et ainsi de répondre au cahier des charges de la thèse. Nous avons donc cherché à créer une technique de commande adaptée à la commande d'aéronefs dans des phases de vol non-linéaires, générique, robuste aux erreurs de modèles (en stabilité et en performances) et la plus robuste possible aux non-linéarités d'actionneurs (le problème typique à résoudre dans ce cadre étant celui de l'instabilité due à un intégrateur de précision bouclé sur une limitation en vitesse d'actionneur). Pour cela, nous nous sommes basés sur la technique d'inversion de la dynamique, bien adaptée aux besoins non-linéaires et de généricité mais dépourvue de preuve de stabilité et de performances robustes.

Le principe de la commande RMI est fondé sur la triple constatation suivante :

- Le modèle d'un système est toujours faux par essence.
- La mesure de l'écart entre les comportements du système et de son modèle doit permettre de recalibrer ce modèle en ligne (l'intégrateur de précision, lui, compare le comportement réel du système à la consigne qui lui est donnée).
- Le moyen usuel d'assurer la précision d'un système corrigé est l'intégrateur de précision. Néanmoins, celui-ci impacte fortement les marges de stabilité du système et son comportement en régime non-linéaire est problématique (forts risques d'instabilité).

La définition de la technique d'inversion de la dynamique proposée dans la littérature et présentée plus haut (§2.1.2.2.4) est basée sur les hypothèses d'un modèle parfait. Le schéma de commande associé est alors le suivant :



*2.2.2.a : Boucle de commande non-linéaire inverse dans le cadre d'un modèle parfait*

Soit un système idéalement modélisé par une représentation d'état non linéaire-affine (1) dont les équations entrées-sorties, obtenues par dérivations successives de ses sorties, peuvent se mettre sous la forme (2). Le comportement entrées-sorties du système étudié est donc décrit par un jeu de vecteurs de fonctions non-linéaires  $(F, G)$ . Considérons maintenant que nous disposons d'un modèle  $(F_m, G_m)$  du système décrit par  $(F, G)$ , entaché d'erreurs notées  $\Delta_m(X, U)$  et représentant pour nous la dynamique entrées-sorties d'un avion de transport commercial de type Airbus.  $F_m, G_m$  et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux doivent être bornées pour tout  $X$  du domaine de fonctionnement (ce qui implique la bornitude de  $\Delta_m$  et de ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux). On a alors :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_m &= F_m(X) + G_m(X).U \\ &= F(X) + G(X).U + \Delta_m(X, U) \end{aligned} \tag{10}$$

et le système (2) peut être réécrit de la manière suivante :

$$\begin{aligned} \tilde{Y} &= F(X) + G(X).U \\ &= F_m(X) + G_m(X).U - \Delta_m(X, U) \end{aligned}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

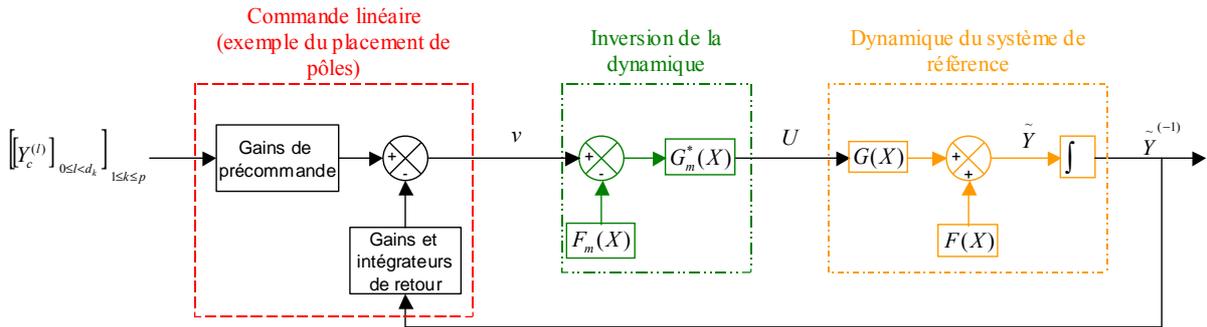
Le retour d'état réellement synthétisé, basé sur le modèle du système, est alors le suivant :

$$U(X) = G_m^*(X).(v(X) - F_m(X))$$

ce qui mène à découpler et linéariser réellement le modèle du système et non le système lui-même :

$$\begin{cases} \tilde{Y} = F(X) + G(X).G_m^*(X).(v(X) - F_m(X)) \\ \tilde{Y}_m = v(X) \end{cases}$$

Le schéma de commande associé à ce problème devient donc le suivant :



*2.2.2.b : Boucle de commande non-linéaire inverse dans le cadre d'un modèle imparfait*

Pour solutionner le problème de la robustesse à l'erreur de modèle, on se propose de définir une représentation entrées-sorties "estimée" du système (1), nommée "système RMI" :

$$\begin{aligned} \tilde{Y}_{RMI} &= F_m(X) + G_m(X).U - \Delta_{RMI} \\ &= F(X) + G(X).U + \Delta_m(X, U) - \Delta_{RMI} \end{aligned}$$

basée sur un observateur original de l'erreur de modèle :

$$\begin{aligned} \Delta_{RMI} &= \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int (\tilde{Y}_{RMI} - \tilde{Y}) dt \\ &= \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int (\Delta_m(X, U) - \Delta_{RMI}) dt \end{aligned} \tag{11}$$

avec :

$$\text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} = \begin{bmatrix} 1/\tau_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1/\tau_p \end{bmatrix}$$

Le système RMI est ensuite inversé. Pour ce faire, on définit la commande suivante :

$$U(X, \Delta_{RMI}) = G_m^*(X).(v(X) - F_m(X) + \Delta_{RMI}) \tag{12}$$

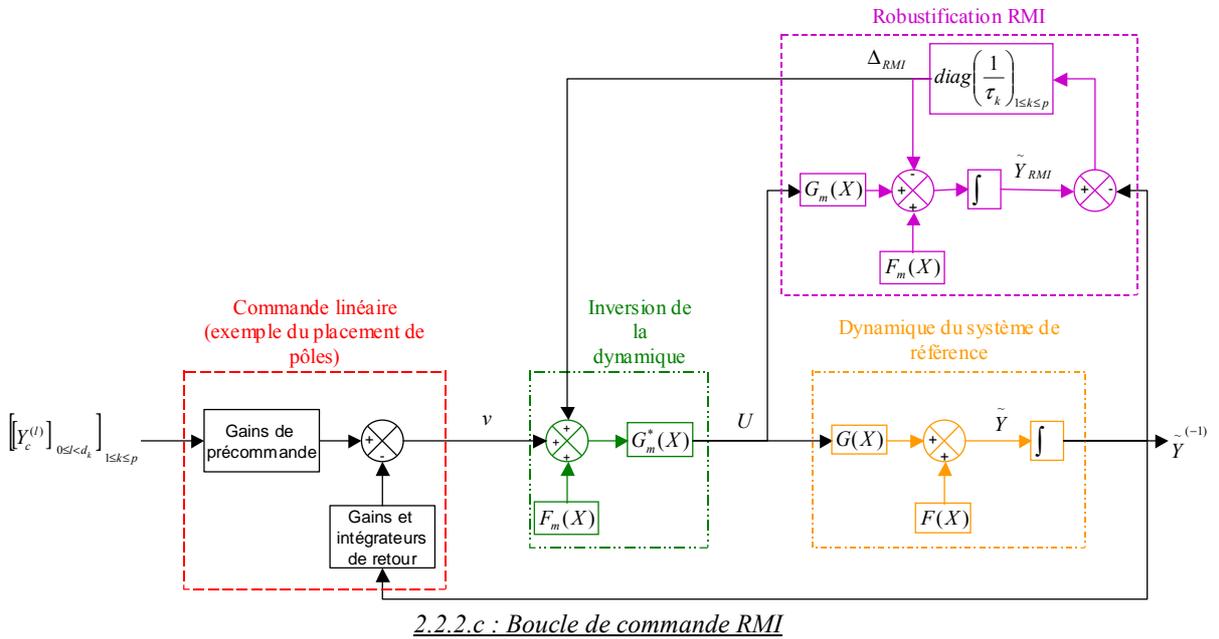
**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Le système (2) associé au système (11) et à la loi de commande (12) forment le système augmenté :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{Y}} = v(X) + \Delta_{RMI} - \Delta_m(X, U(X, \Delta_{RMI})) \\ \Delta_{RMI} = \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} \cdot (\Delta_m(X, U(X, \Delta_{RMI})) - \Delta_{RMI}) \end{cases} \quad (13)$$

Avant de passer à la démonstration formelle de la stabilité et performances robustes du RMI, il paraît assez intuitif que, si les  $\tau_k$  sont suffisamment petits,  $\Delta_{RMI}$  converge vers  $\Delta_m$  et implique la convergence de  $\tilde{Y}$  vers  $v$ . Malgré l'erreur de modèle, on linéarise ainsi asymptotiquement le système à commander. Dès lors, l'absence de besoin d'intégrateur de précision apparaît assez naturelle.

La boucle de commande résultante se présente sous la forme ci-dessous :



On peut exprimer le système (13) de manière plus détaillée en écrivant :

$$\Delta_m(X, U) = (F_m - F)(X) + (G_m - G)(X).U = \Delta F(X) + \Delta G(X).U$$

soit :

$$\Delta_m(X, U(X, \Delta_{RMI})) = \Delta F(X) + (\Delta G.G_m^*)(X).[(v - F_m)(X) + \Delta_{RMI}]$$

ou encore :

$$\Delta_m(X, U(X, \Delta_{RMI})) = \Delta_m^X(X) + [I_p - (G.G_m^*)(X)]\Delta_{RMI}$$

avec :

$$\Delta_m^X(X) = [\Delta F + \Delta G.G_m^*(v - F_m)](X)$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Dès lors, le système (13) équivaut strictement au système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\tilde{Y}} = v(X) - \Delta_m^X(X) + (G.G_m^*)(X).\Delta_{RMI} \\ \dot{\Delta}_{RMI} = \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} . (\Delta_m^X(X) - (G.G_m^*)(X).\Delta_{RMI}) \end{cases} \quad (14)$$

La formulation du problème étant posée, nous présentons maintenant quelques résultats préliminaires nécessaires à la démonstration de stabilité et de performances robustes du RMI.

### 2.2.3 Résultats préliminaires

**Lemme 1 :** Soit le système décrit par :

$$\dot{z}(t) = (-I + \Gamma(t)).z(t)$$

avec  $\Gamma(t)$  vérifiant :

$$\Gamma'(t).\Gamma(t) \leq \alpha.I, \quad 0 < \alpha < 1$$

Ce système est uniformément asymptotiquement stable.

**Démonstration :** Considérons la fonction de Lyapunov candidate :

$$\Lambda(z) = \alpha.z'.z$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \dot{\Lambda}(z) &= \alpha.z'. [(-I + \Gamma)' + (-I + \Gamma)].z \\ &= \alpha.z'. [-2.I + \Gamma' + \Gamma].z \\ &\leq \alpha.z'. [-2.I + \Gamma'.\Gamma + I].z \\ &\leq \alpha.(\alpha - 1).z'.z \\ &< 0 \end{aligned}$$

Le système étudié est donc bien uniformément asymptotiquement stable.

On a aussi le résultat suivant, qui garantie la stabilité des systèmes singulièrement perturbés et proposé par Khalil ([108]).

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

**Théorème 1 :** *Considérons le système singulièrement perturbé*

$$\dot{x} = f(t, x, z, \varepsilon) \quad (15)$$

$$\varepsilon \cdot \dot{z} = g(t, x, z, \varepsilon) \quad (16)$$

*Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites pour*

$$(t, x, \varepsilon) \in [0, \infty[ \times B_\tau \times [0, \varepsilon_0]$$

a)  $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$  et  $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$ .

b) *L'équation*

$$0 = g(t, x, z, 0)$$

*a une racine isolée  $z=h(t,x)$  telle que  $h(t,0)=0$ .*

c) *Les fonctions  $f, g, h$  et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux sont bornées pour  $z-h(t,x) \in B_\rho$*

d) *L'origine du système réduit*

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$$

*est simplement (resp. asymptotiquement, resp. exponentiellement) stable.*

e) *L'origine du système limite*

$$\frac{dy}{d\tau} = g(t, x, y + h(t, x), 0)$$

*est stable, uniformément sur  $(t,x)$ .*

*Il existe alors  $\varepsilon^* > 0$  tel que pour tout  $\varepsilon < \varepsilon^*$ , l'origine du système  $\{(15), (16)\}$  est simplement (resp. asymptotiquement, resp. exponentiellement) stable.*

Tout système vérifiant ce théorème peut être mis sous la forme réduite suivante :

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$$

La dynamique en  $z$  est alors négligée et nommée "dynamique limite".

La proposition suivante concerne les propriétés de stabilité et de performances robustes des lois de commande RMI face aux incertitudes de modélisation.

## 2.2.4 Propriétés de stabilité et de performances robustes du RMI

**Proposition :** Soit un système admettant (1) pour représentation d'état non-linéaire affine et (2) comme équations entrées-sorties. Ce système est inversé par une loi de commande de type RMI (12), basée sur un modèle imparfait (10). Le système inversé est un système augmenté de type (14) exhibant une nouvelle variable d'entrée  $v$ . Il peut contenir des dynamiques internes simplement (resp. asymptotiquement, resp. exponentiellement) stables. La valeur de  $v$  est définie par une loi de commande linéaire exponentiellement stabilisante sous l'hypothèse d'une inversion parfaite (4) (par exemple une loi de type (5)).

Supposons que les hypothèses suivantes sont satisfaites pour tout  $X$  appartenant au domaine de fonctionnement du système:

- i)  $F, G, F_m$  et  $G_m$  et leurs dérivées partielles jusqu'à l'ordre deux sont bornées
- ii)  $G_m^{*'} \cdot \Delta G' \cdot \Delta G \cdot G_m^* (X) \leq \alpha I, 0 < \alpha < 1$

Il existe alors  $\tau_k^* > 0$  tel que pour tout  $\tau_k < \tau_k^*$ , ce système est simplement (resp. asymptotiquement, resp. exponentiellement) stable ou exponentiellement stable s'il ne présente pas de dynamique interne, et le système inversé (14) admet (4) comme représentation réduite.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

**Démonstration** : Pour rendre la démonstration de la stabilité de la commande RMI plus appliquée, on prend  $v$  défini comme précédemment (5). Néanmoins, tout autre type de commande exponentiellement stabilisante dans l'hypothèse d'une inversion parfaite ne changerait en aucun cas le principe de la démonstration. En posant  $\eta = \Delta_{RMI}$  et  $\varepsilon = \text{diag}(\tau_k)$ , on obtient une reformulation du système (1) de type :

$$\begin{aligned}
 & \left[ \begin{array}{c} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{d_1-1} \\ \dot{\xi}_{d_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l - 1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l - 1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot \xi_{d_1} - \dots + C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot (Y_{1c} - \xi_1) - \Delta_{m1}^\xi(\xi) + (G_1 \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot \xi_{d_k} - \dots + C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot \left( Y_{kc} - \xi_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \right) - \Delta_{mk}^\xi(\xi) + (G_k \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 2} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots + C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot \left( Y_{pc} - \xi_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} \right) - \Delta_{mp}^\xi(\xi) + (G_p \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta \end{array} \right] \\
 & \varepsilon \cdot \dot{\eta} = \Delta_m^\xi(\xi) - (G \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta
 \end{aligned} \tag{17}$$

dans le cas où il n'y a pas de dynamiques internes.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Pour simplifier cette expression, on a choisi de noter :

$$\Delta_m^\xi(\xi) = \Delta_m^X(\phi(\xi))$$

Dans le cas où le système augmenté (17) présente des dynamiques internes, on a alors :

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{\xi}_1 \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{d_1-1} \\ \dot{\xi}_{d_1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l - 1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l - 1} \\ \dot{\xi}_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ \dot{\xi}_{1 + \sum_{l=1}^p d_l} \\ \vdots \\ \dot{\xi}_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot \xi_{d_1} - \dots + C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot (Y_{1c} - \xi_1) - \Delta_{m1}^\xi(\xi) + (G_1 \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot \xi_{d_k} - \dots + C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot \left( Y_{kc} - \xi_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \right) - \Delta_{mk}^\xi(\xi) + (G_k \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 2} \\ \vdots \\ \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot \xi_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots + C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot \left( Y_{pc} - \xi_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} \right) - \Delta_{mp}^\xi(\xi) + (G_p \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta \\ f_{1 + \sum_{l=1}^p d_l}(t, \xi) \\ \vdots \\ f_n(t, \xi) \end{array} \right] \quad (18)$$

$$\varepsilon \cdot \eta = \Delta_m^\xi(\xi) - (G \cdot G_m^*)(\phi(\xi)) \cdot \eta$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Afin d'exprimer les systèmes (17) et (18) en conformité avec le théorème de Khalil, on pose  $\xi = \varphi(x)$  :

$$\begin{cases} x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k} = \xi_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k} - Y_{k_c} \\ x_{j \neq \sum_{l=1}^k d_l - d_k} = \xi_j \end{cases}$$

Ceci nous permet de définir la notation suivante :

$$\Delta_m^x(x) = \Delta_m^\xi(\varphi(x))$$

En utilisant cette notation ainsi que l'hypothèse *ii*) nous garantissant l'inversibilité de  $G.G_m^*$ , on pose le changement de variable  $\eta = \psi(z)$  suivant :

$$z = \eta - (G.G_m^*)^{-1}(\phi(\varphi(x)))\Delta_m^x(x)$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Le système (17) ayant subi ce changement de variable se réécrit de la manière suivante :

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{d_1-1} \\ \dot{x}_{d_1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^k d_l - 1} \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^p d_l - 1} \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^p d_l} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x_2 \\ \vdots \\ x_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot x_{d_1} - \dots - C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot x_1 + (G_1 \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 2} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot x_{d_k} - \dots - C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} + (G_k \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 2} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot x_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots - C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} + (G_p \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z \end{array} \right] = f(t, x, z, \varepsilon)$$

$$\varepsilon \cdot z = -(G \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z - \varepsilon \cdot \frac{d \left[ (G \cdot G_m^*)^{-1} (\phi(\varphi(x))) \Delta_m^x(x) \right]}{dt} = g(t, x, z, \varepsilon) \tag{19}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Quant au système (18), il peut lui aussi se réécrire tel que :

$$\left[ \begin{array}{c} \vdots \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{d_1-1} \\ x_{d_1} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_{l-1}} \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_{l-1}} \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ x_{1+\sum_{l=1}^p d_l} \\ \vdots \\ x_n \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x_2 \\ \vdots \\ x_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot x_{d_1} - \dots - C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot x_1 + (G_1 \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 2} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot x_{d_k} - \dots - C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} + (G_k \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 2} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot x_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots - C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} + (G_p \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z \\ f_{1+\sum_{l=1}^p d_l} \\ \vdots \\ f_n(t, x) \end{array} \right] = f(t, x, z, \varepsilon) \quad (20)$$

$$\varepsilon \cdot z = -(G \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \cdot z - \varepsilon \cdot \frac{d \left[ (G \cdot G_m^*)^{-1} (\phi(\varphi(x))) \cdot \Delta_m^x(x) \right]}{dt} = g(t, x, z, \varepsilon)$$

Avec ces différents changements de variable, les systèmes (19) et (20) vérifient trivialement l'hypothèse *a*) du théorème de Khalil, à savoir  $f(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$  et  $g(t, 0, 0, \varepsilon) = 0$ .

Par ailleurs, l'équation  $g(t, x, z, 0) = 0$  admet une racine unique  $h(t, x) = 0$  correspondant à l'équation  $\Delta_{RMI} = \Delta_m$ . On vérifie donc l'hypothèse *b*).

L'hypothèse *i*) de notre proposition impose que l'hypothèse *c*) soit elle aussi vérifiée ( $f$ ,  $g$ ,  $h$  et leur dérivées partielles jusqu'à l'ordre 2 sont bornées lorsque  $z=h$  appartient à une petite boule centrée sur zéro). Ceci est évident pour  $f$ ,  $g$  et  $h$  et les dérivées partielles de  $h(=0)$ . Pour les dérivées partielles correspondant à un système (1) de départ non-linéaire affine quelconque, cette hypothèse reste à vérifier. Cependant, dans notre cadre applicatif comme dans la plupart des systèmes physiques utilisés dans des domaines de fonctionnement dépourvus de singularité, cette hypothèse est vraie.

L'hypothèse *d*) concerne la stabilité de  $f(t, x, h, 0)$ . Comme  $h$  est identiquement nulle, cela revient à démontrer la stabilité de  $f(t, x, 0, 0)$  dans le cas où  $\Delta_{RMI} = \Delta_m$ , i.e. dans le cas où on a affaire à une inversion de la dynamique parfaite (4). Sachant que le système parfait présente une dynamique linéaire placée pour être exponentiellement stable et une éventuelle dynamique interne stable, cette hypothèse est automatiquement vérifiée.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Enfin, en posant  $y=z-h$  et  $\tau=t/\varepsilon$  on définit un système dont on doit prouver la stabilité uniforme pour vérifier l'hypothèse  $e$ ). Or  $h$  étant identiquement égal à 0, ce système est strictement équivalent à :

$$\frac{dy}{d\tau} = \left[ -I_p + (\Delta G \cdot G_m^*) (\phi(\varphi(x))) \right] y$$

Ceci est stable d'après l'hypothèse  $ii$ ) et le lemme 1. Il est important de noter que, dans le cas linéaire invariant, l'hypothèse " $M=-G \cdot G_m^*$  est Hurwitz" peut remplacer  $ii$ ). Cette hypothèse reste une condition nécessaire de stabilité dans le cas non-linéaire affine. Les conséquences de l'hypothèse  $ii$ ) sur l'erreur  $\Delta G$  maximale admissible peuvent être évaluées. En effet, cette hypothèse implique d'avoir une matrice d'erreur  $\Delta G$  telle que  $G_m^* \cdot \Delta G' \cdot \Delta G \cdot G_m^* < I_p$ . Exprimons donc ce produit progressivement, élément par élément :

$$\begin{aligned} \Delta G' \Delta G &= \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{p1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{1m} & \cdots & \Delta_{pm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta_{11} & \cdots & \Delta_{1m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{p1} & \cdots & \Delta_{pm} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \Delta_{i1}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{im} & \cdots & \sum_{i=1}^p \Delta_{im}^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dès lors, on peut calculer :

$$\begin{aligned} \Delta G' \Delta G \cdot G_m^* &= \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^p \Delta_{i1}^2 & \cdots & \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{im} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{im} & \cdots & \sum_{i=1}^p \Delta_{im}^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \cdots & \Theta_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{m1} & \cdots & \Theta_{mp} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{j1} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{ij} \right) & \cdots & \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{jp} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{ij} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{j1} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{im} \cdot \Delta_{ij} \right) & \cdots & \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{jp} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{im} \cdot \Delta_{ij} \right) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Notons que les éléments de  $G_m^*$ , notés  $\Theta$ , sont disponibles car utilisés pour le calcul de la loi de commande non-linéaire inverse de base.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Enfin, on a :

$$G_m^* \Delta G' \Delta G G_m^* = \begin{bmatrix} \Theta_{11} & \dots & \Theta_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \Theta_{1p} & \dots & \Theta_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{j1} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{ij} \right) & \dots & \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{jp} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{i1} \cdot \Delta_{ij} \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{j1} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{im} \cdot \Delta_{ij} \right) & \dots & \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{jp} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{im} \cdot \Delta_{ij} \right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{k=1}^m \left( \Theta_{k1} \cdot \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{j1} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} \cdot \Delta_{ij} \right) \right) & \dots & \sum_{k=1}^m \left( \Theta_{k1} \cdot \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{jp} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} \cdot \Delta_{ij} \right) \right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{k=1}^m \left( \Theta_{kp} \cdot \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{j1} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} \cdot \Delta_{ij} \right) \right) & \dots & \sum_{k=1}^m \left( \Theta_{kp} \cdot \sum_{j=1}^m \left( \Theta_{jp} \cdot \sum_{i=1}^p \Delta_{ik} \cdot \Delta_{ij} \right) \right) \end{bmatrix}$$

qui est une matrice symétrique. Soit  $\Delta \geq 0$  tel que, quel que soit  $0 < i \leq p$  et  $0 < j \leq m$ ,  $|\Delta_{ij}| \leq \Delta$ . On a alors :

$$G_m^* \Delta G' \Delta G G_m^* \leq \begin{bmatrix} p \cdot \Delta^2 \cdot \sum_{k=1}^m \left( |\Theta_{k1}| \cdot \sum_{j=1}^m |\Theta_{j1}| \right) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & p \cdot \Delta^2 \cdot \sum_{k=1}^m \left( |\Theta_{k2}| \cdot \sum_{j=1}^m |\Theta_{j2}| \right) & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & p \cdot \Delta^2 \cdot \sum_{k=1}^m \left( |\Theta_{km}| \cdot \sum_{j=1}^m |\Theta_{jm}| \right) \end{bmatrix}$$

L'hypothèse ii) est donc vérifiée si :

$$p \cdot \Delta^2 \cdot \max_{0 < i \leq m} \left( \sum_{k=1}^m \left( |\Theta_{ki}| \cdot \sum_{j=1}^m |\Theta_{ji}| \right) \right) < 1$$

ou encore :

$$p \cdot \Delta^2 \cdot \max_{0 < i \leq m} \left( \left( \sum_{j=1}^m |\Theta_{ji}| \right)^2 \right) < 1$$

L'erreur maximale  $\Delta$  admissible sur les éléments du modèle  $G_m$  de la matrice  $G$  est donc définie par :

$$\Delta < \frac{1}{\sqrt{p} \cdot \max_{0 < i \leq m} \left( \sum_{j=1}^m |\Theta_{ji}| \right)}$$

Notons que, dans le cas monovariante, la stabilité et les performances robustes du RMI ne nécessitent donc qu'une erreur de modélisation inférieure à 100% en valeur absolue!

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

On a ainsi vérifié toutes les hypothèses du théorème de Khalil et donné des conditions sur les erreurs de modélisation maximales admissibles. Le système  $\{(17),(16)\}$  admet donc comme représentation réduite:

$$\left[ \begin{array}{c} \dot{x}_1 \\ \vdots \\ \dot{x}_{d_1-1} \\ \dot{x}_{d_1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^k d_l - 1} \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} \\ \vdots \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^p d_l - 1} \\ \dot{x}_{\sum_{l=1}^p d_l} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} x_2 \\ \vdots \\ x_{d_1} \\ -C_{d_1}^1 \cdot \omega_1 \cdot x_{d_1} - \dots - C_{d_1}^{d_1} \cdot \omega_1^{d_1} \cdot x_1 \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 2} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^k d_l} \\ -C_{d_k}^1 \cdot \omega_k \cdot x_{d_k} - \dots - C_{d_k}^{d_k} \cdot \omega_k^{d_k} \cdot x_{\sum_{l=1}^k d_l - d_k + 1} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 2} \\ \vdots \\ x_{\sum_{l=1}^p d_l} \\ -C_{d_p}^1 \cdot \omega_p \cdot x_{\sum_{l=1}^p d_l} - \dots - C_{d_p}^{d_p} \cdot \omega_p^{d_p} \cdot x_{\sum_{l=1}^p d_l - d_p + 1} \end{array} \right] = f(t, x, h(t, x), 0)$$

dans le cas où il ne comporte pas de dynamiques internes et :



## 2.2.5 Commentaires

La loi de commande obtenue avec RMI (12) peut aussi s'écrire comme suit :

$$U = G_m^*(X) \cdot \left( v - F_m(X) + \text{diag} \left( \frac{1}{\tau_k} \right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int \left( \tilde{Y}_{RMI} - \tilde{Y} \right) dt \right)$$

On peut noter que, dans le cas d'une commande avec intégrateur de précision classique, on aurait plutôt la commande suivante :

$$U = G_m^*(X) \cdot \left( v - F_m(X) + \text{diag} \left( \frac{1}{\tau_k} \right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int \dots \int \left( \tilde{Y}_c - \tilde{Y} \right) dt \dots dt \right)$$

où  $\tilde{Y}_c$  est la sortie désirée du système ramenée à un ordre de dérivation égal à son degré relatif ( $d_k$ ). Dans ce cas, non seulement le degré d'intégration est supérieur à l'ordre nécessaire pour la commande (perte de marges de stabilité) mais en plus, on est sensible à des non-linéarités d'actionneur puisqu'on intègre la différence entre la sortie du système et sa sortie désirée. L'avantage du RMI est qu'il permet de se restreindre à l'ordre d'intégration minimum nécessaire tout en intégrant la différence entre la sortie du système et la sortie de son modèle.

Quelques commentaires supplémentaires peuvent être formulés :

- Cette commande n'est pas une commande adaptative. Il est donc nécessaire de posséder un modèle de base.
- Il s'agit de robustification *a posteriori* d'une loi classique sans intégrateur de précision. Il faut donc disposer d'une première loi classique et fonctionnelle.
- On ne procède à aucune répartition de l'intégrale entre  $F_m$  et  $G_m$ . On pourrait peut-être ainsi repousser les limites de la robustesse de ce type de solution.

Les principaux avantages de cette technique sont :

- Insensibilité relative aux non-linéarités et dynamiques négligées des dispositifs de commande.
- Robustesse importante aux erreurs de modèle.
- Simplicité de mise en œuvre (une fois la commande linéarisante et découplante synthétisée).

En parallèle, certains inconvénients sont à noter :

- Nécessité d'avoir accès à la valeur de la commande  $U$  (c'est le cas de notre problème industriel).
- Compromis à trouver entre la rapidité de la boucle RMI et l'erreur de modèle.
- Nécessité de posséder une mesure fiable peu bruitée de la dérivée d'ordre  $d_k-1$  des sorties régulées (mesure nécessaire de toute manière pour le placement de pôles mais la qualité de cette mesure est plus cruciale dans le cas RMI puisque le « recalage » du modèle en dépend, ainsi que de la mesure de  $U$ ). En effet, il faut garder en mémoire que le RMI se base sur un observateur d'erreur de modèle à grand gain.

## 2.2.6 Robustesse aux dynamiques des actionneurs : de la nécessité de mesurer $U$

Supposons qu'on a toujours les équations suivantes :

$$\begin{cases} \tilde{Y} = F(X) + G(X).U \\ \tilde{Y}_m = F_m(X) + G_m(X).U = F(X) + G(X).U + \Delta_m \\ \tilde{Y}_{RMI} = F_m(X) + G_m(X).U - \Delta_{RMI} = F(X) + G(X).U + \Delta_m - \Delta_{RMI} \end{cases}$$

L'actionneur est ici considéré comme mal modélisé (partie linéaire mal modélisée ou saturations). On a alors :

$$U_c = G_m^*(X).(v - F_m(X))$$

dans le cas non-linéaire inverse classique, ou :

$$U_c = G_m^*(X).(v - F_m(X) + \Delta_{RMI})$$

dans le cas RMI. Dans les deux cas, on note :

$$U = U_c + \Delta U$$

Ainsi, dans le cas du contrôle non-linéaire classique avec intégrateur de précision, même en supposant que la modélisation paramétrique du système est parfaite ( $F_m = F$  et  $G_m = G$ ), on a :

$$U_c = G^*(X).(v - F(X))$$

En utilisant la notation suivante :

$$U_c = G^*(X).(v_{\text{sans intégrateur de précision}} - F(X) + v_{\text{intégrateur de précision}})$$

on peut réécrire la commande :

$$U_c = G^*(X) \cdot \left( v_{\text{sans intégrateur de précision}} - F(X) + \text{diag} \left( \frac{1}{\tau_k} \right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int \cdots \int (\tilde{Y}_c - \tilde{Y}) \cdot dt \cdots dt \right)$$

d'où :

$$\begin{aligned} & \tilde{Y} = F(X) \\ & + G(X) \cdot \left\{ G^*(X) \cdot \left[ v_{\text{sans intégrateur de précision}} - F(X) + \text{diag} \left( \frac{1}{\tau_k} \right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int \cdots \int (\tilde{Y}_c - \tilde{Y}) \cdot dt \cdots dt \right] + \Delta U \right\} \end{aligned}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

soit :

$$\tilde{Y} = v_{\text{sans int\`egrateur de pr\`ecision}} + \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int \dots \int (\tilde{Y}_c - \tilde{Y}) dt \dots dt + G(X) \cdot \Delta U \quad (21)$$

Cela signifie que le placement de p\`ole que l'on souhaite r\`ealiser par l'interm\`ediaire de  $v$  est impossible. De plus, l'int\`egrateur contenu dans la loi va \^etre surcharg\`e par la pr\`esence de  $\Delta U$ , ce qui peut mener \`a une instabilit\`e du syst\`eme global.

Ceci peut \^etre f\`acheux dans le cas d'une saturation en position ou en vitesse, o\`u  $U$  ou sa d\`eriv\`ee est fix\`ee. Dans ce cas, l'int\`egrateur de pr\`ecision se charge selon l'\`equation (21). Puis, lorsque l'on sort de la saturation ( $\Delta U=0$ ), l'int\`egrateur est surcharg\`e et doit donc se d\`echarger avant d'atteindre l'\`equilibre, d'o\`u l'apparition de ph\`enom\`enes suivants :

- sorties de saturation avec d\`epassements ou collage,
- cycles limites,
- voire instabilit\`e.

Dans le cas de la commande RMI, en supposant comme pr\`ecedemment que la mod\`elisation param\`etrique du syst\`eme est parfaite ( $F_m=F$  et  $G_m=G$ ), on a :

$$\begin{aligned} U_c &= G_m^*(X) \cdot \left( v - F_m(X) + \text{diag}\left(\frac{1}{\tau_k}\right)_{1 \leq k \leq p} \cdot \int (\tilde{Y}_{RMI} - \tilde{Y}) dt \right) \\ &= G^*(X) \cdot (v - F(X)) \end{aligned} \quad (22)$$

Soit :

$$\tilde{Y} = v + G(X) \cdot \Delta U$$

Cela signifie l\`a aussi que le placement de p\`ole que l'on souhaite r\`ealiser par l'interm\`ediaire de  $v$  est impossible. Mais par contre, il n'y a plus d'int\`egrateur de pr\`ecision dans la loi, donc pas de surcharge... Ceci ne pose aucun probl\`eme particulier de sortie de saturation car d'apr\`es l'\`equation (22), on revient dans le cadre lin\`eaire classique de notre placement de p\`ole d\`esir\`e d\`es que l'on sort de la saturation ( $\Delta U=0$ ).

A noter que ces r\`esultats sont aussi valables dans le cadre d'une dynamique actionneur lin\`eaire mal mod\`elis\`ee o\`u l'on s'affranchira de la m\^eme mani\`ere de d\`epassements ou collages intempestifs, voire d'instabilit\`es.

Dans la partie suivante, ces r\`esultats sont illustr\`es par quelques simulations.

## 2.2.7 Exemples illustratifs

### 2.2.7.1 Exemple introductif : Robustesse \`a l'erreur de mod\`ele pour diff\`erents types de lois de commande non-lin\`eaires bas\`ees sur l'inversion de la dynamique

On prend comme r\`ef\`erence le syst\`eme propos\`e en 2.1.3.5.2 avec sa commande parfaite. Supposons maintenant que le mod\`ele dont nous disposons est incertain (\`a  $\pm 50\%$ ) :

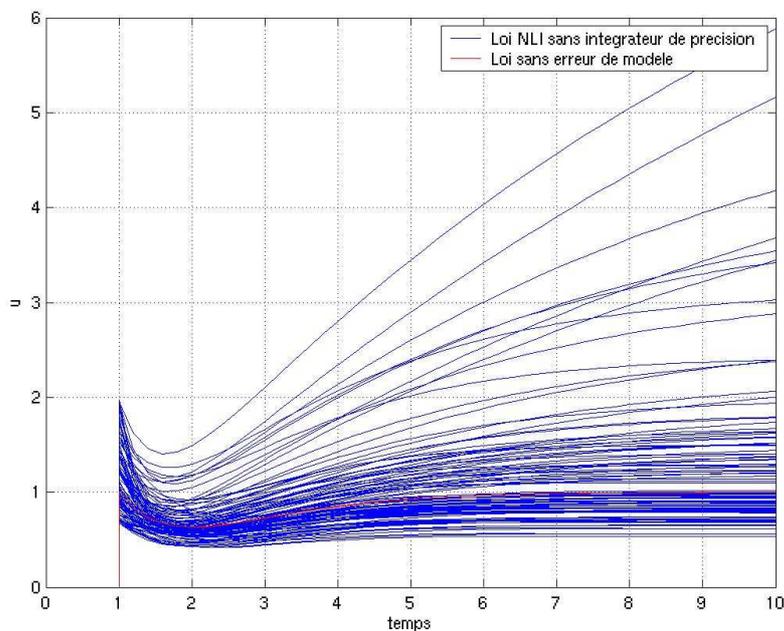
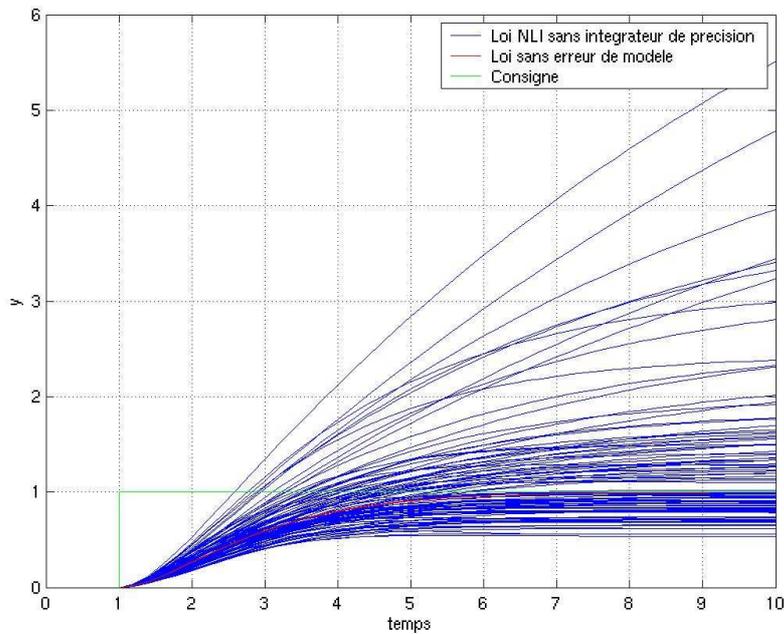
$$\begin{cases} F_m = F + \Delta F \\ G_m = G + \Delta G \end{cases}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

avec  $F$  et  $G$  définis selon (8). Si l'on souhaite imposer pour la sortie un comportement du deuxième ordre sur-amorti avec une pulsation  $\omega=1$ , on peut écrire une loi de commande de type (3) comme suit :

$$U = G_m^* \left( Y_c - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X - F_m \right)$$

Elle donne les résultats suivants :



*2.2.7.1.a : Tracés des résultats d'une loi de commande de type non-linéaire inverse (sans intégrateur de précision) synthétisée à partir d'un modèle incertain à +50%*

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

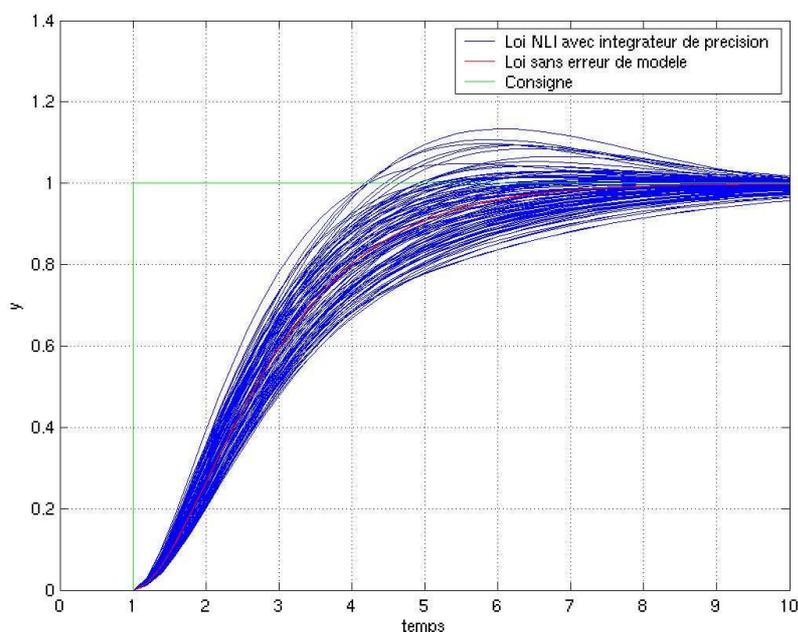
On remarque aisément l'imprécision du système corrigé et, de plus, la variabilité de la forme de la réponse. Le problème de l'imprécision de la loi ne peut être réglé que par l'adjonction d'un intégrateur de précision, dont l'impact sur la loi de commande est par ailleurs doublement négatif :

- déstabilisation potentielle par déphasage,
- à gains équivalents, ralentissement dû au passage à un ordre supérieur (ou à pulsation équivalente, augmentation des gains de la loi).

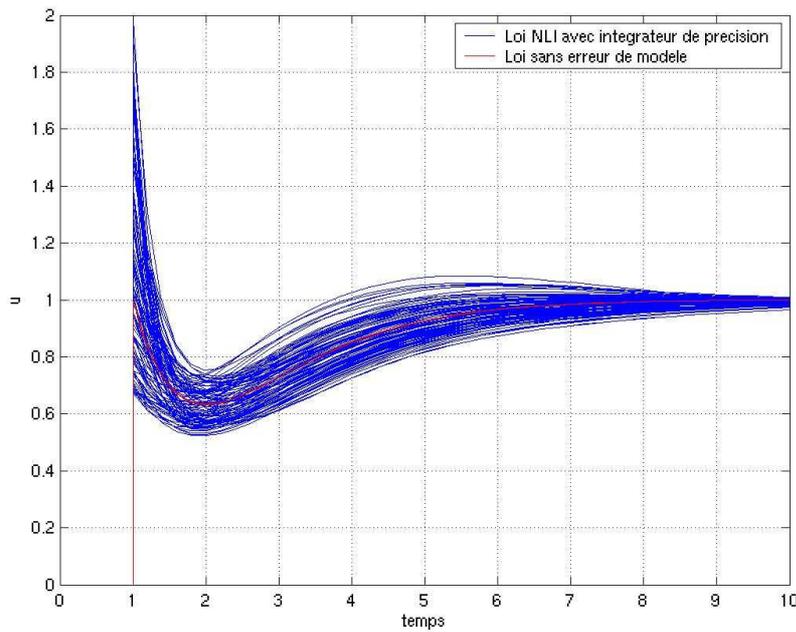
A noter que ces problèmes ne concernent pas que la commande linéarisante par bouclage entrées-sorties mais également toute loi de commande linéaire classique. Ceci n'est pas surprenant, puisque cette technique est communément considérée comme une généralisation des techniques classiques d'automatique linéaire (commande modale par retour d'état par exemple). La loi de commande avec intégrateur de précision devient ainsi par exemple :

$$U = G_m^* \left( Y_c - \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} X + \int (Y_c - [1 \ 0] X) dt - F_m \right)$$

Ceci donne les résultats suivants :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

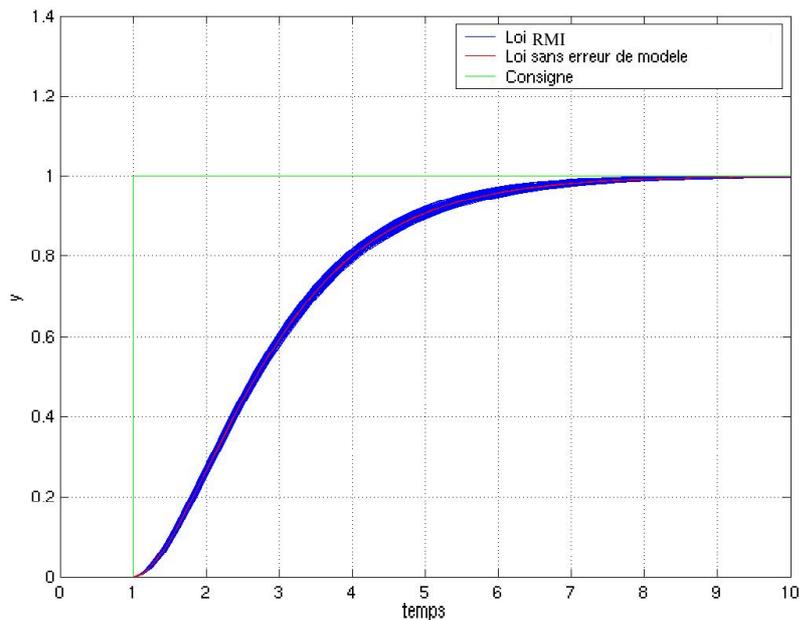


*2.2.7.1.b : Tracés des résultats d'une loi de commande de type non-linéaire inverse (avec intégrateur de précision) synthétisée à partir d'un modèle incertain à +50%*

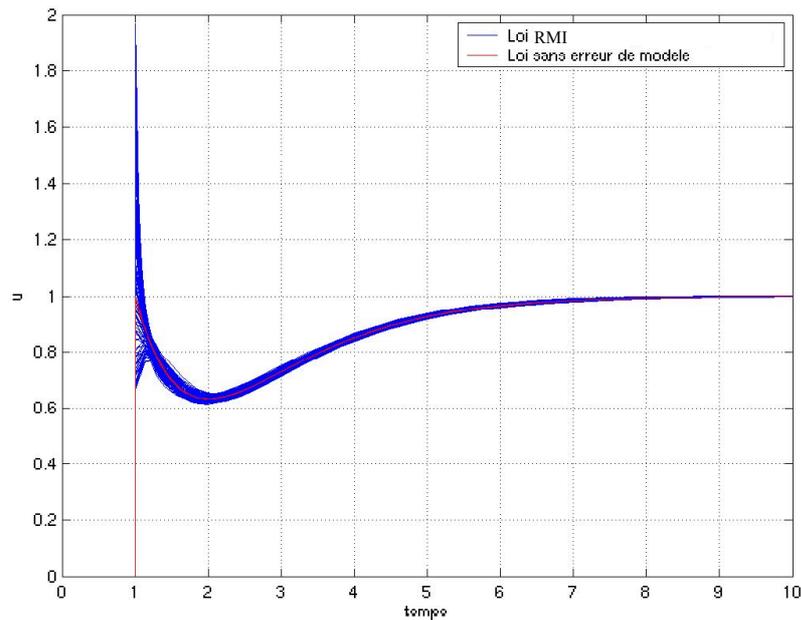
On le voit, l'intégrateur de précision permet de solutionner simplement le problème de l'imprécision des lois de commande. Néanmoins, la variabilité de la réponse peut être augmentée et les marges de stabilité réduites. On peut alors choisir de poser la loi de commande RMI suivante :

$$\begin{cases} U = G_m^* \left( Y_c - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \cdot X - F_m + \Delta_{RMI} \right) \\ \Delta_{RMI} = 8 \cdot \left[ \int (F_m + G_m - \Delta_{RMI}) \cdot dt - \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \right] \end{cases}$$

Dès lors, on obtient le comportement suivant pour le système corrigé :



## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



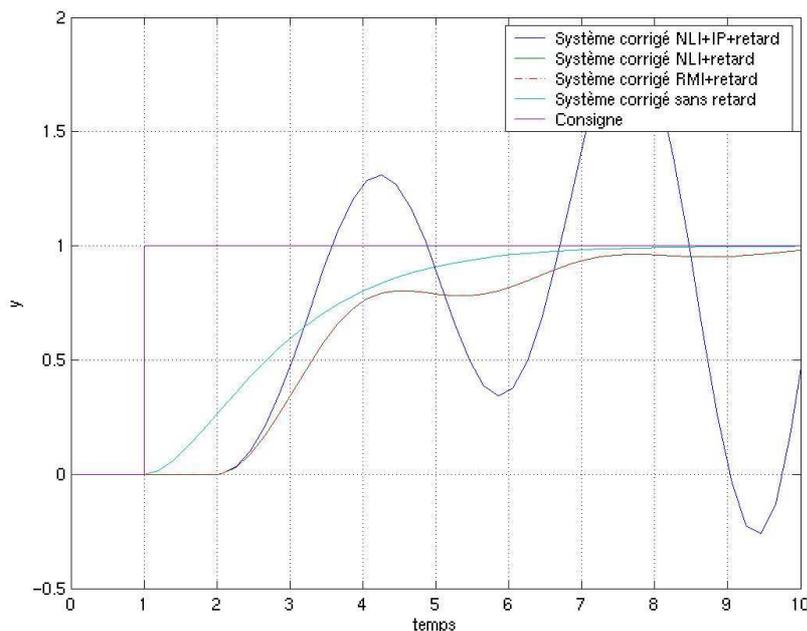
*2.2.7.1.c : Tracés des résultats d'une loi de commande de type RMI synthétisée à partir d'un modèle incertain à  $\pm 50\%$*

Sur cet exemple linéaire, les propriétés de stabilité et performances robustes de la loi de commande RMI apparaissent très clairement. Celles-ci sont absolument comparables dans le cas non-linéaire (cf. §3.3.2).

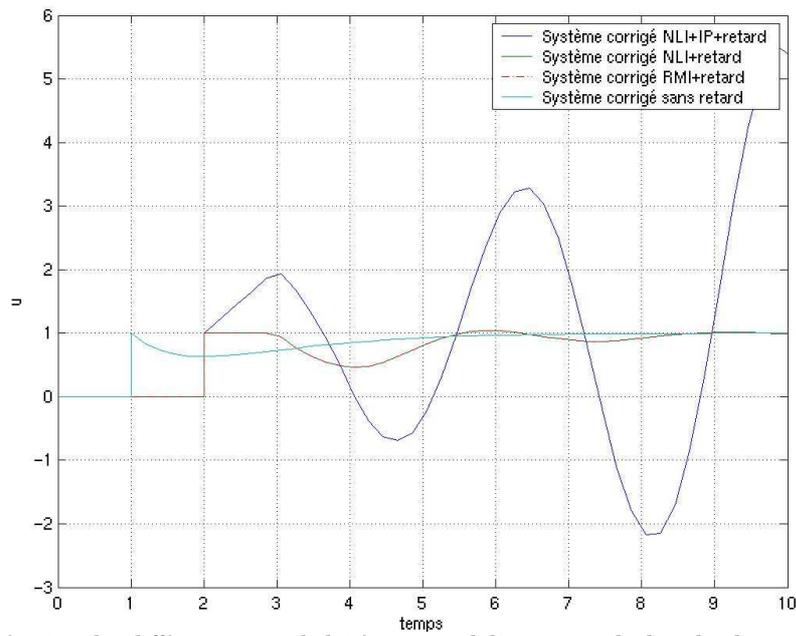
Dans les exemples qui suivent, le système étudié et ses lois de commande sont ceux décrits ici. NLI désigne une loi non-linéaire inverse, IP l'intégrateur de précision et IM les incertitudes multiples.

### 2.2.7.2 Robustesse au retard dans la chaîne de commande

On rajoute un retard d'une seconde entre la consigne de commande et la commande réellement réalisée. On obtient alors le comportement suivant pour la loi :



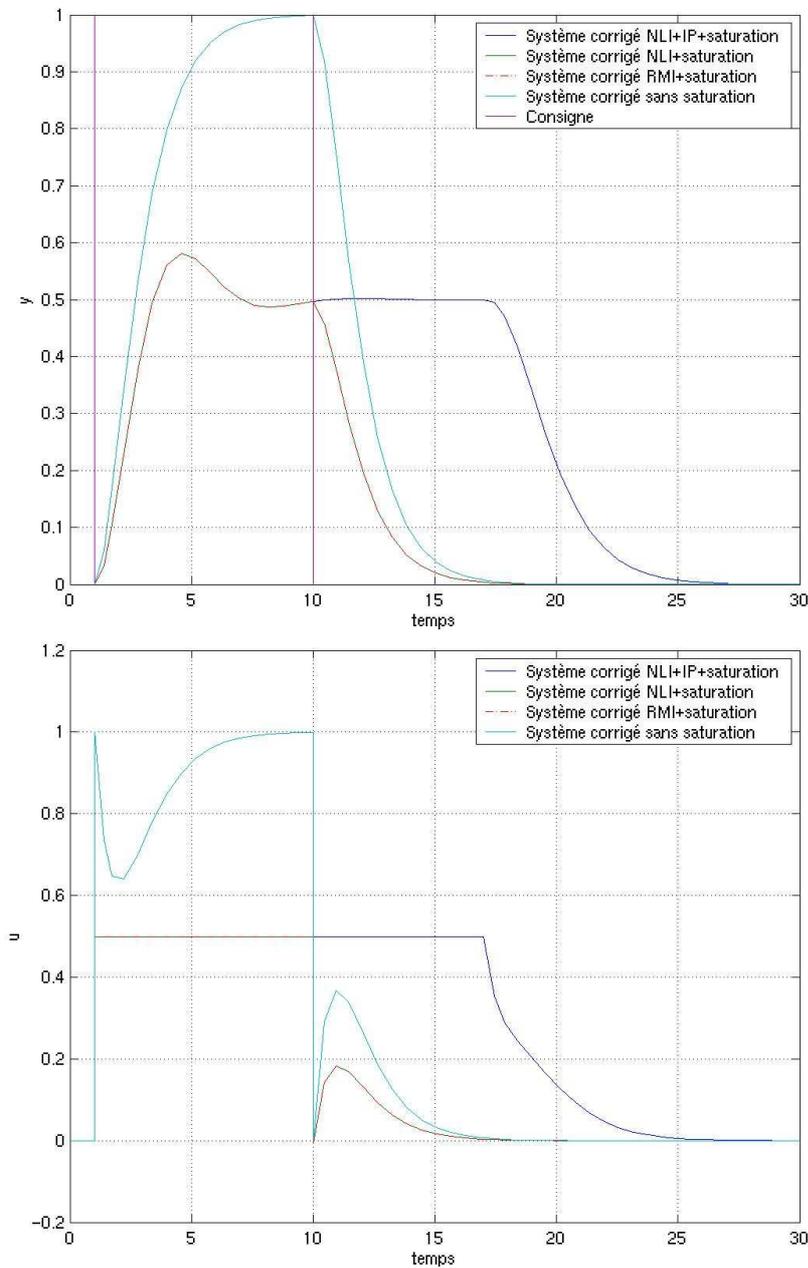
## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



*2.2.7.2.a : Réaction des différents types de loi à un retard d'une seconde dans la chaîne de commande*

Cette simulation met en avant les phénomènes d'instabilité potentiellement liés à l'utilisation d'intégrateurs de précision.

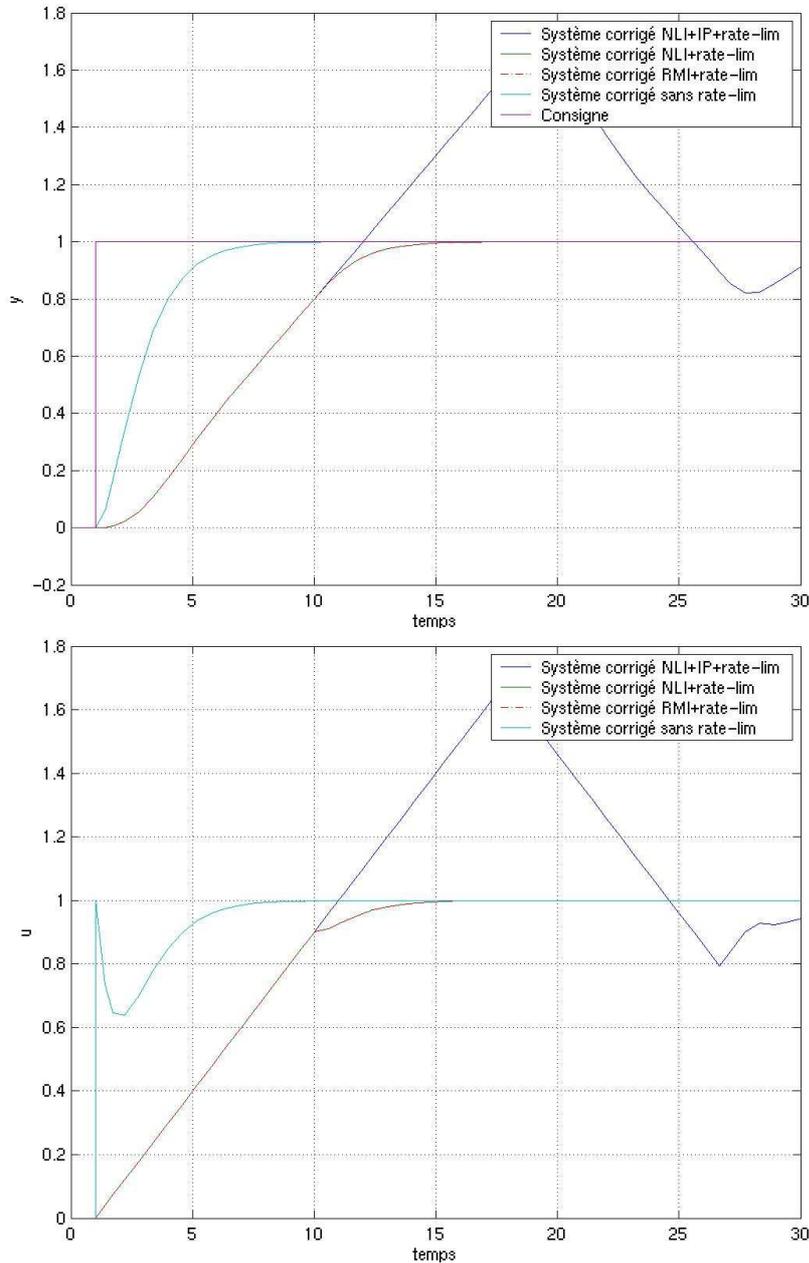
### 2.2.7.3 Robustesse à la saturation en position d'actionneur



*2.2.7.3.a : Réaction des différents types de loi à une saturation en position de la commande en 0.5*

Cette simulation met en avant les phénomènes de « collage » potentiellement liés à l'utilisation d'intégrateurs de précision.

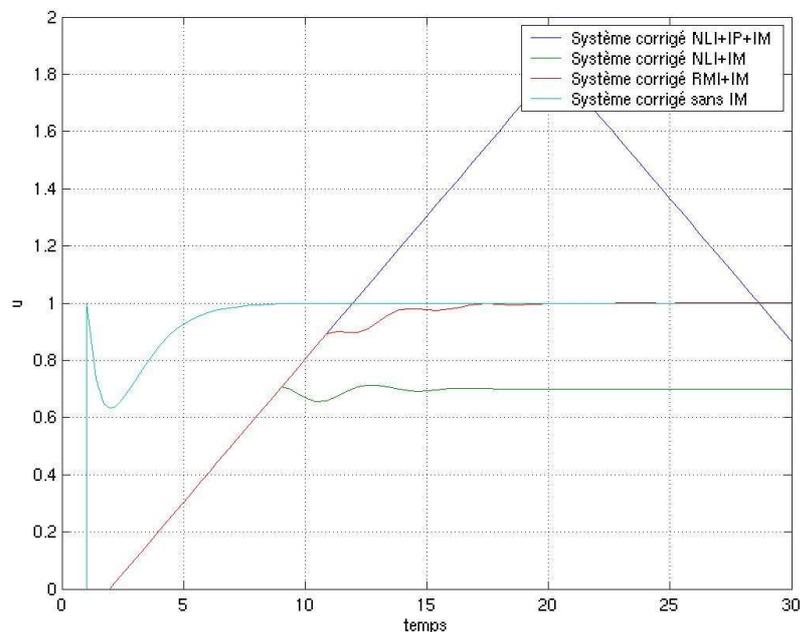
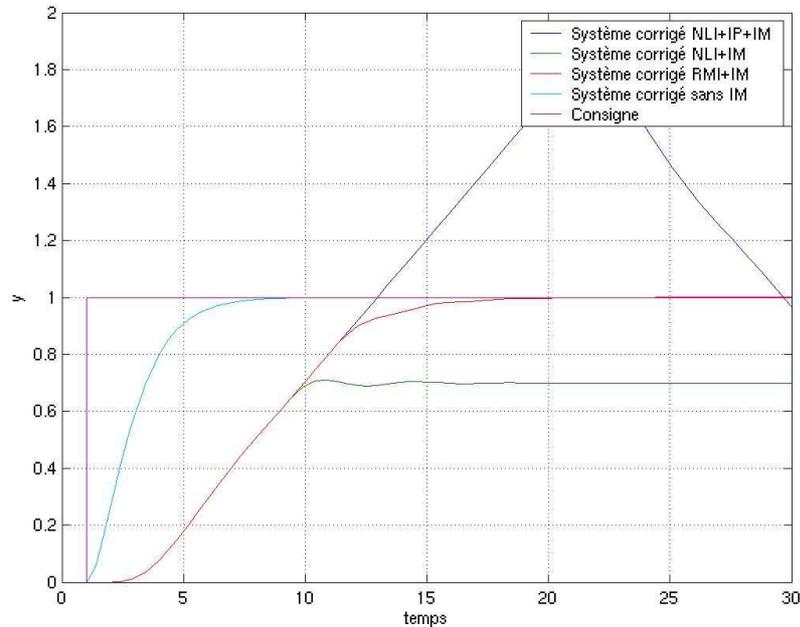
### 2.2.7.4 Robustesse à la saturation en vitesse (rate-lim) d'actionneur



*2.2.7.4.a : Réaction des différents types de loi à une saturation en vitesse de commande (0.1)*

### 2.2.7.5 Robustesse à des incertitudes multiples

On étudie ici la robustesse de la loi à une erreur de modèle de  $\pm 50\%$  sur  $F$  et  $G$ , un retard d'une seconde dans la chaîne de commande et une limitation en vitesse de commande.



2.2.7.5.a : Réaction des différents types de loi à des incertitudes multiples

On constate d'après cette simulation une tendance au cycle limite de la part de la loi avec intégrateur de précision. On constate aussi que, face à une dynamique actionneur négligée, la commande RMI se comporte de la même manière qu'une commande non-linéaire inverse sans intégrateur de précision. De ce point de vue, la commande RMI paraît cumuler les avantages d'une loi avec et sans intégrateur de précision.

## **2.2.8 Conclusion sur la commande RMI**

La technique de commande non-linéaire robuste présentée est une des contributions de la thèse qui permet de répondre à de forts besoins industriels. Son implantation est aussi aisée que celle d'un correcteur non-linéaire classique. Elle permet de plus de dégager d'importantes marges de robustesse face aux incertitudes paramétriques tout comme aux incertitudes sur la dynamique des dispositifs de commande (non-linéarités, retards, etc.). Ces propriétés sont illustrées plus en détail dans la partie 3.3.2.

Rappelons que les conditions de stabilité et de performances robustes de ce type de lois sont peu nombreuses et suffisamment peu contraignantes par rapport à l'inversion de la dynamique classique :

- Stabilité des éventuelles dynamiques internes.
- Bornitude des fonctions  $F$  et  $G$  décrivant la dynamique entrées-sorties du système, de leur modèle  $F_m$  et  $G_m$  et des dérivées de  $F$ ,  $G$ ,  $F_m$  et  $G_m$  jusqu'à l'ordre 2.
- Condition d'erreur maximale admissible sur  $G$ .

Il est important de souligner que cette technique a permis de réaliser un pilote automatique non-linéaire complet et une autopoussée qui ont passé avec succès les critères statistiques de certification de l'atterrissage automatique. Plus de détails sur ces réalisations pratiques sont donnés dans la seconde partie de ce mémoire.

## 2.3 Techniques de modélisation et d'identification

### 2.3.1 Introduction au besoin d'outils de modélisation et d'identification non-linéaires

Le but de la thèse étant de réaliser des lois de commande de vol non-linéaires, un des points cruciaux de notre étude est de créer des outils permettant de disposer de modèles non-linéaires (coefficients aérodynamiques, transferts statiques des moteurs, etc.). Ces modèles doivent par ailleurs être embarquables. Comme de tels modèles ou outils permettant de les obtenir n'existaient pas au début de l'étude, nous nous sommes intéressés à différentes techniques de modélisation et d'identification.

La modélisation peut se définir comme l'activité de représentation structurée et paramétrée d'un processus physique. L'identification consiste ensuite à estimer les paramètres du modèle afin de le rendre le plus proche possible de la réalité. Dans le cadre de ce travail, nous disposons dès le départ d'un modèle identifié et certifié de référence : l'Outil de Simulation des Mouvements Avion (OSMA). Néanmoins, OSMA est trop complexe pour être embarqué tel quel. Partant de cette constatation, deux choix sont possibles.

- Soit l'on garde la structure du modèle de référence et l'on modélise puis identifie des sous-fonctions et paramètres associés.
- Soit l'on réalise un modèle entièrement nouveau, le plus fidèle possible au modèle de référence.

Dans les deux cas, il s'agit bien de modélisation. Toutefois, comme on l'a vu, l'activité de modélisation implique l'activité d'identification.

Les principales techniques envisageables au début de la thèse ont été les suivantes : la modélisation basée sur l'identification par approximation polynomiale ou la modélisation et l'identification par réseaux de neurones. Pour les départager, nous avons défini des critères permettant de satisfaire le cahier des charges applicatif de la thèse. En résumé, tout modèle utilisé pour nos lois de commande doit être embarquable. Cela signifie :

- qu'il doit prendre le moins de place possible pour laisser de l'espace mémoire aux autres applications embarquées;
- qu'il doit contenir des fonctions simples pour demander un temps de calcul le plus faible possible (contrainte d'exécution en temps réel);
- qu'il doit être suffisamment précis;
- que cette précision doit être garantie.

Ensuite, il faut que ce modèle puisse être obtenu rapidement afin de permettre une mise au point de la loi dès qu'un nouveau standard d'avion est défini (jusqu'à plusieurs fois par mois lors du développement d'un avion).

Nous avons donc comparé les techniques choisies sur la base de ces critères. Le but derrière cette étude a été de réaliser à terme un outil de modélisation automatique permettant, dans un cadre industriel, de mettre au point tout type de modèle aéronautique non-linéaire et embarquable.

## 2.3.2 Comparaison des techniques de modélisation et d'identification retenues

### 2.3.2.1 Modélisation et identification par approximation polynomiale

#### 2.3.2.1.1 Principe

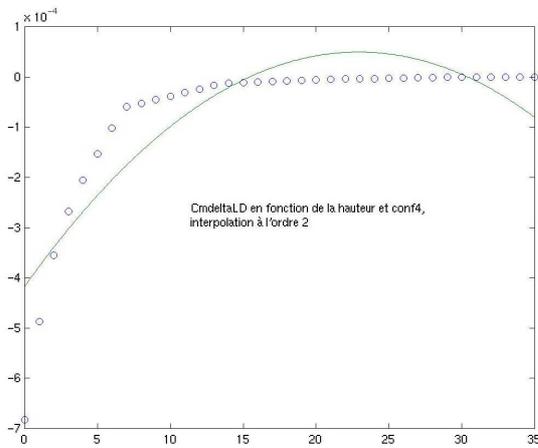
Il s'agit d'approximer une courbe connue en quelques points expérimentaux par un polynôme d'ordre quelconque (à déterminer par l'utilisateur). C'est la méthode la plus simple et la plus courante. Les principales étapes de la méthode sont les suivantes :

- 1°/ Collecte des données en nombre « suffisant ».
- 2°/ Mise en forme des données
- 3°/ Ajustement en augmentant successivement l'ordre du polynôme jusqu'à ce que l'approximation apparaisse « suffisante ».

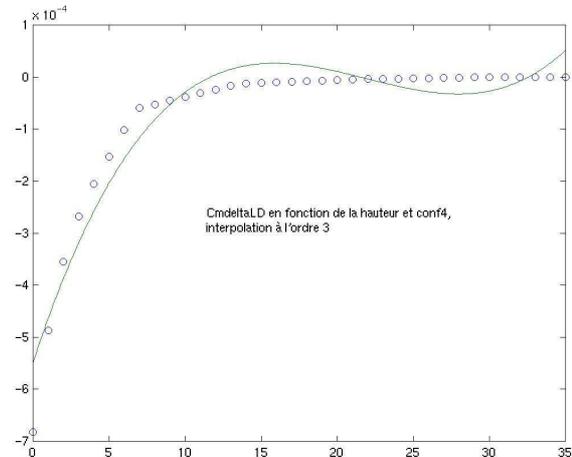
Tout le problème est de déterminer le sens de « suffisant ». L'expérience de l'opérateur joue ici un rôle prépondérant.

Dans notre cas, il faut d'abord découper le coefficient aérodynamique en sous-coefficients élémentaires que l'on modélise séparément (cf. §6.2). Ensuite, on réagrège ces données pour reconstruire le coefficient global.

Dans l'exemple qui suit, on s'occupe de l'effet de sol affectant la contribution du braquage des spoilers au coefficient de tangage ( $C_{mLD}$ ). L'avion est un A321 en configuration 4 (becs et volets aérodynamiques pleinement déployés).

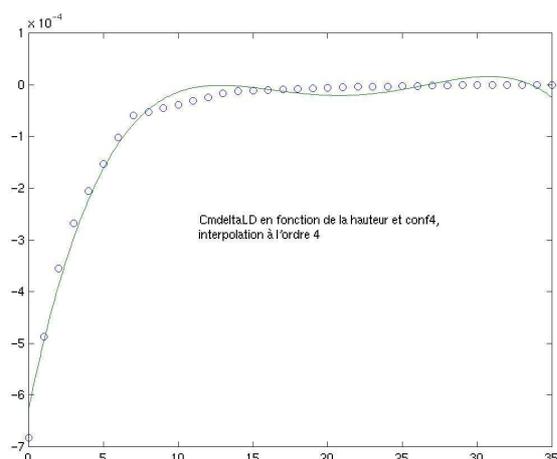


2.3.2.1.1.a :  $C_{mLD}$  en fonction de la hauteur pour l'A321 en conf. 4 – Polynôme d'ordre 2

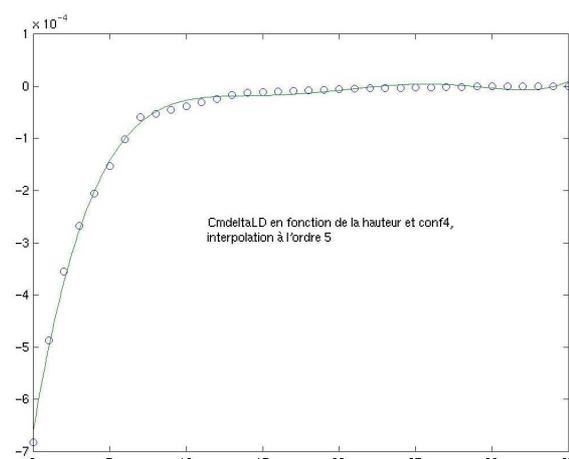


2.3.2.1.1.b :  $C_{mLD}$  en fonction de la hauteur pour l'A321 en conf. 4 – Polynôme d'ordre 3

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



2.3.2.1.1.c : CmLD en fonction de la hauteur pour l'A321 en conf. 4 – Polynôme d'ordre 4



2.3.2.1.1.d : CmLD en fonction de la hauteur pour l'A321 en conf. 4 – Polynôme d'ordre 5

### 2.3.2.1.2 Application

Partant de ce principe, une modélisation numérique complète d'un A321 dans le plan longitudinal et en phase d'atterrissage a été réalisée. Ensuite, ces données ont servi directement à établir un programme simulant les coefficients aérodynamiques sous Matlab. Ils peuvent donc directement être appelés par un schéma Simulink lors du réglage de la loi. Néanmoins, cette méthode présente de nombreuses faiblesses :

- Elle fait appel à une structuration simplifiée de l'avion afin de pouvoir être utilisée en temps réel. La rapidité est donc mieux assurée que la précision.
- Le processus ne peut pas être automatisé. Ainsi, tout changement de caractéristiques de l'avion (jusqu'à plusieurs fois par mois en phase de développement d'un programme) rend le travail déjà effectué obsolète. Or il a fallu un mois de travail pour modéliser trois des six coefficients aérodynamiques.
- Enfin, et c'est là le frein le plus important à son application, elle est exclusivement monovariante. C'est pourquoi nous n'avons pas poursuivi l'étude avec des méthodes plus pointues (splines, etc.).

### 2.3.2.1.3 Performances

Voici un tableau récapitulant les performances de modélisation par approximation polynomiale sur des coefficients aérodynamiques longitudinaux d'un A321.

A321 IAEV2500A5		Approximation polynomiale			
		Pourcentage de points aberrants	Erreur moyenne (en %)	Ecart-type (en %)	Encombrement mémoire (en octets)
Conf. 4	$C_m$	0	-0.5259	2.8251	2748
	$C_x$	9.9	-0.4538	12.3227	915
	$C_z$	0.4	-0.0191	4.2118	2379
Conf. 5	$C_m$	0.1	-0.2459	3.3961	2864
	$C_x$	0.6	0.8630	7.2505	1021
	$C_z$	0.1	-0.2195	3.0956	2433
<b>Total</b>					6042 en conf. 4 6318 en conf. 5

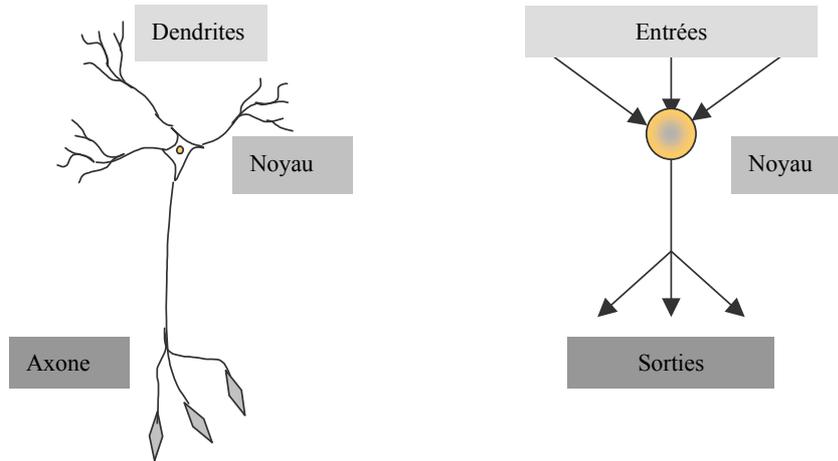
2.3.2.1.3.a : Performances de la modélisation par approximation polynomiale

Le découpage des coefficients aérodynamiques en question est présenté en annexe (§6.3).

## 2.3.2.2 Modélisation et identification par réseau de neurones

### 2.3.2.2.1 Définition d'un neurone formel

Un réseau de neurones est une structure formée de plusieurs éléments de calcul interconnectés, appelés neurones formels ou mathématiques. Un neurone mathématique est un modèle simplifié de neurone humain. Ces deux types de neurones réagissent à des signaux d'entrée.



*2.3.2.2.1.a : Parallèle entre un neurone formel et un neurone biologique.*

Plus précisément, un neurone mathématique produit une réponse fonction de la somme pondérée des signaux d'entrée et de son biais. L'amplitude de cette réponse est modulée par une fonction d'activation. Un neurone mathématique est donc caractérisé par le nombre de ses entrées et leurs pondérations (poids synaptiques), son biais et sa fonction d'activation. Le fonctionnement d'un neurone se généralise par :

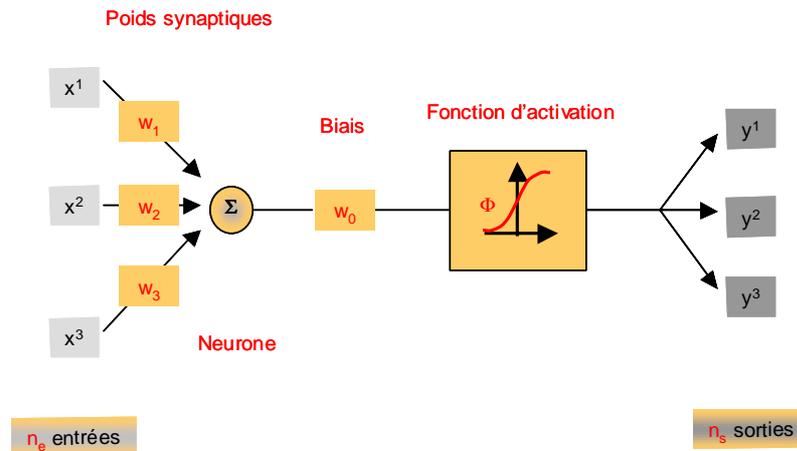
$$\forall j, 1 \leq j \leq n_s, y^j = \Phi \left( \sum_{i=1}^{n_e} w_j^i \cdot x^i - w_0 \right) \quad (23)$$

avec  $n_e$  nombre d'entrées du neurone,  $x^i$  la  $i$ -ème entrée avec  $1 \leq i \leq n_e$ ,  $n_s$  nombre de sorties,  $y^j$  la  $j$ -ème sortie avec  $1 \leq j \leq n_s$ ,  $w_j^i$  le poids synaptique associée à l'entrée  $i$  et à la sortie  $j$ ,  $w_0$  le biais,  $\Phi$  la fonction d'activation. Le biais  $w_0$  peut être considéré comme une entrée fictive  $e_0$  de poids  $-1$ . On réécrit alors (23) de la façon suivante ([166]) :

$$\forall j, 1 \leq j \leq n_s, y^j = \Phi \left( \sum_{i=0}^{n_e} u_j^i \cdot x^i \right)$$

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

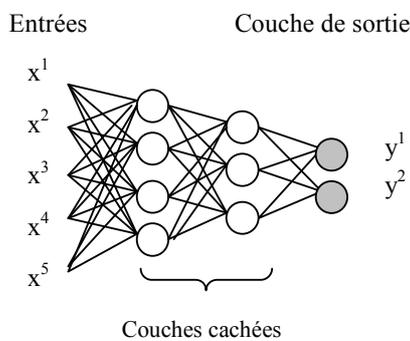
Le neurone ainsi décrit a la structure mathématique suivante :



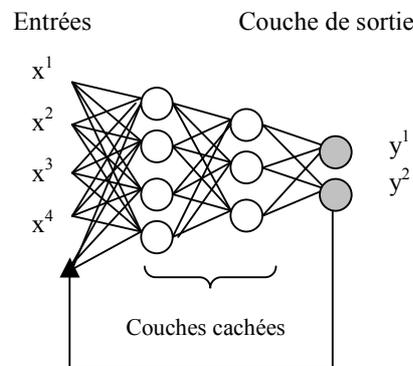
### 2.3.2.2.2 Neurones en réseau

Un réseau de neurones est défini comme une structure paramétrée complexe composée d'un ensemble de neurones connectés les uns aux autres. L'idée est de retrouver, par cette structure, des propriétés d'apprentissage et de généralisation par analogie avec le cerveau humain. Un réseau est caractérisé par son architecture et par les valeurs de ses paramètres (poids, biais, etc.).

Ces dernières valeurs ou paramètres sont estimés lors de l'apprentissage qui consiste à optimiser ces valeurs en fonction de l'utilisation que l'on souhaite faire du réseau de neurones.



*2.3.2.2.2.a : Exemple de perceptron*



*2.3.2.2.2.b : Exemple de réseau récurrent*

### 2.3.2.2.3 Apprentissage

L'apprentissage consiste en l'estimation des paramètres d'un réseau de neurones dont l'architecture est fixée. En fonction de l'utilisation du réseau, c'est-à-dire du phénomène qu'il doit apprendre, des programmes d'optimisation permettent d'estimer les valeurs des poids synaptiques et des biais. Le choix de l'algorithme dépend de l'architecture du réseau et des propriétés recherchées.

### 2.3.2.2.4 Application

Les réseaux de neurones permettent de résoudre, avec une grande précision, les problèmes de modélisation linéaires et non-linéaires. On dispose d'un système dont on connaît les entrées et les sorties quantitatives. A partir d'un certain nombre d'exemples fournis aux réseaux, ceux-ci apprennent à se comporter comme le système de référence. Une fois cet apprentissage réalisé, on obtient des modèles faciles à manipuler, avec un nombre réduit de paramètres à stocker (selon la propriété d'approximation parcimonieuse, cf. [85]).

Au-delà de la modélisation, les réseaux de neurones ont un grand nombre d'applications potentielles : [32], [103], [104], [166], [201], [202] et [213].

Les réseaux utilisés ici sont de type mono-couche (une seule couche interne). Le choix de l'architecture découle du théorème d'approximation universelle [39], qui indique que toute fonction continue sur un compact peut être approchée par un réseau à une seule couche cachée contenant un nombre fini de neurones. La fonction d'activation originale utilisée est la suivante :

$$f(x) = \frac{x}{1 + |x|} \tag{24}$$

Cette fonction d'activation, de type sigmoïde, présente l'avantage d'être à la fois plus facile à implanter dans un calculateur et plus rapide dans son exécution qu'une fonction d'activation sigmoïde classique à base d'exponentielles. De plus, l'apprentissage lui-même est facilité par la simplicité calculatoire de cette fonction. A noter qu'en terme de précision, les deux méthodes sont équivalentes.

La « neural networks toolbox » de Matlab a permis d'obtenir des résultats concluants au bout d'une semaine (à comparer au mois complet dédié à la modélisation par approximation polynomiale).

### 2.3.2.2.5 Résultats

Le même type de calculs que précédemment a été effectué sur les trois coefficients aérodynamiques longitudinaux ( $C_m$ ,  $C_x$  et  $C_z$ ) des deux configurations d'atterrissage (4 et 5) de l'A321. Ces calculs donnent tous des résultats comparables quant aux performances du réseau de neurones par rapport aux sorties. Par ailleurs, des essais ont plus tard été menés sur d'autres modèles d'autres avions de classe complètement différente (A340-300 et -600, A400M) et donnent des résultats similaires. On peut donc assurer la généralité de cette démarche.

A321 IAEV2500A5		Réseaux de neurones			
		Pourcentage de points aberrants	Erreur moyenne (en %)	Ecart-type (en %)	Encombrement mémoire (en octets)
Conf. 4	$C_m$	0	-0.0661	1.9775	1517
	$C_x$	0	-0.0493	1.8551	933
	$C_z$	0	-0.0774	1.0159	1517
Conf. 5	$C_m$	0	-0.1194	2.1244	1517
	$C_x$	0	0.0074	0.9505	933
	$C_z$	0	-0.0429	1.4312	1517
<b>Total</b>					3967 en conf. 4 3967 en conf. 5

#### 2.3.2.2.5.a : Performances finales des réseaux de neurones modélisant les coefficients aérodynamiques

Par rapport aux polynômes, les réseaux de neurones font gagner environ 30% d'encombrement mémoire et de meilleures performances par rapport à l'approximation polynomiale. De plus, il n'est pas nécessaire d'atomiser

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

les coefficients aérodynamiques en de nombreuses contributions élémentaires. Ceci permet de gagner beaucoup de temps et de simplicité dans le processus de modélisation.

### 2.3.2.3 Conclusion

On peut dresser un bilan comparé des deux solutions étudiées précédemment :

	Critère d'évaluation				
	Encombrement mémoire	Rapidité d'exécution	Précision	Durée de mise au point	Généricité
Polynômes approximateurs	Moyen	Bon	Moyen	Mauvais	Mauvais
Réseaux de neurones	Bon	Bon	Bon	Bon	Bon

*2.3.2.3.a : Comparatif des performances des polynômes approximateurs par rapport aux réseaux de neurones*

On constate sans difficulté que les réseaux de neurones apparaissent comme la meilleure solution à notre problème de modélisation non-linéaire. Par ailleurs, l'aspect foncièrement monovarié des polynômes est un frein important à leur utilisation dans le contexte de notre étude. C'est pourquoi nous avons choisi de développer des outils se basant sur les réseaux de neurones.

### 2.3.3 Le logiciel de modélisation automatique « ResOsma »

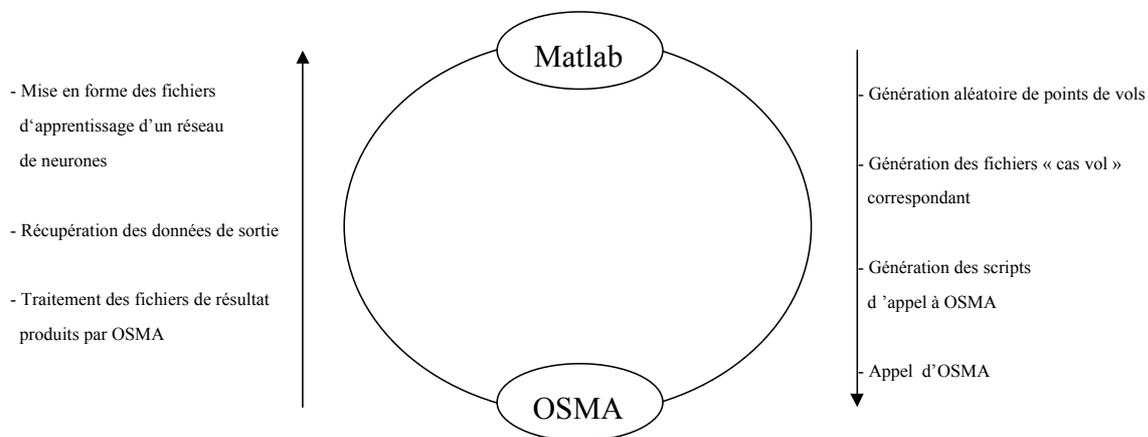
Ayant constaté la généricité de la démarche de modélisation neuronale, l'idée de réaliser un logiciel de modélisation automatique a pris forme.

L'une des contributions de la thèse réside donc dans la réalisation du logiciel ResOsma, Plus précisément, il s'agit d'une famille de logiciels permettant la modélisation automatique de fonctions non-linéaires et multivariées. ResOsma est une famille modulaire. Chacun de ses sous-programmes peut être utilisé séparément et dans des buts différents.

#### 2.3.3.1 ResOsma1 : L'interface avec les outils Airbus

Cette famille de logiciels, écrits en langage interprété Matlab, est complètement générique, c'est-à-dire applicable à différents modèles pour tous les avions de la famille Airbus. Pour l'instant, on a modélisé l'A321, l'A340-300, l'A340-600 et l'A400M. Ces avions ont été choisis car ils couvrent une gamme de masses et des caractéristiques aérodynamiques très dissemblables. Ces modèles sont réalisés en émulant tout d'abord le logiciel OSMA, l'Outil de Simulation des Mouvements Avion d'Airbus. OSMA est le logiciel de référence, il est utilisé par les ingénieurs pour tous les développements d'avions et par les simulateurs de développement et d'entraînement des pilotes. Toutefois, ce logiciel est bien trop complexe pour être embarqué tel quel, dans une loi de commande ou un estimateur. ResOsma se propose donc d'en modéliser certaines parties.

Concrètement, ResOsma1 propose de créer une base d'apprentissage pour les coefficients aérodynamiques, efficacités gouvernes, modèles moteurs statiques (etc.) de différents avions. On peut choisir un avion mis en mémoire ou mettre en mémoire un nouvel avion avec toutes ses caractéristiques. Le logiciel génère ensuite un nombre paramétrable de cas de vol. Il génère alors les fichiers d'appel d'OSMA associés, puis les exécute. Les fichiers résultats d'OSMA sont ensuite traités et stockés sous forme de fichiers d'apprentissage, de validation et de test pour réseaux de neurones.



2.3.3.1.a : Principe du logiciel ResOsma1

On peut ensuite appeler le programme Neuronisation, dont le but est de modéliser par un réseau de neurones chaque fonction non-linéaire. Ce réseau est testé puis stocké automatiquement sous forme d'objet et de fonction Matlab ainsi que sous forme de bloc Simulink.

## 2.3.3.2 Neuronisation : Le cœur du logiciel de modélisation automatique

### 2.3.3.2.1 Introduction

Neuronisation est un outil de modélisation non-linéaire automatique basé sur des réseaux de neurones. En particulier, il doit être parfaitement autonome une fois lancé. Il faut donc définir *a priori* ou laisser le logiciel optimiser les paramètres suivants :

- Architecture
- Réseau retenu
- Critères d'arrêt

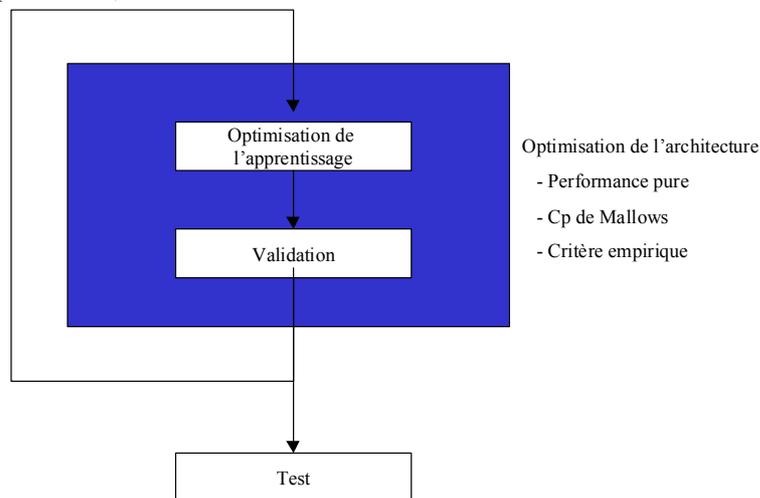
Jusqu'à maintenant, l'intervention d'un opérateur humain était toujours requise pour ce type d'actions. Neuronisation permet d'automatiser ce processus tout en donnant une prédiction précise des erreurs de modélisation.

Neuronisation réalise une double optimisation et une évaluation sur trois jeux de données indépendants. Tout d'abord l'apprentissage du réseau de neurones est exécuté à partir des **données d'apprentissage** collectées précédemment par ResOsma. L'apprentissage fait appel à un algorithme de rétro-propagation du gradient dont l'initialisation est aléatoire. En réalisant plusieurs apprentissages, on peut ainsi explorer plusieurs vallées d'erreur et conserver le réseau qui donne les meilleures performances pures.

Le réseau retenu est ensuite évalué sur les **données de validation**.

Reste à choisir l'architecture du réseau (nombre de neurones sur la couche cachée). Pour cela, on exécute la boucle d'optimisation précédente en commençant avec un neurone sur la couche interne. On incrémente ensuite le nombre de neurones jusqu'à atteindre un critère d'arrêt.

A l'issue de cette optimisation, le réseau choisi est évalué sur les **données de test**.



2.3.3.2.1.a : Principe du logiciel Neuronisation

Il est important de noter que la fonction Neuronisation est disponible pour toute station équipée de Matlab et qu'elle peut être utilisée en dehors du processus ResOsma.

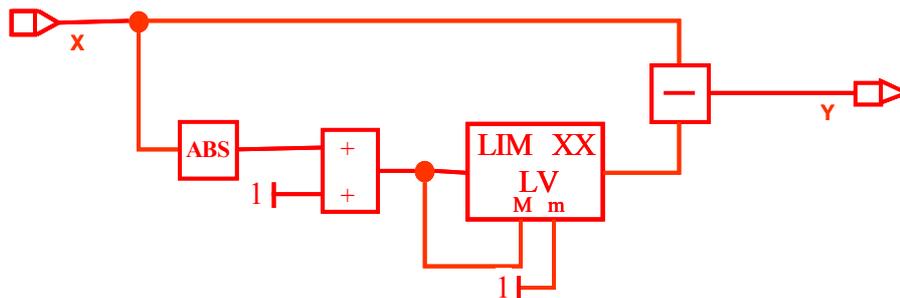
### 2.3.3.2.2 Construction des fichiers d'apprentissage, de validation et de test

La définition des fichiers d'apprentissage, de validation et de test est la suivante. On récupère tout d'abord un fichier d'entrées-sorties du processus à modéliser. On procède à un tirage aléatoire sans remise des données de ce fichier qu'on répartit ensuite uniformément dans les trois fichiers statistiquement indépendants d'apprentissage, de validation et de test (on peut utiliser pour cette tâche un utilitaire développé, nommé Pré\_neuronisation). Ceci permet d'obtenir trois fichiers totalement indépendants et d'assurer la validité de la démarche de modélisation.

Ces fichiers sont ensuite normalisés dans le programme Neuronisation de manière à ce que chaque entrée et chaque sortie soit comprise entre  $-1$  et  $1$ . Cela permet d'avoir un poids apparent identique pour chaque entrée et donc un apprentissage plus rapide et précis.

### 2.3.3.2.3 Optimisation de l'apprentissage

Les réseaux de neurones choisis ont une seule couche cachée. Le théorème de l'approximation universelle garantit que cette solution permet de modéliser toute fonction non-linéaire multivariable et continue. La fonction d'activation retenue pour la couche cachée est de type (24) ce qui peut facilement se représenter comme suit dans un formalisme de type SAO (langage graphique pour le codage automatique d'applications embarquées) :



2.3.3.2.3.a : Neurone formel sous forme SAO (langage graphique pour le codage automatique d'applications embarquées)

L'apprentissage est supervisé, réalisé en mode batch (toutes les données sont présentées en même temps) accéléré par un algorithme de gradient modifié de type Levenberg-Marquardt ([85]). Les critères d'arrêt sont les suivants :

- Soit le gradient d'erreur moyenne quadratique devient inférieur à 1.
- Soit le nombre d'itérations de la rétro-propagation devient supérieur au nombre d'arborescences existant dans le réseau de neurones à un facteur près (2 dans notre cas).

On lance plusieurs apprentissage sur des réseaux initialisés de manière différente. Dès que l'erreur quadratique moyenne sur l'échantillon d'apprentissage se dégrade, les itérations sont arrêtées. Enfin, on conserve le réseau présentant la plus faible erreur quadratique moyenne sur l'échantillon de validation.

### 2.3.3.2.4 Optimisation de l'architecture

L'optimisation de l'architecture des réseaux est nécessaire pour que celle-ci soit représentative de la complexité du modèle de référence. Pour cela une démarche originale est retenue. Il s'agit d'un algorithme de descente du gradient modifié.

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Ce nouvel algorithme est basé sur l'utilisation d'un développement en série de Taylor. Soient  $x$  et  $x_0$  deux réels, toute fonction  $C^n$  de  $x$  peut en effet s'écrire de la manière suivante au voisinage de  $x_0$  :

$$f(x) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n \frac{(x - x_0)^i}{i!} \cdot \left. \frac{d^i f}{dx^i} \right|_{x=x_0}$$

Si  $f$  est le nombre de neurones sur la couche interne correspondant au réseau d'erreur maximale  $x$ ,  $x_0$  étant l'erreur du réseau courant ( $E_c$ ) et  $f(x_0)$  l'architecture du réseau courant ( $A_c$ ), on peut ainsi utiliser cette relation pour trouver l'architecture désirée ( $A_d$ ) en fonction de l'erreur maximale désirée ( $E_d$ ) :

$$A_d = \text{round} \left( A_c + \sum_{i=1}^n \frac{(E_d - E_c)^i}{i!} \cdot \left. \frac{d^i f}{dx^i} \right|_{x=x_0} \right).$$

Le calcul de la dérivée  $i$ -ème de  $f$  par rapport à  $x$  nécessite d'avoir au moins  $i+1$  échantillon de  $f$ . Les méthodes actuelles sont les suivantes :

- Pour la descente du gradient on n'utilise que la dérivée première aux deux derniers points de l'optimisation.
- Pour l'algorithme de Newton, on utilise la dérivée première et la dérivée seconde (aux trois derniers points d'optimisation).

Ces principes de calcul sont relativement sensibles à la présence de minima locaux. C'est pourquoi nous avons choisi un algorithme adaptatif en fonction du nombre de points d'optimisation. En effet, au fur et à mesure que notre algorithme avance, l'échantillon de points s'enrichit. A l'étape  $n+1$ , on dispose de  $n+1$  points et donc on peut utiliser la forme de Taylor à l'ordre  $n$ . Ceci permet d'affiner l'optimisation au cours du temps. Notons que l'on interdit le test multiple d'une architecture donnée, afin de gagner du temps de calcul.

Lorsque le processus mène à un réseau d'erreur inférieure à celle spécifiée, on l'arrête et on conserve ce réseau final. Il arrive toutefois que les réseaux ne puissent pas converger vers la solution, par manque de points d'apprentissage. Dans ce cas, on stoppe l'optimisation d'architecture du réseau lorsque les trois dernières architectures testées apportent une dégradation de performances. L'opérateur doit donc enrichir la base de données avant de relancer Neuronisation s'il souhaite conserver ses exigences en terme d'erreur maximale du modèle.

### 2.3.3.2.5 Qualification et garantie de précision

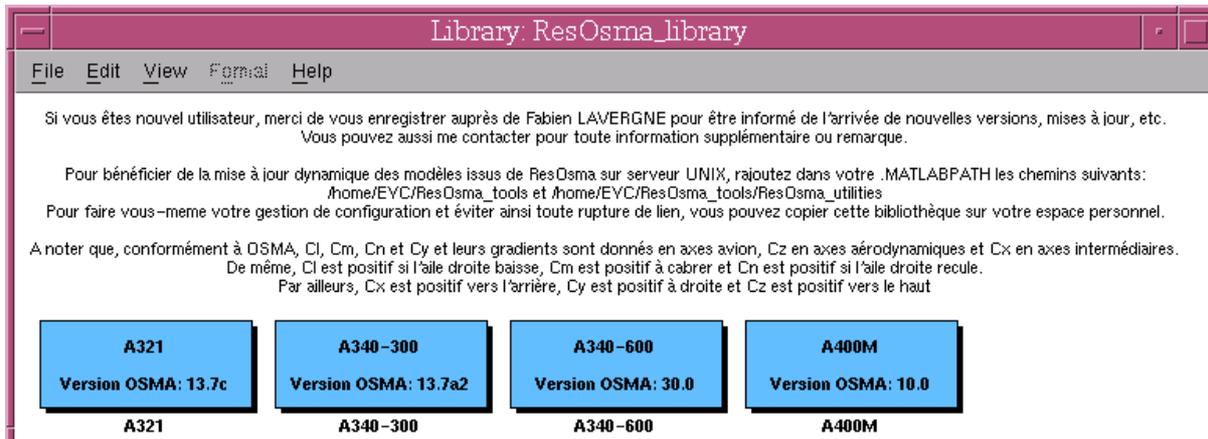
L'erreur maximale observée ne saurait être une garantie de l'erreur maximale réelle du modèle en conditions opérationnelles. C'est pourquoi on s'attache à la prédire. Cette prédiction est opérée sur la base de la loi statistique paramétrique pour laquelle le test d'adéquation de Kolmogorov-Smirnov ([205]) donne la meilleure valeur. On teste ainsi toutes les lois statistiques paramétriques existantes (normale, gamma, Student, lognormale, Fisher, Weibul).

La loi statistique possédant la meilleure adéquation avec l'échantillon d'erreur est retenue. Elle sert ensuite de base à la définition d'intervalles de confiance à  $10^{-3}$ ,  $10^{-5}$ ,  $10^{-7}$ , et  $10^{-9}$ , conformément aux objectifs imposés par la criticité de l'application considérée.

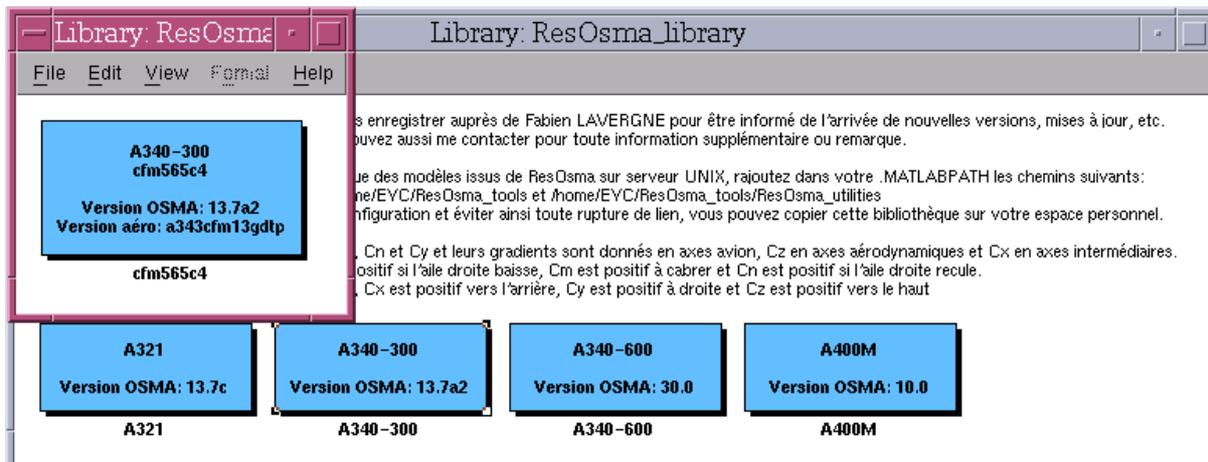
Il faut noter que ce module de prévision d'erreur est générique et peut lui aussi être appliqué à tout autre type de problème (dispersion des points d'impact à l'atterrissage, comportement d'un système soumis à des incertitudes, tolérances sur la taille de pièces mécaniques, etc.).

### 2.3.3.3 ResOsma\_library

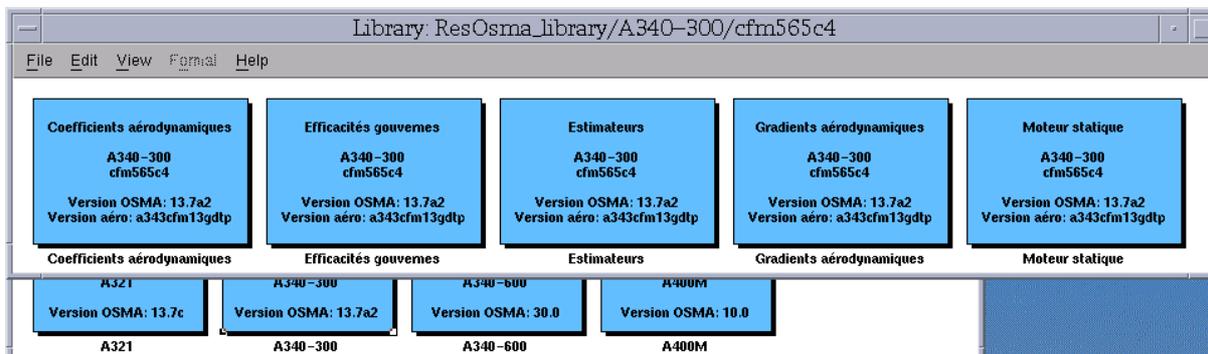
Une fois les modèles produits et qualifiés, il reste à les stocker sous une certaine forme, la plus pratique possible pour les utilisateurs. Ainsi, tous les modèles formés par ResOsma sont « habillés » et classés par un opérateur humain dans une bibliothèque. Cette bibliothèque de blocs fonctionnels Simulink est découpée par types d'avion et de motorisation et donne accès à tout utilisateur, dans un environnement ouvert, à l'intégralité des modèles d'avions modélisés. Voici ci-dessous un exemple d'arborescence-type.



*2.3.3.3.a : Arborescence de niveau 1 de la librairie ResOsma*

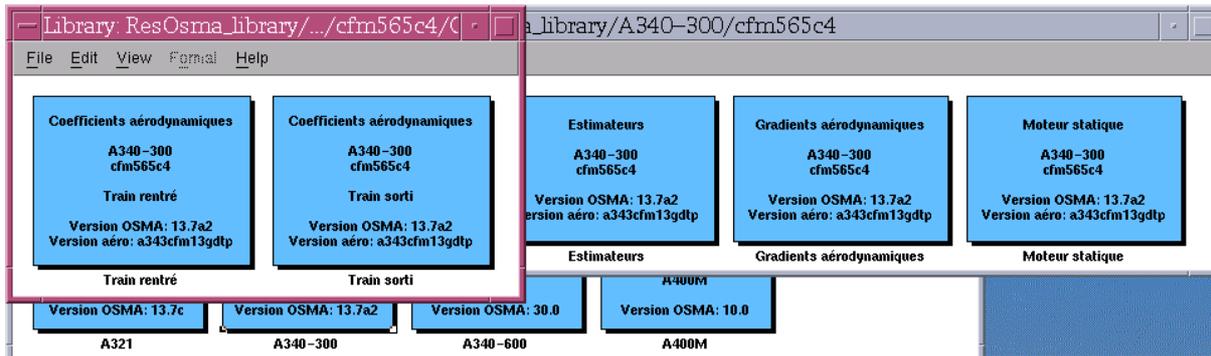


*2.3.3.3.b : Arborescence de niveau 2 de la librairie ResOsma*

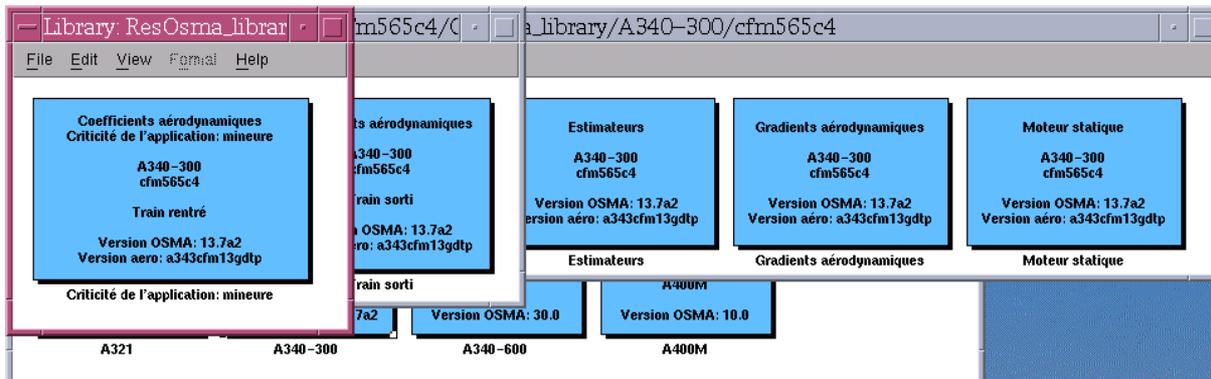


*2.3.3.3.b : Arborescence de niveau 3 de la librairie ResOsma*

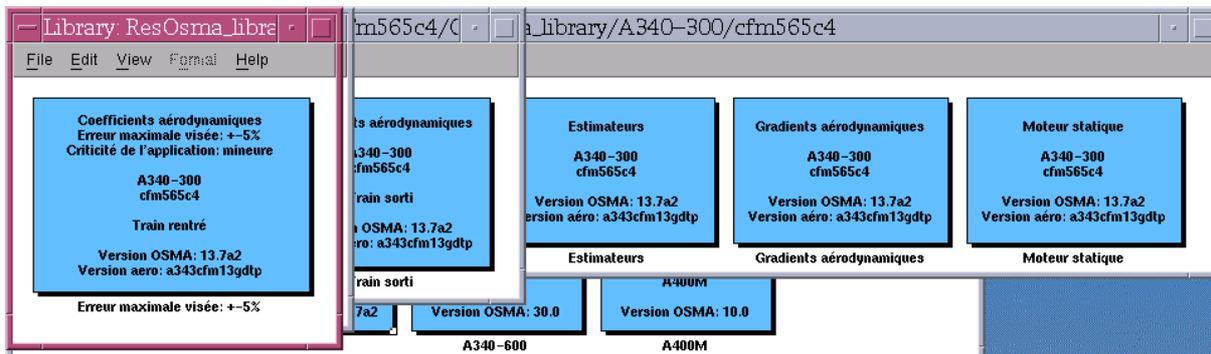
## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



2.3.3.3.d : Arborescence de niveau 4 de la librairie ResOsma



2.3.3.3.e : Arborescence de niveau 5 de la librairie ResOsma



2.3.3.3.f : Arborescence de niveau 6 de la librairie ResOsma

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Library: ResOsma\_library/.../Criticité de l'application: mineure/Erreur maximale visée: +-5%

<pre> &gt;-5&lt;alpha&lt;=17 deg &gt;-17&lt;beta&lt;=17 deg &gt;6.1&lt;Mach&lt;=6.33 &gt;-15&lt;psi&lt;=15 % &gt;-16&lt;phi&lt;=16 % &gt;0&lt;Zp&lt;=43660 R &gt;0.15&lt;CG&lt;=6.45 &gt;Bragage aileron externe droit -25&lt;deltaEd&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron externe gauche -25&lt;deltaEg&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne droit -25&lt;deltaId&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne gauche -25&lt;deltaIg&lt;=25 deg &gt;Bragage direction -31.5&lt;deltaC&lt;=31.5 deg &gt;Bragage spoilers 23 droit 0&lt;deltaSp23d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 23 gauche 0&lt;deltaSp23g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 droit 0&lt;deltaSp45d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 gauche 0&lt;deltaSp45g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 droit 0&lt;deltaSp6d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 gauche 0&lt;deltaSp6g&lt;=35 deg &gt;Configuration aérodynamique 0&lt;conf&lt;=6           </pre> <p style="text-align: center;"><b>Ci</b> Nombre de coeffs: 145 Erreur maximale: +-5.16% Criticité de l'application: mineure <b>A340-300</b> cfm56Sc4 Train rentré Version OSMA: 13.7a2 Version aéro: a343cfm13gdtp</p> <p style="text-align: center;">Ci</p>	<pre> &gt;-5&lt;alpha&lt;=17 deg &gt;-17&lt;beta&lt;=17 deg &gt;6.1&lt;Mach&lt;=6.33 &gt;-15&lt;psi&lt;=15 % &gt;-16&lt;phi&lt;=16 % &gt;0&lt;Zp&lt;=43660 R &gt;0.15&lt;CG&lt;=6.45 &gt;Bragage aileron interne droit -25&lt;deltaId&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne gauche -25&lt;deltaIg&lt;=25 deg &gt;Bragage profondeur -36&lt;deltaP&lt;=15 deg &gt;Bragage spoilers 1 droit 0&lt;deltaSp1d&lt;=25 deg &gt;Bragage spoilers 1 gauche 0&lt;deltaSp1g&lt;=25 deg &gt;Bragage spoilers 23 droit 0&lt;deltaSp23d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 23 gauche 0&lt;deltaSp23g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 droit 0&lt;deltaSp45d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 gauche 0&lt;deltaSp45g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 droit 0&lt;deltaSp6d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 gauche 0&lt;deltaSp6g&lt;=35 deg &gt;Configuration aérodynamique 0&lt;conf&lt;=6           </pre> <p style="text-align: center;"><b>Cm</b> Nombre de coeffs: 257 Erreur maximale: [-8.12%;8.20%] Criticité de l'application: mineure <b>A340-300</b> cfm56Sc4 Train rentré Version OSMA: 13.7a2 Version aéro: a343cfm13gdtp</p> <p style="text-align: center;">Cm</p>
<pre> &gt;-5&lt;alpha&lt;=17 deg &gt;-17&lt;beta&lt;=17 deg &gt;6.1&lt;Mach&lt;=6.33 &gt;-15&lt;psi&lt;=15 % &gt;-16&lt;phi&lt;=16 % &gt;0&lt;Zp&lt;=43660 R &gt;0.15&lt;CG&lt;=6.45 &gt;Bragage aileron externe droit -25&lt;deltaEd&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron externe gauche -25&lt;deltaEg&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne droit -25&lt;deltaId&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne gauche -25&lt;deltaIg&lt;=25 deg &gt;Bragage direction -31.5&lt;deltaC&lt;=31.5 deg &gt;Bragage spoilers 23 droit 0&lt;deltaSp23d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 23 gauche 0&lt;deltaSp23g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 droit 0&lt;deltaSp45d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 gauche 0&lt;deltaSp45g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 droit 0&lt;deltaSp6d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 gauche 0&lt;deltaSp6g&lt;=35 deg &gt;Configuration aérodynamique 0&lt;conf&lt;=6           </pre> <p style="text-align: center;"><b>Cn</b> Nombre de coeffs: 199 Erreur maximale: [-5.93%;5.95%] Criticité de l'application: mineure <b>A340-300</b> cfm56Sc4 Train rentré Version OSMA: 13.7a2 Version aéro: a343cfm13gdtp</p> <p style="text-align: center;">Cn</p>	<pre> &gt;-5&lt;alpha&lt;=17 deg &gt;-17&lt;beta&lt;=17 deg &gt;6.1&lt;Mach&lt;=6.33 &gt;-15&lt;psi&lt;=15 % &gt;-16&lt;phi&lt;=16 % &gt;0&lt;Zp&lt;=43660 R &gt;0.15&lt;CG&lt;=6.45 &gt;Bragage aileron interne droit -25&lt;deltaId&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne gauche -25&lt;deltaIg&lt;=25 deg &gt;Bragage profondeur -36&lt;deltaP&lt;=15 deg &gt;Bragage spoilers 1 droit 0&lt;deltaSp1d&lt;=25 deg &gt;Bragage spoilers 1 gauche 0&lt;deltaSp1g&lt;=25 deg &gt;Bragage spoilers 23 droit 0&lt;deltaSp23d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 23 gauche 0&lt;deltaSp23g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 droit 0&lt;deltaSp45d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 gauche 0&lt;deltaSp45g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 droit 0&lt;deltaSp6d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 gauche 0&lt;deltaSp6g&lt;=35 deg &gt;Configuration aérodynamique 0&lt;conf&lt;=6           </pre> <p style="text-align: center;"><b>Cx</b> Nombre de coeffs: 129 Erreur maximale: [-5.35%;4.12%] Criticité de l'application: mineure <b>A340-300</b> cfm56Sc4 Train rentré Version OSMA: 13.7a2 Version aéro: a343cfm13gdtp</p> <p style="text-align: center;">Cx</p>
<pre> &gt;-5&lt;alpha&lt;=17 deg &gt;-17&lt;beta&lt;=17 deg &gt;6.1&lt;Mach&lt;=6.33 &gt;-15&lt;psi&lt;=15 % &gt;-16&lt;phi&lt;=16 % &gt;0&lt;Zp&lt;=43660 R &gt;0.15&lt;CG&lt;=6.45 &gt;Bragage aileron externe droit -25&lt;deltaEd&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron externe gauche -25&lt;deltaEg&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne droit -25&lt;deltaId&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne gauche -25&lt;deltaIg&lt;=25 deg &gt;Bragage direction -31.5&lt;deltaC&lt;=31.5 deg &gt;Bragage spoilers 23 droit 0&lt;deltaSp23d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 23 gauche 0&lt;deltaSp23g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 droit 0&lt;deltaSp45d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 gauche 0&lt;deltaSp45g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 droit 0&lt;deltaSp6d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 gauche 0&lt;deltaSp6g&lt;=35 deg &gt;Configuration aérodynamique 0&lt;conf&lt;=6           </pre> <p style="text-align: center;"><b>Cy</b> Nombre de coeffs: 181 Erreur maximale: +-2.15% Criticité de l'application: mineure <b>A340-300</b> cfm56Sc4 Train rentré Version OSMA: 13.7a2 Version aéro: a343cfm13gdtp</p> <p style="text-align: center;">Cy</p>	<pre> &gt;-5&lt;alpha&lt;=17 deg &gt;-17&lt;beta&lt;=17 deg &gt;6.1&lt;Mach&lt;=6.33 &gt;-15&lt;psi&lt;=15 % &gt;-16&lt;phi&lt;=16 % &gt;0&lt;Zp&lt;=43660 R &gt;0.15&lt;CG&lt;=6.45 &gt;Bragage aileron interne droit -25&lt;deltaId&lt;=25 deg &gt;Bragage aileron interne gauche -25&lt;deltaIg&lt;=25 deg &gt;Bragage profondeur -36&lt;deltaP&lt;=15 deg &gt;Bragage spoilers 1 droit 0&lt;deltaSp1d&lt;=25 deg &gt;Bragage spoilers 1 gauche 0&lt;deltaSp1g&lt;=25 deg &gt;Bragage spoilers 23 droit 0&lt;deltaSp23d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 23 gauche 0&lt;deltaSp23g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 droit 0&lt;deltaSp45d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 45 gauche 0&lt;deltaSp45g&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 droit 0&lt;deltaSp6d&lt;=35 deg &gt;Bragage spoilers 6 gauche 0&lt;deltaSp6g&lt;=35 deg &gt;Configuration aérodynamique 0&lt;conf&lt;=6           </pre> <p style="text-align: center;"><b>Cz</b> Nombre de coeffs: 269 Erreur maximale: [-2.73%;-2.74%] Criticité de l'application: mineure <b>A340-300</b> cfm56Sc4 Train rentré Version OSMA: 13.7a2 Version aéro: a343cfm13gdtp</p> <p style="text-align: center;">Cz</p>

2.3.3.3.g : Arborescence de niveau 7 de la librairie ResOsma

### 2.3.3.4 ResOsma en quelques chiffres

En synthétisant le processus ResOsma global, le cycle de modélisation non-linéaire des coefficients aérodynamiques d'OSMA par le logiciel ResOsma s'articule comme suit :

Étape	Durée	Temps plein	A refaire pour une nouvelle version d'OSMA
Etude préliminaire du domaine d'évolution des variables du nouvel avion	1h30	Oui	Non
Remplissage des fichiers de paramètres	4x15 min	Oui	Non
Provision pour problèmes d'adaptation à la version d'OSMA	1h	Oui	Non
Exécution de ResOsma1 (création des fichiers d'apprentissage, de validation et de test)	4x2h30	Non	Oui
Création de la sous-bibliothèque de modèles associée au nouvel avion	1h	Oui	Non
Création et intégration dans la bibliothèque avion d'un jeu de modèles avion toute conf	12*45 min	Oui	Oui

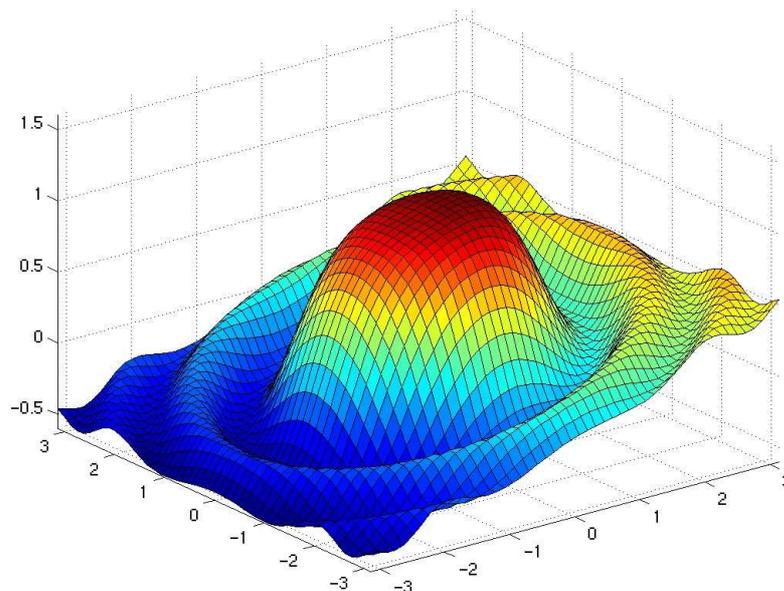
} ½ journée de préparation pour l'étude d'un avion entièrement nouveau  
} 1 journée pour toute remise à jour complète de la base de points de vol  
} 1 journée pour toute remise à jour complète de la bibliothèque de modèles

*2.3.3.4.a : Cycle de production de modèles de coefficients aérodynamiques par ResOsma*

Au total, grâce à ResOsma, seuls deux jours et demi de travail (dont une journée et demi à temps plein) sont nécessaires pour obtenir un modèle complet de l'avion avec une très bonne qualité. La réactivité de cet outil est donc assurée.

### 2.3.3.5 Exemple d'exécution de la fonction Neuronisation

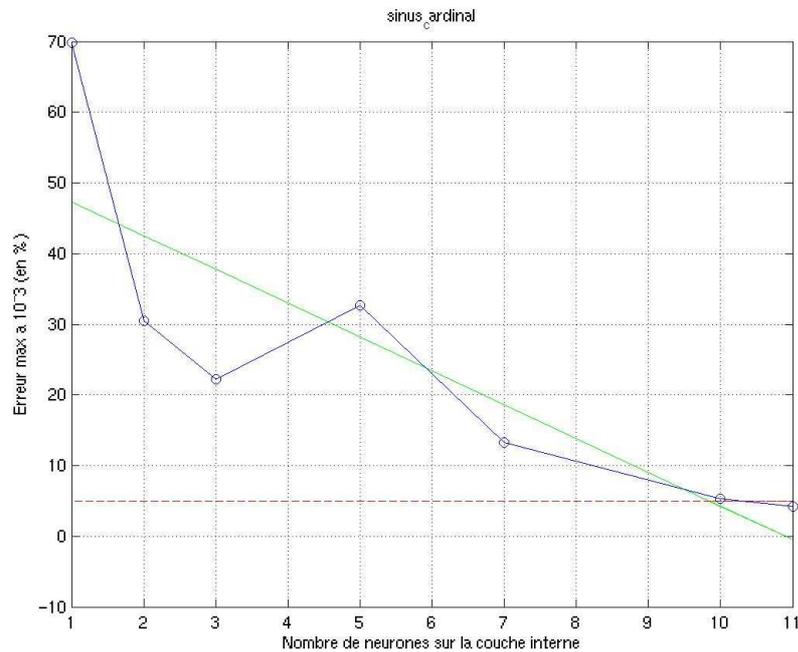
On prend comme exemple la modélisation d'un sinus cardinal à deux variables après rotation et translation comme suit :



*2.3.3.5.a : Sinus cardinal déformé pour étalonner les capacités de recalage d'un réseau de neurones*

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

On utilise Neuronisation pour modéliser ce sinus cardinal (erreur maximale visée 5% à  $10^{-3}$ ). L'optimisation se déroule comme suit :



### 2.3.3.5.b : Apprentissage d'un sinus cardinal déformé avec la fonction Neuronisation

Le réseau de neurones conservé a les caractéristiques suivantes :

Performances du réseau final (sinus\_cardinal) :

(11 neurone(s) sur la couche interne, soit 45 coeffs)

- Performances constatées :

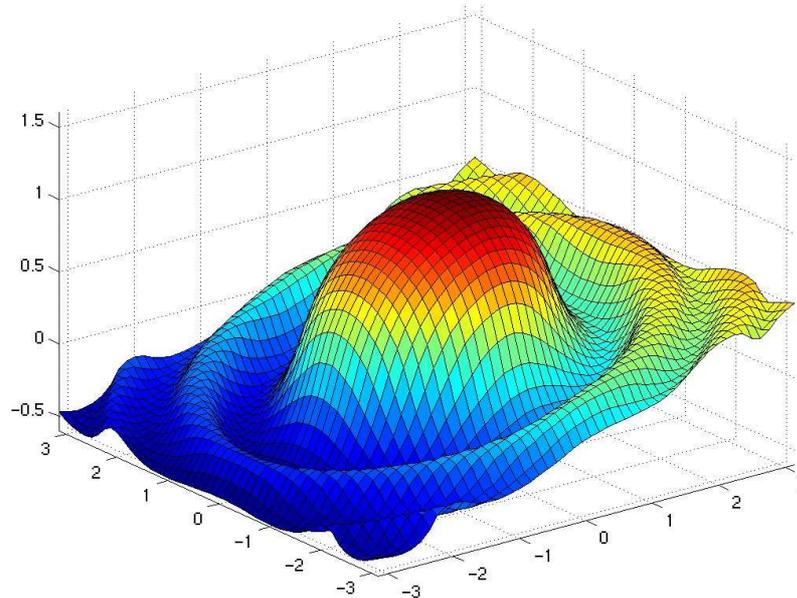
- . Moyenne de l'erreur = 0.108572%
- . Ecart-type de l'erreur = 1.24624%
- . Pourcentage constaté d'erreur supérieure à 5% = 0%

- Performances extrapolées selon une loi de probabilité de type 'normale' :

- . Pourcentage garanti d'erreur supérieure à 5% = 0.00641077%
- . Intervalle de confiance à  $10^{-3}$  = [-3.99223%, 4.20937%]

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

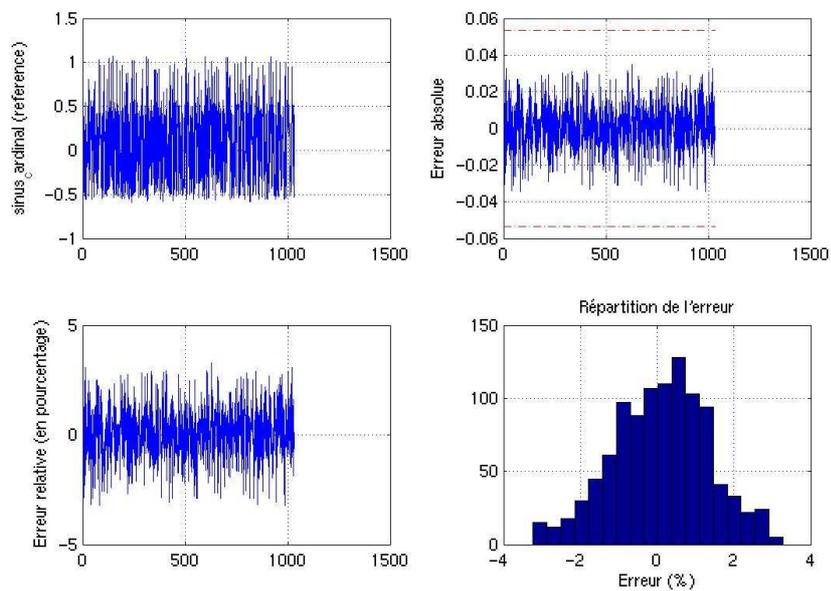
Il présente l'aspect suivant :



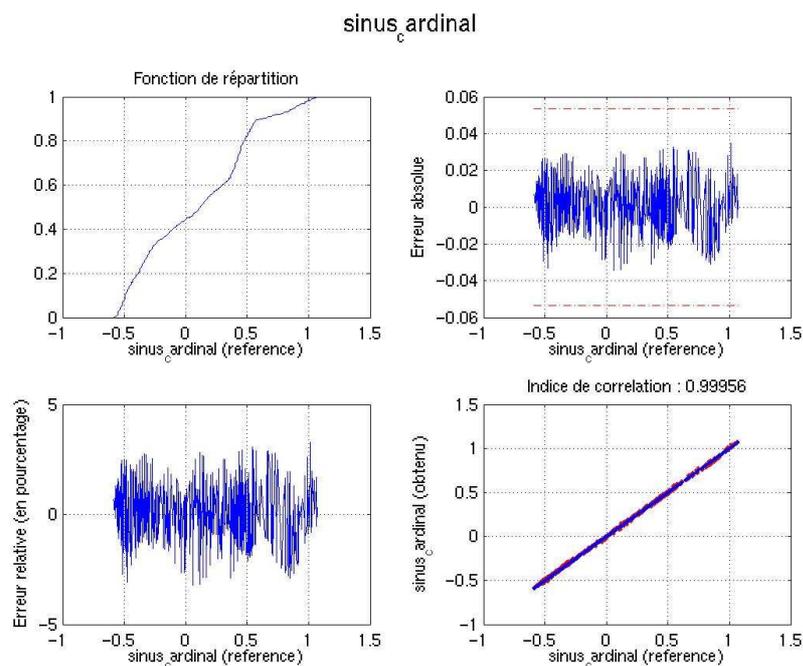
2.3.3.5.c : Sinus cardinal modélisé par la fonction Neuronisation

Ces résultats sont illustrés par les graphiques suivants :

sinus<sub>c</sub> cardinal



## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



*2.3.3.5.d : Illustration des résultats de modélisation par la fonction Neuronisation*

### 2.3.4 Conclusion sur le besoin d'outils de modélisation et d'identification non-linéaires

Le logiciel ResOsma présenté dans cette partie est en réalité une famille de logiciels répondant à de forts besoins industriels, au-delà même du seul sujet de la commande. La production automatique de modèles non-linéaires compacts, précis et fiables est un problème difficile à résoudre et l'approche proposée ici permet d'y apporter des solutions.

Ces solutions sont d'ores et déjà éprouvées puisqu'elles ont servi de base à la production de modèles pour :

- l'estimation : des estimateurs de masse, de dérapage et de turbulence ont été proposés.
- la simulation : des simulateurs de bureaux pour le maquettage rapide de lois de commande ont été créés (A340-300 et A340-600).
- les commandes de vol : des lois de commande non-linéaires à base de commande RMI et de modèles par réseaux de neurones ont été synthétisées et testées sur le simulateur certifié de pilote automatique (SIMPA).

Des études supplémentaires ont été menées pour s'assurer de la facilité de recalage de tels modèles ([116]). Ceci est crucial dans le cadre industriel, où les modèles synthétisés à partir de données prévisionnelles doivent être mis à jour au fur et à mesure de l'arrivée de données issues d'essais en vol.

Aujourd'hui, le problème de l'embarquabilité de modèles non-linéaires semble donc résolu. A noter que des modèles de moteurs obtenus par ResOsma et servant à estimer les charges en vol sont actuellement utilisés sur le calculateur d'essais en vol de l'A380.



## **3 Applications**

### **3.1 Introduction**

A ce niveau de l'étude, nous avons défini un ensemble de techniques, méthodes et outils nécessaires à la production de lois de commande non-linéaires, robustes et embarquables dans les calculateurs d'avions de transport modernes. Il nous faut maintenant adapter ces techniques, méthodes et outils et les enrichir afin de concevoir un système complet de suivi de trajectoire. Dans cette thèse, nous nous intéressons plus particulièrement à une phase de vol exigeante car non-linéaire, transitoire et à proximité du sol : l'atterrissage.

Pour commencer (§3.2), nous présentons donc le système avion, particulièrement à l'atterrissage. En effet, c'est ce système qu'il nous faut modéliser (cf. §2.3) puis commander (cf. §2.1 et 2.2).

Ainsi, la partie suivante (§ 3.3) propose des lois dites lois manuelles ou lois de commande de vol ou encore petites boucles. Cette dénomination désigne des lois qui peuvent s'interfacer avec un pilote humain ou un pilote automatique. Leur but est de permettre au pilote (humain ou automatique) de commander directement des variables significatives au sens des qualités de vol et d'assurer un maintien constant de ces variables lorsque les organes de pilotages ne sont pas sollicités. C'est ce que l'on appelle le pilotage par objectifs.

Ensuite (§3.4), nous présentons les lois de pilotage automatique (autrement appelées grandes boucles) et d'autopoussée. Ce découpage entre les petites boucles et les grandes boucles est classique dans le monde aéronautique. L'allocation de chacune à un calculateur dédié (sur certains avion) en est la manifestation la plus criante. Cette tradition s'explique par le relatif découplage en fréquence entre les objectifs des grandes boucles (variables de trajectoire) et des petites boucles (variables d'attitude).

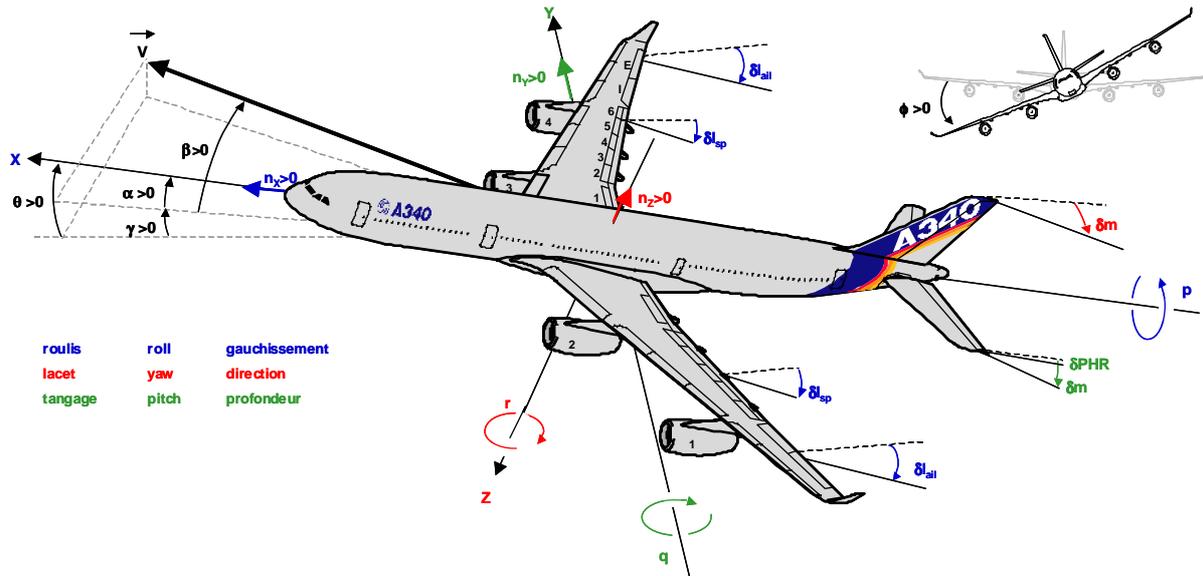
A cet instant, grâce aux grandes boucles, le lien est fait entre les variables d'attitude et de trajectoire. Nous obtenons alors un système automatique que nous pouvons commander en trajectoire désirée. Il reste toutefois à définir ces trajectoires désirées, issues d'un compromis entre les performances d'atterrissages attendues, la résistance structurale de l'avion, les contraintes opérationnelles et de confort, le ressenti des pilotes, etc. C'est l'objet de la partie 3.5.

Enfin, le système d'atterrissage automatique proposé étant complet, on peut présenter des résultats de simulation permettant de juger de la viabilité de l'ensemble (stabilité, performances, robustesse, etc.). La partie 3.6 nous permet ainsi, entre autres, de juger de la "certificabilité" du système d'atterrissage automatique développé pendant la thèse.

## 3.2 Présentation du système avion

### 3.2.1 Introduction

Dans la partie précédente, nous avons proposé des techniques, méthodes et outils pour la commande non-linéaire robuste des systèmes. Il reste maintenant à les appliquer au système avion. Le système avion est le suivant :



3.2.1.a : Le système avion et ses différentes variables

Pour décrire les mouvements de l'avion, plusieurs équations sont à notre disposition :

- Des équations dynamiques, basées sur le principe fondamental de la dynamique et sur le théorème du moment. Ces équations dépendent des paramètres liés à l'avion sur son point de vol spécifique.
- Des équations cinématiques, valables pour tout type d'avion indépendamment de ses paramètres.

Ces différentes équations sont détaillées dans les parties qui suivent.

### 3.2.2 Equations dynamiques

En appliquant le principe fondamental de la dynamique dans le repère aérodynamique de l'avion (lié au vecteur-vitesse), on obtient les équations de force. Pour commencer, selon l'axe longitudinal, la dérivée de la vitesse est principalement fonction de la poussée des moteurs et de la traînée aérodynamique (équation de traînée) :

$$\dot{V} = \frac{T}{m} \cdot \cos(\alpha) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x - g \cdot \sin(\gamma) \quad (25)$$

avec  $V$  la vitesse aérodynamique,  $T$  la poussée des moteurs,  $m$  la masse,  $\alpha$  l'incidence (l'angle entre la corde aérodynamique de l'avion et sa trajectoire, projeté sur l'axe longitudinal),  $\rho$  la densité de l'air,  $S$  la surface de référence (surface alaire),  $C_x$  le coefficient aérodynamique de traînée (indimensionnel),  $g$  la constante gravitationnelle et  $\gamma$  la pente aérodynamique de l'avion (angle de la trajectoire de l'avion par rapport à la masse d'air, projeté sur l'axe longitudinal).

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Ensuite, la dérivée de vitesse latérale est principalement fonction de la force latérale (elle-même principalement fonction du dérapage  $\beta$ ) et de la composante latérale du poids (équation de force latérale) :

$$\dot{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot C_y - \frac{g}{V} \cdot \sin(\phi) - r$$

avec  $C_y$  le coefficient aérodynamique de force latérale et  $r$  la vitesse de lacet.

Enfin, la dérivée de pente aérodynamique est principalement fonction de la portance aérodynamique et du poids (équation de portance) :

$$\dot{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot C_z - \frac{g}{V} \cdot \cos(\gamma) + \frac{T}{m \cdot V} \cdot \sin(\alpha)$$

Pour obtenir les équations en attitude (couplées les unes aux autres), on applique le théorème du moment cinétique. L'équation de roulis est ainsi :

$$\dot{p} = \frac{I_{zz} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cl + I_{xz} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cn}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2} + \frac{q \left[ I_{xz} \cdot p \cdot (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) + r \cdot (I_{yy} \cdot I_{zz} - I_{zz}^2 - I_{xz}^2) \right]}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2}$$

avec  $p$  la vitesse de roulis,  $I_{xx}$  l'inertie de roulis,  $I_{yy}$  l'inertie de tangage,  $I_{zz}$  l'inertie de lacet et  $I_{xz}$  l'inertie croisée roulis-lacet.  $l$  est la longueur de référence (corde aérodynamique moyenne)  $Cl$  le coefficient aérodynamique de roulis et  $Cn$  le coefficient aérodynamique de lacet. Pour alléger la notation, on pose :

$$\dot{p} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot \tilde{Cl}$$

Cette notation est d'ailleurs renforcée par le fait que  $I_{xx}$ ,  $I_{yy}$  et  $I_{zz}$  sont prépondérants sur  $I_{xz}$ . L'équation de tangage est la suivante :

$$\dot{q} = \frac{\frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cm + T \cdot b + I_{xz} \cdot (r^2 - p^2) - p \cdot r \cdot (I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}}$$

avec  $b$  le bras levier équivalent des moteurs. Là aussi, la notation peut être allégée en posant :

$$\dot{q} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{yy}} \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot \tilde{Cm} + \frac{b}{I_{yy}} \cdot T$$

Enfin, l'équation de lacet est présentée ci-dessous :

$$\dot{r} = \frac{I_{xx} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cn + I_{xz} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cl}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2} + \frac{q \left[ p \cdot (I_{xx}^2 - I_{xx} \cdot I_{yy} + I_{xz}^2) - I_{xz} \cdot r \cdot (I_{xx} - I_{yy} + I_{zz}) \right]}{I_{xx} \cdot I_{zz} - I_{xz}^2}$$

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

et peut être allégée en notant :

$$\dot{r} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{zz}} \cdot V^2 \cdot S l \cdot \tilde{C}_n$$

Les équations présentées dans cette partie sont valables pour tout type d'avion. Néanmoins, il est clair que d'un avion à un autre, les comportements peuvent être radicalement différents. Les principaux facteurs modifiant les comportements dynamiques sont :

- Les paramètres avion : la masse, les inerties, le centrage, les longueurs et surfaces de référence, etc.
- Et surtout, les coefficients aérodynamiques. En effet, les coefficients aérodynamiques sont des fonctions multivariées non-linéaires exprimant le comportement de l'avion au travers de sa forme aérodynamique générale (forme en plan) et particulière (nombre de gouvernes, disposition, déflexion maximale, etc.). Ces coefficients aérodynamiques peuvent se découper en contributions élémentaires (cf. annexes, § 6.2 et 6.3). Ce travail de modélisation est dévolu aux aérodynamiciens, il n'est pas du ressort du concepteur de lois.

A noter que, pour un avion de transport, les dynamiques longitudinales et latérales sont assez découplées. On peut donc aisément séparer les deux problématiques. D'autres équations viennent enrichir ces équations dynamiques : les équations cinématiques.

### 3.2.3 Equations cinématiques

#### 3.2.3.1 Equations longitudinales

Dans le cas d'un découplage longitudinal-latéral, on peut écrire une relation très simple entre l'assiette de l'avion  $\theta$  (angle entre la corde de l'avion et l'horizontale), l'incidence et la pente aérodynamique. En effet, on a :

$$\theta = \alpha + \gamma \quad (26)$$

De même, la dérivée de l'assiette longitudinale est donnée par :

$$\dot{\theta} = q \cdot \cos(\phi) - r \cdot \sin(\phi) \quad (27)$$

avec  $\phi$  l'assiette latérale (ou angle de roulis ou inclinaison). Dans le cadre d'un découplage longitudinal-latéral, on peut écrire, en dérivant (26) :

$$q = \dot{\alpha} + \dot{\gamma} \quad (28)$$

En l'absence de vent, le facteur de charge vertical  $N_z$  est donné par :

$$N_z = \frac{V \cdot \dot{\gamma} + g \cdot \cos(\gamma)}{g \cdot \cos(\phi)} \quad (29)$$

Enfin, la relation liant l'altitude  $h$  à la vitesse ascensionnelle  $V_z$  et à la pente aérodynamique est, en l'absence de vent :

$$\begin{aligned} \dot{h} &= V_z \\ &= V \cdot \sin(\gamma) \end{aligned} \quad (30)$$

### 3.2.3.2 Equations latérales

La variation de l'assiette est donnée par l'équation :

$$\dot{\phi} = p + \tan(\theta).(q.\sin(\phi) + r.\cos(\phi)) \quad (31)$$

La variation du cap  $\psi$  est, elle, donnée par :

$$\dot{\psi} = \frac{q.\sin(\phi) + r.\cos(\phi)}{\cos(\theta)}$$

Pour un virage stabilisé ( $V_z=0$ ), coordonné ( $\beta=0$ ) et sans vent, cette relation devient :

$$\dot{\psi} = \frac{g}{V} . \tan(\phi) \quad (32)$$

### 3.2.4 Cas particuliers de l'avion en effet de sol

L'effet de sol débute à une hauteur de l'ordre d'une demi-envergure et augmente à mesure que l'avion se rapproche du sol. La conséquence de la proximité du sol est une modification de la déflexion de l'écoulement en aval de l'aile. Il en résulte une augmentation sensible de la portance ainsi qu'une diminution de la traînée induite par la portance (diminution de la taille des tourbillons marginaux). On note par ailleurs l'apparition d'un couple piqueur.

Les avions à aile delta sont particulièrement sensibles à l'effet de sol. Pour Concorde par exemple, l'accroissement de la portance est de l'ordre de 45%. On comprend pourquoi de nombreuses études ont été réalisées pour mettre au point des avions à effet de sol permettant de transporter de lourdes charges avec des surfaces portantes relativement faibles. L'exemple classique d'avion à effet de sol est celui des Ekranoplan russes, construits pour la majorité d'entre eux pendant la guerre froide. Celui représenté sur la photo ci-dessous pesait 540 tonnes (autant qu'un A380 !) et volait à 400km/h.



*3.2.4.a : Essais de l'Ekranoplan sur le lac Baïkal*

On notera que l'effet de sol se traduit notamment en première approximation en longitudinal par une augmentation du  $C_{z\alpha}$  ( $C_{z\alpha} = \partial C_z / \partial \alpha$ ). Les voilures déportantes voient donc leur déportance augmenter par effet de sol. Cette propriété est utilisée pour les voitures de compétition notamment.

En effet de sol, les équations de la dynamique du vol restent les mêmes qu'en vol normal. Seuls les coefficients aérodynamiques sont modifiés, et ce de manière fortement non-linéaire (cf. 6.2). Dès lors, pour commander l'avion, on comprend qu'il est nécessaire de posséder des techniques de commandes non-linéaires (cf. §2) ainsi que les modèles non-linéaires embarquables de coefficients aérodynamiques nécessaires pour la synthèse de telles lois (cf. §2.3). Comme, en plus, les phénomènes en effet de sol sont particulièrement instationnaires et difficiles à modéliser avec précision, la robustesse des lois est absolument nécessaire.

### **3.2.5 Conclusion**

Dans cette partie on a mis en place les principes de la dynamique du vol, notamment en effet de sol. On remarque que la dynamique de l'avion est décrite à la fois par des équations cinématiques (identiques pour tous les avions) et dynamiques (identiques pour tous les avions dans leur forme, mais paramétriquement variables d'un avion à un autre). L'effort de modélisation doit donc s'appliquer aux équations dynamiques uniquement. Il s'avère, par ailleurs, que ces équations dynamiques sont non-linéaires (affines), particulièrement en effet de sol. Il paraît donc clair que l'effort de commande principal doit aussi s'appliquer aux lois issues de l'inversion des équations dynamiques. Ces lois représentent la « petite boucle » de la commande automatique du vol.

Maintenant que la dynamique avion est connue et analysée, l'on peut débiter la synthèse de lois de commandes de vol, de pilote automatique et d'autopoussée.

## 3.3 Lois de commande de vol

### 3.3.1 Proposition

#### 3.3.1.1 Commande dans le plan longitudinal

##### 3.3.1.1.1 Introduction

Il existe un certain déséquilibre dans la thèse entre le traitement de la partie longitudinale et de la partie latérale du sujet. En effet, historiquement, nous avons commencé par étudier le plan longitudinal en premier, ce qui a soulevé d'importants problèmes. Les solutions apportées sont valables aussi bien dans le cadre longitudinal que dans le cadre latéral, ce qui nous a permis de gagner beaucoup de temps pour le deuxième cas.

La difficulté principale de l'étude est due à l'inadaptation de la technique d'inversion de la dynamique à la commande des systèmes à non-minimum de phase car elle les rend instables (cf. §2.1.3.2.3). Le transfert {gouverne de profondeur} → {facteur de charge} étant à non-minimum de phase, l'inversion de la dynamique présente un certain handicap pour le design de lois de commande de vol longitudinales compatibles avec la philosophie Airbus.

Une première approche a été proposée dans le rapport REAL ATTAS du DLR (2000) qui préconise l'utilisation d'une petite boucle (cf. §1.1) en vitesse de tangage et d'une grande boucle (cf. §1.1) basée sur le principe du contrôle d'énergie totale (TECS) développé dans [113]. Cette architecture de lois de pilotage, basée sur la commande non-linéaire inverse, avait été évaluée à la fois par le DLR (sur un modèle non-linéaire d'A330-200 en phase d'atterrissage) et par Airbus (pilote automatique intégré au simulateur certifié de pilote automatique SIMPA, certification « à blanc »). Elle avait donné de bons résultats, ce qui conduisit Airbus à accueillir cette thèse CIFRE pour s'approprier ces nouvelles techniques non-linéaires, et approfondir certains aspects (activité gouverne, applicabilité à un pilotage manuel, complexité de réalisation et, bien sûr, preuve de robustesse). A noter que, depuis lors, les lois de pilotage au sol basées sur ces mêmes techniques ont prouvé leur bien-fondé et leur efficacité ([43], [44], et [213]).

La petite boucle DLR recevait, sur l'axe longitudinal, un ordre en vitesse de tangage et non pas en facteur de charge. De plus, aucune petite boucle non-linéaire en facteur de charge n'a été proposée dans la littérature à ce jour.

Désireux d'assurer la compatibilité de nos travaux avec les standards Airbus, nous avons choisi de développer notre propre architecture de lois de pilotage conservant les objectifs actuels de la petite boucle et de la grande boucle. Nous avons aussi essayé d'intégrer les protections du domaine de vol au design de cette architecture afin de limiter le nombre de lois à embarquer sur calculateur et le nombre de logiques associées. Plus précisément, l'architecture proposée s'appuie sur une petite boucle en vitesse de tangage avec une surcouche cinématique transformant le facteur de charge désiré en vitesse de tangage désirée. Ceci permet d'associer des grandes boucles du pilote automatique ayant les mêmes objectifs de guidage que les grandes boucles actuelles.

Nous détaillons donc cette nouvelle architecture de lois de pilotage, non sans faire auparavant un rappel sur l'existant.

##### 3.3.1.1.2 L'existant

Traditionnellement, les organes de commande primaires d'un avion (palonnier et manche) commandent directement un angle de braquage de gouvernes proportionnel par l'intermédiaire de timoneries diverses. Avec l'industrialisation de Concorde et de l'Airbus A320 sont apparues les commandes de vol électriques.

Les commandes de vol électriques, entre autres avantages, permettent de **commander** un avion **par objectif**, c'est-à-dire de commander directement une variable (facteur de charge, assiette longitudinale, dérapage, etc.) par le manche et le palonnier. De cette manière, on dit souvent que le manche est « gradué » en facteur de charge et en vitesse de roulis par exemple.

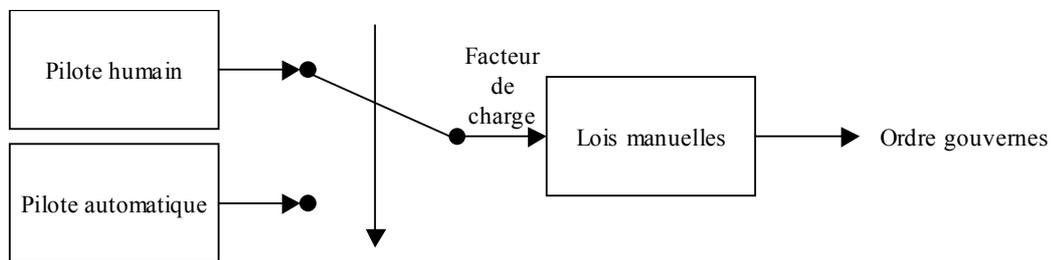
## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Chez Airbus, dans le plan longitudinal, les objectifs de pilotage actuels visent à commander du facteur de charge par le manche. Les avantages sont les suivants :

- La résistance structurale d'un avion est calibrée en facteur de charge (classiquement entre  $-1g$  et  $+2.5g$ ). En graduant le manche en facteur de charge et en limitant sa valeur à  $-1g$  et  $2.5g$ , on est sûr de conserver l'intégrité de l'avion dans toute manœuvre.
- L'expression simplifiée du facteur de charge est la suivante :

$$N_z = \frac{V \cdot \dot{\gamma}}{g}, \quad (33)$$

Commander un facteur de charge nul équivaut à commander une dérivée de la pente nulle, c'est-à-dire une pente constante. Grâce au manche, on peut ainsi guider l'avion à long terme, c'est à dire contrôler sa trajectoire, i.e. contrôler la position de son centre de gravité. On peut donc interfacer avec les commandes de vol électriques soit un pilote humain, soit un pilote automatique comme suit (architecture opérationnelle depuis l'A340-600) :



3.3.1.1.2.a : Architecture de lois de pilotage-guidage de type « petites boucles communes »

La commande en facteur de charge n'est pas la plus directe au vu des relations basiques de la mécanique du vol. En effet, dans un avion traditionnel, le pilote commande directement par le manche un angle de braquage de gouvernes proportionnel par le biais de timoneries diverses. Or on a l'équation aérodynamique suivante :

$$\dot{q} = F_q(X) + G_q(X) \cdot \delta m$$

où  $F_q$  et  $G_q$  sont des fonctions de l'état de l'avion et  $\delta m$  est le braquage de la gouverne de profondeur. Ainsi, en agissant sur le manche d'un avion traditionnel, le pilote fait une action de pilotage (à court terme), c'est-à-dire de positionnement de l'avion autour de son centre de gravité ou encore de contrôle de l'attitude de l'avion.

La loi en facteur de charge, elle, permet de guider l'avion et non de le piloter. Pour les phases de vol très dynamiques (à proximité du sol par exemple), où les tâches de commande sont à très court terme, les lois de commande d'Airbus sont ainsi nécessairement modifiées pour devenir progressivement des lois en assiette longitudinale, plus directement contrôlable par la gouverne de profondeur.

On a donc cherché à proposer une architecture de lois de commande de vol permettant à la fois de commander du facteur de charge dans certaines conditions de vol et de la vitesse de tangage dans d'autres, ainsi qu'à protéger par une seule loi le facteur de charge, l'incidence et l'assiette longitudinale. Après la description de cette architecture, nous présentons quelques réponses temporelles de référence (sur des consignes de pilotage en  $q$  et en  $N_z$ ) sans puis avec les protections en incidence, assiette et facteur de charge. Ces simulations proviennent de lois de commande de type RMI, écrites sous Simulink et simulées sous SIMPA (SIMulateur de Pilote Automatique, outil certifié d'Airbus), après codage automatique en C et implantation manuelle dans le code fortran de SIMPA.

### 3.3.1.1.3 Architecture de lois de pilotage proposée

#### 3.3.1.1.3.1 Commande en tangage

##### 3.3.1.1.3.1.1 Principe général

L'idée fondatrice de cette loi est de réagir tel que le ferait un pilote. Sa vision à court terme correspondant à une commande en tangage, on fait une première commande en assiette longitudinale et en vitesse de tangage. En effet, en postulant un découplage entre les mouvements longitudinaux et latéraux, on peut approximer l'équation (27) comme suit :

$$\dot{\theta} = q$$

on a alors :

$$\begin{aligned}\ddot{\theta} &\approx \dot{q} \\ &\approx F_q(X) + G_q(X) \cdot \delta m\end{aligned}$$

Plus précisément, on a :

$$F_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{yy}} \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot \left( \left. \tilde{C}_m \right|_{\delta m_{ref}} - \left. \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial \delta m} \right|_{\delta m_{ref}} \cdot \delta m_{ref} \right) + \frac{b}{I_{yy}} \cdot T$$

avec :

$$\left. \tilde{C}_m \right|_{\delta m_{ref}} (\alpha, \beta, \text{Mach}, q, Z_p, x_{CG}, \delta i)$$

où  $Z_p$  est l'altitude pression,  $x_{CG}$  le centrage et  $\delta i$  le braquage des gouvernes aérodynamiques exceptée la gouverne de profondeur. On a aussi  $G_q$  défini comme suit :

$$G_q = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{yy}} \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot \left. \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial \delta m} \right|_{\delta m_{ref}}$$

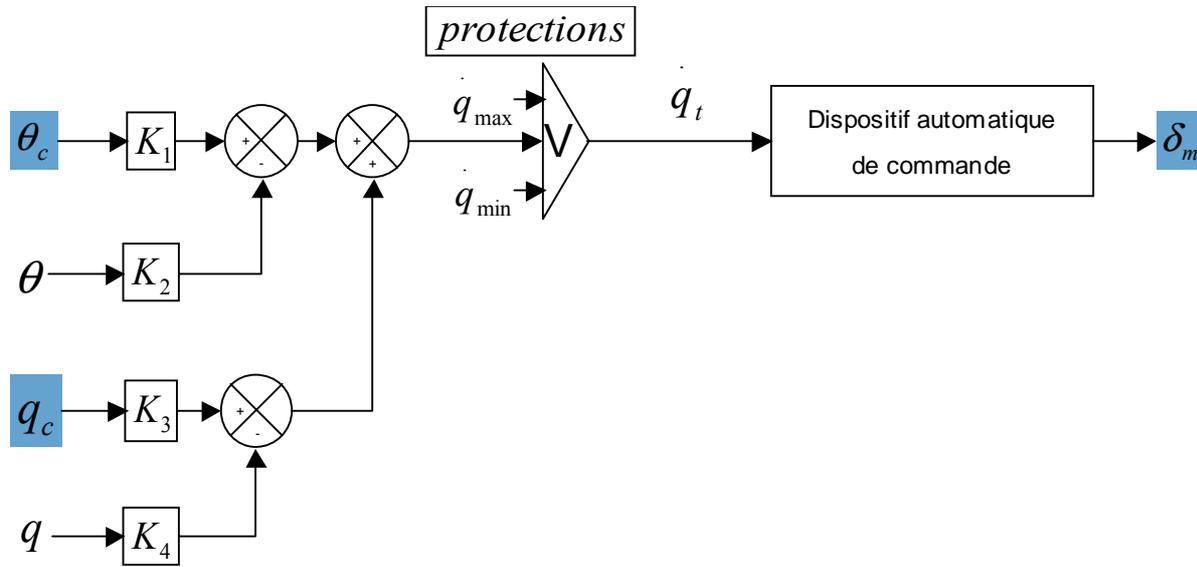
où :

$$\left. \frac{\partial \tilde{C}_m}{\partial \delta m} \right|_{\delta m_{ref}} (\alpha, \beta, \text{Mach}, q, Z_p, x_{CG}, \delta i)$$

est l'efficacité de la gouverne de profondeur. A noter que ces équations résultent de la linéarisation autour d'une valeur de référence pour le braquage de la gouverne de profondeur. Notons que l'efficacité des gouvernes aérodynamiques est généralement considérée comme linéaire dans leur domaine usuel de fonctionnement.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

L'architecture de lois de pilotage proposée est donc la suivante :



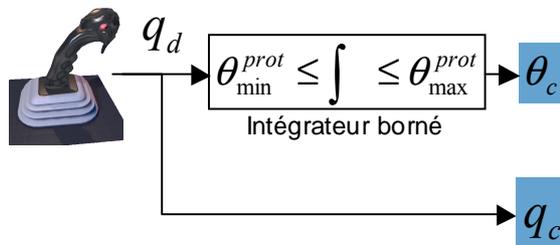
3.3.1.1.3.1.1.a : Architecture de commande en tangage proposée

Cette architecture permet de connecter une commande en assiette longitudinale ( $\theta_c$ ) associée à une précommande en vitesse de tangage ( $q_c$ ). A noter que la loi présente un voteur ( $V$ ) qui protège le système avion rebouclé de tout dépassement commandé du domaine de vol (cf. §3.3.1.1.3.3).

Dans cette étude, le dispositif de commande proposé est une loi de commande de type RMI. Toutefois, on peut imaginer d'autres dispositifs, d'où cette notation non-spécifique. Le correcteur linéaire produit en sortie une variable  $q_t$ , homogène à une accélération de tangage. Le rôle du dispositif automatique de commande présenté ci-dessus est alors d'assurer le transfert linéaire et découplé  $q_t = q$ .

**3.3.1.1.3.1.2 Comment interfacer un manche latéral directement avec la loi en  $q$  ?**

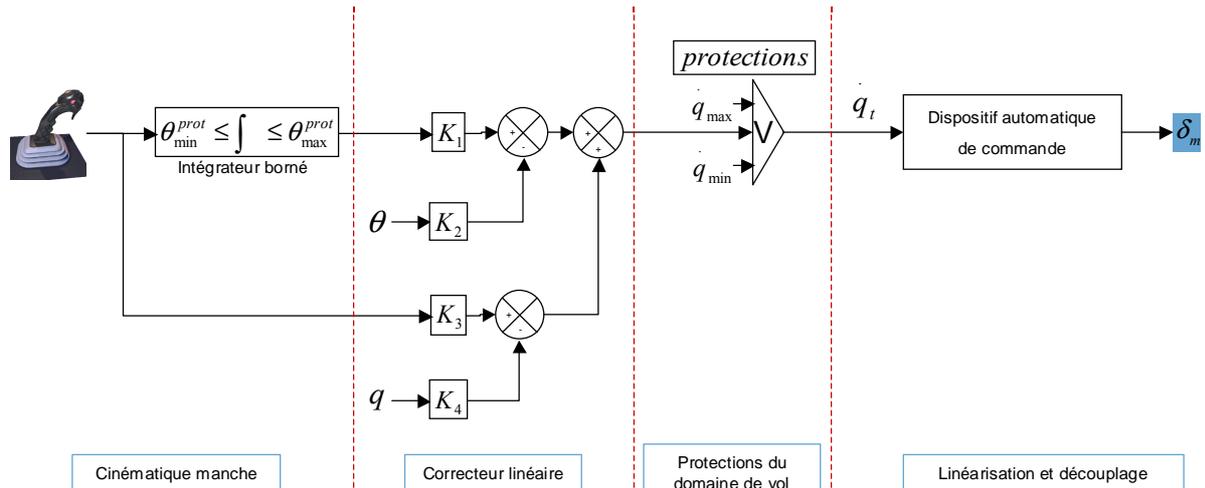
Si l'on souhaite commander l'avion directement en vitesse de tangage, on peut graduer le manche du pilote en vitesse de tangage désirée. Du manche sort alors une information  $q_d$  qui est ensuite retraitée comme suit, avant d'attaquer la loi en  $q$  proprement dite. L'information issue du manche est ségréguée en une précommande en  $q$  et une commande intégrée et bornée en assiette longitudinale. Cette borne en assiette est calculée par le module de protections (cf. §3.3.1.1.3.3). Au final, on a le système suivant :



3.3.1.1.3.1.2.a : Cinématique de commande manuelle en vitesse de tangage

### 3.3.1.1.3.1.3 Exemple de simulation sous SIMPA (SIMulateur de Pilote Automatique)

SIMPA est un outil de simulation non-linéaire certifié développé à Airbus. Ce simulateur est recouqué avec des données issues d'essais en vol pour pouvoir le certifier. Il est ensuite utilisé pour la validation du pilote automatique (simulations déterministes, ou STR, et simulations de type Monte-Carlo). Les simulations que nous présentons mettent en œuvre un pilote automatique Simulink, codé automatiquement en C et implanté manuellement dans le code fortran de SIMPA. On simule le système suivant :

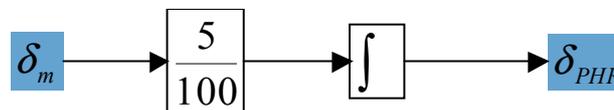


3.3.1.1.3.1.3.a : Loi en  $q$  complète simulée sous SIMPA

Le choix du réglage de la dynamique a été guidé par le désir de démontrer les capacités du type d'architecture de lois de pilotage proposé en terme de temps de réponse, de comportement face aux non-linéarités des actionneurs et de marges de stabilité. L'objet n'est donc pas de juger le réglage des lois (rapidité, dépassement) qui peut être modifié à volonté.

Le réglage illustré ici est défini par  $\omega = 1.5$ ,  $z = 1$  et  $\tau = 3$ . Celui-ci correspond à un objectif de loi très rapide avec compensation de l'erreur de traînage sur une rampe commandée (d'où le dépassement de l'ordre de 30%). L'avion considéré est un A340-300, en configuration full, à un centrage de 30%, à une masse de 130 tonnes et initialisé à 5000ft à la vitesse de 190 kt. Les lois sont de type RMI, l'autopoussée est déconnectée. On commande l'avion en vitesse de tangage ( $q$ ). Les résultats sont donnés page suivante.

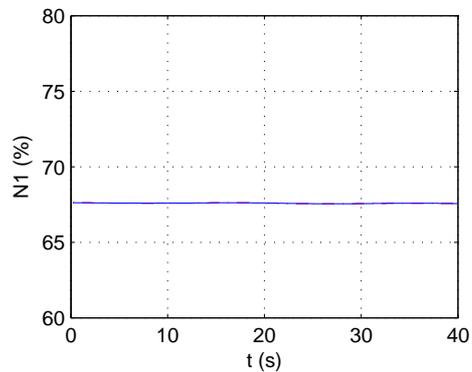
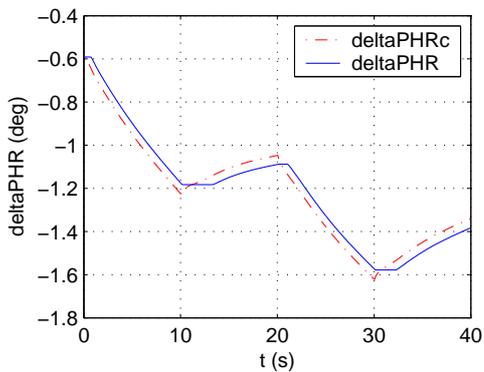
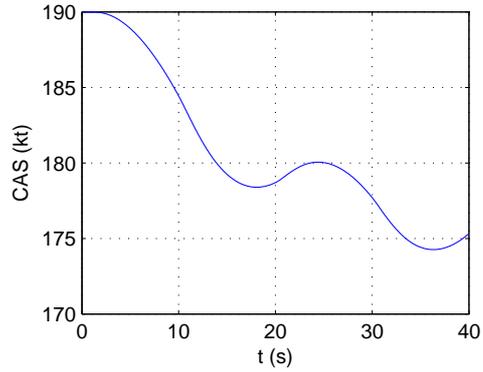
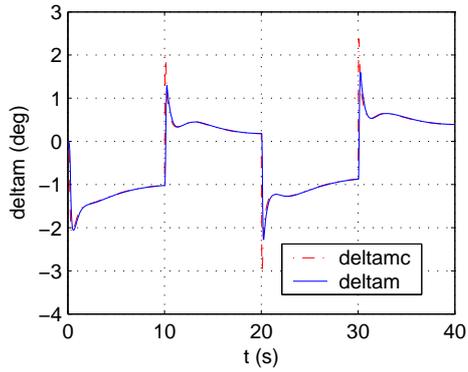
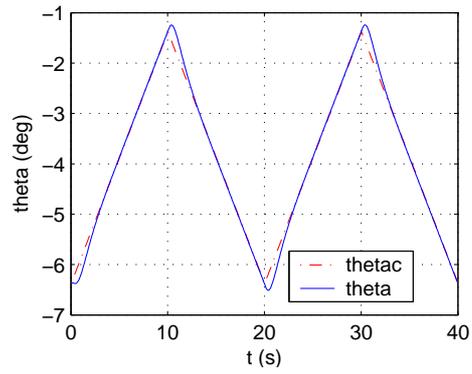
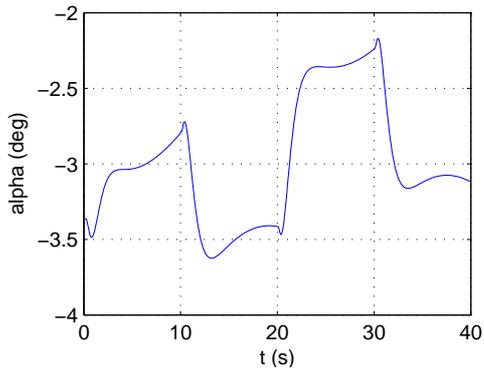
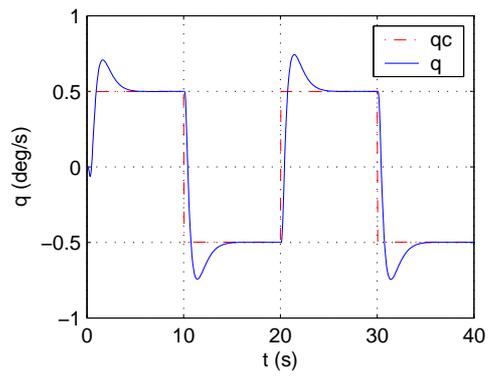
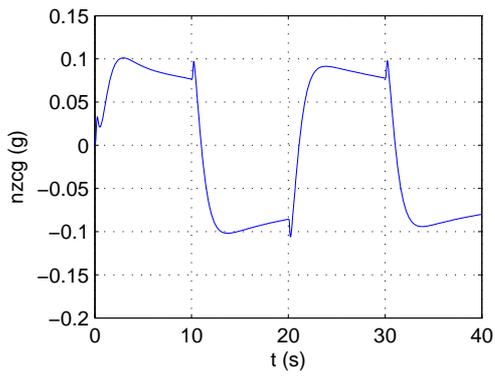
Pour les simulations qui suivent, on utilise le modèle {avion naturel+modèle actionneurs} de SIMPA. La cinématique entre la gouverne de profondeur et le plan horizontal réglable (PHR) est définie par un simple intégrateur :



3.3.1.1.3.1.3.b : Cinématique profondeur/PHR

Ceci n'a pas de conséquence sur les lois puisque l'information de braquage du PHR est rebouclée par l'inversion de la dynamique du système : l'ordre de déflexion de la gouverne de profondeur prend directement en compte la position réelle du plan.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*3.3.1.1.3.1.3.c : Comportement de la loi en q soumise à un enchaînement de créneaux*

### 3.3.1.1.3.2 Commande en dérivée de pente

#### 3.3.1.1.3.2.1 Principe général

Pour le guidage de l'avion, une surcouche en facteur de charge ou en dérivée de pente est nécessaire (on a vu plus haut que, d'après (33), ces deux variables sont proportionnelles). On choisit une commande en dérivée de pente. L'équation de la portance peut s'écrire comme suit :

$$\dot{\gamma} = F_{\gamma}(X) + G_{\gamma}(X).\alpha \quad (34)$$

avec :

$$F_{\gamma} = -\frac{g \cdot \cos(\gamma)}{V} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot \left( Cz|_{\alpha_{ref}} - \frac{\partial Cz}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_{ref}} \cdot \alpha_{ref} \right)$$

et :

$$Cz|_{\alpha_{ref}}(\alpha, \beta, Mach, q, Zp, x_{CG}, \delta)$$

On a par ailleurs :

$$G_{\gamma} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot \frac{\partial Cz}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_{ref}} + \frac{T}{m \cdot V}$$

avec :

$$\frac{\partial Cz}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha_{ref}}(\alpha, \beta, Mach, q, Zp, x_{CG}, \delta)$$

La commande définie dans la partie précédente est une commande en  $\theta$ . Il faut donc trouver le lien entre  $\alpha$  et  $\theta$ . Or on possède les deux équations (26) et (28). Cela signifie que, pour respecter la mécanique du vol, une consigne de tangage doit être équivalente à la somme d'une consigne en dérivée d'incidence et d'une consigne en dérivée de pente :

$$q_c = \dot{\alpha}_c + \dot{\gamma}_c$$

Une approche simplifiée et relativement répandue consiste à dire que la vitesse de tangage est égale à la dérivée de pente aérodynamique. Cette assertion est valable à l'équilibre. En effet, la relation (34) implique qu'un facteur de charge stabilisé correspond à une valeur fixée de l'incidence et donc à une valeur nulle de sa dérivée. Supposons que l'on dispose d'une loi de type premier ordre en  $q$  :

$$\dot{q} = \frac{q_c - q}{\tau_q}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

L'approche simplifiée décrite ci-dessus consisterait à écrire directement :

$$\dot{q} = \frac{\gamma_c - q}{\tau_q}$$

Cette approche est certes asymptotiquement valable, mais pose le problème de ne présenter aucune assurance quant à son comportement en transitoire. Dans ce cas le facteur de charge ne se comporte pas comme un premier ordre. L'innovation fondamentale proposée ici est de considérer l'équation exacte d'un premier ordre en  $q$  :

$$\dot{q} = \frac{\alpha_c + \gamma_c - q}{\tau_q}$$

En ce qui concerne l'ordre en dérivée de pente commandée, il est directement proportionnel au facteur de charge commandé. Malheureusement, un ordre discontinu en dérivée de pente implique un ordre discontinu en incidence. Cela signifie que l'ordre en dérivée de  $\alpha$  n'existe pas. Néanmoins, on sait qu'une consigne en facteur de charge équivaut à une consigne en incidence. On peut alors imposer une dynamique du premier ordre sur  $\alpha$ , de type :

$$\dot{\alpha} = \frac{\alpha_c - \alpha}{\tau_\alpha}$$

Ceci nous permet de disposer d'une consigne en dérivée d'incidence correspondant à un premier ordre. On peut donc réécrire le filtre du premier ordre en  $q$  mis en série avec un filtre du premier ordre en incidence de la manière suivante :

$$\dot{q} = \frac{\frac{\alpha_c - \alpha}{\tau_\alpha} + \gamma_c - q}{\tau_q}$$

Une fois ce correcteur obtenu, il reste à faire le lien avec la petite boucle de tangage précédemment décrite. Dans le cadre d'un deuxième ordre sans avance de phase, cette petite boucle s'écrit :

$$\dot{q} = \omega^2.(C - \theta) - 2.z.\omega.q$$

avec  $C$  la consigne d'entrée de la petite boucle en assiette. En identifiant, on trouve la consigne à donner à la petite boucle afin de satisfaire nos besoins en terme de commande d'incidence :

$$\begin{cases} \tau_q = \frac{1}{2.z.\omega} \\ \tau_\alpha = \frac{2.z}{\omega} \\ C = \frac{2.z}{\omega}.\gamma_c + \alpha_c + \theta - \alpha \end{cases}$$

De cette façon, le correcteur complet en dérivée de pente (ou en facteur de charge) se comporte comme un filtre du deuxième ordre de pulsation  $\omega$  et d'amortissement  $z$ .

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

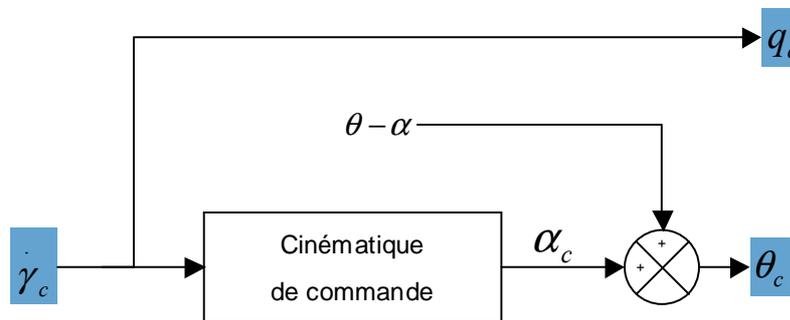
Il nous reste à identifier par rapport aux consignes  $q_c$  et  $\theta_c$  de la petite boucle en assiette :

$$\dot{q}_t = 2.z.\omega.(q_c - q) + \omega^2.(\theta_c - \theta)$$

On peut en déduire les consignes suivantes :

$$\begin{cases} q_c = \gamma_c \\ \theta_c = \alpha_c + \theta - \alpha \end{cases} \quad (35)$$

(Attention, dans ce dernier cas,  $q_c$  et  $\theta_c$  ne sont que des consignes d'entrée de la petite boucle en tangage ; en particulier, on n'a pas  $q_c = d\theta_c/dt$ ). Au final, grâce à cet artifice d'écriture, on obtient une architecture de lois de pilotage très simple (interconnectable avec la partie précédente) :

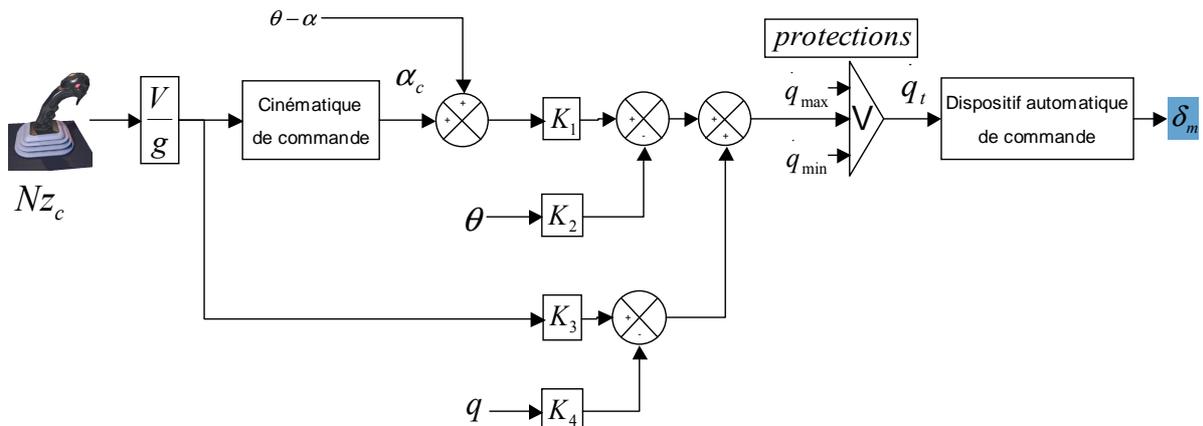


3.3.1.1.3.2.1.a : Architecture de loi interfaçant l'ordre en facteur de charge et la boucle de tangage

Dans notre étude, le dispositif de commande proposé est de type RMI.

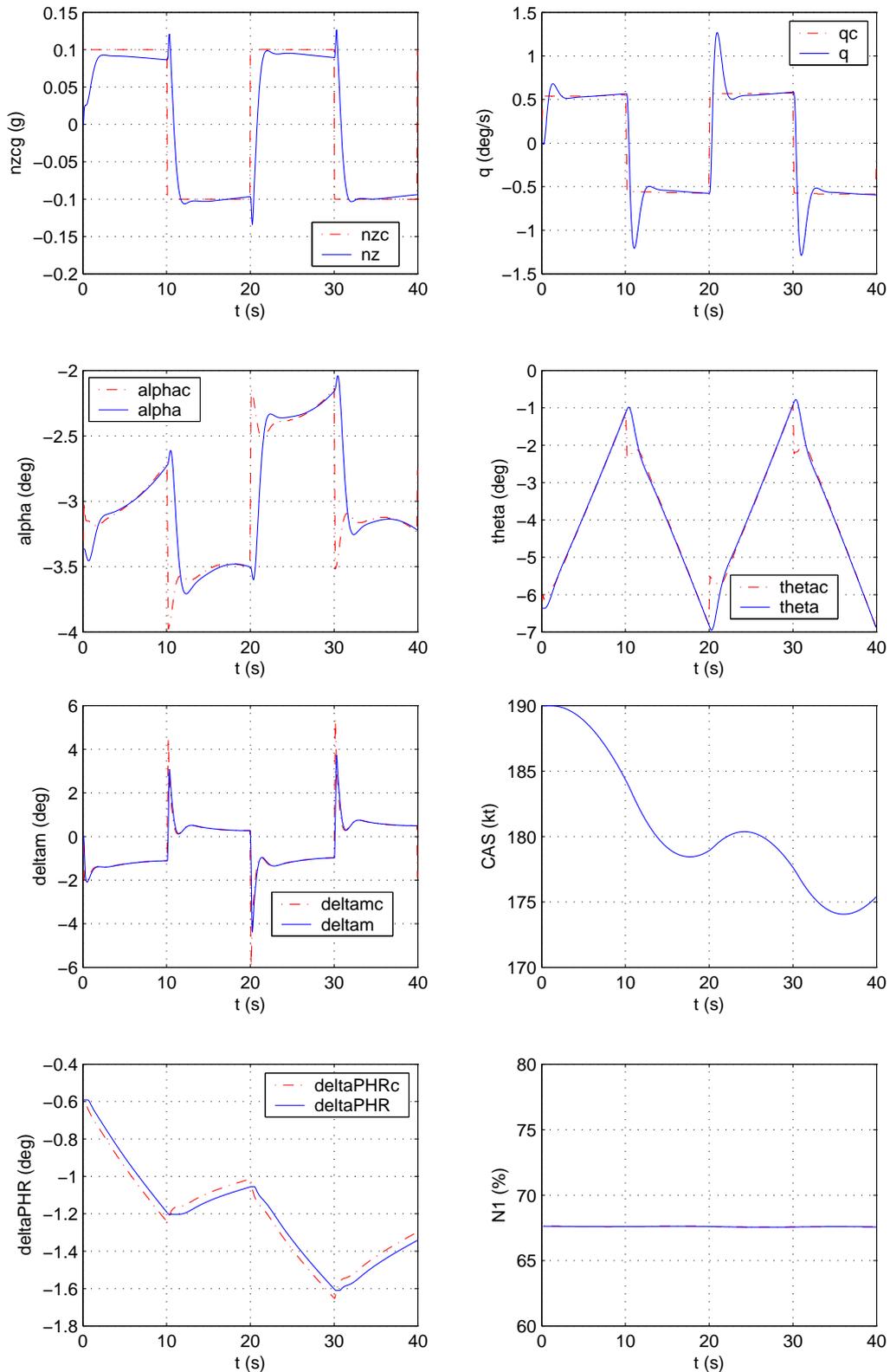
### 3.3.1.1.3.2.2 Simulation

L'avion considéré est un A340-300, en configuration full, à un centrage de 30%, à une masse de 130 tonnes et initialisé à 5000ft à la vitesse de 190 kt. Les lois sont de type RMI avec le même réglage que précédemment ( $\omega = 1.5$ ,  $z = 1$  et  $\tau = 3$ ) et l'autopoussée est déconnectée. On commande l'avion en facteur de charge ( $Nz$ ) comme suit :



3.3.1.1.3.2.2.a : Architecture de commande en facteur de charge basée sur la commande en tangage

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

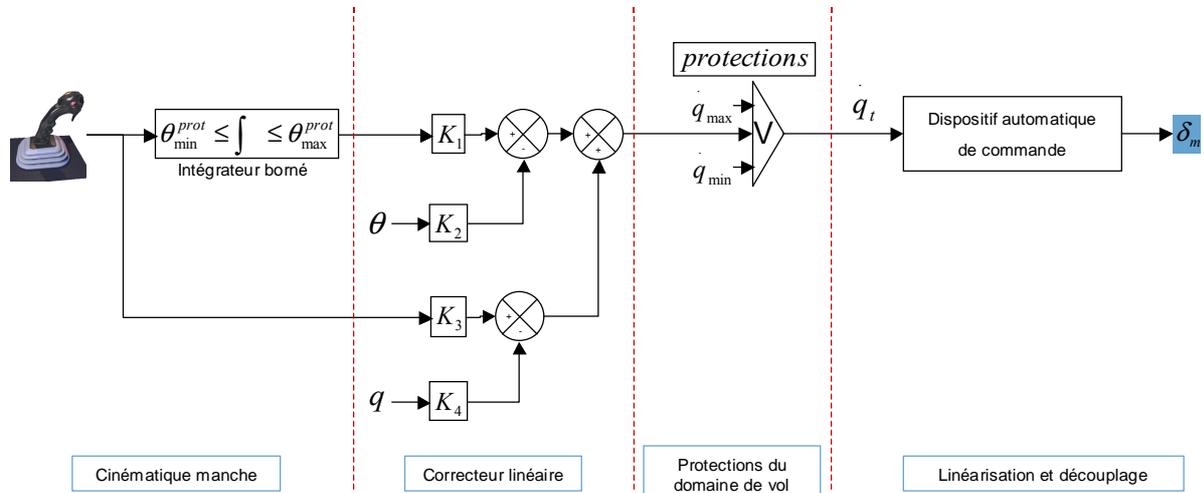


*3.3.1.1.3.2.2.b : Simulation de la loi en facteur de charge sans autopoussée*

Dans cette simulation on constate un suivi légèrement imprécis du facteur de charge commandé lié à l'absence d'autopoussée (voir explication dans la partie 3.3.1.1.3.3.5).

### 3.3.1.1.3.3 Fonctionnement en protection

#### 3.3.1.1.3.3.1 Architecture générale de la loi en $q$ protégée



3.3.1.1.3.3.1.a : Synoptique général de la loi en  $q$  protégée

$\theta_{\min}^{prot}$  et  $\theta_{\max}^{prot}$  sont calculés à partir des valeurs extrêmes admissibles de l'assiette et de la dérivée de pente. On a donc la formulation suivante :

$$\begin{cases} \theta_{\min}^{prot} = \max(\theta_{\min}, \theta(\dot{\gamma}_{\min})) \\ \theta_{\max}^{prot} = \min(\theta_{\max}, \theta(\dot{\gamma}_{\max})) \end{cases}$$

Dans les parties suivantes, on propose des manières de calculer ces valeurs extrêmes. Partant de ces valeurs, on calcule deux correcteurs extrêmes dont la sortie est votée avec celle du correcteur linéaire ci-dessus.

$$\begin{cases} \dot{q}_{\min} = \omega_q^2 \cdot (\theta_{\min}^{prot} - \theta) - 2 \cdot \omega_q \cdot q \\ \dot{q}_{\max} = \omega_q^2 \cdot (\theta_{\max}^{prot} - \theta) - 2 \cdot \omega_q \cdot q \end{cases}$$

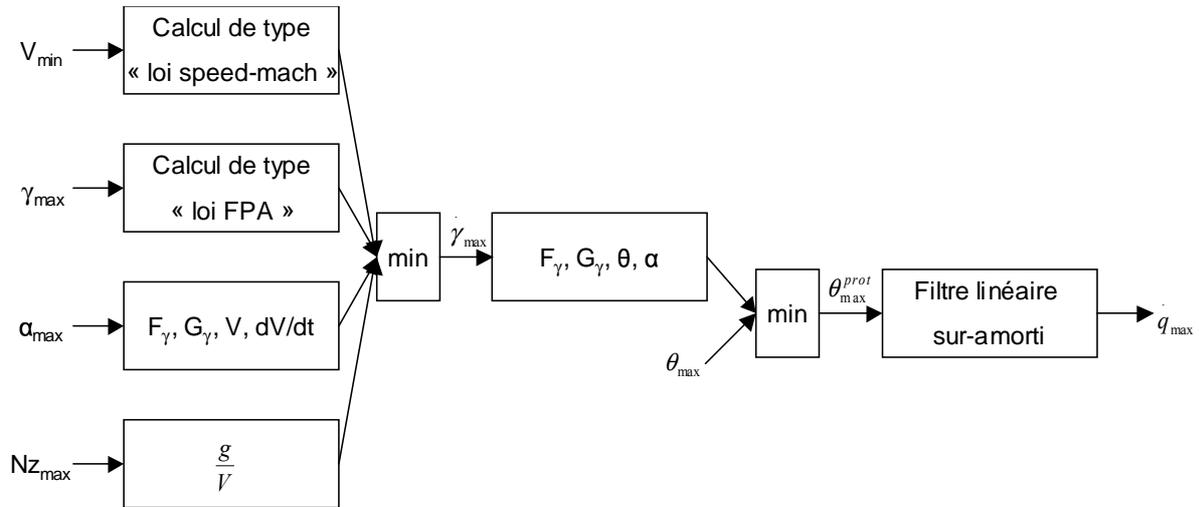
Ces correcteurs extrêmes sont des correcteurs du deuxième ordre en assiette sans avance de phase (pas de précommande en  $q$ ) ni dépassement. Ils visent une assiette égale aux valeurs extrêmes d'assiette correspondantes aux limites du domaine de vol. Ce vote garantit un gabarit de réponse temporelle.

Par ailleurs, les informations  $\theta_{\min}^{prot}$  et  $\theta_{\max}^{prot}$  sont utilisées pour limiter l'intégrateur transformant la vitesse de tangage commandée en assiette commandée. Ceci permet d'éviter toute surcharge de cet intégrateur, en sortie de saturation notamment.

L'avantage de ce principe de protection est qu'il permet de conserver, pour le réglage des protections, la même pulsation que celle réglée et validée pour la synthèse de la loi présentée précédemment ( $\omega_q = \omega$ ). L'apport en terme de temps de réglage est alors très appréciable. Toutefois, l'on peut tout de même souhaiter finalement rendre la protection plus ou moins intrusive. Dans ce cas, on pourra choisir un réglage différent pour  $\omega_q$ .

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

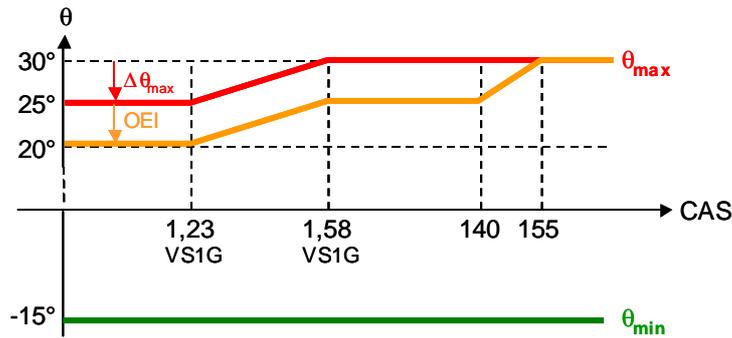
Le principe général de calcul des ordres de protection est donc le suivant :



*3.3.1.1.3.3.1.b : Calcul de la protection en tangage (protection haute)*

### 3.3.1.1.3.3.2 Exemple de calcul de $\theta_{min}$ et $\theta_{max}$

La définition actuelle des butées d'assiette est la suivante :



*3.3.1.1.3.3.2.a : Valeurs actuelles de butée en assiette (A330-A340)*

$\theta_{max}$  dépend donc à la fois de la vitesse et de l'état des moteurs.

### 3.3.1.1.3.3.3 Calcul des valeurs de protection

#### 3.3.1.1.3.3.3.1 Traduction des valeurs de protection en dérivée de pente équivalente

La première protection du domaine de vol directement traduisible en dérivée de pente est la protection en facteur de charge. En effet, protéger  $Nz$  entre deux valeurs extrêmes revient à protéger la dérivée de la pente de la manière suivante :

$$\frac{Nz_{min} \cdot g}{V} \leq \dot{\gamma} \leq \frac{Nz_{max} \cdot g}{V}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Par ailleurs, selon le même schéma, l'incidence commandée est protégée. On calcule simplement  $\dot{\gamma}(\alpha_{\max})$  comme suit :

$$\dot{\gamma}(\alpha_{\max}) = \min \left( F_{\gamma}(X) + G_{\gamma}(X) \cdot \alpha_{\max}, F_{\gamma}(X) + G_{\gamma}(X) \cdot \alpha_{\max} + K_{\alpha} \cdot \frac{\dot{V}}{V} \right)$$

et on fait de même pour  $\dot{\gamma}(\alpha_{\min})$ . Le terme en  $K_{\alpha}$  permet de se dégager de la phugoïde qui apparaît lorsque l'incidence commandée et la poussée sont en butée ([137]). Dans les simulations qui suivent, ce gain a été réglé à 3.

D'autres niveaux de protection sont étudiés (en vitesse et en pente), dont l'implantation au sein de cette architecture de lois de pilotage est aisée. Néanmoins, ils ne figurent pas dans ce mémoire. A ce niveau, on note :

$$\dot{\gamma}_{\max} = \min \left( \frac{Nz_{\max} \cdot g}{V}, \dot{\gamma}(\alpha_{\max}), \dot{\gamma}(V_{\min}), \dots \right)$$

(problème symétrique pour  $\dot{\gamma}_{\min}$ ).

### 3.3.1.1.3.3.2 Traduction des valeurs de protection en assiette équivalente

Enfin, il faut traduire cette valeur extrême de dérivée de pente en valeur extrême d'assiette. Pour cela, on remarque que le système (35) est strictement équivalent au système suivant :

$$\begin{cases} q_c = 0 \\ \theta_c = \frac{2 \cdot z}{\omega} \cdot \dot{\gamma}_c + \alpha_c + \theta - \alpha \end{cases}$$

Or, à proximité des bornes d'assiette, on cherche effectivement à avoir une vitesse de tangage commandée nulle. Ceci peut donc s'écrire de la manière suivante :

$$\theta_c = \dot{\gamma}_c \cdot \left( \frac{2 \cdot z}{\omega} + \frac{1}{G_{\gamma}} \right) - \frac{F_{\gamma}}{G_{\gamma}} + \theta - \alpha$$

On peut alors écrire :

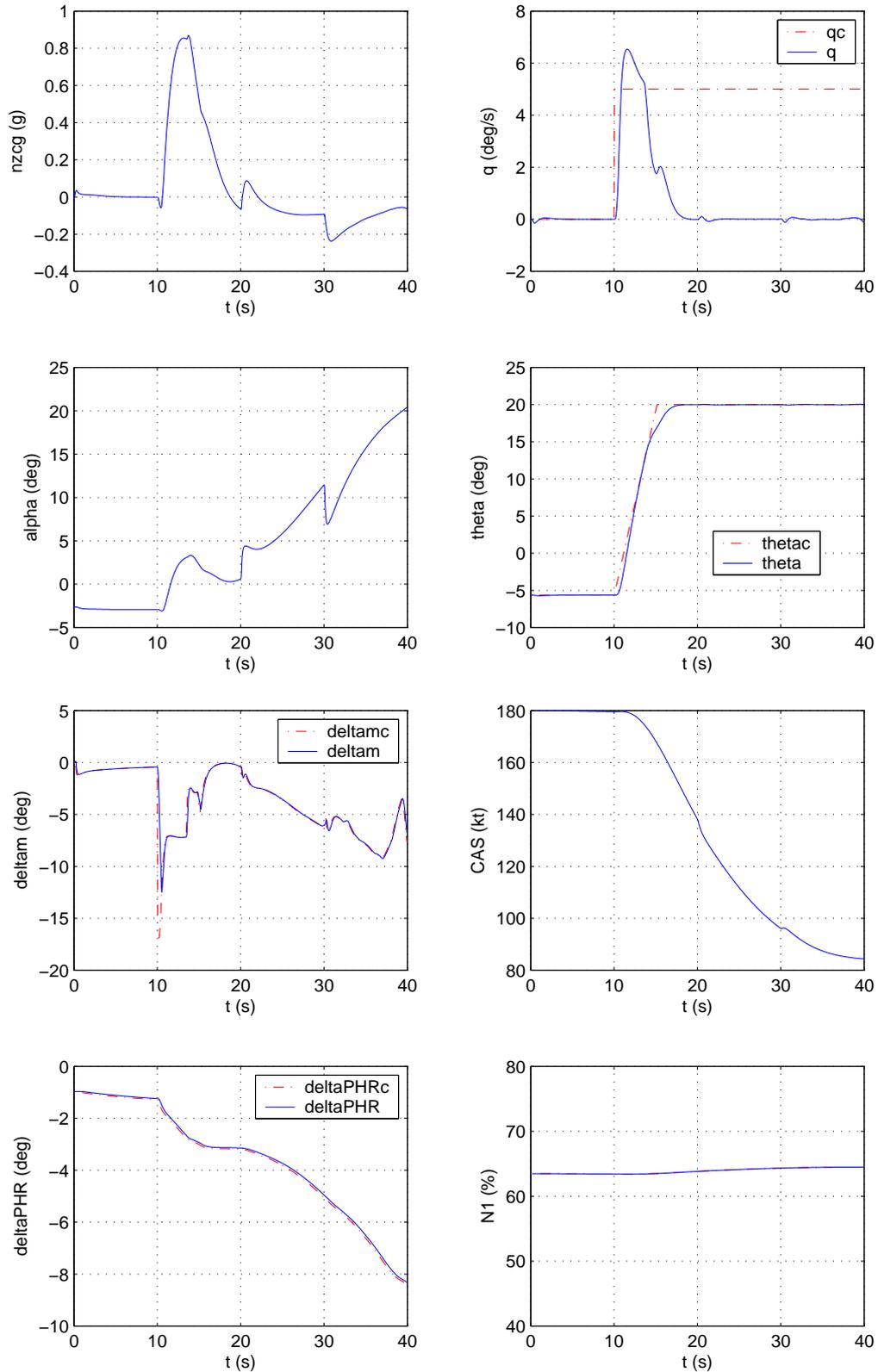
$$\theta_{\max}^{prot} = \dot{\gamma}_{\max} \cdot \left( \frac{2 \cdot z}{\omega} + \frac{1}{G_{\gamma}} \right) - \frac{F_{\gamma}}{G_{\gamma}} + \theta - \alpha$$

### **3.3.1.1.3.3.4 Simulation du comportement en protection d'assiette**

L'avion considéré est un A340-300, en configuration full, à un centrage de 30%, à une masse de 130 tonnes et initialisé à 5000ft à la vitesse de 180 kt. Les lois sont de type RMI avec le même réglage que précédemment ( $\omega = 1.5$ ,  $z = 1$  et  $\tau = 3$ ) et l'autopoussée est déconnectée. On commande l'avion en vitesse de tangage ( $q$ ) : on lui demande un créneau de 5 deg/s. L'avion rencontre un créneau de vent ascendant de 10kt entre 20 et 30 secondes. Pour les besoins de la simulation, la protection d'assiette maximale a été réglée à 20 degrés (pas assez de puissance moteur pour tenir plus de manière stabilisée dans ce cas de vol).

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Les résultats sont les suivants :

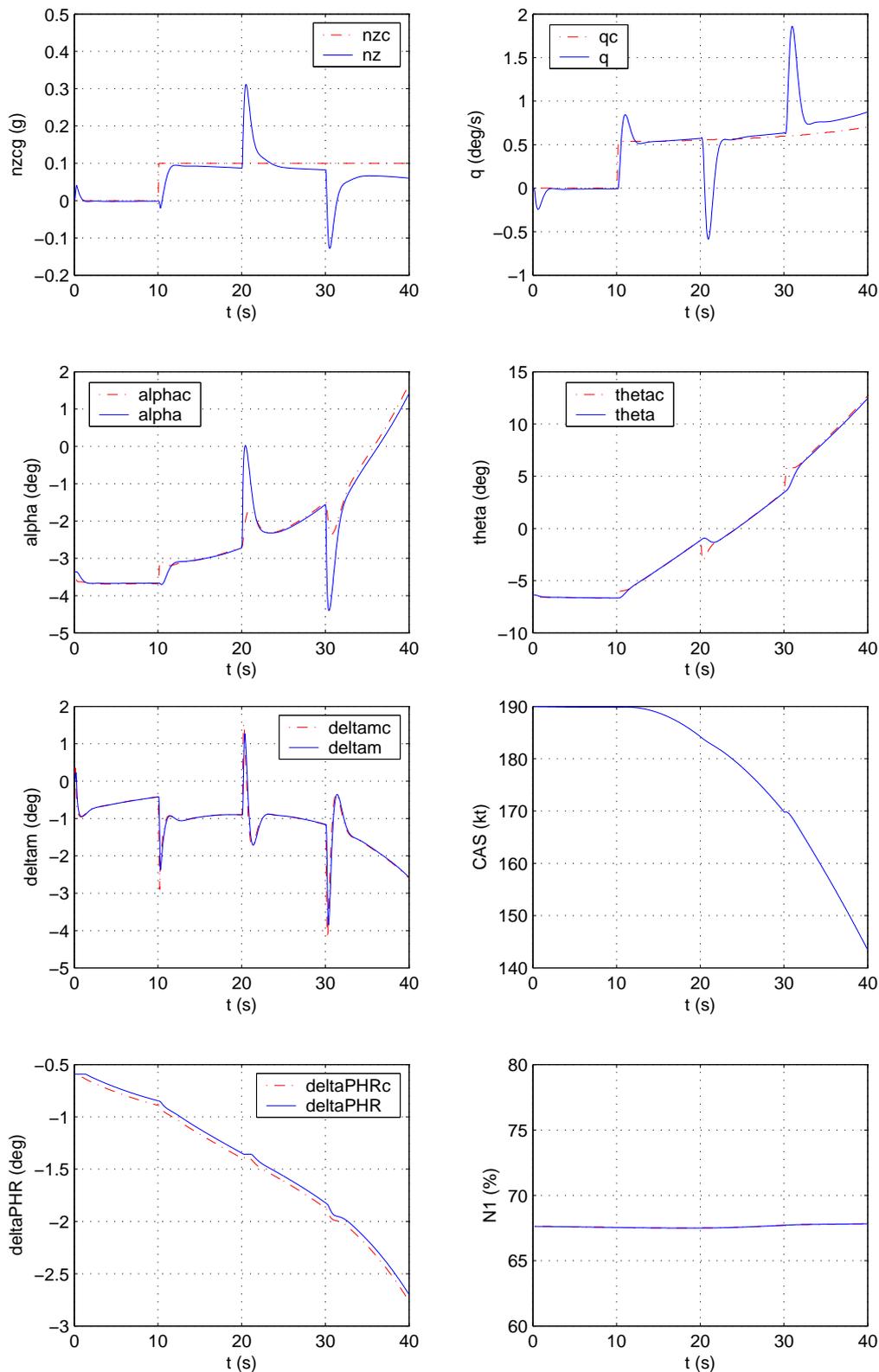


*3.3.1.1.3.3.4.a : Simulation du comportement en protection d'assiette*

### **3.3.1.1.3.3.5 Simulation de la protection en facteur de charge**

L'avion considéré est un A340-300, en configuration full, à un centrage de 30%, à une masse de 130 tonnes et initialisé à 5000ft à la vitesse de 190 kt. Les lois sont de type RMI avec le même réglage que précédemment ( $\omega = 1.5$ ,  $z = 1$  et  $\tau = 3$ ) et l'autopoussée est déconnectée. On commande l'avion en facteur de charge ( $Nz$ ). L'avion rencontre un créneau de vent ascendant de 10kt entre 20 et 30 secondes. Pour les besoins de la simulation, la protection en facteur de charge maximal a été réglée à 0.1g (pas assez de puissance moteur pour tenir plus de manière stabilisée dans ce cas de vol). Les résultats sont visibles à la page suivante.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

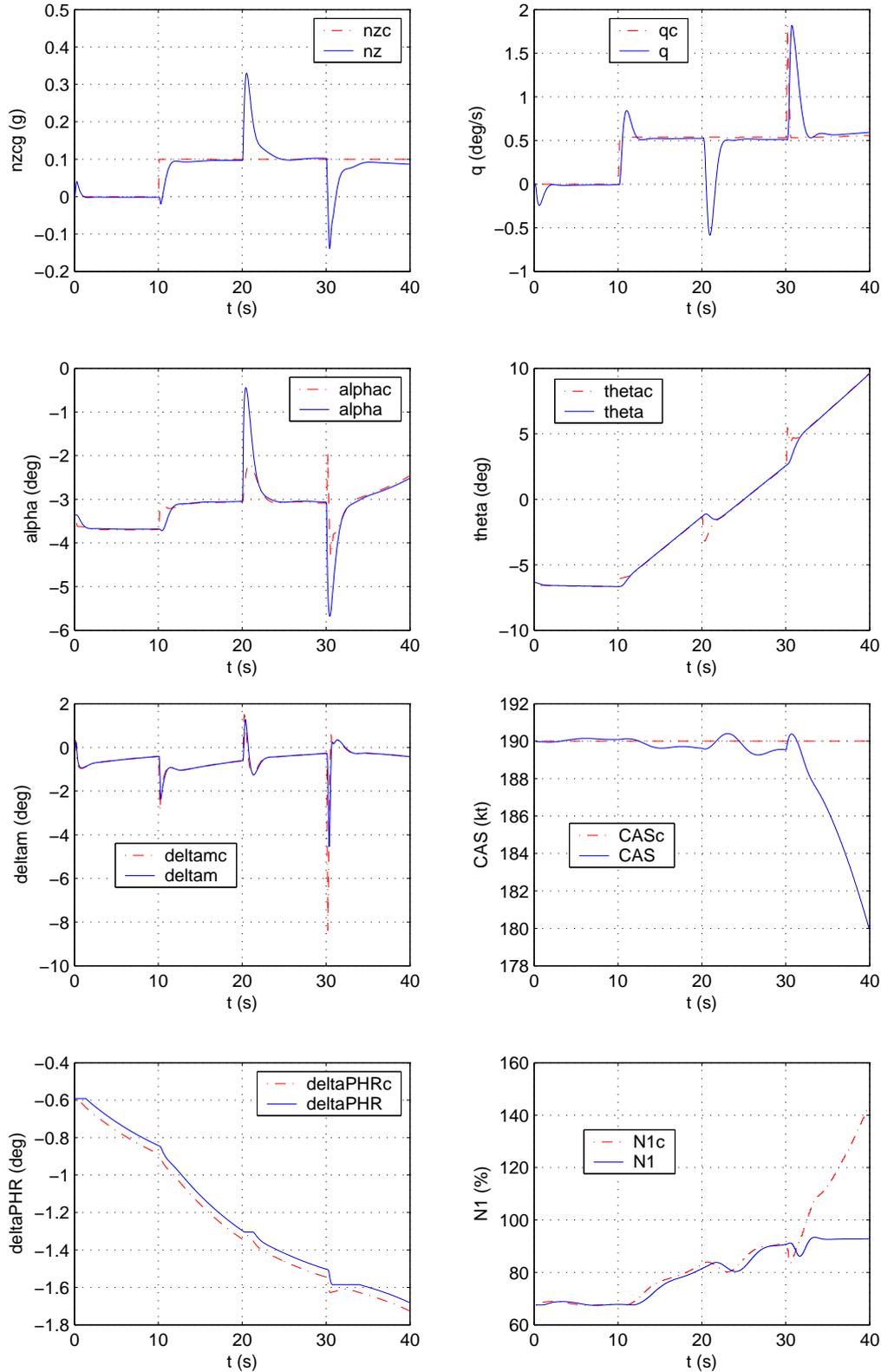


*3.3.1.1.3.3.4.b : Simulation du comportement en protection de facteur de charge sans autopoussée*

Cette simulation fait apparaître un écart croissant entre le facteur de charge commandé et le facteur de charge réel. Celui-ci est dû à l'absence d'autopoussée qui engendre une diminution parabolique de la vitesse. En conséquence, on obtient une augmentation parabolique de l'incidence commandée pour maintenir le facteur de charge demandé. La loi d'asservissement d'incidence telle que nous l'avons réglée se comporte comme un filtre

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

du second ordre. Elle présente donc une erreur de traînage. Celle-ci est linéaire croissante face à une consigne de forme parabolique. Comme le facteur de charge est une fonction linéairement décroissante de l'incidence, on constate finalement une erreur linéairement croissante en facteur de charge. Une des solutions pour palier ce problème est simplement d'ajouter une autopoussée, comme suit :



3.3.1.1.3.3.5.b : Simulation du comportement en protection d'assiette avec autopoussée

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Dans cette simulation, on constate bien un meilleur suivi du facteur de charge commandé, tant que le moteur a assez de puissance pour maintenir la vitesse (avant 30s).

### 3.3.1.1.3.3.6 Simulations de la protection d'incidence

On se situe dans le même cas que précédemment mais sans autopoussée et sans vent. Pour les besoins de la simulation, on rétablit la protection en facteur de charge à  $\pm 1g$  et la protection d'incidence maximale est réglée à 1 degré (pas assez de puissance moteur pour tenir plus de manière stabilisée dans ce cas de vol). Les résultats de simulation de l'entrée en protection sont visibles à la page suivante.

Pour rappel, la loi de commande équivalente en protection d'incidence pure (sans effet phugoïde ni surpassement par d'autres protections) est calculée de la manière suivante :

$$\dot{\gamma}(\alpha_{\max}) = F_{\gamma} + G_{\gamma} \cdot \alpha_{\max}$$

d'où :

$$\theta^{prot}(\alpha_{\max}) = (F_{\gamma} + G_{\gamma} \cdot \alpha_{\max}) \left( \frac{2 \cdot z}{\omega} + \frac{1}{G_{\gamma}} \right) - \frac{F_{\gamma}}{G_{\gamma}} + \theta - \alpha$$

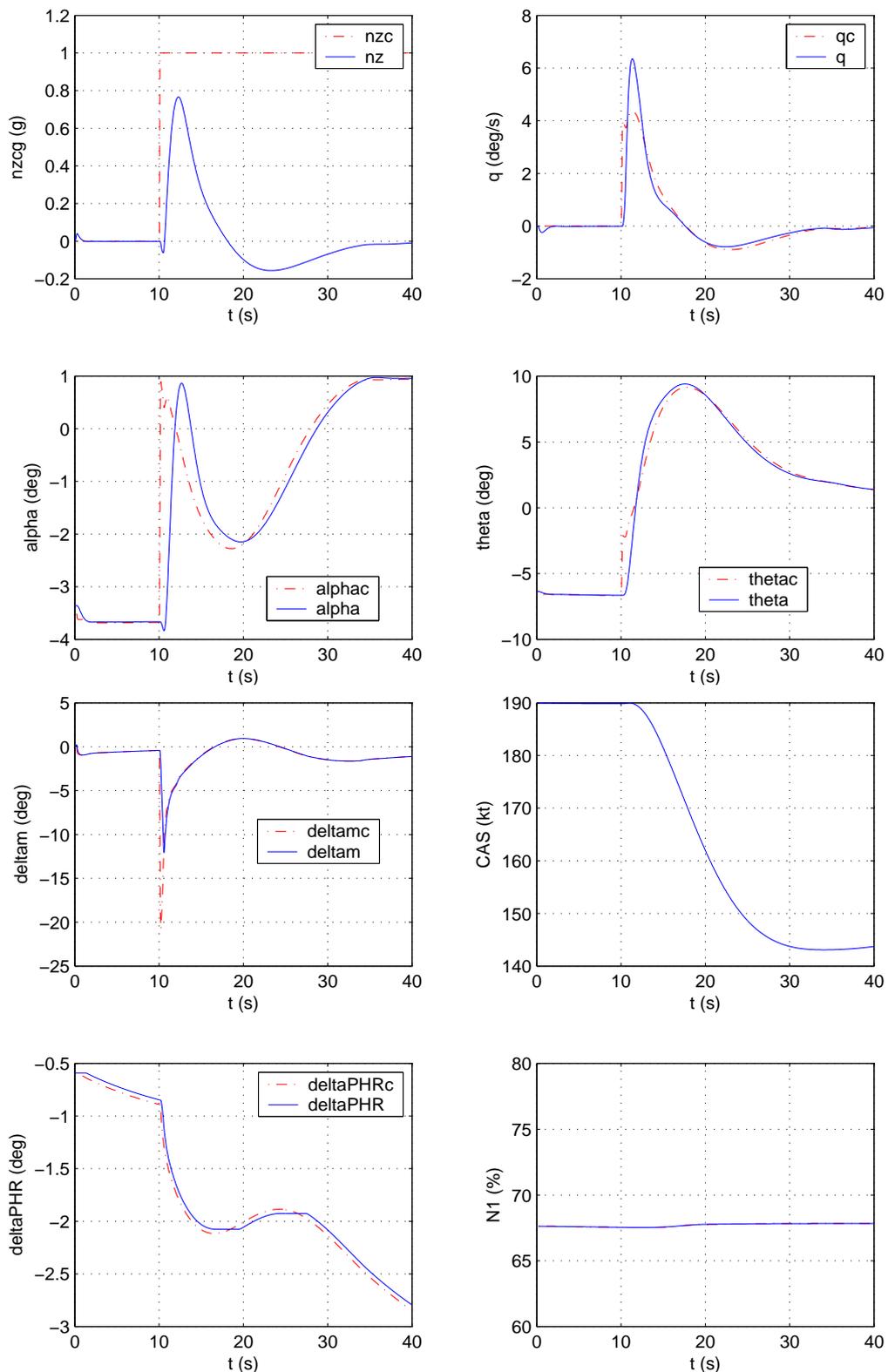
soit :

$$\theta^{prot}(\alpha_{\max}) = \frac{2 \cdot z}{\omega} \cdot (F_{\gamma} + G_{\gamma} \cdot \alpha_{\max}) + \theta + \alpha_{\max} - \alpha$$

Au final, le braquage commandé de la gouverne de profondeur en protection d'incidence est du type :

$$\delta m = \frac{\omega^2 \cdot (\alpha_{\max} - \alpha) + 2 \cdot \omega \cdot (F_{\gamma} + G_{\gamma} \cdot \alpha_{\max} - q) - F_q}{G_q}$$

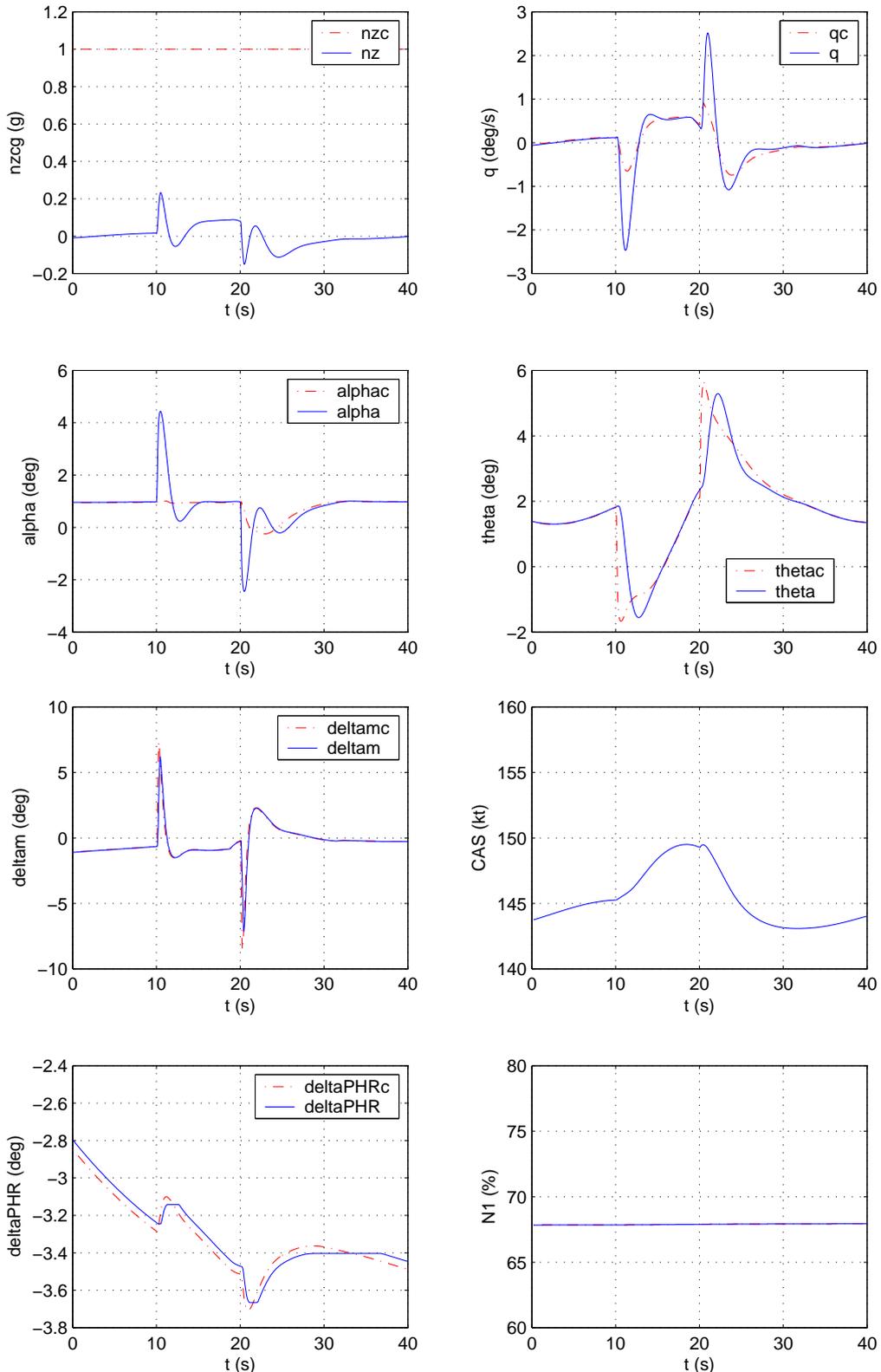
**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*3.3.1.1.3.3.6.a : Entrée en protection d'incidence avec amortissement de la phugoïde*

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

On peut par ailleurs regarder la réponse de l'avion en protection dans le cas où il rencontre un créneau de vent ascendant de 10kt entre 10 et 20 secondes de simulation (simulation enchaînée avec le cas précédent).



*3.3.1.1.3.3.6.b : Réponse à la rafale verticale en protection d'incidence*

### 3.3.1.1.4 Stabilité et performances robustes des lois proposées

Dans la partie 2.2, nous avons explicité des conditions de stabilité et de performances robustes pour les lois de type RMI. Vérifions-les dans le cadre des commandes de vol longitudinales :

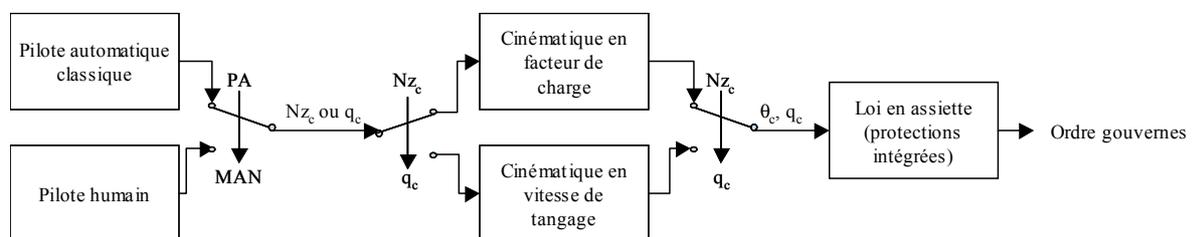
- Stabilité des éventuelles dynamiques internes : le système {avion longitudinal} est d'ordre 4. Nous obtenons donc une dynamique interne d'ordre 2. Les dynamiques internes sont réputées stables dans le domaine de vol pour lequel les lois proposées ont été synthétisées (l'inversion de la dynamique en vitesse angulaire est en effet à la base de tous les articles suivants : [9], [28], [30], [46], [70], [73], [74], [88], [89], [95], [114], [127], [128], [138], [139], [149], [150], [179], [180], [181], [185], [186], [187], [188] et [189]). Par ailleurs, des protections du domaine de vol (assiette, incidence, vitesse, pente et facteur de charge) permettent de rester dans ce domaine de vol nominal.
- Bornitude des fonctions  $F$  et  $G$  décrivant la dynamique entrées-sorties du système, de leur modèle  $F_m$  et  $G_m$  et des dérivées de  $F$ ,  $G$ ,  $F_m$  et  $G_m$  jusqu'à l'ordre 2 : L'aérodynamique de l'avion est un phénomène physique régulier car basé des coefficients aérodynamiques bornés, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2.
- Condition d'erreur maximale admissible sur  $G$  : Notre connaissance de l'aérodynamique de l'avion nous assure que l'erreur que nous faisons sur  $G$  est inférieure à 100% en valeur absolue.

Les propriétés de stabilité et de performances robustes des commandes de vol longitudinales proposées sont donc assurées.

### 3.3.1.1.5 Conclusion

Par le dispositif décrit dans cette partie, on propose une amélioration de l'architecture de lois de commande de vol longitudinales actuelles pour assurer la compatibilité avec les lois de commande de type non-linéaire. De plus, grâce à cette architecture unique et intégrée on peut contrôler les objectifs qui nous intéressent (attitude ou trajectoire) tout en étant protégé (en incidence, facteur de charge et assiette) :

- Cette architecture contient une protection intégrée en assiette longitudinale. Il n'est donc pas nécessaire de développer une loi spécifique de protection en assiette ni de l'interfacer avec une autre loi.
- Cette architecture contient une protection intégrée en incidence. Il n'est donc pas nécessaire de développer une loi de protection en incidence spécifique ni de l'interfacer avec une autre loi.
- La liberté de choix entre une loi en assiette longitudinale et une loi en facteur de charge est totale. On peut ainsi, grâce à cette architecture, choisir à tout moment d'effectuer soit des tâches de guidage (à long terme), soit des tâches de pilotage (à court terme). On peut donc interfacer cette architecture soit avec un pilote humain, soit avec un pilote automatique, et ce de la manière suivante :



3.3.1.1.4.a : Architecture pilote automatique / lois manuelles proposée en longitudinal

A noter que cette architecture de lois de pilotage a servi de base à la "certification" à blanc du premier mode du pilote automatique longitudinal d'atterrissage automatique non-linéaire développé en interne ainsi qu'à un brevet. Par ailleurs, la loi en  $q$  proposée sert de base à un projet de recherche sur le décollage automatique.

### 3.3.1.2 Commande dans le plan latéral

En latéral, classiquement, on souhaite commander (et découpler) soit le vecteur :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ \beta \end{bmatrix} \quad (36)$$

soit le vecteur :

$$\begin{bmatrix} \dot{\phi} \\ N_y \end{bmatrix}$$

Le choix entre ces deux vecteurs de sortie est difficile. On peut remarquer toutefois que :

- La commande en dérapage est obligatoire pour le decrab (phase d'alignement avec la piste lors d'un atterrissage par vent de travers), et tout virage coordonné se fait à dérapage nul.
- La commande en  $N_y$  est certainement plus confortable pour les passagers.

Sachant que nous visons aujourd'hui une application sur l'atterrissage automatique, le système (36) a été retenu.

#### 3.3.1.2.1 Approche directe

En regardant l'équation (31) et en supposant un découplage longitudinal-latéral, on obtient l'équation simplifiée :

$$\dot{\phi} = p$$

On obtient ainsi le système entrées-sorties :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p \\ F_\beta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_p^{\delta l} & G_p^{\delta n} \\ G_\beta^{\delta l} & G_\beta^{\delta n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta n \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} G_p^{\delta l} & G_p^{\delta n} \\ G_\beta^{\delta l} & G_\beta^{\delta n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S.l \cdot \left. \frac{\partial \tilde{C}l}{\partial \delta l} \right|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S.l \cdot \left. \frac{\partial \tilde{C}l}{\partial \delta n} \right|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot \left. \frac{\partial C_y}{\partial \delta l} \right|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot \left. \frac{\partial C_y}{\partial \delta n} \right|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} \end{bmatrix}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

et :

$$\begin{bmatrix} F_p \\ F_\beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S.L. \tilde{Cl} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & -G_p^{\delta l} \cdot \delta l_{ref} - G_p^{\delta n} \cdot \delta n_{ref} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V.S.Cy \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & -\frac{g}{V} \cdot \sin(\phi) - r - G_\beta^{\delta l} \cdot \delta l_{ref} - G_\beta^{\delta n} \cdot \delta n_{ref} \end{bmatrix}$$

L'inversion de ce système donne une commande instable car il est à non-minimum de phase. Si, par contre, on utilise la définition exacte de la dérivée d'assiette, le système à commander devient à minimum de phase. Néanmoins, le système possède alors une dynamique des zéros peu différente du cas où l'on inverse  $p$ , ce qui signifie que la dynamique interne est stable, mais proche de l'instabilité.

### 3.3.1.2.2 Approche par étapes

On se propose donc, comme précédemment, de réaliser une inversion en deux parties. On s'occupe ainsi tout d'abord de l'inversion du système :

$$\{p, r\}$$

On retrouve ainsi la philosophie générale de la partie précédente, où l'on commande en premier lieu l'attitude de l'avion avant de commander des variables de type aérodynamiques ou accélérométriques. Ceci correspond d'ailleurs plutôt bien avec le comportement naturel du pilote. On étudie alors le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p \\ F_r \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} G_p^{\delta l} & G_p^{\delta n} \\ G_r^{\delta l} & G_r^{\delta n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta l \\ \delta n \end{bmatrix}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} G_p^{\delta l} & G_p^{\delta n} \\ G_\beta^{\delta l} & G_\beta^{\delta n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S.L. \frac{\partial \tilde{Cl}}{\partial \delta l} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S.L. \frac{\partial \tilde{Cl}}{\partial \delta n} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{zz}} \cdot V^2 \cdot S.L. \frac{\partial \tilde{Cn}}{\partial \delta l} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{zz}} \cdot V^2 \cdot S.L. \frac{\partial \tilde{Cn}}{\partial \delta n} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} \end{bmatrix}$$

et :

$$\begin{bmatrix} F_p \\ F_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{xx}} \cdot V^2 \cdot S.L. \tilde{Cl} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & -G_p^{\delta l} \cdot \delta l_{ref} - G_p^{\delta n} \cdot \delta n_{ref} \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{I_{zz}} \cdot V^2 \cdot S.L. \tilde{Cn} \Big|_{\delta l = \delta l_{ref}, \delta n = \delta n_{ref}} & -G_r^{\delta l} \cdot \delta l_{ref} - G_r^{\delta n} \cdot \delta n_{ref} \end{bmatrix}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

En inversant le système par commande RMI et en plaçant deux premiers ordres de constante de temps  $\tau_p$  et  $\tau_r$ , on obtient :

$$\begin{bmatrix} \delta l \\ \delta n \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} G_\beta^{\delta n} & -G_p^{\delta n} \\ -G_\beta^{\delta l} & G_p^{\delta l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{p_c - p}{\tau_p} - F_p + \Delta_{RMI}^p \\ \frac{r_c - r}{\tau_r} - F_r + \Delta_{RMI}^r \end{bmatrix}}{G_\beta^{\delta n} \cdot G_p^{\delta l} - G_\beta^{\delta l} \cdot G_p^{\delta n}}$$

avec :

$$\begin{bmatrix} \Delta_{RMI}^p \\ \Delta_{RMI}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int \left( F_p + G_p^{\delta l} \cdot \delta l + G_p^{\delta n} \cdot \delta n - \Delta_{RMI}^p \right) dt - p \\ \int \left( F_r + G_r^{\delta l} \cdot \delta l + G_r^{\delta n} \cdot \delta n - \Delta_{RMI}^r \right) dt - r \end{bmatrix} \begin{matrix} \tau_{RMI}^p \\ \tau_{RMI}^r \end{matrix}$$

Cette nouvelle inversion possède le même degré relatif que précédemment (2). Néanmoins, pour se ramener à un contrôle en assiette et en dérapage, il faut encore inverser deux systèmes découplés dont la somme des degrés relatifs vaut (2). Grâce à cette manipulation, on se sépare du problème des dynamiques internes.

La commande en assiette est relativement simple car elle s'appuie sur une équation cinématique (31) qui est non-linéaire affine :

$$\dot{\phi} = F_\phi + G_\phi \cdot p$$

avec :

$$G_\phi = 1$$

et :

$$F_\phi = \tan(\theta) \cdot (q \cdot \sin(\phi) + r \cdot \cos(\phi))$$

On pose donc la loi de commande suivante pour la commande en assiette :

$$p_c = \frac{\frac{\phi_c - \phi}{\tau_\phi} - F_\phi}{G_\phi}$$

En ce qui concerne la commande en dérapage, le principe général est un peu plus complexe. En effet, on a bien une forme non-linéaire affine, de type :

$$\dot{\beta} = F_\beta + G_\beta \cdot r$$

avec :

$$G_\beta = -1$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

et :

$$F_{\beta} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V \cdot S \cdot C_y - \frac{g}{V} \cdot \sin(\phi)$$

On serait donc tenté d'écrire la loi de commande suivante :

$$r_c = \frac{\frac{\beta_c - \beta}{\tau_{\beta}} - F_{\beta} + \Delta_{RMI}^{\beta}}{G_{\beta}}$$

Néanmoins, en écrivant ceci, on crée une boucle algébrique : en effet, cette loi de commande dépend du braquage des ailerons et spoilers et elle a pour conséquence le braquage de ces mêmes surfaces. Pour surmonter ce problème, il suffit d'écrire :

$$r_c = \frac{\frac{\beta_c - \beta}{\tau_{\beta}} - F_{\beta} \Big|_{\delta = \delta_{ref}, \delta \dot{n} = \delta \dot{n}_{ref}} + \Delta_{RMI}^{\beta}}{G_{\beta} \Big|_{\delta = \delta_{ref}, \delta \dot{n} = \delta \dot{n}_{ref}}}$$

La partie RMI ne pose, elle, pas de problème puisqu'elle intègre implicitement l'information de braquage des gouvernes :

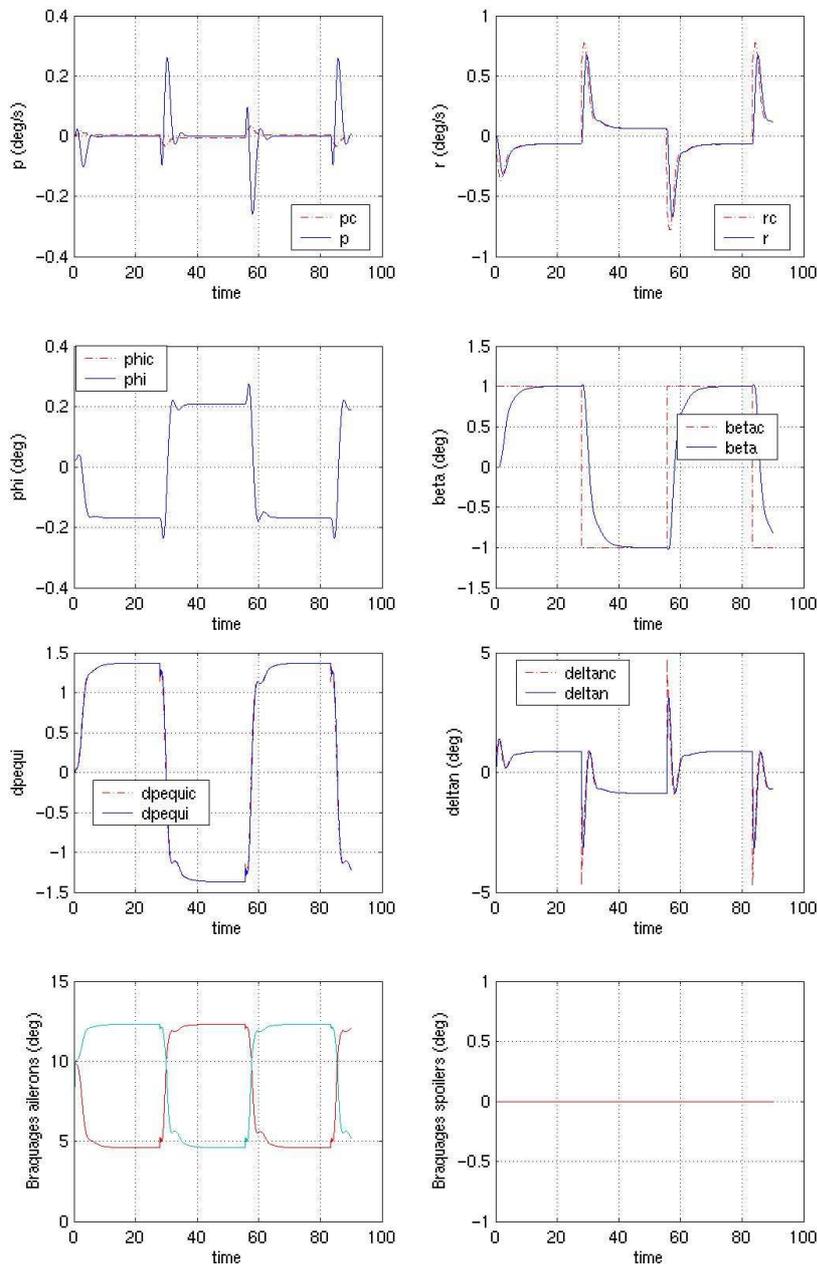
$$\Delta_{RMI}^{\beta} = \frac{\int (F_{\beta} + G_{\beta} \cdot r - \Delta_{RMI}^{\beta}) dt - \beta}{\tau_{RMI}^{\beta}}$$

A noter que, d'après la partie 2.1.3.4, si l'on souhaite placer une dynamique globale du deuxième ordre suramorti en dérapage, il faut poser :

$$\tau_{\beta} = 4 \cdot \tau_r$$

### 3.3.1.2.3 Quelques simulations

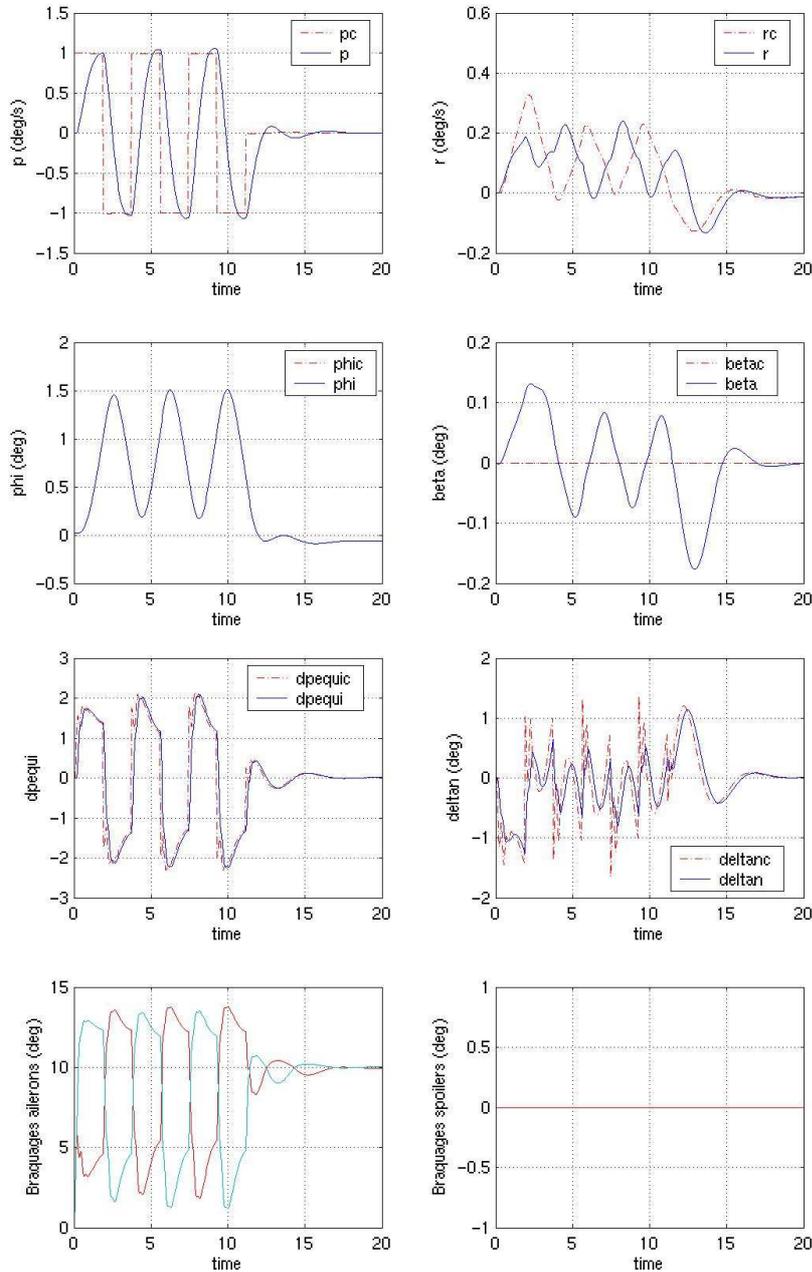
Nous présentons ci-dessous quelques simulation de la loi présentée précédemment. Le réglage retenu pour celles-ci est le suivant:  $\tau_r=0.5$ , et  $\tau_p=0.37$ . La première simulation propose des créneaux d'un degré de dérapage commandé avec une dérivée d'assiette latérale commandée nulle.



3.3.1.2.2.a : Résultat de la loi latérale pour des créneaux de dérapage de  $+1^\circ$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

La simulation qui suit, quant à elle, présente les résultats de la loi latérale pour des créneaux de dérivée d'assiette latérale commandés d'un degré par seconde et un dérapage commandé nul.



*3.3.1.2.2.b : Résultats de la loi latérale pour des créneaux de vitesse de roulis commandée de  $\pm 1^\circ/s$*

On constate que le comportement général de la loi est bon, bien que ce réglage soit en limite de stabilité. Ceci est dû au choix d'une dynamique trop rapide fixée pour le dérapage. Cette dynamique est donc ralentie dans la suite (cf. § 3.6).

### **3.3.1.2.4 Stabilité et performances robustes des lois proposées**

Dans la partie 2.2, nous avons explicité des conditions de stabilité et de performances robustes pour les lois de type RMI. Vérifions-les dans le cadre des commandes de vol latérales :

- Stabilité des éventuelles dynamiques internes : le système {avion latéral} est d'ordre 2. Nous obtenons donc une dynamique interne d'ordre 2. Les dynamiques internes sont réputées stables dans le domaine de vol pour lequel les lois proposées ont été synthétisées (l'inversion de la dynamique en vitesse angulaire est en effet à la base de tous les articles suivants : [9], [28], [30], [46], [70], [73], [74], [88], [89], [95], [114], [127], [128], [138], [139], [149], [150], [179], [180], [181], [185], [186], [187], [188] et [189]). Par ailleurs, des protections du domaine de vol (assiette latérale et dérapage) permettent de rester de ce domaine de vol nominal.
- Bornitude des fonctions  $F$  et  $G$  décrivant la dynamique entrées-sorties du système, de leur modèle  $F_m$  et  $G_m$  et des dérivées de  $F$ ,  $G$ ,  $F_m$  et  $G_m$  jusqu'à l'ordre 2 : L'aérodynamique de l'avion est un phénomène physique régulier car basé des coefficients aérodynamiques bornés, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2.
- Condition d'erreur maximale admissible sur  $G$  : Cette condition n'a pas été vérifiée par manque de temps. Elle nous permettrait de définir *a priori* l'erreur maximale admissible pour les modèles embarqués des gradients de coefficients aérodynamiques. En attendant, l'erreur maximale retenue (+25% à  $10^{-9}$ ) nous a permis de ne jamais prendre en défaut les propriétés de stabilité et de performances robustes de nos lois.

Les propriétés de stabilité et de performances robustes des commandes de vol latérales proposées sont donc vérifiées en simulation mais l'erreur maximale admissible sur  $G$  n'est pas démontrée pour le moment.

## 3.3.2 Résultats de robustesse pour une loi de type décollage automatique

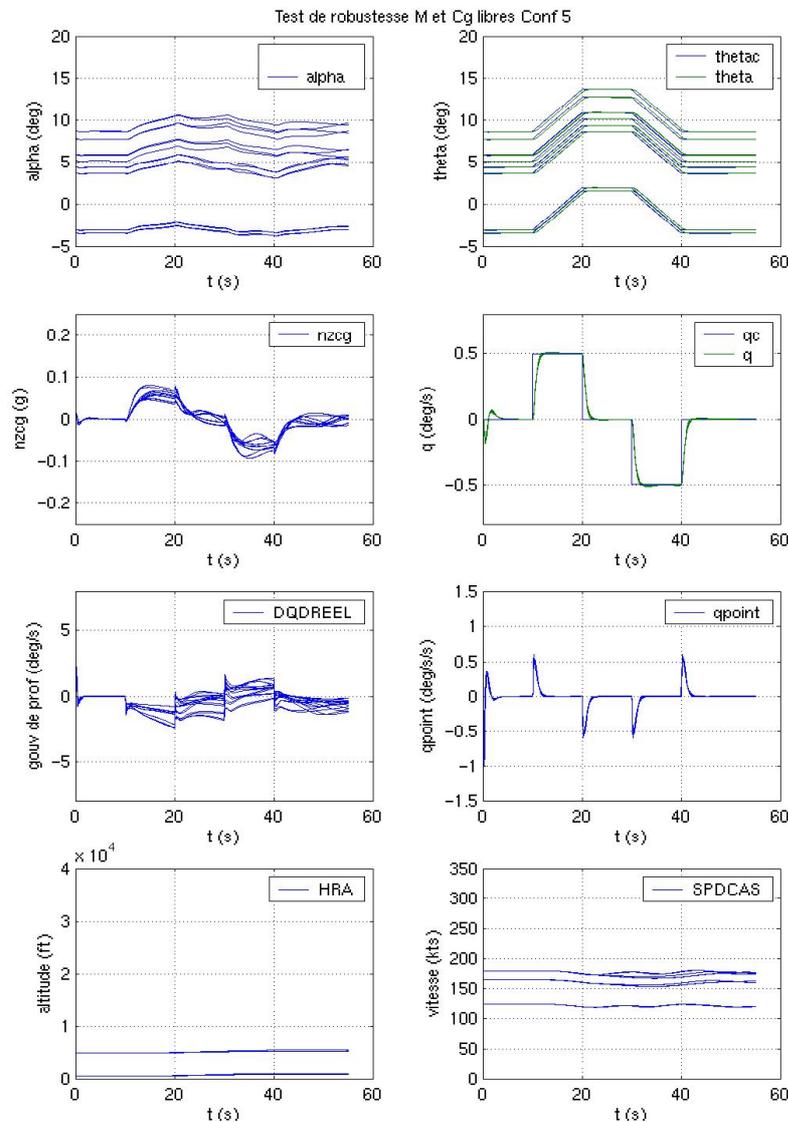
### 3.3.2.1 Introduction

Pendant la thèse, il nous a été donné la possibilité de travailler sur une loi de décollage automatique. Profitant de l'aspect générique de la démarche détaillée dans le chapitre 3.3.1.1, nous avons réutilisé la petite boucle en  $q$  développée pour l'atterrissage. Nous en avons profité pour évaluer sa robustesse aux paramètres les plus influents pour la dynamique du vol : la masse et le centrage. Nous avons donc simulé, sur simulateur certifié (SIMPA), un A340-300 volant à masses extrêmes (125 t et 275 t) et à centrages extrêmes (20% et 40%), le tout à des vitesses et altitudes différentes. La loi de commande RMI synthétisée prend en compte, de base, ces informations. Afin d'évaluer sa robustesse, nous avons donc testé cette loi dans plusieurs situations :

- Nominale : En lui faisant acquérir les valeurs de masse et de centrage courant.
- Moyenne : En lui imposant en entrée une valeur moyenne de masse (200t) et de centrage (30%) alors que l'avion vole à masses et centrages extrêmes.
- Extrême 1 : En lui imposant en entrée une valeur de masse lourde (275t) et de centrage arrière (40%) alors que l'avion vole à masses et centrages extrêmes.
- Extrême 2 : En lui imposant en entrée une valeur de masse légère (125t) et de centrage arrière (40%) alors que l'avion vole à masses et centrages extrêmes.
- Extrême 3 : En lui imposant en entrée une valeur de masse lourde (275t) et de centrage avant (20%) alors que l'avion vole à masses et centrages extrêmes.
- Extrême 4 : En lui imposant en entrée une valeur de masse légère (125t) et de centrage avant (20%) alors que l'avion vole à masses et centrages extrêmes.
- "Impilotable" : En lui imposant en entrée une valeur de masse moyenne (200t) et de centrage avant (20%) alors que l'avion vole au-delà du point de manœuvre (centrage=60%).
- Mesures réduites : La loi ne possède que les informations de vitesse-air, de vitesse de tangage, de déflexion de la gouverne de profondeur, de masse et de centrage. Toutes les autres informations (incidence, dérapage, pente, hauteur, Mach, braquage du plan horizontal réglable et de toutes les gouvernes autres que la gouverne de profondeur) sont ramenées à une valeur moyenne.

### 3.3.2.2 Robustesse de la loi nominale

Cette partie permet d'évaluer la robustesse de la loi aux erreurs de modèles nominalement atteintes dans la vie d'un avion (+25% au maximum). Elle nous sert d'étalon pour la suite des tracés.

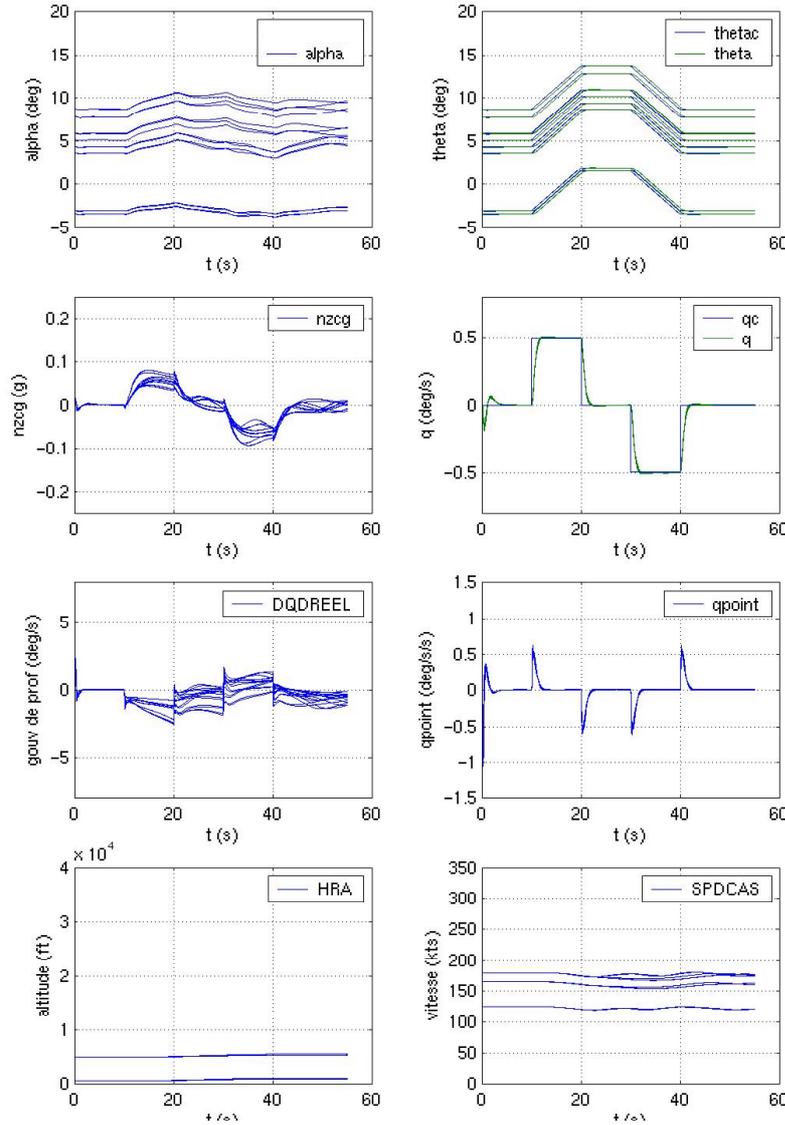


#### 3.3.2.2.a : Robustesse de la loi en $q$ de type RMI dans le cas nominal

La robustesse de la loi est bonne dans ce cas (en effet, malgré la variabilité des différents états de l'avion, toutes les simulations sont superposées au niveau de leur réponse en vitesse de tangage  $q$ ) et la loi est bien stable, rapide et précise. Ces résultats sont déjà en eux-même un enseignement favorable.

### 3.3.2.3 Robustesse de la loi moyenne

Selon les avions de la gamme Airbus et les performances attendues pour leurs lois, la masse et le centrage peuvent être ou ne pas être pris en compte pour le calcul de la loi. Cette partie permet donc d'évaluer la robustesse de notre loi RMI dans le pire-cas opérationnel. De plus, les objectifs de temps de réponse sont élevés pour un tel cas. Les résultats sont les suivants :

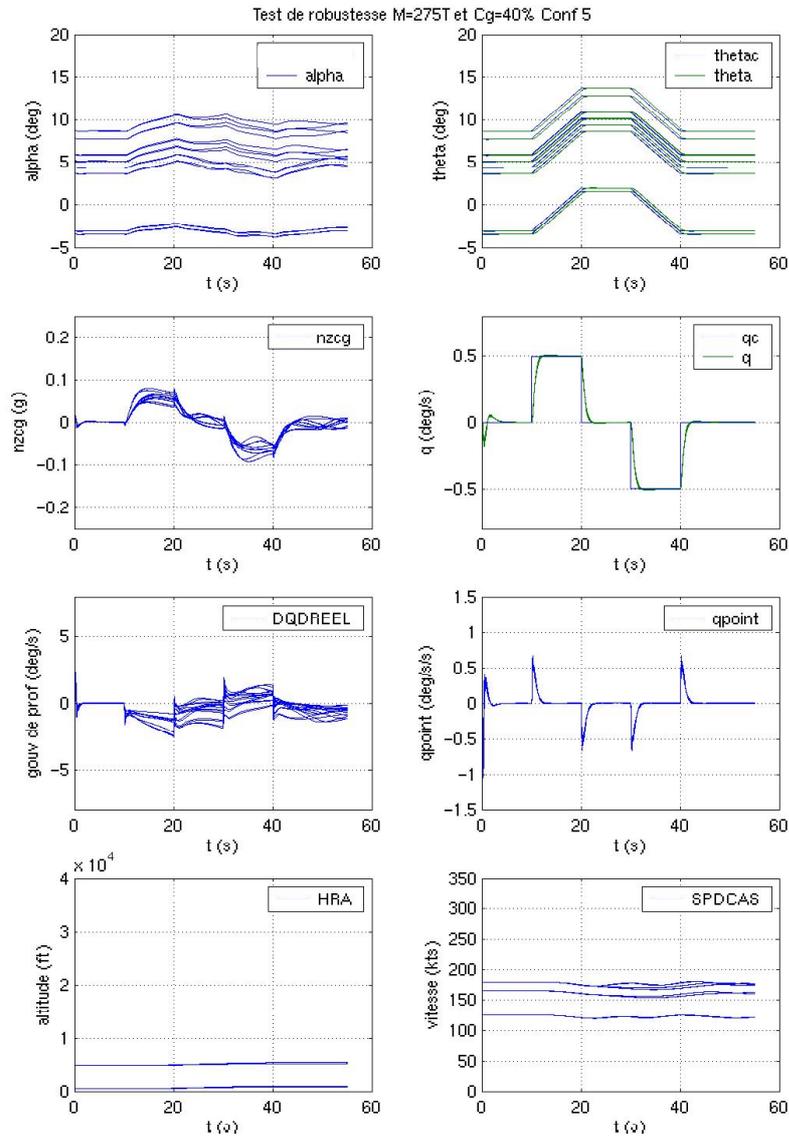


3.3.2.3.a : Robustesse de la loi en q de type RMI dans le cas moyen

Aucune différence significative n'est constatée entre le cas nominal et le cas moyen. Cela signifie que, dans ce cas d'étude, le principe RMI nous permet de nous passer de l'information masse-centrage tout en gardant une robustesse remarquable des performances.

### 3.3.2.4 Robustesse de la loi extrême 1

Cette partie nous permet d'évaluer la robustesse de la loi dans le cas où elle se croit à masse lourde (avion inerte) et centrage arrière (avion peu stable). Il s'agit donc d'un cas croisé. Un tel cas n'est pas opérationnel mais peut arriver si un pilote se trompe dans la saisie des informations de masse et de centrage.

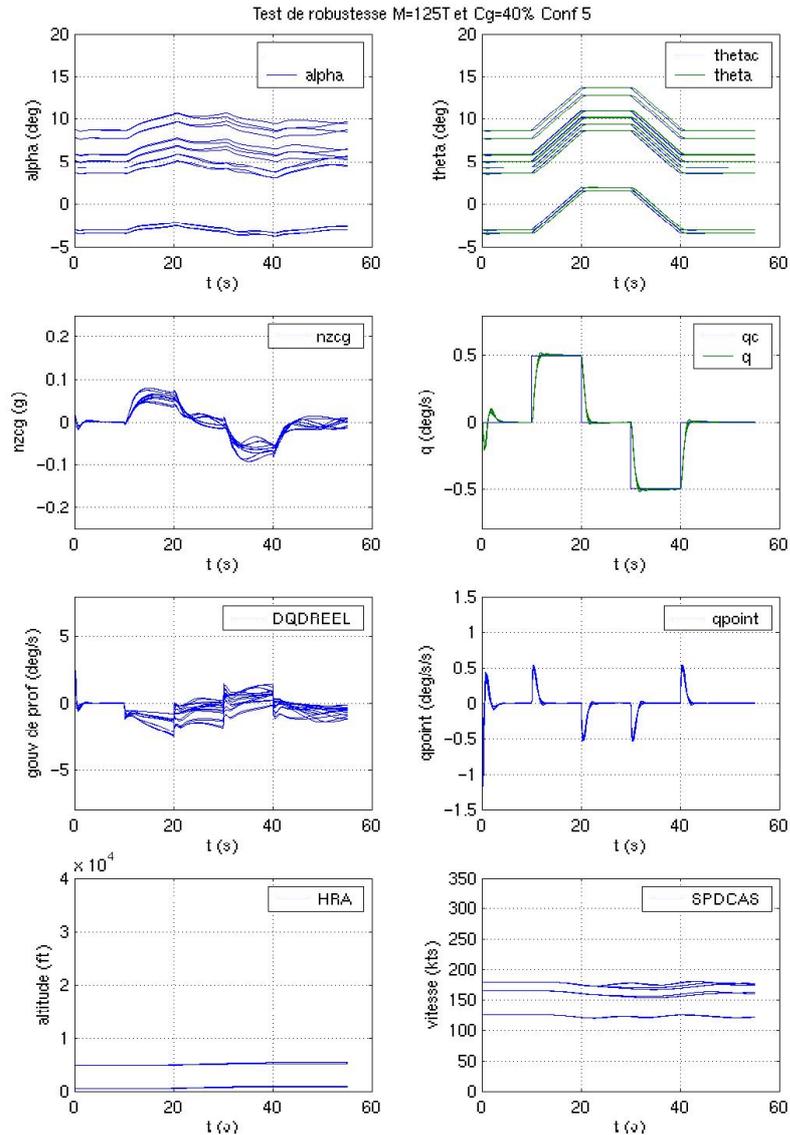


*3.3.2.4.a : Robustesse de la loi en q de type RMI dans le cas extrême 1*

Malgré la forte dispersion de l'avion naturel, qui plus est en dissymétrie par rapport à la loi, les performances de la loi restent robustes. Cette faculté était inespérée au début de notre étude. Ces cas de simulations nous ont donné une grande confiance dans la technique de commande RMI.

### 3.3.2.5 Robustesse de la loi extrême 2

Cette partie nous permet d'évaluer la robustesse de la loi dans le cas où elle se croit à masse légère (avion peu inerte) et centrage arrière (avion peu stable). Il s'agit donc d'un cas plutôt favorable, si ce n'est que les gains sont trop faibles dans le cas général. Un tel cas n'est pas opérationnel mais peut arriver si un pilote se trompe dans la saisie des informations de masse et de centrage.

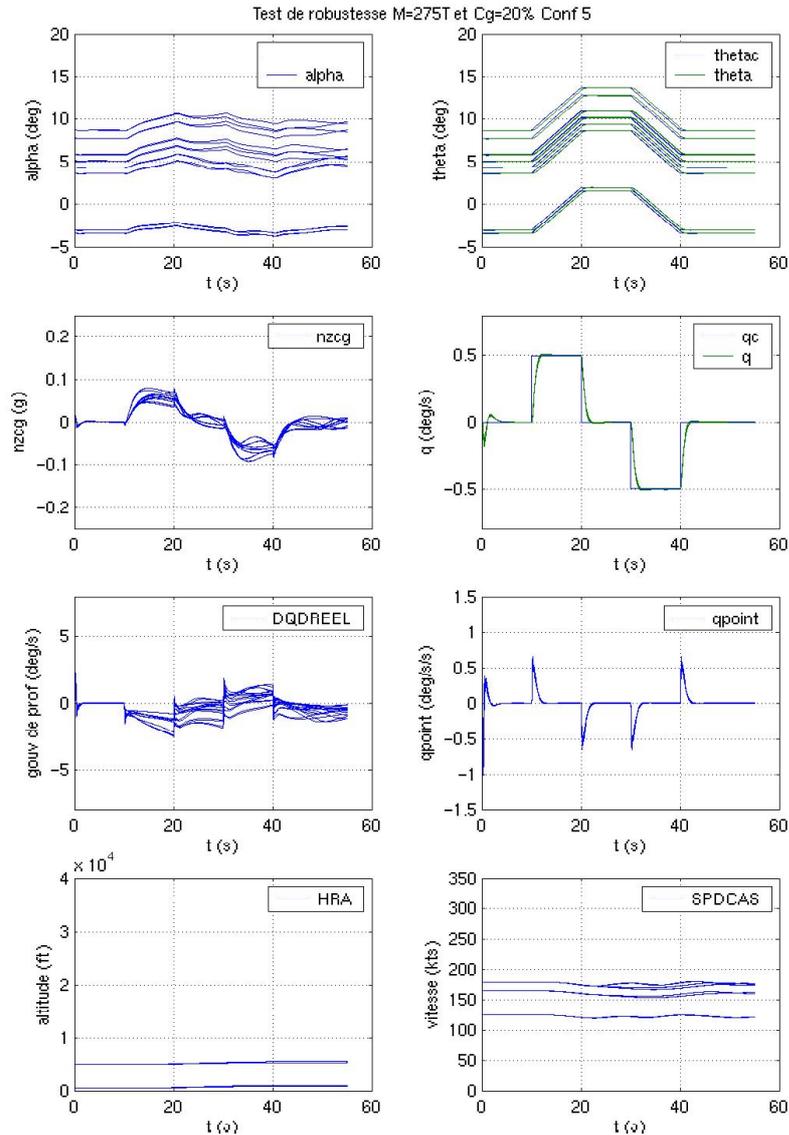


3.3.2.5.a : Robustesse de la loi en q de type RMI dans le cas extrême 2

Même commentaire qu'en 3.3.2.4

### 3.3.2.6 Robustesse de la loi extrême 3

Cette partie nous permet d'évaluer la robustesse de la loi dans le cas où elle se croit à masse lourde (avion inerte) et centrage avant (avion très stable). Les gains de la loi sont donc trop grands et auront normalement tendance à déstabiliser la loi. Il s'agit donc sans aucun doute du pire-cas. Un tel cas n'est pas opérationnel mais peut arriver si un pilote se trompe dans la saisie des informations de masse et de centrage.

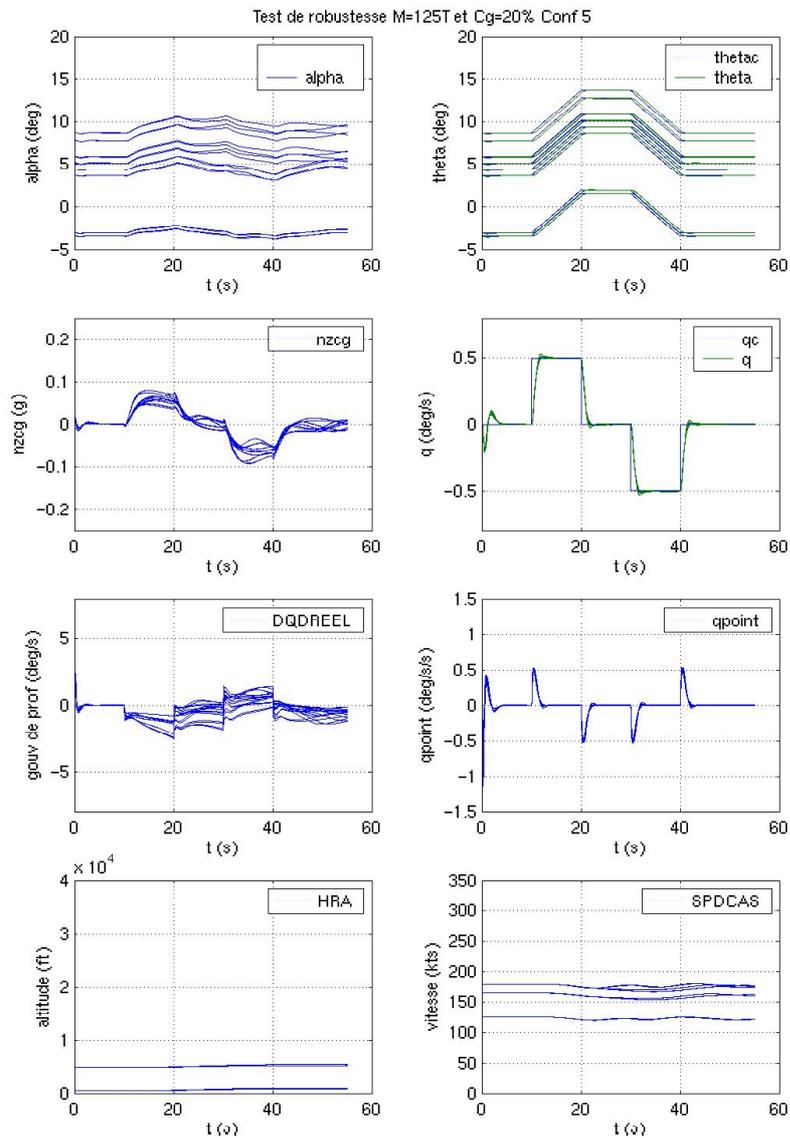


3.3.2.6.a : Robustesse de la loi en  $q$  de type RMI dans le cas extrême 3

Même commentaire qu'en 3.3.2.4

### 3.3.2.7 Robustesse de la loi extrême 4

Cette partie nous permet d'évaluer la robustesse de la loi dans le cas où elle se croit à masse légère (avion peu inerte) et centrage avant (avion très stable). Il s'agit donc d'un cas croisé. Un tel cas n'est pas opérationnel mais peut arriver si un pilote se trompe dans la saisie des informations de masse et de centrage.



3.3.2.7.a : Robustesse de la loi en q de type RMI dans le cas extrême 4

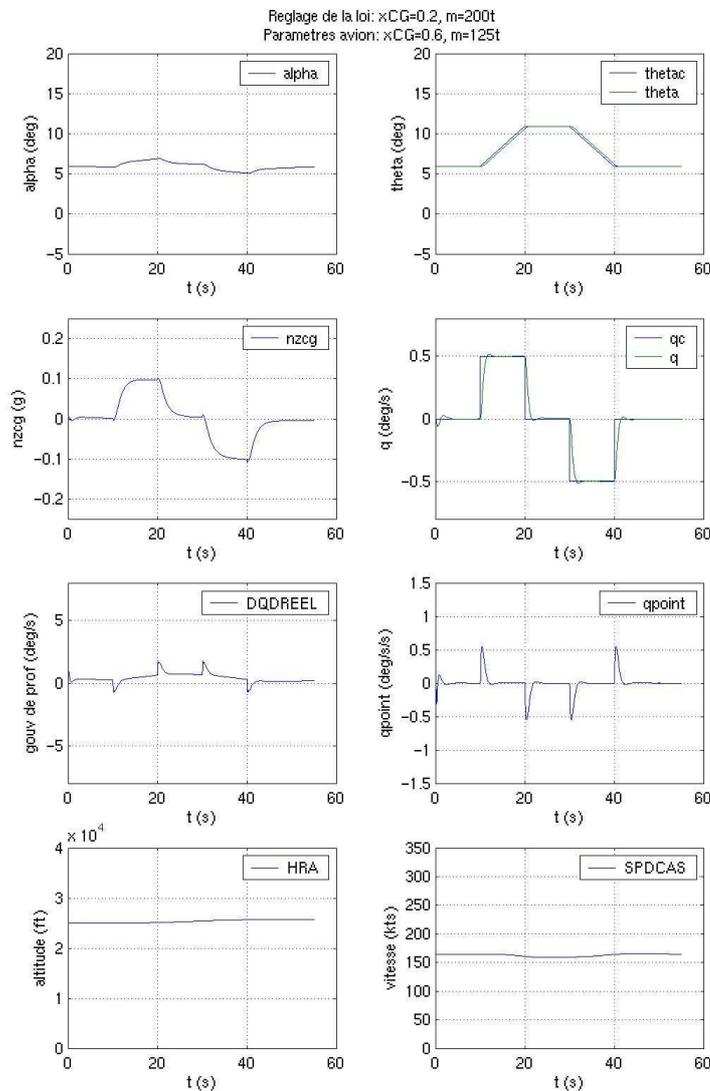
Même commentaire qu'en 3.3.2.4

### 3.3.2.8 Robustesse de la loi pour un avion "impilotable"

Cette partie nous permet d'évaluer la robustesse de la loi dans le cas où elle se croit à masse moyenne (avion moyennement inerte) et centrage avant (avion très stable). Pendant ce temps, l'avion balaie les masses extrêmes. L'intérêt de ce cas réside dans le centrage choisi (60%). Ce n'est pas un centrage opérationnel. C'est même un centrage dangereux. En effet, le point de manœuvre se situe aux alentours de 50% :

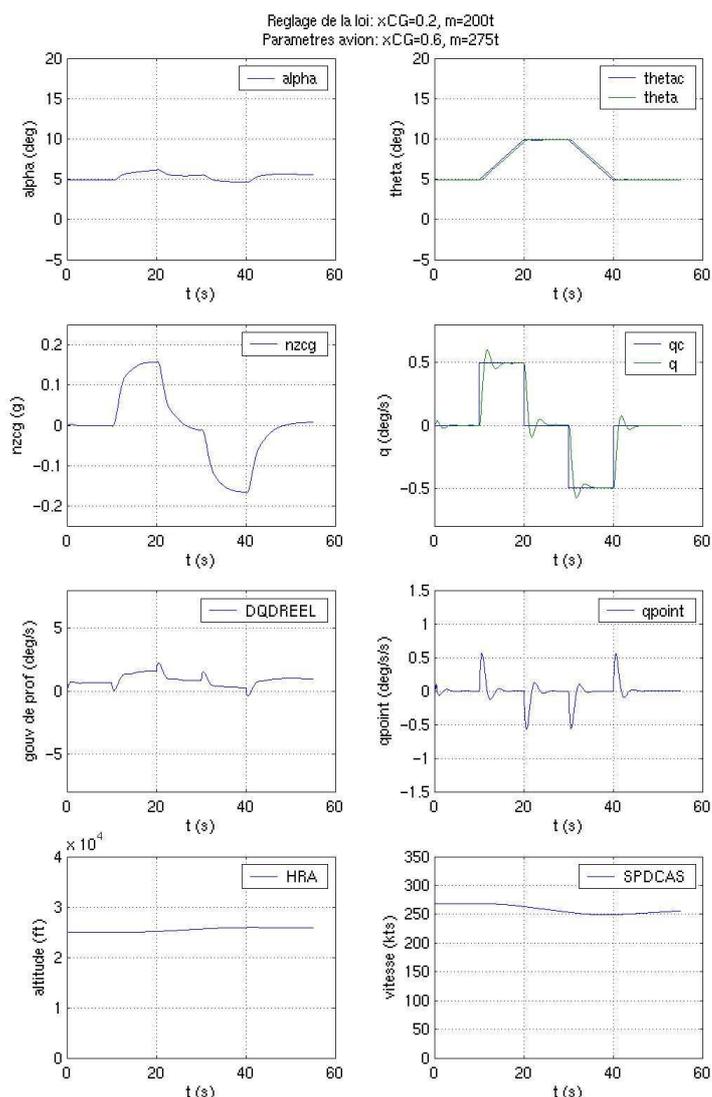
- En deçà de ce point, (cas opérationnel), une manœuvre à cabrer nécessite l'application du manche à cabrer pour initier le mouvement puis une modulation autour de cette position pour maintenir une vitesse de tangage constante.
- Au-delà de ce point, une manœuvre à cabrer nécessite l'application du manche à cabrer pour initier le mouvement puis une position à piquer pour maintenir cette vitesse de tangage (il suffit de comparer l'évolution de la gouverne de profondeur dans les deux cas pour s'en convaincre).

Un tel cas d'avion instable n'est pas opérationnel mais démontrerait le cas échéant des propriétés de robustesse nouvelles pour des lois de pilotage d'avion de transport commercial.



*3.3.2.8.a : Robustesse de la loi en q de type RMI dans le cas "Impilotable" avec avion à masse légère (cas le moins défavorable)*

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



### 3.3.2.8.b : Robustesse de la loi en q de type RMI dans le cas "Impilotable" avec avion à masse lourde (cas le plus défavorable)

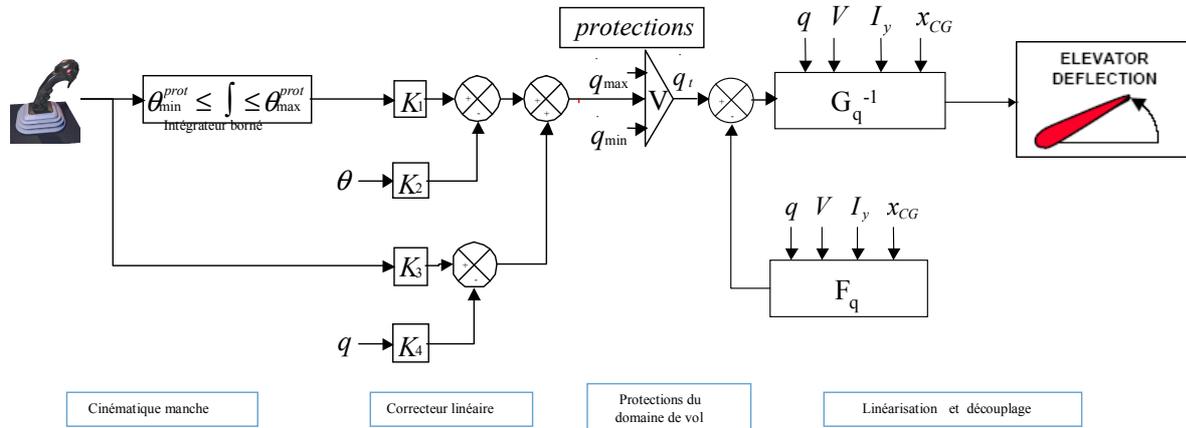
La loi de type RMI reste imperturbable sur le cas de masse légère. Néanmoins, à masse lourde, on voit apparaître les premières oscillations. Dans un cas de vol standard, une telle loi serait jugée inacceptable. Dans ce cas de vol précis, le résultat est tout de même inespéré...

### 3.3.2.9 Mesures réduites

On cherche dans cette partie à limiter les mesures nécessaires pour le calcul de la loi. En effet, chaque mesure correspond à une surveillance et une architecture dédiée. Toute mesure coûte cher à l'avionneur et expose la loi à une panne du dispositif de mesures. La disponibilité opérationnelle de la loi est ainsi d'autant moindre qu'elle nécessite un nombre important de mesures. Or Airbus doit tenir des objectifs de pannes qui peuvent être réduites en diminuant ces mesures. Le sujet est donc crucial pour l'avionneur.

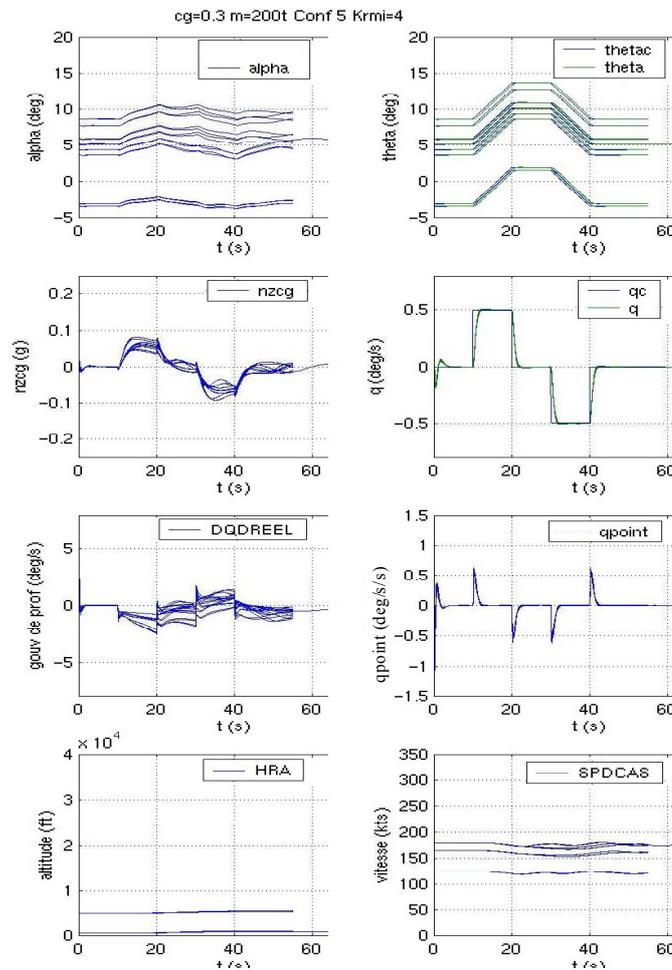
## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

La loi simulée ici peut être représentée par le schéma-bloc suivant :



*3.3.2.9.a : Schéma-bloc d'une loi de type "décollage automatique"*

Les résultats de la loi sont les suivants :



*3.3.2.9.b : Robustesse d'une loi en q de type RMI à une réduction des mesures*

Là encore, la robustesse de la loi apparaît très intéressante. On peut donc l'utiliser sans crainte avec un minimum d'informations. C'est pourquoi elle a été retenue comme boucle de base pour démontrer la faisabilité d'une fonction de décollage automatique.

### **3.3.2.10 Conclusion**

Grâce à cette série de simulations, on a prouvé que la pratique confirmait la théorie sur les propriétés de stabilité et de performances robustes du RMI. On ne s'attendait pas à de telles performances *a priori*. Cette étude nous a permis d'entrevoir les possibilités ouvertes par le RMI.

## 3.4 Lois de pilotage automatique / autopoussée

### 3.4.1 Introduction

Maintenant que des petites boucles robustes ont été synthétisées, on peut construire les grandes boucles associées. Grâce au RMI, chaque chaîne  $(\dot{\gamma}, \dot{\phi}, \dot{\beta})$  est découplée. Il est donc possible de commander séparément chacune d'entre elles, à la main (avec le manche et le palonnier) ou par l'intermédiaire d'un pilote automatique.

### 3.4.2 Pilotage automatique longitudinal

En considérant les équations (29) et (30), le calcul de la commande en dérivée de pente vient assez directement :

$$\dot{\gamma}_c = \frac{2 \cdot z_h \cdot \omega_h \cdot (Vz_c - Vz) + \omega_h^2 \cdot (h_c - h)}{V}$$

Ce second ordre permet une poursuite de  $Vz_c$  et de  $h_c$  sans erreur asymptotique. Le calcul de ces deux valeurs est obtenu de différentes manières :

- Mode maintien d'altitude : La hauteur commandée est choisie directement par le pilote via une interface dédiée (FCU) ou par le système de gestion du vol (FMS) et la vitesse ascensionnelle commandée est nulle.
- Mode acquisition d'altitude : grâce à l'absence d'intégrateur de précision dans la boucle permise par le RMI, on peut tout-à-fait conserver le même principe avec une protection en vitesse adéquate permettant de bloquer l'avion à la vitesse de finesse maximale (par exemple). Cela permettrait à terme de se passer du mode speed-mach sans craindre des phénomènes de surcharge d'intégrateur.
- Mode de montée ou de descente « ouvertes » : idem que précédemment avec une hauteur commandée de 100.000ft ou 0ft
- Mode de vitesse verticale : dans ce cas, la hauteur commandée est directement la hauteur courante et la vitesse ascensionnelle commandée est choisie directement par le pilote ou par le FMS.
- Mode acquisition / suivi de glide (aide radio-électrique matérialisant le plan de référence pour l'atterrissage de précision) : Il existe déjà, pour tous les avions, des lois génériques liant la position de l'avion par rapport au glide à des valeurs de vitesse ascensionnelle commandée et de hauteur commandée. Nous les avons réutilisées.
- Mode flare (voir parties suivantes) : Nous avons généré nos propres trajectoires de référence. Celles-ci nous donnent directement, tout-au long de l'arrondi, des valeurs de vitesse ascensionnelle et de hauteur commandées.

Enfin, seul le mode de suivi de pente est différent. Pour celui-ci, la loi de commande est très simple :

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\gamma_c - \gamma}{\tau_\gamma}$$

et la pente commandée est directement spécifiée par le pilote ou par le FMS.

### 3.4.3 Pilotage automatique latéral

Avant de passer au pilotage automatique latéral, il est nécessaire de piloter directement l'assiette (pour le FMS en mode NAV, par exemple). Pour cela, on pose, de manière assez évidente :

$$\dot{\phi}_c = \frac{\phi_c - \phi}{\tau_\phi}$$

Dés lors, il est possible de commander l'avion en cap (mode heading). D'après l'équation (32), on peut poser :

$$\phi_c = \frac{V}{g} \cdot \frac{\psi_c - \psi}{\tau_\psi}$$

On définit aussi la route ( $TK$ ) comme la projection au sol de l'angle entre la trajectoire réellement suivie par l'avion et le nord (magnétique ou géographique selon le cas). Le comportement dynamique de la route et du cap est sensiblement le même. La principale dissimilitude entre les deux est liée à la dérive due au vent et au dérapage. La loi associée (mode track) est donc identique à la précédente :

$$\phi_c = \frac{V}{g} \cdot \frac{TK_c - TK}{\tau_{TK}}$$

Dans le cas de l'atterrissage de précision, lors de l'approche, l'axe latéral d'alignement à la piste est matérialisé par le faisceau loc (pour « localize »). Le mode d'acquisition/maintien de cet axe précalcule des valeurs équivalentes de distance  $\Delta Y$  par rapport au loc ainsi que les valeurs de sa dérivée. Sans vent et pour de petites valeurs de  $\varphi$ ,  $\theta$  et  $\beta$ , on peut écrire :

$$\dot{\Delta Y} = V \cdot \Delta \psi$$

avec :

$$\Delta \psi = \psi_c - \psi$$

On peut alors définir la dernière boucle de commande en roulis permettant le suivi de l'axe loc :

$$\Delta \psi_c = \frac{\Delta Y}{\tau_{\Delta Y} \cdot V} + \Delta_{RMI}^{\Delta Y}$$

L'apparition d'une contribution RMI est nécessaire à ce niveau pour contrer les effets du vent sans nécessiter d'intégrateur de précision. Son expression vaut :

$$\Delta_{RMI}^{\psi} = \frac{1}{\tau_{RMI}^{\psi}} \cdot \left[ \int (V \cdot \Delta Y - \Delta_{RMI}^{\psi}) dt - \Delta Y \right]$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

La dynamique finale en écart latéral est du quatrième ordre. Conformément à la partie 2.1.3.4, si l'on souhaite placer pour cette dynamique une succession de filtres du premier ordre ayant la même constante de temps, il faut poser :

$$\begin{cases} \tau_\phi = \frac{3 \cdot \tau_p}{8} \\ \tau_\psi = \frac{\tau_p}{6} \\ \tau_{\Delta Y} = \frac{\tau_p}{16} \end{cases}$$

Enfin, la valeur de dérapage commandé est nulle pendant tout le vol (sauf cas de panne moteur). Il existe aussi un mode permettant de décrabrer (à moitié) l'avion pendant l'arrondi afin de mieux l'aligner avec la piste et de minimiser ainsi les charges latérales sur les trains d'atterrissage principaux : le mode decrab. On ne décrabe qu'à moitié pour éviter d'atteindre des angles d'assiette latérale importants qui permettraient sinon de maintenir, pour un decrab complet, un écart latéral nul avec l'axe de piste.

$$\beta_c = \frac{QFU - \psi}{2} \Big|_{\text{decrab initiation}}$$

### 3.4.4 Automanette

On peut mettre l'équation de traînée (25) sous forme non-linéaire affine. Malheureusement, il est impossible de commander directement la poussée des moteurs. En réalité, les moteurs sont sollicités par l'intermédiaire d'un paramètre de contrôle moteur (PCM). Le PCM désiré est envoyé au calculateur de contrôle moteur : le FADEC (Full Authority Digital Engine Computer). Ce PCM varie selon les moteurs. Cela peut être :

- Le N1 : Rapport entre la vitesse de rotation du fan et sa vitesse maximale continue.
- L'EPR (Exhaust Pressure Ratio) : Rapport de pression entre l'entrée et la sortie du moteur.
- Le TPR (Thrust Pressure Ratio) : Rapport entre la poussée et la pression à l'entrée du moteur.

L'équation (25) peut donc se mettre sous la forme :

$$\dot{V} = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x - g \cdot \sin(\gamma) + \frac{\cos(\alpha)}{m} \cdot \left[ T \Big|_{PCM=PCM_{ref}} + \frac{\partial T}{\partial PCM} \Big|_{PCM=PCM_{ref}} \cdot (PCM - PCM_{ref}) \right]$$

On pose alors :

$$\begin{cases} F_V = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x - g \cdot \sin(\gamma) + \frac{\cos(\alpha)}{m} \cdot \left[ T \Big|_{PCM=PCM_{ref}} - \frac{\partial T}{\partial PCM} \Big|_{PCM=PCM_{ref}} \cdot PCM_{ref} \right] \\ G_V = \frac{\cos(\alpha)}{m} \cdot \frac{\partial T}{\partial PCM} \Big|_{PCM=PCM_{ref}} \cdot PCM \end{cases}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

La loi de commande RMI pour ce système est :

$$\begin{cases} PCM = \frac{\frac{V_c - V}{\tau_V} - F_V + \Delta_{RMI}^V}{G_V} \\ \Delta_{RMI}^V = \frac{1}{\tau_{RMI}^V} \cdot \left[ \int (F_V + G_V \cdot PCM - \Delta_{RMI}^V) dt - V \right] \end{cases}$$

Cette loi de commande fonctionne très bien. Toutefois, on peut remarquer qu'elle fait intervenir le coefficient aérodynamique de traînée (par l'intermédiaire de  $F_V$ ), ce qui est certainement un peu luxueux pour une loi de commande en vitesse. Nous avons récemment pu évaluer une loi de commande ne prenant pas en compte ce modèle de  $C_x$ . Les résultats obtenus en simulation ont été absolument équivalents avec et sans  $C_x$ .

### 3.4.5 Stabilité et performances robustes des lois proposées

Dans la partie 2.2, nous avons explicité des conditions de stabilité et de performances robustes pour les lois de type RMI. Vérifions-les dans le cadre du pilote automatique et de l'autopoussée :

- Stabilité des éventuelles dynamiques internes : le système {avion latéral} est d'ordre 4. Lorsqu'il est commandé par le pilote automatique, il ne présente pas de dynamique interne. Le système {avion longitudinal}, supposé découplé du système précédent, est d'ordre 4. Toutefois, du fait d'une certaine séparation en fréquence entre la vitesse et les autres états, on considère traditionnellement deux sous-systèmes découplés, que nous nommerons {A1} et {A3}. Le système {A1} est d'ordre 1. S'il est commandé par une autopoussée, il ne présente pas de dynamique interne. De même, le système {A3} ne présente pas de dynamique interne s'il est commandé par un pilote automatique.
- Bornitude des fonctions  $F$  et  $G$  décrivant la dynamique entrées-sorties du système, de leur modèle  $F_m$  et  $G_m$  et des dérivées de  $F$ ,  $G$ ,  $F_m$  et  $G_m$  jusqu'à l'ordre 2 : L'aérodynamique de l'avion est un phénomène physique régulier car basé des coefficients aérodynamiques bornés, ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre 2.
- Condition d'erreur maximale admissible sur  $G$  : Pour l'autopoussée, notre connaissance de la propulsion de l'avion nous assure que l'erreur que nous faisons sur  $G$  est inférieure à 100% en valeur absolue. Pour les pilotes automatiques, les relations inversées sont exactes car cinématiques au vent près. Or le vent s'applique sur la matrice  $F$  et non sur  $G$ . On peut donc considérer que, dans tous les cas, l'erreur de modélisation maximale n'est pas atteinte.

Les propriétés de stabilité et de performances robustes du pilote automatique et de l'autopoussée proposés sont donc assurées.

### 3.4.6 Conclusion

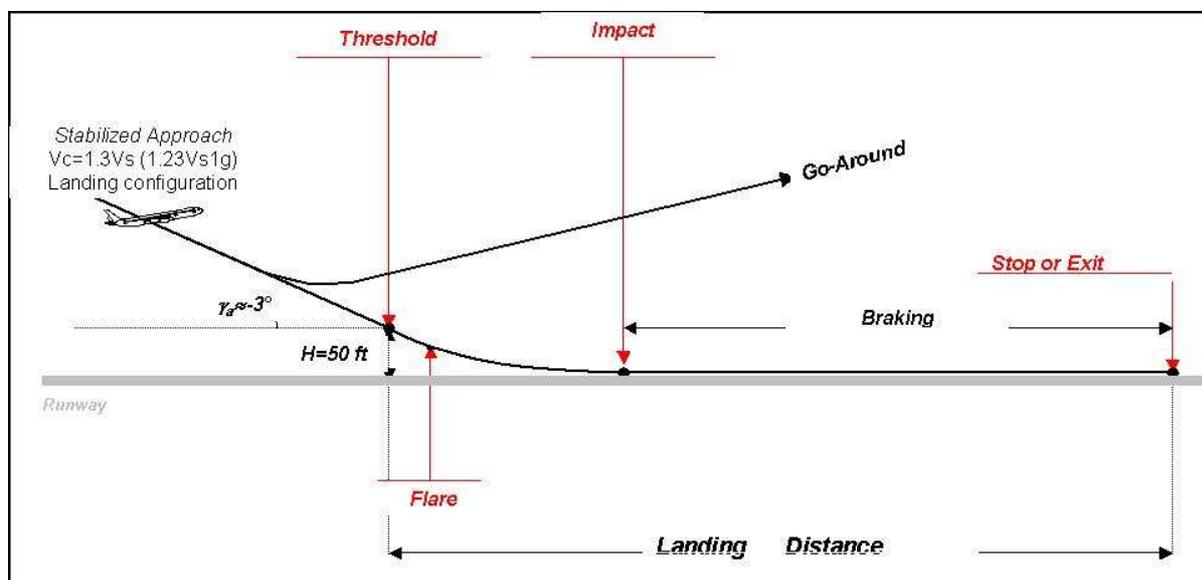
Par l'utilisation du RMI nous avons pu synthétiser un pilote automatique sans intégrateur de précision. De cette manière, les gains des lois obtenues peuvent être optimisés. Par ailleurs, la robustesse est assurée, tant en performances qu'en stabilité.

## 3.5 Trajectoires de référence pour l'arrondi à l'atterrissage

### 3.5.1 Introduction aux trajectoires d'arrondi

#### 3.5.1.1 Contexte de l'étude

Dans les parties précédentes, nous avons proposé une méthode permettant de piloter un avion en agissant directement sur le facteur de charge, l'assiette latérale et le dérapage. Ensuite, nous avons proposé des lois de commande permettant de contrôler l'avion notamment autour de l'axe radioélectrique matérialisé par les aides au pilotage. Néanmoins, un atterrissage n'est pas qu'une approche stabilisée. A proximité du sol, il faut notamment casser la vitesse ascensionnelle afin d'obtenir un atterrissage confortable et sûr : c'est la phase d'arrondi (mode « flare » du pilote automatique). Notons toutefois que la résistance structurale de l'avion est calibrée pour supporter un atterrissage à une vitesse ascensionnelle de 12 ft/s (3.6 m/s), ce qui correspond à un atterrissage sans arrondi.



3.5.1.1.a : Schématisation de la phase d'atterrissage

L'arrondi est donc défini comme la phase transitoire entre la phase d'approche stabilisée et le roulage de l'avion sur la piste. C'est la phase de vol la plus dynamique et la plus critique, qui plus est dans un contexte de fortes incertitudes (vent, profil piste, effet de sol...).

#### 3.5.1.2 Trajectoires de référence pour l'arrondi automatique : Pourquoi et comment ?

Aussi surprenant que cela puisse paraître, il n'est pas nécessaire d'avoir une trajectoire de référence pour réaliser une bonne loi d'arrondi automatique. Ainsi, dans le cas de l'A300/310, on donnait simplement au pilote automatique une consigne d'altitude nulle et de  $V_z$  désirée à partir d'une altitude variable.

Le sens de l'histoire est toutefois d'aller vers des trajectoires de référence plutôt que des consignes forfaitaires. Ainsi, à partir de l'A320 (1987), tous les Airbus sont soumis à ces trajectoires.

En effet, sous un aspect de simplicité séduisant, les consignes forfaitaires induisent une moindre maîtrise et une moindre connaissance de la position de l'avion pendant l'arrondi. Les latitudes de réglages sont aussi faibles et difficilement découplables.

## **Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**

### **Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Inversement, l'utilisation de trajectoires de référence permet d'avoir une connaissance plus déterministe de la trajectoire de l'avion. Toutefois, le problème de définition de LA bonne trajectoire parmi une infinité de solutions est complexe. De plus, la trajectoire de référence choisie peut ne pas être physiquement réalisable, ce qui enlève une part de l'intérêt de la méthode.

Néanmoins, grâce à cette méthode, on peut compter sur un certain découplage entre le problème de suivi de trajectoire et de réglage des grandes boucles, ce qui permet certainement de gagner du temps lors de la synthèse de la loi.

Le débat entre les deux méthodes n'est donc pas clos même s'il penche nettement actuellement en faveur de la trajectoire de référence. En effet, au mieux, les performances avec et sans trajectoires de référence sont identiques. Mais l'implantation de trajectoires de référence permet de faciliter grandement l'analyse de comportement de l'avion rebouclé. Pour une comparaison d'information plus riche et détaillée, le lecteur pourra se reporter à [136]. Il faut ajouter que dans le cadre particulier de la thèse, qui vise à définir des méthodes génériques de synthèse de loi, la trajectoire de référence apparaît sans conteste comme la meilleure solution.

Pour finir, il faut faire attention à ne pas espérer améliorer une loi de pilote automatique par le biais de la génération de trajectoire. La tentation d'utiliser cette méthode à des buts de précommande doit être évitée. Une trajectoire de référence ne peut pas améliorer une loi de commande intrinsèquement médiocre. Par contre, comme toute grande boucle, elle peut dégrader la loi de commande de niveau inférieur.

### **3.5.1.3 Cahier des charges des trajectoires d'arrondi**

Trois points très importants seront considérés lors du jugement d'une trajectoire de référence :

- La hauteur d'initiation de l'arrondi doit être variable. Dans le cas où elle est variable mais non-réglable, elle doit être une fonction croissante de la vitesse sol afin de préserver de bonnes sensations de pilotage.
- Le facteur de charge maximal au poste de pilotage doit être atteint rapidement (idéalement de l'ordre de 0.05g à 45ft) de manière à faire ressentir clairement au pilote le passage en mode flare
- A la fin de l'arrondi, la vitesse ascensionnelle doit présenter un palier (idéalement de durée égale au tiers de la durée totale de l'arrondi). Ceci permet de stabiliser l'avion avant le toucher des roues et garantit donc théoriquement une plus grande robustesse de la loi d'atterrissage automatique vis-à-vis des gradients de vent en particulier.

## 3.5.2 Comparaison de trajectoires de référence innovantes

Le choix ayant été fait entre trajectoire de référence et consigne forfaitaire, il reste à choisir la trajectoire souhaitée. Une littérature importante existe sur ce sujet ([86], [201] et [202]), résultant notamment de nombreuses études faites par la NASA ([69], [81], [82], [83], [174] et [175]). Il s'agit principalement de trajectoires polynomiales ou exponentielles.

Toutefois, ces trajectoires présentent souvent un trop grand nombre de degrés de liberté ou encore des discontinuités (en  $Vz$  notamment). Partant de cette constatation et du cahier des charges détaillé précédemment, trois trajectoires de référence innovantes sont proposées. Chacune est notée afin de permettre une comparaison objective.

### 3.5.2.1 Trajectoire exponentielle-affine améliorée

#### 3.5.2.1.1 Introduction

La première trajectoire de référence retenue est la trajectoire exponentielle-affine (voir [51] pour plus de précision et des comparaisons avec d'autres trajectoires de référence). En effet, cette trajectoire ne contient qu'un seul degré de liberté et est absolument continue en  $h$  et  $Vz$ .

#### 3.5.2.1.2 Principe

Le principe de cette trajectoire est le suivant ; on pose la hauteur commandée  $h_c$  telle que :

$$h_c(t) = a.e^{-\frac{t}{\tau}} + b.t + c$$

où  $t$  est le temps depuis le début de l'arrondi. On cherche à imposer une distance de flare ( $D_{flare}$ ) et une vitesse ascensionnelle à l'impact ( $Vz_{id}$ ). On connaît par ailleurs la vitesse ascensionnelle en tout point de la trajectoire. On suppose aussi qu'on connaît la projection de la vitesse longitudinale en axe sol  $Vx$  et que celle-ci est constante tout au long de l'arrondi ( $Vx=Vx_0$ ). Par exploitation des conditions aux limites, il vient :

$$\begin{cases} h_0 = a + c \\ Vz_0 = -\frac{a}{\tau} + b \\ 0 = a.\exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau.Vx_0}\right) + b.\frac{D_{flare}}{Vx_0} + c \\ Vz_{id} = -\frac{a}{\tau}.\exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau.Vx_0}\right) + b \end{cases}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Pour trouver  $a$ ,  $b$  et  $c$ , il faut résoudre ce système comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} a = \tau \cdot \frac{Vz_{td} - Vz_0}{1 - \exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau \cdot Vx_0}\right)} \\ b = \frac{Vz_{td} - Vz_0 \cdot \exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau \cdot Vx_0}\right)}{1 - \exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau \cdot Vx_0}\right)} \\ c = -a \cdot \exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau \cdot Vx_0}\right) - b \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \end{array} \right.$$

On obtient de cette manière un système ayant comme seul degré de liberté  $\tau$ . Le réglage de ce paramètre permet notamment de faire varier la hauteur d'initiation de l'arrondi. L'avantage de cette trajectoire est sa relative simplicité de mise en œuvre et de calcul. D'autre part, le réglage est facilité, puisqu'un seul paramètre suffit à faire varier la courbure de l'arrondi, tout en conservant la continuité des variables commandées.

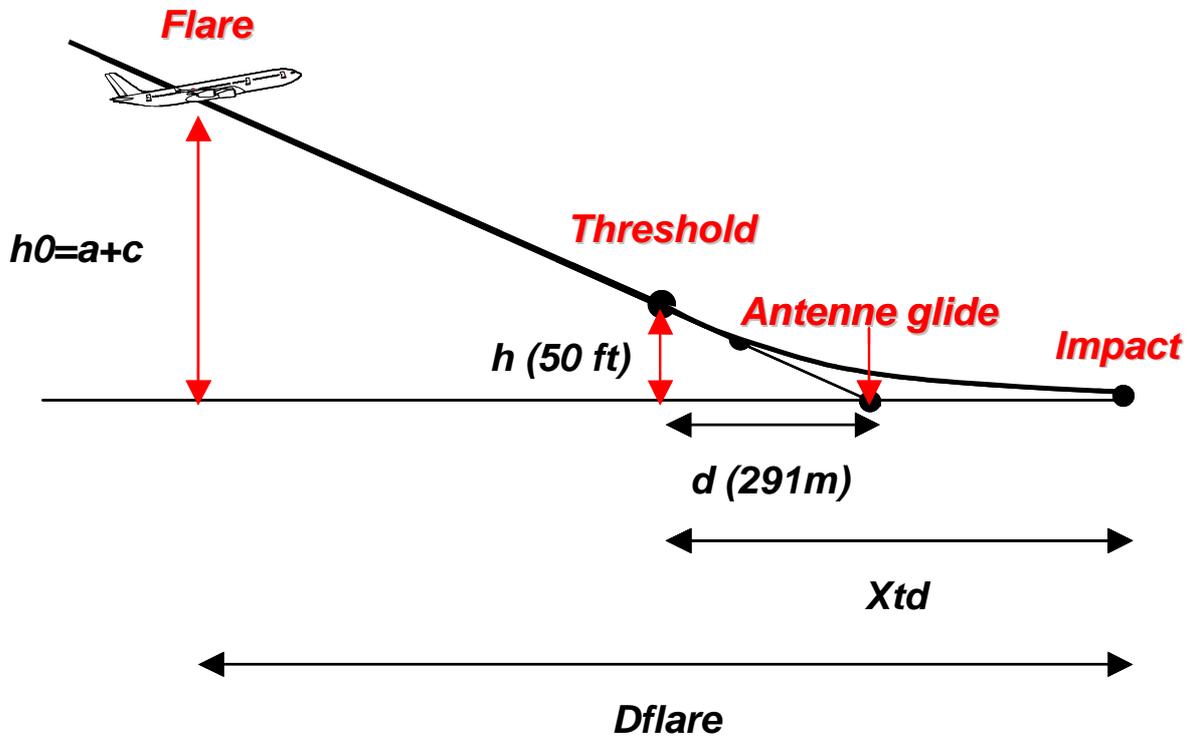
Il y a toutefois deux limitations à cela :

- Si  $Vx$  varie fortement lors de l'arrondi (gradient de vent, etc.), cette variation n'est pas prise en compte puisque la trajectoire est figée dès l'enclenchement du mode. La longueur de l'arrondi peut être alors significativement impactée. A noter que cette constatation est valable pour toute génération de trajectoire déterministe classique et que cela n'est donc pas spécifique à la trajectoire exponentielle-affine.
- La distance d'arrondi fixée ( $D_{flare}$ ) correspond à la distance sol entre le point d'engagement du mode et le point de toucher des roues (distance flare). Or, la distance que l'on souhaite fixer est celle entre le seuil de piste et le point de toucher des roues (distance piste, notée  $X_{td}$ ). La différence entre les deux est souvent non-négligeable, et d'autant plus grande que l'avion est long et que l'arrondi est déclenché haut.

Dans la suite de ce mémoire, une résolution de ces deux problèmes est proposée. Elle a pour but d'amener l'avion de manière déterministe et donc précise au point de toucher des roues spécifié par le concepteur de loi.

### 3.5.2.1.3 Expression de la trajectoire d'arrondi en distance piste

Voici le synoptique de la trajectoire d'arrondi paramétrée telle que les équations ci-dessus, sous l'hypothèse d'un glide à  $-3^\circ$  :



3.5.2.1.3.a : Géométrie de l'arrondi

Ainsi, par le théorème de Thalès, il vient :

$$h_0 = h \cdot \frac{D_{flare} - X_{td} + d}{d}$$

Les deux seules inconnues de cette expression sont *a priori*  $h_0$  et  $D_{flare}$ . Néanmoins, ces valeurs sont fixées lors du calcul des trajectoires de référence et on peut donc les imposer en fonctions de la valeur désirée pour  $X_{td}$ .

### 3.5.2.1.4 Adaptation de la trajectoire de référence

A ce point de l'étude, on a une trajectoire de référence basée sur une seule hypothèse restrictive : la constance de  $Vx$  pendant l'arrondi. Ceci a pour conséquence qu'en cas de fort gradient de vent, on enregistrera une dispersion des points d'impact du fait même de la trajectoire de référence.

Pour expliciter différemment le phénomène physique, on peut remarquer que la trajectoire de référence exponentielle-affine telle que définie au départ est une relation  $h_c(t)$ , soit une relation temporelle. Or, la définition scientifique d'une trajectoire est plutôt géographique, de type  $h_c(x)$ , de manière à avoir homogénéité. Ceci signifie que, dans le cas de la trajectoire exponentielle-affine temporelle, quel que soit le vent, on va impacter le sol à  $t_f = D_{flare}/Vx_0$ . Alors que, dans le cas d'une trajectoire géographique, c'est la position longitudinale de l'avion par rapport à la piste qui détermine le point de toucher des roues.

La solution retenue est de définir un pseudo-temps  $t$  tel que :

$$t = \frac{\int Vx}{Vx_0} = \frac{x}{Vx_0} \quad (37)$$

où le  $Vx$  considéré est obtenu à partir des centrales inertielles et  $x$  est utilisé pour simplifier les notations. De cette manière, l'expression :

$$h_c(t) = a.e^{-\frac{t}{\tau}} + b.t + c$$

devient :

$$h_c(x) = a.e^{-\frac{x}{\tau.Vx_0}} + b.\frac{x}{Vx_0} + c$$

Pour vérifier le bien-fondé de cette adaptation, on rappelle une des équations des conditions aux limites :

$$0 = a.\exp\left(-\frac{D_{flare}}{\tau.Vx_0}\right) + b.\frac{D_{flare}}{Vx_0} + c$$

Or, avec la loi d'adaptation proposée, quelles que soient les conditions rencontrées pendant l'arrondi, la valeur de  $h_c$  en  $D_{flare}$  est la suivante :

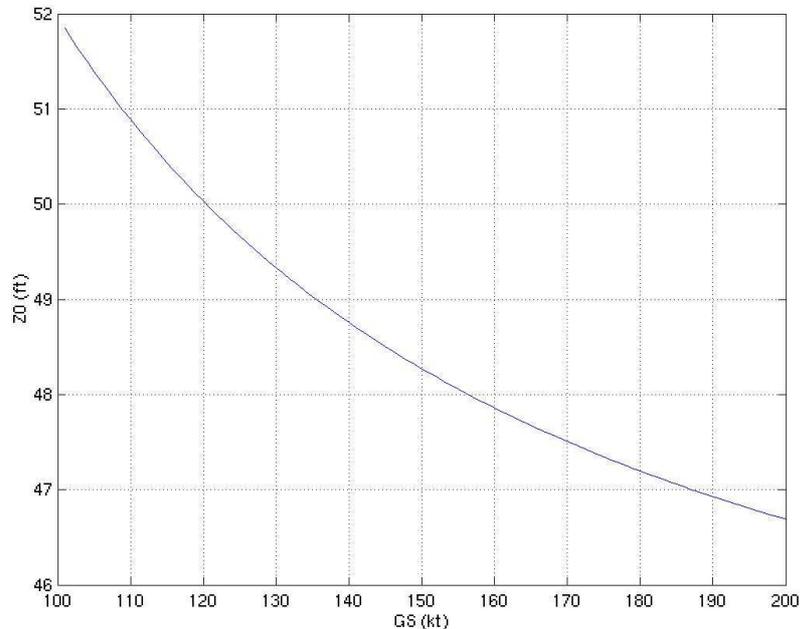
$$h_c(D_{flare}) = a.e^{-\frac{D_{flare}}{\tau.Vx_0}} + b.\frac{D_{flare}}{Vx_0} + c$$

Soit, d'après ce qui précède :

$$h_c(D_{flare}) = 0$$

### 3.5.2.1.5 Quelques formes de trajectoire

La figure ci-dessous montre l'évolution de la hauteur d'initiation de l'arrondi en fonction de la vitesse sol pour un  $\tau$  donné.



*3.5.2.1.5.a : Altitude d'initiation de l'arrondi en fonction de la vitesse-sol*

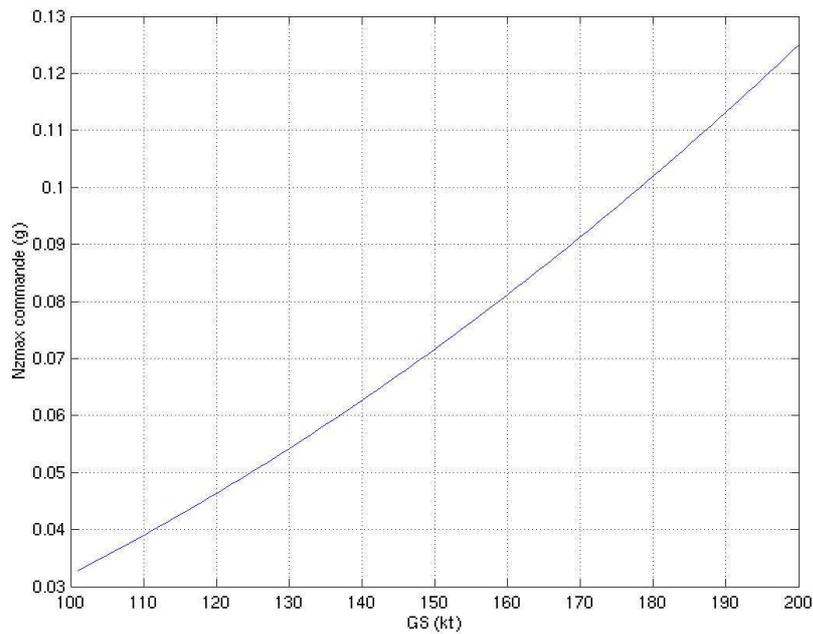
Manifestement, les considérations avec et sans avion dans la boucle s'opposent :

- Mathématiquement, pour satisfaire les conditions initiales et finales du problème d'intégration posé ici, plus on arrive vite et plus il faut arrondir bas.
- Inversement, plus on va vite et plus l'arrondi est court en temps (à hauteur de déclenchement identique). Cela signifie que, le temps de réponse de l'avion étant fixé par design, plus on va vite et plus ce temps de réponse devient significatif. La tendance, en prenant compte l'avion dans la boucle, s'accorde alors avec le ressenti des pilotes puisque, pour un pilote, plus on arrive vite plus il faut arrondir haut. L'évolution de la trajectoire exponentielle-affine est opposée, même si pour une différence de vitesse de 40 kt la différence de hauteur n'est que de 3 ft (et 5 ft pour 100kt).

De plus amples investigations seraient nécessaires pour savoir si l'on peut considérer cette valeur comme constante d'un point de vue pilote ou si la tendance négative est franchement ressentie.

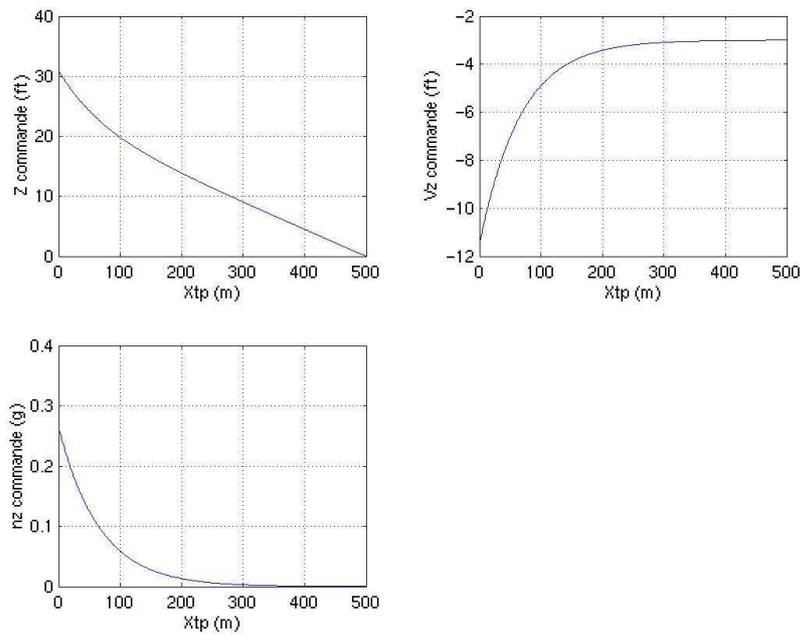
La figure qui suit montre l'évolution du facteur de charge (constaté au début de la manœuvre pour ce type de trajectoires) en fonction de la vitesse sol de l'avion. On remarque que plus on va vite, plus  $N_{z_{max}}$  est important. Ceci est compréhensible puisque, d'après ce qui précède, l'arrondi est déclenché plus tard.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



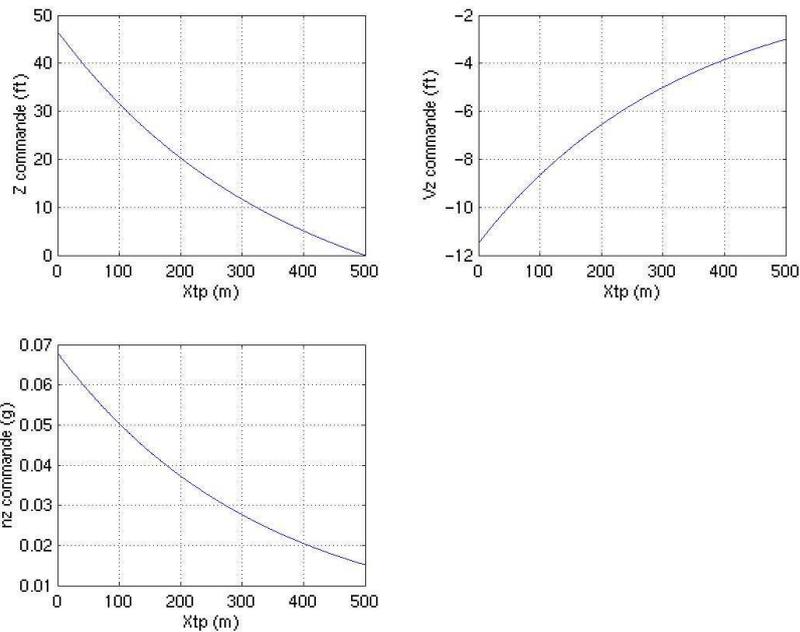
*3.5.2.1.5.b : Facteur de charge maximal commandé pendant l'arrondi en fonction de la vitesse-sol*

Enfin nous montrons une série de courbes montrant les formes de trajectoire en fonction de  $\tau$ .

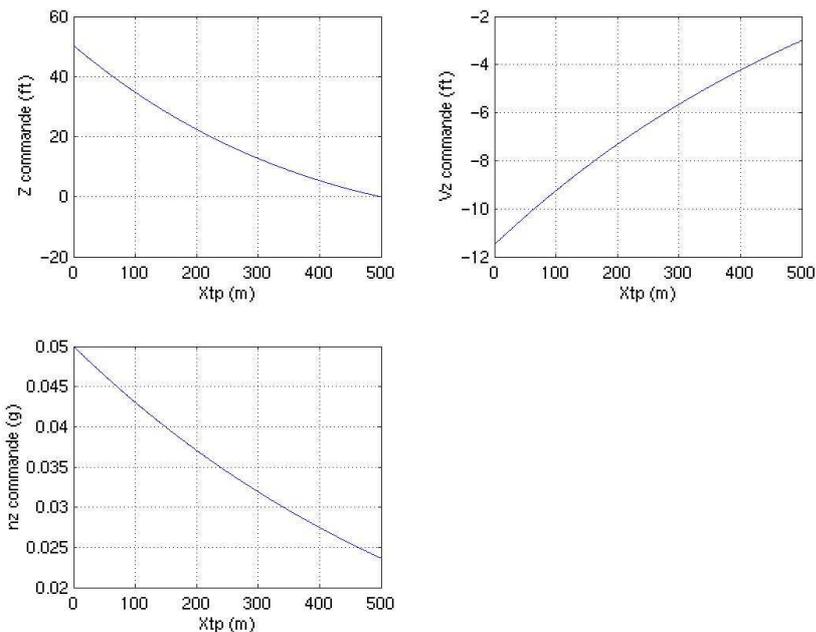


*3.5.2.1.5.c : Hauteur commandée et ses dérivées dans la cas d'une trajectoire exponentielle-affine ( $\tau=1$ )*

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



3.5.2.1.5.d : Hauteur commandée et ses dérivées dans la cas d'une trajectoire exponentielle-affine ( $\tau=5$ )



3.5.2.1.5.e : Hauteur commandée et ses dérivées dans la cas d'une trajectoire exponentielle-affine ( $\tau=10$ )

### 3.5.2.1.6 Conclusion

La trajectoire exponentielle-affine est très intéressante d'un point de vue mathématique. C'est une solution très élégante, qui implique toutefois quelques désagréments. En effet, si l'on reprend le cahier des charges proposé en introduction, on peut juger la loi sur trois points :

- Hauteur d'initiation : elle est variable mais pas réglable et varie (peu) dans un sens contraire à celui souhaité par les pilotes (voir illustration en annexe §6.4). Note : 0/1
- Facteur de charge : il est extrêmement satisfaisant car maximal à l'entrée de l'arrondi (cf. illustration en annexe). Note : 1/1

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

- Palier de  $V_z$  : il ne s'agit pas à proprement d'un palier puisqu'en réalité on a convergence exponentielle. Toutefois, selon les réglages de  $\tau$  (qui fait varier aussi la hauteur d'initiation de l'arrondi), on peut régler l'horizon de stabilisation. Note : 0.5/1

Au final, s'il fallait noter cette trajectoire de référence, elle aurait la moyenne soit 1.5/3.

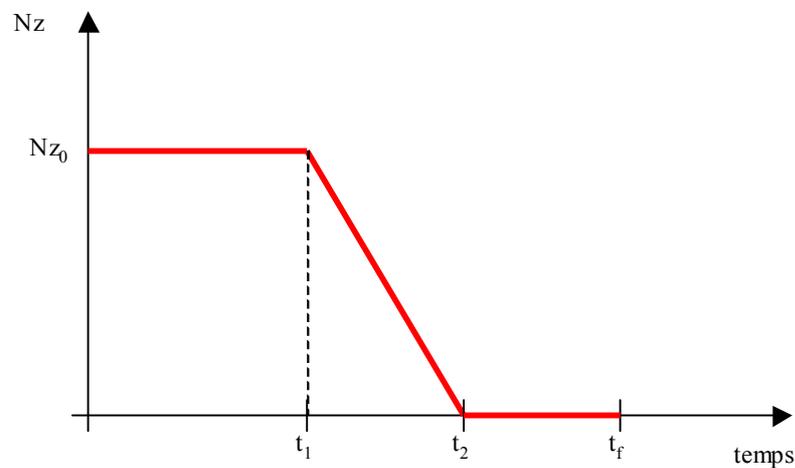
## 3.5.2.2 Trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée »

### 3.5.2.2.1 Introduction

L'idée fondamentale de cette trajectoire est de marier les avantages de la trajectoire en triangle ([136]), à savoir la simplicité de calcul, avec les avantages de la trajectoire exponentielle-affine, à savoir excellent facteur de charge à l'initiation (contrairement à la trajectoire en triangle).

### 3.5.2.2.2 Principe

Dans toute la suite de l'étude, nous utiliserons abusivement le terme « facteur de charge » et son symbole «  $Nz$  » pour désigner la dérivée de la vitesse ascensionnelle. La forme de la trajectoire est la suivante :



3.5.2.2.2.a : Trajectoire de type « simple rampe saturée »

Les équations sont donc les suivantes :

- Pour  $Nz$  :
- o  $0 < t < t_1$  :

$$Nz = Nz_0$$

- o  $t_1 < t < t_2$  :

$$Nz = Nz_0 \cdot \left( 1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)$$

- o  $t_2 < t < t_f$  :

$$Nz = 0$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

- Pour  $Vz$  :
  - $0 < t < t_1$  :

$$Vz = Vz_0 + Nz_0 \cdot t$$

- $t_1 < t < t_2$  :

$$Vz = Vz_0 + Nz_0 \cdot t - \frac{Nz_0}{2} \cdot \frac{(t - t_1)^2}{t_2 - t_1}$$

- $t_2 < t < t_f$  :

$$Vz = Vz_0 + \frac{Nz_0}{2} \cdot (t_2 + t_1)$$

- Pour  $z$  :
  - $0 < t < t_1$  :

$$z = z_0 + Vz_0 \cdot t + \frac{Nz_0}{2} \cdot t^2$$

- $t_1 < t < t_2$  :

$$z = z_0 + Vz_0 \cdot t + \frac{Nz_0}{2} \cdot t^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot \frac{(t - t_1)^3}{t_2 - t_1}$$

- $t_2 < t < t_f$  :

$$z = z_0 + Vz_0 \cdot t - \frac{Nz_0}{6} \cdot (t_1 + t_2)^2 + \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t \cdot (t_1 + t_2)$$

Le détail des calculs est donné en annexe. On notera que, d'après ces calculs, il manque des degrés de liberté pour fixer tous les paramètres souhaités.

Notons aussi que, comme précédemment, l'on peut exprimer cette trajectoire d'arrondi en distance piste (cf. § 3.5.2.1.3) et l'adapter aux conditions réelles de vol (cf. § 3.5.2.1.4).

### **3.5.2.2.3 Conclusion**

La trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée » est relativement simple dans son principe mais déjà relativement complexe dans sa résolution. Il faut par ailleurs faire un choix entre les variables que l'on souhaite imposer. Si ce choix correspond au nôtre et si l'on reprend le cahier des charges proposé en introduction, on peut juger la loi sur trois points :

- Hauteur d'initiation : elle est variable et réglable. Note : 1/1
- Facteur de charge : il est obtenu tout de suite mais on ne peut pas l'imposer positif ! On risque fortement d'avoir ce genre de problèmes pour les arrondis débutés assez haut. Note : 0/1
- Palier de  $V_z$  : il est réglable à volonté. Note : 1/1

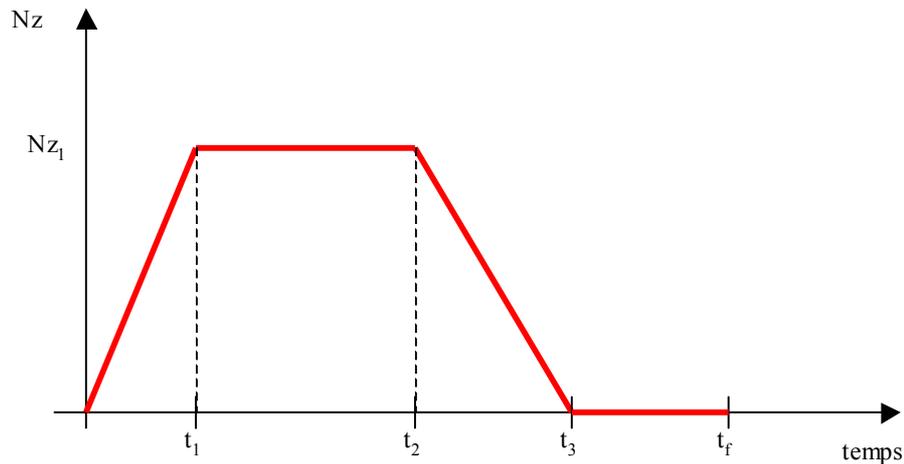
Au final, la note globale est de 2/3. Toutefois, cette note cache la difficulté de régler finement cette trajectoire à cause de son manque de degrés de liberté et de son caractère non-physique (car discontinu). Son étude a donc été délibérément abrégée pour se concentrer sur d'autres trajectoires plus susceptibles de remplir nos besoins.

En effet, en dégageant un degré de liberté supplémentaire, on devrait pouvoir encore améliorer ces trajectoires de référence. C'est le but de la trajectoire de référence suivante.

### 3.5.2.3 Trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée »

#### 3.5.2.3.1 Principe

Afin de dégager un degré de liberté supplémentaire, on propose la forme de trajectoire suivante :



3.5.2.3.1.a : Trajectoire de type « double rampe saturée »

avec  $t_3 = K.t_f$ .  $K$  définit donc la taille du palier de vitesse ascensionnelle. Les équations sont les suivantes :

- Pour  $Nz$  :

○  $0 < t < t_1$  :

$$Nz = Nz_1 \cdot \frac{t}{t_1}$$

○  $t_1 < t < t_2$  :

$$Nz = Nz_1$$

○  $t_2 < t < t_3$  :

$$Nz = Nz_1 \cdot \frac{t - t_3}{t_2 - t_3}$$

○  $t_3 < t < t_f$  :

$$Nz = 0$$

- Pour  $Vz$  :

○  $0 < t < t_1$  :

$$Vz = Vz_0 + Nz_1 \cdot \frac{t^2}{2.t_1}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

- $t_1 < t < t_2$ :

$$V_z = V_{z_0} + N_{z_1} \cdot \frac{t_1}{2} + N_{z_1} \cdot (t - t_1)$$

- $t_2 < t < t_3$ :

$$V_z = V_{z_0} + N_{z_1} \cdot \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) + N_{z_1} \cdot \frac{t^2 - t_2^2}{2 \cdot (t_2 - t_3)} - N_{z_1} \cdot t_3 \cdot \frac{t - t_2}{t_2 - t_3}$$

- $t_3 < t < t_f$ :

$$V_z = V_{z_0} + N_{z_1} \cdot \frac{t_2 + t_3 - t_1}{2}$$

- Pour  $z$  :

- $0 < t < t_1$ :

$$z = z_0 + V_{z_0} \cdot t + N_{z_1} \cdot \frac{t^3}{6 \cdot t_1}$$

- $t_1 < t < t_2$ :

$$z = z_0 + V_{z_0} \cdot t + N_{z_1} \cdot \frac{t_1^2}{6} + N_{z_1} \cdot \frac{t^2}{2} - N_{z_1} \cdot \frac{t \cdot t_1}{2}$$

- $t_2 < t < t_3$ :

$$z = z_0 + V_{z_0} \cdot t + N_{z_1} \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + t \cdot t_2 - \frac{t \cdot t_1}{2} + \frac{\frac{t^3}{6} + \frac{t_2^3}{3} - \frac{t \cdot t_2^2}{2} - \frac{t^2 \cdot t_3}{2} - \frac{t_2^2 \cdot t_3}{2} + t \cdot t_2 \cdot t_3}{t_2 - t_3} \right)$$

- $t_3 < t < t_f$ :

$$z = z_0 + V_{z_0} \cdot t + N_{z_1} \cdot t \cdot \frac{t_2 + t_3 - t_1}{2} + N_{z_1} \cdot \frac{t_1^2 - t_2^2 - t_3^2}{6} - N_{z_1} \cdot \frac{t_2 \cdot t_3}{6}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Avec les valeurs suivantes pour  $t_1$  et  $t_2$  :

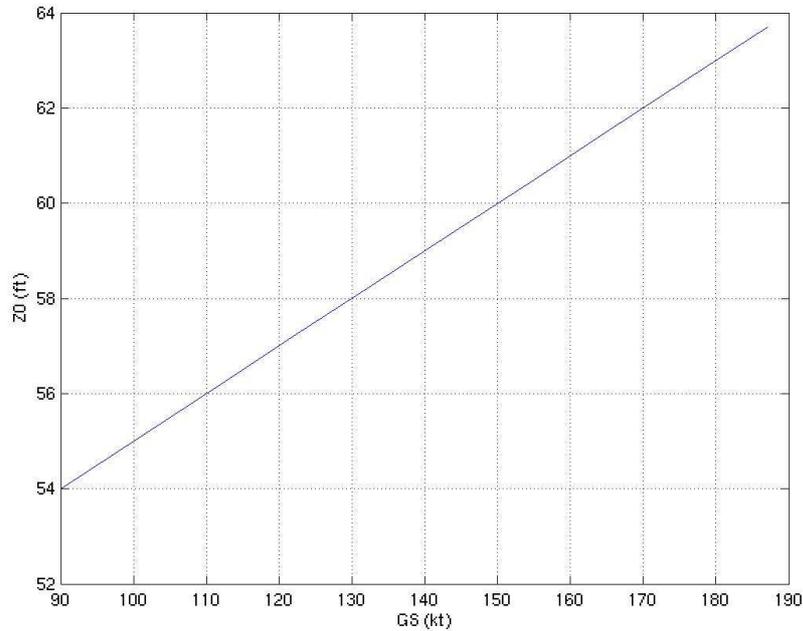
$$\left\{ \begin{array}{l}
 t_1 = \frac{-\left(\frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1}\right)^2 - 2.K.\frac{D_{flare}}{Vx_0}.\frac{(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} - \left(K.\frac{D_{flare}}{Vx_0}\right)^2}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K.\frac{D_{flare}}{Vx_0}} + \\
 \frac{\frac{6}{Nz_1}.\left(z_0 + Vz_{id}.\frac{D_{flare}}{Vx_0}\right)}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K.\frac{D_{flare}}{Vx_0}} \\
 t_2 = \frac{\frac{6}{Nz_1}.\left(z_0 + Vz_{id}.\frac{D_{flare}}{Vx_0}\right) + \left(\frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1}\right)^2 + \frac{4.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1}.K.\frac{D_{flare}}{Vx_0}}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K.\frac{D_{flare}}{Vx_0}}
 \end{array} \right.$$

Par rapport à la simple rampe, l'avantage de la double rampe est la plus grande simplicité de résolution (deux équations d'ordre un à deux inconnues). Toutes nos exigences sont aussi respectées.

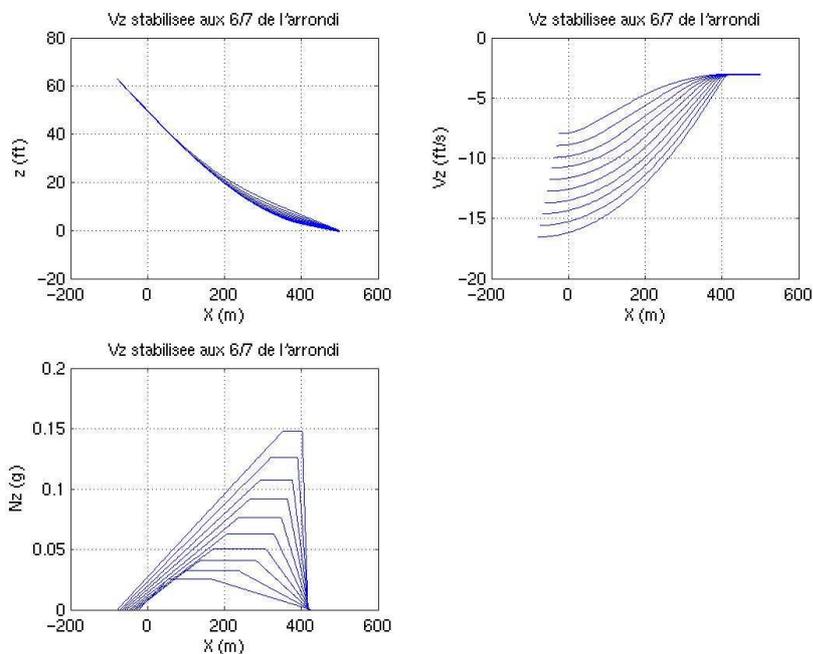
Notons aussi que, comme précédemment, l'on peut exprimer cette trajectoire d'arrondi en distance piste (cf. §3.5.2.1.3) et l'adapter aux conditions réelles de vol (cf. §3.5.2.1.4).

### 3.5.2.3.2 Quelques formes de trajectoire

Dans le cas où l'on vise un toucher des roues à 500m du seuil de piste, à 3 ft/s, voici quelques formes de trajectoire pour la loi  $z_0(GS)$  suivante :

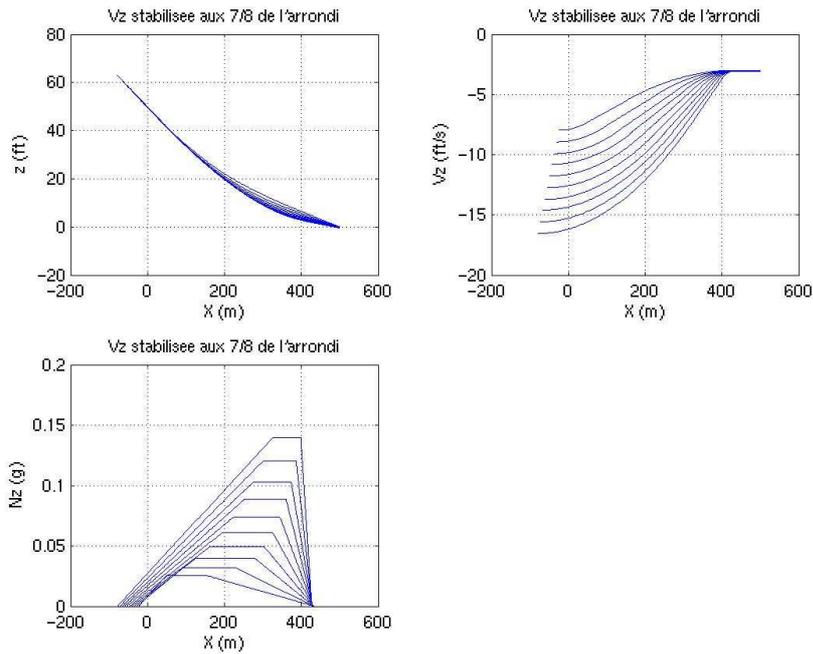


3.5.2.3.4.a : Hauteur d'initiation de l'arrondi en fonction de la vitesse-sol

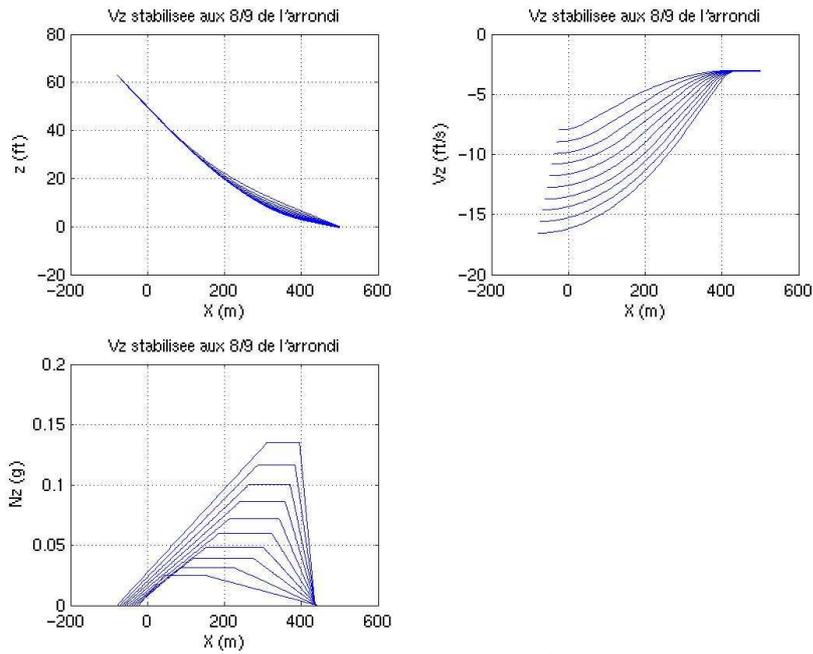


3.5.2.3.4.b : Formes de trajectoire pour  $K_{flare}=6/7$  et vitesse-sol variable

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

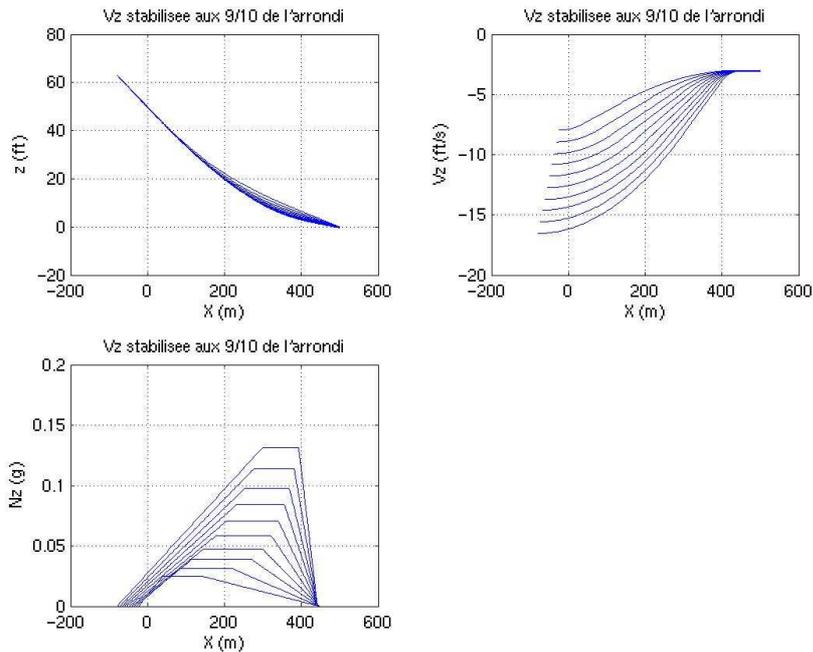


3.5.2.3.4.c : Formes de trajectoire pour  $K_{flare}=7/8$  et vitesse-sol variable



3.5.2.3.4.d : Formes de trajectoire pour  $K_{flare}=8/9$  et vitesse-sol variable

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



3.5.2.3.4.e : Formes de trajectoire pour  $K_{flare}=9/10$  et vitesse-sol variable

### 3.5.2.3.3 Conclusion

La trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée » est relativement simple dans son principe et dans sa résolution. On peut imposer toutes les valeurs spécifiées dans le cahier des charges. En conséquence de quoi, on peut juger la loi sur trois points :

- Hauteur d'initiation : elle est variable est réglable. Note : 1/1
- Facteur de charge : sa valeur maximale est réglable. Note : 1/1
- Palier de  $V_z$  : il est lui aussi réglable. Note : 1/1

Au final, la note globale de cette trajectoire est de 3/3.

### 3.5.2.4 Récapitulatif des trajectoires proposées

Voici résumées les notes données à chacune des trajectoires proposées en fonction du critère du cahier des charges considéré :

	Exponentielle-affine	Simple rampe saturée	Double rampe saturée
Hauteur d'initiation	0/1	1/1	1/1
Facteur de charge maximal	1/1	0/1	1/1
Palier de $V_z$	0.5/1	1/1	1/1
<b>TOTAL</b>	<b>1.5/3</b>	<b>2/3</b>	<b>3/3</b>

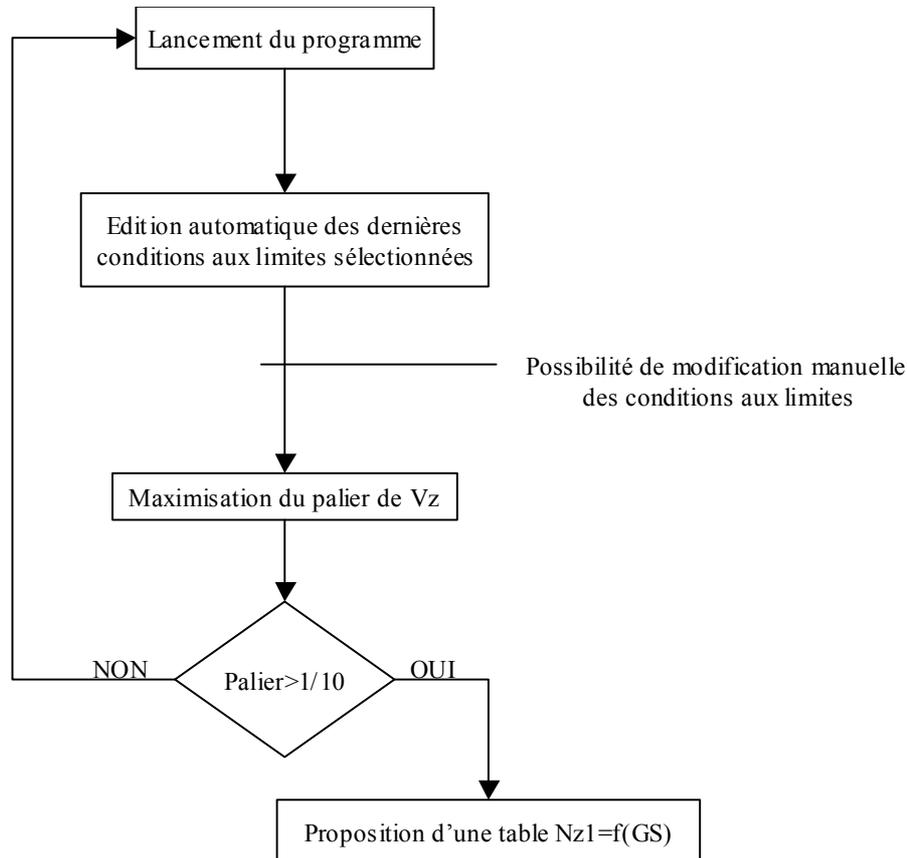
3.5.2.4.a : Comparaison entre les différentes trajectoires de référence proposées

Au vu de ces chiffres, la trajectoire en double rampe saturée paraît être la plus adaptée à notre problème. A noter tout de même que la hauteur d'initiation, le facteur de charge et le palier de  $V_z$  sont réglables mais limités par la physique. Il est difficile de déterminer *a priori* des valeurs compatibles avec les équations développées plus haut. Un outil d'aide à la conception des trajectoires d'arrondi a donc été développé.

### 3.5.3 Outil d'aide à la conception des trajectoires d'arrondi

#### 3.5.3.1 Principe

Cet outil a été développé exclusivement sur la base des trajectoires en facteur de charge de type « double rampe saturée ». Il utilise le langage de programmation Matlab et fonctionne comme suit :



*3.5.3.1.a : Algorithme de l'outil d'aide à la conception de trajectoires de référence*

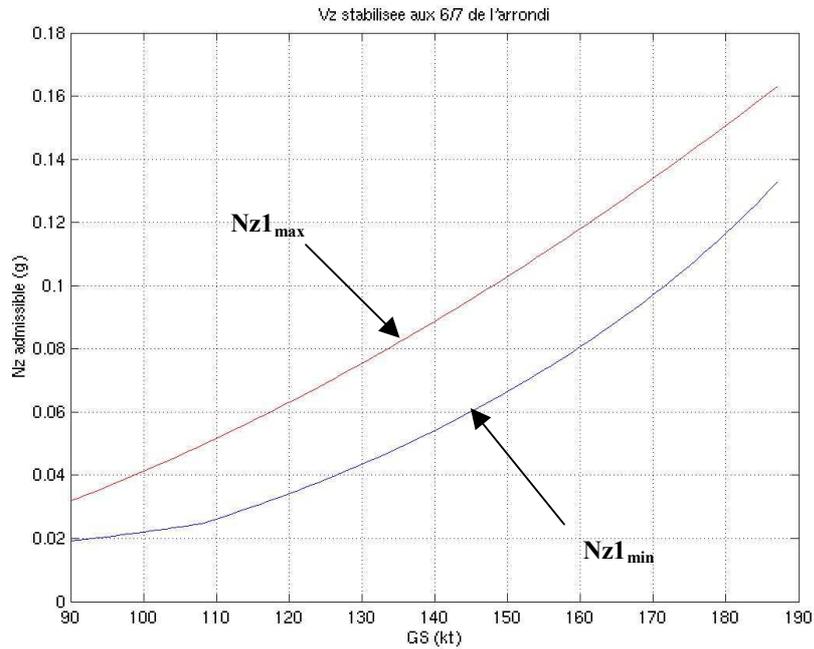
#### 3.5.3.2 Exemple de l'arrondi de l'A340-300

On utilise cet outil pour l'A340-300. Les conditions aux limites spécifiées dans Matlab sont les suivantes :

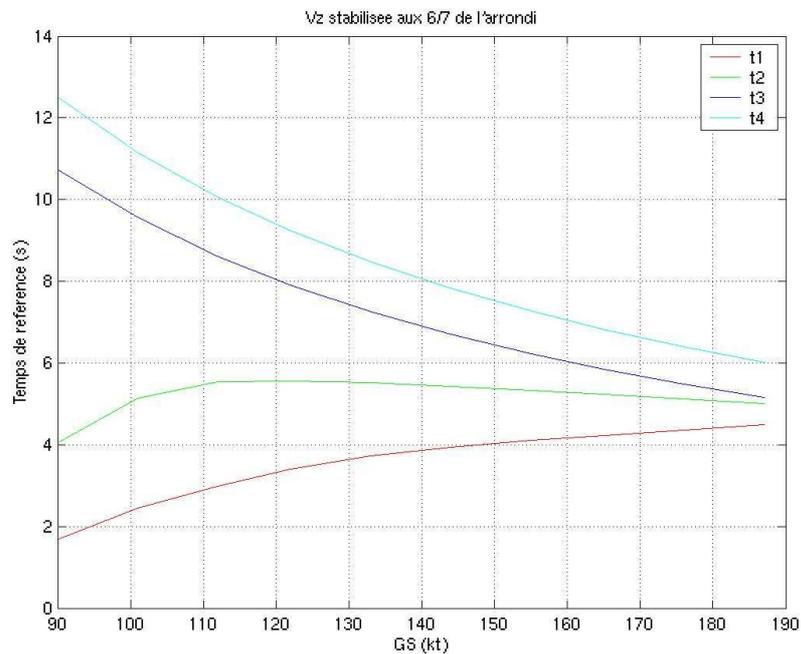
- $Vztd = -3 * 0.3048$ ; % Vitesse ascensionnelle à l'impact
- $Xtd = 500$ ; % Longueur de l'arrondi
- $z0 = 55 * 0.3048 + (GS * 3.6 / 1.852 - 100) / 10 * 0.3048$ ; % Point d'initiation de l'arrondi
- % Vs1g extrémales de l'A340-300 en conf d'atterrissage %
- $Vs1gmin = 90 * 1.852 / 3.6$ ;
- $Vs1gmax = 140 * 1.852 / 3.6$ ;

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Ces données, une fois traitées, renvoient la solution suivante :

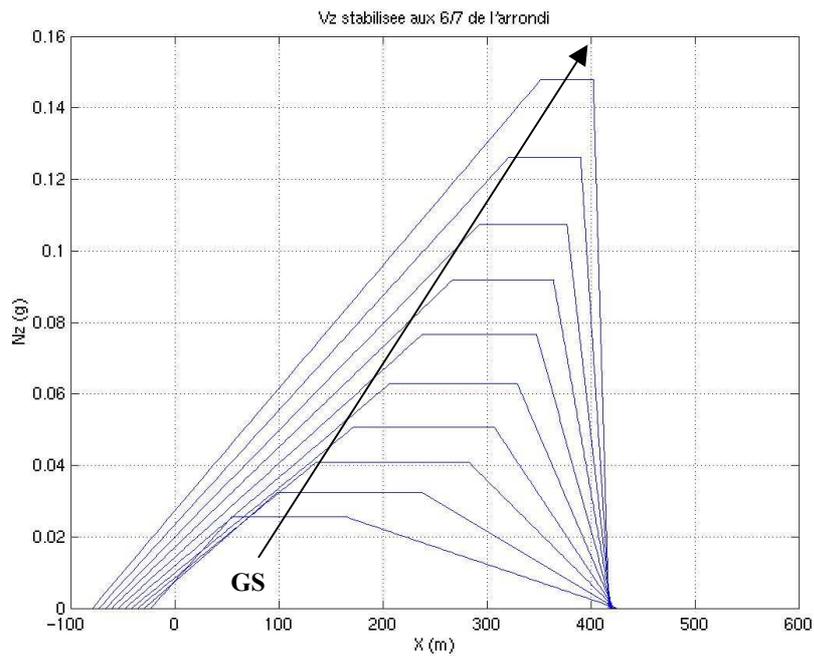


*3.5.3.2.a : Valeurs de  $Nz1$  admissibles renvoyés par l'outil d'aide à la conception de trajectoires de référence*

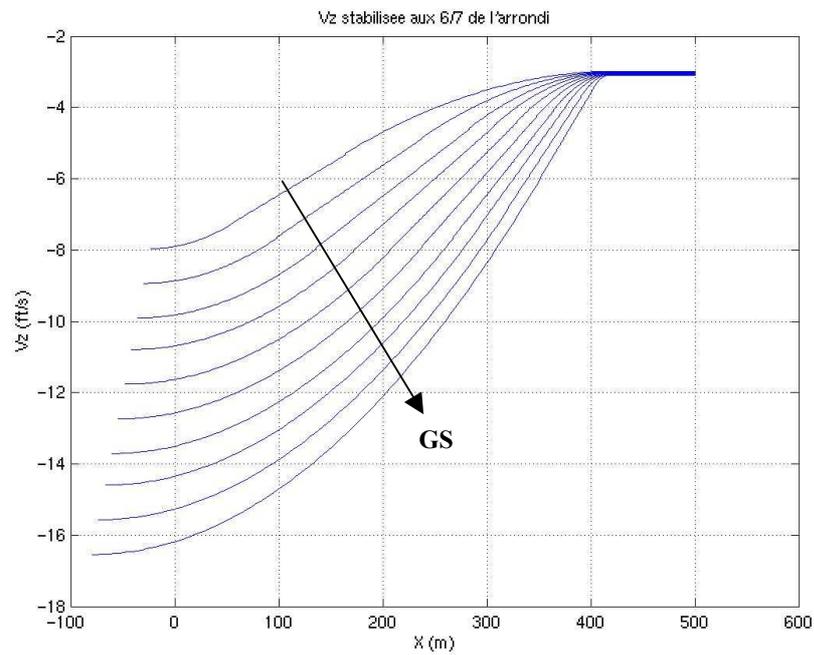


*3.5.3.2.b : Temps de cassure renvoyés par l'outil d'aide à la conception de trajectoires de référence*

### Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

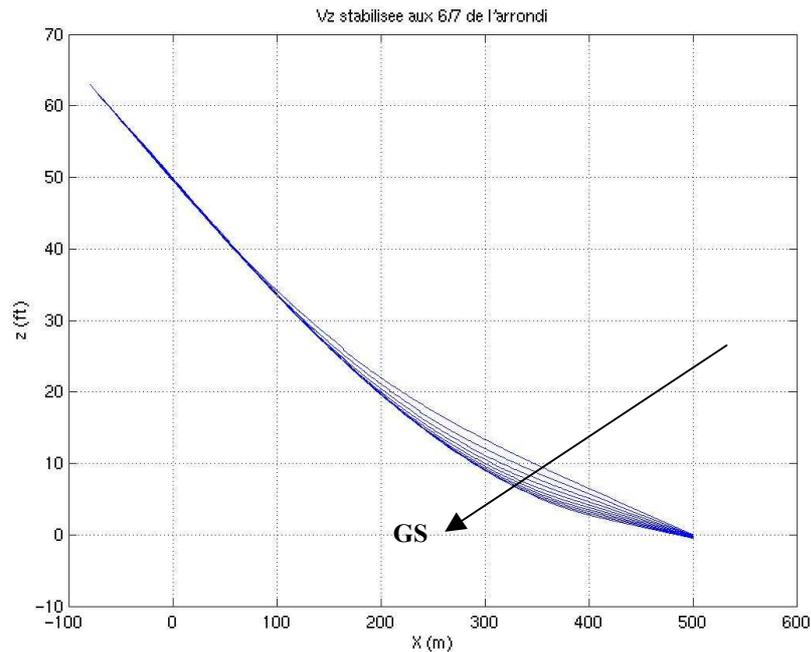


*3.5.3.2.c : Exemple de facteur de charge de référence en fonction de la position de l'avion et de sa vitesse-sol*

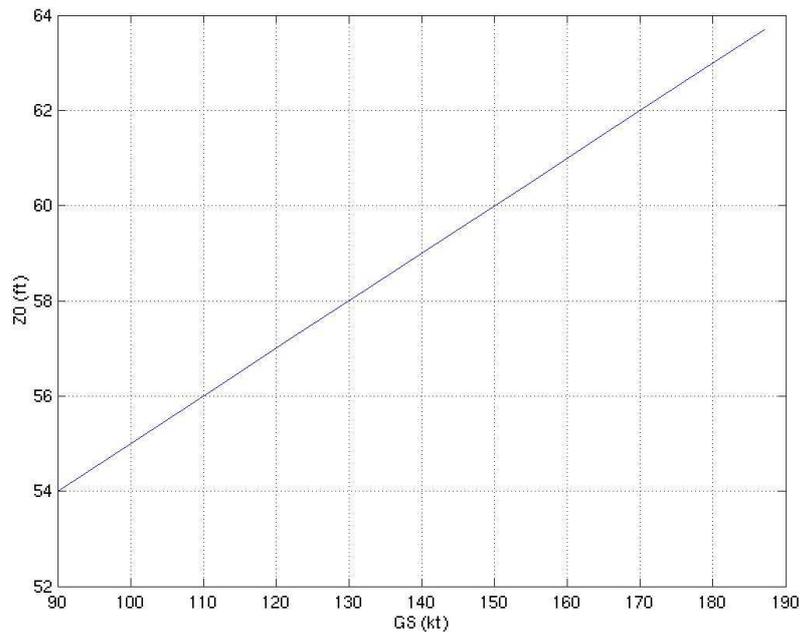


*3.5.3.2.d : Exemple de vitesse ascensionnelle de référence en fonction de la position de l'avion et de sa vitesse-sol*

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



3.5.3.2.d : Exemple de hauteur de référence en fonction de la position de l'avion et de sa vitesse-sol



3.5.3.2.e : Exemple de hauteur d'initiation de l'arrondi en fonction de la vitesse-sol

### 3.5.3.3 Conclusion sur l'outil proposé

Cet outil présente l'avantage de donner au concepteur de loi la certitude mathématique qu'une trajectoire est réalisable ou non et permet ensuite une implantation rapide de la trajectoire sur calculateur par le biais du tableau  $Nz_1=f(GS)$  proposé. En effet, d'un avion à un autre, les temps caractéristiques de la trajectoire conservent la même expression mathématique. Seules la taille du palier de  $Vz$  et la table  $Nz_1=f(GS)$  sont susceptibles de varier d'un réglage à un autre.

### 3.5.4 Conclusion sur les trajectoires de référence

Le but de cette sous-partie de notre étude était de proposer des trajectoires de référence innovantes pour l'arrondi automatique. Partant d'un cahier des charges donné en introduction, plusieurs trajectoires ont été proposées :

- La trajectoire exponentielle-affine : très élégante mathématiquement et d'implantation facile, elle ne satisfait toutefois pas le cahier des charges des pilotes.
- La trajectoire de type « double rampe saturée » : plus difficile à implanter que la trajectoire précédente (définition de plusieurs segments), cette trajectoire suit toutefois parfaitement les exigences du cahier des charges.
- Trajectoire de type « simple rampe saturée » : *A priori* intéressante, en tant que compromis entre les deux trajectoires précédentes, elle cumule en fait les désavantages des deux (non-respect du cahier des charges pour la première et difficulté de résolution pour la deuxième) sans réelle plus-value.

A noter que les trajectoires exponentielle-affine et simple rampe saturée présentent une discontinuité en facteur de charge qui, bien que favorisant un bon ressenti du passage en loi flare, rendent ces trajectoires physiquement non-réalisables. La continuité de la double rampe saturée permet de s'affranchir de ce problème. De plus, cette trajectoire de référence associée à une loi en poursuite permet de réduire l'influence du temps de réponse avion sur la trajectoire de l'avion rebouclé.

La trajectoire retenue pour la suite de l'étude est donc celle en facteur de charge, de type « double rampe saturée ». Sur cette trajectoire, on peut réaliser une double adaptation :

- Adaptation avant engagement de la loi : le point de début d'arrondi est fonction des conditions réelles dans lesquelles l'avion évolue. Cette adaptation n'est pas une nouveauté en soi puisque c'est d'ores et déjà le cas pour certains Airbus.
- Adaptation après engagement de la loi : la trajectoire géographique étant fixée à l'enclenchement de la loi, la position temporelle commandée de l'avion au sein de la trajectoire est fonction de l'historique de l'avion (intégrale de  $V_x$ ). Ceci permet de garantir que la position commandée du point d'impact est bien celle spécifiée par le concepteur de loi. En ceci, ces trajectoires de référence apportent une innovation fonctionnelle.

L'intégration de la  $V_x$  inertielle prolonge une démarche initiée par Jean MULLER ([151]) sur l'intégration d'estimateurs à base d'informations inertielles dans la loi flare, en vue de désensibiliser les lois flare aux profils piste. La nouvelle trajectoire de référence proposée est un outil complémentaire car elle contribue à la désensibilisation des lois flare aux problèmes de vent.

Enfin, l'outil d'aide à la conception de trajectoires d'arrondi présenté dans cette partie autorise une plus grande souplesse dans la définition des valeurs aux limites avec en plus une vérification de leur compatibilité physique avec le problème posé.

## 3.6 Démonstration statistique de robustesse pour la certification du pilote automatique d'atterrissage (analyse de type Monte-Carlo)

### 3.6.1 Introduction à la certification

Plusieurs actions sont nécessaires à une équipe s'occupant des lois de commande pour certifier un atterrissage automatique. Tout d'abord, il faut que les pilotes d'essai jugent positivement le comportement de l'avion à l'atterrissage. Malheureusement, au cours de la thèse, il ne nous a pas été possible de mettre nos lois sur avion, cette étape de validation nous manque donc.

Ensuite, plusieurs milliers de simulations d'atterrissages sont effectuées sur le simulateur de pilote automatique certifié d'Airbus : SIMPA. Nous avons pu les réaliser.

Enfin, un dossier de validation est écrit et communiqué aux autorités de certification. Plusieurs mises aux points sont généralement nécessaires avant de passer ces trois étapes avec succès. Dans cette partie, nous proposons de décrire les activités de validation sur SIMPA nécessaires à la certification du pilote automatique. Nous avons réalisé ces activités avec succès et validé ainsi notre pilote automatique d'atterrissage.

### 3.6.2 Contraintes de certification et cas de test

La réglementation JAR-AWO définit et impose le cadre de tests nécessaires à la certification du pilote automatique d'atterrissage. Elle vise à assurer un comportement sûr de l'avion à l'impact dans toutes les conditions opérationnelles possibles.

Les principaux paramètres influant sur la dispersion du point d'impact à l'atterrissage sont :

- l'altitude de piste,
- le centrage,
- le vent,
- la différence entre la température de l'atmosphère internationale standard (ISA) et la température réelle,
- la masse,
- l'état des moteurs (tout moteur en fonctionnement ou un moteur en panne),
- la pente piste.

Avant de passer les statistiques, on étudie des STR (Simulation Test Requests), c'est-à-dire des simulations individuelles d'approche stabilisée et d'atterrissage. Ces simulations permettent d'évaluer le comportement global des lois, qualitativement, avant de débiter l'analyse statistique. Elles permettent aussi d'explorer rapidement la sensibilité des lois à chacun des paramètres-clés précédemment cités, pendant que les autres sont gelés à une valeur moyenne. Certains profils avant piste sont aussi testés.

Une fois cette première étude conclue, on peut lancer l'étude statistique. Tout d'abord, on étudie des statistiques de **risques limites**. Pour cela, on fixe l'un des paramètres à une de ses valeurs extrêmes et on génère aléatoirement les autres sur deux cents cas d'atterrissage. On réalise donc à ce niveau deux mille six cents atterrissages. Ensuite, on lance deux mille cas de **risques moyens**, en tirant aléatoirement cette fois tous les paramètres clés.

Les résultats extrapolés de ces simulations doivent mettre en avant une probabilité d'occurrence des événements suivants inférieure à  $10^{-6}$  par atterrissage :

- Pour les risques limites
  - o La vitesse ascensionnelle à l'impact est supérieure à 12 ft/s (3.6 m/s)
  - o L'impact des trains principaux a lieu à plus de 915m du seuil de piste
  - o La hauteur du train principal à 200ft (60 m) après le seuil de piste est nulle
  - o L'impact des trains principaux se situe à plus de 15m de l'axe de la piste
  - o L'angle de roulis à l'impact est supérieur à  $10.5^\circ$

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

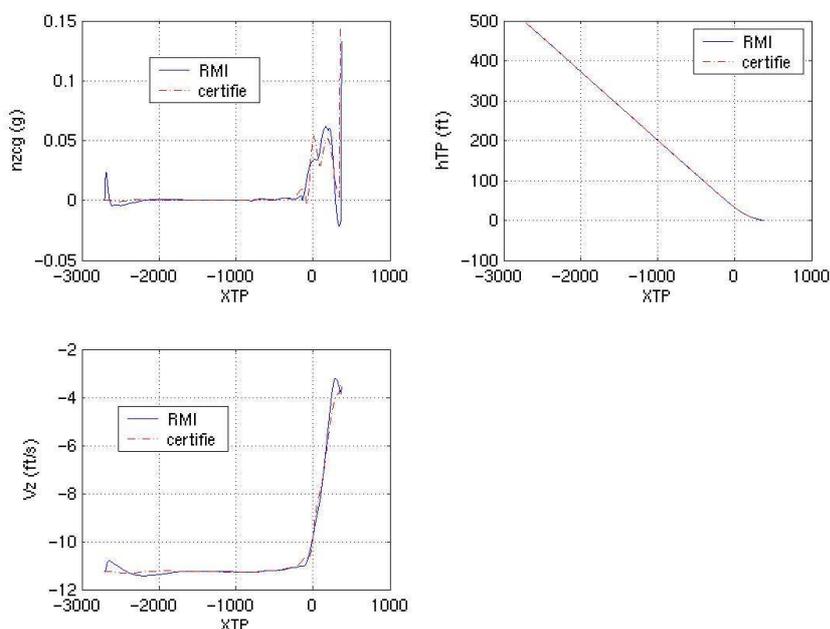
- L'avion est crabé de plus de  $14^\circ$  par rapport à l'axe de la piste
- Pour les risques moyens
  - La vitesse ascensionnelle à l'impact est supérieure à 10 ft/s (3 m/s)
  - L'impact des trains principaux a lieu à plus de 823m du seuil de piste
  - La hauteur du train principal à 200ft (60 m) après le seuil de piste est nulle
  - L'impact des trains principaux se situe à plus de 15m de l'axe de la piste
  - L'angle de roulis à l'impact est supérieur à  $10.5^\circ$
  - L'avion est crabé de plus de  $14^\circ$  par rapport à l'axe de la piste

Pour donner quelques ordres de grandeur, l'avion « moyen » qui doit réaliser ces performances pèse 250t, il arrive à 150kts, soit 75 m/s ou encore 280km/h, et à une vitesse ascensionnelle de 0.8 m/s (2.5 ft/s). Il mesure 50m de long et de large, son assiette est de 7.5 degrés ce qui amène le pilote à 7 mètres au-dessus de son train d'atterrissage au moment de l'impact.

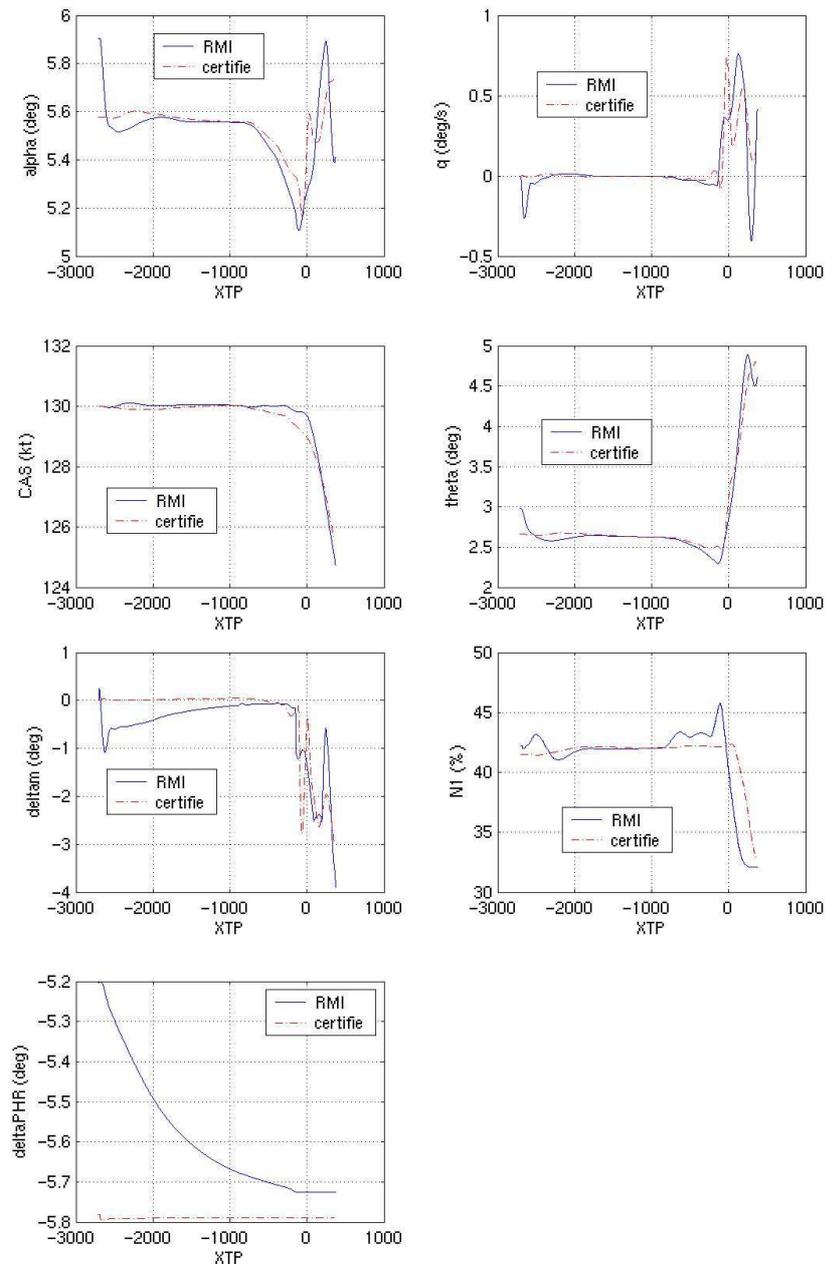
### 3.6.3 Résultats obtenus

#### 3.6.3.1 Exemple de STR

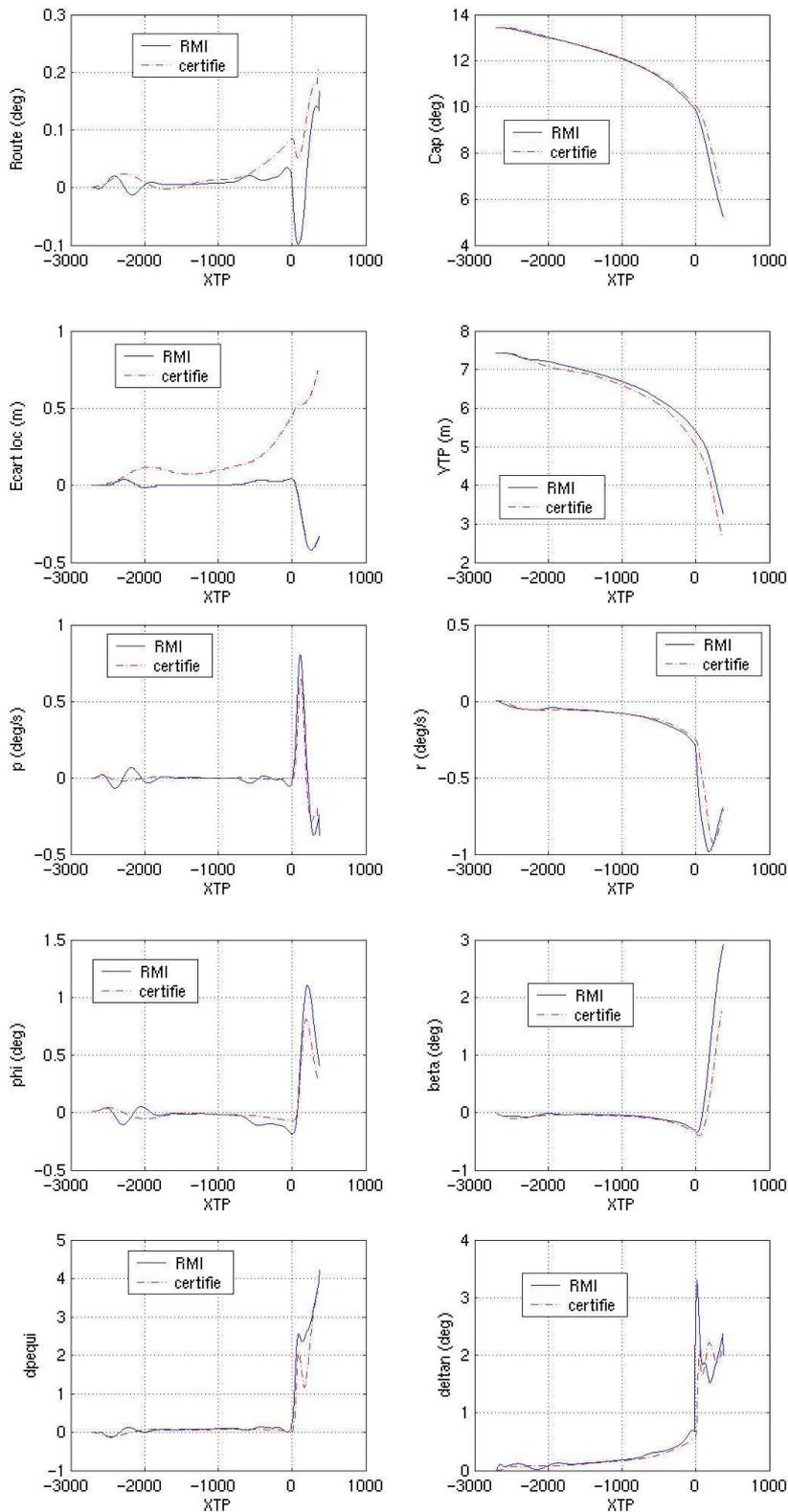
Dans cette partie, on montre les résultats comparés de notre pilote automatique (RMI) et du pilote automatique actuel (certifié) pour un cas de vol. Pour le cas de vol en question, l'avion est un A340-300, sa masse est de 140t et son centrage de 30%. L'avion est en configuration full-1 et subit un vent logarithmique latéral d'une amplitude de 20kt. On le soumet à une trajectoire de référence de type doubles rampe saturée (cf. §3.4). L'abscisse des courbes ci-dessous représente la position longitudinale du train principal de l'avion (XTP) en mètres.



## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*3.6.3.1.a : Résultats de simulation du pilote automatique RMI et du pilote automatique actuel certifié sur une STR donnée*

## **Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**

### **Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Cet exemple, pris au hasard, met en avant des caractéristiques régulièrement observées lors de la comparaison entre le pilote automatique actuel et celui que nous avons développé :

- Les amplitudes de gouvernes utilisées avec le RMI sont légèrement supérieures.
- Le suivi de trajectoire est bien meilleur avec le RMI.
- L'agitation des actionneurs est plus faible avec le RMI (moins d'oscillations).

Notons que ces commentaires sont valables pour le réglage de lois que nous avons choisi. Manifestement, les gains de notre pilote automatique sont supérieurs à ceux de l'actuel (d'où le meilleur suivi de trajectoires et les plus grandes amplitudes gouvernes). Néanmoins, malgré ce réglage, les lois RMI sont plus "stables" (moins d'agitation des actionneurs) que celles utilisées pour le pilote automatique standard. Ceci confirme la théorie développée au chapitre 2.2. Les lois de type RMI apparaissent donc plus robustes et leur latitude de réglage résultante doit être plus importante.

### **3.6.3.2 Résultats statistiques**

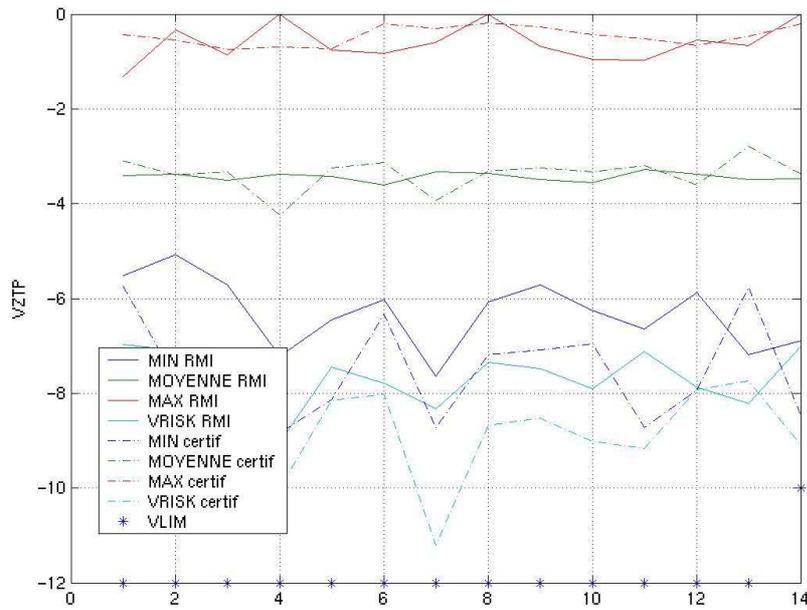
Dans cette partie on résume graphiquement les données numériques issues de la validation statistique des lois de commande sous SIMPA (cf. données brutes §6.6). Les variables critiques pour l'atterrissage automatique (la vitesse ascensionnelle du train principal à l'impact VZTP en pieds par seconde, l'abscisse de l'impact XTP en mètres, la hauteur du train principal au seuil de piste+200ft noté HTP en pieds, l'écart latéral à l'axe de piste du barycentre du train principal lors de l'impact YTP en mètres, l'assiette à l'impact PHI en degrés et le dérapage sol à l'impact BETARO en degrés) y sont présentées (valeurs minimales atteintes en simulation MIN, valeurs moyennes atteintes en simulation MOYENNE, valeurs maximales atteintes en simulation MAX, valeurs maximales extrapolées VRISK et valeurs limites admissibles pour la certification VLIM).

Les points en abscisse correspondent aux simulations suivantes :

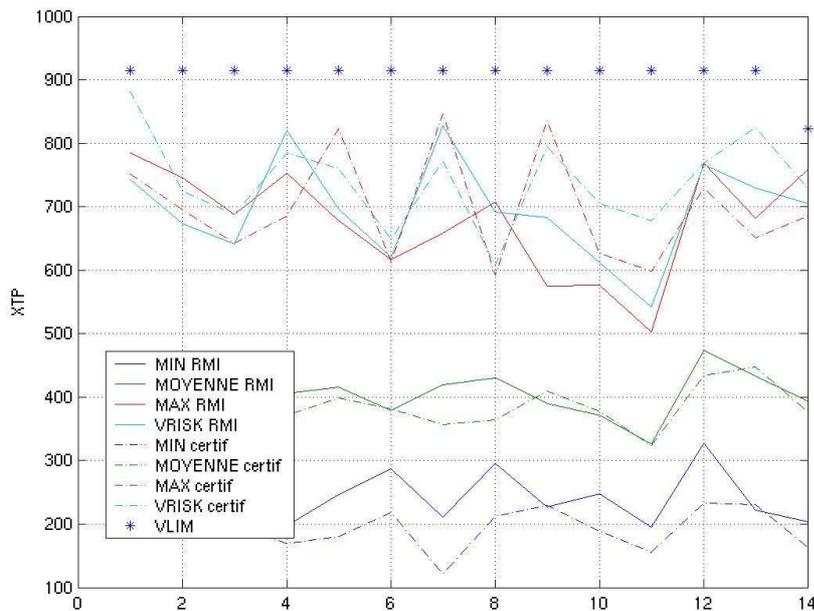
1. Risques limites pour une altitude piste de 9200ft (200 atterrissages).
2. Risques limites pour un centrage à 18% (200 atterrissages).
3. Risques limites pour un centrage à 42% (200 atterrissages).
4. Risques limites pour un vent de travers de 20kt (200 atterrissages).
5. Risques limites pour une température élevée (ISA+40°C) (200 atterrissages).
6. Risques limites pour une température basse (ISA-70°C) (200 atterrissages).
7. Risques limites pour un vent de face de 30 kt (200 atterrissages).
8. Risques limites pour une masse de 123t (200 atterrissages).
9. Risques limites pour une masse de 195t (200 atterrissages).
10. Risques limites un moteur en panne (200 atterrissages).
11. Risques limites avec une pente piste de 0.8° (200 atterrissages).
12. Risques limites avec une pente piste de -0.8° (200 atterrissages).
13. Risques limites avec un vent arrière de 10kt (200 atterrissages).
14. Risques moyens (2000 atterrissages).

Il faut donc garder en mémoire la pondération supérieure correspondante à l'abscisse n°14. Les résultats sont donnés aux pages suivantes.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

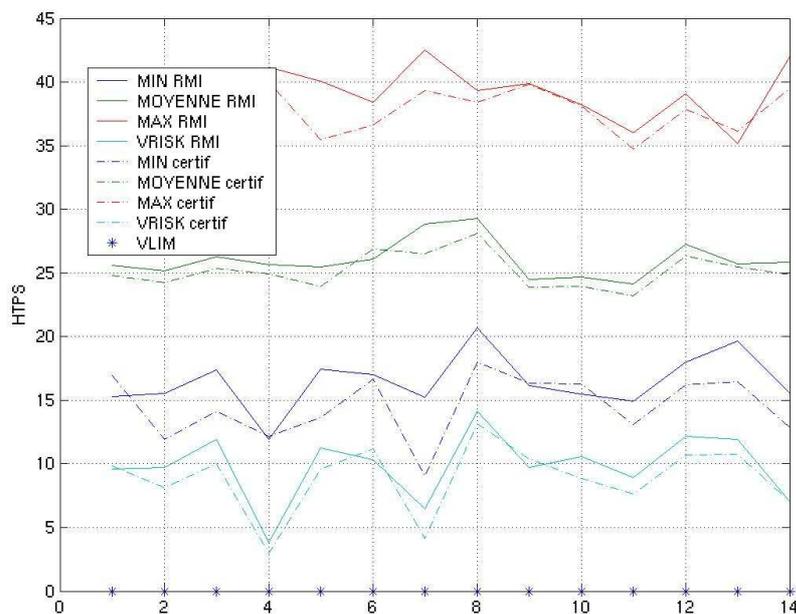


*3.6.3.2.a : Résultats statistiques comparés de la vitesse ascensionnelle (en pieds par seconde) à l'impact pour le pilote automatique certifié et le pilote automatique RMI*

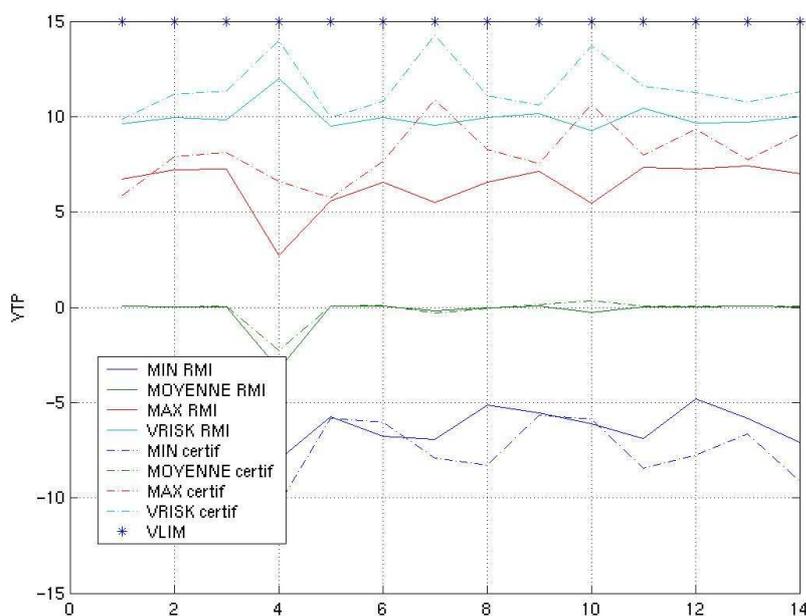


*3.6.3.2.b : Résultats statistiques comparés de l'abscisse (en mètres) des trains principaux à l'impact pour le pilote automatique certifié et le pilote automatique RMI*

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

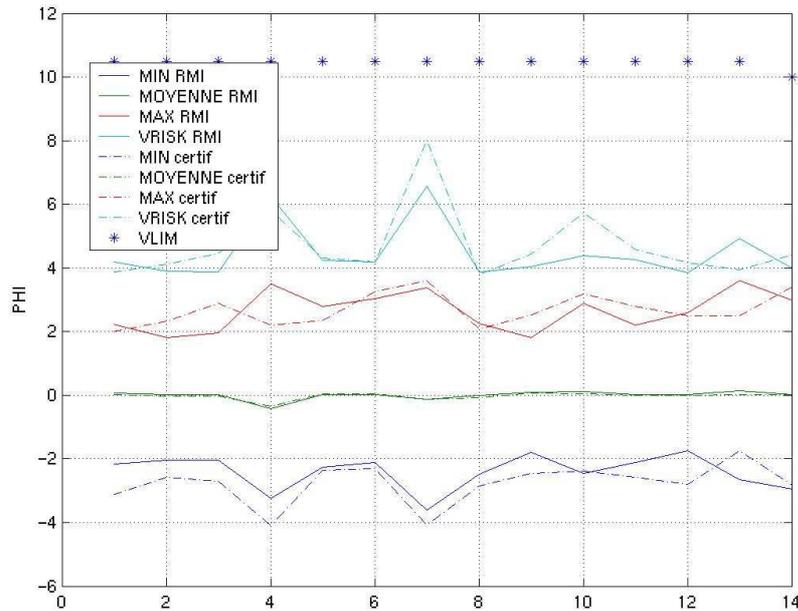


*3.6.3.2.c : Résultats statistiques comparés de la hauteur (en pieds) des trains principaux 200ft après le seuil de piste pour le pilote automatique certifié et le pilote automatique RMI*

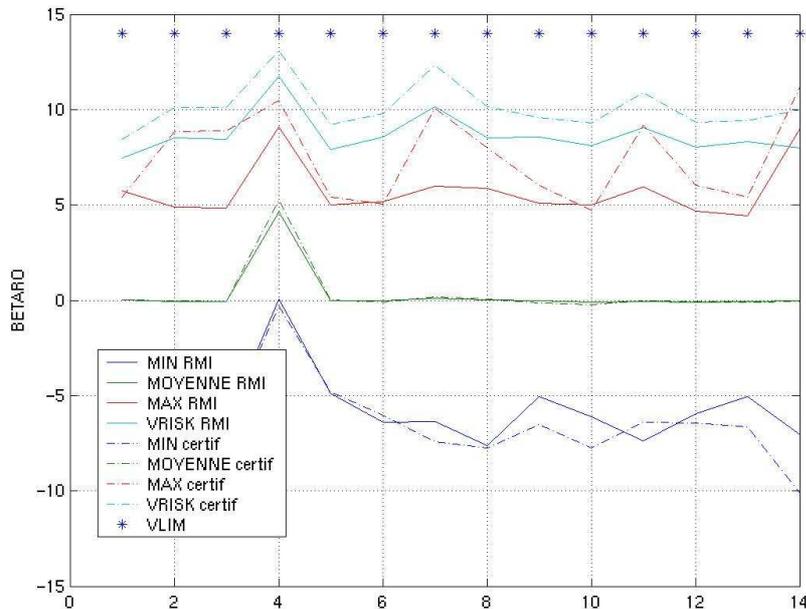


*3.6.3.2.d : Résultats statistiques comparés de l'écart latéral (en mètres) à l'axe de la piste du barycentre des trains principaux à l'impact pour le pilote automatique certifié et le pilote automatique RMI*

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*3.6.3.2.e : Résultats statistiques comparés de l'assiette latérale (en degrés) à l'impact pour le pilote automatique certifié et le pilote automatique RMI*



*3.6.3.2.f : Résultats statistiques comparés du dérapage sol (en degrés) à l'impact pour le pilote automatique certifié et le pilote automatique RMI*

Ces résultats font apparaître, pour le réglage choisi et sans validation des lois par un pilote, une dispersion plus faible des lois de commande de type RMI. Sous ces hypothèses et au sens strict de la validation statistique, le pilote automatique RMI est meilleur que le pilote automatique certifié.

### 3.6.4 Conclusion sur la "certificabilité" du pilote automatique développé

Les résultats mis en avant dans cette dernière partie permettent de justifier *a posteriori* toutes les démarches entreprises au cours de la thèse pour réaliser un pilote automatique d'atterrissage non-linéaire. Toutefois, bien entendu, l'avis des pilotes est primordial pour régler de telles lois. Par cette étude, on a donc validé le concept de lois de commande non-linéaires robustes pour le suivi de trajectoire. Il reste toutefois à l'appliquer industriellement, à le confronter à l'avis des pilotes et à l'usage du développement avant d'exprimer un jugement définitif.

## 4 Bilan de la thèse et perspectives

Le présent mémoire vient conclure trois années de travail extrêmement enrichissantes pour moi et, je l'espère, autant pour Airbus-France que pour le LAAS-CNRS. En trois ans, un véritable projet de recherche et développement s'est ainsi monté de toute pièce. Il a nécessité le développement de techniques, méthodes et outils propres mais qui puissent toutefois être partagés.

Pour moi cette thèse a été une succession de réalisations de briques interdépendantes. Un effort particulier a été fourni pour aller, à chaque étape, au plus loin de la généralité de la démarche et que la « brique » soit de la meilleure qualité possible. Dans le titre de la thèse, n'était-il pas question, en effet, de la mise en place d'une « méthodologie » ? En conséquence, si de nombreux résultats intermédiaires intéressants ont été obtenus tout au long de la thèse, le résultat global, lui, s'est fait attendre longtemps.

C'est effectivement non sans une certaine fébrilité que cet ensemble de briques a été assemblé et testé pendant la dernière année de thèse. Je remercie les personnes qui m'ont encadré d'avoir su me donner la direction permettant cette patiente construction sans mauvaise surprise et de m'avoir fait confiance sur ma capacité à mener ce projet à bien de bout en bout.

Le bilan de la thèse ne s'est donc principalement révélé que pendant sa dernière année. Le voici :

- Développement d'un logiciel générique de modélisation sur la base de réseaux de neurones et d'une bibliothèque de modèles associés. Ces outils sont actuellement utilisés par un certain nombre de personnes chez Airbus, bien au-delà du seul cadre de mon service (embarquement dans le calculateur d'essais en vol de l'A380 et utilisation de modèles moteurs dans l'Outil certifié de Simulation des Mouvements Avion notamment).
- Développement de nouvelles trajectoires d'arrondi et d'un outil associé (reprise du principe de pseudo-temps par l'équipe de l'A380).
- Développement d'une nouvelle technique de commande non-linéaire robuste (RMI) dont les performances sont remarquables.
- Rédaction d'un article sur la commande RMI en cours pour un journal d'automatique.
- « Certification à blanc » d'un pilote automatique d'atterrissage innovant.
- Développement d'un estimateur de dérapage prometteur (et contribution à un estimateur de turbulence).
- Utilisation de la petite boucle RMI pour l'étude d'une loi de décollage automatique ( $q^*$ ).

Il faut ajouter à ceci le dépôt d'un brevet (Airbus-France, "Systèmes de commandes de vol électriques pour gouvernes de profondeur d'aéronef", *INPI*, N° 04 08862, 13 août 2004) et la publication de cinq articles lors de conférences internationales :

- LAVERGNE Fabien, MORA-CAMINO Félix, VILLAUME Fabrice, JEANNEAU Matthieu, "Neural networks contribution to modeling for flight control", *WAC 2004-01-3133*, November 2004.
- LAVERGNE F., VILLAUME F., JEANNEAU M., MORA-CAMINO F., "Neural synthesis of aerodynamic parameters estimators for flight control", *EUCASS*, July 2005.
- LAVERGNE F., VILLAUME F., GARCIA G., TARBOURIECH S., JEANNEAU M., "Nonlinear and robust flight control laws for the longitudinal axis of an aircraft", *AIAC paper WC0004*, March 2005.
- LAVERGNE Fabien, VILLAUME Fabrice, JEANNEAU Matthieu, TARBOURIECH Sophie, GARCIA Germain, "Nonlinear robust autoland", *AIAA-2005-5848*, August 2005.
- LU Wen Chi, MORA-CAMINO Félix, LAVERGNE Fabien, De COLIGNY Marc, ACHAIBOU Karim, "Flight mechanics and differential flatness", *DINCON*, June 2004.

Toutefois, de nombreuses activités restent à creuser à l'issue de ce travail de thèse. D'un point de vue général, il serait souhaitable de poursuivre cette étude en se rapprochant de l'industrialisation. Il faudrait notamment pouvoir confronter le pilote automatique développé à l'avis de pilotes humains. Par ailleurs, l'implantation sur avion réel apportant toujours son lot de surprises, ce travail ne sera pas complet tant qu'aucun avion n'aura volé avec les lois proposées !

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

D'autre part, les lois de commandes RMI, très satisfaisantes au niveau de leur robustesse aux incertitudes de modèle et aux dynamiques négligées des actionneurs (grâce à l'absence d'intégrateur de précision), sont sensibles par construction aux bruits de mesure. Le réglage du gain de la boucle RMI est donc borné :

- inférieurement, d'une part, par la nécessité qu'elle soit suffisamment rapide pour s'affranchir de l'impact des erreurs de modèle sur la dynamique du système corrigé,
- supérieurement, d'autre part, par la nécessité qu'elle soit suffisamment lente pour s'affranchir d'éventuels problèmes liés aux bruits de mesure (ou au cadencement du calculateur sur lequel est implanté la loi de commande).

Nous ne disposons pas actuellement de méthode de calcul permettant de quantifier ces bornes. Il serait intéressant d'approfondir le sujet pour permettre une connaissance plus fine du système à commander et des limites *a priori* de la commande RMI (notamment si les deux bornes se rejoignent...). De plus, une logique de répartition de l'erreur estimée entre  $F_m$  et  $G_m$  serait appréciable. Elle permettrait de repousser encore les limites de stabilité et de performances robustes des lois de type RMI.

En ce qui concerne la modélisation par réseaux de neurones, la prédiction d'erreur pourrait être affinée. En effet, on prédit aujourd'hui une probabilité d'occurrence d'une erreur de modélisation supérieure à seuil donné par nombre de points et non pas, comme c'est classiquement le cas dans l'aéronautique, par heure de vol. Certains résultats sur la modélisation des événements rares pourraient aussi nous permettre d'enrichir cette prédiction.

D'un point de vue applicatif enfin, il serait intéressant de coupler l'approche RMI à la commande de l'avion souple (qui se situe dans le cadre linéaire). On pourrait par exemple réaliser, en linéaire, une première synthèse pour les modes rigides par une commande RMI afin de se ramener à un système {avion rigide corrigé+avion souple} parfaitement connu. Ensuite il devient possible de réaliser une seconde synthèse robuste (de type  $H_2/H_\infty$ ) permettant de conserver le plus possible le placement des modes rigides et de stabiliser les modes souples. L'intérêt de cette technique, par rapport à la technique actuelle (premier placement par commande modale et second par synthèse robuste), est de s'assurer que les modes rigides sont bien placés là où le souhaite avant de réaliser la seconde synthèse.

J'aimerais maintenant finir sur une note plus personnelle. Cette thèse a constitué mon premier emploi. J'ai eu l'insigne chance de pouvoir faire un métier passionnant, et d'être entouré de gens compétents et attentifs. Cette thèse CIFRE m'a permis de toucher du doigt le travail en entreprise et en laboratoire, la recherche et le développement, l'enseignement. Les compétences mises en œuvre ont largement dépassé le cadre des « systèmes automatiques » dans lequel j'ai préparé ce doctorat, ce qui a constitué une source d'enrichissement permanent pour moi. A chaque fois, j'ai été accueilli dans des équipes auxquelles j'ai essayé d'apporter autant que je recevais. C'est cette image collective, faite d'échange et de partage, que je souhaite conserver et promouvoir...

## 5 Bibliographie

1. Aérospatiale, "Note aérodynamique 445,321", 445 025/94, 3 mars 1994
2. ACIKMESE Ahmet Behcet, CORLESS Martin, "Robust tracking and disturbance rejection of bounded rate signals for uncertain/non-linear systems", *Int. J. Control*, Vol. 76, No. 11, 1129-1141, 2003
3. ADAMS Richard J., BUFFINGTON James M., SPARKS Andrew G., BANDA Siva S., "An introduction to multivariable flight control system design", *NTIS ADA-260408, WL-TR-92-3110*, 1992
4. ADOUNKPE Ifédé-Joël, « Robustesse dans un cadre non linéaire - Application au pilotage des missiles », *Mémoire de thèse doctorale, Doctorat Université Paris XI Orsay, N° d'ordre 7718*, 3 décembre 2004
5. AKHRIF O., BLANKENSHIP G. L., "Robust stabilization of feedback linearizable systems", *Proceedings of the 27th conference on decision and control, Austin, Texas*, December 1988
6. ALAZARD Daniel, CUMER Christelle, APKARIAN Pierre, GAUVRIT Michel, FERRERES Gilles, "Robustesse et commande optimale", *Ed. Cépaduès*, 1999
7. ALVAREZ-RAMIREZ José, "Adaptive control of feedback linearizable systems: a modelling error compensation approach", *International journal of robust and nonlinear control*, No. 9, Pp. 361-377, 1999
8. ANDERSON T. W., DARLING D. A., "A test of goodness-to-fit", *American statistical association journal*, December 1954
9. ANTONIEWICZ Robert, F. DUKE Eugene, MENON P.K.A., "Application and flight test of linearizing transformations using measurement feedback to the nonlinear control problem", *NASA technical paper 3154*, 1991
10. ARCAK Murat, KOKOTOVIC Petar, "Further results on robust control of nonlinear systems with input unmodeled dynamics", *American control conference*, June 1999
11. ARCAK Murat, TEEL Andrew, KOKOTOVIC Petar, "Robust control of feedforward systems with unmodeled dynamics", *Automatica*, 37, Pp. 265-272, 2001
12. ARCAK Murat, KOKOTOVIC Petar, "Robust nonlinear control of systems with input unmodeled dynamics", *Systems & control letters*, 41, Pp. 115-122, 2000
13. ARCAK Murat, SERON Maria, BRASLAVSKY Julio, KOKOTOVIC Petar, "Robustification of backstepping against input unmodelled dynamics", *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 45, No. 7, July 2000
14. ARCAK Murat, TEEL Andrew, KOKOTOVIC Petar, "Robust nested saturation redesign for systems with input unmodeled dynamics", *American control conference*, June 2000
15. ARTEMOV O. A., "Approximate dynamic model of a turbojet engine", *NASA TM 75263*, March 1978
16. AZAM Misbahul, SIGNH Sahjendra N., "Invertibility and trajectory control for nonlinear maneuvers of aircraft", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 17, No. 1, January-February 1994
17. BAILLIEUL John, LEVI Mark, MEHRA Raman K., "Bifurcation and feedback in aircraft dynamics", *NTIS ADA-140462*, 1982
18. BAJPAI Gaurav, CHANG B.C., "Control of longitudinal dynamics of the aircraft with elevator failure", *Proceedings of the 20th Digital Avionics Systems Conference, Volume: 2, Page(s): 9A4/1 -9A4/6 vol. 2*, Oct. 2001
19. BALAS Gary J., "Flight control law design: an industry perspective", *Special Issue 2-3 of the European Journal of Control*, Vol 9, No. 2-3, 207-226, 2003
20. BARMISH B. R., "New tools for robustness of linear systems", *Macmillan publishing company*, New York, 1994
21. BARTOLINI Giorgio, PISANO Alessandro, PUNTA Elisabetta, USAI Elio, "A survey of applications of second-order sliding mode control to mechanical systems", *Int. J. control*, Vol. 76, Nos 9/10, 875-892, 2003
22. BHATTACHARYYA S. P., CHAPPELLAT H., KEEL L. H., "Robust control: the parametric approach", *Prentice Hall*, Upper Saddle River, New jersey, 1995
23. BELKHARRAZ Abderrazak Idriddi, "Fault tolerant control for aircraft control surface failures", *PhD Thesis*, UMI dissertation services, 2003
24. BENNETT David, "The RIDE controller", *Bae Systems*
25. BEZIER P., "Essai de définition numérique des courbes et des surfaces expérimentales - Tomes 1 et 2", *Thèse de l'Université de Paris VI, Pierre et Marie CURIE*, 23/02/1977
26. BOYD S., FERON E., BALADRISHNAN V., EI GHAOUI L., "Linear matrix inequalities in system and control theory", *SIAM*, 1994
27. BROCKETT R. W., "Feedback invariants for linear systems", *IFAC 7th triennial world congress, Helsinki*, 12-16/06/1978

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

28. BROWN Stuart C., HARDY Gordon H., HINDSON William S., "A flight-test and simulation evaluation of the longitudinal final approach and landing performance of an automatic system for a light wing loading STOL aircraft equipped with wing spoilers", *NASA technical memorandum* 85873, 1984
29. BRUNOVSKY Pavol, "A classification of linear controllable systems", *Kybernetika*, 6/1970
30. BUGAJSKI Daniel J., ENNS Dale F., "Nonlinear control law with application to high angle-of-attack flight", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 15, No. 3, May-june 1992
31. BURGIN George H., SCHNETZLER Steven S., "Artificial neural networks in flight control and flight management systems", *IEEE NAECON 90*, 21-25 may 1990
32. CALISE Anthony J., RYSDYK Rolf T., "Nonlinear adaptive flight control using neural networks", *IEEE control systems magazine*, V. 18, n° 6, Dec 1998
33. CARDELL Scott N., JOERDING Wayne, LI Ying, "Why some feedforward networks cannot learn some polynomials", *Neural computation*, 6, 761-766, 1994
34. CHABE David, "Synthèse de lois de pilotage robustes pour l'A400M par les méthodes multimodèles", *Projet de fin d'études, DEA de systèmes automatiques, ENSAE*, 2000
35. CICOLANI Luigi S., SRIDHAR B., MEYER George, "Configuration management and automatic control of an augmentor wing aircraft with vectored thrust", *NASA technical paper* 1222, 1979
36. COLANERI P., GEROMEL J.C., LOCATELLI A., "Control theory and design", *Academic press*, 1997
37. COMBES, "Formulaire de mécanique du vol", *Ed. ENAC*, Mars 1978
38. CRASSIDIS John L., "Robust control of nonlinear systems using model-error control synthesis", *AIAA Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, Vol. 22, No. 4, July-Aug. 1999, pp. 595-601
39. CYBENKO G., "Approximation by superpositions of a sigmoidal function", *Math. Control signals systems*, 2: 303-314, 1989
40. CZYBA Roman, BLACHUTA Marian J., "Dynamic contraction method approach to robust longitudinal flight control under aircraft parameters variations", *AIAA guidance, navigation and control conference, Austin*, 11-14/08/2003
41. DANG VU Binh, "Nonlinear dynamic inversion", *Lectures Notes in Control and Information Sciences*, Vol. 224. *Robust Control - A Design Challenge*, Springer, 1995, pp. 102-111
42. DELALEAU E., RUDOLPH J., "Control of flat systems by quasi-static feedback of generalized states", *Int. J. Control*, Vol. 71, No. 5, Pp. 745-765, 1998
43. DUPREZ Jean, "Automatisation du pilotage au sol pour la navigation aéroportuaire", *Thèse, Université de Toulouse III*, 2004
44. DUPREZ Jean, "Etude d'une loi de pilotage de l'avion au sol", *NT EYCDR\_D04010968*, 2004
45. DREYFUS G., MARTINEZ J.-M., SAMUELIDES M., GORDON M. B., BADRAN F., THIRIA S., HERAULT L., "Réseaux de neurones - Méthodologie et applications", *Ed. Eyrolles*, Août 2002
46. ENNS Dale, BUGASKI Dan, HENDRICK Russ, STEIN Gunter, "Dynamic inversion: an evolving methodology for flight control design", *Int. J. Control*, Vol. 59, No. 1, 71-91, 1984
47. ESCANDE Béatrice, "Nonlinear dynamic inversion and LQ techniques", *GARTEUR*, 1997
48. ESFANDIARI Farzad, KHALIL Hassn K., "Output feedback stabilization of fully linearizable systems", *Int J. control*, Vol. 56, No. 5, Pp. 1007-1037, 1992
49. ETKIN Bernard, REID Lloyd Duff, "Dynamics of flight - Stability and control", *Third edition, Wiley & Sons*, 1996
50. EZAL Kenan, PAN Zigang, KOKOTOVIC Petar V., "Locally optimal and robust backstepping design", *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 45, No. 2, February 2000
51. FABRE Pierre, "Reflexion sur l'arrondi automatique et guide de conception", *A/DET/SY/MCDV*, 460.200/94, 20/11/1994
52. Mac FARLAND Michael B., HOQUE Shaheen M., "Robustness of a nonlinear missile autopilot designed using dynamic inversion", *AIAA-2000-3970*, 14-17 august 2000
53. El FARRA Nael, CHRISTOFIDES Panagiotis D., "Robust inverse optimal control laws for nonlinear systems", *Int. J. robust nonlinear control*, 13, 1371-1388, 2003
54. FILIPPOV A.F., "Differential equations with discontinuous right hand-sides", *Mathematics and its applications, Kluwer Ac. Pub*, 1983
55. FITTS R. E., "Two counter-examples to Aizerman's conjecture", *IEEE Trans. Vol. AC-11*, no. 3, pp.553-556, July 1996
56. FLIESS M., LEVINE J., MARTIN P., OLLIVIER F., ROUCHON P., "Controlling nonlinear systems by flatness", *Systems and control in the twenty-first century, Birkhauser*, 1997
57. FLIESS Michel, LEVINE Jean, MARTIN Philippe, ROUCHON Pierre, "Flatness and defect of non-linear systems: introductory theory and examples", *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 6, Pp. 1327-1361, 1995
58. FLIESS Michel, LEVINE Jean, MARTIN Philippe, ROUCHON Pierre, "Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats", *C. R. Acad. Sci. Paris, t. 315, Série I, P. 619-624*, 1992

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

59. FOSSARD A.J., NORMAND-CYROT D., "Systèmes non linéaires, 2. Stabilité - stabilisation", *Ed. Masson*, Avril 1993
60. FOSSARD A.J., NORMAND-CYROT D., "Systèmes non linéaires, 3. Commande", *Ed. Masson*, Avril 1993
61. FRANKLIN Gene F., POWELL J. David, WORKMAN Michael L., "Digital control of dynamic systems", *Second edition, Addison-Wesley publishing company*, 1990
62. FREEMAN Randy A., KOKOTOVIC Petar V., "Approaches to robust nonlinear control", in *"Robust control via variables structure and Lyapunov techniques"*, Springer, 1996
63. FREEMAN Randy A., KOKOTOVIC Petar V., "Robust nonlinear control design, State-space and Lyapunov techniques", *Ed. Birkhäuser*, 1996
64. GANTMACHER Félix R., "Théorie des matrices", *Editions Jacques Gabay*, 1990
65. GARRARD William L., JORDAN John M., "Design of nonlinear automatic flight control systems", *Automatica, Vol. 13, pp. 497-505*, 1977
66. GARRIDO Myriam, "Modélisation des événements rares et estimations des quantiles extrêmes, méthodes de sélection des modèles pour les queues de distribution", *Thèse, Université Joseph FOURIER*, 2002
67. GEORGE L., VERNET J.F., WANNER J.C., "La mécanique du vol", *Ed. DUNOD*, 1969
68. GEORGIE Jennifer, VALASEK John, "Selection of longitudinal desired dynamics for dynamic inversion controlled re-entry vehicles", *AIAA 2001-4382*, August 2001
69. GEVAERT Geert, FEINREICH Ben, "The development of advanced automatic flare and decrab for powered lift short haul aircraft using a microwave landing system", *NASA CR-151948*, April 1977
70. GHOSH Ronojoy, TOMLIN Claire, "Nonlinear inverse dynamic control for mode-based flight", *AIAA - 2000-4066*, 2000
71. GOPALSWAMY Swaminathan, HEDRICK J. Karl, "Control of a high performance aircraft with unacceptable aerodynamics", *11th american control conference*, 06/1992
72. GOPALSWAMY Swaminathan, HEDRICK J. Karl, "Tracking nonlinear non-minimum phase systems using sliding control", *Int. J. Control, Vol. 57, No. 5, Pp. 1141-1158*, 1993
73. GREGORY Irene M., "Modified dynamic inversion to control large flexible aircraft - What's going on?", *AIAA 99-3998*, 1999
74. GREGORY Irene M., "Stability result for dynamic inversion devised to control large flexible aircraft", *AIAA 2001-4284*, 2001
75. GUICHETEAU Philippe, "Bifurcation theory: a tool for nonlinear flight dynamics", *Phil. Trans. R. Soc. Lond., A 356, 2181-2201*, 1998
76. GUICHETEAU Philippe, "Mécanique du vol à grande incidence, Prédiction de la perte de contrôle, Lois de commande et optimisation de manœuvres", *ONERA RT 49/5148 SY*, 1992
77. GUICHETEAU Philippe, "Non-linear flight dynamics", *ONERA TP 1993-109*, 1993
78. HADDAD Wassim M., "Hierarchical robust and adaptive nonlinear control design", *NTIS, ADA-413721*, February 20, 2003
79. HAGENMEYER Veit, DELALEAU Emmanuel, "Exact feedforward linearization based on differential flatness", *Int. J. Control, Vol. 76, No. 6, 537-556*, 2003
80. HAGENMEYER Veit, DELALEAU Emmanuel, "Robustness of exact feedforward linearization based on differential flatness", *Automatica, 39, 1941-1946*, 2003
81. HALYO Nesim, "A combined stochastic feedforward and feedback control design methodology with application to autoland design", *NASA contractor report 4078*, 1987
82. HALYO Nesim, "Development of a digital automatic control law for steep glideslope capture and flare", *NASA-CR-2834*, 1977
83. HALYO Nesim, "Flight test of the digital integrated automatic landing system (DIALS)", *NASA Contractor report 3859*, December 1984
84. HARDIER G., "Neural networks for diagnostics and monitoring of Flight Control systems", *TR 2/09153 DCSD*, January 2005
85. HAYKIN Simon, "Neural networks, A comprehensive foundation", *Prentice Hall*, 1994
86. HESS Ronald A., YOUSEFPOR Marduke, "Analyzing the flared landing task with pitch-rate flight control systems", *Journal of guidance, control and dynamics, Vol. 15, No. 3, May-june 1992*
87. HUESCHEN Richard M., "The design, development, and flight testing of a modern-control-designed autoland system", *4th american control conference*, 05/85
88. HUNT L.R., SU Renjeng, MEYER George, "Global transformations of nonlinear systems", *IEEE transactions on automatic control, Vol. AC-28, No. 1*, January 1983
89. HUNT L.R., MEYER G., SU R., "Nonlinear control of aircraft", *NASA-TM-89225*

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

90. IDAN Moshe, JOHNSON Matthew, CALISE Anthony J., "Hierarchical approach to adaptive control for improved flight safety", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 25, No. 6, November-december 2002
91. ISIDORI Alberto, "Nonlinear control systems, Third edition", *Springer*, 1995
92. ISIDORI Alberto, "Nonlinear control systems II", *Springer*, 1999
93. ISIDORI Alberto, MARCONI Lorenzo, SERRANI Andrea, "Robust nonlinear control of a helicopter", *IEEE Transactions on automatic control*, Vol. 48, No.3, March 2003
94. ISIDORI Alberto, "A tool for semiglobal stabilization of uncertain non-minimum-phase nonlinear systems via output feedback", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 45, No. 10, October 2000
95. ITO Daigoro, WARD Donald T., VALASEK John, "Robust dynamic inversion controller design and analysis for the X-38", *AIAA 2001-4380*, 2001
96. JAKUBCZYK Bronislaw, RESPONDEK Witold, "On linearization of control systems", *Bulletin de l'Académie polonaise des sciences, Série des sciences mathématiques*, Vol. XXVIII, No. P-10, 1980
97. JEANNEAU Matthieu, "Commande fréquentielle semi-adaptative des structures flexibles", *Mémoire de thèse doctorale, Doctorat ENSAE, N° d'ordre 293*, 2000
98. JOHNSON Steven A., "A simple dynamic engine model for use in real-time aircraft simulation with thrust vectoring", *NASA technical memorandum 4240*, 1990
99. JORGENSEN Charles C., SCHLEY C., "A neural network baseline problem for control of aircraft flare and touchdown", *MIT press, Neural networks for control*, 1990
100. JUNGER Igor B., STEIL Jochen J., "Static sliding-motion phenomena in dynamical systems", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 48, No. 4, April 2003
101. KAMINER Isaac, BENSON Russell A., COLEMAN Edward E., EBRAHIMI Yaghoob S., "Design of an integrated pitch axis for autopilot/autothrottle and integrated lateral axis for autopilot/yaw damper for NASA TSRV airplane using integral LQG Methodology", *NASA contractor report 4268*, 1990
102. KANELLAKOPOULOS Ioannis, KOKOTOVIC Petar V., MARINO Ricardo, "Robust adaptive nonlinear control under extended matching conditions", *Coordinated science laboratory, College of engineering, Decision and control laboratory, AD-A217 684*, January 1990
103. KANESHIGE John, BULL John, TOTAH Joseph J., "Generic neural flight control and autopilot system", *AIAA-2000-4281*, August 2000
104. KANESHIGE John, GUNDY-BURLET Karen, "Integrated neural flight and propulsion control system", *AIAA-2001-4386*, August 2001
105. KAPILA V., GRIGORIADIS K. M., "Actuator saturation control", *Marcel Dekker*, 2002
106. KHALID S. J., HEARNE R. E., "Enhancing dynamic model fidelity for improved prediction of turbofan engine transient performance", *AIAA 80-1083*, 1980
107. KHALIL Hassan K., "Adaptive output feedback control of nonlinear systems represented by input-output models", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 41, No. 2, February 1996
108. KHALIL Hassan K., "Nonlinear systems - Third edition", *Pearson education*, 2000
109. KHALIL Hassan K., ESFANDIARI Farzad, "Semiglobal stabilization of a class of nonlinear systems using output feedback", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 48, No. 9, September 1993
110. KIM Byoung S., CALISE Anthony J., "Nonlinear flight control using neural networks", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 20, No.1, January-february 1997
111. KOKOTOVIC Petar, ARCAK Murat, "Constructive nonlinear control: a historical perspective", *Automatica*, 37, Pp. 637-662, 2001
112. KRSTIC Miroslav, KANELLAKOPOULOS Ioannis, KOKOTOVIC Petar, "Nonlinear and adaptive control design", *Wiley & sons*, 1995
113. LAMBREGTS A. A., "Integrated system design for flight and propulsion control using total energy principles", *AIAA-83-2561*, 1983
114. LANE Stephen H., STENGEL Robert F., "Flight control design using non-linear inverse dynamics", *Automatica*, Vol. 24, No. 4, Pp. 471-483, 1988
115. De LARMINAT Philippe, "Automatique, Commande des systèmes linéaires, 2ème édition revue et augmentée", *Ed. Hermès*, Janvier 1996
116. LAVERGNE Fabien, MORA-CAMINO Félix, VILLAUME Fabrice, JEANNEAU Matthieu, "Neural networks contribution to modeling for flight control", *WAC 2004-01-3133*, November 2004
117. LAVERGNE F., VILLAUME F., JEANNEAU M., MORA-CAMINO F., "Neural synthesis of aerodynamic parameters estimators for flight control", *EUCASS*, July 2005
118. LAVERGNE F., VILLAUME F., GARCIA G., TARBOURIECH S., JEANNEAU M., "Nonlinear and robust flight control laws for the longitudinal axis of an aircraft", *AIAC paper WC0004*, March 2005
119. LAVERGNE Fabien, VILLAUME Fabrice, JEANNEAU Matthieu, TARBOURIECH Sophie, GARCIA Germain, "Nonlinear robust autoland", *AIAA-2005-5848*, August 2005

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

120. LECORNU P., "Qualités de vol", Ed. ENAC, 1992
121. LEE Taeyoung, KIM Youdan, "Nonlinear adaptive flight control using backstepping and neural networks controller", *AIAA*, Vol. 24, No. 4, July-August 2001
122. LEVINE J., "Un aperçu élémentaire de la théorie moderne des systèmes non linéaires", *R.A.I.R.O automatique / systems analysis and control*, Vol. 17, n° 4, p.277-321, 1983
123. LEVINE J., NGUYEN D. V., "Flat output characterization for linear systems using polynomial matrices", *Systems & Control Letters* 48 (1), pp. 69-75, 2003
124. LINSE Dennis J., STENGEL Robert F., "Identification of aerodynamic coefficients using computational neural networks", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 16, No. 6, November-December 1993
125. LITTLEBOY P.M., SMITH P.R., "Bifurcation analysis of a high incidence aircraft with nonlinear dynamic inversion", *AIAA-97-3717, A97-37306*, 1997
126. LOWENBERG Marc H., RICHARDSON Thomas S., "Derivation of non-linear control strategies via numerical continuation", *AIAA-99-4111*, 08/1999
127. LU Ping, "An investigation of nonlinear controller for propulsion controlled aircraft", *NASA-CR-203716*, February 1997
128. LU Ping, "Nonlinear predictive controllers for continuous systems", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 17, No.3, May-June 1994
129. LU Wen Chi, MORA-CAMINO Félix, LAVERGNE Fabien, De COLIGNY Marc, ACHAIBOU Karim, "Flight mechanics and differential flatness", *DINCON*, June 2004
130. LYKKEN Lowell O., SHAH Naren M., "Direct lift control for improved automatic landing and performance of transport aircraft", *Journal of aircraft*, Vol. 9, No. 5, May 1972
131. MARCONI Lorenzo, ISIDORI Alberto, SERRANI Andrea, "Input disturbance suppression for a class of feedforward uncertain nonlinear systems", *Systems & control letters*, 45, Pp. 227-236, 2002
132. MARCONI L., ISIDORI A., "Stabilization of nonlinear feedforward systems: a robust approach", *40th IEEE Conference on Decision and Control, Orlando, Florida, USA*, December 2001
133. MEHRA R. K., "Global stability and control analysis of aircraft at high angle-of-attack", *ONR CR-215-248-1*, 1977
134. MELDRUM Deirdre R., "Direct model reference adaptive control of a flexible robotic manipulator", *JPL publication 85-100*, December 15, 1985
135. MENARD Philippe, "Automanette générique", *Note interne Airbus*, 1998
136. MENARD Philippe, "Flare générique, Rapport de synthèse", *518.0086/98*, Janvier 1998
137. MENARD Philippe, "Fonction Pilotage Intégrée (FPI): Objectifs - Réalisation - Validation", *NT X27RP030979*, 2004
138. MENON P.K.A., BADGETT M.E., WALKER R.A., DUKE E.L., "Nonlinear flight test trajectory controllers for aircraft", *J. guidance*, Vol. 10, No.1, Jan-Feb 1987
139. MENON P.K.A., BADGETT M.E., WALKER R.A., "Nonlinear manoeuvre autopilot for the F-15 aircraft", *NASA-CR-179442*, June 1989
140. MEYER George, CICOLANI Luigi, "Application of nonlinear systems inverses to automatic flight control design - System concepts and flight evaluations", *AGARD AG-251, Theory and applications of optimal control in aerospace systems*, 1980
141. MEYER G., SU R., HUNT L.R., "Application of nonlinear transformations to automatic flight control", *Automatica*, Vol. 20, No. 1, Pp. 103-107, 1984
142. MEYER George, HUNT L.R., SU Renjeng, "Nonlinear system guidance", *IEEE, Conference on decision & control*, 13-15/12/1995
143. MEYER George, "The design of exact nonlinear model followers", *Joint automatic control conference*, 17-19/06/81
144. MIELE A., WANG T., WANG H., MELVIN W.W., "Optimal penetration landing trajectories in the presence of windshear", *AIAA-88-0580*, January 11-14 1988
145. MIQUEL Thierry, MORA-CAMINO Félix, LEVINE Jean, "Aircraft relative guidance: a flatness synthesis of a new autopilot mode", *5th Eurocontrol/FAA ATM R&D seminar*, 23rd-27th June 2003
146. MIQUEL Thierry, MORA-CAMINO Félix, "Relative guidance of aircraft: analysis and comparison of two control approaches", *Paper 02WAC-55*, 2002
147. MOODY John E., "The effective number of parameters: an analysis of generalization and regularization in nonlinear learning systems", *Advances in neural information processing systems*, No. 4, 1992
148. MORA-CAMINO Félix, "Systèmes de conduite automatique et de gestion du vol", Ed. ENAC, 1995
149. MORTON B.G., ELGERSMA M.R., HARVEY C.A., HINES G., "Nonlinear flying quality parameters based on dynamic inversion", *AWFAL-TR-87-3079*, October 1987
150. MORTON Blaise, ENNS Dale, ZHANG Bing-Yu, "Stability of dynamic inversion control laws applied to nonlinear aircraft pitch-axis models", *Int. J. Control*, Vol. 63, No. 1, 1-25, 1996

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

151. MULLER Jean, "Fiche d'expérience flare inertiel", *NT 518.0960/99*, 15/06/1999
152. NAM Kwanghee, ARAPOSTATHIS Aristotle, "A model reference adaptive control scheme for pure-feedback nonlinear systems", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 33, No. 9, September 1988
153. NARENDRA Kumpati S., MUKHOPADHYAY Snehasis, "Intelligent control using neural networks", *IEEE Contr. Syst. Mag.*, pp. 11-18, 1992
154. NEUMAN Frank, FOSTER John D., "Investigation of a digital automatic aircraft landing system in turbulence", *NASA TND-006066*, 1970
155. NGUYEN Charles C., ZHOU Zhen-Lei, "Design of an adaptive controller for a telerobot manipulator", *NASA-CR-185863*, August 1989
156. NIJMEIJER H., Van Der SCHAFT A. J., "Nonlinear dynamical control systems", *Springer*, 1990
157. NORGAARD Magnus, JORGENSEN Charles C., ROSS James C., "Neural network prediction of new aircraft design coefficients", *NASA Technical memorandum 112197*, May 1997
158. OSTROFF Aaron J., "Study of a simulation tool to determine achievable control dynamics and control power requirements with perfect tracking", *NASA/TM-1998-208699*, August 1998
159. OUSTALOUP Alain, "La robustesse - Analyse et synthèse de commandes robustes", *Ed. Hermès*, Octobre 1994
160. PAOLETTI S., GRASSELLI O. M., MENINI L., "A comparison between classical robust stability conditions", *International journal of robust and nonlinear control*, 14, 249-271, 2004
161. PAPPAS George J., SIMIC Slobodan, "Consistent abstractions of affine control systems", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. 47, No. 5, May 2002
162. PESKETT Jonathan, "Non-linear aerodynamic modeling in flight dynamics", *University of Bristol, Report No. 710*, May 1995
163. PESOREN Urpo J., STECK James E., ROKHSAZ Kamran, BRUNER Hugh Samuel, DUERKSEN Noel, "Adaptive neural network inverse controller for general aviation safety", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 27, No. 3, May-june 2004
164. PORTER W. A., "Diagonalization and inverses for non-linear systems", *Int. J. control*, Vol. 11, No. 1, 67-76, 1970
165. PUYOU Guilhem, "Méthodes de synthèse de lois de pilotage et optimisation des protections basse énergie  
Projet de fin d'études ENSAE", Septembre 2002
166. RAIMBAULT Nathalie, "Statistiques et réseaux de neurones: applications à la modélisation et à l'optimisation du pilotage d'un avion civil", *Rapport de thèse*, 13 décembre 2001
167. REINER Jacob, BALAS Gary J., GARRARD William L., "Flight control design using robust dynamic inversion and time-scale separation", *Automatica*, Vol. 25, No. 11, Pp. 1493-1504, 1996
168. REINER Jacob, BALAS Gary J., GARRARD William L., "Robust dynamic inversion for control of highly manoeuvrable aircraft", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 18, No.1, January-february 1995
169. RIPOLL J.C., "Aérodynamique/Mécanique du vol", *Ed. ENAC*, 1998
170. ROMANO James J., SINGH Sahjendra N., "I-O map inversion, zero dynamics and flight control", *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, Vol. 26, No. 6, November 1990
171. RYSDYK Rolf T., CALISE Anthony J., "Adaptive model inversion flight control for tiltrotor aircraft", *American helicopter society 57th annual forum, Washington DC*, May 20-22 1998
172. SASTRY Shankar, "Nonlinear systems - Analysis, stability and control", *Springer*, 1999
173. SCHANZER Gunther, KRAUSPE Peter, "A simple propulsion system model for the simulation of non-linear dynamic thrust response", *NASA TM-77053*, March 1983
174. SECKEL Edward, ELLIS David R., OLCOTT John W., "Experimental landings in a spoiler-equipped light aircraft", *J. aircraft*, Vol. 10, No. 4, April 1973
175. SECKEL Edward, "The landing flare: an analysis and flight-test investigation", *NASA CR 2517*, May 1975
176. SEPULCHRE Rodolphe, JANKOVIC Mrdjan, KOKOTOVIC Petar V., "Integrator forwarding: a new recursive nonlinear robust design", *Proceedings of the 13th IFAC World Congress*, San Francisco, California, 1996
177. SERRANI Andrea, ISIDORI Alberto, MARCONI Lorenzo, "Semiglobal robust output regulation of minimum-phase nonlinear systems", *International journal of robust and nonlinear control*, 10, 379-396, 2000
178. SHTESSEL Yuri B., SHKOLNIKOV Ilia A., "Aeronautical and space vehicle control in dynamic sliding manifolds", *Int. J. Control*, Vol. 76, Nos 9/10, 1000-1017, 2003
179. SINGH S., "Control of nearly singular decoupling systems and nonlinear aircraft maneuver", *IEEE transactions on aerospace and electronic systems*, Vol. 24, No. 6, November 1988
180. SINGH S. N., RUGH W. J., "Decoupling in a class of nonlinear systems by state variable feedback", *Journal of dynamic systems, measurement and control*, December 1972

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

181. SINGH Sahjendra N., STEINBERG Marc, DIGIROLAMO Robert D., "Nonlinear predictive control of feedback linearizable systems and flight control system design", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 18, No. 5, Septembre-octobre 1995
182. SKOGESTAD S., POSTLETHWAITE I., "Multivariable feedback control – Analysis and design", *John Wiley & Sons*, 1996
183. SLOTINE Jean-Jacques E., LI Weiping, "Applied nonlinear control", *Prentice Hall*, 1991
184. SLOTINE J. J., SASTRY S. S., "Tracking control of non-linear systems using sliding surfaces, with application to robot manipulators", *Int J. control*, Vol. 38, No. 2, Pp. 465-492, 1983
185. SMITH Allan G., MEYER George, "Aircraft automatic flight control system with model inversion", *J. guidance*, Vol. 10, No.3, May-june 1987
186. SMITH Allan G., MEYER George, "Application of the concept of dynamic trim to automatic landing of carrier aircraft", *NASA technical paper 1512*, 1980
187. SMITH M. R., "Direct lift control applications to transport aircraft - A U.K. point of view", *AGARD flight mechanics panel symposium on take-off and landing*, 1-4 april 1974
188. SMITH Phill, BERRY Andrew, "Flight test experience of a non-linear dynamic inversion control law on the VAAC Harrier", *AIAA-2000-3914*, 2000
189. SMITH P. R., "Functional control law design using exact non-linear dynamic inversion", *AIAA-94-3516-CP*, 08/94
190. SNELL S. Antony, ENNS Dale F., GARRARD William L., "Nonlinear inversion flight control for a supermanoeuvrable aircraft", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 15, No. 4, July-august 1992
191. SNELL S. Antony, STOUT Perry W., "Robust control of angle of attack using dynamic inversion combined with quantitative feedback theory", *AIAA 96-3783*, July 29-31, 1996
192. SNELL S. A., HESS R. A., "Robust, decoupled, flight control design with rate saturating actuators", *AIAA-97-3778*, 1997
193. STEINBERG Marc L., "Comparison of intelligent, adaptive and nonlinear flight control laws", *Journal of guidance, control and dynamics*, Vol. 24, No.4, July-August 2001
194. STEINBERG Marc, "Development and simulation of an F/A-18 fuzzy logic automatic carrier landing system", *IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, Vol. 2, San Francisco, CA, Apr. 1993, pp. 797-802
195. STEINBERG Marc L., PAGE Anthony B., "High-fidelity simulation testing of intelligent and adaptive aircraft control laws", *ACC*, May 8-10 2002
196. STEINBERG M., "Potential role of neural networks and fuzzy logic in flight control design and development", *AIAA 92-0999*, 1992
197. SU Renjeng, HUNT L.R., "A canonical expansion for nonlinear systems", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. AC-31, No. 7, July 1986
198. SU Renjeng, HUNT L.R., "A canonical form for nonlinear systems", *NASA-CR-176941*, Apr. 1984
199. SU Renjeng, HUNT L. R., MEYER George, "Canonical forms for nonlinear systems", *NASA-TM-81323*, February 1983
200. SU Renjeng, "On the linear equivalents of nonlinear systems", *Systems & control letters*, Volume 2, Number 1, July 1982
201. SWERN Frederic L., VAN DER VEEN Arend P., STOPPER Joseph, "Design of a flare coupler using neural networks", *AIAA-96-0511*, January 15-18 1996
202. SWERN Frederic L., VAN DER VEEN Arend P., "A validation methodology for neural network based flight control systems", *Digital Avionics Systems Conference*, 1994., pp. 348-352
203. TARBOURIECH S., GARCIA G., "Control of uncertain systems with bounded inputs", *Springer*, 1997
204. TARBOURIECH Sophie, GOMES Da SILVA J. M. Jr, GARCIA Germain, "Delay-dependent anti-windup strategy for linear systems with saturating inputs and delayed outputs", *International journal of robust and nonlinear control*, No. 14, Pp. 665-682, 2004
205. TASSI Philippe, "Méthodes statistiques", *Ed. Economica*, Janvier 1989
206. TEEL Andrew R., "Applied nonlinear control design", *NTIS ADA-413514*, February 28, 2003
207. TITLI André, "Automatique symbolique et connexionniste", *notes de cours*, 2001
208. TOMCZYK Andrzej, "Handling qualities augmentation system for general aviation aircraft", *AIAA 2001-4264*, 2001
209. TROUDET Terry, GARG Senjay, MERRILL Walter C., "Neural network application to aircraft control system design", *NASA TM-105151*, 1991
210. UTKIN Vadim M., "Variable structure systems: present and future", *Translated from Avtomatika i Telemekhanika*, No. 9, Pp. 5-25, September 1983
211. UTKIN Vadim M., "Variable structure systems with sliding mode", *IEEE transactions on automatic control*, Vol. AC-22, No. 2, 1978

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

212. VERRIERE Jacques, "Mécanique du vol", Ed. ENSICA, 1997
213. VILLAUME F., "Contribution à la commande des systèmes complexes : application à l'automatisation du pilotage au sol des avions de transport", *Thèse*, 2002
214. WHITE Maurice D., "Nonlinear adaptive flight path and speed control using energy principles", *NASA TN D-4438*, January 3 2002
215. WHITE Maurice D., "Proposed analytical model for the final stages of landing a transport airplane", *NASA TN D-4438*
216. WU Shu-Fan, GUO Suo-Feng, "Optimum flight trajectory guidance based on total energy control of aircraft", *Journal of guidance, control, and dynamics*, Vol. 17, No. 2, March-april 1994
217. YOUNG K. D., UTKIN V. I., OZGUNER U., "A control engineer's guide to sliding mode control", *IEEE transactions on control systems technology*, Vol. 7, No. 3, pp. 328-342, May 1999
218. ZHANG Rong, SINGH Sajendra S., "Robust output feedback control of an aeroelastic system using modeling error compensation", *AIAA-2000-4255*, 14-17 august 2000
219. ZHOU K., DOYLE J.C. , GLOVER K., "Robust and optimal control", *Prentice hall*, Englewood cliffs, New jersey, 1996

## 6 Annexes

### 6.1 Robustesse dans le cadre non-linéaire

#### 6.1.1 Introduction

Cette partie vise à compléter les parties 2.1 et 2.2 en présentant des techniques liées à la robustesse en non-linéaire.

La robustesse est l'insensibilité relative d'une loi de commande face à différents types d'incertitudes :

- Incertitudes paramétriques.
- Erreurs de modèles.
- Dynamiques négligées.
- Retards mal connus.
- Non-linéarités.

En premier, une loi de commande doit posséder des caractéristiques de stabilité robuste. Cela signifie que, malgré les incertitudes précédemment énoncées, le système corrigé doit être stable. On s'inquiète ensuite de la performances robustes, c'est-à-dire à la fois des performances minimales du système et de l'homogénéité de ces performances face aux incertitudes.

Le sujet de la robustesse non-linéaire reste ouvert, bien que de premiers résultats soient apparus. Il existe tout de même des techniques relatives à la robustesse non-linéaire. Nous en décrivons certaines dans cette partie.

#### 6.1.2 Analyse de robustesse par l'analyse des bifurcations

La théorie des bifurcations ([125]) est une branche de la théorie des catastrophes et repose sur des concepts de géométrie différentielle. Pour procéder à l'analyse des bifurcations d'un système, il faut tout d'abord en calculer les points d'équilibre. Ensuite, en chacun de ces points d'équilibre on étudie la matrice jacobienne du système selon chaque paramètre influant sur la dynamique. Enfin, on utilise un ensemble de règles et de critères pour qualifier ces bifurcations et décrire le comportement du système qui en découle.

Cette technique est malheureusement trop difficile à appliquer formellement sur des modèles non-linéaires complexes. C'est pourquoi l'analyse de bifurcations est aujourd'hui un processus purement numérique. Les résultats sont toujours riches en enseignements ([75], [76], [77]). Ils sont même souvent trop riches. En effet, l'analyse se fait graphiquement par projections dans des sous-espaces de la base des paramètres influant sur la dynamique. On doit donc figer, dans ces représentations, tous les autres paramètres. Ceci donne potentiellement un nombre infini de projections, soit autant de chances pour l'analyste de passer à côté d'un phénomène critique.

Il paraît assez intuitif que l'application de la théorie des bifurcations requière une grande expertise de l'analyste. Il doit opérer un tri entre les points de fonctionnement qu'il souhaite balayer et avoir une idée *a priori* des phénomènes recherchés.

#### 6.1.3 Commande non-linéaire robuste par backstepping (resp. forwarding)

Le backstepping (resp. forwarding) ([111]) est une technique de commande non-linéaire basée sur la méthode de linéarisation par bouclage entrées-sorties et dont l'application ne peut se faire que sur des systèmes triangulaires inférieurs (resp. supérieurs). L'idée du backstepping (resp. forwarding) robuste est de linéariser le système à commander ligne après ligne d'une manière particulière permettant de générer des fonctions de Lyapunov à chaque étape.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Si ce n'est la nécessité d'avoir un système triangulaire inférieur (resp. supérieur), le backstepping (resp. forwarding) est une méthode aussi souple que la linéarisation par bouclage entrées-sorties. A l'heure actuelle, c'est l'unique technique générale de synthèse non-linéaire robuste disponible dans la littérature. Toutefois, d'un point de vue implémentation, le backstepping mène souvent à des ordres de dérivation très élevés rendant difficile la mesure et donc la commande.

La procédure du backstepping peut être présentée de manière simplifiée comme suit ([172]). Soit un système mis sous la forme :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + f_1(x_1) \\ \vdots \\ \dot{x}_i = x_{i+1} + f_i(x_1, \dots, x_i) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) + u \end{cases}$$

L'idée du backstepping est de considérer l'état  $x_{i+1}$  comme une pseudo-commande (stabilisante) pour  $x_i$ . Posons par exemple, à l'étape 1 :

$$\begin{cases} z_1 = x_1 \\ z_2 = x_2 - \alpha_1(x_1) \end{cases}$$

avec :

$$\alpha_1(x_1) = -x_1 - f_1(x_1)$$

En posant la fonction partielle de Lyapunov suivante :

$$v_1(z_1) = \frac{z_1^2}{2}$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = -z_1 + z_2 \\ \dot{z}_2 = x_3 + f_2(x_1, x_2) - \frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1}(x_2 + f_1(x_1)) = x_3 + \bar{f}_2(z_1, z_2) \\ \dot{v}_1 = -z_1^2 + z_1 \cdot z_2 \end{cases}$$

A l'étape  $i$ , on définit :

$$\begin{cases} z_{i+1} = x_{i+1} - \alpha_i(z_1, \dots, z_i) \\ v_i = \frac{1}{2} \cdot (z_1^2 + z_2^2 + \dots + z_i^2) \end{cases}$$

et on obtient :

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i+1} + \alpha_i(z_1, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i) \\ \dot{v}_i = -z_1^2 - \dots - z_{i-1}^2 + z_{i-1} \cdot z_i + z_i \cdot (z_{i+1} + \alpha_i(z_1, \dots, z_i) + \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i)) \end{cases}$$

En posant :

$$\alpha_i(z_1, \dots, z_i) = -z_{i-1} - z_i - \bar{f}_i(z_1, \dots, z_i)$$

on obtient :

$$\begin{cases} \dot{z}_i = z_{i-1} - z_i + z_{i+1} \\ \dot{v}_i = -z_1^2 - \dots - z_i^2 + z_i \cdot z_{i+1} \end{cases}$$

Enfin, à la dernière étape, on a :

$$\dot{z}_n = \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n) + u$$

En posant :

$$\begin{cases} u = \alpha_n(z_1, \dots, z_n) = -z_{n-1} - z_n - \bar{f}_n(z_1, \dots, z_n) \\ v_n = \frac{1}{2} \cdot (z_1^2 + \dots + z_n^2) \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\begin{cases} \dot{z}_n = -z_{n-1} - z_n \\ \dot{v}_n = -z_1^2 - \dots - z_n^2 \end{cases}$$

$v_n$  est donc une fonction de Lyapunov pour ce système et la loi de commande synthétisée de manière récursive est donc stabilisante.

Pour plus de détails sur le backstepping robuste, ne pas hésiter à se reporter à [62] et [63]. On pourra aussi trouver des techniques de backstepping adaptatif dans [112].

## 6.1.4 Commande par régime glissant

Appelée en anglais « sliding mode control » ([54], [210], [211] et [217]), cette technique permet de définir *a priori* le comportement dynamique du système corrigé. Soit  $X_d$  la valeur désirée pour  $X$  et  $E = P \cdot (X - X_d)$ , avec  $P$  inversible, on définit ainsi le régime de glissement :

$$S = \left( \frac{d}{dt} + \lambda \right) \cdot E$$

avec  $\lambda > 0$ . Pour imposer la stabilité du système au sens de Lyapunov, on définit la fonction  $V$  telle que :

$$V = S^2$$

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Cette fonction est bien définie positive. On satisfait donc la première condition de stabilité de Lyapunov. Une condition suffisante de stabilité au sens de Lyapunov est alors l'existence de  $\eta > 0$  tel que :

$$\frac{dV}{dt} \leq -\eta |S|$$

ce qui peut aussi s'écrire de la manière suivante :

$$\dot{S} \leq -\eta \cdot \text{signe}(s)$$

Soit un gain  $K > \eta$ , réglé par le concepteur de loi, la commande par régime glissant associée est alors la solution en  $U$  de l'équation :

$$\dot{S} = -K \cdot \text{signe}(s)$$

Cette commande est alors stable par design. Ceci invite cependant à trois commentaires :

- 1 La discontinuité de la commande due à la fonction signe crée un phénomène de battement de la consigne (chattering) à proximité de la surface de glissement. La commande par régime glissant s'accompagne donc d'un phénomène de cycle limite (non-divergent). Pour contrer ce problème, on peut aussi réaliser une approximation continue de la fonction signe mais on perd alors la stabilité au sens de Lyapunov (même s'il n'existe pas d'exemple instable en simulation à notre connaissance).
- 2 La valeur de  $K$  est fonction de l'erreur de modèle attendue. Si on dispose d'un bon majorant de l'erreur, on peut donc assurer la stabilité robuste... Avec les réserves formulées en 1 cependant
- 3 Le formalisme non-linéaire affine se prête bien à ce type de commande, puisqu'il est nécessaire d'inverser la relation  $S(U)$  et que celle-ci est affine. On se heurte cependant aux mêmes limitations que dans le cadre de l'inversion de la dynamique.

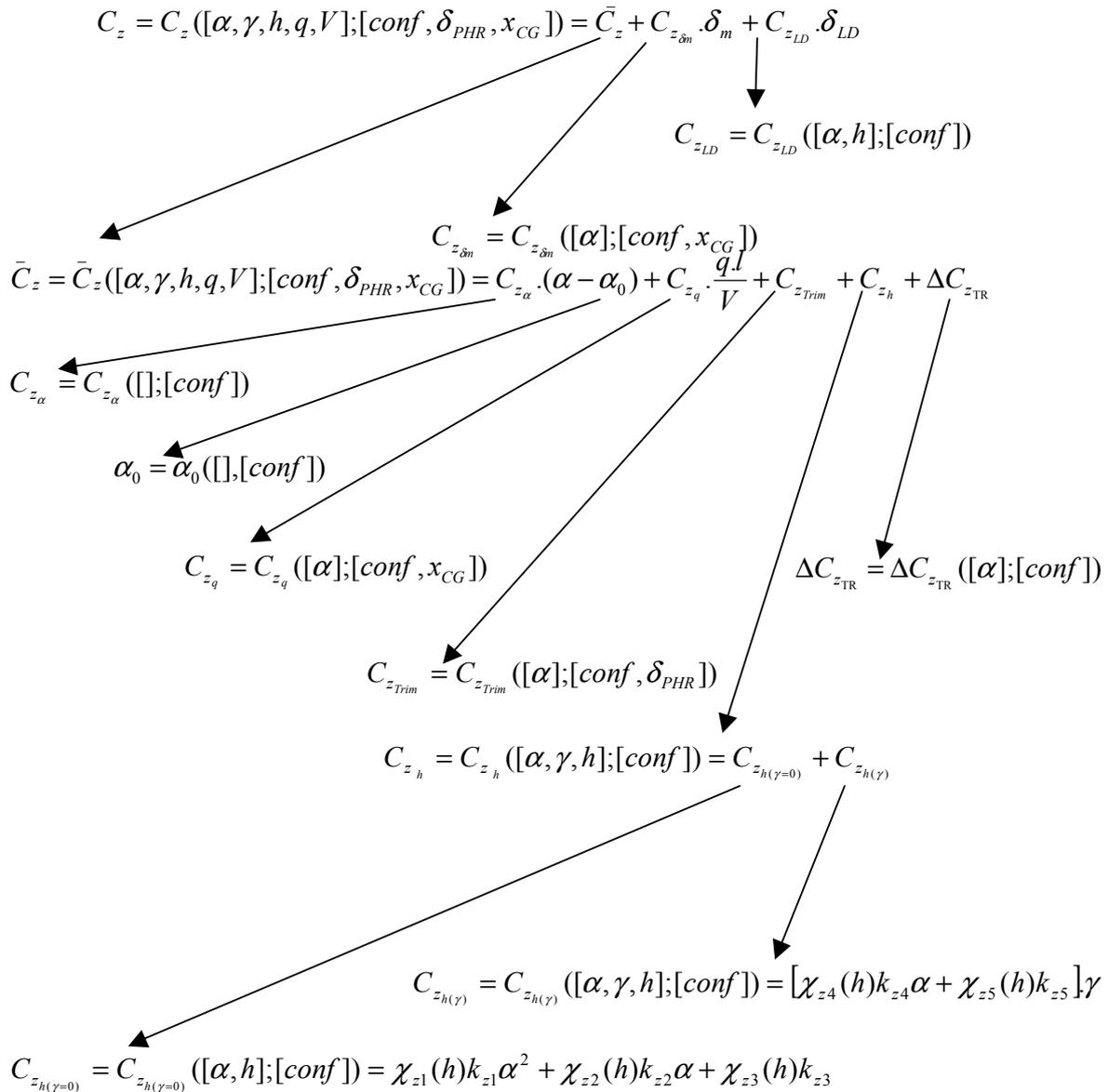
### 6.1.5 Conclusion

Comme on a pu le voir dans cette partie, il existe plusieurs manières de traiter le problème de la robustesse non-linéaire, sans toutefois que l'une de ces solutions n'émerge clairement. En effet, ces techniques comportent un certain nombre de contraintes difficiles à surmonter dans un cadre industriel. Nous avons donc tenté de développer une nouvelle technique de commande non-linéaire robuste basée sur l'inversion de la dynamique. Cette technique est détaillée dans la partie 2.2.

## 6.2 Coefficients aérodynamiques longitudinaux en effet de sol

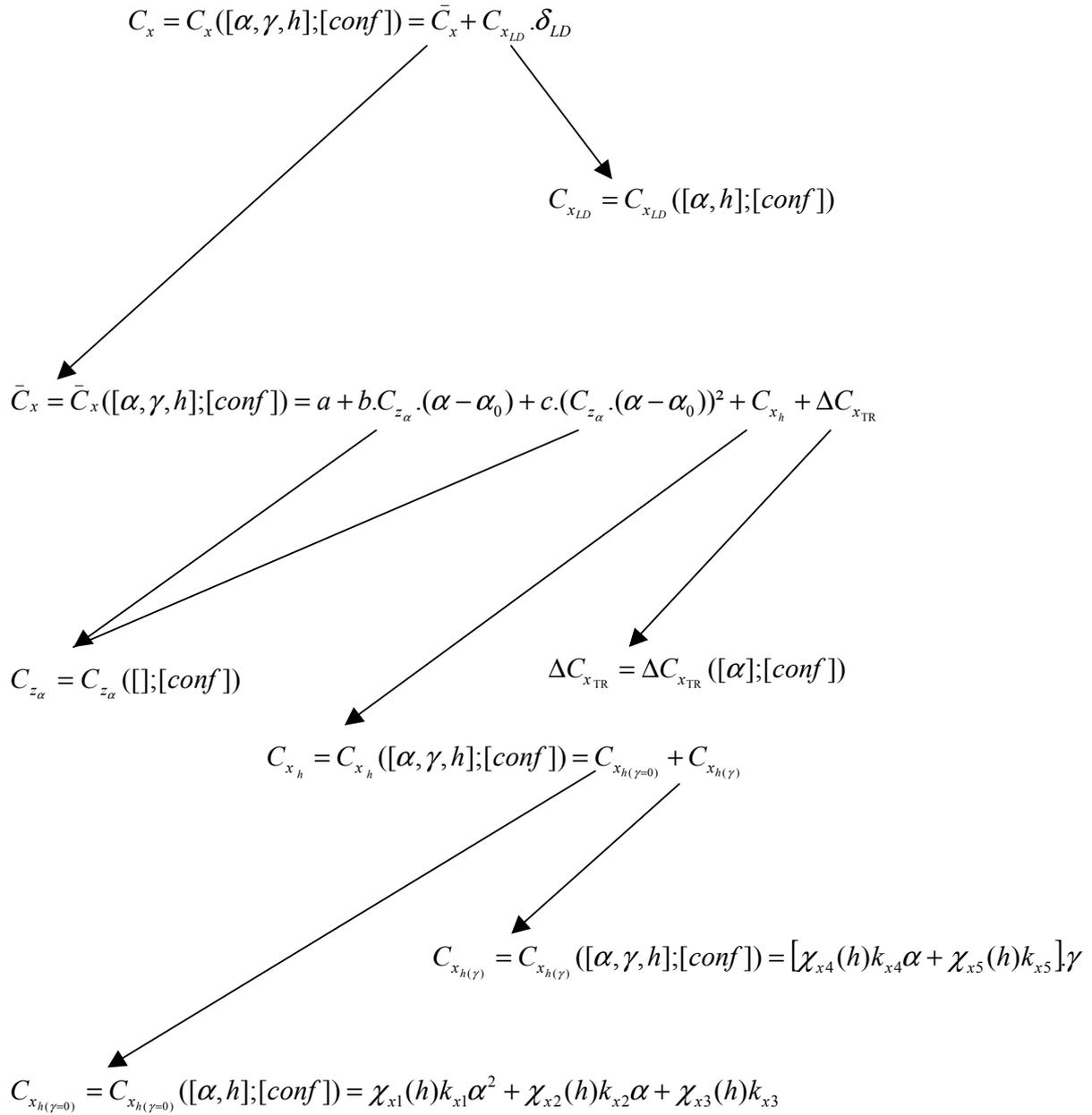
Cette partie vise à montrer le découpage des coefficients aérodynamiques proposé par OSMA (cf. §2.3) et ainsi la complexité de la structure de ces fonctions multivariées. Ceci est particulièrement vrai en effet de sol (cf. §3.2) où apparaissent des phénomènes non-linéaires significatifs.

### 6.2.1 Coefficient de portance



On notera que les  $\chi$  et les  $k$  ne dépendent que de la configuration.

## 6.2.2 Coefficient de traînée



On notera que les  $\chi$  et les  $k$  ne dépendent que de la configuration.

### 6.2.3 Coefficient de moment

$$C_m = C_m([\alpha, \gamma, h, q, V]; [conf, \delta_{PHR}, x_{CG}]) = \bar{C}_m + C_{m_{\delta_n}} \cdot \delta_m + C_{m_{LD}} \cdot \delta_{LD}$$

$$C_{m_{LD}} = C_{m_{LD}}([\alpha, h]; [conf, x_{CG}])$$

$$C_{m_{\delta_n}} = C_{m_{\delta_n}}([\delta]; [x_{CG}])$$

$$\bar{C}_m = \bar{C}_m([\alpha, \gamma, h, q, V]; [conf, \delta_{PHR}, x_{CG}]) = C_{m_\alpha} \cdot (\alpha - \alpha_0) + C_{m_q} \cdot \frac{q \cdot l}{V} + C_{m_{Trim}} + C_{m_h} + \Delta C_{m_{TR}}$$

$$C_{m_\alpha} = C_{m_\alpha}([\delta]; [conf])$$

$$\alpha_0 = \alpha_0([\delta], [conf, x_{CG}])$$

$$C_{m_q} = C_{m_q}([\alpha]; [conf, x_{CG}])$$

$$C_{m_{Trim}} = C_{m_{Trim}}([\delta]; [x_{CG}, \delta_{PHR}])$$

$$\Delta C_{m_{TR}} = \Delta C_{m_{TR}}([\alpha]; [conf, x_{CG}])$$

$$C_{m_h} = C_{m_h}([\alpha, \gamma, h]; [conf, x_{CG}]) = C_{m_{h(\gamma=0)}} + C_{m_{h(\gamma)}} + \frac{x_{CG} - 25}{100} \cdot C_{z_h}$$

$$C_{z_h} = C_{z_h}([\alpha, \gamma, h]; [conf])$$

$$C_{m_{h(\gamma)}} = C_{m_{h(\gamma)}}([\alpha, \gamma, h]; [conf]) = [\chi_{m4}(h)k_{m4}\alpha + \chi_{m5}(h)k_{m5}] \gamma$$

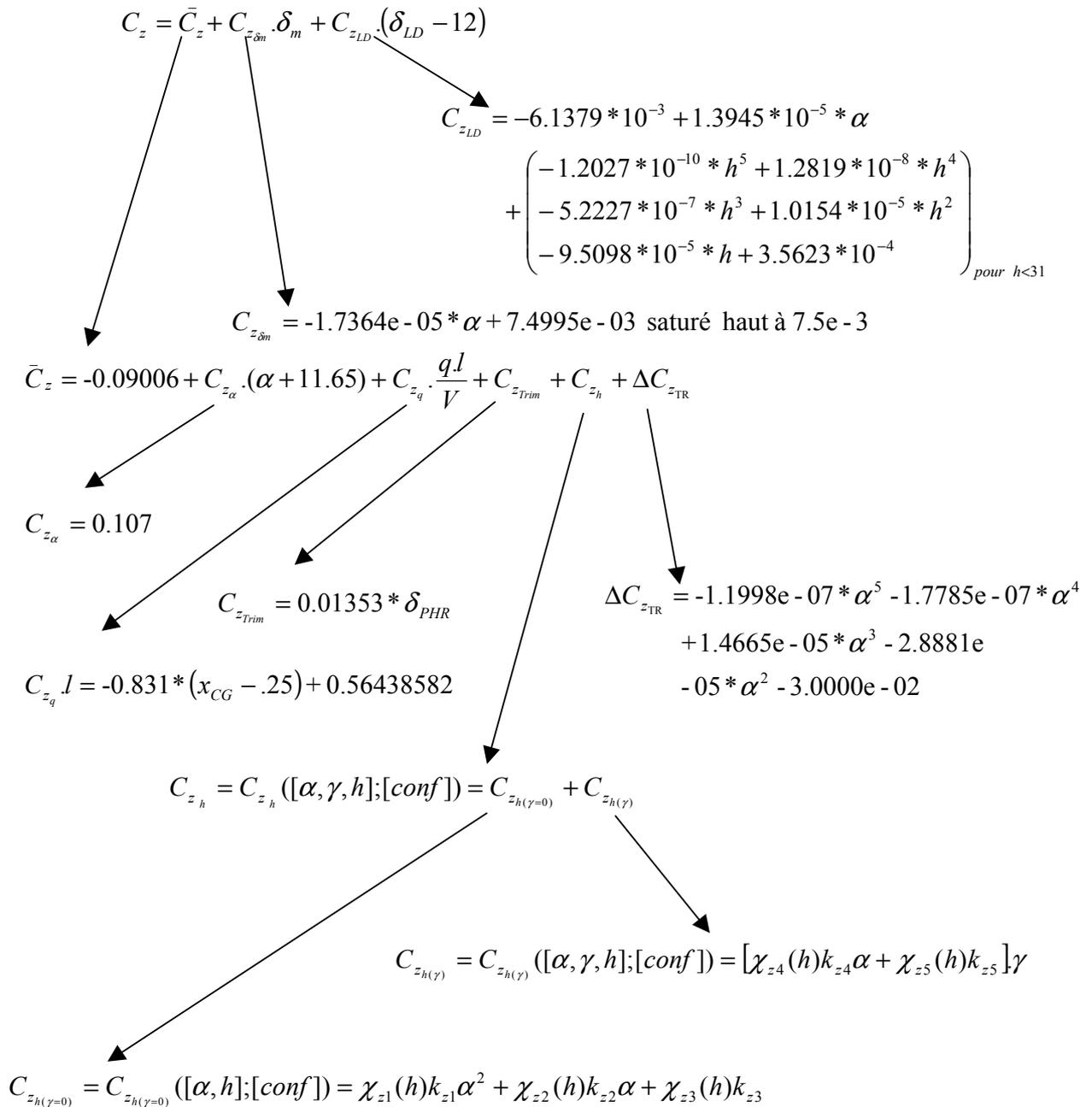
$$C_{m_{h(\gamma=0)}} = C_{m_{h(\gamma=0)}}([\alpha, h]; [conf]) = \chi_{m1}(h)k_{m1}\alpha^2 + \chi_{m2}(h)k_{m2}\alpha + \chi_{m3}(h)k_{m3}$$

On notera que les  $\chi$  et les  $k$  ne dépendent que de la configuration.

## 6.3 Evaluation numérique des coefficients aérodynamiques: Exemple de l'A321 en longitudinal (configuration 5)

Cette partie contient la formulation approchée de coefficients aérodynamiques d'OSMA identifiés à l'aide de polynômes approximateurs (cf. §2.3)

### 6.3.1 Coefficient de portance



### 6.3.2 Coefficient de traînée

$$C_x = C_x([\alpha, \gamma, h]; [conf]) = \bar{C}_x + C_{x_{LD}} \cdot (\delta_{LD} - 12)$$

$$C_{x_{LD}} = 6.2383e-04 - 6.6011e-05 * \alpha$$

$$+ \left( \begin{array}{l} 2.4526e-11 * h^5 - 2.6163e-09 * h^4 + 1.0668e-07 * h^3 \\ - 2.0755e-06 * h^2 + 1.9444e-05 * h - 7.2897e-05 \end{array} \right) \text{ pour } h < 31$$

$$\bar{C}_x = 0.0012 + a + b \cdot C_{z_\alpha} \cdot (\alpha - \alpha_0) + c \cdot (C_{z_\alpha} \cdot (\alpha - \alpha_0))^2 + C_{x_h} + \Delta C_{x_{TR}}$$

$$C_{z_\alpha} = C_{z_\alpha}([\alpha]; [conf])$$

$$\Delta C_{x_{TR}} = -1.1797e-05 * \alpha^2 - 3.0431e-04 * \alpha + 2.3972e-02$$

$$C_{x_h} = -1.1949e-04 * \alpha^2 - 3.6207e-03 * \alpha - 1.7200e-02$$

### 6.3.3 Coefficient de moment

$$C_m = \bar{C}_m + C_{m_{\delta m}} \cdot \delta_m + C_{m_{LD}} \cdot (\delta_{LD} - 12)$$

$$C_{m_{LD}} = -1.7033e-03 + (-1.8605e-04 * \alpha)_{\text{saturé bas à } -0.0018605} + \left( \begin{array}{l} 1.6945e-10 * h^5 - 1.8081e-08 * h^4 \\ + 7.3752e-07 * h^3 - 1.4355e-05 * h^2 \\ + 1.3456e-04 * h - 5.0445e-04 \end{array} \right)_{\text{pour } h < 31} - 6.2885e-03 * (x_{CG} - .25)$$

$$C_{m_{\delta m}} = -0.037912 + 7.0793e-03 * (x_{CG} - .25)$$

$$\bar{C}_m = -0.026892 + C_{m_{\alpha}} \cdot \{\alpha + 4.23354483 + 38.174 * (x_{CG} - .25)\} + C_{m_q} \cdot \frac{q \cdot l}{V} + C_{m_{Trim}} + C_{m_h} + \Delta C_{m_{TR}}$$

$$C_{m_{\alpha}} = -0.03265585 + 0.113584778 * (x_{CG} - .25)$$

$$\Delta C_{m_{TR}} = 4.1241e-06 * \alpha^4 - 4.6870e-06 * \alpha^3 - 3.5941e-04 * \alpha^2 - 1.2613e-03 * \alpha - 6.7000e-03$$

$$C_{m_{Trim}} = \{-0.0667277 + 1.3560e-02 * (x_{CG} - .25)\} * \delta_{PHR}$$

$$C_{m_q} \cdot l = -2.633497469 - 0.8925 * (x_{CG} - .25)^2 + 0.7649 * (x_{CG} - .25)$$

$$C_{m_h} = C_{m_h}([\alpha, \gamma, h]; [conf, x_{CG}]) = C_{m_{h(\gamma=0)}} + C_{m_{h(\gamma)}} + \frac{x_{CG} - 25}{100} \cdot C_{z_h}$$

Voir plus haut

$$C_{m_{h(\gamma)}} = C_{m_{h(\gamma)}}([\alpha, \gamma, h]; [conf]) = [\chi_{m4}(h)k_{m4}\alpha + \chi_{m5}(h)k_{m5}] \gamma$$

$$C_{m_{h(\gamma=0)}} = C_{m_{h(\gamma=0)}}([\alpha, h]; [conf]) = \chi_{m1}(h)k_{m1}\alpha^2 + \chi_{m2}(h)k_{m2}\alpha + \chi_{m3}(h)k_{m3}$$

On notera que les  $\chi$  et les  $k$  ne dépendent que de la configuration.

## 6.4 Détail des calculs de génération de trajectoire

Cette partie permet de rentrer dans le détail des calculs de trajectoires dont les résultats sont présentés en §3.5.

### 6.4.1 Equations régissant la trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée »

Dans toute la suite de l'étude, nous utiliserons abusivement le terme « facteur de charge » et son symbole «  $Nz$  » pour désigner la dérivée de la vitesse ascensionnelle. La forme de la trajectoire est donnée plus haut (3.5.2.2.a). Les équations sont donc les suivantes :

- Pour  $Nz$  :

○  $0 < t < t_1$  :

$$Nz = Nz_0$$

○  $t_1 < t < t_2$  :

$$Nz = Nz_0 \cdot \left( 1 - \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \right)$$

○  $t_2 < t < t_f$  :

$$Nz = 0$$

- Pour  $Vz$  :

○  $0 < t < t_1$  :

$$Vz = Vz_0 + Nz_0 \cdot t$$

○  $t_1 < t < t_2$  :

$$\begin{aligned} Vz &= Vz_0 + Nz_0 \cdot t_1 + Nz_0 \cdot (t - t_1) - \frac{Nz_0}{2} \cdot \frac{(t - t_1)^2}{t_2 - t_1} \\ &= Vz_0 + Nz_0 \cdot t - \frac{Nz_0}{2} \cdot \frac{(t - t_1)^2}{t_2 - t_1} \end{aligned}$$

○  $t_2 < t < t_f$  :

$$\begin{aligned} Vz &= Vz_0 + Nz_0 \cdot t_2 - \frac{Nz_0}{2} \cdot (t_2 - t_1) \\ &= Vz_0 + \frac{Nz_0}{2} \cdot (t_2 + t_1) \end{aligned}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

- Pour  $z$  :
  - $0 < t < t_1$  :

$$z = z_0 + Vz_0 \cdot t + \frac{Nz_0}{2} \cdot t^2$$

- $t_1 < t < t_2$  :

$$\begin{aligned} z &= z_0 + Vz_0 \cdot t_1 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t_1^2 + Vz_0 \cdot (t - t_1) + \frac{Nz_0}{2} \cdot (t^2 - t_1^2) - \frac{Nz_0}{6} \cdot \frac{(t - t_1)^3}{t_2 - t_1} \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t + \frac{Nz_0}{2} \cdot t^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot \frac{(t - t_1)^3}{t_2 - t_1} \end{aligned}$$

- $t_2 < t < t_f$  :

$$\begin{aligned} z &= z_0 + Vz_0 \cdot t_2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t_2^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot (t_2 - t_1)^2 + Vz_0 \cdot (t - t_2) + \frac{Nz_0}{2} \cdot (t_2 + t_1) \cdot (t - t_2) \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t + \frac{Nz_0}{2} \cdot t_2^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot (t_2 - t_1)^2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot (t_2 + t_1) \cdot (t - t_2) \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t + \frac{Nz_0}{2} \cdot t_2^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot t_2^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1^2 + \frac{Nz_0}{3} \cdot t_1 \cdot t_2 + \\ &\quad \frac{Nz_0}{2} \cdot t \cdot t_2 - \frac{Nz_0}{2} \cdot t_2^2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t \cdot t_1 - \frac{Nz_0}{2} \cdot t_1 \cdot t_2 \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t - \frac{Nz_0}{6} \cdot t_2^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1^2 - \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t \cdot (t_1 + t_2) \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t - \frac{Nz_0}{6} \cdot (t_1 + t_2)^2 + \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t \cdot (t_1 + t_2) \end{aligned}$$

Par conditions aux limites, il vient :

$$\begin{cases} Vz_{td} = Vz_0 + \frac{Nz_0}{2} \cdot (t_2 + t_1) \\ 0 = z_0 + Vz_0 \cdot t_f - \frac{Nz_0}{6} \cdot (t_1 + t_2)^2 + \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1 \cdot t_2 + \frac{Nz_0}{2} \cdot t_f \cdot (t_1 + t_2) \end{cases}$$

D'après (37) et sachant que  $z_0$  est imposé et que  $t_2$  est imposé par la taille du plateau de  $Vz$  voulu en fin d'arrondi, soit  $t_2 = K \cdot t_f$ , on a :

$$\begin{cases} Vz_{td} = Vz_0 + \frac{Nz_0}{2} \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_1 \right) \\ 0 = z_0 + Vz_0 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - \frac{Nz_0}{6} \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 + \frac{Nz_0}{6} \cdot t_1 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \frac{Nz_0}{2} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \end{cases}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Ceci nous donne donc le système suivant à deux équations et deux inconnues ( $Nz_0$  et  $t_1$ ) :

$$\left\{ \begin{array}{l} Nz_0 = 2 \cdot \frac{Vz_{td} - Vz_0}{K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_1} \\ 0 = z_0 + Vz_0 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \\ \frac{1}{3} \cdot \frac{Vz_{td} - Vz_0}{K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_1} \cdot t_1 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \end{array} \right.$$

ou encore :

$$\left\{ \begin{array}{l} Nz_0 = 2 \cdot \frac{Vz_{td} - Vz_0}{K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_1} \\ 0 = z_0 \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + Vz_0 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) - \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 + \\ \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot t_1 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \end{array} \right.$$

Soit, en développant :

$$\left\{ \begin{array}{l} Nz_0 = 2 \cdot \frac{Vz_{td} - Vz_0}{K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_1} \\ 0 = z_0 \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + Vz_0 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot t_1 + Vz_0 \cdot K \cdot \left( \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot t_1^2 - \\ \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - \frac{2}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot t_1 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \\ \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot t_1 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot t_1 + (Vz_{td} - Vz_0) \cdot K \cdot \left( \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 \end{array} \right.$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Finalement, en simplifiant, on obtient :

$$\begin{cases} Nz_0 = 2 \cdot \frac{Vz_{td} - Vz_0}{K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_1} \\ 0 = z_0 \cdot \left( t_1 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) - \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot t_1^2 - \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - \\ \frac{1}{3} \cdot (Vz_{td} - Vz_0) \cdot t_1 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot t_1 + Vz_{td} \cdot K \cdot \left( \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 \end{cases}$$

La deuxième équation de ce système est une équation du second ordre en  $t_1$  qu'il est possible de résoudre. On peut toutefois constater qu'en imposant  $Nz_0$ , rien ne garantit qu'on conservera la deuxième équation...

## 6.4.2 Equations régissant la trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée »

### 6.4.2.1 Intégration des équations en facteur de charge

Afin de dégager un degré de liberté supplémentaire, on propose la forme de trajectoire (3.5.2.3.1.a). Les équations sont donc les suivantes :

- Pour  $Nz$  :
  - o  $0 < t < t_1$  :

$$Nz = Nz_1 \cdot \frac{t}{t_1}$$

- o  $t_1 < t < t_2$  :

$$Nz = Nz_1$$

- o  $t_2 < t < t_3$  :

$$Nz = Nz_1 \cdot \frac{t - t_3}{t_2 - t_3}$$

- o  $t_3 < t < t_f$  :

$$Nz = 0$$

- Pour  $Vz$  :
  - o  $0 < t < t_1$  :

$$Vz = Vz_0 + Nz_1 \cdot \frac{t^2}{2 \cdot t_1}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

- $t_1 < t < t_2$ :

$$Vz = Vz_0 + Nz_1 \cdot \frac{t_1}{2} + Nz_1 \cdot (t - t_1)$$

- $t_2 < t < t_3$ :

$$\begin{aligned} Vz &= Vz_0 + Nz_1 \cdot \frac{t_1}{2} + Nz_1 \cdot (t_2 - t_1) + Nz_1 \cdot \frac{t^2 - t_2^2}{2 \cdot (t_2 - t_3)} - Nz_1 \cdot t_3 \cdot \frac{t - t_2}{t_2 - t_3} \\ &= Vz_0 + Nz_1 \cdot \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) + Nz_1 \cdot \frac{t^2 - t_2^2}{2 \cdot (t_2 - t_3)} - Nz_1 \cdot t_3 \cdot \frac{t - t_2}{t_2 - t_3} \end{aligned}$$

- $t_3 < t < t_f$ :

$$\begin{aligned} Vz &= Vz_0 + Nz_1 \cdot \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) + Nz_1 \cdot \frac{t_3^2 - t_2^2}{2 \cdot (t_2 - t_3)} - Nz_1 \cdot t_3 \cdot \frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_3} \\ &= Vz_0 + Nz_1 \cdot \left( t_2 - \frac{t_1}{2} \right) - Nz_1 \cdot \frac{t_2 + t_3}{2} + Nz_1 \cdot t_3 \\ &= Vz_0 + Nz_1 \cdot \frac{t_2 + t_3 - t_1}{2} \end{aligned}$$

- Pour  $z$ :

- $0 < t < t_1$ :

$$z = z_0 + Vz_0 \cdot t + Nz_1 \cdot \frac{t^3}{6 \cdot t_1}$$

- $t_1 < t < t_2$ :

$$\begin{aligned} z &= z_0 + Vz_0 \cdot t_1 + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2}{6} + Vz_0 \cdot (t - t_1) + Nz_1 \cdot \frac{t \cdot t_1}{2} - Nz_1 \cdot \frac{t_1^2}{2} + Nz_1 \cdot \frac{(t - t_1)^2}{2} \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2}{6} + Nz_1 \cdot \frac{t \cdot t_1}{2} - Nz_1 \cdot \frac{t_1^2}{2} + Nz_1 \cdot \frac{t^2}{2} + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2}{2} - Nz_1 \cdot t \cdot t_1 \\ &= z_0 + Vz_0 \cdot t + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2}{6} + Nz_1 \cdot \frac{t^2}{2} - Nz_1 \cdot \frac{t \cdot t_1}{2} \end{aligned}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

○  $t_2 < t < t_3$ :

$$\begin{aligned}
 z &= z_0 + Vz_0.t_2 + Nz_1.\frac{t_1^2}{6} + Nz_1.\frac{t_2^2}{2} - Nz_1.\frac{t_2.t_1}{2} + Vz_0.(t-t_2) + Nz_1.\left(t_2 - \frac{t_1}{2}\right).(t-t_2) + \\
 & Nz_1.\frac{t^3 - t_2^3}{6.(t_2 - t_3)} - Nz_1.\frac{t_2^2.(t-t_2)}{2.(t_2 - t_3)} - Nz_1.t_3.\frac{(t-t_2)^2}{2.(t_2 - t_3)} \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1.\left(\frac{t_1^2}{6} + \frac{t_2^2}{2} - \frac{t_2.t_1}{2} + t.t_2 - t_2^2 - \frac{t.t_1}{2} + \right) + \\
 & Nz_1.\left(\frac{\frac{t^3}{2} - \frac{t_2^3}{6} - \frac{t.t_2^2}{6} + \frac{t_2^3}{2} - \frac{t^2.t_3}{2} - \frac{t_2^2.t_3}{2} + t.t_2.t_3}{t_2 - t_3}\right) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1.\left(\frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + t.t_2 - \frac{t.t_1}{2} + \frac{\frac{t^3}{6} + \frac{t_2^3}{3} - \frac{t.t_2^2}{2} - \frac{t^2.t_3}{2} - \frac{t_2^2.t_3}{2} + t.t_2.t_3}{t_2 - t_3}\right)
 \end{aligned}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

○  $t_3 < t < t_f$ :

$$\begin{aligned}
 z &= z_0 + Vz_0.t_3 + Nz_1 \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + t_3.t_2 - \frac{t_3.t_1}{2} + \frac{\frac{t_3^3}{6} + \frac{t_2^3}{3} - \frac{t_3.t_2^2}{2} - \frac{t_3^2.t_3}{2} - \frac{t_2^2.t_3}{2} + t_3.t_2.t_3}{t_2 - t_3} \right) + \\
 & Vz_0.(t - t_3) + Nz_1 \cdot \frac{t_2 + t_3 - t_1}{2} .(t - t_3) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1 \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + t_3.t_2 - \frac{t_3.t_1}{2} + \frac{\frac{t_2^3}{3} - t_3.t_2^2 - \frac{t_3^3}{3} + t_2.t_3^2}{t_2 - t_3} \right) + \\
 & Nz_1 \cdot \left( \frac{t.t_2}{2} - \frac{t_2.t_3}{2} + \frac{t.t_3}{2} - \frac{t_3^2}{2} - \frac{t.t_1}{2} + \frac{t_1.t_3}{2} \right) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1 \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_3.t_2}{2} + \frac{t.t_2}{2} + \frac{t.t_3}{2} - \frac{t_3^2}{2} - \frac{t.t_1}{2} + \frac{\frac{t_2^3}{3} - t_3.t_2^2 - \frac{t_3^3}{3} + t_2.t_3^2}{t_2 - t_3} \right) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1 \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_3.t_2}{2} + \frac{t.t_2}{2} + \frac{t.t_3}{2} - \frac{t_3^2}{2} - \frac{t.t_1}{2} + \frac{(t_2 - t_3)^2}{3} \right) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1 \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{2} + \frac{t_3.t_2}{2} + \frac{t.t_2}{2} + \frac{t.t_3}{2} - \frac{t_3^2}{2} - \frac{t.t_1}{2} + \frac{t_2^2}{3} + \frac{t_3^2}{3} - \frac{2.t_2.t_3}{3} \right) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1 \cdot \left( \frac{t_1^2}{6} - \frac{t_2^2}{6} - \frac{t_3^2}{6} - \frac{t_2.t_3}{6} + \frac{t.t_2}{2} + \frac{t.t_3}{2} - \frac{t.t_1}{2} \right) \\
 &= z_0 + Vz_0.t + Nz_1.t \cdot \frac{t_2 + t_3 - t_1}{2} + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2 - t_2^2 - t_3^2}{6} - Nz_1 \cdot \frac{t_2.t_3}{6}
 \end{aligned}$$

### 6.4.2.2 Définition des variables inconnues par exploitation des conditions aux limites

Par conditions aux limites, il vient :

$$\begin{cases} Vz_{id} = Vz_0 + Nz_1 \cdot \frac{t_2 + t_3 - t_1}{2} \\ 0 = z_0 + Vz_{id}.t_f + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2 - t_2^2 - t_2.t_3 - t_3^2}{6} \end{cases}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

D'après (37) et sachant que  $z_0$  est imposé et que  $t_3$  est imposé par la taille du plateau de  $V_z$  voulu en fin d'arrondi, soit  $t_3 = K.t_f$ , on a :

$$\begin{cases} V_{z_{td}} = V_{z_0} + Nz_1 \cdot \frac{t_2 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - t_1}{2} \\ 0 = z_0 + V_{z_{td}} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + Nz_1 \cdot \frac{t_1^2 - t_2^2 - t_2 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2}{6} \end{cases}$$

Ceci nous donne donc le système suivant à deux équations et deux inconnues ( $t_1$  et  $t_2$ ) :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} + t_2 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \\ 0 = z_0 + V_{z_{td}} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \\ Nz_1 \cdot \frac{\left( \frac{2 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} + t_2 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - t_2^2 - t_2 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2}{6} \end{cases}$$

ou encore :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} + t_2 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \\ 0 = z_0 + V_{z_{td}} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + Nz_1 \cdot \frac{\left( \frac{2 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} \right)^2 + t_2^2 + \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 + \frac{4 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}}) \cdot t_2}{Nz_1}}{6} \\ Nz_1 \cdot \frac{\frac{4 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + 2 \cdot t_2 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - t_2^2 - t_2 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2}{6} \end{cases}$$

Soit :

$$\begin{cases} t_1 = \frac{2 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} + t_2 + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \\ 0 = z_0 + V_{z_{td}} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \\ Nz_1 \cdot \frac{\left( \frac{2 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}}) \cdot t_2}{Nz_1} + \frac{4 \cdot (V_{z_0} - V_{z_{td}})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + t_2 \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}}{6} \end{cases}$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

On obtient donc  $t_1$  et  $t_2$  :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} + K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \\ \frac{6}{Nz_1} \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \\ \frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \\ t_2 = \frac{6}{Nz_1} \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \\ \frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \end{array} \right.$$

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{-2 \left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} + \frac{6}{Nz_1} \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}} + \\ \frac{\left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} - \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \\ t_2 = \frac{\frac{6}{Nz_1} \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \end{array} \right.$$

Ce qui se simplifie comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} t_1 = \frac{- \left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 - 2.K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \frac{(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} - \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 + \frac{6}{Nz_1} \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \\ t_2 = \frac{\frac{6}{Nz_1} \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \left( \frac{2.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4.(Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}}{\frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \end{array} \right.$$

### 6.4.2.3 Contraintes pour le respect des règles de causalité

On veut ici s'assurer qu'on a bien toujours  $0 < t_1 < t_2 < t_3$ .

#### 6.4.2.3.1 $t_1 < t_2$

Pour assurer cette condition, il faut :

$$\frac{2.(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1} + K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} < 0$$

Soit :

$$Nz_1 < \frac{2.(Vz_{td} - Vz_0)}{K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}}$$

#### 6.4.2.3.2 $0 < t_1$

On veut s'assurer que :

$$0 < \frac{-\left(\frac{2.(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1}\right)^2 - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \frac{(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1} - \left(K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}\right)^2 + \frac{6}{Nz_1} \cdot \left(z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}\right)}{4.(Vz_{td} - Vz_0) - K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}}$$

En développant les calculs, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < -\left(\frac{2.(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1}\right)^2 - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \frac{(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1} - \left(K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}\right)^2 + \frac{6}{Nz_1} \cdot \left(z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}\right) \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ \quad \quad \quad \frac{4.(Vz_{td} - Vz_0)}{Nz_1} - K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} > 0 \\ \quad \quad \quad \text{ou} \\ 0 > -\left(\frac{2.(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1}\right)^2 - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot \frac{(Vz_0 - Vz_{td})}{Nz_1} - \left(K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}\right)^2 + \frac{6}{Nz_1} \cdot \left(z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}\right) \\ \quad \quad \quad \text{et} \\ \quad \quad \quad \frac{4.(Vz_{td} - Vz_0)}{Nz_1} - K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} < 0 \end{array} \right.$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Soit :

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < -2.(Vz_0 - Vz_{id})^2 - \left( K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 . Nz_1^2 + \\ \left( 6. \left( z_0 + Vz_{id} . \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} . (Vz_0 - Vz_{id}) \right) . Nz_1 \\ \text{et} \\ Nz_1 < \frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \\ \text{ou} \\ 0 > -2.(Vz_0 - Vz_{id})^2 - \left( K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 . Nz_1^2 + \\ \left( 6. \left( z_0 + Vz_{id} . \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} . (Vz_0 - Vz_{id}) \right) . Nz_1 \\ \text{et} \\ Nz_1 > \frac{4.(Vz_{id} - Vz_0)}{K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \end{array} \right.$$

D'après la condition sur  $t_2 > t_1$ , la deuxième possibilité est toujours fausse. On peut donc résumer les conditions  $0 < t_1 < t_2$  comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_1 = \left( 6. \left( z_0 + Vz_{id} . \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} . (Vz_0 - Vz_{id}) \right)^2 - 4.(2.(Vz_0 - Vz_{id}))^2 . \left( K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 > 0 \\ \text{et} \\ Nz_1 \in \left[ \frac{\left( 6. \left( z_0 + Vz_{id} . \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) - 2.K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} . (Vz_0 - Vz_{id}) \right) \pm \sqrt{\Delta_1}}{2. \left( K. \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2} \right] \\ \text{et} \\ Nz_1 < \frac{2.(Vz_{id} - Vz_0)}{K. \frac{D_{flare}}{Vx_0}} \end{array} \right.$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Ensuite, on peut exprimer  $K$  par la contrainte sur  $\Delta_l$  de la manière suivante :

$$-3.K^2 \left( 2 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \right)^2 + \left( 6 \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \right)^2 - 24.K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) > 0$$

Ce qui nous donne :

$$\Delta_{K_1} = \left( 24 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \right)^2 + 12 \cdot \left( 2 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \right)^2 \cdot \left( 6 \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \right)^2 > 0$$

Cette contrainte étant toujours vérifiée, on a :

$$K \in \left[ -\frac{24 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \pm \sqrt{\Delta_{K_1}}}{6 \cdot \left( 2 \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \right)^2} \right]$$

### 6.4.2.3.3 $t_2 < t_3$

Cette dernière condition s'exprime comme suit :

$$\frac{\frac{6}{Nz_1} \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \left( \frac{2 \cdot (Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{4 \cdot (Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}}{\frac{4 \cdot (Vz_{id} - Vz_0)}{Nz_1} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0}} - K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} < 0$$

Soit :

$$\frac{6}{Nz_1} \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + \left( \frac{2 \cdot (Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \right)^2 + \frac{8 \cdot (Vz_0 - Vz_{id})}{Nz_1} \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} + \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 < 0$$

Si les contraintes précédemment citées sont vérifiées. Ceci peut alors s'écrire :

$$(2 \cdot (Vz_0 - Vz_{id}))^2 + Nz_1 \cdot \left( 6 \cdot \left( z_0 + Vz_{id} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + 8 \cdot (Vz_0 - Vz_{id}) \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + Nz_1^2 \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 < 0$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

Ceci se traduit par la double contrainte suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta_2 = \left( 6 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + 8 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - 4 \cdot (2 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}))^2 \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 > 0 \\ \text{et} \\ Nz_1 \in \left[ - \frac{\left( 6 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + 8 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \pm \sqrt{\Delta_2}}{2 \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2} \right] \end{array} \right.$$

Ici aussi, la condition de positivité sur  $\Delta_2$  implique une condition sur  $K$  :

$$\left( 6 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) + 8 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - 4 \cdot (2 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}))^2 \cdot \left( K \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 > 0$$

équivalent à :

$$K^2 \cdot \left( 4 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 + \left( 96 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \cdot K + \left( 6 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \right)^2 > 0$$

Le discriminant de cette expression vaut :

$$\Delta_{K_2} = \left( 96 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 - 4 \cdot \left( 4 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2 \cdot \left( 6 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \right)^2$$

Si son signe est négatif, on n'a aucun condition résultante sur  $K$ . Dans le cas contraire, on a :

$$K \notin \left[ - \frac{\left( 96 \left( z_0 + Vz_{td} \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right) \pm \sqrt{\Delta_{K_2}}}{2 \cdot \left( 4 \cdot (Vz_0 - Vz_{td}) \cdot \frac{D_{flare}}{Vx_0} \right)^2} \right]$$

Par rapport à la simple rampe, l'avantage de la double rampe est la plus grande simplicité de résolution (deux équations d'ordre un à deux inconnues). Toutes nos exigences sont aussi respectées.

## 6.5 Premiers travaux sur le longitudinal

### 6.5.1 Introduction

Au début de cette thèse un premier travail exploratoire a été mené pour comprendre et mettre en avant les phénomènes de la dynamique du vol. Ces travaux ont été mis en œuvre sur l'axe longitudinal et ont apporté de nombreux enseignements. Ils sont à la fois trop éloignés du résultat final pour les intégrer au corps du mémoire et suffisamment intéressants à notre avis pour figurer ici en annexe. Cette partie couvre à la fois les aspects commande de vol (§3.3) et pilotage automatique / autopoussée (§3.4).

### 6.5.2 Principes de base

Au tout début de notre étude, nous avons choisi de commander directement l'avion complet par l'intermédiaire des spoilers, de la gouverne de profondeur, et des moteurs. Bien que les modèles dont nous disposions n'étaient pas aussi fiables qu'aujourd'hui, de premières conclusions intéressantes ont pu être tirées. La loi de commande dont nous montrons les résultats correspond à l'asservissement des variables suivantes :

$$\begin{bmatrix} d^{(d_d)} \\ \theta^{(d_\theta)} \\ h^{(d_h)} \end{bmatrix} = F_2(X, \Theta) + G_2(X, \Theta).U$$

La phase de vol concernée est l'arrondi. Les équations utilisées pour l'inversion ne sont pas présentées.

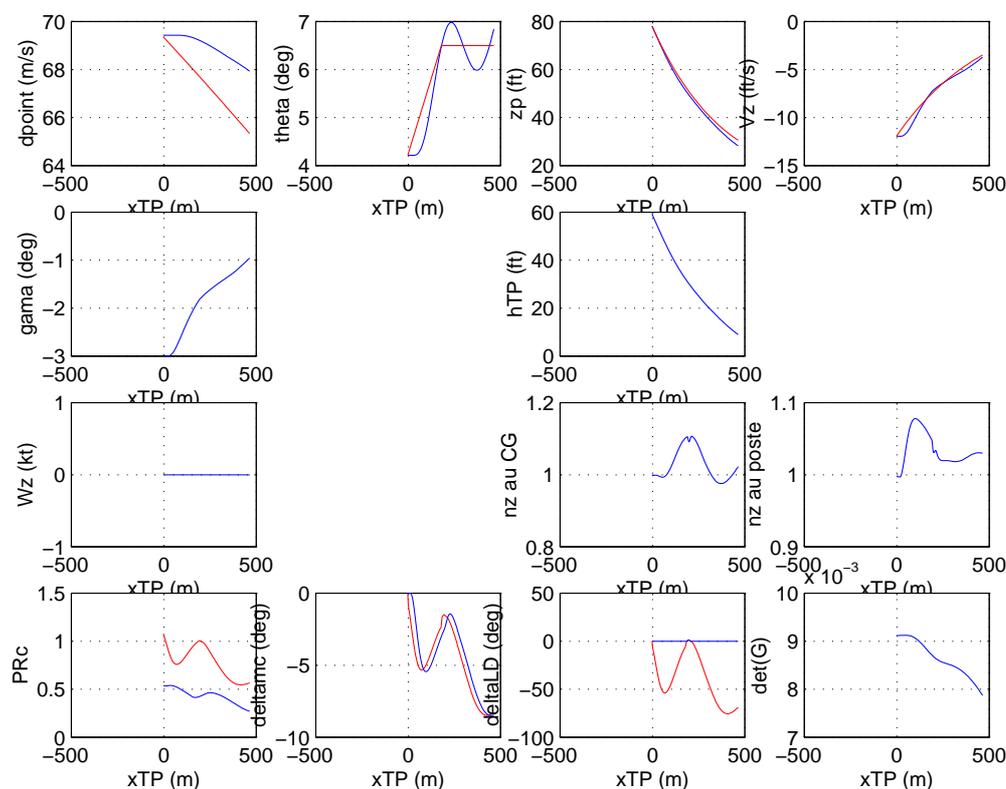
#### 6.5.2.1 Résultats

Les résultats présentés dans cette partie ont été obtenus en utilisant OSMATLAB, c'est-à-dire un noyau mécanique du vol tiré d'OSMA et des dynamiques actionneurs simplifiées. Les valeurs commandées sont tracées en rouge et les valeurs observées en bleu. L'abscisse est graduée en secondes. On peut noter que la hauteur prise aux trains principaux (*hTP*) converge vers dix pieds et non vers zéro suite à un décalage de dix pieds de la trajectoire. On s'affranchit ainsi d'une mauvaise modélisation du contact avec le sol par le modèle de simulation.

Les variables observées sont les suivantes :

- *dpoint* : la vitesse-sol
- *thêta* : l'assiette
- *zp* : l'altitude du centre de gravité de l'avion
- *Vz* : la vitesse ascensionnelle
- *Gama* : la pente aérodynamique
- *HTP* : la hauteur du train principal par rapport à la piste
- *Nz* : le facteur de charge pris à divers points de l'avion
- *PRc* : la poussée réduite commandée
- *Deltam* : le braquage de la gouverne de profondeur
- *DeltaLD* : le braquage des spoilers
- *Det(G)* le déterminant de la matrice inversée.

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport



### 6.5.2.1.a : Résultats de simulation

Sur la première ligne, on peut observer un écart sensible par rapport aux objectifs. Il est dû au manque de puissance des moteurs que l'inversion essaie de compenser par un braquage négatif des spoilers (impossible!). Cela signifie concrètement que cet arrondi, qui suit relativement bien sa courbe de hauteur commandée, (paramètre de sécurité le plus important) est identique au cas où il serait effectué avec moteurs et spoilers en panne. Il ne reste donc plus qu'une commande disponible sur les trois ! A la lumière de ces informations, on comprend pourquoi ces résultats rendent optimistes : ils sont loin d'être catastrophiques pour une telle situation.

L'erreur négative de hauteur (légère) est due au manque de poussée, d'où le fait que l'avion s'enfonce. En ce qui concerne l'assiette longitudinale, la prise d'assiette est bonne et le rendu de main en milieu de courbe est suffisamment léger pour être accepté par un pilote (le  $Nz$  au poste reste supérieur à 1). Quant à la trop forte valeur de vitesse, elle est due à la neutralisation des spoilers qui ne peuvent être utilisés en tant qu'aérofreins.

Sur la dernière ligne, on peut observer l'offset entre la poussée commandée et celle obtenue. Pour la gouverne de profondeur, on voit très nettement le retard gouverne. Quant au déterminant de l'inversion, il ne change pas de signe donc il n'y a pas de risque de déstabilisation ici.

## 6.5.2.2 Enseignements

Il est clair que nous avons voulu trop faire d'un seul coup dans ce premier jet de loi. On s'expose ainsi à la saturation de gouvernes qui sont utilisées car l'inversion ne « connaît » pas les intervalles d'utilisation des gouvernes. Il apparaît, à la lumière de cet exemple, que comme dans toutes les disciplines de l'automatique, un minimum d'analyse du système à commander est nécessaire si l'on veut atteindre de bonnes performances.

Pour cela, on peut remarquer que certaines dynamiques sont découplées en fréquence. D'après le principe des perturbations singulières, on peut alors les inverser séparément. En particulier, la dynamique de la vitesse de tangage, de la vitesse aérodynamique et celle de la pente sont découplées. Par ailleurs, des actionneurs privilégiés

## **Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes** **Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

existent pour chacune de ces variables avec un temps de réponse compatible avec la commande de celles-ci (moteurs pour la vitesse et gouverne de profondeur pour  $q$ ).

Ainsi, par design, l'avion possède des gouvernes permettant un premier découplage approximatif entre ses dynamiques. Le fait de vouloir commander tout le système de manière multivariable et avec toutes les gouvernes représente dans ce cas un pas en arrière en terme de découplage par rapport à l'avion naturel.

Fort de cette expérience, on a essayé dans la suite de cette étude de découper le système de différentes manières afin de rentabiliser les efforts produits lors du dimensionnement de l'avion.

Pour imager les constatations précédentes de manière naïve mais relativement représentative de la démarche suivie, on peut parler du suivi de vitesse aérodynamique. On sait que les spoilers sont très efficaces pour le contrôle de la vitesse : c'est la fonction aérofrein. Néanmoins il est clair qu'il n'est jamais venu à l'idée de personne de commander directement la vitesse d'un avion de ligne par le seul intermédiaire des aérofreins. En effet, ce ne sont pas les aérofreins qui meuvent l'avion mais bien les moteurs. Par ailleurs, il est dommage d'utiliser les spoilers, dont la dynamique est relativement rapide, pour contrôler la vitesse aérodynamique, dont la dynamique désirée est relativement lente : autant conserver ces bonnes propriétés pour le contrôle de variables dont la dynamique désirée est plus rapide (facteur de charge par exemple).

Inversement, on sait que la poussée des moteurs a un fort impact sur la vitesse de tangage de l'avion. Là aussi, la première idée d'un concepteur de lois de commande pour un avion de transport civil qui souhaite commander l'attitude de l'avion n'est pas de le faire par le seul biais des moteurs. Ceux-ci ne sont en effet pas assez rapides et la gouverne de profondeur a justement été inventée à cette fin ...

Ainsi, l'inversion de la dynamique multivariable optimise la répartition des ordres à donner en fonction de l'efficacité supposée de chaque gouverne et uniquement en fonction de ce critère. Elle ignore tout concept de plage de fonctionnement d'une gouverne. Il y a donc à la fois un grand intérêt et des limites non négligeables à l'inversion multivariable d'un système complet. C'est pourquoi nous avons choisi une approche mixte.

### 6.5.3 Synthèse d'une première autopoussée

La dynamique de la vitesse étant suffisamment ségréguée des autres dynamiques longitudinales et les moteurs étant identifiés comme actionneurs privilégiés pour le contrôle de la vitesse, la première loi de commande longitudinale qui vient à l'esprit correspond à l'autopoussée. La synthèse de l'autopoussée s'appuie sur l'inversion de l'équation de la vitesse :

$$\dot{V} = \frac{T \cdot \cos(\alpha)}{m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x - g \cdot \sin(\gamma)$$

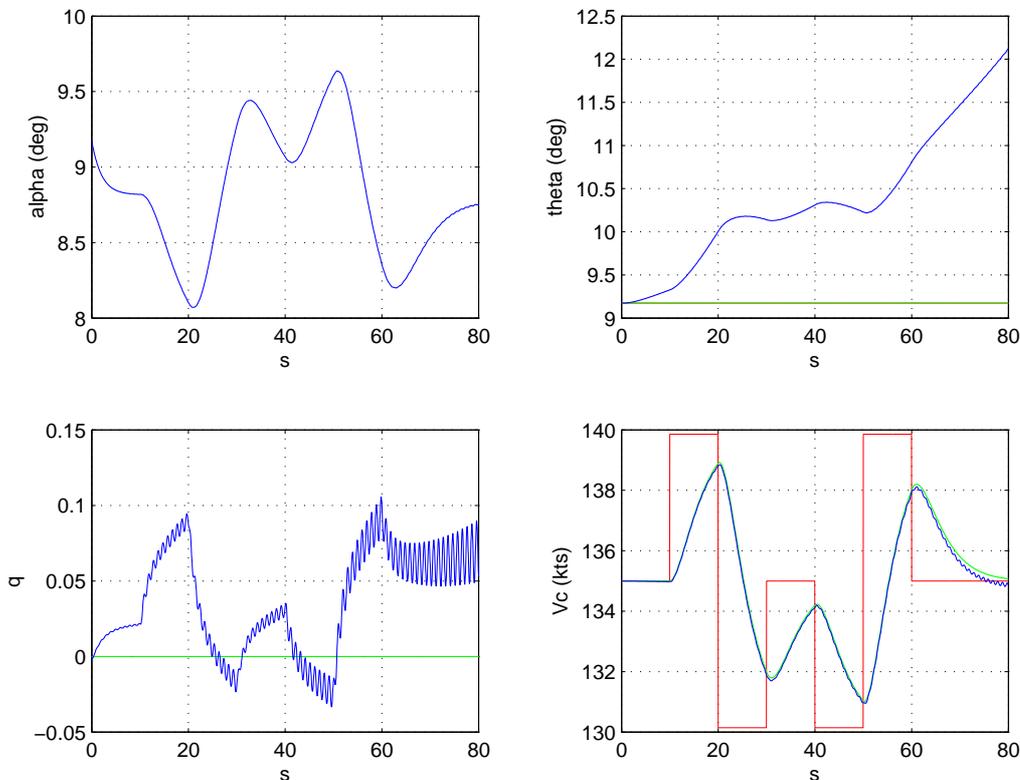
La dynamique de la poussée est difficilement négligeable. Si on la modélise par un premier ordre de constante de temps  $\tau_r=2$  secondes, cette équation devient :

$$\dot{V} = \frac{(T_c - \tau_r \cdot \dot{T}) \cdot \cos(\alpha)}{m} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x - g \cdot \sin(\gamma)$$

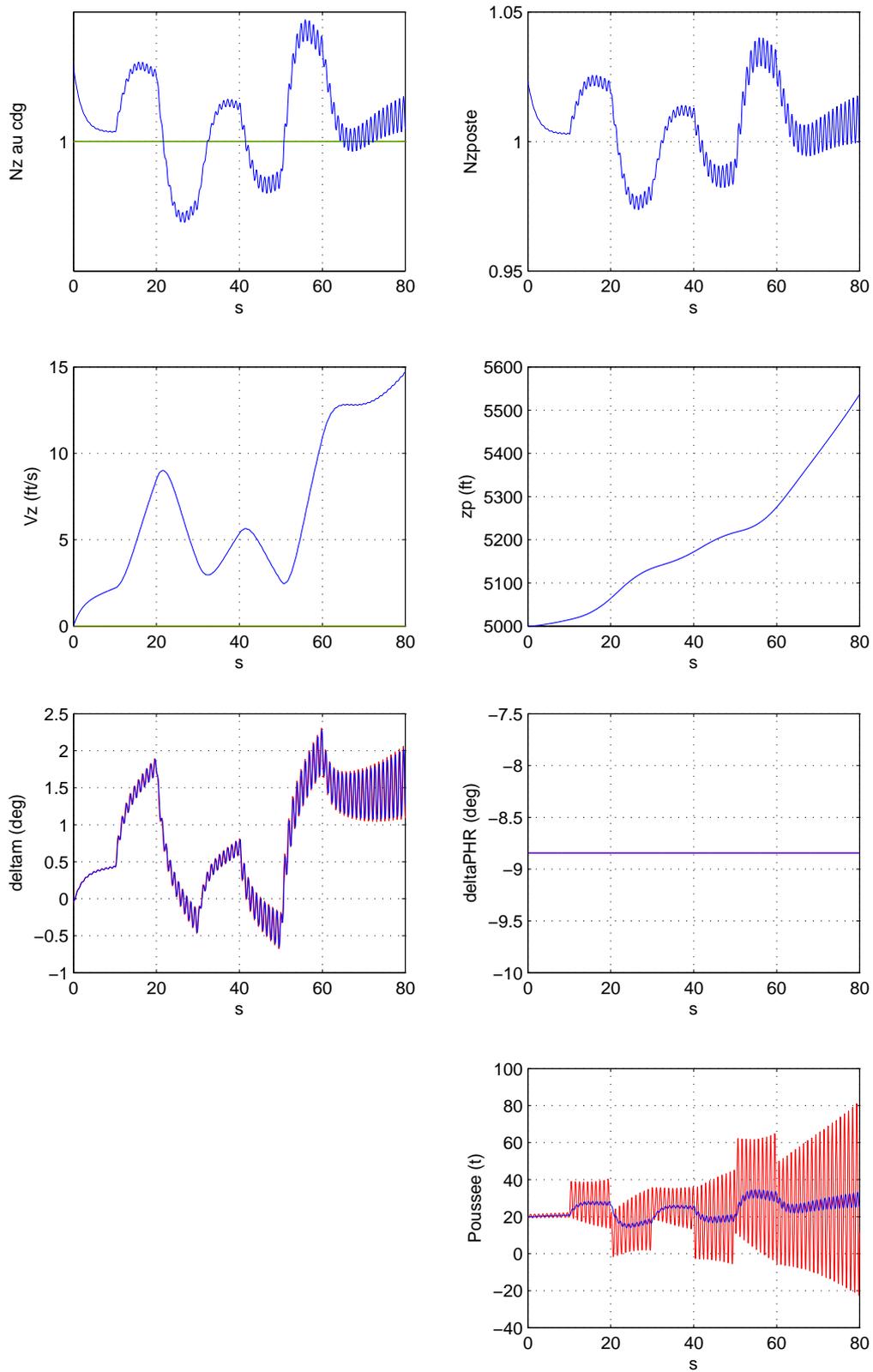
En inversant cette dynamique, on obtient le retour d'état suivant :

$$T_c = \frac{m \cdot v + \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot C_x + m \cdot g \cdot \sin(\gamma)}{\cos(\alpha + \tau)} + \tau_r \cdot \dot{T}$$

Le correcteur linéaire en amont de l'inversion est un deuxième ordre de pulsation 0.3 rad/s et d'amortissement 1. Le résultat est une certaine instabilité :



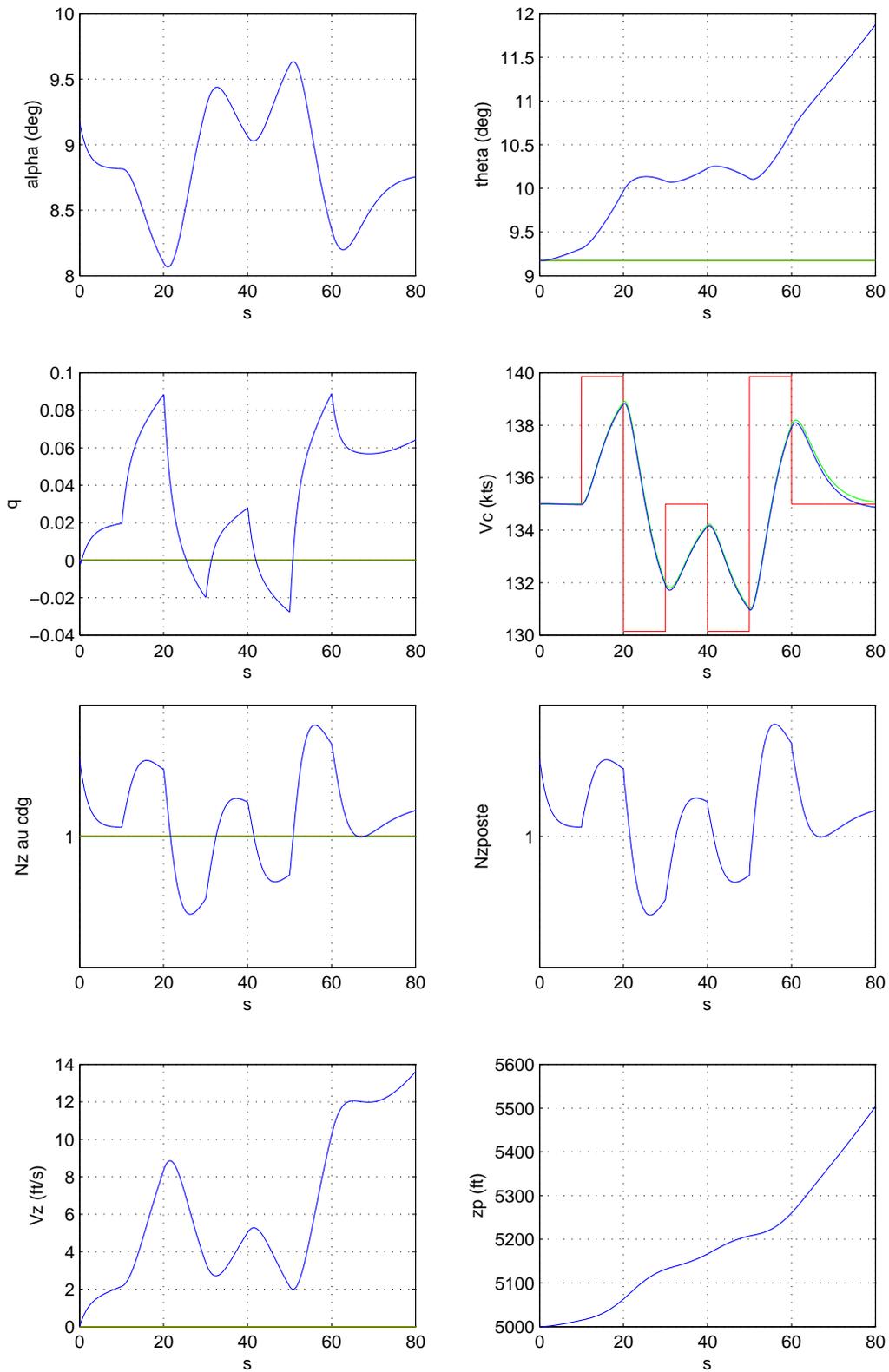
**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



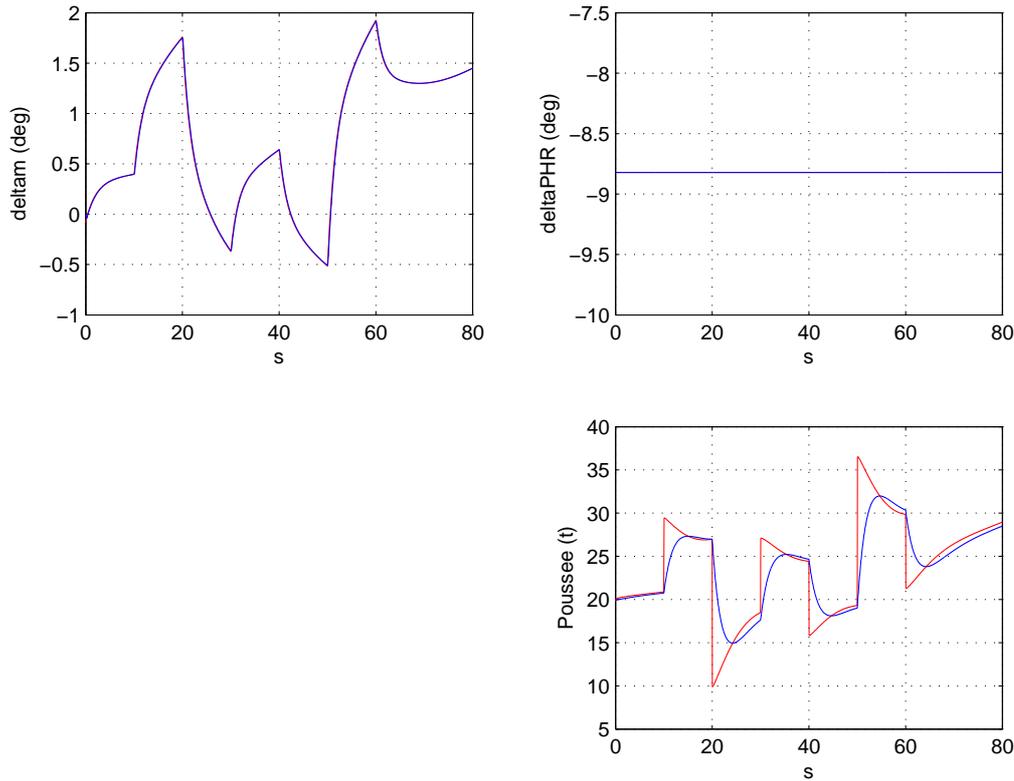
*6.5.3.1.a : Simulation d'une autopoussée prenant en compte la dérivée de la poussée*

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Si on remplace le retour en dérivée de poussée par un retour en dérivée de poussée commandée (qui est moins bruitée et facilement accessible), on stabilise le tout comme suit :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*6.5.3.b : Simulation d'une autopoussée prenant en compte la dérivée de poussée commandée*

Ces résultats sont excellents compte tenu de la forte variation de pente subie par l'avion. Toutefois, il faut préciser que le modèle de dynamique moteur pris en compte dans cette simulation est du premier ordre avec un temps de réponse constant. Ceci est représentatif en première approximation mais la dynamique réelle du moteur est tellement non-linéaire qu'on peut difficilement tirer des conclusions sur le réel comportement d'une telle autopoussée.

En plus du modèle de transfert statique entre la poussée et le paramètre de conduite (que nous possédons déjà grâce à ResOsma), il est nécessaire de posséder un modèle précis de la dynamique des moteurs, autant pour la simulation que pour la commande. Un travail important est en cours sur le sujet et permettra certainement d'améliorer la confiance que nous pouvons avoir dans cette loi.

En attendant ces résultats, l'autopoussée a été conservée pour tenir la vitesse dans toutes les simulations qui suivent avec des performances très satisfaisantes.

## 6.5.4 Loi en vitesse de tangage ( $q$ )

### 6.5.4.1 Principes de base

C'est la première loi qui vient à l'esprit lorsqu'on souhaite faire tanguer l'avion. Elle provient de l'inversion de la dynamique suivante :

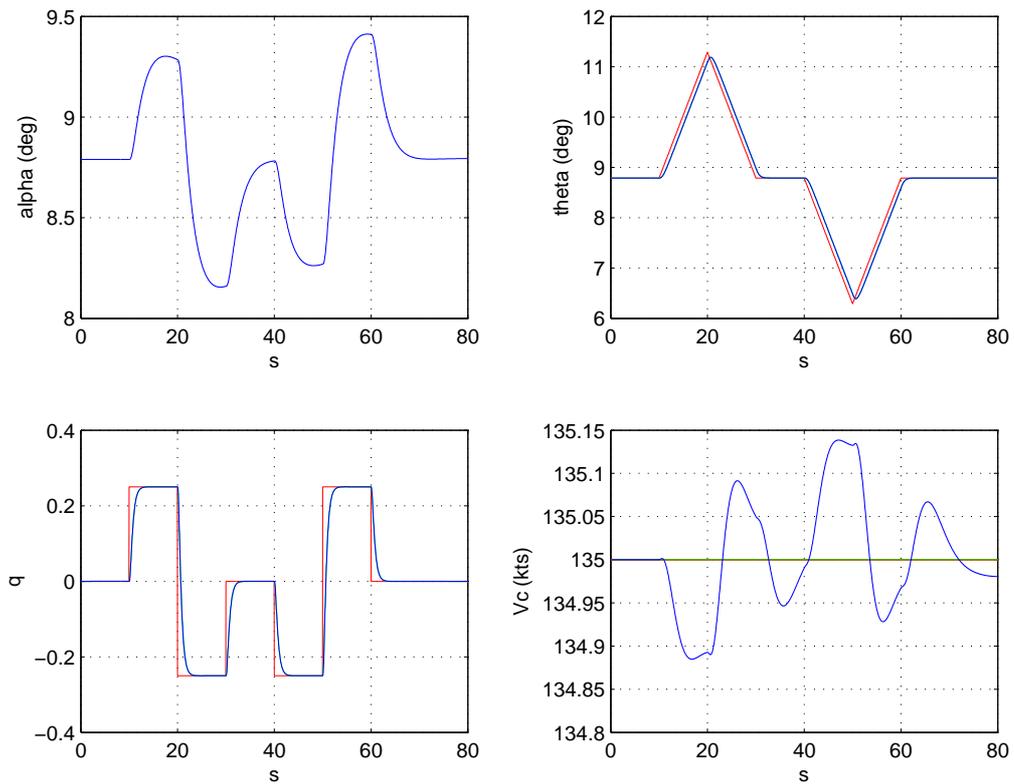
$$\dot{q} = \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot C_m(\delta m_{ref}) + \frac{1}{I_y} \cdot T \cdot b \cdot \cos(\tau) + \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot C_{m_{\delta m}}(\delta m_{ref}) \cdot (\delta m - \delta m_{ref})$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

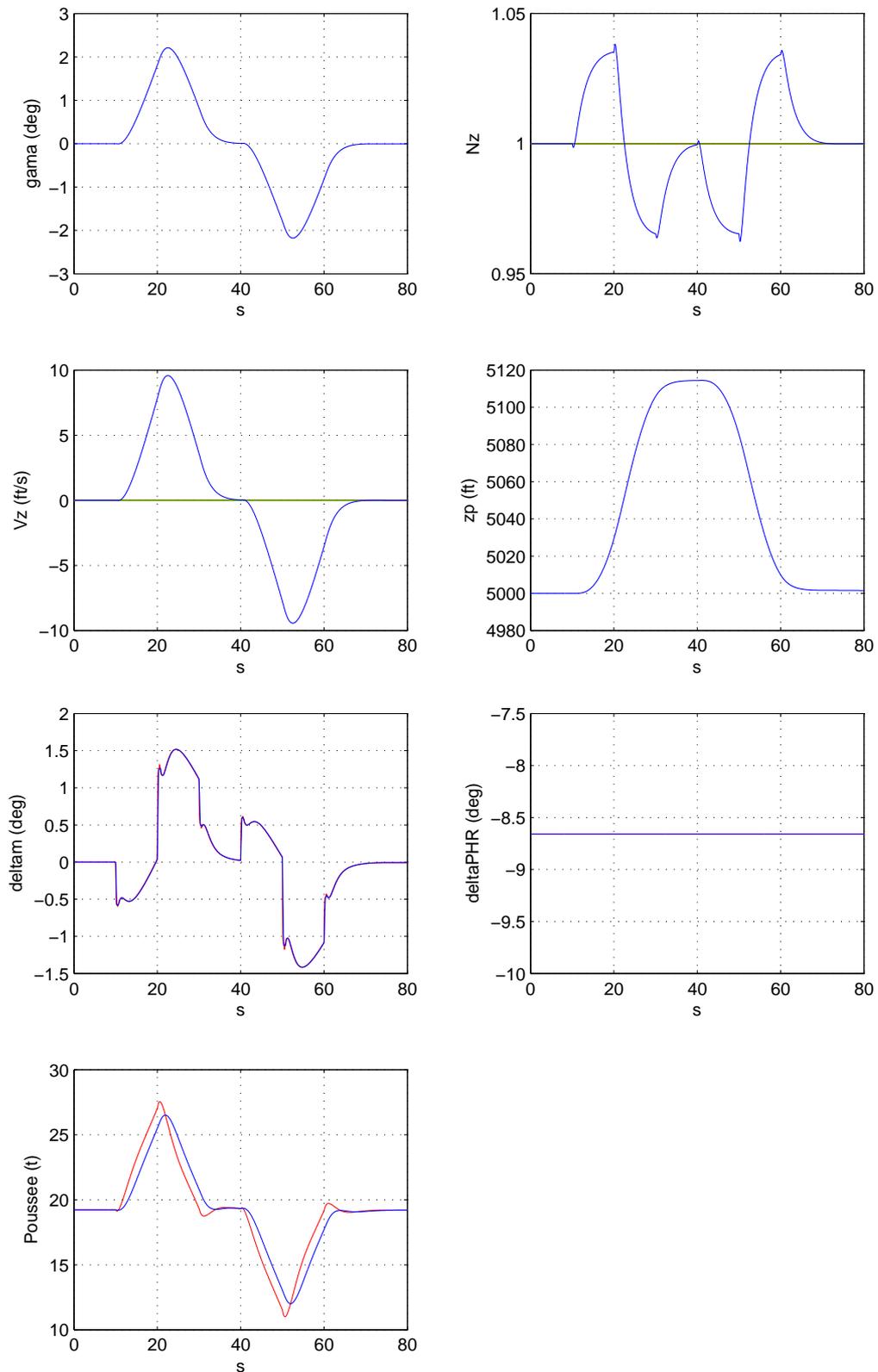
On synthétise le retour d'état suivant :

$$\delta m = \frac{v - \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot C_m - \frac{1}{I_y} \cdot T \cdot b \cdot \cos(\tau)}{\frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot C_{m_{\delta m}}} + \delta m_{ref}$$

Ensuite, on corrige ce système par un deuxième ordre de pulsation 2.5 rad/s et d'amortissement 1. Les résultats sont les suivants :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*6.5.4.1.a : Simulation d'une loi de tangage non-linéaire inverse*

On remarque que cette loi est très dynamique. Elle exploite pleinement les capacités de l'actionneur qui commencerait à osciller à partir de 3 rad/s. Les résultats sont bons. La loi en  $q$  paraît être une très bonne loi manuelle.

Il reste maintenant étudier l'interaction de cette loi avec les lois de commande en trajectoire (grande boucle).

## 6.5.4.2 Etude des grandes boucles

Les grandes boucles longitudinales sont soit homogènes à la pente aérodynamique  $\gamma$  (c'est le cas des modes Flight Path Angle et Vertical Speed), soit homogènes à sa dérivée (cas du  $Nz$ ).

### 6.5.4.2.1 Synthèse d'une loi en facteur de charge

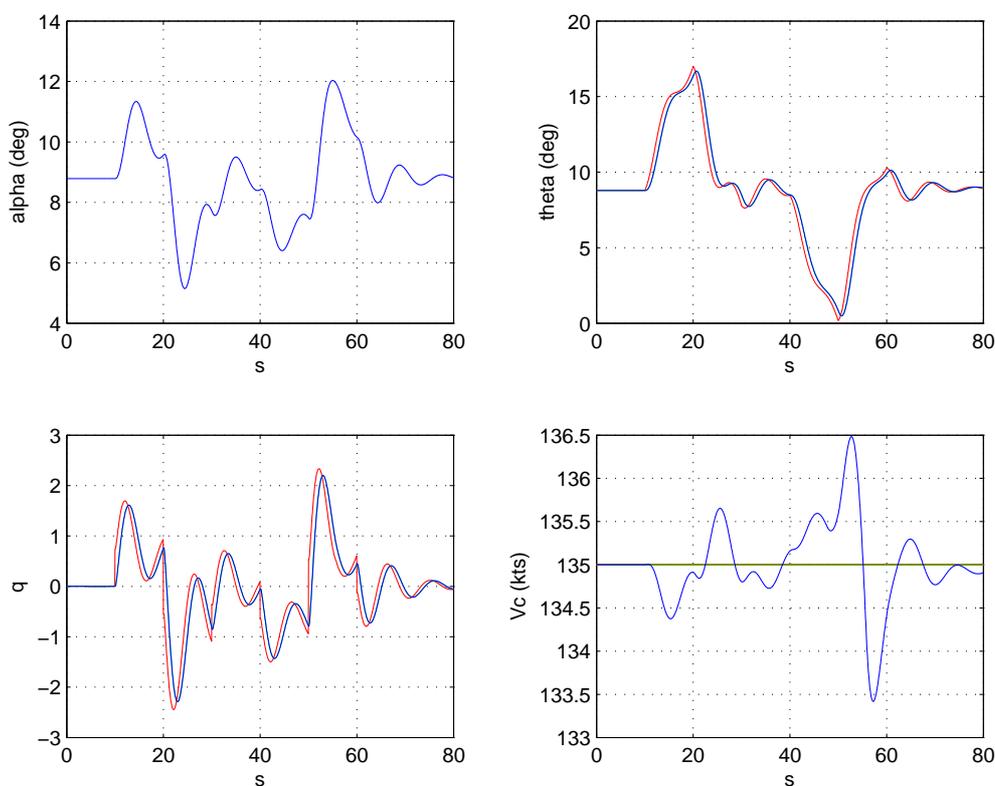
On dispose d'une bonne loi en  $q$ . Or l'expression du facteur de charge est la suivante :

$$Nz = \frac{V \cdot \dot{\gamma}}{g} = V \cdot \frac{q - \dot{\alpha}}{g}$$

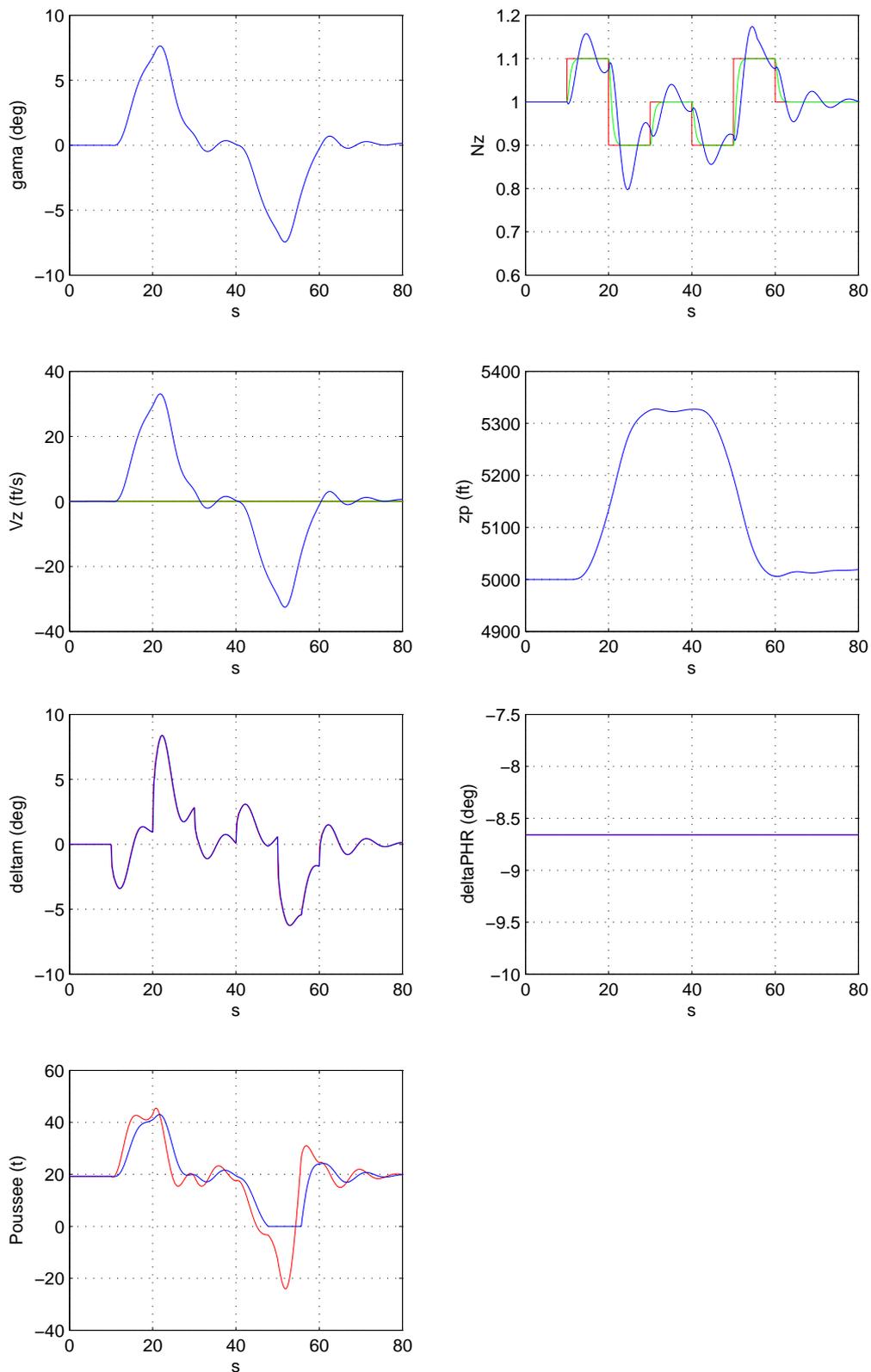
On peut donc dire que :

$$q_c = \frac{g \cdot Nz_c}{V} + \dot{\alpha}$$

Les résultats de cette loi sont présentés ci-dessous :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*6.5.4.2.1.a : Simulation d'une loi en facteur de charge basée sur une loi en tangage et avec un retour en dérivée d'incidence*

Ces résultats sont mauvais. Néanmoins, on pourrait espérer les améliorer en créant un correcteur linéaire plus lent en  $N_z$ , par exemple un premier ordre de constante de temps 5/3.

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

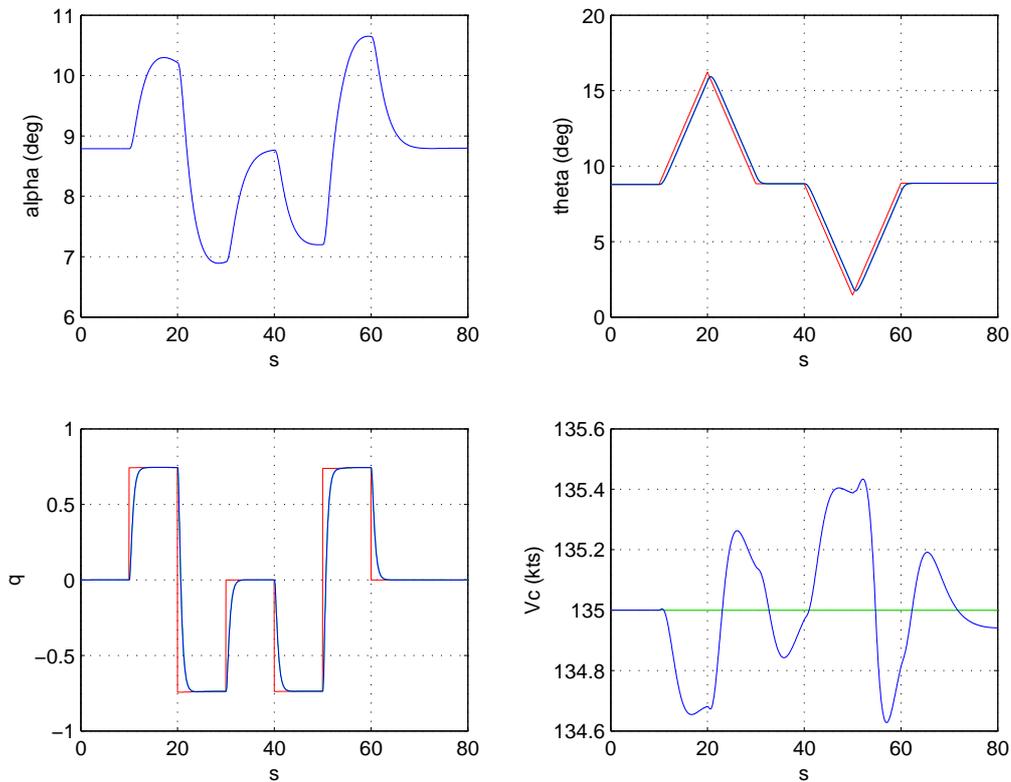
On aurait alors :

$$q_c = \frac{g}{V} \cdot \int \frac{Nz_c - Nz}{\tau} + \dot{\alpha}$$

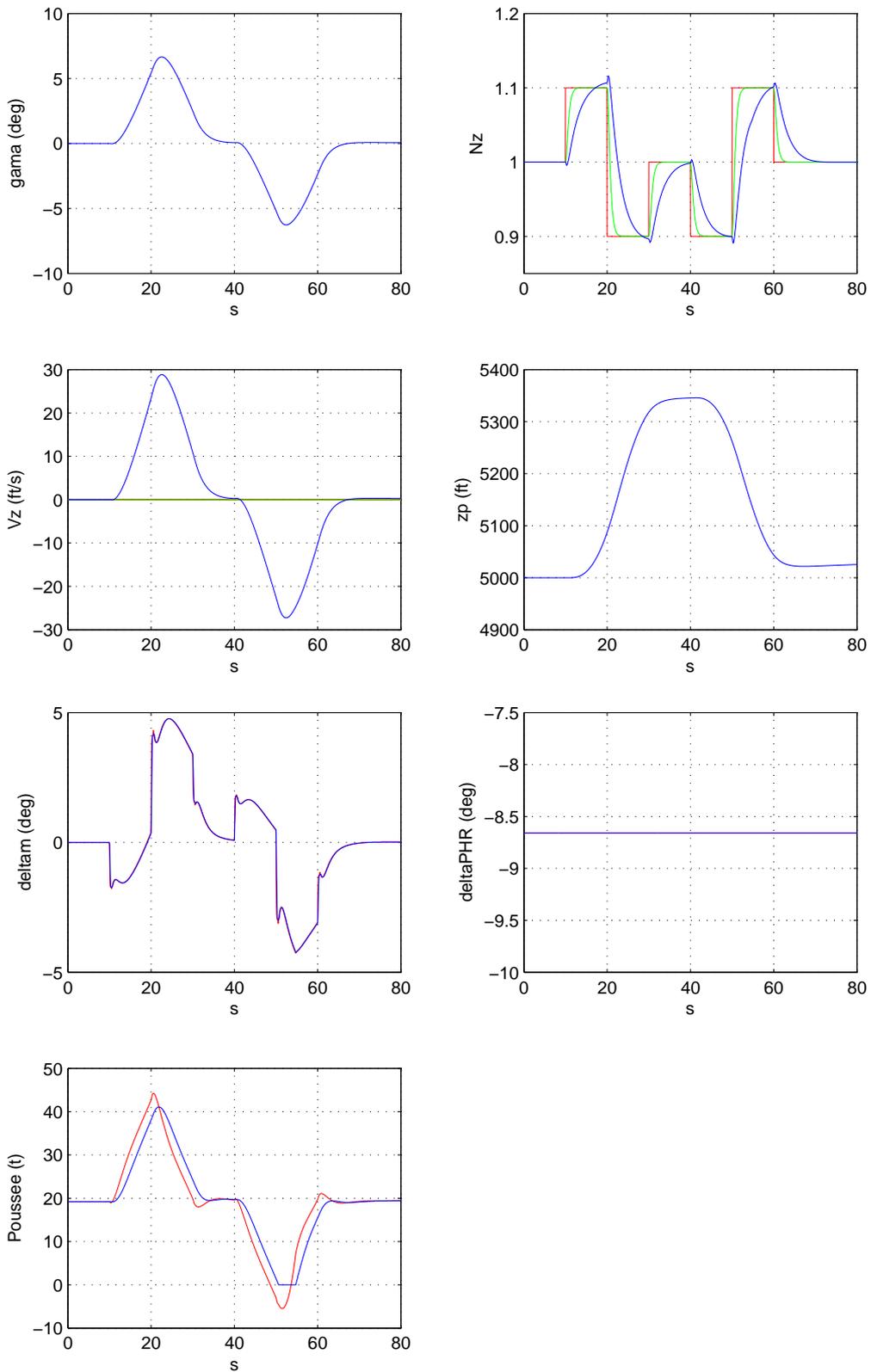
Mais cette loi de commande diverge aussi... En désespoir de cause, on peut toujours essayer de considérer que :

$$Nz = \frac{V \cdot \dot{\gamma}}{g} \approx \frac{V}{g} \cdot q$$

Les résultats de cette loi sont alors proches de ce que l'on peut trouver sur un avion de type A340-300 :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

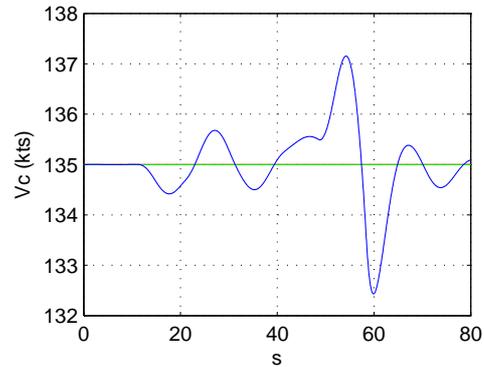
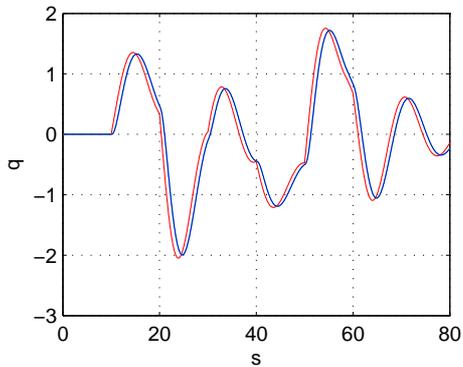
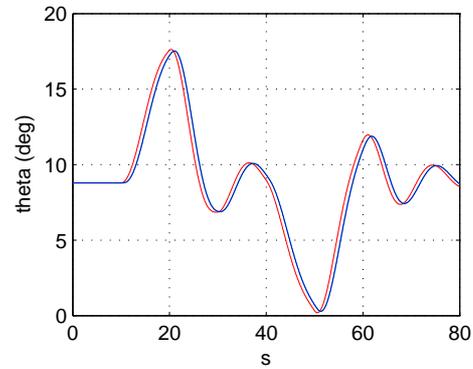
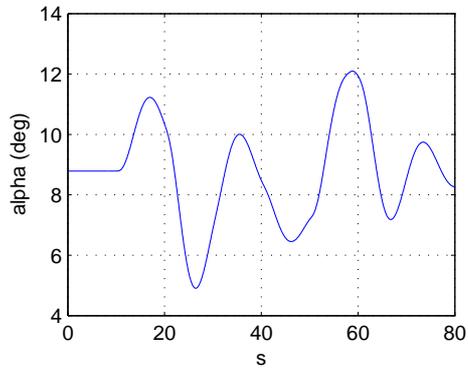


*6.5.4.2.1.b : Simulation d'une loi en facteur de charge simplifiée basée proportionnellement sur une loi en tangage*

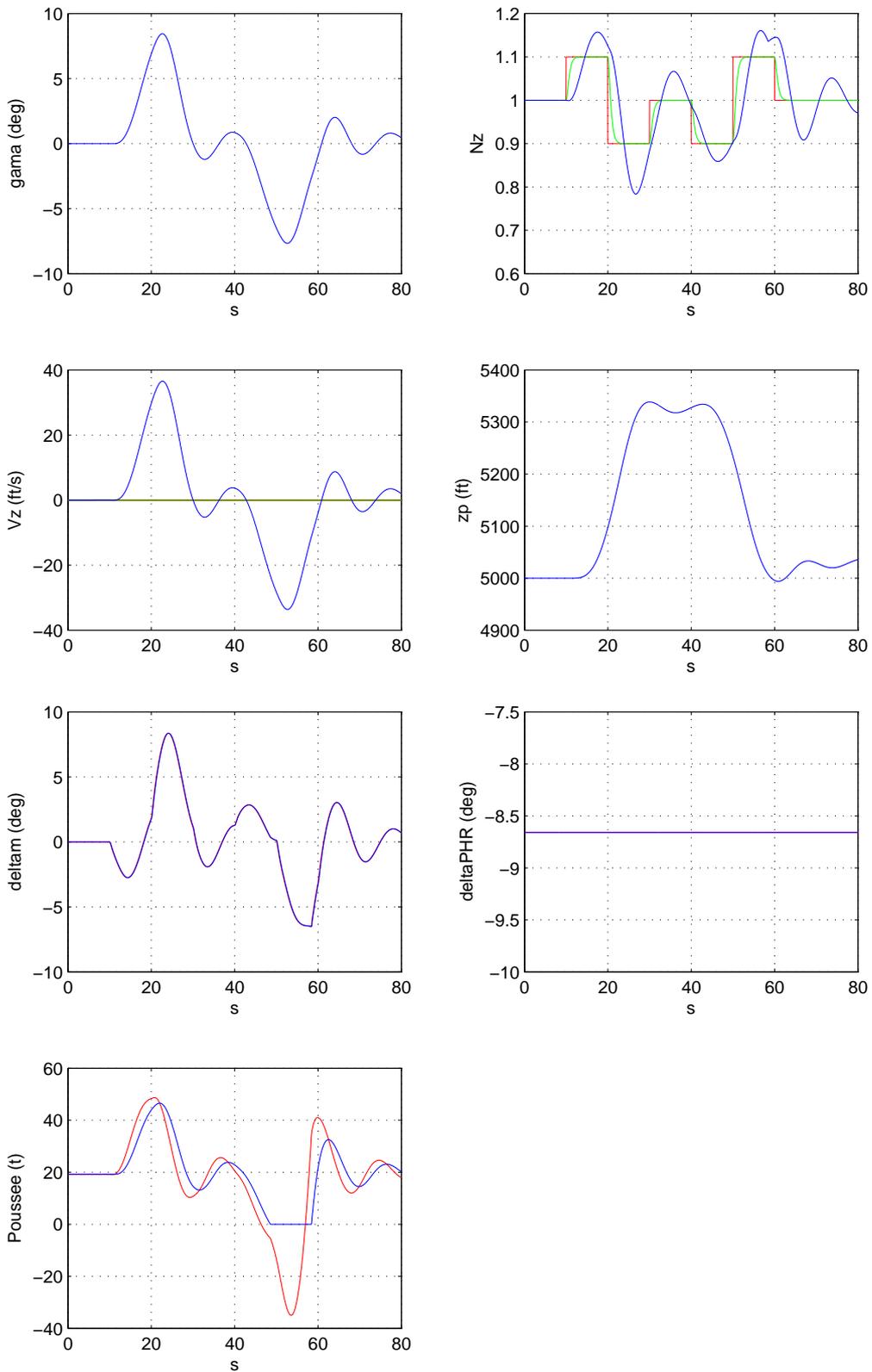
## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

Cette solution est intéressante bien qu'elle revienne à une commande qualitative en  $Nz$ . En particulier, il est difficile de déterminer le temps de réponse ou le dépassement en facteur de charge, ce qui est ennuyeux dans le cas des protections.

On pourrait, comme précédemment, essayer d'intégrer l'erreur en  $Nz$  de manière à avoir de meilleures performances. Toutefois, les résultats sont décevants, comme on peut le voir ci dessous :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



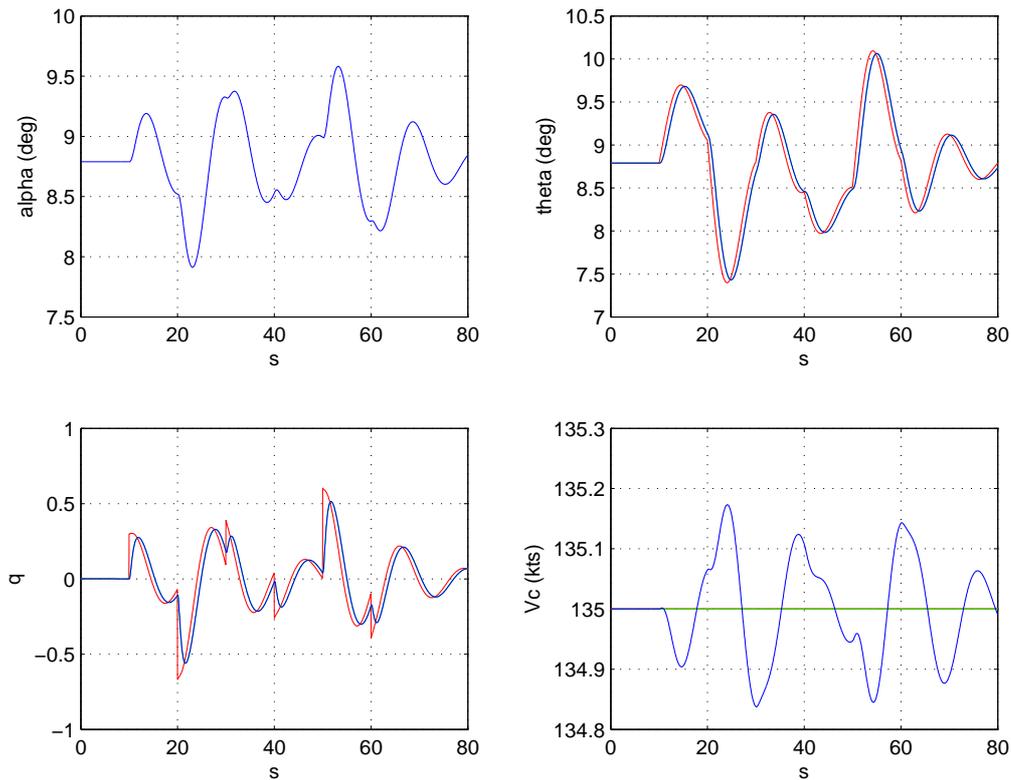
*6.5.4.2.1.b : Simulation d'une loi en facteur de charge simplifiée basée proportionnellement sur une loi en tangage avec adjonction d'un intégrateur de précision*

### 6.5.4.2 Synthèse d'une loi en pente aérodynamique

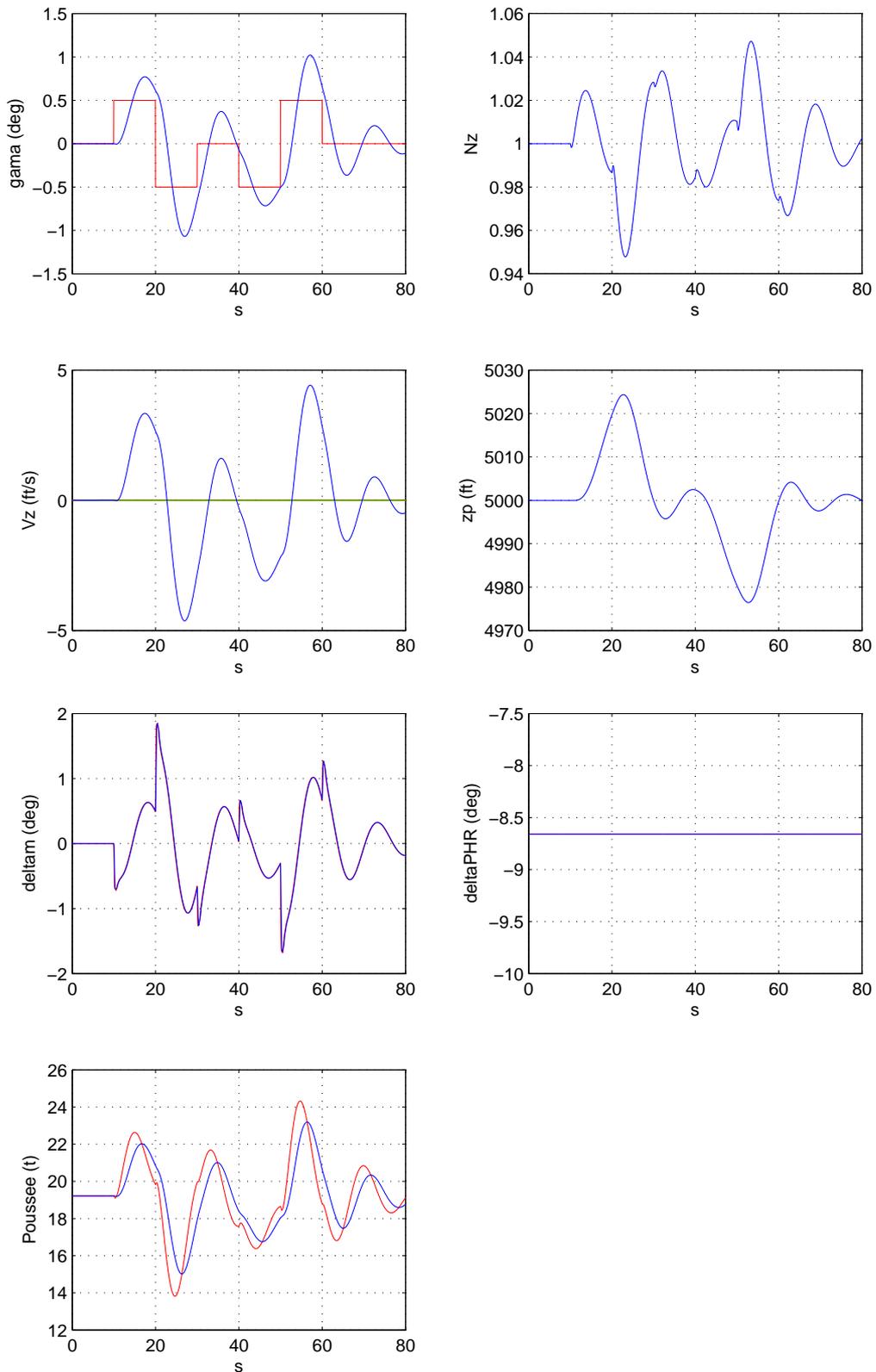
On reprend la loi en  $q$  avec l'architecture retenue précédemment :

$$q_c = \frac{g}{V} \cdot \frac{\gamma_c - \gamma}{\tau}$$

Les résultats obtenus sont décevants si l'on vise un temps de réponse de cinq secondes, ce qui est la valeur standard pour le type d'avion étudié :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*6.5.4.2.2.a : Etude d'une grande boucle en pente aérodynamique*

De nombreux autres types de lois dérivées de celle-ci ont été étudiés (loi en altitude et en vitesse ascensionnelle). Toutes ont présenté les mêmes problèmes en terme d'overshoot ou d'apparition de modes propres concernant d'autres variables (oscillation d'incidence).

### 6.5.4.3 Conclusion sur la loi en $q$

La loi en  $q$  est une très bonne loi manuelle, rapide, facile à mettre en œuvre et très physique pour le pilote. Elle permet aussi facilement de réaliser une protection d'assiette longitudinale de l'avion. Néanmoins, son utilisation comme petite boucle dans un pilote automatique paraît difficile étant données les médiocres qualités des lois de guidage investiguées ici.

On peut aussi se poser la question de la justification d'une telle loi lorsque le pilote suit le directeur de vol. Utiliser une loi en  $q$  dans de nombreuses phases de vol reviendrait à remettre en cause une partie de la philosophie Airbus sur les commandes de vol. En effet, le pilote d'Airbus commande aujourd'hui directement du facteur de charge, c'est-à-dire directement la trajectoire de l'avion et non son attitude alors que la loi en  $q$  présente la philosophie inverse.

Néanmoins, lors des phases de vol manche au neutre ou à  $Nz$  proche de zéro, une telle loi, peu sensible au vent, paraît très intéressante. Il est donc nécessaire de la garder en tête pour des applications particulières.

## 6.5.5 Loi en facteur de charge par inversion directe de l'équation de portance

Ceci revient à inverser la relation :

$$Nz = \frac{V \cdot \dot{\gamma}}{g} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz(\delta m_{ref}) + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz_{\delta m}(\delta m_{ref}) \cdot (\delta m - \delta m_{ref})$$

Ce système étant à non-minimum de phase, l'inversion de la dynamique crée une dynamique interne instable qui déstabilise l'ensemble du système. Cette solution est donc inapplicable.

## 6.5.6 Loi en facteur de charge au poste de pilotage

Le facteur de charge au poste de pilotage a pour expression :

$$Nz_{poste} = \frac{V \cdot \dot{\gamma} + d_{p/cg} \cdot \dot{q}}{g}$$

avec  $d_{p/cg}$  la distance entre le poste de pilotage et le centre de gravité. Cette variable est particulièrement intéressante car c'est elle qui détermine tout le ressenti du pilote par rapport à son avion (on dit souvent qu'on pilote l'avion « aux fesses »). En effet, des études ont prouvé que les fesses possédaient un réseau de terminaisons nerveuses particulièrement riches et donc très sensible aux variations de pression, c'est-à-dire aux variations d'accélération. Or la variable  $Nz_{poste}$  est homogène à l'accélération normale du siège du pilote.

D'un point de vue dynamique, on a :

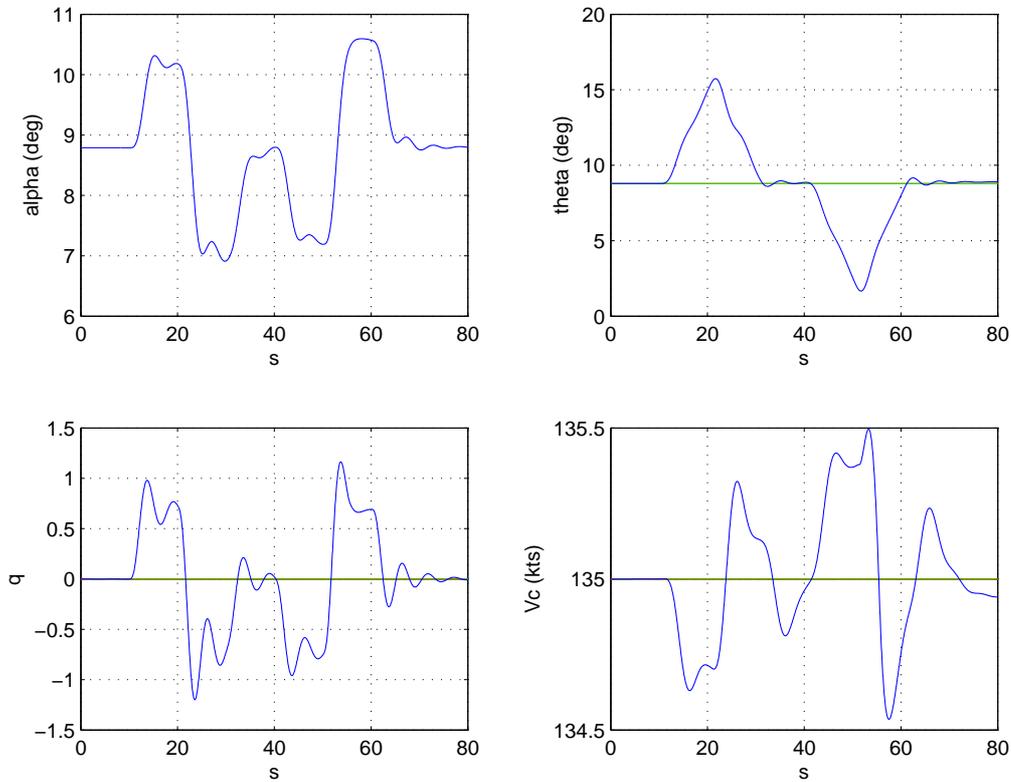
$$Nz_{poste} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz(\delta m_{ref}) + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) + \frac{d_{p/cg}}{g} \left( \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cm(\delta m_{ref}) + \frac{1}{I_y} \cdot T \cdot b \cdot \cos(\tau) \right) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot \left( \frac{Cz_{\delta m}(\delta m_{ref})}{m} + \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta m}(\delta m_{ref}) \right) \cdot (\delta m - \delta m_{ref})$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

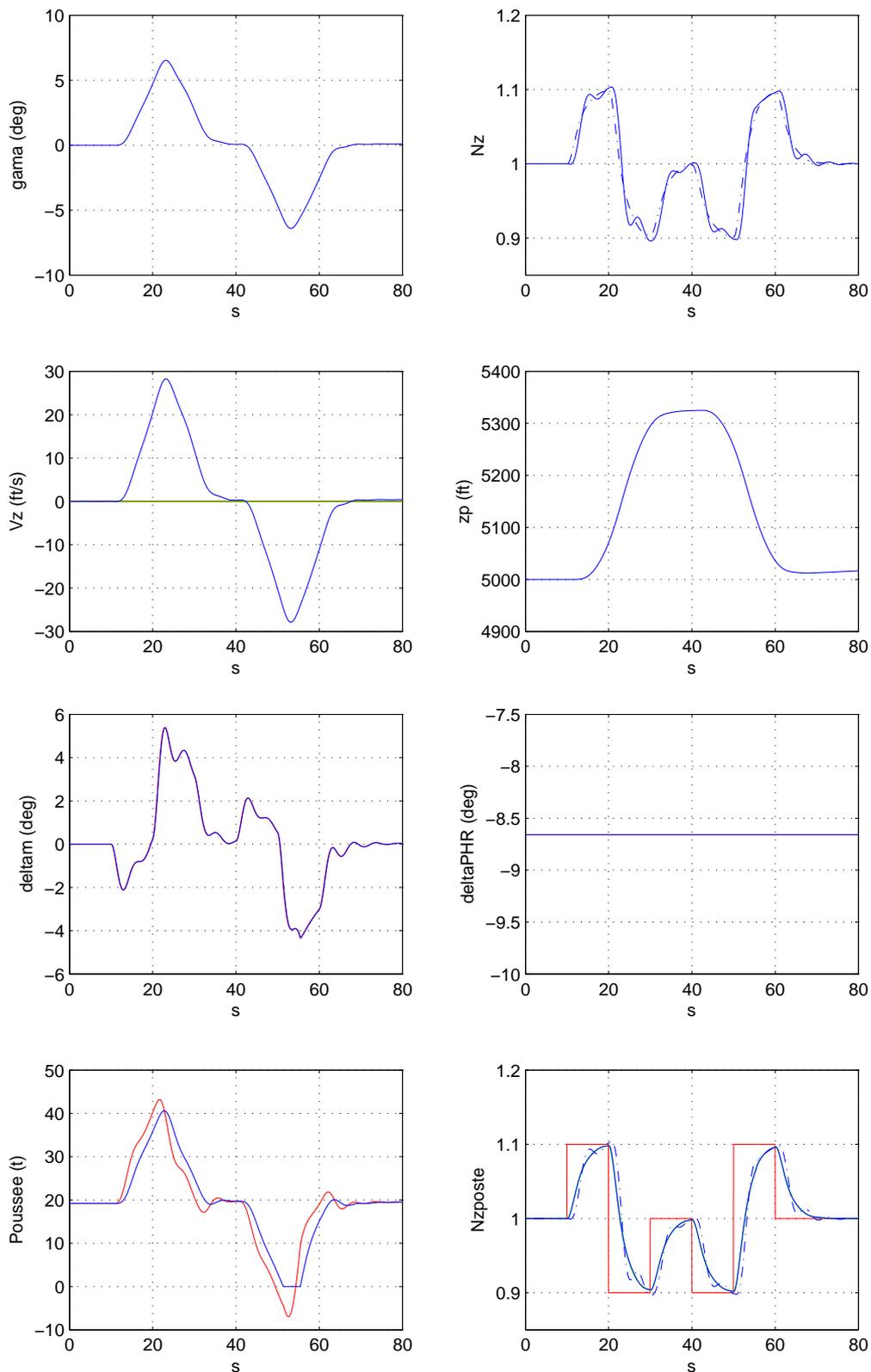
L'inversion de la dynamique revient à synthétiser un retour d'état définissant une nouvelle commande  $v$  telle que :

$$\delta m = \frac{v - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_z(\delta m_{ref}) - \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot V^2 \cdot S \cdot \left( \frac{C_{z_{\delta m}}(\delta m_{ref})}{m} + \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot C_{m_{\delta m}}(\delta m_{ref}) \right)} + \frac{\cos(\gamma) - \frac{d_{p/cg}}{g} \cdot \left( \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot C_{m}(\delta m_{ref}) + \frac{1}{I_y} \cdot T \cdot b \cdot \cos(\tau) \right)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot V^2 \cdot S \cdot \left( \frac{C_{z_{\delta m}}(\delta m_{ref})}{m} + \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot C_{m_{\delta m}}(\delta m_{ref}) \right)} + \delta m_{ref}$$

Les résultats de cette loi sont les suivants :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

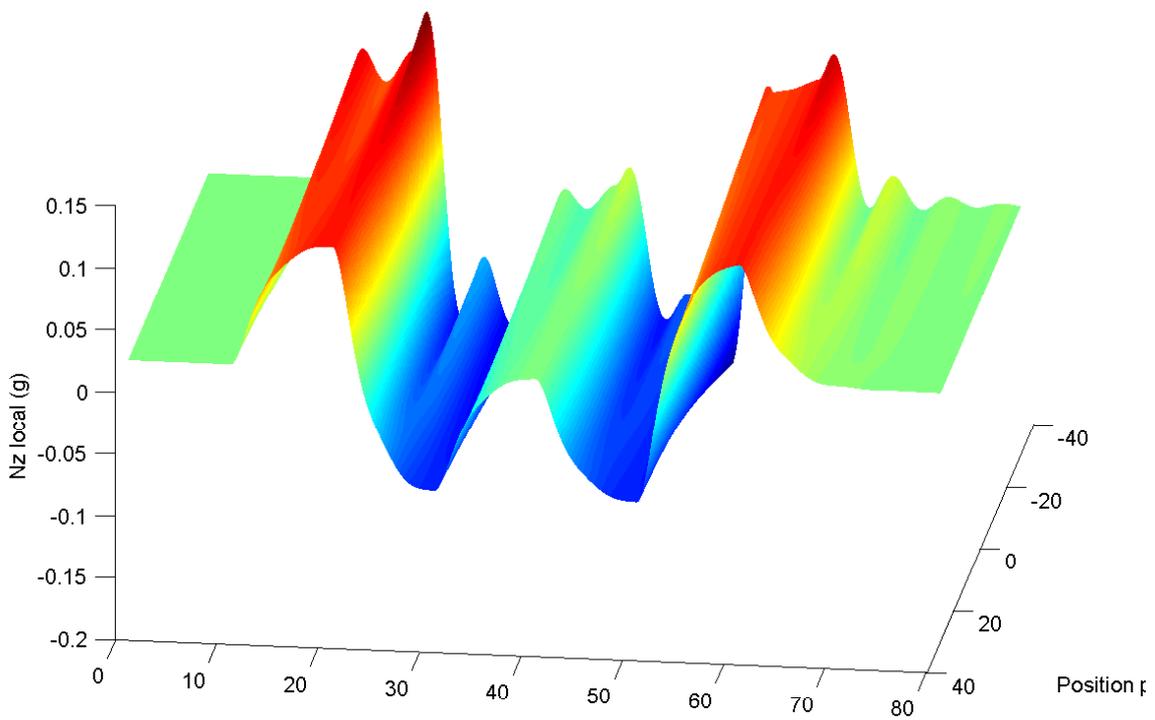
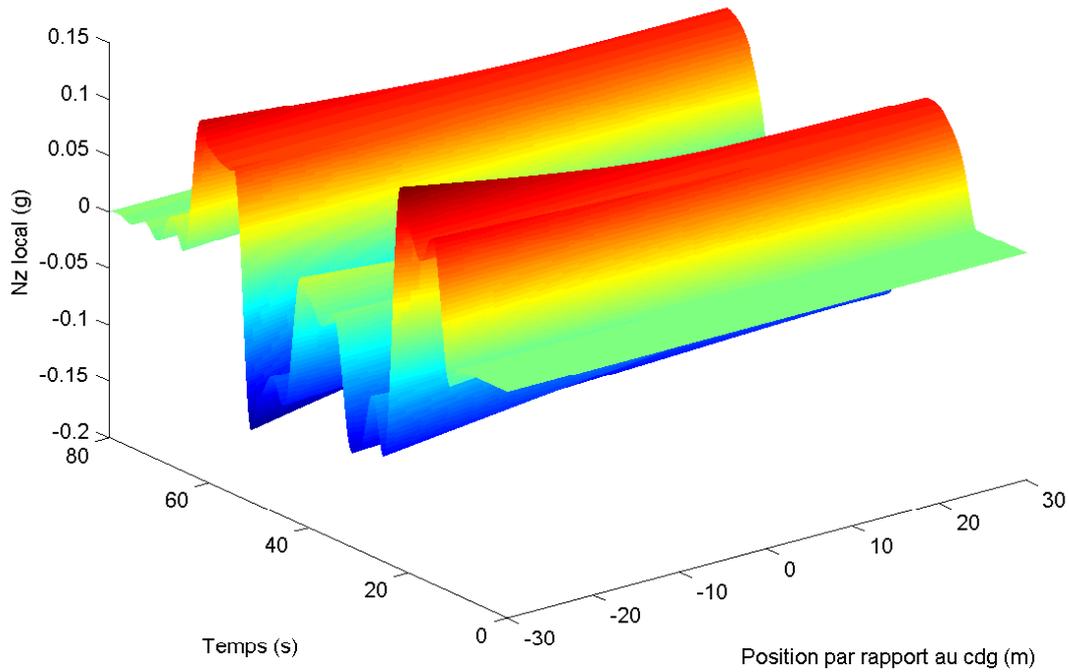


*6.5.6.a : Contrôle du facteur de charge au poste de pilotage*

On remarquera que des pointillés ont été rajoutés sur les figures concernant le facteur de charge. Celle concernant le  $N_z$  (au centre de gravité) contient en pointillés l'information de  $N_z$  poste, et celle concernant le  $N_z$  poste contient en pointillés l'information de  $N_z$  (au centre de gravité).

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

On note ainsi que l'avion est alors parfaitement asservi au poste de pilotage mais que le reste de l'avion oscille comme on peut le voir ci-dessous :



*6.5.6.b : Facteur de charge local ressenti en différents points de l'avion*

On constate que ceci risque de poser des problèmes de confort aux places arrières...

## 6.5.7 Loi en facteur de charge au poste de pilotage et au centre de gravité

Clairement, il manque une gouverne pour stabiliser à la fois le centre de gravité et le poste de pilotage. Dans le cas présent, on inverse les équations de la mécanique du vol suivantes :

$$\begin{bmatrix} Nz_{poste} \\ Nz_{CG} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) \\ \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_{p/cg}}{g} \cdot \left( \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cm + \frac{1}{I_y} \cdot T \cdot b \cdot \cos(\tau) \right) \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot V^2 \cdot S \cdot \begin{bmatrix} \frac{Cz_{\delta m}}{m} + \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta m} & \frac{Cz_{\delta i}}{m} + \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta i} \\ \frac{Cz_{\delta m}}{m} & \frac{Cz_{\delta i}}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta m - \delta m_{ref} \\ \delta i - \delta i_{ref} \end{bmatrix}$$

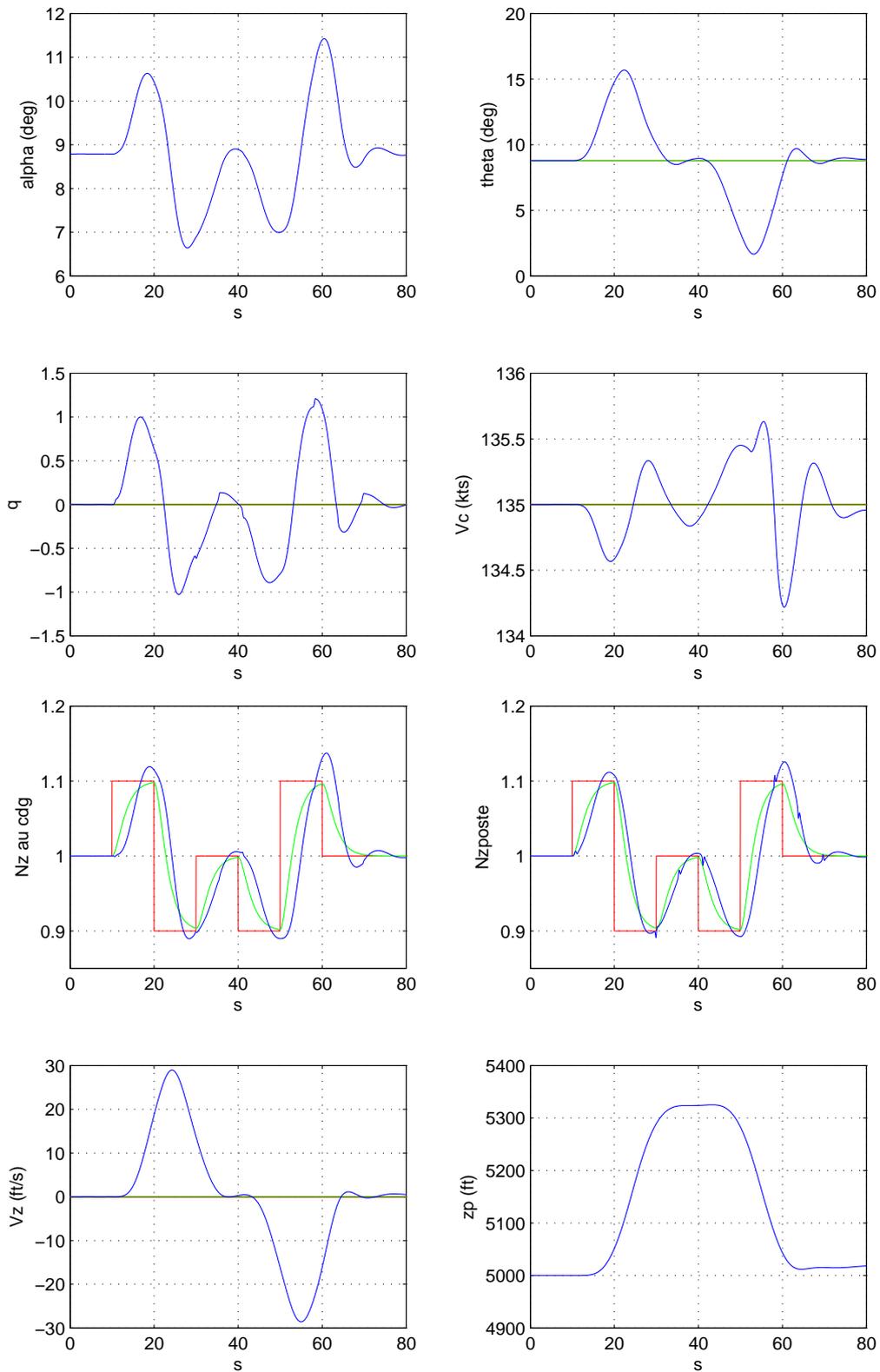
avec  $\delta i$  le braquage des ailerons internes de l'avion. En inversant ceci, on obtient :

$$\begin{bmatrix} \delta m - \delta m_{ref} \\ \delta i - \delta i_{ref} \end{bmatrix} = \frac{\begin{bmatrix} \frac{Cz_{\delta i}}{m} & -\frac{Cz_{\delta i}}{m} - \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta i} \\ -\frac{Cz_{\delta m}}{m} & \frac{Cz_{\delta m}}{m} + \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta m} \end{bmatrix}}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{g} \cdot V^2 \cdot S \cdot \left( \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta m} \cdot \frac{Cz_{\delta i}}{m} - \frac{Cz_{\delta m}}{m} \cdot \frac{d_{p/cg}}{I_y} \cdot l \cdot Cm_{\delta i} \right)} \cdot \left( \begin{bmatrix} Nz_{poste} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) \\ Nz_{CG} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{d_{p/cg}}{g} \cdot \left( \frac{1}{I_y} \cdot \frac{1}{2} \cdot \rho \cdot V^2 \cdot S \cdot l \cdot Cm + \frac{1}{I_y} \cdot T \cdot b \cdot \cos(\tau) \right) \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

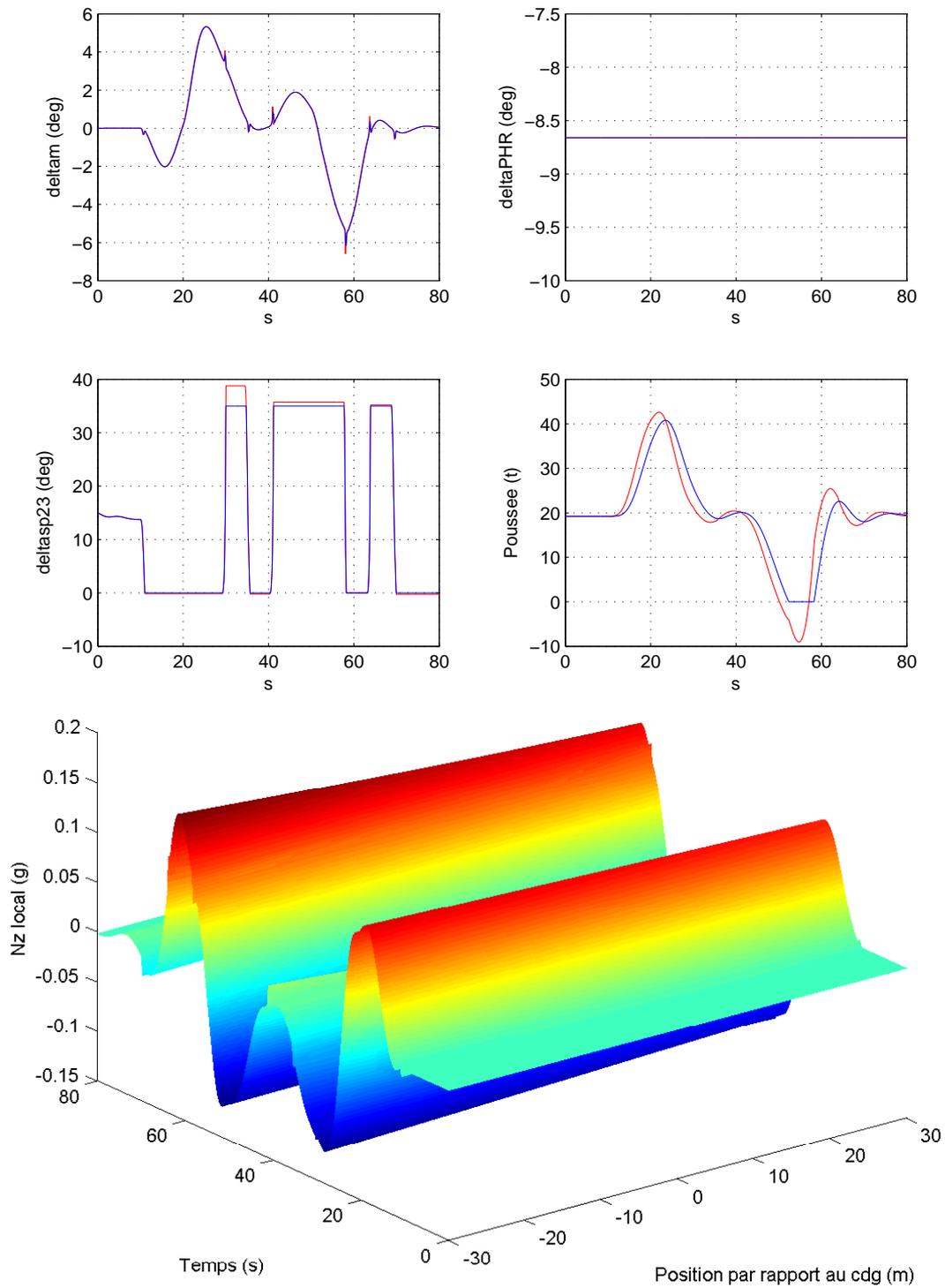
Le résultat de cette loi est un départ en instabilité dû à l'inversion de signe du  $Cm_{\delta i}$  dans sa plage de fonctionnement normale. On propose donc de remplacer l'usage de l'aileron par celui des spoilers 2 et 3.

## Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes Application au suivi de trajectoire des avions de transport

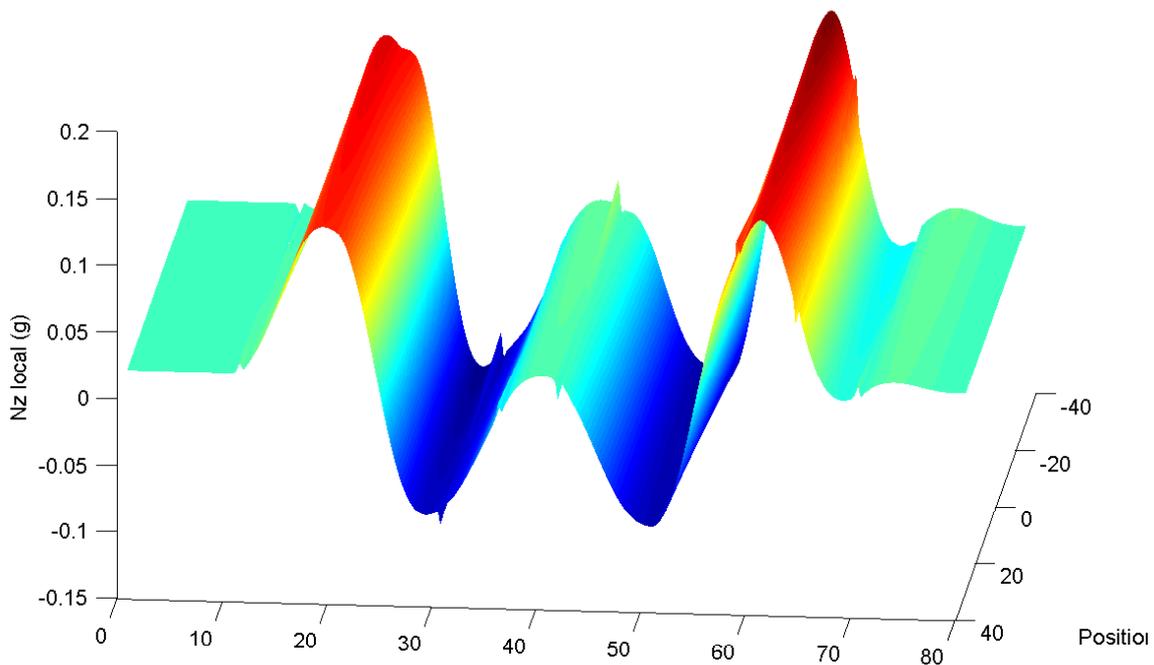
Les résultats sont alors les suivants :



Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes  
Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*6.5.7.a : Résultats d'une loi de commande multivariable commandant le même facteur de charge pour tout l'avion*

Cette solution est très intéressante. On constate que l'inversion n'est pas parfaite étant donné que les courbes vertes et bleues sont loin d'être confondues. Cela est dû à la saturation des spoilers, qui est aussi à l'origine des petits pics observés, en entrée de saturation. A noter que nous ne disposons pas pour le moment de la dynamique de ces spoilers. On peut penser qu'avec leur dynamique, ces pics seraient au moins atténués voire même annulés.

On peut envisager grâce à cette loi un contrôle actif de portance très pratique pour le suivi de trajectoire. Par ailleurs, cet embryon de portance directe permet de faire ressentir au pilote la même accélération que celle de l'avion, ce qui lui donne la possibilité de commander directement un ordre manche proportionnel aux mesures qu'il reçoit (ou que le pilote automatique reçoit).

Par ailleurs, il paraît assez facile de protéger cette loi en facteur de charge et en assiette, étant donné qu'on commande directement ou indirectement ces variables ou leurs dérivées.

## 6.5.8 Commande par boucles imbriquées facteur de charge / incidence

On peut choisir de commander l'avion par inversions successives des dynamiques en incidence et du facteur de charge. Bien qu'on ne possède pas d'équation de la dynamique de l'incidence, on remarque facilement que la dynamique de sa dérivée et celle de  $q$  sont très proches. On utilise donc l'inversion en  $q$  réalisée précédemment doublée d'un correcteur linéaire en incidence. En ce qui concerne le facteur de charge, on inverse simplement l'équation de poussée linéarisée en incidence commandée. Ainsi, l'équation de portance :

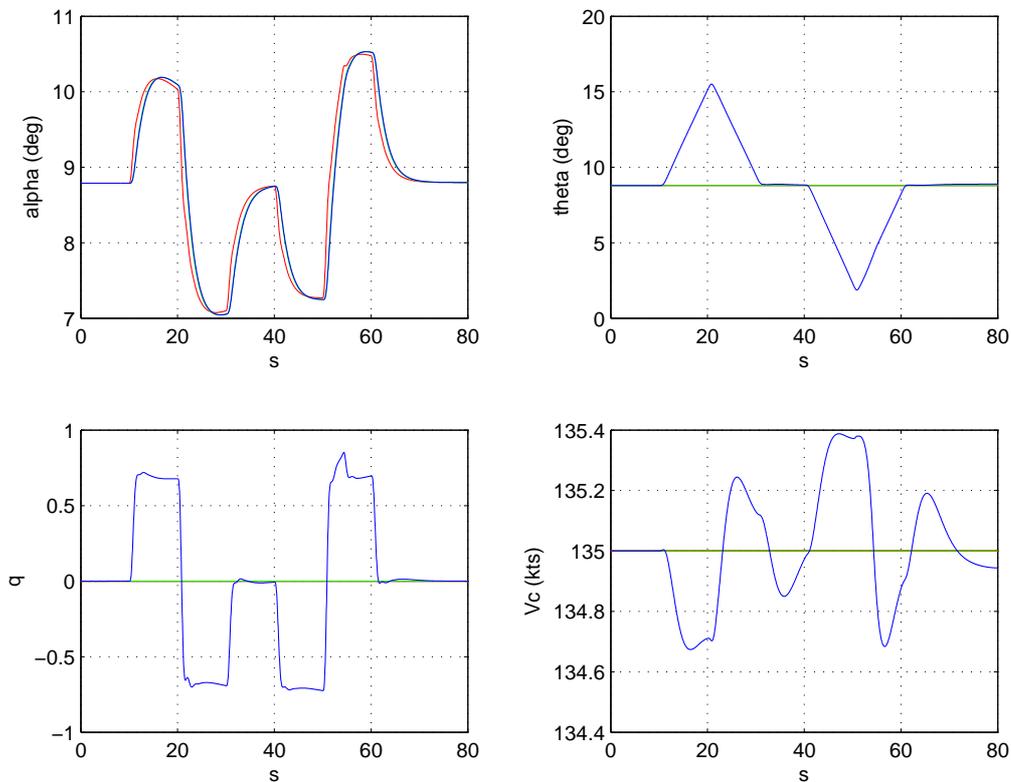
$$N_z = \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_z(\alpha_{ref}) + \frac{T \cdot \sin(\alpha + \tau)}{m \cdot g} - \cos(\gamma) + \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot C_{z_{\delta m}}(\alpha_{ref}) \cdot (\alpha - \alpha_{ref})$$

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

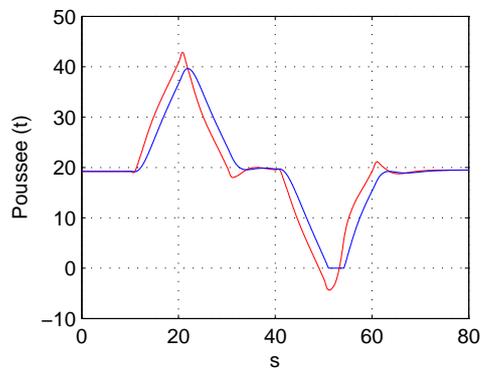
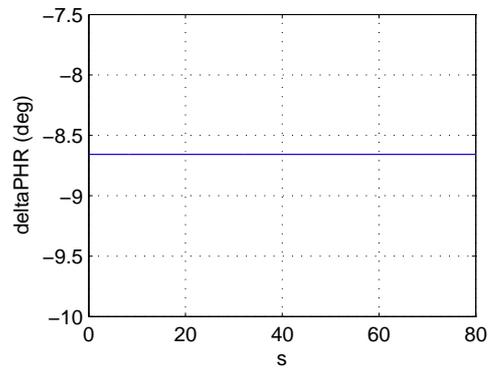
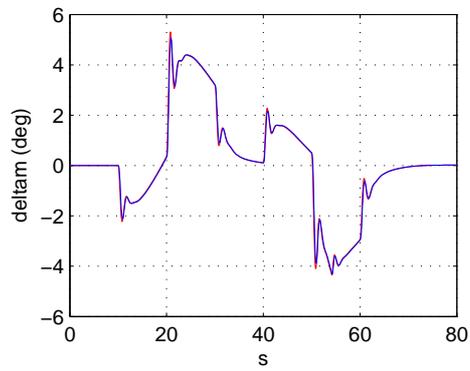
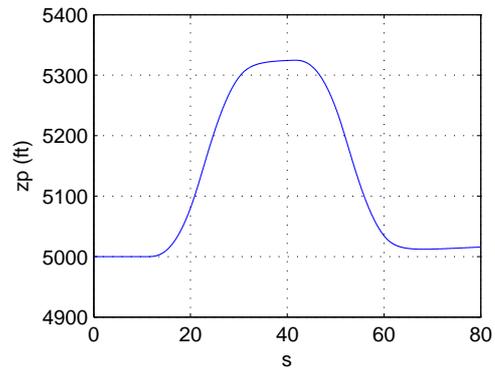
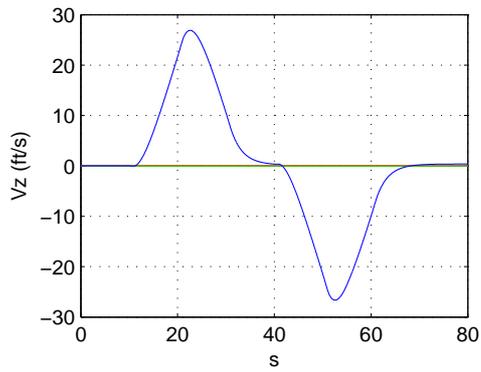
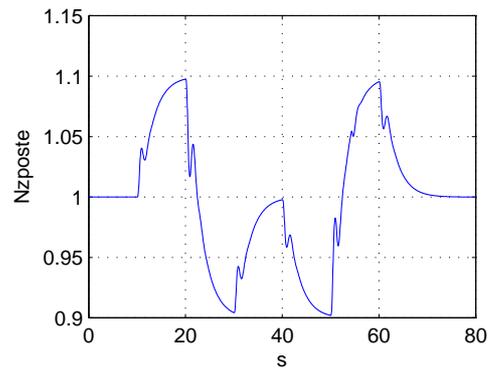
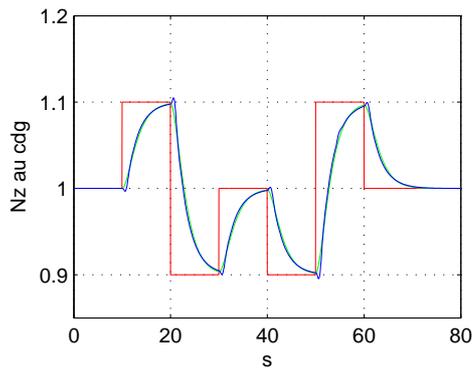
s'inverse comme suit :

$$\alpha_c = \frac{Nz_c - \frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz(\alpha_{ref}) - \frac{T \cdot \sin(\alpha_{ref} + \tau)}{m \cdot g} + \cos(\gamma)}{\frac{1}{2} \cdot \frac{\rho}{m \cdot g} \cdot V^2 \cdot S \cdot Cz_{\delta m}(\alpha_{ref})} + \alpha_{ref}$$

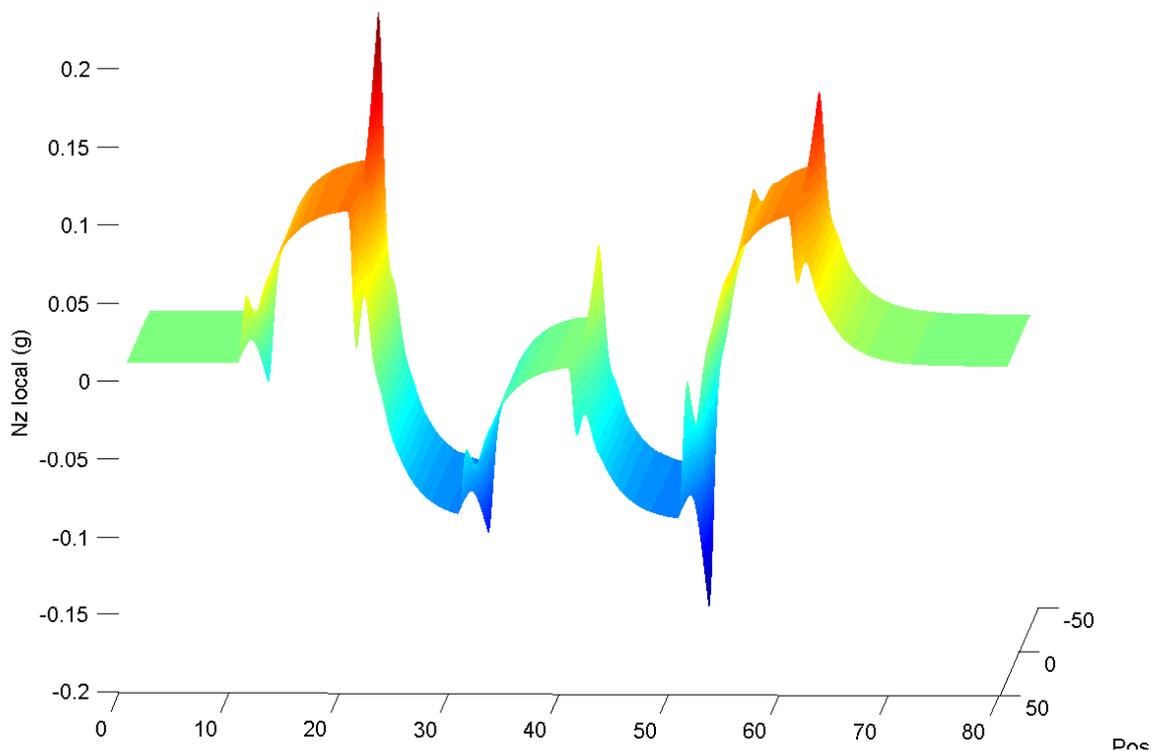
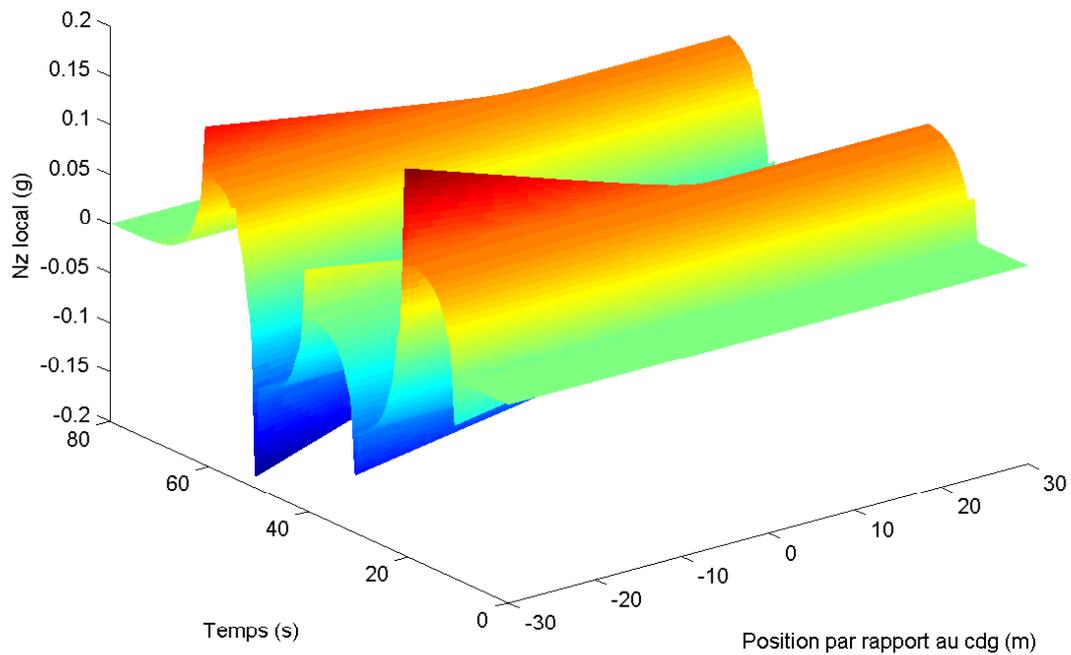
A noter que l'inversion de l'équation de portance n'est pas parfaite. Le terme en poussée n'a pas été retenu pour figurer dans la matrice de commande. Si on l'avait désiré, il aurait alors simplement fallu linéariser le sinus. Néanmoins cette approche, qui se résume au remplacement d'une approximation par une autre, n'a pas été retenue au vu de la qualité des résultats fournis ci-dessous :



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**



*6.5.8.a : Résultats d'une loi en facteur de charge reposant sur une boucle en incidence*

Cette loi donne un excellent suivi du facteur de charge désiré au centre de gravité ainsi que de l'incidence. Toutefois, on peut remarquer qu'elle doit être moins confortable que la précédente à l'avant et à l'arrière de l'appareil. Par ailleurs, on peut mettre en question le comportement d'une telle loi en turbulence car, par expérience, les lois en incidences sont très sensibles aux variations de vent. Néanmoins, la protection de cette loi en incidence et en facteur de charge est immédiatement applicable. Quant à la protection en assiette, son application paraît relativement aisée.

## 6.5.9 Conclusion

La comparaison de ces différentes lois fait apparaître que deux lois sont tout-à-fait adaptées à notre étude :

- La **commande multivariable**  $Nz_{\text{poste}}/Nz_{\text{centre de gravité}}$  paraît confortable, très physique pour le pilote et pourrait servir de base à une fonction d'atténuation de la turbulence par déploiement de spoilers. Toutefois, le suivi de la consigne est un peu lâche ce qui peut être gênant à proximité des limites en facteur de charge. La fonction de portance directe, bien que limitée dans notre cas d'étude, est une application parfaitement adaptée au suivi de trajectoires dynamiques.
- La **commande en cascade**  $Nz_{\text{centre de gravité}}/\text{incidence}$  paraît moyennement confortable, particulièrement en turbulence *a priori*, mais connaît l'avantage d'un excellent suivi du facteur de charge et d'une protection facilitée en incidence.

Nous avons finalement choisi la deuxième solution. En effet, la commande du premier type impose pour être réellement symétrique un pré-braquage des spoilers handicapant pour les performances aérodynamiques de l'avion. Par ailleurs, les vitesses de débattement demandées sont trop importantes. Plutôt que de nous appuyer directement sur l'incidence nous avons finalement choisi une petite boucle en tangage, à la fois plus confortable et plus utile pour d'autres configurations de vol (cf. § 3.3).

## 6.6 Résultats statistiques bruts obtenus sous SIMPA en phase d'atterrissage

Cette partie donne le détail des résultats synthétiques présentés dans la partie 3.6.

### 6.6.1 Pilote automatique certifié de l'A340-300

\*\*\*\*\*  
 RESULTATS DE CERTIFICATION: certif  
 \*\*\*\*\*

DATE: 13-May-2005 12:40:53

AVION : A340

CATALOGUE DES STATISTIQUES:  
 /home/to29669/SIMPA2/SIMPA\_14\_0\_A/PA\_L9A9\_LONGI/trace/

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
 \* RISQUES LIMITES \*  
 \*\*\*\*\*

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_ALTPI\_9200  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.10	1.10	-5.75	-0.44	-12.0	-7.81	< 1e-10
XTP-IMP	433.3	105.1	216.1	751.1	915.0	881.6	2.30e-06
HTPS+200	24.77	3.50	16.96	37.19	0.0	9.86	< 1e-10
YTP-IMP	0.06	2.24	-6.29	5.87	15.0	9.89	< 1e-10
PHI-IMP	0.01	0.73	-3.11	2.00	10.5	3.86	< 1e-10
BETARO-IMP	0.03	1.91	-5.26	5.41	14.0	8.45	< 1e-10

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_CG\_18  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.39	1.18	-7.69	-0.55	-12.0	-8.42	< 1e-10
XTP-IMP	371.2	82.9	184.8	694.9	915.0	724.7	< 1e-10
HTPS+200	24.22	3.78	11.92	37.29	0.0	8.12	< 1e-10
YTP-IMP	0.04	2.53	-8.41	7.92	15.0	11.16	2.92e-09
PHI-IMP	-0.04	0.77	-2.58	2.33	10.5	-4.11	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.03	2.31	-6.70	8.83	14.0	-10.19	1.29e-09

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_CG\_42  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.32	1.22	-7.57	-0.75	-12.0	-8.54	< 1e-10
XTP-IMP	377.7	72.8	198.4	642.6	915.0	688.2	< 1e-10
HTPS+200	25.35	3.59	14.12	37.28	0.0	10.04	< 1e-10
YTP-IMP	0.05	2.56	-8.72	8.12	15.0	11.33	4.99e-09
PHI-IMP	-0.02	0.84	-2.70	2.90	10.5	-4.46	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.06	2.29	-6.52	8.89	14.0	-10.12	1.00e-09

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_CROSS  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-4.25	1.45	-8.83	-0.72	-12.0	-10.41	4.11e-08
XTP-IMP	371.9	97.0	169.2	686.3	915.0	785.4	1.06e-08
HTPS+200	24.93	5.14	12.14	40.08	0.0	3.00	6.24e-07
YTP-IMP	-2.28	2.92	-10.36	6.69	15.0	-14.73	6.59e-06
PHI-IMP	-0.34	1.05	-4.11	2.25	10.5	-5.82	< 1e-10
BETARO-IMP	5.27	1.86	-0.31	10.56	14.0	13.19	1.28e-06

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_DISA\_40  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.24	1.15	-8.13	-0.72	-12.0	-8.15	< 1e-10
XTP-IMP	398.1	84.8	180.4	823.4	915.0	759.9	5.54e-10
HTPS+200	23.96	3.37	13.62	35.44	0.0	9.58	< 1e-10
YTP-IMP	0.06	2.26	-5.82	5.76	15.0	9.97	< 1e-10
PHI-IMP	0.04	0.81	-2.37	2.36	10.5	4.31	< 1e-10
BETARO-IMP	0.02	2.09	-4.79	5.43	14.0	9.21	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_DISA\_69  
 ==> 197 approches traitees sur 198 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.13	1.15	-6.33	-0.20	-12.0	-8.02	< 1e-10
XTP-IMP	381.6	62.6	218.1	613.6	915.0	648.4	< 1e-10
HTPS+200	26.91	3.69	16.67	36.63	0.0	11.16	< 1e-10
YTP-IMP	0.10	2.45	-6.04	7.67	15.0	10.82	9.10e-10
PHI-IMP	0.04	0.78	-2.32	3.25	10.5	4.18	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.11	2.22	-6.03	5.04	14.0	-9.79	2.74e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_HEAD  
 ==> 197 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.94	1.70	-8.73	-0.31	-12.0	-11.20	1.11e-06
XTP-IMP	357.4	97.5	121.5	846.1	915.0	773.1	5.30e-09
HTPS+200	26.52	5.24	9.03	39.35	0.0	4.15	2.13e-07
YTP-IMP	-0.31	3.22	-7.92	10.88	15.0	-14.30	3.62e-06
PHI-IMP	-0.13	1.50	-4.07	3.60	10.5	-8.01	< 1e-10
BETARO-IMP	0.19	2.78	-7.41	10.06	14.0	12.31	5.13e-07

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_MASSE\_123  
 ==> 198 approches traitees sur 198 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.31	1.26	-7.18	-0.18	-12.0	-8.67	< 1e-10
XTP-IMP	364.3	57.2	212.4	592.6	915.0	608.4	< 1e-10
HTPS+200	28.09	3.51	18.01	38.41	0.0	13.12	< 1e-10
YTP-IMP	-0.05	2.53	-8.27	8.27	15.0	-11.18	3.09e-09
PHI-IMP	-0.08	0.71	-2.85	2.09	10.5	-3.79	< 1e-10
BETARO-IMP	0.08	2.30	-7.74	8.00	14.0	10.15	1.11e-09

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_MASSE\_195  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.25	1.24	-7.09	-0.27	-12.0	-8.52	< 1e-10
XTP-IMP	410.2	90.3	229.1	834.6	915.0	795.2	1.12e-08
HTPS+200	23.88	3.17	16.31	39.80	0.0	10.38	< 1e-10
YTP-IMP	0.15	2.40	-5.65	7.53	15.0	10.62	4.45e-10
PHI-IMP	0.08	0.83	-2.45	2.53	10.5	4.44	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.13	2.17	-6.53	6.02	14.0	-9.60	1.17e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_PANMOT  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.32	1.33	-6.96	-0.44	-12.0	-9.01	< 1e-10
XTP-IMP	377.9	76.6	188.4	627.2	915.0	704.6	< 1e-10
HTPS+200	23.97	3.54	16.30	38.12	0.0	8.86	< 1e-10
YTP-IMP	0.34	3.09	-5.86	10.65	15.0	13.71	1.36e-06
PHI-IMP	0.04	1.07	-2.39	3.19	10.5	5.73	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.21	2.10	-7.76	4.72	14.0	-9.31	< 1e-10

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_SLOPE\_MAX  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.19	1.40	-8.73	-0.51	-12.0	-9.17	1.61e-10
XTP-IMP	324.1	82.9	156.0	598.2	915.0	677.8	< 1e-10
HTPS+200	23.22	3.66	13.11	34.74	0.0	7.61	1.10e-10
YTP-IMP	0.06	2.63	-8.46	8.01	15.0	11.60	1.12e-08
PHI-IMP	-0.01	0.86	-2.57	2.80	10.5	-4.59	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.02	2.48	-6.39	9.19	14.0	-10.95	1.63e-08

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_SLOPE\_MIN  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.60	1.01	-7.94	-0.67	-12.0	-7.92	< 1e-10
XTP-IMP	433.7	78.5	233.3	729.7	915.0	768.4	4.31e-10
HTPS+200	26.34	3.66	16.20	37.85	0.0	10.72	< 1e-10
YTP-IMP	0.07	2.55	-7.75	9.34	15.0	11.25	3.87e-09
PHI-IMP	0.00	0.78	-2.79	2.49	10.5	4.16	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.08	2.12	-6.44	6.04	14.0	-9.35	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_TAIL  
 ==> 197 approches traitees sur 197 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-2.78	1.16	-5.77	-0.47	-12.0	-7.74	< 1e-10
XTP-IMP	447.2	88.7	230.1	650.8	915.0	825.4	6.61e-08
HTPS+200	25.49	3.46	16.49	36.17	0.0	10.74	< 1e-10
YTP-IMP	0.08	2.43	-6.65	7.75	15.0	10.76	7.41e-10
PHI-IMP	0.03	0.74	-1.74	2.50	10.5	3.95	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.10	2.13	-6.65	5.41	14.0	-9.41	< 1e-10

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

\*\*\*\*\*  
 \* RISQUES MOYENS \*  
 \*\*\*\*\*

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_certif\_\_STAT\_MOY  
 ==> 1998 approches traitees sur 1998 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.37	1.21	-8.48	-0.27	-10.0	-9.14	2.35e-08
----> RISK a -6ft/s : 0.01							
XTP-IMP	376.7	74.0	162.6	685.4	823.0	728.6	8.27e-10
HTPS+200	24.86	3.76	12.83	39.59	0.0	7.01	< 1e-10
YTP-IMP	0.07	2.32	-9.13	9.12	15.0	11.34	< 1e-10
PHI-IMP	0.03	0.78	-2.83	3.49	10.5	4.49	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.08	2.15	-10.12	11.26	14.0	-10.51	< 1e-10

## 6.6.2 Pilote automatique RMI pour l'A340-300

\*\*\*\*\*  
RESULTATS DE CERTIFICATION: RMI  
\*\*\*\*\*

DATE: 13-May-2005 12:41:20

AVION : A340

CATALOGUE DES STATISTIQUES:  
/home/to29669/SIMPA2/SIMPA\_14\_0\_A/PA\_L9A9\_LONGI/trace/

\*\*\*\*\*

\*\*\*\*\*  
\* RISQUES LIMITES \*  
\*\*\*\*\*

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_ALTPI\_9200  
==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.41	0.83	-5.52	-1.32	-12.0	-6.97	< 1e-10
XTP-IMP	413.3	77.4	214.5	784.9	915.0	743.6	< 1e-10
HTPS+200	25.61	3.76	15.28	40.71	0.0	9.57	< 1e-10
YTP-IMP	0.06	2.18	-5.61	6.72	15.0	9.61	< 1e-10
PHI-IMP	0.07	0.79	-2.16	2.22	10.5	4.20	< 1e-10
BETARO-IMP	0.02	1.68	-4.65	5.73	14.0	7.44	< 1e-10

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_CG\_18

==> 198 approches traitees sur 198 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.38	0.87	-5.08	-0.33	-12.0	-7.09	< 1e-10
XTP-IMP	389.0	66.6	226.9	745.6	915.0	673.1	< 1e-10
HTPS+200	25.14	3.62	15.56	36.54	0.0	9.69	< 1e-10
YTP-IMP	0.01	2.25	-6.10	7.23	15.0	9.94	< 1e-10
PHI-IMP	0.02	0.73	-2.04	1.81	10.5	3.89	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.06	1.93	-6.50	4.90	14.0	-8.53	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_CG\_42

==> 199 approches traitees sur 199 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.51	0.92	-5.72	-0.86	-12.0	-7.42	< 1e-10
XTP-IMP	400.8	56.5	257.5	688.1	915.0	641.7	< 1e-10
HTPS+200	26.26	3.36	17.40	36.57	0.0	11.92	< 1e-10
YTP-IMP	0.01	2.22	-5.79	7.26	15.0	9.82	< 1e-10
PHI-IMP	0.03	0.72	-2.04	1.96	10.5	3.86	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.06	1.91	-6.42	4.84	14.0	-8.43	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_CROSS

==> 199 approches traitees sur 199 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.37	1.33	-7.22	0.00	-12.0	-9.04	< 1e-10
XTP-IMP	406.3	97.1	197.3	753.2	915.0	820.5	8.10e-08
HTPS+200	25.67	5.11	11.91	41.16	0.0	3.86	2.58e-07
YTP-IMP	-3.23	2.06	-8.01	2.73	15.0	-12.02	5.58e-09
PHI-IMP	-0.42	1.12	-3.25	3.51	10.5	-6.25	< 1e-10
BETARO-IMP	4.65	1.66	0.06	9.09	14.0	11.74	9.13e-09

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_DISA\_40  
 ==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.43	0.94	-6.45	-0.76	-12.0	-7.44	< 1e-10
XTP-IMP	416.3	65.7	247.0	677.8	915.0	696.4	< 1e-10
HTPS+200	25.50	3.33	17.45	40.08	0.0	11.28	< 1e-10
YTP-IMP	0.05	2.15	-5.74	5.58	15.0	9.51	< 1e-10
PHI-IMP	0.03	0.79	-2.25	2.78	10.5	4.23	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.00	1.79	-4.87	5.00	14.0	-7.92	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_DISA\_69  
 ==> 198 approches traitees sur 199 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.61	0.98	-6.03	-0.83	-12.0	-7.79	< 1e-10
XTP-IMP	378.5	56.7	287.6	617.2	915.0	620.4	< 1e-10
HTPS+200	26.10	3.70	17.04	38.40	0.0	10.32	< 1e-10
YTP-IMP	0.06	2.26	-6.77	6.55	15.0	9.97	< 1e-10
PHI-IMP	0.02	0.79	-2.12	3.04	10.5	4.20	< 1e-10
BETARO-IMP	0.00	1.94	-6.39	5.19	14.0	8.56	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_HEAD  
 ==> 195 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.32	1.17	-7.65	-0.60	-12.0	-8.33	< 1e-10
XTP-IMP	419.5	95.8	210.8	658.2	915.0	828.2	1.16e-07
HTPS+200	28.82	5.24	15.26	42.53	0.0	6.47	1.90e-08
YTP-IMP	-0.19	2.16	-6.92	5.48	15.0	-9.56	< 1e-10
PHI-IMP	-0.13	1.23	-3.60	3.37	10.5	-6.58	< 1e-10
BETARO-IMP	0.09	2.30	-6.36	5.97	14.0	10.17	1.21e-09

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_MASSE\_123

==> 199 approches traitees sur 199 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.36	0.94	-6.07	0.00	-12.0	-7.35	< 1e-10
XTP-IMP	430.9	61.2	295.0	707.8	915.0	691.9	< 1e-10
HTPS+200	29.29	3.56	20.69	39.35	0.0	14.12	< 1e-10
YTP-IMP	-0.00	2.25	-5.14	6.58	15.0	-9.95	< 1e-10
PHI-IMP	-0.01	0.73	-2.48	2.24	10.5	-3.87	< 1e-10
BETARO-IMP	0.02	1.93	-7.62	5.85	14.0	8.54	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_MASSE\_195

==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.49	0.94	-5.71	-0.68	-12.0	-7.48	< 1e-10
XTP-IMP	390.1	68.8	227.4	574.8	915.0	683.6	< 1e-10
HTPS+200	24.50	3.47	16.17	39.88	0.0	9.72	< 1e-10
YTP-IMP	0.05	2.30	-5.53	7.14	15.0	10.15	< 1e-10
PHI-IMP	0.09	0.75	-1.79	1.80	10.5	4.03	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.03	1.94	-5.03	5.09	14.0	-8.55	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_PANMOT

==> 200 approches traitees sur 200 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.55	1.02	-6.26	-0.95	-12.0	-7.91	< 1e-10
XTP-IMP	371.8	56.2	248.1	576.8	915.0	611.4	< 1e-10
HTPS+200	24.69	3.31	15.51	38.24	0.0	10.55	< 1e-10
YTP-IMP	-0.27	2.08	-6.10	5.46	15.0	-9.24	< 1e-10
PHI-IMP	0.13	0.81	-2.46	2.90	10.5	4.38	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.11	1.84	-6.12	5.01	14.0	-8.13	< 1e-10

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_SLOPE\_MAX  
 ==> 197 approches traitees sur 197 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.27	0.90	-6.64	-0.98	-12.0	-7.12	< 1e-10
XTP-IMP	326.1	50.8	195.0	502.9	915.0	542.6	< 1e-10
HTPS+200	24.13	3.56	14.92	35.99	0.0	8.93	< 1e-10
YTP-IMP	0.01	2.36	-6.89	7.35	15.0	10.44	2.17e-10
PHI-IMP	0.03	0.80	-2.12	2.20	10.5	4.26	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.05	2.05	-7.37	5.93	14.0	-9.04	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_SLOPE\_MIN  
 ==> 197 approches traitees sur 197 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.38	1.05	-5.88	-0.54	-12.0	-7.87	< 1e-10
XTP-IMP	473.1	68.7	327.7	768.4	915.0	765.9	< 1e-10
HTPS+200	27.27	3.54	18.02	39.08	0.0	12.17	< 1e-10
YTP-IMP	0.04	2.19	-4.82	7.26	15.0	9.67	< 1e-10
PHI-IMP	0.03	0.72	-1.75	2.60	10.5	3.84	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.09	1.82	-5.96	4.66	14.0	-8.05	< 1e-10

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_TAIL  
 ==> 197 approches traitees sur 197 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.49	1.11	-7.19	-0.66	-12.0	-8.21	< 1e-10
XTP-IMP	432.6	69.7	221.7	681.4	915.0	730.0	< 1e-10
HTPS+200	25.71	3.23	19.62	35.19	0.0	11.93	< 1e-10
YTP-IMP	0.08	2.20	-5.82	7.43	15.0	9.71	< 1e-10
PHI-IMP	0.15	0.91	-2.65	3.60	10.5	4.92	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.05	1.88	-5.03	4.42	14.0	-8.30	< 1e-10

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

\*\*\*\*\*  
 \* RISQUES MOYENS \*  
 \*\*\*\*\*

CALCULS SUR LA TAPE : ST\_RMI\_\_STAT\_MOY  
 ==> 1998 approches traitees sur 1998 enregistrees

VARIABLE	MOYENNE	SIGMA	MIN	MAX	VLIM	VRISK	PROB
VZTP-IMP	-3.48	0.94	-6.89	-0.45	-10.0	-7.93	< 1e-10
	---> RISK a -6ft/s : 0						
XTP-IMP	393.9	65.5	203.1	759.2	823.0	705.2	< 1e-10
HTPS+200	25.87	3.85	15.52	42.14	0.0	7.56	< 1e-10
YTP-IMP	0.01	2.09	-7.10	7.49	15.0	10.24	< 1e-10
PHI-IMP	0.02	0.77	-2.94	3.37	10.5	4.41	< 1e-10
BETARO-IMP	-0.03	1.81	-7.05	9.47	14.0	-8.87	< 1e-10



## Sommaire détaillé

AVANT-PROPOS .....	2
REMERCIEMENTS .....	3
SOMMAIRE GENERAL.....	4
LEXIQUE.....	7
<b>1 INTRODUCTION AU SUJET DE THESE .....</b>	<b>9</b>
1.1 CONTEXTE INDUSTRIEL : ETAT DES LIEUX DU PILOTE AUTOMATIQUE D'UN AVION DE TYPE AIRBUS.....	9
1.2 CONTEXTE ACADEMIQUE.....	10
1.3 CONTRIBUTIONS DU TRAVAIL DE THESE .....	10
1.4 PLAN DU MEMOIRE .....	11
<b>2 TECHNIQUES, METHODES ET OUTILS .....</b>	<b>13</b>
2.1 TECHNIQUES D'AUTOMATIQUE.....	13
2.1.1 Introduction au besoin en lois de commande non-linéaires .....	13
2.1.2 Techniques d'automatique non-linéaire .....	14
2.1.2.1 Introduction.....	14
2.1.2.2 Différents types de techniques de commande non-linéaire.....	16
2.1.2.2.1 La commande floue.....	16
2.1.2.2.2 La commande neuronale .....	16
2.1.2.2.3 Commande plate .....	18
2.1.2.2.4 Commande linéarisante par bouclage entrées-sorties (ou commande non-linéaire inverse ou encore inversion de la dynamique).....	19
2.1.2.3 Conclusion .....	21
2.1.3 Eléments d'approfondissement sur l'inversion de la dynamique.....	22
2.1.3.1 Introduction.....	22
2.1.3.2 Synthèse des problèmes spécifiques à la commande non-linéaire inverse et solutions .....	22
2.1.3.2.1 Non-inversibilité globale de $G$ ( $G^{-1}$ n'existe pas $\forall X \in \mathcal{R}^n$ ).....	22
2.1.3.2.1.1 Cas où $\text{rang}(G) < p$ .....	22
2.1.3.2.1.2 Cas où $m > p$ .....	22
2.1.3.2.1.3 Cas où $m < p$ .....	23
2.1.3.2.2 Non-inversibilité locale de $G$ ( $\exists X \in \mathcal{R}^n / \text{rang}(G) < p$ ).....	24
2.1.3.2.3 Cas des systèmes à non-minimum de phase ou non strictement propres .....	24
2.1.3.3 Cas des systèmes non affines en la commande.....	25
2.1.3.4 Placement de pôles linéaire après inversion de la dynamique .....	25
2.1.3.5 Exemple illustratif de commande non-linéaire inverse en linéaire .....	29
2.1.3.5.1 Mise en avant des propriétés de découplage .....	29
2.1.3.5.2 Cas sans dynamique interne.....	31
2.1.3.5.3 Cas avec dynamique interne.....	32
2.1.3.5.4 Cas d'un système à non-minimum de phase .....	34
2.1.3.6 Conclusion .....	37
2.2 CONTRIBUTION A LA COMMANDE NON-LINEAIRE ROBUSTE : LA COMMANDE RMI (ROBUST MULTI-INVERSION) .....	38
2.2.1 Introduction .....	38
2.2.2 Position du problème.....	39
2.2.3 Résultats préliminaires .....	42
2.2.4 Propriétés de stabilité et de performances robustes du RMI.....	44
2.2.5 Commentaires.....	54
2.2.6 Robustesse aux dynamiques des actionneurs : de la nécessité de mesurer $U$ .....	55
2.2.7 Exemples illustratifs.....	56
2.2.7.1 Exemple introductif : Robustesse à l'erreur de modèle pour différents types de lois de commande non-linéaires basées sur l'inversion de la dynamique.....	56
2.2.7.2 Robustesse au retard dans la chaîne de commande.....	60
2.2.7.3 Robustesse à la saturation en position d'actionneur .....	62
2.2.7.4 Robustesse à la saturation en vitesse (rate-lim) d'actionneur .....	63

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

2.2.7.5	Robustesse à des incertitudes multiples.....	64
2.2.8	<i>Conclusion sur la commande RMI</i> .....	65
2.3	TECHNIQUES DE MODELISATION ET D'IDENTIFICATION .....	66
2.3.1	<i>Introduction au besoin d'outils de modélisation et d'identification non-linéaires</i> .....	66
2.3.2	<i>Comparaison des techniques de modélisation et d'identification retenues</i> .....	67
2.3.2.1	Modélisation et identification par approximation polynomiale .....	67
2.3.2.1.1	Principe .....	67
2.3.2.1.2	Application.....	68
2.3.2.1.3	Performances.....	68
2.3.2.2	Modélisation et identification par réseau de neurones .....	69
2.3.2.2.1	Définition d'un neurone formel.....	69
2.3.2.2.2	Neurones en réseau .....	70
2.3.2.2.3	Apprentissage.....	70
2.3.2.2.4	Application.....	71
2.3.2.2.5	Résultats.....	71
2.3.2.3	Conclusion .....	72
2.3.3	<i>Le logiciel de modélisation automatique « ResOsma »</i> .....	73
2.3.3.1	ResOsma1 : L'interface avec les outils Airbus .....	73
2.3.3.2	Neuronisation : Le cœur du logiciel de modélisation automatique.....	74
2.3.3.2.1	Introduction.....	74
2.3.3.2.2	Construction des fichiers d'apprentissage, de validation et de test .....	75
2.3.3.2.3	Optimisation de l'apprentissage .....	75
2.3.3.2.4	Optimisation de l'architecture.....	75
2.3.3.2.5	Qualification et garantie de précision.....	76
2.3.3.3	ResOsma_library .....	77
2.3.3.4	ResOsma en quelques chiffres .....	80
2.3.3.5	Exemple d'exécution de la fonction Neuronisation.....	80
2.3.4	<i>Conclusion sur le besoin d'outils de modélisation et d'identification non-linéaires</i> .....	83
<b>3</b>	<b>APPLICATIONS.....</b>	<b>85</b>
3.1	INTRODUCTION.....	85
3.2	PRESENTATION DU SYSTEME AVION .....	86
3.2.1	<i>Introduction</i> .....	86
3.2.2	<i>Equations dynamiques</i> .....	86
3.2.3	<i>Equations cinématiques</i> .....	88
3.2.3.1	Equations longitudinales.....	88
3.2.3.2	Equations latérales .....	89
3.2.4	<i>Cas particuliers de l'avion en effet de sol</i> .....	90
3.2.5	<i>Conclusion</i> .....	91
3.3	LOIS DE COMMANDE DE VOL.....	92
3.3.1	<i>Proposition</i> .....	92
3.3.1.1	Commande dans le plan longitudinal.....	92
3.3.1.1.1	Introduction.....	92
3.3.1.1.2	L'existant .....	92
3.3.1.1.3	Architecture de lois de pilotage proposée .....	94
3.3.1.1.3.1	Commande en tangage.....	94
3.3.1.1.3.1.1	Principe général.....	94
3.3.1.1.3.1.2	Comment interfacer un manche latéral directement avec la loi en $q$ ?.....	95
3.3.1.1.3.1.3	Exemple de simulation sous SIMPA (SIMulateur de Pilote Automatique) .....	96
3.3.1.1.3.2	Commande en dérivée de pente .....	98
3.3.1.1.3.2.1	Principe général.....	98
3.3.1.1.3.2.2	Simulation .....	100
3.3.1.1.3.3	Fonctionnement en protection.....	102
3.3.1.1.3.3.1	Architecture générale de la loi en $q$ protégée .....	102
3.3.1.1.3.3.2	Exemple de calcul de $\theta_{\min}$ et $\theta_{\max}$ .....	103
3.3.1.1.3.3.3	Calcul des valeurs de protection.....	103
3.3.1.1.3.3.3.1	Traduction des valeurs de protection en dérivée de pente équivalente.....	103
3.3.1.1.3.3.3.2	Traduction des valeurs de protection en assiette équivalente.....	104
3.3.1.1.3.3.4	Simulation du comportement en protection d'assiette .....	105

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

3.3.1.1.3.3.5	Simulation de la protection en facteur de charge .....	107
3.3.1.1.3.3.6	Simulations de la protection d'incidence .....	110
3.3.1.1.4	Stabilité et performances robustes des lois proposées.....	113
3.3.1.1.5	Conclusion .....	113
3.3.1.2	Commande dans le plan latéral .....	114
3.3.1.2.1	Approche directe.....	114
3.3.1.2.2	Approche par étapes.....	115
3.3.1.2.3	Quelques simulations .....	118
3.3.1.2.4	Stabilité et performances robustes des lois proposées.....	120
3.3.2	<i>Résultats de robustesse pour une loi de type décollage automatique</i> .....	121
3.3.2.1	Introduction.....	121
3.3.2.2	Robustesse de la loi nominale.....	122
3.3.2.3	Robustesse de la loi moyenne .....	123
3.3.2.4	Robustesse de la loi extrême 1 .....	124
3.3.2.5	Robustesse de la loi extrême 2.....	125
3.3.2.6	Robustesse de la loi extrême 3.....	126
3.3.2.7	Robustesse de la loi extrême 4.....	127
3.3.2.8	Robustesse de la loi pour un avion "impilotable" .....	128
3.3.2.9	Mesures réduites .....	129
3.3.2.10	Conclusion.....	131
3.4	LOIS DE PILOTAGE AUTOMATIQUE / AUTOPOUSSEE .....	132
3.4.1	<i>Introduction</i> .....	132
3.4.2	<i>Pilotage automatique longitudinal</i> .....	132
3.4.3	<i>Pilotage automatique latéral</i> .....	133
3.4.4	<i>Automanette</i> .....	134
3.4.5	<i>Stabilité et performances robustes des lois proposées</i> .....	135
3.4.6	<i>Conclusion</i> .....	135
3.5	TRAJECTOIRES DE REFERENCE POUR L'ARRONDI A L'ATTERRISSAGE.....	136
3.5.1	<i>Introduction aux trajectoires d'arrondi</i> .....	136
3.5.1.1	Contexte de l'étude .....	136
3.5.1.2	Trajectoires de référence pour l'arrondi automatique : Pourquoi et comment ?.....	136
3.5.1.3	Cahier des charges des trajectoires d'arrondi.....	137
3.5.2	<i>Comparaison de trajectoires de référence innovantes</i> .....	138
3.5.2.1	Trajectoire exponentielle-affine améliorée .....	138
3.5.2.1.1	Introduction.....	138
3.5.2.1.2	Principe .....	138
3.5.2.1.3	Expression de la trajectoire d'arrondi en distance piste .....	140
3.5.2.1.4	Adaptation de la trajectoire de référence.....	141
3.5.2.1.5	Quelques formes de trajectoire.....	142
3.5.2.1.6	Conclusion .....	144
3.5.2.2	Trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée ».....	146
3.5.2.2.1	Introduction.....	146
3.5.2.2.2	Principe .....	146
3.5.2.2.3	Conclusion .....	148
3.5.2.3	Trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée » .....	149
3.5.2.3.1	Principe .....	149
3.5.2.3.2	Quelques formes de trajectoire.....	152
3.5.2.3.3	Conclusion .....	154
3.5.2.4	Récapitulatif des trajectoires proposées.....	154
3.5.3	<i>Outil d'aide à la conception des trajectoires d'arrondi</i> .....	155
3.5.3.1	Principe.....	155
3.5.3.2	Exemple de l'arrondi de l'A340-300 .....	155
3.5.3.3	Conclusion sur l'outil proposé.....	158
3.5.4	<i>Conclusion sur les trajectoires de référence</i> .....	159
3.6	DEMONSTRATION STATISTIQUE DE ROBUSTESSE POUR LA CERTIFICATION DU PILOTE AUTOMATIQUE D'ATTERRISSAGE (ANALYSE DE TYPE MONTE-CARLO).....	160
3.6.1	<i>Introduction à la certification</i> .....	160
3.6.2	<i>Contraintes de certification et cas de test</i> .....	160
3.6.3	<i>Résultats obtenus</i> .....	161

**Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes**  
**Application au suivi de trajectoire des avions de transport**

3.6.3.1	Exemple de STR .....	161
3.6.3.2	Résultats statistiques .....	164
3.6.4	Conclusion sur la "certificabilité" du pilote automatique développé .....	168
<b>4</b>	<b>BILAN DE LA THESE ET PERSPECTIVES .....</b>	<b>169</b>
<b>5</b>	<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>171</b>
<b>6</b>	<b>ANNEXES .....</b>	<b>179</b>
6.1	ROBUSTESSE DANS LE CADRE NON-LINEAIRE .....	179
6.1.1	Introduction .....	179
6.1.2	Analyse de robustesse par l'analyse des bifurcations .....	179
6.1.3	Commande non-linéaire robuste par backstepping (resp. forwarding) .....	179
6.1.4	Commande par régime glissant .....	181
6.1.5	Conclusion .....	182
6.2	COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES LONGITUDINAUX EN EFFET DE SOL .....	183
6.2.1	Coefficient de portance .....	183
6.2.2	Coefficient de traînée .....	184
6.2.3	Coefficient de moment .....	185
6.3	EVALUATION NUMERIQUE DES COEFFICIENTS AERODYNAMIQUES: EXEMPLE DE L'A321 EN LONGITUDINAL (CONFIGURATION 5) .....	186
6.3.1	Coefficient de portance .....	186
6.3.2	Coefficient de traînée .....	187
6.3.3	Coefficient de moment .....	188
6.4	DETAIL DES CALCULS DE GENERATION DE TRAJECTOIRE .....	189
6.4.1	Equations régissant la trajectoire en facteur de charge de type « simple rampe saturée » .....	189
6.4.2	Equations régissant la trajectoire en facteur de charge de type « double rampe saturée » .....	192
6.4.2.1	Intégration des équations en facteur de charge .....	192
6.4.2.2	Définition des variables inconnues par exploitation des conditions aux limites .....	195
6.4.2.3	Contraintes pour le respect des règles de causalité .....	198
6.4.2.3.1	$t_1 < t_2$ .....	198
6.4.2.3.2	$0 < t_1$ .....	198
6.4.2.3.3	$t_2 < t_3$ .....	200
6.5	PREMIERS TRAVAUX SUR LE LONGITUDINAL .....	202
6.5.1	Introduction .....	202
6.5.2	Principes de base .....	202
6.5.2.1	Résultats .....	202
6.5.2.2	Enseignements .....	203
6.5.3	Synthèse d'une première autopoussée .....	205
6.5.4	Loi en vitesse de tangage ( $q$ ) .....	208
6.5.4.1	Principes de base .....	208
6.5.4.2	Etude des grandes boucles .....	211
6.5.4.2.1	Synthèse d'une loi en facteur de charge .....	211
6.5.4.2.2	Synthèse d'une loi en pente aérodynamique .....	217
6.5.4.3	Conclusion sur la loi en $q$ .....	219
6.5.5	Loi en facteur de charge par inversion directe de l'équation de portance .....	220
6.5.6	Loi en facteur de charge au poste de pilotage .....	220
6.5.7	Loi en facteur de charge au poste de pilotage et au centre de gravité .....	224
6.5.8	Commande par boucles imbriquées facteur de charge / incidence .....	227
6.5.9	Conclusion .....	231
6.6	RESULTATS STATISTIQUES BRUTS OBTENUS SOUS SIMPA EN PHASE D'ATTERRISSAGE .....	232
6.6.1	Pilote automatique certifié de l'A340-300 .....	232
6.6.2	Pilote automatique RMI pour l'A340-300 .....	238
	<b>SOMMAIRE DETAILLE .....</b>	<b>245</b>

**AUTEUR** : Fabien LAVERGNE

**TITRE** : Méthodologie de synthèse de lois de commande non-linéaires et robustes : Application au suivi de trajectoire des avions de transport

**DIRECTEURS DE THESE** : Germain GARCIA / Sophie TARBOURIECH

**RESPONSABLE INDUSTRIEL** : Fabrice VILLAUME

**LIEU ET DATE DE SOUTENANCE** : LAAS du CNRS, le 21 octobre 2005 à 15 heures

## **RESUME**

Le travail présenté dans ce mémoire de thèse s'inscrit dans le cadre de la commande non-linéaire et robuste des avions de transport. Le but de cette thèse est de coupler les propriétés de la commande non-linéaire (adaptation aux non-linéarités de l'avion, synthèse de correcteurs explicites, facilité de réglage une fois la synthèse réalisée, généricité des lois de commande obtenues) à des propriétés de robustesse indispensables à l'activité aéronautique. En effet, pour garantir la sécurité des vols tant en pilotage manuel qu'en pilotage automatique, les lois de commande doivent présenter des propriétés fortes de stabilité et de performances robustes.

Après une introduction au contexte industriel et de recherche du sujet de thèse, une partie "techniques, méthodes et outils" nous permet de mettre en avant les contributions du travail de thèse dans les domaines de la commande non-linéaire robuste et de la modélisation automatique.

La technique de commande non-linéaire robuste présentée, appelée commande RMI (Robust Multi-Inversion) s'appuie sur la technique désormais classique d'inversion de la dynamique, notamment étudiée à Airbus depuis quelques années (Fabrice VILLAUME, Jean DUPREZ) et qu'elle robustifie par l'adjonction d'une boucle supplémentaire d'observation.

Nous présentons aussi un outil de génération automatique de modèles non-linéaires, multivariables et embarquables, ainsi que les méthodes afférentes basées sur les réseaux de neurones. Cet outil est nécessaire à l'industrialisation des lois de commandes non-linéaires basées modèles.

La partie applicative de la thèse souligne ensuite les particularités du système "avion" et propose des architectures de lois de commande, des trajectoires de référence associées, et la validation avancée de l'ensemble par simulations sur simulateur certifié.

Enfin, après une conclusion sur le bilan de la thèse et les perspectives envisageables, nous proposons des annexes permettant d'approfondir certains aspects de notre étude.

## **MOTS-CLES**

Pilote automatique, atterrissage automatique, décollage automatique commande automatique du vol, commande non-linéaire, robustesse, réseaux de neurones, dynamique du vol, modélisation, inversion de la dynamique, commande RMI.

## **DISCIPLINE ADMINISTRATIVE**

Systemes automatiques

---

### **INTITULE ET ADRESSE DU LABORATOIRE :**

LAAS du CNRS, 7 avenue du Colonel Roche, 31077 Toulouse, France

