



**HAL**  
open science

# Traitement de Signal Appliqué aux Etalons Primaires de Fréquence : Amélioration de leur Exactitude et de leur Stabilité

Alaa Makdissi

► **To cite this version:**

Alaa Makdissi. Traitement de Signal Appliqué aux Etalons Primaires de Fréquence : Amélioration de leur Exactitude et de leur Stabilité. Traitement du signal et de l'image [eess.SP]. Université Paris Sud - Paris XI, 1999. Français. NNT: . tel-00011625

**HAL Id: tel-00011625**

**<https://theses.hal.science/tel-00011625>**

Submitted on 16 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ORSAY

N° D'ORDRE : 5844

UNIVERSITE DE PARIS-SUD  
U.F.R SCIENTIFIQUE D'ORSAY

THESE

présentée

Pour obtenir

Le GRADE de DOCTEUR EN SCIENCES  
DE L'UNIVERSITE PARIS XI ORSAY

PAR

Ala'a MAKDISSI

SUJET :

*Traitement de Signal Appliqué aux Etalons  
Primaires de Fréquence : Amélioration de leur  
Exactitude et de leur Stabilité*

Soutenue le 24 septembre 1999 devant la commission d'examen:

|                         |                      |
|-------------------------|----------------------|
| M. Claude AUDOIN        |                      |
| M. Andreas BAUCH        |                      |
| M. Emeric DE CLERCQ     | (invité)             |
| M. Michel GRANVEAUD     | (Directeur de thèse) |
| M. Ali MOHAMMAD-DJAFARI |                      |
| M. Pierre THOMANN       | (rapporteur)         |
| M. François VERNOTTE    | (rapporteur)         |



*A mes parents*



## **Abstract:**

The definition of the second is based, since 1967, on the atomic properties of the caesium atom. An atomic clock is the device that realises this definition. This is achieved with a limited precision because of many perturbations. Every enhancement in the performance of atomic clocks is welcome by the present and future applications that use these clocks.

The aim of this thesis work is to enhance the performances of the primary frequency standard (JPO) of the BNM-LPTF.

The results obtained during this thesis could be resumed by the following performances: A global uncertainty of  $6,3 \cdot 10^{-15}$  and a short term stability of  $3 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$  where  $\tau$  is the integration time in seconds. These enhancements make our JPO frequency standard the best atomic beam frequency standard in the world.

These good results are due to many factors:

- 1) A control of the Micro-wave leakage level inside the Ramsey cavity which was designed and realized during this thesis.
- 2) New signal processing methods (regularization, inverse problems, cepstral analysis, ...) that we have introduced in the evaluation process.
- 3) A new study of the frequency control loop based on a dynamical model that was developed to represent the different noises contribution to the stability. This study was materialized by the implementation (hardware and software) of a digital servo loop of a very high quality.

## **Résumé :**

La définition de la seconde est basée, depuis 1967, sur les propriétés atomiques de l'atome de césium. Une horloge atomique est l'instrument qui permet de réaliser cette définition avec une exactitude limitée par plusieurs sources de perturbations. Toute amélioration dans les performances des horloges atomiques est la bienvenue pour les diverses applications, actuelles et futures, qui utilisent ces horloges. L'objet de ce travail de thèse est d'améliorer les performances de l'étalon primaire de fréquence (JPO) à jet de césium du Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences. Les résultats obtenus se traduisent par les performances suivants : Notre Horloge JPO est maintenant l'horloge, à jet thermique, la plus exacte au monde, avec une exactitude de  $6,3 \times 10^{-15}$ . Elle est également l'horloge à jet thermique la plus stable, avec une stabilité à court terme de  $3 \cdot 10^{-13} \tau^{-1/2}$  où  $\tau$  est le temps d'intégration en seconde.

L'obtention de ces bons résultats est liée à la maîtrise des fuites micro-ondes grâce à la conception et à la réalisation d'une cavité de Ramsey. La bonne exactitude est due aux nouvelles techniques de traitement du signal (problèmes inverses, régularisation, analyse cepstrale, ...) que nous avons introduites pour mieux évaluer les effets perturbateurs. La bonne stabilité profite de l'étude détaillée du système d'asservissement dans une horloge ainsi que de la réalisation matérielle et logicielle d'une boucle d'asservissement numérique de haute qualité.



# REMERCIEMENTS

---

*Cette thèse a été effectuée au Bureau National de Métrologie - Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences. Je remercie Michel Granveaud de m'y avoir accueilli et avoir accepté de diriger cette thèse.*

*J'ai eu le plaisir et la chance de travailler sous l'orientation d'Emeric de Clercq qui m'a fait profiter en toute sympathie de sa grande compétence sur le plan expérimental et théorique. Ses compétences et sa gentillesse en font un collègue de travail très agréable. Je le remercie sincèrement.*

*Je remercie vivement André Clairon pour les nombreux éclairages théoriques et « coups de main » expérimentaux dont il m'a fait bénéficié.*

*Je remercie Claude Audoin, Andréas Bauch et Ali Mohammad-Djafari pour l'intérêt qu'ils ont manifesté à l'égard de cette thèse en acceptant de faire partie du jury et pour leurs commentaires judicieux sur le manuscrit. Je remercie tout particulièrement Pierre Thomann et François Vernotte pour avoir accepté de faire partie du jury en qualité de rapporteurs. Leurs remarques m'ont été précieuses.*

*Jean Paul Berthet a contribué à toutes les mesures et à la réalisation de plusieurs montages - démontages de l'horloge. Je le remercie pour sa disponibilité. Merci également à Nicolas Dichard qui a assuré le dernier assemblage de l'horloge avec beaucoup de soins et une patience à toute épreuve.*

*Pierre Aynié a dessiné toute l'horloge. Il a participé efficacement aux différentes étapes de conception et de réalisation de la cavité. Je le remercie sincèrement pour sa précieuse collaboration.*

*Daniele Rovera m'a souvent posé des questions et des problèmes intéressants. Je le remercie pour son intérêt à mon travail.*

*Les services techniques de l'Observatoire de Paris m'ont fourni une aide précieuse dans une atmosphère très chaleureuse et sympathique. Merci en particulier aux mécaniciens de l'atelier de Paris qui ont aidé au réglage de la cavité.*

*J'exprime ma gratitude à l'ensemble du personnel du LPTF et toutes les personnes qui ont contribué à l'avancement de mes travaux.*



*Je tiens tout particulièrement à remercier pour leur soutien administratif et technique Catherine Laurent, Marie-Ange Ragot, Annie Gérard et Pascal Blondé*

*Merci à mes amis qui m'ont aidé durant la rédaction de ce mémoire. En particulier, Je remercie Emeric de Clercq, Michel Dequin et Véronique*

*Je ne pourrais pas oublier les moments agréables passés avec mes collègues du LPTF. Merci à ceux que j'ai le plaisir de côtoyer : Ouali Aœf, Pierre Urich, Giorgio Santarelli, Christophe Andréucci, Michel Lours, Laurent Volodimer, André Campos, Raymond Tourde, Monique Prodhomme et Monsieur Georges Fréon . Un merci particulier pour les thésitifs : Driss, Selma, Messaoud, Eric, Monica, Pierre, To, Albane, Yvan, Sébastien, Shougang et Michel.*

*Je suis reconnaissant à Maglonne Chambon et au Bureau National de Métrologie pour leur soutien constant.*

*Je ne sais pas comment remercier les gens qui m'ont soutenu pendant une période très critique de ma vie. Au LPTF, je suis reconnaissant à Michel Granveaud et à Emeric de Clercq. Je remercie Farida de tout mon cœur pour sa patience et sa présence. Ce travail n'aurait pas vu le jour sans elle*

# TABLE DES MATIERES

---

|  |    |
|--|----|
| REMERCIEMENTS .....                              | 1  |
| TABLE DES MATIERES .....                         | 3  |
| INTRODUCTION .....                               | 9  |
| CHAPITRE 1. PRINCIPE DE L’HORLOGE .....          | 13 |
| 1.1. Introduction .....                          | 13 |
| 1.2. Principe de l’horloge .....                 | 16 |
| 1.3. Mise en évidence de la transition .....     | 19 |
| 1.3.1. <i>Pompage à un laser</i> .....           | 19 |
| 1.3.2. <i>Pompage à deux lasers</i> .....        | 20 |
| 1.3.3. <i>Détection optique</i> .....            | 21 |
| 1.4. Conclusion.....                             | 22 |
| CHAPITRE 2. MONTAGE EXPERIMENTAL .....           | 25 |
| 2.1. Le Tube.....                                | 25 |
| 2.1.1. <i>Le vide</i> .....                      | 26 |
| 2.1.2. <i>Le Four et le Jet</i> .....            | 27 |
| 2.1.3. <i>Le champ magnétique statique</i> ..... | 27 |

|             |   |           |
|-------------|---|-----------|
| 2.1.4.      | <i>Les zones d'interaction optique</i> .....        | 29        |
| <b>2.2.</b> | <b>Montage Optique</b> .....                        | <b>29</b> |
| <b>2.3.</b> | <b>La cavité de Ramsey</b> .....                    | <b>31</b> |
| 2.3.1.      | <i>Phase de conception</i> .....                    | 31        |
| 2.3.2.      | <i>Phase de réalisation et de réglage</i> .....     | 34        |
| <b>2.4.</b> | <b>Génération du signal hyperfréquence</b> .....    | <b>38</b> |
| <b>2.5.</b> | <b>Informatique de contrôle et de gestion</b> ..... | <b>40</b> |
| <b>2.6.</b> | <b>Conclusion</b> .....                             | <b>42</b> |

## **CHAPITRE 3. ANALYSE DE LA FRANGE DE RAMSEY** ..... **45**

|             |  |           |
|-------------|--|-----------|
| <b>3.1.</b> | <b>La transition d'horloge</b> .....                     | <b>45</b> |
| <b>3.2.</b> | <b>Les autres transitions</b> .....                      | <b>47</b> |
| 3.2.1.      | <i>Les transitions <math>\sigma</math></i> .....         | 47        |
| 3.2.2.      | <i>Les transitions <math>\pi</math></i> .....            | 48        |
| <b>3.3.</b> | <b>Spectre de résonance expérimental</b> .....           | <b>48</b> |
| <b>3.4.</b> | <b>Partie centrale de la frange</b> .....                | <b>51</b> |
| 3.4.1.      | <i>Approximation d'ordre zéro</i> .....                  | 51        |
| 3.4.2.      | <i>Approximation du 1<sup>er</sup> ordre</i> .....       | 53        |
| <b>3.5.</b> | <b>Le piédestal de Rabi</b> .....                        | <b>55</b> |
| <b>3.6.</b> | <b>Estimation de la pulsation de Rabi</b> .....          | <b>57</b> |
| 3.6.1.      | <i>Frangé à <math>b</math> fort</i> .....                | 57        |
| 3.6.2.      | <i>Frangé à valeurs de <math>b</math> usuelles</i> ..... | 59        |
| <b>3.7.</b> | <b>Conclusion</b> .....                                  | <b>68</b> |

## **CHAPITRE 4. MESURE DE LA DISTRIBUTION DE VITESSE** ..... **71**

|             |                                      |           |
|-------------|--------------------------------------|-----------|
| <b>4.1.</b> | <b>Introduction</b> .....            | <b>71</b> |
| <b>4.2.</b> | <b>Etat de l'art</b> .....           | <b>74</b> |
| 4.2.1.      | <i>La méthode de Boulanger</i> ..... | 75        |
| 4.2.2.      | <i>La méthode de Shirley</i> .....   | 76        |

---

|             |   |            |
|-------------|---|------------|
| <b>4.3.</b> | <b>Les nouvelles méthodes .....</b>         | <b>79</b>  |
| 4.3.1.      | <i>Frangé à pulsation b forte .....</i>     | 79         |
| 4.3.2.      | <i>Méthode de Régularisation .....</i>      | 81         |
| 4.3.3.      | <i>Inversion du taux de transition.....</i> | 82         |
| 4.3.4.      | <i>Inversion du transitoire.....</i>        | 89         |
| <b>4.4.</b> | <b>Critère de Comparaison .....</b>         | <b>97</b>  |
| 4.4.1.      | <i>Le critère.....</i>                      | 97         |
| 4.4.2.      | <i>La Comparaison.....</i>                  | 98         |
| <b>4.5.</b> | <b>Maxwell et l'hypergéométrie .....</b>    | <b>100</b> |
| <b>4.6.</b> | <b>Conclusion.....</b>                      | <b>101</b> |

## **CHAPITRE 5. ASSERVISSEMENT - MODELE STATIQUE** ..... **105**

|             |   |            |
|-------------|---|------------|
| <b>5.1.</b> | <b>Principe .....</b>                                   | <b>105</b> |
| <b>5.2.</b> | <b>Génération du signal d'erreur.....</b>               | <b>107</b> |
| 5.2.1.      | <i>Modulation-Démodulation .....</i>                    | 108        |
| <b>5.3.</b> | <b>Le cerveau et les muscles.....</b>                   | <b>113</b> |
| <b>5.4.</b> | <b>Description de la boucle .....</b>                   | <b>116</b> |
| <b>5.5.</b> | <b>Conception du correcteur .....</b>                   | <b>120</b> |
| 5.5.1.      | <i>Transformée en z.....</i>                            | 120        |
| 5.5.2.      | <i>Equations de la boucle.....</i>                      | 121        |
| <b>5.6.</b> | <b>Applications .....</b>                               | <b>127</b> |
| 5.6.1.      | <i>Le plus simple (1Intégrateur - 1Dérivateur).....</i> | 127        |
| 5.6.2.      | <i>La boucle 2Intégrateurs-2Dérivateurs .....</i>       | 139        |
| <b>5.7.</b> | <b>Mise en pratique .....</b>                           | <b>146</b> |
| 5.7.1.      | <i>Algorithme .....</i>                                 | 148        |
| <b>5.8.</b> | <b>Stabilité de fréquence - Ecart-type d'Allan.....</b> | <b>151</b> |
| 5.8.1.      | <i>Stabilité de JPO .....</i>                           | 156        |
| <b>5.9.</b> | <b>Conclusion.....</b>                                  | <b>161</b> |

## **CHAPITRE 6. ASSERVISSEMENT -MODELE DYNAMIQUE .....** **163**

|   |  |            |
|---|--|------------|
| <b>6.1.</b>                             | <b>Le modèle dynamique .....</b>   | <b>163</b> |
| <b>6.2.</b>                             | <b>La fonction de sensibilité.....</b>   | <b>166</b> |
| 6.2.1.                                  | <i>Cas monocinétique.....</i>  | 167        |
| 6.2.2.                                  | <i>Cas d'une distribution de temps de vol.....</i>   | 176        |
| 6.2.3.                                  | <i>Discussion.....</i>   | 180        |
| 6.2.4.                                  | <i>L'effet Dick.....</i>   | 181        |
| <b>6.3.</b>                             | <b>Approche fréquentielle .....</b>  | <b>184</b> |
| <b>6.4.</b>                             | <b>Incidence sur la stabilité .....</b>  | <b>193</b> |
| <b>6.5.</b>                             | <b>Conséquences sur l'asservissement .....</b>   | <b>197</b> |
| 6.5.1.                                  | <i>Les équations de la boucle.....</i>   | 200        |
| 6.5.2.                                  | <i>Exemple d'une boucle simple .....</i>   | 206        |
| 6.5.3.                                  | <i>Discussion.....</i>   | 208        |
| <b>6.6.</b>                             | <b>Conclusion .....</b>  | <b>211</b> |
| <br><b>CHAPITRE 7. EXACTITUDE .....</b> |  | <b>215</b> |
| <b>7.1.</b>                             | <b>Introduction.....</b>   | <b>215</b> |
| <b>7.2.</b>                             | <b>Conséquences d'un effet perturbateur .....</b>  | <b>216</b> |
| <b>7.3.</b>                             | <b>Evaluation .....</b>  | <b>220</b> |
| <b>7.4.</b>                             | <b>L'effet Doppler du second ordre.....</b>  | <b>222</b> |
| <b>7.5.</b>                             | <b>L'effet gravitationnel.....</b>   | <b>224</b> |
| <b>7.6.</b>                             | <b>Effet de rayonnement du corps noir.....</b>   | <b>225</b> |
| <b>7.7.</b>                             | <b>Effet Zeeman de second ordre .....</b>  | <b>228</b> |
| 7.7.1.                                  | <i>Détermination de la valeur de <math>f_Z</math> :.....</i>   | 229        |
| 7.7.2.                                  | <i>Différence entre <math>\langle B_0^2 \rangle</math> et <math>\langle B_0 \rangle^2</math> .....</i> | 231        |
| 7.7.3.                                  | <i>Correction à la formule de Breit - Rabi .....</i>   | 233        |
| 7.7.4.                                  | <i>Inhomogénéité du champ statique .....</i>   | 234        |
| 7.7.5.                                  | <i>Correction totale et incertitude.....</i>   | 242        |
| <b>7.8.</b>                             | <b>Composantes spectrales micro-ondes supplémentaires ....</b>   | <b>242</b> |
| 7.8.1.                                  | <i>Effet des impuretés spectrales.....</i>   | 243        |
| 7.8.2.                                  | <i>Effet Bloch-Siegert.....</i>  | 245        |
| <b>7.9.</b>                             | <b>Le déplacement lumineux ou effet Stark dynamique .....</b>  | <b>247</b> |
| 7.9.1.                                  | <i>Expression générale .....</i>   | 247        |

---

|              |  |            |
|--------------|--|------------|
| 7.9.2.       | <i>Détermination expérimentale de <math>\Lambda_0</math></i> ..... | 250        |
| 7.9.3.       | <i>Résultats expérimentaux</i> .....                               | 252        |
| <b>7.10.</b> | <b>Les fuites micro-ondes</b> .....                                | <b>255</b> |
| <b>7.11.</b> | <b>Effet du déphasage dans la cavité</b> .....                     | <b>256</b> |
| 7.11.1.      | <i>Nouvelle méthode d'estimation de <math>\phi</math></i> .....    | 260        |
| 7.11.2.      | <i>Résultats Expérimentaux</i> .....                               | 263        |
| 7.11.3.      | <i>Remarques</i> .....   | 267        |
| <b>7.12.</b> | <b>Effet du désaccord de la cavité</b> .....                       | <b>270</b> |
| 7.12.1.      | <i>Estimation de la pente de la cavité</i> .....                   | 272        |
| <b>7.13.</b> | <b>Effets des transitions voisines</b> .....                       | <b>277</b> |
| 7.13.1.      | <i>Rabi pulling</i> .....  | 277        |
| 7.13.2.      | <i>Ramsey pulling</i> .....  | 280        |
| <b>7.14.</b> | <b>Conclusion : exactitude globale</b> .....                       | <b>284</b> |

## **CONCLUSION ..... 289**

## **ANNEXE A. SIGNAUX DETERMINISTES ..... 291**

|             |  |            |
|-------------|--|------------|
| <b>A.1.</b> | <b>Définitions et propriétés élémentaires</b> .....                | <b>291</b> |
| <b>A.2.</b> | <b>Signal et système</b> .....                                     | <b>293</b> |
| A.2.1.      | <i>Signal</i> .....  | 293        |
| A.2.2.      | <i>Système</i> .....   | 296        |
| <b>A.3.</b> | <b>Signaux Continus</b> .....                                      | <b>297</b> |
| A.3.1.      | <i>Transformée de Laplace</i> .....                                | 297        |
| A.3.2.      | <i>Transformation de Fourier</i> .....                             | 297        |
| A.3.3.      | <i>Signaux périodiques</i> .....                                   | 299        |
| A.3.4.      | <i>Formule sommatoire de Poisson</i> .....                         | 300        |
| A.3.5.      | <i>Transformation de Hilbert</i> .....                             | 301        |
| <b>A.4.</b> | <b>Signaux à Temps Discret</b> .....                               | <b>301</b> |
| A.4.1.      | <i>Transformée en Z</i> .....                                      | 301        |
| <b>A.5.</b> | <b>Echantillonnage</b> .....                                       | <b>301</b> |
| A.5.1.      | <i>Théorème d'échantillonnage (Reconstruction du signal)</i> ..... | 302        |
| A.5.2.      | <i>Formule d'interpolation :</i> .....                             | 302        |
| A.5.3.      | <i>Théorème (échantillonnage d'un signal hybride)</i> .....        | 303        |

---

|   |   |            |
|---|---|------------|
| <b>A.6.</b>                               | <b>Critère de JURY.....</b>                               | <b>304</b> |
| <b>ANNEXE B. SIGNAUX ALEATOIRES .....</b> |   | <b>307</b> |
| <b>B.1.</b>                               | <b>Définitions .....</b>                                  | <b>307</b> |
| <b>B.2.</b>                               | <b>Processus Aléatoire.....</b>                           | <b>308</b> |
| <i>B.2.1.</i>                             | <i>Moments statistiques.....</i>                          | <i>308</i> |
| <i>B.2.2.</i>                             | <i>Stationnarité au second ordre (au sens large).....</i> | <i>308</i> |
| <i>B.2.3.</i>                             | <i>Filtrage linéaire.....</i>                             | <i>309</i> |
| <b>B.3.</b>                               | <b>Echantillonnage d'un signal aléatoire .....</b>        | <b>310</b> |

# INTRODUCTION

---

Le temps est la grandeur physique qui se mesure le mieux actuellement. La précision atteinte est telle que l'on tend à ramener la définition d'autres grandeurs physiques à des mesures de temps ou de fréquence et à la connaissance de constantes fondamentales.

Le temps était autrefois déterminé par l'observation des astres. Depuis 1955, il est produit par des étalons de fréquence à jet de césium. Les étalons atomiques de fréquence ont pour rôle de délivrer un signal dont la fréquence conserve un rapport arithmétique constant avec la fréquence liée à la différence entre deux niveaux d'énergie d'un atome.

Les étalons à césium se sont vite multipliés, tandis que leur exactitude progressait. Leur bon accord entre eux inspira confiance. Il fut ainsi possible d'adopter une définition atomique de la seconde (unité de temps), à la place de sa définition astronomique, en 1967.

Dans les étalons de laboratoire on s'attache à réaliser la définition de la seconde avec la plus grande exactitude possible. Pour les horloges industrielles, étalons secondaires, on essaye d'obtenir un compromis entre encombrement, stabilité, exactitude et coût.

L'utilisation des horloges atomiques est omniprésente. Elle s'articule autour de deux opérations : La synchronisation et le positionnement.



La *synchronisation* des horloges se traduit souvent par un besoin de dater des événements ayant lieu dans des lieux distincts. A titre d'exemple nous citerons la synchronisation des observations de radioastronomie dans les expériences d'interférométrie à très longue base ou la synchronisation poussée des générateurs de signaux pseudo-aléatoires dans les systèmes de télécommunications militaires à spectre étalé.

Le *positionnement* se traduit par des besoins de connaître sa position avec précision dans le référentiel terrestre. Les systèmes de positionnement modernes font tous intervenir des mesures de temps. Le plus récent et performant est le Global Positioning System (GPS). Ce système permet de connaître sa position à la surface du globe en trois dimensions. La mesure des instants d'arrivée respectifs des signaux émis par plusieurs satellites équipés d'horloges atomiques à jet de césium permet, en utilisant des techniques de traitement du signal numérique, la localisation d'un mobile avec une précision pouvant aller jusqu'au décimètre.

En France, le **Laboratoire Primaire du Temps et des Fréquences (LPTF)** a été désigné par le **Bureau National de Métrologie (BNM)** pour réaliser la définition de la seconde. En 1991, un étalon primaire à **Jet de césium à Pompage Optique (JPO)** a fonctionné pour la première fois au LPTF. Deux ans plus tard, le JPO a été évalué. Son exactitude a été estimée à  $1,1 \times 10^{-13}$ . Cette performance était inférieure à celles des meilleurs étalons primaires mondiaux. Le travail de cette thèse a donc été entamé dans l'objectif d'apporter des améliorations aux performances du JPO, améliorations qui devront le rendre aussi performant (sinon plus) que les étalons primaires réalisés par les autres pays (Allemagne, Etats-Unis, Japon, Canada).

Dans le premier chapitre, nous rappelons brièvement les principes qui ont mené à la réalisation d'un résonateur à jet de césium pompé optiquement. Nous mentionnons les principales propriétés spectroscopiques de l'atome de césium intervenant dans nos expériences : niveaux d'énergie, transitions hyperfréquences et optiques. Nous finissons par le rappel du principe du résonateur atomique à jet de césium et exposons succinctement le fonctionnement en horloge.

Le deuxième chapitre décrit l'ensemble qui constitue l'horloge atomique "JPO" de notre laboratoire. Ses parties mécaniques et optiques sont abordées rapidement. Sa

---

cavité micro-onde, que nous avons mise au point, ainsi que la génération du signal d'interrogation et la boucle d'asservissement sont détaillées amplement .

Le troisième chapitre présente un développement théorique des équations qui décrivent le comportement d'une horloge. Nous présentons une nouvelle approche, basée sur la théorie des systèmes, qui nous permettra par la suite de déterminer deux quantités importantes : la fréquence de Rabi et la distribution des vitesses des atomes.

Le quatrième chapitre est consacré aux méthodes d'estimation de la distribution de vitesse des atomes dans un jet thermique. Nous commençons ce chapitre par la présentation de l'état de l'art sur ces méthodes, puis nous présentons plusieurs nouvelles méthodes ou améliorations des méthodes existantes. Enfin, un critère de comparaison de toutes ces méthodes est présenté. Ce critère nous permettra d'adopter une méthode finale lors de l'évaluation de l'exactitude de notre étalon.

Le cinquième chapitre traite en détail la boucle d'asservissement d'un oscillateur local (quartz) sur la fréquence de transition atomique. Le comportement de la boucle d'asservissement est analysé d'un point de vue statique qui ne tient pas compte des variations rapides de l'oscillateur local. La stabilité de l'oscillateur asservi est établie et les différents facteurs limitatifs de cette stabilité sont discutés.

Le sixième chapitre présente une étude d'un modèle dynamique de la boucle d'asservissement. Nous utilisons deux approches pour aboutir à ce modèle dynamique. La première, temporelle, est une généralisation de la fonction de sensibilité déjà introduite et étudiée dans le cas des horloges à réponse discontinue. La seconde approche est fréquentielle, et est basée sur la théorie des transformées de Fourier. Enfin, nous présentons les incidences de ce modèle sur la boucle d'asservissement et nous montrons qu'il conduit à "l'effet Dick" bien connu dans les horloges à réponse discontinue.

Dans le septième chapitre nous évaluons tous les effets "connus" qui peuvent décaler la fréquence de l'horloge par rapport à la définition. Nous insistons sur les nouvelles méthodes d'évaluation que nous avons proposées pour certains effets. En particulier, nous proposons une méthode originale pour déterminer la différence de phase entre

les deux bras de la cavité micro-onde. Cette méthode permet de mesurer la différence de phase dans les horloges commerciales, ce qui n'était pas possible jusqu'à maintenant. L'effet lumineux, négligeable jusqu'à présent dans les étalons à pompage optiques, est évalué avec précision. Nous montrons que cet effet, bien qu'il soit faible, est corrélé avec l'effet, très important, du déphasage dans la cavité. Par conséquent, sa considération dans le budget d'erreur d'un étalon primaire est primordiale.

Enfin, nous présentons les performances atteintes par notre horloge. Ces performances ont été améliorées grâce aux nouvelles méthodes de traitement et aux techniques d'évaluation développées au cours de ce travail de thèse. Notre horloge JPO est maintenant l'horloge, à jet thermique, la plus exacte au monde, avec une exactitude de  $6,3 \times 10^{-15}$ . Elle est également l'horloge à jet thermique la plus stable, avec une stabilité à court terme de  $3 \times 10^{-13} \tau^{-1/2}$  où  $\tau$  est le temps d'intégration en seconde.

Certaines méthodes proposées au cours de ce travail permettent de mieux comprendre le fonctionnement d'une horloge atomique fonctionnant avec un jet continu ainsi qu'en mode discontinu. En particulier, les résultats de l'étude de l'asservissement peuvent s'avérer très utiles pour les futures étalons de fréquence à atomes froids fonctionnant en mode continu.

# Chapitre 1. PRINCIPE DE L'HORLOGE

---

Dans ce chapitre, nous rappellerons brièvement les principes qui ont mené à la réalisation d'un résonateur à jet de césium pompé optiquement.

Tout d'abord, nous mentionnerons les principales propriétés spectroscopiques de l'atome de césium intervenant dans nos expériences : niveaux d'énergie, transitions hyperfréquences et optiques. Nous finirons par le rappel du principe du résonateur atomique à jet de césium et nous exposerons succinctement le fonctionnement en horloge.

## 1.1. Introduction

Les niveaux d'énergie de l'atome sont quantifiés, et les différences d'énergie qui séparent les niveaux sont bien définies. Une transition entre deux niveaux  $E_1$  et  $E_2$  ( $E_2 > E_1$ ) a lieu quand l'atome émet ou absorbe un photon de fréquence de rayonnement  $\nu_0$  déterminée par la relation de Bohr :

$$h\nu_0 = E_2 - E_1 \quad (1-1)$$

Où  $h$  est la constante de Planck. Ainsi, une résonance de largeur  $\Delta\nu$  peut être observée. La relation d'Heisenberg reliant la largeur  $\Delta\nu$  au temps d'observation  $\Delta t$  de la transition est donnée par

$$2\pi\Delta\nu\Delta t \geq 1 \quad (1-2)$$

En 1939, Rabi a proposé une méthode pour observer une transition atomique. Elle met en œuvre la méthode de résonance magnétique sur jet qui a été développée dans son équipe.

En 1967, la XIII<sup>ème</sup> Conférence Générale des Poids et Mesures a opté pour l'atome de césium. Elle a remplacé la définition astronomique de la seconde par la définition suivante : *"la seconde est la durée de 9192631770 périodes de la radiation correspondant à la transition entre deux niveaux hyperfins de l'état fondamental de l'atome de césium 133"*.

Ce choix de l'atome de césium 133 est justifié par ses propriétés :

- Métal alcalin stable, le plus électropositif de tous les métaux, le plus lourd des alcalins.
- Température de fusion basse (28°C).
- Un seul isotope à l'état naturel : nombre quantique principal  $n = 6$ , spin nucléaire  $I = 7/2$ .
- Structure hyperfine de l'état fondamental  $6^2S_{1/2}$  constituée de deux niveaux  $F = 3$  et  $F = 4$  dont l'écart énergétique en l'absence de champ magnétique correspond par définition à la fréquence  $\nu_0 = 9192631770$  GHz (voir Fig. 1.1).

En présence d'un champ magnétique statique  $B_0$ , chaque niveau de l'état fondamental  $F$  ou excité  $F'$  se décompose respectivement en  $2F + 1$  et  $2F' + 1$  sous-niveaux Zeeman. Les écarts entre ces sous-niveaux varient linéairement avec le champ magnétique tant que le champ est faible. La transition  $|F = 4, m_F = 0\rangle \leftrightarrow |F = 3, m_F = 0\rangle$  du niveau fondamental présente seulement une sensibilité au 2<sup>ème</sup> ordre pour le champ magnétique. Ce sera donc la transition d'horloge dont la fréquence  $\nu'_0$  est donnée par [1] :

$$\nu'_0 = \nu_0 + 427,45 \times 10^8 B_0^2 \quad (1-3)$$

Avec  $\nu_0$  en Hz et  $B_0$  Tesla.

La Fig. 1-1 représente les différents niveaux d'énergie de l'atome de césium.

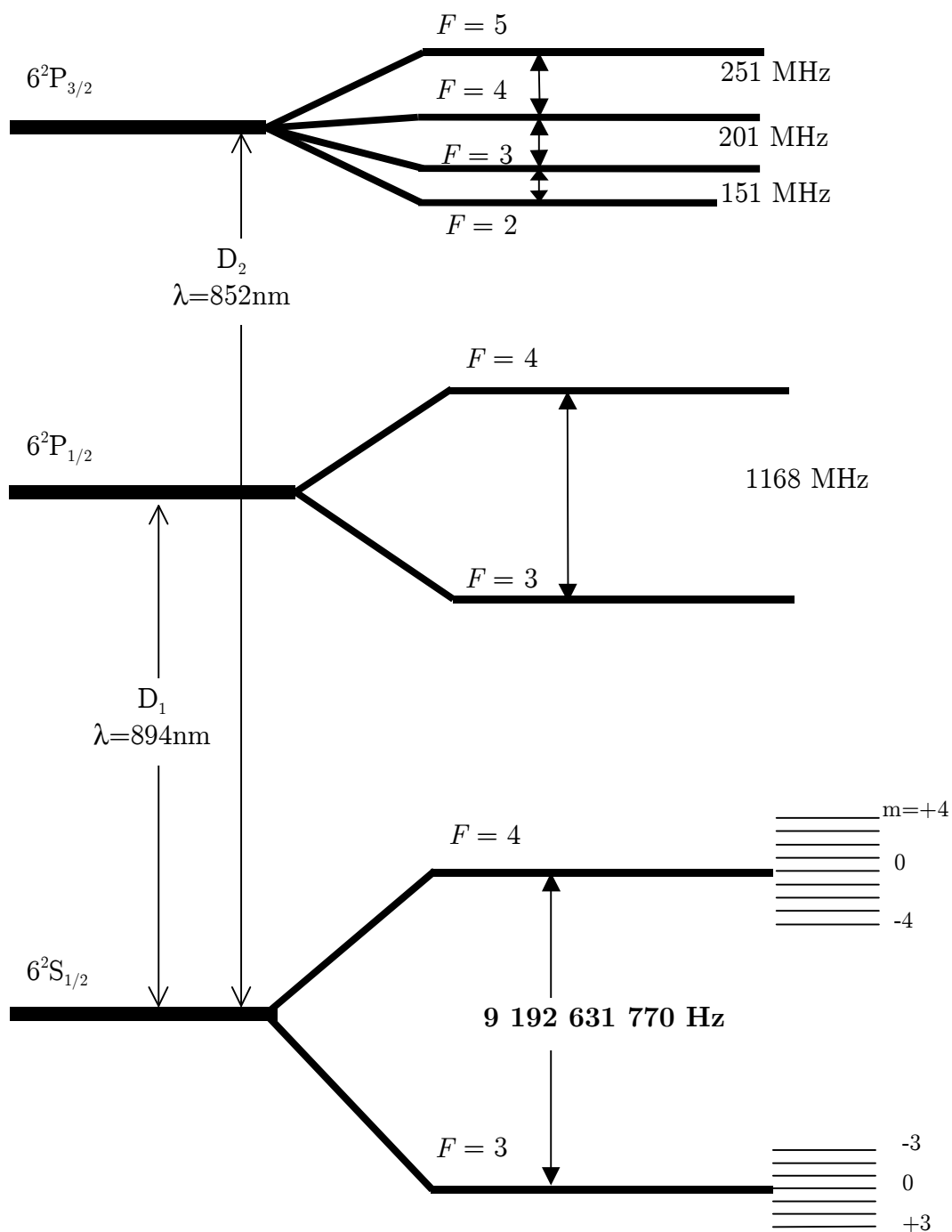


Fig. 1-1 : *Diagramme des niveaux d'énergie de l'atome de césium qui interviennent dans la réalisation d'une horloge atomique.*

## 1.2. Principe de l'horloge

La figure 1-2 présente un schéma fonctionnel d'une horloge à jet thermique de césium. Les atomes de césium sont chauffés à l'aide d'un four pour fournir un jet divergent. Dans le jet, les atomes sont équirépartis sur les deux niveaux d'énergie  $F = 3$  (atomes noirs sur la figure) et  $F = 4$  (atomes blancs).

Un faisceau laser de pompage est ensuite utilisé pour préparer presque tous les atomes dans un seul niveau ( $F = 3$ ). Ce faisceau est représenté dans la figure 1-2 par une lumière noir. Les atomes sont alors répartis sur tous les sous-niveaux Zeeman ( $F = 3, m$ ).

A l'intérieur de la cavité, les atomes traversent un champ électromagnétique dont la fréquence peut être réglée à l'aide d'un oscillateur commandé en tension (VCO). Si cette fréquence correspond à  $\nu_0$ , la fréquence de transition du césium, les atomes sont excités et changent de niveau d'énergie. Les atomes arrivent ensuite dans une zone de détection, où ils rencontrent un faisceau laser de détection. Un signal  $S$ , appelé *frange*, est ainsi obtenu. Son amplitude est proportionnelle au nombre d'atomes (blancs) qui ont effectué la transition. Un maximum du signal est obtenu quand tous les atomes dans la zone de détection sont blancs (transparents).

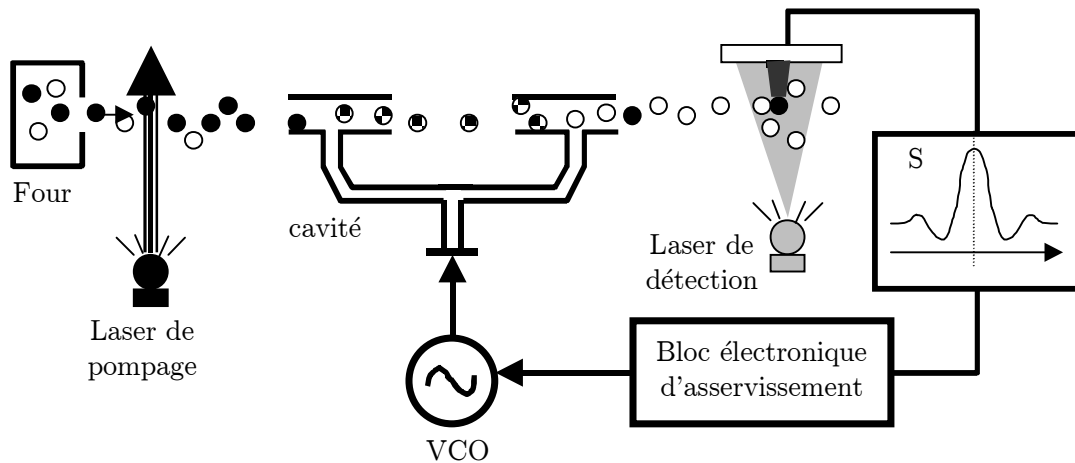


Fig. 1-2 : Schéma fonctionnel d'une horloge atomique. Les atomes noirs correspondent à  $F = 3$  et les blancs à  $F = 4$ .

Le signal  $S$  est utilisé pour régler la fréquence du VCO à la valeur  $\nu_0$ . Un bloc électronique d'asservissement verrouille la fréquence de l'oscillateur VCO sur le sommet de la frange afin de réduire les fluctuations du VCO. Enfin, un signal

d'horloge est dérivé de la fréquence de l'oscillateur. Le rôle du résonateur atomique est donc de fournir une référence précise et stable. Celui du bloc électronique est de fournir un signal dont la fréquence est égale à celle de la référence atomique.

La forme du signal de détection  $S$  en fonction de la fréquence, la « frange », dépend à la fois de la cavité et de la vitesse des atomes. Dans le cas d'une simple cavité, dite de Rabi (voir Fig. 1-3a), la probabilité de transition, pour un atome soumis pendant un temps d'interaction  $\tau$  à un champ magnétique oscillant de fréquence et d'amplitude constantes, est donnée par [2]:

$$P(\tau, \Omega_0, b) = \frac{b^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \quad (1-4)$$

Avec :  $\Omega_0 = \omega - \omega_0$  et  $\Omega = \sqrt{\Omega_0^2 + b^2}$

$\omega$  = pulsation du champ micro-onde

$\omega_0 = 2\pi\nu_0$  = pulsation de résonance

$b$  = représentation de l'amplitude du champ micro-onde.  $b$  est homogène à une pulsation et est traditionnellement appelé fréquence de Rabi:

$$b = \frac{\mu_B}{\mathbf{h}} B_{HF} \quad (1-5)$$

$B_{HF}$  : amplitude du champ magnétique micro-onde en Tesla.

$\mu_B$  : magnéton de Bohr =  $9,27 \cdot 10^{-24}$  J/T

$\mathbf{h}$  : constante de Planck réduite =  $1,05 \cdot 10^{-34}$  Js

Ramsey [2] a proposé une cavité à deux zones d'interaction. Cette cavité permet à la fois une largeur plus petite de la frange de résonance et une distribution du champ micro-onde plus idéale. Ce type de cavité est employé dans notre étalon JPO. Il est représenté sur la Fig. 1-3b.

Soit un jet monocinétique de vitesse  $v$ . On pose  $T = \frac{L}{v}$  le temps de transit entre les deux zones d'interaction de la cavité et  $\tau = \frac{\mathbf{l}}{v}$  le temps d'interaction dans chacun



des bras. Si la différence de phase entre les champs hyperfréquences dans les deux bras est  $\phi$ , la probabilité de transition est donnée par l'expression suivante [1] :

$$P(\tau, T, \omega, b) = \frac{4b^2}{\Omega^2} \sin^2\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \left[ \cos\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_0 T + \phi}{2}\right) - \frac{\Omega_0}{\Omega} \sin\left(\frac{\Omega\tau}{2}\right) \sin\left(\frac{\Omega_0 T + \phi}{2}\right) \right]^2 \quad (1-6)$$

Dans un jet thermique, les atomes possèdent une distribution de vitesse  $f(v)$  qu'on traduit généralement en distribution de temps de vol  $f(\tau)$ . Par ailleurs, le signal détecté  $S$  est la probabilité de transition moyennée sur cette distribution :

$$S = \int_{\tau=0}^{\infty} P(\tau, T, \omega, b) f(\tau) d\tau \quad (1-7)$$

Une analyse de la structure de ce signal, la frange de Ramsey, sera présentée en détail au chapitre 3.

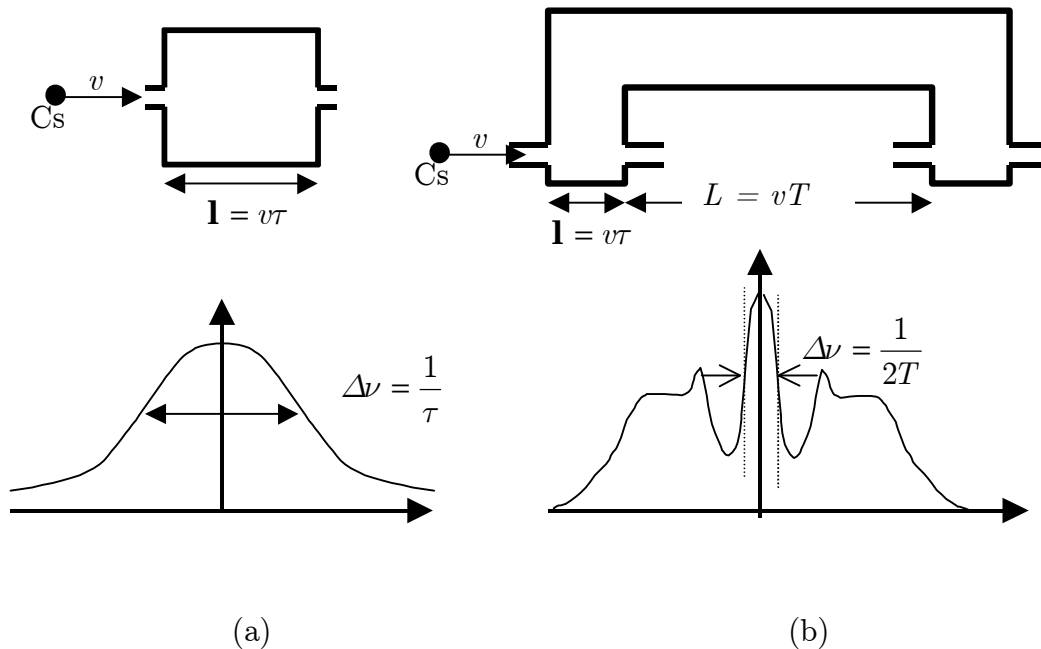


Fig. 1-2 : cavités (a) Rabi, (b) Ramsey.

### 1.3. Mise en évidence de la transition

Le jet à la sortie du four contient presque autant d'atomes dans l'état  $F = 4$  que dans l'état  $F = 3$ . Pour mettre en évidence la transition d'un niveau sur l'autre, il faut "préparer" un jet avec beaucoup plus d'atomes dans un état que dans l'autre, c'est à dire créer une différence de population.

Dans les horloges classiques à sélection magnétique, cette différence se fait en séparant les atomes au moyen des forces dues à leur moment magnétique dipolaire dans un gradient de champ magnétique [3].

En 1950, Kastler [4] a proposé d'utiliser l'interaction atome-lumière pour réaliser le transfert des atomes d'un niveau à un autre. De plus, il a noté qu'il était même possible d'utiliser les photons d'émission spontanée produits au cours de l'interaction pour détecter la présence d'atomes sur le niveau de départ. Il fallut attendre l'apparition des toutes premières diodes laser et le travail précurseur de Picqué [5] et Arditì [6] pour appliquer cette méthode aux jets de césium.

#### 1.3.1. Pompage à un laser

Considérons un diagramme d'énergie simplifié comme celui de la Fig. 1-3.

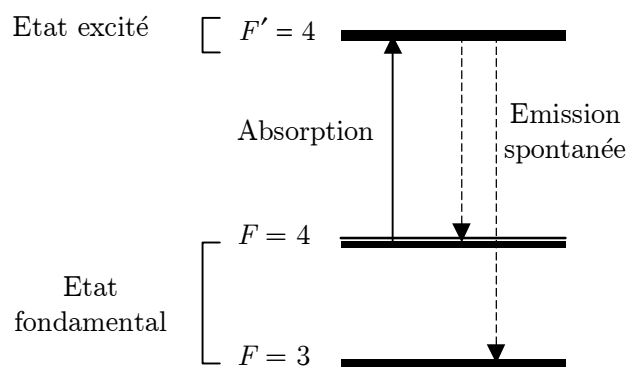


Fig. 1-3 : *Pompage optique - Transition Pompante.*

La lumière d'un laser de longueur d'onde accordée sur une des transitions de la raie  $D_2$  peut être absorbée par les atomes et provoquer le passage de l'atome de césium d'un des états fondamentaux ( $F = 4$  sur la figure) vers un état excité. La durée de

vie des états excités étant de l'ordre de 30 ns, les atomes retombent sur l'un ou l'autre des états fondamentaux par émission spontanée d'un photon de fluorescence. Après quelques cycles d'absorption et d'émission spontanée, les atomes sont transférés d'un état dans l'autre. Ces transitions sont dites "pompantes".

Les transitions pompantes distribuent les atomes dans les différents sous-niveaux Zeeman de l'état final ( $F = 3$  sur la figure). Plusieurs combinaisons possibles de longueur d'onde des lasers (suivant les niveaux impliqués), et de polarisation<sup>1</sup> des lasers ont été considérées dans la référence [7]. En pratique, la durée totale de l'interaction est de l'ordre d'une dizaine de microsecondes, le pompage optique est complet et se fait donc sans effet de sélection de vitesse.

### 1.3.2. Pompage à deux lasers

Considérons le schéma de la figure 1-5. Un premier laser, de polarisation  $\sigma$ , est utilisé comme précédemment pour transférer les atomes du niveau  $F = 4$  au niveau  $F = 3$  en passant par l'état excité  $F' = 4$ .

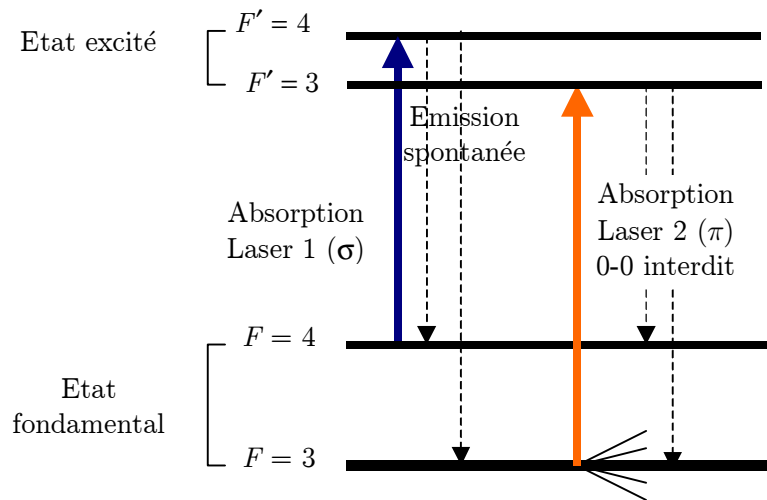


Fig. 1-5 : *Pompage optique à deux lasers.*

<sup>1</sup> Nous parlons de polarisation  $\pi$  quand la polarisation du faisceau laser est parallèle au champ statique  $B_0$ , et de polarisation  $\sigma$  quand elle y est orthogonale.

Un second laser, de polarisation  $\pi$ , mais accordé sur la transition  $F = 3 \leftrightarrow F' = 3$ , vide les atomes des sous-niveaux de  $F = 3$  à l'exception du sous-niveau  $F = 3, m_F = 0$ , selon les règles de sélection. Par conséquent, les atomes tendent à s'accumuler dans ce sous-niveau. Presque 95 % des atomes peuvent être transférés dans le sous-niveau final en utilisant deux lasers dont un de polarisation  $\pi$  [7]

### 1.3.3. Détection optique

Après la préparation des atomes dans le niveau  $F = 3$  par pompage optique, ils traversent la cavité micro-onde. Les atomes ayant effectué la transition micro-onde reviennent sur le niveau  $F = 4$ . Ils interagissent une deuxième fois avec un laser dans la zone de détection. Ce laser est accordé sur la transition 4-5. Les atomes excités dans l'état  $F = 5$  ne peuvent retomber que sur le niveau  $F = 4$ , car la transition  $F = 5 \leftrightarrow F = 3$  est interdite par les règles de sélection. Les atomes vont donc pouvoir subir un grand nombre de cycles absorption - émission, la transition est dite "cyclante". Ils émettent alors une centaine de photons par atome. Ces photons sont concentrés par un système optique, puis convertis en courant par un photodétecteur qui fournit le signal d'horloge. C'est le schéma de détection le plus efficace.

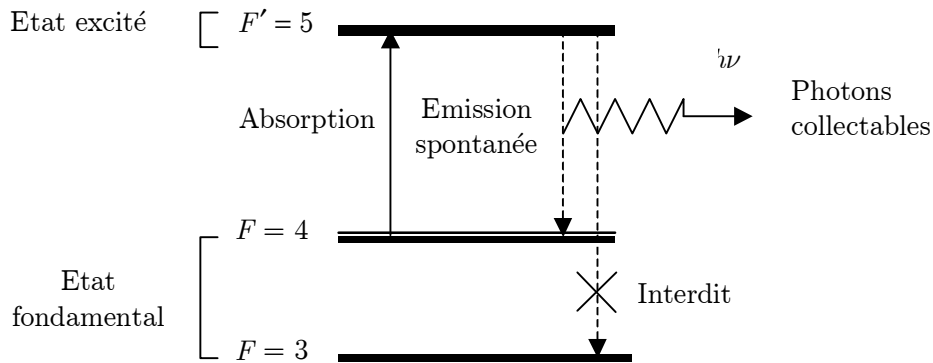


Fig. 1-4 : Détection optique : transition cyclante

Il est aussi possible de détecter la transition micro-onde avec le même laser qu'au pompage [8]. Cette configuration a l'avantage de la simplicité au détriment de l'amplitude du signal, car on obtient dans ce cas quelques photons par atome seulement.

---

## 1.4. Conclusion

Nous avons présenté, d'une façon brève et très simplifiée, le principe d'un étalon de fréquence à jet de césium. Nous avons rappelé quelques propriétés de l'atome de césium qui ont conduit à son choix pour la définition atomique de la seconde. Ensuite, les probabilités de transition dans un schéma de Rabi et de Ramsey ont été rappelées. Enfin, nous avons présenté les principes de pompage de détection optiques.

---

## Bibliographie

- [1] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [2] N. F. Ramsey, **Molecular Beams**, Oxford, Clarendon Pres, 1956
- [3] W. Gerlach, O. Stern, *Ann. Der Phys.*, **74**, 673-699, 1924.
- [4] A. Kastler, "Quelques suggestions concernant la production optique et la détection optique d'une inégalité de population des niveaux de quantification spatiale des atomes. Application à l'expérience de Stern et Gerlach et à la résonance magnétique", *Le Journal de Physique et le Radium*, **11**, 255-265, 1950.
- [5] J. L. Picqué, "Hyperfine optical pumping of Cesium with a CW GaAs Laser, *Journal of Quantum Electronics*", **QE-10**, 892-897, 1974.
- [6] M. Arditi and J. L. Picqué, "A cesium beam atomic clock using laser optical pumping. Preliminary tests", *J. Phys. Lettres*, **41**, L-379-L-381, 1980.
- [7] G. Avila, V. Giordano, V. Candelier, E. de Clercq, G. Théobald, P. Céréz, "State selection in a cesium beam by laser diode optical pumping", *Phys. Rev.*, **36**, 3719-3728, 1987.
- [8] B. Boussert, G. Lucas-Leclin, F. Hamouda, P. Céréz and G. Théobald, "Frequency performances of a miniature optically pumped cesium beam frequency standard", *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelect., Freq. Contr.*, **46**, 366-371, 1999.



# Chapitre 2. MONTAGE EXPERIMENTAL

---

Réaliser la définition de la seconde consiste à réunir les conditions pour observer la transition d'horloge sans la perturber, ou du moins en limitant, autant qu'il est possible, les sources de perturbations. Les deux niveaux impliqués dans la définition étant très proches, deux niveaux hyperfins de l'état fondamental, ils sont également peuplés naturellement. Observer la transition les reliant impose de créer une différence de population initiale. Nous avons vu dans le chapitre précédent que dans le cas de notre étalon ce déséquilibre est créé par pompage optique. La transition d'horloge est ensuite provoquée par interaction avec un champ magnétique oscillant dans une cavité résonante. Les atomes ayant subi la transition sont alors détectés par interaction avec un faisceau laser. Afin de réduire les perturbations, cette résonance est observée sous vide, sur un jet atomique, à l'intérieur de blindages magnétiques.

On réalise un étalon de fréquence en asservissant la fréquence d'un oscillateur local (quartz) sur la transition atomique. Pour cela, une fréquence voisine de la "fréquence atomique" est générée à partir de l'oscillateur local, et injectée dans la cavité micro-onde. La réponse des atomes est ensuite "recueillie", traitée et utilisée pour corriger l'oscillateur local.

Ce sont tous ces éléments, dont l'ensemble constitue l'horloge atomique "JPO" (pour **J**et à **P**ompage **O**ptique), que nous allons décrire dans ce chapitre. Nous passerons rapidement sur les parties mécaniques et optiques, qui ont déjà été décrites dans la référence [1]. Puis nous détaillerons la cavité micro-onde, dite de Ramsey, que nous avons mise au point, ainsi que la génération du signal d'interrogation et la boucle d'asservissement.

## 2.1. Le Tube



# LPTF - JPO

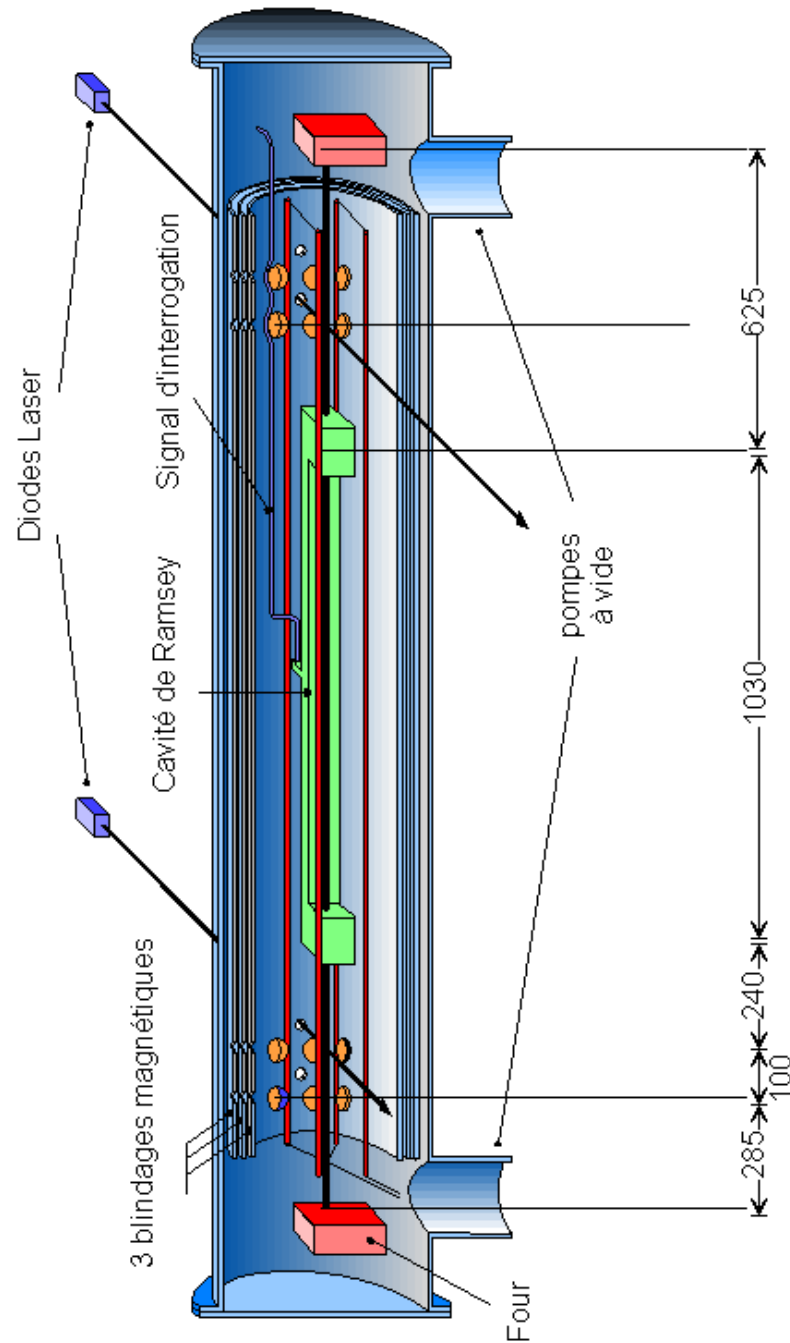


Fig. 2-1 : Tube de JPO.

Les cotes sont en mm.

## 2.1.1. Le vide

L'enceinte à vide est un tube cylindrique en acier inoxydable amagnétique de diamètre 25 cm et de longueur 2,6 m. Elle est pompée continûment à une extrémité par une *pompe ionique* (600 l/s) et à l'autre par une *pompe turbo-moléculaire* à paliers magnétiques (500 l/s). Le vide obtenu en fonctionnement

---

est de l'ordre de  $3 \cdot 10^{-7}$  Pa. L'enceinte comporte de nombreuses traversées électriques, un passage SMA pour la micro-onde et huit hublots pour le passage des faisceaux lasers.

Un cylindre intérieur en dural, de diamètre 15 cm et de longueur 1,96 m, sert d'armature à toutes les pièces internes.

### 2.1.2. Le Four et le Jet

Un four en acier inoxydable amagnétique est placé à chaque extrémité, afin de permettre un jet dans deux sens opposés. Chaque four est chargé initialement avec une *ampoule de verre* contenant 3 à 5 g de césium. Dans les conditions habituelles, c'est-à-dire une température du four de  $90^\circ\text{C}$ , la consommation est d'environ 3g par an. La vapeur de césium sort par un *collimateur* multicanaux, constitué d'un empilement de tôles ondulées dont le rôle est de réduire la divergence du jet. La divergence est estimée à 55 mrad. Les dimensions utiles du collimateur, 8,6 mm horizontalement et 3,9 mm verticalement, sont supérieures aux dimensions des fentes de passage du jet dans la cavité afin de réduire l'effet d'un désalignement du four (effet lié à l'existence d'un gradient de phase dans la cavité, voir chapitre 7). Pour la même raison la divergence est nettement supérieure à l'angle sous lequel on voit les fentes de la cavité depuis le four.

Un *obturateur* mobile en graphite est situé devant chaque four, permettant de couper chaque jet.

La température de chaque four est réglée. En fonctionnement normal les deux fours sont chauffés en permanence, quel que soit le jet utilisé, afin d'éviter tout gradient de température dissymétrique.

La forme du jet utile est définie uniquement par les dimensions des fentes de la cavité ( $4 \times 3 \text{ mm}^2$ ). Pour un four à  $90^\circ\text{C}$ , l'intensité du jet dans la zone de détection est estimée à  $2 \times 10^{10}$  atomes/seconde, et sa densité entre les deux bras de la cavité à  $10^7$  atomes/cm<sup>3</sup>. La vitesse moyenne des atomes détectés est de 240 m/s.

### 2.1.3. Le champ magnétique statique

Afin de limiter l'influence des champs magnétiques parasites, le cylindre en Dural, servant d'armature, est entouré par trois blindages magnétiques concentriques. Ce sont trois cylindres en Mu-métal, d'épaisseur 2 mm et écartés de 2 cm. Le facteur d'atténuation mesuré pour un champ transverse est de  $10^5$ . Pour un champ longitudinal, il est estimé à 300. C'est pour cette raison que le tube est

orienté dans la direction Est-Ouest. Il a été vérifié auparavant que le champ interne n'était pas affecté par les champs magnétiques parasites des pompes à vide. Ces blindages sont démagnétisés régulièrement.

Un *champ magnétique statique uniforme* est créé sur toute la longueur du jet. Le rôle de ce champ *directeur* est de séparer la transition peu sensible au champ magnétique, transition entre sous niveaux Zeeman  $m = 0$ , des autres transitions ( $m \neq 0$ ). Ce champ statique *vertical* est créé au moyen de quatre barres parallèles, en Dural, disposées suivant les arrêtes d'un parallélépipède et parcourues par un courant continu (Voir Fig. 2-1). Leur écartement est de 110 mm horizontalement et de 63,5 mm verticalement. Le rapport  $\sqrt{3}$  entre ces deux écartements est celui qui donne la meilleure homogénéité du champ [2]. Ces barres sont fixées sur 10 disques en céramique, régulièrement répartis dans le cylindre en Dural, et positionnés transversalement au moyen de vis de réglages avec une précision de  $\pm 10 \mu\text{m}$ .

Les barres sont alimentées par une alimentation régulée en courant. Si  $\nu_z$  est le déplacement de fréquence de la transition d'horloge dû au champ magnétique statique, habituellement  $B \cong 10 \mu\text{T}$  et  $\nu_z \cong 4\text{Hz}$ , et  $i$  le courant de l'alimentation, on montre que :

$$\frac{d\nu_z}{\nu_z} = 2 \frac{di}{i} \quad (2-1)$$

La stabilité de l'alimentation est de l'ordre de  $10^{-6}$  sur un jour, soit une variation relative de la fréquence d'horloge inférieure à  $1 \times 10^{-15}$ . Pour l'instant, la valeur du champ magnétique est mesurée et corrigée plusieurs fois par jour. Dans l'avenir on pourra asservir directement le courant.

L'*homogénéité* du champ statique, traditionnellement appelé champ C dans les machines à aimants, a été mesurée à l'aide d'une sonde avant la mise en place de la cavité. Pour contrôler l'homogénéité, une fois la cavité en place et le tout sous vide, sept *solénoïdes* de diamètre 25 mm sont disposés régulièrement sur l'axe du jet : deux à l'extérieur de la cavité, de longueur 64 mm, et cinq entre les bras de la cavité, de longueur 146 mm. Ces solénoïdes, appelées aussi *bobines Zeeman*, parcourus par un courant alternatif vont créer une transition entre niveaux  $m$  voisins lorsque la fréquence excitatrice sera égale à la fréquence séparant deux niveaux (transition Zeeman). On peut en déduire le champ magnétique sachant que ces niveaux s'écartent de 3,5 GHz par Tesla. Cependant ces mesures ne sont pas très précises car l'amplitude du champ oscillant varie longitudinalement et transversalement. De plus un léger désalignement angulaire en-

traîne une erreur de fréquence. Il s'agit donc plus d'un contrôle que d'une mesure.

#### 2.1.4. Les zones d'interaction optique

Deux zones d'interaction sont situées de chaque côté de la cavité. En principe, une zone de chaque côté est suffisante. L'intérêt d'en avoir deux, outre plus de souplesse pour renverser le jet, est essentiellement de pouvoir faire varier la distance entre la zone d'interaction et la cavité micro-onde, qui est la seule méthode dont nous disposons pour mesurer le déplacement lumineux dû à la lumière de fluorescence des atomes pompés (voir chapitre 7).

Les faisceaux lasers traversent l'enceinte, perpendiculairement au jet, grâce à des hublots traités anti-reflets. Un miroir diélectrique sphérique ( $R = 62$  mm) placé sous le jet en fait l'image sur lui-même. Deux lentilles asphériques (de diamètre 52 mm), au dessus du jet, en forment l'image sur l'extrémité d'un barreau de verre, qui conduit la lumière à travers les blindages magnétiques sur une photodiode placée sous vide, mais à l'extérieur des blindages. Des diaphragmes en graphites bloquent, sauf sur l'axe, la propagation de la lumière parasite ou de fluorescence vers la cavité.

## 2.2. Montage Optique

Le montage optique est représenté sur la Fig. 2-2. La source laser est une *diode* laser, SDL modèle 5422 (150 mW), placée en cavité externe et *asservie* par absorption saturée sur la transition  $F = 4 - F' = 4$  de la raie  $D_2$  du césium (852 nm). Le faisceau laser est envoyé avec une polarisation  $\sigma$  dans la zone de pompage. Une partie du faisceau est décalée spatialement et en fréquence par un modulateur Acousto-Optique pour coïncider avec la transition  $F = 4 - F' = 5$ . Ce dernier faisceau polarisé *circulairement* est envoyé dans la zone de détection. Un ensemble, lame retard  $\lambda/2$  + cube polariseur, permet de basculer très facilement le faisceau d'un côté à l'autre lors du renversement du jet. Les puissances utilisées sont 1,3 mW au pompage et 100  $\mu$ W à la détection.

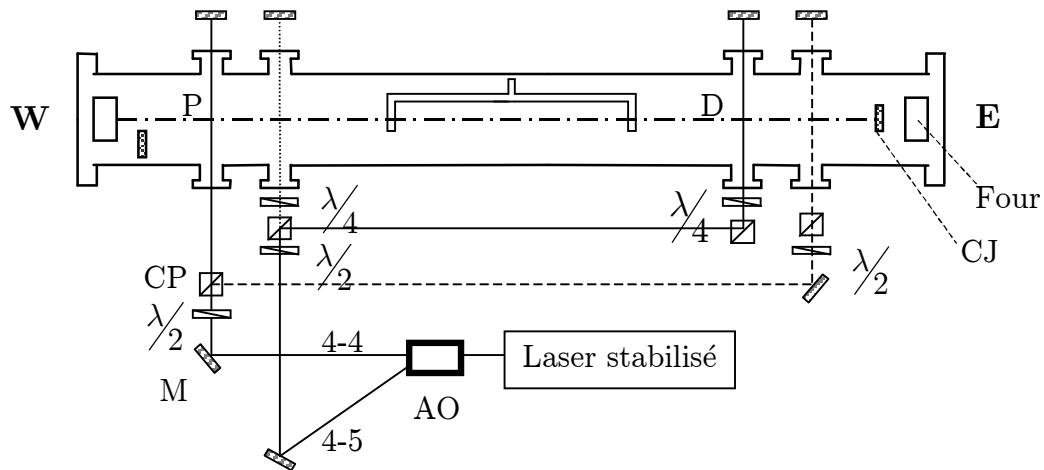


Fig. 2-2 : Montage optique.

P = zone de pompage, D = zone de détection, CJ = coupe-jet,  $\lambda/2$  et  $\lambda/4$  = lames retard, CP = cube polariseur, M = miroir, AO = modulateur acousto-optique, **W** = ouest, **E** = est.

Afin d'éviter tout effet sélectif en vitesse ou de déflexion du jet par la pression de radiation, nous utilisons des *ondes stationnaires* pour le pompage et la détection. De plus, la perpendicularité des faisceaux avec le jet est réglée à mieux que le milliradian.

Le *pompage* optique est pratiquement *complet*. Le nombre relatif d'atomes demeurant dans le niveau  $F = 4$  après pompage est de l'ordre de  $10^{-4}$ . Les autres atomes sont répartis dans les sous niveaux ( $F = 3, m$ ) de manière inégale mais symétrique par rapport à  $m$ .

Après traversée de la cavité nous détectons les atomes ayant subi la transition  $(F = 3, m = 0) \rightarrow (F = 4, m = 0)$  à l'aide de la transition optique  $F = 4 \leftrightarrow F' = 5$ . Cette transition est utilisée car elle ne permet pas de pompage optique,  $F = 3 \leftrightarrow F' = 5$  étant interdite par les règles de sélection. Les atomes dans l'état 4 vont donc absorber et émettre des photons pendant toute la traversée du faisceau laser. Les atomes lents émettent donc plus de photons que les atomes rapides. Ceci entraîne une pondération par  $1/v$  de la distribution de vitesse des atomes détectés par rapport à la distribution réelle des atomes dans le jet (nous y reviendrons au chapitre 4).

Pour certaines expériences nous utilisons un pompage à deux lasers (cf. chap. 1). Dans ce cas le deuxième laser est une diode DBR, de fabrication SDL, asservie sur la transition  $F = 3 \leftrightarrow F' = 3$  de la raie  $D_1$  du césium.

## 2.3. La cavité de Ramsey

Au cœur de l'horloge se situe la cavité micro-onde. Celle-ci est en guide d'onde, en forme de U, conformément à la méthode d'interrogation par deux champs oscillants séparés proposée par Ramsey [3]. Le U est dans le plan E, qui est dans le plan horizontal, de façon à ce que le champ oscillant soit vertical, parallèle au champ magnétique statique (Pour plus de détails théoriques concernant la cavité micro-onde, voir l'annexe D).

La cavité de Ramsey a été étudiée au laboratoire. Sa réalisation a été précédée par une phase de conception. Elle consistait à faire des tests sur un prototype fabriqué à l'atelier de mécanique de l'observatoire de Paris.

### 2.3.1. Phase de conception

Elle consistait à faire des tests de réglage d'une cavité assemblée de plusieurs tronçons de guides d'onde et plusieurs types de jonctions entre la cavité et la source hyperfréquence. Dans un premier temps, nous avons testé une jonction micro-onde comme celle de la Fig. 2-3. Le choix de cette jonction est dû principalement à des contraintes géométriques concernant la taille (diamètre) de notre tube.

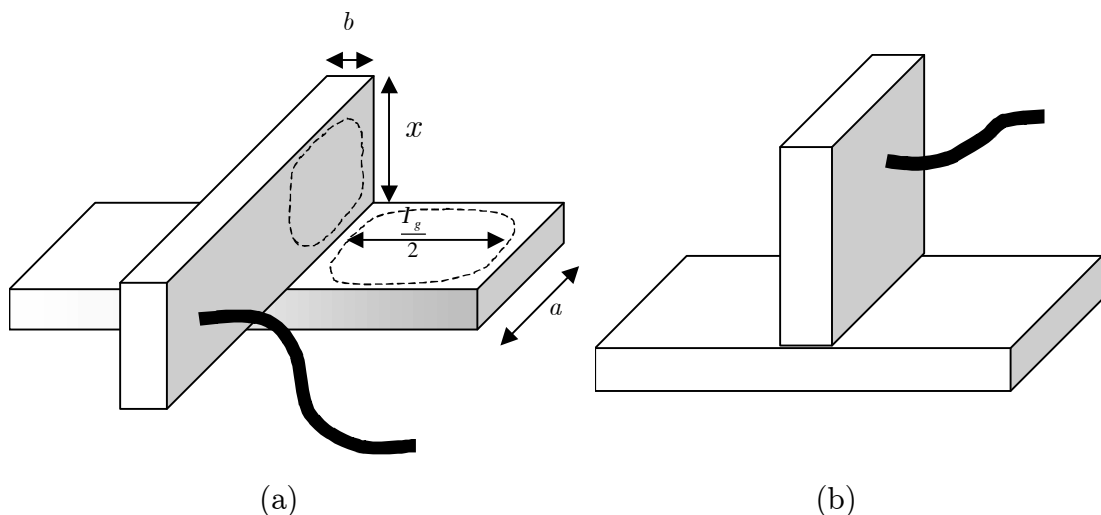


Fig. 2-3 : (a) *Jonction de test*, (b) *jonction en T classique*.

La Fig. 2-4 représente le montage de test utilisé pour étudier cette jonction.

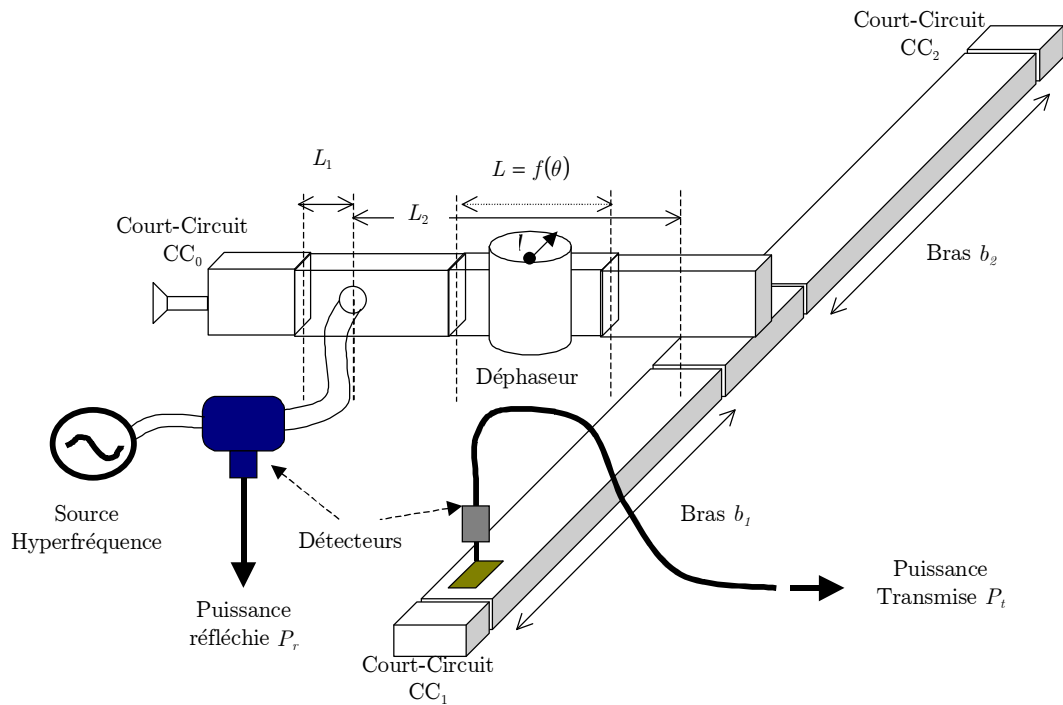


Fig. 2-4 : *Montage expérimental de test.*

Rappelons que cette jonction a été réalisée à l'atelier et que les bras  $b_1$  et  $b_2$  sont en guide d'onde bande X standard.

Un étalonnage des court-circuits mobiles et de tous les éléments du montage (détecteurs, déphaseurs, puissance mètre, coupleur) a précédé les mesures, afin de mettre en évidence le rôle et l'influence de chacun de ces paramètres sur la réponse de la cavité.

Le comportement de la cavité en fonction de la longueur de l'antenne d'excitation a aussi fait l'objet de différents tests de vérification.

Précisons que le déphaseur et le court-circuit  $CC_0$  permettent de régler les distances  $L_1$  et  $L_2$  de la Fig. 2-4. Les courts-circuits  $CC_1$  et  $CC_2$  permettent de régler la symétrie des deux bras de la cavité par rapport au plan d'excitation.

Dans un deuxième temps nous avons testé un autre type de jonction. Il s'agit du type de jonction représenté par la Fig. 2-5.

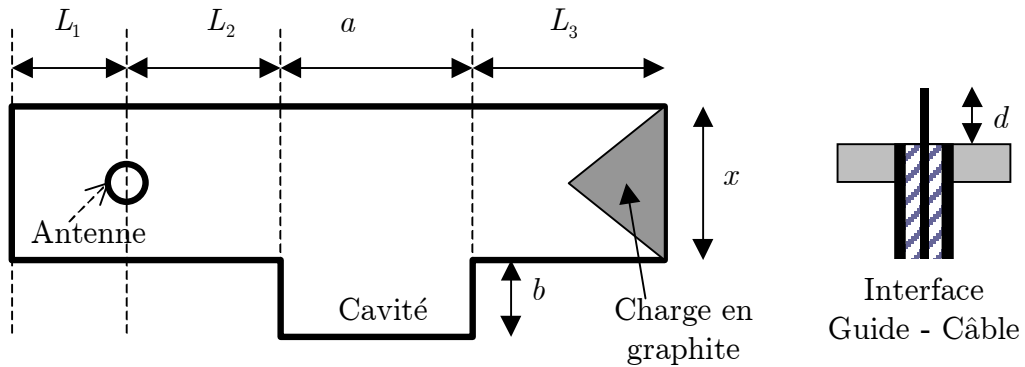


Fig. 2-5 : Jonction test doublement couplée.

L'avantage de cette jonction c'est de pouvoir réaliser une cavité doublement couplée (d'un côté par la source et de l'autre côté par une charge en graphite). Un choix judicieux de la position de la charge et de l'antenne permet d'optimiser le couplage en terme de Taux d'Ondes Stationnaires (TOS) et de facteur de qualité de la cavité chargée. Pour la jonction finale nous avons choisi les dimensions suivantes :

$$L_1 \approx 11 \text{ mm réglable}, L_2 = \frac{a}{2}, L_3 = 35 \text{ mm réglable}, x = \frac{\lambda_g}{2}, d = 5 \text{ mm}.$$

Ces valeurs donnent un TOS de 1,37 et un facteur de qualité en transmission  $Q_t$  de 425. Nous avons aussi noté les résultats suivants :

1. Un réglage fin du court-circuit  $CC_0$  situé derrière l'antenne permet d'ajuster la fréquence de résonance sans modifier le facteur de qualité. Plus précisément, l'action d'avancer le court-circuit vers l'antenne induit l'augmentation de la fréquence de résonance.
2. L'enfoncement de l'antenne permet d'ajuster le TOS tout en modifiant la fréquence de résonance (diminution) et le facteur de qualité (diminution)
3. L'annulation de la différence de phase  $\phi$  entre les deux champs dans les deux zones d'interaction avec les atomes<sup>1</sup>, ne dépend pas du couplage. Il est par contre très sensible à la dissymétrie des deux bras de la cavité.

Cette phase de conception et d'étude de la sensibilité des différents éléments du montage a été finalisée par sa réalisation selon le procédé d'électroformage.

<sup>1</sup> Cette différence de phase est proportionnelle à l'amplitude des modes impairs excités en présence d'une dissymétrie électrique entre les deux bras. Elle entraîne un déplacement de fréquence appelé "phase shift" proportionnel à  $\phi$  qui sera étudié en détail au chapitre 7.



### 2.3.2. Phase de réalisation et de réglage

Le matériau utilisé pour la réalisation de la cavité est le cuivre pur. Ses dimensions internes sont celles d'un guide d'onde bande X ( $a = 22,86 \text{ mm}$ ,  $b = 10,16 \text{ mm}$ ). Sa longueur électrique totale est  $48 \frac{\lambda_g}{2}$  ; où  $\lambda_g$  ( $\lambda_g = 46,532 \text{ mm}$ ) est la longueur d'onde dans le guide à la fréquence du césium.

La cavité est constituée de trois parties : une partie centrale droite comportant un couplage avec un câble coaxial semi-rigide pour son alimentation, et de deux parties terminales symétriques courbées selon la Fig. 2-6.

Ces deux parties se terminent par un court-circuit, avec une fente (au ras du court-circuit) pour le passage du jet dont la longueur est  $4 \text{ mm}$  et la hauteur  $3 \text{ mm}$ . La longueur électrique de la partie centrale est  $15\lambda_g / 2$ . Celle de chaque extrémité est  $16,5\lambda_g / 2$ .

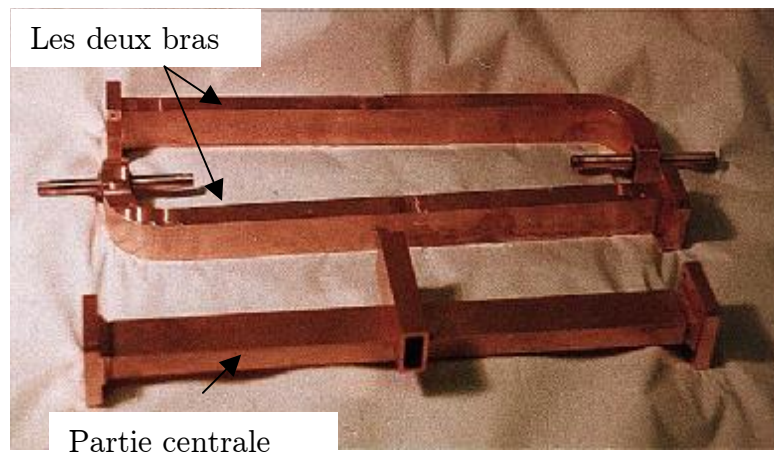


Fig. 2-6 : Les trois parties constituant la cavité.

Après l'assemblage de ces trois parties (voir Fig. 2-7), un montage de test plus élaboré que le précédent a été monté. Il visait principalement à régler la symétrie électrique de la cavité afin de rendre la différence de phase  $\phi$  nulle.

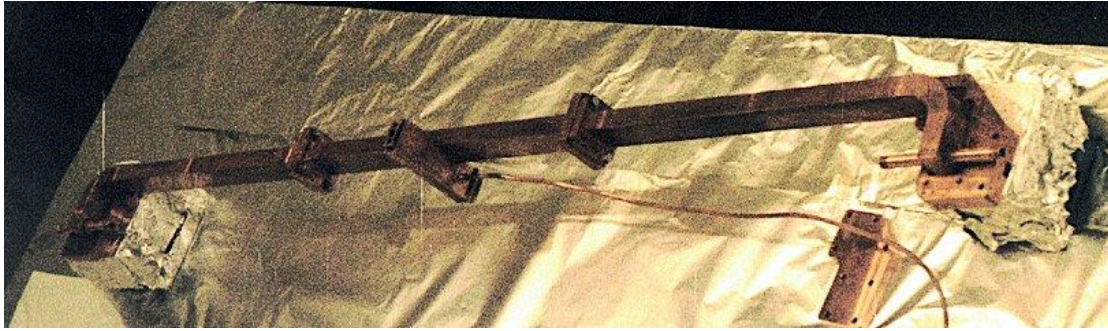


Fig. 2-7 : *Assemblage de la cavité.*

Concernant le couplage entre le câble coaxial et le guide d'onde, nous avons réussi à réaliser un bon couplage ( $TOS = 1,3$  et  $Q = 800$ ) sans utiliser le graphite comme charge électrique. Par conséquent, nous avons envisagé un montage final sans graphite.

Pour régler la symétrie électrique, nous avons minimisé l'amplitude des modes impairs ( $n = 47$  et  $n = 49$ ) voisins du mode pair  $n = 48$  dont la fréquence de résonance sous vide est égale à la fréquence de transition de césium. Pour modifier l'amplitude de ces modes impairs, nous changeons la longueur totale de la cavité. Ceci a été effectué en insérant deux cales d'épaisseur égale à  $\frac{\lambda_g}{4}$  entre la partie centrale et les bras. Dans ce cas, la fréquence de transition de césium correspond à un mode impair qui s'annule si la cavité est électriquement symétrique par rapport au plan de couplage. Ensuite, nous avons fait varier la température des bras en les chauffant pour changer leur longueur. La Fig. 2-8 montre le montage expérimental final utilisé pour le réglage de la symétrie. Dans ce montage, le fil chauffant permet de modifier la température d'un bras, et les thermistances permettent de mesurer la température en une dizaine de points le long de la cavité. Un gradient de température est ensuite calculé, par interpolation, et les dimensions de la cavité sont estimées connaissant le coefficient de dilatation du cuivre. Les sondes placées à proximité des fentes de passage du jet permettent d'enregistrer la réponse de la cavité en transmission sans modifier la distribution du champ à l'intérieur de la cavité.

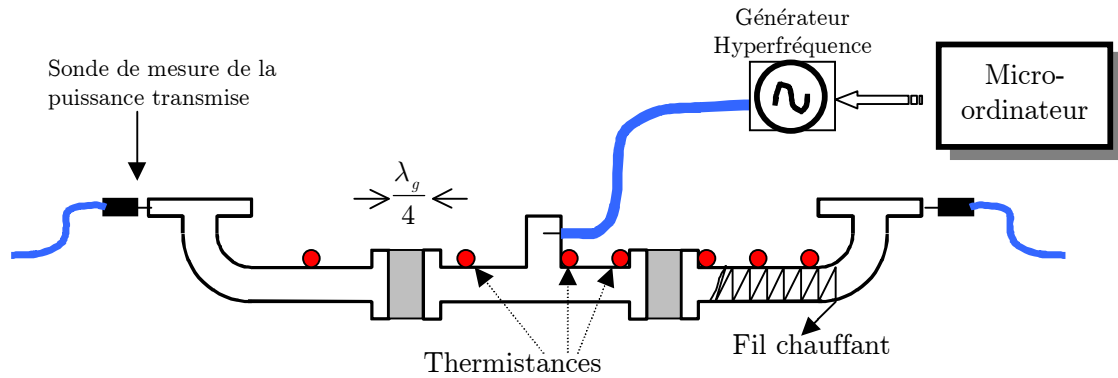


Fig. 2-8 : Montage de réglage de la symétrie.

La Fig. 2-9 montre la puissance transmise mesurée par une sonde en fonction de la fréquence pour 3 températures mesurées par une des thermistance de la Fig. 2-9. Nous remarquons sur cette figure que le mode impair s'annule pour la température  $T_2$  et qu'il change d'allure en passant par la longueur qui réalise une cavité symétrique.

En utilisant cette méthode, nous avons estimé qu'il fallait raccourcir un bras de  $225 \mu\text{m}$ . Le bras correspondant a été repris à l'atelier de mécanique et la symétrie électrique a été vérifiée. Ensuite, les trois pièces ont été reliées entre elles par des brides, avec un joint d'étain intercalé [4] afin d'éviter toute fuite de rayonnement micro-onde qui serait catastrophique. Pour la même raison, le câble coaxial a été soudé sur la cavité, et des tubes de cuivre, de diamètre intérieur  $6 \text{ mm}$  et de longueur  $40 \text{ mm}$ , ont été soudés devant chaque fente de passage du jet. Ces tubes ont le rôle de guide sous-coupe.

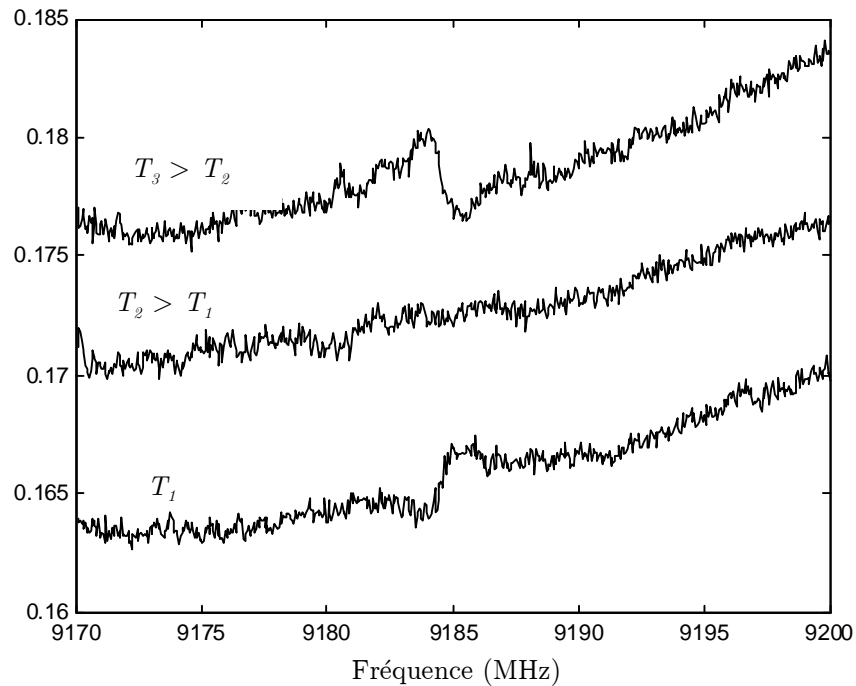


Fig. 2-9 : Réponse de la cavité en fonction de la température d'un bras.

Après soudage, la fréquence de résonance et le facteur de qualité de la cavité ont été modifiés (dans le mauvais sens bien sûr). Finalement notre cavité a un facteur de qualité  $Q \approx 1800$  et une fréquence de résonance sous vide qui varie avec la température selon la Fig. 2-10. Dans le montage final la température est mesurée à l'aide d'une résistance platine fixée sur chaque bras de la cavité.

Finalement nous avons tenté de mesurer la puissance des fuites micro-ondes à l'aide d'un cornet bande X, de plusieurs amplificateurs en série, et d'un analyseur de spectre. La puissance des fuites, ainsi mesurée, par rapport à la puissance envoyée dans la cavité est inférieure à -154 dB. La mesure est limitée par des fuites provenant de la source hyperfréquence utilisée, ainsi que des connexions.

Les résultats obtenus avec cette cavité en terme de déplacements de fréquence liés à la différence de phase et à l'entraînement par la cavité seront discutés au chapitre 7.

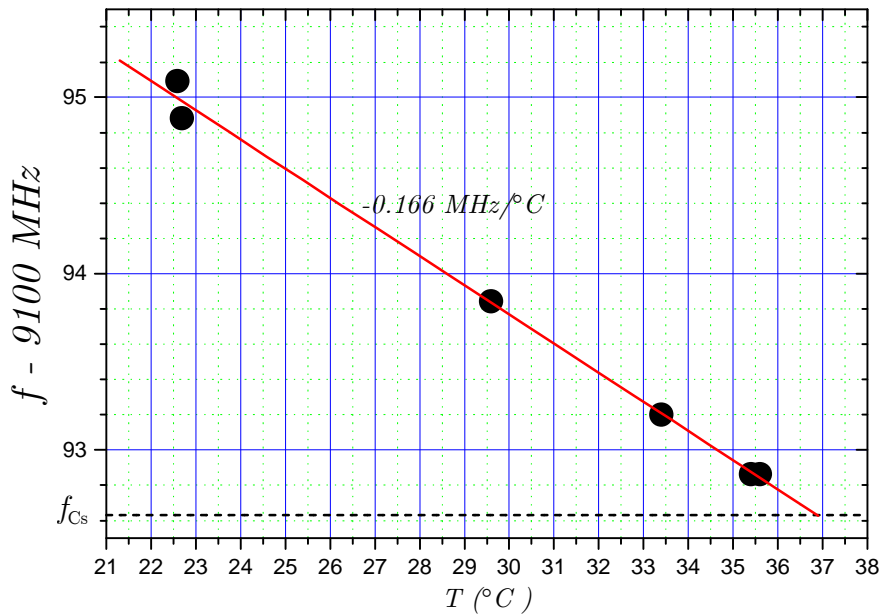


Fig. 2-10 : Fréquence de résonance en fonction de la température.

## 2.4. Génération du signal hyperfréquence

La chaîne de multiplication de fréquence a été fournie par la PTB [5]. La Fig. 2-11 montre un schéma bloc de cette chaîne et du système de contrôle et de mesure utilisé.

La fréquence 5 MHz de l'oscillateur local VCXO à quartz est multipliée par 20 ( $5 \times 2 \times 2$ ) dans une première étape, puis par 92 dans une deuxième étape. Le signal à 100 MHz de la première étape est verrouillé sur la fréquence d'un signal de référence externe provenant d'un Maser dans notre cas.

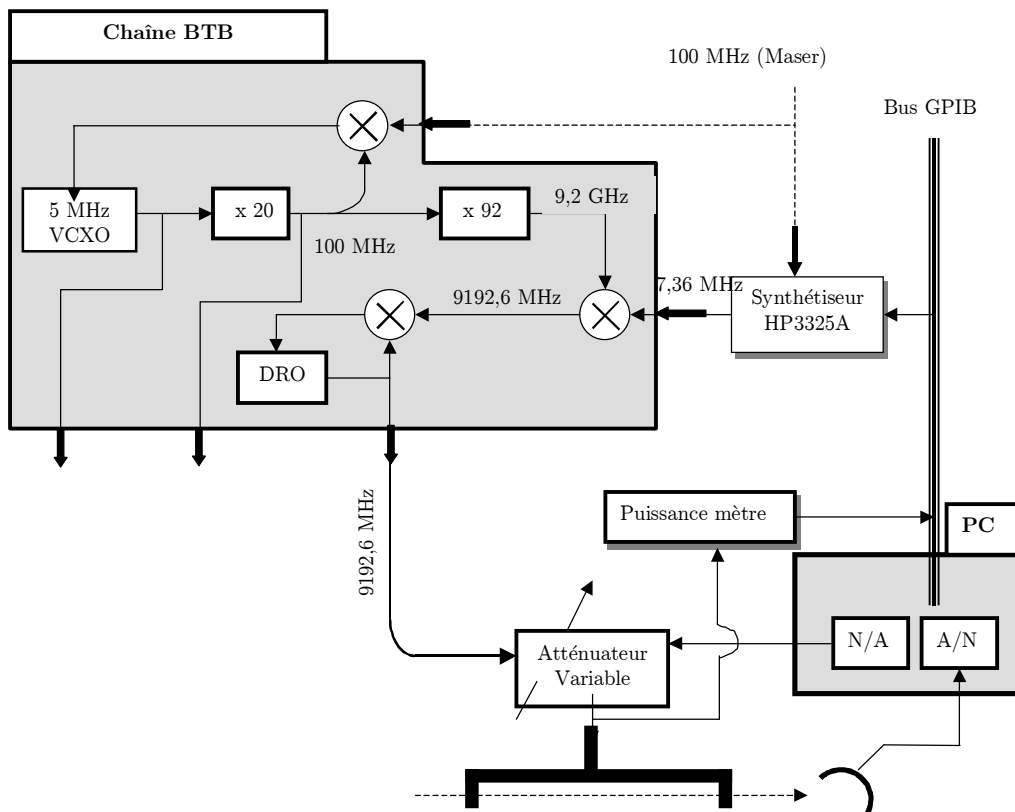


Fig. 2-11 : Chaîne de génération de signal hyperfréquence.

Un signal de fréquence 7,368 MHz provenant d'un synthétiseur HP3325A, synchronisé sur le quartz 5 MHz et commandable par ordinateur, est additionné en fréquence au signal de 9200 MHz sortant de la deuxième étape de multiplication pour donner une fréquence de 9192,6 MHz. Cette dernière sert à verrouiller la fréquence d'un Oscillateur à Résonateur Diélectrique (DRO). La sortie du DRO passe par un atténuateur commandable afin de pouvoir modifier sa puissance, avant d'alimenter la cavité micro-onde.

Le bruit de phase de cette chaîne a été mesuré contre une deuxième chaîne réalisée dans notre laboratoire. La figure 2-12 montre les résultats des mesures.

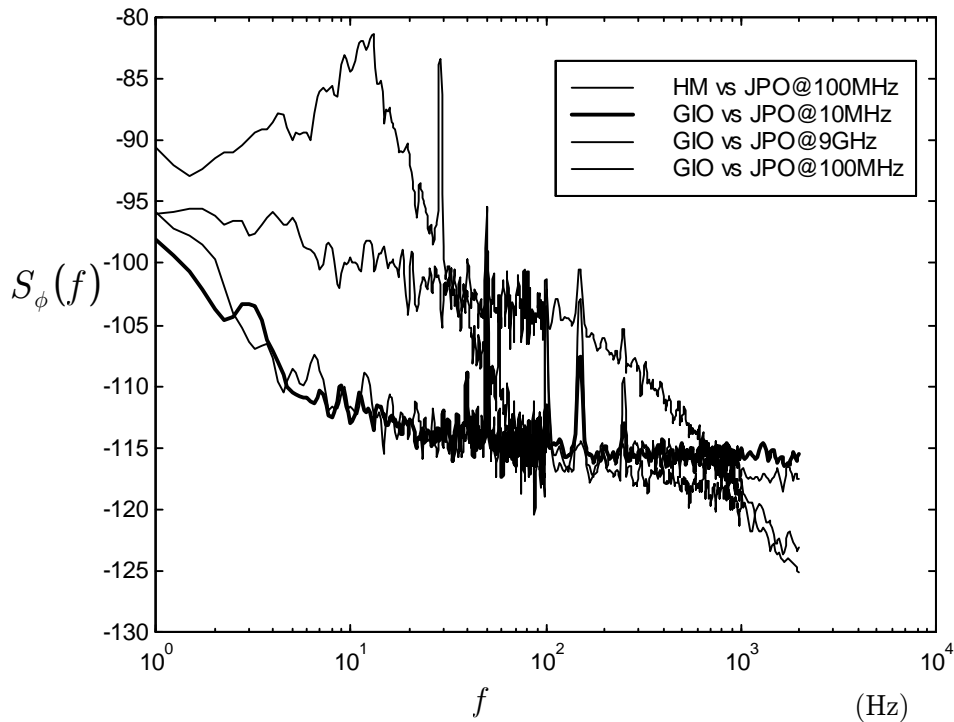


Fig. 2-12 : *Bruit de la chaîne JPO contre celui de la chaîne GIO du laboratoire et celui du notre Maser à hydrogène.*

## 2.5. Informatique de contrôle et de gestion

Le contrôle des opérations de mesure et d'asservissement<sup>1</sup> est fait d'une façon numérique. Un micro-ordinateur (PC) fonctionnant sous le système d'exploitation Windows95, est équipé d'une carte d'acquisition et d'une carte GPIB.

La carte d'acquisition est la carte MOI-16X de chez *National Instruments*. Elle contient un convertisseur Analogique/Numérique de résolution 16bits. Il permet l'échantillonnage de deux signaux analogiques à une fréquence de 100 kHz en utilisant son horloge (quartz) interne. En plus, deux sorties analogiques sont disponibles. Elles convertissent en tension les signaux numériques (chiffres) après troncature à 16 bits. La carte fonctionne dans la plage  $[-10 V, +10 V]$ . Une entrée A/N est utilisée en permanence pour mesurer le signal d'horloge. L'autre est utilisée occasionnellement pour certaines mesures. Une sortie N/A est utilisée pour commander l'atténuateur variable. La carte a été fournie avec un pilote (driver) qui consiste en une machine virtuelle (VxD = Virtual Device

<sup>1</sup> Voir le chapitre 5 pour plus de détails sur la boucle d'asservissement et sa réalisation.

Driver) et une bibliothèque de lien dynamique (DLL = Dynamic Link Library) qui permet d'interfacer d'autres applications avec le VxD.

La carte GPIB sert à passer des commandes et recevoir des données avec les appareils de mesure qui reconnaissent les protocoles de communication sur Bus GPIB. Elle est aussi de chez National Instrument et a été fournie avec une VxD et une DLL. Pendant le fonctionnement normal de l'horloge, deux appareils sont gérés par cette carte : le synthétiseur numérique de fréquence HP3325A et le puissance mètre HP437B. D'autres appareils ont été utilisés pendant la phase de conception et de réglage de la cavité micro-onde.

Les applications développées pour gérer les mesures et l'asservissement sont écrites en langage MATLAB version 5.1 de chez Mathworks. MATLAB est un environnement de script<sup>1</sup> qui supporte la programmation Orientée Objet. Nous l'avons choisi pour sa puissance en calcul numérique, en affichage graphique et surtout en facilité d'apprentissage et de programmation.

Les bibliothèques dynamiques fournies avec les cartes ne sont pas accessibles directement dans MATLAB. Pour cela, nous avons développé une bibliothèque dynamique (DLL), en C++, accessible par MATLAB, qui fait l'interface avec les DLL fournies avec les cartes. La Fig. 2-13 montre les couches de programmation utilisées pour réaliser la gestion de notre système de mesure et d'asservissement.

---

<sup>1</sup> Dans un langage de script, le programme est un fichier texte contenant une suite de commande à exécuter. Ce fichier n'est pas compilé une fois pour toute pour générer un exécutable binaire, donc l'application est toujours visible. Par contre, il est analysé en terme d'erreur de syntaxe à chaque démarrage, puis il est stocké en mémoire pour être exécuté.



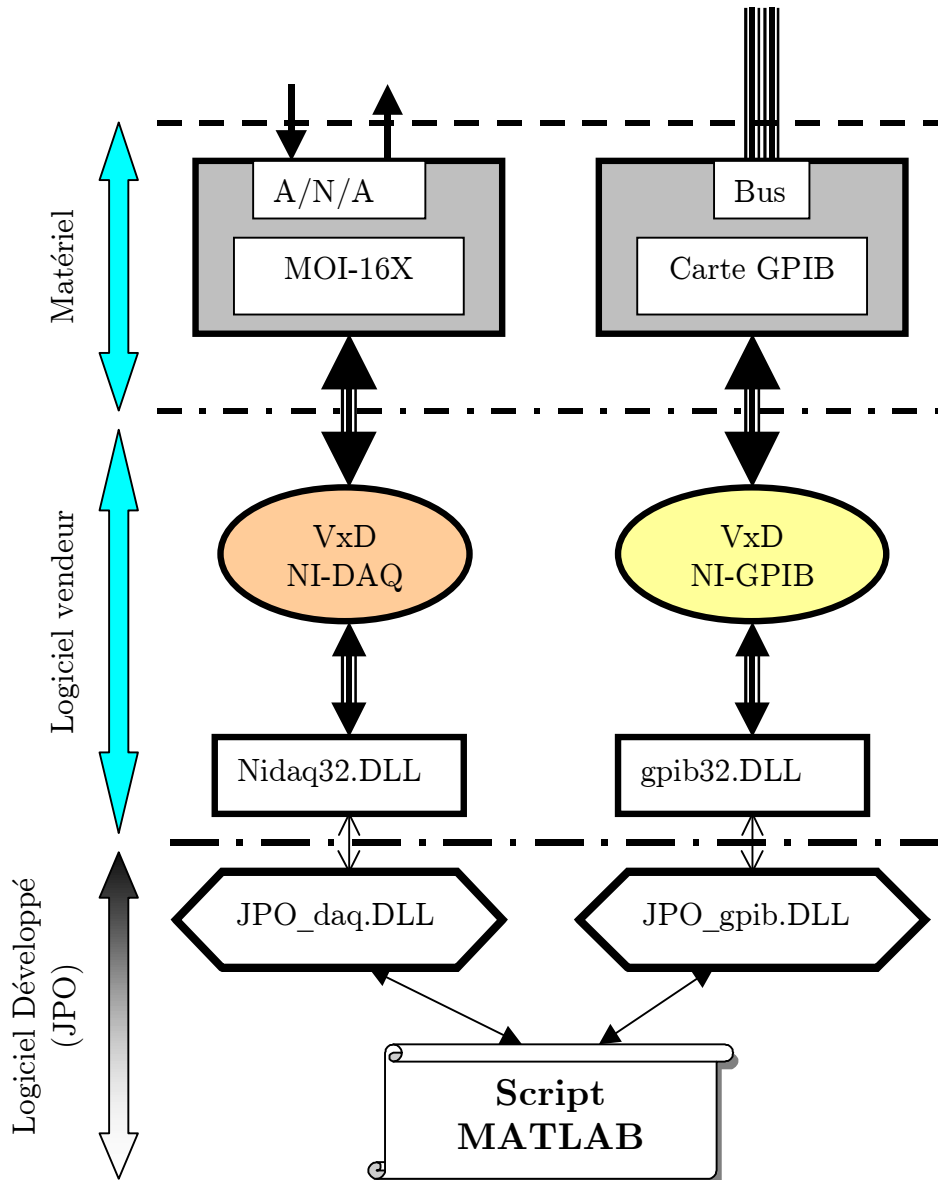


Fig. 2-13 : Couches de programmation dans l'informatique du JPO.

## 2.6. Conclusion

Nous avons présenté les différentes parties constituant notre horloge atomique JPO. Le tube, les fours, le champ statique ainsi que le montage optique ont été décrits brièvement. Nous avons montré plus en détails les phases de conception, de réalisation, et de réglage de la cavité micro-onde sans trop insister sur les problèmes techniques rencontrés lors des étapes qui ont conduit, au bout de deux ans, à notre cavité finale. Ensuite, une description de la chaîne micro-onde et de son interface avec l'horloge atomique a été donnée. Enfin, nous avons décrit l'informatique de gestion des mesures dans l'horloge. Nous avons choisi une

interface informatique unique en son genre, qui permet une modification très facile et un apprentissage très rapide. Ceci réduit énormément le temps de diagnostic des pannes ainsi que le temps de développement de nouvelles méthodes pour améliorer l'évaluation de notre horloge.

---

## Bibliographie

- [1] S. Belkhalfi-Bouزيد, "Evaluation des principaux effets affectant l'exactitude d'un étalon de fréquence à jet de césium pompé optiquement", Thèse de doctorat de l'université Paris XI, Orsay, 1992.
- [2] M. Morris, "Shielded four-conductor magnetic field assembly", *Rev Sci. Instr.*, 55(9), 1483, September 1984.
- [3] N. F Ramsey, **Molecular Beams**, Oxford, Clarendon Pres, 1956.
- [4] R. Schröder, PTB, communication privée.
- [5] R. Schröder, "Frequency Synthesis in Primary Cesium Clocks", 5<sup>th</sup> EFTE, Besançon, 12-14 March, 1991, pp. 194 -200.

# Chapitre 3. ANALYSE DE LA FRANGE DE RAMSEY

---

La frange de Ramsey constitue le cœur d'une horloge atomique. Elle est sensible à tous les paramètres qui entrent en jeu dans la construction de l'horloge. C'est pourquoi une bonne compréhension de son équation (le modèle) permet d'extraire un maximum d'informations sur ces paramètres et permet ainsi d'améliorer l'exactitude finale d'une horloge. Dans ce chapitre nous présenterons une nouvelle approche, basée sur la théorie des systèmes, qui va nous permettre dans la suite de déterminer deux quantités importantes : la fréquence de Rabi et la distribution des vitesses des atomes.

## 3.1. La transition d'horloge

Nous avons donné dans l'équation (1-6) la probabilité de transition entre les niveaux  $\langle F = 3, m = 0 \rangle$  et  $\langle F = 4, m = 0 \rangle$  pour des atomes monocinétiques ayant une vitesse  $v$ . En réalité, chaque atome a une vitesse différente et il est impossible de connaître sa vitesse ainsi que le nombre exact des atomes. Il est alors plus plausible de traiter la vitesse  $v$  et en conséquence le temps de vol  $\tau$  comme une *variable aléatoire*. Plusieurs grandeurs sont souvent utilisées pour caractériser les variables aléatoires (moyenne, variance, etc. ...) mais la meilleure information que l'on peut espérer avoir est la *fonction de densité de probabilité* (Probability Density Function). Dans ce cas, la probabilité de transition  $P(\Omega_0, b, \tau)$  est une fonction d'une variable aléatoire et le signal détecté à la sortie de l'horloge n'est que la valeur moyenne (statistique) de cette probabilité de transition :

$$s(\Omega_0, b) = E_\tau [P(\Omega_0, b, \tau)] = \int_0^\infty f(\tau) P(\Omega_0, b, \tau) d\tau \quad (3-1)$$

où  $E_\tau$  signifie Espérance mathématique par rapport à la variable aléatoire  $\tau$  et  $f(\tau)$  est la fonction de densité de probabilité de  $\tau$ .  $f(\tau)$  vérifie les deux propriétés évidentes suivantes:

$$\begin{aligned} & \bullet f(\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0 \\ & \bullet \int_0^{\infty} f(\tau) = 1 \end{aligned} \tag{3-2}$$

La première signifie que le temps de vol ne peut être négatif et la seconde résulte de la définition même d'une fonction de densité de probabilité.

En pratique nous disposons du signal mesuré  $y(\Omega_0, b)$ , par le circuit électronique de détection, qui n'est que ce taux de transition moyen  $s(\Omega_0, b)$  à une constante (offset) et un gain près :

$$y(\Omega_0, b) = c_1 s(\Omega_0, b) + c_2 \tag{3-3}$$

La valeur de l'offset  $c_2$  peut être déterminée en mesurant le signal  $y(\Omega_0, b)$  pour un taux de transition nul ( $s(\Omega_0, b) = 0$ ), ce qui arrive quand la fréquence d'excitation est très loin de la fréquence atomique.

Le signal d'horloge  $y(\Omega_0, b)$  peut être présenté comme la sortie d'un système non linéaire variant dans le temps qui dépend de plusieurs paramètres comme le montre la Fig. 3-1.

Les paramètres de gauche de cette figure sont contrôlables par l'utilisateur et les quantités  $b$  et  $f(\tau)$  sont généralement inconnues. Des procédures spéciales sont effectuées (assez souvent à partir du signal mesuré  $y(\Omega_0, b)$ ) pour estimer leur valeurs.

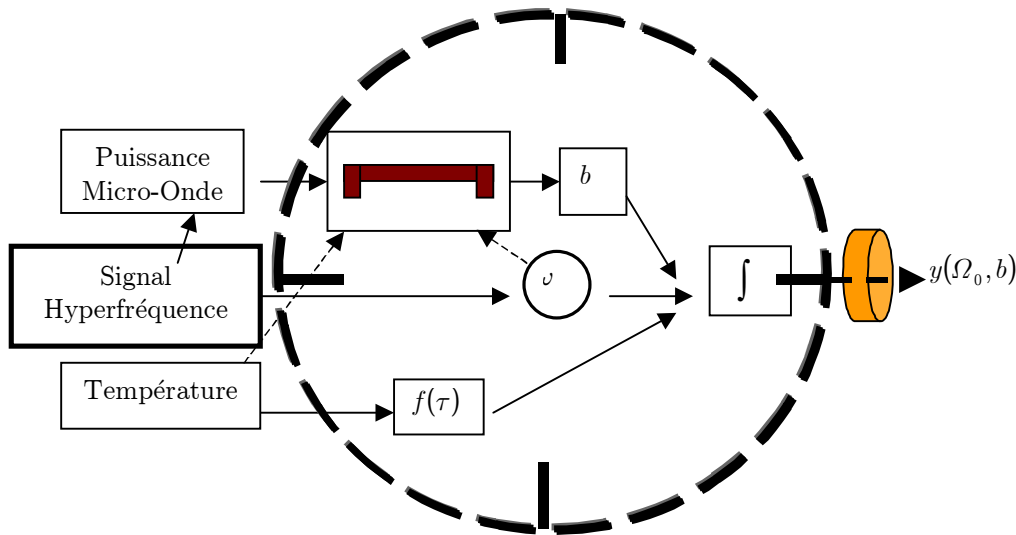


Fig. 3-1 : Représentation système de l'horloge

## 3.2. Les autres transitions

En plus de la transition d'horloge  $\langle 4,0 \rangle \leftrightarrow \langle 3,0 \rangle$ , les transitions qui peuvent être excitées par le champ magnétique hyperfréquence sont nombreuses. Les transitions pour lesquelles  $\Delta m = 0$  sont appelées transitions  $\sigma$ , celles pour lesquelles  $\Delta m = \pm 1$  sont appelées transitions  $\pi$ .

### 3.2.1. Les transitions $\sigma$

Les transitions  $\sigma$  sont dues à la composante du champ hyperfréquence qui est parallèle au champ magnétique statique C. Il y en a six en plus de la transition d'horloge. La fréquence de transition de celles-ci ( $\Delta m = 0, m \neq 0$ ) dépend linéairement au premier ordre du champ C suivant la formule de Breit-Rabi [1] :

$$\nu_{(m)} = \nu_0 \sqrt{1 + \frac{m}{2} x + x^2} \cong \nu_0 \left( 1 + \frac{m}{4} x \right)$$

avec  $x = 3.049549 B_0$  (3-4)

où  $B_0$  est l'amplitude moyenne du champ statique C en tesla entre les deux zones d'interrogation.

La probabilité de transition dans ce cas est donnée par l'équation (1-6) mais avec des pulsations de Rabi  $b_{(m)}$  qui dépendent de la transition suivant la relation ([2] et [3]) :

$$b_{(m)} = b_{(0)} \sqrt{1 - \left(\frac{m}{4}\right)^2} \quad (3-5)$$

où  $b_{(0)}$  est la pulsation de Rabi pour la transition d'horloge.

La distribution de temps de vol  $f(\tau)$  peut être elle aussi dépendante du nombre quantique  $m$  et on la note  $f_{(m)}(\tau)$ . Le signal mesuré pour ces transitions s'écrit sous la forme :

$$y(\Omega_0, b) = c_{1(m)} s_{(m)}(\Omega_0, b_{(m)}) + c_2$$

$$s_{(m)}(\Omega_0, b_{(m)}) = \int_0^{\infty} f_{(m)}(\tau) P(\Omega_0 - \omega_{(m)}, b_{(m)}, \tau) d\tau \quad (3-6)$$

avec  $\omega_{(m)} = 2\pi\nu_{(m)}$ ,  $c_{1(m)}$  étant un facteur de gain qui dépend du nombre d'atomes dans le niveau  $m$ .

Ces transitions sont utilisées pour extraire des informations concernant l'amplitude du champ statique à partir de la relation (3-4).

### 3.2.2. Les transitions $\pi$

Elles sont dues à la composante du champ hyperfréquence qui est perpendiculaire au champ statique C et elles sont donc d'amplitude faible par rapport aux transitions  $\sigma$ . Peu de travaux ont été consacrés à la modélisation de ces transitions à cause de la difficulté de modéliser d'une façon exacte le profil du champ hyperfréquence dans la cavité Micro-Onde. Leur probabilité de transition a été calculée en adoptant un modèle simple pour le profil de la composante orthogonale du champ hyperfréquence [4]. Un autre modèle de calcul, basé sur l'angle moyen entre le champ hyperfréquence et le champ statique, a conduit à une expression de taux de transition valable autour de la fréquence centrale de la transition d'horloge [5].

## 3.3. Spectre de résonance expérimental

Dans le cas d'un pompage à un seul laser, le taux de transition moyen mesuré est composé de 7 transitions  $\sigma$  et de 14 transitions  $\pi$ . La Fig. 3-2 montre un

spectre de résonance expérimental enregistré à puissance optimale (la puissance Micro-Onde qui maximise le taux de transition à la résonance). Sur cette figure, on distingue clairement les 7 transitions  $\sigma$ , qui sont séparées de 70.3 kHz (ce qui correspond à un champ statique d'amplitude  $B_0 = 10 \mu\text{Tesla}$ ). On remarque aussi que leur amplitude dépend du nombre quantique  $m$ .

Les transitions  $\pi$  ne sont pas très visibles sur cette figure vu leur taux de transition faible. La Fig. 3-3 montre un agrandissement du signal enregistré autour de la fréquence de transition d'horloge. La valeur du champ statique a été délibérément augmentée ( $B_0 = 15,6 \mu\text{Tesla}$ ) pour mieux séparer les transitions  $\sigma$  et ainsi mieux voir les transitions  $\pi$ .

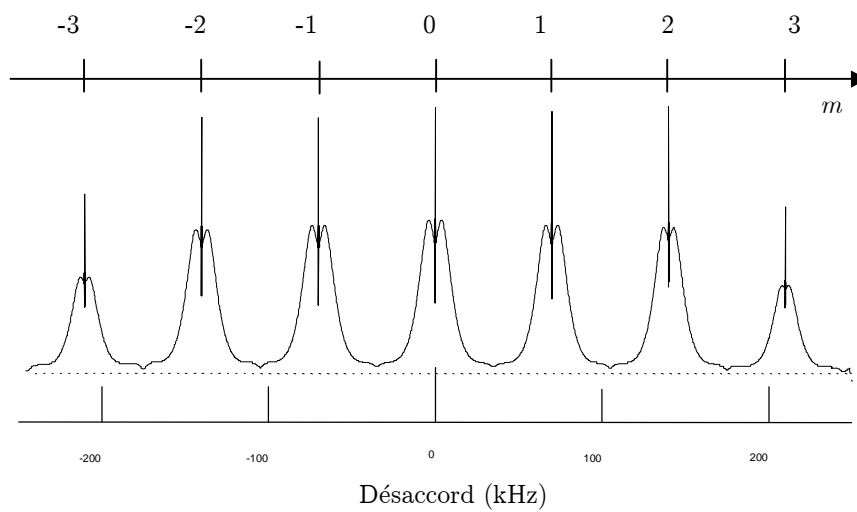


Fig. 3-2 : Spectre de résonance expérimental,  $B_0 = 10 \mu\text{ Tesla}$

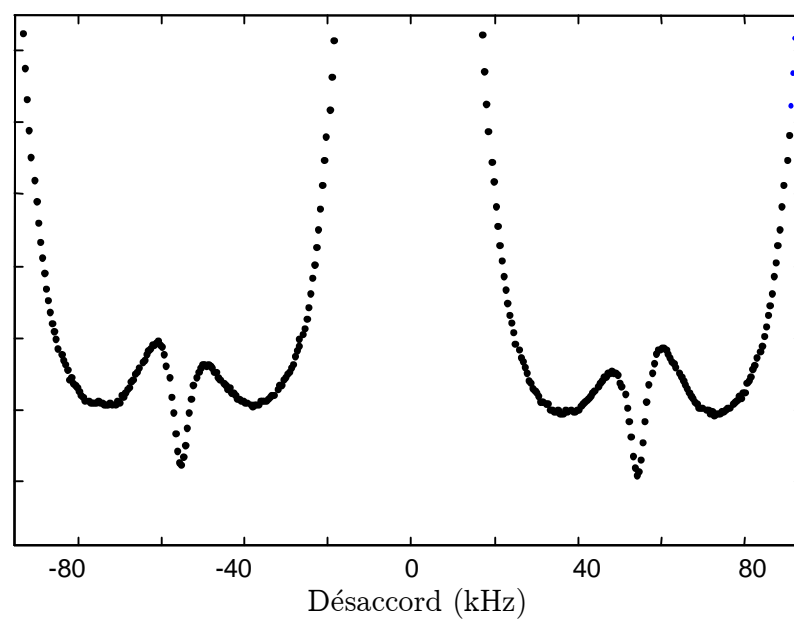
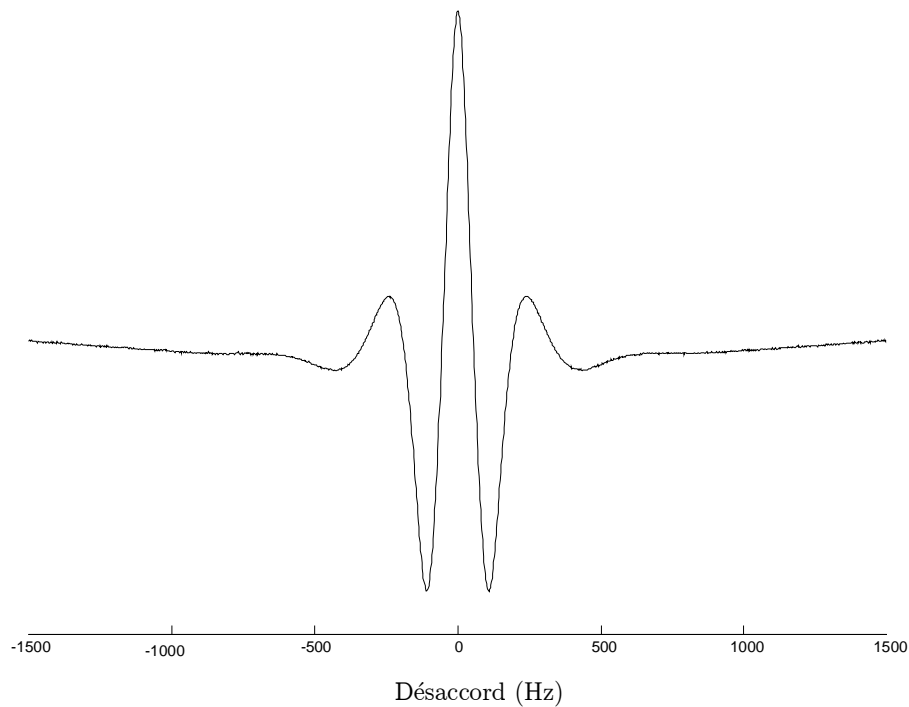




Fig. 3-3 : Transitions  $\pi$  visibles autour 55 Hz,  $B_0 = 15.6 \mu$  Tesla

La partie centrale de la transition d'horloge, qui jouera le rôle d'une raie de référence, est présentée dans la Fig. 3-4 pour une puissance micro-onde qui maximise le signal. Elle est caractérisée par une largeur à mi-hauteur de 100 Hz. La forme de cette raie, et ainsi sa largeur, dépend de la pulsation de Rabi  $b$  et de la distribution du temps de vol. Pour montrer cette dépendance vis à vis de la pulsation de Rabi nous montrons sur la Fig. 3-5 le signal à résonance en fonction de  $b$ . Cette courbe est appelée souvent la courbe  $I(b)$ . Elle a été enregistrée avec une valeur élevée du champ statique ( $B_0 \cong 30 \mu$ Tesla) pour réduire l'effet des transitions  $\sigma$  et  $\pi$  voisines de la transition d'horloge. Un amplificateur hyperfréquence a également été utilisé pour atteindre des valeurs élevées de  $b$ . A priori, les valeurs de  $b$  sont inconnues. Une mesure de la puissance micro-onde injectée dans la cavité est enregistrée, puis une conversion entre la puissance et  $b$  est effectuée, suivant la relation (3-19) qui sera expliquée plus loin dans ce chapitre.

Fig. 3-4 : Partie centrale expérimentale de la transition d'horloge.  $b = b_{opt}$

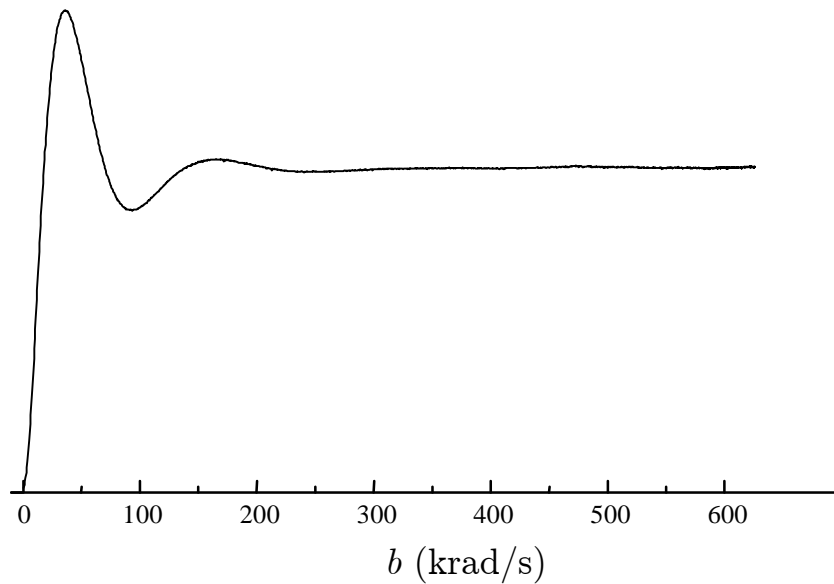


Fig. 3-5 :  $I(b)$  = Taux de transition expérimental en fonction de la fréquence de Rabi  $b$ ,  $\Omega_0 = 0$ ,  $B_0 \cong 30 \mu\text{Tesla}$

## 3.4. Partie centrale de la frange

### 3.4.1. Approximation d'ordre zéro

La partie intéressante de la frange de Ramsey, qui joue le rôle d'une raie de référence, est la partie centrale. Cette partie est caractérisée par la relation  $\Omega_0 \ll b$ . Si nous faisons l'approximation  $\frac{\Omega_0}{b} = 0$  dans l'équation (1-6), la probabilité de transition s'écrit alors, pour  $\phi = 0$  :

$$P(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) [1 + \cos(a\Omega_0\tau)] \quad (3-7)$$

où nous avons posé  $a = \frac{L}{\mathbf{1}}$  (voir Fig. 1-3).

En développant le terme en  $\sin^2(b\tau)$ , nous pouvons écrire :

$$P(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{4} [1 - \cos(2b\tau)] + \frac{1}{4} \left[ \cos(a\Omega_0\tau) - \frac{1}{2} \cos[(2b + a\Omega_0)\tau] - \frac{1}{2} \cos[(2b - a\Omega_0)\tau] \right] \quad (3-8)$$

Soit  $F(\xi)$  la *Transformée en Cosinus* de la fonction  $f(\tau)$ .  $F(\xi)$  est définie par :

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} f(\tau) \cos(\xi\tau) d\tau \quad (3-9)$$

Le taux de transition moyen s'écrit d'après (3-1), (3-2), (3-8) et (3-9) sous la forme:

$$s(\Omega_0, b) = \frac{1}{4} \left[ F(a\Omega_0) - \frac{1}{2} F(2b + a\Omega_0) - \frac{1}{2} F(2b - a\Omega_0) + 1_{C_1(b)} \frac{F(2b)}{4} \right] \quad (3-10)$$

Cette écriture montre que la partie centrale de la frange de Ramsey est composée de la superposition de trois termes qui ne sont que des translations de  $F(a\Omega_0)$ , plus un "offset"  $C_1(b)$  ne dépendant que de la pulsation de Rabi  $b$ . La Fig. 3-6 montre la forme de la partie centrale de la frange de Ramsey ainsi que les termes de la relation (3-10).

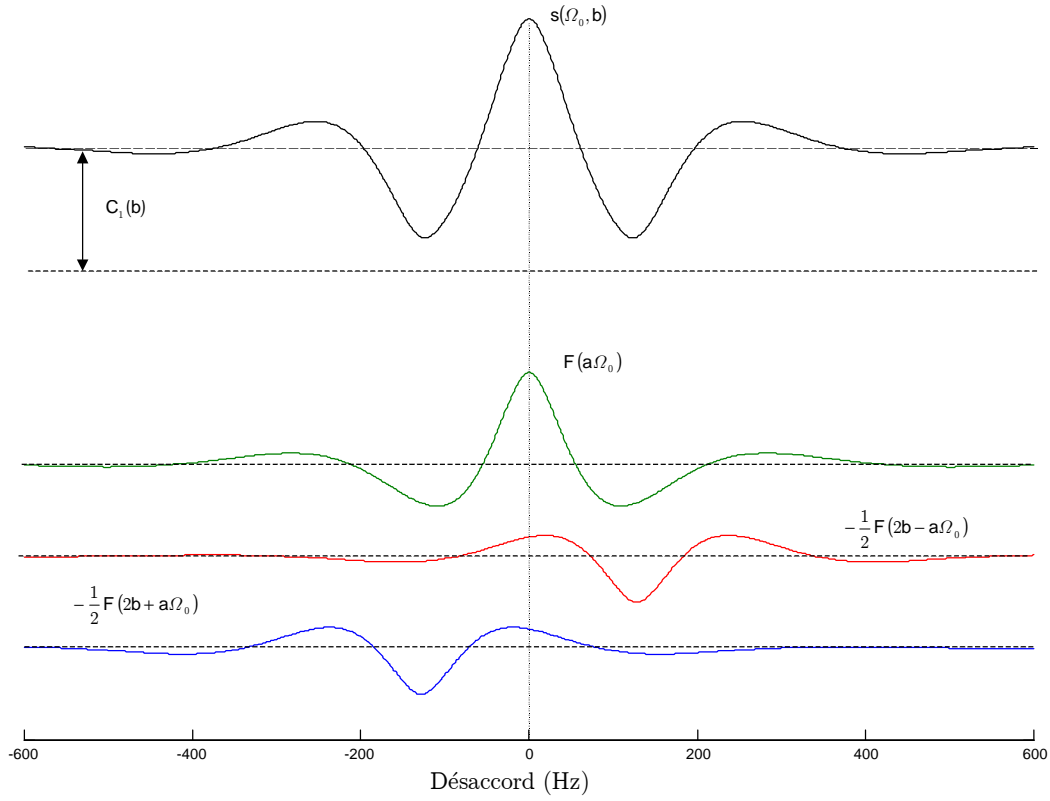


Fig. 3-6 : Décomposition de l'approximation d'ordre zéro de la frange de Ramsey

La relation (3-10) peut être écrite aussi en utilisant l'impulsion de Dirac  $\delta(\cdot)$  et l'opérateur de convolution  $*$  sous la forme [6] :

$$\begin{aligned}
 s(\Omega_0, b) &= \frac{1}{4} F(a\Omega_0) * \left[ \delta(a\Omega_0) - \frac{1}{2} \delta(2b - a\Omega_0) - \frac{1}{2} \delta(2b + a\Omega_0) \right] + \frac{1}{4} C_1(b) \\
 &= \frac{1}{4} F(a\Omega_0) * p(\Omega_0) + \frac{1}{4} C_1(b)
 \end{aligned} \tag{3-11}$$

Cette relation est à la base des méthodes d'estimation de la fréquence de Rabi qui seront développées dans la suite de ce chapitre.

### 3.4.2. Approximation du 1<sup>er</sup> ordre

L'approximation effectuée au paragraphe 3.4.1 en posant  $\frac{\Omega_0}{b} = 0$  n'est pas toujours justifiée. Une approximation du 1<sup>er</sup> ordre est indispensable dès qu'il s'agit des points de la frange centrale qui ne sont pas très proches du sommet. L'ap-

proximation du 1<sup>er</sup> ordre consiste à conserver les termes en  $\frac{\Omega_0}{b}$  dans l'équation de la probabilité de transition et à y négliger les ordres supérieurs.

Dans ces hypothèses, l'équation de la probabilité de transition dans un schéma d'interrogation de Ramsey s'écrit, d'après (1-6), pour  $\phi = 0$ , sous la forme :

$$P(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) [1 + \cos(a\Omega_0\tau)] - 2 \frac{\Omega_0}{b} \sin^2\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(b\tau) \sin(a\Omega_0\tau) \quad (3-12)$$

Ou encore, en utilisant l'identité  $\sin^2\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(b\tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right)$ , sous la forme :

$$P(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) \left[ 1 + \cos(a\Omega_0\tau) - 2 \frac{\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\Omega_0\tau) \right] \quad (3-13)$$

Le taux de transition *moyen* s'écrit en fonction de la Transformée en Cosinus  $F(\xi)$  de la distribution du temps de vol, comme dans le cas de l'approximation d'ordre zéro, sous la forme :

$$\begin{aligned} s(\Omega_0, b) = & \frac{1}{4} [1 - F(2b) \\ & + F(a\Omega_0) + 2 \frac{\Omega_0}{b} F(b + a\Omega_0) - 2 \frac{\Omega_0}{b} F(b - a\Omega_0) \\ & + \left(-\frac{1}{2} - \frac{\Omega_0}{b}\right) F(2b + a\Omega_0) + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\Omega_0}{b}\right) F(2b - a\Omega_0) ] \end{aligned} \quad (3-14)$$

La Fig. 3-7 montre la partie centrale d'une frange de Ramsey calculée en intégrant la probabilité de l'équation (3-13) pour une distribution de temps de vol théorique dont l'équation est donnée plus loin (équation 4-5). Le calcul est effectué pour une pulsation de Rabi optimale  $b = 34$  krad/s. La courbe en pointillés représente dix fois la différence entre la frange calculée avec une approximation d'ordre zéro et celle calculée avec une approximation du 1<sup>er</sup> ordre.

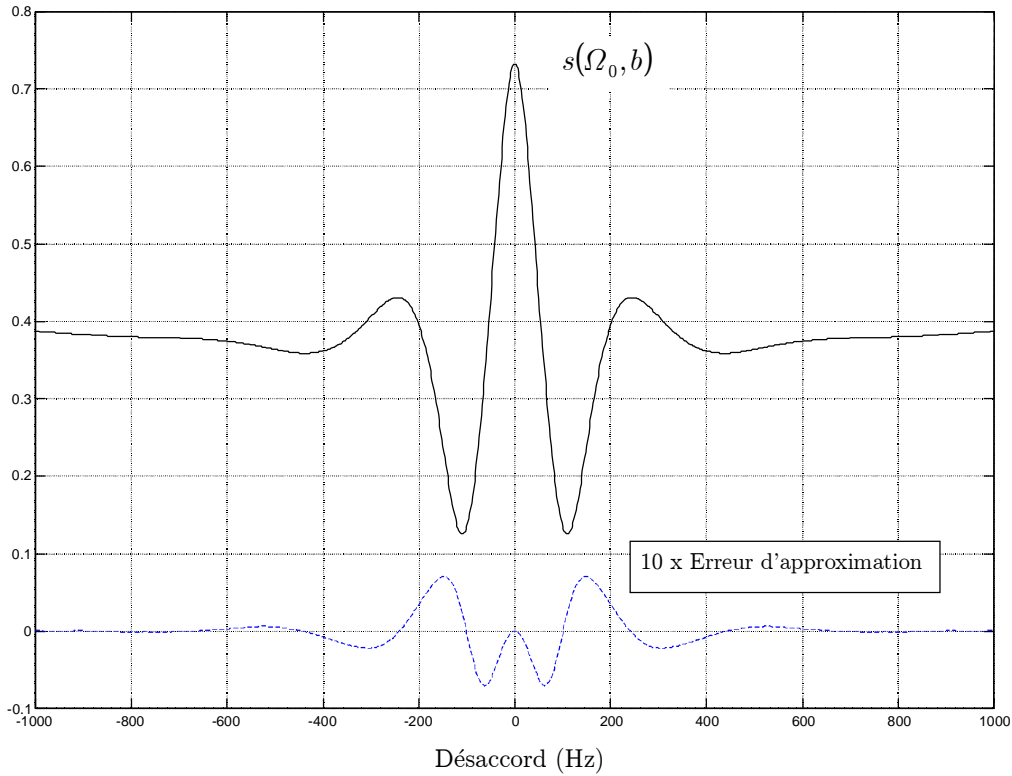


Fig. 3-7 : Frange de Ramsey théorique,  $b = 34$  krad/s.

L'erreur d'approximation peut atteindre le un pour cent dans certains points de la frange de Ramsey, ce qui n'est pas négligeable dans le calcul de certains effets d'amplitude importante (Doppler et phase) si une incertitude de quelques  $10^{-15}$  est souhaitable.

### 3.5. Le piédestal de Rabi

Nous pouvons remarquer à partir de la Fig. 3-2 que les franges de Ramsey se positionnent sur des collines beaucoup plus larges. Ces collines sont appelées les piédestaux de Rabi. Ils sont dus aux atomes qui ont été interrogés une seule fois par le champ hyperfréquence dans une des deux zones d'interrogation. Leur transition s'obtient à partir de la probabilité de transition de Ramsey, en remplaçant les termes oscillatoires  $\sin(a\Omega_0\tau)$  et  $\cos(a\Omega_0\tau)$  par leurs valeurs moyennes. Nous avons alors [2] :

$$P_3(\Omega_0, b, \tau) = \frac{b^2}{2\Omega^2} \left[ \sin^2(\Omega\tau) + \frac{\Omega_0^2}{\Omega^2} (1 - \cos(\Omega\tau))^2 \right] \quad (3-15)$$

Pour simplifier cette expression, nous développons deux approximations :

1) La première approximation consiste à écrire leur expression loin de leur centre, ce qui revient à supposer que  $b$  est petit devant  $\Omega_0$  et, par conséquent, à remplacer  $\Omega$  par  $\Omega_0$ . L'équation (3-15) devient alors :

$$P_3(\Omega_0, b, \tau) = \frac{b^2}{\Omega_0^2} [1 - \cos(\Omega_0 \tau)] \cong \frac{b^2}{\Omega_0^2}. \quad (3-16)$$

Le terme  $\cos(\Omega_0 \tau)$  peut être remplacé par zéro dans la mesure où il est très oscillatoire, et après intégration sur le temps de vol il devient nul. (3-16) est l'équation des ailes de la frange qui décroissent quadratiquement en fonction du désaccord  $\Omega_0$ .

2) La deuxième approximation est valable autour du centre de la frange. Elle consiste à négliger  $\Omega_0$  devant  $b$  ( $\Omega = b$ ). Dans ces conditions, l'équation (3-15) s'écrit sous la forme :

$$P_3(\Omega_0, b, \tau) = \frac{1}{2} \left[ \sin^2(b\tau) + \frac{\Omega_0^2}{b^2} (1 - \cos(b\tau))^2 \right]. \quad (3-17)$$

Notons que le piédestal de Rabi varie quadratiquement en fonction de  $\Omega_0$  autour du centre de la frange. Ceci est visible sur la Fig. 3-4 où la frange se positionne sur une parabole.

Le centre des piédestaux de Rabi pour les différentes transitions  $\sigma$  est donné par l'équation (3-4), mais en prenant la valeur moyenne du champ statique  $C$  sur les deux zones d'interrogation et non pas sur la région de vol libre. Cette différence entre le centre du piédestal de Rabi et celui de la frange de Ramsey va nous permettre d'avoir une idée grossière sur l'inhomogénéité du champ statique  $C$ .

Nous avons vu, au paragraphe 3.1, que les inconnues dans le modèle du spectre de résonance de l'horloge sont  $b$  et  $f(\tau)$ . La suite de ce chapitre est consacrée à la détermination de la pulsation de Rabi  $b$ , le chapitre suivant sera dédié à la détermination de la distribution du temps de vol  $f(\tau)$ .

### 3.6. Estimation de la pulsation de Rabi

Le taux de transition dans un schéma d'interrogation de Rabi ou de Ramsey dépend de l'amplitude de la perturbation (le champ hyperfréquence) via la quantité  $b$  appelée la pulsation (ou fréquence mais en rad/s) de Rabi de l'atome, définie par :

$$b = \frac{\mu_B}{\mathbf{h}} B_{HF} \quad (3-18)$$

où  $B_{HF}$  est l'amplitude du champ hyperfréquence (en Tesla) qui interroge les atomes,  $\mu_B$  le magnéton de Bohr et  $\mathbf{h}$  la constante de Planck réduite.

$B_{HF}$  peut être exprimée en fonction de l'énergie emmagasinée dans la cavité et donc en fonction de la puissance du signal hyperfréquence envoyée dans la cavité. Nous pouvons alors écrire :

$$b = \alpha \sqrt{P_{in}} \quad (3-19)$$

où  $P_{in}$  est la puissance (en Watt) du signal hyperfréquence injecté dans la cavité et  $\alpha$  est une constante inconnue.

Traditionnellement, on mesure la puissance  $P_{in}$  et on détermine la constante  $\alpha$  lors de l'estimation de la distribution du temps de vol, en calculant une frange de Ramsey qui dépend de  $b$  et donc de  $\alpha$ . Une minimisation de l'erreur entre la frange calculée et une frange expérimentale est ensuite effectuée pour déterminer la valeur de  $\alpha$ .

Ici nous proposons trois méthodes qui permettent de déterminer la valeur de  $b$  directement à partir d'une frange de Ramsey expérimentale, sans passer par la mesure de puissance et la distribution du temps de vol.

#### 3.6.1. Frange à $b$ fort

Nous avons montré que la frange de Ramsey est composée, suivant l'équation (3-10), de la convolution de  $F(a\Omega_0)$  avec trois impulsions de Dirac ayant pour origine  $\Omega_{0(0)} = 0$ ,  $\Omega_{0(-1)} = -2b/a$  et  $\Omega_{0(1)} = 2b/a$ . Ainsi, l'estimation de l'origine



(position) de ces impulsions de Dirac nous permet de déterminer la pulsation de Rabi par la relation:

$$b = a \frac{\Omega_{0(1)} - \Omega_{0(-1)}}{4} \tag{3-20}$$

La Fig. 3-6 montre qu'il n'est pas facile de déterminer les positions de ces impulsions de Dirac à partir de la frange de Ramsey, qui est la superposition pondérée des trois termes de l'équation (3-10). Cependant elle montre que pour les valeurs élevées de  $\Omega_0$ ,  $F(a\Omega_0)$  devient presque nul. Pour les valeurs élevées de  $b$ , les trois termes de (3-10) sont bien séparés et la détermination de l'origine des trois termes devient directe à partir de la forme de la frange de Ramsey.

La Fig. 3-8 montre une frange de Ramsey enregistrée à puissance micro-onde très élevée. Un amplificateur hyperfréquence a été utilisé pour atteindre cette valeur de la puissance.

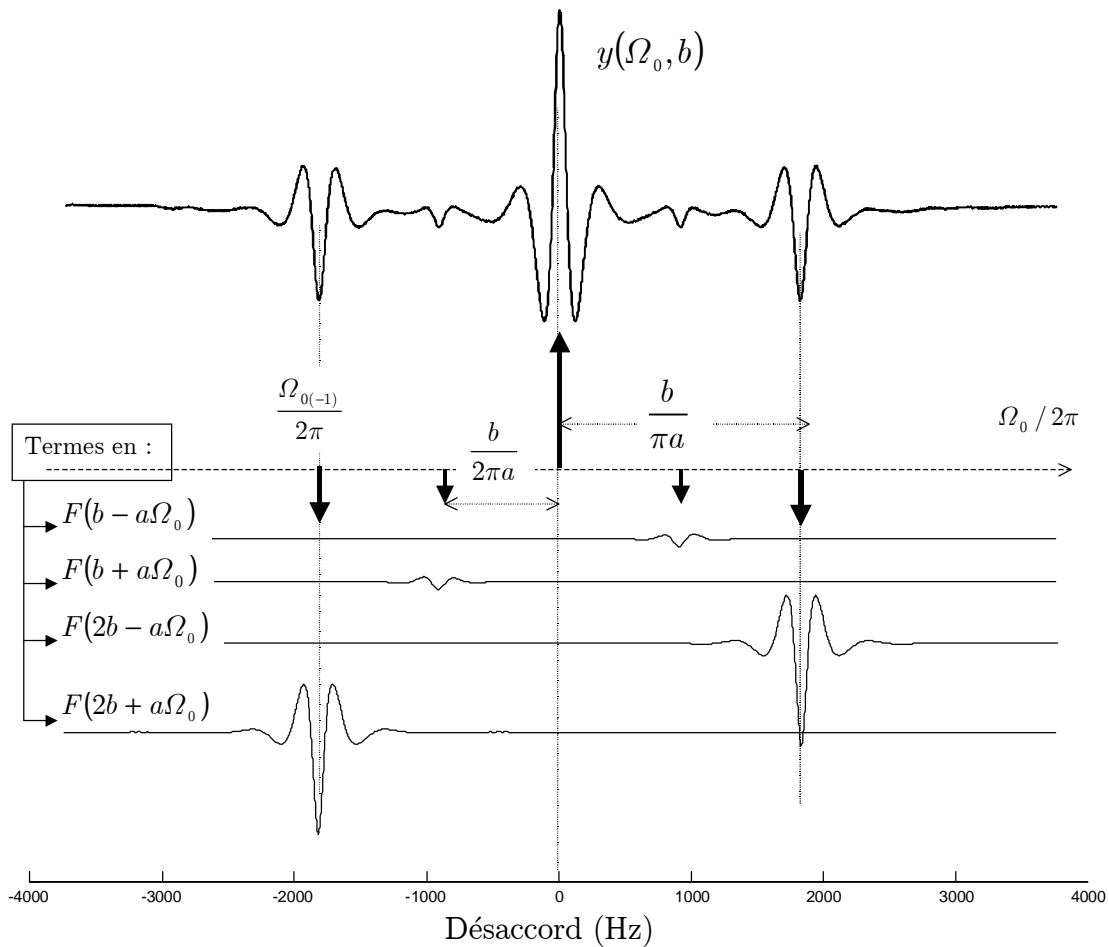


Fig. 3-8 : Estimation de la pulsation de Rabi à partir d'une frange à  $b$  élevée.

En plus du signal mesuré  $y(\Omega_0, b)$ , nous montrons sur cette figure les translations de  $F(a\Omega_0)$  qui interviennent dans l'équation (3-14) donnant l'approximation du 1<sup>er</sup> ordre de la frange. La décomposition de la frange de Ramsey en cinq franges, d'après l'équation (3-14), peut se voir ici directement sur la frange expérimentale.

Nous pouvons déterminer graphiquement les valeurs de  $\Omega_{0(1)} = 2\pi \times 1819$  rad/s et de  $\Omega_{0(-1)} = 2\pi \times (-1821)$  rad/s, ce qui donne, en utilisant l'équation (3-20), une valeur de  $b$  égale à 571613 rad/s.

Notons que cette méthode de détermination de la pulsation de Rabi est très précise parce qu'elle est basée sur une mesure de fréquence. La position des termes  $F(2b + a\Omega_0)$  et  $F(2b - a\Omega_0)$  peut être déterminée par un asservissement autour de leur origine à la place de la simple détermination graphique du centre des deux vallées.

Dans le cas de l'exemple donné dans la Fig. 3-8, les positions des vallées peuvent être déterminées (graphiquement) à un Hertz près, ce qui implique une incertitude relative  $\Delta b / b = 5 \times 10^{-4}$ .

Assez souvent, l'optimisation du fonctionnement de l'horloge exige de travailler avec des pulsations de Rabi qui maximisent l'amplitude du signal d'horloge. Ces valeurs optimales sont beaucoup plus faibles que celle de la Fig. 3-8 et une autre méthode est souhaitable pour déterminer  $b$  dans ces conditions de travail optimales.

### 3.6.2. Frange à valeurs de $b$ usuelles

Pour les valeurs usuelles de  $b$ , les approximations d'ordre zéro et du premier ordre restent valables. Cependant, les termes qui interviennent dans les équations (3-10) et (3-14) se recouvrent comme déjà montré dans la Fig. 3-6. Dans ce cas, l'estimation de  $b$  nécessite un traitement supplémentaire de la frange mesurée. La suite de ce paragraphe est consacrée à ce problème.

Pratiquement, la frange est mesurée pour des valeurs de désaccords équidistants  $\Omega_0[n] = n\Delta$ , où  $\Delta$  est le pas de mesure. La discrétisation de l'équation (3-11) donne après suppression de la constante  $C_1(b)$  :

$$\begin{aligned}
s[n] &= \frac{1}{4} F[n] * p[n] \\
p[n] &= -\frac{1}{2} \delta[n + N_0] + \delta[n] - \frac{1}{2} \delta[n - N_0]
\end{aligned} \tag{3-21}$$

où  $F[n] = F(na\Delta)$  et  $N_0 = \text{round}\left(\frac{2b}{a\Delta}\right)$ , ce qui revient à arrondir la valeur de  $b$  à un multiple de  $a\Delta$ .

L'équation (3-21) peut être vue comme décrivant un système discret linéaire de fonction de transfert (réponse impulsionnelle)  $\frac{1}{2} F[n]$ . La séquence  $p[n]$  peut être considérée comme l'entrée du système et  $s[n]$  comme sa sortie. L'estimation de  $b$  revient à estimer l'entrée  $p[n]$ . La quantité connue (mesurée) dans cette équation est la sortie  $s[n]$ . L'estimation de l'entrée connaissant la sortie est appelé *déconvolution*, mais puisque la fonction de transfert n'est pas connue a priori, on parle de *déconvolution aveugle* (Blind Deconvolution). Dans la suite nous développons deux méthodes propres à notre système pour déterminer la valeur de  $b$ .

### 3.6.2.1. La méthode de dérivée

A partir de (3-7), nous remarquons que la dérivée seconde de  $s(\Omega_0, b)$  par rapport à  $\Omega_0$  s'écrit sous la forme :

$$s_2(\Omega_0) = \frac{\partial^2 s(\Omega_0, b)}{\partial \Omega_0^2} = -\frac{a^2}{2} \int_0^\infty \tau^2 f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos(a\Omega_0\tau). \tag{3-22}$$

Un développement semblable à celui déjà effectué dans l'approximation d'ordre zéro nous permet d'écrire :

$$s_2(\Omega_0) = -\frac{1}{4} \left[ F_2(a\Omega_0) - \frac{1}{2} F_2(2b - a\Omega_0) - \frac{1}{2} F_2(2b + a\Omega_0) \right] \tag{3-23}$$

où  $F_2(\xi)$  est la Transformée en Cosinus de la fonction  $a^2 \tau^2 f(\tau)$ .

La multiplication par  $\tau^2$  a un effet d'élargissement sur  $f(\tau)$  dans le domaine du temps  $\tau$ . Ceci se traduit par une fonction  $F_2(\xi)$  plus étroite que  $F(\xi)$ , et le re-

couvrement des termes dans l'équation (3-23) est réduit en comparaison de celui des termes dans l'équation (3-10).

Les dérivées paires d'ordres supérieurs (4 et 6) produisent le même effet, et elles sont données par la même équation que (3-23) avec des fonctions  $F_4(\xi)$  et  $F_6(\xi)$  qui sont encore plus étroites que  $F_2(\xi)$ .

En pratique, le signal mesuré est entaché d'un bruit de mesure, ce qui rend le calcul numérique de ses dérivées peu aisé et même inutile. Ici nous utilisons la méthode de Savitzky-Golay [7] pour estimer les dérivées des signaux bruités.

La Fig. 3-9 montre la dérivée seconde de la frange de Ramsey expérimentale de la Fig. 3-4.

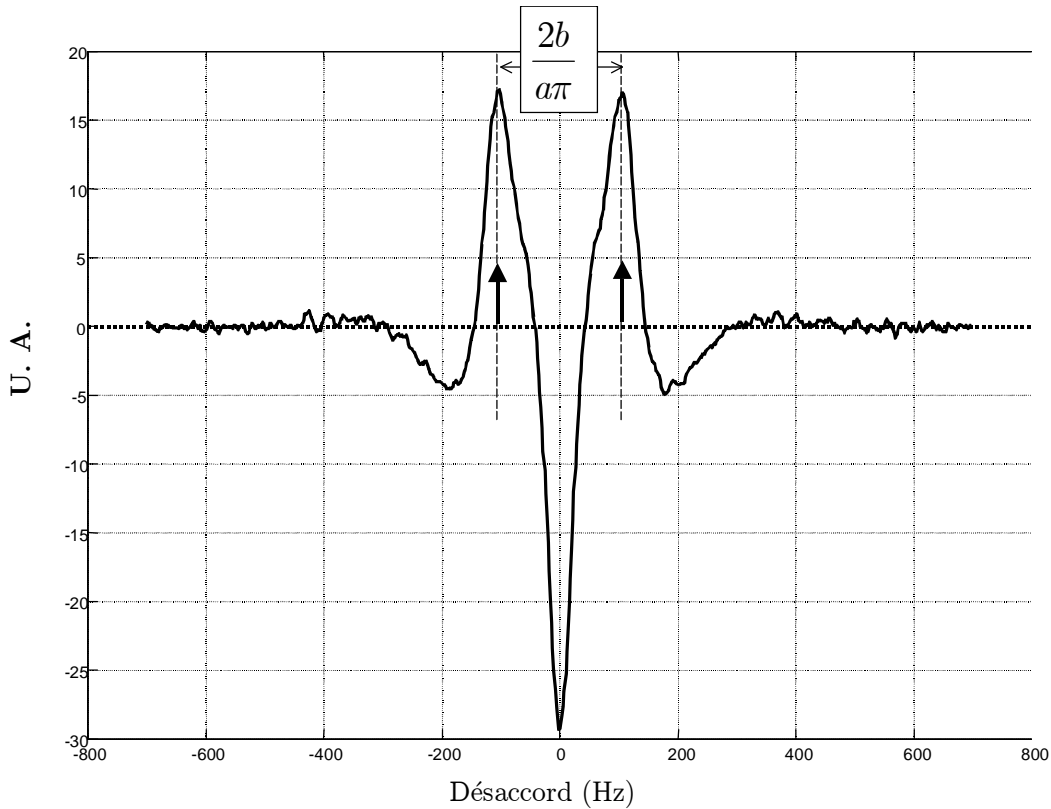


Fig. 3-9 : Dérivée seconde de la frange de Ramsey de la Fig. 3-4.

Ici, nous remarquons que  $F_2(\xi)$  est bien plus étroite que  $F(\xi)$  mais cela ne suffit pas pour distinguer les trois termes de l'équation (3-23). Si nous estimons l'origine des translations de  $F_2(\xi)$  à partir de la courbe, nous trouvons une valeur de  $b$  donnée par :

$$b = \frac{a\pi\Delta f}{2} \tag{3-24}$$

où  $\Delta f$  est la distance entre les deux pics en Hz.

Nous estimons graphiquement  $\Delta f = 210$  Hz, ce qui conduit à une valeur de  $b = 32990$  rad/s.

La Fig. 3-10 montre la dérivée quatrième de la même frange de Ramsey.

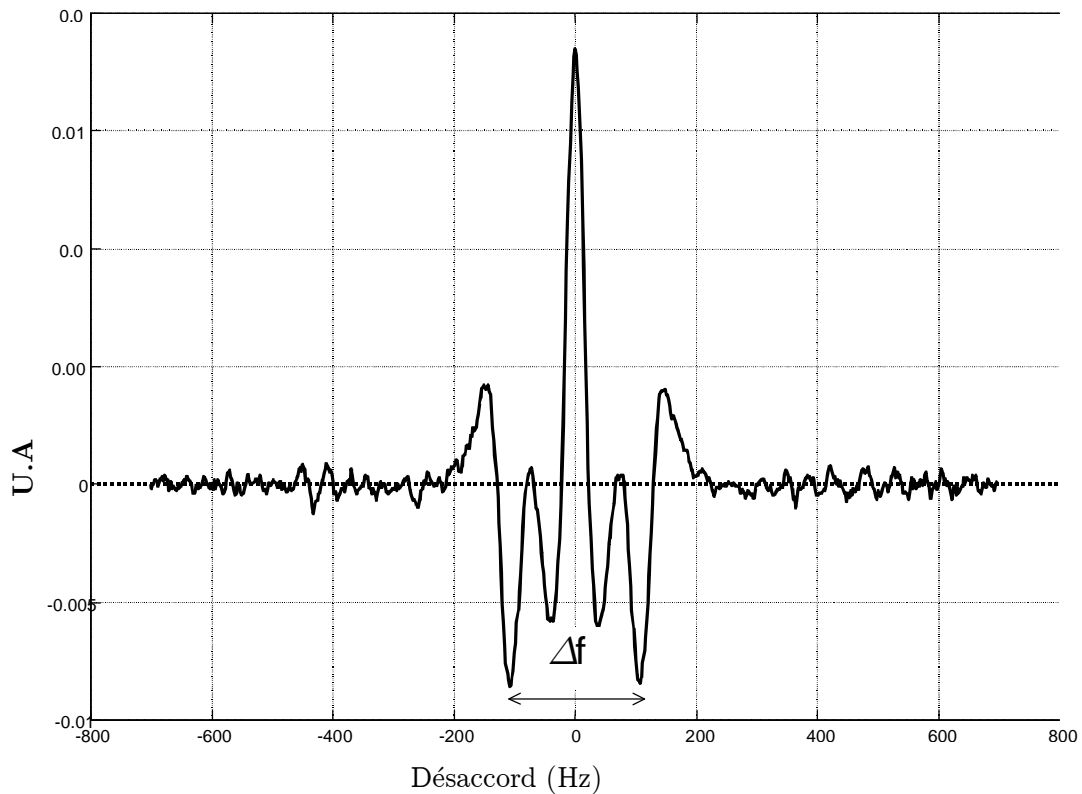


Fig. 3-10 : Dérivée quatrième de la frange de Ramsey de la Fig. 3-4.

Malgré le niveau de bruit élevé dans l'estimation de la dérivée quatrième, nous remarquons que le recouvrement des termes est assez réduit. La valeur de  $\Delta f$  estimée graphiquement est de 216 Hz, ce qui conduit à une valeur de  $b = 33930$  rad/s.

Dans l'estimation des dérivées par la méthode de Savitzky-Golay, il faut veiller à ne pas trop lisser les dérivées. Un compromis entre le degré de lissage (longueur de filtre) et niveau de bruit admissible est à trouver.

Pour le calcul de la dérivée seconde (quatrième) nous avons utilisé un filtre<sup>1</sup> de longueur 17 (37). La Fig. 3-11 montre les séquences utilisées pour effectuer le calcul numérique des dérivées.

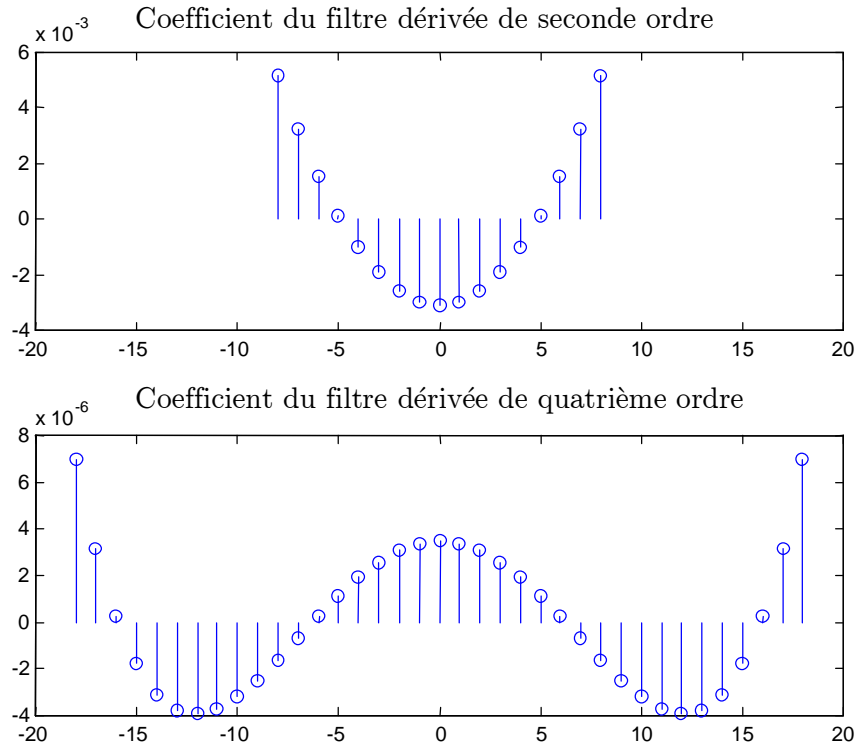


Fig. 3-11 : Séquences utilisées pour le calcul de dérivées.

Dans le paragraphe suivant nous présentons une deuxième méthode plus originale pour estimer  $b$ .

### 3.6.2.2. Analyse Cepstrale

Le *cepstre* d'un signal discret  $x[n]$  est défini par [8] :

$$c_x[n] = \text{IDFT}\{\log[\text{DFT}(x[n])]\} \quad (3-25)$$

<sup>1</sup> La dérivée seconde numérique classique consiste en un filtre formé de la séquence  $[1 \ -2 \ 1]$  et celui de la dérivée quatrième est formé de la séquence  $[1 \ -4 \ 6 \ -4 \ 1]$ .

où DFT désigne la *Transformée de Fourier Discrète*, IDFT désigne son *inverse* et  $\log$  est une définition adéquate du logarithme d'un nombre complexe ( $\log z = \log|z| + i \arg\{z\}$ ). Dans la suite nous allons développer le calcul du *cepstre* de la frange de Ramsey.

La **première** étape dans le calcul du *cepstre* consiste à calculer la Transformée de Fourier (TF). En utilisant les propriétés de la Transformée de Fourier des fonctions de Dirac, nous pouvons calculer la TF de la frange à partir de l'équation (3-11) :

$$\begin{aligned} S(\theta) &= \frac{1}{4} \tilde{f}\left(\frac{\theta}{a}\right) \left(1 - \frac{1}{2} e^{-j\frac{2b}{a}\theta} - \frac{1}{2} e^{j\frac{2b}{a}\theta}\right) \\ &= \frac{1}{4} \tilde{f}\left(\frac{\theta}{a}\right) \left(1 - \cos\left(\frac{2b}{a}\theta\right)\right) \end{aligned} \quad (3-26)$$

où  $S(\theta)$  est la TF de  $s(\Omega_0, b)$ ,  $\theta$  et  $\Omega_0$  sont des variables duales par TF et  $\tilde{f}(\theta)$  est une prolongation de  $f(\tau)$  qui la rend paire, telle que ( $f(-\theta) = f(\theta)$ ). Nous remarquons que  $S(\theta)$  est une fonction réelle. Elle est de plus positive car les fonctions  $(1 - \cos(\ ))$  et  $f(\tau)$  le sont. Ceci simplifie le calcul du *cepstre*, car il s'agit dans ce cas du logarithme d'un nombre réel positif.

La **deuxième** étape dans le calcul du *cepstre* est le calcul du logarithme de la TF. L'équation (3-26) conduit à :

$$\log(S(\theta)) = \log\left(\frac{1}{4} \tilde{f}\left(\frac{\theta}{a}\right)\right) + \log\left(1 - \cos\left(\frac{2b}{a}\theta\right)\right). \quad (3-27)$$

Dans la mesure où  $\log(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ , le deuxième terme de (3-27) est une somme pondérée par  $1/k$  des fonctions périodiques  $\cos^k(2b\theta/a)$ , dont la période est un multiple de  $\frac{2b}{a}$ .

La **troisième** et dernière étape dans le calcul du *cepstre* consiste à calculer la TF inverse du logarithme de la TF, donnée par l'équation (3-27). La TF inverse du premier terme de l'équation (3-27) donne  $c_F(\Omega_0)$ , le *cepstre* de la fonction  $F(a\Omega_0)$ . La TF inverse (IFT) du second terme de (3-27) est la TF inverse d'une somme pondérée des fonctions périodiques. Cette périodicité se manifeste lors de

la TF inverse par des impulsions (de Dirac) espacées de  $\frac{2b}{a}$ . C'est le *cepstre*  $c_p(\Omega_0)$  de la fonction  $p(\Omega_0)$  de (3-11), qui s'écrit sous la forme :

$$c_p(\Omega_0) = -\sum_{k \neq 0} \frac{1}{k} \delta\left(\Omega_0 - k \frac{2b}{a}\right) \quad (3-28)$$

Ainsi le *cepstre* de la frange de Ramsey s'écrit sous la forme<sup>1</sup> :

$$c_s(\Omega_0) = c_F(\Omega_0) + c_p(\Omega_0) \quad (3-29)$$

ou dans le cas discret

$$c_s[n] = c_F[n] + c_p[n] \quad (3-30)$$

Le premier terme de cette somme est une fonction lisse qui ne dépend que de la fonction  $F(a\Omega_0)$ . Le second terme est une suite d'impulsions de Dirac séparées de  $\frac{2b}{a}$ .

La Fig. 3-12 montre les trois étapes du calcul de *cepstre* d'une frange de Ramsey théorique pour une pulsation de Rabi  $b = 34$  krad/s. Nous distinguons bien les impulsions de Dirac, avec des amplitudes décroissantes dans le *cepstre* de la frange. Nous estimons graphiquement la distance moyenne entre deux impulsions voisines à  $\Delta f = 107.3$  Hz ce qui conduit à une valeur de  $b = 33.71$  krad/s. L'erreur relative commise dans l'estimation de  $b$  est de  $9 \times 10^{-3}$ .

Malheureusement, les impulsions sont moins visibles dans le cas d'une frange expérimentale. Ceci est dû principalement au fait que le signal mesuré est entaché de bruit, mais peut-être aussi au fait qu'il y a plutôt une distribution de pulsation de Rabi (distribution de l'amplitude du champ hyperfréquence  $B_{HF}$  dans la zone d'interrogation) et non pas une seule valeur de  $b$ .

---

<sup>1</sup> Nous pouvons constater que le produit, ou la convolution, s'est transformée en somme. Cette propriété rend le *cepstre* très intéressant, dans la mesure où il transforme un problème *non linéaire* en un linéaire.



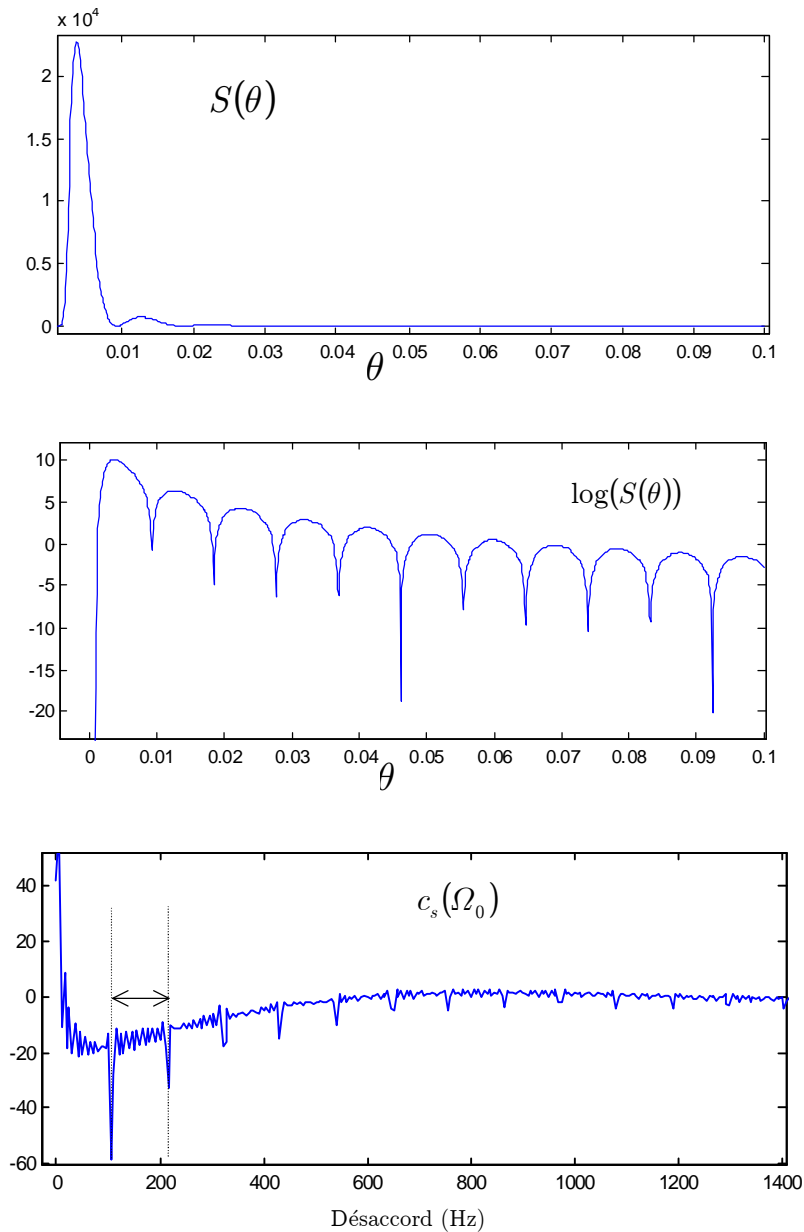


Fig. 3-12 : *Etapes de calcul du cepstre d'une frange théorique.*

La Fig. 3-13 montre le *cepstre* de la frange de Ramsey de la Fig. 3-4. Deux impulsions élargies seulement sont discernables sur cette figure. La distance entre ces deux impulsions est estimée graphiquement à  $\Delta f = 217$  Hz, ce qui conduit à  $b = 34086$  krad/s.

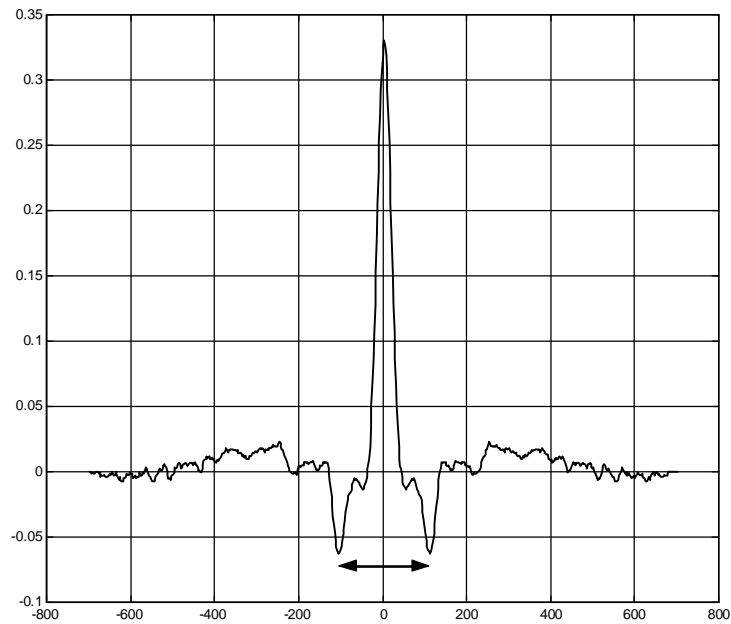


Fig. 3-13 : Cepstre de la frange de Ramsey de la Fig. 3-4.

Notons que la valeur de  $b$  estimée par la méthode de cepstre et celle estimée par la dérivée quatrième sont très proches. De plus, nous avons estimé cette valeur de  $b$  à partir d'une mesure de la puissance micro-onde et en utilisant la relation (3-19). La constante  $\alpha$  a été estimée par la méthode de Shirley, que l'on verra dans le chapitre suivant, pour la détermination de la distribution du temps de vol. La mesure de la puissance a conduit à une valeur estimée de  $b = 34071$  rad/s.

Le tableau suivant résume les résultats obtenus par les différentes méthodes :

| Méthode                            | Valeur de $b$ rad/s |
|------------------------------------|---------------------|
| Dérivée du 2 <sup>nd</sup> ordre   | 32990               |
| Dérivée du 4 <sup>ième</sup> ordre | 33930               |
| Cepstre                            | 34086               |
| Mesure de la puissance micro-onde  | 34071               |

Nous constatons qu'il manque un élément important dans ce tableau. qui consiste en l'incertitude de chaque méthode. Nous savons que le rapport signal à

bruit des mesures utilisées dans chaque méthode est un facteur prépondérant dans l'incertitude de chaque méthode. Cependant, ce rapport signal à bruit n'est sûrement pas la seule source d'incertitude affectant les résultats obtenus. Nous savons par exemple que la méthode de la dérivée de 2<sup>nd</sup> ordre est biaisée par le recouvrement des pics. La méthode du 4<sup>ième</sup> dérivée l'est aussi mais moins. Une estimation des biais est très difficile, sinon impossible, dans toutes les méthodes. Dans une telle situation, nous tirons profit de la multitude des méthodes pour former une incertitude "statistique" qui consiste en la déviation standard ( $1\sigma$ ) des résultats obtenus par ces différentes méthodes. Nous pouvons aussi éliminer les méthodes qui semblent "très biaisées".

En éliminant la valeur de  $b$  obtenue par la dérivée seconde de la frange, nous pouvons estimer la valeur de  $b$  par trois méthodes à  $b = 34029 \pm 86$  rad/s ce qui revient à une incertitude relative  $\Delta b/b = 2.5 \times 10^{-3}$ .

### 3.7. Conclusion

Le spectre de résonance a été décomposé en plusieurs transitions. L'équation générale de chaque transition a été donnée et étudiée. La partie centrale de chaque transition qui se positionne sur un piédestal de Rabi a été étudiée en détail. Nous avons montré que chaque frange est décomposée elle-même en plusieurs franges (cinq), qui se recouvrent ou non suivant la valeur de la pulsation de Rabi. Cette analyse nous a conduit à proposer trois nouvelles méthodes pour la détermination de la pulsation de Rabi réellement vue par les atomes et indépendamment de la puissance micro-onde injectée dans la cavité.

---

## Bibliographie

- [1] N. F. Ramsey, *Molecular Beams*, Oxford, Clarendon Press, 1956.
- [2] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Adam Hilger, Bristol, 1989.
- [3] A. De Marchi, G. D. Rovera, and A. Premoli, "Pulling by Neighbouring Transitions and its Effects on the Performance of Caesium-Beam Frequency Standards", *Metrologia* 20, 37-47, 1984.
- [4] V. Giordano, L. Pichon, P. C erez, and G. Th eobald, "Investigation of microwave  $\pi$  transitions in cesium beam clocks operated with U-shaped H plane waveguide cavities", *J. Appl. Phys.*, Vol. 78, No. 1, pp 1-8, July 1995.-
- [5] L. S. Cutler, A. De Marchi, C. Flory and R. Giffard, "Frequency pulling by hyperfine  $\sigma$  transitions in cesium beam atomic frequency standards", *J. Appl. Phys.*, Vol. 69, No. 5, pp. 2780-2792, March 1991.
- [6] A. Makdissi and E. de Clercq, "A Signal Approach Analysis of the Ramsey Pattern in Cesium Beam Frequency Standards", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 46, No. 2, pp. 112-116, April 1997.
- [7] W. H. Press *et al.*, *Numerical Recipes in C, The Art of Scientific Computing*, Cambridge, U. K. : Cambridge Univ. Press, 1992.
- [8] V. Oppenheim and R. W. Schaffer, *Discret-Time Signal Processing*, London, U. K. : Prentice-Hall, 1989.



# Chapitre 4. MESURE DE LA DISTRIBUTION DE VITESSE

---

La distribution de vitesse des atomes qui interagissent avec le champ Micro-onde est un paramètre fondamental dans la *modélisation* d'un étalon de fréquence à jet de césium. C'est la précision avec laquelle le *modèle* correspond à l'expérience qui détermine l'exactitude de l'étalon. Nous commencerons ce chapitre par présenter l'état de l'art sur les méthodes d'estimation de la distribution de vitesse, puis nous présenterons plusieurs nouvelles méthodes ou améliorations des méthodes existantes. Enfin, un critère de comparaison de toutes ces méthodes sera présenté pour nous permettre d'adopter une méthode finale lors de l'évaluation de l'exactitude de notre étalon.

## 4.1. Introduction

Soit un atome de vitesse  $v$  et soit  $\mathbf{l}$  la longueur de la zone d'interaction. Le *temps de vol* (Time Of Flight (TOF))  $\tau$  est défini par  $\tau = \mathbf{l} / v$ . Il est égal à la durée de séjour de l'atome dans une zone d'interaction. Notons que le temps de vol libre entre les deux zones d'interaction avec le champ hyperfréquence est  $T = L / v = a\tau$  d'après les notations du premier chapitre.

Nous avons vu au paragraphe (3.1) qu'il est plus commode de traiter les quantités  $\tau$  et  $v$  comme des *variables aléatoires* (VA). Les densités de probabilité de ces deux variables sont liées par la relation ([1] et [2]) :

$$f_{\tau}(\tau) = \frac{\mathbf{l}}{\tau^2} f_v(v) \Big|_{v=\frac{\mathbf{l}}{\tau}} \quad (4-1)$$

où  $f_x(x)$  désigne la *fonction de densité de probabilité* de la variable aléatoire  $x$ .

Afin d'alléger les notations, dans ce qui suit,  $f_\tau(\tau)$  sera notée  $f(\tau)$ .

La théorie cinétique des gaz montre que les trois composantes du vecteur vitesse  $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$  sont normales (Gaussiennes), indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), de moyenne nulle et de variance  $kT/m$  (voir plus bas). On peut montrer alors [2], qu'à l'intérieur du four, la densité du module de la vitesse  $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ , suit une loi en *chi* (et  $v^2$  suit la fameuse loi en *chi-deux*) à trois degrés de liberté, qui n'est autre que la loi *maxwellienne* dans ce cas<sup>7</sup>. A la sortie des fours, cette loi est pondérée par  $v$ , pour donner une loi "Maxwellienne modifiée", dont l'expression est :

$$f_v(v) = 2 \frac{v^3}{\kappa^4} \exp\left(-\frac{v^2}{\kappa^2}\right). \quad (4-2)$$

Le paramètre  $\kappa$  est la vitesse la plus probable, à l'intérieur du four, à la température  $T$  :

$$\kappa = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (4-3)$$

Avec :

- $k =$  constante de Boltzmann =  $1.38 \cdot 10^{-23}$  J/K
- $m =$  masse de l'atome de Cs =  $2.21 \cdot 10^{-25}$  kg.

La distribution  $f(\tau)$  associée à  $f_v(v)$  se calcule à partir des équations (4-1) et (4-2) :

---

<sup>7</sup> En général, étant données  $n$  variables normales  $x_i$ , i.i.d, centrées, et de variance  $\sigma^2$ , la variable  $\chi = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$  suit une loi *chi* à  $n$  degrés de liberté définie par

$$f_\chi(\chi) = \frac{2}{(\sigma\sqrt{2})^n \Gamma(n/2)} \chi^{n-1} e^{-\chi^2/2\sigma^2}$$

où  $\Gamma$  est la fonction gamma. Pour  $n=3$  nous retrouvons la distribution Maxwellienne.

$$f(\tau) = \frac{2\tau_0^4}{\tau^5} \exp\left(-\frac{\tau_0^2}{\tau^2}\right) \quad (4-4)$$

où  $\tau_0 = \mathbf{l} / \kappa$ .

Dans les horloges à *sélection magnétique*, la déflexion des trajectoires des atomes dépend de leur vitesse. La distribution  $f(\tau)$  dépend ainsi de la géométrie du jet (angle d'émission, taille des ouvertures du four, largeur du fil chaud de détection, taille et position des aimants de sélection, etc. ...).

Dans les jets à *pompage optique*, la déflexion des atomes est négligeable et  $f(\tau)$  ne dépend pas, en première approximation, de la géométrie du jet. Par contre, la distribution des vitesses peut dépendre de la durée d'interaction  $\tau$  avec la lumière des lasers. C'est le cas dans un schéma de pompage avec deux lasers si le pompage n'est pas complet, ce qui introduit un facteur  $1/v$  dans la distribution de vitesse. Dans un schéma de pompage avec un seul laser la distribution à la sortie du four n'est pas modifiée. Le même raisonnement vaut pour les lasers de détection. Suivant le schéma de pompage et de détection utilisé, nous nous attendons à avoir une distribution  $f(\tau)$  égale à la distribution théorique donnée par (4-4), pondérée par 1,  $\tau$  ou  $\tau^2$ .

Habituellement, nous utilisons pour la détection la transition ( $F = 4 - F' = 5$ ) qui ne permet pas le pompage optique. Les atomes émettent alors un nombre de photons proportionnel au temps d'interaction avec le faisceau laser (les atomes lents vont donner plus de photons que les atomes rapides). On montre que, dans ce cas, la distribution de vitesse des atomes détectés est pondérée par  $\tau$ . L'équation de la distribution théorique du temps de vol se déduit de l'équation (4-4) après multiplication par  $\tau$  et normalisation, pour donner :

$$f_{th}(\tau) = \frac{4\tau_0^3}{\sqrt{\pi}\tau^4} \exp\left(-\frac{\tau_0^2}{\tau^2}\right) \quad (4-5)$$

Nous retrouvons donc comme distribution des atomes détectés la distribution *Maxwellienne* d'un gaz.

Dans la suite, nous passons brièvement en revue les méthodes déjà utilisées pour estimer la distribution  $f(\tau)$ , puis nous présentons notre contribution en développant plusieurs nouvelles méthodes.



## 4.2. Etat de l'art

La détermination de la distribution des vitesses a fait couler beaucoup d'encre durant des années et plusieurs approches ont été utilisées. Mungall [3] calculait les franges de Ramsey avec une distribution de vitesse Maxwellienne tronquée. Une méthode basée sur la réponse du jet à un train d'impulsions Micro-onde a été proposée par Hellwig *et al.*[4]. Elle sélectionne les vitesses pour donner des franges monocinétiques dont l'amplitude est proportionnelle au nombre d'atomes dans la classe de vitesse sélectionnée. Bien qu'elle soit séduisante sur le plan théorique<sup>8</sup>, sa mise en œuvre est relativement difficile et son application aux jets ayant une large distribution de vitesse (cas des jets pompés optiquement) conduit à un phénomène de recouvrement (aliasing) causé par l'échantillonnage (dû à la sélection par un train d'impulsion) qui dégrade la précision de la solution obtenue.

Rovera *et al.* [5] ont proposé une méthode basée sur la réponse du jet à une seule courte impulsion micro-onde. Cette réponse contient la réponse des atomes qui se trouvaient dans les deux bras de la cavité lorsque l'impulsion a eu lieu. Elle nécessite une déconvolution (inversion) pour obtenir la réponse des atomes qui se trouvaient dans un seul bras. Un modèle exact de la réponse du jet à cette impulsion n'a pas été fourni et il mérite d'être étudié car la mise en œuvre de cette méthode est simple.

Jarvis [6] calculait la distribution qui minimise un critère composite qui inclut l'ajustement sur trois franges de Ramsey enregistrées à trois niveaux micro-onde proprement choisis.

Une Transformée de Fourier d'une seule frange de Ramsey, après soustraction du piédestal de Rabi, est utilisée par Bauch et Heindorff [7] dans les horloges à sélection magnétique ayant une distribution étroite.

D'autres méthodes spécifiques aux horloges à pompage optique ont été développées. de Clercq *et al.* [8] utilisaient l'effet Doppler du 1<sup>er</sup> ordre sur une transition optique pour déduire la distribution de vitesse. Hamel a proposé la méthode du miroir tournant [9] et la méthode de fonction de transfert [10]. Domelunksen *et al.* [11], Lee *et al.* [12] ont utilisé la fluorescence observée quand le pompage optique est modulé pour déduire par déconvolution la distribution de vitesse.

---

<sup>8</sup> Cette méthode est, à notre avis, la plus intelligente parmi les méthodes directes (qui ne sont pas basées sur l'inversion des quantités mesurées) pour obtenir la distribution des vitesses.

En plus de ces méthodes, deux méthodes sont largement répandues à cause de leur simplicité et leur précision : la méthode de Boulanger [13] et celle de Shirley [14], dont nous allons donner le principe.

### 4.2.1. La méthode de Boulanger

Elle est basée sur la mesure du taux de transition, à la résonance, en fonction de la puissance micro-onde. A la résonance ( $\Omega_0 = 0$ ), l'approximation d'ordre zéro du taux de transition donné par l'équation (3-10) est égale à l'expression complète du taux de transition qui s'écrit sous la forme :

$$I(b) = s(0, b) = \frac{1}{4} \left[ F(0) - \frac{1}{2} F(2b) - \frac{1}{2} F(2b) + 1 - F(2b) \right] \quad (4-6)$$

Nous rappelons que  $F$  est la Transformée en Cosinus de  $f(\tau)$ .

La normalisation de  $f(\tau)$  donnée par (3-2) implique  $F(0) = 1$ , et l'équation (4-6) devient :

$$I(b) = \frac{1}{2} [1 - F(2b)] \quad (4-7)$$

Cette relation montre que la courbe  $I(b)$  (voir la figure 3-5 pour un exemple de cette courbe) n'est autre que la transformée en Cosinus de  $f(\tau)$  (à une constante près), et une simple *Transformée en Cosinus Inverse* nous donne  $f(\tau)$  suivant la relation inverse de (3-9) :

$$f(\tau) = \int_0^{\infty} F(\xi) \cos(\xi\tau) d\xi \quad (4-8)$$

En pratique, les valeurs de la pulsation de Rabi  $b$  ne sont pas connues directement, et nous mesurons le taux de transition à la résonance en fonction de la puissance micro-onde  $P$  liée à  $b$  par la relation  $b = \alpha\sqrt{P}$  (déjà donnée par l'équation 3-19). Ceci nous permet d'avoir la courbe  $I(\sqrt{P})$  à la place de  $I(b)$ . Ces deux courbes ne

différent que par le coefficient d'échelle (dilatation)  $\alpha$  inconnu. La Transformée en Cosinus de  $I(\sqrt{P})$  nous donne ainsi la fonction  $f$  à un coefficient d'échelle près. Pour déterminer ce coefficient d'échelle  $\alpha$  nous enregistrons une frange de Ramsey à une puissance quelconque (mais connue)  $P_0$ , puis nous calculons une frange de Ramsey (théorique) qui dépend de  $\alpha$  (via  $b_0 = \alpha\sqrt{P_0}$  et  $f(\tau)$  déjà déterminé à un coefficient d'échelle près). On fait varier  $\alpha$  pour minimiser la différence entre la frange mesurée et celle calculée. Nous obtenons ainsi à la fois  $f(\tau)$  et la valeur de  $\alpha$ .

Lors du calcul de la Transformée en Cosinus Inverse (par FFT) nous devons fournir une courbe expérimentale enregistrée avec un pas fixe de  $\sqrt{P}$ , ce qui n'est pas facile à réaliser en pratique. Une interpolation (par "splines") est effectuée pour approcher cette courbe à pas fixe. De plus, pour réduire l'influence des transitions voisines de la transition d'horloge sur la courbe enregistrée  $I(\sqrt{P})$ , une valeur élevée du champ statique  $C$  est demandée, afin d'écarter ces transitions voisines.

### 4.2.2. La méthode de Shirley

Elle est basée sur l'approximation au premier ordre de la frange de Ramsey donnée par la relation (3-13). En notant  $h(\tau) = \frac{2}{ab\tau} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right)$ , nous pouvons écrire le taux de transition (en adoptant l'expression (3-13) pour la probabilité de transition) sous la forme :

$$s(\Omega_0, b) = \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[a\Omega_0\tau(1+h)] d\tau \quad (4-9)$$

Dans cette expression, nous avons supposé que  $h \ll 1$ . En effectuant le changement de variable  $u = \eta(\tau) = \tau(1+h)$ , nous pouvons écrire l'équation (4-9) sous la forme :

$$s(\Omega_0, b) = \int f(\eta^{-1}(u)) \sin^2(b\eta^{-1}(u)) \cos(a\Omega_0 u) \frac{du}{1 + \eta^{-1}(u)h'(\eta^{-1}(u)) + h(\eta^{-1}(u))} \quad (4-10)$$

en désignant par  $h'$  la dérivée par rapport à  $\tau$  de la fonction  $h$ .

Soit  $S(u)$  la Transformée en Cosinus de la frange  $s(\Omega_0)$ . D'après (4-10), elle est donnée par :

$$S(u) = \frac{f(\eta^{-1}(u))\sin^2(b\eta^{-1}(u))}{1 + \eta^{-1}(u)h'(\eta^{-1}(u)) + h(\eta^{-1}(u))} \quad (4-11)$$

Un changement de variable inverse de celui déjà effectué plus haut nous permet de déduire l'expression de  $f(\tau)$  de l'équation (4-11) :

$$f(\tau) = \frac{S(\tau + \tau h(\tau))[1 + \tau h'(\tau) + h(\tau)]}{\sin^2(b\tau)} \quad (4-12)$$

où encore, sous la forme donnée par Shirley (sans justification) [14] :

$$f(\tau) = \frac{S(\tau + \tau h(\tau))}{\sin^2(b\tau)[1 - \tau h'(\tau) - h(\tau)]} \quad (4-13)$$

Notons que nous avons démontré (4-13) par une méthode différente de celle donnée par Shirley. L'idée de base de la méthode consiste à dire qu'à partir de la Transformée en Cosinus  $S(\tau)$  de la frange et en utilisant (4-13) nous pouvons déduire  $f(\tau)$ . Mais le terme  $\sin^2(b\tau)$  dans le dénominateur du (4-13) s'annule pour certaines valeurs utiles de  $\tau$ . Pour faire face à cette difficulté, nous utilisons plusieurs franges de Ramsey enregistrées avec des valeurs  $b_j$  de  $b$  bien choisies pour que les termes  $\sin^2(b_j\tau)$  ne s'annulent jamais pour la même valeur de  $\tau$ .

Soit  $f_j(\tau)$  la solution obtenue à partir de (4-13) pour la frange  $j$ . La solution de Shirley est formée par la méthode des moindres carrés pondérés :

$$\bar{f}(\tau) = \frac{\sum_j W_j(\tau) f_j(\tau)}{\sum_j W_j(\tau)} \quad (4-14)$$

avec des poids  $W_j(\tau)$  donnés par :

$$W_j(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sin^4(b_j\tau) < W_c \\ \sin^4(b_j\tau) & \text{sinon} \end{cases} \quad (4-15)$$

où  $W_c$  est un seuil de pondération.

En pratique, les pulsations de Rabi  $b_j$  ne sont pas connues mais les puissances micro-ondes  $P_j$  sont mesurées pour chaque niveau micro-onde et les calculs précédents se font en remplaçant  $b_j$  par  $\alpha P_j$ , où  $\alpha$  est une constante à déterminer. La détermination de  $\alpha$  se fait en minimisant le critère suivant :

$$E(\alpha) = \int_0^{\infty} \left( \sum_j W_j(\tau) [f_j(\tau) - \bar{f}(\tau)]^2 \right) d\tau \quad (4-16)$$

Ceci revient à minimiser l'erreur quadratique moyenne entre les franges mesurées et celles calculées à partir de  $\bar{f}(\tau)$ .

Afin d'obtenir une solution significative et valable pour les valeurs utiles de  $\tau$ , l'utilisation de cette méthode exige l'enregistrement d'au moins quatre franges de Ramsey.

Cette méthode, malgré la complexité apparente des expressions qui interviennent, nous semble parmi les méthodes les plus faciles à exécuter d'une façon automatique (sans l'intervention de l'utilisateur). En effet, aucun choix (à part le seuil  $W_c$  qui est fixé une fois pour toutes) n'est nécessaire lors de son exécution.

La diversité des méthodes utilisées pour déterminer la distribution du temps de vol montre bien qu'il n'y a pas une méthode universelle et simple. Dans l'objectif d'améliorer l'exactitude de notre étalon, nous avons jugé qu'il était nécessaire de proposer de nouvelles méthodes, ainsi qu'un critère pour les comparer.

## 4.3. Les nouvelles méthodes

### 4.3.1. Frange à pulsation $b$ forte

C'est la première méthode qui nous vient à l'esprit après avoir donné l'expression du taux de transition avec les approximations d'ordre zéro et au premier ordre, suivant les relations (3-10) et (3-14), et après avoir vu la forme de la frange de Ramsey à  $b$  fort. La figure 3-8 nous montre qu'à  $b$  fort, la frange de Ramsey est décomposée en cinq franges. Les deux franges latérales sont bien visibles avec un bon rapport signal à bruit et elles sont le moins touchées par le recouvrement des autres franges. Sur la Figure 4-1 nous montrons la frange expérimentale de la figure 3-8. La partie encadrée sur cette figure n'est autre que  $-\frac{1}{8}F(2b - a\Omega_0)$  d'après l'analyse déjà effectuée au paragraphe 3.4.1.

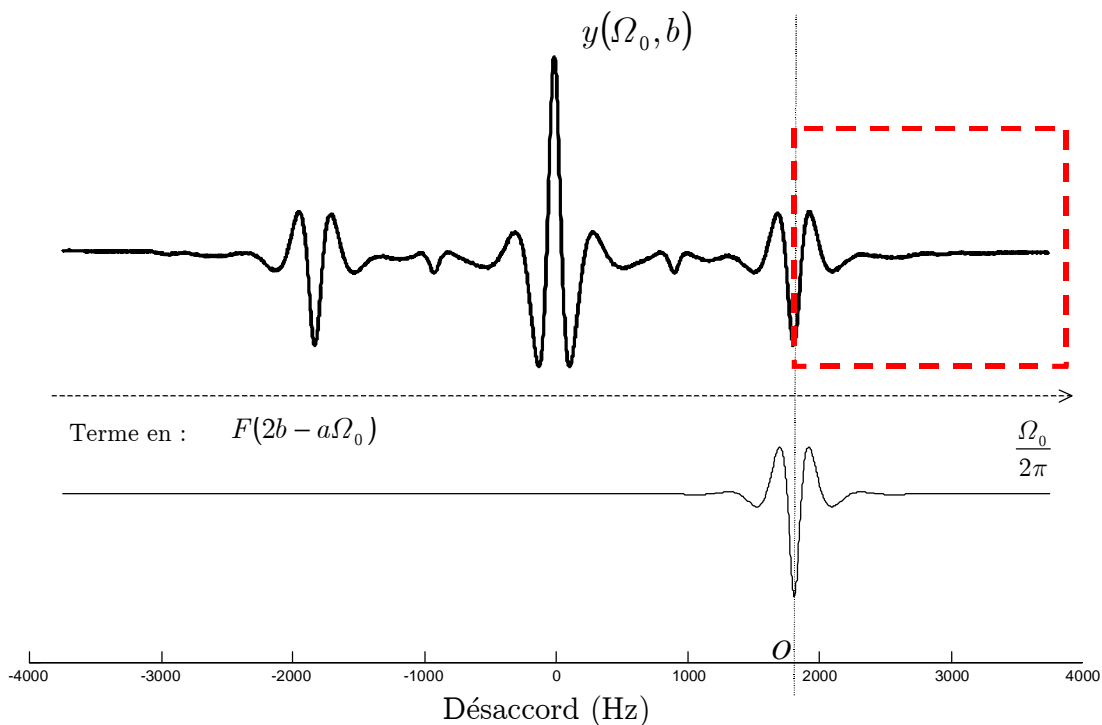


Figure 4-1 : *Frange Expérimental à b fort.*

La fonction  $F(a\Omega_0)$  se déduit de la partie encadrée de la courbe par simple translation de  $2b$ , ce qui revient à prendre le point  $O$  sur la figure comme origine. La partie gauche de  $F(a\Omega_0)$  ( $\Omega_0 < 0$ ) se déduit de la partie encadrée par symétrie (due à la définition de la Transformée en Cosinus). Une fois  $F(a\Omega_0)$  déterminée,  $f(\tau)$  se calcule par simple Transformée en Cosinus Inverse. Remarquons aussi que cette partie encadrée n'est autre que la fameuse courbe  $I(b)$  mais cette fois les abscisses sont bien connues (ce sont des fréquences à la place des pulsations de Rabi ou des puissances micro-ondes). La méthode de Boulanger s'applique sur cette partie de la courbe sans l'ambiguïté d'un coefficient d'échelle inconnu et sans le besoin d'un critère pour sa détermination.

La Figure 4-2 montre la distribution du temps de vol  $f(\tau)$  calculé à partir de la partie encadrée de la Figure 4-1. A titre de comparaison nous avons tracé sur la même figure la distribution théorique attendue qui correspond à la distribution des vitesses Maxwellienne dont l'expression est donnée par l'équation (4-5).

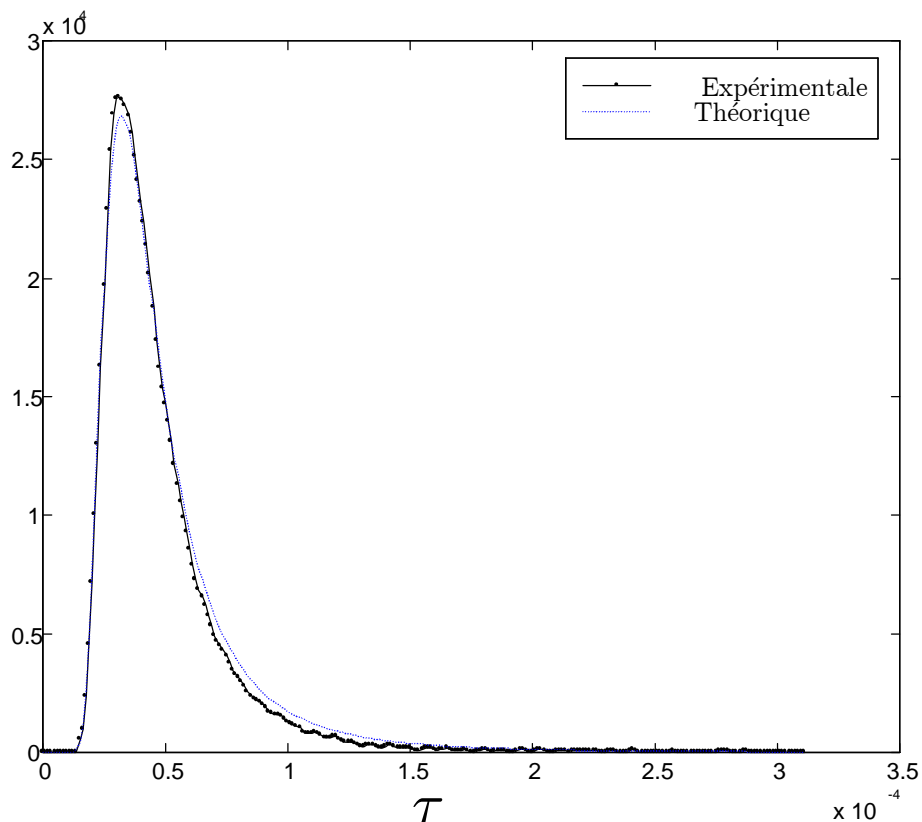


Figure 4-2 :  $f(\tau)$  à partir d'une frange à  $b$  fort.

### 4.3.2. Méthode de Régularisation

Nous pouvons remarquer, lors de l'exposition des méthodes déjà citées dans le paragraphe 4.2, que la plupart d'entre elles sont basées sur la mesure d'une quantité qui dépend de  $f(\tau)$ , et l'estimation de cette dernière se fait par une *inversion* (déconvolution) des mesures. Mais aucune de ces méthodes (à part celle de Jarvis) n'utilise la théorie des *problèmes inverses*, bien répandue en traitement du signal et dans de nombreux autres domaines. Une des caractéristiques des problèmes inverses est qu'ils sont souvent *mal posés* (ill-posed), dans le sens où la solution recherchée n'est pas unique ou ne correspond pas forcément à une réalité physique. Cette mal position (ill-posedness) est due en général à deux facteurs : le premier est que les mesures sont entachées de bruit<sup>9</sup> et que les opérateurs d'inversion sont sensibles au bruit. Le deuxième facteur est dû à la nature même des opérateurs de mesure qui sont souvent des sommations ou des intégrateurs. Connaître le résultat d'une somme ne suffit pas (sauf information supplémentaire) pour déterminer les quantités sommées.

La théorie de la régularisation des problèmes inverses est basée sur l'utilisation d'une information *a priori* de la solution. La recherche de la solution *régularisée* revient à trouver une solution *unique*, qui inverse le problème et qui vérifie une autre contrainte, introduite pour obliger la solution à contenir cette information d' "a priori". Ces informations préalables sont souvent simples (solution positive, lisse, tronquée, etc. ... ) mais un compromis reste à trouver entre la vérification de la contrainte supplémentaire et l'accord entre la solution et les mesures.

Dans le cas de la distribution du temps de vol  $f(\tau)$ , deux informations sont disponibles. Cette solution est *lisse* car il n'y a pas de raisons physiques pour qu'elle présente des discontinuités, et il est très plausible qu'elle ne soit pas très différente de la solution théorique  $f_{th}(\tau)$  donnée par (4-5). En plus, elle est *positive*, ce qui résulte de la définition même d'une densité de probabilité.

Dans la suite nous présentons l'approche de la régularisation appliquée à l'inversion de quelques quantités mesurées dans une horloge atomique pour trouver la distribution  $f(\tau)$ .

---

<sup>9</sup> Même le calcul d'un signal par Transformée de Fourier Inverse à partir de son spectre bruité est un problème mal-posé et peut donner des solutions éloignées de la vraie solution.



### 4.3.3. Inversion du taux de transition

Cette méthode consiste à inverser le taux de transition mesuré en fonction du désaccord  $\Omega_0$  ou de la pulsation de Rabi  $b$  à la résonance. Elle est présentée dans la référence [15] reproduite dans l'annexe A1.

Soit  $y(\Omega_0)$  le signal de la transition d'horloge mesuré par le détecteur en fonction du désaccord  $\Omega_0$  (en rad/s). Après la détermination de la fréquence de Rabi  $b$  par une des méthodes développées au chapitre 3, nous pouvons écrire ce signal sous la forme (Voir l'équation 3-3) :

$$y(\Omega_0) = c_1 s(\Omega_0) + c_2 + e(\Omega_0) \quad (4-17)$$

où  $c_1$  est un facteur de gain,  $c_2$  un décalage (offset), et  $e(\Omega_0)$  un bruit de mesure.

Le décalage  $c_2$  peut être déterminé en mesurant le signal  $y(\Omega_0)$  pour un désaccord important ou en l'absence de micro-onde ( $s(\Omega_0) = 0$ ). Une autre méthode (équation (12) de la référence [15]) a été proposée pour estimer le décalage dans le cas d'une valeur élevée de  $b$ .

#### 4.3.3.1. Le problème inverse

Après soustraction de  $c_2$  du signal mesuré,  $y(\Omega_0)$  peut être vu comme une équation intégrale de *Fredholm* de première espèce [16]:

$$y(\Omega_0) = \int_0^{\infty} P(\Omega_0, b, \tau) f(\tau) d\tau + e(\Omega_0). \quad (4-18)$$

Ici, le membre de gauche  $y(\Omega_0)$  est mesuré, le noyau (Kernel)  $P(\mathbf{L})$  est connu (donné par la probabilité de transition de Ramsey), et  $f(\tau)$  est la solution (inconnue) multipliée par le facteur de gain  $c_1$  qui ne modifie pas la solution, car nous cherchons une densité de probabilité normalisée telle que  $\int f(\tau) d\tau = 1$ .

L'équation (4-18) est mal posée dans le sens où sa solution  $f(\tau)$  est potentiellement très sensible aux perturbations  $e(\Omega_0)$  qui affectent le signal mesuré.

La discrétisation de l'équation (4-18) en  $\tau$  au sens de Riemann<sup>10</sup> avec un pas  $\Delta\tau$  sur un support limité ( $0 \leq \tau \leq \tau_{\max}$ ) conduit à :

$$y(\Omega_0) = \sum_{j=1}^n P(\Omega_0, b, j\Delta\tau) f(j\Delta\tau) \Delta\tau \quad (4-19)$$

En rassemblant les mesures  $y(\Omega_0)$  dans un vecteur  $\mathbf{y}$ , nous obtenons un système linéaire d'équations

$$\mathbf{y} = \mathbf{P}\mathbf{f} + \mathbf{e}, \quad \mathbf{P} \in R^{m \times n}, m > n \quad (4-20)$$

Où :

- $\mathbf{f}$  est un vecteur de  $n$  inconnues représentant les valeur de  $f(\tau)$  dans un ensemble fini de temps de vol :

$$f_j = f(j\Delta\tau), \quad j \in \{1, \dots, n\}.$$

- $\mathbf{y}$  est un vecteur de  $m$  données mesurées pour  $m$  différentes valeurs du désaccord ( $\omega_i, i \in \{1, \mathbf{L}, m\}$ ).
- $\mathbf{P}$  est une matrice réelle telle que :

$$p_{i,j} = P(\omega_i, b, j\Delta\tau) \Delta\tau, \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

Notons que dans le calcul de la matrice  $\mathbf{P}$  nous utilisons l'expression complète de la probabilité de transition et non une approximation valable au voisinage de la résonance comme c'est souvent le cas.

La résolution du système (4-20) par la méthode des moindres carrés conduit à une solution qui minimise la norme résiduelle :

$$\mathbf{f}_{LS} = \arg \min \|\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{f}\| = \arg \min \{(\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{f})^t (\mathbf{y} - \mathbf{P}\mathbf{f})\} \quad (4-21)$$

---

<sup>10</sup> D'autres méthodes de discrétisation sont envisageables même souhaitables pour réduire l'effet des bords.

L'expression explicite de cette solution de moindres carrés est bien connue :

$$\mathbf{f}_{LS} = (\mathbf{P}^t \mathbf{P})^{-1} \mathbf{P}^t \mathbf{y} \quad (4-22)$$

Elle peut conduire à une solution qui n'a pas de sens à cause du vecteur  $\mathbf{y}$  bruité et à cause du caractère mal posé du problème. Les équations de *Fredholm* de première espèce sont souvent extrêmement mal posées. En effet, l'application du noyau à une fonction est généralement une opération de lissage (ou de sommation) qui fait perdre les informations (détails) de cette fonction, et l'opération inverse n'est pas capable de retrouver ces détails. Par conséquent, il est nécessaire d'augmenter l'information concernant la solution désirée en utilisant quelques connaissances a priori pour pouvoir stabiliser le problème et extraire une solution utile et stable. C'est le rôle de la régularisation.

#### 4.3.3.2. La régularisation

La présence du bruit dans le système à inverser, conduit à la création de composantes oscillatoires dans la solution obtenue par inversion directe. Pour réduire l'effet de bruit nous imposons à la solution d'être lisse [6]. Par conséquent, une information additionnelle de *douceur* (smoothness) sera incorporée en ajoutant une contrainte supplémentaire  $C(\mathbf{f})$  à l'équation (4-21). Cette contrainte inclut la minimisation de la dérivée du premier ordre, ou d'ordres supérieurs, de la solution, pour empêcher ses variations rapides et oscillatoires. Par exemple, dans le cas d'une minimisation de la dérivée du premier ordre, la contrainte  $C(\mathbf{f})$  s'écrit sous la forme :

$$C(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^{n-1} (f_{i+1} - f_i)^2 = \mathbf{f}^t \mathbf{D}_1^t \mathbf{D}_1 \mathbf{f} \quad (4-23)$$

où  $\mathbf{D}_k$  est une matrice représentant la dérivée d'ordre  $k$ .  $\mathbf{D}_1$  est donnée par :

$$\mathbf{D}_1 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{L} & 0 \\ \mathbf{M} & & & \mathbf{O} & & & \mathbf{M} \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & \mathbf{L} & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (4-24)$$

C'est la forme la plus fréquente de la régularisation, elle est connue sous le nom de *régularisation de Tikhonov* [17]. Dans ce cas, la solution régularisée  $\mathbf{f}_\lambda$  est celle qui minimise une combinaison *pondérée* de la *norme résiduelle* et de la contrainte supplémentaire :

$$\mathbf{f}_\lambda = \arg \min \{ \|\mathbf{P}\mathbf{f} - \mathbf{y}\| + \lambda C(\mathbf{f}) \} \quad (4-25)$$

où le *paramètre de régularisation*  $\lambda$  contrôle le poids attribué à la minimisation de la contrainte supplémentaire par rapport à celle de la norme résiduelle. Pour les faibles valeurs de  $\lambda$  ( $\lambda = 0$  à la limite), le critère (4-25) se réduit au critère habituel de moindres carrés et nous retrouvons la solution (4-22). Pour les valeurs élevées de  $\lambda$ , le critère (4-25) se réduit à la contrainte supplémentaire. Dans le cas d'une contrainte représentant la dérivée d'ordre  $k$  de la solution  $\mathbf{f}$ , la solution de l'équation (4-25) est approchée par un polynôme d'ordre  $k-1$  qui s'ajuste le mieux avec les données. Par conséquent,  $\lambda$  doit être choisi avec beaucoup de soins. Une variété de stratégies de choix a été proposée dans la littérature [18]. La stratégie la plus évidente (dans le cas où nous connaissons la variance du bruit ou la norme du vecteur  $\mathbf{e}$ ) consiste à choisir  $\lambda$  telle que la norme résiduelle de la solution  $\mathbf{f}_\lambda$  vérifie la relation :

$$\|\mathbf{P}\mathbf{f}_\lambda - \mathbf{y}\| = \|\mathbf{e}\|. \quad (4-26)$$

Comme dans le cas des moindres carrés classiques, une expression de la solution qui minimise le critère de l'équation (4-25) est disponible et donnée par :

$$\mathbf{f}_\lambda = (\mathbf{P}^t \mathbf{P} + \lambda \mathbf{D}_k^t \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{P}^t \mathbf{y} \quad (4-27)$$

D'autres types de contraintes supplémentaires  $C(\mathbf{f})$  peuvent être incorporés en fonction des connaissances préalables. Quand une solution positive est attendue, la fonction *non linéaire* suivante est utilisée comme contrainte :

$$C(\mathbf{f}) = \sum_{i=1}^n f_i \log(w_i f_i) \quad (4-28)$$

où  $w_1, \mathbf{K}, w_n$  sont  $n$  poids. Cette contrainte correspond à la *régularisation du maximum d'entropie* (car  $-C(\mathbf{f})$  mesure l'entropie de  $\mathbf{f}$ ). Elle est moins immune au bruit que la régularisation de *Tikhonov*.

Quand aucune solution explicite (formelle mais numérique) de l'équation (4-25) n'est disponible, une solution numérique est obtenue par des méthodes *itératives* comme le *gradient conjugué* (CG) ou bien par des méthodes pseudo *directes* comme la *décomposition en valeurs singulières généralisées* (GSVD) [19].

Nous avons montré comment extraire la distribution  $f(\tau)$  à partir d'une frange de Ramsey. Il est aussi possible de l'extraire d'une courbe du signal à la résonance, courbe  $I(b)$ , en utilisant la même méthode de régularisation. Pour cela, on remplace le noyau dans l'équation (4-18) par la fonction  $P(0, b, \tau) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau)$ .

#### 4.3.3.3. Application

Nous avons appliqué la méthode précédente pour estimer la distribution du temps de vol  $f(\tau)$  à partir d'une frange de Ramsey expérimentale. La Figure 4-3 montre une frange enregistrée à une puissance micro-onde relativement élevée. La valeur de  $b$  se déduit graphiquement à partir de la forme de cette frange. En utilisant la méthode du paragraphe 3-6-1, nous trouvons  $b = 3,6$   $b_{opt} = 124830$  rad/s.  $b_{opt}$  étant la valeur de  $b$  qui maximise le signal à la résonance.

Nous avons utilisé  $N = 300$  points de cette frange enregistrée avec un pas de 3 Hz pour remplir le vecteur  $\mathbf{y}$  de la méthode de régularisation. Les points choisis couvrent une plage de fréquence allant de 0 Hz jusqu'à 900 Hz. Nous avons choisi une contrainte représentant la dérivée troisième, et un paramètre de régularisation  $\lambda = 10^{-4}$  calculé à l'aide du critère (4-26). La Figure 4-4 (trait continu) montre la solution obtenue par la méthode de régularisation à partir de la frange de la Figure 4-3.

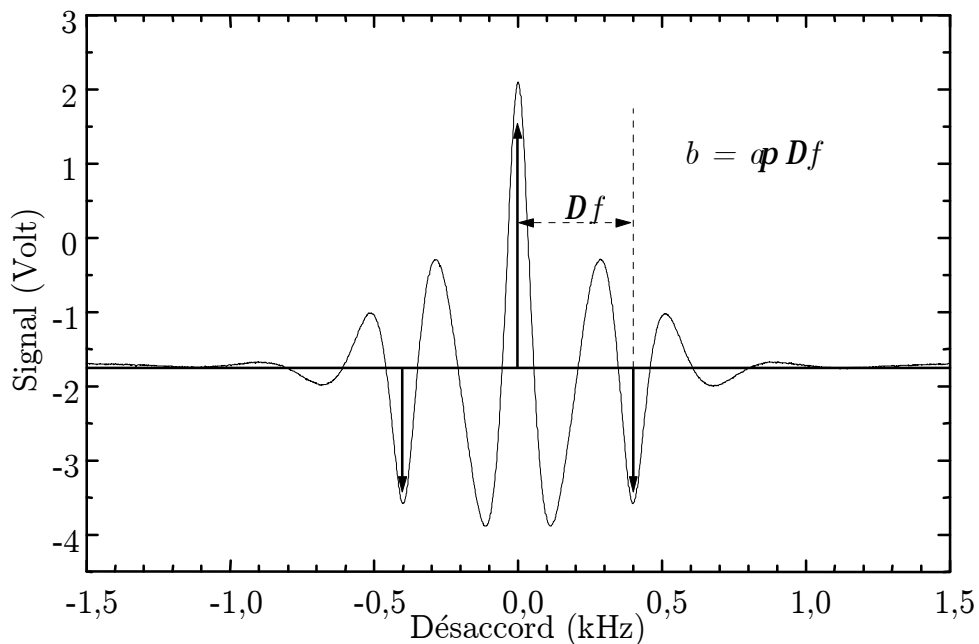


Figure 4-3 : *Frangé de Ramsey expérimentale.*

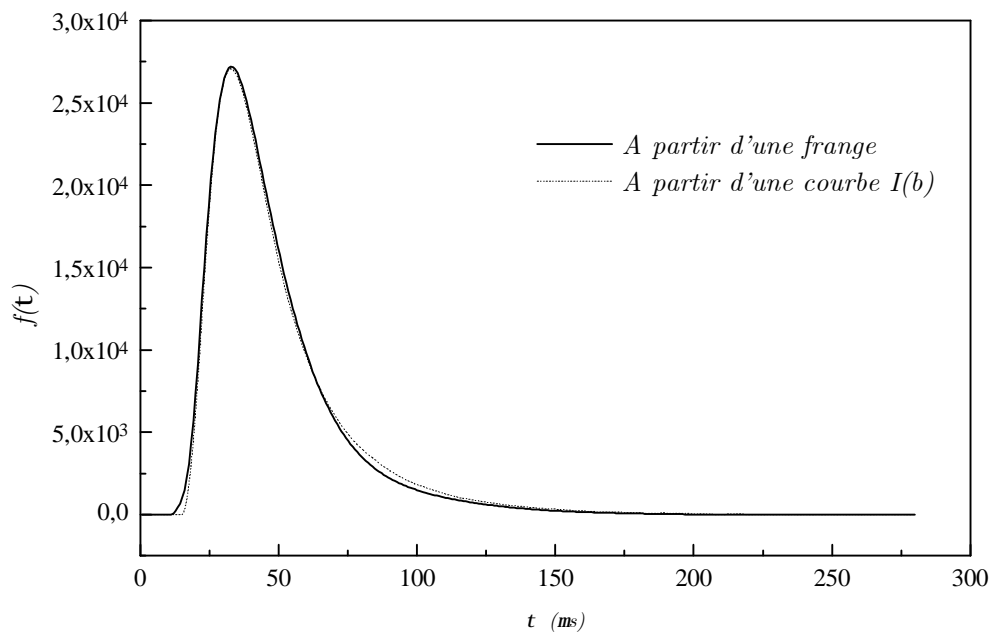


Figure 4-4 :  $f(\tau)$  par la méthode de régularisation de Tikhonou 1) A partir de la frange de la Figure 4-3 (trait continu). 2) A partir de la courbe  $I(b)$  de la Figure 3-5 (en pointillé).

Sur la même figure nous présentons la solution obtenue en appliquant la méthode de régularisation sur les données de la courbe  $I(b)$  déjà présentée dans la Figure 3-5.

A titre de comparaison, nous avons appliqué la méthode de Boulanger pour calculer  $f(\tau)$  à partir de la même courbe  $I(b)$  (celle de la Figure 3-5). Nous présentons sur la Figure 4-5 les solutions obtenues par les deux méthodes ainsi que la distribution théorique correspondant à notre jet (donnée par l'équation (4-5)). Les trois courbes sont normalisées, telles que leur intégrale est égale à 1. Un agrandissement (zoom) de ces courbes montre que la solution régularisée est nulle pour  $\tau$  supérieur à 220  $\mu\text{s}$  tandis que la méthode de Boulanger donne un fond plat pour les valeurs élevées de  $\tau$ . Cette platitude est liée à la Transformée de Fourier du bruit (bruit blanc). La différence entre l'amplitude des pics des deux courbes s'explique par la normalisation.

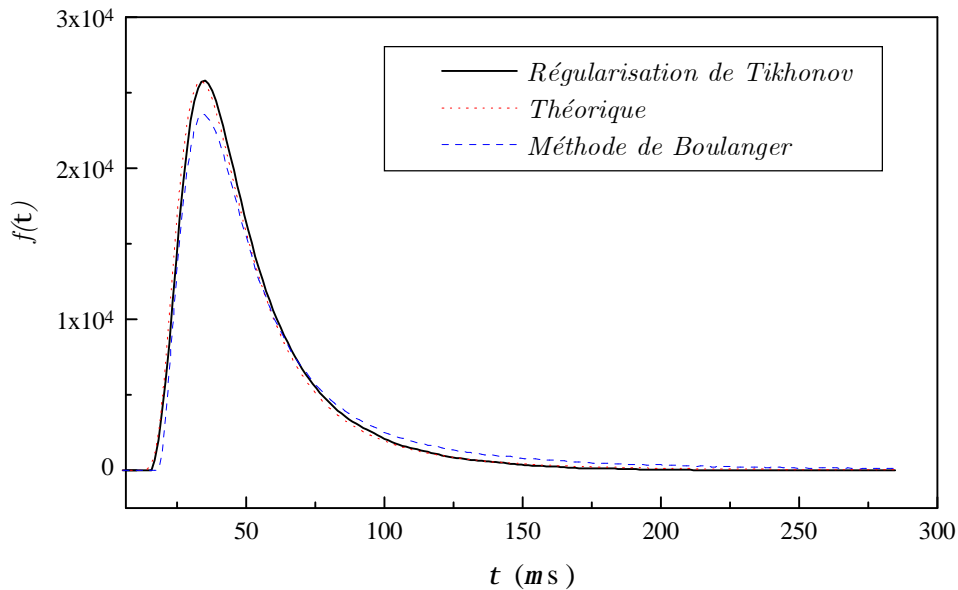


Figure 4-5 : Comparaison de la méthode de régularisation avec celle de Boulanger.

Si nous calculons la frange de Ramsey  $\mathbf{y}_c$ , à partir de la solution  $\mathbf{f}_\lambda$  obtenue par la méthode de régularisation ( $\mathbf{y}_c = \mathbf{P}\mathbf{f}_\lambda$ ), afin de la comparer avec la frange mesu-

rée  $\mathbf{y}$ , nous nous attendons à trouver le bruit  $\mathbf{e}$  en faisant la différence entre la frange mesurée et celle calculée. En réalité, la frange est légèrement distordue par quelques effets tels que le désaccord de la cavité et la différence de phase entre les deux bras de la cavité. La Figure 4-6 montre la différence entre la frange expérimentale de la Figure 4-3 et celle calculée à partir de la solution  $\mathbf{f}_\lambda$ , obtenue à partir de cette frange. Nous montrons aussi sur cette figure les distorsions de la frange induites par deux effets (le désaccord de la cavité et le "phase shift") en prenant les vraies amplitudes de ces effets. La somme de ces deux distorsions semble être en accord avec l'erreur résiduelle (trait continu). Faire apparaître de tels effets ténus confirme, à notre avis, la validité de notre approche (la régularisation) et celle de la solution  $f(\tau)$  obtenue.

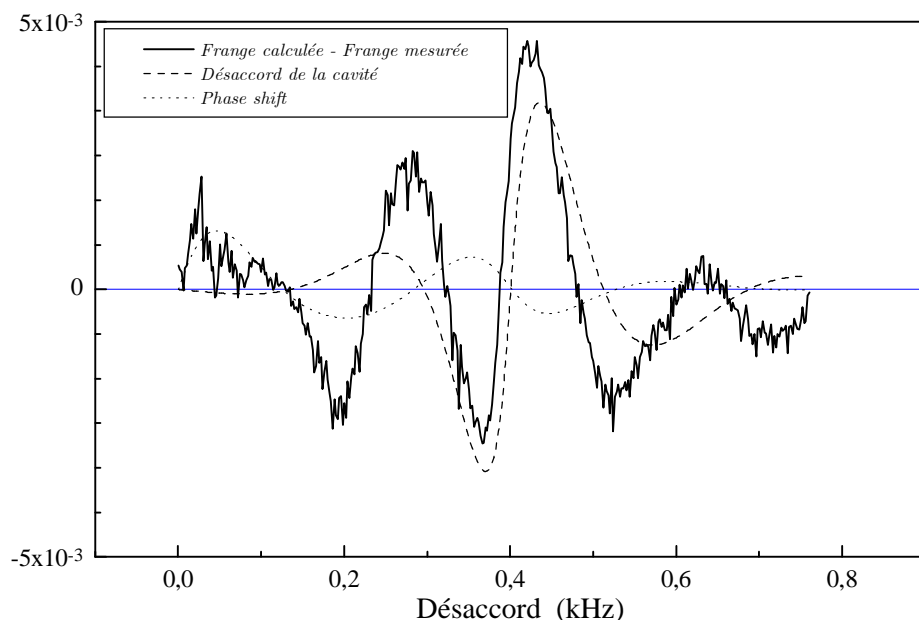


Figure 4-6 : Différence entre la frange mesurée et celle calculée à partir de la solution régularisée.

#### 4.3.4. Inversion du transitoire

Nous avons remarqué lors de la modulation du signal hyperfréquence destinée à alimenter un oscillateur local sur la transition d'horloge, que la forme de la réponse des atomes à un saut de fréquence produit un signal *transitoire*, dont la forme semble



proche de la fonction  $f(\tau)$ . Nous avons alors modélisé ce transitoire dans le but de comprendre le comportement des atomes et nous avons appliqué l'approche de régularisation pour inverser son équation et retrouver la fonction  $f(\tau)$ .

#### 4.3.4.1. Calcul du transitoire

Nous supposons que la fréquence angulaire du désaccord  $\Omega_0$  aux instants  $t < 0$  est égale à  $\omega_1$ . A l'instant  $t = 0$ , nous appliquons un échelon de fréquence qui va de  $\omega_1$  à  $\omega_2$ . Pour tout instant  $t$  nous pouvons écrire :

$$\Omega_0(t) = \omega_1 + \Phi(t) \quad (4-29)$$

où

$$\Phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \omega_2 - \omega_1 = \Delta\omega & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (4-30)$$

$\phi(t)$  est la phase du signal d'interrogation et  $\Phi(t)$  est sa dérivée par rapport au temps  $t$ . Intégrant (4-30) par rapport au temps nous trouvons

$$\phi(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } t < 0 \\ \Delta\omega t & \text{pour } t > 0 \end{cases} \quad (4-31)$$

La Figure 4-7-a montre la forme de l'échelon de fréquence et la Figure 4-7-b montre la forme des signaux  $\phi(t)$  et  $\Phi(t)$  correspondants.

Dans les étalons de fréquence utilisant une cavité de Ramsey avec une longueur de vol libre  $L$  et une longueur d'interrogation  $\mathbf{l}$  telles que  $\mathbf{l} \ll L$ , le signal  $y(t)$ , mesuré par un détecteur positionné à une distance  $D$  de la cavité micro-onde, s'écrit sous la forme ( Voir la Figure 4-8) :

$$y(t) = y_0 + \int_0^{\infty} f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[\Omega_0(t)a_1\tau + \Phi(t, \tau)] d\tau \quad (4-32)$$

Avec

- $a_1 = \frac{L}{\mathbf{1}}$
- $\tau$ ,  $f(\tau)$  et  $b$  définis dans (1-2)
- $\Phi(t, \tau)$  différence de phase vue par un atome de temps d'interaction  $\tau$  et arrivant au détecteur à l'instant  $t$ .

et soient  $a_2 = \frac{D}{\mathbf{1}}$ ,  $\alpha_1 = \frac{\mathbf{1}}{D+L}$  et  $\alpha_2 = \frac{\mathbf{1}}{D}$ .

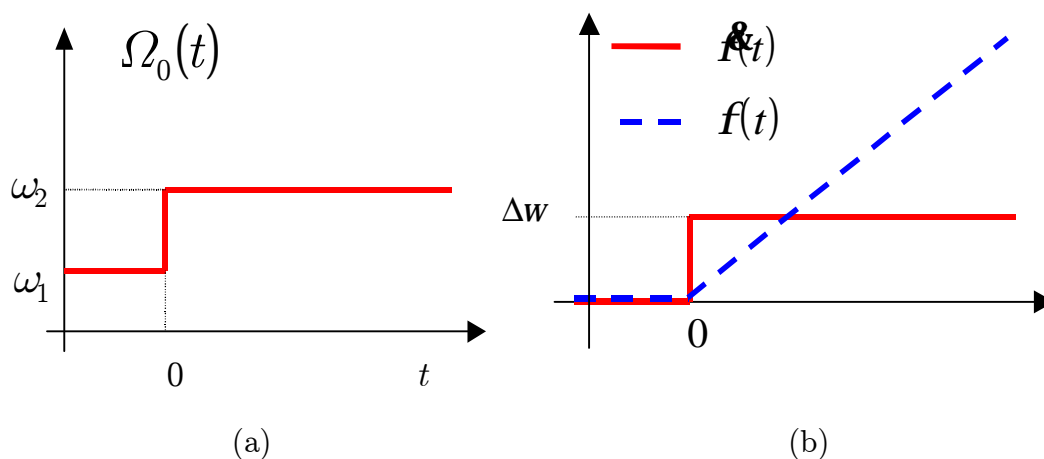


Figure 4-7 : a) L'échelon de fréquence, b) la phase correspondante.

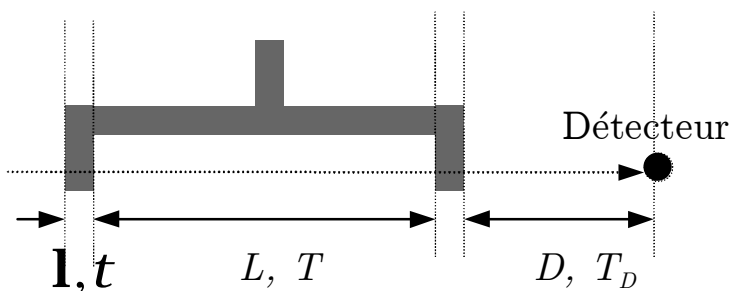


Figure 4-8 : Schéma d'interrogation de Ramsey.

Si nous négligeons la différence de phase électrique entre les champs dans les deux zones d'interrogation, nous pouvons écrire  $\Phi(t, \tau)$  sous la forme :

$$\Phi(t, \tau) = \phi(t - T_D) - \phi(t - T_D - T) \quad (4-33)$$

où  $T_D = a_2\tau$  est le temps mis par l'atome pour parcourir la distance  $D$  entre le deuxième bras de la cavité et le détecteur, et  $T = a_1\tau$  est le temps de son séjour dans la région de vol libre.

Les équations (4-31) et (4-33), permettent d'écrire, pour un temps de vol  $\tau$  fixé,  $\Phi(t, \tau)$  en fonction du temps  $t$  sous la forme

$$\begin{cases} t < T_D \Rightarrow \Phi(t, \tau) = 0 \\ T_D < t < T_D + T \Rightarrow \Phi(t, \tau) = \Delta\omega(t - T_D) \\ t > T + T_D \Rightarrow \Phi(t, \tau) = \Delta\omega T \end{cases} \quad (4-34)$$

Pour calculer l'expression du signal mesuré  $y(t)$  à l'instant  $t$ , nous avons besoin de l'expression de  $\Phi(t, \tau)$  en fonction de  $\tau$  pour un instant fixé  $t$ . Cette expression se déduit de (4-34) :

$$\begin{cases} \tau > \alpha_2 t \Rightarrow \Phi(t, \tau) = 0 \\ \alpha_2 t > \tau > \alpha_1 t \Rightarrow \Phi(t, \tau) = \Delta\omega(t - a_2\tau) \\ \alpha_1 t > \tau > 0 \Rightarrow \Phi(t, \tau) = \Delta\omega a_1\tau \end{cases} \quad (4-35)$$

La Figure 4-9-a représente la forme de  $\Phi(t, \tau)$  en fonction du temps  $t$ . La Figure 4-9-b représente  $\Phi(t, \tau)$  en fonction de  $\tau$  pour un instant fixe  $t$ . C'est cette forme de  $\Phi(t, \tau)$  qui va être utilisée pour calculer le signal mesuré.

L'intégration dans (4-32) peut se décomposer en plusieurs intégrales suivant la forme :

$$y(t) = \int_0^{\infty} \mathbf{K} d\tau = \int_0^{\alpha_1 t} \dots d\tau + \int_{\alpha_1 t}^{\alpha_2 t} \dots d\tau + \int_{\alpha_2 t}^{\infty} \dots d\tau \quad (4-36)$$

En remplaçant l'expression adéquate de  $\Phi(t, \tau)$  à partir de l'équation (4-35) dans (4-36), le signal mesuré se décompose lui aussi sous la forme :

$$y(t) = y_1(t) + y_2(t) - y_3(t) - y_4(t) + C \quad (4-37)$$

où  $C$  est une constante et :

$$y_1(t) = \int_0^{\alpha_1 t} f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[\omega_2 a_1 \tau] d\tau$$

$$y_2(t) = \int_0^{\alpha_2 t} f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[\omega_1 a_1 \tau - \Delta\omega a_2 \tau + \Delta\omega t] d\tau$$

$$y_3(t) = \int_0^{\alpha_1 t} f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[\omega_1 a_1 \tau - \Delta\omega a_2 \tau + \Delta\omega t] d\tau$$

$$y_4(t) = \int_0^{\alpha_2 t} f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[\omega_1 a_1 \tau] d\tau \quad (4-38)$$

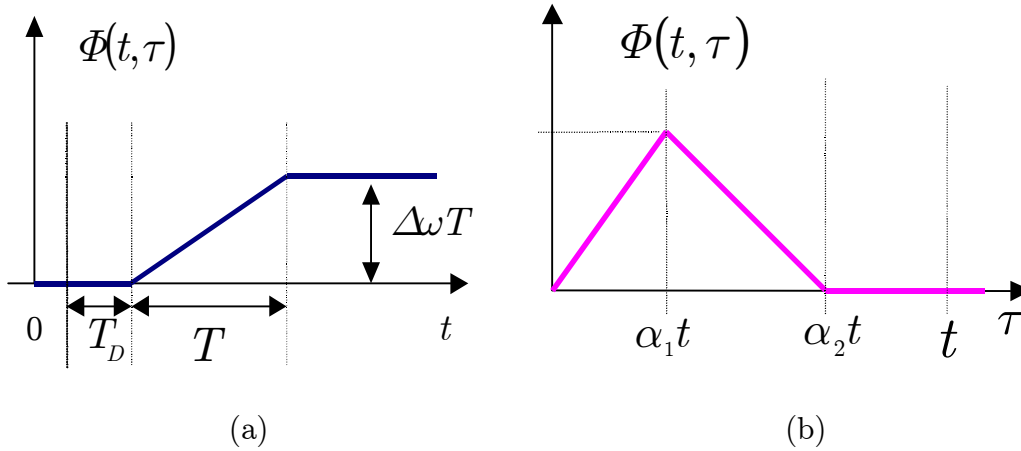


Figure 4-9 :  $\Phi(t, \tau)$  : a) en fonction du temps  $t$ ,

b) en fonction du temps de vol  $\tau$

La Figure 4-10 montre les quatre termes de (4-37) calculés pour un échelon de fréquence qui va de -50 Hz à +50 Hz (la largeur de la frange de Ramsey dans notre jet est de 100 Hz). Le calcul est effectué pour une pulsation de Rabi  $b$  égale à la pulsation optimale  $b_{opt}$  et une distribution  $f(\tau)$  correspondant à une distribution des vitesses Maxwellienne.

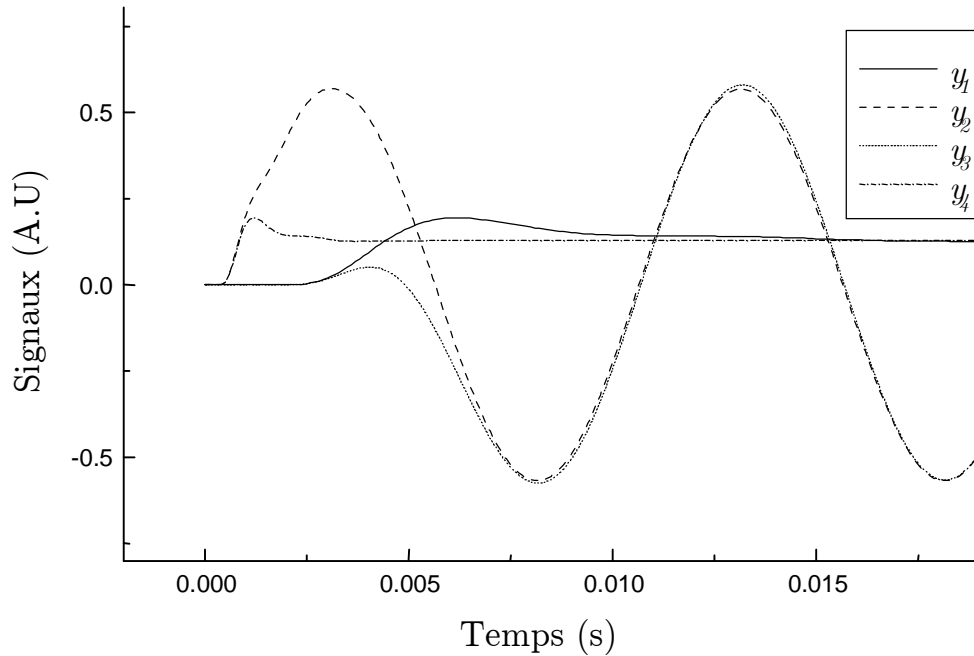


Figure 4-10 : Les quatre termes qui forment le transitoire.

Nous avons mesuré ce transitoire pour différents échelons de fréquence. Les mesures ont été réalisées avec une carte d'acquisition qui échantillonne le signal du détecteur avec un pas de  $60 \mu s$ . Pour avoir un bon rapport signal à bruit nous avons moyenné cent transitoires répétés dans les mêmes conditions. Les mesures sont en bon accord avec le calcul développé plus haut. La Figure 4-11 montre le transitoire dans les mêmes conditions que celles simulées dans la Figure 4-10 (dans notre jet, nous avons  $L = 1000$  mm,  $\mathbf{l} = 10$  mm et  $D = 250$  mm). La courbe théorique est calculée à partir des quatre termes donnés par les équations (4-38) et représentés dans la Figure 4-10.

La différence entre les deux courbes peut s'expliquer par la "simplicité" du modèle représentant le transitoire. En effet, ce modèle ne tient pas compte de la bande passante du détecteur qui déforme le signal "rapide" mesuré. En plus, nous avons supposé un échelon de fréquence parfait (de durée nulle) ce qui n'est pas possible en pratique.

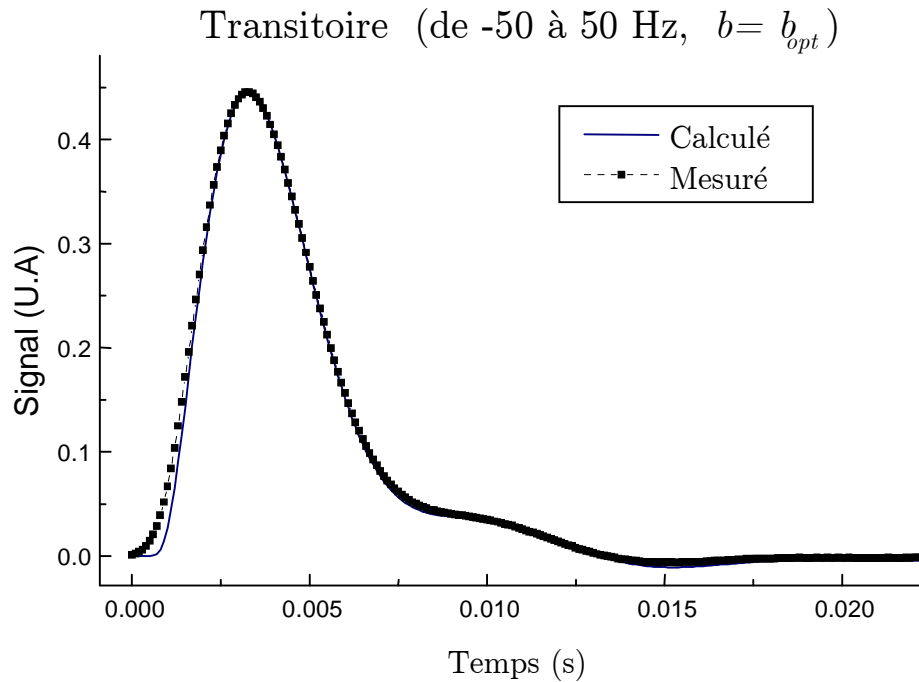


Figure 4-11 : Signal transitoire expérimental et théorique.

#### 4.3.4.2. Calcul de la distribution du temps de vol

L'équation (4-37) montre que le transitoire est la somme de quatre termes. Chaque terme a la forme d'une intégrale de Volterra, telle que le signal  $y(t)$  peut être écrit sous la forme d'une équation de Volterra :

$$y(t) = \int_0^t K(b, \omega_1, \omega_2, \tau) f(\tau) d\tau \quad (4-39)$$

où  $K(\mathbf{L})$  est le noyau connu (par calcul) à partir des équations (4-37) et (4-38),  $y(t)$  est le terme connu expérimentalement et  $f(\tau)$  est l'inconnue de l'équation.

La discrétisation de (4-39) dans  $t$  et  $\tau$  conduit à un système linéaire d'équations de la forme :

$$Y = \mathbf{K}X \quad (4-40)$$

où :

- $Y$  est un vecteur de  $N$  points mesurés (discrétisation de  $y(t)$ )
- $X$  est un vecteur de  $M$  ( $M < N$ ) points de la solution inconnue (discrétisation de  $f(\tau)$ )
- $\mathbf{K}$  est une matrice ( $N \times M$ ) représentant la discrétisation du noyau  $K(\mathbf{L})$ .

Les mesures  $Y$  sont entachées du bruit ce qui rend le système (4-40) mal posé. Pour calculer une solution de (4-40) nous avons utilisé la méthode de régularisation déjà employée dans le paragraphe 4.3.3 avec un critère composé de l'erreur résiduelle  $\|\mathbf{K}X - Y\|$  d'un côté, et de la distance entre la solution recherchée et la solution théorique (la Maxwellienne)  $\|X - X_{th}\|$  de l'autre côté. La solution régularisée s'écrit alors :

$$X_\lambda = \arg \min \{ \|\mathbf{K}X - Y\| + \lambda \|X - X_{th}\| \} \quad (4-41)$$

La Figure 4-12 montre la solution minimisant le terme entre accolades de l'équation (4-41) avec un paramètre de régularisation  $\lambda = 1 \times 10^{-4}$ .

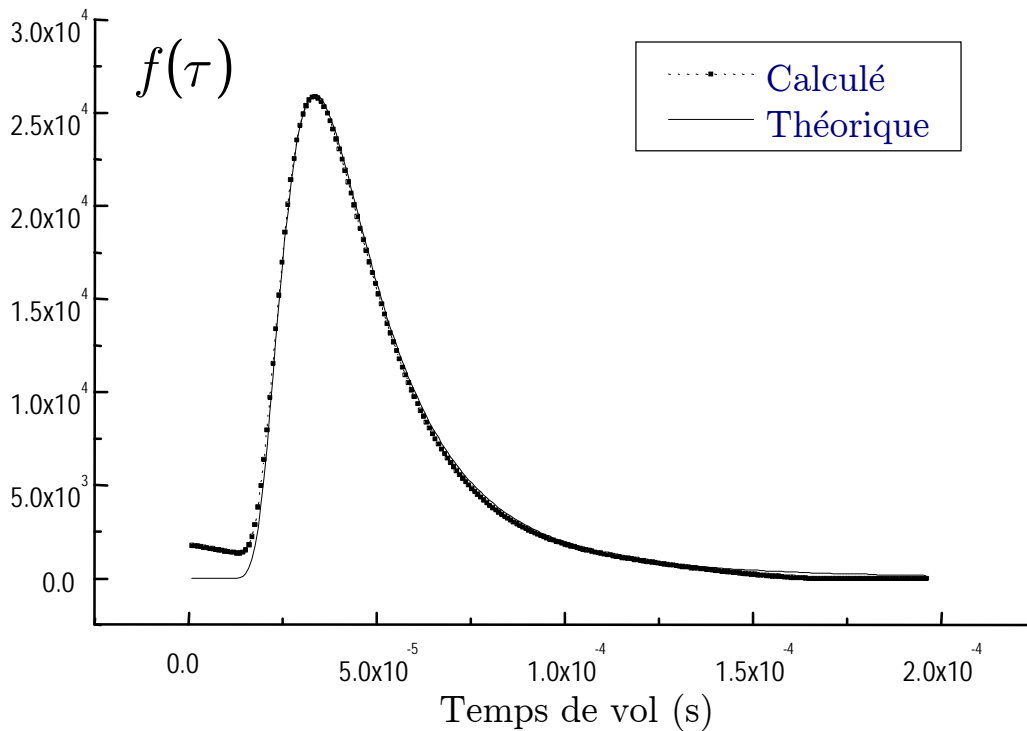


Figure 4-12 :  $f(\tau)$  estimée par inversion régularisée du transitoire.

Dans le système à résoudre (4-40), nous avons utilisé les données mesurées  $Y$  de la Figure 4-11. Nous avons choisi  $N = 300$  points expérimentaux séparés par un pas  $\Delta t = 100 \mu s$ , Le calcul du temps de vol a été effectué en  $M = 250$  points espacés de  $\Delta \tau = \alpha_1 \Delta t = \Delta t / 125 = 0,8 \mu s$ . Sur la même figure nous montrons la distribution théorique  $X_{th}$  qui a été utilisée dans la contrainte supplémentaire.

Là ici, la différence notable entre les deux courbes pour les temps de vol faibles peut s'expliquer par les imperfections du modèle.

## 4.4. Critère de Comparaison

Plusieurs méthodes ont été proposées pour déterminer la distribution du temps de vol. Quand nous avons utilisé les différentes distributions ainsi obtenues pour calculer l'effet Doppler du second ordre<sup>11</sup>, chaque méthode a montré une *répétabilité* de quelques  $10^{-15}$  en valeur relative, pour différents enregistrements expérimentaux. Mais la différence entre deux méthodes a, parfois, été supérieure à  $10^{-14}$ . Ceci nous a amené à penser qu'il pouvait y avoir un *biais* ou une erreur systématique introduit par chacune des méthodes. Ce biais peut être dû à l'*approximation* des modèles utilisés dans certaines méthodes ou bien à la sensibilité de la méthode au *bruit* qui entache toutes les mesures utilisées dans ces méthodes. Il nous a paru alors nécessaire d'établir un critère pour pouvoir juger et comparer ces différentes méthodes.

### 4.4.1. Le critère

Pour pouvoir comparer ces méthodes, nous avons pensé qu'il serait très souhaitable de pouvoir calculer l'effet Doppler par une méthode qui ne dépende pas de la distribution du temps de vol.

Lorsqu'une modulation carrée de fréquence est utilisée pour asservir un oscillateur local sur la transition d'horloge, la fréquence asservie est décalée par l'effet Doppler du second ordre, dont la valeur relative est [20]:

---

<sup>11</sup> C'est l'effet le plus sensible à la distribution du temps de vol. Il sera expliqué dans le chapitre "Exactitude".



$$\frac{\nu_D}{\nu_0} = - \frac{\mathbf{1}^2 \int_0^{\infty} \tau^{-1} \sin^2(b\tau) \sin(a\omega_m \tau) f(\tau) d\tau}{2c^2 \int_0^{\infty} \tau \sin^2(b\tau) \sin(a\omega_m \tau) f(\tau) d\tau} \quad (4-42)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière en m/s,  $\nu_D$  est l'effet Doppler en Hz et  $\omega_m$  est la profondeur de modulation en rad/s.

Traditionnellement, cet effet est estimé en calculant les deux intégrales de (4-42) après détermination de la pulsation de Rabi  $b$  et de la distribution  $f(\tau)$ . Nous avons montré dans la référence [20], qu'il est possible de calculer cet effet à partir d'une frange de Ramsey  $s(\Omega_0, b)$  expérimentale enregistrée dans les mêmes conditions que celles de la modulation, suivant la relation :

$$\frac{\nu_D}{\nu_0} = \frac{L^2 \int_0^{\omega_m} [s(\omega, b) - s(0, b)] d\omega}{2c^2 \left. \frac{\partial s(\omega, b)}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} \quad (4-43)$$

Nous appelons dans la suite "Méthode Directe" le calcul de l'effet Doppler d'après l'équation (4-43). C'est cette méthode qui va être utilisée comme critère de comparaison, avec les autres méthodes de calcul de l'effet Doppler, à partir de la distribution du temps de vol.

#### 4.4.2. La Comparaison

Après avoir déterminé la pulsation de Rabi  $b$  par une des méthodes présentées au chapitre 3, nous avons calculé l'effet Doppler par la relation (4-42) avec les distributions  $f(\tau)$  obtenues par cinq méthodes différentes. Le Tableau 4-1 rappelle les caractéristiques des méthodes choisies.

La Figure 4-13 montre les résultats obtenus par les cinq méthodes du Tableau 4-1. La ligne horizontale représente le résultat obtenu par la méthode directe. L'écart de la méthode de Boulanger peut être dû à un manque de précision dans les mesures du niveau micro-onde. L'écart de la méthode du transitoire peut être dû à la ré-

ponse du détecteur qui a été négligée, ou au fait que l'échelon réalisé (par le synthétiseur) n'est pas parfait.

| Méthode                         | Domaine des données          | Approximation ? | Combien ?  |
|---------------------------------|------------------------------|-----------------|--|
| Régularisation                  | Fréquence<br>ou Puissance MO | NON             | Une frange de Ramsey<br>ou une courbe $I(b)$     |
| Shirley                         | Fréquence                    | OUI             | 3 ou 4 franges de Ramsey                         |
| Boulangier                      | Puissance MO                 | NON             | Une courbe $I(b)$ + une<br>frange de Ramsey      |
| Puissance Micro-<br>Onde élevée | Fréquence                    | OUI             | Une partie d'une frange de<br>Ramsey à $b$ fort. |
| Transitoire                     | Temps                        | OUI             | La réponse à un saut de<br>fréquence             |

Tableau 4-1 : Les Méthodes du calcul de la distribution du temps de vol.

### L'effet de Doppler relatif

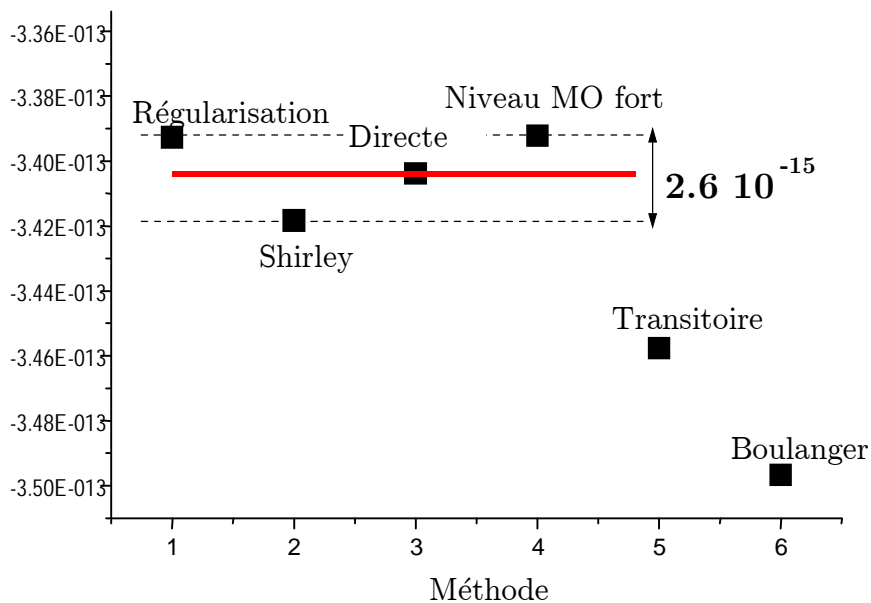


Figure 4-13 : Comparaison des différentes méthodes.

En éliminant les méthodes de transitoire et celle de Boulanger nous pouvons estimer l'effet Doppler avec une incertitude de  $2,6 \times 10^{-15}$ .

## 4.5. Maxwell et l'hypergéométrie

La détermination de la distribution du temps de vol peut servir dans deux cas de figures : le premier est de calculer quelques effets qui déforment la frange de Ramsey. L'estimation de ces effets nécessite le calcul d'intégrales de fonctions oscillatoires qui dépendent de  $f(\tau)$ . Ce calcul doit être effectué avec une bonne précision, ce qui exige d'avoir une présentation discrète de  $f(\tau)$  avec un pas de discrétisation très faible  $\Delta\tau \leq 10^{-6}$  s. Exiger une présentation aussi dense de  $f(\tau)$  peut être coûteux en termes de calcul pour certaines méthodes d'estimation de  $f(\tau)$ . Il est possible alors d'estimer  $f(\tau)$  sur un ensemble de points moins dense, puis d'utiliser la théorie des interpolations (par "splines" par exemple) pour avoir une présentation plus dense et pouvoir effectuer le calcul des intégrales. Le deuxième cas de figure consiste à calculer la forme de la frange (complète ou partielle) ou la forme de la dissymétrie de la frange induite par certains effets. Dans ce cas, la précision du résultat est moins importante que dans le premier cas.

Nous avons remarqué que la forme de  $f(\tau)$  estimée par les diverses méthodes n'est pas très éloignée de celle prédite par la théorie et donnée dans l'équation (4-5). Ceci nous laisse penser que l'utilisation de cette distribution théorique peut suffire dans le deuxième cas de figure.

Dans la plupart des applications on est amené à utiliser les valeurs de la Transformée en Cosinus de la fonction  $f(\tau)$  qui s'écrit, dans le cas de la distribution théorique correspondant à une distribution de vitesse Maxwellienne, sous la forme :

$$F(\xi) = \int_0^{\infty} \frac{4\tau_0^3}{\sqrt{\pi}\tau^4} \exp\left(-\frac{\tau_0^2}{\tau^2}\right) \cos(\xi\tau) d\tau \quad (4-44)$$

En dérivant cette relation trois fois par rapport à la variable  $\xi$ , et en utilisant les propriétés des intégrations par parties nous pouvons établir une équation différentielle dont la solution est  $F(\xi)$ . Par ailleurs, cette équation différentielle a une solution formelle basée sur les fonctions hypergéométriques. En identifiant les deux solutions, nous obtenons :

$$F(\xi) = H\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \left(\frac{\xi\tau_0}{2}\right)^2\right) + \frac{8}{3}\sqrt{\pi}\left(\frac{\xi\tau_0}{2}\right)^3 H\left(2, \frac{5}{2}, \left(\frac{\xi\tau_0}{2}\right)^2\right) \quad (4-45)$$

où  $H$  est la fonction *hypergéométrique* définie par :

$$\begin{aligned} H(a, b, x) &= \sum_{i=0}^{\infty} m_i x^i \\ m_i &= \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+i)\Gamma(b+i)\Gamma(i+1)} \\ \Gamma(z) &= \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \end{aligned} \quad (4-46)$$

$\Gamma(z)$  est la fameuse fonction *gamma* ( $\Gamma(n+1) = n!$ ) disponible dans la plupart des bonnes bibliothèques (logicielles) mathématiques et elle se calcule avec une très bonne approximation sans faire appel au calcul intégral. Les coefficients  $m_i$  décroissent rapidement avec la valeur de  $i$  et la somme infinie dans l'expression de  $H$  peut être tronquée à une valeur  $N$  finie ( $N = 50$  est largement suffisant).

L'utilisation de l'expression (4-45) à la place de l'intégrale (4-44) pour calculer  $F(\xi)$  est beaucoup plus économique, surtout pour les grandes valeurs de  $\xi$ , où l'intégrant dans (4-44) devient très oscillatoire. Même les algorithmes optimisés pour le calcul des intégrales des fonctions oscillantes (par FFT) sont moins performants que le calcul polynomial de l'équation (4-45).

## 4.6. Conclusion

Nous avons rappelé les différentes méthodes existantes dans la littérature pour estimer la distribution des vitesses des atomes d'un jet thermique. Trois nouvelles méthodes ont été proposées. La première est basée sur une frange de Ramsey enregistrée à puissance micro-onde élevée. La deuxième est basée sur l'inversion avec régularisation d'une frange de Ramsey ou d'une courbe  $I(b)$ . La troisième est basée sur la réponse du jet à un saut de fréquence. Enfin, un critère de comparaison des différentes méthodes a été établi. Ceci nous a permis d'estimer l'effet Doppler dans notre jet avec une incertitude de  $2,6 \times 10^{-15}$ .

## Bibliographie

- [1] J. Vanier et C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. Bristol, Adam Hilger, 1989.
- [2] A. Papoulis, *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, 2<sup>ième</sup> édition, 1984.
- [3] A. G. Mungall, "The second order Doppler shift in cesium beam atomic frequency standards," *Metrologia*, vol. 7, pp. 49 - 56, 1971.
- [4] H. Hellwig et al., "Evaluation and operation of atomic beam tube frequency standards using time domain velocity selection," *Metrologia*, vol. 9, pp. 107 - 112, 1973.
- [5] G. D. Rovera, A. Premoli et A. De Marchi, "Determining the velocity distribution in cesium beams from the response to a microwave pulse", dans *Frequency Standards and Metrology*, A. De Marchi Ed., Berlin : Springer Verlag, 1989, pp.395 - 397.
- [6] S. Jarvis, "Determination of velocity distributions in molecular beam frequency standards from measured resonance curves," *Metrologia*, vol. 10, pp. 87 - 98, 1974.
- [7] A. Bauch et T. Heindorff, "The PTB primary atomic clocks CS3 and CS4: determination of further uncertainty contributions," dans *Proc. 8<sup>th</sup> European Freq. Time Forum*, 1994, pp. 503- 512, Weihenstephan, Germany.
- [8] E. de Clercq, A. Clairon, B. Dahmani, A. Gérard et P. Aynié, "Design of an optically pumped Cs laboratory frequency standard," dans *Frequency Standards and Metrology*, A. De Marchi Ed., Berlin : Springer Verlag, 1989, pp.120 - 125.
- [9] A. Hamel, "Propriétés d'un résonateur atomique à jet de césium pompé optiquement et à structure de champ longitudinale," *Thèse de doctorat*, Université de Paris-Sud, Orsay, France, 1989.
- [10] A. Hamel, V. Giordano, P. Petit, et C. Audoin, "Velocity distribution measurement in an optically pumped cesium beam resonator," dans *Proc. 14<sup>th</sup> European Freq. Time Forum*, Neuchâtel, Switzerland, 1990, pp. 169 - 174.

- 
- [11] V. G. Domelunksen, A. Y. Nicolaev, et L. Y. Khryashchev, " Possibility of using the optical-pumping effect to measure velocities of particles in an atomic beam," *Opt. Spectrosc. (USSR)*, vol. 64, pp. 700 - 701, 1988.
- [12] W. D. Lee, J. H. Shirley, et R. E. Drullinger, "Velocity distributions of atomic beams by gated optical pumping," dans *Proc. IEEE Int. Freq. Contr. Symp.*, 1995, pp. 658 - 661, San Francisco, CA.
- [13] J.-S. Boulanger, "A new method for the determination of velocity distributions in cesium beam clocks," *Metrologia*, vol. 23, pp. 37 - 44, 1986.
- [14] J. H. Shirley, "Velocity distributions from the Fourier Transforms of Ramsey line shapes," dans *Proc. 43<sup>rd</sup> Ann. Symp. Freq. Contr.*, 1989, Denver, CO, pp. 162 — 167, et *IEEE Trans. Instr. Measur.*, vol. 46, pp. 117-121, April 1997.
- [15] A. Makdissi et E. de Clercq, "A Regularization Approach for the Determination of the Time of Flight Distribution in the Cesium Beam Standards," *IEEE Trans. Ultra. Ferro. Freq. Contr.*, vol. 44, No. 3, pp. 637 -642. May 1997.
- [16] C. W. Groetsh, *The Theory of Tikhonov Regularization for Fredholm Equations of the First Kind*, Boston : Pitman, 1984.
- [17] A. N. Tikhonov et V. Y. Arsenin, *Solutions of Ill-Posed Problems*, Washington, DC : Winston & Sons, 1977.
- [18] H. W. Engl et J. Gfrerer, "A posteriori parameter choice for general regularization methods for solving linear ill-posed problems," *Appl. Numerical Math.*, vol. 4, pp. 395 - 417, 1988.
- [19] P. C. Hansen, "Regularization, GSVD and truncated GSVD," *BIT* (Denmark), vol. 29, pp. 491 - 504, 1989.
- [20] A. Makdissi et E. de Clercq, "A Signal Approach Analysis of the Ramsey Pattern in Cesium Beam Frequency Standards," *IEEE Trans. Instr. Measur.*, vol.46, No. 2, pp. 112-116, April 1997.



# Chapitre 5. ASSERVISSEMENT - MO- DELE STATIQUE

---

Les étalons de fréquence atomiques à césium sont des étalons passifs. Pour tirer profit de la stabilité de la résonance atomique nous verrouillons la fréquence d'un oscillateur à quartz sur la fréquence atomique. L'asservissement consiste à obliger la fréquence de l'oscillateur local à poursuivre la transition atomique. Pour atteindre les meilleures performances une opération de Modulation - Démodulation est souvent introduite. Dans ce chapitre nous présenterons le principe d'asservissement d'un oscillateur local sur la résonance atomique d'un étalon passif. Une étude détaillée de la boucle d'asservissement sera ensuite présentée. La stabilité de l'oscillateur asservi sera établie et les différents facteurs limitatifs de cette stabilité seront discutés.

## 5.1. Principe

Habituellement, on dispose d'un oscillateur à quartz dont la fréquence nominale a une valeur ronde de 5 ou 10 MHz. Une chaîne de multiplication de fréquence sert à fournir à partir de ce quartz une fréquence  $\nu$  voisine de la fréquence de transition atomique du césium  $\nu_0$ . Dans la suite nous appelons *fréquence de l'oscillateur local*  $\nu_{LO}$  la sortie de la chaîne de multiplication de fréquence. Nous désignons par  $\nu_{LLO}$  sa fréquence quand elle est asservie.

La fréquence du quartz et donc de l'oscillateur local est entachée de plusieurs sources de perturbations (bruit thermique, vieillissement, dérive). L'*asservissement* de cette dernière consiste à lui faire *suivre* une fréquence de *référence* plus stable. Tout le rôle de l'horloge atomique dans le montage d'asservissement se réduit à fournir indirectement cette fréquence de référence.

La Fig. 5-1 représente un schéma bloc des opérations à réaliser lors de l'asservissement.



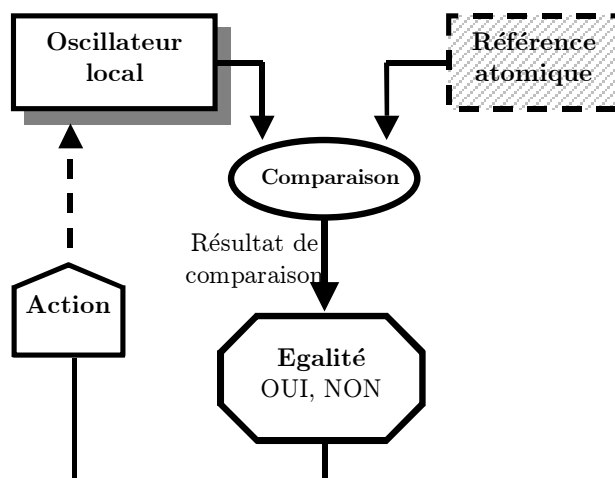


Fig. 5-1 : Schéma bloc des opérations à réaliser lors de l'asservissement

Ces opérations sont mises en œuvre pratiquement par un système d'asservissement à bouclage<sup>12</sup> comme le montre la Fig. 5-2.

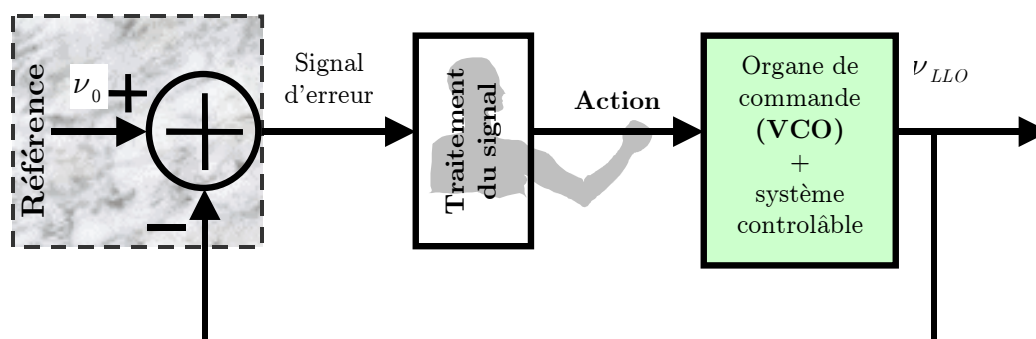


Fig. 5-2 : Système à bouclage décrivant l'asservissement d'un oscillateur local sur la fréquence de référence atomique

Dans cette figure, la partie hachurée représente l'opération de Modulation - Démodulation décrite plus loin qui permet de comparer la fréquence de l'oscillateur local,

<sup>12</sup> Dans une opération de bouclage (en anglais "feedback"), les résultats des observations sont, après réflexion, utilisés pour élaborer des actions. Ce n'est que dans les années 1930 que WIENER a introduit cette notion de bouclage comme "une méthode de commande d'un système, consistant à lui réinjecter les résultats de ses performances passées".

disponible à la sortie de la chaîne, avec celle de la référence atomique. La sortie de cette partie est appelée "Signal d'erreur". L'objectif de l'asservissement est de rendre  $\nu$  égale à  $\nu_0$  et par suite de rendre le signal d'erreur nul.

Le bloc de traitement du signal d'erreur est la partie *réflexion* de la boucle à la suite de laquelle une décision d'effectuer une *action* (corriger la fréquence de l'oscillateur local dans notre cas) est prise. L'organe de commande pour la chaîne de fréquence est son oscillateur à fréquence commandée en tension (**O.F.C.**, en anglais VCO<sup>13</sup>). Dans le paragraphe suivant nous décrirons la partie de la boucle qui fournit le signal d'erreur.

## 5.2. Génération du signal d'erreur

Le signal détecté à l'issue de l'interrogation des atomes dans la cavité est la frange de Ramsey dont le sommet coïncide<sup>14</sup> avec un oscillateur local accordé sur la transition atomique, ce qui se traduit par un signal d'erreur nul. Le système d'asservissement doit garder son point de fonctionnement au maximum global de la frange de Ramsey en présence des perturbations dans le signal de la frange ainsi que dans l'oscillateur local. Les performances du système asservi (temps de réponse, possibilité de supprimer les dérives linéaires ou paraboliques, maximum de stabilité, etc. ...) dépendent considérablement de la méthode utilisée pour la *recherche* et le *maintien* au maximum de la frange de Ramsey. La Fig. 5-3 montre deux formes possibles de la frange de Ramsey à deux instants différents. Nous constatons un changement de la valeur du maximum (à cause d'une variation de la température, du gain du système électronique de détection, etc. ...) ainsi qu'un déplacement de la position de ce maximum (déplacement Zeeman, ...).

Les méthodes de poursuite d'un maximum global sont divisées dans la littérature en deux catégories:

---

<sup>13</sup> **VCO = Voltage Controlled Oscillator.** C'est un générateur de signal de forme déterminée (sinusoïdale, carrée, ...), dont la fréquence est commandée par un signal électrique (courant ou tension), appliqué à une entrée particulière.

<sup>14</sup> en négligeant les effets perturbateurs de la frange de Ramsey.

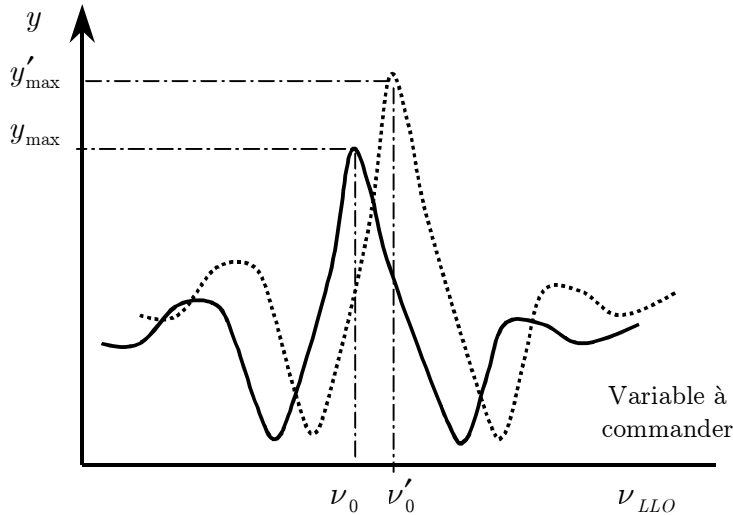


Fig. 5-3 : Formes possibles de la frange de Ramsey à deux instants différents. (comportement typique en cas de changement de température et du champ magnétique statique).

- *Poursuite par excitation* où le système est excité constamment loin de son point de fonctionnement (le sommet) pour déduire l'état présent de la variable à commander par rapport au sommet.
- *Poursuite par maintien* où les excitations fortes ne sont pas permises, Dans ce cas des petites variations progressives sont appliquées aux variables à commander quand elles s'éloignent du point de fonctionnement pour les replacer autour du maximum.

Dans les systèmes d'asservissement de fréquence, nous pouvons facilement fabriquer un signal d'excitation artificiel (par addition de fréquence) à partir du point de fonctionnement sans modifier ce dernier. C'est pourquoi la méthode de poursuite par excitation est largement répandue dans la pratique, et elle prend la forme d'une opération de *modulation* autour du point de fonctionnement pour exciter le système. Une *démodulation* adéquate est en suite effectuée pour extraire la position de la variable à commander par rapport au maximum ce qui n'est autre que le signal d'erreur.

### 5.2.1. Modulation-Démodulation

La frange de Ramsey est une fonction symétrique (paire) par rapport à la fréquence de transition d'horloge  $\nu_0$ . Les effets qui traduisent ou dissymétrisent cette frange

seront négligés dans ce chapitre. Le chapitre 7 sera consacré à l'estimation de ces effets. La réponse de l'horloge à une fréquence micro-onde  $\nu$  est donnée par une fonction paire  $h(\nu - \nu_0)$  représentant la frange non perturbée.

La modulation *carrée de fréquence* consiste à ajouter à la fréquence de l'oscillateur local  $\nu_{LO}$  une forme d'onde rectangulaire et périodique  $m(t)$  de période  $2T_c$  et d'amplitude  $\nu_m$  (profondeur de modulation) comme nous le montrons dans la Fig. 5-4.

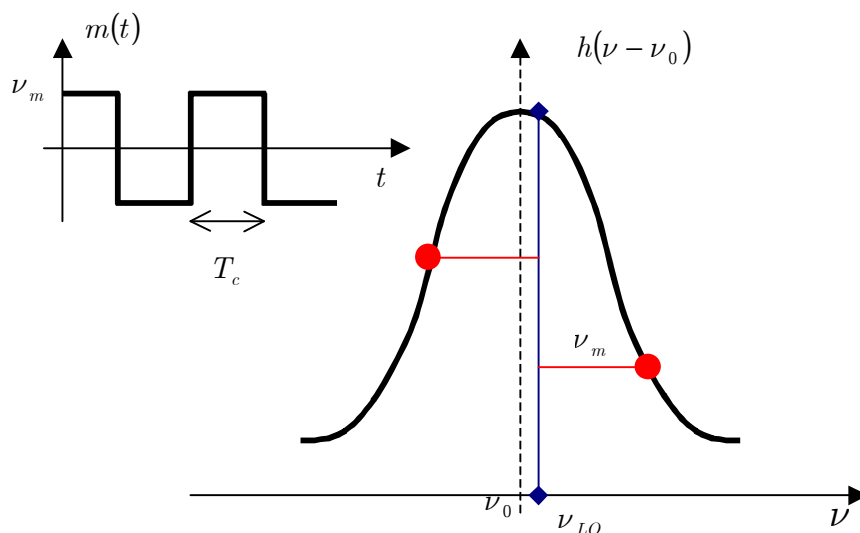


Fig. 5-4 : Modulation carrée de fréquence.

La fréquence d'interrogation  $\nu(t)$  s'écrit, à tout instant  $t$ , sous la forme :

$$\nu(t) = \nu_{LO}(t) + m(t) \quad (5-1)$$

Le signal  $m(t)$  prend les valeurs  $(-1)^k \nu_m$  suivant le cycle  $k$  (demi-période) d'interrogation. Supposons que la fréquence de l'oscillateur local  $\nu_{LO}(t)$  n'est pas très éloignée de la fréquence de transition  $\nu_0$ , de façon à pouvoir considérer le désaccord de l'oscillateur local, non asservi pour le moment, suffisamment petit. Ce désaccord  $w(t)$  est défini par :

$$w(t) = \nu_{LO}(t) - \nu_0 \quad (5-2)$$

Le signal mesuré  $s(t)$ , à tout instant  $t$ , s'écrit dans ces conditions sous la forme :

$$s(t) = h(\nu(t) - \nu_0) + n(t) \quad (5-3)$$

où  $n(t)$  représente la fluctuation du signal de détection<sup>15</sup>, toutes sources de variations résiduelles confondues, lorsque la fréquence d'interrogation est égale à  $\nu_0 \pm \nu_m$ .

En reportant dans cette relation l'expression (5-1) de la fréquence d'interrogation  $\nu(t)$  modulée, et en utilisant la définition du désaccord  $w(t)$ , on obtient immédiatement :

$$s(t) = h(w(t) + (-1)^k \nu_m) + n(t) \quad (5-4)$$

Supposons, dans la suite, que :

- 1) La fréquence de modulation  $f_M = 1/2T_c$  est suffisamment lente.
- 2) La fréquence de l'oscillateur local est constante pendant la durée totale d'interrogation d'un atome  $T$ , ce qui revient à négliger les variations de phase vues par l'atome lorsqu'il traverse les deux zones d'interaction.
- 3) La réponse transitoire des atomes aux sauts de fréquence de  $\nu_m$  à  $-\nu_m$  et inversement a été supprimée.

Ces hypothèses forment ce qu'on appelle un modèle "**quasi-statique**" [1] de la réponse du jet aux variations de la fréquence. Le cas dynamique où la deuxième hypothèse n'est pas vérifiée sera traité dans le chapitre 6.

---

<sup>15</sup> Il est possible démontrer que si la fréquence atomique varie avec le temps  $\nu_0(t)$ , alors la relation (5-3) reste valable avec un bruit de mesure qui contient en plus de  $n(t)$  un terme qui dépend des variations de  $\nu_0$ .

En faisant un Développement Limité du premier ordre de l'expression précédente autour des points  $\nu_m$  et  $-\nu_m$ , nous pouvons l'écrire sous la forme :

$$s(t) = h((-1)^k \nu_m) + w(t) \left. \frac{\partial h}{\partial \nu} \right|_{(-1)^k \nu_m} + n(t) \quad (5-5)$$

Cette écriture n'est vraie que si la condition 2 du modèle quasi-statique est vérifiée. Nous verrons par la suite, que cette hypothèse n'est pas totalement vraie et par conséquence le terme  $\partial h / \partial \nu$  supposé constant ici va dépendre du temps  $t$ .

La fonction  $h(\cdot)$  étant paire, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a &= h(\nu_m) = h(-\nu_m) \\ p &= \frac{\partial h}{\partial \nu}(\nu_m) = -\frac{\partial h}{\partial \nu}(-\nu_m) \end{aligned} \quad (5-6)$$

D'où :

$$s(t) = a + (-1)^k p w(t) + n(t) \quad (5-7)$$

Nous constatons que le signal mesuré dans le cas d'une modulation carrée de fréquence contient déjà le signal d'erreur recherché  $w(t)$ . Cependant, le terme principal dans le signal mesuré est le terme constant  $a$  qui n'est pas utile. Cette constante est plutôt non désirable car elle contient la réponse de l'horloge à notre signal artificiel  $m(t)$  qui a été introduit pour aider à obtenir un signal d'erreur. Pour se débarrasser de ce terme constant nous effectuons une *démodulation* en multipliant le signal mesuré  $s(t)$  par un signal (artificiel aussi) de démodulation  $d(t)$ . Nous obtenons alors un signal démodulé  $x(t)$  dont l'expression est donnée par :

$$x(t) = s(t) \cdot d(t) = a \cdot d(t) + (-1)^k p \cdot w(t) \cdot d(t) + n(t) \cdot d(t) \quad (5-8)$$

Si nous choisissons un signal de démodulation rectangulaire et périodique identique à celui de la modulation mais d'amplitude 1,  $d(t) = (-1)^k$ , le signal démodulé s'écrit alors :

$$x(t) = (-1)^k a + w(t)p + (-1)^k n(t) \quad (5-9)$$

La valeur moyenne sur le cycle  $k$  ( $t \in [(k-1)T_c, kT_c]$ ) de ce signal est définie par :

$$x_k = \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} x(t) dt \quad (5-10)$$

Nous définissons de la même façon les signaux discrets  $w_k$  et  $n_k$ . Nous pouvons alors exprimer le signal démodulé moyen sur le cycle  $k$  par :

$$x_k = (-1)^k a + pw_k + (-1)^k n_k \quad (5-11)$$

Il est facile maintenant d'extraire le signal d'erreur  $w_k$  par un traitement numérique du signal démodulé  $x_k$  qui fait disparaître le terme constant  $a$ . La façon la plus simple de faire est de former le signal  $e_k$  en sommant les valeurs du signal démodulé  $x_k$  sur deux cycles successifs :

$$e_k = x_k + x_{k-1} \quad (5-12)$$

qui s'écrit à partir de (5-11) sous la forme :

$$e_k = p(w_k + w_{k-1}) + (-1)^k (n_k - n_{k-1}) \quad (5-13)$$

Nous avons ainsi obtenu un signal  $e_k$  contenant des informations sur la position de l'oscillateur local par rapport à la fréquence atomique. Quand la boucle est fermée, le signal d'erreur  $e_k$  est utilisé (après traitement) pour corriger l'oscillateur local.

Soit  $y$  le désaccord de l'oscillateur local quand la boucle est fermée. Les relations précédentes restent valables à condition de considérer la fermeture de la boucle, c'est-à-dire remplacer  $w$  par  $y$ . La boucle d'asservissement de la Fig. 5-2 est faite de façon à actionner l'oscillateur local pour rendre le signal  $e_k$  nul en régime permanent. Ce régime s'obtient pour  $k \rightarrow \infty$  en remplaçant les signaux de l'équation (5-13) par leurs valeurs moyennes sur tout leur historique de  $k = 1$  à  $k \rightarrow \infty$ . La valeur moyenne  $n$  de  $n_k$  est forcément nulle d'après sa définition (bruit blanc centré) et nous avons à partir de l'équation (5-13) :

$$e \rightarrow 0, \Rightarrow p(y + y) = 2py \rightarrow 0 \quad (5-14)$$

La pente  $p$  n'étant pas nulle, c'est donc *forcément* le désaccord en boucle fermée  $y$  qui *s'annule* et la fréquence de l'oscillateur local asservi *converge* vers la fréquence atomique.

Nous avons convenu plus haut que la boucle se comporte de façon à rendre le signal d'erreur nul. Dans la suite nous expliquons comment faire pour que la boucle actionne l'oscillateur local de cette manière intelligente.

### 5.3. Le cerveau et les muscles

La partie intelligente de la boucle comprend une *réflexion* sur le signal d'erreur que nous venons d'obtenir par modulation - démodulation. Après réflexion, une *action* doit être prise pour corriger la déviation de l'oscillateur local. Cette action est prise en fonction de la capacité de l'organe commandé à y réagir.

Avant de voir comment former l'action, regardons en détail l'oscillateur local qui va réagir à cette action. Cet oscillateur est commandable en tension, ce qui veut dire que sa fréquence de *sortie* est commandée par un signal électrique appliqué à une *entrée* particulière. Notons  $\nu_{LLO}$  sa fréquence de sortie,  $\nu_{LO}$  sa fréquence propre qui peut évoluer librement, et  $c$  son entrée (la tension). La fréquence de sortie s'écrit à tout instant  $t$  sous la forme :

$$\nu_{LLO}(t) = \nu_{LO}(t) - k_v c(t) \quad (5-15)$$

où  $k_v$  représente la sensibilité du VCO.



Remarque :

Notons que, d'après cette définition, si l'oscillateur asservi est verrouillé sur la transition atomique, cela n'entraîne pas que l'oscillateur libre le soit. En effet, si  $\nu_{LLO} = \nu_0$ , on a alors, selon l'équation (5-15),  $\nu_{LO} = \nu_0 + k_v c$ .

Essayons de passer le signal  $e_k$ , obtenu par traitement numérique, au VCO directement comme entrée *sans réfléchir*. Avant, il faut transformer les nombres discrets  $e_k$  en tension électrique continue. Ceci se fait en utilisant un bloc de *maintien* (bloqueur) d'ordre zéro (Zero Order Holder) qui produit un signal électrique constant, par morceau, de durée  $T_c$ , et d'amplitude égale à la valeur numérique appliquée à son entrée. En termes de relation entrée-sortie, nous écrivons :

$$c(t) = e_k, \quad \text{pour } t \in [kT_c, (k+1)T_c] \quad (5-16)$$

Ou encore :

$$c(t) = \sum_{k=0}^{\infty} e_k h(t - kT_c) \quad (5-17)$$

en désignant par  $h(t)$  la réponse impulsionnelle du bloqueur et  $c(t)$  son signal de sortie.

La Fig. 5-5 représente un schéma de fonctionnement d'un bloqueur d'ordre zéro ainsi que sa réponse impulsionnelle  $h(t)$ . Nous montrons aussi un exemple d'une séquence d'entrée et la tension de sortie correspondante.

Notons que la valeur moyenne de la sortie  $c(t)$  durant le cycle  $k$  est égale à la valeur appliquée à l'entrée à l'instant  $k-1$ , et nous avons  $c_k = e_{k-1}$  en adoptant la définition (5-10) pour  $c_k$ .

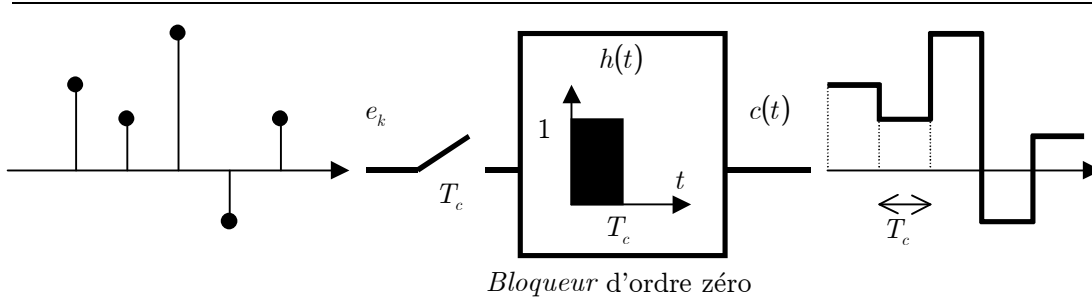


Fig. 5-5 : Bloc de maintien d'ordre zéro.

Dans ce cas (sans réflexion), les équations développées dans le paragraphe précédent sont valables à condition de tenir compte du fait que la fréquence d'interrogation est celle de l'oscillateur commandé, ce qui revient à remplacer  $\nu_{LO}$  par  $\nu_{LLO}$ . Si nous multiplions la séquence numérique  $e_k$  par une constante  $b_0$  (gain de la boucle), le désaccord devient :

$$\begin{aligned} y_k &= \nu_{LLO} - \nu_0 = w_k - k_v c_k \\ c_k &= b_0 e_{k-1} \end{aligned} \quad (5-18)$$

et l'équation (5-13) devient :

$$e_k = p(y_k + y_{k-1}) + (-1)^k (n_k - n_{k-1}) \quad (5-19)$$

En régime permanent, nous aurons alors en définissant  $k_0 = b_0 k_v$  :

$$\left. \begin{aligned} y &= w - k_0 e \\ e &= 2py \end{aligned} \right\} \Rightarrow y = \frac{1}{1 + 2k_0 p} w \quad (5-20)$$

Autrement dit, le désaccord  $y$  de l'oscillateur asservi n'est nul que si l'oscillateur libre (sans asservissement) est déjà accordé. De plus, nous verrons plus tard, qu'il y a une condition pour que la boucle converge. Cette condition de *stabilité* est donnée dans ce cas par  $-0,5 < k_0 p < 1$  ce qui veut dire qu'on peut espérer, au mieux, réduire le désaccord de l'oscillateur libre  $w$  par un facteur important en choisissant

une valeur de  $b_0$  telle que  $k_0 p$  soit proche de  $-0,5$ . Ce choix se fait au prix d'un fonctionnement de la boucle à la limite de la stabilité ce qui revient à accepter un comportement oscillatoire de l'oscillateur asservi.

Ce résultat peut être résumé de la manière suivant :

Utiliser le signal d'erreur directement, c'est-à-dire sans traitement approprié, pour commander l'oscillateur local ne suffit pas pour le verrouiller sur la transition atomique.

Nous allons, par la suite, réfléchir sur la façon de former les actions dans la boucle pour rendre l'oscillateur asservi accordé quels que soient le désaccord et le comportement de l'oscillateur libre. Cette réflexion se traduit en insérant un bloc de traitement du signal d'erreur dans la boucle. Pour cela nous allons étudier le comportement d'une boucle très générale en mettant un cahier des charges et en étudiant les conditions à remplir pour que notre cahier des charges soit vérifié.

## 5.4. Description de la boucle

Considérons une boucle générale comme celle de la Fig. 5-6. Elle correspond à la boucle du paragraphe précédent, mais nous avons ajouté un bloc numérique, le calculateur, pour la génération et le traitement du signal d'erreur.

Les signaux discrets dans cette boucle désignent ou bien des valeurs moyennes sur le cycle  $k$  quand il s'agit de signaux continus (entre la sortie du bloqueur et l'entrée du calculateur) ou bien des valeurs numériques quand il s'agit des valeurs calculées à l'intérieur du calculateur. Nous distinguons les blocs opérationnels suivants dont nous rappelons les caractéristiques :

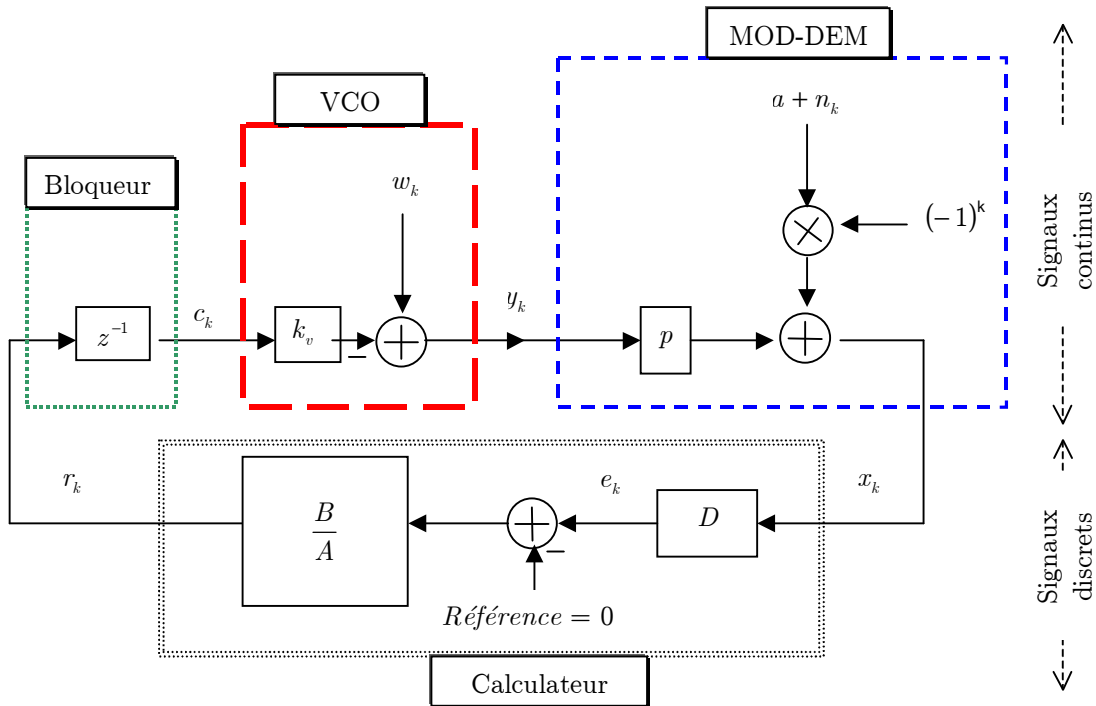


Fig. 5-6 : Schéma général de la boucle d'asservissement

### Bloc de l'oscillateur local commandable :

Sa sortie  $y_k$  représente le désaccord entre l'oscillateur asservi et la fréquence atomique. Elle est donnée par :

$$y_k = w_k - k_v c_k \quad (5-21)$$

en désignant par  $w_k$  le désaccord entre l'oscillateur libre et la résonance atomique, c'est-à-dire quand la tension d'entrée  $c_k$  est nulle. Rappelons que  $w_k$  est généralement inconnu et évolue librement et indépendamment de l'entrée  $c_k$  du VCO.

### Bloc de Modulation-Démodulation (MOD-DEM) :

Il représente l'opération de Modulation-Démodulation décrite au paragraphe 5.2.1. Sa sortie  $x_k$  désigne le signal démodulé pendant le cycle  $k$ .

En pratique, nous obtenons ce signal en échantillonnant le signal de détection (5-7) avec une fréquence d'échantillonnage  $1/T_s$  très élevée. Nous obtenons ainsi  $N$  ( $N$  est grand) échantillons représentant les valeurs du signal de détection durant le cy-

cle  $k$ . Ces échantillons vont servir pour pouvoir approcher l'intégrale dans la relation (5-10) par une moyenne arithmétique. La démodulation du signal de détection se fait par multiplication par  $\pm 1$  suivant le cycle courant :

$$x_k = (-1)^k s_k = (-1)^k \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s(t) \delta(t - jT_s), \quad t \in [(k-1)T_c, kT_c] \quad (5-22)$$

L'expression de ce signal démodulé en fonction du désaccord  $y_k$ , quand la boucle est fermée, a été donnée par l'équation (5-11) que nous rappelons ici :

$$x_k = (-1)^k a + p y_k + (-1)^k n_k \quad (5-23)$$

où  $p$  représente la *pen*te de la courbe de résonance.

#### **Bloc de génération du signal d'erreur :**

C'est le bloc  $D$  dans la Fig. 5-6. Il présente les opérations numériques effectuées, par le calculateur, sur les valeurs numériques (tronquées par quantification) du signal démodulé  $x_k$ . Le rôle principal de ce bloc est de supprimer la suite alternée  $(-1)^k a$  pour pouvoir extraire un signal d'erreur  $e_k$ . Le calculateur consiste en une unité de traitement numérique (Micro-ordinateur, Microcontrôleur, DSP, etc. ...). Nous supposons que le calcul de la séquence  $e_k$  se fait numériquement comme étant la sortie d'un filtre linéaire à moyenne mobile (MA) de longueur  $M+1$  suivant la relation :

$$e_k = \sum_{n=0}^M d_n x_{k-n} \quad (5-24)$$

en désignant par  $\{d_k\}$  la séquence numérique représentant la réponse impulsionnelle du bloc  $D$ . L'équation (5-12) de la boucle précédemment étudiée (la boucle "sans réfléchir"), correspond à un cas particulier du bloc  $D$ .

#### **Bloc de calcul des corrections :**

C'est le bloc  $B/A$  dans la Fig. 5-6. Il présente les opérations effectuées sur le signal d'erreur  $e_k$  pour calculer une commande  $r_k$  qui sera envoyée à l'oscillateur

après le passage par le bloqueur. Nous supposons que ce bloc a un modèle linéaire du type moyenne mobile autoregressive (ARMA)<sup>16</sup>. Il peut être décomposé en deux parties : une partie  $A$  auto-régressive (AR) qui traite les valeurs passées de  $r_k$  et une partie  $B$  non régressive (MA) qui traite les valeurs de l'entrée  $e_k$ . L'équation entrée-sortie qui régit ce bloc est :

$$\sum_{n=0}^P a_n r_{k-n} = \sum_{n=0}^Q b_n e_{k-n} \quad (5-25)$$

En supposant que  $a_0 = 1$ , il vient :

$$r_k = -\sum_{n=1}^P a_n r_{k-n} + \sum_{n=0}^Q b_n e_{k-n} \quad (5-26)$$

Cette écriture suppose que les valeurs calculées  $r_k$  ne sont disponibles qu'aux instants multiples de  $T_c$ . En réalité, pour des longueurs de filtres  $P$  et  $Q$  raisonnables, le temps de calcul de  $r_k$  est très petit devant la durée du cycle  $T_c$  et nous pouvons négliger le temps total du traitement numérique. Si ce temps de calcul est grand, nous introduisons un retard d'un cycle dans la boucle, ce qui revient à mettre le coefficient  $b_0$  égal à zéro dans l'équation (5-25).

### **Le bloqueur d'ordre zéro :**

C'est le bloc qui transforme la suite de valeurs numériques  $r_k$  en un signal électrique constant de valeur  $c_k$ . Il a été étudié en détail au paragraphe 5.3. Nous rappelons ici sa relation d'entrée-sortie :

$$c_k = r_{k-1} \quad (5-27)$$

Cette relation caractérise un retard pur d'un cycle.

---

<sup>16</sup> De l'anglais AutoRegressive Moving Average. Les termes "autoregressive" et "moyenne mobile" ont été inventés par les statisticiens et adoptés dans le domaine de traitement du signal dans les années 70.

Notons que, dans un schéma classique d'asservissement, on forme un signal d'erreur de la forme "signal d'erreur = Référence - grandeur à commander". Dans notre schéma, la référence étant nulle, nous avons passé le signal " $e_k - 0$ " au bloc de traitement car le bloc VCO inverse le signe des corrections.

Dans la suite, nous allons étudier la conception des blocs de traitement numériques. Cette conception est conditionnée par les contraintes suivantes :

- 1) Il faut que le bloc  $D$  soit capable d'extraire un signal d'erreur comme celui déjà obtenu par l'équation (5-12). (c'est-à-dire capable de supprimer la suite alternée  $(-1)^k a$  dans le signal démodulé). Nous confions cette tâche au bloc  $D$  vu qu'il est le seul à pouvoir agir sur la suite  $x_k$ .
- 2) Il faut que les corrections engendrées par le bloc  $B/A$  soient capables d'asservir l'oscillateur local sur la transition atomique. En régime permanent, cette condition se traduit par un désaccord  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$  quel que soit le comportement de l'oscillateur libre.

Pour étudier les conditions que doivent vérifier les blocs de traitement numérique, nous allons réécrire les équations de la boucle sous une forme plus maniable.

## 5.5. Conception du correcteur

Avant de développer les équations de la boucle, nous allons introduire un outil mathématique qui facilite l'étude des systèmes échantillonnés. C'est la transformée en  $z$ . Elle est aux systèmes et signaux à temps discret ce que la transformée de Laplace (ou de Fourier) est aux systèmes et signaux à temps continu.

### 5.5.1. Transformée en $z$

On appelle *transformée en  $z$  unilatérale* d'une suite  $\{x_k\}$ , la somme, lorsqu'elle existe,  $X(z)$  définie par [2] :

$$X(z) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k}, z \in \mathbf{C} \quad (5-28)$$

On peut montrer à partir de cette définition les propriétés importantes, dans notre cas, suivantes :

- Retard :  $y_k = x_{k-n} \Rightarrow Y(z) = z^{-n} X(z)$  (5-29)

- Impulsion :  $y_k = \delta_k \Rightarrow Y(z) = 1$  (5-30)

- Echelon unité :  $x_k = 1, k \geq 0 \Rightarrow X(z) = \frac{z}{z-1}$  (5-31)

- Multiplication par  $k$  :  $y_k = k x_k \Rightarrow Y(z) = -z \frac{dX(z)}{dz}$  (5-32)

- Rampe :  $y_k = T_c k \Rightarrow Y(z) = \frac{T_c z}{(z-1)^2}$  (5-33)

- Suite alternée :  $y_k = (-1)^k x_k \Rightarrow Y(z) = X(-z)$  (5-34)

- Filtrage linéaire :  $y_k = \sum_{n=0}^{\infty} h_n x_{k-n} \Rightarrow Y(z) = H(z)X(z)$  (5-35)

- Filtre dérivateur :

$$\begin{aligned} y_k &= x_k - x_{k-1} \Rightarrow Y(z) = (1 - z^{-1})X(z) \\ &\Rightarrow H(z) = (1 - z^{-1}) \end{aligned} \quad (5-36)$$

- Filtre intégrateur :

$$\begin{aligned} y_k &= \sum_{n=0}^k x_n = y_{k-1} + x_k \Rightarrow Y(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})} X(z) \\ &\Rightarrow H(z) = \frac{1}{(1 - z^{-1})} \end{aligned} \quad (5-37)$$

- Théorème de la valeur finale :  $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = \lim_{z \rightarrow 1} \{(1 - z^{-1})X(z)\}$  (5-38)

### 5.5.2. Equations de la boucle

L'application de la transformée en  $z$  aux équations de la boucle donne :

1) Pour le bloc de l'oscillateur, nous avons, à partir de l'équation (5-21) :

$$Y(z) = W(z) - k_v C(z) \quad (5-39)$$



2) Pour le bloc de MOD-DEM, nous avons à partir de l'équation (5-23) et en utilisant les propriétés (5-31) et (5-34) :

$$X(z) = \frac{az}{z+1} + pY(z) + N(-z) \quad (5-40)$$

3) Pour le bloc de génération du signal d'erreur, nous obtenons à partir des équations (5-24) et (5-35) :

$$E(z) = D(z)X(z) \quad (5-41)$$

4) Pour le bloc correcteur, nous calculons à partir de l'équation (5-25) :

$$A(z)R(z) = B(z)E(z) \Rightarrow R(z) = \frac{B(z)}{A(z)}E(z) \quad (5-42)$$

5) Pour le bloqueur d'ordre zéro, nous avons, tout simplement, à partir de (5-27) :

$$C(z) = z^{-1}R(z) \quad (5-43)$$

Ces équations "*polynomiales*"<sup>17</sup> sont beaucoup plus simples à manipuler que les équations de *réurrence* temporelles.

Intéressons nous aux conditions que doivent vérifier les fonctions  $D(z)$ ,  $B(z)$  et  $A(z)$  pour que les deux contraintes mentionnées plus haut soient respectées.

---

<sup>17</sup> En automatique, nous parlons de fonction de transfert polynomiale si sa transformée en  $z$  est d'ordre fini ou si elle est du type moyenne mobile (MA). Notons qu'un polynôme d'ordre infini représente souvent une fonction de transfert Autoregressive (AR) d'ordre fini.

D'abord, pour que le bloc  $D$  soit capable de supprimer la constante  $a$ , il faut que la réponse de ce bloc à la suite alternée  $(-1)^k a$ , toute seule, soit *nulle* à tout instant  $k$ . Soit d'après l'équation (5-24) :

$$a \sum_{n=0}^M d_n (-1)^{k-n} = 0, \forall k \quad (5-44)$$

D'où

$$\sum_{n=0}^M d_n (-1)^n = 0 \quad (5-45)$$

Utilisant la définition de la transformée en  $z$ , il vient :

$$D(-1) = 0 \quad (5-46)$$

Autrement dit, il faut que la somme des coefficients du filtre  $D(z)$  modulés par la suite  $(-1)^k$  soit nulle. Nous citons en exemple parmi les filtres qui vérifient cette condition les filtres suivants :

$$\begin{aligned} \{d_k\} &= \{1,1\} \\ \{d_k\} &= \{1,2,1\} \\ \{d_k\} &= \{1,2,2,1\} \end{aligned} \quad (5-47)$$

Le premier exemple est le traitement, largement répandu, déjà effectué par l'équation (5-12), qui consiste à sommer deux valeurs consécutives du signal démodulé  $x_k$ .

En pratique, l'opération de démodulation est réalisée par le calculateur et non pas en multipliant le signal de détection par le signal de démodulation analogique  $d(t)$ . On peut alors rassembler les opérations de démodulation et

celle du calcul du signal d'erreur par un seul bloc  $D'(z)$  tel que  $D'(z) = D(-z)$ . La condition (5-46) s'écrit alors sous la forme  $D'(1) = 0$ . Autrement dit, la première contrainte se traduit par un bloc  $D'(z)$ , composé de la démodulation et du calcul du signal d'erreur, dont la somme des coefficients est nulle. Cette condition se résume en disant que le bloc  $D'(z)$  doit réaliser une opération de dérivation. Parmi les dérivateurs les plus courants nous citons la dérivée première  $\{d'_k\} = \{1, -1\}$  et la dérivée seconde  $\{d'_k\} = \{1, -2, 1\}$ .

Supposons, dans la suite, que le filtre  $D(z)$  vérifie la contrainte (5-46). On peut alors simplifier l'expression du signal démodulé  $X(z)$ , en ne tenant pas compte du terme en  $a$  qui est annulé dans l'étape suivante lors du calcul du signal d'erreur. L'équation (5-40) devient alors :

$$X(z) = pY(z) + N(-z) \quad (5-48)$$

Respecter la deuxième contrainte consiste à choisir  $A(z)$  et  $B(z)$  de façon que  $y_k \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0$ . Nous allons alors calculer  $Y(z)$  pour déterminer la condition qu'implique cette contrainte. Réécrivons les équations précédentes de la boucle :

$$\begin{aligned} Y(z) &= W(z) - k_v C(z) \\ C(z) &= z^{-1} R(z) \\ R(z) &= \frac{B(z)}{A(z)} E(z) \\ E(z) &= D(z) X(z) \\ X(z) &= pY(z) + N(-z) \end{aligned} \quad (5-49)$$

D'où on tire immédiatement :

$$Y(z) [A(z) + k_v p z^{-1} B(z) D(z)] = A(z) W(z) - k_v z^{-1} B(z) D(z) N(-z) \quad (5-50)$$

Soit :

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= \frac{A(z)}{A(z) + k_v p z^{-1} B(z) D(z)} W(z) - \frac{k_v z^{-1} B(z) D(z)}{A(z) + k_v p z^{-1} B(z) D(z)} N(-z) \\
 Y(z) &= H_1(z) W(z) + H_2(z) N(-z)
 \end{aligned}
 \tag{5-51}$$

Nous appelons  $H_1(z)$  la fonction de transfert entre l'oscillateur libre et celui asservi et  $H_2(z)$  la fonction de transfert entre le bruit de détection et l'oscillateur asservi.

Le désaccord de l'oscillateur asservi (c'est-à-dire la précision de la boucle) en *régime permanent* est quantifié, selon le théorème (5-38) de la valeur finale, par :

$$y_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} y_k = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t) = \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)Y(z)\} \tag{5-52}$$

Supposons que  $N(z)$  représente un bruit centré. Nous avons alors :

$$\sum_k n_k = \sum_k (-1)^k n_k = N(1) = N(-1) = 0 \tag{5-53}$$

Nous supposons aussi que le filtrage de ce bruit par le filtre  $H_2(z)$  donne aussi un bruit centré tel que  $H_2(1)N(-1) = 0$ . L'équation (5-52) se simplifie alors sous la forme :

$$\begin{aligned}
 y_\infty &= \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)H_1(z)W(z)\} + \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)H_2(z)N(-z)\} \\
 y_\infty &= \lim_{z \rightarrow 1} \{(z-1)H_1(z)W(z)\}
 \end{aligned}
 \tag{5-54}$$

Cette expression montre que, l'erreur  $y_\infty$  dépend à la fois du système de traitement numérique (présence de  $D(z)$ ,  $A(z)$  et  $B(z)$ ) et du type de comportement de l'oscillateur libre (présence de  $W(z)$ ).

### Discussion :

Supposons que le désaccord de l'oscillateur libre est une constante égale à  $w_0$ , ce qui revient à dire que  $W(z)$  est un échelon. Alors :

$$W(z) = \frac{w_0 z}{z-1} \Rightarrow y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ w_0 \frac{A(z)}{A(z) + pk_v B(z)D(z)} \right\} \quad (5-55)$$

On voit que  $y_\infty$  dépend du nombre de facteurs  $z-1$  que comporte  $A(z)$ , c'est-à-dire du nombre de dérivateurs dans le filtre  $A(z)$  ou du nombre d'intégrateurs dans le bloc de traitement numérique du signal d'erreur :

- Si ce nombre est nul, alors  $y_\infty = C^{te} = \frac{A(1)}{A(1) + pk_v B(1)D(1)} w_0$
- Sinon  $y_\infty = 0$ .

A partir de considérations analogues, on peut dresser le tableau suivant :

**ERREUR PERMANENTE**


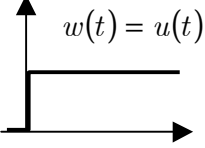
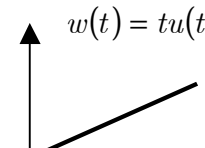
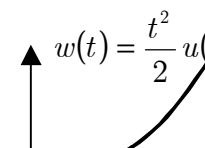

|   |   |   |   |
|---|---|---|---|
| Désaccord de l'oscillateur libre.<br>    | <br>$w(t) = u(t)$ | <br>$w(t) = tu(t)$ | <br>$w(t) = \frac{t^2}{2} u(t)$ |
| Nombre d'intégrateurs dans la boucle<br> | $W(z) = \frac{z}{z-1}$  | $W(z) = \frac{T_c z}{(z-1)^2}$  | $W(z) = \frac{T_c^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$  |
| 0   | $y_p$   | $\infty$  | $\infty$  |
| 1   | 0   | $y_v$   | $\infty$  |
| 2   | 0   | 0   | $y_A$   |

Tableau 1 : Erreur permanente de la boucle d'asservissement en fonction du comportement de l'oscillateur libre et de type de traitement numérique.

en désignant par  $y_p$ ,  $y_v$  et  $y_A$  les erreurs appelées de position, de vitesse et d'accélération.

Dans la suite nous étudions en détails le comportement de la boucle pour des cas précis et pratiques des fonctions  $D(z)$ ,  $A(z)$  et  $B(z)$ .

## 5.6. Applications

Nous allons choisir des cas très simples des fonctions  $D(z)$ ,  $A(z)$  et  $B(z)$  qui vérifient les contraintes mentionnées à la fin du paragraphe 5.4. Dans chaque cas, nous allons analyser le système asservi, c'est-à-dire étudier ses performances intrinsèques.

### 5.6.1. Le plus simple (1Intégrateur - 1Dérivateur)

C'est une boucle dans laquelle le signal d'erreur est calculé à partir du signal détecté (et non démodulé, car la démodulation est effectuée par traitement numérique) par simple *dérivation* du premier ordre, ce qui revient à choisir :

$$\begin{aligned} D'(z) &= (1 - z^{-1}) \text{ (Dérivée du 1<sup>er</sup> ordre)} \\ D(z) &= (1 + z^{-1}) \end{aligned} \tag{5-56}$$

Il vérifie bien la première contrainte concernant la génération du signal d'erreur, car nous avons bien  $D(-1) = D'(1) = 0$ .

Concernant la deuxième contrainte, nous choisissons le bloc  $B/A$  de façon à ce qu'il soit capable d'annuler le désaccord en régime permanent  $y_\infty$  si l'oscillateur local présente des désaccords de type échelon seulement. Les résultats dressés dans le Tableau 1, nous conduisent à choisir une boucle comportant un seul *intégrateur numérique*, Autrement dit :

$$\begin{aligned} \frac{B(z)}{A(z)} &= b_0 \frac{1}{(1 - z^{-1})} = \text{Un intégrateur numérique.} \\ \Rightarrow B(z) &= b_0, A(z) = 1 - z^{-1} \end{aligned} \tag{5-57}$$

Nous avons choisi un bloc  $B$  sous la forme d'un simple gain  $b_0$  pour pouvoir agir, si nécessaire, sur la stabilité de la boucle.

En remplaçant les expressions (5-56) et (5-57) dans l'équation générale (5-51) donnant le désaccord de l'oscillateur asservi, nous obtenons :

$$\begin{aligned}
Y(z) &= \frac{1 - z^{-1}}{1 + (\beta - 1)z^{-1} + \beta z^{-2}} W(z) - \frac{k_0 z^{-1}(1 + z^{-1})}{1 + (\beta - 1)z^{-1} + \beta z^{-2}} N(-z) \\
Y(z) &= H_1(z)W(z) + H_2(z)V(z)
\end{aligned} \tag{5-58}$$

où nous avons posé  $k_0 = b_0 k_v$ ,  $\beta = k_0 p$  et  $V(z) = N(-z) \Rightarrow v_k = (-1)^k n_k$ .

L'équation (5-58) définit un système linéaire invariant dans le temps (LTI), à coefficients constants. Nous avons aussi défini dans cette équation les fonctions de transferts (transmittances<sup>18</sup>)  $H_1$  et  $H_2$  entre le désaccord de l'oscillateur libre et celui asservi, d'une part, et entre le bruit de détection et le désaccord de l'oscillateur asservi, d'autre part.

Ces fonctions de transfert représentent des filtres récurrents du deuxième ordre à mémoire infinie. Bien que cette relation représente un système à deux entrées, nous attribuons le nom entrée au désaccord de l'oscillateur libre  $W$  tout seul et nous traitons la quantité  $V$  comme une perturbation.

### 5.6.1.1. Equation temporelle

En multipliant les deux membres de l'équation (5-58) par le dénominateur  $1 + (\beta - 1)z^{-1} + \beta z^{-2}$  et en prenant la transformée en  $z$  inverse après utilisation de la propriété (5-29) qui se traduit par "chaque terme en  $z^{-1}$  équivaut à un retard d'un cycle", nous avons :

$$y_k + (\beta - 1)y_{k-1} + \beta y_{k-2} = w_k - w_{k-1} + k_0[v_{k-1} + v_{k-2}] \tag{5-59}$$

On constate que chaque échantillon du signal de sortie  $y_k$  est une combinaison linéaire des échantillons présents et passés du signal d'entrée  $w_k$  et du bruit  $v_k$ , ainsi que des échantillons passés de sortie.

---

<sup>18</sup> Certains auteurs réservent l'expression *fonction de transfert* pour caractériser la relation entrée sortie du système dans le domaine de *Fourier*. Nous utilisons, par abus de langage, l'expression *fonction de transfert* pour désigner la relation Entrée-Sortie du système dans tous les domaines de transformations (Laplace, Fourier,  $z$ , etc.)

### 5.6.1.2. Stabilité de l'asservissement

D'une façon très générale, on dit qu'un système est stable lorsque, écarté de sa position d'équilibre, il tend à y revenir. Il est dit instable lorsqu'il tend à s'en écarter davantage.

Un système discret (échantillonné) est stable, lorsqu'il satisfait à la condition de stabilité aux instants d'échantillonnage. Il est *asymptotiquement stable* (Entrée Bornée - Sortie Bornée) si et seulement si tous les pôles  $p_i$  de sa transmittance  $H(z)$  sont à l'intérieur du cercle unité ( $|p_i| \leq 1$ ).

Plusieurs critères (algébriques et graphiques) existent pour éviter le calcul effectif des pôles. Nous donnons dans l'annexe C le critère de JURY, le plus répandu pour les systèmes échantillonnés.

Le dénominateur de  $H_1$  et  $H_2$  dans l'équation (5-58) étant de degré  $n = 2$ , le critère de JURY impose  $n + 1 = 3$  conditions :

$$1) \quad 1 + (\beta - 1) + \beta > 0$$

$$2) \quad 1 - (\beta - 1) + \beta > 0$$

$$3) \quad |\beta| - 1 < 0$$

$$\text{Soit :} \quad 1) \quad \beta > 0$$

$$2) \quad (2 > 0, \text{ heureusement})$$

$$3) \quad |\beta| < 1$$

$$\left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \Rightarrow 0 < \beta < 1$$

En revenant au gain  $b_0$ , on obtient finalement la condition de stabilité suivante :

$$0 < b_0 < \frac{1}{k_v p} \tag{5-60}$$

Notons qu'à la limite de la stabilité, pour  $\beta = 1$ , le dénominateur des transmittances devient  $1 + z^{-2}$  dont les racines sont complexes pures ( $\pm \sqrt{-1}$ ). Dans ce cas, l'amortissement est nul et le système asservi est éternellement (!) oscillatoire.

### 5.6.1.3. Réponses typiques

En l'absence de bruit de détection, nous distinguons trois types de perturbations dans le comportement de l'oscillateur libre :



- La percussion (Dirac) :  $w_k = w_0 \delta[k]$
- L'échelon :  $w_k = w_0 u[k]$
- La rampe :  $w_k = w_0 k T_c u[k]$

Si la boucle est stable, l'erreur permanente s'écrit à partir de l'équation (5-54) sous la forme :

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ (z-1) \frac{z(z-1)}{z^2 + (\beta-1)z + \beta} W(z) \right\} \quad (5-61)$$

La réponse à une percussion  $W(z) = w_0$  donne :

$$y_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{(z-1)^2}{2\beta} w_0 \right\} = 0$$

La Fig. 5-7 montre la réponse du système asservi à une percussion d'amplitude  $w_0 = 1$  pour trois valeurs de  $\beta$ .

Pour un échelon  $W(z) = w_0 \frac{z}{z-1}$ , nous avons :

$$y_\infty = y_p = \lim_{z \rightarrow 1} \left\{ \frac{(z-1)}{2\beta} w_0 \right\} = 0$$

La Fig. 5-8 montre la réponse du système asservi à un échelon d'amplitude  $w_0 = 1$  pour trois valeurs de  $\beta$ .

Pour une rampe  $W(z) = w_0 T_c \frac{z}{(z-1)^2}$ , nous avons :

$$y_\infty = y_v = \frac{T_c w_0}{2\beta}$$

La Fig. 5-9 représente la réponse du système asservi à une rampe de pente  $w_0 T_c = 0,1$  pour trois valeurs de  $\beta$ .

Nous constatons, sur l'équation précédente, que l'erreur de vitesse  $y_v$  est proportionnelle à la durée du cycle  $T_c$  et inversement proportionnelle à  $\beta$ . Donc, elle peut être réduite en choisissant des cycles rapides ou un gain de boucle élevé (en prenant bien garde à la stabilité). Nous retrouvons ainsi le fameux dilemme "Précision - Stabilité" dans les systèmes asservis.

Pour un VCXO très stable à long terme, présentant lorsqu'il est libre une dérive linéaire de fréquence telle que  $w_0 = 0,1$  Hz par jour ( $1 \times 10^{-6}$  Hz par seconde) [3], le traînage de fréquence est égal à  $y_v = 6,3 \times 10^{-7}$  Hz, si on pose  $T_c = 1$  s et  $\beta = 0,8$ , (en valeur relative, nous avons  $\frac{y_v}{\nu_0} = 6,5 \times 10^{-16}$ ). Cette dernière erreur est négligeable vu les performances actuelles des horloges atomiques, mais ne l'est pas pour les futurs étalons.

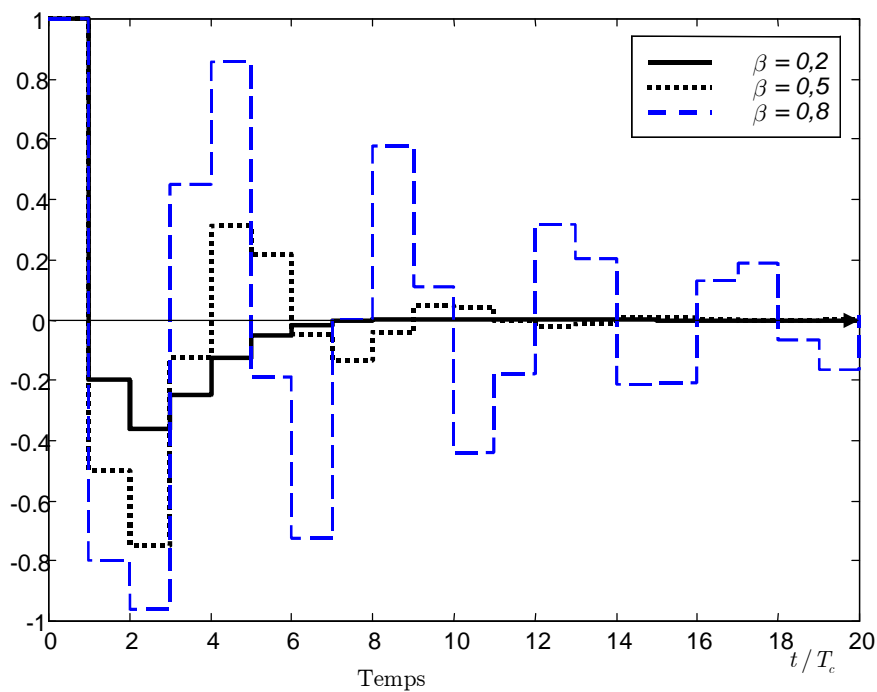


Fig. 5-7 : Réponse à une percussion.

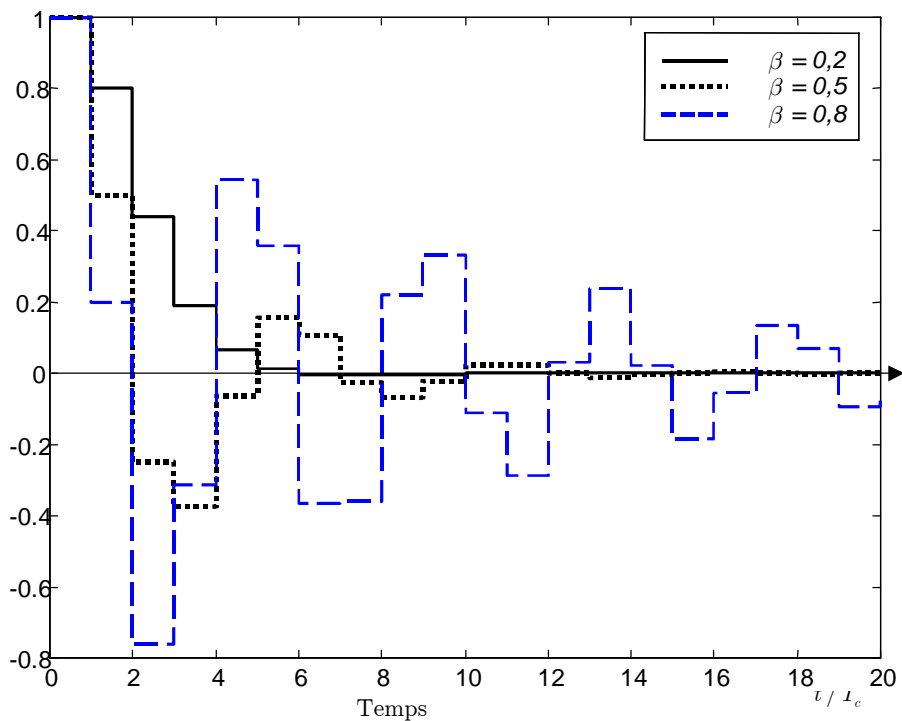


Fig. 5-8 : Réponse à un échelon.

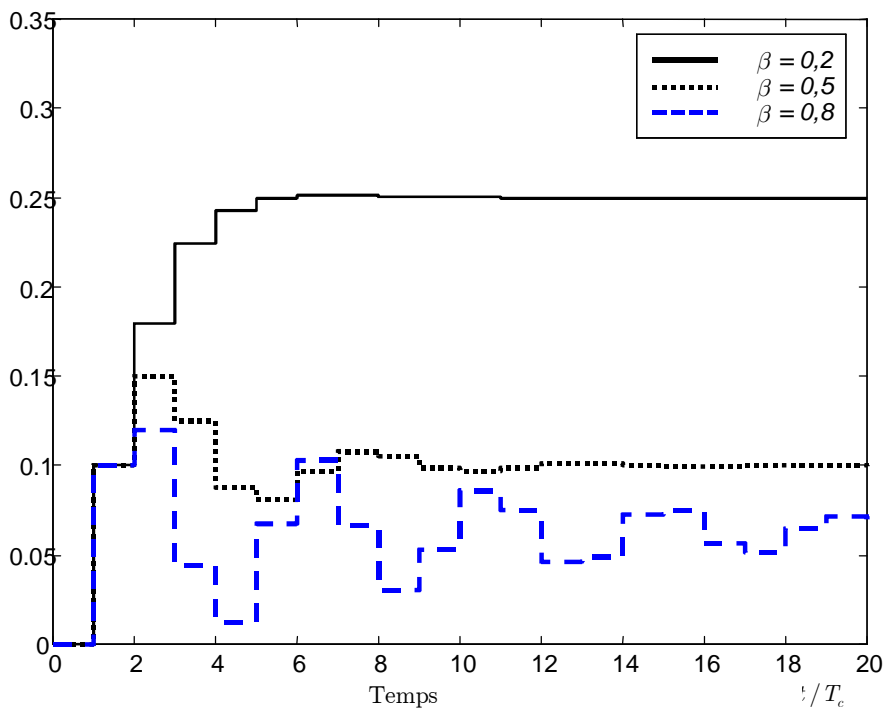


Fig. 5-9 : Réponse à une rampe.

#### 5.6.1.4. Réponse en fréquence

Nous avons vu que le désaccord de l'oscillateur asservi s'obtient par filtrage linéaire du bruit de détection et du désaccord de l'oscillateur libre. Pour caractériser les performances du système asservi en termes d'immunité au bruit, nous avons besoin de connaître les réponses en fréquence des filtres qui forment le système.

Le *spectre* ou transformée de Fourier à temps discret (TFTD), d'un signal échantillonné  $\{h_k\}$  est défini, à partir de sa transformée en  $z$ , par [4] :

$$H(f) = H(z) \Big|_{z=\exp(2\pi jfT_c)} \quad (5-62)$$

Notons que  $H(f)$  est périodique de période  $1/T_c$ .

Dans la suite nous nous intéressons en particulier aux fluctuations de l'oscillateur libre et à celles du bruit de détection ainsi qu'à leur influence sur l'oscillateur asservi. Ces fluctuations sont supposées de nature *aléatoire* et seront caractérisées par leurs Densités Spectrales de Puissance (DSP).

##### 5.6.1.4.1 Oscillateur libre à Oscillateur asservi

Soient  $S_w(f)$  la densité spectrale de puissance de fluctuation du désaccord de l'oscillateur libre (voir l'annexe B pour la définition de la densité spectrale de puissance d'un signal aléatoire), et  $S_y(f)$  celle de fluctuation de fréquence de l'oscillateur asservi. Ces deux quantités sont liées par la relation [5]:

$$S_y(f) = |H_1(f)|^2 S_w(f) \quad (5-63)$$

$H_1(z)$  est donnée dans l'équation (5-58) et nous rappelons son expression ici :

$$H_1(z) = \frac{z(z-1)}{z^2 + (\beta-1)z + \beta} \quad (5-64)$$

$H_1(f)$  s'obtient à partir de  $H_1(z)$  selon la relation (5-62). Tout calcul fait, nous obtenons pour  $|H_1(f)|^2$  l'expression suivante :

$$|H_1(f)|^2 = \frac{1 - \cos(2\pi f T_c)}{(\beta - 1)^2 + (\beta^2 - 1)\cos(2\pi f T_c) + 2\beta \cos^2(2\pi f T_c)} \quad (5-65)$$

La Fig. 5-10 représente  $|H_1(f)|^2$  sur une période pour trois valeurs de  $\beta$ .

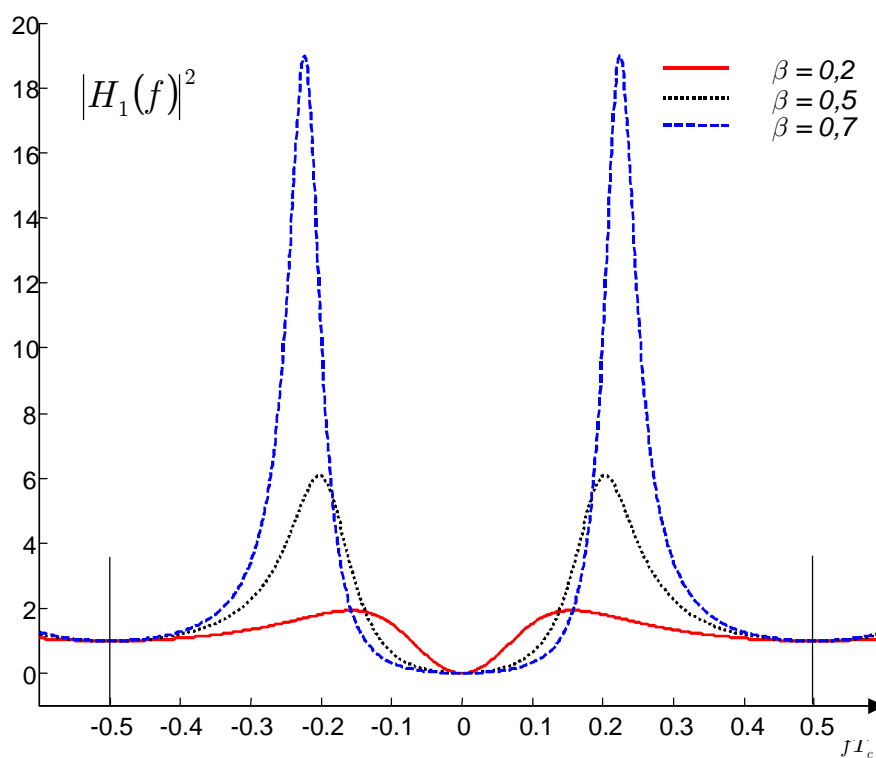


Fig. 5-10 : Fonction de transfert entre l'oscillateur libre et celui asservi.

Notons que, pour les très basses fréquences ( $f \ll 1/T_c$ ), cette expression devient :

$$|H_1(f)|^2 = \frac{(\pi f T_c)^2}{\beta^2} \quad (5-66)$$

Si l'oscillateur libre présente des bruits de type  $S_w(f) = h_\alpha f^\alpha$ , la densité spectrale de puissance de l'oscillateur asservi pour les basses fréquences s'écrit alors :

$$S_y(f) = h_\alpha \frac{(\pi T_c)^2}{\beta^2} f^{\alpha+2} \quad (5-67)$$

Notons que  $S_y(f) \underset{f \rightarrow 0}{=} 0$  si  $\alpha > -2$ . Ce qui veut dire qu'à long terme ( $f \rightarrow 0$ ), la contribution des bruits tels que  $\alpha > -2$  sur la fluctuation de l'oscillateur asservi est nulle.

Rappelons aussi que cette écriture est valable dans le cadre du *modèle quasi-statique*.

#### 5.6.1.4.2 Bruit de détection à oscillateur asservi

Soit  $S_v(f)$  la densité spectrale de puissance du bruit  $\{v_k\}$ . Nous rappelons que ce bruit est lié à celui de détection  $\{n_k\}$  par la relation  $v_k = (-1)^k n_k$ . Nous supposons que ce dernier est *stationnaire* de fonction d'auto-corrélation  $\gamma_n[k]$ . La fonction d'auto-corrélation  $\gamma_v[k]$  du bruit  $\{v_k\}$  est alors (voir l'annexe B) :

$$\begin{aligned} \gamma_v[k] &= E\{v_p v_{p-k}\} \\ \gamma_v[k] &= E\{(-1)^p n_p (-1)^{p-k} n_{p-k}\} \\ \gamma_v[k] &= (-1)^k \gamma_n[k] \end{aligned} \quad (5-68)$$

Pour  $k = 0$ , la fonction d'auto-corrélation est égale à la variance, et l'équation (5-68) entraîne une égalité des variances ( $\sigma_v^2 = \sigma_n^2$ ) des deux bruits.

La densité spectrale de puissance est égale, par définition, dans le cas des signaux stationnaires, à la transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation. Mais la transformée de Fourier d'un signal discret s'obtient à partir de sa transformée en  $z$  selon la relation (5-62). Soient  $\Gamma_v(z)$  et  $\Gamma_n(z)$  les transformées en  $z$  des fonctions d'auto-corrélation discrètes précédentes. Nous avons alors :

$$S_v(f) = \Gamma_v(e^{-2\pi j f T_c}) = \Gamma_n(-e^{-2\pi j f T_c}) = \Gamma_n(e^{-2\pi j f T_c + \pi}) = \Gamma_n\left(e^{-2\pi j T_c \left(f + \frac{1}{2T_c}\right)}\right)$$

$$S_v(f) = S_n\left(f + \frac{1}{2T_c}\right) \quad (5-69)$$

où nous avons utilisé la relation  $\Gamma_v(z) = \Gamma_n(-z)$  qui résulte de l'équation (5-68). La Fig. 5-11 clarifie la démonstration et le résultat de cette dernière relation.

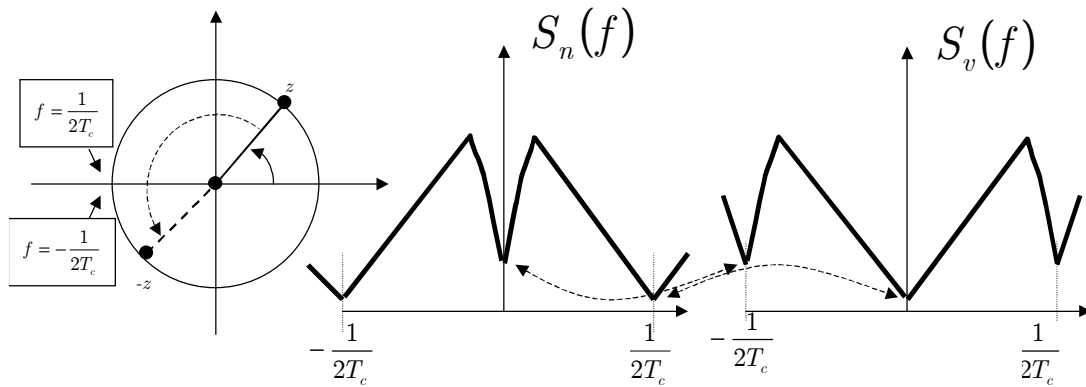


Fig. 5-11 : Relation entre  $S_v(f)$  et  $S_n(f)$ .

Dans le cas où  $S_n(f)$  représente un bruit blanc de variance  $\sigma_n^2$ , nous avons :

$$S_n(f) = T_c \sigma_n^2 = S_v(f) \quad (5-70)$$

La densité spectrale de puissance  $S_y(f)$  de l'oscillateur asservi est reliée à  $S_v(f)$  par :

$$S_y(f) = |H_2(f)|^2 S_v(f) \quad (5-71)$$

$H_2(z)$  est donnée dans l'équation (5-58) et nous rappelons son expression ici :

$$H_2(z) = -\frac{k_0 z(z+1)}{z^2 + (\beta-1)z + \beta} \quad (5-72)$$

$H_2(f)$  s'obtient à partir de  $H_2(z)$  selon la relation (5-62). Tout calcul fait, nous obtenons pour  $|H_2(f)|^2$  l'expression suivante :

$$|H_2(f)|^2 = \frac{k_0^2 (1 + \cos(2\pi f T_c))}{(\beta-1)^2 + (\beta^2-1)\cos(2\pi f T_c) + 2\beta \cos^2(2\pi f T_c)} \quad (5-73)$$

La Fig. 5-12 représente  $|H_2(f)|^2$  sur une période pour plusieurs valeurs de  $\beta$ .

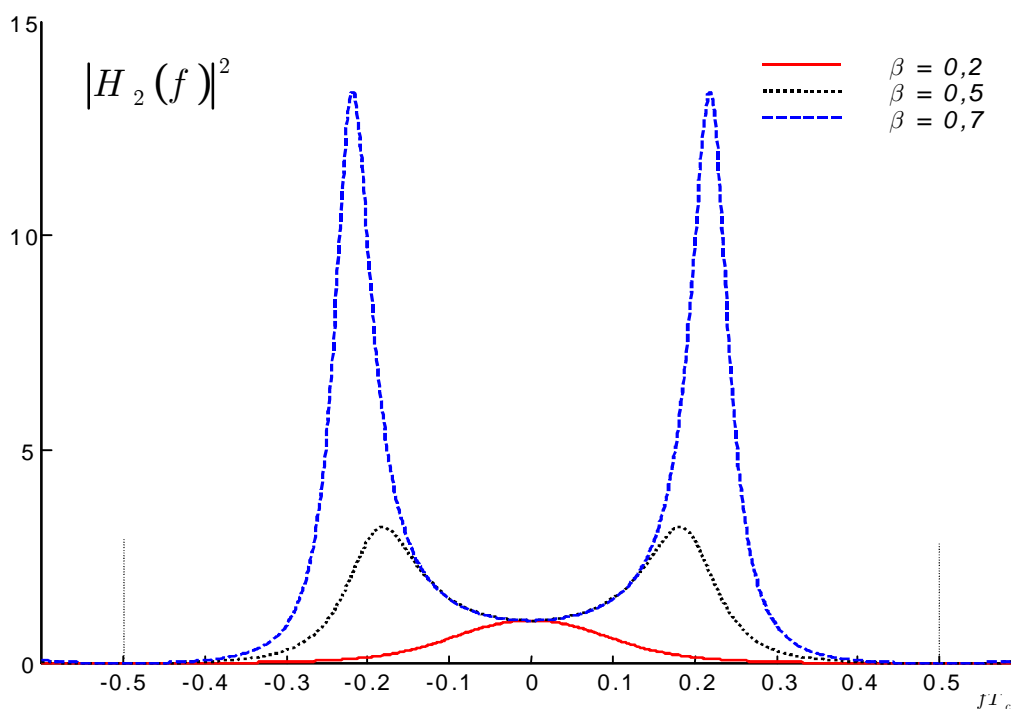


Fig. 5-12 : Fonction de transfert entre le bruit de détection et l'oscillateur asservi

Pour les très basses fréquences, cette dernière expression devient :



$$|H_2(f)|^2 = \frac{2k_0^2}{2\beta^2} = \frac{1}{p^2} \quad (5-74)$$

Ce qui veut dire, qu'aux basses fréquences, les fluctuations de bruit de détection sont recopiées (à un coefficient près) sur l'oscillateur asservi. Un choix judicieux de la profondeur de modulation  $\nu_m$  et de la pulsation de Rabi permet de maximiser la valeur de la pente  $p$  de la frange de Ramsey et ainsi réduire au mieux la contribution du bruit de détection sur la fréquence asservie.

A partir des équations (5-70) et (5-74) nous pouvons écrire :

$$S_y(f) = \frac{T_c \sigma_n^2}{p^2} \quad (5-75)$$

Cette expression nous laisse penser, à tort, que nous pouvons réduire la contribution du bruit en diminuant la durée du cycle  $T_c$ . En effet,  $\sigma_n^2$  représente la variance du signal discret  $n_k$  que nous avons obtenu à partir du bruit de détection continu  $n(t)$  affectant le signal de détection par :

$$n_k = \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} n(t) dt \quad (5-76)$$

Supposons que  $n(t)$  est un bruit blanc de variance  $\sigma_0^2$ . On montre alors [5], que la variance du signal discret  $n_k$  est égale à :

$$\sigma_n^2 = \frac{\sigma_0^2}{T_c} \quad (5-77)$$

D'où :

$$S_n(f) = T_c \sigma_n^2 = \sigma_0^2 \quad (5-78)$$

Autrement dit,  $n(t)$  et  $n_k$  ont la même densité spectrale de puissance mais pas la même variance. En remplaçant l'expression (5-77) dans l'équation (5-75) nous obtenons :

$$S_y(f) = \frac{\sigma_0^2}{p^2} \quad (5-79)$$

Ce qui prouve que la contribution du bruit de détection dépend de la conception de l'horloge et ne dépend pas de la boucle d'asservissement. Nous montrons plus tard que ce résultat est vrai quelle que soit la boucle utilisée.

### 5.6.2. La boucle 2Intégrateurs-2Dérivateurs

Nous avons vu que la boucle décrite dans le paragraphe précédent, présentait une erreur de vitesse statique lorsqu'une dérive linéaire est présente dans le comportement de l'oscillateur libre. Pour améliorer les performances du système asservi vis-à-vis des perturbations de l'oscillateur libre, nous proposons une boucle contenant deux intégrateurs.

On sait, de l'étude des systèmes asservis analogiques, qu'il est nécessaire d'ajouter un filtre d'avance (ou de retard) de phase pour stabiliser une boucle avec un intégrateur double. Nous proposons alors un bloc B/A de la forme :

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \underbrace{b_0 + b_1 z^{-1}}_{\text{avance de phase}} \cdot \underbrace{\frac{1}{(1 - z^{-1})^2}}_{\text{intégrateur double}} \quad (5-80)$$

Le bloc  $B$  joue le rôle d'une avance de phase. Nous déterminons plus bas les conditions sur ce bloc qui rendront la boucle stable.

Nous proposons aussi de modifier le bloc  $D$  qui calcule le signal d'erreur à partir du signal démodulé. Nous proposons de réaliser ce bloc par le filtre suivant:

$$\begin{aligned} D(z) &= 1 + 2z^{-1} + z^{-2} \\ D'(z) &= D(-z) = 1 - 2z^{-1} + z^{-2} = (1 - z^{-1})^2 \end{aligned} \quad (5-81)$$

Le filtre  $D'(z)$  qui comprend la démodulation et la génération du signal d'erreur est celui d'un dérivateur double. La proposition de ce filtre est basée sur le fait suivant :

Nous avons constaté que le signal de détection présente des dérivées linéaires, par morceaux, en fonction du temps. Ces dérivées proviennent principalement des fluctuations lentes de la température du four et plus généralement de celles de l'environnement.

Dans ce cas, pour simplifier, nous supposons que le bruit de détection est nul, et que la suite  $\{n_k\}$  représente les dérivées qui affectent le signal de détection. Cette suite prend alors la forme d'une rampe de pente  $n_0$  :

$$n_k = n_0 T_c k, \quad (5-82)$$

et le signal  $\{v_k\}$  défini auparavant s'écrit alors :

$$v_k = (-1)^k n_k = n_0 T_c (-1)^k k \quad (5-83)$$

Dans le bloc  $D$  utilisé dans la boucle précédente (1I-1D), on formait le signal d'erreur  $\{e_k\}$  par simple sommation de deux valeurs consécutives du signal démodulé (ou simple différence du signal mesuré). L'expression du signal d'erreur (équation 5-12) s'écrit dans le cas d'une dérive dans le signal de détection sous la forme :

$$\begin{aligned} e_k &= p(w_k + w_{k-1}) + (-1)^k (n_0 T_c k - n_0 T_c (k-1)) \\ e_k &= p(w_k + w_{k-1}) + \underbrace{(-1)^k n_0 T_c}_{\varepsilon_k} \end{aligned} \quad (5-84)$$

Le terme  $\varepsilon_k = (-1)^k n_0 T_c$  représente une suite alternée d'amplitude constante et a une valeur moyenne nulle. Il ne risque donc pas de biaiser le signal d'erreur.

En pratique, le terme  $\varepsilon_k$  est noyé dans le bruit de détection et il peut être vu comme un bruit supplémentaire qui s'additionne au vrai bruit de détection. La variance du "bruit"  $\varepsilon_k$  est égale à  $(n_0 T_c)^2$ .

La Fig. 5-13 représente l'exemple d'une dérive linéaire par morceau affectant le signal de détection et son évolution dans la boucle du paragraphe précédent. Nous avons posé  $T_c = 1$  s,  $n_0 = +1$  pendant le premier morceau et  $n_0 = -1$  pendant le deuxième morceau.

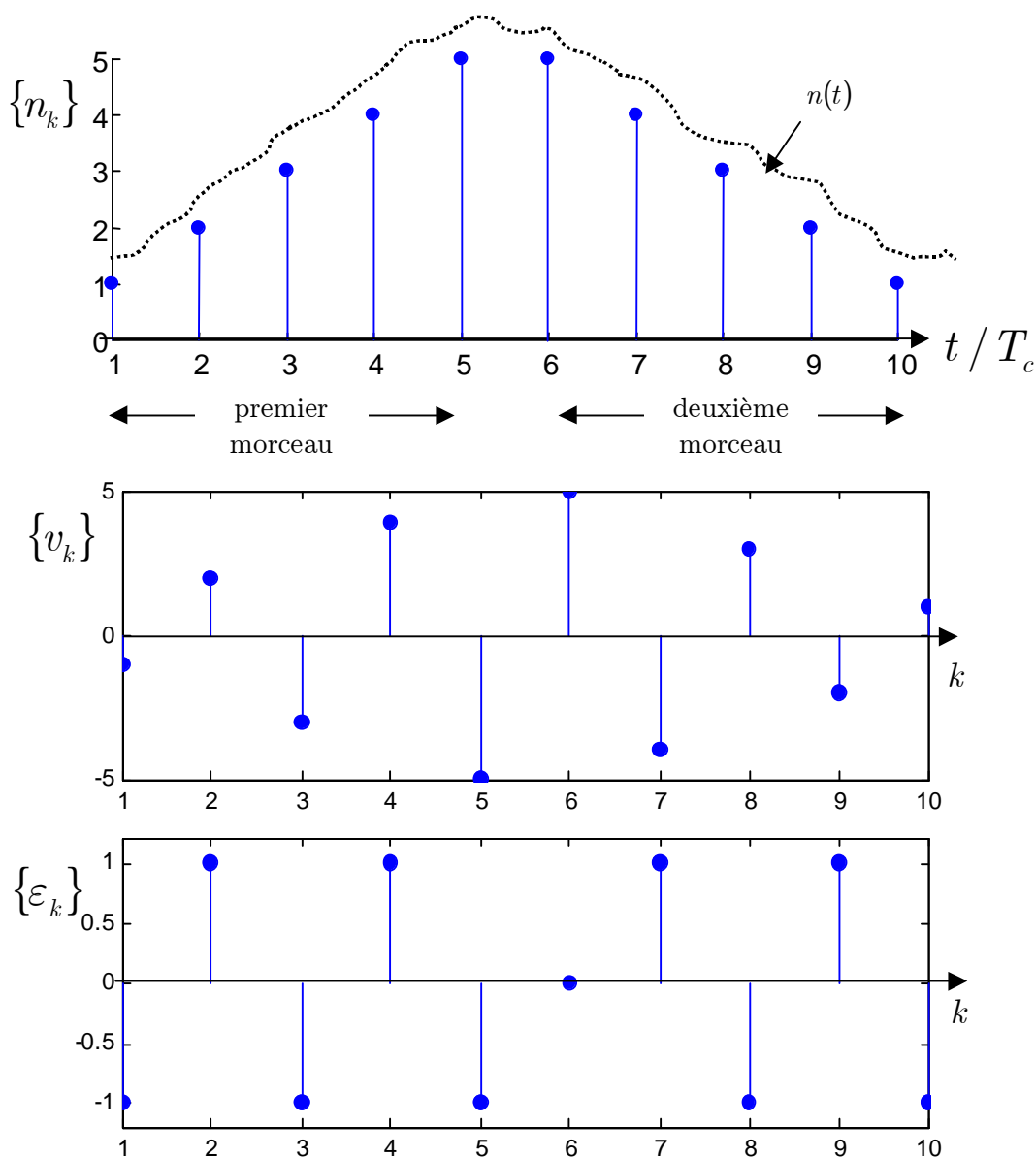


Fig. 5-13 : Contribution d'une dérive linéaire par morceau au signal d'erreur.

Si nous supposons la présence des dérives par morceaux, de durée moyenne de 2 minutes par morceau, qui font varier le signal total  $S$  de 2% de sa valeur nominale, nous avons alors :

$$n_0 = \frac{2\%S}{2 \times 60} = 1,6 \times 10^{-4} S \quad (5-85)$$

pour des cycles de durée  $T_c = 1$  s. Ces dérives sont équivalentes à un bruit pour lequel le rapport signal à bruit vaut :

$$\frac{S}{n_0} = 6 \times 10^3 \quad (5-86)$$

Le vrai rapport signal à bruit en l'absence des dérives n'est pas forcément très supérieur à cette valeur.

Dans le cas du nouveau filtre proposé dans ce paragraphe ( $\{d_k\} = \{1,2,1\}$ ), il est clair que la contribution des dérives du signal de détection au signal d'erreur est éliminée. En effet, dans ce cas nous avons :

$$\varepsilon_k = v_k + 2v_{k-1} + v_{k-2} = (-1)^k n_0 T_c [k - 2(k-1) + k - 2] = 0 \quad (5-87)$$

### 5.6.2.1. Caractéristiques de la boucle

L'étude de la nouvelle boucle (2I-2D = deux intégrateurs et deux dérivateurs), caractérisée par les équations (5-80) et (5-81), est identique à celle de la boucle précédente. Nous donnons ici, brièvement, ses caractéristiques.

En reportant les expressions (5-80) et (5-81), donnant les transmittances des filtres  $A$ ,  $B$  et  $D$ , dans l'équation 5-45, nous obtenons pour la fonction de transfert  $H_1(z)$  l'expression suivante :

$$H_1(z) = \frac{(1 - z^{-1})^2}{1 + (\beta_0 - 2)z^{-1} + (1 + 2\beta_0 + \beta_1)z^{-2} + (\beta_0 + 2\beta_1)z^{-3} + \beta_1 z^{-4}} \quad (5-88)$$

où nous avons posé  $\beta_0 = k_v p b_0$  et  $\beta_1 = k_v p b_1$ .

De même, nous obtenons pour la fonction  $H_2(z)$  l'expression suivante :

$$H_2(z) = \frac{1}{p} \frac{z^{-1} [\beta_0 + (2\beta_0 + \beta_1)z^{-1} + (\beta_0 + 2\beta_1)z^{-2}]}{1 + (\beta_0 - 2)z^{-1} + (1 + 2\beta_0 + \beta_1)z^{-2} + (\beta_0 + 2\beta_1)z^{-3} + \beta_1 z^{-4}} \quad (5-89)$$

Nettement plus ardu que dans le cas précédent, le calcul de la condition de stabilité se fait numériquement en cherchant les couples  $(\beta_0, \beta_1)$  pour lesquelles les pôles de  $H_1(z)$  ou  $H_2(z)$  se trouvent à l'intérieur du cercle unité.

La Fig. 5-14 montre l'unique région de stabilité (région remplie) de la boucle en fonction de  $(\beta_0, \beta_1)$ .

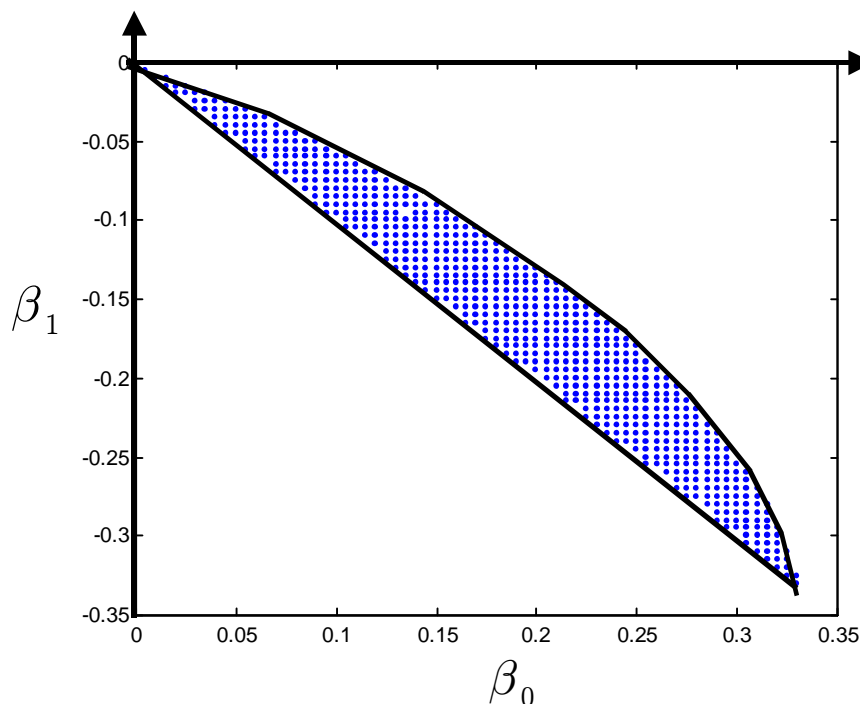


Fig. 5-14 : Domaine de stabilité de la boucle 2I-2D.

- La réponse de la sortie aux *perturbations typiques* ressemble au cas précédent, sauf la réponse à une rampe dans l'oscillateur libre qui s'annule ici en régime permanent. La réponse du filtre (5-88) à une rampe de pente égale à 0,1 Hz par seconde est présentée dans la Fig. 5-15, où nous avons posé  $T_c = 1$  s,  $\beta_0 = 0,2$  et  $\beta_1 = -0,18$ .

- L'allure de la *réponse en fréquence* de  $H_1(z)$  n'est pas très différente du cas précédent. Notons que, pour les basses fréquences, nous avons :

$$H_1(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{(z-1)^2}{4(\beta_0 + \beta_1)} \Rightarrow H_1(f) \xrightarrow{f \rightarrow 0} \frac{(j2\pi f T_c)^2}{4(\beta_0 + \beta_1)}$$

$$|H_1(f)|^2 = \frac{(\pi f T_c)^4}{(\beta_0 + \beta_1)^2} \quad \text{pour } f \ll \frac{1}{T_c} \quad (5-90)$$

Nous en déduisons que la contribution des bruits, pour lesquels  $\alpha > -4$ , sur l'oscillateur asservi est nulle à long terme. La condition  $\alpha > -4$  inclut tous les types de bruit qui se présentent en pratique.

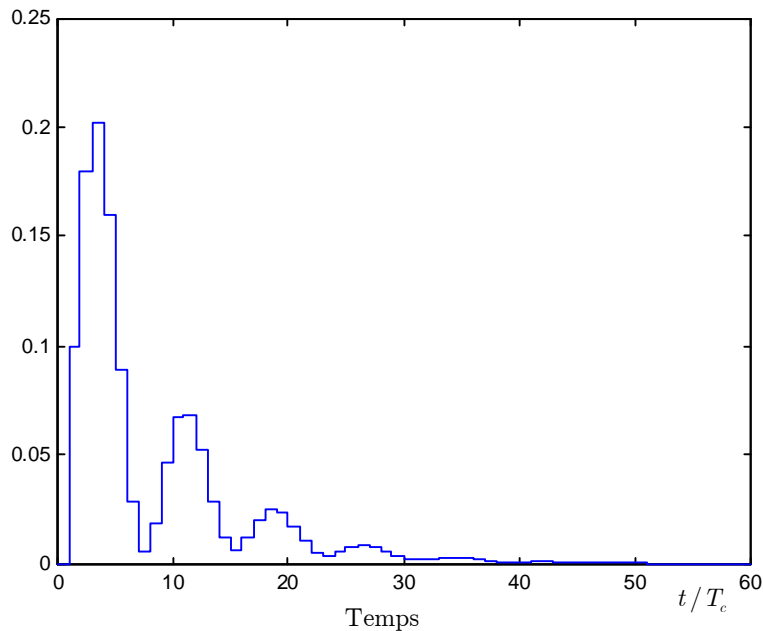


Fig. 5-15 : Réponse de la boucle 2I-2D à une entrée en rampe.

La réponse en fréquence de  $H_2(z)$ , est aussi semblable à celle du cas précédent, avec la différence qu'elle présente un gain plus faible pour les hautes fréquences (proches de  $1/2T_c$ , n'oublions pas qu'elle est périodique). Pour les faibles fréquences nous avons :

$$H_2(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{1}{p} \frac{4(\beta_0 + \beta_1)}{4(\beta_0 + \beta_1)} = \frac{1}{p} \quad (5-91)$$

Enfin, l'utilisation de cette boucle n'est pas coûteuse en termes de temps de calcul. Elle a deux multiplications et trois additions en plus de la boucle précédente.

Nous avons remarqué que les deux boucles (la simple et la 2I-2D), présentent le même comportement vis-à-vis du bruit de détection, ce qui nous laisse penser, à raison cette fois ci, que la contribution de ce bruit ne dépend pas de la façon avec laquelle la boucle est conçue et réalisée. En effet, la condition d'astatisme impose la présence de, au moins, un intégrateur dans la boucle, ce qui se traduit par la condition  $A(1) = 0$ . En reportant cette condition dans l'équation générale 5-45, on obtient immédiatement :

$$H_2(z) \xrightarrow{z \rightarrow 1} \frac{k_v B(1) D(1)}{A(1) + p k_v B(1) D(1)} = \frac{1}{p} \quad (5-92)$$

Ceci prouve que l'équation (5-79) est valable quelle que soit la boucle d'asservissement à condition qu'elle contienne au moins un intégrateur.

En résumé, On retiendra les résultats suivants :

- Plus il y a d'intégrateurs dans la boucle, plus on réduit la contribution du bruit de l'oscillateur libre.
- C'est la pente de la courbe de résonance atomique qui détermine la contribution du bruit de détection.
- Une dérivée double ( $\{d'_k\} = \{1, -2, 1\}$ ) du signal de détection, ne peut qu'améliorer les choses, car elle annule l'effet des dérives linéaires, s'il y en avait, dans le signal de détection.



## 5.7. Mise en pratique

Pour mesurer la stabilité<sup>19</sup>, de notre étalon, il faut comparer sa fréquence à une autre référence. Traditionnellement, la mesure de fréquence se fait à l'aide d'un comparateur de phase. Nous disposons dans notre laboratoire d'un Maser à hydrogène très stable à court terme. La Fig. 5-16 représente un schéma bloc des opérations effectuées dans notre montage d'asservissement. Le synthèse de fréquence se fait par multiplication de la fréquence d'un quartz et addition d'une fréquence externe fournie par un synthétiseur de fréquence (voir chapitre 2 pour les détails). Le tout est asservi sur la fréquence du Maser de façon à pouvoir considérer que la sortie de la chaîne (notre oscillateur "local") est proportionnelle à la fréquence du Maser. Nous interrogeons l'horloge par modulation carrée de fréquence (amplitude de modulation typique  $\nu_m = 45$  Hz) en envoyant au synthétiseur les valeurs numériques  $(-1)^k \nu_m$  selon le cycle  $k$ . Après interrogation de l'horloge, un signal d'erreur est formé par un algorithme (bloc  $D$ ) qui traite le signal de détection mesuré à l'aide d'une carte d'acquisition numérique. Puis nous calculons un signal de commande (bloc  $B/A$ ) qui sera envoyé à son tour au synthétiseur. Si nous supposons que la fréquence du Maser est constante, nous pouvons considérer que le signal d'erreur est dû au bruit de détection tout seul.

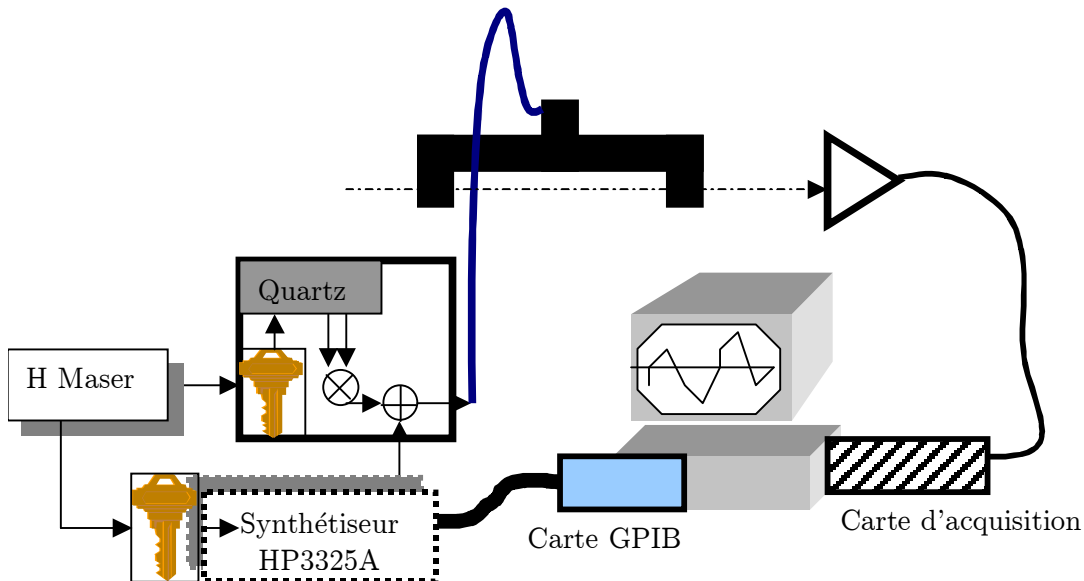


Fig. 5-16 : Montage d'asservissement expérimental dans JPO.

<sup>19</sup> Nous allons définir la stabilité dans le paragraphe suivant. Pour l'instant, nous considérons qu'elle est quantifiée par la densité spectrale  $S_y(f)$  des fluctuations de la fréquence asservie.

En tenant compte du fait que le signal de commande est envoyé directement au synthétiseur ( $k_v = 1$ ), et que la fréquence de notre oscillateur local correspond à la fréquence du Maser, l'équation 5-49 générale de la boucle devient :

$$\begin{aligned}
 Y(z) &= W(z) - C(z) \\
 C(z) &= z^{-1}R(z) \\
 R(z) &= \frac{B(z)}{A(z)}E(z) \\
 E(z) &= D(z)X(z) \\
 X(z) &= pY(z) + N(-z)
 \end{aligned} \tag{5-93}$$

La sortie de notre boucle d'asservissement est le signal de commande  $\{c_k\}$  et non pas la fréquence asservie  $\{y_k\}$  car nous ne la mesurons pas.

Une simple manipulation de l'équation (5-93) nous permet d'exprimer cette sortie :

$$\begin{aligned}
 C(z) &= H(z)W(z) + \frac{1}{p}H(z)N(-z) \\
 \text{avec } H(z) &= \frac{pz^{-1}B(z)D(z)}{A(z) + pz^{-1}B(z)D(z)}
 \end{aligned} \tag{5-94}$$

Notons que si la boucle contient au moins un intégrateur ( $A(1) = 0$ ), on aura pour les faibles fréquences :

$$\lim_{z \rightarrow 1} C(z) = \lim_{z \rightarrow 1} W(z) + \lim_{z \rightarrow 1} \frac{1}{p} N(-z) \tag{5-95}$$

Puisque  $N(-z)$  correspond à un bruit blanc de détection ( $N(-1) = 0$ ), l'enregistrement du signal de commande  $\{c_k\}$  nous permet de mesurer la valeur moyenne du désaccord  $\{w_k\}$  entre la fréquence du Maser et celle de la transition atomique.

Vis à vis des bruits dans la boucle, l'équation (5-95) nous permet d'écrire pour les basses fréquences :

$$S_c(f) = S_w(f) + \frac{1}{p^2} S_n(f) \quad (5-96)$$

Remarque :

Contrairement à la densité spectrale  $S_y(f)$  de la fréquence asservie qui ne dépend pas de  $S_w(f)$  à long terme (grâce à l'intégrateur), la densité spectrale  $S_c(f)$  du signal de commande recopie entièrement  $S_w(f)$ .

Si nous supposons que les fluctuations du Maser "libre" sont très faibles, c'est-à-dire que  $S_w(f) = 0$ , la dernière équation devient :

$$S_c(f) = \frac{1}{p^2} S_n(f) \quad (5-97)$$

En comparant cette expression avec l'équation 5-79, nous pouvons écrire :

$$S_y(f) = S_c(f) = \frac{1}{p^2} S_n(f) \quad (5-98)$$

ce qui veut dire que l'enregistrement du signal de commande suffit pour déterminer la stabilité de l'horloge. L'hypothèse  $S_w(f) = 0$  sera vérifiée expérimentalement plus loin dans ce chapitre.

### 5.7.1. Algorithme

La boucle d'asservissement est gérée entièrement par micro-ordinateur. Elle contient un dérivateur double pour calculer le signal d'erreur, ce qui correspond au bloc  $D$  de la boucle 2Intégrateurs-2Dérivateurs étudiée au paragraphe 5.6.2. Le bloc  $B/A$  consiste en un intégrateur simple pour calculer les corrections. Car, nous le rappelons, le signal de commande enregistré copie entièrement les fluctuations de la

l'oscillateur libre. Par conséquent, nous ne pouvons pas voir l'amélioration apportée par un intégrateur sur la fréquence asservie.

L'exécution de cette boucle consiste en les étapes suivantes :

1) Initialisation :

- Profondeur de modulation  $\nu_m = 45$  Hz.
- Condition de stabilité :  $\beta = 0,7$
- Mesure expérimentale de la pente  $p$  autour de  $\nu_m$ .
- Bloc  $D$  (dérivateur double) :  $d_0 = 1, d_1 = -2, d_2 = 1$ .
- Bloc  $B/A = \frac{b_0}{1-z^{-1}} =$  Intégrateur simple + gain
- Bloc  $A$  (dérivateur simple) :  $a_0 = 1, a_1 = -1$ .
- Bloc  $B$  (gain) :  $b_0 = \frac{\beta}{p}$
- Durée du cycle  $T_c$  : choix de la fréquence d'échantillonnage de la carte d'acquisition, et le nombre de points mesurés par cycle.

2) Début de la boucle + vérification de la condition d'arrêt ( $k < N$ )

3) Initialisation du chronomètre :  $t_0 = TIC$ ;

4) Obtenir la valeur de la commande :  $c_k = r_{k-1}$  et stockage de  $c_k$ .

5)  $c_k + (-1)^k \nu_m$  à Synthétiseur : modulation + correction.

6) Délai : suppression de la réponse transitoire.

7)  $\mathbf{s}$  = acquisition pendant  $T_c$  du signal de détection.

8) Valeur moyenne de  $\mathbf{s}$  :  $x_k = \text{mean}(\mathbf{s})$

9) Calcul du signal d'erreur (bloc  $D$ ,  $e_k = (-1)^k [d_0 x_k + d_1 x_{k-1} + d_2 x_{k-2}]$ ) :

$$e_k = (-1)^k [x_k - 2x_{k-1} + x_{k-2}]$$

10) Calcul du signal de correction ( Bloc B/A,  $r_k = -a_1 r_{k-1} + b_0 e_k$ ) :

$$r_k = r_{k-1} + b_0 e_k$$

11) Cycle suivant :  $k = k+1$

12) Arrêt du chronomètre  $t_k = TOC - t_0$

13) Retour à (2).

En pratique, les valeurs de  $c_k$  sont moyennées sur quelques cycles puis stockées dans un fichier. Ce fichier est traité à posteriori pour extraire la fréquence moyenne ou la variance d'Allan pour calculer la stabilité.

Il faut souligner ici que les étapes décrites plus haut ne sont pas optimales au sens de la minimisation du temps perdu dans la boucle. En pratique, le temps de suppression de transitoire est de l'ordre 100 ms, et il faut réaliser des cycles de durée  $T_c$  de l'ordre de 1 s pour avoir un rapport cyclique<sup>20</sup> de l'ordre de 0,9. Ainsi, optimiser le temps de calcul ne veut rien dire car il est très inférieur au temps mort. Si le rapport cyclique est faible, un effet de repliement de spectre (l'effet Dick) vient dégrader la stabilité. Cet effet sera discuté au chapitre suivant.

En revanche, s'il n'y a pas de temps mort, cas d'une modulation *carrée de phase*, la boucle précédente peut s'optimiser de la façon suivante :

- 1) Initialisation comme avant,  $\phi_m = \frac{\pi}{4}$ , signe = 1;
- 2) Commencer l'acquisition
- 3) Début de la boucle + vérification de la condition d'arrêt
  - 4) Attendre la fin de l'acquisition et calculer  $x_0 = \text{mean}(\mathbf{s})$
  - 5)  $r_0 = r' + b_0 \cdot \text{signe} \cdot x_0$
  - 6)  $r_0$  (fréquence) à synthétiseur.
  - 7) signe.  $\phi_m$  (phase) à synthétiseur.
  - 8) Commencer l'acquisition
  - 9) Effectuer les calculs suivants pendant l'acquisition :
 
$$x_2 = x_1, x_1 = x_0, r_1 = r_0$$

$$\text{signe} = -\text{signe}$$

$$r' = r_1 + b_0 \cdot \text{signe} \cdot (-2x_1 + x_2)$$
- 10) Retour à (3)

<sup>20</sup> Rapport cyclique = "Duty cycle" =  $((T_c - \text{temps mort}) / T_c)$ .

## 5.8. Stabilité de fréquence - Ecart-type d'Allan

Le signal généré par un oscillateur en présence de perturbations est évidemment quasi-monochromatique et peut s'écrire ([6] et [7]) :

$$X(t) = A(t) \cos(2\pi\nu_0 t + \phi(t)) \quad (5-99)$$

où  $\nu_0$  est sa fréquence moyenne, et  $A(t)$  et  $\phi(t)$  sont l'amplitude et la phase instantanées. C'est le fait que  $A(t)$  et  $\phi(t)$  varient avec le temps  $t$  qui rend le signal  $X(t)$  non monochromatique au sens strict. Dans la suite, nous négligeons les fluctuations d'amplitude et nous notons  $A(t) = A$ . Cela se justifie en supposant que l'oscillateur est stabilisé en amplitude (par contrôle automatique de gain). Dans ce cas, le processus aléatoire  $X(t)$  est de second ordre ( $E[X(t)^2] \leq A^2$ ) quelles que soient les propriétés statistiques de la fonction aléatoire  $\phi(t)$ .

La fréquence instantanée  $\nu(t)$  est définie par :

$$\nu(t) = \nu_0 + \frac{1}{2\pi} \frac{d\phi(t)}{dt} = \nu_0 + y(t) \quad (5-100)$$

Il faut souligner ici que  $\nu(t)$  est une quantité qui n'est pas toujours définie au sens mathématique (à cause de la dérivée), mais n'est pas non plus physiquement mesurable.

Les mesures des fluctuations  $y(t)$  de la fréquence instantanée sont généralement effectuées à l'aide des incréments de la phase dont les résultats sont :

$$y_\tau(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\phi(t) - \phi(t - \tau)}{\tau} \quad (5-101)$$

La densité spectrale  $S_y^\tau(f)$  des fluctuations mesurables  $y_\tau(t)$  est reliée à celle des fluctuations instantanées  $y(t)$  par :

$$S_y^\tau(f) = S_y(f) \left( \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f \tau} \right)^2 \quad (5-102)$$

La stabilité d'un oscillateur est caractérisée par les propriétés statistiques des fluctuations  $y(t)$ . Une des propriétés importantes d'un signal aléatoire est sa variance  $\sigma^2$  définie à partir de sa densité spectrale  $S(f)$  par :

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(f) df \quad (5-103)$$

Quand nous disposons de  $N$  mesures  $y_\tau(i\tau)$ ,  $1 \leq i \leq N$ , effectuées sans temps mort, la variance de  $y_\tau(t)$  s'estime par :

$$\hat{V}(\tau, N) = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N y_\tau^2(i\tau) - \left[ \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N y_\tau(i\tau) \right]^2 \quad (5-104)$$

Cet estimateur de la variance est non biaisé pour le bruit blanc et sa valeur moyenne statistique  $E(\hat{V}(\tau, N))$  est reliée à la densité spectrale  $S_y^\tau(f)$  par la relation [8] :

$$E(\hat{V}(\tau, N)) = \frac{N}{N-1} \int_{-\infty}^{\infty} S_y^\tau(f) \left[ 1 - \left( \frac{\sin(N\pi f \tau)}{N \sin(\pi f \tau)} \right)^2 \right] df \quad (5-105)$$

Un cas particulier intéressant est obtenu pour  $N = 2$ . C'est la variance d'Allan  $\sigma_y^2(\tau)$  à deux échantillons. En reportant l'équation (5-102) dans l'équation (5-105) nous obtenons<sup>21</sup> pour  $N = 2$  :

---

<sup>21</sup> Plusieurs auteurs préfèrent utiliser la densité spectrale mono-latérale qui vaut zéro pour les fréquences négatives et deux fois la densité spectrale bilatérale pour les fréquences positives. Dans ce cas la relation (5-106) reste valable pour les densités spectrale mono-latérales en évaluant l'intégrale entre 0 et  $\infty$ .

$$\sigma_y^2(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} S_y(f) \frac{\sin^4(\pi f \tau)}{(\pi f \tau)^2} df \quad (5-106)$$

L'intérêt de la variance d'Allan est double : elle permet de caractériser la stabilité de l'oscillateur à partir des mesures temporelles  $y_\tau(i\tau)$ , et elle converge pour la plupart des modèles de bruits qui peuvent exister en pratique, tandis que la variance normale donnée par la relation (5-103) diverge pour ces bruits.

En pratique, les mesures  $y_\tau(i\tau)$  sont disponibles pour un temps d'intégration  $\tau = \tau_0$  fixe. Pour obtenir des mesures pour d'autres valeurs de  $\tau$ , nous nous limitons aux temps d'intégration multiples de  $\tau_0$  ( $\tau = n\tau_0$ ) et nous calculons les valeurs de  $y_{n\tau_0}(i)$  en faisant la moyenne sur  $n$  valeur de  $y_{\tau_0}(i)$ .

Notons que le calcul de  $\sigma_y^2(\tau)$  à partir de l'équation (5-104) permet, théoriquement, de déduire la densité spectrale  $S_y(f)$  en inversant l'équation intégrale (5-106). Cependant, cette inversion est mal posée et la solution  $S_y(f)$  trouvée n'est pas unique [9].

Pour les bruits typiques des oscillateurs à quartz, la densité spectrale des fluctuations de l'oscillateur libre prend la forme  $S_w(f) = \sum_{\alpha=-2}^2 h_\alpha f^\alpha$  pour les basses fréquences (la fréquence de coupure est  $f_h$ ). Dans ce cas, le tracé de la variance d'Allan  $\sigma_y^2(\tau)$  en fonction de  $\tau$  sur une échelle logarithmique suffit pour déterminer le type de bruit suivant les résultats dressés dans le Tableau 2 [7].

Nous avons vu lors de l'étude de la réponse en fréquence de la boucle d'asservissement que la densité spectrale des fluctuations de l'oscillateur asservi s'écrivait sous la forme :

$$\begin{aligned} S_y(f) &= |H_1(f)|^2 S_w(f) + |H_2(f)|^2 S_n(f) \\ S_y(f) &= {}^1S_y(f) + {}^2S_y(f) \end{aligned} \quad (5-107)$$



| Type de Bruit                 | $S_w(f)$        | $\sigma_y^2(\tau)$   | Pente de la courbe $\log(\sigma_y^2(\tau))$ en fonction de $\log(\tau)$ |
|-------------------------------|-----------------|--|---|
| Blanc de phase                | $h_2 f^2$       | $\frac{3h_2 f_h}{4\pi^2 \tau^2}$                             | -2  |
| "Flicker" de phase            | $h_1 f$         | $\frac{h_1}{4\pi^2 \tau^2} \{1,038 + 3 \ln(2\pi f_h \tau)\}$ | $\approx -2$  |
| Blanc de fréquence            | $h_0$           | $\frac{h_0}{2\tau}$  | -1  |
| "Flicker" de fréquence        | $h_{-1} f^{-1}$ | $2h_{-1} \ln(2)$   | 0   |
| Marche aléatoire de fréquence | $h_{-2} f^{-2}$ | $\frac{2\pi^2 h_{-2} \tau}{3}$                               | +1  |

Tableau 2: Variance d'Allan pour les différentes types de bruit.

Le bruit de détection est caractérisé par un bruit blanc ( $S_n(f) = \sigma_0^2$ ). Pour les basses fréquences, nous avons démontré que la fonction de transfert  $|H_2(f)|^2$  vaut  $1/p^2$  quelle que soit la boucle d'asservissement utilisée. La contribution de ce bruit sur l'oscillateur asservi vaut alors  ${}^2S_y(f) = \sigma_0^2 / p^2$  (voir l'équation 5-79) dont l'écart type d'Allan est :

$${}^2\sigma_y(\tau) = \frac{\sigma_0}{p\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (5-108)$$

Le bruit dominant dans la plupart des oscillateurs locaux est celui de scintillation "Flicker" de fréquence, et nous avons  $S_w(f) = h_{-1} f^{-1}$ . La fonction de transfert  $|H_1(f)|^2$  pour les basses fréquences dépend du nombre d'intégrateurs dans la boucle (voir équations 5-66 et 5-90). Dans le cas d'une boucle contenant un seul intégrateur, la contribution de l'oscillateur local est donnée par l'équation 5-67 et vaut pour un bruit "Flicker" de fréquence :

$${}^1S_y(f) = |H_1(f)|^2 S_w(f) = h_{-1} \left( \frac{\pi T_c}{\beta} \right)^2 f \quad (5-109)$$

ce qui entraîne une contribution en bruit "Flicker" de phase dont l'écart type d'Allan  ${}^1\sigma_y(\tau)$  varie comme  $1/\tau$  pour les grandes valeurs de  $\tau$ .

Pour pouvoir comparer la stabilité des différents oscillateurs, on utilise l'écart type d'Allan  $\sigma_y(\tau)$  des fluctuations de fréquence *normalisées* par la fréquence nominale  $\nu_0$  de l'oscillateur.

La Fig. 5-17 représente un exemple de la contribution des deux bruits (détection et oscillateur libre) sur les fluctuations relatives de l'oscillateur asservi. Nous avons posé  $\frac{\sigma_0}{\nu_0 p} = 3 \times 10^{-13}$  pour le bruit de détection et supposé un oscillateur libre caractérisé par  $h_{-1} = 2 \times 10^{-25}$ . Les courbes présentées correspondent au comportement de la boucle (1Intégrateur-1Dérivateur) où nous avons choisi  $\beta = 0,5$  et  $T_c = 1$  s.

Dans les étalons primaires de fréquence, une fois l'oscillateur local asservi sur la transition atomique, le bruit dominant à long terme ( $\tau \gg 1$  s) est un bruit blanc de fréquence  $S_y(f) = h_0$ , ce qui correspond à un écart type d'Allan de pente de -0,5 sur une échelle logarithmique. On appelle, quelquefois, par abus de langage, "Stabilité de l'horloge" la valeur de  $\sigma_y(\tau)$  pour  $\tau = 1$  s. Cette valeur est obtenue par interpolation et vaut  $\sqrt{h_0/2}$  dans le cas d'un bruit blanc de fréquence (le cercle de la Fig. 5-17).

Dans le paragraphe suivant nous établissons la stabilité de notre étalon, et discutons les différents facteurs qui limitent cette stabilité.

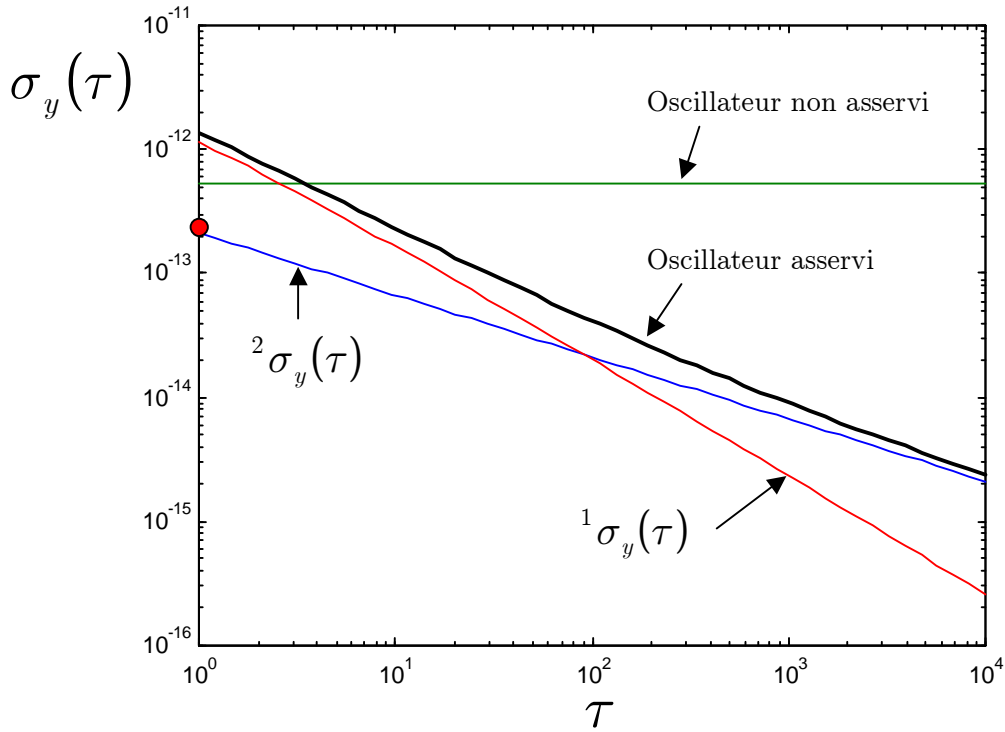


Fig. 5-17 : Contribution des bruits de détection et de l'oscillateur libre sur la stabilité de l'oscillateur asservi

### 5.8.1. Stabilité de JPO

Pour vérifier la validité de l'hypothèse  $S_w(f) = 0$ , établie précédemment, nous avons mesuré rapidement (la durée totale des mesures est de 3 minutes), la variance  $\sigma_s$  du signal de détection en fonction de la position sur la frange de Ramsey. La Fig. 5-18 représente les variations du signal de détection en fonction de la fréquence ainsi que les variations du bruit en fonction du signal.

L'expression du signal  $s_i$  en chaque point mesuré  $i$ , en fonction du désaccord  $w_i$ , s'obtient en effectuant un développement limité de la frange autour des  $w_i$  :

$$s_i(t) = h(w_i) + \left. \frac{\partial h}{\partial w} \right|_i w(t) + n(t) \tag{5-110}$$

D'où la variance mesurée :

$$\sigma_s^2(i) = p_i^2 \sigma_w^2 + \sigma_n^2(i) \quad (5-111)$$

en désignant par  $p_i$  la pente de la frange de Ramsey pour le désaccord  $w_i$ .

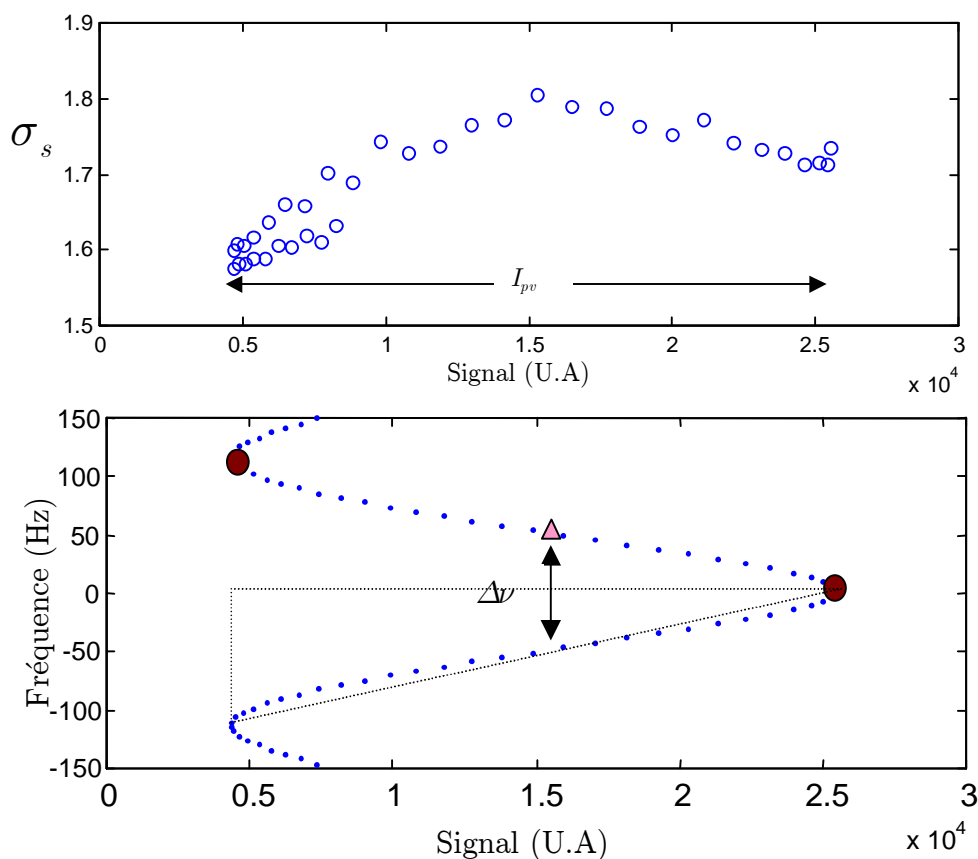


Fig. 5-18 : Variations du signal de détection et sa variance en fonction de la fréquence d'interrogation.

Le bruit  $n(t)$  provient, en premier lieu, des fluctuations dues au comptage des atomes dans le jet, le bruit de grenaille (Shot Noise) atomique, proportionnel à la racine carrée du nombre d'atomes détectés ( $\propto \gamma\sqrt{s_i}$ ) [10]. Plusieurs autres sources de bruit y contribuent aussi : le bruit du détecteur, les fluctuations de l'efficacité du pompage optique et la largeur de raie des lasers de l'expérience [11]. Nous pouvons écrire alors :

$$\sigma_n^2(i) = \gamma^2 s_i + \varsigma^2 \quad (5-112)$$

où  $\gamma$  représente la contribution du bruit de grenaille et  $\varsigma$  celle des autres sources de bruit.

En calculant les pentes  $p_i$  (connues) à partir du signal mesuré  $s_i$ , et en ajustant les paramètres  $\gamma$ ,  $\varsigma$  et  $\sigma_w$  (inconnues) avec les variances mesurées  $\sigma_s^2(i)$  (connues) par la méthode des moindres carrés, nous obtenons :

$$\varsigma = 1,56$$

$$\gamma = 4,1 \times 10^{-3}$$

$$\sigma_w = 2,3 \times 10^{-3}$$

L'unité de ces valeurs est arbitraire, mais elle correspond à une valeur pic-vallée du signal  $I_{pv} = 21 \times 10^3$  (Voir la Fig. 5-18).

Nous signalons aussi que la valeur de  $\varsigma$  peut s'estimer en calculant la variance du signal mesuré en l'absence du bruit atomique (micro-onde "OFF" et loin de la résonance). Cette méthode conduit à une valeur de  $\varsigma = 1,5$ . D'autres mesures ont montré que la contribution prépondérante du bruit vient du détecteur (la photodiode). Le bruit provenant de la lumière parasite ou des atomes non pompés est négligeable.

A mi-hauteur de la frange, la pente peut se calculer approximativement en approchant la forme de la frange par un triangle de hauteur  $I_{pv}$  et de largeur de base

$$\Delta\nu = 104 \text{ Hz. Il vient } p = \frac{I_{pv}}{\Delta\nu} = \frac{21 \times 10^3}{104} = 200 \text{ (U.A.)/Hz (Voir la Fig. 5-18). En}$$

effet, cette approximation n'est pas valable car la mesure expérimentale de la pente donne  $p = 296$ .

D'autre part, l'équation (5-96) nous permet d'écrire :

$$\sigma_c^2 = \sigma_w^2 + \frac{\sigma_n^2}{p^2} \quad (5-113)$$

En reportant les valeurs numériques calculées plus haut dans cette relation, nous avons pour le bruit du Maser :

$$\frac{\sigma_w}{\nu_0} = \frac{2,3 \times 10^{-3}}{9192631770} = 2,5 \times 10^{-13}$$

et pour le bruit de détection :

$$\frac{\sigma_n}{\nu_0 p} = \frac{\sqrt{\gamma^2 s + \varsigma^2}}{\nu_0 p} = \frac{\sqrt{(4,1)^2 \times 10^{-6} \times 1,6 \times 10^4 + (1,56)^2}}{9192631770 \times 296} = 6,1 \times 10^{-13}.$$

Nous en déduisons que le bruit du Maser n'est pas négligeable devant la contribution du bruit de détection sauf s'il est du type "Flicker" de phase ou blanc de phase. La Fig. 5-19 présente une estimation de l'écart type d'Allan des fluctuations du Maser contre celui de la contribution du bruit de détection. Le bruit du Maser a été spécifié par le constructeur du Maser (SIGMA TAU) et mesuré dans notre laboratoire à plusieurs reprises.

Nous constatons sur cette figure que le Maser présente un bruit "Flicker" de phase à court terme (jusqu'à 20 seconds) et un bruit blanc de fréquence pour un temps d'intégration entre 20s et 400 s. Puis il présente un palier "Flicker" de fréquence de  $2 \times 10^{-15}$  à long terme. Par conséquent, on ne verra pas la contribution du bruit du Maser sur la stabilité de l'horloge, sauf sur les temps longs où l'on observera d'abord son palier "Flicker" puis une dérive de quelques  $10^{-16}$  par jour. Par suite l'enregistrement du signal de correction suffit pour déterminer la stabilité de notre étalon.

Ces mesures préliminaires nous permettent de *prédire* la stabilité de notre étalon. En effet, le bruit de détection étant blanc, l'écart type des fluctuations *relatives* de la fréquence se déduit de l'équation (5-108) :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{\sigma_0}{\nu_0 p \sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\tau}} \quad (5-114)$$

En reportant les valeurs numériques trouvées dans cette expression, nous avons :

$$\hat{\sigma}_y(\tau) = \frac{4,3 \times 10^{-13}}{\sqrt{\tau}} \quad (5-115)$$

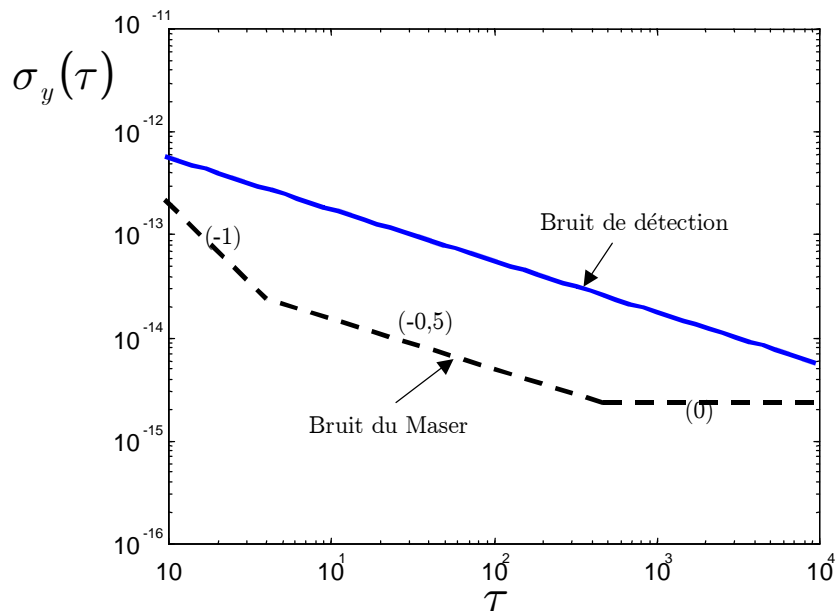


Fig. 5-19 : Comparaison : bruit de maser à hydrogène contre bruit de détection

La Fig. 5-20 représente l'écart type d'Allan des corrections  $\{c_k\}$  résultant de l'asservissement de la fréquence du Maser sur la transition atomique dans le cas d'un pompage à un seul laser.

Nous constatons sur cette figure que la pente (-0,5) de  $\sigma_y(\tau)$  correspond à un bruit blanc de fréquence dû au bruit blanc de détection. La stabilité de l'horloge est obtenue en calculant la valeur de  $\sigma_y(\tau = 1 \text{ s})$  par interpolation. Nous trouvons :

$$\sigma_y(\tau) = \frac{3,8 \times 10^{-13}}{\sqrt{\tau}} \tag{5-116}$$

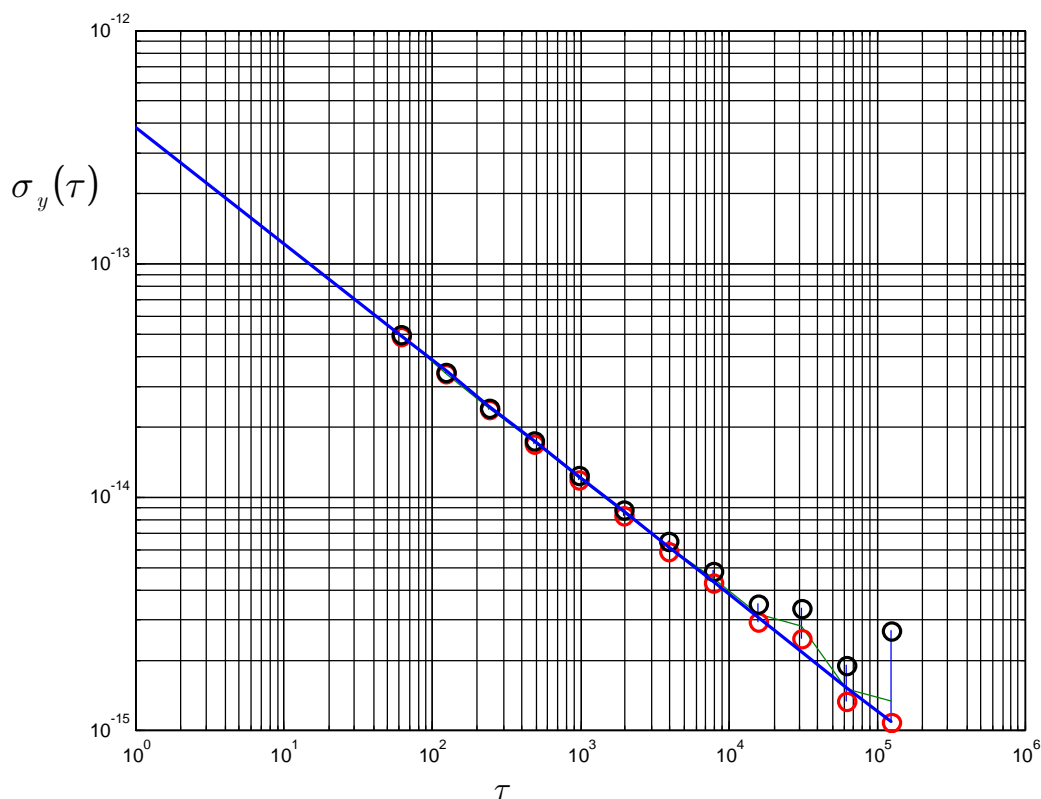


Fig. 5-20 : Ecart type d'Allan expérimental.

## 5.9. Conclusion

Nous avons étudié en détail l'asservissement d'un oscillateur local sur la transition atomique. Nous avons d'abord montré que le signal d'erreur est généré par une modulation de la fréquence d'interrogation, suivie par une démodulation adéquate du signal détecté. Nous avons aussi montré que, sans traitement approprié, ce signal d'erreur est insuffisant pour asservir l'oscillateur local. Ensuite, nous avons présenté une boucle très générale et discuté les conditions qu'elle doit vérifier pour réaliser un verrouillage complet. Nous avons proposé deux boucles et présenté une étude détaillée de leur comportement. Enfin, nous avons présenté comment réaliser la boucle d'asservissement en pratique et montré les résultats obtenus dans notre horloge en terme de stabilité de la fréquence asservie. Cette stabilité est déterminée par le bruit de détection et par le pouvoir discriminateur (la pente) de la courbe de résonance atomique.



---

## Bibliographie

- [1] C. Audoin, V. Candelier, N. Dimarcq, "A limit to the frequency stability of passive frequency standards due to an intermodulation effet", *IEEE Trans. Instr. Meas.*, Vol. 40, No. 2, Avril 1991, pp. 121 - 125.
- [2] P. Siarry, *Automatique de base*, Editions Ellipses, 1989.
- [3] C. Audoin, communication privée.
- [4] G. Blanchet et J. Prado, *Eléments d'Automatique*, Collection Pédagogique de Télécommunication, Editions Ellipses, 1995.
- [5] B. Picinbono, *Random Signals and systems*, Prentice Hall, 1993.
- [6] E. Boileau, B. Picinbono, "Statistical Study of Phase Fluctuations and Oscillator Stability", *IEEE Trans. Instr. Meas.*, Vol. 25, No. 1, March 1976.
- [7] J. Rutman, "Characterization of Phase and frequency Instabilities in Precision Frequency Sources : Fifteen Years of Progress", *Proc. IEEE*, Vol. 66, No. 9, pp. 1048-1174, Septembre 1978.
- [8] J. A. Barnes et al., "Characterization of Frequency Stability", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. IM-20, pp. 105-120, May 1971.
- [9] C. A. Greenhall, "Does Allan Variance Determine the Spectrum?", *Proc. Frequency Control Symposium*, Orlando, pp. 358-365, 1997.
- [10] J. Vanier et C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. Bristol, Adam Hilger, 1989.
- [11] N. Dimarcq., V. Giordano, P. Cerez, and G. Theobald, " Analysis of the noise sources in an optically pumped cesium beam resonator", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, Vol. 42, p. 115, May 1993.

# Chapitre 6. ASSERVISSEMENT -

## MODELE DYNAMIQUE

---

Jusqu'à présent, nous nous sommes placés dans le cadre du modèle quasi-statique, qui consistait à négliger les variations rapides du bruit de l'oscillateur libre. Dans la suite, nous nous intéressons au comportement la boucle d'asservissement quand cette hypothèse n'est plus valable. Nous appelons *modèle dynamique* le modèle que nous développons pour décrire le comportement de la boucle dans ce cas. Nous utilisons deux approches pour aboutir à ce modèle. La première, temporelle, est basée sur la fonction de sensibilité déjà introduite et étudiée dans le cas des horloges à réponse discontinue. La seconde approche est fréquentielle, et basée sur la théorie des transformées de Fourier. Enfin, nous présentons les conséquences de ce modèle sur la boucle d'asservissement et nous montrons qu'il conduit à l'effet "Dick" bien connu dans les horloges à réponse discontinue.

### 6.1. Le modèle dynamique

Nous avons vu dans le modèle quasi-statique présenté au chapitre 5, que la valeur du signal démodulé  $x_k$  contient l'information recherchée  $w_k$  concernant la position de l'oscillateur libre par rapport au sommet de la frange de Ramsey. Cette information s'écrit tout simplement sous la forme :

$$x_k = p \cdot w_k = p \cdot \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} w(t) dt \quad (6-1)$$

Autrement dit, elle est proportionnelle à la valeur moyenne sur un cycle du désaccord  $w(t)$ , ce qui n'est pas valable quand l'oscillateur libre présente des variations rapides par rapport à la durée du cycle  $T_c$ .

En effet, le signal de Ramsey, que nous avons représenté par une courbe statique symétrique par rapport à la fréquence de transition atomique, est sensible à la différence de phase vue par les atomes lors de leur passage dans les deux bras de la cavité, en plus de sa sensibilité au désaccord en fréquence. Quand la fréquence d'interrogation présente des variations rapides, cette différence de phase n'est plus nulle comme nous l'avons supposé dans le modèle statique. Pour tenir compte de ce fait, il faut exprimer le signal mesuré à tout instant  $t$  en fonction des variations instantanées de la fréquence d'interrogation.

Pour écrire l'expression de ce signal mesuré dans le cadre dynamique nous négligeons le bruit de détection. Nous avons vu, lors du calcul de la réponse du jet à un saut de fréquence de l'oscillateur local, que le signal de détection, à tout instant  $t$ , s'écrit sous la forme :

$$s(t) = C + \int_0^{\infty} f(\tau) \sin^2(b\tau) \cos[\Omega_0 a_1 \tau + \Phi(t, \tau)] d\tau \quad (6-2)$$

Cette équation a été donnée au chapitre 4 (équation 4-32). La signification des symboles utilisés dans cette expression est la même que celle déjà détaillée au chapitre 4. Rappelons seulement que  $\Phi(t, \tau)$  est la différence de phase vue par un atome de temps d'interaction  $\tau$  et arrivant au détecteur à l'instant  $t$ .

Si nous négligeons la différence de phase électrique (constante) entre les deux champs dans les deux zones d'interrogation, nous pouvons écrire  $\Phi(t, \tau)$  sous la forme :

$$\Phi(t, \tau) = \phi(t - T_D) - \phi(t - T_D - T) \quad (6-3)$$

où  $T_D = a_2 \tau$  est le temps mis par l'atome pour parcourir la distance  $D$  entre le deuxième bras de la cavité et le détecteur, et  $T = a_1 \tau$  est le temps de transit dans la région de vol libre.

Dans l'équation (4-33), nous n'avons pas considéré le temps d'interaction  $\tau$ , ce qui est valable sous l'hypothèse  $\tau < T$ . Celle-ci constitue la limite du modèle dynamique et ainsi la limite de validité des résultats obtenus dans ce chapitre.

Quand nous utilisons une opération de modulation pour verrouiller la fréquence de l'oscillateur libre sur celle de la transition atomique, la phase instantanée de l'oscillateur d'interrogation s'écrit sous la forme :

$$\phi(t) = \underbrace{\phi_m(t)}_{\text{modulation}} + \underbrace{\phi_B(t)}_{\text{bruit}} \quad (6-4)$$

en désignant par :

- $\phi_m(t)$  la phase, déterministe car artificielle, due à la modulation. Elle est périodique de période  $2T_c$ .
- $\phi_B(t)$  les fluctuations de phase de l'oscillateur d'interrogation. Elles sont de nature aléatoire et reflètent les fluctuations de fréquence  $w(t)$  ( $w(t) = \frac{d\phi_B(t)}{dt}$ ).

Le signal de détection mesuré dans ce cas n'est pas exploitable directement, car il dépend de la modulation  $\phi_m(t)$  qui a été ajoutée artificiellement. Pour supprimer l'influence de la modulation sur ce signal, nous le multiplions par un signal de démodulation  $d(t)$ , lui aussi de période  $2T_c$ . Soit  $x(t) = d(t) \cdot s(t)$  le signal démodulé. Après démodulation nous calculons la valeur moyenne sur un cycle dont l'expression est :

$$x_k = \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} x(t) dt = \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} d(t)s(t) dt \quad (6-5)$$

En d'autres termes, nous exigeons de l'opération de modulation - démodulation qu'elle soit :

- 1) transparente par rapport à  $\phi_m(t)$
- 2) sensible aux fluctuations de phase  $\phi_B(t)$ .

En effet, l'expression (6-2) représente bien un modèle dynamique du signal de détection. Cependant, elle ne constitue pas une relation simple et directe entre les fluctuations de fréquence  $w(t)$  et le signal  $x_k$ , donné par l'équation (6-5), et utilisé dans la boucle d'asservissement. Dans la suite nous cherchons à établir une relation simple entre ces deux quantités par deux approches différentes.

## 6.2. La fonction de sensibilité

Cette approche a été introduite par Dick [1] pour étudier la contribution du bruit de l'oscillateur local sur celui de l'oscillateur asservi dans le cas des étalons à réponse discontinue. Nous utilisons cette approche pour étudier la réponse des jets continus à des variations rapides de la fréquence de l'oscillateur local.

L'approche de la fonction de sensibilité consiste à exprimer la relation entre le signal démodulé<sup>22</sup> numérique  $x_k$  et les fluctuations de fréquence  $w(t)$  de l'oscillateur d'interrogation (asservi ou pas), quel que soit le comportement de l'oscillateur libre. Nous écrivons cette relation recherchée sous la forme :

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)w(t)dt \quad (6-6)$$

où  $g(t)$  est la fonction de sensibilité que nous désirons déterminer.

La recherche de  $g(t)$  peut être vue comme un problème d'identification. La méthode "la plus simple" pour effectuer cette identification est la méthode de la réponse impulsionnelle, qui consiste à exciter le système par une *impulsion de Dirac* à un instant donné  $t_0$ . La réponse du système est alors :

$$w(t) = \delta(t - t_0) \Rightarrow x_k(t_0) = \int g(t)\delta(t - t_0)dt = g(t_0) \quad (6-7)$$

En faisant varier l'instant  $t_0$ , nous obtenons les valeurs de  $g(t_0)$  recherchées.

---

<sup>22</sup> La fonction de sensibilité introduite par Dick a été définie dans le cas discret ou la modulation est carrée de fréquence et la démodulation n'existe pas car une seule valeur est disponible à la fin de chaque cycle. Ici, nous disposons d'une valeur numérique à la fin de chaque cycle après la démodulation du signal continu de la sortie et le calcul d'une valeur moyenne sur cette cycle. Par suite, la fonction de sensibilité dans notre cas va dépendre de la forme d'onde de démodulation. Par abus de langage, nous appelons cette fonction la *fonction de sensibilité* bien qu'elle a été définie par Dick dans un contexte différent.

Réaliser une impulsion de Dirac de fréquence, revient à réaliser un échelon de phase. Supposons qu'un saut de phase d'amplitude  $\Delta\phi_0$  infiniment petite a lieu à l'instant  $t_0$ . Nous avons alors :

$$\phi_B(t) = \Delta\phi_0 u(t - t_0) \Rightarrow w(t) = \frac{d\phi_B(t)}{dt} = \Delta\phi_0 \delta(t - t_0) \quad (6-8)$$

en désignant par  $u(t)$  la "fonction" échelon d'amplitude unité.

Pour ce saut de phase, nous calculons, ou mesurons, le signal  $x_k(t_0, \Delta\phi_0)$  correspondant. Nous avons alors, à partir de (6-7) :

$$g(t_0) = \frac{\partial x_k(t_0, \Delta\phi_0)}{\partial \Delta\phi_0} \quad (6-9)$$

Dans la suite, nous proposons de calculer la fonction de sensibilité  $g(t)$  pour plusieurs types de modulation - démodulation, dans le cas d'un jet monocinétique ainsi que dans le cas d'une distribution du temps de vol (jet non monocinétique).

### 6.2.1. Cas monocinétique

Nous supposons que les atomes ont tous le même temps de vol  $\tau$ . Dans ce cas, l'intégrale dans l'équation (6-2) disparaît et le signal  $s(t)$  s'écrit :

$$s(t) = C + \sin^2(b\tau) \cos[\Omega_0 a_1 \tau + \Phi(t, \tau)] \quad (6-10)$$

Ce signal dépend bien sûr de la forme de modulation  $\phi_m(t)$  à cause du terme  $\Phi(t, \tau)$ .

#### 6.2.1.1. Modulation carrée de phase

Supposons qu'un saut de phase d'amplitude  $\Delta\phi_0$  ait lieu à l'instant  $t_0$  ( $\phi_B(t) = \Delta\phi_0 u(t - t_0)$ ). Il sera détecté par les atomes grâce à leur sensibilité à la différence de phase  $\Phi(t, \tau)$  donnée par l'équation (4-33) qui s'écrit dans ce cas :

$$\begin{aligned}\Phi_B(t, \tau, t_0) &= \Delta\phi_0 [u(t - T_D) - u(t - T_D - T)] \\ &= \begin{cases} \Delta\phi_0 & \text{si } T_D < t - t_0 < T_D + T \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}\end{aligned}\quad (6-11)$$

La Fig. 6-1 montre la forme de cette différence de phase due au saut de phase en fonction du temps  $t$ , pour un instant  $t_0$  et un temps de vol  $\tau$  fixés.

Nous constatons sur la Fig. 6-1 que  $\Phi_B(t, \tau, t_0)$  prend la forme d'une fenêtre rectangulaire qui commence à l'instant  $t_0$ , ce qui s'écrit sous la forme :

$$\Phi_B(t, \tau, t_0) = \Delta\phi_0 R_T(t - t_0 - T_D) \quad (6-12)$$

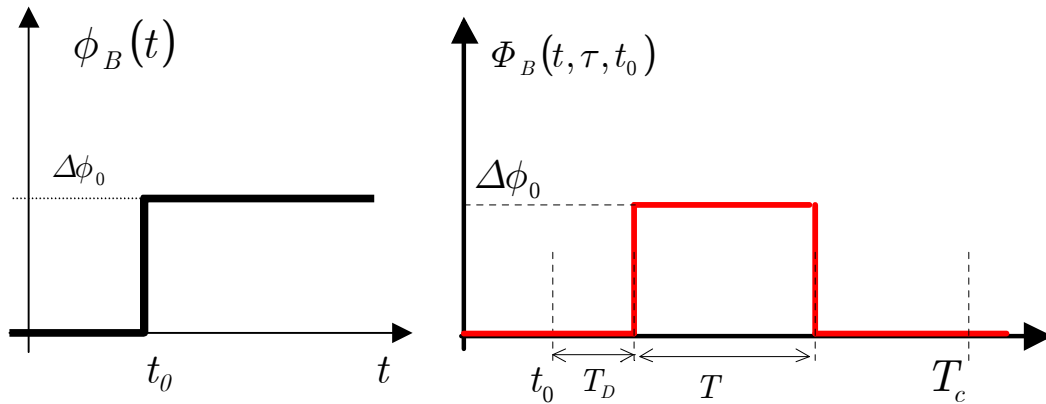


Fig. 6-1 : Saut de phase et la fonction  $\Phi_B(t, \tau, t_0)$  correspondante.

Considérons une modulation  $\phi_m(t)$ , carrée de phase, d'amplitude  $\phi_m$  et périodique de période  $2T_c$ . La Fig. 6-2 représente la forme d'onde, en fonction du temps, de la phase de modulation  $\phi_m(t)$  dans ce cas, ainsi que la différence de phase  $\Phi_m(t, \tau)$  due à la modulation (pour  $T_c \geq T$ ).  $\Phi_m(t, \tau)$  s'obtient à partir de l'équation (4-33) en remplaçant  $\phi(t)$  par  $\phi_m(t)$ .

Nous constatons sur la Fig. 6-2 que, pendant le cycle  $k$ ,  $\Phi_m(t, \tau)$  est une fenêtre rectangulaire d'amplitude  $2(-1)^k \phi_m$ , ce que nous exprimons sous la forme :

$$\Phi_m(t, \tau) = 2(-1)^k \phi_m R_T(t - (k-1)T_c - T_D) \quad (6-13)$$

où  $R_T(t)$  est une fenêtre rectangulaire de largeur  $T$  qui commence à l'origine  $t = 0$ .

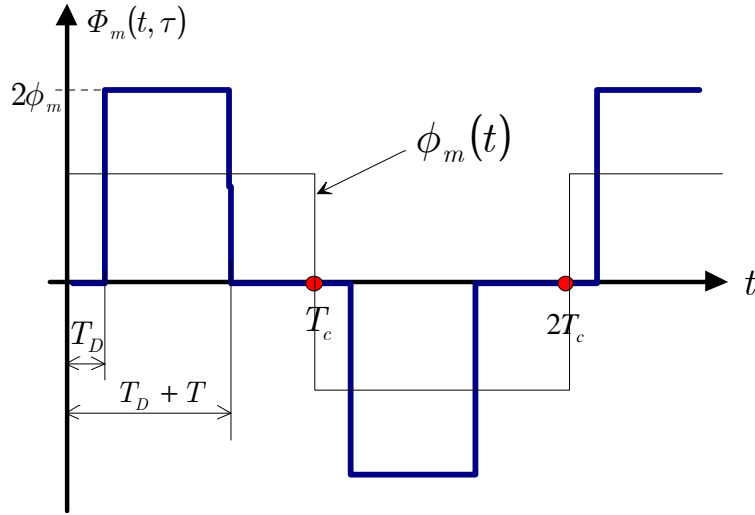


Fig. 6-2 : Modulation carrée de phase.

Pour calculer le signal de détection en tenant compte à la fois de la modulation et du saut de phase, nous reportons les équations (4-33) et (6-4) dans l'équation (6-2). Après développement du terme en cosinus nous obtenons :

$$s(t, t_0) = C + \sin^2(b\tau) [\cos(\Phi_m) \cos(\Phi_B) - \sin(\Phi_m) \sin(\Phi_B) - \Omega_0 T \sin(\Phi_m) \cos(\Phi_B) - \Omega_0 T \cos(\Phi_m) \sin(\Phi_B)] \quad (6-14)$$

Supposons que l'amplitude  $\Delta\phi_0$  est infiniment petite, nous pouvons alors approcher  $\cos(\Delta\phi_0)$  par un et  $\sin(\Delta\phi_0)$  par  $\Delta\phi_0$ . Nous supposons aussi qu'on est au voisinage de la résonance, ce qui revient à négliger les termes en  $\Omega_0$  dans l'équation (6-14).

Puisque nous cherchons à déterminer la fonction de sensibilité, les seuls termes dans (6-14) qui nous intéressent sont ceux qui dépendent de  $\Delta\phi_0$ . Après application des approximations précédentes, il ne reste que le terme en  $\sin(\Phi_m) \sin(\Phi_B)$  dans l'équation (6-14) et nous écrivons :



$$s(t, t_0) = -\sin^2(b\tau) \sin(\Phi_m(t, \tau)) \Delta\phi_0 R_T(t - t_0 - T_D) + c_1 \quad (6-15)$$

en posant  $c_1 = C + \sin^2(b\tau) \cos(\Phi_m(\mathbf{L}))$ . Notons que ce terme ne change pas de signe d'un cycle à l'autre car la fonction cosinus est paire.

A la suite de la démodulation de  $s(t, t_0)$  par  $d(t)$ , nous calculons la valeur moyenne sur un cycle du signal démodulé, ce qui entraîne :

$$x_k(t_0) = -\frac{1}{T_c} \Delta\phi_0 \sin^2(b\tau) \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} d(t) \sin(\Phi_m(t, \tau)) R_T(t - t_0 - T_D) dt + (-1)^k c \quad (6-16)$$

où le terme  $c$  résulte de la démodulation de la constante dans l'équation (6-15).

En reportant l'expression de  $\Phi_m(t, \tau)$ , donnée par l'équation (6-13), dans l'équation précédente, nous obtenons :

$$x_k(t_0) = (-1)^k \alpha \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} d(t) R_T(t - T_D - (k-1)T_c) R_T(t - t_0 - T_D) dt + (-1)^k c \quad (6-17)$$

où nous avons posé  $\alpha = -\frac{1}{T_c} \Delta\phi_0 \sin(2\phi_m) \sin^2(b\tau)$ .

Le signal de démodulation  $d(t)$  est périodique de période  $2T_c$  et change de signe tous les cycles. Nous pouvons alors écrire, d'après la Fig. 6-3 :

$$d(t) = (-1)^k \eta(t - (k-1)T_c) \quad \text{pour } t \in [(k-1)T_c, kT_c] \quad (6-18)$$

Ou encore :

$$d(t) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \eta(t - (k-1)T_c) , \quad \forall t > 0 \quad (6-19)$$

Le signal  $\eta(t)$  représente le motif qui génère le signal de démodulation. Il s'annule à l'extérieur de l'intervalle  $[0, T_c]$ .

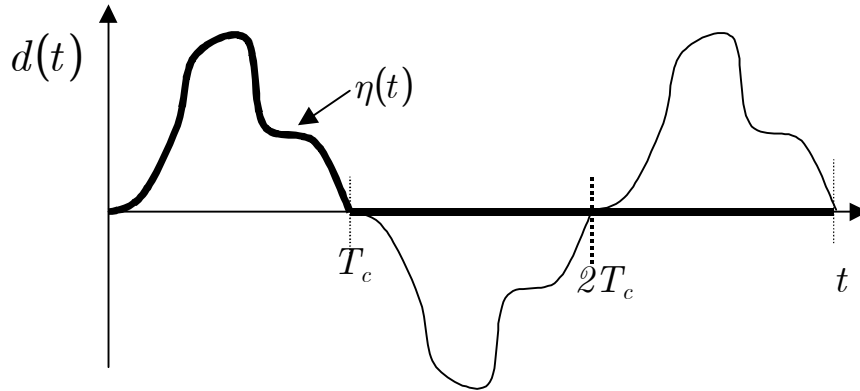


Fig. 6-3 : Signal de démodulation.

En reportant l'équation (6-18) dans (6-17), nous obtenons :

$$x_k(t_0) = \alpha \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} \eta(t - (k-1)T_c) R_T(t - T_D - (k-1)T_c) R_T(t - t_0 - T_D) dt + (-1)^k c \quad (6-20)$$

Nous constatons que cette expression "ressemble" à l'expression (5-11) obtenue dans le modèle statique pour le cas d'une modulation carrée de fréquence. Les deux expressions contiennent un terme de la forme  $(-1)^k c$  qui sera éliminé par le bloc de calcul de signal d'erreur, et un autre terme qui inclut les informations sur l'oscillateur local.

Si la fonction de démodulation est carrée d'amplitude 1, nous pouvons remplacer  $\eta(t - (k-1)T_c)$  par 1, et l'intégrale dans l'équation peut s'étendre sur l'intervalle  $]-\infty, +\infty[$  car la fonction  $\eta(t - (k-1)T_c)$  est nulle en dehors de l'intervalle  $[(k-1)T_c, kT_c]$ . Ceci revient à réécrire (6-20) sous la forme :

$$x_k(t_0) = \alpha \int_{-\infty}^{\infty} R_T(t - T_D - (k-1)T_c) R_T(t - t_0 - T_D) dt + (-1)^k c \quad (6-21)$$

L'expression de  $x_k(t_0)$  dans l'équation (6-21) peut être vue comme l'intercorrélation (définie dans l'annexe A) de deux fenêtres rectangulaires ayant la même largeur  $T$ . Or, on sait que la corrélation entre deux fenêtres rectangulaires est une

fenêtre triangulaire. Le sommet du triangle est atteint quand les deux rectangles coïncident. L'équation (6-21) montre que cette coïncidence a lieu quand  $t_0 = (k-1)T_c$ . A cet instant, l'intégrale est égale à la surface du rectangle  $R_T$  qui vaut  $T$ .

La fonction de sensibilité  $g_k(t)$  pour le cycle  $k$ , s'obtient en reportant l'équation (6-21) dans l'équation (6-9). Après dérivation (ou division) par rapport à  $\Delta\phi_0$  (inclus dans le coefficient  $\alpha$ ), nous obtenons :

$$g_k(t) = -\frac{T}{T_c} \sin^2(b\tau) \sin(2\phi_m) \Lambda_{2T}(t - (k-1)T_c) \quad (6-22)$$

où  $\Lambda_\lambda(t)$  désigne une fenêtre triangulaire d'amplitude 1 dont le sommet coïncide avec l'origine  $t = 0$  et la largeur de base vaut  $\lambda$ .

La Fig. 6-4 présente la fonction la fonction  $g_k(t)$ .

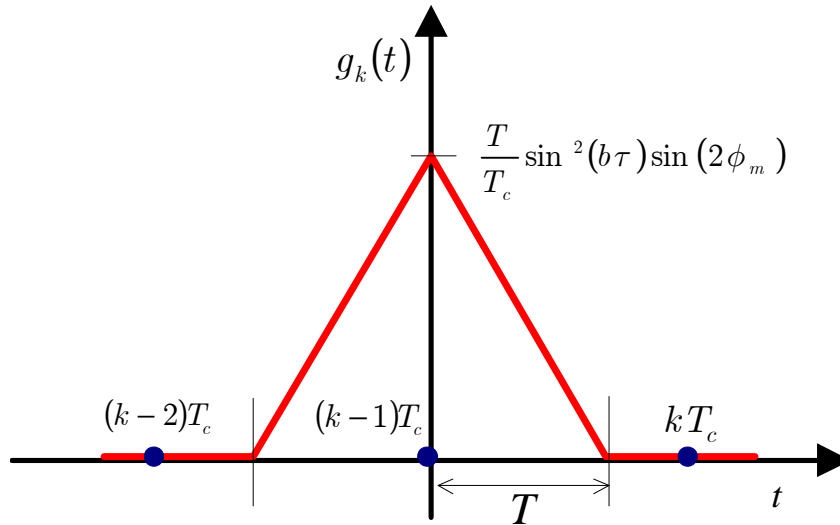


Fig. 6-4 : Fonction de sensibilité pour le cycle  $k$ .

L'expression du signal démodulé pour le cycle  $k$ , donnée par l'équation (6-21), s'écrit alors en fonction de  $g_k(t)$  sous la forme :

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} g_k(t)w(t)dt + (-1)^k c \quad (6-23)$$

Pour rendre l'équation (6-23) équivalente à celle d'un système *linéaire invariant dans le temps*, nous définissons une **fonction de sensibilité générale**  $g(t)$  qui ne dépend pas du cycle  $k$  par :

$$g(t) = g_k(-t + kT_c) \quad (6-24)$$

La Fig. 6-5 (trait continu) représente la fonction de sensibilité *générale* dans ce cas.

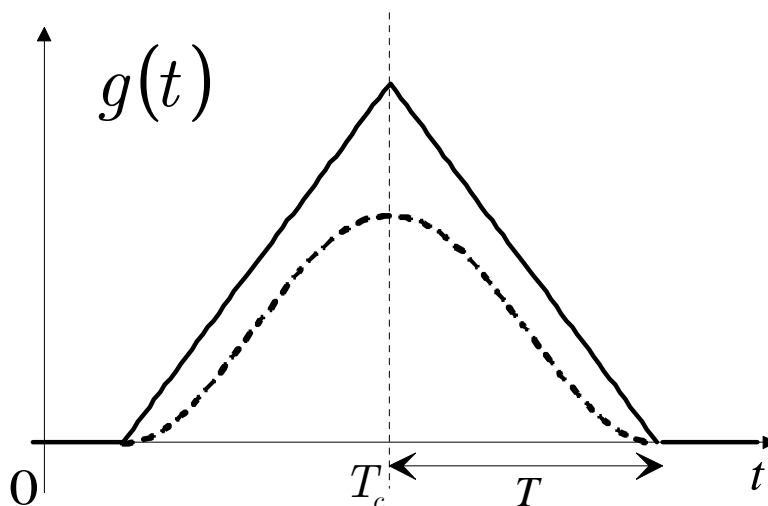


Fig. 6-5 : *Fonction de sensibilité dans le cas d'une modulation carrée de phase : 1) démodulation carrée (trait continu). 2) démodulation sinusoïdale (trait discontinu)*

En remplaçant cette expression dans l'équation (6-23), nous écrivons :

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(kT_c - t)w(t)dt + (-1)^k c \quad (6-25)$$

L'équation (6-25) montre que la valeur  $x_k$  peut être vue comme si elle était obtenue par échantillonnage, tous les  $T_c$  secondes, de la sortie  $x(u) = \int g(u-t)w(t)dt$  d'un système linéaire d'entrée  $w(t)$  et de réponse impulsionnelle  $g(t)$ .

Ce résultat peut être représenté par le schéma de la Fig. 6-6.

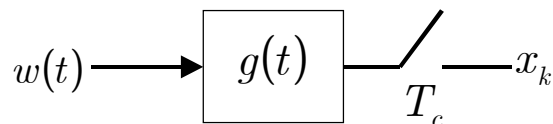


Fig. 6-6 : Relation entre le signal démodulé et la fonction de sensibilité.

Nous constatons, à partir de l'équation (6-20), que  $x_k(t_0)$ , et par suite  $g_k(t_0)$ , dépend du motif  $\eta(t)$  de l'onde de démodulation. Par exemple, une fonction  $\eta(t)$  sinusoidale est souvent utilisée et connue sous le nom de "détection du premier harmonique". La Fig. 6-6 (trait discontinu) montre la fonction de sensibilité  $g(t)$  dans le cas d'une démodulation générée par la fonction  $\eta(t) = \sin\left(\pi \frac{t}{T_c}\right)$ .

### 6.2.1.2. Modulation carrée de fréquence

Ce cas correspond à une fréquence de modulation de la forme d'une onde rectangulaire d'amplitude  $\nu_m$ . La phase de modulation  $\phi_m(t)$  prend la forme d'une onde triangulaire (l'intégrale d'une onde rectangulaire). On montre alors que [2] la différence de phase  $\Phi_m(t, \tau)$  due à la modulation a l'allure présentée sur la Fig. 6-7 où nous avons posé  $\omega_m = 2\pi\nu_m$ .

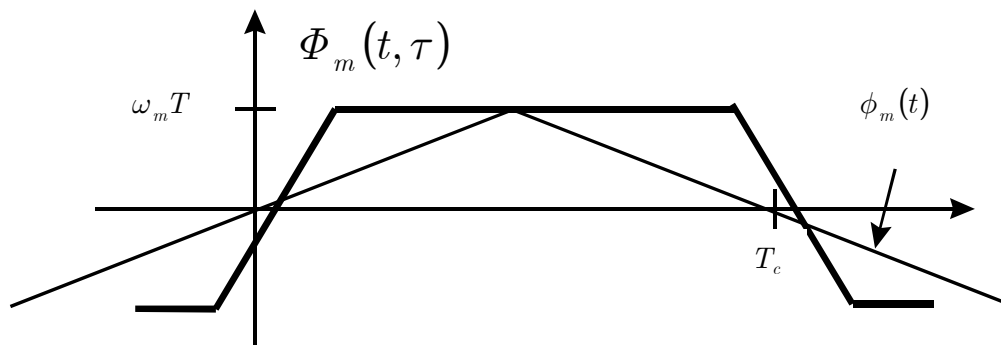


Fig. 6-7 : Modulation carrée de fréquence.

La différence de phase  $\Phi_B(t, \tau, t_0)$ , due au saut de phase, ne dépend pas du type de modulation et l'expression (6-12) reste valable dans ce cas.

La fonction de sensibilité est, d'après l'équation (6-16), donnée par l'intercorrélation entre  $d(t)\sin(\Phi_m(t, \tau))$  et la fenêtre rectangulaire  $R_T(t - t_0 - T_D)$  où  $\Phi_m(t, \tau)$  est celle représentée sur la Fig. 6-7.

Il n'est pas facile d'exprimer la fonction  $\sin(\Phi_m(t, \tau))$  sous forme analytique simple car  $\Phi_m(t, \tau)$  présente des rampes sur certains intervalles. Par suite, l'intercorrélation est calculée numériquement. Tous calculs faits, nous trouvons la fonction de sensibilité représentée dans la Fig. 6-8, dans le cas d'une démodulation par une forme d'onde carrée.

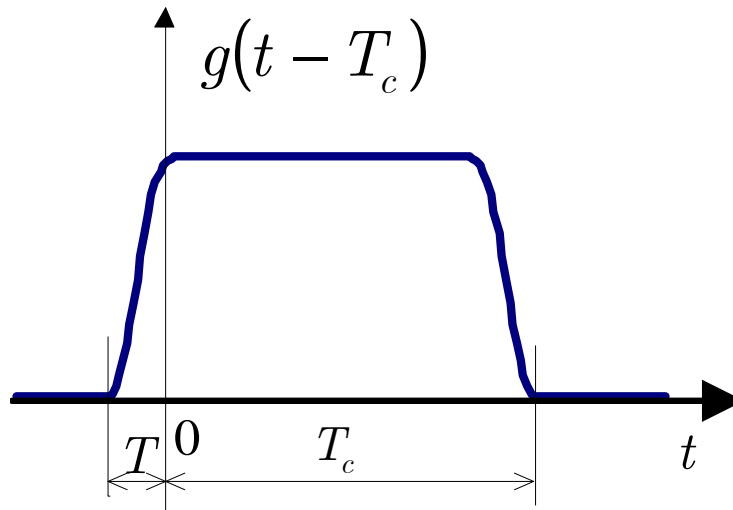


Fig. 6-8 : Fonction de sensibilité dans le cas d'une modulation carrée de fréquence, (démodulation carrée).

Nous avons ainsi obtenu la fonction de sensibilité en deux cas de modulation (carrée de phase et carrée de fréquence). Ces résultats sont valables pour les jets continus mais monocinétiques. Actuellement, plusieurs laboratoires construisent des étalons à atomes froids avec un jet continu dans l'objectif d'améliorer la sensibilité du signal de détection aux variations de l'oscillateur local par rapport à celle obtenue dans les étalons monocinétiques à réponse *discontinue* (la fontaine atomique). La Fig. 6-9 représente la fonction de sensibilité de la fontaine atomique du LPTF ([3] et [4]) dans le cas d'une modulation carrée de fréquence. Cette figure est à comparer à la Fig. 6-8 obtenue dans les mêmes conditions de modulation pour un jet mo-

nocinétique continu. Nous constatons que les atomes sont sensibles pendant presque toute la durée du cycle dans le cas continu, tandis que la sensibilité dans le cas discontinu est égale au temps d'interrogation  $T$  quelle que soit la durée du cycle.

Dans le cas de notre étalon (JPO, jet thermique), ces résultats ne sont pas valables, à cause de la présence d'une distribution de temps de vol. Dans le paragraphe suivant, nous déterminons la fonction de sensibilité pour les jets continus avec une distribution de temps de vol.

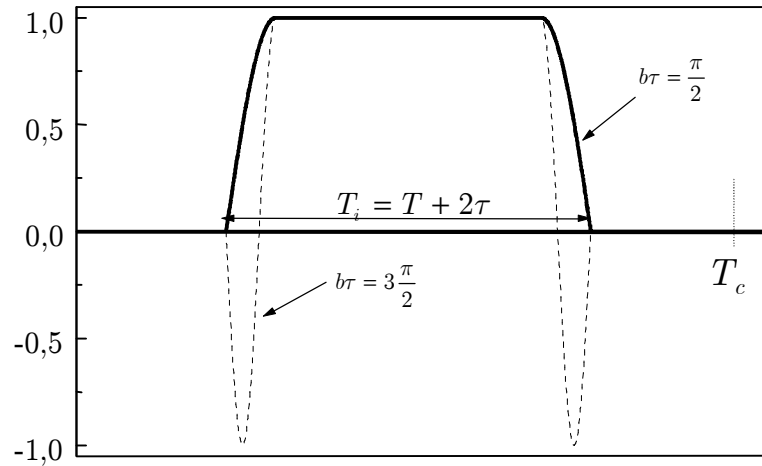


Fig. 6-9 : *Fonction de sensibilité dans les étalons à réponse discontinue* [3].

### 6.2.2. Cas d'une distribution de temps de vol

Nettement plus ardu que dans le cas des jets monocinétiques, le calcul de la fonction de sensibilité exige l'intégration sur le temps de vol des atomes. Nous considérons ici le cas d'une modulation carrée de fréquence et nous supposons que nous introduisons un temps mort dans le cycle, pendant lequel nous attendons que la différence de phase  $\Phi_m(t, \tau)$  devienne constante. Cette dernière opération est appelée "la suppression de la réponse transitoire du jet" (voir la Fig. 6-10). Dans ce cas,  $T_c$  désignera la durée d'acquisition du signal de détection, et  $T_s$  est la somme de  $T_c$  et du temps mort.

La réponse transitoire a été étudiée au chapitre 4, où nous l'avons utilisée pour déterminer la distribution du temps de vol  $f(\tau)$ .

Le calcul du signal mesuré  $s(t, t_0)$  se fait à partir de l'équation (6-2) en intégrant par rapport au temps de vol  $\tau$  pour chaque instant  $t$ . Après suppression de la réponse transitoire, la fonction  $\Phi_m(t, \tau)$  devient constante (égale à  $\omega_m T$ ) en fonction

du temps, mais la fonction  $\Phi_B(t, \tau, t_0)$  varie en fonction de ses trois variables. Pour développer le calcul, nous écrivons la différence de phase  $\Phi_B(t, \tau, t_0)$  en fonction de  $\tau$  pour un instant  $t$  fixe.

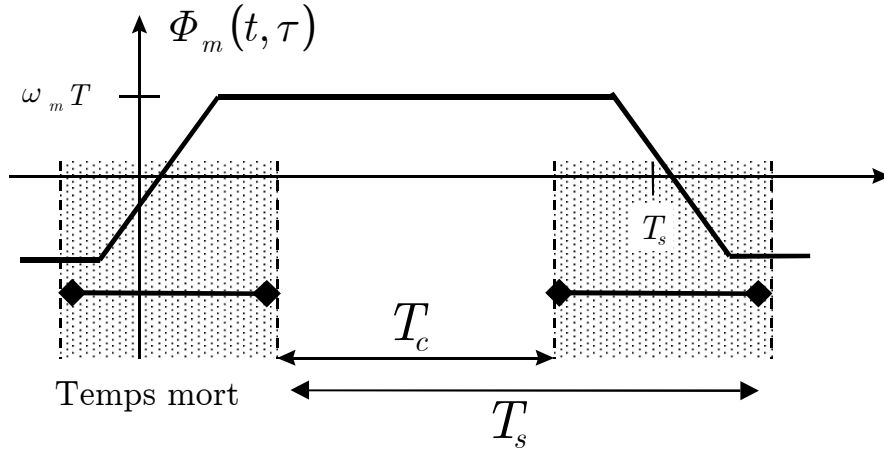


Fig. 6-10 : Modulation carrée de fréquence avec suppression de la réponse transitoire.

L'équation (6-11) entraîne :

$$\Phi_B(t, \tau, t_0) = \begin{cases} \Delta\phi_0 & \text{si } \alpha_1(t - t_0) < \tau < \alpha_2(t - t_0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (6-26)$$

où  $\alpha_1 = \frac{\mathbf{1}}{D + L}$  et  $\alpha_2 = \frac{\mathbf{1}}{D}$  ont été donnés au chapitre 4.

Posons  $t_1 = \alpha_1(t - t_0)$  et  $t_2 = \alpha_2(t - t_0)$ . L'intégration par rapport à  $\tau$  dans l'équation (6-2) peut être décomposée de la façon suivante :

$$s(t, t_0) = C + \int_0^{t_1} \mathbf{L} d\tau + \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{L} d\tau + \int_{t_2}^{\infty} \mathbf{L} d\tau \quad (6-27)$$

Le seul terme qui dépend de  $\Delta\phi_0$  est l'intégrale sur l'intervalle  $[t_1, t_2]$ , car sur cet intervalle  $\Phi_B(t, \tau, t_0)$  n'est pas nulle d'après l'équation (6-26). C'est ce terme que



nous allons calculer. Les autres termes s'annulent après dérivation par rapport à  $\Delta\phi_0$  lors du calcul de la fonction de sensibilité. La Fig. 6-11 illustre le signal calculé  $s(t, t_0)$  pour un saut de phase qui a lieu à l'instant  $t_0 = 0$ , dans le cas d'une distribution de vitesse maxwellienne pour  $b = b_{opt}$  et une profondeur de modulation  $\nu_m = 45$  Hz (la largeur à mi-hauteur de la frange de Ramsey vaut 100 Hz).

Avec les mêmes hypothèses qu'auparavant (c'est-à-dire  $\Omega_0 = 0$  et  $\Delta\phi_0 \ll 1$ ), les équations (6-14) et (6-27) entraînent :

$$s(t, t_0) = (-1)^k \Delta\phi_0 \int_{t_1}^{t_2} f(\tau) \sin^2(b\tau) \sin(a_1 \omega_m \tau) + \dots \quad (6-28)$$

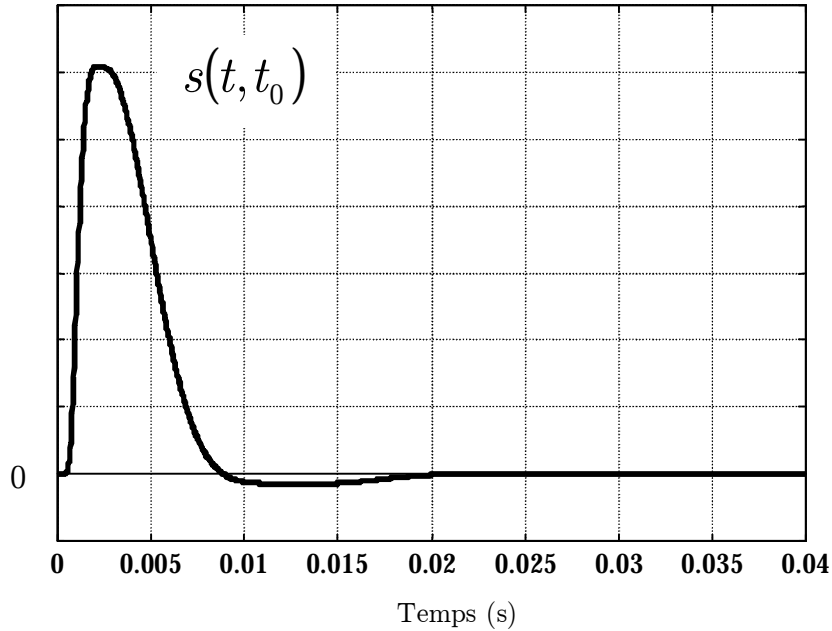


Fig. 6-11 : Réponse à un saut de phase à l'instant  $t_0 = 0$  pour une modulation carrée de fréquence dans un jet à distribution de temps de vol.

D'après la définition de  $t_1 = \alpha_1(t - t_0)$  et  $t_2 = \alpha_2(t - t_0)$ , nous déduisons que  $s(t, t_0) = s(t - t_0)$ . L'équation (6-5) donnant le signal démodulé s'écrit :

$$x_k(t_0) = \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} d(t) s(t - t_0) dt = \frac{1}{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t - (k-1)T_c) s(t - t_0) dt \quad (6-29)$$

En fonction de  $t_0$ , cette expression est équivalente à une intercorrélacion entre le signal  $\eta(t)$  qui génère le signal de démodulation et le signal  $s(t)$  de la Fig. 6-11. Quant à la fonction de sensibilité, elle est obtenue en dérivant le signal de l'équation (6-29) par rapport à  $\Delta\phi_0$ . Pour le cycle  $k$  nous obtenons :

$$g_k(t_0) = -\frac{1}{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \eta(t - (k-1)T_c) \int_{\alpha_1(t-t_0)}^{\alpha_2(t-t_0)} f(\tau) \sin^2(b\tau) \sin(a_1 \omega_m \tau) d\tau \right] dt$$

pour  $t_0 \in ]-\infty, kT_c]$  (6-30)

La fonction de sensibilité générale  $g(t)$  se déduit de cette expression d'après la relation (6-24). La Fig. 6-12 représente la forme de  $g(t)$  dans le cas d'un jet à distribution de vitesse maxwellienne pour une modulation carrée de fréquence et une démodulation par une forme d'onde carrée.

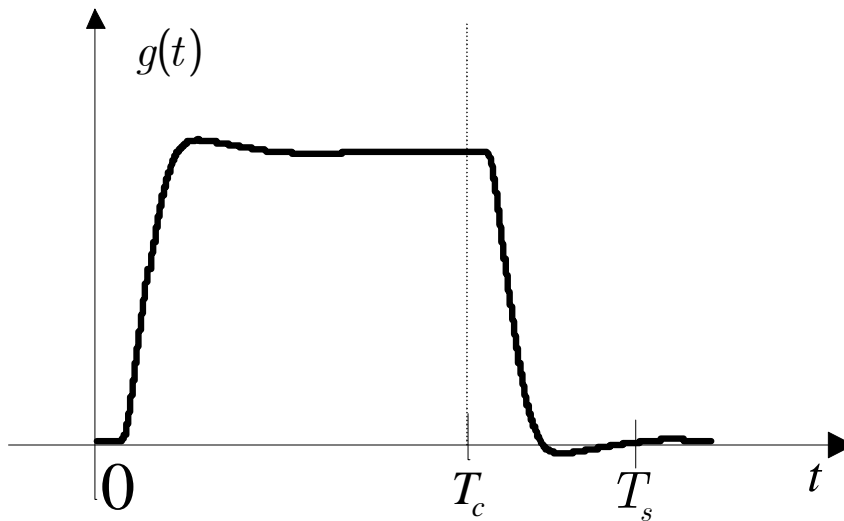


Fig. 6-12 : *Fonction de sensibilité en présence d'une distribution des vitesses, modulation carrée de fréquence, démodulation carrée.*

Nous constatons sur cette figure, que la fonction de sensibilité a un support qui dépasse la durée  $T_c$ . Ceci est dû au fait que durant le cycle  $k$ , les atomes lents qui vont arriver au détecteur, auront été sensibles aux variations de fréquence durant

leur passage dans le premier bras de la cavité. Quand le temps mort n'est pas nul ( $T_s > T_c$ ), l'acquisition se fait durant  $T_c$  secondes, par ailleurs les valeurs du signal démodulé  $x_k$  sont disponibles toutes les  $T_s$  secondes. Le schéma de la Fig. 6-6 est valable à condition de remplacer  $T_c$  par  $T_s$  et de calculer la fonction de sensibilité à partir des signaux mesurés pendant un temps  $T_c$ .

### 6.2.3. Discussion

- Dans le cas monocinétique, la réponse du jet est disponible après un retard  $T_D$  égal au temps que met l'atome pour parcourir la distance  $D$  entre la deuxième zone d'interrogation et le détecteur. Cela dit, les termes  $\eta(t - (k-1)T_c)$  et  $R_T(t - T_D - (k-1)T_c)$  dans l'équation (6-20), représentant respectivement la démodulation et la réponse des atomes à la modulation, ne sont pas synchronisés. Ceci peut être surmonté en introduisant un retard  $T_D$  dans la fonction de démodulation. Les figures 6-5 et 6-8 ont été obtenues en utilisant la version décalée  $\eta(t - T_D - (k-1)T_c)$  de la fonction de démodulation. Si nous n'introduisons pas ce retard, nous obtenons la fonction de sensibilité de la Fig. 6-13. Elle correspond au cas monocinétique avec modulation carrée de phase et démodulation carrée.

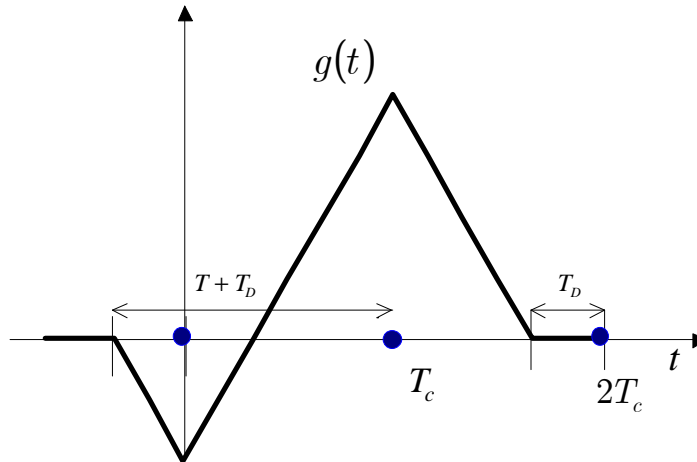


Fig. 6-13 : *Fonction de sensibilité sans démodulation retardée, cas monocinétique : modulation carrée de phase, démodulation carrée.*

- Nous constatons également que, sur toutes les figures précédentes (6-5, 6-8 et 6-12), la fonction de sensibilité a un support supérieur à la durée du cycle  $T_c$ . Ceci n'est pas le cas dans les horloges à réponse discontinue. Ce support est égal à  $2T$  dans le cas d'une modulation carrée de phase et n'augmente pas avec la durée du cycle. Il est donc inutile de réaliser des cycles plus longs que  $T$  dans ce cas.
- Quand le désaccord  $w(t)$  est constant, égal à  $w_k$ , pendant la durée du cycle, l'équation (6-25) devient :

$$x_k = \int_{-\infty}^{\infty} g(kT_c - t)w(t)dt + (-1)^k c = w_k p + (-1)^k c \quad (6-31)$$

où  $p$  est la surface sous la fonction de sensibilité.

Nous retrouvons ainsi le modèle **quasi-statique**, où  $p$  était la pente de la courbe de résonance atomique (La frange de Ramsey). Dans le cas d'une modulation carrée de phase, cette pente est maximale pour une amplitude de modulation  $\phi_m = \frac{\pi}{4}$ .

Enfin, l'utilisation de cette approche nous a permis d'écrire le signal mesuré à la fin de chaque cycle d'une manière semblable à celle existant dans les horloges à réponse discontinue. Elle nous permettra alors de tirer profit des études, nombreuses, effectuées pour caractériser la boucle d'asservissement dans les jets à réponse discontinue.

En résumé on retiendra le résultat suivant :

Le signal mesuré à la fin de chaque cycle peut être vu comme s'il s'obtenait par échantillonnage de la sortie d'un système linéaire dont la réponse impulsionnelle est égale à la fonction de sensibilité.

#### 6.2.4. L'effet Dick

Ce phénomène d'échantillonnage va dégrader la stabilité de l'oscillateur asservi en raison d'un recouvrement (aliasing) qui consiste à convertir le bruit à haute fréquence en un bruit à basse fréquence. L'effet Dick exprime la dégradation de la

stabilité de l'oscillateur en fonction de la fonction de sensibilité. Il est donné par "la formule de Dick" sous la forme [1] :

$$S_y(0) = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{g_k^2}{g_0^2} S_w \left( \frac{k}{T_c} \right) \quad (6-32)$$

où  $S_y(0)$  représente la densité spectrale de l'oscillateur local asservi à basses fréquences,  $S_w(f)$  désigne la densité spectrale de l'oscillateur libre, et  $g_k$  représente les coefficients de Fourier de la fonction de sensibilité. Ces coefficients s'obtiennent à partir de la transformée de Fourier  $G(f)$  de la fonction de sensibilité  $g(t)$  par la relation :

$$g_k = \frac{1}{T_c} G \left( \frac{k}{T_c} \right) \quad (6-33)$$

La formule de Dick, donnée par l'équation (6-32), a été démontrée par plusieurs auteurs ([1], [5], [6] et [7]) et selon plusieurs approches. L'ambition ici n'est pas de la démontrer, mais simplement d'expliquer son origine.

En effet le signal utilisé pour asservir l'oscillateur libre est celui de l'équation (6-25). Nous rappelons son expression après avoir omis le terme  $(-1)^k c$  qui s'annule lors du calcul du signal d'erreur :

$$x_k = x(kT_c), \text{ avec } x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t-u)w(u)du \quad (6-34)$$

où le signal continu  $x(t)$  n'est pas forcément un signal physique. Cependant, il permet d'exprimer  $x_k$  sous forme simple et juste. Soit  $S_w(f)$  la densité spectrale de  $w(t)$ . Nous pouvons exprimer la densité spectrale  $S_x(f)$  de  $x(t)$  d'après la théorie de filtrage linéaire par :

$$S_x(f) = |G(f)|^2 S_w(f) \quad (6-35)$$

Le signal discret  $x_k$  s'obtient à partir de  $x(t)$  par un échantillonnage uniforme de période  $T_c$ . Le théorème d'échantillonnage entraîne :

$$S_{x_k}(f) = \frac{1}{T_c^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_x\left(f + \frac{n}{T_c}\right) \quad (6-36)$$

En désignant par  $S_{x_k}(f)$  la densité spectrale de  $x_k$ .

L'équation (6-36) traduit bien le phénomène de recouvrement de spectre ou "aliasing". Nous verrons plus tard qu'une boucle d'asservissement contenant au moins un intégrateur ne voit pas, à long terme, les termes de recouvrement ( $n \neq 0$  dans (6-36)) et qu'elle ne compense que le terme principal ( $n = 0$ ). Par ailleurs, les termes de recouvrement vont être copiés (à un coefficient près) dans le spectre de l'oscillateur asservi. Ceci se traduit en écrivant la densité spectrale de l'oscillateur asservi sous la forme :

$$S_y(f) = \zeta \sum_{n \neq 0} S_x\left(f + \frac{n}{T_c}\right)$$

$$S_y(f) = \zeta \sum_{n \neq 0} \left| G\left(f + \frac{n}{T_c}\right) \right|^2 S_w\left(f + \frac{n}{T_c}\right) \quad (6-37)$$

On retrouve ainsi la formule de Dick, à un coefficient près, si on fait tendre  $f$  vers zéro (le long terme) et si on tient compte de l'équation (6-33).

Ce résultat se traduit de la façon suivante :

La stabilité de l'oscillateur asservi est dégradée par les composantes du bruit de l'oscillateur libre aux fréquences multiples de  $1/T_c$ .

Ce résultat était bien connu *auparavant* sous le nom de "l'effet d'intermodulation" dû à Audoin [8] qui exprimait son effet par la formule :

$$S_y(0) = \frac{1}{2P_1^2} \sum_{n=1}^{\infty} (P_{2n-1} - P_{2n+1})^2 S_w(2nf_M) \quad (6-38)$$

où  $f_M = \frac{1}{2T_c}$  est la fréquence de modulation et où  $P_n$  représente les coefficients de Fourier d'une fonction qui dépend du type de modulation et des caractéristiques du jet.

Mais la question de savoir s'il s'agit de deux effets indépendants qui existent en même temps ou s'il s'agit d'un seul effet, n'était pas soulevée jusqu'à présent.

Dans l'objectif de répondre à cette question, nous avons entamé une approche fréquentielle, plus ou moins semblable à celle adoptée par Audoin, afin de savoir si elle conduisait à la fonction de sensibilité trouvée par l'approche temporelle.

### 6.3. Approche fréquentielle

Nous nous plaçons ici dans le cas d'un jet monocinétique, pour des raisons de simplicité. Nous supposons également que nous détectons les atomes à la sortie de la cavité, ce qui revient à négliger le temps  $T_D$  mis par les atomes pour atteindre le détecteur.

Nous décomposons la chaîne de modulation - démodulation et de calcul du signal d'erreur suivant le schéma de la Fig. 6-14

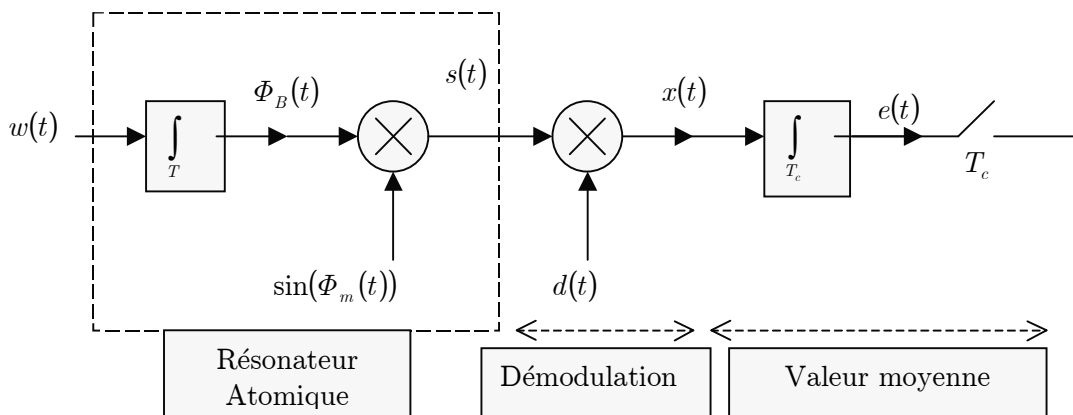


Fig. 6-14 : Chaîne de génération du signal d'erreur

Les fluctuations de fréquence de l'oscillateur local  $w(t)$  se traduisent par des fluctuations de phase  $\phi_B(t)$  qui s'écrivent :

$$w(t) = \frac{d\phi_B(t)}{dt} \Rightarrow \phi_B(t) = \int_{-\infty}^t w(u) du \quad (6-39)$$

Les atomes, eux, sont sensibles à la différence de phase  $\Phi_B(t)$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \Phi_B(t) &= \phi_B(t) - \phi_B(t-T) \\ &= \int_{-\infty}^t w(u) du - \int_{-\infty}^{t-T} w(u) du = \int_{t-T}^t w(u) du \end{aligned} \quad (6-40)$$

Soit  $m_T(t)$  la réponse impulsionnelle d'un "moyenneur temporel causal" [9], comme présentée dans la Fig. 6-15. Elle s'écrit sous la forme  $m_T(t) = \frac{1}{T} R_T(t)$ .

La différence de phase  $\Phi_B(t)$  de l'équation (6-40) s'écrit alors :

$$\Phi_B(t) = T \int_{-\infty}^{\infty} m_T(t-u) w(u) du = T m_T(t) * w(u) \quad (6-41)$$

où \* désigne l'opérateur de convolution.

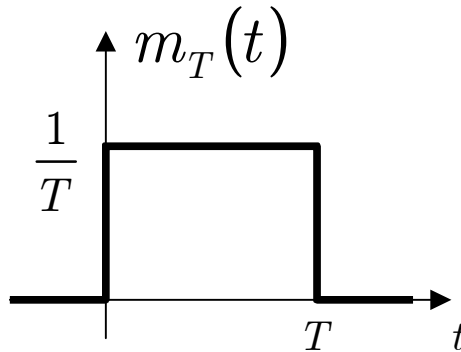




Fig. 6-15 : *La réponse impulsionnelle d'un filtre moyennneur causal de durée T.*

Nous considérons les mêmes approximations effectuées lors du calcul de la fonction de sensibilité, c'est-à-dire  $\Omega_0 = 0$  et  $\phi_B(t) \ll 1$ . La partie utile du signal mesuré de l'équation 6-10, s'écrit alors :

$$s(t) = -\sin^2(b\tau)\Phi_B(t)\sin(\Phi_m(t)) \quad (6-42)$$

Après démodulation par le signal  $d(t)$ , elle devient :

$$x(t) = s(t)d(t) = -\sin^2(b\tau)\Phi_B(t)\sin(\Phi_m(t))d(t) \quad (6-43)$$

Les fonctions  $\sin(\Phi_m(t))$  et  $d(t)$  sont toutes les deux périodiques de période  $2T_c$ . De plus, elles ont le même signe sur chaque cycle. On peut alors définir :

$$z(t) = \sin(\Phi_m(t))d(t) \quad (6-44)$$

$z(t)$  est périodique de période  $T_c$ .

Soit  $\theta(t)$  le motif qui génère la fonction périodique  $z(t)$ . Ce signal motif est défini par (voir la Fig. 6-16) :

$$\theta(t) = \begin{cases} z(t) & \text{pour } 0 < t < T_c \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (6-45)$$

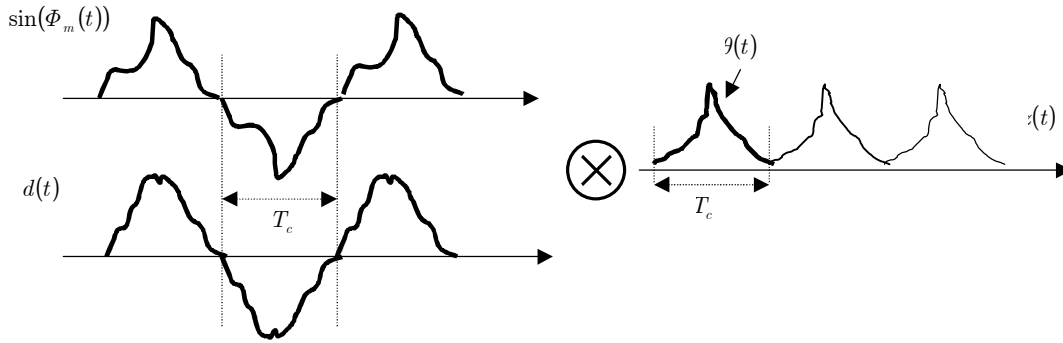


Fig. 6-16 : Signaux de modulation et de démodulation

Après démodulation, nous calculons la valeur moyenne, sur un cycle de durée  $T_c$ , du signal démodulé  $x(t)$ . Cette opération peut se décomposer en deux parties :

- 1) le calcul d'un signal continu  $e(t)$  résultant d'une moyenne mobile de  $x(t)$ .  
En utilisant la définition du filtre moyeneur  $m_T(t)$  nous pouvons écrire :

$$e(t) = m_{T_c}(t) * x(t) \quad (6-46)$$

- 2) le prélèvement, tous les cycles, d'une valeur du signal continu  $e(t)$ . Ceci revient à échantillonner  $e(t)$  pour obtenir :

$$e_k = e(t) \Big|_{t=kT_c} \quad (6-47)$$

Dans le développement précédent, nous avons omis le terme constant et le terme en  $(-1)^k$  qui résulte de sa démodulation, sachant qu'il sera éliminé par le traitement numérique du signal  $e_k$ . La relation entre les fluctuations de l'oscillateur libre  $w(t)$  et le signal continu  $e(t)$  (c'est ce que nous cherchons) se déduit à partir des équations (6-46), (6-43) et (6-41) :

$$e(t) = -\sin^2(b\tau)T m_{T_c}(t) * \{z(t) \cdot [m_T(t) * w(t)]\} \quad (6-48)$$

En prenant la transformée de Fourier des deux membres de l'équation (6-48), il vient :

$$E(f) = -\sin^2(b\tau)T M_{T_c}(f) \{Z(f) * [M_T(f)W(f)]\} \quad (6-49)$$

Le signal  $z(t)$  étant périodique de motif  $\theta(t)$ , sa transformée de Fourier est discrète et s'écrit :

$$Z(f) = \frac{1}{T_c} \sum_n \Theta\left(\frac{n}{T_c}\right) \delta\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \quad (6-50)$$

Le filtre  $m_T(t)$  a pour transformée de Fourier la quantité :

$$M_T(f) = e^{-j\pi f T} \text{sinc}(fT) \quad (6-51)$$

où **sinc** désigne la fonction sinus cardinal définie par  $\text{sinc}(x) = \frac{\sin(\pi x)}{\pi x}$ .

En reportant les équations (6-51) et (6-50) dans (6-49), nous obtenons :

$$E(f) = -\sin^2(b\tau) \frac{T}{T_c} e^{-j\pi f T_c} \text{sinc}(fT_c) \cdot \sum_n \Theta\left(\frac{n}{T_c}\right) e^{-j\pi\left(f - \frac{n}{T_c}\right)T} \text{sinc}\left(fT - \frac{n}{T_c}T\right) W\left(f - \frac{n}{T_c}\right) \quad (6-52)$$

Nous constatons ici qu'il y a, avant même d'échantillonner le signal  $e(t)$ , une sorte de recouvrement de spectre : la somme  $\sum_n$  dans l'équation (6-52). C'est, à notre avis, l'intermodulation d'Audoïn due à la multiplication par le signal périodique  $z(t)$  qui dépend de la modulation  $\sin(\Phi_m(t))$  et de la démodulation  $d(t)$  (voir l'équations (6-44) et (6-45)). Notons que le recouvrement dans l'équation (6-52) n'est pas dû au filtre  $M_T(f)$  et que ce recouvrement existe dans le spectre du signal démodulé continu  $x(t)$ . Le filtrage sélectif de  $x(t)$  à  $f_M = 1/T_c$  introduit dans les calculs d'Audoïn ne change rien à l'origine de ce recouvrement.

En effet, l'échantillonnage idéal est un cas particulier de cette intermodulation, car la multiplication par un signal périodique (différent du train d'impulsions de Dirac) peut être vue comme un échantillonnage non idéal (voir la Fig. 6-17).

D'après le développement effectué pour calculer la fonction de sensibilité, nous nous attendons à trouver une relation entre les signaux  $e(t)$  et  $w(t)$  sous la forme simple  $E(f) = G(f)W(f)$ . De plus, l'échantillonnage de  $e(t)$  ne semble pas simplifier les choses car la transformée de Fourier de  $e_k$  est :

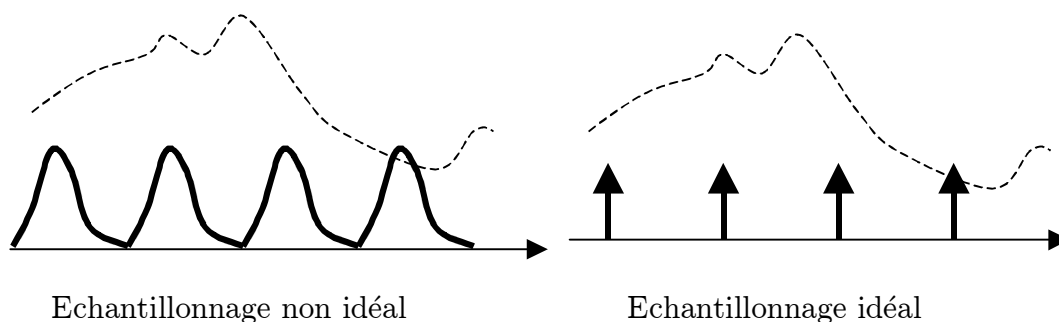


Fig. 6-17 : *Multiplication par un signal périodique*

$$E^*(f) = -\sin^2(b\tau) \frac{T}{T_c^2} \sum_k \left\{ e^{-j\pi \left(f - \frac{k}{T_c}\right) T_c} \operatorname{sinc} \left( \left(f - \frac{k}{T_c}\right) T_c \right) \cdot \sum_n \Theta \left( \frac{n}{T_c} \right) e^{-j\pi \left(f - \frac{n+k}{T_c}\right) T} \operatorname{sinc} \left( fT - \frac{n+k}{T_c} T \right) W \left( f - \frac{n+k}{T_c} \right) \right\} \quad (6-53)$$

Nous ne voyons pas comment simplifier cette relation pour la mettre sous une forme équivalente à une fonction de sensibilité, c'est-à-dire sous la forme :

$$E^*(f) = \frac{1}{T_c} \sum_k G \left( f - \frac{k}{T_c} \right) W \left( f - \frac{k}{T_c} \right) \quad (6-54)$$

Constatons tout de même que, lorsque  $f$  tend vers zéro, l'équation (6-53) peut se simplifier. En fait, pour  $f = 0$ , la première somme sur  $k$  se simplifie en un seul terme égal à 1 pour  $k = 0$ , les autres valeurs de  $k$  entraînent des termes nuls à

cause de la relation  $\text{sinc}(k) = \delta_k$ . Ceci revient à dire que l'échantillonnage de  $e(t)$  ne produit pas de termes de recouvrement parce qu'il est précédé par le filtre d'anti-repliement  $m_{T_c}(t)$ . D'où il vient :

$$E^*(0) = -\sin^2(bT) \frac{T}{T_c} \sum_n \Theta \left( \frac{n}{T_c} \right) e^{-j\pi \left( \frac{n}{T_c} \right) T} \text{sinc} \left( \frac{n}{T_c} T \right) W \left( \frac{n}{T_c} \right) \quad (6-55)$$

Dans le cas d'une modulation carrée de phase d'amplitude  $\phi_m$  et d'une démodulation carrée d'amplitude 1, la fonction  $\theta(t)$  est une fenêtre de largeur  $T$  et d'amplitude  $\sin(2\phi_m)$ , nous avons alors :

$$\Theta(f) = \sin(2\phi_m) T e^{-j\pi f T} \text{sinc}(fT) \quad (6-56)$$

En reportant cette expression dans l'équation (6-55), nous avons :

$$E^*(0) = -\sin^2(bT) \sin(2\phi_m) \frac{T^2}{T_c} \sum_n e^{-j2\pi \frac{n}{T_c} T} \text{sinc}^2 \left( \frac{n}{T_c} T \right) W \left( \frac{n}{T_c} \right) \quad (6-57)$$

Sachant que la transformée de Fourier de la fonction triangle de largeur de base  $2T$  est la fonction  $T \text{sinc}^2(fT)$ , nous réécrivons cette expression sous la forme :

$$E^*(0) = -\frac{1}{T_c} \sin^2(bT) \sin(2\phi_m) \frac{T}{T_c} \sum_n \Sigma_{2T} \left( \frac{n}{T_c} \right) W \left( \frac{n}{T_c} \right) \quad (6-58)$$

où  $\Sigma_{2T}(f)$  désigne la transformée de Fourier d'une fenêtre triangulaire de largeur de base  $2T$ , décalée de  $T$  et d'amplitude 1.

En comparant cette relation avec l'équation (6-54), nous trouvons bien qu'elle correspond à la fonction de sensibilité trouvée par l'approche temporelle et présentée dans la Fig. 6-5. Ceci prouve que l'approche fréquentielle est équivalente à celle temporelle pour  $f = 0$ .

Mais pourquoi l'approche temporelle nous a-t-elle permis de présenter la relation entrée - sortie sous la forme d'un filtre  $g(t)$ , suivi par un échantillonneur idéal, tandis que l'approche fréquentielle ne le permettait pas?

En fait, les relations (6-48) et (6-49) montrent un fait important :

Il n'est pas possible d'écrire la relation entre  $w(t)$  et  $e(t)$  sous la forme d'un filtrage linéaire. Autrement dit, le schéma de la Fig. 6-6 n'est qu'un modèle et la sortie du filtre  $g(t)$  ne correspond pas à un signal physique. Ce sont les échantillons de cette sortie qui ont une réalité physique. Ceci est dû au fait que la relation entre  $w(t)$  et  $e(t)$  est celle d'un système *variant* dans le temps en raison de l'opération de multiplication qu'il contient.

Par contre, l'opération d'échantillonnage rend le système invariant et nous permet de le présenter par un filtre linéaire, ce qui n'est pas attendu d'un échantillonneur en général. En réalité, c'est le choix des instants d'échantillonnage qui rend le système invariant, et l'approche fréquentielle ne permet pas de voir le rôle des instants d'échantillonnage. Pour bien saisir l'importance des instants d'échantillonnage, écrivons les valeurs des échantillons de  $e(t)$  à partir des équations (6-43) et (6-44):

$$e_k = \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} x(t) dt = -\sin^2(b\tau) \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} \Phi_B(t) z(t) dt \quad (6-59)$$

En utilisant le motif  $\theta(t)$  du signal  $z(t)$ , il vient :

$$e_k = -\sin^2(b\tau) \frac{1}{T_c} \int_{(k-1)T_c}^{kT_c} \Phi_B(t) \theta(t - (k-1)T_c) dt \quad (6-60)$$

Sachant que  $\theta(t)$  a un support limité à l'intervalle  $[0, T_c]$  et posant :

$$\xi(t) = \theta(-t + T_c) \quad (6-61)$$

nous pouvons écrire  $e_k$  sous la forme :

$$e_k = -\sin^2(b\tau) \frac{1}{T_c} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_B(t) \xi(kT_c - t) dt \quad (6-62)$$

Ou encore, en remarquant qu'elle représente une convolution :

$$e_k = -\sin^2(b\tau) \frac{1}{T_c} (\Phi_B(t) * \xi(t))|_{t=kT_c} \quad (6-63)$$

Enfin, à partir de l'équation (6-41),  $e_k$  s'écrit :

$$e_k = -\sin^2(b\tau) \frac{T}{T_c} (\xi(t) * m_T(t) * w(t))|_{t=kT_c} \quad (6-64)$$

Ce qui représente bien l'échantillonnage de la sortie d'un système linéaire de réponse impulsionnelle :

$$\boxed{g(t) = -\sin^2(b\tau) \frac{T}{T_c} \xi(t) * m_T(t)} \quad (6-65)$$

Nous avons ainsi une expression générale et simple, qui permet le calcul direct de la fonction de sensibilité.

Pour vérifier la validité de cette expression, nous utilisons cette expression pour calculer la fonction de sensibilité dans le cas d'une modulation carrée de phase et une démodulation carrée. Dans ce cas  $\xi(t) = \sin(2\phi_m) m_T(-t + T_c)$  et l'équation (6-65) devient :

$$g(t) = -\sin^2(b\tau) \frac{T}{T_c} \sin(2\phi_m) m_T(-t + T_c) * m_T(t) \quad (6-66)$$

Ce résultat est identique à celui donné par l'équation (6-22) et représenté dans la Fig. 6-5.

## 6.4. Incidence sur la stabilité

Nous avons vu, sans démonstration, que ce sont les coefficients de Fourier de la fonction de sensibilité qui déterminent la contribution du bruit de l'oscillateur local sur celui asservi. Intéressons nous à la condition que doit vérifier la fonction de sensibilité  $g(t)$  pour que cette contribution soit nulle.

On définit la **fonction de sensibilité globale**  $\psi(t)$ , qui représente la contribution de la fonction de sensibilité sur toutes les valeurs  $e_k$  qui servent à commander l'oscillateur, par :

$$\psi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT_c) \quad (6-67)$$

Il est clair que  $\psi(t)$  est périodique de période  $T_c$  quelle que soit la forme de  $g(t)$ , et par suite elle est développable en série de Fourier.

La *formule sommatoire de Poisson* (voir l'annexe A pour l'énoncé de cette formule) [10] permet d'écrire :

$$\psi(t) = \frac{1}{T_c} \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(-\frac{n}{T_c}\right) e^{j2\pi n \frac{t}{T_c}} \quad (6-68)$$

Cette écriture représente le développement en série de Fourier de  $\psi(t)$ .

Pour que la contribution du bruit de l'oscillateur libre soit nulle, il faut que :

$$G\left(\frac{n}{T_c}\right) = 0, \quad \forall n \neq 0 \quad (6-69)$$

D'après l'unicité du développement en série de Fourier, nous avons l'équivalence :



$$G\left(\frac{n}{T_c}\right) = 0, \quad \forall n \neq 0 \Leftrightarrow \psi(t) = \frac{1}{T_c} G(0) \quad (6-70)$$

Cette relation se traduit par :

$$\boxed{\sum_{k=-\infty}^{\infty} g(t - kT_c) = \text{Constante}} \quad (6-71)$$

Autrement dit, il **faut** que la **sensibilité globale** aux variations de l'oscillateur libre soit **constante**. D'après l'équation (6-55), nous constatons que la condition (6-69) est vérifiée en deux cas :

- 1)  $\text{sinc}\left(n \frac{T}{T_c}\right) = \delta_n$ , ce qui est vrai si  $T = T_c$  et quelles que soient les formes d'ondes de modulation et de démodulation.
- 2)  $\Theta\left(\frac{n}{T_c}\right) = \delta_n$ , ce qui arrive quand la fonction  $d(t)\sin(\Phi_m(t))$  est constante en fonction du temps, c'est-à-dire que l'ensemble modulation- démodulation doit refléter les variations de l'oscillateur libre sans pondération temporelle. Cette écriture est valable dans le cas de notre modèle où nous avons supposé que le détecteur à une bande infinie et que les signaux dans ce modèle ne subissent aucune distorsion.

La Fig. 6-18 représente la fonction de sensibilité  $g(t)$  ainsi que la fonction de sensibilité globale  $\psi(t)$  dans le cas d'une modulation sinusoïdale de phase et d'une démodulation par une onde sinusoïdale pour  $T = T_c$ . Nous constatons que  $\psi(t)$  obtenue en sommant les fonctions  $g(t - kT_c)$  est constante. Par conséquent, l'effet Dick est nul dans ce cas ( $T = T_c$ ).

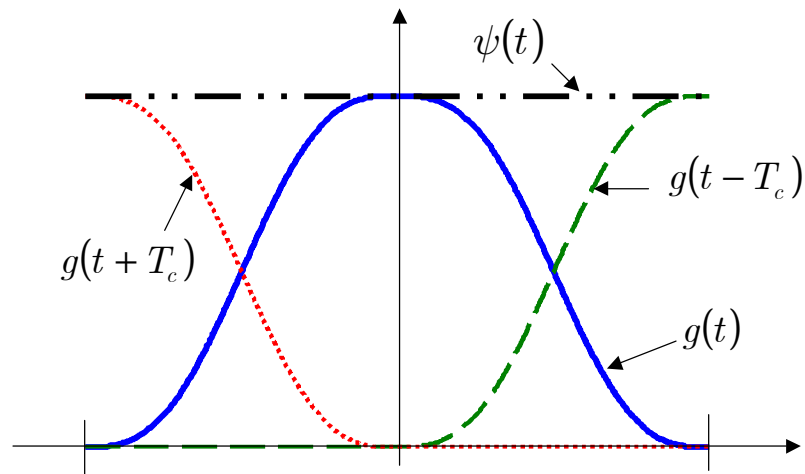


Fig. 6-18 : Annulation de l'effet Dick par  $T = T_c$ .

La deuxième condition est impossible à réaliser si  $T_c > T$  à cause du passage de  $\sin(\Phi_m(t))$  par zéro pendant un temps égal à  $T_c - T$ .

La Fig. 6-19 présente l'allure des fonction  $g(t)$  et  $\psi(t)$  quand  $T_c > T$ , dans le cas d'une modulation carrée de phase et démodulation par une forme d'onde carrée.

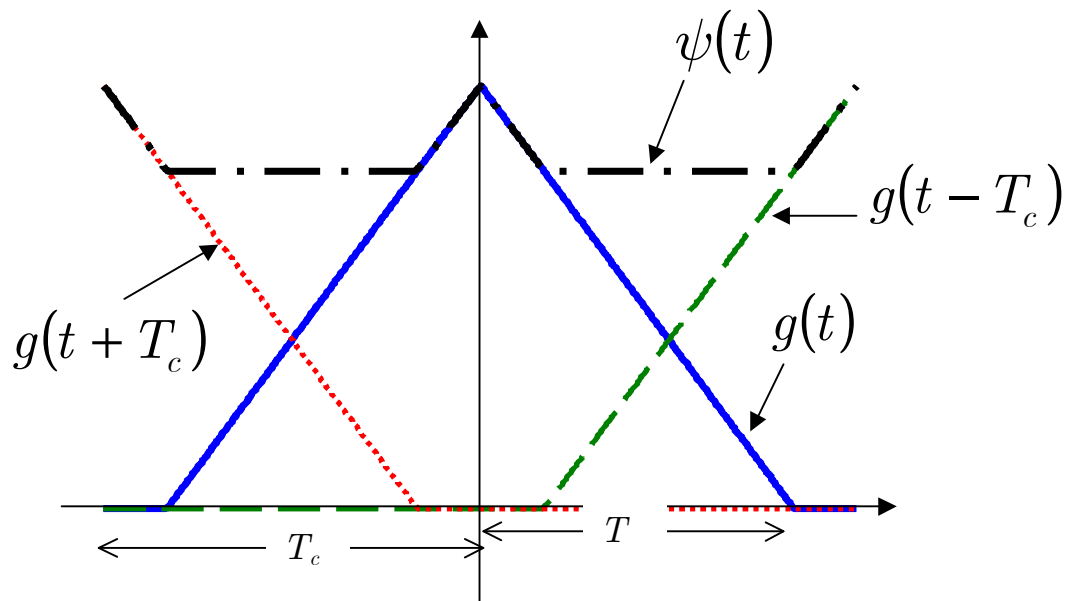


Fig. 6-19 : Fonction de sensibilité pour  $T_c > T$ .

Quand il n'est pas possible de vérifier aucune des deux conditions précédentes, on souhaite, malgré tout minimiser la dégradation de l'oscillateur asservi. C'est toujours le cas dans les jets à distribution de vitesse, où il devient impossible de réaliser aucune des conditions précédentes pour tous les temps de vol à la fois.

Dans la pratique, il est possible de réaliser, d'une manière simple, des formes d'ondes carrées ou sinusoïdales. Nous comparons ces deux formes d'ondes pour un rapport cyclique  $\frac{T}{T_c} = 0,8$ . La Fig. 6-20 montre la contribution des différents coefficients de Fourier dans deux cas : le premier est celui d'une modulation carrée de phase et démodulation par une onde carrée (les carrés sur la Fig. 6-20). Le second est celui d'une modulation sinusoïdale de phase et démodulation par une onde sinusoïdale (les cercles sur la Fig. 6-20). Nous constatons que les coefficients sont très petits dans le cas sinusoïdal sauf pour le coefficient d'ordre 1. Quand l'oscillateur local est caractérisé par un bruit de type  $S_w(f) = f^\alpha$ , nous avons calculé l'effet Dick suivant la relation (6-32) en considérant la somme sur 50 termes :

$$S_y(0) = 2 \sum_{k=1}^{50} \frac{g_k^2}{g_0^2} \left( \frac{k}{T_c} \right)^\alpha \quad (6-72)$$

L'effet Dick dans le cas carrée était inférieur à celui dans le cas sinusoïdal pour les cinq types de bruit  $\alpha \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ . Par contre, l'utilisation d'un filtre réjecteur qui supprime le bruit de l'oscillateur libre autour de la fréquence  $1/T_c$  ("notch filter") rend le cas sinusoïdal largement supérieur au cas carré et l'effet Dick est presque nul.

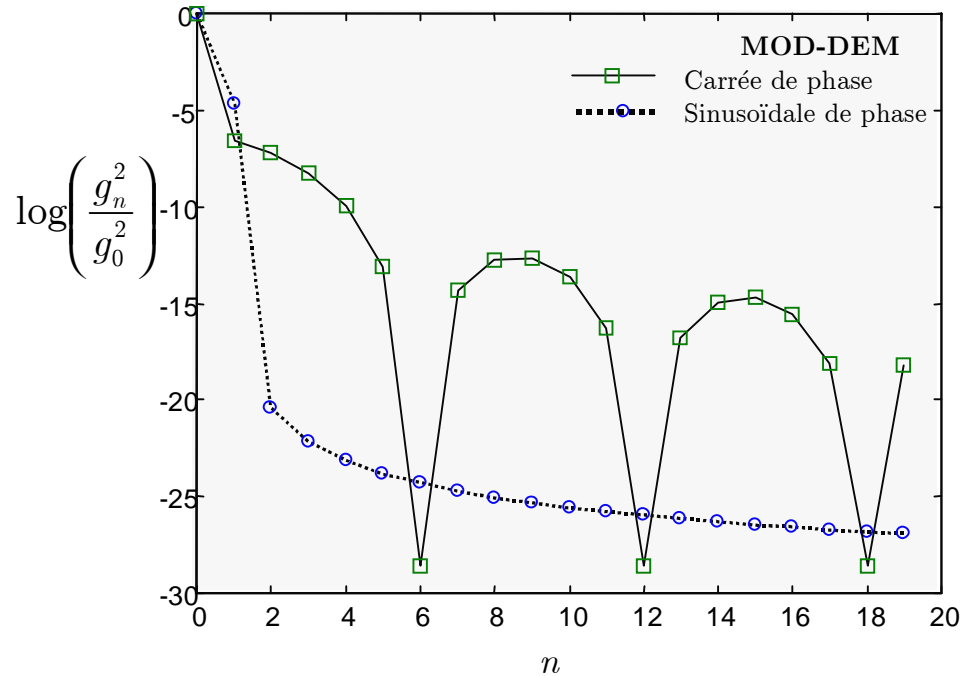


Fig. 6-20 : Coefficients de Fourier de la fonction de sensibilité.  
Rapport cyclique = 0,8.

## 6.5. Conséquences sur l'asservissement

Après avoir présenté le modèle dynamique, nous étudions le comportement de la boucle d'asservissement en tenant compte de ce modèle.

Nous présentons ici une boucle d'asservissement de fréquence (ou de phase) d'un oscillateur local commandable (VCO) sur la résonance atomique.

Soit  $y(t)$  la fréquence instantanée de l'oscillateur local asservi et  $w(t)$  son bruit de fréquence.  $y(t)$  peut s'écrire sous la forme :

$$y(t) = w(t) - c(t) \quad (6-73)$$

où  $c(t)$  est le signal de correction appliqué au VCO.

La Fig. 6-21-a représente un schéma bloc très général d'une boucle d'asservissement numérique. Afin de bien saisir le rôle des blocs dans cette figure, nous avons présenté dans la Fig. 6-21-b une redistribution de ces blocs pour que la boucle ressemble à un schéma d'asservissement numérique traditionnel.

La fonction  $g(t)$  représente la fonction de sensibilité de l'horloge et dépend de ses paramètres tels que la puissance micro-onde, les types de modulation et de démodulation utilisés, etc.. Le signal  $e(t)$  représente le signal d'erreur fourni après démodulation. Il s'écrit sous la forme :

$$e(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \theta)y(\theta)d\theta = g(t) * y(t) \tag{6-74}$$

L'opération \* désigne une convolution.

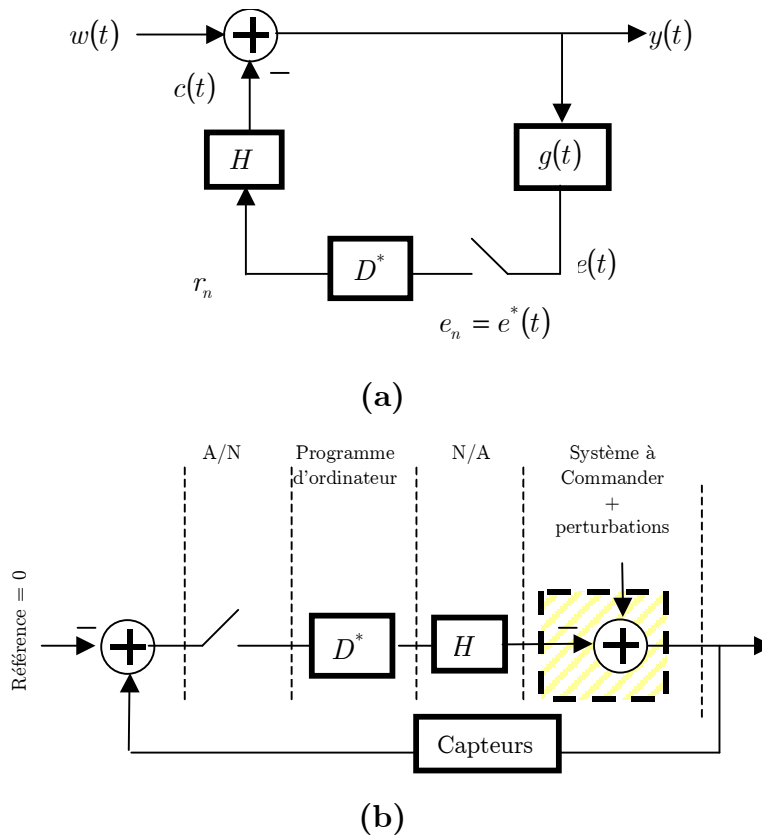


Fig. 6-21 : Schéma général d'une boucle d'asservissement de fréquence

Le signal  $e(t)$  n'est pas accessible directement car il représente un modèle et n'a pas de présence physique. Ce sont les échantillons  $e_n$  de  $e(t)$  qui sont accessibles à la fin de chaque cycle de mesure. Ces échantillons s'écrivent :

$$e_n = e(t)|_{t=nT_c} = e^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e(t)\delta(t - nT_c) \quad (6-75)$$

Dans la suite, nous désignons par  $x^*$  la version échantillonnée de  $x$  quand il s'agit des signaux. L'opération  $( )^*$  désigne l'opération d'échantillonnage et le symbole étoile, pour une fonction de transfert, signifie qu'elle est périodique.

Le bloc  $D^*$  représente toutes les opérations effectuées sur les valeurs numériques du signal d'erreur. Nous supposons que le bloc  $D^*$  a un modèle linéaire du type *moyenne mobile autoregressive* (ARMA) comme nous l'avons décrit au chapitre 5 dans le cas du modèle statique. Nous pouvons donc écrire:

$$r_n + \sum_{k=1}^P a_k r_{n-k} = \sum_{k=0}^Q b_k e_{n-k} \quad (6-76)$$

Une fois les valeurs numériques  $r_n$  calculées, elles sont transformées en signaux électriques continus pour les appliquer au VCO. C'est le bloc du maintien (Holder) qui gère cette opération. Dans le cas d'un bloqueur d'ordre zéro ZOH, la sortie est un signal constant par morceaux :

$$c(t) = r(kT_c) = r_k \quad \text{pour } kT_c \leq t \leq kT_c + T_c \quad (6-77)$$

On dit que le bloqueur est d'ordre zéro parce que sa sortie est composée de polynômes d'ordre zéro<sup>23</sup> qui passent par les échantillons  $r_n$ . On peut calculer sa fonction de transfert  $H(s)$  en déterminant sa réponse impulsionnelle. Pour une entrée  $r^*(t) = \delta(t)$  les échantillons à l'entrée représentent l'impulsion unité, et la sortie

---

<sup>23</sup> D'une façon générale : un bloqueur d'ordre  $n$  produit un signal continu (par morceaux), composé de polynômes d'ordre  $n$ , qui passe par les échantillons de son entrée.

$c(t)$  est une impulsion (rectangulaire) d'amplitude 1 et de durée  $T_c$  secondes. Utilisant la fonction échelon unité  $u(t)$ , la réponse impulsionnelle  $h(t)$  du bloqueur s'écrit:

$$h(t) = u(t) - u(t - T_c) \quad (6-78)$$

La fonction de transfert  $H(s)$  étant la transformée de Laplace de  $h(t)$  :

$$\begin{aligned} H(s) &= \text{Laplace}\{h(t)\} \\ &= \int_0^{\infty} [u(t) - u(t - T_c)] e^{-st} dt \\ &= (1 - e^{-sT_c}) / s. \end{aligned} \quad (6-79)$$

Exprimons la sortie du bloqueur en fonction de son entrée :

$$\begin{aligned} c(t) &= h(t) * r^*(t) \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r_k h(t - kT_c) \end{aligned} \quad (6-80)$$

### 6.5.1. Les équations de la boucle

Nous constatons que les équations précédentes sont identiques au cas du modèle quasi-statique développé au chapitre 5 à l'exception des relations (6-74) et (6-75) reliant les échantillons du signal d'erreur  $e_k$  à la fréquence asservie  $y(t)$ . Nous avons aussi omis dans ces équations le bloc qui génère le signal d'erreur à partir du signal démodulé ce qui revient à supprimer la séquence  $(-1)^k c$  du signal démodulé.

Pour étudier l'influence du bruit de l'oscillateur local  $w(t)$  sur la fréquence asservie  $y(t)$  nous essayons d'établir la relation entre les densités spectrales de puissance des deux quantités en tenant compte de la fonction de sensibilité. Deux démarches sont possibles :

- la première consiste à écrire les densités spectrales de tous les signaux présents dans le schéma d'asservissement, puis à utiliser l'équation (6-73) pour calculer

la densité spectrale  $S_y(f)$  de  $y(t)$  en fonction de la densité spectrale  $S_w(f)$  de  $w(t)$ . Cette approche sera rejetée car elle exige beaucoup d'attention lors des développements et fait intervenir les termes de corrélation croisée (complexes) entre les différents signaux.

- la deuxième consiste à essayer d'écrire une relation directe entre  $w(t)$  et  $y(t)$  sous forme de fonction de transfert  $P$ , puis à calculer  $S_y(f)$  en utilisant les propriétés des filtres linéaires de l'annexe B.

C'est cette deuxième approche, moins lourde que la première, que nous utilisons pour calculer la densité spectrale de puissance  $S_y(f)$ .

Avant de développer les équations de la boucle, nous annonçons le résultat suivant, très utile dans la suite:

### Echantillonnage d'un signal hybride

Si la transformée (de Laplace)  $Z(s)$  du signal à échantillonner est le produit d'une transformée  $X^*(s)$  qui est déjà périodique, et d'une autre  $Y(s)$  qui n'est pas périodique, comme dans  $Z(s) = X^*(s)Y(s)$ , alors, lors de l'échantillonnage, le terme périodique peut être mis en facteur :

$$Z^*(s) = (X^*(s)Y(s))^* = X^*(s)Y^*(s) \quad (6-81)$$

La démonstration de ce résultat remarquable est donnée dans l'annexe C.

Pour établir une relation entre l'entrée  $w(t)$  et la sortie  $y(t)$ , écrivons les relations de la boucle dans le domaine de Laplace à partir de la Fig. 6-21 :

$$(6-73) \Rightarrow Y(s) = W(s) - C(s) \quad (6-82)$$

$$(6-74) \Rightarrow E = GY \quad (6-83)$$

$$R^* = D^* E^* \quad (6-84)$$

$$C = HR^* \quad (6-85)$$



Le signal échantillonné dans la boucle est  $e(t)$ . Il est souvent utile de démarrer le développement à partir du signal qui précède l'échantillonneur. En appliquant l'opérateur d'échantillonnage sur le signal  $e(t)$ , nous avons :

$$\begin{aligned} E^* &= (GY)^* \\ &= [G(W - C)]^* \\ &= (GW)^* - (GHR^*)^* \\ &= (GW)^* - (GHD^*E^*)^* \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant la propriété (6-81) qui se traduit par "périodique donc en facteur", nous obtenons :

$$\begin{aligned} E^* &= (GW)^* - (GH)^* D^* E^* \\ E^* &= \frac{(GW)^*}{1 + (GH)^* D^*} \end{aligned} \quad (6-86)$$

En remplaçant cette équation dans l'équation (6-82), on trouve :

$$\begin{aligned} Y &= W - HD^*E^* \\ Y &= W - \frac{HD^*(GW)^*}{1 + (GH)^* D^*} \end{aligned} \quad (6-87)$$

L'équation (6-87) montre un résultat curieux. La transformée de l'entrée  $W(s)$  est groupée avec  $G(s)$  et *ne peut pas* être séparée pour obtenir une fonction de transfert  $P$  telle que  $Y(s) = P(s)W(s)$ .

Ce résultat met en évidence un fait important que nous avons tendance à oublier lors de la manipulation (facile) des systèmes échantillonnés : un système échantillonné est **variant dans le temps**. En effet, la réponse du bloqueur dépend de l'instant auquel on applique les valeurs numériques de l'entrée. Ceci devient plus évident si nous montrons mathématiquement que sa sortie n'est pas stationnaire au sens large. Par exemple, soit  $m_r \neq 0$  la moyenne statistique de l'entrée  $r_n$ . En utilisant l'équation (6-80) nous avons  $m_c = E[c(t)] = m_r \sum_k h(t - kT_c)$ . D'après cette

relation, il est clair que  $m_c$  est une quantité qui dépend en général de  $t$ , et donc  $c(t)$  n'est pas stationnaire au sens large.

Rappelons que nous désirons calculer la densité spectrale  $S_y(f)$  pour exprimer la stabilité, via la variance d'Allan  $\sigma_y^2(\tau)$  à *long terme* (pour  $\tau \gg 2T_c$ ). Par conséquent, c'est la partie de  $S_y(f)$  pour les faibles fréquences ( $f \ll 1/2T_c$ ) qui nous intéresse. Pour cela, nous détournons le problème en cherchant un signal fictif qui a la même densité spectrale que  $y(t)$  pour les faibles fréquences.

La méthode qui consiste à obtenir ce signal fictif désiré  $q(t)$  à partir de  $y(t)$ , par filtrage analogique passe-bas, vient à l'esprit immédiatement.

Soit  $M(s)$  la réponse d'un filtre *passé-bas* quelconque de fréquence de coupure inférieure à  $1/2T_c$ . Nous pouvons choisir par exemple le filtre passe-bas idéal comme défini dans l'annexe C, mais avec un gain égal à 1. Après le passage de  $y(t)$  par ce filtre, nous avons :

$$Q = MY = MW - MX(GW)^*$$

$$\text{avec } X = \frac{HD^*}{1 + (GH)^* D^*} \quad (6-88)$$

Le signal  $q(t)$  étant maintenant à bande limitée, peut être échantillonné sans risque de repliement :

$$\begin{aligned} Q^* &= (MW)^* - (MX(GW)^*)^* \\ &= (MW)^* - (MX)^* (GW)^* \\ &= (MW)^* - ((MX)^* GW)^* \\ &= (MW - (MX)^* GW)^* \\ &= \{[M - (MX)^* G]W\}^* \end{aligned} \quad (6-89)$$

Ici, nous avons utilisé la propriété (6-81) sur la deuxième ligne pour mettre  $(GW)^*$  en facteur. Sur la troisième ligne la propriété (6-81) a été utilisée à l'envers.

Enfin, nous avons :

$$Q^* = (PW)^* \quad \text{avec} \quad P = M - (MX)^*G \quad (6-90)$$

Ce résultat (très intéressant) montre que le signal fictif  $q^*(t)$  est obtenu à partir de celui de l'oscillateur local  $w(t)$  par filtrage linéaire suivi par un échantillonneur idéal. Toute la boucle d'asservissement de la Fig. 6-21-a peut être remplacée par le schéma de la Fig. 6-22.

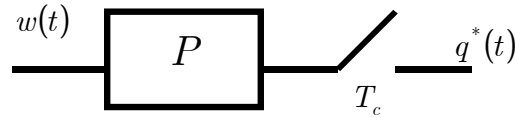


Fig. 6-22 : Schéma (Entrée - Sortie) équivalent de la boucle d'asservissement

La densité spectrale  $S_q(f)$  de  $q(t)$  est reliée à  $S_y(f)$  par la relation :

$$S_q(f) = |M(f)|^2 S_y(f) \quad (6-91)$$

Pour les faibles fréquences, elle s'écrit, en tenant compte du fait que  $M(f)$  est un filtre passe-bas idéal de gain unité, sous la forme :

$$S_q(f) = S_y(f) \quad \text{pour} \quad f \in \left[ -\frac{1}{2T_c}, \frac{1}{2T_c} \right] \quad (6-92)$$

D'autre part, le signal échantillonné  $q^*(t)$  est précédé par le filtre  $M(f)$  d'anti-repliement, nous avons donc, d'après le théorème d'échantillonnage :

$$S_{q^*}(f) = \frac{1}{T_c^2} \sum_n S_q\left(f + \frac{n}{T_c}\right)$$

$$S_{q^*}(f) = \frac{1}{T_c^2} S_q(f) \quad \text{pour} \quad f \in [-1/2T_c, 1/2T_c] \quad (6-93)$$

Les équations (6-92) et (6-93) entraînent :

$$S_y(f) = T_c^2 S_{q^*}(f) \quad \text{pour } f \in \left[ -\frac{1}{2T_c}, \frac{1}{2T_c} \right] \quad (6-94)$$

D'autre part, l'équation (6-90) entraîne d'après la théorie des filtres linéaires et celle de l'échantillonnage :

$$S_{q^*}(f) = \frac{1}{T_c^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| P \left( f - \frac{n}{T_c} \right) \right|^2 S_w \left( f - \frac{n}{T_c} \right) \\ \text{pour } f \in \left[ -1/2T_c, 1/2T_c \right] \quad (6-95)$$

En reportant l'équation (6-95) dans l'équation (6-94), nous avons enfin :

$$\boxed{S_y(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| P \left( f - \frac{n}{T_c} \right) \right|^2 S_w \left( f - \frac{n}{T_c} \right)} \\ \text{pour } f \in \left[ -1/2T_c, 1/2T_c \right] \quad (6-96)$$

Nous appelons cette relation la formule de **Dick généralisée**. Elle permet d'exprimer la densité spectrale  $S_y(f)$  de l'oscillateur asservi en fonction des blocs de la boucle d'asservissement (présence de  $P$ ) et en fonction de la densité spectrale  $S_w(f)$  de l'oscillateur libre.

Elle peut être développée davantage pour décrire les différents blocs intervenant dans la boucle d'asservissement. Supposons que la fonction de transfert du bloc de traitement s'écrive sous la forme  $D^* = B^* / A^*$ , nous avons alors, d'après l'équation (6-88):

$$X = \frac{HB^*}{A^* + (GH)^* B^*} \quad (6-97)$$

En utilisant l'équation (6-81), il vient :

$$(MX)^* = \frac{(MH)^* B^*}{A^* + (GH)^* B^*} \quad (6-98)$$

Sachant que la transformée de Laplace  $\Psi^*(s)$  d'un signal échantillonné s'obtient à partir de la transformée  $\Psi(s)$  du signal avant l'échantillonnage par :

$$\Psi^*(s) = \frac{1}{T_c} \sum_n \Psi(s + jn\omega_c) \quad (6-99)$$

où  $\omega_c$  représente la fréquence angulaire d'échantillonnage définie par  $\omega_c = 2\pi/T_c$ .  
Le filtre  $P$  s'écrit alors :

$$P = M - \frac{(MH)^* B^* G}{A^* + (GH)^* B^*}$$

$$P(j\omega) = M(j\omega) - \frac{B^*(j\omega)G(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(j\omega + jn\omega_c)H(j\omega + jn\omega_c)}{T_c A^*(j\omega) + B^*(j\omega) \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jk\omega_c)H(j\omega + jk\omega_c)} \quad (6-100)$$

### 6.5.2. Exemple d'une boucle simple

Dans la plupart des schémas d'asservissement rencontrés dans les horloges atomiques, nous utilisons les blocs suivants:

1- Le bloc  $D^*$  se réduit à un intégrateur numérique et (6-76) devient :

$$r_k = r_{k-1} + K_0 e_k \quad (6-101)$$

En terme de transformée en  $z$  nous écrivons :

$$D(z) = \frac{E(z)}{R(z)} = \frac{K_0}{1 - z^{-1}} = \frac{K_0 z}{z - 1} \quad (6-102)$$

Pour passer à la fonction de transfert nous utilisons la relation  $e^{sT_c} = z$ , on a alors :

$$D^*(s) = \frac{B^*(s)}{A^*(s)} = \frac{K_0 e^{sT_c}}{e^{sT_c} - 1} \quad (6-103)$$

2- Le bloqueur est d'ordre zéro et  $H$  est donné après une simple manipulation de (6-79) par :

$$H(j\omega) = e^{-j\omega T_c / 2} T_c \operatorname{sinc}(\omega T_c / 2) \quad (6-104)$$

Les termes qui interviennent dans le calcul de la densité spectrale  $S_y(f)$  dans (6-96) pour  $f \rightarrow 0$  sont les valeurs de  $P(f)$  autour des fréquences multiples de  $1/T_c$ .

Pour  $f \rightarrow \frac{n}{T_c}$  ( $n$  étant un entier), nous notons les valeurs suivantes :

- $M\left(\frac{n}{T_c}\right) = \delta[n]$ , car  $M$  est, par définition, un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c = \frac{1}{2T_c}$ .
- $B^*\left(\frac{n}{T_c}\right) = B^*(0) = K_0$ , car  $B^*$  est numérique donc périodique.
- $A^*\left(\frac{n}{T_c}\right) = A^*(0) = 0$ , car dérivateur et numérique.
- $H\left(\frac{n}{T_c}\right) = T_c \delta[n]$ , à cause de la fonction **sinc**.

Utilisons ces valeurs dans (6-100) pour calculer le terme générique de (6-96) :

$$P\left(\frac{n}{T_c}\right) = \delta[n] - \frac{K_0 G\left(\frac{n}{T_c}\right) T_c}{K_0 G(0) T_c} \quad (6-105)$$

Nous remarquons que ce terme est nul pour  $n = 0$ .

La densité spectrale dans (6-96) devient :

$$S_y(f)\Big|_{f \rightarrow 0} = \sum_{n \neq 0} \left| \frac{G_n}{G_0} \right|^2 S_w\left(\frac{n}{T_c}\right) \quad \text{avec } G_n = G\left(\frac{n}{T_c}\right) \quad (6-106)$$

Nous retrouvons ainsi la formule de Dick classique.

Cette boucle simple a été souvent utilisée lors de la démonstration de l'effet Dick. Nous allons montrer dans le paragraphe suivant que ce résultat est généralisable à une boucle quelconque.

### 6.5.3. Discussion

L'équation (6-100) nous laisse penser qu'avec un choix judicieux des blocs de traitement dans la boucle<sup>24</sup>  $H$ ,  $A^*$  et  $B^*$ , nous pouvons minimiser ou même éliminer l'effet Dick. Ceci serait partiellement vrai s'il n'y avait pas de contraintes sur les fonctions demandées de certains blocs.

Soit  $X$  une fonction de transfert quelconque dans la boucle. Notons par  $X_n = X\left(\frac{n}{T_c}\right)$  les composantes de Fourier du bloc  $X$  aux fréquences multiples de la fréquence d'échantillonnage  $1/T_c$ .

---

<sup>24</sup>  $M$  étant un bloc fictif qu'on a introduit pour faciliter le calcul, il ne doit donc pas jouer sur les résultats.

$M$  étant toujours un filtre passe-bas parfait, nous avons  $M_n = \delta[n]$  et l'équation (6-100) devient :

$$P_n = \delta[n] - \frac{B_n^* G_n H_0}{T_c A_n^* + B_n^* \sum_k G_k H_k} \quad (6-107)$$

La seule contrainte que nous imposons à la boucle d'asservissement est qu'elle soit capable d'éliminer la composante continue ( $n = 0$ ) du bruit de l'oscillateur local, soit  $P_0 = 0$ . Ceci implique, à partir de l'équation (6-107), la contrainte mathématique suivante :

$$P_0 = 0 \Rightarrow \sum_k G_k H_k = -T_c \frac{A_0^*}{B_0^*} + G_0 H_0 \quad (6-108)$$

Notons que si  $H$  est un bloqueur d'ordre zéro, la condition (6-108) implique que  $A_0^* = 0$ , c'est-à-dire que le bloc  $A^*$  est un dérivateur.

En remplaçant la contrainte de l'équation (6-108) dans l'équation (6-107) nous obtenons pour  $n \neq 0$  :

$$P_n|_{n \neq 0} = - \frac{B_n^* H_0 G_n}{T_c \left( A_n^* - A_0^* \frac{B_n^*}{B_0^*} \right) + B_n^* H_0 G_0} \quad (6-109)$$

Sachant que les blocs  $A^*$  et  $B^*$  sont numériques donc de spectre périodique, nous avons :

$$A_n^* = A_0^* \quad \text{et} \quad B_n^* = B_0^* \Rightarrow P_n|_{n \neq 0} = - \frac{G_n}{G_0} \quad (6-110)$$



Ce qui prouve que, quelque soit la nature des blocs  $H$ ,  $A^*$  et  $B^*$ , nous obtenons la formule de Dick classique.

Le passage de (6-109) à (6-110) nous laisse penser que c'est le caractère numérique (donc périodique) des blocs  $A^*$  et  $B^*$  qui rend les coefficients  $P_n$  pour  $n \neq 0$  indépendants des blocs de traitement dans la boucle et nous empêche ainsi de pouvoir minimiser l'effet Dick. Vérifions ce qui se passe lorsqu'il n'y a pas de blocs numériques dans la boucle. Pour cela, nous changeons le montage d'asservissement de la Fig. 6-21 en supprimant le bloc numérique  $D^*$  et en rajoutant un bloc analogique  $D$  derrière le bloqueur.

Pour obtenir l'équation de la boucle dans ce cas, il suffit de remplacer le bloc numérique  $D^*$  (et donc  $A^*$  et  $B^*$ ) par 1 et remplacer le bloc analogique  $H$  par le produit  $HD$  dans l'équation (6-100) :

$$P(j\omega) = M(j\omega) - \frac{G(j\omega) \sum_{n=-\infty}^{\infty} M(j\omega + jn\omega_c) H(j\omega + jn\omega_c) D(j\omega + jn\omega_c)}{T_c + \sum_{k=-\infty}^{\infty} G(j\omega + jk\omega_c) H(j\omega + jk\omega_c) D(j\omega + jk\omega_c)} \quad (6-111)$$

Et le terme générique de la formule de Dick généralisée devient :

$$P_n = \delta[n] - \frac{G_n H_0 D_0}{T_c + \sum_k G_k H_k D_k} \quad (6-112)$$

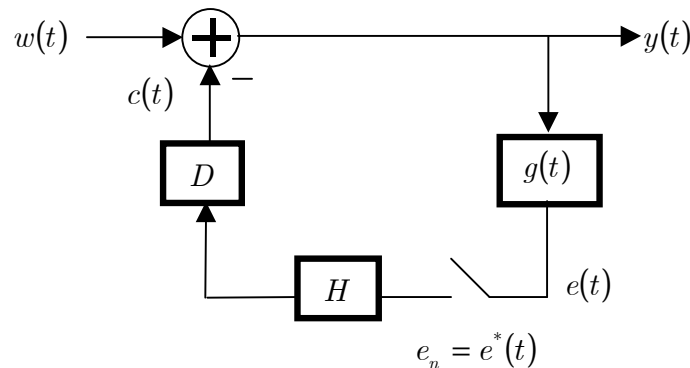


Figure 6-1 : Boucle d'asservissement sans blocs de traitement numérique.

Respectant la même contrainte qu'avant, nous avons :

$$P_0 = 0 \Rightarrow \sum_k G_k H_k D_k = -T_c + G_0 H_0 D_0 \quad (6-113)$$

Notons que, d'après cette contrainte, un bloqueur d'ordre zéro implique ou bien  $T_c = 0$ , ce qui est impossible car le modèle dynamique n'est plus valable, ou bien  $D_0 = \infty$ , ce qui revient à avoir un intégrateur analogique dans la boucle.

A partir des équations (6-113) et (6-112) nous obtenons pour  $n \neq 0$  :

$$\boxed{P_n|_{n \neq 0} = -\frac{H_0 D_0 G_n}{T_c + H_0 G_0 D_0 - T_c} = -\frac{G_n}{G_0}} \quad (6-114)$$

Là aussi nous retrouvons la formule de Dick classique.

## 6.6. Conclusion

Nous avons développé un modèle dynamique qui représente la relation entre la fréquence de l'oscillateur libre et le signal utilisé pour l'asservir sur la transition atomique. Dans un premier temps, nous avons adopté une approche temporelle basée sur la fonction de sensibilité. Nous avons calculé la fonction de sensibilité pour les jets continus monocinétiques dans deux schémas de modulation, et pour les jets continus à distribution de vitesse dans le cas d'une modulation carrée de fréquence.

Cette approche nous a permis de présenter le modèle dynamique d'une façon simple sous la forme d'un filtre linéaire suivi par un échantillonneur idéal. Ensuite, nous avons montré brièvement que ce modèle conduit à un phénomène de repliement de spectre qui dégrade par effet Dick la stabilité de l'horloge.

Puis nous avons adopté une approche fréquentielle qui nous a permis de saisir l'origine de la dégradation de stabilité comme étant due au phénomène d'intermodulation introduit par l'opération de modulation destinée à interroger la résonance atomique. Nous avons montré aussi que l'approche fréquentielle ne permettait pas,

en général, de retrouver la fonction de sensibilité à cause d'une perte d'information sur les instants de prise des mesures.

Enfin, nous avons étudié le comportement d'une boucle d'asservissement très générale en tenant compte du modèle dynamique. Nous avons démontré la formule de Dick d'une façon générale et avons montré que l'effet Dick est présent quel que soit le type de la boucle utilisé.

Les résultats obtenus dans ce chapitre peuvent s'avérer utiles pour les futurs étalons à atomes froids fonctionnant en mode continu.

---

## Bibliographie

- [1] G. J. Dick, "Local Oscillator Induced Instabilities in Trapped Ion Frequency Standards," dans Proc. Of Precise Time and Time Interval, Redondo Beach, pp. 133-147, 1987.
- [2] J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Adam Hilger, Bristol 1989.
- [3] G. Santarelli, "Contribution à la réalisation d'une fontaine atomique", Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1996.
- [4] P. Lemonde, "Pharao : étude d'une horloge spatiale utilisant des atomes refroidis par laser ; réalisation d'un prototype", Thèse de doctorat de l'université Paris VI, 1997.
- [5] C. A. Greenhall, "A Derivation of the Long-Term Degradation of a Pulsed Atomic Frequency Standard from a Control-Loop Model", *IEEE Trans. Ultra. Ferro. Freq. Contr.*, vol. 45, NO. 4, pp. 895-898, July 1998.
- [6] C. Audoin, G. Santarelli, A. Makdissi, A. Clairon, "Properties of an Oscillator Slaved to a Periodically Interrogated Atomic Resonator", *IEEE Trans. Ultra. Ferro. Freq. Contr.*, vol. 45, NO. 4, pp. 877-886, July 1998.
- [7] L. Lo Presti, D. Rovera, A. De Marchi, "A Simple Analysis of the Dick Effect in Terms of Phase Noise Spectral Densities", *IEEE Trans. Ultra. Ferro. Freq. Contr.*, vol. 45, NO. 4, pp. 899-905, July 1998.
- [8] C. Audoin, V. Candelier, N. Dimarcq, "A Limit to the Frequency Stability of Passive Frequency Standards Due to an Intermodulation Effect", *IEEE Trans. Instrum. Measur.*, Vol. 40, No. 2, pp. 121-125, April, 1991.
- [9] B. Picinbono, "Random signals and Systems", Prentice Hall,
- [10] P. Brémaud, *Signaux Aléatoires pour le traitement du signal et les communications*, Ellipses, 1993.



# Chapitre 7. EXACTITUDE

---

La définition de la seconde sous-entend que les atomes de césium sont au repos, bien isolés et dans l'espace libre. Ces conditions ne sont pas vérifiées dans les horloges, ce qui crée des décalages de la fréquence réalisée par rapport à la définition. Ces décalages, bien que très petits, sont nombreux. Le fait que ces perturbations ne soient pas parfaitement connues rend la fréquence de l'horloge incertaine à un certain degré. Dans ce chapitre, nous évaluerons tous les effets connus qui peuvent décaler la fréquence de l'horloge par rapport à la définition. Nous insisterons sur les nouvelles méthodes d'évaluation que nous avons proposées pour certains effets. Enfin, nous donnerons une évaluation totale de l'exactitude de notre étalon.

## 7.1. Introduction

La réalisation de la définition de la seconde, par un appareil réel qui délivre une fréquence (l'étalon de fréquence), implique plusieurs étapes de traitement techniques et physiques qui peuvent créer une déviation (un biais) par rapport à la fréquence de transition atomique non perturbée.

L'amplitude de chacun de ces biais peut être évaluée à l'aide d'expériences ou de considérations théoriques. Cependant, ces biais ne sont pas connus avec une certitude infinie. L'amplitude de ces incertitudes dépend du degré de compréhension théorique aussi bien que de la précision avec laquelle on peut mesurer les paramètres expérimentaux. Cette précision dépend de deux facteurs : le premier est la conception et la construction de l'horloge. Le deuxième est la stabilité de fréquence de l'étalon. Cette fréquence mesurée est utilisée au cours de l'évaluation. L'incertitude combinée de tous les biais est appelée "*Exactitude*" de l'étalon.

Dans la suite de ce chapitre, nous allons présenter toutes les sources de biais connus susceptibles de perturber la fréquence réalisée dans notre étalon et discuter la procédure suivie pour évaluer chacun d'entre eux.

## 7.2. Conséquences d'un effet perturbateur

D'une façon générale, un effet perturbateur peut modifier la fréquence de transition atomique  $\omega_0$ , d'un atome de temps de vol  $\tau$ , de la quantité  $\Delta(\tau)$ . La fréquence de transition atomique devient  $\omega_0 + \Delta(\tau)$  en présence de l'effet perturbateur, et le désaccord entre la fréquence angulaire de l'oscillateur local (asservi ou pas) et celle de la transition atomique est :

$$\Omega_0 - \Delta(\tau) = \omega - \omega_0 - \Delta(\tau) \quad (7-1)$$

La probabilité de transition de Ramsey dans l'approximation du premier ordre s'écrit, d'après l'équation (3-13), alors :

$$P_{\Delta}(\Omega_0) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) \left[ 1 + \cos(a(\Omega_0 - \Delta(\tau))\tau) - 2 \frac{\Omega_0 - \Delta}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a(\Omega_0 - \Delta(\tau))\tau) \right] \quad (7-2)$$

Le signal de Ramsey détecté à la sortie de l'horloge est donné par :

$$s_{\Delta}(\Omega_0, b) = \int_0^{\infty} f(\tau) P_{\Delta}(\Omega_0, b, \tau) d\tau \quad (7-3)$$

où  $f(\tau)$  est la distribution du temps de vol.

En l'absence de toute perturbation ( $\Delta = 0$ ), le signal de Ramsey  $s_{\Delta}(\Omega_0, b)$  représente une fonction paire symétrique par rapport à l'origine  $\Omega_0 = 0$ . Quand le décalage  $\Delta(\tau)$  ne dépend pas du temps de vol  $\tau$ , nous pouvons écrire  $\Delta(\tau) = \lambda$ . Le signal de détection reste une fonction paire par rapport à l'origine  $\Omega_0 = \lambda$ .

Quand le décalage  $\Delta(\tau)$  est une fonction de  $\tau$ , la probabilité de transition de Ramsey de l'équation (7-2) peut s'écrire sous la forme :

$$\begin{aligned}
 P_{\Delta}(\Omega_0) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) & \left\{ 1 + \cos(a\Delta(\tau)\tau) \left[ \cos(a\Omega_0\tau) - 2 \frac{\Omega_0 - \Delta}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\Omega_0\tau) \right] \right. \\
 & \left. + \sin(a\Delta(\tau)\tau) \left[ \sin(a\Omega_0\tau) + 2 \frac{\Omega_0 - \Delta}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \cos(a\Omega_0\tau) \right] \right\} \quad (7-4)
 \end{aligned}$$

Nous remarquons que cette fonction se décompose en la somme d'une fonction paire (en  $\Omega_0$ ) et d'une fonction impaire. Le signal de Ramsey de l'équation (7-3) en présence de l'effet perturbateur se décompose en :

$$s_{\Delta}(\Omega_0) = h(\omega - \omega_0) + g(\omega - \omega_0) \quad (7-5)$$

Avec  $h(\omega - \omega_0)$  est une fonction paire symétrique par rapport à l'origine  $\omega_0$ . Pour  $a\tau\Delta(\tau) \ll 1$ , nous avons :

$$h(\Omega_0) = \frac{1}{2} \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \left[ 1 + \cos(a\Omega_0\tau) - 2 \frac{\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\Omega_0\tau) \right] d\tau + o(\Delta^2) \quad (7-6)$$

La fonction  $g(\omega - \omega_0)$  est impaire et anti-symétrique par rapport à  $\omega_0$ . Pour un petit effet tel que  $a\tau\Delta(\tau) \ll 1$ , nous avons :

$$g(\Omega_0) = \frac{1}{2} \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \Delta(\tau) \left[ a\tau \sin(a\Omega_0\tau) + \frac{2}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) (a\tau\Omega_0 \cos(a\Omega_0\tau) + \sin(a\Omega_0\tau)) \right] d\tau \quad (7-7)$$

Dans ce cas, l'effet perturbateur déforme la forme de la frange de Ramsey. Selon la dépendance de  $\Delta(\tau)$  de  $\tau$ , nous aurons des effets *translateurs* ou *déformateurs*.

Nous utilisons une **modulation lente carrée de fréquence**, de profondeur de modulation  $\omega_m$ , pour déterminer précisément le centre de la frange de Ramsey. Dans ce cas, le signal mesuré pendant le cycle correspondant à la fréquence  $\omega_m$  s'écrit :



$$s_1 = s_{\Delta}(\Omega_0 + \omega_m) = s(\omega_m) + (\Omega_0) \left. \frac{\partial s_{\Delta}}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} \quad (7-8)$$

Pendant le cycle suivant, la fréquence d'interrogation s'obtient en remplaçant  $\omega_m$  par  $-\omega_m$ , et le signal mesuré est :

$$s_2 = s_{\Delta}(\Omega_0 - \omega_m) = s(-\omega_m) + (\Omega_0) \left. \frac{\partial s_{\Delta}}{\partial \omega} \right|_{\omega=-\omega_m} \quad (7-9)$$

La fonction  $h$  étant paire par rapport à  $\omega$ , nous avons :

$$\begin{aligned} h(\omega_m) &= h(-\omega_m) \\ \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} &= - \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=-\omega_m} \end{aligned} \quad (7-10)$$

La fonction  $g$  étant impaire, nous avons :

$$\begin{aligned} g(\omega_m) &= -g(-\omega_m) \\ \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} &= \left. \frac{\partial g}{\partial \omega} \right|_{\omega=-\omega_m} \end{aligned} \quad (7-11)$$

Le signal d'erreur utilisé par la boucle d'asservissement est :

$$e = s_1 - s_2 = 2\Omega_0 \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} + 2g(\omega_m) \quad (7-12)$$

La boucle d'asservissement se comporte de façon à rendre ce signal d'erreur nul. La fréquence angulaire de l'oscillateur local asservi converge vers la valeur :

$$e = 0 \Rightarrow \Omega_0 = \omega - \omega_0 = - \frac{g(\omega_m)}{\left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} \quad (7-13)$$

Le décalage de la fréquence mesurée dans la boucle asservie, et dû à l'effet perturbateur, est alors :

$$\nu_{\Delta} = - \frac{g(\omega_m)}{2\pi \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} = - \frac{g(\nu_m)}{\left. \frac{\partial h}{\partial \nu} \right|_{\nu=\nu_m}} = - \frac{g(\nu_m)}{h'(\nu_m)} \quad (7-14)$$

où  $h'$  représente la dérivée de la frange de Ramsey non perturbée par rapport à la fréquence  $\nu$ . Il se déduit à partir de l'équation (7-6) :

$$h'(\nu_m) = -\pi \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \left[ a\tau \sin(a\omega_m \tau) + \frac{2}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) (\sin(a\omega_m \tau) + \omega_m a\tau \cos(a\omega_m \tau)) \right] d\tau \quad (7-15)$$

Le résultat général de l'équation (7-14) va nous permettre dans la suite de calculer le décalage de fréquence dû à tous les effets déformateurs. A partir des équations (7-7) et (7-15) nous avons :

$$\nu_{\Delta} = \frac{\int \Delta(\tau) A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau}{2\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau}$$

$$A(\omega_m, b, \tau) = \sin^2(b\tau) \left[ a\tau \sin(a\omega_m \tau) + \frac{2}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) (\sin(a\omega_m \tau) + a\tau \omega_m \cos(a\omega_m \tau)) \right] \quad (7-16)$$

Si la quantité  $\Delta(\tau) = \lambda$  est une constante, qui ne dépend pas du temps vol, cette expression se simplifie pour donner  $\nu_{\Delta} = \lambda / 2\pi$ .

### 7.3. Evaluation

Dans le montage expérimental d'asservissement utilisé dans JPO, le signal d'erreur correspond à la différence entre une fréquence de référence  $\nu_R$ , fournie par un Maser, et la fréquence d'interrogation  $\nu_{LLO}$  qui correspond à la sortie asservie de la chaîne de fréquence. Lors de l'asservissement nous enregistrons les corrections  $c$  appliquées à la fréquence  $\nu_{LLO}$ . Désormais nous notons ce signal de correction par  $\nu_{Ex}$  pour désigner une fréquence enregistrée ou expérimentale :

$$\nu_{Ex} = \nu_{LLO} - \nu_R \quad (7-17)$$

Ainsi le désaccord  $\Omega_0$  intervenant dans l'équation (7-13) devient :

$$\Omega_0 = 2\pi(\nu_{LLO} - \nu_0) = 2\pi(\nu_{Ex} + \nu_R - \nu_0) \quad (7-18)$$

Dans la cas où plusieurs effets perturbateurs  $\Delta_i$  sont présent en même temps, le signal d'erreur de l'équation (7-12) s'écrit :

$$e = s_1 - s_2 = 2\Omega_0 \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m} + 2 \sum_i g_i(\omega_m) \quad (7-19)$$

Et par suite, quand  $e = 0$ , nous avons :

$$\Omega_0 = 2\pi(\nu_{Ex} + \nu_R - \nu_0) = - \frac{\sum_i g_i(\omega_m)}{\left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} \quad (7-20)$$

La fréquence *expérimentale* enregistrée  $\nu_{Ex}$  s'écrit alors :

$$\nu_{Ex} = \nu_0 - \nu_R - \frac{\sum_i g_i(\omega_m)}{2\pi \left. \frac{\partial h}{\partial \omega} \right|_{\omega=\omega_m}} \quad (7-21)$$

En utilisant l'expression du déplacement de fréquence  $\nu_{\Delta}$  défini par (7-14), nous avons :

$$\nu_{Ex} = \nu_0 - \nu_R + \sum_i \nu_{\Delta_i} = \alpha + \sum_i \nu_{\Delta_i} \quad (7-22)$$

où  $\alpha$  est une quantité inconnue qui représente la différence entre la fréquence de transition  $\nu_0$  non perturbée mentionnée dans la définition et la fréquence de référence délivrée par notre Maser.

L'évaluation de la fréquence de notre étalon revient donc à estimer la quantité  $\alpha$  qui s'écrit :

$$\begin{aligned} \alpha &= \nu_{Ex} - \sum \text{déplacements} \\ \alpha &= \nu_{Ex} + \sum \text{corrections} \end{aligned} \quad (7-23)$$

L'incertitude sur la valeur de  $\alpha$  s'exprime en terme des variances :

$$\sigma_{\alpha}^2 = \sigma_{Ex}^2 + \sigma_{Corrections}^2 \quad (7-24)$$

L'incertitude  $\sigma_{Ex}$  est reliée à la stabilité de l'étalon. C'est une incertitude de type *A*. La quantité  $\sigma_{Corrections}$  représente l'incertitude combinée de toutes les corrections connues et appliquées (ou pas). C'est une incertitude de type *B* et elle appelée ***exactitude*** de l'étalon.

Dans la suite nous essayons d'évaluer les valeurs de tous les déplacements de fréquence qui sont susceptibles d'avoir lieu dans notre étalon ainsi que les incertitudes sur ces valeurs.

## 7.4. L'effet Doppler du second ordre

Il traduit la *dilatation du temps* dans un référentiel mobile prédit par la théorie de la relativité restreinte. Il correspond à un décalage de la fréquence angulaire de transition par la quantité  $\Delta$  donnée par l'expression [1] :

$$\Delta = -\frac{\omega_0 v^2}{2c^2} \quad (7-25)$$

où  $c$  est la vitesse de la lumière et  $v$  la vitesse de l'atome de césium reliée au temps de vol  $\tau$  par la relation  $v = \mathbf{l} / \tau$ . En supposant que  $a\tau\Delta \ll 1$ , nous pouvons remplacer l'expression (7-25) dans l'équation (7-16) :

$$\nu_D = -\frac{\nu_0 \mathbf{l}^2}{2c^2} \frac{\int \frac{1}{\tau^2} A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau}{\int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (7-26)$$

Cette expression est équivalente à celle habituellement utilisée et donnée dans la référence [1], avec des termes supplémentaires dus au développement au premier ordre en  $\omega_m / b$ .

Les Fig. 7-1 et Fig. 7-2 montrent les variations du déplacement relatif  $\nu_D / \nu_0$  dû à l'effet Doppler du seconde ordre en fonction des paramètres  $\nu_m$  et  $b$ . Dans les conditions habituelles de fonctionnement ( $\nu_m = 45$  Hz et  $b = b_{opt} = 34 \times 10^3$  rad/s), le décalage relatif vaut  $-3,325 \times 10^{-13}$ . Pour établir l'incertitude de la valeur calculée de cet effet, nous nous calculé les valeurs de  $\nu_D / \nu_0$  selon la relation (7-26) en utilisant trois valeurs de  $b$  obtenues par les trois méthodes du chapitre 3 et trois fonctions  $f(\tau)$  obtenues par trois méthodes pour estimer la distribution de temps de vol (voir chapitre 4). De plus, nous avons montré [2] qu'il est possible de calculer l'effet Doppler, par une *méthode directe*, à partir de l'enregistrement expérimental d'une frange de Ramsey sans connaître  $f(\tau)$  ou  $b$ .

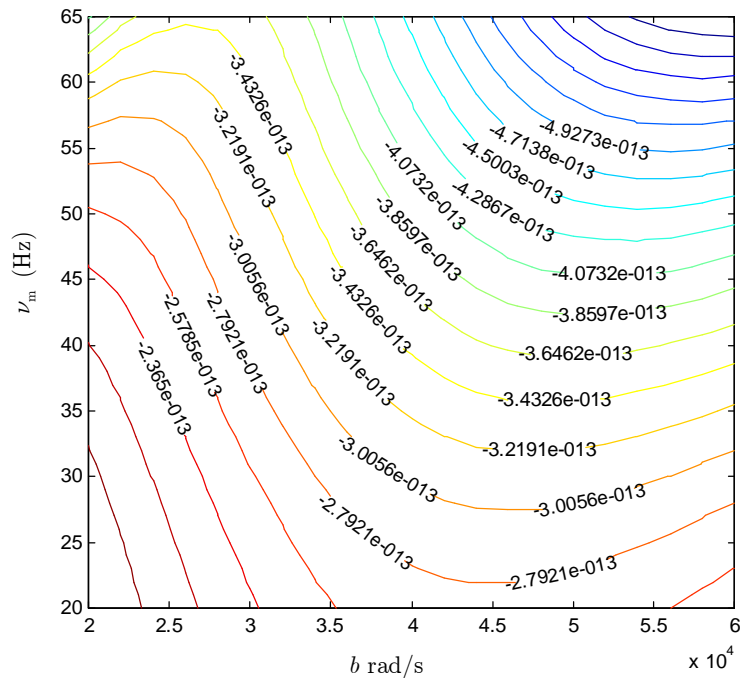


Fig. 7-1 : L'effet Doppler quadratique en fonction de  $b$  et  $\nu_m$  (lignes de niveau)

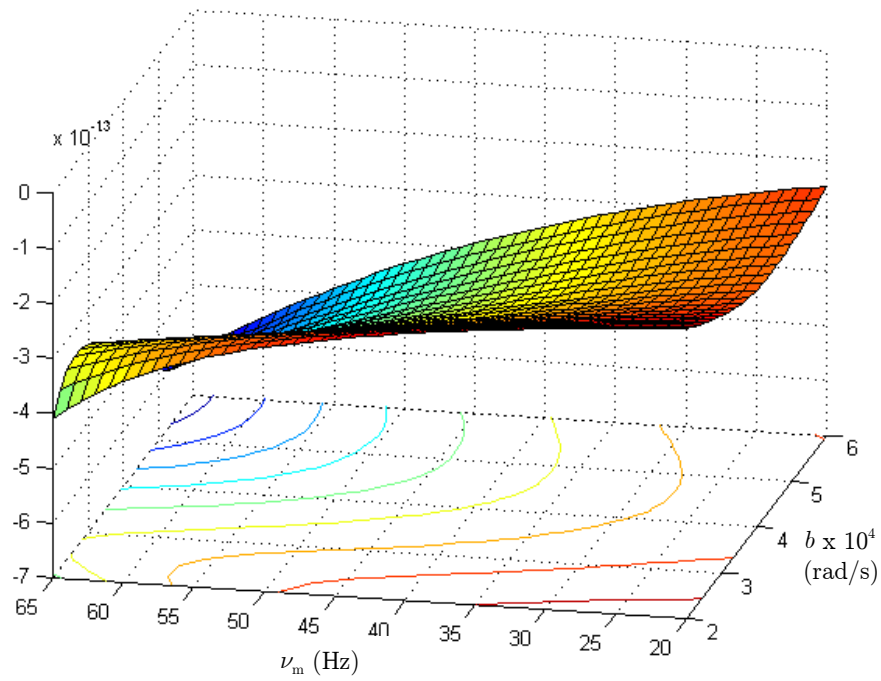


Fig. 7-2 : L'effet Doppler quadratique en fonction de  $b$  et  $\nu_m$ .

Le calcul de l'effet Doppler donne 7 (3 + 3 + 1) valeurs de l'effet correspondant a 7 méthodes différentes. L'écart maximum (pic-à-pic) entre ces 7 valeurs n'a jamais dépassé  $2.6 \times 10^{-15}$  en répétant les mesures des paramètres pendant deux années (Voir figure 4-13 pour voir les valeurs de l'effet obtenues pour les différentes distributions  $f(\tau)$ ). Nous signalons aussi que les valeurs de l'effet calculées par notre formule (7-26), qui contient des termes supplémentaires en  $\omega_m / b$ , diffèrent de celles obtenue par la formule classique (page 787 de la référence [1] ) par  $4 \times 10^{-15}$  pour les valeurs habituelles de  $\nu_m$  et  $b$ . Tout cela, nous permet d'établir, avec confiance, une incertitude relative de l'effet Doppler de seconde ordre de :

$$\frac{\delta\nu_D}{\nu_0} = 2,6 \times 10^{-15} \quad (7-27)$$

Notons que l'application d'une seule méthode pour l'estimation de cet effet conduit à une répétabilité de  $5 \times 10^{-16}$  en répétant les mesures de  $b$  et de  $f(\tau)$  par la même méthode. Plusieurs laboratoires utilisent cette répétabilité comme l'incertitude sur la valeur de l'effet.

## 7.5. L'effet gravitationnel

C'est un effet relativiste, dû au potentiel gravitationnel qui varie en fonction de l'altitude de l'horloge. Cet effet décale la fréquence de transition de tous les atomes indépendamment de leur vitesse. Par conséquent, c'est un effet translateur. Par convention la seconde est définie sur la surface du géoïde. Le décalage de fréquence  $\nu_G$  pour une horloge d'altitude  $h$  est donné par [1] :

$$\nu_G = g \frac{h}{c^2} \quad (7-28)$$

où  $g$  est l'accélération de la gravité et  $h$  est l'altitude de l'horloge.

En 1993, l'altitude  $h$  de notre horloge a été estimée par rapport à une antenne GPS (Global Positioning System) du laboratoire située sur le toit d'un autre bâtiment. Elle était de 52 m.

Puis elle a été mesurée par rapport à un repère IGN (Institut Géographique National) selon la Fig. 7-3. Nous avons mesuré en 1999 une altitude  $h = 55,8$  m par rapport à ce repère La deuxième mesure étant plus précise, nous adoptons une valeur de  $h = 55,8$  m avec une incertitude de 3 m. Ceci conduit à effet gravitationnel relatif de :

$$\frac{\nu_G}{\nu_0} = (6,07 \pm 0,3) \times 10^{-15} \quad (7-29)$$

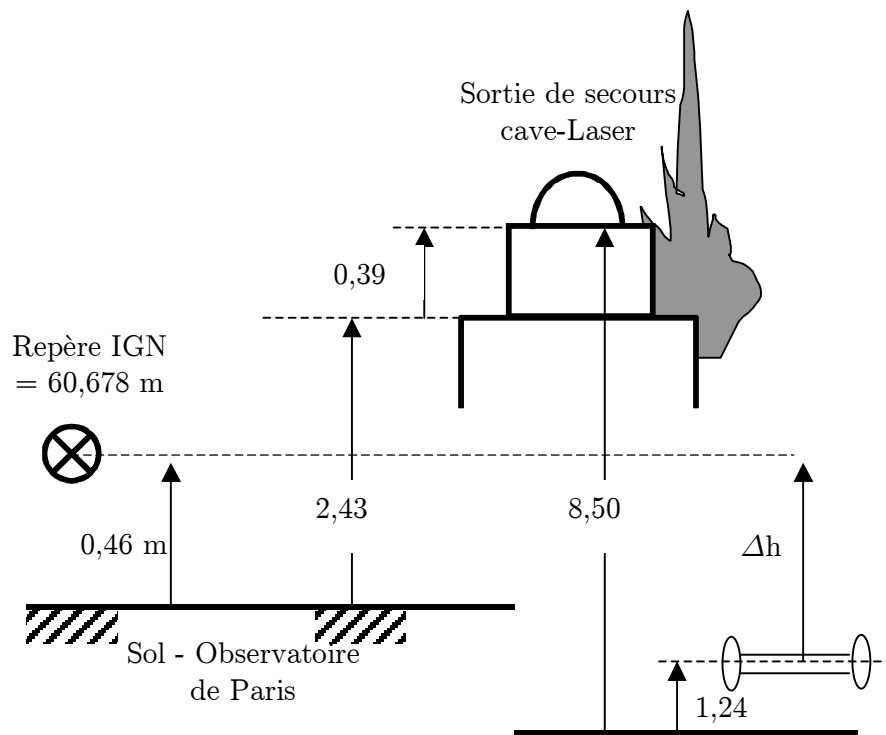


Fig. 7-3 : *Mesure de l'altitude de JPO.*

## 7.6. Effet de rayonnement du corps noir

La présence d'un champ électrique rayonné par un corps noir à la température  $T$  (en Kelvin) induit un déplacement de fréquence  $\nu_T$  de la transition atomique. Ce déplacement a été estimé [3] par l'expression :



$$\nu_T = -K'' \left( \frac{T}{300} \right)^4 \left( 1 + \varepsilon \left( \frac{T}{300} \right)^2 \right) \quad (7-30)$$

avec  $K'' = 1,573(3) \times 10^{-4}$  Hz et  $\varepsilon = 1,4 \times 10^{-2}$ .

La température à l'intérieure de la cavité est mesurée en permanence au moyen de résistances en platine, elle vaut en moyenne  $34,6^\circ\text{C}$  ( $T = 307,75$  K) avec une incertitude inférieure à  $0,5$  K. L'incertitude sur la valeur numérique de la constante  $K''$  étant négligeable, La valeur relative de l'effet est :

$$\frac{\nu_T}{\nu_0} = -19,2 \times 10^{-15} \quad (7-31)$$

La cavité est placée dans un cylindre en Dural, de température assez homogène bien qu'il subsiste un léger gradient de température du fait des fours chauds à chaque extrémité. Elle est isolée du reste de l'enceinte à vide par un diaphragme en graphite de chaque côté, couvrant  $86\%$  de la section du cylindre. On peut donc considérer que la cavité baigne dans un rayonnement proche de celui du corps noir idéal avec une correction de température, pour tenir compte des ouvertures [3], inférieure à  $1\text{K}$ . L'effet du rayonnement provenant directement des fours peut être estimé grossièrement par un raisonnement simple. Si nous supposons que l'énergie venant des fours se propage uniquement, sans tenir compte des réflexions, nous pouvons exprimer la densité d'énergie  $w_e$  dans l'enceinte, et venant du four, sous la forme :

$$w_e(T_F) = w_0(T_F) \left( \frac{r_0}{R} \right)^2 \quad (7-32)$$

Avec :

$w_0$  = densité d'énergie autour du four

$T_F$  = Température du four

$r_0$  = distance entre le four et le premier diaphragme en graphite.

$R$  = distance entre le four et le milieu de la cavité de Ramsey (voir Fig. 7-4).

Puisque le déplacement en fréquence est proportionnel à  $T^4$ , nous pouvons écrire :

$$\frac{\text{Déplacement (four)}}{\text{Déplacement (enceinte)}} = \frac{w_e(T_F)}{w_e(T_e)} = \left(\frac{T_F}{T_e}\right)^4 \left(\frac{r_0}{R}\right)^2$$

Pour  $T_F \cong 373K$ ,  $T_e \cong 307K$ ,  $r_0 = 10$  mm et  $R = 1383$  mm nous avons :

$$\frac{\text{Déplacement (four)}}{\text{Déplacement (enceinte)}} = 1 \times 10^{-4}$$

Ce résultat prouve que le déplacement de fréquence induit par le rayonnement du four est négligeable.

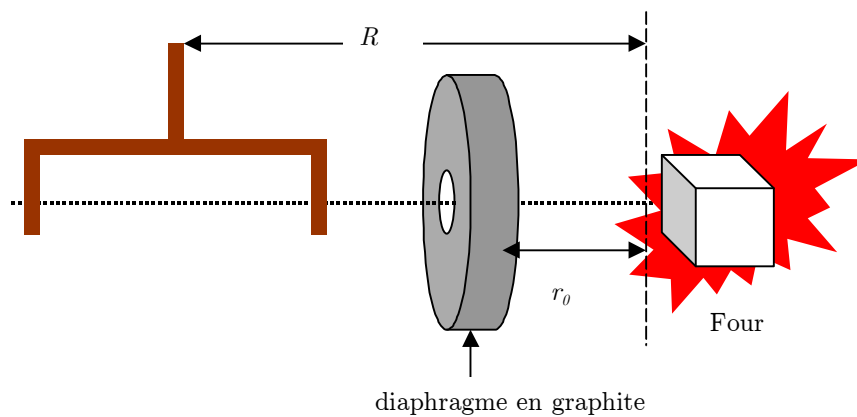


Fig. 7-4 : *Rayonnement venant du four.*

En tenant compte des différentes incertitudes et en restant très prudent on peut fixer à 2 K l'incertitude maximale sur la température du rayonnement du corps noir, soit une incertitude sur la fréquence relative de

$$\frac{\delta\nu_T}{\nu_0} = 0,5 \times 10^{-15} \quad (7-33)$$

## 7.7. Effet Zeeman de second ordre

Les niveaux hyperfins du césium, mentionnés dans la définition de la seconde, sont dégénérés en l'absence d'un champ magnétique statique  $B_0$ . Plusieurs raisons défavorisent le fonctionnement d'une horloge atomique dans un champ magnétique nul. Une de ces raisons est que le zéro exact ne peut être garanti. Par suite, la fréquence de transition réalisée avec un champ  $B_0$  dépend de l'amplitude de ce dernier. La fréquence de transition entre deux niveaux  $\Delta m = 0$  est donnée par l'équation 3-4 [1] :

$$\nu_{(m)} = \nu_0 \sqrt{1 + \frac{m}{2} x + x^2}$$

avec  $x = 3,0486 B_0$  (7-34)

En pratique, la valeur de  $B_0$  est de l'ordre de  $10 \mu\text{T}$ , ce qui rend  $x$  petit devant 1.

Ainsi, la transition d'horloge ( $m = 0$ ) doit être corrigée de l'effet Zeeman de seconde ordre donné par :

$$\nu_z = \frac{\nu_0}{2} x^2 = 4,2745 \times 10^{10} B_0^2$$
(7-35)

La valeur de  $x$  est mesurée à partir de la fréquence de résonance des transitions  $\sigma$ . Pour  $m \neq 0$ , nous avons :

$$\nu_{(m)} = \nu_0 \left( 1 + \frac{m}{4} x + \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{m^2}{16} \right) x^2 \right) \text{ pour } m \neq 0$$
(7-36)

En mesurant les fréquences de résonance des deux transitions  $\nu_{(-1)}$  et  $\nu_{(1)}$ , voisines de la transition d'horloge, nous pouvons calculer :

$$x = \frac{4}{\nu_0} \frac{\nu_{(1)} - \nu_{(-1)}}{f_Z} \quad (7-37)$$

et par suite [4] :

$$\nu_Z = 8 \frac{f_Z^2}{\nu_0} \quad (7-38)$$

La quantité  $f_Z$  est appelée souvent, par abus de langage, la fréquence Zeeman. Une fois la quantité  $f_Z$  estimée, l'effet Zeeman de second ordre est calculé selon l'équation (7-38). On s'affranchit ainsi de l'erreur sur le coefficient reliant  $x$  à  $B_0$ . Désormais, nous caractériserons l'amplitude du champ magnétique par la fréquence Zeeman  $f_Z$ .

En pratique nous mesurons une fréquence Zeeman du premier ordre  $f_Z = 70$  kHz. Ceci correspond à un champ statique  $B_0 \cong 10 \mu\text{T}$ . La valeur de l'effet Zeeman correspondant est  $\nu_Z = 4,2643$  Hz.

La détermination de cette valeur est entachée de plusieurs sources d'erreurs :

### 7.7.1. Détermination de la valeur de $f_Z$ :

La mesure de  $\nu_{(-1)}$  et  $\nu_{(1)}$  se fait avec une exactitude limitée et reliée à la stabilité de l'horloge. A partir de l'équation(7-38), nous avons :

$$\begin{aligned} \delta\nu_Z &= \frac{16}{\nu_0} f_Z \delta f_Z \\ \frac{\delta\nu_Z}{\nu_0} &= 2 \frac{\nu_Z}{\nu_0} \frac{\delta f_Z}{f_Z} \end{aligned} \quad (7-39)$$

Avec les valeurs numériques ci-dessus, nous obtenons une incertitude relative :

$$\frac{\delta\nu_Z}{\nu_0} = 1 \times 10^{-15} \text{ pour } \delta f_Z = 0,07 \text{ Hz}$$

$$\frac{\delta\nu_Z}{\nu_0} = 1,4 \times 10^{-16} \text{ pour } \delta f_Z = 0,01 \text{ Hz}$$

Il suffit donc de mesurer  $\nu_{(-1)}$  et  $\nu_{(1)}$  à un centième de hertz près pour avoir une incertitude relative

$$\frac{\delta\nu_Z}{\nu_0} = 1,4 \times 10^{-16} \tag{7-40}$$

Le champ  $B_0$  est créé par 4 fils alimentés par une source de courant. Ce courant peut varier au cours de temps. Par conséquent une mesure périodique de la fréquence Zeeman est nécessaire pour tenir compte des variations du champ  $B_0$ . La Fig. 7-5 montre les variations de l'effet Zeeman de second ordre sur une période de dix jours. Nous constatons qu'une seule mesure quotidienne de la fréquence Zeeman du premier ordre garantit une variation de  $\nu_Z$  inférieur à  $3 \times 10^{-6}$  Hz. En pratique,  $f_Z$  est mesuré plusieurs fois par jour.

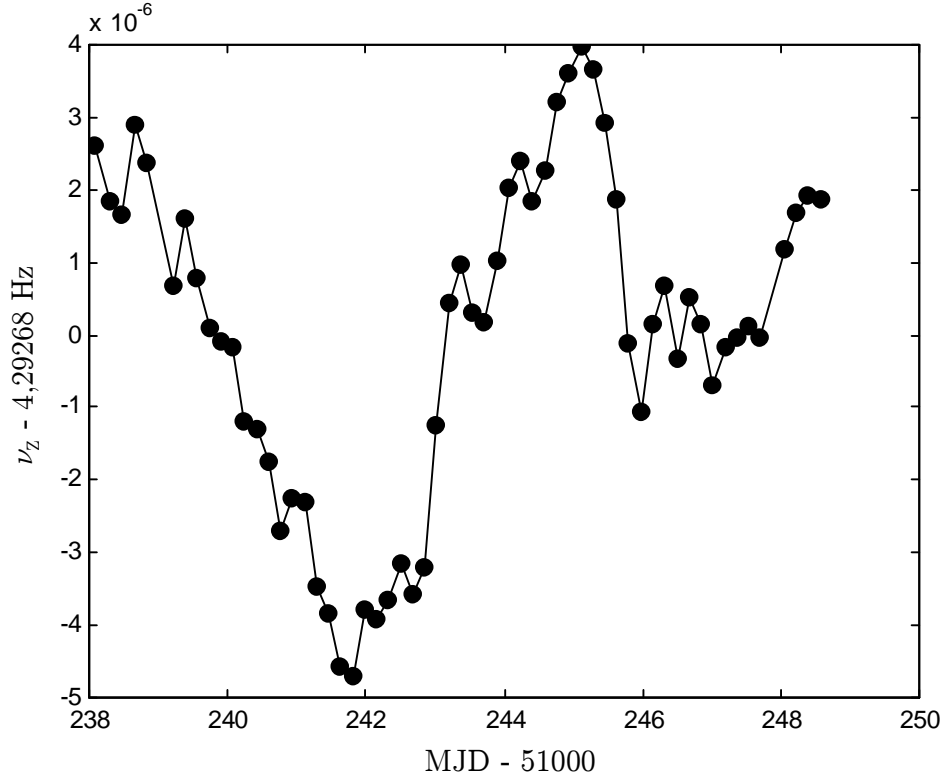


Fig. 7-5 : Variations de l'effet Zeeman de second ordre en fonction du temps.

En combinant le incertitude provenant de la mesure de  $f_Z$  avec celle due aux variations temporelles du champ magnétique, nous obtenons une incertitude globale :

$$\delta\nu_Z = 4 \cdot 10^{-6} \text{ Hz} \Rightarrow \frac{\delta\nu_Z}{\nu_0} = 0,5 \times 10^{-15} \quad (7-41)$$

### 7.7.2. Différence entre $\langle B_0^2 \rangle$ et $\langle B_0 \rangle^2$

Le calcul de  $\nu_Z$  à partir de l'équation (7-35) suppose que le champ magnétique a une valeur constante  $B_0$  tout le long de la trajectoire de l'atome. En réalité, le champ  $B_0$  varie en fonction de la position  $y$  de l'atome. Ainsi, l'effet Zeeman est proportionnel à la valeur moyenne

$$\langle B_0^2 \rangle = \frac{1}{L} \int_{y=0}^L B_0^2(y) dy \quad (7-42)$$

Or, la mesure des fréquences  $\nu_{(-1)}$  et  $\nu_{(1)}$  permet d'estimer la valeur

$$\langle B_0 \rangle = \frac{1}{L} \int_{y=0}^L B_0(y) dy \quad (7-43)$$

Ainsi, la méthode de détermination de  $\nu_z$  expliquée plus haut utilise le carré de la valeur moyenne  $\langle B_0 \rangle$  à la place de la valeur moyenne du carré de  $B_0$ . Quand la valeur de  $B_0$  n'est pas constante le long de la trajectoire de l'atome, les deux quantités  $\langle B_0^2 \rangle$  et  $\langle B_0 \rangle^2$  ne sont pas forcément égales. Ceci induit une source d'erreur lors du calcul de  $\nu_z$ . Le seul moyen de mesurer  $\langle B_0^2 \rangle$  est de mesurer directement (par une sonde) le profil du champ magnétique en fonction de la position  $y$ .

La Fig. 7-6 montre l'amplitude des trois composantes (Horizontale, Verticale, et axiale) du champ magnétique enregistrées à l'intérieur du tube avant l'assemblage final de l'horloge.

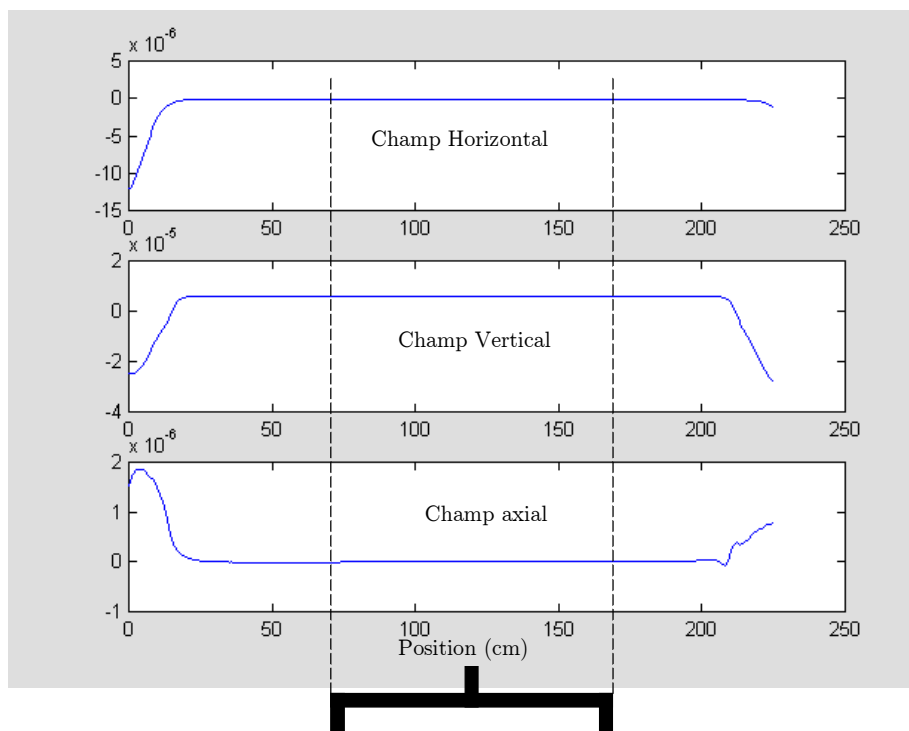


Fig. 7-6 : *Champ Statique expérimental en Tesla.*

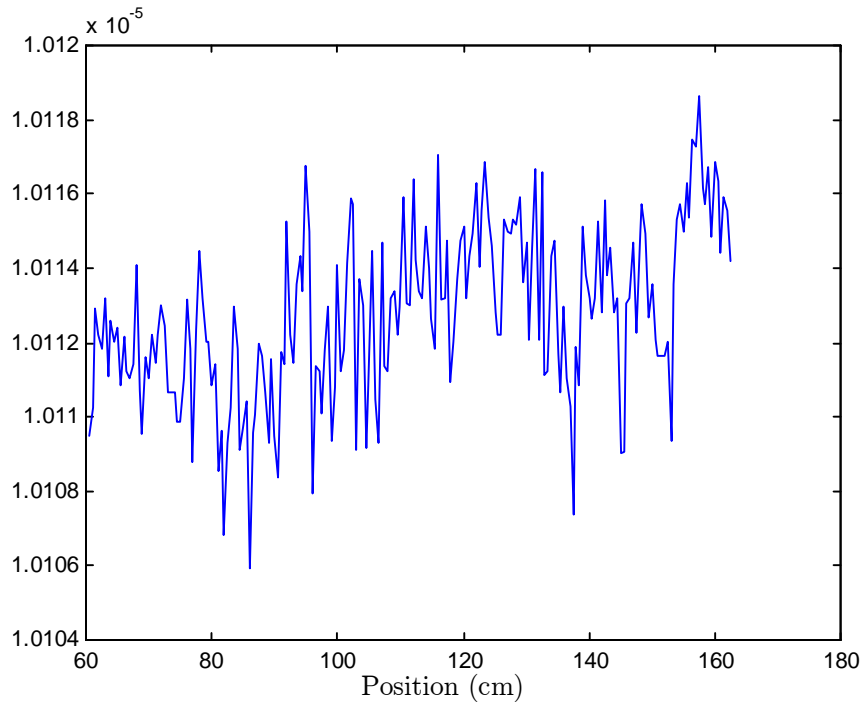


Fig. 7-7 : *Champ vertical  $B_0$  (en T) en fonction de la position  $y$  le long de la cavité micro-onde.*

La Fig. 7-7 montre un agrandissement du champ vertical dans la zone de la cavité micro-onde. Le profil du champ sur cette figure nous permet de calculer à la fois  $\langle B_0^2 \rangle$  et  $\langle B_0 \rangle^2$ . La fréquence  $\nu_z$  calculée à partir de  $\langle B_0^2 \rangle$  diffère de celle calculée à partir de  $\langle B_0 \rangle^2$  par  $-2,2 \times 10^{-7}$  Hz, ce qui implique une erreur relative :

$$\frac{\delta\nu_z}{\nu_0} = 2,5 \times 10^{-17} \quad (7-44)$$

### 7.7.3. Correction à la formule de Breit - Rabi

La correction appliquée pour tenir compte de l'effet Zeeman du second ordre est calculée à partir de l'équation (7-34). Cette équation est déduite de la formule de Breit-Rabi. Quelle est la validité de cette équation dans le cas d'un champ de  $10 \mu\text{T}$  ? Itano [5] envisage trois corrections possibles : un terme diamagnétique dipolaire, un terme diamagnétique quadrupolaire, et un terme qu'il appelle Zeeman-



hyperfine. Le premier induit un déplacement relatif estimé à  $10^{-20}$  dans nos conditions avec une incertitude de 20%. Le deuxième terme est nul pour la transition d'horloge. Le troisième terme correspond à une perturbation du troisième ordre. Si on transpose l'expression donnée par Itano pour la transition entre niveaux  $m_F = -1$  au cas  $m_F = 0$ , ce terme conduit à un déplacement de fréquence :

$$\begin{aligned}\nu_{corr} &= -2\sqrt{16}\beta B = -7 \mu\text{Hz} \\ \frac{\nu_{corr}}{\nu_0} &= 0,8 \cdot 10^{-15}\end{aligned}\tag{7-45}$$

avec  $\beta = 88 \text{ mHz}\cdot\text{T}^{-1}$ , et  $B$  l'amplitude du champ magnétique statique (en Tesla). L'incertitude sur cette correction est estimée à 30%. Etant donné la petitesse de cet effet ( $0,8 \cdot 10^{-15}$ ) et son incertitude nous n'appliquons pas la correction correspondante mais nous le prenons en compte comme incertitude supplémentaire sur l'effet Zeeman du second ordre.

Rappelons que l'effet Zeeman de seconde ordre est un effet translateur car il ne dépend pas de la vitesse de l'atome. Un autre effet déformateur relié au champ statique peut avoir lieu. C'est l'effet de l'inhomogénéité du champ magnétique.

#### 7.7.4. Inhomogénéité du champ statique

Si les niveaux d'énergie impliqués n'ont pas les mêmes valeurs dans les zones d'interaction de Ramsey et dans la zone de vol libre, il s'ensuit une erreur de fréquence. Soit  $B_0$  la valeur moyenne du champ statique dans la zone du vol libre et  $B_1$  ( $B_2$ ) sa valeur dans la première (deuxième) zone d'interaction. Nous supposons que  $B_1$  et  $B_2$  sont proches de  $B_0$  de façon à pouvoir écrire  $x$  ( $x = 3,0486 B$ ) sous la forme :

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + \varepsilon_1 \\ x_2 &= x_0 + \varepsilon_2\end{aligned}\tag{7-46}$$

avec  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  petits devant  $x_0$ . La Fig. 7-8 montre un exemple d'un profil du champ magnétique.

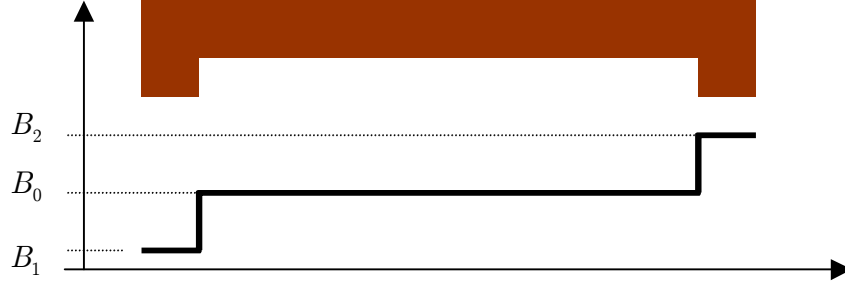


Fig. 7-8 : Exemple d'un profil du champ magnétique.

La probabilité de transition de Ramsey est donnée dans cas par l'équation (5.6.50) de [1] . Elle est égale dans le cadre de l'approximation au premier ordre à l'équation (7-6) plus un terme impaire donné par :

$$g_{HZ}(\Omega_0) = -\frac{(\omega'_0 - \omega_1) + (\omega'_0 - \omega_2)}{2b} \int f(\tau)(1 - \cos(b\tau)) \sin(b\tau) \sin(a\Omega_0\tau) d\tau \quad (7-47)$$

où  $\omega'_0$  est fréquence de transition angulaire dans la zone de vol libre et  $\omega_1$  ( $\omega_2$ ) est celle dans la première (deuxième) zone d'interaction.

Le déplacement de fréquence induit par cette déformation  $g_{HZ}(\Omega_0)$  se déduit de l'équation (7-14) :

$$\nu_{HZ} = -\frac{g_{HZ}(\omega_m, b)}{\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (7-48)$$

Ou encore en posant  $\Delta_1 = (\nu'_0 - \nu_1)$  et  $\Delta_2 = (\nu'_0 - \nu_2)$  :

$$\nu_{HZ} = -(\Delta_1 + \Delta_2) \gamma(\omega_m, b) \quad (7-49)$$

avec :

$$\gamma(\omega_m, b) = - \frac{\int (1 - \cos(b\tau)) \sin(b\tau) \sin(a\omega_m \tau) f(\tau) d\tau}{b \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (7-50)$$

Pour la transition d'horloge, la fréquence de transition dépend quadratiquement du champ magnétique et nous avons :

$$\begin{aligned} \Delta_1 &= \frac{\nu_0}{2} (x_0^2 - x_1^2) \text{ et } \Delta_2 = \frac{\nu_0}{2} (x_0^2 - x_2^2) \\ \Delta_1 + \Delta_2 &= \frac{\nu_0}{2} (2x_0^2 - x_1^2 - x_2^2) \end{aligned} \quad (7-51)$$

En développant l'équation (7-46) au premier ordre en  $\varepsilon_1/x_0$  et  $\varepsilon_2/x_0$ , le déplacement s'écrit :

$$\nu_{HZ} = \nu_0 x_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma(\omega_m, b) \quad (7-52)$$

Ou encore en utilisant la définition de la fréquence Zeeman donnée par l'équation (7-37) :

$$\nu_{HZ} = 4f_Z (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma(\omega_m, b) \quad (7-53)$$

Pour pouvoir calculer cet effet, il faut connaître trois quantités :

- $\gamma(\omega_m, b)$  qui se calcul à partir de la distribution de vitesse et des paramètres de modulation.
- $x_0$  proportionnel au champ  $B_0$  dans la zone de vol libre. Elle se déduit de l'équation (7-35) après mesure de la fréquence Zeeman  $f_Z$ .
- $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  qui nécessite la connaissance de  $B_1$  et de  $B_2$  dans les deux zones d'interaction qui sont généralement inconnues.

#### 7.7.4.1. Mesure de $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$

Pour mesurer  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$  nous tirons profit du fait que la piédestal de Rabi est dû à la probabilité qu'une transition ait lieu dans la première zone d'interaction mais pas dans la deuxième, plus la probabilité qu'une transition ait lieu dans la deuxième zone d'interaction mais pas dans la première [6]. Le centre de ce piédestal pour les transitions  $m \neq 0$  est donné alors par l'équation (7-34) :

$$\nu^{Rb}(m) = \nu_0 \left( 1 + \frac{m}{4} \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right) \right), \quad (7-54)$$

Par contre, Le centre de la frange de Ramsey pour les transitions  $m \neq 0$  est proportionnel au champ  $B_0$  dans la zone de vol libre :

$$\nu^{Ram}(m) = \nu_0 \left( 1 + \frac{m}{4} x_0 \right) \quad (7-55)$$

En mesurant les centres de chaque transition  $m \neq 0$  sur la frange de Ramsey et le piédestal de Rabi, nous pouvons calculer la différence :

$$D(m) = \nu^{Ram}(m) - \nu^{Rb}(m) = -\nu_0 \frac{m}{8} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \quad (7-56)$$

Nous constatons que la relation entre  $m$  et  $D(m)$  est linéaire. L'estimation de la pente de la courbe  $D(m)$  nous permet de déduire la valeur de  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ .

En notant  $p$  la pente de la courbe  $D(m)$ , L'effet  $\nu_{HZ}$  s'écrit alors selon les équations (7-53) et (7-56) sous la forme :

$$\nu_{HZ} = 32 \frac{p}{\nu_0} f_Z \gamma(\omega_m, b) \quad (7-57)$$

La Fig. 7-9 montre une courbe  $D(m)$  expérimentale obtenue dans notre étalon. Nous estimons une pente de 10 Hz, ce qui implique une valeur de  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = -8,7 \cdot 10^{-9}$ . Ceci correspond à une différence entre le champ magnétique dans les bras et celui entre les bras de l'ordre de  $-1,4 \cdot 10^{-9}$  Tesla. Pour les transitions  $m = \pm 3$ , les valeurs de  $D(m)$  mesurées sont éloignées de la droite à cause du déplacement dû aux transitions voisines les affectant.

En reportant ces valeurs dans l'équation (7-52), nous pouvons calculer le déplacement de fréquence dû à l'inhomogénéité du champ magnétique. La Fig. 7-10 montre le déplacement  $\nu_{HZ}$  en fonction des paramètres de modulation. Nous constatons que cet effet est de l'ordre de  $1,8 \times 10^{-5}$  Hz pour les paramètres de modulation typiques.

La valeur ce effet est faible sur la transition d'horloge. Des mesures rapides de la courbe  $D(m)$  permettent de déterminer sa pente à un Hertz près. Ainsi, la valeur de  $\nu_{HZ}$  peut être estimée avec une incertitude de  $3,5 \times 10^{-6}$  Hz au pire des cas en supposant des incertitudes relatives de 10% sur chacune des valeurs de  $(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)$ ,  $x_0$  et  $\gamma(\omega_m, b)$ . *Mais est-ce c'est vrai pour les transitions  $m \neq 0$  ?*

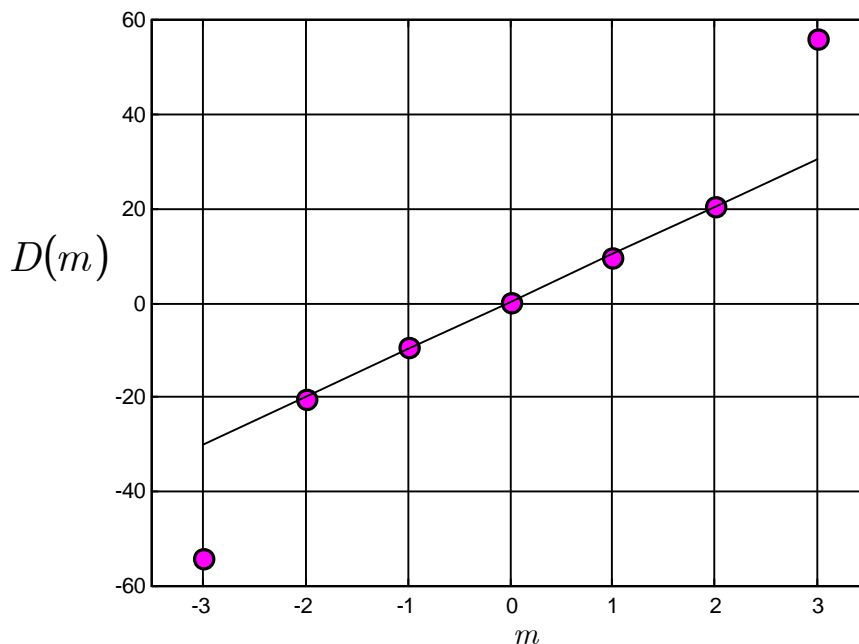


Fig. 7-9 : Mesure expérimentale de  $\nu^{Ram}(m) - \nu^{Rb}(m)$ .

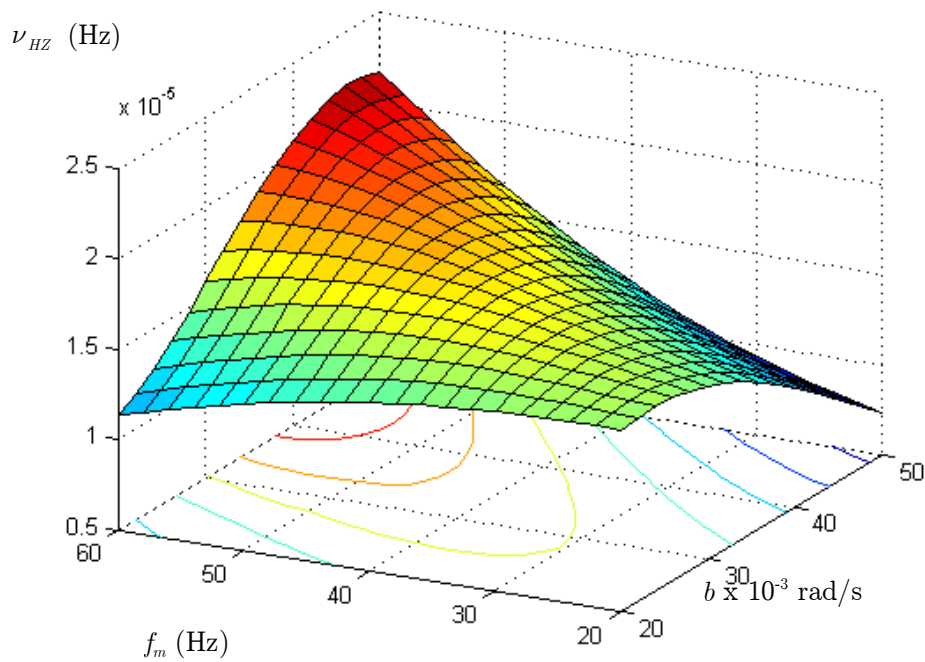


Fig. 7-10 : Déplacement dû à l'inhomogénéité du champ magnétique en fonction des paramètres de modulation.

#### 7.7.4.2. Conséquence sur la fréquence Zeeman

Pour les transitions  $m \neq 0$  nous avons :

$$\Delta_1(m) = \nu_0 \frac{m}{4} (x_0 - x_1) \text{ et } \Delta_2(m) = \nu_0 \frac{m}{4} (x_0 - x_2)$$

$$\Delta_1(m) + \Delta_2(m) = \nu_0 \frac{m}{4} (2x_0 - x_1 - x_2) \quad (7-58)$$

Le déplacement se calcul en reportant ces valeurs dans l'équation (7-49) :

$$\nu_{HZ}(m) = \nu_0 \frac{m}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma(m) \quad (7-59)$$

En comparant cette expression avec celle de l'équation (7-52) obtenue pour la transition d'horloge, nous constatons qu'il y a un rapport  $m/(4x_0)$  entre les deux. Ceci veut dire qu'un effet de  $5 \mu\text{Hz}$  sur la transition d'horloge veut  $0,125 \text{ Hz}$  sur la transition  $m = 1$ . *Cette énorme valeur risque t-elle de fausser le calcul de la correction de l'effet Zeeman de seconde ordre ?*

L'effet Zeeman de seconde ordre  $\nu_Z$  est calculé à partir de la fréquence Zeeman  $f_Z$  donnée par :

$$f_Z = \frac{\nu_{(1)} - \nu_{(-1)}}{2} = \nu_0 \frac{x_0}{4} \quad (7-60)$$

La présence d'un déplacement  $\nu_{HZ}(m)$  dû à l'inhomogénéité du champ magnétique, va induire une erreur  $\delta f_Z$  sur  $f_Z$  :

$$\delta f_Z = \frac{\nu_{HZ}(1) - \nu_{HZ}(-1)}{2} \quad (7-61)$$

En reportant l'expression (7-59) dans l'équation (7-61) nous avons :

$$\delta f_Z = \frac{\nu_0}{4} (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma_1 \quad (7-62)$$

L'effet Zeeman quadratique  $\nu_Z$  est calculé à partir de  $f_Z$  selon l'équation (7-36). L'erreur  $\delta f_Z$  sur  $f_Z$  induit une erreur  $\delta \nu_Z$  sur  $\nu_Z$ . La valeur  $\delta \nu_Z$  s'obtient en remplaçant l'expression (7-62) dans l'équation (7-37) :

$$\delta \nu_Z = x_0 \nu_0 (\varepsilon_1 + \varepsilon_2) \gamma_1 \quad (7-63)$$

En comparant cette expression avec le déplacement  $\nu_{HZ}$  de l'équation (7-52), nous constatons que les deux valeurs sont égales si les paramètres de modulations sur les transitions  $m = \pm 1$  sont identiques à ceux sur la transition d'horloge :

$$\delta\nu_Z = \nu_{HZ} \quad (7-64)$$

En pratique, nous calculons un effet Zeeman perturbé  $\nu_Z + \delta\nu_Z$  où  $\nu_Z$  représente la vraie valeur de l'effet Zeeman quadratique donnée par l'équation (7-35). Nous utilisons cette valeur pour corriger la fréquence mesurée  $\nu_{Ex}$ . L'équation (7-23) s'écrit alors :

$$\alpha = \nu_{Ex} - (\nu_Z + \delta\nu_Z) - \mathbf{L} \quad (7-65)$$

En reportant l'expression (7-64) dans cette expression, nous avons :

$$\alpha = \nu_{Ex} - \nu_Z - \nu_{HZ} - \mathbf{L} \quad (7-66)$$

Autrement dit, corriger la fréquence de l'horloge en utilisant la fréquence Zeeman perturbée par l'inhomogénéité du champ magnétique revient à la corriger de deux effet d'un seul coup : l'effet Zeeman quadratique,  $\nu_Z$ , et l'effet de l'inhomogénéité du champ magnétique,  $\nu_{HZ}$ . Ce résultat a été mentionné dans [6].

Cependant, l'équation (7-64) n'est pas complètement vraie si la mesure de  $f_Z$  n'est pas effectuée avec les mêmes paramètres  $(b, \omega_m)$  que ceux avec lesquels a lieu le fonctionnement en horloge. Il subsiste donc une erreur résiduelle que nous estimons à  $\delta\nu_{HZ} = 4,5 \mu\text{Hz}$  en prenant l'écart maximum entre ces deux effets calculés sur toute la plage des valeurs prises par les paramètres  $(b, \omega_m)$  dans nos expériences (voir Fig. 7-10).

En conclusion, nous n'appliquons pas de correction de l'effet de l'inhomogénéité du champ car il se compense partiellement en appliquant la correction de l'effet de Zeeman second ordre. L'incertitude sur cette compensation est de l'ordre de  $5 \mu\text{Hz}$ , ce qui vaut en valeur relative :

$$\frac{\delta\nu_{HZ}}{\nu_0} < 6 \cdot 10^{-16} \quad (7-67)$$



### 7.7.5. Correction totale et incertitude

La correction appliquée pour compenser l'effet Zeeman du second ordre est donnée par l'équation (7-38). Le tableau suivant résume les incertitudes intervenant dans la détermination de cet effet :

| Origine   | Incertaince relative en $10^{-15}$ | Equation |
|---|------------------------------------|----------|
| Détermination de $f_z$  | 0,5                                | (7-41)   |
| Différence entre $\langle B_0 \rangle^2$ et $\langle B_0^2 \rangle$ | 0,0025                             | (7-44)   |
| Correction de Breit-Rabi  | 0,8                                | (7-45)   |
| Inhomogénéité du champ  | 0,6                                | (7-67)   |

La somme quadratique de ces termes donne une incertitude de  $1,1 \mu\text{Hz}$ , soit en valeur relative :

$$\frac{\delta\nu_z}{\nu_0} < 1,3 \cdot 10^{-15} \quad (7-68)$$

## 7.8. Composantes spectrales micro-ondes supplémentaires

La probabilité de Ramsey, équation (1-6), est calculée en résolvant l'équation de Schrödinger dans l'approximation de l'onde tournante. Dans cette approximation on considère l'interaction entre l'atome et un champ tournant. Or le champ dans la cavité est polarisé linéairement. Il peut être décomposé en deux composantes tournant en sens opposées. L'une de fréquence angulaire  $\omega$ , celle qui est retenue dans l'approximation de l'onde tournante, et l'autre de fréquence  $-\omega$ , qui est négligée. Tenir compte de cette composante entraîne un déplacement de fréquence par rapport à la fréquence de résonance de l'équation (1-6), c'est l'effet Bloch-Siegert. De même si le champ dans la cavité n'est pas parfaitement monochromatique, mais possède des composantes spectrales, la fréquence de résonance va en être affectée.

### 7.8.1. Effet des impuretés spectrales

Soit  $\omega_1$  la fréquence angulaire d'une composante spectrale supplémentaire et  $b_1$  sa fréquence de Rabi associée. Suivant Vanier et Audoin [1] nous distinguerons deux cas : composante loin de la résonance ( $\omega_1 - \omega_0 \gg$  largeur de la résonance) et proche de la résonance ( $\omega_1 - \omega_0$  plus petit ou du même ordre que la largeur de la résonance). Dans les deux cas nous considérons des composantes d'amplitudes  $b_1 \ll b$ , ce qui est largement justifié expérimentalement. Dans la présence d'une composante loin de la résonance telle que

$$|(\omega_1 - \omega_0)/b_1| \gg 1, \quad (7-69)$$

La fréquence de transition dans les zones d'interaction sera différente de celle dans la zone de vol libre. Ceci peut être vu comme l'effet de l'inhomogénéité du champ magnétique donné par l'équation (7-47) avec (équation 5.6.90 dans [1]) :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{b_1^2}{2(\omega_0 - \omega_1)} \quad (7-70)$$

Le déplacement de fréquence dû à cette composante spectrale se déduit de l'équation (7-47) :

$$\nu_{IS} = -\frac{1}{2\pi} \frac{b_1^2}{(\omega_0 - \omega_1)} \gamma(\omega_m, b) \quad (7-71)$$

Si la composante parasite est proche de la résonance, le décalage est donnée par l'équation 5.6.104 dans la référence [1] .

La Fig. 7-11 montre le spectre du signal hyperfréquence à l'entrée de la cavité micro-onde. Nous constatons la présence de bandes latérales à 50 Hz et à 100 Hz.

Les deux bandes latérales à 100 Hz ont la même amplitude et sont symétrique par rapport à la résonance. Par conséquent, elles n'induisent pas un déplacement de

fréquence. Les deux bandes à 50 Hz ont des amplitudes faibles (-60 dB) par rapport à l'amplitude du signal d'interrogation principal, mais leurs amplitudes diffèrent de 0,5 dB. Ceci crée un déplacement qui se calcule selon l'équation 5.6.104 de [1], car ces deux composantes sont proches de la résonance. Tout calcul fait, avec un déséquilibre majoré à 1dB, nous estimons un effet  $\nu_{IS}$  inférieur à 8  $\mu\text{Hz}$  pour des paramètres de modulation qui varient dans l'intervalle de la Fig. 7-10.

Le spectre expérimental a été mesuré par battement entre deux chaînes dans deux pièces différentes sans isoler les masses, le 50 Hz et 100Hz visibles viennent probablement en grande partie de ce manque d'isolation et non de la chaîne elle même. Mais même avec ces valeurs l'effet est inférieur à 8  $\mu\text{Hz}$ . Nous ne corrigeons pas cet effet et nous prenons sa valeur maximale comme incertitude :

$$\frac{\delta\nu_{IS}}{\nu_0} = 9 \cdot 10^{-16} \quad (7-72)$$

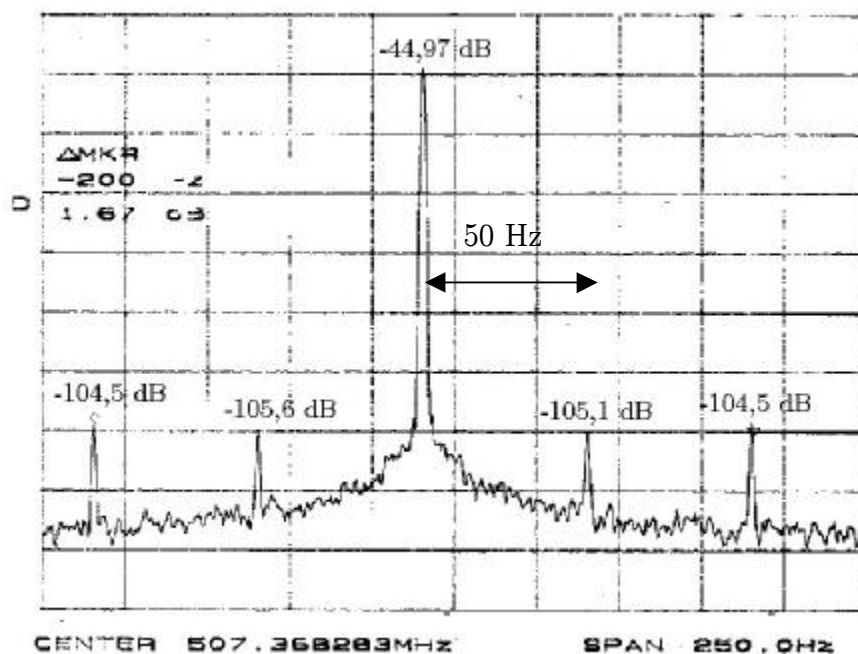


Fig. 7-11 : Spectre expérimental du signal hyperfréquence.

### 7.8.2. Effet Bloch-Siegert

Il peut être considéré comme un cas particulier d'une bande latérale d'amplitude  $b$  et de fréquence angulaire  $\omega_1 = -\omega = -\omega_0$ . Il est donc équivalent à l'effet de l'inhomogénéité du champ magnétique avec :

$$\Delta_1 = \Delta_2 = \frac{1}{2\pi} \frac{b^2}{4\omega_0} \quad (7-73)$$

Le déplacement de fréquence dû à cet effet est :

$$\nu_{BS} = -\frac{1}{2\pi} \frac{b^2}{2\omega_0} \gamma(\omega_m, b) \quad (7-74)$$

La Fig. 7-12 montre les variations de cet effet en fonction des paramètres de modulation. Dans les conditions de fonctionnement en horloge il vaut  $11,6 \mu\text{Hz}$ .

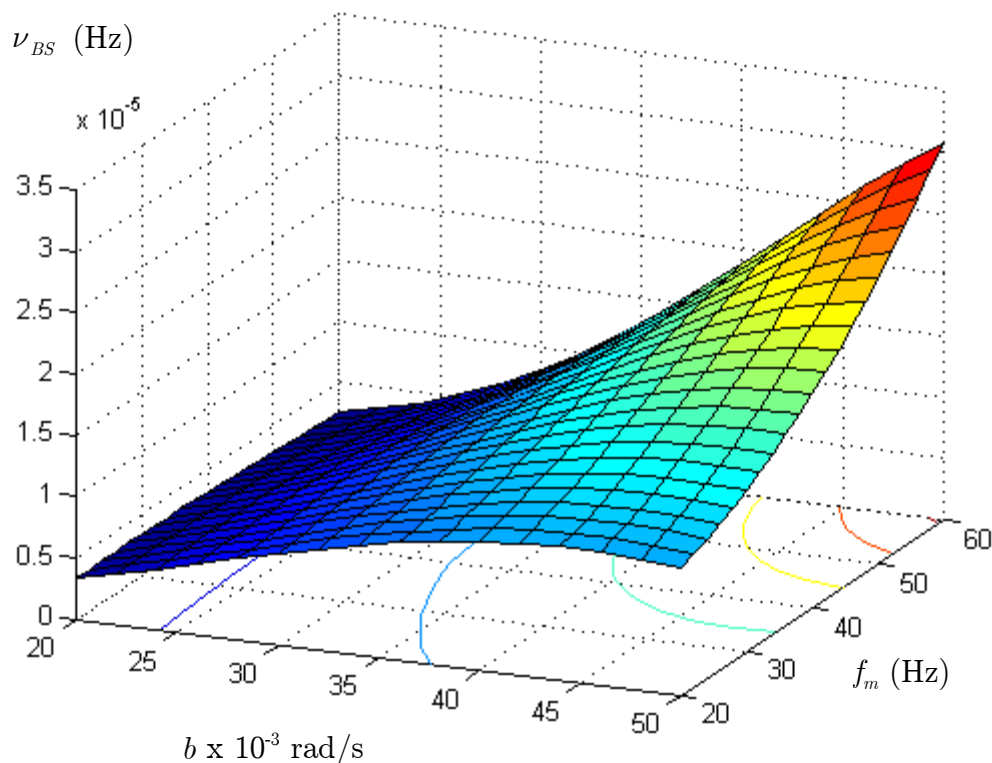


Fig. 7-12 : *Déplacement Bloch-Siegert.*

L'incertitude sur cet effet provient de l'incertitude sur  $b$  et de celle sur la distribution de vitesse. Nous avons calculé cette effet par la distribution de vitesse obtenue par différentes méthodes (voir chapitre 4) et en injectant dans la formule (7-74) des valeurs de  $b$  estimées par différentes méthodes (voir chapitre 3). Les résultats ne varient pas plus de 3 pour cent, d'où l'incertitude :

$$\frac{\delta\nu_{BS}}{\nu_0} < 4 \cdot 10^{-17} \quad (7-75)$$

## 7.9. Le déplacement lumineux ou effet Stark dynamique

### 7.9.1. Expression générale

Quand un atome avec un état fondamental  $g$  et un état excité  $e$  est soumis à un rayonnement lumineux de spectre  $E^2 \cdot u(\omega)$ , l'énergie du niveau fondamental est déplacée d'une quantité ([1] et [7]):

$$\Delta w_g = \int \frac{E^2}{4\mathbf{h}} d_{eg}^2 \frac{\omega - \omega_{eg} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}}{(\omega - \omega_{eg} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + (\Gamma_{eg}/2)^2} u(\omega) d\omega \quad (7-76)$$

où  $d_{eg}$  est le moment dipolaire électrique de la transition  $g-e$ ,  $\omega_{eg}$  est sa fréquence angulaire,  $\Gamma_{eg}$  est sa largeur naturelle ( $3,12 \cdot 10^7$  rad/s pour la raie  $D_2$  du césium).  $\mathbf{k}$  est le vecteur d'onde de l'onde lumineuse,  $\mathbf{v}$  est la vitesse de l'atome et  $u(\omega)$  est le spectre normalisé du rayonnement.

Les atomes de césium en transit entre les deux bras de la cavité baignent dans le rayonnement lumineux provenant de l'émission spontanée dans les zones de pompage et de détection. Leurs niveaux d'énergie sont donc déplacés. Calculons le spectre du rayonnement de fluorescence. Il correspond à une Lorentzienne décalée par effet Doppler et intégrée sur la distribution des vitesses, soit :

$$u(\omega) = \frac{(\Gamma_{eg}/2)^2}{\pi} \int \frac{1}{(\omega - \omega_{eg} - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 + (\Gamma_{eg}/2)^2} f(\tau) d\tau \quad (7-77)$$

où nous avons gardé la notation  $\mathbf{v}$  plutôt que  $\mathbf{l}/\tau$  pour pouvoir conserver l'écriture vectorielle.

En fait le spectre de la lumière de fluorescence contient deux composantes séparées de 9 GHz (retombées sur les niveaux  $F = 4$  et  $F = 3$ ). Or il n'y a pratiquement pas d'atomes dans le jet de vitesse supérieure à 800 m/s soit un décalage Doppler maximum de 900 MHz. On peut donc considérer quand on calcule le déplacement

d'un niveau qu'il est soumis à une seule composante, celle qui correspond à la retombée vers lui, l'autre étant trop loin de la résonance ( $9 \text{ GHz} - 0.9 \text{ GHz}$  au minimum).

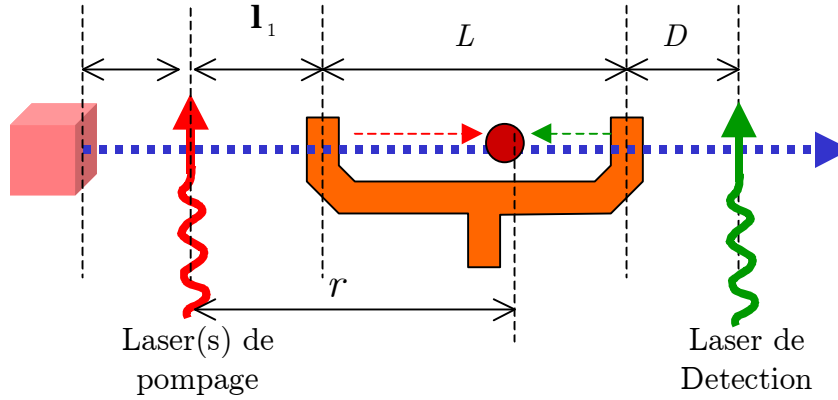


Fig. 7-13 : *Déplacement lumineux d'un atome se trouvant entre les deux bras de la cavité de Ramsey*

Dans le cas de la fluorescence provenant de la zone de pompage et en prenant  $\Gamma_{eg}/2$  comme unité de fréquence angulaire,  $u(\omega)$  devient à un coefficient multiplicatif près :

$$\xi(x) = \int \frac{1}{(x - k\mathbf{l}/\tau)^2 + 1} f(\tau) d\tau \quad (7-78)$$

où  $x$  est le désaccord en fréquence normalisé.

Le déplacement du niveau  $g$  pour un atome de temps de vol  $\tau$  s'écrit alors :

$$\Delta w_g(\tau) = c_g \int \frac{x - k\mathbf{l}/\tau}{(x - k\mathbf{l}/\tau)^2 + 1} \xi(x) dx \quad (7-79)$$

où  $c_g$  est une constante qui tient compte de la moyenne du moment dipolaire sur les polarisations de la lumière et sur les sous-niveaux Zeeman du niveau excité, et de l'intensité de la lumière de fluorescence.

La même équation avec un coefficient  $c_f$  s'applique au déplacement  $\Delta w_f$  du niveau  $f$ ,  $f$  et  $g$  étant deux sous-niveaux de l'état fondamental, ici les deux niveaux de la transition d'horloge. La fréquence de cette transition est donc déplacée, pour un atome de temps de vol  $\tau$ , d'une quantité :

$$\Delta_L(\tau) = \Lambda_0 \int \frac{x - k\mathbf{l}/\tau}{(x - k\mathbf{l}/\tau)^2 + 1} \xi(x) dx \quad (7-80)$$

La Fig. 7-14 représente le déplacement de la fréquence de transition angulaire pour un atome en fonction de son temps de vol  $\tau$ .

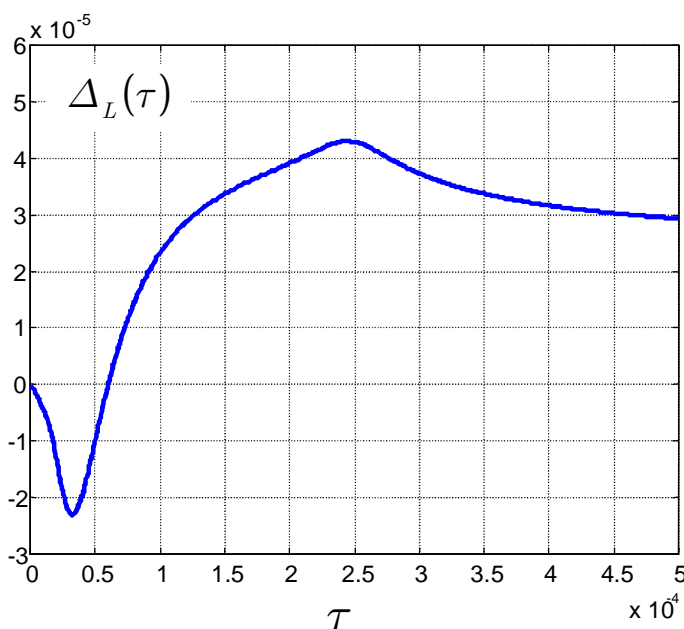


Fig. 7-14 : Déplacement lumineux normalisé en fonction du temps de vol.

Le déplacement lumineux total est donné par l'équation (7-16) en y substituant  $\Delta$  par l'expression (7-80). On peut l'écrire sous la forme :

$$\nu_L = \Lambda_0 f_L(\omega_m, b) \quad (7-81)$$



Le terme  $\Lambda_0$  est déterminé expérimentalement. Rappelons que nous avons établi cette expression pour le déplacement causé par la lumière provenant de la zone de pompage. Le déplacement causé par la lumière provenant de la zone de détection est obtenu par la même expression en remplaçant  $-k$  par  $k$  dans les équations (7-78) et (7-80).

## 7.9.2. Détermination expérimentale de $\Lambda_0$

### 7.9.2.1. lumière provenant du pompage

Rappelons que  $\Lambda_0$  est proportionnel à l'intensité de la lumière. La façon la plus simple de déterminer  $\Lambda_0$  est donc de mesurer la fréquence de l'étalon en fonction de l'intensité de lumière de fluorescence. Mais si le pompage est complet, ce qui est notre cas, le nombre de photons échangés au cours du pompage est constant et indépendant de la puissance laser. Cependant l'intensité de lumière varie comme  $1/r^2$  où  $r$  est la distance entre la zone de pompage et l'atome considéré (voir Fig. 7-14). On doit donc intégrer l'intensité lumineuse sur la distance comprise entre les deux bras de la cavité :

$$\Lambda_0 = \Lambda_L \int_{\mathbf{1}_1}^{\mathbf{1}_1+L} \frac{1}{r^2} dr = \Lambda_L \frac{1}{\mathbf{1}_1(\mathbf{1}_1 + L)} \quad (7-82)$$

avec  $\mathbf{1}_1$  la distance entre la zone de pompage 1 et le premier bras de la cavité ( $\mathbf{1}_1 = 335mm$ ). Comme nous disposons d'une deuxième zone de pompage (voir Fig. 7-15) à une distance  $\mathbf{1}_2$  ( $\mathbf{1}_1 = \mathbf{1}_2 + 100mm$ ) de la cavité nous pouvons faire varier le déplacement lumineux en changeant de zone de pompage. Soient  $\nu_1$  et  $\nu_2$  les fréquences mesurées pour un pompage en zones 1 et 2 :

$$\begin{aligned} \nu_1 &= cte + \nu_L(1) \\ \text{et } \nu_2 &= cte + \nu_L(2) = cte + \frac{\mathbf{1}_1(\mathbf{1}_1 + L)}{\mathbf{1}_2(\mathbf{1}_2 + L)} \nu_L(1) \end{aligned} \quad (7-83)$$

avec  $\nu_L(1)$  le déplacement lumineux pour un pompage en zone 1. On en déduit :

$$\nu_L(\mathbf{l}) = \Lambda_0 f_L(\omega_m, b) = \frac{(\nu_2 - \nu_1)}{\frac{\mathbf{l}_1(\mathbf{l}_1 + L)}{\mathbf{l}_2(\mathbf{l}_2 + L)} - 1} = 1,86(\nu_2 - \nu_1) \quad (7-84)$$

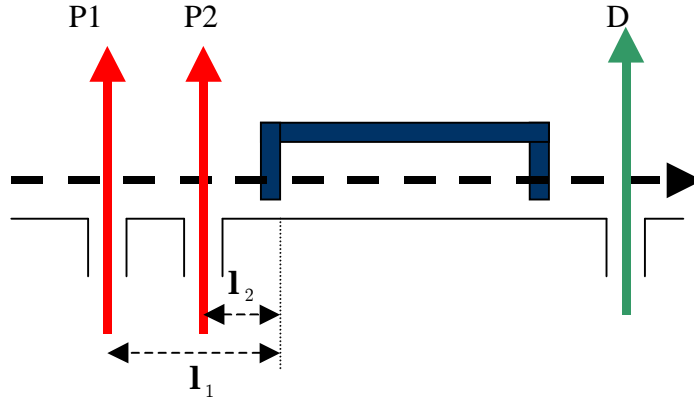


Fig. 7-15 : *Montage expérimental pour mesurer le déplacement dû au pompage.*

L'effet étant petit, inférieur à  $1 \cdot 10^{-14}$ , il est mesuré pour des valeurs élevées de la profondeur de modulation et de la puissance micro-onde qui augmentent la valeur de  $f_L(\omega_m, b)$ .

#### 7.9.2.2. *Lumière provenant de la zone de détection*

Rappelons que nous utilisons pour la détection une transition cyclante, contrairement au cas précédent on peut donc modifier le nombre de photons échangés en changeant la puissance du laser. Le nombre de photons émis par émission spontanée par un atome de vitesse  $v$  est égal à :

$$n = \frac{s}{1+s} \frac{\Gamma_{eg}}{2} \frac{d}{v} \quad (7-85)$$

$s$  est le paramètre de saturation,  $s = I_1 / I_0$  avec  $I_1$  l'intensité laser en  $\text{mW}/\text{cm}^2$ ,  $I_0$  est l'intensité de saturation  $I_0 = 1,1 \text{ mW}/\text{cm}^2$  pour la transition 4-5,  $d$  est le diamètre du faisceau laser (7 mm).

Le déplacement lumineux peut alors s'écrire :

$$\nu = cte + \nu_L = cte + \frac{s}{1+s} A_s f_L(\omega_m, b) \quad (7-86)$$

$A_s$  est déterminé en ajustant une droite des moindres carrés sur les mesures de la fréquence en fonction de  $s/(1+s)$ .

### 7.9.3. Résultats expérimentaux

La procédure employée est la suivante. Pour une valeur donnée du paramètre considéré, la fréquence de l'étalon par rapport au maser est mesurée en intégrant sur une journée. Puis la valeur du paramètre est changée. Afin de minimiser l'erreur due à une dérive ou un saut de fréquence du maser le choix du paramètre est alterné plusieurs fois de suite. La durée totale d'une mesure est de plus d'une semaine.

Pour le sens WE du jet, le déplacement lumineux du au pompage a été mesuré une première fois à puissance micro-onde optimale ( $P_{opt}$ ) et avec une profondeur de modulation de 45 Hz :  $\nu_L = (-56 \pm 33) \mu\text{Hz}$ . La mesure a été reprise quelques mois plus tard avec une puissance double et une profondeur de modulation de 60 Hz, on gagne ainsi un facteur 1,8. Ramené aux conditions habituelles le résultat est :  $\nu_L = (-85 \pm 21) \mu\text{Hz}$ . La moyenne pondérée par l'inverse des incertitudes donne :  $\nu_L = (-76 \pm 18) \mu\text{Hz}$ .

Le déplacement du à la détection a également été mesuré à diverses reprises. Ramené aux conditions habituelles ( $P_{opt}$ ,  $f_m = 45$  Hz, puissance laser = 100  $\mu\text{W}$ ) il vaut :  $\nu_L = (-4,4 \pm 1) \mu\text{Hz}$ .

Le déplacement lumineux total est donc :

$$\nu_L = (-80 \pm 18) \mu\text{Hz} \quad (7-87)$$

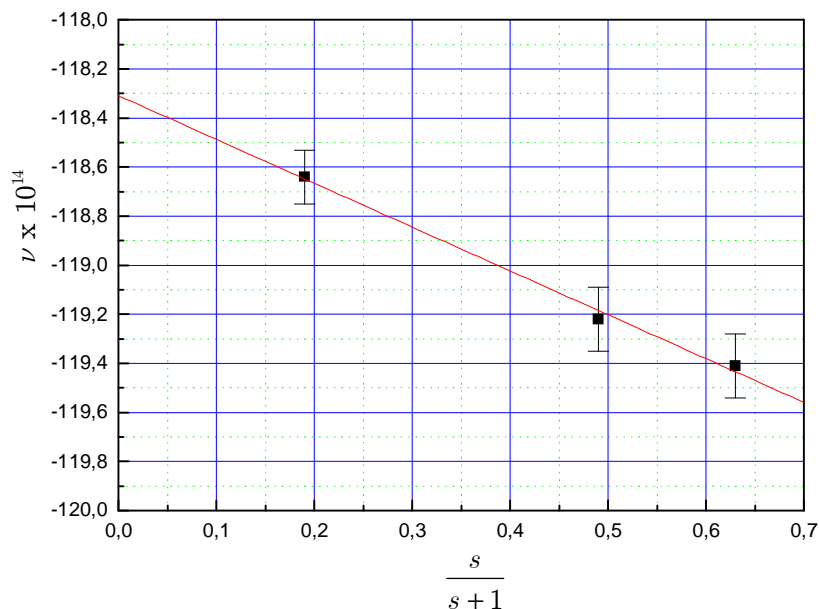


Fig. 7-16 : Exemple de mesure de fréquence en fonction du paramètre  $s/(1+s)$ .

ce qui correspond à un coefficient  $\Lambda_0$  :

$$\Lambda_0 = -37,2 \pm 8 \quad (7-88)$$

Pour le sens opposé du jet nous avons mesuré :

$$\begin{aligned} \nu_L &= (-66 \pm 17) \mu\text{Hz} \\ \text{et } \Lambda_0 &= -29 \pm 7 \end{aligned} \quad (7-89)$$

Nous avons donné ici les déplacements en fréquence et ramenés aux conditions habituelles parce que c'est plus parlant, mais en réalité c'est le coefficient  $\Lambda_0$  qui est mesuré et que nous utilisons.

La précision est limitée par les mesures de fréquences, soulignons qu'elle nécessite à la fois une excellente stabilité de fréquence de l'étalon et une référence, ici le maser à hydrogène, très stable sur plusieurs jours.

Le déplacement du à la détection a également été mesuré avec un flux atomique beaucoup plus important : four à 100°C et pompage à deux lasers. Le déplacement est multiplié en conséquence, ce qui nous permet d'affirmer que nous mesurons bien l'effet de la fluorescence du jet et non l'effet de la lumière parasite.

*Ces résultats sont-ils raisonnables ?*

Shirley [8] a calculé des coefficients permettant d'estimer le déplacement lumineux dans un étalon à pompage optique. Il donne les coefficients  $a_S$  tels que :

$$\frac{\nu_L}{\nu_0} = a_S I_{Fl} \quad (7-90)$$

$a_S$  est donné pour chaque niveau supérieur fluorescent et pour chaque polarisation,  $I_{Fl}$  est l'intensité de fluorescence entre les bras de la cavité (en W/m<sup>2</sup>).

Pour une température du four de 90°C et à partir de la géométrie du jet on estime le flux atomique dans la zone de pompage à  $1,4 \cdot 10^{12}$  atomes/s. Avec un photon par atome en moyenne l'intensité de fluorescence correspondante moyennée sur la longueur de la cavité est  $5,7 \cdot 10^{-8}$  W/m<sup>2</sup>. Le coefficient  $a_S$  pour le niveau 4 moyenné sur les polarisations vaut  $-5,4 \cdot 10^{-8}$  d'où un déplacement relatif :

$$\frac{\nu_L}{\nu_0} = -3,1 \times 10^{-15},$$

soit  $\nu_L = -28 \mu\text{Hz}$  (7-91)

Si on estime, d'après la géométrie du jet, le flux atomique dans la zone de détection à  $2,3 \times 10^{10}$  atomes/s, compte tenu d'une probabilité 0,15 d'être pompé initialement dans l'état ( $F = 3, m = 0$ ), d'une probabilité 0,36 (à mi-hauteur de la résonance) de subir la transition micro-onde, le flux d'atomes dans l'état ( $F = 4, m = 0$ ) dans la zone de détection est égal à  $1,2 \times 10^9$  atomes/s. Dans les conditions habituelles de fonctionnement la puissance du laser est de 100  $\mu\text{W}$ , soit un paramètre de saturation de 0,5, ce qui correspond à une moyenne de 160 photons de fluorescence par

atome. L'intensité de fluorescence moyennée sur la longueur de la cavité (qui est plus proche que pour le pompage) est  $1,2 \times 10^{-8} \text{ W/m}^2$  dans ce cas. Le coefficient  $a_s$  pour le niveau 5 moyenné sur les polarisations vaut  $3 \times 10^{-8}$  d'où un déplacement relatif :

$$\frac{\nu_L}{\nu_0} = 0,4 \times 10^{-15}, \text{ soit } \nu_L = +3,7 \mu\text{Hz} \quad (7-92)$$

L'accord avec nos résultats expérimentaux est satisfaisant étant donné les incertitudes sur nos mesures, sur les flux atomiques et les approximations utilisées par Shirley. Notons que le signe du déplacement du à la détection est inversé, ce qui peut s'expliquer par le fait que Shirley calcule son coefficient  $a_s$  pour une lumière provenant de la zone de pompage, c'est à dire se propageant dans le même sens que les atomes.

## 7.10. Les fuites micro-ondes

Depuis quelque temps l'existence de fuites micro-ondes dans l'enceinte à vide s'est révélée un problème crucial dans l'évaluation de l'exactitude des étalons primaires ([9], [10], [11]). Ce rayonnement parasite à 9 GHz peut provenir soit de l'intérieur de l'enceinte, fuites provenant de la cavité ou des connecteurs coaxiaux, soit de l'extérieur, fuites provenant du générateur 9 GHz et des connections entre câbles et transmises dans l'enceinte par les passages électriques et les hublots. Si les atomes interagissent avec un rayonnement parasite en dehors des deux zones de Ramsey leur fréquence de résonance peut être déplacée d'une quantité qu'il est extrêmement difficile de prévoir. En effet, le calcul de cet effet requerrait la connaissance de la phase, de l'amplitude et du vecteur  $\mathbf{k}$  de l'onde parasite en tout point du jet, ce qui est impossible, et même dans ce cas le calcul serait très complexe. La signature de cet effet est un déplacement de fréquence anormal avec la puissance micro-onde et/ou une grande sensibilité de la fréquence à une modification de la géométrie du montage interne ou externe (déplacement d'un câble par exemple). Cet effet était estimé à  $1 \cdot 10^{-13}$  dans le montage d'origine de JPO.

Le calcul théorique de cet effet a été effectué dans deux cas "simples" : onde progressive parasite sur l'axe du jet [12] et propagation perpendiculaire au jet avec un déphasage [13], dans le cas d'une onde perpendiculaire sans déphasage l'effet modi-

fie la forme de raie de façon symétrique sans déplacer la résonance. Les deux modèles prévoient un déplacement de fréquence proportionnel au rapport des amplitudes de l'onde parasite  $B_f$  et du champ dans la cavité  $B_c$  :

$$\nu_{fuites} \propto \frac{B_f}{B_c} \quad (7-93)$$

D'après ce modèle une onde progressive de puissance inférieure de 130dB à la puissance du champ dans la cavité entraîne un déplacement de fréquence inférieur à  $10^{-15}$ . Un grand soin a été apporté lors de la construction de la nouvelle cavité à l'extinction des fuites micro-onde. La puissance des fuites issues de la cavité mesurée avec un cornet standard bande X est inférieure de 154 dB à la puissance injectée dans la cavité. De même tous les éléments de l'ensemble générant le signal d'interrogation à 9 GHz ont été blindés avec le plus grand soin. Il n'est cependant pas possible d'éliminer totalement toute fuite. La puissance du rayonnement parasite mesurée devant l'enceinte à vide avec le même cornet est de -145 dB par rapport à la puissance injectée dans la cavité, soit 35 dB de mieux que le montage primitif. Comme celui-ci correspondait à une erreur de fréquence de  $1 \cdot 10^{-13}$ , on en déduit d'après l'équation (7-93) un écart relatif maximum de fréquence de  $2 \cdot 10^{-15}$ . C'est ce chiffre que nous prendrons comme incertitude :

$$\frac{\delta\nu_{fuites}}{\nu_0} = 2 \cdot 10^{-15} \quad (7-94)$$

## 7.11. Effet du déphasage dans la cavité

La cavité résonnante présente des pertes en raison de la conductivité finie de ses parois. Par conséquent, il existe, en plus de l'onde stationnaire pure prévue dans une structure résonnante idéale, une onde progressive qui transporte l'énergie perdue par effet Joule. La phase du champ magnétique oscillant représente des sauts de phases de  $\pi$  au passage par chacun des nœuds de résonance (voir Fig. 7-17), mais en cas de pertes il varie presque linéairement entre deux nœuds.

Si les deux bras de la cavité possèdent des longueurs électriques légèrement différentes, les atomes seront interrogés par deux champs magnétiques (dans les deux zones d'interaction) qui présentent une différence de phase  $\phi$  donnée par [1] :

$$\phi = \pi\alpha_g L\Delta L / \lambda_g \quad (7-95)$$

où  $L$  est la longueur totale de la cavité,  $\Delta L$  est la différence de longueur entre les deux bras et  $\alpha_g$  est une constante d'atténuation qui dépend de la conductivité et du mode de résonance.

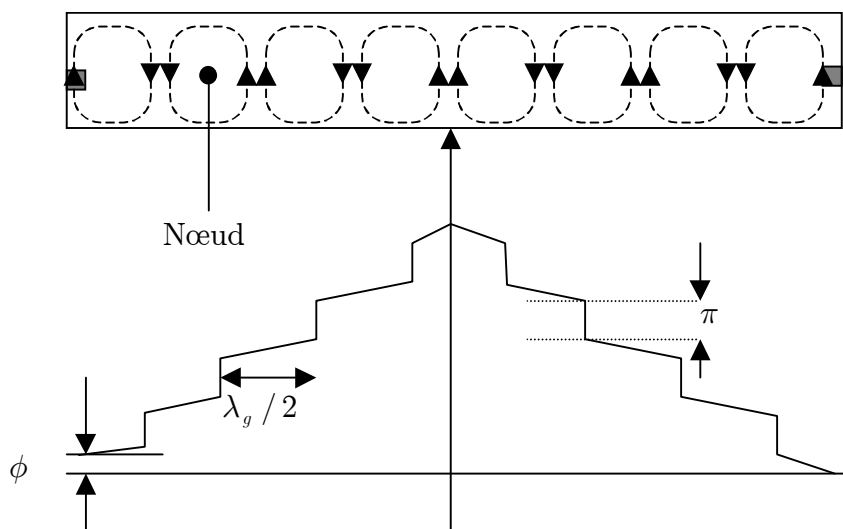


Fig. 7-17 : Représentation schématique des variations de la phase du champ magnétique dans la cavité.

La probabilité de transition en présence d'un déphasage  $\phi$  entre les deux champs oscillants est donnée par l'équation (1-6). En développant cette équation au premier ordre en  $\Omega_0 / b$  nous avons :

$$P(\tau, \Omega_0, b) = \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) \left[ 1 + \cos(a\Omega_0\tau) - 2 \frac{\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \sin(a\Omega_0\tau) \right] - \phi \frac{1}{2} \sin^2(b\tau) \left[ \sin(a\Omega_0\tau) + 2 \frac{\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \cos(a\Omega_0\tau) \right] \quad (7-96)$$



Après intégration sur tous les temps de vol, le signal de Ramsey perturbé par le déphasage  $\phi$  s'écrit sous la somme d'une fonction paire donnée par l'expression (7-6) et une fonction impaire donnée par :

$$g(\Omega_0) = -\phi \frac{1}{2} \int f(\tau) \sin^2(b\tau) \left[ \sin(a\Omega_0\tau) + \frac{2\Omega_0}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \cos(a\Omega_0\tau) \right] \quad (7-97)$$

Notons que cette expression est différente de celle obtenue à partir de l'expression (7-7) en remplaçant  $\Delta$  par  $\Delta_\phi = -\frac{\phi}{a\tau}$ . Ce résultat montre que, dans le cadre d'une approximation du premier ordre en  $\Omega_0/b$ , l'effet du déphasage n'est pas une simple translation de  $-\frac{\phi}{T}$  même pour un jet monocinétique.

En remplaçant les expressions (7-97) et (7-15) dans l'équation (7-16), nous obtenons l'expression du déplacement de fréquence  $\nu_\phi$  induit par le déphasage  $\phi$  :

$$\nu_\phi = -\phi \frac{\int f(\tau) \sin^2(b\tau) \left[ \sin(a\omega_m\tau) + \frac{2\omega_m}{b} \tan\left(\frac{b\tau}{2}\right) \cos(a\omega_m\tau) \right]}{2\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} = -\phi F(\omega_m, b) \quad (7-98)$$

La fonction  $F(\omega_m, b)$  peut être calculée connaissant la distribution du temps de vol ou bien directement à partir d'une frange de Ramsey expérimentale [2]. Il est clair que cette fonction dépend des paramètres de modulation  $(\omega_m, b)$ . En conséquence, l'effet de déphasage est un effet déformateur. La valeur de  $\phi$  est inconnue et il est impossible de la déterminer à partir de l'équation (7-95), car nous ne pouvons pas déterminer la différence de longueurs *électriques* entre les deux bras de la cavité. Cette différence de longueur dépend de la géométrie de la cavité, mais aussi de l'état de surface et de l'homogénéité du métal formant la cavité.

Lors de l'assemblage de la cavité, nous avons réglé la symétrie électrique de la cavité de façon à minimiser l'amplitude des modes des résonances impaires. L'amplitude de ces modes étant nulle dans le cas d'une cavité parfaitement symétrique, nous avons estimé une différence de longueur entre les deux bras  $\Delta L$  inférieure à 20  $\mu\text{m}$ . En utilisant l'équation (7-95) nous nous attendions à réaliser un déphasage

$\phi$  inférieur à  $40 \mu\text{rad}$ . Mais quelle est la vraie valeur du déphasage  $\phi$  vu par les atomes?

Une première méthode utilisée [14] pour estimer  $\phi$  consistait à mesurer la fréquence de l'étalon pour deux temps de vol ( $\tau_1 \neq \tau_2$ ) obtenus par sélection de la vitesse des atomes :

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= Cte - \frac{\phi}{2\pi T_1} \\ \nu_2 &= Cte - \frac{\phi}{2\pi T_2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi = \frac{2\pi(\nu_1 - \nu_2)T_1 T_2}{T_1 - T_2} \quad (7-99)$$

Le déphasage  $\phi$  étant égale à la phase dans le deuxième bras moins celle dans le premier bras, un reversement du jet permet de changer le signe du déphasage  $\phi$ . D'où la méthode de reversement du jet qui consiste à mesure la fréquence de l'étalon dans deux sens :

$$\left. \begin{aligned} \nu_1 &= Cte - \phi F \\ \nu_2 &= Cte + \phi F \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi = -\frac{(\nu_1 - \nu_2)}{2F} \quad (7-100)$$

Cette méthode exige une parfaite symétrie lors du reversement du jet qui assure que tous les autres effets (la constante dans l'équation (7-100)) ne changent pas avec le reversement. La phase du champ magnétique hyperfréquence dépend de la position dans la région d'interaction. Cette variation spatiale est due également aux pertes dans les parois de la cavité. Ceci augmente les exigences de symétrie du recouvrement du jet lors de son renversement. Le déphasage  $\phi$  considéré ci-dessus doit donc être interprété comme le déphasage total, somme du déphasage lié au déséquilibre entre les longueurs des deux bras ("End to End") et du déphasage réparti ("Distributed"). Ce dernier étant moyenné sur les trajectoires atomiques dans chaque zone d'interaction, il est donc difficile à estimer. Pour vérifier la validité de la méthode de reversement du jet, nous avons proposé une nouvelle méthode qui permet d'estimer le déphasage total ("End to End" + "Distributed").

### 7.11.1. Nouvelle méthode d'estimation de $\phi$

Elle est basée sur le simple fait que tous les effets déformateurs (y compris l'effet de déphasage) dépendent des paramètres de modulation. C'est De Marchi [15] qui fut le premier à étudier la dépendance de ces effets en fonction des paramètres de modulation. La fréquence mesurée lors de l'asservissement dans l'horloge s'écrit d'après les équations (7-22) et (7-98) :

$$\nu_{Ex}(\omega_m, b) = \alpha - \sum_{i \neq \text{déphasage}} \nu_{\Delta_i} - \phi F(\omega_m, b) \quad (7-101)$$

En faisant varier les paramètres  $\omega_m$  (profondeur de modulation) et  $b$  (puissance micro-onde), nous obtenons pour chaque couple  $j$  de valeurs  $(\omega_m, b)$  une fréquence mesurée  $\nu_{Ex}(j)$ . Si nous connaissons tous les effets  $\nu_{\Delta_i}$ , à l'exception du déplacement du au déphasage, nous pouvons corriger les fréquences mesurées pour obtenir des fréquences corrigées  $x(j)$  :

$$x(j) = \nu_{Ex}(j) + \sum_{i \neq \text{déphasage}} \nu_{\Delta_i}(j) = \alpha - \phi F(j) \quad (7-102)$$

En utilisant  $N$  mesures ( $j=1..N$ ), nous pouvons former un vecteur  $\mathbf{X}$  des fréquences corrigées :

$$\begin{pmatrix} x(1) \\ x(2) \\ \mathbf{M} \\ x(N) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -F(1) \\ 1 & -F(2) \\ \mathbf{M} & \mathbf{M} \\ 1 & -F(N) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \phi \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{X} = \mathbf{A}\Theta \quad (7-103)$$

Cette équation représente un système d'équations linéaire à deux inconnus ( $\alpha$  et  $\phi$ ). D'une façon plus simple, la relation reliant  $F$  à  $x$  est représentée par une droite dont la pente est  $\phi$ . Tous les méthodes pour estimer la pente de cette droite étant

bonnes, nous préférons la méthode céleste<sup>25</sup>, celle des moindres carrés. La méthode des moindres carrés pondérés permet, en plus de la détermination des inconnues, d'estimer leurs incertitudes.

L'incertitude des fréquences corrigées  $x(j)$  s'obtient à partir de l'équation (7-102), en supposant que tous les effets sont indépendants :

$$\sigma_x(j) = \sqrt{\sigma_{Ex}^2(j) + \sum_{i \neq \text{déphasage}} \sigma_{\Delta_i}^2(j)} \quad (7-104)$$

où  $\sigma_{Ex}(j)$  représente l'incertitude des fréquences mesurées. Elle dépend de la stabilité de l'horloge.  $\sigma_{\Delta_i}(j)$  représente l'incertitude de l'effet  $\Delta_i$  supposé connue. Notons que  $\sigma_{\Delta_i}(j)$  dépend des paramètres de modulations quand il s'agit d'un effet déformateur seulement.

Dans le cas où les effets ne sont pas indépendants, nous pouvons majorer l'incertitude  $\sigma_x(j)$  par :

$$\sigma_x(j) \leq \sigma_{Ex}(j) + \sum_{i \neq \text{déphasage}} \sigma_{\Delta_i}(j) \quad (7-105)$$

La matrice de covariance  $\mathbf{R}_X$  du vecteur  $\mathbf{X}$  exprime l'incertitude de ce vecteur. Dans l'hypothèse (vérifiée) que les  $N$  différentes mesures sont non corrélées, elle s'écrit :

$$\mathbf{R}_X = \text{diag}(\sigma_x^2(1), \mathbf{L}, \sigma_x^2(N)) \quad (7-106)$$

---

<sup>25</sup> La première impulsion dans le développement de la théorie de l'estimation provient apparemment d'études astronomiques dans lesquelles les mouvements de planètes et de comètes étaient déterminés à partir d'observations télescopiques. Gauss s'est illustré dans la résolution de ce problème, non seulement en développant la méthode des moindres carrés, mais en introduisant de plus tous les ingrédients qui allaient constituer les fondements des autres méthodes de traitement de données, dont la plus célèbre (sinon la plus utile) est actuellement, en traitement du signal et en automatique, le filtre de Kalman.

où *diag* signifie une matrice diagonale.

Pour résoudre l'équation (7-103) en  $\alpha$  et  $\phi$ , nous cherchons une solution *non biaisée*  $\hat{\Theta}$  qui a une covariance  $\mathbf{R}_{\Theta}$  minimale. Ceci peut être vu comme un problème de minimisation (de  $\mathbf{R}_{\Theta}$ ) sous une contrainte (solution non biaisée). La solution formelle de ce problème est donnée par :

$$\hat{\Theta} = (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{R}_X \cdot \mathbf{A})^{-1} \cdot \mathbf{A}^t \cdot \mathbf{R}_X^{-1} \cdot \mathbf{X} \quad (7-107)$$

La covariance de cette solution est :

$$\mathbf{R}_{\hat{\Theta}} = (\mathbf{A}^t \cdot \mathbf{R}_X^{-1} \cdot \mathbf{A})^{-1} \quad (7-108)$$

$\mathbf{R}_{\hat{\Theta}}$  est une matrice carrée (2 x 2). Ses termes diagonaux expriment l'incertitude de  $\alpha$  et  $\phi$  :

$$\sigma_{\phi} = \sqrt{\mathbf{R}_{\hat{\Theta}}(2,2)} \quad \text{et} \quad \sigma_{\alpha} = \sqrt{\mathbf{R}_{\hat{\Theta}}(1,1)} \quad (7-109)$$

Ses termes non diagonaux expriment la corrélation entre  $\alpha$  et  $\phi$ .

Notons que la solution (7-107) est un cas particulier de celle obtenue par la méthode des moindres carrés pondérés. Elle s'obtient en remplaçant la matrice de pondération par l'inverse de la matrice de covariance  $\mathbf{R}_X$  des observations  $\mathbf{X}$ .

Si la matrice  $\mathbf{R}_X$  est inconnue, nous pouvons la remplacer par la matrice identité. Dans ce cas nous retrouvons la solution des moindres carrés classique.

Quand la distribution de vitesse est étroite, changer les paramètres  $\omega_m$  et  $b$  conduit à des valeurs  $F(j)$  qui sont très proches l'une des autres. Par conséquent, les lignes de la matrice  $\mathbf{A}$  de l'équation (7-103) deviennent linéairement dépendantes et la matrice  $\mathbf{A}$  est dite *mal-conditionnée*. Dans ce cas, l'inversion du système d'équations (7-103) constitue un problème mal posé dont la solution est non significative. L'application de la régularisation de Tikhonov introduite au chapitre 4 n'a pas de sens ici car un lissage de la solution conduit à des valeurs proches de  $\alpha$  et  $\phi$ , ce qui n'a aucun fondement physique.

### 7.11.2. Résultats Expérimentaux

Pour mettre en pratique notre nouvelle méthode, nous avons effectué des mesures de la fréquence asservie en fonction des paramètres de modulation pour les deux sens du jet. Ceci nous a permis d'estimer le déphasage  $\phi$  par la méthode du reversement du jet en plus de notre méthode.

Pour chaque sens du jet nous avons mesuré la fréquence  $\nu_{Ex}$  dans les conditions suivantes:

- 1)  $\omega_m = 2\pi \times 45$  rad/s, et  $b$  variant dans l'ensemble  $b \in b_{opt} \times \{0,45, 0,63, 0,78, 0,9, 1,00, 1,1, 1,19\}$  rad/s.
- 2)  $b = b_{opt}$  et  $\omega_m$  variant dans l'ensemble  $\omega_m \in 2\pi \times \{30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 70\}$  rad/s.
- 3)  $b = 0,6 b_{opt}$  et  $\omega_m$  variant dans l'ensemble  $\omega_m \in 2\pi \times \{25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60\}$  rad/s.

La demi-largeur à mi-hauteur de la frange de Ramsey dans JPO est de l'ordre de 50 Hz quand la pulsation de Rabi vaut  $b_{opt}$ , la pulsation qui maximise le signal à la résonance.

Nous avons ainsi obtenu un ensemble de  $N$  ( $N \cong 25$ ) mesures distinctes pour chaque sens de jet. Le temps total de mesure est un peu inférieur à 5 jours. La dérive relative du Maser pendant cette période est inférieure à  $10^{-15}$ . La fréquence mesurée est corrigée de tous les effets connus sauf l'effet de déphasage de la cavité. L'incertitude  $\sigma_x(j)$  pour les différents points est entre  $4 \times 10^{-5}$  Hz et  $8 \times 10^{-5}$  Hz.

Pour chaque couple de paramètres  $(\omega_m, b)$ , les valeurs de la fonction  $F(\omega_m, b)$  dans l'équation (7-98) ont été calculées connaissant la distribution de vitesse déterminée antérieurement. A titre d'exemple nous montrons sur la Fig. 7-18 la fonction  $F(\omega_m, b)$  en fonction de  $\omega_m$  pour deux valeurs de  $b$ .

Nous remarquons sur cette figure, que la fonction  $F$  et par suite l'effet de déphasage est nul (les cercles sur la figure) pour certaines valeurs de  $\omega_m$  et de  $b$ . Dans ces conditions ( $F(\omega_m, b) = 0$ ), la pente du discriminateur de fréquence est faible et la stabilité est dégradée.

Chaque fréquence mesurée  $\nu_{Ex}(j)$  a été corrigée (voir 7.11.3 plus loin) de tous les effets connus sauf l'effet de déphasage. La Fig. 7-19 montre les valeurs de la fréquence corrigée  $x(j)$  en fonction des valeurs  $F(j)$  calculées numériquement.

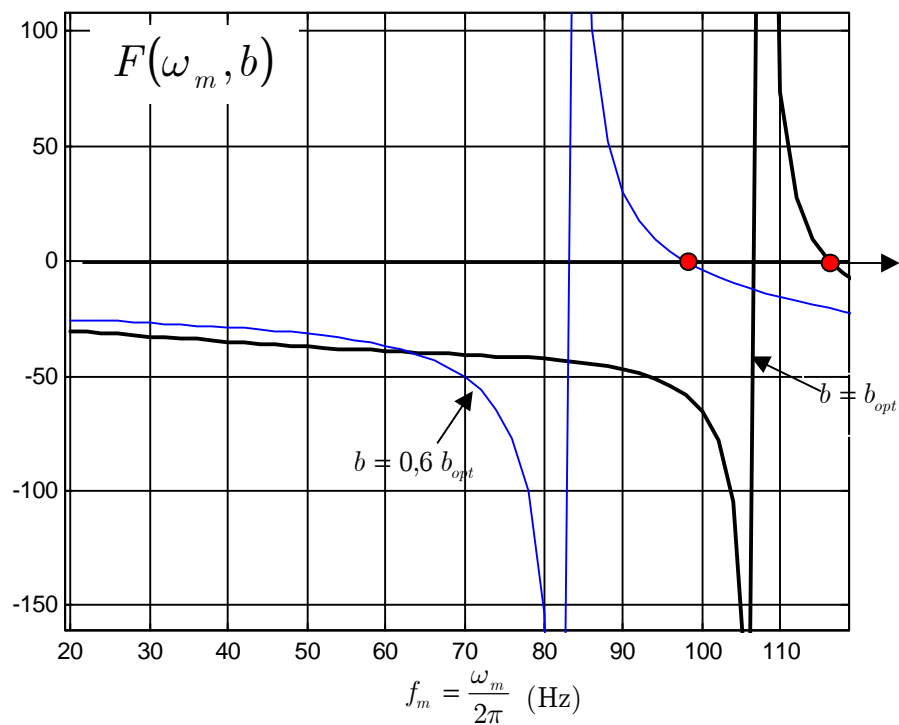


Fig. 7-18 : Variation de la fonction  $F(\omega_m, b)$  en fonction de  $f_m$ .

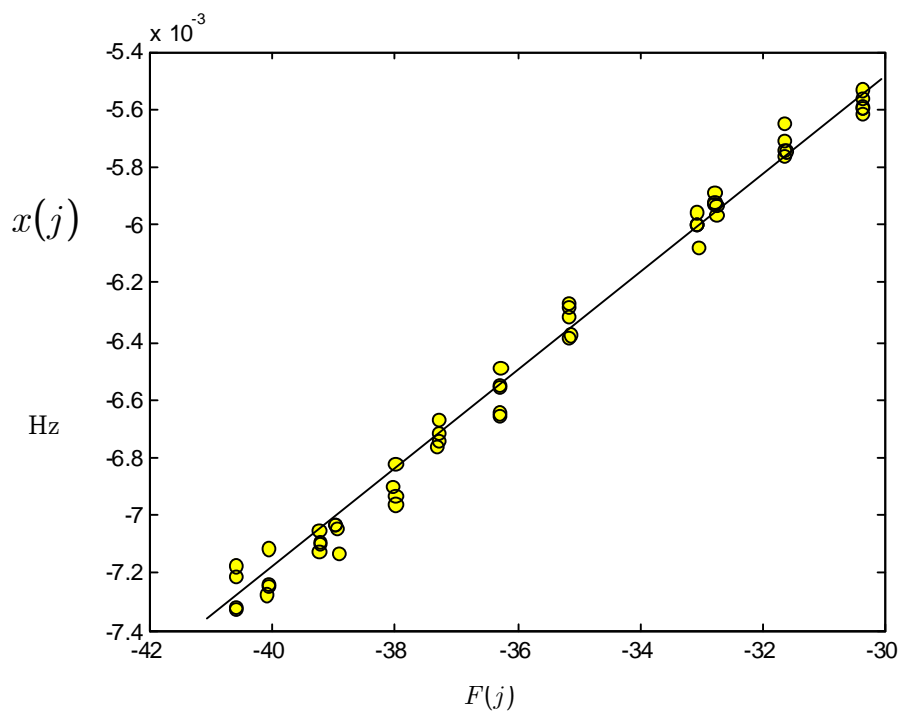


Fig. 7-19 : Fréquence mesurée et corrigée  $x(j)$  en fonction de  $F(j)$ .

Nous constatons bien la relation linéaire entre  $F$  et  $x$ . L'application de la méthode des moindres carrés (équation(7-107)) a conduit aux valeurs suivantes pour le premier sens du jet :

$$\begin{aligned}\phi_1 &= 179,5 \mu\text{rad}, \quad \sigma_\phi = 2,3 \mu\text{rad} \\ \alpha &= -13,6 \times 10^{-5} \text{ Hz}, \quad \sigma_\alpha = 8,1 \times 10^{-5} \text{ Hz}\end{aligned}\tag{7-110}$$

La même méthode a été appliquée sur des mesures effectuées dans l'autre sens du jet. Elle a aboutit aux résultats suivants :

$$\begin{aligned}\phi_2 &= -179,8 \mu\text{rad}, \quad \sigma_\phi = 2,1 \mu\text{rad} \\ \alpha &= -5,6 \times 10^{-5} \text{ Hz}, \quad \sigma_\alpha = 7,6 \times 10^{-5} \text{ Hz}\end{aligned}\tag{7-111}$$

La baisse des incertitudes pour ce sens peut s'expliquer par une meilleure stabilité de notre étalon pour ce sens. La variation de la valeur de  $\alpha$  est due aux dérives de la fréquence de notre Maser entre les deux périodes de mesure.

Notons que ces valeurs de  $\phi$  représentent le déphasage total ("End to End" + "Distributed") dans chaque sens. Le fait que les deux valeurs soient presque identiques signifie que le déphasage réparti ("Distributed"), qui ne change pas de signe par renversement du jet, est négligeable ( $< 0,3 \mu\text{rad}$ ) dans notre étalon.

En utilisant  $N$  configurations pour chaque sens du jet, nous pouvons appliquer la méthode de reversement de jet  $N$  fois. L'équation (7-67) nous permet d'écrire pour la configuration  $j$  :

$$\frac{(\nu_{Ex(1)}(j) - \nu_{Ex(2)}(j))}{2} = -\phi_{BR}(j)F(j)\tag{7-112}$$



où  $\nu_{Ex(k)}(j)$  est la fréquence mesurée pour la configuration  $j$  dans le sens  $k$  et  $\phi_{BR}(j)$  est la valeur du déphasage obtenue par inversement du jet pour la configuration  $j$ .

Là aussi, nous pouvons appliquer la méthode de moindres carrés pour calculer une valeur moyenne des  $N$  valeurs  $\phi(j)$  obtenues par renversement du jet  $N$  fois. La Fig. 7-20 montre les résultats obtenus par renversement du jet. La méthode des moindres carrés nous permet d'estimer :

$$\phi_{BR} = 179,7 \mu\text{rad}, \sigma_{\phi} = 0,4 \mu\text{rad}. \quad (7-113)$$

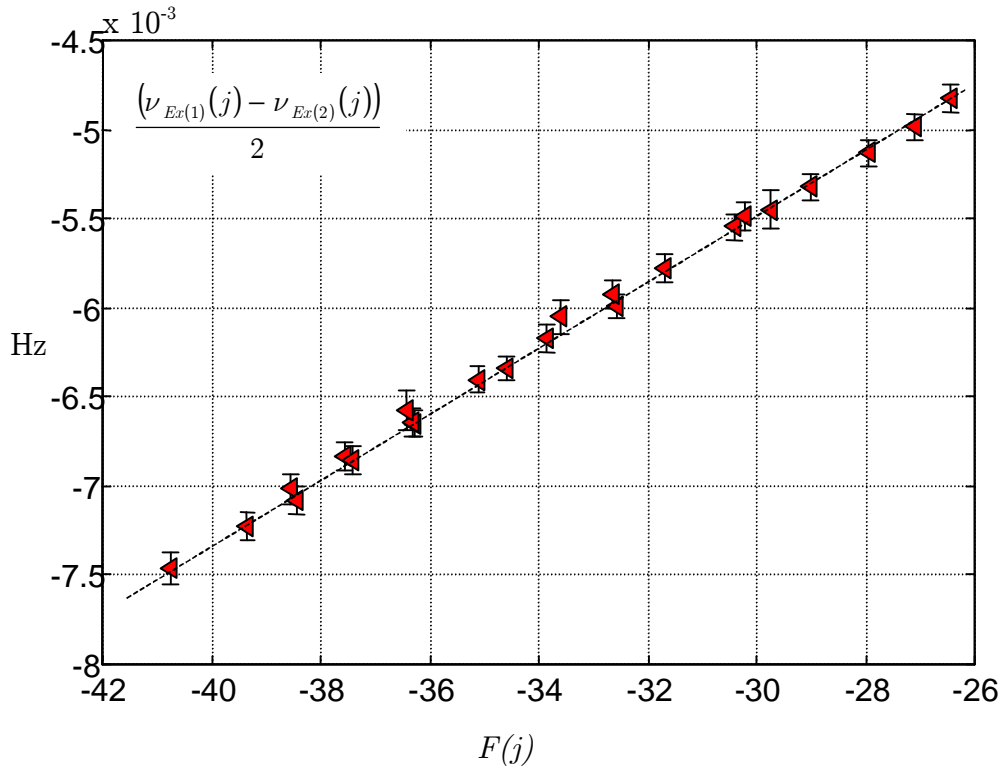


Fig. 7-20 : Résultats du renversement du jet.

Nous avons effectué le renversement du jet six fois pendant un an (février 1998 - février 1999). A chaque fois, nous avons estimé le déphasage  $\phi$  par notre méthode ainsi que par la méthode de reversement de jet. La différence entre les deux métho-

des pour chaque sens du jet n'a jamais dépassé<sup>26</sup> 1  $\mu\text{rad}$ . Par conséquent nous adoptons les résultats suivants :

$$\phi = 179,7 \mu\text{rad}, \sigma_\phi = 1 \mu\text{rad}. \quad (7-114)$$

Dans les conditions normales d'opération ( $f_m = 45 \text{ Hz}$  et  $b = b_{opt}$ ), la valeur de  $F$  est de -36 avec une incertitude  $\sigma_F$  inférieure à 0,05. L'équation (7-65) donne :

$$\delta\nu_\phi = \sqrt{(\sigma_\phi F)^2 + (\phi \sigma_F)^2} \quad (7-115)$$

En reportant les valeurs numériques obtenues ci-dessus nous pouvons prétendre une incertitude relative :

$$\frac{\delta\nu_\phi}{\nu_0} \leq 4 \times 10^{-15} \quad (7-116)$$

### 7.11.3. Remarques

- 1) Pour pouvoir appliquer notre méthode, il faut s'assurer qu'aucun effet n'a été oublié lors de la correction de la fréquence mesurée. Quand nous avons mis en pratique cette méthode pour la première fois, nous avons obtenu des valeurs différentes de  $\phi$  pour chaque sens de jet (écart de 16  $\mu\text{rad}$ ). Nous n'avions pas d'explication pour cette différence, à moins que l'effet du gradient de phase soit bien supérieur aux estimations les plus pessimistes. La même méthode appliquée dans le cas d'un pompage à deux lasers a donné une différence encore plus grande (écart de 59  $\mu\text{rad}$ ). La valeur obtenue par renversement du jet était in-

---

<sup>26</sup> Bien que la valeur de  $\phi$  ait changé une fois de 10  $\mu\text{rad}$ , suite à une augmentation de la température de l'enceinte.

changée. Dans les deux cas les valeurs étaient symétriques par rapport à celle-ci. Ceci, nous a conduit à évaluer l'effet de déplacement lumineux. L'application de notre méthode, après avoir tenu compte de cet effet, a conduit à des valeurs égales de  $\phi$  pour les deux sens. Ceci peut s'expliquer par le fait que le déplacement lumineux et celui dû au déphasage ont le même comportement en fonction des paramètres de modulation. La Fig. 7-21 montre la fonction  $f_L(\omega_m, b)$  de l'équation (7-81) intervenant dans le calcul du déplacement lumineux en fonction de la fonction  $F(\omega_m, b)$  intervenant dans le calcul du déplacement dû au déphasage. Nous constatons une relation presque linéaire entre les deux fonctions.

- 2) Cette méthode peut être considérée comme un bon moyen pour vérifier si tous les effets déformateurs de la frange ont été pris en compte. Après estimation de  $\phi$ , la fréquence mesurée peut être corrigée de tous les effets (y compris le déphasage). Si aucun effet déformateur n'a été oublié, nous nous attendons à trouver une constante ( $\alpha$  dans l'équation (7-98)). La Fig. 7-22 montre la fréquence mesurée et corrigée de tous les effets connus pendant une dizaine de jours. Les fréquences sur cette courbe ont été mesurées dans 23 configurations  $(\omega_m, b)$  différentes. Toutes les mesures (54 mesures) sont réparties, en tenant compte des barres d'erreur, autour de la valeur moyenne dans un intervalle de  $2 \times 6 \cdot 10^{-5}$  Hz. Ce qui est compatible avec la stabilité de notre étalon et avec (mais ne prouve pas) son exactitude finale (voir tableau d'exactitude à la fin de ce chapitre).
- 3) La méthode proposée pour estimer le déphasage  $\phi$  peut être (et a été) utilisée pour estimer d'autres effets déformateurs. Elle est capable aussi d'estimer deux (ou plusieurs) effets à la fois à conditions qu'ils n'aient pas le même comportement en fonction de  $(\omega_m, b)$ .

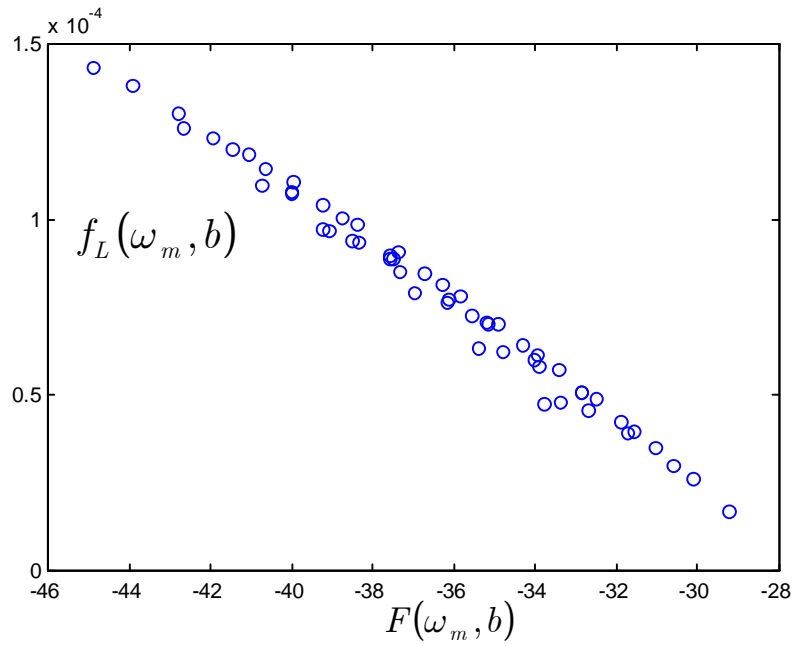


Fig. 7-21 : Relation entre déplacement lumineux et déplacement de déphasage.

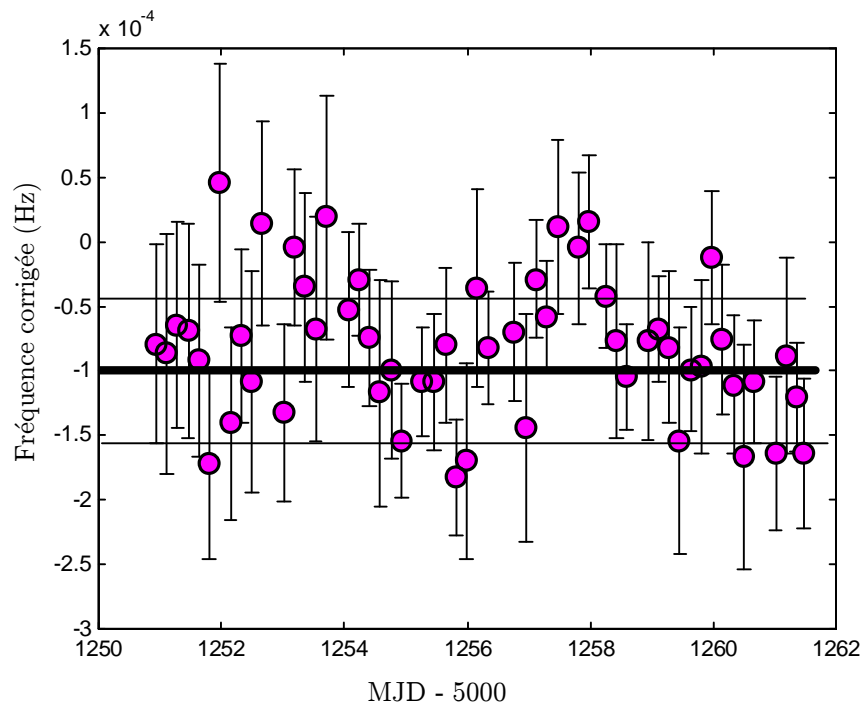


Fig. 7-22 : Fréquence (JPO - Maser)

## 7.12. Effet du désaccord de la cavité

Si la fréquence de résonance de la cavité,  $\nu_c$ , n'est pas exactement égale à la fréquence atomique,  $\nu_0$ , alors l'amplitude  $b$  du champ hyperfréquence varie de façon asymétrique autour de  $\nu_0$ . La réponse de la cavité s'écrit [1] :

$$b(\omega) = \frac{b_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega - \omega_c}{\Pi}\right)^2}} \quad (7-117)$$

$\Pi$  étant la largeur à mi-hauteur de la réponse de la cavité et  $b_c$  la pulsation de Rabi au sommet de la réponse ( $\omega = \omega_c$ ).

Nous désignons par  $\varepsilon = \omega_0 - \omega_c$  le désaccord de la cavité. En utilisant la définition du désaccord en fréquence  $\Omega_0 = \omega - \omega_0$ , nous pouvons écrire (7-117) sous la forme :

$$b(\Omega_0) = \frac{b_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\Omega_0 + \varepsilon}{\Pi}\right)^2}} \quad (7-118)$$

Nous supposons que le désaccord en fréquence angulaire  $\Omega_0$  est faible devant le désaccord  $\varepsilon$ . Un développement limité en premier ordre en  $\Omega_0/\varepsilon$  de l'équation (7-118) donne :

$$b = b_0 + p_c \Omega_0$$

$$b_0 = \frac{b_c}{\sqrt{1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Pi}\right)^2}} \quad \text{et} \quad p_c = -\frac{b_c \varepsilon}{\Pi^2 \left(1 + \left(\frac{\varepsilon}{\Pi}\right)^2\right)^{3/2}} \quad (7-119)$$

$b_0$  est la pulsation de Rabi et  $p_c$  est la pente de la cavité à la résonance atomique.

L'équation (7-119) montre que l'amplitude du champ hyperfréquence varie linéairement autour de la résonance atomique  $\omega_0$ . Cette équation est valable quelle soit

la réponse de la cavité (lorentzienne ou pas), car il est toujours possible d'approcher la réponse de la cavité pour les fréquences qui couvrent la frange de Ramsey ou de Rabi par une droite.

La probabilité de transition (de Rabi ou de Ramsey) s'écrit alors :

$$P(\Omega_0, b) = P(\Omega_0, b_0 + p_c \Omega_0) = P(\Omega_0, b_0) + p_c \Omega_0 \left. \frac{\partial P}{\partial b} \right|_{b=b_0} \quad (7-120)$$

En présence d'un désaccord de la cavité, la probabilité de transition se décompose alors en une fonction paire égale à la probabilité de transition non perturbée et une fonction impaire

$$g(\Omega_0) = p_c \Omega_0 \left. \frac{\partial P}{\partial b} \right|_{b=b_0} \quad (7-121)$$

Lorsque la fréquence de l'oscillateur local est asservie en utilisant une modulation carrée de fréquence de profondeur de modulation  $\omega_m$ , le déplacement de fréquence dû au désaccord de la cavité est donné par l'équation (7-14) qui s'écrit alors :

$$\nu_{cav} = - \frac{p_c \omega_m}{2\pi} \frac{\left. \frac{\partial P}{\partial b} \right|_{(b=b_0, \Omega_0=\omega_m)}}{\left. \frac{\partial P}{\partial \Omega_0} \right|_{(b=b_0, \Omega_0=\omega_m)}} \quad (7-122)$$

Cette équation montre que le déplacement induit par un désaccord de la cavité peut être estimé expérimentalement si on connaît la pente de la cavité. Les dérivées dans l'équation (7-122) peuvent être calculées en mesurant le signal de transition (Rabi ou Ramsey) autour du point  $(b = b_0, \Omega_0 = \omega_m)$ . Des petites variations de la puissance et de la fréquence d'interrogation autour de ce point permettent de calculer les dérivées en accordant les points expérimentaux avec des droites.

Dans le cas où l'asservissement a lieu sur une frange de Ramsey, la probabilité de transition est donnée par l'équation (7-6). Sa dérivation par rapport à  $b$  fait appa-

raître des termes en  $b^2$  qui sont négligeable dans le cadre d'une approximation en premier ordre. Tout calcul fait nous obtenons :

$$\nu_{cav}^{Ram} = -\frac{p_c \omega_m}{2\pi} \frac{\int f(\tau) D_{Ram}(\omega_m, b_0, \tau) d\tau}{\int f(\tau) A(\omega_m, b_0, \tau) d\tau} \quad (7-123)$$

Avec  $A_{Ram}(\omega_m, b, \tau)$  égale à  $A(\omega_m, b, \tau)$  de l'équation (7-16) et  $D_{Ram}(\omega_m, b, \tau)$  donné par :

$$D_{Ram}(\omega_m, b, \tau) = \tau \sin(2b\tau) [1 + \cos(a\omega_m \tau)] - 2 \frac{\omega_m}{b} \tau \sin(a\omega_m \tau) \left[ \sin^2(b\tau) + 2 \cos(b\tau) \sin^2\left(\frac{b\tau}{2}\right) \right] \quad (7-124)$$

Pour estimer cet effet selon l'équation (7-123), il faut tout d'abord estimer la pente  $p_c$  de la cavité.

### 7.12.1. Estimation de la pente de la cavité

Plusieurs méthodes ont été proposées dans la littérature pour mesurer cette pente. La référence [16] contient une description détaillée de ces méthodes. Nous présentons ici une nouvelle méthode.

#### 7.12.1.1. Nouvelle méthode pour mesurer $p_c$

L'effet de désaccord de la cavité, "cavity pulling", sur la frange de Ramsey est donnée par l'équation (7-122) que nous écrivons :

$$\nu_{cav}^{Ram} = \frac{-p_c \omega_m^{Ram}}{2\pi} \frac{M^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)}{N^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)} \quad (7-125)$$

où  $M^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)$  désigne la dérivée de la frange de Ramsey par rapport à la fréquence angulaire et  $N^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)$  désigne sa dérivée par rapport à  $b$  et  $\omega_m^{Ram}$  est la profondeur de modulation quand on s'asservit sur la frange de Ramsey.

Ces deux quantités sont mesurées expérimentalement comme mentionné ci-dessus.

Le "cavity pulling" sur le piédestal de Rabi s'écrit de la même façon :

$$\nu_{cav}^{Rb} = \frac{-p_c \omega_m^{Rb}}{2\pi} \frac{M^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)}{N^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)} \quad (7-126)$$

Nous constatons que  $\nu_{cav}^{Rb}$  est beaucoup plus grand que  $\nu_{cav}^{Ram}$  car (voir Fig. 7-23) :

1) Le rapport des profondeurs de modulation est :

$$\frac{\omega_m^{Rb}}{\omega_m^{Ram}} \approx 2 \frac{L}{\mathbf{1}} = 2a \quad (7-127)$$

2) Les dérivées par rapport à  $b$  ont un rapport 1/2 au pire des cas :

$$\frac{M^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)}{M^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b)} \approx \frac{1}{2} \quad (7-128)$$

3) Les dérivées par rapport à  $\Omega_0$  sont (voir Fig. 7-23):

$$N^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b) = \frac{S/2}{\omega_m^{Rb}} = \frac{S}{4a\omega_m^{Ram}} \quad \text{et} \quad N^{Ram}(\omega_m^{Ram}, b) = \frac{S}{\omega_m^{Ram}} \quad (7-129)$$

Ainsi, le rapport  $\nu_{cav}^{Rb} / \nu_{cav}^{Ram}$  vaut approximativement :

$$\frac{\nu_{cav}^{Rb}}{\nu_{cav}^{Ram}} = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot 4a = 4a^2 \quad (7-130)$$



Dans notre étalon ( $a = 100$ ) le rapport vaut 40000.

C'est de loin l'effet le plus grand (après l'effet Zeeman bien sur) qui déplace le centre du piédestal de Rabi pour la transition  $m = 0$ .

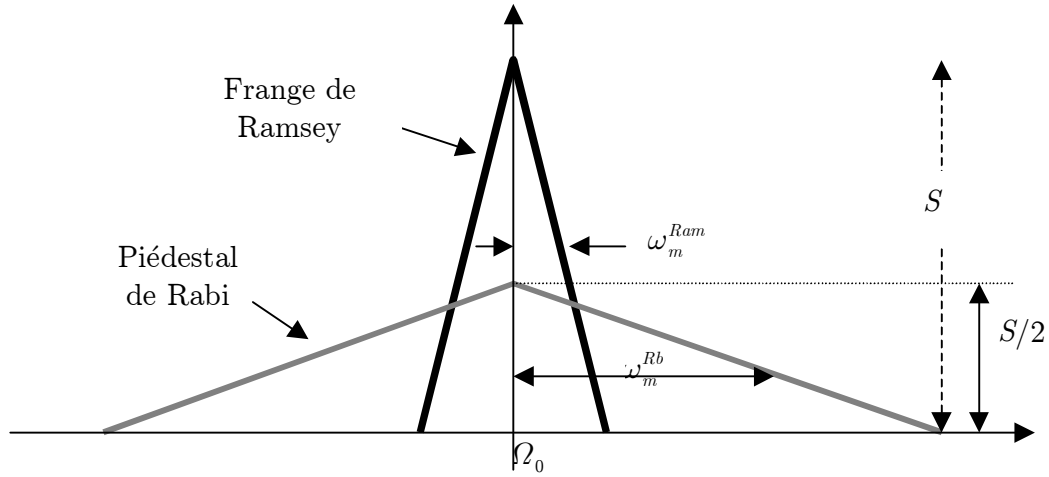


Fig. 7-23 : Représentation schématique de la frange de Ramsey et du piédestal de Rabi

La fréquence mesurée en s'asservissant sur le centre du piédestal ( $m = 0$ ) s'écrit :

$$\nu_{Ex}^{Rb} = \alpha + \nu_{cav}^{Rb} + \nu_Z + \mathbf{L} \quad (7-131)$$

Pour le centre de la frange de Ramsey nous avons :

$$\nu_{Ex}^{Ram} = \alpha + \nu_{cav}^{Ram} + \nu_Z + \mathbf{L} \quad (7-132)$$

En mesurant expérimentalement  $\nu_{Ex}^{Ram}$  et  $\nu_{Ex}^{Rb}$  nous avons :

$$\nu_{Ex}^{Rb} - \nu_{Ex}^{Ram} \approx \nu_{cav}^{Rb} = -\frac{p_c \omega_m^{Rb}}{2\pi} \frac{M^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)}{N^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)} \quad (7-133)$$

Dans notre étalon nous mesurons  $\nu_{Ex}^{Rb} - \nu_{Ex}^{Ram} \approx \nu_{cav}^{Rb} = 0,25$  Hz ce qui donne un ordre de grandeur sur  $\nu_{cav}^{Ram} = \nu_{cav}^{Rb} / 4a^2 = 5,75$   $\mu$ Hz.

Connaissant  $M^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)$ ,  $N^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)$  et  $\omega_m^{Rb}$ , nous déduisons la pente de la cavité de l'équation (7-133) :

$$p_c = - \frac{2\pi(\nu_{Ex}^{Rb} - \nu_{Ex}^{Ram})N^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)}{\omega_m^{Rb}M^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)} \quad (7-134)$$

La valeur de cette pente dépend de la puissance et par suite de la pulsation de Rabi  $b_c$  définie dans l'équation (7-117). Dans le cas où la réponse de la cavité est lorentzienne donnée par l'équation (7-117), nous définissons la pente normalisée :

$$\frac{p_c}{b_c} = - \frac{\varepsilon}{\Pi^2 \left( 1 + \left( \frac{\varepsilon}{\Pi} \right)^2 \right)^{3/2}} \quad (7-135)$$

L'application de cette méthode pour différentes valeurs de  $b$ ,  $\omega_m^{Rb}$  et  $\omega_m^{Ram}$  nous permettent d'estimer une valeur moyenne de la pente normalisée de  $-4,4 \cdot 10^{-10}$ . La déviation standard des différentes valeurs obtenues est  $2,3 \cdot 10^{-10}$ .

Ces résultats laissent penser que l'incertitude de la méthode est de 50% ce qui n'est pas vrai. En effet, ces résultats ont été obtenus après avoir accordé la cavité à l'aide de deux pistons ("stubs") placés à l'extérieur de l'enceinte, juste avant la bride de connexion du câble coaxial.

La même méthode a été appliquée dans le cas de la cavité désaccordée. Nous avons obtenu une pente normalisée de  $1,5 \cdot 10^{-8}$  avec une déviation standard de  $3 \cdot 10^{-10}$ , ce qui fait une incertitude de 3%.

Cette incertitude est limitée par le temps d'intégration pour mesurer  $M^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)$ ,  $N^{Rb}(\omega_m^{Rb}, b)$ ,  $\nu_{Ex}^{Rb}$  et  $\nu_{Ex}^{Ram}$ . Elle est donc reliée au rapport signal à bruit dans le signal d'horloge.

En reportant ces valeurs dans l'équation (7-125), nous pouvons calculer l'effet induit par le désaccord de la cavité. La Fig. 7-23 montre les valeurs de cet effet en

fonction des paramètres de modulation pour une cavité de pente normalisée  $p_c/b = -4,4 \times 10^{-10}$ .

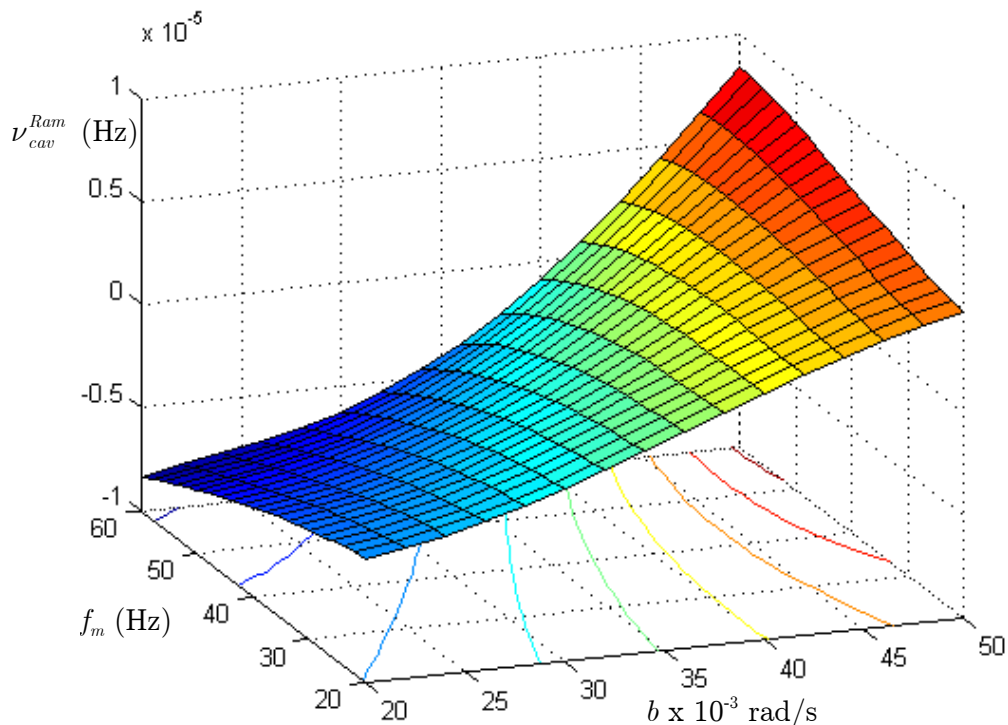


Fig. 7-24 : Effet de désaccord de la cavité en fonction des paramètres de modulation.

Dans les conditions de fonctionnement en horloge, le déplacement de fréquence correspondant est inférieur en valeur relative à  $-0,3 \cdot 10^{-15}$ . Nous n'appliquons pas de correction pour cet effet. Mais pour tenir compte des effets de température sur la cavité et sur le montage d'accord (effets possibles de température, de pression et d'humidité de l'air), nous prenons comme incertitude associée, en valeur relative :

$$\frac{\nu_{cav}^{Ram}}{\nu_0} \leq 0,4 \cdot 10^{-15}. \quad (7-136)$$

## 7.13. Effets des transitions voisines

Les raies voisines de la transition d'horloge peuvent distordre sa forme de résonance. Cet effet est connu sous le nom de "Rabi pulling" pour l'effet des transitions  $\Delta m = 0$  [17] et "Rabi-Ramsey pulling" pour les transitions  $\Delta m = \pm 1$  [18].

### 7.13.1. Rabi pulling

Les ailes du piédestal des transitions  $m = 1$  et  $m = -1$  contribuent à la réponse du jet lorsque la fréquence d'interrogation est proche de la fréquence d'horloge  $\nu_0$ .

D'après la Fig. 7-25, nous pouvons écrire le signal du tube à césium au voisinage de  $\nu_0$  sous la forme :

$$s(\Omega_0) = I_{(0)}P(\Omega_0) + I_{(1)}P_2(\Omega_0 - \omega_z) + I_{(-1)}P_2(\Omega_0 + \omega_z) \quad (7-137)$$

où  $P(\Omega_0)$  est la probabilité de Ramsey et  $P_2(\Omega_0)$  celle du piédestal de Rabi,  $I_{(m)}$  est l'amplitude de la transition  $m$  et  $\omega_z = 2\pi f_z$ .

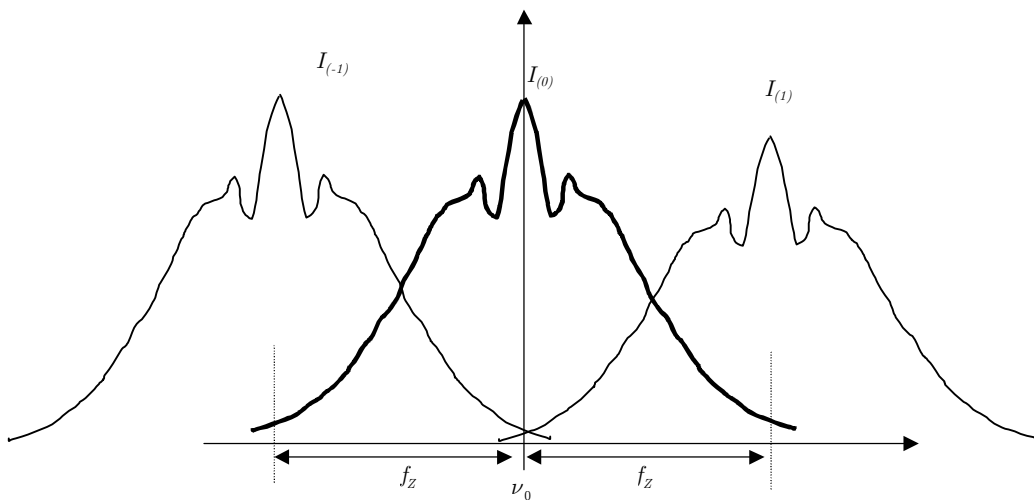


Fig. 7-25 : Représentation schématique de l'effet "Rabi pulling".

La probabilité  $P_2(\Omega_0)$  est donnée par l'équation (3-16). En la développant au premier ordre en  $\Omega_0/\omega_z$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} P_2(\Omega_0 - \omega_z) &= \frac{b^2}{\omega_z^2} \left( 1 + 2 \frac{\Omega_0}{\omega_z} \right) \\ P_2(\Omega_0 + \omega_z) &= \frac{b^2}{\omega_z^2} \left( 1 - 2 \frac{\Omega_0}{\omega_z} \right) \end{aligned} \quad (7-138)$$

En reportant ces expressions dans l'équation (7-137) nous avons après normalisation par rapport à  $I_{(0)}$  :

$$\begin{aligned} s(\Omega_0) &= P(\Omega_0) + \frac{b^2}{I_{(0)}\omega_z^2} \left[ I_{(1)} + I_{(-1)} + 2 \frac{\Omega_0}{\omega_z} (I_{(1)} - I_{(-1)}) \right] \\ s(\Omega_0) &= P(\Omega_0) + \beta_0 + \Omega_0\beta_1 \end{aligned} \quad (7-139)$$

avec  $\beta_0 = \frac{b^2(I_{(1)} + I_{(-1)})}{I_{(0)}\omega_z^2}$  et

$$\beta_1 = \frac{2b^2(I_{(1)} - I_{(-1)})}{I_{(0)}\omega_z^3} \quad (7-140)$$

Nous constatons que l'effet des transitions voisines de celle de la transition d'horloge se traduit par un fond (la constante  $\beta_0$ ) et une fonction impaire qui consiste en une droite de pente  $\beta_1$ . Cette fonction impaire crée une déformation du signal d'horloge. Quand les deux transitions voisines ont la même amplitude, la pente et par suite la déformation sont nulles.

Le déplacement de fréquence induit par se déduit de l'équation (7-14) :

$$\nu_{Rb} = - \frac{\beta_1 \omega_m}{\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (7-141)$$

Pour estimer cet effet il faut connaître la pente  $\beta_1$ . D'après l'équation (7-140),  $\beta_1$  est mesurable si on connaît la différence de population (amplitude) normalisée  $(I_{(1)} - I_{(-1)})/I_{(0)}$ .

Dans notre étalon, la différence de population normalisée est inférieure à cinq pour mille (grâce au pompage optique). Nous avons vérifié que les distributions de vitesse étaient identiques pour les atomes dans les deux niveaux. Par mesure de précaution nous appliquons un champ magnétique assez élevé dans notre étalon de telle sorte que les transitions voisines soient assez lointaines (fréquence Zeeman égale à 70 kHz).

On en déduit une pente  $\beta_1 = 8 \cdot 10^{-11}$ . La Fig. 7-26 montre le déplacement de "Rabi pulling" en fonction des paramètres de modulation. Dans les conditions de fonctionnement en horloge, cet effet vaut 2  $\mu$ Hz. Nous ne corrigeons pas la fréquence de notre étalon de cet effet et nous prenons sa valeur typique (2  $\mu$ Hz) comme incertitude.

Notons que cet effet peut être annulé en utilisant une modulation carrée de fréquence à deux profondeurs de modulation [19]. Avec la profondeur de modulation  $\omega_m^{(i)}$  ( $i = 1, 2$ ) nous formons le signal d'erreur (voir équation (7-12)):

$$e_i = 2\Omega_0 \Psi(\omega_m^{(i)}) + 2\beta_1 \omega_m^{(i)} \quad (7-142)$$

En désignant par  $\Psi$  la dérivée de la frange de Ramsey.

Ensuite nous utilisons le signal d'erreur composite dans la boucle d'asservissement :

$$e = e_1 + \lambda e_2$$

$$e = 2\Omega_0 (\Psi(\omega_m^{(1)}) + \lambda \Psi(\omega_m^{(2)})) + 2\beta_1 (\omega_m^{(1)} + \lambda \omega_m^{(2)}) \quad (7-143)$$

Si on choisit  $\lambda$  tel que  $\lambda = -\frac{\omega_m^{(1)}}{\omega_m^{(2)}}$ , l'effet sera nul et la boucle converge vers  $\Omega_0 = 0$ .

L'utilisation de cette boucle d'asservissement implique de recalculer les déplacements induits par les autres effets. Nous avons appliqué cette boucle dans notre étalon. La fréquence obtenue par cette boucle était identique à celle obtenue par la boucle classique (à  $2 \cdot 10^{-5}$  Hz, limitée par notre maser). Ceci confirme le résultat de notre estimation de l'effet "Rabi pulling" expliquée ci-dessus.

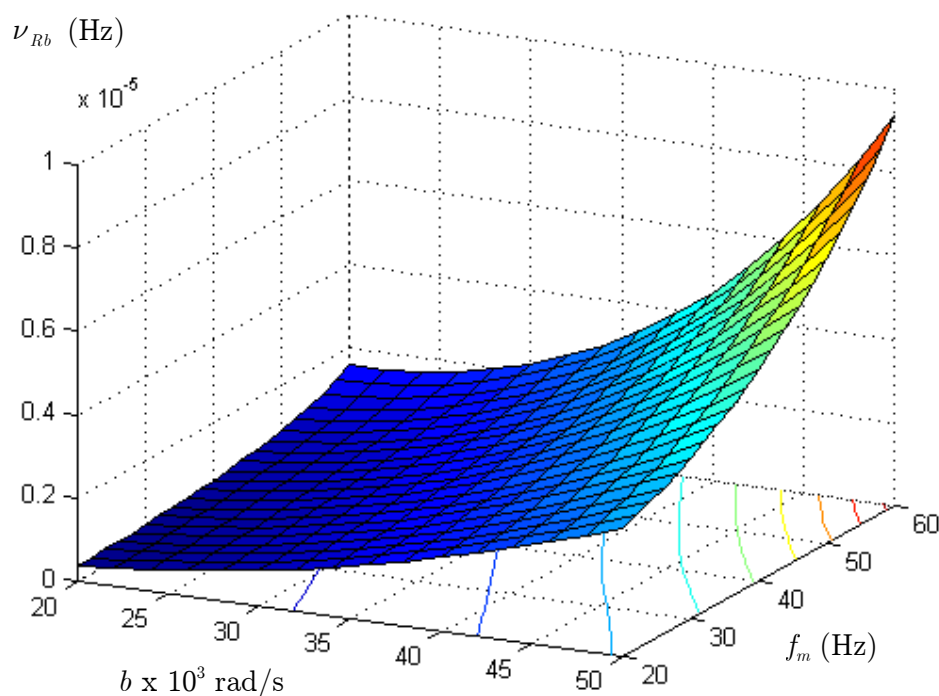


Fig. 7-26 : Déplacement dû au "Rabi pulling".

### 7.13.2. Ramsey pulling

Cet effet est de même nature que l'effet de "Rabi pulling", à part qu'il est induit par les transitions  $\pi$  (voir le paragraphe 3.2.2) voisines de la transition d'horloge. L'estimation de cet effet est plus ardue que celle du "Rabi pulling" car la probabilité des transitions  $\pi$  dépend du profil exact du champ magnétique hyperfréquence et elle exige de connaître la distribution de vitesse pour ces transitions.

Cutler [18] a donné l'expression la probabilité de transition pour ces transitions. Il a aussi calculé une expression du déplacement de fréquence sans tenir compte des

paramètres de modulation. Nous avons réécrit son expression sous la forme d'une somme : fonction paire plus fonction impaire. Puis nous avons appliqué la formule (7-14) pour trouver l'expression de l'effet en fonction des paramètres de modulation. Nous ne donnons pas l'expression détaillée ici car elle est trop longue (2 pages) et nous nous limitons à une version compacte :

$$\nu_{Rm} = - \frac{I_{(10)} - I_{(01)}}{I_{(0)}} \frac{\tan^2(\theta_1)\eta_1(\omega_m, b, f_Z) + \tan^2(\theta_2)\eta_2(\omega_m, b, f_Z)}{\pi \int A(\omega_m, b, \tau) f(\tau) d\tau} \quad (7-144)$$

En désignant par :

- $I_{(10)}$  et  $I_{(01)}$  l'amplitude des deux transitions  $\pi$  voisines.
- $\theta_i$  l'angle moyen entre le champ hyperfréquence et le champ statique dans le bras  $i$  de la cavité.
- $\eta_i(\omega_m, b, f_Z)$  une fonction de la distribution de vitesse des transitions  $\pi$ .

Nous avons calculé cet effet dans les conditions suivantes :

- Une différence d'amplitudes normalisée de 15%.
- $\theta_1 = \theta_2 = 10^\circ$ .
- Une distribution de vitesse identiques à celle des transitions  $\sigma$ .

La Fig. 7-27 montre le déplacement de fréquence en fonction des paramètres de modulation dans ces conditions pour  $f_Z = 70$  kHz.



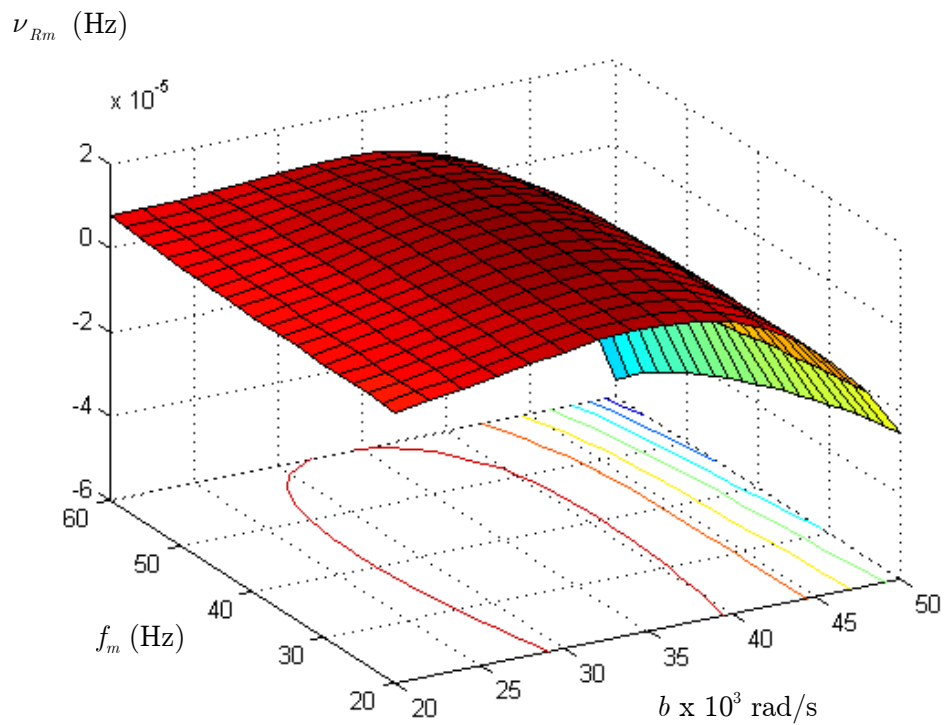


Fig. 7-27 : Effet de "Ramsey pulling".

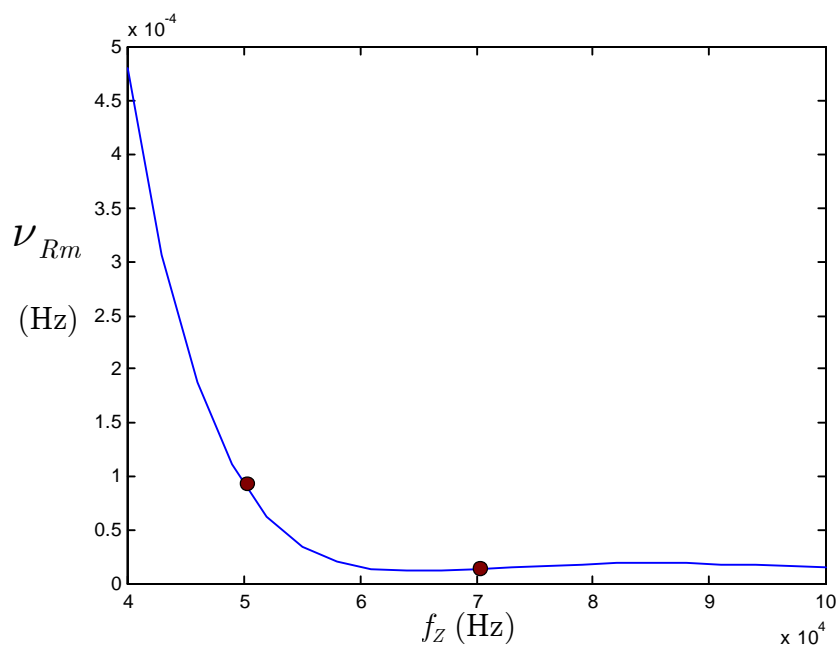


Fig. 7-28 : Effet de "Ramsey pulling" en fonction de la fréquence Zeeman.

Nous présentons aussi dans la Fig. 7-28 la variation de l'effet en fonction de la fréquence Zeeman dans les conditions de fonctionnement en horloge.

La valeur de cet effet dans les conditions typiques de fonctionnement est de 14  $\mu\text{Hz}$ . Quand on réduit la fréquence Zeeman de 70 kHz à 50 kHz la valeur de l'effet est multipliée par 7.

Nous avons mesuré la fréquence de notre étalon dans ces deux conditions (50 kHz et 70 kHz). Nous n'avons pas remarqué de différence de fréquence à  $2 \cdot 10^{-5}$  Hz près. Ceci prouve que nos hypothèses (différence de population de 15% et  $\theta_i = 10^\circ$ ) sont très pessimistes. Par conséquent, nous n'appliquons pas de correction pour cet effet.

Par mesure de prudence, nous prendrons comme incertitude relative globale sur l'ensemble "Ramsey pulling" + "Rabi pulling" la valeur :

$$\frac{\delta\nu_{\text{transitions voisines}}}{\nu_0} \leq 2 \cdot 10^{-15} \quad (7-145)$$

## 7.14. Conclusion : exactitude globale

Les différentes corrections appliquées à la fréquence de notre étalon, et les incertitudes associées sont regroupées dans le Tableau 2.

| Origine du déplacement          | Correction | Incertitude | Equation |
|---------------------------------|------------|-------------|----------|
| Effet Zeeman du second ordre    | -467 200   | 1,3         | (7-68)   |
| Effet Doppler                   | +339,7     | 2,6         | (7-27)   |
| Déphasage de la cavité          | -720,5     | 4,0         | (7-116)  |
| Désaccord de la cavité          | 0          | 0,4         | (7-136)  |
| Effet des transitions voisines  | 0          | 2           | (7-145)  |
| Effet lumineux                  | +8,7       | 2,4         | (7-87)   |
| Asymétrie du spectre micro-onde | 0          | 0,9         | (7-72)   |
| Bloch Siegert                   | 1,3        | 0,04        | (7-75)   |
| Fuites micro-ondes              | 0          | 2,0         | (7-94)   |
| Effet gravitationnel            | -6,07      | 0,3         | (7-29)   |
| Corps noir                      | +19,2      | 0,5         | (7-33)   |

Tableau 2: Budget d'erreur de JPO. Corrections relatives de fréquence et leurs incertitudes en  $10^{-15}$ .

L'exactitude globale ( $1 \sigma$ ) est donnée par la somme quadratique des incertitudes, incertitudes de type B, soit  $6,3 \cdot 10^{-15}$ . Cette incertitude est la meilleure obtenue à ce jour sur un étalon de fréquence à jet de césium. Elle est cependant assez proche de celle obtenue sur le meilleur étalon à jet de césium et sélection magnétique ( $6,7 \cdot 10^{-15}$ ) [20]. Les différents déplacements de fréquence sont en général plus grands dans un jet à pompage optique, car la distribution de vitesse est complète, et donc beaucoup plus large que dans une horloge comme CS1 où elle est filtrée par les aimants sélecteurs. Dans JPO les effets sont donc plus grands en général et plus sensibles aux paramètres de l'interrogation (puissance micro-onde, profondeur de

modulation). En revanche, d'une part cette sensibilité accrue peut être mise à profit pour mesurer ces effets, voir la mesure des effets de phase par exemple, et pour vérifier à posteriori qu'ils ont été correctement pris en compte. D'autre part le pompage optique permet l'utilisation de jets beaucoup plus intenses, d'où une bien meilleure stabilité qui permet une mesure plus fine et plus rapide de la fréquence ou du signal en fonction d'un paramètre. Les effets sont donc plus grands dans un jet à pompage optique mais peuvent être évalués plus précisément.

## Bibliographie

- [1] J. Vanier et C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*. Bristol, Adam Hilger, 1989.
- [2] A. Makdissi et E. de Clercq, "A Signal Approach Analysis of the Ramsey Pattern in Cesium Beam Frequency Standards," *IEEE Trans. Instr. Measur.*, vol.46, No. 2, pp. 112-116, April 1997.
- [3] E. Simon, "Vers une stabilité et une exactitude de  $10^{-16}$  pour les horloges atomiques : - le rayonnement du corps noir - la détection optique", Thèse de doctorat, Université de Paris-Sud, Orsay, 1997.
- [4] Y. Koga, "An improved method of measuring the Zeeman shift in Cs beam frequency standards", *Jap. J. Appl. Phys.*, vol 23, pp. 97-100, January 1984.
- [5] W. M. Itano, "High-magnetic-field corrections to cesium hyperfine structure", *Proceedings of the fifth Symposium on Frequency Standards and Metrology*, Ed. J. C. Bergquist, World Scientific, Singapore, 1996.
- [6] J. H. Shirley, W. D. Lee, G. D. Rovera and R. E. Drullinger, "Rabi pedestal shifts as a diagnostic tool in primary frequency standards", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, 44, pp136-139, 1995
- [7] S. Ohshima, Y. Nakadan, T. Ikegami and Y. Koga, "Light shifts in an optically pumped Cs beam frequency standard", *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 40, pp. 1003-1007, 1991.
- [8] J. Shirley, "Fluorescent light shift in optically pumped cesium standards", *Proceedings of the 39<sup>th</sup> Frequency Control Symposium* 1985, pp 22-23.
- [9] T. Heindorff, A. Bauch and R. Schröder, "Performance of the new PTB experimental atomic beam resonance apparatus CSX", *PTB-Mitteilungen* **94**, 5/84, pp. 318-326, 1984.
- [12] W. D. Lee, J. P. Lowe, J. H. Shirley, R. E. Drullinger, "Microwave leakage as a source of frequency error and long-term instability in cesium atomic-beam frequency standards", *Proceedings 8<sup>th</sup> European Frequency and Time Forum*, pp. 513-516, Weihenstephan (Allemagne), 1994.
- [11] G. D. Rovera, E. de Clercq and A. Clairon, "An analysis of major fre-

- 
- quency shifts in the LPTF optically pumped primary frequency standard”, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, vol. 41, pp. 245-249, 1994.
- [12] B. Boussert, G. Théobald, P. Cérez and E. de Clercq, ”Frequency shifts in cesium beam clocks induced by microwave leakages”, *IEEE Trans. Ultrason., Ferroelec., Freq. Contr.*, vol. 45, pp. 728-738, 1998.
- [13] K. Dorenwendt and A. Bauch, ”Spurious microwave fields in caesium atomic beam frequency standards : symmetry considerations and model calculations”, à paraître dans *Proceedings of the 1<sup>st</sup> joint meeting European Frequency and Time Forum and IEEE Frequency Control Symposium*, Besançon, 13-16 avril 1999.
- [14] G. Becker, B. Fisher, G. Kramer and E. K. Mueller, ”The cesium-beam primary frequency standard CS1 of the Physikalisch-Technische Bundesanstalt”, *Seminar on Frequency Standards & Metrology*, August 30 - September 1, 1971, Pavillon Montmorency, Québec, Canada.
- [15] A. De Marchi, G. D. Rovera, and A. Premoli, ”Effects of servo loop modulation in atomic beam frequency standards employing a ramsey cavity,” *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelec. Freq. Contr.*, vol. UFFC 34, pp. 582-591, Nov. 1987.
- [16] F. Hamouda, ”Dispositif numérique pour l’optimisation des performances d’une horloge atomique à césium à pompage optique”, Thèse de doctorat, Université Paris XI - Orsay, 1998.
- [17] A. De Marchi, G. D. Rovera and A. Premoli, ”Pulling by neighboring transitions and its effect on the performance of cesium beam frequency standards”, *Metrologia*, 20, pp. 37-47, 1984
- [18] L. Cutler, A. De Marchi, C. Flory and R. Giffard, ”Frequency pulling by hyperfine (sigma) transitions in cesium beam atomic frequency standards”, *J. Appl. Phys.*, 69, pp. 2780-2792, 1991, + Erratum.
- [19] L. S. Cutler and R. P. Giffard, ”Architecture and algorithms for a new cesium beam frequency standard electronics”, in proceedings *IEEE Frequency Control Symposium*, 1992.
- [20] A. Bauch, B. Fischer, T. Heindroff and R. Schröder, ”Performance of the PTB reconstructed primary clock CS1 and an estimate of its current uncertainty”, *Metrologia*, 35, 1998.



# CONCLUSION

---

Les performances atteintes par l'étalon primaire de fréquence à jet de césium JPO montrent bien l'apport bénéfique du traitement du signal au domaine de la métrologie temps - fréquence. Ces performances font, actuellement, de JPO l'horloge à jet de césium la plus exacte et la plus stable au monde.

L'analyse *cepstrale*, empruntée des techniques de traitement de la parole, a permis de mesurer la puissance micro-onde à l'intérieur de la cavité avec précision. Cette détermination précise de la puissance joue un rôle important lors de l'évaluation de tous les effets perturbateurs de la fréquence de l'étalon.

L'approche des *problèmes inverses* et leurs solutions par la technique de *régularisation* a permis d'introduire des nouvelles méthodes pour déterminer la distribution de temps de vol des atomes. La connaissance de cette distribution est primordiale pour le processus d'évaluation en particulier, et pour la compréhension du modèle de l'horloge en général.

D'autres techniques, de base, de traitement du signal comme l'analyse spectrale et la théorie des transformées en Fourier ont aidé à extraire un maximum d'information à partir des mesures disponibles. Ceci a conduit à une analyse simple et utile de l'équation de la frange de Ramsey. De plus, ces techniques nous ont incité à proposer et réaliser des nouvelles mesures qui se sont avérées très utiles, comme la mesure d'une frange de Ramsey à puissance micro-onde très élevée.

La théorie *statistique* du signal nous a permis de proposer un moyen pour vérifier la validité de notre estimation des effets perturbateurs. En particulier, la nouvelle méthode pour déterminer le déphasage de la cavité, par une simple méthode de moindres carrées, nous a conduit à explorer l'effet d'un déplacement lumineux et à vérifier la faiblesse de l'effet d'un déphasage distribué de la cavité.

Bien sûr, sans une bonne compréhension et maîtrise du dispositif expérimental, les mesures récoltées seront beaucoup plus faibles en informations et les meilleures techniques de traitement de données seront moins efficaces.



---

L'étude détaillée de la boucle d'asservissement, d'un quartz sur la fréquence de la transition atomique, a permis de comprendre les limites de la stabilité du quartz asservi. Nous avons ainsi pu proposer une boucle (2Dérivateurs-2Intégrateurs) qui optimise les performances de l'horloge. La très bonne stabilité ainsi obtenue dans notre JPO a permis d'accélérer plusieurs phases dans la procédure d'évaluation.

Pour tenir compte de l'incidence du bruit du quartz libre sur sa stabilité quand il est asservi sur la transition atomique, une étude plus complexe était nécessaire. Là aussi, la théorie des signaux *aléatoires*, et en particulier *l'estimation spectrale*, était très utile. Elle nous a permis de généraliser l'effet Dick sur les horloges à jet continu et de le relier à l'effet d'intermodulation étudié par Audoin.

Bien que cela n'apparaisse pas très clairement dans ce mémoire, les problèmes techniques et expérimentaux étaient nombreux lors de cette étude. En particulier, la conception et la réalisation de la cavité de Ramsey, avec tout ce qu'elle nécessitait d'étude théorique, de simulations, et de maîtrise de plusieurs domaines techniques, a duré plus de deux ans. La partie informatique du dispositif expérimental a aussi son importance. Elle a permis surtout de configurer rapidement le dispositif pour réaliser des mesures particulières comme la mesure de la réponse transitoire et l'implantation des différentes méthodes de mesure de la pente de la cavité.

Pour vérifier la validité de notre exactitude estimée, nous avons effectué à plusieurs reprises une comparaison entre la fréquence de JPO et celle de la fontaine atomique FO1 de LPTF (son exactitude est de  $2 \cdot 10^{-15}$ ). Les deux fréquences étaient en accord dans leurs barres d'erreur.

D'autres comparaisons avec d'autres étalons primaires de fréquence dans le monde sont maintenant possibles et envisageables grâce à la participation de JPO à l'étalonnage du Temps Atomique International (TAI). Ceci permettra de mieux valider l'exactitude de tous ces étalons primaires et de diffuser la fréquence de notre étalon mondialement.

# Annexe A. SIGNAUX DETERMINIS- TES

---

## A.1. Définitions et propriétés élémentaires

On note  $L_1(\mathbf{R})$  l'ensemble des fonctions  $x(t)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\int_{\mathbf{R}} |x(t)| dt < \infty .$$

On dit que  $x(t)$  est *stable* ou *sommable*.

$L_2(\mathbf{R})$  est l'ensemble des fonctions  $x(t)$  de  $\mathbf{R}$  dans  $\mathbb{C}$  telles que

$$\int_{\mathbf{R}} |x(t)|^2 dt < \infty .$$

On dit que  $x(t)$  est d'*énergie finie*.  $L_2(\mathbf{R})$  ainsi défini est un espace de Hilbert sur  $\mathbb{C}$  lorsqu'on le munit du produit hermitien

$$\langle x, y \rangle_{L_2(\mathbf{R})} = \int_{\mathbf{R}} x(t) y^*(t) dt . \quad (\text{A-1})$$

De même, on note  $\mathbf{l}_1$  l'ensemble des suites complexes  $a = \{a_n\} = a[n], n \in \mathbf{Z}$ , telles que  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |a_n| < \infty$  et  $\mathbf{l}_2$  l'ensemble des suites telles que  $\sum_{n \in \mathbf{Z}} |a_n|^2 < \infty$ .  $\mathbf{l}_2$  muni du produit hermitien

$$\langle a, b \rangle_{\mathbf{l}_2} = \sum_{n \in \mathbf{Z}} a_n b_n^* \quad (\text{A-2})$$

est un espace Hilbert.

### **Produit de convolution**

Soit  $h(t)$  et  $x(t)$  deux fonctions stables. On définit pour presque tout  $t$  la fonction  $y(t)$  de  $L_1$  par

$$y(t) = \int h(t-u)x(u)du . \quad (\text{A-3})$$

On note ceci

$$y(t) = (h * x)(t) \quad (\text{A-4})$$

et on dit :  $y(t)$  est la *convolution* de  $h(t)$  et de  $x(t)$ .

### **Fonction d'intercorrélation**

La *fonction d'intercorrélation*  $R_{xy}$  de deux fonctions stables  $x$  et  $y$  est le produit de convolution des fonctions  $x$  et  $y^*$  (en notant  $y^*(t) = y(-t)$ ) :

$$R_{xy}(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)y^*(u-t)du = x(t) * y^*(t) . \quad (\text{A-5})$$

### **Fonction d'autocorrélation**

La *fonction d'autocorrélation*  $R_{xx}$  d'une fonction stable  $x$  est définie par (A-5) en prenant  $y = x$ . Il vient :

$$R_{xx}(t) = \int_{\mathbb{R}} x(u)x^*(u-t)du = x(t) * x^*(t) . \quad (\text{A-6})$$

## A.2. Signal et système

### A.2.1. Signal

D'une manière très générale un **signal** est une *représentation mathématique* d'un *phénomène physique*. Cette représentation prend assez souvent la forme d'une fonction<sup>1</sup> réelle ou complexe, à une ou plusieurs dimensions, d'une ou plusieurs variables (paramètres) réelles ou entières. Un signal  $\mathbf{x}$  peut être écrit sous la forme  $x = x(\theta; \zeta)$ . Dans cette expression  $\theta$  est un vecteur généralement complexe. Le symbole  $\zeta$  indique que le signal peut aussi être **aléatoire**. Dans cette annexe nous ne traitons que les signaux **déterministes** qui ne dépendent pas de  $\zeta$ . Assez souvent on a affaire à des signaux scalaires réels fonctions du temps  $t$  et on note le signal  $x$  par  $x(t)$ . Ces signaux (fonctions) seront soit stables (fonctions de  $L_1$ ), soit d'énergie finie (fonctions de  $L_2$ ), soit auront simultanément ces deux propriétés (fonctions de  $L_1 \cap L_2$ ).

Le paramètre  $t$  peut être continu ( $\in \mathbf{R}$ ) ou discret ( $\in \mathbf{Z}$ ) et on parle de signaux à temps continu (**TC**) ou à temps discret (**TD**)<sup>2</sup>. Les valeurs du signal peuvent être elles aussi **continues** ou **discrètes** (par quantification).

#### A.2.1.1. Exemples de signaux à TC

- **l'impulsion de Dirac** que l'on note  $\delta_a(t)$  ou  $\delta(t-a)$ , *distribution* qui à toute fonction  $\phi(t)$ , fait correspondre la valeur  $\phi(a)$ . Et l'on note symboliquement :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-a)\phi(t)dt = \phi(a) \quad (\text{A-7})$$

Dans la suite, l'impulsion de Dirac sera définie comme *fonction* et non comme *distribution*. On justifie cette notation par sa conformité à la théorie des distributions. Les principales propriétés de la '*fonction*' Dirac  $\delta(t)$  sont les suivantes :

---

<sup>1</sup> La modélisation de certains phénomènes physiques conduit à introduire les *distributions* (tempérées).

<sup>2</sup> Ceci n'a aucun lien avec une discussion philosophique sur la notion de temps. D'ailleurs le paramètre  $t$  ne représente pas forcément un temps.

$$x(t)\delta(t - t_0) = x(t_0)\delta(t - t_0) \quad (\text{A-8})$$

$$x(t - t_0) * \delta(t - t_1) = x(t - t_0 - t_1) \quad (\text{A-9})$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (\text{A-10})$$

La Figure A-1-a montre une représentation graphique purement symbolique de  $k\delta(t - a)$ .

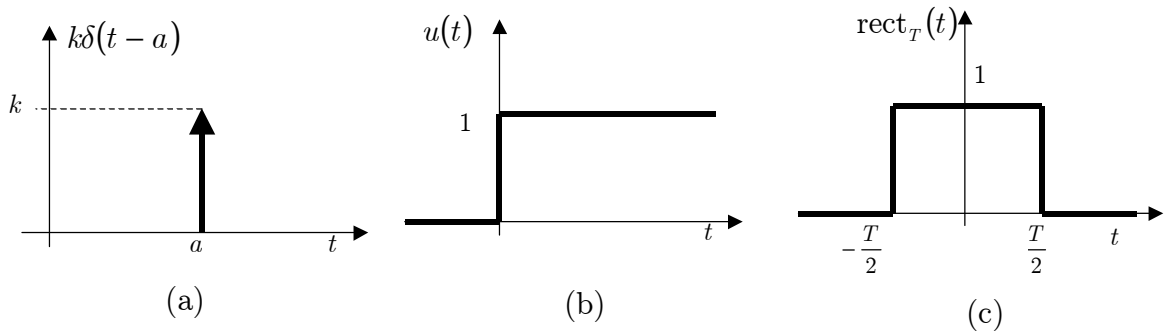


Figure A-1 : Exemples de signaux à TC. (a) Représentation symbolique de la fonction *impulsion de Dirac*. (b) l'échelon unité. (c) la fonction porte.

- l'**échelon unité** noté  $u(t)$  qui peut être défini comme la distribution possédant  $\delta(t)$  comme dérivée ou comme fonction :

$$u(t) = \begin{cases} 1 & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t < 0 \end{cases} \quad (\text{A-11})$$

La valeur en  $t = 0$  est arbitraire. On la choisit souvent égale à  $1/2$ . L'échelon unité peut être utilisé pour rendre compte de la causalité<sup>1</sup>.

- la **fonction porte** défini par :

$$\text{rect}_T(t) = u\left(t + \frac{T}{2}\right) - u\left(t - \frac{T}{2}\right) \quad (\text{A-12})$$

<sup>1</sup> Un signal est causal s'il est nul pour  $t < 0$  ( $n < 0$  pour les signaux à TD).

On utilisera la fonction porte pour exprimer qu'un signal  $x(t)$  est observé sur un horizon fini de "durée"  $T$ . On dira aussi que l'on a effectué un *fenêtrage* sur  $x(t)$  :

$$x_T(t) = x(t) \text{rect}_T(t) \quad (\text{A-13})$$

*A.2.1.2. Exemples de signaux à TD*

- ***l'impulsion unité*** notée  $\{\delta_n\}$  ou  $\delta[n]$  défini par :

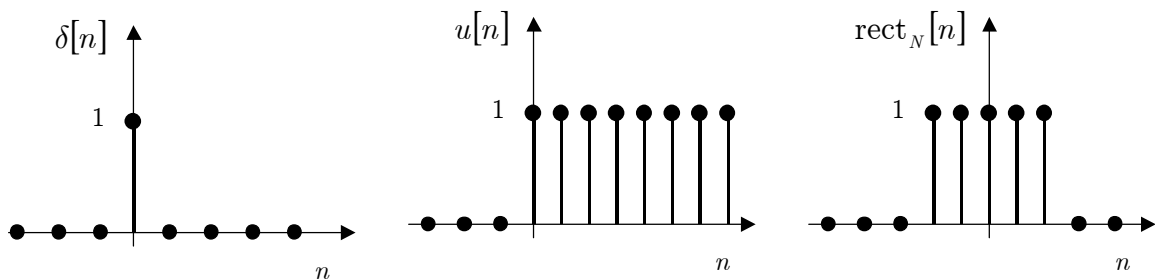
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & \text{pour } n = 0 \\ 0 & \text{pour } n \neq 0 \end{cases} \quad (\text{A-14})$$

- ***l'échelon unité*** ou *saut unité* notée  $\{u_n\}$  ou  $u[n]$  défini par :

$$u[n] = \sum_{k=0}^n \delta[k] = \begin{cases} 1 & \text{si } n \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A-15})$$

- ***fonction porte*** de longueur  $N$  définie par :

$$\text{rect}_N[n] = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{N}{2} \leq n \leq \frac{N}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (\text{A-16})$$



(a) (b) (c)

Figure A-2 : Exemples de signaux à TD. (a) l'impulsion unité. (b) l'échelon unité. (c) la fonction porte de longueur  $N = 4$ .

### A.2.2. Système

Un **systeme** est une "boîte noire" qui transforme un signal d'entrée  $x(t)$  en un signal de sortie  $y(t)$ , où  $t$  peut être continu ou discret. La relation entrée-sortie d'un système notée par  $y(t) = \mathbf{S}\{x(t), t\}$  est appelée *description externe*, par opposition à la *description interne* représentée par les équations d'état.

- Un système est dit *linéaire* si  $\mathbf{S}$  est linéaire :

$$y(t) = \mathbf{S}\{\lambda_1 x_1(t) + \lambda_2 x_2(t), t\} = \lambda_1 \mathbf{S}\{x_1(t), t\} + \lambda_2 \mathbf{S}\{x_2(t), t\} . \quad (\text{A-17})$$

La relation entrée-sortie d'un système à TC s'écrit sous la forme :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, u)x(u)du \quad (\text{A-18})$$

Dans le cas du TD cette relation devient

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[n, k]x[k] . \quad (\text{A-19})$$

- Un système est dit *invariant* dans le temps si  $\mathbf{S}$  est invariant par la translation temporelle définie par  $\mathbf{T}_\tau\{x(t)\} = x(t) * \delta(t + \tau)$ , ce qui s'écrit :

$$\mathbf{S}\{\mathbf{T}_\tau\{x(t)\}, t\} = \mathbf{T}_\tau\{\mathbf{S}\{x(t), t\}\}, \quad \forall \tau \text{ tel que } -\infty < \tau < \infty \quad (\text{A-20})$$

Ceci peut aussi s'exprimer en disant que  $\mathbf{S}$  et  $\mathbf{T}_\tau$  sont permutables pour tout  $\tau$ .

En utilisant la relation entrée-sortie (A-18) du système on peut écrire :

$$\mathbf{S}\{\mathbf{T}_\tau\{x(t)\}, t\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t, u)x(u + \tau)du \text{ et } \mathbf{T}_\tau\{\mathbf{S}\{x(t), t\}\} = \int_{-\infty}^{\infty} h(t + \tau, u)x(u)du$$

d'où  $h(t, u - \tau) = h(t + \tau, u)$  pour tout  $u$ , soit encore :

$$h(t, -\tau) = h(t + \tau, 0) \text{ ou } h(t, 0) = h(t + \tau, \tau) \quad (\text{A-21})$$

On appellera  $\underline{h(t, 0) = h(t)}$  *réponse impulsionnelle* du système invariant. On peut alors écrire :

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t - u)x(u)du = \int_{-\infty}^{\infty} h(u)x(t - u)du = (h * x)(t) \quad (\text{A-22})$$

Ce qui forme une relation de *convolution* et on dit qu'un système linéaire invariant est un *convoluteur* ou *filtre*.

## A.3. Signaux Continus

### A.3.1. Transformée de Laplace

On définit la *Transformée de Laplace bilatérale* de  $x(t)$ , si elle existe, par une fonction complexe  $X(s)$  de la variable complexe  $s$ , de la façon suivante :

$$X(s) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt \quad (\text{A-23})$$

### A.3.2. Transformation de Fourier

Nous admettons (théorème de Plancherel) que tout signal  $x(t)$  d'*énergie finie* (de  $L_2(\mathbf{R})$ ) admet une Transformée de Fourier  $X(f)$  de  $L_2(\mathbf{R})$  aussi :



$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-i2\pi ft} dt \quad (\text{A-24})$$

et

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) e^{i2\pi ft} df \quad (\text{A-25})$$

**Notation :**  $x(t) \leftrightarrow X(f)$

$X(f)$  est appelée le *spectre complexe* de  $x(t)$ .

**Propriétés de la TF :**

- Linéaire
- Similitude :  $x(at) \leftrightarrow \frac{1}{|a|} X\left(\frac{f}{a}\right)$
- Retard ou déphasage :  $x(t - t_0) \leftrightarrow X(f) \exp(-2i\pi f t_0)$
- Modulation :  $x(t) \exp(2i\pi f_0 t) \leftrightarrow X(f - f_0)$
- Dérivation :  $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \leftrightarrow (2i\pi f)^n X(f)$  et  $(-2i\pi t)^n x(t) \leftrightarrow \frac{d^n X(f)}{df^n}$
- Dualité :  $X(t) \leftrightarrow x(-f)$
- Théorème de Wiener-Khintchine : Soit  $R_{xx}$  la fonction d'autocorrélation de  $x(t)$ . La Transformée de Fourier de  $R_{xx}$  vaut  $|X(f)|^2$ .
- multiplication :  $x(t) y(t) \leftrightarrow X(f) * Y(f)$
- Convolution ou Filtrage :  $x(t) * y(t) \leftrightarrow X(f) Y(f)$
- Parseval : Energie de  $x(t) = E = \int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|^2 dt = \int_{-\infty}^{\infty} |X(f)|^2 df$

**Exemples :** (certaines fonctions sont définies au sens des distributions)

- $1 \leftrightarrow \delta(f)$
- $\exp(i2\pi f_0 t) \leftrightarrow \delta(f - f_0)$
- $\cos(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2} [\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)]$  et  $\sin(2\pi f_0 t) \leftrightarrow \frac{1}{2i} [\delta(f - f_0) - \delta(f + f_0)]$

### A.3.3. Signaux périodiques

Un signal  $x(t)$  est dit *périodique* de période  $T$  si pour tout  $t \in \mathbf{R}$ ,  $x(t+T) = x(t)$ . Si  $x(t)$  est stable sur sa période ( $x(t) \in L_1([0, T])$ ), alors il peut se décomposer, en série de Fourier, sous la forme :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k e^{i2\pi k \frac{t}{T}} \quad \text{avec} \quad X_k = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) e^{-i2\pi k \frac{t}{T}} dt . \quad (\text{A-26})$$

$X_0$  est appelée *composante continue* ; elle est égale à la valeur moyenne de  $x(t)$ .

**Egalité de Parseval** : la puissance du signal périodique  $x(t)$  vaut :

$$P_x = \frac{1}{T} \int_0^T |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |X_k|^2 \quad (\text{A-27})$$

#### TF des signaux périodiques

La T.F d'un signal périodique s'obtient directement de son développement en série de Fourier par :

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X_k \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (\text{A-28})$$

Lorsque le signal périodique  $x(t)$  est obtenu par périodisation d'un signal d'énergie finie  $x_T(t)$  de support temporel  $[-T/2; +T/2]$  et de spectre complexe  $X_T(f)$ , c'est à dire  $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x_T(t - kT)$ , la TF de  $x(t)$  s'écrit .

$$X(f) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{T} X_T\left(\frac{k}{T}\right) \delta\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (\text{A-29})$$

*Périodiser dans l'espace temps  $\Rightarrow$  Echantillonner dans l'espace fréquence.*

### A.3.4. Formule sommatoire de Poisson

Soit  $x(t)$  un signal complexe stable de T.F stable  $X(f)$  et soit  $T$  un nombre réel arbitraire positif, Pour presque-tout  $(u, v) \in \mathbb{R}^2$  :

$$\boxed{T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT - u) \exp(2i\pi kv) = \exp\left(2i\pi \frac{uv}{T}\right) \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k-v}{T}\right) \exp\left(-2i\pi \frac{k}{T} u\right)} \quad (\text{A-30})$$

#### Cas Particuliers :

$$1) \quad u = v = 0, \Rightarrow \boxed{T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right)}$$

$$2) \quad u = 0, \Rightarrow \boxed{T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \exp(2i\pi kv) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k-v}{T}\right)}$$

$$3) \quad v = 0, \Rightarrow \boxed{T \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT - u) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X\left(\frac{k}{T}\right) \exp\left(-2i\pi \frac{k}{T} u\right)}$$

#### Applications :

##### 1) Modulation:

Soit  $y(t)$  le produit d'un signal  $x(t)$  par un signal périodique  $h(t)$  résultant de la périodisation d'un signal  $g(t)$  tel que  $y(t) = h(t)x(t) = \left(\sum_k g(t - kT)\right)x(t)$ .

Nous avons alors :

$$Y(f) = \frac{1}{T} \sum_k G\left(\frac{k}{T}\right) X\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (\text{A-31})$$

##### 2) Echantillonnage :

Si  $g(t) = \delta(t)$ ,  $y(t)$  représente le résultat de l'échantillonnage de  $x(t)$  ( $y(t) = x^*(t)$ ) :

$$X^*(f) = \frac{1}{T} \sum_k X\left(f - \frac{k}{T}\right) \quad (\text{A-32})$$

### A.3.5. Transformation de Hilbert

La transformée de Hilbert de  $x(t)$  est définie par :

$$\hat{x}(t) = x(t) * \text{vp}\left(\frac{1}{\pi t}\right) = \frac{1}{\pi} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{x(u)}{t-u} du + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{x(u)}{t-u} du \right) \quad (\text{A-33})$$

ou par :  $\hat{x}(t) \leftrightarrow \hat{X}(f) = -i \text{signe}(f) X(f)$

**Causalité :** si  $x(t)$  est causal (i.e  $x(t) = 0$  pour  $t < 0$ ), la partie imaginaire de  $X(f)$  est la transformée de Hilbert de sa partie réelle. Ce résultat est applicable à la distribution de temps de vol  $f(\tau)$  des atomes. Il permet de calculer la Transformée en Cosinus à partir de la Transformée en Sinus et vice versa.

## A.4. Signaux à Temps Discret

### A.4.1. Transformée en $Z$

La Transformée en  $Z$  d'une signal numérique  $x[n]$  est définie par :

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n] z^{-n} \quad R_1 < |z| < R_2 \quad (\text{A-34})$$

L'expression  $X(z = \exp(2i\pi f))$  pour  $f \in [-1/2, 1/2]$  a un sens et s'appelle la **Transformée de Fourier à temps Discret (TFD)**; par abus d'écriture nous notons :  $X(f) = X(z = \exp(2i\pi f))$ .

## A.5. Echantillonnage

La Figure A-3 montre une représentation schématique d'un échantillonneur idéal.

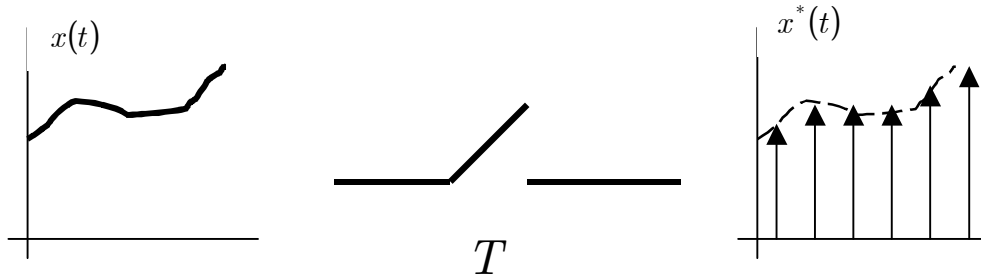


Figure A-3 : L'échantillonneur idéal.

Le signal échantillonné  $x^*(t)$  est une suite de valeurs prélevées aux instants discrets  $kT$  du signal analogique  $x(t)$ . En réalité ces signaux échantillonnés sont des signaux à temps continu qui peuvent prendre en dehors de ces instants  $kT$  des valeurs quelconques que l'on ignore et suppose abusivement qu'elles sont nulles. Ici, nous représentons mathématiquement l'opération d'échantillonnage par une *modulation par impulsions* :

$$x^*(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - kT) = x(t) \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(t - kT) \quad (\text{A-35})$$

**Recouvrement du spectre :** Le spectre complexe du signal échantillonné est donné par l'équation (A-32).

### A.5.1. Théorème d'échantillonnage (Reconstruction du signal)

D'après (A-32) nous pouvons voir que le spectre  $X(f)$  est contenu dans la partie basse fréquence de  $X^*(f)$ . Pour retrouver  $X(f)$  nous avons besoin de passer  $X^*(f)$  dans un filtre passe-bas et de multiplier par  $T$ .

### A.5.2. Formule d'interpolation :

Si  $X(f)$  a une occupation spectrale limitée à la bande  $\left[-\frac{1}{2T}, \frac{1}{2T}\right]$ , un filtre *passe-bas idéal*  $L(f)$  de gain  $T$  dans cette bande et nul ailleurs peut reconstruire  $X(f)$  à partir de  $X^*(f)$  :

$$X(f) = L(f)X^*(f) \quad (\text{A-36})$$

ou dans le domaine temporel :

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT) \operatorname{sinc} \frac{\pi(t-kT)}{T} \quad (\text{A-37})$$

### A.5.3. Théorème (échantillonnage d'un signal hybride)

Si la transformée en Laplace  $Z(s)$  du signal à échantillonner est le produit d'une transformée  $X^*(s)$  qui est déjà périodique de période  $2\pi/T$ , et d'une autre  $Y(s)$  qui n'est pas périodique, comme dans  $Z(s) = X^*(s)Y(s)$ , alors, lors de l'échantillonnage le terme périodique peut être mis en facteur :

$$Z^*(s) = (X^*(s)Y(s))^* = X^*(s)Y^*(s) \quad (\text{A-38})$$

#### Démonstration :

Nous pouvons démontrer (A-38) de deux façons différentes: Dans le domaine temporel à partir de (A-35) ou dans le domaine fréquentiel à partir de (A-32). Nous utilisons l'approche fréquentielle ici.

Si  $Z(s) = X^*(s)Y(s)$ , par application de (A-32) nous avons :

$$Z^*(s) = \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} X^*(s - jn\omega_c) Y(s - jn\omega_c) \quad (\text{A-39})$$

où nous avons posé  $\omega_c = 2\pi/T$

Mais  $X^*(s)$  est donné par (A-32) et nous avons :

$$X^*(s - jn\omega_c) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} X^*(s - jn\omega_c - jk\omega_c) \quad (\text{A-40})$$

Effectuons le changement de variable  $k = \mathbf{1} - n$  dans (A-40) nous obtenons :

$$X^*(s - jn\omega_c) = \frac{1}{T} \sum_{\mathbf{1}=-\infty}^{\infty} X^*(s - j\mathbf{1}\omega_c) = X^*(s) \quad (\text{A-41})$$

En d'autres termes, translater  $X^*$  qui est déjà périodique d'un nombre entier de périodes ne le modifie pas. Remplaçant (A-41) dans (A-39) nous avons :

$$Z^*(s) = X^*(s) \frac{1}{T} \sum_{n=-\infty}^{\infty} Y(s - jn\omega_c) = X^*(s)Y^*(s) \quad (\text{A-42})$$

## A.6. Critère de JURY

Le critère de stabilité pour un système à temps discret exige le calcul des pôles de sa fonction de transfert  $H(z) = N(z)/D(z)$ . Le critère de Jury évite le calcul effectif de ces pôles. Il s'applique au dénominateur mis sous la forme :

$$D(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \mathbf{L} + a_{n-1} z + a_n \text{ avec } a_0 > 0 \quad (\text{A-43})$$

On construit le tableau à  $2n - 3$  lignes suivant :

|              |              |              |              |           |              |       |
|--------------|--------------|--------------|--------------|-----------|--------------|-------|
| $a_0$        | $a_1$        | $a_2$        | $\mathbf{L}$ | $a_i$     | $\mathbf{L}$ | $a_n$ |
| $a_n$        | $a_{n-1}$    | $a_{n-2}$    | $\mathbf{L}$ | $a_{n-i}$ | $\mathbf{L}$ | $a_0$ |
| $b_0$        | $b_1$        | $\mathbf{L}$ | $b_{n-1}$    |           |              |       |
| $b_{n-1}$    | $b_{n-2}$    | $\mathbf{L}$ | $b_0$        |           |              |       |
| $c_0$        | $c_1$        | $\mathbf{L}$ | $\mathbf{L}$ |           |              |       |
| $c_{n-2}$    | $c_{n-3}$    | $\mathbf{L}$ | $\mathbf{L}$ |           |              |       |
| $\mathbf{L}$ | $\mathbf{L}$ | $\mathbf{L}$ |              |           |              |       |
| $q_0$        | $q_1$        | $q_2$        |              |           |              |       |

Les deux lignes suivantes sont construites à partir des deux premières par

$$b_i = \begin{vmatrix} a_0 & a_{n-i} \\ a_n & a_i \end{vmatrix} \text{ puis les deux suivantes par : } c_i = \begin{vmatrix} b_0 & b_{n-i-1} \\ b_{n-1} & b_i \end{vmatrix}.$$

La condition nécessaire et suffisante de stabilité est constituée des conditions suivantes qui doivent être remplies simultanément :

$$D(1) > 0, \begin{cases} D(-1) < 0 & \text{si } n \text{ est impair} \\ D(-1) > 0 & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} a_0 > |a_n| \\ |b_0| > |b_{n-1}| \\ \mathbf{M} \\ |q_0| > |q_2| \end{cases}$$

Dans le cas d'un second ordre avec  $D(z) = az^2 + bz + c$ , on a

$$: \begin{cases} a - c > 0 \\ D(1) = a + b + c > 0 \\ D(-1) = a - b + c > 0 \end{cases}$$





# Annexe B. SIGNAUX ALEATOIRES

---

## B.1. Définitions

Soit  $X$  une Variable Aléatoire (V.A) de densité de Probabilité  $f_X(x)$ . Pour une fonction  $g(x)$  mesurable, **l'espérance mathématique** de la variable aléatoire  $g(X)$ , que l'on note  $E(g(X))$ , est définie (lorsqu'elle existe) de la façon suivante :

$$E(g(X)) = \int_R g(x) f_X(x) dx \quad (\text{B-1})$$

On appelle *moment d'ordre  $n$*  l'espérance mathématique de la variable  $g(X) = X^n$  :

$$E(X^n) = \int_R x^n f_X(x) dx \quad (\text{B-2})$$

La valeur pour  $n=1$  s'appelle la *moyenne*.

On appelle **Variance** la quantité :

$$\sigma^2 = E(X^2) - E^2(X) \quad (\text{B-3})$$

### Formule de changement de variable :

Soit  $g(x)$  une fonction régulière et monotone sur  $\mathbf{R}$ , on montre alors que la V.A.  $Y = g(X)$  est telle que :

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|} \quad (\text{B-4})$$

où  $g^{-1}(y)$  désigne l'application inverse de  $g(x)$  et  $g'(x)$  la dérivée de  $g(x)$ .

Dans le cas où la fonction  $g(x)$  n'est pas monotone, il faut sommer sur toutes les déterminations de  $x$  telles que  $y = g(x)$ .

**Exemple :**  $x = v$  = la vitesse d'un atome et  $y = \tau = \frac{\mathbf{1}}{v}$  = son temps de vol.

Dans ce cas, on a :  $g^{-1}(\tau) = \mathbf{1} / \tau$  et  $g'(v) = -\mathbf{1} / v^2$ . Par suite  $g'(g^{-1}(\tau)) = -\frac{\tau^2}{\mathbf{1}}$  et

$$f_{\tau}(\tau) = \frac{\mathbf{1}}{\tau^2} f_v\left(v = \frac{\mathbf{1}}{\tau}\right)$$

## B.2. Processus Aléatoire

On appelle *processus aléatoire* une famille de variables aléatoires fonctions d'une variable réelle  $t \in \mathbf{R}$ , que l'on note indifféremment  $X_t(\xi)$ ,  $X(t, \xi)$  ou tout simplement  $X(t)$ . Ici, le paramètre  $\xi$  représente une épreuve (tirage) d'un espace probabilisé. Pour une valeur fixée du paramètre  $t$  ( $t = t_0$ ),  $X(t_0, \xi)$  est une variable aléatoire de densité de probabilité  $f_X(x; t_0)$ .

### B.2.1. Moments statistiques

La *valeur moyenne* statistique est la quantité définie par :

$$m_x(t) = E(X(t, \xi)) = \int_R x f_X(x; t) dx \quad (\text{B-5})$$

La *fonction d'autocorrélation* statistique, qui fait intervenir la statistique d'ordre 2, a pour expression :

$$R_{xx}(t_1, t_2) = E(X(t_1, \xi)X(t_2, \xi)) = \iint_R x_1 x_2 f_{X_1 X_2}(x_1, x_2; t_1, t_2) dx_1 dx_2 \quad (\text{B-6})$$

### B.2.2. Stationnarité au second ordre (au sens large)

Un processus (signal) aléatoire est stationnaire au sens large s'il vérifie :

- $m_x(t)$  indépendant de  $t$ ,

- $E(|X(t)|^2) < +\infty$ , indépendant de  $t$ ,
- $R_{xx}(t_1, t_2)$  fonction uniquement de  $\tau = t_1 - t_2$ .

Dans ce cas nous désignons la valeur moyenne par  $m_x$  et la fonction d'autocorrélation par

$$R_{xx}(\tau) = E(X(t)X(t - \tau)) \tag{B-7}$$

Pour une *suite aléatoire*, elle vaut :

$$R_{xx}[k] = E(x[n] x[n - k]) \tag{B-8}$$

### Densité Spectrale de Puissance

On appelle *densité spectrale de puissance* (en abrégé **D.S.P**) la Transformée de Fourier de la fonction d'autocorrélation. Dans le cas des *suites aléatoires* il vient :

$$S_x(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} R_{xx}[n] e^{-2i\pi n f} \text{ pour } f \in [-1/2, 1/2] \tag{B-9}$$

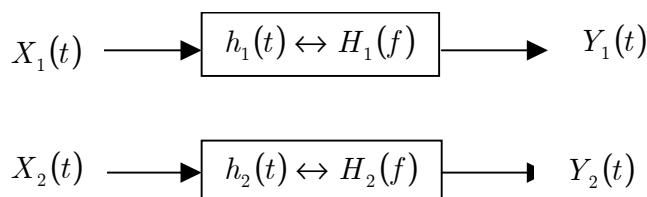
Dans le cas des *processus aléatoires* il vient :

$$S_x(f) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xx}(\tau) \exp(-2i\pi f \tau) d\tau \tag{B-10}$$

### B.2.3. Filtrage linéaire

Considérons deux filtres linéaires  $h_1(t)$  et  $h_2(t)$ . Soient  $X_1(t)$  et  $X_2(t)$  leurs entrées respectives et  $Y_1(t)$  et  $Y_2(t)$  leurs sorties respectives comme dans la figure suivante.

En introduisant alors les transformées de Fourier  $S_{x_1 x_2}(f)$  et  $S_{y_1 y_2}(f)$  des fonctions d'intercorrélacion, il vient :



$$S_{y_1 y_2}(f) = H_1(f)H_2^*(f)S_{x_1 x_2}(f) \quad (\text{B-11})$$

La formule (B-11) porte dans la littérature, le nom de *formule des interférences*. Elle s'applique aussi aux suites aléatoires en prenant les transformées de Fourier à temps discret.

**Application :**

1)  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$  et  $h_1(t) = h_2(t) = h(t) \Rightarrow y_1(t) = y_2(t) = y(t)$  et (B-11) devient :

$$S_y(f) = |H(f)|^2 S_x(f) \quad (\text{B-12})$$

2)  $x_1(t) = x_2(t) = x(t)$  et  $h_1(t) = h(t)$ ,  $h_2(t) = \delta(t) \Rightarrow y_1(t) = y(t)$  et  $y_2(t) = x(t)$  :

$$S_{yx}(f) = H(f)S_x(f) \quad (\text{B-13})$$

### B.3. Echantillonnage d'un signal aléatoire

Soit  $x(t)$  un signal aléatoire à temps continu, stationnaire au sens large. Considérons le signal aléatoire  $\tilde{x}(t)$  obtenu en échantillonnant les réalisations du signal  $x(t)$  à la fréquence  $f_e = 1/T$  avec une phase aléatoire  $\theta$ . Le signal échantillonné  $\tilde{x}(t)$  peut s'écrire formellement :

$$\tilde{x}(t) = x(t)\xi(t) = x(t)\sum_n \delta(t - nT - \theta) = \sum_n x_n \delta(t - nT - \theta) \quad (\text{B-14})$$

avec :

- $x_n = x(nT + \theta)$  : échantillon prélevé à l'instant aléatoire  $nT + \theta$ . C'est une V.A.
- $\theta$  : V.A uniformément répartie sur l'intervalle  $[0, T]$ , indépendant du signal  $x(t)$  et, par conséquent, indépendant de la suite  $x_n$ .

Nous avons alors :

$$S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{xx} \left( f - \frac{n}{T} \right) \quad (\text{B-15})$$

### Démonstration :

La formule sommatoire de Poisson (A-30) permet d'écrire :

$$\xi(t) = \sum_n c_n \exp\left(i2\pi n \frac{t}{T}\right) \text{ avec } c_n = \frac{1}{T} \exp\left(-i2\pi n \frac{\theta}{T}\right).$$

$$\text{Par suite : } m_\xi = E(\xi(t)) = \frac{1}{T} \text{ et } R_{\xi\xi}(\tau) = \frac{1}{T^2} \sum_n \exp\left(i2\pi n \frac{\tau}{T}\right).$$

En utilisant l'indépendance entre  $x(t)$  et  $\xi(t)$  nous obtenons :

$$\begin{aligned} R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) &= E(x(t)x(t-\tau)\xi(t)\xi(t-\tau)) = E(x(t)x(t-\tau)) E(\xi(t)\xi(t-\tau)) \\ &= R_{xx}(\tau)R_{\xi\xi}(\tau) \end{aligned}$$

ou avec la formule de Poisson sous la forme :

$$R_{\tilde{x}\tilde{x}}(\tau) = R_{xx}(\tau) \frac{1}{T} \sum_n \delta(\tau - kT)$$

En prenant la T.F de cette relation nous avons :

$$\begin{aligned} S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) &= S_{xx}(f) * \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta\left(f - \frac{n}{T}\right) \\ &= \frac{1}{T^2} \sum_{n=-\infty}^{\infty} S_{xx}\left(f - \frac{n}{T}\right) \end{aligned}$$

C'est la formule de repliement de spectre pour les signaux aléatoires.

Certains auteurs donnent une formule qui diffère par un facteur  $T$  de cette dernière. En effet, ils donnent la D.S.P d'un signal numérique où la période d'échantillonnage n'a aucun rôle. Notons ici que ce formalisme conduit à une valeur moyenne du signal échantillonné qui vaut  $m_x/T$  tandis que la valeur moyenne de la suite numérique vaut  $m_x$ .

Si le signal aléatoire  $x(t)$  a une occupation spectrale limitée à la bande  $[-T/2, T/2]$ , un filtrage du signal échantillonné par filtre passe-bas idéal permet de reconstruire le signal  $x(t)$ . En effet, la fonction de transfert de ce filtre est  $H(f) = T$  pour  $f \in [-T/2, T/2]$  et zéro ailleurs. La DSP du signal reconstruit est égale à  $|H(f)|^2 S_{\tilde{x}\tilde{x}}(f) = S_{xx}(f)$ . On retrouve bien la D.S.P du signal

$x(t)$ . L'application de ce filtre sur la suite numérique sans tenir compte de  $T$  conduit à une D.S.P qui vaut  $T S_{xx}(f)$ .

L'introduction du déphasage  $\theta$  ne change rien à la généralité du problème. En effet, sans ce déphasage le signal échantillonné n'est pas stationnaire et le calcul de la D.S.P fait intervenir la fonction d'autocorrélation temporelle.