



**HAL**  
open science

## Stabilisation des systèmes commandés par réseaux.

Emmanuel Witrant

► **To cite this version:**

Emmanuel Witrant. Stabilisation des systèmes commandés par réseaux.. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Grenoble - INPG, 2005. Français. NNT: . tel-00011606

**HAL Id: tel-00011606**

**<https://theses.hal.science/tel-00011606>**

Submitted on 14 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Institut National Polytechnique de Grenoble

No. attribué par la bibliothèque

--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--	--

## **THESE**

*pour obtenir le grade de*

**DOCTEUR DE L'INPG**

***Spécialité : AUTOMATIQUE-PRODUCTIQUE***

préparée au Laboratoire d'Automatique de Grenoble

dans le cadre de l'École Doctorale :

**Électronique, Électrotechnique, Automatique, Traitement du Signal**

*présentée et soutenue publiquement*

*par*

**Emmanuel WITRANT**

*le 27 Septembre 2005*

**Titre :**

**Stabilisation des systèmes commandés par réseaux.**

*Directeurs de thèse :*

M. Carlos CANUDAS-DE-WIT (LAG - INPG)

M. Didier GEORGES (LAG - INPG)

**JURY :**

M. Joël LIENARD Président

M. Rodolphe SEPULCHRE Rapporteur

M. Jean-Pierre RICHARD Rapporteur

M. Karl Henrik JOHANSSON Examineur

M. Carlos CANUDAS-DE-WIT Directeur de thèse

M. Didier GEORGES Co-encadrant



à Patricia,  
à ma mère,  
à mon grand-père.

*On appelle “illusions” les facteurs qui rendent notre esprit indiscipliné et le maintiennent dans cet état. L’illusion principale est cette ignorance fondamentale qui sous-tend tous les états confus de notre esprit - cette saisie selon laquelle les choses existent de façon inhérente.*

Tenzin Gyatso, 14<sup>e</sup> dalaï lama et prix nobel de la paix.

[Sa Sainteté le Dalaï Lama, 2000]



## Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma reconnaissance envers les membres du jury, dont la renommée et la qualité scientifique honorent grandement ce travail:

- Joël Liénard, que je remercie pour son intervention en tant que président de jury et son apport culturel de par son expertise en théorie de l'information,
- Rodolphe Sépulchre, de l'Université de Liège, et Jean-Pierre Richard, de l'Ecole Centrale de Lille, à qui je témoigne ma gratitude pour leur lecture attentive et détaillée de ce manuscrit ainsi que pour leurs nombreux commentaires constructifs,
- Special thanks go to Karl Henrik Johansson, from the Royal Institute of Technology of Stockholm, as a specialist in networked control systems, for accepting to be a member of my jury.

Mes remerciements particuliers à Carlos Canudas de Wit et Didier Georges. Le premier pour ses directions scientifiques, son esprit critique et les nombreuses possibilités qui m'ont été offertes durant cette thèse, notamment au travers des projets NECS et NACO2. Le second pour sa sagacité intellectuelle, son omniscience et son optimisme, qui n'ont cessé de me motiver durant ces trois années. Merci également à mes proches collaborateurs, notamment à Mazen Alamir, qui a eu une participation active tout au long de mon travail et dont l'humilité scientifique restera pour moi un exemple. Je tiens également à remercier Arjan van der Schaft et Stephano Stramigioli, de l'Université de Twente, qui m'ont initié à l'approche géométrique de la commande non linéaire et aux graphes aliens lors d'un séjour d'une très grande richesse intellectuelle que j'ai eu la chance d'effectuer en Hollande. Merci à Stéphane Mocanu pour sa connaissance approfondie des réseaux de communication et à Olivier Senname, Silviu Niculescu et Wim Michiels pour leur expertise en systèmes à retards.

Le travail universitaire ne pouvant se concevoir sans partage et transmission du savoir, je ne puis oublier Ange-Marie Risterucci et Marie-Laure Espinouse, avec qui j'ai eu le plaisir de partager de nombreuses heures d'enseignement, pour leurs qualités humaines et pédagogiques. Je tiens également à remercier particulièrement Luc, Gildas et Alina, Nicolas, Hayate, Jérôme, Sid Ahmed, John, Lina, Jean-Mathieu, Yajun, Pietro, Denis, Julien, Salvador, Fadi, Alessandro, David, Mimine et Lolotte, Cindy, Matthieu, Jean-Luc, Sylvie, Jérôme, Alexandre et tant d'autres pour leur soutien moral, les discussions

animées et moments de rires qui ont donné vie à cette expérience.

Pour finir, ce travail n'aurait pu aboutir sans l'aide technique de Pascal, Daniel et Olivier, qui m'ont permis de conclure ma thèse avec l'expérience du pendule inversé, l'aide bibliographique de Patricia et le support administratif de Virginie, Marie-Rose et Marie-Thérèse.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>11</b>
1.1	Modèles de canal de communication . . . . .	12
1.2	Modèles de protocoles . . . . .	15
1.3	Problématiques NECS . . . . .	18
1.4	Formulation du problème de commande . . . . .	21
1.4.1	Spécifications du réseau et motivations . . . . .	22
1.4.2	Justification du modèle déterministe . . . . .	24
1.4.3	Formulation du problème . . . . .	26
1.4.4	Exemple d'application : le réseau TCP . . . . .	27
1.5	Contributions de la thèse . . . . .	30
<b>2</b>	<b>Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat</b>	<b>35</b>
2.1	Aperçu historique . . . . .	36
2.1.1	Commandabilité . . . . .	36
2.1.2	Attribution de spectre fini . . . . .	38
2.1.3	Réduction des systèmes . . . . .	40
2.1.4	Horizon de prédiction pour le retard temps variant . . . . .	41
2.2	Autres approches . . . . .	43
2.2.1	Robustesse vis-à-vis du retard : analyse fréquentielle . . . . .	43
2.2.2	Commande $H^\infty$ avec retard temps variant . . . . .	44
2.2.3	Problèmes numériques liés au calcul de l'intégrale . . . . .	46
<b>3</b>	<b>Prédicteur par Retour d'Etat</b>	<b>49</b>
3.1	Méthode de commande . . . . .	49
3.1.1	Description . . . . .	50
3.1.2	Analyse de stabilité asymptotique . . . . .	52
3.2	Calcul de l'horizon de prédiction . . . . .	55
3.2.1	Existence et unicité . . . . .	56
3.2.2	Méthodes de calcul analytiques et numériques . . . . .	57
3.2.3	Solution dynamique . . . . .	60
3.3	Prédicteur à horizon estimé . . . . .	64



3.3.1	Influence de l'estimation . . . . .	65
3.3.2	Formulation finale . . . . .	71
3.4	Comparaison avec les méthodes de commande classique . . . . .	75
<b>4</b>	<b>Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard</b>	<b>81</b>
4.1	Description du problème . . . . .	81
4.2	Approche exacte . . . . .	83
4.2.1	Formulation du problème . . . . .	83
4.2.2	Robustesse de l'état . . . . .	85
4.2.3	Stabilité de la loi de commande . . . . .	88
4.2.4	Synthèse finale . . . . .	91
4.3	Méthode approchée . . . . .	92
4.3.1	Analyse par fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii . . . . .	94
4.3.2	Approximation du retard temps variant . . . . .	96
<b>5</b>	<b>Application et Expérimentation</b>	<b>105</b>
5.1	Poursuite de trajectoire par retour de sortie . . . . .	105
5.1.1	Retard sur les deux canaux . . . . .	106
5.1.2	Observateur . . . . .	108
5.1.3	Poursuite de trajectoire . . . . .	112
5.2	Résultats expérimentaux . . . . .	115
5.2.1	Banc d'essai expérimental et réglages préliminaires . . . . .	115
5.2.2	Résultats expérimentaux . . . . .	118
<b>6</b>	<b>Conclusion et Perspectives</b>	<b>127</b>
<b>A</b>	<b>Rappels Mathématiques</b>	<b>131</b>
<b>B</b>	<b>Pendule Inversé en "T"</b>	<b>133</b>
<b>C</b>	<b>A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line</b>	<b>137</b>
C.1	Introduction . . . . .	137
C.2	The classical transmission line . . . . .	138
C.3	Model with time-varying elements . . . . .	139
C.4	The distributed model . . . . .	143
C.4.1	Global behavior . . . . .	143
C.4.2	Transient response . . . . .	145
C.5	Simulations . . . . .	146
	<b>Bibliographie</b>	<b>150</b>

*Du Lire et de l'Écrire.*  
*Qui gravit les plus hautes cimes se rit de*  
*toutes tragédies jouées, de toutes tragédies*  
*vécues.*

Friedrich Nietzsche, 1885.

[Nietzsche, 1985]



# Chapitre 1

## Introduction

Les systèmes commandés par réseau constituent une nouvelle classe de systèmes, introduisant des problèmes spécifiques liés à la présence de retards, à la perte d'information, ou à la gestion du flux de données. Ces contraintes prennent une importance considérable lors de la commande de procédés rapides pour lesquels les caractéristiques du réseau ne peuvent plus être négligées. Nous retrouvons notamment ce genre de systèmes dans les automobiles, les drones, ou plus généralement tout système complexe géré au travers d'un réseau dédié.

Le canal de communication entre le système et le contrôleur est souvent modélisé comme une ligne de transmission, c'est à dire un élément physique induisant un retard constant, dépendant des propriétés structurelles de la ligne. Cette description devient plus complexe lorsque le système est commandé au travers d'un réseau utilisé par de multiples utilisateurs. Dans ce cas, le retard induit ne dépend plus seulement d'éléments physiques mais aussi et surtout des algorithmes mis en place pour la gestion du trafic sur le réseau et le codage de l'information. Le canal de communication utilisé pour la commande du système considéré subi l'influence de tous les autres flux de données présents sur le réseau.

Un réseau peut être caractérisé par deux éléments de première importance lors de sa modélisation :

- la gestion du flux de données au niveau local (émetteur/récepteur), où les mesures physiques sont converties en unités d'information à transmettre,
- la gestion du flux de données au niveau global, où un algorithme gère les interactions entre les différents flux, évitant ainsi par exemple les collisions ou la perte de paquets induits par une surcharge du réseau.

Lors de l'émission, la gestion des données dépend du protocole utilisé et de son implémentation. La taille, la fréquence d'émission et la priorité des paquets peuvent ainsi être ajustés, en prenant éventuellement en compte des consignes issues de la gestion globale

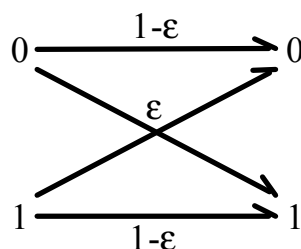


FIG. 1.1 – Modèle de type *Shannon-Weaver*.

du réseau.

Lorsque le flux de données devient trop important, la capacité du réseau est dépassée et de l'information est perdue. Des algorithmes spécifiques entrent alors en action, afin par exemple d'éviter les collisions ou de gérer la file d'attente en entrée du routeur. L'émetteur peut être dans ce cas informé de la saturation et adapter son taux d'émission.

Après un bref aperçu de modèles élémentaires de canaux de communication, nous verrons dans ce chapitre des exemples de réseaux à utilisateurs multiples et les problématiques spécifiques induites par la commande des systèmes en réseau. Cette analyse permettra la justification de la formulation choisie pour aborder la stabilisation des systèmes commandés par réseaux. En fin de chapitre nous aborderons les principales contributions de cette thèse ainsi que leur organisation dans le présent manuscrit. Une partie de ce chapitre a été présentée dans [Witrant, 2003].

### 1.1 Modèles de canal de communication

Le canal de communication est envisagé de différentes façons selon le domaine d'application dans lequel il est utilisé. Dans le cadre de la théorie de l'information, celui-ci est considéré comme une source de corruption de l'information. Ainsi la communication de données binaires s'effectue, en prenant comme exemple un modèle de type *Shannon-Weaver* [Shannon & Weaver, 1949], avec une corruption de donnée de probabilité  $\epsilon$ . Ceci signifie qu'un 0 émis a une probabilité de  $1 - \epsilon$  de conduire à la réception d'un 0 et une probabilité de  $\epsilon$  de conduire à la réception d'un 1, comme illustré dans la figure 1.1. Une autre approche, plus fréquemment utilisée dans le cadre de l'automatique, consiste à considérer le canal comme une source de retard dans la communication. La transmission est supposée fidèle et le problème de modélisation revient à établir le modèle de retard le plus proche de celui subi par les données.

Les modèles de canal de communication peuvent aussi être différenciés selon la nature de la transmission, qui peut être digitale (paquets d'information) ou continue. Notons qu'un modèle de transmission continue n'exclut pas le fait que les données soient émises par pa-

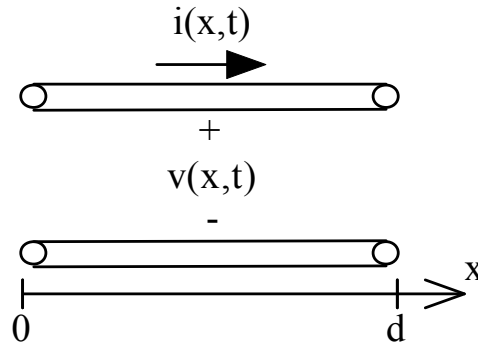


FIG. 1.2 – Ligne de transmission à deux conducteurs.

quets mais suppose plutôt que le conditionnement des données (algorithmes d'émission, de gestion du flux et de réception) est inclus dans le modèle du canal de communication. Dans ce cas et pour l'exemple d'un système physique commandé par réseau, le capteur envoie un flux continu de données vers l'encodeur (qui émet l'information sur le réseau) et l'actionneur reçoit un flux continu du décodeur. Nous considérons le canal de communication comme une source de retard pour un flux continu de données dans ce travail. Quatre modèles élémentaires de canal de communication, où le retard apparaît comme élément prédominant, sont présentés ici. Le premier est celui de la ligne de transmission sans pertes, basé sur les propriétés physiques de la ligne, qui conduit à modéliser le canal comme une impédance et un retard constants. Le second est une ligne de transmission non homogène, induisant un retard et une impédance variables. La troisième approche considère le canal comme un retard pur, variable et discret. Le dernier modèle (aussi basé sur un retard pur) décrit quand à lui le réseau de communication comme un ensemble d'états, chacun étant caractérisé par une distribution spécifique de retards.

### Ligne de transmission idéale

Une ligne de transmission idéale est une ligne sans pertes, uniforme dans l'espace et avec des paramètres indépendants de la fréquence (une description précise de différents types de lignes de transmission est proposée dans [Miano & Mafucci, 2001]). Ce modèle est présenté sur la figure 1.2, où  $v$  indique la tension,  $i$  le courant,  $x$  la position et  $d$  la longueur totale de la ligne. Ses caractéristiques sont décrites par les équations du télégraphe

$$C \frac{\partial v(t, x)}{\partial t} = - \frac{\partial i(t, x)}{\partial x}$$

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial x} = -L \frac{\partial i(t, x)}{\partial t}$$

où  $L$  et  $C$  sont, respectivement, d'inductance et la capacitance caractéristique par unité de longueur de la ligne de transmission. Ces équations ont une solution unique si les conditions initiales de tension et de courant, ainsi que deux conditions limites (par exemple

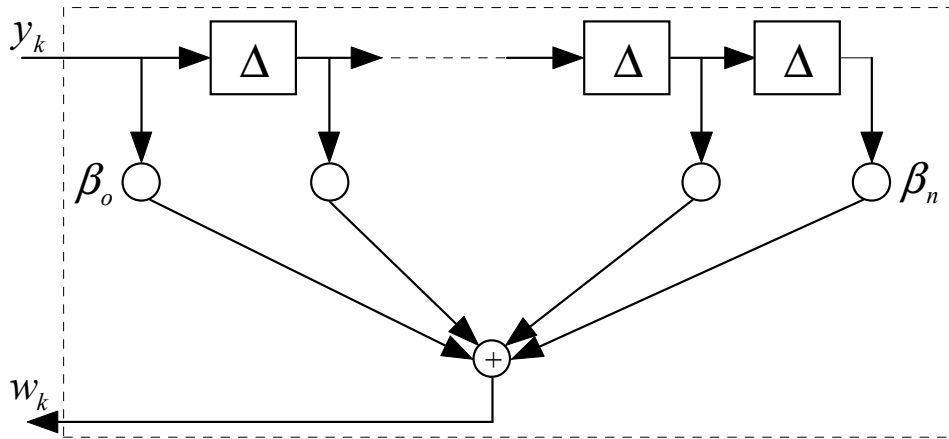


FIG. 1.3 – Modèle de retard variable.

les variables électriques aux extrémités de la ligne) sont spécifiées.

Ce modèle représente un canal de transmission à délai constant  $\tau = d\sqrt{L/C}$ , subi par les variables électriques  $v$  et  $i$  lors de leur passage sur la ligne. Une approche complète prenant en compte la dissipation résistive et basée sur la mise en cascade d'un nombre fini de cellules élémentaires  $RLC$  est présentée dans [Teppoz, 2005].

### Ligne de transmission non homogène

D'autres modèles de ligne plus complets ont été développés, mais leur complexité rend leur utilisation peu fréquente lors de la synthèse de lois de commande. Le principal inconvénient du modèle idéal, pour représenter un réseau de communication, est qu'il ne prend pas en compte les perturbations externes sur le flux de données, induites par la présence d'utilisateurs multiples sur le réseau, ni le codage de l'information (multiplexage analogique, codage numérique, compression). Nous avons développé, lors d'un travail de trois mois avec Arjan van de Schaft et Stephano Stramigioli à l'Université de Twente [Witrant, van der Schaft & Stramigioli, 2005], un modèle de ligne de transmission non homogène mettant en évidence les effets de résonance induits par des variations paramétriques. Ce travail est présenté en Annexe C et illustre comment une ligne de transmission peut être source de retard variable dans le temps.

### Système à retard variable

D'autres approches considèrent le canal de transmission comme un retard variable dans le temps (celui-ci étant la principale source d'instabilité du système). Le retard peut alors être caractérisé par un modèle déterministe, une distribution probabiliste ou encore une chaîne de Markov. Ce dernier exemple est étudié dans [Krtolica et al., 1994] et induit le modèle de retard présenté dans la figure 1.3. La chaîne de Markov est utilisée pour fixer l'un des  $\beta_i$  à un, les autres valant zéro, ce qui permet de permuter entre les différentes valeurs du retard. Le signal échantillonné  $y_k$  est ainsi retardé d'un nombre

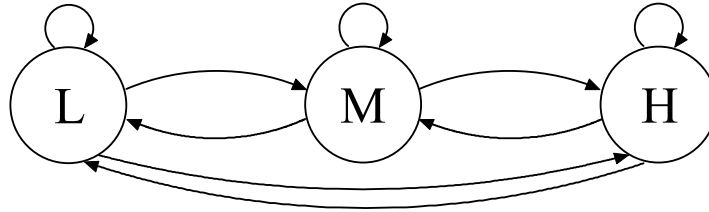


FIG. 1.4 – Réseau modélisé comme une chaîne de Markov à trois niveaux de charge : bas (L), moyen (M) et haut (H).

d'échantillons  $i\Delta$  du fait du  $\beta_i$  non nul. Le système distant reçoit le signal  $w_k$ .

### Ensemble de modèles

Le réseau de communication peut être aussi considéré comme un système ayant différents modes de fonctionnements, en fonction de la quantité d'information qu'il doit gérer. Dans ce cas, différents modèles peuvent être appliqués selon l'état global du réseau. Ainsi dans [Nilsson & Bernhardsson, 1997] et [Nilsson et al., 1998], le réseau est modélisé en utilisant une chaîne de Markov à multiples états, pour lesquels l'état  $r_k$  correspond à la charge du réseau (distribution probabiliste du retard de transmission). Un exemple de ce modèle est présenté dans la figure 1.4 avec trois niveaux de charge. La probabilité de distribution pour  $r_k$  peut ensuite être établie en utilisant une matrice de transition, la probabilité de l'état et le vecteur de distribution de l'état du modèle de Markov. Cette approche peut être étendue plus largement en introduisant d'autres variables physiques (comme l'impédance) dans l'état.

## 1.2 Modèles de protocoles

Les modèles de protocoles sont difficiles à établir, l'interaction entre les différents utilisateurs ne pouvant être prédite. Néanmoins, des résultats concernant des modèles moyens permettent de comprendre les principaux processus mis en jeu et de mettre en valeur les propriétés principales des réseaux. Trois modèles différents de protocoles sont présentés, illustrant les principaux réseaux de communication utilisés dans l'industrie.

### Bus de terrain : CAN

Le bus de terrain CAN (Controller Area Network), fréquemment utilisé dans l'industrie (notamment automobile avec le VAN, qui est un exemple spécifique de CAN utilisé pour les contrôleurs électroniques des véhicules motorisés), est caractérisé par l'utilisation de niveaux de priorité pour l'émission des messages ( $2^{29}$  niveaux). Son débit est au maximum de 1Mbit/s, pour une longueur de 40m. Un noeud peut émettre à tout instant si le bus



## Chapitre 1. Introduction

---

est silencieux mais c'est le message à plus haut niveau de priorité qui a l'accès au bus (au travers du contrôleur central du bus) si deux noeuds tentent d'émettre au même instant. Le délai de transmission induit par ce système a été étudié dans [Nilsson, 1998], où il est décomposé comme la somme de trois retards : le temps d'attente de fin de l'émission en cours, le temps d'attente que les messages à priorité supérieure soient émis, et le temps de transmission du message considéré. Des résultats expérimentaux ont montré que des fonctions de densité probabiliste sont suffisantes pour établir des modèles simples, mais qu'un modèle de Markov peut être utilisé pour des représentations plus complexes.

### Réseaux locaux : Ethernet

Les réseaux locaux (souvent dénommés *LAN*, pour Local Area Networks) sont largement répandus et habituellement utilisés pour connecter des ordinateurs dans les réseaux privés. Leur taille est limitée, rendant le retard connu et borné, et ils ont un taux de transmission élevé. Ethernet constitue un exemple courant de réseau LAN en bus, sans contrôleur centralisé. L'accès au bus peut être effectué par protocole à détection de porteuse (CSMA - Carrier Sense Multiple Access) avec détection de collision (CD - Collision Detection). Avec cette méthode l'émission débute seulement si le canal est libre, mais deux (ou plus) émetteurs peuvent décider d'émettre en même temps, ce qui induit une collision. Cette dernière est automatiquement détectée et les deux émetteurs arrêtent leur émission, pour la reprendre après un temps aléatoire. Les caractéristiques du retard dépendent fortement de la charge du réseau, rendant Ethernet très difficile à modéliser.

### Réseaux longue distance : Protocole de transfert

Les réseaux grande distance ou WAN (Wide Area Network) sont caractérisés par la présence d'un ou plusieurs routeurs et de commutateurs, qui gèrent et distribuent l'information. La principale influence du routeur est d'induire une file d'attente où sont stockés les messages avant d'être retransmis. Notons que ce problème apparaît également dans les LAN, où les commutateurs sont de plus en plus utilisés. Lorsque les flux d'entrée dans le routeur sont trop importants, celui-ci devient congestionné et des paquets d'information sont perdus. L'émetteur peut-être informé des paquets reçus par l'envoi de acquittements (acknowledgements) par le destinataire. Un flux de données passant par un routeur est présenté dans la figure 1.5. Un modèle moyen déterministe du retard est disponible pour différents types de réseaux, notamment pour ceux à file d'attente [Gross & Harris, 1998].

Le protocole de contrôle de transfert TCP (Transfer Control Protocol) est un exemple classique de protocole utilisé dans les réseaux longue distance et LAN, mis en place aux deux extrémités du canal de communication afin de permettre aux utilisateurs d'émettre et de recevoir des données au travers d'internet. C'est un protocole dit *sécurisé*, dans le sens où tout paquet perdu est réémis. Son objectif principal est de maximiser le taux de transmission de l'utilisateur en ajustant la taille de la fenêtre d'émission de l'utilisateur

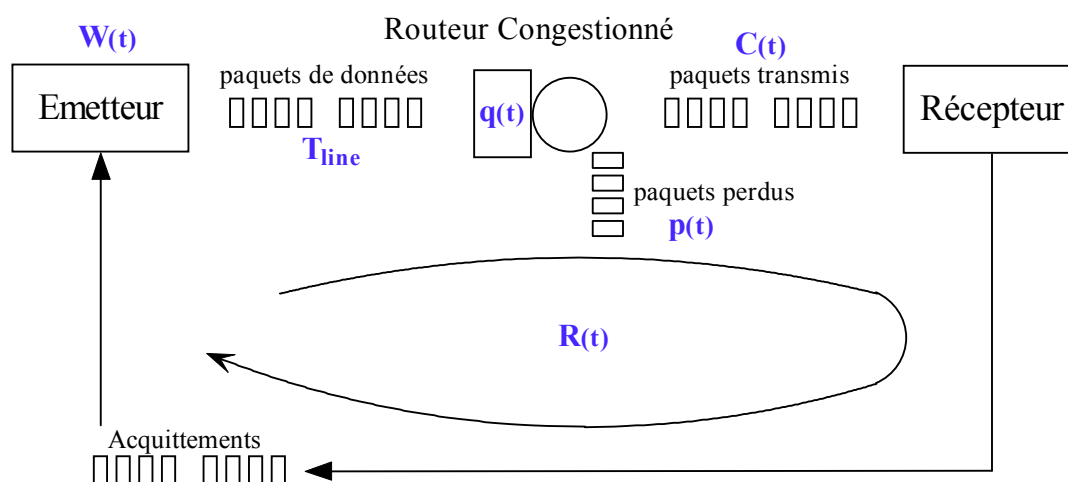


FIG. 1.5 – Exemple de flux dans un réseau comportant un routeur.

en fonction de la congestion du réseau, exprimée par le nombre de paquets perdus. Bien que le TCP ne soit pas un protocole de premier choix pour la synthèse d'une commande par réseau (faible qualité de service, notée QoS par la suite), il fournit un exemple intéressant de protocole sécurisé pour lequel des modèles moyens continus ont été développés [Misra et al., 2000; Low et al., 2001]. Un tel exemple de modèle sera présenté dans la section 1.4.3, illustrant la présence d'une file d'attente dans le réseau.

D'autres modèles de réseaux, plus généraux, ont été développés afin d'assurer une meilleure QoS. Ainsi une modélisation de type compartiments est proposée dans [Mounier & Bastin, 2001a; Mounier & Bastin, 2001b] pour la description d'un réseau à commutateur (switch). Ce modèle, dit de seaux percés à jetons, est utilisé dans la construction de lois de commande de proche en proche garantissant la stabilité globale du réseau. Un modèle étendu, comprenant les systèmes commandés par réseau et le réseau lui-même, est développé dans [Mastellone & Abdallah, 2005]. Dans ce cas, l'analyse de stabilité est effectuée en utilisant la théorie des systèmes commutés.

Les différents modèles présentés dans cette sous-section peuvent être interprétés dans le cadre de la théorie de l'information (perte de qualité de transmission de données) ou dans celui des systèmes à retard. Comme indiqué lors de présentation des protocoles, où nous avons insisté sur la nature du retard induit, nous positionnons le problème de stabilisation par l'intermédiaire d'un réseau de communication dans le cadre de la transmission avec retard.

### 1.3 Problématiques NECS

La présence d'un réseau dans la boucle de commande induit de nombreuses problématiques spécifiques telles que :

- la quantification du signal lors de l'émission/réception des paquets d'information,
- le compression/décompression des informations transitant par le réseau,
- la perte de paquets due à la congestion du réseau,
- la gestion du trafic par le routeur afin de garantir la stabilité ou la performance du système considéré lors de la congestion,
- la stabilisation des systèmes en présence de retard,
- la prise en compte de la bande passante disponible (dépendante de l'état d'occupation du réseau) lors de la synthèse du contrôleur.

Chacun de ces points faisant l'objet d'une formulation et d'une voie de recherche spécifique, nous nous contenterons d'en donner un bref aperçu afin de justifier l'approche choisie.

#### Quantification et codage

Les problèmes de quantification et de codage sont liés à la théorie de l'information ; ils apparaissent lors de la conversion d'un signal de mesure physique en unités d'information transmises au réseau (élaboration de l'alphabet, quantification, compression...). Le problème du codage des données pour l'émission sur un réseau de communication est considéré dans [Alamir & Commault, 2004], et fait plus généralement partie de la problématique de la commande avec information limitée. Dans ce cadre, des résultats ont été obtenus sur le lien entre la longueur de mots composant l'alphabet et la période d'échantillonnage admissible [Williamson, 1990], sur les effets chaotiques induits par l'approximation en utilisant des longueurs de mots finies [Ushio & Hsu, 1987], ou encore sur les effets de la quantification de l'état sur la stabilisation d'un système instable en boucle ouverte [Delchamps, 1990]. Les problèmes liés à la quantification ont été abordés dans le cadre de l'automatique avec notamment la stabilisation par commande quantifiée [Brockett & Liberzon, 2000] utilisée afin de conduire le système vers un ensemble invariant autour de l'équilibre [Picasso & Bicchi, 2003], la synthèse de quantificateurs pour systèmes à données échantillonnées [Ishii & Francis, 2003; Ishii & Basar, 2005], et une approche probabiliste pour la stabilisation de systèmes quantifiés [Ishii et al., 2004]. Nous pouvons aussi considérer le problème de l'échantillonnage à période variable (cette variation étant induite par le réseau) combiné à un retard variable : une formulation continue de ce problème ainsi qu'une solution de stabilisation type LMI est proposée dans [Fridman et al., 2004; Seuret et al., 2006]. Pour finir, une méthode de synthèse de l'encodeur et du décodeur permettant de répondre à des objectifs de commande classique est proposée dans [Tatikonda et al., 2004], où les systèmes de commande linéaire

## Chapitre 1. Introduction

---

stochastique sont considérés et où l'influence du canal de communication sur le problème de synthèse LQG est établie.

### Congestion et perte de paquets

La perte de paquets et la congestion du réseau apparaissent dans les réseaux à file d'attente (routeur ou switch) lorsque le flux de données est trop important. La gestion de la file d'attente s'effectue par le protocole mis en place au niveau du routeur, qui détermine de quelle manière les paquets sont rejetés (pour l'AQM par exemple, le nombre de paquets rejetés est proportionnel à la longueur de la file lorsqu'une certaine longueur de référence est atteinte). Le contrôle de congestion fait l'objet de nombreux travaux dans le domaine de l'informatique [Mascolo, 1999; Low et al., 2002] et la stabilité du réseau résultant d'un choix particulier de fonction de rejet de paquets peut être étudiée (voir [Hollot & Chait, 2001] pour l'exemple TCP/AQM). Le cas du contrôle de la file en prenant en compte l'état de congestion est étudié en détail dans [Van Foreest, 2004]. Lorsqu'un paquet est perdu, il peut être réémis (par exemple, dans le cas du TCP) ou non (UDP...). Dans le second cas, l'analyse de stabilité du système commandé par réseau inclut la considération de perte d'information et ne peut être effectuée par les approches continues. Ainsi dans [Azimi-Sadjadi, 2003] un principe de seuil d'incertitude est utilisé pour déterminer le taux de perte de paquets pour lequel le système bouclé non perturbé reste stable au sens des moindres carrés (l'espérance de la norme de l'état au carré est nulle en l'infini). D'autres résultats [Ling & Lemmon, 2002; Ling & Lemmon, 2003] proposent la synthèse d'un compensateur optimal de pertes, utilisant les informations passées, qui est obtenu par obtention d'un contrôleur contraint généralisé. Pour finir, ce problème peut aussi être abordé en utilisant la théorie des jeux [Alpcan & Başar, 2002; Alpcan & Başar, 2003], où l'unicité de l'équilibre de Nash est utilisée pour obtenir la garantie de stabilité, sous certaines conditions de variation faible pour les flux agrégés par rapport aux retards induits.

### Présence de retards

Un élément fondamental induit par la présence du réseau dans la boucle de commande est la présence de retards entre les capteurs et la commande, et entre la commande et les actionneurs. La commande des systèmes à retard constitue un sujet très vaste [Dugard & E. Verriest (Eds), 1997; Gu et al., 2003; Richard, 2003; Niculescu & K. Gu (Eds.), 2004] et nous n'en donnerons ici qu'un bref aperçu, en commençant par les approches déterministes. La plupart des analyses de stabilité classiques (en utilisant les fonctions de Lyapunov-Krasovkii et Lyapunov-Rasumikhin par exemple) considèrent un retard constant ou de borne connue [Niculescu, Verriest, Dugard & Dion, 1998; Kolmanovskii & Richard, 1999]. Le retard constant peut être compensé à l'aide d'un prédicteur de Smith [Smith, 1959] ou plus généralement un prédicteur d'état à horizon fixe

## Chapitre 1. Introduction

---

[Manitius & Olbrot, 1979; Kwon & Pearson, 1980; Artstein, 1982]. Le cas des retard temps variant ou dépendant de l'état peut être abordé avec les solutions présentées dans [Yu, 1999; Verriest, 2002] lorsque le système est stable en boucle ouverte. De manière plus générale, une méthode constructive de stabilisation robuste basée sur une transformation descriptive du modèle (dénommée *descriptor model method*) est proposée dans [Fridman et al., 2003; Fridman & Shaked, 2003] et appliquée au cas des retards temps variants dans [Seuret et al., 2004]. Dans un cadre similaire, la stabilisation de systèmes neutres en présence de saturation sur la commande est décrite dans [Gomes da Silva Jr. et al., 2005]. Le prédictor d'état à horizon variable sera détaillé dans le chapitre suivant. La téléopération constitue un problème classique de système à retard, incluant également les problématiques d'adaptation d'impédance et de diffraction d'onde dues à l'utilisation de deux canaux de transmission. Des solutions basées sur la passivité (approche énergétique) ont été développées pour le cas d'un retard constant [Anderson & Spong, 1989; Niemeyer & Slotine, 1991] puis un retard variable, identique [Niemeyer & Slotine, 1998] ou différent [Lozano et al., 2002; Berestesky et al., Sept. 2-4, 2004] sur les deux canaux. Une approche prédictive pour le cas du retard variable est considérée dans [Pan et al., 2004]. Pour clore ce bref aperçu sur les systèmes à retard, des approches stochastiques ont aussi été développées, considérant le retard induit par le réseau comme une distribution probabiliste ou une chaîne de Markov [Nilsson, 1998].

### Allocation de ressources et limite de bande passante

La présence sur le réseau de multiples utilisateurs suppose un partage et une redistribution des ressources, ainsi qu'une limite de la bande passante disponible pour chacun des émetteurs. La bande passante minimum garantie détermine la qualité de service (QoS) assurée par le réseau. Celle-ci dépend de la gestion de la file d'attente au niveau du routeur ainsi que de celle des émissions, effectuées par le contrôleur centralisé (par exemple au niveau du routeur). Le problème d'allocation de ressources est classiquement abordé en mathématiques discrètes afin d'illustrer les solutions par programmation linéaire ; nous ne verrons ici que quelques exemples d'approches orientées automatique appliquées à des réseaux sans fil (donc à ressources plus limitées). L'analyse d'allocation de capacité dans un réseau Bluetooth (communication radio à courte distance pour systèmes mobiles) est formulée comme un problème d'optimisation convexe dans [Son et al., 2002], où une loi hybride de distribution de capacité est proposée. La QoS pour les réseaux locaux sans fil (WLAN, pour Wireless Local Area Network) répondant à la norme IEEE 802.11x (version sans fil de réseau Ethernet) avec une méthode d'accès par fonction de coordination hybride est assurée dans [Grieco et al., 2003]. L'algorithme proposé prend en compte le retard induit par la file d'attente désirée et utilise une loi de commande par retour d'état proportionnel, les perturbations étant compensées par action anticipative. Le concept de *réseau sous-jacent* [Delli Priscoli, 1999] est utilisé dans [Delli Priscoli & Isidori, 2005] afin de considérer plus généralement les réseaux sans fil avec architecture IP (Bluetooth,

## Chapitre 1. Introduction

---

IEEE 802.11, Hyperplan II, UMTS, GPRS). Un module de commande de circulation incluant des buffers avec un contrôleur gérant les datagrammes IP entrant et sortant est inséré au niveau de l'interface aérienne afin d'assurer un équilibre idéal garantissant les performances requises.

Une approche plus générale considère la commande sous contraintes de communication, où la commande s'effectue de manière distribuée sur le réseau et où un critère de *complexité de l'information* est défini [Tatikonda & Mitter, 2004]. Un autre résultat d'intérêt majeur est proposé dans [Sahai & Mitter, 2005a; Sahai & Mitter, 2005b], où la notion appelée *anytime capacity* est définie pour introduire une nouvelle qualité paramétrique du canal de communication, permettant de prendre en compte la présence de bruit. La richesse de l'information peut ainsi intervenir directement dans la synthèse de loi de commande.

Pour une QdS garantie, la contrainte de bande passante peut être prise en compte lors de la synthèse du contrôleur dédié au système commandé à travers le réseau. Dans ce cadre, une solution au problème d'estimation de l'état est proposée dans [Wong & Brockett, 1997], où le concept de séquence récursive finie pour le codeur-estimateur est introduit et la convergence de l'algorithme d'estimation est proposée. Le problème de stabilisation avec information limitée est abordé dans [Wong & Brockett, 1999] avec l'introduction d'un critère moins contraignant que celui de la stabilité classique : la *contenabilité*, proche de la stabilité pratique. Un système de communication commandé est *contenable* si pour toute sphère  $N$  centrée sur l'origine il existe un environnement ouvert centré sur l'origine  $M$  et un codage et une loi de commande tels que toute trajectoire partant de  $M$  reste dans  $N$  pour tout temps. Cette notion diffère de la stabilité classique du fait que  $M$  est un sous-ensemble de  $N$ . Le résultat proposé permet de relier contenabilité, taux de transfert de données et variation de l'état.

### 1.4 Formulation du problème de commande

Les sections précédentes sont maintenant utilisées afin de formuler le problème de commande des systèmes commandés par réseaux. Après une évaluation des spécifications techniques induites par le réseau, nous détaillerons les arguments motivant le choix d'une approche déterministe pour la résolution de ce problème de commande. Nous verrons ensuite la formalisation de ce dernier comme un système à entrée retardée par un retard temps variant décrit par un système d'équations différentielles. Un exemple de modèle de réseau répondant aux caractéristiques proposées, utilisé par la suite afin d'illustrer les résultats obtenus, sera finalement présenté.

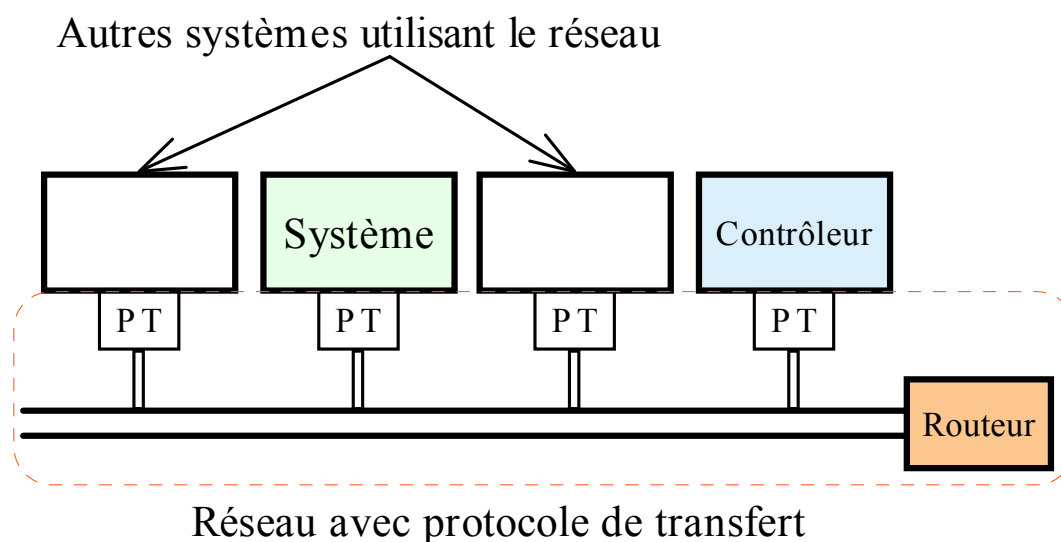


FIG. 1.6 – Système contrôlé par réseau.

### 1.4.1 Spécifications du réseau et motivations

Nous considérons ici un réseau utilisé par de multiples utilisateurs émettant sur le même canal de communication avec un algorithme gérant les flux de données (par exemple un routeur). Un protocole de transfert (PT) est mis en oeuvre pour permettre aux systèmes connectés d'émettre et de recevoir au travers du réseau, comme illustré dans la figure 1.6. Des exemples de tels protocoles sont fournis par

- User Data Protocol (UDP)
- Transfer Control Protocol (TCP)
- Network Control Protocol (NCP)
- Sequenced Packet Exchange (SPX)

Les deux premiers sont construits sur des réseaux à protocoles Internet (IP) alors que NCP et SPX sont utilisés sur des réseaux IPX (Internetwork Packet Exchange). A noter que TCP et SPX sont des protocoles sécurisés.

Le problème de stabilisation par l'intermédiaire d'un réseau est principalement rencontré pour les systèmes embarqués à dynamique rapide (automobiles, avions, drones...) où un réseau dédié est mis en place entre les capteurs et actionneurs. Le réseau dédié permet l'utilisation d'un protocole sécurisé, qui peut être construit sur une base UDP (plus performant que le TCP) ou autre. Le faible coût actuel et la standardisation des réseaux rapides de type Ethernet rend négligeable le temps de propagation par rapport au temps de gestion de l'information. L'impact d'un tel réseau est donc d'induire un retard *temps variant* entre le système et la loi de commande, dû à l'interaction des multiples utilisateurs. L'absence de pertes permet de justifier l'hypothèse d'un retard *borné*. Pour des raisons de causalité dans le calcul de la loi de commande et de garantie de service

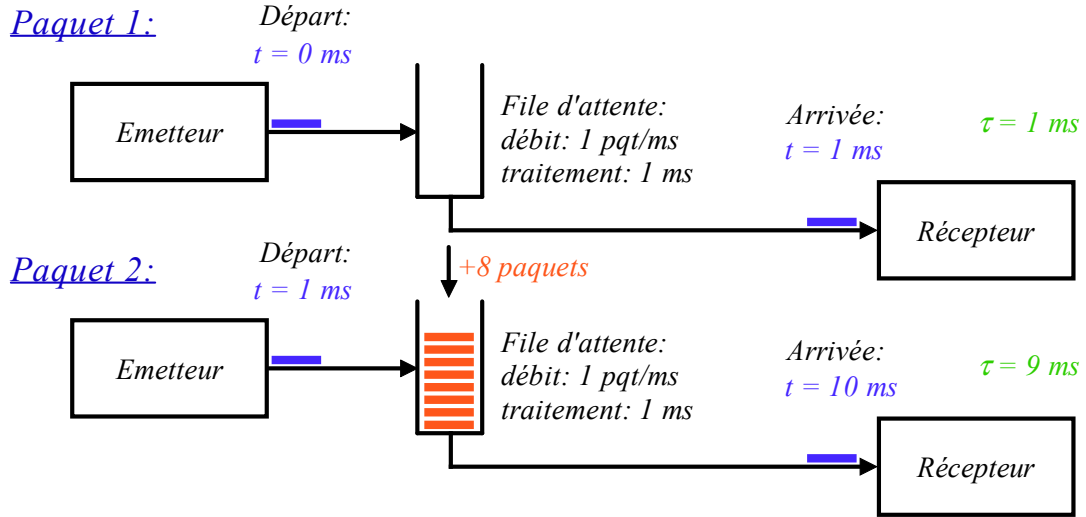


FIG. 1.7 – Illustration de l’hypothèse  $\dot{\tau} < 1$ .

(réseau sans perte), nous supposons aussi que

$$\dot{\tau}(t) < 1$$

Cette hypothèse est justifiée physiquement par le fait que le retard est borné et qu’il est celui perçu par le récepteur, et non le retard effectif présent dans le réseau. Afin d’illustrer cette différence, considérons le canal présenté dans la figure 1.7, illustrant le transport d’un paquet devant passer par une file d’attente ayant pour débit de sortie 1 *paquet/ms* et un délai pour traitement de l’information de 1 *ms*. L’émetteur émet toutes les millisecondes. Le premier paquet arrive dans la file vide, subi un retard de 1 *ms* et arrive à  $t = 1 \text{ ms}$ . Le second paquet est émis dans la milliseconde qui suit mais 8 paquets sont arrivés dans le buffer durant ce laps de temps; ce paquet subi donc un retard de 9 *ms* et arrive à  $t = 10 \text{ ms}$ . La variation du retard dans le réseau  $\dot{\tau}_r$  est donc  $\dot{\tau}_r = 8$ , mais le retard perçu par le récepteur est le rapport entre la différence de délais et la différence des temps d’arrivée

$$\frac{d\tau}{dt} \approx \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \frac{9 - 1}{10 - 1} < 1$$

Notons aussi que si le retard perçu par le récepteur est de dérivée égale à un, ceci implique qu’un paquet précède dans la file le paquet émis à chaque instant et pour tout temps (le paquet reste indéfiniment bloqué dans la file), ce qui est contradictoire avec les hypothèses de bornitude sur le retard.

**Remarque.** La présence d’un PT entre le réseau et le système physique au niveau du récepteur permet la réorganisation des paquets dans leur ordre d’émission, ce qui constitue une hypothèse courante pour la stabilisation des systèmes commandés par réseau. Ceci garantit une borne inférieure sur la dérivée du retard, qui n’est pas utilisée



dans ce travail mais est cependant intéressante pour illustrer le lien entre les propriétés du réseau et le modèle de retard associé. En effet, considérons un premier paquet émis au temps  $t_1$  subissant un retard  $\tau_1$  et un second paquet émis au temps  $t_2$  subissant un retard  $\tau_2$ . L'ordonnancement correcte des paquets implique que la relation suivante soit vérifiée

$$t_1 + \tau_1 < t_2 + \tau_2$$

d'où

$$-1 < \frac{\tau_2 - \tau_1}{t_2 - t_1} \approx \frac{d\tau}{dt}$$

Le fait que nous n'ayons pas besoin d'une telle hypothèse est d'un intérêt particulier car nous pouvons alors envisager une extension du travail proposé à la stabilisation des systèmes à échantillonnage temps variant, en suivant un formalisme similaire à celui proposé dans [Fridman et al., 2004; Seuret et al., 2006].  $\diamond$

Nous avons vu précédemment que des modèles moyens continus sont disponibles pour évaluer l'évolution dynamique du réseau, ainsi que le retard temps variant induit. C'est pourquoi nous considérerons dans un premier temps le cas où un modèle *déterministe* du retard est disponible pour l'élaboration de la loi de commande, comme c'est le cas dans un petit réseau embarqué. Nous verrons ensuite quelles sont les marges applicables à une telle hypothèse grâce à une analyse de robustesse.

### 1.4.2 Justification du modèle déterministe

L'hypothèse d'un modèle déterministe de retard peut sembler a priori très contraignant pour la stabilisation des systèmes commandés par réseau. Ce paragraphe a pour objet d'illustrer les nombreux domaines d'application où cette hypothèse est réaliste et les limitations d'une telle approche. Nous retiendrons que la méthode de commande choisie, par prédicteur d'état, permet de *compenser* le retard et donc d'obtenir un gain de performance important par rapport aux autres méthodes.

Prenons tout d'abord l'exemple du réseau dédié où l'ensemble des tâches est régi par un ordonnancement nécessaire à l'objectif recherché. C'est le cas par exemple pour les machines outil ou des ensembles complexes tels les accélérateurs de particules, où l'interaction de nombreux sous-systèmes sur le réseau ainsi que les temps de calcul et de transmission de données prennent une importance considérable. Nous avons ainsi pour objectif de compenser un retard constant, induit par le traitement des données, et un retard variable, dont la variation est communément dénommée *gigue*, induit par leur acheminement. Le système physique considéré est entièrement déterministe du fait de l'ordonnancement des tâches et du choix des protocoles mis en œuvre sur le réseau. Il convient donc d'établir une loi de commande permettant d'utiliser au mieux cette propriété forte du système.

## Chapitre 1. Introduction

---

Pour les réseaux dédiés non ordonnancés ou les réseaux locaux, le retard induit par le réseau répond souvent à des *comportement moyens* induit par le nombre et la qualité (en terme de propriété d'émission/réception) des utilisateurs. Ces comportements moyens peuvent être modélisés par des méthodes analytiques (du type de l'exemple TCP) ou à partir de mesures (caractérisation des sources en fonction de leur effet perturbateur sur le réseau, par le volume et la fréquence des données transmises). Un exemple de ce type de systèmes est fourni par le réseau local utilisé dans une automobile où, comme cela a été souligné dans le projet en collaboration industrielle [Bonnet, 2005], la considération de la variation du retard dans la synthèse de loi de commande répond à une véritable nécessité.

La source d'incertitude la plus importante dans ce cadre est le nombre de sources émettrices, déterminé par les stimuli de déclenchement exogènes des systèmes (comme l'intervention humaine ou la réponse à un signal extérieur d'un système). Nous pouvons envisager dans ce cas un protocole de transfert impliquant qu'une source indique au réseau son intention d'émettre puis respecte un certain délai avant l'émission effective afin de mettre à jours les fonctions exogènes du modèle. Le retard de transmission induit (temps nécessaire à l'information émise par la source pour rejoindre le récepteur modélisant le réseau) se justifie par le gain de performance permis par le prédicteur. Des protocoles dédiés à la commande tel celui développé dans [Briat, 2005], où le transfert de données et la gestion de file d'attente sont établis afin de respecter des contraintes de bandes passantes spécifiées par les unités émettrices, sont aussi appropriés à ce type de systèmes.

Pour des réseaux de plus grande taille, où la commande d'un système physique n'a qu'une faible place par rapport au trafic global, les états de charge du réseau déterminent la valeur du retard et de ses variations. Ce type de systèmes est classiquement illustré par la téléopération par internet. Nous pouvons établir de manière intuitive que le retard induit est proportionnel à la charge du réseau mais que sa variation est inversement proportionnelle. Le nombre d'états caractérisant le réseau (et la précision d'estimation du retard) dépend alors de la qualité et de la fréquence des mesures effectuées. Le modèle de retard utilisé par le prédicteur dépendra dans ce cas de l'état de charge du réseau, avec les caractéristiques de robustesse associées.

Cette sous-section nous a permis de considérer les différents types de réseaux par ordre de déterminisme. Le comportement imprévu et non-déterminisme du réseau est pris en compte dans la présente étude par l'analyse de robustesse présentée au chapitre 4. Nous verrons en effet comment le gain de commande admissible ainsi que le profil de retard peuvent être pris en compte *explicitement* pour déterminer l'erreur maximale admissible sur l'estimation du retard ainsi que la variation temporelle maximale de cette erreur. Ce résultat, permettant une évaluation quantitative des compromis à réaliser entre la connaissance possible du retard induit par le réseau et les performances admissibles pour le système, présente une alternative réaliste aux approches stochastiques classiques.

### 1.4.3 Formulation du problème

Nous considérons la stabilisation à distance des systèmes linéaires commandés par réseau, ce dernier introduisant un retard variable dans l'entrée de commande. Notons que le problème d'instabilité ou de perte de performance induite par la variation du retard est classiquement appelé *Jitter* dans le milieu industriel et que peu de solutions sont disponibles pour le résoudre. Plus précisément, la classe de systèmes étudiée est décrite par les équations suivantes

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (1.4.1)$$

$$y(t) = Cx(t) \quad (1.4.2)$$

où  $x \in R^n$  est l'état interne du système,  $u \in R^l$  est l'entrée de commande,  $y \in R^m$  est la sortie mesurée, et  $A, B, C$  sont des matrices aux dimensions appropriées. Les paires  $(A, B)$  et  $(A, C)$  sont supposées stabilisable et détectable, respectivement, mais aucune hypothèse n'est faite quant à la stabilité de  $A$ . Nous considérons donc aussi le cas des systèmes instables en boucle ouverte.

Le réseau intervient par l'intermédiaire du retard variable, pouvant être décrit par un modèle de type

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u_d(t)), \quad z(0) = z_0 \quad (1.4.3)$$

$$\tau(t) = h(z(t), u_d(t)) \quad (1.4.4)$$

où la variable  $z(t)$  décrit l'état interne du réseau et  $\tau(t)$  est le retard résultant. Le signal exogène  $u_d(t)$  est supposé connu et les fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  connues et continûment dérivables (de classe  $C^1$ ). Les équations (1.4.3) et (1.4.4) sont obtenues grâce à un modèle du canal de transmission et décrivent la dynamique interne du retard. Par exemple, dans le cadre d'un réseau à routeur et PT (voir l'exemple 1.4.1) :

- $z(t)$  décrit l'évolution temporelle de la taille des fenêtres d'émission  $W_i(t)$  (pour  $i = 1 \dots N$  sources connectées au réseau) et de la longueur de file d'attente du routeur  $q(t)$ ,
- $u_d(t)$  est une entrée exogène du système composée du nombre d'utilisateurs  $N$ , de la capacité du canal en sortie du routeur  $C_r$  et de la probabilité de perte de paquets  $p(t)$ ,
- $f(z(t), u_d(t))$  décrit la dynamique interne du réseau, déterminée par le PT (taille des fenêtres) et par la politique de gestion de la file d'attente,
- $h(z(t), u_d(t))$  donne le retard résultant  $\tau(t)$  du modèle complet. Ce retard est celui subi par le signal émis par le contrôleur à l'attention du système.

Nous supposons que toutes les solutions du modèle (1.4.3)-(1.4.4) ont les propriétés suivantes, pour tout  $t \geq 0$

$$\tau_{max} \geq \tau(t) \geq 0 \quad (1.4.5)$$

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) = \nu < 1 \quad (1.4.6)$$

où  $\tau_{max} \geq 0$  est une borne supérieure sur le retard  $\tau(t)$  et  $\nu > 0$  est une constante arbitrairement proche de un. La première de ces deux propriétés est assurée par le choix d'un réseau sécurisé alors que la seconde est une caractéristique de causalité, comme décrite au paragraphe précédent.

**Remarque.** L'approche de commande développée dans cette thèse est établie sur l'hypothèse que le réseau peut être représenté par un modèle déterministe. En effet, nous verrons par la suite que le retard doit être prédit sur un horizon  $[t, t + \tau_{max}]$ , où  $\tau_{max}$  est le retard maximum induit par le réseau, et que les incertitudes du modèle, ou comportement non déterministe du réseau, sont prises en compte avec une analyse de robustesse. Le choix d'un modèle basé sur une équation différentielle ordinaire n'a qu'une importance secondaire et est motivé par le formalisme analytique utilisé. Les résultats proposés peuvent aisément être étendus aux modèles de réseaux discrets ou hybrides. Ainsi le prédicteur pourrait aussi être utilisé avec un modèle établi sur les niveaux de charge du réseau (tel que celui présenté figure 1.4), la charge pouvant être mesurée sans difficulté, dans la mesure où l'erreur induite par le temps d'actualisation du modèle lors d'une transition respecte les critères obtenus par l'analyse de robustesse.  $\diamond$

### 1.4.4 Exemple d'application : le réseau TCP

Nous avons choisi le TCP comme exemple de réseau du fait de l'absence de perte de paquets, malgré ses faibles performances au niveau du retard induit. Cet exemple d'application constitue donc une étude du pire cas du point de vue de la commande des systèmes à retard.

#### Exemple 1.4.1

Un modèle de type flux de fluide du TCP a été développé dans [Misra et al., 2000] en utilisant des équations différentielles de Poisson. Ce modèle considère  $N$  flux TCP (indexés par  $i = 1, \dots, N$ ) qui transitent par un routeur de capacité  $C$ . Chaque flux est caractérisé par le temps d'aller-retour  $R_i$  et par la taille de la fenêtre d'émission d'espérance  $W_i(t)$ . Au niveau du routeur, la dynamique de la file d'attente est exprimée par la longueur de file d'attente d'espérance  $q(t)$  et par la longueur moyenne de file d'attente d'espérance  $\bar{q}(t)$ . Une politique de gestion active de la file telle que l'AQM (Active Queue Management) est introduite avec la fonction de perte de paquets  $p(\bar{q})$ . Cette fonction correspond à la probabilité de marquage des paquets qui seront considérés comme perdus. Les équations dynamiques décrivant le TCP s'écrivent alors

$$\frac{dW_i(t)}{dt} = \frac{1}{R_i(q)} - \frac{W_i(t)W_i(t - R_i(q))}{2R_i(q(t - R_i(q)))} p(\bar{q}(t - R_i(q)))$$

$$\frac{d\bar{q}(t)}{dt} = \frac{\ln(1-\alpha)}{\delta}\bar{q}(t) - \frac{\ln(1-\alpha)}{\delta}q(t)$$

$$\frac{dq(t)}{dt} \approx -C + \sum_{i=1}^N \frac{W_i(t)}{R_i(q)}$$

$$R_i(q) = \frac{q}{C} + T_{pi}$$

où  $T_{pi}$  est le retard constant induit par la ligne de transmission,  $\alpha$  est une constante de pondération comprise entre 0 et 1, et  $\delta$  est la période d'échantillonnage. Nous avons utilisé ici l'hypothèse courante que le temps mis par l'information de perte de paquet (émise par le routeur) pour atteindre la source émettrice est assimilable à  $R_i(t)$ . Le contrôle d'un tel modèle peut s'effectuer au niveau du routeur en choisissant une politique AQM appropriée (par la définition de  $p(\bar{q})$ ).

La validation de ce modèle a été effectuée en le comparant aux résultats obtenus grâce au simulateur de réseau *ns*. Cette comparaison considère un réseau comportant cinq sources et deux routeurs. La file d'attente estimée et la longueur de file instantanée sont présentées dans les figures 1.8(a)-1.8(b) (extraites de [Misra et al., 2000]), où la réponse du modèle -notée DE- est superposée avec celle de *ns*. Notons que l'effet du "slow start" induit par le

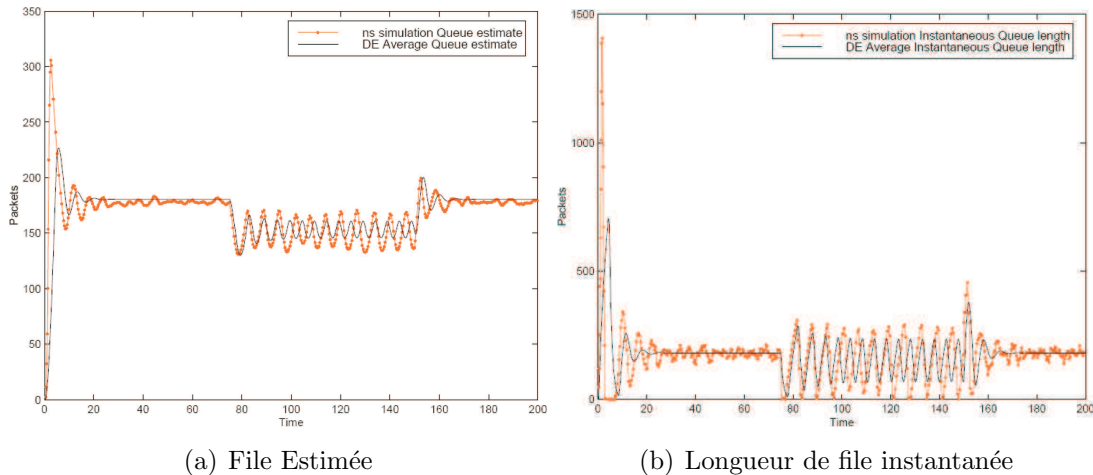


FIG. 1.8 – Validation du modèle TCP avec le simulateur *ns*.

TCP n'est pas inclus dans le modèle et génère le pic de départ sur les courbes obtenues avec *ns*. Ces résultats illustrent l'efficacité du modèle proposé pour représenter le comportement moyen du réseau, bien que les phénomènes transitoires apparaissent de manière légèrement retardée.

L'exemple précédent montre comment la dynamique interne du réseau, induite par la file d'attente du routeur, est affectée par le protocole de transfert implémenté au niveau de

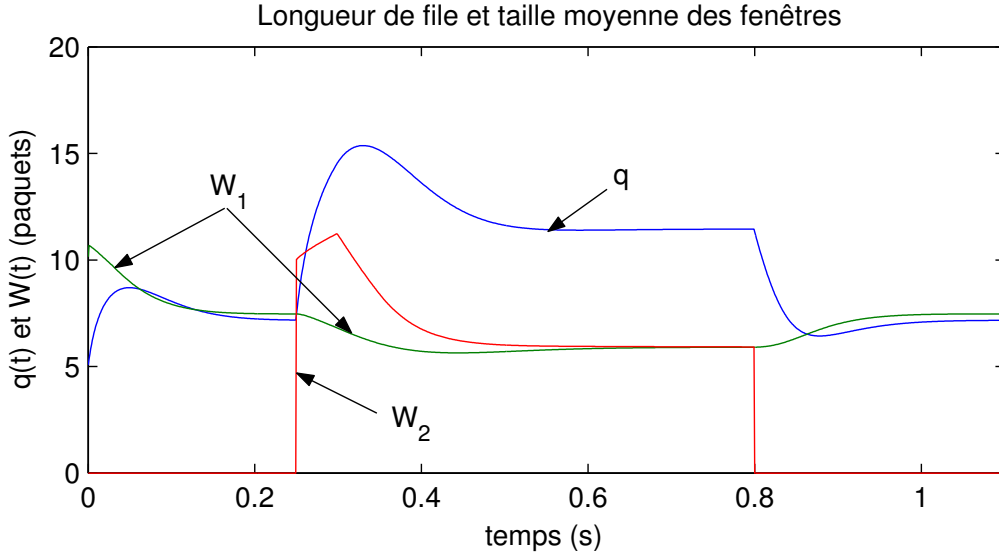


FIG. 1.9 – État du réseau et calcul de  $\delta(t)$ .

l'émetteur (taille de la fenêtre) et par les caractéristiques intrinsèques au réseau (telles que la capacité du canal de transmission...). L'émetteur adapte la taille de la fenêtre d'émission  $W(t)$  en fonction des ressources disponibles sur le réseau. Le retard résultant dépend du temps de transmission, de la longueur de la file d'attente, ainsi que du temps induit par la gestion de l'information au niveau du router (adressage, etc.).

De manière plus générale, le modèle précédent fait partie de la classe de systèmes pouvant être représentés par une équation différentielle de type (1.4.3)-(1.4.4) avec

$$\begin{aligned}
 z(t) &= [W_1(t) \dots W_N(t) q(t)]^T \\
 u_d(t) &= \{N(t), C(t), p(t)\} \\
 f(z(t), u_d(t)) &= \left[ \frac{dW_1(t)}{dt} \dots \frac{dW_N(t)}{dt} \frac{dq(t)}{dt} \right]^T \\
 h(z(t), u_d(t)) &= \frac{1}{2} \left[ \frac{q(t)}{C(t)} + T_{pi} \right]
 \end{aligned}$$

et où le retard induit  $\tau_i(t)$  est estimé comme étant la moitié du temps d'aller retour. La dynamique de l'état  $\bar{q}(t)$  n'apparaît pas explicitement ici du fait de la considération de  $p(t)$  comme une entrée exogène.

Le modèle de réseau présenté ci-dessus est illustré par l'exemple numérique suivant.

### Exemple 1.4.2

Soit un réseau constitué d'un routeur et de deux flux TCP (celui utilisé par le canal de commande et un flux perturbateur, agissant entre  $t = 0,25s$  et  $t = 0,8s$ ). Les paramètres de ce réseau sont tels que le retard est obtenu à

partir des équations dynamiques

$$\frac{dW_1(t)}{dt} = \frac{1}{R_1(t)} - \frac{W_1(t)}{2} \frac{W_1(t - R_1(t))}{R_1(t - R_1(t))} p_1(t),$$

$$\frac{dW_2(t)}{dt} = \frac{1}{R_2(t)} - \frac{W_2(t)}{2} \frac{W_2(t - R_2(t))}{R_2(t - R_2(t))} p_2(t),$$

$$\frac{dq(t)}{dt} = -300 + \sum_{i=1}^2 \frac{W_i(t)}{R_i(t)}, \quad q(0) = 5$$
$$\tau(t) = R_1(t)/2$$

avec  $R_1(t) \doteq \frac{q(t)}{300} + 0,001$ ,  $R_2(t) \doteq \frac{q(t)}{300} + 0,0015$ ,  $p_i(t) = 0,005 \times q(t - R_i(t))$ ,  
 $i = 1, 2$ , et  $W_1(0) = W_2(0, 25) = 10$  paquets. L'évolution temporelle des états internes du réseau  $q(t)$ ,  $W_1(t)$  et  $W_2(t)$  est présentée dans la figure 1.9.

Cet exemple sera utilisé comme base de modèle de retard dans la suite de ce travail.

## 1.5 Contributions de la thèse

Cette introduction nous a permis d'avoir un aperçu des différents types de problèmes inhérents au réseau et de mettre en évidence l'importance du retard variable dans ce cadre. Une analyse des propriétés du réseau justifie certaines hypothèses, notamment sur la bornitude du retard et de sa dérivée, qui orientent notre choix vers l'utilisation d'un prédicteur d'état. Les différents chapitres de cette thèse sont présentés ci-dessous.

### Etat de l'art sur le prédicteur d'état

Le second chapitre est dédié à une étude bibliographique permettant de se familiariser avec les propriétés des systèmes à entrée retardée commandés par un prédicteur d'état. Nous verrons plus particulièrement l'attribution de spectre fini, l'utilisation d'un horizon de prédiction temps variant et quelques éléments de mise en œuvre. Cette étude motivera l'analyse effectuée par la suite, notamment concernant l'utilisation d'un modèle de retard pour établir la loi de commande et une compréhension plus détaillée du système en boucle fermée ainsi obtenu.

### Prédicteur par retour d'état

Dans ce troisième chapitre, nous détaillerons le cas du prédicteur à horizon variable dans le cas où l'état complet est mesurable. Ceci nous permettra de relier les conditions de stabilité et de causalité aux hypothèses émises sur le modèle dynamique du retard. Nous verrons ensuite différentes méthodes de calcul de l'horizon de prédiction, et plus

## Chapitre 1. Introduction

---

particulièrement une méthode par estimation dynamique permettant de faire apparaître de manière *explicite* le modèle du retard dans la loi de commande. L'effet de cette estimation sur la dynamique du système en boucle fermée sera détaillé.

### Analyse de robustesse vis-à-vis d'incertitudes sur le retard

Afin de valider l'approche proposée, et notamment son applicabilité à la stabilisation des systèmes commandés par réseaux, il convient d'étudier sa robustesse lors d'une erreur d'estimation sur le retard, comme proposé dans le quatrième chapitre. Ceci nous permettra de définir la qualité de réseau nécessaire à une mise en œuvre sûre et performante de la loi de commande, en vue d'établir un éventuel cahier des charges pour un réseau dédié.

### Application et résultats expérimentaux

Le cas concret d'un réseau induisant un retard sur les deux canaux de communication, où seule la sortie du système est disponible pour établir la loi de commande et où l'objectif est la poursuite d'une trajectoire de référence, est considéré dans le cinquième chapitre. Nous verrons comment l'horizon de prédiction peut être étendu afin de prendre en compte un second retard, et comment le prédicteur d'état peut être aisément inclus dans une loi de commande basée sur l'observation ou la poursuite de trajectoire.

La fin du chapitre présentera la mise en application de la loi de commande proposée sur un banc d'essai expérimental constitué d'un pendule inversé.

### Publications

Les travaux suivants, décrits dans ce manuscrit, ont été publiés ou sont en cours de soumission :

- E. Witrant, “An Overview of Networked Control Systems”, *Note interne*, Laboratoire d'Automatique de Grenoble, Grenoble, France 2003.
- E. Witrant, C. Canudas de Wit and D. Georges, “Remote Output Stabilization Under Two Channels Time-Varying Delays”, *Proc. of the 4<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems*, Rocquencourt, France, September 2003.
- E. Witrant, C. Canudas de Wit, D. Georges and M. Alamir, “Remote Stabilization via Time-Varying Communication Network Delays : Application to TCP networks”, *Proc. of the IEEE Conference on Control Applications*, Taipei, Taiwan, Sept. 2-4, 2004.
- E. Witrant, C. Canudas de Wit, D. Georges and M. Alamir, “On the use of State Predictors in Networked Control Systems”, en processus de révision pour le livre *Applications of Time-Delay Systems*, Springer, 2005.
- E. Witrant, C. Canudas de Wit, D. Georges and M. Alamir, “Remote Output Stabilization via Communication Networks with a Distributed Control Law”, en



## Chapitre 1. Introduction

---

- processus de révision pour *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2005.
- E. Witrant, A. Van der Schaft and S. Stramigioli, “A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line”, *Note interne*, Universiteit Twente, Enschede, Netherlands 2005.
  - E. Witrant, D. Georges and O. Sename, projet de chapitre du livre *Systèmes commandés en réseau*, IC2 Hermes, 2006.

*Les chemins méthodiques d'approche convergent et concourent au point central de la Création ; chacun d'eux y amène une finesse analytique différente, telle ou telle détermination.*

Michel Serres.

[Serres, 2001]



## Chapitre 2

# Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat

La commande basée sur un prédicteur d'état est particulièrement efficace pour stabiliser un système (éventuellement instable en boucle ouverte) avec entrée retardée du fait qu'elle permet le placement des pôles du système en boucle fermée. Cette classe de systèmes est décrite par une équation différentielle de type

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau)$$

Le placement de pôles sur ce type de systèmes est effectué par attribution de spectre fini, comme nous le détaillerons plus loin, et permet d'extraire le retard de la boucle, de manière similaire au prédicteur de Smith [Smith, 1959]. En effet, pour le cas du retard constant, le prédicteur d'état permet de mettre en place la loi de commande

$$u = -Kx(t + \tau)$$

et le système en boucle fermée devient

$$\dot{x}(t) = Ax(t) - BKx(t - \tau + \tau) = (A - BK)x(t)$$

Cette méthode peut aussi être appliquée au cas des retards temps variants en considérant un prédicteur à horizon variable, l'horizon étant calculé grâce à un modèle du retard.

Ce chapitre est dédié à la présentation de résultats notoires concernant l'utilisation du prédicteur d'état dans la stabilisation des systèmes à entrée retardée. Nous verrons dans un premier temps quelques approches historiques conduisant à une compréhension de la méthode de prédiction, à une analyse du système bouclé résultant et à la prise en compte de la dynamique induite par le prédicteur. Une seconde section décrit comment le prédicteur d'état peut être analysé d'un point de vue fréquentiel ou inclus dans une synthèse  $H^\infty$  pour assurer la robustesse vis-à-vis de perturbations sur le retard ou sur

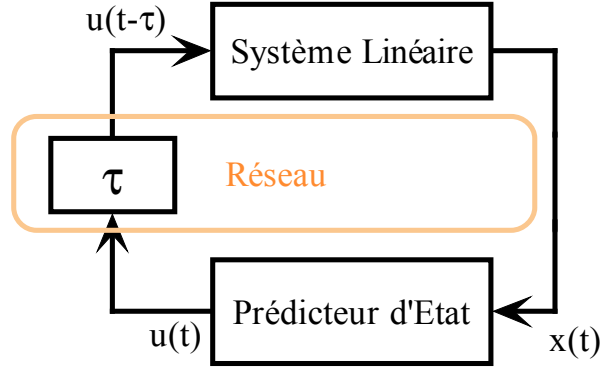


FIG. 2.1 – Système à retard sur un canal.

l'état. Quelques considérations concernant les instabilités liées à la solution numérique de la commande seront également présentées. Une partie de ce chapitre sera présentée dans [Witrant, Canudas-de-Wit, Georges & Alamir, 2005a].

## 2.1 Aperçu historique

Après un bref rappel sur la notion de commandabilité dans le cas des systèmes à entrée retardée, nous verrons dans cette section les principaux résultats obtenus dans les années 1970-1980 concernant le prédicteur d'état. Nous porterons une attention particulière sur la notion d'attribution de spectre fini, de système réduit et sur l'utilisation du prédicteur pour stabiliser des systèmes à entrée retardée dans le cas où ce retard varie dans le temps. L'état est supposé complètement connu pour établir la loi de commande, tel que présenté en figure 2.1.

### 2.1.1 Commandabilité

La commandabilité des systèmes linéaires à entrée de commande retardée n'est pas triviale (un système à retard est un système de dimension infinie et à caractère distribué) et nécessite une définition spécifique, telle que celle proposée dans [Olbrot, 1972]. Nous considérons la classe générale de systèmes décrits sur l'horizon  $[t_0, t_1]$  par

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + \sum_{i=0}^k B_i(t)u(t - \tau_i) \quad (2.1.1)$$

où  $A(t)$ ,  $B_i(t)$  sont des matrices mesurables bornées de taille  $n \times n$  et  $n \times m$ , respectivement, et  $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k$  sont des nombres réels.

La commandabilité de l'état complet est classiquement définie ainsi

## Chapitre 2. Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat

---

**Définition 2.1.1.** *L'état complet du système (2.1.1) au temps  $t$  est l'ensemble  $x_c(t) = \{x(t), v(t, s)\}$ , où  $v(t, s) = u(s)$ ,  $s \in [t - \tau_k, t]$ .*

**Définition 2.1.2.** *L'état complet  $x_c(t_0)$  est dit commandable sur  $[t_0, t_1]$  si il existe une commande  $u$  telle que  $x(t_1) = 0$ .*

**Définition 2.1.3.** *L'état complet  $x_c(t_0)$  est dit absolument commandable sur  $[t_0, t_1]$  si il existe une commande  $u$  telle que  $x_c(t_1) = 0$  ( $x(t_1) = 0$  et  $v(t_1, s) = 0$ ).*

**Définition 2.1.4.** *Le système (2.1.1) est dit (absolument) commandable sur  $[t_0, t_1]$  si et seulement si tout état complet est (absolument) commandable sur cet intervalle.*

Ces définitions montrent l'influence du retard sur la notion d'état et de commandabilité. En effet, nous ne considérons plus un état instantané mais une évolution sur un horizon dépendant du retard : la commande  $u(\cdot)$  doit être connue sur l'horizon

$$[t - \max_k \tau_k, t]$$

pour pouvoir calculer une valeur unique de  $\dot{x}(t)$ , deux commandes ayant une valeur égale à un instant donné mais un historique différent induisant deux évolutions dynamiques différentes.

Nous retrouvons ce principe lors de la définition d'un système à retard de type

$$\dot{x}(t) = A_n x(t) + A_d x(t - \tau)$$

où une condition initiale appropriée d'écrit sous la forme [Niculescu, Verriest, Dugard & Dion, 1998]

$$x(t_0 + \theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [-\tau, 0], \quad (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \tau}^\nu$$

avec  $\mathcal{C}_{n, \tau}^\nu = \{\phi \in \mathcal{C}_{n, \tau} : \|\phi\|_c < \nu\}$ , où  $\nu$  est un nombre réel positif,  $\|\phi\|_c = \sup_{-\tau \leq t \leq 0} \|\phi\|$ ,  $\|\cdot\|$  se réfère à la norme Euclidienne et  $\mathcal{C}_{n, \tau} = \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$  dénote l'espace de Banach des fonctions vectorielles continues projetant l'intervalle  $[-\tau, 0]$  dans  $\mathbb{R}^n$  avec une topologie de convergence uniforme.

La notion d'état complet de la première définition est donc introduite pour prendre en compte les valeurs passées de la commande. Les définitions suivantes sont une application de la commandabilité au sens classique à ce type de système, ou plus simplement la prise en compte que l'on doit établir les conditions passées de la commande avant l'instant d'initialisation du système ( $t_0$ ) puis conserver l'historique de celle-ci durant l'intervalle  $[t - \max_k \tau_k, t]$  pour assurer l'unicité de la trajectoire décrite par (2.1.1).

### Remarques:

- Pour plus de simplicité, nous considérerons dans la suite de ce travail que les valeurs de la commande précédant l'initialisation du système sont nulles et que l'historique de celle-ci est conservé sur l'horizon nécessaire. Les conditions initiales du système se réduisent ainsi à  $x(t_0)$  et les notions classiques de commandabilité peuvent être appliquées directement.

- L'utilisation de la commande prédictive permet, du fait de la dimension infinie de la loi de commande, d'obtenir un système en boucle fermée de dimension finie. Cette transformation d'un système décrit par une équation différentielle fonctionnelle en système décrit par une équation différentielle ordinaire est limitée par la précision de calcul du terme intégral. En effet, le système résultant peut s'avérer non robuste vis-à-vis d'incertitudes arbitrairement petites à ce niveau. Une discussion plus complète à ce sujet est disponible dans [Michiels, 2002] et la limitation de performance résultante est proche de celle induite par une erreur d'estimation du retard, dont nous détaillerons l'effet au chapitre 4.  $\diamond$

La solution de l'équation différentielle (2.1.1) et les définitions précédentes sont utilisées pour établir le théorème suivant concernant la commandabilité absolue.

**Théorème 2.1.1** ([Olbrot, 1972]). *Si les matrices  $A(t)$ ,  $B_i(t)$  sont analytiques sur  $[t_0, t_1]$ ,  $[t_0 + \tau_i, t_1]$ , respectivement, alors le procédé (2.1.1) est absolument commandable sur  $[t_0, t_1]$  si et seulement si*

$$\text{rank} [D(t), LD(t), \dots, L^{n-1}D(t)] = n$$

pour tout point non isolé de  $[t_0, t_1 - \tau_k]$ . La fonction  $D(s)$  et l'opérateur  $L$  sont définis par

$$\begin{aligned} D(s) &\doteq \sum_{i=0}^k \Phi(s, s + \tau_i) B_i(s + \tau_i) \\ LD(t) &\doteq (d/ds)D(s)|_{s=t} - A(t)D(t) \end{aligned}$$

où  $\Phi(t, t_0)$  est la matrice de transition de  $A(t)$ .

**Remarque.** Pour le cas spécifique du procédé décrit par (1.4.1) avec retard constant,  $D(s) = e^{-A\tau}B$  et la stabilité absolue de ce système est garantie si et seulement si  $\text{rank} [e^{-A\tau}B, Ae^{-A\tau}B, \dots, A^{n-1}e^{-A\tau}B] = n$ .  $\diamond$

## 2.1.2 Attribution de spectre fini

L'utilisation d'un retour d'état linéaire sur un système dynamique à commande retardée conduit à un système en boucle fermée décrit par une équation différentielle fonctionnelle retardée à *spectre infini*. L'attribution d'un spectre fini à un tel système n'est pas possible avec une commande par retour d'état instantané car le système bouclé résultant appartient à la classe des systèmes retardés. En effet, la construction de l'évolution temporelle de cette classe de systèmes nécessite de l'information sur un intervalle non-nul (la condition initiale est une fonction à valeurs vectorielles), ce qui conduit à la considération d'une classe de systèmes à *dimension infinie* [Niculescu, 2001; Hale, 1977]. L'objet de cette section est de présenter les résultats obtenus dans [Manitius & Olbrot, 1979], où le

## Chapitre 2. Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat

---

prédicteur d'état est utilisé afin d'obtenir un *spectre fini* en boucle fermée, pour la classe de systèmes dynamiques à entrée retardée.

Soit le système avec une entrée retardée et une non retardée

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + B_0u(t) + B_1u(t - \tau), \quad (2.1.2)$$

où  $A$ ,  $B_0$ ,  $B_1$  sont des matrices de dimensions appropriées, et la loi de commande

$$u(t) = Kx(t) + K \int_{-\tau}^0 e^{-(\tau+\theta)A} B_1 u(t + \theta) d\theta \quad (2.1.3)$$

où  $K$  est une matrice de taille  $m \times n$  spécifiant l'attribution du spectre en boucle fermée. Alors le caractère fini de ce spectre est déterminé par le théorème suivant :

**Théorème 2.1.2.** *Le spectre du système en boucle fermée (2.1.2), (2.1.3) coïncide avec celui de la matrice*

$$A + [B_0 + e^{-A\tau} B_1]K$$

*De plus, en supposant la commandabilité (respectivement stabilisabilité) de la paire  $(A, B_0 + e^{-A\tau} B_1)$ , le spectre du système (2.1.2)-(2.1.3) peut être placé à n'importe quel ensemble de points conjugués prédéfinis du plan complexe (resp. les valeurs propres instables de  $A$  peuvent être déplacées arbitrairement) par un choix approprié de la matrice  $K$ .*

*Démonstration.* Supposons que les solutions de (2.1.2) sont continûment dérivables ; elles peuvent donc s'écrire  $x(t) = e^{At}\kappa(t)$ , où  $\kappa(t)$  est une fonction continûment dérivable. Nous avons alors

$$x(t + \tau) = e^{A\tau} \left[ x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-(\tau+\theta)A} [B_0u(t + \theta + \tau) + B_1u(t + \theta)] d\theta \right]$$

En extrayant  $x(t)$  de l'équation précédente et en l'introduisant dans (2.1.3), nous obtenons après simplification

$$u(t - \tau) = K \left[ e^{-A\tau} x(t) - \int_{-\tau}^0 e^{-(\tau+\theta)A} [B_0u(t + \theta)] d\theta \right] \quad (2.1.4)$$

L'expression pour  $u(t)$  de (2.1.3) et celle pour  $u(t - \tau)$  de (2.1.4) peuvent maintenant être substituées dans (2.1.2). Notons que les termes intégraux s'annulent et que le système en boucle fermée résultant est

$$\dot{x}(t) = (A + B_0K + B_1Ke^{-A\tau})x(t)$$

ce qui termine la démonstration. □

**Remarques:**



## Chapitre 2. Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat

---

- Le résultat original de [Manitius & Olbrot, 1979] était donné pour la classe plus générale de systèmes décrits par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \int_{-\tau}^0 d\beta(\theta)u(t + \theta) \quad (2.1.5)$$

où  $\beta(\cdot)$  est une matrice de taille  $n \times m$  composée de fonctions à variation bornée contenant des fonctions absolument continues et un nombre fini de discontinuités. De plus, la version originale utilise les intégrales de Lebesgue-Stieltjes, permettant ainsi la considération de mesures non-uniformément distribuées. Nous nous sommes restreints à la classe de procédés décrits par (2.1.2) pour plus de simplicité et de clarté.

- La sensibilité de cette approche aux variations du modèle du système et à celles du contrôleur est aussi considérée dans [Manitius & Olbrot, 1979]. Il est montré que le système en boucle fermée reste stable pour des variations relativement petites, même si le spectre désiré n'est pas préservé.
- Pour le cas spécifique du procédé décrit par (1.4.1) avec un retard constant ( $B_0 = 0$ ), la condition de commandabilité du théorème précédent est équivalente à la condition exprimée dans la remarque 2.1.1. En effet, (2.1.3) est choisie avec un gain  $Ke^{A\tau}$ , d'où la commande

$$u(t) = Ke^{A\tau} \left[ x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-(\tau+\theta)A} B_1 u(t + \theta) d\theta \right] \quad (2.1.6)$$

Le spectre résultant est donc celui de  $[A + B_1 K]$ .  $\diamond$

Un résultat de stabilité similaire a aussi été établi dans [Kwon & Pearson, 1980], où le régulateur à horizon glissant est utilisé dans le cadre du contrôle optimal pour minimiser l'énergie de commande.

### 2.1.3 Réduction des systèmes

Les notions de système équivalent et de réduction de système ont tout d'abord été présentées dans [Kwon & Pearson, 1980], afin de présenter le prédicteur comme une méthode de stabilisation générale. Les travaux précédents (attribution de spectre fini, réduction de modèle) sont ensuite généralisés dans [Artstein, 1982], où une condition absolue de continuité pour la réduction des systèmes est proposée. Ceci permet la transformation d'un système linéaire à commande retardée en système différentiel commandé ordinaire. Cette transformation s'effectue de la manière suivante.

**Théorème 2.1.3.** *Soit*

$$p(t) \doteq x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{(t-\theta-\tau)A} B_1 u(\theta) d\theta$$

## Chapitre 2. Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat

---

Alors  $\{x(t), u(t)\}$  est admissible pour (2.1.2) si et seulement si  $\{p(t), u(t)\}$  est admissible pour

$$\dot{p}(t) = Ap(t) + \hat{B}u(t) \quad (2.1.7)$$

avec  $\hat{B} \doteq B_0 + e^{-A\tau}B_1$ .

*Démonstration.* Le résultat précédent est obtenu en dérivant  $p(t)$  par rapport au temps et en substituant directement la dérivée de  $x(t)$  par (2.1.2), ce qui permet d'obtenir le système équivalent (2.1.7).  $\square$

Pour le cas des systèmes avec un retard temps variant dans l'entrée de commande décrits par (1.4.1) avec  $\eta(t) \doteq t - \tau(t)$  absolument continu et  $\dot{\tau}(t) \neq 1$  pour presque tout  $t$ , le système équivalent est obtenu, pour presque tout  $t$ , en utilisant la fonction temps variante

$$\hat{B}(t) = \sum_{s \in \eta^{-1}(t)} e^{A(t-s)} B |1 - \dot{\tau}(s)|^{-1}.$$

où  $\eta^{-1}(t) \doteq \{s | \eta(s) = t\}$ .

Les techniques classiques de stabilisation, d'optimisation et de commandabilité peuvent être directement appliquées au système réduit grâce au théorème suivant.

**Théorème 2.1.4.** *Soit  $u(t) = K(t)p(t)$  un retour d'état stabilisant pour (2.1.7) avec  $K(t)$  borné. Alors le système (2.1.2) est stabilisé par la commande*

$$u(t) = K(t) \left[ x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{(t-\theta-\tau)A} B_1 u(\theta) d\theta \right].$$

**Remarque.** Les théorèmes originaux de [Artstein, 1982] sont établis pour la classe plus générale de systèmes décrits par (2.1.5) (le cas particulier de (2.1.2) est introduit comme exemple d'illustration).  $\diamond$

### 2.1.4 Horizon de prédiction pour le retard temps variant

La méthode d'attribution de spectre fini est appliquée plus spécifiquement aux systèmes avec un retard de commande temps variant dans [Nihtilä, 1989], où cette méthode est utilisée pour établir un algorithme adaptatif assurant la convergence de la sortie vers la valeur désirée ainsi que la stabilité globale. Les spécificités induites par l'utilisation d'un prédicteur à horizon temps variant sont soulignées dans cette sous-section.

Le système du premier ordre considéré dans [Nihtilä, 1989] s'écrit

$$\dot{x}(t) = ax(t) + u(t - \tau(t)) \quad (2.1.8)$$

## Chapitre 2. Etat de l'Art sur le Prédicteur d'Etat

---

avec  $a$  une constante positive inconnue et  $\tau(t)$  satisfaisant les conditions établies dans la section 1.4.3.

Le but est d'exprimer (2.1.8) sous la forme

$$\frac{dx}{d\zeta(t)}(\zeta(t)) = ax(\zeta(t)) + u(t)$$

où  $\zeta(t) \doteq t + \delta(t)$  est le temps prédit. Ceci est réalisé si  $\delta(t)$  satisfait  $\delta(t) - \tau(t + \delta(t)) = 0$ . On voit apparaître ici le problème de l'équation implicite par rapport au temps réel, qui sera détaillé par la suite. Le placement de pôles désiré sur le système bouclé est obtenu avec l'utilisation de la loi de commande non causale

$$u(t) = \kappa x(\zeta(t)) + u_r(t)$$

où  $u_r(t)$  est une entrée de référence bornée et  $\kappa$  est une constante négative telle que  $a + \kappa < 0$ . Cette loi de commande est rendue causale en utilisant l'état prédit  $x(\zeta(t))$  calculé grâce au lemme suivant :

**Lemme 2.1.5.** *La prédiction  $x(t + \delta(t))$  est donnée par l'équation*

$$x(t + \delta(t)) = F(\zeta(t), t) \left[ x(t) + \int_{t-\tau(t)}^t F(t, \zeta(s)) \dot{\zeta}(s) u(s) ds \right]$$

où  $F$  est la fonction de transition de l'état du système, i.e.  $F(t, \sigma) = e^{a(t-\sigma)}$  pour (2.1.8).

Ce lemme montre que, si  $a$  est cette fois connu, nous pouvons établir la loi de commande proposée de façon causale, car l'état prédit  $x(t + \delta)$  est calculé à partir de  $x(t)$  et de  $u(s)$  avec  $s \in [t - \tau, t]$ .

En exprimant (2.1.8) dans les coordonnées temporelles en  $\zeta(t)$ , nous avons

$$\frac{dx}{d\zeta(t)}(\zeta(t)) = ax(\zeta(t)) + u(t + \delta - \tau(t + \delta)) = ax(\zeta(t)) + u(t)$$

du fait de la définition de  $\delta(t)$ . En introduisant la loi de commande proposée nous pouvons placer les pôles du système bouclé exprimé en  $\zeta$ , qui s'écrit

$$\frac{dx}{d\zeta(t)}(\zeta(t)) = (a + \kappa)x(\zeta(t)) + u_r(t)$$

où  $\kappa$  est le gain affecté à la commande.

Cette méthode est étendue à la stabilisation des systèmes SISO multidimensionnels dans [Nihtilä, 1991a] où une mise en oeuvre avec un estimateur d'état est aussi proposé. Elle est appliquée aux systèmes à non minimum de phase à retard constant dans [Nihtilä, 1991b]. Notons que le calcul de l'horizon de prédiction n'est pas détaillé et que la stabilité du système en boucle fermée n'est pas établie de manière formelle dans ces travaux.

## 2.2 Autres approches

Le prédictor d'état peut être combiné à d'autres approches, telles l'analyse fréquentielle, la synthèse  $H^\infty$  ou l'analyse numérique, afin de déterminer la robustesse et les qualités du système bouclé. Nous verrons tout d'abord comment le problème de robustesse par rapport à la connaissance du retard peut être abordé par l'approche fréquentielle, dans le cas d'un retard constant. Ensuite, la synthèse  $H^\infty$  sera utilisée afin de rejeter une perturbation sur l'état, en prenant partiellement en compte la variation du retard temps variant. Pour terminer cette section, nous considérerons quelques éléments d'analyse numérique permettant de compenser l'instabilité induite par le calcul de l'intégrale dans le prédictor d'état.

### 2.2.1 Robustesse vis-à-vis du retard : analyse fréquentielle

Un critère de robustesse vis-à-vis de l'estimation du retard utilisé lors du calcul de l'état prédit est proposé dans [Mondié et al., 2001]. Le système considéré est un système dynamique à entrée retardée tel que celui décrit par (1.4.1), avec un retard constant. Le problème de robustesse est formulé en introduisant la déviation maximale du retard  $\Delta \doteq \tau - \hat{\tau}$ , où  $\tau$  est le retard induit par le réseau et  $\hat{\tau}$  est le retard utilisé pour la prédiction. Il s'agit donc de trouver la valeur maximale  $\bar{\Delta}$  de  $\Delta$  assurant la stabilité du système bouclé pour  $|\Delta| \in [0, \bar{\Delta}]$ . La considération d'un retard constant permet de résoudre ce problème en utilisant une approche fréquentielle, détaillée ci-dessous. Le retard estimé est utilisé pour établir la loi de commande

$$u(t) = -Ke^{A\hat{\tau}} \left[ x(t) + e^{A\hat{\tau}} \int_{t-\hat{\tau}}^t e^{-A\theta} Bu(\theta) d\theta \right] \quad (2.2.1)$$

qui s'écrit, dans le domaine fréquentiel,

$$(I_n + K(sI_n - A)^{-1}[I_n - e^{-\hat{\tau}(sI_n - A)}]B)u(s) = -Ke^{\hat{\tau}A}x(s)$$

où  $I_n$  est la matrice identité de taille  $n$  et  $s$  est l'opérateur de Laplace. Le système (1.4.1) est décrit par

$$(sI_n - A)x(s) = Be^{-\tau s}u(s)$$

et la matrice caractéristique du système en boucle fermée est

$$\begin{aligned} & \det \begin{pmatrix} sI_n - A & Be^{-\tau s} \\ -Ke^{\hat{\tau}A} & I_n + K(sI_n - A)^{-1}[I_n - e^{-\hat{\tau}(sI_n - A)}]B \end{pmatrix} \\ & = \det (sI_n - A + [I_n - e^{\hat{\tau}A}(e^{-\hat{\tau}s} - e^{-\tau s})]BK) \end{aligned}$$

**Remarque.** Lorsque le retard est parfaitement connu,  $\Delta = 0$  et le spectre en boucle fermée est identique à celui des systèmes équivalents non retardés décrits précédemment.

◇

Le développement précédent permet d'établir la proposition suivante

**Proposition 2.2.1.** *Soit le système décrit par (1.4.1) avec un retard constant  $\tau$ , commandé par (2.2.1). Si le retard estimé  $\hat{\tau}$  est différent de celui subi par l'entrée du système et que  $\Delta$  décrit la déviation de ce retard, alors l'équation caractéristique du système en boucle-fermée est*

$$\det(sI_n - A + BK - e^{\hat{\tau}A}e^{-\hat{\tau}s}(1 - e^{-\Delta s})BK)$$

**Remarque.** Ce résultat montre la corrélation entre le choix du gain  $K$ , le retard estimé maximum et la déviation admissible du retard. Ceci illustre le compromis nécessaire entre un gain élevé (large bande-passante) et une tolérance vis-à-vis des incertitudes sur le retard (sensibilité du système bouclé).  $\diamond$

La borne supérieure sur la déviation de retard admissible peut ensuite être évaluée, de manière analytique pour le cas monovarié (analyse basée sur des arguments de continuité) ou de façon numérique pour le cas multivarié (balayage fréquentiel).

L'inconvénient majeur de cette méthode est de ne pas être applicable au cas du retard temps variant, d'une importance capitale dans les réseaux de communication où le retard subi de fortes variations selon la charge.

### 2.2.2 Commande $H^\infty$ avec retard temps variant

La méthode du prédictor d'état est utilisée dans la synthèse d'une loi de commande  $H^\infty$  pour un système à retard de commande temps variant dans [Uchida et al., 2003]. Le système et le canal du capteur sont décrits, respectivement, par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)) + Dv(t) \quad (2.2.2)$$

$$y(t) = x(t - \tau_1(t)) \quad (2.2.3)$$

où  $v(t)$  est le vecteur de perturbation,  $y(t)$  est la sortie mesurée utilisée pour établir la loi de commande, et les deux retards remplissent les spécifications décrites dans la section 1.4.3 (retard et sa dérivée bornés). Ce système est décrit de manière schématique par la figure 2.2. La formulation de l'état prédit  $p(t) = x(t + \delta(t))$  est similaire à celle proposée dans [Uchida et al., 2000] et s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{p}(t) &= \tilde{A}(\delta(t))p(t) + \tilde{B}(\delta(t))u(t) \\ &+ \tilde{D}(\tau_1(t), \dot{\tau}_1(t), \delta(t))v(t - \tau_1(t)), \quad p(0) = 0 \end{aligned}$$

où

$$\tilde{A}(\theta) \doteq (1 + \theta)A$$

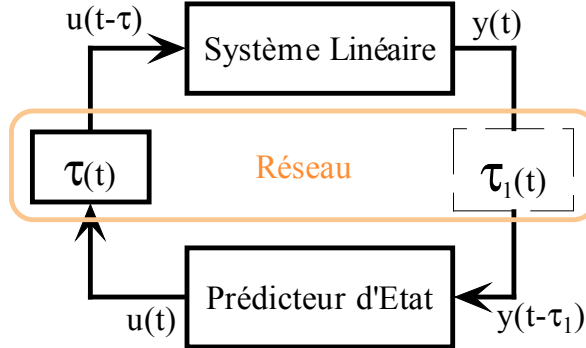


FIG. 2.2 – Système à retard sur les deux canaux.

$$\begin{aligned}\tilde{B}(\theta) &\doteq (1 + \theta)B \\ \tilde{D}(\tau_1, \theta, \delta) &\doteq (1 - \theta)e^{A(\tau_1 + \delta)}D\end{aligned}$$

où  $\theta$  est l'argument de la fonction concernée. Soit  $z(t)$  la sortie contrôlée définie par  $z(t) \doteq Fp(t)$ , où la matrice constante  $F$  est utilisée pour l'estimation de l'effet des perturbations. L'effet de la perturbation  $v(t)$  est atténué si le critère suivant est vérifié

$$\int_0^\infty z^T(t)z(t)dt \leq \gamma^2 \int_0^\infty v^T(t)v(t)dt$$

pout toute perturbation  $v(t)$  dans  $L_2[0, \infty)$ , l'espace des fonctions vectorielles dont les carrés des éléments sont intégrables sur  $[0, \infty)$ . A partir de cette formulation, la solution du problème de commande  $H^\infty$  est établie sous forme de LMI (inégalités matricielles linéaires) pour deux cas distincts :

- le retard est supposé connu à tout instant et la solution est exprimée sous forme de LMI temps variantes,
- seules les informations présentes et passées sont disponibles ; la solution utilise les bornes supérieures des retards et de leur dérivées.

Le cas de retour de sortie est aussi abordé, ainsi que des considérations de bruits de capteurs reflétés dans la sortie mesurée  $y(t)$ .

Le fait que cette solution nécessite de résoudre des LMI à chaque instant pour utiliser effectivement la valeur du retard réduit considérablement le champ d'application de cette méthode. En effet, les problématiques NECS telles que considérées ici concernent des systèmes à dynamique rapide, où le réseau a une influence prépondérante. La résolution d'un contrôleur impliquant la résolution de LMI en temps réel n'est donc pas concevable dans ce cas.

### 2.2.3 Problèmes numériques liés au calcul de l'intégrale

Le calcul de la loi de commande prédictive, présentée précédemment sous différentes formes, est typiquement effectué grâce à une approximation finie de la partie intégrale. Ceci conduit à une version discrète qui peut, dans certains cas, induire des instabilités numériques. Trois études, effectuées pour le cas des retards constants, sont décrites ici :

- Les méthodes de mise en oeuvre par quadrature numérique sont étudiées dans [Van Assche et al., 1999], où il apparaît notamment que les méthodes les plus précises donnent les pires résultats (ce sont celles qui induisent le plus d'oscillations). Par rapport aux autres approches classiques, la méthode rectangulaire backward donne le résultat le plus satisfaisant (pas d'oscillations ni de dépassement).
- Une approximation de la commande à retards distribués par une commande avec seulement des retards ponctuels utilisant un ensemble de fonctions “block-pulse” est proposé dans [Fattouh et al., 2001]. L'avantage de cette méthode est que la nature du système bouclé reste inchangée, mais sa robustesse n'est pas étudiée.
- Une dernière méthode d'approximation est proposée dans [Mondié & Michiels, 2003], utilisant elle aussi un nombre fini de retards ponctuels. L'introduction d'un filtre passe-bas dans la boucle de commande (de manière implicite), induisant ainsi un quasi-polynôme de boucle fermée de type retardé et non neutre (source d'instabilités), permet dans ce cas d'éviter les problèmes d'instabilité numérique.

Lorsque le retard est temps variant, le problème est plus complexe car dans ce cas la discrétisation conduit à un contrôleur discret à *dimension variable*. Le système bouclé résultant a donc un nombre variable de pôles et de zéros, ce qui rend difficile l'étude de la corrélation entre les instabilités numériques et la période d'échantillonnage ou la méthode de discrétisation. Ce problème nécessiterait clairement une étude plus poussée mais nous nous contenterons ici d'utiliser la méthode des rectangles backward. Ce choix est motivé par la simplicité de cette approche et sa relative robustesse dans le cas du retard constant. Les détails de mise en oeuvre de cette technique seront présentés en fin du chapitre suivant.

#### Synthèse

Au travers d'une étude bibliographique, ce chapitre nous a permis d'apprécier les bénéfices de l'utilisation du prédicteur d'état pour la stabilisation de systèmes à entrée retardée. En effet, l'attribution de spectre fini permet de compenser la nature distribuée (de dimension infinie) de ce type de systèmes et d'appliquer les méthodes de choix de gains classiques de l'automatique linéaire. Bien que l'utilisation d'un prédicteur à horizon temps variant soit introduite, son étude reste succincte, notamment concernant l'utilisation explicite des dynamiques du retard dans la loi de commande. La nature variable du retard présent dans les réseaux ainsi que l'efficacité du prédicteur d'état ont motivés l'orientation de la suite de ce travail.

*Pourquoi mettre au dessus de l'Être, des fantômes ?  
Les clartés, les éthers, ne sont pas des royaumes.  
Place au fourmillement éternel des cieux noirs,  
Des cieux bleus, des midis, des aurores, des soirs !  
Place à l'atome saint qui brûle ou qui ruisselle !  
Place au rayonnement de l'âme universelle !*

Victor Hugo, mars 1859.

[Hugo, 1972]





# Chapitre 3

## Prédicteur par Retour d'Etat

Nous considérons ici le problème de stabilisation par retour d'état, où nous supposons que l'état complet peut être mesuré i.e.  $y(t) = x(t)$ . Le cas de la poursuite de sortie, avec l'utilisation d'un observateur d'état, peut être traité de manière similaire et sera étudié dans un chapitre suivant. Le système étudié est donc décrit par les équations dynamiques

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)), \quad x(0) = x_0 \quad (3.0.1)$$

où  $x \in R^n$  est l'état interne du système commandé,  $u \in R^l$  est l'entrée de commande, et la paire  $(A, B)$  est supposée stabilisable. Le réseau induit le retard variable décrit par le système dynamique

$$\dot{z}(t) = f(z(t), u_d(t)), \quad z(0) = z_0 \quad (3.0.2)$$

$$\tau(t) = h(z(t), u_d(t)) \quad (3.0.3)$$

où la variable  $z(t)$  décrit l'état interne du réseau et  $\tau(t)$  est le retard résultant. Le signal exogène  $u_d(t)$  est supposé connu et les fonctions  $f(\cdot)$  et  $h(\cdot)$  connues et continûment dérivables (de classe  $\mathcal{C}^1$ ).

Nous verrons dans ce chapitre comment le prédicteur d'état à horizon temps variant peut être utilisé pour stabiliser ce système. Différentes méthodes de calcul de l'horizon de prédiction seront proposées, afin d'obtenir une loi de commande utilisant le modèle du retard de manière *explicite*. Les contributions principales de ce chapitre sont l'analyse détaillée du système commandé par prédicteur d'état ainsi que la prise en compte des retards lors de la modélisation et la stabilisation du système à contrôler. Une partie de ces résultats a été présentée dans [Witrant et al., 2003] et [Witrant et al., 2004].

### 3.1 Méthode de commande

Le problème de stabilisation d'un système à entrée retardée, où le retard varie dans le temps, est abordé ici. Nous utilisons la commande basée sur le prédicteur d'état décrite

dans le chapitre précédent. Ce choix est motivé par l'efficacité de cette méthode dans le cas où un modèle du réseau est disponible et par la diversité des stratégies de commande classiques applicables pour le choix du gain (le prédicteur compense le retard et le gain détermine les performances du système bouclé). Une analyse détaillée des conditions de stabilité est proposée dans cette section, ce qui permettra d'établir les hypothèses nécessaires à la suite de ce travail.

### 3.1.1 Description

Définissons tout d'abord la nouvelle entrée  $v(t)$  par

$$v(t) \doteq u(t - \tau(t)),$$

En supposant l'existence d'une fonction bornée dépendante du temps  $\infty > \delta(t) \geq 0$  (qui sera définie par la suite) et en remplaçant l'argument temporel  $t$  par l'argument à coordonnée temporelle décalée  $t + \delta(t)$  dans (3.0.1), nous obtenons

$$x'(t + \delta(t)) = Ax(t + \delta(t)) + Bv(t + \delta(t))$$

où  $x'$  est la dérivée de  $x$  par rapport à son argument. Il est intéressant de noter que pour les systèmes à retard temps variant la transformation temporelle n'est pas réversible pour un horizon de prédiction égal au retard. En effet,

$$v(t + \delta(t)) = u(t - \tau(t + \delta(t)) + \delta(t)) \quad (3.1.1)$$

contrairement au cas du retard constant, où  $\delta = \tau$  et  $v(t + \delta) = u(t)$ .  
Supposons qu'il soit possible de calculer

$$v(t + \delta(t)) = -Kx(t + \delta(t)) \quad (3.1.2)$$

le système résultant en boucle fermée est alors

$$x'(t + \delta(t)) = (A - BK)x(t + \delta(t)) = A_{cl}x(t + \delta(t)) \quad (3.1.3)$$

où  $A_{cl}$  est la matrice d'état du système bouclé, pouvant être rendue de Hurwitz du fait de l'hypothèse de contrôlabilité de la paire  $(A, B)$ . Néanmoins, la stabilité de l'état  $x(t)$  ne peut être déduite directement de la stabilité de  $A_{cl}$  et nécessite certaines contraintes sur  $\delta(t)$ . Nous reviendrons sur ce point après la présentation de la procédure de prédiction de  $v(t + \delta(t))$  et de la définition constructive résultante pour  $\delta(t)$ .

Pour résumer, deux conditions doivent être satisfaites afin que la procédure décrite ci-dessus puisse être mise en place :

1. la possibilité de prédire  $x(t + \delta(t))$ ,
2. la possibilité de calculer  $v(t + \delta(t))$ .

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

La seconde condition est satisfaite si  $t - \tau(t + \delta(t)) + \delta(t) = t$ , du fait de l'équation (3.1.1). Ceci conduit à une condition nécessaire sur  $\delta(t)$  qui sera utilisée par la suite. La prédiction de  $x(t + \delta(t))$  est donc l'élément clé pour la construction de (3.1.2) et pour que la relation (3.1.3) soit satisfaite. En substituant la solution de l'équation différentielle (3.0.1)

$$x(t + \delta(t)) = e^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right]$$

dans (3.1.2), nous obtenons

$$v(t + \delta(t)) = -K e^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right]$$

Ensuite, la combinaison de (3.1.1) et de l'équation précédente permet d'écrire

$$\begin{aligned} u(t - \tau(t + \delta(t)) + \delta(t)) &= -K e^{A\delta(t)} x(t) \\ &- K e^{A(t+\delta(t))} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau(\theta)) d\theta \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

L'argument de l'intégrale implique de connaître l'information entre  $u(t - \tau(t))$  et  $u(t + \delta(t) - \tau(t + \delta(t)))$ . La causalité dans le calcul de la loi de commande est donc satisfaite si les conditions suivantes sont vérifiées

$$\forall \theta \in [t, t + \delta(t)], \quad \theta - \tau(\theta) \leq t$$

C'est la raison pour laquelle  $\delta(t)$  est défini par

$$\delta(t) \doteq \max \{ \delta \geq 0 \mid \forall \theta \in [t, t + \delta], \quad \theta - \tau(\theta) \leq t \} \quad (3.1.5)$$

L'existence d'une solution à (3.1.5) est obtenue par la proposition suivante

**Proposition 3.1.1.** *Le problème d'optimisation (3.1.5) admet une solution  $\delta(t)$  pour laquelle*

$$\delta(t) - \tau(t + \delta(t)) = 0 \quad (3.1.6)$$

*Démonstration.* Soit  $t$  un instant donné. L'ensemble admissible pour le problème d'optimisation (3.1.5) est non vide car la valeur  $\delta = 0$  est une solution candidate répondant à la contrainte  $t - \tau(t) \leq t$ . Ceci est dû au fait que  $\tau(t) \geq 0$ , par l'hypothèse (1.4.5). De plus, l'ensemble admissible est clairement borné par  $\delta = \sup_{\sigma \geq 0} \tau(\sigma)$ . Finalement, en utilisant des arguments de continuité classiques, l'ensemble admissible est fermé. Le problème d'optimisation (3.1.5) est donc de trouver la valeur maximale d'une fonction continue (la fonction identité) sur un ensemble compact. Le fait que la solution  $\delta(t)$  satisfasse (3.1.6) est une conséquence directe de cette propriété de maximum. L'existence et l'unicité de la solution sont décrites de façon plus détaillée dans la sous-section suivante.  $\square$

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

A partir de la proposition précédente, il est clair que  $\delta(t)$  défini par (3.1.5) permet d'écrire (3.1.4) sous la forme explicite suivante

$$u(t) = -Ke^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \quad (3.1.7)$$

puisque l'information passée de  $u(t)$  est nécessaire uniquement sur l'intervalle temporel  $[t - \tau(t), t]$ .

### Remarques:

- Le calcul de  $\delta(t)$  requiert de résoudre continûment l'équation (3.1.6) pour tout instant. De plus, il est important de noter qu'une prédiction du retard est nécessaire. Celle-ci peut être obtenue par intégration du modèle (1.4.3)-(1.4.4) sur l'horizon de prédiction.
- Pour l'implantation de la loi de commande (3.1.7), il est nécessaire de garder en mémoire l'histoire des signaux de commande passés durant un intervalle temporel  $[t - \tau(t), t]$ .  $\diamond$

### 3.1.2 Analyse de stabilité asymptotique

Le but est ici de montrer la stabilité de l'état à partir de sa dynamique décrite dans l'espace temporel  $t + \delta(t)$  obtenue par la procédure décrite précédemment et exprimée dans l'équation (3.1.3). Nous utiliserons la notation  $x'(\cdot)$  pour faire référence à la dérivée de  $x(\cdot)$  par rapport à son argument ; ainsi

$$x'(\zeta) = \frac{d}{d\zeta} x(\zeta)$$

avec  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ .

**Lemme 3.1.2.** *Soit le système décrit par*

$$x'(t + \delta(t)) = A_{cl}x(t + \delta(t))$$

avec  $t \geq 0$  et  $\delta(0) = \delta_0$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées :

- i) toutes les valeurs propres de  $A_{cl}$  sont dans le demi-plan ouvert gauche du plan complexe,
- ii)  $0 \leq \delta(t) \leq \delta_M < \infty$ ,
- iii)  $-1 < \dot{\delta}(t) < \infty$ ,

alors

$$\lim_{\zeta \rightarrow \infty} \|x(\zeta)\| = \lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t + \delta(t))\| = 0 \quad (3.1.8)$$

pour toute valeur bornée de  $x(\delta_0)$ . De plus, l'état  $x(t + \delta(t))$  décroît exponentiellement vers 0.

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

*Démonstration.* Introduisons tout d'abord la fonction correspondant à l'échelle temporelle décalée  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ , notée  $\zeta$  pour plus de clarté. Soit la fonction de Lyapunov

$$V(t) = x(\zeta)^T P x(\zeta) \quad (3.1.9)$$

où  $P = P^T > 0$ . En notant que la dérivée temporelle de l'état correspond au système linéaire temps variant

$$\frac{d[x(\zeta)]}{dt} = \frac{dx(\zeta)}{d\zeta} \frac{d\zeta}{dt} = (1 + \dot{\delta}) A_{cl} x(\zeta)$$

nous obtenons, grâce à l'hypothèse (i), qu'il existe une matrice  $Q$  définie positive telle que

$$\begin{aligned} \dot{V}(t) &= (1 + \dot{\delta}(t)) x(\zeta)^T (P A_{cl} + A_{cl}^T P) x(\zeta) \\ &= -(1 + \dot{\delta}(t)) x(\zeta)^T Q x(\zeta) \\ &\leq -(1 + \dot{\delta}(t)) \lambda_m(Q) \|x(\zeta)\|^2 < 0 \end{aligned} \quad (3.1.10)$$

où la dernière inégalité est obtenue avec l'hypothèse (iii). En utilisant les bornes

$$\lambda_m(P) \|x(\zeta)\|^2 \leq V(t) \leq \lambda_M(P) \|x(\zeta)\|^2$$

avec  $\lambda_m(\cdot)$  et  $\lambda_M(\cdot)$  dénotant respectivement les valeurs propres minimum et maximum de la matrice considérée, et en intégrant l'inégalité (3.1.10) entre 0 et  $t$ , nous obtenons

$$V(t) \leq V(0) e^{-\Psi(t)}$$

où

$$\Psi(t) \doteq \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} \int_0^t (1 + \dot{\delta}(\theta)) d\theta > 0$$

En utilisant à nouveau les bornes de l'équation de Lyapunov, nous pouvons en déduire

$$\|x(\zeta)\|^2 \leq \frac{\lambda_m(P)}{\lambda_M(P)} \|x(\delta_0)\|^2 e^{-\Psi(t)}, \quad (3.1.11)$$

Il reste à établir que  $\Psi(t) \rightarrow \infty$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Pour cela, nous utilisons la définition de  $\Psi(t)$  pour montrer que

$$\Psi(t) = \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(P)} (t + \delta(t) - \delta_0)$$

où  $\delta(t)$  est positif et borné, du fait de l'hypothèse (ii). Nous pouvons donc en conclure que  $t \rightarrow \infty$  implique  $\Psi(t) \rightarrow \infty$ . L'application de cette propriété à (3.1.11) permet de conclure la démonstration.  $\square$

**Corollaire 3.1.3.** *Si les hypothèses du lemme 3.1.2 sont satisfaites, alors le système en boucle fermée résultant de l'application de la loi de commande (3.1.7) au système (1.4.1)-(1.4.2), a une solution bornée et converge exponentiellement vers 0, pour tout  $t \geq 0$ . De manière plus générale, la stabilité de l'état est déduite de celle de  $x(t + \delta(t))$  dès lors que les conditions de bornitude sur  $\delta(t)$  et sa dérivée sont vérifiées.*

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

*Démonstration.* Le système (1.4.1)-(1.4.2) est linéaire, et ses états ne peuvent diverger en temps fini. Donc pour toute valeur bornée de  $\delta_0$ , l'état  $x(\delta_0)$  à cet instant est borné. Le lemme précédent permet ensuite de conclure, si ses hypothèses sont vérifiées, que l'état converge exponentiellement vers zéro.  $\square$

Les conditions de stabilité précédentes concernant la nature de  $\delta(t)$  peuvent être exprimées en fonction de la nature du retard  $\tau(t)$  avec la proposition suivante.

**Proposition 3.1.4.** *Les conditions sur l'horizon de prédiction  $\delta(t)$*

- i)  $0 \leq \delta(t) \leq \delta_M < \infty$ ,*
- ii)  $-1 < \dot{\delta}(t) \leq \rho < \infty$ ,*

*sont toujours satisfaites pour les modèles de retard définis par (1.4.3)-(1.4.4) et ayant les propriétés*

- P1)  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max}$ ,*
- P2)  $\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) = \nu < 1$ .*

*Démonstration.* L'hypothèse (i) ( $\delta(t)$  borné) est clairement satisfaite par la définition de  $\delta(t)$  et par la condition sur le retard (P1). En utilisant la propriété  $\dot{\tau}(t) \neq 1$  pour tout  $t$ , nous pouvons dériver (3.1.6) par rapport au temps et réécrire l'hypothèse (ii) ainsi :

$$-1 < \frac{\tau'(\zeta)}{1 - \tau'(\zeta)} \leq \rho$$

avec  $\rho > 0$  fini. La partie gauche de cette inégalité est équivalente à  $-1 < 0$  et est donc toujours satisfaite ( $\dot{\tau}(t) \leq 1$ ). La partie droite de l'inégalité (dérivée de  $\delta(t)$  finie) est satisfaite par (P2). En effet, nous pouvons choisir  $\rho$  tel que

$$\rho = \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \frac{\dot{\tau}(t)}{1 - \dot{\tau}(t)}$$

$\square$

Les résultats de cette section sont maintenant résumés dans le théorème suivant.

**Théorème 3.1.5.** *Soit le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t))$$

*avec  $(A, B)$  une paire commandable. En supposant que la dynamique du retard (1.4.3)-(1.4.4) est telle que les conditions suivantes sur  $\tau(t)$  sont satisfaites pour tout  $t \geq 0$*

- A1)  $\tau_{max} \geq \tau(t) \geq 0$  pour une constante finie  $\tau_{max} \geq 0$ ,*
- A2)  $\dot{\tau}(t) < 1 \quad \forall t \geq t_0$*

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

alors la loi de commande

$$u(t) = -Ke^{A\delta(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \quad (3.1.12)$$

avec

$$\delta(t) = \tau(t + \delta(t))$$

assure que le système en boucle fermée est borné, et que son état converge exponentiellement vers zéro.

*Démonstration.* Ce théorème découle naturellement de l'approche constructive présentée dans la section précédente et des résultats obtenus dans cette section. Plus précisément, la causalité de la loi de commande est assurée par la définition de  $\delta$ . Puis la stabilité du système résultant est obtenue en appliquant successivement le lemme, le corollaire et la proposition présentés dans cette section.  $\square$

**Remarque.** L'originalité de ce résultat réside plus dans la manière dont il est obtenu que dans le résultat lui-même. En effet, nous avons vu dans le chapitre précédent l'effet stabilisant de la commande prédictive en raisonnant sur un système réduit (théorèmes 2.1.3 et 2.1.4), puis que cette propriété de stabilisation était due à la propriété de stabilité de l'état  $x(t + \delta(t))$  (lemme 2.1.5). La méthode d'analyse proposée ici est singulière dans le fait qu'elle soit élaborée directement à partir de l'état temps décalé, permettant une analyse de stabilité classique et faisant apparaître les conditions de causalité (propriétés du modèle de retard admissible) de façon explicite.  $\diamond$

### 3.2 Calcul de l'horizon de prédiction

Nous nous intéressons ici à la résolution de l'équation *implicite*

$$\delta(t) = \tau(t + \delta(t))$$

utilisée lors du calcul de la loi de commande. Cette équation implique l'évolution temporelle du retard  $\tau(t)$  et se trouve donc directement affectée par la dynamique de ce retard. Nous verrons tout d'abord quelles sont les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir une solution unique à ce problème. Des méthodes de résolution exacte seront ensuite présentées, permettant dans certains cas l'obtention d'une solution explicite. Enfin, nous proposerons une approche de calcul dynamique permettant l'utilisation *explicite* de la dynamique du retard, applicable à la classe de retards considérée.



### 3.2.1 Existence et unicité

Nous reconsidérons tout d'abord le problème d'existence d'une solution, abordé dans le cadre de la résolution du problème optimal (3.1.5) avec la proposition 3.1.1. Ceci nous permettra, dans un premier temps, d'établir le formalisme nécessaire à l'application du théorème du point fixe (existence d'une solution). La version de Brouwer de ce théorème sera ensuite utilisée pour déterminer les conditions d'unicité de la solution.

Ce problème est de type

$$\delta = g(\delta, t)$$

où  $g(\delta, t) = \tau(t + \delta)$ . L'existence d'une solution à ce problème est établie en considérant le cas spécifique où le temps est fixé (i.e.  $g(\delta, t) = g(\delta)$ ). Le résultat obtenu est ensuite étendu au cas général en remarquant qu'il reste vrai pour tout temps  $t \in \mathbb{R}^+$ .

Soit  $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{n+}, [a, b])$  la classe des applications continues de  $\mathbb{R}^{n+}$  dans  $[a, b]$ . De par la définition des retards admissibles  $\tau(\cdot)$ , continus et bornés, considérés dans le système (3.0.2)-(3.0.3), et le fait que  $t \in \mathbb{R}^+$ , nous avons  $\tau(t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, [0, \tau_{max}])$ .

Ensuite, en considérant aussi le fait que  $g(\delta, t)$  est une projection de  $\mathbb{R}^{2+}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , la propriété suivante est établie

$$g(\delta, t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^{2+}, [0, \tau_{max}]) \quad (3.2.1)$$

Finalement, le fait que  $\delta = g(\delta, t)$  permet de conclure que, si  $\delta$  existe,

$$\delta \in [0, \tau_{max}] \quad (3.2.2)$$

L'existence d'une solution peut maintenant être établie à l'aide du théorème du point fixe avec la proposition suivante.

**Proposition 3.2.1.** *Si le retard  $\tau(t)$  est continu et borné, alors il existe toujours une solution  $\delta(t)$  telle que l'équation implicite (3.1.6) soit vérifiée.*

*Démonstration.* Le théorème du point fixe [Wells, 1991] établit que si  $g$  est une fonction continue  $g(\theta) \in [a, b]$  pour tout  $\theta \in [a, b]$ , alors  $g$  a un point fixe dans  $[a, b]$ .

Ce théorème est appliqué au problème d'existence de  $\delta$  en considérant tout d'abord  $g(\delta, t_1)$ , où  $t_1 > 0$  est un instant donné. Dans ce cas le théorème du point fixe, avec les propriétés de  $g$  et  $\delta$  établies par (3.2.1)-(3.2.2), assure directement qu'il existe un point fixe  $\delta \in [0, \tau_{max}]$ . En effet, le fait que  $g(\theta) \in [0, \tau_{max}]$  pour tout  $\theta \in [0, \tau_{max}]$  implique l'intersection de  $g(\theta)$  avec la droite  $g(\theta) = \theta$ , comme illustré dans la figure 3.1. Le point fixe  $g(\delta, t_1) = \delta(t_1)$  est donc défini par cette intersection. Ceci est ensuite étendu au cas général en remarquant que cette propriété reste vraie pour tout  $t_1 \in \mathbb{R}^+$ . Donc nous pouvons garantir qu'il existe un  $\delta(t) \in [0, \tau_{max}]$  tel que la relation (3.1.6) est satisfaite.  $\square$

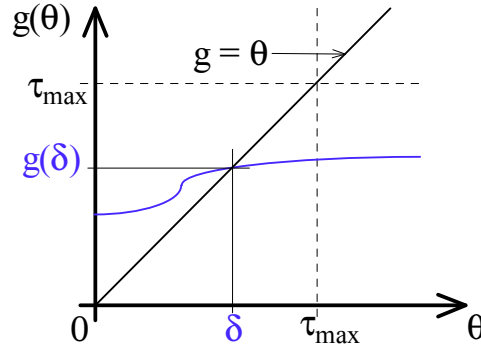


FIG. 3.1 – Illustration du théorème du point fixe.

L'unicité de la solution est obtenue par application du théorème du point fixe de Brouwer [Milnor, 1965] et présentée dans la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *Si le retard  $\tau(t)$  est continu et borné, et si sa dérivée vérifie*

$$\sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) < 1$$

*alors la solution  $\delta(t)$  de l'équation implicite (3.1.6) existe et est unique, pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .*

*Démonstration.* La propriété d'unicité découle naturellement du fait que la condition imposée sur  $\dot{\tau}$  nécessite que la fonction  $\tau(t)$  ait une dérivée inférieure à un. Plus précisément, supposons qu'il existe deux points fixes  $\delta_1$  et  $\delta_2$ . Alors

$$d(\delta_1, \delta_2) = d(g(\delta_1), g(\delta_2)) \leq Lip(g).d(\delta_1, \delta_2)$$

où  $d(\cdot, \cdot)$  est la distance entre deux points,  $g(\delta)$  est telle que définie précédemment et  $Lip(g)$  est la constante de Lipschitz de  $g$ . Le fait que  $\dot{\tau}(t) < 1$  implique que  $Lip(g) < 1$ , donc que  $\delta_1 = \delta_2$ .  $\square$

**Remarque.** L'inégalité stricte sur la borne supérieure de la dérivée du retard est nécessaire à l'unicité de l'horizon de prédiction  $\delta(t)$ .  $\diamond$

### 3.2.2 Méthodes de calcul analytiques et numériques

Il apparaît clairement qu'un modèle complet du retard est nécessaire pour calculer  $\delta(t)$ , tout du moins sur l'intervalle temporel  $[0, t + \delta(t)]$ . La solution de l'équation implicite définissant  $\delta(t)$  peut être obtenue par différentes méthodes, selon la structure du modèle du retard et l'information disponible. Nous considérerons ici deux méthodes analytiques et deux numériques.

### Utilisation de la fonction de Lambert

Un cas particulier où une solution *explicite* pour  $\delta$  existe est donnée dans l'exemple suivant. Supposons que le retard soit représenté par un équation différentielle scalaire et linéaire du type

$$\begin{aligned}\dot{z}(t) &= az(t) + b, \quad \text{avec } z(0) = z_0 \\ \tau(t) &= cz(t)\end{aligned}$$

où  $a, b, c$  et  $z_0$  sont des constantes scalaires connues. L'évolution temporelle du retard est déterminée par l'intégration du système précédent et s'écrit

$$\tau(t) = c \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} - \frac{bc}{a}$$

L'horizon de prédiction  $\delta$  est donc solution de l'équation

$$\delta(t) = c \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at} e^{a\delta(t)} - \frac{bc}{a}$$

cette équation devant être résolue à tout temps  $t$ .

Dans ce cas, la solution explicite de (3.1.6) peut être établie et résolue analytiquement en utilisant la *fonction de Lambert* [Corless et al., 1993]<sup>1</sup>, notée  $W$ . Cette fonction est telle que  $W : xe^x \mapsto x$  et peut être calculée par un développement en série. Son utilisation est illustrée par l'exemple suivant.

#### Exemple 3.2.1

Soit une variable  $x$  définie par l'équation transcendantale

$$x = \alpha e^{\beta x} - \gamma$$

Afin de pouvoir utiliser la fonction de Lambert, cette égalité est reformulée comme suit

$$\begin{aligned}xe^{-\beta x} &= \alpha - \gamma e^{-\beta x} \\ \Leftrightarrow -\beta x e^{-\beta x} &= -\alpha\beta + \beta\gamma e^{-\beta x} \\ \Leftrightarrow (-\beta\gamma - \beta x)e^{-\beta x} &= -\alpha\beta \\ \Leftrightarrow (-\beta\gamma - \beta x)e^{-\beta\gamma - \beta x} &= -\alpha\beta e^{-\beta\gamma}\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant utiliser la transformation  $W : xe^x \mapsto x$ , ce qui donne

$$-\beta\gamma - \beta x = W(-\alpha\beta e^{-\beta\gamma})$$

ou, de manière équivalente,

$$x = -\frac{1}{\beta} [W(-\alpha\beta e^{-\beta\gamma}) + \beta\gamma]$$

---

<sup>1</sup>Cette fonction fût introduite par Euler dans [Euler, 1779] lors de son étude de l'équation transcendantale de Lambert [Lambert, 1758] :  $x^\alpha - x^\beta = (\alpha - \beta)vx^{\alpha+\beta}$ . Euler définit alors une fonction de  $x$  satisfaisant  $we^{-w} = x$ .

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

Le résultat de l'exemple précédent peut être utilisé pour le calcul de  $\delta(t)$  en remplaçant  $\alpha$  par  $c \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at}$ ,  $\beta$  par  $a$  et  $\gamma$  par  $\frac{bc}{a}$ . La solution finale est donc

$$\delta(t) = -\frac{1}{a} \left[ W \left( -ac \left( z_0 + \frac{b}{a} \right) e^{at-bc} \right) + bc \right]$$

#### Remarques:

- Cette méthode peut aussi être appliquée au cas multivariable ainsi que pour les modèles dynamiques linéaires avec une entrée dépendante du temps. Son principal défaut est la complexité introduite par le calcul de la série associée à  $W$ , qui peut induire de longs temps de calcul et la rendre inapplicable pour les lois de commande synthétisées en temps réel.
- Si l'argument  $x$  de la fonction de Lambert est réel, alors pour  $-1/e \leq x < 0$  il y a deux valeurs réelles possibles de  $W(x)$ . La première branche satisfait l'inégalité  $W(x) \leq -1$  alors que la seconde, dite *branche principale*, est caractérisée par  $W(x) \geq -1$ . Notons que dans le cas étudié ici, ce problème n'apparaît que si  $a > -\frac{b}{cz_0}$  et ne sera pas étudié plus en détails.  $\diamond$

#### Résolution implicite analytique

Pour le cas multi-variable avec entrée temps variante, une expression analytique impliquant  $\delta(t)$  peut être obtenue en utilisant la prédiction du retard. Par exemple, dans le cas simplifié où  $\tau(t) = z(t)$ , l'horizon de prédiction est obtenu par

$$\delta(t) = \tau(t + \delta(t)) = \tau(t) + \int_t^{t+\delta} f(\tau(\theta), u_d(\theta)) d\theta$$

La résolution de cette égalité peut être effectuée de manière numérique en effectuant une approximation discrète du terme intégral. Cette méthode peut s'avérer efficace, en temps de calcul, pour des retards à faible variation (moins de pas d'intégration à calculer).

#### Calcul par dichotomie

La méthode de dichotomie peut être appliquée à la résolution de (3.1.6) en utilisant les valeurs numériques du retard. La dynamique du retard n'intervient pas directement dans le calcul de l'horizon de prédiction lorsque cette approche est utilisée. La validité de cette méthode est une conséquence directe du théorème du point fixe. Le temps de calcul induit peut aussi être relativement long, du fait que la dichotomie doit être appliquée à chaque période d'échantillonnage.

#### Méthode de la suite contractante

Nous pouvons aussi utiliser directement le fait que la fonction étudiée est positive et

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

de dérivée inférieure à un pour résoudre  $\delta = g(\delta)$ . En effet, le calcul de la suite

$$\delta_{n+1} = g(\delta_n)$$

pour un  $\delta_0$  au voisinage du point fixe nous permet de trouver ce dernier. Cet algorithme est dit *méthode des approximations successives* et l'existence et l'unicité d'une solution est une conséquence directe des propriétés de contraction.

### 3.2.3 Solution dynamique

La fonction  $\delta(t)$  peut aussi être calculée de manière dynamique, en utilisant directement le modèle du retard. Nous exploitons ici le fait que l'équation différentielle scalaire  $\dot{\delta}(t) = -\delta + g(\delta)$  possède un seul point fixe globalement attractif si l'application  $g$  n'a qu'un point fixe. Il s'agit d'une version continue de l'itération discrète  $\delta_{n+1} = g(\delta_n)$ . Cette approche a l'avantage de proposer une solution explicite, où le retard apparaît dans l'état du contrôleur, et d'être plus performante au niveau du temps de calcul nécessaire à la résolution de l'équation implicite (3.1.6). Nous décrirons comment la dynamique de  $\delta(t)$ , exprimée de manière continue pour plus de simplicité d'analyse du fait du choix d'une dynamique du retard décrite par une équation différentielle ordinaire, est définie afin de garantir une convergence asymptotique vers la valeur nominale. Notons qu'un modèle interne du retard est nécessaire pour la mise en œuvre de cette approche.

Définissons tout d'abord la fonction d'erreur induite par l'estimation de  $\delta(t)$  par la relation

$$\hat{s}(t) \doteq \hat{\delta}(t) - \tau(t + \hat{\delta}(t)) \quad (3.2.3)$$

où  $\hat{\delta}(t)$  est la valeur estimée de  $\delta(t)$ . L'idée directrice de l'approche proposée est de trouver une loi de variation pour  $\hat{\delta}(t)$  telle que la surface  $s(t) = 0$ , où  $s(t)$  correspond à la valeur recherchée de  $\hat{s}(t)$  (car correspondant à une solution exacte de l'équation implicite), soit rendue attractive et invariante. Le résultat d'une telle dynamique garantit la convergence exponentielle de  $\hat{\delta}(t)$  vers  $\delta(t)$ . Nous construisons en fait un estimateur de  $\delta(t)$  en boucle ouverte, solution du système de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = 0 \\ s(t = 0) = 0 \end{cases}$$

Pour prévenir des instabilités numériques induites par cette approche, la dynamique de  $\hat{s}(t)$  est définie par

$$\dot{\hat{s}}(t) + \sigma \hat{s}(t) = 0 \quad (3.2.4)$$

où  $\sigma$  est une constante positive pouvant être choisie arbitrairement. En dérivant (3.2.3) par rapport au temps et en substituant  $\hat{s}$  dans (3.2.4), nous obtenons

$$\dot{\hat{\delta}}(t) - \tau'(\hat{\zeta})(1 + \dot{\hat{\delta}}(t)) + \sigma(\hat{\delta}(t) - \tau(\hat{\zeta})) = 0$$

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

où  $\hat{\zeta}(t) \doteq t + \hat{\delta}(t)$  et  $\tau'(\cdot)$  est la dérivée de  $\tau(\cdot)$  par rapport à son argument. L'équation précédente implique que (3.2.4) soit satisfaite si  $\tau'(\cdot) \neq 1$  et si la loi de variation  $\dot{\hat{\delta}}(t)$  est établie avec

$$\dot{\hat{\delta}}(t) = -\frac{\sigma \hat{\delta}}{1 - \tau'(\hat{\zeta})} + \frac{\tau'(\hat{\zeta}) + \sigma \tau(\hat{\zeta})}{1 - \tau'(\hat{\zeta})} \quad (3.2.5)$$

Cette expression *explicite* de la dynamique de  $\hat{\delta}(t)$  garantit donc que l'estimation  $\hat{\delta}(t)$  converge vers la valeur désirée  $\delta(t)$ , et que la fonction  $\hat{s}(t)$  converge exponentiellement vers zéro. La vitesse de convergence peut être établie comme arbitrairement rapide par le choix d'un  $\sigma$  suffisamment grand, mais nous verrons par la suite que ce paramètre doit être borné supérieurement afin de garantir la stabilité du système en boucle fermée. Nous utilisons ainsi directement les dynamiques de  $\tau(\hat{\zeta})$  et de  $\tau'(\hat{\zeta})$  données par (1.4.3)-(1.4.4). Il reste à démontrer que l'erreur d'estimation sur  $\delta(t)$  induite par la méthode proposée a les mêmes propriétés de convergence que  $\hat{s}(t)$ , pour le type de fonctions considéré. Ceci est établi avec le lemme suivant.

**Lemme 3.2.3.** *Soit  $x(t) \in \mathcal{X} \subset \mathbb{R}$  la solution de l'équation implicite  $x(t) = f(x(t))$  avec  $f(x(t))$  une fonction continue et dérivable sur  $\mathcal{X}$  de coefficient de Lipschitz  $M < 1$ . Soit  $\hat{x}(t)$  l'estimée de cette solution, calculée par résolution dynamique avec la relation*

$$\begin{cases} \dot{\hat{s}}(t) &= -\sigma \hat{s}(t) \\ \hat{s}(t) &= \hat{x}(t) - f(\hat{x}(t)) \end{cases}$$

où  $\sigma$  est une constante positive. Alors l'erreur d'estimation  $\epsilon(t)$  définie par

$$\epsilon(t) \doteq x(t) - \hat{x}(t)$$

satisfait l'inégalité

$$|\epsilon(t)| \leq \frac{|\hat{s}(t)|}{1 - M}$$

et converge exponentiellement vers zéro.

*Démonstration.* L'erreur d'estimation<sup>2</sup>  $\epsilon$  est tout d'abord exprimée en fonction de  $f$  et de  $\hat{s}$  avec

$$\epsilon = f(x) - \hat{s} - f(\hat{x}) = -\hat{s} + f(x) - f(x - \epsilon)$$

Les propriétés de continuité et de dérivabilité sur  $\mathcal{X}$  de  $f$ , ainsi que le théorème des accroissements finis permettent ensuite d'établir qu'il existe un  $c$  compris dans l'intervalle  $[x - \epsilon, x]$  tel que

$$f(x) - f(x - \epsilon) = f'(c)\epsilon$$

d'où la relation

$$\epsilon(1 - f'(c)) = -\hat{s}$$

---

<sup>2</sup>les indices temporels sont omis pour plus de clarté dans la démonstration, le développement proposé restant vrai pour tout  $t$ .

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

ce qui implique

$$\epsilon = -\frac{\hat{s}}{1 - f'(c)}$$

L'hypothèse sur le coefficient de Lipschitz  $f$  permet finalement d'établir que

$$\sup_{x \in \mathbb{R}} f'(x) = M < 1 \Rightarrow f'(c) < 1$$

justifiant ainsi l'inégalité proposée dans le lemme. La convergence exponentielle de  $\epsilon(t)$  est directement obtenue de l'équation dynamique définissant  $s(t)$ , qui a pour solution  $\hat{s}(t) = \hat{s}(0)e^{-\sigma t}$ .  $\square$

#### Remarques:

- Le résultat précédent montre de manière équivalente que l'erreur de poursuite

$$e(t) = s(t) - \hat{s}(t)$$

obéit à la loi de décroissance exponentielle  $e(t) = e(0)e^{-\sigma t}$ . Ceci découle directement du fait que la fonction  $s(t)$  soit décrite par le système de Cauchy présenté plus haut.

- Une autre approche, basée sur une méthode similaire à la commande par modes glissants, peut aussi être utilisée pour résoudre ce type de problème. Nous obtiendrions ainsi une convergence de la fonction  $\hat{s}(t)$  vers zéro en temps finis mais devrions inclure une partie non linéaire liée à la fonction  $\text{sign}(\cdot)$  dans l'analyse.  $\diamond$

Le lemme précédent peut maintenant être appliqué au problème considéré dans cette section avec le théorème suivant.

**Théorème 3.2.4.** *La solution  $\delta(t)$  de l'équation implicite (3.1.6) peut être estimée par la variable  $\hat{\delta}(t)$  solution de l'équation dynamique (3.2.5) avec  $\hat{\delta}(0) = \hat{\delta}_0 \in [0, \tau_{max}]$  et  $\tau(t)$  satisfaisant les conditions*

$$P1) \quad 0 \leq \tau(t) \leq \tau_{max},$$

$$P2) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) = \nu < 1.$$

*L'erreur induite par cette approximation converge exponentiellement vers zéro et est bornée de la manière suivante :*

$$|\epsilon(t)| = |\delta(t) - \hat{\delta}(t)| \leq \frac{|\hat{\delta}_0 - \tau(\hat{\delta}_0)|e^{-\sigma t}}{1 - \nu} \quad (3.2.6)$$

*où  $\sigma$  est une constante positive.*

*Démonstration.* Cette proposition découle naturellement du développement proposé dans cette section et des propriétés du retard considéré, qui permettent d'appliquer le lemme 3.2.3. En effet, le domaine d'étude considéré se situe sur  $\mathbb{R}^+$ , de par la définition de  $\delta$  (3.1.6) et la condition de bornitude sur  $\tau(t)$  (P1). La condition sur la dérivée du retard (P2) remplit la condition sur le coefficient de Lipschitz du lemme 3.2.3. Enfin, les variables  $\epsilon(t)$  et  $s(t)$  sont substituées par leur expression en fonction de  $\delta(\cdot)$ ,  $\hat{\delta}(\cdot)$  et  $\tau(\cdot)$ .  $\square$

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

**Remarque.** Dans le cadre considéré ici, la valeur de la constante  $\sigma$  doit être choisie en accord avec la sensibilité aux bruits de mesure sur le retard et aux erreurs numériques générées par l'algorithme utilisé. Cette notion sera revue par la suite dans le cadre du choix du gain de l'observateur avec la remarque 5.1.1. Nous verrons apparaître dans la section suivante une contrainte plus forte, liée à la stabilité du système en boucle fermée.  $\diamond$

Pour illustrer le calcul de  $\dot{\delta}$ , considérons tout d'abord l'exemple présenté dans la section précédente, où  $\tau(t) = z(t)$ . Dans ce cas, la dynamique (3.2.5) est évaluée avec

$$\begin{aligned}\tau(\hat{\zeta}) &= z(\hat{\zeta}) \\ \tau'(\hat{\zeta}) &= z'(\hat{\zeta}) = f(z(\hat{\zeta}), u_d(\hat{\zeta}))\end{aligned}$$

Nous retrouvons ici la nécessité de prédire l'évolution temporelle du retard sur l'horizon  $[t, t + \tau_{max}]$  et donc de connaître l'entrée perturbatrice  $u_d(\theta)$  sur cet horizon. Un second exemple, illustrant l'application de la méthode proposée à un réseau TCP, est présenté ci-dessous.

### Exemple 3.2.2

Nous considérons ici le modèle TCP présenté dans l'exemple 1.4.1, dans le cas spécifique où la capacité du routeur est constante. La définition de  $R_i(t)$  permet d'établir que

$$\tau(\hat{\zeta}) = \frac{1}{2} \left[ \frac{q(\hat{\zeta})}{C_r} + T_{pcs} \right] \quad (3.2.7)$$

En dérivant l'équation précédente et en substituant la dynamique de la file d'attente  $\dot{q}(t)$  présentée dans le modèle, nous obtenons

$$\frac{d\tau}{d\hat{\zeta}}(\hat{\zeta}) = \frac{1}{2C_r} \left[ \sum_{i=1}^{N(\hat{\zeta})} \frac{W_i(\hat{\zeta})}{R_i(\hat{\zeta})} - C_r \right] \quad (3.2.8)$$

où  $R_i(\hat{\zeta})$  est obtenu avec le calcul de  $q(\hat{\zeta})$ .  $N(\hat{\zeta})$  est supposé connu sur l'horizon  $[t, t + \tau_{max}]$ , permettant ainsi la prédiction du modèle du retard. L'évolution temporelle des variables  $W_i(\hat{\zeta})$  et  $q(\hat{\zeta})$  est obtenue à partir de la dynamique du modèle, en évaluant de manière continue ses solutions jusqu'à l'instant  $(t + \tau_{max})$ . Les équations (3.2.7)-(3.2.8) peuvent maintenant être substituées dans (3.2.5) afin d'évaluer  $\dot{\delta}(t)$ .

Un dernier exemple est introduit ici afin de présenter une application numérique permettant de comparer la solution exacte de  $\delta(t)$ , calculée par dichotomie, avec son estimation obtenue par résolution dynamique.

### Exemple 3.2.3

Nous considérons ici le modèle de réseau TCP présenté dans l'exemple 1.4.2.



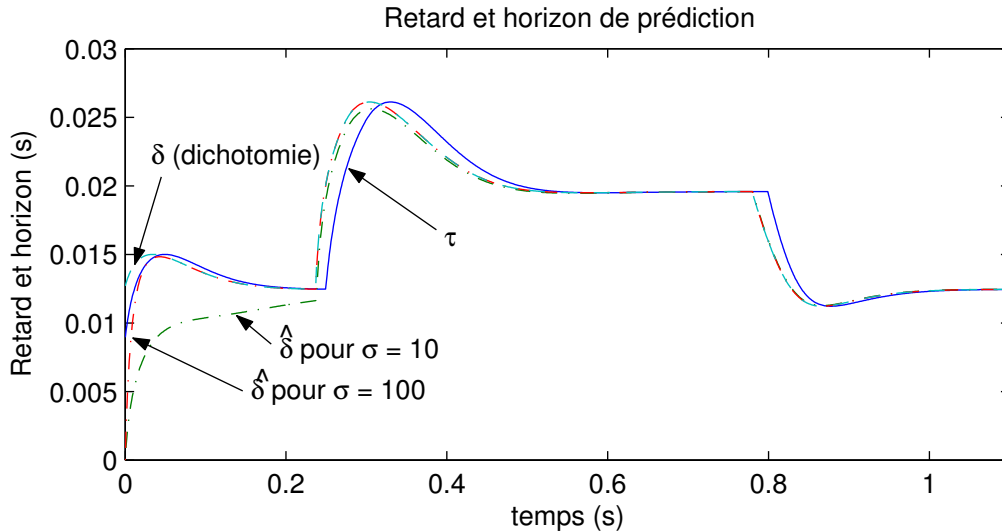


FIG. 3.2 – État du réseau et calcul de  $\delta(t)$ .

Le calcul de l'estimation de l'horizon de prédiction  $\hat{\delta}(t)$  s'effectue à partir des équations (3.2.7)-(3.2.8) avec  $\hat{\delta}(0) = 0$ , ce qui correspond au pire cas possible. Nous pourrions en effet éliminer l'effet des transitoires en calculant la condition initiale avec une méthode numérique, mais le but ici est d'illustrer la qualité de la méthode dynamique ainsi que sa simplicité d'utilisation. La figure 3.2 permet une comparaison entre les horizons de prédiction obtenus avec la méthode par dichotomie (solution exacte), et ceux fournis par l'approche dynamique, pour  $\sigma = 10$  et  $\sigma = 100$ . Nous pouvons apprécier grâce à la figure 3.3 l'efficacité de la méthode dynamique, qui converge rapidement vers la solution exacte pour un  $\sigma$  suffisamment grand. Notons que le pic est dû à la perturbation intervenant sur le réseau, induisant une discontinuité dans la dérivée de  $\tau(t)$ .

### 3.3 Prédicteur à horizon estimé

Cette section est dédiée à la synthèse d'une loi de commande à horizon estimé pour la stabilisation du système commandé par réseau. Nous verrons en premier lieu la formalisation de l'influence de l'estimation de l'horizon de prédiction sur le système en boucle fermée. Puis nous validerons la méthode de calcul dynamique de l'horizon proposée dans la section précédente, en garantissant la stabilité exponentielle du système bouclé. Enfin, une loi de commande utilisant explicitement la dynamique du réseau décrite par (3.0.2)-(3.0.3) sera proposée.

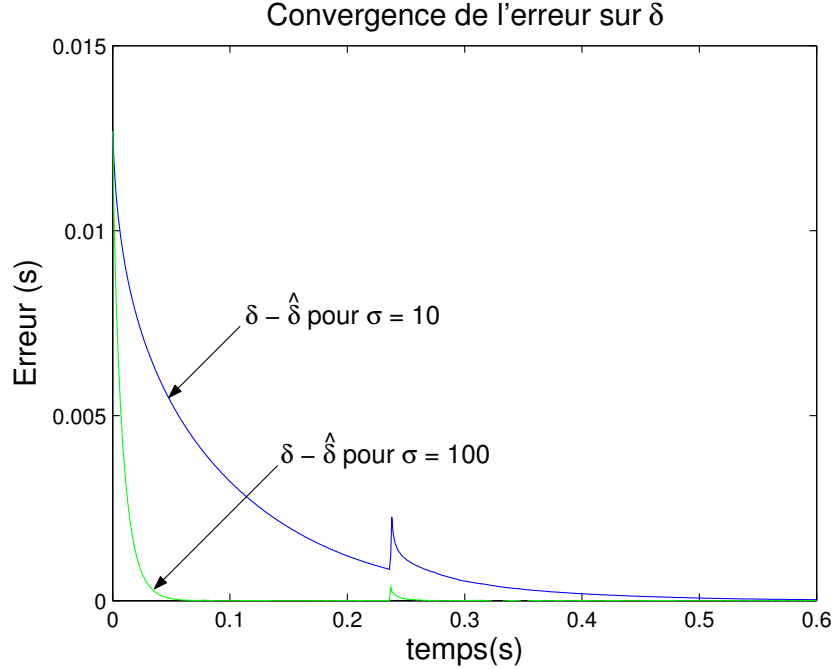


FIG. 3.3 – Erreur induite par la méthode dynamique sur  $\delta(t)$ .

### 3.3.1 Influence de l'estimation

L'estimation de l'horizon de prédiction  $\hat{\delta}(t)$  induit une nouvelle dynamique qui influence le système en boucle fermée. En effet, la commande basée sur le prédicteur d'état est maintenant évaluée à partir de l'estimation de  $\delta(t)$ , comme présenté dans la figure 3.4, et s'écrit

$$u(t) = -Ke^{A\hat{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\hat{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \quad (3.3.1)$$

ou, de manière équivalente,

$$u(t) = -Kx(t + \hat{\delta}(t))$$

avec  $\hat{\delta}(t)$  définie par sa dynamique (3.2.5). En utilisant la même transformation sur l'espace temporel d'évolution de l'état que celle décrite en début de chapitre, l'équation dynamique considérée est<sup>3</sup>

$$\begin{aligned} x'(t + \delta) &= Ax(t + \delta) + Bu(t) \\ &= Ax(t + \delta) - BKx(t + \hat{\delta}) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Après addition et soustraction du terme  $BKx(t + \delta)$  à droite de l'égalité précédente, puis changement de variable, nous obtenons le système

$$\Sigma_o : x'(\zeta) = (A - BK)x(\zeta) + BK(x(\zeta) - x(\zeta - \epsilon))$$

<sup>3</sup>la dépendance temporelle de  $\delta(t)$  et de  $\hat{\delta}(t)$  est omise ici pour plus de clarté.

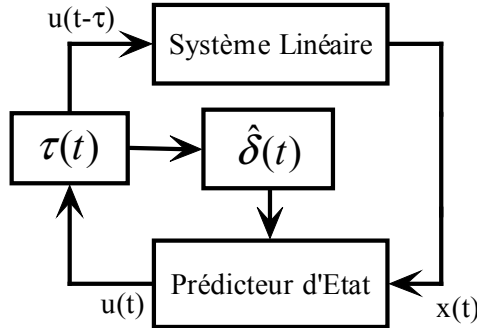


FIG. 3.4 – Commande à partir de l'estimation de  $\delta(t)$ .

où  $\epsilon(t) = \delta(t) - \hat{\delta}(t)$  a les propriétés décrites par le théorème 3.2.4 et  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ . Le système précédent peut se réécrire, par équivalence arithmétique en utilisant la formule de Leibniz-Newton,

$$x'(\zeta) = (A - BK)x(\zeta) + BK \int_{-\epsilon}^0 x'(\zeta + \theta)d\theta$$

L'expression (3.3.2) est ensuite substituée dans l'intégrale pour obtenir le système transformé

$$\Sigma_t : x'(\zeta) = (A - BK)x(\zeta) + BKA \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)d\theta - (BK)^2 \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta)d\theta$$

Notons que la stabilité de  $\Sigma_t$  implique celle de  $\Sigma_o$  mais que l'inverse n'est pas vrai (principe de comparaison), du fait de la prolongation des conditions initiales sur l'espace temporel  $[\delta(0) - 2\epsilon, \delta(0) - \epsilon]$ . La stabilité du système transformé est garantie par le lemme suivant, qui est une application des résultats de [Niculescu, de Souza, Dugard & Dion, 1998] au problème considéré.

**Lemme 3.3.1.** *Soit le système décrit par l'évolution dynamique*

$$x'(\zeta) = A_{cl}x(\zeta) + BKA \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)d\theta - (BK)^2 \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta)d\theta$$

$$x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [t_0 - 2 \sup_t \epsilon(t), t_0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, -2 \sup_t \epsilon(t)}^\nu$$

avec  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ . Si les conditions suivantes sont vérifiées

- i)  $A_{cl}$  est une matrice de Hurwitz,
- ii)  $\epsilon(t)$  satisfait (3.2.6) avec

$$0 < \dot{\epsilon}_M \doteq \sup_t \dot{\epsilon}(t) < \frac{1}{2}$$

alors la trajectoire  $x(\zeta(t))$  est asymptotiquement stable.

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

*Démonstration.* Soit la fonction de Lyapunov-Krasovskii établie pour  $\Sigma_t$

$$\begin{aligned}
 V(x(\zeta)) &= \underbrace{x(\zeta)^T P x(\zeta)}_{V_1(x(\zeta))} + \frac{1}{1 - \dot{\epsilon}_M} \underbrace{\int_{-\epsilon}^0 \left[ \int_{\zeta+\theta}^{\zeta} x(\mu)^T S x(\mu) d\mu \right] d\theta}_{V_2(x(\zeta))} \\
 &\quad + \frac{\alpha}{1 - 2\dot{\epsilon}_M} \underbrace{\int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} \left[ \int_{\zeta+\theta}^{\zeta} x(\mu)^T S x(\mu) d\mu \right] d\theta}_{V_3(x(\zeta))}
 \end{aligned}$$

avec  $P$  et  $S$  des matrices symétriques définies positives, et

$$0 < \alpha < \frac{1 - 2\dot{\epsilon}_M}{\dot{\epsilon}_M} \quad (3.3.3)$$

La dérivée de  $V$  le long des solutions de  $\Sigma_t$  est obtenue par sommation pondérée des éléments

$$\begin{aligned}
 \frac{dV_1(x(\zeta))}{d\zeta} &= x(\zeta)^T [P A_{cl} + A_{cl}^T P] x(\zeta) + 2x(\zeta)^T P B K A \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta) d\theta \\
 &\quad - 2x(\zeta)^T P (B K)^2 \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta) d\theta \\
 \frac{dV_2(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq \epsilon x(\theta)^T S_1 x(\theta) - (1 - \dot{\epsilon}_M) \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) d\theta \\
 \frac{dV_3(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq \epsilon x(\theta)^T S x(\theta) - (1 - 2\dot{\epsilon}_M) \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) d\theta \\
 &\quad + \dot{\epsilon}_M \int_{-\epsilon}^0 x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) d\theta
 \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation

$$\frac{d}{dt} \left[ \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t+\theta}^t f(\mu) d\mu d\theta \right] = (b - a) f(t) - (1 + \dot{b}) \int_a^b f(t + \theta) d\theta + (\dot{b} - \dot{a}) \int_a^0 f(t + \theta) d\theta$$

Après réorganisation des termes semblables, la dérivée de  $V(\cdot)$  s'écrit

$$\begin{aligned}
 \frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} &= x(\zeta)^T \left[ P A_{cl} + A_{cl}^T P + \left( \frac{1}{1 - \dot{\epsilon}_M} + \frac{\alpha}{1 - 2\dot{\epsilon}_M} \right) \epsilon S \right] x(\zeta) \\
 &\quad + \int_{-\epsilon}^0 \left[ 2x(\zeta)^T P B K A x(\zeta + \theta) - x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\alpha \dot{\epsilon}_M}{1 - 2\dot{\epsilon}_M} x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) \right] d\theta \\
 &\quad + \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} \left[ -2x(\zeta)^T P (B K)^2 x(\zeta + \theta) - \alpha x(\zeta + \theta)^T S x(\zeta + \theta) \right] d\theta
 \end{aligned}$$

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

Cette fonction peut être bornée en utilisant la relation du complément des carrés de type

$$2u^T v \leq u^T S_i^{-1} u + v^T S_i v$$

pour  $i = 1, 2$ . Nous obtenons ainsi l'inégalité

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq x(\zeta)^T [PA_{cl} + A_{cl}^T P + \epsilon a_1 S] x(\zeta) \\ &\quad + \int_{-\epsilon}^0 a_2 x(\zeta)^T PBKAS^{-1}(PBKA)^T x(\zeta) d\theta \\ &\quad + \int_{-2\epsilon}^{-\epsilon} \frac{1}{\alpha} x(\zeta)^T P(BK)^2 S^{-1}(P(BK)^2)^T x(\zeta) d\theta \\ &\leq x(\zeta)^T \left[ PA_{cl} + A_{cl}^T P + \epsilon a_1 S \right. \\ &\quad \left. + \epsilon a_2 PBKAS^{-1}(PBKA)^T + \epsilon \frac{1}{\alpha} P(BK)^2 S^{-1}(P(BK)^2)^T \right] \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

avec

$$a_1 \doteq \frac{1 + \alpha(1 - \dot{\epsilon}_M)}{(1 - \dot{\epsilon}_M)(1 - 2\dot{\epsilon}_M)}, \quad a_2 \doteq \frac{1 - 2\dot{\epsilon}_M}{1 - (2 + \alpha)\dot{\epsilon}_M} \quad (3.3.5)$$

des constantes positives. En introduisant les matrices

$$\begin{aligned} R &\doteq a_1 S + a_2 PBKAS^{-1}(PBKA)^T + \frac{1}{\alpha} P(BK)^2 S^{-1}(P(BK)^2)^T \\ Q &\doteq -(PA_{cl} + A_{cl}^T P) \end{aligned}$$

qui sont définies positives par construction et par l'hypothèse  $i$ ), respectivement, l'inégalité précédente s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} &\leq -x(\zeta)^T Q x(\zeta) + \epsilon x(\zeta)^T R x(\zeta) \\ &\leq (-\lambda_m(Q) + |\epsilon| \lambda_M(R)) \|x(\zeta)\|^2 \end{aligned}$$

La convergence de la fonction  $\epsilon(t)$  nous assure qu'il existe un temps  $t_c$  tel que

$$|\epsilon(t)| < \frac{\lambda_m(Q)}{\lambda_M(R)}$$

pout tout  $t > t_c$ , et donc que la fonction de Lyapunov-Krasovskii converge pour tout  $x(\zeta) \in \{x(\zeta(t)) : t > t_c\}$ . Ceci permet de conclure que  $\Sigma_t$  est asymptotiquement stable (voir [Khalil, 1996] pour plus de précision concernant la stabilité).  $\square$

**Remarque.** Bien que la méthode utilisée pour établir le lemme précédent puisse sembler conservative, notamment au niveau des bornes imposées sur la variation de l'erreur, elle reste appropriée pour soutenir le propos de cette section. En effet, ces bornes sont déterminées par un choix approprié de la constante  $\sigma$ , qui doit être choisie telle que

$$\sigma < \frac{1 - \nu}{2|\hat{\delta}_0 - \tau(\hat{\delta}_0)|}$$

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

Des approches moins conservatives seront proposées dans le chapitre suivant, où des résultats plus précis sont recherchés.  $\diamond$

L'influence de l'estimation dynamique de l'horizon de prédiction peut être étudiée de manière plus précise en déterminant à quel instant  $t$  l'erreur d'estimation  $\epsilon(t)$  est suffisamment petite pour que les trajectoires du système suivent une décroissance exponentielle. Ceci est réalisé dans le corollaire suivant, qui spécifie cette erreur maximale et dont le résultat pourra être utilisé pour déterminer le temps associé.

**Corollaire 3.3.2.** *Si les conditions du lemme 3.3.1 sont satisfaites, si l'horizon de prédiction vérifie les propriétés*

- i)  $0 \leq \delta(t) \leq \delta_M < \infty$ ,*
- ii)  $-1 < \dot{\delta}(t) < \infty$ ,*

*et si  $\epsilon(t)$  est tel que*

- il existe des matrices  $P$  et  $S$  définies positives,*
- la LMI suivante est vérifiée :*

$$\begin{bmatrix} PA_{cd} + A_{cd}^T P + \epsilon a_1 S & \epsilon PBKA & \epsilon P(BK)^2 \\ (*) & -\epsilon \frac{1}{a_2} S & 0 \\ (*) & (*) & -\epsilon \alpha S \end{bmatrix} < 0 \quad (3.3.6)$$

où  $(*)$  représente le bloc obtenu par symétrie et  $a_1, a_2, \alpha$  sont définis par (3.3.3), (3.3.5),

alors les trajectoires du système en boucle fermée (3.0.1)-(3.3.1), avec l'horizon de prédiction estimé par (3.2.5), convergent exponentiellement vers zéro pour tout  $\zeta(t) \geq \zeta(0)$ .

*Démonstration.* L'application du complément de Schur sur l'inégalité (3.3.4) permet d'établir que la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovshii est négative si  $\epsilon$  est tel que la LMI (3.3.6) soit vérifiée.

Ceci reste vrai pour l'évolution temporelle l'état  $x(\zeta(t))$  (en fonction de  $t$ ), sous les hypothèses *i*) et *ii*), en notant que

$$\dot{V}(t) = (1 + \dot{\delta}(t))V'(\zeta)$$

et en utilisant des arguments similaires à ceux présentés dans la démonstration du lemme 3.1.2 et le corollaire 3.1.3.  $\square$

**Remarque 3.3.1.** La LMI (3.3.6) peut s'écrire sous la forme du problème généralisé de valeur propre

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_1 S & PBKA & P(BK)^2 \\ (*) & -\frac{1}{a_2} S & 0 \\ (*) & (*) & -\alpha S \end{bmatrix}}_{A(x)} < - \underbrace{\frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} PA_{cd} + A_{cd}^T P & 0 & 0 \\ (*) & 0 & 0 \\ (*) & (*) & 0 \end{bmatrix}}_{-B(x)} \quad (3.3.7)$$

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

avec  $C(x) = \text{diag}(P, S) > 0$ , où  $A(x)$ ,  $B(x)$  et  $C(x)$  sont des fonctions affine de  $x$ , le vecteur des variables de décision constitué à partir de  $P$  et  $S$ . Ce problème s'exprime sous sa forme générale

$$\begin{aligned} & \text{minimiser } \lambda \\ & \text{tel que } \lambda B(x) - A(x) > 0, B(x) > 0, C(x) > 0 \end{aligned}$$

Notons ici que la matrice  $B(x)$  de l'inégalité (3.3.7) est semi-définie positive. Il convient donc de reformuler ce problème afin qu'il soit bien posé. Pour cela, nous introduisons la matrice auxiliaire  $Y > 0$ , ce qui permet d'écrire le problème d'optimisation final :

$$\min_{P, S, Y} \frac{1}{\epsilon}$$

$$\begin{aligned} \text{sous les contraintes } & 0 < P, S, Y \\ & \begin{bmatrix} a_1 S - Y & PBKA & P(BK)^2 \\ (*) & -\frac{1}{a_2} S & 0 \\ (*) & (*) & -\alpha S \end{bmatrix} < 0 \\ & 0 < -PA_{cl} - A_{cl}^T P \\ & Y < \frac{1}{\epsilon} (-PA_{cl} - A_{cl}^T P) \end{aligned}$$

◇

La formulation obtenue dans la précédente remarque permet d'évaluer l'erreur d'estimation de l'horizon qui garantit la convergence exponentielle de l'état. Ce résultat, associé à celui présenté dans le théorème 3.2.4 et aux caractéristiques intrinsèques du système considéré (dynamique de l'état et du retard), conduit à une estimation du temps  $t_c$  à partir duquel le système va converger. Cet instant est obtenu grâce à la relation

$$t_c = -\frac{1}{\sigma} \ln \left( \frac{1 - \nu}{|\hat{\delta}_0 - \tau(\hat{\delta}_0)|} \epsilon(t_c) \right)$$

Nous pouvons donc en déduire que l'état  $x(t)$  converge exponentiellement vers zéro pour tout  $t \geq t_c + \delta(t_c)$ . Cette démarche est illustrée par l'exemple suivant.

#### Exemple 3.3.1

Soit le pendule inversé en forme de "T" décrit dans l'annexe B ayant pour dynamique

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18.78 & 0 & 14.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 56.92 & 0 & -15.18 & 0 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.52 \\ 0 \\ -8.82 \end{bmatrix} u(t - \tau(t))$$

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

Le gain de commande  $K$  est choisi pour placer les pôles de la matrice  $A_{cl}$  en  $[-8 + 0.5i; -8 - 0.5i; -16; -32]$ . La valeur de  $\dot{\epsilon}_M$  est fixée à 0.36 et  $\alpha = 0.9 \times \frac{1 - 2\dot{\epsilon}_M}{\dot{\epsilon}_M} = 0.7$ . Le problème d'optimisation exprimé dans la remarque

3.3.1 est résolu en prenant les conditions initiales

- $S_0 = I$ ,
- $P_0 > 0$  solution de  $P_0 A_{cl} + A_{cl}^T P_0 < 0$ ,
- $\epsilon_0 = \frac{\lambda_m(Q_0)}{\lambda_M(R_0)}$  avec  $Q_0$  et  $R_0$  définis comme dans la démonstration précédente,
- $Y_0 > 0$  solution de  $a_1 S_0 - Y_0 < 0$  et de  $Y_0 < -\frac{1}{\epsilon_0}(P_0 A_{cl} + A_{cl}^T P_0)$ .

Nous obtenons ainsi une erreur d'estimation admissible, au sens où  $\frac{dV(x(\zeta))}{d\zeta} < 0$ , de  $\epsilon = 2.3ms$ . Notons ici que l'utilisation de conditions ini-

tiales  $S_0, P_0, Y_0$  et  $\epsilon_0$  permet une légère amélioration de la solution trouvée ( $\epsilon$  augmente d'environ 1.5%), du fait de la méthode numérique utilisée. L'amplitude des solutions peut être contrainte en modifiant le rayon de faisabilité ou en introduisant des LMIs de type

$$\begin{bmatrix} P & I \\ I & Y \end{bmatrix} > 0$$

$$\Leftrightarrow P > 0, Y > 0, \lambda_{\min}(PY) > 1$$

mais ceci n'influence pas la solution optimale.

En considérant le retard induit par le réseau TCP de l'exemple 1.4.2, de valeur initiale  $\tau(0) = 8.96 ms$  et de dérivée maximale  $\nu = 0.617$ , l'instant de convergence est déterminé par  $t_c = 233.4 ms$  et l'état  $x(t)$  suit une décroissance exponentielle pour  $t > t_c + \delta(t_c) = 245.8 ms$ , pour une vitesse de convergence de l'approximation déterminée par  $\sigma = 10$ . Le dernier calcul est effectué en utilisant la dichotomie pour évaluer  $\delta(t_c)$ , étant donné la faible vitesse de convergence choisie.

**Remarque.** La variation maximale admissible de l'erreur  $\dot{\epsilon}_M$  est donnée par le degré de fiabilité du réseau ou peut être ajustée par l'utilisateur du réseau si une file de stockage est mise en place en entrée du récepteur (utilisation du protocole de transfert à ce niveau pour les nécessités de la commande).  $\diamond$

### 3.3.2 Formulation finale

Nous avons pu voir au cours de ce chapitre comment l'effet retard du réseau peut être compensé avec un prédicteur d'état à horizon temps variant. Plusieurs méthodes ont



### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

été proposées pour calculer cet horizon, de manière statique ou dynamique. La méthode dynamique étant la plus efficace, au niveau du temps de calcul, c'est celle que nous avons retenu pour la suite du travail. Une analyse de robustesse du système bouclé vis-à-vis de l'erreur d'estimation nous a permis d'établir la stabilité de l'état, et notamment que la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation induit la stabilité exponentielle de l'état. La dernière étape, décrite dans cette section, vise à décrire la loi de commande comme une fonction *explicite* du retard et à montrer que la stabilité est assurée pour un retard vérifiant (1.4.5)-(1.4.6). Ceci est établi par le théorème suivant.

**Théorème 3.3.3.** *Soit le système*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t))$$

où la paire  $(A, B)$  est commandable. En supposant que la dynamique du retard décrite par (1.4.3)-(1.4.4) est telle que les conditions suivantes sont satisfaites pour tout  $t$

A1)  $\tau(t) \in \mathcal{C}(R^+, [0, \tau_{max}])$ ,

A2)  $\dot{\tau}(t) < 1$ ,

A3)  $0 < \dot{\tau}_M \doteq \sup_t \dot{\tau}(t) < \frac{1}{2}$

Alors la loi de commande par retour d'état

$$\begin{aligned} u(t) &= -Ke^{A\hat{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\hat{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right] \\ \dot{\hat{\delta}}(t) &= -\Phi_1 \left( \frac{d\tau(\zeta)}{d\zeta} \right) \hat{\delta} + \Phi_2 \left( \frac{d\tau(\zeta)}{d\zeta}, \tau(\zeta) \right) \\ \frac{d\tau}{d\zeta}(\zeta) &= \frac{dh}{d\zeta}(z(\zeta), u_d(\zeta)) \\ \frac{dz}{d\zeta}(\zeta) &= f(z(\zeta), u_d(\zeta)), \quad z(0) = z_0 \end{aligned}$$

avec  $\zeta = \zeta(t) = 1 + \hat{\delta}(t)$ ,  $\sigma$  une constante positive,  $\hat{\delta}(0) = \hat{\delta}_0 \in [0, \tau_{max}]$ , et

$$\begin{aligned} \Phi_1(d\tau(\zeta)/d\zeta) &= \frac{\sigma}{1 - d\tau(\zeta)/d\zeta} \\ \Phi_2(d\tau(\zeta)/d\zeta, \tau(\zeta)) &= \frac{d\tau(\zeta)/d\zeta + \sigma\tau(\zeta)}{1 - d\tau(\zeta)/d\zeta} \end{aligned}$$

assure que le système en boucle fermée est borné, et que la trajectoire de  $x(t)$  converge exponentiellement vers zéro.

*Démonstration.* Ce théorème est la suite logique du développement effectué au cours de ce chapitre. En effet, les hypothèses (A1) et (A2) permettent

- de garantir la convergence exponentielle de l'erreur d'estimation du fait que les conditions du théorème 3.2.4 sont vérifiées,

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

- d’avoir les conditions nécessaires au corollaire 3.3.2 sur la dynamique de l’horizon de prédiction  $\delta(t)$ , par application de la proposition 3.1.4.

Le fait que la paire  $(A, B)$  soit commandable permet de garantir qu’il existe un gain  $K$  tel que  $A - BK$  soit une matrice de Hurwitz. Nous pouvons donc appliquer le lemme 3.3.1 ainsi que le corollaire 3.3.2, en notant que le fait d’avoir la garantie d’une trajectoire bornée (résultat du lemme) avant l’instant de convergence exponentielle nous assure qu’il existe un fonction exponentielle décroissante bornant supérieurement la valeur absolue de la trajectoire tout au long de son évolution (pour  $t \in \mathbb{R}$ ).  $\square$

**Remarque.** Cette loi de commande nécessite de garder en mémoire les signaux de commande émis durant l’intervalle temporel  $[t - \tau_{max}, t]$ . De plus, le calcul de l’horizon de prédiction implique une connaissance du retard sur l’intervalle  $[t, t + \tau_{max}]$ . Cette dernière hypothèse est la plus restrictive ; elle peut être satisfaite

- pour les systèmes périodiques, grâce à la connaissance du cycle suivant,
- pour les systèmes entièrement déterministes, en utilisant un prédicteur d’état sur le retard (éventuellement non linéaire),
- de manière plus générale, en combinant un observateur et un prédicteur sur le retard.

Notons que l’algorithme d’émission peut être utilisé à ce niveau pour rendre un réseau aperiodique complètement déterministe. En effet, supposons qu’une source émette un signal, de taille négligeable, informant de son intention d’utiliser le réseau et attende durant un temps  $\tau_{max}$  avant d’émettre. Le nombre de sources prévoyant d’utiliser le réseau est ainsi connu en avance et un modèle des protocoles d’émission et de la file d’attente peut être utilisé afin de prédire l’évolution du retard de manière précise.  $\diamond$

Ainsi que nous l’avons vu dans la sous-section 2.2.3, le retard temps variant conduit à un contrôleur discret à *dimension variable*. Nous estimons la partie intégrale de la loi de commande en utilisant la méthode des rectangles backward, en choisissant un pas d’intégration fixe et égal à la période d’échantillonnage  $T_s$ . Il en résulte que le nombre de pas  $n_k = n(t_k)$  nécessaires pour estimer l’intégrale à un instant donné  $t = t_k$  dépend de  $\hat{\delta}_k = \hat{\delta}(t_k)$  et est défini par

$$n_k \doteq \hat{\delta}_k / T_s$$

Ceci conduit à l’approximation suivante du terme intégral, pour tout  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$\begin{aligned} I_k &= I(t_k) \doteq e^{At_k} \int_{t_k}^{t_k + \hat{\delta}(t_k)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta)) d\theta \\ &\approx T_s \sum_{i=0}^{n_k-1} e^{-iAT_s} Bu(k + i - \frac{\tau(k+i)}{T_s}) \end{aligned}$$

où le retard est supposé être un multiple de la période d’échantillonnage. Cette hypothèse n’est pas trop restrictive si la période d’échantillonnage est suffisamment petite

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

par rapport au retard, afin que la partie fractionnelle  $\frac{\tau(k+i)}{T_s}$  puisse être négligée dans l'approximation de l'intégrale.

La partie prédictive de la loi de commande proposée dans le théorème précédant peut maintenant être exprimée de manière discrète

$$u_k = -Ke^{A\delta_k}(x_k + I_k) \quad (3.3.8)$$

Le terme d'exponentiel de matrice peut être calculé de manière approchée en utilisant la méthode de Krylov [Sidje, 1998] ou de façon exacte par la méthode des composantes de matrices [Borne et al., 1992].

### Exemple 3.3.2

Nous considérons ici la stabilisation à distance du pendule inversé (voir Annexe B) dont la dynamique a été présentée dans l'exemple 3.3.1, avec comme condition initiale

$$x(0) = [1 \ 0 \ 0,5 \ 0]^T$$

Le réseau a les propriétés décrites dans l'exemple 1.4.2 et induit le retard  $\tau(t)$  présenté en haut de la figure 3.5. L'évolution temporelle de l'erreur d'estimation de l'horizon de prédiction induite par l'utilisation de l'approche dynamique pour le calcul de  $\delta(t)$  est aussi présenté. Une première courbe, notée  $\epsilon_{mes}$ , montre l'erreur d'estimation calculée à partir de la différence entre  $\hat{\delta}(t)$  et  $\delta(t)$  obtenu par dichotomie. La seconde, notée  $\epsilon_{est}$ , est la borne supérieure obtenue avec le théorème 3.2.4. La comparaison de ces deux courbes permet d'évaluer le conservatisme induit par ce théorème, qui est assez important initialement puis se réduit. L'augmentation du retard (et de l'erreur d'estimation) induite par l'émission de la source perturbatrice reste cependant dans les bornes prévues par le théorème.

Les conditions initiales sur la commande sont considérées comme nulles, avec

$$u(\theta) = 0 \quad \forall \theta \in [-\tau_{max}, 0]$$

et la période d'échantillonnage utilisée pour l'estimation de la partie intégrale de la commande est de 1 ms. Le système est simulé de manière continue. Le bas de la figure 3.5 montre la stabilisation du pendule inversé en T, avec l'évolution des quatre états le caractérisant (position et vitesse de la barre en translation, angle et vitesse angulaire de la barre verticale). Notons ici le temps de latence induit par le retard (d'une centaine de millisecondes), temps pendant lequel l'état diverge du fait des conditions initiales non nulles et de son instabilité. Puis le signal de commande atteint le système, produisant des trajectoires inverses à celles de la stabilisation du fait de la nature du pendule, qui est à non minimum de phase. Une fois cet effet passé, les trajectoires se stabilisent de manière exponentielle. Notons que l'effet du retard n'apparaît

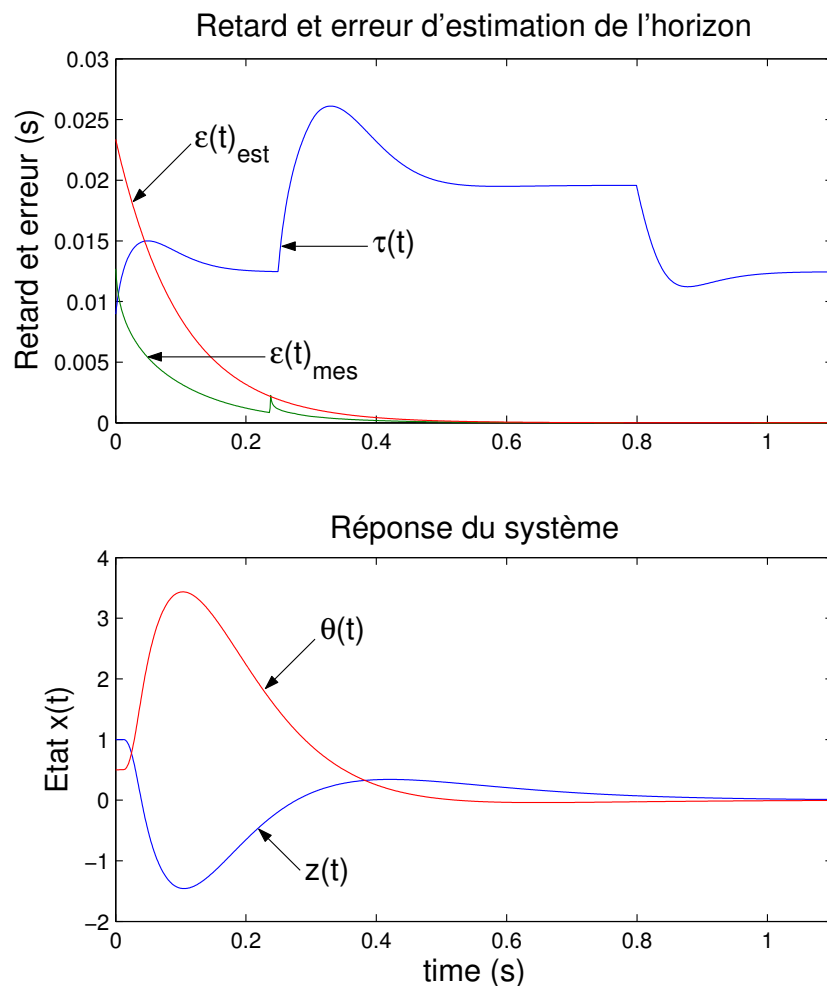


FIG. 3.5 – Réponse du système à une condition initiale non nulle.

pas de manière explicite sur l'évolution du système, une fois la période de latence passée, du fait de la loi de commande choisie. En effet, la prédiction permet d'enlever le retard de la boucle.

Cette simulation illustre l'efficacité théorique de la loi de commande proposée dans le théorème 3.3.3 pour stabiliser un système ayant des conditions initiales non-nulles.

### 3.4 Comparaison avec les méthodes de commande classique

Le but de cette section est de fournir quelques éléments justifiant l'utilisation d'un prédicteur à horizon variable plutôt qu'un simple retour d'état, un prédicteur à horizon

## Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

fixe ou une stratégie de tampon. Ces éléments sont d'ordre qualitatifs et sont illustrés par un exemple.

Il est clair que l'utilisation d'un prédicteur pour compenser le retard ne se justifie que pour des applications où les dynamiques du système sont rapides par rapport à l'amplitude du retard généré par le réseau. En effet, un simple retour d'état de type

$$u(t) = -Kx(t)$$

permet d'assurer la stabilité d'un système linéaire pour un retard suffisamment petit par rapport aux modes propres du système bouclé (marge de stabilité). Dans le cas d'applications plus sensibles où ce n'est pas le cas, la compensation du retard s'avère préférable voir nécessaire.

L'instabilité induite par un retard fixe d'amplitude non négligeable, tel que celui généré par des lignes de transmission homogènes ou des temps de calcul constants, peut être compensée avec un prédicteur d'état à horizon fixe.

Dans le cadre de la commande des systèmes commandés par réseau, nous considérons des retards dont la valeur moyenne est assez peu représentative. Ces retards sont fortement dépendants de l'état de charge du réseau et peuvent varier de manière drastique d'un instant à l'autre. Ce problème, dénommé *gigue* dans le milieu industriel, induit des variations de phase difficilement compensable et justifie l'utilisation d'un prédicteur à horizon variable. Ceci est illustré dans l'exemple suivant.

### Exemple 3.4.1

Soient le pendule inversé et le réseau décrits dans l'exemple précédent. Nous étudions la réponse du système pour quatre lois de commande différentes :

- retour d'état,
- prédicteur à horizon variable,
- prédicteur à horizon fixe, d'horizon égal au retard maximal,
- la mise en œuvre d'une stratégie de tampon, consistant à ajouter un buffer en entrée du système afin de rendre le retard constant (égal à sa valeur maximale  $\tau_{max}$ ), combinée au prédicteur précédent.

Afin de comparer ces méthodes la réponse du système à une condition initiale non-nulle et sa robustesse vis-à-vis de bruits de mesure (bruit blanc de puissance 0.01 et de noyau [23341]) sont illustrées par la figure 3.6. L'évolution temporelle de l'angle du pendule inversé montre que, par rapport à l'utilisation d'un prédicteur à horizon variable :

- le simple retour d'état induit un dépassement et de légères oscillations lors d'une condition initiale non nulle, et des oscillations importantes lorsqu'un bruit de mesure est ajouté,
- le prédicteur à horizon fixe, bien que plus approprié que le contrôleur précédent, induit des oscillations et un temps de stabilisation plus long lors d'une condition initiale non nulle, et est plus sensible aux bruits de mesure,

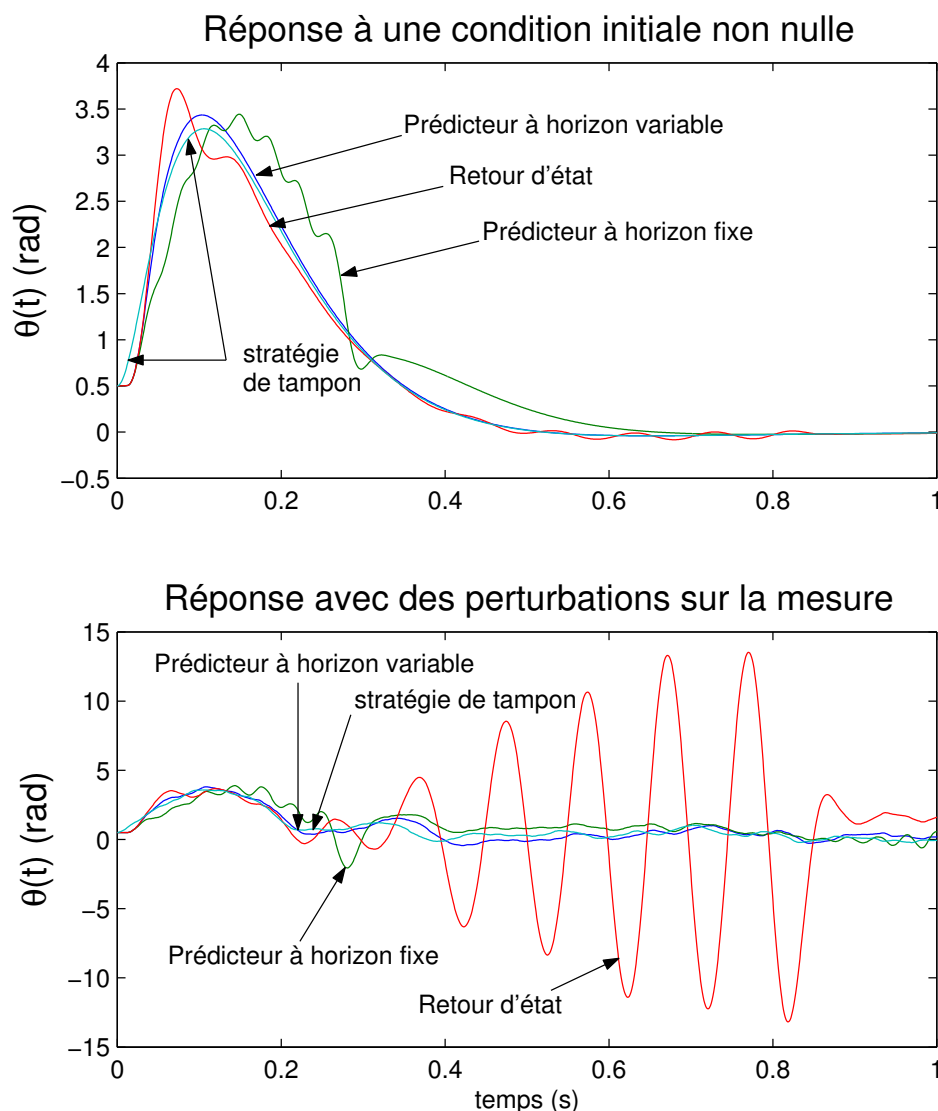


FIG. 3.6 – Réponse du système avec divers loi de commande.

- la stratégie de tampon montre une divergence initiale (due au retard plus important induit par le tampon) rapidement compensée et présente des performances similaires à celles du prédicteur à horizon variable (pic légèrement plus faible). Cette stratégie a l'avantage d'être plus simple à mettre en œuvre au niveau du correcteur mais introduit une complexité au niveau du système. Outre la présence du tampon, elle implique en effet soit de connaître le retard réel au niveau du système pour l'incrémenter au niveau du retard maximum, soit un synchronisation des horloges entre le correcteur et le système (ce qui peut être une problématique de recherche en soi lorsque l'utilisation d'un GPS n'est pas possible). De plus, l'augmentation du temps de réponse à une entrée

### Chapitre 3. Prédicteur par Retour d'Etat

---

de commande peut s'avérer un facteur limitant pour les systèmes à dynamique rapide.

Notons que les effets précédents sont largement amplifiés pour des retards d'amplitude et/ou de variation plus importante.

#### Synthèse

Ce chapitre nous a permis d'établir une loi de commande performante et adaptée pour la stabilisation des systèmes commandés par réseaux déterministes. La synthèse proposée prend explicitement en compte la dynamique du réseau au travers du calcul de l'horizon de prédiction, variable dans le temps. Cette commande conduit à l'élaboration d'un contrôleur à taille variable, du fait de la variation de l'horizon d'intégration. La robustesse de cette méthode vis-à-vis des incertitudes induites par l'estimation de l'horizon a aussi été étudiée.

*Notre pâle raison nous cache l'infini !  
Nous voulons regarder : - le Doute nous punit !  
Le doute, morne oiseau, nous frappe de son aile...  
- Et l'horizon s'enfuit d'une fuite éternelle !...*

Arthur Rimbaud, 1870.

[Rimbaud, 1984]





# Chapitre 4

## Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

Nous avons étudié dans le chapitre précédent l'utilisation du prédicteur d'état pour établir une loi de commande stabilisant un système à entrée retardée, où le retard varie dans le temps. Dans ce chapitre, nous évaluerons l'incertitude maximale acceptable sur le modèle du réseau pour stabiliser le système. Ce problème revient à déterminer l'erreur maximale du retard telle que le système en boucle fermée reste stable, erreur induite par la différence entre le modèle de retard utilisé pour le calcul de l'horizon de prédiction et le retard effectif subi par les paquets d'information.

Dans un premier temps, nous verrons que le problème de robustesse du système en boucle fermée vis à vis d'incertitudes sur le retard conduit au problème de stabilisation d'un système *algébro-différentiel* à état retardé. Une première approche exacte nous permettra d'étudier cette stabilité, en montrant notamment que l'état reste stable pour une perturbation bornée et que les incertitudes sur le retard induisent, par l'intermédiaire de la loi de commande, une perturbation convergeant vers zéro. Ceci nous permettra, dans un deuxième temps, de justifier une approximation de l'expression de loi de commande permettant une analyse moins conservatrice que la première. Une partie de ce chapitre sera présentée dans [Witrant, Canudas-de-Wit, Georges & Alamir, 2005b].

### 4.1 Description du problème

Soit  $\tau(t)$  le retard effectif induit par le canal de communication et  $\bar{\tau}(t)$  celui estimé (fournit par un modèle de retard), utilisé pour calculer l'horizon de prédiction  $\bar{\delta}(t)$  et établir la loi de commande. Le système en boucle fermée est alors déterminé par

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau(t)) \quad (4.1.1)$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

$$u(t) = -Ke^{A\bar{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \bar{\tau}(\theta)) d\theta \right] \quad (4.1.2)$$

$$\bar{\delta}(t) = \bar{\tau}(t + \bar{\delta}(t)) \quad (4.1.3)$$

avec  $(A, B)$  une paire commandable et comme condition initiale (voir sous-section 2.1.1)

$$u(\theta) = \phi(\theta), \quad \theta \in [t_0 - \bar{\tau}_{max}, t_0], \quad (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \bar{\tau}_{max}}^\nu$$

Le retard estimé  $\bar{\tau}(t)$  est obtenu par un modèle dynamique de type

$$\dot{\bar{z}}(t) = f_e(\bar{z}(t), u_{de}(t)), \quad \bar{z}(0) = \bar{z}_0 \quad (4.1.4)$$

$$\bar{\tau}(t) = h_e(\bar{z}(t), u_{de}(t)) \quad (4.1.5)$$

où  $f_e(\cdot)$ ,  $h_e(\cdot)$  et  $u_{de}(\cdot)$  sont les estimations  $f(\cdot)$ ,  $h(\cdot)$  et  $u_d(t)$ , respectivement. Ce modèle à les mêmes propriétés que celles décrites pour le cas nominal dans la section 1.4.3, notamment concernant les conditions de bornitude sur le retard et sa dérivée :

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{max} &\geq \bar{\tau}(t) \geq 0 \\ \sup \dot{\bar{\tau}}(t) &= \bar{\nu} < 1 \end{aligned}$$

La difficulté de l'étude de robustesse de (4.1.1)-(4.1.3) est due au fait que ce soit un système *algébro-différentiel* à état retardé. En effet, il peut s'écrire de manière équivalente avec la représentation

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}(t) \\ \dot{u}(t) \end{bmatrix} &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ -Ke^{-A\bar{\delta}} & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(t) \\ u(t) \end{bmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & B \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x(t - \tau) \\ u(t - \tau) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -Ke^{A\bar{\delta}(t)} \left[ e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \bar{\tau}(\theta)) d\theta \right] \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Le caractère algébro-différentiel est mis ici en évidence car il empêche une approche directe (plus classique) telle que celle pouvant être effectuée à partir du système décrit par l'équation dynamique de  $x(t)$  et celle de la loi de commande  $u(t)$ , utilisée dans [Mondié et al., 2001] ou [Michiels & Niculescu, 2003] pour le cas des retards constants. L'utilisation des fonctions de Laplace, pour le cas des systèmes à retard constant, permet de prendre en compte le caractère algébrique induit par l'intégrale dans la transformée elle-même, mais ceci n'est pas possible pour le cas des retards variables et l'opérateur de dérivée n'assure pas une équivalence entre les deux expressions (variation de  $u(t)$  exprimée par une intégrale et par sa dérivée).

C'est pourquoi l'effet du terme intégral sera considéré comme celui d'une perturbation s'annulant dans le temps dans l'approche exacte, permettant ainsi de mettre en évidence les problèmes de robustesse liés à la nature temps variante du système. Avec la seconde méthode, dite approchée, nous décomposerons le terme intégral afin d'extraire la partie induisant une formulation algébrique, que nous négligerons grâce à une justification appropriée.

## 4.2 Approche exacte

Une formulation intuitive du problème de robustesse consiste à choisir comme état étendu la combinaison de l'état du système  $x(t)$  et de l'estimation de l'état prédit utilisé pour établir la loi de commande. Cette approche conduit à un problème mal posé du fait de la dépendance implicite de l'état ainsi composé en lui-même. Nous chercherons par conséquent à obtenir une dépendance explicite, similaire à la formulation proposée dans [Mondié et al., 2001] pour le cas du retard constant où le système considéré est décrit par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= \alpha(x, u) \\ \dot{u}(t) &= \beta(x, u) \end{cases}$$

Le fait que le retard soit temps variant et que nous poursuivions une approche temporelle rend l'utilisation directe de  $u(t)$  comme extension de l'état inappropriée. Nous utiliserons donc le terme intégral de la commande comme nouvel état, celui-ci étant la source de la dynamique de commande et le siège des perturbations.

### 4.2.1 Formulation du problème

L'état induit par l'intégrale est défini par

$$\mathcal{I}(t) = e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \bar{\tau}(\theta)) d\theta$$

Une formulation intuitive consiste à utiliser la dynamique de cet état

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{I}}(t) &= A\mathcal{I}(t) + e^{At} \left[ (1 + \dot{\bar{\delta}}) e^{-A(t+\bar{\delta})} Bu(t + \bar{\delta} - \bar{\tau}(t + \bar{\delta})) - e^{-At} Bu(t - \bar{\tau}) \right] \\ &= A\mathcal{I}(t) + (1 + \dot{\bar{\delta}}) e^{-A\bar{\delta}} Bu(t) - Bu(t - \bar{\tau}) \end{aligned}$$

En substituant  $u(t)$  par

$$u(t) = -Ke^{A\bar{\delta}(t)} [x(t) + \mathcal{I}(t)]$$

nous obtenons

$$\dot{\mathcal{I}}(t) = A\mathcal{I}(t) - (1 + \dot{\bar{\delta}}) e^{-A\bar{\delta}} BK e^{A\bar{\delta}} [x(t) + \mathcal{I}(t)] + BK e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})} [x(t - \bar{\tau}) + \mathcal{I}(t - \bar{\tau})]$$

Le système en boucle fermée avec estimation du retard est donc décrit par les équations différentielles retardées

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})} [x(t - \bar{\tau}) + \mathcal{I}(t - \bar{\tau})], \\ \dot{\mathcal{I}}(t) &= (A - (1 + \dot{\bar{\delta}}) e^{-A\bar{\delta}} BK e^{A\bar{\delta}}) \mathcal{I}(t) - (1 + \dot{\bar{\delta}}) e^{-A\bar{\delta}} BK e^{A\bar{\delta}} x(t) \\ &\quad + BK e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})} [x(t - \bar{\tau}) + \mathcal{I}(t - \bar{\tau})], \end{cases}$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

---

avec

$$\begin{aligned} x(\theta) &= \phi(\theta), \theta \in [t_0 - \max(\tau_{max}, \bar{\tau}_{max}), t_0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \max(\tau_{max}, \bar{\tau}_{max})}^\nu \\ \mathcal{I}(\theta) &= \phi_{\mathcal{I}}(\theta), \theta \in [t_0 - \max(\tau_{max}, \bar{\tau}_{max}), t_0], (t_0, \phi_{\mathcal{I}}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \max(\tau_{max}, \bar{\tau}_{max})}^\nu \end{aligned}$$

Nous voyons clairement apparaître le retard réel du réseau  $\tau(t)$  dans l'équation dynamique de  $x(t)$  et le retard estimé  $\bar{\tau}$  dans celle de  $\mathcal{I}(t)$ . En définissant l'état complet comme

$$\mathcal{X}(t) \doteq [x(t) \ \mathcal{I}(t)]^T$$

le système précédent s'écrit sous forme matricielle

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{X}}(t) &= \begin{bmatrix} A & 0 \\ -(1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BK e^{A\bar{\delta}} & A - (1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BK e^{A\bar{\delta}} \end{bmatrix} \mathcal{X}(t) \\ &+ \begin{bmatrix} -BK e^{A\bar{\delta}(t-\tau)} & -BK e^{A\bar{\delta}(t-\tau)} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{X}(t - \tau) + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ BK e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})} & BK e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})} \end{bmatrix} \mathcal{X}(t - \bar{\tau}) \end{aligned}$$

Notons ici qu'en l'absence de retard l'état  $x(t)$  converge exponentiellement vers zéro et le terme intégral  $\mathcal{I}(t)$  est nul, du fait que  $\mathcal{I}(0) = 0$ . Le terme intégral est cependant instable dans ce cas, au sens classique du terme, du fait qu'il a pour dynamique  $\dot{\mathcal{I}} = A\mathcal{I}$ . C'est pourquoi ce type de formulation est impropre au type de problème considéré, du fait de la perte du caractère algébro-différentiel du système. Notons que l'utilisation de la variable

$$w(t) \doteq x(t) + \mathcal{I}(t)$$

qui décrit la dynamique la plus importante de la loi de commande, conduit au même type de problème.

Afin de respecter le caractère algébro-différentiel du système en boucle fermée, nous sommes donc contraints de conserver le terme intégral dans l'expression du système. Ce dernier s'écrit donc, après un changement de base approprié dans l'intégrale,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) - BK e^{A\bar{\delta}(t-\tau)}x(t-\tau) - BK\mathcal{I}(t-\tau) \\ \mathcal{I}(t) &= \int_0^{\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta}Bu(t+\theta - \bar{\tau}(t+\theta))d\theta \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Pour étudier la stabilité de ce système, nous considérerons tout d'abord la robustesse de l'état  $x(t)$  en supposant que le terme intégral agit comme une perturbation bornée. Nous reviendrons ensuite sur la dynamique de la loi de commande pour justifier cette hypothèse de bornitude et montrer la stabilité de la loi de commande.

## 4.2.2 Robustesse de l'état

Le système (4.2.1) est considéré ici comme un système à retard perturbé, où la perturbation est induite par le terme intégral. Celle-ci est introduite par le terme

$$\Delta(t) \doteq -BK\mathcal{I}(t - \tau)$$

avec  $|\Delta(t)| < \infty$  et  $\lim_{t \rightarrow \infty} \Delta(t) \neq 0$

La perturbation induite est donc supposée bornée, mais persistante (ne s'annule pas), aussi convient-il en premier lieu d'établir les propriétés de stabilité et de bornitude des systèmes à retard subissant une perturbation persistante. Ceci est effectué avec le lemme suivant

**Lemme 4.2.1.** *Soit le système différentiel retardé subissant une perturbation persistante décrit par*

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + A_d(t)x(t - \tau(t)) + \Delta(t) \quad (4.2.2)$$

avec  $x(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\theta \in [t_0 - \tau_{max}, t_0]$ ,  $(t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \tau_{max}}^\nu$ . Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H1) le retard satisfait les conditions

$$\begin{aligned} \tau_{max} &\geq \tau(t) \geq 0 \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} \dot{\tau}(t) &= \nu < 1 \end{aligned}$$

H2) il existe des matrices symétriques  $P$ ,  $X$ ,  $X_1$  définies positives telles que la LMI suivante soit vérifiée

$$\begin{bmatrix} PA_n + A_n^T P + \tau_{max}^2 \bar{A}^T X \bar{A} + \frac{\tau_{max}^2}{(1 - \nu)^2} \bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d & P \bar{A}_d & P \bar{A}_d \\ \bar{A}_d^T P & -X & 0 \\ \bar{A}_d^T P & 0 & -X_1 \end{bmatrix} < 0$$

avec  $A_n \doteq A(t_1) + A_d(t_1)$ ,  $\bar{A} \doteq A(t_2)$  et  $\bar{A}_d \doteq A_d(t_3)$  où

$$t_1 = \arg \left\{ \max_t \lambda(A(t) + A_d(t)) \right\}, \quad t_2 = \arg \left\{ \sup_t \|A(t)\| \right\}, \quad t_3 = \arg \left\{ \sup_t \|A_d(t)\| \right\}$$

H3) la variable

$$p(t) \doteq 2P \left( A_d(t) \int_{t-\tau(t)}^t \Delta(\theta) d\theta - \Delta(t) \right)$$

est de norme bornée,

alors nous pouvons garantir que l'état  $x(t)$  est globalement uniformément borné de la manière suivante :

$$\|x(t)\| \leq -\frac{\|p(t)\|}{\lambda_M(\mathcal{M}_n)}$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

avec

$$\mathcal{M}_n \doteq PA_n + A_n^T P + PA_d X^{-1} A_d^T P + PA_d X_1^{-1} A_d^T P + \tau_{max}^2 A^T X A + \frac{\tau_{max}^2}{(1-\nu)^2} \bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d$$

la matrice décrivant la stabilité du système nominal ( $p(t) = 0$ ), définie négative par (H2).

*Démonstration.* De la même manière que décrite dans la section 3.3.1, les propriétés du système (4.2.2) peuvent être déduites de celles du système transformé

$$\Sigma_t : \dot{x}(t) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^t Ax(\theta) d\theta - A_d \int_{t-\tau}^t A_d x(\theta - \tau(\theta)) d\theta - A_d \int_{t-\tau}^t \Delta(\theta) d\theta + \Delta(t)$$

Nous utilisons ensuite la fonction de Lyapunov-Krasovskii ainsi que la méthode proposée dans [Kim, 2001], appliquées à notre problème. La fonction de Lyapunov est définie par

$$V(x, t) \doteq v_0(x) + \tau_{max} v_1(x, t) + \frac{\tau_{max}}{(1-\nu)^2} v_2(x, t)$$

avec

$$\begin{aligned} v_0(x, t) &\doteq x^T(t) P x(t) \\ v_1(x, t) &\doteq \int_0^{\tau_{max}} \int_{t-\theta}^t x^T(s) \bar{A}^T X \bar{A} x(s) ds d\theta \\ v_2(x, t) &\doteq \int_{\tau}^{\tau+\tau_{max}} \int_{t-\theta}^t x^T(s) \bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(s) ds d\theta \end{aligned}$$

La dérivée temporelle du premier terme de la fonction de Lyapunov est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{v}_0(x, t) &= x^T(t) (P(A + A_d) + (A + A_d)^T P) x(t) - 2x^T(t) P A_d \int_{t-\tau}^t Ax(\theta) d\theta \\ &\quad - 2x^T(t) P A_d \int_{t-\tau}^t A_d x(\theta - \tau(\theta)) d\theta - x^T(t) p(t) \\ &\leq x^T(t) (P(A + A_d) + (A + A_d)^T P) x(t) + 2 \|x^T(t) P A_d X^{-1/2}\| \cdot \left\| \int_{t-\tau}^t X^{1/2} Ax(\theta) d\theta \right\| \\ &\quad + 2 \|x^T(t) P A_d X_1^{-1/2}\| \cdot \left\| \int_{t-\tau}^t X_1^{1/2} A_d x(\theta - \tau(\theta)) d\theta \right\| - x^T(t) p(t) \\ &\leq x^T(t) (P(A + A_d) + (A + A_d)^T P) x(t) + \|x^T(t) P A_d X^{-1/2}\|^2 \\ &\quad + \tau \int_{t-\tau}^t \|X^{1/2} Ax(\theta)\|^2 d\theta + \|x^T(t) P A_d X_1^{-1/2}\|^2 + \tau \int_{t-\tau}^t \|X_1^{1/2} A_d x(\theta - \tau(\theta))\|^2 d\theta \\ &\quad - x^T(t) p(t) \end{aligned}$$

où la dernière expression est obtenue en utilisant le complément des carrés ( $2ab \leq a^2 + b^2$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ ) ainsi que la relation

$$\left\| \int_a^b f(s) ds \right\|^2 \leq (b-a) \int_a^b \|f(s)\|^2 ds$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

---

Les inégalités

$$\begin{aligned} \int_{t-\tau}^t \|X^{1/2}Ax(\theta)\|^2 d\theta &\leq \int_{t-\tau}^t x^T(\theta)A^T X Ax(\theta)d\theta \\ \int_{t-\tau}^t \|X_1^{1/2}A_d x(\theta - \tau(\theta))\|^2 d\theta &\leq \frac{1}{1-\nu} \int_{t-\tau-\tau_{max}}^{t-\tau} x^T(\theta)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(\theta)d\theta \end{aligned}$$

permettent d'établir l'expression finale pour  $\dot{v}_0(t)$

$$\begin{aligned} \dot{v}_0(x, t) &\leq x^T(t)(P(A + A_d) + (A + A_d)^T P)x(t) + \|x^T(t)P\bar{A}_d X^{-1/2}\|^2 \\ &+ \tau \int_{t-\tau_{max}}^t x^T(\theta)\bar{A}^T X \bar{A}x(\theta)d\theta + \|x^T(t)P\bar{A}_d X_1^{-1/2}\|^2 \\ &+ \frac{\tau}{1-\nu} \int_{t-\tau-\tau_{max}}^{t-\tau} x^T(\theta)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(\theta)d\theta - x^T(t)p(t) \end{aligned}$$

En dérivant le second et le troisième terme de la fonction de Lyapunov et en appliquant le lemme A.0.5, nous obtenons

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(x, t) &= \tau_{max}x^T(t)\bar{A}^T X \bar{A}x(t) - \int_{t-\tau_{max}}^t x^T(s)\bar{A}^T X \bar{A}x(s)ds \\ \dot{v}_2(x, t) &= \tau_{max}x^T(t)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(t) - (1-\dot{\tau}) \int_{t-\tau-\tau_{max}}^{t-\tau} x^T(s)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(s)ds \\ &\leq \tau_{max}x^T(t)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(t) - (1-\nu) \int_{t-\tau-\tau_{max}}^{t-\tau} x^T(s)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(s)ds \end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant additionner les trois termes dérivés pour obtenir l'expression finale de la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &= \dot{v}_0(x) + \tau_{max}\dot{v}_1(x, t) + \frac{\tau_{max}}{(1-\nu)^2}\dot{v}_2(x, t) \\ &\leq x^T(t)(PA_n + A_n^T P)x(t) + \|x^T(t)P\bar{A}_d X^{-1/2}\|^2 + \|x^T(t)P\bar{A}_d X_1^{-1/2}\|^2 \\ &- x^T(t)p(t) + \tau_{max}^2 x^T(t)\bar{A}^T X \bar{A}x(t) + \frac{\tau_{max}^2}{(1-\nu)^2} x^T(t)\bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d x(t) \\ &\leq x^T(t) \left[ PA_n + A_n^T P + P\bar{A}_d X^{-1} \bar{A}_d^T P + P\bar{A}_d X_1^{-1} \bar{A}_d^T P \right. \\ &+ \left. \tau_{max}^2 \bar{A}^T X \bar{A} + \frac{\tau_{max}^2}{(1-\nu)^2} \bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d \right] x(t) - x^T(t)p(t) \end{aligned}$$

L'hypothèse (H2) et l'application du complément de Schur nous garantissent la stabilité du système non perturbé. Le fait que l'état soit borné est obtenu par la relation

$$\begin{aligned} \dot{V}(x, t) &\leq \lambda_M(\mathcal{M}_n)\|x(t)\|^2 + \|p(t)\|\|x(t)\| \\ &\leq (\lambda_M(\mathcal{M}_n)\|x(t)\| + \|p(t)\|)\|x(t)\| \end{aligned}$$

qui permet d'établir que la dérivée de la fonction de Lyapunov est négative pour tout  $x(t)$  tel que

$$\|x(t)\| \geq -\frac{\|p(t)\|}{\lambda_M(\mathcal{M}_n)}$$



## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

---

L'hypothèse (H3) permet de garantir qu'un tel  $x(t)$  existe de manière finie, et la conclusion du lemme est conséquence à la négativité de  $\dot{V}(x, t)$ . Notons ici que la stabilité du système nominal garantit que  $\lambda_M(\mathcal{M}_n) < 0$  et la symétrie de la LMI assure que les valeurs propres de  $\mathcal{M}_n$  soient réelles.  $\square$

Dans le cas particulier de la commande du système à entrée retardée avec un prédicteur d'état, où le prédicteur est calculé à partir d'une estimation du retard, le lemme précédent est appliqué avec

$$A(t) = A \quad \text{et} \quad A_d(t) = -BK e^{A\bar{\delta}(t-\tau)}$$

**Remarque.** La formulation choisie et le lemme précédent conduisent à l'assimilation de la commande prédictive à un simple retour d'état, aussi le résultat obtenu sera de nature conservative. Le point important à retenir du lemme précédent est que si le système nominal est stable et la perturbation bornée, alors l'effet de cette perturbation est d'induire un résultat de bornitude globale au lieu d'une stabilité asymptotique.  $\diamond$

### 4.2.3 Stabilité de la loi de commande

Nous allons maintenant étudier plus en détail la nature du terme intégral et son effet sur le système bouclé. Notre but est d'établir des conditions suffisantes sur le retard et son estimation pour que  $\mathcal{I}(t)$  soit borné. Le fait que l'intégrale soit évaluée sur l'horizon fini  $[0, \bar{\delta}(t)]$  implique que  $\mathcal{I}(t)$  est borné si  $u(t)$  l'est, et donc si  $w(t)$  est borné. En définissant l'erreur d'estimation du retard  $\epsilon(t)$  par

$$\epsilon(t) \doteq \tau(t) - \bar{\tau}(t)$$

et en dérivant la dynamique de la loi de commande

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= \dot{x}(t) + \dot{\mathcal{I}}(t), \\ &= (A - (1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BK e^{A\bar{\delta}})w(t) + BK(e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})}w(t-\bar{\tau}) - e^{A\bar{\delta}(t-\tau)}w(t-\tau)) \end{aligned}$$

avec

$$u(t) = -K e^{A\bar{\delta}(t)}w(t)$$

nous obtenons

$$\dot{w}(t) = (A - (1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BK e^{A\bar{\delta}})w(t) + BK(e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})}w(t-\bar{\tau}) - e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau}-\epsilon)}w(t-\bar{\tau}-\epsilon))$$

En notant que

$$[e^{A\bar{\delta}(\theta)}w(\theta)]' = A\bar{\delta}'(\theta)e^{A\bar{\delta}(\theta)}w(\theta) + e^{A\bar{\delta}(\theta)}w'(\theta)$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

---

nous obtenons le système transformé

$$\begin{aligned} \dot{w}(t) &= (A - (1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BK e^{A\bar{\delta}})w(t) + BK \int_{t-\bar{\tau}-\epsilon}^{t-\bar{\tau}} \left[ A\bar{\delta}'(\theta)e^{A\bar{\delta}(\theta)}w(\theta) + e^{A\bar{\delta}(\theta)}w'(\theta) \right] d\theta \\ &= (A - (1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BK e^{A\bar{\delta}})w(t) + BK \int_{t-\bar{\tau}-\epsilon}^{t-\bar{\tau}} \left[ (1 + \bar{\delta}')(A - BK)e^{A\bar{\delta}(\theta)}w(\theta) \right. \\ &\quad \left. + BK(e^{A\bar{\delta}(\theta-\bar{\tau})}w(\theta - \bar{\tau}) - e^{A\bar{\delta}(\theta-\bar{\tau}-\epsilon)}w(\theta - \bar{\tau} - \epsilon)) \right] d\theta \end{aligned}$$

Les conditions suffisantes de stabilité du système précédent sont établies avec le lemme suivant.

**Lemme 4.2.2.** *Soit le système différentiel retardé décrit par*

$$\dot{w}(t) = A_1(t)w(t) + E \int_{t-\bar{\tau}-\epsilon}^{t-\bar{\tau}} [A_2(\theta)w(\theta) + A_{d1}(\theta)w(\theta - \bar{\tau}) + A_{d2}(\theta)w(\theta - \bar{\tau} - \epsilon)] d\theta \quad (4.2.3)$$

avec  $w(\theta) = \phi_w(\theta)$ ,  $\theta \in [t_0 - 2(\bar{\tau}_{max} + \epsilon), t_0]$ ,  $(t_0, \phi_w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, 2(\bar{\tau}_{max} + \epsilon)}^\nu$ . Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H1) le retard et l'erreur d'estimation satisfont pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  les conditions

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{max} &\geq \bar{\tau}(t) \geq 0 & |\epsilon(t)| &\leq \epsilon_M \\ \sup \dot{\bar{\tau}}(t) &= \bar{\nu} < 1 & \sup |\dot{\epsilon}(t)| &= \dot{\epsilon}_M < 1 - \nu \end{aligned}$$

H2) il existe des matrices symétriques  $P, X, X_1, X_2$  définies positives telles que la LMI suivante soit vérifiée

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & PE & PE & PE \\ E^T P & -X & 0 & 0 \\ E^T P & 0 & -X_1 & 0 \\ E^T P & 0 & 0 & -X_2 \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_{11} \doteq P\underline{A}_1 + \underline{A}_1^T P + \frac{\epsilon_M^2}{1 - \bar{\nu}} \bar{A}_2^T X \bar{A}_2 + \frac{\epsilon_M^2}{(1 - \bar{\nu})^2} \bar{A}_{d1}^T X_1 \bar{A}_{d1} + \frac{\epsilon_M^2}{(1 - \bar{\nu} - \dot{\epsilon}_M)(1 - \bar{\nu})} \bar{A}_{d2}^T X_2 \bar{A}_{d2}$$

et  $\underline{A}_1 \doteq A_1(t_1)$ ,  $\bar{A}_2 \doteq A_2(t_2)$ ,  $\bar{A}_{d1} \doteq A_{d1}(t_3)$  et  $\bar{A}_{d2} \doteq A_{d2}(t_4)$ , où  $t_1 = \arg \{\max_t \lambda(A_1(t))\}$ ,  $t_2 = \arg \{\sup_t \|A_2(t)\|\}$ ,  $t_3 = \arg \{\sup_t \|A_{d1}(t)\|\}$ ,  $t_4 = \arg \{\sup_t \|A_{d2}(t)\|\}$ ,

alors le système ayant pour dynamique (4.2.3) est asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Cette démonstration est similaire à celle du lemme 4.2.1, aussi nous omettrons ici les détails de calcul.

Soit la fonction de Lyapunov-Krasovskii définie par

$$V(x, t) \doteq v_0(x) + \frac{\epsilon_M}{1 - \bar{\nu}} v_1(x, t) + \frac{\epsilon_M}{(1 - \bar{\nu})^2} v_2(x, t) + \frac{\epsilon_M}{(1 - \bar{\nu} - \dot{\epsilon}_M)(1 - \bar{\nu})} v_3(x, t)$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

avec

$$\begin{aligned}
 v_0(x, t) &\doteq x^T(t)Px(t) \\
 v_1(x, t) &\doteq \int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau}+\epsilon_M} \int_{t-\theta}^t x^T(s)\bar{A}_2^T X \bar{A}_2 x(s) ds d\theta \\
 v_2(x, t) &\doteq \int_{\bar{\tau}+\bar{\tau}_M}^{\bar{\tau}+\bar{\tau}_M+\epsilon_M} \int_{t-\theta}^t x^T(s)\bar{A}_{d1}^T X_1 \bar{A}_{d1} x(s) ds d\theta \\
 v_3(x, t) &\doteq \int_{\bar{\tau}+\bar{\tau}_M+\epsilon_M}^{\bar{\tau}+\bar{\tau}_M+2\epsilon_M} \int_{t-\theta}^t x^T(s)\bar{A}_{d2}^T X_2 \bar{A}_{d2} x(s) ds d\theta
 \end{aligned}$$

Après simplification, les dérivées des fonctions précédentes sont données par

$$\begin{aligned}
 \dot{v}_0(x, t) &\leq x^T(t)(PA_1 + A_1^T P)x(t) + \|x^T(t)PEX^{-1/2}\|^2 + \epsilon_M \int_{t-\bar{\tau}-\epsilon_M}^{t-\bar{\tau}} x^T(\theta)\bar{A}_2^T X \bar{A}_2 x(\theta) d\theta \\
 &+ \|x^T(t)PEX_1^{-1/2}\|^2 + \frac{\epsilon_M}{1-\bar{\nu}} \int_{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M-\epsilon_M}^{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M} x^T(\theta)\bar{A}_{d1}^T X_1 \bar{A}_{d1} x(\theta) d\theta \\
 &+ \|x^T(t)PEX_2^{-1/2}\|^2 + \frac{\epsilon_M}{1-\bar{\nu}-\dot{\epsilon}_M} \int_{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M-2\epsilon_M}^{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M-\epsilon_M} x^T(\theta)\bar{A}_{d2}^T X_2 \bar{A}_{d2} x(\theta) d\theta \\
 \dot{v}_1(x, t) &\leq \epsilon_M x^T(t)\bar{A}_2^T X \bar{A}_2 x(t) - (1-\bar{\nu}) \int_{t-\bar{\tau}-\epsilon_M}^{t-\bar{\tau}} x^T(s)\bar{A}_2^T X \bar{A}_2 x(s) ds \\
 \dot{v}_2(x, t) &\leq \epsilon_M x^T(t)\bar{A}_{d1}^T X_1 \bar{A}_{d1} x(t) - (1-\bar{\nu}) \int_{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M-\epsilon_M}^{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M} x^T(s)\bar{A}_{d1}^T X_1 \bar{A}_{d1} x(s) ds \\
 \dot{v}_3(x, t) &\leq \epsilon_M x^T(t)\bar{A}_{d2}^T X_2 \bar{A}_{d2} x(t) - (1-\bar{\nu}) \int_{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M-2\epsilon_M}^{t-\bar{\tau}-\bar{\tau}_M-\epsilon_M} x^T(s)\bar{A}_{d2}^T X_2 \bar{A}_{d2} x(s) ds
 \end{aligned}$$

L'expression finale de la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii est donc, après simplification des termes comportant une intégrale

$$\begin{aligned}
 \dot{V}(x, t) &= \dot{v}_0(x) + \frac{\epsilon_M}{1-\bar{\nu}} \dot{v}_1(x, t) + \frac{\epsilon_M}{(1-\bar{\nu})^2} \dot{v}_2(x, t) + \frac{\epsilon_M}{(1-\bar{\nu}-\dot{\epsilon}_M)(1-\bar{\nu})} \dot{v}_3(x, t) \\
 &\leq x^T(t) \left[ PA_1 + A_1^T P + PEX^{-1}E^T P + PEX_1^{-1}E^T P + PEX_2^{-1}E^T P \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\epsilon_M^2}{1-\bar{\nu}} \bar{A}_2^T X \bar{A}_2 + \frac{\epsilon_M^2}{(1-\bar{\nu})^2} \bar{A}_{d1}^T X_1 \bar{A}_{d1} + \frac{\epsilon_M^2}{(1-\bar{\nu}-\dot{\epsilon}_M)(1-\bar{\nu})} \bar{A}_{d2}^T X_2 \bar{A}_{d2} \right] x(t)
 \end{aligned}$$

L'hypothèse (H2) et l'application du complément de Schur nous garantissent la négativité de  $\dot{V}(x, t)$  et donc la stabilité de l'état.  $\square$

Le lemme précédent est appliqué à l'étude de stabilité de  $w(t)$  en utilisant

$$\begin{aligned}
 A_1(t) &= A - (1 + \dot{\delta}(t))e^{-A\bar{\delta}(t)}BK e^{A\bar{\delta}(t)}, \quad E = BK, \quad A_2(\theta) = (1 + \bar{\delta}'(\theta))(A - BK)e^{A\bar{\delta}(\theta)}, \\
 A_{d1}(\theta) &= BK e^{A\bar{\delta}(\theta-\bar{\tau}(\theta))}, \quad A_{d2}(\theta) = -BK e^{A\bar{\delta}(\theta-\bar{\tau}(\theta)-\epsilon(\theta))}.
 \end{aligned}$$

L'influence de  $\epsilon_M$  et de  $\dot{\epsilon}_M$  comme éléments déstabilisants apparaît explicitement dans le résultat obtenu, ainsi que l'effet du retard estimé et de sa dérivée. Il reste maintenant à combiner les deux résultats précédents afin d'aboutir au résultat final.

### 4.2.4 Synthèse finale

La sous-section précédente permet d'établir que si les hypothèses du lemme 4.2.2 sont vérifiées pour le système considéré, alors l'état  $w(t)$ , de condition initiale  $x_0$ , converge vers zéro. Nous pouvons donc en déduire que la loi de commande  $u(t)$  tend vers zéro en conséquence, ainsi que  $\mathcal{I}(t)$ , pour  $t$  suffisamment grand. L'influence de l'estimation du retard sur l'état du système n'est donc pas celle d'une perturbation persistante, comme supposé en début de section, mais s'annule avec le temps. Il en résulte que la boule contenant la norme de l'état, de rayon calculé dans le lemme 4.2.1, devient de plus en plus petite et que l'état converge vers zéro. Nous avons donc pu montrer la stabilité de l'état, dont les conditions précises sont synthétisées dans le théorème suivant.

**Théorème 4.2.3.** *Soit le système algébro-différentiel décrit par*

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}(t) = Ax(t) - BKe^{A\bar{\delta}(t-\tau)}x(t-\tau) - BK\mathcal{I}(t-\tau) \\ \dot{w}(t) = (A - (1 + \dot{\bar{\delta}})e^{-A\bar{\delta}}BKe^{A\bar{\delta}})w(t) \\ \quad + BK(e^{A\bar{\delta}(t-\bar{\tau})}w(t-\bar{\tau}) - e^{A\bar{\delta}(t-\tau)}w(t-\tau)) \\ \mathcal{I}(t) = \int_0^{\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta}Bu(t+\theta - \bar{\tau}(t+\theta))d\theta \\ u(t) = -Ke^{A\bar{\delta}(t)}w(t) \\ \bar{\delta}(t) = \bar{\tau}(t + \bar{\delta}(t)) \end{array} \right.$$

avec

$$x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [t_0 - \tau_{max}, t_0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \tau_{max}}^\nu$$

$$w(\theta) = \phi_w(\theta), \theta \in [t_0 - \max(\tau_{max}, \bar{\tau}_{max}), t_0], (t_0, \phi_w) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \max(\tau_{max}, \bar{\tau}_{max})}^\nu$$

$$u(\theta) = \phi_u(\theta), \theta \in [t_0 - \tau_{max} - \bar{\tau}_{max} - \sup(\bar{\delta}), t_0], (t_0, \phi_u) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \tau_{max} + \bar{\tau}_{max} + \sup(\bar{\delta})}^\nu$$

où  $\bar{\tau}(t)$  est l'estimée de  $\tau(t)$  et  $\epsilon(t)$  est l'erreur induite par cette approximation, définie par

$$\epsilon(t) = \tau(t) - \bar{\tau}(t)$$

Si les hypothèses suivantes sont vérifiées :

H1) le retard et l'erreur d'estimation satisfont pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  les conditions

$$\begin{array}{lll} \tau_{max} \geq \tau(t) \geq 0 & \bar{\tau}_{max} \geq \bar{\tau}(t) \geq 0 & |\epsilon(t)| \leq \epsilon_M \\ \dot{\tau}(t) \leq \nu < 1 & \dot{\bar{\tau}}(t) \leq \bar{\nu} < 1 & |\dot{\epsilon}(t)| \leq \dot{\epsilon}_M < 1 - \bar{\nu} \end{array}$$

H2) il existe des matrices symétriques  $P, X, X_1$  définies positives telles que la LMI suivante soit vérifiée

$$\left[ \begin{array}{ccc} PA_n + A_n^T P + (\bar{\tau}_M + \epsilon_M)^2 A^T X A + \frac{(\bar{\tau}_M + \epsilon_M)^2}{(1 - \bar{\nu} - \dot{\epsilon}_M)^2} \bar{A}_d^T X_1 \bar{A}_d & P \bar{A}_d & P \bar{A}_d \\ & \bar{A}_d^T P & -X & 0 \\ & \bar{A}_d^T P & 0 & -X_1 \end{array} \right] < 0$$

avec  $A_n = A - BKe^{A\bar{\tau}(t_1)}$ , où  $t_1 = \arg \{ \max_t \lambda(A - BKe^{A\bar{\tau}(t)}) \}$ , et  $\bar{A}_d = -BKe^{A\bar{\tau}_M}$ .

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

H3) il existe des matrices symétriques  $Q, Y, Y_1, Y_2$  définies positives telles que la LMI suivante soit vérifiée

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & QBK & QBK & QBK \\ (BK)^T Q & -Y & 0 & 0 \\ (BK)^T Q & 0 & -Y_1 & 0 \\ (BK)^T Q & 0 & 0 & -Y_2 \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_{11} \doteq Q\underline{A}_1 + \underline{A}_1^T Q + \frac{\epsilon_M^2}{1 - \bar{\nu}} \bar{A}_2^T Y \bar{A}_2 + \frac{\epsilon_M^2}{(1 - \bar{\nu})^2} \bar{A}_{d1}^T Y_1 \bar{A}_{d1} + \frac{\epsilon_M^2}{(1 - \bar{\nu} - \dot{\epsilon}_M)(1 - \bar{\nu})} \bar{A}_{d2}^T Y_2 \bar{A}_{d2}$$

$$\begin{aligned} \text{et } \underline{A}_1 &= A - (1 + \dot{\delta}(t_2)) e^{-A\bar{\delta}(t_2)} BK e^{A\bar{\delta}(t_2)}, \quad \text{où } t_2 = \\ \text{arg} \left\{ \max_t \lambda \left( A - (1 + \dot{\delta}(t)) e^{-A\bar{\delta}(t)} BK e^{A\bar{\delta}(t)} \right) \right\}, \quad \bar{A}_2 &= \left( \frac{1}{1 - \bar{\nu}} \right) (A - BK) e^{A\bar{\tau}_M}, \\ \bar{A}_{d1} &= BK e^{A\bar{\tau}_M} \text{ et } \bar{A}_{d2} = -BK e^{A\bar{\tau}_M}, \end{aligned}$$

alors le système considéré est asymptotiquement stable.

*Démonstration.* Ce théorème est une application directe des lemmes 4.2.1 et 4.2.2, où les hypothèses sont adaptées au système considéré. Leur combinaison est effectuée en suivant les principes mentionnés en début de cette sous-section, et les relations  $\tau_{max} \leq \bar{\tau}_M + \epsilon_M$ ,  $\nu \leq \bar{\nu}_M + \dot{\epsilon}_M$  et  $1 + \dot{\delta}(t) = \frac{1}{1 - \dot{\tau}(t + \bar{\delta})}$  sont utilisées afin de tout exprimer en terme de variables connues.  $\square$

### Remarques:

- L'existence d'une solution aux LMIs du théorème précédent nécessite que le système réponde aux critères détaillés dans le théorème 2.1.1.
- Le retard et sa dérivée apparaissent clairement comme termes déstabilisants dans le résultat précédent, où ils interviennent par l'intermédiaire de leur carré et dans la fonction exponentielle. Le fait que le prédicteur permette d'extraire le retard de la boucle n'apparaît cependant pas dans le calcul du retard maximum admissible.  $\diamond$

## 4.3 Méthode approchée

Compte tenu du conservatisme induit par la méthode exacte présentée précédemment, nous considérons ici le cas où le retard estimé sur la loi de commande peut être assimilé au retard exact du système, lors du calcul de l'intégrale. Plus précisément, nous supposons que

$$u(t) = -K e^{A\bar{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \bar{\tau}(\theta)) d\theta \right]$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

---

$$\simeq -Ke^{A\bar{\delta}(t)} \left[ x(t) + e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta))d\theta \right]$$

Cette hypothèse est motivée par le fait que, comme nous l'avons vu dans la section précédente, l'état reste borné en présence d'incertitude bornée sur sa dynamique et la dynamique de la loi de commande tend à se stabiliser.

Plus précisément, l'erreur induite est mise en évidence par la relation

$$\begin{aligned} e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \bar{\tau}(\theta))d\theta &= e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau(\theta))d\theta \\ &+ e^{At} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} B[u(\theta - \bar{\tau}(\theta)) - u(\theta - \tau(\theta))]d\theta \end{aligned}$$

La différence

$$u(\theta - \tau(\theta)) - u(\theta - \bar{\tau}(\theta)) \tag{4.3.1}$$

est supposée bornée, et le fait qu'elle soit intégrée sur un horizon borné d'amplitude maximale  $[0, \bar{\tau}_{max}]$  nous permet d'écrire

$$u(t) = -Kx(t + \bar{\delta}(t)) + \Delta_1(t)$$

où

$$\Delta_1(t) \doteq -Ke^{A(t+\bar{\delta}(t))} \int_t^{t+\bar{\delta}(t)} e^{-A\theta} B[u(\theta - \bar{\tau}(\theta)) - u(\theta - \tau(\theta))]d\theta$$

avec  $\Delta_1(t)$  borné. Le système bouclé résultant a pour dynamique

$$x'(t + \delta(t)) = Ax(t + \delta(t)) - BKx(t + \bar{\delta}(t)) + B\Delta_1(t)$$

et constitue donc un système à retard classique subissant une perturbation bornée. Nous pouvons donc conclure, grâce aux résultats obtenus dans le lemme 4.2.1, que si le système retardé non perturbé est stable alors la perturbation  $\Delta_1(t)$  déterminera le rayon de bornitude de l'état  $x(t + \delta(t))$  de façon proportionnelle mais ne déstabilisera pas le système.

Revenons maintenant sur la différence (4.3.1). Lorsque l'état se stabilise autour d'un point ou d'une région d'équilibre, la loi de commande va tendre naturellement vers des variations plus faibles, conduisant ainsi l'état plus proche du point d'équilibre (l'amplitude de la perturbation diminue ainsi que le rayon de la sphère contenant l'état). L'erreur d'estimation de la loi de commande induite par la différence temporelle entre les entrées du système va donc décroître avec le temps. Cette explication intuitive est difficile à démontrer rigoureusement, du fait de la présence de fonctionnelles dans la commande  $u(\cdot)$  qui induit un conservatisme dû plus à la méthode et aux outils disponibles qu'à la réalité des phénomènes physiques. En effet, la source principale d'instabilité vient de la différence entre l'horizon de prédiction idéal  $\delta(t)$  et celui estimé  $\bar{\delta}(t)$ , d'où l'objet spécifique

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

de cette section où nous négligeons l'erreur sur  $u(\cdot)$  pour mettre en valeur l'influence de l'erreur d'estimation du retard sur le système au travers de l'horizon de prédiction.

La loi de commande résultante de l'approximation proposée est donc

$$u(t) = -Kx(t + \bar{\delta}(t))$$

et le système bouclé a pour dynamique

$$\Sigma_o \begin{cases} x'(t + \delta(t)) &= Ax(t + \delta(t)) - BKx(t + \bar{\delta}(t)) \\ &= (A - BK)x(t + \delta(t)) + BK(x(t + \delta(t)) - x(t + \bar{\delta}(t))) \end{cases} \quad (4.3.2)$$

Notons que cette équation dynamique est identique à celle obtenue dans la sous-section 3.3.1. Cette formulation conduit donc à considérer l'erreur d'estimation sur le retard comme une erreur d'estimation de l'horizon de prédiction  $\delta(t)$ . Cependant, nous n'avons ici aucune garantie de convergence de l'erreur d'estimation, aussi chercherons-nous à utiliser des fonctionnelles plus précises lors des analyses de stabilité. Plusieurs méthodes seront présentées ici, à des fins de comparaison.

### 4.3.1 Analyse par fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii

Le premier résultat présenté est issu de la méthode proposée par [Kim, 2001] et utilisée dans la section précédente. Il convient tout d'abord de noter que la stabilité du système  $\Sigma_o$  peut être déduite de celle du système

$$\Sigma_t : \begin{cases} x'(\zeta) = A_{cl}x(\zeta) + BKA \int_{-\epsilon(t)}^0 x(\zeta + \theta)d\theta - (BK)^2 \int_{-2\epsilon(t)}^{-\epsilon(t)} x(\zeta + \theta)d\theta \\ x(\theta) = \phi(\theta), \theta \in [t_0 - 2\epsilon_M, t_0], (t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, 2\epsilon_M}^\nu \end{cases} \quad (4.3.3)$$

avec  $A_{cl} = A - BK$  et en définissant l'erreur d'approximation  $\epsilon(t) = \delta(t) - \bar{\delta}(t)$ . La stabilité de  $\Sigma_t$  est ensuite obtenue par le lemme suivant

**Lemme 4.3.1.** *Soit le système décrit par 4.3.3. Si les conditions suivantes sont vérifiées :*

A1) *le retard et l'erreur d'estimation satisfont pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$  les conditions*

$$\begin{aligned} \bar{\tau}_{max} \geq \bar{\tau}(t) \geq 0 & & |\epsilon(t)| \leq \epsilon_M \\ \sup \dot{\bar{\tau}}(t) = \bar{\nu} < 1 & & \sup |\dot{\epsilon}(t)| = \dot{\epsilon}_M < 1 - \bar{\nu} \end{aligned}$$

A2) *il existe des matrices symétriques  $P, X, X_1$  définies positives telles que la LMI suivante ait une solution*

$$\begin{bmatrix} \mathcal{M}_{11} & PBK & P(BK)^2 \\ (BK)^T P & -X & 0 \\ ((BK)^2)^T P & 0 & -X_1 \end{bmatrix} < 0$$

avec

$$\mathcal{M}_{11} = PA_{cl} + A_{cl}^T P + \epsilon_M^2(1 + \nu)A_{cl}^T X A_{cl} + \epsilon_M^2 \frac{1 + \nu}{1 - \dot{\epsilon}_M} X_1$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

alors l'état du système considéré est stable.

*Démonstration.* Soit la fonction de Lyapunov-Krasovskii définie par

$$V(x, \zeta) \doteq v_0(x, \zeta) + \frac{\epsilon_M}{1 + \dot{\delta}_m} v_1(x, \zeta) + \frac{\epsilon_M}{(1 + \dot{\delta}_m)(1 - \dot{\epsilon}_M)} v_2(x, \zeta)$$

avec

$$\begin{aligned} v_0(x, \zeta) &\doteq x^T(\zeta) P x(\zeta) \\ v_1(x, \zeta) &\doteq \int_{-\delta}^{-\delta + \epsilon_M} \int_{\zeta - \theta}^{\zeta} x^T(s) A_{cl}^T X A_{cl} x(s) ds d\theta \\ v_2(x, \zeta) &\doteq \int_{-\delta + \epsilon_M}^{-\delta + 2\epsilon_M} \int_{\zeta - \theta}^{\zeta} x^T(s) X_1 x(s) ds d\theta \end{aligned}$$

Après simplification, les dérivées des fonctions précédentes sont données par

$$\begin{aligned} v_0'(x, \zeta) &\leq x^T(\zeta) (P A_{cl} + A_{cl}^T P) x(\zeta) + \|x^T(\zeta) P B K X^{-1/2}\|^2 + \epsilon_M \int_{\zeta + \delta - \epsilon_M}^{\zeta + \delta} x^T(\theta) A_{cl}^T X A_{cl} x(\theta) d\theta \\ &\quad + \|x^T(\zeta) P (B K)^2 X_1^{-1/2}\|^2 + \frac{\epsilon_M}{1 - \dot{\epsilon}_M} \int_{\zeta + \delta - 2\epsilon_M}^{\zeta + \delta - \epsilon_M} x^T(\theta) X_1 x(\theta) d\theta \\ v_1'(x, \zeta) &\leq \epsilon_M x^T(\zeta) A_{cl}^T X A_{cl} x(\zeta) - (1 + \dot{\delta}_M) \int_{\zeta + \delta - \epsilon_M}^{\zeta + \delta} x^T(\theta) A_{cl}^T X A_{cl} x(\theta) d\theta \\ v_2'(x, \zeta) &\leq \epsilon_M x^T(\zeta) X_1 x(\zeta) - (1 + \dot{\delta}_M) \int_{\zeta + \delta - 2\epsilon_M}^{\zeta + \delta - \epsilon_M} x^T(\theta) X_1 x(\theta) d\theta \end{aligned}$$

L'expression finale de la dérivée de la fonction de Lyapunov-Krasovskii est donc, après simplification des termes comportant une intégrale

$$\begin{aligned} V'(x, \zeta) &= v_0'(x, \zeta) + \frac{\epsilon_M}{1 + \dot{\delta}_m} v_1'(x, \zeta) + \frac{\epsilon_M}{(1 + \dot{\delta}_m)(1 - \dot{\epsilon}_M)} v_2'(x, \zeta) \\ &\leq x^T(\zeta) \left[ P A_{cl} + A_{cl}^T P + P B K X^{-1} (B K)^T P + P (B K)^2 X_1^{-1} ((B K)^2)^T P \right. \\ &\quad \left. + \frac{\epsilon_M^2}{1 + \dot{\delta}_m} A_{cl}^T X A_{cl} + \frac{\epsilon_M^2}{(1 + \dot{\delta}_m)(1 - \dot{\epsilon}_M)} X_1 \right] x(\zeta) \end{aligned}$$

La LMI du lemme précédent et l'application du complément de Schur nous garantissent la négativité de  $V'(x, \zeta)$  et donc la stabilité de l'état.  $\square$

**Remarque 4.3.1.** Pour un système subissant un retard de dynamique donnée et une variation maximale de l'erreur connue, nous pouvons déterminer l'erreur maximale admissible en reformulant la LMI du lemme 4.3.1 comme un problème de valeur propre généralisée. En effet le but est, connaissant  $\nu$  et  $\dot{\epsilon}_M$ , de trouver  $\epsilon_M$  répondant au problème d'optimisation



## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

minimiser  $\frac{1}{\epsilon_M^2}$  tel que  $\frac{1}{\epsilon_M^2}B(x) - A(x) > 0$ ,  $B(x) > 0$ ,  $C(x) > 0$ , avec

$$\begin{aligned} B(x) &\doteq \begin{bmatrix} PA_{cl} + A_{cl}^T P & -PBK & -P(BK)^2 \\ -(BK)^T P & X & 0 \\ -((BK)^2)^T P & 0 & X_1 \end{bmatrix} \\ A(x) &\doteq \text{diag} \left( (1 + \nu)A_{cl}^T X A_{cl} + \frac{1 + \nu}{1 - \dot{\epsilon}_M} X_1, 0, 0 \right) \\ C(x) &\doteq \text{diag}(P, X, X_1) \end{aligned}$$

◇

Cette approche est maintenant illustrée par l'exemple suivant.

### Exemple 4.3.1

Nous considérons ici la stabilisation à distance du pendule inversé, dont la dynamique a été présentée dans l'exemple 3.3.1, par l'intermédiaire du réseau décrit dans l'exemple 1.4.2. La dérivée maximum du retard est de  $\nu = 0.6167$  et nous évaluons l'erreur maximale d'estimation admissible telle que la stabilité puisse être déduite du lemme 4.3.1. Le problème d'optimisation proposé dans la remarque 4.3.1 est résolu grâce au logiciel de résolution numérique *LMI toolbox* de *Matlab*<sup>®</sup> et le résultat obtenu est présenté dans la figure 4.1, où la dépendance de l'erreur en sa dérivée est mise en évidence. Le cas où  $\nu = 0$  (retard constant) est aussi pris en compte.

Cet exemple illustre bien la perte de robustesse due au caractère temps variant du retard, au travers des termes  $\nu$  et  $\dot{\epsilon}_M$ . En effet, l'erreur maximale admissible  $\epsilon_M$  est inversement proportionnelle aux dérivées  $\nu$  et  $\dot{\epsilon}_M$ .

### 4.3.2 Approximation du retard temps variant

L'approche considérée dans cette sous-section est de type *petit gain*, telle que proposée dans [Gu et al., 2003], chapitre 8. Elle consiste à réécrire le système (4.3.2) en faisant apparaître la valeur moyenne, *temps-invariante*, de l'erreur  $\epsilon_a$  grâce à la relation

$$x(t - \epsilon(t)) = x(t - \epsilon_a) - \int_{t - \epsilon(t)}^{t - \epsilon_a} \dot{x}(\theta) d\theta$$

Le système ainsi obtenu a pour dynamique

$$x'(\zeta) = Ax(\zeta) - BKx(\zeta - \epsilon_a) + BK \int_{\zeta - \epsilon(t)}^{\zeta - \epsilon_a} [Ax(\theta) - BKx(\theta - \epsilon(\theta))] d\theta$$

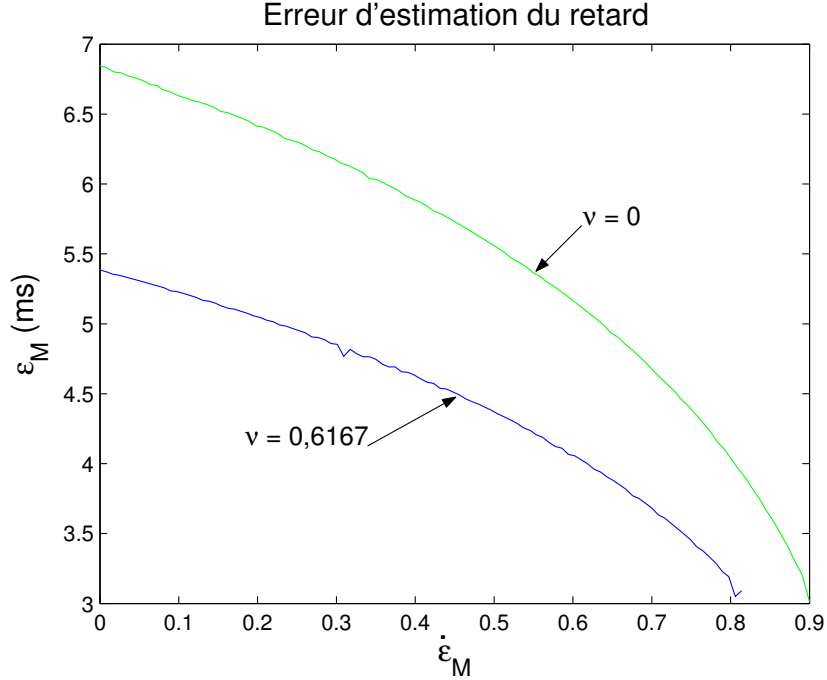
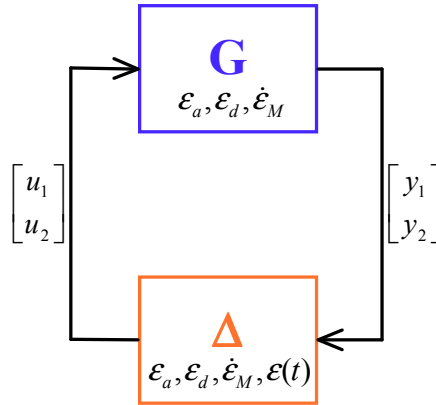


FIG. 4.1 – Erreur maximale d'estimation admissible.



avec  $x(\theta) = \phi(\theta)$ ,  $\theta \in [t_0 - \epsilon_M, t_0]$ ,  $(t_0, \phi) \in \mathbb{R}^+ \times \mathcal{C}_{n, \epsilon_M}^\nu$ . Le terme intégral du système précédent est considéré comme une incertitude et le système en boucle fermée peut être réécrit sous la forme

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \Delta \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

avec les systèmes  $G$  et  $\Delta$  présentés figure 4.3.2 définis par

$$G : \begin{cases} x'(\zeta) = Ax(\zeta) - BKx(\zeta - \epsilon_a) + \epsilon_d BK u_2(\zeta) \\ y_1(t) = \frac{1}{\sqrt{1 - \dot{\epsilon}_M}} x(t) \\ y_2(t) = Ax(t) - BK u_1(t) \end{cases} \quad (4.3.4)$$

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

$$\Delta : \begin{cases} u_1(t) = \Delta_1 y_1(t) = \sqrt{1 - \dot{\epsilon}_M} y_1(t - \epsilon(t)) \\ u_2(t) = \Delta_2 y_2(t) = \frac{1}{\epsilon_d} \int_{t-\epsilon(t)}^{t-\epsilon_a} y_2(\theta) d\theta \end{cases} \quad (4.3.5)$$

où  $\epsilon_d \doteq \max\{\epsilon_M - \epsilon_a; \epsilon_a - \epsilon_m\}$ . Il est montré dans [Gu et al., 2003], sous-section 8.6.1, que

$$\gamma_0(\Delta_k X_k) \leq 1, \text{ pour toute matrice non-singulière } X_k \in \mathbb{R}^{n \times n}, k = 1, 2,$$

avec  $\gamma_0(H)$  le gain du système considéré et  $H_X$  le nouveau système, définis respectivement par

$$\gamma_0(H) = \inf\{\gamma \mid \|Hf\|_2 \leq \gamma \|f\|_2 \text{ pour tout } f \in L_{2+}\}, \text{ et} \\ H_X f = XH(X^{-1}f).$$

où  $L_{2+}$  représente l'ensemble de toutes les fonctions  $f : \overline{\mathbb{R}}_+ \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $\overline{\mathbb{R}}$  étant l'ensemble clos des réels, dont le carré est intégrable, i.e.,  $\int_0^\infty \|f(t)\|^2$  est bien défini et fini. Nous pouvons ensuite conclure sur la stabilité du système (4.3.2) en appliquant la proposition suivante.

**Proposition 4.3.2.** [Gu et al., 2003] *La stabilité entrée-sortie du système décrit par (4.3.2) est assurée si le problème étalonné -scaled- du petit gain*

$$\gamma_0(G_X) < 1 \text{ pour } X = \text{diag}(X_1 \ X_2), X_1, X_2 \in \mathbb{R}^{n \times n} \text{ non singulière}$$

*a une solution, où  $G$  est décrit par (4.3.4).*

Il reste donc à trouver les conditions suffisantes que doit satisfaire l'erreur d'estimation pour assurer que le gain du système  $G$  soit borné par un. Ceci est effectué avec la proposition suivante, qui synthétise différents résultats de [Gu et al., 2003] et l'utilisation d'une discrétisation de la fonctionnelle de Lyapunov à paramètres variables.

**Proposition 4.3.3.** *Soit le système  $G$  décrit par*

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t - r) + Eu(t) \\ y(t) &= G_0 x(t) + G_1 x(t - r) + Du(t), \end{aligned}$$

*un ensemble donné de matrices nonsingulières  $\mathcal{X}$ , et  $\mathcal{Z} \doteq \{X^T X \mid X \in \mathcal{X}\}$ . Il existe un  $X \in \mathcal{X}$  tel que  $\gamma_0(G_X) < 1$  si il existe un  $Z \in \mathcal{Z}$ , des matrices réelles  $P = P^T$ ,  $Q_p$ ,  $S_p$ ,  $R_{pq} = R_{qp}^T$ ,  $p = 0, 1, \dots, N$ ,  $q = 0, 1, \dots, N$  tels que les LMI suivantes sont satisfaites :*

$$\begin{pmatrix} P & \tilde{Q} \\ \tilde{Q}^T & \tilde{R} + \tilde{S} \end{pmatrix} > 0 \\ \begin{pmatrix} \tilde{\Delta} & -\tilde{D}^s & -\tilde{D}^a \\ -\tilde{D}^{sT} & R_d + S_d & 0 \\ -\tilde{D}^{aT} & 0 & 3S_d \end{pmatrix} > 0$$

où

$$\begin{aligned}
 \tilde{Q} &\doteq (Q_0 \ Q_1 \ \dots \ Q_N), \quad \tilde{S} \doteq \frac{1}{h} \text{diag}(S_0 \ S_1 \ \dots \ S_N) \\
 \tilde{R} &\doteq \begin{pmatrix} R_{00} & R_{01} & \dots \\ R_{01}^T & \ddots & \\ \vdots & & R_{NN} \end{pmatrix}, \quad h = \frac{r}{N} \\
 \tilde{\Delta} &\doteq \begin{pmatrix} \Delta_{00} & Q_N - PA_1 - G_0^T ZG_1 & -PE - G_0^T ZD \\ (*) & S_N - G_1^T ZG_1 & -G_1^T ZD \\ (*) & (*) & Z - D^T ZD \end{pmatrix} \\
 \Delta_{00} &\doteq -PA_0 - A_0^T P - Q_0 - Q_0^T - S_0 - G_0^T ZG_0 \\
 \tilde{D}^s &\doteq (D_1^s \ \dots \ D_N^s) \\
 D_p^s &\doteq \begin{pmatrix} \frac{h}{2} A_0^T (Q_{p-1} + Q_p) + \frac{h}{2} (R_{0,p-1} + R_{0,p}) - (Q_{p-1} - Q_p) \\ \frac{h}{2} A_1^T (Q_{p-1} + Q_p) - \frac{h}{2} (R_{N,p-1} + R_{N,p}) \\ \frac{h}{2} E^T (Q_{p-1} + Q_p) \end{pmatrix} \\
 \tilde{D}^a &\doteq (D_1^a \ \dots \ D_N^a) \\
 D_p^a &\doteq \frac{h}{2} \begin{pmatrix} -A_0^T (Q_{p-1} - Q_p) - (R_{0,p-1} - R_{0,p}) \\ -A_1^T (Q_{p-1} - Q_p) + (R_{N,p-1} - R_{N,p}) \\ E^T (Q_p - Q_{p-1}) \end{pmatrix} \\
 R_d &\doteq \begin{pmatrix} R_{d11} & R_{d12} & \dots \\ R_{d12}^T & \ddots & \\ \vdots & & R_{dNN} \end{pmatrix}, \quad R_{dpq} \doteq h(R_{p-1,q-1} - R_{pq}) \\
 S_d &\doteq \text{diag}(S_{d1} \ S_{d2} \ \dots \ S_{dN}), \quad S_{dp} \doteq S_{p-1} - S_p
 \end{aligned}$$

La proposition précédente est appliquée au système considéré en utilisant  $h = \frac{\epsilon_a}{N}$  et

$$\begin{cases} A_0 = A, & A_1 = -BK, & E = [0_{n \times n} \ \epsilon_d BK] \\ G_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ \sqrt{1 - \dot{\epsilon}_M} I_n \\ A \end{bmatrix}, & G_1 = 0_{2n \times n}, & D = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & 0_{n \times n} \\ -BK & 0_{n \times n} \end{bmatrix} \end{cases} \quad (4.3.6)$$

Ce résultat permet donc d'obtenir l'erreur moyenne d'estimation du retard admissible, pour une valeur ainsi qu'une variation maximale donnée. Nous pouvons, par exemple, prendre  $\epsilon_d = 2\epsilon_a$ .

**Remarque.** Notons ici que la contrainte d'existence d'une solution suppose que  $\dot{\epsilon}_M < 1$  et non  $\dot{\epsilon}_M < 1 - \bar{\nu}$  comme dans la sous-section précédente. De plus l'utilisation d'une

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

fonction de Lyapunov-Krasovskii à paramètres variables du type ([Gu et al., 2003], p.290)

$$V(t, \phi) = \phi^T(0)P\phi(0) + 2\phi^T(0) \int_{-r}^0 Q(\xi)\phi(\xi)d\xi + \int_{-r}^0 \left[ \int_{-r}^0 \phi^T(\xi)R(\xi, \eta)\phi(\eta)d\eta \right] d\xi + \int_{-r}^0 \phi^T(\xi)S(\xi)\phi(\xi)d\xi$$

permet d'obtenir des résultats beaucoup moins conservateurs que ceux obtenus avec des fonctions de Lyapunov à paramètres constants.  $\diamond$

La méthode développée dans cette sous-section est illustrée par l'exemple suivant.

### Exemple 4.3.2

Pour le pendule inversé en "T" décrit précédemment, nous appliquons le résultat décrit dans la proposition 4.3.3 avec les paramètres (4.3.6). La valeur moyenne de l'estimation ainsi que sa variation maximale sont présentées dans le tableau ci-dessous.

$\dot{\epsilon}_M$	0.00	0.09	0.18	0.27	0.36	0.45	0.54	0.63	0.72	0.81	0.90
$\epsilon_a(ms)$	8.1	7.8	7.6	7.3	7.0	6.7	6.3	5.8	5.2	4.4	3.4

Ces résultats sont clairement moins pessimistes que ceux présentés dans l'exemple 4.3.1, d'autant que la valeur maximale considérée ici est le double de la valeur moyenne  $\epsilon_a$ .

Nous vérifions maintenant que le système se stabilise avec l'erreur estimée. En partant du principe que la variation maximum de l'erreur d'estimation est identique à celle du retard, nous choisissons  $\dot{\epsilon}_M = 0.6167$ , ce qui donne  $\epsilon_a = 5.9ms$ . Nous considérons une erreur de type sinusoïdal

$$\epsilon(t) = \epsilon_a + \epsilon_a \sin\left(\frac{\dot{\epsilon}_M}{\epsilon_a} t\right)$$

et étudions la réponse du système lorsque

$$\tau(t) = \bar{\tau}(t) + \epsilon(t) \quad \text{et} \quad \tau(t) = \bar{\tau}(t) - \epsilon(t)$$

La réponse du système à une condition initiale non nulle est présentée dans la figure 4.2(a) lorsque l'erreur est ajoutée au retard estimé et dans la figure 4.2(b) lorsqu'elle est soustraite. Le retard oscillant  $\tau(t)$  est celui subit par les informations transitant du contrôleur au système alors que l'estimation  $\bar{\tau}(t)$  est utilisée pour calculer l'horizon de prédiction. Cette simulation montre la capacité du système à se stabiliser lorsque le retard est estimé avec une erreur satisfaisant les conditions établies dans cette sous-section (répondant aux critères  $\epsilon_a$ ,  $\epsilon_d$  et  $\dot{\epsilon}_M$ ). Notons que le système devient oscillant et ne se stabilise pas lorsque  $\epsilon_a$  est augmentée de  $2ms$  (non représenté ici), ce qui illustre l'optimisme de la méthode proposée.

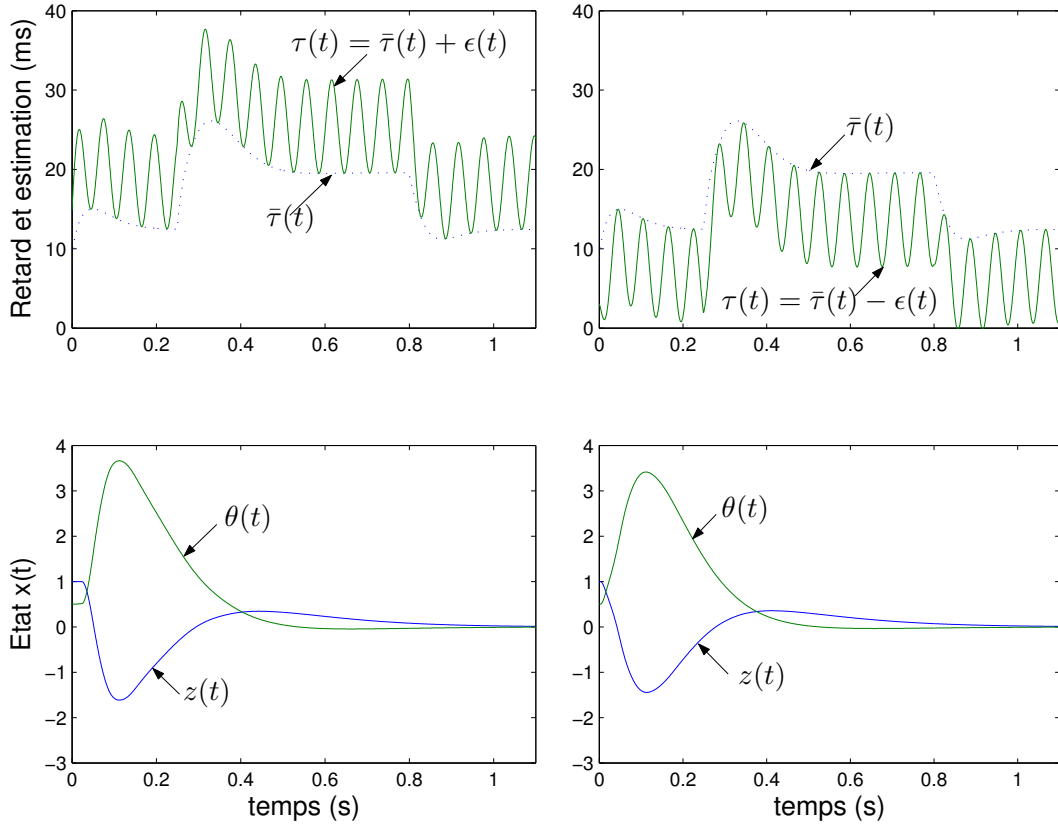


FIG. 4.2 – Influence de l'erreur d'estimation du retard.

**Remarque.** Les résultats numériques obtenus pour les différentes méthodes de calcul des fonctions de Lyapunov-Krasovskii peuvent être mis en parallèle en comparant les erreurs maximales admissibles résultantes. Ceci est effectué dans le tableau suivant, en prenant par exemple  $\dot{\epsilon}_M = 0.36$ .

Méthode	Exemple	$\epsilon_M$
Système transformé et complément des carrés	3.3.1	2.3 ms
[Kim, 2001]	4.3.1	6 ms pour $\nu = 0$
Approche type petit gain [Gu et al., 2003]	4.3.2	14 ms pour $\epsilon_a = 7 ms$

La dernière approche est donc nettement moins conservatrice, notamment grâce à la fonction de Lyapunov-Krasovskii à paramètres variables de [Gu et al., 2003].  $\diamond$

### Synthèse

Nous avons étudié dans ce chapitre l'influence d'une erreur d'estimation du retard induite par le réseau sur la loi de commande proposée. Ce problème, connu comme source d'instabilité pour le prédicteur de Smith et abordé pour le prédicteur d'état dans le cas

## Chapitre 4. Analyse de Robustesse vis-à-vis d'Incertitudes sur le Retard

---

de retards constants, n'avait pas été pris en compte pour le retard variable. Le réseau induisant de fortes variations sur le retard, nous avons établi un critère de robustesse permettant de prendre en compte ces dernières de manière explicite. La difficulté de ce problème est qu'il implique l'analyse de stabilité d'un système algébro-différentiel.

Une première approche exacte nous a conduit à un résultat conservateur, mais a permis d'établir certaines propriétés du système justifiant les hypothèses de simplifications utilisées dans la seconde approche. La seconde méthode (approchée) conduit à un critère peu conservateur (d'après les simulations) prenant en compte l'erreur d'estimation ainsi que sa variation maximale. Le compromis entre un gain important et la robustesse vis-à-vis du retard apparaît aussi clairement dans ce résultat.

Pour finir, différentes méthodes d'analyse par fonction de Lyapunov-Krasovskii ont été considérées, nous permettant de conclure sur la pertinence d'utiliser une fonction à paramètres variables [Gu et al., 2003] dans le cadre de l'étude de robustesse de systèmes à retard.

*[...] il n'y a que deux voies pour penser un accord nécessaire de l'expérience avec les concepts de ses objets : ou bien l'expérience rend possible ces concepts, ou ces concepts rendent possible l'expérience.*

Emmanuel Kant, 1781.

[Kant, 1990]





# Chapitre 5

## Application et Expérimentation

Afin de considérer la mise en œuvre de la loi de commande proposée précédemment pour la stabilisation à distance de systèmes réels, nous aborderons tout d'abord dans ce chapitre le problème de poursuite de trajectoire par retour de sortie. L'utilisation du prédicteur à horizon variable sera étendue au cas du retard variable sur les deux canaux, à l'observation et à la poursuite de trajectoire. Nous détaillerons ensuite l'élaboration d'un banc d'essai expérimental permettant d'effectuer la stabilisation du pendule inversé en  $T$  en présence de retards variables pour finir sur les résultats expérimentaux.

### 5.1 Poursuite de trajectoire par retour de sortie

La loi de commande basée sur un prédicteur à horizon variable développée dans les chapitres précédent est utilisée ici afin d'effectuer une poursuite de trajectoire à partir d'un retour de sortie. La classe de systèmes considérée est donc décrite par

$$\begin{cases} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau(t)) \\ y(t) &= Cx(t) \end{cases} \quad (5.1.1)$$

La trajectoire désirée  $y_d(t)$  est supposée continûment dérivable et bornée. Nous introduirons aussi un second retard, entre les capteurs et la loi de commande, afin de prendre en compte le fait que la présence du réseau entre le système et la loi de commande induit un retard sur les deux canaux de communication.

Nous verrons tout d'abord l'effet du retard introduit sur le second canal, avec notamment l'extension de l'horizon de prédiction nécessaire à sa compensation. La seconde sous-section abordera le problème du retour de sortie, avec l'élaboration d'un observateur de l'état retardé, nécessaire à la mise en œuvre du prédicteur. La poursuite de trajectoire sera abordée en fin de chapitre.

### 5.1.1 Retard sur les deux canaux

Nous considérons dans cette sous-section le cas du retour d'état, la stabilisation par retour de sortie étant traitée dans la section suivante, en introduisant un observateur.

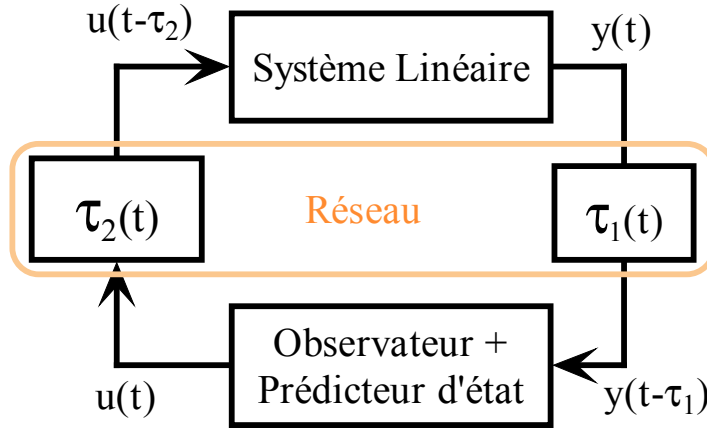


FIG. 5.1 – Réseau avec retard sur les deux canaux.

Les résultats précédents sont étendus au problème du retard sur les deux canaux, illustré par la figure 5.1 en considérant l'état retardé  $x(t - \tau_1(t))$  comme signal de retour. L'objectif de commande est d'assigner la loi de commande

$$v(t + \delta(t)) = -Kx(t + \delta(t))$$

telle que le système en boucle fermée s'écrive sous la forme

$$x'(t + \delta(t)) = (A - BK)x(t + \delta(t))$$

Si cet objectif est atteint, alors les propriétés de stabilité sont identiques à celles obtenues par le lemme 3.1.2 et le corollaire 3.1.3.

Dans le cas du retard double canal, la prédiction de  $x(t + \delta(t))$  s'effectue par intégration entre  $t - \tau_1(t)$  et  $t + \delta(t)$  (au lieu de l'intégration entre  $t$  et  $t + \delta(t)$  comme c'était le cas avec un seul canal retardé). Ainsi

$$x(t + \delta(t)) = e^{A(\delta(t) + \tau_1(t))}x(t - \tau_1(t)) + e^{A(t + \delta(t))} \int_{t - \tau_1(t)}^{t + \delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau_2(\theta))d\theta$$

ce qui, associé à la définition de  $v(\cdot)$  donnée plus haut, conduit à la loi de commande suivante

$$u(t + \delta(t) - \tau_2(t + \delta(t))) = -Kx(t + \delta(t)) \quad (5.1.2)$$

En utilisant la même définition pour  $\delta(t)$  que celle donnée par l'équation

$$\delta(t) - \tau_2(t + \delta(t)) = 0 \quad (5.1.3)$$

## Chapitre 5. Application et Expérimentation

---

les contraintes de causalité sur la loi de commande sont satisfaites. Celle-ci peut donc s'écrire sous la forme

$$u(t) = -Ke^{A(\delta(t)+\tau_1(t))}x(t - \tau_1(t)) - Ke^{A(t+\delta(t))} \int_{t-\tau_1(t)}^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau_2(\theta))d\theta \quad (5.1.4)$$

L'expression précédente est *explicite* du fait que l'intégrale utilise l'information passée de commande dans la fenêtre temps variante,

$$[\{t - \tau_1(t) - \tau_2(t - \tau_1(t))\}, \{t + \delta(t) - \tau_2(t + \delta(t))\}]$$

ce qui donne, après utilisation de la définition de  $\delta(t)$ ,

$$[t - \tau_1(t) - \tau_2(t - \tau_1(t)), t]$$

### Remarques:

- Pour la mise en œuvre de la loi de commande (5.1.4), il est nécessaire de garder l'historique des entrées de commande passée sur l'intervalle temporel  $[t - \tau_1(t) - \tau_2(t - \tau_1(t)), t]$  et de calculer  $\delta(t)$ . Afin que ce soit possible, il est nécessaire d'avoir un modèle pour les deux retards permettant de calculer leur solutions et de prédire  $\tau_2(t)$  pour résoudre (5.1.3).
- La différence principale entre ce résultat et le précédent concernant le retard sur un seul canal est l'extension de l'horizon de prédiction. Ceci retarde l'instant auquel la loi de commande peut être complètement mise en œuvre de  $\tau_1(t)$ . Les propriétés de stabilité en boucle fermée sont similaires à celles du cas du retard simple canal.  $\diamond$

La contribution principale de cette sous-section est résumée dans le théorème suivant

**Théorème 5.1.1.** *Soit le système décrit par l'équation différentielle*

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau_2(t))$$

avec  $(A, B)$  commandable. Si la dynamique des retards est telle que les conditions suivantes sont satisfaites pour  $\tau_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \geq 0$  :

$$A1) \quad 0 \leq \tau_i(t) \leq \tau_i^{max} < \infty,$$

$$A2) \quad \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\dot{\tau}_i(t)| = \nu_i < 1$$

Alors la loi de commande par retour d'état (5.1.4) assure que l'état  $x(t)$  converge exponentiellement vers zéro.

*Démonstration.* La démonstration de ce théorème est similaire à celle du lemme 3.1.2.  $\square$

### Exemple 5.1.1

Nous considérons dans cet exemple la stabilisation du pendule inversé en "T"

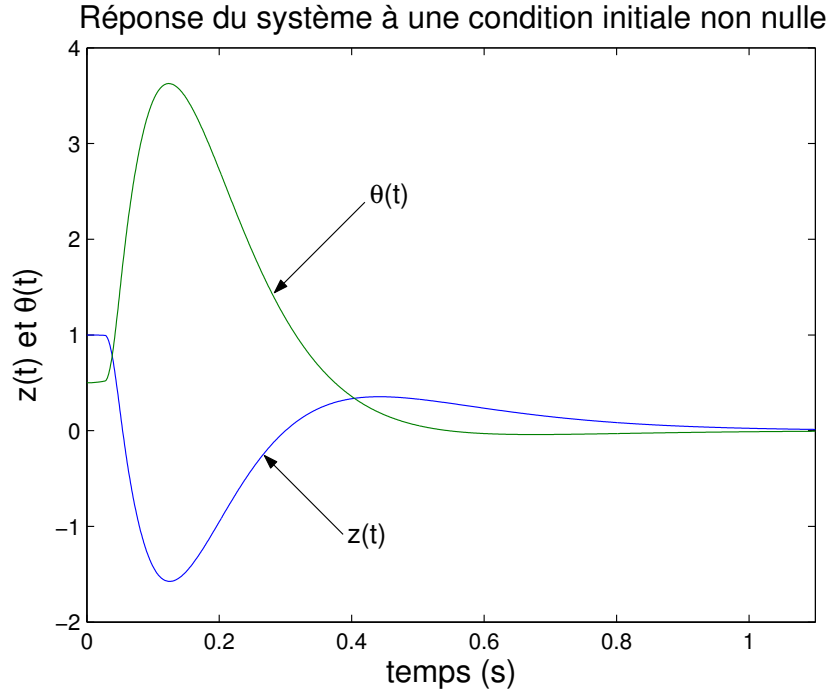


FIG. 5.2 – Stabilisation pour un retard sur les deux canaux.

au travers du réseau TCP. Les deux canaux de communication subissent le retard induit par ce réseau et décrit dans l'exemple 1.4.2, aussi nous avons

$$\tau_1(t) = \tau_2(t)$$

La loi de commande est décrite par (5.1.4) et la réponse du système à une condition initiale non nulle est présentée dans la figure 5.2. Cette simulation montre l'efficacité de la loi de commande proposée pour stabiliser un système par le biais d'un réseau induisant un retard sur les deux canaux de communication

### 5.1.2 Observateur

Afin de relaxer l'hypothèse que l'état complet est mesurable, le but de cette sous-section est d'établir une loi de commande basée sur un observateur. Cette approche nous permet d'étendre les résultats obtenus aux systèmes ayant une paire  $(A, C)$  observable, ou tout du moins détectable. L'état de l'observateur<sup>1</sup>  $\hat{x}(t - \tau_1)$  est utilisé pour évaluer la partie dépendante de l'état  $x(t - \tau_1)$  nécessaire au calcul de la loi de commande. Nous

<sup>1</sup>Afin de simplifier les notations, la dépendance temporelle des fonctions  $\tau_1(t)$ ,  $\tau_2(t)$  et  $\delta(t)$  sera omise. Par la suite, les notations  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  et  $\delta$  seront utilisées à la place.

## Chapitre 5. Application et Expérimentation

---

introduisons l'observateur d'état de Luenberger suivant pour le système (1.4.1)-(1.4.2) :

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t - \tau_1) &= A\hat{x}(t - \tau_1) + Bu(t - \tau_1 - \tau_2(t - \tau_1)) \\ &\quad + H\{y(t - \tau_1) - C\hat{x}(t - \tau_1)\}\end{aligned}$$

L'erreur d'observation résultante

$$\epsilon(t - \tau_1) = x(t - \tau_1) - \hat{x}(t - \tau_1)$$

a pour dynamique

$$\begin{aligned}\dot{\epsilon}(t - \tau_1) &= \dot{x}(t - \tau_1) - \dot{\hat{x}}(t - \tau_1) = (A - HC)\epsilon(t - \tau_1) \\ &= \hat{A}_{cl}\epsilon(t - \tau_1)\end{aligned}$$

La loi de commande est exprimée comme une fonction de l'état observé retardé  $\hat{x}(t - \tau_1)$  avec

$$\begin{aligned}u(t) &= -K [e^{A(\delta+\tau_1)}\hat{x}(t - \tau_1) + I(t)] \\ &= -K [e^{A(\delta+\tau_1)}x(t - \tau_1) - e^{A(\delta+\tau_1)}\epsilon(t - \tau_1) + I(t)]\end{aligned}$$

où  $I(t)$  est la partie intégrale de la loi de commande et  $\hat{A}_{cl} = A - HC$  est une matrice dont on peut fixer les valeurs propres (grâce à la propriété d'observabilité du système). Ainsi, la dynamique complète du système en boucle fermée est

$$\begin{aligned}\dot{x}(t + \delta(t)) &= A_{cl}x(t + \delta(t)) + BK e^{A(\delta+\tau_1)}\epsilon(t - \tau_1) \\ \dot{\epsilon}(t - \tau_1) &= \hat{A}_{cl}\epsilon(t - \tau_1)\end{aligned}$$

La stabilité de ce système est garantie par le lemme suivant.

**Lemme 5.1.2.** *Soit le système*

$$\dot{x}(\zeta_1) = A_{cl}x(\zeta_1) + BK e^{A(\delta+\tau_1)}\epsilon(\zeta_2) \quad (5.1.5)$$

$$\dot{\epsilon}(\zeta_2) = \hat{A}_{cl}\epsilon(\zeta_2) \quad (5.1.6)$$

où  $\zeta_1 = t + \delta(t)$ ,  $\zeta_2 = t - \tau_1$ , pour  $t \geq 0$  et  $\delta(0) = \delta_0$ . Si les conditions suivantes sont satisfaites

- i)  $A_{cl}$  et  $\hat{A}_{cl}$  sont des matrices de Hurwitz,
- ii) les retards  $\tau_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \geq 0$  sont tels que

$$\begin{aligned}0 \leq \tau_i(t) &\leq \tau_i^{max} < \infty \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\dot{\tau}_i(t)| &= \nu_i < 1\end{aligned}$$

alors,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t + \delta(t))\| = 0, \quad \forall t \geq \delta_0$$

pour toute valeur bornée de  $\epsilon(\delta_0)$ . De plus,  $\epsilon(t)$  converge de manière exponentielle.

## Chapitre 5. Application et Expérimentation

---

*Démonstration.* Ce résultat s'obtient en utilisant le lemme 3.1.2 sur les équations (5.1.5) et (5.1.6). Ceci permet de démontrer que les deux états, dans leurs arguments temporels respectifs  $\zeta_1$  et  $\zeta_2$ , sont bornés supérieurement par un signal à décroissance exponentielle. Les conditions (ii) et (iii) assurent cette propriété. Ensuite, la stabilité du système interconnecté est obtenu par application du principe de séparation de la procédure de synthèse de l'observateur et du contrôleur [Kailath, 1980].  $\square$

L'existence d'une loi de commande basée sur un observateur est résumée dans le théorème suivant.

**Théorème 5.1.3.** [Witrant et al., 2003] *Soit le système*

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t - \tau_2(t)) \\ y(t) &= Cx(t)\end{aligned}$$

avec  $(A, B)$  une paire commandable et  $(A, C)$  une paire observable. Si les conditions suivantes sont satisfaites :

- i)  $A - BK$  et  $A - HC$  sont des matrices de Hurwitz,
- ii) les retards  $\tau_i(t)$ ,  $i = 1, 2$ ,  $t \geq 0$  sont tels que

$$\begin{aligned}0 \leq \tau_i(t) &\leq \tau_i^{max} < \infty \\ \sup_{t \in \mathbb{R}^+} |\dot{\tau}_i(t)| &= \nu_i < 1\end{aligned}$$

alors, la loi de commande établie avec un observateur

$$\begin{aligned}u(t) &= -Ke^{A(\delta(t)+\tau_1(t))}\hat{x}(t) - Ke^{A(t+\delta(t))} \int_{t-\tau_1(t)}^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} Bu(\theta - \tau_2(\theta))d\theta \\ \dot{\hat{x}}(t) &= A\hat{x}(t) + Bu(t - \tau_1 - \tau_2(t - \tau_1)) + H\{y(t - \tau_1) - C\hat{x}(t)\}\end{aligned}$$

avec  $\hat{x}(t) \doteq \hat{x}(t - \tau_1(t))$ , assure que le système en boucle fermée est borné et exponentiellement stable.

*Démonstration.* Ce théorème est une conséquence directe du lemme 5.1.2 appliqué au système considéré dans cette section.  $\square$

**Remarque 5.1.1.** Le gain d'observation doit être suffisamment élevé pour retrouver les propriétés de performance et de robustesse obtenues par la méthode de placement de pôles. Cette caractéristique induit donc une augmentation de la bande passante nécessaire au niveau de l'observateur, rendant le système plus sensible aux bruits de mesure (principe de récupération du transfert de boucle).

### Exemple 5.1.2

L'exemple précédent est reconsidéré ici avec un retour de sortie. Dans ce

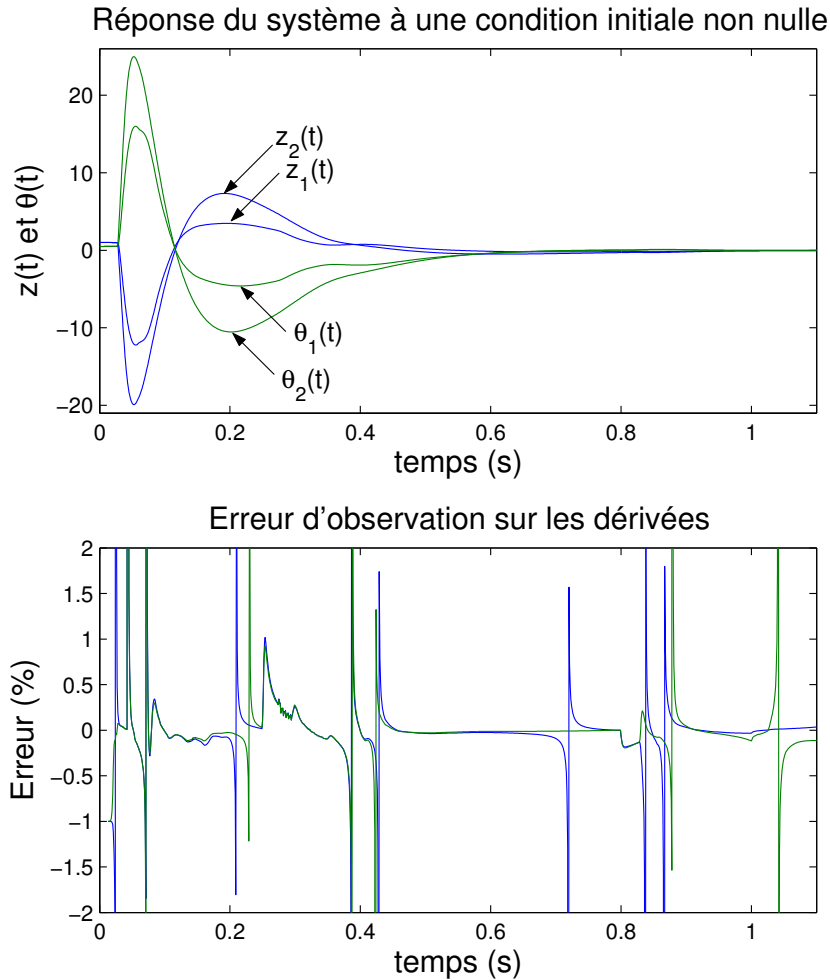


FIG. 5.3 – Stabilisation avec utilisation d'un observateur.

cas, la position de la barre horizontale et l'angle de la barre verticale sont mesurés; nous avons donc

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Cette sortie est utilisée afin de mettre en œuvre la loi de commande proposée dans le théorème 5.1.3, où le gain de l'observateur  $H$  est choisi tel que les valeurs propres de la matrice  $A - HC$  soient  $\{-1000, -1100, -1200, -1300\}$ . Ce choix de gain élevé est motivé par la remarque précédente et différents essais de simulation. La sortie du système, notée  $\{z_1(t), \theta_1(t)\}$ , et l'erreur d'estimation des vitesses sont présentés sur la figure 5.3. Cette erreur est calculée en divisant la différence entre les états du système et les sorties de l'observateur par les sorties observés, aussi les pics correspondent à des divisions par zéro (dérivées nulles) et ne sont pas représentatifs. Une autre simulation, présentée par l'évolution temporelle des états  $\{z_2(t), \theta_2(t)\}$ , correspond à un second



gain choisi tel que les pôles de l'observateur se situent dix fois plus loin sur l'axe réel, c'est à dire à  $\{-10000, -11000, -12000, -13000\}$ . La superposition des réponses du système pour ces deux valeurs du gain d'observation permet de conclure qu'un gain trop élevé nuit à la performance du système, les trajectoires présentant un pic de dépassement plus important dans le second cas.

### 5.1.3 Poursuite de trajectoire

Cette sous-section a pour vocation d'étendre les résultats précédents au cas de la poursuite de sortie. La trajectoire de référence à poursuivre est notée  $y_r(t)$ , et sa dérivée  $\dot{y}_r(t)$  est bornée et connue. Le système considéré est décrit par (5.1.1) avec  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $u, y \in \mathbb{R}$  et  $A, B, C$  des matrices aux dimensions appropriées.

Nous considérons tout d'abord le cas où le système est de degré relatif un, i.e.  $CB \neq 0$ . Les dynamiques des zéros induites de dimension  $n - 1$  sont supposées stabilisées par un premier retour d'état. En suivant les notations utilisées dans le chapitre 3, où le système considéré s'écrit

$$x'(\zeta) = Ax(\zeta) + Bv(\zeta),$$

la loi de commande

$$v(\zeta) = -Kx(\zeta) + \frac{1}{CB} [-CA_{cl}x(\zeta) - k\tilde{y}(\zeta) + \dot{y}_r(\zeta)]$$

avec  $\zeta(t) = t + \delta(t)$ ,  $\tilde{y}(t) = y(t) - y_r(t)$ ,  $k > 0$  et  $A_{cl} = (A - BK)$  une matrice de Hurwitz, conduit à la dynamique de l'erreur de sortie suivante

$$\tilde{y}'(\zeta) = -k\tilde{y}(\zeta)$$

La stabilité de cette équation est déduite directement des propriétés du retard considéré et des résultats précédents. La dynamique des zéros résultante ( $\tilde{y} \rightarrow 0$ )

$$\dot{x}(\zeta) = \left( I - \frac{BC}{CB} \right) A_{cl}x(\zeta) + \frac{B}{CB} \dot{y}_r(\zeta)$$

est stable du fait de la bornitude de  $\dot{y}_r(\zeta)$  et des hypothèses émises sur  $A_{cl}$ .

La loi de commande peut être ré-écrite sous la forme

$$v(\zeta) = -\bar{K}x(\zeta) + \bar{y}_r(\zeta)$$

avec

$$\begin{aligned} \bar{K} &= K + C \frac{(A_{cl} + kI)}{CB} \\ \bar{y}_r(\zeta) &= \frac{1}{CB} [ky_r(\zeta) + \dot{y}_r(\zeta)] \end{aligned}$$

## Chapitre 5. Application et Expérimentation

---

Finalement, en suivant la même procédure que celle décrite précédemment, la loi de commande est mise en œuvre avec

$$u(t) = -\bar{K}e^{A\delta(t)} \left[ e^{A\tau_1(t)} x(t - \tau_1(t)) + e^{At} \int_{t-\tau_1(t)}^{t+\delta(t)} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau_2(\theta)) d\theta \right] + \bar{y}_r(t + \delta(t))$$

Dans le cas où  $CB = 0$ , comme pour le pendule inversé, nous cherchons à poursuivre la trajectoire donnée par l'état  $x_r(t)$ . La loi de contrôle choisie a pour forme

$$v(\zeta) = -K(x(\zeta) - x_r(\zeta)) + u_c(t)$$

où  $u_c(t) = B^+(x'_r(\zeta) - Ax_r(\zeta))$  et  $B^+$  est la pseudo-inverse de  $B$ . L'erreur de poursuite résultante

$$e(t) = x(t) - x_r(t)$$

a pour dynamique

$$\begin{aligned} e'(\zeta) &= (A - BK)x(\zeta) + BKx_r(\zeta) + Bu_c - x'_r(\zeta) \\ &= (A - BK)e(\zeta) + Ax_r(\zeta) + Bu_c - x'_r(\zeta) \\ &= (A - BK)e(\zeta) \end{aligned}$$

et s'annule donc de manière exponentielle. La loi de commande finale s'écrit donc

$$u(t) = -K \left[ e^{A(\delta+\tau_1)} x(t - \tau_1) + e^{A(\delta+t)} \int_{t-\tau_1}^{t+\delta} e^{-A\theta} B u(\theta - \tau_2(\theta)) d\theta - x_r(\zeta) \right] + B^+(x'_r(\zeta) - Ax_r(\zeta)) \quad (5.1.7)$$

La performance de cette poursuite est illustrée dans l'exemple suivant.

### Exemple 5.1.3

Nous considérons ici l'exemple du pendule inversé avec une condition initiale non nulle présenté précédemment. Le retard présent sur les deux canaux de communication est celui induit par le réseau TCP, avec une perturbation agissant entre 10 s et 25 s, présenté en haut de la figure 5.4. La trajectoire de référence est un signal carré filtré par

$$\frac{1}{0.8s + 1}$$

L'état de référence est l'angle du pendule  $\theta(t)$ , qui a pour valeurs  $\theta_r = \pm 2,5 \text{ deg}$ . La fréquence du filtre est choisie suffisamment faible par rapport aux fréquences propres du système pour pouvoir négliger l'effet des vitesses dans la trajectoire de référence. Cette dernière est établie en tenant compte

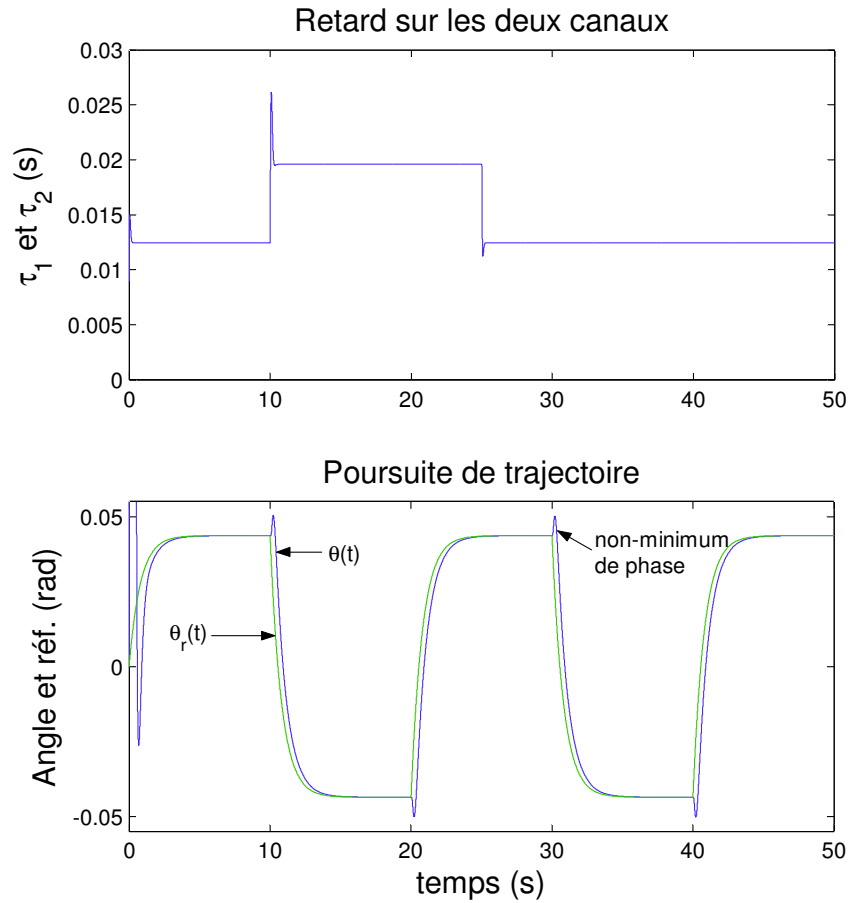


FIG. 5.4 – Poursuite de trajectoire.

des propriétés physiques du système afin de générer un état de référence correspondant à un état d'équilibre du système ( $\dot{z}_r(t) = \dot{\theta}_r(t) = 0$ ), ainsi nous avons

$$x_r(t) = \left[ -\frac{m_1 l_0 + m_2 l_c}{m_1} \tan(\theta_r(t)) \quad 0 \quad \theta_r(t) \quad 0 \right]^T \quad \text{et} \quad x'_r(t) = 0$$

La trajectoire de référence ainsi que la trajectoire du système sont présentés en bas de la figure 5.4, où la commande est établie avec (5.1.7).

Cette simulation illustre l'efficacité de la loi de commande proposée pour suivre une trajectoire, compte tenu de conditions initiales non nulles. Notons que le pic apparaissant au moment du changement de consigne est révélateur du fait que le pendule soit à non minimum de phase; il lui faut en effet commencer par partir en sens inverse de la trajectoire désirée.

### 5.2 Résultats expérimentaux

La loi de commande développée dans les chapitres précédents est mise en œuvre sur le pendule inversé en “T” *Model 505* commercialisé par Educational Control Products®. La présentation théorique de ce système est effectuée en annexe B où sont présentés le modèle non linéaire ainsi que le modèle linéaire. Nous détaillerons ici la mise en œuvre expérimentale ainsi que les résultats obtenus dans le cas d’une poursuite de trajectoire.



FIG. 5.5 – Pendule inversé *ECP'505*.

#### 5.2.1 Banc d'essai expérimental et réglages préliminaires

Le banc d'essai expérimental est composé de quatre sous-systèmes, comme présenté dans la figure 5.6 :

- Le système électromécanique du pendule inversé, constitué du système mécanique à frottements relativement faibles, de deux capteurs haute résolution (mesurant la position angulaire et la position de la barre horizontale), et d'un servomoteur à courant continu actionnant la barre horizontale.
- L'unité d'interface contenant, les interfaces servo-actionneurs, le servo-amplificateur et les sources de puissance auxiliaires.

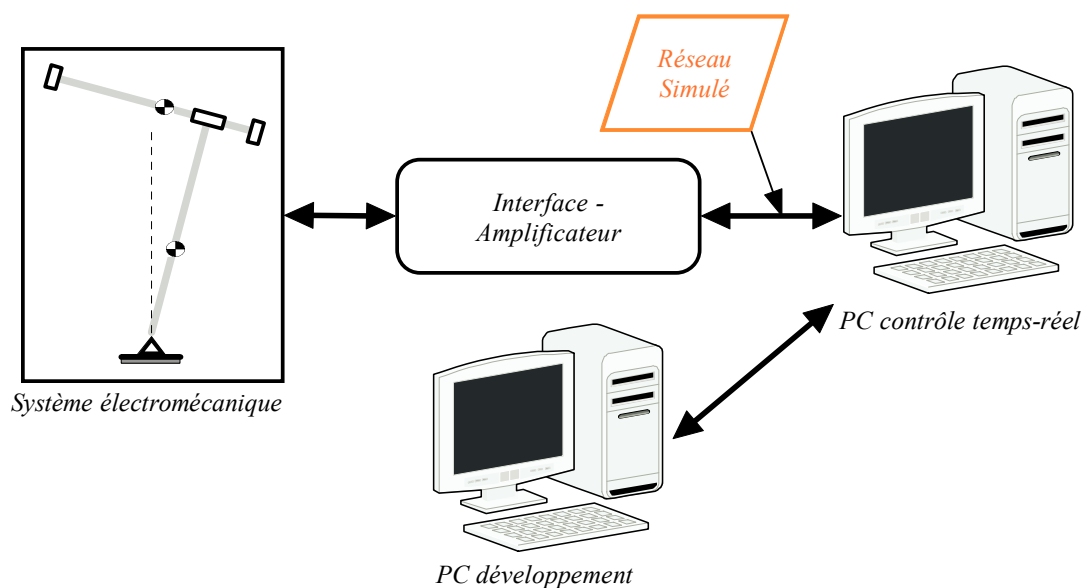


FIG. 5.6 – Banc d’essai expérimental.

- Un PC de contrôle en temps réel, fonctionnant avec un noyau *xPC Target* placé sur une disquette et contenant les spécifications de la loi de commande choisie. Ce PC permet la mise en œuvre de la loi de commande, simule le réseau et sert d’interface entre l’utilisateur et le système.
- Un second PC, fonctionnant sous *Windows<sup>TM</sup>*, dit de développement car il permet la mise en place du processus de commande sous *Matlab - Simulink<sup>®</sup>* avant d’être téléchargé sur le PC d’interface. Cette unité permet aussi la récupération et le traitement des mesures une fois la simulation effectuée.

Afin de compléter cette description, notons que deux cartes d’acquisition *Measurement Computing* sont présentes dans le PC de contrôle en temps réel afin de permettre la communication avec l’unité d’interface :

- une carte *PCI-DDA 02/12* permettant de gérer deux sorties analogiques de douze bits, et
- une carte *PCI-QUAD 04* à quatre canaux, pour l’acquisition des données fournies par les encodeurs incrémentaux.

Pour finir, le PC d’interface et le PC d’acquisition sont connectés entre eux par l’intermédiaire de deux cartes réseau *100 Mb Intel<sup>®</sup> PRO/100S Desktop Adapter*, compatibles avec *xPC Target*.

Nous avons effectué une identification des paramètres du système afin d’obtenir un modèle plus précis. Ceux-ci sont indiqués dans le tableau ci-dessous, en comparaison avec les valeurs fournies par le constructeur.

## Chapitre 5. Application et Expérimentation

Nom du paramètre	Signification	Constructeur	Identification
$m_1$	Masse de la barre horizontale	0.213 kg	0.217 kg
$m_2$	Masse de la barre verticale	1.785 kg	1.795 kg
$l_0$	Longueur de la barre verticale	0.33 m	0.33 m
$l_c$	Position du centre de gravité de la barre verticale	-0.029 m	-0.0322 m
$\bar{J}$	Moment d'inertie nominal	0.055 Nm <sup>2</sup>	0.0571 Nm <sup>2</sup>

Le modèle linéarisé résultant diffère donc du modèle fourni par le constructeur (utilisé dans les simulations) et la loi de commande est établie à partir de la dynamique (identifiée) suivante

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18.785 & 0 & 14.820 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 56.924 & 0 & -15.181 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 \\ 7.520 \\ 0 \\ -8.824 \end{bmatrix} u$$

Les signaux mesurés en sortie des encodeurs incrémentaux doivent être multipliés par des facteurs d'échelle appropriés afin d'obtenir une mesure ayant pour unités celles du système international. Nous devons de plus replacer le zéro de référence étant donné que les mesures sont initialisées lorsque le pendule est au repos à droite alors que l'analyse est effectuée avec le zéro correspondant à la position d'équilibre verticale. En notant  $\theta_c$  et  $z_c$  l'angle et la position mesurés, l'étalonnage est effectué avec

$$\begin{aligned} \theta &= 0.5 \theta_c - 0.3395 \text{ [rad]} \\ z &= 0.0063 z_c - 0.1075 \text{ [m]} \end{aligned}$$

La vitesse angulaire et la vitesse de la barre horizontale sont estimées en dérivant puis en filtrant  $\theta(t)$  et  $z(t)$ . Les filtres numériques utilisés ont pour fonction de transfert

$$\frac{1}{0.01 s + 1}$$

Pour finir, la loi de commande est codée en langage C afin d'améliorer les performances de l'algorithme et du fait qu'il n'est pas possible d'utiliser les fonctions classiques de Matlab (uniquement des blocs *Simulink*®) avec *xPC Target*. Notons aussi que l'utilisation de fonctions de transfert continues dans le programme induisant des comportements erronés, les estimateurs utilisés pour observer les variables  $\dot{\theta}(t)$  et  $\dot{z}(t)$  ont été discrétisés avant leur utilisation, aussi

$$\dot{\theta}(t) = \frac{9.95 z - 9.95}{z - 0.99} \theta(t) \quad \text{et} \quad \dot{x}(t) = \frac{9.95 z - 9.95}{z - 0.99} x(t)$$

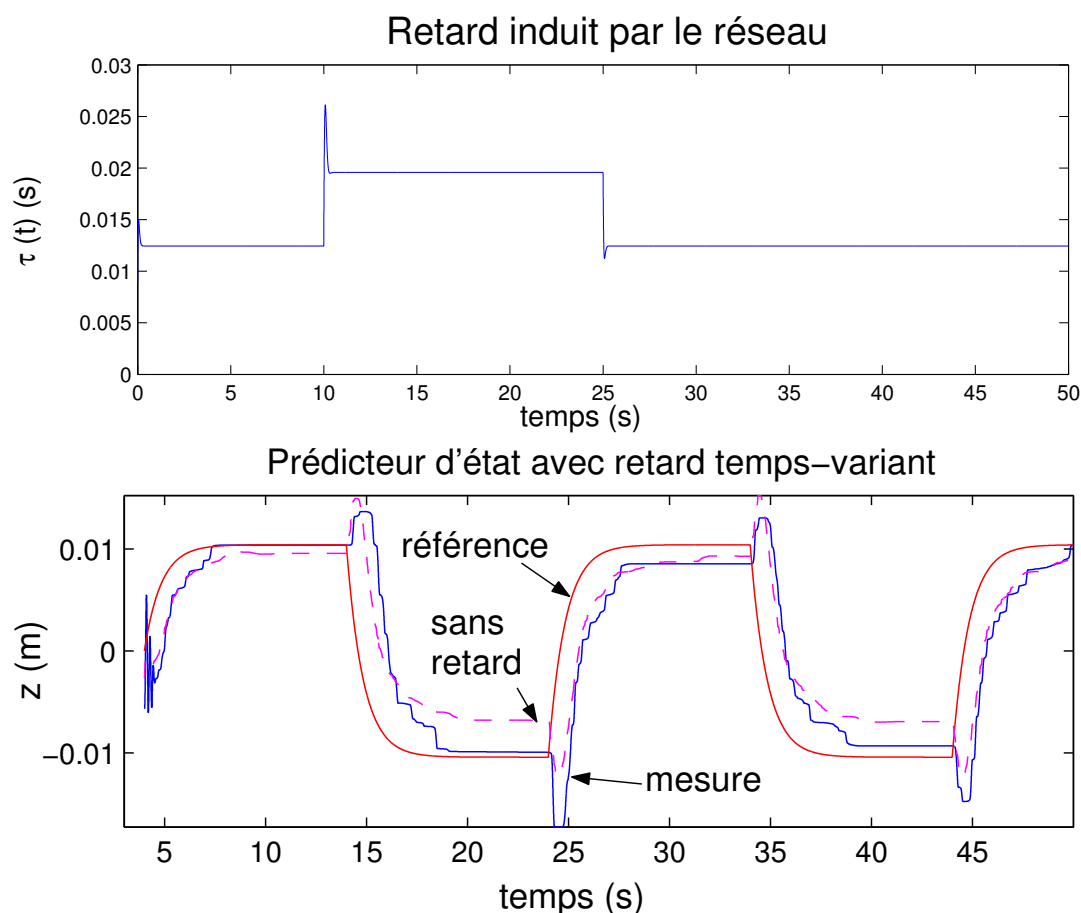


FIG. 5.7 – Résultats expérimentaux.

## 5.2.2 Résultats expérimentaux

Étant donné le faible retard induit par le réseau local Ethernet (d'environ  $1\text{ ms}$ ), nous avons choisi d'utiliser le modèle de retard présenté dans l'exemple 5.1.3, qui est calculé a priori et rappelé en haut de la figure 5.7. Il faudrait, pour que le retard soit significatif, disposer d'un système aux dynamiques plus rapides ou d'un réseau induisant des retards plus contraignants (type réseau sans fil). Le gain du correcteur  $K$  est choisi par synthèse LQR avec  $Q = \text{diag}(900, 600, 900, 600)$  et  $R = 1$  sur le système non retardé

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

La configuration de commande est celle d'une poursuite de trajectoire avec un retard sur le canal entre le contrôleur et l'actionneur.

La période d'échantillonnage des capteurs, actionneur et loi de commande est fixée à  $1\text{ ms}$ , et la trajectoire de référence est un signal carré filtré identique à celui de l'exemple 5.1.3. La référence, la réponse en boucle fermée du système (position de la barre horizontale) avec la loi de commande proposée et la réponse avec un retard nul sont présentées

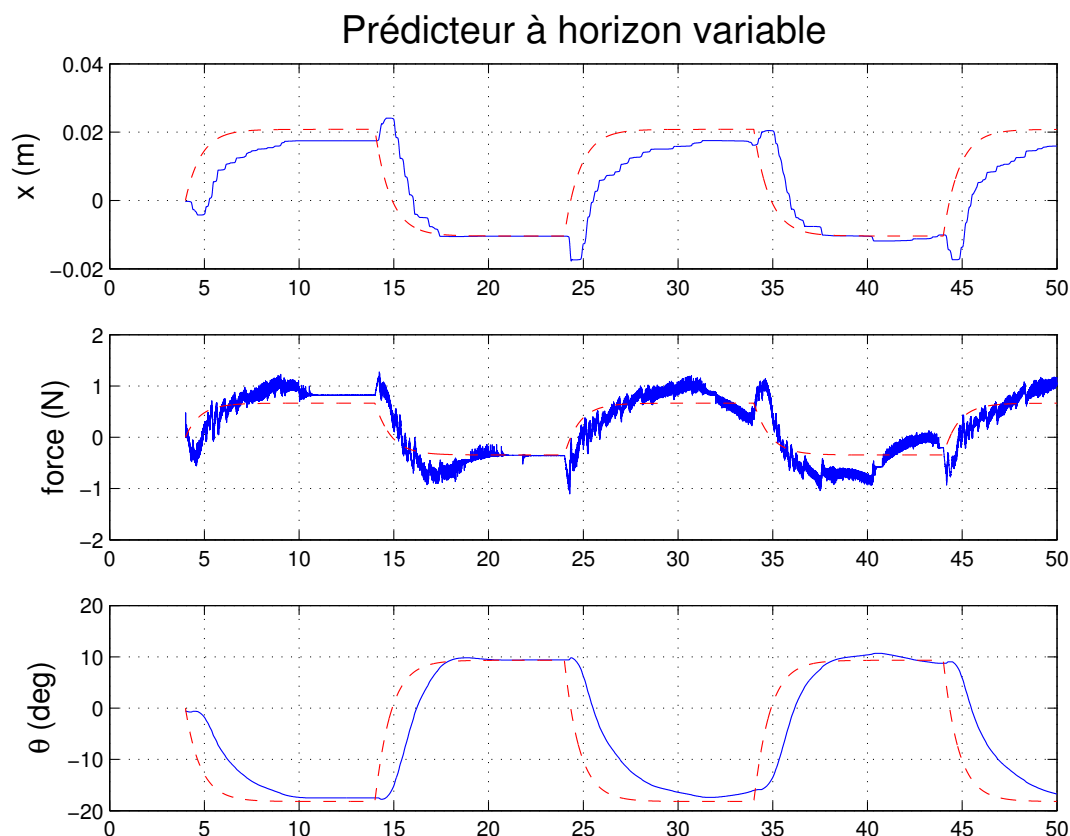


FIG. 5.8 – Réponse du prédicteur à horizon variable.

en bas de la figure 5.7.

Ces résultats montrent l'efficacité de la loi de commande proposée pour stabiliser le pendule inversé lorsqu'un retard temps variant apparaît dans le canal de communication. L'asymétrie de la réponse est due à la force exercée par le câble reliant le pendule à l'unité d'interface. Cet effet peut être considéré comme une perturbation extérieure sur le système affectant la performance mais suffisamment bien gérée par la loi de commande pour ne pas affecter la stabilité. La réponse du système dans le cas où il n'y a pas de retards permet d'illustrer la similitude des réponses, exception faite de l'effet du câble qui induit une erreur peu prévisible.

### Comparaison avec d'autres méthode de commande

Les simulations présentées ici ont pour but de mettre en perspective la loi de commande développée dans cette thèse avec celles présentées dans la section 3.4. La poursuite de trajectoire effectuée avec le prédicteur à horizon variable est présentée dans la figure 5.8, la réponse obtenue grâce à un prédicteur à horizon fixe correspond à la figure 5.9 et la stratégie tampon est illustrée par la figure 5.10. La position et l'angle du pendule, ainsi que la force appliquée par la loi de commande, sont utilisés afin de comparer les



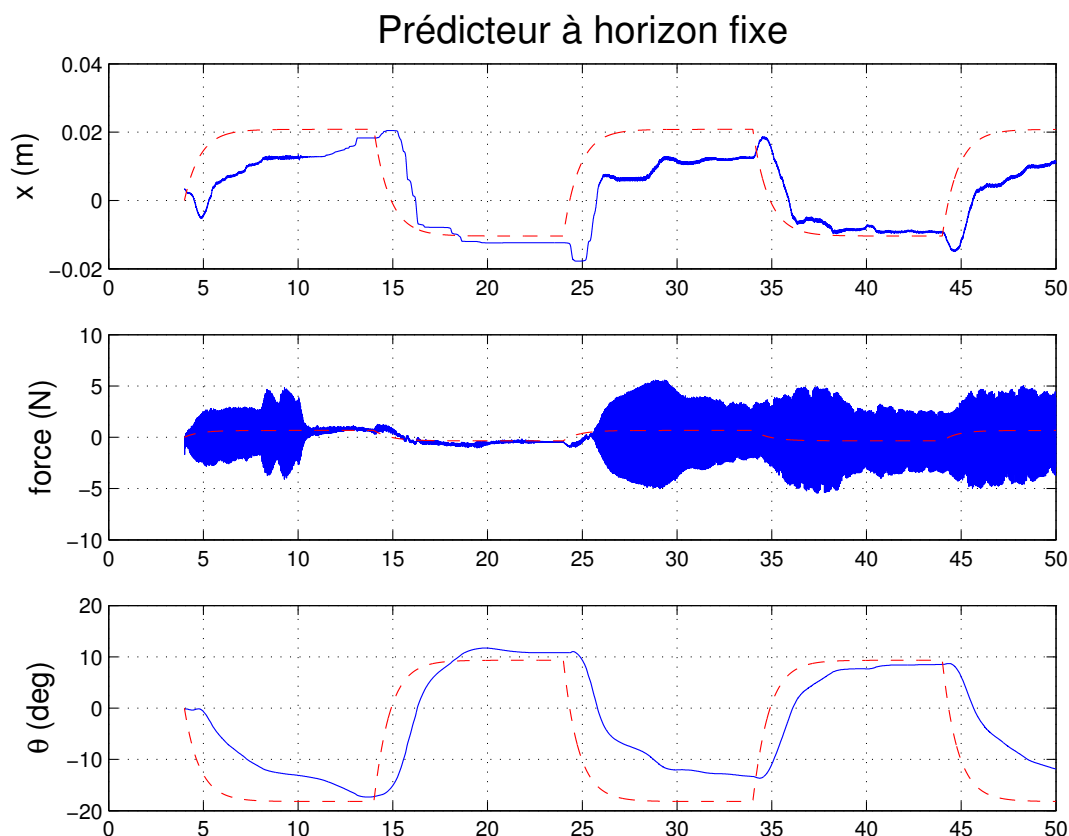


FIG. 5.9 – Réponse du prédicteur à horizon fixe.

méthodes proposées.

Par rapport à la commande utilisant un prédicteur à horizon variable, les résultats sont les suivants :

- la stabilisation par retour d'état ne peut être effectuée sur le système considéré, celui-ci induisant de fortes oscillations sur le pendule qui le font immédiatement sortir du domaine d'étude (d'où le fait que ce résultat expérimental ne soit pas illustré),
- la commande à horizon fixe introduit une oscillation haute fréquence sur la commande ainsi qu'une réponse dégradée,
- la stratégie tampon a le même type de conséquences que la commande précédente, de manière cependant moins marquée.

Cette série d'expérience montre que la plus grande fiabilité et la meilleure performance sont atteintes avec la commande basée sur le prédicteur à horizon variable.

### Etudes de robustesse

Différentes expériences sont présentées ici afin de mettre en évidence les caractéristiques de robustesse du système bouclé. La première illustre la robustesse vis-à-vis de

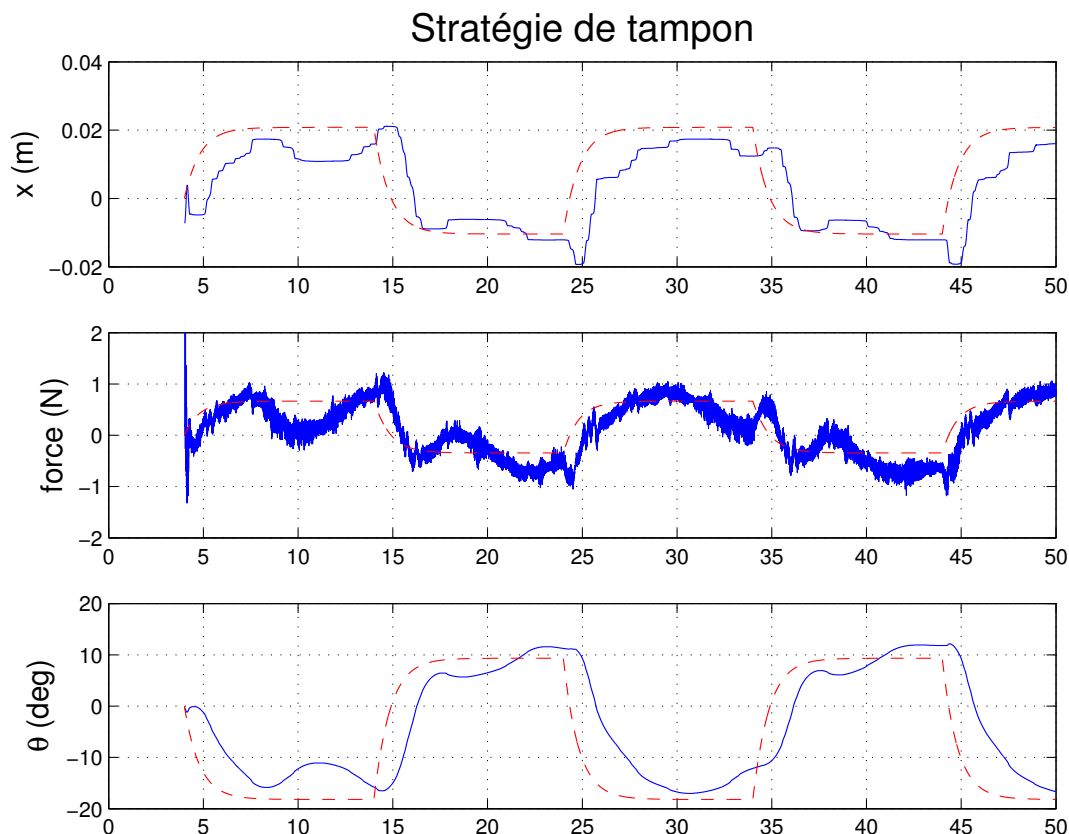


FIG. 5.10 – Réponse avec une stratégie tampon.

variations sur le modèle du système. A cet effet, les masses sous-jacentes au pendule ont été remontées afin de rendre le système plus instable et modifier le lieu de ses pôles. Ce dernier est donné dans le tableau ci-dessous, en fonction de la distance du sommet des masses au pivot.

distance	pôles imaginaires	pôles réels
73 mm	$\pm 6.7885i$	$\pm 3.4810$
71 mm	$\pm 6.7906i$	$\pm 3.5117$
69 mm	$\pm 6.7912i$	$\pm 3.5326$
65 mm	$\pm 6.7907i$	$\pm 3.5751$
60 mm	$\pm 6.7866i$	$\pm 3.6299$

L'évolution temporelle de l'angle du pendule, pour chaque placement de masses proposé, est présenté dans la figure 5.11. Nous pouvons observer que pour les distances de 60 et 65 mm l'angle devient trop important pour que le modèle linéaire soit valide (le pendule opère avec un angle de 30 deg), aussi la loi de commande ne peut plus assurer la poursuite de trajectoire. L'ensemble des résultats illustre cependant la robustesse de la loi de

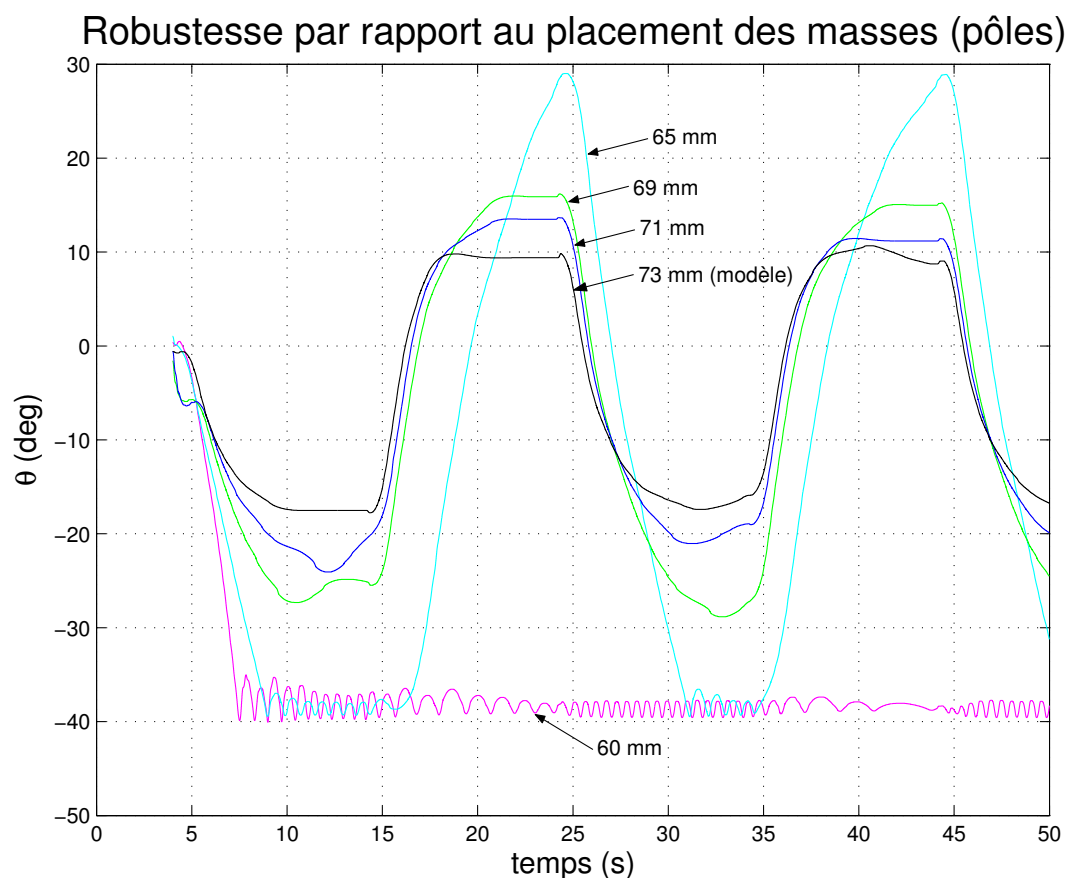


FIG. 5.11 – Effet de variations paramétriques.

commande proposée vis-à-vis des incertitudes paramétriques.

La seconde étude de robustesse étudie l'effet d'erreurs de mesure et d'impulsions exogènes. Ceci a été effectué en inclinant d'un angle d'environ 5 deg la table supportant le pendule pour introduire un biais de mesure, et en donnant de petites impulsions aux bouts de la barre horizontale pour observer le rejet des perturbations. Le résultat de ces deux procédures est présenté sur la figure 5.12. Nous pouvons conclure de ces deux expériences que le biais de mesure induit un biais sur la réponse du système d'amplitude équivalente mais ne le déstabilise pas. Le système montre aussi une bonne robustesse vis-à-vis des perturbations extérieures.

Une dernière expérience montre enfin la robustesse du système à une erreur d'estimation du retard. Le retard réel est incrémenté de la fonction sinusoïdale déterminée dans l'exemple 4.3.2. Un agrandissement du retard estimé  $\bar{\tau}(t)$  et du retard réel  $\tau(t)$  ainsi que la réponse du système sont présentés dans la figure 5.2.2. Ceci montre le peu d'effet d'une erreur d'estimation du retard, ayant une amplitude et une variation correspondant aux résultats du précédent chapitre, sur la réponse du système.

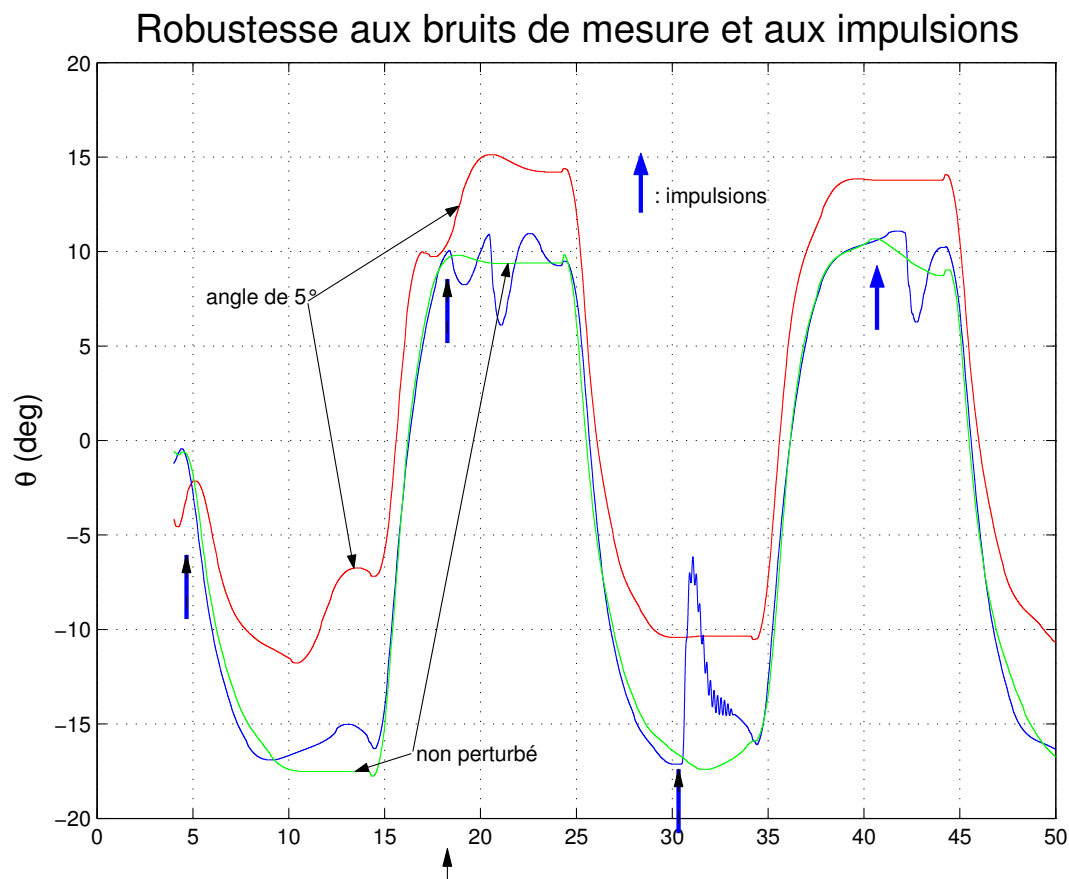


FIG. 5.12 – Effet d'un biais de mesure et de perturbations.

Le système s'est aussi avéré robuste vis-à-vis d'une perturbation en sortie de la loi de commande.

### Synthèse

Nous avons vu dans ce chapitre l'applicabilité de la loi de commande proposée au cas du retard sur les deux canaux de transmission, au retour de sortie et à la poursuite de trajectoire. Différentes expériences ont ensuite montré l'applicabilité du prédicteur à horizon variable à un système physique réel. Une comparaison avec d'autres méthodes plus classiques a permis de mettre en évidence les atouts d'une telle loi. Une étude de robustesse a finalement permis d'établir la qualité du prédicteur pour palier à une erreur d'estimation des paramètres du modèle, un biais de mesure, des perturbations physiques impulsionnelles et une erreur d'estimation du retard.

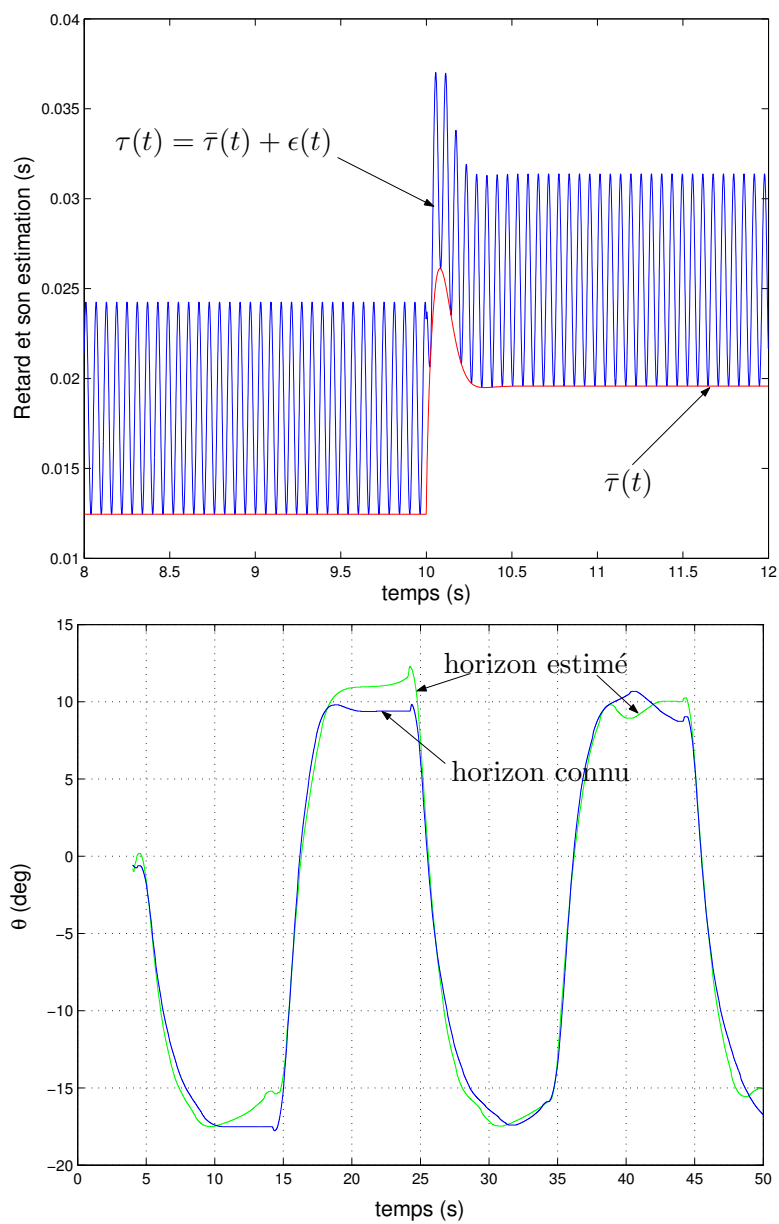


FIG. 5.13 – Effet de l'erreur d'estimation du retard.

*Les trente rayons s'unissent sur le moyeu unique ;  
mais c'est l'espace vide (pour l'axe),  
qui donne à la roue son usage.*

Lao Tseu, VI<sup>e</sup> siècle av. J.-C.

[Legge, 1891]



# Chapitre 6

## Conclusion et Perspectives

Dans ce mémoire, nous avons abordé le problème de stabilisation des systèmes commandés par réseaux. Une étude de différents réseaux et de leurs propriétés a permis de centrer notre recherche sur l'effet du retard sur la stabilisation. Ainsi le réseau a été considéré comme un retard *temps variant* satisfaisant des conditions de bornitude motivées par les propriétés structurelles du réseau et supposé connu, ou tout du moins estimable.

Ceci nous a conduit au choix du prédicteur d'état comme base de loi de commande, celui-ci permettant d'affecter un *spectre fini* au système en boucle fermée, dans la mesure où le retard est connu. L'horizon de prédiction de la commande a été choisi temps variant afin de prendre en compte les importantes variations de charge présentes dans un réseau et de laisser une grande liberté de choix de gain. Le fait que le prédicteur soit sur un horizon temps variant implique que nous utilisons un contrôleur à dimension variable.

Après une étude détaillée sur les conditions nécessaires à la stabilité et à la causalité du système commandé par le prédicteur, nous avons pu proposer différentes méthodes de calcul de l'horizon de prédiction. La méthode de calcul par estimation dynamique est particulièrement retenue car elle permet la prise en compte *explicite* de la dynamique du retard dans la synthèse de loi de commande. La robustesse du système vis-à-vis de cette estimation a pu être montrée.

Pour justifier de l'applicabilité de la méthode proposée à des réseaux où l'estimation du retard peut s'avérer difficile, nous avons conduit une analyse de robustesse du système commandé vis-à-vis d'incertitudes sur le retard. Une première approche, exacte mais conservatrice, nous a permis de justifier qualitativement certaines hypothèses simplificatrices conduisant à des résultats plus optimistes. Les résultats obtenus permettent, compte tenu d'un choix de gain (qui peut être lié à des critères de performance), de déterminer l'erreur maximale admissible ainsi que sa variation. Ces paramètres peuvent ensuite motiver un choix de réseau adapté.



## Chapitre 6. Conclusion et Perspectives

---

Le prédicteur a finalement été combiné avec des méthodes de commande classiques telles que la commande avec des retards variables sur les deux canaux de communication, la commande par retour de sortie (utilisation d'un observateur) ou la poursuite de trajectoire. Un banc d'essai expérimental a été mis en place afin de faire suivre une trajectoire au pendule inversé en forme de "T" lorsque la commande subit un retard variable. Cette expérience, ainsi que les différentes simulations illustrant les résultats obtenus, ont permis de montrer l'efficacité de la méthode développée dans ce mémoire.

Ce travail permet également d'établir différentes perspectives concernant la méthode de commande utilisée et plus généralement la stabilisation par réseau. En considérant tout d'abord la stabilisation de systèmes à entrée retardée à l'aide d'un prédicteur à horizon variable, la question de la performance envisageable et de critères de mesure adaptés, en relation notamment avec des contraintes de robustesse, pourrait être envisagée. Une approche constructive pour le choix du gain du prédicteur, étant donnés certains critères de qualité du réseau, pourrait aussi être déduite des résultats proposés ici. Un autre point d'intérêt concerne la discrétisation du terme intégral et le calcul des matrices constituantes de l'exponentiel. Ces éléments numériques demandent des ressources calculatoires importantes, qui pourraient être allégées par une étude appropriée des algorithmes utilisés et de l'effet de l'erreur induite sur le système. La mise en œuvre d'une application à dynamique plus rapide ou l'utilisation d'un réseau sans fil comme moyen de communication permettraient une étude plus détaillée des limites de la loi de commande proposée, notamment en terme de modélisation du retard et de robustesse du système en boucle fermée.

Une extension du prédicteur au cas non linéaire est aussi envisageable, étant donné la structure du prédicteur et le fait qu'il intègre l'évolution du système. En effet, considérons par exemple le système

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t - \tau(t))$$

sous l'hypothèse que nous connaissions une fonction  $\phi(x)$  telle qu'il existe, pour

$$u(t) = \phi(x)$$

une fonction de Lyapunov  $V(x) > 0$  associée au système

$$\dot{x}(t) = f(x) + g(x)u(t)$$

et de dérivée  $\dot{V}(x) < 0$ . Dans ce cas, nous pouvons utiliser les mêmes outils que ceux développés précédemment pour le cas linéaire, notamment concernant la causalité et le calcul de prédiction, afin de mettre en place la loi de commande

$$\begin{aligned} u(t) &= \phi(x(t + \delta(t))) \\ &= \phi\left(x(t) + \int_t^{t+\delta} f(x(\theta)) + g(x(\theta))u(\theta - \tau(\theta))d\theta\right) \end{aligned}$$

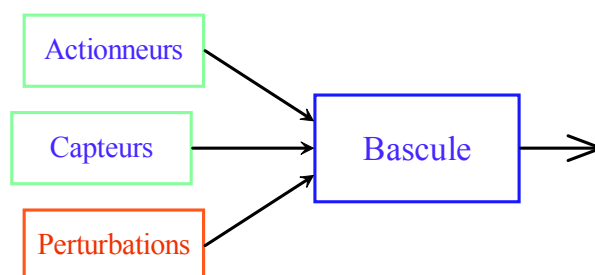


FIG. 6.1 – Système contrôlé par l’intermédiaire d’une bascule.

Les méthodes d’analyse restent similaires excepté pour l’analyse de robustesse, auquel cas nous devons considérer les résultats établis pour les systèmes non linéaires retardés [Mazenc & Niculescu, 2001]. Un autre problème induit par la stabilisation à distance d’un système non linéaire apparaît lors de la synthèse d’un observateur. En effet, nous ne pouvons plus dans ce cas utiliser le principe de séparation. Des résultats du type de ceux développés par [Praly & Arcak, 2004] pourraient servir de point de départ à une telle étude.

Nous nous sommes concentrés ici sur la question de la stabilisation, mais il serait intéressant de relier cette étude à la problématique de la mise en œuvre du protocole, dans le cadre notamment de la synthèse d’un réseau dédié. En ce qui nous concerne, une étude préliminaire a été effectuée dans cette direction avec un projet de Master dont le thème a été la synthèse d’un nouveau protocole de transfert de données et de contrôle de réseau en étoile [Briat, 2005]. Cette étude a permis d’établir les bases nécessaires à la synthèse d’un protocole ad hoc garantissant la taille des fenêtres d’émission, cette taille permettant d’établir un lien avec des critères classiques de l’automatique tels que la bande passante. Un estimateur du retard associé, dont la précision dépend de la période d’échantillonnage du système, a aussi été proposé. La mise en œuvre d’un tel protocole sur un réseau type UDP serait particulièrement adaptée au contrôle de systèmes embarqués.

Ceci conduit naturellement au problème de stabilisation par réseau de systèmes embarqués, où le réseau est une bascule (switch). Dans ce cas, les capteurs et actionneurs (ou signaux de commande) constituent les entrées de la bascule, comme présenté dans la figure 6.1. Une synthèse simultanée, prenant en compte les besoins des systèmes commandés (bande passante et priorité) ainsi que les algorithmes de gestion du réseau (protocoles d’émission, tailles des fenêtres et gestion des collisions), revient à introduire un retard dépendant de l’état. En effet, la taille des fenêtres d’émission dépendant de l’état du système commandé ainsi que de la file d’attente, le retard subi par le signal dépend en même temps de l’état du réseau et de celui du système. La résolution d’un tel problème peut se baser sur [Verriest, 2002; Georges, 2003], où est abordé le problème de commande avec des retards dépendant de l’état.

## Chapitre 6. Conclusion et Perspectives

---

Un dernier aspect critique de la stabilisation des systèmes par réseau, non abordé ici, concerne les aspects liés à la discrétisation et au codage. Ceci conduit au problème de la commande des flux critiques, à la considération des aspects asynchrones, comme l'échantillonnage variable [Fridman et al., 2004], et plus globalement aux problématiques de commande numérique appliquée au réseau.

# Annexe A

## Rappels Mathématiques

**Définition A.0.1** (Application lipschitzienne). Une application  $h$  est dite lipschitzienne s'il existe  $K \in [0, +\infty[$  tel que

$$d(h(x), h(x')) \leq K.d(x, x')$$

On dit aussi qu'elle est  $K$ -lipschitzienne.

On définit la constante de Lipschitz

$$\text{Lip}(h) = \sup\left\{\frac{d(h(x), h(x'))}{d(x, x')} \mid x, x' \in X, x \neq x'\right\}$$

**Proposition A.0.1.** Si  $f$  est lipschitzienne, elle est uniformément continue.

**Définition A.0.2** (Application contractante). On appelle application contractante ou contraction une application lipschitzienne dont la constante de Lipschitz est  $< 1$ .

**Théorème A.0.2** (Théorème de Banach du point fixe). Soit  $X$  un espace métrique complet et  $h$  une contraction de  $X$  dans  $X$ . Alors :

- $h$  admet un unique point fixe  $x_0$
- $\forall x \ d(x, x_0) \leq \frac{1}{1-\text{Lip}(h)}d(x, h(x))$

**Théorème A.0.3** (Théorème des accroissements finis pour une application de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ). On se donne  $f$  continue de  $[a, b]$  dans  $\mathbb{R}$ , dérivable sur  $]a, b[$ . Alors il existe  $c \in [a, b]$  tel que  $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$ .

**Théorème A.0.4** (Changement de variable). Si  $f$  est continue sur  $[c, d]$  et si  $\theta$  est  $C^1$  de  $[a, b]$  dans  $[c, d]$ , alors on a

$$\int_{\theta(a)}^{\theta(b)} f(t)dt = \int_a^b f(\theta(x))\theta'(x)dx$$

## Annexe A. Rappels Mathématiques

---

**Lemme A.0.5** ([Kim, 2001]). *Soient deux fonctions dérivables  $a$ ,  $b$ , et*

$$w(t) = \int_{a(t)}^{b(t)} \int_{t-\theta}^t f(s) ds d\theta$$

*Alors la relation suivante est satisfaite :*

$$\frac{d}{dt}w(t) = (b - a)f(t) - (1 - \dot{b}) \int_{t-b}^{t-a} f(s) ds + (\dot{b} - \dot{a}) \int_{t-a}^t f(s) ds$$

## Annexe B

### Pendule Inversé en “T”

Nous décrivons ici le pendule inversé en forme de “T” utilisé comme exemple de système physique instable dans ce manuscrit. Ce banc d’essai expérimental a été développé par Educational Control Products® et est référencé comme le *Model 505*. Il est caractérisé par des pôles et des zéros dans le demi-plan complexe droit et des nonlinéarités cinétique et gravitationnelle couplées. De plus, la disposition des masses étant ajustable, les racines du polynôme caractéristiques peuvent être modifiées. Ces propriétés en font donc un exemple de choix pour tester les capacités de stabilisation d’une loi de commande.

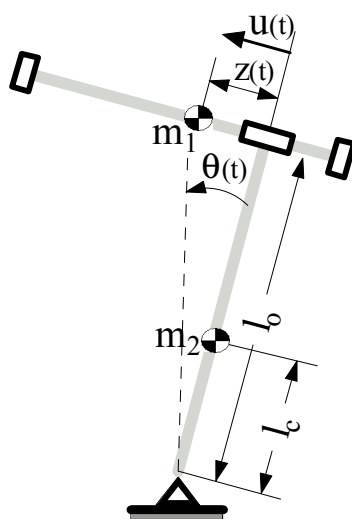


FIG. B.1 – Schéma du Pendule inversé en “T”.

Le pendule inversé, dont un schéma est proposé sur la figure B.1, est composé d’une barre horizontale pouvant coulisser perpendiculairement au sommet d’une barre verticale. Le bas de la barre verticale tourne librement autour d’un axe, fixé sur la structure de support. L’angle entre la position verticale haute et la barre verticale, noté  $\theta(t)$ , est mesuré positivement dans le sens trigonométrique. Le déplacement de la barre horizontale

## Annexe B. Pendule Inversé en “T”

par rapport à sa position médiane, noté  $z(t)$ , est positif vers la gauche. Ce système est actionné en appliquant une force linéaire  $u(t) = F(t)$  à la barre horizontale à l'aide d'un moteur à courant continu placé en bas de la barre verticale et couplé à la barre horizontale par un engrenage mécanique. Les variables  $z(t)$  et  $\theta(t)$  sont mesurées grâce à deux capteurs, situés sur l'axe fixe (mesure de l'angle) et sur le moteur. La position du centre de gravité de la barre verticale peut être déplacée vers le haut ou vers le bas en ajustant la hauteur des deux masses placées en bas de la barre verticale.

Le modèle sans frottement de ce système est décrit par

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1 & m_1 l_0 \\ m_1 l_0 & \bar{J} + m_1 z^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{z} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -m_1 z \dot{\theta} \\ 2m_1 z \dot{\theta} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{z} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} -m_1 \sin \theta \\ -(m_1 l_0 + m_2 l_c) \sin \theta - m_1 z \cos \theta \end{bmatrix} g = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} u, \end{aligned}$$

où la dépendance temporelle des variables d'état est implicite, et la signification et la valeur des paramètres utilisés sont listées ci-dessous.

Nom du paramètre	Valeur	Signification
$m_1$	0.213 kg	Masse de la barre horizontale.
$m_2$	1.785 kg	Masse de la barre verticale.
$l_0$	0.33 m	Longueur de la barre verticale.
$l_c$	-0.029 m	Position du centre de gravité de la barre verticale.
$g$	$9.807 \frac{m}{s^2}$	Accélération gravitationnelle.
$\bar{J}$	$0.055 Nm^2$	Moment d'inertie nominal.

En définissant le vecteur d'état  $x \doteq [z, \dot{z}, \theta, \dot{\theta}]^\top$ , l'équation dynamique précédente se ré-écrit

$$\begin{cases} \dot{x}_1 & = x_2, \\ \dot{x}_2 & = \frac{u}{m_1} - l_0 \dot{x}_4 + x_1 x_4^2 + g \sin(x_3), \\ \dot{x}_3 & = x_4, \\ \dot{x}_4 & = \frac{1}{J_0(x_1) - m_1 l_0^2} [g(m_2 l_c \sin(x_3) + m_1 x_1 \cos(x_3)) \\ & \quad - m_1(l_0 x_4 + 2x_2)x_1 x_4 + -l_0 u], \\ J_0(x_1) & = \bar{J} + m_1 x_1^2, \end{cases}$$

La linéarisation autour du point d'équilibre  $\bar{x} = 0$  sous  $u(t) = 0$ , donne la représen-

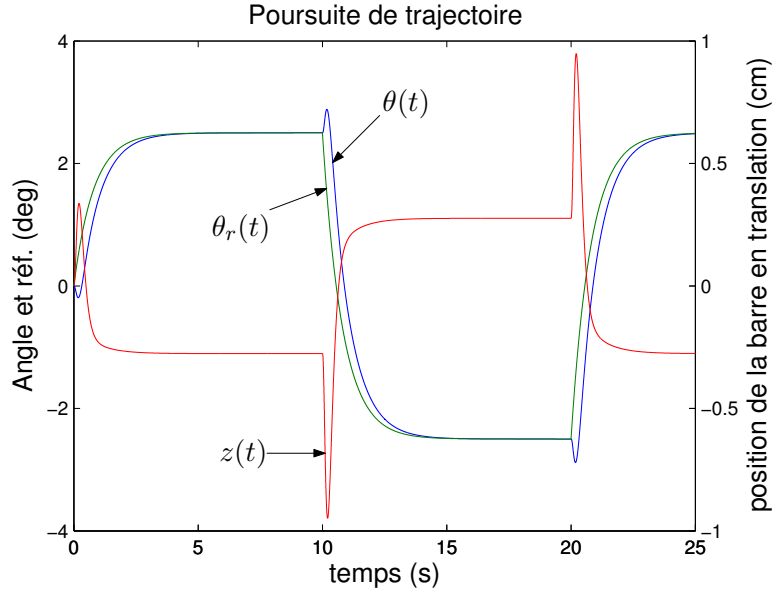


FIG. B.2 – Influence de l’erreur d’estimation du retard.

tation d’état sous la forme standard  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ ,  $y(t) = x(t)$ , où

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -18.78 & 0 & 14.82 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 56.92 & 0 & -15.18 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 7.52 \\ 0 \\ -8.82 \end{bmatrix}.$$

Les valeurs propres de  $A$  sont  $\lambda_{1,2} = \pm 6.788j$ ,  $\lambda_3 = 3.481$  et  $\lambda_4 = -3.481$ . Les deux valeurs propres purement imaginaires dépendent de la dynamique de la barre verticale (sans frottement), alors que celles qui sont réelles et positives dépendent de la dynamique de la barre coulissante.

Dans le cadre du chapitre 5 et de la synthèse d’observateur, la position de la barre horizontale et l’angle de la barre verticale sont mesurés; nous avons donc

$$y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} x(t)$$

Le fait que le pendule inversé soit à non minimum de phase induit les dépassements que l’on peut observer figure B.2, où une poursuite de trajectoire est effectuée sur le système.



## Annexe B. Pendule Inversé en “T”

---

# Annexe C

## A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

### Abstract <sup>1</sup>.

The aim of this work is to develop and study a power consistent model for a non-homogeneous lossless transmission line. The proposed model is based on the classical *LC* circuit, with time-varying inductance and capacitance, under the constraint that no power can be created by these variations. It results in a passive physical object characterized by a time-varying impedance and inducing a variable transmission delay in the communication channel.

### C.1 Introduction

One of the major problems concerning the use of transmission lines is due to the *non-homogeneous* effects, induced by the fact that the physical properties of the line are not uniform. This properties can be strongly affected by climatical changes or lightning surge (see [Yamada et al., 1995] for some experimental evaluation of this problem). In that case, the parameters of the line experience some time and space variations, which results in some important wave reflections and unpredicted overvoltage in the line equipments. Safety and performance issues motivate the importance of a proper model to describe the line behavior. The nonuniform transmission line is also of prime interest in medical sciences, where it is used to model arteries behavior [Taylor, 1965; Matonick & Li, 2001].

---

<sup>1</sup>ce travail résulte d'un séjour de trois mois à l'Université de Twente en collaboration avec Arjan van der Schaft et Stephano Stramigioli

---

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

---

The nonuniform transmission lines are classically modelled with space-varying parameters. A model with varying inductance and capacitance is proposed in [Taylor, 1965] to model the pulses in arteries. A dampening, space-varying resistance is introduced in [Ishii et al., 1991] to model the time-varying impedance. A finite-differences algorithm, with space-varying inductance, capacitance and resistance, is also presented in [Correia de Barros & Almeida, 1996] to model the line with distributed nonuniform losses.

In this work, we consider a lossless transmission line and describe the resonance effect that occurs when this line is not uniform. This effect is due to the coupling between the electric and the magnetic energy. The line is modelled as a set of classical T-shape  $LC$  circuits, where the capacitance and inductance are both time and space-varying. Compared to most of the existing models, based on empirical methods, we propose here a power consistent, physically based model. This is done using geometric modelling [van der Schaft, 2004] and power port concepts [Blankenstein et al., 2003] to develop a passive model with time and space-varying impedance and delay. The resulting bond graph representation allows for a direct use of the proposed model in geometric control schemes such as impedance matching [Stramigioli et al., 2000], robotic telemanipulation [Stramigioli et al., 2002; Blankenstein et al., 2003] or telemanipulation with time-varying delays [Stramigioli, 2002].

This paper is organized as follows. We first present the geometric modelling of the homogeneous lossless transmission line in order to introduce the proposed method and allow for some direct comparisons. In the third section we establish the  $LC$  circuit model with time-varying elements, based on some physical elementary properties and passivity constraints. The resulting distributed model is then analyzed in the fourth section to describe the global behavior of the line (characterized by the impedance and time-delay) and its transient response (scattering-like analysis). Some simulation results are also presented.

### C.2 The classical transmission line

The aim of this section is to present the classical  $LC$  model of the transmission line in the bond graph framework and from an energetic point of view. This transmission line is supposed to be lossless and is modelled with the usual T-shape circuit describing the differential length element, which is presented on Figure C.1.

The equivalent Bond graph model is shown on Figure C.2, where  $\mathbf{I}$  is an inductor of inductance  $L$  and flux linkage  $\phi$ ,  $\mathbf{C}$  a capacitor of capacitance  $C$  and charge  $q$ .  $\mathbf{P}_{\text{in}}$  is the input power port (characterized by the effort  $e_1$  and the flow  $f_1$ ) and  $\mathbf{P}_{\text{out}}$  is the output power port (characterized by the effort  $e_2$  and the flow  $f_2$ ).

The physical (inductance, flux linkage, capacitor and charge) and the power (efforts

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

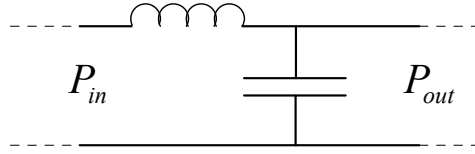


FIG. C.1 – Differential element of a transmission line.

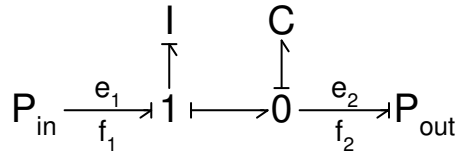


FIG. C.2 – Equivalent bond graph representation.

and flows) variables are related thanks to the relationships

$$\begin{aligned} e_1 &= q/C + \dot{\phi} \\ f_1 &= \phi/L \\ e_2 &= e_1 - \dot{\phi} \\ f_2 &= f_1 - \dot{q} \end{aligned}$$

In order to ensure the power consistency of the differential element, the input power is equal to the output power plus the change of the stored energy  $E_{st}$ , which yields to

$$\begin{aligned} e_1 f_1 &= e_2 f_2 + \frac{dE_{st}}{dt} \\ \Leftrightarrow \dot{E}_{st} &= \frac{\phi}{L} \dot{\phi} + \frac{q}{C} \dot{q} \end{aligned} \quad (\text{C.2.1})$$

where the last line is obtained by substituting the power variables by the physical variables.

Considering the distributed model of this uniform transmission line, the global behavior of the line is described by two parameters of prime importance : the impedance  $Z$  and the induced time delay  $\tau$ , related to  $L$  and  $C$  by (for a unitary line length)

$$\begin{aligned} \tau &= \sqrt{LC} \\ Z &= \sqrt{L/C} \end{aligned}$$

### C.3 Model with time-varying elements

We now introduce the time-varying property of the line with some time-varying capacitance and inductance. This is achieved in the bond graph framework by modelling **I**

---

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

---

and  $\mathbf{C}$  as two-ports objects. Using the fact that no power can be created by the transmission line, the variations of  $L(t)$  and  $C(t)$  can not be considered independently and are structurally coupled.

### Passivity requirement

Considering some linear elements, the electric energy of the circuit  $V$  and its magnetic energy  $T$  can be expressed, respectively, as

$$V = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C} \quad (\text{C.3.1})$$

$$T = \frac{1}{2} \frac{\phi^2}{L} \quad (\text{C.3.2})$$

The total energy of the elementary circuit unit is

$$E = V + T$$

From the fact that the time variation of  $C$  and  $L$  does not produce any extra power and that there is no dissipative element, the stored energy is not influenced by these variations. Therefore, we establish the passivity of the differential element by differentiating the previous equality as

$$\frac{dE}{dt} = \frac{q}{C} \dot{q} + \frac{\phi}{L} \dot{\phi} - \frac{q^2}{2C^2} \dot{C} - \frac{\phi^2}{2L^2} \dot{L} = \dot{E}_{st}$$

where  $E_{st}$  is the stored energy of the uniform line and the last equality is inferred from the passivity property. This leads to the following requirement on the dynamics of  $L(t)$  and  $C(t)$  (cancelling the terms in  $\dot{q}$  and  $\dot{\phi}$  using (C.2.1))

$$\dot{L} = -\frac{L^2}{C^2} \frac{q^2}{\phi^2} \dot{C} \quad (\text{C.3.3})$$

### Capacitor and inductor models

The capacitor and inductor models are established similarly to [Secchi et al., 2001], where the model of a spring with variable stiffness was developed. The main idea was to first consider the classical Hamiltonian representation of the system and then to introduce a new port, induced by the new state variable (in this case the stiffness).

Following this method, a capacitor with a time-varying capacitance is modelled as a 2-port Hamiltonian system, as shown in Figure C.3a, with the energy function  $V$ , two states ( $q$  and  $C$ ) and their corresponding produced efforts and input flows. If we first consider the left port (with state  $q$ ), its input current and output voltage are obtained by deriving (C.3.1) with respect to  $q$  and write as, respectively,

$$f_{C1} = \dot{q} \quad \text{and} \quad e_{C1} = \frac{q}{c}$$

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

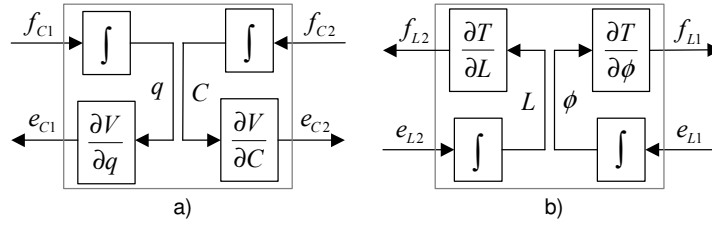


FIG. C.3 – Time-varying capacitor (a) and inductor (b).

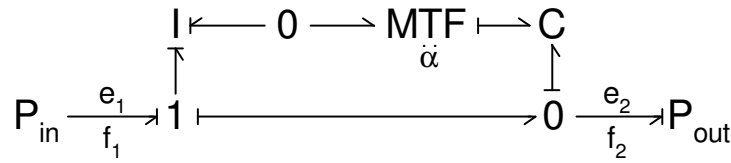


FIG. C.4 – Differential element with time-varying parameters.

Concerning the right port (with state  $C$ ), its input flow and output effort are given by (deriving (C.3.1) with respect to  $C$ )

$$f_{C2} = \dot{C} \quad \text{and} \quad e_{C2} = -\frac{q^2}{2C^2}$$

The inductor with a time-varying inductance is also modeled as a 2-port Hamiltonian system, as shown in Figure C.3b, with the energy function  $T$ , two states ( $\phi$  and  $L$ ) and their corresponding produced flows and input efforts. The right port (with state  $\phi$ ), has an input voltage and an output current (obtained by deriving (C.3.2) with respect to  $\phi$ )

$$e_{L1} = \dot{\phi} \quad \text{and} \quad f_{L1} = \phi/L$$

The left port (with state  $L$ ), has an input effort and an output flow (obtained by deriving (C.3.2) with respect to  $L$ )

$$e_{L2} = \dot{L} \quad \text{and} \quad f_{L2} = -\frac{\phi^2}{2L^2}$$

### A passive interconnection

We now have to connect the ports induced by the time varying inductance and capacitance in a passive way (that is, with the dynamics of  $L(t)$  and  $C(t)$  satisfying (C.3.3)). This is done thanks to a modulated transformer  $MTF$  with input  $\alpha$  and a zero-junction, as shown on Figure C.4. The resulting capacitance and inductance have the following dynamics

$$\dot{C} = \alpha \frac{\phi^2}{2L^2} \quad (\text{C.3.4})$$

$$\dot{L} = -\alpha \frac{q^2}{2C^2} \quad (\text{C.3.5})$$

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

The passivity requirement is directly verified by substituting  $\alpha$  from (C.3.4) into (C.3.5). It is important to note that the dynamics of this system depends directly on the input  $\alpha$  and that there is no passivity constraint on this input. Therefore,  $\alpha$  can be any desired function, possibly with a nonlinear or stochastic evolution. Nevertheless,  $\alpha$  has to be such that the physical positivity constraints on  $L(t)$  and  $C(t)$  are satisfied.

### Exemple C.3.1

Consider the  $LC$  circuit presented in figure C.4 where the initial values of the inductance and capacitance are, respectively,  $L(0) = 1\text{ mH}$  and  $C = 10\text{ }\mu\text{F}$ . A voltage source providing  $1\text{ V}$  is connected to the input of this circuit and a resistor of  $100\text{ }\Omega$  is placed at its output. The input of the modulated transformer  $\alpha$  is the square signal of amplitude  $10^{-4}$  presented at the top of figure C.5. The middle part of this figure shows the time evolution of  $L(t)$  and  $C(t)$ , while the resulting time-delay and impedance are plotted on the bottom part.

These results illustrate the fact that the time variation of the capacitance is proportional to  $\alpha$  while the variations of the inductance, impedance and time-delay are inversely proportional to this design parameter.

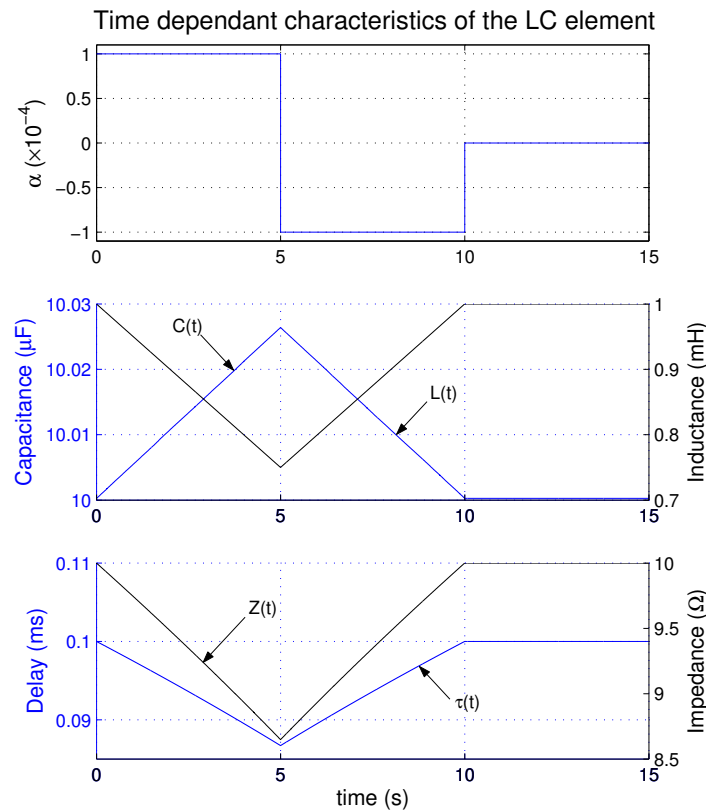


FIG. C.5 – Properties of the  $LC$  circuit for a step input.

## C.4 The distributed model

The behavior of the transmission line resulting from the previous elementary time-varying unit is now detailed by an analysis of the distributed model. From the physical model, the Telegrapher's equations follow as

$$\begin{aligned}\frac{\partial q}{\partial t} &= -\frac{\partial I}{\partial z} \\ \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{\partial V}{\partial z}\end{aligned}$$

where  $z$  is the spatial coordinate and

$$\begin{aligned}q &= CV \\ \phi &= LI\end{aligned}$$

This leads to the relationship

$$\begin{aligned}C_t V + CV_t &= -I_z \\ L_t I + LI_t &= -V_z\end{aligned}$$

using the notation  $X_t = \frac{\partial X}{\partial t}$  and  $X_z = \frac{\partial X}{\partial z}$ .

From the passivity of the interconnection between the capacitance and the inductance (C.3.4)-(C.3.5), we also have that

$$\begin{aligned}C_t &= \alpha \frac{\phi^2}{2L^2} = \alpha \frac{I^2}{2} \\ L_t &= -\alpha \frac{q^2}{2C^2} = -\alpha \frac{V^2}{2}\end{aligned}$$

In order to obtain a set of partial differential equations (PDE) involving only the voltage and current derivatives, we finally substitute  $q$  and  $\phi$  in the telegrapher's equations, which gives

$$\frac{\alpha}{2} I^2 V + CV_t = -I_z \quad (\text{C.4.1})$$

$$-\frac{\alpha}{2} V^2 I + LI_t = -V_z \quad (\text{C.4.2})$$

Note that this system is equivalent to the homogeneous transmission line model when  $\alpha = 0$ .

### C.4.1 Global behavior

The PDEs describing the model behavior are clearly coupled and difficult to analyze. This is due to the third order coupling terms appearing in (C.4.1)-(C.4.2). Nevertheless,



## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

---

the global behavior of the line, described by the induced time-delay and impedance, can be inferred from the homogeneous solution of the model.

First note that (C.4.1)-(C.4.2) can be put into the form

$$\begin{bmatrix} V_t \\ I_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_z \\ I_z \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} -\frac{1}{2C}I^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2L}V^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ I \end{bmatrix}$$

The waves velocity  $v(z, t)$  is then given by the eigenvalues of the homogeneous solution matrix

$$\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & 0 \end{bmatrix}$$

from which we have that

$$v(z, t) = \pm \frac{1}{\sqrt{L(z, t)C(z, t)}}$$

Using the finite element method, the resulting time-delay  $\tau_l$  is computed as

$$\tau_l(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{L_i(t)C_i(t)}$$

where  $N$  is the number of elements used to described the transmission line,  $L_i$  and  $C_i$  are, respectively, the inductance and capacitance of the  $i^{th}$  element of the line. The impedance of the line  $Z_l$  is computed in a similar way as

$$Z_l(t) = \sum_{i=1}^N \sqrt{\frac{L_i(t)}{C_i(t)}}$$

It is interesting to note that the dynamics of the line delay  $\dot{\tau}_l(t)$  and impedance  $\dot{Z}_l(t)$  can be expressed as a function of the transformer parameters, the electric and the magnetic energies, with

$$\begin{aligned} \dot{\tau}_l(t) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{T_i - V_i}{\sqrt{L_i(t)C_i(t)}} \\ \dot{Z}_l(t) &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \alpha_i \frac{T_i + V_i}{C_i \sqrt{L_i(t)C_i(t)}} \end{aligned}$$

While the previous dynamics are difficult to analyze, they could be used to design an observer or an estimator for the global transmission line behavior.

### C.4.2 Transient response

In order to study the coupling problem in the transient behavior analysis, we introduce the *scattering-like* variables to describe the incident and reflected waves, denoted respectively by  $S_+(z, t)$  and  $S_-(z, t)$  (see [Stramigioli et al., 2000; Stramigioli, 2001] for a detailed presentation of geometric scattering of Hamiltonian systems). We call these variables *scattering-like* because they are not orthogonal, contrarily to the constant capacitance and inductance case, as detailed in this sub-section.

Let

$$Z(z, t) = \sqrt{\frac{L(z, t)}{C(z, t)}}$$

be the distributed impedance of the transmission line, a two covariant tensor dependant on time and space, and  $N(z, t)$  be such that  $Z = NN$ . The scattering variables write as

$$\begin{aligned} S_+(z, t) &= \frac{N^{-1}}{\sqrt{2}}(V + ZI) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^{-1}V + NI) \\ S_-(z, t) &= \frac{N^{-1}}{\sqrt{2}}(V - ZI) = \frac{1}{\sqrt{2}}(N^{-1}V - NI) \end{aligned}$$

Thanks to the equalities (C.4.1)-(C.4.2), the partial derivatives of  $S_+$  are then obtained as

$$\begin{aligned} \frac{\partial S_+}{\partial t} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(I - N^{-2}V)N_t + NI_t + N^{-1}V_t] \\ \frac{\partial S_+}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(I - N^{-2}V)N_z + NI_z + N^{-1}V_z] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} [(I - N^{-2}V)(N_z - N\alpha\frac{IV}{2}) - N^{-1}LI_t - NCV_t] \end{aligned}$$

Using the fact that  $N^2 = \sqrt{\frac{L(z, t)}{C(z, t)}}$  and rearranging the terms properly, we have that

$$\frac{\partial S_+}{\partial z} + \sqrt{LC} \frac{\partial S_+}{\partial t} = \frac{I - N^{-2}V}{\sqrt{2}} \left[ N_z + \sqrt{LC}N_t - \alpha\frac{NIV}{2} \right] \quad (\text{C.4.3})$$

The dynamics of the reflected wave  $S_-$  are computed similarly and are described by the PDE

$$\frac{\partial S_-}{\partial z} - \sqrt{LC} \frac{\partial S_-}{\partial t} = \frac{I + N^{-2}V}{\sqrt{2}} \left[ -N_z + \sqrt{LC}N_t + \alpha\frac{NIV}{2} \right] \quad (\text{C.4.4})$$

**Remarque.** When the scattering variables are orthogonal (in the homogeneous transmission line case), they are described by the set of PDEs

$$\frac{\partial S_+}{\partial t} - v \frac{\partial S_+}{\partial z} = 0$$

---

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

---

$$\frac{\partial S_-}{\partial t} + v \frac{\partial S_-}{\partial z} = 0$$

where  $v$  is the speed of the travelling wave. The resulting scattering variables then write as

$$\begin{aligned} S_+ &= K(t + z/v) \\ S_- &= L(t - z/v) \end{aligned}$$

for some continuous functionals  $K$  and  $L$ . ◇

The dynamics of the two waves (C.4.3)-(C.4.4) clearly shows a dependency of the solutions on the time-varying property of  $L$  and  $C$ , and more precisely on the design parameter  $\alpha$  ( $N_t$  is directly proportional to  $\alpha$  and  $N_z$  is proportional). The fact that both waves equations depend on the same parameters indicates that they are coupled. This coupling is proportional to the exchange of energy occurring between the inductance and capacitance since it is proportional to the parameter  $\alpha$ .

The fact that the incident and reflected waves influence each other has already been described in [Stix, 1992], where the effect of non-homogeneous plasma regions on the travelling waves is investigated. The exchange of energy between the capacitance and inductance is clearly equivalent to the change of density in a plasma medium, since it corresponds to an exchange between potential and kinetic energy in both cases.

## C.5 Simulations

The previous model is used to represent a transmission line of 100 *km*, which experiences a time-variation of its physical characteristics. In order to determine the initial values of the line parameters, the transmission speed  $v$  is assumed to be one third of the speed of light, which leads to

$$v = 10^8 \text{ [m/s]} = \frac{1}{\sqrt{L(0)C(0)}} \Rightarrow L(0)C(0) = 10^{-16} \text{ [H.F/m}^2\text{]}$$

where  $L(0)$  and  $C(0)$  are the initial inductance and capacitance per meter characterizing the transmission line. Setting a cell to describe 10 *km* of the line we have that  $L_i(0)C_i(0) = 10^{-8} \text{ [H.F]}$  where the subscript  $i$  is introduced to denote the characteristics of the  $i^{\text{th}}$  cell. If we assume that the initial capacitance of each cell is  $C_i(0) = 10 \text{ }\mu\text{F}$ , it follows that the initial inductance is  $L_i(0) = 1 \text{ mH}$  and the corresponding time-delay is  $\tau_i(0) = 10^{-4} \text{ s}$ .

The software *20-sim*<sup>®</sup> is used to simulate the behavior of the transmission line, which is described by ten unit cells with a voltage (effort) input  $\mathbf{Se} = 1 \text{ V}$ . A resistor  $\mathbf{R} = 10 \text{ }\Omega$  terminates the line and is used to measure the transmission line output voltage. The

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

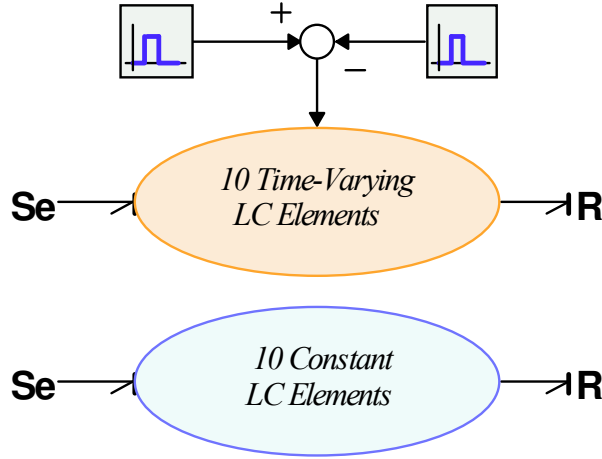


FIG. C.6 – *20-sim*<sup>®</sup> model of the transmission line.

main scheme is presented on Figure C.6, where the top part is the nonuniform line with the *MTF* input  $\alpha$  and the bottom part corresponds to a homogeneous line, introduced for comparison.

The model's response (delay, impedance and voltage across the resistor) to a step input provided by  $\mathbf{Se}$  is presented on Figure C.7, which shows

- the input signals provided by the voltage source  $V_s$  and by the modulated transformer coefficient  $\alpha$  (top),
- the induced time-delay  $\tau_5(t)$  and impedance variations  $Z_5(t)$ , occurring in the 5<sup>th</sup> cell of the nonuniform line (middle),
- a comparison between the output voltage of the homogeneous line  $V_h$  and the output of the non-homogeneous model (bottom).

These results can be described as follows :

- between 0 and 0.01 s :  $\alpha = -0.1$  and  $V_s = 1$ , the impedance increases and the delay decreases, the transients of the output voltages are similar (the line parameters are close to their initial values) but the steady state value of  $V_{nh}$  is less than the one of  $V_h$ ,
- between 0.01 s and 0.02 s :  $\alpha = -0.1$  and  $V_s = 0$  the impedance and the delay remain constant, the wave reflection effect clearly appears in the transients response of  $V_{nh}$  and the steady state values are the same for both line,
- between 0.02 s and 0.06 s : the sign of  $\alpha$  is changed at 0.03 s and  $V_s = 1$ , the impedance and the delay show some important variations, the wave reflection effect increases and the sign of the difference between the steady state values of both lines changes at the same time as  $\alpha$ ,
- between 0.06 s and 0.08 s :  $\alpha = 0.1$  and  $V_s = 0$ , the impedance and the delay remain constant, the wave reflection effect is very important.

This set of simulations shows that  $\alpha$  has an important effect on the model behavior. It appears that the line parameters (illustrated by  $\tau_5(t)$  and  $Z_5(t)$ ) strongly depend

## Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line

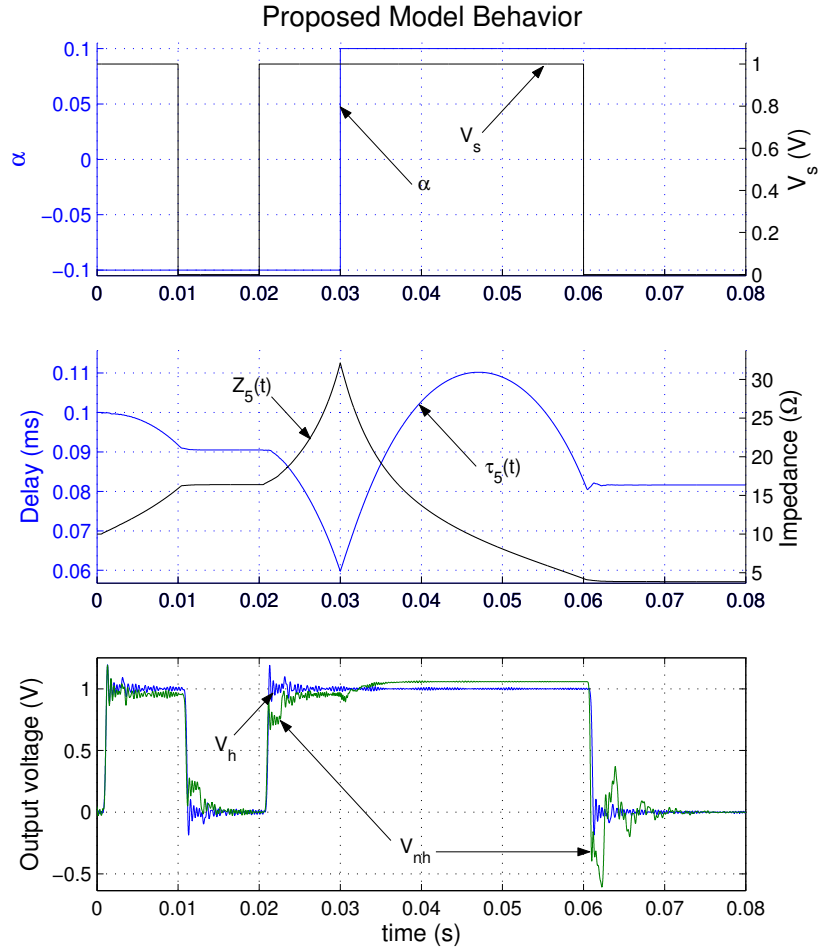


FIG. C.7 – Model’s response to a step input for two values of  $\alpha$ .

on  $\alpha$  and on the applied voltage (we can’t establish some simple relationships as in the previous example). The internal wave reflections (coupling of the scattering-like variables) clearly depend on the uniformity of the line, since the simulation setup is such that the nonuniformity increases with time and the oscillations follow this evolution. We can also observe that the steady state error depends directly on  $\alpha$ , which is consistent with the fact that it corresponds to a transfer between the electric and magnetic energies. To conclude, these simulation results show the capability of the proposed model to describe the physical phenomena occurring in a non-homogeneous transmission line.

## Conclusion

We proposed in this paper a new model to describe non-homogeneous transmission lines, based on geometrical modelling and bond graph representation. This model, physically based and power constant, allows for a precise analysis of the resonance effects

## **Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line**

---

induced by the time and space variations of the line parameters. We analyzed both the global behavior and the transient response of the distributed model thanks to classical PDE properties and a scattering-like analysis. Some simulation results were finally presented to illustrate the theoretical results and verify the physical properties established in the analysis.

### **Acknowledgements**

The authors would like to thank Laurent Teppoz for the fruitful discussions on transmission lines. They would also like to thank Goran Golo and Eric Blayo for their help on PDE analysis and modelling.

## **Annexe C. A Passive Model for a Non-Homogeneous Transmission Line**

---

# Bibliographie

- Alamir, M. & Commault, C. [2004], A new equal-partition measurement encoding scheme for networked control systems, *in* 'Proceedings of the 2004 NOLCOS Symposium on Nonlinear Control Systems', Stuttgart, Germany.
- Alpcan, T. & Başar, T. [2002], A game-theoretic framework for congestion control in general topology networks, *in* 'Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control', Las Vegas, NV, USA, pp. 1218–1224.
- Alpcan, T. & Başar, T. [2003], Global stability analysis of an end-to-end congestion control scheme for general topology networks with delay, *in* 'Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control', Maui, Hawaii USA.
- Anderson, R. J. & Spong, M. W. [1989], 'Bilateral control of teleoperators with time delay', *IEEE Transactions on Automatic Control* **34**, no.5, 494–501.
- Artstein, Z. [1982], 'Linear systems with delayed control : a reduction', *IEEE Transactions on Automatic Control* **ac-27**, no.4, 869–879.
- Azimi-Sadjadi, B. [2003], Stability of networked control systems in the presence of packet losses, *in* 'Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control', Maui, Hawaii USA.
- Berestesky, P., Chopra, N. & Spong, M. W. [Sept. 2-4, 2004], Theory and experiments in bilateral teleoperation over the internet, *in* 'Proc. of the IEEE Conference on Control Applications', Taipei, Taiwan.
- Blankenstein, S. S. G., Duindam, V., Bruyninckx, H. & Melchiorri, C. [2003], Power port concepts in robotics : the geometrical-physical approach, *in* 'tutorial at the IEEE international conference on robotics and automation', Taipei, Taiwan.
- Bonnet, M. [2005], Stabilité-Performance des Lois de Contrôle Commande en Réseaux, Projet de fin d'études d'ingénieur en collaboration avec PSA peugeot citroën, Institut National Polytechnique de Grenoble - ENSIEG, Grenoble, France.
- Borne, P., Dauphin-Tanguy, G., Richard, J.-P., Rotella, F. & Zambettakis, I. [1992], *Modélisation et identification des processus. Tome 1*, Méthodes et Pratiques de l'Ingénieur, Technip, Paris (France).



## Bibliographie

---

- Briat, C. [2005], Etude et conception d'un réseau dédié pour le contrôle de systèmes par réseau, Thèse de master au laboratoire d'automatique de grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, Grenoble, France.
- Brockett, R. & Liberzon, D. [2000], 'Quantized feedback stabilization of linear systems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **45**, 1279–1289.
- Corless, R. M., Gonnet, G. H., Hare, D. E. G. & Jeffrey, D. J. [1993], On lambert's w function, Technical Report CS-93-03, University of Waterloo, Dept. Comp. Sci.
- Correia de Barros, M. & Almeida, M. [1996], 'Computation of electromagnetic transients on nonuniform transmission lines', *IEEE Transactions on Power Delivery* **11**, issue **2**, 1082 – 1091.
- Delchamps, D. F. [1990], 'Stabilizing a linear system with quantized state feedback', *IEEE Transactions on Automatic Control* **35**, 916–924.
- Delli Priscoli, F. [1999], 'Interworking of a satellite system for mobile multimedia applications with the terrestrial networks', *IEEE Journal on Selected Areas in Communications (JSAC), Special Issue on Direct-to-User Satellite Systems and Technologies at Ka Band and Beyond* **17**(2), 385–394.
- Delli Priscoli, F. & Isidori, A. [2005], 'A control-engineering approach to integrated congestion control and scheduling in wireless local area networks', *Control Engineering Practice* **13** (5), 541–558.
- Dugard, L. & E. Verriest (Eds) [1997], *Stability and Control of Time-delay Systems*, Vol. LNCIS 228 of *Lecture Notes on Control and Information Sciences*, Berling-Verlag, New York.
- Euler, E. [1779], De serie lambertina plurismique eius insignibus propretatibus, in 'Leonhardi euleri opera omnia, ser. 1', Opera mathematica, Bd 6, 1921.
- Fattouh, A., Sename, O. & Dion, J.-M. [2001], Pulse controller design for linear systems with delayed state and control, in 'Proc. of the 1<sup>st</sup> IFAC Symposium on System Structure and Control', Prague, Czeck Republic.
- Fridman, E., Seuret, A. & Richard, J.-P. [2004], 'Robust sampled-data stabilization of linear systems : an input delay approach', *Automatica* **40**, no.8, 1441–1446.
- Fridman, E. & Shaked, U. [2003], 'Delay-dependent stability and  $h_\infty$  control : constant and time-varying delays', *Int. J. Control* **76**, No. 1, 48–60.
- Fridman, E., Shaked, U. & Xie, L. [2003], 'Robust  $H_\infty$  filtering of linear systems with time varying delay', *IEEE Transactions on Automatic Control* **48**, no. 1, 159–165.
- Georges, D. [2003], A note on static output feedback control of linear systems with state-dependent delays, Technical Report AP03-088, Laboratoire d'automatique de Grenoble, Grenoble, France.
- Gomes da Silva Jr., J., Fridman, E., Seuret, A. & Richard, J.-P. [2005], Stabilization of neutral systems with saturating inputs, in 'Proc. of the 16<sup>th</sup> IFAC World Congress', Prague, Czech Republic.

## Bibliographie

---

- Grieco, L. A., Boggia, G., Mascolo, S. & Camarda, P. [2003], A control theoretic approach for supporting quality of service in ieee 802.11e wlans with hcf, *in* 'Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control', Maui, Hawaii USA.
- Gross, D. & Harris, C. M. [1998], *Fundamentals of Queueing Theory (3rd ed.)*, John Wiley & Sons, New York.
- Gu, K., Kharitonov, V. L. & Chen, J. [2003], *Stability and robust stability of time-delay systems*, Birkhäuser, Boston.
- Hale, J. [1977], *Theory of functional differential equations*, Springer-Verlag, New-York.
- Hollot, C. V. & Chait, Y. [2001], Nonlinear stability analysis for a class of tcp/aqm networks, *in* 'Proc. of the 40<sup>th</sup> IEEE Int. Conf. on Decision and Control', Orlando, Florida, USA.
- Hugo, V. [1972], *Poésie*, Vol. 2 of *l'Intégrale*, Seuil, Paris 6<sup>e</sup>.
- Ishii, H. & Basar, T. [2005], 'Remote control of lti systems over networks with state quantization', *Systems & Control Letters* **54**, 15–31.
- Ishii, H., Basar, T. & Tempo, R. [2004], 'Randomized algorithms for quadratic stability of quantized sampled-data systems', *Automatica* **40**, 839–846.
- Ishii, H. & Francis, B. [2003], 'Quadratic stabilization of sampled-data systems with quantization', *Automatica* **39**, 1793–1800.
- Ishii, M., Kawamura, T., Kouno, T., Ohsaki, E., Shiokawa, K., Murotani, K. & Higuchi, T. [1991], 'Multistory transmission tower model for lightning surge analysis', *IEEE Transactions on Power Delivery* **6**, issue **3**, 1327 – 1335.
- Kailath, T. [1980], *Linear Systems*, Prentice-hall information and system sciences series, Englewood Cliffs, N.J. 07632.
- Kant, E. [1990], *Critique de la raison pure*, folio/essais, Gallimard, Paris 7<sup>e</sup>, France.
- Khalil, H. K. [1996], *Nonlinear System, Second Edition*, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ 07458.
- Kim, J.-H. [2001], 'Delay and its time-derivative dependant robust stability of time-delayed linear systems with uncertainty', *IEEE Transactions on Automatic Control* **46**, no.5, 789–792.
- Kolmanovskii, V. & Richard, J.-P. [1999], 'Stability of some linear systems with delays', *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**, 984–989.
- Krtolica, R., Özgüner, Ü., Chan, H., Göktas, H., Winkelman, J. & Liubakka, M. [1994], 'Stability of linear feedback systems with random communication delays', *International Journal of Control* **59** :4, 925– 953.
- Kwon, W. H. & Pearson, A. [1980], 'Feedback stabilization of linear systems with delayed control', *IEEE Transactions on Automatic Control* **ac-25**, no.2, 266–269.
- Lambert, J. H. [1758], *Observationes variae in mathesin puram*, *in* 'Acta Helvetica, phisico-mathematico-anatomico-botanico-medica', Vol. 3, Basel, pp. 128–168.

## Bibliographie

---

- Legge, J. [1891], *The Tao Teh King*, Vol. 39 of *The Sacred Books of the East*, 1<sup>st</sup> edn, Oxford University Press, Oxford.
- Ling, Q. & Lemmon, M. D. [2002], Robust performance of soft real-time networked control systems with data dropouts, *in* 'Proc. of the 41st IEEE Conference on Decision and Control', Las Vegas, NV, USA.
- Ling, Q. & Lemmon, M. D. [2003], Optimal dropout compensation in networked control systems, *in* 'Proc. of the 42nd IEEE Conference on Decision and Control', Maui, Hawaii USA.
- Low, S. H., Paganini, F. & Doyle, J. C. [2002], 'Internet congestion control', *IEEE Control Syst. Mag.* **22**(1), 28–43.
- Low, S. H., Peterson, L. L. & Wang, L. [2001], Understanding TCP vegas : a duality model, *in* 'SIGMETRICS/Performance', pp. 226–235.
- Lozano, R., Chopra, N. & Spong, M. W. [2002], Passivation of force reflecting bilateral teleoperators with time varying delay, *in* 'Mechatronics'02', Enschede, Netherlands.
- Manitius, A. & Olbrot, A. [1979], 'Finite spectrum assignment problem for systems with delays', *IEEE Transactions on Automatic Control* **24**, 541–552.
- Mascolo, S. [1999], 'Congestion control in high-speed communication networks using the smith principle', *Automatica* **35**(12), 1921–1935.
- Mastellone, S. & Abdallah, C. [2005], Networked control systems and communication networks : integrated model and stability analysis, *in* 'Proc. of the 16<sup>th</sup> IFAC World Congress', Prague, Czech Republic.
- Matonick, J. P. & Li, J. K.-J. [2001], 'A new nonuniform piecewise linear viscoelastic model of the aorta with propagation characteristics', *Cardiovascular Engineering* **1**, no. 1, 37–47.
- Mazenc, F. & Niculescu, S.-I. [2001], 'Lyapunov stability analysis for nonlinear delay systems', *Systems and Control Letters* **42**, 245–251.
- Miano, G. & Mafucci, A. [2001], *Transmission Lines and Lumped Circuits*, Academic Press Series in Electromagnetism.
- Michiels, W. [2002], Stability and Stabilization of Time-Delay Systems, Phd thesis, Katholieke Universiteit Leuven - Faculteit Toegepaste Wetenschappen, Arenbergkasteel, B-3001 Heverlee, Belgium.
- Michiels, W. & Niculescu, S.-I. [2003], 'On the delay sensitivity of smith predictors', *International Journal of Systems Science* **34**(8-9), 543–552.
- Milnor, J. [1965], *Topology from the Differentiable Viewpoint*, Princeton University Press, Princeton, NJ.
- Misra, V., Gong, W.-B. & Towsley, D. [2000], Fluid-based analysis of a network of aqm routers supporting tcp flows with an application to red, *in* 'Proc. of ACM SIGCOMM'00', Stockholm, Sweden.

## Bibliographie

---

- Mondié, S. & Michiels, W. [2003], A safe implementation for finite spectrum assignment : robustness analysis, *in* ‘Proceedings of the 42<sup>nd</sup> IEEE Conference on Decision and Control (CDC2003)’, Hawaii, USA.
- Mondié, S., Niculescu, S.-I. & Loiseau, J.-J. [2001], Delay robustness of closed loop finite assignment for input delay systems, *in* ‘Proc. of the 3<sup>rd</sup> IFAC Conference on Time Delay Systems’, Santa Fe, New Mexico, USA.
- Mounier, H. & Bastin, G. [2001a], A compartmental approach to congestion control in communication networks, *in* ‘Proc. of the 8<sup>th</sup> Int. Conf. on Advances in Communications and Control’, Rithymna Beach, Crète (Greece).
- Mounier, H. & Bastin, G. [2001b], Compartmental modelling for congestion control in communication systems, *in* ‘Proc. of the IFAC NOLCOS 01 Conference’, St Peterburg.
- Niculescu, S.-I. [2001], *Delay effects on stability : A robust control approach*, Springer-Verlag : LNCIS vol.269, Heidelberg.
- Niculescu, S.-I., de Souza, C., Dugard, L. & Dion, J.-M. [1998], ‘Robust exponential stability of uncertain systems with time-varying delays’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **43**, no. 5, 743–748.
- Niculescu, S.-I. & K. Gu (Eds.) [2004], *Advances in Time-Delay Systems*, Vol. LNCSE 38 of *Lecture Notes in Computational Science and Engineering*, Springer-Verlag, New York.
- Niculescu, S.-I., Verriest, E., Dugard, L. & Dion, J.-M. [1998], Stability and robust stability of time-delay systems : A guided tour, *in* L. Dugard & E. Verriest, eds, ‘Stability and Control of Time-delay Systems’, Vol. LNCIS 228 of *Lecture Notes on Control and Information Sciences*, Berling Springer, New York, pp. 1–71.
- Niemeyer, G. & Slotine, J.-J. [1991], ‘Stable adaptive teleoperation’, *IEEE Journal of Oceanic Engineering* **16**(1).
- Niemeyer, G. & Slotine, J.-J. [1998], Towards force-reflecting teleoperation over the internet, *in* ‘Proc. IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation’, Vol. 3, pp. 1909–1915.
- Nietzsche, F. [1985], *Ainsi parlait Zarathoustra*, Folio, Gallimard, Paris 7<sup>e</sup>, France.
- Nihtilä, M. T. [1989], ‘Adaptive control of a continuous-time system with time-varying input delay’, *Systems and Control Letters* (12), 357–364.
- Nihtilä, M. T. [1991a], Finite pole assignment for systems with time-varying input delays, *in* ‘Proc. of the 30<sup>rd</sup> IEEE Int. Conf. on Decision and Control’, Brighton, England.
- Nihtilä, M. T. [1991b], Pole placement design methodology for input delay systems, *in* ‘European Control Conference’, Grenoble, France.
- Nilsson, J. [1998], Real-Time Control Systems with Delays, Ph. d. thesis at the department of automatic control, Lund Institute of Technology, Sweden.

## Bibliographie

---

- Nilsson, J. & Bernhardsson, B. [1997], Lqg control over a markov communication network, *in* ‘Proceedings of the 36th IEEE Conference on Decision and Control’, San Diego, pp. 4586–4591.
- Nilsson, J., Bernhardsson, B. & Wittenmark, B. [1998], ‘Stochastic analysis and control of real-time systems with random time delays’, *Automatica* **34**, 57–64.
- Olbrot, A. W. [1972], ‘On controllability of linear systems with time delays in the control’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **ac-16**, 664–666.
- Pan, Y. J., Canudas de Wit, C. & Sename, O. [2004], Predictive controller design for bilateral teleoperation systems with time varying delays, *in* ‘Proc. of the 2004 IEEE Control and Decision Conference’, Atlantis, Paradise Island, Bahamas.
- Picasso, B. & Bicchi, A. [2003], Stabilization of lti systems with quantized state-quantized input static feedback, *in* A. Pnueli & O. Maler, eds, ‘Hybrid Systems : Computation and Control’, Vol. LNCS 2623 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer-Verlag, Heidelberg, Germany, pp. 405–416.
- Praly, L. & Arcak, M. [2004], ‘A sufficient condition for stability of nonlinear observer-based controllers’, *Systems and Control Letters* **53**, 311–320.
- Richard, J.-P. [2003], ‘Time delay systems : An overview of some recent advances and open problems’, *Automatica* **39**(10), 1667–1694.
- Rimbaud, A. [1984], *Poésies : Une saison en enfer - Illuminations*, Poésie, seconde edn, Gallimard, Paris 7<sup>e</sup>, France.
- Sa Sainteté le Dalai Lama [2000], *Dzogchen*, Points - Sagesses, Seuil, Paris 6<sup>e</sup>, France.
- Sahai, A. & Mitter, S. [2005a], ‘The necessity and sufficiency of anytime capacity for stabilization of a linear system over a noisy communication link, part I : Scalar systems’, *submitted to IEEE Trans. on Inf. Theory* **LIDS 2649**.
- Sahai, A. & Mitter, S. [2005b], ‘The necessity and sufficiency of anytime capacity for stabilization of a linear system over a noisy communication link, part II : Vector systems’, *submitted to IEEE Trans. on Inf. Theory* **LIDS 2651**.
- Secchi, C., Stramigioli, S. & Melchiorri, C. [2001], Geometric grasping and telemanipulation, *in* ‘Proceedings of IROS2001’, Maui, Hawaii, USA.
- Serres, M. [2001], *Le système de Leibniz et ses modèles mathématiques*, Épipiméthée, 4<sup>e</sup> edn, Presses Universitaires de France, Paris 14<sup>e</sup>, France.
- Seuret, A., Dambrine, M. & Richard, J.-P. [2004], Robust exponential stabilisation of systems with time-varying delays, *in* ‘Proc. of the 5<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems’, Leuven, Belgium.
- Seuret, A., Fridman, E. & Richard, J.-P. [2006], ‘Exponential stabilization of delay neutral systems under sampled-data control’, *submitted to IEEE Trans. on Auto. Control*.

## Bibliographie

---

- Shannon, C. & Weaver, W. [1949], *The mathematical theory of communication*, University of Illinois Press, Urbana.
- Sidje, R. B. [1998], ‘Expokit : a software package for computing matrix exponentials’, *ACM Transactions on Mathematical Software (TOMS)* **24**(1), 130–156.
- Smith, O. J. M. [1959], ‘Closer control of loops with dead time’, *Chem. Eng. Prog.* **53**, 217–219.
- Son, L. T., Schiøler, H. & Madsen, O. B. [2002], Hybrid distributed iterative capacity allocation over bluetooth network, in ‘8th IEEE International Conference on Communication Systems (ICCS2002)’, Singapore.
- Stix, T. [1992], *Waves in plasmas*, American Institute of Physics, New-York.
- Stramigioli, S. [2001], *Modeling and IPC Control of Interactive Mechanical Systems : A Coordinate-free Approach*, Lecture Notes in Control and Information Sciences 266, Springer-Verlag, London.
- Stramigioli, S. [2002], About the use of port concepts for passive geometric telemanipulation with varying time delays, in ‘The 8th Mechatronics Forum International Conference (Mechatronics2002)’, Enschede, The Netherlands.
- Stramigioli, S., van der Schaft, A., Mashke, B., Andreotti, S. & Melchiorri, C. [2000], Geometric scattering in tele-manipulation of port controlled hamiltonian systems, in ‘Proceedings of the 39th IEEE Conference on Decision and Control’, Sydney, Australia.
- Stramigioli, S., van der Schaft, A., Mashke, B. & Melchiorri, C. [2002], ‘Geometric scattering in robotic telemanipulation’, *IEEE Transactions of Robotics and Automation* **18**, n. 4.
- Tatikonda, S. & Mitter, S. [2004], ‘Control under communication constraints’, *IEEE Trans. on Auto. Control* **49** (7), 1056–1068.
- Tatikonda, S., Sahai, A. & Mitter, S. [2004], ‘Stochastic linear control over a communication channel’, *IEEE Trans. on Auto. Control, Special Issue on Networked Control Systems* **49** (9), 1549–1561.
- Taylor, M. [1965], ‘Wave-travel in a non-uniform transmission line, in relation to pulses in arteries’, *Phys Med Biol* **10**, 539–550.
- Teppoz, L. [2005], Commande d’un système de conversion de type VSC-HVDC. Stabilité-contrôle des perturbations, PhD thesis, INPG/Laboratoire d’Automatique de Grenoble, Grenoble, France.
- Uchida, K., Ikeda, K., Azuma, T. & Kojima, A. [2000], Finite-dimensional characterizations of  $h^\infty$  control for linear systems with delays in control input and controlled output, in ‘Proc. of the 2<sup>nd</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems’, Ancona, USA, pp. 219–224.

## Bibliographie

---

- Uchida, K., Misaki, Y., Azuma, T. & Fujita, M. [2003], Predictive  $h^\infty$  control for linear systems over communication channels with time-varying delays, *in* ‘Proc. of the 4<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems’, Rocquencourt, France.
- Ushio, T. & Hsu, C. S. [1987], ‘Chaotic rounding error in digital control systems’, *IEEE Trans. Circuits and Systems* **34**, 133–139.
- Van Assche, V., Dambrine, M., Lafay, J.-F. & Richard, J.-P. [1999], Some problems arising in the implementation of distributed-delay control laws, *in* ‘Proc. of the 38<sup>th</sup> Conference on Decision and Control’, Phoenix, Arizona (USA).
- van der Schaft, A. [2004], Port-hamiltonian systems : an approach to modeling and control of complex physical systems, *in* ‘Proceedings of the Sixteenth International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MTNS2004)’, Leuven, Belgium.
- Van Foreest, N. [2004], Queues with Congestion-dependent Feedback, Ph. d. thesis at the faculty of mathematical sciences, University of Twente, Enschede, The Netherlands.
- Verriest, E. I. [2002], ‘Stability of systems with state-dependant and random delays’, *IMA Journal of Mathematical Control and Information* **19**, 103–114.
- Wells, D. [1991], *The Penguin Dictionary of Curious and Interesting Geometry*, Penguin Books, Middlesex, England.
- Williamson, D. [1990], ‘Finite wordlength design of digital kalman filters for state estimation’, *IEEE Transactions on Automatic Control* **30**, 930–939.
- Witrant, E. [2003], An overview of networked control systems, Technical report, Laboratoire d’Automatique de Grenoble, Grenoble, France.
- Witrant, E., Canudas-de-Wit, C. & Georges, D. [2003], Remote output stabilization under two channels time-varying delays, *in* ‘Proc. of the 4<sup>th</sup> IFAC Workshop on Time Delay Systems’, Rocquencourt, France.
- Witrant, E., Canudas-de-Wit, C., Georges, D. & Alamir, M. [2004], Remote stabilization via time-varying communication network delays : Application to TCP networks, *in* ‘Proc. of the IEEE Conference on Control Applications’, Taipei, Taiwan.
- Witrant, E., Canudas-de-Wit, C., Georges, D. & Alamir, M. [2005a], On the use of state predictors in networked control systems, *in* ‘Applications of Time-Delay Systems’, Vol. Springer (en processus de révision).
- Witrant, E., Canudas-de-Wit, C., Georges, D. & Alamir, M. [2005b], ‘Remote output stabilization via communication networks with a distributed control law’, *IEEE Transactions on Automatic Control* (en processus de révision) .
- Witrant, E., van der Schaft, A. & Stramigioli, S. [2005], A passive model for a non-homogeneous transmission line, Technical report, Universiteit Twente, Enschede, Netherlands.

## Bibliographie

---

- Wong, W. S. & Brockett, R. W. [1997], 'Systems with finite communication bandwidth constraints I : State estimation problems', *IEEE Transactions on Automatic Control* **42**(9), 1294–1298.
- Wong, W. S. & Brockett, R. W. [1999], 'Systems with finite communication bandwidth constraints II : Stabilization with limited information feedback', *IEEE Transactions on Automatic Control* **44**(5), 1049–1053.
- Yamada, T., Mochizuki, A., Sawada, J., Zaima, E., Kawamura, T., Ametani, A., Ishii, M. & Kato, S. [1995], 'Experimental evaluation of a UHV tower model for lightning surge analysis', *IEEE Transactions on Power Delivery* **10**, issue **1**, 393 – 402.
- Yu, R. [1999], 'On stability of linear systems with time-varying delay : generalized lyapunov equation', *IEEE AFRICON* **1**, 569–574.



---

**Résumé :** Nous étudions dans cette thèse le problème de stabilisation de systèmes physiques par l'intermédiaire d'un réseau de communication induisant des retards de dynamique connue. Ce problème apparaît lorsque la loi de commande est mise en œuvre à distance et conduit au problème de la stabilisation d'un système instable en boucle ouverte avec un retard variant dans le temps. Nous utilisons un prédicteur d'état à horizon variable afin d'établir une loi de commande stabilisante qui place les pôles du système en boucle fermée. Le calcul de l'horizon de prédiction est détaillé afin d'établir un contrôleur qui utilise de manière explicite les dynamiques du retard et est robuste vis-à-vis d'erreurs d'estimation induites par le modèle de réseau utilisé. Cette analyse de robustesse permet de prendre en compte les caractéristiques non déterministes du réseau. Nous proposons finalement une loi de commande basée sur un observateur pour le cas où seule la sortie est mesurable et considérons aussi le cas de poursuite de trajectoire. Des simulations et résultats expérimentaux sont proposés.

**Mots clés :** Systèmes commandés par réseau, stabilisation avec des retards temps variants, prédicteur d'état, observateur.

---

## Stabilisation of Network Controlled Systems

---

**Abstract :** In this thesis we investigate the problem of remote stabilization via communication networks involving some time-varying delays of known dynamics. This problem arises when the control law is remotely implemented and leads to the problem of stabilizing an open-loop unstable system with time-varying delay. We use a time-varying horizon predictor to design a stabilizing control law that sets the poles of the closed-loop system. The computation of the horizon of the predictor is detailed to establish a control law which explicitly uses the delay dynamics and is robust with respect to some uncertainties on the delay model. Thanks to this robustness analysis, we also consider the non-deterministic behavior of the networks. We finally develop an observer-based control for the case when only the delayed system output is measurable and solve the trajectory tracking problem in this framework. Simulation and experimental results are also presented.

**Key words :** Networked control systems, stabilization with time-varying delays, observer-based control, state predictor.

---

**Discipline :** Automatique-Productique

---

Laboratoire d'Automatique de Grenoble - ENSIEG - BP 46, 38402 Saint-Martin d'Hères, FRANCE.