HAL
open science

Corrélation du bruit de phase de lasers à réseau de Bragg par injection optique. Application à la génération et au transport sur fibre de signaux radiofréquence

Fabien Kéfélian

▶ To cite this version:

Fabien Kéfélian. Corrélation du bruit de phase de lasers à réseau de Bragg par injection optique. Application à la génération et au transport sur fibre de signaux radiofréquence. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Ecole nationale supérieure des telecommunications - ENST, 2005. Français. NNT : . tel-00011613v1

HAL Id: tel-00011613

https://theses.hal.science/tel-00011613v1

Submitted on 14 Feb 2006 (v1), last revised 7 Mar 2006 (v3)

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

TELECOM PARIS
école nationale supérieure des télécommunications

École Doctorale d'Informatique, Télécommunications et Électronique de Paris

Thèse

présentée pour obtenir le grade de docteur
de l'École Nationale Supérieure des Télécommunications

Spécialité : Électronique et Communications

Fabien KÉFÉLIAN

Corrélation du bruit de phase de lasers à réseau de Bragg par injection optique. Application à la génération et au transport sur fibre de signaux radiofréquence.

Soutenue le 5 décembre 2005 devant le jury composé de :

Jean-Michel Jonathan	Président
Michel Têtu	Rapporteurs
Guang-Hua Duan	
Jean Chazelas	Examinateurs
Renaud Gabet	
Philippe Gallion	Directeur de thèse
Francisco Mendieta	Invité

Remerciements

Je tiens à remercier en premier lieu Philippe Gallion de m'avoir proposé ce sujet de thèse et d'en avoir assuré la direction.

J'exprime ma profonde reconnaissance à Guang-Hua Duan et Michel Têtu pour avoir accepté la lourde tache d'être mes rapporteurs. Il en est de même envers Jean Chazelas et Francisco Mendieta, pour avoir accepté de faire partie de mon jury, et envers Jean-Michel Jonathan, pour l'avoir présidé.

Merci à Renaud Gabet pour son aide durant ces trois années.

Je remercie évidemment tous les membres du groupe télécommunications optiques de l'ENST pour leur accueil, leur écoute et leurs conseils : Didier Erasme, responsable du groupe, Guy Debarge, Yves Jaouen, Catherine Lepers, Jean-Claude Bouley, Christophe Minot, Marcia Costa et bien sur tous mes collègues doctorants, ceux qui ont commencé en même temps : Bruno Bristiel et Jérémie Renaudier, ceux qui avaient commencé avant : Sebastien Agnoli, Christophe Gosset, Elena Olmedo, Stefan Lauffenburger, Lydia Lourdiane, Désiré Topomentzo, Carlos Palavicini, Gabriel Campuzano, Cédric Ware, et ceux qui commencèrent après : Ihsan Fsaifes, Shi-Feng Jiang, Fausto Gomez, Hassan Teimoori, Damien Fafchamps, Manuel Sabban, Philippe Hamel, Qing Xu, sans oublier les stagiaires Chadi Abou Rjeily, Sébastien Lebrault et Chao-Wei Gao. Remerciements aussi aux autres membres du département Communications et électronique : son responsable, Bruno Thédrez, les secrétaires, Chantal Cadiat, Marie Baquero, Danièle Childz, et les doctorants : Anne-Laure Deleuze, Sophie Gault, Emilio Calvanese, Fernando Rangel, David Champion, Eli Jandot, Axel Le Poupon, Sylvain Chaillou, Sabine Leveiller, Mariam Kimiaei, Yolada Feideropoulou, Alireza Kazemipour, Ioannis Krikidis, Sara Abou Chakra, Antonio Cipriano, Nicolas Gresset, Anne-Claire Lepage, Ghaya Rekaya.

Résumé

Le mélange de deux faisceaux laser sur un photo-détecteur permet de générer un signal radiofréquence jusqu'au THz. Par corrélation des deux sources optiques, le signal obtenu peut acquérir la pureté spectrale requise pour les réseaux de communications radio sur fibre.

Notre travail porte sur la méthode de corrélation par accrochage optique sur un peigne de fréquences. L'injection optique permet de transférer le bruit de phase d'un laser maître, pris comme référence, à un laser esclave. En utilisant deux harmoniques d'un laser modulé en fréquence comme sources distinctes d'injection, les bruits de phase des deux lasers esclaves sont corrélés et la différence de fréquences est multiple de la fréquence primaire.

Nous avons réalisé une étude théorique générale de l'injection dans les lasers semi-conducteur à cavité complexe, en particulier les lasers DFB, en mettant notamment en évidence l'asymétrie géométrique du bruit. Nous avons relié théoriquement le degré de corrélation entre les deux lasers aux paramètres d'injection et au bruit de phase. L'expression a été confirmée par des mesures sur le contraste de franges d'interférences et le spectre du photo-courant hétérodyne. Ces battements temporels ont été mis en regard avec l'optique de Fourier et le speckle. Nous avons étudié la pureté spectrale du battement et établi les limites fondamentales de cette technique en fonction de la qualité de l'oscillateur primaire, des propriétés spectrales des lasers, des paramètres d'injection et de transport sur fibre. Les mesures de bruit de phase sur le signal généré expérimentalement, pour différentes conditions d'injection, sont en très bon accord avec les expressions analytiques.

Abstract

Mixing of two laser beams on a photo-detector is a way to generate radiofrequency signals up to THz band. By correlation of both optical sources, this signal can reach the required spectral purity for radio-over-fiber communications systems.

Our work deals with the method of correlation by optical locking on a frequency comb. Injection locking is used to transfer the phase noise of a reference laser to a slave laser. Using two harmonics line of a frequency modulated laser as two distinct master sources, the phase noises of both slave lasers become correlated and the frequencies difference is a multiple of the primary frequency.

We have realized a general theoretical study of the injection into semi-conductor laser with complex cavity, in particular distributed grating lasers, showing in particular the geometrical asymmetry of the noise propriety. The correlation degree between the lasers has been analytically linked to the injection parameters and the phase noise. Measurements concerning interferences fringes contrast and heterodyne photocurrent spectrum have confirmed the expression. The temporal beating phenomenon has been compared with Fourier optics and speckle. Spectral purity of the beat-note has been studied in function of the quality of the primary oscillator, the spectral proprieties of the lasers, the parameters of injection and fiber transportation. Phase noise measurements on the experimentally generated radio-frequency signal, for different conditions of injection, are in good agreement with theoretical expressions establishing the fundamental limits of this technique.

Sommaire

Remerciements **i**

Résumé **i**

Abstract **iii**

Sommaire **v**

Table des figures **xii**

Introduction générale **xvi**

1 Système Radio-sur-Fibre et génération d'ondes millimétriques par battement optique **1**

1.1 Système de communication sans fil large bande et radio-sur-fibre 1

1.1.1 Introduction 1

1.1.2 Systèmes de communication sans fil large bande 1

1.1.3 La solution radio-sur-fibre 3

1.2 Transmission d'une porteuse micro-onde sur fibre optique par modulation de l'intensité optique 4

1.2.1 Introduction 4

1.2.2 Modulation directe du laser 4

1.2.3 Modulation externe de l'onde optique 6

1.2.4 Pénalité induite par la dispersion chromatique 6

1.3 Génération et transmission d'une porteuse micro-onde sur fibre optique par battement optique 7

1.3.1 Utilisation de deux lasers indépendants 7

1.3.2 Utilisation d'un seul laser 8

1.3.3 Utilisation de deux lasers corrélés 8

1.4 Transmission de données utilisant la radio-sur-fibre et la génération hétérodyne 10

1.4.1 Principe général de communications 10

1.4.2 Standards de format de modulation et tolérance au bruit de phase 11
1.4.3 Résultats expérimentaux de transmissions de données à l'aide d'un système opto/micro-ondes hétérodyne 13
1.5 Conclusion 16

2 Rappels théoriques et mesures expérimentales sur les lasers DFB 19
2.1 Introduction 19
2.2 Équations statiques du laser DFB 20
2.2.1 Introduction 20
2.2.2 Équation des modes couplés 20
2.2.3 Équation caractéristique du mode spectral 21
2.2.4 Expression du mode longitudinal 24
2.2.5 Caractéristique du mode longitudinal 24
2.3 DFB : Caractéristiques expérimentales 27
2.3.1 Introduction 27
2.3.2 Détail de la structure du laser 27
2.3.3 Caractéristiques statiques 29
2.3.4 Caractéristiques spectrales 32
2.3.5 Caractéristiques dynamiques 36
2.4 Conclusion 39

3 Rappels sur les propriétés statistiques du champ et du bruit de phase optique 41
3.1 Introduction 41
3.2 Propriétés statistiques de la phase d'un mode laser 42
3.2.1 Propriétés statistiques générales 42
3.2.2 Marche aléatoire, processus de Wiener-Levy et équation de Langevin 42
3.2.3 Moments du premier et du second ordre 47
3.2.4 Autres expressions 48
3.2.5 Densité spectrale de puissance de la phase 49
3.3 Propriétés statistiques du champ laser monomode 49
3.3.1 Moment du premier ordre 49
3.3.2 Moments du second ordre 49
3.3.3 Moment d'ordre 4 51
3.4 Propriétés statistiques du photocourant 52
3.4.1 Remarque préliminaire 52
3.4.2 Statistique du photo-courant 52
3.4.3 Courant moyen 53
3.4.4 Moment du second ordre 53

3.4.5 Conclusion 54
3.5 Conclusion 54

4 Injection optique dans un laser à cavité complexe 55
4.1 Introduction 55
4.1.1 Rappel sur la fonction de Green 55
4.1.2 Application de la méthode de la fonction de Green 56
4.1.3 Injection optique dans les lasers 56
4.2 Présentation générale 57
4.3 Étude générale de l'injection dans un laser à cavité complexe 58
4.3.1 Introduction 58
4.3.2 Description du milieu 58
4.3.3 Équation de Maxwell et équation de Helmhotz pour le champ électrique 59
4.3.4 Résolution de l'équation d'Helmotz longitudinal dans un laser DFB 61
4.3.5 Calcul de la matrice de transmission 62
4.3.6 Calcul de l'émission spontanée par la méthode de Green 65
4.3.7 Compatibilité avec la méthode du Wronskien 67
4.4 Cas Contrapropagatif 68
4.4.1 Développement de l'équation du champ électrique 68
4.4.2 Calcul de l'enveloppe du champ électrique 70
4.4.3 Expression des paramètres en fonction du mode longitudinal résonnant 71
4.4.4 Expression du taux d'émission spontanée 72
4.4.5 Équation du Fabry-Perot soumis à injection par la face de sortie 72
4.4.6 Paramètres d'injection du laser DFB avec une face anti-reflet 73
4.4.7 Équations de la puissance et de la phase optique 74
4.4.8 Intensité et phase pour le laser Fabry-Perot 76
4.4.9 Calcul de la plage d'accrochage 76
4.4.10 Détermination des densités spectrales de bruit 78
4.4.11 Commentaires 82
4.5 Cas Copropagatif 83
4.5.1 Développement de l'équation du champ électrique 83
4.5.2 Calcul de l'enveloppe temporelle du champ électrique 84
4.5.3 Équation du laser Fabry-Perot soumis à injection par la face opposée à la sortie . 85
4.5.4 Équations sur la puissance et la phase optique 86
4.5.5 Calcul de la plage d'accrochage 87
4.5.6 Linéarisation, bruit d'intensité et bruit de phase 89
4.5.7 Commentaires 90

4.6 Résultats numériques 90
4.6.1 Introduction 90
4.6.2 Cas du mode dans la bande interdite 94
4.7 Conclusion 97

5 Battements temporels et spectraux : analogie avec les interférences spatiales et l'optique de Fourier 99
5.1 Introduction 99
5.2 Rappel sur les phénomènes interférométriques spatiaux 99
5.2.1 Les franges d'Young 99
5.2.2 Trous d'Young en optique de Fourier 100
5.2.3 Influence de la corrélation entre les deux trous 101
5.2.4 Influence de la taille des trous et de la densité spectrale spatiale du champ 102
5.2.5 Expérience des trous d'Young par division de l'amplitude 104
5.2.6 Conclusion 106
5.2.7 Généralisation 107
5.3 Franges d'Young fréquentielles 109
5.3.1 Trous d'Young temporels 109
5.3.2 Brouillage des franges obtenues par les trous d'Young temporels 110
5.3.3 Franges d'Young fréquentielles par division du front d'onde 111
5.3.4 Détection de cannelures spectrales dans une raie laser inférieure au Méga-Hertz 112
5.3.5 Expression de la fonction d'autocorrélation 115
5.3.6 Conclusion 116
5.4 Franges d'Young temporelles 116
5.4.1 Trous d'Young fréquentiels 116
5.4.2 Condition de cohérence spectrale pour des franges par division du front d'onde . 117
5.4.3 Visualisation des interférences temporelles entre deux lasers indépendants de fréquences différentes 120
5.4.4 Autres moyens de détection des battements temporels 124
5.4.5 Interférences temporelles par duplication du front d'onde spectral 125
5.4.6 Interférences temporelles obtenues par deux sources partiellement corrélées . . . 125
5.5 Conclusion 126

6 Étude du degré de corrélation de deux lasers partiellement corrélés par injection optique 129
6.1 Introduction à la corrélation par injection optique 129
6.2 Calcul du degré de corrélation de deux lasers reliés par injection 130
6.2.1 Transfert et synchronisation de bruit par injection 130

6.2.2 Expression du degré de corrélation 131
6.3 Études des propriétés spectrales des bruits de phases 132
6.3.1 Introduction 132
6.3.2 Calcul adiabatique de la densité spectrale de puissance du bruit de phase 133
6.3.3 Calcul de la densité spectrale de puissance de la phase du battement 136
6.3.4 Calcul des variances 137
6.3.5 Calcul de la gigue de phase du laser esclave 137
6.3.6 Expression du degré de corrélation 138
6.4 Mesure expérimentale du degré de corrélation en fonction des conditions d'injection . . 139
6.4.1 Introduction 139
6.4.2 Mesure du degré de corrélation en fonction de la puissance injectée 139
6.4.3 Mesure du degré de corrélation en fonction du désaccord de fréquence 140
6.5 Conclusion 145

7 Caractérisation de la pureté spectrale de la porteuse micro-onde générée par détection du battement corrélé 147
7.1 Introduction 147
7.2 Transfert de corrélation 148
7.2.1 Corrélation des bandes latérales optiques 148
7.2.2 Transfert de corrélation des bandes latérales aux lasers esclaves 151
7.2.3 Décorrélation par décalage temporel 152
7.3 Densité spectrale de puissance de la phase micro-onde 154
7.3.1 Expression de la densité spectrale de puissance 155
7.3.2 Cas du délai nul, de lasers identiques et de conditions d'injection identiques . . . 156
7.3.3 Cas du délai non nul, de lasers identiques et de fréquence d'accrochage infini . . 156
7.4 Analyse numérique des résultats 157
7.4.1 Influence du facteur d'injection k_c' 157
7.4.2 Influence de la largeur spectrale des lasers soumis à injection $\Delta\nu$ 158
7.4.3 Influence du désequilibre des conditions d'injection 159
7.4.4 Influence de la pureté spectrale du laser maître 160
7.4.5 Influence d'un délai entre les deux ondes 161
7.5 Densité spectrale de puissance du photocourant 164
7.5.1 Expression de la variance de la gigue de phase RF 164
7.5.2 Expression de la densité spectrale de puissance 165
7.5.3 Autres sources de bruit 166
7.6 Caractérisation expérimentale du bruit de phase de la porteuse générée optiquement . . . 167
7.6.1 Remarques préliminaires 167

7.6.2 Limitations expérimentale 168
7.6.3 Présentation des paramètres de mesure 168
7.6.4 Résultats et commentaires 170
7.6.5 Proposition d'une méthode de mesure de bruit de fréquence optique basée sur l'injection optique par un laser de très faible largeur spectrale 170
7.7 Conclusion 171

Conclusions et perspectives **171**

A Calcul statistique du photo-courant **175**
A.1 Introduction 175
A.2 Émission poissonienne conditionnelle des électrons 175
A.3 Calcul du courant moyen 176
A.3.1 Calcul de l'écart type du photo-courant 177
A.4 Calcul de la fonction d'autocorrelation du photo-courant 178
A.5 Calcul de la densité spectrale de puissance de bruit du courant 179

B Densité spectrale de puissance du bruit de phase **181**
B.1 Calcul d'une densité spectrale de puissance pour la phase 181
B.2 Calcul d'une fonction d'autocorrélation pour la phase 182
B.3 La densité spectrale de puissance définie pour ϕ a-t-elle un sens ? 182
B.4 Application de la pseudo densité spectrale 183

C Bruit de phase RF - Bruit de phase optique - Spectre du champ **185**
C.1 Introduction 185
C.2 Spectre du champ et gigue de phase 186
C.3 Représentation et mesure du bruit de phase 186

Bibliographie **191**

Table des figures

1.1 Schéma général d'un réseau pico-cellulaire 2
1.2 Schéma général d'une liaison hybride Optique/RF 3
1.3 Modulation directe du laser par modulation du courant 5
1.4 Modulation de l'onde optique par un modulateur externe 6
1.5 Génération et transmission de porteuse micro-onde par détection de battement optique . 7
1.6 Principe de la génération micro-onde par double injection optique 9
1.7 Schéma général du système de télécommunications hybride opto/micro-onde basé sur le battement laser hétérodyne corrélé par synchronisation sur bandes latérales de modulation 10
1.8 Constellation d'une modulation 16 QAM avec bruit de phase 12

2.1 Schéma d'un laser DFB 20
2.2 Détermination de différents points de fonctionnement 23
2.3 Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 6 25
2.4 Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 2 25
2.5 Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 1 26
2.6 Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 0.5 26
2.7 Schéma de structure du laser DFB à convertisseur de mode 28
2.8 Caractéristique électrique de la diode laser 29
2.9 Caractéristiques expérimentales courant-puissance du laser n°3 pour différentes températures 30

2.10 Longueur d'onde d'émission du laser maître en fonction de la température 31
2.11 Fréquence d'émission du laser maître en fonction du courant d'injection 32
2.12 Évolution du spectre du laser DFB près du seuil 33
2.13 Spectre du laser DFB à deux fois le courant de seuil 33
2.14 Mesure auto-hétérodyne du spectre d'un laser 35
2.15 Variation de la largeur spectrale avec la puissance d'émission 37
2.16 Spectre optique du laser modulé 38
2.17 Fréquence de résonance en fonction du courant d'injection 39

3.1 Différente réalisation de la phase du laser 44
3.2 Représentation de Fresnel de la perturbation du champ stimulé par l'émission spontanée 45
3.3 Autocorrélation de la gigue de phase durant un temps T 47

4.1 Laser soumis à injection par les deux facettes 59
4.2 Schéma d'injection laser dans le sens contra-propagatif 68
4.3 Schéma d'injection optique dans le sens co-propagatif 83
4.4 Intervalle spectral libre vu par l'onde injectée (f_R), normalisé par l'intervalle spectral libre de la cavité $(1/\tau_{in})$ 91
4.5 Intervalle spectral libre vu par l'onde injectée normalisé par l'intervalle spectral libre de la cavité $(1/\tau_i)$ 91
4.6 Argument des intervalles spectraux libres complexes vus dans le cas co et contra-propagatif 92
4.7 Paramètre χ_t en fonction du coefficient de couplage 93
4.8 Déphasage entre f_T et f_t 94
4.9 Paramètre de seuil et d'injection en fonction de la réflectivité 95
4.10 Influence de la phase de la réflectivité sur les paramètres du mode et de l'injection 96
4.11 Montage de mesure de la plage d'accrochage 96
4.12 Demi largeur d'accrochage en fonction du taux d'injection 97

5.1 Schéma de montage des trous d'Young 100
5.2 Schéma de montage des trous d'Young avec un front d'onde incident bruité et des trous de taille non nulle 103
5.3 Montage des trous d'Young avec duplication du front d'onde 105
5.4 Montage des trous d'Young dans le spectre spatial 107
5.5 Schéma des trous d'Young temporels 109
5.6 Schéma des trous d'Young temporels avec bruit de phase sur la source et impulsion de durée non nulle 110
5.7 Montage expérimental interférométrique relié au montage de mesure spectrale par auto-hétérodynage 113

5.8 Courbes expérimentales du spectre auto-hétérodyne avec et sans interférences spectrales, en pointillé, ajustement lorentzien du spectre du laser et spectre auto-hétérodyne cannelé correspondant . . . 114
5.9 Spectre théorique du champ optique sans et avec interférences obtenu à partir des paramètres mesurés sur le spectre auto-hétérodyne . . . 114
5.10 Enveloppe de la fonction d'autocorrélation du champ mélange pour différentes valeurs du décalage temporel . . . 115
5.11 Expérience des trous d'Young dans le spectre temporel . . . 117
5.12 Schéma du montage de génération THz par filtrage spectral . . . 119
5.13 Effet du bruit de phase combiné à la persistance rétinienne, observation sur 5 périodes d'un battement à 100 kHz obtenu avec deux lasers de 30 kHz . . . 121
5.14 Histogramme des tensions visualisées sur l'oscilloscope à temps réel et ajustement de la densité de probabilité au niveau d'un noeud de la sinusoïde en fonction de la largeur spectrale des lasers . . . 123

6.1 Spectre optique expérimental du laser soumis à très faible et faible injection d'un laser maître plus cohérent (mesure auto-hétérodyne) . . . 135
6.2 Mesure du degré de corrélation entre le laser maître et le laser esclave en fonction de la puissance injectée . . . 140
6.3 Spectre schématique du photocourant de battement . . . 141
6.4 Schéma de montage de la mesure du degré de corrélation en fonction du désaccord de fréquence . . . 143
6.5 Mesure du degré de corrélation au bord gauche de la plage d'accrochage . . . 144
6.6 Régime du mélange multi-ondes . . . 145

7.1 Schéma général du transfert de corrélation . . . 149
7.2 Influence des paramètres d'injection sur le bruit de phase micro-onde . . . 157
7.3 Influence de la largeur spectrale des lasers soumis à injection . . . 159
7.4 Influence de la différence entre les paramètres d'accrochage . . . 160
7.5 Influence de la pureté spectrale du laser maître . . . 161
7.6 Influence d'un délai entre les deux ondes optiques sur le bruit de phase micro-onde . . . 162
7.7 Influence de la largeur spectrale du laser maître sur la pénalité due au délai . . . 163
7.8 Influence de la bande d'accrochage et du délai sur la densité spectrale de puissance du battement RF . . . 165
7.9 Variance de la gigue de phase et corrélation du quatrième ordre . . . 166
7.10 Schéma du montage expérimental . . . 168
7.11 Mesures expérimentales du spectre du bruit de phase en fonction de différentes fréquences d'accrochage . . . 169

C.1 Spectre schématique d'une porteuse micro-onde 187
C.2 Spectre d'une porteuse optique, comparaison au bruit de phase 188

Introduction générale

Le 4 octobre 2005, l'Académie royale des sciences de Suède attribuait le Prix Nobel de physique à Roy J. Glauber, pour sa contribution à la théorie quantique de la cohérence optique, et conjointement à John L. Hall et à Theodor W. Hänsch pour leurs travaux sur la technique du peigne de fréquence optique.

Or depuis 1967, la seconde est définie comme la durée de 9 192 631 770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre les deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133. La comparaison directe des fréquences optiques à cet étalon pose alors d'importants problèmes, la première chaîne de fréquence reliant un laser HeNe visible à un oscillateur klystron Cs nécessita ainsi pas moins de huit étages de conversion de fréquence. Grâce à la génération de peigne optique basée sur le blocage en phase des modes d'un laser [1], il est devenu beaucoup plus simple de mesurer une fréquence optique. On dispose en effet, à partir d'un seul laser, d'un ensemble de fréquences optiques formant une règle graduée dont la longueur peut atteindre plusieurs THz, et la graduation une centaine de MHz. La mesure entre deux graduations peut alors se faire de manière électrique par détection du battement entre la fréquence à mesurer et la graduation la plus proche.

L'une des propriétés des peignes optiques est donc de garantir un intervalle égal entre chaque mode et par conséquent une distance fixe entre deux modes optiques pouvant être éloignés de plusieurs THz. Par conséquent, un peigne optique peut aussi servir de référence pour des signaux millimétriques. Cette rigidité d'intervalle entre deux fréquences optiques éloignées traduit en fait une corrélation très importante entre les bruits de fréquences des deux modes considérés. En transmettant le bruit de deux modes éloignés à deux lasers indépendants, on parviendrait à synchroniser le bruit de ses deux lasers, dont les battements généreraient alors une onde électrique continue, extrêmement stable, avec une fréquence pouvant dépasser le THz.

Notre travail porte ainsi sur l'étude du transfert de corrélation entre un peigne optique obtenu par modulation directe d'un laser maître, et deux lasers accrochés sur les dents du peigne par injection optique. Cette méthode s'inscrit comme une des solutions à la génération et la distribution de porteuses millimétriques dans le cadre du déploiement de réseaux de télécommunications locaux à très large bande.

La présentation de notre travail commence par un exposé du cadre d'application, la technologie radio-sur-fibre, et de la méthode de génération de radio-fréquence par voie optique. Nous proposons ensuite deux chapitres généraux concernant les lasers DFB et le bruit de phase dans les lasers. Le chapitre central est dévolu à l'analyse théorique de l'injection optique dans les lasers DFB et Fabry-Perot à partir

des équations électromagnétiques. Le cinquième chapitre concerne l'étude des battements optiques dans le cadre générale des interférences et de la cohérence spatiale et temporelle. Le chapitre suivant étudie théoriquement et expérimentalement les propriétés de corrélation entre un laser maître et un laser esclave à partir duquel le chapitre final établit analytiquement et confirme expérimentalement les propriétés du bruit de phase d'un signal radio-fréquence généré par battement entre deux lasers corrélés par accrochage sur des bandes latérales de modulation.

Chapitre 1

Système Radio-sur-Fibre et génération d'ondes millimétriques par battement optique

1.1 Système de communication sans fil large bande et radio-sur-fibre

1.1.1 Introduction

La multiplication des téléphones cellulaires, des ordinateurs portables « WIFI » ainsi que des systèmes automobiles de positionnement (GPS) témoigne du développement à très grande échelle des communications sans fil. Le développement des formats multimédia de haute définition entraîne ainsi une demande accrue en bande passante, en efficacité spectrale (Bit/s/Hz) et en possibilité de multiplexage, dans le but d'accroître les capacités de transmission des systèmes. La translation des porteuses vers des fréquences plus élevées permet de répondre à la demande en bande passante, cependant elle est aussi synonyme de hausse des coûts technologiques, amplifiée par la réduction de la couverture et donc la nécessité de multiplier le nombre de stations de base.

1.1.2 Systèmes de communication sans fil large bande

Face à cette demande accrue en mobilité et en débit, de nouveaux systèmes de télécommunications sont actuellement en train de voir le jour. Ainsi le système M.B.S. (Mobile Broadband System, *Système mobile large bande*) est prévu pour étendre aux utilisateurs mobiles les fonctionnalités du réseau fixe B-ISDN (Broadband Integrated Services Digital Network, *Réseau numérique de services intégrés large bande*). Le cahier des charges du MBS fixe un débit de 155 MBit/s sur des porteuses comprises entre 62 et 66 GHz donnant des diamètres de cellules de la centaine de mètres (figure 1.1). Le MBS a fait l'objet d'une première étude sur quatre années (1992-1996) dans le cadre du projet R.A.C.E. 2067 [2] (Research and development in Advanced Communication technologie for Europe, *Recherche et developpement en*

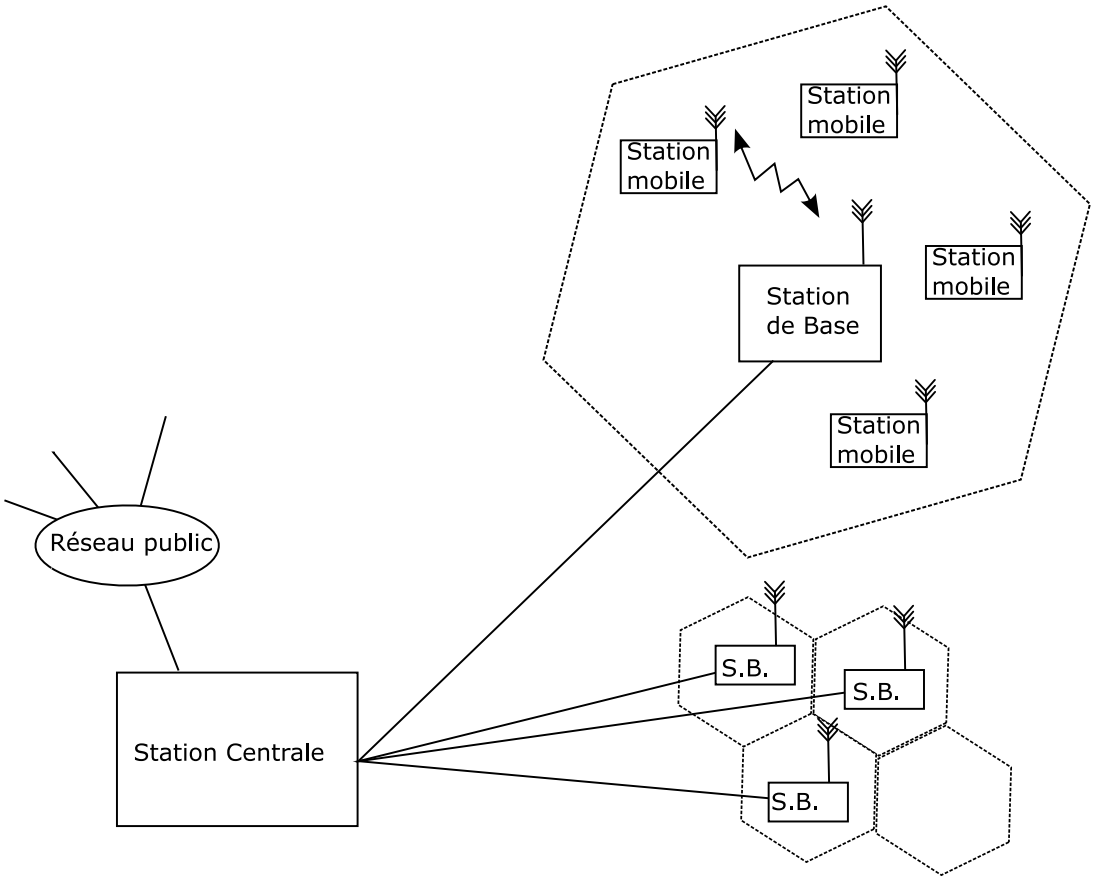

FIG. 1.1 – Schéma général d'un réseau pico-cellulaire

technologie de communications avancée pour l'Europe). Les études sur le MBS se sont poursuivies dans le cadre des projets A.C.T.S. (Advanced Communications Technologies and Services,*Services et technologies de communications avancés*) :

- AC204 SAMBA (System for Advanced Mobile Broadband Applications, *Système pour applications mobiles large-bande avancées*) avec démonstration à 40 GHz et 34 MBit/s
- AC006 MEDIAN [3] (Wireless Broadband Customer Premises Network/Local Area Network for Professional and Residential Multimedia Applications, *Réseau sans fil large bande local intra-bâtiment pour applications multimédia professionnelles et résidentielles*), concernant un réseau local basé sur une modulation multi-porteuse adaptatrice dans la bande 60 GHz avec un débit de 155 MBit/s et une compatibilité de connexion avec les systèmes de téléphonie mobile de troisième génération utilisant l'ATM (Asynchronous Transfer Mode *Mode de transfert asynchrone*)
- AC348 ACCORD [4] qui a pour objectif d'assurer la compatibilité des systèmes satellitaires, intra-bâtiments et pico-cellulaires haut et bas débit pour l'implémentation global du MBS

L'une des applications les plus concrètes du MBS est la vidéo mobile haut débit, les données vidéo haute définition sont en effet celles qui impliquent les débits les plus importants, comme le montre le

Service (nb. de bits de codage/Fréq. d'échantillonnage/nb. de canaux)	Débits
Voix (8 Bit/8 kHz/1)	64 kBit/s
Audio stéréo qualité CD (16 Bit/44.1 kHz/2)	1.4 MBit/s
Audio qualité professionnelle (DAT) (24 Bit/48 kHz/2)	2.3 MBit/s
Vidéo numérique compressée (MPEG)	2-8 MBit/s
Vidéo numérique qualité studio (ITU-R 601)	216 MBit/s
Vidéo numérique qualité imagerie médicale (NTT)	650 MBit/s
Vidéo numérique haute définition qualité studio (HDTV)	1.08 GBit/s

TAB. 1.1 – Evolution des débits audio-vidéo, d'après [5]

tableau 1.1, avec une transmission temps réel et des conditions d'utilisation sans fil allant du tournage studio à la télédiffusion médicale embarquée dans les ambulances.

Le LMDS (Local Multipoint Distribution System, *Système de distribution local multipoint*) est une technologie sans fil d'origine états-unienne, proche du MBS, utilisant la bande 30 GHz.

Le domaine des systèmes de transport intelligent (Intelligent Vehicule Highway System) est actuellement aussi en pleine période de développement, que ce soit du point de vue de la communication route-véhicule ou du point de vue véhicule-véhicule [6] [7] [8]

1.1.3 La solution radio-sur-fibre

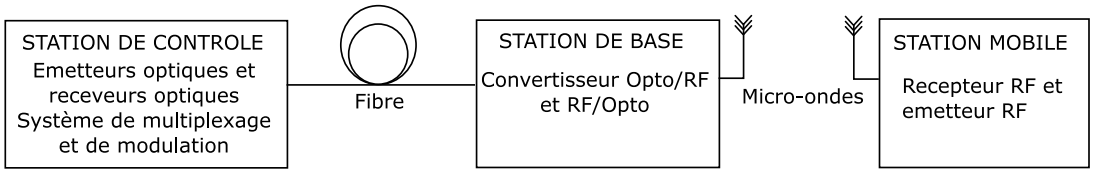

FIG. 1.2 – Schéma général d'une liaison hybride Optique/RF

La technologie « Radio sur Fibre » tente de répondre à la problématique de coût des systèmes picocellulaires en déplaçant la complexité technologique présente dans chacune des stations fixes locales vers la seule station centrale. Le lien entre les stations de base locales et la station centrale s'effectue alors par fibre optique. La station centrale se charge d'alimenter optiquement les stations locales en porteuses très hautes fréquences, éliminant alors la présence d'oscillateurs et de modulateurs micro-ondes dans chacune des cellules (figure 1.2). Outre cette simplification technologique des stations de base, un grand nombre d'autres avantages est apporté par la technologie « Radio sur Fibre » parmi lesquels, tout d'abord, une très faible atténuation dans la fibre (0.2 dB/km à 1500 nm sur fibre silice, à comparer au 1500 dB/km du câble coaxial à 25 GHz), une bande passante théorique de plusieurs THz couplée à la possibilité de multiplexage en longueurs d'ondes [9] [10], une immunité aux interférences électromagnétiques, un faible poids (0.07 g/m à comparer au 50 g/m du câble coaxial) ainsi qu'une flexibilité

d'évolution et d'allocation dynamique grâce à un contrôle centralisé.

Les applications potentielles de la technologie « Radio sur Fibre » couvrent les réseaux de téléphonie mobile, les réseaux satellitaires, la distribution vidéo, la communication automobile ainsi que l'échange de données informatiques.

Dans le domaine des composants, le projet OPTIMM (Systèmes opto-millimétriques pour le prolongement optique des raccordements hertziens large bande à 60 GHz) [11] initié par le RNRT (Réseau national de recherche en télécommunications) s'est particulièrement penché sur les composants d'interfaces au sein de quatre sous projets :

- Génération optique du 55 GHz : Technologie basée sur un laser bi-mode double polarisation utilisant comme matériau actif un assemblage de verre dopé Er,Yb et un cristal de LiTa03 [12].
- Récepteur à 60 GHz : Fabrication d'une photo-diode de sensibilité 0.5 A/W pouvant fournir jusqu'à -7 dBm à 60 GHz ainsi que d'un photo-oscillateur à 55 GHz à super-réseau contraint.
- Antennes actives 60 GHz et communications avec les mobiles : Technologie associant MMIC (circuits intégrés monolithiques micro-ondes) et antennes à réseaux linéaires ou plans avec diagramme de rayonnement directif [13].
- Intégration système et pilotage : Transmission radio de débit moyen descendant jusqu'à 20 MBit/s.

1.2 Transmission d'une porteuse micro-onde sur fibre optique par modulation de l'intensité optique

1.2.1 Introduction

Le moyen le plus simple pour transmettre un signal électrique par voie optique est de moduler l'intensité optique de la source optique située en amont de la fibre (Station centrale) par ce signal, modulation qui sera convertie en signal électrique de même fréquence par le photo-détecteur situé en aval de la fibre (Station de base).

Deux moyens existent pour moduler l'intensité optique de la source :

- Modulation interne, c'est à dire par modulation du courant de pompage du laser
- Modulation externe, c'est à dire par modulation de l'intensité du faisceau lumineux émis, par exemple à l'aide d'un modulateur Mach-Zehnder

Afin de pouvoir apprécier les performances de ces deux méthodes, il est nécessaire de faire un bilan de transmission.

1.2.2 Modulation directe du laser

Dans le cas de la modulation interne, la fréquence maximale de modulation du laser est limitée par le circuit électronique de la diode (capacité parasite) etla dynamique des porteurs du laser. De nombreuses innovations technologiques ont permis d'étendre la bande passante de modulation des lasers

semi-conducteurs, cependant une modulation au-delà de 20 GHz reste toujours problématique et conduit alors à des taux de modulation de la porteuse optique très faible.

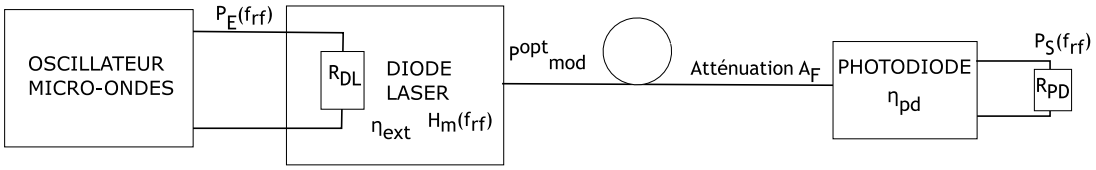

FIG. 1.3 – Modulation directe du laser par modulation du courant

Dans le cas de la modulation directe, (figure 1.3), le rapport de la puissance électrique P_S reçue par une charge R_{PD} connectée aux bornes de la photodiode à la puissance électrique P_E reçue par la charge d'entrée R_{DL} de la diode laser est déterminé de la manière suivante :

$$P_E = R_{DL} I_{DLmod}^2 = R_{DL} \left[\frac{h\nu}{e} \eta_{ext} P_{mod}^{opt} \right]^2 \tag{1.1}$$

$$P_S = R_{PD} I_{PDmod}^2 = R_{PD} \left[H_m(f_{RF}) \frac{e}{h\nu} \eta_{PD} A_F P_{mod}^{opt} \right]^2 \tag{1.2}$$

où η_{ext} est l'efficacité quantique externe de la diode laser, η_{PD} est l'efficacité quantique de la photodiode, I_{DLmod} l'intensité du courant appliqué à la diode laser modulé à la fréquence f_{RF}, I_{PDmod} l'intensité du courant modulé produit par le photodétecteur, P_{mod}^{opt}, la puissance optique modulée et A_F est l'atténuation de la fibre optique $P_{\text{sortie}}/P_{\text{entree}}$.

donc

$$\frac{P_S}{P_E} = \frac{R_{PD}}{R_{DL}} (\eta_{ext}\eta_{PD})^2 \mathrm{H_m}^2(f_{RF}) {A_F}^2 \tag{1.3}$$

$\mathrm{H_m}$ est le module de la fonction de transfert de modulation d'intensité normalisée. Il s'agit du paramètre essentiel de la liaison puisque pour des fréquences de modulation inférieures à la fréquence de relaxation du laser, elle est pratiquement unitaire, alors que pour des fréquences assez supérieures, ce facteur décroît avec une pente en $1/f^2$ donc mis au carré $1/f^4$. L'impédance d'entrée de la diode laser, très inférieure à 50 Ω, entraîne une importante reflexion de la puissance émise par l'oscillateur, par conséquent seule une faible partie de la puissance émise par l'oscillateur est réellement transmise à la diode laser. Nous n'avons pas fait figurer la réponse en fréquence du photodétecteur, la technologie actuelle permet de faire des détecteurs plus rapides que les diodes lasers, donc c'est toujours cette dernière qui limite le bilan. Pour des fréquences dans la bande de modulation, un laser de gain important, une fibre sans perte, le rapport des puissances est difficilement supérieur à 0.2 soit -7 dB (avec η_{ext}=0.6, η_{PD}=0.8) auquel il faut ajouter la pénalité due à la mauvaise adaptation d'impédance, pour des fréquences supérieures à 20 GHz, il apparaît forcement une perte supplémentaire de -40 dB/décade ce qui compromet fortement l'utilisation de la modulation directe au-delà de la fréquence de résonance.

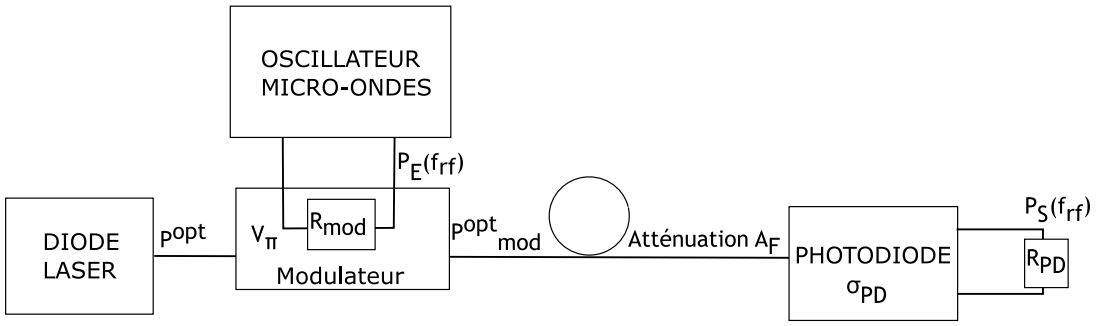

FIG. 1.4 – Modulation de l'onde optique par un modulateur externe

1.2.3 Modulation externe de l'onde optique

Dans le cas de la modulation externe par un interféromètre Mach-Zehnder polarisé en quadrature, (figure 1.4), le rapport des puissances est donné par :

$$P_E = \frac{V_{mod}^2}{R_{mod}} = \left[P_{mod}^{opt} \frac{2V_\pi}{\pi P_0^{opt}} \right]^2 \tag{1.4}$$

$$P_S = R_{PD} I_{PDmod}^2 = R_{PD} \left[H_m(f_{RF}) \sigma_{PD} \, A_F \, P_{mod}^{opt} \right]^2 \tag{1.5}$$

donc

$$\frac{P_S}{P_E} = \frac{R_{PD}}{R_{mod}} (\sigma_{PD})^2 \left[\frac{\pi P_{opt}}{2V_\pi} \right]^2 A_F^2 \tag{1.6}$$

où R_{mod} est l'impédance d'entrée du modulateur, V_{mod} est l'amplitude de la tension appliquée aux bornes du modulateur, P_0^{opt} est la puissance optique moyenne en sortie du modulateur et V_π est la tension de fermeture du modulateur, σ_{PD} est la sensibilité de la photo-diode en A/W. La fonction de transfert n'apparaît pas car il est technologiquement possible par exemple avec le niobate de lithium et une structure à ondes progressives, de faire des modulateurs pour des fréquences de 60 GHz voire jusqu'à 100 GHz [14], on considère donc que la fréquence de modulation est inférieure à la fréquence de coupure.

Pour un modulateur adapté en impédance, une fibre sans perte, on obtient typiquement un rapport de puissance de 1.5 pour 1000 soit -28 dB (avec V_π=10 V, P_0^{opt}=1 mW, σ_{PD}=1 W/A). Par conséquent, même pour une utilisation dans la bande passante du modulateur, le bilan de liaison est très faible.

1.2.4 Pénalité induite par la dispersion chromatique

Dans les deux cas, la puissance en sortie de fibre sera sensible à la dispersion. En effet, celle-ci induit un déphasage entre les deux bandes optiques latérales, provoquant, en fonction de la longueur de la fibre, une atténuation périodique de la puissance de sortie [15], [16]. On cherche alors, dans le cas de la modulation externe, à réaliser des modulations avec une seule bande latérale [17] [18] ou des modulations sans porteuse [19] à l'aide de configuration particulière du modulateur Mach-Zehnder. Dans

le cas de la modulation directe, la déviation de fréquence provoquée par la modulation (chirp) accentue la sensibilité à la dispersion.

Un certain nombre de travaux expérimentaux basés sur la modulation d'intensité ont été menés [20], [21], [22], [23] utilisant diverses méthodes afin d'étendre la fréquence maximale de modulation des lasers.

1.3 Génération et transmission d'une porteuse micro-onde sur fibre optique par battement optique

1.3.1 Utilisation de deux lasers indépendants

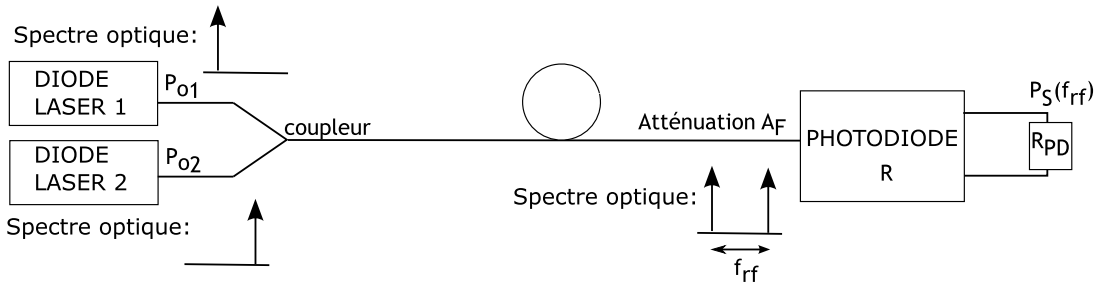

FIG. 1.5 – Génération et transmission de porteuse micro-onde par détection de battement optique

Nous avons pour le moment traité de la transmission d'une onde hyperfréquence d'un lieu à un autre par voie optique, à l'aide d'une double conversion RF/Optique-Optique/RF, nous allons maintenant traiter de la génération d'une onde hyperfréquence par voie optique.

La technique de génération de micro-ondes par détection de battement optique est basée sur la photodétection du mélange de deux ondes optiques dont l'intervalle fréquentiel est égal à la fréquence micro-onde voulue. On utilise donc deux lasers émettant aux fréquences ν_1 et $\nu_1 + f_{RF}$ les puissances respectives P_1 et P_2. Le photocourant est alors :

$$I_{PD} = \sigma_{PD}\{(P_1 + P_2) + 2\sqrt{P_1 P_2}\cos(2\pi f_{RF} t + \phi_2(t) - \phi_1(t))\} \tag{1.7}$$

où σ_{PD} est la sensibilité du photodétecteur et ϕ_1, ϕ_2 les phases des lasers 1 et 2.

La résistance de charge en sortie du photodétecteur reçoit donc une puissance continue proportionnelle à la somme des puissances optiques, et une puissance micro-onde proportionnelle à $\sqrt{P_1 P_2}$. La fréquence de l'onde générée est bien entendu limitée par la bande passante du photo-détecteur, mais celle-ci ne cesse de s'étendre, et cette méthode est déjà utilisée pour générer des ondes dans le domaine THz. [24]

En terme de bilan de puissance, on remarque que c'est la puissance optique continue qui est convertie en puissance micro-onde, par conséquent avec deux lasers de 40 mW il est possible d'obtenir près de 80 mW de puissance radio dans une charge 50 Ω. La limite vient maintenant du photo-détecteur qui doit être

capable de pouvoir recevoir de fortes puissances optiques et de générer de fortes puissances électriques sans saturation.

Le principal désavantage de cette technique se situe au niveau de la stabilité fréquentielle de l'onde générée et de son bruit de phase. En effet, la fréquence du battement est directement égale à la différence des deux fréquences optiques. Or la fréquence optique est reliée à la longueur optique de la cavité laser, c'est à dire à la distance géométrique et à l'indice. Ces deux paramètres dépendent de la température. On observe typiquement, dans une diode laser, des variations d'une dizaine de GHz pour un Kelvin, par conséquent même en stabilisant la température à 0.0001 K, la fréquence peut varier de 1 MHz, ce qui, relativement à la fréquence optique, correspond à une variation de 10^{-8}, mais qui, relativement à une fréquence micro-onde de 10 GHz, correspond à une variation de 10^{-4}. Il est alors possible de stabiliser les deux fréquences sur une cavité Fabry-Perot ou des raies d'absorption atomiques [25].

La densité spectrale de puissance du battement est, du fait de l'incohérence entre les ondes optiques, la convolution des densités spectrales de puissances optiques. Par conséquent, en considérant deux lasers de profil spectral lorentzien et de largeur à mi-hauteur 1 MHz, le battement micro-onde présente alors une densité spectrale lorentzienne de largeur à mi-hauteur 2 MHz, correspondant alors à une porteuse de très mauvaise qualité. Le seul moyen pour obtenir une porteuse utilisable est de faire battre des lasers de largeur spectrale extrêmement faible, c'est à dire en pratique des lasers solides voire avec contre-réaction optique dont la longueur d'onde ne correspond pas forcement à la fenêtre de transmission des fibres optiques [26].

1.3.2 Utilisation d'un seul laser

Il est possible d'utiliser la méthode de génération d'onde radio par battement avec un seul laser. Le laser peut être monomode, alors un second mode est créé en décalant en fréquence une partie de l'onde, par exemple à l'aide d'une cellule de Bragg acousto-optique [27], ou en modulant une partie avec une seule bande latérale [28]. Le laser peut aussi être lui-même bi-mode [29] [30] [31].

1.3.3 Utilisation de deux lasers corrélés

Corrélation par injection optique

Le problème de stabilité de la méthode par hétérodynage provient de l'indépendance entre les deux lasers utilisés. Afin de résoudre ce problème il est donc nécessaire de corréler les deux lasers. En 1983, L. Goldberg du Naval Research Laboratory, étudie la possibilité de synchroniser par injection optique un laser sur une des bandes latérales d'un laser modulé [32]. Il parvient ainsi à accrocher le laser esclave sur la cinquième harmonique du laser maître modulé à 1.9 GHz. En outre, il observe un battement électrique de grande pureté spectrale en détectant le battement entre le laser maître et le laser esclave. Ceci constitue donc une première méthode de génération de micro-onde et a donné lieu à plusieurs améliorations techniques [33]. Elle présente cependant le désavantage de partager la puissance optique du laser maître

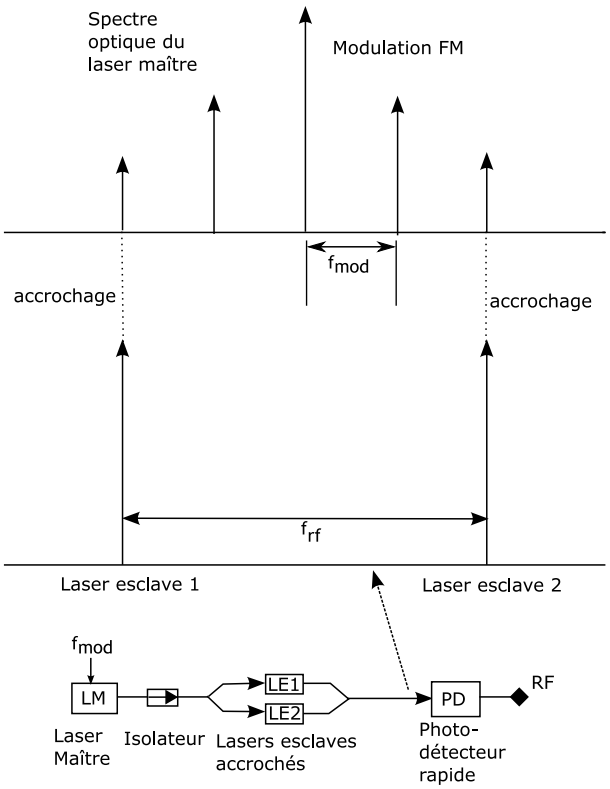

FIG. 1.6 – Principe de la génération micro-onde par double injection optique

entre de nombreuses bandes latérales dont une seule est utilisée pour le battement hétérodyne, le bilan de puissance est donc faible car la puissance optique fournie par le laser maître est faible.

Un autre montage est ensuite proposé par L. Goldberg utilisant alors non plus un laser maître et un laser esclave, mais deux lasers esclaves chacun accroché sur une des bandes latérales du laser maître modulé [34], comme le présente la figure 1.6. Par conséquent, le laser maître ne participe plus en terme de puissance au battement hétérodyne et on peut profiter de l'ensemble de la puissance délivrée par les lasers esclaves. En modulant le laser maître à 2.63 GHz, il parvient à générer une fréquence micro-onde de 10.52 GHz en accrochant les deux lasers sur les bandes latérales respectivement -2 et +2. La largeur spectrale du battement apparaît alors uniquement limitée par la largeur spectrale de l'oscillateur sub-harmonique utilisé pour moduler le laser maître.

Autres méthodes de corrélation

La synchronisation de deux ondes optiques peut aussi être obtenue par l'intermédiaire d'une boucle à verrouillage de phase. La phase du battement est comparée avec la phase d'un synthétiseur en utilisant un mélangeur doublement équilibré, un signal de commande vient agir sur un des lasers afin de maintenir constante la différence de fréquence et la différence de phase entre les lasers [35]. Cette méthode n'est efficace que pour des lasers de largeur spectrale faible. En effet, la fréquence maximale d'accrochage

d'une boucle à verrouillage de phase dépend directement du délai de la boucle et par conséquent est en général de l'ordre de la dizaine de kHz. Par conséquent, les lasers doivent avoir un bruit de phase très faible au-delà de cette fréquence, car celui-ci sera directement transmis au battement. Les expériences sur ce type de synchronisation ont donc été en général menées sur des lasers à cavité externe [36], à fibre ou pompés par diode [37]. La modification de la fonction de transfert de la boucle a néanmoins permit d'étendre dans une certaine mesure la méthode à des lasers de largeur spectrale plus importante [38] [39].

Afin d'étendre la synchronisation du bruit de phase des deux lasers aux composantes du bruit de fréquence supérieures à la fréquence de verrouillage de la boucle, A. J. Seeds, du University College London, a expérimenté un montage associant une boucle à verrouillage de phase et l'injection optique [40], [41]. Cette méthode se base donc sur la méthode initiale présentée par Goldberg [32] en lui associant une boucle à verrouillage de phase afin d'étendre la plage d'accrochage statique de l'injection, permettant donc d'améliorer la stabilité à long terme du système et de réduire l'exigence sur la température.

1.4 Transmission de données utilisant la radio-sur-fibre et la génération hétérodyne

Après avoir présenté la méthode de génération et de transport de porteuses micro-ondes par battement hétérodyne, nous allons maintenant présenter comment un tel système peut être utilisé pour transporter des données binaires de la station de contrôle à la station mobile via une station de base.

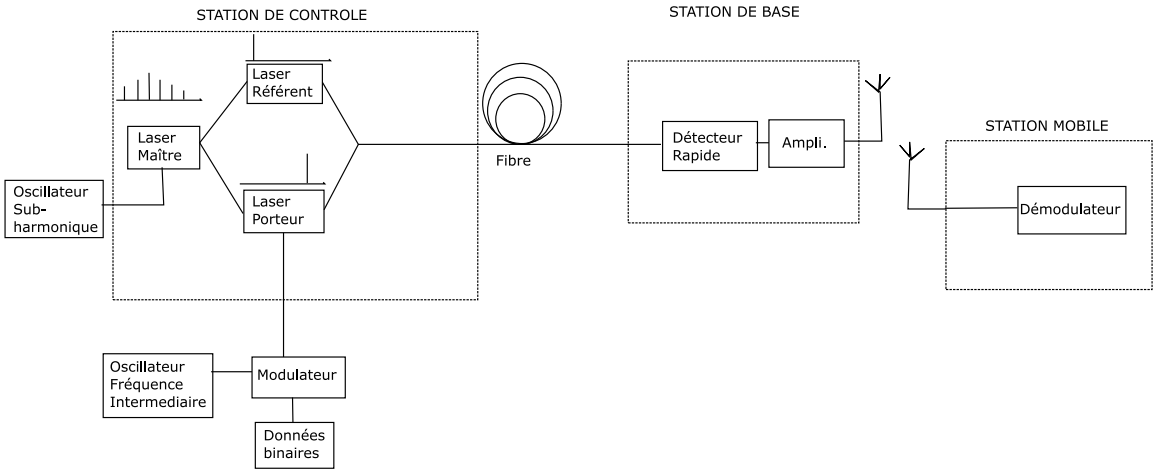

FIG. 1.7 – Schéma général du système de télécommunications hybride opto/micro-onde basé sur le battement laser hétérodyne corrélé par synchronisation sur bandes latérales de modulation

1.4.1 Principe général de communications

Nous avons représenté sur la figure 1.7 la manière selon laquelle le système de génération micro-onde par battement laser s'insère dans un canal physique de communication de type radio-sur-fibre. Du point

de vue fonctionnel, un système de génération de micro-onde par battement laser simple (par exemple à l'aide d'un laser bi-mode) est un générateur de micro-ondes alors qu'un système de génération basé sur l'accrochage sur des bandes latérales de modulation est un multiplicateur de fréquence en même temps qu'un moyen d'acheminer optiquement une porteuse d'un point à un autre par voie optique.

Du point de vue système de communication, la technique hétérodyne fonctionne comme un convertisseur de fréquence porteuse. En effet, en amont les données numériques sont traduites physiquement par une porteuse radio modulée, par exemple une porteuse radio de 200 MHz modulée par des données à 100 MBit/s. Cette porteuse modulée peut être appliquée sur le courant d'un des deux lasers, celui que nous appellerons le laser porteur, l'onde d'optique devient alors la porteuse et l'onde radio la sous porteuse modulée[1]. Les données sont donc transportées sur une porteuse optique jusqu'au photodétecteur situé dans la station de base. L'onde optique du laser porteur va alors battre avec l'onde optique du second laser, dit de référence, et provoquer la génération d'un photocourant dans la bande micro-onde. Les données sur la sous porteuse radio passent donc de la porteuse optique à la porteuse micro-onde uniquement grâce à un photodétecteur. On réalise donc simultanément la génération de la porteuse et la modulation de la porteuse. Grâce à la porteuse micro-onde, les données peuvent alors être acheminées sans fil jusqu'à la station mobile. Pour donner un ordre de grandeur, la puissance émise pour une porteuse à 10 GHz au niveau de la station de base est typiquement de 12 dBm et la puissance reçue par la station mobile pour une modulation 16-QAM doit être d'au moins -83 dBm.

1.4.2 Standards de format de modulation et tolérance au bruit de phase

Il existe un certain nombre de formats de modulation associés aux communications sans-fil large bande, ce sont principalement les formats de type M-PSK (Phase shift keying *Modulation de phase à M états*), M-QAM (Quadrature amplitude modulation, *Modulation d'amplitude en quadrature à M états*) associés à des méthodes de multiplexage de type TDMA (Time Division Multiple Access, *Accès multiple par répartition dans le temps*), FDMA(Frequency Division Multiple Access, *Accès multiple par répartition en fréquence*), OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing, *Multiplexage par division en fréquences orthogonales*) qui repartit les données sur plusieurs sous-porteuses.

Un canal de communication est généralement caractérisé par son taux d'erreur binaire noté BER. Celui-ci dépend fortement du rapport :

$$\frac{E_b}{N_o} = \frac{R_d}{B_f} \cdot S/N \tag{1.8}$$

où E_b est l'énergie contenue dans un bit, N_o la densité spectrale de bruit, S/N le rapport signal sur bruit, R_d le débit des données et B_f la bande passante. Ce rapport caractérise en fait la dégradation due à un bruit blanc additif gaussien de densité spectrale N_o, causé par exemple par le bruit thermique électrique du récepteur. Cependant les formats de modulation M-PSK et M-QAM sont sensibles aussi aux bruits de

[1]En réalité il est nécessaire, à cause des effets thermiques basses fréquences, de décaler la fréquence de la porteuse radio avant qu'elle ne soit appliquée sur le courant du laser.

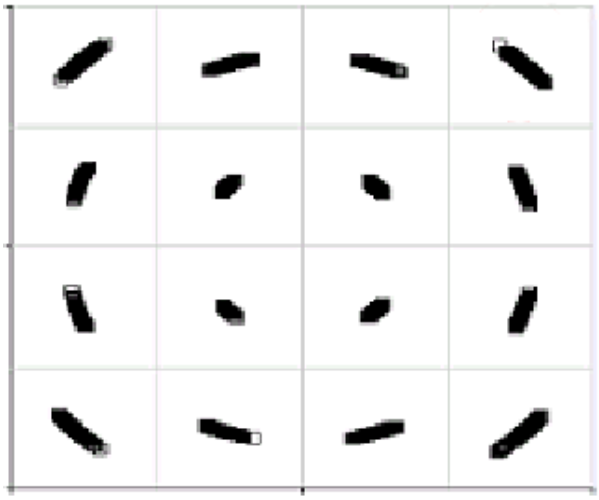

FIG. 1.8 – Constellation d'une modulation 16 QAM avec bruit de phase

phases (1.8). Pour comprendre l'influence du bruit de phase sur le taux d'erreur binaire, il faut savoir que la détection du signal se base souvent sur une boucle à verrouillage de phase. Cette boucle est caractérisée par une bande passante B_L. La détection du signal sera perturbée par deux types de bruit de phase : le bruit de phase de l'oscillateur générant la porteuse, et le bruit de phase de la boucle dû au bruit blanc gaussien additif. Ce dernier est caractérisé par la variance du bruit de phase [42] :

$$\sigma^2_{PLL} = \frac{N_o B_L}{E_b R_d} \tag{1.9}$$

elle est donc directement proportionnelle à la bande passante de la boucle.

Le bruit de phase de l'oscillateur est en partie réduit par la fonction d'accrochage de la boucle à verrouillage de phase $H_L(f)$, typiquement un filtre coupe-bas du premier ou du second ordre de fréquence de coupure B_L, par conséquent la densité spectrale de bruit de phase en sortie de la boucle est :

$$S_{\phi_s}(f) = |H_L(f)|^2 S_{\phi_{osc}}(f) \tag{1.10}$$

La variance du bruit de phase de sortie dû à l'oscillateur et non accroché par la boucle est alors :

$$\sigma^2_{S_{osc}} = 2\int_0^\infty S_{\phi_s}(f)df = 2\int_0^\infty |H_L(f)|^2 S_{\phi_{osc}}(f) \tag{1.11}$$

Cependant en général l'intégration du bruit de phase est présentée sous la forme :

$$\sigma^2_{S_{osc}} = 2\int_{f_1}^{f_2} S_{\phi_{osc}}(f)df \tag{1.12}$$

où f_1 et f_2 sont deux fréquences choisies en fonction du système de réception et du débit de données.

Les bruits de phase étant considérés comme de statistiques gaussiennes et indépendantes, la somme des bruits de phase est de statistique gaussienne avec une variance égale à la somme des variances.

σ_ϕ	E_b/N_o à BER=10^{-7}	BER à E_b/N_o=28 dB
1°	> 50 dB	10^{-4}
0.7°	32 dB	10^{-6}
0.5°	27 dB	10^{-9}
0.3°	25.5 dB	$< 10^{-10}$
0°	25 dB	$< 10^{-10}$

TAB. 1.2 – Augmentation nécessaire de l'énergie par bit due au bruit de phase : cas de la modulation 256 QAM [42]

L'influence relative du bruit de phase est plus importante sur les formats de modulation à états multiples.

Comme nous pouvons le constater sur le tableau 1.2, la dégradation du taux d'erreur binaire devient critique au-delà de 0.7°pour une modulation 256-QAM. De plus si l'on compare la sensibilité au bruit de phase des formats, on constate que la pénalité induite par un écart type de phase de 0.3°pour un BER de 10^{-8} est de 0.5 dB pour une 256-QAM et 5.5 dB pour une 1024-QAM.

Il est donc absolument nécessaire de connaître précisément le profil de bruit de phase de la porteuse micro-onde générée par le système hétérodyne afin de déterminer le format de modulation pouvant être supporté.

1.4.3 Résultats expérimentaux de transmissions de données à l'aide d'un système opto/micro-ondes hétérodyne

N'ayant pas eu l'occasion durant notre travail d'aborder expérimentalement l'aspect communications de la génération hétérodyne synchronisée, nous proposons au lecteur un résumé commenté d'un des plus important travail expérimental effectué sur la transmission de données, travail que l'on doit à Ralf-Peter Braun du Heinrich-Hertz-Institut für Nachrichtentechnik [43]. En brossant les différentes étapes de ce travail, nous mettons ainsi en évidence les diverses problématiques rencontrées, les solutions apportées, ainsi que les performances quantitatives de la technique hétérodyne.

Génération d'un peigne de fréquence radio par hétérodynage d'un peigne optique et transmission de données bi-canal

Les premières expériences de R. P. Braun ont utilisé un système à multiplexage en longueur d'onde associé à un laser de référence permettant la conversion du peigne optique en un peigne de fréquence électrique permettant d'effectuer de la distribution multicanal dans chaque cellule ou bien d'assigner à chaque cellule un canal [44]. Ce montage ne possède pas de système de corrélation entre le laser de référence et les lasers porteurs, par conséquent, il impose des largeurs de raies très fines pour chacun des lasers. Il a été expérimenté pour des fréquences porteuses de l'ordre de 12 GHz [45] à l'aide de laser DFB

de largeur spectrale à mi-hauteur 2 MHz en configuration bi-canal, c'est à dire avec deux lasers porteurs et un laser de référence. Les trois lasers sont commandés par un système de contrôle de fréquence (boucle opto-électronique), ce qui constitue donc un mécanisme de corrélation pour les fréquences basses du bruit de phase et permet d'assurer une stabilité de l'intervalle fréquentiel entre les lasers. Le débit de données appliqué à chacun des deux lasers est de 140 MBit/s avec une modulation directe de type FSK. Il a été ainsi démontré avec ce système la possibilité d'obtenir un taux d'erreur binaire de 10^{-9} avec une puissance optique incidente sur le photodétecteur de -21 dBm. Les interférences entre canaux ont aussi été mesurées et entraînent une pénalité de 2 dB pour un intervalle de 1.3 GHz entre porteuses. La taille relativement importante des canaux (près de 1 GHz) vient du format de modulation utilisé, FSK, et de la largeur spectrale des lasers nécessitant l'utilisation d'une fréquence de décalage, pour la modulation FSK, élevée donc une faible efficacité spectrale.

Génération et transport micro-onde utilisant un laser impulsionnel

Afin d'augmenter l'efficacité spectrale de la transmission, l'ensemble des trois lasers a été remplacé par un laser à modes bloqués par une modulation de 6.25 GHz [45]. Les modes sont donc fortement corrélés (-63 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse à 62.5 GHz). La transmission de données est faites à un débit de 155 MBit/s, les données modulent une sous-porteuse à 2 GHz en DBPSK, la sous-porteuse module le peigne optique par modulation d'intensité externe. Un filtre à la suite du détecteur permet de ne conserver que la bande de fréquence désirée (Bande V). Ce système permet d'utiliser un format de modulation beaucoup plus efficace mais requiert l'utilisation d'un système de modulation externe, de type Mach-Zehnder, car il n'est plus possible de moduler indépendamment chacun des modes optiques.

Système opto-millimétrique à 60 GHz avec verrouillage en fréquence

L'expérience utilisant une simple boucle de contrôle de fréquence a été transposée à 60 GHz en monocanal selon les spécifications du projet RACE déjà mentionné [46]. Le décalage de fréquence pour la modulation FSK étant de 400 MHz, il entraîne une occupation spectrale de 700 MHz pour un débit de 140 MBit/s soit 0.2 Bit/s/Hz. La modulation est appliquée directement sur le courant de polarisation du laser porteur. Il a été démontré la possibilité d'obtenir un taux d'erreur binaire de 10^{-9} pour une puissance optique de -8.9 dBm.

Génération micro-onde à 20 GHz par double injection sur bandes latérales

Afin d'augmenter l'efficacité spectrale et donc de pouvoir densifier le multiplexage en fréquence, les bruits de phase des deux lasers ont été corrélés par la méthode d'injection sur bandes latérales [34].

Cette méthode de corrélation a été intégrée dans un système de transmission à 19.45 GHz, [47] utilisant un oscillateur sub-harmonique à 3.89 GHz (facteur 5), avec un bruit de phase résultant inférieur à -80 dBc/Hz à 1 kHz de la porteuse à 19.45 Ghz et inférieur à -100 dBc/Hz à 100 kHz. Les données

transmises à une débit de 140 MBit/s modulent une sous-porteuse à 140 MHz au format OQPSK, la sous-porteuse modulée est ensuite translaté à 870 MHz, le signal modulé est directement appliqué sur le courant de polarisation du laser porteur, entraînant donc une modulation de la phase du laser, à cause de l'injection optique [48]. Les mesures ont montré la possibilité d'atteindre un taux d'erreur binaire de 10^{-9} avec 10 m de fibre et une puissance électrique en entrée du démodulateur de -61.5 dBm, pour 12.8 km, la puissance requise est de -61 dBm. On remarque que ce système possède une efficacité supérieure à 1 Bit/s/Hz, il a de plus été configuré afin de pouvoir extraire un oscillateur local au niveau de la station de base pour une communication de la station module vers la station de base.

Génération micro-onde à 20 GHz par dispersion chromatique d'harmonique FM

Une méthode originale de génération d'harmonique au niveau de la photodétection a aussi été mise en place par la même équipe [49]. Elle consiste à moduler un laser par le courant, combinant donc modulation IM et FM, et de le faire suivre d'une longue fibre dispersive entraînant une modification de la phase relative entre les composantes de Fourier initiales. Par conséquent au niveau du détecteur il y a génération d'harmoniques supplémentaires, dues à la conversion FM/IM au cours de la propagation. La fibre n'induisant que des décalages de phase certains, la corrélation de phase reste identique, nonobstant la décorrélation due aux faibles délais induits par la fibre entre les composantes spectrales. Les résultats donnent un bruit de phase de -73 dBc/Hz à 1 kHz de la porteuse à 18.58 GHz correspondant à la cinquième harmonique. Afin de s'inscrire dans un schéma bidirectionnel, un second laser modulé à 2.779 GHz permet d'obtenir une septième harmonique électrique à 19.45 GHz pouvant servir d'oscillateur local pour le canal ascendant (Mobile vers fixe). Les mesures de taux d'erreur indiquent que le système optique n'induit qu'une pénalité de 1 dB sur la puissance électrique pour un taux de 10^{-9} en configuration de liaison descendante. Le désavantage de cette technique est de partager la puissance électrique dans un grand nombre d'harmoniques inutilisées.

Génération micro-onde à 60 GHz par double injection sur bandes latérales

L'expérience de double injection précédemment décrite a été transposée avec succès sur un système à 62.5 GHz [50]. La fréquence subharmonique utilisée est de 3.125 GHz correspondant à un facteur 20 de multiplication (harmoniques 10 et -10). Le principe de modulation des données reste identique, débit à 140 MBit/s, format OQPSK, sous porteuse à 140 MHz. Le bruit de phase est de -70 dBc/Hz à 10 kHz de la porteuse 62.5 GHz. Le détecteur utilisé intègre une photodiode Schottky et un amplificateur sur GaAs (technologie MMIC), la réponse maximale sur la gamme 60-70 GHz est de 2.1 A/W à 62.5 GHz. Un autre détecteur de type photodiode p.i.n. couplée par ondes évanescentes à un guide d'onde optique, présentant une réponse de 0.3 A/W, une puissance optique admise de +10 dBm et une réponse en fréquence relativement plate entre 0 et 70 GHz, a aussi été testé dans cette configuration [51].

Génération micro-onde à 60 GHz par double injection sur bandes latérales double canal

En ajoutant un second laser porteur au système, l'équipe a pu tester le fonctionnement bi-canal [52]. Les caractéristiques du montage sont : une fréquence subharmonique de 3.2 GHz, le laser de référence accroché sur l'harmonique -10, le premier laser porteur sur +9 et le second sur +10. Les deux lasers porteurs sont chacun modulés (en phase) via le courant de polarisation par une sous-porteuse respectivement à 1.27 GHz et 1.79 GHz portant deux séries de données différentes codées en OQPSK à un débit de 155 MBit/s. La propagation optique a lieu le long d'une fibre standard de 12.8 km de long sans amplification. L'effet de l'interférence entre canaux a été mesuré comme étant notable seulement en dessous d'un intervalle de 110 MHz après conversion de fréquence au niveau du récepteur, ce qui témoigne de la grande efficacité spectrale (1.4 Bit/s/Hz) et donc de la densité de multiplexage possible.

Influence de la décorrélation temporelle

L'influence d'un délai vrai entre les deux lasers avant injection (différence de chemin optique entre le laser maître et chacun des lasers esclaves) a été étudié en terme de taux d'erreur binaire [53], montrant que pour une modulation OQPSK à 144 MBit/s on passait d'un taux d'erreur binaire de 10^{-10} pour une différence de chemin de 100 mm, à un taux d'erreur de 10^{-7} pour une différence de chemin de 200 mm.

Conclusion

Ce résumé des différents travaux initiés par Ralf-Peter Braun nous montre, au-delà des diverses méthodes de générations présentées, la multiplicité des combinaisons de modulations de ce système. En effet, les données peuvent moduler directement un des lasers, ou moduler une sous-porteuse, sous porteuse pouvant être convertie vers une fréquence plus élevée, la sous porteuse peut moduler le laser porteur en phase ou en intensité, de manière directe ou externe. Il y a aussi de nombreuses possibilités de multiplexage : conversion d'un multiplexage optique en électrique ou multiplexage en amont des données avant modulation optique. Le format de modulation lui-même peut varier, bien qu'il ne soit fait ici référence principalement qu'à la modulation OQPSK. Enfin le système peut être uniquement descendant ou bien bi-directionnel. Il existe donc tout un travail en terme d'architecture de modulation autour des systèmes optique/micro-ondes.

1.5 Conclusion

Ce chapitre a eu pour objectif de présenter le cadre général dans lequel se situe notre travail de recherche, les réseaux hybrides opto/RF pour la communication sans fil large bande. Nous avons notamment mis en avant le bilan de liaison en puissance de différents systèmes de transmission et génération RF puis étudié les exigences en terme de bruit de phase suivant les formats de modulation et enfin présenté les résultats préexistants de transmissions de données expérimentales prouvant le fonctionnement

du système de génération hétérodyne par battement de lasers synchronisés optiquement.

A partir de ces données générales, notre travail consiste à approfondir la compréhension des mécanismes physiques de synchronisation des bruits de phase optique des lasers afin d'établir les caractéristiques du bruit de phase de la porteuse micro-onde générée optiquement en fonction des paramètres d'injection et du canal de transmission. Pour cela il est au préalable nécessaire de rappeler les principaux résultats concernant les lasers susceptibles d'être utilisés dans ce type de système et que nous avons testés expérimentalement, les lasers à contre réaction distribuée (DFB), avant de pouvoir établir les équations spécifiques à l'injection dans ces lasers. Par conséquent, dans le chapitre suivant nous proposons d'établir les équations générales concernant le fonctionnement statique des lasers DFB, ainsi que de présenter les caractéristiques expérimentales des lasers que nous avons utilisés.

Chapitre 2

Rappels théoriques et mesures expérimentales sur les lasers DFB

2.1 Introduction

Un laser DFB (Distributed FeedBack, *Réaction distribuée*) est caractérisé par une variation périodique longitudinale de l'indice de réfraction se traduisant par la présence d'un réseau de Bragg sur toute ou partie de la longueur du laser. Ce réseau est gravé en dessous ou au-dessus de la couche active, le second choix permet d'optimiser à posteriori les caractéristiques du réseau pour chaque série produite mais nécessite une reprise d'épitaxie, la formation du réseau est réalisé par exposition holographie ultraviolette ou lithographie électronique d'une couche photosensible, après développement cette dernière sert de masque pour la gravure [54] . La présence d'un réseau d'épaisseur de type Bragg au sein de la cavité laser entraîne l'existence d'une réflectivité distribuée dans la longueur par opposition au laser Fabry-Perot où les réflexions n'ont lieu qu'aux deux extrémités. Cette réflectivité distribuée provoque un couplage des ondes contrapropagatives présentes dans la cavité laser, ce couplage est caractérisé par un facteur noté κ en cm^{-1} qui dépend principalement du contraste de la variation d'indice inscrite dans le milieu ; le facteur de couplage est généralement exprimé par le produit sans unité κL où L est la longueur du réseau. Pour les lasers à guidage par l'indice, κ est réel. Le second paramètre caractéristique du réseau de Bragg est sa période Λ_B en $\mu\mathrm{m}$ qui est typiquement de l'ordre de 0,2 microns pour un réseau utilisé au premier ordre.

Les premières études concernant les structures DFB, au début des années 70, sont dues à Kogelnik et Shank [55]. De nombreuses études théoriques et expérimentales furent ensuite entreprises durant les années 80 [56] [57] [58] [59] pour aboutir à une entrée sur le marché commercial en 1990.

L'atout majeur du laser DFB vis à vis du laser Fabry-Perot est d'être monomode avec un taux de suppression des modes résiduels de plus de trois ordres de grandeur.

2.2 Équations statiques du laser DFB

2.2.1 Introduction

L'objectif de cette section est de déterminer la fréquence et le gain au seuil des modes du laser en fonction des paramètres du réseau. Celui-ci ne sera étudié que pour le premier ordre de diffraction et dans le cas d'un profil sinusoïdal.

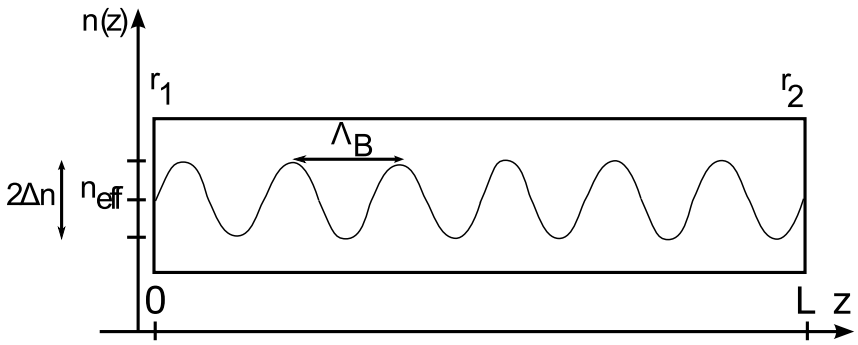

FIG. 2.1 – Schéma d'un laser DFB

2.2.2 Équation des modes couplés

On part de l'équation scalaire de Helmotz longitudinale pour une onde monochromatique de pulsation ω, $\alpha = (\Gamma g_m - \alpha_{int})/2$ est le gain net linéique en amplitude en cm^{-1} (où Γ est le facteur de confinement du mode dans la couche active, g_m le gain du matériau et α_{int} les pertes internes) (2.1) :

$$\nabla^2 E(z) + k^2(z)E(z) = 0 \tag{2.1}$$

$$k(z) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\epsilon_r(z)} = \beta(z) + j\alpha(z) = \frac{2\pi n(z)}{\lambda} + j\alpha(z) \tag{2.2}$$

$$\alpha(z) = \alpha_0 + \Delta\alpha \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda_B} + \Omega_B\right) \tag{2.3}$$

$$n(z) = n_{eff} + \Delta n \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda_B} + \Omega_B\right) \tag{2.4}$$

On calcule $k^2(z)$ en utilisant les conditions suivantes : $\Delta n << n_{eff}$, $\Delta\alpha << \alpha_0$ et $\alpha_0 << \beta_0$ (valeur typique : $n_{eff} = 3.4$, $\alpha_{int} = 5\ \mathrm{cm}^{-1}$, $g_{max} = 200\ \mathrm{cm}^{-1}$ $\Delta n = 0.0025$ et $\Delta\alpha = 0$) ce qui donne après simplification :

$$k^2(z) = \beta_0^2 + 4\kappa\beta_0 \cos(2\beta_B z + \Omega_B) + 2j\alpha_0\beta_0 \tag{2.5}$$

$$\beta_B = \frac{\pi}{\Lambda_B} \tag{2.6}$$

$$\kappa = \frac{\Delta\beta}{2} + j\frac{\Delta\alpha}{2} = \frac{\beta_0^2}{2k_0}\frac{\int\int \Delta\epsilon_r(x,y)\Phi^2(x,y)dxdy}{\int\int \Phi^2(x,y)dxdy} \tag{2.7}$$

Comme valeur typique, $\kappa = 25\ \mathrm{cm}^{-1}$, ce qui donne pour un laser de longueur $L = 400\ \mu\mathrm{m}$ un produit $\kappa L = 1$.

On cherche pour le champ $E(z)$ une solution de la forme :

$$E(z) = R(z)e^{-j\beta_B z} + S(z)e^{j\beta_B z} \tag{2.8}$$

La fonction R représente l'amplitude de l'onde se propageant dans le sens positif, la fonction S celle de l'onde se propageant dans le sens négatif. En combinant les équations (2.1) et (2.5) et en négligeant les dérivées secondes (approximation de l'enveloppe lentement variable) on obtient le système d'équations couplées suivant :

$$\frac{\partial R}{\partial z}(z) = -j\kappa e^{-j\Omega_B} S(z) + (\alpha_0 - j\delta_0)R(z) \tag{2.9}$$

$$\frac{\partial S}{\partial z}(z) = j\kappa e^{j\Omega_B} R(z) - (\alpha_0 - j\delta_0)S(z) \tag{2.10}$$

$$\tag{2.11}$$

avec $\delta_0 = \beta_0 - \beta_B$. On vérifie bien ici que κ couple les équations longitudinales de R et de S . Ce système est résolu sous la forme matricielle :

$$\frac{\partial}{\partial z}\begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} = \mathbf{A}\begin{bmatrix} R \\ S \end{bmatrix} \tag{2.12}$$

avec :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} (\alpha_0 - j\delta_0) & -j\kappa e^{-j\Omega_B} \\ j\kappa e^{j\Omega_B} & -(\alpha_0 - j\delta_0) \end{bmatrix} \tag{2.13}$$

2.2.3 Équation caractéristique du mode spectral

Pour résoudre cette équation différentielle, il suffit de déterminer les valeurs propres de A afin de pouvoir en calculer l'exponentielle : Soit γ une valeur propre de A, elle est racine du polynôme caractéristique :

$$\begin{aligned} & \det(\mathbf{A} - \gamma\mathbf{Id}) = 0 \\ \Leftrightarrow \quad & \gamma^2 = (\alpha_0 - j\delta_0)^2 + \kappa^2 \end{aligned} \tag{2.14}$$

Il existe donc deux valeurs propres opposées : $\gamma = \sqrt{(\alpha_0 - j\delta_0)^2 + \kappa^2}$ et $-\gamma$. Les parties réelles et imaginaires de γ sont données par :

$$\gamma_r = (\alpha_0^2 + \kappa^2 - \delta_0^2) + \sqrt{(\alpha_0^2 + \kappa^2 - \delta_0^2)^2 + 4\delta_0^2\alpha_0^2} \tag{2.15}$$

$$\gamma_i = \frac{\delta_0\alpha_0}{\gamma_r} \tag{2.16}$$

On calcule ensuite deux vecteurs propres orthogonaux associés aux deux valeurs propres :

$$v_\gamma = \begin{bmatrix} -\kappa_c^* \\ \hat{\Gamma} \end{bmatrix} \tag{2.17}$$

$$v_{-\gamma} = \begin{bmatrix} \hat{\Gamma} \\ \kappa_c \end{bmatrix} \tag{2.18}$$

$$\hat{\Gamma} = (\alpha_0 - j\delta_0) - \gamma \tag{2.19}$$

$$\kappa_c = j\kappa e^{j\Omega} \tag{2.20}$$

On obtient à l'aide de la matrice de passage P définie par les deux vecteurs propres la solution suivante :

$$\begin{bmatrix} R(z) \\ S(z) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\gamma z} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma z} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_0 \\ S_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\kappa_c^* R_0 e^{\gamma z} + \hat{\Gamma} S_0 e^{-\gamma z} \\ \hat{\Gamma} R_0 e^{\gamma z} + \kappa_c S_0 e^{-\gamma z} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

Les relations de continuités aux extrémités du laser doivent permettre de relier S_0 et R_0. Les facettes gauche ($z = 0$) et droite ($z = L$) sont caractérisées par les coefficients de réflexion en amplitude respectifs r_1 et r_2 qui imposent alors les relations suivantes :

$$R(0) = r_1 S(0) \tag{2.22}$$

$$S(L)e^{j\beta_B L} = r_2 R(L) e^{-j\beta_B L} \tag{2.23}$$

En utilisant les expressions obtenues ci-dessus pour R et S ainsi que les notations $\rho_1 = r_1 e^{j(\Omega_B - \beta_B L)}$ et $\rho_2 = r_2 e^{-j(\Omega_B + \beta_B L)}$, on obtient le système d'équations en (S_0, R_0) suivant :

$$-R_0 \left(1 - \rho_1 \frac{\hat{\Gamma}}{j\kappa}\right) + S_0 \left(\rho_1 - \frac{\hat{\Gamma}}{j\kappa}\right) e^{\gamma L} = 0 \tag{2.24}$$

$$R_0 \left(\rho_2 - \frac{\hat{\Gamma}}{j\kappa}\right) + S_0 \left(1 - \rho_2 \frac{\hat{\Gamma}}{j\kappa}\right) e^{-\gamma L} = 0 \tag{2.25}$$

Pour que ce système ait une solution non nulle, il faut que son déterminant soit nul. Après calculs on obtient l'équation en γL suivante :

$$\begin{aligned} &(\gamma L)^2 \left[(1 + \rho_1\rho_2)^2 - 4\rho_1\rho_2 \cosh^2(\gamma L)\right] \\ &+(\kappa L)^2 \sinh(\gamma L)(1 - \rho_1^2)(1 - \rho_2^2) \\ &+2j\kappa L(\rho_1 + \rho_2)(1 - \rho_1\rho_2)\gamma L \sinh(\gamma L)\cosh(\gamma L) = 0 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Les γ solutions de l'équation (2.26) forment un ensemble discret et déterminent la fréquence $\frac{c(\beta_B + \delta_0)}{2\pi n}$ et le gain net en amplitude au seuil α_0 des modes résonnants de la cavité d'après les deux équations suivantes :

$$\alpha_0 = \pm \Re e \left\{ \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2} \right\} \tag{2.27}$$

$$\delta_0 = \mp \Im m \left\{ \sqrt{\gamma^2 - \kappa^2} \right\} \tag{2.28}$$

(seule la solution assurant $\alpha_0 > 0$ est considérée). Seul le mode de gain net au seuil le plus faible est émis à cause de la saturation de la densité de porteur. Le gain au seuil est donné par :

$$g_{seuil} = \frac{2\alpha_0 + \alpha_{int}}{\Gamma} \tag{2.29}$$

En comparant cette expression à celle correspondante dans le cas d'un laser Fabry-Perot, on se rend compte que le facteur α_0 est analogue au facteur α_m correspondant aux pertes des miroirs. α_0 prend en compte la réflectivité des miroirs et la réflectivité du réseau. Dans le cas d'un laser DFB où l'une des

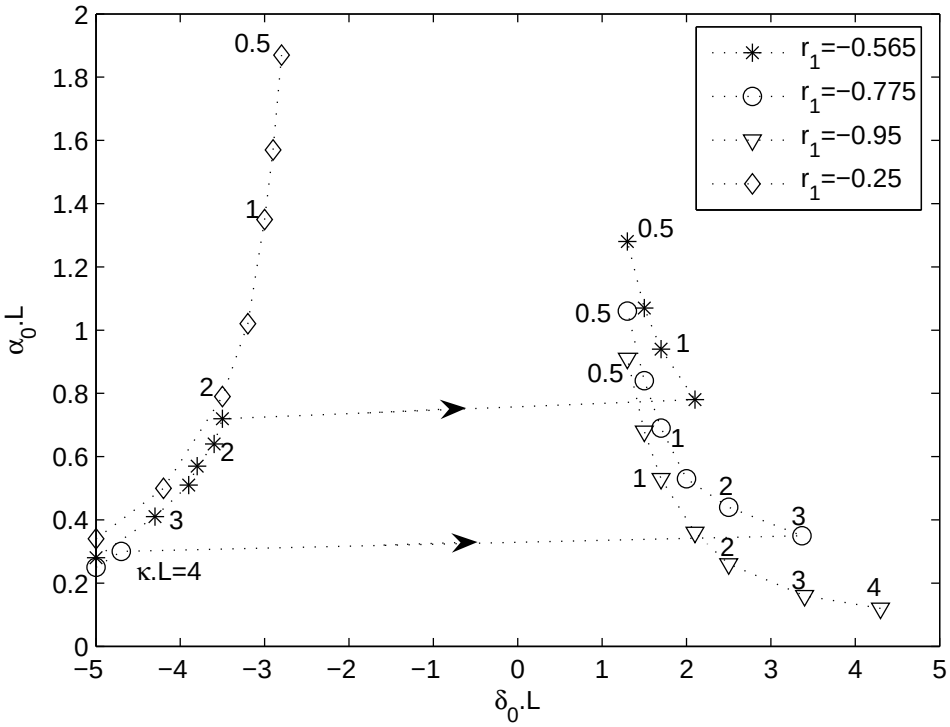

FIG. 2.2 – Détermination de différents points de fonctionnement

facettes (par exemple la face droite) est traitée de manière à la rendre anti-réfléchissante (par exemple à l'aide de multi-couches diélectriques d'indice décroissant afin d'adapter l'indice optique du laser à l'indice optique de l'air), l'équation (2.26) se simplifie car $\rho_2 = 0$:

$$(\kappa L)^2 + (\kappa L)^2 \sinh(\gamma L)(1 - \rho_1^2) + 2j\kappa L \rho_1 \gamma L \sinh(\gamma L)\cosh(\gamma L) = 0 \tag{2.30}$$

C'est le cas qu'en pratique nous étudierons par la suite, les lasers DFB utilisés dans notre montage expérimental étant des lasers DFB du type AR/HR c'est à dire comportant une face anti-réfléchissante et une face à haute réflectivité. Nous avons calculé un certain nombre de points de fonctionnement (désaccord de fréquence, gain net au seuil) que nous présentons ici dans un repaire normalisé par la longueur du réseau de Bragg. Ces modes concernent un DFB dont le déphasage à gauche est π (cas d'une réflexion entre deux dioptres)

La figure 2.2 montre clairement l'évolution du point de fonctionnement lorsque le facteur de couplage varie. Plus le couplage est faible, plus la fréquence du mode se rapproche de la fréquence Bragg et possède un seuil élevé. Pour les réflectivités intermédiaires -0.565 et -0.775, on constate un changement brusque de la fréquence du mode pour les valeurs de κL respectivement 1.8 et 3.25.

2.2.4 Expression du mode longitudinal

Nous allons maintenant reprendre l'équation (2.21) afin de pouvoir exprimer le champ en z en fonction du champ en 0 :

$$\begin{bmatrix} R(z) \\ S(z) \end{bmatrix} = \mathbf{P} \begin{bmatrix} e^{\gamma z} & 0 \\ 0 & e^{-\gamma z} \end{bmatrix} \mathbf{P}^{-1} \begin{bmatrix} R(0) \\ S(0) \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

où

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -\kappa_c^* & \hat{\Gamma} \\ \hat{\Gamma} & \kappa_c \end{bmatrix} \tag{2.32}$$

$$\mathbf{P}^{-1} = \frac{1}{2\hat{\Gamma}\gamma} \begin{bmatrix} \kappa_c & -\hat{\Gamma} \\ -\hat{\Gamma} & -\kappa_c^* \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

$$\tag{2.34}$$

En utilisant la relation $|\kappa_c|^2 + \hat{\Gamma}^2 = 2\gamma\hat{\Gamma}$, et en notant $\delta = \delta_0 + j\alpha_0$, on obtient :

$$\begin{bmatrix} R(z) \\ S(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_{11}(z) & n_{12}(z) \\ n_{21}(z) & n_{22}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R(0) \\ S(0) \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

avec :

$$n_{11}(z) = \left[\cosh(\gamma z) - j\frac{\delta}{\gamma}\sinh(\gamma z)\right] \tag{2.36}$$

$$n_{12}(z) = \frac{\kappa_c^*}{\gamma}\sinh(\gamma z) \tag{2.37}$$

$$n_{21}(z) = \frac{\kappa_c}{\gamma}\sinh(\gamma z) \tag{2.38}$$

$$n_{22}(z) = \left[\cosh(\gamma z) + j\frac{\delta}{\gamma}\sinh(\gamma z)\right] \tag{2.39}$$

2.2.5 Caractéristique du mode longitudinal

Nous présentons ici graphiquement les caractéristiques longitudinales du champ intra-cavité associées à quatre valeurs du coefficient de couplage au réseau pour un laser de réflectivité (-0.565, 0). Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, ce type de laser change de coté d'émission par rapport à la longueur d'onde Bragg aux environs de $\kappa L = 1.5$. On constate d'après ces figures que pour de fortes valeurs de couplage, la densité de photons est plus importante au centre de la cavité. On constate cependant que dans le cas d'un très fort couplage, (figure 2.3), la distribution de la densité de photons

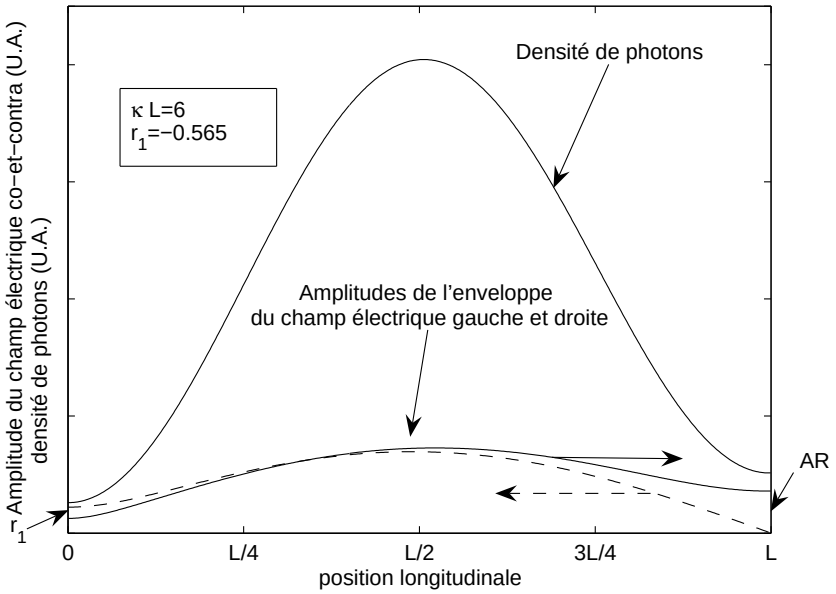

FIG. 2.3 – Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 6

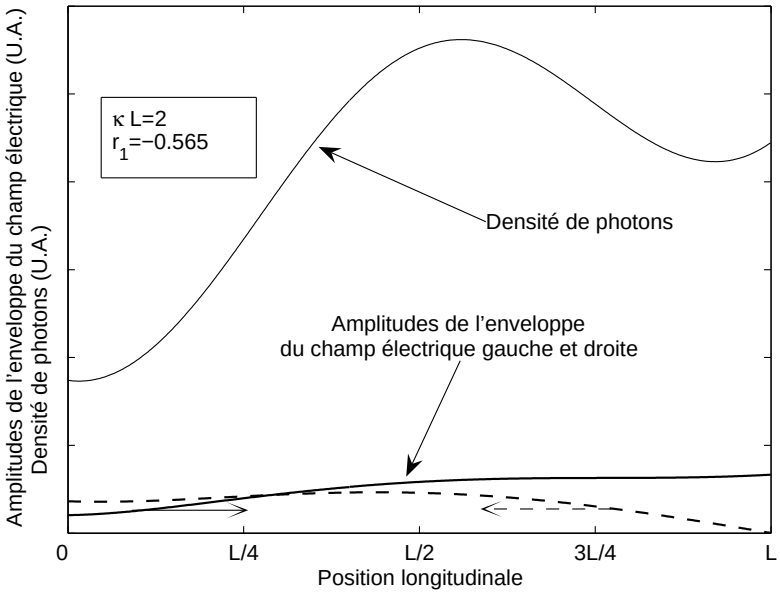

FIG. 2.4 – Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 2

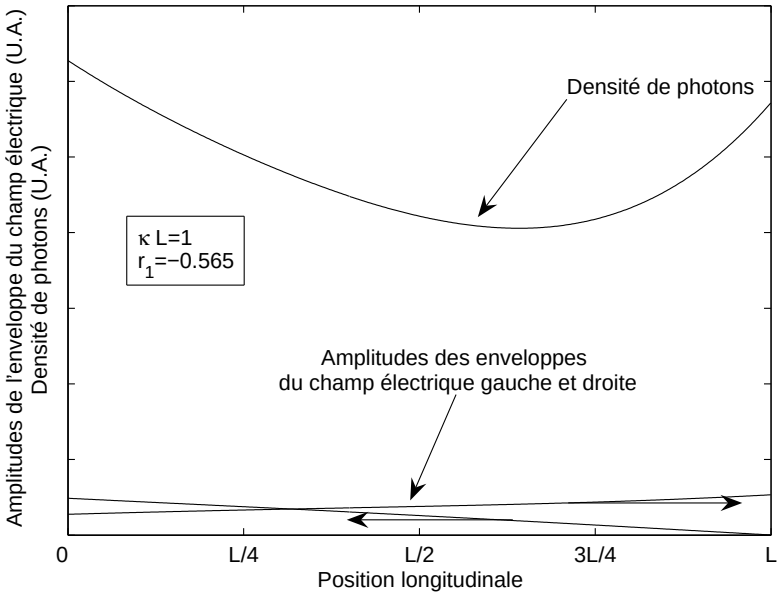

FIG. 2.5 – Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 1

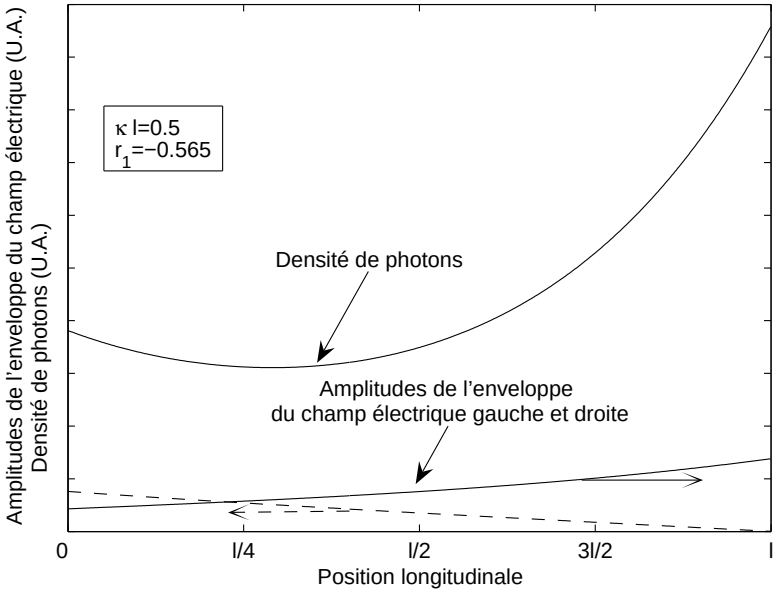

FIG. 2.6 – Représentation de l'enveloppe gauche et droite du champ électrique et de la distribution longitudinale de la densité de photons dans la cavité pour un coefficient de couplage normalisé de 0.5

est quasi symétrique, alors que dans le cas d'un couplage moyen, (figure 2.4), il apparaît une asymétrie dans la distribution de la densité de photons due à l'asymétrie de la réflectivité des facettes, la facette de forte réflectivité correspondant à une faible densité de photons. Pour un couplage très fort, la réflectivité du réseau est tellement forte qu'elle masque les réflectivités extrêmes.

Si l'on observe maintenant les courbes correspondant à de faibles coefficients de couplage, on constate que la distribution de la densité de photons atteint un minimum, figure (2.5), qui tend à se rapprocher de la facette à haute réflexion pour de plus faibles valeurs du couplage, (figure 2.6). C'est au niveau de la facette anti-reflet que la densité de photons est la plus forte. En outre, au niveau de cette facette le champ électrique se dirige uniquement vers la droite donc tous les photons sont des photons qui sortent du laser.

Rappelons enfin que les courbes présentées ne donnent aucune indication sur le nombre absolu de photons, dont la détermination nécessite de prendre en compte l'équation sur les porteurs. Nous pouvons cependant rappeler que les faibles coefficients de couplage correspondent à des seuils plus élevés, donc à une puissance généralement moindre pour un même courant de polarisation.

Le principal enseignement à tirer de ces courbes est que les DFB présentent généralement une distribution longitudinale inhomogène de la densité de photons, ce qui par couplage avec le milieu actif induit une distribution longitudinale de la densité de porteurs inhomogène. Ce phénomène, que l'on désigne en anglais par l'expression "spatial hole burning", implique, dans l'étude des propriétés dynamiques, de prendre en compte non pas simplement le nombre total de photons ou de porteurs mais bien leurs densités (moyennée transversalement) en chaque point de l'axe longitudinal.

2.3 DFB : Caractéristiques expérimentales

2.3.1 Introduction

Les lasers DFB dont nous avons fait usage dans notre montage expérimental ont été gracieusement fournis par la société Alcatel. La particularité de ces lasers [60] est de posséder une divergence de sortie relativement faible, donnant la possibilité de coupler directement le faisceau à une fibre clivée traitée anti-reflet. Cette faible divergence est obtenue grâce à la présence d'une section de conversion de mode en entonnoir située sous la couche active (figure 2.7, d'après [61]).

2.3.2 Détail de la structure du laser

Les lasers utilisés possèdent tous une longueur d'onde d'émission autour de 1.55 μm. Le confinement transverse est basé sur un guidage par l'indice et un ruban crête enterré, le guidage par l'indice permet notamment de supprimer le coude sur la courbe Puissance(Courant) [62]. La zone de conversion de mode est formée d'une zone supérieure en biseau où la largeur de la zone active décroît linéairement, et une zone passive inférieure de type entonnoir. Le mode est ainsi transféré dans la section inférieure et sa taille élargie. Le réseau d'indice caractéristique de la structure DFB est situé dans une section antérieure.

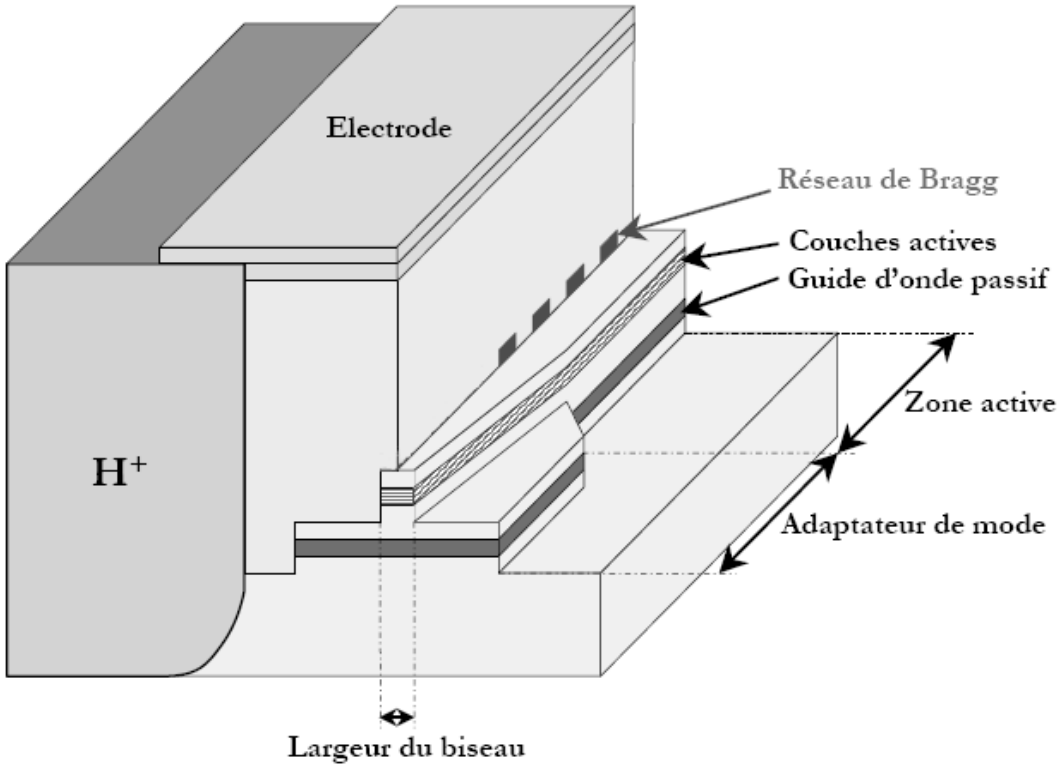

FIG. 2.7 – Schéma de structure du laser DFB à convertisseur de mode

La couche active est de type multi-puits quantiques, composée de six puits contraints de 8 nm d'épaisseur en InGaAsP séparés par des barrières de 10 nm d'épaisseur. La structure est entourée de deux couches de confinement. Le réseau d'indice est gravé par holographie sur une couche d'InGaAsP située au-dessus de la couche active, avec une couche d'espacement en InP dopé p.

L'utilisation de multi-puits quantiques contraints présente de multiples avantages, parmi lesquels l'accordabilité de la bande interdite, la réduction du courant de seuil, le contrôle de la polarisation, la réduction de la recombinaison Auger et l'allongement de la durée de vie du composant

La divergence du faisceau de sortie est déterminée par la largeur de l'adaptateur de mode ainsi que par la largeur de l'extrémité en biseau de la zone active. Un angle de divergence d'environ 15 degrés dans les deux directions est atteint grâce à une taille de 200 nm de l'extrémité [60].

Il a été réalisé deux versions de ces lasers, une version dite non-localisée, dans laquelle le réseau de Bragg était présent tout le long du laser, et une version localisée, où le réseau de Bragg est limité à la zone antérieure à la section de conversion de mode, dite alors section Bragg. Les lasers utilisés dans notre montage sont de la deuxième version.

Un certain nombre de paramètres géométriques et matériels ont pu être mesurés dans notre laboratoire, au cours d'une précédente étude [63], en utilisant un réflectomètre optique à faible cohérence sensible à la phase. Il a ainsi été déterminé précisément la longueur de la zone de conversion de mode :

Laser	Laser 1	Laser 2	Laser 3
Résistance	32 Ω	26 Ω	28 Ω
Tension de coude	0.65 V	0.72 V	0.67 V

TAB. 2.1 – Mesure des caractéristiques électriques de la diode laser

$L_M = 135\ \mu\mathrm{m}$ et la longueur de la zone Bragg : $L_B = 345\ \mu\mathrm{m}$, le coefficient d'absorption : $\alpha = 40\ \mathrm{cm}^{-1}$ ($\kappa L_B = 1.4$), et le coefficient de couplage au réseau : $\kappa = 21\ \mathrm{cm}^{-1}$ ($\kappa L_B = 0.7$). On remarque que les pertes internes sont assez fortes et que le coefficient de couplage est assez faible. La version non-localisée du laser présenterait un réseau de Bragg plus long donc un meilleur coefficient de couplage normalisé et par conséquent un courant de seuil un peu plus faible.

2.3.3 Caractéristiques statiques

Caractéristiques électriques

Nous avons tout d'abord mesuré les caractéristiques électriques du dipôle pour une température de 20˚(la tension de coude décroît quand la température augmente).

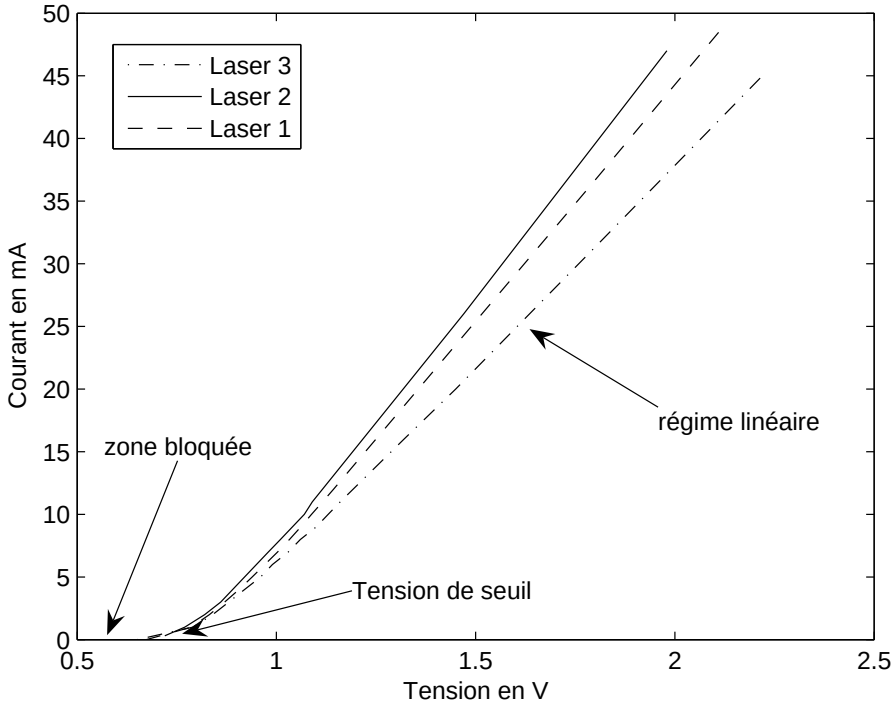

FIG. 2.8 – Caractéristique électrique de la diode laser

On retrouve le classique effet de seuil des diodes. La résistance mesurée inclut la resistance de l'embase, la resistance propre à la diode est typiquement inférieure à 5 Ω.

Température	15˚C	20˚C	30˚C
i_{seuil}	7.73 mA	8.60 mA	10.45 mA
η_{extc}	0.272 W/A	0.267 W/A	0.258 W/A
ϵ_i	0.00054 mA^{-1}	0.00056 mA^{-1}	0.00061 mA^{-1}

TAB. 2.2 – Mesure des caractéristiques de puissance du laser n˚3

Caractéristique courant-puissance optique

Nous présentons sur la figure 2.9 les mesures de puissance effectuée en fonction du courant pour trois températures différentes.

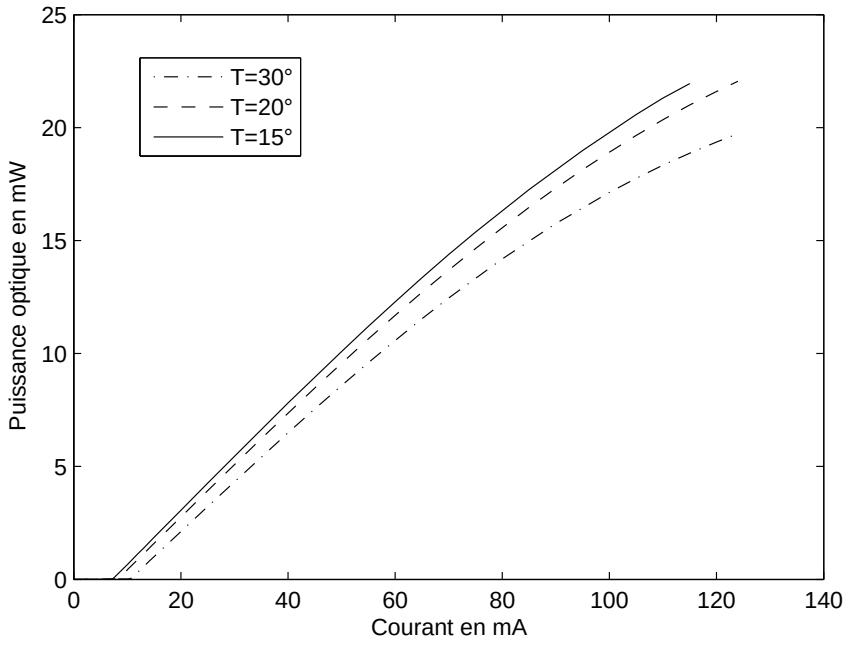

FIG. 2.9 – Caractéristiques expérimentales courant-puissance du laser n˚3 pour différentes températures

A partir des résultats de l'approximation polynomiale du second ordre, on détermine l'équation de la puissance au-dessus du seuil :

$$P_{opt}(i) = (i - i_{seuil})\eta_{extc}(1 - \epsilon_i i) \tag{2.40}$$

les résultats concernant le courant de seuil (i_{seuil}), le rendement quantique externe couplé (η_{extc}), et les non-linéarités (ϵ_i) à différentes températures sont rassemblés dans le tableau 2.2.

Malgré le soin apporté au couplage entre le laser et la surface du détecteur, le rendement η_{extc} mesuré est inférieur de 25% à la valeur annoncée par le constructeur. L'utilisation d'une sphère intégrante permettrait sûrement d'améliorer les resultats de la mesure.

On retrouve classiquement l'augmentation du seuil et la diminution de l'efficacité de conversion avec l'accroissement de la température. Le coefficient de compression du gain du laser étudié est assez faible et permet de considérer la caractéristique comme purement linéaire jusqu'à 60 mA. Il croît légèrement avec la température.

Longueur d'onde d'émission

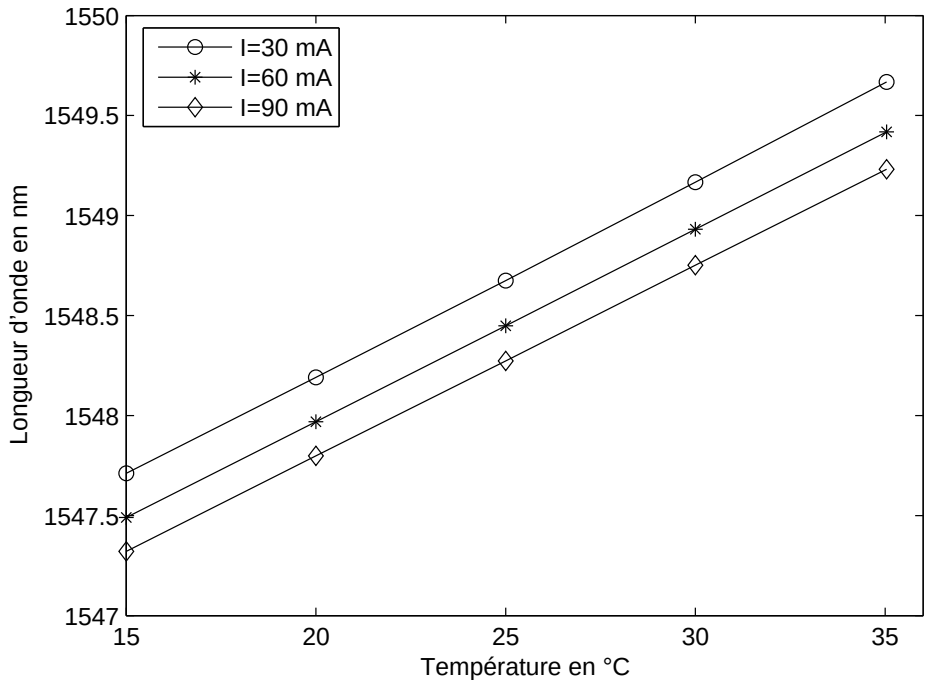

FIG. 2.10 – Longueur d'onde d'émission du laser maître en fonction de la température

La figure 2.10 présente les résultats de la mesure, réalisée à l'analyseur de spectre, de la longueur d'onde du mode principal en fonction de la température du laser, pour trois courants de polarisation différents. On constate une excellente linéarité, identique pour chaque courant d'injection.

Les mesures permettent d'évaluer le coefficient de variation de la fréquence avec la température :

$$\frac{d\nu}{dT} = -12 \text{ GHz/K} \tag{2.41}$$

La figure 2.11 présente les résultats de la mesure de la fréquence du mode principal en fonction du courant d'injection, pour trois températures différentes. On constate par rapport à la caractéristique Longueur d'onde (Température), que les courbes ne sont pas linéaires.

La fréquence du laser varie donc avec le courant selon un polynôme du second degré :

$$\nu(i) - \nu(i_{seuil}) = -410 \text{ MHz/mA}(i - i_{seuil}) - 4\text{MHz/mA}^2(i - i_{seuil})^2 \tag{2.42}$$

$$= -410 \text{ MHz/mA}(i - i_{seuil})(1 - 0.01 \text{ mA}^{-1}(i - i_{seuil})) \tag{2.43}$$

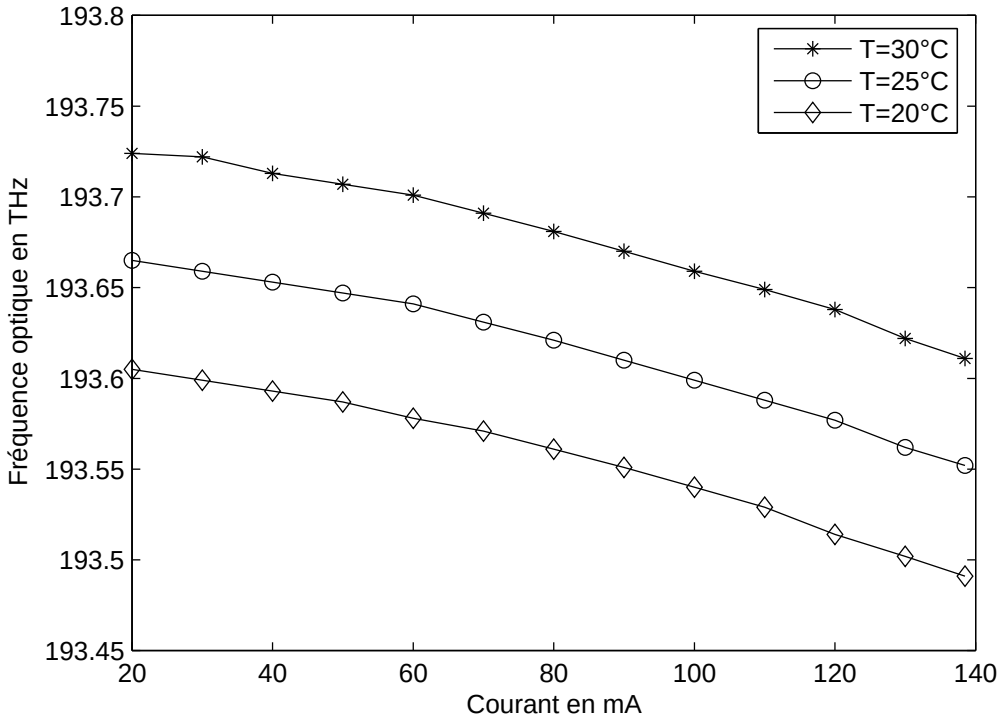

FIG. 2.11 – Fréquence d'émission du laser maître en fonction du courant d'injection

donc

$$\frac{d\nu}{di}(i) = -410 \text{ MHz/mA} - 8\text{MHz/mA}^2(i - i_{seuil}) \tag{2.44}$$

Étant donné que le courant d'injection maximum est de quatorze fois le courant de seuil, le coefficient de variation fréquence/courant varie entre -410 MHz/mA et -510 MHz/mA. La variation légèrement quadratique provient de l'effet Joule, c'est à dire une modification de la température proportionnelle au carré du courant.

2.3.4 Caractéristiques spectrales

Spectre du laser autour du seuil

La figure 2.12 met clairement en évidence un certain nombre de phénomènes fondamentaux.

- En dessous du seuil, le spectre du laser est analogue au spectre d'une diode électroluminescente, la largeur spectrale est de l'ordre de $\Delta\lambda = \frac{\Delta E}{h}\frac{\lambda_0^2}{c} = \frac{k_B T}{h}\frac{\lambda_0^2}{c} \approx$50 nm correspondant à la largeur de l'émission spontanée (où k_B est la constante de Boltzmann, T la température en Kelvin, h la constante de Planck, c la vitesse de la lumière et λ_0 la longueur d'onde moyenne)
- Aux environs de 1547 nm, on remarque un trou dans le spectre correspondant à la bande interdite du réseau de Bragg

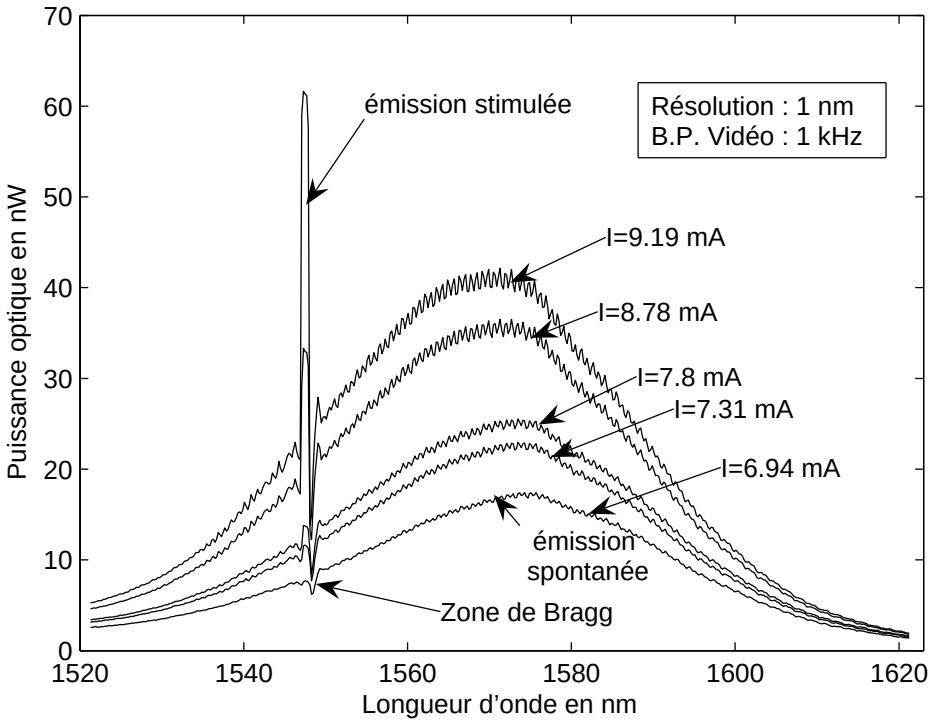

FIG. 2.12 – Évolution du spectre du laser DFB près du seuil

– On constate la sélectivité spectrale de l'émission par rapport au spectre d'émission spontanée.

Spectre du laser au-dessus du seuil

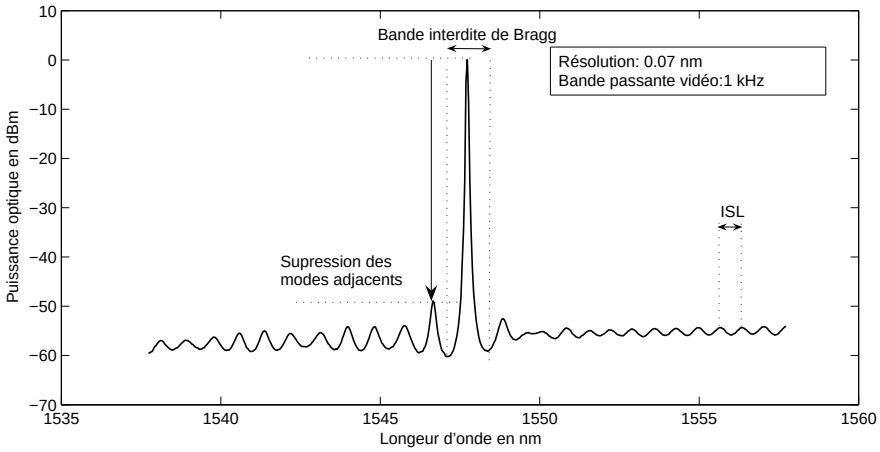

FIG. 2.13 – Spectre du laser DFB à deux fois le courant de seuil

La figure 2.13 représente le spectre du laser pour un courant égal à deux fois le seuil. On constate

très clairement le caractère monomode du laser dû à la structure DFB, le taux de suppression des modes secondaires, défini comme le rapport de puissance entre le mode principal et le mode secondaire le plus important, est estimé à -50 dB. La figure permet aussi de mesurer l'intervalle spectral libre, on l'estime à 850 pm c'est à dire environ 100 GHz. On note surtout que le mode du laser est situé dans la bande interdite de Bragg, ce qui signifie que la phase de ρ_r est d'environ $\pi/2$, ce mode dit "mode de gap" possède le seuil le plus bas uniquement pour des réflectivités importantes [57].

Mesure de la largeur spectrale du laser

Nous proposons ici quelques rappels sur les différentes méthodes de mesure, directes ou indirectes, pour mesurer le spectre d'émission d'un laser.

La première méthode directe consiste à utiliser un élément dispersif (réseau ou prisme) afin de séparer spatialement les différentes composantes spectrales d'émission. La puissance de chacune d'elles est alors mesurée à l'aide d'un détecteur spatialement sélectif. Ce principe est à la base du fonctionnement des monochromateurs, spectromètres et analyseurs de spectre optique. La résolution dépend du paramètre de dispersion, de la diffraction des éléments ainsi que de la taille du détecteur.

La seconde méthode directe consiste à utiliser un filtre accordable réalisé à l'aide d'une cavité Fabry-Perot dont l'un des miroirs est monté sur une cale piézo-électrique. Pour une position donnée du miroir, la cavité Fabry-Perot ne laisse idéalement passer qu'une seule composante spectrale multiple de l'intervalle spectral libre. On mesure la puissance de cette composante grâce à un détecteur placé en sortie du Fabry-Perot. La résolution est directement reliée à la finesse de la cavité, c'est à dire à la réflectivité des miroirs et à l'intervalle spectral libre.

Il existe aussi des méthodes indirectes telles que la méthode de spectrométrie par transformée de Fourier. Elle est basée sur le théorème de Wiener-Khintchine indiquant que la densité spectrale de puissance est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation temporelle du champ de la source à étudier. Cette méthode consiste donc à mesurer non pas la répartition spectrale de puissance, mais la fonction d'autocorrélation, à l'aide d'un montage de type Michelson. Il reste ensuite à effectuer la transformation de Fourier numérique de l'autocorrélogramme. La résolution est limitée par la taille de l'autocorrélogramme, c'est à dire la différence maximum de longueur des bras du Michelson.

Les analyseurs de spectre dans le domaine électrique (radio-fréquence ou micro-ondes) permettent d'atteindre des résolutions bien supérieures à celle des appareils optiques. En transposant l'onde optique dans le domaine radio on peut ainsi mesurer des détails du spectre beaucoup plus fin. Pour effectuer cette transposition, il est nécessaire de disposer d'une source laser "étalon" de fréquence proche dont le spectre est bien plus fin que le spectre du laser à étudier. En faisant battre les deux lasers sur un photo-détecteur, on obtient une onde radio-électrique ayant les même propriétés de bruit que l'onde laser à étudier, en considérant que l'étalon n'ajoute aucun bruit. Dans la pratique, la largeur spectrale du laser étalon est le paramètre limitant la résolution de mesure.

La méthode de mesure spectrale par auto-hétérodynage décorrélé se base elle aussi sur une mesure

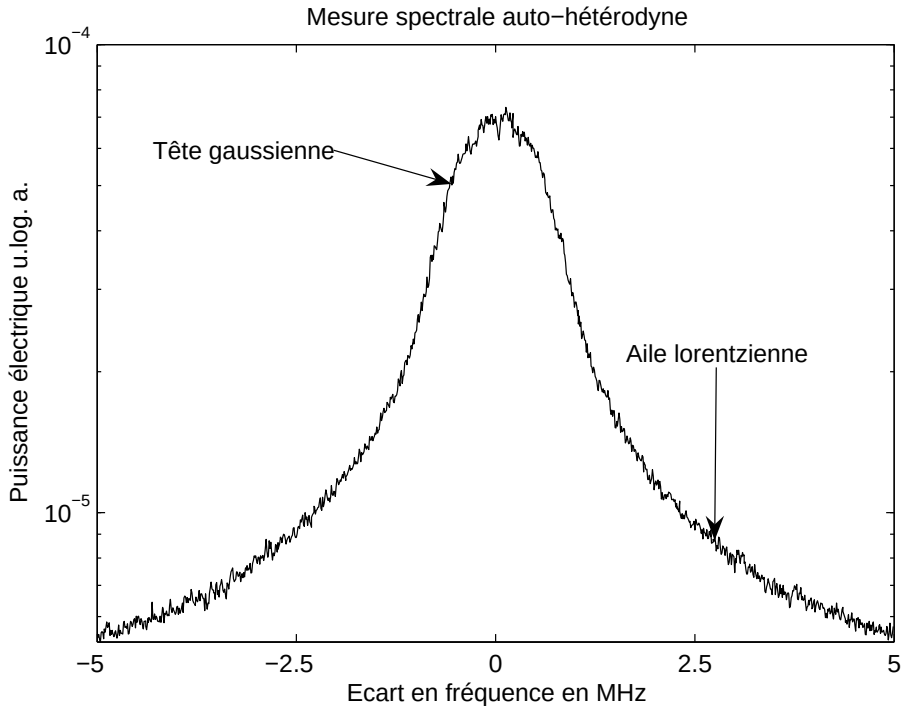

FIG. 2.14 – Mesure auto-hétérodyne du spectre d'un laser

du spectre d'un photo-courant [64] [65]. Elle ne permet pas de remonter totalement au spectre mais seulement à l'autoconvolution du spectre. Dans le cas d'un spectre supposé de forme lorentzienne, elle permet de déterminer la largeur spectrale avec une résolution bien supérieure à celle d'un Fabry-Perot à balayage.

Le principe de cette mesure est de faire battre sur un détecteur rapide deux répliques du champ à analyser, en ayant pris soin de faire disparaître la corrélation existant entre les deux champs[1]. On obtient ainsi deux champs optiques de propriétés statistiques identiques (la cohérence de chacune des sources restent inchangée) et de cohérence mutuelle nulle. En se basant sur le fait que le photocourant de battement de deux lasers indépendants possèdent un spectre égal à la convolution des spectres optiques des deux lasers, on obtient à l'aide de nos deux champs décorrélés un spectre électrique égal à la convolution de deux spectres identiques, c'est à dire l'autoconvolution des spectres.

Un certain nombre de formes de raies sont ainsi stables par autoconvolution, c'est le cas de la forme lorentzienne, dont la largeur à mi-hauteur de l'autoconvolution est le double de la largeur à mi-hauteur de la lorentzienne d'origine, et de la forme gaussienne dont la largeur à mi-hauteur de l'autocorrélation est $\sqrt{2}$ fois celle de la largeur à mi-hauteur initiale. En pratique, pour des courants assez importants, le spectre obtenu possède un profil proche d'une fonction de Voigt, c'est à dire la convolution d'une gaussienne et d'une lorentzienne (figure 2.14), la composante en $1/f$ du bruit de fréquence optique étant

[1]Dans le cas ou les champs sont parfaitement corrélés, le photocourant n'est sensible qu'au bruit d'intensité du laser

à l'origine de la partie quasi gaussienne [2] [65] [67].

Afin de s'affranchir de la zone aveugle de l'analyseur de spectre autour de la fréquence nulle, l'une des répliques du champ est décalée en fréquence à l'aide d'un montage acousto-optique, ou bien modulée en fréquence, directement par le courant de polarisation [68], ou indirectement à l'aide d'un modulateur électro-optique.

La largeur spectrale du laser dépend du poids relatif de l'émission spontanée et donc du nombre de photons à l'intérieur de la cavité laser, plus le nombre de photons émis par émission stimulée est grand devant le nombre de photons émis par émission spontanée, plus l'influence sur la phase de l'émission spontanée est faible et par conséquent plus la largeur spectrale est faible. Nous présentons sur la figure 2.15 les largeurs spectrales mesurées pour le Laser 3 en fonction de l'inverse de la puissance couplée dans la fibre optique. On constate un régime de décroissance linéaire de la largeur spectrale, du courant seuil jusqu'à une puissance correspondant à un courant d'environ 60 mA, puis une saturation de la décroissance.

Cette anomalie générale dans l'évolution de la largeur spectrale, consistant, suivant les lasers, en un ralentissement de la réduction, une stabilisation ou même un rélargissement, a fait l'objet de nombreuses études mettant notamment en cause l'effet de la variation spatiale de distribution de porteurs et de photons (*spatial hole burning*), la saturation des niveaux énergétiques des porteurs (*spectral hole burning*), ces deux phénomènes engendrant une compression du gain, ainsi que l'augmentation du niveau de bruit en $1/f$ [69] [70] [71]. Dans le cas présent, la saturation de la décroissance apparaît bien à une puissance à partir de laquelle la compression du gain a été observée.

2.3.5 Caractéristiques dynamiques

Étant donné que le peigne optique sur lequel les deux lasers doivent être accrochés est produit par modulation du courant du laser maître, nous présentons ici brièvement quelques courbes et informations sur les propriétés de modulation des lasers utilisés.

Fonction de transfert de modulation de fréquence

A cause du facteur de Henry α_H [72], la variation de la fréquence optique $\delta\nu$ est reliée à la variation de la densité de porteurs $\delta\mathcal{N}$:

$$\delta\nu(t) = \frac{\alpha_H}{4\pi} g_{\mathcal{N}} \delta\mathcal{N}(t) \tag{2.45}$$

où $g_{\mathcal{N}}$ est le gain différentiel. Par conséquent, toute modulation de la puissance optique provoquée par une modulation du nombre de porteurs induit une modulation de la fréquence du laser. La fonction de transfert de modulation de fréquence est aussi modifiée par les effets thermiques pour les fréquences inférieures à la dizaine de MHz, au-delà elle est soumise à l'effet du gain et de sa compression entraînant

[2] En toute rigueur, le profil gaussien n'est obtenu que pour une variance de gigue de phase en τ^2, ce qui correspond à un spectre de bruit de fréquence représenté par une distribution de Dirac en zéro et non à un spectre en $1/f$ [66]

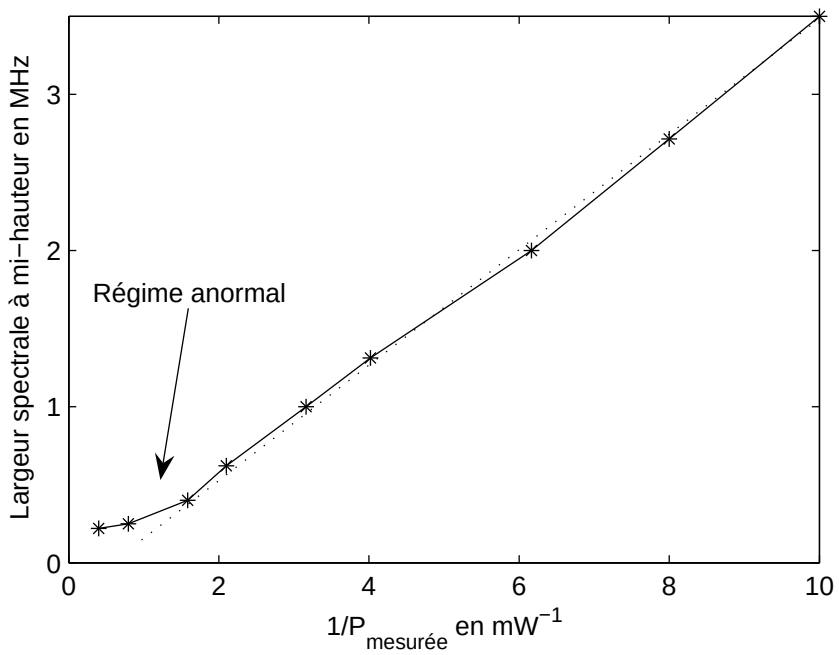

FIG. 2.15 – Variation de la largeur spectrale avec la puissance d'émission

une réponse constante jusqu'à 1 GHz, puis une résonance d'environ un ordre de grandeur au niveau de la fréquence de relaxation suivie au-delà d'une décroissance en $1/f^2$ [73].

Au niveau spectral cette modulation de fréquence se caractérise par l'apparition de bandes latérales de modulation liées au développement en série de Bessel de la modulation de fréquence.

Spectre de modulation

Nous avons représenté sur la figure 2.16 le spectre optique en échelle linéaire du laser utilisé comme laser maître dans nos expériences d'injection optique, pour différentes fréquences du courant de modulation (puissance électrique de 19 dBm, polarisation à 7 fois le seuil).

On constate que la distribution de puissance parmi les harmoniques varie fortement en fonction de la fréquence de modulation. Celle-ci dépend en fait de plusieurs paramètres, la fonction de transfert de modulation en intensité du laser, la fonction de transfert de modulation en fréquence et l'adaptation d'impédance du circuit électrique.

Fréquence de résonance

Nous avons mesuré grossièrement la fréquence de résonance du laser à l'aide du profil de la densité spectrale de puissance du photocourant obtenu à l'aide d'un photodétecteur rapide et d'un analyseur de spectre.

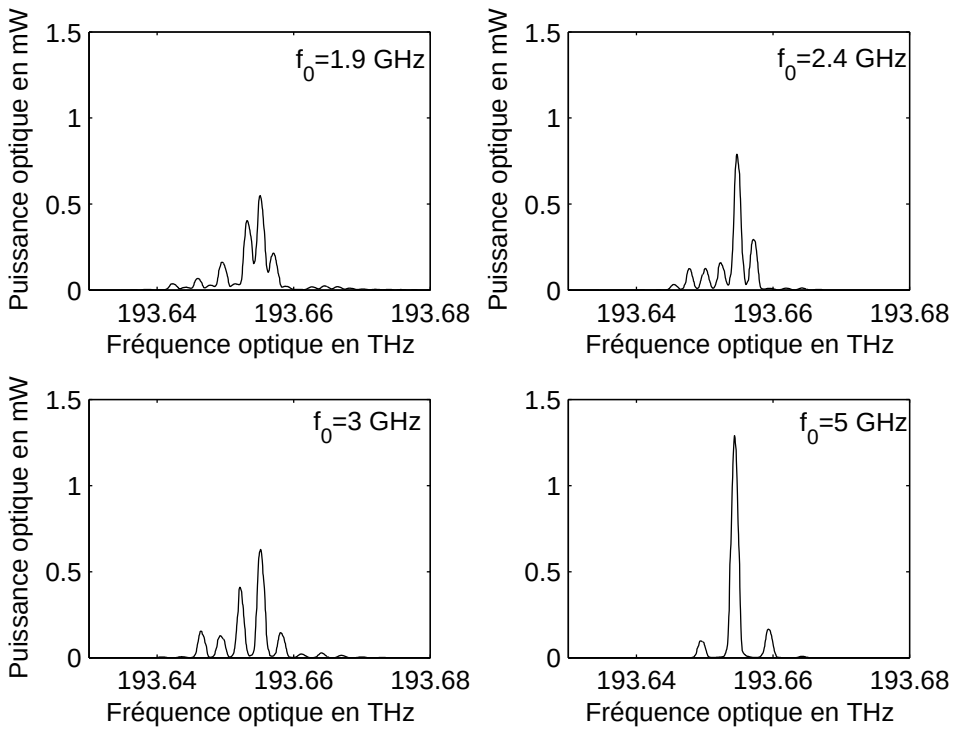

FIG. 2.16 – Spectre optique du laser modulé

Il en résulte, à partir de la figure 2.17, que pour les valeurs du courant inférieures à 60 mA il y a un bon accord avec la formule théorique approchée :

$$f_R = \sqrt{\frac{(i - i_{seuil})\Gamma G_N}{e}} \tag{2.46}$$

où i est le courant d'injection de porteur, i_{seuil} est le courant de seuil, $e = 1.6\,10^{-19}$ C est la charge de l'électron, Γ est le facteur de confinement et $G_{\mathcal{N}} = \frac{\partial G}{\partial \mathcal{N}}$ où G est le gain. D'après l'approximation linéaire réalisée à partir des mesures, $\Gamma G_{\mathcal{N}} \approx 15.10^3$ s^{-1}

Au-delà de 60 mA, la fréquence de résonance sature à 9 GHz, vu le lien entre la fréquence de résonance et le gain différentiel, ce phénomène est à rapprocher des remarques faites au niveau des mesures de la puissance en fonction du courant et de la largeur spectrale en fonction de la puissance.

Impédance d'entrée du laser

La réponse en modulation étant aussi liée au circuit électrique d'injection, nous avons procédé à la mesure de l'impédance d'entrée du laser à l'aide d'un analyseur de réseau. On considère qu'il y a bonne adaptation de l'impédance pour un taux de réflexion inférieur à -10 dB. Nous avons ainsi pu déterminer que le laser était correctement adapté dans la bande 1-2 GHz, dans une bande très étroite autour de 3 GHz, puis pour les fréquences supérieures à 6 GHz.

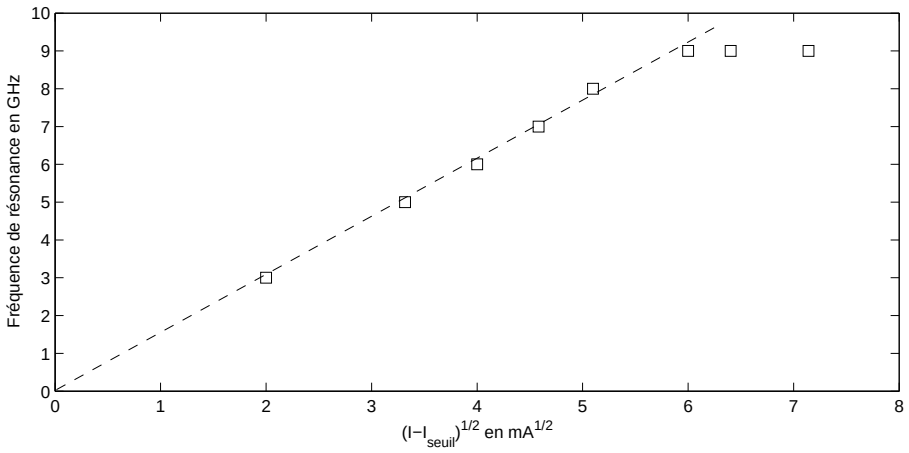

FIG. 2.17 – Fréquence de résonance en fonction du courant d'injection

2.4 Conclusion

Dans une première partie nous avons présenté, en résolvant le système d'équations couplées des modes longitudinaux, les caractéristiques statiques d'émission d'un laser DFB, cette étude servira de base pour l'étude théorique générale de l'injection optique dans les lasers DFB et Fabry-Perot. Dans une seconde partie nous avons donné un certain nombre de valeurs de paramètres mesurées sur les lasers DFB présents dans notre montage expérimental.

Le prochain chapitre propose un rappel et des résultats généraux concernant le bruit de phase et le spectre laser. Il présente en particulier de manière simple le formalisme des forces de Langevin qui sera ensuite amplement utilisé lors de l'étude théorique générale de l'injection optique.

Chapitre 3

Rappels sur les propriétés statistiques du champ et du bruit de phase optique

3.1 Introduction

L'importance de la littérature concernant l'étude des bruits quantiques des lasers à semi-conducteur est en premier lieu due au fait que leur cavité possèdent un faible facteur de qualité et que le milieu amplificateur présente un important bruit quantique par rapport aux autres types de lasers. De nombreuses études théoriques sur le sujet furent menées dès la fin des années 60 [74] [75] à l'aide de la méthode de Langevin ou de la matrice densité [76], mais déjà, à la fin des années cinquante, avaient été prédites la forme Lorentzienne du spectre laser et la relation inverse entre largeur spectrale et puissance [77].

Au cours des années 70, des études expérimentales furent menées afin de vérifier les expressions théoriques, elles étaient cependant confrontées à l'extrême finesse des raies des lasers à gaz. Avec les lasers à semi-conducteur apparurent alors des sources lasers de spectre beaucoup plus large. C'est en mesurant l'un de ces spectres [78] que fut révélé une des grandes spécificités des lasers à semi-conducteur, le fait que la variation du gain induise une variation de l'indice de réfraction non négligeable, contrairement à ce que les travaux théoriques des années 60 avaient laissé penser. C'est Charles Henry qui mit en avant cet effet pour expliquer le désaccord entre les mesures et la formule de Schawlow-Townes modifiée par Lax [72]. Le facteur d'élargissement de la largeur spectrale des lasers à semi-conducteur devint alors un des grands sujet de recherche [79] [80] et stimula l'étude plus générale des bruits de phase et d'intensité notamment grâce aux équations de taux [81] [82] [83] [84].

Dans ce chapitre nous allons tout d'abord étudier les propriétés statistiques de la phase d'un laser, puis relier celles-ci aux phénomènes physiques présents dans le laser à semi-conducteur de manière intuitive. Nous proposons ensuite de rappeler les résultats classiques de calculs des paramètres statistiques du champ et du photocourant. Tout ceci se situe dans l'objectif de la caractérisation du bruit de phase du battement de deux ondes lasers.

3.2 Propriétés statistiques de la phase d'un mode laser

3.2.1 Propriétés statistiques générales

Soit une onde optique quasi-monochromatique réelle notée :

$$e(t) = A_0 \cos(2\pi\nu_0 t + \phi(t)) \tag{3.1}$$

de fréquence moyenne ν_0 et de phase $\phi(t)$ issue d'une source laser monomode, on considère que l'amplitude du champ est stabilisée à la valeur A_0 et donc que le bruit du champ est uniquement dû au bruit de sa phase. La représentation complexe du champ est :

$$E(t) = E_0(t)e^{j2\pi\nu_0 t} \tag{3.2}$$

avec comme expression de l'amplitude complexe :

$$E_0(t) = A_0 e^{j\phi(t)} \tag{3.3}$$

Le bruit de phase $\phi(t)$ étant une fonction aléatoire réelle, pour connaître l'ensemble de ses propriétés statistiques il faudrait connaître toutes les densités de probabilité conjointes :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in \mathbb{R}^n, P_{\phi(t_1)....\phi(t_n)}(\varphi_1, ..., \varphi_n) \tag{3.4}$$

En considérant que $\phi(t)$ est un processus aléatoire gaussien centré on obtient la description statistique suivante : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall(t) \in \mathbb{R}^n$,

$$P_{\phi(t_1)....\phi(t_n)}(\varphi_1, ..., \varphi_n) = \frac{\exp(-\frac{1}{2}[\varphi_1...\varphi_n]R_\phi(t)[\varphi_1...\varphi_n]^T)}{2\pi^{n/2}}$$

avec

$$(R_\phi)_{ij} = \langle \phi(t_i)\phi(t_j) \rangle$$

Connaissant la matrice de covariance, on peut déterminer entièrement les propriétés statistiques de l'incrément de phase.

3.2.2 Marche aléatoire, processus de Wiener-Levy et équation de Langevin

Description

Nous allons tout d'abord donner une description du processus statistique dénommé "marche aléatoire".

On considère une particule sur un axe, à $t = 0$. Elle est située au centre de l'axe et toutes les τ secondes, elle effectue un mouvement d'un incrément Δx vers la gauche ou vers la droite, avec la même probabilité. La probabilité à l'instant $k\tau$ que la particule soit située à l'abscisse $n\Delta t$ est la suivante [85] :

$$P(n\Delta t, k\tau) = \frac{k!}{2^k \left(\frac{k-n}{2}\right)! \left(\frac{k+n}{2}\right)!} \tag{3.5}$$

On cherche maintenant à rendre le processus continu, c'est à dire à faire tendre l'incrément spatial (Δx) et temporel (τ) vers zéro. On établit ainsi la densité de probabilité de trouver la particule à l'abscisse x à l'instant t :

$$P(x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4Dt}}}{\sqrt{4\pi Dt}} \tag{3.6}$$

où D_x est appelé paramètre de diffusion, dans le cas discret :

$$D_x = \frac{(\Delta x)^2}{2\tau} \tag{3.7}$$

On constate que la moyenne de $x(t)$ est nulle par parité et que la variance est donnée par :

$$\sigma^2_{x(t)} = 2D_x t \tag{3.8}$$

La fluctuation de la phase d'un laser, due à l'émission spontanée de photons, peut être considérée comme une marche aléatoire. L'incrément correspond alors à l'incrément de phase ajoutée lors de chaque émission spontanée d'un photon. L'unique paramètre caractérisant le processus est donc le paramètre de diffusion que nous noterons $\Delta\omega/2$. Nous connaissons donc l'écart type de la phase :

$$\sigma^2_{\phi(t)} = \Delta\omega t \tag{3.9}$$

il nous manque cependant les corrélations croisées.

Mouvement Brownien ou processus de Wiener

Le mouvement brownien ou processus de Wiener est un cas particulier de l'équation de Focker-Planck, (équation différentielle du second ordre dont la densité de probabilité des processus de Markov homogènes diffusifs est solution) :

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = -\frac{\partial}{\partial x}\left(a(x)P(x,t)\right) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(b(x)P(x,t)\right) \tag{3.10}$$

pour laquelle $a(x) = 0$ (dite fonction de dérive) et $b(x) = 2D_x$ (dite fonction de diffusion)

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t) = D_x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(P(x,t)\right) \tag{3.11}$$

qui est une équation de diffusion, ce qui justifie le fait de dire que la phase d'un laser diffuse.

La densité de probabilité du processus de marche aléatoire continue (3.6) vérifie cette équation, il s'agit donc d'un processus de Wiener. On peut alors écrire la probabilité conditionnelle sachant la position x_1 à t_1 pour $t > t_1$:

$$P(x_1,t_1|x,t) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4D_x(t-t_1)}}}{\sqrt{4\pi D(t-t_1)}} \tag{3.12}$$

Pour la phase, on a donc pour $t_2 > t_1$,

$$P(\phi(t_2)|\phi(t_1)) = \frac{e^{-\frac{\phi(t_2)^2}{2\Delta\omega(t_2-t_1)}}}{\sqrt{2\pi\Delta\omega(t_2-t_1)}} \tag{3.13}$$

ce qui nous permet de calculer les éléments de la matrice de covariance :

$$\langle \phi(t_i)\phi(t_j)\rangle = \Delta\omega|\min(t_i, t_j)|$$

On remarque donc que $\phi(t)$ n'est pas stationnaire au sens large (Annexe B). Par contre le processus :

$$\Delta\phi(T, t) = \phi(t + T) - \phi(t) \tag{3.14}$$

appelé incrément de phase de parametre T, est lui aussi gaussien et sa matrice de covariance est donnée par :

$$\begin{aligned}
(R_{\Delta\phi(T)})_{ij} &= \langle \Delta\phi(T, t_i)\Delta\phi(T, t_j)\rangle && (3.15)\\
&= \langle (\phi(t_i + T) - \phi(t_i))(\varphi(t_j + T) - \varphi(t_j))\rangle && (3.16)\\
&= \frac{\Delta\omega}{2}[-2|t_i - t_j| + |t_i - t_j + T| + |t_i - t_j + T|] && (3.17)\\
&= \Delta\omega|T - |t_i - t_j||.\mathrm{Heav}(T - |t_i - t_j|) && (3.18)
\end{aligned}$$

On remarque que l'incrément de phase est stationnaire au sens large, il ne dépend que de la différence des instants, donc au sens strict (car gaussien), de plus si $T > 0$, l'incrément de phase entre t et $t + T$ est indépendant du bruit de phase en t.

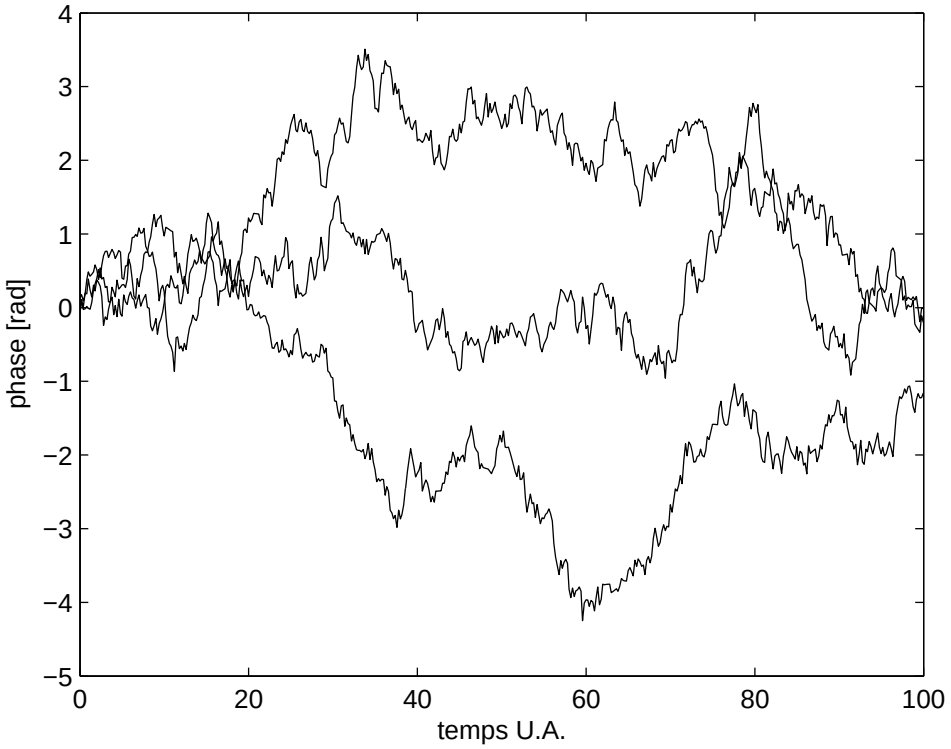

FIG. 3.1 – Différente réalisation de la phase du laser

La variance de l'incrément de phase est appelée en statistique la fonction de structure de la phase, elle joue un rôle important pour le calcul de la densité spectrale de puissance du champ.

Equation de Langevin de la phase

Il est très pratique d'introduire les fluctuations de la phase dans son équation d'évolution grâce à une fonction aléatoire appelée force de Langevin. L'idée principale de Langevin est que les équations restent valables en moyenne. La force de Langevin, de moyenne nulle, rend compte de la variation statistique de la phase au cours du temps.

On considère donc que l'équation d'évolution de la phase peut être mise sous la forme :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = F_\phi(t) \tag{3.19}$$

avec $F_\phi(t)$ une force de Langevin.ϕ et $F_\phi(t)$ étant reliées par une relation linéaire, ϕ étant supposée être une fonction aléatoire gaussienne centrée, $F_\phi(t)$ est donc aussi une fonction aléatoire gaussienne centrée. Comme le système est supposé Markovien, c'est à dire que les forces aléatoires sont sans mémoire, l'autocorrélation de $F_\phi(t)$ est de la forme $\Gamma_\phi \delta(t_1 - t_2)$, c'est à dire un bruit blanc. En utilisant la relation :

$$\langle \phi(t_1)\phi(t_1)\rangle = \int_0^{t_1}\int_0^{t_2} \langle F_\phi(t_1')F_\phi(t_2')\rangle dt_1' dt_2' \tag{3.20}$$

On retrouve la relation de corrélation :

$$\langle \phi(t_1)\phi(t_2)\rangle = \Gamma_\phi \mathrm{min}(\mathrm{t}_1, \mathrm{t}_2) \tag{3.21}$$

Par conséquent, $\Gamma_\phi = \Delta\omega$.

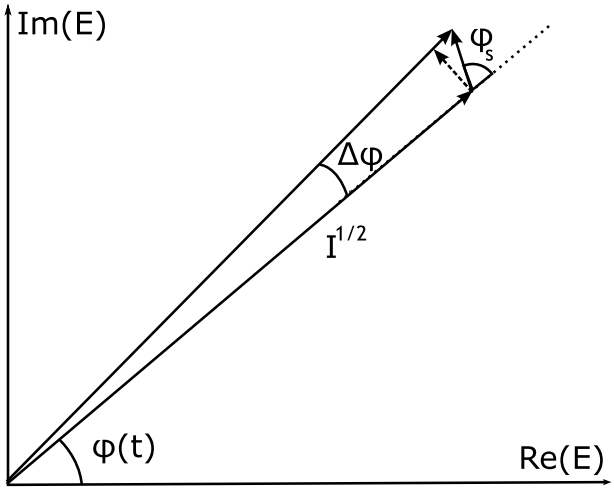

FIG. 3.2 – Représentation de Fresnel de la perturbation du champ stimulé par l'émission spontanée

Le paramètre $\Delta\omega$ a été introduit via la marche aléatoire et dans le cas discret, d'après (3.7),

$$\Delta\omega = \frac{(\Delta\phi)^2}{\tau} \tag{3.22}$$

où $\Delta\phi$ est l'incrément de phase induit par un photon émis spontanément et τ la durée entre deux émissions spontanées. La phase ϕ_s d'un photon spontané est une variable aléatoire uniformément répartie sur le cercle trigonométrique. Soit I le nombre de photons dans le mode, on considère l'amplitude du champ proportionnelle à $\sqrt{I}$, l'amplitude du photon spontané est quant à elle égale à 1. On constate d'après la représentation de Fresnel de la figure 3.2, que, comme $\Delta\phi$ est petit :

$$\Delta\phi = \frac{\sin(\phi_s)1 \text{ photonchamp}}{\sqrt{I}} \tag{3.23}$$

où 1 photonchamp correspond en fait à un quantum d'amplitude de champ associé à un photon.

Par conséquent, si l'on calcule la variance :

$$\langle(\Delta\phi)^2\rangle = \frac{1 \text{ photon}}{2I} \tag{3.24}$$

Il ne manque donc que la donnée du temps moyen entre deux photons spontanés, ou encore le nombre moyen de photons émis en une seconde. Ce facteur est appelé le taux d'émission spontanée et est noté R en [Nb de photon/s], $R = 1 \text{ photon}/\tau$, donc :

$$\Delta\omega = \frac{R}{2I} \tag{3.25}$$

En fait, il existe un facteur correctif dû à la fluctuation du nombre de photon ΔI. Afin de garantir la stationnarité de la puissance optique, toute variation du nombre de photons est compensée par une variation opposée du nombre de porteurs c'est à dire du gain. Or la variation du nombre de porteurs fait aussi changer l'indice du milieu, à par conséquent la phase du champ. En consécutive, la fluctuation du nombre de photons, via le couplage photons-porteurs, induit aussi un déphasage : $\phi'_s = -\alpha_H \Delta I/2I$, où α_H est le rapport entre la variation de la partir réelle de l'indice et la partie imaginaire de l'indice (gain) avec le nombre de porteurs (facteur de Henry [72]). En résumé :

$$\Delta\phi = \frac{\sin(\phi_s)1 \text{ photonchamp}}{\sqrt{I}} - \alpha_H \frac{2\sqrt{I}cos(\phi_s)1 \text{ photonchamp}}{2I} \tag{3.26}$$

donc :

$$\langle(\Delta\phi)^2\rangle = \frac{1 \text{ photon}(1+\alpha_H^2)}{2I} \tag{3.27}$$

et par conséquent,

$$\Delta\omega = \frac{(1+\alpha_H^2)R}{2I} \tag{3.28}$$

On doit donc compléter l'équation d'évolution de la phase en y ajoutant une contribution de la force de Langevin associée au bruit d'intensité F_I :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = F_\phi(t) - \frac{\alpha_H}{2I_0}F_I \tag{3.29}$$

3.2.3 Moments du premier et du second ordre

On considère que la valeur de la phase en $t = 0$ est une variable aléatoire uniformément distribuée dans l'intervalle $[0, 2\pi[$, ce qui correspond à la méthode de stationnarisation des fonctions aléatoires cyclo-stationnaires. Le bruit de phase est alors centré, sa moyenne est nulle ainsi que celle de l'incrément de phase.

La fonction d'autocorrelation et la variance du bruit de phase sont :

$$R_{phi}(t_1, t_2) = \Delta\omega|\min(t_i, t_j)|$$

$$\mathrm{Var}(\phi)(t) = \Delta\omega|t|$$

La fonction d'autocorrelation et la variance de l'increment de phase de parametre T sont :

$$R_{\Delta\phi(T)}(\tau) = \frac{\Delta\omega}{2}[-2|\tau| + |\tau + T| + |\tau - T|] = \Delta\omega|T - |\tau||.\mathrm{Heav}(T - |\tau|)$$

$$\mathrm{Var}(\Delta\phi(T)) = \Delta\omega|T|$$

où Heav désigne la fonction de Heaviside. L'incertitude relative sur la phase à $t + T$ connaissant la phase en t est donc :

$$\frac{\Delta\phi}{2\pi} = \frac{\sqrt{\mathrm{Var}(\Delta\phi(T))}}{2\pi} = \frac{\sqrt{\Delta\omega|T|}}{2\pi} \tag{3.30}$$

Par conséquent pour $\Delta\omega = 2\pi\ 10^6$ rad/s, l'incertitude relative sur la phase atteint 100% à partir de $6,3\ \mu$s.

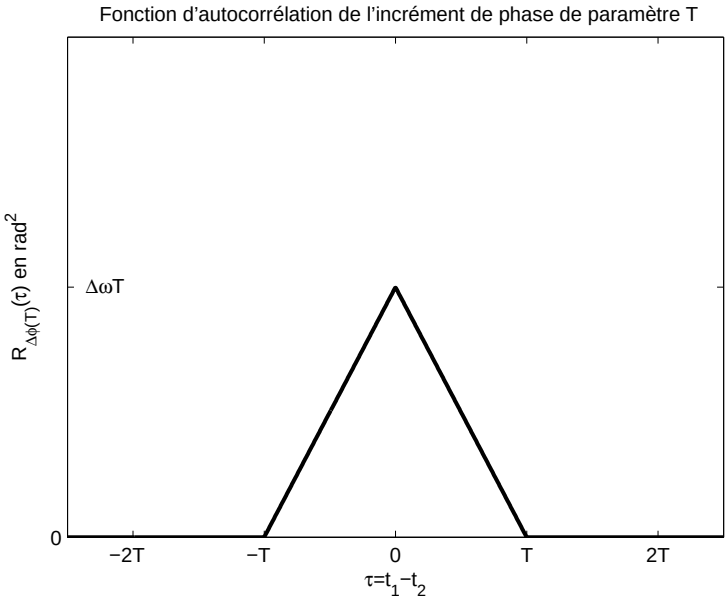

FIG. 3.3 – Autocorrélation de la gigue de phase durant un temps T

Comme l'incrément de phase (ou gigue de phase) est stationnaire, on peut calculer sa densité spectrale de puissance, en remarquant, (figure 3.3), que la fonction d'autocorrélation est une fonction triangle :

$$S_{\Delta\phi(T)}(f) = \Delta\omega\frac{\sin^2(\pi T f)}{(\pi f)^2}$$

3.2.4 Autres expressions

Si l'on appelle $\delta\nu(t)$ le bruit de fréquence instantanée, alors :

$$\phi(t) = 2\pi \int_0^t \delta\nu(t')dt' \tag{3.31}$$

De cette expression intégrale on peut déduire la variance de la gigue de phase à partir de la fonction d'autocorrélation du bruit de fréquence :

$$\mathrm{Var}(\Delta\phi(\tau)) = 8\pi^2\tau \int_0^\tau \left[1 - \frac{\tau'}{\tau}\right] R_{\delta\nu}\tau' d\tau' \tag{3.32}$$

En notant $2\pi\delta\nu = \dot{\phi}$, on obtient aussi une expression de la variance de la gigue de phase en fonction de la densité spectrale de puissance de la pulsation instantanée :

$$\mathrm{Var}(\Delta\phi(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\dot{\phi}}(f)\frac{\sin^2(\pi f\tau)}{\pi^2 f^2}df \tag{3.33}$$

On rappelle que $S_{\dot{\phi}}(f) = 4\pi^2 S_{\delta\nu}(f)$. A partir de l'expression (3.33) on peut en déduire que la densité spectrale de bruit de la fréquence instantanée associée à une phase suivant une marche aléatoire de paramètre $2\pi\Delta\nu$ est $S_{\delta\nu}(f) = \Delta\nu/2\pi$, le bruit est donc uniformément réparti dans toutes les fréquences et ceci correspond à une fonction d'autocorrélation nulle en dehors de zéro (delta-corrélé)[1]. Comme nous l'avons déjà mentionné, la marche aléatoire de la phase est due à l'ajout d'un terme de phase aléatoire lors de l'émission spontanée d'un photon dans le mode, l'émission d'un photon spontané dans le mode correspond donc à un décalage de la fréquence (variation de phase durant un instant infinitésimal), par conséquent l'émission des photons étant delta-corrélée, le bruit de fréquence est aussi delta-corrélé. On retrouve ce résultat immédiatement en considérant l'équation incluant les forces de Langevin blanches :

$$2\pi\delta\nu(t) = F_\phi(t) - \frac{\alpha}{2I}F_I \tag{3.34}$$

La formule (3.33) fait intervenir une quantité que l'on peut mesurer expérimentalement, la densité spectrale de puissance du bruit de fréquence[2]. A l'aide de cette mesure on peut donc en déduire l'évolution de la fonction $D_\phi(\tau)$ et constater un éventuel écart par rapport à la marche aléatoire[3].

[1] Nous faisons remarquer au lecteur que l'expression de la densité spectrale du bruit de fréquence a été établie sans utiliser la densité spectrale de puissance de la phase

[2] Une telle mesure se fait à l'aide d'un dispositif interférométrique de type Michelson ou Fabry-Pérot permettant de convertir la fréquence instantanée du champ optique en une variation de l'intensité optique. A l'aide d'un photo-détecteur il est alors possible d'obtenir un signal électrique proportionnel au bruit de fréquence, et d'utiliser un analyseur de spectre électrique pour en mesure la densité spectrale de puissance

[3] Le principal écart que l'on peut constater vient de la dynamique du couplage phase/intensité. Comme nous l'avons déjà mentionné, lors de l'émission spontanée d'un photon dans le mode il faut comptabiliser pour le bruit de fréquence la contribution instantanée et une contribution supplémentaire retardée provenant de la variation de la densité de porteurs induite par l'émission spontanée d'un photon. Le temps caractéristique de la dynamique photon-porteur étant entre 100 ps et 1 ns, pour des intervalles de temps inférieurs, la variation de phase constatée ne peut pas prendre en compte ce phénomène, donc la pente de la fonction $D_\phi(\tau)$ est plus faible à l'origine, le rapport des pentes est $(1 + \alpha_H^2)$ ([86]). On vérifie indirectement ceci expérimentalement en constatant qu'au delà d'une fréquence de l'ordre de 10 GHz, le bruit de fréquence chute à un niveau plus bas dans un rapport identique au rapport des pentes.

3.2.5 Densité spectrale de puissance de la phase

Nous définissons la densité spectrale de puissance de la phase à partir de celle du bruit de fréquence. Le fait que la fréquence soit proportionnelle à la dérivé de la phase se traduit dans le domaine de Fourier par la relation :

$$\delta\nu(f) = jf\phi(f) \tag{3.35}$$

Par conséquent on pose :

$$S_\phi(f) = \frac{S_{\delta\nu}(f)}{f^2} \tag{3.36}$$

Le problème lié à la non-stationnarité de la phase est discuté dans l'annexe B.

3.3 Propriétés statistiques du champ laser monomode

A partir de la représentation complexe du champ optique $E(t)$ [4], on cherche à déterminer ses moments du premier et second ordre :

3.3.1 Moment du premier ordre

Nous avons indiqué ci dessus que la phase à $t = 0$ était une variable aléatoire uniformément répartie, par conséquent la moyenne du champ est nulle.

3.3.2 Moments du second ordre

Fonction d'autocorrélation

On cherche à évaluer le produit $\langle E(t+\tau)E^*(t)\rangle$ sachant qu'une variable aléatoire gaussienne X vérifie la propriété suivante[5] :

$$\left\langle e^{jX}\right\rangle = e^{-\sigma_X^2/2} \tag{3.37}$$

[4] E désigne ici le champ électrique normalisé de telle manière que son module carré soit directement relié à la puissance optique émise

[5] En effet :

$$\begin{aligned}
\left\langle e^{jX}\right\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{jx} p_X(x)dx \\
&= \mathrm{TF}\left\{p_X\right\}\left(\frac{1}{2\pi}\right) \\
&= \mathrm{TF}\left\{\frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma_X^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_X^2}}\right\}\left(\frac{1}{2\pi}\right) \\
&= e^{-\sigma_X^2/2}
\end{aligned}$$

:

$$\begin{aligned}
\langle E(t+\tau)E^*(t)\rangle &= \left\langle A_0^2 e^{j(\phi(t+\tau)-\phi(t)} e^{j2\pi\nu_0\tau}\right\rangle \\
&= A_0^2 \left\langle e^{j(\phi(t+\tau)-\phi(t)}\right\rangle e^{j2\pi\nu_0\tau} \\
&= A_0^2 e^{-\frac{D_{\phi(\tau)}(\tau)}{2}} e^{j2\pi\nu_0\tau} \text{ car la phase est statistiquement gaussienne} \\
&= A_0^2 e^{-\pi\Delta\nu|\tau|} e^{j2\pi\nu_0\tau} \text{ pour un spectre de bruit de fréquence blanc} \qquad (3.38)
\end{aligned}$$

On constate donc que le champ est stationnaire à l'ordre 2. On définit le temps de corrélation, $\tau_c = 1/(\pi\Delta\nu)$. Lorsque $\tau = \tau_c$, le module de la fonction d'autocorrélation a perdu 63 %, l'incertitude relative sur la phase est de 22,5 %. Elle est de 100 % (écart type de 2π) pour un délai de 20 fois le temps de corrélation.

On déduit enfin la fonction d'autocorrélation du champ réel à partir de celle du champ complexe :

$$\begin{aligned}
\langle e(t+\tau)e(t)\rangle &= R_e(\tau) \\
&= \frac{\Re e\{R_E(\tau)\}}{2} \\
&= \frac{A_0^2}{2} e^{-\pi\Delta\nu|\tau|}\cos(2\pi\nu_0\tau) \qquad (3.39)
\end{aligned}$$

Densité spectrale de puissance

A partir de la fonction d'autocorrélation, on calcule la densité spectrale de puissance du champ dans le cas de la marche aléatoire :

$$\begin{aligned}
S_E(\nu) &= \mathrm{TF}\{R_E(\tau)\}(\nu) \\
&= A_0^2 \mathrm{TF}\left\{e^{-\pi\Delta\nu|\tau|}\right\}(\nu-\nu_0) \\
&= \frac{2A_0^2}{\pi\Delta\nu}\frac{1}{1+4\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2} \qquad (3.40)
\end{aligned}$$

Pour une phase régit par une marche aléatoire de paramètre $2\pi\Delta\nu$, c'est à dire pour un bruit de fréquence blanc de niveau $\Delta\nu/2\pi$, le spectre possède donc une forme lorentzienne de largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$[6].

La densité spectrale de puissance du champ réel est donnée par :

$$\begin{aligned}
S_e(\nu) &= \frac{S_E(\nu)+S_E(-\nu)}{4} \\
&= \frac{A_0^2}{2\pi\Delta\nu}\left[\frac{1}{1+4\left(\frac{\nu-\nu_0}{\Delta\nu}\right)^2}+\frac{1}{1+4\left(\frac{\nu_0-\nu}{\Delta\nu}\right)^2}\right] \qquad (3.41)
\end{aligned}$$

La densité spectrale mesurée sur un analyseur de spectre est unilatérale donc elle correspond à $S_E(\nu)/2$.

[6]La dynamique des porteurs évoquée précédemment entraîne l'apparition de pics satellites dans le spectre du champ à la fréquence de résonance de l'interaction photon-porteur

Comme le champ est stationnaire, la densité spectrale de puissance est reliée à la fonction d'autocorrélation spectrale de la manière suivante :

$$\langle \tilde{E}(\nu_1)\tilde{E}^*(\nu_2)\rangle = S_E(\nu_1)\delta(\nu_1-\nu_2) \tag{3.42}$$

3.3.3 Moment d'ordre 4

Fonction d'autocorrélation du quatrième ordre

On considère maintenant le moment d'ordre 4 :

$$\begin{aligned}\langle E(t_1)E^*(t_2)E(t_3)E^*(t_4)\rangle &= R^{(4)}(t_1,t_2,t_3,t_4)\\ &= A_0^4\left\langle e^{j[\phi(t_1)-\phi(t_2)+\phi(t_3)-\phi(t_4)]}\right\rangle e^{j2\pi\nu_0(t_1-t_2+t_3-t_4)}\\ &= A_0^4 e^{-\frac{1}{2}\left\langle[\phi(t_1)-\phi(t_2)+\phi(t_3)-\phi(t_4)]^2\right\rangle} e^{j2\pi\nu_0(t_1-t_2+t_3-t_4)}\end{aligned} \tag{3.43}$$

En utilisant la relation

$$R_\phi(t_1,t_2) = \frac{1}{2}[D_\phi(t_1)+D_\phi(t_2)-D_\phi(t_1-t_2)] \tag{3.44}$$

on peut exprimer la variance à calculer à l'aide de D_ϕ :

$$\begin{aligned}\left\langle[\phi(t_1)-\phi(t_2)+\phi(t_3)-\phi(t_4)]^2\right\rangle &= D_\phi(t_1-t_2)+D_\phi(t_2-t_3)+D_\phi(t_3-t_4)\\ &\quad -D_\phi(t_1-t_3)-D_\phi(t_2-t_4)+D_\phi(t_1-t_4)\end{aligned} \tag{3.45}$$

On constante que la variance et donc la fonction d'autocorrélation du quatrième ordre, ne dépend que de trois paramètres ce qui est une propriété générale des fonctions aléatoires stationnaires. On pose donc les nouvelles variables :

$$\tau_1 = t_1 - t_2 \tag{3.46}$$

$$\tau_2 = t_2 - t_3 \tag{3.47}$$

$$\tau_3 = t_3 - t_4 \tag{3.48}$$

La fonction d'autocorrélation du quatrième ordre s'exprime alors sous la forme :

$$R^{(4)}(\tau_1,\tau_2,\tau_3) = A_0^4 e^{-\frac{1}{2}[D_\phi(\tau_1)+D_\phi(\tau_2)+D_\phi(\tau_3)-D_\phi(\tau_1+\tau_2)-D_\phi(\tau_2+\tau_3)+D_\phi(\tau_1+\tau_2+\tau_3)]} e^{j2\pi\nu_0(\tau_1+\tau_3)} \tag{3.49}$$

Densité spectrale de puissance du quatrième ordre et densité spectrale de puissance de l'intensité

A partir de la fonction d'autocorrélation du quatrième ordre à trois variables, on définit la densité spectrale de puissance du quatrième ordre à trois variables par transformation de Fourier :

$$S_E^{(4)}(\nu_1,\nu_2,\nu_3) = \mathrm{TF}\left\{R_E^{(4)}(\tau_1,\tau_2,\tau_3)\right\}(\nu_1,\nu_2,\nu_3) \tag{3.50}$$

Comme le champ est stationnaire, la densité spectrale du quatrième ordre est reliée à la fonction d'autocorrélation spectrale du quatrième ordre de la manière suivante :

$$\langle \tilde{E}(\nu_1)\tilde{E}^*(\nu_2)\tilde{E}(\nu_3)\tilde{E}^*(\nu_4)\rangle = S_E^{(4)}(\nu_1, \nu_1 - \nu_2, \nu_4)\delta(\nu_1 - \nu_2 + \nu_3 - \nu_4) \tag{3.51}$$

On définit maintenant l'intensité du champ :

$$I(t) = E(t)E^*(t) \tag{3.52}$$

La fonction d'autocorrélation de l'intensité du champ s'exprime donc à l'aide de la fonction d'autocorrélation du quatrième ordre du champ :

$$R_I(\tau) = \langle I(t+\tau)I(t)\rangle = R(0, \tau, 0) \tag{3.53}$$

et la densité spectrale de puissance de l'intensité à l'aide de la densité spectrale du quatrième ordre du champ :

$$S_I(f) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} S_E^{(4)}(\nu, f, \nu')d\nu d\nu' \tag{3.54}$$

3.4 Propriétés statistiques du photocourant

3.4.1 Remarque préliminaire

Dans cette partie nous rappelons les propriétés statistiques du photo-courant du point de vue classique, c'est à dire que le champ électromagnétique est traité classiquement et qu'il n'est fait mention de photon qu'en terme de quantité d'énergie $h\nu$. L'utilisation d'opérateur quantique révélerait que la statistique des photo-électrons décrite comme induite par le processus de détection est déjà présente au niveau des photons. En outre, l'ensemble des calculs statistiques intermédiaires est regroupé dans l'annexe A.

3.4.2 Statistique du photo-courant

On considère que lorsqu'une onde électromagnétique éclaire un photo-détecteur, elle peut libérer des électrons et par conséquent induire un courant. La probabilité d'émission d'un électron est une loi statistique de Poisson dont le paramètre est la puissance à un instant donnée du champ incident. La photo-détection est donc insensible à la phase du champ. Plus la puissance est importante, plus la probabilité d'obtenir un grand nombre d'électron entre deux instants est grande. Le courant est formé de la succession des émissions d'électrons convoluées par la réponse impulsionnelle du détecteur. Si la puissance du champ est elle même un processus statistique, alors nous sommes confronté à une émission poissonnienne dite conditionnelle [87].

3.4.3 Courant moyen

Le processus de photodétection n'étant pas idéal, il existe un facteur $\eta < 1$ qui vient diminuer le paramètre de la loi de Poisson [7]. Le courant moyen produit par un détecteur éclairé par un champ de puissance I_0 est :

$$\langle i(t) \rangle = \sigma_{PD} I_0 \tag{3.55}$$

où σ_{PD} est la sensibilité du détecteur.

3.4.4 Moment du second ordre

Écart type du photo-courant

Si l'on s'intéresse maintenant aux fluctuations du photo-courant, celles-ci sont dues, d'une part, au processus de génération poissonien, et d'autre part, aux fluctuations de la puissance optique incidente :

$$\mathrm{Var}(i(t)) = (h \otimes h)(0)\mathrm{e}\langle i \rangle + \sigma_{PD}^2([h \otimes h) * R_I](0) \tag{3.56}$$

où $h(t)$ est la réponse impulsionnelle du photo-détecteur à la libération d'un photo-électron. L'intégrale de 0 à ∞ de h est unitaire. e est la charge de l'électron. D'après le théorème de Parceval, $(h \otimes h)(0) = (H \otimes H)(0)$ où $H(f) = \mathrm{TF}\{h(t)\}(f)$ est la fonction de transfert du photodétecteur. Par conséquent en considérant la fonction de transfert comme un filtre passe bas parfait de bande passante Δf :

$$\mathrm{Var}(i(t)) = 2\mathrm{e}\langle i \rangle \Delta f + \sigma_{PD}^2([h \otimes h) * R_I](0) \tag{3.57}$$

Fonction d'autocorrélation

La fonction d'autocorrélation du photocourant[8] est reliée à la fonction d'autocorrélation de la puissance incidente et à la fonction d'autocorrélation du processus poissonien qui est delta-corrélé :

$$R_i(\tau) = \sigma_{PD}^2[(h \otimes h) * R_I](\tau) + (h \otimes h)(\tau)\mathrm{e}\langle i \rangle \tag{3.58}$$

Densité spectrale de puissance

Par transformation de Fourier (théorème de Wiener-Khintchine) on détermine la densité spectrale de puissance du photocourant à l'aide de sa fonction d'autocorrélation :

$$S_i(f) = |H(f)|^2[\sigma_{PD}^2 S_I(f) + \mathrm{e}\langle i \rangle] \tag{3.59}$$

La densité spectrale de puissance du photocourant est donc la somme d'un bruit blanc dû au bruit de grenaille, et de la densité spectrale de bruit de la puissance optique incidente, les deux contributions étant filtrées par la fonction de transfert du photo-détecteur.

[7] η est en toute rigueur aussi une variable aléatoire, sa moyenne étant proche de 1 on ne considère que sa moyenne [87]

[8] Il s'agit en fait de la fonction d'autocorrélation du bruit du courant (centrage), moment que l'on appelle parfois la fonction d'autocovariance et que l'on note C_i

3.4.5 Conclusion

D'après les rappels faits sur les moments statistiques du champ, ceux du photocourant sont reliés aux moments du quatrième ordre du champ incident sur le détecteur :

$$R_i(\tau) = [(h \otimes h) * \sigma_{PD}^2 R_E^{(4)}(0, \tau, 0) + (h \otimes h)(\tau)\mathrm{e}\langle i \rangle \tag{3.60}$$

$$S_i(\tau) = |H(f)|^2 \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{PD}^2 S_E^{(4)}(\nu, f, \nu') d\nu d\nu' + \mathrm{e}\langle i \rangle \right] \tag{3.61}$$

3.5 Conclusion

Nous avons jugé utile de nous attarder sur les propriétés statistiques de la phase du laser car celles-ci sont assez particulières, notamment du fait de la non stationnarité. Nous avons ainsi montré que le processus de marche aléatoire était solution de l'équation de Focker-Planck dans le cas de la diffusion, déterminé les éléments de la matrice de covariance et donc entièrement caractérisé la fonction aléatoire gaussienne. Nous avons relié les paramètres de la marche aléatoire à l'émission spontanée grâce au diagramme de Fresnel et ainsi déterminé la force de Langevin pouvant être incluse dans l'équation d'évolution de la phase. Grâce au calcul des moments statistiques de la gigue de phase nous avons déterminé les moments du second et quatrième ordre du champ laser. Enfin nous avons relié les moments statistiques du photo-courant à ceux du champ incident.

Le prochain chapitre présente d'importants résultats de notre travail de recherche. Il s'intéresse à l'injection optique dans les lasers à cavité complexe, notamment DFB et Fabry-Perot et a en particulier pour but d'établir l'équation de la phase d'un laser soumis à injection pour la caractérisation du bruit de phase micro-onde.

Chapitre 4

Injection optique dans un laser à cavité complexe

4.1 Introduction

4.1.1 Rappel sur la fonction de Green

Le mathématicien et physicien britannique Georges Green est le premier a avoir introduit le concept de "fonction-potentiel" en physique. Ces fonctions, que l'on nomme maintenant fonctions de Green, servent à la résolution d'équations différentielles inhomogènes avec conditions aux limites. La fonction de Green généralise le concept de réponse percussionnelle, elle est définie en un point de l'espace comme la solution de l'équation inhomogène avec pour second membre une distribution de Dirac centrée sur ce point :

Soit L un opérateur linéaire, la fonction de Green $G(x, x_0)$ vérifie :

$$\mathrm{L}G(x, x_0) = \delta(x - x_0) \tag{4.1}$$

On peut alors exprimer la solution $f(x)$ de l'équation :

$$\mathrm{L}f(x) = k(x) \tag{4.2}$$

à l'aide de la fonction de Green :

$$f(x) = \int k(x_0)G(x, x_0)dx_0 \tag{4.3}$$

Les $k(x_0)$ sont équivalents aux coordonnées de f sur la base des $G(\ , x_0)$ (fonction de x et de paramètre x_0).

Cette méthode est ainsi bien adaptée à la résolution de l'équation de propagation des champs avec termes sources.

4.1.2 Application de la méthode de la fonction de Green

Depuis la première publication de C. Henry utilisant la méthode de la fonction de Green pour l'étude de l'émission spontanée [88], les propriétés des bruits et de la dynamique des lasers DFB ont fait l'objet de nouvelles recherches. Ainsi B. Tromborg et al. ont utilisé l'approche "ligne de transmission" en incluant la fonction de Green afin d'étudier la réflexion distribuée dans les laser DFB et notamment la position des modes et leur stabilité, le bruit de phase et d'intensité, le comportement loin du maximum du gain [89] ou encore les caractéristiques de modulation des lasers à section accordable [90]. Avec le même formalisme, les conditions d'effondrement de la cohérence, prenant en compte le gain non-linéaire, ont été établies [91]. La méthode a pu être généralisée sous forme matricielle à des structures plus complexes [92]

L'influence de la structure des lasers DFB ou des lasers à cavité composite sur le facteur de couplage phase-amplitude et le taux d'émission spontanée dans le mode a aussi été étudiée grâce à la fonction de Green [93]. Ainsi un paramètre de couplage phase/amplitude effectif a été défini et, en incluant le gain non-linéaire, de nouvelles explications au rélargissement du spectre à forte puissance ont été données [94]. En établissant une théorie plus générale [95] incluant les effets de la distribution spatiale des sources de bruit conjointement avec la distribution spatiale des porteurs et des photons, de nouvelles contributions à l'élargissement spectral ont été mises en évidence. Cette théorie a aussi permis l'étude de la stabilité, de la réponse en modulation et des spectres de bruit en incluant les effets purement quantiques [96]. Plus récemment, la fonction de Green a été utilisée dans le cadre de nouvelles études sur la contre-réaction optique, portant sur les seuils d'effondrement de la cohérence [97] et le comportement spectral des cavités externes [98].

4.1.3 Injection optique dans les lasers

L'accrochage de fréquence consiste à synchroniser un oscillateur esclave sur un oscillateur maître en établissant un couplage unilatéral. La synchronisation des oscillateurs fut pour la première fois constatée par le néerlandais Christian Huygens en 1665. Le pionnier dans l'étude des oscillateurs électriques synchronisés est son compatriote Balthasar Van der Pol. L'injection d'une faible quantité de lumière provenant d'un laser maître au sein d'un laser esclave permet de réaliser l'accrochage fréquentiel.

Les propriétés de l'injection optique ont tout d'abord été établies à partir des résultats connus sur l'injection dans les oscillateurs micro-ondes, basés sur les travaux d'Adler concernant les oscillateurs à tube à vide [99]. L'application principale de l'injection pour les oscillateurs micro-ondes est la réduction du bruit de phase [100] [101]. Les premières expériences d'injection optique furent réalisées dans des lasers à gaz He-Ne [102], bien avant que la méthode ne soit généralisée aux lasers semi-conducteurs [103] [104].

Du point de vue théorique, la spécificité de l'injection optique passe par la prise en compte du facteur de Henry dans l'expression de la plage d'accrochage [105]. Les premières études furent en effet

tournées vers la mesure de la zone d'accrochage et de stabilité [106] [107], avant que ne soient établies et mesurées les expressions des densités spectrales de bruit d'intensité, phase et porteurs des lasers soumis à l'injection [108], [109]. Ces études ont généralement été faites en parallèle avec celles concernant la contre-réaction optique [110] [111] du fait des similitudes entre les deux phénomènes. L'analyse des propriétés de modulation d'un laser accroché a montré la possibilité de réduire la résonance de relaxation [112] [113], d'étendre la plage de modulation et de réduire l'effet du glissement de fréquence [109] [114]. Enfin le gain non-linéaire s'est révélé être un facteur de stabilisation des modes [115].

Cependant, les études théoriques et expérimentales ont été principalement réalisées sur des lasers de type Fabry-Perot. Des équations basées sur la propagation du champ à l'intérieur du laser [116] sont nécessaires pour prendre en compte les spécificités de certaines cavités et déterminer théoriquement le coefficient de couplage. En parallèle avec l'étude théorique de la contre réaction optique dans les laser DFB réalisé par F. Favre [117], quelques premiers résultats ont été publiés concernant l'injection dans les DFB [89]. Les études expérimentales ont démontré que les lasers DFB présentaient des propriétés d'accrochage différentes de celles d'un Fabry-Perot. En particulier les lasers DFB possèdent une bande d'accrochage symétrique pour de faibles niveaux d'injection, due à la possibilité d'obtenir une oscillation dans un mode de gain au seuil plus élevé que le mode libre [118] [119] [120].

4.2 Présentation générale

Ce chapitre s'organise de la manière suivante. Tout d'abord est établie à l'aide des équations de Maxwell l'équation d'Helmotz gouvernant l'évolution longitudinale des composantes spectrales du champ optique. Le gain laser est introduit comme la partie imaginaire de la constante diélectrique, l'émission spontanée est elle introduite sous la forme d'une force de Langevin associée à la polarisation électrique spontanée du milieu. Après réduction du problème tridimensionnel à un problème longitudinal, nous établissons à l'aide de l'équation des modes couplés la relation liant les champs émis par le laser, les champs injectés dans le laser et l'émission spontanée locale. Cette relation se base sur deux paramètres liés à la structure du laser : le coefficient de réflexion équivalent et le coefficient de transmission équivalent. Grâce à la méthode de Green nous obtenons une expression simple de la contribution de l'ensemble de l'émission spontanée locale au niveau de la face de sortie.

Nous distinguons ensuite deux cas : celui de l'injection par la face de sortie, dite injection contra-propagative, et l'injection par la face d'entrée, dite co-propagative. Pour chacun des deux cas, l'étude se déroule ensuite de la manière suivante : Par transformation de Fourier nous obtenons l'équation d'évolution temporelle de l'enveloppe du champ électrique à partir de l'équation des composantes spectrales du champ de sortie et d'un développement limité du coefficient de réflexion de la structure, l'équation sur l'enveloppe est calculée dans les cas du laser Fabry-Perot et du laser DFB avec une face anti-reflet. Puis nous déterminons les équations d'évolution de l'intensité optique de sortie et de la phase. Celles-ci

nous donnent alors la plage d'accrochage statique d'injection et, après linéarisation et transformation de Fourier, la densité spectrale de puissance du bruit d'intensité et de phase.

$$E(\vec{r},t) \longmapsto E(\vec{r},\omega) \longmapsto E(z,\omega) \longmapsto E(l,\omega) \longmapsto A(t) \longmapsto I(t),\ \phi(t) \longmapsto S_I(\omega),\ S_\phi(\omega).$$

$$P_s(\vec{r},t) \longmapsto F(\vec{r},\omega) \longmapsto f(z,\omega) \longmapsto F_L(\omega) \longmapsto F_A(t) \longmapsto F_I(t),\ F_\phi(t),\ R_I \longmapsto F_I(\omega),\ F_\phi(\omega)$$

Nous avons enfin regroupé l'étude numérique des équations des cas co- et contra- propagatif à la fin du chapitre.

4.3 Étude générale de l'injection dans un laser à cavité complexe

4.3.1 Introduction

L'objectif de cette première partie est d'établir l'équation du champ électrique de sortie d'un laser DFB pour lequel les champs entrants par chacune des faces peuvent être non-nuls, c'est à dire qu'il peut y avoir injection de lumière au travers de chacune des facettes. Dans cette étude nous considérons systématiquement que l'on observe la lumière émise par la face de droite du laser (abcisse $z = l$), bien entendu ceci n'est qu'une convention d'orientation des axes et il est immédiat de déterminer l'équation du champ électrique sortant par la face gauche par permutation des paramètres de gauche et de droite. Nous désignons par l'expression *injection contra-propagative* le fait d'injecter de la lumière de sens de propagation contraire au sens de propagation de la lumière émise observée, et par l'expression *injection co-propagative* le fait d'injecter de la lumière de sens de propagation identique au sens de propagation de la lumière émise observée.

Notre étude débute par une analyse entièrement basée sur les équations électromagnétiques afin d'utiliser les relations de continuités des champs aux interfaces pour obtenir les paramètres de couplage entre l'onde émise et les ondes injectées. L'objectif intermédiaire est d'établir une équation matricielle du type "ligne de transmission" permettant d'obtenir les composantes de Fourier du champ de sortie du laser en fonction des composantes de Fourier du champ d'entrée et de celles d'une fonction de Langevin globale. En utilisant les coefficients de réflexion en amplitude, nous déterminerons ainsi l'équation du champ de sortie.

4.3.2 Description du milieu

Le laser d'étude s'étend de $z = 0$ à $z = l$, le champ interne est la superposition de deux ondes, une se propageant de $z = 0$ à $z = l$, notée E^+ (onde droite), une autre se propageant de $z = l$ à $z = 0$, notée E^- (onde gauche). Le laser délimite trois espaces, espace 1 pour $x \leq 0$, espace 2 pour $0 \leq x \leq l$, et espace 3 pour $x \geq l$. A l'interface de chacun de ces espaces on définit des coefficients de transmission et de réflexion, r_{ij} est le coefficient de réflexion correspondant à une onde venant du

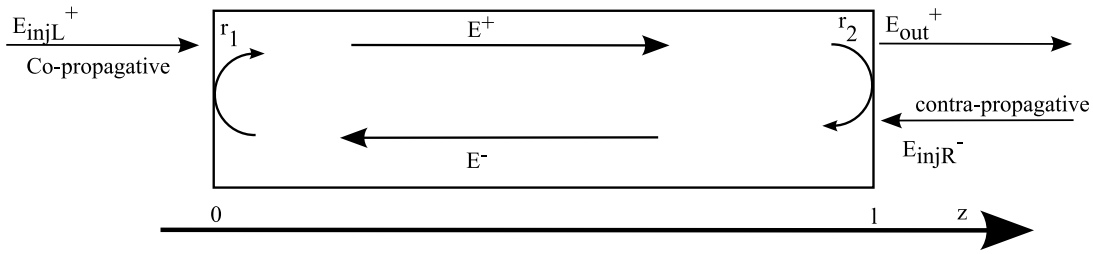

FIG. 4.1 – Laser soumis à injection par les deux facettes

milieu i et se réfléchissant sur la surface du milieu j, t_{ij} correspond au coefficient de transmission d'une onde venant du milieu i et passant dans le milieu j, on suppose de plus que $r_{ij} = r_{ji}$ (pas d'absorption aux interfaces) on note alors $r_{12} = r_{21} = r_1$ et $r_{23} = r_{32} = r_2$, ce sont les coefficients de réflexion en amplitude des facettes 1 (gauche) et 2 (droite). Les traitements multicouches éventuellement présents aux interfaces sont considérés d'épaisseur nulle.

Le laser est soumis à l'injection optique d'un champ E^-_{injR} se propageant de $z = +\infty$ vers $z = l$ et d'un champ E^+_{injL} se propageant de $z = -\infty$ vers $z = 0$

4.3.3 Équation de Maxwell et équation de Helmhotz pour le champ électrique

On considère un milieu local (les champs en un point ne dépendent que des caractéristiques du milieu en ce point), non magnétique (pas d'aimantation du milieu) pour lequel on rappelle les quatre équations de Maxwell [121] :

$$\text{div } \vec{H}(\vec{r},t) = 0 \tag{4.4}$$

$$\text{div } \vec{E}(\vec{r},t) = 0 \tag{4.5}$$

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{E}(\vec{r},t) = -\mu_0 \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}(\vec{r},t) \tag{4.6}$$

$$\vec{\text{rot}}\ \vec{H}(\vec{r},t) = \sigma(\vec{r},t) * \vec{E}(\vec{r},t) + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}(\vec{r},t) \tag{4.7}$$

avec $\vec{r}$ de coordonnées (x, y, z), E est le champ électrique (V/m), D le déplacement électrique ($\mathrm{C/m^2}$), B le champ magnétique (T), H l'excitation magnétique (A/m), μ_0 est la perméabilité magnétique du vide ($4\pi \cdot 10^{-7}$ H/m) et σ est la conductivité (S/m).

En éliminant $\vec{H}$ à l'aide de l'équation de conservation du flux, on obtient l'équation de propagation du champ électrique :

$$\nabla^2 E(\vec{r},t) - \mu_0 \frac{\partial^2 D}{\partial t^2}(\vec{r},t) - \mu_0 \sigma \frac{\partial E}{\partial t}(\vec{r},t) = 0 \tag{4.8}$$

On considère dorénavant une onde optique polarisée rectilignement donc des champs scalaires. Le vecteur déplacement électrique est la somme du déplacement induit par le champ électrique dans le vide $\epsilon_0 E$, où $\epsilon_0 = 1/c^2\mu_0$ est la permittivité du vide (F/m), de la polarisation P_g résultant de l'émission stimulée par les dipôles de la zone active, égale à $\epsilon_0 \chi_g * E$ où χ_g est la susceptibilité de la zone active

(F/m) (aussi caractérisée par la constante diélectrique relative ϵ_r[1]) et de la polarisation spontanée P_s correspondant au courant spontané à la fréquence optique lié à la quantification du champ [122] :

$$\begin{aligned} D(\vec{r},t) &= \epsilon_0 E(\vec{r},t) + P_g(\vec{r},t) + P_s(\vec{r},t) \\ &= \epsilon_0 E + \epsilon_0 \chi_g(\vec{r},t) * E(\vec{r},t) + P_s(\vec{r},t) \\ &= \epsilon_0 \epsilon_r(\vec{r},t) * E(\vec{r},t) + P_s(\vec{r},t) \end{aligned} \tag{4.9}$$

Les composantes de Fourier du champ électrique sont alors solutions de l'équation de Helmholtz :

$$\nabla^2 E(\vec{r},\omega) + \frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(\vec{r},\omega)E(\vec{r},\omega) = F(\vec{r},\omega) \tag{4.10}$$

avec $c = 299792458$ m/s la vitesse de la lumière dans le vide et $F(\vec{r},\omega) = -\frac{\omega^2}{c^2}P_s(\vec{r},\omega)$ [2]. La constante diélectrique relative complexe s'exprime en fonction de l'indice du milieu n, du gain du matériau g_m et des pertes internes α_i :

$$\epsilon_r = \left[n + j\frac{c}{\omega}\frac{(g_m - \alpha_i)}{2}\right]^2 \tag{4.11}$$

F est la force de Langevin représentant l'émission spontanée, c'est une fonction aléatoire complexe stationnaire formée d'une succession de pics de Dirac d'amplitudes complexes et d'instants aléatoires, sa densité spectrale est blanche donc elle est temporellement delta-corrélée. Sa fonction d'auto-corrélation spectrale est liée à la fonction d'autocorrélation de la polarisation spontanée donnée par le théorème de dissipation fluctuation [122] [123] :

$$\left\langle F(\vec{r'},\omega)F^*(\vec{r},\omega')\right\rangle = 2D_{FF^*}(\vec{r})\delta(\vec{r}-\vec{r'})\delta(\omega-\omega') \tag{4.12}$$

$$D_{FF^*}(\vec{r}) = \frac{2\pi\omega^3\hbar}{c^3\epsilon_0}n(\vec{r})g_m(\vec{r})n_{sp} \tag{4.13}$$

$$n_{sp} = \frac{1}{1-e^{\left(\frac{\hbar\omega - E_{cv}}{k_B T}\right)}} \tag{4.14}$$

avec T la température (K), $k_B \approx 1.3806505 \times 10^{-23}$J/K $\approx 8.617386 \times 10^{-5}$eV/K la constante de Boltzmann, $h \approx 6.6261 \times 10^{-34}$J.s $\approx 4.1413 \times 10^{-15}$eV/Hz, la constante de Planck, $\hbar = h/2\pi$, (à $\lambda = 1550$ nm, $\hbar\omega = 0.8$ eV), E_{cv} est la différence d'énergie entre les quasi-niveaux de Fermi de la bande de valence et de la bande de conduction (typiquement de 1 à 1.5 eV pour un semi-conducteur), n_{sp} est le facteur d'inversion de population, il représente l'aspect incomplet de l'inversion des niveaux associés à la transition laser [72] (valeurs typiques : 2.6 (AlGaAs) [124], 1.2 (InGaAsP avec T=300 K et $\hbar\omega_0 - E_{cv}$=44 meV [125])) et D_{FF^*} est appelé coefficient de diffusion.

[1]En fait il existe deux voire trois champs dans la cavité : le champ optique, le champ statique dû au courant continu de polarisation et le champ radio-fréquence dû à une éventuelle modulation du courant de polarisation ou encore à un battement optique intracavité, on ne conserve ici que le champ électrique dans la bande optique. Notons d'ailleurs qu'en régime variable σ (relatif aux charges libres) et ϵ_r (relatif au charges liées) ne peuvent être distingués, dans le domaine micro-onde on emploie généralement une conductivité équivalente incluant la contribution des charges liées et dans le domaine optique on emploie une constante diélectrique complexe généralisée, ou encore un indice complexe.

[2]Dans la bande de fréquence optique on néglige les dérivées de ϵ_r par rapport au temps

On considère ensuite que le laser est monomode transverse, il existe donc une fonction $\Phi(x,y)$, représentant le mode spatial transverse associé à la constante de propagation complexe notée $k(z,\omega)$ (rad/m) telle que [62] :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\omega^2}{c^2}\epsilon_r(x,y,z,\omega)\right]\Phi(x,y)=k^2(z,\omega)\Phi(x,y) \tag{4.15}$$

On réécrit donc $E(\vec{r},\omega)$ sous la forme $E(z,\omega)\Phi(x,y)$ avec $E(z,\omega)$ vérifiant l'équation :

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2}+k^2(z,\omega)\right]E(z,\omega)=f(z,\omega) \tag{4.16}$$

où

$$f(z,\omega)=\frac{\int\int F(x,y,z,\omega)\Phi(x,y)dxdy}{\int\int\Phi(x,y)\Phi(x,y)dxdy} \tag{4.17}$$

représente la force de Langevin modale associée au champ électrique. Le coefficient de diffusion de cette force se déduit simplement de celui de D_{FF^*} :

$$D_{ff^*}(z)=\frac{2\pi\omega_0^3\hbar}{c^3\epsilon_0\left|\int\int\Phi(x,y)\Phi(x,y)dxdy\right|^2}\mathrm{ng}(z)n_{sp}\delta(\omega-\omega') \tag{4.18}$$

où

$$\mathrm{ng}(z)=\int\int n(\vec{r})g(\vec{r})|\Phi(x,y)|^2dxdy=-\frac{\omega}{c}\int\int\Im m\{\epsilon_r(\vec{r})\}|\Phi(x,y)|^2dxdy \tag{4.19}$$

Nous précisons que ng est le nom d'une fonction et non le produit de n et de g.

4.3.4 Résolution de l'équation d'Helmotz longitudinal dans un laser DFB

On considère maintenant le champ électrique comme la superposition de deux ondes contrapropagatives :

$$E(z,\omega)=E_B^+(z,\omega)e^{-j\beta_B z}+E_B^-(z,\omega)e^{j\beta_B z} \tag{4.20}$$

E_B^+ et E_B^- sont les deux enveloppes spatiales du champ électrique autour des vecteurs d'onde β_B et $-\beta_B$ ($\beta_B=\pi/\Lambda_B$).

A partir de l'équation de Helmotz et de l'expression de $k(z,\omega)$ pour un laser DFB, on en déduit l'équation matricielle suivante :

$$\frac{d}{dz}\begin{bmatrix}E_B^+(z,\omega)\\E_B^-(z,\omega)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-j\delta & \kappa_c^*\\ \kappa_c & j\delta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}E_B^+(z,\omega)\\E_B^-(z,\omega)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}f_B^+(z,\omega)\\f_B^-(z,\omega)\end{bmatrix} \tag{4.21}$$

On retrouve bien évidemment la matrice A étudiée dans le cas du DFB sans sources spontanées. f_B^+ et f_B^- sont les enveloppes de f selon les dérivées des ondes de vecteurs d'onde β_B et $-\beta_B$ (approximation de l'enveloppe lentement variable) [96] :

$$\begin{aligned}f(\omega,z) &= TF^{-1}[f(\beta,\omega)\mathrm{Heav}(\beta)](z)+TF^{-1}[f(\beta,\omega)\mathrm{Heav}(-\beta)](z)\\ &= 2f_B^+(\omega,z)\frac{d}{dz}e^{-j\beta_B z}+2f_B^-(\omega,z)\frac{d}{dz}e^{j\beta_B z}\end{aligned} \tag{4.22}$$

Les auto-corrélations spectrales des deux enveloppes sont :

$$\left\langle f_B^+(z,\omega) f_B^{+*}(z',\omega') \right\rangle = \left\langle f_B^+(z,\omega) f_B^{+*}(z',\omega') \right\rangle = \frac{2D_{ff^*}(z)}{(2\beta_B)^2}\delta(z-z')\delta(\omega-\omega') \tag{4.23}$$

La solution de cette équation est obtenue par la méthode de la variation de la constante :

$$\begin{bmatrix} E_B^+(z,\omega) \\ E_B^-(z,\omega) \end{bmatrix} = e^{Az} \begin{bmatrix} E_B^+(0,\omega) \\ E_B^-(0,\omega) \end{bmatrix} + e^{Az} \int_0^z e^{-Az'} \begin{bmatrix} f_B^+(z',\omega) \\ f_B^-(z',\omega) \end{bmatrix} dz' \tag{4.24}$$

4.3.5 Calcul de la matrice de transmission

A partir des résultats obtenus dans l'étude des lasers DFB, les champs en entrée et en sortie sont reliés par la relation matricielle suivante :

$$\begin{bmatrix} E^+(l^-,\omega) \\ E^-(l^-,\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^+(0^+,\omega) \\ E^-(0^+,\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^+(l,\omega) \\ F^-(l,\omega) \end{bmatrix} \tag{4.25}$$

avec

$$F^+(l,\omega) = e^{\gamma l} \int_0^l [m_{11}(z) f_B^+(z',\omega) + m_{12} f_B^-(z',\omega)] dz' \tag{4.26}$$

$$F^-(l,\omega) = e^{-\gamma l} \int_0^l [m_{22}(z) f_B^-(z',\omega) + m_{21} f_B^+(z',\omega)] dz' \tag{4.27}$$

Cette équation peut être mise en forme afin de donner les champs sortants du laser en fonction des champs entrants dans le laser :

$$\begin{bmatrix} 1 & -m_{12} \\ 0 & -m_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^+(l^-,\omega) \\ E^-(0^+,\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^+(0^+,\omega) \\ E^-(l^-,\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^+ \\ F^- \end{bmatrix} \tag{4.28}$$

Les relations de continuité aux interfaces gauche et droite fournissent les deux équations suivantes :

$$E^+(0^+,\omega) = r_1 E^-(0^+,\omega) + t_{12} E_{injL}^+(0^-,\omega) \tag{4.29}$$

$$E^-(l^-,\omega) = r_2 E^+(l^-,\omega) + t_{32} E_{injR}^-(l^+,\omega) \tag{4.30}$$

En injectant (4.29) et (4.30) dans (4.28), on obtient la relation matricielle liant les champs sortants du laser, les champs injectés et les champs spontanés :

$$\begin{bmatrix} 1 & -m_{12} - r_1 m_{11} \\ r_2 & -m_{22} - r_1 m_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E^+(l^-,\omega) \\ E^-(0^+,\omega) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{11} & 0 \\ m_{21} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{12} E_{injL}^+(0^-,\omega) \\ t_{23} E_{injR}^-(l^+,\omega) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F^+ \\ F^- \end{bmatrix} \tag{4.31}$$

Le déterminant de la matrice de gauche est :

$$\Delta = -(m_{22} + r_1 m_{21}) + r_2(m_{21} + r_1 m_{11}) = -(m_{22} + r_1 m_{21})\left[1 - r_L r_2\right] \tag{4.32}$$

$$\text{avec } r_L = \frac{m_{12} + r_1 m_{11}}{m_{22} + r_1 m_{21}} \tag{4.33}$$

L'expression ci-dessus de r_L est équivalente à l'expression :

$$r_L(\omega) = Z_L^+(l^-)/Z_L^-(l^-) \tag{4.34}$$

où $Z_L(z)$ est une solution de l'équation des modes couplés sans sources vérifiant la condition aux limites à gauche (r_1). r_L représente donc le coefficient de réflexion du laser DFB lorsqu'il est éclairé par une onde venant de la droite. Il prend en compte le phénomène d'amplification du laser et la diffraction sur le réseau.

Pour un laser Fabry-Perot :

$$r_L(\omega) = r_1 e^{-2jk(\omega)l} \tag{4.35}$$

Pour un laser DFB de coefficient de couplage au réseau κ, de phase à l'origine Ω, et $\rho_1 = r_1 e^{j\Omega - 2\beta_B l}$:

$$r_L(\omega) = \frac{(\kappa + \delta\rho_1)\tanh(\gamma l) + j\gamma\rho_1}{-(\kappa\rho_1 + \delta)\tanh(\gamma l) + j\gamma} e^{-j\Omega} \tag{4.36}$$

En inversant la matrice on obtient l'expression des champs sortants :

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix} E^+(l^-,\omega) \\ E^-(0^+,\omega) \end{bmatrix} &= \frac{1}{-\Delta}\begin{bmatrix} m_{11}m_{22} - m_{21}m_{12} & r_1 m_{11} + m_{12} \\ m_{22} - r_2 m_{11} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} t_{12}E^+_{injL}(0^-,\omega) \\ t_{32}E^-_{injR}(l^-,\omega) \end{bmatrix} \\ &+ \frac{1}{-\Delta}\begin{bmatrix} m_{22} + m_{21}r_1 & -(m_{12} + r_1 m_{11}) \\ r_2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F^+ \\ F^- \end{bmatrix}\end{aligned} \tag{4.37}$$

Dans le cas d'un laser à contre-réaction distribuée (DFB) de longueur l, de période Λ_B, de phase à l'origine Ω et de coefficient de couplage κ, la matrice $(m)_{ij}$ est donnée par :

$$m_{11}(z) = \left[\cosh(\gamma z) - j\frac{\delta}{\gamma}\sinh(\gamma z)\right] e^{-j\beta_B l} \tag{4.38}$$

$$m_{12}(z) = \frac{\kappa_c^*}{\gamma}\sinh(\gamma z) e^{-j\beta_B l} \tag{4.39}$$

$$m_{21}(z) = \frac{\kappa_c}{\gamma}\sinh(\gamma z) e^{j\beta_B l} \tag{4.40}$$

$$m_{22}(z) = \left[\cosh(\gamma z) + j\frac{\delta}{\gamma}\sinh(\gamma z)\right] e^{j\beta_B l} \tag{4.41}$$

$$m_{11} = m_{11}(l) \tag{4.42}$$

$$m_{12} = m_{12}(l) \tag{4.43}$$

$$m_{21} = m_{21}(l) \tag{4.44}$$

$$m_{22} = m_{22}(l) \tag{4.45}$$

avec

$$\beta_B = \frac{\pi}{\Lambda_B}, \text{nombre d'onde de Bragg} \tag{4.46}$$

$$\delta = k_0 - \beta_B = \delta_0 + i\alpha_0, \text{désaccord de Bragg complexe} \tag{4.47}$$

$$\gamma^2 = \kappa^2 - \delta^2, \text{nombre d'onde complexe de l'enveloppe au carré} \tag{4.48}$$

$$\kappa_c = j\kappa e^{j\Omega} \tag{4.49}$$

$$k_0 = n_{eff}\frac{\omega}{c} + j\frac{1}{2}(g - \alpha_{int}), \text{où } g \text{ est le gain modal} \tag{4.50}$$

En utilisant l'expression (4.37), on peut établir l'équation du champ sortant par la face droite :

$$E^+(l^-,\omega)\left[1 - r_L(\omega)r_2\right] = t_L(\omega)t_{12}E^+_{injL}(0^-,\omega) + r_L(\omega)t_{32}E^-_{injR}(l^+,\omega) + F^+(\omega) - r_L(\omega)F^-(\omega) \tag{4.51}$$

ou encore :

$$\frac{E^+(l^-,\omega)}{r_L(\omega)} = r_2E^+(l^-,\omega) + \frac{t_L}{r_L}(\omega)t_1E^+_{injL}(0^-,\omega) + t_2E^-_{injR}(l^+,\omega) + \frac{F^+}{r_L}(\omega) - F^-(\omega) \tag{4.52}$$

avec :

$$t_L(\omega) = \frac{m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}}{m_{21}r_1 + m_{22}} \tag{4.53}$$

On peut simplifier l'expression de t_L, d'après l'expression des coefficients m_{ij} :

$$t_L(\omega) = \frac{1}{m_{21}r_1 + m_{22}} = Z^-_L(0^+)/Z^-_L(l^-) \tag{4.54}$$

où Z_L est identique à la fonction utilisée ci-dessus pour l'expression de r_L. t_L représente le coefficient de transmission du laser DFB de la droite vers la gauche.

Pour un laser Fabry-Perot :

$$t_L(\omega) = e^{-jk(\omega)l} \tag{4.55}$$

Pour un laser DFB :

$$t_L(\omega) = \frac{\gamma}{\kappa_c\sinh(\gamma l)e^{j\beta_B l}r_1 + [\gamma\cosh(\gamma l) + j\delta\sinh(\gamma l)]e^{j\beta_B l}} \tag{4.56}$$

On pose maintenant $F_L(\omega) = F^+(\omega) - r_LF^-(\omega)$. F_L représente l'ensemble des photons spontanés émis dans le mode par la face droite du laser. Dans le cas d'un laser Fabry-Perot, F_L est directement proportionnel à la longueur du laser.

La corrélation spectrale de F_L se déduit de celles des enveloppes de f :

$$\begin{aligned}
&\left\langle F_L(\omega)F^*_L(\omega')\right\rangle = \\
&\frac{2}{(2\beta_B)^2}\delta(\omega-\omega')\Big(|e^{\gamma l}|^2\left[\langle m_{11}(-z)|\,D_{ff^*}(z)\;m^*_{11}(-z)\rangle + \langle m_{12}(-z)|\,D_{ff^*}(z)\;m^*_{12}(-z)\rangle\right] \\
&+|r_L|^2|e^{-\gamma l}|^2\left[\langle m_{21}(-z)|\,D_{ff^*}(z)\;m^*_{21}(-z)\rangle + \langle m_{22}(-z)|\,D_{ff^*}(z)\;m^*_{22}(-z)\rangle\right] \\
&-2\Re e\left\{r_Le^{\arg(e^{\gamma l})}\left[\langle m_{11}(-z)|\,D_{ff^*}(z)\;m^*_{21}(-z)\rangle + \langle m_{12}(-z)|\,D_{ff^*}(z)\;m^*_{22}(-z)\rangle\right]\right\}\Big)
\end{aligned} \tag{4.57}$$

(4.58)

où l'on introduit une notation proche de celle de Dirac en mécanique quantique et correspondant à un produit scalaire dans l'espace vectoriel des fonctions :

$$\langle f|\, g\rangle = \int_0^L f(z')g(z')dz' \tag{4.59}$$

4.3.6 Calcul de l'émission spontanée par la méthode de Green

L'expression de F_L peut aussi être déterminée plus traditionnellement par la méthode de Green : connaissant deux solutions indépendantes Z_1 et Z_2 de l'équation d'Helmotz homogène, c'est à dire deux solutions dont le Wronskien[3]

$$W = Z_1 dZ_2/dz - Z_2 dZ_1/dz \tag{4.60}$$

est non nul, la solution générale de l'équation inhomogène est donnée par :

$$E(\omega, z) = \frac{E(\omega, 0)}{Z_0(0)} Z_0(z) + \int_0^z f(\omega, z') \frac{[Z_1(z)Z_2(z') - Z_2(z)Z_1(z')]}{W} dz' \tag{4.61}$$

avec Z_0 une solution de l'équation homogène déterminée en fonction des conditions aux limites.

Ces dernières sont les suivantes :

$$E^+(0^+, \omega) = r_1 E^-(0^+, \omega)) + t_{12} E^+_{injL}(0^-, \omega) \tag{4.62}$$

$$E^-(l^-, \omega) = r_2 E^+(l^-, \omega) + t_{32} E^-_{injR}(l^+, \omega) \tag{4.63}$$

En notant

$$Z_0(z) = R(z)e^{-j\beta_B z} + S(z)e^{+j\beta_B z} \tag{4.64}$$

d'après le chapitre sur les DFB, le problème se résume à déterminer $R_0(0)$ et $S_0(0)$. L'équation de continuité à gauche donne :

$$R(0) = r_1 S(0) + t_{12} E^+_{injL}(0^-) \tag{4.65}$$

L'équation de continuité à droite donne :

$$S(l)e^{j\beta_B l} - r_2 R(l)e^{-j\beta_B l} = \int_0^l f(\omega, z') \frac{[(r_2 Z_1^+(l) - Z_1^-(l))Z_2(z') - (r_2 Z_2^+(l) - Z_2^-(l))Z_1(z')]}{W} dz' + t_{32} E^+_{injL}(l^+) \tag{4.66}$$

La première relation peut être transformée en relation en l à partir des coefficient n_{ij} du chapitre sur les DFB :

$$R(l)[n_{22}(l) + r_1 n_{21}(l)] = S(l)[n_{12}(l) + r_1 n_{11}(l)] + t_{12} E^+_{injL}(0^-)[n_{11}(l)n_{22}(l) - n_{21}(l)n_{12}(l)] \tag{4.67}$$

et en utilisant les expressions de r_L et t_L :

$$R(l) = S(l) r_L e^{j2\beta_B l} + t_{12} E^+_{injL}(0^-, \omega) t_L e^{j\beta_B l} \tag{4.68}$$

[3] Il s'agit en fait du Wronskien de l'équation du premier ordre en dimension deux associée à l'équation linéaire du second ordre en dimension un

La relation pour le bord de gauche est alors injectée dans la relation pour le bord de droite :

$$\begin{aligned}
&S(l)[e^{j\beta_B l} - r_2 r_L e^{j\beta_B l}] = \\
&\int_0^l f(\omega, z') \frac{[(r_2 Z_1^+(l) - Z_1^-(l))Z_2(z') - (r_2 Z_2^+(l) - Z_2^-(l))Z_1(z')]}{W} dz' \\
&\quad + t_{32} E_{injL}^+(l^+) + r_2 t_{12} E_{injL}^+(0^-) t_L
\end{aligned} \tag{4.69}$$

à partir de laquelle on détermine l'expression du champ sortant à droite :

$$\begin{aligned}
E^+(\omega, l^-) &= R(l) e^{-j\beta_B l} + \int_0^l f(\omega, z') \frac{[Z_1(z)Z_2(z') - Z_2(z)Z_1(z')]}{W} dz' \\
&= r_2 r_L E^+(\omega, l^-) + t_L t_{12} E_{injL}^+(0^-) + r_L t_{32} E_{injR}^-(l^+) \\
&\quad + r_L \int_0^l f(\omega, z') \frac{[(r_2 Z_1^+(l) - Z_1^-(l))Z_2(z') - (r_2 Z_2^+(l) - Z_2^-(l))Z_1(z')]}{W} dz' \\
&\quad + [1 - r_2 r_L] \int_0^l f(\omega, z') \frac{[Z_1^+(z)Z_2(z') - Z_2^+(z)Z_1(z')]}{W} dz' \\
&= r_2 r_L E^+(\omega, l^-) + t_L t_{12} E_{injL}^+(0^-) + r_L t_{32} E_{injR}^-(l^+) \\
&\quad + \int_0^l f(\omega, z') \frac{[(Z_1^+(l) - r_L Z_1^-(l))Z_2(z') - (Z_2^+(l) - r_L Z_2^-(l))Z_1(z')]}{W} dz'
\end{aligned} \tag{4.70}$$

On a précédemment montré que si Z_2 vérifie l'équation de continuité à l'interface gauche sans injection, alors $Z_2^+(l) - r_L Z_2^-(l) = 0$, par contre Z_1 ne peut satisfaire les conditions aux limites sans injection à gauche si $W \neq 0$. Afin de simplifier le Wronskien, on choisit une solution Z_1 telle que $Z_1(0) = 0$ et $dZ_1/dz = 1$, par conséquent, $W = W(0) = Z_2(0) = (1 + r_1)Z_2^-(0)$, on a enfin :

$$Z_2^+(l) = Z_2^-(0)(m_{11} r_1 + m_{12}) \tag{4.71}$$

et

$$Z_1^+(l) - r_L Z_1^-(l) = Z_1^+(0)[r_1 + 1] \frac{m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}}{m_{21} r_1 + m_{22}} \tag{4.72}$$

par conséquent, on obtient l'équation plus simple :

$$\boxed{E^+(l^-, \omega) = r_2 r_L E^+(l^-, \omega) + t_L t_{12} E_{injL}^+(0^-, \omega) + r_L t_{32} E_{injR}^-(l^+, \omega) + \frac{Z_1^+(0)}{Z_2^-(l)} \int_0^l f(z', \omega) Z_2(z') dz'} \tag{4.73}$$

On retrouve bien l'équation (4.51) obtenue à l'aide de l'équation matricielle. L'expression de F_L présente cependant une nouvelle forme :

$$F_L(\omega) = \frac{Z_1^+(0)}{Z_2^-(l)} \int_0^l f(z', \omega) Z_2(z') dz' \tag{4.74}$$

Le calcul de Z_1, en négligeant la dérivée des enveloppes, donne l'expression suivante pour la force de Langevin intégrée :

$$F_L(\omega) = -\frac{1}{2j\beta_0 Z_L^-(0)} \int_0^l f_\omega(z) Z_L(z) dz \tag{4.75}$$

Dans la première méthode, l'expression de F_L a été obtenue en utilisant l'équation des ondes couplées approchées, c'est à dire en négligeant les dérivées du second ordre des enveloppes. Dans la seconde méthode, l'expression de F_L a été obtenue à l'aide d'une méthode plus générale de résolution d'équation inhomogène [126], cependant les deux solutions de l'équation homogène nécessaire à l'application de cette méthode sont aussi des solutions approchées (enveloppe lente)[4].

Il peut être utile de donner l'expression de la fonction Z_0, proportionnelle au champ électrique longitudinal dans le cas où l'on néglige l'émission spontanée :

$$Z_0(z) = \frac{Z_0(0)}{E(\omega,0)} \frac{t_L t_{12} E^+_{injL}(\omega,0^-) + r_L t_{32} E^-_{injR}(\omega,l^+)}{1 - r_2 r_L} \tag{4.76}$$

Enfin, la corrélation de F_L est obtenue à partir de D_{ff^*} :

$$\begin{aligned} \left\langle F_L(\omega) F_L^*(\omega') \right\rangle &= \frac{1}{4\beta_0^2 |Z_L^-(0)|^2} \int_0^l 2D_{ff^*}(z) |Z_L(z)|^2 dz \\ &= 4\pi R_L \delta(\omega - \omega') \end{aligned} \tag{4.77}$$

avec

$$R_L = \frac{\omega_0^3 \hbar}{c^3 \epsilon_0 \left| \int\int \Phi(x,y)\Phi(x,y) dx dy \right|^2 4\beta_0^2 |Z_L^-(0)|^2} \int_0^l n g(z) n_{sp} |Z_L(z)|^2 dz \tag{4.78}$$

4.3.7 Compatibilité avec la méthode du Wronskien

On souhaite vérifier la compatibilité de la méthode utilisant les coefficients de réflexion et de transmission r_L et t_L avec la méthode de Green basée sur l'utilisation de deux solutions satisfaisant chacune une équation aux limites. Sans injection (4.73) devient

$$E^+_\omega(l)[1 - r_2 r_L] = F_L(\omega) \tag{4.79}$$

Or d'après [95] appendice A, le Wronskien et r_L sont reliés par :

$$W = -2j\beta_B Z_L^-(l) Z_R^+(l)[1 - r_2 r_L] \tag{4.80}$$

où Z_L et Z_R vérifie respectivement les conditions à gauche et à droite.

Donc en considérant l'expression de F_L :

$$-2j\beta_B Z_L^-(l)[1 - r_2 r_L] E^+_\omega(l) = \int_0^l f_\omega(z) Z_L(z) dz \tag{4.81}$$

(4.81) est bien equivalente à :

$$W\, E^+_\omega(l) = \int_0^l f_\omega(z) Z_R^+(l) Z_L(z) dz \tag{4.82}$$

qui est l'expression de la solution de l'équation de Helmotz avec second membre déterminée à l'aide de la méthode traditionnelle de la fonction de Green.

[4] L'une des conséquences de cette approximation est que le Wronskien de ces solutions n'est pas réellement indépendant de z [93]

4.4 Cas Contrapropagatif

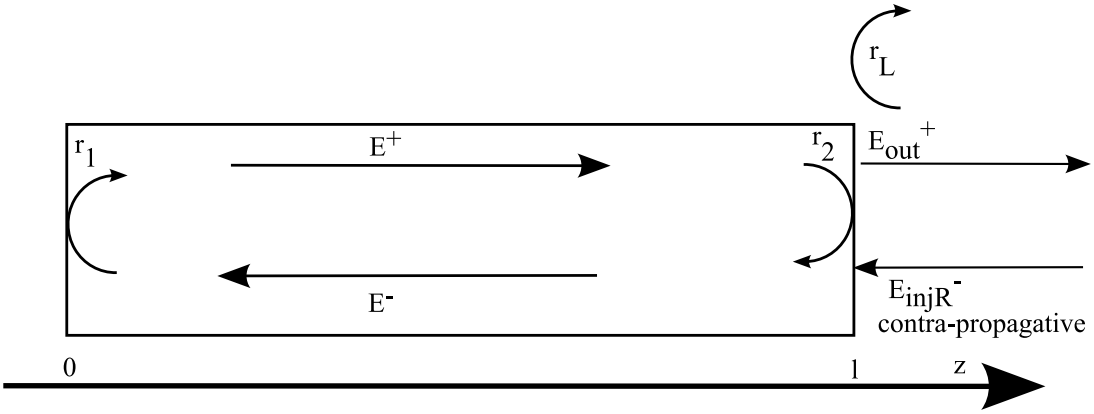

FIG. 4.2 – Schéma d'injection laser dans le sens contra-propagatif

4.4.1 Développement de l'équation du champ électrique

Dans le cas d'une injection par la face de sortie (droite), l'équation aux limites devient :

$$\frac{E^+(l^-,\omega)}{r_L} = r_2 E^+(l^-,\omega) + t_{32} E^-_{injR}(l^+,\omega) + \frac{F_L(\omega)}{r_L} \tag{4.83}$$

r_L dépend de la pulsation ω, mais aussi de la distribution de porteurs $\mathcal{N}(z)$ et de la distribution de photons $\mathcal{P}(z)$ le long du laser, car il rend compte du gain. C'est donc mathématiquement une fonctionnelle (fonction qui, à une fonction sur l'espace des réels, associe un nombre complexe).

En supprimant le bruit et le champ injecté, on obtient l'équation[5] :

$$E^+(l^-,\omega)[1 - r_L r_2] = 0 \tag{4.84}$$

On considère la solution stationnaire $(\omega_s, \mathcal{N}_s(z), \mathcal{P}_s(z))$, pour laquelle la condition d'oscillation est vérifiée :

$$r_2 r_L(\omega_s, \mathcal{N}_s(z), \mathcal{P}_s(z)) = 1 \tag{4.85}$$

Il s'agit de l'équation complexe classique donnant une condition sur la phase (résonance de cavité) et une sur l'amplitude (gain égal aux pertes). Le coefficient r_L comporte le paramètre de phase dû au parcours de l'onde dans la cavité, ainsi que le paramètre de gain net.

[5]En fait ceci n'est pas la vraie condition d'oscillation, en effet comme nous le verrons par la suite, il faut tenir compte du nombre de photons spontanés dans le mode qui participent alors à la condition d'oscillation, on dit d'ailleurs généralement que l'émission laser doit se déclencher sur le bruit, ce qui est exact c'est que la moyenne statistique de F_L est nulle par conséquent l'équation (4.84) est valable pour la moyenne statistique du champ, or ceci veut donc dire que si $[1 - r_L r_2] \neq 0$, la moyenne statistique du champ est nulle mais que, par contre, son écart type est non nul, c'est à dire la puissance. Au cours des calculs suivants on peut généralement utiliser la condition $[1 - r_L r_2] = 0$ dès que l'on est un peu au dessus du seuil, cependant si l'on essayait de calculer la densité spectrale de puissance à partir de l'équation (4.83), il serait indispensable de prendre en compte la vrai valeur de $[1 - r_L r_2]$, cette remarque est évidemment valable aussi pour le Wronskien.

$\mathcal{N}(z,t)$ est la densité de porteurs et $\mathcal{P}(z,t)$ la densité de photons dans la couche active (C.A.) moyennée transversalement et temporellement :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(z,t) &= \Re e\left\{\int\int_{C.A}\frac{w(x,y,z)}{A_{act}\hbar\omega_0}dxdy\right\} = \Re e\left\{\frac{1}{A_{act}}\int\int_{C.A}\frac{\left[\vec{E}\vec{D}^* + \vec{H}\vec{B}^*\right]}{4A_{act}\hbar\omega_0}dxdy\right\} \\
&= \frac{2\epsilon_0 n_{ca}(z)\, n_g\Gamma}{\hbar\omega_0 A_{act}}\left\{|E(t,z)^+|^2 + |E(t,z)^-|^2\right\} \qquad (4.86)\\
\mathcal{P}(z,t) &= B_{\mathcal{P}}\left\{|E(t,z)^+|^2 + |E(t,z)^-|^2\right\} \qquad (4.87)
\end{aligned}$$

où w est la densité volumique d'énergie électromagnétique complexe($\mathrm{J/m^3}$), $n_{ca}(z)$ est l'indice du milieu moyenné transversalement sur la couche active :

$$n_{ca}(z) = \frac{1}{A_{act}}\int\int_{C.A.} n(\vec{r})|\Phi(x,y)|^2 dxdy \qquad (4.88)$$

n_g est l'indice de groupe, Γ le facteur de confinement du mode dans la couche active, $\hbar\omega_0$ l'énergie d'un photon et A_{act} l'aire transverse de la couche active. On note de plus p_0 le nombre total moyen de photons dans le mode laser :

$$p_0(t) = \Re e\left\{\int\int\int\frac{w(x,y,z,t)}{\hbar\omega_0}dxdydz\right\} \qquad (4.89)$$

On considère maintenant le laser soumis à l'injection. Les paramètres statiques du laser, $(\omega_0, \mathcal{N}(z), \mathcal{P}(z))$, sont donc modifiés, la pulsation moyenne du laser esclave devient égale à la pulsation moyenne du laser maître ω_i lorsqu'il y a accrochage. Afin de déterminer une équation pour chaque composante de Fourier du champ, on développe la fonction $(r_L(\omega,\mathcal{N},\mathcal{P}))^{-1}$ autour de $(\omega_s, \mathcal{N}_s, \mathcal{P}_s)$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{r_L(\omega,\mathcal{N},\mathcal{P})} &\approx \frac{1}{r_L(\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s)} + \left[\frac{\partial\frac{1}{r_L}}{\partial\omega}\right]_{(\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s)}(\omega-\omega_s) \\
&+ \int_0^l\left[\frac{\delta\frac{1}{r_L}}{\delta k}(z)\frac{\partial k}{\partial\mathcal{N}}\right]_{(\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s)}(\mathcal{N}(z)-\mathcal{N}_s(z))dz \\
&+ \int_0^l\left[\frac{\delta\frac{1}{r_L}}{\delta k}(z)\frac{\partial k}{\partial\mathcal{P}}\right]_{(\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s)}(\mathcal{P}(z)-\mathcal{P}_s(z))dz \qquad (4.90)
\end{aligned}$$

On a introduit ici la dérivée fonctionnelle de $\frac{1}{r_L}$. En effet, nous rappelons que r_L est une fonctionnelle, c'est à dire que sa valeur dépend de l'ensemble des valeurs des fonctions $\mathcal{N}(z)$ et $\mathcal{P}(z)$. Cette dépendance est en fait indirecte et provient de la dépendance en $k(\omega,\mathcal{P}(z),\mathcal{N}(z))$, par conséquent il convient d'exprimer la contribution à la variation de $\frac{1}{r_L}$ entraînée par une variation infinitésimale de k en z. On note cette dernière, $\frac{\delta 1/r_L}{\delta k}(z)$, dont la propriété/définition est[6] :

$$\delta\frac{1}{r_L} = \int_0^l\frac{\delta\frac{1}{r_L}}{\delta k}(z)\delta k(z)dz \qquad (4.91)$$

[6]Remarquons que son unité est mal indiquée par cette expression puisqu'il s'agit en fait d'une quantité sans unité car elle représente la distribution linéique de la dérivé fonctionnelle

où $\delta\frac{1}{r_L}$ représente la variation infinitésimale de la valeur $\frac{1}{r_L}$ provoquée par la variation infinitésimale δk de la fonction k.

4.4.2 Calcul de l'enveloppe du champ électrique

On considère maintenant l'enveloppe temporelle du champ électrique sortant par la droite définie par :

$$A^{\pm}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty} E_{\omega}^{\pm}(l^-)e^{j(\omega-\omega_i)t}d\omega \tag{4.92}$$

ω_i est la pulsation moyenne du champ injecté et donc la pulsation moyenne du champ du laser esclave. L'enveloppe du champ injecté $A^i(t)$ est définie de la même manière.

En utilisant le développement de $\frac{1}{r_L}$ autour de la condition d'oscillation dans l'équation (4.83), on obtient par transformation de Fourier inverse l'équation suivante sur l'enveloppe :

$$\begin{aligned}\frac{dA^+}{dt}(t) = -j(\omega_s-\omega_i)A^+(t) + A^+(t)\int_0^l C_{\mathcal{N}(z)}\Delta\mathcal{N}(z,t)dz \\ +A^+(t)\int_0^l C_{\mathcal{P}}(z)\Delta\mathcal{P}(z,t)dz + f_R t_{32}A^i(t) + F_A(t)\end{aligned} \tag{4.93}$$

avec

$$f_R = r_{Ls}f_D = j\left(\frac{\partial\frac{1}{r_L}}{\partial\omega}\right)_s^{-1} \tag{4.94}$$

$$C_{\mathcal{N}}(z) = -\left[\frac{\delta\frac{1}{r_L}}{\delta k}(z)\frac{\partial k}{\partial\mathcal{N}}\right]_s f_R \tag{4.95}$$

$$C_{\mathcal{P}}(z) = -\left[\frac{\delta\frac{1}{r_L}}{\delta k}(z)\frac{\partial k}{\partial\mathcal{P}}\right]_s f_R \tag{4.96}$$

$$\frac{\partial k}{\partial\omega} = \frac{1}{v_g} + \frac{j}{2}\frac{\partial g}{\partial\omega} \tag{4.97}$$

$$\frac{\partial g}{\partial\omega} = \frac{g(\omega_{pic})}{\delta\omega^2_{-3\,dB}}(\omega-\omega_{pic}) \tag{4.98}$$

$$\frac{\partial k}{\partial\mathcal{N}} = j\frac{1+j\alpha_H}{2}\frac{\partial g}{\partial\mathcal{N}} \tag{4.99}$$

L'enveloppe du champ électrique est donc solution d'une équation différentielle complexe du premier ordre avec second membre. Les fonctions $C_{\mathcal{N}}$ et $C_{\mathcal{P}}$ déterminent la contribution à la variation globale du gain et de l'indice causée par la variation locale de la densité de porteurs et de la densité de photons. Comme nous l'avons montré dans le chapitre sur les lasers DFB, dans le cas d'un laser dont une des faces est traitée anti-reflet et l'autre est traitée haute-réflectivité, la distribution longitudinale des photons peut devenir fortement dissymétrique et par interaction, la distribution longitudinale des porteurs devient dissymétrique, par conséquent le gain n'est pas le même le long de la cavité (*longitudinal spatial hole burning*). En outre la densité de porteurs peut varier volontairement suivant l'axe longitudinal grâce à

l'emploi de plusieurs électrodes, permettant par exemple de compenser la diminution locale des porteurs à cause de la distribution des photons [127]. Enfin le coefficient $C_{\mathcal{P}}$ peut prendre en compte la saturation du gain due au dépeuplement du niveau des porteurs correspondant à l'émission stimulée des photons à la longueur d'onde du mode laser (en anglais *spectral hole burning*) [128].

En régime statique, la rotation et le changement d'amplitude du champ esclave dus au désaccord de pulsation par rapport à la fréquence propre de la cavité, et à la modification de la distribution de porteurs et de photons (changement de gain) sont exactement compensés par la contribution complexe du champ injecté.

La distribution longitudinale du champ électrique peut être exprimée en fonction de l'enveloppe du champ et du mode longitudinal Z_L normalisé en $z = l$:

$$E(z,\omega) = A(\omega) Z_L(z) \tag{4.100}$$

A partir de cette expression, on peut déterminer à l'aide de (4.86) le nombre total moyen de photons dans la cavité en fonction du carré moyen du module de l'enveloppe :

$$w = 2|\Phi(x,y)|^2 |Z_L(z)|^2 \epsilon_0 n(\vec{r}) n_g |A|_0^2 \tag{4.101}$$

donc

$$p_0 = \int\int\int \frac{w(x,y,z)}{\hbar\omega_0} dxdydz = 2|A|_0^2 \frac{\epsilon_0 n_g}{\hbar\omega_0} \int n(z)|Z_L(z)|^2 dz = \sigma_p |A|_0^2 \tag{4.102}$$

où $n(z)$ est définie comme $n_{ca}(z)$ (4.88) mais en intégrant sur l'ensemble du mode transverse.

$$n(z) = \int\int n(\vec{r})|\Phi(x,y)|^2 dxdy \tag{4.103}$$

4.4.3 Expression des paramètres en fonction du mode longitudinal résonnant

D'après [95] f_D peut être exprimé plus explicitement en fonction du mode longitudinal resonnant $Z_0(z)$:

$$f_D = \left[\frac{2\int_0^l k_0 Z_0^+(z) Z_0^-(z) \frac{\partial k}{\partial \omega} dz}{\beta_0 Z_0^+(0) Z_0^-(0)} \right]^{-1} \tag{4.104}$$

De plus, toujours d'après [95], on obtient l'expression[7] :

$$\frac{\delta \frac{1}{r_L}}{\delta k} = j \frac{k(z) Z_L(z) Z_R(z)}{\beta_0 Z_R^+(0) Z_L^+(0)} \tag{4.107}$$

[7]En effet, l'Appendice B de [95] donne l'expression :

$$\frac{\delta W}{\delta k} = 2k(z) Z_L(z) Z_R(z) \tag{4.105}$$

qui peut être combinée avec la relation de l'Appendice A de [95] :

$$\frac{\delta W}{\delta k} = -2j\beta_0 Z_R^+(0) Z_L^+(0) \frac{\delta \frac{1}{r_L}}{\delta k} \tag{4.106}$$

4.4.4 Expression du taux d'émission spontanée

La fonction enveloppe de Langevin est définie par :

$$F_A(t) = \frac{f_D}{2\pi}\int_0^{\infty} F_L(\omega)e^{j(\omega-\omega_i)t}d\omega \tag{4.108}$$

L'auto-corrélation de F_A est obtenue à partir de celle de F_L.
En notant $\langle F_L(t)F_L^*(t')\rangle = 2R_L\delta(t-t')$:

$$\left\langle F_A(t)F_A^*(t')\right\rangle = |f_D|^2 2R_L\delta(t-t') = \frac{R_{sp}}{\sigma_p}\delta(t-t') \tag{4.109}$$

avec

$$R_{sp} = \frac{\omega_0^3\hbar n_g \int_0^l\int\int n(\vec{r})|\Phi(x,y)|^2dxdy|Z_L(z)|^2dz|f_D|^2\int_0^l ng(z)n_{sp}|Z_L(z)|^2dz}{c^3\left|\int\int\Phi(x,y)\Phi(x,y)dxdy\right|^2\beta_0^2|Z_L^-(0)|^2} \tag{4.110}$$

R_{sp} est le taux moyen d'émission spontanée couplée au mode laser. Un certain nombre de paramètres dus à la structure du laser viennent donc modifier sa valeur par rapport à la valeur standard de la relation d'Einstein $R_{sp} = v_g g n_{sp}$:

- le facteur de Petermann dû au mode transverse (sans effet dans le cas d'un guidage par l'indice où les modes sont alors réels et orthogonaux au sens du produit hermitien) [129] :

$$\frac{\int\int n(\vec{r})|\Phi(x,y)|^2dxdy}{\left|\int\int\Phi(x,y)\Phi(x,y)dxdy\right|^2} \tag{4.111}$$

- et un facteur plus compliqué dû au mode longitudinal [88] [95] [89], qui dans le cas d'un guidage par l'indice et d'une couche active uniforme est d'après (4.110) :

$$\left[\frac{|f_D|}{v_g}\frac{\int_0^l|Z_L(z)|^2dz}{|Z_L^-(0)|}\right]^2 \tag{4.112}$$

4.4.5 Équation du Fabry-Perot soumis à injection par la face de sortie

Dans le cas d'un laser Fabry-Perot où l'on considère le champ comme uniforme dans la cavité (pas de variation spatiale du gain (*longitudinal spatial hole buring*)) et dont la fréquence correspond au maximum du gain (pas de variation du gain avec la fréquence) :

$$f_D = \frac{1}{\tau_{in}} = \frac{v_g}{2l} \tag{4.113}$$

$$C_{\mathcal{N}} = \frac{1+j\alpha_H}{2l}v_g\frac{\partial g}{\partial\mathcal{N}} \tag{4.114}$$

$$C_{\mathcal{S}} = \frac{v_g}{2l}\frac{\partial g}{\partial\mathcal{S}} \tag{4.115}$$

$$r_{Ls} = \frac{1}{r_2} \tag{4.116}$$

$$f_R = \frac{v_g}{2lr_2} \tag{4.117}$$

$\alpha_H = -2k_0 \frac{\partial n/\partial \mathcal{N}}{\partial g/\partial \mathcal{N}}$ est le facteur de Henry du matériau.

L'équation sur l'enveloppe (4.93) devient alors :

$$\boxed{\frac{dA^+}{dt}(t) = -j(\omega_s - \omega_i)A^+(t) + A^+(t)\left(\frac{1+j\alpha_H}{2}v_g\frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}}\Delta\mathcal{N}(t) + \frac{v_g}{2}\frac{\partial g}{\partial \mathcal{P}}\Delta\mathcal{P}(t)\right) + \frac{v_g}{2l}\frac{t_{32}}{r_2}A^i(t) + F_A(t)} \tag{4.118}$$

Le facteur de couplage de l'onde injectée est par conséquent :

$$m = \frac{v_g}{2l}\frac{t_2}{r_2} \tag{4.119}$$

On remarque tout d'abord que celui-ci diffère du facteur classique introduit par Lang [105] :

$$\frac{ct_{23}}{2nl} \tag{4.120}$$

par la prise en compte de l'indice de groupe et du facteur de réflexion de la face d'entrée.

Dans le cas d'un laser à facettes clivées d'indice n, le facteur de couplage est $m = f_{ISL}2/(1-n)$.

Les paramètre f_R et f_D sont homogènes à une fréquence, f_R est le facteur de couplage externe de la cavité, que l'on doit pondérer par le coefficient de transmission en amplitude du champ électrique. On remarque ci-dessus que dans le cas du laser Fabry-Perot, f_D est égal à l'intervalle spectral libre de la cavité f_{ISL} , inverse du temps de parcours de l'onde dans la cavité τ_{in}. f_R est donc proportionnel à l'intervalle spectral libre modifié par la réflectivité interne de la surface d'injection.

L'analyse phénoménologique du facteur de couplage faite par Lang [105] est que l'onde laser intra-cavité reçoit une contribution du champ injecté à chaque fois que celle-ci atteint la face d'injection, c'est à dire toutes les τ_{in} secondes. En réalité, ce temps est augmenté par la faiblesse de la réflectivité de la face d'injection, on remarque en effet que le couplage n'existe que pour la partie de l'onde qui est dans le même sens que l'onde injectée, c'est à dire la partie de l'onde réfléchie. Le facteur f_R peut donc être considéré comme un intervalle spectral libre vu par l'onde injectée. Dans le cas du laser DFB, la notion de temps de parcours est généralisée par le paramètre complexe f_D et dépend du facteur du couplage au réseau (réflexion distribuée) et des réflectivités des facettes. Pour un laser DFB avec une face de sortie traitée anti-reflet, f_D devient nul, en effet dans ce cas la condition d'oscillation $r_L r_2 = 1$ implique que r_L soit infini, cependant le paramètre f_R reste lui fini.

4.4.6 Paramètres d'injection du laser DFB avec une face anti-reflet

Calcul du paramètre de couplage externe

Dans le cas d'un laser DFB avec la face de droite (face d'injection et de sortie) traitée anti-reflet, on utilise l'expression du coefficient de réflexion équivalent, à l'abcisse $z = l$, r_L :

$$r_L = \frac{(\kappa + \delta\rho_1)\tanh(\gamma l) + j\gamma\rho_1}{-(\kappa\rho_1 + \delta)\tanh(\gamma l) + j\gamma}e^{-j\Omega} \tag{4.121}$$

avec comme condition supplémentaire, due au traitement anti-reflet, le fait qu'à la résonance $r_L r_2 = 1$ avec $r_2 = 0$ donc $1/r_L = 0$, c'est à dire la condition :

$$\tanh(\gamma l) = \frac{j\gamma}{\kappa\rho_1 + \delta} \tag{4.122}$$

d'où, à partir des expressions de γ et δ et calculs, le resultat suivant :

$$f_R = j\left(\frac{\partial\frac{1}{r_L}}{\partial\omega}\right)_s^{-1} = -j\frac{v_g}{l}\frac{\left[(\kappa l)^2 - (\gamma l)^2\right]\left[(1+\rho_1^2) + 2\rho_1\frac{\gamma}{\kappa}\right]}{(\gamma l)[\rho_1 + j(\kappa l)(1+\rho_1^2)] + \kappa l + 2j\rho_1(\gamma l)^2} \tag{4.123}$$

Analogie avec le facteur de couplage pour la contre-réaction

Le coefficient de couplage f_R apparaît comme proportionnel au facteur de couplage C introduit par F. Favre [117] dans l'étude des lasers DFB soumis à une contre-réaction externe. Une précédente étude concernant l'injection optique dans les DFB s'est d'ailleurs basée sur une transposition de l'injection optique en terme de contre-réaction [130]. Plus récemment [97], la méthode de Green a été utilisée pour l'étude de la rétro-action externe sur les lasers DFB avec structure complexe, où la constante de Favre apparaît comme proportionnelle au module de la variation du Wronskien par rapport à la réflectivité de la face indicée k considérée :

$$C_k = \frac{j\tau_{in}}{2}T_2\frac{\partial W}{\partial r_k}/\frac{\partial W}{\partial\omega} \tag{4.124}$$

Ceci s'explique en considérant l'expression du Wronskien en fonction des modes longitudinaux gauche et droit [95] :

$$W = 2j\beta_B Z_R^+(l)Z_L^-(l)[1 - r_L r_2] \tag{4.125}$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial W}{\partial r_2} = -2j\beta_B R^+(l)Z_L^-(l)r_L \tag{4.126}$$

$$\frac{\partial W}{\partial\omega} = 2j\beta_B Z_R^+(l)Z_L^-(l)r_L\frac{\partial\frac{1}{r_L}}{\partial\omega} \tag{4.127}$$

Donc

$$C_2 = -\frac{j\tau_{in}}{2}T_2\left(\frac{\partial\frac{1}{r_L}}{\partial\omega}\right)^{-1} = -f_R T_2\frac{\tau_{in}}{2} \tag{4.128}$$

4.4.7 Équations de la puissance et de la phase optique

Le module au carré de l'enveloppe est relié à la puissance moyenne $I(t)$ sortant par la facette de droite du laser par :

$$\begin{aligned} I(t) &= \Re e\left\{\int\int\vec{\Pi}(x,y,l^+,t)\vec{n}dxdy\right\} = \Re e\left\{\int\int(\frac{\vec{E}\times\vec{H}^*}{2})\vec{n}dxdy\right\} \\ &= (1-r_2^2)2\epsilon_0 nc|A(t)|^2 = (1-r_2^2)B_P n_2|A|^2(t) = T_2 B_I n_2|A|^2(t) \end{aligned} \tag{4.129}$$

où Π est le vecteur de Poynting complexe ($\mathrm{W/m^2}$) et $T_2 = |t_{23}|^2 \frac{n_3}{n_2} = |t_{32}|^2 \frac{n_2}{n_3} = 1 - |r_2|^2 = 1 - R_2$. On définit de même la puissance optique incidente :

$$I_{in}(t) = B_I n_3 |A_{in}|^2(t) \tag{4.130}$$

Afin de déterminer les équations sur la puissance $I(t)$ émise par la facette de droite (aussi appelée abusivement intensité) et la phase $\phi(t)$ de l'enveloppe, l'équation sur l'enveloppe est multipliée par $2A^{+*}B_I n_2 T_2$:

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt}(t) + 2jI\frac{d\phi}{dt}(t) &= 2I(t)\int_0^l C_{\mathcal{N}}(z)\Delta\mathcal{N}(z,t)dz \\
&\quad +2I(t)\int_0^l C_{\mathcal{S}}(z)\Delta\mathcal{S}(z,t)dz - 2j(\omega_i - \omega_s)I(t) \\
&\quad +2f_R T_2\sqrt{I(t)I_{in}(t)}e^{j(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))} \\
&\quad +F_I(t) + 2jI(t)F_\phi(t)
\end{aligned} \tag{4.131}$$

où I_{in} est la puissance incidente sur la facette de droite du laser.

Les forces de Langevin sont issues du produit $2A^{+*}B_I T_2 F_A$, la moyenne de ce terme donne la puissance moyenne spontanée R_I émise par la face de droite [131] :

$$R_I = R_{sp}\frac{I_0}{p_0} \tag{4.132}$$

qui détermine la vrai condition d'oscillation sans injection :

$$r_{Ls}(\omega)r_2 - 1 = -\frac{R_{sp}}{2f_D p_0} \tag{4.133}$$

Les forces F_I et F_ϕ découlent de F_A :

$$F_I = \Re e\{2A^{+*}B_I n_2 T_2 F_A - R_I\} \tag{4.134}$$

$$F_\phi = \Im m\{\frac{A^{+*}F_A}{|A|_0^2} - \frac{R_{sp}}{2p_0}\} \tag{4.135}$$

Les relations de corrélation non nulles de F_I et F_ϕ sont les suivantes [131] :

$$\left\langle F_I(t)F_I^*(t')\right\rangle = 2R_{sp}\frac{I_0^2}{p_0}\delta(t-t') \tag{4.136}$$

$$\left\langle F_\phi(t)F_\phi^*(t')\right\rangle = \frac{R_{sp}}{2p_0}\delta(t-t') \tag{4.137}$$

En séparant partie réelle et partie imaginaire, on obtient une équation pour l'intensité et une autre

pour la phase :

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt}(t) &= 2I(t)\int_0^l \Re e\left\{C_{\mathcal{N}}(z)\right\}\Delta\mathcal{N}(z,t)dz \\
&\quad +2I(t)\int_0^l \Re e\left\{C_{\mathcal{P}}(z)\right\}\Delta\mathcal{P}(z,t)dz + \\
&\quad +2T_2\sqrt{I(t)I_{in}(t)}\left[\Re e\left\{f_R\right\}\cos(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))-\right. \\
&\quad \left.-\Im m\left\{f_R\right\}\sin(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))\right]+F_I(t) \qquad (4.138) \\
\frac{d\phi}{dt}(t) &= (\omega_s-\omega_i)+\int_0^l \Im m\left\{C_{\mathcal{N}}(z)\right\}\Delta\mathcal{N}(z,t)dz + \\
&\quad +\int_0^l \Im m\left\{C_{\mathcal{P}}(z)\right\}\Delta\mathcal{P}(z,t)dz \\
&\quad +T_2\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}}\left[\Im m\left\{f_R\right\}\cos(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))+\right. \\
&\quad \left.+\Re e\left\{f_R\right\}\sin(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))\right]+F_\phi(t) \qquad (4.139)
\end{aligned}$$

4.4.8 Intensité et phase pour le laser Fabry-Perot

Dans le cas d'un laser Fabry-Perot, on introduit les paramètres déterminés pour l'équation (4.118) :

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt}(t) &= I(t)v_g\frac{\partial g}{\partial\mathcal{N}}\Delta\mathcal{N}(t)-I(t)v_g g\epsilon_I\Delta I \\
&\quad +2T_2\sqrt{I(t)I_{in}(t)}\frac{1}{\tau_i r_2}\cos(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))+F_I(t) \qquad (4.140) \\
\frac{d\phi}{dt}(t) &= (\omega_s-\omega_i)+\frac{\alpha_H}{2}v_g\frac{\partial g}{\partial\mathcal{N}}\Delta\mathcal{N}(t)+ \\
&\quad +T_2\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}}\frac{1}{\tau_i r_2}\sin(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg(t_{32}))+F_\phi(t) \qquad (4.141)
\end{aligned}$$

où ϵ_I est le facteur de compression du gain par rapport à l'intensité.

Ce résultat, dans le cas particulier du Fabry-Perot, est comparable aux équations données dans [48], [112], avec une correction sur le facteur de couplage.

4.4.9 Calcul de la plage d'accrochage

Afin de déterminer le désaccord de fréquence maximal d'accrochage, on supprime les termes de bruits et de dérivations des deux équations ci-dessus :

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^l \Re e\left\{C_{\mathcal{N}}(z)\right\}\Delta\mathcal{N}(z)dz+\int_0^l \Re e\left\{C_{\mathcal{P}}(z)\right\}\Delta\mathcal{P}(z)dz \\
&\quad +\eta\left|f_R\right|\cos(\theta_0+\arg(f_D r_{Ls}t_{32})) \qquad (4.142) \\
0 &= (\omega_s-\omega_i)+\int_0^l \Im m\left\{C_{\mathcal{N}}(z)\right\}\Delta\mathcal{N}(z)dz+ \\
&\quad \int_0^l \Im m\left\{C_{\mathcal{P}}(z)\right\}\Delta\mathcal{P}(z)dz+\eta\left|f_R\right|\sin(\theta_0+\arg(f_D r_{Ls}t_{32})) \qquad (4.143)
\end{aligned}$$

où $\theta(t) = \phi_{in}(t) - \phi(t)$ et $\eta = \sqrt{\frac{I_{in0}T_2}{I_0/T_2}}$, η^2 représente donc le rapport entre la puissance optique injectée à l'intérieur de la facette droite et la puissance optique de l'onde sortante au niveau interne de la facette droite.

Il est important de noter que, si l'on peut définir une valeur moyenne stationnaire pour la différence des phases, il n'en est pas de même pour chacune des phases, en effet le laser maître n'étant pas modifié par l'injection, sa phase reste non stationnaire, on ne peut donc en définir une valeur moyenne dans le temps, il en est donc de même pour la phase du laser esclave.

Afin de déterminer une formule simple pour la demi-largeur d'accrochage, on pose :

$$\alpha_{eff} = \frac{\int_0^l \Im m \left\{C_{\mathcal{N}}(z)\right\} \Delta\mathcal{N}(z)dz + \int_0^l \Im m \left\{C_{\mathcal{P}}(z)\right\} \Delta\mathcal{P}(z)dz}{\int_0^l \Re e \left\{C_{\mathcal{N}}(z)\right\} \Delta\mathcal{N}(z)dz + \int_0^l \Re e \left\{C_{\mathcal{P}}(z)\right\} \Delta\mathcal{P}(z)dz} \tag{4.144}$$

Il s'agit du facteur de Henry structurel, prenant en compte, non seulement le facteur de couplage phase-amplitude, mais aussi l'effet de la distribution longitudinale des porteurs et des photons, ainsi que la compression du gain. En général la partie imaginaire de $C_{\mathcal{P}}$ est négligeable.

On obtient donc l'équation liant différence de phases et différence de fréquences :

$$\omega_i - \omega_s = \eta \left|f_R\right| \sqrt{1 + \alpha_{eff}^2} \sin(\theta_0 + arg(f_R t_{32}) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})) \tag{4.145}$$

et la valeur de la demi-largeur d'accrochage :

$$\delta\nu_{max} = \nu_{max} - \nu_s = \frac{1}{2\pi}\eta \left|f_R\right| \sqrt{1 + \alpha_{eff}^2} = k_l \sqrt{1 + \alpha_{eff}^2} \tag{4.146}$$

avec

$$k_l = \frac{\eta \left|f_R\right|}{2\pi} \tag{4.147}$$

Nous avons ici supposé que α_{eff} était constant, or l'expression de α_{eff} fait intervenir les décalages de distribution de la densité de porteurs et de la densité de photons par rapport à la solution libre, par conséquent seule une analyse numérique, prenant en compte l'équation sur les porteurs, permet alors de déterminer la véritable plage d'accrochage.

Dans le cas d'un laser Fabry-Perot, la modification de la plage due à la compression du gain est obtenue par la formule :

$$\alpha_{eff} = \frac{\alpha_H}{1 + \frac{\frac{\partial g}{\partial \mathcal{P}}\Delta\mathcal{P}}{\frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}}\Delta\mathcal{N}}} \tag{4.148}$$

L'équation simplifiée sur les porteurs fournissant la relation supplémentaire :

$$\frac{\Delta\mathcal{P}}{\Delta\mathcal{N}} = -\frac{\tau_{ph}}{\tau_e}(1 - \epsilon_{\mathcal{P}}\mathcal{P}) \tag{4.149}$$

où $\epsilon_{\mathcal{P}}$ est le coefficient de compression du gain en densité de photons, τ_{ph} est le temps de vie des photons, $1/\tau_e$ est le taux de recombinaison total des porteurs.

Enfin, pour un laser Fabry-Perot, le gain au seuil du mode accroché ne peut être supérieur au gain au seuil du mode naturel [106] [112]. Or on remarque que le facteur de Henry permet d'étendre la

plage d'accrochage, en effet, lorsque le laser fonctionne en désaccord de la cavité, il est nécessaire qu'à chaque aller-retour le déphasage induit par le désaccord soit compensé par la phase rajoutée par le champ injecté. Or l'existence du facteur de couplage phase-amplitude ou encore indice-gain, permet d'ajouter un déphasage supplémentaire en modifiant la densité de porteurs, c'est à dire le gain, tout en garantissant évidemment la condition d'oscillation sur l'amplitude. Dans le cas d'un laser Fabry-Perot, ce décalage du gain ne peut se faire dans un sens où le gain au seuil du mode accroché serait supérieur au gain au seuil du mode naturel, correspondant donc à une diminution du nombre de photons, ce qui implique une restriction de la zone d'accrochage pour le désaccord positif :

$$\nu_{max} - \nu_s = k_l \tag{4.150}$$

$$\nu_{min} - \nu_s = k_l\sqrt{1+\alpha_{eff}^2} \tag{4.151}$$

4.4.10 Détermination des densités spectrales de bruit

Équation des porteurs, équation des photons

Nous disposons déjà de deux équations concernant l'intensité (4.138) et la phase (4.139), celles-ci impliquent aussi la densité de porteurs et la densité de photons.

L'équation sur la densité de porteurs est :

$$\frac{d\mathcal{N}(z,t)}{dt} = J(z,t) - \mathrm{R}(\mathcal{N}(z,t)) - v_g g(\mathcal{N}(z,t),\mathcal{P}(z,t))\mathcal{P}(z,t) + F_{\mathcal{N}}(z,t) \tag{4.152}$$

où J est la densité de porteurs injectés par le courant de polarisation, R est la fonction rendant compte de la recombinaison spontanée des porteurs et $F_{\mathcal{N}}(z,t)$ la force de Langevin associée aux fluctuations des porteurs dues à l'interaction entre le champ et la polarisation spontanée [122].

En ce qui concerne la densité de photons, elle est reliée au champ électrique longitudinal grâce au paramètre $B_{\mathcal{P}}$ (équation (4.86)) :

$$\mathcal{P}(z,t) = B_{\mathcal{P}}|E(z,t)|^2 \tag{4.153}$$

quant à la puissance optique de sortie, elle est reliée au module de l'enveloppe temporelle grâce au paramètre B_I (équation (4.129)) :

$$I(t) = T_2 B_P n_2 |A|^2(t) \tag{4.154}$$

L'enveloppe spectrale est elle reliée au champ électrique longitudinal via le mode longitudinal (équation (4.100)) :

$$E(z,\omega) = A(\omega)Z_L(z) \tag{4.155}$$

Cependant cette relation n'est pas transposable à l'enveloppe temporelle car le mode longitudinal $Z_L(z)$ dépend en fait de ω, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{N}$. Par conséquent $\mathcal{P}(t)$ n'est pas directement relié à $I(t)$ par la vitesse de groupe comme dans le cas du Fabry-Perot. $\mathcal{P}(t)$ est en fait lié aussi à $\phi(t)$ et $\mathcal{N}(t)$.

On fait alors un développement limité du mode longitudinal :

$$Z_L(z) = Z_{L0}(z) + \frac{\partial Z_L}{\partial \omega}(\omega - \omega_s) + \langle Z_{\mathcal{N}}(z)|\, \delta\mathcal{N}\rangle + \langle Z_{\mathcal{P}}(z)|\, \delta\mathcal{P}\rangle \tag{4.156}$$

avec :

$$\frac{\delta Z_L(z)}{\delta k(z')}\frac{\partial k_0}{\partial \mathcal{N}} = Z_{\mathcal{N}}(z,z') \tag{4.157}$$

$$\frac{\delta Z_L(z)}{\delta k(z')}\frac{\partial k_0}{\partial \mathcal{P}} = Z_{\mathcal{P}}(z,z') \tag{4.158}$$

$Z_{L0}(z)$ est le mode longitudinal stationnaire avec injection. L'écart par rapport au mode longitudinal stationnaire sans injection intervient dans $\Delta\mathcal{P}(z)$.

On obtient ainsi en injectant (4.155) dans (4.153) et transformation de Fourier à l'aide du développement limité :

$$|\delta\mathcal{P}\rangle = \mathfrak{M}_{\mathcal{N}}\,|\delta\mathcal{N}\rangle + \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\,|\delta\mathcal{P}\rangle + \left[|\mathcal{P}_0\rangle\,\frac{\delta I}{I_0} + \frac{|H_I\rangle}{2I_0}\frac{d\delta I}{dt} + |H_\phi\rangle\,\frac{d\phi}{dt}\right] \tag{4.159}$$

où sont utilisés les deux opérateurs

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{P}} = \frac{2\Re e\{Z_{L0}(z)\}}{|Z_{LO}(z)|^2}\,|\mathcal{P}_0\rangle\,\langle Z_{\mathcal{P}}(z)| \tag{4.160}$$

$$\mathfrak{M}_{\mathcal{N}} = \frac{2\Re e\{Z_{L0}(z)\}}{|Z_{LO}(z)|^2}\,|S_0\rangle\,\langle Z_{\mathcal{N}}(z)| \tag{4.161}$$

et enfin, en supposant $1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}$ inversible et en notant :

$$\mathfrak{M} = (1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\mathfrak{M}_{\mathcal{N}} \tag{4.162}$$

on établit [95] :

$$|\delta S\rangle = (1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left[|\mathcal{P}_0\rangle\,\frac{\delta I}{I_0} + \frac{|H_I\rangle}{2I_0}\frac{d\delta I}{dt} + |H_\phi\rangle\,\frac{d\phi}{dt}\right] + \mathfrak{M}\,|\delta\mathcal{N}\rangle \tag{4.163}$$

$H(z)$ et $H_I(z)$ proviennent de la dépendance en ω du mode longitudinal Z_L :

$$H(z) = 2\Re e\left\{I_0 Z_{L0}^*(z)\frac{\partial Z_L}{\partial \omega}(z,\omega_s)\right\} \tag{4.164}$$

$$H_I(z) = 2\Im m\left\{I_0 Z_{L0}^*(z)\frac{\partial Z_L}{\partial \omega}(z,\omega_s)\right\} \tag{4.165}$$

La variation de Z_L avec ω est obtenue par résolution de l'équation des modes couplés :

$$\begin{bmatrix}\frac{\partial R}{\partial \omega}(z,\omega_s)\\ \frac{\partial S}{\partial \omega}(z,\omega_s)\end{bmatrix} = e^{Az}\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial R}{\partial \omega}(0,\omega_s)\\ \frac{\partial S}{\partial \omega}(0,\omega_s)\end{bmatrix} - jz\frac{\partial k_0}{\partial \omega}(\omega_i)\begin{bmatrix}R(0,\omega_i)\\ S(0,\omega_i)\end{bmatrix}\right\} \tag{4.166}$$

et

$$\frac{\partial Z_L}{\partial \omega}(z,\omega_i) = {}^t\begin{bmatrix}e^{-j\beta_B z}\\ e^{j\beta_B z}\end{bmatrix} e^{Az}\left\{\begin{bmatrix}\frac{\partial R}{\partial \omega}(0,\omega_i)\\ \frac{\partial S}{\partial \omega}(0,\omega_i)\end{bmatrix} - jz\frac{\partial k_0}{\partial \omega}\begin{bmatrix}R(0,\omega_i)\\ S(0,\omega_i)\end{bmatrix}\right\} \tag{4.167}$$

or les valeurs initiales $R(0)$ et $S(0)$ étant fixées, elles ne varient pas avec ω donc :

$$\frac{\partial Z_L}{\partial \omega}(z,\omega_i) = -jz\frac{\partial k_0}{\partial \omega}Z_{L0}(z) \tag{4.168}$$

Les expressions de $Z_{\mathcal{P}}(z,z')$ et de $Z_{\mathcal{N}}(z,z')$ peuvent être déterminées de la même manière.

Linéarisation des équations et transformation de Fourier

Afin d'obtenir les densités spectrales de puissance de bruit de phase, intensité et densité de porteurs du laser esclave, on linéarise les équations (4.138), (4.139) et (4.152) autour de la solution statique $(I_0, I_{in0}, \theta_0, \mathcal{N}_0(z))$. Les écarts à la solution statique sont notés $(\delta I, \delta I_{in}, \delta\theta, \delta\mathcal{N}(z))$. A cause de la non stationnarité du bruit de phase, on ne peut définir les quantités $\delta\phi$ ou $\delta\phi_{in}$.

$$\begin{bmatrix} s_{11}+d_{11}+j\omega & s_{12}+d_{12} & s_{13} \\ s_{21}+d_{21} & s_{22}+d_{22}+j\omega & s_{23} \\ s_{31} & s_{32} & s_{33}+j\omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta I(\omega) \\ \phi(\omega) \\ \delta\mathcal{N}(z,\omega) \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & 0 \\ c_{21} & c_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta I_{in}(\omega) \\ \phi_{in}(\omega)-\theta_0\delta(\omega) \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_I(\omega) \\ F_\phi(\omega) \\ F_{\mathcal{N}}(z,\omega)+\delta J(z,\omega) \end{bmatrix} \tag{4.169}$$

où

$$\begin{aligned} k_c &= k_l\,\cos(\theta_0+\arg(f_R t_{32})) \\ k_s &= k_l\,\sin(\theta_0+\arg(f_R t_{32})) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s_{11} &= -2\left\langle C_{\mathcal{N}r}\right|\Delta\mathcal{N}_0\rangle - 2\left\langle C_{\mathcal{P}r}\right|\Delta\mathcal{P}_0\rangle - 2\left\langle C_{\mathcal{P}r}\right|(1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|\mathcal{P}_0\right\rangle \\
&\quad -j\omega\left\langle C_{\mathcal{P}r}\right|(1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|H_I\right\rangle \\
s_{12} &= -j\omega 2I_0\left\langle C_{\mathcal{P}r}\right|(1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|H_\phi\right\rangle \\
s_{13} &= -2I_0\left\langle C_{\mathcal{N}r}\right| - \left\langle C_{\mathcal{P}r}\right|\mathfrak{M} \\
s_{21} &= -\frac{1}{I_0}\left\langle C_{\mathcal{P}i}\right|(1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|\mathcal{P}_0\right\rangle - \frac{j\omega}{2I_0}\left\langle C_{\mathcal{P}i}\right|(1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|H_I\right\rangle \\
s_{22} &= -j\omega\left\langle C_{\mathcal{P}i}\right|(1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|H_\phi\right\rangle \\
s_{23} &= -\left\langle C_{\mathcal{N}i}\right| - \left\langle C_{\mathcal{P}i}\right|\mathfrak{M} \\
s_{31} &= \left[v_g\frac{\partial g}{\partial\mathcal{P}}\mathcal{P}_0(z)+v_g g_0(z)\right](1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left[\frac{\left|\mathcal{P}_0\right\rangle}{I_0}+\frac{j\omega\left|H_I\right\rangle}{2I_0}\right] \\
s_{32} &= \left[v_g\frac{\partial g}{\partial\mathcal{P}}\mathcal{P}_0(z)+v_g g_0(z)\right](1-\mathfrak{M}_{\mathcal{P}})^{-1}\left|H_\phi\right\rangle j\omega \\
s_{33} &= \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial\mathcal{N}}+v_g g_N\mathcal{P}_0(z)+\left[v_g\frac{\partial g}{\partial\mathcal{P}}\mathcal{P}_0(z)+v_g g_0(z)\right]\mathfrak{M}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d_{11} &= -k_c \\ d_{12} &= -2I_0\,k_s \\ d_{21} &= -\frac{k_s}{2I_{in0}} \\ d_{22} &= -k_c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{I_0}{I_{in0}} k_c \\ c_{12} &= -2I_0\, k_s \\ c_{21} &= \frac{k_s}{2I_{in0}} \\ c_{22} &= k_c \end{aligned} \tag{4.170}$$

Expression matricielle des densités spectrales de puissance

On utilise maintenant les notations vectorielles suivantes [132] :

$$\boldsymbol{X}(\omega) = \begin{bmatrix} \delta I(\omega) \\ \phi(\omega) \\ \delta\mathcal{N}(\omega, z) \end{bmatrix} \tag{4.171}$$

$$\boldsymbol{X_{in}}(\omega) = \begin{bmatrix} \delta I_{in}(\omega) \\ \phi_{in}(\omega) \\ \delta\mathcal{N}_{in}(\omega, z) \end{bmatrix} \tag{4.172}$$

$$\boldsymbol{F}(\omega) = \begin{bmatrix} F_I(\omega) \\ F_\phi(\omega) \\ F_{\mathcal{N}}(\omega, z) + \delta J(\omega, z) \end{bmatrix} \tag{4.173}$$

Par conséquent, l'équation (4.169) se transforme en l'équation :

$$[M]\boldsymbol{X} = [C]\boldsymbol{X_{in}} + \mathbf{F} \tag{4.174}$$

si $[M]$ est inversible :

$$\boldsymbol{X}(\omega) = [M(\omega)]^{-1}[C]\boldsymbol{X_{in}}(\omega) + [M(\omega)]^{-1}\boldsymbol{F}(\omega) \tag{4.175}$$

On exprime alors la densité spectrale de puissance à partir du produit de corrélation hermitien :

$$S_{\boldsymbol{X}}(\omega)\delta(\omega - \omega') = \left\langle X(\omega)X(\omega')^\dagger \right\rangle \tag{4.176}$$

Les coefficients de $S_{\boldsymbol{X}}$ correspondent aux densités spectrales de bruit d'intensité, phase et densité de porteurs pour les termes diagonaux et aux densités interspectrales pour les termes non diagonaux.

A partir de (4.174) on détermine l'expression de $S_{\mathbf{X}}$:

$$S_{\boldsymbol{X}}(\omega) = [M(\omega)]^{-1}[C]S_{\boldsymbol{X_{in}}}(\omega)[C]^\dagger[M(\omega)]^{-1^\dagger} + [M(\omega)]^{-1}S_{\boldsymbol{F}}(\omega)[M(\omega)]^{-1^\dagger} \tag{4.177}$$

avec

$$S_{\boldsymbol{F}}(\omega) = 2\begin{bmatrix} D_{II} & 0 & D_{I\mathcal{N}}(z) \\ 0 & D_{\phi\phi} & 0 \\ D_{I\mathcal{N}}(z) & 0 & D_{\mathcal{N}\mathcal{N}}(z) + S_J(\omega, z) \end{bmatrix} \tag{4.178}$$

Les coefficients de diffusion des forces de Langevin sont les suivants [89] :

$$2D_{II} = 2R_{sp}\frac{I_0^2}{p_0} \tag{4.179}$$

$$2D_{\phi\phi} = \frac{R_{sp}}{2p_0} \tag{4.180}$$

$$2D_{\mathcal{N}\mathcal{N}}(z) = 2[v_g g_0(z) n_{sp} S_0(z) + \mathrm{R}(\mathcal{N}(z))]/A_{act} \tag{4.181}$$

$$2D_{I\mathcal{N}}(z) = -2v_g g_0(z) n_{sp} S_0(z)\frac{I_0}{p_0} \tag{4.182}$$

4.4.11 Commentaires

On constate en premier lieu que les coefficients de couplage pour le bruit, correspondant aux coefficients d_{ij} et c_{ij}, sont identiques aux cas du Fabry-Perot [109], par conséquent, dans la configuration d'injection contrapropagative, ces facteurs de couplage de bruit sont indépendants de la structure du laser soumis à l'injection. Si l'injection est en phase, c'est à dire si $\theta_0 + \arg(f_R t_{32}) = 0$, alors seul le bruit de phase du maître est couplé au bruit de phase et seul le bruit d'intensité du maître est couplé au bruit d'intensité de l'esclave. Par contre, si l'injection est en quadrature de phase, c'est à dire si $\theta_0 + \arg(f_R t_{32}) = \pi/2$, alors c'est le bruit d'intensité maître qui est couplée au bruit de phase de l'esclave et le bruit de phase du maître au bruit d'intensité de l'esclave. On montrera par la suite que la configuration d'injection correspondant au meilleur transfert de bruit n'est pas l'injection en phase, à cause du couplage phase-amplitude. Les paramètres s_{ij} correspondent aux caractéristiques de bruit propres au laser. On y retrouve un certain nombre de facteurs correctifs par rapport aux expressions du bruit obtenues dans le cas Fabry-Perot [133]. Ces termes correctifs sont dus à

- la prise en compte de la distribution longitudinal des photons et des porteurs (produit fonctionnel $\langle \mid \rangle$)
- la prise en compte de la compression du gain (fonction $C_{\mathcal{P}r}$ et $\partial g/\partial\mathcal{P}$, la partie imaginaire de $C_{\mathcal{P}}$ correspondrait en fait à une modification de l'indice par la densité de photon ; comme nous l'avons déjà mentionné, cette modification est généralement négligeable, cependant cette partie imaginaire pourrait par exemple modéliser un effet photorefractif dans le milieu)
- la prise en compte du transfert de bruit via la déformation du mode longitudinal (opérateurs $\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}$ et $\mathfrak{M}$ et les fonctions $H(z)$ et $H_I(z)$), cet effet entraîne un couplage supplémentaire entre les équations sur l'intensité, la phase et la densité de porteurs se manifestant notamment au niveau des paramètres s_{12}, s_{22} et s_{32}, tous nuls si l'on ne prend pas en compte cet effet. Le paramètre s_{12} correspond ainsi à une influence de la variation temporelle de phase (bruit de fréquence) sur l'intensité. Elle est induite par le fait que le bruit de fréquence provoque un bruit sur la distribution longitudinale de photons, à cause de la dépendance en fréquence du mode longitudinal, qui se répercute sur l'intensité de sortie via la compression du gain. Le paramètre s_{32} correspond lui à une influence du bruit de fréquence (dérivée de la phase) sur la densité de porteurs. Le mécanisme de départ est identique à celui de s_{12}, le bruit de phase induit un bruit sur la distribution longitudinal

de la densité de photons, celui-ci est alors transmis à la densité de porteurs via le couplage photons-porteurs du gain.

Il nous semble qu'en pratique on pourrait négliger $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_{\mathcal{P}}$, et $C_{\mathcal{P}i}$, par contre il pourrait être intéressant d'étudier l'influence du coefficient $s_{12} = -j\omega 2I_0 \langle C_{\mathcal{P}r} | H_\phi \rangle$ et du coefficient $s_{32} = v_g g_0 j\omega H(z)$ car contrairement aux autres paramètres qui n'induisent que de légères variations à des coefficients pré-existants, ces deux derniers induisent de nouveaux couplages dont la valeur peut devenir importante à haute fréquence. Cette remarque peut d'ailleurs aussi s'appliquer au terme correctif dû à $H_I(z)$ dans s_{31}.

Maintenant si l'on observe les équations (4.164),(4.165) et (4.168), on remarque que $H(z)$ est non nul uniquement si $\partial k_0/\partial\omega$ est complexe c'est à dire uniquement si $\partial g/\partial\omega$ est non nul. L'effet sera donc d'autant plus important que l'émission se fera loin du maximum du gain.

4.5 Cas Copropagatif

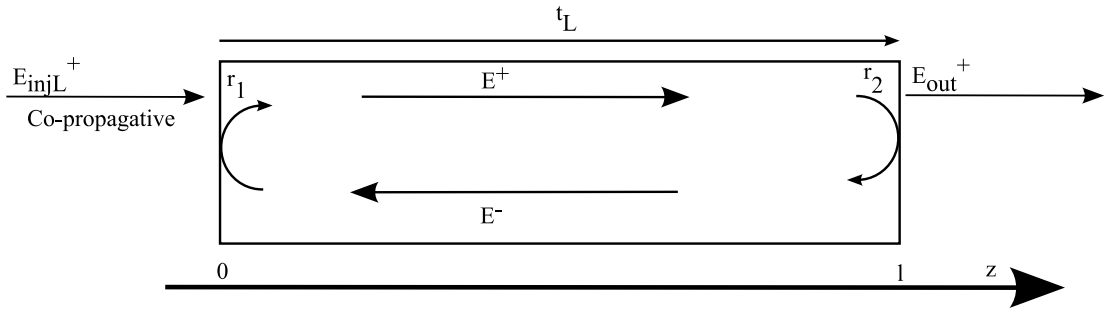

FIG. 4.3 – Schéma d'injection optique dans le sens co-propagatif

4.5.1 Développement de l'équation du champ électrique

On considère maintenant que le champ injecté se propage de $-\infty$ vers 0. D'après l'équation (4.51)

$$\boxed{E^+(l^-,\omega) = r_L r_2 E^+(l^-,\omega) + t_L t_{12} E^+_{injL}(0^-,\omega) + F_L(\omega)} \tag{4.183}$$

On remarque que par rapport au cas contrapropagatif, le facteur de couplage du champ électrique injecté prend maintenant en compte le facteur de transmission du laser, car le champ de sortie est situé à l'autre extrémité du laser par rapport à la face d'injection.

Afin d'obtenir l'équation des composantes de Fourier du champ au voisinage de la solution station-

naire libre, on utilise le développement limité suivant, autour de la condition d'oscillation libre :

$$\begin{aligned}\left(\frac{t_L}{r_L}\right)(\omega,\mathcal{N},\mathcal{P}) &= \left(\frac{t_L}{r_L}\right)(\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s)+\left(\frac{\partial\frac{t_L}{r_L}}{\partial\omega}\right)_s(\omega-\omega_s)\\ &+\int_0^l\left(\frac{\delta\frac{t_L}{r_L}}{\delta k}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}\frac{\partial k}{\partial\mathcal{N}}(\mathcal{N}(z)-\mathcal{N}_s(z))\,dz\\ &+\int_0^l\left(\frac{\delta\frac{t_L}{r_L}}{\delta k}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}\frac{\partial k}{\partial\mathcal{P}}(\mathcal{P}(z)-\mathcal{P}_s(z))\,dz \qquad (4.184)\end{aligned}$$

4.5.2 Calcul de l'enveloppe temporelle du champ électrique

Par transformation de Fourier, on obtient l'équation différentielle sur l'enveloppe temporelle du champ :

$$\begin{aligned}\frac{dA^+}{dt}(t) &= -j(\omega_s-\omega_i)A^+(t)+A^+(t)\int_0^l C_{\mathcal{N}}(z)\Delta\mathcal{N}(z)dz+A^+(t)\int_0^l C_{\mathcal{P}}(z)\Delta\mathcal{P}(z)dz\\ &+t_{Ls}f_Dt_{12}A^i(t)+f_Dr_L\left[\int_0^l\left(\frac{\delta\frac{t_L}{r_L}}{\delta k}\frac{\partial k}{\partial\mathcal{N}}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}(\mathcal{N}(z)-\mathcal{N}_s(z))\,dz\,t_{12}A^i(t)\right.\\ &+\int_0^l\left(\frac{\delta\frac{t_L}{r_L}}{\delta k}\frac{\partial k}{\partial\mathcal{P}}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}(\mathcal{P}(z)-\mathcal{P}_s(z))\,dz\,t_{12}A^i(t)\\ &\left.-j\left(\frac{\partial\frac{t_L}{r_L}}{\partial\omega}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}t_{12}\frac{d\,A^i}{dt}(t)+\left(\frac{\partial\frac{t_L}{r_L}}{\partial\omega}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}(\omega_i-\omega_s)t_{12}A^i(t)\right]\\ &+F_A(t) \qquad (4.185)\end{aligned}$$

Après reformulation :

$$\begin{aligned}\frac{dA^+}{dt}(t) &= -j(\omega_s-\omega_i)A^+(t)+A^+(t)\left[\langle C_{\mathcal{N}}|\,\Delta\mathcal{N}\rangle+\langle C_{\mathcal{P}}|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right]\\ &+f_Tt_{12}A^i(t)+\left[\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\Delta\mathcal{N}\rangle+\left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\Delta\mathcal{P}\rangle\right]t_{12}A^i(t)\\ &+\frac{f_T}{f_t}\frac{d\,A^i}{dt}(t)+j\frac{f_T}{f_t}(\omega_i-\omega_s)t_{12}A^i(t)+F_A(t) \qquad (4.186)\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}f_T &= f_Dt_{Ls}\\ C^t_{\mathcal{N}} &= f_R\left(\frac{\delta\frac{t_L}{r_L}}{\delta k}\frac{\partial k}{\partial\mathcal{N}}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}\\ C^t_{\mathcal{P}} &= f_R\left(\frac{\delta\frac{t_L}{r_L}}{\delta k}\frac{\partial k}{\partial\mathcal{P}}\right)_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s}\\ \frac{r_L}{t_L}f_t &= j\left(\frac{\partial\frac{t_L}{r_L}}{\partial\omega}\right)^{-1}_{\omega_s,\mathcal{N}_s,\mathcal{P}_s} \qquad (4.187)\end{aligned}$$

On constate d'importantes modifications par rapport à l'équation correspondante dans le cas contra-propagatif (4.93). Outre le changement de facteur de couplage f_T, trois termes supplémentaires apparaissent :

$$\left[\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right| \Delta\mathcal{N}\right\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right| \Delta\mathcal{P}\rangle\right] t_{12} A^i(t) \tag{4.188}$$

$$\frac{f_T}{f_t} t_{12} \frac{d\,A^i}{dt}(t) \tag{4.189}$$

$$j\frac{f_T}{f_t}(\omega_i - \omega_s) t_{12} A^i(t) \tag{4.190}$$

Le premier et le troisième correspondent à des couplages secondaires du champ injecté, le facteur de couplage complet est ainsi :

$$f_T + \left[\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right| \Delta\mathcal{N}\right\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right| \Delta\mathcal{P}\rangle\right] + j\frac{f_T}{f_t}(\omega_i - \omega_s) \tag{4.191}$$

Il dépend donc des conditions d'injection.

Le deuxième terme fait intervenir la dérivée de l'enveloppe temporelle du champ injectée. Nous pensons que ce terme provient du fait que, en prenant l'origine au niveau de la face de sortie, l'onde injectée est couplée à mi-parcours de l'onde dans la cavité.

Le paramètre d'importance est maintenant le rapport t_L/r_L qui, d'après les expressions de r_L et t_L, peut prendre une forme assez simple :

$$\frac{t_L}{r_L} = \frac{1}{m_{11} r_1 + m_{12}} = \frac{\gamma e^{j\beta_B l}}{\kappa_c^* \sinh(\gamma l) + r_1[\cosh(\gamma l) - j\delta \sinh(\gamma l)]} \tag{4.192}$$

4.5.3 Équation du laser Fabry-Perot soumis à injection par la face opposée à la sortie

Pour un laser Fabry-Perot au maximum du gain :

$$t_{Ls} = \frac{1}{\sqrt{r_1 r_2}} \tag{4.193}$$

$$f_T = \frac{1}{\tau_{in}\sqrt{r_1 r_2}} \tag{4.194}$$

$$f_t = \frac{2}{\tau_{in}} \tag{4.195}$$

$$C^t_{\mathcal{N}} = -\frac{1 + j\alpha_H}{4l\sqrt{r_1 r_2}} \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}} v_g \tag{4.196}$$

L'équation sur l'enveloppe (4.186) devient alors :

$$\begin{aligned} \frac{dA^+}{dt}(t) &= j(\omega_s - \omega_i) A^+(t) + A^+(t) \frac{1 + j\alpha_H}{2} v_g \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}} \Delta\mathcal{N} \\ &+ \frac{t_{12}}{\tau_{in}\sqrt{r_1 r_2}} A^i(t) - \frac{(1 + j\alpha_H) t_{12}}{4\sqrt{r_1 r_2}} \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}} v_g \Delta\mathcal{N} A^i(t) \\ &+ \frac{t_{12}}{2\sqrt{r_1 r_2}} \frac{d\,A^i}{dt}(t) - j\frac{t_{12}}{2\sqrt{r_1 r_2}}(\omega_s - \omega_i) A^i(t) + F_A(t) \end{aligned} \tag{4.197}$$

Le facteur de couplage externe est $m = f_{ISL}\frac{t_{12}}{\sqrt{r_1 r_2}}$ et pour un laser à facettes clivées d'indice n, $m = f_{ISL}\frac{2}{n-1}$, identique au cas contra-propagatif. On peut considérer que l'ISL, c'est à dire l'inverse du temps de parcours de la cavité, vu par l'onde injectée est $f_{ISL}/\sqrt{r_1 r_2}$, il dépend donc des deux facettes.

Le facteur f_t est égal au double de l'ISL, il correspond donc à la moitié du temps de parcours, du fait de l'injection à mi-parcours de l'onde.

4.5.4 Équations sur la puissance et la phase optique

De manière similaire au cas contra-propagatif, on établit les équations sur la phase et la puissance de sortie du champ. La puissance incidente sur la face de gauche s'exprime en fonction du module au carré de l'enveloppe du champ électrique incident :

$$I_{in}(t) = B_I n_1 |A_{in}|^2(t) \tag{4.198}$$

Par conséquent :

$$\begin{aligned}
\frac{dI}{dt}(t) \;=\;& 2\left[\langle C_{\mathcal{N}r}|\,\Delta\mathcal{N}\rangle + \langle C_{\mathcal{P}r}|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right] I(t) \\
&+2\,|f_T|\,\sqrt{T_1T_2}\sqrt{I_{in}(t)I(t)}\cos\left(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg\left(f_T t_{12}\right)\right) \\
&+2\left|\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right|\sqrt{T_1T_2}\sqrt{I_{in}(t)I(t)} \\
&\quad\times\cos\left(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg\left(t_{12}\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right)\right) \\
&-2\left|\frac{f_T}{f_t}\right|(\omega_i-\omega_s)\sqrt{T_1T_2}\sqrt{I_{in}(t)I(t)}\sin\left(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg\left(\frac{f_T}{f_t}t_{12}\right)\right) \\
&+\left|\frac{f_T}{f_t}\right|\frac{dI_{in}}{dt}(t)\sqrt{T_1T_2}\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}}\cos\left(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg\left(\frac{f_T}{f_t}\right)\right) \\
&-2\left|\frac{f_T}{f_t}\right|\frac{d\phi_{in}}{dt}(t)\sqrt{T_1T_2}\sqrt{I_{in}(t)I(t)}\sin\left(\phi_{in}(t)-\phi(t)+\arg\left(\frac{f_T}{f_t}t_{12}\right)\right) \\
&+R_I + F_I(t)
\end{aligned} \tag{4.199}$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt}(t) &= [\langle C_{\mathcal{N}i}|\,\Delta\mathcal{N}\rangle + \langle C_{\mathcal{P}i}|\,\Delta\mathcal{P}\rangle] - (\omega_i - \omega_s) \\
&+ |f_T|\sqrt{T_1T_2}\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}}\sin(\phi_{in}(t) - \phi(t) + \arg(f_T t_{12})) \\
&+ \left|\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\right\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right|\sqrt{T_1T_2}\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}} \\
&\quad \times \sin\left(\phi_{in}(t) - \phi(t) + \arg\left(t_{12}\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\right\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right)\right) \\
&+ \left|\frac{f_T}{f_t}\right|(\omega_i - \omega_s)\sqrt{T_1T_2}\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}}\cos\left(\phi_{in}(t) - \phi(t) + \arg\left(\frac{f_T}{f_t}t_{12}\right)\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left|\frac{f_T}{f_t}\right|\frac{dI_{in}}{dt}(t)\sqrt{T_1T_2}\sqrt{\frac{1}{I_{in}(t)I(t)}}\sin\left(\phi_{in}(t) - \phi(t) + \arg\left(\frac{f_T}{f_t}t_{12}\right)\right) \\
&+ \left|\frac{f_T}{f_t}\right|\frac{d\phi_{in}}{dt}(t)\sqrt{T_1T_2}\sqrt{\frac{I_{in}(t)}{I(t)}}\cos\left(\phi_{in}(t) - \phi(t) + \arg\left(\frac{f_T}{f_t}t_{12}\right)\right) \\
&+ F_\phi(t)
\end{aligned}
\tag{4.200}
$$

On constate que suite à l'apparition de la dérivée de l'enveloppe de l'onde injectée dans l'équation de l'enveloppe du champ, il apparaît dans l'équation sur la phase et la puissance des termes tenant compte de la dérivée de la phase (bruit de fréquence) et de la dérivée de la puissance injectée.

4.5.5 Calcul de la plage d'accrochage

Pour établir l'expression de la plage d'accrochage, on élimine les dérivées et les forces de Langevin des équations ci-dessus. Le désaccord en fréquence peut ainsi être exprimé en fonction du désaccord de phase et du taux d'injection :

$$
\begin{aligned}
\omega_i - \omega_s &= \eta\sqrt{1+\alpha_{eff}^2}\left\{|f_T|\sin(\theta_0 + \arg(f_T t_{12}) - \tan^{-1}(\alpha_{eff}))\right. \\
&+ \left.\left|\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\right\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right|\sin(\theta_0 + \arg(\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle) - \tan^{-1}(\alpha_{eff}))\right\} \\
&\times \frac{1}{1 - \eta\sqrt{1+\alpha_{eff}^2}\left|\frac{f_T}{f_t}\right|\cos(\theta_0 + \arg(\frac{f_T}{f_t}t_{12}) - \tan^{-1}(\alpha_{eff}))}
\end{aligned}
\tag{4.201}
$$

Dans le cas d'une faible puissance d'injection, le dénominateur est pratiquement égal à 1, par conséquent :

$$
\begin{aligned}
\omega_i - \omega_s &= \eta\sqrt{1+\alpha_{eff}^2}\left\{|f_T|\sin(\theta_0 + \arg(f_T t_{12}) - \tan^{-1}(\alpha_{eff}))\right. \\
&+ \left.\left|\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\right\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle\right|\sin(\theta_0 + \arg(\left\langle C^t_{\mathcal{N}}\right|\,\Delta\mathcal{N}\rangle + \left\langle C^t_{\mathcal{P}}\right|\,\Delta\mathcal{P}\rangle) - \tan^{-1}(\alpha_{eff}))\right\}
\end{aligned}
\tag{4.202}
$$

Dans le cas d'un laser Fabry-Perot, l'expression est alors :

$$\begin{aligned}\omega_i - \omega_s &= \eta\sqrt{1+\alpha_H^2}\left\{\frac{1}{\tau_{in}\sqrt{r_1 r_2}}\sin(\theta_0 - \tan^{-1}(\alpha_H))\right.\\ &+ \left.\frac{\sqrt{1+\alpha_H}^2}{4\sqrt{r_1 r_2}}\frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}} v_g \Delta\mathcal{N}\sin(\theta_0 - 2\tan^{-1}(\alpha_H))\right\}\end{aligned} \tag{4.203}$$

On constate clairement une expression différente par rapport au cas contra-propagatif.

Notons tous d'abord que le paramètre η est différent puisque dans le cas contrapropagative il représente la racine du rapport entre la puissance entrée en l^- et la puissance sortante en l^-. Or dans le cas co-propagatif, η représente la racine du rapport entre la puissance entrée en 0^+ et la puissance sortante en l^-. Dans le cas d'un laser symétrique sans injection, la puissance sortant par chacune des faces est identique. Cependant dans le cas d'un laser injecté, la puissance n'est plus la même pour les deux faces. Ceci a été théoriquement mis en évidence dans le cas d'un Fabry-Perot [116]. L'asymétrie n'est cependant notable que pour des taux d'injection fort (>-20 dB).

La puissance de sortie du laser varie en fonction de la puissance injectée et du désaccord, et de plus cette variation est fonction de la face considérée. Ce phénomène n'a pas été pris en compte par la plupart des auteurs utilisant la notion de temps de vie du photon, qui consiste à distribuer les pertes des miroirs de sortie et donc à perdre les spécificités géométriques de la cavité. Il apparaît donc nécessaire lors de l'étude de l'injection d'un laser avec une puissance assez forte, de prendre en compte la variation longitudinale de la densité de porteurs et de photons. Ceci implique par conséquent que le taux d'injection n'est plus un paramètre indépendant du désaccord pour l'étude de l'injection.

Le phénomène d'asymétrie est plus facilement compréhensible si l'on considère le laser injecté comme un amplificateur résonnant. Si l'on reprend les équations concernant les champs électriques en éliminant les termes impliquant l'émission spontanée :

$$E^+(l^-,\omega) = \frac{t_{32}E^-_{injR}(l^+,\omega)}{1 - r_L(\omega)r_2} \tag{4.204}$$

et

$$E^+(l^-,\omega) = \frac{t_L t_{12}E^+_{injL}(0^-,\omega)}{1 - r_L(\omega)r_2} \tag{4.205}$$

Par conséquent le terme d'amplification est différent dans les deux cas, le rapport des facteurs d'amplification est t_L/r_L. Comme il dépend de la fréquence, ceci indique que non seulement la puissance est différente, mais de plus le spectre optique sortant par chacune des facettes est différents, c'est à dire l'évolution temporelle, ce qui se traduit par la prise en compte de la dérivée de l'amplitude du champ injecté dans l'équation d'évolution de l'enveloppe dans le cas co-propagatif.

Lorsque le laser est accroché, il est légitime de ne plus faire apparaître le terme correspondant à l'amplification de l'émission spontanée, c'est à dire l'émission propre du laser. En effet, l'accrochage correspond au moment où le gain est saturé par l'onde injectée au dessous du seuil d'émission du laser [134], par conséquent, la puissance à la fréquence propre du laser est comparable à la puissance sous le

seuil. La détermination de la puissance émise en régime accroché nécessite de déterminer la variation de la distribution longitudinale de la densité de porteurs et de la densité de photons par des calculs numériques itératifs.

4.5.6 Linéarisation, bruit d'intensité et bruit de phase

On reprend la méthode de calcul matriciel des densités spectrales de bruit en posant les notations suivantes :

$$k_l = \eta \left| f_T \right| / 2\pi \tag{4.206}$$

$$k_c = k_l \cos(\theta_0 + \arg(f_T)) \tag{4.207}$$

$$k_s = k_l \sin(\theta_0 + \arg(f_T)) \tag{4.208}$$

$$\chi_t = \left| \frac{f_T}{f_t} \right| \tag{4.209}$$

$$\chi_c = \chi_t \cos\left(\theta_0 + \arg\left\{\frac{f_T}{f_t}\right\}\right) \tag{4.210}$$

$$\chi_s = \chi_t \sin\left(\theta_0 + \arg\left\{\frac{f_T}{f_t}\right\}\right) \tag{4.211}$$

$$\xi_{\mathcal{N}c} = \eta \left| C^t_{\mathcal{N}} \right| \cos\left(\arg\{C^t_{\mathcal{N}}\} + \theta_0\right) \tag{4.212}$$

$$\xi_{\mathcal{N}s} = \eta \left| C^t_{\mathcal{N}} \right| \sin\left(\arg\{C^t_{\mathcal{N}}\} + \theta_0\right) \tag{4.213}$$

$$\xi_{\mathcal{P}c} = \eta \left| C^t_{\mathcal{P}} \right| \cos\left(\arg\{C^t_{\mathcal{P}}\} + \theta_0\right) \tag{4.214}$$

$$\xi_{\mathcal{P}s} = \eta \left| C^t_{\mathcal{P}} \right| \sin\left(\arg\{C^t_{\mathcal{P}}\} + \theta_0\right) \tag{4.215}$$

$$\begin{aligned}
d_{11} &= -k_c - \left[\langle \xi_{\mathcal{N}c} | \, \Delta\mathcal{N}_0 \rangle + \langle \xi_{\mathcal{P}c} | \, \Delta\mathcal{S}_0 \rangle\right] \\
&\quad - \left[\langle \xi_{\mathcal{P}c} | \left(1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\right)^{-1} | 2\mathcal{P}_0 \rangle + j\omega \langle \xi_{\mathcal{P}c} | \left(1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\right)^{-1} | H_I \rangle\right] + \chi_s(\omega_i - \omega_s) \\
d_{12} &= -2I_0 \left\{k_s + \left[\langle \xi_{\mathcal{N}s} | \, \Delta\mathcal{N}_0 \rangle + \langle \xi_{\mathcal{P}s} | \, \Delta\mathcal{P}_0 \rangle\right]\right. \\
&\quad \left. + j\omega \langle \xi_{\mathcal{P}c} | \left(1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\right)^{-1} | H_\phi \rangle + \chi_c(\omega_i - \omega_s)\right\} \\
d_{13} &= 2I_0 \langle \xi_{\mathcal{N}c} | + 2I_0 \langle \xi_{\mathcal{P}c} | \mathfrak{M} \\
d_{21} &= \frac{1}{2I_0} \left\{ \quad k_s + \left[\langle \xi_{\mathcal{N}s} | \, \Delta\mathcal{N}_0 \rangle + \langle \xi_{\mathcal{S}s} | \, \Delta\mathcal{S}_0 \rangle\right]\right. \\
&\quad \left. - \left[\langle \xi_{\mathcal{P}s} | \left(1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\right)^{-1} | \mathcal{P}_0 \rangle + \frac{j\omega}{2} \langle \xi_{\mathcal{P}s} | \left(1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\right)^{-1} | H_I \rangle\right] + \chi_c(\omega_i - \omega_s)\right\} \\
d_{22} &= k_c + \langle \xi_{\mathcal{N}c} | \, \Delta\mathcal{N}_0 \rangle + \langle \xi_{\mathcal{P}c} | \, \Delta\mathcal{P}_0 \rangle + j\omega \langle \xi_{\mathcal{P}s} | \left(1 - \mathfrak{M}_{\mathcal{P}}\right)^{-1} | H_\phi \rangle - \chi_s(\omega_i - \omega_s) \\
d_{23} &= \langle \xi_{\mathcal{N}s} | + \langle \xi_{\mathcal{P}s} | \mathfrak{M}
\end{aligned} \tag{4.216}$$

$$\begin{aligned}
c_{11} &= \frac{I_0}{I_{in0}}\left\{k_c + [\langle\xi_{\mathcal{N}c}|\,\Delta\mathcal{N}_0\rangle + \langle\xi_{\mathcal{P}c}|\,\Delta\mathcal{P}_0\rangle] - \chi_s(\omega_i-\omega_s)\right\} + j\omega\chi_c \\
c_{12} &= -2I_0\left\{k_s + [\langle\xi_{\mathcal{N}s}|\,\Delta\mathcal{N}_0\rangle + \langle\xi_{\mathcal{P}s}|\,\Delta\mathcal{P}_0\rangle] + \chi_c(\omega_i-\omega_s) + j\omega\chi_s\right\} \\
c_{21} &= \frac{1}{2I_{in0}}\left\{k_s + [\langle\xi_{\mathcal{N}s}|\,\Delta\mathcal{N}_0\rangle + \langle\xi_{\mathcal{P}s}|\,\Delta\mathcal{P}_0\rangle] + \chi_c(\omega_i-\omega_s) + j\omega\chi_s\right\} \\
c_{22} &= k_c + [\langle\xi_{\mathcal{N}c}|\,\Delta\mathcal{N}_0\rangle + \langle\xi_{\mathcal{P}c}|\,\Delta\mathcal{P}_0\rangle] - \chi_s(\omega_i-\omega_s) + j\omega\chi_c
\end{aligned} \tag{4.217}$$

4.5.7 Commentaires

On constate tout d'abord que les coefficients d_{ij}, propres à la modification du bruit par l'injection, dépendent maintenant de la structure du laser et qu'ils sont modifiés comme la plage d'accrochage par le facteur χ_t. Il y de plus de nouveaux coefficients concernant l'influence de la densité de porteurs sur la puissance et la phase (d_{13} et d_{13}).

Les coefficients de couplage des bruits du laser maître sont eux aussi modifiés, et présentent dorénavant une partie proportionnelle à ω, ce qui indique donc que pour des fréquences très hautes, le bruit du maître peut être transmis, comme il s'agit d'une des conséquences du facteur χ_t, on peut assimiler ceci à un effet de résonance de la cavité.

4.6 Résultats numériques

4.6.1 Introduction

Nous présentons ci-dessous un certain nombre de résultats numériques concernant les lasers DFB dont la face de sortie est traitée anti-reflet. Les paramètres étudiés sont les facteurs complexes de couplage, dans le cas contrapropagatif f_R et le cas copropagatif f_T, ainsi que le facteur χ_t spécifique au cas contrapropagatif. Une attention particulière est portée au cas du laser DFB dont le mode est dans la bande interdite.

Influence de la réflectivité et du facteur de couplage

La figure 4.4 présente la valeur du module du facteur de couplage dans le cas de l'injection contrapropagative en fonction du couplage au réseau et pour différentes valeurs de réflectivité de la face opposée. Cette valeur est normalisée par l'intervalle spectral libre de la cavité Fabry-Perot de même longueur que le réseau de Bragg. On remarque l'effet du changement de mode pour $r_1 = 0.565$ à $\kappa.l = 1.75$ et pour $r_1 = 0.775$ à $\kappa.l = 3.25$ le changement de mode correspond à un changement de signe du désaccord en fréquence du mode dominant par rapport à la fréquence Bragg. On constate donc que les valeurs de f_R normalisées se repartissent sur deux courbes, la plus haute correspondant, pour des réflectivités positives, à un mode dominant de longueur d'onde inférieure à Λ_{Bragg}. De plus, sur la figure 4.6, on observe une rotation de la phase de f_R de près de 180°entre les deux modes. L'influence de la phase de f_R est

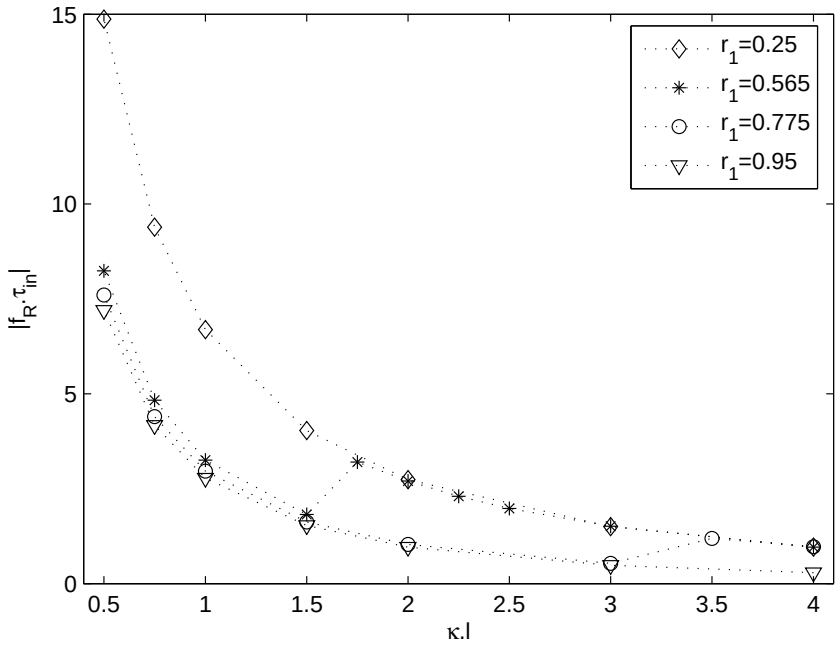

FIG. 4.4 – Intervalle spectral libre vu par l'onde injectée (f_R), normalisé par l'intervalle spectral libre de la cavité $(1/\tau_{in})$

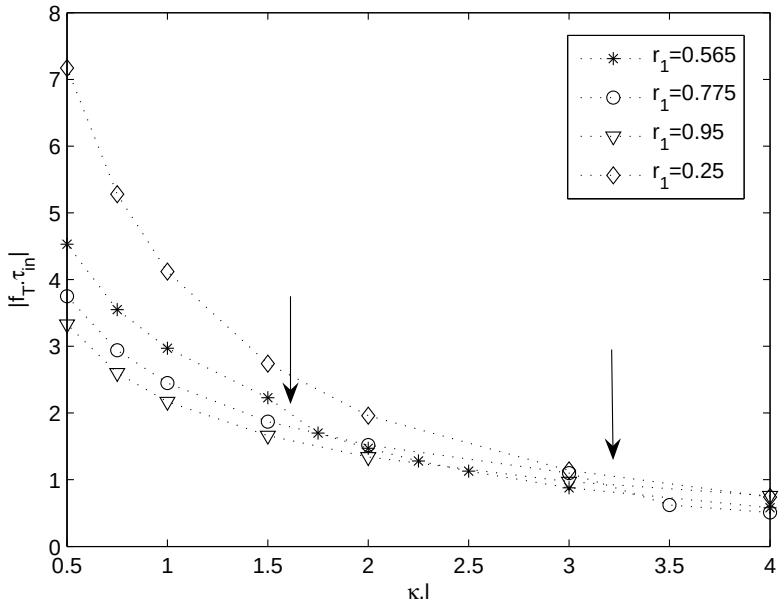

FIG. 4.5 – Intervalle spectral libre vu par l'onde injectée normalisé par l'intervalle spectral libre de la cavité $(1/\tau_i)$

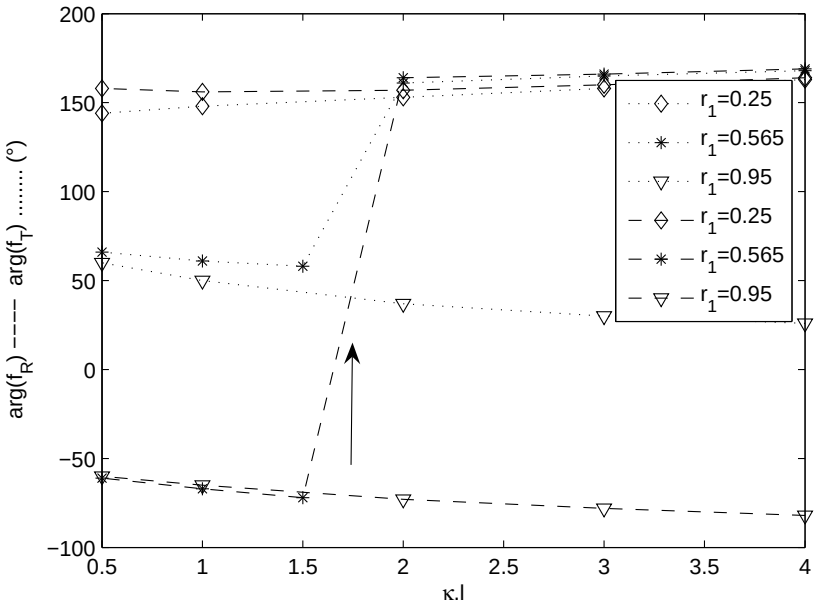

FIG. 4.6 – Argument des intervalles spectraux libres complexes vus dans le cas co et contra-propagatif

principalement notable dans le décalage qu'elle introduit entre la phase du laser maître et la phase du laser esclave accroché.

La valeur de de $|f_R/\tau_i|$ pour un laser Fabry-Perot à facettes clivées de réflectivité -0.565 est de 1.8. Par conséquent, pour des constantes de couplage normalisées inférieures à 1.5 , le facteur de couplage en injection par la face anti-réfléchissant sera supérieur à celui d'un Fabry-Perot à facettes clivées (dans la limite d'une réflectivité opposée inférieure à 95%). Par contre pour des couplages plus forts et des valeurs moyennes de la réflectivité opposée, le facteur de couplage est inférieur à celui d'un laser Fabry-Perot standard. En effet pour de fort paramètre de couplage du réseau, l'influence des conditions aux extrémités est plus faible, d'ailleurs les $|f_R/\tau_i|$ pour chacune des reflectivités tendent vers zéro pour un très fort couplage, alors que pour un couplage normalisé de 0.5, on obtient un rapport du simple au double entre les deux courbes.

On constate donc que pour de faibles valeurs de la constante de couplage du réseau, la réflectivité de la face opposée et son mode associé influence grandement l'efficacité de couplage externe de l'onde injectée, tandis que pour des fortes valeurs de couplage du réseau, l'efficacité de couplage externe de l'onde injectée tend vers zéro quelle que soit la réflectivité opposée.

La figure 4.5 présente la valeur du module du facteur de couplage dans le cas de l'injection copropagative en fonction du couplage au réseau et pour différentes valeurs de réflectivité de la face opposée. Il est à rappeler que cette valeur n'inclut pas le facteur de transmission de la face d'entrée donné par :

$$|t_{12}| = \sqrt{\frac{n_1}{n_2}(1 - |r_1|^2)} \tag{4.218}$$

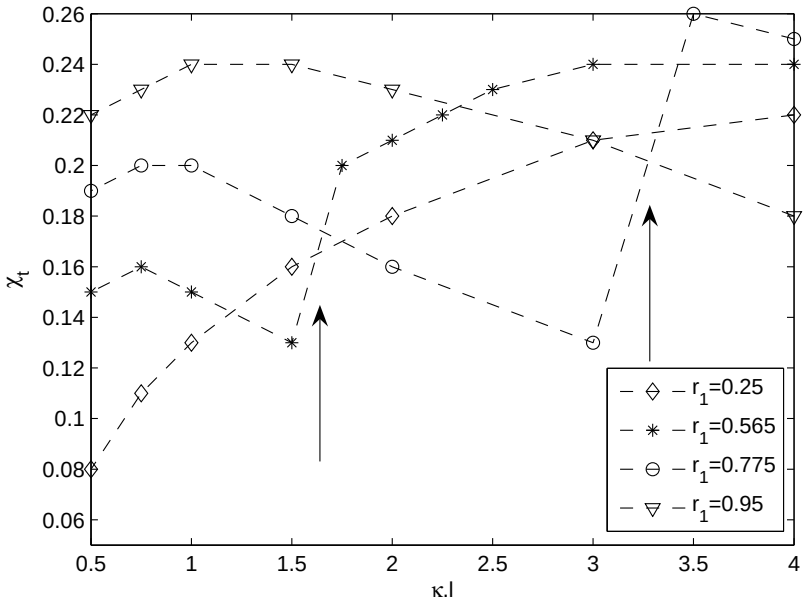

FIG. 4.7 – Paramètre χ_t en fonction du coefficient de couplage

Pour un laser Fabry-Perot à facettes clivées, le facteur de couplage est de 1.8. Par conséquent, pour une réflectivité r_1 supérieure à celle de la facette clivée, le facteur de couplage du laser DFB devient inférieur à celui du laser Fabry-Perot lorsque le couplage au réseau est supérieur à 1.7. L'effet du changement de position du mode dans les cas r_1=0.775 et 0.565 signalé par deux flèches est beaucoup plus faible que dans le cas du facteur de couplage contrapropagatif. On constate de plus sur la figure 4.6 que la différence de phase entre le mode à droite du mode Bragg et le mode à gauche du mode Bragg est environ moitié moindre que celle observée dans le cas contra-propagatif.

Si l'on s'intéresse maintenant au paramètre χ_t spécifique à l'injection co-propagative, on constate tout d'abord sur la figure 4.8 que les valeurs sont beaucoup plus dispersées que celles de f_R et f_T. Dans le cas d'un mode à gauche du mode Bragg (r_1=0.95, r_1=0.775 et $\kappa.l > 1.7$, $r_1 = 0.565$ et $\kappa.l > 3.2$), la valeur de χ_t croît avec la valeur de $\kappa.l$ alors que dans le cas inverse d'un mode à droite du mode Bragg (r_1=0.25, r_1=0.775 et $\kappa.l < 1.7$, $r_1 = 0.565$ et $\kappa.l < 3.2$), la valeur de χ_t décroît quand $\kappa.L$ croît [8]. La valeur de χ_t pour un laser Fabry-Perot à facettes clivées est de 0.9, par conséquent, l'effet spécifique lié à χ_t est nettement plus présent dans un Fabry-Perot que dans la structure DFB étudiée. En ce qui concerne la phase associée à χ_t, elle suit un comportement comparable à celui de l'argument de f_R.

[8]En fait ce n'est pas le fait d'être à gauche ou à droite mais d'être dans le mode κ_0 ou κ_∞, c'est à dire être du même coté que dans le cas $\kappa \to 0$ ou $\kappa \to \infty$.

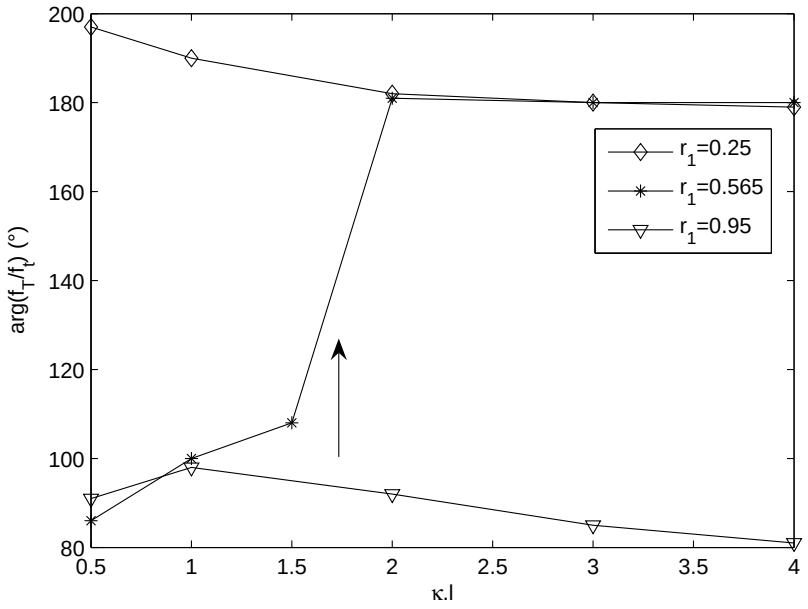

FIG. 4.8 – Déphasage entre f_T et f_t

4.6.2 Cas du mode dans la bande interdite

Nous venons d'étudier quantitativement le cas d'une réflectivité r_1 réelle. La valeur des paramètres est identique pour r_1 et $-r_1$, seule la position du mode par rapport au mode de Bragg change.

Intéressons nous maintenant au cas du laser dont la réflectivité est purement imaginaire , ceci correspond à un mode au centre de la bande interdite [106].

La figure 4.9 présente les paramètres f_R, f_T normalisés et χ_t ainsi que le gain au seuil α_0 normalisé, en fonction de la valeur du module du facteur de réflexion r_1. Nous n'avons pris en compte que les valeurs de la réflectivité pour lesquelles le mode de Bragg est le mode de seuil le plus bas, ce qui explique la différence de plage en abcisse pour les deux coefficients de couplage au réseau considérés, $\kappa.l = 1$ et $\kappa.l = 0.7$. On constate tout d'abord sur les valeurs de f_R, qu'elles varient considérablement suivant les valeurs de la réflectivité. On constate notamment une résonance au niveau de la valeur $r_1 = j0.487$ pour $\kappa.l = 1$ et $r_1 = j0.62$ pour $\kappa.l = 0.7$. En comparaison, d'après la figure 4.4, dans le cas d'une réflectivité réelle, la valeur normalisée du module de f_R s'étant de 4.5 à 9.5 pour $\kappa.l$=0.7 et de 2.5 à 7 pour $\kappa.l = 1$. Pour les fortes valeurs de r_1, le facteur de couplage est près de deux ordres de grandeur en dessous du facteur du Fabry-Perot à faces clivées. Ceci signifie donc que dans le cas d'un tel laser on peut, en choisissant la valeur de réflectivité appropriée, le rendre extrêmement sensible à l'injection optique, avec par conséquent des plages d'accrochages extrêmement grandes pour des taux d'injection faible, ou au contraire le rendre presque insensible à l'injection optique avec des plages d'accrochage très limitées.

On ne retrouve pas la même dynamique de résultat en ce qui concerne le facteur de couplage dans

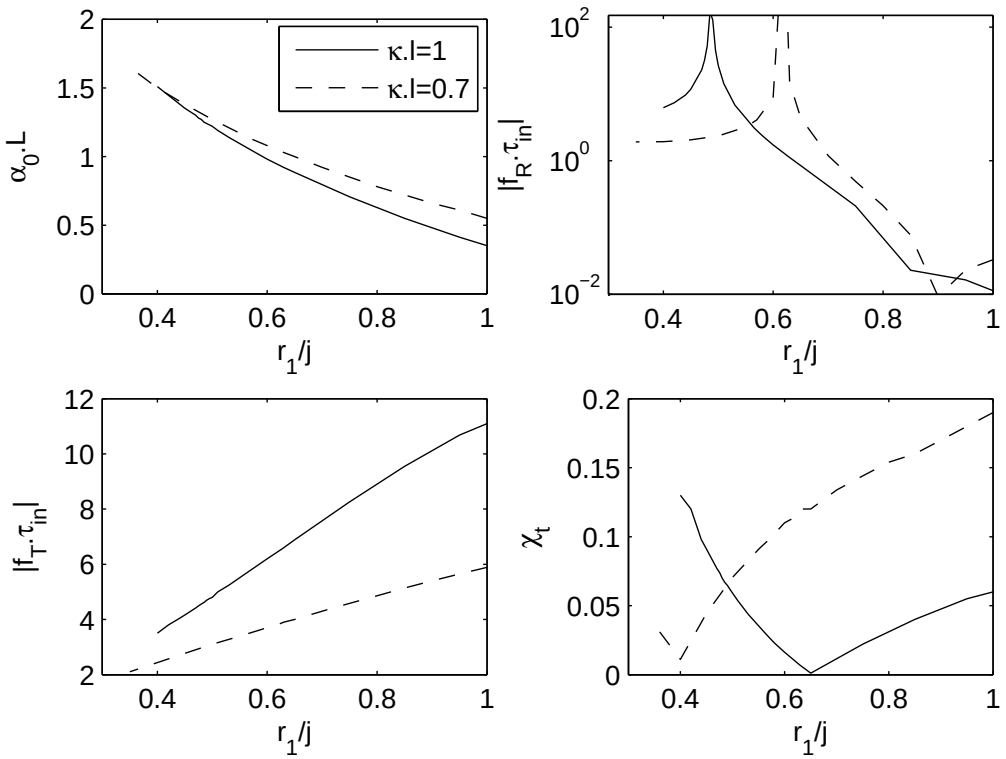

FIG. 4.9 – Paramètre de seuil et d'injection en fonction de la réflectivité

le configuration copropagative. On constate cependant que le facteur croît avec la réflectivité, ce qui est l'inverse du cas r_1 réel. De plus la sensibilité au coefficient de couplage est supérieure à celle observée dans le cas réel.

En ce qui concerne le paramètre χ_t, les valeurs restent toujours sensiblement inférieures à celle du laser Fabry-Perot à facettes clivées. Le rebroussement de la courbe est dû en fait au changement de signe de f_T/f_t. Pour chacune des valeurs de $\kappa.l$ il existe une valeur de la réflectivité pour laquelle χ_t est nul.

Influence de la phase du coefficient de réflexion

Nous avons constaté un grand nombre de changement dans les paramètres d'injection du laser entre le cas d'une réflectivité réelle et le cas d'une réflectivité imaginaire pure. Nous allons donc maintenant étudier les paramètres en fonction de la phase de la réflectivité, à l'aide la figure 4.10.

Afin de compléter la carte des modes établie dans le chapitre sur les DFB, nous avons tout d'abord représenté le désaccord au mode Bragg et le gain au seuil en fonction de la phase de la réflectivité.

Si l'on s'intéresse aux valeurs du facteur de couplage contrapropagatif, on constate qu'il croît quasi quadratiquement autour de la valeur minimum atteinte dans le cas du mode Bragg ($\pi/2$). Par conséquent, un écart de quelques degrés de l'axe imaginaire fait varier le facteur de couplage de manière importante.

En ce qui concerne le facteur de couplage dans le cas copropagatif, le mode de Bragg correspond à

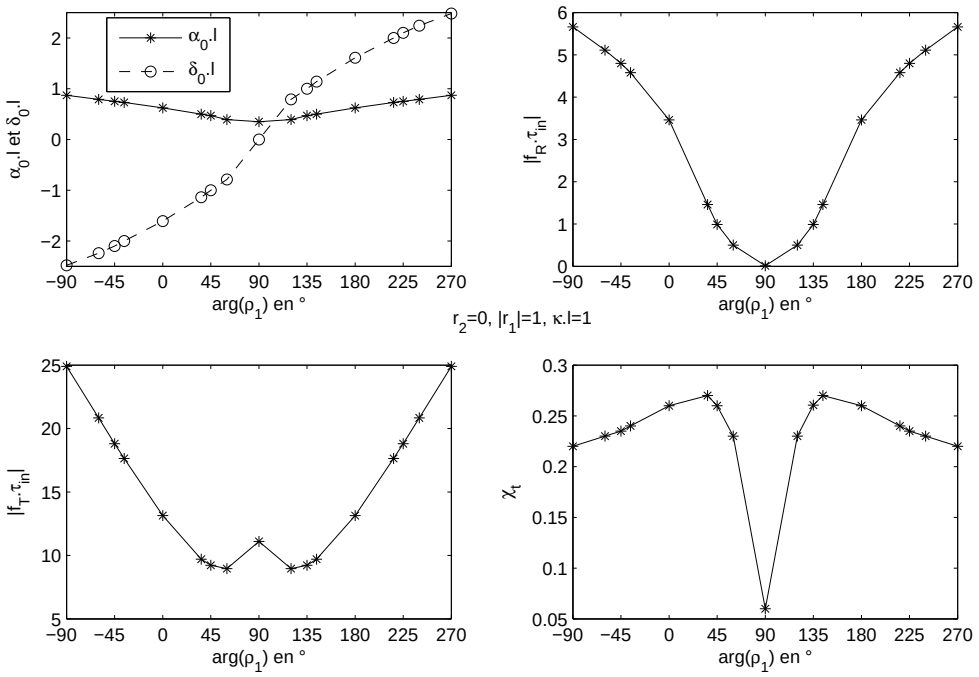

FIG. 4.10 – Influence de la phase de la réflectivité sur les paramètres du mode et de l'injection

un maximal local. Un écart de 45 ˚à l'axe imaginaire fait alors décroître le facteur de couplage jusqu'à environ 30 %. Entre 45˚et -90˚et entre 135˚et 270˚, le facteur de couplage dépend quasi linéairement de la phase de la réflectivité.

Enfin, le mode de Bragg apparaît comme minimum pour le paramètre χ_t. Celui-ci reste toujours inférieur au cas du Fabry-Perot faces clivées. Comme pour le facteur f_R, la sensibilité à la phase autour du mode Bragg est importante.

Mesures expérimentales

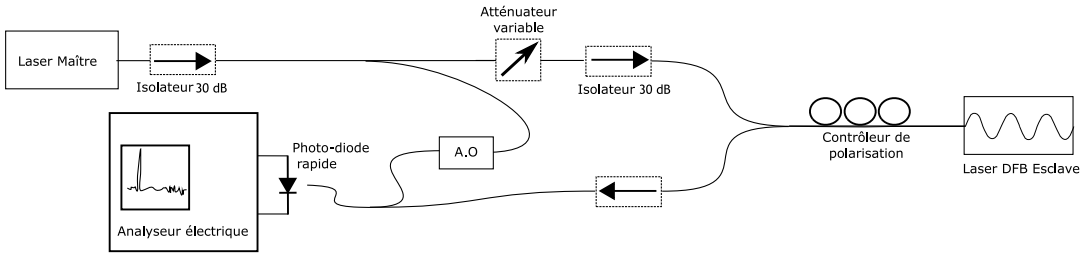

FIG. 4.11 – Montage de mesure de la plage d'accrochage

L'analyse théorique ayant été réalisée tardivement, nous n'avons pu procéder à de nombreuses mesures, d'autant plus que nous ne disposions que de lasers de même type. Nous ne donnerons donc ici que

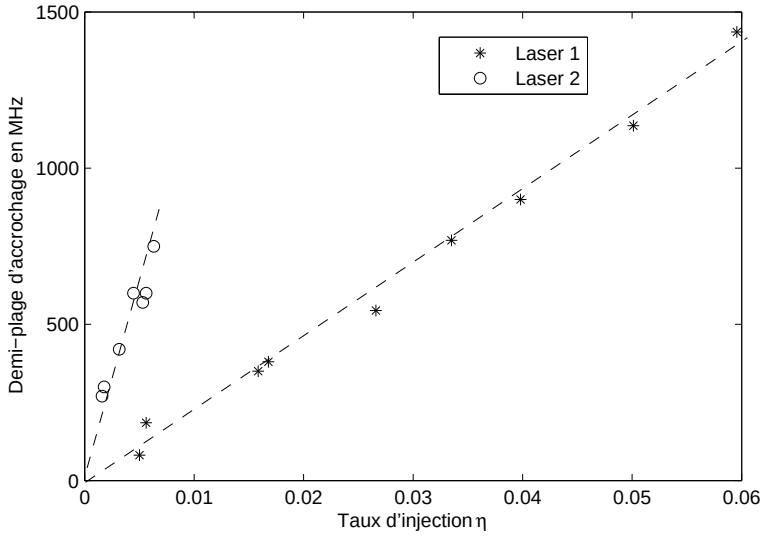

FIG. 4.12 – Demi largeur d'accrochage en fonction du taux d'injection

deux exemples de mesures du paramètre f_R effectuées sur nos deux lasers esclaves.

Le critère d'accrochage utilisé est basé sur l'observation du battement maître esclave décalé en fréquence de 100 MHz grâce à une cellule acousto-optique (figure 4.11). Lorsque le laser esclave est accroché, on observe à l'analyseur de spectre électrique une raie fine à 100 MHz car les deux fréquences sont exactement identiques. Lorsque le laser n'est plus accroché, on observe le battement entre le laser maître et le laser esclave décalé en fréquence. En vérité, lorsque l'on est proche de la zone d'accrochage, ce battement ne s'effectue pas à la fréquence de l'esclave libre, par conséquent pour connaître la vraie valeur du désaccord, il faut entièrement supprimer l'injection [119] [135].

La pente des deux séries de points présentées sur la figure 4.12 donne des valeurs de f_R de 23.5 GHz et 91 GHz. Le mode principal des deux lasers se situe dans la zone de Bragg et le facteur de couplage au réseau mesuré est de 0.7. Pour des lasers DFB AR/HR, l'analyse numérique prédit donc une valeur de f_R beaucoup plus basse (figure 4.9). Cependant les deux lasers utilisés présentent en fait deux sections ainsi qu'il a été exposé dans le chapitre Laser DFB. Par conséquent, vu la sensibilité des résultats numériques aux divers paramètres, il semble difficile de comparer les deux types de résultats.

4.7 Conclusion

Nous avons effectué, à notre connaissance, la première étude théorique de l'injection optique prenant en compte les spécificités de la cavité laser et le sens de l'injection. Nous avons notamment déterminé théoriquement et analysé numériquement l'expression du facteur de couplage et ainsi apporté des corrections à l'expression de R. Lang. Nous avons de plus mis en évidence un comportement spécifique à l'injection par la face opposée à la face de sortie. Nous avons enfin déterminé sous forme matricielle les

expressions littérales des densités spectrales de puissance des bruits d'intensité, de phase et de porteurs du laser accroché.

Un important travail reste cependant à faire pour compléter l'étude, incluant l'analyse de la stabilité de l'accrochage, l'étude numérique des densités spectrales et surtout l'étude expérimentale de l'injection co-propagative.

Dans le chapitre suivant, nous allons aborder l'étude des battements lasers par le biais de l'étude des interférences spatiales d'Young.

Chapitre 5

Battements temporels et spectraux : analogie avec les interférences spatiales et l'optique de Fourier

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une approche originale de l'étude de la génération d'onde radio par battement laser, basée sur l'analogie avec les dispositifs interférométriques de type "trous d'Young" et à l'aide de l'optique de Fourier [136]. Nous allons tout d'abord étudier les caractéristiques des franges d'Young classiques et l'influence de plusieurs paramètres pouvant modifier leurs formes, ceci dans le cas de la division ou de la duplication du front d'onde. En second lieu, nous allons transposer l'expérience de l'espace spatial à l'espace temporel afin d'étudier les interférences produites entre deux ondes décalées temporellement puis décalées fréquentiellement. Nous montrerons ainsi que l'onde électrique périodique obtenue par détection du battement de deux lasers correspond à des franges d'Young. En utilisant les résultats obtenus dans le domaine spatial, nous retrouvons dans le domaine temporel un certain nombre de phénomènes et de techniques vus ainsi sous un autre aspect.

5.2 Rappel sur les phénomènes interférométriques spatiaux

5.2.1 Les franges d'Young

Les phénomènes d'interférences sont intimement liés à la nature ondulatoire des ondes. L'une des premières expériences historiques est celle de Thomas Young. Le principe en est le suivant : une onde plane éclaire perpendiculairement un écran percé de deux petits trous. On observe l'éclairement sur un écran placé à grande distance du premier ou mieux encore sur un écran placé au foyer d'une lentille située après les trous, (figure 5.1). Une modulation de l'éclairement optique est alors présente sur l'écran

selon l'axe parallèle à celui défini par les deux trous. La période spatiale de cette modulation est $\lambda D/a$ où a est la distance entre les deux trous, λ la longueur d'onde de l'onde lumineuse et D la distance entre les deux écrans (dans le cas de l'observation au foyer d'une lentille de focale f la période est $\lambda f/a$). Une des méthodes pour expliquer ce phénomène est de considérer les longueurs des chemins optiques parcourus par les ondes sortant du premier ou du second trou et aboutissant en un même point d'altitude y' de l'écran d'observation, la différence des longueurs donnant la différence de marche optique $\delta(y')$ conduisant à l'éclairement $I(y') = I_0(1 + \cos(2\pi\delta(y')/\lambda))$.

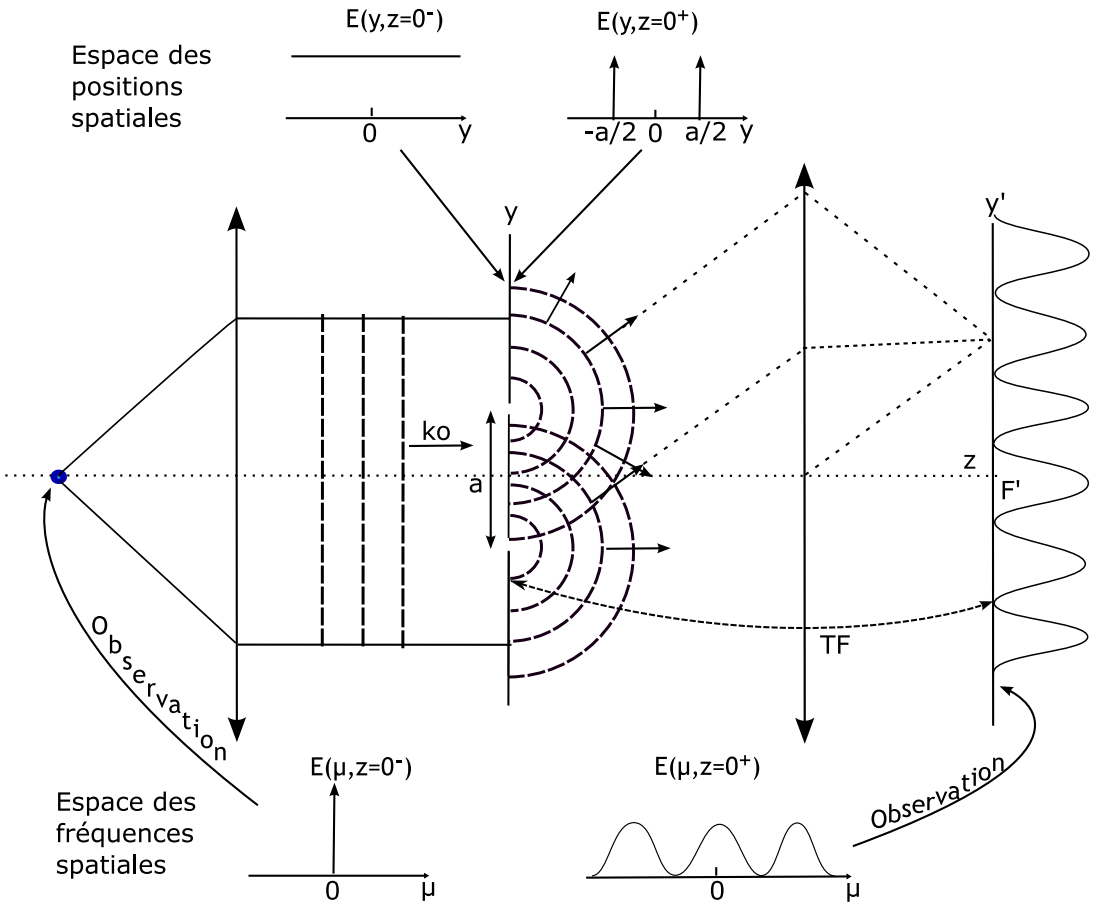

FIG. 5.1 – Schéma de montage des trous d'Young

5.2.2 Trous d'Young en optique de Fourier

Nous proposons d'analyser les interférences d'Young dans le cadre de l'optique de Fourier. Le champ optique peut être vu comme une fonction du plan (x, y) où du plan (η, μ), variables conjugués de (x, y) pour la transformation de Fourier (coordonnées des fréquences spatiales). On étudie donc soit $E(x, y)$ soit $\tilde{E}(\eta, \mu)$. L'origine de l'axe longitudinal z est prise au niveau de l'écran percé. Revenons maintenant à l'expérience de Young. L'onde incidente sur l'écran percé est plane, on considère de plus qu'elle est d'étendu infinie ou du moins grande devant a (on l'obtient en pratique, par exemple, à l'aide d'un trou

source et d'un collimateur). La répartition du champ dans le plan transverse est uniforme et la répartition dans le plan de Fourier est donc concentrée en zéro sous la forme d'un pic de Dirac. Si l'on considère maintenant la distribution du champ juste après l'écran percé, celle-ci est grandement modifiée puisque qu'elle se réduit à deux zones de très faibles dimensions. En considérant les trous comme très petits devant la longueur d'onde, le champ peut être exprimé par la formule suivante[1] :

$$E(x, y, z = 0^+) = E_0\delta(y - a/2) + E_0\delta(y + a/2) \tag{5.1}$$

Si l'on considère maintenant la répartition dans le plan de Fourier :

$$\tilde{E}(\eta, \mu, z = 0^+) = E_0 e^{j\pi\mu a} + E_0 e^{-j\pi\mu a} = 2E_0 \cos(\pi\mu a) \tag{5.2}$$

$z = 0$ représente l'abscisse de l'écran percé. En se propageant dans l'espace situé après l'écran percé, le champ se diffracte. Dans le cas d'une observation du champ proche, c'est la théorie de la diffraction de Fresnel qui est associée, dans le cas d'une observation lointaine, c'est la diffraction de Fraunhoffer. Dans ce dernier cas, la diffraction s'identifie à une transformation de Fourier du champ, le résultat sera d'ailleurs plus exact en utilisant une observation au foyer d'une lentille, c'est à dire en observant le champ à l'infini. Par conséquent, on obtient sur l'écran d'observation une distribution du champ proportionnelle à la distribution du champ dans l'espace de Fourier au niveau des trous. L'éclairement est proportionnel au carré du module de la transformée de Fourier :

$$I(F') \propto |\tilde{E}(\eta, \mu, z = 0)|^2 \propto \cos^2(\pi\mu a) \propto (1 + \cos(2\pi\mu a)) \tag{5.3}$$

Dans la théorie de la diffraction de Fraunhoffer, les angles correspondent aux fréquences spatiales donc à (η, μ), on démontre ainsi la correspondance $\mu = y'/(f\lambda)$, avec y' au niveau du plan focal de la lentille, ce qui permet de retrouver la formule :

$$I(y', F') = I_0 \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{a\, y'}{f\lambda}\right)\right) \tag{5.4}$$

où la période (interfrange) est bien $\lambda f/a$.[2]

5.2.3 Influence de la corrélation entre les deux trous

Revenons maintenant sur les hypothèses faites dans la première partie : nous avons supposé l'onde incidente plane c'est à dire caractérisée par une unique direction de propagation, et de dimension transverse infinie. Ces deux hypothèses n'en sont qu'une seule car le principe de diffraction de Fraunhoffer implique que si le faisceau est limité par une pupille, il va se diffracter lors de sa propagation, donc il

[1] On ne peut en fait physiquement associer des trous infiniment petits à une distribution de Dirac, car des trous infiniment petits ne peuvent pas transmettre d'énergie, cependant on ne prend pas ici en considération la quantité de flux transmise

[2] Dans cette analyse on voit que l'écran agit comme un filtre dans l'espace spatial, de fonction de transfert $h(x, y) = \delta(y - a/2) + \delta(y + a/2)$ ce qui donne une réponse percussionnelle dans l'espace spatio-fréquentiel, c'est à dire une réponse à une impulsion spatio-fréquentielle : $\tilde{h}(\eta, \mu) = 2\cos(\pi\mu a)$ qui vient convoluer la distribution de Fourier du champ.

sera composé de différentes directions de propagation. De plus la distribution du champ dans le plan transverse peut être entachée d'un bruit spatial. On considère donc maintenant que le champ incident possède une certaine étendue dans le plan de Fourier $\tilde{E}_0(\eta,\mu)$, étendue pouvant résulter de la taille finie du faisceau (détail géométrique), de la cohérence spatiale partielle de la source (Cf. théorème de Zernike-Van Cittert), ou d'un bruit plus local dû à la présence d'une plaque dépolie ou de fluctuation de l'indice de l'air (dans ce dernier cas on parle de speckle à cause de l'aspect tacheté ou granuleux du champ dans l'espace de Fourier).

Le champ juste au niveau des trous, voir figure 5.2, est maintenant exprimé de la manière suivante :

$$E(x,y,z=0^+) = E_0(a/2)\delta(y-a/2) + E_0(-a/2)\delta(y+a/2) \tag{5.5}$$

D'après les limitations énoncées précédemment, $E_0(a/2)$ et $E_0(-a/2)$ peuvent avoir un module ou une phase différente à cause d'un front d'onde non uniforme et n'être pas totalement statistiquement corrélés :

$$\langle E_0(a/2)E_0^*(a/2)\rangle \leq \sigma_{E_0(a/2)}\sigma_{E_0(-a/2)} \tag{5.6}$$

Après propagation dans l'espace libre et conjugaison de l'infini par la lentille, on obtient l'éclairement suivant sur l'écran d'observation :

$$\begin{aligned} I(x',y',F') &\propto \left\langle |\tilde{E}(\eta,\mu,z=0)|^2 \right\rangle \propto |E_0(a/2)e^{j2\pi\mu a} + E_0(-a/2)e^{-j2\pi\mu a}|^2 \\ &\propto |E_0|^2(a/2) + |E_0|^2(-a/2) + 2\underbrace{\langle E_0(a/2)E_0(-a/2)\rangle}_{(a)}\cos(\pi\frac{y\,a}{f\lambda}) \end{aligned} \tag{5.7}$$

Il apparait en (a) la fonction d'auto-corrélation spatiale : $\langle E_0(a/2)E_0(-a/2)\rangle$ venant déterminer l'amplitude du terme d'interférence en $\cos(\pi\frac{y\,a}{f\lambda})$. La corrélation entre les champs en $a/2$ et $-a/2$ vient donc directement agir sur le contraste des franges observées. Si la distance des trous est bien supérieure à la distance de corrélation spatiale transverse de l'onde incidente, alors il n'y a pas de frange stable.

5.2.4 Influence de la taille des trous et de la densité spectrale spatiale du champ

Considérons maintenant la nature finie des trous associée aux fluctuations spatiales du champ. On néglige tout d'abord les fluctuations au niveau de la surface de chaque trou et l'on note la fonction d'ouverture des trous (supposés identiques) par $T(x,y)$:

$$E(x,y,z=0^+) = E_0(0,a/2)T(x,y-a/2) + E_0(0,-a/2)T(x,y+a/2) \tag{5.8}$$

$$\tilde{E}(\eta,\mu,z=0^+) = E_0(a/2)\tilde{T}(\eta,\mu)e^{j2\pi\mu a} + E_0(-a/2)\tilde{T}(\eta,\mu)e^{-j2\pi\mu a} \tag{5.9}$$

donc

$$I(x',y',F') \propto \underbrace{\left|\tilde{T}\left(\frac{x'}{f\lambda},\frac{y'}{f\lambda}\right)\right|^2}_{(a)} \left[|E_0|^2(a/2) + |E_0|^2(-a/2) + 2\langle E_0(a/2)E_0(-a/2)\rangle\cos\left(2\pi\frac{y'\,a}{f\lambda}\right)\right] \tag{5.10}$$

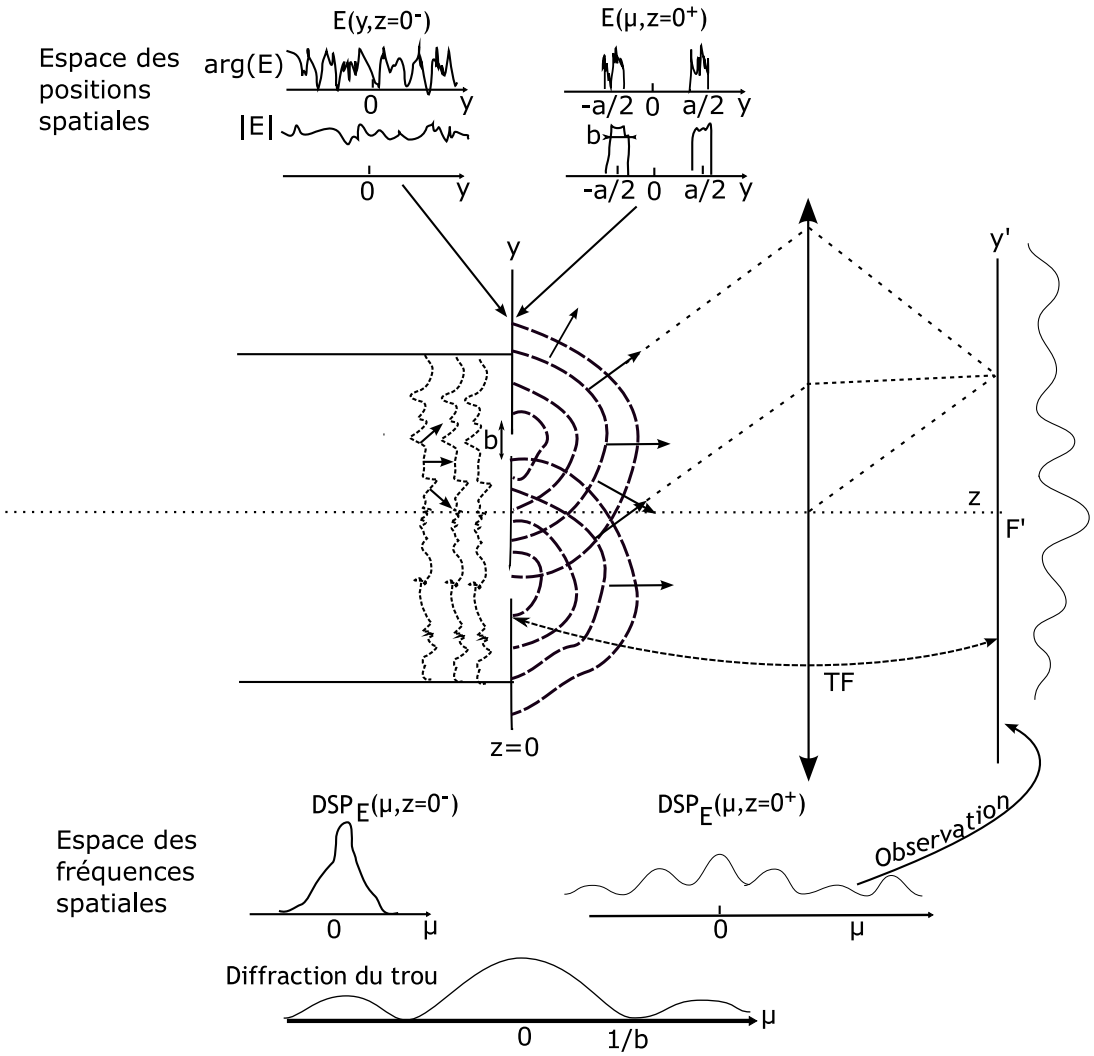

FIG. 5.2 – Schéma de montage des trous d'Young avec un front d'onde incident bruité et des trous de taille non nulle

L'intensité des franges est maintenant modulée par une enveloppe (a) identique à la figure de diffraction du trou, résultat bien connu.

Prenons maintenant également en compte le bruit de haute fréquence spatiale ; le champ à l'intérieur de chaque pupille est donc aléatoire.

On considère tout d'abord un seul trou :

$$E(x,y,z=0^+) = E_0(x,y)T(x,y-a/2) \tag{5.11}$$

$$\tilde{E}(\eta,\mu,z=0^+) = \tilde{E}_0(\eta,\mu) * \left[\tilde{T}(\eta,\mu)e^{-j\pi a\mu}\right] \tag{5.12}$$

Calculons alors la moyenne de l'éclairement sur l'écran :

$$I(x',y',F') \propto \left\langle \left|\tilde{E}(\eta,\mu,z=0^+)\right|^2 \right\rangle = DSP(E_0) * \left|\tilde{T}\right|^2 \left(\frac{x'}{f\lambda},\frac{y'}{f\lambda}\right) \tag{5.13}$$

La densité spectrale de puissance du champ est la transformé de Fourier de la fonction d'auto-corrélation spatiale du champ supposé stationnaire à l'ordre 2. [3]

Si l'on considère maintenant les deux trous, alors la moyenne de l'éclairement sur l'écran sera composée de la somme des éclairements de chacun des trous (a) et d'un terme d'interférence (b) :

$$I(x', y', F') \propto \underbrace{DSP(E_0)}_{(d)} * \left[\underbrace{\left|\tilde{T}\right|^2 \left(\frac{x'}{f\lambda}, \frac{y'}{f\lambda}\right)}_{(c)} \left(\underbrace{1}_{(a)} + \underbrace{\cos\left(2\pi \frac{a\, y'}{f\lambda}\right)}_{(b)} \right) \right] \tag{5.14}$$

On retrouve la modulation spatiale de l'intensité (b) et l'enveloppe due à la diffraction des trous (c), cependant ces franges sont convoluées par la densité spectrale de puissance du champ (d) qui agit donc comme un filtre brouillant les franges. Ainsi, si la densité spectrale de puissance est de diamètre bien supérieur à la période des franges, c'est à dire si le diamètre de corrélation est inférieur à la distance entre les trous, les franges disparaissent par « étalement ». On retrouve donc bien une généralisation du résultat énoncé précédemment section 5.2.3.[4]

L'un des points importants à souligner est que chaque trou est éclairé par une portion différente du front d'onde de l'onde plane incidente, on appelle ce type d'interférences, interférences à division du front d'onde par opposition aux interférences à division d'amplitude. Ces dernières se basent sur une réplication du front d'onde par exemple à l'aide d'une lame semi-réfléchissante (cas du montage de Michelson), ou en optique intégrée une jonction Y.

5.2.5 Expérience des trous d'Young par division de l'amplitude

On considère maintenant un montage où le champ incident E_0 est divisé en deux champs secondaires E_1 et E_2 (à l'aide par exemple d'une lame semi-réfléchissante) translatés respectivement vers le haut et vers le bas de la distance $a/2$ et qui viennent éclairer chacun des trous, (figure 5.3) [5], on suppose de plus que les deux champs secondaires ne se superposent pas. On a alors $E_1(x, y) = E_0(x, y - a/2)$ et $E_2(x, y) = E_0(x, y + a/2)$, et par conséquent $E_1(0, a/2) = E_2(0, -a/2)$ les deux sources secondaires

[3]En pratique, si l'on éclaire un dépoli, on n'obtient pas la densité spectrale car il n'y a pas de moyennage, on obtient l'intensité spectrale liée à la plaque dépolie utilisée (une réalisation statistique), caractérisée par des grains de speckle. Par contre si l'on fait défiler un dépoli ou s'il s'agit de turbulence atmosphérique, avec un temps d'intégration assez long on obtient par ergodisme la moyenne statistique de l'intensité spectrale.

[4]En pratique, on peut parfaitement obtenir des franges d'Young en éclairant à l'aide d'un faisceau laser deux plaques dépolies différentes espacées [137]. Le résultat « non moyenné » fait alors intervenir la taille des grains de speckle qui délimite les zones à l'intérieur desquelles on peut observer des franges d'Young (zone de "stabilité" de la phase). Rappelons que la taille des grains de speckle dépend non pas de la statistique de la perturbation locale mais de la taille de la pupille et de la cohérence spatiale de l'onde source incidente, par contre la répartition spatiale des grains et l'étendu qu'ils occupent dépendent, elles, de la statistique des irrégularités.

[5]Sur le montage la duplication s'accompagne d'un décalage temporel mais il est évidemment possible de le modifier afin de compenser le délai

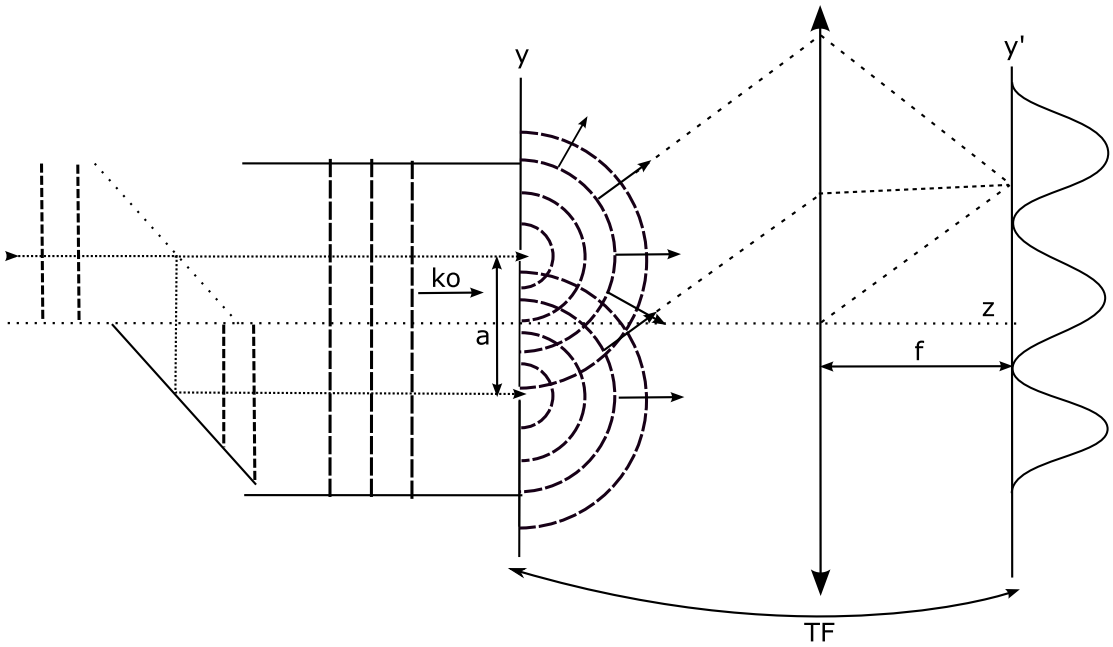

FIG. 5.3 – Montage des trous d'Young avec duplication du front d'onde

sont parfaitement spatialement corrélées entre elles donc le contraste des franges sera maximum quelle que soit la distance entre les trous.

Le champ dans le plan des trous est le suivant :

$$E(x,y,z=0^+) = E_0(x,y-a/2)T(x,y-a/2) + E_0(x,y+a/2)T(x,y+a/2) \quad (5.15)$$

$$\begin{aligned}\tilde{E}(\eta,\mu,z=0^+) &= \left[\tilde{E}_0 * \tilde{T}(\eta,\mu)\right] e^{j\pi\mu a} + \left[\tilde{E}_0 * \tilde{T}(\eta,\mu)\right] e^{-j\pi\mu a} \\ &= 2\cos(\pi\mu a)\left[\tilde{E}_0 * \tilde{T}(\eta,\mu)\right] \quad (5.16)\end{aligned}$$

Ce qui donne un éclairement de l'écran d'observation de la forme :

$$I(x',y',F') \propto DSP(E_0) * \left|\tilde{T}\right|^2 \left(\frac{x'}{f\lambda},\frac{y'}{f\lambda}\right)\left[1+\cos\left(2\pi\frac{y'\,a}{f\lambda}\right)\right] \quad (5.17)$$

On constate en premier lieu que le taux de modulation est maximal. On retrouve en fait le cas où l'on considère en même temps l'interférence d'Young et la diffraction des trous sans considérer le problème de la cohérence, cependant la fonction d'ouverture du trou est ici multipliée par la densité spectrale de puissance du champ. Par conséquent, supposons, dans le cas d'une onde parfaitement plane, que le rayon des trous ne soit que peu inférieur à la distance entre les trous, alors la figure de diffraction sera de très faible étendue et l'on n'observera que quelques franges. Cependant si l'on considère maintenant la statistique du champ éclairant, si celui-ci est très bruité à l'intérieur de la pupille du trou, alors son spectre sera large et viendra élargir la zone de visibilité des franges. [6] On retrouve ici un résultat bien connu

[6] Par contre, comme nous l'avons déjà mentionné, sa distribution sera aussi bruitée, car il n'y a à priori pas de moyennage effectué. On obtiendra donc, dans le cas de la présence d'une structure granuleuse, une distribution de speckle avec à l'intérieur

dans le cas de l'observation des franges de type « égale inclinaison » dans le montage de Michelson, celles-ci ne sont jamais brouillées lorsque l'on élargit la source, ce qui correspond d'après le théorème de Zernicke-Van Citterte, à diminuer la fonction de cohérence donc augmenter l'étendu de la densité spectrale de puissance spatiale.

5.2.6 Conclusion

Nous en concluons donc que l'on peut parfaitement observer des franges d'interférences spectrales à l'intérieur d'un spectre de bruit dans le cas d'une interférence par dédoublement du front d'onde. Par contre, dans le cas d'une interférence par division spatiale du front d'onde, le contraste des franges est limité par la cohérence de l'onde incidente. Dans le cas de la division du front d'onde, l'expérience consiste à prélever deux valeurs dans la distribution spatiale du champ :

$$E(x,y) = E(a/2)\delta(x, y - a/2) + E(-a/2)\delta(x, y + a/2); \tag{5.18}$$

puis à observer les franges dans le spectre du champ.

Dans le cas du dédoublement du front d'onde, l'expérience consiste à superposer deux copies du champ décalées :

$$E(x,y) = E_0(x, y - a/2) + E_0(x, y + a/2) \tag{5.19}$$

puis à observer les franges dans le spectre du champ, spectre qui est élargi par la présence des trous. Cependant, si le spectre du champ E_0 est déjà assez large, alors on peut observer des franges d'Young sans trou. A l'inverse, le fait d'avoir une source à spectre large dans le cas de la division du front d'onde entraîne lui un brouillage des franges. Cette différence apparaît dans la place du terme de modulation lorsque l'on compare les deux formules donnant l'intensité :

Cas division du front d'onde :

$$I(x', y') \propto DSP(E_0) * \left[\left|\tilde{T}\right|^2 \left(\frac{x'}{f\lambda}, \frac{y'}{f\lambda}\right) \left(1 + \cos\left(2\pi \frac{a\, y'}{f\lambda}\right)\right)\right] \tag{5.20}$$

Cas dédoublement du front d'onde :

$$I(x', y') \propto DSP(E_0) * \left|\tilde{T}\right|^2 \left(\frac{x'}{f\lambda}, \frac{y'}{f\lambda}\right) \left[1 + \cos\left(2\pi \frac{y'\, a}{f\lambda}\right)\right] \tag{5.21}$$

Remarque : nous n'avons pas parlé de la cohérence temporelle car nous traitions un problème d'interférence spatiale, cependant l'équation de propagation de l'onde implique un couplage entre la cohérence

de chaque grain des franges d'Young, cependant, à la différence du cas évoqué dans la section précédente, il y a aura continuité dans la disposition des franges entre chaque grain de speckle à l'inverse du cas de deux dépolis éclairés par une onde, où chaque réseau de franges présent dans un grain est indépendant du réseau présent dans les autres grains. En pratique le détecteur peut effectuer un certain moyennage spatial (taille d'une cellule du capteur CCD, rugosité de l'écran d'observation, taille des bâtonnets de la rétine, amétropie) mais ce moyennage spatial agit aussi sur les franges donc ne peut pas être trop important et n'est pas forcement un bon estimateur statistique. Si ce bruit varie au cours du temps (plaque dépolie en rotation, turbulence de l'air) alors le détecteur peut jouer le rôle d'estimateur de moyenne par ergodisme temporel et l'on obtiendra alors une distribution d'intensité s'approchant de la densité spectrale de bruit spatiale à l'intérieur de laquelle on peut obtenir les franges.

spatiale et la cohérence temporelle et, de plus, les montages utilisés pour faire la transformée de Fourier spatiale utilise la propagation des ondes donc font intervenir un paramètre temporel. On trouvera un critère de séparabilité entre cohérence spatiale et temporelle dans [138].

5.2.7 Généralisation

On peut maintenant s'interroger sur le fait de pouvoir généraliser ces deux expériences d'interférence à d'autres variables du champ. En effet dans les deux formules

$$E(x,y) = E(a/2)\delta(x, y - a/2) + E(-a/2)\delta(x, y + a/2) \tag{5.22}$$

et

$$E(x,y) = E_0(x, y - a/2) + E_0(x, y + a/2) \tag{5.23}$$

on peut chercher à remplacer la position par exemple par la fréquence spatiale, le temps ou la fréquence temporelle.

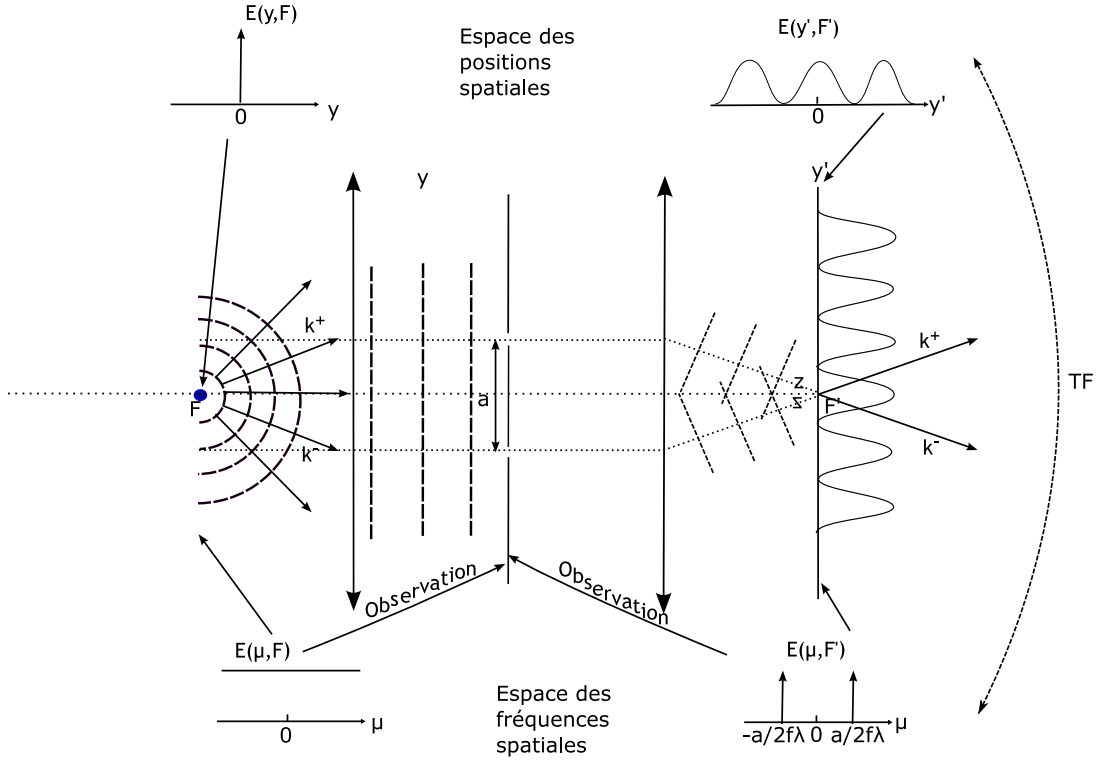

FIG. 5.4 – Montage des trous d'Young dans le spectre spatial

Nous présentons ainsi sur la figure 5.4, la transposition des trous d'Young spatiaux en trous d'Young spectro-spatiaux, c'est à dire dans l'espace des fréquences spatiales.

Si l'on reprend les conditions de l'expérience d'Young précédemment décrite, il nous faut tout d'abord une onde plane. Il s'agit ici d'une onde plane dans l'espace spatial réciproque, donc c'est la

transformée de Fourier de la distribution transverse du champ spatial qui doit être plane. Il s'agit donc d'une onde sphérique provenant d'un unique point source. Ensuite, les trous d'Young spectro-spatiaux correspondent à la sélection de deux fréquences spatiales au sein du front d'onde spectro-spatial. Nous proposons donc pour les réaliser, de placer une lentille en avant du trou source de telle manière que le trou source soit au foyer objet F de la lentille. Par conséquent, l'onde image produite par la lentille est une onde plane spatiale, dont chaque position transverse y correspond à une fréquence spatiale $y/f\lambda$. En plaçant donc un écran percé aux ordonnés $y = +a/2$ et $y = -a/2$, on vient prélever uniquement les deux directions correspondant aux fréquences spatiales $a/2f\lambda$ et $-a/2f\lambda$. On place ensuite une seconde lentille pour faire la conjugaison inverse et revenir dans l'espace des fréquences spatiales. Au foyer image F', la répartition spectro-spatiale du champ est bien formée de deux pics de Dirac, correspondant aux deux directions de propagation émergeant de la seconde lentille. Cette distribution spectrale se traduit dans le domaine spatial par un réseau de franges transverses.

On remarque en fait que le montage de la figure 5.4 est identique au montage présenté sur la figure 5.1 où nous avions mis en évidence le collimateur servant de source d'onde plane [7]. Cependant les plans et les espaces considérés ont été modifiés. Dans le cas des trous d'Young spatiaux, on regardait la distribution spectrale du champ juste après les trous et l'on constatait qu'elle était modulée par des franges. Dans le second cas, on regarde la distribution spatiale après les trous spectraux, étant entendu que les trous spectraux sont formés par l'ensemble des deux lentilles et de l'écran percé.

Nous allons dans la suite pratiquer le même travail de transposition pour les variables f, la fréquence temporelle et t, le temps.

[7] En fait nous avons légèrement transformé le montage en le plaçant dans les conditions particulières dites 4 f, c'est à dire de telle manière que l'écran percé soit au foyer image de la première lentille et au foyer objet de la seconde. Ceci permet de justifier plus facilement le fait que l'on observe la répartition spectrale du champ situé au niveau du foyer image de la seconde lentille au niveau de l'écran percé du fait que celui-ci soit au foyer objet de la seconde lentille, c'est à dire au foyer image si l'on considère que l'on éclaire la modulation (les franges) de la droite vers la gauche. En fait, quelle que soit la position de l'écran percé, on y observe la distribution spectrale de la modulation spatiale en F', que l'écran percé soit donc au foyer ou non. Ceci est dû au fait que la règle concernant l'observation de la transformée de Fourier d'une modulation spatiale au niveau du foyer d'une lentille n'est valable que pour un éclairement en onde plane de la modulation. Dans notre montage, si l'écran percé n'est pas au foyer objet de la seconde lentille, l'éclairement de la modulation spatiale en F' (les franges) n'est pas un éclairement en onde plane, par conséquent, en renversant le sens de la lumière, la représentation de la transformée de Fourier n'est pas située au foyer (devenu foyer image) mais à l'image géométrique de la source de l'onde éclairante, qui correspond donc toujours au plan de l'écran percé.

5.3 Franges d'Young fréquentielles

5.3.1 Trous d'Young temporels

Reprenons donc l'équation 5.22 et remplaçons les deux variables de position par la variable temporelle t et l'écart a par la durée ΔT :

$$E(t) = E(\Delta T/2)\delta(t - \Delta T/2) + E(-\Delta T/2)\delta(t + \Delta T/2) \tag{5.24}$$

L'origine des temps est prise au milieu des deux instants d'émission.

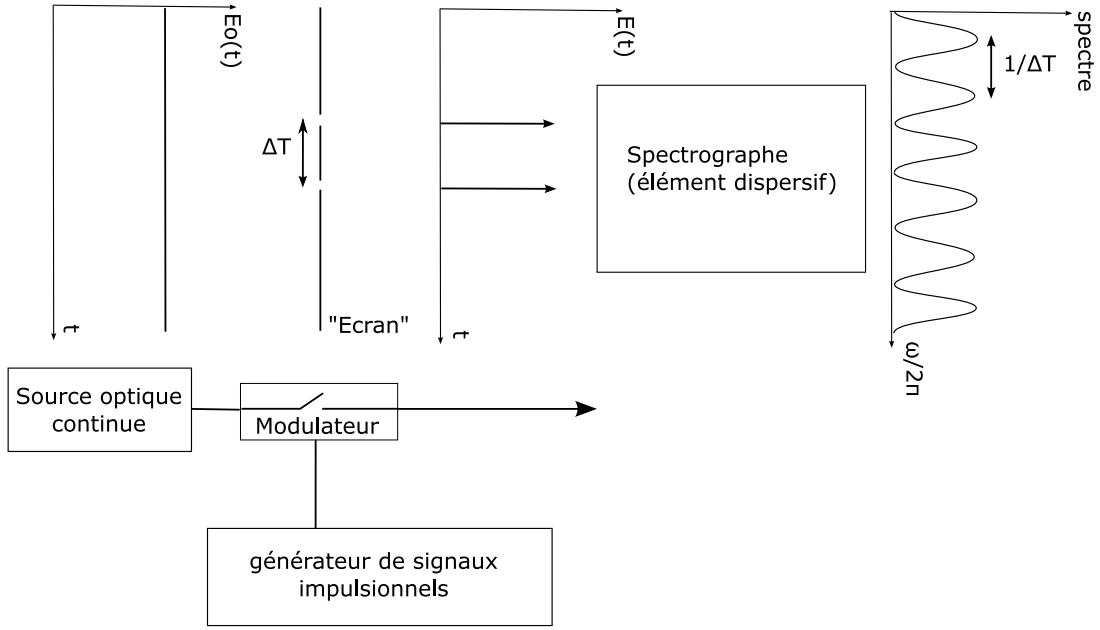

FIG. 5.5 – Schéma des trous d'Young temporels

Ceci correspond donc en pratique à deux impulsions infiniment brèves décalées de ΔT. Ces impulsions pourraient être obtenues soit par modulation impulsionnelle d'une source lumineuse, soit en utilisant un laser impulsionnel (ce qui permet d'avoir une bien plus grande puissance).

D'après les résultats obtenus dans le cas des trous d'Young, on doit pouvoir observer des franges d'Young dans le spectre temporel du champ, en effet, en transposant l'équation (5.3), on obtient l'expression de la densité spectrale :

$$S_E(\nu) \propto (1 + \cos(2\pi\nu\Delta T)) \tag{5.25}$$

Puisque les impulsions sont très brèves, le spectre optique est très large, les franges présentent dans le spectre ont une période inverse de la durée entre les deux impulsions. On ne pourra voir les franges que si la durée n'est pas trop courte car sinon le monochromateur ou l'analyseur de spectre ne pourra résoudre les franges. [8]

[8] En pratique les analyseurs de spectre conventionnels ne seront pas forcement capable de faire interférer les spectres et donc

Notons qu'en terme de puissance spectrale, la puissance des pics des franges spectrales est quatre fois plus grande que la puissance du spectre à la même fréquence pour une seule impulsion car dans ce cas on a sommation cohérente de la puissance spectrale.

En pratique, on peut effectivement observer de telles franges dans le spectre d'un laser femtoseconde ; s'il s'agit d'un train d'impulsions, les franges deviennent théoriquement des pics de Dirac car on est alors en présence de la décomposition en série de Fourier d'un phénomène périodique.

5.3.2 Brouillage des franges obtenues par les trous d'Young temporels

Qu'en est il de l'influence de la durée des impulsions et de la cohérence temporelle de la source ? Nous proposons comme point de départ sur la figure 5.6 une transposition de la figure 5.2.

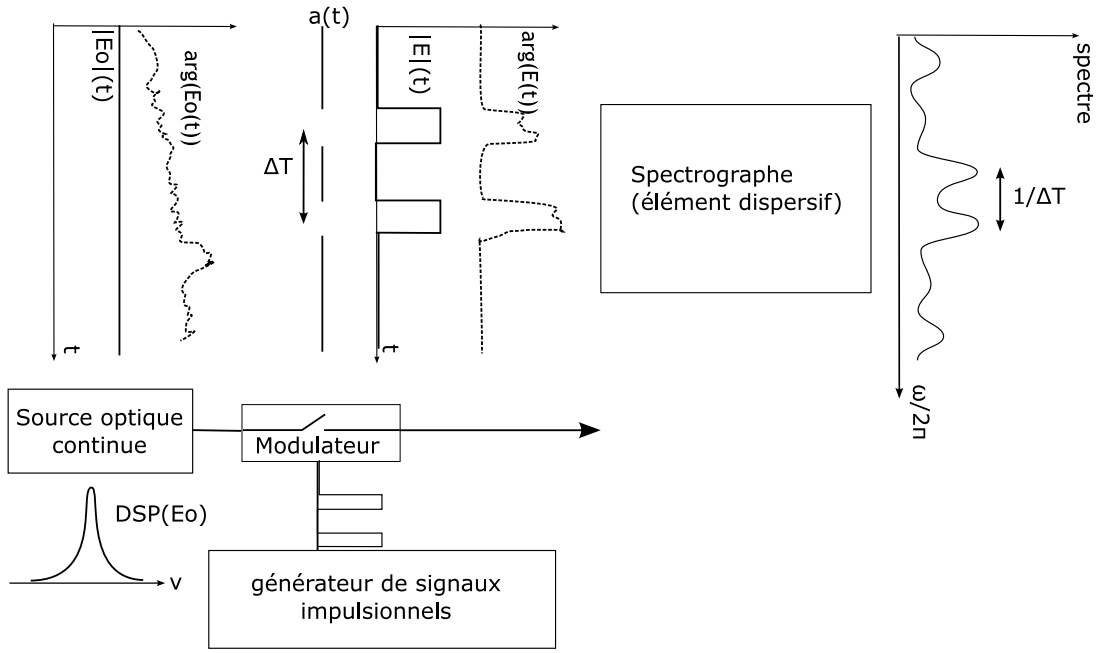

FIG. 5.6 – Schéma des trous d'Young temporels avec bruit de phase sur la source et impulsion de durée non nulle

En accord avec les résultats obtenus au cours de l'étude des trous d'Young, on remarque que la durée des impulsions va limiter l'étendu du spectre et donc le nombre de franges visibles (analogue à la zone de diffraction du trou). En effet, en transposant l'équation (5.10) avec un profil d'impulsion normalisé $a(t)$, la densité spectrale devient :

$$S_E(\nu) = 2E_0^2|\tilde{a}(\nu)|^2\left[1+\cos(2\pi\nu\Delta T)\right] \tag{5.26}$$

révéler ces franges, ils feront alors la somme des puissances des spectres et non la puissance de la somme des spectres à cause du délai d'arrivé sur le détecteur du spectromètre. On peut concevoir pour des grands délais que la première impulsion soit, après avoir été diffractée par le réseau du spectromètre (et donc Fourier transformée), retardée afin d'attendre la transformé de Fourier de la seconde et que les deux spectres puissent interférer sur le capteur à très haute résolution spatiale.

En ce qui concerne la cohérence temporelle, la transposition de l'équation (5.14) nous donne :

$$S_E(\nu) = S_{E_0} * \left[|\tilde{a}(\nu)|^2 \left[1 + \cos(2\pi\nu\Delta T)\right]\right] \tag{5.27}$$

où S_{E_0} représente la densité spectrale de puissance de la source en fonctionnement continu. Dans le cas d'impulsions obtenues par modulation impulsionnelle, c'est donc la densité spectrale de la source continue que l'on module. Dans le cas d'un laser impulsionnel, la fonction traduit l'écart à la limite de Fourier de l'impulsion dû au bruit de phase et au blocage incomplet des modes[9].

On retrouve bien le fait que les impulsions ne pourront interférer efficacement si l'intervalle de temps entre les deux est supérieur au temps de corrélation de la source, c'est à dire si la la période de la modulation $1/\Delta T$ est petite devant la taille du spectre ($1/\tau_c$) qui vient la convoluer.

En conclusion, on remarque que la zone de visibilité des franges spectrales est d'autant plus large que les impulsions sont brèves, et que le contraste des franges est réduit par le bruit de phase de la source, correspondant au temps de cohérence.

5.3.3 Franges d'Young fréquentielles par division du front d'onde

L'étude des franges spectrales est très utilisée dans la caractérisation des impulsions lasers. Cependant, il s'agit alors de franges dues à l'interférence entre une impulsion et sa réplique décalée dans le temps (par exemple à l'aide d'un montage de Michelson). Il s'agit donc d'interférences par dédoublement du front d'onde assurant que les deux composantes du spectre interférantes sont toujours parfaitement corrélées.

Une des applications connexes des interférences spectrales par décalage temporel est la génération accordable de battement TéraHertz par interférence entre deux impulsions à glissement linéaire de fréquence [139], mais dans ce cas les battements sont en fait observés temporellement[10].

En transposant l'étude faite pour les trous d'Young, l'équation (5.17) donne :

$$S_E(\nu) = S_{E_0} * |\tilde{a}(\nu)|^2 \left[1 + \cos\left(2\pi\nu\Delta T\right)\right] \tag{5.28}$$

Nous en déduisons donc que, dans le cas de la duplication, les franges (ou cannelures) obtenues dans le spectre de la somme des deux impulsions ne seront jamais brouillées par la cohérence temporelle, le délai induit dans le montage de Michelson peut donc être supérieur au temps de cohérence de la somme.

Nous savons de plus que les franges peuvent apparaître à l'intérieur du spectre du bruit et donc que l'on peut enlever les « trous temporels », c'est à dire le caractère impulsionnel, et utiliser une source continue bruitée. Un des exemples typiques de ce phénomène est facilement observable avec un Michelson illuminé par une source blanche. En observant le spectre de la lumière en sortie à l'aide d'un prisme on observe facilement l'extinction périodique de certaines composantes spectrales.

[9] Elle est reliée à la mesure de la densité spectrale du battement entre deux modes

[10] En effet, à l'intérieur de la durée de l'impulsion on observe à un temps donnée une fréquence instantanée donnée, par conséquent on peut observer dans le profil temporel de l'impulsion l'effet des interférences spectrales

Nous avons cherché à vérifier l'existence de ce phénomène pour une source de spectre bien plus fin que celui mentionné précédemment, un laser à semi-conducteur de type DFB dont la largeur spectrale à mi-hauteur est inférieure au MHz. Sachant que les franges ne sont visibles qu'à l'intérieur du spectre, c'est à dire dans une zone de l'ordre du MHz, il faut que leur période soit de l'ordre de la centaine de kHz pour pouvoir être facilement visible au sein du spectre, c'est à dire utiliser un délai de l'ordre de la dizaine de μs.

Il peut paraître surprenant d'observer un phénomène d'interférence entre deux ondes décorrélées (temps de cohérence de l'ordre de la μs). Nous rappelons donc que ce ne sont pas les champs temporels qui interfèrent, mais les composantes spectrales des champs, or le délai ne modifie pas le fait que les deux champs fréquentiels sont parfaitement corrélés aux fréquences identiques (à cause de la stationnarité du champ, les composantes spectrales à des fréquences différentes sont par contre toujours totalement décorrelées comme nous le verrons dans la suite).

5.3.4 Détection de cannelures spectrales dans une raie laser inférieure au Méga-Hertz

Deux problèmes se posent dans la mise en place de la détection de franges spectrales dans une raie aussi fine :

1. Pouvoir obtenir un délai suffisant afin de se placer dans le régime de faible cohérence temporelle.
2. Être capable de suffisamment résoudre le spectre afin de pouvoir observer les franges.

Le premier problème est résolu par l'utilisation d'une fibre optique, qui nous permet facilement d'obtenir une différence de chemin de l'ordre du km. Le second est par contre beaucoup plus délicat. Il s'agit en effet de pouvoir voir des détails de l'ordre de la centaine de kHz. Il est donc inutile d'envisager l'utilisation d'un analyseur de spectre optique à réseau. Nous pourrions envisager d'utiliser un Fabry-Perot à balayage, cependant celui à notre disposition possède un intervalle spectral libre d'au minimum $5\,\mathrm{GHz}$ ce qui demanderait une finesse de 10000, qu'il ne possède malheureusement pas. La solution que nous avons choisie est celle du montage auto-hétérodyne, celle-ci ne nous permettra cependant pas d'observer directement la densité spectrale de puissance, mais uniquement l'auto-convolution de la densité spectrale de puissance, les franges seront donc visibles dans l'auto-convolution, mais avec un contraste moins bon qu'avec l'observation directe du spectre.

Rappelons que la méthode de mesure par auto-hétérodynage se base elle-même sur le décalage temporel de l'onde à analyser. Elle part du principe que si l'on parvient à décorréler totalement une onde et sa réplique, alors le spectre du courant de battement est la convolution des deux spectres optiques (c'est à dire l'auto-convolution), comme observé dans le cas du battement de deux lasers différents. L'un des paramètres essentiels est le choix du délai. Rappelons donc qu'un délai égal au temps de cohérence supposé de la source n'est pas suffisant pour obtenir l'auto-corrélation du spectre. En analysant la courbe théorique du spectre du photo-courant en fonction du délai et de la largeur à mi-hauteur du spectre sup-

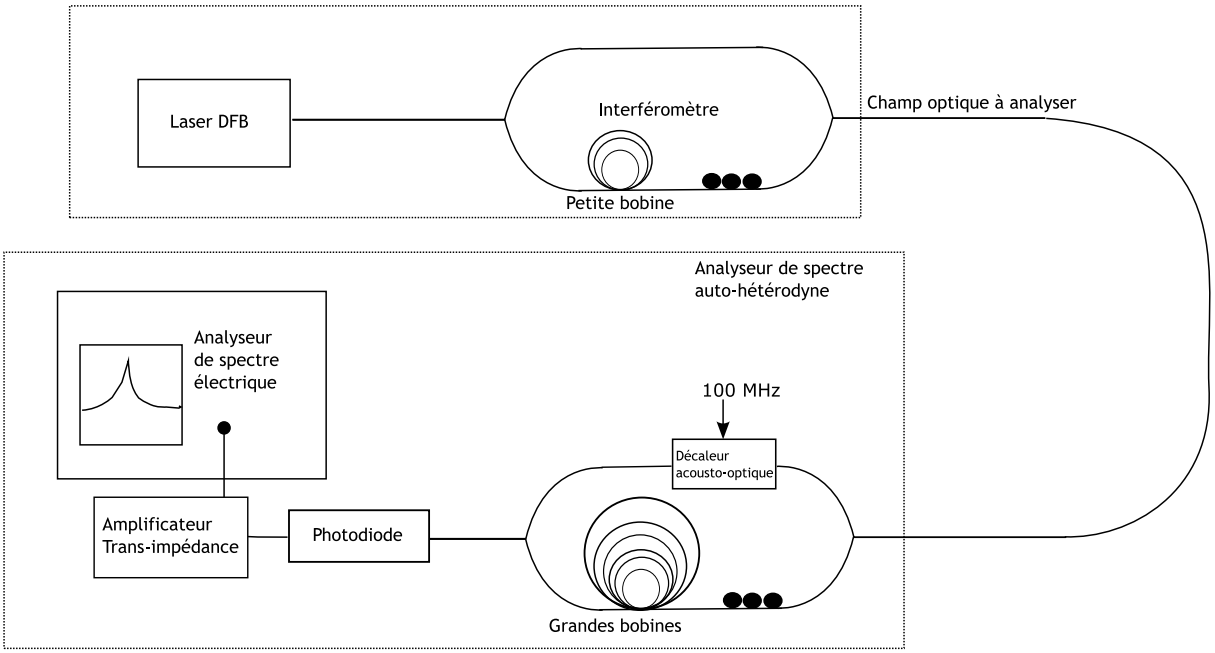

FIG. 5.7 – Montage expérimental interférométrique relié au montage de mesure spectrale par auto-hétérodynage

posé lorentzien (c'est à dire résultant d'un champ quasi-monochromatique dont le bruit de fréquence est blanc), on montre qu'un délai supérieur à trois fois le temps de cohérence est nécessaire pour obtenir un résultat conforme. Le temps de cohérence étant donné par $\tau_c = 1/\pi\Delta\nu$, un délai comparable à l'inverse de la largeur fréquentielle à mi-hauteur du spectre optique est suffisant. Dans le cas de notre expérience, le champ dont nous cherchons à obtenir le spectre n'a pas un spectre lorentzien à cause des cannelures. On montre, en mettant la somme des champs sous la forme d'un champ quasi-monochromatique, que ce dernier possède du bruit de phase et du bruit d'intensité dans chacun desquels ont pourrait observer l'effet des interférences.

Nous avons donc décidé, pour choisir le délai à utiliser, de considérer non pas la largeur de la raie mais la largeur des cannelures qui représentent le motif à résoudre. Par conséquent, connaissant la différence de longueur des deux bras de l'interféromètre de Mach-Zehnder, nous en déduisons un délai de $3\,\mu\mathrm{s}$ et choisissons de prendre un délai pour l'analyseur auto-hétérodyne supérieur à $6\,\mu\mathrm{s}$ correspondant à une différence de longueur de bras supérieure à $450\,\mathrm{m}$. Il est important de noter que le centre du spectre peut être éteint si le produit $\Delta T\omega_o$ est égal à $\pi\,[2\pi]$. Dans notre cas, nous avons plutôt cherché à maximiser le centre du spectre. Il est en outre nécessaire d'insérer un contrôleur de polarisation afin d'égaliser les deux polarisations et donc de pouvoir rendre maximal le contraste des franges.

Les résultats obtenus sont représentés sur la figure 5.8. On remarque tout d'abord que le spectre cannelé est légèrement dissymétrique, le maximum de la modulation est décalé d'environ $40\ \mathrm{kHz}$ de la fréquence optique moyenne correspondant à un produit $\Delta T\omega_o$ d'environ 45 . On réalise un ajuste-

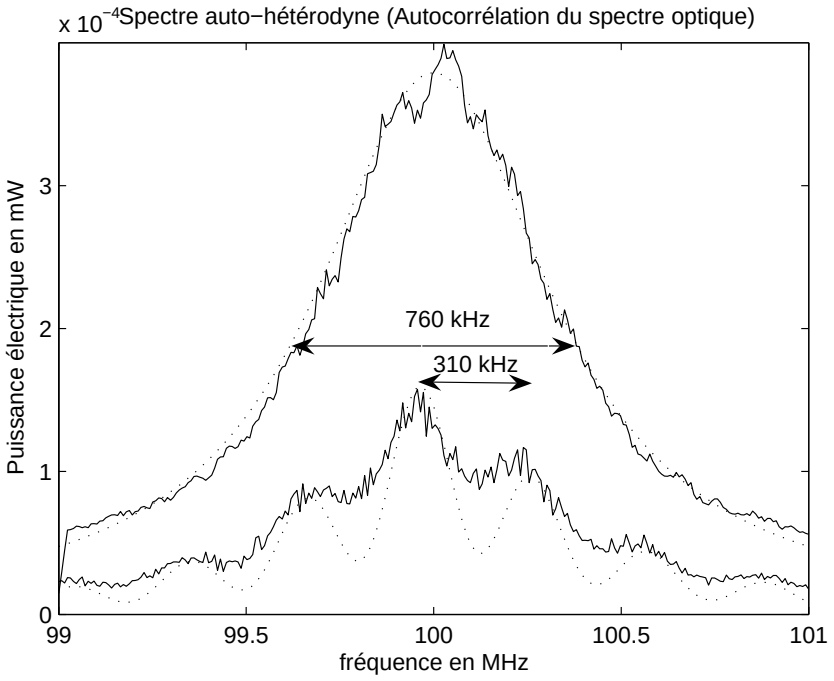

FIG. 5.8 – Courbes expérimentales du spectre auto-hétérodyne avec et sans interférences spectrales, en pointillé, ajustement lorentzien du spectre du laser et spectre auto-hétérodyne cannelé correspondant

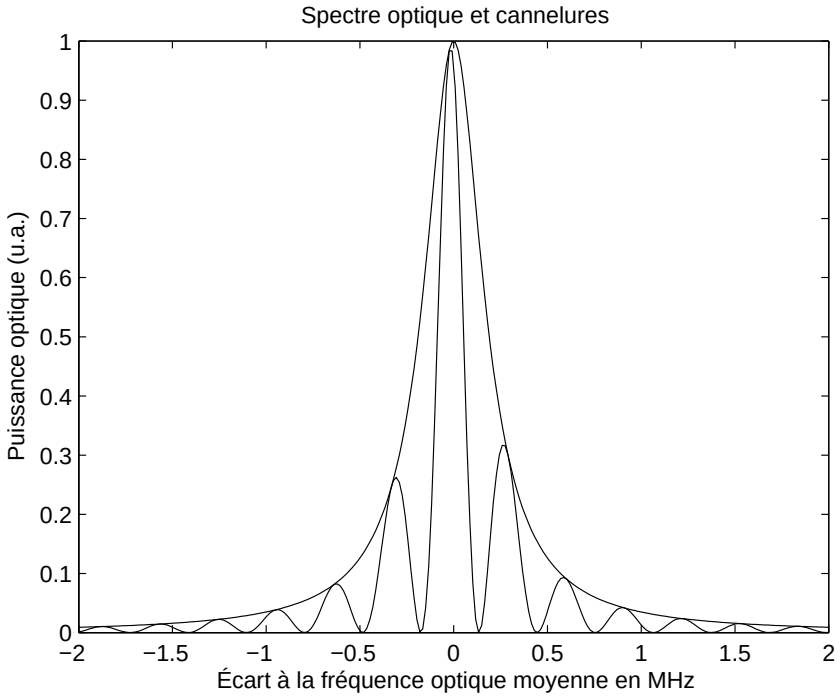

FIG. 5.9 – Spectre théorique du champ optique sans et avec interférences obtenu à partir des paramètres mesurés sur le spectre auto-hétérodyne

ment de la courbe obtenue avec un délai nul à l'aide d'une fonction lorentzienne. Nous déduisons de celui-ci une largeur spectrale du laser de $380\,\mathrm{kHz}$. La période des cannelures présentes sur le spectre est d'environ $300\,\mathrm{kHz}$. A l'aide de ce paramètre et de la largeur spectrale du laser, nous avons tracé l'autocorrélation du spectre cannelé théorique, représentée en pointillé [11]. Nous remarquons un bon accord entre les courbes théoriques et expérimentales au niveau des pics, par contre les creux de la courbe expérimentale sont moins profonds. Ceci est probablement dû à une résolution insuffisante de notre analyseur auto-hétérodyne et peut être aussi à un légère différence de polarisation des deux ondes.

A partir de la période et de la largeur à mi-hauteur obtenues, nous avons représenté sur la figure 5.9 le spectre optique avec et sans cannelures afin de se rendre compte de la différence avec leurs autoconvolutions.

5.3.5 Expression de la fonction d'autocorrélation

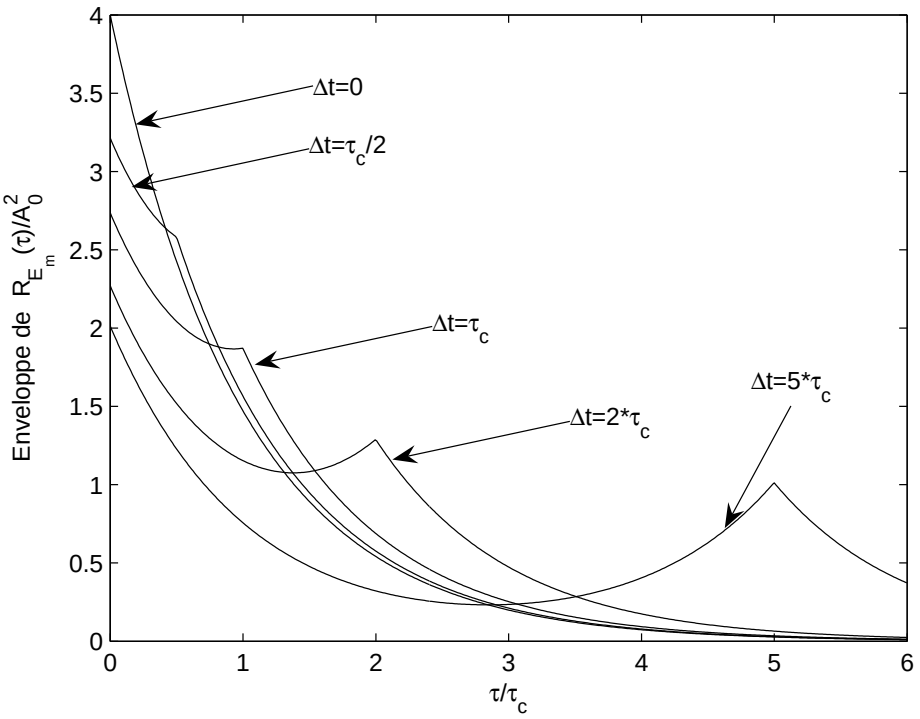

FIG. 5.10 – Enveloppe de la fonction d'autocorrélation du champ mélange pour différentes valeurs du décalage temporel

Il est aussi intéressant d'observer l'effet du délai sur la fonction d'autocorrélation du mélange. La fonction d'autocorrélation de la somme des deux ondes peut être calculée par développement de la

[11] l'autocorrélation a été calculée sur la lorentzienne cannelée en utilisant une plage fréquentielle double afin de minimiser l'erreur due à la troncature de la fonction

moyenne du produit, cependant nous pouvons ici mettre à profit le fait que le champ somme se déduit de l'onde source par un filtrage linéaire :

$$E(t) = E_0 * (\delta(0) + \delta(\Delta T))(t) = E_0 * h(t) \tag{5.29}$$

La fonction d'autocorrélation du champ mélange est donc reliée à la fonction d'autocorrélation de l'onde source par la relation suivante :

$$R_E(\tau) = R_{E_0} * (h \otimes h) \tag{5.30}$$

Ce qui, après calcul de l'autoconvolution de la réponse impulsionnelle, nous donne :

$$R_E(\tau) = 2A_0^2 e^{-\pi\Delta\nu|\tau|} e^{j\nu_0\tau} + A_0^2 e^{-\pi\Delta\nu|\tau+\Delta T|} e^{j\nu_0(\tau+\Delta T)} + A_0^2 e^{-\pi\Delta\nu|\tau-\Delta T|} e^{j\nu_0(\tau-\Delta T)} \tag{5.31}$$

Nous avons représenté l'enveloppe de la fonction d'autocorrélation du champ somme sur la figure 5.10. On constate qu'elle présente un maximum au niveau du temps de décalage entre les deux ondes. Lorsque le délai ΔT devient grand, le maximum normalisé est à 1. Ceci est important, car généralement on considère que lorsque deux ondes on été décalées temporellement d'un temps assez supérieur à leur temps de cohérence on peut considérer qu'elles sont devenues indépendantes (notamment lorsque l'on présente la méthode auto-hétérodyne), en fait leur fonction d'autocorrélation présentera toujours un pic bien net au niveau du temps de délai, ce qui permet donc à posteriori de déterminer le délai. Ceci est à mettre en parallèle avec le fait que la corrélation des transformées de Fourier des deux champs reste de module constant quel que soit le délai. En définitive, le champ temporel se décorrèle mais pas sa transformée de Fourier, par conséquent la corrélation n'est en fait pas perdue[12].

5.3.6 Conclusion

A partir de l'étude des franges d'Young dans le cadre d'un front d'onde bruité (granulosité-speckle), nous avons retrouvé le phénomène du spectre cannelé, que nous avons ensuite expérimentalement mis en évidence dans une raie laser de moins de 400 kHz de large.

5.4 Franges d'Young temporelles

5.4.1 Trous d'Young fréquentiels

Après l'étude des interférences dans le domaine des fréquences temporelles, on peut se demander si des phénomènes identiques peuvent être observés dans l'espace réciproque, c'est à dire dans l'espace

[12]La corrélation apparaît toujours sous la forme des cannelures dans le spectre, cependant plus le délai est grand, plus les cannelures sont fines et deviennent donc difficiles à visualiser, de la même manière que la détection du pic dans la fonction d'autocorrélation demande des délais de plus en plus grand pour l'autocorrélateur. Lorsque que l'on utilise la méthode de mesure spectrale par auto-hétérodynage, on induit un très grand délai par conséquent le champ incident possède un spectre avec des cannelures extrêmement serrées cependant comme on mesure la densité spectrale du photo-courant, c'est à dire une intégration du moment spectrale du quatrième ordre d'après le chapitre sur les rappels de statistique, les franges sont effacées.

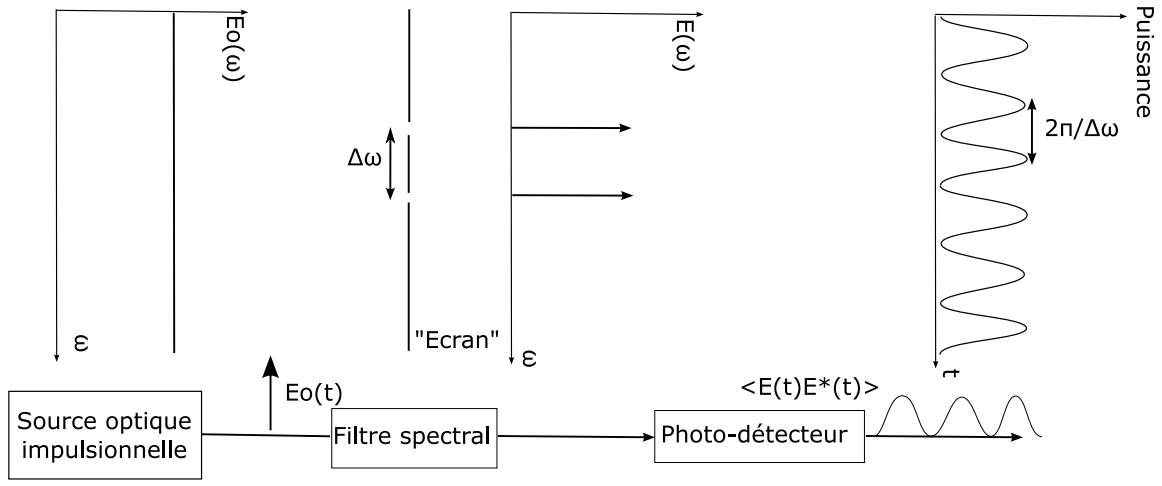

FIG. 5.11 – Expérience des trous d'Young dans le spectre temporel

temporel. Essayons donc d'imaginer une expérience utilisant des trous d'Young fréquentiels. Ils s'agit donc de deux filtres très étroits situés de part et d'autre de f_0 et espacés de Δf [13].

Nous présentons sur la figure 5.11 la transposition dans le domaine spectro-temporel des trous d'Young spatiaux. Le front d'onde plan spectral est obtenu grâce à une impulsion temporelle ultra-brève.

Sur le photodétecteur, sont superposées deux ondes purement monochromatiques de fréquences différentes. L'intensité du photocourant est proportionnelle au carré filtré temporellement de la transformée de Fourier du spectre, c'est à dire au carré du champ temporel. La période des battements temporels est inverse de la fréquence entre les deux composantes spectrales que le filtre laisse passer.

$$i(t) \propto |\tilde{E}_0 \cos(2\pi t(f_0 + \Delta f/2)) + E_0 \cos(2\pi t(f_0 + \Delta f/2))|^2_{\text{Bande Electrique}} = |\tilde{E}_0|^2 \cos(2\pi t \Delta f) \tag{5.32}$$

5.4.2 Condition de cohérence spectrale pour des franges par division du front d'onde

Nous allons maintenant transposer les résultats obtenus dans l'étude spatial. On considère donc maintenant que les deux filtres fréquentiels, ne sont pas infiniment fins mais sont décrits par une même fonction de transfert $H(f)$.

A partir de l'équation (5.10), on établit :

$$I(t) \propto \underbrace{\left|\tilde{H}(t)\right|^2}_{(a)} \left[|E_0|^2(a/2) + |E_0|^2(-a/2) + 2\left\langle E_0(f_0 - \Delta f/2)E_0(f_0 + \Delta f/2)\right\rangle \cos(2\pi t \Delta f)\right] \tag{5.33}$$

On constate donc que la transformée de Fourier de la fonction de transfert du filtre va déterminer l'enveloppe temporelle de l'intensité du photocourant. Ainsi pour un filtre de largeur 1 GHz, le battement

[13] Comme dans le cas des trous infiniment petits, ou de la modulation à impulsion infiniment brève, un filtre infiniment fin ne laisse passer aucune puissance

sera d'une durée d'environ 1 ns. Nous avons de plus fait apparaître un produit de corrélation. Il s'agit ici non pas de la corrélation temporelle mais de la corrélation spectrale. Elle rend compte de la corrélation existant entre deux composantes spectrales de fréquences de Fourier différentes. Dans l'équation (5.33), nous n'avons pris en compte que la corrélation entre les centres des deux trous (filtres). Si l'on souhaite prendre en compte le bruit des composantes spectrales à l'intérieur de chaque filtre, il faut trouver la fonction qui joue maintenant le rôle de la densité spectrale de puissance dans l'equation (5.27) dans le cas des trous temporels ou encore l'équation (5.14) dans le cas des trous d'Young spatiaux classiques. Ce rôle doit être ici être joué par une "densité temporelle de puissance" qui serait la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation spectrale : $\mathrm{TF}\langle E(\omega)E^*(\omega')\rangle$, le critère de stationnarité serait alors que la corrélation ne dépend que de la différence $\Delta\omega = \omega - \omega'$, en fait nous verrons par la suite que cette fonction n'est pas stationnaire donc il n'est pas possible de mettre le photocourant sous une forme aussi simple que dans les autres cas.

Dans le cas d'une source (temporellement) stationnaire au sens large, la corrélation entre deux composantes fréquentielles de fréquences différentes est toujours nulle car la fonction d'auto-corrélation temporelle ne dépend que de la différence entre les deux instants [14] Donc, en moyenne, les franges (variation périodique) sur la puissance sont nulles. La phase entre les deux composantes spectrales est en fait une variable aléatoire uniformément distribuée sur l'intervalle $[0, 2\pi]$. Il est donc apparemment impossible d'obtenir des franges temporelles à l'aide d'une source continue (i.e. stationnaire)[15]

Par conséquent, il n'est pas possible d'utiliser comme source de spectre large par exemple une source type Émission spontanée amplifiée (ESA) ou encore une lampe blanche.

Plusieurs comportements temporels peuvent donner la même distribution de puissance spectrale : soit le spectre est dû à du bruit (transformée de Fourier de l'auto-corrélation), soit le spectre est dû à la forme de l'enveloppe temporelle de l'onde (carré de la transformée de Fourier) ou encore une combinaison des deux. Dans le cas d'un régime impulsionnel, l'enveloppe du spectre est donnée par la transformée de Fourier du profil de l'impulsion et en théorie le spectre est constitué de pics de Dirac espacés d'une

[14]Démonstration : Si $X(t)$ est stationnaire au sens large (ordre 2), alors $\forall T$, $\langle X(t_1)X^*(t_2)\rangle = \langle X(t_1+T)X^*(t_2+T)\rangle$. Par conséquent, $\forall T$

$$\left\langle \tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(-\omega_2)\right\rangle = \left\langle \tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(-\omega_2)\right\rangle e^{-j(\omega_1-\omega_2)T} \tag{5.34}$$

Ce qui implique donc que pour $\omega_1 \neq \omega_2$, $\left\langle \tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(-\omega_2)\right\rangle = 0$. On obtient ainsi la formule pour X une fonction réelle : $\left\langle \tilde{X}(\omega_1)\tilde{X}^*(\omega_2)\right\rangle = S_X(\omega_1)\delta(\omega_1-\omega_2)$

[15]Ceci est en fait la réciproque des conditions du théorème de Zernicke-Van Citterte, transposée dans le domaine temporel : ce dernier indique que la cohérence de deux points situés dans un plan éloigné d'une source optique limitée par une certaine pupille est proportionnelle à la transformée de Fourier de la pupille, chaque point de la source étant décorrélé des autres (atomes différents d'un gaz). Les deux points situés dans le plan éloigné voient en fait la transformé de Fourier du champ, donc le théorème évalue la cohérence entre deux composantes de Fourier de fréquences différentes. Dans le cas du champ stationnaire, ce sont les composantes de Fourier qui sont décorrélées et c'est la transformée de Fourier de la densité spectrale (équivalent de la pupille) qui donne la corrélation entre le champ à deux instants différents. On constate donc dans le cas de la source spatialement incohérente et dans le cas de la source stationnaire une dissymétrie entre les propriétés des espaces réciproques [140].

fréquence égale à la fréquence de répétition des impulsions. En pratique ces Dirac peuvent être élargis à cause du bruit (de phase) stationnaire et effacés par la trop faible résolution des spectromètres.

Pour faire des interférences temporelles en utilisant la division du front d'onde (spectral), il faut donc nécessairement utiliser une source non stationnaire donc en pratique une source impulsionnelle ou une source modulée.

Dans ce cas, les composantes spectrales du champ à des fréquences différentes sont corrélées et peuvent donc interférer.

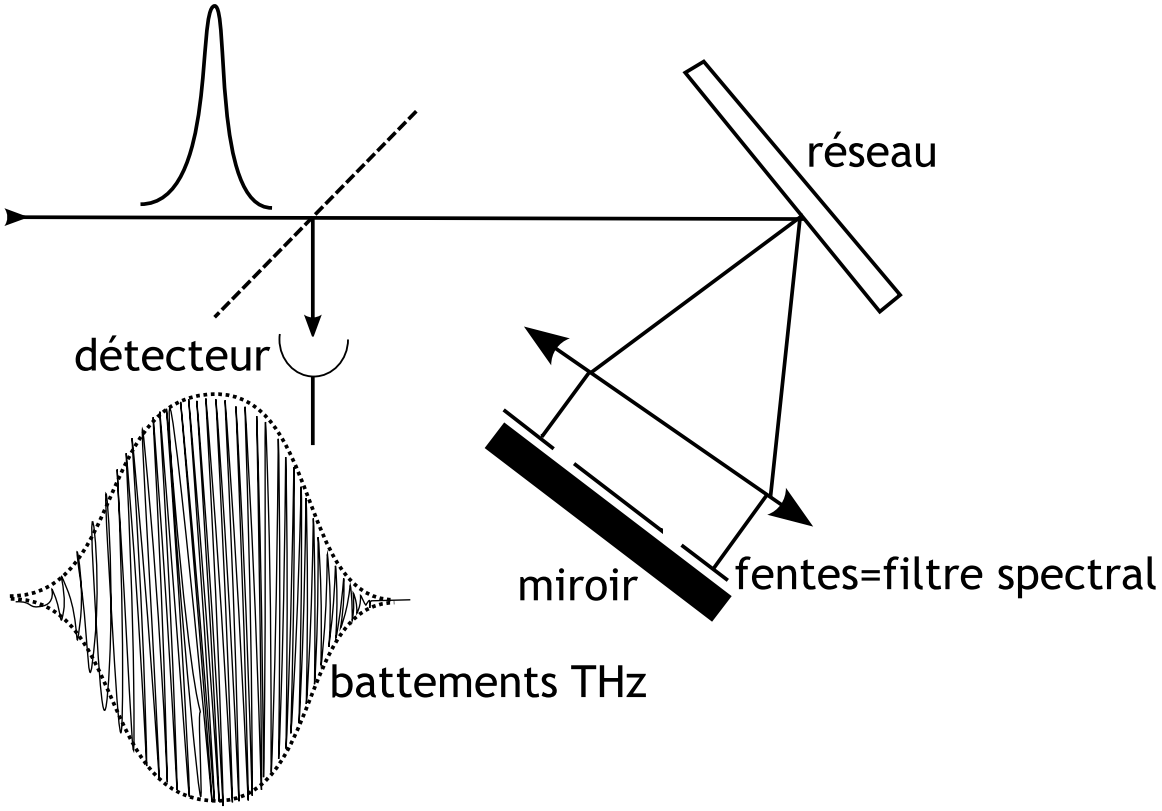

FIG. 5.12 – Schéma du montage de génération THz par filtrage spectral

Dans l'idéal, l'expérience est réalisée en utilisant une source extrêmement brève (par exemple quelques fs) émettant une unique impulsion. On va ensuite filtrer le spectre de celle-ci de manière à ne laisser passer que deux composantes spectrales. On observe ensuite à l'aide d'un photo-détecteur la réponse temporelle.

Cette expérience a en pratique effectivement été réalisée à l'Université de Laval [141] pour générer des battements THz, le schéma de montage est représentée sur la figure 5.12. Le filtrage est effectué en utilisant un dispositif à réseau : le réseau 1800 lignes/mm effectue la transformée de Fourier spatio-temporelle, c'est à dire qu'il étale dans l'espace les différentes longueurs d'ondes contenues dans l'impulsion ultra-brève produite par exemple par un laser Titane-Saphir, le champ est collimaté par une lentille cylindrique à la suite de laquelle est placé un masque formé de deux fentes de largeur 0.4 mm et

de séparation variable, on réalise donc spatialement le filtrage du spectre temporel de l'impulsion dont on ne conserve que deux minces composantes spectrales[16]. Le masque est en fait déposé sur un miroir, ce qui permet par retour inverse de la lumière d'effectuer la transformation de Fourier inverse sur le réseau. On peut par conséquent détecter un battement THz dont la fréquence est liée à l'écartement des fentes du masque, la durée à la largeur des fentes et le bruit de phase à celui du laser. Des considérations énergétiques limitent cependant la durée et la fréquence du battement car des fentes trop fines et trop éloignées du centre du spectre produiront des portions de spectres de trop faible puissance pour pouvoir générer un battement utilisable.

5.4.3 Visualisation des interférences temporelles entre deux lasers indépendants de fréquences différentes

Nous avons précédemment étudié la possibilité de réaliser des interférences entre deux composantes spectrales d'une source continue à large spectre de bruit (du type émission spontanée amplifiée). En appliquant le principe de stationnarité, nous en avons conclu que les battements étaient, en moyenne statistique, nul. Nous avons en un deuxième temps analysé une expérience identique pratiquée dans le spectre d'une source impulsionnelle.

Nous proposons maintenant d'étudier une expérience de trous d'Young spectraux en effectuant non plus un double « prélèvement » dans le spectre, mais en utilisant deux « trous sources » indépendants, à savoir deux lasers monomodes.

Lorsque deux lasers indépendants de fréquences différentes sont mélangés sur un photo-détecteur, la moyenne statistique du terme d'interférence est nulle à cause de la diffusion indépendante des deux phases optiques. Cependant, il n'est pas impossible de pouvoir détecter la présence de cette interférence. En effet, la moyenne statistique correspond bien souvent en pratique à une transposition par ergodisme d'un moyennage temporel. Cependant, dans le cas de l'observation de franges dans le domaine temporel, le moyennage temporel vient à l'encontre de la résolution de l'observation des franges temporelles. Par conséquent, on est amené à apprécier le moyennage uniquement sur une certaine plage temporelle, correspondant donc à un certain domaine de fréquences pour la densité spectrale de bruit.

En premier lieu, il faut que le détecteur possède une bande passante suffisante pour pouvoir être sensible au battement temporel, par conséquent, le temps de moyennage ne peut être supérieur à la période

[16]On agit ici par filtrage spatial sur le spectre temporel de l'onde. La propriété bien connue de la déviation des différentes longueurs d'onde par le réseau est due aux interférences spatiales multiples, notons cependant que, de manière moins connue, la modification du champ spatial en sortie du réseau s'accompagne aussi d'une modification temporelle de l'onde, en fonction de la direction considérée de l'onde émergeante. Claude Froehly de l'IRCOM a ainsi montré [142] que dans une direction donnée, la fonction de transfert d'une pupille d'amplitude présente le même profil que la dérivée de la répartition de transparence projetée sur cette direction. Dans le cas d'un réseau parfait, la fonction de transfert est la somme d'opérateurs de dérivation (dérivée de la distribution de Dirac), dont le délai est proportionnel au sinus de l'angle de diffraction. Sous un angle non normal, on retrouve dans le spectre, en calculant la fonction de transfert par transformée de Fourier, la superposition de plusieurs longueurs d'onde, correspondant à différents ordres de diffraction, dont l'intensité est proportionnelle à la fréquence.

des franges/oscillations temporelles, sous peine de faire disparaître les franges. Il se pose en second lieu le problème de l'affichage des franges. L'appareil dédié est l'oscilloscope. Lui aussi possède une certaine bande passante, auquel s'ajoute un certain nombre de paramètres plus directement liés à l'affichage (bande passante vidéo). Le principe de l'oscilloscope à faisceau d'électrons (analogique) est de périodiquement balayer l'écran en revenant vers la gauche afin de donner l'illusion de l'affichage d'une portion de sinusoïde continue, illusion basée sur la persistance rétinienne de l'observateur (intégration dans un temps d'environ 100 ms)[17]. En effet, le propre des franges d'interférences temporelles est qu'en théorie elle ne peuvent être observées dans leur ensemble au même instant, c'est le principe de l'oscilloscope qui permet d'immobiliser dans le temps une portion des franges. Les problèmes de cohérence dans la visualisation des franges d'interférences sont reliés à l'analyse de la stabilité de ces franges. Par conséquent, il faut analyser la stabilité de l'affichage de l'oscilloscope.

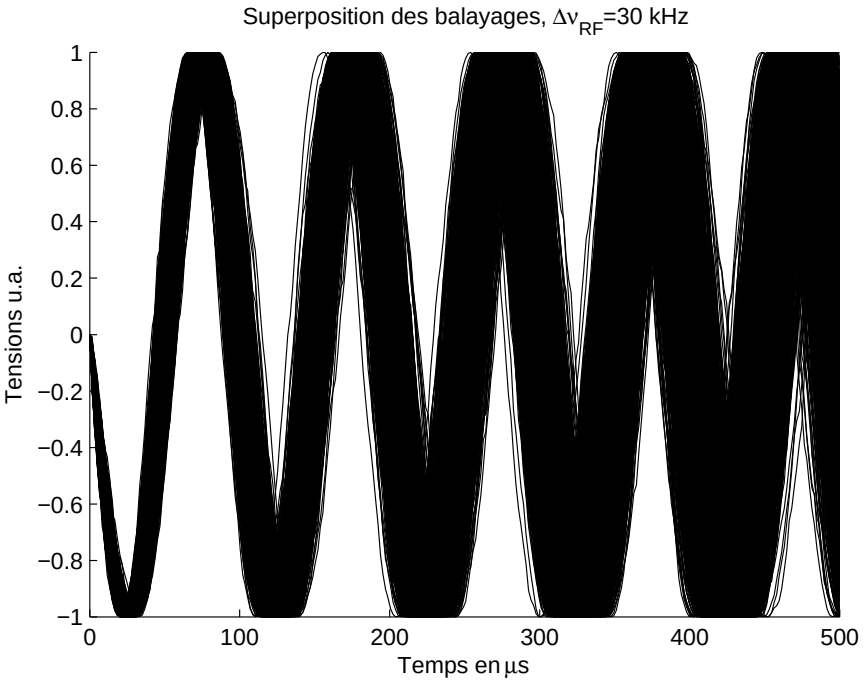

FIG. 5.13 – Effet du bruit de phase combiné à la persistance rétinienne, observation sur 5 périodes d'un battement à 100 kHz obtenu avec deux lasers de 30 kHz

Un balayage de l'écran correspond à la durée de la rampe (pour voir au moins une sinusoïde il faut un

[17] l'oeil est un capteur basé sur un phénomène photo-chimique conduisant à la modification de la polarisation électrique de la cellule photo-détectrice (bâtonnet ou cône), la substance présente sur la rétine est le pourpre rétinien (rhodopsine pour les bâtonnets) capable de se dissocier en une protéine (opsine) et de la vitamine A (rétinal, dérivé du carotène). La réponse de l'oeil à une stimulation en échelon se décompose en plusieurs phases : une phase de latence (retard), une phase d'établissement, une phase de réglage et une phase de persistance. En terme de sensibilité, le courant produit par l'absorption d'un photon par un cône est de 10^{-14} A et celui délivré par un bâtonnet est de 10^{-12} A, par contre la réponse des cônes entre l'absorption et le signal électrique est quatre fois plus lente (300 ms contre 70 ms) [143]

temps d'au moins la période du signal), le deuxième balayage à lieu lorsque le signal dépasse un certain seuil, par conséquent on est sûr que chaque affichage d'une portion temporelle de la sinusoïde partira du même niveau, c'est à dire de la même phase. Pour que l'affichage donne l'impression d'être permanent, il faut que le faisceau d'électron décrive exactement la même sinusoïde. Or, à cause du bruit de phase du signal de battement, la sinusoïde suivante n'est pas exactement identique à la précédente. En une abscisse donnée, l'oeil va superposer toutes les ordonnées, c'est à dire les tensions ou encore les phases de chaque balayage. La persistance de l'oeil étant assez longue, on peut considérer que la dimension de l'étalement des ordonnées peut être estimée par le double de l'écart type statistique de la tension à l'abscisse donnée (incertitude élargie)[18]. Pour le calcul, on se place à une abscisse τ dont l'ordonné moyen est nul[19] :

$$\begin{aligned}
\left\langle V^2 \right\rangle &= \left\langle \sin^2(\Delta\Phi_{RF}(t;\tau)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left\langle \sin^2(\Delta\Phi_{RF}(t;\tau)) \right\rangle \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\left\langle (\Delta\Phi_{RF}(t;\tau))^2 \right\rangle} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\pi(\Delta\nu_1+\Delta\nu_2)|\tau|}
\end{aligned} \tag{5.35}$$

où Φ_{RF} est la différence entre les deux phases des lasers.

On constate que la visibilité des oscillations décroît le long de l'axe de l'oscilloscope. Si la fréquence de battement est grande devant la largeur spectrale du battement, la durée du balayage pour un nombre faible de périodes sera courte devant le temps de cohérence, l'étalement sera donc faible. Par contre, pour des fréquences de l'ordre des largeurs spectrales des lasers, l'écran sera complètement brouillé par la superposition de motifs décalés, ce qui est la marque de la diffusion de la phase. Nous avons représenté sur la figure 5.13 une simulation de la superposition des balayages obtenus par le battement à 100 kHz de deux lasers de 30 kHz de largeur spectrale. Cette représentation sur deux niveaux (noir ou blanc) ne rend pas compte de la nuance d'éclairement que l'oeil peut percevoir en fonction de l'accumulation des points à chaque balayage, elle ne donne qu'une représentation du contour extrême. Afin de mieux apprécier le rendu visuel, nous avons représenté sur la figure 5.14 la simulation de l'histogramme des tensions au niveau du dernier noeud de l'oscillogramme. On retrouve une variable aléatoire gaussienne dont l'écart type est proportionnel à la largeur spectrale des lasers.

Cette analyse n'est valable que pour les oscilloscopes « traditionnels » fonctionnant en temps réel, or pour les fréquences très élevées, il n'est pas possible d'utiliser de tels oscilloscopes, on emploie alors des oscilloscopes à échantillonnage aléatoire [20]. Dans ce type d'appareil, il est pratiqué un échantillonnage

[18]En pratique, ceci dépend de la qualité de fluorescence de l'écran, du diamètre du faisceau, en outre l'estimation à l'aide de l'écart n'est valable que si le rendu visuel est linéaire, par conséquent il est préférable de baisser au maximum l'intensité du faisceau afin que l'oeil puisse au mieux apprécier les différences de luminance sur l'écran, les zones de fortes luminances correspondant aux zones de plus grande probabilité

[19]c'est le point où la linéarité permet de retrouver la variable aléatoire centrée, à l'inverse, au niveau d'un pic ou d'un creux, la densité de probabilité est fortement dissymétrique

[20]L'oscilloscope numérique temps réel le plus rapide, fabriqué par Tektronix, fonctionne cependant jusqu'à 15 GHz avec un

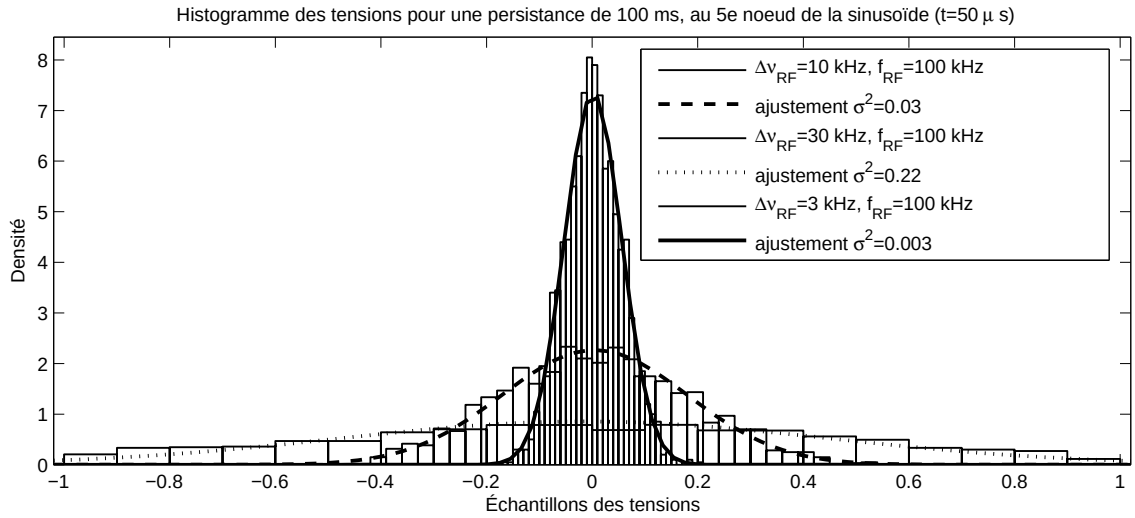

FIG. 5.14 – Histogramme des tensions visualisées sur l'oscilloscope à temps réel et ajustement de la densité de probabilité au niveau d'un noeud de la sinusoïde en fonction de la largeur spectrale des lasers

de quelques points lors d'une oscillation, ces points sont mémorisés et l'on pratique d'autres échantillonnages sur d'autres motifs d'oscillation mais à des instants relatifs différents afin d'échantillonner des points de la courbe différents. On reconstruit la forme de la sinusoïde à l'aide de tous ces points. Dans ce cas, l'analyse de la stabilité est complètement différente puisque le signal n'est pas affiché en temps réel. Intuitivement, la paramètre aléatoire à considérer est le changement de phase durant la durée nécessaire à l'enregistrement de tous les points de la courbe. Ce type d'oscilloscope possède des taux d'échantillonnage beaucoup plus faible que les oscilloscopes numériques temps réel dont le taux d'échantillonnage doit être plusieurs fois supérieur à la bande passante. Le taux d'échantillonnage aléatoire est typiquement de 10 millions d'échantillons par seconde[21], cependant chaque échantillon est acquis avec un temps de réponse extrêmement bref de l'ordre de l'inverse de la bande passante. L'acquisition de 1000 échantillons prend donc 0.1 ms. Chaque échantillon est pris sur une arche distante de 100 ns de la suivante. Si l'on considère alors la moyenne des écarts types des abscisses des points à la sinusoïde pure, on obtient un écart type moyen de $T\pi(\Delta\nu_1 + \Delta\nu_2)$ où T est la durée d'acquisition de tous les points correspondant à une gigue temporelle de $\frac{T}{2f_0}(\Delta\nu_1 + \Delta\nu_2)$ où f_0 est la fréquence du battement. Pour un temps d'acquisition de 0.1 ms, une fréquence de battement de 10 GHz et une largeur de raie identique pour les deux lasers de 1 MHz, la gigue temporelle est de 10^{-8} s soit 100 fois la période du signal, par conséquent il est impossible de distinguer la sinusoïde.

En résumé, on constate que la visibilité des battements temporels dépend expressément de l'oscilloscope utilisé. Pour un oscilloscope en temps réel, il est possible d'afficher plusieurs franges/oscillations

taux d'échantillonnage de 40 milliards d'échantillons par secondes

[21]Oscilloscope numérique à échantillonnage aléatoire de chez LeCroi fonctionnant jusqu'à 100 GHz avec un temps de monté de 4 ps

temporelles lorsque la fréquence du battement est nettement plus petite que la largeur spectrale des lasers. Il est cependant à noter que les variations de la phase au cours d'une durée inférieure au temps d'intégration de l'oeil ne contribuent pas à l'étalement des oscillations mais par contre induisent une dérive aléatoire lente (i.e. dont l'oeil perçoit le mouvement) de la courbe affichée, similaire à l'oscillation aléatoire d'un ressort fixé par son extrémité gauche.

Plus important encore, l'émission spontanée, à l'origine de la largeur spectrale, n'est pas la source principale d'instabilité fréquentielle. En effet viennent s'ajouter les bruits dit "technologiques" dont le principal est, pour les lasers à semi-conducteur, la fluctuation de température. Par conséquent, avec deux lasers semi-conducteurs, il est très difficile de pouvoir observer un battement stable temporellement sur un oscilloscope, même si les conditions de bonne visibilité mentionnées précédemment sont réunies, car la différence de fréquences des deux lasers et donc la fréquence du battement à visualiser, varie avec une amplitude comparable voire supérieure à la fréquence du battement, rendant difficile sont affichage à long terme sur l'oscilloscope, nous n'avons par conséquent pas réussit à prendre en photographie l'écran de notre oscilloscope analogique. Il est donc nécessaire de considérer la stabilité de la fréquence des lasers (bruits lents d'origine thermique ou mécanique) en plus de leurs largeurs spectrales (bruits rapides dus à l'émission spontanée).

5.4.4 Autres moyens de détection des battements temporels

Il existe d'autres moyens pour détecter l'interférence entre deux composantes spectrales non-corrélées. En effet, un des travaux pratiques les plus courants dans l'enseignement supérieur est la détection du doublet du sodium grâce au montage de Michelson. Des franges sont visibles non pas sur l'intensité de la lampe, mais sur son auto-corrélation, que l'on trace en faisant varier continûment la position d'un des miroirs.

Autre exemple, en mesurant la densité spectrale de puissance du photo-courant issu du mélange de deux lasers, on obtient un pic à la fréquence de battement, pic élargi par la convolution des densités spectrales des lasers. Ce spectre, par transformée de Fourier, peut nous fournir la fonction d'auto-corrélation du photo-courant sur laquelle seraient visibles des franges, il s'agit alors de franges dans la fonction d'auto-corrélation du quatrième ordre du champ.

On peut enfin utiliser un auto-corrélateur, comme pour la visualisation du profil des impulsions.

On constate par conséquent que même si l'on ne peut détecter les franges sur le photocourant, c'est à dire la variance, on peut les observer sur d'autres moments statistiques, comme le moment d'ordre deux du champ optique ou le moment d'ordre quatre du champ optique.

Pour voir les franges temporelles on peut encore :

- diminuer le temps de persistance/d'intégration de l'observateur/détecteur, dans ce cas on va pouvoir suivre le déplacement des franges, ou l'enregistrer.
- soit diminuer le temps d'interaction des deux ondes, cette voie à donner lieu à l'observation de franges d'interférences entre deux impulsions émises par des lasers différents [144]. Dans cette

expérience, la durée des impulsions est de la durée du temps de cohérence, par conséquent si les deux impulsions arrivent simultanément (grâce à un pompage picoseconde commun des deux lasers) alors chacune des deux phases restent suffisamment stable au cours du temps de l'impulsion pour donner lieu à un phénomène d'interférence stable de type trou d'Young, la stabilité étant ici maintenue dans le temps grâce à la persistance rétinienne. A noter cependant, que si l'on intègre la détection sur plusieurs impulsions, alors on obtient un brouillage des franges car la phase entre deux impulsions est aléatoire (translation aléatoire du réseau de franges)[22].

– soit stabiliser les fluctuations de la phase du terme d'interférence.

5.4.5 Interférences temporelles par duplication du front d'onde spectral

Nous abordons maintenant brièvement le cas de la duplication du front d'onde. Supposons que le faisceau d'un laser monochromatique soit dupliqué et qu'une des copies soit décalée en fréquence (par exemple grâce à un modulateur acousto-optique), on obtient ainsi deux trous d'Young fréquentiels par duplication du front d'onde. On détecte évidemment des franges d'Young parfaitement contrastées dans le domaine temporel, ce qui correspond à l'oscillation périodique du photo-courant, de fréquence égale à la fréquence de décalage (distance entre les deux trous fréquentiels) que l'on peut visualiser grâce à un oscilloscope. Les limitations sur la visibilité des franges proviennent essentiellement de la qualité de la source radio-électrique appliquée au modulateur, qui détermine la corrélation entre les deux "trous".

Il s'agit d'une des méthodes simples utilisant un seul laser pour générer par battement des micro-ondes [27].

5.4.6 Interférences temporelles obtenues par deux sources partiellement corrélées

Lors de l'étude des interférences temporelles par division du front d'onde, nous avons parlé de deux cas extrêmes, le spectre totalement corrélé (source impulsionnel) et le spectre totalement décorrélé (source stationnaire à large spectre, lampe, émission spontanée amplifiée ou encore superposition de deux lasers indépendants).

Le cas intermédiaire correspond nécessairement à une source non stationnaire, de type auto-oscillante ou auto-pulsante. Dans le cas d'un laser à plusieurs modes, il est possible qu'il existe une certaine corrélation entre chaque mode, cette corrélation peut être induite activement (absorbant saturable, autofocalisation par effet Kerr, mélange à quatre ondes, modulation accousto-optique) ou exister naturellement (verrouillage de modes passif). Dans ce dernier cas, on peut mesurer la corrélation existant entre chaque

[22]Cette expérience est à rapprocher de celle déjà mentionnée des franges d'Young obtenues dans les grains de speckle dus à l'éclairement de deux dépolis. La zone de speckle est analogue à la zone temporelle de cohérence, c'est à dire le train d'onde, qui est ici égal à la durée de l'impulsion. Chacun des grains de speckle correspond donc à une impulsion et comme nous l'avions mentionné, il n'y a pas de relation de continuité entre les franges d'Young de chacun des grains de speckle, pas plus qu'il n'y a de maintient de la position spatiale des franges entre deux séries d'interférences entre impulsions

mode en mesurant la largeur spectrale du battement entre deux modes et en la comparant avec la somme des largeurs spectrales optiques de chacun des modes (cas lorentzien) [145].

Nous avons aussi traité le cas de deux lasers indépendants, en enlevant les "trous". Il n'existe à priori pas plus de corrélation entre deux composantes spectrales de deux lasers différents, qu'entre deux composantes spectrales d'un laser continu. Avec deux sources lasers, nous sommes dans le cas de deux sources quasi-monochromatiques dont le bruit de phase apporte la contribution prépondérante à la densité spectrale. Il est donc possible d'écrire les deux champs optiques temporels sous la forme :

$$E_1(t) = A_1(t)e^{j\omega_1 t} \tag{5.36}$$

$$E_2(t) = A_2(t)e^{j\omega_2 t} \tag{5.37}$$

où $\omega_1/2\pi$ et $\omega_1/2\pi$ sont les fréquences moyennes des deux lasers et $A_1(t)$ et $A_2(t)$ les enveloppes complexes temporelles autour de ces fréquences respectives. On considère donc qu'en superposant ces deux champs on obtient un nouveau champ noté E_m et appelé champ "mélange".

On va donc maintenant considérer le photocourant obtenu sans "trous" c'est à dire simplement le photocourant obtenu à l'aide d'un photodétecteur éclairé par le champ mélange. Comme il n'y a plus de fonction de transfert H, le photocourant est simplement :

$$i(t) \propto \langle |E_m(t)|^2 \rangle = \langle |E_1(t)|^2 \rangle + \langle |E_2(t)|^2 \rangle + 2\langle \Re e\{E_1(t)E_2^*(t)\} \rangle \tag{5.38}$$

On constate donc que ce n'est plus la fonction d'autocorrélation spectrale du champ qui intervient, mais la fonction de corrélation temporelle entre les deux champs sources. Afin de faire apparaître les franges, ont utilise les expressions en enveloppe complexe des champs :

$$i(t) \propto A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\langle \cos(\phi_1(t) - \phi_2(t) + \Omega t) \rangle \tag{5.39}$$

On constate donc que l'on est passé d'une nécessité de cohérence spectrale de la source à une nécessité de corrélation temporelle entre les deux sources. Nous avons étudié plus haut le cas où les lasers étaient décorrélés, c'est à dire le cas où la moyenne statistique du terme d'interférence était nulle. Si les deux champs deviennent mutuellement stationnaires, c'est à dire si $\langle A_1(t+\tau)A_2(t) \rangle$ ne dépend pas de t, alors on peut montrer que seules les composantes spectrales du champ mélange distantes de Ω sont corrélées. En résumé, en rendant non nul et constant $\langle A_1(t)A_2^*(t) \rangle$, on rend non nul $\langle E_1(\omega)E_2^*(\omega+\Omega) \rangle$.

5.5 Conclusion

Au cours de ce chapitre nous avons cherché à mettre en évidence les similitudes entre les phénomènes interférentiels dans quatre espaces différents : positions, fréquences spatiales, fréquences temporelles, instants. Ainsi nous avons noté les analogies existant entre la granulosité spatiale et le bruit de phase des lasers, les franges d'égales inclinaisons d'un Michelson et les cannelures spectrales ou encore les

battements temporels et les espaces qui ne permettent pas de faire systématiquement la transposition des formules. Il y a tout d'abord le fait que si le formalisme statistique est commun aux différents espaces, en pratique, le principe d'ergodisme s'applique de manière différente et avec plus ou moins de succès. En particulier, nous avons noté que l'analyse des battements en terme de franges d'interférences était très liée à la méthode d'observation, et nous avons pointé le fait que les fonctions d'autocorrélation des espaces réciproques n'avait pas les mêmes propriétés statistiques, en particulier la stationnarité.

Dans le prochain chapitre, nous proposons d'étudier la corrélation entre un laser maître et un laser esclave accroché. Le calcul du degré de corrélation entre les deux lasers sera obtenu à partir de l'étude de la corrélation entre les phases des deux lasers.

Chapitre 6

Étude du degré de corrélation de deux lasers partiellement corrélés par injection optique

6.1 Introduction à la corrélation par injection optique

Lorsqu'un laser(appelé esclave) est soumis à l'injection optique d'un autre laser (appelé maître), on parle généralement de synchronisation de laser. Si l'on se place dans le cadre de deux champs aléatoires, on peut alors parler de corrélation des lasers. Or l'une des facultés propres aux ondes corrélées est de pouvoir interférer, c'est à dire, en les superposant, d'obtenir tantôt un renforcement, tantôt une disparition de l'énergie.

Lorsque deux champs complexes quasi monochromatiques de même fréquence sont superposés, nous rappelons que la puissance moyenne résultante est donnée par :

$$P_M = \frac{\left\langle |A+B|^2 \right\rangle}{2} = \frac{|A|^2}{2} + \frac{|B|^2}{2} + 2\frac{\langle \Re e\{AB\} \rangle}{2} = P_A + P_B + 2\sqrt{P_A P_B}\,\langle \cos(\phi_A - \phi_B) \rangle \quad (6.1)$$

La puissance de la superposition des deux ondes est donc la somme des puissances individuelles de chacune des ondes, plus un terme d'interférence.

On constate donc que le terme d'interférence viendra renforcer ou faire disparaître la somme des puissances des deux ondes, selon la différence de leurs phases. Cependant, la phase de chacune des ondes dépend du temps, impliquant par conséquent que cette différence de phase varie au cours du temps de manière aléatoire. On a montré précédemment que pour un laser de largeur spectrale à mi-hauteur de 1 MHz, l'incertitude relative sur la phase était de 100% au bout de 6,3 μs. Si les deux phases sont des fonctions aléatoires indépendantes, alors l'écart type de leur différence est la somme de leurs écarts types. Sur un intervalle de temps supérieur à une dizaine de durée de cohérence, la variation de la phase du terme

d'interférence devient une variable aléatoire uniformément répartie sur le cercle trigonométrique. Par contre, si les deux phases proviennent d'un processus statistique commun, alors leur différence restera constante avec le temps.

Grâce au principe de l'injection optique, on peut transférer les propriétés statistiques d'un laser à un autre laser. La phase de chacun des lasers reste une fonction aléatoire non stationnaire, cependant la statistique de la phase du laser esclave est fortement influencée par la statistique de la phase du laser maître, si bien que la différence des deux phases, c'est à dire de deux fonctions aléatoires non stationnaires, est une fonction aléatoire stationnaire, par conséquent sa moyenne et son écart type n'évolue pas au cours du temps. Si l'on réalise une superposition entre le champ du laser maître et le champ du laser esclave, les propriétés statistiques du terme d'interférence seront stables dans le temps, c'est à dire que l'intensité du terme d'interférence sera stable dans le temps (moyenne) et que le contraste entre une superposition en phase et en opposition de phase sera de même stable dans le temps (écart type).

De nombreuses études ont été effectuées afin d'étudier les propriétés interférométriques de sources lumineuses s'écartant du modèle théorique de l'onde monochromatique issue d'un point source. Ces études sont centrées autour de deux théorèmes, le théorème de Zernike-Van Cittert, déterminant le degré de cohérence du champ en deux points différents d'un écran éclairé par une source primaire étendue, et l'équivalent optique du théorème de Wiener-Khintchnine, déterminant le degré de cohérence du champ à deux instants différents. L'unification et la généralisation des théories sur la cohérence spatiale et la cohérence temporelle est l'oeuvre de Emil Wolf [146] aux États-Unis et de André Blanc-Lapierre [147] en France. Ces études concernent principalement les propriétés d'une seule source, possédant une certaine étendue spatiale ainsi qu'une certaine largeur spectrale, vue comme la somme de multiples sources secondaires possédant certaines propriétés statistiques mutuelles. Notre étude ne considère pas une source mais deux sources, ce qui introduit une cinquième dimension dans l'étude statistique (les trois coordonnées spatiales, la coordonnée temporelle et le choix de la source).

Afin de faire acquérir à ces deux lasers distincts un certain degré de corrélation [1], on utilise donc le principe de l'injection optique. On considérera ici uniquement des questions de cohérence temporelle.

6.2 Calcul du degré de corrélation de deux lasers reliés par injection

6.2.1 Transfert et synchronisation de bruit par injection

La largeur spectrale d'un laser à émission continue est la signature d'une fluctuation aléatoire du champ au cours du temps. Elle trouve sa source dans le mécanisme d'émission spontanée, produisant

[1] Nous utiliserons plutôt le terme de corrélation lorsque l'on parle des propriétés statistiques croisées des deux sources, et le terme de cohérence lorsque l'on parle des propriétés statistiques propres à chacune des sources. Cependant, on utilisera le terme classique d'autocorrélation pour chacune des sources plutôt que celui de fonction de cohérence. L'autocovariance désigne parfois la fonction d'autocorrélation de la fonction aléatoire centrée, comme en général on considère une fonction aléatoire de moyenne nulle, les deux termes se confondent en pratique.

une émission de photons de phase aléatoire, mécanisme qui siège au sein du laser au coté du mécanisme d'émission stimulé, produisant lui une émission en phase de photons. Il faut noter que les deux mécanismes ne sont pas totalement dissociés, puisque le mécanisme d'émission stimulée ne peut démarrer qu'à partir de l'émission spontanée d'un photon initial.

Lorsque l'on injecte une faible quantité de lumière issu d'un laser, dit maître, à l'intérieur de la cavité du laser esclave, ces photons maîtres viennent s'ajouter aux photons spontanés de la cavité esclave en tant que source de démarrage de l'émission stimulée. Cependant les photons maîtres possèdent les propriétés du champ du laser maître, les photons sont donc tous de même mode spatial, et bien en phase, par conséquent un champ laser peut se construire extrêmement efficacement à partir de ces quelques photons, tout en conservant les propriétés de fréquence et de phase. L'émission stimulée n'est alors plus déclenchée sur l'émission spontanée, mais sur l'émission stimulée du laser maître.

Le laser maître possède lui-même un certain bruit dû à son émission spontanée. Ce bruit est par conséquent transféré au champ du laser esclave. Le laser acquiert donc la même largeur spectrale que celle du laser maître[2], mais mieux encore, il y a synchronisation entre le bruit des deux champs. Lorsque un photon spontané apparaît dans la cavité esclave, il perturbe le champ stimulé du laser maître. Cette perturbation arrive jusque dans la cavité laser de l'esclave et se retrouve sur le champ stimulé du laser esclave. On obtient par conséquent deux lasers partiellement cohérents (à cause de leur largeur spectrale) mais totalement corrélés. En fait, le mécanisme d'émission spontanée existe toujours au sein de la cavité du laser esclave, il y a donc un certain nombre de perturbations qui demeurent propres au champ du laser esclave. De même, un certain nombre de perturbations du champ laser maître ne pourront être transmises au champ laser esclave, lorsque ces perturbations propres deviennent non-négligeable, on doit alors parler de corrélation partielle entre les deux sources et non totale.

6.2.2 Expression du degré de corrélation

Comme nous l'avons vu précédemment, c'est la phase des champs lasers qui va influer sur la stabilité des interférences observées. Ainsi la corrélation entre les deux sources est étroitement liée à la corrélation entre les phases de chacune des sources.

On définit le degré de corrélation entre les deux sources lasers [148] :

$$\gamma_{ms} = \frac{|\langle E_m(t) E_s^*(t) \rangle|}{\sqrt{\langle |E_m(t)| \rangle} \sqrt{\langle |E_s(t)| \rangle}} \tag{6.2}$$

Puisque l'on ne considère que l'influence du bruit des phases et que celles-ci sont de statistique gaussienne :

$$\gamma_{ms} = \left\langle e^{-j(\phi_m(t)-\phi_s(t))} \right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\left\langle (\phi_m(t)-\phi_s(t))^2 \right\rangle} \tag{6.3}$$

Il s'agit donc maintenant en quelque sorte d'étudier les interférences, non plus entre les champs, mais

[2]Pour un taux d'injection suffisant

entre les phases des champs [3]. On peut, dans un premier temps, développer le terme en moyenne quadratique :

$$\left\langle(\phi_m(t)-\phi_s(t))^2\right\rangle = \left\langle(\phi_m(t))^2\right\rangle + \left\langle(\phi_s(t))^2\right\rangle - 2\left\langle(\phi_m(t)\phi_s(t))\right\rangle \tag{6.4}$$

et le traduire en densité spectrale de puissance :

$$S_{\phi_m-\phi_s}(f) = S_{\phi_m}(f) + S_{\phi_s}(f) - 2\Re e\left\{S_{\phi_m\phi_s}(f)\right\} \tag{6.5}$$

où $S_{\phi_m\phi_s}(f)$ est la densité interspectrale de puissance des deux phases, elle est définie formellement par :

$$S_{\phi_m\phi_s}(f)\delta(f-f') = \phi_m(f)\phi_s^*(f') \tag{6.6}$$

ou bien à partir de la densité interspectrale des deux bruits de fréquence instantanée.

6.3 Études des propriétés spectrales des bruits de phases

6.3.1 Introduction

Dans cette partie, nous allons chercher à exprimer d'une manière simple la densité spectrale de puissance de la phase du battement radio-fréquence produit par deux lasers corrélés par injection. L'objectif étant aussi de pouvoir calculer littéralement l'écart type du bruit de phase et de la gigue de phase, il est nécessaire d'obtenir une formule dont il sera possible de calculer la transformée de Fourier.

La plage des fréquences d'écart à la porteuse nécessaire à la caractérisation du bruit de phase radio-fréquence est généralement bien inférieure au GHz, par conséquent, il s'agit dans un premier temps d'établir une équation simplifiée de la densité spectrale de puissance du bruit de phase pour des fréquences de Fourier inférieures à la fréquence de résonance du laser, celle-ci devra mettre en évidence la contribution du laser maître au bruit et la contribution propre du laser esclave.

Ensuite, il s'agit de déterminer la densité interspectrale de puissance des phases des lasers maître et esclave en distinguant les termes corrélés et non corrélés, afin de pouvoir calculer la densité spectrale de puissance de la différence des deux phases.

L'approximation permettant d'obtenir la densité spectrale pour les fréquences de Fourier inférieures à la fréquence de relaxation est basée sur une analyse de type Van der Pol où la densité de porteurs est éliminée de manière adiabatique. L'équation de Van der Pol est obtenue à partir des résultats obtenus dans le chapitre sur l'injection optique dans un laser DFB.

[3] Cette étude est rendue plus ardue par le fait que la phase de chaque laser n'est pas stationnaire. En toute rigueur, on ne peut définir la densité spectrale de la phase à cause de sa non-stationnarité, cependant la phase n'est que faiblement non stationnaire car sa dérivée est stationnaire. Par conséquent, on peut à partir de la densité spectrale de fréquence (écart de fréquence instantané) définir une pseudo densité spectrale de puissance valable pour toutes les fréquences exceptées celles au voisinage de zéro. Il n'est donc, par exemple, pas possible de calculer la fonction d'autocorrélation de la phase à l'aide de cette densité spectrale de puissance. Par contre, elle est utilisable dans tous les cas où elle est régularisée en zéro. Voir en annexe B pour plus de détails.

6.3.2 Calcul adiabatique de la densité spectrale de puissance du bruit de phase

On utilise dans ce chapitre pour l'enveloppe du champ optique une équation proche de celle d'un laser Fabry-Perot. Les spécificités propres du laser DFB sont introduites en utilisant un coefficient de couplage phase-amplitude α_{eff} et d'une constante de couplage du champ injecté f_R dépendant tous deux de la structure du DFB (paramètre de couplage, réflectivité des facettes, phase à l'origine du réseau). De plus nous ne prenons pas en compte la compression du gain en considérant des courants d'injection pas trop élevés et nous négligeons le bruit de grenaille des électrons.

L'équation de départ sur l'enveloppe du champ de l'onde sortante est donc (4.93) :

$$\frac{dA^+}{dt}(t) = -j(\omega_s - \omega_i)A^+(t) + A^+(t)\left\langle C_{\mathcal{N}}\right| \Delta\mathcal{N}(t)\rangle + f_R t_{23} A^i(t) + F_A(t) \tag{6.7}$$

Par la même méthode que celle utilisée dans le cas général, on déduit de cette équation une équation pour l'intensité, et une autre pour la phase :

$$\frac{dI}{dt}(t) = 2\left\langle C_{\mathcal{N}r}\right| \Delta\mathcal{N}(t)\rangle I(t) + 2 f_R T_2 \sqrt{I(t) I_{in}(t)} \cos(\phi_{in}(t) - \phi(t)) + F_I(t) \tag{6.8}$$

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = (\omega_s - \omega_i) + \alpha_{eff}\left\langle C_{\mathcal{N}r}\right| \Delta\mathcal{N}(t)\rangle + f_R T_2 \sqrt{\frac{I_{in}}{I(t)}} \sin(\phi_{in}(t) - \phi(t)) + F_\phi(t) \tag{6.9}$$

On se place alors en régime stationnaire pour lequel la variation d'intensité est supposée négligeable (saturation du gain), on élimine ainsi la densité de porteurs :

$$\begin{aligned}
\frac{d\phi}{dt}(t) &= (\omega_s - \omega_i) + f_R T_2 \sqrt{\frac{I_{in0}}{I_0}} \left[\sin(\phi_{in}(t) - \phi(t)) - \alpha_{eff}\cos(\phi_{in}(t) - \phi(t))\right] \\
&\quad + F_\phi(t) - \alpha_{eff}\frac{F_I(t)}{2I_0} \\
&= (\omega_s - \omega_i) + \eta |f_R| \sqrt{1 + \alpha_{eff}^2} \sin(\theta(t) + \arg(f_R) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})) \\
&\quad + F_\phi(t) - \alpha_{eff}\frac{F_I(t)}{2I_0}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

où $\theta(t) = \phi_{in}(t) - \phi(t)$

En régime petit signal, en utilisant les résultats obtenus sur la plage d'accrochage :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = \delta\theta(t)\delta\omega_{\max}\cos(\theta_0 + \arg(f_R) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})) + F_\phi(t) - \alpha_{eff}\frac{F_I(t)}{2I_0} \tag{6.11}$$

On pose alors

$$k'_c = \delta\nu_{\max}\cos(\theta_0 + \arg(f_R) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})) \tag{6.12}$$

En faisant la transformée de Fourier de l'équation (6.11) :

$$[j2\pi f + 2\pi k'_c]\phi(f) = 2\pi k'_c \phi_{in}(f) + F_\phi(f) - \alpha_{eff}\frac{F_I(f)}{2I_0} \tag{6.13}$$

La densité spectrale de puissance de bruit de la fonction aléatoire X est $S_X(\omega)$ et elle vérifie (formellement) la relation suivante :

$$\left\langle X(f).X^*(f')\right\rangle = S_X(f)\delta(f-f') \tag{6.14}$$

A partir de (6.13) on obtient ainsi la densité spectrale de puissance du bruit de phase du laser soumis à injection :

$$S_\phi(f) = \frac{{k'_c}^2}{{k'_c}^2+f^2}S_{\phi_{in}}(f) + \frac{2(D_{\phi\phi}+\alpha_{eff}^2 D_{II}/4I_0^2)}{4\pi^2{k'_c}^2+4\pi^2 f^2} \tag{6.15}$$

En utilisant les coefficients de diffusion des forces de Langevin de la phase et de l'intensité dues aux photons spontanés :

$$2D_{II} = 2R_{sp}\frac{I_0^2}{p_0} \tag{6.16}$$

$$2D_{\phi\phi} = \frac{R_{sp}}{2p_0} \tag{6.17}$$

où p_0 est le nombre moyen de photons dans la cavité. Comme nous l'avons précédemment montré, R_{sp} dépend de la structure longitudinal du mode ainsi que de la structure transverse (facteur de Petermann).

La densité spectrale de puissance peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{S_\phi(f) = \underbrace{\frac{{k'_c}^2}{{k'_c}^2+f^2}S_{\phi_{in}}(f)}_{(a)} + \underbrace{\frac{f^2}{{k'_c}^2+f^2}S_{\phi_l}(f)}_{(b)}} \tag{6.18}$$

avec comme expression pour la densité spectrale de puissance du bruit de phase libre :

$$S_{\phi_l}(f) = \frac{1+\alpha^2}{4\pi^2 f^2}\frac{R_{sp}}{2p_0} = \frac{\Delta\nu}{2\pi f^2} \tag{6.19}$$

avec la largeur spectrale à mi-hauteur $\Delta\nu = (1+\alpha^2)\frac{R_{sp}}{4\pi p_0}$ ou encore pour le bruit de fréquence [4] :

$$S_{\delta\nu_l}(f) = \frac{\Delta\nu}{2\pi} \tag{6.20}$$

On distingue très clairement dans l'équation (6.18) deux contributions :

- (a) est la partie des composantes spectrales du bruit de phase transmise du laser maître vers l'esclave par le mécanisme d'accrochage optique.
- (b) est la partie résiduelle du bruit propre à l'émission spontanée de la cavité esclave .

[4] On retrouve ici la contribution du bruit d'intensité optique à l'augmentation du bruit de phase et donc à l'élargissement de la raie spectrale due au couplage phase-amplitude (relation de Kramers-Kronig, conséquence du principe de causalité). On montre que pour des fréquences bien supérieures à la fréquence de résonance, cette contribution disparaît car la dynamique limitée des porteurs ne permet pas de transmettre les composantes hautes-fréquences du bruit d'intensité, le niveau de densité spectrale du bruit de fréquence dans cette bande est alors de $\frac{R_{sp}}{8\pi^2 p_0}$ (Hz).

Par rapport à un laser libre, on remarque ici une réjection du bruit d'émission spontanée de la cavité semblable à un filtre coupe-bas ou encore une boucle à verrouillage de phase du premier ordre, de fréquence de coupure à -3 dB k_c' [40]. A l'inverse, la bande passante de la transmission du bruit maître vers l'esclave est limitée par un filtre passe-bas du premier ordre de fréquence de coupure à -3 dB k_c'. Si le niveau de la densité spectrale de bruit de fréquence du laser maître est supérieur à la fréquence de coupure k_c', liée au paramètre d'injection, alors la largeur spectrale à mi-hauteur du laser esclave sera très proche de celle du laser maître (par exemple pour un laser maître de largeur spectrale à mi-hauteur de 1 MHz, la condition est remplie pour des taux d'injections relativement faibles). Si la fréquence de coupure est faible par rapport au niveau du bruit de fréquence du maître, alors le transfert de largeur spectrale n'est pas complet [149]. Le spectre du laser esclave sera formé par le spectre du champ libre surmonté d'un pic plus étroit dans le cas où le laser maître possède une largeur spectrale plus faible que le laser libre (figure 6.1). Si le laser maître possède un spectre plus large, alors le spectre du laser esclave s'élargit progressivement avec k_c' [150]

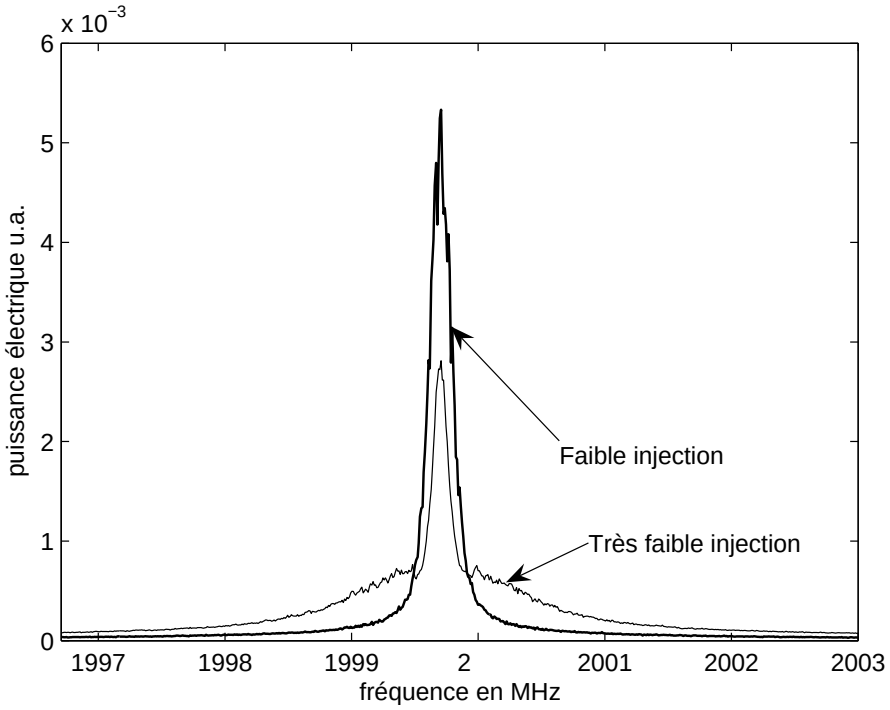

FIG. 6.1 – Spectre optique expérimental du laser soumis à très faible et faible injection d'un laser maître plus cohérent (mesure auto-hétérodyne)

6.3.3 Calcul de la densité spectrale de puissance de la phase du battement

La phase du terme d'interférence est directement donnée par la différence des phases optiques des deux champs incidents sur le détecteur :

$$\phi_{ms}(t) = \phi_m(t) - \phi_s(t) \tag{6.21}$$

La densité spectrale de puissance de la phase du battement est donnée par :

$$S_{\phi_{ms}}(f) = S_{\phi_m}(f) + S_{\phi_s}(f) - 2\Re e\left\{S_{\phi_m\phi_s}(f)\right\} \tag{6.22}$$

D'après les résultats précédant, la phase du laser esclave s'exprime dans le domaine de Fourier sous la forme :

$$\phi_s(f) = \frac{2\pi k'_c \phi_m(f) + F_{\phi eq}(f)}{j2\pi f + 2\pi k'_c} \tag{6.23}$$

où $F_{\phi eq} = F_\phi(f) + \alpha_{eff}\frac{F_I(f)}{2I_0}$ prend en compte l'effet de l'intensité des photons spontanés sur la phase.

On cherche alors à évaluer l'expression de la densité interspectrale des deux phases optiques :

$$\begin{aligned} S_{\phi_m\phi_s}(f)\delta(f-f') &= \left\langle \phi_m(f)\phi_s^*(f')\right\rangle \\ &= \left\langle \frac{k'_c\phi_{in}(f) + F_{\phi eq}(f')}{jf + k'_c}\phi_{in}^*(f')\right\rangle \\ &= \frac{k'_c S_{\phi_{in}}(f)\delta(f-f')}{jf + k'_c} \end{aligned} \tag{6.24}$$

D'où

$$S_{\phi_m\phi_s}(f) = \frac{k'_c S_{\phi_m}(f)}{jf + k'_c} \tag{6.25}$$

et

$$\Re e\{S_{\phi_m\phi_s}(f)\} = \frac{{k'_c}^2 S_{\phi_m}(f)}{f^2 + {k'_c}^2} \tag{6.26}$$

Nous disposons maintenant des trois expressions nécessaires :

$$S_{\phi_m}(f) = \frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} \tag{6.27}$$

$$S_{\phi_s}(f) = \frac{{k'_c}^2}{{k'_c}^2 + f^2}\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} + \frac{f^2}{{k'_c}^2 + f^2}\frac{\Delta\nu}{2\pi f^2} \tag{6.28}$$

$$\Re e\{S_{\phi_m\phi_s}(f)\} = \frac{{k'_c}^2}{f^2 + {k'_c}^2}\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} \tag{6.29}$$

$$\tag{6.30}$$

donc

$$S_{\phi_{ms}}(f) = S_{\phi_m}(f) + S_{\phi_s}(f) - 2\Re e\left\{S_{\phi_m\phi_s}(f)\right\} \tag{6.31}$$

$$= \frac{f^2}{{k'_c}^2 + f^2}\frac{\Delta\nu_m + \Delta\nu}{2\pi f^2} \tag{6.32}$$

6.3.4 Calcul des variances

On calcule ensuite la moyenne quadratique de ϕ_{ms} par intégration de sa densité spectrale de puissance sur toutes les fréquences :

$$\begin{aligned}\left\langle(\phi_{ms}(t;\tau))^2\right\rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi_{ms}(t;\tau)}(f)df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f^2}{k_c'^2+f^2}\frac{\Delta\nu_m+\Delta\nu}{2\pi f^2}df \\ &= \frac{\Delta\nu_m+\Delta\nu_s}{2k_c'}\end{aligned} \tag{6.33}$$

La variance du déphasage entre les deux lasers est due aux composantes spectrales des phases non corrélées.

Pour des lasers de largeurs spectrales égales, l'expression (6.33) devient :

$$\langle\phi_{ms}^2\rangle = \frac{\Delta\nu}{k_c'} \tag{6.34}$$

6.3.5 Calcul de la gigue de phase du laser esclave

Il nous semble utile à partir des calculs précédents d'établir la variance de la gigue de phase du laser esclave accroché :

$$\Delta\phi_s(t,\tau) = \phi_s(t+\tau) - \phi_s(t) \tag{6.35}$$

Celle-ci s'exprime en fonction de la densité spectrale de la gigue

$$\left\langle(\Delta\phi_s(t;\tau))^2\right\rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\Delta\phi_s(\tau)}(f)df \tag{6.36}$$

qui elle-même est reliée à l'expression de la densité spectrale de la phase du laser esclave :

$$S_{\Delta\phi_s(\tau)}(f) = 2S_{\phi_s}(f)(1-\cos(2\pi f\tau)) \tag{6.37}$$

En utilisant (6.18), on obtient l'expression :

$$S_{\Delta\phi_s(\tau)}(f) = 2\sin^2(\pi f\tau)\left[\frac{\Delta\nu_m k_c'^2}{\pi f^2(k_c'^2+f^2)} + \frac{\Delta\nu}{\pi(f^2+k_c'^2)}\right] \tag{6.38}$$

à partir de laquelle on peut calculer la variance de la gigue de phase :

$$\left\langle(\Delta\phi_s(t;\tau))^2\right\rangle = \Delta\nu_m\left[2\pi|\tau| - \frac{\left(1-e^{-2\pi k_c'|\tau|}\right)}{k_c'}\right] + \Delta\nu_s\left[\frac{\left(1-e^{-2\pi k_c'|\tau|}\right)}{k_c'}\right] \tag{6.39}$$

On remarque que pour des délais suffisamment grands devant $1/k'_c$, la variance est identique à la variance de la gigue de phase du laser maître ($2\pi|\tau|\Delta\nu_m$), et pour des délais suffisamment petits [5] devant $1/k'_c$, la variance est identique à la variance de la gigue de phase du laser libre ($2\pi|\tau|\Delta\nu_s$) [6].

A partir de l'expression de la variance de la gigue de phase il est alors aisé, comme présenté dans le chapitre sur les rappels statistiques, d'obtenir la fonction d'autocorrélation puis par transformation de Fourier rapide, d'obtenir numériquement la densité spectrale de puissance du laser soumis à injection [149].

6.3.6 Expression du degré de corrélation

L'équation (6.3) utilisée avec l'équation (6.33) permet finalement de déterminer le degré de corrélation existant entre un laser maître de largeur spectrale $\Delta\nu_m$, et un laser esclave de largeur spectrale libre $\Delta\nu$, en fonction du paramètre k'_c :

$$\gamma_{ms} = e^{-\frac{\Delta\nu+\Delta\nu_m}{4k'_c}} \tag{6.40}$$

On rappelle alors que :

$$k'_c = \eta\frac{|f_R|}{2\pi}\sqrt{1+\alpha_{eff}^2}\cos(\theta_0 + \arg(f_R) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})) \tag{6.41}$$

et que la condition d'accrochage reliant le déphasage au désaccord de fréquence est :

$$\nu_m - \nu_s = \eta\frac{|f_R|}{2\pi}\sqrt{1+\alpha_{eff}{}^2}\sin(\theta_0 + \arg(f_R t_{32}) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})) \tag{6.42}$$

On obtient ainsi une équation plus compacte reliant la fréquence d'accrochage au désaccord de fréquence :

$$k'_c = \delta\nu_{max}\sqrt{1-\left(\frac{\nu_m-\nu_s}{\delta\nu_{max}}\right)^2} \tag{6.43}$$

où

$$\delta\nu_{max} = \eta\frac{|f_R|}{2\pi}\sqrt{1+\alpha_{eff}{}^2} \tag{6.44}$$

est la demi-largeur fréquentielle de la plage d'accrochage.

[5] Si le délai est petit devant le temps d'interaction photon-porteur (inverse de la fréquence de relaxation) alors l'expression n'est plus valable car l'approximation adiabatique faite dans le calcul de la densité spectrale de puissance de la phase du laser accroché ne l'est plus.

[6] Il est courant de déterminer la largeur spectrale d'un champ laser en calculant la valeur du spectre de fréquence en zéro, cette méthode est évidemment exacte dans le cas d'un laser dont le spectre de bruit de fréquence est blanc ($S_\nu(f) = \frac{\Delta\nu}{2\pi}$), cependant elle peut être erronée dans le cas d'un laser très faiblement injecté car dans ce cas la forme de la densité spectrale de puissance du champ est grossièrement celle du laser libre sauf au voisinage de la fréquence moyenne optique, la largeur spectrale définie à mi-hauteur sera celle du laser libre $\Delta\nu_s$ alors que la valeur de la densité spectrale de fréquence sera toujours $\frac{\Delta\nu_m}{2\pi}$

6.4 Mesure expérimentale du degré de corrélation en fonction des conditions d'injection

6.4.1 Introduction

Nous avons cherché à mesurer le degré de corrélation existant entre le laser maître et le laser esclave suivant différentes conditions d'injection afin de valider expérimentalement nos calculs.

Le paramètre fondamental est

$$k'_c = \delta\nu_{max}\sqrt{1-\left(\frac{\nu_m-\nu_s}{\delta\nu_{max}}\right)^2} \tag{6.45}$$

$$= \sqrt{P_{inj}}K\sqrt{1-\left(\frac{\nu_m-\nu_s}{\sqrt{P_{inj}}K}\right)^2} \tag{6.46}$$

où $K = \frac{|f_R|}{\sqrt{P_{int}}2\pi}\sqrt{1+\alpha_{eff}{}^2}$, P_{inj} est la puissance maître injectée au travers de la facette d'injection et P_{int} est la puissance interne du laser esclave au niveau de la facette de sortie.

Il apparaît donc que l'on peut assez simplement faire varier le degré de corrélation entre les deux lasers, soit en changeant la puissance injectée, et le mieux est alors de le faire à désaccord nul, soit en changeant le désaccord c'est à dire une des fréquences optiques.

6.4.2 Mesure du degré de corrélation en fonction de la puissance injectée

La première expérience a consisté en la mesure du degré de corrélation en fonction de la puissance injectée. Nous avons pour cela mesuré le facteur de visibilité des franges obtenues en faisant varier la différence de chemin optique entre les deux ondes. Pour obtenir le plus grand contraste, il est nécessaire d'égaliser la puissance des deux ondes qui interfèrent. Une petite partie de la lumière du laser maître est prélevée, à l'aide d'un coupleur, et injectée dans le laser esclave. La puissance optique est détectée à l'aide d'une photodiode suivie d'un filtre passe-bas permettant de filtrer l'éventuel bruit sur l'intensité électrique dû au bruit de phase non corrélé. Le signal est visualisé sur un oscilloscope dont la base de temps est de plusieurs secondes. On fait ensuite légèrement varier la longueur d'un des bras d'une dizaine de longueurs d'onde.

La visibilité de l'oscillogramme est définie par le rapport :

$$V = \frac{u_{max}-u_{min}}{u_{max}+u_{min}} \tag{6.47}$$

Il est en fait égal au degré de corrélation dans le cas d'un interféromètre équilibré. La puissance injectée dans le laser est modifiée grâce à un atténuateur variable. En modifiant la puissance injectée, on change le paramètre η d'injection, dont le carré est le rapport de la puissance injectée à travers la facette et de la puissance interne au niveau de la facette. Le paramètre k'_c est donc directement proportionnel à la racine carré de la puissance injectée.

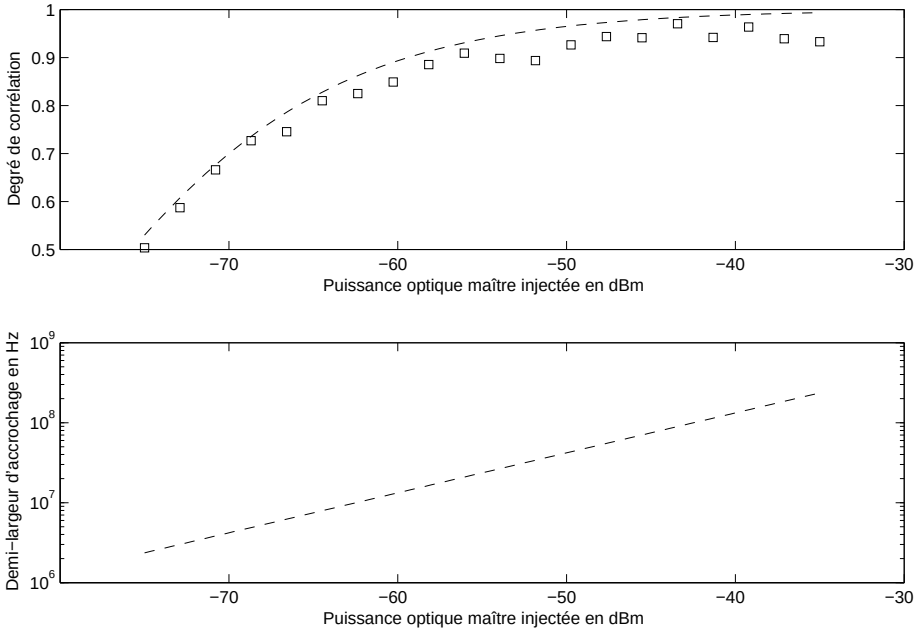

FIG. 6.2 – Mesure du degré de corrélation entre le laser maître et le laser esclave en fonction de la puissance injectée

On retrouve sur la figure 6.2 les résultats des mesures effectuées pour plusieurs puissances d'injection ainsi que la courbe théorique établie à l'aide de la formule :

$$\gamma(P_{in}) = e^{-\frac{\Delta\nu_m+\Delta\nu}{4\delta\nu_{max}}} = e^{-\frac{\Delta\nu_m+\Delta\nu}{4\sqrt{P_{in}/P_{out}}\frac{|f_R|}{2\pi}\sqrt{1+\alpha_{eff}^2}}} \tag{6.48}$$

Nous avons, pour information, placé sous la figure la valeur de la demi-largeur d'accrochage calculée théoriquement en fonction de la puissance injectée, à l'aide des paramètres mesurés sur le laser.

Le laser maître est un laser à cavité externe de largeur spectrale très inférieure à celle du laser esclave libre. Le laser esclave est polarisé à deux fois le seuil, il émet une puissance de 3 mW et possède une largeur spectrale de 2.9 MHz. Le facteur $\frac{|f_R|}{2\pi}\sqrt{1+\alpha_{eff}^2}$ est de 23 GHz.

6.4.3 Mesure du degré de corrélation en fonction du désaccord de fréquence

La seconde expérience a consisté en la mesure du degré de corrélation en fonction du désaccord de fréquence, c'est à dire en fonction du déphasage statique existant entre le laser maître et le laser esclave. Notre montage expérimental utilise la configuration d'injection contra-propagative, en d'autres termes, l'injection se fait au travers de la face de sortie du laser (ici traitée antireflet). La différence de phase s'évalue donc au niveau de la face de sortie.

Le désaccord entre la fréquence libre du laser et la fréquence du laser maître détermine le déphasage statique. La valeur de celui-ci apparaît dans l'expression du paramètre k_c' au sein d'une fonction cosinus.

Celle-ci possède une dérivée nulle en zéro, par conséquent la variation du degré de corrélation ne sera manifeste que sur les bords de la plage d'accrochage, c'est à dire pour des valeurs de $|\Theta| = |\theta_0 + \arg(f_R) - \tan^{-1}(\alpha_{eff})|$ proche de $\pi/2$.

La mesure du degré de corrélation ne peut être ici effectuée simplement par la mesure du facteur de visibilité des franges, car il est difficile de maintenir dans le temps le désaccord de fréquence à cause des dérives et bruits de fréquences dus à la température, aux ondes acoustiques et à l'émission spontanée (largeur de raie). Nous avons donc mis en place une mesure plus rapide afin d'essayer de s'affranchir des dérives (composantes basses fréquences du bruit). Le degré de corrélation est relié à la puissance

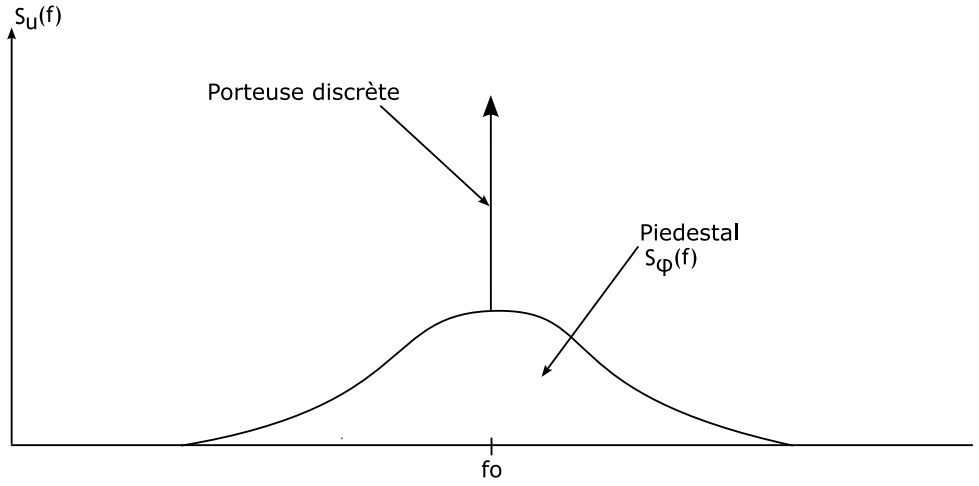

FIG. 6.3 – Spectre schématique du photocourant de battement

"cohérente" du battement hétérodyne entre le laser esclave et le laser maître décalé en fréquence par effet acousto-optique. Comme dans le cas du mélange hétérodyne entre une source laser et sa réplique décalée temporellement, le spectre du battement hétérodyne présente deux composantes (figure 6.3) :

- Une composante modélisée par un pic de Dirac, correspondant à la partie "cohérente" de la puissance du photocourant, sont poids est égal à l'autocorrélation du quatrième ordre du champ en (0,0,0). Le pic de Dirac est en fait limité par la densité spectrale de puissance de la source radio-fréquence appliquée sur le modulateur acousto-optique. L'existence de ce pic tient au fait que la variance de la gigue de phase du battement radio-fréquence, nonobstant la phase de la source RF, possède une limite finie pour un délai tendant vers l'infini
- Une composante continue appelée piédestal correspondant à la somme des puissances des bruits non corrélés.[7]

Nous détaillerons les caractéristiques spectrales du photo-courant dans le dernier chapitre.

[7]Dans le cas du battement auto-hétérodyne, les composantes spectrales du bruit de phase des deux champs optiques ne sont jamais décorrelées mais plutôt anticorrelées, alors que les deux champs (temporel) sont décorrelées par le délai, le piédestal présente des "franges" qui sont la représentation électrique des franges observables sur le champ optique, tandis que dans le cas du battement maître-esclave, il s'agit de composantes spectrales du bruit de phase non corrélées comme il a été expliqué dans le calcul de la densité spectrale de puissance du bruit de phase du laser soumis à injection.

La puissance électrique de la première composante correspond exactement au degré de corrélation des deux sources car il s'agit du spectre de la partie de l'onde de battement dont la phase est stable (gigue de phase de variance bornée), donc apte à donner des franges d'interférences stables. En mesurant la puissance de cette composante nous aurons donc accès au degré de corrélation.

Le problème est ici de pouvoir discriminer la puissance de cette composante au sein de la densité spectrale de puissance. D'après la description de la densité spectrale de puissance, cette discrimination doit se faire spectralement. En effet, la composante qui nous intéresse est localisée spectralement dans un très étroit voisinage de la fréquence de décalage acousto-optique alors que le piédestal est distribué sur une très grande plage de fréquence. Bien que le piédestal possède une certaine quantité de puissance au voisinage de la fréquence de décalage, celle-ci peut être considérablement réduite en choisissant un filtre de très faible largeur devant la largeur du piédestal. La mesure du degré de corrélation consiste donc à mesurer la puissance électrique du battement dans une plage de fréquence très étroite centrée sur la fréquence de décalage pour laquelle la puissance de bruit du piédestal est négligeable. Une autre méthode équivalente consiste à faire une mesure homodyne électrique en mélangeant le signal de battement avec une partie du signal radio appliqué au modulateur acousto-optique puis en mesurant la puissance moyenne continue du signal, cette méthode permettant de s'affranchir du bruit de phase de l'onde de décalage.

Nous rappelons ici la formule donnant la puissance électrique $P_{RF}(\Delta f)$ dans une bande de Δf Hz d'un signal de P_0 mW de densité spectrale de puissance de forme lorentzienne et de largeur à mi-hauteur $\Delta\nu$ Hz :

$$\begin{aligned} P_{RF}(\Delta f) &= P_0 \frac{\Delta\nu}{2\pi} \int_{-\Delta f/2}^{\Delta f/2} \frac{dF}{F^2 + \left(\frac{\Delta\nu}{2}\right)^2} \\ &= P_0 \frac{1}{\pi} \arctan\left[\frac{\Delta f}{\Delta\nu}\right] \end{aligned} \tag{6.49}$$

et pour Δf petit devant $\Delta\nu$:

$$P_{RF}(\Delta f) \approx \frac{P_0}{\pi} \frac{\Delta f}{\Delta\nu} \tag{6.50}$$

Ainsi, pour une puissance électrique totale de battement de 1 mW, dans le cas d'une absence de corrélation, le densité spectrale de puissance électrique du battement est une lorentzienne dont la largeur à mi-hauteur est la somme des largeurs à mi-hauteur des densités spectrale de puissance optique. En supposant que les deux lasers possèdent une largeur spectrale identique de 500 kHz, on en déduit par exemple que la puissance recueillie au travers d'un filtre de largeur 1 kHz est de P_{RF}(1 kHz)=320 nW. Ceci est donc le plancher de notre mesure de degré de corrélation et correspond à 0.3 % de la puissance électrique dans le cas de la corrélation totale. Le plancher peut être bien entendu abaissé en diminuant la largeur du filtre, dans la limite de la largeur spectrale du signal de décalage.

La méthode de mesure que nous avons mise en place consiste à moduler le courant de polarisation du laser maître à l'aide d'un très faible courant de forme triangulaire à une fréquence de l'ordre du Hz.

Le très faible niveau de modulation entraîne une variation de la fréquence d'émission sans modifier de manière notable la puissance d'émission. Nous utilisons en pratique l'entrée modulation de l'alimentation en courant qui permet de moduler le courant à l'aide d'une source de tension avec un coefficient de conversion de 50 μA/mV. La tension de modulation est de 2 mV, correspondant à un balayage en fréquence de 45 MHz.

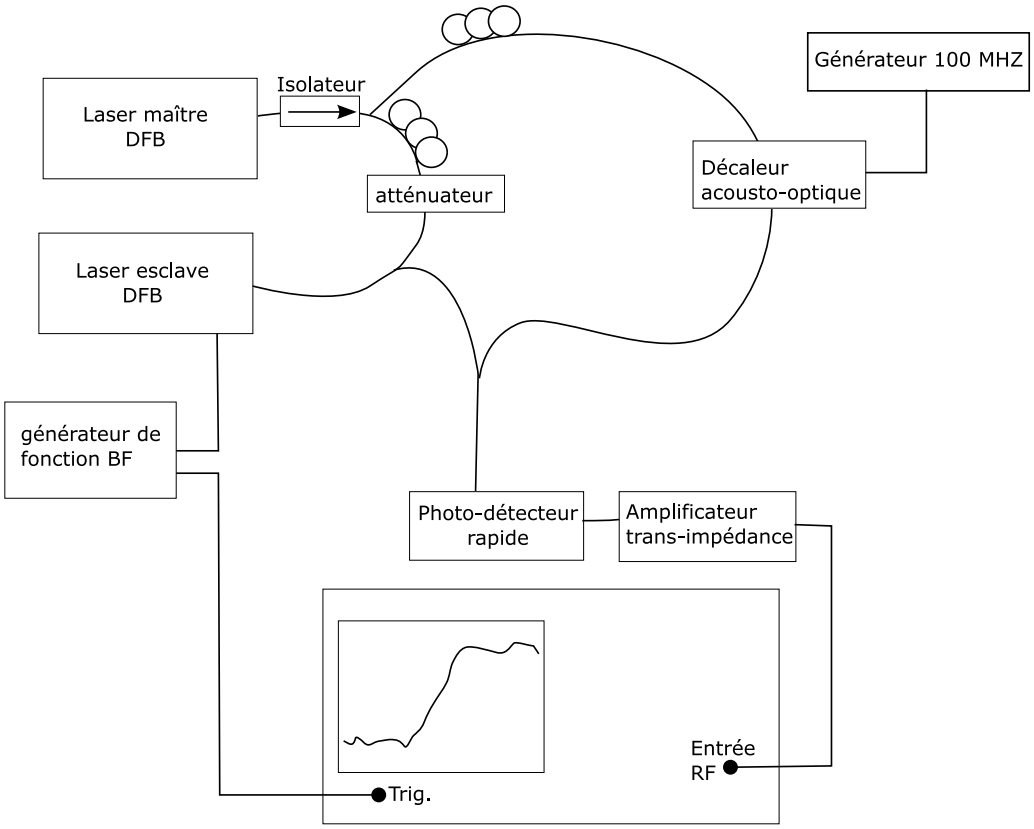

FIG. 6.4 – Schéma de montage de la mesure du degré de corrélation en fonction du désaccord de fréquence

L'un des principaux facteurs limitant l'expérience est la stabilité de l'alimentation en courant continue. Celle-ci est annoncée avec un écart type de 1 μA correspondant à un écart type de fréquence de 400 kHz. Ceci induit donc une forte instabilité au niveau de l'abcisse de notre courbe d'affichage fréquence/degré de corrélation. Les dérives de fréquences dues au micro fluctuations de température sont aussi un facteur important d'instabilité, cependant leur densité spectrale est plus concentrée vers les basses fréquences que pour le courant continue. A cause de ces deux fluctuations, il est nécessaire d'effectuer le balayage en fréquence assez rapidement afin d'effectuer une sorte de filtrage coupe-bas des dérives lentes et descendre en dessous de 100 kHz de fluctuation.

La visualisation se fait directement sur l'analyseur de spectre électrique utilisé en mode sans balayage, à la fréquence fixe du décaleur acousto-optique. L'analyseur de spectre fonctionne alors comme un oscilloscope. La bande passante de résolution de l'appareil correspond à la largeur du filtre autour de

la fréquence de décalage. Il est nécessaire de bien choisir la bande passante vidéo, celle-ci correspond à la largeur du filtre passe-bas appliqué sur le signal affiché afin d'améliorer le rapport signal/bruit. La fréquence de notre balayage est fixée à 10 Hz. Nous prévoyons à l'aide du modèle théorique que la zone de décroissance du degré de corrélation est d'environ 1 MHz, par conséquent ceci correspond à un intervalle temporel de moins d'un centième de seconde. Il est donc nécessaire de garder une bande passante vidéo de 3 kHz pour pouvoir exploiter les détails de l'enregistrement. Comme pour un oscilloscope, nous synchronisons le balayage de l'écran de l'analyseur de spectre sur le générateur basse-fréquence.

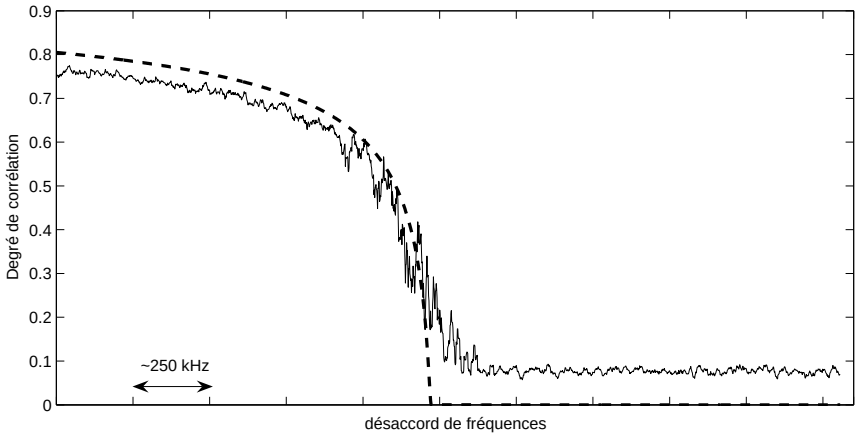

FIG. 6.5 – Mesure du degré de corrélation au bord gauche de la plage d'accrochage

La puissance injectée par la face traitée anti-reflet est de -55 dBm, correspondant à une plage d'accrochage totale de 42 MHz, la largeur spectrale du laser esclave libre est de 3 MHz. La plage d'accrochage étant faible, la stabilité temporel de l'accrochage est très courte. On effectue donc des traces uniques, en réajustant le courant afin de recaler la fréquence de l'esclave si besoin est.

Les résultats de la mesure sont présentés sur la figure 6.5, sur laquelle on retrouve aussi l'ajustement théorique. Malgré les fluctuations de la fréquence, on constate un assez bon accord des profils. On constate de plus que le degré de corrélation ne descend pas jusqu'à zéro. Ceci ne correspond pas à la puissance du piédestal non corrélée car le filtre utilisé est très étroit. En fait lorsque le laser esclave n'est plus accroché, près de la plage d'accrochage il existe un régime de fonctionnement appelé mélange multi-ondes, pour lequel coexiste le mode propre du laser, légèrement décalé en fréquence, le mode maître et un mode miroir du maître par rapport au mode propre précédemment mentionné (figure 6.6) [119], le laser se comporte alors comme un amplificateur pour le champ maître injecté tout en oscillant sur sa fréquence propre. Par conséquent, comme le mode maître amplifié présent dans le spectre est exactement à la fréquence du maître et qu'il est cohérent avec le maître, on mesure au-delà de la plage d'accrochage le battement cohérent entre le maître et le mode maître dans le spectre de l'esclave.

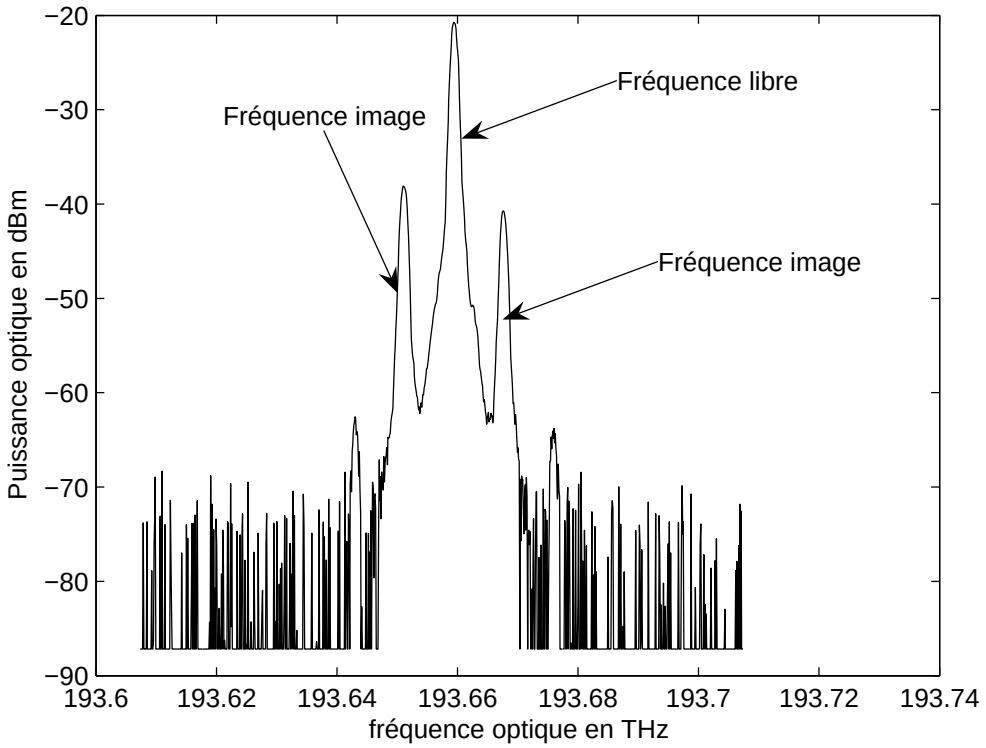

FIG. 6.6 – Régime du mélange multi-ondes

6.5 Conclusion

Ce chapitre avait pour but de déterminer le degré de corrélation entre le laser esclave et le laser maître. Pour cela nous avons cherché à évaluer la variance de la différence de phase entre les deux champs à l'aide de sa densité spectrale. Il nous est donc apparu indispensable d'établir une équation simplifiée reliant la phase esclave à la phase du maître. Nous avons, grâce à celle-ci, déterminé l'expression de la densité spectrale du bruit de phase esclave, la densité interspectrale entre les phases du maître et de l'esclave et ainsi le degré de corrélation. Nous avons de plus présenté les résultats expérimentaux validant l'expression littérale du degré de corrélation en faisant varier celui-ci via la puissance d'injection et le désaccord de fréquence.

Dans le prochain chapitre nous exploiterons les résultats obtenus concernant les densités spectrales et interspectrales des phases afin de caractériser le bruit de phase d'une onde générée par battement hétérodyne de deux lasers synchronisés par injections.

Chapitre 7

Caractérisation de la pureté spectrale de la porteuse micro-onde générée par détection du battement corrélé

7.1 Introduction

Nous avons, au cours des précédents chapitres, déterminé l'expression de la phase d'un laser soumis à l'injection optique d'un second laser, puis déterminé une forme analytique simple pour la densité interspectrale des deux phases, rendant compte dans le domaine spectral de la corrélation existant entre les bruits de phase des lasers maître et esclave. Nous avons de plus relié le degré de corrélation existant entre les lasers maître et esclave au bruit de phase et aux conditions d'injection (puissance injectée et désaccord de fréquence).

La technique de génération de signaux micro-ondes par injection optique s'appuie sur la corrélation existant entre les phases du laser maître et du laser esclave, mais n'utilise le laser maître que comme une horloge commune aux deux lasers (figure 7.1) dont les ondes optiques ont pour but de se propager et d'être superposer sur un détecteur afin de générer un photo-courant de faible bruit de phase.

Cette technique de génération peut être vue comme un moyen de multiplier la fréquence d'un oscillateur micro-onde primaire. En effet, pour que les deux lasers soumis à injection ne présentent pas la même fréquence optique, il est nécessaire qu'ils ne soit pas injectés par le même "mode maître". La solution est donc d'utiliser un laser maître dont le spectre possède plusieurs pics, tous les pics ayant le même bruit de phase. Le moyen le plus simple d'obtenir ce peigne est de moduler le courant du laser. Par couplage phase amplitude, on sait que la modulation d'intensité du laser provoquée par la modulation du courant de polarisation, s'accompagne d'une modulation de fréquence du laser. Le spectre résultant présente donc un nombre important de pics caractéristiques des modulations FM.

7.2 Transfert de corrélation

Afin de déterminer la pureté spectrale de la porteuse micro-onde générée, il convient de faire un bilan du transfert de corrélation et des différents bruits ajoutés, de l'oscillateur primaire dit sub-harmonique, au courant issu du photodétecteur.

Nous avons indiqué plus haut que le laser maître jouait en fait le rôle d'une horloge commune entre les deux lasers, nous avons de plus ajouté que cette synchronisation n'était possible que si les bandes latérales de modulation utilisées pour l'injection des deux lasers étaient corrélées. La première chose à étudier est donc la corrélation entre les bandes latérales de modulation :.

7.2.1 Corrélation des bandes latérales optiques

On numérote pour cela les bandes latérales de modulation par rapport au mode central fondamental par les nombres relatifs N et N'. La phase de l'harmonique N est issue du developpement en série de Bessel du champ optique modulée en fréquence à cause de la relation :

$$\frac{d\phi}{dt}(t) = -\frac{\alpha_H}{2} v_g \frac{\partial g}{\partial \mathcal{N}} \Delta\mathcal{N}(t) + ... \tag{7.1}$$

où $\Delta\mathcal{N}(t)$ est la variation de la densité de porteurs.

Le champ optique modulé s'exprime, sous la forme :

$$E(t) = E_0(t)\cos(2\pi\nu_0 t + \phi_o(t) + m\cos(2\pi f_0 t + \phi_e(t))) \tag{7.2}$$

où ν_0 est la fréquence moyenne du laser, f_0 est la fréquence moyenne du courant de modulation, ϕ_o est le bruit de phase optique, ϕ_e est le bruit de phase électrique et m est l'indice de modulation, lié à la fonction de transfert IM et au facteur de Henry. En utilisant un développement en série de Bessel :

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0(t)\Bigg(J_0(m)\cos\left(2\pi\nu_0 t + \phi_o(t)\right) \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} J_n(m)\left[\cos\left\{2\pi(\nu_0 - nf_0)t + \phi_o(t) - n\phi_e(t)\right\}\right. \\ &\qquad \left. - \cos\left\{2\pi(\nu_0 + nf_0)t + \phi_o(t) + n\phi_e(t)\right\}\right]\Bigg) \end{aligned} \tag{7.3}$$

En pratique, l'expression de l'amplitude de chacune des harmoniques n'est pas aussi simple car il y a mélange entre la modulation d'intensité et la modulation de fréquence et nécessité de prendre en compte la fonction de transfert de modulation FM intrinsèque du laser et la fonction de transfert extrinsèque liée au circuit électrique.

On constate qu'au niveau de la phase, elle s'exprime de manière simple pour chacune des harmoniques :

$$\phi_N(t) = \phi_o(t) + N\phi_e(t) \tag{7.4}$$

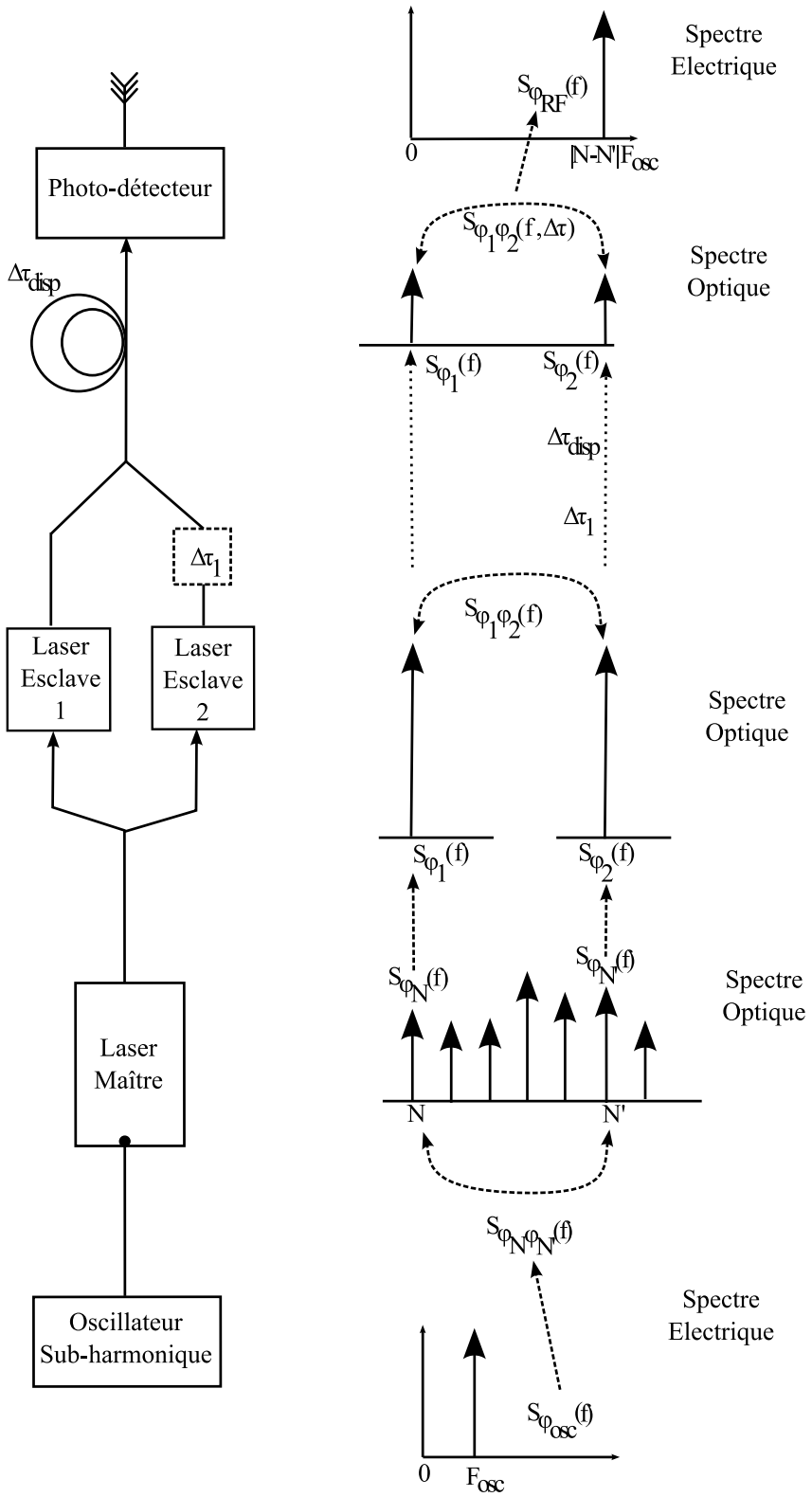

FIG. 7.1 – Schéma général du transfert de corrélation

Si l'on considère le photocourant issu du battement entre les harmoniques N et N', le bruit de phase du photocourant est :

$$\phi_{RF(N,N')}(t) = \phi_N(t) - \phi_{N'}(t) = (N - N')\phi_e(t) \tag{7.5}$$

On constate donc que la phase du battement est proportionnelle à la phase de l'oscillateur subharmonique avec comme facteur de proportionnalité le nombre d'intervalles de fréquence subharmonique entre les deux bandes latérales de modulation considérées, c'est à dire le facteur de multiplication de la fréquence micro-onde du système de génération. La densité spectrale de la différence de phase s'établit donc très facilement en fonction de la densité spectrale de puissance du bruit de phase de l'oscillateur sub-harmonique :

$$S_{\phi_{RF(N,N')}}(f) = (N - N')^2 S_{\phi_{oscil}}(f) \tag{7.6}$$

où $\phi_{oscil} = \phi_e$ est la phase de l'oscillateur sub-harmonique.

La pénalité pour un facteur de multiplication de n est donc de $20\log(\mathrm{n})$ dB soit pour un facteur 10, +20 dB sur la densité spectrale de bruit de phase RF [151]. Cette pénalité théorique est identique à celle prévue dans le cas d'une multiplication électrique de la fréquence d'un oscillateur à l'aide d'un élément non-linéaire (ex :diode).

On note enfin que la densité spectrale de puissance du bruit de phase de l'harmonique N est donnée par :

$$S_{\phi_N}(f) = S_{\phi_0}(f) + N^2 S_{\phi_{oscil}}(f) \tag{7.7}$$

la densité interspectrale de puissance des phases des harmoniques N et N' :

$$S_{\phi_N \phi_{N'}}(f) = \mathrm{TF}\left\{\langle \phi_N(t)\phi_{N'}(t)\rangle\right\} = S_{\phi_0}(f) + NN' S_{\phi_{oscil}}(f) \tag{7.8}$$

et le degré de corrélation spectrale des phases :

$$\gamma(f) = \frac{S_{\phi_N \phi_{N'}}(f)}{\sqrt{S_{\phi_N}(f) S_{\phi'_N}(f)}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{(N-N')^2 S_{\phi_{oscil}}(f) S_{\phi_0}(f)}{\left[S_{\phi_0}(f) + NN' S_{\phi_{oscil}}(f)\right]^2}}} \tag{7.9}$$

Le degré de corrélation entre les deux bandes latérales s'exprime en fonction de l'écart type du bruit de phase de l'oscillateur sub-harmonique $\sigma_{\phi_{oscil}}$:

$$\gamma_{N,N'} = e^{-\sigma^2_{\phi_{oscil}} \frac{(N-N')^2}{2}} \tag{7.10}$$

que l'on relie à la densité spectrale de bruit de phase de l'oscillateur :

$$\sigma_{\phi_{oscil}}{}^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} S_{\phi_{oscil}}(f) df \tag{7.11}$$

7.2.2 Transfert de corrélation des bandes latérales aux lasers esclaves

Nous avons déjà amplement discuté du bruit de phase d'un laser soumis à l'injection optique d'un laser maître. Dans la configuration de la génération de micro-ondes par battement entre deux lasers injectés par des bandes latérales de modulation, cas pouvant se généraliser à un peigne optique corrélé obtenu par une autre méthode, on considère tout d'abord que chacun des lasers esclaves est soumis à l'injection d'un champ différent. Dans un second temps, nous prendrons en compte la corrélation existant entre les deux champs injectés étudiée précédemment.

Transfert du bruit de phase

On indice les deux lasers esclaves par les nombres 1 et 2. D'après le chapitre précédent, la densité spectrale de puissance de la phase d'un laser injecté s'exprime sous la forme :

$$S_\phi(f) = \frac{{k'_c}^2}{{k'_c}^2 + f^2} S_{\phi_{in}}(f) + \frac{f^2}{{k'_c}^2 + f^2} S_{\phi_l}(f) \tag{7.12}$$

Par conséquent, en supposant que les lasers 1 et 2 sont soumis à l'injection des bandes latérales respectivement N et N', avec les paramètres d'injection respectivement k'_{c1} et k'_{c2}, on obtient pour chacune des phases :

$$S_{\phi_1}(f) = \frac{{k'_{c1}}^2}{{k'_{c1}}^2 + f^2} S_{\phi_N}(f) + \frac{\Delta\nu_1/2\pi}{{k'_{c1}}^2 + f^2} \tag{7.13}$$

$$S_{\phi_2}(f) = \frac{{k'_{c2}}^2}{{k'_{c2}}^2 + f^2} S_{\phi_{N'}}(f) + \frac{\Delta\nu_2/2\pi}{{k'_{c2}}^2 + f^2} \tag{7.14}$$

avec comme largeur spectrale des lasers libres respectivement $\Delta\nu_1$ et $\Delta\nu_2$.

Il est également nécessaire de connaître le moment croisé c'est à dire la densité interspectrale des deux phases.

D'après les résultats du chapitre précédent, l'expression de la phase du laser esclave dans le domaine de Fourier est :

$$\phi(f) = \frac{2\pi k'_c \phi_m(f) + F_{\phi eq}(f)}{j2\pi f + 2\pi k'_c} \tag{7.15}$$

où $F_{\phi eq}(f)$ représente la contribution directe au bruit de phase de l'émission spontanée propre et la contribution indirecte via le facteur de Henry :

$$\langle F_{\phi eq}(f) F^*_{\phi eq}(f') \rangle = 2\pi\Delta\nu\delta(f' - f) \tag{7.16}$$

où $\Delta\nu$ est la largeur spectrale à mi-hauteur du laser libre.

On établit par conséquent l'expression de la phase de chacun des lasers dans le domaine de Fourier :

$$\phi_1(f) = \frac{2\pi k'_{c1} \phi_N(f) + F_{\phi eq1}(f)}{j2\pi f + 2\pi k'_{c1}} \tag{7.17}$$

$$\phi_2(f) = \frac{2\pi k'_{c2} \phi_{N'}(f) + F_{\phi eq2}(f)}{j2\pi f + 2\pi k'_{c2}} \tag{7.18}$$

Transfert de la corrélation

La densité interspectrale est alors évaluée sous la forme de la corrélation spectrale croisée :

$$\begin{aligned} S_{\phi_1\phi_2}(f)\delta(f-f') &= \left\langle \phi_1(f)\phi_2^*(f') \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{k'_{c1}\phi_N(f)+F_{\phi eq1}(f')}{jf+k'_{c1}} \frac{k'_{c2}\phi^*_{N'}(f')+F^*_{\phi eq2}(f')}{-jf+k'_{c2}} \right\rangle \\ &= \frac{k'_{c1}k'_{c2}S_{\phi_{NN'}}(f)\delta(f-f')}{f^2+jf(k'_{c1}-k'_{c2})+k'_{c1}k'_{c2}} \end{aligned} \tag{7.19}$$

donc :

$$S_{\phi_1\phi_2}(f) = \frac{k'_{c1}k'_{c2}S_{\phi_{NN'}}(f)}{f^2+jf(k'_{c1}-k'_{c2})+k'_{c1}k'_{c2}} \tag{7.20}$$

Si les paramètres d'injection k'_{c1} et k'_{c2} sont identiques, alors la densité interspectrale devient réelle :

$$S_{\phi_1\phi_2}(f) = \frac{{k'_c}^2 S_{\phi_{NN'}}(f)}{f^2+{k'_{c1}}^2} \tag{7.21}$$

Nous venons d'établir la densité spectrale de puissance de la phase de chacun des lasers ainsi que la densité interspectrale des deux phases. Cette dernière dépend directement de la densité interspectrale de puissance entre les deux bandes latérales injectées. En utilisant l'équation (7.8), on établit l'expression de la densité interspectrale de puissance de la phase des lasers esclaves en fonction de la largeur spectrale du laser maître $\Delta\nu_m$ [1] et du bruit de phase de l'oscillateur subharmonique :

$$\begin{aligned} S_{\phi_1\phi_2}(f) &= \frac{k'_{c1}k'_{c2}S_{\phi_{NN'}}(f)}{f^2+jf(k'_{c1}-k'_{c2})+k'_{c1}k'_{c2}} \\ &= \frac{k'_{c1}k'_{c2}[S_{\phi_m}(f)+NN'S_{\phi_{oscil}}(f)]}{f^2+jf(k'_{c1}-k'_{c2})+k'_{c1}k'_{c2}} \\ &= \frac{k'_{c1}k'_{c2}[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2}+NN'S_{\phi_{oscil}}(f)]}{f^2+jf(k'_{c1}-k'_{c2})+k'_{c1}k'_{c2}} \end{aligned} \tag{7.22}$$

si $k'_{c1} = k'_{c2}$:

$$S_{\phi_1\phi_2}(f) = \frac{{k'_c}^2[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2}+NN'S_{\phi_{oscil}}(f)]}{f^2+{k'_c}^2} \tag{7.23}$$

7.2.3 Décorrélation par décalage temporel

Caractéristiques physiques des délais

Lorsque nous avons établi les équations des phases des lasers soumis à injection, nous avons implicitement supposé que les chemins optiques entre le laser maître et chacun des lasers soumis à injection étaient identiques.

[1] On suppose alors que le bruit de phase du laser maître est uniquement dû à l'émission spontanée et que l'on est toujours dans les conditions de l'approximation adiabatique

Nous allons maintenant quantifier la décorrélation induite par différent décalage au sein du système. Nous avons identifié trois zones où un délai peut intervenir : Entre le laser maître et les lasers esclaves et plus précisément entre la jointure du diviseur 1 :2 et la surface de chacun des lasers esclaves, entre les lasers esclaves et la jointure du coupleur 2 :1, et enfin entre la jointure du coupleur 2 :1 et la surface du photo-détecteur. Les deux premières sections correspondent à des délais dit "vrais", c'est à dire des différences de chemins géométriques, le délai induit par la troisième section est un délai de dispersion, correspondant à la différence d'indice vu par chacune des ondes optiques.

Les délais vrais sont de la forme :

$$\Delta\tau_{\text{Vrai}} = \frac{n\Delta L}{c} \tag{7.24}$$

et le délai de dispersion :

$$\Delta\tau_{\text{Disp.}} = L\left[\frac{\partial\beta}{\partial\nu}(\nu_1) - \frac{\partial\beta}{\partial\nu}(\nu_1 + f_{RF})\right] \approx -\frac{D_F L\lambda_0^2 f_{RF}}{c} \tag{7.25}$$

où ΔL est la différence de chemin géométrique, L la longueur de la fibre, $\beta(\nu)$ la constante de propagation dans la fibre, D_F le paramètre de dispersion en ps/nm/km, λ_0 la moyenne des longueurs d'onde des deux lasers.

Notons que les délais sont algébriques et qu'il est donc possible de compenser, pour une longueur de fibre et une fréquence radio données, le délai de dispersion par un délai vrai :

$$\Delta L = \frac{D_F L}{n}\lambda_0^2 f_{RF} \tag{7.26}$$

Nous traiterons maintenant du cas général de la décorrélation par un délai $\Delta\tau$ qu'il soit "vrai" ou de dispersion.

Effet de la décorrélation temporelle

Nous cherchons à établir analytiquement l'influence du délai sur la corrélation pouvant exister entre deux fonctions (ici les phases des lasers).

Nous partons donc du principe que la densité interspectrale entre les deux phases est connue : $S_{\phi_1\phi_2}$. L'une des phases, par exemple ϕ_1 subit un décalage temporel de $\Delta\tau$, on cherche maintenant à connaître la densité interspectrale entre $\phi_1(\Delta\tau)$ et ϕ_2 en fonction de $S_{\phi_1\phi_2}$ et de $\Delta\tau$ ($\phi_1(\Delta\tau) = \delta(\Delta\tau) * \phi_1$) :

Dans le domaine de Fourier, un décalage de $\Delta\tau$ correspond à une modulation par une fonction hélice de période $1/\Delta\tau$:

$$TF[\phi_1(t + \Delta\tau)](f) = TF[\phi(t)](f)e^{-2\pi jf\Delta\tau} \tag{7.27}$$

Par conséquent, en évaluant la densité interspectrale à l'aide de la corrélation spectrale croisée :

$$\begin{aligned} S_{\phi_1(\Delta\tau)\phi_2}\delta(f - f') &= \langle\phi_1(\Delta\tau)(f)\phi_2^*(f')\rangle \\ &= \langle\phi_1(f)e^{-2\pi jf\Delta\tau}\phi_2^*(f')\rangle \\ &= S_{\phi_1\phi_2}e^{-2\pi jf\Delta\tau}\delta(f - f') \end{aligned} \tag{7.28}$$

Le résultat est donc très simple. Le module de la densité interspectrale n'est donc pas affecté par un délai. La phase de la densité interspectrale de deux fonctions témoigne, à un fréquence donnée, d'un déphase moyen entre les composantes spectrales à la fréquence donnée, de chacune des fonctions. Dans le cas présent, les fonctions sont les phases des lasers, ce qui peut troubler la compréhension. Le décalage temporel entraîne donc un changement du déphasage moyen entre les composantes spectrales des deux phases, proportionnel à la fréquence. Les composantes spectrales dont la fréquence est multiple de $1/\Delta\tau$ ne sont pas affectées, par contre les composantes aux fréquences de la forme $1/2\Delta\tau$ $[1/\Delta\tau]$ sont mises en opposition de phase (en les supposant à l'origine en phase).

Nous tenons donc bien à préciser que, comme la densité interspectrale de puissance est complexe, un certain nombre de composantes spectrales peuvent être parfaitement bien corrélées mais être en opposition de phase, on dira donc qu'elles sont anti-corrélées. Nous verrons l'importance de cette notion dans le calcul de la phase micro-onde.

7.3 Densité spectrale de puissance de la phase micro-onde

Il est maintenant temps d'utiliser les expressions des densités spectrales et interspectrales afin de caractériser la phase du battement micro-onde.

Récapitulons les données statistiques des phases des champs incidents sur le photo-détecteur :

$$S_{\phi_1}(f) = \frac{{k'_{c1}}^2}{{k'_{c1}}^2 + f^2}\left[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} + N^2 S_{\phi_{oscil}}(f)\right] + \frac{\Delta\nu_1/2\pi}{{k'_{c1}}^2 + f^2} \tag{7.29}$$

$$S_{\phi_2}(f) = \frac{{k'_{c2}}^2}{{k'_{c2}}^2 + f^2}\left[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} + N'^2 S_{\phi_{oscil}}(f)\right] + \frac{\Delta\nu_2/2\pi}{{k'_{c2}}^2 + f^2} \tag{7.30}$$

$$S_{\phi_1\phi_2}(f) = \frac{k'_{c1}k'_{c2}\left[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} + NN' S_{\phi_{oscil}}(f)\right]}{f^2 + jf(k'_{c1} - k'_{c2}) + k'_{c1}k'_{c2}} e^{-2\pi j f \Delta\tau} \tag{7.31}$$

où $\phi_1(t)$ désigne maintenant la phase du laser 1 au niveau de la surface du photodétecteur, incluant donc le délai cumulé. La phase sans délai est notée $\phi_{1_0}(t)$.

Le photocourant est proportionnel à la puissance incidente sur le photo-détecteur, c'est à dire au carré du champ filtré par la bande passante du détecteur :

$$\begin{aligned} i(t) &\propto \langle (E_1\cos(2\pi\nu_0 + Nf_0 + \phi_1(t)) + E_2\cos(2\pi\nu_0 + N'f_0 + \phi_2(t))^2\rangle \\ &\propto \frac{E_1^2}{2} + \frac{E_2^2}{2} + 2E_1E_2\cos(2\pi(N - N')f_0 + \phi_1(t) - \phi_2(t)) \end{aligned} \tag{7.32}$$

La phase ϕ_{RF} de l'onde est donc la différence des phases optiques :

$$\phi_{RF}(t) = \phi_1(t) - \phi_2(t) \tag{7.33}$$

Nous cherchons maintenant à obtenir la densité spectrale de puissance de la phase micro-onde.

On utilise comme toujours la corrélation spectrale :

$$\begin{aligned} S_{\phi_{RF}}(f)\delta(f-f') &= \langle \phi_{RF}(f){\phi_{RF}}^*(f')\rangle \\ &= \langle \phi_1(f){\phi_1}^*(f')\rangle + \langle \phi_1(f){\phi_1}^*(f')\rangle - \langle \phi_1(f){\phi_2}^*(f')\rangle - \langle \phi_2(f){\phi_1}^*(f')\rangle \\ &= \left[S_{\phi_1}(f) + S_{\phi_2}(f) - 2\Re e\{S_{\phi_1\phi_2}(f)\}\right]\delta(f-f') \end{aligned} \tag{7.34}$$

Donc :

$$\boxed{S_{\phi_{RF}} = S_{\phi_1}(f) + S_{\phi_2}(f) - 2\Re e\{S_{\phi_1\phi_2}(f)\}} \tag{7.35}$$

Dans le cas où $k'_{c1} = k'_{c2}$, nous avons montré que la densité interspectrale était réelle, donc avec un délai cummulé $\Delta\tau$:

$$S_{\phi_{RF}} = S_{\phi_1}(f) + S_{\phi_2}(f) - 2S_{\phi_{1_0}\phi_2}(f)\cos(2\pi f\Delta\tau) \tag{7.36}$$

Dans le cas général, il faut prendre en compte la phase de la densité interspectrale :

$$\left|S_{\phi_{1_0}\phi_2}\right|(f) = \frac{k'_{c1}k'_{c2}\left[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} + NN'S_{\phi_{oscil}}(f)\right]}{\sqrt{(f^2+k'_{c1}k'_{c2})^2 + f^2(k'_{c1}-k'_{c2})^2}} \tag{7.37}$$

$$\arg\left\{S_{\phi_{1_0}\phi_2}\right\}(f) = \tan^{-1}\left(\frac{f(k'_{c1}-k'_{c2})}{f^2+k'_{c1}k'_{c2}}\right) \tag{7.38}$$

La densité spectrale de la phase micro-onde s'établit alors sous la forme :

$$S_{\phi_{RF}} = S_{\phi_1}(f) + S_{\phi_2}(f) - 2\left|S_{\phi_{1_0}\phi_2}\right|(f)\cos\left(\arg\left\{S_{\phi_{1_0}\phi_2(f)}\right\} - 2\pi f\Delta\tau\right) \tag{7.39}$$

Dans le cas d'un délai nul :

$$\Re e\left\{S_{\phi_1\phi_2}(f)\right\} = \frac{k'_{c1}k'_{c2}\left[\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2} + NN'S_{\phi_{oscil}}(f)\right]}{(f^2+k'_{c1}k'_{c2}) + \frac{(k'_{c1}-k'_{c2})^2}{(1+\frac{k'_{c1}k'_{c2}}{f^2})}} \tag{7.40}$$

7.3.1 Expression de la densité spectrale de puissance

En rassemblant les différentes expressions nécessaires à l'évaluation de l'équation (7.35), l'expression générale de la densité spectrale est établie en fonction des paramètres d'accrochage, des largeurs spectrales des trois lasers et du délai cumulé :

$$\begin{aligned} S_{\phi_{RF}}(f) &= \frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2}\left[\frac{{k'_{c1}}^2}{{k'_{c1}}^2+f^2} + \frac{{k'_{c2}}^2}{{k'_{c2}}^2+f^2} - 2\frac{k'_{c1}k'_{c2}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{f(k'_{c1}-k'_{c2})}{f^2+k'_{c1}k'_{c2}}\right) - 2\pi f\Delta\tau\right)}{\sqrt{(f^2+k'_{c1}k'_{c2})^2 + f^2(k'_{c1}-k'_{c2})^2}}\right] \\ &+ S_{\phi_{oscil}}(f)\left[\frac{N^2{k'_{c1}}^2}{{k'_{c1}}^2+f^2} + \frac{N'^2{k'_{c2}}^2}{{k'_{c2}}^2+f^2} - 2NN'\frac{k'_{c1}k'_{c2}\cos\left(\tan^{-1}\left(\frac{f(k'_{c1}-k'_{c2})}{f^2+k'_{c1}k'_{c2}}\right) - 2\pi f\Delta\tau\right)}{\sqrt{(f^2+k'_{c1}k'_{c2})^2 + f^2(k'_{c1}-k'_{c2})^2}}\right] \\ &+ \frac{\Delta\nu_1/2\pi}{{k'_{c1}}^2+f^2} + \frac{\Delta\nu_2/2\pi}{{k'_{c2}}^2+f^2} \end{aligned} \tag{7.41}$$

Nous avons décomposé l'expression sous la forme d'une somme de trois termes

– Le premier correspond au bruit de phase du laser maître transféré à chacun des lasers puis partiellement éliminé lors de la photodétection grâce à la corrélation
– Le deuxième correspond au bruit de phase de l'oscillateur sub-harmonique transféré à chacun des lasers et partiellement éliminé lors de la photodétection
– Le troisième correspond au bruit de phase résiduel propre à chacun des lasers esclaves, qui n'est donc pas corrélé et est reporté intégralement sur le bruit de phase micro-onde.

Nous allons maintenant considérer des cas plus simples afin de mettre en évidence la contribution de chacun des paramètres.

7.3.2 Cas du délai nul, de lasers identiques et de conditions d'injection identiques

Si $\Delta\tau = 0$, $\Delta\nu_1 = \Delta\nu_2 = \Delta\nu$ et $k'_{c1} = k'_{c2} = k'_c$, l'expression de la densité spectrale de puissance du bruit de phase RF est simplifiée :

$$S_{\phi_{RF}}(f) = \underbrace{(N-N')^2}_{a3}\underbrace{S_{\phi_{oscil}}(f)}_{a1}\underbrace{\frac{f^2}{f^2+k_c'^2}}_{a2} + \underbrace{\frac{\Delta\nu/\pi}{k_c'^2+f^2}}_{b} \tag{7.42}$$

On retrouve le bruit de phase de l'oscillateur (a1), dont seule une partie est transmise par injection (a2) et qui est amplifié par le facteur de multiplication des fréquences (a3), s'ajoutent les bruits de phases résiduels propres à chacun des lasers (b), ici de contribution identique car de même largeur spectrale.

7.3.3 Cas du délai non nul, de lasers identiques et de fréquence d'accrochage infini

Si $\Delta\nu_1 = \Delta\nu_2 = \Delta\nu$ et $k'_{c1} = k'_{c2} = k'_c$ sont très grands devant les fréquences de Fourier considérées, alors on considère que l'intégralité du bruit de phase des bandes latérales est substituée au bruit de phase propre des lasers esclaves :

$$S_{\phi_{RF}}(f) = 4\left[\overbrace{\frac{\Delta\nu_m}{2\pi f^2}}^{a2} + \overbrace{NN'S_{\phi_{oscil}(f)}}^{a3}\right]\underbrace{(\sin^2(\pi f\Delta\tau))}_{a1} + \underbrace{(N-N')^2 S_{\phi_{oscil}}(f)}_{b} \tag{7.43}$$

La contribution de la largeur spectrale des lasers esclaves a disparu car on considère qu'il n'y a plus de contribution due à l'émission spontanée des cavités esclaves. Par contre, le délai introduit entre les deux ondes vient modifier la phase de la fonction d'autocorrélation et donc déphaser certaines composantes du bruit de phase d'une des ondes optiques par rapport à l'autre. Il apparaît donc à travers (a1) une contribution des composantes spectrales en opposition de phase, composantes qui, au lieu de s'annuler, vont donc se renforcer. Cette contribution ne concerne que les parties des bruits de phase corrélées provenant du maître (a2) ou de l'oscillateur sub-harmonique (a3). On retrouve enfin la multiplication du bruit de phase de l'oscillateur subharmonique (b).

7.4 Analyse numérique des résultats

Nous allons maintenant présenter de manière graphique l'influence des différents paramètres du système sur la densité spectrale de bruit de phase micro-onde.

Comme il est d'usage dans le domaine des micro-ondes, la densité spectrale de puissance de phase est exprimée selon une échelle logarithmique avec pour unité le dBc/Hz. Dans le domaine optique, c'est généralement le bruit de fréquence qui est étudié, et le bruit de phase est généralement exprimé à l'aide de sa véritable unité, le $\mathrm{rad}^2/\mathrm{Hz}$. Nous utiliserons ici une échelle logarithmique avec pour unité le $\mathrm{dBrad}^2/\mathrm{Hz}$ qui correspond en fait dans la nouvelle norme IEEE au dBc/Hz, le lecteur pourra se reporter à l'annexe C pour une plus ample discussion sur les problèmes de compatibilité entre la phase optique et la phase électrique.

Nous considérons dans un premier temps qu'il n'y a pas de bruit de phase subharmonique.

7.4.1 Influence du facteur d'injection k'_c

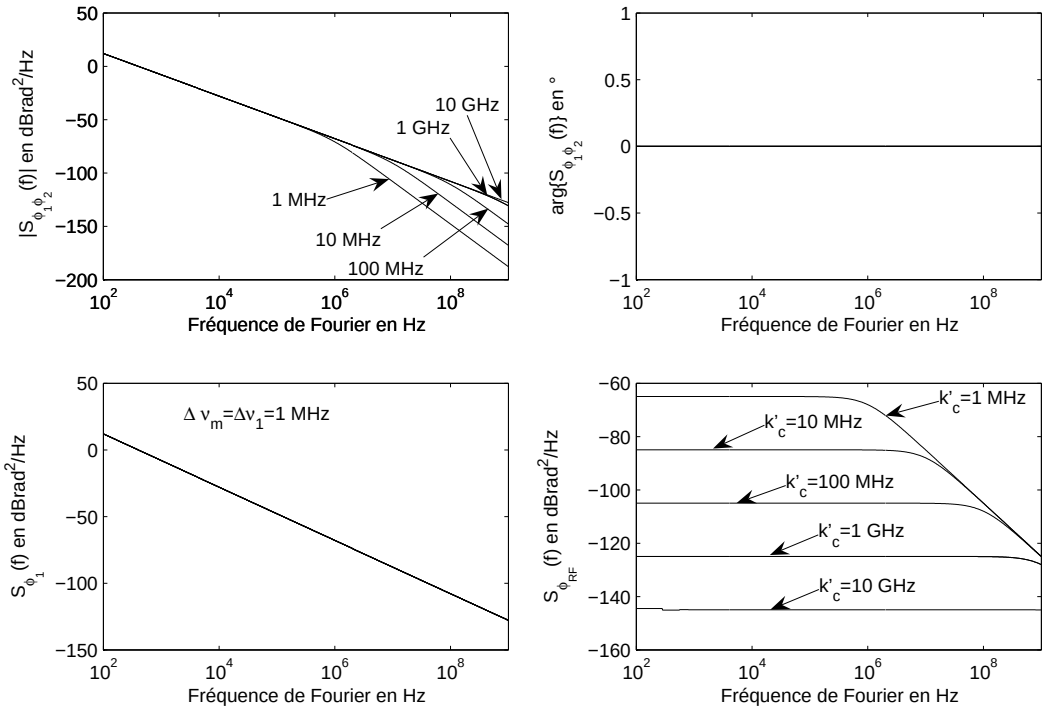

FIG. 7.2 – Influence des paramètres d'injection sur le bruit de phase micro-onde

L'influence des paramètres d'injection, représentés par le facteur k'_c, est illustrée sur la figure 7.2, au travers de quatre graphiques, présentant, énumérés dans le sens horaire, le module de la densité interspectrale de puissance des phases des deux ondes optiques, la phase de la densité interspectrale de puissance

des phases, la densité spectrale de puissance de la phase du battement micro-onde, et la densité spectrale de puissance de la phase de l'onde optique 1.

Les hypothèses sont les suivantes : des largeurs spectrales identiques pour les trois lasers, des paramètres d'injection identiques.

Signalons en premier lieu que le laser maître et les lasers esclaves ayant des largeurs spectrales identiques, c'est à dire, dans l'hypothèse d'un bruit de phase dont l'origine est uniquement l'émission spontanée, le même bruit de phase, la courbe représentant le bruit de phase du laser esclave 1 reste inchangée par l'injection.

Nous constatons l'influence du paramètre d'injection, que nous pouvons aussi appeler fréquence d'accrochage, tout d'abord sur la densité interspectrale. C'est à partir de cette fréquence d'accrochage que la pente de la densité interspectrale change et donc que la corrélation devient beaucoup moins importante. Au niveau de la densité spectrale de la phase micro-onde, l'importance de la fréquence d'accrochage apparaît très clairement, elle détermine le niveau du plateau de bruit que l'on obtient entre la fréquence nulle et la fréquence d'accrochage. On constate qu'un ordre de grandeur supplémentaire sur la fréquence d'accroche correspond à -20 dB sur la densité spectrale de bruit. Nous pouvons vérifier ceci à partir de l'équation (7.42) en faisant les approximations nécessaires.

Pour $f << k'_c$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = -20\log(k'_c) + 10\log(\Delta\nu/\pi) \tag{7.44}$$

Pour $f >> k'_c$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = -20\log(f) + 10\log(\Delta\nu/\pi) \tag{7.45}$$

7.4.2 Influence de la largeur spectrale des lasers soumis à injection $\Delta\nu$

Nous allons maintenant étudier l'influence de la pureté spectrale des lasers utilisés comme laser esclave. Nous considérons que les deux lasers sont identiques et que les paramètres d'injection sont identiques (k'_c=100 MHz).

Nous constatons, sur la figure 7.3, tout d'abord qu'autour de la fréquence de Fourier correspondant à la fréquence d'accrochage, la densité spectrale de puissance de la phase du laser esclave passe progressivement du niveau de bruit du maître au niveau de bruit de l'esclave libre. Concernant la densité spectrale de puissance de la phase micro-onde, comme la fréquence d'accrochage précédemment étudiée, la largeur spectrale des lasers esclaves détermine le niveau du plateau présent entre la fréquence nulle et la fréquence d'accrochage. Cependant, un ordre de grandeur supplémentaire correspond ici à +10 dB.

On retrouve ce résultat à partir de l'équation (7.42) :

Pour $f << k'_c$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = 10\log(\Delta\nu) - 10\log(\pi {k'_c}^2) \tag{7.46}$$

Pour $f >> k'_c$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = 20\log(f) + 10\log(\Delta\nu/\pi) \tag{7.47}$$

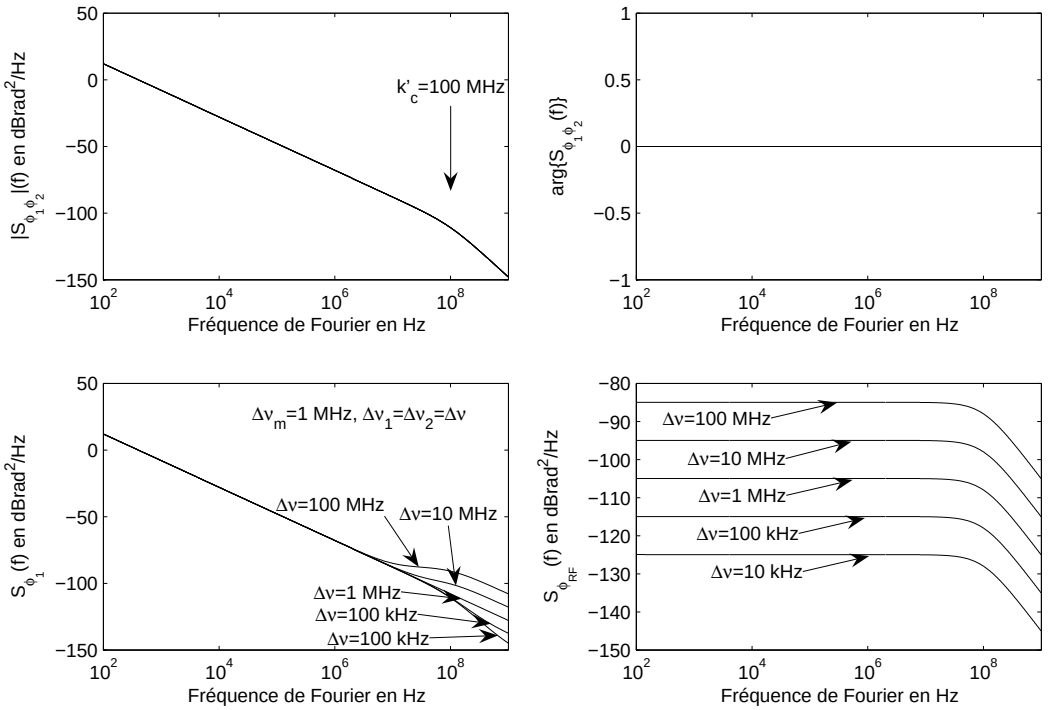

FIG. 7.3 – Influence de la largeur spectrale des lasers soumis à injection

7.4.3 Influence du désequilibre des conditions d'injection

Nous nous intéressons maintenant à l'influence d'une éventuelle différence entre les paramètres d'injection des deux lasers. En pratique, les deux bandes latérales de modulation utilisées comme source d'injection peuvent ne pas avoir la même puissance optique et donc entraîner une différence entre les fréquences d'accrochage k'_{c1} et k'_{c2}.

L'hypothèse est : une largeur spectrale identique de 1 MHz pour les trois lasers.

Nous constatons sur la figure 7.4, que le niveau du plateau de la densité spectrale de la phase micro-onde est principalement déterminé par la valeur de la plus petite des fréquences d'accrochage. D'après les courbes représentant un laser de fréquence d'accrochage 50 MHz et un autre de fréquence 100 MHz, 500 MHz et 5 GHz, une valeur importante au niveau du second laser ne peut améliorer le niveau de bruit de phase micro-onde de plus de 3 dB.

En effet,en considérant $k'_{c1} < k'_{c2}$, avec les approximations nécessaires :

Pour $f << k'_{c1}$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = -20\log(k'_{c1}) + 10\log(\Delta\nu/2\pi) + 10\log(1 + \frac{{k'_{c1}}^2}{{k'_{c2}}^2}) \tag{7.48}$$

Pour $f >> k'_{c2}$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = -20\log(f) + 10\log(\Delta\nu/\pi) \tag{7.49}$$

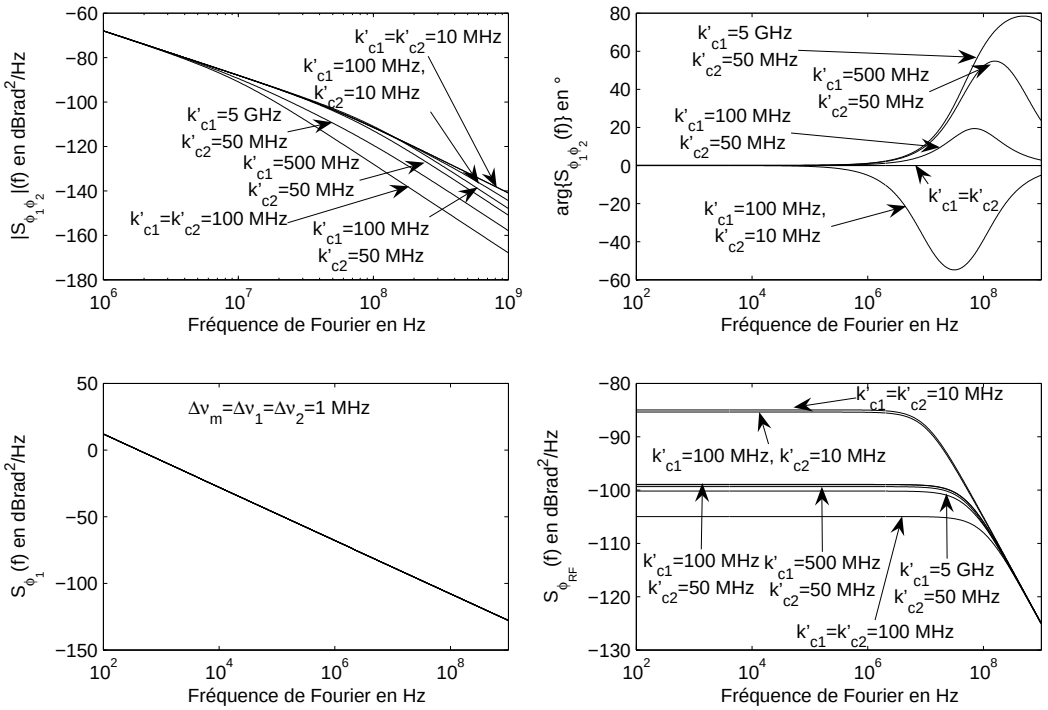

FIG. 7.4 – Influence de la différence entre les paramètres d'accrochage

Si k'_{c2} tend vers l'infini, alors on supprime totalement la contribution résiduelle du bruit propre du laser 2 ce qui améliore donc de 3 dB le niveau du bruit de phase micro-onde.

7.4.4 Influence de la pureté spectrale du laser maître

Nous allons maintenant étudier l'influence de la largeur spectrale du laser maître sur la qualité du signal micro-onde généré. Les hypothèses sont les suivantes : des lasers soumis à injection de largeurs spectrales identiques de 1 MHz, des fréquences d'accrochage identiques de 100 MHz.

On constate sur la figure 7.5, que la pureté spectrale du laser maître n'a aucune influence sur le niveau de bruit de phase : Une largeur spectrale importante du laser maître entraîne une augmentation du bruit de phase de chacun des lasers esclaves (courbe $S_{\phi_1}(f)$), et dans la même proportion une augmentation de la quantité de bruit corrélé. Les bruits corrélés étant amenés à disparaître lors de la photodétection, leur quantité n'a pas d'influence. Cependant, le fait d'avoir un laser maître avec un important bruit de phase peut avoir un impact défavorable lors du transport des ondes corrélées. Nous ne pouvons donc conclure à l'indépendance du bruit de phase micro-onde vis à vis de la pureté spectrale du laser maître avant d'avoir étudié l'influence du délai.

Si l'on calcule le degré d'intercorrélation spectrale entre les phases des lasers à partir des expressions des densités spectrales des bruits de phase et de la densité interspectrale, en gardant des hypothèses

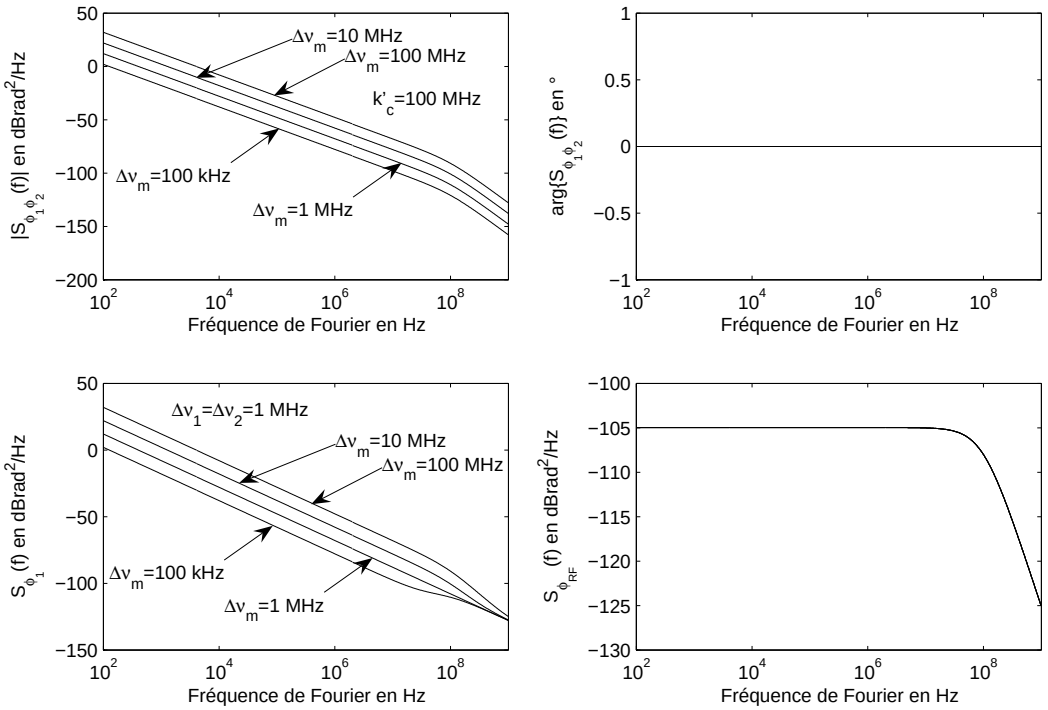

FIG. 7.5 – Influence de la pureté spectrale du laser maître

identiques,

$$\gamma_{\phi_1\phi_2}(f) = \frac{1}{1 + \frac{\Delta\nu}{\Delta\nu_m}\frac{f^2}{k_c'^2}} \tag{7.50}$$

on constate qu'il dépend de la largeur spectrale du laser maître, par conséquent, ce paramètre n'est pas équivalent à la densité spectrale de la phase micro-onde.

7.4.5 Influence d'un délai entre les deux ondes

Nous souhaitons maintenant étudier l'influence d'un éventuel délai introduit entre les deux phases corrélées. Rappelons que ce délai peut se situer entre le maître et les deux esclaves, entre les deux esclaves et la jonction du coupleur et le long de la fibre dispersive.

On considère donc un délai cumulé $\Delta\tau$, trois lasers de largeur spectrale 1 MHz, des fréquences d'accrochage identiques de 1 GHz.

Signalons tout d'abord qu'un délai n'a aucune influence sur le bruit de phase de chacun des lasers. Nous avons précédemment démontré qu'un délai n'agit que sur la phase de la densité interspectrale de puissance des deux phases. On constate ainsi que pour un délai de 100 ps, la phase de la densité interspectrale subit une rotation allant jusqu'à 45°pour des fréquences de Fourier de 0 à 1 GHz. Ceci se traduit par une pénalité de quelques dB au niveau du plateau de bruit de phase micro-onde. Pour un délai

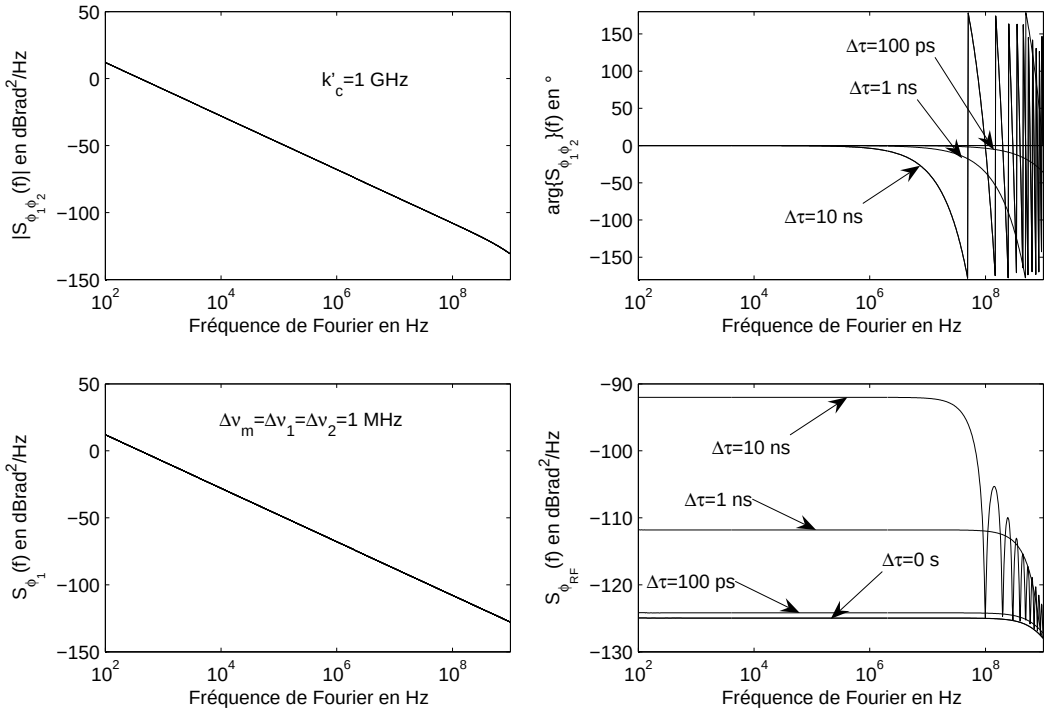

FIG. 7.6 – Influence d'un délai entre les deux ondes optiques sur le bruit de phase micro-onde

dix fois plus important, la phase de la densité spectrale va subir une rotation pouvant aller jusqu'à un tour complet à la fréquence de Fourier de 1 GHz. Ainsi, les composantes spectrales des deux bruits de phase ϕ_1 et ϕ_2 à la fréquence 500 MHz, subissent un déphasage moyen[2] de 180°, ce qui signifie donc qu'elles sont anti-corrélées, au lieu de s'annuler lors de la photodétection, elles vont donc s'ajouter.

La pénalité induite par un délai de 1 ns est ici de 13 dB. L'effet de la rotation périodique de la phase de la densité interspectrale n'apparaît que pour des délais plus importants pour lesquels la période fréquentiel de rotation ($1/\Delta\tau$) est inférieure à la fréquence d'accrochage k'_c

On établit les équations simplifiées suivantes :

Pour $f << k'_{c1}$ et $f << \Delta\tau$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = 10\log(2\pi\Delta\nu_m\Delta\tau^2 + \frac{\Delta\nu/2\pi}{{k'_c}^2}) \tag{7.52}$$

[2]La quantité considérée, la densité interspectrale, est un moment statistique, la transformée de Fourier de la phase est une fonction aléatoire complexe dont la phase est elle aussi aléatoire, la densité interspectrale est lié à la moyenne du produit entre les transformées de Fourier des deux phases, la phase du produit est la différence des phases des transformées de Fourier (phase spectrale de la phase) :

$$S_{\phi_1\phi_2}(f)\delta(f-f') = \langle\phi(f)\phi^*(f')\rangle = \langle|\phi(f)||\phi(f')|e^{\arg\{\phi(f)-\arg\{\phi(f')\}}\rangle \tag{7.51}$$

Et si $\Delta\tau >> \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\delta\nu_m}}\frac{1}{2\pi k'_c}$

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = 20\log(\Delta\tau) + 10\log(2\pi\Delta\nu_m) \tag{7.53}$$

L'influence du déphasage sur la densité interspectrale sous la forme $\sin^2(\pi f\Delta\tau)\ (\pi f\Delta\tau)^2$ est égalisée par la distribution en fréquence du bruit de phase en $1/f^2$, ce qui explique l'uniformité de la pénalité au niveau du plateau.

Dans la précédente étude de cas, avec un délai nul, nous avions remarqué que le niveau de bruit de la phase micro-onde était indépendant de la largeur spectrale du laser maître. Maintenant si l'on observe l'équation (7.52), on constate que la pénalité dépend de la largeur spectrale du laser.

Nous illustrons donc l'influence de la largeur spectrale du laser maître sur la pénalité induite par le délai par une nouvelle série de figure, avec pour hypothèse : un délai cumulé de 1 ns, deux lasers soumis à injection de largeur spectrale naturelle 1 MHz, des fréquences d'accrochage identiques de 1 GHz.

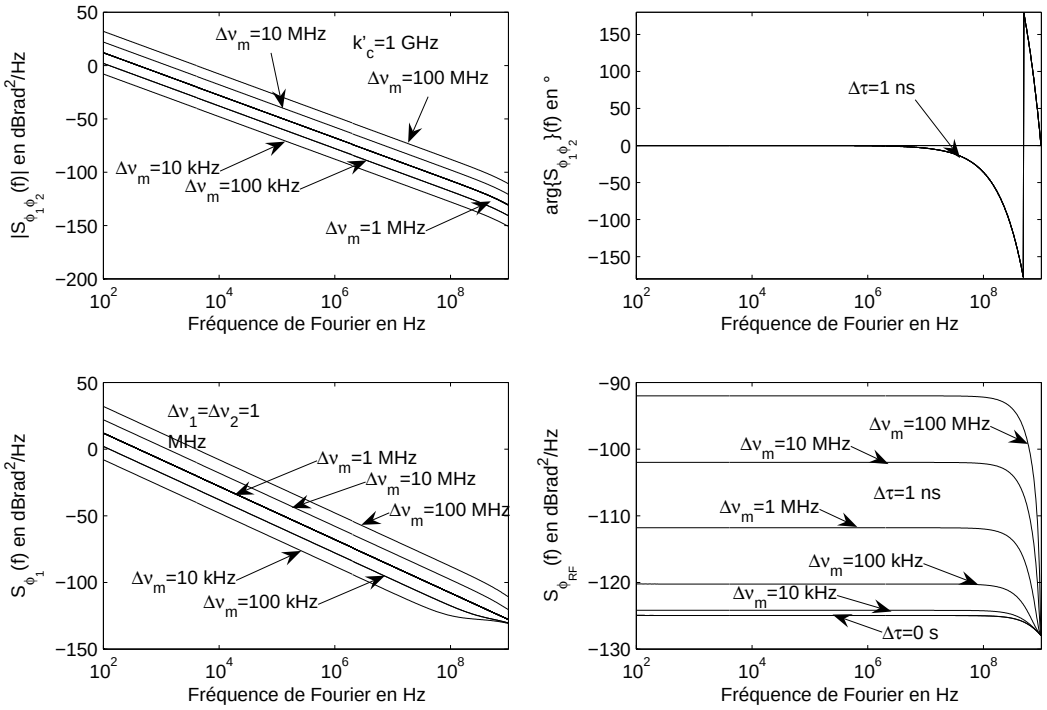

FIG. 7.7 – Influence de la largeur spectrale du laser maître sur la pénalité due au délai

On constate sur la figure 7.7, que pour un même délai, la pénalité induite varie de 1 dB à 33 dB pour des valeurs de la largeur spectrale du laser maître allant de 10 kHz à 100 MHz.

En effet, d'après l'équation (7.52) pour $f << k'_{c1}$, $f << \Delta\tau$ et $\Delta\tau >> \sqrt{\frac{\Delta\nu}{\delta\nu_m}}\frac{1}{2\pi k'_c}$:

$$S_{\phi_{RF}}(f)(dB) = 10\log(\Delta\nu_m) + 10\log(2\pi\Delta\tau^2) \tag{7.54}$$

Le paramètre à considérer en pratique est en fait le produit $\Delta\nu_m\Delta\tau^2$, à pénalité égale, un délai dix fois plus important peut donc être compensé par une largeur spectrale cent fois plus petite. Comme nous l'avons remarqué sur l'équation (7.43), le délai fait apparaître des composantes corrélées en opposition de phase. A une fréquence donnée, la puissance en opposition de phase de la composante corrélée est bien entendue proportionnelle à la puissance totale de la composante corrélée, c'est à dire à la largeur spectrale du laser maître, par conséquent, si les lasers esclaves sont corrélés avec peu de bruit, alors un délai n'entraînera que peu de bruit car il n'y aura que peu de bruit anti-corrélé.

En conclusion, nous pouvons dire qu'une grande pureté spectrale du laser maître n'améliore pas directement le bruit de phase micro-onde mais rend celui-ci beaucoup moins sensible aux pénalités induites par un délai.

7.5 Densité spectrale de puissance du photocourant

Nous avons dans le chapitre de rappels sur les propriétés statistiques du champ optique établit l'expression de la densité spectrale de puissance du photocourant en fonction du champ incident :

$$S_i(f) = |H(f)|^2[\underbrace{\sigma^2 S_I(f)}_{a} + \underbrace{e\langle i\rangle}_{b}] \tag{7.55}$$

où $H(f)$ est ici la fonction de transfert sans dimension, e est la charge de l'électron, $S_I(f)$ est la densité spectrale de puissance de la puissance optique et $\langle i\rangle$ est le photocourant continu moyen, σ_{PD} est la sensibilité du détecteur. (a) correspond aux interférences entre les deux ondes et (b) correspond au bruit de grenaille dû à la détection des deux ondes optiques.

$S_I(f)$ est la transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation du quatrième ordre du champ optique dont l'expression est :

$$R_E^{(4)}(0,\tau,0) = 2I_1I_2\cos(2\pi f_{RF}\tau)e^{-\frac{1}{2}\left\langle(\Delta\phi_{RF}(\tau))^2\right\rangle} \tag{7.56}$$

où $\Delta\phi_{RF}(t,\tau) = \phi_{RF}(t+\tau) - \phi_{RF}(t)$ est la gigue de phase RF.

7.5.1 Expression de la variance de la gigue de phase RF

On constate d'après l'équation précédente que la seule chose à connaître est la variance de la gigue de phase. Celle-ci est directement reliée à la densité spectrale de puissance du bruit de phase RF par :

$$\left\langle(\Delta\phi_{RF}(\tau))^2\right\rangle = 4\int_{-\infty}^{\infty}\sin^2(\pi f\tau)S_{\phi_{RF}}(f)df \tag{7.57}$$

Si l'on considère que le délai entre les deux lasers est nul, que le bruit de phase de l'oscillateur subharmonique est négligeable et que les lasers esclaves sont identiques avec les mêmes paramètres d'injection :

$$S_{\phi_{RF}}(f) = \frac{\Delta\nu/\pi}{k_c'^2 + f^2} \tag{7.58}$$

alors la variance de la gigue de phase est de la forme :

$$\left\langle (\Delta\phi_{RF}(\tau))^2 \right\rangle = 2\frac{\Delta\nu}{|k_c'|}\left[1 - e^{-2\pi|\tau k_c'|}\right] \tag{7.59}$$

On constate que contrairement à la variance de la gigue de phase d'un laser, en $2\pi\nu|\tau|$, elle ne tend pas vers l'infini. Ceci est fortement lié au fait que le bruit de phase ne diverge pas en zéro et que la phase du battement soit statistiquement stationnaire.

La valeur maximale de la variance de la gigue de phase RF est :

$$\sigma^2_{RFmax} = 2\frac{\Delta\nu}{|k_c'|} \tag{7.60}$$

7.5.2 Expression de la densité spectrale de puissance

Comme la variance de la gigue de phase RF ne tend pas vers l'infini, la fonction d'autocorrélation $R_E^{(4)}(0,\tau,0)$ ne tend pas vers zéro. On utilise alors la fonction :

$$G_E^{(4)}(\tau) = R_E^{(4)}(0,\tau,0) - 2I_1I_2\cos(2\pi f_{RF}\tau)e^{-\sigma^2_{RFmax}/2} \tag{7.61}$$

qui s'annule pour τ infini. Le calcul de la densité spectrale unilatérale donne alors deux composantes :

$$S_i(f) = 2|H(f)|^2\left[\left(\underbrace{\sigma^2\mathrm{TF}\{G_E^{(4)}\}(f-f_{RF})}_{a} + \underbrace{2a^2\langle i\rangle^2 e^{-\frac{\Delta\nu}{k_c'}}\delta(f-f_{RF})}_{a}\right) + e\langle i\rangle\right] \tag{7.62}$$

avec $a = \frac{\sqrt{I_1I_2}}{I_1+I_2}$. On distingue, en plus du spectre blanc du bruit de grenaille, une composante pure (b), et un piédestal (a), tous deux centrés sur la fréquence de battement f_{RF}.

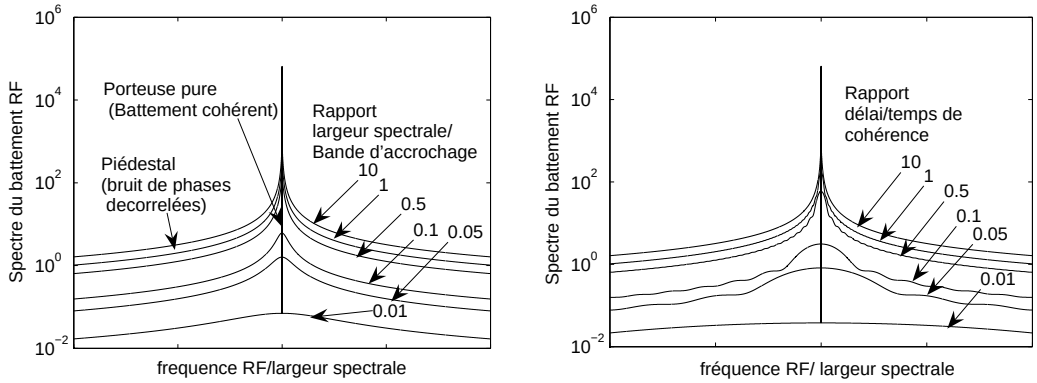

FIG. 7.8 – Influence de la bande d'accrochage et du délai sur la densité spectrale de puissance du battement RF

Nous avons représenté sur la figure 7.8, le profil spectral en fonction du facteur d'accrochage (figure de gauche) et le profil spectral correspondant à un délai variable entre les deux ondes optiques (figure de droite). La première figure est obtenue numériquement par transformée de Fourier rapide de la fonction

d'autocorrélation du quatrième ordre, tandis que la seconde est obtenue grâce au calcul analytique du spectre auto-hétérodyne avec un délai τ_0 :

$$\left\langle (\Delta\phi_{RF}(\tau))^2 \right\rangle = 4\pi\Delta\nu \left[|\tau_0| + |\tau| - \frac{|\tau_0+\tau| + |\tau_0-\tau|}{2} \right] \tag{7.63}$$

et après calculs :

$$S_i(f-f_{RF}) = \frac{2a^2\langle i\rangle^2\Delta\nu/2\pi}{(\Delta\nu/2)^2+f^2}\left\{1-e^{-2\pi\Delta\nu|\tau_0|}\left[\frac{\sin(f|\tau_0|)}{f/\Delta\nu}+\cos(f\tau_0)\right]\right\} + 2a^2\langle i\rangle^2\delta(f)e^{-2\pi\Delta\nu|\tau_0|} \tag{7.64}$$

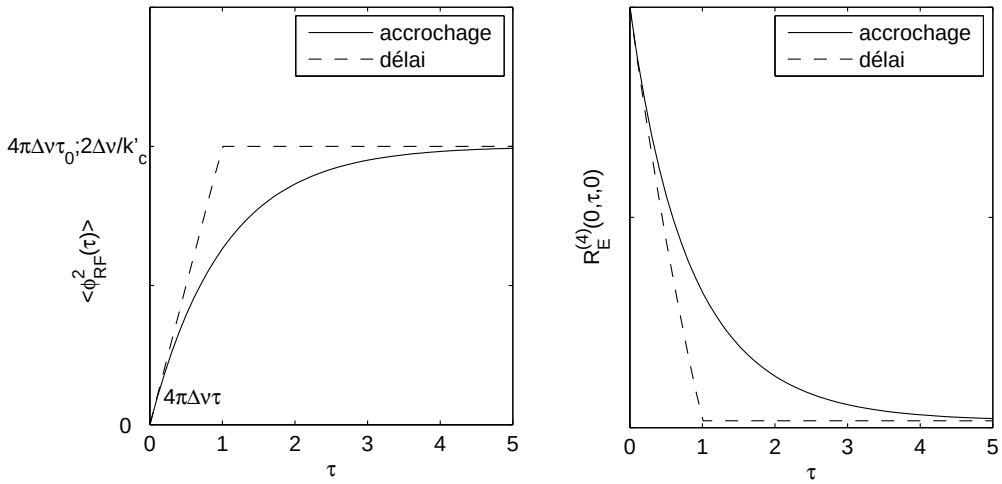

FIG. 7.9 – Variance de la gigue de phase et corrélation du quatrième ordre

On constate graphiquement et analytiquement qu'au niveau de la puissance contenue dans la composante pure, un facteur d'accrochage de k'_c correspond à un délai de $1/(\pi k'_c)$. Pour une même puissance dans la composante pure, le spectre dû au délai présente une largeur à mi-hauteur plus importante que celle du spectre dû à la plage d'accrochage. Le spectre associé au délai exhibe une modulation peu contrastée correspondant aux interférences spectrales présentes dans le spectre optique, tandis que le spectre associé à l'accrochage présente toujours un profil quasi-lorentzien. Cette différence provient de la différence de régularité de la variance de la gigue. On constate en effet sur la figure 7.9 que la variance de la gigue dans le cas temporel possède une discontinuité de pente au niveau de τ_0, celle-ci est bien évidemment présente sur la fonction d'autocorrélation du quatrième ordre et est responsable des oscillations présentes sur le spectre et de période inverse de τ_0.

7.5.3 Autres sources de bruit

Nous avons durant tout ce mémoire considéré qu'il n'y avait pas de bruit sur l'amplitude du laser. Or on connaît l'importance du RIN dans les communications optiques. L'amplitude moyenne du photocourant est proportionnelle au produit de corrélation de l'amplitude des deux lasers. Lors de l'injection

optique, il y a transfert du RIN par conséquent les lasers esclaves possèdent, sur la plage de fréquence de la largeur d'accrochage, un RIN identique et synchronisé, par conséquent le bruit d'amplitude de l'onde de battement est en fait égal au bruit de la puissance du laser maître. L'amplitude du battement est donc sensible au bruit en 1/f du RIN prédominant jusqu'à une fréquence d'écart à la porteuse de 1 MHz et pouvant atteindre -120 dB/Hz à 1 kHz de la porteuse. A cause de l'ambiguïté de définition du bruit de phase micro-onde (voir Annexe C), le RIN est parfois inclus dans le bruit de phase. [152].

Il existe de plus un mécanisme de conversion du RIN en bruit de phase lors d'une modulation directe [153], cette effet peut alors entraîner une modification de la corrélation entre les dents du peigne optique généré par modulation du laser maître.

Enfin, nous n'avons mentionné dans l'expression du photocourant que le bruit quantique d'origine optique, cependant pour un courant inférieur au mA, le bruit thermique est comparable au bruit de grenaille et devient prédominant à faible puissance optique, sa densité spectrale de puissance unilatérale est :

$$S_i^{th} = \frac{4k_B T}{R_{PD}} \tag{7.65}$$

Ces deux bruits blancs peuvent être inclus dans le bruit blanc additif gaussien de la transmission numérique. Pour des fréquences générées supérieures à 30 GHz, la contribution du RIN liée à la détection directe est négligeable.

7.6 Caractérisation expérimentale du bruit de phase de la porteuse générée optiquement

7.6.1 Remarques préliminaires

Nous avons cherché à valider expérimentalement les expressions analytiques précédemment déterminées dans l'approximation adiabatique. L'objectif était de vérifier la pénalité sur le bruit de phase due à la multiplication de la fréquence moyenne, et surtout de mettre en évidence la pénalité induite par une faible valeur de la fréquence d'accrochage.

Dans l'analyse qualitative de l'équation analytique, nous n'avons pas pris en compte le bruit de phase de l'oscillateur sub-harmonique car il s'agit d'une donnée essentiellement expérimentale. Or il a été montré que la densité spectrale de bruit de phase était principalement la somme de trois termes d'origines différentes :

- La contribution du bruit de phase de l'oscillateur sub-harmonique plus la pénalité de multiplication.
- La contribution des bruits de phase propres résiduels de chacun des lasers.
- La contribution des bruits de phase venant du maître anti-corrélés par un éventuelle délai vrai ou de dispersion.

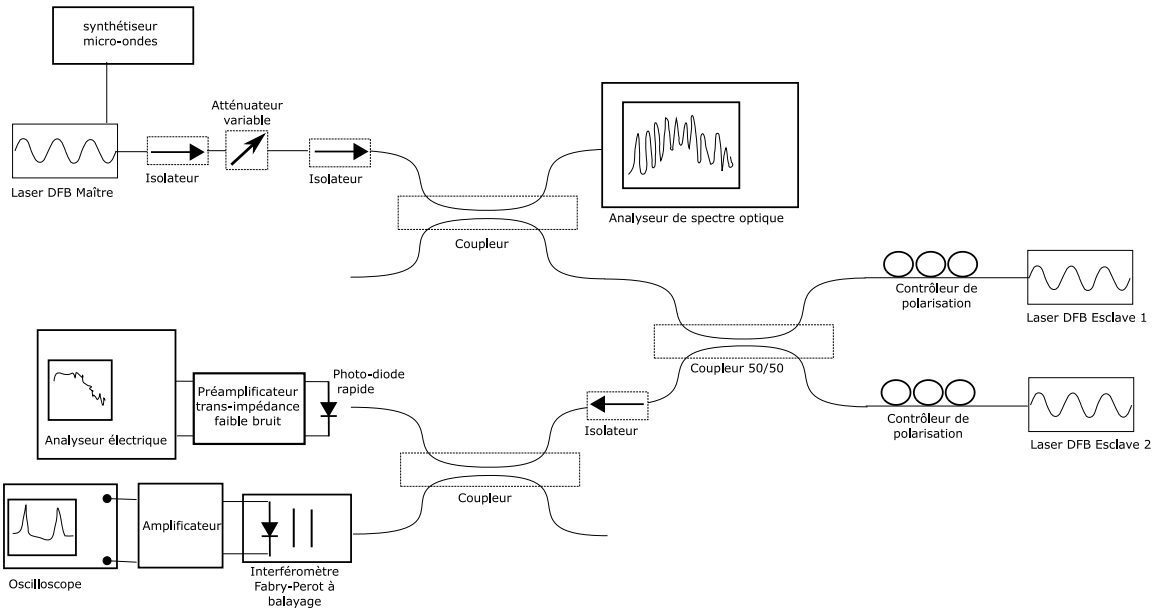

FIG. 7.10 – Schéma du montage expérimental

7.6.2 Limitations expérimentale

Afin de pouvoir mettre en évidence l'une de ces sources, il est nécessaire que les autres ne la masquent pas. Dans un premier temps nous avons utilisé un générateur de signaux Marconi 2032 comme oscillateur sub-harmonique. Ses valeurs de bruit de phase se sont révélés assez élevés que ce soit pour mettre en évidence les défauts de la méthode de corrélation ou pour envisager d'utiliser l'onde générée optiquement comme porteuse. Nous avons pu utiliser occasionnellement un second générateur de signaux micro-ondes de conception plus récente, le Rohde & Schwartz SMP 02/22. Sa densité spectrale de bruit de phase est plus de 30 dB inférieure à celle du générateur Marconi 2032.

Une seconde limitation est venue de l'analyseur électrique. Les mesures de densités spectrales de bruit de phase ont été réalisées à l'aide d'un analyseur de spectre micro-onde (Cf. Annexe C) pour les fréquences le permettant. La limitation provient essentiellement du bruit de phase de la source interne de l'analyseur de spectre. Celui-ci étant de conception ancienne, son bruit de phase est supérieur au bruit de phase du générateur Rhode & Schwartz. Enfin le détecteur photo-électrique utilisé pour le mélange hétérodyne possède une bande passante limitée à 22 GHz, égale à la bande passante de l'analyseur de spectre micro-onde, ce qui fixe la limite haute des fréquences des porteuses micro-ondes pouvant être générées expérimentalement.

7.6.3 Présentation des paramètres de mesure

Nous avons réalisé le battement à l'aide de deux lasers DFB dont la largeur spectrale au courant de polarisation fixé est 750 kHz et 800 kHz (mesure auto-hétérodyne), nous avons choisi des courants de polarisation pas trop élevés afin d'obtenir des valeurs de bruit de phase optique assez élevée pour les

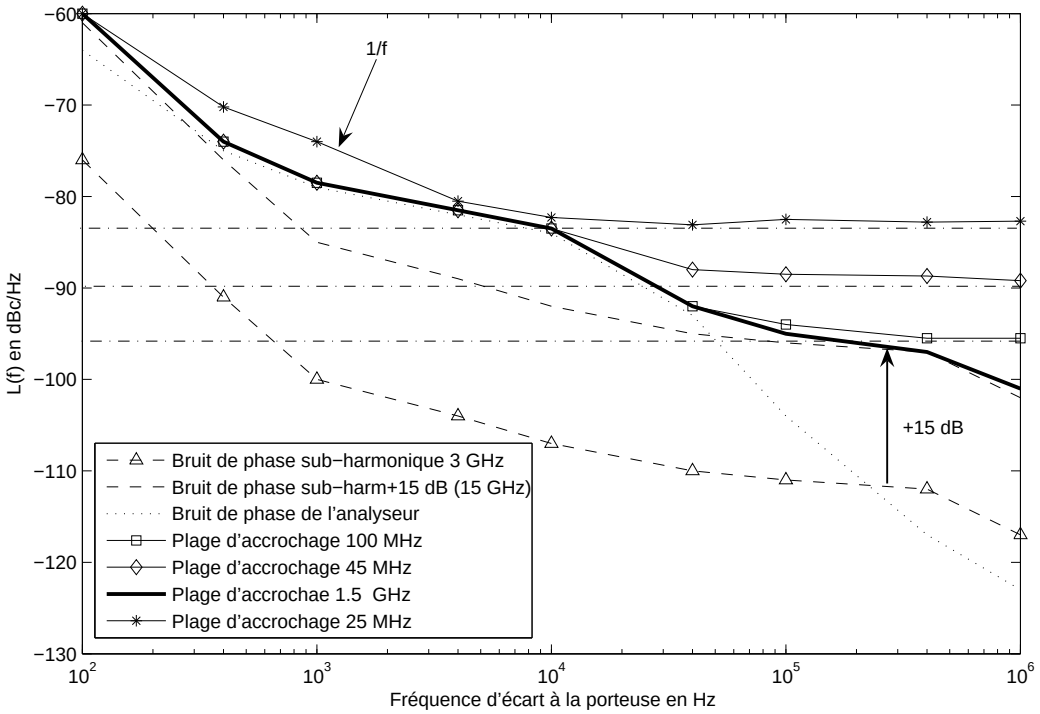

FIG. 7.11 – Mesures expérimentales du spectre du bruit de phase en fonction de différentes fréquences d'accrochage

mettre en évidence. Comme nous l'avons mentionné lors de la présentation de nos lasers DFB, le facteur de Henry est d'environ 3.5. Le laser maître est modulé par un signal sinusoïdal à 3 GHz. Les lasers sont accrochés sur les harmoniques -3 et +2 dont la puissance est quasi-identique, le photocourant généré possède donc une fréquence de 15 GHz. Les facteurs de couplage f_R des deux lasers esclaves étant un peu différents (0.25*ISL et 0.3*ISL), nous avons compensé cette différence au niveau du couplage laser/fibre et au niveau de la puissance de sortie des lasers. Les fréquences des lasers sont réglées de telle manière que l'injection se fasse à désaccord nul. Comme nous l'avons vu lors de la mesure du degré de corrélation entre le maître et l'esclave, la diminution du paramètre k_c' a lieu au bord de la plage d'accrochage, par conséquent le désaccord n'est pas un paramètre critique. A cause des instabilités et de l'appareil de mesure, les mesures de bruit de phase sont faites fréquences par fréquences. Nous avons restreint notre plage d'étude à des fréquences d'écart à la porteuse entre 100 Hz et 1 MHz car premièrement il s'agit de la plage typique dans laquelle sont données les valeurs de bruit de phase des porteuses micro-ondes et deuxièmement la mesure avec notre appareil n'est pas valable pour les trop basses fréquences.

7.6.4 Résultats et commentaires

L'ensemble des résultats est présenté sur la figure 7.11. Nous y avons représenté le bruit de phase de l'oscillateur subharmonique et le bruit de phase avec la pénalité théorique due à la multiplication de la fréquence.Nous avons tout d'abord mesuré les valeurs de bruit de phase pour une plage d'accrochage de 1.5 GHz pour laquelle le bruit de phase résiduel des lasers esclaves est négligeable devant le bruit de phase de l'oscillateur subharmonique. Nous avons pu constater que la pénalité par rapport au bruit de phase subharmonique était d'au maximum 3 dB. Les mesures sont cependant masquées sur plus de deux décades par le bruit de phase de l'analyseur micro-ondes.

Afin de mesurer l'impact de la bande d'accrochage nous avons réalisé trois séries de mesures avec des bandes d'accrochage de 100 MHz, 45 MHz et 25 MHz. Nous avons tracé en trait mixte les seuils de bruit de phase respectif dû aux composantes de bruit de phase propre résiduelles. Là où le bruit de phase n'est pas masqué par l'analyseur de spectre c'est à dire au-delà de 40 kHz, on détecte effectivement un planché de bruit de phase de 1 à 3 dB au dessus du niveau théorique. De plus, pour la plage d'accrochage de 45 MHz, nous avons mesuré dans la bande 100 Hz - 10 kHz un composante du bruit de phase en 1/f. Celle-ci à probablement comme origine un bruit de fréquence en 1/f présent sur les lasers. En effet, à cause de l'accrochage, le bruit de phase en $1/f^3$ devient du bruit de phase en $1/f$. Nous n'avons pas pu mesurer correctement le spectre du bruit de fréquence optique de nos lasers avec les interféromètres de Fabry-Perot à notre disposition et donc confirmer l'origine de ce profil en 1/f.

7.6.5 Proposition d'une méthode de mesure de bruit de fréquence optique basée sur l'injection optique par un laser de très faible largeur spectrale

A la suite de ces mesures, il nous est apparu l'idée que l'injection optique pourrait être utilisée pour effectuer des mesures de bruit de fréquence optique. En effet, pour les fréquences inférieures au paramètre k'_c, le bruit de phase du battement entre le maître et l'esclave est proportionnel à la somme des bruits de fréquence des lasers. En considérant que le laser maître possède un bruit négligeable devant celui du laser esclave, on peut alors mesurer directement avec un analyseur de spectre électrique le bruit de fréquence optique du laser esclave. Le coefficient de conversion étant $\frac{1}{k_c'^2}$ il est donc nécessaire d'être dans un régime de faible injection pour que le bruit à mesurer ne soit pas trop faible.

En pratique, le laser maître devra être en partie décalé en fréquence pour la détection hétérodyne, la source du décalage, de fréquence moyenne, ne devrait pas gêner la mesure. Le seuil de détectivité dépendra alors de l'analyseur de bruit de phase utilisé. La méthode impose cependant de faire un compromis entre le gain de conversion ($1/k_c'^2$) et la plage en fréquence de conversion k'_c.

7.7 Conclusion

Nous avons, au cours de ce chapitre, tout d'abord établi l'expression théorique de la densité spectrale de puissance de la phase du battement, en prenant en compte :

- la densité spectrale de puissance de la phase de l'oscillateur sub-harmonique,
- les propriétés spectrales des lasers maître et esclaves,
- les paramètres d'injections,
- les délais géométrique et de dispersion induits au cours de la transmission.

L'influence de chacun de ces paramètres a été ensuite étudiée en détails à l'aide de calculs numériques et d'expressions asymptotiques. Nous avons de plus relié ces paramètres aux caractéristiques spectrales du photocourant. Enfin nous avons validé les expressions analytiques à l'aide de mesures expérimentales sur le bruit de phase. Durant ces mesures nous avons détecté la présence de bruit en 1/f et avons ainsi proposé une nouvelle méthode de mesure du spectre de bruit de fréquence optique.

Conclusion générale

Le travail de recherche présenté dans cette thèse est parti d'une problématique réseau : la distribution de porteuses micro-ondes par voie optique pour les réseaux hybrides sans fil large bande, face à laquelle une réponse système se présente : la génération de micro-ondes par battement de lasers corrélés par injections optiques. Nous avons ainsi cherché à étudier les mécanismes physiques fondamentaux liés à cette technique au niveau de la structure des lasers, au niveau de la dynamique de l'accrochage optique et au niveau des propriétés statistiques du bruit de phase. Ce travail s'est articulé autour de quatre axes forts :

- **L'analyse théorique de l'injection optique dans les lasers DFB et Fabry-Perot.** A notre connaissance, il s'agit de la première étude détaillée de l'injection optique réalisée à l'aide des fonctions de Green et de la méthode des lignes de transmissions. Nous avons étudié théoriquement et numériquement les paramètres d'accrochage pour les lasers DFB et Fabry-Perot dans les deux configurations d'injection possibles, et nous avons calculé les expressions littérales des densités spectrales de puissance des bruits du laser DFB accroché.

- **L'étude théorique et expérimentale de la corrélation optique entre un laser maître et un laser esclave.** Nous avons en particulier relié le concept, plutôt du domaine optique, de degré de corrélation, au concept, plutôt du domaine électrique, de densité spectrale de bruit de phase. Nous avons ainsi établit l'expression du degré de corrélation en fonction des conditions d'accrochage, et réalisé deux expériences de mesure confirmant la formule théorique.

- **L'étude des battements temporels sous l'angle des interférences à deux ondes et de l'optique de Fourier.** Cette partie originale a permis de relier les approches de la cohérence et de la corrélation au niveau spatial et temporel. Elle donne ainsi un nouvel éclairage à la méthode de génération de signaux radio-fréquences par battement optique.

- **L'étude approfondie théorique et expérimentale de la pureté spectrale d'une porteuse micro-onde générée par battement de deux lasers soumis à l'injection de bandes latérales de modulation optiques.** Nous avons en particulier fait un usage systématique de la notion de densité interspectrale afin de montrer le transfert de cohérence de l'oscillateur sub-harmonique amont jus-

qu'au photocourant micro-onde généré en aval.

Notre étude de l'injection dans les lasers DFB est loin d'être complète et pourrait être la base d'études numériques et expérimentales ultérieures permettant de dégager les propriétés spécifiques et les potentialités de l'injection dans les lasers à structure complexe.

La méthode d'analyse de la corrélation des bruits de phase que nous avons présentée nous semble pouvoir être adaptée facilement à l'étude des lasers à blocage de mode actif ou bien autopulsant.

Enfin le transfert de corrélation par injection optique pourrait être appliqué sur des peignes optiques obtenus par blocage de mode, permettant alors d'atteindre des fréquences de battement beaucoup plus importantes et de fournir des sources d'onde THz continues de très faible bruit de phase.

Annexe A

Calcul statistique du photo-courant

A.1 Introduction

Nous proposons dans cette annexe le calcul détaillé des paramètres statistiques du photocourant. L'approche utilisée est basée sur un double processus statistique. On considère en effet que la statistique d'émission d'un photo-électron est directement liée à la puissance du champ incident sur le détecteur. Comme nous souhaitons traiter du transfert de bruit du champ optique au photo-courant, la puissance incidente est considérée elle aussi comme un processus aléatoire. On effectue donc pour chacun des calculs de moments deux calculs d'espérance mathématique. Au final, il apparaît clairement la contribution de la densité spectrale de puissance de l'intensité du champ et du bruit de grenaille intrinsèque à la statistique poisonnienne.

A.2 Émission poissonienne conditionnelle des électrons

On considère un photodétecteur de type P.I.N. éclairé par une onde lumineuse et recevant une puissance optique $I(t)$. Par interactions atomiques, les photons incidents libèrent des électrons à l'intérieur du matériau du détecteur et donnent naissance à un courant au sein d'une charge résistive.
Expression instantanée du photocourant :

$$i(t) = \mathrm{e} \sum_{j=1}^{k(t)} h(t - t_j)$$

où $k(t)$ est le nombre de photo-électrons émis entre 0 et t, t_j est l'instant d'émission du j^e photo-électron, h est la réponse en courant normalisée du photodétecteur et e la charge de l'électron.
L'émission des électrons est régie par une loi de Poisson dont le paramètre est $\lambda(t, t+T)$:

$$P(k, \lambda(t, t+T)) = \frac{\lambda(t, t+T)^k}{k!} e^{-\lambda(t,t+T)}$$

désigne la probabilité d'obtenir k p.e. entre t et $t+T$. $\lambda(t, t+T)$ correspond à la moyenne du nombre de photo-électrons obtenus dans cet intervalle, il est relié au flux photo-électronique idéal n_{pe} en nombre de photo-électrons par seconde :

$$\lambda(t, t+T) = \int_t^{t+T} n_{pe}(r)dr$$

avec $n_{pe}(t) = \eta_{pd}\frac{I}{h\nu}$, I est la puissance optique incidente sur le détecteur, η_{pd} le rendement quantique du photo-détecteur, $h\nu$ l'énergie d'un photon.

On considère que $I(t)$ est bruitée donc $\lambda(t, t+T)$ est une variable aléatoire et l'expression de la probabilité d'obtenir k électrons est la suivante :

$$P(k) = \int_0^{\infty} p_{\lambda(t,t+T)}(l)\left(\frac{l^k}{k!}e^{-l}\right)dl \tag{A.1}$$

La loi régissant k est donc de type Poisson conditionnelle.

A.3 Calcul du courant moyen

La probabilité d'obtenir un p.e. entre T_1 et T_2 est :

$$P(1, \lambda(T_1, T_2)) = \lambda(T_1, T_2)e^{-\lambda(T_1,T_2)} \tag{A.2}$$

En outre, sachant qu'un électron a été émis entre t_1 et t_2, la densité de probabilité que cet électron soit émis à l'instant t_j est la suivante :

$$p_{t_j}(t) = \frac{n_{pe}(t)}{\lambda(T_1, T_2)} \tag{A.3}$$

Pour déterminer la moyenne statistique du courant, il est nécessaire de connaître la densité de probabilité de l'événement [k p.e apparaissent aux instants $t = t_1, ..., t_k$]
Pour une V.A. poissonienne, cette densité de probabilité est égale au produit de la probabilité de l'événement : [k p.e. apparaissent entre T_1 etT_2] et de la densité de probabilité de l'événement [sachant que k p.e. sont apparus entre T_1 et T_2, les instants d'apparitions sont $t_1, ..., t_k$].

Or d'après (A.3) :

$$p(t_1, ..., t_k|k; n_{pe}(t)) = \prod_{j=1}^{k} \frac{n_{pe}(t_j)}{\lambda(T_1, T_2)}$$

On pose $N_e(t) = \lambda(-\infty, t)$ le nombre moyen total des électrons émis à t.

Calcul de la moyenne du photo-courant :

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[i(t,n_{pe}(t))] &= \mathrm{eE}_k\left[\mathrm{E}_{\{t\}}[\sum_{j=1}^{k(t)} h(t-t_j)]\right] && \text{(A.4)}\\
&= \mathrm{eE}_k\left[\int_{-\infty}^{t}...\int_{-\infty}^{t}\sum_{j=1}^{k(t)} h(t-t_j)p(t_1...t_k|k)dt_1...dt_k\right] && \text{(A.5)}\\
&= \mathrm{eE}_k\Big[\sum_{j=1}^{k}\int_{-\infty}^{t} h(t-t_j)\frac{n_{pe}(t_j)}{N_e(t)}dt_j \times && \text{(A.6)}\\
&\quad \times \underbrace{\int_{-\infty}^{t}\dots\int_{-\infty}^{t}\frac{n_{pe}(t_1)\dots n_{pe}(t_{j-1})n_{pe}(t_{j+1})\dots n_{pe}(t_k)}{N_e(t)^{k-1}}dt_1\dots dt_{j-1}dt_{j+1}\dots dt_k}_{=1^{k-1}=1}\Big]\\
&= \mathrm{e}\int_{-\infty}^{t} h(t-u)n_{pe}(u)du\,\underbrace{\frac{\mathrm{E}_k[k]}{N_e(t)}}_{=1} && \text{(A.7)}\\
\mathrm{E}_{n_{pe}}[\mathrm{E}[i(t)]] &= \int_{-\infty}^{t} h(t-u)\mathrm{E}[n_{pe}(u)]du && \text{(A.8)}\\
&= \mathrm{e}\bar{n}_{pe}\ \text{car}\ \int_{-\infty}^{t} h(t-u)du = 1 && \text{(A.9)}\\
\mathrm{E}_{n_{pe}}[\mathrm{E}[i(t)]] &= \sigma_{PD}I_0 && \text{(A.10)}
\end{aligned}$$

avec σ_{PD} la sensibilité du photo-détecteur et I_0 la puissance optique incidente moyenne.

A.3.1 Calcul de l'écart type du photo-courant

$$\mathrm{Var}[i(t)|n_{pe}] = \mathrm{E}[i^2(t)|n_{pe}] - \mathrm{E}[i(t)|n_{pe}]^2 \qquad \text{(A.11)}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[i^2(t)|n_{pe}] &= \mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[\int_{-\infty}^{t}...\int_{-\infty}^{t}\sum_{j=1}^{k(t)} h(t-t_j)^2p(t_1...t_k|k)dt_1...dt_k\right]\\
&= \mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[\sum_{j=1}^{k(t)}\int_{-\infty}^{t} h^2(t-t_j)\frac{n_{pe}(t_j)}{N_e(t)}dt_j\right]\\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} h(t-t_j)h(t-t_i)\frac{n_{pe}(t_j)}{N_e(t)}\frac{n_{pe}(t_i)}{N_e(t)}dt_jdt_i\right] \qquad \text{(A.12)}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{E}[i^2(t)] &= \mathrm{e}^2\mathrm{E}_{n_{pe}}\left[\int_{-\infty}^{t} h^2(t-u)n_{pe}(u)du\right] \\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}\int_{-\infty}^{t}\int_{-\infty}^{t} h(t-t_j)h(t-t_i)\frac{R_{n_{pe}}(t_j-t_i)}{N_e(t)^2}dt_j dt_i\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}\int_0^{+\infty} h^2(u)du \\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[4\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} h(\frac{T_{ij}-\Delta t_{ij}}{2})h(\frac{T_{ij}+\Delta t_{ij}}{2})dT_{ij}\frac{R_{n_{pe}}(\Delta t_{ij})}{N_e(t)^2}d\Delta t_{ij}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}\int_0^{+\infty} h^2(u)du \\
&\quad +\mathrm{e}^2E_k\left[2\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}\int_0^{+\infty}(h\otimes h)(\Delta t_{ij})\frac{R_{n_{pe}}(\Delta t_{ij})}{N_e(t)^2}d\Delta t_{ij}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}\int_0^{+\infty} h^2(u)du \\
&\quad +\mathrm{e}^2(h\otimes h)*R_{n_{pe}}(0)E_k\left[\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{j-1}\frac{1}{m^2}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}\int_0^{+\infty} h^2(u)du + \mathrm{e}^2(h\otimes h)*R_{n_{pe}}(0)\underbrace{E_k\left[\frac{k^2-k}{N_e(t)^2}\right]}_{=1} \qquad \text{(A.13)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Var}[i(t)] &= \mathrm{e}^2(h\otimes h)*C_{n_{pe}}(0) + \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}h\otimes h(0) \qquad \text{(A.14)} \\
\mathrm{Var}[i(t)] &= \sigma_{PD}^2(h\otimes h)*C_I(0) + \mathrm{e}\sigma_{PD}I_0 h\otimes h(0) \qquad \text{(A.15)}
\end{aligned}
$$

A.4 Calcul de la fonction d'autocorrelation du photo-courant

$$
C_i(\tau) = \mathrm{E}[i(t)i(t+\tau)] - \mathrm{E}[i(t)]\mathrm{E}[i(t+\tau)] \qquad \text{(A.16)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[i(t)i(t+\tau)|n_{pe}] = \mathrm{E}_k[\mathrm{E}_{t_1,\ldots,t_k}[i(t)i(t+\tau)]|n] \\
&= \mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[\int_{-\infty}^{t}\ldots\int_{-\infty}^{t}\sum_{j=1}^{k(t)}h(t-t_j)\sum_{i=1}^{k(t+\tau)}(h(t-t_j+\tau)p(t_1\ldots t_{k(t+\tau)}|k)dt_1\ldots dt_{k(t+\tau)}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[\sum_{j=1}^{k(t)}\int_{-\infty}^{t}h(t-t_j)h(t-t_j+\tau)\frac{n_p(t_j)}{m(t)}dt_j\right] \\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[2\sum_{j=1}^{k(t+\tau)}\sum_{i=1;i\neq j}^{(k(t+\tau)}\int_{-\infty}^{t+\tau}\int_{-\infty}^{t+\tau}h(t-t_j)h(t-t_i+\tau)\frac{n_p(t_j)}{N_e(t)}\frac{n_p(t_i)}{N_e(t)}dt_j dt_i\right] \qquad \text{(A.17)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{E}[i(t)i(t+\tau)] = \mathrm{E}_n[\mathrm{E}[i(t)i(t+\tau)|n]] \\
&= \mathrm{e}^2\mathrm{E}_{n_{pe}}\left[\int_{-\infty}^{t} h(t-u)h(t+\tau-u)n_p(u)du\right] \\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[2\sum_{j=1}^{k(t+\tau)}\sum_{i=1}^{k(t+\tau)}\int_{-\infty}^{t+\tau}\int_{-\infty}^{t+\tau} h(t-t_j)h(t-t_i+\tau)\frac{R_{n_{pe}}(t_j-t_i)}{{N_e}^2(t+\tau)}dt_j dt_i\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}(h\otimes h)(\tau) \\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[4\sum_{j=1}^{k(t+\tau)}\sum_{i=1}^{k(t+\tau)}\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty} h(\frac{T_{ij}-\Delta t_{ij}}{2})h(\frac{T_{ij}+\Delta t_{ij}+\tau}{2})dT_{ij}\frac{R_{n_{pe}}(\Delta t_{ij})}{{N_e}^2(t+\tau)}d\Delta t_{ij}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}(h\otimes h)(\tau) \\
&\quad +\mathrm{e}^2\mathrm{E}_k\left[2\sum_{j=1}^{k(t+\tau)}\sum_{i=1}^{k(t+\tau)}\int_{0}^{+\infty}(h\otimes h)(\Delta t_{ij}-\tau)\frac{R_{n_{pe}}(\Delta t_{ij})}{{N_e}^2(t+\tau)}d\Delta t_{ij}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}(h\otimes h)(\tau) \\
&\quad +\mathrm{e}^2(h\otimes h)*R_{n_{pe}}(\tau)\mathrm{E}_k\left[\sum_{j=1}^{k(t+\tau)}\sum_{i=1}^{k(t+\tau)}\frac{1}{{N_e}^2(t+\tau)}\right] \\
&= \mathrm{e}^2\bar{n}_{pe}(h\otimes h)(\tau) + \mathrm{e}^2(h\otimes h)*R_{n_{pe}}(\tau)\underbrace{\mathrm{E}_k\left[\frac{k(t+\tau)^2-k(t+\tau)}{{N_e}^2(t+\tau)}\right]}_{=1}
\end{aligned}
\tag{A.18}
$$

$$
C_i(\tau) = \mathrm{e}^2(h\otimes h)*(C_{n_{pe}}+\bar{n}_{pe}\delta)(\tau) \tag{A.19}
$$

$$
C_i(\tau) = (h\otimes h)*(\sigma_{PD}^2 C_I + \mathrm{e}\sigma_{PD}I_0\delta)(\tau) \tag{A.20}
$$

A.5 Calcul de la densité spectrale de puissance de bruit du courant

$$
S_i(\omega) = TF[C_i(\tau)](\omega) \tag{A.21}
$$

$$
= \mathrm{e}^2|\tilde{h}(\omega)|^2(S_{n_{pe}}(\omega)+\bar{n}_{pe}) \tag{A.22}
$$

$$
S_i(\omega) = |\tilde{h}(\omega)|^2(\sigma_{PD}^2 S_I(\omega) + \mathrm{e}\sigma_{PD}I_0) \tag{A.23}
$$

Annexe B

Densité spectrale de puissance du bruit de phase

B.1 Calcul d'une densité spectrale de puissance pour la phase

Soit $\phi(t)$ la phase d'un laser, et $\delta\nu(t)$ le bruit de fréquence défini par $\delta\nu(t) = \frac{d\phi}{2\pi dt}(t)$. ϕ est une F.A. modélisée par une marche aléatoire continue (processus de Wiener) de paramètre $2\pi\Delta\nu$ tel que :

$$\langle\phi(t_1)\phi(t_2)\rangle = 2\pi\Delta\nu\min(t_1, t_2) \tag{B.1}$$

par conséquent ϕ n'est pas stationnaire.

On peut calculer la fonction d'autocorrélation du bruit de fréquence :

$$\langle\delta\nu(t_1)\delta\nu(t_2)\rangle = \frac{\partial^2 \langle\phi(t_1)\phi^*(t_2)\rangle}{4\pi^2\partial t_1\partial t_2} = \frac{2\pi\Delta\nu}{4\pi^2}\delta(t_1 - t_2) \tag{B.2}$$

On vérifie bien la stationnarité du bruit de fréquence.

On pause donc comme fonction d'autocorrélation à une variable la fonction $R_{\delta\nu}(\tau) = \frac{\Delta\nu}{2\pi}\delta(\tau)$ Il est alors possible de définir la densité spectrale de puissance du bruit de fréquence :

$$S_{\delta\nu}(f) = \mathrm{TF}[R_{\delta\nu}](f) \tag{B.3}$$

ϕ et $\delta\nu$ sont reliées par un opérateur linéaire $\frac{1}{2\pi}\frac{d}{dt}$ dont la réponse percussionnelle peut être notée par la distribution $\frac{1}{2\pi}\delta'$ de transformée de Fourier jf.

On est donc tenté d'en déduire en appliquant le théorème sur le filtrage des F.A. :

$$S_{\delta\nu}(f) = f^2 S_\phi(f) = \frac{\Delta\nu}{2\pi} \tag{B.4}$$

donc

$$S_\phi(f) = \frac{\Delta\nu}{2\pi f^2} \tag{B.5}$$

Ceci est évidemment contradictoire avec le fait que ϕ soit non-stationnaire.

B.2 Calcul d'une fonction d'autocorrélation pour la phase

Il est utile de présenter ici la notion de pseudo-fonction [154] [155] : Soit g une fonction, on peut lui associer une distribution appelée pseudo fonction de g et notée $\mathrm{PF}\{g\}$ telle que $\forall\varphi \in D^1$, $\langle \mathrm{PF}\{g\}, \varphi\rangle = \mathrm{Partie\,finie} \int_R g(x)\varphi(x)dx$

Ainsi on peut calculer la transformée de Fourier de $\frac{\Delta\nu}{2\pi}\mathrm{PF}\left\{1/f^2\right\}$ qui est $-\pi|\tau|\Delta\nu$ il s'agit donc de la transformée de Fourier, au sens des pseudo-fonctions, de la densité spectrale de puissance de ϕ définie à partir de la densité spectrale de puissance de $\delta\nu$.

Au final on obtient une fonction d'autocorrélation non-stationnaire :

$$R_\phi(t_1, t_2) = 2\pi\Delta\nu\min(t_1, t_2) \tag{B.6}$$

et une fausse fonction d'auto-corrélation stationnaire

$$R_\phi(\tau) = -\pi|\tau|\Delta\nu \tag{B.7}$$

B.3 La densité spectrale de puissance définie pour ϕ a-t-elle un sens ?

On montre que dans le cas d'une fonction aléatoire X stationnaire :

$$\left\langle \tilde{X}(f_1)\tilde{X}^*(f_2)\right\rangle = TF\left\{R_X\right\}(f_1)\delta(f_1 - f_2) \tag{B.8}$$

Calculons donc l'auto-corrélation spectrale du bruit de fréquence :

$$\left\langle \tilde{\delta\nu}(f_1)\tilde{\delta\nu}^*(f_2)\right\rangle = f_1 f_2 \left\langle \tilde{\phi}(f_1)\tilde{\phi}^*(f_2)\right\rangle \tag{B.9}$$

$$= S_{\delta\nu}(f_1)\delta(f_1 - f_2) \tag{B.10}$$

On obtient donc la relation :

$$\left\langle \tilde{\phi}(f_1)\tilde{\phi}^*(f_2)\right\rangle = \frac{S_{\delta\nu}(f_1)}{f_1 f_2}\delta(f_1 - f_2) \tag{B.11}$$

Il est tentant d'écrire :

$$\frac{S_{\delta\nu}(f_1)}{f_1 f_2}\delta(f_1 - f_2) = \frac{S_{\delta\nu}(f_1)}{f_1^2}\delta(f_1 - f_2) \tag{B.12}$$

On semble alors retrouver la densité spectrale de puissance de ϕ précédemment définie. En fait pas tout à fait car il y a le problème du pôle en zéro. Si l'on souhaite faire la transformation de Fourier inverse pour retrouver la fonction d'autocorrélation en $2\pi\Delta\nu\min(t_1, t_2)$, il est nécessaire de garder la distinction entre f_1 et f_2 avant d'appliquer cette distribution à la fonction test.

[1] Si la relation existe pour toutes les fonctions de S, alors la pseudo-fonction est tempérée

En effet, si l'on confond f_1 et f_2, le calcul de la transformée de Fourier au sens des pseudo-fonctions donnent bien évidemment le résultat stationnaire :

$$R_\phi(t_1, t_2) = -\pi|t_1 - t_2|\Delta\nu \tag{B.13}$$

à mettre en regard avec la formule :

$$\min(t_1, t_2) = \frac{1}{2}\left[t_1 + t_2 - |t_1 - t_2|\right] \tag{B.14}$$

On remarque qu'il manque donc les deux premiers termes, de transformée de Fourier [2] :

$$\pi\Delta\nu\left(\frac{\partial\delta}{\partial\omega_1}(0,0) + \frac{\partial\delta}{\partial\omega_2}(0,0)\right) \tag{B.16}$$

Le calcul rigoureux nécessite de passer par la définition de la transformée de Fourier des distributions [156], les termes supplémentaires apparaissent alors suite au développement limité de la fonction test.

B.4 Application de la pseudo densité spectrale

Au final, on peut donc définir une densité spectrale de puissance sur l'ensemble $\mathbb{R}^*$, mais elle ne permet pas de calculer la fonction d'autocorrélation.

Cependant, en pratique le calcul de la "fausse" fonction d'autocorrélation stationnaire peut être utile pour le calcul de la variance de la gigue de phase, nécessaire dans le calcul de la densité spectrale de puissance du champ laser, car on a formellement :

$$\left\langle(\phi(t+\tau) - \phi(t))^2\right\rangle = 2[R_\phi(0) - R_\phi(\tau)] \tag{B.17}$$

où R_ϕ est donc ici la "fausse" autocorrélation. Cette formule est obtenue en considérant la fonction $\phi(t+\tau) - \phi(t)$ comme issue d'un filtrage de $\phi(t)$ de réponse percussionelle $h(t) = \delta(\tau) - \delta(0)$ donnant une fonction de transfert de module : $|\tilde{h}|(f) = 2\cos(\pi f)$, par conséquent :

$$\begin{aligned}\left\langle(\phi(t+\tau) - \phi(t))^2\right\rangle &= \int_{\mathbb{R}} S_{\phi(t+\tau)-\phi(t)}(f)df \\ &= 2\int_{\mathbb{R}} S_\phi(f)(1 - cos(2\pi f))df \\ &= 2[R_\phi(0) - R_\phi(\tau)]\end{aligned} \tag{B.18}$$

En pratique la formule fonctionne si le spectre de la fréquence n'a pas un comportement trop singulier, pour un bruit de fréquence en $1/f$ la formule ne fonctionne pas (car dans ce cas la variance de la gigue de phase diverge réellement).

[2] $\frac{\partial\delta}{\partial\omega_i}(\eta_0, \mu_0)$ désigne la dérivée partielle de la distribution de Dirac sur $\mathbb{R}^2$:

$$\left\langle\frac{\partial\delta}{\partial\omega_i}(\eta_0, \mu_0), \phi\right\rangle = \frac{\partial\phi}{\partial\omega_i}(\eta_0, \mu_0) \tag{B.15}$$

En conclusion, la densité spectrale de puissance de la phase définie à partir de la densité spectrale de puissance du bruit de fréquence correspond presque totalement avec la fonction d'autocorrélation spectrale (bi-spectre), cependant elle ne permet pas de retrouver la fonction d'autocorrélation mais peut servir, par transformation de Fourier au sens des pseudo-fonctions, à calculer la variance de la gigue de phase.

Annexe C

Bruit de phase RF - Bruit de phase optique - Spectre du champ

C.1 Introduction

Ce travail de thèse se trouve à l'interface entre les domaines optique et micro-onde. L'une de ses ambitions était de faire le lien entre les propriétés du bruit de phase optique et les propriétés du bruit de phase électrique, dans le cas d'un battement hétérodyne. Nous avons pu constater que la représentation et la mesure du bruit de phase étaient assez différentes suivant la communauté, optique ou micro-onde, à laquelle on s'adresse. La raison de cela est la profonde différence au niveau statistique entre la phase d'un laser et la phase d'un oscillateur micro-onde. Nous avons déjà évoqué le fait que la phase d'un laser était statistiquement non stationnaire, à cause de l'absence de force de rappel dans l'équation différentielle d'évolution de la phase. Ceci se traduit au niveau du spectre de phase par un comportant en $1/f^2$, c'est à dire un spectre de phase non intégrable donc un écart type de phase divergeant. Nous avons d'ailleurs en annexe critiqué la notion même de densité spectrale pour la phase.

Au niveau radio-électrique, les sources sont généralement plus complexes que les sources optiques, associant généralement deux sources de propriétés différentes, par exemple une source quartz et une source contrôlée en tension, par le biais d'une boucle à verrouillage de phase. Ainsi l'équation différentielle d'évolution de la phase est plus complexe que celle de la phase du laser et inclut des forces de rappel permettant de rendre stationnaire la phase. On constate en effet sur le bruit de phase d'un oscillateur micro-onde un plateau au niveau des basses fréquences. On peut ainsi calculer l'écart type de la phase en intégrant le bruit de phase. L'intégration est en général effectué non pas jusqu'en 0 mais jusqu'à une fréquence très basse, de l'ordre de 10 Hz, fixée par la technique de communication et par la fait que des bruits très lents en $1/f$ peuvent apparaître pour de très basses fréquences.

C.2 Spectre du champ et gigue de phase

On constate donc que d'un coté, le spectre de phase optique typique possède une distribution en $1/f^2$ et que de l'autre le spectre de phase électrique typique possède une distribution du type $1/(f_c^2 + f^2)$ impliquant donc que d'un coté la phase possède un écart type infini alors que de l'autre la phase possède un écart type fini. Si l'on s'intéresse maintenant au spectre non plus de la phase mais du signal, c'est à dire le champ optique et l'onde radio-fréquence, on sait que ce spectre peut être calculé à l'aide de la fonction d'autocorrélation, qui dans le cas d'un signal de bruit d'amplitude négligeable devant le bruit de phase, et de bruit de phase de statistique gaussienne, ne dépend que d'un seul paramètre statistique : la variance de la gigue de phase :

$$\left\langle (\phi(t+\tau) - \phi(t))^2 \right\rangle \tag{C.1}$$

Nous avons déjà mentionné le fait que bien que la phase d'un laser soit non stationnaire, son incrément de phase, encore appelé gigue de phase, c'est à dire la fonction

$$\Delta\phi(t,\tau) = \phi(t+\tau) - \phi(t) \tag{C.2}$$

est elle stationnaire (pour la variable t), du fait que la fréquence d'un laser soit stationnaire. Par conséquent, la variance de la gigue de phase est indépendante de t et ne dépend donc que du paramètre τ.

L'incrément de phase dans le cas électrique est bien évidemment aussi stationnaire. Pourtant les incréments, dans le cas de la phase optique et dans le cas de la phase électrique, témoignent d'un comportement radicalement différent. En effet, le calcul de la variance de la gigue de phase optique révèle un comportement en τ, c'est à dire une variance croissant linéairement avec le délai et donc tendant vers l'infini pour un délai infini. Le même calcul, effectué avec un spectre de phase électrique de type $1/(f_c^2 + f^2)$, donne une variance de gigue de phase tendant vers une valeur finie pour un délai infini, du au fait que la densité spectrale est intégrable. Ces deux comportements sont encore une fois intimement liés au fait que la phase optique possède un spectre divergent en zéro alors que la phase électrique possède un spectre fini.

C.3 Représentation et mesure du bruit de phase

Toutes ces considérations statistiques permettent de mieux comprendre pourquoi le bruit de phase électrique est généralement caractérisé par le biais d'une fonction notée $\mathscr{L}(f)$ dont la définition est basée non pas sur la densité spectrale de puissance du bruit de phase, mais sur la densité spectrale de puissance de bruit de l'onde électrique.

La fonction d'autocorrélation de l'onde $u(t) = u_0 \cos(2\pi f_0 t + \phi(t))$ est donnée par :

$$R_{uu}(\tau) = \frac{u_0^2}{2} \langle \cos(\phi(t+\tau) - \phi(t)) \rangle \cos(2\pi f_0 \tau) \tag{C.3}$$

On considère maintenant que l'on peut développer le premier cosinus à l'ordre deux, c'est à dire que :

$$\langle \phi(t+\tau) - \phi(t) \rangle << 1 \text{ rad} \tag{C.4}$$

La gigue de phase étant une fonction aléatoire, elle peut théoriquement prendre toutes les valeurs, avec certes des probabilités plus ou moins grandes. On considère donc que si la condition sur la phase est valable en écart type, alors le développement limité sera valable en moyenne.

Par conséquent :

$$\langle \cos(\phi(t+\tau) - \phi(t)) \rangle \approx 1 - \frac{\langle \phi(t)^2 \rangle + \langle \phi(t+\tau)^2 \rangle}{2} + R_{\phi\phi}(\tau) \tag{C.5}$$

Les deux variances sont, par stationnarité de la phase, identique, par conséquent, en notant l'écart type de la phase σ_ϕ, on peut écrire l'expression approchée de la fonction d'autocorrélation :

$$R_{uu}(\tau) = \frac{u_0^2}{2}((1-\sigma_\phi^2) + R_{\phi\phi}(\tau)) \cos(2\pi f_0 \tau) \tag{C.6}$$

On obtient par conséquent par transformation de Fourier l'expression approchée de la densité spectrale de puissance de l'onde :

$$S_u(\tau) = \frac{u_0^2}{2}(1-\sigma_\phi^2)\delta(f-f_0) + \frac{u_0^2}{2} S_\phi(f-f_0) \tag{C.7}$$

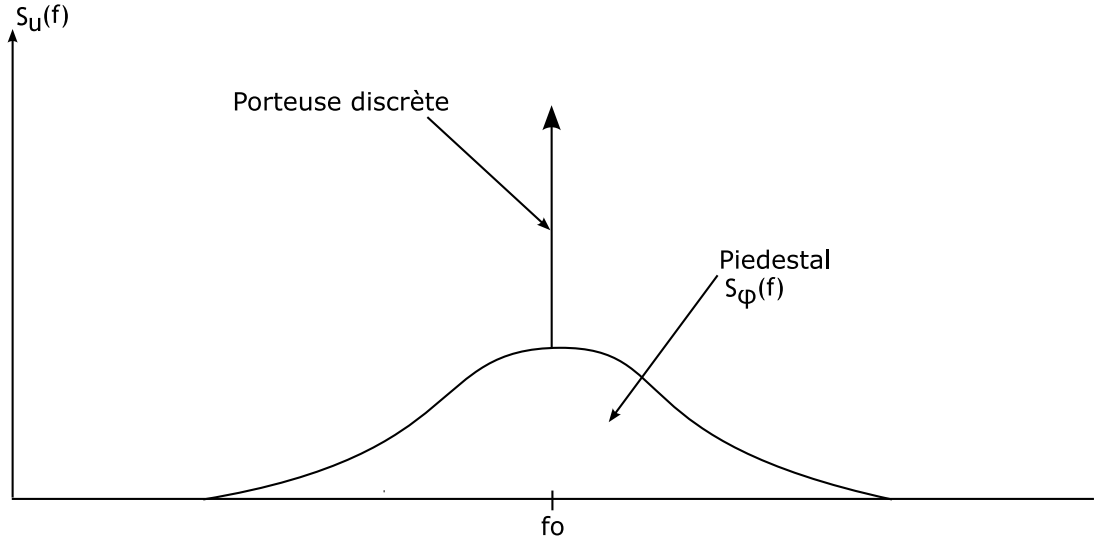

FIG. C.1 – Spectre schématique d'une porteuse micro-onde

On constate donc que la densité spectrale de l'onde est formée d'une composante discrète à la fréquence moyenne dont l'amplitude est atténuée par le bruit de phase, et d'une composante continue, généralement appelée piédestal.

La formule approchée n'est valable que pour les fréquences telles que le bruit de phase intégré entre celle-ci et l'infini soit petit devant 1 rad. Pour les fréquences très proches de la porteuse, on peut constater

que la porteuse n'est pas discrète mais généralement de forme lorentzienne avec une très faible demi-largeur.

Si l'on applique ce critère au bruit de phase optique, on obtient une expression approché dont le domaine de validité correspond aux fréquences grandes devant la largeur à mi-hauteur de la raie lorentzienne, or pour les hautes fréquences, la fonction de Lorentz est bien équivalente à une fonction en $1/f^2$
.

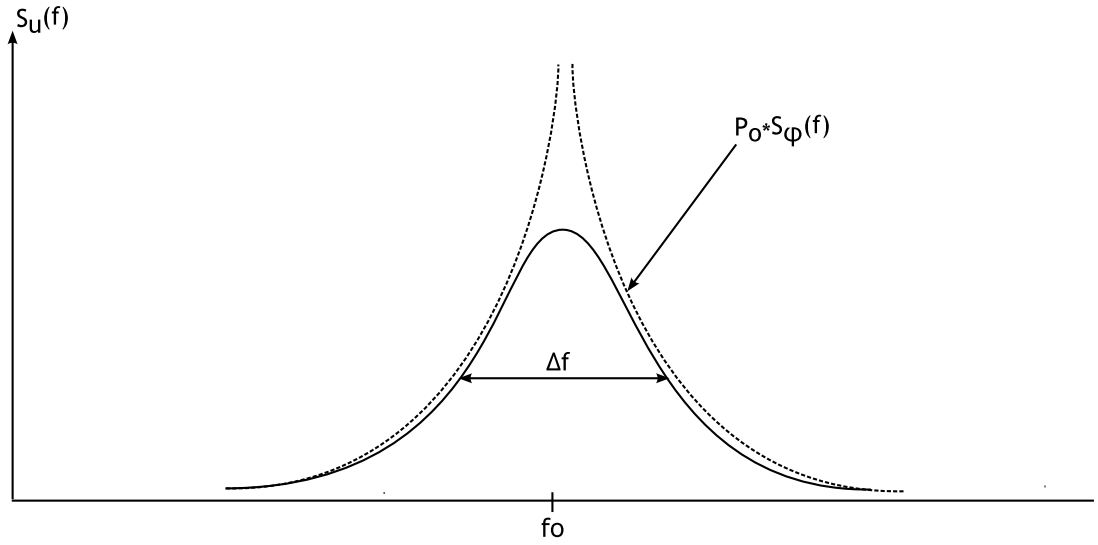

FIG. C.2 – Spectre d'une porteuse optique, comparaison au bruit de phase

La différence entre les propriétés spectrales optiques et les propriétés spectrales électriques est que pour les ondes radio-électriques, le spectre de l'onde reflète l'allure du bruit de phase sur un domaine de fréquence bien plus vaste que pour l'onde optique, grâce à la meilleure stationnarité de la phase radio.

C'est à cause de cette relation entre spectre de phase et spectre de champ que l'on utilise dans le domaine radio/micro-ondes, la quantité $\mathscr{L}(f)$ pour caractériser le bruit de phase des oscillateurs.

La définition conventionnelle de $\mathscr{L}(f)$ [157] est le rapport entre la puissance de bruit dans une bande latérale pour une bande passante de 1 Hz et la puissance totale du signal. D'après les calculs conduisant à l'expression approchée de la densité spectrale de l'onde en fonction de la densité spectrale de la phase, on en déduit que $\mathscr{L}(f)$ est relié à $S_\phi^{ul}(f)$, la densité spectrale de puissance de phase unilatérale par la relation :

$$\mathscr{L}(f) \cong \frac{S_\phi^{ul}(f)}{2} \tag{C.8}$$

pour les fréquences f telles que :

$$\int_f^\infty S_\phi^{ul}(f')df' << 1 \text{ rad} \tag{C.9}$$

$\mathscr{L}(f)$ est donc proportionnel au spectre de puissance de l'onde normalisée pour une résolution de 1 Hz.

Le standard adopté en 1988 part l'IEEE [158] adopte la redéfinition suivante :

$$\mathscr{L}(f) = \frac{S_\phi^{ul}(f)}{2} \tag{C.10}$$

ce qui revient à éliminer le concept spécifique à $\mathscr{L}(f)$

Un amendement au standard militaire MIL-0-55310B propose lui la définition :

$$\mathscr{L}(f) = 10 \log \left[\frac{1}{2\delta f} \int_{f-\frac{\delta f}{2}}^{f+\frac{\delta f}{2}} S_\phi^{ul}(f') df' \right] \tag{C.11}$$

avec $\delta f << f$, ce qui n'est qu'une formalisation de la définition de Kartaschoff.

Le lecteur pourra aussi se référer au chapitre 12 de [159] ainsi qu'au rapport du National Institute of Standards and Technology [160]

Bibliographie

[1] S. T. CUNDIFF, J. YE et J. L. HALL, « Optical frequency synthesis based on mode-locked lasers », *Review of Scientific Instruments*, vol. 72, no. 10, p. 3749–3771, 2001.

[2] J. ZUBRZYCKI, « Mobile Broadband System, a report on the work of RACE Project 2067 », rap. tech., The Britrish Broadcasting Corporation, 1996.

[3] « http ://www.dit.upm.es/infowin/atmeurope/ch4/median.html ».

[4] « http ://www.cordis.lu/infowin/acts/rus/projects/ac348.htm ».

[5] A. J. SEEDS, « Broadband wireless access using millimetre-wave over fibre systems », *in IEEE MTT-S Digest*, p. 23–25, 1997.

[6] M. OKITA, H. HARADA et M. FUJISE, « A new access protocol in radio-on-fiber based millimeter-wave road-vehicle communications systems », *in Vehicular technology conference 2001*, vol. 4, p. 2178–2182, 2001.

[7] H. HARADA, K. SATO et M. FUJISE, « A radio-on-fiber millimeter-wave road-vehicle communication system forfuture intelligent transport system - Effect of cell size - », *in Vehicular technology conference 2001*, vol. 4, p. 2630–2634, 2001.

[8] H. HARADA, K. SATO et M. FUJISE, « A radio-on-fiber based millimter-wave road-vehicle communication system by a code division multiplexing radio transmission scheme », *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 2, no. 4, p. 165–179, 2001.

[9] M. SAUER, K. KOJUCHAROW, H. KALUZNI, D. SOMMER, W. NOWAK et A. FINGER, « Radio-optical system design and transmission experiments for a mobile broadband communications system at 60 GHz », *Wireless Personal Communications*, vol. 14, p. 147–163, 2000.

[10] Y.-K. SEO, J.-H. SEO et W.-Y. CHOI, « 60-GHz radio-on-fiber distribution of 2×622 Mb/s WDM channels using remote photonic-frequency upconversion », *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 39, no. 3, p. 201–203, 2003.

[11] « http ://www.telecom.gouv.fr/rnrt/rnrt/projets/poptimm.htm ».

[12] M. ALOUINI, B. BENAZET, M. VALLET, M. BRUNEL, P. DI BIN, F. BRETENAKER, A. LE FLOCH et P. THONY, « Offset phase locking of Er,Yb :glass laser eigenstates for RF photonics applications », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 13, no. 4, p. 367–369, 2001.

[13] O. LAFOND, M. HIMDI et J. DANIEL, « Aperture coupled microstrip patch antenna with thick ground plane in millimeter waves », *Electronics Letters*, vol. 35, no. 17, p. 1394–1396, 1999.

[14] K. NOGUCHI, H. MIYAZAWA et O. MITOMI, « Frequency-dependent propagation characteristics of coplanar waveguide electrode on 100 GHz Ti :LiNbO3 optical modulator », *Electronics Letters*, vol. 34, no. 7, p. 661–663, 1998.

[15] H. SCHMUCK, « Comparison of optical millimetre-wave system concepts with regard to chromatic dispersion », *Electronics Letters*, vol. 31, no. 21, p. 1848–1849, 1995.

[16] I. FRIGYES, Z. VARALLYAY, O. SCHWELB, L. JAKAB et P. RICHTER, « Investigations in the joint effect of fiber dispersion and nonlinear refraction in microwave optical links », *in International Topical Meeting on Microwave Photonics*, p. 299–302, 2003.

[17] G. SMITH et D. NOVAK, « Broadband millimeter-wave fiber-radio network incorporating remote up/downconversion », *in IEEE MTT-S Digest*, vol. 3, p. 1509–1512, 1998.

[18] J. J. O'REILLY, P. M. LANE, R. HEIDEMANN et R. HOFSTETTER, « Optical generation of very narrow linewidth mm-wave signals », *Electronics Letters*, vol. 28, p. 2309–2311, 1992.

[19] R. HOFSTETTER, H. SCHMUCK et R. HEIDEMANN, « Dispersion effects in optical millimeter-wave systems using self-heterodyne method for transport and generation », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, no. 9, p. 2263–2269, 1995.

[20] K. LAU et A. YARIV, « Ultra high speed semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 2, p. 121–138, 1985.

[21] J. E. BOWERS, « Millimeter wave response of InGaAsP », *Electronics Letters*, vol. 5, p. 1195–1197, 1985.

[22] S. LEVY, R. NAGARAJAN, A. MAR, H. P. et J. E. BOWERS, « Fibre-optic PSK subcarrier transmission at 35 GHz using a resonantly enhanced semiconductor laser », *Electronics Letters*, vol. 28, no. 22, p. 2103–2104, 1992.

[23] J. B. GEORGES, M.-H. KIANG, K. HEPPELL, M. SAYED et K. Y. LAU, « Optical transmission of narrow-band millimeter-wave signals by resonant modulation of monolithic semiconductor lasers », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 6, no. 4, p. 568–570, 1994.

[24] R. MENDIS, C. SYDLO, J. SIGMUND, M. FEIGINOV, P. MEISSNER et H. L. HARTNAGEL, « Tunable CW-THz system with a log-periodic photoconductive emitter », *Solid State Electronics*, vol. 48, no. 11-12, p. 2041–2045, 2004.

[25] C. LATRASSE, M. BRETON, M. TÊTU, N. CYR, R. ROBERGE et B. VILLENEUVE, « C2HD and 13C2H2 absorption lines near 1530 nm for semiconductor-laser frequency locking », *Optics Letters*, vol. 19, no. 22, p. 1885–1887, 1994.

[26] N. BRUNEL, N. DIEP LAI, M. VALLET, A. LE FLOCH, F. BRETENAKER, L. MORVAN et M. T., « Generation of tunable high-purity microwave and terahertz signals by two-frequency solid-state lasers », *in Proceedings of SPIE*, vol. 5466, p. 131–139, 2004.

[27] R. A. SOREF, « Voltage-controlled optical/RF phase shifter », *Journal of Lightwave Technology*, vol. 3, no. 10, p. 992–998, 1985.

[28] K. KITAYAMA, « Highly spectrum efficient OFDM/PDM wireless networks by using optical SSB modulation », *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, no. 6, p. 969–979, 1998.

[29] M. AL-MUMIN, X. WANG, W. MAO, S. PAPPERT et G. LI, « Optical generation and sideband injection locking of tunable 11-120 GHz microwave/millimetre signals », *Electronics Letters*, vol. 36, no. 18, p. 1547–1548, 2000.

[30] D. WAKE, C. R. LIMA et P. A. DAVIES, « Optical generation of millimeter-wave signals for fiber-radio systems using a dual-mode DFB semiconductor laser », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 43, no. 9, p. 2270–2277, 1996.

[31] X. WANG, W. MAO, M. AL-MUMIN, S. A. PAPPERT, J. HONG et G. LI, « Optical generation of microwave/millimeter-wave signals using two-section gain-coupled DFB lasers », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 11, no. 10, p. 1292–1294, 1999.

[32] L. GOLDBERG, H. F. TAYLOR et J. F. WELLER, « FM sideband injection locking of diode laser », *Electronics Letters*, vol. 18, no. 23, p. 1019–1020, 1982.

[33] C. LAPERLE, M. SVILANS, M. POIRIER et M. TÊTU, « Frequency Multiplication of microwave signals by sideband optical injection locking using a monolithic dual-wavelength DFB laser device », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 7, p. 1219–1224, 1999.

[34] L. GOLDBERG, H. F. TAYLOR, J. F. WELLER et D. M. BLOOM, « Microwave generation with injection-locked laser diodes », *Electronics Letters*, vol. 19, p. 491–493, 1983.

[35] U. GLIESE, T. N. NIELSEN, M. BRUUN, E. L. CHRISTENSEN, K. E. STUBKJAER, S. LINDGREN et B. BROBERG, « A wide-band heterodyne optical phase-locked loop for generation of 3-18 GHz microwave carriers », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 4, no. 8, p. 936–938, 1992.

[36] J. HARRISON et A. MOORADIAN, « Linewidth and offset frequency locking of external cavity GaAlAs lasers », *Electronics Letters*, vol. 25, p. 1152–1155, 1989.

[37] K. WILLIAMS, L. GOLDBERG et R. D. ESMAN, « 6-34 GHz offset phase locking of Nd :YAG nonplanar ring lasers », *Electronics Letters*, vol. 25, p. 1242–1243, 1989.

[38] R. RAMOS et A. SEEDS, « Delay, linewidth and bandwidth limitations in optical phase-locked loop design », *Electronics Letters*, vol. 26, no. 6, p. 389 – 391, 1990.

[39] R. A. GRIFFIN et K. KITAYAMA, « Optical mm-wave generation with high spectral purity using feed-forward optical field modulation », *Electronics Letters*, vol. 34, p. 795–796, 1998.

[40] R. RAMOS, P. GALLION, D. ERASME, A. SEEDS et A. BORDONALLI, « Optical injection locking and phase-lock loop combined system », *Optics Letters*, vol. 19, no. 1, p. 4–6, 1994.

[41] L. A. JOHANSSON et A. J. SEEDS, « Millimeter-wave modulated optical signal generation with high spectral purity and wide-locking bandwidth using a fiber-integrated optical injection phase-lock loop », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 12, no. 6, p. 690–692, 2000.

[42] F. M. GARDNER, *Phaselock Techniques*. John Wiley and Sons, New York, 1979.

[43] R. BRAUN, G. GROSSKOPF, H. HEIDRICH, C. von HELMOT, R. KAISER, K. KRÜGER, U. KRÜGER, D. ROHDE, F. SCHMIDT, R. STENZEL et D. TROMMER, « Optical microwave generation and transmission experiments in the 12- and 60-GHz region for wireless communications », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 46, no. 4, p. 320–330, 1998.

[44] R. BRAUN, G. KOPF et D. RHODE, « Optical millimeter-wave generation and transmission technologies for mobile communications, an overview », *in Microwave Systems Conference*, p. 239–242, 1995.

[45] R. BRAUN, G. KOPF, C. H. von HELMOLT, K. KRÜGER, U. KRÜGER, D. ROHDE et F. SCHMIDT, « Optical microwave generation and transmision experiments in the 12 and 60 GHz-region for wireless communications », *in IEEE MTT-S Digest*, p. 499–501, 1996.

[46] R. P. BRAUN, G. GROSSKOPF, D. ROHDE et F. SCHMIDT, « Optical millimetre-wave generation and transmission experiments for mobile 60 GHz band communications », *Electronics Letters*, vol. 32, no. 7, p. 626–628, 1996.

[47] R. P. BRAUN, G. GROSSKOPF, R. MESCHENMOSER, D. ROHDE, F. SCHMIDT et G. VILLINO, « Microwave generation for bidirectional broadband mobile communications using optical sideband injection locking », *Electronics Letters*, vol. 33, no. 16, p. 1395–1396, 1997.

[48] R. HUI, « Optical PSK modulation using injection-locked DFB semiconductor lasers », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 2, no. 10, p. 743–747, 1990.

[49] R. P. BRAUN, G. GROSSKOPF, R. MESCHENMOSER, D. ROHDE, F. SCHMIDT et G. VILLINO, « Optical harmonic upconversion for microwave generation in bidirectionnal broadband mobile communication system », *Electronics Letters*, vol. 33, no. 22, p. 1884–1885, 1997.

[50] R. P. BRAUN, G. GROSSKOPF, D. ROHDE et F. SCHMIDT, « Fiber optic millimeter-wave generation and bandwidth efficient data transmission for broadband mobile communications in the 60 GHz-band », *in ECOC 97 Conference publication*, vol. 448, p. 33–36, 1997.

[51] A. UMBACH, A. UNTERBÖRSCH, R. BRAUN et G. GROSS KOPF, « Stable optical source and high-speed photodetector used for remote fiber-optic 64-GHz mm wave generation », *in OFC 98 technical digest*, p. 260–261, 1998.

[52] R. P. BRAUN et G. GROSSKOPF, « Optical feeding of base stations in millimeter-wave mobile communications », *in ECOC 98*, p. 665–666, 1998.

[53] R. BRAUN, G. GROSS KOPF, D. ROHDE, F. SCHMIDT et G. WALF, « Fiber-optic millimeter-wave generation at 64 GHz and spectral efficient data transmission for mobile communications », *in OFC 98 technical digest*, p. 17–18, 1998.

[54] G. MORTHIER et P. VANKWIKELBERGE, *Handbook of distributed feedback laser diodes*. Artech House, Inc., 1997.

[55] H. KOGELNIK et C. SHANK, « Coupled-wave theory of distributed feedback lasers », *Journal of Applied Physics*, vol. 43, p. 2327–2335, 1972.

[56] W. STREIFER, R. D. BURNHAM et D. R. SCIFRES, « Effect of external reflectors on longitudinal modes of distributed feedback lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 11, no. 4, p. 154–161, 1975.

[57] C. H. HENRY, « Performance of distributed feedback lasers designed to favor the energy gap model », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 12, p. 1913–1918, 1985.

[58] R. F. KAZARINOV et C. H. HENRY, « Second order distributed feedback lasers with mode selection provided by first order radiation losses », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 4, p. 144–150, 1985.

[59] K. UTAKA, S. AKABI, K. SAKAI et Y. MATSUSHIMA, « Effect of mirror facets on lasing characteristics of distributed feedback InGaAsP/InP laser diodes at 1.5 μm range », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 20, no. 3, p. 236–245, 1984.

[60] V. VOIROT, B. THEDREZ, J. GENTNER, J.-M. RAINSANT, V. COLSON, C. DUCHEMIN, F. GABORIT, S. HUBERT, J. LAFRAGETTE, A. PINQUIER, L. ROUX et B. FERNIER, « 1.55 μm high efficiency tapered DFB laser using UV 250 2-in technology process », *in 11th international conference on Indium Phosphide and related materials*, p. 33–36, 1999.

[61] F. G. GRILLOT, *Lasers monomodes à faible sensibilité à la rétroaction optique pour les transmissions à 2,5 GBit/s sans isolateur*. Thèse doctorat, Université de Franche-Comté, 2003.

[62] G. P. AGRAWAL et N. K. DUTTA, *Semiconductors lasers*. Van Nostrand Reinhold, 1993.

[63] C. PALAVICINI, G. CAMPUZANO, B. THEDREZ, Y. JAOUEN et P. GALLION, « Analysis of optical-injected distributed feedback lasers using complex optical low-coherence reflectometry », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 15, no. 12, p. 1683–1685, 2003.

[64] P. B. GALLION et G. DEBARGE, « Quantum phase noise and field correlation in single frequency semiconductor laser systems », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 20, no. 4, p. 343 –349, 1984.

[65] L. B. MERCER, « 1/f frequency noise effects on self-heterodyne linewidth measurements », *Journal of Lightwave Technology*, vol. 9, no. 4, p. 485–493, 1991.

[66] F. KÉFÉLIAN, « Aspect théorique du transfert de bruit de phase vers le spectre du photocourant auto-hétérodyne », Mém. D.E.A., École supérieure d'optique, 2002.

[67] G. STÉPHAN, T. T. TAM, S. BLIN, P. BESNARD et M. TÊTU, « Laser line shape and spectral density of frequency noise », *Physical Review A*, vol. 71, no. 1, p. 1–9, 2005.

[68] D. BANEY et P. B. GALLION, « Power spectrum measurement of a modulated semiconductor laser using an interferometric self-homodyne technique : influence of quantum phase noise and field correlation », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 25, no. 10, p. 2106–2112, 1989.

[69] M. J. O'MAHONY et I. D. HENNING, « Semiconductor laser linewidth broadening due to 1/f carrier noise », *Electronics Letters*, vol. 19, no. 23, p. 1000–1001, 1983.

[70] K. KIKUCHI, « Origin of residual semiconductor-laser linewidth in high-power limit », *Electronics Letters*, vol. 24, no. 16, p. 1001–1002, 1988.

[71] F. KANO, M. FUKUDA et J. YOSHIDA, « Correlation of noise characteristics and line shape with linewidth rebroadening of MQW DFB lasers », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 4, no. 1, p. 13–15, 1992.

[72] C. H. HENRY, « Theory of the linewidth of semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 18, no. 2, p. 259–264, 1985.

[73] K. PETERMANN, *Laser diode modulation and noise*. Kluwer Academic Publishers, 1988.

[74] H. HAUG et H. HAKEN, « Theory of noise in semiconductor laser emission », *Zeitschrift fur Physika*, vol. 204, p. 262–275, 1967.

[75] H. HAUG, « Quantum mechanical rate equations for semiconductor lasers », *Physical Review*, vol. 184, p. 338–348, 1969.

[76] M. LAX et W. LOUISELL, « Quantum noise XII : Density operator treatment of field and population fluctuations », *Physical Review*, vol. 185, p. 568–591, 1969.

[77] A. SCHAWLOW et C. TOWNES, « Infrared and optical masers », *Physical Review*, vol. 112, p. 1940–1949, 1958.

[78] M. W. FLEMING et A. MOORADIAN, « Fundamental line broadening of single-mode (GaAl)As diode lasers », *Applied Physical Letters*, vol. 38, p. 511, 1981.

[79] M. OSINSKI et J. BUUS, « Linewidth broadening factor in semiconductor lasers - An overview », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 23, no. 1, p. 9–29, 1987.

[80] K. KIKUSHI et T. OKOSHI, « Estimation of linewidth enhancement factor of AlGaAs lasers by correlation measurement between FM and AM noises », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 6, p. 669–673, 1985.

[81] K. VAHALA et A. YARIV, « Semiclassical theory of noise in semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 19, no. 6, p. 1096–1109, 1983.

[82] B. DAINO, P. SPANO, M. TAMBURRINI et M. PIAZZOLLA, « Phase noise and spectral line shape in semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 19, no. 3, p. 266 –270, 1983.

[83] A. DANDRIDGE et H. F. TAYLOR, « Correlation of low-frequency intensity and frequency fluctuations in GaAlAs lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 18, no. 10, p. 1738–1750, 1983.

[84] Y. YAMAMOTO, « AM and FM quantum noise in semiconductor lasers - part I : theoretical analysis », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 19, no. 1, p. 34–46, 1982.

[85] A. PAPOULIS, *Probability Random Variables, and Stochastic Processes*. New York :McGraw-Hill, 1984.

[86] C. H. HENRY, « Theory of the phase noise and power spectrum of a single mode injection laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 19, no. 9, p. 1391 –1397, 1986.

[87] B. SALEH, *Photoelectron statistics*. New York :McGraw-Hill, 1978.

[88] C. H. HENRY, « Theory of spontaneous emission noise in open resonators and its application to lasers and optical amplifiers », *Journal of Lightwave Technology*, vol. 4, no. 3, p. 288–297, 1986.

[89] B. TROMBORG, H. OLESEN, X. PAN et S. SAITO, « Transmission line description of optical feedback and injection locking for Fabry-Perot and DFB lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 23, no. 11, p. 1875 – 1889, 1987.

[90] X. PAN, H. OLESEN et B. TROMBORG, « Modulation characteristics of tunable DFB/DBR lasers with one or two passive tuning sections », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 25, no. 6, p. 1254–1260, 1989.

[91] B. TROMBORG et J. MØ RK, « Nonlinear injection locking dynamics and the onset of coherence collapse in external cavity lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 26, no. 4, p. 642–654, 1990.

[92] T. MAKINO, « Transfer-matrix analysis of the intensity and phase noise of multisection DFB semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, no. 11, p. 2404–2414, 1991.

[93] G.-H. DUAN, P. GALLION et G. DEBARGE, « Analysis of the phase-amplitude coupling factor and spectral linewidth of distributed feedback and composite-cavity semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 26, no. 1, p. 32–44, 1990.

[94] G.-H. DUAN, P. GALLION et G. P. AGRAWAL, « Dynamic and noise properties of tunable multielectrode semiconductor lasers including spatial hole burning and nonlinear gain », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, no. 3, p. 844–854, 1993.

[95] B. TROMBORG, H. OLESEN et X. PAN, « Theory of linewidth for multielectrode laser diodes with spatially distributed noise sources », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, no. 2, p. 178–192, 1991.

[96] H. OLESEN, B. TROMBORG, X. PAN et H. E. LASSEN, « Stability and dynamic properties of multi-electrode laser diodes using Green's function approach », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, no. 8, p. 2282–2301, 1993.

[97] F. GRILLOT, B. THEDREZ et G.-H. DUAN, « Feedback sensitivity and coherence collapse threshold of semiconductor dfb lasers with complex structures », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 40, no. 3, p. 231 – 240, 2004.

[98] E. DETOMA, B. TROMBORG et I. MONTROSSET, « The complex way to laser diode spectra : example of an external cavity laser strong optical feedback », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 41, no. 2, p. 171–182, 2005.

[99] R. ADLER, « A study of locking phenomena in oscillators », *in Proceedings IRE*, vol. 34, p. 351–356, 1946.

[100] M. E. HINES, J.-C. R. COLLINET et J. G. ONDRIA, « FM noise suppression of an injection phase-locked oscillator », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 16, no. 9, p. 738 –742, 1968.

[101] K. KUROKAWA, « Noise in synchronized oscillators », *IEEE Transactions on microwave theory and techniques*, vol. 16, no. 4, p. 234–240, 1968.

[102] H. L. STOVER et W. STEIER, « Locking of laser oscillators by light injection », *Applied Physical Letters*, vol. 8, p. 91–93, 1966.

[103] S. KOBAYASHI et T. KIMURA, « Injection locking in AlGaAs semiconductor laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 17, no. 5, p. 681–689, 1981.

[104] K. OTSUKA et S. TARUCHA, « Theoretical studies on injection locking and injection-induced modulation of laser diodes », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 17, no. 8, p. 1515–1521, 1981.

[105] R. LANG, « Injection locking properties of a semiconductor laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 18, no. 6, p. 976 –983, 1982.

[106] C. H. HENRY, N. A. OLSSON et N. K. DUTTA, « Locking range and stability of injection locked 1.54 μm InGaAsP », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 8, p. 1152–1156, 1985.

[107] F. MOGENSEN, H. OLESEN et G. JACOBSEN, « Locking conditions and stability properties for a semiconductor laser with external light injection », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 21, no. 7, p. 784–793, 1985.

[108] N. SCHUNK et K. PETERMANN, « Noise analysis of injection-locked semiconductor injection lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 22, no. 5, p. 642–650, 1986.

[109] P. SPANO, S. PIAZZOLLA et M. TAMBURRINI, « Frequency and intensity noise in injection-locked semiconductor lasers : theory and experiments », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 22, no. 3, p. 427–435, 1986.

[110] R. LANG et K. KOBAYASHI, « External optical feedback effects on semiconductor injection laser properties », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 16, no. 3, p. 347 –355, 1980.

[111] P. SPANO, S. PIAZZOLLA et M. TAMBURRINI, « Theory of noise in semiconductor lasers in the presence of optical feedback », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 20, no. 4, p. 350–357, 1984.

[112] I. PETITBON, P. GALLION, G. DEBARGE et C. CHABRAN, « Locking bandwidth and relaxation oscillations of an injection-locked semiconductor laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 24, no. 4, p. 148 –154, 1988.

[113] O. LIDOYNE, P. B. GALLION et D. ERASME, « Modulation properties of an injection-locked semiconductor laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, no. 3, p. 344 –351, 1991.

[114] J. WANG, M. K. HALDAR, L. LI et F. MENDIS, « Enhancement of modulation bandwidth of laser diodes by injection locking », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 8, no. 1, p. 34–36, 1996.

[115] O. LIDOYNE, P. GALLION, C. CHABRAN et G. DEBARGE, « Locking range, phase noise and power spectrum of an injection-locked semiconductor laser », *IEE Proceedings*, vol. 137, no. J3, p. 147 –154, 1990.

[116] G. R. HADLEY, « Injection locking of diode lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 22, no. 3, p. 419–426, 1986.

[117] F. FAVRE, « Theoretical analysis of external optical feedback on DFB semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 23, no. 1, p. 81–88, 1987.

[118] R. HUI, A. D'OTTAVI, A. MECOZZI et P. SPANO, « Injection locking in distributed feedback semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, no. 6, p. 1688–1695, 1991.

[119] J.-P. BOUYER et C. BRÉANT, « Stability of an injection-locked DFB 1.5 μm semiconductor laser », *Journal de physique III*, vol. 9, p. 1623–1644, 1992.

[120] J. TROGER, P.-A. NICATI, L. THÉVENAZ et P. A. ROBERT, « Novel measurement scheme for injection-locking experiments », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 25, no. 6, p. 1254–1260, 1989.

[121] C. VASSALLO, *Electromagnetisme classique dans la matière*. Dunod, 1980.

[122] C. HENRY et R. F. KAZARINOV, « Quantum noise in photonics », *Review of Modern Physics*, vol. 68, no. 3, p. 802 – 851, 1996.

[123] L. D. LANDAU et E. M. LIFSHITZ, *Physique statistique*. Moscou :Mir, 1967.

[124] C. H. HENRY, « Phase noise in semiconductor lasers », *Journal of Lightwave Technology*, vol. 4, no. 3, p. 298–311, 1986.

[125] M. FUJISE, « Spectral linewidth estimation of a 1.5 μm range InGaAsP/InP distributed feedback laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 22, no. 3, p. 458–462, 1986.

[126] P. M. MORSE et H. FESHBACK, *Methods of theoretical physics*. New York : McGraw Hill, 1953.

[127] X. PAN, H. OLESEN et B. TROMBORG, « Spectral linewidth of DFB lasers including the effects of spatial holeburning and nonuniform current injection », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 2, no. 5, p. 312–315, 1990.

[128] G. P. AGRAWAL, « Gain nonlinearities in semiconductor lasers : theory and application to distributed feedback lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 23, no. 6, p. 860–868, 1987.

[129] K. PETERMANN, « Calculated spontaneous emission factor for double-heterostructure injection lasers with gain-induced waveguiding », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 15, no. 7, p. 566–570, 1979.

[130] G. CAMPUZANO, P. GALLION et G. DEBARGE, « Locking range dependence on the grating characteristics of distributed feedback semiconductor lasers », *in The 14th Annual Meeting of the IEEE LEOS*, p. 800–801, 2001.

[131] M. LAX, « Classical noise IV :Langevin methods », *Review of Modern Physics*, vol. 38, p. 541–566, 1966.

[132] J. GENEST, M. CHAMBERLAND, P. TREMBLAY et M. TÊTU, « Microwave signals generated by optical heterodyne between injection-locked semiconductor lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 33, no. 6, p. 989–998, 1997.

[133] P. SPANO, S. PIAZZOLLA et M. TAMBURRINI, « Phase noise in semiconductor lasers : a theoretical approach », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 19, no. 7, p. 1195 –1199, 1994.

[134] C. J. BUCZEK et R. J. FREIBERG, « Hybrid injection locking of higher power CO2 lasers », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 8, no. 7, p. 641–650, 1972.

[135] M. P. van EXTER, C. BIEVER et J. P. WOERDMAN, « Effect of optical injection on bias voltage and spectrum of a semiconductor laser », *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, no. 11, p. 2771 –2779, 1993.

[136] J. W. GOODMAN, *Introduction to Fourier optics, 2nd edition*. New York : McGraw Hill, 1996.

[137] M. MAY et M. FRANÇON, « Correlation and information processing using speckles », *Journal of the Optical Society of America*, vol. 66, p. 1275, 1975.

[138] A. MARÉCHAL et P. CHAVEL, « La séparabilité de la cohérence temporelle et de la cohérence spatiale dans les expériences d'interférences », *Journal of Optics*, vol. 13, no. 4, p. 193–198, 1982.

[139] A. S. WELING et D. H. AUSTON, « Novel sources and detectors for coherent tunable narrow-band terahertz radiation in free space », *Journal of the Optical Society of America vol. B*, vol. 13, no. 12, p. 2783–2791, 1996.

[140] C. DORRER, « Temporal van cittert-zernike theorem and its application to measurement of chromatic dispersion », *Journal of the Optical Society of America*, vol. 21, no. 8, p. 1417–1423, 2004.

[141] C. RIVIERE, *Mise en opération d'une source picoseconde de rayonnement infrarouge lointain*. Thèse doctorat, Université de Laval, 1999.

[142] C. FROEHLY, A. LACOURT et V. J. CH., « Notions de réponse impulsionnelle et de fonction de transfert temporelles des pupilles optiques, justifications expérimentales et applications », *Nouvelle revue d'optique*, vol. 4, no. 4, p. 183–196, 1973.

[143] Y. LE GRAND, *Optique physiologique*. Masson, 1970.

[144] F. LOURADOUR, F. REYNAUD, B. COLOMBEAU et C. FROEHLY, « Interference fringes between two separate lasers », *American Journal of Physics*, vol. 61, no. 3, p. 242–245, 1993.

[145] J. RENAUDIER, G.-H. DUAN, J.-G. PROVOST, H. DEBREGEAS-SILLARD et P. GALLION, « Phase correlation between longitudinal modes in semiconductor self-pulsating DBR lasers », *IEEE Photonics Technology Letters*, vol. 17, no. 4, p. 741–743, 2005.

[146] M. BORN et E. WOLF, *Principles of optics*. Pergamon press, 1970.

[147] A. BLANC-LAPIERRE et P. DUMONTET, « La notion de cohérence en optique », *Revue d'optique*, vol. 34, no. 1, 1955.

[148] L. MANDEL, « Concept of cross-spectral purity in coherence theory », *Journal of the Optical Society of America*, vol. 51, p. 1342–1350, 1961.

[149] F. MOGENSEN, H. OLESEN et G. JACOBSEN, « FM noise suppression and linewidth reduction in an injection-locked semiconductor laser », *Electronics Letters*, vol. 21, no. 16, p. 696–697, 1985.

[150] R. GABET, *Etude expérimentale et théorique de l'injection optique dans un laser à semiconducteurs : application à la détection de faibles signaux cohérents à 1.55 μm*. Thèse doctorat, Université de Rennes I, 2000.

[151] F. L. WALLS et A. DEMARCHI, « RF spectrum of a signal after frequency multiplication ; measurement and comparison with a simple calculation », *IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement*, vol. 24, no. 3, p. 210–217, 1975.

[152] M.-B. BIBEY, F. DEBORGIES, M. KRAKOWSKI et D. MONGARDIEN, « Very low phase-noise optical links-experiments and theory », *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 47, no. 12, p. 2257–2262, 1999.

[153] X. ZHANG, T.-D. NI et A. S. DARYOUSH, « Laser induced phase noise in optically injection locked oscillator », *in IEEE MTT-S digest*, vol. 2, p. 765–768, 1992.

[154] J. LAVOINE, *Calcul symbolique (distribution et pseudo-fonction)*, vol. II. edition CNRS, 1959.

[155] S. COLOMBO et J. LAVOINE, *Transformations de Laplace et de Mellin*. Gauthier-Villars, 1972.

[156] L. SCHWARTZ, *Théorie des distributions*. Hermann, 1998.

[157] P. KARTASCHOFF, *Frequency and time*. New York : Academic press, 1978.

[158] H. HELLWIG, D. ALLAN, J. VANIER, G. M. R. WINKLER, P. KARTASCHOFF, J. VIG et N. F. YANNONI, « IEEE standard definitions of physical quantities for fundamental frequency and time metrology », rap. tech., Institute of Electrical and Electronics Engineers, 1988.

[159] S. L. STEIN, *Precision frequency control*. New York : Academic press, 1985.

[160] D. B. SULLIVAN, D. W. ALLAN, D. A. HOWE et F. L. WALLS, « Characterization of clocks and oscillators », rap. tech., National Institute of Standards and Technology, 1990.