



HAL
open science

Elaboration d'une modélisation mathématique du transfert multi-échelle des signaux mécaniques dans l'os cortical humain. Aspects théoriques et simulations numériques

Mihaela Predoi Racila

► To cite this version:

Mihaela Predoi Racila. Elaboration d'une modélisation mathématique du transfert multi-échelle des signaux mécaniques dans l'os cortical humain. Aspects théoriques et simulations numériques. Modélisation et simulation. Université de Franche-Comté, 2005. Français. NNT: . tel-00011578v1

HAL Id: tel-00011578

<https://theses.hal.science/tel-00011578v1>

Submitted on 10 Feb 2006 (v1), last revised 18 Feb 2006 (v2)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée à

L'UFR DES SCIENCES ET TECHNIQUES
DE L'UNIVERSITE DE FRANCHE-COMTE

pour obtenir le

**GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITE DE
FRANCHE-COMTE**

Spécialité : *Mathématiques et Applications*

**ELABORATION D'UNE MODELISATION
MATHEMATIQUE DU TRANSFERT MULTIECHELLE
DES SIGNAUX MECANQUES DANS L'OS CORTICAL
HUMAIN. ASPECTS THEORIQUES ET SIMULATIONS
NUMERIQUES.**

par

Mihaela PREDOI RACILA

Soutenue : le 22 novembre 2005 devant la commission d'examen :

Président : D. CIORANESCU, Professeur, Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Rapporteurs : M. EL HATRI, Professeur, Ecole Supérieure de Technologie de Fès
M.C. HO BA THO, Professeur, Université de Technologie de Compiègne
M. PANFILOV, Professeur, Institut National Polytechnique de Lorraine

Examineurs : J. N. PERNIN, Professeur, LMA, Université de Franche-Comté
V. RADULESCU, Professeur, Université de Craiova

Codirecteurs de
thèse: J. M. CROLET, Professeur, Université de Franche-Comté
C. NICULESCU, Professeur, Université de Craiova

*A mes parents,
A tous ceux qui me sont chers*

REMERCIEMENTS

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au sein du Laboratoire de Mathématiques de l'Université de Franche-Comté de Besançon dans le cadre d'une thèse en cotutelle, sous la direction de J. M. CROLET, Professeur à l'Université de Franche-Comté et celle de C. NICULESCU, Professeur à l'Université de Craiova.

Mes premiers mots de reconnaissance vont naturellement vers mon codirecteur de thèse, Prof. J. M. CROLET. Je lui remercie de m'avoir accueilli au sein du Laboratoire de Mathématiques de Besançon, de m'avoir proposé ce sujet passionnant et d'avoir mis à ma disposition tous les moyens nécessaires à son aboutissement. Au-delà de son encadrement scientifique que j'ai eu la chance d'apprécier, il a toujours été à l'écoute des joies mais aussi des angoisses ou des états d'âme de sa thésarde. Je n'oublierai pas ses qualités humaines qui ont grandement contribué au plaisir que j'ai eu à réaliser ce travail. Je lui dois beaucoup et plus encore.

Un grand merci aussi à Prof. C. NICULESCU, qui a sûrement du initier mon attrait pour la recherche. C'est lui qui m'a présenté à J. M. CROLET, qui allait encadrer mon stage de DEA à l'Université de Franche-Comté et puis devenir mon codirecteur de thèse dans le cadre de la cotutelle réalisée entre les deux universités, de Craiova et de Besançon. C'est lui aussi qui a collaboré à l'élaboration de mon sujet de thèse et a encadré mon travail au sein du Laboratoire de Mathématiques de Craiova, tout au long de ma première année de thèse. Cela suffirait très largement à mériter toute ma reconnaissance, mais ce n'est pas tout : Monsieur C. NICULESCU m'a aussi et surtout soutenu dans des moments de doute, de désespoir même. Il sait ce que je lui dois, je ne l'oublierai pas.

Mes remerciements vont aussi aux membres du jury :

- Prof. D. CIORANESCU, qui m'a fait l'honneur d'accepter de présider ce jury
- Prof. EL HATRI, M-C HO BA THO et M. PANFILOV qui ont eu la gentillesse d'être les rapporteurs scientifiques de mon travail, malgré leur emploi du temps chargé. Je leur remercie aussi pour leur participation au jury
- Prof. J. N. PERNIN et V. RADULESCU, pour avoir bien voulu participer à ce jury

Je remercie aussi A. MEUNIER de Laboratoire de Recherches Orthopédiques de Paris et Prof. C. REY de Toulouse, pour nos discussions qui m'ont permis d'avancer dans la modélisation du problème complexe abordé. Ils m'ont fait part de leur grande expérience en biomécanique.

Je tiens à remercier vivement D. CALUGARU, Ingénieur de Recherche à l'Université de Franche-Comté, pour son énorme disponibilité et son aide soutenu. Il n'a pas mesuré son temps pour m'apporter son aide, notamment en s'occupant activement de la « mise en route » de mes simulations avec le code SETMP dont il s'en occupe au Laboratoire de Mathématiques. Cela ce n'est pas tout, il a toujours su être un très bon ami. Merci Dan, à toi et à ta famille.

Je n'oublierai pas non plus tous les autres collègues et doctorants avec lesquels j'ai pu faire un bout de chemin, que je ne nommerai pas de peur d'en oublier, et qui ont su me supporter jusqu'aux dernières heures de ce travail.

Un grand merci à Madame DiGuglielmo, pour l'aide qu'elle m'a apporté pendant ces années. Sa gentillesse et sa simplicité n'ont pu que renforcer le respect que j'éprouvais pour elle depuis mon arrivée à Besançon.

Cette liste n'a pas la prétention d'être exhaustive et j'espère que ceux qui n'y retrouvent pas leur nom ne m'en tiendront pas rigueur. Sachez que vous n'êtes pas oubliés et que vous avez tous contribué à l'excellent souvenir que je garderai des deux années qui viennent de s'écouler.

Au lecteur qui s'estimerait injustement oublié, j'adresse mes plus plates excuses. Il faut probablement en chercher la cause dans ces intenses mois de travail qui, par leur intensité, ont mis à mal les capacités mnémoniques du malheureux neurone qui me reste.

J'ai voulu limiter ces pages de remerciements aux gens que j'ai connu dans un cadre professionnel. D'autres, ailleurs, mes parents, mes amis, m'ont entouré et aidé à travers les années que j'ai consacré à cette thèse. Je pense à eux aussi.

TABLE DES MATIERES

Introduction	I
1 Chapitre 1	
Problématique et cadre de l'étude	1
1.1 Le tissu osseux	2
1.1.1 Os compact	4
1.1.2 Activité cellulaire	4
1.2 Le remodelage osseux	5
1.3 Cadre général de l'étude	7
1.3.1 Etat actuel de la modélisation	8
1.3.2 Limites de cette modélisation	10
1.3.3 Nouvelle modélisation	11
1.4 Conclusions	17
2 Chapitre 2	
Homogénéisation en milieu périodique	19
2.1 Historique	19
2.2 Milieux et fonctions périodiques	21
2.3 Méthodes d'homogénéisation	24
2.4 La méthode des développements asymptotiques	31
2.5 Schéma de calcul des coefficients homogénéisés	33
2.6 Conclusions	34
3 Chapitre 3	
Modélisation élémentaire des EVMC	35
3.1 Introduction	35
3.2 Arrangement géométrique	36
3.3 Brève analyse du comportement mécanique probable	38
3.4 Proposition de détermination des propriétés physiques	38
3.5 Quelques résultats numériques	40
3.6 Conclusions	42

4	Chapitre 4	
	Homogénéisation de structures piézoélectriques	43
4.1	Introduction	43
4.2	Mise en équations. Hypothèses. Notations	43
4.3	Cadre fonctionnel. Existence et unicité de la solution	46
4.4	Homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques	47
4.5	Equations homogénéisées. Caractéristiques physiques homogénéisées . . .	50
4.6	Retour au niveau microscopique	
	Calcul des microcontraintes	55
4.7	Etude sur la convergence de la solution	63
5	Chapitre 5	
	Homogénéisation de l'os cortical	73
5.1	Introduction	73
5.2	Homogénéisation d'un composite dont les constituants sont monocliniques	74
	5.2.1 Formulation variationnelle des problèmes cellulaires	79
	5.2.2 Seconds membres des problèmes cellulaires	80
	5.2.3 Caractéristiques homogénéisées	89
	5.2.4 Conclusions	96
5.3	Hypothèses et méthodologie	96
5.4	Homogénéisation lamellaire	101
	5.4.1 Structure lamellaire avec une orientation quelconque des fibres de collagène	106
5.5	Homogénéisation ostéonale	111
	5.5.1 Détermination des fonctions χ^{mn} et Ψ^{mn}	114
	5.5.2 Détermination des fonctions Φ^m et R^m	117
	5.5.3 Calcul des coefficients homogénéisés de la structure	120
5.6	Homogénéisation corticale	125
5.7	Propriétés d'isotropie des structures considérées	129
	5.7.1 Isotropie de la lamelle	130
	5.7.2 Isotropie de la structure ostéonale	135
5.8	Conclusions	138
6	Chapitre 6	
	Propriétés physiques de la paroi cavitaire ostéonale	139
6.1	Position du problème	139
6.2	Existence et unicité de la solution	141
6.3	Limite du système (P_{piezo})	142

6.4	Conclusions	145
7	Chapitre 7	
	Nouvelle modélisation de la structure de l'os compact	147
7.1	Introduction	147
7.2	Nouvelle loi de comportement	148
7.3	Rôle du fluide	152
	7.3.1 Notations	153
	7.3.2 Equations en milieu poreux	153
	7.3.3 Equation de Stokes et couplage Darcy-Stokes	155
7.4	Modélisation finale	157
	7.4.1 Description du niveau lamellaire	158
	7.4.2 Description du niveau ostéonal	159
	7.4.3 Description du niveau VOE	161
7.5	Conclusions	162
8	Chapitre 8	
	Logiciels et résultats	163
8.1	Introduction	163
8.2	Déscription du logiciel "SiNuPrOs"	164
	8.2.1 Données	164
	8.2.2 Etapes de calcul	167
	8.2.3 Description des étapes	169
8.3	Résultats d'homogénéisation	169
8.4	Résultats de localisation	200
	8.4.1 Description du cadre macroscopique	201
	8.4.2 Ecoulement dans une structure ostéonale	203
	8.4.3 Champs mécaniques à l'échelle nanoscopique	209
8.5	Conclusions	211
9	Chapitre 9	
	Conclusions et perspectives	213
9.1	Conclusions	213
9.2	Perspectives	216
	Annexe 1	
	Description des étapes du logiciel SiNuPrOs	217
	Annexe 2	
	Formules d'une rotation autour de l'axe Ox	223

Annexe 3

Empilement selon l'axe Ox

227

Bibliographie

231

INTRODUCTION

L'os est un matériau vivant en perpétuelle évolution: il change sa masse lors de la croissance, il peut changer localement son architecture et ses propriétés mécaniques lors du remodelage comme dans le cas de la consolidation d'une fracture, enfin il change sa morphologie avec l'âge. En fait, il optimise simultanément son architecture, sa structure et ses propriétés physiques afin de s'adapter aux sollicitations auxquelles il est soumis. Ce processus biologique d'optimisation est fascinant car remarquablement efficace et à ce phénomène naturel sont associées plusieurs questions. Quelle est la structure optimale de l'os? Est-il possible de décrire son comportement mécanique? Est-il possible de décrire l'adaptation fonctionnelle? Quel est le mécanisme du remodelage osseux et comment est-il induit? Est-il possible de prévoir les pathologies?

Sur le plan mécanique, l'os est un milieu fortement hétérogène dans lequel on peut distinguer sept niveaux structurels à sept échelles d'espace distinctes et les biomécaniciens savent mesurer les caractéristiques physiques de certains composants élémentaires. Les cliniciens ont besoin de connaître les champs de déformations ou de contraintes dans tout le fémur. Il est évident qu'il est impossible d'entreprendre un calcul de structure pour déterminer de tels champs. Il faut donc utiliser d'autres outils d'investigation.

La thématique du comportement mécanique de l'os cortical humain et de son remodelage est étudiée depuis plusieurs années au laboratoire de Mathématiques de Besançon et, à mon arrivée, il m'a été demandé de finaliser l'ensemble des études réalisées afin de pouvoir aborder une modélisation de la minéralisation. Pour ce faire, nous avons d'abord été amenés à introduire le niveau fibrillaire dans la modélisation existante. Cependant, les tests effectués à mes débuts n'étaient pas concluants et, à plusieurs reprises, nous avons été amenés à remettre en cause la modélisation.

Après m'être penchée sur la problématique de l'os cortical et de son remodelage, j'ai étudié les travaux qui avaient été réalisés et j'ai analysé leurs limites respectives. Une première étude réalisée entre 2003 et 2004 et publiée dans *Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering*, [CR05], nous a amené à conclure que la nature de l'os cortical n'était pas due à la seule structure haversienne mais plutôt à l'organisation architecturale au niveau fibrillaire. Le **premier chapitre** regroupe ces analyses et ce résultat qui est très important sur le plan biomécanique. Cette partie de notre travail est à l'origine d'une importante refonte des modélisations qui avaient été élaborées.

La nécessité d'introduire le niveau fibrillaire nous a rapidement conduit à introduire une entité fictive, les EVMC (Elementary Volume of Mineral Contents), pour répondre à des exigences de calcul quant aux développements de la méthode asymptotique d'homogénéisation. La première question que nous nous sommes posée était de savoir

si la méthode que nous utilisons pour l'homogénéisation était la plus appropriée. Cette réflexion est conduite au **chapitre 2**.

Par ailleurs, nous avons très vite observé que, si ces EVMC avaient des propriétés physiques adéquates, nous étions capables de retrouver les caractéristiques essentielles des propriétés osseuses. Mais il manquait alors un justificatif à l'introduction de telles propriétés. Nous nous sommes intéressés à la partie élémentaire de la structure minérale du cortical, le cristal d'hydroxyapatite (Hap) et, suite à une visite chez le Pr. Ch. Rey à Toulouse, nous avons décidé de mettre en place une première modélisation des propriétés d'un ensemble de cristaux d'Hap. Cependant, une telle modélisation n'était pas envisageable sans prendre en compte le fluide lié aux cristaux et le fluide s'écoulant entre eux. Ce développement est présenté au **chapitre 3**.

Le fait d'introduire le fluide au niveau nanoscopique nous obligeait à l'introduire à tous les niveaux que nous utilisons et donc nous avons été amenés à reprendre tous les développements relevant de l'homogénéisation. Nous avons à homogénéiser des structures pseudo-périodiques comprenant un composant piezo électrique, un composant linéairement élastique et un fluide diélectrique. Ces développements sont détaillés dans les deux chapitres 4 et 5. **Le chapitre 4** reprend la théorie de l'homogénéisation dans un cadre général sur lequel on peut (et je l'espère on pourra) s'appuyer à plusieurs occasions. Tout d'abord dans **le chapitre 5** on décrit, de manière assez précise, tous les développements que nous faisons pour obtenir, à partir des constituants de base, l'expression des coefficients homogénéisés au niveau macroscopique. Ensuite dans les développements suggérés au chapitre 7 par l'introduction de nouvelles lois de comportement, il se peut que le critère que nous avons choisi dans ce mémoire ne convienne pas et qu'un autre critère émerge. Il faudrait tout de même vérifier qu'il soit admissible au sens des développements que nous avons faits.

Nous avons alors pensé pouvoir aborder le phénomène de minéralisation. Dans la phase initiale, des ostéoclastes ont creusé une galerie et nous imaginions que des ions transportés par le fluide contenus dans cette galerie pourraient être attirés par le collagène apparu à la surface de cette galerie. Afin d'estimer ce pouvoir attractif, nous avons évalué, par homogénéisation, les propriétés piézo électriques de cette surface dans le **chapitre 6**. Sans anticiper sur le résultat, nous pouvons d'ores et déjà affirmer que ces propriétés piézo ne semblent pas suffisantes pour amorcer un tel processus de minéralisation.

Conscients de la complexité du phénomène, nous avons alors considéré l'os cortical comme un milieu poreux et étudié, en tenant compte de toutes les investigations précédentes, les écoulements qui pouvaient exister dans une structure ostéonale. Ces développements introduisent le **chapitre 7** et nous avons constaté que le fluide traversait deux zones d'écoulement se distinguant par la vitesse d'écoulement : le canal de Havers, avec une vitesse "rapide" et la structure osseuse avec une vitesse "lente". Cette constata-

tion a des répercussions importantes sur le plan biomécanique. Ayant pris en compte toutes ces améliorations, nous pouvions enfin obtenir les propriétés homogénéisées de l'os cortical. Nous avons constaté que les composantes piézo électriques ne "s'évanouissaient" pas. Il faut savoir qu'il est aujourd'hui bien admis que l'os cortical n'est pas, au niveau macroscopique, un matériau piézo électrique. Si le résultat que nous obtenions n'est pas conforme à la réalité, il est cependant conforme à l'esprit de l'homogénéisation : cette méthode calcule des moyennes à partir des seules propriétés physiques et de la géométrie des constituants de base. Elle ne tient en aucun cas compte de la physique du problème. Or, au cours du processus de minéralisation, le matériau piézo électrique (le collagène à faible module d'Young : environ 1 Gpa) est "enrobé" d'un matériau uniquement élastique (les cristaux d'Hap à fort module d'Young : environ 117 Gpa). De manière un peu simple, on peut dire que le processus de minéralisation a pour conséquence de diminuer le chargement appliqué au collagène et donc de limiter l'effet piézo électrique de ce dernier. Pour prendre en compte ce phénomène mécanique, nous avons donc été obligés d'introduire une nouvelle loi de comportement (avec seuil). Cette nouvelle loi est introduite à chaque niveau structurel de notre structure osseuse. Les divers travaux que nous avons conduits aboutissent en fait à une nouvelle modélisation qui clos ce chapitre.

Après un bref descriptif, au **chapitre 8**, des fonctionnalités du code **SiNuPrOs** (*Simulation Numérique des Propriétés de l'Os*) que nous avons conçu, nous regroupons divers résultats des simulations numériques effectuées.

Enfin **le chapitre 9** et dernier chapitre est consacré aux conclusions et aux perspectives que cette étude ouvre.

Chapitre 1

Problématique et cadre de l'étude

L'objectif qui est fixé à long terme est de pouvoir simuler numériquement le remodelage osseux, à la fois dans des cas sains et dans des cas pathologiques. Ce sujet a été abordé par plusieurs chercheurs de l'équipe de calcul scientifique du laboratoire de mathématiques de l'université de Franche-Comté depuis 1988. Les travaux que j'ai réalisés s'appuient donc sur de nombreux résultats obtenus durant ces années. Mais le modèle auquel cette équipe est arrivée en 2002 n'était pas encore satisfaisant et je l'ai beaucoup modifié. Le degré de complexité que j'ai été amené à introduire peut apparaître sans fondement au lecteur néophyte sur ce sujet. Cependant, je n'ai pas le choix : il n'est pas possible de modéliser simplement un tel phénomène sans être au plus près de la réalité physiologique qui, elle, est fort complexe. Ce premier chapitre a donc pour objet de présenter, assez brièvement, l'aspect biophysique du milieu osseux humain et les premiers résultats et conclusions de la modélisation qui ont été considérés comme pas suffisamment satisfaisants.

Les os (au nombre de 206) remplissent différentes fonctions dans le corps humain. Ils donnent au corps sa forme extérieure, soutiennent et protègent les parties molles et renferment la moelle qui produit les cellules sanguines. D'un point de vue statique, les os assurent le soutien du corps et la protection de certains viscères. D'un point de vue dynamique, ils représentent les éléments de transmission des forces musculaires au cours du mouvement. Les os contiennent en outre les réservoirs de sels minéraux que l'organisme peut mobiliser par résorption, selon ses besoins. De plus, les os détoxifient le corps en éliminant les métaux lourds, tels que le plomb et l'arsenic, ainsi que d'autres toxines, véhiculés dans la circulation générale.

Les os sont composés d'une substance rigide, *le tissu osseux* et d'une substance molle, *la moelle*, rouge ou jaune, selon l'âge du sujet.

La plupart des os (à l'exception de ceux du crâne) apparaissent d'abord sous la forme d'une ébauche cartilagineuse qui s'ossifie ensuite au fur et à mesure de la croissance du nouveau-né. Deux méthodes fondamentales de classification servent à différencier les os du corps. Le premier système de classification est basé sur l'emplacement anatomique

de l'os (axial ou appendiculaire), le second sur sa forme (long, court, plat ou irrégulier). Les os axiaux sont les quatre-vingt os qui se répartissent le long de l'axe central, vertical du corps. Ils soutiennent et protègent la tête et le thorax et comprennent le crâne et la colonne vertébrale (rachis). Les os appendiculaires, au nombre de cent vingt six, sont ceux qui forment les membres, c'est-à-dire les épaules et les hanches, les bras et les jambes, les mains et les pieds, les doigts et les orteils.

Les os du squelette ont des formes variables qui dépendent de leur fonction et de leur situation dans le corps [Cab95]. On distingue:

- les os longs, tels que le radius, l'humérus et le fémur, qui se composent du corps ou diaphyse, et des extrémités ou épiphyses, où l'on trouve l'os spongieux
- les os courts, tels que les os du carpe, les os du tarse, les phalanges de la main et du pied et le calcaneum, plus petits et comportant de nombreuses surfaces articulaires
- les os plats, tels que l'omoplate, le sternum et les os du crâne, de faible épaisseur
- les os irréguliers, tels que la vertèbre, ne pouvant pas être classés dans les groupes précédents
- les os "pneumatiques", tels que les os du crâne, contenant de l'air
- les os sésamoïdes, tels que les os de la main ou la rotule, petits os situés dans l'épaisseur des tendons

1.1 Le tissu osseux

Le tissu osseux est constitué d'eau (environ 1/4 du poids de l'os), de matières organiques (environ 1/3 du poids de l'os, dont la majeure partie est représentée par une protéine, l'osséine) et de sels minéraux inorganiques (le calcium, le phosphore et le magnésium prédominent, bien que l'on trouve également du fer, du sodium, du potassium, du chlore et du fluor en petites quantités).

A la coupe, l'os frais présente, de la superficie vers la profondeur:

- le périoste (membrane fibreuse)
- l'os cortical
- l'os spongieux, ou une cavité, limitée par l'endoste

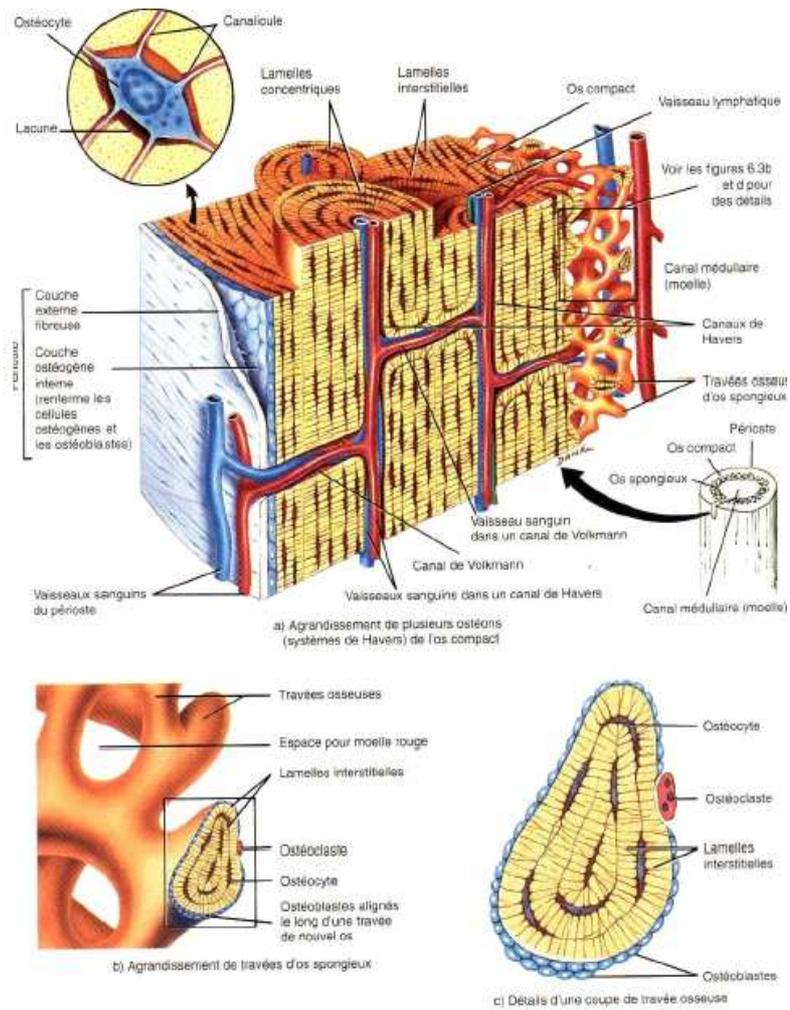


Figure 1.1: Os cortical et spongieux. Système de Havers [Gra94]

1.1.1 Structure de l'os compact

L'os compact (ou *cortical*), dur et dense, constitue la coque externe des os et comprend des *ostéons* (unité histo-physiologique constituée par un canalicule vasculaire et des lamelles osseuses concentriques qui l'entourent) et des *lamelles* arciformes s'interposant entre les ostéons. L'os cortical est formé par une association dense d'unités structurales élémentaires cylindriques appelées *ostéons*. L'ostéon est composé de lamelles concentriques au canal de Havers. Les vaisseaux sanguins irriguant l'os passent par les canaux de Havers. Les ostéons, de structure cylindrique, sont reliés entre eux par des *lamelles interstitielles* formées par les restes d'ostéons antérieurs, l'ensemble donnant une structure compacte, hétérogène, anisotrope et viscoélastique.

1.1.2 Activité cellulaire

Au niveau cellulaire, l'os trabéculaire contient différents types de cellules: ostéoblastes, ostéoclastes et ostéocytes [Gib88] (Figures 1.2 et 1.3):

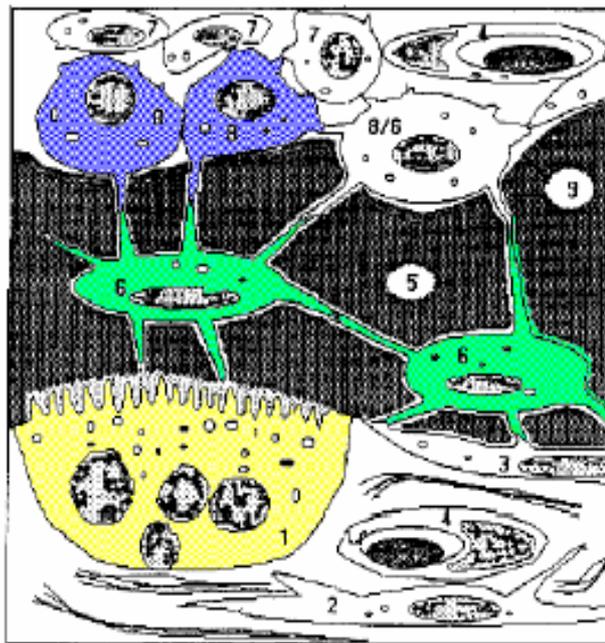


Figure 1.2: Les différentes cellules du tissu osseux [Gib88]

Les *ostéoblastes* sont les cellules qui contribuent à la formation de l'os mais qui ne peuvent pas se diviser par mitose.

Les *ostéocytes* sont des cellules osseuses matures qui proviennent des ostéoblastes; ce sont les cellules principales du tissu osseux. Comme les ostéoblastes, ils ne présentent

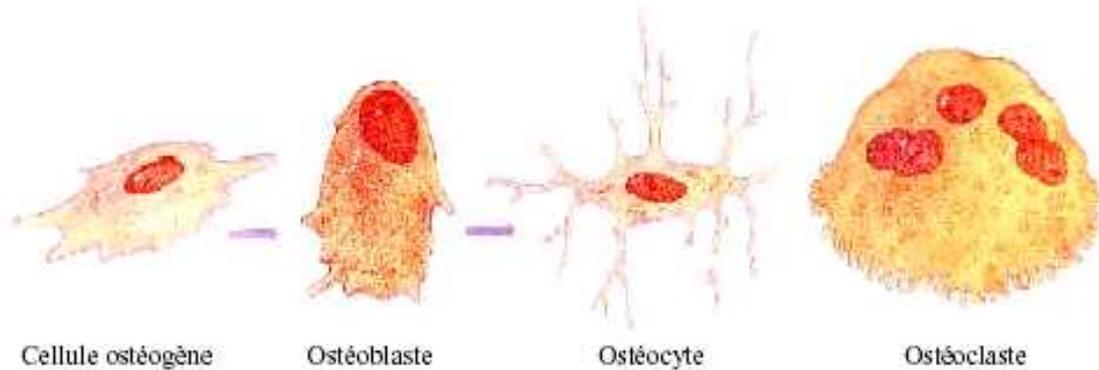


Figure 1.3: Cellules de l'os trabéculaire [Gib88]

aucune possibilité de mitose. Les ostéoblastes se trouvent sur la surface de l'os mais deviennent des ostéocytes quand ils sont couverts de matrice. Ils ne sécrètent alors plus de matrice. Alors que les ostéoblastes produisent d'abord le tissu osseux, les ostéocytes maintiennent les activités cellulaires quotidiennes de celui-ci, notamment l'échange des nutriments et des déchets avec le sang. Le rôle physiologique de ces cellules est encore mal connu.

Les *ostéoclastes* sont issus de monocytes en circulation (un type de globule blanc). Ils se posent sur la surface de l'os et assurent la résorption osseuse (destruction de la matrice) essentiellement dans le développement, la croissance, le maintien et la réparation de l'os.

1.2 Le remodelage osseux

En tant que structure adaptée, adaptable et optimisée, l'architecture osseuse est continuellement régénérée par apposition et résorption locale d'os: c'est le *remodelage osseux*. Ces processus de formation et de résorption d'os sont couplés et synchronisés par l'intermédiaire de paquets d'ostéoblastes et d'ostéoclastes couramment appelés *unités de remodelage*. Chez un sujet en bonne santé, l'ensemble des taux de résorption et de formation reste constant, permettant la conservation de la masse osseuse, mais le processus de remaniement n'est pas uniforme. Chaque année, un homme adulte renouvelle 25% de son os trabéculaire et 4% de son os cortical.

Ce phénomène physiologique du remodelage osseux peut être schématisé de la façon suivante [Gra94]: les ostéoblastes apposent de l'os aux endroits réclamant plus de renfort, pendant que les ostéoclastes assurent la résorption là où l'os devient trop rigide par surminéralisation. La destruction ostéoclastique et la reconstruction ostéoblastique

s'enchaînent dans le temps et l'espace à l'échelle microscopique. Le remodelage se déroule de façon cyclique en quatre phases:

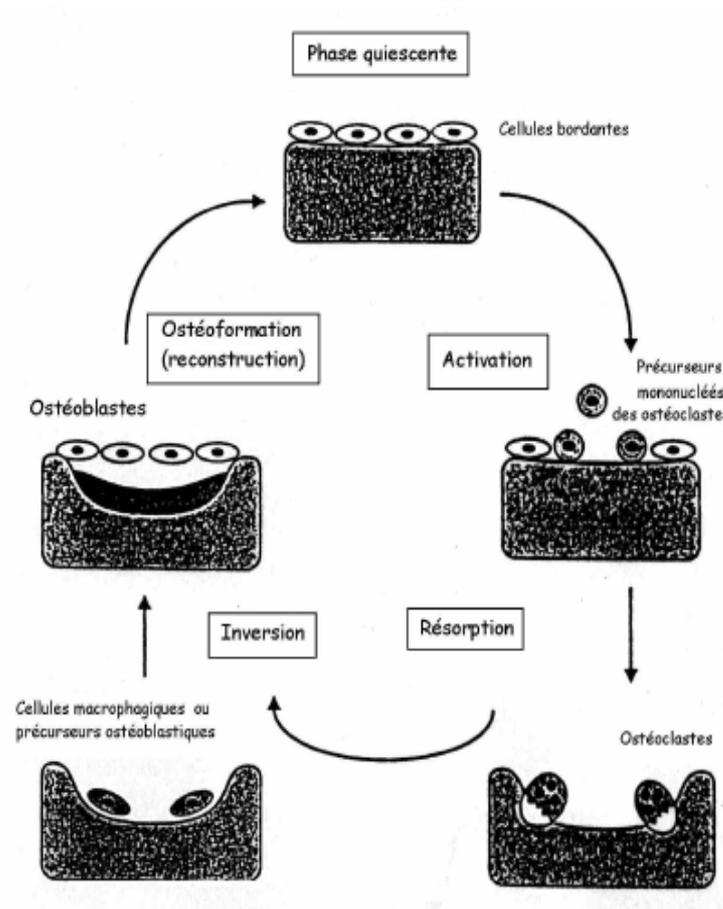


Figure 1.4: Description du remodelage osseux [Cow93]

Phase d'activation: le long de la surface osseuse inactive recouverte de cellules bordantes, ou ostéoblastes quiescents, surviennent les précurseurs mononucléés des ostéoclastes.

Phase de résorption: l'os ancien est résorbé par les ostéoclastes.

Phase d'inversion: les ostéoclastes sont remplacés par des cellules mononucléées.

Phase de reconstruction (ostéoformation): les ostéoblastes colonisent la lacune et la combrent en apposant une nouvelle matrice osseuse. Durant cette dernière phase, certains ostéoblastes restent enfermés dans la matrice nouvellement formée et deviennent alors des ostéocytes.

L'os s'adaptant de lui-même aux conditions de chargement auxquelles il est soumis, hypothèse proposée par Wolff il y a plus d'un siècle, doit donc contenir des capteurs

internes capables de mesurer cette charge et de traduire les signaux pour activer le remaniement osseux. De nombreuses hypothèses ont été faites sur le fait que ce serait les cellules ostéocytes qui agiraient comme des cellules mécano-sensitives. En effet, d'après Cowin et al. [Cow91], [Cow93], elles capteraient les signaux mécaniques et seraient régulatrices de la masse osseuse en agissant sur les cellules actrices du remodelage (ostéoclastes, ostéoblastes). Ces hypothèses sont dues au fait que les ostéocytes se révèlent être les candidates appropriées pour ce rôle de par leur architecture et leur position favorable dans la matrice extracellulaire osseuse.

Récemment, une nouvelle hypothèse a été avancée par Qui et al. [Qui97], supposant que la mort cellulaire des ostéocytes serait à l'origine du phénomène de remodelage osseux. Quoiqu'il en soit, le débat reste ouvert sur l'activité cellulaire liée au remodelage osseux.

1.3 Cadre général de l'étude

Apparemment, les premiers essais de modélisation du cortical comme un milieu composite sont dus à Currey [Cur62] et plus tard Bonfield et Lie [BLi67]. Ils ont appliqué «la loi des mélanges» ou modèle de Voigt pour trouver le module de Young du cortical E_{cort} , en utilisant les modules d'Young du collagène et de l'hydroxyapatite E_{col} , E_{Hap} ainsi que les volumes du collagène et de l'hydroxyapatite v_{col} et v_{Hap} :

$$E_{cort} = v_{col} \cdot E_{col} + v_{Hap} \cdot E_{Hap} \quad (1.1)$$

D'autres auteurs ont utilisé le modèle de Reuss qui donne le module d'Young de l'os cortical par la relation :

$$\frac{1}{E_{cort}} = \frac{v_{col}}{E_{col}} + \frac{v_{Hap}}{E_{Hap}} \quad (1.2)$$

L'inconvénient de ces modèles est que, d'une part, ils ignorent l'arrangement de la structure de l'os compact, et d'autre part, ils n'en donnent que les bornes supérieure (1.1) et inférieure (1.2).

Pour ces raisons, Piekarski [Pie73] a proposé le modèle de Hirsch, qui combine les deux modèles précédents d'une façon linéaire :

$$\frac{1}{E_{cort}} = x \cdot \frac{1}{v_{col} \cdot E_{col} + v_{Hap} \cdot E_{Hap}} + (1 - x) \cdot \left(\frac{v_{col}}{E_{col}} + \frac{v_{Hap}}{E_{Hap}} \right)$$

où $x = 0.925$ pour l'os cortical.

Cette dernière équation présente les mêmes handicaps que celles qui l'ont précédées.

Dans une série d'articles [Kat76]-[Kat85], J. L. Katz et al. suggèrent qu'il est insuffisant de considérer l'os compact comme un matériau composite à deux phases. Ils proposent un modèle hiérarchique à deux niveaux :

- au premier niveau, l'ostéon est considéré comme un matériau fibreux ayant une structure cylindrique. Son module d'Young E_{ost} est calculé en se basant sur l'équation suivante :

$$E_{ost} = E_{org} \cdot V_{org} \cdot (1 - v_{org} \cdot v_{ost}) / (1 - v_{org}^2) + \sum_n E_{min} \cdot V_{min} \cdot \alpha_n \cdot (\cos^4 \varphi_n - v_{ost} \cdot \cos^2 \varphi_n \cdot \sin^2 \varphi_n)$$

relation introduite par Katz en [Kat81], α_n et φ_n étant des paramètres liés aux caractéristiques géométriques et physiques des cristaux d'hydroxyapatite.

- au second niveau, les ostéons sont considérés comme des fibres creuses noyées dans une matrice (ligne cimentante + lamelle interstitielle). Les ostéons ont un arrangement hexagonal. Le calcul des bornes des caractéristiques d'élasticité de l'os compact se fait par appel aux équations de Hashin-Rosen [Has64]. Par application de ce modèle, Katz obtient des résultats encourageants.

Des modèles hiérarchiques ont été proposés après par Wagner et Weiner [WaW92], puis un modèle plus raffiné a été introduit en 1998 par Akiva et al. [AWW98].

Des modèles globaux existent également. Ils ont été réalisés par Reilly et Burstein [ReB75], Mammone et Hudson [MaH93], Sasaki et al. [SaM89], Pidaparti et al. [PCT96], etc.

La méthode que l'on propose pour notre modèle est une méthode d'homogénéisation sur cinq niveaux hiérarchiques, en utilisant des développements asymptotiques.

L'idée principale consiste à considérer l'architecture de l'os cortical comme une structure multi niveaux. Dans une première étape, on utilise ou on développe tous les outils mathématiques nécessaires pour décrire comment une structure, à un niveau donné, va se comporter, dès lors que l'on connaît les propriétés physiques des "constituants de base" et l'agencement respectif de ces constituants. Ces développements devraient permettre de caractériser au mieux chacun de ces niveaux. Dans une seconde étape, on étudie l'effet d'un chargement réaliste, au niveau macroscopique de l'os, sur chacun de ces niveaux. On aura ainsi l'ensemble des sollicitations mécaniques existant dans le milieu où évoluent protéines et cellules. On pourra alors modéliser et simuler l'apposition osseuse.

1.3.1 Etat actuel de la modélisation

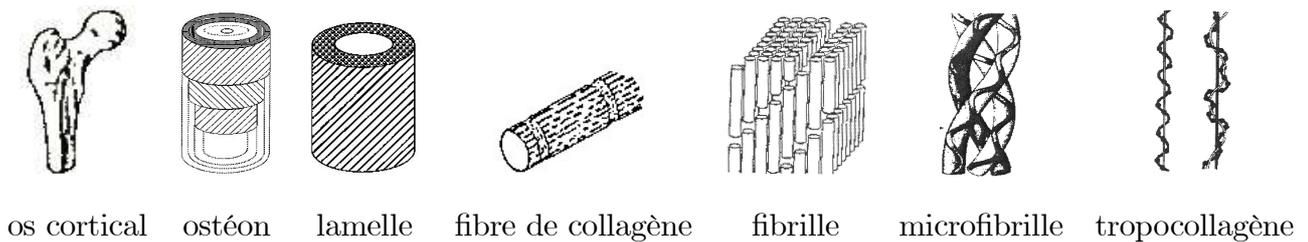
Considérons un os long, comme le fémur. Une coupe transversale effectuée dans la partie médiane permet de distinguer trois parties en allant du centre vers l'extérieur : la moelle, l'os spongieux et l'os cortical. Nous nous intéressons à ce dernier. Une analyse microscopique met en évidence une architecture complexe que l'on peut décrire comme suit. La première image qu'on a est celle d'un matériau composite: il faut imaginer des

cylindres creux juxtaposés les uns à côté des autres et scellés par une matrice. Les cylindres s'appellent *les ostéons*, le trou interne *le canal de Havers* et la matrice *le système interstitiel*.

Une analyse plus approfondie montre que les ostéons sont en fait un assemblage de *lamelles* cylindriques emboîtées les unes dans les autres et que chaque lamelle est constituée d'un réseau de *fibres orientées de collagène* enroulées hélicoïdalement et insérées dans des cristaux d'hydroxyapatite. L'orientation des fibres de collagène peut être différente entre deux lamelles consécutives. Par ailleurs, ces fibres sont un ensemble de *fibrilles*, chaque fibrille étant à son tour composée de *micro fibrilles*. Enfin, chaque micro fibrille est un arrangement hélicoïdal de trois composants de *tropocollagène*.

L'os cortical ressemble donc à un matériau composite multi échelle.

La figure ci-dessous permet de mieux comprendre cette présentation simplifiée d'une architecture fort complexe. En résumé et pour préciser les dénominations structurelles utilisées ultérieurement, on dira que la structure de l'os cortical humain comprend sept niveaux structurels qui sont les niveaux macroscopique, ostéonal, lamellaire, fibreux, fibrilleux, microfibrilleux et enfin tropocollagénique.



Le composant organique principal de l'os est le tropocollagène (niveau 7 de l'architecture ci-dessus). Les composants minéraux sont nombreux et variés (calcium, magnésium, ...). Les niveaux 6 et 7 sont totalement organiques et les composantes minérales n'apparaissent qu'au niveau fibrillaire (5) pour coexister avec les composantes organiques dans tous les autres niveaux.

Une telle architecture a été exhibée afin de pouvoir utiliser la théorie mathématique de l'homogénéisation qui est, de par sa nature, un outil très bien adapté pour l'étude de telles structures. En effet, elle permet d'abord le calcul des coefficients homogénéisés à partir des caractéristiques physiques des composants élémentaires en tenant compte de la géométrie à une échelle microscopique de ces composants. Ensuite, elle permet d'obtenir une information locale au niveau microscopique à partir d'une donnée macroscopique.

Depuis plus d'une quinzaine d'années, diverses études ont été menées à Besançon sur cette architecture de l'os cortical. Nous les rappelons très succinctement ci-dessous:

- 1 Dans le cadre d'une étude statique utilisant la théorie de l'homogénéisation sur quatre niveaux avec une pseudo périodicité (depuis le niveau fibreux jusqu'au niveau macroscopique), nous savons caractériser, à partir des propriétés élastiques du collagène et de l'hydroxyapatite, les propriétés élastiques homogènes de l'os cortical macroscopique. On sait également déterminer les informations au niveau ostéonal à partir de données (déformations, contraintes,) au niveau macroscopique (voir [Aou91]).
- 2 Dans le cadre d'une étude dynamique utilisant la théorie de l'homogénéisation sur deux niveaux (du niveau ostéonal au niveau macroscopique) et en introduisant un fluide visqueux dans le canal de Havers, on peut montrer le comportement visco-élastique à mémoire longue de l'os cortical macroscopique (voir [Da96]).
- 3 Aussi dans le cadre d'une étude dynamique utilisant la théorie de l'homogénéisation sur deux niveaux (du niveau fibreux au niveau lamellaire) et en introduisant la notion de forte hétérogénéité existant entre les propriétés physiques du collagène et celles de l'hydroxyapatite, on sait montrer que chaque lamelle a un comportement visco-élastique à mémoire courte. Par ailleurs, on peut montrer que ce comportement visco-élastique à mémoire courte ne se retrouve pas au niveau ostéonal (J. M. Crolet et M. Panfilov).
- 4 Enfin, dans le cadre d'une étude statique utilisant la théorie de l'homogénéisation sur quatre niveaux avec une pseudo périodicité (depuis le niveau fibreux jusqu'au niveau macroscopique), nous savons caractériser, à partir des propriétés piézoélectriques du collagène et à partir des propriétés élastiques de l'hydroxyapatite, les propriétés piézo-électriques homogènes de l'os cortical macroscopique (N. Pernin et R. Mahraoui).

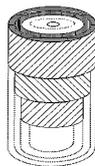
En conclusion, l'architecture de l'os cortical est telle qu'il est doté de propriétés propres à certains niveaux. Ceci lui permet sûrement d'optimiser son comportement mécanique (chargement, résistance à la rupture,) et sa restructuration.

1.3.2 Limites de cette modélisation

Dans les modélisations existantes quatre niveaux hiérarchiques ont déjà été pris en compte : *macroscopique* (niveau de l'os), *microscopique* (niveau ostéonal), *mésoscopique* (niveau lamellaire) et *nanoscopique* (composants) avec une architecture spécifique:



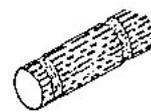
macro



micro



meso



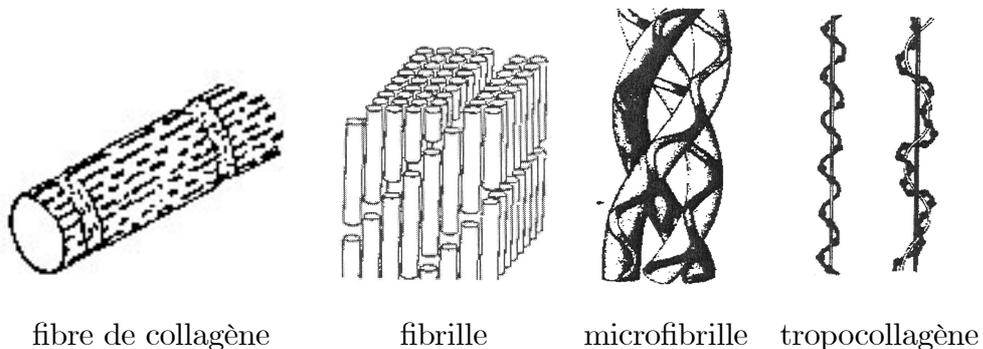
nano

Mais ces modèles présentent trois inconvénients importants :

- l'Hap est considérée comme un milieu continu. Au mieux, elle pourrait être considérée comme un milieu poreux avec une porosité donnée (à l'échelle nano) mais ce concept ne peut pas être employé en début du procédé de minéralisation où il n'y a rien dans la cavité sauf du fluide, des ions, des protéines et des cellules
- ils ne sont pas validés expérimentalement
- ils ne peuvent pas expliquer tout, par exemple le procédé de minéralisation ou les variations locales des propriétés mécaniques dans la lamelle

1.3.3 Nouvelle modélisation

Notre but est maintenant de construire une nouvelle modélisation permettant d'introduire le processus de minéralisation. Du point de vue physiologique, la fibre de collagène est considérée comme un ensemble de fibrilles, chaque fibrille étant composée de bâtonnets de collagène (ou micro fibrilles) et ces micro fibrilles sont elles-mêmes un arrangement spatial spécifique de tropocollagène. Ce dernier ainsi que les micro fibrilles étant des composants uniquement organiques, nous n'allons pas les retenir dans cette nouvelle modélisation. La minéralisation, c'est-à-dire le dépôt des cristaux d'Hap survenant entre les bâtonnets de collagène afin de constituer les fibrilles, nous devons prendre en compte cette structure de fibrille.

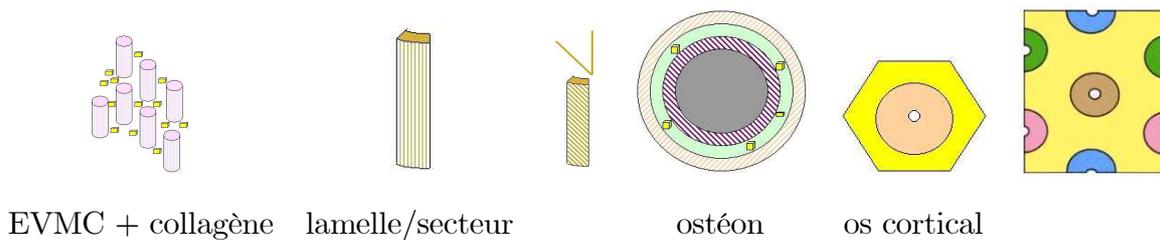


Alors, pour notre nouvelle modélisation, nous introduisons le niveau de la *fibrille* et nous pourrions alors avoir un modèle d'os cortical à cinq niveaux. Mais l'architecture "bâtonnets de collagène entourés d'Hap" pour former des "fibres elles mêmes entourées d'Hap" paraît redondante aux biomécaniciens (discussion informelle avec A. Meunier du Laboratoire de Recherches Orthopédiques de Paris). De plus, elle est pénalisante lorsqu'on conçoit l'architecture de la lamelle car, en début de minéralisation, il n'y a aucune raison pour qu'il y ait la même densité de cristaux d'Hap en tout point de cette lamelle. Alors, nous choisissons d'occulter le niveau "fibre de collagène" pour considérer,

comme constituants de base, les bâtonnets de collagène et les cristaux d'Hap. Nous nous heurtons alors à une difficulté supplémentaire : celle de la taille respective des bâtonnets de collagène et des cristaux d'Hap qui sont très différentes. Pour donner un ordre de grandeur, un bâtonnet de collagène peut être considéré comme un cylindre ayant un diamètre de 100 nm (nanomètre) et une longueur de 300 nm alors que le cristal d'Hap est un parallélépipède dont les dimensions ont pour ordre de grandeur (en nm) : 10 x 3 x 20. Afin de pouvoir traiter numériquement ce problème, nous introduisons un nouveau concept : le *Volume Élémentaire de Contenu Minéral* (EVMC : Elementary Volume of Mineral Content) qui est composé en fait de paquets de cristaux d'Hap liés entre eux. Ce EVMC n'a aucune réalité physiologique mais ils donne une proportion cohérente avec la taille des bâtonnets de collagène.

Notre nouveau modèle présente alors quatre niveaux, comme le précédent, mais la différence principale avec les deux modèles se situe à l'échelle nanoscopique où les composants sont maintenant les *bâtonnets de collagène* et les EVMC.

Maintenant, à l'analyse descendante de l'architecture corticale que nous venons de mener, nous pouvons opposer une construction ascendante de l'os:



Avec des bâtonnets de collagène orientés verticalement et une distribution d' EVMC, nous obtenons l'architecture d'un secteur lamellaire, ce qui nous permet d'une part de bien prendre en compte l'aspect tubulaire de la lamelle et d'autre part de simuler des hétérogénéités architecturales ou de minéralisation. Il est donc supposé que les propriétés physiques sont constantes dans un secteur angulaire et que deux secteurs peuvent tôt ou tard différer par la densité des cristaux d'Hap et/ou petites variations de l'angle d'orientation des bâtonnets de collagène. Restant à cette même échelle, il n'y a aucune difficulté à changer l'orientation des bâtonnets. La construction d'un ostéon se fait par apposition de lamelles concentriques (faites de plusieurs secteurs angulaires). En fonction de l'orientation des bâtonnets de collagène, nous pouvons imaginer ces ostéons comme ceux décrits par Ascenzi ou toute autre sorte d'ostéons.

La construction de l'os cortical peut être réalisée de plusieurs manières : si un seul type d'ostéon est considéré, alors une période hexagonale peut être employée; si plusieurs types d'ostéons (au maximum 4) sont considérés, alors une période rectangulaire est plus adéquate.

Nous considérons que les EVMC sont caractérisés par un module d'Young transversal E_1 , un module d'Young longitudinal E_3 et par un coefficient de Poisson ν . Le collagène

est caractérisé par un module d'Young E_{col} et par un coefficient de Poisson ν_{col} ainsi que par des propriétés piézoélectriques .

Le processus à suivre pour déterminer les caractéristiques mécaniques homogénéisées de l'os cortical peut être résumé comme suit :

1) on prend pour caractéristiques de l'EVMC un module de Young longitudinal E_1 , un module de Young transversal E_3 et un coefficient de Poisson ν et pour le collagène, un module de Young E_{col} et un coefficient de Poisson ν_{col}

2) avec ces caractéristiques (et avec une nano porosité qui peut être donnée) nous pouvons obtenir, par homogénéisation, les propriétés mécaniques homogénéisées d'une lamelle (Q_{lam}) dont les fibres sont parallèles à l'axe vertical

3) en utilisant des équations classiques de rotation, on calcule les coefficients de la lamelle $Q_{lam\varphi_1}$ après la rotation d'angle φ_1 . Ainsi, nous obtenons les propriétés mécaniques de la lamelle pour une orientation des bâtonnets de collagène d'angle $\varphi_1(Q_{lam\varphi_1})$. L'orientation des bâtonnets de collagène peut différer entre deux lamelles consécutives. Nous considérons deux orientations φ_1 et φ_2 pour ces bâtonnets de collagène et nous calculons pour ces orientations les coefficients homogénéisés pour un ostéon (Q_{ost})

4) alors, en considérant quatre types d'ostéons (ou des ostéons du même type), le système interstitiel, et en tenant compte de la macroporosité donnée par le canal Haversien et les canaux de Volkman, nous calculons enfin les propriétés physiques de l'os cortical (Q_{os}) au niveau macroscopique

Niveau	Caractéristiques mécaniques					porosité	Résultats
Lamelle	E_{coll}	ν_{coll}	E_1	E_3	ν	nano porosité	Q_{lam}
Orientation	Q_{lam}	φ_1				/	$Q_{lam\varphi_1}$
Ostéon	$Q_{lam\varphi_1}$	$Q_{lam\varphi_2}$				canalicules / interface	Q_{ost}
Os	Q_{ost1}	Q_{ost2}	Q_{ost3}	Q_{ost4}	Q_{int}	canal de Havers/Volkman	Q_{os}

(1.3)

La conclusion du premier groupe de simulations que nous avons réalisées dans de nombreuses configurations différentes n'est pas celle que nous aurions aimé donner. En effet, l'analyse de ces premiers résultats numériques prouve la non adéquation de cette modélisation avec la réalité physique : si nous considérons les résultats obtenus au niveau macroscopique et si nous étudions le rapport entre le coefficient élastique homogénéisé longitudinal et le coefficient élastique homogénéisé transverse, nous trouvons des valeurs dont l'ordre de grandeur est de 1.1 avec un maximum à 1.2. Or, toutes les références bibliographiques relevant d'une estimation expérimentale de ce rapport concordent pour donner un ordre de grandeur de 1.5.

La modélisation telle qu'elle est décrite présente donc une faiblesse. Nous avons mené une analyse fine de toutes les hypothèses que nous avons émises. A l'exception du niveau

nanoscopique, toutes les hypothèses formulées sont physiquement et physiologiquement proches de la réalité. Que se passe-t-il au niveau nanoscopique ? Nous avons implicitement, sans formuler une hypothèse particulière, considéré qu'à ce niveau, il y avait une distribution régulière en espace des EVMC et que ces EVMC avaient des propriétés isotropes. Le nombre de simulations numériques réalisées et qui correspond vraisemblablement à toutes les possibilités du modèle nous conduit à penser que, sans formuler d'autre hypothèse à ce niveau nanoscopique, il semble presque impossible d'obtenir une anisotropie réelle à l'échelle macroscopique.

Ce travail de modélisation que nous avons effectué permet donc de donner une première conclusion très importante dans la mesure où elle remet en cause l'origine de l'anisotropie osseuse. Cette modélisation prouve que l'anisotropie de l'os n'est pas entièrement induite par la seule architecture haversienne mais qu'elle l'est aussi par l'organisation architecturale des cristaux d'Hap au niveau nanoscopique.

Dans ce cadre, nous sommes conduits à formuler deux nouvelles hypothèses au niveau nanoscopique. Nous supposons:

- que les cristaux d'Hap ont la même orientation que celle des bâtonnets de collagène
- que l'agencement spatial des cristaux d'Hap n'est pas quelconque : ils se déposent d'abord autour du collagène et la zone qu'ils couvrent s'étend peu à peu de manière radiale, le bâtonnet de collagène étant au centre de cette construction

Ces hypothèses ne réglant pas la difficulté liée à la taille respective des cristaux et des bâtonnets de collagène, nous transposons ces hypothèses aux EVMC. La cohérence physique de nos hypothèses peut être argumentée en trois points :

i) la faible anisotropie obtenue à l'échelle macroscopique est physiquement cohérente. La composante "dure" dans la structure osseuse est l'Hap (module d'Young d'environ 117 GPa contre 1 GPa pour le collagène présent dans le tissu osseux). En considérant que les EVMC ont des propriétés isotropes et qu'ils sont régulièrement distribués en espace, alors l'homogénéisation faite au niveau de la lamelle donne un milieu homogénéisé qui est presque isotrope. Le changement d'orientation ne change pas beaucoup cette anisotropie et les deux autres homogénéisations augmentent légèrement l'anisotropie mais d'une manière telle que le résultat final est un matériau avec une faible anisotropie.

ii) un scénario possible permettant de comprendre cette distribution spatiale pourrait être trouvé dans l'existence des propriétés piézoélectriques du collagène. Après la destruction de l'os par les ostéoclastes et l'élaboration du tissu collagénique (totalement ou partiellement), certains minéraux ionisés sont en suspension dans le fluide. Le potentiel induit par l'effet piézoélectrique des bâtonnets de collagène pourrait attirer dans le voisinage de ces bâtonnets certaines de ces particules ionisées en quantité suffisante. L'action des protéines ou autres cellules actives pourrait alors être responsable de l'élaboration des cristaux d'Hap.

iii) plusieurs auteurs ont déjà suggéré une telle distribution de l'Hap (F. J. Ulm, M. J. Glimcher, Ch. Hellmich, [Hel02]).

Considérons les notations suivantes :

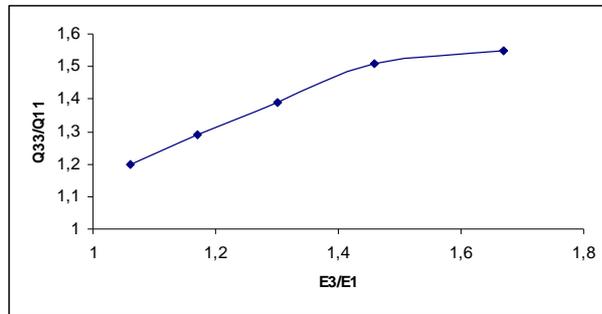
R_{nano} = module d'Young longitudinal de l' Hap (E3) / module d'Young transverse de l' Hap (E1)

Q33 : coefficient élastique homogénéisé de l'os cortical dans la direction verticale

Q11 : coefficient élastique homogénéisé de l'os cortical dans la direction transverse

$R_{macro} = Q33 / Q11$

On a étudié d'abord les effets des propriétés mécaniques de l'EVMC sur les propriétés mécaniques osseuses (échelle macroscopique). Pour cela, nous traçons la courbe $R_{macro} = R_{macro}(R_{nano})$ dont le graphe est donné ci-dessous:



Influence du rapport E3/E1 sur le rapport Q33/Q11

Il existe de nombreuses références bibliographiques à partir desquelles il est possible de donner une plage de valeurs expérimentales pour le rapport R_{macro} . Nous en donnons quelques unes dans le tableau (1.4).

	MEU (89)	Katz (87)			Ascenzi (84)
Q_{33}	27, 6	32, 5	29	30	27, 6
Q_{11}	18, 1	23, 4	21, 1	20, 9	18
Q_{33}/Q_{11}	1, 5	1, 39	1, 37	1, 44	1, 53

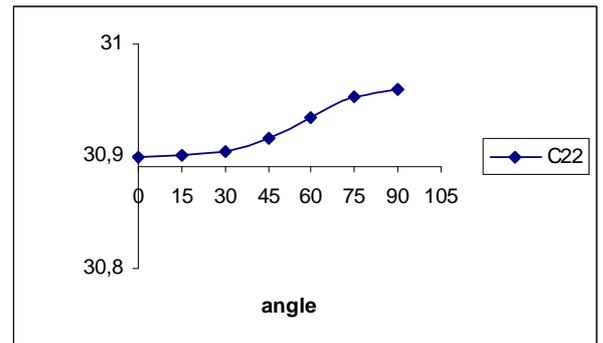
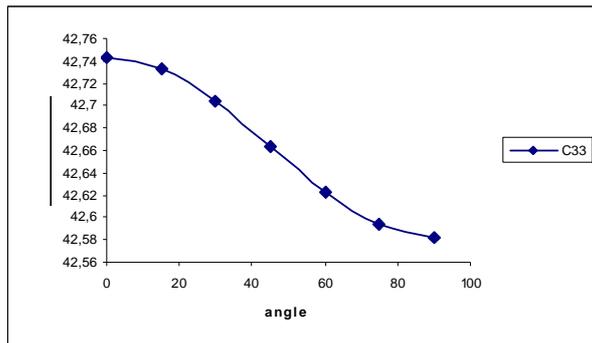
(1.4)

Sur le plan expérimental, le rapport R_{macro} semble donc appartenir à l'intervalle [1.37;1.53]. Nous pouvons alors en déduire un intervalle de cohérence physique pour le rapport R_{nano} qui serait l'intervalle [1.27;1.51]. Cela signifie que, si les propriétés mécaniques de l'EVMC sont telles que le rapport R_{nano} soit dans l'intervalle [1.27;1.51], alors des résultats plausibles peuvent être obtenus pour les propriétés mécaniques de l'os cortical à l'échelle macroscopique.

Il reste cependant un problème totalement ouvert et que nous n'avons pas abordé: quelle peut être l'origine de cette particularité? Plusieurs possibilités doivent être étudiées

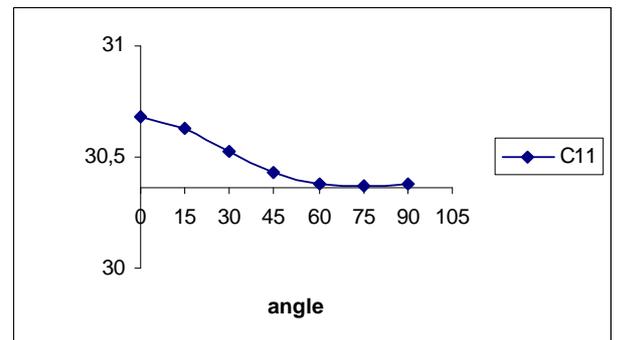
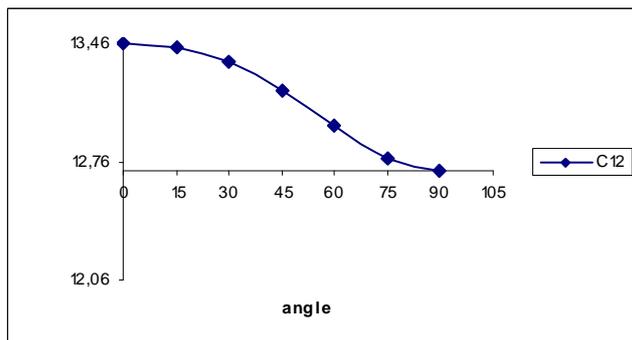
sur les cristaux d'Hap: l'anisotropie, la forme, l'architecture géométrique, la distribution dans le voisinage du collagène, ...

On a également étudié la manière dont l'orientation des fibres de collagène peut influencer sur les propriétés mécaniques de l'os au niveau macroscopique. Pour cela, on considère que tous les paramètres de la structure (minéralisation, volume du système interstitiel, types d'ostéons, porosité, ...) sont fixés et que seule l'orientation des fibres de collagène peut varier. Les résultats trouvés sont présentés aux figures ci-dessous:



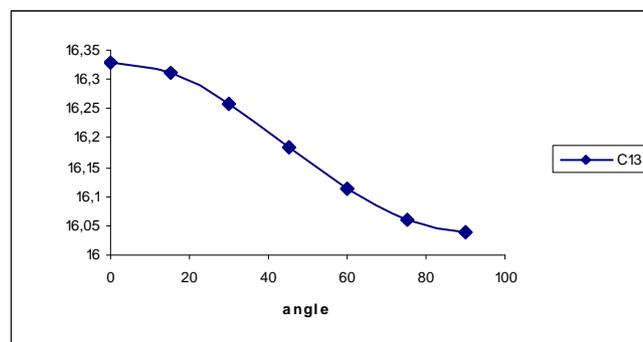
Influence de l'orientation des fibres de collagène

Influence de l'orientation des fibres de collagène



Influence de l'orientation des fibres de collagène

Influence de l'orientation des fibres de collagène



Influence de l'orientation des fibres de collagène

On constate que ces variations sont très faibles (par exemple : 0,016 % pour C_{13} , 0,009 % pour C_{11} et C_{22} et 0,052 % pour C_{12})

Cette modélisation présente encore un autre intérêt : elle permet de poser clairement le problème de la nature piézoélectrique de l'os. Dans l'état actuel de nos connaissances au niveau biomécanique et des possibilités de notre modélisation, nous devons admettre trois faits :

- le collagène est un matériau piézoélectrique
- l'os cortical (au niveau macroscopique) n'a aucune propriété piézoélectrique
- notre modélisation montre que théoriquement les coefficients piézoélectriques sont non nuls au niveau macroscopique, bien qu'ils soient assez faibles

Il nous faut concilier ces trois faits qui, à priori, sont antagonistes. A ce stade de la réflexion, on mesure toute l'importance de la notion d'échelle. Certains processus physiques sont vrais à une échelle donnée et leur contribution doit être exploitée à cette seule échelle.

1.4 Conclusions

La taille des cristaux d' Hap étant trop petite en comparaison avec la taille des bâtonnets de collagène, une nouvelle entité (le Volume Élémentaire de Contenu Minéral) est suggérée à l'échelle nanoscopique. Cependant, nous ne disposons pas encore d'outils permettant de déterminer les propriétés physiques de cette entité. Notre modèle permet d'essayer toutes les configurations structurales possibles et il semble prouver que l'anisotropie de l'os ne soit pas induite par la seule structure haversienne mais plutôt, et de manière très importante, par les propriétés des cristaux d'Hap et par leur organisation spatiale.

Il s'ensuit que l'ensemble de la modélisation de l'os cortical doit être reconsidéré dans ses moindres détails. Les développements présentés dans les chapitres 2 à 6 nous conduiront à construire une nouvelle modélisation.

Chapitre 2

Homogénéisation en milieu périodique

Dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, la mise en œuvre de la méthode des développements asymptotiques nécessite la résolution d'équations aux dérivées partielles sur des géométries plus ou moins compliquées via des méthodes classiques de discrétisation (éléments finis, volumes finis, etc...). Or, au niveau fibrillaire, les deux composantes en présence ont des dimensions très différentes : le bâtonnet de collagène est un cylindre ayant un diamètre de 100 nm et une longueur de 300 nm alors que le cristal d'hydroxyapatite (Hap) est un petit parallélépipède (10 x 3 x 20 nm).

Par ailleurs, ces cristaux ne sont pas homogènes mais formés d'une partie solide entourée d'un gel (dit eau liée) et l'arrangement des cristaux entre eux peut laisser apparaître des canaux dans lesquels va s'écouler le fluide, recréant ainsi un milieu poreux dans lequel il n'y a pas à priori de périodicité.

Il est clair qu'une technique d'homogénéisation doit être utilisée, cependant la méthode des développements asymptotiques utilisée à ce jour n'est peut être pas la plus performante.

L'objectif de ce chapitre est d'analyser les méthodes existantes afin de faire le choix le plus judicieux.

2.1 Historique

Dans ce paragraphe nous présentons un court historique de la théorie mathématique de l'homogénéisation. Nous ne visons pas à mentionner toutes les références existantes, et notre tâche ici n'est pas de produire une revue compréhensive du sujet, qui est extrêmement vaste. La littérature mentionnée ici se réfère plutôt aux papiers qui ont été la source de notre propre compréhension de l'homogénéisation et qui, directement ou indirectement, ont influencé les résultats présentés dans ce mémoire.

Mis à part les méthodes dites “de centrage” ou “de moyennage”, utilisées pour l’étude des équations différentielles ordinaires, qui sont plus anciennes mais qui relèvent aussi de l’homogénéisation, les idées qui ont fondé la théorie mathématique de l’homogénéisation, ont vu le jour progressivement depuis bientôt trente ans. Il semble que ces idées soient nées presque simultanément, d’une part en Mécanique Théorique, avec l’emploi de méthodes fondées sur les développements asymptotiques et d’autre part en Mathématiques Appliquées, avec des théories relatives à la convergence de fonctionnelles associées à des problèmes aux limites.

Mais le concept ou plus exactement le terme “homogénéisation” au sens strict a été probablement pour la première fois employé par E. Sanchez-Palencia dans une note aux Comptes Rendus de l’Académie des Sciences de Paris en 1971 [SP71]. Dans cette note, il a montré, en utilisant des développements asymptotiques, que la loi dite “de Darcy”, pour les milieux poreux était une version homogénéisée des équations de Stokes régissant le mouvement lent d’un fluide visqueux à travers une matrice rigide.

On pourrait chercher aussi son origine dans le travail effectué par De Giorgi et Spagnolo [GS73], où les auteurs prouvaient le premier théorème sur le passage à la limite dans les edp linéaires avec coefficients périodiques rapidement oscillants, quand le paramètre de taille associé à la cellule unité tend vers zéro. Leur preuve était assez compliquée et était basée sur des résultats de Spagnolo [Sp67], [Sp68], qui avait introduit la notion de G-convergence associée à des séquences des edp symétriques et linéaires et avait étudié leur propriétés.

Ensuite Tartar [Ta74] suggérait une preuve directe du théorème d’homogénéisation en utilisant la méthode dite d’énergie ou la théorie de compacité. Son approche était basée sur l’utilisation, au cours du passage à la limite, d’un choix spécial de fonctions test dans la formulation variationnelle de l’équation, en combinaison avec le maintenant classique lemme de compacité.

A peu près dans le même temps, Sanchez-Palencia [SP74] et Bakhvalov [Ba74], [Ba75] employaient la méthode des développements asymptotiques multi-échelle pour la construction de l’équation homogénéisée. Sanchez-Palencia faisait seulement du développement formel asymptotique, mais Bakhvalov avait aussi prouvé que la solution de l’équation homogénéisée est la limite des solutions des problèmes originaux hétérogènes quand le petit paramètre tend vers zéro, et il fournit l’erreur estimée correspondante. Le concept de la méthode des développements asymptotiques (puissant d’un point de vue rigoureux mais aussi heuristique) est due en fait à Krylov & Bogoliubov [KB47] et à Bogoliubov & Mitropolsky [BM61] et a été employée avec succès pour l’étude de plusieurs problèmes concernant les échelles multiples depuis ce moment là. L’idée maintenant déjà classique consiste à chercher un développement asymptotique de la solution d’un problème donné, avec des coefficients qui “séparent” l’échelle fortement oscillante de celle “lente”.

Des résultats similaires à ceux obtenus par [SP74], [Ba74], [Ba75] ont été obtenus ultérieurement mais indépendamment, par Keller [Ke77] et Bensoussan et al. [BLP78]. Les applications et les extensions de cette méthode générale dans la théorie de l'homogénéisation ont été davantage développées et résumées dans Sanchez-Palencia [SP80] et Bakhvalov & Panasenko [BP84].

Jusqu'en 1975, des résultats d'homogénéisation avaient été donnés seulement pour des problèmes linéaires. Mais rapidement, De Giorgi et Franzoni [GF75] développaient la théorie de la Γ -convergence pour les fonctionnelles non-linéaires, en fournissant une méthode rigoureuse pour réaliser une homogénéisation dans ces problèmes non linéaires qui admettent une formulation variationnelle avec une fonctionnelle convexe (pas forcément quadratique). Presque dans le même temps, Bakhvalov [Ba75] appliquait son idée originale de développement asymptotique multi-échelle à un cas général non linéaire. Cependant, il a seulement construit un développement asymptotique formel, mais sans établir un résultat de convergence.

Un autre pas majeur dans la théorie de l'homogénéisation a été franchi par Murat et Tartar [MT97], qui ont introduit la notion de H -convergence des opérateurs monotones et ont étudié les principales propriétés de celle-ci. Cette méthode permet en particulier d'homogénéiser des équations elliptiques linéaires dont les coefficients ne sont pas forcément symétriques. Elle permet aussi de traiter un grand nombre de problèmes non linéaires qui n'admettent pas forcément une formulation variationnelle et donc ne sont plus couverts par la théorie de la Γ -convergence.

Une dizaine d'années après, une autre méthode a été développée: la méthode de convergence "à deux échelles". Cette technique a été introduite par le travail de Nguetseng [Ng89] et développée après par les travaux de Grégoire Allaire [All92] qui a montré de nombreuses applications de cette méthode. L'un des intérêts de celle-ci est la facilité de la compréhension des oscillations dans le cadre du processus d'homogénéisation, par l'introduction d'une notion de convergence des fonctions dépendantes d'une variable "microscopique", qui s'ajoute à la variable "macroscopique". En ce sens, cette méthode est quelque part semblable à la méthode des développements asymptotiques à deux échelles. Le lemme de compacité à deux échelles a été un nouvel apport à cette méthode.

2.2 Milieux et fonctions périodiques

Dans \mathbb{R}^n , $n \geq 2$, muni du repère $\{O, e_1, \dots, e_n\}$, on considère le pavé : $Y = \prod_{i=1}^n]-a_i, a_i[$,

de frontière $\partial Y = \bigcup_{p=-n}^n f_p$ où f_p est une face de Y et f_{-p} est la face opposée.

Supposons :

1. Y est une partition de deux sous-ensembles tels que

$$Y = \bigcup_{l=1}^2 Y_l, \bar{Y}_1 \cap \bar{Y}_2 = S_1$$

où S_1 est une sous variété de dimension $(n - 1)$ de classe C^1 , de mesure positive

2. Chaque Y_l est localement situé du même côté de sa frontière \dot{Y}_l avec $\dot{Y}_l = S_1 \cup \partial Y_l$, où $\partial Y_l = \bar{Y}_l \cap \partial Y$, $l = 1, 2$

3. Posons $\partial Y_{lp} = \partial Y_l \cap f_p$ alors, nous supposons que $\forall p \in \{-n, \dots, -1, 1, \dots, n\}$, $\forall l \in \{1, 2\}$, $\partial Y_{lp} \neq \emptyset$ et elle est de mesure positive

4. ∂Y_{lp} et ∂Y_{l-p} sont géométriquement superposables ; de plus :

(a) si $n = 2$ et α donné, $\partial Y_{\alpha p}$ est connexe $\forall p \in \{1, \dots, n\}$; dans ce cas Y_1 est connexe, alors que Y_2 est connexe par morceaux

(b) si $n = 3$, ∂Y_{1p} , ∂Y_{2p} sont connexes $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, dans ce cas, Y_1 et Y_2 sont connexes

Ainsi, soit $T^{\mathbf{k}}$ la translation de vecteur $\mathbf{T}^{\mathbf{k}} = (t_1^{\mathbf{k}}, t_2^{\mathbf{k}} \dots t_n^{\mathbf{k}})$, avec $t_i^{\mathbf{k}} = 2k_i a_i$, $\mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n$, et posons $Y^{\mathbf{k}} = T^{\mathbf{k}}(Y)$.

Ω est alors défini par :

$$\Omega = \left\{ \varepsilon(Y^{\mathbf{k}} + Y), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \right\}, \varepsilon = \frac{1}{N}, N \in \mathbb{N}^* ; |\mathbf{k}| < (2N + 1)^n, |\mathbf{k}| = |k_1| + |k_2| + \dots + |k_n|.$$

Ω est alors la réunion de $(2N + 1)^n$ cellules identiques εY que l'on notera Y^ε . De la même façon, posons :

$$\Omega_l^\varepsilon = \left\{ \varepsilon(Y_l^{\mathbf{k}} + Y_l), \mathbf{k} \in \mathbb{Z}^n \right\}, l = 1, 2$$

on a alors

$$\Omega = \bigcup_{l=1}^2 \Omega_l^\varepsilon, \Gamma_1^\varepsilon = \bar{\Omega}_1^\varepsilon \cap \bar{\Omega}_2^\varepsilon.$$

Fonctions périodiques

On va introduire maintenant les espaces : $E_{\#}(\mathbb{R}^n)$ ou $E_{\#}(\Omega)$ des fonctions εY -périodiques.

Soit $E(Y) = \left\{ \mathbf{v} : \mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n) \in Y \mapsto \mathbf{v}(\mathbf{y}) \in \mathbb{R}^n \right\}$ un espace de fonctions et posons $x = \varepsilon y$, alors la fonction $\widehat{\mathbf{v}}^\varepsilon(x) = \mathbf{v}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \in E(\varepsilon Y)$. Notons de plus \mathbf{v}^ε , la fonction $\widehat{\mathbf{v}}^\varepsilon$ prolongée par périodicité à \mathbb{R}^n .

Nous écrivons :

$$\mathbf{v}^\varepsilon \in E_{\#}(\mathbb{R}^n),$$

$E_{\#}(\Omega)$ est la restriction de $E_{\#}(\mathbb{R}^n)$ à Ω .

On remarque que si $\mathbf{v} \in \mathcal{E}_{\#}(Y)$ où $\mathcal{E}_{\#}(Y) = \{\mathbf{v} \in E(Y) : tr(\mathbf{v})|_{\partial Y^p} = tr(\mathbf{v})|_{\partial Y^{-p}}\}^1$, alors l'espace : $\mathcal{E}_{\#}(\mathbb{R}^n)$ des fonctions εY -périodiques est :

$$\mathcal{E}_{\#}(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{v}^{\varepsilon} \in \mathcal{E}_{loc}(\mathbb{R}^n) : tr(\mathbf{v}^{\varepsilon})|_{\partial Y^{\varepsilon p}} = tr(\mathbf{v}^{\varepsilon})|_{\partial Y^{\varepsilon -p}}\}.$$

De même, on définit les espaces de fonctions périodiques :

$$[L_{\#}^p(\mathbb{R}^n)]^n = \{\mathbf{v}^{\varepsilon} \in [L_{loc}^p(\mathbb{R}^n)]^n, \mathbf{v}^{\varepsilon}(\mathbf{x}) \text{ } \varepsilon Y\text{-périodique}\}, \quad 1 \leq p \leq \infty$$

$$W_{\#}^{1,\infty}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in W^{1,\infty}(\Omega) : \mathbf{v}^{\varepsilon} \text{ } \varepsilon Y\text{-périodique}\},$$

$$H_{\#}^m(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{v} \in H_{loc}^m(\mathbb{R}^n) : \mathbf{v}|_{\partial Y^{\varepsilon p}} = \mathbf{v}|_{\partial Y^{\varepsilon -p}}\}, \quad m = 1, 2, \dots$$

$$C_{\#}^{0,1}(\Omega) = \{\mathbf{v} \in C^{0,1}(\Omega) : \mathbf{v}|_{\partial Y^{\varepsilon p}} = \mathbf{v}|_{\partial Y^{\varepsilon -p}}\},$$

$$W_{\#}(Y) = \{\mathbf{v} \in [H^1(Y)]^n : \mathbf{v}|_{\partial Y^p} = \mathbf{v}|_{\partial Y^{-p}}\},$$

$$W_{\#}(\mathbb{R}^n) = \{\mathbf{v} \in [H_{loc}^1(\mathbb{R}^n)]^n : \mathbf{v}|_{\partial Y^{\varepsilon p}} = \mathbf{v}|_{\partial Y^{\varepsilon -p}}\}.$$

Condition de périodicité pour les solutions d'un problème local (cellulaire)

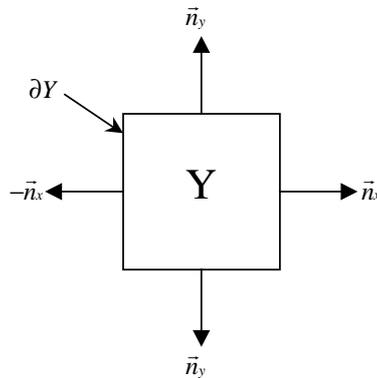
Dans la suite, nous aurons à exprimer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un problème aux limites du type:

$$\begin{cases} -div(A)\mathbf{v} = \mathbf{f} & \text{dans } Y, \\ \mathbf{v} & Y\text{-périodique} \end{cases}$$

ait une solution \mathbf{v} , Y -périodique.

Soit $D_{\#}(Y)$ l'ensemble des fonctions Y -périodiques définies sur Y . Multiplions la première équation par une fonction quelconque $\mathbf{v} \in D_{\#}(Y)$ et intégrons ce produit sur Y . On obtient:

$$\int_Y A \cdot grad(\mathbf{v}) dy - \int_{\partial Y} A \cdot \vec{n} \mathbf{v} ds = \int_Y \mathbf{f} \mathbf{v} dy.$$



¹tr est l'application trace linéaire continue de $W^{1,m}(\Omega)$ sur $W^{1-\frac{1}{m},m}(\partial\Omega) \quad \forall m, 1 < m < \infty$, unique prolongement de l'application de restriction à $\partial\Omega$ des éléments de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Or pour la période Y , les arêtes sont deux à deux parallèles et donc la normale sortante \vec{n} étant de signe contraire sur deux arêtes opposées, puisque A est Y -périodique, il vient : $\int_{\partial Y} A \cdot \vec{n} \mathbf{v} ds = 0$ et par conséquent :

$$\int_Y A \cdot \text{grad}(\mathbf{v}) dy = \int_Y \mathbf{f} v dy.$$

De plus, parmi l'ensemble des fonctions $\mathbf{v} \in D_{\#}(Y)$ on peut choisir $\mathbf{v} = 1 \Rightarrow \text{grad}(\mathbf{v}) = 0$, $\forall y \in Y$; la relation précédente étant vraie $\forall \mathbf{v} \in D_{\#}(Y)$, nous en déduisons la condition nécessaire et suffisante de périodicité d'une solution du problème considéré :

$$\int_Y \mathbf{f} dy = 0.$$

Autrement dit, la moyenne de la fonction f sur la période Y doit être nulle.

2.3 Méthodes d'homogénéisation

On présente ici les techniques les plus connues de la théorie mathématique de l'homogénéisation. Cette présentation est très brève et pas complète, et on peut la considérer comme une courte introduction au vaste domaine de l'homogénéisation. Pour une présentation plus vaste, on peut consulter par exemple [BP84], [BLP78], [SP80], [Mas93] ou [JKO94].

Γ -convergence

La Γ -convergence est une notion abstraite de convergence fonctionnelle qui a été introduite par De Giorgi. Ce n'est pas une notion restreinte à l'homogénéisation et elle a plusieurs applications dans le domaine du calcul variationnel. Une présentation détaillée de la Γ -convergence et quelques applications peuvent être trouvées dans le livre de [Mas93]. Le principe de la Γ -convergence sur l'homogénéisation est donné dans l'exemple ci-dessous.

Considérons un processus de diffusion linéaire dans un domaine périodique Ω de période ε .

Supposons que le tenseur de diffusion soit $A(x/\varepsilon)$, où $A(y)$ est une matrice symétrique, coercive et bornée, Y -périodique. Pour un terme source $f(x) \in L^2(\Omega)$ ce problème de diffusion est une edp linéaire

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.1)$$

Il est bien connu que lorsque la matrice A est symétrique, l'équation (2.1) est équivalente à la formulation variationnelle suivante:

Trouver $u^\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$ qui réalise la valeur minimale de

$$\min_{u \in H_0^1(\Omega)} \left(\frac{1}{2} \int_{\Omega} A\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \nabla u \cdot \nabla u dx - \int_{\Omega} f u dx \right) \quad (2.2)$$

Ainsi, la Γ -convergence des fonctionnelles dont le minimum est donné par (2.2) est équivalente à homogénéiser le problème (2.1).

Un avantage de cette méthode est qu'elle n'est pas restreinte aux équations linéaires (i.e. aux fonctionnelles quadratiques).

G -convergence

La notion de G -convergence est liée aux séquences des opérateurs symétriques, elliptiques du deuxième degré. Elle a été introduite par Spagnolo [Sp68]. Le G vient de Green, car ce type de convergence correspond à celui des fonctions de Green associées.

Le résultat le plus important sur la G -convergence est un théorème de compacité dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation qui énonce que « pour toute suite coercive et bornée de coefficients d'une équation symétrique, elliptique de deuxième degré, il existe une sous suite et une G -limite (c-à-d des coefficients homogénéisés) telle que, pour tout terme source, la sous suite correspondante de solutions converge vers la solution de l'équation homogénéisée ». Du point de vue mécanique, cela veut dire que les propriétés mécaniques d'un milieu hétérogène (perméabilité, conductivité, propriétés élastiques...) peuvent être très bien approximées par celles d'un milieu homogène (ou homogénéisé) si la grandeur des hétérogénéités est petite par rapport à celle du milieu.

H -convergence

La H -convergence est une généralisation de la G -convergence pour le cas des problèmes non symétriques. En plus, elle permet l'introduction de la dite méthode de l'énergie, pour la démonstration du principal théorème de compacité qui est plus simple que celles d'avant.

La H -convergence (H vient de homogénéisation) a été introduite par Murat et Tartar [MT77] en 1977.

La méthode de l'énergie

Une méthode très efficace et aussi très élégante pour homogénéiser les équations aux dérivées partielles a été introduite par Murat et Tartar [MT97] et a été baptisée "méthode de l'énergie"; pourtant, il n'y a aucune liaison avec toute sorte d'énergie. Elle peut être aussi rencontrée dans la littérature sous le nom de "méthode des fonctions test oscillantes".

La méthode de l'énergie est une méthode très générale dans la théorie de l'homogénéisation. Elle ne demande aucune hypothèse de nature géométrique sur le comportement des

coefficients de l'équation aux dérivées partielles étudiée (propriétés de périodicité ou autre). Comme on l'a déjà mentionné, elle assure une démonstration constructive plus simple du théorème de compacité de la H-convergence.

Exposer la méthode de l'énergie dans les grandes lignes générales pourrait "cacher" les idées clef de la méthode. C'est la raison pour laquelle on préfère la présenter tout de même sur un problème modèle d'homogénéisation périodique dans le cadre de la diffusion. On mentionne qu'elle fonctionne aussi bien dans le cas non périodique.

Pour fixer les idées, le domaine périodique est noté Ω (un ouvert borné de R^N), sa période est ε (un réel positif qui est destiné à tendre vers zéro) et la cellule unité est notée par $Y = (0, 1)^N$. Le tenseur de diffusion est donné par une matrice $N \times N$, $A(x, \frac{x}{\varepsilon})$, pas forcément symétrique, où $A(x, y)$ est une fonction continue de la variable $x \in \Omega$ et Y -périodique de variable oscillante $y \in Y$.

On suppose que cette matrice A satisfait les hypothèses usuelles de coercivité et de bornétude.

On note par $f(x) \in L^2(\Omega)$ le terme source et l'on considère une condition de Dirichlet nulle sur le bord (pour la simplicité des calculs). Notre problème de diffusion modèle devient :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(\frac{x}{\varepsilon}) \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.3)$$

Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème (2.3) admet une solution unique u^ε dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ et cette solution satisfait évidemment l'inégalité :

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.4)$$

C étant une constante positive qui ne dépend pas de ε (cette estimation est obtenue en multipliant l'équation (2.3) par u^ε , en intégrant par parties et utilisant l'inégalité de Poincaré). On cite le théorème suivant :

Théorème 1 *La suite $u^\varepsilon(x)$ de solutions des problèmes (2.3) converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite $u(x)$ qui est l'unique solution du problème homogénéisé:*

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A^*(x) \nabla u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.5)$$

Le tenseur de diffusion homogénéisé est défini par:

$$A_{ij}^*(x) = \int_Y A(x, y) \cdot (\vec{e}_i + \nabla_y w_i(x, y)) \cdot (\vec{e}_j + \nabla_y w_j(x, y)) dy \quad (2.6)$$

où $w_i(x, y)$ sont définies, pour tout point $x \in \Omega$, comme uniques solutions des problèmes cellulaires dans $H_{\#}^1(Y)/R$

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot (A(x, y) \cdot (\vec{e}_i + \nabla_y w_i(x, y))) = 0 & \text{dans } Y \\ y \rightarrow w_i(x, y) & Y\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.7)$$

$(\vec{e}_i)_{1 \leq i \leq N}$ étant la base canonique de R^N .

Remarque 2 Le système homogène défini par (2.5) est identique à celui obtenu par le développement asymptotique formel:

$$u^\varepsilon(x) = u(x) + \varepsilon \cdot u^1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots$$

où u^1 est lié aux solutions des problèmes locaux (2.7):

$$u^1(x, y) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) \cdot w_i(x, y) \tag{2.8}$$

Le problème original (2.3) admet la formulation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \phi(x) dx \tag{2.9}$$

pour toute fonction test $\phi \in H_0^1(\Omega)$.

De (2.4) on déduit que l'on peut extraire une sous suite, encore notée u^ε , et telle que u^ε converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers une limite u .

Malheureusement, le terme de gauche de (2.9) contient deux termes faiblement convergents dans $L^2(\Omega)$, $A(x, \frac{x}{\varepsilon})$ et $\nabla u^\varepsilon(x)$, mais il n'est pas vrai que le produit va converger vers le produit des limites faibles des deux termes. Donc, sans aucun argument supplémentaire, on n'a pas le droit de passer à la limite dans (2.9).

L'idée principale dans la méthode de l'énergie est de remplacer la fonction test ϕ de la relation (2.9) par une suite ϕ^ε (dites fonctions test oscillantes) faiblement convergente, et telle que le terme de gauche de la relation (2.9) passe "miraculeusement" à la limite. Ce phénomène est un exemple de la théorie de compacité par compensation développée par Murat et Tartar.

L'idée clef de la démonstration est de bien choisir la fonction test oscillante $\phi^\varepsilon(x)$. Soit $\phi(x) \in D(\Omega)$ une fonction continue à support compact dans Ω . On définit la fonction test oscillante ϕ^ε par:

$$\phi^\varepsilon(x) = \phi(x) + \varepsilon \sum_{i=1}^N \frac{\partial \phi}{\partial x_i}(x) \cdot w_i^*(x, \frac{x}{\varepsilon}) \tag{2.10}$$

où $w_i^*(x, y)$ ne sont pas les solutions des problèmes cellulaires mais celles des duaux:

$$\begin{cases} -\nabla_y \cdot (A^t(x, y) \cdot (\vec{e}_i + \nabla_y w_i^*(x, y))) = 0 & \text{dans } Y \\ y \rightarrow w_i^*(x, y) & Y\text{-périodique} \end{cases} \tag{2.11}$$

La différence entre les problèmes (2.7) et (2.11) consiste dans le remplacement de la matrice $A(x, y)$ par sa transposé $A^t(x, y)$.

Le pas suivant est d'introduire cette fonction test oscillante ϕ^ε dans la formulation variationnelle (2.9):

$$\int_{\Omega} A(x, \frac{x}{\varepsilon}) \cdot \nabla u^\varepsilon(x) \cdot \nabla \phi^\varepsilon(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \cdot \phi^\varepsilon(x) dx \quad (2.12)$$

Puis, en tenant compte de l'équation (2.11), on va développer et intégrer par partie la relation (2.12). En faisant les calculs et en tenant compte du fait que toute fonction périodique converge faiblement vers sa moyenne, on peut passer à la limite, d'où le résultat.

Remarque 3 *L'intérêt majeur de la méthode de l'énergie est de fonctionner dans un cadre non périodique, ce qui nous intéresse a priori; elle est également valide pour quelques problèmes non linéaires et opérateurs monotones (correspondant aux problèmes non symétriques).*

Convergence à deux échelles

Contrairement aux méthodes d'homogénéisation présentées ci-dessus, la méthode de convergence à deux échelles n'est utilisée que pour des problèmes d'homogénéisation périodiques. Elle est moins générale que les méthodes de la Γ -convergence, G -convergence et H -convergence, mais, dans le contexte d'une homogénéisation périodique elle est aussi plus simple et plus efficace. La convergence à deux échelles a été récemment introduite par Nguetseng [Ng89] et Allaire [All92].

Dans le cadre des problèmes d'homogénéisation périodique un fait bien connu est que le problème homogénéisé peut être obtenu de manière heuristique par le biais de la méthode des développements asymptotiques à deux échelles (voir par exemple [BP84], [SP80] ou [San92]).

En notant par ε la grandeur des hétérogénéités (un réel positif qui va tendre vers zéro dans le processus asymptotique) et par u^ε la suite des solutions de l'équation aux dérivées partielles considérée avec des coefficients périodiques oscillants, un développement asymptotique à deux échelles s'écrit

$$u^\varepsilon(x) = u^0(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon \cdot u^1(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \varepsilon^2 \cdot u^2(x, \frac{x}{\varepsilon}) + \dots \quad (2.13)$$

où toute fonction $u^i(x, y)$ dans la série ci-dessus dépend des deux variables (la variable macroscopique x et la variable microscopique $y = \frac{x}{\varepsilon}$) et est une fonction Y -périodique en y (Y étant la période unité).

Insérant la relation (2.13) dans l'équation satisfaite par u^ε et en identifiant les puissances de ε , on arrive à une cascade de problèmes pour chacun des termes $u^i(x, y)$.

Malheureusement, du point de vue mathématique, cette méthode des développements asymptotiques n'est que formelle, car, a priori, il n'y a pas de raison pour que la relation (2.13) soit vraie. Ainsi, on a besoin de justifier rigoureusement le résultat obtenu de

manière heuristique, en utilisant cette méthode de développement asymptotique à deux échelles (voir par exemple le paragraphe précédent sur la méthode de l'énergie).

Malgré ses fréquentes utilisations dans l'homogénéisation de différents types d'équations, cette méthode n'est pas entièrement satisfaisante car deux étapes sont nécessaires: une dérivation formelle et une justification rigoureuse du problème homogénéisé.

En conséquence, il y a lieu pour une nouvelle méthode, plus efficace, de combiner les deux pas en un seul, plus simple. C'est exactement le but de la méthode de convergence à deux échelles, qui se base sur un nouveau type de convergence. Autrement dit, elle justifie rigoureusement le premier terme du développement asymptotique (2.13) dans le sens qu'elle affirme l'existence d'une limite "à deux échelles" $u^0(x, y)$ tel que u^ε converge vers $u^0(x, y)$.

$$\int_{\Omega} u^\varepsilon(x) \phi(x, \frac{x}{\varepsilon}) dx \rightarrow \int_{\Omega} \int_Y u^0(x, y) \phi(x, y) dx dy$$

La méthode de convergence à deux échelles se base sur le résultat suivant : "en multipliant l'équation satisfaite par u^ε par une fonction test oscillante $\phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$ et en passant à la limite "deux échelles", on obtient automatiquement le problème homogénéisé.

Homogénéisation itérée

Les méthodes d'homogénéisation présentées précédemment sont des méthodes qui marchent très bien dans le cadre de problèmes d'homogénéisation pour des milieux périodiques où seulement deux échelles ont été considérées, à savoir l'échelle macroscopique (celle du domaine considéré) et l'échelle microscopique (celle de la période). Mais dans la réalité on n'est pas toujours amené à étudier un milieu qui soit forcément périodique ou qui n'ait que deux échelles d'hétérogénéités ; souvent, il arrive que le domaine soit très loin d'être périodique et qu'il exige l'étude à plusieurs échelles d'hétérogénéités voire un grand nombre d'échelles.

Ce type d'homogénéisation s'appelle "homogénéisation itérée" en suivant la dénomination donnée par [BLP78]. Elle consiste à faire des homogénéisations successives en commençant par la plus petite échelle tout en gardant la plus grande échelle comme fixe.

On va présenter cette méthode brièvement, sur un problème modèle, en n'insistant pas trop sur les détails techniques.

Considérons toujours le cas de l'équation de diffusion dans un domaine multiplement périodique Ω (ouvert borné de R^N). On suppose qu'il y a n échelles d'hétérogénéités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$ qui dépendent d'un seul paramètre positif ε , qui tend vers zéro. L'hypothèse clef est que toutes les échelles tendent vers zéro quand ε tend vers zéro, c'est-à-dire

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \varepsilon_i(\varepsilon) = 0, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq n \tag{2.14}$$

et que

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\varepsilon_i(\varepsilon)}{\varepsilon_{i-1}(\varepsilon)} = 0, \quad \text{pour } 2 \leq i \leq n \tag{2.15}$$

Pour simplifier, on considère que les cellules unités Y_i à chaque échelle sont supposées être les mêmes : $Y = (0, 1)^N$

Le tenseur de diffusion dans Ω est donné par une matrice $N \times N$, $A(x, \frac{x}{\varepsilon_1}, \dots, \frac{x}{\varepsilon_n})$, qui n'est pas forcément symétrique, où $A(x, y_1, \dots, y_n)$ est une fonction continue des variables $x \in \Omega$ et $y_i \in Y_i$ et Y_i -périodique en y_i . A satisfait les conditions usuelles de bornétude et de coercivité. On note par $f(x) \in L^2(\Omega)$ le terme source et on considère une condition de Dirichlet nulle sur le bord (pour la simplicité des calculs). Notre problème de diffusion modèle dans un domaine multi périodique s'écrit :

$$\begin{cases} -\nabla \cdot (A(x, \frac{x}{\varepsilon_1}, \dots, \frac{x}{\varepsilon_n}) \nabla u^\varepsilon) = f & \text{dans } \Omega \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.16)$$

Grâce au lemme de Lax-Milgram, le problème (2.16) admet une solution unique u^ε dans l'espace $H_0^1(\Omega)$ et cette solution satisfait évidemment l'inégalité :

$$\|u^\varepsilon\|_{H_0^1(\Omega)} \leq C \cdot \|f\|_{L^2(\Omega)}, \quad (2.17)$$

C étant une constante positive qui ne dépend pas de ε . Cela implique que la suite u^ε est bornée dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Pour calculer le tenseur de diffusion homogénéisé on a besoin des notations suivantes :

Soit $A_n(y_0, y_1, \dots, y_n)$ le tenseur original $A(x, y_1, \dots, y_n)$ (on convient que la variable macroscopique x soit notée par y_0). Pour $0 \leq i \leq n-1$ le tenseur $A_i(y_0, y_1, \dots, y_i)$ est défini comme le tenseur homogénéisé de $A_{i+1}(y_0, y_1, \dots, y_i, \frac{x}{\varepsilon})$ où toutes les "grandes" échelles y_0, y_1, \dots, y_i (incluant celle macroscopique y_0) sont fixées. On note aussi le dernier tenseur homogénéisé $A_0(y_0)$ par $A^*(x)$, pour lequel il n'y a plus d'échelle microscopique. Autrement dit, le schéma de calcul pour le tenseur homogénéisé final $A^*(x)$ est de séparer et d'homogénéiser les différentes échelles, de la plus petite à la plus grande. Plus précisément, à chaque échelle $0 \leq i \leq n$, on introduit les solutions $w_p^i(y_0, y_1, \dots, y_i)$, $1 \leq p \leq N$, définies en tout point $(y_0, y_1, \dots, y_{i-1})$ comme solutions uniques dans $H_{\#}^1(Y_i)/R$ des problèmes locaux :

$$\begin{cases} -\nabla_{y_i} \cdot (A_i(y_0, y_1, \dots, y_i) \cdot (\vec{e}_p + \nabla_{y_i} w_p^i(y_0, y_1, \dots, y_i))) = 0 & \text{dans } Y_i \\ y_i \rightarrow w_p^i(y_0, y_1, \dots, y_i) & Y_i\text{-périodique} \end{cases} \quad (2.18)$$

où $(e_p)_{1 \leq p \leq N}$ est la base canonique de R^N . Alors, la suite $A_i(y_0, y_1, \dots, y_i)$ est définie par :

$$\begin{aligned} & A_i^{pq}(y_0, y_1, \dots, y_i) \\ &= \int_{Y_{i+1}} A_{i+1}(y_0, y_1, \dots, y_i, y_{i+1}) \\ & \quad (\vec{e}_p + \nabla_{y_{i+1}} w_p^{i+1}) \cdot (\vec{e}_q + \nabla_{y_{i+1}} w_q^{i+1}) dy_{i+1} \end{aligned} \quad (2.19)$$

Les formules (2.18) et (2.19) sont utilisées pour calculer les coefficients homogénéisés d'un milieu périodique à une seule échelle. Le résultat principal de cette homogénéisation itérée est le théorème suivant :

Théorème 4 *La suite $u^\varepsilon(x)$ des solutions de l'équation (2.16) converge faiblement dans $H_0^1(\Omega)$ vers $u(x)$, la solution unique du problème homogénéisé*

$$\begin{cases} -\nabla_x \cdot (A^*(x)\nabla u(x)) = f(x) & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases} \quad (2.20)$$

où le tenseur homogénéisé de diffusion est donné par le dernier terme A_0 de la suite définie par (2.19).

Ce théorème a été démontré pour la première fois par [BLP78] dans le cas où les échelles étaient des puissances successives de ε , c'est-à-dire $\varepsilon_i = \varepsilon^i$ (cela favorise l'utilisation des développements asymptotiques) ; une preuve dans le cas plus général d'un nombre infini d'échelles est donnée dans [AB96], où la notion de convergence à échelles multiples est introduite (qui est en fait une généralisation de la convergence à double échelle).

2.4 La méthode des développements asymptotiques

La méthode des développements asymptotiques permet dans un premier temps de calculer les propriétés homogénéisées en connaissant les propriétés des composantes de base du matériau composite considéré tout en tenant compte de sa géométrie microscopique, et dans un deuxième temps elle donne accès aux informations locales, au niveau microscopique.

Considérons une structure composite fibreuse et supposons que sa microstructure soit périodique avec une unique période de taille ε qui représente la microstructure partout dans le composite. Aussi, on suppose que des conditions aux limites suffisantes existent, pour que le problème soit bien posé.

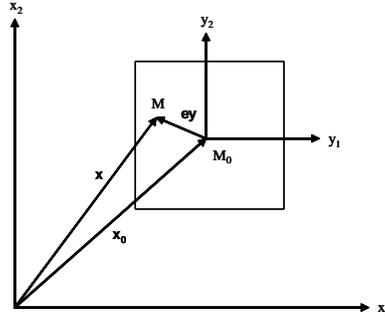
Un tel problème est coûteux à résoudre car, par exemple, si une méthode de type éléments finis est utilisée, le maillage qu'on devrait construire serait tellement grand que le problème approché ne pourrait pas être résolu, même avec les moyens informatiques actuels. On peut alors considérer deux échelles: celle du domaine ou échelle macroscopique et celle de la fibre ou échelle microscopique. L'objectif est d'établir un lien entre ces deux échelles.

Considérons alors que le matériau composite est rapporté à un système cartésien d'axes (Ox_1x_2) associé à la variable macroscopique x . La microstructure du composite est constituée par des cellules unités Y liées à l'échelle microscopique y . Chaque période Y a deux composantes: la fibre et la matrice.

A tout point M du domaine ayant pour coordonnées dans le repère (Ox_1x_2) le vecteur \mathbf{x} on peut associer:

- un point M_0 du domaine qui est le barycentre de la cellule de base contenant ce point M . Il a pour coordonnées dans le repère (Ox_1x_2) le vecteur \mathbf{x}_0

- un vecteur \mathbf{y} de Y tel que le vecteur $\varepsilon\mathbf{y}$ représente les coordonnées du point M dans un repère cartésien issu de M_0 (on pourra considérer le repère $(M_0y_1y_2)$)



On voit ainsi comme sont les variables d'espace définies pour les échelles macroscopique et microscopique sont liées. Ce lien est formalisé par la relation:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \varepsilon\mathbf{y}$$

Nous précisons, par un changement de notation, que certaines entités physiques dépendent des deux échelles. Par exemple, dans notre cas, au lieu de noter la solution par $u(x)$ en faisant intervenir la seule échelle macroscopique, on va la noter par $u^\varepsilon(x, y)$ pour montrer qu'elle dépend des deux échelles, à une taille de période ε fixée.

On cherche la solution $u^\varepsilon(x, y)$ sous la forme d'un développement asymptotique:

$$u^\varepsilon(x, y) = u^0(x, y) + \varepsilon u^1(x, y) + \varepsilon^2 u^2(x, y) + O(\varepsilon^3)$$

où chaque fonction $u^i(x, y)$ est périodique en y et où l'on pose: $y = \frac{x}{\varepsilon}$

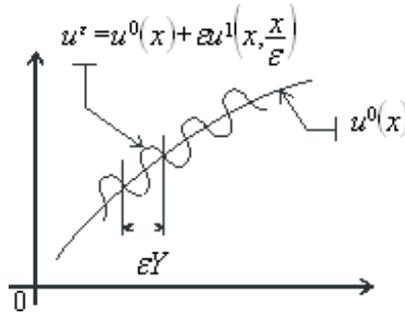
On remplace l'opérateur de dérivation classique qui ne fait apparaître que la seule variable macroscopique par un nouvel opérateur qui tient compte des deux échelles:

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi(x, y)) = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial y}\right)(\phi(x, y))$$

En utilisant cet opérateur et le développement asymptotique de la solution, on obtient les problèmes locaux (ou problèmes cellulaires), par identification des termes de même puissance de ε .

Le calcul montre que le premier terme du développement asymptotique est toujours indépendant de y . Le graphe de la solution u^ε (en dimension 1) si l'on s'en tient aux

deux premiers termes du développement est alors celui de la figure ci-dessous.



Il est composé d'une fonction régulière de x , $u^0(x)$, plus un terme petit $\epsilon u^1(x, y)$ car $0 < \epsilon \leq 1$ qui est un terme fortement oscillant, puisque fonction de y .

Il est facile à voir que le terme oscillant $u^1(x, y)$ peut être obtenu en fonction du gradient du terme "régulier" $u^0(x)$, grâce à la linéarité du second problème local. On introduit alors la notion de fonctions d'influence et elles seront solutions de problèmes sur la cellule unité Y . Ces problèmes étant résolus on trouve u^1 . La condition d'existence et d'unicité de la solution u^2 nous permet de trouver des relations explicites pour les coefficients homogénéisés du problème considéré.

Ainsi, en résolvant les problèmes locaux on va trouver la solution de notre problème.

2.5 Schéma de calcul des coefficients homogénéisés

Les méthodes d'homogénéisation ont, en général, des ressemblances au niveau de l'application et de l'implémentation, malgré la diversité qu'elles offrent dans les multiples problèmes et phénomènes qui proviennent de l'industrie. De ce point de vue, on peut mettre en évidence un algorithme qui couvre plusieurs contributions de la théorie de l'homogénéisation:

- 1 Mailler le domaine représenté par la cellule unité
- 2 Introduire le développement asymptotique
- 3 Obtenir une "cascade" de problèmes: en partant de l'équation de l'équilibre, des lois de comportement ou autre, un enchaînement d'étapes amène à trois problèmes hiérarchiques
- 4 Introduire les fonctions d'influence, qui sont obtenues par résolution des problèmes cellulaires en utilisant une méthode de discrétisation (éléments finis par exemple)
- 5 Trouver les coefficients homogénéisés, qui dépendent des solutions des problèmes locaux sur la cellule de base (fonctions d'influence)
- 6 Faire une analyse locale, c'est-à-dire obtenir la réponse au niveau microscopique d'une sollicitation macroscopique; il peut s'agir par exemple des expressions analytiques des microcontraintes ou autre, qui sont obtenues de manière indirecte à l'étape 3

2.6 Conclusions

Les deux principaux intérêts des méthodes d'homogénéisation sont:

- d'être un outil de synthèse, puisque ces méthodes conduisent à une description macroscopique de la structure et un outil d'analyse, car, par le biais de la localisation, elles permettent d'accéder au phénomène à l'échelle microscopique [Duv84]
- de réduire considérablement le coût des calculs numériques, lorsque le calcul exact n'est pas possible (ou est possible mais devient prohibitif à cause de la complexité géométrique du milieu), tout en conservant une excellente précision sur le résultat

Les méthodes de convergence sont des outils performants de démonstration, cependant les suites exhibées pour établir la convergence ne sont pas aisément utilisables sur le plan numérique.

L'homogénéisation itérée a retenu toute notre attention car elle se rapproche beaucoup de la démarche qui avait été utilisée auparavant. La raison majeure pour laquelle cette méthode n'a pas été retenue finalement sera détaillée au chapitre 7. En effet, le processus de minéralisation étant évolutif en temps, les opérateurs associés à chaque niveau peuvent changer de nature. Il faut donc rester au plus près de la physique du problème.

On choisit donc de traiter le problème qui nous intéresse par la méthode des développements asymptotiques, elle assure très bien le passage de la structure fortement hétérogène (qui sera le cas dans le phénomène qu'on modélise) à la structure homogène équivalente. Pour pouvoir justifier les résultats formels obtenus par la méthode des développements asymptotiques (elle reste tout de même une méthode heuristique), on va appliquer une méthode de type "énergie" pour démontrer la convergence de la suite des solutions u^ε vers la solution du problème homogénéisé.

Chapitre 3

Modélisation élémentaire des EVMC

3.1 Introduction

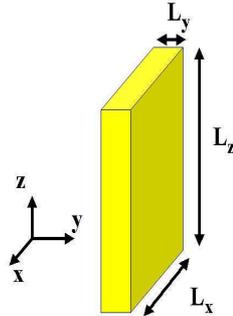
Nous avons vu au chapitre 1 que la propriété principale d'anisotropie de l'os cortical ne semblait pouvoir être vérifiée que si le matériau directement issu de la minéralisation avait lui même une propriété similaire. Par ailleurs, le cristal d'Hap semble, au vu de la littérature être isotrope. Il était alors naturel d'imaginer que l'anisotropie apparaissant à ce niveau ne pouvait être induite que par l'arrangement spatial des cristaux d'Hap entre eux. De plus, comme il est maintenant communément admis que l'os cortical est un milieu poreux avec une porosité apparaissant à tous les niveaux de son architecture, il est facile d'imaginer que les espaces vacants entre les cristaux pourraient constituer un réseau propice à l'écoulement d'un fluide.

Il y a bien entendu plusieurs façon d'aborder la modélisation de cette structure cristalline. En l'absence d'éléments plus précis, nous sommes réduits à formuler des hypothèses qui, malheureusement, ne peuvent pas être vérifiées à l'heure actuelle. Ce chapitre est relativement court et nous avons souhaité ne pas l'inclure dans un autre chapitre car il est d'une nature tout à fait différente : d'une part, il est davantage réalisé dans un esprit physicien plutôt que dans un esprit mathématique et d'autre part il est beaucoup plus sensible à la critique que tous les autres.

Nous décrivons d'abord l'arrangement géométrique que nous proposons, puis nous analysons le comportement probable de ce milieu sous un aspect mécanique. Enfin nous proposons une méthode de détermination des propriétés physiques et nous donnons quelques résultats numériques.

3.2 Arrangement géométrique

La structure initiale est le cristal d'Hap. Il a une forme parallélépipédique dont les dimensions L_x , L_y , L_z sont introduites comme paramètres afin qu'elles puissent être facilement modifiables ultérieurement.



Cristal d'Hap

Suite à une réunion de travail avec le Professeur Ch. Rey (Toulouse) nous prendrons pour valeurs numériques $L_x = 10$, $L_y = 3$, $L_z = 20$, l'unité étant le nanomètre.

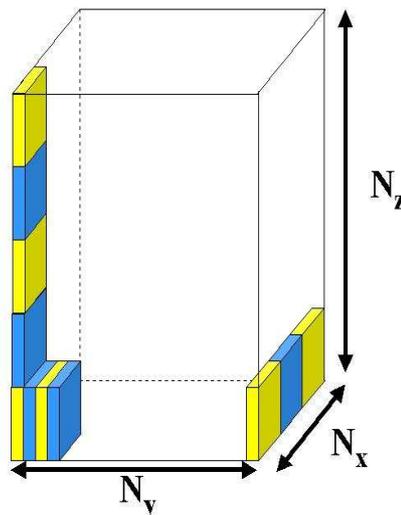
La manière dont les cristaux vont s'agglomérer entre eux n'est pas connue et l'on sait simplement que le résultat final forme un milieu poreux dont la porosité et la perméabilité varient avec le taux de minéralisation. Notre objectif est de pouvoir en estimer les propriétés physiques. On pourrait concevoir une architecture périodique ou pseudo périodique modélisant la géométrie de ce milieu poreux et déduire ses caractéristiques poro élastiques par une technique d'homogénéisation. Cependant, avant d'entreprendre un quelconque développement avec cette technique, il faut prendre conscience de l'énormité du travail à réaliser pour arriver à un résultat qui pourra être très aisément critiquable.

Une telle critique porterait sur deux points : tout d'abord, la géométrie choisie qui, au lieu d'être périodique, est plutôt aléatoire et ensuite le fait que la théorie de l'homogénéisation ne prend en compte que la géométrie des constituants de base et leurs propriétés intrinsèques. Or il existe à ce niveau un processus qu'il ne faut pas négliger. Sous l'effet combiné des sollicitations mécaniques et de l'augmentation de la minéralisation, les cristaux d'Hap pourraient avoir tendance à se "coller les uns aux autres". Ce phénomène est semblable à celui qui existe entre deux fines lamelles de verre lorsqu'on y a introduit une goutte d'eau. Il est évident que les propriétés physiques de l'ensemble sont alors totalement différentes.

Posé ainsi, le problème se résume à une alternative peu réjouissante : choisir aléatoirement les valeurs des propriétés physiques mais en leur imposant une contrainte arbitraire et non justifiée mais permettant d'obtenir des résultats cohérents ou se lancer dans un calcul fastidieux et que l'on sait au départ basé sur des hypothèses fausses. Nous op-

tons pour une troisième voie qui consiste à obtenir, par un développement simple une estimation assez grossière de ces propriétés.

Nous considérons un volume élémentaire de contenu minéral (EVMC) de référence. Supposons le d'abord constitué de N_x (respectivement N_y et N_z) parallélépipèdes ayant les dimensions ci-dessus selon la direction Ox (respectivement selon Oy et Oz). Il est toujours possible de choisir les nombres N_x, N_y et N_z de telle sorte que les dimensions $N_x \cdot L_x, N_y \cdot L_y$ et $N_z \cdot L_z$ soient du même ordre de grandeur.



Structure d'un EVMC

Hypothèse 1 : nous supposons que, dans chaque direction, un parallélépipède sur deux est un cristal et l'autre est occupé par du fluide osseux

Remarquons que si l'on arrête à cette hypothèse, la proportion d'eau dans un EVMC sera toujours de 50 %.

Hypothèse 2 : nous supposons qu'un parallélépipède occupé par du fluide est homothétique à un parallélépipède d'Hap avec un coefficient d'homothétie d ($d < 1$).

D'après les observations faites par l'équipe du Professeur Ch. Rey, le cristal d'Hap a une structure particulière : il n'a pas des propriétés constantes dans tout son volume car l'Hap est enrobée d'un gel.

Hypothèse 3 :

- l'épaisseur du gel associé à l' Hap est constante dans les 3 directions : e_{gel}
- les propriétés de ce gel sont les propriétés du fluide environnant.

Par la suite, nous appellerons "eau liée à l'Hap" ce gel et l'eau contenue dans les trous.

L'ensemble de ces hypothèses est peu réaliste et même peu probable car il est vraisemblable que l'arrangement des cristaux d'Hap relève plus d'un aspect aléatoire que déterministe. En effet, on sait maintenant qu'à un tel niveau nanoscopique les lois de la mécanique newtonienne doivent être remplacées par des lois stochastiques. Cependant ces hypothèses sont suffisantes pour nous permettre d'établir une première estimation des propriétés physiques d'un tel EVMC.

3.3 Brève analyse du comportement mécanique probable

Le comportement mécanique de la structure décrite ci-dessus est en fait très complexe car il y a une forte interaction fluide – structure. Cette interaction est encore plus complexe si l'on se place dans un cadre dynamique : en effet, sous l'action d'une sollicitation mécanique, les propriétés physiques peuvent changer et ceci d'une manière non réversible. Par exemple, sous l'action d'une compression, les cristaux vont se rapprocher et les liaisons entre eux peuvent se renforcer. Ces liaisons étant associées à des milieux hétérogènes encore mal connus (on a parlé précédemment de gel), entraînent probablement des "effets de collage".

Il est clair que les propriétés physiques globales vont dépendre fortement de la manière dont les cristaux d' Hap sont collés entre eux. Cependant, en l'absence de toute information sur la nature du gel, il est vain de vouloir tenter une quelconque approche de ce phénomène.

3.4 Proposition de détermination des propriétés physiques

Nous proposons une approche plus simple, peut être même simpliste en ne faisant intervenir que la géométrie des composants du domaine considéré. Nous pourrions bien sur introduire une technique d'homogénéisation. Cependant une telle méthode est relativement fastidieuse à mettre en œuvre, surtout dans un cadre tridimensionnel et, au vu de toutes les réserves que nous avons émis précédemment, tant au niveau de la géométrie elle même que du comportement mécanique probable, nous nous contentons d'appliquer une méthode classique de moyennage.

Il est aisé de déterminer successivement :

- le volume d'eau liée à un cristal V_1 :

$$\begin{aligned} V_1 &= 2 \cdot e_{gel} \cdot [L_x \cdot L_z + L_y \cdot L_z - 2 \cdot L_z \cdot e_{gel} - 2 \cdot L_x \cdot e_{gel} - 2 \cdot L_y \cdot e_{gel} + L_x \cdot L_y - 4 \cdot e_{gel}^2] \\ &= 2 \cdot e_{gel} \cdot [L_x \cdot L_z + L_y \cdot L_z + L_x \cdot L_y - 2 \cdot e_{gel} \cdot (L_z + L_x + L_y) - 4 \cdot e_{gel}^2] \end{aligned}$$

3.4 PROPOSITION DE DÉTERMINATION DES PROPRIÉTÉS PHYSIQUES 39

- le volume d'eau entre deux cristaux V_2 :

$$V_2 = d^3 \cdot L_x \cdot L_y \cdot L_z \cdot N_{trous}$$

N_{trous} étant le nombre total de trous (les parallélépipèdes occupés par du fluide).
Le volume total d'eau liée sera:

$$V_T = V_1 + V_2$$

Sur le plan pratique, on procède de la manière suivante : on se donne un pourcentage d'eau liée, on cherche les valeurs de l'épaisseur de gel et celle du coefficient d . Le problème posé sous cette forme ne présente pas unicité de la solution dans tous les cas. On remédie à cette difficulté en introduisant une valeur seuil pour l'épaisseur de gel. Les calculs se déroulent alors de la manière suivante :

On calcule pour e_{gel}^{seuil} le V_1^{seuil} par:

$$V_1^{seuil} = 2 \cdot e_{gel}^{seuil} \cdot [L_x \cdot L_z + L_y \cdot L_z + L_x \cdot L_y - 2 \cdot e_{gel}^{seuil} \cdot (L_z + L_x + L_y) - 4 \cdot e_{gel}^{seuil 2}]$$

Si $V_T < V_1^{seuil}$ alors on calcule e_{gel} en résolvant $V_1^{seuil} = V_T$, sinon, on calcule d en résolvant $d^3 = \frac{V_2}{(L_x \cdot L_y \cdot L_z \cdot N_{trous})}$

Les propriétés physiques sont alors déterminées par des relations intégrale de moyennage :

$$\begin{aligned} E_x &= \frac{1}{m_x} \cdot \left[(N_x - N_x^T) \cdot \int_0^{L_x - 2 \cdot e_{gel}} E + N_x^T \cdot \int_0^{L_x - 2 \cdot e_{gel} - d L_x} E \right] \\ &= E \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot e_{gel}}{L_x} - \frac{N_x^T}{N_x} \cdot d \right] \end{aligned}$$

où $m_x = N_x \cdot L_x$, N_x^T est le nombre de "trous" sur Ox et E représente le module d'Young de l'Hap.

De même,

$$E_y = E \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot e_{gel}}{L_y} - \frac{N_y^T}{N_x} \cdot d \right]$$

et

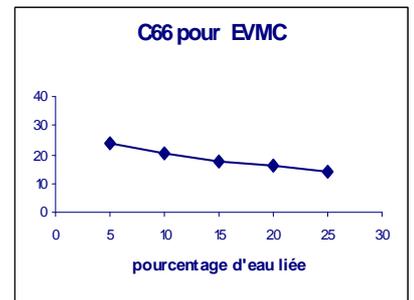
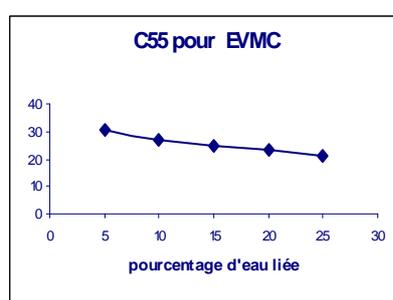
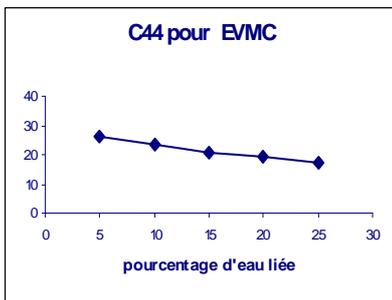
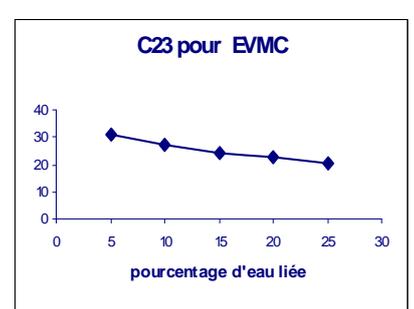
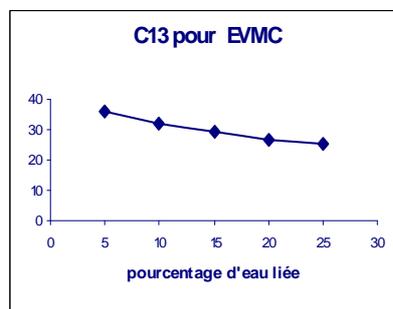
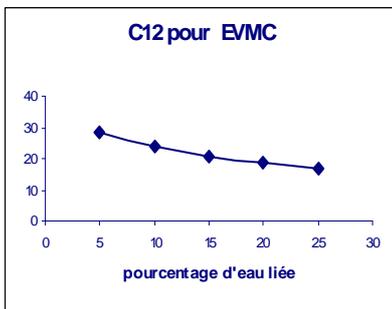
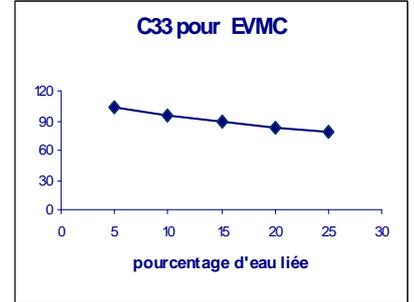
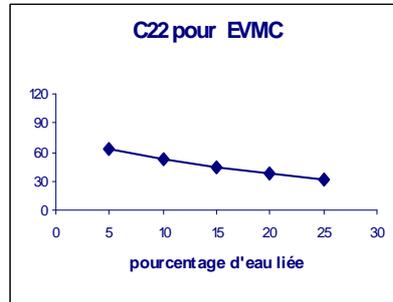
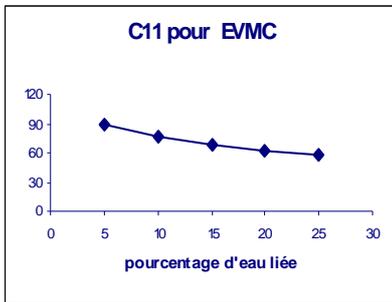
$$E_z = E \cdot \left[1 - \frac{2 \cdot e_{gel}}{L_z} - \frac{N_z^T}{N_z} \cdot d \right]$$

En résumé, les coefficients E_x , E_y et E_z sont E multipliés par un terme correctif du à l'architecture.

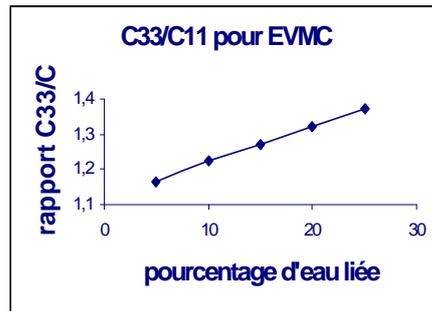
3.5 Quelques résultats numériques

On présente ici les diverses valeurs (en GPa) qu'on obtient pour les coefficients élastiques des EVMC en faisant varier le pourcentage d'eau liée. Les valeurs considérées pour celui-ci sont respectivement 5%, 10%, 15%, 20% et 25%. On a considéré que ce sont les pourcentages d'eau liée les plus appropriés pour faire des simulations cohérentes. Les propriétés physiques que nous prenons pour l' Hap sont les suivantes : module d'Young = 117 GPa et coefficient de poisson = 0.27. On utilise ces valeurs pour les simulations numériques que l'on présente au chapitre 8. On étudie aussi la variation du rapport C_{33}/C_{11} pour les diverses valeurs du pourcentage d'eau liée.

<i>pel</i>	C_{11}	C_{22}	C_{33}	C_{44}	C_{55}	C_{66}	C_{12}	C_{13}	C_{23}
25%	57,1	32,2	78,5	17,4	21,4	14,1	16,5	25,1	20,5
20%	62,7	37,6	82,9	18,9	22,9	15,8	18,5	26,9	22,3
15%	69,3	43,9	88,2	20,8	24,8	17,8	20,9	29,1	24,4
10%	77,5	51,9	94,8	23,1	27,1	20,4	23,9	31,9	27,1
5%	89,3	63,4	104,2	26,4	30,5	24,1	28,2	35,8	30,9



Coefficients élastiques des EVMC en fonction du pourcentage d'eau liée



(3.1)

Le rapport C33/C11 pour les EVMC

3.6 Conclusions

L'allure générale des coefficients élastiques est conforme à ce que l'on pouvait attendre. On note une décroissance avec l'augmentation du pourcentage d'eau liée; les valeurs les plus fortes sont obtenues pour le C33 (de 78 à 104), puis pour les C11 et C22 (de 32 à 89), les autres coefficients variant approximativement dans le même intervalle (de 14 à 35).

Les valeurs des coefficients C11 et C22 sont très différentes. Ceci est du à l'architecture des cristaux eux-mêmes. Ce fait sera sans conséquence ultérieurement puisque nous supposons que cette structure d'EVMC sera répartie de manière circulaire autour des bâtonnets de collagène, ce qui entraînera un effet de symétrie. Il est clair que la présence de l'eau change considérablement la nature du tenseur élastique. Notons que si le pourcentage de l'eau est nul, on retrouve le tenseur d'élasticité associé aux valeurs des module d'Young et coefficient de Poisson de l'Hap.

Les variations du rapport C33 / C11 sont également intéressantes à analyser. D'abord, il augmente de manière significative avec le pourcentage d'eau. Lorsque ce pourcentage d'eau tend vers zéro, il s'approche de 1, mais on est alors dans le cas d'une structure sur-minéralisée. Dans le cas d'un ostéon en cours de minéralisation, le pourcentage d'eau est plus important et la valeur de ce rapport est loin d'être négligeable pour les développements ultérieurs.

La méthode que nous proposons est rudimentaire, cependant ce côté grossier lui donne un avantage : il compense d'une manière floue les hypothèses très strictes que nous avons imposées.

Chapitre 4

Homogénéisation de structures piézoélectriques

4.1 Introduction

L'homogénéisation de structures périodiques formées de composants piézoélectriques apparaît comme un passage obligé dans l'étude que nous menons. Sur le plan pratique, nous serons amenés à l'utiliser trois fois au cours du chapitre 5 (concernant l'homogénéisation du cortical) dans deux cadres différents et une réflexion sera ouverte au chapitre 7 lorsque nous introduirons des lois de comportement avec seuil. Il faudra alors s'assurer que les hypothèses et le cadre fonctionnel sont encore applicables.

Comme ces lois pourront évoluer lors des travaux ultérieurs qui seront menés sur ce sujet, il nous a donc paru judicieux de reprendre l'ensemble de la théorie en mettant en avant les hypothèses nécessaires. Dans ce chapitre, nous présenterons successivement la mise en équations, le cadre fonctionnel, l'homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques, les équations homogénéisées, les caractéristiques physiques homogénéisées, le retour au niveau microscopique et la convergence faible de la solution du problème hétérogène vers celle du problème homogénéisé.

Bien que nous ayons parlé, dans les chapitres précédents de trois constituants de base, nous pouvons présenter le cadre général avec seulement deux composants. Ceci nous permet d'alléger l'écriture, suffisamment complexe, des équations envisagées.

4.2 Mise en équations. Hypothèses. Notations

Dans toute la suite de cette section, la géométrie des composites considérés sera supposée périodique. La structure du milieu est donc parfaitement connue dès que l'on connaît la

géométrie et le comportement d'une de ses périodes.

On va considérer que le milieu piézoélastique occupe le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, de frontière $\partial\Omega$ "suffisamment régulière"¹. Notons $\mathbf{u} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ et $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, respectivement le champ de déplacement élastique et le potentiel électrique.

On utilise les espaces de fonctions $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_m)$ à composantes dans $L^2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $H_0^1(\Omega)$ qu'on note respectivement : $\mathbf{L}^2(\Omega)$, $\mathbf{H}^1(\Omega)$, $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$. Le tenseur de déformations associé au champ de déplacements \mathbf{u} est donné par

$$e_{kjh}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)$$

On note par $\mathbf{X} = (x_{ijkh})$, $\mathbf{Y} = (y_{jkh})$, $\mathbf{Z} = (z_{ij})$ des tenseurs respectivement d'ordre 4, 3 et 2, et par $\langle F \rangle$ la moyenne sur Y d'une fonction F c-à-d

$$\langle F \rangle = \frac{1}{|Y|} \int_Y F dy$$

et on introduit les espaces suivants :

$$H_{per}(Y) = \{v \in H^1(Y) \text{ telle que } v \text{ est } Y \text{ périodique}\}$$

$$H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{v} = (v_i) \text{ telle que } v_i \in H_{per}(Y)\}$$

Remarque 5 Une fonction est dite Y -périodique si ses traces sur les faces opposées de Y sont égales.

Par la suite on utilisera la convention d'Einstein de sommation sur les indices répétés.

Les équations d'équilibre piézoélectrique sont :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}) = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_i}(D_i) = 0 & \text{dans } \Omega \end{cases} \quad (4.1)$$

les lois de comportement

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} - g_{kij}E_k \quad (4.2)$$

$$D_i = g_{ikl}e_{kl} + \epsilon_{ik}E_k \quad (4.3)$$

et les relations

$$\begin{aligned} e_{kjh}(\mathbf{u}) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right) \\ E_k &= -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \end{aligned} \quad (4.4)$$

où

¹Par exemple, $\partial\Omega$ est une surface de \mathbb{R}^3 de classe \mathcal{C}^1 .

- σ : tenseur des contraintes
- \mathbf{u} : vecteur déplacement
- b : densité volumique de forces dans Ω
- E : vecteur champ électrique
- D : vecteur de déplacement électrique
- φ : potentiel électrique

Nous admettons que les coefficients C_{ijkl} (élastiques), g_{ijk} (piézoélectriques) et ϵ_{ij} (diélectriques) vérifient les hypothèses habituelles:

de symétrie :

$$\begin{aligned} C_{ijkl} &= C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk} \\ g_{ijk} &= g_{ikj} \\ \epsilon_{ij} &= \epsilon_{ji} \end{aligned} \tag{4.5}$$

de positivité :

$$\begin{aligned} \exists \alpha > 0 \quad C_{ijkl} e_{kl} e_{ij} &\geq \alpha |e|^2 \quad \forall e \in E_S^3 \\ \exists \beta > 0 \quad \epsilon_{ij} a_i a_j &\geq \beta |a|^2 \quad \forall a \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \tag{4.6}$$

E_S^3 étant l'espace des matrices 3×3 symétriques.

de bornétude:

$$C_{ijkl}, g_{ijk} \text{ et } \epsilon_{ij} \text{ sont dans } L^\infty(\Omega) \tag{4.7}$$

Remarque 6 *Il n'est pas nécessaire d'imposer ici une condition de positivité sur les coefficients piézoélectriques.*

En tenant compte des relations (4.2), (4.3) et (4.4), le système (4.1) s'écrit :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - g_{kij} E_k] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + \epsilon_{jk} E_k] = 0 \end{cases} \tag{4.8}$$

soit

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = 0 \end{cases} \tag{4.9}$$

dans ces équations les inconnues sont \mathbf{u} et φ .

En plus, on considère les **conditions aux limites de Dirichlet** suivantes :

$$\begin{cases} \mathbf{u} = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

4.3 Cadre fonctionnel. Existence et unicité de la solution

On introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$$\Theta = \{ \Psi \in H^1(\Omega) ; \Psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Le produit $\mathbf{V} \times \Theta$ est un espace de Hilbert. Soient (\mathbf{v}, Ψ) dans $\mathbf{V} \times \Theta$ où $\mathbf{v} = (v_i)$. En multipliant (4.9) par \mathbf{v} et Ψ et en intégrant sur Ω on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_j} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i dx = \int_{\Omega} b_i v_i dx \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \Psi dx = 0. \end{cases}$$

En regroupant les deux termes et en appliquant la formule de Green on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i \eta_j dx \\ & - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} [g_{ijk} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \Psi \eta_i d\sigma = \int_{\Omega} b_i v_i dx \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx \\ & - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} b_i v_i dx \end{aligned}$$

En introduisant la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a((u, \varphi); (v, \Psi)) &= \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx \\ & - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

et la forme linéaire

$$L(v, \Psi) = \int_{\Omega} b_i v_i dx$$

le problème se formule ainsi

$$\text{Trouver } (u, \varphi) \in \mathbf{V} \times \Theta \text{ tel que } a((u, \varphi); (v, \Psi)) = L(v, \Psi), \quad \forall (v, \Psi) \in \mathbf{V} \times \Theta \quad (4.10)$$

Lemme 7 *Sous les hypothèses (4.5), (4.6), et (4.7), le problème (4.10) admet une solution unique.*

Preuve. L'existence et l'unicité de la solution découle de l'application du lemme de Lax-Milgram.

Il est facile de montrer que $a(.,.)$ est une forme bilinéaire continue et $L(.)$ est une forme linéaire continue sur l'espace $\mathbf{V} \times \Theta$.

Il reste à montrer la coercivité de la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} a((\mathbf{v}, \Psi), (\mathbf{v}, \Psi)) &= \int_{\Omega} [c_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{v}) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} [g_{jkl}e_{kl}(\mathbf{v}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \\ &= \int_{\Omega} [c_{ijkl}e_{kl}(\mathbf{v})e_{ij}(\mathbf{v}) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi}{\partial x_k} \frac{\partial \Psi}{\partial x_j}] dx \\ &\geq \alpha \sum_{i=1}^3 \|v_i\|_{1,\Omega}^2 + \beta \|\Psi\|_{1,\Omega}^2 \end{aligned}$$

ainsi, avec la coercivité, le lemme de Lax Milgram permet de conclure à l'existence et l'unicité de la solution. ■

4.4 Homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques

L'intérêt consiste à remplacer dans la modélisation notre milieu périodique hétérogène par un milieu équivalent homogène dont on évaluera les caractéristiques physiques. Pour une suite de valeurs réelles de ε tendant vers zéro, on peut aussi trouver la limite éventuelle de la solution $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ et le cas échéant, le problème vérifié par cette limite.

La technique d'homogénéisation que nous allons développer ici, utilise les idées de la méthode des échelles multiples et les techniques relatives aux équations aux dérivées partielles. L'hypothèse fondamentale, consiste à postuler que la structure du milieu est périodique, la période étant "petite" par rapport aux dimensions du milieu. Autrement dit, les valeurs des coefficients qui caractérisent le milieu, se reproduisent par déplacement périodique de petite échelle ε , $0 < \varepsilon < 1$.

On suppose donc que la structure du matériau est caractérisée par des coefficients C_{ijkl} , g_{ijk} et ϵ_{ij} présentant un caractère périodique en x . De manière plus précise, soit $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$ la cellule de base et soient les fonctions $C_{ijkl}(y)$, $g_{ijk}(y)$ et $\epsilon_{ij}(y)$ définies sur la période de base Y . On suppose que ces fonctions satisfont à (4.6) et (4.7).

Soit un scalaire $\varepsilon > 0$ destiné à tendre vers 0. Avec le changement de variable $y = \frac{x}{\varepsilon}$, ces fonctions deviennent :

$$C_{ijkl}^\varepsilon(x) = C_{ijkl}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); g_{ijk}^\varepsilon(x) = g_{ijk}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right); \epsilon_{ij}^\varepsilon(x) = \epsilon_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \quad (4.11)$$

pour $x \in \Omega$. Les fonctions C_{ijkl}^ε , g_{ijk}^ε , $\epsilon_{ij}^\varepsilon$ sont εY -périodiques. Pour $\varepsilon > 0$ fixé, le problème hétérogène se formule ainsi

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) + \mathbf{g}_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^\varepsilon = \mathbf{0} \quad \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi^\varepsilon = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad (4.12)$$

Ce problème admet une solution unique $\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon$, conformément au lemme de Lax-Milgram.

Pour déterminer un problème homogène équivalent à (4.12), on cherchera \mathbf{u}^ε et φ^ε sous la forme de développements asymptotiques :

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^0(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y) + \dots \quad (4.13)$$

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y) + \dots \quad (4.14)$$

où $y = \frac{x}{\varepsilon}$ et les fonctions \mathbf{u}^i et φ^i sont Y -périodiques par rapport à la variable y .

On rappelle que la dérivation par rapport à la variable x_i , $\frac{\partial}{\partial x_i}$, s'écrit

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \rightsquigarrow \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial y_i}$$

et par conséquent

$$e_{ij}(\Phi^\varepsilon(x)) = e_{ij}(\Phi(x, y) + \frac{1}{\varepsilon} e_{ijy}(\Phi(x, y)))$$

où $\Phi^\varepsilon(x) = \Phi(x, \frac{x}{\varepsilon})$.

En tenant compte de ce qui précède, le système (4.12) devient

$$\begin{aligned} & \varepsilon^{-2} \left(-\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] + \right. \\ & \varepsilon^{-1} \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] \right) \\ & \left. + \varepsilon^0 \left(-\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^\varepsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] + \varepsilon(\dots) \right) = b_i \end{aligned} \quad (4.15)$$

$$\begin{aligned}
 & \varepsilon^{-2} \left(\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] \right) \\
 + \varepsilon^{-1} & \left(\frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} r_{klx}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] \right) \\
 & + \varepsilon^0 \left(\frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^\varepsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}] \right) + \varepsilon (\dots) = 0
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

En remplaçant \mathbf{u}^ε et φ^ε par leurs développements dans (4.15) et (4.16) et par identification des puissances de ε , on obtient une "cascade" de problèmes:

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\
 - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
 -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^2) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\
 - \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = b_i
 \end{aligned} \tag{4.19}$$

⋮

$$\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\
 + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0
 \end{aligned} \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\
 + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

⋮

Les problèmes ci-dessus s'énoncent ainsi

Premier système : trouver \mathbf{u}^0 et φ^0 solutions de

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^0 \text{ et } \varphi^0 \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{cases} \quad (4.23)$$

Deuxième système : trouver \mathbf{u}^1 et φ^1 solutions de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0 \\ \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \\ + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^1 \text{ et } \varphi^1 \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{cases} \quad (4.24)$$

Troisième système : trouver \mathbf{u}^2 et φ^2 solutions de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^2) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] - \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - g_{kij} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{klx}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}] + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl} e_{kly}(\mathbf{u}^2) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^2 \text{ et } \varphi^2 \text{ sont } Y - \text{périodiques} \end{cases} \quad (4.25)$$

4.5 Equations homogénéisées. Caractéristiques physiques homogénéisées

On rappelle le *lemme de Fredholm*:

Lemme 8 Soit F une fonction de carré intégrable sur Y . On considère le problème aux limites :

$$A\Phi = F$$

Φ Y – périodique

où A est un opérateur elliptique.

Alors la solution périodique Φ existe si et seulement si $\langle F \rangle = 0$.

De plus si la solution existe, elle est unique à une constante additive près.

Tout d'abord, notons que le premier système nous donne l'indépendance de la solution $(\mathbf{u}^0, \varphi^0)$ de la variable microscopique y :

$$\mathbf{u}^0(x, y) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (4.26)$$

$$\varphi^0(x, y) = \varphi(x) \quad (4.27)$$

En effet, d'après l'alternative de Fredholm, la solution de ce système existe à une constante additive près.

Si on multiplie la première équation par \mathbf{u}^0 et la deuxième équation par φ^0 et on intègre sur Y , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_Y \left(\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) + g_{ijk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j}] \cdot \mathbf{u}_i^0 \right) dy \\ & - \int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{ijk} e_{kly}(\mathbf{u}^0) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k}] \cdot \varphi^0 dy = 0 \end{aligned}$$

En appliquant la formule de Green et en tenant compte de la périodicité des fonctions on obtient

$$\int_Y [C_{ijkl} e_{kly}(\mathbf{u}^0) e_{ijy}(\mathbf{u}^0) + \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j}] dy = 0$$

En tenant compte de l'ellipticité (4.6), on a

$$0 \geq \alpha \sum_{kl=0}^3 \|e_{kly}(\mathbf{u}^0)\|^2 + \beta \left\| \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j} \right\|^2$$

d'où

$$\begin{aligned} e_{kly}(\mathbf{u}^0) &= 0 \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial y_j} &= 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathbf{u}^0(x, y) = \mathbf{u}(\mathbf{x})$$

$$\varphi^0(x, y) = \varphi(x)$$

En tenant compte de (4.26) et (4.27), le deuxième système (4.24) devient

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \end{cases} \quad (4.28)$$

En appliquant l'opérateur $\langle \rangle$ (moyenne) aux deux seconds membres et en tenant compte de la périodicité on obtient

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}e_{klx}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] dy = 0$$

et

$$\int_Y \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] dy = 0$$

et donc d'après le lemme de Fredholm on a l'existence et l'unicité de la solution à une constante additive près. Grâce à la linéarité du problème (4.28) on peut mettre \mathbf{u}^1 et φ^1 sous la forme

$$\mathbf{u}_k^1(x, y) = \chi_k^{mn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) + \Phi_k^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \quad (4.29)$$

$$\varphi^1(x, y) = \Psi^{mn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) + R^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} \quad (4.30)$$

où χ^{mn} , Φ^m , Ψ^{mn} et R^m sont des fonctions périodiques solutions de

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y)(e_{kly}(\chi^{mn}(y))e_{mnx}(\mathbf{u}) + e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}) \\ \quad + g_{kij}(y)(\frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} e_{mnx}(\mathbf{u}) + \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m})] = \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijmn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) \\ \quad + g_{mij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}] \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y)(e_{kly}(\chi^{mn}(y))e_{mnx}(\mathbf{u}) + e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}) \\ \quad - \epsilon_{jk}(y)(\frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} e_{mnx}(\mathbf{u}) + \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m})] = \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jmn}(y)e_{mnx}(\mathbf{u}) \\ \quad - \epsilon_{jm}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}] \end{cases} \quad (4.31)$$

En multipliant les deux équations ci-dessus par la fonction test $\mathbf{v} = (v_i) \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3)$, en intégrant sur Y , en appliquant la formule de Green et en tenant compte de la condition de périodicité on obtient les problèmes cellulaires suivants :

$$\begin{cases} \int_Y (C_{ijkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + C_{ijmn}(y) \\ \quad + g_{kij}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}) e_{ij}(v) dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) \end{cases} \quad (4.32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (g_{jkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \\ \quad + g_{jmn}(y)) \frac{\partial w}{\partial y_j} dy = 0 \end{array} \right. \quad \forall w \in H_{per}(Y) \quad (4.33)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (g_{mij}(y) + C_{ijkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y))) \\ \quad + g_{kij}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} e_{ij}(\mathbf{v}) dy = 0 \end{array} \right. \quad \forall \mathbf{v} \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) \quad (4.34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_Y (\epsilon_{jm}(y) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \\ \quad - g_{jkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial w}{\partial y_j} dy = 0 \end{array} \right. \quad \forall w \in H_{per}(Y) \quad (4.35)$$

Le troisième système s'écrit sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^2) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}^1) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) - g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] + b_i \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^2) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k}] \\ \quad + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \end{array} \right. \quad (4.36)$$

D'après le lemme de Fredholm ce système admet une solution périodique si les deux seconds membres ont des moyennes nulles. Ainsi la moyenne de la première équation donne

$$\int_Y \left(\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{kly}(\mathbf{u}^1) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] \right. \\ \left. + \frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}(y)e_{klx}(\mathbf{u}) + g_{kij}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] + b_i \right) dy = 0$$

d'où, en remplaçant \mathbf{u}^1 et φ^1 par leurs expressions on a :

$$\int_Y \left[(C_{ijmn}(y)e_{mny}(\chi^{kl}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} + C_{ijkl}) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} \right. \\ \left. + (g_{kij}(y) + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m}) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + b_i \right] dy = 0$$

soit

$$C_{ijkl}^h(y) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + g_{kij}^h(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + b_i = 0 \quad (4.37)$$

où

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^h &= \langle C_{ijmn}(y) e_{mny}(\chi^{kl}(y)) + g_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} + C_{ijkl}(y) \rangle \\ g_{kij}^h &= \langle g_{kij}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m} + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} \rangle \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ceci constituent les coefficients homogénéisés de la structure piézo-électrique. ((C_{ijkl}^h) : tenseur élastique homogénéisé ; (g_{kij}^h) : tenseur piézoélectrique homogénéisé). La moyenne de la deuxième équation de (4.36) donne

$$\int_Y \left(\frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y) e_{kly}(\mathbf{u}^1) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}] + \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}(y) e_{klx}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \right) dy = 0$$

et en remplaçant \mathbf{u}^1 et φ^1 par leurs expressions on obtient:

$$\begin{aligned} &\int_Y \left[(g_{jkl}(y) e_{kly}(\chi^{mn}(y) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + g_{jmn}(y)) \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} \right. \\ &\left. + (g_{jkl}(y) e_{kly}(\Phi^m(y)) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - \epsilon_{jm}(y) \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m}) \right] dy = 0 \end{aligned}$$

soit

$$\mathbf{g}_{jmn}^h \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} - \epsilon_{jm}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \quad (4.39)$$

où

$$\begin{aligned} \epsilon_{jm}^h &= \langle \epsilon_{jm}(y) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y) e_{kly}(\Phi^m(y)) \rangle \\ \mathbf{g}_{jmn}^h &= \langle g_{jmn}(y) + g_{jkl}(y) e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \rangle \end{aligned} \quad (4.40)$$

(ϵ_{jm}^h) est le tenseur diélectrique homogénéisé. Les équations piézoélectriques homogénéisées s'écrivent donc

$$\begin{cases} C_{ijkl}^h \frac{\partial^2 (u_k)}{\partial x_j \partial x_l} + g_{kij}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} + b_i = 0 \\ \mathbf{g}_{jmn}^h \frac{\partial^2 u_m}{\partial x_j \partial x_n} - \epsilon_{jm}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_m} = 0 \end{cases} \quad (4.41)$$

Les conditions aux limites du problème homogénéisé se déduisent facilement des conditions aux limites du problème hétérogène et sont donc telles que:

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

et

$$\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega$$

Remarque 9 Les coefficients g_{kij}^h donnés par (4.38-2) et (4.40-2) sont identiques.

Remarque 10 Les caractéristiques homogénéisées gardent les propriétés de symétrie.

4.6 Retour au niveau microscopique

Calcul des microcontraintes

Une fois l'étape d'homogénéisation finie, on peut résoudre le problème au niveau macroscopique. De plus, il est possible d'obtenir des informations au niveau microscopique et c'est ce que l'on présente dans ce qui suit.

On considère maintenant que la structure composite est soumise à un chargement donné. Par la technique d'homogénéisation, exposée ci-avant, on peut lui substituer une structure homogène équivalente, et à un chargement donné on peut associer, en chaque point de la structure homogène les champs de contraintes, de déformations, électrique, etc.

Le processus de localisation est la démarche qui nous permet d'associer à un champ de déformations macroscopique le champ de microcontraintes régnant dans la cellule (la période) qui se trouve au voisinage de ce point x .

Revenons aux relations initiales:

- **les lois de comportement**

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} - g_{kij}E_k$$

$$D_i = g_{ikl}e_{kl} + \epsilon_{ik}E_k$$

- **les déformations**

$$e_{kh}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_h} + \frac{\partial u_h}{\partial x_k} \right)$$

$$E_k = -\frac{\partial \varphi}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

On utilise le développement asymptotique de la solution $(\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$:

$$\mathbf{u}^\varepsilon(x) = \mathbf{u}^0(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y) + \dots$$

$$\varphi^\varepsilon(x) = \varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y) + \dots$$

et on l'introduit dans les lois de comportement

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}e_{kl} + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

$$D_i = g_{ikl}e_{kl} - \epsilon_{ik} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}$$

On obtient ainsi, en tenant compte du nouvel opérateur de dérivation, **le tenseur de**

contraintes

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^\varepsilon &= C_{ijkl}^\varepsilon \cdot [e_{klx}(u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot e_{kly}(u^\varepsilon)] + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \\
&C_{ijkl}^\varepsilon \cdot [e_{klx}(\mathbf{u}^o(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y)) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \cdot e_{kly}(\mathbf{u}^o(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y))] \\
&+ g_{kij}^\varepsilon \cdot \left[\begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x_k} (\varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y)) + \\ + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial}{\partial y_k} (\varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y)) \end{array} \right] \\
&= \left\{ C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{kly}(u^1) + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k} \right\} \\
&+ \varepsilon \cdot \left\{ C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^1) + C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{kly}(u^2) + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial x_k} + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^2}{\partial y_k} \right\} \\
&+ \varepsilon^2 \cdot \{ \dots \dots \dots \}
\end{aligned}$$

En utilisant aussi le développement asymptotique du tenseur des contraintes σ_{ij}^ε , on aura:

$$\sigma_{ij}^\varepsilon(u^\varepsilon) = \sigma_{ij}^0(u^\varepsilon) + \varepsilon \cdot \sigma_{ij}^1(u^\varepsilon) + \varepsilon^2 \cdot \sigma_{ij}^2(u^\varepsilon) + \dots \dots \dots$$

d'où, en suivant les puissances de ε on obtient

$$\sigma_{ij}^0(u^\varepsilon) = \left\{ C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{kly}(u^1) + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k} \right\} \quad (4.42)$$

On rappelle que les fonctions \mathbf{u}^1 et φ^1 sont de la forme

$$\mathbf{u}_k^1(x, y) = \chi_k^{mn}(y) e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + \Phi_k^m(y) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \quad (4.43)$$

$$\varphi^1(x, y) = \Psi^{mn}(y) e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + R^m(y) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \quad (4.44)$$

En utilisant (4.43) et (4.44) on calcule

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left[\Psi^{mn}(y) e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + R^m(y) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \right] \\
&= e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
e_{kly}(u^1) &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{\partial u_k^1}{\partial y_l} + \frac{\partial u_l^1}{\partial y_k} \right) \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y_l} \left(\chi_k^{mn}(y) e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + \Phi_k^m(y) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial}{\partial y_k} \left(\chi_l^{mn}(y) e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + \Phi_l^m(y) \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \right) \right] \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot \left(\frac{\partial \chi_k^{mn}(y)}{\partial y_l} + \frac{\partial \chi_l^{mn}(y)}{\partial y_k} \right) \right. \\
&+ \left. \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \left(\frac{\partial \Phi_k^m(y)}{\partial y_l} + \frac{\partial \Phi_l^m(y)}{\partial y_k} \right) \right] \\
&= e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot e_{kly}(\Phi^m(y))
\end{aligned}$$

4.6 RETOUR AU NIVEAU MICROSCOPIQUE

En les introduisant en(4.42) on obtient

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^0(u^\varepsilon) &= \left\{ C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{kly}(u^1) + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k} \right\} \\
&= C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + C_{ijkl}^\varepsilon \cdot \left[e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) \right] + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} \\
&+ g_{kij}^\varepsilon \cdot \left[e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right] \\
&= \left\{ C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + C_{ijkl}^\varepsilon \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + g_{kij}^\varepsilon \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \right\} \\
&+ \left\{ C_{ijkl}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} + g_{kij}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right\}
\end{aligned}$$

En regroupant les termes on a

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}^0(x, y) &= e_{mnx}(\mathbf{u}^0) \cdot \left[C_{ijmn}^\varepsilon(y) + C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \right] \\
&+ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \cdot \left[C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{mij}^\varepsilon(y) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right], \quad i, j = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

ce qui représente les relations analytiques des microcontraintes pour un chargement macroscopique donné $(\mathbf{u}^0, \varphi^0)$.

Si on note par

$$K_{ijmn} = C_{ijmn}^\varepsilon(y) + C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}$$

et

$$G_{mij} = g_{mij}^\varepsilon(y) + C_{ijkl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{kij}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k}$$

alors les relations précédentes peuvent s'écrire

$$\sigma_{ij}^0(x, y) = K_{ijmn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{mij} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x), \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (4.45)$$

La connaissance donc de la microcontrainte $\sigma_{ij}^0(x, y)$ pour un point fixé x de la section de la période de base nécessite l'évaluation des coefficients $K_{ijmn}(y_1, y_2)$ en ce point là.

Les $K_{ijmn}(y_1, y_2)$ s'appellent **les microcontraintes élémentaires**. Après la résolution des problèmes cellulaires, ces quantités sont calculées une fois pour tout, pour une configuration donnée du composite. Le champ de microcontraintes correspondant à un champ de déformations macroscopiques (ou bien de contraintes macroscopiques) s'obtient comme combinaison linéaire de ces dernières et des microcontraintes élémentaires. On peut tester ainsi l'effet des divers chargements macroscopiques.

En faisant varier les indices dans la formule (4.45) on obtient explicitement (pour un matériau de type orthotrope par exemple)

$$\begin{aligned}
\sigma_{11}^0(x, y) &= K_{11mn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{m11} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\
&= K_{1111} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{1122} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{1133} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + 2 \cdot K_{1123} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{1113} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{1112} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + G_{111} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{211} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) + G_{311} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\
&= K_{1111} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{1122} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{1133} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) + G_{311} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x)
\end{aligned}$$

donc

$$\sigma_{11}^0(x, y) = K_{1111} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{1122} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{1133} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) + G_{311} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \quad (4.46)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{22}^0(x, y) &= K_{22mn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{m22} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\
&= K_{2211} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{2222} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{2233} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + 2 \cdot K_{2223} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{2213} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{2212} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + G_{122} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{222} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) + G_{322} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\
&= K_{2211} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{2222} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{2233} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) + G_{322} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x)
\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_{22}^0(x, y) = K_{2211} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{2222} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{2233} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) + G_{322} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \quad (4.47)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{33}^0(x, y) &= K_{33mn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{m33} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\
&= K_{3311} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{3322} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{3333} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + 2 \cdot K_{3323} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{3313} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{3312} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + G_{133} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{233} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) + G_{333} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\
&= K_{3311} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{3322} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{3333} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) + G_{333} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\sigma_{33}^0(x, y) = K_{3311} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{3322} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{3333} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) + G_{333} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \quad (4.48)$$

De même, on calcule les autres composantes du tenseur des microcontraintes:

$$\begin{aligned}
\sigma_{23}^0(x, y) &= K_{23mn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{m23} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\
&= K_{2311} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{2322} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{2333} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + 2 \cdot K_{2323} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{2313} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{2312} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + G_{123} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{223} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) + G_{323} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\
&= 2 \cdot K_{2323} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + G_{123} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{223} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) \\
\sigma_{23}^0(x, y) &= 2 \cdot K_{2323} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + G_{123} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{223} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) \tag{4.49}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{13}^0(x, y) &= K_{13mn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{m13} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\
&= K_{1311} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{1322} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{1333} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + 2 \cdot K_{1323} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{1313} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{1312} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + G_{113} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{213} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) + G_{313} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\
&= 2 \cdot K_{1313} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + G_{113} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{213} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{13}^0(x, y) = 2 \cdot K_{1313} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + G_{113} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{213} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) \tag{4.50}$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{12}^0(x, y) &= K_{12mn} \cdot e_{mnx}(\mathbf{u}^0) + G_{m12} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\
&= K_{1211} \cdot e_{11x}(\mathbf{u}^0) + K_{1222} \cdot e_{22x}(\mathbf{u}^0) + K_{1233} \cdot e_{33x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + 2 \cdot K_{1223} \cdot e_{23x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{1213} \cdot e_{13x}(\mathbf{u}^0) + 2 \cdot K_{1212} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) \\
&\quad + G_{112} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) + G_{212} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) + G_{312} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\
&= 2 \cdot K_{1212} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) + G_{312} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x)
\end{aligned}$$

$$\sigma_{12}^0(x, y) = 2 \cdot K_{1212} \cdot e_{12x}(\mathbf{u}^0) + G_{312} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \tag{4.51}$$

Si on considère un matériau orthotrope, il faut alors tenir compte des relations:

$$\begin{aligned}
& K_{1123} = K_{1113} = K_{1112} = K_{2223} = K_{2213} = K_{2212} = K_{3323} \\
& = K_{3313} = K_{3312} = K_{2311} = K_{2322} = K_{2333} = K_{2313} = K_{2312} \\
& = K_{1311} = K_{1322} = K_{1333} = K_{1323} = K_{1312} \\
& = K_{1211} = K_{1222} = K_{1233} = K_{1223} = K_{1213} = 0 \\
& g_{111} = g_{122} = g_{133} = g_{112} = g_{211} = g_{222} = g_{233} = g_{212} = g_{323} = g_{313} = 0
\end{aligned}$$

et

$$\epsilon_{12} = \epsilon_{13} = \epsilon_{21} = \epsilon_{23} = \epsilon_{31} = \epsilon_{32} = 0$$

Matriciellement les relations (4.46) - (4.51) s'écrivent

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_{1111} & K_{1122} & K_{1133} & 0 & 0 & 0 \\ K_{2211} & K_{2222} & K_{2233} & 0 & 0 & 0 \\ K_{3311} & K_{3322} & K_{3333} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{1313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & K_{1212} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{123} & G_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{223} & G_{213} & 0 \\ G_{311} & G_{322} & G_{333} & 0 & 0 & G_{312} \end{pmatrix}^T \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

On peut procéder de la même manière pour **le vecteur déplacement électrique**. En développant, on obtient

$$\begin{aligned}
D_i^\varepsilon(u^\varepsilon) &= g_{ikl}^\varepsilon \cdot [e_{klx}(u^\varepsilon) + \frac{1}{\varepsilon} \cdot e_{kly}(u^\varepsilon)] - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \left(\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial y_k} \right) \\
&= g_{ikl}^\varepsilon \cdot [e_{klx}(\mathbf{u}^0(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y)) \\
&+ \frac{1}{\varepsilon} \cdot e_{kly}(\mathbf{u}^0(x, y) + \varepsilon \mathbf{u}^1(x, y) + \varepsilon^2 \mathbf{u}^2(x, y))] \\
&- \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \left[\frac{\partial(\varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y))}{\partial x_k} + \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial(\varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y))}{\partial y_k} \right] \\
&= \left[g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{kly}(u^1) - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k} \right] \\
&+ \varepsilon \cdot [\dots\dots\dots] + \varepsilon^2 \cdot [\dots\dots\dots\dots\dots\dots]
\end{aligned}$$

Mais

$$D_i^\varepsilon = D_i^0 + \varepsilon \cdot D_i^1 + \varepsilon^2 \cdot D_i^2 + \dots$$

et en identifiant les puissances de ε on obtient

$$D_i^0(u^\varepsilon) = \left[g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{kly}(u^1) - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k} \right]$$

On introduit, comme précédemment, les expressions (4.43) et (4.44) de \mathbf{u}^1 et φ^1 et on obtient:

$$\begin{aligned} D_i^0(u^\varepsilon) &= g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + g_{ikl}^\varepsilon \cdot \left[e_{mnx}(u^0) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) \right] \\ &- \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \left[e_{mnx}(u^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right] \\ &= \left\{ g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{klx}(u^0) + g_{ikl}^\varepsilon \cdot e_{mnx}(u^0) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot e_{mnx}(u^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \right\} \\ &+ \left\{ g_{ikl}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} - \epsilon_{ik}^\varepsilon \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right\} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} D_i^0(x, y) &= e_{mnx}(u^0) \cdot \left[g_{imn}^\varepsilon(y) + g_{ikl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{ik}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} \right] \\ &- \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \cdot \left[-g_{ikl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + \epsilon_{im}^\varepsilon(y) + \epsilon_{ik}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right] \end{aligned}$$

ce qui représente les relations donnant le champ déplacement électrique au niveau microscopique (pour un chargement macroscopique donné).

Si l'on note par

$$G_{imn} = g_{imn}^\varepsilon(y) + g_{ikl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\chi^{mn}(y)) - \epsilon_{ik}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}$$

et

$$E_{im} = -g_{ikl}^\varepsilon(y) \cdot e_{kly}(\Phi^m(y)) + \epsilon_{im}^\varepsilon(y) + \epsilon_{ik}^\varepsilon(y) \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k}$$

on obtient les expressions ci-dessus sous la forme suivante

$$D_i^0(x, y) = G_{imn} \cdot e_{mnx}(u^0) - E_{im} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.52)$$

ou bien en explicitant la relation (4.52):

$$\begin{aligned} D_1^0(x, y) &= G_{1mn} \cdot e_{mnx}(u^0) - E_{1m} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\ &= G_{111} \cdot e_{11x}(u^0) + G_{122} \cdot e_{22x}(u^0) + G_{133} \cdot e_{33x}(u^0) \\ &+ 2 \cdot G_{123} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{113} \cdot e_{13x}(u^0) + 2 \cdot G_{112} \cdot e_{12x}(u^0) \\ &- E_{11} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) - E_{12} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) - E_{13} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\ &= 2 \cdot G_{123} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{113} \cdot e_{13x}(u^0) - E_{11} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) \end{aligned}$$

donc

$$D_1^0(x, y) = 2 \cdot G_{123} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{113} \cdot e_{13x}(u^0) - E_{11} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) \quad (4.53)$$

On trouve aussi

$$\begin{aligned} D_2^0(x, y) &= G_{2mn} \cdot e_{mnx}(u^0) - E_{2m} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\ &= G_{211} \cdot e_{11x}(u^0) + G_{222} \cdot e_{22x}(u^0) + G_{233} \cdot e_{33x}(u^0) \\ &+ 2 \cdot G_{223} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{213} \cdot e_{13x}(u^0) + 2 \cdot G_{212} \cdot e_{12x}(u^0) \\ &- E_{21} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) - E_{22} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) - E_{23} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\ &= 2 \cdot G_{223} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{213} \cdot e_{13x}(u^0) - E_{22} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) \end{aligned}$$

donc

$$D_2^0(x, y) = 2 \cdot G_{223} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{213} \cdot e_{13x}(u^0) - E_{22} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) \quad (4.54)$$

$$\begin{aligned} D_3^0(x, y) &= G_{3mn} \cdot e_{mnx}(u^0) - E_{3m} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m}(x) \\ &= G_{311} \cdot e_{11x}(u^0) + G_{322} \cdot e_{22x}(u^0) + G_{333} \cdot e_{33x}(u^0) \\ &+ 2 \cdot G_{323} \cdot e_{23x}(u^0) + 2 \cdot G_{313} \cdot e_{13x}(u^0) + 2 \cdot G_{312} \cdot e_{12x}(u^0) \\ &- E_{31} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1}(x) - E_{32} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2}(x) - E_{33} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \\ &= G_{311} \cdot e_{11x}(u^0) + G_{322} \cdot e_{22x}(u^0) + G_{333} \cdot e_{33x}(u^0) + 2 \cdot G_{312} \cdot e_{12x}(u^0) - E_{33} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \end{aligned}$$

$$D_3^0(x, y) = G_{311} \cdot e_{11x}(u^0) + G_{322} \cdot e_{22x}(u^0) + G_{333} \cdot e_{33x}(u^0) + 2 \cdot G_{312} \cdot e_{12x}(u^0) - E_{33} \cdot \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3}(x) \quad (4.55)$$

Autrement dit, on peut écrire les relations (4.53) - (4.55) sous la forme suivante:

$$\begin{pmatrix} D_1^0 \\ D_2^0 \\ D_3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & G_{123} & G_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{223} & G_{213} & 0 \\ G_{311} & G_{322} & G_{333} & 0 & 0 & G_{312} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_{11} \\ e_{22} \\ e_{33} \\ 2e_{23} \\ 2e_{13} \\ 2e_{12} \end{pmatrix} -$$

$$- \begin{pmatrix} E_{11} & 0 & 0 \\ 0 & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & E_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_1} \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

Pour le vecteur champ électrique on a

$$E_k^\varepsilon = -\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

et donc

$$E_k^\varepsilon = -\frac{\partial (\varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y))}{\partial x_k} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\partial (\varphi^0(x, y) + \varepsilon \varphi^1(x, y) + \varepsilon^2 \varphi^2(x, y))}{\partial y_k}$$

Mais

$$E_k^\varepsilon = E_k^0 + \varepsilon \cdot E_k^1 + \varepsilon^2 \cdot E_k^2 + \dots$$

d'où

$$E_k^0 = -\frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} - \frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}$$

et en remplaçant $\frac{\partial \varphi^1}{\partial y_k}$ par son expression, on obtient

$$E_k^0 = -\frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k} - \left[e_{mnx}(u^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} \right]$$

c'est-à-dire:

$$E_k^0 = -e_{mnx}(u^0) \cdot \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} - \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_m} \cdot \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - \frac{\partial \varphi^0}{\partial x_k}, \quad k = 1, 2, 3$$

qui est l'expression analytique du vecteur champ électrique au niveau microscopique.

4.7 Etude sur la convergence de la solution

Dans ce paragraphe on va démontrer que la solution du problème hétérogène converge faiblement vers la solution du problème homogénéisé. Considérons un corps piézoélectrique qui occupe un domaine Ω de \mathbb{R}^3 de frontière $\partial\Omega$ supposée assez régulière. On considère le problème piézoélectrique :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u \text{ et } \varphi \text{ tel que} & \\ -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kl}(u) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(u) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] = 0 & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

où

- $\boldsymbol{\sigma}$: tenseur des contraintes
- \mathbf{u} : vecteur déplacements
- b : densité volumique de forces dans Ω
- φ : potentiel électrique

On suppose que les coefficients C_{ijkl} (élastiques), g_{ijk} (piézoélectriques) et ϵ_{ij} (diélectriques) satisfont les conditions de symétrie, de positivité et de bornétude et on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$\mathbf{V} = \{ \mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3) \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; v_i = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

$$\Theta = \{ \Psi \in H^1(\Omega) ; \Psi = 0 \text{ sur } \partial\Omega \}$$

Soient (\mathbf{v}, Ψ) dans $\mathbf{V} \times \Theta$ où $\mathbf{v} = (v_i)$. En multipliant le premier membre du problème par \mathbf{v} et le deuxième par Ψ et en intégrant sur Ω on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i dx = \int_{\Omega} b_i v_i dx \\ \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \Psi dx = 0. \end{cases}$$

En regroupant les deux termes et en appliquant la formule de Green on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial v_i}{\partial x_j} dx - \int_{\partial\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] v_i \eta_j d\sigma \\ & - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx + \int_{\partial\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \Psi \eta_j d\sigma = \int_{\Omega} b_i v_i dx \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx \\ & - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} b_i v_i dx \end{aligned}$$

En posant

$$\begin{aligned} a((u, \varphi); (v, \Psi)) &= \int_{\Omega} [c_{ijkl} e_{kl}(\mathbf{u}) + g_{kij} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \\ & - \int_{\Omega} [g_{jkl} e_{kl}(\mathbf{u}) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

et

$$L(\mathbf{v}, \Psi) = \int_{\Omega} b_i v_i dx$$

le problème se formule ainsi

$$a((u, \varphi); (v, \Psi)) = L(v, \Psi)$$

On a déjà montré que, sous les hypothèses de bornétude, de symétrie et de positivité, le problème admettait une solution unique.

On s'intéresse au cas où la structure du matériau est caractérisée par des coefficients C_{ijkl} , g_{ijk} et ϵ_{ij} présentent un caractère périodique en x . De manière plus précise, soit $Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$ la cellule de base et soient les fonctions $C_{ijkl}(y)$, $g_{ijk}(y)$ et $\epsilon_{ij}(y)$ définies sur la période de base Y . On suppose que ces fonctions satisfont les hypothèses de bornétude et de symétrie.

Soit un scalaire $\epsilon > 0$ destiné à tendre vers 0. On définit alors

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^\epsilon(x) &= C_{ijkl}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\ g_{ijk}^\epsilon(x) &= g_{ijk}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \\ \epsilon_{ij}^\epsilon(x) &= \epsilon_{ij}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \end{aligned}$$

pour $x \in \Omega$. Les fonctions C_{ijkl}^ϵ , g_{ijk}^ϵ , ϵ_{ij}^ϵ sont ϵY -périodiques.

Pour $\epsilon > 0$ fixé, le problème hétérogène

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} [C_{ijkl}^\epsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\epsilon) + g_{kij} \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial x_k}] = b_i \\ \frac{\partial}{\partial x_j} [g_{jkl}^\epsilon e_{kl}(\mathbf{u}^\epsilon) - \epsilon_{jk} \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial x_k}] = 0 \\ \mathbf{u}^\epsilon = \mathbf{0} & \text{sur } \partial\Omega \\ \varphi^\epsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

admet une solution unique $(\mathbf{u}^\epsilon, \varphi^\epsilon)$.

Le problème est équivalent à

$$a^\epsilon((\mathbf{u}^\epsilon, \varphi^\epsilon); (\mathbf{v}, \Psi)) = L(\mathbf{v}, \Psi)$$

où

$$\begin{aligned} a^\epsilon((\mathbf{u}^\epsilon, \varphi^\epsilon); (\mathbf{v}, \Psi)) &= \int_{\Omega} [c_{ijkl}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) e_{kl}(\mathbf{u}^\epsilon) + g_{kij}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial x_k}] e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} [g_{jkl}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) e_{kl}(\mathbf{u}^\epsilon) - \epsilon_{jk}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) \frac{\partial \varphi^\epsilon}{\partial x_k}] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

Introduisons alors

$$W_1 = H_{per}(Y) = \{v \in H^1(Y) \text{ telle que } v \text{ est } Y \text{ périodique}\}$$

$$W_2 = H_{per}(Y, \mathbb{R}^3) = \{\mathbf{v} = (v_i) \text{ telle que } v_i \in H_{per}(Y)\}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_i^{mn} &= y_n \delta_{im} \\ q^m &= y_m \end{aligned}$$

Théorème 11 *Sous les hypothèses de symétrie, de positivité et de bornétude, si les coefficients sont Y -périodiques et si $b \in L^2(\Omega)$, alors la solution du problème*

$$a^\varepsilon((\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (\mathbf{v}, \Psi)) = L(\mathbf{v}, \Psi)$$

converge faiblement dans $\mathbf{V} \times \Theta$, soit

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^\varepsilon &\rightarrow u && \text{faiblement dans } \mathbf{V} \\ \varphi^\varepsilon &\rightarrow \varphi && \text{faiblement dans } \Theta \end{aligned}$$

où (u, φ) est l'unique solution de

$$\begin{cases} (u, \varphi) \in W_1 \times W_2 \\ C_{ijkl}^h \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} + g_{kij}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = b_i \\ g_{kij}^h \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \epsilon_{jk}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^h &= \langle C_{ijmn}(y) \cdot e_{mny}(\mathbf{X}^{kl}(y)) + \mathbf{C}_{ijkl}(y) + g_{mij}(y) \cdot \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} \rangle \\ g_{kij}^h &= \langle c_{ijmn}(y) \cdot \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} + g_{mij}(y) \cdot \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m} + \mathbf{g}_{kij}(y) \rangle \\ \epsilon_{jm}^h &= \langle g_{jkl}(y) \cdot e_{kly}(\mathbf{\Phi}^m(y)) - \epsilon_{jk}(y) \cdot \frac{\partial R^m}{\partial y_k} - \epsilon_{jm}(y) \rangle \end{aligned}$$

Preuve. Choisissons $(\mathbf{v}, \Psi) = (\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ dans $a^\varepsilon((\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon); (\mathbf{v}, \Psi))$ et utilisons la positivité. On obtient:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}^\varepsilon\| &\leq C_1 \\ \|\varphi^\varepsilon\| &\leq C_2 \end{aligned}$$

posons

$$\begin{aligned} \xi_{ij}^\varepsilon &= C_{ijkl}(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ \tau_{ij}^\varepsilon &= g_{kij}(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \\ \lambda_j^\varepsilon &= g_{jkl}(\frac{x}{\varepsilon}) \cdot e_{kl}(\mathbf{u}^\varepsilon) \\ \rho_j^\varepsilon &= \epsilon_{jk}(y) \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \end{aligned}$$

On a:

$$|\xi_{ij}^\varepsilon|_{L^2} \leq C_3$$

$$|\tau_{ij}^\varepsilon|_{L^2} \leq C_4$$

$$|\lambda_j^\varepsilon|_{L^2} \leq C_5$$

$$|\rho_j^\varepsilon|_{L^2} \leq C_6$$

on en déduit que, pour des sous-suites de $\mathbf{u}^\varepsilon, \varphi^\varepsilon, \xi_{ij}^\varepsilon, \tau_{ij}^\varepsilon, \lambda_j^\varepsilon$ et ρ_j^ε

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{u}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \\ \varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi \\ \xi_{ij}^\varepsilon \rightarrow \xi_{ij} \\ \tau_{ij}^\varepsilon \rightarrow \tau_{ij} \\ \lambda_j^\varepsilon \rightarrow \lambda_j \\ \rho_j^\varepsilon \rightarrow \rho_j \end{array} \right.$$

en passant à la limite dans

$$\int_{\Omega} [\xi_{ij}^\varepsilon + \tau_{ij}^\varepsilon] e_{ij}(\mathbf{v}) dx - \int_{\Omega} [\lambda_j^\varepsilon - \rho_j^\varepsilon] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = L(\mathbf{v}, \Psi)$$

on obtient

$$\int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] e_{ij}(\mathbf{v}) - [\lambda_j - \rho_j] \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = L(\mathbf{v}, \Psi) \quad \forall (\mathbf{v}, \Psi) \in \mathbf{V} \times \Theta$$

Soit $\mathbf{P}(y)$ un champ de vecteurs sur Y dont les composantes P_i sont des polynômes homogènes du premier degré en y .

Construisons

$$\mathbf{w}^\varepsilon(x) = \mathbf{P}(x) + \varepsilon \chi^{mn}(y)$$

où χ^{mn} est l'une des fonctions d'influence. La fonction d'influence χ^{mn} est bornée car Y -périodique et de plus $\mathbf{w}^\varepsilon \rightarrow \mathbf{P}$ dans $L^2(\Omega)$ fort.

Soit q un polynôme homogène du premier degré en y . On construit

$$R^\varepsilon(x) = q(x) + \varepsilon R^m(y)$$

où $R^m(y)$ est aussi une fonction d'influence. Les fonctions d'influence sont solutions des problèmes

$$\int_Y (C_{ijkl}(y) e_{kly}(\chi^{mn}(y) + C_{ijmn}(y) + g_{kij}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}) e_{ij}(v) dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3)$$

$$\int_Y (g_{jkl}(y)e_{kly}(\chi^{mn}) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k} + g_{jmn}(y)) \frac{\partial w}{\partial y_j} dy = 0 \quad \forall w \in H_{per}(Y)$$

$$\int_Y (g_{mij}(y) + C_{ijkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) + g_{kij}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k}) e_{ij}(\mathbf{v}) dy = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in H_{per}(Y, \mathbb{R}^3)$$

$$\int_Y (\epsilon_{jm}(y) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y)e_{kly}(\Phi^m(y)) \frac{\partial w}{\partial y_j}) dy = 0 \quad \forall w \in H_{per}(Y)$$

On a $R^\varepsilon \rightarrow q$ dans L^2 fort. De plus

$$\begin{aligned} a^\varepsilon((\mathbf{w}^\varepsilon, \Psi^{mn}), (\mathbf{v}_1, v_2)) &= 0 \quad \forall (\mathbf{v}_1, v_2) \in \mathbf{V} \times \Theta \\ a^\varepsilon((\Phi^m, R^\varepsilon), (\mathbf{v}_1, v_2)) &= 0 \quad \forall (\mathbf{v}_1, v_2) \in \mathbf{V} \times \Theta \end{aligned} \quad (4.56)$$

On choisit dans la formulation variationnelle $\mathbf{v} = \varphi \mathbf{w}^\varepsilon$, $\psi = \varphi \Psi^{mn}$ et $\mathbf{v} = \varphi \Phi^m$, $\psi = \varphi R^\varepsilon$. On obtient:

$$a^\varepsilon((\mathbf{u}, \varphi), (\varphi \mathbf{w}^\varepsilon, \varphi \Psi^{mn})) = L(\varphi \mathbf{w}^\varepsilon, \varphi \Psi^{mn}) \quad (4.57)$$

$$a^\varepsilon((\mathbf{u}, \varphi), (\varphi \Phi^m, \varphi R^\varepsilon)) = L(\varphi \Phi^m, \varphi R^\varepsilon) \quad (4.58)$$

Dans (4.56) on choisit $\mathbf{v}_1 = \varphi \mathbf{u}^\varepsilon$, $v_2 = \varphi \varphi^\varepsilon$. Il vient

$$a^\varepsilon((\mathbf{w}^\varepsilon, \Psi^{mn}), (\varphi \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \varphi^\varepsilon)) = 0 \quad (4.59)$$

$$a^\varepsilon((\Phi^m, R^\varepsilon), (\varphi \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \varphi^\varepsilon)) = 0 \quad (4.60)$$

(4.57)-(4.59) donne

$$a^\varepsilon((\mathbf{u}, \varphi), (\varphi \mathbf{w}^\varepsilon, \varphi \Psi^{mn})) - a^\varepsilon((\mathbf{w}^\varepsilon, \Psi^{mn}), (\varphi \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \varphi^\varepsilon)) = L(\varphi \mathbf{w}^\varepsilon, \varphi \Psi^{mn}) \quad (4.61)$$

(4.58)-(4.60) donne

$$a^\varepsilon((\mathbf{u}, \varphi), (\varphi \Phi^m, \varphi R^\varepsilon)) - a^\varepsilon((\Phi^m, R^\varepsilon), (\varphi \mathbf{u}^\varepsilon, \varphi \varphi^\varepsilon)) = L(\varphi \Phi^m, \varphi R^\varepsilon) \quad (4.62)$$

On traite d'abord l'équation (4.61). Après réduction de l'équation, on a

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} [\xi_{ij}^\varepsilon + \tau_{ij}^\varepsilon] \mathbf{w}_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} [\lambda_j^\varepsilon - \rho_j^\varepsilon] \Psi^{mn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ & - \int_{\Omega} [c_{ijkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\mathbf{w}^\varepsilon) + g_{kij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_k}] \mathbf{u}_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ & + \int_{\Omega} [g_{jkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\mathbf{w}^\varepsilon) - \epsilon_{jk}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_k}] \varphi^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} b_i \varphi \mathbf{w}_i^\varepsilon dx \end{aligned}$$

on peut alors passer à la limite en tenant compte que toute fonction périodique converge vers sa moyenne. Ainsi on a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_i^\varepsilon &\rightarrow \mathbf{P}_i \\ \mathbf{u}_i^\varepsilon &\rightarrow \mathbf{u}_i \\ \varphi^\varepsilon &\rightarrow \varphi \\ [c_{ijkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\mathbf{w}^\varepsilon) + g_{kij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_k}] &\rightarrow M_{ij}(\mathbf{P}) \quad (\text{sa moyenne}) \\ [g_{jkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\mathbf{w}^\varepsilon) - \epsilon_{jk}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_k}] &\rightarrow N_j(\mathbf{P}) \quad (\text{sa moyenne}) \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ([\xi_{ij} + \tau_{ij}] \mathbf{P}_i - [\lambda_j - \rho_j] \Psi^{mn} - \\ & - M_{ij}(\mathbf{P}) \mathbf{u}_i + N_j(\mathbf{P}) \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} b_i \varphi \mathbf{P}_i dx = L(\varphi \mathbf{P}, \varphi \Psi^{mn}) \end{aligned}$$

où $M_{ij}(\mathbf{P})$ est la moyenne de $c_{ijkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\mathbf{w}^\varepsilon) + \mathbf{g}_{kij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_k}$ et $N_j(\mathbf{P})$ est la moyenne de $g_{jkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\mathbf{w}^\varepsilon) - \epsilon_{jk}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_k}$

D'autre part,

$$\begin{aligned} L(\varphi \mathbf{P}, \varphi \Psi^{mn}) &= \int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] (\mathbf{P}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi e_{ij}(\mathbf{P})) \\ & - [\lambda_j - \rho_j] (\varphi \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_j} + \Psi^{mn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) dx \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} ([\xi_{ij} + \tau_{ij}] \mathbf{P}_i - [\lambda_j - \rho_j] \Psi^{mn} - M_{ij}(\mathbf{P}) \mathbf{u}_i + N_j(\mathbf{P}) \varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \\ & = \int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] (\mathbf{P}_i \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi e_{ij}(\mathbf{P})) - [\lambda_j - \rho_j] (\varphi \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_j} + \Psi^{mn} \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}) dx \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (-M_{ij}(\mathbf{P}) \mathbf{u}_i + N_j(\mathbf{P})\varphi) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx &= \int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] \varphi e_{ij}(\mathbf{P}) - [\lambda_j - \rho_j] \varphi \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_j} dx \\ \implies \frac{\partial}{\partial x_j} [M_{ij}(\mathbf{P}) \mathbf{u}_i - N_j(\mathbf{P})\varphi] &= [\xi_{ij} + \tau_{ij}] e_{ij}(\mathbf{P}) - [\lambda_j - \rho_j] \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_j} \end{aligned}$$

$$\implies M_{ij}(\mathbf{P}) e_{ij}(\mathbf{u}) - N_j(\mathbf{P}) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - [\xi_{ij} + \tau_{ij}] e_{ij}(\mathbf{P}) + [\lambda_j - \rho_j] \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial x_j} = 0 \quad (4.63)$$

En prenant $\mathbf{P} = \mathbf{P}^{mn}$ on obtient

$$\begin{aligned} M_{ij}(\mathbf{P}^{mn}) &= \langle c_{ijkl}(y) e_{kly}(\mathbf{w}^\varepsilon) + \mathbf{g}_{kij}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \rangle = \\ &= \langle c_{ijkl}(y) e_{kly}(\boldsymbol{\chi}^{mn}) + \mathbf{C}_{ijmn}(y) + \mathbf{g}_{kij}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \rangle = C_{ijmn}^h \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} N_j(\mathbf{P}^{mn}) &= \langle g_{jkl}(y) e_{kly}(\mathbf{w}^\varepsilon) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \rangle = \\ &= \langle g_{jkl}(y) e_{kly}(\boldsymbol{\chi}^{mn}) + g_{jmn}(y) - \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \rangle = g_{jmn}^h \end{aligned}$$

l'équation (4.63) devient alors

$$\int_{\Omega} C_{ijkl}^h e_{ij}(\mathbf{u}) e_{kl}(\mathbf{P}^{mn}) - g_{jkl}^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} e_{kl}(\mathbf{P}^{mn}) dx = L(\mathbf{P}^{mn}, \Psi^{mn})$$

ie

$$C_{ijkl}^h \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_j \partial x_l} - g_{kij}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = b_i$$

On procède de la même manière pour l'équation (4.62). Il en résulte que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\xi_{ij}^\varepsilon + \tau_{ij}^\varepsilon] \Phi_i^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \int_{\Omega} [\lambda_j^\varepsilon - \rho_j^\varepsilon] R^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ - \int_{\Omega} [c_{ijkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\Phi^m) + g_{kij}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x_k}] \mathbf{u}_i^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx \\ + \int_{\Omega} [g_{jkl}(\frac{x}{\varepsilon}) e_{kl}(\Phi^m) - \epsilon_{jk}(\frac{x}{\varepsilon}) \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x_k}] \varphi^\varepsilon \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} b_i \varphi \Phi_i^m dx \end{aligned}$$

on peut alors passer à la limite en tenant compte à nouveau que toute fonction périodique converge vers sa moyenne. Ainsi on a

$$R^\varepsilon \rightarrow \mathbf{q}$$

$$\mathbf{u}_i^\varepsilon \rightarrow \mathbf{u}_i$$

$$\varphi^\varepsilon \rightarrow \varphi$$

$$\left[c_{ijkl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_{kl}(\Phi^m) + g_{kij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \rightarrow M_{ij}'(\mathbf{q}) \quad (\text{sa moyenne})$$

$$\left[g_{jkl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_{kl}(\Phi^m) - \epsilon_{jk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \rightarrow N_j'(\mathbf{q}) \quad (\text{sa moyenne})$$

et donc

$$\int_{\Omega} \left([\xi_{ij} + \tau_{ij}] \Phi_i^m - [\lambda_j - \rho_j] q - M_{ij}'(q) \mathbf{u}_i + N_j'(q) \varphi \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = L(\varphi \Phi^m, \varphi q)$$

où $M_{ij}'(q)$ est la moyenne de $c_{ijkl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_{kl}(\Phi^m) + \mathbf{g}_{kij} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x_k}$ et $N_j'(q)$ est la moyenne de $g_{jkl} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) e_{kl}(\Phi^m) - \epsilon_{jk} \left(\frac{x}{\varepsilon} \right) \frac{\partial R^\varepsilon}{\partial x_k}$

Mais

$$L(\varphi \Phi^m, \varphi q) = \int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] \left(\Phi_i^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi e_{ij}(\Phi^m) \right) - [\lambda_j - \rho_j] \left(\varphi \frac{\partial q}{\partial x_j} + q \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx$$

donc

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left([\xi_{ij} + \tau_{ij}] \Phi_i^m - [\lambda_j - \rho_j] q - M_{ij}'(q) \mathbf{u}_i + N_j'(q) \varphi \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \\ & = \int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] \left(\Phi_i^m \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} + \varphi e_{ij}(\Phi^m) \right) - [\lambda_j - \rho_j] \left(\varphi \frac{\partial q}{\partial x_j} + q \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) dx \end{aligned}$$

ie

$$\int_{\Omega} - \left(M_{ij}'(q) \mathbf{u}_i + N_j'(q) \varphi \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx = \int_{\Omega} [\xi_{ij} + \tau_{ij}] \varphi e_{ij}(\Phi^m) - [\lambda_j - \rho_j] \varphi \frac{\partial q}{\partial x_j} dx$$

Ainsi on aura

$$\frac{\partial}{\partial x_j} [M_{ij}'(q) \mathbf{u}_i - N_j'(q) \varphi] = (\xi_{ij} + \tau_{ij}) e_{ij}(\Phi^m) - (\lambda_j - \rho_j) \frac{\partial q}{\partial x_j}$$

ie

$$M_{ij}'(q) e_{ij}(\mathbf{u}) - N_j'(q) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} - (\xi_{ij} + \tau_{ij}) e_{ij}(\Phi^m) + (\lambda_j - \rho_j) \frac{\partial q}{\partial x_j} = 0$$

choisissons $q = q^m$ dans la relation ci-dessus et on obtient

$$M_{ij}'(q^m) = \langle c_{ijkl}(y) e_{kly}(\Phi^m) + g_{kij}(y) \frac{\partial R^m}{\partial y_k} + g_{mij}(y) \rangle = g_{mij}^h$$

$$N_j'(q^m) = \langle g_{jkl}(y)e_{kly}(\Phi^m) - \epsilon_{jk}(y)\frac{\partial R^m}{\partial y_k} - \epsilon_{jm}(y) \rangle = \epsilon_{jm}^h$$

donc

$$\int_{\Omega} g_{kij}^h e_{ij}(\mathbf{u}) \frac{\partial q^m}{\partial x_k} - \epsilon_{jk}^h \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial q^m}{\partial x_k} = 0$$

d'où

$$g_{kij}^h \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} - \epsilon_{jk}^h \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_j \partial x_k} = 0$$

c.q.f.d. ■

Chapitre 5

Homogénéisation de l'os cortical

5.1 Introduction

L'objectif de ce chapitre est de présenter l'ensemble des développements nécessaires à l'obtention des propriétés physiques de l'os cortical, à chacun de ses niveaux : lamellaire, ostéonal et cortical.

Nous avons, dans les paragraphes consacrés à la description de l'os, annoncé qu'il y avait parfois trois constituants de base : (collagène – EVMC – fluide) ou (ostéon – système interstitiel – fluide). Il est possible de présenter nos développements pour trois constituants (ou pour un nombre quelconque), mais cela alourdit considérablement la présentation. Nous choisissons de ne faire la présentation que dans le cas de deux constituants et nous précisons le moment venu comment la transition est possible.

Nous utiliserons à trois reprises la théorie de l'homogénéisation en traitant le cas particulier de composants monocliniques. Nous consacrons donc le paragraphe 5.2 à ce développement commun : construction des problèmes cellulaires, définition des seconds membres et enfin expressions des caractéristiques homogénéisées.

Puis nous abordons les trois niveaux d'homogénéisation. Afin de donner au lecteur une vue d'ensemble, nous présentons d'abord la méthodologie de calcul (paragraphe 5.3) puis nous traitons successivement les trois homogénéisations : lamellaire (paragraphe 5.4), ostéonale (paragraphe 5.5) et corticale (paragraphe 5.6). Nous terminons par les propriétés d'isotropie des structures.

5.2 Homogénéisation d'un composite dont les constituants sont monocliniques

Dans cette section on applique les résultats précédents à une structure composite fibreuse unidirectionnelle dont les constituants sont *monocliniques*.

On montre que l'exploitation de certaines hypothèses vérifiées par la cellule de base et ses constituants, permet de ramener la résolution de ces problèmes cellulaires au cas bidimensionnel, ce qui réduit considérablement le coût de calcul. Nous abordons la mise en forme des nouveaux problèmes permettant l'utilisation de la technique des éléments finis pour leur résolution. On donne une formulation permettant la mise en oeuvre numérique des coefficients homogénéisés.

On considère un composite constitué de fibres distribuées de manière périodique dans une matrice.

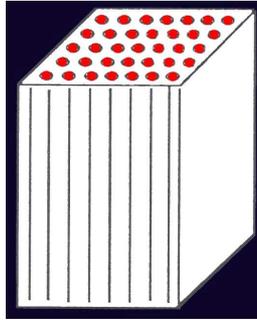


Figure 5.1: Structure composite

On suppose que ce composite vérifie les hypothèses suivantes :

H1 La cellule de base est définie par $Y = H \times [0, y_3]$ où H est la section transversale de Y incluse dans le plan Oy_1y_2 et y_3 est un réel quelconque.

H2 Les coefficients C_{ijkl} , g_{kij} et ϵ_{jk} caractérisant les constituants de la cellule de base Y sont indépendants de la variable y_3 i.e.

$$C_{ijkl}(y) = C_{ijkl}(y_1, y_2)$$

$$g_{kij}(y) = g_{kij}(y_1, y_2)$$

$$\epsilon_{jk}(y) = \epsilon_{jk}(y_1, y_2)$$

H3 Le tenseur d'élasticité est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1211} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{1222} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{1233} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2313} & C_{1313} & 0 \\ C_{1211} & C_{1222} & C_{1233} & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix}$$

le tenseur de piézoélectricité est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123} & g_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223} & g_{213} & 0 \\ g_{311} & g_{322} & g_{333} & 0 & 0 & g_{312} \end{pmatrix}$$

le tenseur diélectricité est de la forme

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}$$

Rappelons que les caractéristiques homogénéisées d'un tel composite s'obtiennent en deux étapes

1. On résout les problèmes cellulaires (4.32)- (4.35) qui sont équivalents à (au sens des distributions) :

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [C_{ijkl}(y) \frac{\partial \chi_l^{mn}(y)}{\partial y_k} + g_{kij}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijmn}(y) \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{jkl}(y) \frac{\partial \chi_l^{mn}(y)}{\partial y_k} - \varepsilon_{jk}(y) \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{mij}(y) \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} [g_{kij}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} + C_{ijkl}(y) \frac{\partial \Phi_l^m(y)}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{mij}(y) \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} [\varepsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - g_{ikl}(y) \frac{\partial \Phi_l^m(y)}{\partial y_k}] = \frac{\partial}{\partial y_j} \varepsilon_{jm}(y) \end{cases} \quad (5.2)$$

2. On calcule les coefficients homogénéisés en utilisant les relations

$$C_{ijkl}^h = \langle C_{ijkl}(y) + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \chi_m^{kl}(y)}{\partial y_n} + g_{mij}(y) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} \rangle \quad (5.3)$$

$$g_{kij} = \langle g_{kij}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m} + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} \rangle \quad (5.4)$$

$$\epsilon_{jm}^h = \langle \epsilon_{jm}(y) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y) \frac{\partial \Phi_l^m(y)}{\partial y_k} \rangle \quad (5.5)$$

Remarque 12 Une analyse des hypothèses ci-dessus conduit à plusieurs conclusions préliminaires

1. De l'hypothèse H_2 on déduit que $\frac{\partial C_{ijkl}(y)}{\partial y_3} = 0$, $\frac{\partial g_{kij}(y)}{\partial y_3} = 0$, $\frac{\partial R^m(y)}{\partial y_3} = 0$
2. Les fonctions χ^{mn} , Ψ^{mn} , R^m et Φ^m sont Y -périodiques de période Y_3 en y_3 (Y_3 étant quelconque dans \mathbb{R}) donc ces fonctions sont indépendantes de y_3 . D'où

$$\frac{\partial \chi_l^{mn}(y)}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_3} = 0, \quad \frac{\partial R^m(y)}{\partial y_3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \Phi_l^m(y)}{\partial y_3} = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} \chi^{mn}(y) &= (\chi_1^{mn}(y_1, y_2); \chi_2^{mn}(y_1, y_2); \chi_3^{mn}(y_1, y_2)) \\ \Phi^m(y) &= (\Phi_1^m(y_1, y_2); \Phi_2^m(y_1, y_2); \Phi_3^m(y_1, y_2)) \end{aligned}$$

3. Grâce à la symétrie des tenseurs on a

$$\chi^{mn} = \chi^{nm} \quad \text{et} \quad \Psi^{mn} = \Psi^{nm}$$

par conséquent il y aura 18 fonctions à déterminer

$$\begin{aligned} &\chi^{11}, \chi^{12}, \chi^{13}, \chi^{22}, \chi^{23}, \chi^{33}. \\ &\Psi^{11}, \Psi^{12}, \Psi^{13}, \Psi^{22}, \Psi^{23}, \Psi^{33} \\ &\Phi^1, \Phi^2, \Phi^3. \\ &R^1, R^2, R^3 \end{aligned}$$

Par la suite, les fonctions ne dépendent que des variables y_1 et y_2 . En tenant compte des remarques précédentes, les équations vérifiées par χ^{mn} , Ψ^{mn} , R^m et Φ^m au sens des distributions prennent les formes suivantes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} + g_{kij} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijmn} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[g_{jkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{jmn} \\ \chi^{mn} \text{ et } \Psi^{mn} \text{ sont } H\text{-périodiques } (1 \leq j, k \leq 2 \text{ et } 1 \leq m, n, l \leq 3) \end{array} \right. \quad (5.6)$$

et

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[g_{kij} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} + C_{ijkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{mij} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[\epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} - g_{jkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \\ R^m \text{ et } \Phi^m \text{ sont } H\text{-périodiques } (1 \leq j, k \leq 2 \text{ et } 1 \leq m, n, l \leq 3) \end{cases}$$

En tenant compte de l'hypothèse (H_3) on constate que

$$g_{jmn} = 0 \quad \text{pour } (m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2) \text{ et pour } j = 1, 2.$$

Ainsi

$$\frac{\partial}{\partial y_j} (g_{mij}) = 0$$

Ceci nous conduit à grouper les équations précédentes en deux sous-ensembles

1. l'ensemble des équations régissant les χ^{mn} et Ψ^{mn} pour $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$
2. l'ensemble des équations régissant les χ^{mn} et Ψ^{mn} pour $(m, n) = (1, 3); (2, 3)$

Cas où $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$

Proposition 13 *Sous les hypothèses H_i ($i = 1, 2, 3$) et en tenant compte des remarques précédentes, les fonctions χ^{mn} et Ψ^{mn} sont telles que*

1. $\chi^{mn} = (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}, 0)$ et $\Psi^{mn} = 0$
2. en plus $(\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn})$ sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{ijmn} \\ \chi_l^{mn} H - \text{périodique} \end{cases} \quad (5.7)$$

Remarque 14 *Le problème ci-dessus est un problème de type élastique bidimensionnel*

Cas où $(m, n) = (1, 3); (2, 3)$

Proposition 15 *Sous les hypothèses H_i ($i = 1, 2, 3$) et en tenant compte des remarques précédentes les fonctions χ^{m3} et Ψ^{m3} sont telles que*

1. $\chi^{m3}(y_1, y_2) = (0, 0, \chi_3^{m3}(y_1, y_2))$

2. En plus χ_3^{m3} et Ψ^{m3} sont solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{3jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[g_{jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3} \\ \chi_3^{m3} \text{ et } \Psi^{m3} \text{ sont } H\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (5.8)$$

Remarque 16 Le problème ci-dessus est un problème de type piézoélectrique.

Détermination des fonctions R^m et Φ^m

Ces fonctions sont solutions du système :

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[g_{kij} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} + C_{ijkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{mij} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[\epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} - g_{jkl} \frac{\partial \Phi_l^m}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \\ R^m \text{ et } \Phi^m \text{ sont } H\text{-périodiques } (1 \leq j, l, k \leq 2) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

En tenant compte de l'hypothèse H_3 , on constate que

$$g_{mij} = 0 \quad \text{pour } m = 1, 2 \quad \text{et pour } i = 1, 2$$

On a deux cas :

Cas où $m = 1, 2$

Proposition 17 Sous les hypothèses H_i ($i = 1, 2, 3$) et en tenant compte des remarques précédentes les fonctions Φ^m et R^m sont telles que

1. $\Phi^m(y_1, y_2) = (0, 0, \Phi_3^m(y_1, y_2))$

2. Les fonctions Φ_3^m et R^m sont solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[C_{3jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j} \\ -\frac{\partial}{\partial y_j} \left[-g_{jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + \epsilon_{kj} \frac{\partial R^m}{\partial y_k} \right] = \frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \\ R^m \text{ et } \Phi_3^m \text{ sont } H\text{-périodiques} \end{array} \right. \quad (5.10)$$

Remarque 18 Les problèmes ci-dessus sont des problèmes de type piézoélectrique.

Cas où $m = 3$

Proposition 19 Sous les hypothèses H_i , ($i = 1, 2, 3$) et en tenant compte des remarques précédentes les fonctions R^3 et Φ^3 sont telles que

1. $\Phi^3(y_1, y_2) = (\Phi_1^3(y_1, y_2), \Phi_2^3(y_1, y_2), 0)$ et $R^3 = 0$
2. La fonction (Φ_1^3, Φ_2^3) est solution du problème

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial y_j} (C_{ijkl} \frac{\partial \Phi_l^3}{\partial y_k}) = \frac{\partial}{\partial y_j} g_{3ij} \\ \Phi_l^3 \text{ } H\text{-périodique. } (1 \leq i, j, l, k, \leq 2) \end{cases} \quad (5.11)$$

D'après ce qui précède, on doit résoudre deux types de problèmes bidimensionnels définis sur la section H de la période de base. Tout d'abord on introduit les espaces fonctionnels suivants :

$$W_1(H) = \{v, v \in H^1(H), v \text{ } H\text{-périodique}\}$$

$$W_2(H) = \{\mathbf{v}, \mathbf{v} \in [H^1(H)]^2, \mathbf{v} \text{ } H\text{-périodique}\}$$

Puisqu'on ne peut pas donner les solutions analytiques des problèmes cellulaires ci-dessus on va utiliser la méthode des éléments finis pour déterminer une approximation de leurs solutions. Afin de préparer ces problèmes à la mise en oeuvre numérique, on donne ci-dessous leurs formulations variationnelles.

5.2.1 Formulation variationnelle des problèmes cellulaires

Formulation variationnelle des problèmes (5.7)

Le système (5.7) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = - \int_H C_{ijmn} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \end{cases} \quad \forall \mathbf{v} \in W_2(H) \quad (5.12)$$

Formulation variationnelle des problèmes (5.8)

Le système (5.8) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } (\chi_3^{m3}, \Psi^{m3}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (g_{jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = - \int_H (C_{3jm3} \cdot \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \cdot \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{cases} \quad (5.13)$$

Formulation variationnelle des problèmes (5.10)

Le système (5.10) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_3^m, R^m) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (-g_{jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + \epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = - \int_H (g_{m3j} \cdot \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \cdot \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (5.14)$$

Formulation variationnelle des problèmes (5.11)

L'équation (5.11) est équivalent à

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_1^3, \Phi_2^3) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} e_{kl}(\Phi^3) e_{ij}(\mathbf{v}) dy = - \int_H g_{3ij} \cdot \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \quad \forall \mathbf{v} \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (5.15)$$

5.2.2 Seconds membres des problèmes cellulaires

On suppose que la cellule de base est constituée de deux matériaux de nature différente et vérifiant les hypothèses précédentes. La section H peut se décomposer sous la forme

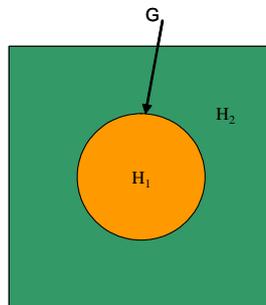
$$H = H_1 \cup H_2$$

Soit Γ l'interface entre les deux matériaux. i.e

$$\Gamma = H_1 \cap H_2$$

Notons que

$$\partial H_1 = \Gamma \quad \text{et} \quad \partial H_2 = \Gamma \cup \partial H$$



Seconds membres des problèmes (5.12) (cas $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$)

Notons $L^{mn}(\mathbf{v})$ le second membre du problème (5.12)

$$\begin{aligned} L^{mn}(\mathbf{v}) &= - \int_H C_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \\ &= - \int_{H_1} C_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy - \int_{H_2} C_{ijmn} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \end{aligned}$$

En utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} L^{mn}(\mathbf{v}) &= \int_{H_1} \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy - \int_{\partial H_1} C_{ijmn} v_i \eta_j^1 ds \\ &\quad + \int_{H_2} \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy - \int_{\partial H_2} C_{ijmn} v_i \eta_j^2 ds \end{aligned}$$

et on a

$$L^{mn}(\mathbf{v}) = - \int_{\Gamma} C_{ijmn} v_i \eta_j^1 ds - \int_{\Gamma \cup \partial H} C_{ijmn} v_i \eta_j^2 ds + \int_H \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy$$

Sachant que (grâce à la périodicité)

$$\int_{\partial H} C_{ijmn} v_i \eta_j^2 ds = 0$$

et que

$$n_j^1 = -n_j^2 \quad \text{sur } \Gamma$$

on en déduit

$$L^{mn}(v) = \int_{\Gamma} [[C_{ijmn}]] v_i \eta_j^1 ds + \int_H \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} v_i dy$$

où $\eta^1 = (\eta_1^1, \eta_2^1)$ est la normale extérieure à Γ et $[[\cdot]]$ est le saut de la fonction à l'interface Γ , c'est-à-dire:

$$[[C_{ijmn}]] = C_{ijmn}|_{H_2} - C_{ijmn}|_{H_1}$$

Posons:

$$f_i^{mn} = \frac{\partial C_{ijmn}}{\partial y_j} \tag{5.16}$$

et

$$F_i^{mn} = [[C_{ijmn}]] \cdot \eta_j^1 \tag{5.17}$$

pour $i = 1, 2$ et $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$

Ces quantités peuvent être identifiées respectivement à des forces surfaciques et linéiques. L'expression du second membre de (5.12) prend alors la forme suivante:

$$L^{mn}(v) = \int_{\Gamma} F_i^{mn} \cdot v_i ds + \int_H f_i^{mn} \cdot v_i dy$$

Expressions des forces surfaciques:

$$f_1^{11} = \frac{\partial C_{1111}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{1112}}{\partial y_2}$$

$$f_2^{11} = \frac{\partial C_{1112}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{1122}}{\partial y_2}$$

$$f_1^{22} = \frac{\partial C_{1122}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{2212}}{\partial y_2}$$

$$f_2^{22} = \frac{\partial C_{2212}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{2222}}{\partial y_2}$$

$$f_1^{33} = \frac{\partial C_{1133}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{3312}}{\partial y_2}$$

$$f_2^{33} = \frac{\partial C_{3312}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{3322}}{\partial y_2}$$

$$f_1^{12} = \frac{\partial C_{1112}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{1212}}{\partial y_2}$$

$$f_2^{12} = \frac{\partial C_{1212}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{1222}}{\partial y_2}$$

Expressions des forces linéiques:

$$F_1^{11} = [[C_{1111}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{1112}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_2^{11} = [[C_{1112}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{1122}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_1^{22} = [[C_{1122}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{2212}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_2^{22} = [[C_{2212}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{2222}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_1^{33} = [[C_{1133}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{3312}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_2^{33} = [[C_{3312}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{3322}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_1^{12} = [[C_{1112}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{1212}]] \cdot \eta_2^1$$

$$F_2^{12} = [[C_{1212}]] \cdot \eta_1^1 + [[C_{1222}]] \cdot \eta_2^1$$

Seconds membres des problèmes (5.13) $((\mathbf{m}, \mathbf{n}) = (\mathbf{1}, \mathbf{3}); (\mathbf{2}, \mathbf{3}))$

Notons L^{m3} le second membre du problème (5.13)

$$\begin{aligned}
L^{m3}(w, z) &= - \int_H (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy & (5.18) \\
&= - \int_{H_1} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy - \int_{H_2} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
- \int_{H_1} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy - \int_{\partial H_1} C_{3jm3} w \eta_j^1 ds \\
&\quad + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy - \int_{\partial H_1} g_{jm3} \eta_j^1 z ds
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
- \int_{H_1} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3}) \frac{\partial z}{\partial y_j} dy &= - \int_{\Gamma} C_{3jm3} w \eta_j^1 ds - \int_{\Gamma} g_{jm3} \eta_j^1 z ds & (5.19) \\
&\quad + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy
\end{aligned}$$

de même on a

$$\begin{aligned}
- \int_{H_2} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy - \int_{\partial H_2} C_{3jm3} w \eta_j^2 ds \\
&\quad + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy - \int_{\partial H_2} g_{jm3} \eta_j^2 z ds \\
&= - \int_{\Gamma} C_{3jm3} w \eta_j^2 ds - \int_{\Gamma} g_{jm3} \eta_j^2 z ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
- \int_{H_2} (C_{3jm3} \frac{\partial w}{\partial y_j} + g_{jm3}) \frac{\partial z}{\partial y_j} dy &= - \int_{\Gamma} C_{3jm3} w \eta_j^2 ds - \int_{\Gamma} g_{jm3} \eta_j^2 z ds & (5.20) \\
&\quad + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy
\end{aligned}$$

en utilisant (5.19), (5.20) et (5.18), on obtient

$$L^{m3}(w, z) = \int_{\Gamma} [[C_{3jm3}]] w \eta_j^1 ds + \int_{\Gamma} [[g_{jm3}]] \eta_j^1 z ds + \int_H (\frac{\partial}{\partial y_j} C_{3jm3}) w dy + \int_H (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{jm3}) z dy$$

où $\eta^1 = (\eta_1^1, \eta_2^1)$ est la normale extérieure à Γ et $[[\circ]]$ est le saut de la fonction à l'interface Γ , c'est-à-dire:

$$[[\circ]] = \circ|_{H_2} - \circ|_{H_1}$$

Comme pour le second membre du problème (5.12), on peut identifier ci-dessus les forces surfaciques et linéiques par les expressions suivantes:

$$f^{m3} = \frac{\partial C_{3jm3}}{\partial y_j} \quad (5.21)$$

$$h^{m3} = \frac{\partial g_{jm3}}{\partial y_j} \quad (5.22)$$

$$F^{m3} = [[C_{3jm3}] \cdot \eta_j^1 \quad (5.23)$$

$$H^{m3} = [[g_{jm3}] \cdot \eta_j^1 \quad (5.24)$$

pour $m = 1, 2$. Les expressions (5.21), (5.22) expriment les forces surfaciques et (5.23), (5.24) les forces linéiques. Le second membre devient alors:

$$L^{m3}(w, z) = \int_{\Gamma} F^{m3} \cdot w ds + \int_{\Gamma} H^{m3} \cdot z ds + \int_H f^{m3} \cdot w dy + \int_H h^{m3} \cdot z dy$$

On donne ci-dessous les expressions explicites des forces surfaciques et linéiques:

Forces surfaciques:

$$f^{13} = \frac{\partial C_{1313}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{1323}}{\partial y_2}$$

$$f^{23} = \frac{\partial C_{1323}}{\partial y_1} + \frac{\partial C_{2323}}{\partial y_2}$$

$$h^{13} = \frac{\partial g_{113}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{213}}{\partial y_2}$$

$$h^{23} = \frac{\partial g_{123}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{223}}{\partial y_2}$$

Forces linéiques:

$$F^{13} = [[C_{1313}] \cdot \eta_1^1 + [[C_{1323}] \cdot \eta_2^1$$

$$F^{23} = [[C_{1323}] \cdot \eta_1^1 + [[C_{2323}] \cdot \eta_2^1$$

$$H^{13} = [[g_{113}] \cdot \eta_1^1 + [[g_{213}] \cdot \eta_2^1$$

$$H^{23} = [[g_{123}] \cdot \eta_1^1 + [[g_{223}] \cdot \eta_2^1$$

Seconds membres des problèmes (5.14) ($m = 1, 2$)

On note par $L^m(w, z)$ le second membre du (5.14)

$$\begin{aligned}
L^m(w, z) &= - \int_H (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy \\
&= - \int_{H_1} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy - \int_{H_2} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy
\end{aligned} \tag{5.25}$$

or

$$\begin{aligned}
- \int_{H_1} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j}) w dy - \int_{\partial H_1} g_{m3j} \eta_j^1 w ds \\
&\quad + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm}) z dy - \int_{\partial H_1} \epsilon_{jm} \eta_j^1 z ds
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
- \int_{H_1} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= - \int_{\Gamma} g_{m3j} \eta_j^1 w ds - \int_{\Gamma} \epsilon_{jm} \eta_j^1 z ds \\
&\quad + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j}) w dy + \int_{H_1} (\frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm}) z dy
\end{aligned} \tag{5.26}$$

de même

$$\begin{aligned}
- \int_{H_2} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j}) w dy - \int_{\partial H_2} g_{m3j} \eta_j^2 w ds \\
&\quad + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm}) z dy - \int_{\partial H_2} \epsilon_{jm} \eta_j^2 z ds \\
&= - \int_{\Gamma \cup \partial H} g_{m3j} \eta_j^2 w ds - \int_{\Gamma \cup \partial H} \epsilon_{jm} \eta_j^2 z ds \\
&\quad + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j}) w dy + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm}) z dy
\end{aligned}$$

Comme

$$\begin{aligned}
\int_{\partial H} g_{m3j} \eta_j^2 w ds &= 0 \\
\int_{\partial H} \epsilon_{jm} \eta_j^2 z ds &= 0
\end{aligned}$$

par raisons de périodicité, on obtient finalement:

$$\begin{aligned}
- \int_{H_2} (g_{m3j} \frac{\partial w}{\partial y_j} + \epsilon_{jm} \frac{\partial z}{\partial y_j}) dy &= - \int_{\Gamma} g_{m3j} \eta_j^2 w ds - \int_{\Gamma} \epsilon_{jm} \eta_j^2 z ds \\
&\quad + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j}) w dy + \int_{H_2} (\frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm}) z dy
\end{aligned} \tag{5.27}$$

en utilisant (5.26), (5.27) et (5.25), on obtient

$$L^m(w, z) = \int_{\Gamma} [[g_{m3j}]] \eta_j^1 w ds + \int_{\Gamma} [[\epsilon_{jm}]] \eta_j^1 z ds + \int_H \left(\frac{\partial}{\partial y_j} g_{m3j} \right) w dy + \int_H \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \epsilon_{jm} \right) z dy$$

ce qui représente le seconde membre du problème (5.14).

En notant par

$$\begin{aligned} f^m &= \frac{\partial g_{m3j}}{\partial y_j} \\ h^m &= \frac{\partial \epsilon_{jm}}{\partial y_j} \end{aligned} \quad (5.28)$$

et par

$$\begin{aligned} F^m &= [[g_{m3j}]] \cdot \eta_j^1 \\ H^m &= [[\epsilon_{jm}]] \cdot \eta_j^1 \end{aligned} \quad (5.29)$$

pour $m = 1, 2$, on obtient l'expression du second membre en fonction de forces surfaciques et linéiques

$$L^m(w, z) = \int_{\Gamma} F^m \cdot w ds + \int_{\Gamma} H^m \cdot z ds + \int_H f^m \cdot w dy + \int_H h^m \cdot z dy$$

Les expressions explicites de ces forces sont:

Forces surfaciques:

$$\begin{aligned} f^1 &= \frac{\partial g_{113}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{123}}{\partial y_2} \\ f^2 &= \frac{\partial g_{213}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{223}}{\partial y_2} \\ h^1 &= \frac{\partial \epsilon_{11}}{\partial y_1} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial y_2} \\ h^2 &= \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial y_1} + \frac{\partial \epsilon_{22}}{\partial y_2} \end{aligned}$$

Forces linéiques:

$$\begin{aligned} F^1 &= [[g_{113}]] \cdot \eta_1^1 + [[g_{123}]] \cdot \eta_2^1 \\ F^2 &= [[g_{213}]] \cdot \eta_1^1 + [[g_{223}]] \cdot \eta_2^1 \\ H^1 &= [[\epsilon_{11}]] \cdot \eta_1^1 + [[\epsilon_{12}]] \cdot \eta_2^1 \\ H^2 &= [[\epsilon_{12}]] \cdot \eta_1^1 + [[\epsilon_{22}]] \cdot \eta_2^1 \end{aligned}$$

Seconds membres des problèmes (5.15) ($m = 3$)

Notons L^3 le second membre du problème (5.15)

$$\begin{aligned} L^3(v) &= - \int_H g_{3ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \\ &= - \int_{H_1} g_{3ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy - \int_{H_2} g_{3ij} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy \end{aligned}$$

on applique la formule de Green pour chaque terme

$$\begin{aligned} L^3(v) &= \int_{H_1} \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j} v_i dy - \int_{\partial H_1} g_{3ij} v_i \eta_j^1 ds \\ &\quad + \int_{H_2} \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j} v_i dy - \int_{\partial H_2} g_{3ij} v_i \eta_j^2 ds \end{aligned}$$

et on a

$$L^3(\mathbf{v}) = - \int_{\partial H_1} g_{3ij} v_i \eta_j^1 ds - \int_{\Gamma \cup \partial H} g_{3ij} v_i \eta_j^2 ds + \int_{H_1} \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j} v_i dy + \int_{H_2} \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j} v_i dy$$

Sachant que (grâce à la périodicité)

$$\int_{\partial H} g_{3ij} v_i \eta_j^2 ds = 0$$

et que

$$n_j^1 = -n_j^2 \quad \text{sur } \Gamma$$

on déduit:

$$L^3(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} [[g_{3ij}]] v_i \eta_j^1 ds + \int_H \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j} v_i dy$$

ou bien, en tenant compte des forces surfaciques et linéiques

$$f_i^3 = \frac{\partial g_{3ij}}{\partial y_j} \tag{5.30}$$

$$F_i^3 = [[g_{3ij}]] \cdot \eta_j^1 \tag{5.31}$$

pour $i = 1, 2$ et $m = 3$, on a l'expression du second membre sous la forme

$$L^3(\mathbf{v}) = \int_{\Gamma} F_i^3 \cdot v_i ds + \int_H f_i^3 \cdot v_i dy$$

Les **forces surfaciques** sont données par:

$$\begin{aligned} f_1^3 &= \frac{\partial g_{311}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{312}}{\partial y_2} \\ f_2^3 &= \frac{\partial g_{312}}{\partial y_1} + \frac{\partial g_{322}}{\partial y_2} \end{aligned}$$

Les **forces linéiques** sont données par:

$$\begin{aligned} F_1^3 &= [[g_{311}]] \cdot \eta_1^1 + [[g_{312}]] \cdot \eta_2^1 \\ F_2^3 &= [[g_{312}]] \cdot \eta_1^1 + [[g_{322}]] \cdot \eta_2^1 \end{aligned}$$

Remarque 20 On a mis ainsi les seconds membres des problèmes (5.12)-(5.15) sous forme de forces surfaciques et linéiques, ce qui est commode pour la résolution de ces problèmes par la méthode des éléments finis. Cette mise en forme des seconds membres reste valable quand la cellule de base est constituée de plus de deux composantes.

En tenant compte de ce qui précède, les problèmes (5.12)-(5.15) deviennent:

Pour $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = \int_\Gamma F_i^{mn} \cdot v_i ds + \int_H f_i^{mn} \cdot v_i dy \quad \forall v \in W_2(H) \end{array} \right.$$

où F_i^{mn} et f_i^{mn} sont données par les expressions (5.16) et (5.17).

Pour $(m, n) = (1, 3); (2, 3)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\chi_3^{m3}, \Psi^{m3}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (g_{jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = \int_\Gamma F^{m3} \cdot w ds + \int_\Gamma H^{m3} \cdot z ds + \int_H f^{m3} \cdot w dy + \int_H h^{m3} \cdot z dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right.$$

où F^{m3} , H^{m3} , f^{m3} et h^{m3} sont données par les expressions (5.21), (5.22), (5.23) et (5.24).

Pour $m = 1, 2$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_3^m, R^m) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (-g_{jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + \epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = \int_\Gamma F^m \cdot w ds + \int_\Gamma H^m \cdot z ds + \int_H f^m \cdot w dy + \int_H h^m \cdot z dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right.$$

avec F^m , H^m , f^m et h^m données par les expressions (5.28) et (5.29).

Pour $m = 3$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_1^3, \Phi_2^3) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} e_{kl}(\Phi^3) e_{ij}(\mathbf{v}) dy = \int_{\Gamma} F_i^3 \cdot v_i ds + \int_H f_i^3 \cdot v_i dy \quad \forall \mathbf{v} \in W_2(H) \end{array} \right.$$

avec F_i^3, f_i^3 données par les expressions (5.30) et (5.31).

Résumé

On résume ci-dessous le calcul des fonctions d'influence pour un composite monoclinique, ce qui permet ensuite le calcul des coefficients homogénéisés de la structure.

Cas	Pb. à résoudre	Comp. nulles	Comp. à déterminer
$(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$	5.7	χ_3^{mn}, ψ^{mn}	χ_1^{mn}, χ_2^{mn}
$(m, n) = (1, 3); (2, 3)$	5.8	χ_1^{mn}, χ_2^{mn}	χ_3^{mn}, ψ^{mn}
$m = 1, 2$	5.10	ϕ_1^m, ϕ_2^m	ϕ_3^m, R^m
$m = 3$	5.11	ϕ_3^m, R^m	ϕ_1^m, ϕ_2^m

(5.32)

5.2.3 Caractéristiques homogénéisées

Ayant résolu les problèmes cellulaires, les coefficients homogénéisés sont donnés par les expressions (5.3), (5.4) et (5.5). En tenant compte des hypothèses H_i ($i = 1, 2, 3$) et de la forme des fonctions d'influence, on vérifie facilement que les caractéristiques du problèmes homogénéisées ont des profils particuliers, à savoir:

1. le tenseur d'élasticité $C^h = (C_{ijkl}^h)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & C_{1112}^h \\ C_{2211}^h & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & C_{2212}^h \\ C_{3311}^h & C_{3322}^h & C_{3333}^h & 0 & 0 & C_{3312}^h \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}^h & C_{2313}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1323}^h & C_{1313}^h & 0 \\ C_{1211}^h & C_{1222}^h & C_{1233}^h & 0 & 0 & C_{1212}^h \end{pmatrix} \quad (5.33)$$

les coefficients non nuls s'obtenant par la relation

$$C_{ijkl}^h = \langle C_{ijkl}(y_1, y_2) + C_{ijmn}(y_1, y_2) \frac{\partial \chi_m^{kl}(y)}{\partial y_n} + g_{mij}(y_1, y_2) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} \rangle_H$$

2. le tenseur piézoélectrique $G^h = (g_{kij}^h)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & g_{213}^h & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & g_{312}^h \end{pmatrix} \quad (5.34)$$

avec

$$g_{kij}^h = \langle g_{kij}(y_1, y_2) + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y_1, y_2)}{\partial y_n} + g_{mij}(y_1, y_2) \frac{\partial R^k(y_1, y_2)}{\partial y_m} \rangle_H$$

3. et le tenseur diélectrique $\epsilon = (\epsilon_{jm}^h)$ est de la forme

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}^h & \epsilon_{12}^h & 0 \\ \epsilon_{21}^h & \epsilon_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^h \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

avec

$$\epsilon_{jm}^h = \langle \epsilon_{jm}(y_1, y_2) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^m(y_1, y_2)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y_1, y_2) \frac{\partial \Phi_l^m(y_1, y_2)}{\partial y_k} \rangle_H$$

En effet, pour $(k, l) = (2, 3); (1, 3)$ et $i = 1, 2, 3$ on a

$$C_{iikl}^h = \langle C_{iikl}(y_1, y_2) + C_{iimn}(y_1, y_2) \frac{\partial \chi_m^{kl}(y)}{\partial y_n} + g_{mii}(y_1, y_2) \frac{\partial \Psi^{kl}(y)}{\partial y_m} \rangle_H \quad (5.36)$$

($m = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2$)

Mais $C_{iikl}^h = 0$ car la matrice de départ est monoclinique, donc le premier terme est nul.

En utilisant le tableau (5.32) on observe que $\chi_1^{kl} = \chi_2^{kl} = 0$ donc $\frac{\partial \chi_m^{kl}}{\partial y_n} \neq 0$ que pour $m = 3$, donc du deuxième terme de la relation ci-dessus il ne reste que $C_{i3n} \cdot \frac{\partial \chi_3^{kl}}{\partial y_n}$. Mais ce terme est nul pour $n = 1, 2$ (car matrice initiale monoclinique) et il s'ensuit que le deuxième terme de (5.36) est nul aussi.

Les coefficients g_{mii} pour $m = 1, 2$ sont aussi nuls pour des raisons de forme de la matrice piézoélectrique, donc en tenant compte de tout ces éléments on obtient que

$$C_{iikl}^h = 0 \text{ pour } (k, l) = (2, 3); (1, 3) \text{ et } i = 1, 2, 3$$

Pour $(i, j) = (2, 3); (1, 3)$ on a

$$C_{ij12}^h = \langle C_{ij12}(y_1, y_2) + C_{ijmn}(y_1, y_2) \frac{\partial \chi_m^{12}(y)}{\partial y_n} + g_{mij}(y_1, y_2) \frac{\partial \Psi^{12}(y)}{\partial y_m} \rangle_H$$

($m = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2$)

Du tableau (5.32) il résulte que $\Psi^{12} = 0$ donc le dernier terme sera nul. Aussi, le terme C_{ij12} est nul, compte tenu de la forme de la matrice de départ.

Ensuite, $\chi_3^{12} = 0$, donc $\chi_m^{12} \neq 0$ que pour $m = 1, 2$. Il ne nous reste ainsi les termes en C_{ij1n} et C_{ij2n} pour $n = 1, 2$. Mais ces termes sont évidemment nuls car la matrice de départ est monoclinique. Ainsi, le deuxième terme de la relation ci-dessus est aussi nul. Donc $C_{ij12}^h = 0$ pour $(i, j) = (2, 3); (1, 3)$.

La forme du tenseur élastique homogénéisé sera donc bien celle décrite en (5.33).

Pour le tenseur piézoélectrique on procède de la même manière. On aura:

Pour $k = 1, 2$ et $i = 1, 2, 3$

$$g_{kii}^h = \langle g_{kii}(y_1, y_2) + C_{iimn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y_1, y_2)}{\partial y_n} + g_{mii}(y_1, y_2) \frac{\partial R^k(y_1, y_2)}{\partial y_m} \rangle_H \quad (5.37)$$

($m = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2$)

Le terme g_{kii} est nul en tenant compte de la forme initiale du tenseur piézoélectrique.

$\Phi_m^k = 0$ pour $m = 1, 2$ en utilisant le tableau (5.32), donc il ne nous reste pour le deuxième terme que $C_{ii3n} \frac{\partial \Phi_3^k}{\partial y_n}$. Mais $C_{ii3n} = 0$ pour $n = 1, 2$ d'après la forme du tenseur élastique, donc le deuxième terme est aussi nul pour la relation (5.37).

$g_{mii} = 0$ pour $m = 1, 2$ (voir forme du tenseur piézoélectrique initial) donc le troisième terme est aussi nul et donc $g_{kii}^h = 0$ pour $k = 1, 2$ et $i = 1, 2, 3$.

Pour $k = 1, 2$:

$$g_{k12}^h = \langle g_{k12}(y_1, y_2) + C_{12mn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y_1, y_2)}{\partial y_n} + g_{m12}(y_1, y_2) \frac{\partial R^k(y_1, y_2)}{\partial y_m} \rangle_H$$

($m = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2$)

$g_{k12} = 0$ d'après la forme initiale du tenseur piézoélectrique.

$\Phi_m^k = 0$ pour $m = 1, 2$, donc il ne nous reste que le terme $C_{123n} \frac{\partial \Phi_3^k}{\partial y_n}$. Mais $C_{123n} = 0$ pour $n = 1, 2$, en utilisant la forme initiale de la matrice élastique. Donc le deuxième terme de la relation ci-dessus est aussi nul.

$g_{m12} = 0$ pour $m = 1, 2$ (voir la forme du tenseur piézoélectrique), donc le troisième terme est nul. Ainsi, $g_{k12}^h = 0$ pour $k = 1, 2$.

Pour $i = 1, 2$:

$$g_{3i3}^h = \left\langle g_{3i3}(y_1, y_2) + C_{i3mn}(y) \frac{\partial \Phi_m^3(y_1, y_2)}{\partial y_n} + g_{mi3}(y_1, y_2) \frac{\partial R^3(y_1, y_2)}{\partial y_m} \right\rangle_H$$

($m = 1, 2, 3$ et $n = 1, 2$)

$g_{3i3} = 0$ en tenant compte de la forme initiale du tenseur piézoélectrique.

$\Phi_3^3 = 0$ et donc il résulte qu'il ne nous reste que le terme $C_{i3mn} \frac{\partial \Phi_m^3}{\partial y_n}$ pour $m = 1, 2$ et $n = 1, 2$. Mais $C_{i3mn} = 0$ pour $m = 1, 2$ et $n = 1, 2$ étant donnée la forme du tenseur élastique. Donc le second terme de la relation est nul.

Comme $R^3 = 0$ il en résulte que le troisième terme est aussi nul. Ainsi, $g_{3i3}^h = 0$ pour $i = 1, 2$.

La forme du tenseur homogénéisé piézoélectrique est donc bien (5.34).

Pour le tenseur diélectrique:

Pour $j = 1, 2$ on a:

$$\epsilon_{j3}^h = \left\langle \epsilon_{j3}(y_1, y_2) + \epsilon_{jk}(y) \frac{\partial R^3(y_1, y_2)}{\partial y_k} - g_{jkl}(y_1, y_2) \frac{\partial \Phi_l^3(y_1, y_2)}{\partial y_k} \right\rangle_H$$

($k = 1, 2$ et $l = 1, 2, 3$)

$\epsilon_{j3} = 0$ compte tenant de la forme initiale du tenseur diélectrique.

$R^3 = 0$ il en résulte donc que le second terme est aussi nul.

$\Phi_3^3 = 0$ donc il ne nous reste du troisième terme que $g_{jkl} \frac{\partial \Phi_l^3}{\partial y_k}$ pour $k = 1, 2$ et $l = 1, 2$.

Mais $g_{jkl} = 0$ pour $k = 1, 2$ et $l = 1, 2$ (voir forme initiale du tenseur) donc le troisième terme est nul aussi.

Ainsi, $\epsilon_{j3}^h = 0$ pour $j = 1, 2$ ce qui montre que la forme du tenseur homogénéisé diélectrique est bien celle de (5.35).

Pour les coefficients homogénéisés non nuls on a d'une manière explicite:

Pour le tenseur élastique:

$$\begin{aligned}
 C_{1111}^h &= \langle C_{1111} + C_{11mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{11}}{\partial y_n} + g_{m11} \cdot \frac{\partial \Psi^{11}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{1111} + C_{1111} \cdot \frac{\partial \chi_1^{11}}{\partial y_1} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_1^{11}}{\partial y_2} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_2^{11}}{\partial y_1} + C_{1122} \cdot \frac{\partial \chi_2^{11}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

(on a tenu compte ici du fait que $\Psi^{11} = 0$ (voir tableau (5.32)) donc le terme piézo va disparaître)

$$\begin{aligned}
 C_{1122}^h &= \langle C_{1122} + C_{11mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{22}}{\partial y_n} + g_{m11} \cdot \frac{\partial \Psi^{22}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{1122} + C_{1111} \cdot \frac{\partial \chi_1^{22}}{\partial y_1} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_1^{22}}{\partial y_2} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_2^{22}}{\partial y_1} + C_{1122} \cdot \frac{\partial \chi_2^{22}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

(pour les mêmes raisons le terme piézo disparaîtra). Cela se passera de même pour les termes suivants:

$$\begin{aligned}
 C_{1133}^h &= \langle C_{1133} + C_{11mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{33}}{\partial y_n} + g_{m11} \cdot \frac{\partial \Psi^{33}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{1133} + C_{1111} \cdot \frac{\partial \chi_1^{33}}{\partial y_1} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_1^{33}}{\partial y_2} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_2^{33}}{\partial y_1} + C_{1122} \cdot \frac{\partial \chi_2^{33}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{1112}^h &= \langle C_{1112} + C_{11mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{12}}{\partial y_n} + g_{m11} \cdot \frac{\partial \Psi^{12}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{1112} + C_{1111} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_1} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_2} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_1} + C_{1122} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2222}^h &= \langle C_{2222} + C_{22mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{22}}{\partial y_n} + g_{m22} \cdot \frac{\partial \Psi^{22}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{2222} + C_{2211} \cdot \frac{\partial \chi_1^{22}}{\partial y_1} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \chi_1^{22}}{\partial y_2} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \chi_2^{22}}{\partial y_1} + C_{2222} \cdot \frac{\partial \chi_2^{22}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2233}^h &= \langle C_{2233} + C_{22mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{33}}{\partial y_n} + g_{m22} \cdot \frac{\partial \Psi^{33}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{2233} + C_{2211} \cdot \frac{\partial \chi_1^{33}}{\partial y_1} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \chi_1^{33}}{\partial y_2} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \chi_2^{33}}{\partial y_1} + C_{2222} \cdot \frac{\partial \chi_2^{33}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 C_{2212}^h &= \langle C_{2212} + C_{22mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{12}}{\partial y_n} + g_{m22} \cdot \frac{\partial \Psi^{12}}{\partial y_m} \rangle_H \\
 &= \langle C_{2212} + C_{2211} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_1} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_2} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_1} + C_{2222} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_2} \rangle_H
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{3333}^h &= \langle C_{3333} + C_{33mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{33}}{\partial y_n} + g_{m33} \cdot \frac{\partial \Psi^{33}}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle C_{3333} + C_{3311} \cdot \frac{\partial \chi_1^{33}}{\partial y_1} + C_{3312} \cdot \frac{\partial \chi_1^{33}}{\partial y_2} + C_{3312} \cdot \frac{\partial \chi_2^{33}}{\partial y_1} + C_{3322} \cdot \frac{\partial \chi_2^{33}}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{3312}^h &= \langle C_{3312} + C_{33mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{12}}{\partial y_n} + g_{m33} \cdot \frac{\partial \Psi^{12}}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle C_{3312} + C_{3311} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_1} + C_{3312} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_2} + C_{3312} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_1} + C_{3322} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
C_{2323}^h &= \langle C_{2323} + C_{23mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{23}}{\partial y_n} + g_{m23} \cdot \frac{\partial \Psi^{23}}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle C_{2323} + C_{2313} \cdot \frac{\partial \chi_3^{23}}{\partial y_1} + C_{2323} \cdot \frac{\partial \chi_3^{23}}{\partial y_2} + g_{123} \cdot \frac{\partial \Psi^{23}}{\partial y_1} + g_{223} \cdot \frac{\partial \Psi^{23}}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2313}^h &= \langle C_{2313} + C_{23mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{13}}{\partial y_n} + g_{m23} \cdot \frac{\partial \Psi^{13}}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle C_{2313} + C_{2313} \cdot \frac{\partial \chi_3^{13}}{\partial y_1} + C_{2323} \cdot \frac{\partial \chi_3^{13}}{\partial y_2} + g_{123} \cdot \frac{\partial \Psi^{13}}{\partial y_1} + g_{223} \cdot \frac{\partial \Psi^{13}}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1313}^h &= \langle C_{1313} + C_{13mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{13}}{\partial y_n} + g_{m13} \cdot \frac{\partial \Psi^{13}}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle C_{1313} + C_{1313} \cdot \frac{\partial \chi_3^{13}}{\partial y_1} + C_{1323} \cdot \frac{\partial \chi_3^{13}}{\partial y_2} + g_{113} \cdot \frac{\partial \Psi^{13}}{\partial y_1} + g_{213} \cdot \frac{\partial \Psi^{13}}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1212}^h &= \langle C_{1212} + C_{12mn} \cdot \frac{\partial \chi_m^{12}}{\partial y_n} + g_{m12} \cdot \frac{\partial \Psi^{12}}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle C_{1212} + C_{1211} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_1} + C_{1212} \cdot \frac{\partial \chi_1^{12}}{\partial y_2} + C_{1212} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_1} + C_{1222} \cdot \frac{\partial \chi_2^{12}}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

(là non plus il n'y a pas de terme piézo, car $\Psi^{12} = 0$)

Pour le tenseur piézoélectrique:

$$\begin{aligned}
g_{123}^h &= \langle g_{123} + C_{23mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^1}{\partial y_n} + g_{m23} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_m} \rangle_H \\
&= \langle g_{123} + C_{2323} \cdot \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y_2} + C_{2313} \cdot \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y_1} + g_{123} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_1} + g_{223} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_2} \rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{113}^h &= \left\langle g_{113} + C_{13mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^1}{\partial y_n} + g_{m13} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{113} + C_{1313} \cdot \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y_1} + C_{2313} \cdot \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y_2} + g_{113} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_1} + g_{213} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{223}^h &= \left\langle g_{223} + C_{23mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^2}{\partial y_n} + g_{m23} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{223} + C_{2323} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_2} + C_{2313} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_1} + g_{123} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_1} + g_{223} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{213}^h &= \left\langle g_{213} + C_{13mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^2}{\partial y_n} + g_{m13} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{213} + C_{1323} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_2} + C_{1313} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_1} + g_{113} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_1} + g_{213} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{311}^h &= \left\langle g_{311} + C_{11mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^3}{\partial y_n} + g_{m11} \cdot \frac{\partial R^3}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{311} + C_{1111} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_1} + C_{1122} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_2} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_1} + C_{1112} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{322}^h &= \left\langle g_{322} + C_{22mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^3}{\partial y_n} + g_{m22} \cdot \frac{\partial R^3}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{322} + C_{2211} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_1} + C_{2222} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_2} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_1} + C_{2212} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{333}^h &= \left\langle g_{333} + C_{33mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^3}{\partial y_n} + g_{m33} \cdot \frac{\partial R^3}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{333} + C_{3311} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_1} + C_{3322} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_2} + C_{3312} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_1} + C_{3312} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{312}^h &= \left\langle g_{312} + C_{12mn} \cdot \frac{\partial \Phi_m^3}{\partial y_n} + g_{m12} \cdot \frac{\partial R^3}{\partial y_m} \right\rangle_H \\
&= \left\langle g_{312} + C_{1211} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_1} + C_{1222} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_2} + C_{1212} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_1} + C_{1212} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

Pour le tenseur diélectrique:

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11}^h &= \left\langle \epsilon_{11} + \epsilon_{1k} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_k} - g_{1kl} \cdot \frac{\partial \Phi_l^1}{\partial y_k} \right\rangle_H \\
&= \left\langle \epsilon_{11} + \epsilon_{11} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_1} + \epsilon_{12} \cdot \frac{\partial R^1}{\partial y_2} - g_{113} \cdot \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y_1} - g_{123} \cdot \frac{\partial \Phi_3^1}{\partial y_2} \right\rangle_H
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{12}^h &= \left\langle \epsilon_{12} + \epsilon_{1k} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_k} - g_{1kl} \cdot \frac{\partial \Phi_l^2}{\partial y_k} \right\rangle_H \\ &= \left\langle \epsilon_{12} + \epsilon_{11} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_1} + \epsilon_{12} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_2} - g_{113} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_1} - g_{123} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_2} \right\rangle_H\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{22}^h &= \left\langle \epsilon_{22} + \epsilon_{2k} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_k} - g_{2kl} \cdot \frac{\partial \Phi_l^2}{\partial y_k} \right\rangle_H \\ &= \left\langle \epsilon_{22} + \epsilon_{22} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_2} + \epsilon_{12} \cdot \frac{\partial R^2}{\partial y_1} - g_{213} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_1} - g_{223} \cdot \frac{\partial \Phi_3^2}{\partial y_2} \right\rangle_H\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\epsilon_{33}^h &= \left\langle \epsilon_{33} + \epsilon_{3k} \cdot \frac{\partial R^3}{\partial y_k} - g_{3kl} \cdot \frac{\partial \Phi_l^3}{\partial y_k} \right\rangle_H \\ &= \left\langle \epsilon_{33} - g_{311} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_1} - g_{312} \cdot \frac{\partial \Phi_1^3}{\partial y_2} - g_{312} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_1} - g_{322} \cdot \frac{\partial \Phi_2^3}{\partial y_2} \right\rangle_H\end{aligned}$$

5.2.4 Conclusions

On a développé un modèle pour l'étude du comportement piézoélectrique d'un composite unidirectionnel, dont les constituants sont monocliniques. Des hypothèses faites sur la cellule de base ramènent cette opération à un problème bidimensionnel.

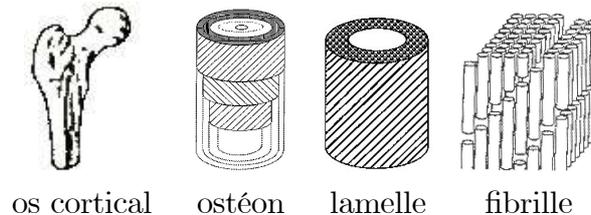
Le développement des calculs repose sur la méthode des éléments finis. Celle-ci permet d'obtenir les fonctions d'influence qui sont à la base des relations déterminant les caractéristiques homogénéisées.

Ce modèle pouvant être appliqué à n'importe quel composite, nous avons utilisé ces développements à chacun des niveaux de la modélisation du cortical.

5.3 Hypothèses et méthodologie

L'ensemble des hypothèses que nous formulons pour la modélisation que l'on va construire est résumé ci-dessous :

- 1) la structure de l'os cortical humain est basée sur quatre niveaux hiérarchiques



- 2) les constituants au niveau fibrillaire sont :

a) *le collagène*: milieu piézoélectrique dont les propriétés physiques sont un module d'Young, un coefficient de Poisson, des coefficients piézoélectriques et des coefficients diélectriques

b) *les EVMC*: milieu élastique dont les propriétés physiques sont données par les résultats du chapitre 3 et qui possède des propriétés diélectriques

c) *le fluide*: milieu diélectrique puisqu'il transporte les sels minéraux sous forme ionisée. On ne considère pas, dans ce chapitre, le mouvement de ce fluide. On suppose qu'il est le siège d'une pression qui est supposée localement constante.

3) l'architecture retenue est la suivante :

a) une lamelle a la géométrie d'un tube et le milieu qui la constitue est formé par les trois constituants ci dessus, les bâtonnets de collagène ayant une orientation d'angle φ par rapport à la génératrice de ce tube

b) un ostéon a également la géométrie d'un tube et il est formé par un ensemble de lamelles emboîtées les unes dans les autres

c) l'os cortical est composé d'ostéons inclus dans une matrice appelée "système interstitiel". Ce dernier est formé de morceaux d'anciens ostéons et est surminéralisé. L'interface entre un ostéon et le système interstitiel est appelée "ligne cémentante".

4) la minéralisation peut varier d'un ostéon à l'autre, cependant on suppose qu'elle est constante dans un ostéon.

5) les propriétés diélectriques du fluide sont supposées constantes dans le volume élémentaire d'os cortical que l'on étudie

Remarque 21 *Une telle architecture n'est pas périodique puisque les sections transverses font apparaître des couronnes.*

Nous allons déterminer explicitement les propriétés physiques à chacun de ces niveaux (lamellaire, ostéonal et cortical) afin de pouvoir comparer cette modélisation avec des résultats d'expérience qui se mettent progressivement en place.

Etapes dans le déroulement des calculs

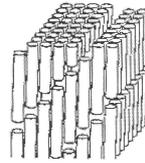
Pour alléger la présentation des processus d'homogénéisation successifs, nous présentons d'abord l'organisation structurelle des calculs.

1) l'homogénéisation lamellaire

On considère une couche parallélépipédique notée Ω constituée d' EVMC, de fluide et de collagène dont les bâtonnets sont orientés verticalement; on cherche les propriétés homogénéisées du milieu occupant ce domaine

- choix de la période

Les calculs ultérieurs étant basés sur une méthode d'éléments finis, il nous faut choisir la géométrie d'une période afin de construire un maillage. Cette période est, par nature, tridimensionnelle car elle a un arrangement spatial très particulier à cause du décalage existant entre les bâtonnets de collagène. Mais elle dépend de paramètres (longueur de bâtonnets de collagène, écart entre deux bâtonnets de collagène) que nous ne connaissons pas avec précision. Par ailleurs, il nous a semblé judicieux de laisser la possibilité aux ingénieurs biomécaniciens intéressés par le sujet de faire varier ces paramètres. La possibilité de maillages tridimensionnels paramétriques existe mais sa mise en œuvre enlève beaucoup à la convivialité du code.



fibrille

Nous optons donc pour une solution mixte : des périodes bidimensionnelles (il y en a 4) dans le plan xOy couplées avec une intégration selon l'axe Oz .

- prise en compte d'une valeur de minéralisation réelle

Avec les périodes que nous avons choisies à l'étape précédente, nous n'avons que cinq niveaux de minéralisation possible. Or nous souhaitons donner à l'utilisateur la possibilité de choisir la valeur de minéralisation qu'il veut. Pour cela, on associe à chacun des niveaux de minéralisation une valeur seuil de minéralisation réelle par une intégration sur la longueur verticale de la période. Ensuite, le cas d'une valeur donnée de minéralisation est traité via une interpolation linéaire dans cette intégration en z .

- déroulement des calculs

La minéralisation étant fixée, on doit procéder alors à plusieurs homogénéisations bidimensionnelles. Ces homogénéisations ne diffèrent que par la géométrie de la période. On se contente alors de ne présenter le processus d'homogénéisation (section 5.4) que dans un cadre général en simplifiant au maximum les notations.

Remarque 22 *Il n'est pas nécessaire, sur la plan numérique, de considérer la lamelle dans son intégralité. Seules les propriétés d'un secteur lamellaire sont intéressantes car ce seront elles qui seront mesurées expérimentalement. On prend comme propriétés physiques d'un tel secteur angulaire les propriétés déterminées pour la couche parallépipédique ci-dessus. Ce point est parfaitement correct si les bâtonnets de collagène sont orientés verticalement. Par contre, c'est faux si les bâtonnets ont une orientation d'angle φ avec la génératrice de la lamelle et s'ils sont considérés comme s'enroulant hélicoïdalement dans cette structure. L'erreur que nous commettons avec cette approximation est due à la nature circulaire du milieu considéré : il n'y a pas de périodicité. Il*

est possible de remédier à cette difficulté, cependant la correction à apporter est lourde à mettre en œuvre et elle sera d'autant plus minimale que le secteur angulaire sera fin. En conséquence, nous choisissons d'approcher, dans tous les cas, les propriétés physiques d'un secteur lamellaire par les propriétés physiques du domaine Ω considéré ci-dessus.

2) l'homogénéisation ostéonale

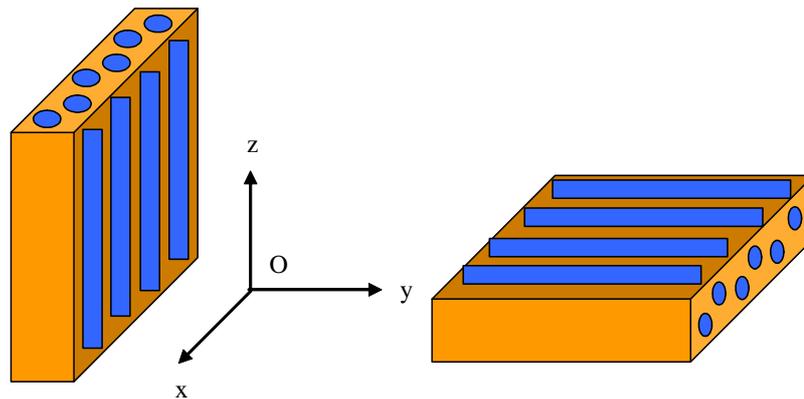
Comme pour le cas de la lamelle, on ne va pas s'intéresser directement à l'ostéon, mais on va d'abord envisager le cas d'un secteur ostéonal. Un tel secteur ostéonal apparaît comme un empilement de secteurs angulaires de tubes. À nouveau, nous choisissons d'approcher les propriétés de cet empilement de secteurs angulaires de tubes par celles d'un empilement de couches.

Il y a deux manières d'organiser les calculs. Nous présentons celle qui est implantée dans le logiciel et qui basée sur une homogénéisation monodirectionnelle selon Oz . Nous donnons la seconde en remarque.

Les données pour cette étape sont donc les propriétés physiques du domaine Ω considéré ci-dessus.

a) première rotation d'axe Ox

Ayant choisi un processus d'homogénéisation monodirectionnelle selon Oz , nous appliquons au domaine Ω une rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ afin que celui ci, initialement vertical vienne se placer dans un plan parallèle au plan xOy . Cela induit, au niveau des propriétés physiques, l'application en termes tensoriels de cette même rotation. Les relations sont données en *Annexe 2*

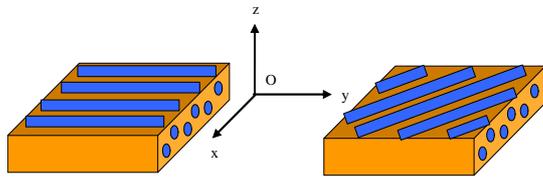


Rotation d'axe Ox , angle $\frac{\pi}{2}$

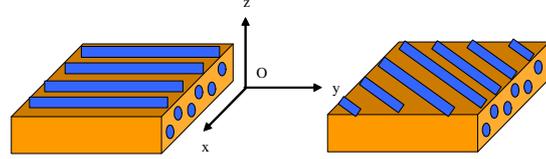
b) seconde rotation d'axe Oz

Si les bâtonnets de collagène n'ont pas la même direction que la génératrice de la lamelle, il suffit, pour respecter cet arrangement géométrique, d'appliquer, après la rota-

tion précédente, une nouvelle rotation d'axe Oz et d'angle φ ou $-\varphi$



Rotation d'axe Oz , angle φ



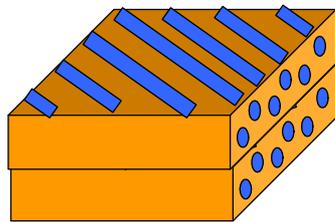
Rotation d'axe Oz , angle $-\varphi$

c) homogénéisation

- choix de la période

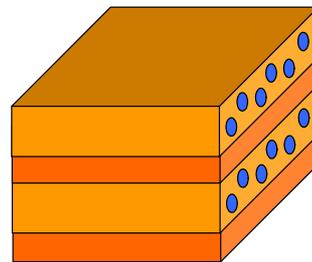
De par la nature de l'ostéon, les couches qui constituent l'empilement que nous devons homogénéiser ne peuvent être, au plus, que de deux natures différentes et dans ce cas elles doivent être disposées en alternance et avoir ainsi un caractère périodique.

La période est alors simple à concevoir : deux parallélépipèdes mis l'un sur l'autre. Cependant, il peut arriver que les lamelles qui constituent l'ostéon ne soient pas jointives. On considère alors une période constituée de quatre parallélépipèdes superposés: deux pour les couches ci-dessus et deux pour modéliser l'interface et qui matériellement occupée par un fluide diélectrique.



Période de base pour ostéon

- lamelles jointives -



Période de base pour ostéon

- lamelles non jointives -

- déroulement des calculs

Les calculs sont présentés dans un cadre général en simplifiant au maximum les notations dans la section 5.5.

d) troisième rotation d'axe Ox

Ayant obtenu les propriétés homogénéisées d'un ensemble de couches, jointives ou non, et empilées selon la direction Oz , il nous faut, pour obtenir les propriétés homogénéisées d'un ensemble de couches empilées selon la direction Ox , puis appliquer une rotation d'axe Ox et d'angle $-\pi/2$.

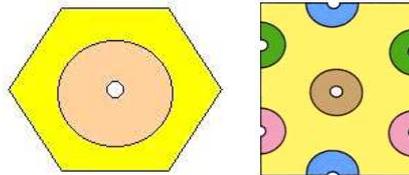
Remarque 23 *Il est possible de procéder de manière plus directe en appliquant d'abord des rotations d'axe Ox et d'angle φ ou $-\varphi$, puis de faire l'homogénéisation d'un empilement selon la direction Ox . Les deux procédés donnent des résultats similaires. Nous avons préféré la première solution car nous avons préalablement mis au point et validé le module d'homogénéisation d'un empilement selon la direction Oz .*

3) l'homogénéisation corticale

Les étapes précédentes étant réalisées, nous disposons donc des propriétés du système interstitiel et de celles d'un secteur ostéonal. Les propriétés du fluide traversant les canaux de Havers et de Volkman restent les mêmes que précédemment.

- choix de la période

La période est à nouveau tridimensionnelle. Cependant, l'effet de la longueur de l'ostéon pouvant être un paramètre intéressant à étudier pour les ingénieurs biomécaniciens, nous procédons comme précédemment: on introduit deux périodes bidimensionnelles et une intégration selon la direction Oz . Par ailleurs, nous donnons à l'utilisateur la possibilité d'avoir simultanément quatre types d'ostéons.



Pour de raisons techniques, le nombre d'éléments étant trop grand dans la seconde période, on ne prend qu'une demi période et on tient compte de la symétrie.

- déroulement des calculs

Les calculs sont conduits sans difficulté particulière (section 5.6). Il faut cependant noter une difficulté liée à la modélisation de la ligne cimentante qui forme l'interface entre l'ostéon et le système interstitiel. Nous la négligeons dans les calculs développés au cours de ce paragraphe pour deux raisons: d'abord, elle est d'une épaisseur très fine et sa contribution, en terme d'intégrale de surface sera faible et ensuite sa prise en compte nécessite un maillage très fin dont l'utilisation augmente considérablement le temps calcul.

Son rôle nous échappe à ce niveau de modélisation. Nous essaierons de mieux comprendre l'origine de cette ligne au chapitre 5 et on esquissera un possible rôle dans les conclusions, après l'analyse des résultats.

5.4 Homogénéisation lamellaire

Nous avons donc trois composants de base: les bâtonnets de collagène, les EVMC et le fluide. Il est naturel de laisser au bâtonnet de collagène le rôle de la fibre et nous allons

considérer que les EVMC et le fluide constituent la matrice. Ceci est possible car ces milieux sont de même type au niveau des équations : ils font apparaître des composantes élastiques et diélectriques et ne contiennent pas de composantes piézoélectriques.

En effet le fluide n'est considéré, dans les procédures d'homogénéisation, que sous une forme statique et donc ses contraintes internes s'expriment par la relation :

$$\sigma = p \cdot Id$$

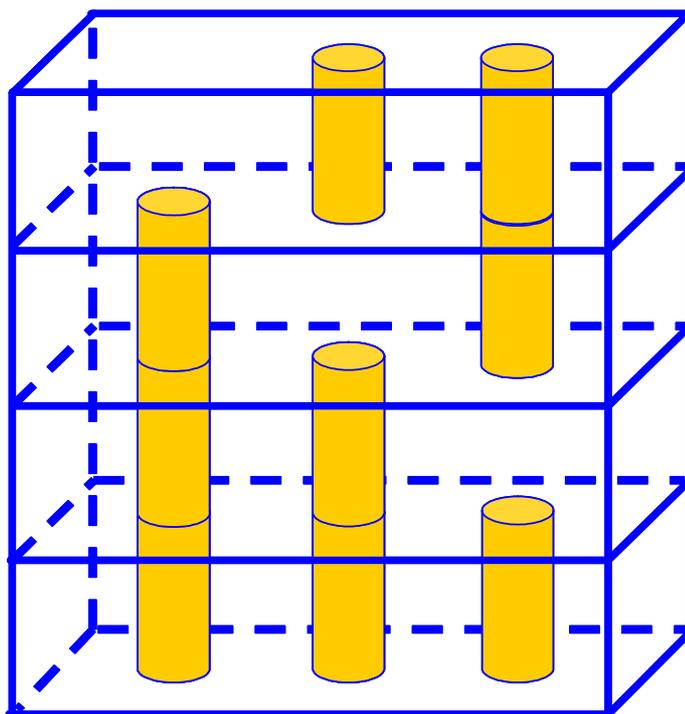
Par ailleurs, il contient des éléments ionisés en suspension et donc on peut lui définir des coefficients diélectriques. Il n'y a pas de couplage entre les phénomènes électriques et mécaniques donc pas de coefficients piézoélectriques.

Nous considérons les EVMC comme un milieu poreux et donc, en accord avec le cadre de la théorie des milieux poreux, nous définissons en tout point de ce domaine des caractéristiques élastiques et des caractéristiques du fluide. On a vu au chapitre 3 un procédé nous permettant d'obtenir les caractéristiques élastiques. Il faut alors prendre en compte le fluide en ajoutant la composante $p Id$ au tenseur élastique des EVMC et définir des coefficients diélectriques pour ce milieu. Notons que ces coefficients peuvent être les mêmes que ceux du fluide ou qu'il est possible de tenir compte de la porosité.

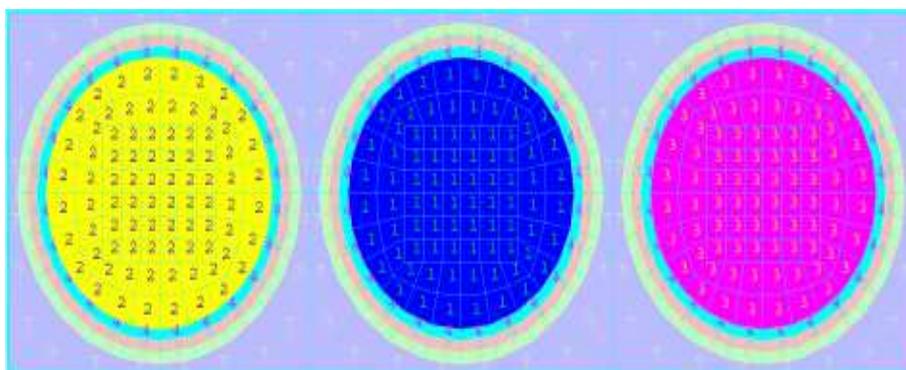
La "matrice" qui est autour du collagène est donc un milieu élastique et diélectrique sans couplage entre les phénomènes électriques et mécaniques et donc avec des coefficients piézoélectriques nuls. Nous avons noté que la condition de positivité sur les coefficients piézoélectriques n'était pas nécessaire pour assurer l'existence et l'unicité de la solution de nos problèmes.

On peut alors utiliser directement les résultats présentés au paragraphe 5.2. La mise en œuvre est réalisée via une méthode d'éléments finis et donc la prise en compte des trois composants se fait d'une part, naturellement lors de l'affectation des valeurs des coefficients pour chaque élément et d'autre part en introduisant deux sauts dans le second membre : collagène – EVMC, puis EVMC – fluide.

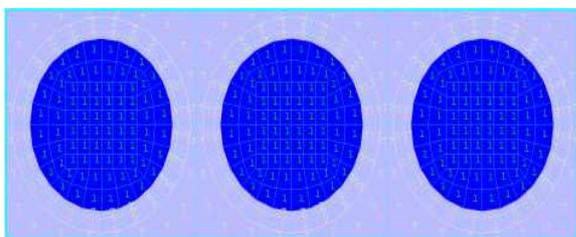
Comme nous l'avions annoncé, nous souhaitons que certaines grandeurs (longueurs des bâtonnets, écarts entre les bâtonnets) soient des paramètres et donc on procède à quatre homogénéisations bidimensionnelles qui ne diffèrent que par la géométrie de la période de base. Les périodes de base et les maillages utilisés sont présentés ci-dessous:



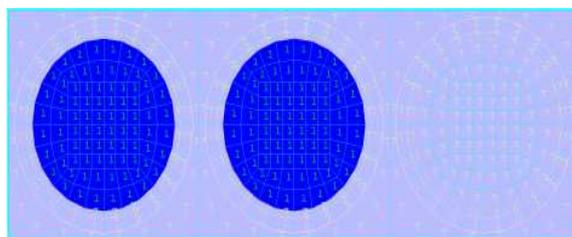
Période 3D de la fibrille



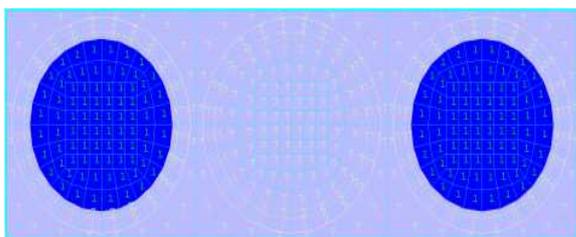
Période 2D de départ



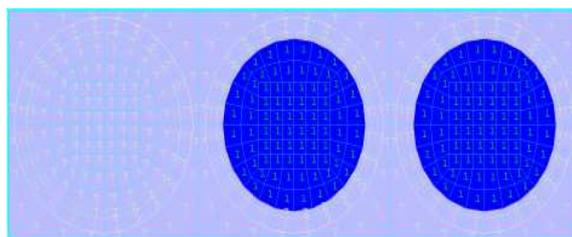
Minéralisation 0, niveau 1



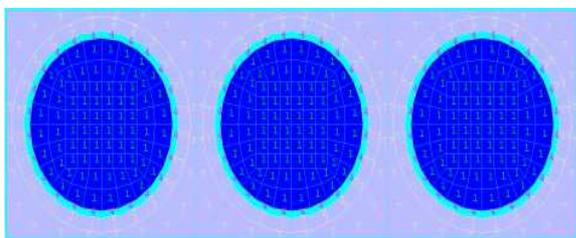
Minéralisation 0, niveau 2



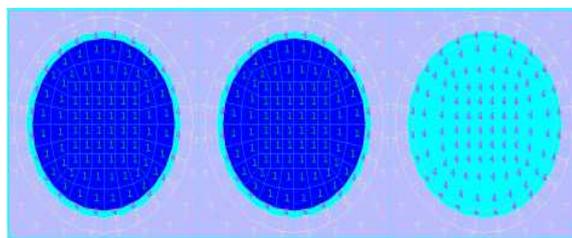
Minéralisation 0, niveau 3



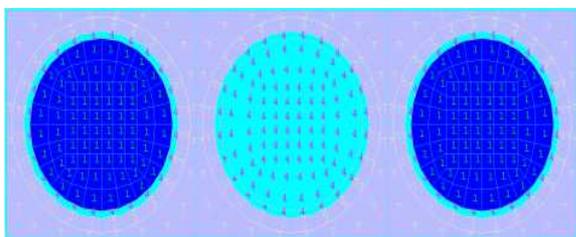
Minéralisation 0, niveau 4



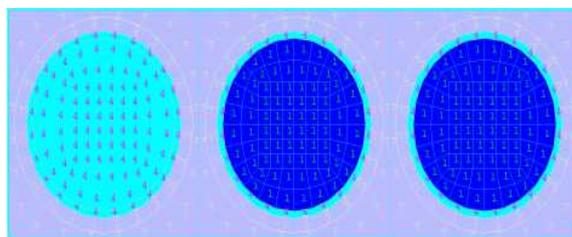
Minéralisation 1, niveau 1



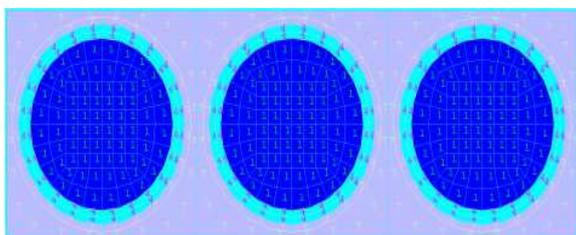
Minéralisation 1, niveau 2



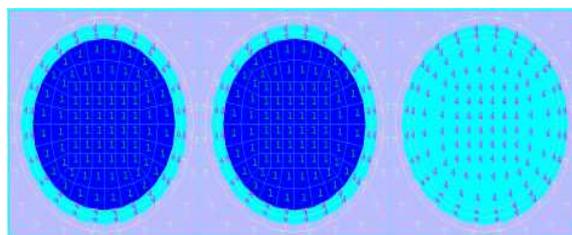
Minéralisation 1, niveau 3



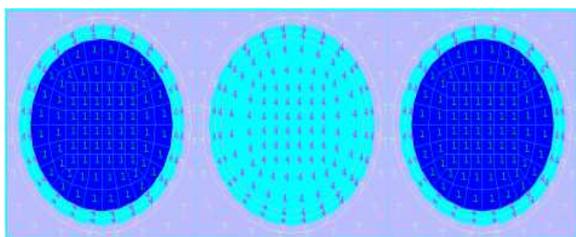
Minéralisation 1, niveau 4



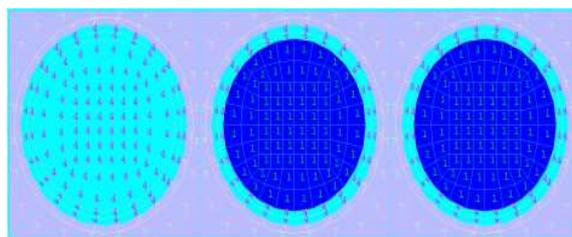
Minéralisation 2, niveau 1



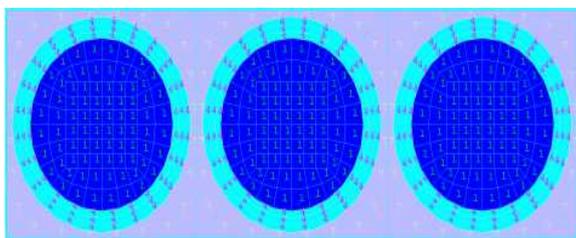
Minéralisation 2, niveau 2



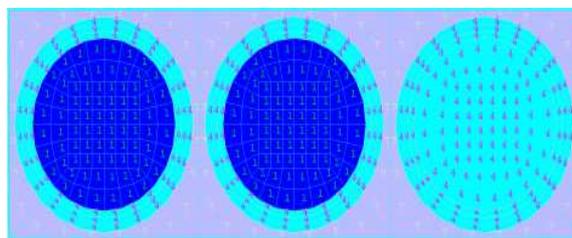
Minéralisation 2, niveau 3



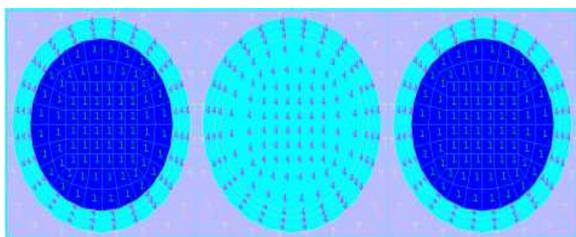
Minéralisation 2, niveau 4



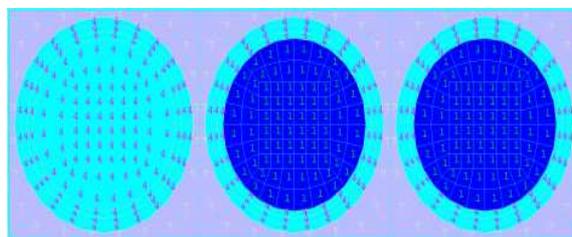
Minéralisation 3, niveau 1



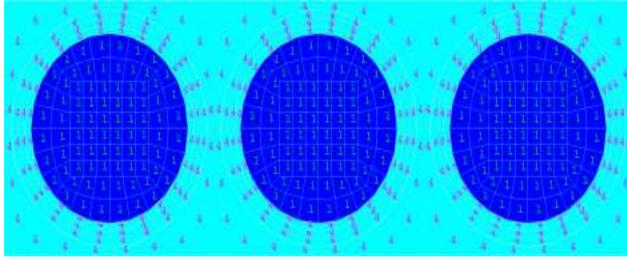
Minéralisation 3, niveau 2



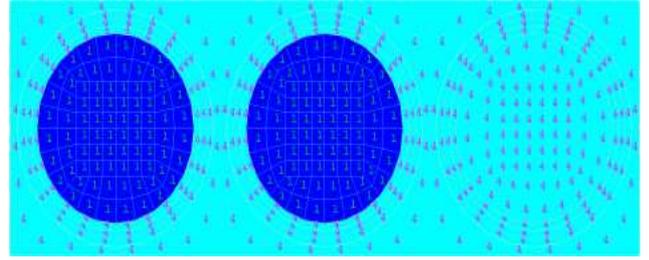
Minéralisation 3, niveau 3



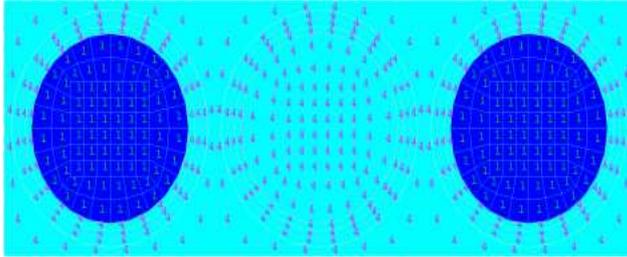
Minéralisation 3, niveau 4



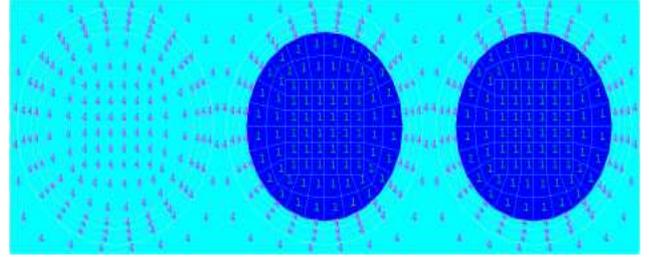
Minéralisation 4, niveau 1



Minéralisation 4, niveau 2



Minéralisation 4, niveau 3



Minéralisation 4, niveau 4

Les coefficients homogénéisés de ce milieu sont obtenus par application directe des relations données à la section 5.2.

5.4.1 Structure lamellaire avec une orientation quelconque des fibres de collagène

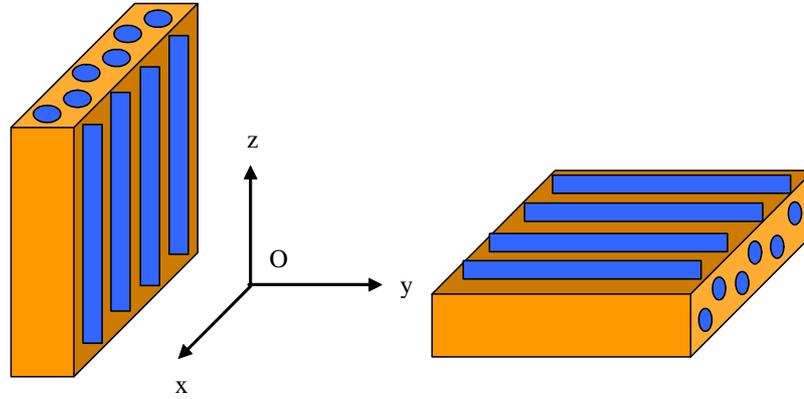
Maintenant, étudions le changement d'orientation des bâtonnets dans une lamelle. Considérons une lamelle dans un repère $(Oxyz)$ où la direction des fibres est parallèle à Oz et un repère $(Ox'y'z')$ où les fibres font un angle θ avec Oz . On veut connaître les propriétés de cette lamelle dans le nouveau repère. Pour faire cela nous appliquons d'abord une rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ afin que la lamelle, initialement verticale, vienne se placer dans le plan xOy . Cela revient au niveau des propriétés physiques à l'application des relations suivantes entre les tenseurs d'élasticité (respectivement piézoélastique et diélectrique) [Ger73]:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^x(\theta) &= t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{kr} \cdot t_{ls} \cdot C_{mnr s} \\ g_{ijk}^x(\theta) &= t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{ks} \cdot g_{mns} \\ \epsilon_{ij}^x(\theta) &= t_{im} \cdot t_{jr} \cdot \epsilon_{mr} \end{aligned}$$

$$\text{où } \theta = \frac{\pi}{2} \text{ et } T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ est la matrice de rotation d'angle } \frac{\pi}{2}, C = (C_{mnr s})$$

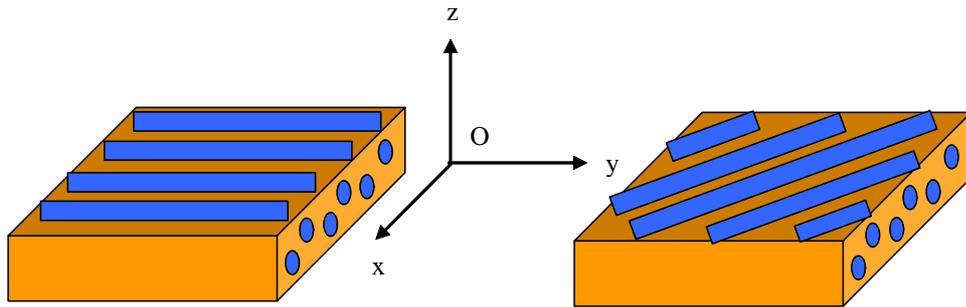
est le tenseur d'élasticité de la lamelle dans le repère $(Oxyz)$ et $C^x = (C_{ijkl}^x(\theta))$ est le

tenseur d'élasticité de la lamelle après avoir appliqué la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$. Les relations explicites de cette rotation seront données en Annexe 2.



Rotation d'axe Ox , angle $\frac{\pi}{2}$

Il suffit maintenant d'appliquer, après la rotation précédente, une rotation d'axe Oz et d'angle θ suivie d'une nouvelle rotation d'axe Ox et d'angle $-\pi/2$.



Rotation Oz , angle θ

On aura ainsi les propriétés d'une lamelle avec une orientation quelconque des bâtonnets de collagène.

Pour la rotation d'axe Oz et d'angle θ les relations tensorielles à utiliser ont la forme suivante:

$$C_{ijkl}^h(\theta) = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{kr} \cdot t_{ls} \cdot C_{mnr s} \quad (5.38)$$

$$g_{ijk}^h(\theta) = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{ks} \cdot g_{mns} \quad (5.39)$$

$$\epsilon_{ij}^h(\theta) = t_{im} \cdot t_{jr} \cdot \epsilon_{mr} \quad (5.40)$$

$$\text{où } T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ est la matrice de rotation d'angle } \theta, C = (C_{mnr s})$$

est le tenseur d'élasticité de la lamelle dans le repère $(Oxyz)$ et $C^h = (C_{ijkl}^h(\theta))$ est le tenseur d'élasticité de la lamelle dans le repère $(Ox'y'z')$ (avec les notations correspondantes pour les tenseurs piézo-élastiques et diélectriques).

En faisant varier les indices on obtient d'une manière explicite:

$$\begin{aligned} C_{1111}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{1r} \cdot t_{1s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1111} \cdot t_{11}^4 + C_{1122} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{12}^2 + C_{2211} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{12}^2 + C_{1112} \cdot t_{11}^3 \cdot t_{12} + C_{1121} \cdot t_{11}^3 \cdot t_{12} \\ &\quad + C_{1211} \cdot t_{11}^3 \cdot t_{12} + C_{2111} \cdot t_{11}^3 \cdot t_{12} + C_{2212} \cdot t_{12}^3 \cdot t_{11} + C_{1222} \cdot t_{12}^3 \cdot t_{11} \\ &\quad + C_{2221} \cdot t_{12}^3 \cdot t_{11} + C_{2122} \cdot t_{12}^3 \cdot t_{11} + C_{1212} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{12}^2 \\ &\quad + C_{2112} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{12}^2 + C_{1221} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{12}^2 + C_{2121} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{12}^2 + C_{2222} \cdot t_{12}^4 \\ &= C_{1111} \cdot \cos^4 \theta + C_{1122} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + C_{1122} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \\ &\quad + C_{1112} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta + C_{1112} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta + C_{1112} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \\ &\quad + C_{1112} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta + C_{2212} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + C_{2212} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + C_{2212} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ &\quad + C_{2212} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + C_{1212} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + C_{1212} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + C_{1212} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \\ &\quad + C_{1212} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + C_{2222} \cdot \sin^4 \theta \\ &= C_{1111} \cdot \cos^4 \theta + C_{2222} \cdot \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (2C_{1122} + 4C_{1212}) \\ &\quad + 4 \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \cdot C_{1112} + 4 \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \cdot C_{2212} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1122}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1111} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{21}^2 + C_{2222} \cdot t_{22}^2 \cdot t_{12}^2 + C_{1122} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{22}^2 + C_{2211} \cdot t_{21}^2 \cdot t_{12}^2 \\ &\quad + C_{1112} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{21} \cdot t_{22} + C_{1121} \cdot t_{11}^2 \cdot t_{21} \cdot t_{22} + C_{1211} \cdot t_{21}^2 \cdot t_{11} \cdot t_{12} \\ &\quad + C_{2111} \cdot t_{12} \cdot t_{11} \cdot t_{21}^2 + C_{2212} \cdot t_{12}^2 \cdot t_{21} \cdot t_{22} + C_{1222} \cdot t_{12} \cdot t_{11} \cdot t_{22}^2 \\ &\quad + C_{2221} \cdot t_{21} \cdot t_{12}^2 \cdot t_{22} + C_{2122} \cdot t_{11} \cdot t_{12} \cdot t_{22}^2 + C_{1212} \cdot t_{11} \cdot t_{12} \cdot t_{21} \cdot t_{22} \\ &\quad + C_{2112} \cdot t_{11} \cdot t_{12} \cdot t_{21} \cdot t_{22} + C_{1221} \cdot t_{11} \cdot t_{12} \cdot t_{21} \cdot t_{22} + C_{2121} \cdot t_{11} \cdot t_{12} \cdot t_{21} \cdot t_{22} \\ &= C_{1111} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + C_{2222} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta + C_{1122} \cdot \cos^4 \theta \\ &\quad + C_{2211} \cdot \sin^4 \theta - C_{1112} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta - C_{1121} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta + C_{1211} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \\ &\quad + C_{2111} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta - C_{2212} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + C_{1222} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \\ &\quad - C_{2211} \cdot \sin^3 \theta \cdot \cos \theta + C_{2122} \cdot \cos^3 \theta \cdot \sin \theta - C_{1212} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \\ &\quad - C_{2112} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta - C_{1221} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta - C_{2121} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \\ &= \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (C_{1111} + C_{2222} - 4C_{1212}) + C_{1122} \cdot (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) \\ &\quad + \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \cdot (2C_{1112} - 2C_{2212}) + \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \cdot (2C_{2212} - 2C_{1112}) \end{aligned}$$

$$C_{1133}^h(\theta) = t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{3r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s}$$

$$= C_{1133} \cdot \cos \theta^2 + C_{2233} \cdot \sin \theta^2 + 2C_{3312} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta$$

$$\begin{aligned} C_{1112}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos \theta^3 \cdot \sin \theta \cdot (-C_{1111} + C_{1122} + 2C_{1212}) + \sin \theta^3 \cdot \cos \theta \cdot (-C_{1122} + C_{2222} - 2C_{1212}) \\ &\quad + C_{1112} \cdot \cos \theta^4 - C_{2212} \cdot \sin \theta^4 + 3 \cdot \cos \theta^2 \cdot \sin \theta^2 \cdot (-C_{1112} + C_{2212}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2222}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{2r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2222} \cdot \cos \theta^4 + C_{1111} \cdot \sin \theta^4 + \cos \theta^2 \cdot \sin \theta^2 \cdot (2C_{1122} + 4C_{1212}) \\ &\quad - 4C_{1112} \cdot \sin \theta^3 \cdot \cos \theta - 4 \cos \theta^3 \cdot \sin \theta \cdot C_{2212} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2233}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{3r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2233} \cdot \cos \theta^2 + C_{1133} \cdot \sin \theta^2 - 2C_{3312} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2212}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos \theta^3 \cdot \sin \theta \cdot (C_{2222} - C_{1122} - 2C_{1212}) \\ &\quad + \sin \theta^3 \cdot \cos \theta \cdot (C_{1122} - C_{1111} + 2C_{1212}) \\ &\quad + C_{2212} \cdot \cos \theta^4 - C_{1112} \cdot \sin \theta^4 + 3 \cdot \cos \theta^2 \cdot \sin \theta^2 \cdot (C_{1112} - C_{2212}) \end{aligned}$$

$$C_{3333}^h(\theta) = t_{3m} \cdot t_{3n} \cdot t_{3r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} = C_{3333}$$

$$\begin{aligned} C_{3312}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{3n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (C_{2233} - C_{1133}) + C_{3312} \cdot \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2323}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{3n} \cdot t_{2r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2323} \cdot \cos \theta^2 + C_{1313} \cdot \sin \theta^2 - 2C_{2313} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2313}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{3n} \cdot t_{1r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (C_{2323} - C_{1313}) + C_{2313} \cdot \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1313}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{3n} \cdot t_{1r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1313} \cdot \cos \theta^2 + C_{2323} \cdot \sin \theta^2 + 2C_{2313} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1212}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos \theta^3 \cdot \sin \theta \cdot (2C_{2212} - 2C_{1112}) + \sin \theta^3 \cdot \cos \theta \cdot (2C_{1112} - 2C_{2212}) \\ &\quad + C_{1212} \cdot \cos \theta^4 + C_{1212} \cdot \sin \theta^4 + \cos \theta^2 \cdot \sin \theta^2 \cdot (C_{1111} + C_{2222} - 2C_{1122} - 2C_{1212}) \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour les tenseurs homogénéisés piézoélectriques et diélectriques. On obtient (en appliquant les relations (5.39) et (5.40)):

$$\begin{aligned} g_{123}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (g_{223} - g_{113}) + g_{123} \cdot \cos \theta^2 - g_{213} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{113}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (g_{123} + g_{213}) + g_{113} \cdot \cos \theta^2 + g_{223} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{223}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (-g_{123} - g_{213}) + g_{223} \cdot \cos^2 \theta + g_{113} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{213}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{1n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (g_{223} - g_{113}) + g_{213} \cdot \cos^2 \theta - g_{123} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{311}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{1n} \cdot t_{1s} \cdot g_{mns} \\ &= 2 \cdot g_{312} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + g_{311} \cdot \cos^2 \theta + g_{322} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{322}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{2n} \cdot t_{2s} \cdot g_{mns} \\ &= -2 \cdot g_{312} \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta + g_{322} \cdot \cos^2 \theta + g_{311} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{333}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{3n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= g_{333} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{312}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2s} \cdot g_{mns} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (g_{322} - g_{311}) + g_{312} \cdot \cos 2\theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{11} \cdot \cos^2 \theta + \epsilon_{22} \cdot \sin^2 \theta + 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \epsilon_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{12} \cdot \cos 2\theta + \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (\epsilon_{22} - \epsilon_{11}) \end{aligned}$$

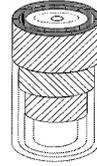
$$\begin{aligned} \epsilon_{22}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{22} \cdot \cos^2 \theta + \epsilon_{11} \cdot \sin^2 \theta - 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot \epsilon_{12} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{33}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{3r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{33} \end{aligned}$$

La détermination des caractéristiques mécaniques de la lamelle dans le repère $(Oxyz)$ (où la direction des fibres est parallèle à Oz) est donc suffisante pour la détermination des caractéristiques mécaniques de celle-ci dans le repère $(Ox'y'z')$ (où les fibres font un angle θ avec Oz).

5.5 Homogénéisation ostéonale

L'ostéon est composé d'un ensemble de lamelles concentriques entourant le canal de Havers. La section transversale de l'ostéon est supposée être circulaire (elle peut être elliptique). Les lamelles de l'ostéon sont caractérisées par l'orientation de leurs fibres, qui peut changer en alternance d'une lamelle à l'autre.



ostéon

L'homogénéisation de la structure ostéonale se ramène à l'homogénéisation d'un milieu multi-couches. Il s'agit d'un empilement constitué de deux types de couches pour lequel l'angle formé par la direction des fibres de deux couches consécutives est de 2θ . Cette structure n'est pas périodique. Dans une telle structure il est trop difficile, voire impossible, de faire des simulations numériques car les hétérogénéités rendent les calculs trop coûteux. L'homogénéisation, qui consiste à donner une loi de comportement équivalente simplifiée du composite, permet de surmonter cette difficulté. Cependant, l'application de la technique de l'homogénéisation des milieux périodiques à cette structure ostéonale rencontre une difficulté majeure, à savoir le fait que le milieu ne présente pas un caractère périodique. On se propose de chercher les caractéristiques mécaniques homogénéisées de cette structure ostéonale.

On considère une subdivision de l'intervalle $(0, 2\pi)$ en n intervalles de longueur $\frac{2\pi}{n}$. On obtient ainsi un découpage de l'ostéon Ω en secteurs ostéonaux Ω_n .

Soient

Q_{n_0} : le tenseur du secteur ostéonal Ω_{n_0}

Q_{n_i} : le tenseur du secteur ostéonal Ω_{n_i}

Le secteur Ω_{n_i} s'obtient du secteur Ω_{n_0} par une rotation d'angle donné $\varphi = (n_i - n_0) \cdot \frac{2\pi}{n}$ autour de l'axe Oz . La relation de tensorialité entre Q_{n_0} et Q_{n_i} est donnée par [Ger73]:

$$(Q_{n_i})_{khpq} = t_{kl} \cdot t_{hm} \cdot t_{pr} \cdot t_{qs} \cdot (Q_{n_0})_{lmrs}$$

avec

$$T = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

matrice de rotation autour de l'axe Oz .

Les propriétés d'un secteur ostéonal peuvent être obtenues en fait en deux manières:

1 En faisant trois rotations successives:

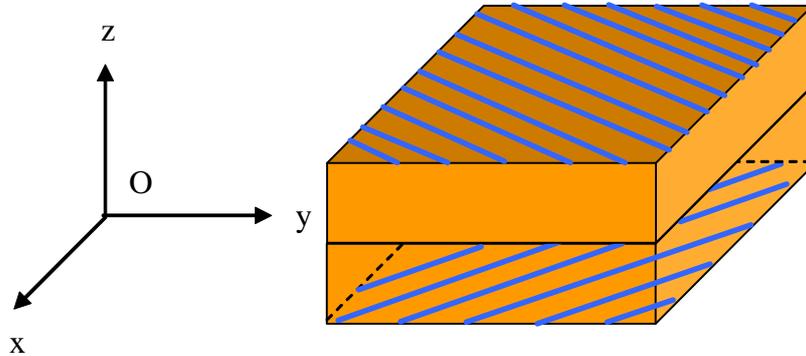
- une rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ dans le but d'obtenir une lamelle placée dans le plan xOy ou dans un plan parallèle à celui ci
- une rotation d'axe Oz et d'angle φ ou $-\varphi$ pour avoir une lamelle dont les bâtonnets de collagène n'ont pas la même direction que la génératrice de la lamelle. On utilisera les deux couches ainsi obtenues et on fera un empilement selon l'axe Oz pour obtenir les propriétés d'un secteur ostéonal qui sera placé dans le plan xOy
- une nouvelle rotation d'axe Ox et d'angle $-\pi/2$ qui finalement va nous donner les propriétés d'un secteur ostéonal verticalement placé

2 En faisant une rotation et un empilement:

- des rotations d'axe Ox et d'angle φ ou $-\varphi$
- l'homogénéisation d'un empilement selon la direction Ox

On présente ici la première variante, des idées sur la deuxième seront donnée en Annexe 3 (les calculs se déroulent de la même manière, seules les relations diffèrent et les résultats sont similaires).

La cellule de base étant la plus petite partie de la structure permettant de recouvrir le domaine tout entier (par des translations), on choisit la cellule représentée sur la figure ci-dessous:



Cellule de base - homogénéisation ostéonale

$$Y = [0, Y_1] \times [0, Y_2] \times [0, Y_3]$$

Les différentes couches de l'empilement sont homogènes. Dans la cellule de base Y les composantes du tenseur d'élasticité (piézoélastique et diélectrique) ne dépendent que de la variable y_3 , c'est-à-dire:

$$C_{ijkl}(y) = C_{ijkl}(y_3)$$

$$g_{ijk}(y) = g_{ijk}(y_3)$$

$$\epsilon_{ij}(y) = \epsilon_{ij}(y_3)$$

On suppose que chaque couche est homogène et que les tenseurs respectifs ont les formes suivantes:

- pour le tenseur d'élasticité

$$\begin{pmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & 0 & 0 & C_{1112} \\ C_{1122} & C_{2222} & C_{2233} & 0 & 0 & C_{2212} \\ C_{1133} & C_{2233} & C_{3333} & 0 & 0 & C_{3312} \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323} & C_{2313} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1323} & C_{1313} & 0 \\ C_{1112} & C_{2212} & C_{3312} & 0 & 0 & C_{1212} \end{pmatrix}$$

- pour la matrice de piézoélectricité

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123} & g_{113} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223} & g_{213} & 0 \\ g_{311} & g_{322} & g_{333} & 0 & 0 & g_{312} \end{pmatrix}$$

- pour la matrice de diélectricité

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & 0 \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33} \end{pmatrix}$$

En tenant compte des hypothèses ci-dessus, les fonctions χ^{ij} , Ψ^{ij} , Φ^i et R^i sont Y_1 -périodiques et Y_2 -périodiques par rapport aux variables y_1 et y_2 où Y_1 et Y_2 sont quelconques, par conséquent ces fonctions sont indépendantes de y_1 et y_2 i.e

$$\chi^{ij}(y) = \chi^{ij}(y_3), \quad \Psi^{ij}(y) = \Psi^{ij}(y_3), \quad \Phi^i(y) = \Phi^i(y_3) \quad \text{et} \quad R^i(y) = R^i(y_3)$$

Ces fonctions sont solutions de problèmes cellulaires (4.32)-(4.35) qui prennent les formes suivantes

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{i3k3} \frac{d\chi_k^{mn}}{dy_3} + g_{3i3} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{i3mn} \\ \frac{d}{dy_3} [g_{3k3} \frac{d\chi_k^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} g_{3mn} \end{cases} \quad (5.41)$$

et

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \left[g_{3i3} \frac{dR^m}{dy_3} + C_{i3k3} \frac{d\Phi_k^m}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{mi3} \\ \frac{d}{dy_3} \left[\epsilon_{33} \frac{dR^m}{dy_3} - g_{3k3} \frac{d\Phi_k^m}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} \epsilon_{3m} \end{cases} \quad (5.42)$$

5.5.1 Détermination des fonctions χ^{mn} et Ψ^{mn}

Cas où $(m, n) = (\alpha, 3)$ avec $\alpha = 1, 2$

Si on prend $i = 3$ dans (5.41), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_3} \left[C_{3333} \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dy_3} \left[g_{333} \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \right] &= 0 \end{aligned}$$

On multiplie la première équation par $\chi_3^{\alpha 3}$ et la deuxième par $\Psi^{\alpha 3}$, on intègre de 0 à Y_3 puis on applique la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{Y_3} \left(C_{3333} \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \right) \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} dy &= 0 \\ \int_0^{Y_3} \left(g_{333} \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \right) \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} dy &= 0 \end{aligned}$$

i.e

$$\int_0^{Y_3} \left[C_{3333} \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} + \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \right] dy = 0$$

d'après la coercivité, on obtient

$$0 \geq \alpha \left| \frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} \right|^2 + \beta \left| \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} \right|^2$$

Soit

$$\frac{d\chi_3^{\alpha 3}}{dy_3} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\Psi^{\alpha 3}}{dy_3} = 0$$

et donc les fonctions $\chi_3^{\alpha 3}$ et $\Psi^{\alpha 3}$ sont des constantes que l'on peut choisir nulles :

$$\chi_3^{\alpha 3} = 0 \quad \text{et} \quad \Psi^{\alpha 3} = 0$$

Par conséquent les fonctions $\chi^{\alpha 3}$ et $\Psi^{\alpha 3}$ sont telles que

$$\chi^{\alpha 3}(y_3) = (\chi_1^{\alpha 3}(y_3), \chi_2^{\alpha 3}(y_3), 0) \quad \text{et} \quad \Psi^{\alpha 3}(y_3) = 0$$

Les composantes $\chi_1^{\alpha 3}(y_3)$ et $\chi_2^{\alpha 3}(y_3)$ sont solutions des problèmes

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{i3k3} \frac{d\chi_k^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{i3\alpha 3} & i, k, \alpha = 1, 2 \\ \chi_k^{\alpha 3} \text{ } Y_3\text{-périodique} \end{cases}$$

Pour obtenir les solutions de ce problème, on pose $i = 1$ et on a:

$$\frac{d}{dy_3} [C_{13k3} \frac{d\chi_k^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{13\alpha 3}$$

et en tenant compte des hypothèses, on a

$$\frac{d}{dy_3} [C_{1313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{13\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2$$

pour $i = 2$ on a

$$\frac{d}{dy_3} [C_{23k3} \frac{d\chi_k^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{23\alpha 3}$$

et en tenant compte des hypothèses, on a

$$\frac{d}{dy_3} [C_{2313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{23\alpha 3}, \quad \alpha = 1, 2$$

En prenant $\alpha = 1$ on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{1313} \frac{d\chi_1^{13}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{13}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{1313} \\ \frac{d}{dy_3} [C_{2313} \frac{d\chi_1^{13}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{13}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{2313} \end{cases}$$

et en prenant $\alpha = 2$ on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{1313} \frac{d\chi_1^{23}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{23}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{1323} \\ \frac{d}{dy_3} [C_{2313} \frac{d\chi_1^{23}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{23}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{2323} \end{cases}$$

soit dans le cas général

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} [C_{1313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{13\alpha 3} \\ \frac{d}{dy_3} [C_{2313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3}] = -\frac{d}{dy_3} C_{23\alpha 3} \end{cases}, \quad \alpha = 1, 2$$

Après intégration, on obtient

$$\begin{cases} C_{1313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} = -C_{13\alpha 3} + C_1^{te} \\ C_{2313} \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} = -C_{23\alpha 3} + C_2^{te} \end{cases}$$

d'où

$$\frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} = \frac{C_{1323} \cdot C_{23\alpha 3} - C_{2323} \cdot C_{13\alpha 3} + C_1^{te} \cdot C_{2323} - C_2^{te} \cdot C_{1323}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (5.43)$$

et

$$\frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} = \frac{-C_{1313} \cdot C_{23\alpha 3} + C_{2313} \cdot C_{13\alpha 3} - C_1^{te} \cdot C_{2313} + C_2^{te} \cdot C_{1313}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (5.44)$$

les constantes C_1^{te} et C_2^{te} étant déterminées par la condition de périodicité des fonctions $\chi_1^{\alpha 3}$ et $\chi_2^{\alpha 3}$:

$$\left\langle \frac{d\chi_1^{\alpha 3}}{dy_3} \right\rangle = \left\langle \frac{d\chi_2^{\alpha 3}}{dy_3} \right\rangle = 0$$

et on rappelle que

$$\chi_3^{\alpha 3} = 0 \quad \text{et} \quad \Psi^{\alpha 3} = 0 \quad , \quad \alpha = 1, 2$$

Cas où $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$

pour $i = 1$

$$\frac{d}{dy_3} \left[C_{1313} \frac{d\chi_1^{mn}}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\chi_2^{mn}}{dy_3} \right] = 0$$

pour $i = 2$

$$\frac{d}{dy_3} \left[C_{2323} \frac{d\chi_2^{mn}}{dy_3} + C_{2313} \frac{d\chi_1^{mn}}{dy_3} \right] = 0$$

pour $i = 3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_3} \left[C_{3333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} \right] &= -\frac{d}{dy_3} C_{33mn} \\ \frac{d}{dy_3} \left[g_{333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} \right] &= -\frac{d}{dy_3} g_{3mn} \end{aligned}$$

La positivité de la matrice d'élasticité entraîne la positivité de la matrice

$$\begin{pmatrix} C_{1313} & C_{1323} \\ C_{1323} & C_{2323} \end{pmatrix}$$

et donc

$$\chi_1^{mn} = 0 \text{ et } \chi_2^{mn} = 0$$

et les χ_3^{mn} et Ψ^{mn} vérifient

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \left[C_{3333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} C_{33mn} \\ \frac{d}{dy_3} \left[g_{333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{3mn} \end{cases}$$

Après intégration, le système devient

$$\begin{cases} C_{3333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} + g_{333} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} = -C_{33mn} + C_1^{te} \\ g_{333} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} - \epsilon_{33} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} = -g_{3mn} + C_2^{te} \end{cases}$$

il admet la solution suivante

$$\begin{aligned} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} &= \frac{(-C_{33mn} + C_1) \epsilon_{33} + g_{333}(-g_{3mn} + C_2^{te})}{C_{3333}\epsilon_{33} + g_{333}^2} \\ \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} &= -\frac{C_{3333}(g_{3mn} + C_2) - g_{333}(C_{33mn} + C_1^{te})}{C_{3333}\epsilon_{33} + g_{333}^2} \end{aligned} \quad (5.45)$$

avec C_1^{te} et C_2^{te} vérifiant

$$\begin{cases} C_1^{te} \langle \epsilon_{33} \rangle + C_2^{te} \langle g_{333} \rangle = \langle C_{33mn}\epsilon_{33} + g_{333}g_{3mn} \rangle \\ C_1^{te} \langle g_{333} \rangle - C_2^{te} \langle C_{3333} \rangle = \langle -C_{3333}g_{3mn} + g_{333}C_{33mn} \rangle \end{cases}$$

ce qui représente la condition de périodicité des fonctions χ_3^{mn} et Ψ^{mn} :

$$\left\langle \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_3} \right\rangle = \left\langle \frac{d\Psi^{mn}}{dy_3} \right\rangle = 0$$

5.5.2 Détermination des fonctions Φ^m et R^m

Cas où $m = 1, 2$

pour $i = 1$

$$\frac{d}{dy_3} \left[C_{13k3} \frac{d\Phi_k^m}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{m13}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dy_3} \left[C_{1313} \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{m13} \quad (5.46)$$

pour $i = 2$

$$\frac{d}{dy_3} \left[C_{23k3} \frac{d\Phi_k^m}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{m23}$$

c'est-à-dire

$$\frac{d}{dy_3} \left[C_{2313} \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{m23} \quad (5.47)$$

pour $i = 3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_3} \left[g_{333} \frac{dR^m}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} \right] &= 0 \\ \frac{d}{dy_3} \left[\epsilon_{33} \frac{dR^m}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} \right] &= 0 \end{aligned}$$

on multiplie la première équation par Φ_3^m et la deuxième par R^m et on intègre sur $[0, Y_3]$; en utilisant la formule de Green et la périodicité on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^{Y_3} \left[g_{333} \frac{dR^m}{dy_3} \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} \right] dy &= 0 \\ \int_0^{Y_3} \left[\epsilon_{33} \frac{dR^m}{dy_3} \frac{dR^m}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} \frac{dR^m}{dy_3} \right] dy &= 0 \end{aligned}$$

La coercivité implique $\left| \frac{d\Phi_3^m}{dy_3} \right| = 0$ et $\left| \frac{dR^m}{dy_3} \right| = 0$, donc les fonctions Φ_3^m et R^m sont constantes et on peut les prendre nulles.

Les fonctions Φ_1^m et Φ_2^m sont solutions du système formé par les équations (5.46) et (5.47) et on rappelle que:

$$\Phi_3^m = 0 \quad \text{et} \quad R^m = 0, \quad m = 1, 2$$

On a donc

$$\begin{cases} C_{1313} \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} = -g_{m13} + C_1^{te} \\ C_{2313} \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} + C_{2323} \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} = -g_{m23} + C_2^{te} \end{cases}$$

Après un calcul analytique

$$\frac{d\Phi_1^m}{dy_3} = \frac{C_{1323} \cdot g_{m23} - C_{2323} \cdot g_{m13} + C_1^{te} \cdot C_{2323} - C_2^{te} \cdot C_{1323}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (5.48)$$

et

$$\frac{d\Phi_2^m}{dy_3} = \frac{C_{2313} \cdot g_{m13} - C_{1313} \cdot g_{m23} - C_1^{te} \cdot C_{2313} + C_2^{te} \cdot C_{1313}}{C_{1313} \cdot C_{2323} - C_{1323}^2} \quad (5.49)$$

avec C_1^{te} et C_2^{te} vérifiant

$$\left\langle \frac{d\Phi_1^m}{dy_3} \right\rangle = \left\langle \frac{d\Phi_2^m}{dy_3} \right\rangle = 0$$

(condition de périodicité)

Cas où $m = 3$

pour $i = 1$

$$\frac{d}{dy_3} \left(C_{1313} \frac{d\Phi_1^3}{dy_3} + C_{1323} \frac{d\Phi_2^3}{dy_3} \right) = 0$$

pour $i = 2$

$$\frac{d}{dy_3} \left(C_{2323} \frac{d\Phi_2^3}{dy_3} + C_{2313} \frac{d\Phi_1^3}{dy_3} \right) = 0$$

pour $i = 3$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy_3} \left[g_{333} \frac{dR^3}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} \right] &= -\frac{d}{dy_3} g_{333} \\ \frac{d}{dy_3} \left[\epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} \right] &= -\frac{d}{dy_3} \epsilon_{33} \end{aligned}$$

La positivité de la matrice d'élasticité entraîne que

$$\Phi_1^3 = 0 \text{ et } \Phi_2^3 = 0$$

et les Φ_3^3 et R^3 vérifient

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_3} \left[g_{333} \frac{dR^3}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} g_{333} \\ \frac{d}{dy_3} \left[\epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} \right] = -\frac{d}{dy_3} \epsilon_{33} \end{cases}$$

Après avoir intégré on obtient

$$\begin{cases} g_{333} \frac{dR^3}{dy_3} + C_{3333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} = -g_{333} + C_1 \\ \epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} = -\epsilon_{33} + C_2 \end{cases}$$

La solution du système ci-dessus est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{dR^3}{dy_3} &= \frac{(-g_{333} + C_1)g_{333} + C_{3333}(-\epsilon_{33} + C_2)}{g_{333}^2 + C_{3333}\epsilon_{33}} \\ \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} &= -\frac{g_{333}(-\epsilon_{33} + C_2) - \epsilon_{33}(-g_{333} + C_1)}{g_{333}^2 + C_{3333}\epsilon_{33}}\end{aligned}\quad (5.50)$$

les constantes C_1 et C_2 sont solutions de

$$\begin{cases} C_1 < g_{333} > + C_2 < C_{3333} > = < g_{333}^2 + C_{3333}\epsilon_{33} > \\ C_1 < \epsilon_{33} > = C_2 < g_{333} > \end{cases}$$

5.5.3 Calcul des coefficients homogénéisés de la structure

Les coefficients homogénéisés de la structure ostéonale s'obtiennent par les expressions suivantes:

$$C_{ijkl}^h = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} [C_{ijkl} + C_{ijm3} \frac{d\chi_m^{kl}}{dy_3} + g_{3ij} \frac{d\Psi^{kl}}{dy_3}] dy_3 \quad (5.51)$$

$$g_{kij}^h = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} [g_{kij} + C_{ijm3} \frac{d\Phi_m^k}{dy_3} + g_{3ij} \frac{dR^k}{dy_3}] dy_3 \quad (5.52)$$

$$\epsilon_{jm}^h = \frac{1}{Y_3} \int_0^{Y_3} [-g_{j3l} \frac{d\Phi_l^m}{dy_3} + \epsilon_{j3} \frac{dR^m}{dy_3} + \epsilon_{jm}] dy_3 \quad (5.53)$$

La matrice d'élasticité est donc la suivante

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & C_{1112}^h \\ C_{2211}^h & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & C_{2212}^h \\ C_{3311}^h & C_{3322}^h & C_{3333}^h & 0 & 0 & C_{3312}^h \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}^h & C_{2313}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1323}^h & C_{1313}^h & 0 \\ C_{1211}^h & C_{1222}^h & C_{1233}^h & 0 & 0 & C_{1212}^h \end{bmatrix} \quad (5.54)$$

La matrice de piézoélectricité est donnée par

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & g_{213}^h & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & g_{312}^h \end{bmatrix} \quad (5.55)$$

et la matrice de diélectricité est

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & \epsilon_{12}^h & 0 \\ \epsilon_{21}^h & \epsilon_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^h \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

où les coefficients homogénéisés de la structure s'obtiennent d'une manière détaillée en faisant varier les indices dans les formules(5.51), (5.52) et (5.53):

Pour le tenseur élastique

$$\begin{aligned} C_{1111}^h &= \left\langle C_{1111} + C_{11m3} \cdot \frac{d\chi_m^{11}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{11}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle C_{1111} + C_{1133} \cdot \frac{d\chi_3^{11}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{11}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1122}^h &= \left\langle C_{1122} + C_{11m3} \cdot \frac{d\chi_m^{22}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{22}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle C_{1122} + C_{1133} \cdot \frac{d\chi_3^{22}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{22}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1133}^h &= \left\langle C_{1133} + C_{11m3} \cdot \frac{d\chi_m^{33}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{33}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle C_{1133} + C_{1133} \cdot \frac{d\chi_3^{33}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{33}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1112}^h &= \left\langle C_{1112} + C_{11m3} \cdot \frac{d\chi_m^{12}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle C_{1112} + C_{1133} \cdot \frac{d\chi_3^{12}}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2222}^h &= \left\langle C_{2222} + C_{22m3} \cdot \frac{d\chi_m^{22}}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{d\Psi^{22}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle C_{2222} + C_{2233} \cdot \frac{d\chi_3^{22}}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{d\Psi^{22}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2233}^h &= \left\langle C_{2233} + C_{22m3} \cdot \frac{d\chi_m^{33}}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{d\Psi^{33}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle C_{2233} + C_{2233} \cdot \frac{d\chi_3^{33}}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{d\Psi^{33}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2212}^h &= \left\langle C_{2212} + C_{22m3} \cdot \frac{d\chi_m^{12}}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{2212} + C_{2233} \cdot \frac{d\chi_3^{12}}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{3333}^h &= \left\langle C_{3333} + C_{33m3} \cdot \frac{d\chi_m^{33}}{dy_3} + g_{333} \cdot \frac{d\Psi^{33}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{3333} + C_{3333} \cdot \frac{d\chi_3^{33}}{dy_3} + g_{333} \cdot \frac{d\Psi^{33}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{3312}^h &= \left\langle C_{3312} + C_{33m3} \cdot \frac{d\chi_m^{12}}{dy_3} + g_{333} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{3312} + C_{3333} \cdot \frac{d\chi_3^{12}}{dy_3} + g_{333} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2323}^h &= \left\langle C_{2323} + C_{23m3} \cdot \frac{d\chi_m^{23}}{dy_3} + g_{323} \cdot \frac{d\Psi^{23}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{2323} + C_{2313} \cdot \frac{d\chi_1^{23}}{dy_3} + C_{2323} \cdot \frac{d\chi_2^{23}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2313}^h &= \left\langle C_{2313} + C_{23m3} \cdot \frac{d\chi_m^{13}}{dy_3} + g_{323} \cdot \frac{d\Psi^{13}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{2313} + C_{2313} \cdot \frac{d\chi_1^{13}}{dy_3} + C_{2323} \cdot \frac{d\chi_2^{13}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1313}^h &= \left\langle C_{1313} + C_{13m3} \cdot \frac{d\chi_m^{13}}{dy_3} + g_{313} \cdot \frac{d\Psi^{13}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{1313} + C_{1313} \cdot \frac{d\chi_1^{13}}{dy_3} + C_{1323} \cdot \frac{d\chi_2^{13}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{1212}^h &= \left\langle C_{1212} + C_{12m3} \cdot \frac{d\chi_m^{12}}{dy_3} + g_{312} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle C_{1212} + C_{1233} \cdot \frac{d\chi_3^{12}}{dy_3} + g_{312} \cdot \frac{d\Psi^{12}}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

Pour le tenseur piézoélectrique

$$\begin{aligned} g_{123}^h &= \left\langle g_{123} + C_{23m3} \cdot \frac{d\Phi_m^1}{dy_3} + g_{323} \cdot \frac{dR^1}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{123} + C_{2313} \cdot \frac{d\Phi_1^1}{dy_3} + C_{2323} \cdot \frac{d\Phi_2^1}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{113}^h &= \left\langle g_{113} + C_{13m3} \cdot \frac{d\Phi_m^1}{dy_3} + g_{313} \cdot \frac{dR^1}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{113} + C_{1313} \cdot \frac{d\Phi_1^1}{dy_3} + C_{1323} \cdot \frac{d\Phi_2^1}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{223}^h &= \left\langle g_{223} + C_{23m3} \cdot \frac{d\Phi_m^2}{dy_3} + g_{323} \cdot \frac{dR^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{223} + C_{2313} \cdot \frac{d\Phi_1^2}{dy_3} + C_{2323} \cdot \frac{d\Phi_2^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{213}^h &= \left\langle g_{213} + C_{13m3} \cdot \frac{d\Phi_m^2}{dy_3} + g_{313} \cdot \frac{dR^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{213} + C_{1313} \cdot \frac{d\Phi_1^2}{dy_3} + C_{1323} \cdot \frac{d\Phi_2^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{311}^h &= \left\langle g_{311} + C_{11m3} \cdot \frac{d\Phi_m^3}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{311} + C_{1133} \cdot \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} + g_{311} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{322}^h &= \left\langle g_{322} + C_{22m3} \cdot \frac{d\Phi_m^3}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{322} + C_{2233} \cdot \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} + g_{322} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{333}^h &= \left\langle g_{333} + C_{33m3} \cdot \frac{d\Phi_m^3}{dy_3} + g_{333} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\ &= \left\langle g_{333} + C_{3333} \cdot \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} + g_{333} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{312}^h &= \left\langle g_{312} + C_{12m3} \cdot \frac{d\Phi_m^3}{dy_3} + g_{312} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle g_{312} + C_{1233} \cdot \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} + g_{312} \cdot \frac{dR^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

Pour le tenseur diélectrique

$$\begin{aligned}
\epsilon_{11}^h &= \left\langle \epsilon_{11} + \epsilon_{13} \frac{dR^1}{dy_3} - g_{13l} \frac{d\Phi_l^1}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle \epsilon_{11} - g_{131} \frac{d\Phi_1^1}{dy_3} - g_{132} \frac{d\Phi_2^1}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{12}^h &= \left\langle \epsilon_{12} + \epsilon_{13} \frac{dR^2}{dy_3} - g_{13l} \frac{d\Phi_l^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle \epsilon_{12} - g_{131} \frac{d\Phi_1^2}{dy_3} - g_{132} \frac{d\Phi_2^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{22}^h &= \left\langle \epsilon_{22} + \epsilon_{23} \frac{dR^2}{dy_3} - g_{23l} \frac{d\Phi_l^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle \epsilon_{22} - g_{231} \frac{d\Phi_1^2}{dy_3} - g_{232} \frac{d\Phi_2^2}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\epsilon_{33}^h &= \left\langle \epsilon_{33} + \epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{33l} \frac{d\Phi_l^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3} \\
&= \left\langle \epsilon_{33} + \epsilon_{33} \frac{dR^3}{dy_3} - g_{333} \frac{d\Phi_3^3}{dy_3} \right\rangle_{Y_3}
\end{aligned}$$

Résumé

On résume ci-dessous le calcul des fonctions d'influence pour la structure ostéonale, ce qui permet ensuite le calcul des coefficients homogénéisés de la structure:

Cas	Pb. à résoudre	Comp. à déterminer	Comp. nulles
$(m, n) = (1, 1); (2, 2);$ $(3, 3); (1, 2)$	(5.45)	χ_3^{mn}, ψ^{mn}	χ_1^{mn}, χ_2^{mn}
$(m, n) = (1, 3); (2, 3)$	(5.43) et (5.44)	χ_1^{mn}, χ_2^{mn}	χ_3^{mn}, ψ^{mn}
$m = 1, 2$	(5.48) et (5.49)	ϕ_1^m, ϕ_2^m	ϕ_3^m, R^m
$m = 3$	(5.50)	ϕ_3^m, R^m	ϕ_1^m, ϕ_2^m

(5.57)

Ainsi on peut donc calculer les propriétés mécaniques homogénéisées de la structure ostéonale, que l'on va noter par Q_{ost} .

Remarque 24 1) Les coefficients C_{ikl} pour $(k, l) = (2, 3); (1, 3)$ et $i = 1, 2, 3$ et C_{ij12} pour $(i, j) = (2, 3); (1, 3)$ sont nuls, compte tenu de la forme initiale des tenseurs élastiques et piézoélectriques (et de tableau (5.57)), donc la forme du tenseur élastique homogénéisé est bien celle donnée par la relation (5.54).

2) Les coefficients g_{kii} pour $k = 1, 2$ et $i = 1, 2, 3$, g_{k12} pour $k = 1, 2$ et g_{3i3} pour $i = 1, 2$ sont nuls pour les mêmes raisons que ci-dessus; le tenseur homogénéisé piézoélectrique a donc la forme (5.55).

3) Les coefficients ϵ_{j3} , $j = 1, 2$ sont nuls grâce à la forme des tenseurs piézoélectriques et diélectriques et au tableau (5.57); la forme du tenseur homogénéisé diélectrique est donc celle de (5.56).

5.6 Homogénéisation corticale

On passe enfin de la structure ostéonale à la structure de l'os compact. Pour cela il nous faut encore modéliser le système interstitiel. Tous les auteurs sont unanimes sur le fait que ce système interstitiel est formé de fragments d'anciens ostéons partiellement résorbés.

On va donc considérer que ce système interstitiel est constitué de plusieurs blocs de composition homogène, chaque bloc étant un morceau d'ancien ostéon. Ces blocs sont constitués de parties de lamelles caractérisées, d'une part, par l'orientation des bâtonnets de collagène, qui est similaire à celles des lamelles des ostéons (alternance d'une lamelle à l'autre) et d'autre part, par une surminéralisation.

Remarque 25 Les blocs du système interstitiel étant des morceaux d'ostéons, leur homogénéisation est donc similaire à celle des ostéons.

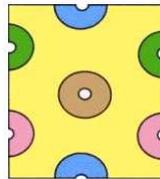
Dans une étude concernant la distribution des ostéons et du système interstitiel dans la section transversale du fémur humain, Portigliatti [POR83] montre que la distribution des différents types d'ostéons est pratiquement régulière dans la section du fémur, avec une très légère différence entre les parties postérieure et antérieure (voir aussi [MEU89]). Cela nous permet de supposer que les ostéons sont régulièrement et périodiquement répartis dans la structure de l'os compact.

La détermination du comportement homogénéisé de l'os compact se fait par la méthode de l'homogénéisation, en utilisant les résultats obtenus aux paragraphes précédents.

Nous considérons le cas où l'os compact est constitué de quatre types d'ostéons. La cellule de base est alors formée de trois parties:

- le canal de Havers
- l'ostéon, qui peut être homogénéisé en suivant les procédures des paragraphes précédents
- le système interstitiel composé de plusieurs blocs

On suppose que les différents types d'ostéons sont répartis d'une manière périodique dans la structure de l'os. La période de base peut être choisie alors comme ci-dessous:



Cellule de base - quatre ostéons

Ayant homogénéisé les différents constituants de la cellule de base considérée (structure lamellaire et structure ostéonale), en suivant les procédures présentées aux paragraphes précédents, les caractéristiques des différents constituants des cellules de base décrites ci-dessus sont complètement connues, par conséquent, on peut aborder la résolution des problèmes cellulaires dans le cas actuel.

Pour les différents choix de la cellule de base, on remarque que les coefficients des constituants sont indépendants de la troisième variable et que les fonctions d'influence sont périodiques et telles que:

Pour $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (1, 2)$ les fonctions χ^{mn} et Ψ^{mn} sont de la forme

$$\chi^{mn} = (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}, 0) \text{ et } \Psi^{mn} = 0$$

et $(\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn})$ sont solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\chi_1^{mn}, \chi_2^{mn}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} \frac{\partial \chi_l^{mn}}{\partial y_k} \frac{\partial v_i}{\partial y_j} dy = \int_\Gamma F_i^{mn} \cdot v_i ds + \int_H f_i^{mn} \cdot v_i dy \quad \forall v \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (5.58)$$

avec F_i^{mn} et f_i^{mn} données par les expressions (5.16) et (5.17).

Pour $(m, n) = (1, 3); (2, 3)$ les fonctions χ^{m3} et Ψ^{m3} sont de la forme

$$\chi^{m3}(y_1, y_2) = (0, 0, \chi_3^{m3}(y_1, y_2))$$

et χ_3^{m3} et Ψ^{m3} sont solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\chi_3^{m3}, \Psi^{m3}) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (g_{jk3} \frac{\partial \chi_3^{m3}}{\partial y_k} - \epsilon_{jk} \frac{\partial \Psi^{m3}}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = \int_\Gamma F^{m3} \cdot w ds + \int_\Gamma H^{m3} \cdot z ds + \int_H f^{m3} \cdot w dy + \int_H h^{m3} \cdot z dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (5.59)$$

avec F^{m3}, H^{m3}, f^{m3} et h^{m3} données par les expressions (5.21), (5.22), (5.23) et (5.24).

Pour $m = 1, 2$ les fonctions Φ^m et R^m sont de la forme

$$\Phi^m(y_1, y_2) = (0, 0, \Phi_3^m(y_1, y_2))$$

et Φ_3^m et R^m sont solutions des problèmes

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_3^m, R^m) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H [(C_{3jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + g_{k3j} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial w}{\partial y_j} \\ + (-g_{jk3} \frac{\partial \Phi_3^m}{\partial y_k} + \epsilon_{jk} \frac{\partial R^m}{\partial y_k}) \frac{\partial z}{\partial y_j}] dy = \int_\Gamma F^m \cdot w ds + \int_\Gamma H^m \cdot z ds + \int_H f^m \cdot w dy + \int_H h^m \cdot z dy \\ \forall (w, z) \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (5.60)$$

avec F^m, H^m, f^m et h^m données par les expressions (5.28) et (5.29).

Pour $m = 3$ les fonctions R^3 et Φ^3 sont de la forme

$$\Phi^3(y_1, y_2) = (\Phi_1^3(y_1, y_2), \Phi_2^3(y_1, y_2), 0) \text{ et } R^3 = 0$$

et (Φ_1^3, Φ_2^3) est solution du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\Phi_1^3, \Phi_2^3) \in W_2(H) \text{ telle que} \\ \int_H C_{ijkl} e_{kl}(\Phi^3) e_{ij}(\mathbf{v}) dy = \int_{\Gamma} F_i^3 \cdot v_i ds + \int_H f_i^3 \cdot v_i dy \quad \forall \mathbf{v} \in W_2(H) \end{array} \right. \quad (5.61)$$

avec F_i^3, f_i^3 données par les expressions (5.30) et (5.31).

La résolution numérique des problèmes (5.58)-(5.61) est réalisée par application de la méthode des éléments finis (programmation en Matlab). Pour calculer les coefficients homogénéisés, nous avons développé le code **SiNuPrOs** (voir chapitre 8). Ce code calcule les caractéristiques homogénéisées du milieu considéré, à partir des caractéristiques géométriques et mécaniques des composants de la cellule de base et des solutions des problèmes (5.58)-(5.61).

Ayant résolu les problèmes cellulaires (5.58)-(5.61), les coefficients homogénéisés sont donnés explicitement par les relations (5.3)-(5.5).

Les tenseurs homogénéisés élastique, piézoélectrique et diélectrique de l'os auront les formes suivantes :

- pour le tenseur d'élasticité homogénéisé

$$\begin{pmatrix} Q_{1111}^h & Q_{1122}^h & Q_{1133}^h & 0 & 0 & Q_{1112}^h \\ Q_{1122}^h & Q_{2222}^h & Q_{2233}^h & 0 & 0 & Q_{2212}^h \\ Q_{1133}^h & Q_{2233}^h & Q_{3333}^h & 0 & 0 & Q_{3312}^h \\ 0 & 0 & 0 & Q_{2323}^h & Q_{2313}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{1323}^h & Q_{1313}^h & 0 \\ Q_{1112}^h & Q_{2212}^h & Q_{3312}^h & 0 & 0 & Q_{1212}^h \end{pmatrix}$$

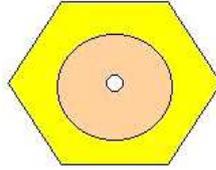
- pour le tenseur piézoélectrique homogénéisé

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & g_{213}^h & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & g_{312}^h \end{pmatrix}$$

- pour le tenseur diélectrique homogénéisé

$$\begin{pmatrix} \epsilon_{11}^h & \epsilon_{12}^h & 0 \\ \epsilon_{21}^h & \epsilon_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^h \end{pmatrix}$$

Remarque 26 Si l'on suppose que tous les ostéons sont du même type, alors la cellule de base peut être choisie comme ci-dessous :



Cellule de base - ostéon de type unique

Le processus à suivre pour déterminer les caractéristiques mécaniques homogénéisées de l'os cortical peut être résumé comme suit :

1) on prend pour caractéristiques de l'EVMC un module de Young longitudinal E_1 , un module de Young transversal E_3 et un coefficient de Poisson ν et pour le collagène, un module de Young E_{col} et un coefficient de Poisson ν_{col} ; on considère aussi des propriétés piézoélectriques pour le collagène; avec ces caractéristiques (et avec une nano porosité qui peut être donnée) nous pouvons obtenir, par homogénéisation, les propriétés mécaniques homogénéisées d'une lamelle (Q_{lam}) dont les fibres sont parallèles à l'axe vertical

2) en utilisant des équations classiques de rotation, on calcule les coefficients de la lamelle $Q_{lam\varphi_1}$ après la rotation d'angle φ_1 . Ainsi, nous obtenons les propriétés mécaniques de la lamelle pour une orientation des bâtonnets de collagène d'angle φ_1 ($Q_{lam\varphi_1}$). L'orientation des bâtonnets de collagène peut différer entre deux lamelles consécutives. Nous considérons deux orientations φ_1 et φ_2 pour ces bâtonnets de collagène et nous calculons pour ces orientations les coefficients homogénéisés pour un ostéon (Q_{ost})

3) alors, en considérant quatre types d'ostéons (ou des ostéons du même type), le système interstitiel, et en tenant compte de la macroporosité donnée par le canal Haversien et les canaux de Volkman, nous calculons enfin les propriétés physiques de l'os cortical (Q_{os}) au niveau macroscopique

5.7 Propriétés d'isotropie des structures considérées

On regroupe ici quelques résultats concernant les propriétés d'isotropie de la lamelle, de l'ostéon et finalement de l'os cortical macroscopique.

Les invariances matérielles (par symétrie matérielle ou par rotation autour d'un axe) de la cellule de base, quand elles existent, impliquent les mêmes invariances du matériau composite à structure périodique, réduisant ainsi le nombre des coefficients indépendants. Le but de ce paragraphe est d'identifier ces propriétés pour quelques types de transformations orthogonales (symétries ou rotations) dans le cas des composites unidirectionnels et des multicouches et d'étudier ensuite leurs conséquences sur l'isotropie de la lamelle et de l'ostéon (ensemble de couches concentriques).

Considérons un matériau piézoélectrique à structure périodique occupant un domaine Ω de R^3 muni du repère $Ox_1x_2x_3$. Ce matériau est caractérisé par ses tenseurs d'élasticité, piézoélectricité et diélectricité homogénéisés dans ledit repère.

Les invariances de ce matériau peuvent être caractérisées par un groupe de transformations orthogonales des axes $Ox_i, i = 1, 2, 3$. Soit T un élément de ce groupe, nous avons:

$$\begin{aligned} x'_k &= t_{kl} \cdot x_l \\ t_{kl} \cdot t_{ml} &= t_{lk} \cdot t_{lm} = \delta_{km}; \quad \det t_{kl} = \pm 1 \end{aligned}$$

Les tenseurs d'élasticité, piézoélectricité et diélectricité dans le nouveau repère $Ox'_1x'_2x'_3$ s'obtiennent par les relations de tensorialité suivantes [GER73]:

$$C'_{ijkl} = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{kr} \cdot t_{ls} \cdot C_{mnr s}$$

$$g'_{ijk} = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{ks} \cdot g_{mns}$$

$$\epsilon'_{ij} = t_{im} \cdot t_{jr} \cdot \epsilon_{mr}$$

L'invariance matérielle nous permet d'avoir:

$$C_{ijkl} = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{kr} \cdot t_{ls} \cdot C_{mnr s}$$

$$g_{ijk} = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{ks} \cdot g_{mns}$$

$$\epsilon_{ij} = t_{im} \cdot t_{jr} \cdot \epsilon_{mr}$$

5.7.1 Isotropie de la lamelle

On va considérer le cas d'une lamelle dont les fibres sont toutes parallèles à sa génératrice. Alors la cellule de base peut être choisie comme un cube dont la section de base Y_{12} est un rectangle régulier. Le repère orthonormé $(O y_1 y_2 y_3)$ est tel que O soit le barycentre du cube et l'axe Oy_3 est porté par la direction de la fibre.

$$Y = Y_{12} \times \left[\frac{-y_3}{2}, \frac{y_3}{2} \right]$$

Cette cellule de base présente les caractéristiques suivantes :

1. La symétrie matérielle par rapport aux plans $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ et $y_3 = 0$
2. Invariance pour les rotations d'angles π et $\frac{\pi}{2}$

5.7 PROPRIÉTÉS D'ISOTROPIE DES STRUCTURES CONSIDÉRÉES 131

Si on considère un nouveau repère orthonormé $(O y'_1 y'_2 y'_3)$ obtenu à partir de l'ancien repère par une transformation orthogonale $a = (a_{pq})$, on a :

$$y'_p = a_{pq} y_q$$

Les caractéristiques élastiques, piézoélectriques et diélectriques satisfont bien sûr :

$$C'_{ijkl} = a_{ip} a_{jq} a_{kn} a_{lm} C_{pqnm}$$

$$g'_{ijk} = a_{ip} a_{jq} a_{km} g_{pqm}$$

$$\epsilon'_{jk} = a_{jp} a_{kq} \epsilon_{pq}$$

Lemme 27 *Si le matériau composite est tel que la cellule de base Y possède l'invariance matérielle par une transformation orthogonale autour d'un axe Δ on peut choisir les fonction χ_k^{ij} , Ψ^{ij} solutions des problèmes cellulaire telles que leurs composantes satisfassent :*

$$\begin{aligned} \chi_n^{kl}(y') &= a_{kp} a_{lq} a_{nr} \chi_r^{pq}(y) \\ e'_{rs}(\chi^{mn}(y')) &= a_{mh} a_{nk} a_{r\alpha} a_{s\lambda} e_{\alpha\lambda}(\chi^{hk}(y)) \\ \frac{\partial \Psi^{kl}(y')}{\partial y_\gamma} &= a_{km} a_{ln} a_{\gamma\alpha} \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_\alpha} \\ \frac{\partial \Phi_j^i(y')}{\partial y_k} &= a_{im} a_{jn} a_{kh} \frac{\partial \Phi_n^m(y')}{\partial y_h} \\ \frac{\partial R^m(y')}{\partial y_k} &= a_{mi} a_{kh} \frac{\partial R^i(y')}{\partial y_h} \end{aligned}$$

Preuve. La démonstration se trouve dans [LEN84] pour les fonctions χ_k^{ij} et on procède de la même manière pour les fonctions Ψ^{ij} , Φ_n^m et R^m ■

Proposition 28 *Sous les conditions 1. et 2. ci-dessus, les tenseurs homogénéisés C_{ijkl}^h , g_{ijk}^h et ϵ_{jk}^h sont tels que*

$$C^h = \begin{bmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211}^h & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311}^h & C_{3322}^h & C_{3333}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212}^h \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

$$g^h = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{213}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{312}^h \end{bmatrix}$$

et

$$\epsilon^h = \begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^h \end{bmatrix}$$

dans le repère $(O y_1 y_2 y_3)$

Preuve. Soit $a = (a_{pq})$ le représentant d'une transformation définie ci-dessus (rotation d'angle π ou d'angle $\frac{\pi}{2}$). On a

$$\begin{aligned} \chi_n^{kl}(y') &= a_{kp} a_{lq} a_{nr} \chi_r^{pq}(y) \\ \frac{\partial \Psi^{kl}(y')}{\partial y_\gamma} &= a_{kn} a_{lm} \frac{\partial \Psi^{mn}(y)}{\partial y_\gamma} \\ \frac{\partial R^m(y')}{\partial y_k} &= a_{mi} a_{kh} \frac{\partial R^i(y')}{\partial y_h} \end{aligned}$$

et

$$\frac{\partial \Phi_j^i(y')}{\partial y_k} = a_{im} a_{jn} a_{kh} \frac{\partial \Phi_n^m(y')}{\partial y_h}$$

sachant que $\det(a_{ij}) = \pm 1$ on a

$$\begin{aligned} a_{ip} a_{jq} a_{km} a_{ln} C_{pqmn}^h(y) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ip} a_{jq} a_{kn} a_{lm} [C_{pqmn}(y) + C_{pq\alpha\beta} e_{\alpha\beta}(\chi^{mn}) \\ &\quad + g_{\gamma pq} \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial y_\gamma}] dy \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_Y [C_{ijkl}(y') + C_{ijrs} e_{rs}(\chi^{kl}(y')) + g_{\gamma ij}(y') \frac{\partial \Psi^{kl}(y')}{\partial y_\gamma}] dy' \\ &= C_{ijkl}^h(y') \end{aligned}$$

de même on a

$$\begin{aligned} a_{ip} a_{jq} a_{km} g_{pqm}^h(y) &= \frac{1}{|Y|} \int_y a_{ip} a_{jq} a_{km} [g_{pqm}(y) + C_{qmr s} \frac{\partial \Phi_r^p}{\partial y_s} \\ &\quad + g_{lqm} \frac{\partial R^p}{\partial y_l}] dy \\ &= \frac{1}{|Y|} \int_y [g_{ijk}(y') + C_{jkr s}(y') \frac{\partial \Phi_r^i(y')}{\partial y_s} + g_{ljk}(y') \frac{\partial R^i(y')}{\partial y_l}] dy' \\ &= g_{ijk}^h(y') \end{aligned}$$

5.7 PROPRIÉTÉS D'ISOTROPIE DES STRUCTURES CONSIDÉRÉES 133

et aussi

$$\begin{aligned}
 a_{ip}a_{jq}\epsilon_{pq}^h(y) &= \frac{1}{|Y|} \int_Y a_{ip}a_{jq}[-g_{pkl}(y) \frac{\partial \Phi_k^q}{\partial y_l} \\
 &\quad + \epsilon_{pk} \frac{\partial R^q}{\partial y_k} + \epsilon_{pq}] dy \\
 &= \frac{1}{|Y|} \int_Y -g_{ikl}(y') \frac{\partial \Phi_k^j(y')}{\partial y_l} + \epsilon_{ik}(y') \frac{\partial R^j(y')}{\partial y_k} + \epsilon_{ij}(y') dy' \\
 &= \epsilon_{ij}^h(y')
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 a_{ip}a_{jq}a_{km}a_{ln}C_{pqmn}^h(y) &= C_{ijkl}^h(y') = C_{ijkl}^{h'} & (5.63) \\
 a_{ip}a_{jq}a_{km}g_{pqm}^h(y) &= g_{ijk}^h(y') = g_{ijk}^{h'} \\
 a_{ip}a_{jq}\epsilon_{pq}^h(y) &= \epsilon_{ij}^h(y') = \epsilon_{ij}^{h'}
 \end{aligned}$$

La cellule de base reste invariante par la symétrie par rapport à $y_1 = 0$ la matrice de transformation a est de la forme

$$a = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

en utilisant (5.63) et en tenant compte de(5.64) la matrice d'élasticité prend la forme

$$\begin{bmatrix} C_{1111} & C_{1122} & C_{1133} & C_{1123} & 0 & 0 \\ C_{2211} & C_{2222} & C_{2233} & C_{2223} & 0 & 0 \\ C_{3311} & C_{3322} & C_{3333} & C_{3323} & 0 & 0 \\ & & & C_{2323} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313} & C_{1312} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1312} & C_{1212} \end{bmatrix} \quad (5.65)$$

et la matrice de piézoélectricité prend la forme

$$\begin{bmatrix} g_{111}^h & g_{122}^h & g_{133} & g_{123}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{213}^h & g_{212}^h \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{313}^h & g_{312}^h \end{bmatrix}$$

et aussi la matrice diélectrique

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^h & \epsilon_{23}^h \\ 0 & 0 & \epsilon_{32}^h & \epsilon_{33}^h \end{bmatrix}$$

de même la cellule de base reste invariante par rapport à Oy_2 la matrice de la transformation est donnée par

$$a = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

en utilisant (5.63) et en tenant compte de (5.65) et (5.66) la matrice d'élasticité prend la forme

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211}^h & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311}^h & C_{3322}^h & C_{3333}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1212}^h \end{bmatrix}$$

et la matrice de la piezoélectricité prend la forme

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g_{213}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & g_{312}^h \end{bmatrix}$$

et aussi la matrice dielectrique

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h \\ \epsilon_{22}^h \\ \epsilon_{33}^h \end{bmatrix}$$

ce qui termine la démonstration ■

5.7.2 Isotropie de la structure ostéonale

On considère un empilement périodique de couches constitué de deux types de couches. Chaque couche est constituée d'un composite unidirectionnel. L'empilement est caractérisé par l'orientation des fibres qui change en alternance d'une couche à l'autre.

Dans ce cas la cellule de base peut être choisie comme on l'avait vu au paragraphe 5.5. Le repère orthonormé $(Oy_1y_2y_3)$ est tel que O soit le barycentre du cube et les axes Oy_1 et Oy_2 soient portées par les bissectrices des angles formés par deux fibres de deux couches consécutives. La cellule de base est donc la suivante:

$$Y = \left] -\frac{Y_1}{2}, \frac{Y_1}{2} \left[\times \left] -\frac{Y_2}{2}, \frac{Y_2}{2} \left[\times \left] -\frac{Y_3}{2}, \frac{Y_3}{2} \left[$$

Elle reste invariante par les rotations d'angles π , $\frac{\pi}{2}$ et $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'axe Oy_3 .

Proposition 29 *les matrices des coefficients homogénéisés correspondant à l'empilement de couches défini ci-dessus ont les formes suivants:*

pour le tenseur d'élasticité:

$$\begin{pmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & 0 \\ C_{2211}^h & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & 0 \\ C_{3311}^h & C_{3322}^h & C_{3333}^h & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}^h & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{1313}^h & 0 \\ & & 0 & 0 & 0 & C_{1212}^h \end{pmatrix}$$

pour le tenseur piézoélectrique:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & 0 & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

pour le tenseur diélectrique:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{33}^h \end{bmatrix}$$

Preuve. Tout d'abord les coefficients homogénéisés de l'empilement vérifient les relations (5.63).

La cellule de base reste invariante par la rotation d'angle π , sa transformation est donnée par

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.67)$$

et en tenant compte de (5.63) et (5.67) on obtient

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & C_{1112}^h \\ C_{2211}^h & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & C_{2212}^h \\ C_{3311}^h & C_{3322}^h & C_{3333}^h & 0 & 0 & C_{3312}^h \\ 0 & 0 & 0 & C_{2323}^h & C_{2313}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{1323}^h & C_{1313}^h & 0 \\ C_{1211}^h & C_{1222}^h & C_{1233}^h & 0 & 0 & C_{1212}^h \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & g_{213}^h & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & g_{312}^h \end{bmatrix} \quad (5.69)$$

et

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & \epsilon_{12}^h & 0 \\ \epsilon_{21}^h & \epsilon_{22}^h & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_{22}^h \end{bmatrix} \quad (5.70)$$

De plus, la cellule de base est invariante par la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$, qui a pour transformation

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

5.7 PROPRIÉTÉS D'ISOTROPIE DES STRUCTURES CONSIDÉRÉES 137

En utilisant (5.63),(5.71),(5.68),(5.69) et(5.70) on obtient

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & C_{1112}^h \\ & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333}^h & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323}^h & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313}^h & 0 \\ C_{1112}^h & 0 & & & & C_{1212}^h \end{bmatrix} \quad (5.72)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & g_{123}^h & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & g_{213}^h & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5.73)$$

et

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & 0 & 0 \\ & \epsilon_{22}^h & 0 \\ & & \epsilon_{33}^h \end{bmatrix} \quad (5.74)$$

de même la cellule de base est invariante par le plan d'équation $y_1 = 0$ qui a pour transformation

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.75)$$

En utilisant (5.63),(5.75),(5.72),(5.73) et(5.74) on obtient

$$\begin{bmatrix} C_{1111}^h & C_{1122}^h & C_{1133}^h & 0 & 0 & 0 \\ & C_{2222}^h & C_{2233}^h & 0 & 0 & 0 \\ & & C_{3333}^h & 0 & 0 & 0 \\ & & & C_{2323}^h & 0 & 0 \\ & & & & C_{1313}^h & 0 \\ & & & & & C_{1212}^h \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & g_{113}^h & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{223}^h & 0 & 0 \\ g_{311}^h & g_{322}^h & g_{333}^h & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et

$$\begin{bmatrix} \epsilon_{11}^h & 0 & 0 \\ & \epsilon_{22}^h & 0 \\ & & \epsilon_{33}^h \end{bmatrix}$$

ce qui achève la démonstration ■

5.8 Conclusions

Le but de cette modélisation était de décrire un modèle numérique permettant le calcul des caractéristiques homogénéisées de la structure composite multi-échelle de l'os cortical humain.

L'étude permet de concevoir pour l'os un modèle semi-descriptif. La modélisation que nous venons de proposer apporte un plus par rapport aux modèles existants. Premièrement, le modèle tient compte de la structure hiérarchique de l'os compact, deuxièmement, la simulation numérique est basée sur une technique d'homogénéisation reposant sur des résultats mathématiques.

Grâce à certaines hypothèses, nous avons contribué à la formulation des problèmes cellulaires sous une forme permettant l'utilisation de la technique des éléments finis en vue de leur résolution.

L'utilisation de ce modèle permet, d'une part, l'étude des variations des coefficients homogénéisés de l'os compact en fonction des différents paramètres mécaniques et géométriques de ses constituants, et d'autre part, l'étude du champ de contraintes au niveau des hétérogénéités.

Pour mieux appréhender l'aspect piézoélectrique de ce milieu osseux, on va s'intéresser à un cas très particulier qui apparaît dans le processus de remodelage : celui où les ostéoclastes viennent de creuser une galerie et le tissu collagénique n'est pas encore apparu. La cavité ainsi construite ne contient que du fluide. La question naturelle est : quelles sont alors les propriétés physiques de la paroi ?

Chapitre 6

Propriétés physiques de la paroi cavitaire ostéonale

Lors de la première phase du remodelage osseux, les ostéoclastes creusent une galerie dans l'os surminéralisé. Des bâtonnets de collagène qui étaient totalement entourés par une structure cristalline d'Hap deviennent partiellement libres. Intuitivement on imagine bien la combinaison des deux effets physico-chimiques suivants : d'une part, la structure cristalline étant affaiblie autour de ces bâtonnets, l'effet piézoélectrique de ce collagène de surface peut augmenter et d'autre part, cette augmentation du potentiel électrique pourrait favoriser la minéralisation par l'apparition d'un environnement riche en ions minéraux dans lequel l'activité des protéines et des cellules responsables de l'apposition minérale serait optimal.

Il nous a donc paru intéressant d'estimer les propriétés physiques de cette paroi. A cette fin, nous allons développer une modélisation spécifique de la paroi qui est considérée comme un film mince et utiliser à nouveau la théorie de l'homogénéisation. Le développement est essentiellement de nature mathématique. Nous résolvons un problème de convergence.

6.1 Position du problème

On considère un tube Ω dont la frontière $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4$. $\partial\Omega_1$ est divisée en n surfaces $S_{\varepsilon,1}, \dots, S_{\varepsilon,n}$ de diamètre ε . Par ailleurs, on considère des surfaces $T_{\varepsilon,1}, \dots, T_{\varepsilon,n}$ incluses dans $S_{\varepsilon,1}, \dots, S_{\varepsilon,n}$ et telles que le diamètre de $T_{\varepsilon,j}$ vaille r avec $r < \varepsilon$. Ces surfaces $T_{\varepsilon,1}, \dots, T_{\varepsilon,n}$ représentent les parties de collagène localisées sur la paroi.

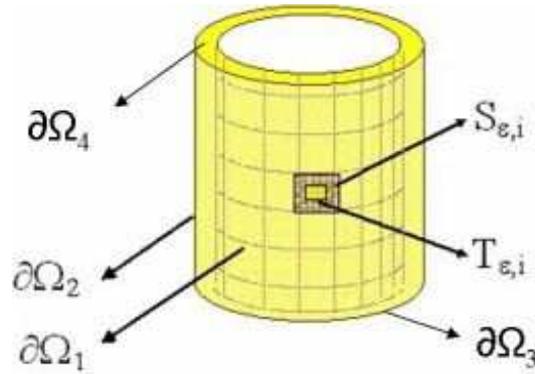


Figure 6.1: Modélisation de la paroi

On note $S_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n S_{\varepsilon,i}$ et $T_\varepsilon = \bigcup_{i=1}^n T_{\varepsilon,i}$.

Dans ce domaine Ω on considère le problème classique de piézoélectricité (P_{piezo}) :

$$(P_{piezo}) \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i^\varepsilon = c_i, \quad i = 1, 2, 3 & \text{sur } T_\varepsilon \\ \varphi^\varepsilon = d & \text{sur } T_\varepsilon \\ u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } S_\varepsilon \setminus T_\varepsilon \\ u^\varepsilon = \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{array} \right.$$

où:

u^ε	champ de déplacement
$e_{kl}(u^\varepsilon)$	tenseur de déformation
φ^ε	potentiel électrique
$\frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}$	vecteur champ électrique
$b = (b_1, b_2, b_3)$	densité volumique de forces dans Ω
$C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}$	tenseur des contraintes
$G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k}$	vecteur de déplacement électrique

On suppose que les coefficients élastiques, piézoélectriques et diélectriques satisfont les conditions suivantes:

- **symétrie:** $C_{ijkl} = C_{klij} = C_{jikl} = C_{ijlk}$; $G_{ijk} = G_{ikj}$; $\alpha_{ij} = \alpha_{ji}$
- **positivité:** $\exists \alpha > 0$ t. q. $C_{ijkl} \cdot e_{ij} \cdot e_{kl} \geq \alpha \|e\|^2$, $\forall e \in M_S^3$
 $\exists \beta > 0$ t. q. $\alpha_{ij} \cdot a_i \cdot a_j \geq \beta \|a\|_{R^3}^2$, $\forall a \in R^3$
- **bornétude:** C_{ijkl} , G_{ijk} et $\alpha_{ij} \in L^\infty(\Omega)$

6.2 Existence et unicité de la solution

Théorème 30 *Le problème (P_{piezo}) admet une solution unique $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon), (u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$*

Preuve. Soient $g^\varepsilon = (g_1^\varepsilon, g_2^\varepsilon, g_3^\varepsilon) \in (H^1(\Omega))^3$ et $h^\varepsilon \in H^1(\Omega)$ telles que:

$$\left\{ \begin{array}{ll} g_i^\varepsilon = c_i, & i = 1, 2, 3 & \text{sur } T_\varepsilon \\ h^\varepsilon = d & & \text{sur } T_\varepsilon \\ g_i^\varepsilon = h^\varepsilon = 0 & & \text{sur } S_\varepsilon \setminus T_\varepsilon \\ g_i^\varepsilon \text{ et } h^\varepsilon \text{ sont uniformément bornées dans } H^1(\Omega) & & \end{array} \right.$$

On considère:
$$\left\{ \begin{array}{l} w^\varepsilon = u^\varepsilon - g^\varepsilon \\ \Psi^\varepsilon = \varphi^\varepsilon - h^\varepsilon \end{array} \right.$$

Alors, le problème piézoélectrique (P_{piezo}) équivaut à:

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) = b_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(g^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_k} \right) & \text{dans } \Omega \quad (1) \\ = b_i^\varepsilon & \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) = -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(g^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial h^\varepsilon}{\partial x_k} \right) & \text{dans } \Omega \quad (2) \\ = c^\varepsilon & \\ w^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ \Psi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right.$$

On multiplie (1) par $v_i \in H_0^1(\Omega)$ et (2) par Ψ ; en utilisant la formule de Green on obtient:

$$\begin{aligned} a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (v, \Psi)) &= L(v, \Psi), \forall (v, \Psi) \in (H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega), \text{ où} \\ a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (v, \Psi)) &= \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot e_{ij}(v) dx - \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx \end{aligned}$$

$$\text{et } L(v, \Psi) = \int_{\Omega} b_i^\varepsilon \cdot v_i dx + \int_{\Omega} c^\varepsilon \cdot \Psi dx$$

$a(\bullet, \bullet)$ est une forme bilinéaire et continue sur $\left((H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega)\right)^2$

$L(\bullet, \bullet)$ est une forme linéaire et continue sur $(H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega)$

$$\text{On a: } a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)) = \int_{\Omega} C_{ijkl} \cdot e_{kl}(w^\varepsilon) \cdot e_{ij}(w^\varepsilon) dx + \int_{\Omega} \left[\alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \Psi^\varepsilon}{\partial x_j} \right] dx$$

$$\begin{aligned} \text{donc } a((w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon), (w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)) &\geq \alpha \cdot \sum_{i=1}^3 \|w_i^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 + \beta \cdot \|\Psi^\varepsilon\|_{1,\Omega}^2 \geq \\ &\geq \min\{\alpha, \beta\} \cdot \|(w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)\|_{(H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega)}^2 \end{aligned}$$

Alors, $a(\bullet, \bullet)$ est aussi coercive sur $\left((H_0^1(\Omega))^3 \times H_0^1(\Omega)\right)^2$

D'après le théorème de Lax-Milgram on a existence et unicité pour $(w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ solution du système (P) .

Donc

$$(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) = (w^\varepsilon + g^\varepsilon, \Psi^\varepsilon + h^\varepsilon)$$

est l'unique solution du problème (P_{piezo}) ■

6.3 Limite du système (P_{piezo})

Théorème 31 *La solution du problème (P_{piezo}) converge faiblement quand $\varepsilon \rightarrow 0$ vers $(u, \varphi) \in (H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ solution du problème:*

$$(P_{\text{lim}}) \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) & = b_i & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) & = 0 & \text{dans } \Omega \\ u_i & = \gamma c_i, i = 1, 2, 3 & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \varphi & = \gamma d & \text{sur } \partial\Omega_1 \\ u^\varepsilon & = \varphi^\varepsilon = 0 & \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{cases}$$

avec $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon} \in (0, 1)$

Preuve. $(w^\varepsilon, \Psi^\varepsilon)$ est uniformément bornée dans $(H^1(\Omega))^3 \times H^1(\Omega)$ donc $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon)$ l'est aussi. On conclut qu'il existe (u, φ) t.q. $(u^\varepsilon, \varphi^\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} (u, \varphi)$

En multipliant (P_{piezo}) par $v_i \in D(\Omega)$ et $\Psi \in D(\Omega)$ on obtient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \cdot e_{ij}(v_i) dx = \int_{\Omega} b_i \cdot v_i dx \\ \int_{\Omega} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = 0 \end{cases}$$

Par passage à la limite il vient

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \cdot e_{ij}(v_i) dx = \int_{\Omega} b_i \cdot v_i dx, \forall v_i \in H^1(\Omega) \\ \int_{\Omega} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) \cdot \frac{\partial \Psi}{\partial x_j} dx = 0, \forall \Psi \in H^1(\Omega) \end{cases}$$

donc

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x_j} \left(C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = b_i \text{ dans } \Omega \\ \frac{\partial}{\partial x_j} \left(G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right) = 0 \text{ dans } \Omega \end{cases}$$

On calcule les valeurs de u sur la frontière de Ω . En multipliant (P_{piezo}) par u^ε et en utilisant la formule de Green on aura

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} dx - \\ & - c_i \cdot \int_{T_\varepsilon} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \int_{\Omega} b_i \cdot u_i^\varepsilon dx \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} & \int_{T_\varepsilon} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \\ & = \sum_i \int_{T_{\varepsilon,i}} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \\ & = \left\langle \mu_\varepsilon, \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j(x) \right\rangle_{H^{-1}(\Omega), H^1(\Omega)} \quad \text{où} \\ & \mu_\varepsilon = \sum_i \delta_{T_{\varepsilon,i}}, \text{ avec } \langle \delta_{T_{\varepsilon,i}}, \Psi \rangle = \int_{T_{\varepsilon,i}} \Psi(x) d\sigma \end{aligned}$$

$$\text{On a } \langle \mu_\varepsilon, \Psi \rangle = \int_{T_\varepsilon} \Psi(x) d\sigma =$$

$$= \frac{r}{\varepsilon} \cdot \sum_i \varepsilon \cdot \left(\frac{1}{r} \cdot \int_{T_{\varepsilon,i}} \Psi(x) d\sigma \right)$$

Donc $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle \mu_\varepsilon, \Psi \rangle = \gamma \cdot \int_{\partial\Omega_1} \Psi(x) d\sigma$, avec $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon}$

Alors, $\mu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{-} \gamma \cdot d\sigma_{\partial\Omega_1}$ faible dans $H^{-1}(\Omega)$, où

$$\langle d\sigma_{\partial\Omega_1}, \Psi \rangle = \int_{\partial\Omega_1} \Psi(x) d\sigma, \forall \Psi \in H^1(\Omega)$$

Comme $0 \leq \mu_\varepsilon \leq d\sigma_{\partial\Omega_1}$ on déduit que $\mu_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \rightarrow 0]{} d\sigma_{\partial\Omega_1}$ fort dans $H^1(\Omega)$

On obtiendra

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{T_\varepsilon} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \\ = \gamma \cdot \int_{\partial\Omega_1} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma \end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial u_i^\varepsilon}{\partial x_j} dx - \\ - \gamma \cdot c_i \cdot \int_{\partial\Omega_1} \left[C_{ijkl} \cdot e_{kl}(u) + G_{kij} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot n_j d\sigma = \int_{\Omega} b_i \cdot u_i dx, \text{ d'où} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_i &= \gamma \cdot c_i, \quad i = 1, 2, 3 && \text{sur } \partial\Omega_1 \\ u_i &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

On va procéder de la même manière pour trouver les valeurs de φ sur la frontière de Ω . En multipliant (P_{piezo}) par φ^ε et en utilisant la formule de Green, on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_j} dx - \\ - d \cdot \int_{T_\varepsilon} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u^\varepsilon) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi^\varepsilon}{\partial x_j} \cdot n_j d\sigma = 0 \end{aligned}$$

On passe à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} dx - \\ - \gamma \cdot d \cdot \int_{\partial\Omega_1} \left[G_{jkl} \cdot e_{kl}(u) - \alpha_{jk} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \cdot n_j d\sigma = 0 \end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \varphi &= \gamma \cdot d && \text{sur } \partial\Omega_1 \\ \varphi &= 0 && \text{sur } \partial\Omega_2 \cup \partial\Omega_3 \cup \partial\Omega_4 \end{aligned}$$

donc (u, φ) vérifie le problème (P_{\lim}) , avec $\gamma = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{r}{\varepsilon} \in (0, 1)$ ■

6.4 Conclusions

On est amené à faire une étude sur la phase initiale du remodelage osseux. On voudrait savoir s'il est possible d'estimer les propriétés piézoélectriques de la paroi de la galerie creusée par les ostéoclastes.

L'intérêt de ce théorème est de montrer que les coefficients homogénéisés sont proportionnels au terme que nous avons noté γ . Ce terme est la limite du rapport entre la taille, dans la période considérée, du domaine occupé par le collagène et la dimension de la période. Donc, dans tous les cas, on a $r < \varepsilon$ avec une inégalité stricte. De manière plus concrète, dans le cas numérique que nous traitons dans le chapitre des résultats, nous aurons une valeur de γ proche de 0.7.

Il apparaît donc clairement que les propriétés homogénéisées obtenues sur ce pourtour sont diminuées. Il semble donc qu'une telle organisation ne soit pas propice à un processus immédiat de minéralisation sur le pourtour de la paroi. Ce résultat est physiquement réaliste cependant, en l'absence de tout autre élément d'information, il nous est difficile d'expliquer pourquoi le processus de remodelage commence par l'apparition de collagène sur ce pourtour.

Chapitre 7

Nouvelle modélisation de la structure de l'os compact

7.1 Introduction

Au cours des chapitres précédents, nous avons introduit différentes notions dans l'espoir de modéliser au mieux le comportement de l'os cortical. Malgré tous nos efforts, nous n'y sommes pas encore parvenus. En effet, les quelques tests que nous avons réalisés montrent tous que notre modèle d'os cortical a un comportement piézo électrique au niveau macroscopique. Or il est maintenant bien admis qu'à ce niveau l'os cortical n'est pas un matériau piézo électrique. Cette différence peut s'expliquer de la manière suivante.

Sur le plan méthodologique, dans le cadre de la théorie de l'homogénéisation, lorsqu'on se donne une seule loi de comportement pour les composants élémentaires, cette loi est conservée par tous les développements réalisés car ils ne prennent en compte que les valeurs des propriétés physiques et les géométries des composants.

Sur le plan physiologique, les bâtonnets de collagène sont très fins et les cristaux d'Hap, encore plus fins, vont se déposer autour d'eux de manière à former une gaine quasiment continue. Dans le cas d'une minéralisation très avancée, le bâtonnet de collagène se trouve donc totalement "emprisonné" dans cette gaine cristalline.

Sur le plan physique, si l'on se place dans le cadre d'une forte minéralisation et si cette structure est soumise à un chargement mécanique, on constate que le champ de contraintes est essentiellement localisé dans la partie cristalline. Il n'est pas nécessaire de présenter ici des résultats numériques issus d'un calcul de structure classique pour montrer que lorsque la minéralisation augmente, l'effet piézoélectrique dû au collagène

diminue. La difficulté ne consiste pas à mettre en évidence ce phénomène mais à le quantifier, la modélisation étant particulièrement complexe.

Sur le plan de la modélisation, on pourrait introduire deux lois aux niveaux des composants de base : une loi piézo électrique pour le collagène et une loi élastique pour l'Hap et reprendre un nouveau développement dans le cadre de l'homogénéisation. Cependant, cela revient à ne plus considérer le domaine minéralisé comme un milieu poreux et on a vu que ce point était une avancée considérable car il permet d'avoir les écoulements et les pressions au niveau ostéonal.

Pour lever cette difficulté, on introduit tout d'abord une nouvelle loi de comportement, dite avec seuil, dans laquelle les termes piézo électriques s'évanouissent si une certaine condition est réalisée.

Les remarques ci-dessus concernent le comportement mécanique de la partie solide du cortical. Or nous avons introduit, au chapitre 5, un fluide contenant des ions minéraux et pouvant s'écouler dans cette structure de milieu poreux. Il faut rappeler que cette notion a été introduite afin de formaliser correctement le problème d'homogénéisation, puisque ceci nous permettait d'avoir des tenseurs élastiques et diélectriques non nuls dans tout le domaine considéré. Le troisième paragraphe de ce chapitre est donc consacré au rôle et à la modélisation de ce fluide.

On peut enfin présenter, au dernier paragraphe, la modélisation dans son ensemble.

7.2 Nouvelle loi de comportement

Une nouvelle loi de comportement est introduite dans le but d'avoir un modèle beaucoup plus réaliste sur le plan physiologique. Le caractère spécifique de la piézoélectricité au niveau macroscopique de l'os cortical pourrait se résumer comme suit :

- dans un os sain, il n'y a pas d'effet piézoélectrique
- dans un cas pathologique (comme celui du début d'un allongement osseux) les aspects piézoélectriques sont localement présents au niveau macroscopique puisqu'il n'y a que du collagène

Quelle est l'origine du problème?

Dans le développement de l'actuelle modélisation, les coefficients piézoélectriques apparaissent comme une moyenne où interviennent 3 parties :

- la valeur initiale
- la valeur initiale perturbée par le gradient de la fonction d'influence R
- un terme de couplage où apparaissent les constantes élastiques C_{ijmn} et le gradient de la fonction d'influence Φ

Cette décomposition est résumée dans l'expression

$$g_{kij}^h = \langle g_{kij}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m} + C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n} \rangle$$

et la fonction d'influence Φ apparaît dans l'expression du terme correcteur de premier ordre du champ de déplacements.

$$\mathbf{u}_k^1(x, y) = \chi_k^{mn}(y) e_{mnx}(\mathbf{u}) + \Phi_k^m(y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_m}$$

Analysons la composition des coefficients piézoélectriques homogénéisés. Ils sont le résultat de deux termes d'origine différente

- 1) le terme $g_{kij}(y) + g_{mij}(y) \frac{\partial R^k(y)}{\partial y_m}$

Il correspond à la partie purement piézoélectrique et il intervient dans le calcul de la moyenne, lors de la première homogénéisation, pour 40 % puisque le collagène occupe 40 % du volume osseux. Dans les autres homogénéisations, un terme équivalent apparaîtra systématiquement sur la période entière puisque les composants de base auront des propriétés homogénéisées piézoélectriques ! Il s'ensuit que ce terme piézoélectrique ne peut jamais disparaître.

- 2) le terme $C_{ijmn}(y) \frac{\partial \Phi_m^k(y)}{\partial y_n}$

Il correspond au couplage avec les phénomènes élastiques. Il peut même, si la fonction Φ n'est pas constante dans la partie de la période occupée par l'Hap ou le fluide, apporter une perturbation non négligeable.

En conséquence, il est vain, avec une telle modélisation de vouloir simuler à la fois les cas sains et les cas pathologiques. Il nous faut donc concevoir une *nouvelle loi de comportement* qui prenne mieux en compte le processus de minéralisation.

Pour une meilleure investigation de cet aspect, considérons maintenant le processus d'homogénéisation au niveau fibrillaire. Il y a trois phases dans la cellule de base: le collagène qui est un milieu piézoélectrique, les EVMC qui ont seulement des propriétés élastiques et diélectriques et le fluide entourant les deux composants précédents. Dans ce cadre ci, ce fluide est supposé être caractérisé par une pression constante et des propriétés diélectriques constantes dans la cellule de base. Les deux lois constitutives modelisant le phénomène piézoélectrique, à l'échelle des composants, sont les suivants:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \left[C_{ijkh}^{\text{col}} \cdot e_{kh}^{\text{col}} + g_{kij}^{\text{col}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \chi^{\text{col}} + \left[C_{ijkh}^{\text{EVMC}} \cdot e_{kh}^{\text{EVMC}} \right] \cdot \chi^{\text{EVMC}} + p \cdot Id \cdot \chi^{\text{fluid}} \\ D_i = \left[g_{ikh}^{\text{col}} \cdot e_{kh}^{\text{col}} - \varepsilon_{ik}^{\text{col}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \chi^{\text{col}} - \varepsilon_{ik}^{\text{EVMC}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \chi^{\text{EVMC}} - \varepsilon_{ik}^{\text{fluid}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \chi^{\text{fluid}} \end{cases} \quad (7.1)$$

où χ est la fonction caractéristique

$$\chi^{EVMC}(M) = \begin{cases} 1, & \text{si } M \text{ appartient au domaine occupé par les EVMC} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

La technique d'homogénéisation donne des coefficients d'une loi de comportement homogénéisés piézoélectrique:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \left[C_{ijkh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}} + g_{kij}^{\text{hom lam}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \\ D_i = \left[g_{ikh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}} - \varepsilon_{ik}^{\text{hom lam}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \end{cases} \quad (7.2)$$

ce qui signifie que cette loi piézoélectrique caractérise entièrement le comportement de la lamelle à l'échelle lamellaire. Regardons de plus proche les deux cas contraires suivants:

- *le secteur lamellaire considéré n'est pas minéralisé*: dans ce cas, $\chi^{EVMC}(M) = 0$ et les lois constitutives deviennent:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \left[C_{ijkh}^{\text{col}} \cdot e_{kh}^{\text{col}} + g_{kij}^{\text{col}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \chi^{\text{col}} + p \cdot Id \cdot \chi^{\text{fluid}} \\ D_i = \left[g_{ikh}^{\text{col}} \cdot e_{kh}^{\text{col}} - \varepsilon_{ik}^{\text{col}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \cdot \chi^{\text{col}} - \varepsilon_{ik}^{\text{fluid}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \cdot \chi^{\text{fluid}} \end{cases} \quad (7.3)$$

Le résultat de l'homogénéisation est une loi piézoélectrique. Ce point est absolument cohérent.

- *le secteur lamellaire considéré est surminéralisé*

Avant de présenter une formulation mathématique, il est nécessaire de décrire le processus physique. L'ensemble de cristaux d'Hap fonctionne comme une matrice entourant les bâtonnets de collagène. A cause de la grande disproportion existant entre les propriétés élastiques du collagène et de l'Hap, quand un chargement est appliqué, les contraintes les plus élevées sont situées dans l'Hap et les valeurs survenant dans le collagène sont très faibles. Ainsi, l'effet piézoélectrique induit par ces contraintes est lui aussi très faible. Donc le champ électrique induit à une valeur faible et seulement un effet local, dans le collagène lui même ou son voisinage immédiat. En effet, les coefficients diélectriques associées aux EVMC sont devenus plus faibles car la plupart des ions qui étaient à l'origine de ces coefficients ont disparu pour donner naissance à des cristaux d'Hap et ceux qui n'ont pas été utilisés sont "emprisonnés" dans la structure cristalline. Ne pouvant ainsi plus circuler, il n'engendrent plus le potentiel électrique qu'ils génèraient auparavant.

En résumé, si une telle structure est observée "de l'extérieur", c'est-à-dire à une échelle macroscopique, l'effet piézoélectrique ne peut pas être "vu" ou ne peut pas être détecté. La structure d'Hap, avec son architecture spécifique, a donc le même effet que celui d'une "boite électriquement isolante."

Avant d'introduire la nouvelle loi, nous présentons deux notations:

m_d la minéralisation courante

m_{d_s} la valeur du seuil de la minéralisation à partir de laquelle l'imperméabilité électrique est efficace

puis nous introduisons la fonction définie par:

$$\mu = \frac{(m_{d_s} - m_d)_+}{m_{d_s}}$$

où $(m_{d_s} - m_d)_+$ est la "partie positive" de la fonction $m_{d_s} - m_d$.

Maintenant, au lieu de considérer la loi homogénéisée obtenue auparavant :

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = \left[C_{ijkh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}} + g_{kij}^{\text{hom lam}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \\ D_i = \left[g_{ikh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}} - \varepsilon_{ik}^{\text{hom lam}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \end{cases}$$

on considère la nouvelle formulation:

$$\begin{cases} \sigma_{ij} = C_{ijkh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}} + \mu \cdot g_{kij}^{\text{hom lam}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \\ D_i = \mu \cdot \left[g_{ikh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}} - \varepsilon_{ik}^{\text{hom lam}} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right] \end{cases} \quad (7.4)$$

Il est facile de voir que:

- s'il y a aucune minéralisation, alors $m_d = 0$ et $\mu = 1$ et la première loi homogénéisée (7.2) est obtenue

- si la minéralisation courante est plus grande ou égale à la valeur seuil, alors $\mu = 0$ et la loi homogénéisée est une loi élastique classique

$$\sigma_{ij} = C_{ijkh}^{\text{hom lam}} \cdot e_{kh}^{\text{hom lam}}$$

En conclusion, cette nouvelle loi de comportement change de nature physique avec un seuil sur l'état de minéralisation. D'une manière plus générale, nous pourrions dire que, lorsqu'on étudie, à une échelle donnée, une structure composite ayant des composants possédant des propriétés piézoélectriques, l'effet piézoélectrique ne peut être considéré à l'échelle supérieure que si le milieu entourant cette structure n'est pas trop rigide.

Il est naturel de se demander si le choix d'un critère établi sur une valeur seuil de la minéralisation est judicieux car il est évident qu'il est difficile, voire impossible d'obtenir des informations sur cette entité au niveau expérimental.

D'après la description physique que nous avons faite, il serait plus raisonnable d'introduire des rapports de contraintes (ou des rapports de déformations) comme valeur seuil. C'est cette direction qui a d'abord retenu notre attention. Mais nous avons vite constaté d'une part, que les quelques rapports que nous avons testés étaient liés à une valeur de minéralisation et d'autre part, que les valeurs de ces rapports dépendaient de l'échelle à laquelle on étudiait le phénomène.

Après réflexion, il semble qu'il faille étudier le champ électrique existant dans la structure des EVMC pour savoir à partir de quel degré de minéralisation, l'effet de milieu électriquement isolant apparaît. Ce point est d'autant plus intéressant qu'il est indépendant de l'échelle à laquelle on se place mais, faute de temps, nous n'avons pas pu développer cette voie.

Pour les simulations numériques que nous avons réalisées et en l'absence de tout résultat obtenu à partir de critères mécaniques, nous avons choisi arbitrairement une valeur seuil qui correspond, dans nos simulations, à la valeur minimale que nous prenons pour le système interstitiel.

Enfin, une dernière difficulté doit être signalée : le retour au niveau microscopique ne peut plus être obtenu comme précédemment et il nous faut développer un autre processus : nous utiliserons des techniques issues du calcul de structure ou des formulations de problèmes inverses.

La conséquence principale d'une telle loi de modélisation est que la structure ostéonale, dans l'os sain, sera toujours un milieu élastique étant donné que la minéralisation dans le système interstitiel est égale ou plus grande que la valeur seuil.

7.3 Rôle du fluide

Le fluide que nous considérons dans la structure osseuse a de bonnes propriétés : on le suppose newtonien, visqueux et incompressible. La nature de son écoulement est double et dépend de sa position dans le milieu

- Dans la structure ostéonale (et donc dans le système interstitiel) son écoulement est celui d'un fluide dans un milieu poreux : on utilise alors une équation d'écoulement avec une modélisation de la vitesse de filtration par la loi de Darcy. Ce fluide transporte des ions minéraux et la modélisation de ce phénomène se fait de manière classique par des équations de transport qui sont couplées à l'équation d'écoulement par un terme de masse. Nous présentons d'abord ces équations d'écoulement et de

transport et leur couplage, puis la problématique associée à la prise en compte actuelle de ce couplage.

- Dans les canaux de Havers ou de Volkmann, il s'écoule comme dans des tubes et on utilise l'équation de Stokes.

Par ailleurs, il est nécessaire d'introduire le couplage entre ces deux modes d'écoulement.

On précise à chaque fois que cela est nécessaire le choix des conditions limites qu'il est possible d'utiliser.

7.3.1 Notations

On présente ici les notations utilisées dans ce paragraphe.

ρ masse spécifique

μ viscosité

K coefficient de perméabilité

g accélération gravitationnelle

k perméabilité intrinsèque [m^2]

\vec{q} vitesse

P pression

S_s coefficient d'émagasinement

C concentration de la soluté

D tenseur de dispersion

Q_S terme source de l'équation de transport

Le coefficient de perméabilité exprime l'aptitude d'un milieu poreux à se laisser traversé par un fluide. Sa valeur dépend à la fois du fluide et de la matrice solide et son expression est:

$$K = \frac{\rho \cdot g \cdot k}{\mu}$$

Pour le problème qu'on étudie le paramètre k a une grande importance car il peut subir des variations significatives selon l'architecture de l'ostéon et en particulier selon l'orientation des fibres de collagène.

7.3.2 Equations en milieu poreux

Dans cette section on présente les équations qui régissent l'écoulement et le transport dans un milieu poreux.

Equation de l'écoulement

Pour un milieu poreux les équations de Navier-Stokes ne sont pas applicables directement. On peut appliquer par contre la loi de Darcy qui relie bien la pression, la vitesse et les forces extérieures. Elle peut se formuler de cette manière:

$$\vec{q} = -\frac{k}{\mu} \cdot (\vec{\nabla} P - \rho \cdot \vec{g}) \quad (7.5)$$

où \vec{q} est appelée la *vitesse de Darcy*. Cette relation est valable pour un milieu poreux isotrope ce qui n'est pas le cas dans notre problème, notre milieu étant anisotrope et non homogène. Cependant, on peut toujours utiliser la formule (7.5) si on remplace la perméabilité intrinsèque k par un tenseur de perméabilité.

Le problème d'écoulement se formalise alors comme suit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } P : \Omega \times (0, T) \rightarrow R & \text{telle que:} \\ S_s \cdot \frac{\partial P}{\partial t} + \text{div} \left[-\rho \cdot \frac{k}{\mu} \cdot (\vec{\nabla} P - \rho \cdot \vec{g}) \right] = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ + \text{C.L.} & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ + \text{C.I.} & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.6)$$

Les conditions aux limites sont de l'un de types suivants:

- Dirichlet:

$$P = P^* \text{ sur } \Gamma_1$$

- Neumann:

$$\rho \cdot \frac{k}{\mu} \cdot (\vec{\nabla} P - \rho \cdot \vec{g}) \cdot \vec{n} = d_1 \text{ sur } \Gamma_2$$

- Mixte:

$$\rho \cdot \frac{k}{\mu} \cdot (\vec{\nabla} P - \rho \cdot \vec{g}) \cdot \vec{n} + \gamma_1 \cdot P = \delta_1 \text{ sur } \Gamma_3$$

où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ est une partition de $\partial\Omega$, P^* est la pression imposée sur Γ_1 , d_1 est la valeur du flux qui traverse l'unité de surface de Γ_2 et γ_1, δ_1 sont des paramètres qui peuvent varier en espace et en temps. Le fait d'imposer au moins une condition de Dirichlet ou mixte est essentiel pour assurer l'unicité de la pression.

Equation du transport

Il y a autant d'équations de transport à écrire que de composants minéraux pris en compte. Nous n'entrons pas dans ces détails et nous ne formalisons qu'un seul problème

de transport qui s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } C : \Omega \times (0, T) \rightarrow R & \text{telle que:} \\ \frac{\partial C}{\partial t} + \vec{q} \cdot \vec{\nabla} C - \text{div} [D \cdot \vec{\nabla} C] = Q_s & \text{dans } \Omega \times (0, T) \\ + \text{C.L.} & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T) \\ + \text{C.I.} & \text{dans } \Omega \end{array} \right. \quad (7.7)$$

Les conditions aux limites sont de l'un de types suivants:

- Dirichlet:

$$P = C^* \text{ sur } \Gamma_1$$

- Neumann:

$$(D \cdot \vec{\nabla} C) \cdot \vec{n} = d_2 \text{ sur } \Gamma_2$$

- Mixte:

$$(D \cdot \vec{\nabla} C) \cdot \vec{n} + \gamma_2 \cdot P = \delta_2 \text{ sur } \Gamma_3$$

où $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \Gamma_3$ est une partition de $\partial\Omega$ (qui peut être différente de la précédente), C^* est la pression imposée sur Γ_1 , d_2 est la valeur du flux qui traverse l'unité de surface de Γ_2 et γ_2, δ_2 sont des paramètres qui peuvent varier en espace et en temps. Le fait d'imposer au moins une condition de Dirichlet ou mixte n'est pas essentiel pour assurer l'unicité de la concentration.

On constate que les équations d'écoulement et de transport sont doublement couplées:
 - par la vitesse de Darcy \vec{q} solution de (7.6) et qui apparaît dans (7.7) par le produit $\vec{q} \cdot \vec{\nabla} C$
 - par la concentration C solution de (7.7) et qui apparaît dans (7.6) par le terme S_s

Dans le cadre de notre étude, nous ne nous intéressons pas au processus de construction des cristaux qui lui nécessite la prise en compte de variations des diverses concentrations. En conséquence, seule la solution du problème stationnaire de l'écoulement nous suffit. Et donc le terme d'évolution de l'équation écoulement est supposé nul, ce qui a pour conséquence de ne pas prendre en compte le couplage écoulement transport dans cette étude.

7.3.3 Equation de Stokes et couplage Darcy-Stokes

Problème de Stokes

Considérons le problème de l'écoulement dans le domaine $\Omega \subset R^3$ modélisé comme un problème de Stokes évolutif. On fait abstraction pour l'instant des conditions d'interaction

avec le milieu poreux et on considère que la vitesse du fluide est connue sur sa frontière $\Gamma = \partial\Omega$. Ainsi, le problème se formule:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver} & (\mathbf{u}(x, t), p(x, t)) \quad \text{tel que:} \\ \rho \cdot \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \mu \cdot \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \rho \cdot \mathbf{g} & \text{dans} \quad \Omega \times (0, T) \\ \operatorname{div} \mathbf{u} = 0 & \text{sur} \quad \Omega \times (0, T) \\ \mathbf{u} = \mathbf{u}_d & \text{sur} \quad \Gamma \times (0, T) \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x) & \text{dans} \quad \Omega \end{array} \right. \quad (7.8)$$

Couplage Darcy-Stokes

A l'état naturel, l'os est constitué d'une structure solide et de fluide. La fraction fluide qui était ignorée dans les homogénéisations précédentes, est maintenant prise en compte. Quand l'os est mis en charge, la déformation de la structure solide génère un mouvement du fluide. Il s'ensuit que, la matrice solide est soumise à une contrainte hydrostatique interne appliquée sur les bords des canaux de Havers. Etant donné les dimensions de ces cavités (quelques dizaines de microns), il est difficile de mesurer expérimentalement cette contrainte hydrostatique ainsi que ses conséquences sur le comportement final de l'os compact. Il y a une interaction naturelle entre le fluide et la structure: le fluide s'écoule sous l'effet d'un chargement et transmet une pression à la structure ostéonale qui est contrainte et donc pourrait être le siège d'un phénomène piézoélectrique si le degré de minéralisation n'est pas trop grand. Le cadre de ce paragraphe traite la simulation numérique du comportement mécanique de l'os compact entier considéré comme un ensemble fluide-structure. La structure ostéonale est encore plus complexe que ce qui était écrit avant, car il existe les canalicules traversant la lamelle. On peut donc imaginer que cette pression sera transmise par le fluide à la totalité de l'ostéon. Si l'on fait abstraction de la complexité architecturale de l'os cortical, sa structure peut être vue comme un milieu poreux avec des coefficients différents de porosité selon la minéralisation et des tenseurs différents de perméabilité selon l'architecture.

Ce problème est donc modélisé comme un problème couplé Darcy-Stokes, en considérant la loi de Darcy pour la structure ostéonale et l'équation de Stokes pour le canal de Havers.

La difficulté sur le plan numérique consiste à garantir la conservation de la masse dans le domaine où l'on utilise Stokes. Il est assez facile de calculer les vitesses à l'interface commune Darcy – Stokes mais il reste à déterminer les vitesses que l'on impose sur les faces d'entrée et de sortie du domaine où s'applique Stokes. Il est possible d'extraire du problème macroscopique une information sur les flux mais, pour écrire correctement la conservation de la masse en terme de vitesse, il faut choisir un profil d'écoulement : laminaire, parabolique ou autre ?

On traite ce problème d'une manière itérative: on résout successivement deux problèmes différents (dans le milieu poreux-structure ostéonale et dans le fluide-canal de Havers) jusqu'à l'obtention de la convergence via une norme appropriée. Puisque l'écoulement dans le milieu poreux et celui dans le domaine ouvert sont découplés, on peut utiliser des codes numériques différents pour la résolution de chaque problème, chacun de ces codes étant performant dans son domaine d'application.

L'algorithme à suivre est, en grandes lignes, le suivant:

- on résout le problème d'écoulement en pression (ou en niveau piézométrique) puis on calcule la vitesse d'écoulement par la loi de Darcy
- on extrait la vitesse à l'interface et on la prend comme l'une des conditions aux limites pour le problème de Stokes
- pour résoudre Stokes, il faut aussi les conditions aux limites aux deux extrémités du canal de Havers : il faut déterminer les champs de vitesse sur ces faces. On se donne un profil d'écoulement, on obtient à partir d'un calcul de structure les valeurs de la pression sur ces faces et on déduit les champs de vitesse par l'utilisation de la condition d'incompressibilité

Pour la résolution numérique du problème couplé, un code (SETMP) basé sur la bibliothèque d'éléments finis MODULEF a été développé à Besançon depuis 1989 (J.M. Crolet, F. Jacob [Cro98] et D. Calugaru [Cal92]). Il simule l'écoulement d'un fluide par la loi de Darcy et le transport de solutés par une équation de convection-diffusion. La résolution numérique de ces équations permet de calculer en 3D les vitesses et les pressions, avec la possibilité d'imposer diverses conditions aux limites. Quelques adaptations ont été faites pour simuler numériquement l'écoulement d'un fluide dans la structure ostéonale, ce qui pourrait être un bon début pour une étude plus complexe en ce qui concerne les implications que cela pourrait avoir sur le comportement macroscopique de l'os cortical.

Remarque 32 *Nous remercions l'ingénieur du Laboratoire de Mathématiques, M. D. Calugaru, pour l'aide qu'il nous a apportée dans les modifications qu'il était nécessaire d'inclure dans le logiciel SETMP que nous utilisons dans cette partie. Il avait réalisé ce logiciel durant ses études doctorales et une version de ce dernier est en libre service sur le site de l'université.*

7.4 Modélisation finale

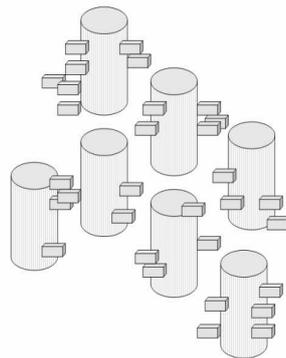
Cette modélisation comprend trois aspects : la description architecturale et géométrique de chaque niveau, la description des composants de base à chaque niveau et les lois de comportement qui leur sont associées.

Au niveau macroscopique, on considère que la partie corticale d'un os est constituée de *Volumes Osseux Elementaires* (VOE) dont la particularité est d'avoir une architecture constante (nombre de types et types d'ostéons). Ceci nous permet de considérer des os dont l'architecture peut varier d'une extrémité à l'autre. Un modèle d'os (au sens biomédical du terme) devrait donc être un ensemble de coordonnées et une topologie de maillage auxquels on associe une description architecturale.

Le VOE est donc la structure corticale élémentaire du niveau macroscopique sur laquelle nous développons la méthodologie d'homogénéisation.

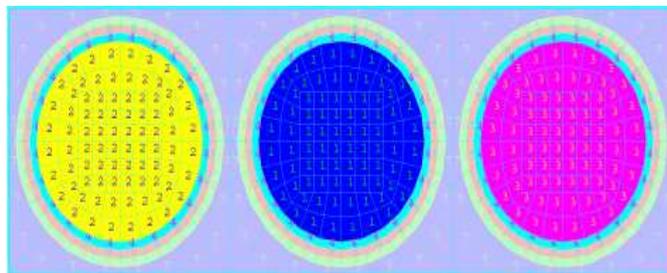
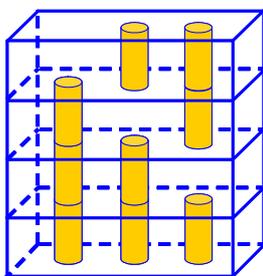
7.4.1 Description du niveau lamellaire

Les constituants de base sont les bâtonnets de collagène avec une orientation donnée, les EVMC et le fluide. On suppose qu'il existe une distribution préférentielle des EVMC dans la direction des bâtonnets de collagène.



Distribution spatiale des battonnets de collagène

La géométrie de la période 3D est obtenue par utilisation des quatre périodes bidimensionnelles (dans le plan xOy) couplées avec une intégration selon l'axe Oz (voir les dessins de la section 5.4).



Période 3D de la fibrille Période 2D de départ de la fibrille + diverses minéralisations

Cette période dépend des paramètres (longueur d'un bâtonnet de collagène, écart entre deux bâtonnets, etc..) dont on laisse le choix à l'utilisateur. Aussi une valeur quelconque de minéralisation peut être étudiée. Les lois de comportement sont respectivement:

- piézoélectrique pour les bâtonnets de collagène
- élastique + diélectrique pour les EVMC
- diélectrique pour le fluide

On va prendre en compte le fluide en ajoutant la composante $p \text{Id}$ au tenseur élastique des EVMC et on définit des coefficients diélectriques pour ce milieu.

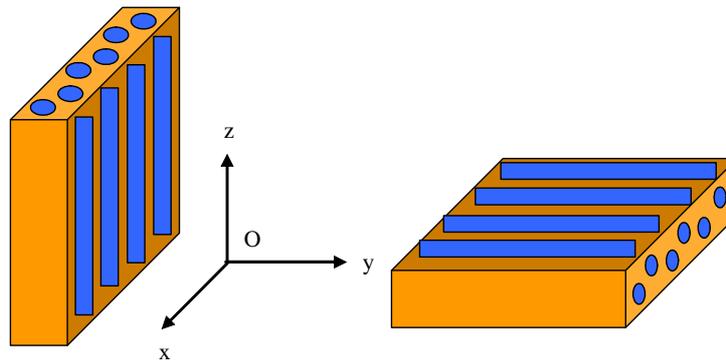
La loi de comportement homogénéisée sera une loi piézoélectrique ou élastique selon la minéralisation.

On aura ainsi le modèle d'une lamelle avec des bâtonnets de collagène orientés verticalement. Une orientation quelconque peut être obtenue par application des relations tensorielles de rotation, obtenant ainsi le comportement d'une lamelle avec une orientation quelconque des bâtonnets de collagène.

7.4.2 Description du niveau ostéonal

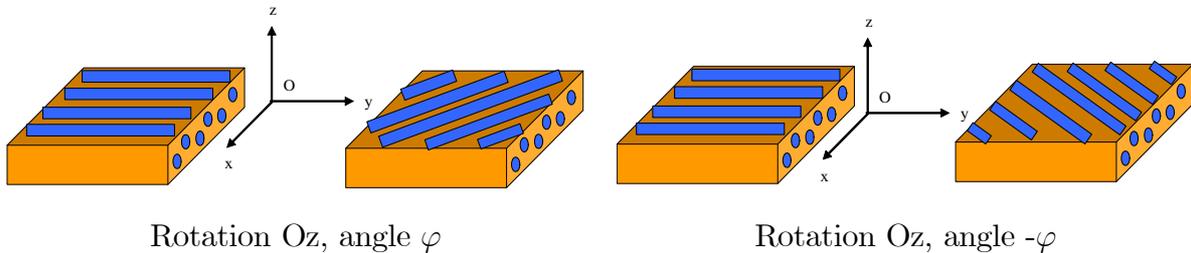
On va d'abord envisager le cas d'un secteur ostéonal. Un tel secteur ostéonal apparaît comme un empilement de secteurs angulaires de tubes. Il y a deux manières d'organiser les calculs:

- Ayant choisi un processus d'homogénéisation monodirectionnelle selon Oz , nous appliquons au domaine Ω une rotation d'axe Ox et d'angle $\pi/2$ afin que celui ci, initialement vertical vienne se placer dans un plan parallèle au plan xOy . Cela induit, au niveau des propriétés physiques, l'application en termes tensoriels de cette même rotation.



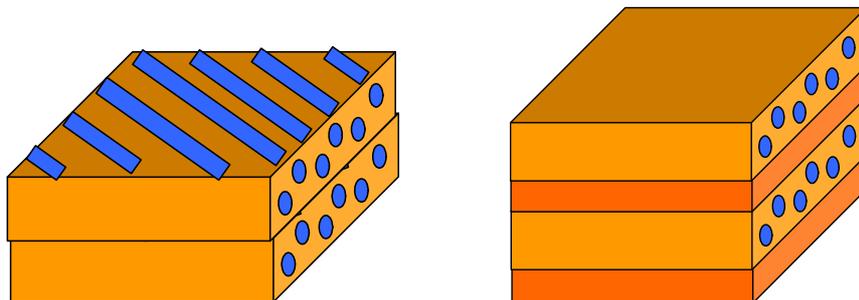
Rotation d'axe Ox , angle $\frac{\pi}{2}$

Si les bâtonnets de collagène n'ont pas la même direction que la génératrice de la lamelle, il suffit, pour respecter cet arrangement géométrique, d'appliquer, après la rotation précédente, une nouvelle rotation d'axe Oz et d'angle φ ou $-\varphi$

Rotation Oz , angle φ Rotation Oz , angle $-\varphi$

De par la nature de l'ostéon, les couches qui constituent l'empilement que nous devons homogénéiser ne peuvent être, au plus, que de deux natures différentes et dans ce cas elles doivent être disposées en alternance et avoir ainsi un caractère périodique.

La période est alors simple à concevoir : deux parallélépipèdes mis l'un sur l'autre. Cependant, il peut arriver que les lamelles qui constituent l'ostéon ne soient pas jointives. On considère alors une période constituée de quatre parallélépipèdes superposés: deux pour les couches ci-dessus et deux pour modéliser l'interface et qui matériellement occupée par un fluide diélectrique.



Période de base n° 1 pour ostéon Période de base n° 2 pour ostéon

Les calculs à faire sont ceux présentés dans la section 5.5.

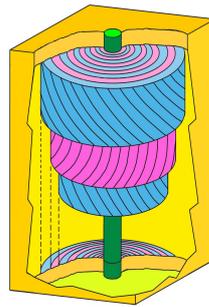
Ayant obtenu les propriétés homogénéisées d'un ensemble de couches, jointives ou non, et empilées selon la direction Oz , il nous faut, pour obtenir les propriétés homogénéisées d'un ensemble de couches empilées selon la direction Ox appliquer une rotation d'axe Ox et d'angle $-\pi/2$.

- De manière plus directe en appliquant d'abord des rotations d'axe Ox et d'angle φ ou $-\varphi$, puis de faire l'homogénéisation d'un empilement selon la direction Ox . Les deux procédés donnent des résultats similaires. Nous avons préféré la première solution car nous avons préalablement mis au point et validé le module d'homogénéisation d'un empilement selon la direction Oz .

7.4.3 Description du niveau VOE

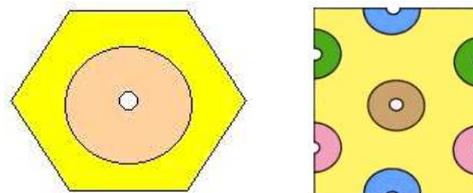
Ce niveau est appelé, par souci de commodité, le niveau cortical. Les constituants de cet élément de structure corticale sont : les ostéons, le système interstitiel et le fluide diélectrique s'écoulant dans les canaux de Havers et de Volkmann. Comme des ostéons de type différents peuvent être voisins, nous reprendrons une période déjà utilisée par B. Aoubiza pour pouvoir simuler cette mixité qui est supposée constante dans tout le VOE.

Dans les études précédente, l'ostéon était considéré comme ayant une dimension infinie dans la direction longitudinale. Ceci permettait de réduire les calculs à des problèmes bidimensionnels. Dans la modélisation actuelle, l'ostéon est considéré comme un tube ayant une longueur finie dans la direction longitudinale, les extrémités de ce tube étant occupées par du système interstitiel. Le canal de Havers qui a la forme d'un cylindre, de longueur finie, traverse l'ensemble de cette structure. Le système interstitiel est le complémentaire de cette ensemble ostéon-canaux. Les canaux de Volkmann situés dans des plans perpendiculaires à la direction des canaux de Havers ne sont pas représentés (voir figure ci-dessous).



Structure corticale

La figure ci-dessus illustre cet arrangement des composantes les unes par rapport aux autres cependant, dans le cadre de nos simulations, la coupe horizontale correspond, non pas à un carré, mais à l'une des deux périodes que nous choisissons.



Un seul ostéon Plusieurs ostéons

Remarque 33 *Si l'analyse architecturale des ostéons dans un VOE montre que les ostéons ne sont pas verticaux, mais orientés dans une direction particulière, il suffit d'appliquer une nouvelle rotation aux tenseurs obtenus pour avoir des propriétés physiques cohérentes.*

Nous avons trouvé dans la littérature diverses valeurs concernant la longueur des ostéons, certaines pouvant atteindre 10 mm. Il nous a semblé prudent de mettre cette grandeur en paramètre dans notre modèle et donc nous découpons à nouveau notre problème d'homogénéisation tridimensionnelle en deux parties : une homogénéisation bidimensionnelle et une homogénéisation monodimensionnelle selon la direction longitudinale.

Les lois de comportements que nous prenons pour chacun des composants sont les suivantes : pour l'ostéon nous considérons une loi piézo électrique ou élastiques selon la minéralisation, le système interstitiel est supposé être élastique et diélectrique et le fluide un milieu diélectrique. Selon notre modèle, la loi de comportement homogénéisée sera élastique.

7.5 Conclusions

Une modélisation relativement fine quant à la prise en compte de phénomènes biomécaniques a été réalisée. Elle aborde à la fois les aspects géométriques, comportementaux, multi composants dans un cadre multi échelle. La prise en compte du couplage fluide-structure de manière différente à chacun des niveaux est une avancée importante.

Elle apparaît donc, parmi tous les modèles publiés à ce jour, comme celle qui est la plus conforme possible à la réalité physiologique.

Chapitre 8

Logiciels et résultats

8.1 Introduction

Les développements théoriques que nous avons présentés dans les chapitres précédents ont toujours été menés de front avec l'élaboration de schémas numériques, leur mise au point, leur implémentation dans l'un ou l'autre des logiciels que nous utilisons et l'utilisation de ces derniers pour réaliser des simulations numériques.

Trois logiciels sont utilisés dans le cadre de ce travail. Le premier, consacré à la détermination des propriétés homogénéisées à chacun des niveaux, se nomme SiNuPrOs (Simulation Numérique des Propriétés de l'Os). Nous l'avons entièrement développé en Matlab. Le deuxième est le code d'écoulement et de transport en milieu poreux écrit par D. Calugaru, nommé SETMP (Simulation d' Ecoulement et de Transport en Milieu Poreux). Les modifications que nous avons introduites sont mineures. Le troisième est le code d'éléments finis Modulef qui a été développé par l'Inria et que nous utilisons pour déterminer les propriétés mécaniques à l'échelle nanoscopique. Le second paragraphe de ce chapitre est consacré à une courte description du seul logiciel SiNuPrOs.

Les résultats qu'il serait possible de présenter avec ces logiciels couvrent un champ d'investigation très vaste. Nous avons choisi de présenter des résultats que nous considérons comme significatifs quant aux possibilités d'investigation. Nous retenons trois aspects.

Le premier aspect concerne les valeurs homogénéisées que l'on peut obtenir dans quelques configurations et il est développé au paragraphe 3.

Les deux autres aspects concernent le retour à une information microscopique et ils sont regroupés au paragraphe 4. Pour cela, on décrit d'abord une situation macroscopique

d'une structure corticale plausible, on explique comment il est possible de visualiser les écoulements dans une structure ostéonale type, puis comment il est possible d'accéder aux divers champs mécaniques existant à l'échelle nanoscopique.

8.2 Description du logiciel "SiNuPrOs"

Ce logiciel permet de calculer, de manière conviviale, les caractéristiques homogénéisées de la structure composite multi échelle de l'os haversien compact. Les données que l'on entre sont les propriétés physiques du collagène, de l'Hap et du fluide ainsi qu'une description architecturale. Ce code a été baptisé SiNuPrOs (**S**imulation **N**umérique des **P**ropriétés de l' **O**s). Il a été réalisé en Matlab et les maillages utilisés pour les cellules de base ont été élaborés en utilisant les maillages du code Modulf. Il comprend en fait deux parties :

- une interface qui rend son utilisation très conviviale, les entrées des données se faisant de manière interactive
- une phase de calculs qui peut être totalement transparente pour l'utilisateur

L'interface est telle que ce code peut fonctionner comme une boîte noire pour l'utilisateur.

La phase de calculs est hiérarchisée, ce qui permet une construction ascendante des propriétés physiques recherchées.

Signalons enfin une dernière particularité qui rend ce code attractif pour les biomécaniciens : on obtient les propriétés pour chaque niveau, ce qui permet de comparer les résultats intermédiaires obtenus à chaque niveau avec ceux trouvés dans la littérature ou par expérimentation. Une validation de tout ce travail peut être mise en place, les mesures expérimentales étant réalisées par le Professeur M.C. Ho Ba Tho du Département Génie Biologique et Médical de l'Université de Technologie de Compiègne.

Dans un premier temps, on décrit les différents types de données à fournir par l'utilisateur lors des différentes étapes de calcul.

Dans un deuxième temps, on présente les étapes de calculs nécessaires pour obtenir les caractéristiques homogénéisées.

Enfin, on décrit les différentes étapes du calcul qui sont constituées elles aussi de sous-étapes et on donne l'arborescence du code (l'enchaînement des procédures créées).

8.2.1 Données

Les différentes données à fournir par l'utilisateur sont les suivantes:

Architecture

mi_arch	minéralisation osseuse exprimée en pourcentage ($0 < \text{mi_arch} < 100$)
pel	pourcentage d'eau liée
type d'ostéon	1, 2, 3, 4 ou 5 (selon l'orientation du collagène)
type 1	45° -45°
type 2	90° -90°
type 3	0° 90°
type 4	0° 0°
type 5	on donne les deux angles Phi1 et Phi2

Par pourcentage d'eau liée, *pel*, on comprend l'eau fixée au cristal avec une épaisseur constante qu'on a notée *e_gel* (il existe une valeur seuil *e_gel_s*) mais aussi l'eau emprisonnée dans les trous entre les cristaux d'Hap.

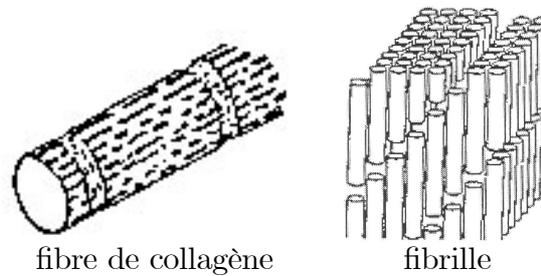
Paramètres de base

Paramètre 1	Module d'Young de l'Hap
Paramètre 2	Coefficient de Poisson de l' Hap
Paramètre 3	Module d'Young du collagène
Paramètre 4	coefficient de Poisson du collagène
Paramètre 5	longueur du bâtonnet de collagène
Paramètre 6	écart entre deux bâtonnets de collagène
Paramètre 7	pression moyenne dans le fluide
Paramètre 8	valeur seuil de l'épaisseur du gel dans les cristaux d' Hap

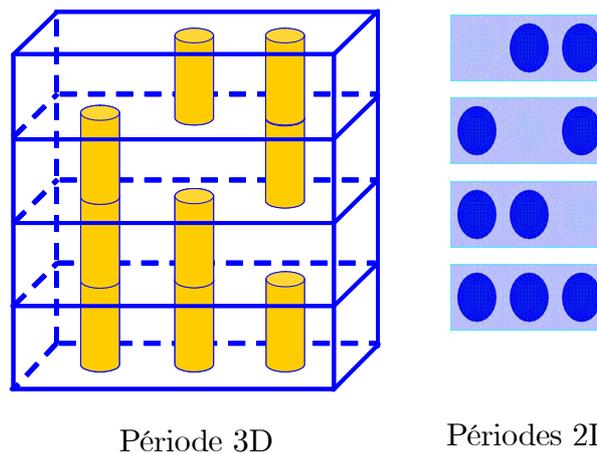
La pression moyenne dans le fluide est obtenue à partir d'un calcul de structure classique sur un os entier avec un mode de sollicitation donné. Cette pression varie selon les sollicitations, cependant son effet est faible au niveau des propriétés macroscopiques globales.

Pourcentages

Dans l'organisation architecturale du cortical, la fibre de collagène est constituée de fibrilles qui ont un arrangement spatial particulier.



Il nous est paru judicieux de prendre en compte cet arrangement géométrique et donc l'homogénéisation fibrillaire s'appuie sur 4 maillages différents. Pour chacun d'eux il est possible de faire varier la minéralisation, d'où la notion de pourcentages.



Pourcentage 1	pourcentage de la surface du domaine 1
Pourcentage 2	pourcentage de la surface du domaine 2
Pourcentage 3	pourcentage de la surface du domaine 3
Pourcentage 4	pourcentage de la surface du domaine 4
Pourcentage 5	pourcentage de la surface du domaine 5
Pourcentage 6	pourcentage de la surface du domaine 6
Pourcentage 7	pourcentage de la surface du domaine 7

Ce sont les sept domaines correspondant au collagène, l'Hap et au fluide qui coexistent dans la structure considérée.

8.2.2 Etapes de calcul

Le processus de calcul des coefficients homogénéisés est hiérarchique et cela permet une détermination ascendante des propriétés physiques:

- dans un premier temps on fait une **homogénéisation lamellaire**: les données sont les propriétés élastiques des EVMC, les propriétés piézoélectriques du collagène, la valeur de la pression du fluide interstitiel et les propriétés diélectriques du fluide, ainsi que la nano porosité; les résultats sont les propriétés d'un secteur lamellaire avec une orientation verticale des bâtonnets de collagène. Les propriétés d'un secteur lamellaire avec une orientation donnée du collagène sont obtenues par une matrice de rotation
- dans un deuxième temps, les données étant ces résultats auxquels une porosité lamellaire (canalicules, interface entre les lamelles) est ajoutée, une **homogénéisation haversienne** nous donne les propriétés d'un secteur ostéonal
- enfin, l'**homogénéisation osseuse** clos ce processus, les données étant l'architecture haversienne et la porosité haversienne (canaux de Havers et de Volkman); comme résultat final on obtient les propriétés macroscopiques de l'os cortical

Il est important de tenir compte du degré de minéralisation car, dans l'homogénéisation haversienne, le système interstitiel est considéré comme étant surminéralisé, donc il aura une loi de comportement élastique . La construction ascendante des propriétés physiques de l'os peut être résumée comme ci-dessous:

Détermination des propriétés des EVMC

On détermine d'abord les propriétés élastiques des EVMC, en ayant comme données les propriétés élastiques de l'Hap, le pourcentage d'eau liée (pel) et l'épaisseur du gel (e_gel). Cela se réalise dans le cadre de la procedure EVMC.m

Homogénéisation lamellaire**Données 1**

- 1) tenseur élastique des EVMC
- 2) tenseur piézoélectrique du collagène
- 3) pression
- 4) propriétés diélectriques du fluide
- 5) degré de minéralisation + nano porosité
- 6) lois de comportement
à l'échelle micro

Résultats 1

- 1) propriétés piézoélectriques
d'un secteur lamellaire
avec une orientation verticale
du collagène
- 2) loi de comportement
d'un secteur lamellaire

Données 2

- 1) propriétés piézoélectriques d'un secteur
lamellaire avec une orientation verticale du collagène
- 2) orientation
- 3) loi de comportement d'un secteur lamellaire

Résultats 2

- 1) propriétés piézoélectriques d'un secteur
lamellaire avec une orientation arbitraire
du collagène
- 2) loi de comportement
d'un secteur lamellaire

Homogénéisation Haversienne**Données**

- 1) propriétés piézoélectriques d'un secteur
lamellaire avec une orientation arbitraire du collagène
- 2) porosité lamellaire (canalicules, interface)
- 3) loi de comportement d'un secteur lamellaire

Résultats

- 1) propriétés piézoélectriques
d'un secteur ostéonal
(puis d'un ostéon)
- 2) loi de comportement
d'un secteur osteonal

Homogénéisation Osseuse**Données**

- 1) architecture haversienne
- 2) porosité haversienne
- 3) type d'osteons
- 4) degré de minéralisation de chaque ostéon
- 5) loi de comportement d'un secteur osteonal

Résultats

- 1) Propriétés macroscopiques de l'os cortical
- 2) Loi de comportement de l'os cortical

8.2.3 Description des étapes

Un descriptif plus technique du logiciel SiNuPrOs est donné en **Annexe 1**.

8.3 Résultats d'homogénéisation

Il était logique de s'intéresser tout d'abord à l'effet de la minéralisation sur les coefficients élastiques. La notion de contenu minéral, qui est bien définie en biomécanique, doit être précisée dans le cadre de notre modélisation.

La littérature nous apprend que l'os adulte est formé à 40 % de collagène et à 60 % de matière minérale [Aou91] et que c'est un milieu poreux. Si, avec les maillages que nous avons utilisés pour nos simulations, le contenu minéral occupe bien, au maximum, 58 % du volume osseux, il faut bien voir que ces 58 % ne sont pas occupés par des seuls cristaux d'Hap. Ils sont occupés par du fluide et par des EVMC qui contiennent eux aussi du fluide. Le pourcentage d'eau liée aux cristaux d'EVMC, ou sa variation au cours du processus de minéralisation n'est pas connu. Nous le considérons comme un paramètre et nous le faisons varier de 5 à 25 %. Le cas d'un pourcentage nul n'est pas considéré ici car ce cas dégénéré n'est pas implémenté (il le sera dans une prochaine version). Notons que l'on retrouve alors les propriétés mécaniques de l'Hap et que le milieu n'est plus poreux. Par ailleurs, il nous a semblé qu'il n'était pas raisonnable d'aller au delà de 25 %.

En notant $pEVMC$ le pourcentage d'EVMC et pel le pourcentage d'eau liée dans ces EVMC, on voit que ce qui correspond, dans notre modèle, à la notion biomécanique de contenu minéral est donc la quantité : $pEVMC \times (1 - pel)$

Il s'ensuit que des valeurs différentes pour les paramètres $pEVMC$ et pel peuvent donner la même valeur de minéralisation et des coefficients élastiques différents. Par

exemple:

$$\begin{aligned} pEVMC &= 0,9 & pel &= 0,2 \\ pEVMC \times (1 - pel) &= 0,9 \times 0,8 = 0,72 \\ C33 &= 31,14 \text{ (cas du type1)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} pEVMC &= 0,8 & pel &= 0,1 \\ pEVMC \times (1 - pel) &= 0,8 \times 0,9 = 0,72 \\ C33 &= 35,73 \text{ (cas du type1)} \end{aligned}$$

Il est difficile de dire si ce point est biomécaniquement correct ou pas car les articles que nous avons trouvés portant sur des mesures de minéralisation osseuse ne parlent pas de l'architecture de l'échantillon testé. Sur le plan mécanique des matériaux composites, il est bien connu que des architectures différentes des constituants, à quantité de matière égale, vont générer des propriétés mécaniques différentes.

Il est évident qu'il faudrait adjoindre à notre modélisation le mode de variation du paramètre pel en fonction de $pEVMC$ mais ceci nécessite l'étude du processus de minéralisation incluant la manière dont les cristaux s'arrangent entre eux.

Nous poursuivons nos investigations et nous allons donc faire varier simultanément, pour chaque type d'ostéon (rappelé ci dessous), les paramètres $pEVMC$ et pel . Ces types d'ostéons sont définis selon les descriptions d'Ascenzi, la numérotation étant différente:

- type 1 d'ostéon: l'ostéon pour lequel les fibres de collagène de deux lamelles consécutives sont orientées à 45° respectivement -45°
- type 2 d'ostéon: l'ostéon pour lequel les fibres de collagène de deux lamelles consécutives sont orientées à 90° respectivement -90°
- type 3 d'ostéon: l'ostéon pour lequel les fibres de collagène de deux lamelles consécutives sont orientées à 0° respectivement 90°
- type 4 d'ostéon: l'ostéon pour lequel les fibres de collagène de deux lamelles consécutives sont orientées à 0° respectivement 0°
- type 5 d'ostéon: l'ostéon pour lequel les fibres de collagène de deux lamelles consécutives sont orientées à φ_1° respectivement φ_2° . Celui ci est un type d'ostéon qu'on a introduit dans le but de pouvoir tester toutes les configurations possibles

Dans cette investigation, nous supposons que :

- le VOE est constitué d'un seul type d'ostéon,
- l'architecture de cet ostéon et du système interstitiel est la même

- la minéralisation de cet ostéon et de ce système interstitiel est la même.

Sur le plan clinique, cette situation pourrait correspondre à un remodelage dans le cas d'un patient sain chez lequel un fragment d'os aurait disparu suite à un accident (fracture, ...). L'os se reforme complètement dans un volume important et où il n'y a pas encore de partie surminéralisée.

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
95	1	5	37	39.8	9.8	14.1	15.9	14
		10	32.5	36	8.7	12.7	14.1	12.2
		15	29.2	33.4	7.9	11.6	12.9	10.9
		20	26.7	31.2	7.3	10.8	11.8	9.9
		25	24.4	29.4	6.7	10.1	11	9

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
95	2	5	42.2	32.8	10.4	12.6	13.5	16.3
		10	37.4	28.7	9.5	11.3	12.1	14.3
		15	33.9	25.9	8.8	10.4	11.1	12.9
		20	31.1	23.6	8.2	9.7	10.3	11.7
		25	28.8	21.7	7.8	9.1	9.6	10.7

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
95	3	5	38.6	45.3	10.3	11.8	13.7	14.5
		10	33.9	40.8	9.2	10.6	12.1	12.7
		15	30.6	37.6	8.4	9.8	11	11.4
		20	27.9	35.1	7.7	9.1	10.2	10.3
		25	25.6	33	7.1	8.5	9.4	9.4

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
95	4	5	34.8	57.6	10.3	11.2	13.9	12.6
		10	30.3	52.6	8.9	10	12.2	11
		15	27	49.2	7.9	9.2	11	9.8
		20	24.5	46.4	7.1	8.6	10	8.8
		25	22.2	44.1	6.5	8.09	9.26	8.08

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
90	1	5	36.69	39.76	10	14.07	15.66	13.77
		10	32.2	35.96	8.87	12.61	13.9	12.02
		15	29.01	33.28	8.07	11.57	12.65	10.77
		20	26.43	31.14	7.42	10.74	11.64	9.76
		25	24.23	29.33	6.88	10.02	10.79	8.91

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
90	2	5	41.74	32.96	10.73	12.51	13.33	16
		10	36.96	28.85	9.72	11.25	11.97	14.04
		15	33.54	25.97	9.02	10.36	11	12.63
		20	30.77	23.67	8.45	9.63	10.22	11.49
		25	28.4	21.73	7.98	9.01	9.56	10.51

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
90	3	5	38.19	44.85	10.55	11.91	13.56	14.27
		10	33.54	40.38	9.35	10.71	12.03	12.47
		15	30.22	37.23	8.5	9.85	10.95	11.19
		20	27.55	34.73	7.82	9.16	10.08	10.15
		25	25.27	32.61	7.24	8.57	9.35	9.26

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
90	4	5	34.48	56.59	10.38	11.35	13.8	12.47
		10	30	51.75	8.98	10.21	12.12	10.85
		15	26.8	48.35	7.98	9.4	10.93	9.69
		20	24.22	45.64	7.18	8.74	9.97	8.76
		25	22.02	43.35	6.51	8.17	9.16	7.96

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
80	1	5	36.05	39.6	10.42	13.83	15.02	13.24
		10	31.6	35.73	9.2	12.38	13.32	11.56
		15	28.43	33.01	8.33	11.34	12.12	10.35
		20	25.87	30.84	7.64	10.51	11.16	9.38
		25	23.69	29.01	7.04	9.79	10.34	8.56

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
80	2	5	40.73	33.24	11.26	12.32	12.95	15.23
		10	36.02	29.05	10.17	11.05	11.63	13.35
		15	32.65	26.1	9.4	10.14	10.69	12
		20	29.93	23.76	8.78	9.4	9.93	10.9
		25	27.6	21.78	8.26	8.77	9.29	9.97

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
80	3	5	37.34	43.94	10.88	11.99	13.21	13.68
		10	32.74	39.5	9.61	10.75	11.72	11.95
		15	29.47	36.39	8.7	9.87	10.67	10.71
		20	26.84	33.91	7.98	9.16	9.82	9.71
		25	24.59	31.82	7.36	8.55	9.1	8.86

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
80	4	5	33.82	54.57	10.52	11.67	13.49	12.06
		10	29.39	49.9	9.05	10.47	11.85	10.51
		15	26.22	46.62	8	9.62	10.68	9.39
		20	23.68	44.01	7.16	8.93	9.74	8.49
		25	21.5	41.8	6.45	8.34	8.94	7.73

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70	1	5	35.4	39.42	10.83	13.58	14.38	12.72
		10	30.98	35.5	9.53	12.14	12.76	11.09
		15	27.84	32.74	8.6	11.11	11.61	9.93
		20	25.31	30.54	7.85	10.27	10.69	9
		25	23.16	28.68	7.21	9.56	9.9	8.21
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70	2	5	39.7	33.52	11.79	12.13	12.56	14.45
		10	35.06	29.24	10.61	10.84	11.28	12.65
		15	31.74	26.23	9.78	9.91	10.37	11.36
		20	29.07	23.84	9.11	9.17	9.64	10.32
		25	26.79	21.83	8.54	8.54	9.01	9.42
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70	3	5	36.47	43.04	11.21	12.05	12.87	13.08
		10	31.94	38.65	9.86	10.78	11.41	11.42
		15	28.72	35.57	8.9	9.88	10.38	10.23
		20	26.12	33.11	8.13	9.15	9.56	9.28
		25	23.91	31.04	7.48	8.52	8.86	8.47
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70	4	5	33.15	52.55	10.67	11.98	13.18	11.66
		10	28.77	48.05	9.12	10.73	11.57	10.16
		15	25.64	44.89	8.02	9.84	10.43	9.09
		20	23.13	42.37	7.15	9.13	9.51	8.22
		25	20.98	40.24	6.4	8.51	8.73	7.49

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
60	1	5	34.73	39.25	11.25	13.33	13.75	12.18
		10	30.35	35.27	9.85	11.9	12.2	10.62
		15	27.24	32.47	8.86	10.87	11.1	9.51
		20	24.74	30.24	8.06	10.04	10.22	8.62
		25	22.61	28.35	7.38	9.33	9.47	7.86
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
60	2	5	38.63	33.79	12.33	11.93	12.18	13.65
		10	34.07	29.42	11.06	10.62	10.94	11.94
		15	30.82	26.36	10.16	9.69	10.05	10.71
		20	28.19	23.93	9.44	8.93	9.34	9.72
		25	25.96	21.87	8.83	8.29	8.74	8.88
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
60	3	5	35.6	42.16	11.56	12.11	12.53	12.48
		10	31.13	37.81	10.13	10.8	11.11	10.89
		15	27.96	34.76	9.11	9.87	10.1	9.75
		20	25.4	32.33	8.29	9.12	9.3	8.84
		25	23.23	30.28	7.6	8.48	8.62	8.07
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
60	4	5	32.48	50.52	10.81	12.29	12.86	11.25
		10	28.14	46.19	9.19	10.99	11.29	9.81
		15	25.06	43.16	8.04	10.07	10.17	8.78
		20	22.57	40.73	7.13	9.32	9.28	7.95
		25	20.46	38.69	6.35	8.68	8.51	7.25

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
50	1	5	34.04	39.07	11.67	13.08	13.12	11.65
		10	29.71	35.03	10.18	11.65	11.64	10.15
		15	26.64	32.19	9.12	10.63	10.6	9.08
		20	24.17	29.93	8.27	9.8	9.76	8.23
		25	22.06	28.02	7.55	9.1	9.05	7.5
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
50	2	5	37.53	34.06	12.87	11.72	11.79	12.85
		10	33.05	29.61	11.51	10.4	10.59	11.22
		15	29.86	26.49	10.55	9.45	9.74	10.05
		20	27.3	24	9.77	8.69	9.05	9.12
		25	25.11	21.91	9.11	8.05	8.47	8.32
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
50	3	5	34.71	41.3	11.9	12.14	12.18	11.87
		10	30.32	37	10.39	10.81	10.8	10.35
		15	27.19	33.98	9.32	9.86	9.82	9.27
		20	24.69	31.58	8.45	9.09	9.04	8.41
		25	22.55	29.55	7.72	8.43	8.37	7.67
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
50	4	5	31.79	48.48	10.96	12.59	12.55	10.84
		10	27.52	44.33	9.26	11.25	11.01	9.46
		15	24.47	41.42	8.07	10.29	9.92	8.48
		20	22.02	39.1	7.11	9.51	9.04	7.68
		25	19.93	37.13	6.3	8.85	8.3	7

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
40	1	5	29.48	36.85	13.3	11.6	9.88	8.64
		10	25.55	32.65	11.44	10.27	8.8	7.5
		15	22.77	29.7	10.12	9.32	8.04	6.7
		20	20.54	27.36	9.05	8.55	7.45	6.06
		25	18.64	25.38	8.14	7.9	6.95	5.52

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
40	2	5	30.49	34.54	15.09	10.18	9.55	8.38
		10	26.72	29.8	13.33	8.87	8.59	7.27
		15	24.05	26.48	12.08	7.94	7.91	6.48
		20	21.91	23.84	11.07	7.2	7.36	5.85
		25	20.09	21.63	10.21	6.56	6.88	5.32

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
40	3	5	29.36	36.45	13.26	11.76	10.05	8.6
		10	25.51	32.5	11.43	10.33	8.86	7.48
		15	22.78	29.74	10.12	9.31	8.03	6.7
		20	20.6	27.55	9.07	8.47	7.36	6.08
		25	18.75	25.72	8.18	7.76	6.8	5.56

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
40	4	5	27.58	37.33	11.38	13.77	10.68	8.54
		10	23.72	34.16	9.38	12.25	9.35	7.5
		15	20.97	31.93	7.97	11.15	8.41	6.76
		20	18.75	30.14	6.84	10.26	7.65	6.17
		25	16.86	28.63	5.89	9.49	7.02	5.65

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
30	1	5	27.91	34.93	12.62	11.03	9.36	8.16
		10	24.19	30.96	10.87	9.76	8.33	7.08
		15	21.56	28.18	9.62	8.86	7.62	6.32
		20	19.44	25.97	8.61	8.13	7.05	5.71
		25	17.65	24.1	7.75	7.51	6.58	5.2

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
30	2	5	28.87	32.88	14.4	9.59	8.98	7.88
		10	25.3	28.37	12.73	8.36	8.07	6.82
		15	22.77	25.23	11.54	7.49	7.42	6.08
		20	20.75	22.73	10.58	6.79	6.9	5.49
		25	19.03	20.64	9.77	6.19	6.45	4.99

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
30	3	5	27.82	34.65	12.59	11.14	9.48	8.13
		10	24.17	30.9	10.86	9.78	8.36	7.07
		15	21.59	28.29	9.63	8.81	7.57	6.33
		20	19.52	26.21	8.63	8.02	6.94	5.74
		25	17.77	24.48	7.79	7.35	6.41	5.24

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
30	4	5	26.13	35.37	10.72	13.12	10.05	8.11
		10	22.47	32.37	8.84	11.67	8.79	7.12
		15	19.86	30.25	7.51	10.63	7.9	6.41
		20	17.75	28.56	6.45	9.78	7.19	5.84
		25	15.96	27.13	5.56	9.05	6.59	5.35

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
20	1	5	21.16	26.75	9.76	8.74	7.16	6.06
		10	18.33	23.73	8.43	7.75	6.37	5.23
		15	16.33	21.63	7.48	7.06	5.82	4.66
		20	14.73	19.95	6.72	6.5	5.39	4.2
		25	13.38	18.55	6.07	6.03	5.04	3.82

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
20	2	5	21.94	25.94	11.46	7.23	6.7	5.7
		10	19.23	22.46	10.16	6.32	5.99	4.92
		15	17.32	20.03	9.24	5.67	5.49	4.37
		20	15.79	18.12	8.49	5.15	5.08	3.94
		25	14.5	16.53	7.86	4.72	4.74	3.57

pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
20	3	5	21.29	27.15	9.8	8.57	6.98	6.1
		10	18.49	24.25	8.48	7.53	6.14	5.29
		15	16.53	22.24	7.55	6.79	5.54	4.73
		20	14.96	20.65	6.8	6.19	5.07	4.28
		25	13.64	19.33	6.16	5.68	4.68	3.91

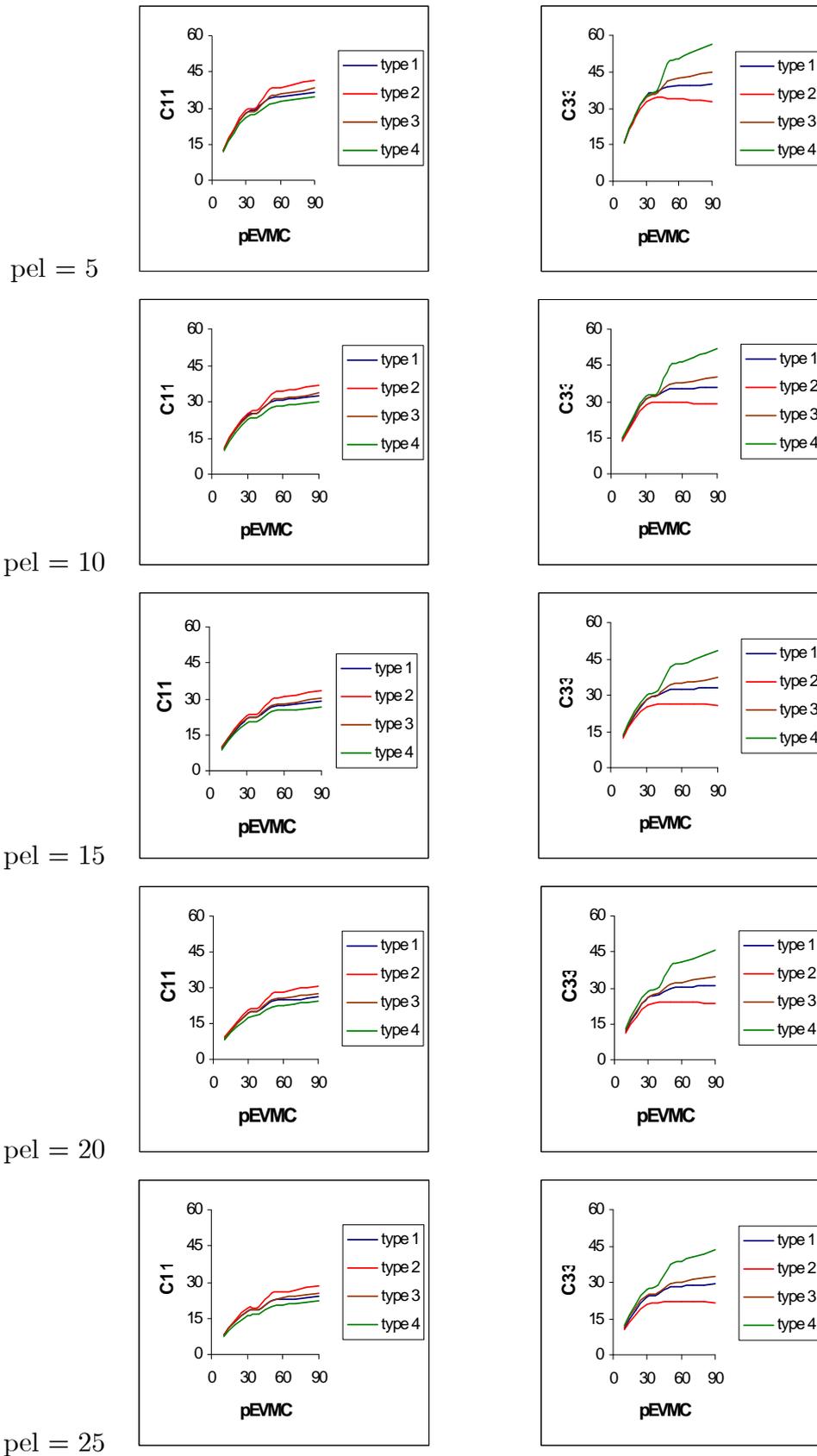
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
20	4	5	20.05	27.3	8	10.37	7.39	6.28
		10	17.21	24.97	6.62	9.23	6.45	5.49
		15	15.2	23.32	5.64	8.43	5.79	4.93
		20	13.59	22.01	4.86	7.78	5.26	4.48
		25	12.23	20.9	4.21	7.22	4.82	4.1

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

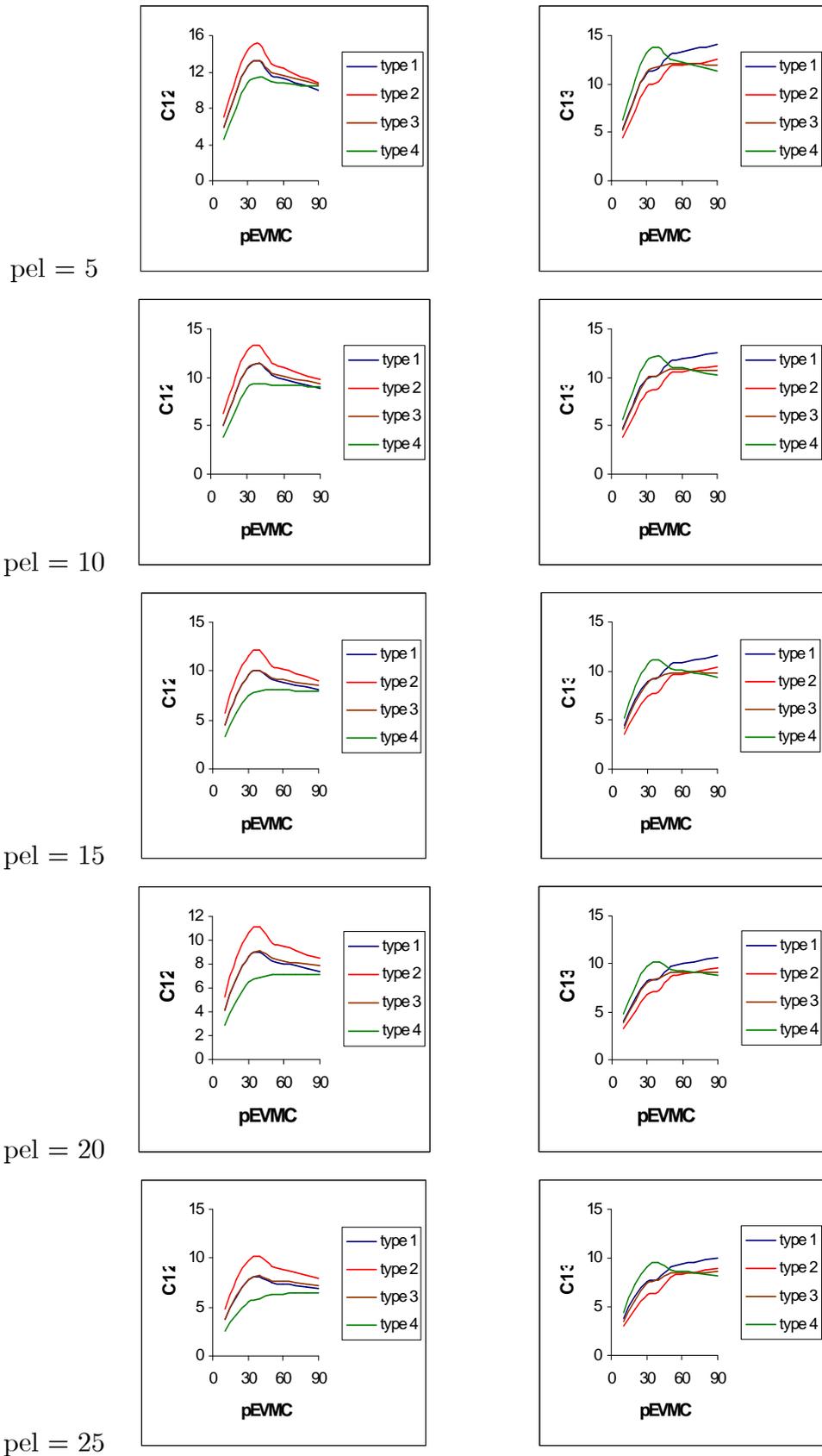
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
10	1	5	12.14	15.61	5.84	5.39	4.07	3.31
		10	10.53	13.9	5.06	4.82	3.63	2.86
		15	9.4	12.7	4.51	4.41	3.32	2.55
		20	8.51	11.76	4.07	4.09	3.09	2.3
		25	7.75	10.97	3.71	3.82	2.89	2.09
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
10	2	5	12.53	15.51	6.99	4.42	3.89	2.97
		10	11.01	13.53	6.22	3.89	3.47	2.56
		15	9.93	12.15	5.67	3.52	3.18	2.27
		20	9.08	11.08	5.23	3.23	2.94	2.04
		25	8.35	10.19	4.86	2.98	2.74	1.84
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
10	3	5	12.29	16.05	5.89	5.2	3.86	3.36
		10	10.7	14.39	5.12	4.59	3.4	2.92
		15	9.59	13.24	4.57	4.16	3.07	2.61
		20	8.71	12.34	4.14	3.82	2.81	2.37
		25	7.97	11.59	3.78	3.53	2.6	2.17
pEVMC	type	pel	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
10	4	5	11.74	15.94	4.65	6.29	4.03	3.66
		10	10.1	14.58	3.87	5.62	3.52	3.19
		15	8.94	13.62	3.33	5.15	3.17	2.87
		20	8.02	12.85	2.91	4.77	2.88	2.61
		25	7.25	12.2	2.55	4.46	2.65	2.39

Résultats selon minéralisation (pEVMC) et type d'ostéons

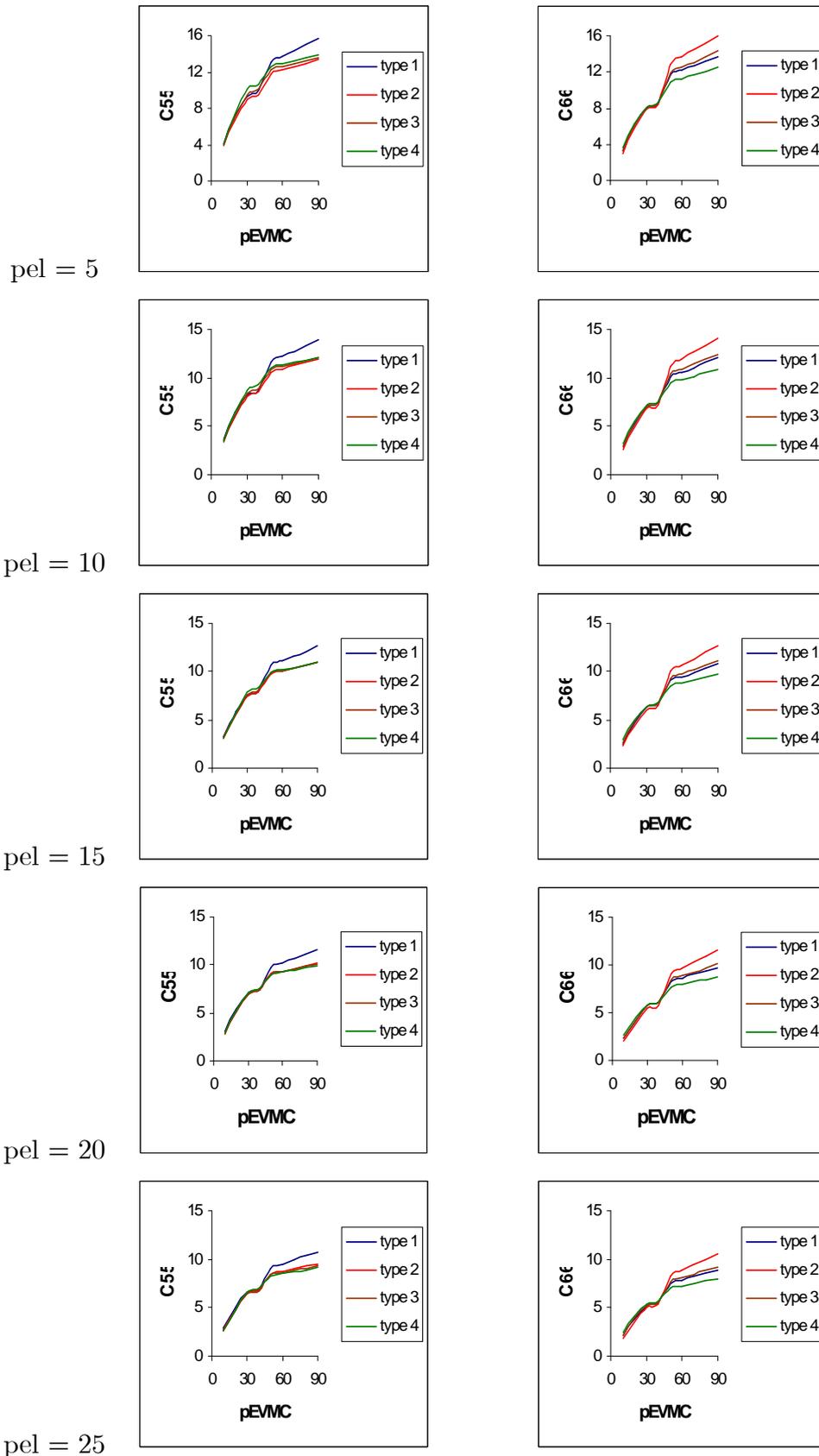
Variations des coefficients C_{11} et C_{33} pour diverses valeurs de pel



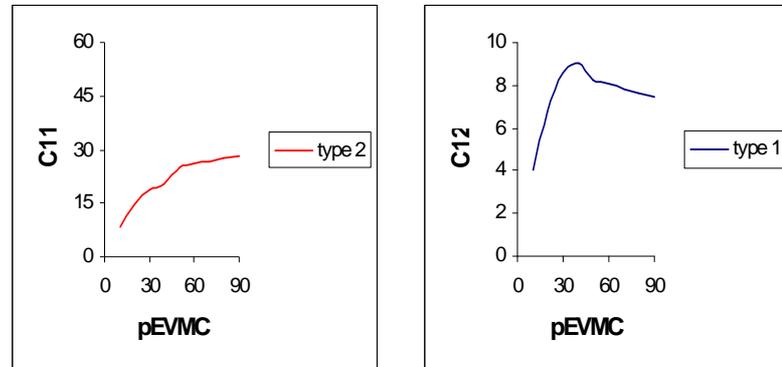
Variations des coefficients C_{12} et C_{13} pour diverses valeurs de pel



Variations des coefficients C_{55} et C_{66} pour diverses valeurs de pel



L'analyse des graphes regroupés ci-avant montre que l'allure générale des variations des coefficients élastiques est la suivante :



On distingue nettement quatre parties selon les valeurs de pEVMC :

- jusqu'à 40 % il y a croissance des coefficients avec un fort gradient
- entre 40 et 50 % on a un palier
- entre 50 et 60 % il y a, à nouveau, croissance des coefficients avec un fort gradient
- au delà de 60 %, la croissance est plus faible ou il y a faible décroissance

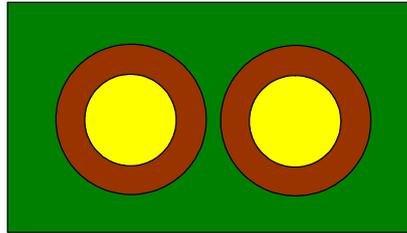
Ces résultats sont surprenants par deux aspects : l'existence d'un palier et la décroissance pour des valeurs élevées de pEVMC.

Pour comprendre ces deux aspects, il faut reprendre, pour chacune des quatre phases apparaissant sur les graphes, le processus physique d'apposition minérale en accord avec les maillages que nous utilisons.

En l'absence de toute minéralisation, les bâtonnets de collagène sont géométriquement séparés les uns des autres. Nous avons choisi un mode d'apposition minérale selon lequel les cristaux d'Hap se déposent en créant des couronnes successives et concentriques autour de chaque bâtonnet. Ce mode est en accord avec ce que nous avons vu au chapitre 1 et avec certains articles [Hel02].

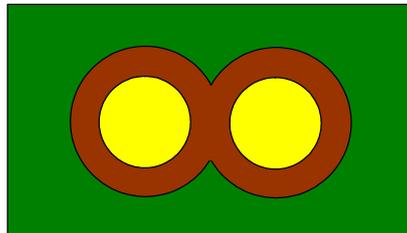
Jusqu'à environ 40 %, les bâtonnets sont ainsi enrobés de manière concentrique. Cependant, dans les maillages que nous considérons, il n'y a pas, pour cette valeur de 40 % en volume, jonction entre deux enrobages voisins (figure 8.1). Sur le plan physique, on a bien une rigidification rapide de la structure collagénique, le volume d'enrobage étant plus faible dans les couches entourant immédiatement les bâtonnets. Il s'ensuit qu'on a

une augmentation rapide des propriétés élastiques, ce que nous observons.



(8.1)

La deuxième phase est approximativement comprise entre 40 et 50 %. Sur nos graphiques elle montre un palier et elle correspond dans nos simulations à la jonction totale des bâtonnets enrobés entre eux (figure 8.2). Ce palier que nous observons dans cette seconde phase est probablement dû au mode d'apposition que nous simulons. En effet, l'espace existant entre deux enrobages voisins étant réduit, il est physiquement vraisemblable que l'apposition va être plus rapide dans cette zone ce qui aurait pour effet de rigidifier rapidement l'ensemble de la structure. Or nous ne prenons pas en compte ce phénomène, car il relève du processus de minéralisation, et donc nous supposons une apposition minérale équiprobable dans l'espace constitué par les couronnes de nos maillages qui vont réaliser géométriquement cette jonction.



(8.2)

La jonction entre tous les bâtonnets étant réalisée, l'apposition minérale se fait toujours de manière concentrique mais dans un espace de plus en plus grand. Deux phases se distinguent : l'une, allant environ de 50 à 60 % avec un fort gradient qui est, à priori identique, au gradient obtenu dans la première phase et l'autre, au delà de 60 % avec un gradient moindre, voire parfois un gradient négatif.

Ce gradient négatif n'a aucune explication physique. Il apparaît dans nos simulations car la physique du problème n'est probablement plus prise en compte. Il est vraisemblable que, lorsque la minéralisation augmente, le pourcentage d'eau liée diminue sous l'effet des diverses sollicitations mécaniques comprimant le milieu cristallin. Or dans les résultats que nous présentons, le paramètre pel est constant. Un test réalisé pour des valeurs croissantes du $pEVMC$ combinées avec des valeurs décroissantes du pel montre une

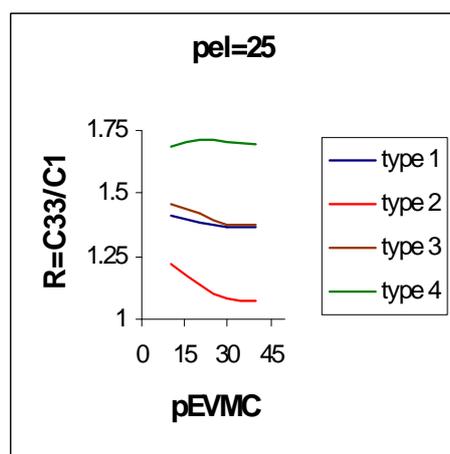
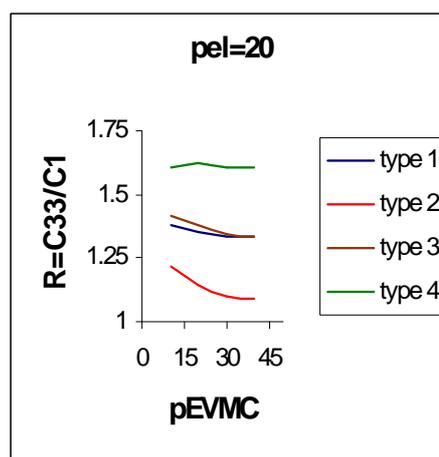
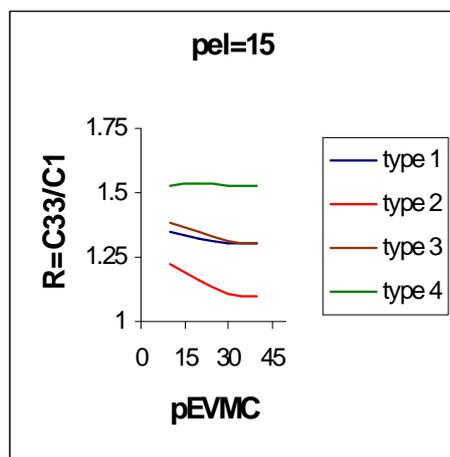
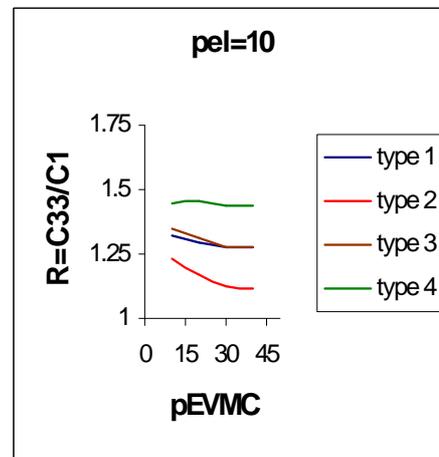
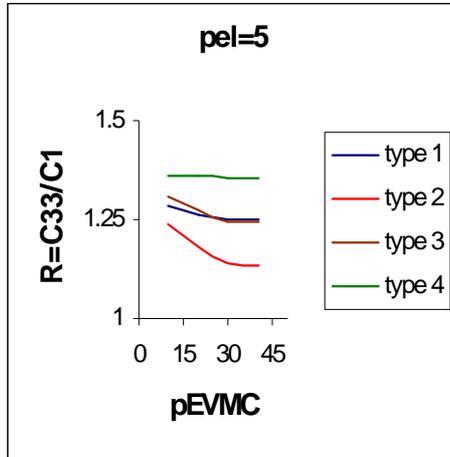
croissance des coefficients, par exemple:

$pEVMC = 50$	$pel = 25$	$C33 = 28.02$
$pEVMC = 60$	$pel = 20$	$C33 = 30.24$
$pEVMC = 70$	$pel = 15$	$C33 = 32.74$
$pEVMC = 80$	$pel = 10$	$C33 = 35.73$
$pEVMC = 90$	$pel = 5$	$C33 = 39.76$

Ensuite, nous nous sommes intéressés au rapport $C33/C11$. Les conclusions que nous pouvons tirer de l'analyse de ce rapport concernent les extrémités de l'intervalle d'investigation.

Tout d'abord, nous avons vu précédemment qu'au delà de 40 % nos résultats dépendaient fortement du processus de minéralisation et comme ce dernier n'est pas modélisé, nous restreignons la présentation de ces rapports à l'intervalle 0 – 40 % . On constate que, dans cet intervalle, le rapport $C33/C11$ est conforme à ce que l'on attend. Pour des valeurs de $pEVMC$ élevées associées à des valeurs de pel faibles, ce rapport se rapproche de 1.1, comme nous le constatons au chapitre 1.

Les variations du rapport C_{33}/C_{11} en fonction de $pEVMC$



Signalons enfin qu'il est possible d'exhiber des architectures pour lesquelles les coefficients élastiques et ce rapport sont biomécaniquement cohérents. On donne ci-après de tels exemples. Pour le système interstitiel constitué d'ostéons de type 4, on considère deux pourcentages d'EVMC (70 et 80 %) et pour chacun d'eux le pourcentage d'eau liée varie de 5 à 25 %. Pour les ostéons qui sont toujours de type 4, on considère des pourcentages d'EVMC de 20, 30 et 40 % pour des pourcentages d'eau liée allant de 5 à 25 %. On constate des variations significatives, en fonction du pourcentage d'eau liée, sur les valeurs des coefficients élastiques diagonaux de l'ordre 4 GPa. Les valeurs numériques obtenues restent cohérentes avec ce qu'on peut lire dans la littérature. Ces exemples sont donnés à titre indicatif car il est bien entendu possible de faire un grand nombre d'autres tests.

Ostéons avec pEVMC de 20, 30 et 40 et pel = 5, ..., 25 et
interstitiel avec pEVMC = 70 et pel = 15

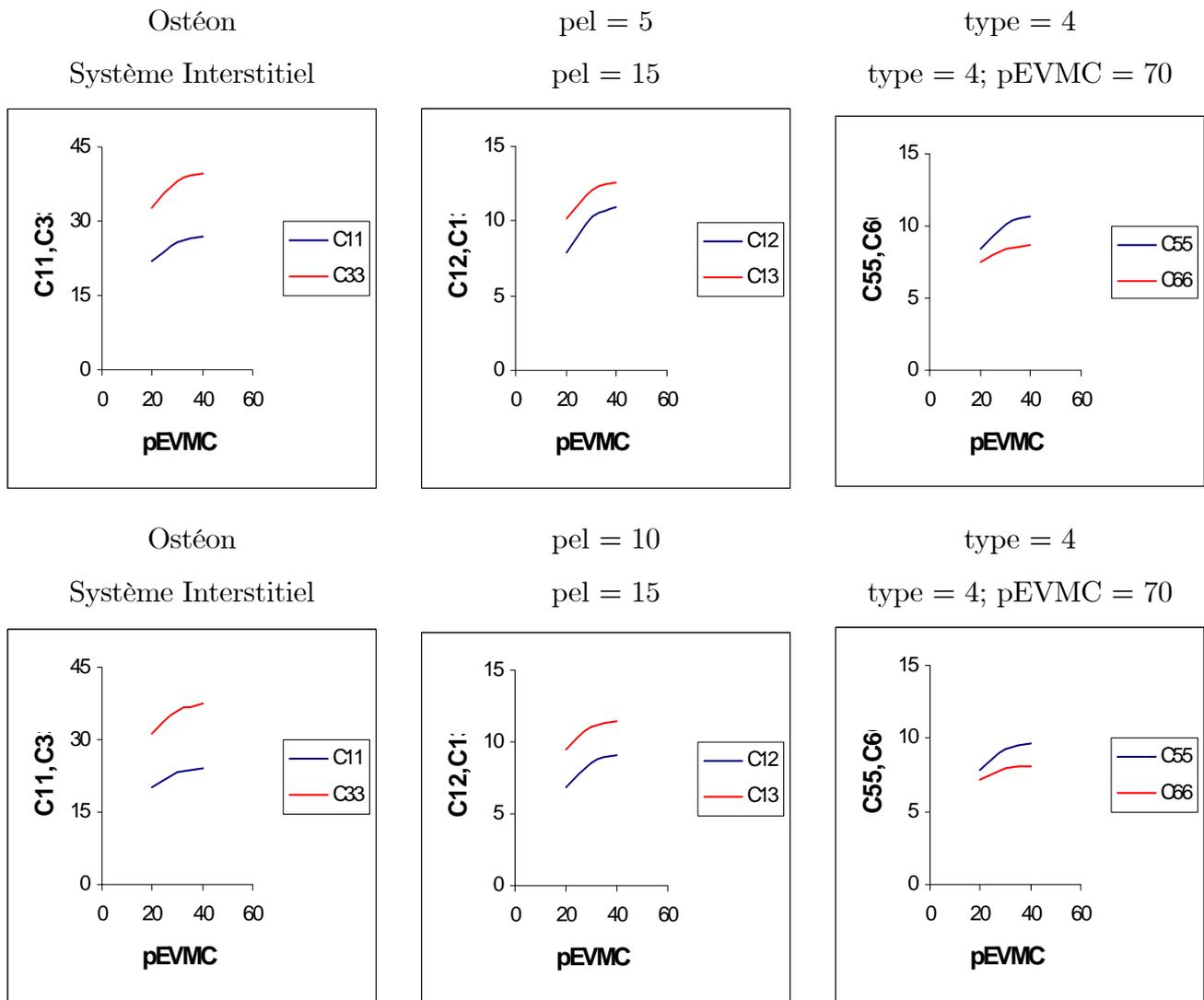
int	pel	pEVMC	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70/15	5	20	21.84	32.59	7.92	10.14	8.38	7.49
		30	25.93	38.25	10.26	12.08	10.15	8.46
		40	27.02	39.68	10.89	12.62	10.61	8.72

int	pel	pEVMC	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70/15	10	20	20.15	31.05	6.84	9.48	7.81	7.12
		30	23.39	36.09	8.61	11	9.29	7.91
		40	24.23	37.35	9.07	11.41	9.67	8.12

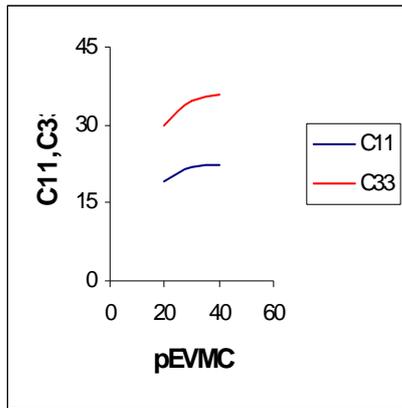
int	pel	pEVMC	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70/15	15	20	19	30	6.09	9.04	7.42	6.87
		30	21.72	34.63	7.51	10.31	8.71	7.55
		40	22.42	35.78	7.88	10.65	9.04	7.72

int	pel	pEVMC	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70/15	20	20	18.1	29.17	5.51	8.7	7.12	6.67
		30	20.44	33.5	6.67	9.8	8.26	7.27
		40	21.04	34.57	6.97	10.08	8.55	7.43

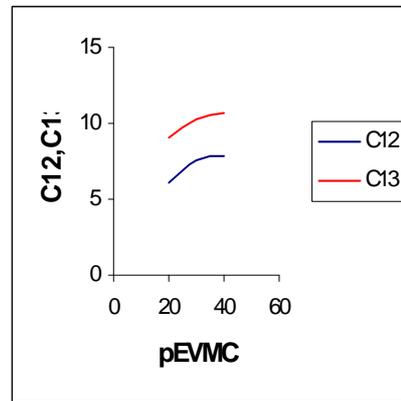
int	pel	pEVMC	C_{11}	C_{33}	C_{12}	C_{13}	C_{55}	C_{66}
70/15	25	20	17.35	28.48	5.02	8.41	6.87	6.5
		30	19.39	32.57	5.98	9.38	7.9	7.05
		40	19.91	33.57	6.22	9.63	8.15	7.18



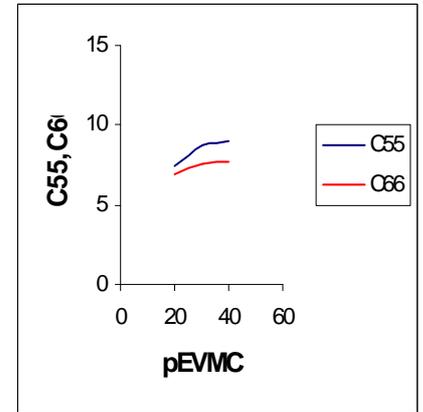
Ostéon
Système Interstitiel



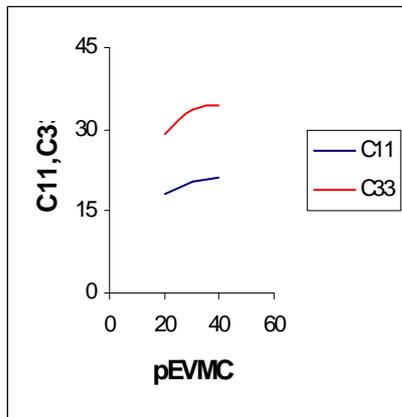
pel = 15
pel = 15



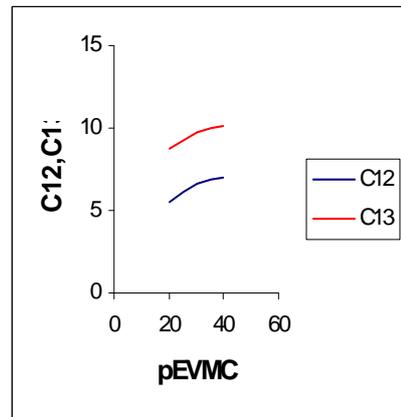
type = 4
type = 4; pEVMC = 70



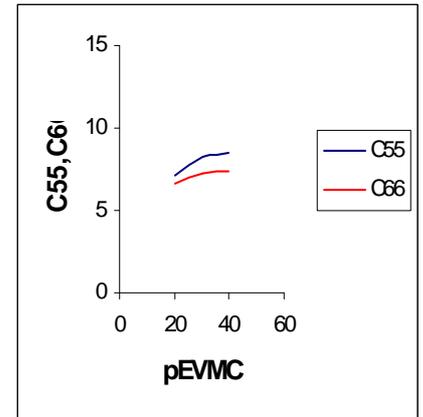
Ostéon
Système Interstitiel



pel = 20
pel = 15



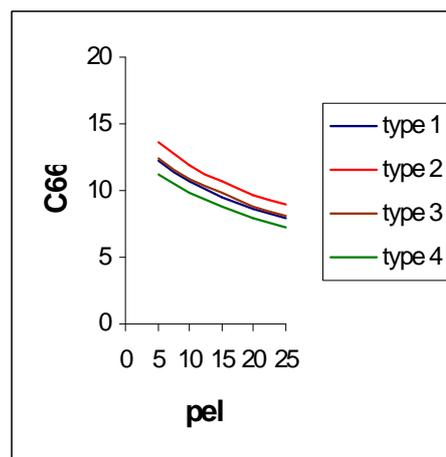
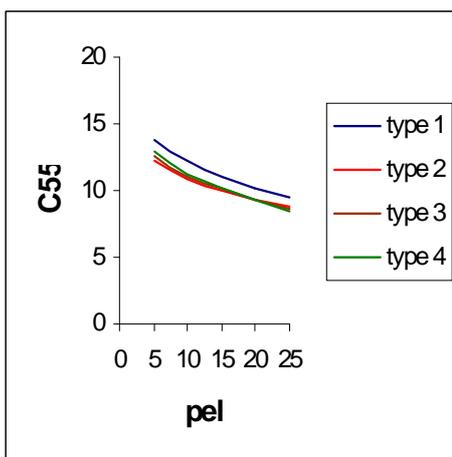
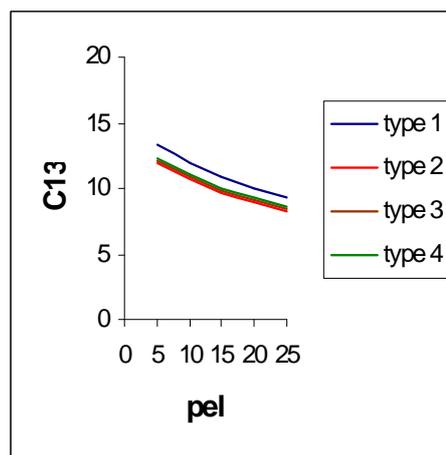
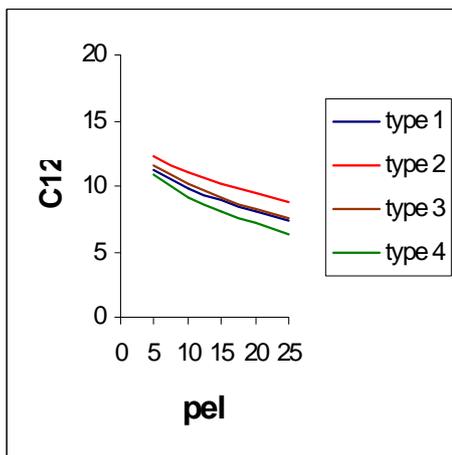
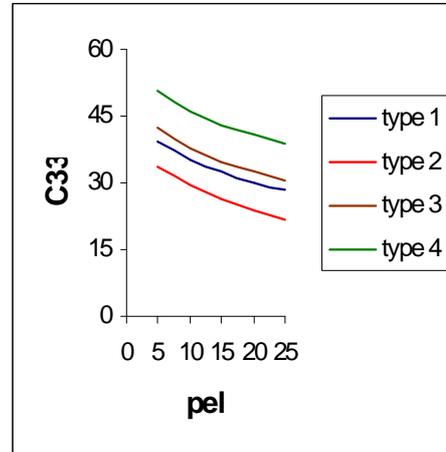
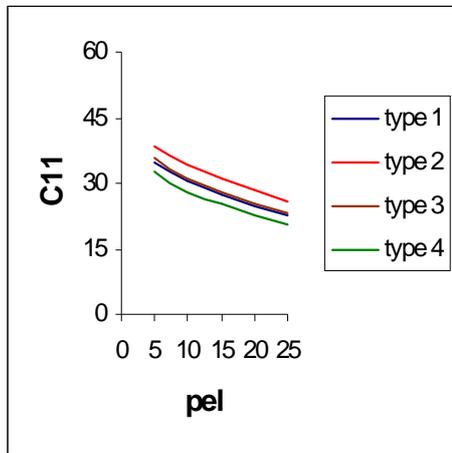
type = 4
type = 4; pEVMC = 70



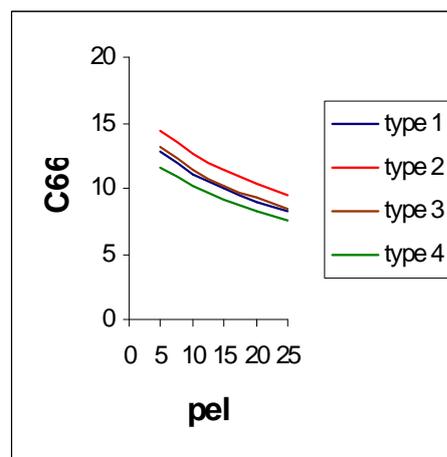
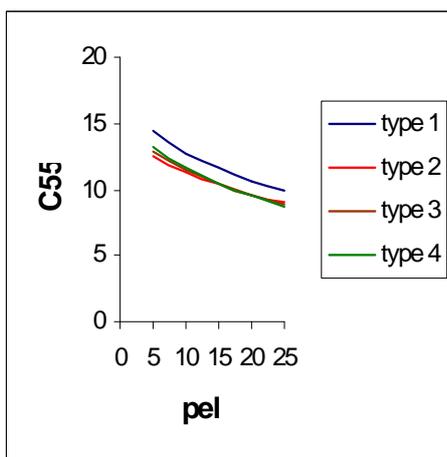
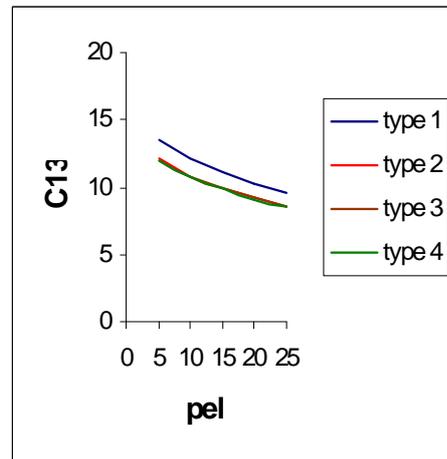
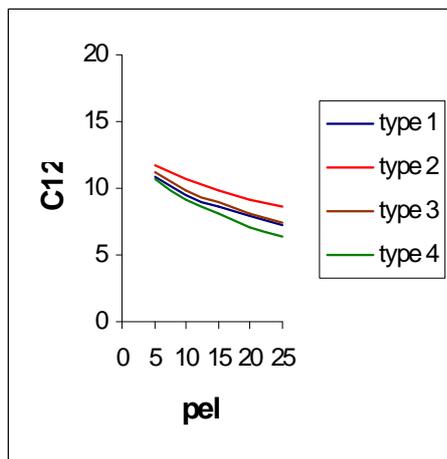
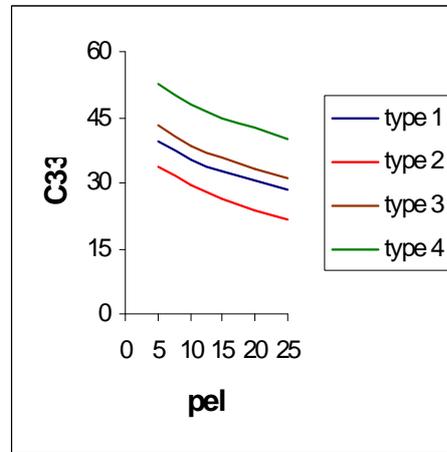
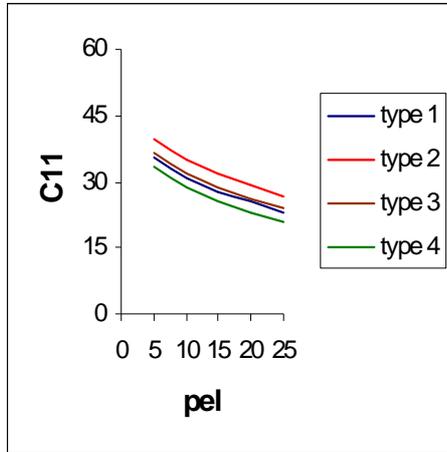
On présente aussi les variations des coefficients en fonction des pourcentages d'eau liée. On fait ces représentations pour un pEVMC fixe et pour divers types d'ostéons. On observe systématiquement une décroissance de ces coefficients, les valeurs maximales sur l'ensemble des graphes étant obtenues pour le pourcentage d'EVMC maximal, ce qui est physiquement cohérent.

Ensuite, on étudie l'influence de l'orientation des fibres de collagène sur les coefficients. On teste, pour diverses pEVMC et divers pourcentages d'eau liée l'effet des diverses orientations. Cette influence est maximale pour le coefficient C_{33} et dans le cas d'un fort pourcentage d'eau liée (15 GPa). Cependant, il faut noter que l'ensemble des variations est relativement faible (4 à 5 GPa).

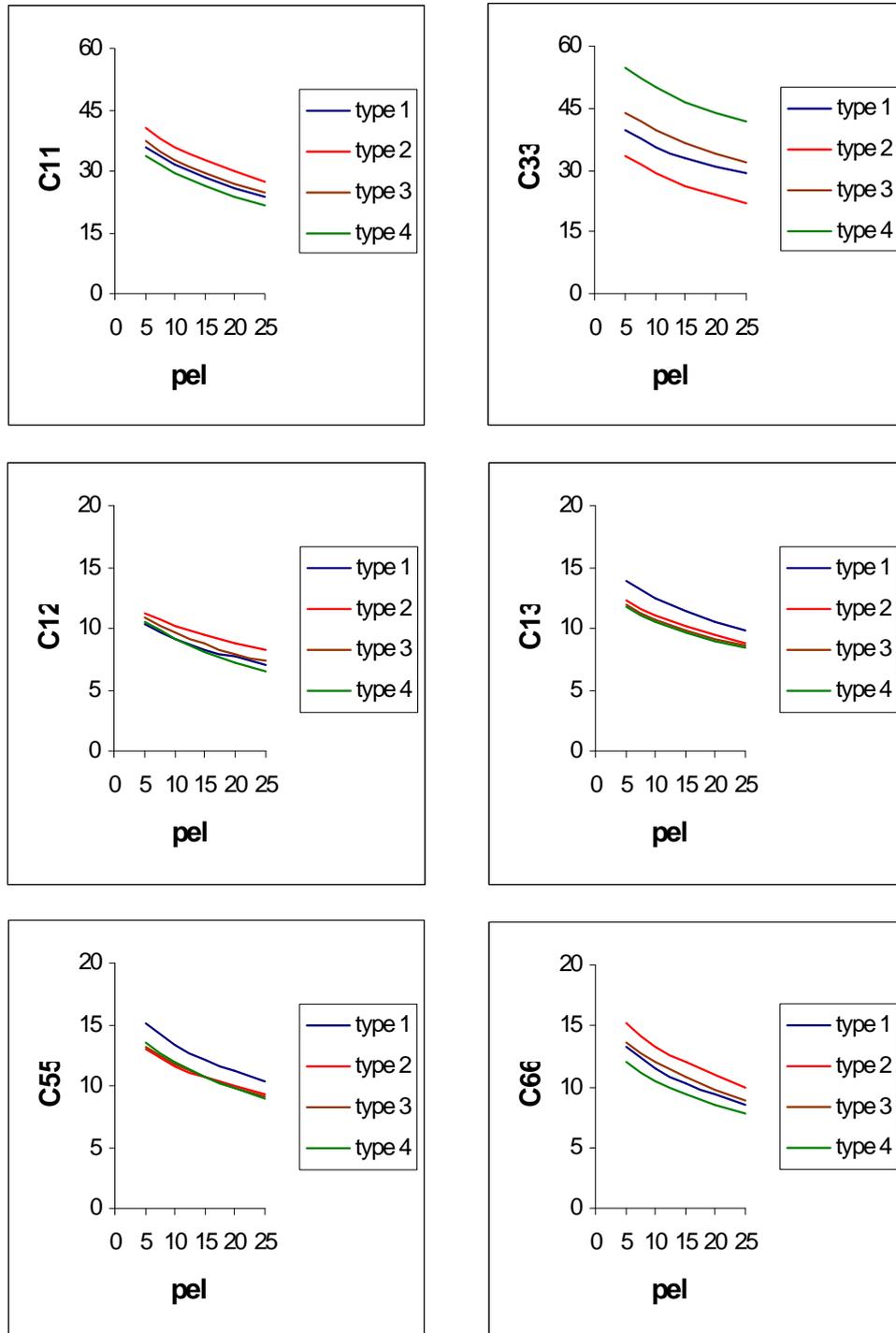
Variations des coefficients élastiques pour pEVMC = 60 %



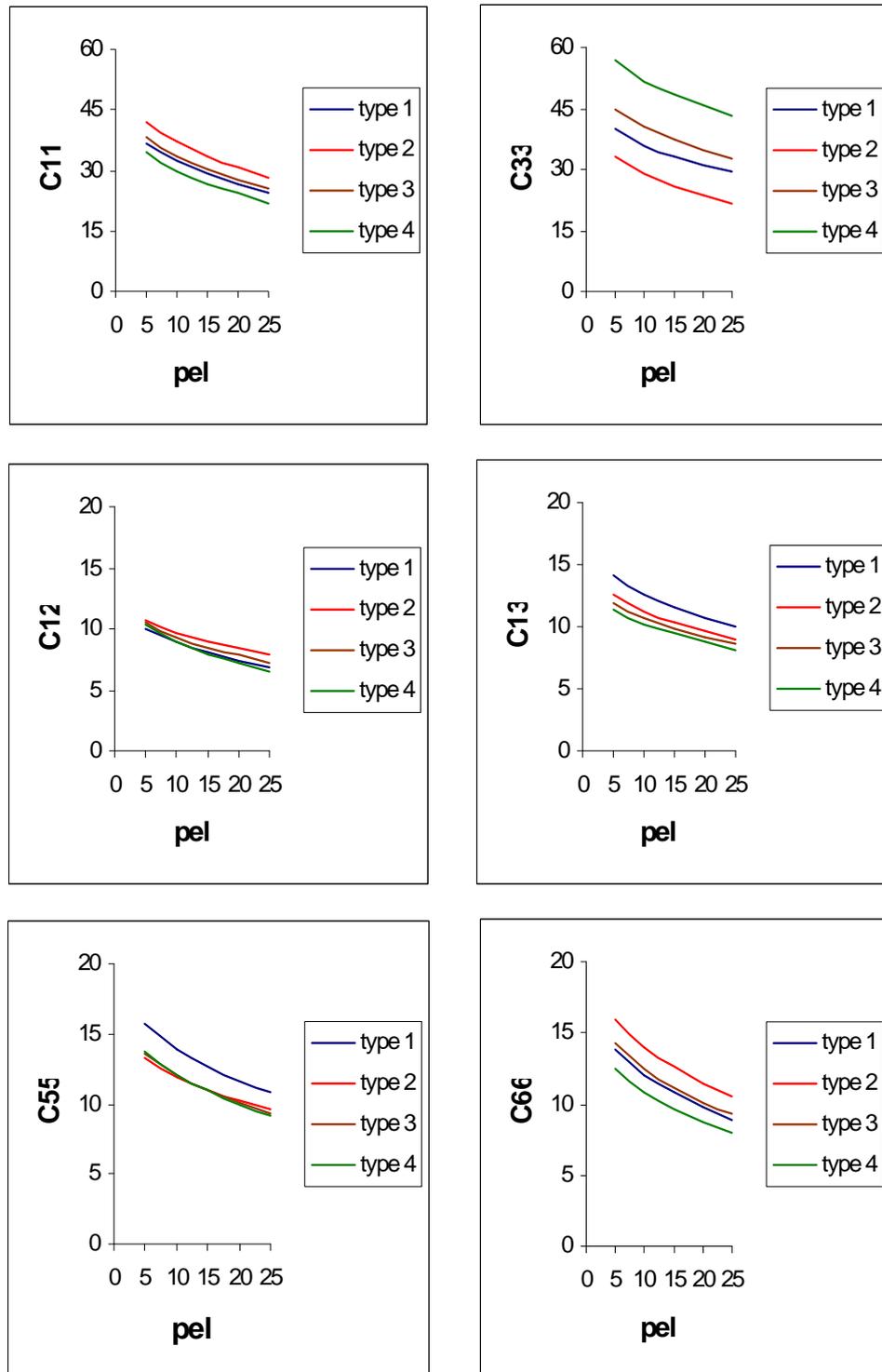
Variations des coefficients élastiques pour $pEVMC = 70\%$



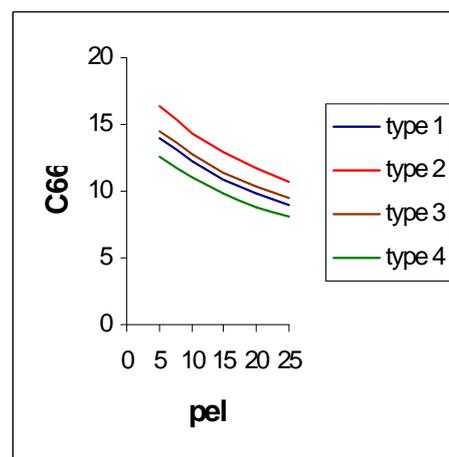
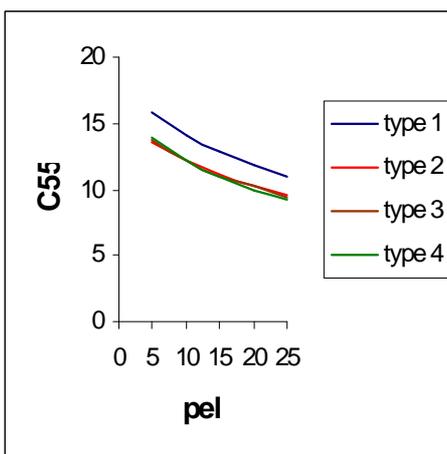
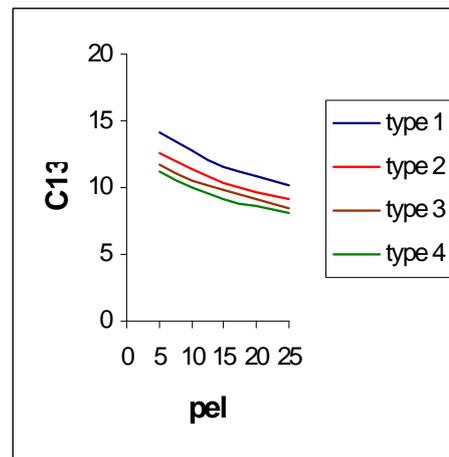
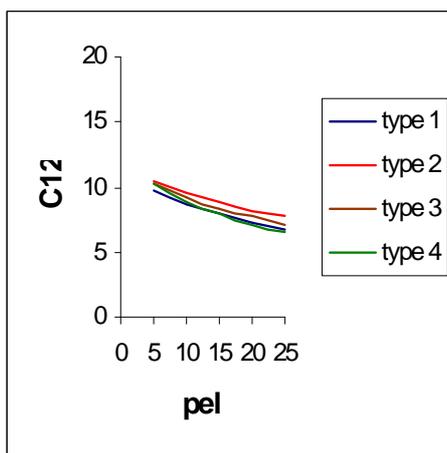
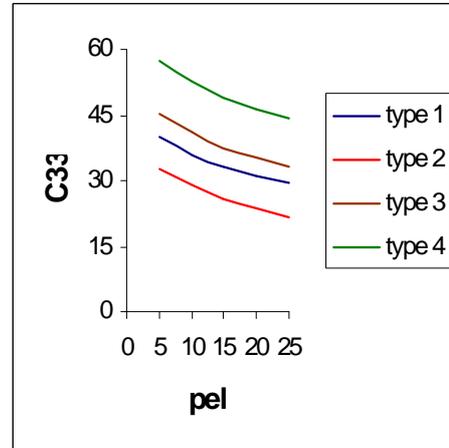
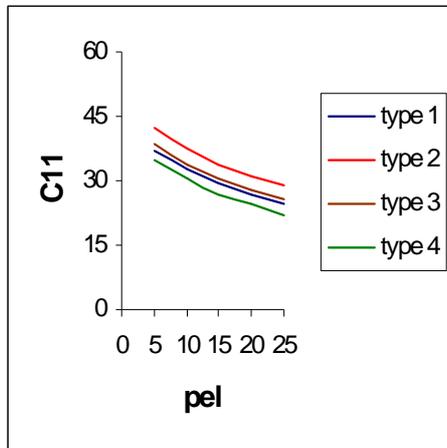
Variations des coefficients élastiques pour $pEVMC = 80\%$



Variations des coefficients élastiques pour pEVMC = 90 %

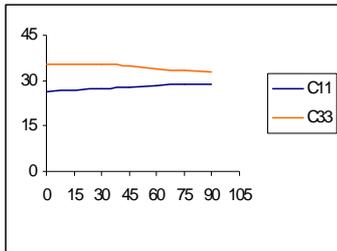


Variations des coefficients élastiques pour pEVMC = 95 %

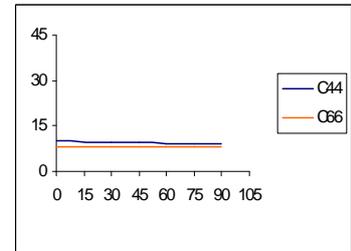
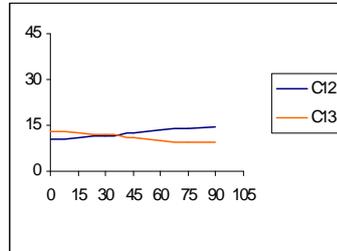


Effet de l'orientation des fibres de collagène

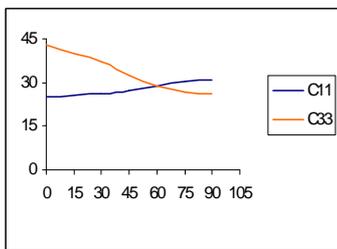
pel = 5



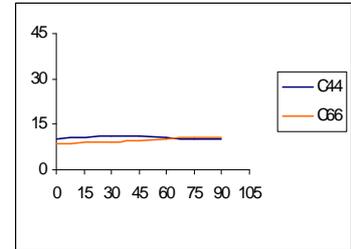
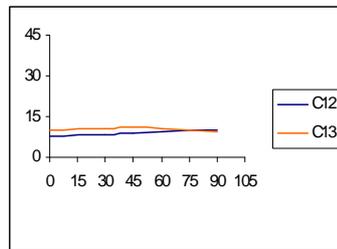
pEVMC = 30



pel = 15



pEVMC = 60



Conclusions

La modélisation que nous avons réalisée permet de simuler d'innombrables configurations. Elle permet de retrouver des résultats sur les propriétés osseuses similaires à ceux que l'on trouve dans la littérature cependant, la comparaison s'arrête là car les données de la littérature ne donnent aucune information sur l'architecture des échantillons testés. On constate que, dans de nombreux cas, plusieurs échantillons ont été testés et des valeurs moyennes ont été calculées pour fournir les résultats. Il est donc difficile de mener des comparaisons fines.

Cette modélisation valide le résultat que nous avons trouvé au chapitre 1, à savoir que l'anisotropie osseuse est due, pour une part importante, à l'architecture cristalline. Elle met en évidence la nécessité de développer une modélisation de l'apposition minérale. En effet, sans cette dernière, notre modélisation ne peut pas être exploitée dans son intégralité.

Nous avons souvent, au long des chapitres précédents, parlé de ce processus d'apposition minérale et évoqué le besoin d'une modélisation. Le lecteur est en droit de s'interroger sur les raisons pour lesquelles nous n'avons pas abordé de développement dans cette direction.

La raison est simple et peut être résumée comme suit : des ions minéraux sont en suspension dans un fluide et c'est l'action combinée de protéines, de cellules et d'un processus de mécanotransduction plus ou moins complexe qui permet l'apparition d'un cristal.

Nous rappelons que la mécanotransduction est le processus qui transforme des informations de nature mécanique en information d'autre nature (chimique, biologique, ...) captées par les protéines ou les cellules.

La difficulté est double. Tout d'abord il faut recenser, décrire et modéliser l'ensemble de ces processus élémentaires. Ceci constitue un travail d'études doctorales à part entière. Ensuite il faut pouvoir estimer les champs existants à l'échelle nanoscopique et qui sont créés par les sollicitations mécaniques imposées à la structure macroscopique.

Ce second point a été réalisé dans le cadre de cette étude et nous présentons ci-après, dans le cadre d'une seule simulation, les étapes qui doivent être parcourues.

8.4 Résultats de localisation

Ce paragraphe décrit comment les informations mécaniques peuvent être transmises de l'échelle macroscopique à l'échelle nanoscopique en respectant l'architecture que nous avons considérée. Trois grandes étapes doivent être réalisées : d'abord la définition des

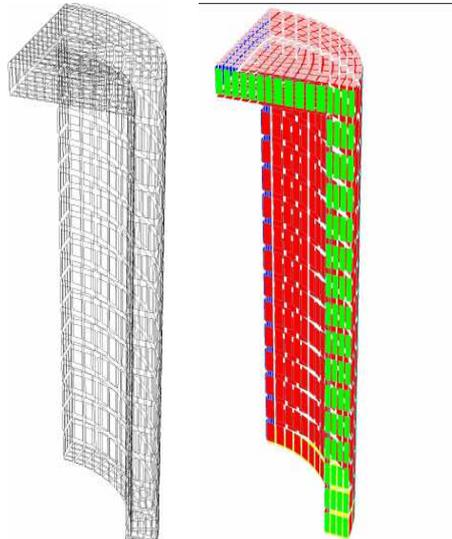
données à l'échelle macroscopique, ensuite le calcul des champs de contraintes, de vitesse et de pression à l'intérieur d'une structure ostéonale et enfin les informations existant au niveau lamellaire, dans le voisinage d'un bâtonnet de collagène.

Pour obtenir les données à l'échelle macroscopique, on peut soit procéder soit de manière expérimentale, soit faire un calcul de structures par éléments finis, soit faire une approche mixte.

Notre approche est uniquement numérique. Nous aurions souhaité travailler sur un fémur. Il est possible de trouver des fichiers de données reconstruisant la géométrie de cet os, mais nous n'avons pas trouvé de bases de données contenant également un descriptif de l'architecture locale de cet os cortical. Nous savons maintenant que ce point est relativement important et comme nous n'avons pas le temps de mener une étude fine sur l'architecture de cet os, nous préférons présenter sur un cas académique le déroulement de notre méthode.

8.4.1 Description du cadre macroscopique

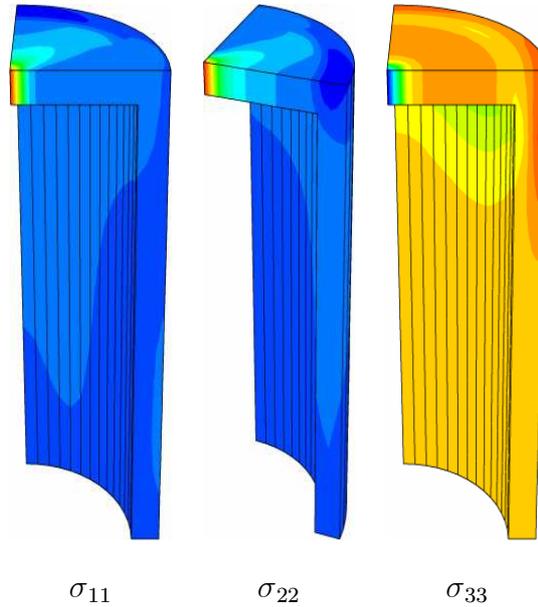
Nous avons donc maillé avec des éléments hexaédriques un tube fermé à ses parties supérieure et inférieure (le dessin ci-dessous représente le huitième de ce tube), nous nous sommes donné un seul type d'architecture et nous avons affecté à tous les éléments de ce maillage les propriétés physiques obtenues par notre processus d'homogénéisations successives.



Nous avons simulé sur la face supérieure un chargement de 5000 N selon une orientation de 30° par rapport à la verticale. Ce chargement correspond, d'une manière assez grossière, à un chargement existant chez un individu normal, au niveau de la tête fémorale lors d'un exercice physique (environ 8 fois le poids du corps). On applique des conditions de symétrie sur la couronne inférieure du maillage.

Un calcul classique par une méthode d'éléments finis est réalisé via le code Modulef en utilisant une interpolation de Lagrange de degré 1. Nous obtenons ainsi :

- en chaque nœud du maillage, les trois composantes du champ de déplacement
- au barycentre de chaque élément, le tenseur des contraintes qui est constant par élément



Nous choisissons un de ces éléments (le n° 809). Les données que nous allons utiliser sont :

- son architecture que nous nous sommes donnée par construction : type 1 (45° ; -45°)
- les déplacements en chacun des 8 sommets que nous extrayons des résultats précédents (8.3)
- le champ de contraintes auquel est soumis cet élément (8.4)

Noeuds	u_x	u_y	u_z
1	0.208244E-08	0.264385E-05	-0.182907E-08
2	0.229451E-08	0.232485E-05	-0.182636E-08
3	0.246746E-08	0.239286E-05	-0.182575E-08
4	0.224372E-08	0.272882E-05	-0.182923E-08
5	0.208201E-08	0.265165E-05	-0.365668E-08
6	0.229291E-08	0.233049E-05	-0.365142E-08
7	0.246626E-08	0.239748E-05	-0.364821E-08
8	0.234378E-08	0.273560E-05	-0.365485E-08

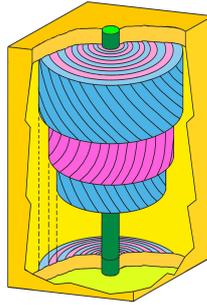
(8.3)

σ_{11}	0.4469436E-05	σ_{12}	-0.8048651E-05
σ_{22}	0.9942555E-05	σ_{13}	-0.8611518E-06
σ_{33}	-0.3607881E-02	σ_{23}	0.2966725E-05

(8.4)

8.4.2 Ecoulement dans une structure ostéonale

Nous nous plaçons maintenant au niveau d'une structure ostéonale:



L'élément n° 809 que nous avons considéré à l'étape précédente est donc constitué par de telles structures qui ont été traitées, dans l'étape précédente, comme homogénéisées. A ce niveau de calcul, nous les considérons avec leur architecture propre. Les résultats qui ont été obtenus ci-dessus se transposent facilement à cette structure :

- les déplacements aux 8 sommets de cette structure ostéonale sont obtenus par interpolation linéaire
- le champ de contraintes est le même

A partir de ces résultats, il est possible d'extraire :

- la pression du fluide : nous choisissons de la prendre égale à la contrainte équivalente de von Mises (36 MPa)
- une estimation des déformations de chacune des faces de ce parallélépipède

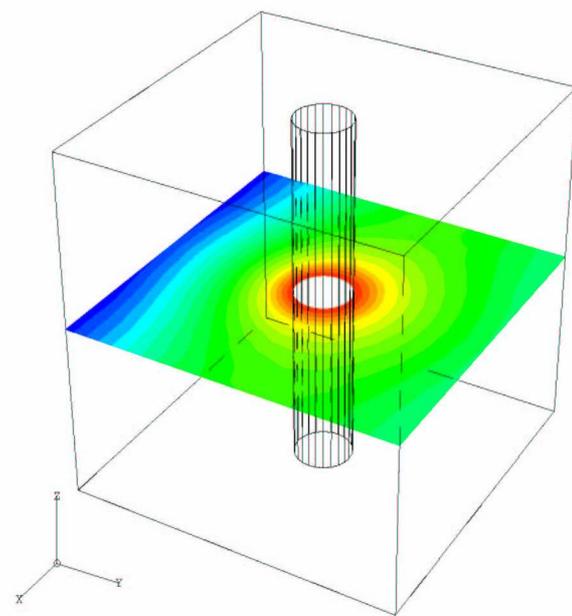
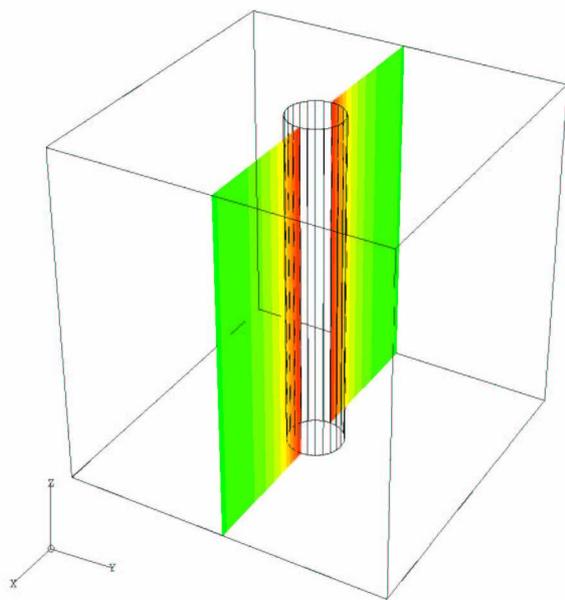
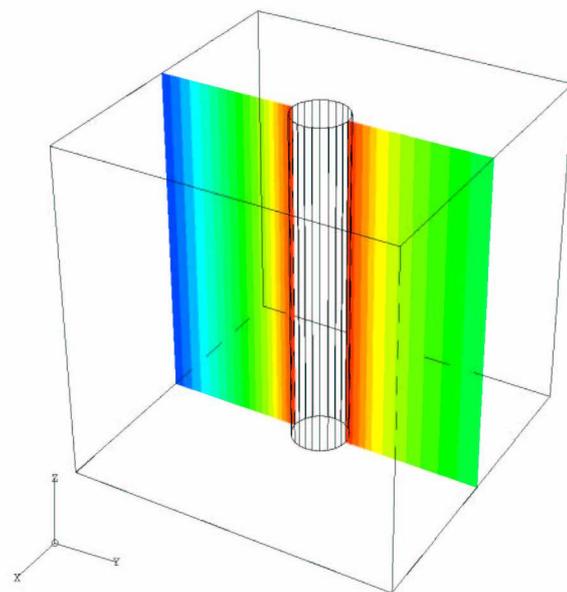
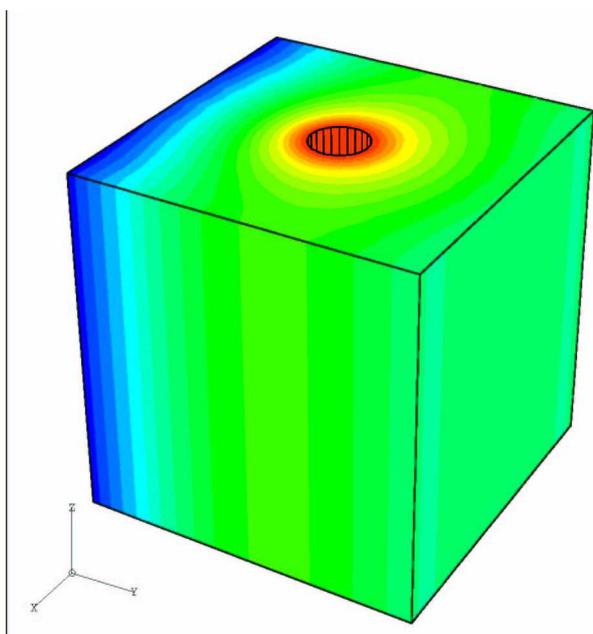
Remarque 34 *Si la valeur de la pression du fluide que nous venons de trouver est injectée dans notre processus d'homogénéisations successives (qui nous donne les propriétés homogénéisées du cortical), nous constatons, à posteriori, que cette valeur n'intervient quasiment pas dans la valeur des propriétés physiques du cortical. Ceci reste cohérent dans la mesure où la structure doit être conçue pour contenir ce fluide et donc résister à sa pression.*

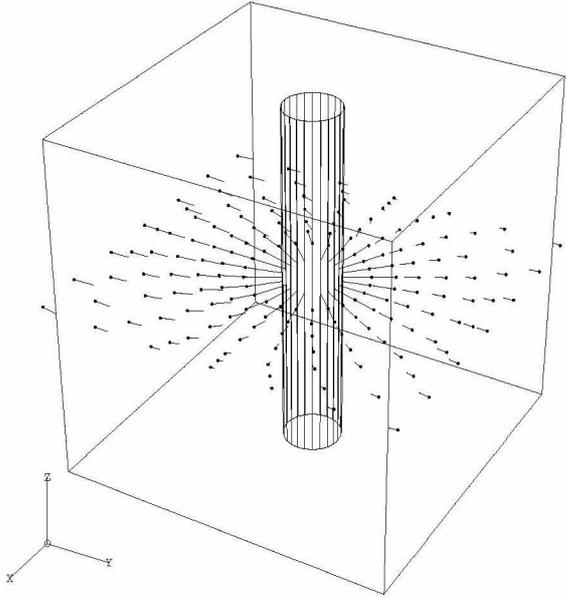
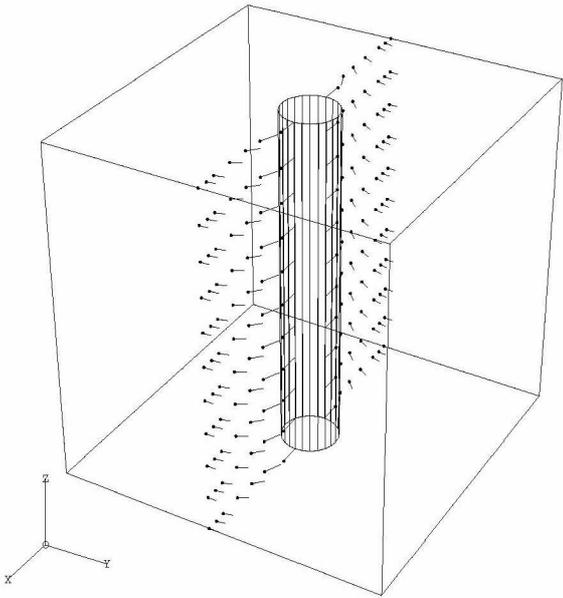
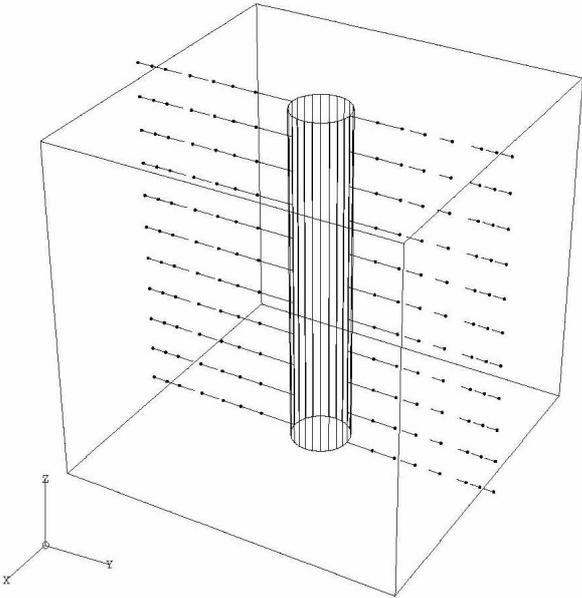
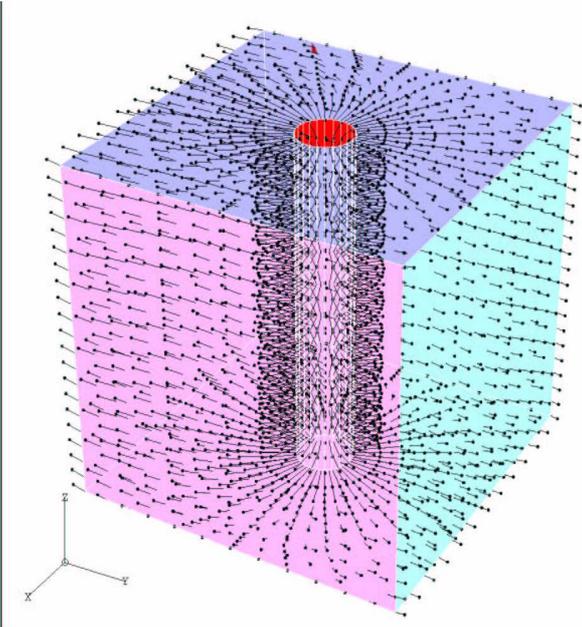
Nous allons maintenant traiter le problème de l'écoulement du fluide dans cette structure ostéonale via le code SETMP qui nous permet de simuler le couplage Darcy-Stokes. Les informations précédentes y sont utilisées de deux manières distinctes :

- la valeur de la pression (36 MPa) est prise comme valeur au barycentre de la structure
- à partir des déformations de chaque face, il est possible de calculer les flux traversant ces faces

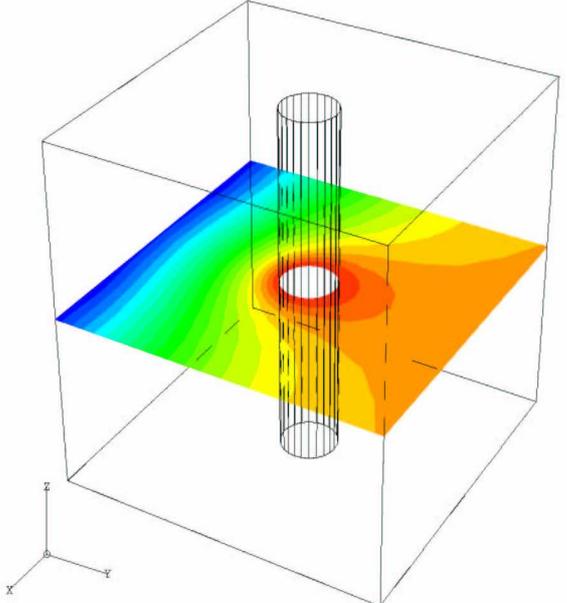
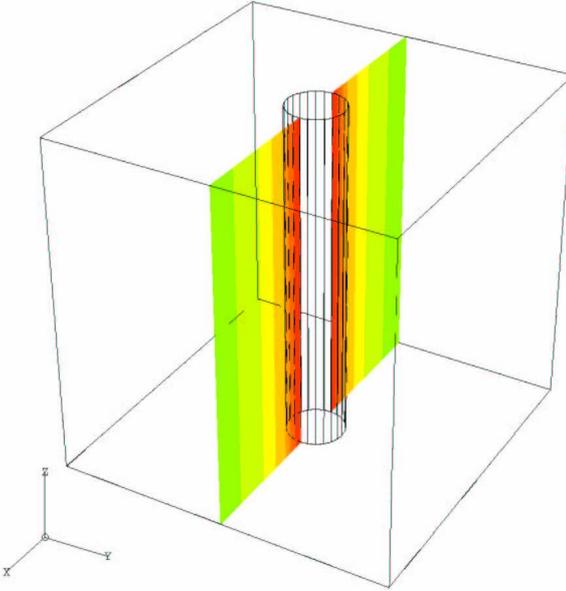
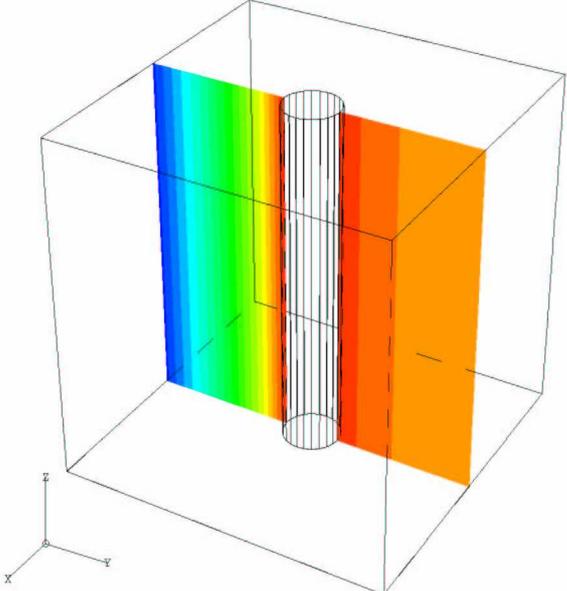
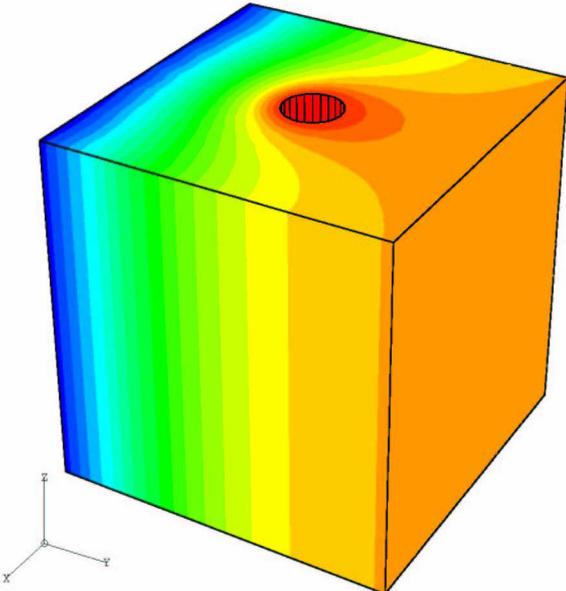
Le couplage Darcy-Stokes peut alors être traité numériquement.

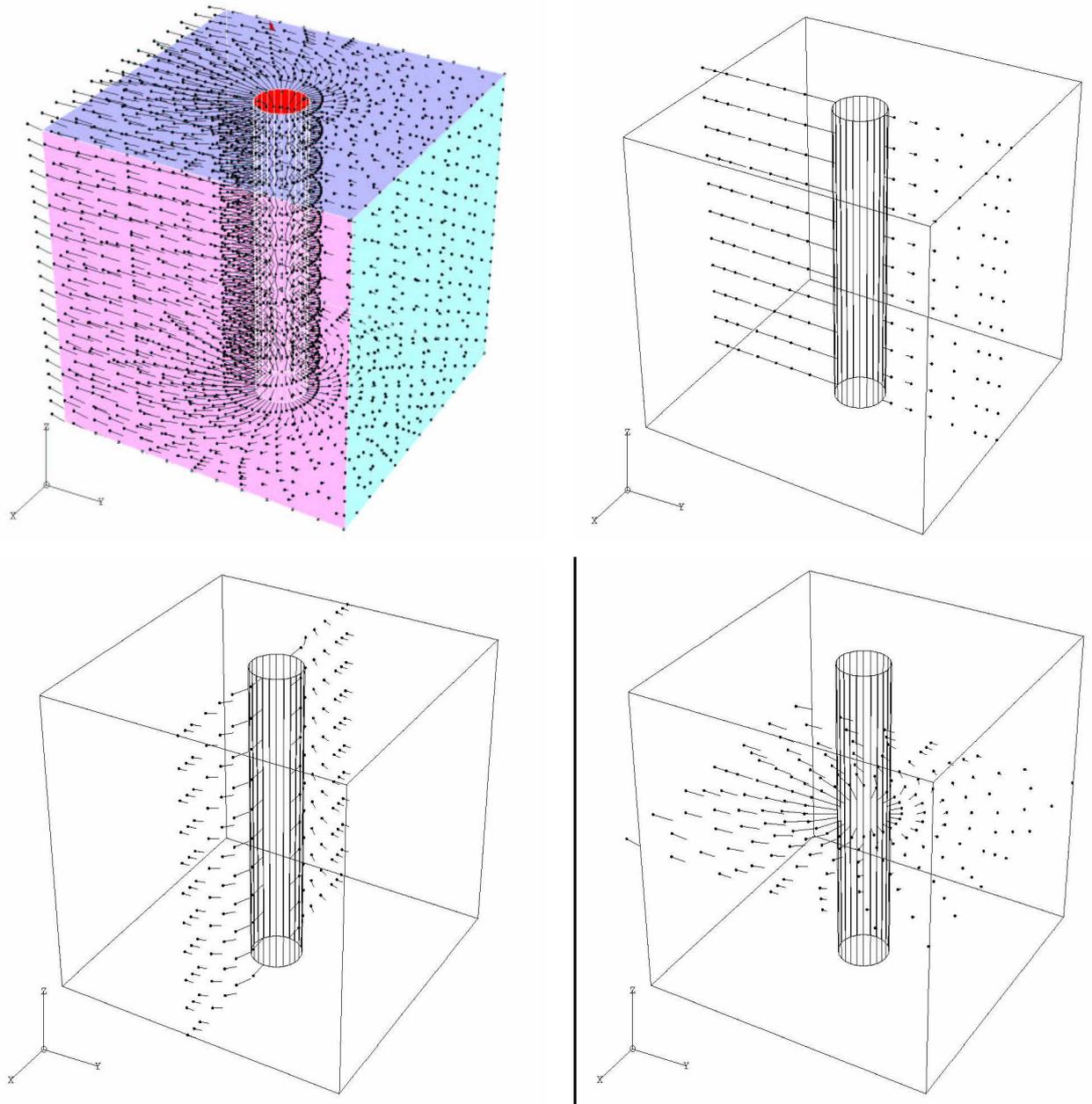
Nous donnons ci-dessous des représentations graphiques du champ piézométrique et du champ de vitesse:





A titre indicatif, nous donnons des représentations graphiques similaires pour un chargement différent au niveau macroscopique et que l'on pourrait assimiler à une relaxation:





Il est important de noter que l'on distingue nettement les deux types d'écoulement: l'écoulement est plus rapide dans le canal de Havers que dans l'ostéon ou le système interstitiel.

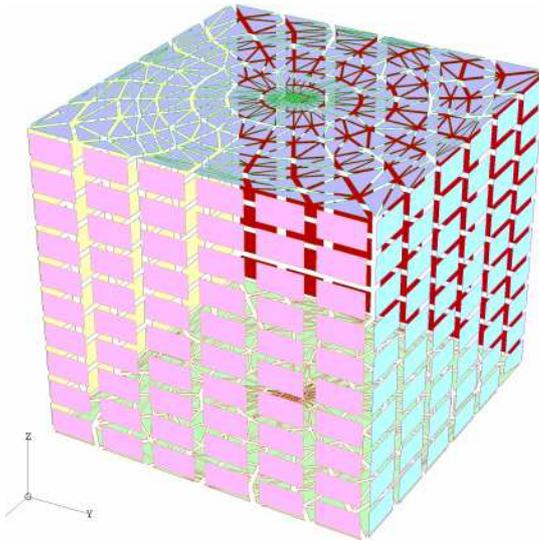
8.4.3 Champs mécaniques à l'échelle nanoscopique

Il est maintenant possible de choisir l'un des éléments du maillage de la structure ostéonale ci-dessus. Des résultats obtenus lors de la simulation du couplage Darcy–Stokes, on peut extraire, en chaque sommet, la valeur de la pression et le vecteur vitesse.

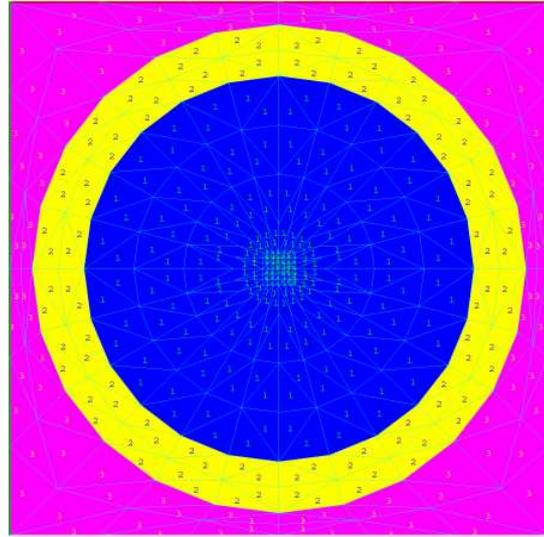
Cet élément est constitué de structures fibrillaires composées de bâtonnets de collagène entourés d'EVMC et de fluide. Nous considérons alors une structure lamellaire de géométrie parallélépipédique dont la section est représentée sur la figure (8.5).

A partir des informations précédentes, nous pouvons extraire, sur chaque face, le champ de pression et le champ des vitesses d'écoulement. On peut alors calculer, à ce niveau fibrillaire :

- les champs de pression et d'écoulement (code SETMP)
- les champs de déplacements, de contraintes et le potentiel électrique (code Modulef)



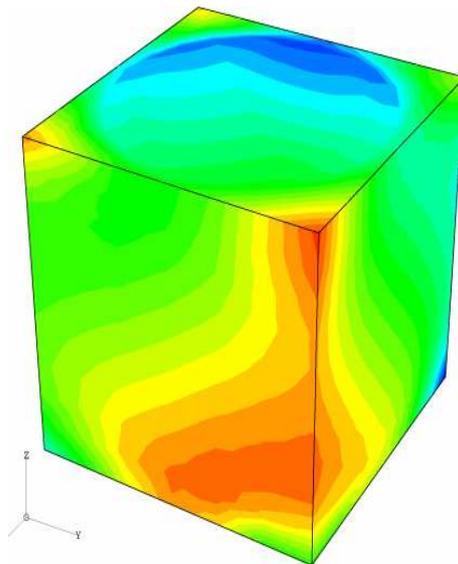
Maillage 3D



Coupe 2D

(8.5)

Voilà par exemple le potentiel électrique qu'on pourrait obtenir au niveau fibrillaire:



Potentiel électrique - niveau fibrillaire

8.5 Conclusions

Le tissu cortical est un matériau très complexe. La connaissance de ses propriétés est indispensable si l'on veut maîtriser certains aspects cliniques, tels que l'ostéoporose ou la stabilité à long terme des prothèses ostéoarticulaires. Le modèle que l'on a développé tient compte de la structure hiérarchique de l'os compact et la simulation numérique est basée sur une technique d'homogénéisation reposant sur des résultats mathématiques. L'utilisation de ce modèle permet, d'une part, l'étude des variations des coefficients homogénéisés de l'os compact en fonction de différents paramètres mécaniques et géométriques des constituants, et d'autre part, l'étude du champ de contraintes au niveau des hétérogénéités ce qui est utile pour la compréhension de la loi du remodelage osseux.

Le code SiNuPrOs que nous avons développé s'avère être un outil d'investigation performant. Les simulations faites dans certaines configurations sont tout à fait cohérentes et correspondent aux données qui existent dans la littérature.

Chapitre 9

Conclusions et perspectives

9.1 Conclusions

L'étude que nous venons de réaliser est l'élaboration d'une modélisation de la structure de l'os cortical qui prend en compte de nombreux aspects : architecture complexe et multi niveaux, loi de comportement dépendant de la structure elle même et présence du même fluide à chaque niveau mais avec des rôles différents.

Le point de départ de ce travail vient de la conclusion faite à partir d'un ensemble important de tests numériques montrant que la structure haversienne n'est pas celle qui induit le plus fortement l'anisotropie de l'os. Cette étude prouve que ce rôle revient plutôt à l'organisation architecturale des cristaux d'Hap au niveau microscopique.

On a été amené à prendre en compte le niveau fibrillaire de l'architecture osseuse, qui est le niveau élémentaire de l'apposition du contenu minéral. Les dimensions des bâtonnets de collagène et ceux des cristaux d'Hap étant très différentes, on a introduit une nouvelle entité, le Volume Élémentaire de Contenu Minéral (EVMC), pour laquelle on a imaginé un arrangement géométrique, puis on a proposé une méthode de détermination de ses propriétés physiques. Cette prise en compte du niveau fibrillaire a nécessité la remise en cause de plusieurs concepts.

On s'est d'abord assuré que notre outil spécifique d'homogénéisation était bien adapté pour notre modélisation. On a analysé les méthodes d'homogénéisation existantes afin de faire le choix le plus judicieux pour traiter notre problème.

Dans un premier temps, on a repris le cadre général d'un problème piézoélectrique, en présentant les équations, puis le cadre fonctionnel, l'homogénéisation par la méthode des développements asymptotiques, l'obtention des propriétés mécaniques homogénéisées,

l'analyse locale et enfin la convergence faible de la solution. On note que la positivité des caractéristiques piézoélectriques n'est pas une condition déterminante pour assurer l'unicité de la solution.

A chacun des quatre niveaux (fibrillaire, lamellaire, ostéonal et cortical) on utilise cette méthode d'homogénéisation par développements asymptotiques en traitant le cas particulier de composantes monocliniques. La volonté de mettre en paramètres de notre logiciel certaines entités nous entraîne à décomposer notre problème d'homogénéisation en deux sous problèmes bi et mono dimensionnels. Il faut cependant noter que ceci permet de réduire considérablement le temps des calculs. Nous abordons la mise en forme des problèmes permettant l'utilisation de la technique des éléments finis pour leur résolution. On donne une formulation permettant la mise en oeuvre numérique des coefficients homogénéisés. Pour l'homogénéisation ostéonale on présente deux manières d'organiser les calculs, les deux méthodes donnant des résultats similaires. Elles ne diffèrent que sur le plan analytique. Les propriétés d'isotropie des structures sont ensuite étudiées et on constate qu'au niveau macroscopique l'os cortical est un matériau orthotrope.

Afin de mieux comprendre le rôle de la ligne cimentante et la place qu'on devait lui accorder dans notre modélisation, on s'est intéressé au cas particulier dans lequel les ostéoclastes venant de creuser une galerie et le tissu collagénique n'étant pas encore apparu, la cavité ainsi construite ne contient que du fluide. On a estimé les propriétés piézoélectriques de la paroi de cette galerie par un développement mathématique. La résolution d'un problème de convergence nous a permis de voir que les propriétés piézoélectriques homogénéisées obtenues sur le pourtour de la galerie étaient diminuées. Il semble donc qu'une telle organisation ne soit pas propice à un processus immédiat de minéralisation. Ce résultat est physiquement réaliste cependant, en l'absence de tout autre élément d'information, il nous est difficile d'expliquer pourquoi il y a apparition de collagène sur ce pourtour.

Enfin, on a introduit une nouvelle loi de comportement, dite avec seuil, dans laquelle les termes piézoélectriques s'évanouissent si une certaine condition est réalisée. Cette nouvelle loi de comportement change de nature physique avec un seuil sur l'état de minéralisation. D'une manière plus générale, on peut dire que, lorsqu'on étudie, à une échelle donnée, une structure composite dont seule la fibre possède des propriétés piézoélectriques, l'effet piézoélectrique ne peut être considéré à l'échelle supérieure que si la matrice entourant cette "fibre" n'est pas trop rigide. Cette loi, introduite dans le but d'avoir un modèle beaucoup plus réaliste sur le plan physiologique, peut être appliquée à n'importe quel niveau de l'architecture. De plus, elle est compatible avec tous les développements faits dans le cadre de l'homogénéisation. La difficulté pour nous était de définir une valeur seuil. Cette dernière a été choisie sur un critère de minéralisation et la "minéralisation seuil" que nous avons retenue est celle qui correspond au système interstitiel. La conséquence principale d'une telle loi de modélisation est que la structure

ostéonale, dans l'os sain, sera toujours un milieu élastique..

Ensuite, on a traité le comportement mécanique de l'os compact entier comme un ensemble fluide-structure. Le problème a été modélisé comme un problème couplé Darcy-Stokes, en supposant que l'écoulement était modélisé par la loi de Darcy pour la structure ostéonale et par l'équation de Stokes pour les canaux de Havers et Volkman. On a considéré la structure de l'os cortical comme un milieu poreux avec différents coefficients de porosité selon la minéralisation et différents tenseurs de perméabilité selon l'architecture.

En résumé, une modélisation relativement fine quant à la prise en compte de phénomènes biomécaniques à donc été réalisée. Elle aborde à la fois les aspects géométriques, comportementaux, multi composants dans un cadre multi échelle. D'une part, cette modélisation décrit un modèle numérique permettant le calcul des caractéristiques homogénéisées de la structure composite multi échelle de l'os cortical humain et d'autre part, elle représente une avancée importante quant à la prise en compte du couplage fluide-structure à chacun des niveaux.

Le modèle qui a été réalisé est assez complexe et pratiquement, toutes les configurations possibles peuvent être testées, le modèle permettant une intervention directe sur les diverses données liées à l'architecture de l'os. On peut par exemple changer facilement les données concernant la minéralisation (pEVMC), le pourcentage d'eau liée (pel), la longueur d'un bâtonnet de collagène, l'écart entre deux bâtonnets de collagène, l'épaisseur de la ligne cémentante, on peut considérer le cas des lamelles collées ou pas, etc ...

A partir de ce travail on a construit un logiciel permettant de calculer, de manière conviviale, les caractéristiques homogénéisées de la structure composite multi échelle de l'os haversien compact, les données que l'on entre étant les propriétés physiques du collagène, du fluide et celles du volume élémentaire de contenu minéral (EVMC). Ce code a été baptisé SiNuPrOs (Simulation Numérique des Propriétés de l'Os). Il a été réalisé en Matlab et les maillages utilisés pour les cellules de base ont été élaborés en utilisant les maillages du code Modulef. Il comprend une interface qui rend son utilisation très conviviale, possible par n'importe quelle personne intéressée par le sujet mais non mathématicienne (biomécaniciens, cliniciens,) et une phase de calculs qui peut être totalement transparente pour l'utilisateur.

Une étude sur les variations des coefficients homogénéisés de l'os compact en fonction de différents paramètres mécaniques et géométriques liés à ses constituants a été réalisée. Ces résultats sont intéressants sur le plan biomécanique. D'abord on montre qu'il est possible, pour certaines architectures de retrouver les caractéristiques du tissu osseux. Ensuite, on met en évidence le fait que l'organisation cristalline a un rôle dans l'anisotropie de l'os. Enfin, les techniques de localisation développées permettent

d'estimer les champs mécaniques existant au niveau nanoscopique.

Le problème de la modélisation du remodelage osseux reste ouvert mais cette étude est une contribution importante puisqu'elle donne l'accès à des valeurs de champs nanoscopique à partir de données macroscopiques.

9.2 Perspectives

L'étude que nous venons de réaliser n'est pas une fin en elle-même car elle ouvre la porte à des investigations incontournables dont la finalité est la compréhension du remodelage osseux.

Ces investigations peuvent être regroupées en deux grandes classes.

- La première concerne la simulation des écoulements existants au niveau de la structure ostéonale. Il semble important d'effectuer plusieurs batteries de simulation afin de voir quelles pourraient être les informations mécaniques susceptibles de modifier localement la nature du remodelage osseux.

Par exemple, nous avons constaté que des variations significatives apparaissaient dans les résultats en fonction de l'architecture de l'ostéon en cours de minéralisation. Une étude plus précise quant à la nature des informations macroscopiques doit donc être menée. Ce point est important. En effet, considérons un système interstitiel (SI) avec une architecture donnée, monotype dans lequel les ostéoclastes viennent de creuser une galerie. Si la nature de l'écoulement à l'interface SI-cavité dépendait de l'architecture du SI alors on pourrait imaginer que cette information soit captée par les cellules responsables de la création des bâtonnets de collagène et qu'elle soit utilisée pour déterminer l'orientation de ces derniers.

- La seconde concerne bien entendu la modélisation du processus de minéralisation. Nous en avons suffisamment parlé dans ce mémoire pour ne plus avoir à prouver son intérêt.

Annexe 1

Description des étapes du logiciel

SiNuPrOs

Le logiciel est structuré en plusieurs modules: modules d'entrées de données, modules de calcul ou modules de sortie de résultats. Les entrées de données se font de manière interactive; une interface logiciel – utilisateur a été conçue de manière conviviale, ce qui rend l'exploitation de ce logiciel possible par n'importe quelle personne intéressée par le sujet mais non mathématicienne (biomécaniciens, cliniciens,).

Le calcul des coefficients homogénéisés nécessite la résolution des problèmes cellulaires, résolution qui se fait par la technique des éléments finis et qui contient plusieurs sous-étapes:

Génération des maillages

Les maillages ont été construits en faisant appel à la bibliothèque d'éléments finis MODULEF [FEM]. Les données nécessaires pour générer les maillages sont les caractéristiques géométriques de la section de la fibrille, dans un premier temps, et de la section de l'os, dans un deuxième temps, les deux constituant les cellules de base pour chacune de ces structures. Toutes les informations liées à ces maillages ont été récupérées en créant des modules spécifiques, les données étant chargées en Matlab comme fichiers de données lors de l'exécution du programme.

Entrées de données

Les modules d'entrées de données sont INTERFACE et PARAMETRES_PHYSIQUES. Dans le premier on donne les informations concernant l'architecture et la géométrie des maillages utilisés et dans le deuxième on introduit toutes les propriétés physiques des

composantes.

Les propriétés des EVMC sont calculés séparément dans le module EVMC, pour un volume de référence dont on a étudié les propriétés.

Le module PRESENCECELLULE récupère les propriétés physiques de chaque élément du maillage en fonction de son appartenance à l'un ou l'autre des sous-domaines, collagène, EVMC ou fluide. De même, PRESENCECELLULE_HAV a la même fonction, mais cette fois les sous-domaines sont les 4 ostéons, le système interstitiel et le fluide s'écoulant dans les canaux de Havers.

Conditions aux limites

On a utilisé deux types de conditions aux limites:

- des conditions aux limites de Dirichlet aux sommets de la section de la cellule de base (valeurs qu'on a fixé à 0)
- des conditions aux limites de périodicité, c'est-à-dire, des valeurs égales pour les noeuds situés sur des faces opposées de la section de la cellule de base

Elles sont traitées dans les modules DIRICHLET_ZERO et PERIODDIRICH

Construction et résolution des systèmes linéaires

Dans le module MATRICE sont regroupés les calculs pour l'obtention des matrices associées aux problèmes cellulaires qu'il faut résoudre pour trouver les coefficients homogénéisés des différentes structures que l'on rencontre jusqu'au niveau macroscopique de l'os. Dans SECONDMEMBRE on traite les seconds membres élémentaires de ces problèmes cellulaires.

Le module SOLUTION permet de trouver les fonctions d'influence qui interviennent dans le calcul des coefficients homogénéisés.

Calcul des coefficients homogénéisés

Pour le calcul des coefficients homogénéisés on a construit les modules COEFF-ELASHOM, COEFFPIEZOHOM et COEFFDIELECHOM. Ces modules calculent les propriétés homogénéisées à partir des données géométriques et mécaniques des constituants de la section de la cellule de base et de la solution des problèmes cellulaires, résultats de la sous-étape précédente. On calcule ainsi les propriétés homogénéisées élastiques, piézoélectriques et diélectriques des structures fibrillaire, lamellaire, ostéonale et finalement corticale.

Des modules comme ROTATION et ROT_LAMELLE sont créés pour déterminer par exemple les propriétés d'une lamelle avec une orientation donnée des bâtonnets de collagène.

Le module HOM_LAM_OZ réalise un empilement de 4 couches qui vont constituer la fibrille et donc après une lamelle avec une orientation verticale du collagène; on tient compte de la dimension d'un bâtonnet de collagène.

ROTATION_OS et ROTATION_SI sont des modules qui permettent le passage d'un secteur ostéonal à l'ostéon dans le cas d'un ostéon normal ou bien dans le cas d'un ostéon surminéralisé qui constituera après le système interstitiel.

Les modules *_HAV permettent enfin de calculer les propriétés physiques homogénéisées de l'os cortical au niveau macroscopique.

ARBORESCENCE

- > Interface
- > Propriétés_physiques_base:
 - || EVMC
- > Paramètres_physiques
- > Choix_elt
- > Choix_front:
 - || Choix_front_0
 - || Choix_front_1
 - || Choix_front_2
 - || Choix_front_3
 - Choix_front_4
- > Affich_tenseur_C
- > Affich_tenseur_G
- > Affich_tenseur_D
- > Affectation

- > Matrice1:
 - || PresenceCellule1
 - || PeriodDirich
- > SecondMembre1:
 - || rotationelast
 - || rotationpiezo
 - || rotationdielec

```

> SecondMembre0
> Dirichlet_zero
> Solutions1
> Affich
> CoeffElasHom1
> CoeffPiezoHom1
> CoeffDielecHom1
> hom_lam_Oz
> Empilement_Oz
> rotation_OS
> rotation_SI
> rot_lamelle:
|| rotationelast_Oz
|| rotationpiezo_Oz
|| rotationdielec_Oz
> matrice_hav:
|| PresenceCellule_hav
|| PeriodDirich_hav
> SecondMembre_hav
> Dirichlet_hav
> CoeffElasHom_hav

```

Le logiciel et le fichier "Help" se trouvent sur le site de l'Université de Franche-Comté à l'adresse <http://www-math.univ-fcomte.fr/Sinupros.zip>

Annexe 2

Formules d'une rotation autour de l'axe Ox

Pour la rotation d'axe Ox et d'angle θ les relations tensorielles à utiliser ont la forme suivante:

$$C_{ijkl}^h(\theta) = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{kr} \cdot t_{ls} \cdot C_{mnr s}$$

$$g_{ijk}^h(\theta) = t_{im} \cdot t_{jn} \cdot t_{ks} \cdot g_{mns}$$

$$\epsilon_{ij}^h(\theta) = t_{im} \cdot t_{jr} \cdot \epsilon_{mr}$$

où $T = (t_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ est la matrice de rotation d'angle θ , $C = (C_{mnr s})$

est le tenseur d'élasticité de la lamelle dans le repère initial ($Oxyz$) et $C^h = (C_{ijkl}^h(\theta))$ est le tenseur d'élasticité de la lamelle dans le repère ($Ox'y'z'$) obtenu après la rotation d'angle θ et d'axe Ox (avec les notations correspondantes pour les tenseurs piézo-élastiques et diélectriques).

En faisant varier les indices on obtient de manière explicite:

$$\begin{aligned} C_{1111}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{1r} \cdot t_{1s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1122}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1122} \cdot \cos^2 \theta + C_{1133} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$C_{1133}^h(\theta) = t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{3r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s}$$

$$= C_{1133} \cdot \cos^2 \theta + C_{1122} \cdot \sin^2 \theta$$

$$\begin{aligned} C_{1112}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1112} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2222}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{2r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2222} \cdot \cos^4 \theta + C_{3333} \cdot \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (2C_{2233} + 4C_{2323}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2233}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{3r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2233} \cdot (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) + (C_{2222} + C_{3333} - 4C_{2323}) \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2212}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2212} \cdot \cos^3 \theta + \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot (C_{3312} + 2C_{2313}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3333}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{3n} \cdot t_{3r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} = \\ &= C_{3333} \cdot \cos^4 \theta + C_{2222} \cdot \sin^4 \theta + \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (2C_{2233} + 4C_{2323}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3312}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{3n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{3312} \cdot \cos^3 \theta + \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot (C_{2212} - 2C_{2313}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2323}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{3n} \cdot t_{2r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2323} \cdot (\cos^4 \theta + \sin^4 \theta) - \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \cdot (2C_{2233} + 2C_{2323}) + C_{2222} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \\ &\quad + C_{3333} \cdot \cos^2 \theta \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2313}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{3n} \cdot t_{1r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{2313} \cdot \cos^3 \theta + \sin^2 \theta \cdot \cos \theta \cdot (C_{2212} - C_{2313} - C_{3312}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1313}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{3n} \cdot t_{1r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1313} \cdot \cos^2 \theta + C_{1212} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1212}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2n} \cdot t_{1r} \cdot t_{2s} \cdot C_{mnr s} \\ &= C_{1212} \cdot \cos^2 \theta + C_{1313} \cdot \sin^2 \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1123}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (C_{1133} - C_{1122}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{2223}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{2r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \cdot (C_{2233} + 2C_{2323} - C_{2222}) + \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \cdot (C_{3333} - 2C_{2323} - C_{2233}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{3323}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2n} \cdot t_{2r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \cdot (C_{2233} + 2C_{2323}) - \sin^3 \theta \cdot \cos \theta \cdot C_{2222} + \cos^3 \theta \cdot \sin \theta \cdot C_{3333} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_{1312}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2r} \cdot t_{3s} \cdot C_{mnr s} \\ &= \sin \theta \cdot \cos \theta \cdot (C_{1313} - C_{1212}) \end{aligned}$$

On procède de la même manière pour les tenseurs homogénéisés piézoélectriques et diélectriques. On obtient (en appliquant les relations ci-dessus):

$$\begin{aligned} g_{123}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= g_{123} \cdot \cos \theta^2 - g_{123} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{213}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{1n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= g_{213} \cdot \cos \theta^2 - g_{312} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{312}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2s} \cdot g_{mns} \\ &= g_{312} \cdot \cos \theta^2 - g_{213} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{111}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1n} \cdot t_{1s} \cdot g_{mns} \\ &= g_{111} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{122}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2n} \cdot t_{2s} \cdot g_{mns} \\ &= 2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot g_{123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{133}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{3n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= -2 \cdot \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot g_{123} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{212}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{1n} \cdot t_{2s} \cdot g_{mns} \\ &= \cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (g_{213} + g_{312}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g_{313}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{1n} \cdot t_{3s} \cdot g_{mns} \\ &= -\cos \theta \cdot \sin \theta \cdot (g_{213} + g_{312}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{11}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{1r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{11} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{12}^h(\theta) &= t_{1m} \cdot t_{2r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{12} \cdot \cos \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{22}^h(\theta) &= t_{2m} \cdot t_{2r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{22} \cdot \cos \theta^2 + \epsilon_{33} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{33}^h(\theta) &= t_{3m} \cdot t_{3r} \cdot \epsilon_{mr} \\ &= \epsilon_{33} \cdot \cos \theta^2 + \epsilon_{22} \cdot \sin \theta^2 \end{aligned}$$

Annexe 3

Empilement selon l'axe Ox

Les équations qu'il faut résoudre pour trouver les fonctions d'influence sont:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1} [C_{i1k1} \frac{d\chi_k^{mn}}{dy_1} + g_{1i1} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} C_{i1mn} \\ \frac{d}{dy_1} [g_{1k1} \frac{d\chi_k^{mn}}{dy_1} - \epsilon_{11} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} g_{1mn} \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1} [g_{1i1} \frac{dR^m}{dy_1} + C_{i1k1} \frac{d\Phi_k^m}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} g_{mi1} \\ \frac{d}{dy_1} [\epsilon_{11} \frac{dR^m}{dy_1} - g_{1k1} \frac{d\Phi_k^m}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} \epsilon_{1m} \end{cases}$$

On peut démontrer facilement (comme dans le cas de l'empilement selon l'axe Oz) que:

1 Pour $(m, n) = (1, 3); (1, 2)$, $\chi_1^{mn} = 0$ et $\Psi^{mn} = 0$ et χ_2^{mn}, χ_3^{mn} sont solutions du système:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1} [C_{1312} \frac{d\chi_2^{mn}}{dy_1} + C_{1313} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} C_{31mn} \\ \frac{d}{dy_1} [C_{1212} \frac{d\chi_2^{mn}}{dy_1} + C_{1213} \frac{d\chi_3^{mn}}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} C_{21mn} \end{cases}$$

2 Pour $(m, n) = (1, 1); (2, 2); (3, 3); (2, 3)$, $\chi_2^{mn} = \chi_3^{mn} = 0$ et χ_1^{mn}, Ψ^{mn} vérifient:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1} [C_{1111} \frac{d\chi_1^{mn}}{dy_1} + g_{111} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} C_{11mn} \\ \frac{d}{dy_1} [g_{111} \frac{d\chi_1^{mn}}{dy_1} - \epsilon_{11} \frac{d\Psi^{mn}}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} g_{1mn} \end{cases}$$

3 Pour $m = 2, 3$, $\Phi_1^m = 0$ et $R^m = 0$ et Φ_2^m, Φ_3^m vérifient:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1} [C_{1212} \frac{d\Phi_2^m}{dy_1} + C_{1213} \frac{d\Phi_3^m}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} g_{m21} \\ \frac{d}{dy_1} [C_{1312} \frac{d\Phi_2^m}{dy_1} + C_{1313} \frac{d\Phi_3^m}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} g_{m31} \end{cases}$$

4 Pour $m = 1$, $\Phi_2^m = \Phi_3^m = 0$ et Φ_1^m, R^m vérifient:

$$\begin{cases} \frac{d}{dy_1} [g_{111} \frac{dR^m}{dy_1} + C_{1111} \frac{d\Phi_1^m}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} g_{111} \\ \frac{d}{dy_1} [\epsilon_{11} \frac{dR^m}{dy_1} - g_{111} \frac{d\Phi_1^m}{dy_1}] = -\frac{d}{dy_1} \epsilon_{11} \end{cases}$$

Les coefficients homogénéisés d'un tel empilement s'obtiennent en utilisant les formules suivantes:

- pour les coefficients élastiques:

$$C_{ijkl}^h = \frac{1}{Y_1} \int_0^{Y_1} [C_{ijkl} + C_{ijm1} \frac{d\chi_m^{kl}}{dy_1} + g_{1ij} \frac{d\Psi^{kl}}{dy_1}] dy_1$$

- pour les coefficients piézoélectriques:

$$g_{kij}^h = \frac{1}{Y_1} \int_0^{Y_1} [g_{kij} + C_{ijm1} \frac{d\Phi_m^k}{dy_1} + g_{1ij} \frac{dR^k}{dy_1}] dy_1$$

- pour les coefficients diélectriques:

$$\epsilon_{jm}^h = \frac{1}{Y_1} \int_0^{Y_1} [-g_{j1l} \frac{d\Phi_l^m}{dy_1} + \epsilon_{j1} \frac{dR^m}{dy_1} + \epsilon_{jm}] dy_1$$

Les travaux présentés dans ce mémoire ont fait l'objet de plusieurs articles et communications:

Articles

Crolet J. M. , Racila M., Mahraoui R., Meunier A. , "New numerical concept for hydroxyapatite in human cortical bone", Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Vol. 8 (2), pp. 139-143, 2005

Racila M., Crolet J. M., "Human cortical bone: A tool for numerical simulation of fluid motion in osteonal architectures", Proceedings of 2nd International Conference on Computational Bioengineering, Vol. 2, IST Press, pp. 711-718, 2005

Crolet J. M. , Racila M., "Sur les propriétés physiques homogénéisées d'une paroi osseuse", Annals of University of Craiova, pp. 106-111, 2005

Racila M., "On the homogenized behavior of composites with periodic structure", Annals of Univ. of Craiova, Math.Comp.Sci.Ser. Volume 30(2), ISSN: 1223-69341, pp.146-150, 2003

Crolet J. M., Racila M., "Human cortical bone: computer method for physical behavior at nano scale", Technology and Healthcare – Journal of the European Society for Engineering and Medicine, ISSN 0928-7329 (à paraître)

Conférences

Crolet J. M. , Racila M., "Human cortical bone : computer method for physical behavior at nano scale", Symposium of Applied Biomechanics, Regensburg, june, 2005

Crolet J. M., Racila M., "New numerical concept for hydroxyapatite in human cortical bone", 6th International Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Madrid, février 2004

Racila M., Crolet J. M., "Multi physic and multiscale aspects in human cortical bone", 5th International Balkan Workshop on Applied Physics, Constanta, Romania, july, 2004

Crolet J. M. , Racila M., *"Interest of homogenization theory for modeling human cortical bone"*, 7ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Craiova, Roumanie, août, 2004

Racila M., Crolet J. M., *"Homogénéisation d'une structure osseuse en début de minéralisation"*, 7ème Colloque Franco-Roumain de Mathématiques Appliquées, Craiova, Roumanie, août, 2004

Racila M., *"On the homogenization of heterogeneous piezoelectric medium"*, CAIM, Oradea, Roumanie, mai 2003

BIBLIOGRAPHIE

- [AB96] **Allaire G. and Briane M.** , "*Multiscale convergence and reiterated homogenization*", Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 126A: 297-342, 1996
- [All92] **Allaire G.**, "*Homogenisation and two-scale convergence*", SIAM J. Math. Anal. , 23.6 : 1482-1518, 1992
- [All99] **Allaire G.**, "Homogenization and applications to material sciences", Lecture Notes at the Newton Institute, Cambridge, September, 1999
- [Aki92] **Akiva U. et al.**, "*Modelling the three-dimensional elastic constants of parallel-fibred and lamellar bone*", Journal of Materials Science, 33, 1497-1509, 1998
- [Aou96] **Aoubiza B., Crolet J. M., Meunier A.**, "*On the mechanical characterization of compact bone structure using the homogenization theory*", Journal of Biomechanics, vol. 29, no. 12, pag. 1539-1547, 1996
- [Aou91] **Aoubiza B.**, "*Homogénéisation d'un composite multi-échelle: Application à une modélisation numérique de l'os haversien compact*", Thèse présentée à l'UFR des Sciences et Techniques de l'Université de Franche-Comté, 1991
- [Ash87] **Ashman R.B., Corin J.D., Turner C.H.**, "*Elastic properties of cancellous bone : measurement by an ultrasonic technique.*", Journal of Biomechanics, Vol 20, N° 10, p. 979-986, 1987
- [Ash88] **Ashman R.B., Rho J.Y.**, "*Elastic modulus of trabecular bone material.*", Journal of Biomechanics, Vol. 21,N° 3, p. 177-181, 1988
- [Ash89] **Ashman R.B., Rho J.Y., Turner C.H.**, "*Anatomical variation of orthotropic elastic moduli of the proximal human tibia.*" Journal of Biomechanics, Vol. 22, N°8/9, p. 895-900, 1989
- [Ash94] **Ashman R.B., Antich P.P., Gonzales J., Anderson J.A., Rho J.Y.**, "*A comparison of reflection and transmission ultrasonic techniques for measurement of cancellous bone elasticity.*", Journal of Biomechanics, Vol. 27, N°9, p. 1195-1199, 1994

- [AWW98] **Akiva U., Wagner H. D., Weiner S.**, *Modelling the three-dimensional elastic constants of parallel-fibred and lamellar bone*, J. Mater. Sci., **33**, 1497, 1998
- [Ba74] **Bakhvalov. N. S.**, *"Averaged characteristics of bodies with periodic structure"*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **218**, 1046-1048, 1974. English translation in Soviet Physics Dokl. **19**, 1974
- [Ba75] **Bakhvalov. N. S.**, *"Averaging of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients"*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **221**, 516-519, 1975. English translation in Soviet Math. Dokl. **16**, 1975
- [Ba75] **Bakhvalov. N. S.**, *"Averaging of nonlinear partial differential equations with rapidly oscillating coefficients"*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **225**, 249-251, 1975. English translation in Soviet Math. Dokl. **16**, 1975
- [BP84] **Bakhvalov N. S. and Panasenko. G. P.**, *"Homogenization: Averaging Processes in Periodic Media"*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht-Boston-London, 1989
- [BLP78] **Bensoussa A., Lions J.-L. and Papanicolaou. G. C.**, *"Asymptotic analysis for periodic structures"*, North Holland, Amsterdam, 1978
- [FEM] **Bernadou M. et al.**, "MODULEF: Une bibliothèque modulaire d'éléments finis", INRIA, 1988
- [BM61] **Bogoliubov N. N. and Mitropolsky. Y. A.**, *"Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillations"*, Gordon and Breach, New York, 1961
- [BLi67] **Bonfield W., Li C. H.**, *"Anisotropy of nonelastic flow in bone"*, J. Appl. Phys., **38**, 2450, 1967
- [Bre83] **Brezis H.**, *Analyse fonctionnelle. Théorie et application*, Masson, 1983
- [Cab95] **Cabrol C.**, *Anatomie 1. Appareil locomoteur*, Paris, Flammarion, 417 p., 1995
- [Cal02] **Calugaru D.G.**, *"Modélisation et simulation numérique du transport de radon dans un milieu poreux fissuré ou fracturé. Problème direct et problèmes inverses comme outils d'aide à la prédiction sismique"*, Thèse présentée à l'Université de Franche-Comté, 2002
- [CD99] **Cioranescu D., Donato P.**, *"An Introduction to Homogenization"*, Oxford University Press, 1999
- [Cow99] **Cowin S. C.**, *"Bone poroelasticity"*, Journal of Biomechanics, **32**, 217-238, 1999

- [Cro93] **Crolet J. M., Aoubiza B., Meunier A.**, *Compact bone: numerical simulation of mechanical characteristics*, Journal of Biomechanics, vol. 26, no. 6, pag. 677-687, 1993
- [Cro02] **Crolet J.M.**, "Introduction of piezo elasticity phenomenon in cortical bone remodelling," Proceedings of the fourth Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, J. Middleton, N.G. Shrive, M.L. Jones Eds., 2002
- [CR05] **Crolet J.M., Racila M., Mahraoui R. and Meunier A.**, "A new numerical concept for modeling hydroxyapatite in human cortical bone", Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, Ed. John Middleton and Nigel Shrive, Vol. 8, No. 2, p. 139-143, 2005
- [Cro98] **Crolet J. M. and Jacob F.**, "Numerical dispersivity in modeling of saltwater intrusion into a coastal aquifer", Recent Advances in Problems of Flow and Transport in Porous Media., J.M. Crolet and M.E. Hatri (eds.), pp. 131-142, 1998
- [Cur62] **Currey J. D.**, "Strength of bone", Nature, 195, 513, 1962
- [Da96] **Dasser S.**, Thèse de l'Université de Franche-Comté
- [Duv76] **Duvaut G.**, "Analyse fonctionnelle et mécanique des milieux continus Application à l'étude des matériaux composites élastiques à structure périodique-homogénéisation" Theoretical and Applied Mechanics, W.T.Koiter, ed.Noerth-Holland Publishing Company 1976
- [Duv84] **Duvaut G.**, "Homogénéisation et matériaux composites.Trends and Applications of Pures Mathematics to Mecanics.Proceedings", Palaiseau France, 1983. Ed. P.G. Ciarlet, M.Roseau, Lectures notes in Physics, n° 195, 35-62, Springer Verlag, 1984
- [Gar99] **Garrigues J.** "Mécanique des milieux continus", Cours de l'école supérieure de mécanique de Marseille, 1999
- [Gra94] **Grabowski T.**, *Principes d'anatomie et de physiologie*. 2ème ed. Québec :De Boeck Université, p.156-157, 1994
- [Ger73] **Germain P.**, *Cours de mécanique des milieux continu*, éd. Masson, 1973
- [Gib85] **Gibson L.J.**, *The mechanical behaviour of cancellous bone.*, J. Biomechanics, Vol. 18, N° 5, p. 317-328, 1985
- [Gib97] **Gibson L.J., Ashby M.F.**, *Cellular solids. Structure and properties.*, Second edition, Cambridge : Cambridge University Press, 510 p., 1997

- [GF75] **E. De Giorgi, T. Franzoni.** *"Su un tipo di convergenza variazionale"*, Rend. Accad. Naz. Lincei, Roma LV III, 842-850, 1975
- [Gol87] **Goldstein S.A.**, *The mechanical properties of trabecular bone : dependance on the anatomic location and fonction.*, J. Biomechanics, Vol. 20, N° 11/12, p.1055-1061, 1987
- [GS73] **E. De Giorgi, Spagnolo S. .**, *"Sulla convergenza degli integrali dell'energia per operatori ellittici del secondo ordine."*, Boll. Unione Mat. Ital., Ser 8, 391-411, 1973
- [Gur05] **Gururaja S.et al.**, *"Modeling deformation-induced fluid flow in cortical bone's canalicular-lacunar system"*, *Annals of Biomedical Engineering*, 33 (1), 7-25, 2005
- [Has64] **Hashin Z., Rosen B. W.**, *"The elastic moduli of fiber-reinforced materials"*, ASME J. Appl. Mec., Vol. 31, pp. 223-232, 1964
- [Hel02] **Hellmich CH., Ulm F.J.**, *Hydroxyapatite is uniformly concentrated in the extracollagenous ultrastructure of mineralised tissues*, Proceedings of the fourth Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, J. Middleton, N.G. Shrive, M.L. Jones Eds., 2002
- [Hel02] **Hellmich CH., Ulm F.J.**, *Mineralized tissues as crystal foams reinforced by collagen: experimental evidence and continuum micromechanics model*, Proceedings of the fourth Symposium on Computer Methods in Biomechanics and Biomedical Engineering, J. Middleton, N.G. Shrive, M.L. Jones Eds., 2002
- [Jos97] **Joseph Pastor**, *"Homogenization of linear piezoelectric media"*, Mech. Research Communications, Vol. 24, No. 2, pp. 145-150, 1997
- [JKO94] **Jikov V. V., Kozlov S. M. and Oleinik O. A.**, *"Homogenization of Differential Operators and Integral Functions"*, Springer-Verlag, Berlin, 1994
- [Kat76] **Katz J. L.**, *"Hierarchical modeling of compact Haversian bone as a fiber reinforced material"*, Advance in bioengineering, 17-18, 1976
- [Kat80] **Katz J. L.**, *"The structure and biomechanics of bone"*, Society for experimental biology symposium, 34th, 1980
- [Kat81] **Katz J. L.**, *"Composite material models for cortical bone"*, ASME, AMD, Vol. 45, 1981
- [Kat85] **Katz J. L., Yoon H. S., Maharidge R. L.**, *"The estimation of interosteonal mechanical properties from a composite model for Haversian bone"*, Biomechanics: current Interdisciplinary Research, pp. 179-184, Martinus Nijhoff, Dordrecht, edited by Perren S. M. and Schneider E., 1985

- [Ke77] **Keller. J. B.**, "*Effective behaviour of heterogeneous media*", In: U. Landman (Ed). *Statistical Mechanics and Statistical Methods in theory and Application*, Plenum, New York, 631-644, 1977
- [KB47] **Krylov N. N. and Bogoliubov.N. N.** , "*Introduction to Nonlinear Mechanics*", Princeton University, Princeton, 1947
- [MaH93] **Mammone J. F., Hudson S. M.**, "*Micromechanics of bone strength and fracture*", *J. Biomech.*, 26, 439, 1993
- [Mar93] **Marcelli C., Sebert J.-L.**, *Architecture et résistance mécanique osseuses*, Paris : Ed. Masson, p. 27-28, 1993
- [Mas93] **G. dal Maso**, "*An introduction to Γ -convergence*", Birkhauser, Boston, 1993
- [MT97] **Murat F. and Tartar. L.** , "*H-convergence. Séminaire d'Analyse Fonctionnelle et Numérique de l'Université d'Alger*", 1977
- [Ng89] **Nguetseng. G.** , "*A general convergence result for a functional related to the theory of homogenization*", *SIAM J. Math. Anal.* 20, 608-623, 1989
- [Ote97] **Otero J. A., Castillero J. B., Ramos R. R.**, "*Homogenization of heterogeneous piezoelectric medium*", *Mechanics Research Communications*, Vol. 24, No. 1, pp. 75-84, 1997
- [Pao97] **Paolo Bisegna, Raimondo Luciano**, "*On methods for bounding the overall properties of periodic piezoelectric fibrous composites*", *J. Mech. Phys. Solids*, Vol. 45, No. 8, pp. 1329-1356, 1997
- [PCT96] **Pidaparti R. M., Chandran A., Takano Y., Turner C. H.**, "*Bone minerals lies mainly outside collagen fibrils: predictions of a composite model for osteonal bone*", *J. Biomech.*, 29, 909, 1996
- [Per95] **Pernin J. N.** "*Homogénéisation en Milieux Composites*", Thèse de Doctorat en Sciences Physiques, Université de Franche-Comté, 1995
- [Pid96] **Pidaparti R. M. V. et al.**, "*Bone mineral lies mainly outside collagen fibrils: predictions of a composite model for osteonal bone*", *J. of Biomechanics*, 29 (7), 909-916, 1996
- [Pie73] **Piekarski K.**, "*Analysis of bone as a composite material*", *Int. J. Eng. Sci.*, 11, 557, 1973
- [Rac03] **Racila M.**, "*Metoda omogenizarii aplicata in studiul problemelor piezoelectrice*", Referat no. 2, 2004
- [Rav88] **Raviart P.A, Thomas J.M.**, "*Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*". Masson 1988

- [ReB75] **Reilly D., Burstein A. H.**, *"The elastic and ultimate properties of compact bone tissue"*, J. Biomech., 8, 393, 1975
- [Rho98] **Rho J-Y et al.**, *"Mechanical properties and the hierarchical structure of bone"*, Medical Engineering & Physics, 20, 92-102, 1998
- [RoDie] **Royer D., Dieulesaint E.**, *"Ondes élastiques dans les solides"*, Masson, Paris
- [SaM89] **Sasaki N., Matsushima N., Ikawa T., Yamamura H., Fukuda A.**, *"Orientation of bone mineral and its role in the anisotropic mechanical properties of bone-transverse anisotropy"*, J. Biomech., 22, 157, 1989
- [San80] **Sanchez-Palencia E.**, *"Non homogeneous media and vibration theory"*, Notes in Physics, Springer Verlag, nr. 127, Berlin, 1980
- [San92] **Sanchez-Palencia E., Sanchez-Hubert J.**, *"Introduction aux méthodes asymptotiques et à l'homogénéisation"*. Masson 1992
- [SP74] **Sanchez-Palencia E.**, *"Comportements local et macroscopique d'un type de milieux physiques hétérogènes"*, Intern. Jour. Engin. Sci. 12, 331-351, 1974
- [SP71] **Sanchez-Palencia E.**, *"Equations aux dérivées partielles. Solutions périodiques par rapport aux variables d'espace et applications"*, Compt. Rend. Acad. Sci. Paris, A, 1410-1413, 1971
- [Si02] **Silva C. C. et al.**, *"Piezoelectric properties of collagen-nanocrystalline hydroxyapatite composites"*, Journal of Materials Science, 37, 2061-2070, 2002
- [Si01] **Silva C. C. et al.**, *"On the piezoelectricity of collagen-chitosan films"*, Phys. Chem., 3, 4154-4157, 2001
- [Sp67] **Spagnolo. S.**, *"Sul limite delle soluzioni di problemi di Cauchy relativi all'equazione del calore."*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 21, 637-699, 1967
- [Sp68] **Spagnolo.S.**, *"Sulla convergenza di soluzioni di equazioni paraboliche ed ellittiche."*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 22, 577-597, 1968
- [Swa03] **Swan C. C.**, *"Micromechanically based poroelastic modeling of fluid flow in haversian bone"*, Journal of Biomechanical Engineering, 125, 25-36, 2003
- [Ta74] **Tartar. L.**, *"Probl emes de controle des coefficients dans des équations aux dérivées partielles"*, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems 107, 420-426, 1974
- [WaW92] **Wagner H. D., Weiner S.**, *"On the relationship between the microstructure of bone and its mechanical stiffness"*, J. Biomech., 25, 1311, 1992

Résumé

Comprendre le remodelage osseux nécessite la maîtrise du transfert des informations mécaniques: quelles informations reçoit une cellule osseuse de la partie corticale lorsque l'os est sollicité ? Ce mémoire est l'élaboration d'une modélisation et d'outils mathématiques permettant d'estimer, à partir d'un chargement mécanique appliqué à un os humain, divers champs existant dans le collagène, l'hydroxyapatite et le fluide environnant.

On utilise les théories mathématiques de l'homogénéisation et des écoulements en milieux poreux. La modélisation est mise en place, étape par étape: organisation spatiale des cristaux d'hydroxyapatite, prise en compte de minéralisations différentes, d'une nouvelle loi de comportement, d'un fluide contenant des ions à chacun des niveaux architecturaux et homogénéisation de structures composites complexes (lamelles, ostéon, os cortical).

Sur le plan mathématique, on reprend la méthode des développements asymptotiques dans un cadre piézoélectrique (avec seuil), on établit toutes les relations nécessaires, une propriété de convergence et une estimation de propriétés locales. Le retour au microscopique est fait directement via une technique de localisation ou indirectement lorsque l'effet de seuil se produit. Les méthodes numériques ont été implantées dans deux logiciels.

Sur le plan biomécanique, on établit que l'os cortical humain est un milieu orthotrope non piézo électrique pour lequel l'anisotropie est due à l'architecture nanoscopique, que les ostéons sont le siège de deux types d'écoulement, que les écoulements y diffèrent selon l'architecture : on voit comment les cellules savent quelle architecture donner au tissu collagénique.

Mots clés

modélisation mathématique, homogénéisation, transfert multi échelles, piézo électricité, milieux poreux, couplage Darcy-Stokes, os cortical, simulations numériques, éléments finis, remodelage osseux

Abstract

Understand bone remodelling needs the knowledge of mechanical information transfer: what information receives a cortical bony cell when the bone is solicited? The purpose of this study is the elaboration of a modeling and of mathematical tools allowing to estimate, from a mechanical loading applied on a human bone, various fields existing in collagen, hydroxyapatite and bony fluid.

Mathematical theories of homogenization and flow in porous media are used. Model is made by taking successively into account spatial organization of hydroxyapatite crystals, different mineralizations, a new behaviour's law, motion of fluid containing ions in each of architectural levels and homogenization of complex composite structures (lamellae, osteons, cortical bone).

On a mathematical point of view, asymptotic developments method in a new piezoelectric framework (with threshold) is used. One establishes all necessary relationships, a property of convergence and a local analysis is made. The return to microscopic level is made directly via a technique of localization or indirectly when the effect of threshold occurs. Developed computational methods have been packed in two softwares.

On a biomechanical point of view, it has been established that human cortical bone is a non piezoelectric orthotropic medium for which anisotropy is essentially involved by the nanoscopic architecture, that they are two types of flow in osteon and that flows in the osteons differ according to their architecture. A process being able to explain how cells know what architecture to give to the collagen tissue is thus pointed out.

Keywords

mathematical modeling, homogenization, multi scale transfer, piezo electricity, porous media, Darcy-Stokes coupling, cortical bone, computational methods, finite element analysis, bone remodeling