



**HAL**  
open science

# Etude de la localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser

Hans Lignier

► **To cite this version:**

Hans Lignier. Etude de la localisation dynamique avec des atomes refroidis par laser. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université des Sciences et Technologie de Lille - Lille I, 2005. Français. NNT: . tel-00011644v1

**HAL Id: tel-00011644**

**<https://theses.hal.science/tel-00011644v1>**

Submitted on 17 Feb 2006 (v1), last revised 24 Aug 2009 (v2)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Université des Sciences et Technologies de Lille

## **Thèse**

pour l'obtention du grade

de Docteur de l'Université de Lille I

dans la spécialité : Laser, Molécules, et Rayonnements Atmosphériques

présentée par

**Hans Lignier**

Sujet de la thèse :

**Etude de la localisation dynamique avec des  
atomes refroidis par laser**

Soutenue le 9 décembre 2005 devant le jury composé de :

T. Monteiro	Rapporteur
J. Robert	Rapporteur
B. Grémaud	Examineur
M. Douay	Examineur
J.-C. Garreau	Directeur de thèse
P. Szriftgiser	Co-directeur de thèse

---

# Remerciements

J'ai passé, au sein du laboratoire PhLAM, trois années de thèse particulièrement agréables, à tous points de vue.

Scientifiquement tout d'abord, je considère avoir bénéficié d'un excellent encadrement. Non seulement Pascal et Jean-Claude ont toujours été disponibles, chose qui n'est pas si évidente, mais ils m'ont aussi communiqué un regard de physicien, en ce sens qu'ils ont transformé mon rapport primaire, trop scolastique, à la physique. J'ai eu la chance, de plus, que, de par leurs différences, ils m'aient apporté des outils complémentaires. Par ailleurs, sans m'étendre dans une description aux relents nostalgiques des moments de rires, et de sourires (au ralenti), de discussions au café, etc., je les remercie vivement de la façon dont j'ai été accueilli dans l'équipe. C'est une condition à mon avis essentielle (pour qui n'est pas moine) pour travailler efficacement en recherche.

Je remercie aussi l'ensemble des gens qui travaillent au laboratoire, avec qui je me suis toujours senti à l'aise, et surtout, avec qui je n'ai jamais ressenti la nécessité professionnelle (ou stratégique) de me taire, ou de faire dans la nuance polie. Je ne crois pas que l'on jouisse si souvent, dans les lieux de travail, d'une liberté d'expression aussi réelle.

J'ajoute un salut (chapeau bas) spécialement ciblé sur le bureau 072, à tous ses résidents, et à tous ceux qui y passaient avec joie. Un salut et non un merci (qui serait bien trop cérémonieux).

Enfin, je remercie ceux grâce et avec qui, bien que hors du labo, j'ai eu cette vie de thésard qu'ils ont permise sans s'en rendre nécessairement compte. Je pense aux très proches.

---

# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>v</b>
<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé</b>	<b>5</b>
1.1 Traitement classique . . . . .	6
1.1.1 Présentation du modèle . . . . .	6
1.1.2 Portrait de phases . . . . .	7
1.1.3 Diffusion . . . . .	9
1.2 Traitement quantique . . . . .	12
1.2.1 L'opérateur d'évolution . . . . .	14
1.2.2 Dynamique quantique . . . . .	15
1.2.3 Interprétation de la localisation dynamique . . . . .	19
1.3 Conclusion . . . . .	24
<b>2 Réalisation expérimentale d'un pendule pulsé avec des atomes froids</b>	<b>27</b>
2.1 Des atomes froids dans une onde stationnaire pulsée . . . . .	27
2.1.1 Le piège magnéto-optique (PMO). . . . .	28
2.1.2 L'onde stationnaire . . . . .	31
2.1.3 Mesure de la forme de la distribution d'impulsions . . . . .	37
2.2 Observation expérimentale de la localisation dynamique . . . . .	43
2.2.1 Forme de la distribution . . . . .	43
2.2.2 Evolution de $\langle P^2 \rangle$ . . . . .	44
2.2.3 Evolution du maximum de la distribution d'impulsions . . . . .	45
2.3 Effets expérimentaux . . . . .	46
2.3.1 Signal de fond et perte d'atomes . . . . .	47
2.3.2 Inhomogénéité en $K$ . . . . .	47
2.3.3 Durée finie des pulses . . . . .	49
2.3.4 Emission spontanée . . . . .	51
2.3.5 Retrouver les résultats expérimentaux . . . . .	56
2.4 Conclusion . . . . .	58
<b>3 Destruction de la localisation dynamique</b>	<b>59</b>
3.1 Générer des séquences bicolores . . . . .	59
3.1.1 La modulation de phase . . . . .	60
3.1.2 La modulation d'amplitude . . . . .	61
3.1.3 Générer expérimentalement une série bicolore . . . . .	62

3.2	Etude de la dynamique d'un système bicolore en modulation de phase	64
3.2.1	Etude numérique de la dynamique classique . . . . .	64
3.2.2	Etude expérimentale de la dynamique quantique . . . . .	68
3.3	Spectre de localisation . . . . .	71
3.3.1	Cas classique : étude numérique . . . . .	72
3.3.2	Cas quantique : étude expérimentale . . . . .	75
3.4	Etude expérimentale de la raie de localisation $r = 1$ . . . . .	82
3.4.1	Mesure de la population $P = 0$ . . . . .	83
3.4.2	Variation du taux de diffusion . . . . .	88
3.5	Interprétation théorique des résultats expérimentaux . . . . .	90
3.5.1	Description et vocabulaire . . . . .	92
3.5.2	Dynamique d'un état initial . . . . .	96
3.5.3	Interprétation des résultats . . . . .	103
3.6	Conclusion . . . . .	107
<b>4</b>	<b>Réversibilité de la délocalisation</b>	<b>109</b>
4.1	Réversibilité et relocalisation . . . . .	109
4.1.1	Un aller-retour dans le spectre des quasi-énergies . . . . .	110
4.1.2	Evolution idéale. Approximation adiabatique . . . . .	111
4.1.3	Evolution réelle. Effets de la non-adiabaticité . . . . .	112
4.1.4	Critères pour une observation efficace de la localisation . . . . .	115
4.2	Présentation et étude numérique du système expérimental . . . . .	116
4.2.1	La séquence expérimentale . . . . .	119
4.2.2	Quelques résultats numériques . . . . .	119
4.3	Observation expérimentale de la relocalisation . . . . .	122
4.3.1	Dispositif . . . . .	122
4.3.2	Résultats . . . . .	123
4.3.3	Destruction de la relocalisation par décohérence . . . . .	126
4.4	Conclusion . . . . .	128
	<b>Conclusion</b>	<b>131</b>
	<b>A Atome à deux niveaux dans une onde stationnaire</b>	<b>133</b>
	<b>B Articles publiés</b>	<b>141</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>171</b>

# Introduction

En physique, la notion de chaos a une acceptation bien précise : elle concerne les systèmes dont le comportement dynamique est très sensible aux conditions initiales. Les travaux fondateurs sur le sujet de H. Poincaré au début du XX<sup>ème</sup> siècle ont montré que leur caractéristique majeure était l'impossibilité de déterminer analytiquement leurs trajectoires avec exactitude. Le sujet laissé en friche pendant plusieurs décennies a suscité un regain d'intérêt vers la fin des années 1960 du fait de la possibilité alors nouvelle de réaliser des calculs complexes par ordinateur (E. Lorenz<sup>1</sup>, un météorologue du Massachusetts Institut of Technology, fut une des personnes qui a participé à ce retour sur la notion de chaos ; il avait remarqué que ces prédictions météorologiques, basées sur des simulations numériques, étaient très sensibles aux données initiales). Depuis cette époque, de nombreuses recherches ont accru nos connaissances sur le sujet, et des notions nouvelles sont apparues (exposant de Lyapounov, théorème KAM, etc.). Cette approche, qui se base sur la possibilité de définir un état du système par un point dans l'espace des phase, constitue ce que l'on appelle précisément le chaos classique.

Une approche quantique d'un système chaotique pose d'emblée un problème. Non seulement parce que la notion de condition initiale est obscurcie par le fait que la relation de Heisenberg empêche d'associer un point unique à l'état du système dans l'espace des phases, mais aussi parce que, plus généralement, la notion de trajectoire est remplacée par celle d'amplitude de probabilité. Plus encore, la linéarité de l'équation de Schrödinger empêche les systèmes quantiques de présenter cette "sensibilité aux conditions initiales" qui est l'ingrédient de base du chaos classique.

Cependant, il existe un domaine de recherche dénommée *chaos quantique*. En fait, ce terme désigne, par commodité, l'étude quantique d'un système qui présente classiquement une dynamique chaotique. Les recherches effectuées dans ce cadre ont généralement pour objet de caractériser le comportement chaotique ou régulier du mouvement classique dans les propriétés quantiques, telles que la distribution des niveaux d'énergie ou encore les états propres du système. Le modèle paradigmatique du pendule pulsé, qui présente classiquement une dynamique classique sous certaines conditions, est l'objet, du fait de sa simplicité, de nombreuses études théoriques depuis les années 1970. Ce modèle consiste à soumettre une particule libre à une séquence de pulses<sup>2</sup> d'un potentiel sinusoïdal. Un traitement classique montre

---

<sup>1</sup>On attribue souvent la parabole célèbre de l'"effet Papillon" à E. Lorenz qui l'a utilisé de nombreuse fois. En 1972, il tint, par exemple, une conférence dont le titre était : *Predictability : does the flap of butterfly's wings in Brazil set off a tornado in Texas ?*

<sup>2</sup>Afin d'éviter toute confusion avec le terme "impulsion" compris dans le sens de quantité de mouvement, le terme "pulse", qui est un néologisme, désigne, dans ce rapport, un forçage bref .



que l'énergie cinétique moyenne d'un tel système croît linéairement avec le temps – ce qui est caractéristique d'une dynamique chaotique (ergodicité). Par contre, un traitement quantiquement du même système fait apparaître un gel de l'énergie cinétique moyenne au bout d'un certain temps caractéristique ; ce phénomène, appelé *localisation dynamique*, constitue une signature du comportement chaotique du pendule pulsé classique.

Toutefois, cette signature dépend de la périodicité temporelle de la séquence de pulses, et une brisure de cette périodicité conduit à détruire la localisation dynamique, phénomène désignée sous le terme de *délocalisation dynamique*. L'avènement de la technique de refroidissement d'atomes par laser a permis d'étudier expérimentalement sa dynamique quantique. En effet, l'énergie cinétique d'atomes ainsi refroidis est suffisamment faible pour que leur longueur d'onde de de Broglie soit comparable à la période spatiale d'un potentiel optique, ce qui permet la manifestation de phénomènes quantiques. L'équipe de M. Raizen a ainsi réalisé au milieu des années 1990 un pendule pulsé quantique expérimental et observé le phénomène de localisation dynamique. Au moyen d'un dispositif similaire, nous avons pu constater expérimentalement que la brisure de la périodicité du pendule pulsé conduit au phénomène de délocalisation. Dans ce cadre, nous avons mis en évidence l'existence des résonances qui ont une propriété particulièrement intéressante : elles présentent un caractère sub-Fourier, c'est-à-dire qu'elles sont plus étroites que l'inverse de la durée de la séquence de pulses. L'accent a été mis sur la caractérisation et l'évolution de leur largeur. Par ailleurs, une analyse basée sur une analyse du spectre de Floquet a révélé que ce comportement dépend de la façon dont le système évolue sur ses niveaux d'énergies, et que, sous certaines conditions, la destruction de la localisation par brisure de périodicité est un processus déterministe. Nous l'avons prouvé en construisant une séquence inversée qui ramène le système sur un état partiellement localisé. Nous avons de plus montré que l'introduction contrôlée de décohérence dans le système détruit la localisation dynamique de manière irréversible. L'exposé de ces résultats est structuré en quatre chapitres.

Le premier chapitre fait office d'introduction. Les principaux résultats concernant le pendule pulsé périodiquement y sont rappelés et illustrés par des simulations numériques. Nous montrons que des traitements classique et quantique de ce système font effectivement apparaître des différences de comportement sur l'évolution de l'énergie cinétique moyenne.

Le deuxième chapitre porte sur la réalisation expérimentale du pendule pulsé quantique<sup>3</sup>. Tout d'abord, les éléments importants du montage sont décrits et caractérisés, puis les résultats d'une expérience de pendule pulsé périodiquement sont exposés. Les principaux effets parasites entachant les résultats expérimentaux sont identifiés et modélisés, de façon à ce qu'ils puissent être pris en compte dans nos simulations numériques.

Le troisième chapitre se concentre sur l'étude du pendule pulsé par des séquences constituées de deux fréquences caractéristiques permettant éventuellement de briser leur périodicité temporelle. Nous montrons expérimentalement l'effet de délocalisation dans le cas non-périodique et introduisons la notion de spectre de localisation. La forme, la largeur et l'évolution temporelle d'une raie particulière de ce spectre

---

<sup>3</sup>L'embasement théorique sous-jacent à cette réalisation a été reporté dans l'annexe A.

sont étudiées. Nous mettons en évidence son caractère sub-Fourier que nous interprétons grâce à un modèle basée sur l'analyse de Floquet du système périodique sous-jacent.

Le quatrième chapitre est consacré à la réalisation d'une expérience imaginée sur la base de l'analyse développée au chapitre précédent. Il s'agit d'une expérience de réversibilité, c'est-à-dire d'une expérience dont il est attendu qu'elle permette de retrouver, au moins en partie, les propriétés de localisation que nous lui faisons perdre préalablement. Pour cela, nous utilisons des séquences de pulses dites inversées agissant en deux étapes : la première détruit la localisation dynamique, la deuxième est censée la reconstruire.

Les trois articles publiés dans le cadre de ces travaux sont insérés dans l'annexe B.



# Chapitre 1

## Particule dans un potentiel sinusoïdal pulsé

Le chaos quantique, l'expression l'indique, procède de la rencontre de deux thématiques historiquement distinctes en physique. Le chaos au sens classique désigne une dynamique instable intervenant dans des systèmes qui remplissent des conditions particulières : entre autres, la non-intégrabilité et la non-linéarité des équations du mouvement. Concrètement, cette instabilité conduit à ce que deux trajectoires issues de conditions initiales infiniment proches divergent exponentiellement l'une de l'autre. L'*exposant de Lyapounov*, en tant qu'argument de cette fonction exponentielle, caractérise cette divergence :

$$|\delta x| \sim e^{\lambda t}. \quad (1.1)$$

Bien que les systèmes chaotiques reposent sur des principes déterministes, la prévision des trajectoires s'avère pratiquement difficile, et même impossible à long terme, du fait qu'elle exige une précision numérique toujours plus grande.

Sans détailler les concepts et subtilités du domaine, il est intéressant de faire la distinction entre chaos hamiltonien et chaos dissipatif. Le premier regroupe les systèmes pour lesquels les forces dérivent d'un potentiel (excluant ainsi les systèmes aux forces dissipatives) et dont l'énergie peut s'écrire sous forme hamiltonienne. Hormis les propriétés particulières du chaos hamiltonien, celui-ci présente la particularité d'être conforme au formalisme de la mécanique quantique. Le pont entre les deux thématiques apparaît...

L'expression "chaos quantique" est évoquée lorsque l'on traite un système quantique dont la limite classique est chaotique. Dans ce cadre, l'évolution du système se fonde sur l'équation de Schrödinger et non plus sur les équations de Hamilton, ce qui implique, de part la linéarité intrinsèque de ce formalisme, qu'une dynamique stable est imposée à la fonction d'onde. Par ailleurs, le concept classique de trajectoire est mis à mal du fait de l'indétermination sur la position, conséquence des inégalités de Heisenberg ( $\Delta x \Delta p \geq \hbar/2$ ). Il faut donc s'attendre à un comportement radicalement différent du cas classique.

Ce premier chapitre a pour objet de montrer comment ces notions s'articulent dans le cas particulier de notre système de référence. Dans la première section, nous rappelons les principaux résultats fournis par une approche classique (et statistique).

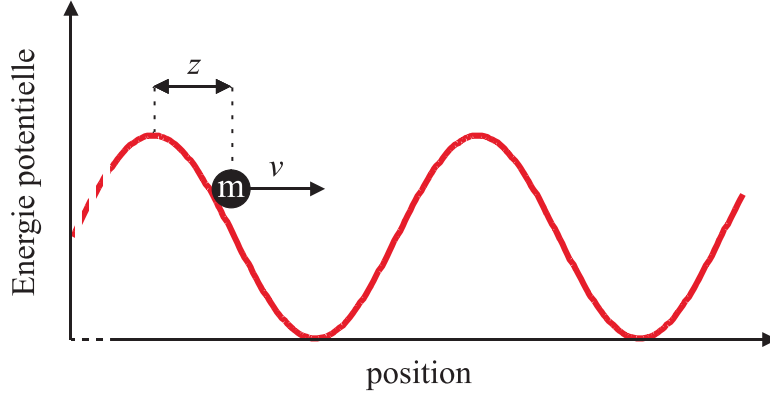


FIG. 1.1 – Lorsqu’une particule de masse  $m$  se déplace librement, le système conserve son impulsion. Mais périodiquement apparaissent des pulses d’un potentiel sinusoïdal de période spatiale  $\Lambda$ . La particule subit alors une force proportionnelle à la dérivée du potentiel. Ce système est équivalent au pendule pulsé classique

La seconde section est le pendant quantique de la première. Hormis les concepts et les outils spécifiques qui y sont introduits, les différences de comportement, notamment en ce qui concerne la diffusion, y sont pointées.

## 1.1 Traitement classique

### 1.1.1 Présentation du modèle

Considérons une particule de masse  $m$  soumise à une force pulsée dérivant d’un potentiel sinusoïdal de période spatiale  $\Lambda$  (figure 1.1). Ces pulses se succèdent périodiquement dans le temps et, plus précisément, toutes les  $T$  secondes. Ce système unidimensionnel est caractérisée par sa *position* ( $z$ ) et sa grandeur conjuguée, l’*impulsion*

$$p = mv \quad (1.2)$$

à laquelle est liée l’énergie cinétique

$$E_c = \frac{p^2}{2m}. \quad (1.3)$$

Par ailleurs, le hamiltonien global s’écrit

$$\tilde{H}(t) = \frac{p^2}{2m} + V_0 \cos\left(\frac{2\pi z}{\Lambda}\right) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \delta(t - n_1 T), \quad (1.4)$$

où  $V_0$  représente l’amplitude maximale du potentiel,  $t$  marque le temps et les fonctions de Dirac  $\delta$  retranscrivent l’instantanéité des pulses.

Afin d’améliorer la lisibilité des équations, un changement d’échelle est effectué sur

le temps :  $n = \frac{t}{T}$ ,  
 la position :  $\theta = \frac{2\pi}{\Lambda} z \pmod{2\pi}$ ,  
 et l'impulsion :  $P = \frac{2\pi T}{m\Lambda} p$ .

Cela conduit à ce que le hamiltonien s'écrive

$$H(n) = \frac{P^2}{2} + K \cos(\theta) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \delta(n_1 - n), \quad (1.5)$$

où  $H(n) = \frac{4\pi^2 T^2}{m\Lambda^2} \tilde{H}(t)$  est l'énergie renormalisée et  $K = \frac{4\pi^2 T}{m\Lambda^2} V_0$  est le paramètre de stochasticité.

Ce modèle apparaît souvent dans la littérature spécialisée sous une forme quelque peu différente – mais absolument équivalente. Au lieu d'une particule pulsée périodiquement par un potentiel sinusoïdal, il est alors question d'un pendule pulsé par un champ gravitationnel. Ce modèle, connu sous l'expression anglaise *Kicked Rotor* (rotateur pulsé), fait intervenir des grandeurs conjuguées différentes (l'angle et le moment cinétique) dont les évolutions sont strictement identiques à celles de la position et de l'impulsion de notre particule. D'une certaine manière, notre modèle n'est qu'une version "dépliée" ou encore "linéaire" du *Kicked Rotor*. Le choix de présentation se justifie par le fait que notre expérience, présentée au chapitre 2, correspond au modèle "linéaire".

### 1.1.2 Portrait de phases

L'étude du pendule pulsé périodiquement passe généralement par le suivi des trajectoires issues de différentes conditions initiales. La détermination des trajectoires s'appuie sur l'intégration des équations de Hamilton

$$\begin{cases} \dot{P} &= -\frac{\delta H}{\delta \theta}, \\ \dot{\theta} &= \frac{\delta H}{\delta P}, \end{cases} \quad (1.6)$$

sur une période afin de faire apparaître deux relations de récurrence portant sur  $\theta$  et  $P$  entre les instants  $n$  et  $n + 1$  :

$$\begin{cases} P_{n+1} &= P_n - K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + P_{n+1} \end{cases} \quad (1.7)$$

En les itérant numériquement, il est possible de tracer plusieurs trajectoires stroboscopées sur des intervalles  $\Delta n = 1$  dans un plan  $(\theta, P)$ . Les équations (1.7) indiquent que ce plan est  $2\pi$ -périodique sur ses deux axes. Sur le "portrait de phases" ainsi généré, connu sous le nom d'*application standard* ou encore d'*application de Chirikov-Taylor*, on distingue nettement les trajectoires stables des trajectoires stochastiques (voir sous-section suivante). Remarquons cependant que le recours au calcul numérique a une conséquence notable : les séries de points correspondant à des trajectoires chaotiques sont très dépendantes – par définition – des troncatures numériques à la différence des trajectoires stables (figures 1.2). Seules ces dernières sont donc déterminées correctement. Ceci ne pose pas de problème puisque l'objet de cette analyse n'est que la caractérisation – en terme de type de dynamique – de l'espace des phases.

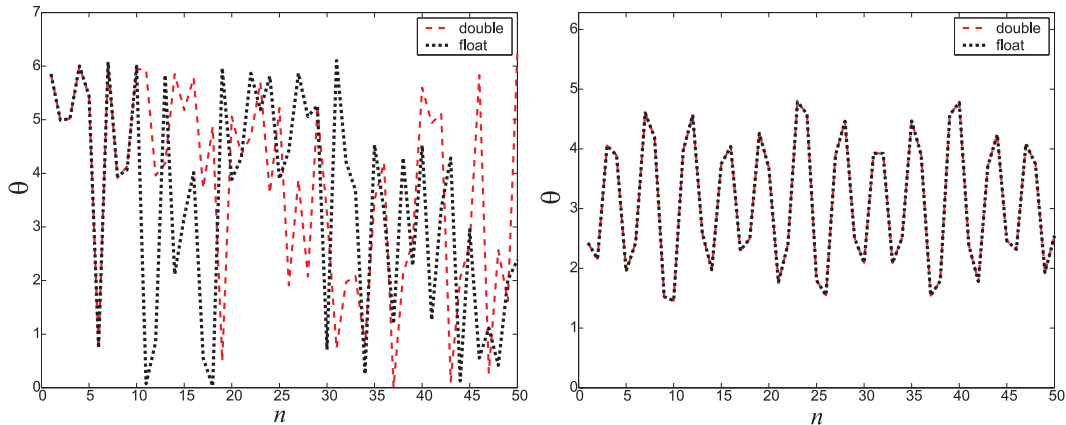


FIG. 1.2 – Les grandeurs  $\theta$  et  $P$  sont ici codées numériquement par deux formats de données différents – le float (4 octets) et le double (8 octets). Le fait que le format double contienne une plus grande quantité d'information que le format float se répercute sur la détermination de l'évolution temporelle de la position en régime chaotique (figure de gauche) : jusqu'au dixième pulse, la précision du format float est suffisante pour que la trajectoire de  $\theta$  coïncide avec celle fournie par le format double ; au-delà de ce pulse, les trajectoires divergent, marquant ainsi jusqu'où la précision du format float permet de prédire correctement l'évolution de  $\theta$ . Au contraire, en régime stable (figure de droite), le choix du format n'a aucun effet sur la prévision des trajectoires.

### Analyse du portrait de phase en fonction de $K$

Les relations (1.7) montrent que le comportement de la particule soumise au potentiel pulsé dépend uniquement du paramètre  $K$  – conditions initiales mises à part, bien sûr. La valeur de ce paramètre contrôle la dynamique globale du système ; trois régimes principaux peuvent être distingués.

Tant que le potentiel perturbateur est nul ( $K = 0$ ), l'impulsion est conservée, autrement dit  $P = \text{Constante}$  ou encore  $E_c = \text{Constante}$ . Des lignes droites correspondant à différentes vitesses initiales composent alors l'espace des phases (cf. figure 1.3). Avec l'apparition d'une faible perturbation ( $K \rightarrow 0$ ), apparaissent des trajectoires stables de types différents. Certaines se referment sur elles-mêmes (voir figure 1.3) et forment des îlots appelés résonances. Physiquement, elles correspondent à des trajectoires qui, *sous l'effet* de la stroboscopie, sont circonscrites à des régions limitées du potentiel (ce qui ne signifie pas que les particules sont bloquées dans un puits unique mais plutôt qu'elles explorent périodiquement les mêmes zones de différents puits ; seules les résonances centrées sur  $P = 0$  correspondent à l'exploration d'un même puits). Par ailleurs, il existe des trajectoires stables que l'on peut distinguer des précédentes en ce sens qu'elles décrivent complètement l'intervalle  $[0; 2\pi]$  ; les particules passent alors périodiquement de puits en puits, sans restriction en position.

Avec la croissance de  $K$ , des régions chaotiques apparaissent et s'étendent. Dans ces zones, les corrélations temporelles sur  $P$  et  $\theta$  diminuent tellement rapidement que les trajectoires présentent une dynamique stochastique. Cette propriété leur permet, pour un nombre suffisant d'itérations, de balayer l'ensemble de la région

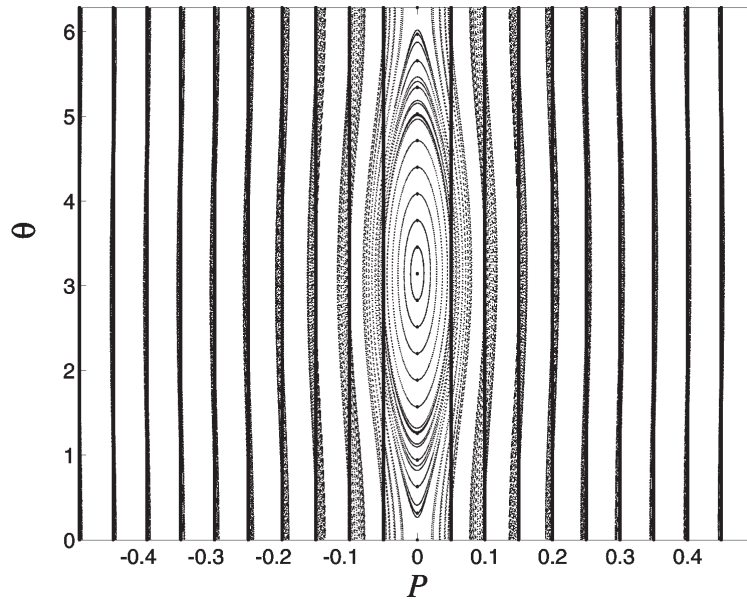


FIG. 1.3 – Trajectoires d’un portrait de phases pour  $K = 0$  (trait épais) et  $K = 0.01$  (pointillés). Les trajectoires fermées centrées sur  $P = 0$  correspondent à une résonance : les particules parcourent le puits, ralentissent, rebroussement chemin et oscillent ainsi périodiquement.

dans laquelle elles sont contenues. Au-delà d’une valeur critique du paramètre de stochasticité,  $K_{cr} \simeq 0,9716$ , il a été démontré [1, 2] que cette région s’étend à tout l’espace des impulsions. Au contraire, pour  $K < K_{cr}$ , l’exploration des trajectoires stochastiques est limitée par les barrières que constituent les trajectoires stables (voir figure 1.4).

Lorsque  $K$  dépasse  $K_{cr}$ , la dernière barrière se déchire et les trajectoires de certaines régions chaotiques sont libres de diffuser à travers l’espace des impulsions en se faufilant entre les résonances (voir figure 1.5). La surface globale des résonances diminue ensuite exponentiellement avec  $K$  conduisant à ce que, pour  $K \gg K_{cr}$ , seuls de minuscules îlots de stabilité subsistent dans une mer chaotique [1]. Numériquement, on constate que ceci est déjà vrai pour  $K \gtrsim 5$  (voir figure 1.6).

### 1.1.3 Diffusion

Les phénomènes diffusifs regroupent les systèmes pour lesquels l’écart quadratique moyen d’une grandeur évolue linéairement avec le temps et avec une constante de proportionnalité appelée *taux de diffusion*. Dans le cas de particules soumises à un potentiel pulsé, nous allons voir que c’est précisément ce comportement qu’adopte l’énergie cinétique moyenne si l’ensemble de l’espace des impulsions est entièrement ouvert aux dynamiques chaotiques ( $K > K_{cr}$ ). Rappelons que l’énergie cinétique moyenne vaut la moitié de l’écart quadratique moyen de l’impulsion.

La démonstration s’appuie sur les équations (1.7) qui permettent d’écrire la variation de  $P$  d’une trajectoire chaotique individuelle :



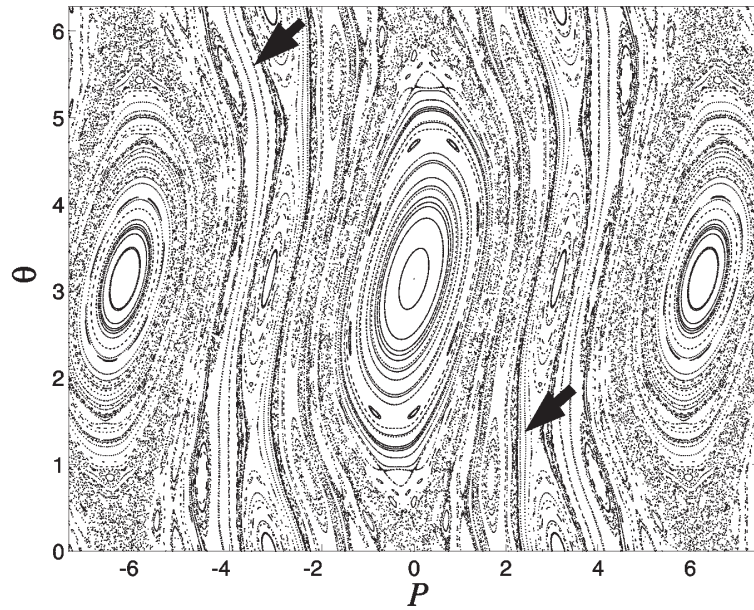


FIG. 1.4 – Portait de phase pour  $K = 0,85$ . Tant que  $K < 0,9716$ , aucune trajectoire chaotique n'explore l'espace des impulsions à cause des barrières (deux d'entre elles sont indiquées par les flèches) constituées par les trajectoires stables s'étendant en  $\theta$  sur  $[0; 2\pi]$ .

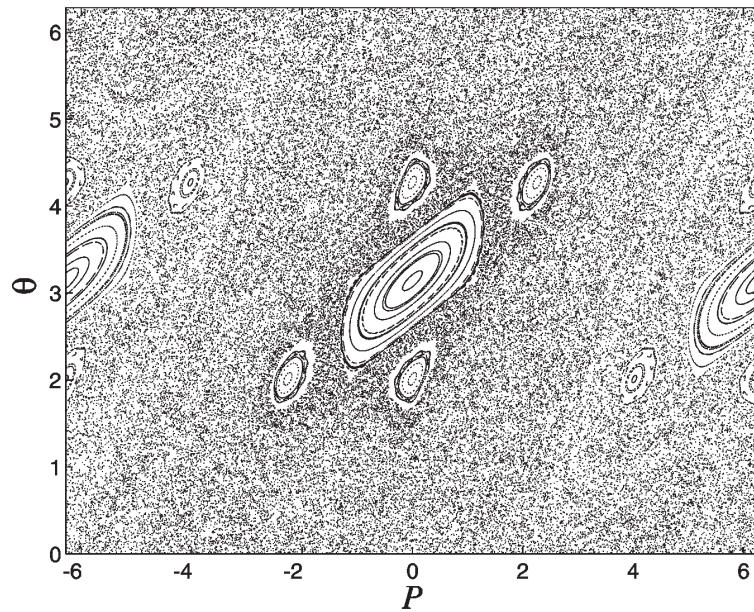


FIG. 1.5 – Portait de phase pour  $K = 2,5$ . A partir de  $K \gtrsim 0,9716$ , la diffusion en impulsion peut s'étendre à l'infini puisque plus aucune trajectoire stable ne l'empêche. Aussi, l'aire des orbites stables qui subsistent diminuent exponentiellement avec  $K$ .

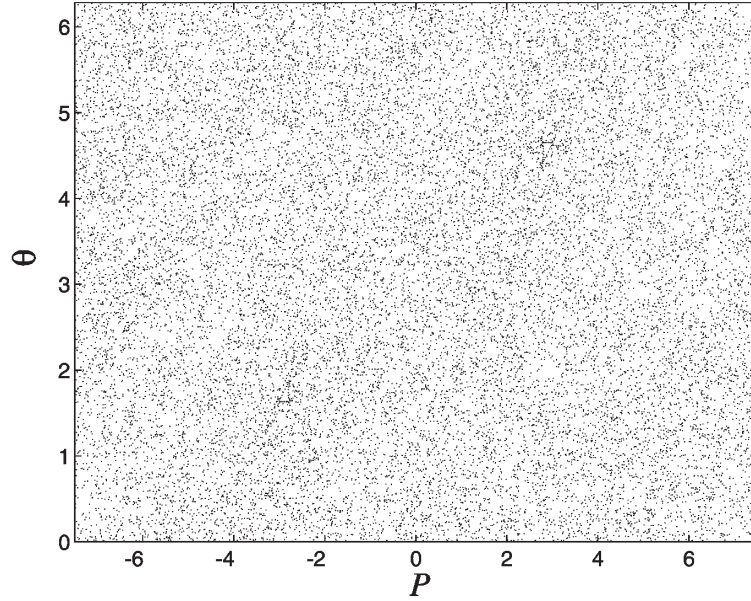


FIG. 1.6 – Portait de phases pour Ici  $K = 5,8$ . Si  $K \gtrsim 5$ , l'espace des phases apparaît complètement chaotique.

$$\Delta P_n = (P_n - P_0) = K \sum_{n_1=0}^{n-1} \sin \theta_{n_1}, \quad (1.8)$$

où les indices se réfèrent à différents instants ( $n$  itérations en tout). Pour  $K \gg K_{cr}$ , il est alors possible de calculer approximativement la moyenne et l'écart quadratique moyen de  $P$  si l'on suppose une distribution homogène de  $\theta$  sur l'intervalle  $[0; 2\pi]$  :

$$\overline{\Delta P_n} = \langle \Delta P_n \rangle = 0; \quad \overline{(\Delta P_n)^2} = \langle (\Delta P_n)^2 \rangle \cong \frac{1}{2} K^2 n, \quad (1.9)$$

où la barre désigne une moyenne réalisée sur différents temps initiaux (pour une même trajectoire) et les symboles  $\langle \rangle$  une moyenne réalisée sur différentes positions initiales (l'équivalence de ces opérations, due à l'ergodicité du système, est illustrée au moyen de simulations numériques sur la figure 1.8).

A partir des relations (1.9), on identifie le taux de diffusion :

$$D_{cl}(K) \equiv \frac{\overline{(\Delta P_n)^2}}{n} = \frac{\langle (\Delta P_n)^2 \rangle}{n} \cong \frac{1}{2} K^2. \quad (1.10)$$

Les simulations numériques indiquent effectivement que  $D_{cl}(K)$  suit une tendance (grossièrement) parabolique en fonction de  $K$ . Mais elles indiquent aussi un comportement oscillant absent de ce modèle (voir figure 1.8). Un calcul plus précis [3, 1], prenant en compte les corrélations temporelles sur la position, aboutit à une expression analytique de  $D_{cl}(K)$  plus juste :

$$D_{cl}(K) \approx \begin{cases} \frac{1}{2} K^2 \{1 - 2J_2(K)[1 - J_2(K)]\}, & K \geq 4,5 \\ 0.30(K - K_{cr})^3, & K_{cr} < K < 4,5 \end{cases}, \quad (1.11)$$

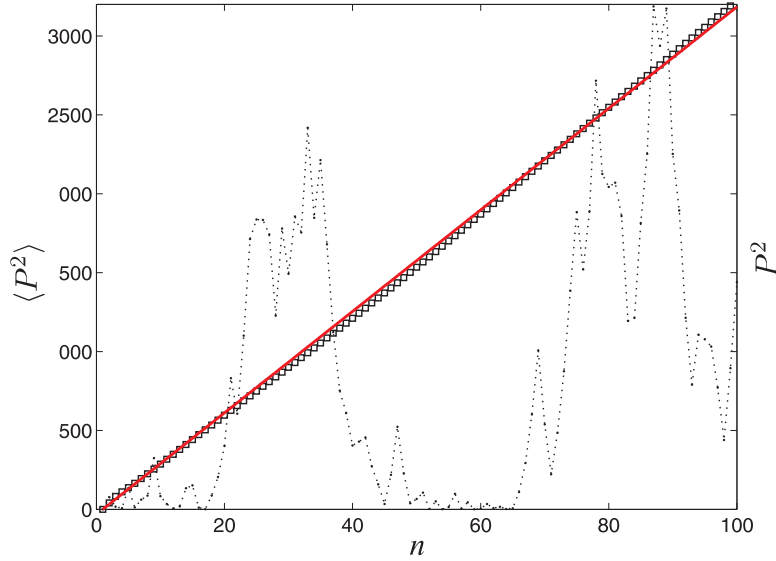


FIG. 1.7 – Evolutions temporelles de  $\langle P^2 \rangle$  moyennée (carrés) et de  $P^2$  pour une réalisation particulière (pointillés) obtenues par simulation numérique ( $K = 9$ ). La courbe en trait continu représente la même évolution déterminée analytiquement [ $D_{cl}(K = 9) \approx 32,16$ ].

où  $J_2(K)$  est une fonction de Bessel d'ordre 2. La croissance linéaire de l'écart quadratique moyen de  $P$  ainsi calculée s'accorde très bien avec les résultats numériques comme le montrent les figures 1.7 et 1.8.

Enfin, il apparaît numériquement (voir figure 1.9), pour  $P_0$  donnée et  $\theta$  distribuée de façon homogène sur  $[0; 2\pi]$ , que la distribution en  $P$  prend une forme gaussienne centrée sur  $P_0$  et que sa largeur croît linéairement avec le nombre de pulses avec un taux  $D_{cl}(K)$ . Cette évolution s'exprime de la façon suivante [4] :

$$f(P, n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{cl}(K)n}} \exp\left(-\frac{(P - P_0)^2}{2D_{cl}(K)n}\right). \quad (1.12)$$

En définitive, pour un ensemble de particules dont les conditions initiales correspondent à une petite surface de l'espace des phases, l'application d'une série de pulses périodiques d'amplitude  $K \gtrsim 5,8$  produit une expansion de cette surface en position et en impulsion. En particulier, l'espace des impulsions est exploré suivant une gaussienne dont la largeur croît linéairement avec le nombre de pulses.

## 1.2 Traitement quantique

Pour un système dont l'action est proche de  $\hbar$ , la démarche précédente cède le pas au formalisme quantique. En conservant les renormalisations de la section 1.1, le hamiltonien du système quantique prend une forme par définition similaire à celle déterminée classiquement :

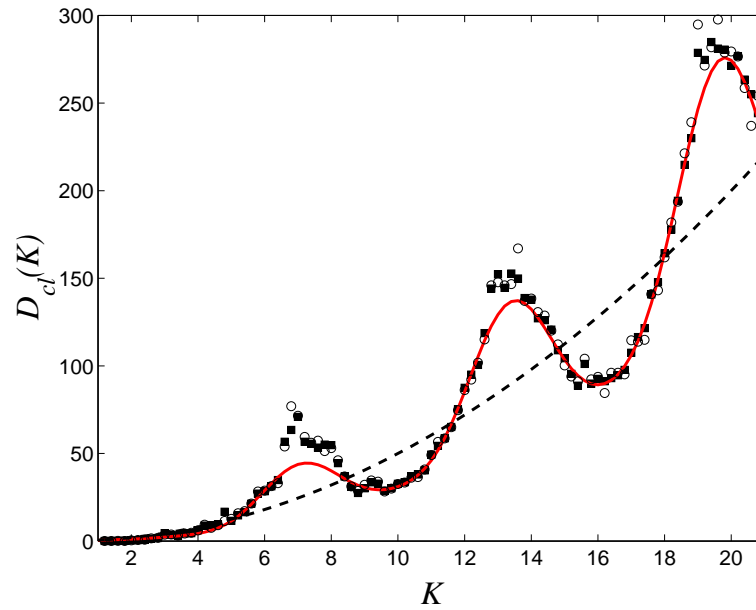


FIG. 1.8 – Evolution du taux de diffusion  $D_{cl}(K)$  : les carrés et les ronds correspondent à des simulations numériques (200 itérations) pour lesquelles l'écart quadratique a été moyenné respectivement sur le temps et la position ; la courbe en trait discontinu représente l'évolution asymptotique et celle en trait épais le calcul plus précis de  $D_{cl}(K)$  [équation (1.11)].

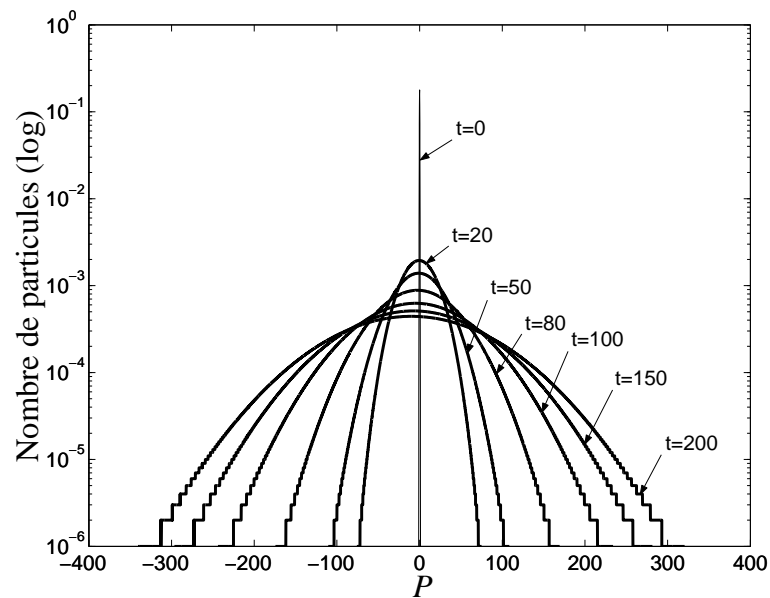


FIG. 1.9 – Evolution temporelle d'une distribution d'impulsions pour  $K = 9$ . Elle s'élargit avec le taux de diffusion  $D_{cl}(K = 9)$  et prend une forme gaussienne rapidement (après quelques pulses).

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + K \cos \hat{\theta} \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \delta(n - n_1), \quad (1.13)$$

à la différence près cependant, que les grandeurs observables sont désormais des opérateurs (marqués par des chapeaux) et que la particule est décrite par son état quantique  $|\Psi_n\rangle$ . L'évolution d'un tel état obéit à l'équation de Schrödinger

$$i\bar{k} \frac{\partial |\Psi_n\rangle}{\partial n} = \hat{H} |\Psi_n\rangle, \quad (1.14)$$

où  $\bar{k} = \frac{4\pi^2 \hbar T}{m\Lambda^2}$  est interprété comme une constante de Planck renormalisée<sup>1</sup> et sert donc à mesurer le caractère quantique du système (pour  $\bar{k} \rightarrow 0$ , le comportement tend à être classique tandis que pour  $\bar{k} \gtrsim 1$ , il tend à être quantique). La période  $T$  apparaît comme un levier facilement manipulable pour modifier la valeur de  $\bar{k}$ . Par ailleurs, comme nous ne nous intéressons qu'à la dynamique quantique lorsque la dynamique classique est chaotique sur la quasi-totalité du portrait de phases, il faut poser la condition  $K \gtrsim 5, 8$ .

Dans un premier temps, nous allons décrire quelle méthode nous employons pour déterminer l'évolution temporelle de l'état d'une particule dans le cas quantique. Ensuite, nous présenterons les principaux effets quantiques obtenus au moyen de simulations numériques. Enfin et surtout, une explication de ces effets sera fournie dans la dernière sous-section.

### 1.2.1 L'opérateur d'évolution

L'évolution de la fonction d'onde entre deux instants  $n_1$  et  $n_2$  obéit à la relation

$$|\Psi_{n_2}\rangle = \hat{U}(n_2 - n_1) |\Psi_{n_1}\rangle, \quad (1.15)$$

où  $\hat{U}$ , l'opérateur d'évolution, est issu de l'intégration de l'équation de Schrödinger qui s'écrit formellement

$$\hat{U}(n_2 - n_1) = \mathcal{T} \left\{ e^{-\frac{i}{\bar{k}} \int_{n_1}^{n_2} \hat{H}(n') dn'} \right\}, \quad (1.16)$$

où  $\mathcal{T}$  désigne l'opérateur-produit d'ordination temporelle qui prend en compte les subtilités de commutation du hamiltonien avec lui-même à des temps différents. Généralement, le calcul de l'opérateur d'évolution d'un système dépendant du temps s'avère complexe et fastidieux mais, dans le cas présent, la caractéristique périodique du potentiel mène à une simplification particulièrement efficace. En effet, si l'on définit un opérateur d'évolution sur une période ("1" en unité réduite) tel que

$$|\Psi_{n+1}\rangle = \hat{U}(1) |\Psi_n\rangle, \quad (1.17)$$

l'évolution d'un état initial ayant été soumis à  $n$  pulses s'écrit

$$|\Psi_n\rangle = \hat{U}(1)^n |\Psi_0\rangle. \quad (1.18)$$

---

<sup>1</sup>que l'on retrouve aussi comme résultat du commutateur des opérateurs positions et impulsions réduites  $[\hat{\theta}; \hat{P}] = i\bar{k}$ .

Le calcul de  $\hat{U}(1)$  est grandement facilité par le fait que les états “allumé” et “éteint” sont les seuls états possibles du potentiel et que l’évolution liée au terme d’énergie cinétique pendant l’application du pulse est négligée. Il suffit alors d’enchaîner bout à bout un opérateur relevant d’une propagation libre

$$\hat{U}_{pr}(\varphi) = e^{-i\frac{\hat{P}^2}{2\bar{k}}\varphi}, \quad (1.19)$$

où  $\varphi$  est la durée de propagation en temps réduit, avec un opérateur correspondant à l’application du pulse lui-même :

$$\hat{U}_{pulse} = e^{-i\frac{K}{\bar{k}}\cos\hat{\theta}}. \quad (1.20)$$

L’opérateur d’évolution sur une période complète s’écrit alors comme le produit

$$\hat{U}(1) = \hat{U}_{pr}(1 - \varphi) \cdot \hat{U}_{pulse} \cdot \hat{U}_{pr}(\varphi) \quad (1.21)$$

où la valeur de  $\varphi$ , comprise entre 0 et 1, exprime la façon dont la période est calée sur la séquence de pulses (sans jouer toutefois sur la physique du problème). Par la suite, nous prendrons  $\varphi = 0$

L’opérateur d’évolution tel qu’il est défini à partir des équations (1.18) et (1.21) permet de déterminer numériquement le comportement de  $\langle \hat{P}_n^2 \rangle \equiv \langle \Psi_n | \hat{P}^2 | \Psi_n \rangle$ .

### 1.2.2 Dynamique quantique

En usant d’une approche classique, nous avons vu que la distribution d’impulsions s’étale linéairement en fonction du temps. Tout naturellement, la question se pose de savoir si l’évolution quantique d’une distribution initiale d’impulsions obéit à la même tendance. Historiquement, la réponse a été donnée par Izraelev [5, 1] au moyen de simulations numériques, méthode éprouvée que nous avons reprise. Les principes de cette simulation, que nous désignons par le terme de “simulation standard”, sont détaillés ici.

#### Les principes du calcul numérique

Considérons les opérateurs  $\hat{\theta}$  et  $\hat{P}$  (reliés entre eux par une transformée de Fourier) dont les états et valeurs propres sont reliés par

$$\hat{\theta}|\theta\rangle = \theta|\theta\rangle \quad \text{et} \quad \hat{P}|P, q\rangle = (P + q)|P, q\rangle, \quad (1.22)$$

où  $0 \leq q < \bar{k}$  et  $P$  est un multiple entier de  $\bar{k}$ . Nous faisons directement apparaître la *quasi-impulsion*  $q$ , une constante du mouvement induite par la périodicité spatiale du potentiel (l’équation de Schrödinger en représentation  $|P, q\rangle$  met en évidence cette constante). Par ailleurs, les pulses couplent uniquement les états  $|P, q\rangle$  distants de quantités entières  $P$ . Rappelons, au passage, qu’en représentation  $|\theta\rangle$  l’opérateur impulsion agit de la façon suivante sur la fonction d’onde :

$$\langle \theta | \hat{P} | \Psi_n \rangle = -i\bar{k} \frac{\partial}{\partial \theta} \langle \theta | \Psi_n \rangle. \quad (1.23)$$

Puisque les opérateurs de propagation (1.19) et d’application d’un pulse (1.20) ne dépendent respectivement que de  $\hat{P}$  et  $\hat{\theta}$ , les matrices qui les caractérisent sont

diagonales dans les bases associées  $|\theta\rangle$  et  $|P, q\rangle$ . En passant d'une représentation à l'autre par transformée de Fourier, le calcul de l'évolution de  $|\Psi_0\rangle$  se trouve ainsi grandement facilité. Le processus est le suivant.

- Décomposition de l'état initial sur les états  $|P, q\rangle$  ( $q$  fixé) :

$$|\Psi_0\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} \tilde{a}(P+q, 0)|P\rangle, \quad (1.24)$$

où

$$\sum_{P=-L}^{+L} |\tilde{a}(P+q, 0)|^2 = 1 \quad (1.25)$$

est la condition pour que l'état initial soit normalisé sur une base de taille  $(2L+1)$ . Rigoureusement, cette taille devrait être infinie ( $L \rightarrow \infty$ ) mais il est possible de la tronquer à une valeur finie à condition que cela n'induisse pas d'erreurs significatives (pratiquement il faut que  $\tilde{a}(0+q, n) \gg \tilde{a}(\pm L+q, n) \forall n$ ).

- Sur cette base, l'opérateur de propagation est diagonal : la propagation libre revient donc à décaler les phases des états  $|P, q\rangle$  d'une quantité  $\hbar P^2/2$  :

$$|\Psi_{1^-}\rangle = \sum_{P=-L}^{+L} \tilde{a}(P+q, 0) e^{i\frac{(q+P)^2}{2\hbar}} |P, q\rangle \equiv \sum_{P=-L}^{+L} \tilde{a}(P+q, 1^-)|P, q\rangle \quad (1.26)$$

où le signe "1<sup>-</sup>" désigne le fait que le pulse n'a pas encore été appliqué.

- Ensuite, par une transformée de Fourier discrète, on bascule dans l'espace des positions  $|\theta\rangle$  :

$$a(\theta, 1^-) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{P=-L}^{+L} \tilde{a}(P+q, 1^-) e^{-i\frac{\theta(P+q)}{\hbar}}. \quad (1.27)$$

- De ce fait, l'opérateur  $\hat{U}_{pulse}$  n'a d'éléments non-nuls que sur sa diagonale et son action sur chaque composante  $|\theta\rangle$  revient à décaler la phase d'une quantité  $\frac{K}{\hbar} \cos \theta$  :

$$|\Psi_1\rangle = \sum_{j=0}^{2L+1} a(\theta, 1^-) e^{i\frac{K}{\hbar} \cos \theta} |\theta\rangle, \quad (1.28)$$

avec  $\theta = \frac{2\pi*j}{2L+1}$ .

- Par transformée de Fourier inverse, l'état est de nouveau représenté dans la base des impulsions.

Dans cette description, l'état initial a évolué sur une période complète. Il suffit de répéter ce cycle autant de fois que l'expérience contient de pulses pour obtenir l'évolution de la fonction d'onde en représentation  $|P, q\rangle$ . Il apparaît qu'en se limitant à ce processus, la distribution de probabilité  $|\langle P, q|\Psi_n\rangle|^2$  est très bruyante par rapport aux résultats expérimentaux. Cela est dû au fait que l'expérience, réalisée avec un nombre important de particules, donc de quasi-impulsions différentes, correspond à une moyenne sur  $q$ . En rendre compte numériquement consiste à moyenner les probabilités  $|\langle P, q|\Psi_n\rangle|^2$  sur  $q$  (lors des propagations libres, pour  $q$  donné, les composantes  $\tilde{a}(P+q, n)$  se décalent d'une quantité  $\hbar(P+q)^2/2$ ). Par cette opération nous avons dégradé implicitement la résolution en impulsion, désormais égale à 1 en unité  $P/\hbar$ .

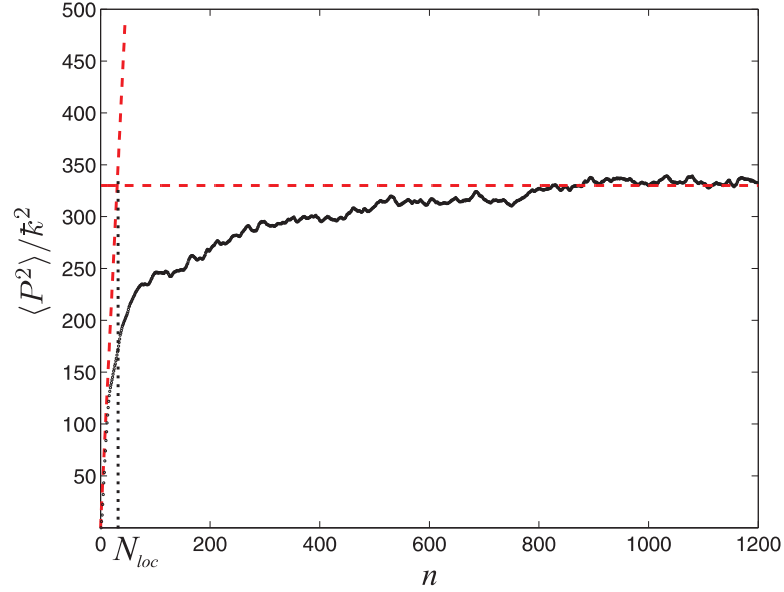


FIG. 1.10 – Exemple d'évolution quantique de  $\langle P \rangle$  déterminée par simulation numérique pour  $K = 10$  et  $\hbar = 2,885$ . La longueur de localisation est environ égale à 18,2 en unité  $P/\hbar$ . Le temps de localisation  $N_{loc}$ , ici environ égal à 35, correspond au temps qui serait nécessaire pour que le système atteigne la longueur de localisation s'il conservait son taux de diffusion initiale  $D_q[K_q(K = 10)] \approx 10,9$  (il existe d'autres définitions possibles du temps de localisation). Ce taux, bien qu'en rapport avec le taux de diffusion classique [équation (1.29)], en est cependant quantitativement différent [ $D_{cl}(K = 10) \approx 31,0$ ].

### Localisation dynamique

Nous avons choisi de tracer différents résultats de simulations numériques pour des paramètres accessibles dans l'expérience réelle, c'est-à-dire  $K = 10$  et  $\hbar = 2,89$ . De même, les coefficients  $\tilde{a}(P + q, n = 0)$  définissent pour la distribution initiale une forme gaussienne (de largeur à mi-hauteur égale à 4-5 en unités  $P/\hbar$ ) similaire à la distribution (thermique) fournie par notre nuage d'atomes froids.

Sur la figure 1.10 qui illustre une évolution de  $\langle \hat{P}^2 \rangle$  en fonction du nombre de pulse, il est visible que l'élargissement de la distribution d'impulsions se comporte différemment du cas classique. Au début de la séquence de pulses, la distribution s'élargit quasiment linéairement, comme dans le cas classique, puis, à partir d'un temps dit de localisation ( $N_{loc}$ ), celle-ci n'évolue plus et ne varie que mollement autour d'une largeur moyenne appelée *longueur de localisation*, définie par

$$\mathcal{P}_{loc} = \sqrt{\langle \Psi_n | \hat{P}^2 | \Psi_n \rangle},$$

pour  $n \gg N_{loc}$ . Ce phénomène, qui rompt clairement avec le comportement classique, est connu sous le nom de *localisation dynamique* (figure 1.10).

Un deuxième point de divergence avec la dynamique classique concerne l'évolution de la forme de la distribution. Sur la figure 1.12 ont été tracées en échelle semi-logarithmique des distributions d'impulsions pour des simulations numériques



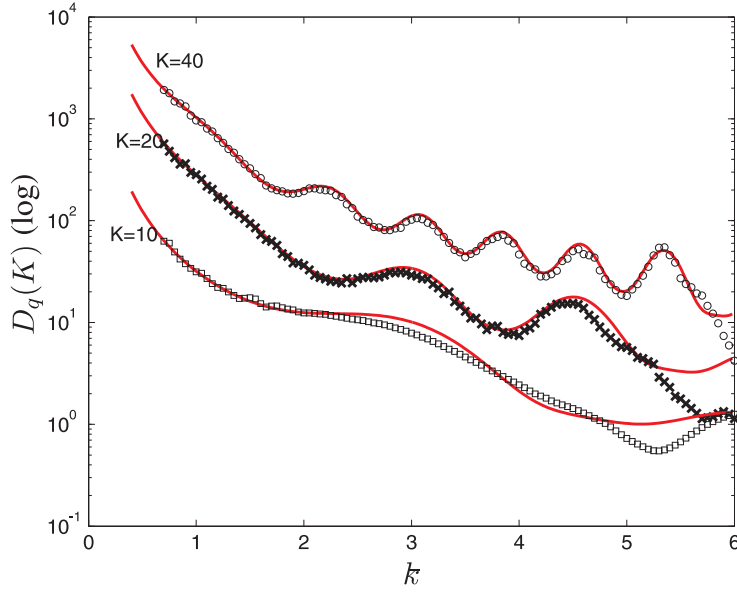


FIG. 1.11 – Dépendance du taux de diffusion quantique initial en fonction de  $\bar{k}$  pour trois valeurs du paramètre de stochasticité :  $K = 10$  (a),  $K = 20$  (b) et  $K = 40$  (c). Les différents marqueurs associés (carrés, points et cercles) représentent les résultats d’une simulation numérique tandis que les courbes continues caractérisent l’évolution théorique déterminée par D. L. Shepelyanski. L’accord est d’autant meilleur que le rapport  $K/\bar{k}$  est grand.

classiques et quantiques. Alors que la forme de la distribution classique est gaussienne, sa correspondance quantique, à partir du temps de localisation, s’ajuste bien à une courbe moyenne de forme

$$|\langle P, q | \Psi_{n > N_{loc}} \rangle|^2 \sim e^{-\frac{2|P|}{P_{loc}}}$$

que l’on désigne souvent par l’expression “double exponentielle”.

*A priori* les visions quantiques et classiques divergent radicalement. Cependant, comme l’ont démontré théoriquement D. L. Shepelyansky [6] et expérimentalement M. G. Raizen [7], l’énergie cinétique moyenne croît linéairement dans un premier temps avec un taux de diffusion quantique  $D_q(K)/2$  relié au taux de diffusion classique par

$$D_q(K) = \left( \frac{K}{K_q} \right)^2 D_{cl}(K_q), \quad (1.29)$$

où  $K_q = K \frac{\sin(\bar{k}/2)}{\bar{k}/2}$  (à noter que  $D_q(K) \xrightarrow{\bar{k} \rightarrow 0} D_{cl}(K)$ ). La figure 1.11 illustre l’évolution de  $D_q(K)$  en fonction de  $\bar{k}$  pour quelques valeurs du paramètre de stochasticité.

Le comportement quantique de notre système présente donc deux caractéristiques fondamentalement différentes de son analogue classique : le gel de la diffusion et la forme en double exponentielle de la distribution d’impulsions. Ce genre de phénomène avait déjà été prédit théoriquement dans un tout autre contexte – celui de la physique des solides – où une fonction d’onde électronique initiale placée dans un potentiel aléatoire diffuse jusqu’à *localiser spatialement* : il s’agit de la localisation

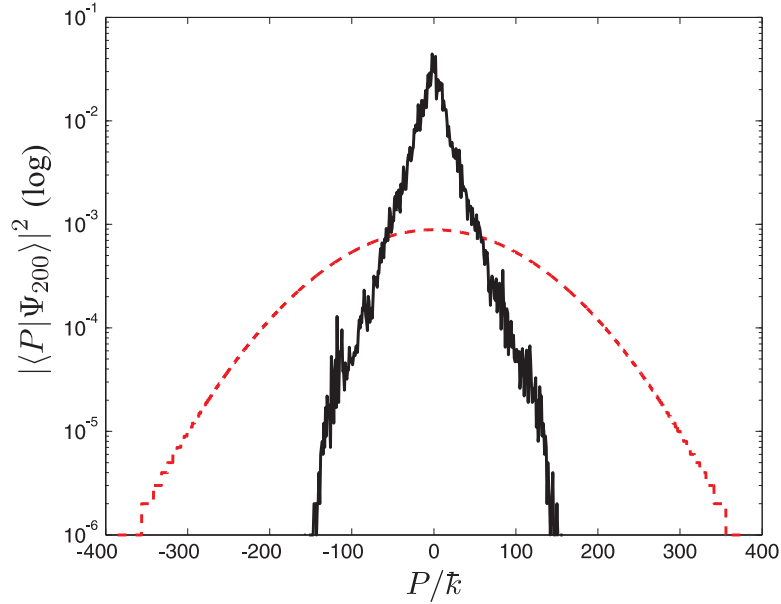


FIG. 1.12 – Fonctions d’onde en représentation  $|P\rangle$  après 200 pulses ( $K = 10$ ) obtenues par simulations numériques : version quantique ( $\hbar = 1.44$  en trait plein) et classique ( $\hbar = 0$  en tirets). L’échelle logarithmique fait apparaître une forme respectivement double exponentielle et gaussienne des distributions d’impulsions.

d’Anderson [8]. La correspondance entre les deux phénomènes a d’ailleurs été démontrée en 1982 par D. R. Grempel, R. E. Prange et S. Fishman [9, 10]. Bien que la méthode par transformée de Fourier fournisse des résultats tout à fait satisfaisants pour une faible dépense en calcul, elle ne se prête malheureusement pas à une interprétation claire. Une analyse s’appuyant sur le théorème de Floquet comble cette lacune.

### 1.2.3 Interprétation de la localisation dynamique

Dans les systèmes stationnaires, les états propres du hamiltonien évoluent avec une fréquence proportionnelle à leurs énergies propres. L’évolution d’un état initial quelconque se détermine alors par la décomposition sur cette base. Bien que les systèmes dépendant du temps n’admettent généralement pas cette approche, pour les systèmes périodiques, il est envisageable de définir les états et valeurs propres de l’opérateur d’évolution sur une période et, ainsi, de décomposer tout état sur cette nouvelle base. C’est ce que l’on appelle le théorème de Floquet. Une restriction importante cependant : l’évolution ne se calcule que sur un temps discrétisé. Le théorème de Floquet conduit à ce que  $\hat{U}_q(1)$ , l’opérateur d’évolution sur une période “1”, respecte l’équation aux valeurs propres

$$\hat{U}_q(1)|j(q)\rangle = e^{-i\varepsilon_{j,q}}|j(q)\rangle, \quad (1.30)$$

où  $\varepsilon_{j,q} \equiv \varepsilon_j$  représentent les quasi-énergies  $2\pi$ -périodiques (notons que cette notation des valeurs propres ressemble à l’argument de l’opérateur d’évolution d’un système

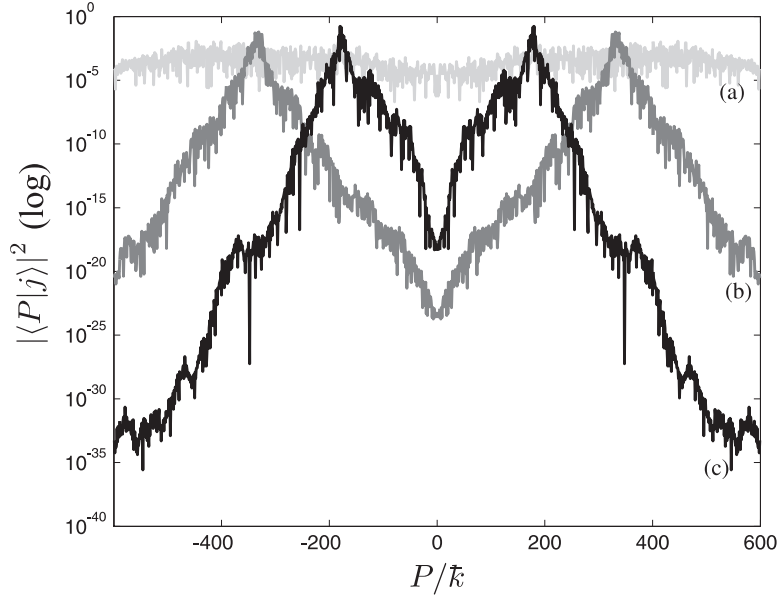


FIG. 1.13 – Trois quasi-états de Floquet en représentation  $|P\rangle$ , avec  $K = 10$  et  $q = 0, 1$  :  $\bar{\hbar} = 0, 2$  (a),  $\bar{\hbar} = 1, 44$  (b),  $\bar{\hbar} = 3$  (c) (les distributions sont symétriques :  $|\langle P|j\rangle|^2 = | \langle -P|j\rangle|^2$ ). A noter que, dans le cas quantique ( $\bar{\hbar} = 1.44, 3$ ), la distribution est localisée sous une forme double exponentielle (échelle logarithmique en ordonnée) alors que dans le cas quasi-classique ( $\bar{\hbar} = 0, 2$ ), la distribution est très large et ne présente pas une telle forme.

stationnaire) et  $|j(q)\rangle \equiv |j\rangle$  les états propres de  $\hat{U}_q(1) \equiv \hat{U}$  appelés quasi-états du système. Après  $N$  périodes, les quasi-états n'ont donc vu que leur phase évoluer puisque

$$\hat{U}^n |j\rangle = e^{-i\varepsilon_j n} |j\rangle. \quad (1.31)$$

### Détermination des quasi-états et quasi-énergies

Pour calculer les quasi-états et quasi-énergies du système, il faut tout d'abord exprimer l'opérateur  $\hat{U}$  dans une base puis le diagonaliser. La base propre de  $\hat{P}$  est toute indiquée pour deux raisons : premièrement, parce que les éléments de la matrice  $\hat{U}$  peuvent être déterminés analytiquement ; deuxièmement, parce que nous serons directement dans la représentation qui nous intéresse. Les éléments de la matrice  $\hat{U}$  s'écrivent

$$\langle P', q | \hat{U} | P, q \rangle = e^{-i\frac{\bar{\hbar}(P'+q)^2}{2}} (i)^{P-P'} J_{P-P'}\left(\frac{K}{\bar{\hbar}}\right), \quad (1.32)$$

où  $J_m(\frac{K}{\bar{\hbar}})$  est une fonction de Bessel d'ordre  $m$  qui, multipliée par  $(i)^m$ , représente l'action des pulses en représentation  $|P, q\rangle$ , tandis que la fonction exponentielle représente le terme de propagation libre.

Par le biais d'une diagonalisation numérique, il est alors facile d'obtenir les quasi-états : la figure 1.13 illustre la distribution de probabilité  $|\langle P, q | j \rangle|^2$  de quelques-

uns pour différentes valeurs de  $\tilde{k}$ . Il se trouve que leurs formes suivent la formule empirique

$$|\langle P, q | j \rangle|^2 \propto \begin{cases} e^{-\frac{\sqrt{2}|P-P_j-q|}{\mathcal{L}}}, & P > 0 \\ e^{-\frac{\sqrt{2}|P+P_j+q|}{\mathcal{L}}}, & P \leq 0 \end{cases} \quad (1.33)$$

où  $P_j \geq 0$ . Ces distributions se composent donc de deux parties symétriques par rapport à  $P = 0$ , et  $\mathcal{L}$  représente l'écart quadratique moyen de l'impulsion pour  $P_{j=0} = 0$ . Il apparaît que  $\mathcal{L}$  augmente avec  $K$  croissant et  $\tilde{k}$  décroissant, c'est-à-dire lorsque le système est "plus chaotique" et "plus classique". Cette tendance est prévisible au regard des éléments de la matrice  $\hat{U}$  : ceux-ci deviennent négligeables hors d'une bande diagonale de largeur  $\approx 2\frac{K}{\tilde{k}}$  à cause de l'allure de la fonction de Bessel, ce qui fait que le nombre d'états  $|P, q\rangle$  couplés notablement par la séquence de pulses est environ de la taille de cette bande. En conséquence, le quasi-état  $|j\rangle$  est d'autant plus localisé en impulsion que l'argument  $\frac{K}{\tilde{k}}$  est petit. Quant aux autres quasi-états ( $P_j \neq 0$ ), ceux-ci sont tout aussi bien localisés dans l'espace des impulsions mais autour de leur valeur de  $P_j$ . Leur distance à  $P = 0$  conduit à augmenter leur écart quadratique en impulsion. Ainsi,

$$\sqrt{\langle j | \hat{P}^2 | j \rangle - (\langle j | \hat{P} | j \rangle)^2} \geq \mathcal{L} \quad (1.34)$$

pour  $P_j \neq 0$ .

### Evolution de la largeur d'un état initial

Ce qui nous intéresse maintenant, c'est de regarder de façon analytique l'évolution de la largeur d'une distribution initiale lorsque des pulses sont appliqués. L'enjeu étant, bien entendu, de retrouver le phénomène de localisation dynamique qui apparaît dans les simulations numériques et les expériences.

Pour ce faire, nous considérons une particule dans l'état initial  $|\Psi_0\rangle$  dont la distribution de probabilité  $|\langle P | \Psi_0 \rangle|^2$  est une gaussienne de largeur  $\mathcal{P}_0 = \sqrt{\langle \Psi_0 | \hat{P}^2 | \Psi_0 \rangle}$ , centrée en  $P = 0$  et couvrant quelques états  $|P, q\rangle$ . Après  $n$  pulses, l'équation (1.31) indique que l'énergie cinétique moyenne

$$\langle \hat{P}_n^2 \rangle \equiv \langle \Psi_n | \hat{P}^2 | \Psi_n \rangle = \langle \Psi_0 | (\hat{U}^\dagger)^n \hat{P}^2 (\hat{U})^n | \Psi_0 \rangle, \quad (1.35)$$

ce qui donne, en introduisant des relations de fermetures sur les quasi-états de Floquet,

$$\begin{aligned} \langle \hat{P}_n^2 \rangle &= \sum_j \sum_k \langle \Psi_0 | j \rangle \langle j | (\hat{U}^\dagger)^n \hat{P}^2 (\hat{U})^n | k \rangle \langle k | \Psi_0 \rangle, \\ &= \sum_j \sum_k \langle \Psi_0 | j \rangle \langle k | \Psi_0 \rangle \langle j | \hat{P}^2 | k \rangle e^{-i(\varepsilon_k - \varepsilon_j)n}, \\ &= \sum_j |a_j|^2 \langle j | \hat{P}^2 | j \rangle + \sum_j \sum_{k \neq j} a_j^* a_k \langle j | \hat{P}^2 | k \rangle e^{-i(\varepsilon_k - \varepsilon_j)n}, \end{aligned} \quad (1.36)$$

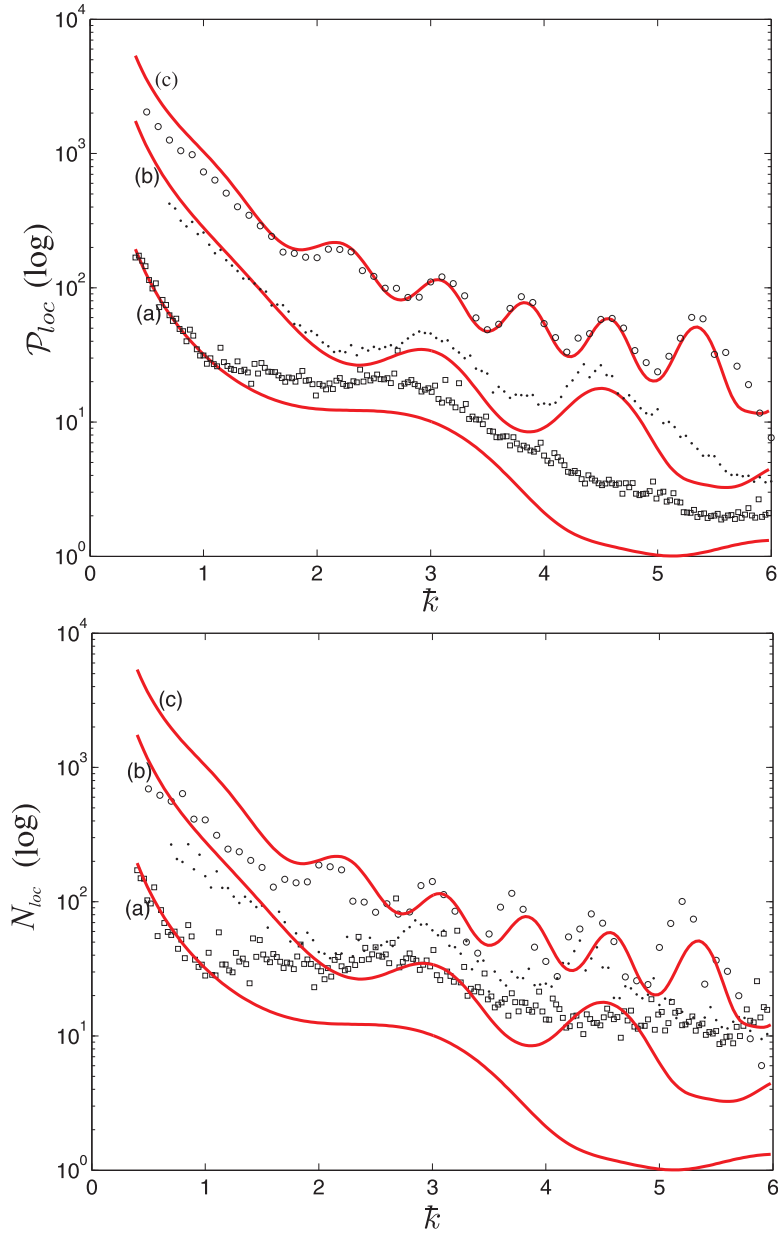


FIG. 1.14 – Longueur de localisation (en haut) et temps de localisation (en bas) déterminées par les relations 1.40 [traits continus (a), (b) et (c)], et par simulations numériques avec  $K = 10$  (carrés),  $K = 20$  (points) et  $K = 40$  (cercles).

où  $a_j = \langle j | \Psi_0 \rangle$  représente le recouvrement de la fonction d'onde initiale avec le quasi-état  $|j\rangle$ . Les caractéristiques  $(K, L)$  du potentiel sont choisies de telle manière que  $\mathcal{P}_0$  soit plus petit que l'écart quadratique moyen des quasi-états.

Le second terme de l'équation (1.36), en tant que somme d'oscillations de différentes fréquences  $\omega_{kj} = \varepsilon_k - \varepsilon_j$  interférant destructivement, varie avec une amplitude décroissante, progressivement négligeable devant le premier terme. Aux temps longs, il ne subsiste plus qu'une contribution du premier terme accompagnée de fluctuations résiduelles provenant du second terme<sup>2</sup>. L'énergie cinétique moyenne stagne alors, après  $N \gg N_{loc}$  autour de la valeur

$$\mathcal{P}_{loc}^2 \approx \sum_j |a_j|^2 \langle j | \hat{P}^2 | j \rangle. \quad (1.37)$$

Bien que, rigoureusement, cette dynamique fasse intervenir une infinité de quasi-états, elle repose en fait essentiellement sur les quasi-états qui sont recouverts de façon significative par la distribution initiale. Nous définissons le nombre de ces quasi-états  $N_\Psi$  en ne comptant que ceux dont le taux de recouvrement  $|a_j|^2$  est plus élevé qu'un seuil relevant "pertinent". Puisque les quasi-énergies associées sont réparties sur  $[0, 2\pi]$ , nous estimons qu'elles sont distantes d'une quantité moyenne  $\bar{\omega} = \frac{2\pi}{N_\Psi}$ . Par conséquent le phénomène d'interférence entre les diverses fréquences annule le second terme pour un temps caractéristique

$$N_{loc} \approx \frac{2\pi}{\bar{\omega}} \approx N_\Psi. \quad (1.38)$$

Notons que ce temps correspond à la limite de résolution du spectre des quasi-énergies qu'impose typiquement l'incertitude de Heisenberg. Bien que l'inéquation (1.34) implique que  $\mathcal{P}_{loc}^2 > \mathcal{L}^2$ , il est possible de trouver  $\mathcal{P}_{loc}^2 \approx \mathcal{L}^2$  si la distribution initiale a majoritairement excité les états proches de  $P = 0$ . Dans ce cas,  $N_\Psi$  représente aussi le nombre d'états  $|P\rangle$  que couvre la fonction d'onde après le temps de localisation. En utilisant le taux de diffusion initial, cela implique que

$$N_\Psi \approx \frac{\sqrt{\langle \hat{P}_{N_{loc}}^2 \rangle}}{\bar{k}} \approx \frac{\sqrt{D_q(K)N_{loc}}}{\bar{k}}. \quad (1.39)$$

La comparaison des équations (1.38) et (1.39) nous renseigne alors sur la dépendance en  $K$  et  $\bar{k}$  des différentes grandeurs caractéristiques :

$$N_{loc} \sim \frac{\mathcal{P}_{loc}}{\bar{k}} \approx \frac{D_q(K)}{\bar{k}^2}. \quad (1.40)$$

D'un point de vue expérimental, il est bien plus facile d'accéder à  $K$  et  $\bar{k}$  qu'aux quasi-états et aux quasi-énergies du système, ce qui explique l'intérêt porté à ces dernières relations. Il faut cependant les considérer avec prudence étant donné les suppositions qui ont été faites. Ainsi sur les figures présentées en (1.14), le temps de localisation tout comme la longueur de localisation donnés par les simulations numériques correspondent d'autant moins à la prédiction (1.40) que le rapport  $\frac{K}{\bar{k}}$  est

<sup>2</sup>En considérant l'équation 1.36 à  $N = 0$ , on s'aperçoit que, si la largeur à laquelle localise la fonction d'onde (premier terme) est plus élevée que la largeur initiale, le second terme est initialement négatif.

important (il faut être attentif au fait que l'échelle des ordonnées est logarithmique). Une explication raisonnable est que le nombre d'états  $|j\rangle$  recouverts dépasse  $N_\Psi$  pour des quasi-états de largeur très importante (croissant avec  $\frac{K}{\hbar}$ ), ce qui impliquerait que la longueur et le temps de localisation donnés par la relation (1.40) soient sous-estimés.

### Interprétation selon la vision de la mécanique quantique par R. Feynman

Les résultats de la mécanique quantique traditionnellement présentés au moyen de l'approche hamiltonienne peuvent être retrouvés par une approche lagrangienne. Dans cette dernière, les trajectoires et l'interprétation en termes de probabilité de présence des objets quantiques suivent le principe de quantification de Feynman [11], analogue au principe d'Huygens en optique ondulatoire, ou encore au principe de moindre action en mécanique classique. De la même manière que les lois de l'optique géométrique (principe de Fermat) correspondent au cas limite où la longueur d'onde est très nettement inférieure au chemin optique, la mécanique classique (principe de Hamilton) correspond au cas limite où l'action entre deux instants est nettement supérieure au quantum d'action  $\hbar$ . Comme le dit C. Cohen-Tannoudji dans un cours sur la formulation lagrangienne de la mécanique quantique [12], “*on peut dire qu'une expérience de mécanique quantique est une expérience de diffraction dans l'espace-temps [...]*”. Dans ce cadre, le phénomène de localisation dynamique peut s'interpréter comme suit : les différentes trajectoires classiques chaotiques – qui apparaissent sur les portraits de phases – interfèrent destructivement pour les valeurs élevées de l'impulsion ; la limite en impulsion causée par ces interférences est caractérisée par la *longueur de localisation*.

## 1.3 Conclusion

En traçant les trajectoires classiques sur un portrait de phase  $(P, \theta)$  d'une particule soumise à une séquence périodique de pulses d'un potentiel sinusoïdal pour différentes conditions initiales, nous avons vu que la proportion d'entre elles qui sont stables dépend de l'amplitude du potentiel ( $K$  en unités réduites). Le paramètre de stochasticité ( $K$ ) indique dans quel régime se trouve le système ; plus il est élevé, plus les trajectoires régulières cèdent la place aux trajectoires chaotiques (ou irrégulières, ou encore instables). Lorsque  $K \gtrsim 5$ , le chaos est généralisé, c'est-à-dire que l'énorme majorité des conditions initiales conduisent à des trajectoires instables. Dans ce cas, l'énergie cinétique moyenne croît linéairement avec le temps ( $n$ ), proportionnellement au taux de diffusion  $D_d(K)$ . Une distribution d'impulsions initiale localisée autour de  $P = 0$  (avec une distribution homogène en position) s'élargit linéairement selon le même taux, et prend une forme gaussienne.

Un système équivalent quantique (même hamiltonien,  $K \gtrsim 5$ ) considère un paramètre supplémentaire, le degré de quanticité, appréhendé en unité réduite par la constante de Planck renormalisée  $\hbar$ . Aussi la particule est-elle décrite par sa fonction d'onde  $|\Psi_n\rangle$ . Dans ces conditions, c'est la distribution des probabilités  $|\langle P|\Psi_n\rangle|^2$  de la particule qui est regardée. D'après les simulations numériques, il apparaît que, à la différence du cas classique, une distribution d'impulsion initiale localisée autour de  $P = 0$  s'élargit [avec un taux de diffusion initial  $D_q(K)$  relié à  $D_d(K)$ ] jusqu'à

atteindre une limite appelée longueur de localisation  $\mathcal{P}_{loc}$  – ceci en un temps caractéristique appelé temps de localisation  $N_{loc}$ . En d’autres termes, une particule ne peut absorber qu’une quantité d’énergie limitée. Par ailleurs la forme de la distribution “gelée” est différente de celle obtenue classiquement : elle s’ajuste à une fonction  $\exp(-\frac{2|P|}{\mathcal{P}_{loc}})$ , dite “double exponentielle”. Ce phénomène de localisation dynamique s’explique en termes d’interférences quantiques. En décomposant une fonction d’onde initiale sur les vecteurs propres (quasi-états) de l’opérateur de Floquet (opérateur d’évolution sur une période de la séquence), qui sont localisés en impulsion sur une longueur  $\mathcal{L}$ , il est effectivement montré que les interférences dues aux valeurs différentes de leurs quasi-énergies respectives (correspondant aux phases des valeurs propres) limitent le peuplement des régions lointaines en  $P$ . Il faut noter enfin que le comportement classique peut être retrouvé pour  $\hbar \rightarrow 0$ .





## Chapitre 2

# Réalisation expérimentale d'un pendule pulsé avec des atomes froids

Nous avons vu au chapitre précédent que la dynamique d'un pendule pulsé périodique quantique était caractérisée par le phénomène de localisation dynamique qui se traduit par un gel de la diffusion et par une forme spécifique de la distribution d'impulsions. Dès 1992, Graham, Schlautmann et Zoller [13] ont suggéré une expérience permettant l'observation de ce phénomène pour un système légèrement différent mais équivalent au pendule pulsé ; leur proposition consistait à mesurer la distribution "localisée" des angles de déflexion d'atomes froids traversant une onde stationnaire modulée en phase. En 1994, l'équipe de Mark Raizen [14] réalisa cette expérience, mais en mesurant directement la distribution d'impulsions ; ce fut la première fois que la localisation dynamique fut observée. L'année suivante, la même équipe passa à la pulsation de l'onde stationnaire [15, 16], autrement dit à une réalisation expérimentale du pendule pulsé. C'est ce type de dispositif que notre équipe a mis en place peu après, avec quelques aménagements (principalement en ce qui concerne l'obtention des distributions d'impulsions).

Dans ce chapitre, la première partie est consacrée à la description de notre dispositif expérimental. Nous y découvrons comment un nuage d'atomes froids dans une onde stationnaire lumineuse pulsée réalise le pendule pulsé quantique. Ensuite, dans la deuxième partie, une expérience de localisation dynamique est présentée. Les différents effets qui sont susceptibles d'expliquer les écarts constatés entre théorie et expérience sont passés en revue dans la dernière partie.

### 2.1 Des atomes froids dans une onde stationnaire pulsée

Notre réalisation du pendule pulsé quantique consiste à appliquer une séquence de pulses lumineux sur un nuage d'atomes de césium froids créé par piégeage magnéto-optique (PMO), puis à détecter le nombre d'atomes sélectionné en impulsion par spectroscopie Raman. La durée totale de l'expérience peut varier, surtout à cause de

Etape	Réalisation du nuage d'atomes froids	Séquence de pulses	Spectroscopie Raman
Durée	120 ms	7 ms	50 ms

TAB. 2.1 – Durées typiques des étapes d'une expérience de pendule pulsé quantique (l'ordre de réalisation se lit de la gauche vers la droite).

la phase de chargement du nuage, mais excède rarement 200 ms. Cette brièveté permet de réitérer l'expérience, et d'acquérir en quelques minutes, voire en une dizaine de minutes, des courbes moyennées en fonction d'un paramètre choisi (principalement : distributions d'impulsions ou nombres d'atomes d'impulsion nulle en fonction du nombre de pulses). Le tableau 2.1 reprend cette description de façon chronologique et précise les durées de chaque étape. Dans les trois sections suivantes, nous expliquons les principes et décrivons les montages de chacune d'entre elles.

### 2.1.1 Le piège magnéto-optique (PMO).

L'intérêt porté au refroidissement d'atomes à quelques microkelvins réside dans le fait que leur distribution d'impulsions – dont la largeur est proportionnelle à la température – ne couvre que quelques quasi-états de Floquet. En théorie, cette caractéristique permet, pour un jeu de paramètres  $K$  et  $\hbar k$  bien choisis, d'observer une diffusion initiale suivie d'une localisation dynamique après seulement quelques dizaines de pulses. En effet, afin de réduire le nombre d'émissions spontanées, processus qui modifie irréversiblement la dynamique quantique [17], il vaut mieux limiter le nombre de pulses. La technique de piégeage magnéto-optique par laquelle nous obtenons notre nuage d'atomes froids est désormais bien connue, et de nombreux ouvrages ont paru sur le sujet [18, 19, 20]. Nous ne faisons ici qu'une brève description du dispositif et des lasers utilisés, puis donnons les caractéristiques du nuage d'atomes.

Le double processus de refroidissement et de piégeage se déroule dans une cellule de verre contenant une vapeur de césium à très basse pression ( $10^{-8}$  mbar) placée dans un champ magnétique créé par deux bobines, et irradiée par trois paires de faisceaux laser rétro-réfléchis (dit laser PMO), orthogonaux entre eux et se croisant en son centre (voir le schéma figure 2.1). Plus précisément, nous utilisons deux lasers accordés sur deux transitions hyperfines du césium (voir le schéma des états du césium sur la figure 2.2). L'un, accordé sur une fréquence légèrement inférieure à la transition du césium  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ , a pour fonction de refroidir les atomes et de les piéger (grâce au couplage avec le champ magnétique). Le ralentissement s'opère au moyen des nombreux cycles de fluorescence que les atomes effectuent (échange d'impulsion photon-atome). L'autre laser "repompe" vers  $|F_f = 4\rangle$  les atomes qui, au lieu de faire la transition précédente, ont été excités dans l'état  $|F_e = 4\rangle$  (qui n'est distant que d'environ  $50\Gamma$  de l'état  $|F_e = 5\rangle$ ) puis ont relaxé dans l'état  $|F_f = 3\rangle$ ;

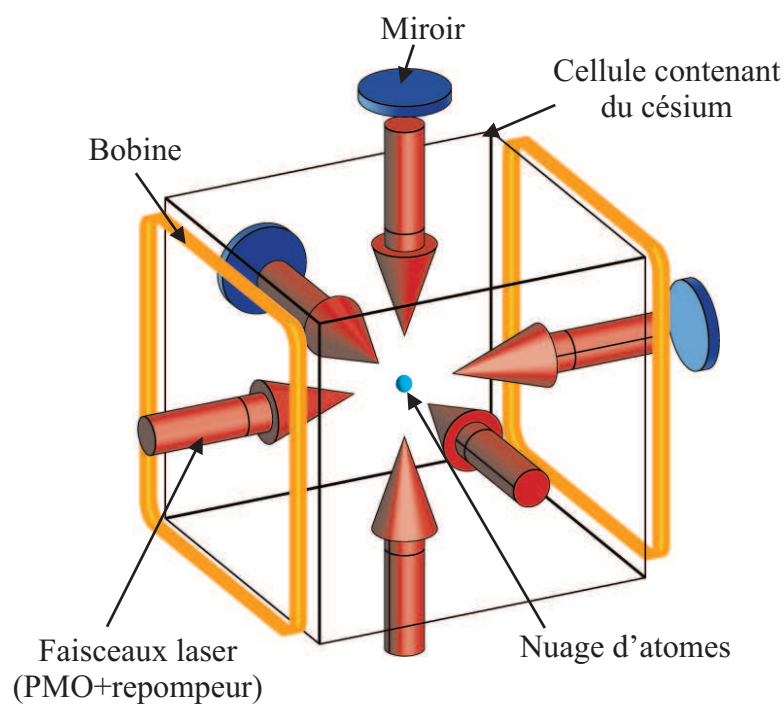


FIG. 2.1 – Schéma de la cellule contenant le nuage d'atomes de césium refroidis par piègeage magnéto-optique. Les faisceaux laser de refroidissement ( $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$ ) et de repompage ( $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$ ) sont, dans notre montage, spatialement confondus, et rétro-réfléchis. Le champ magnétique produit par les bobines couplé au laser de refroidissement permettent de piéger les atomes au centre de la cellule.

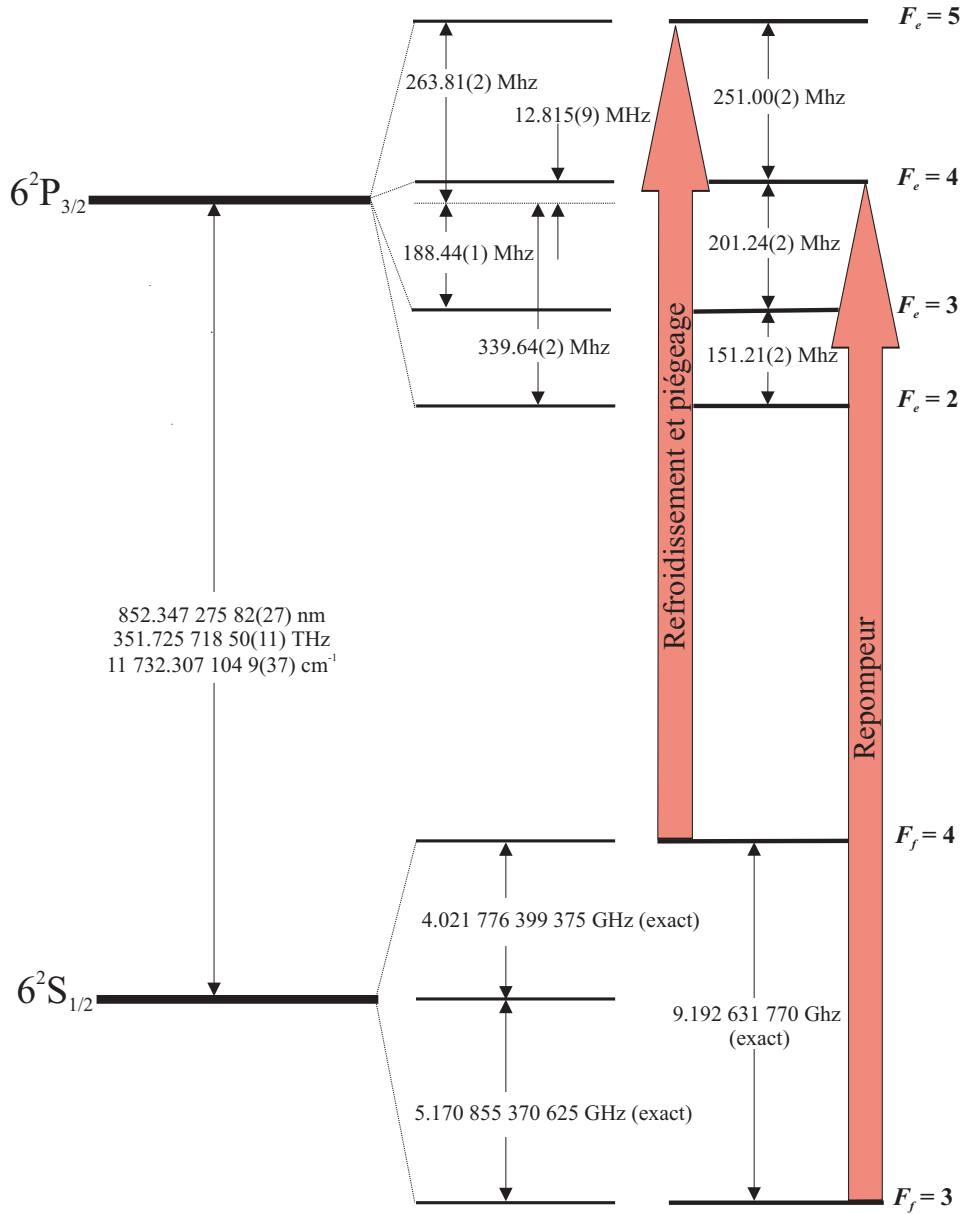


FIG. 2.2 – Structure hyperfine de la transition D2 du césium. Les états  $6^2S_{1/2}$  sont dits fondamentaux et les états  $6^2P_{3/2}$  excités. Le cycle de fluorescence pour le refroidissement fait intervenir les niveaux  $|F_f = 4\rangle$  et  $|F_e = 5\rangle$ . Les atomes ayant suivi le chemin  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle \rightarrow |F_f = 3\rangle$  sont récupérés par un laser repompeur de fréquence  $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$ .

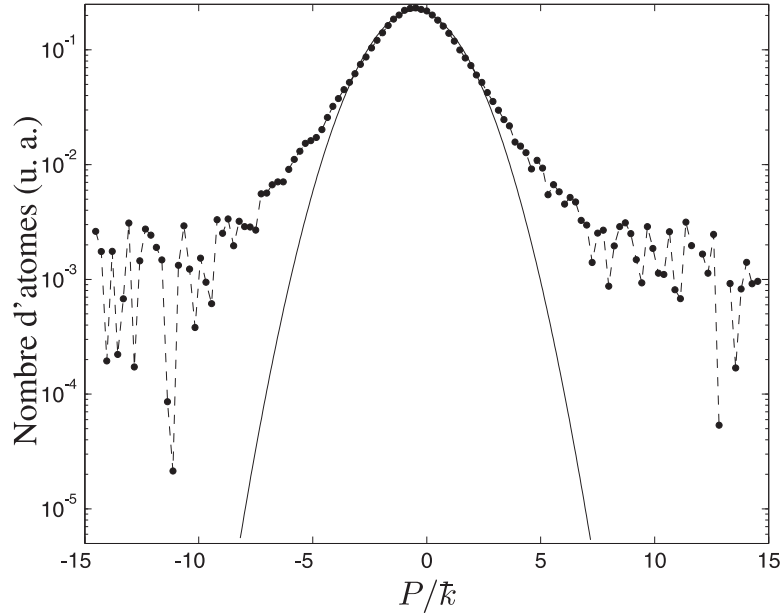


FIG. 2.3 – Distribution d’impulsions préparée par le piège magnéto-optique (points), comparée à une distribution gaussienne (trait plein). Ici  $\sqrt{\langle P^2 \rangle}/\hbar = \sqrt{\langle p^2 \rangle}/2\hbar k_L = 2,11$ , ce qui donne la température du nuage  $T = \sqrt{\langle p^2 \rangle}/(m \cdot k_B) \approx 3,5 \mu\text{K}$ .

celui-ci est donc accordé sur la transition  $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_e = 4\rangle$ . A la fin de cette séquence, la très grande majorité des atomes sont préparés dans l’état  $|F_f = 4\rangle$ . Il résulte de cette opération, et surtout des subtilités<sup>1</sup> non-décrites ici, que les atomes sont refroidis aux alentours de  $3,5 \mu\text{K}$  (voir figure 2.3) dans un volume estimé entre  $(0,85)^3 \text{ mm}^3$  et  $1 \text{ mm}^3$ .

Après cette phase, qui dure environ 120 ms, les faisceaux laser sont bloqués par des obturateurs mécaniques et des modulateurs acousto-optiques ; le champ magnétique est également éteint. Sous l’action de la gravité, le nuage d’atomes entame alors une chute libre (tout en diffusant spatialement).

### 2.1.2 L’onde stationnaire

La phase suivante est celle de la réalisation du pendule pulsé quantique. Elle consiste à envoyer une séquence de pulses laser à travers la cellule sur le nuage en chute libre. La durée maximale de l’expérience est fixée à 7 ms afin que l’interaction atomes-laser ne change pas trop entre le début et la fin de la séquence (le nuage chute, la position verticale du laser est fixe).

Dans cette section, nous abordons brièvement comment un laser peut agir comme potentiel sinusoidal (pulsé) ; ensuite, après une description du montage, nous donnons les éléments nécessaires pour convertir pratiquement les paramètres expérimentaux en paramètres  $K$  et  $\hbar$  ; enfin, nous décrivons les contraintes qui pèsent sur le système et leur conséquences sur les valeurs de  $K$  et  $\hbar$  accessibles.

<sup>1</sup>Notamment, la dernière phase de refroidissement, appelée Phase Sysiphe, permet d’abaisser la température du PMO d’une dizaine de microkelvins à quelques microkelvins [21, 22].

## Un potentiel lumineux

Il est montré dans l'annexe A qu'un atome à deux niveaux<sup>2</sup> (de fréquence de transition  $\omega_0/2\pi$ ) placé dans une séquence périodique de pulses d'onde stationnaire lumineuse (de fréquence optique  $\omega_L/2\pi$ ), équivaut, à condition que la durée des pulses soit suffisamment courte et que le désaccord  $\delta_L = \omega_L - \omega_0$  soit grand par rapport à la largeur des niveaux ( $\Gamma$ ), à un pendule pulsé. Autrement dit, l'onde stationnaire agit comme un potentiel sinusoidal sur le centre de masse des atomes. La force qui dérive de ce potentiel provient du fait que les atomes échangent des photons par processus stimulé<sup>3</sup>. La dynamique du centre de masse atomique répond alors au hamiltonien réduit

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + k \cos(\hat{\theta}) \sum_{n_1=0}^{N_1-1} d(n - n_1), \quad (2.1)$$

où  $n = Ft$ ,  $\theta = 2k_L \hat{z}$  {modulo  $2\pi$ } ( $k_L = 2\pi/\lambda$ , avec  $\lambda$ , la longueur d'onde dans le vide de l'onde stationnaire correspondant à deux fois la distance entre deux maxima du potentiel),  $\hat{P} = \frac{2k_L}{mF} \hat{p}$ ,  $k = \frac{8\omega_r}{\hbar F^2} V_0$  ( $V_0 = \frac{\hbar \Omega_R^2}{8\delta_L}$  est le potentiel optique dépendant de la fréquence de Rabi  $\Omega_R$ , et  $\hbar\omega_r = \frac{\hbar^2 k_L^2}{2m}$  est l'énergie de recul),  $\hat{H} = \frac{8\omega_r}{\hbar F^2} \hat{H}'$  et  $d(n - n_1)$  est une fonction représentant un pulse carré (d'aire unitaire) dont la durée en unités réduites est donnée par  $\alpha = F\tau$ .

Dans cette description, le paramètre de stochasticité

$$K = \alpha k = \frac{8\omega_r \tau}{\hbar F} V_0, \quad (2.2)$$

et la constante de Planck renormalisée

$$\tilde{\hbar} = \frac{8\omega_r}{F}. \quad (2.3)$$

## Description du montage

Le montage que nous utilisons pour générer des séquences de pulses d'onde stationnaire est schématisé sur la figure 2.4. La fréquence  $\omega_L/2\pi$  de l'onde stationnaire est fixée par une diode laser "maître" dont la puissance du faisceau, d'environ 6 mW, est amplifiée par un amplificateur optique jusqu'à 375 mW. Le faisceau amplifié subit ensuite deux filtrages de types différents. Le premier consiste en une absorption des composantes spectrales résonantes avec le césium par un passage dans une cellule de 10 cm de long contenant une vapeur de césium (une estimation donne une absorption de puissance d'un ordre de grandeur à ces fréquences). Le second filtrage sélectionne un seul mode transverse du faisceau, le mode fondamental gaussien, par injection dans une fibre optique mono-mode (qui a pour autre fonction de transporter

<sup>2</sup>Bien que le césium possède plusieurs états d'énergie, il est possible ici de le réduire, en première approximation, à un atome à deux niveaux, à condition qu'il soit préparé dans un de ses deux états fondamentaux (ici  $|F_f = 4\rangle$ ), et que les niveaux excités puissent avoir une action moyenne équivalente à un seul état (ce qui est possible si les sources lumineuses sont très désaccordées).

<sup>3</sup>Un atome peut aussi absorber un photon puis en émettre un autre spontanément ; ce processus dissipatif, qui permet le couplage entre plusieurs états internes dans le cas du césium, doit être minimisé si l'on veut réaliser un pendule pulsé quantique (voir sous-section 2.3.4).

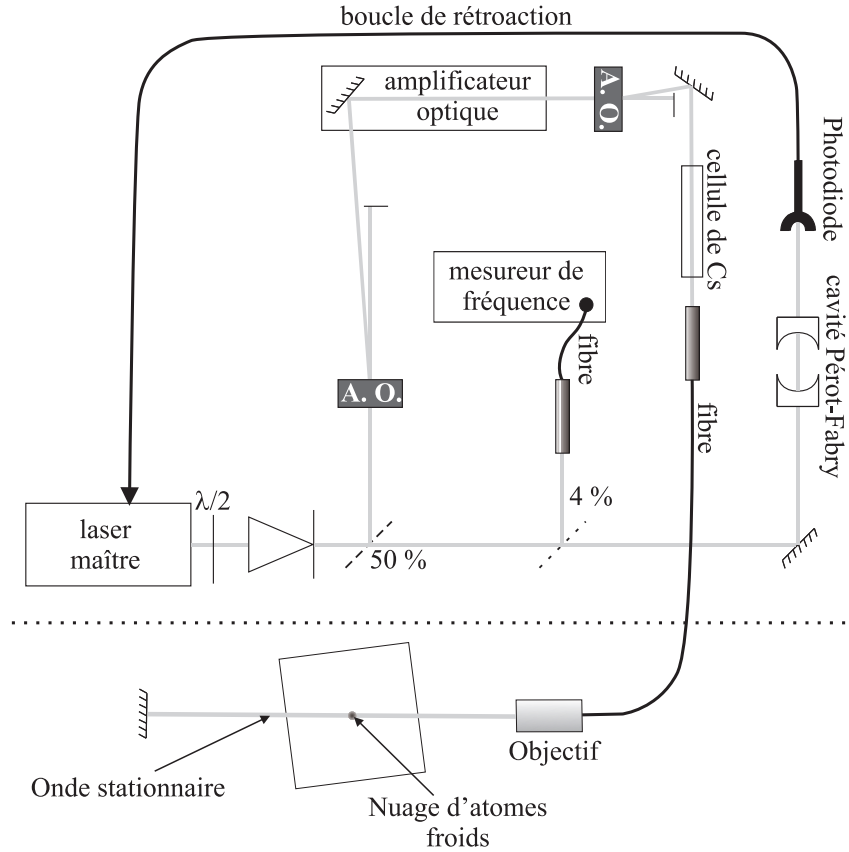


FIG. 2.4 – Schéma du dispositif générant l'onde stationnaire pulsée. Un amplificateur laser à semi-conducteur est injecté par un laser maître (diode montée en cavité externe de fréquence centrale désaccordée ( $\delta_L/2\pi$ ) par rapport à la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  ; puissance égale à 6 mW). En jouant sur la température de la diode (réglage grossier) et sur la longueur de la cavité externe (réglage fin),  $\delta_L$  est ajustable (de quelques unités à plusieurs centaines de GHz). Sa fréquence est aux alentours de 352 THz et sa finesse est de l'ordre du MHz. Elle est stabilisée sur une plage inférieure à 75 MHz grâce à une boucle de rétroaction utilisant le signal de transmission d'une cavité Péro-Fabry confocale ( $\sim 750$  MHz d'intervalle spectral libre et une finesse de 10 au minimum). Parallèlement, la fréquence est contrôlée par un mesureur commercial de fréquence optique. Quant à la puissance laser à la sortie de l'amplificateur optique, celle-ci s'élève à 375 mW. Ce faisceau, filtré par une cellule contenant une vapeur de césium, est conduit vers la cellule via une fibre optique dont l'injection est pilotée par un modulateur acousto-optique permettant de réaliser des pulses d'une durée minimum de 60 ns. A la sortie de la fibre, le faisceau traverse la cellule à l'endroit du PMO puis est rétro-réfléchi par un miroir, créant ainsi une onde stationnaire (pulsée).



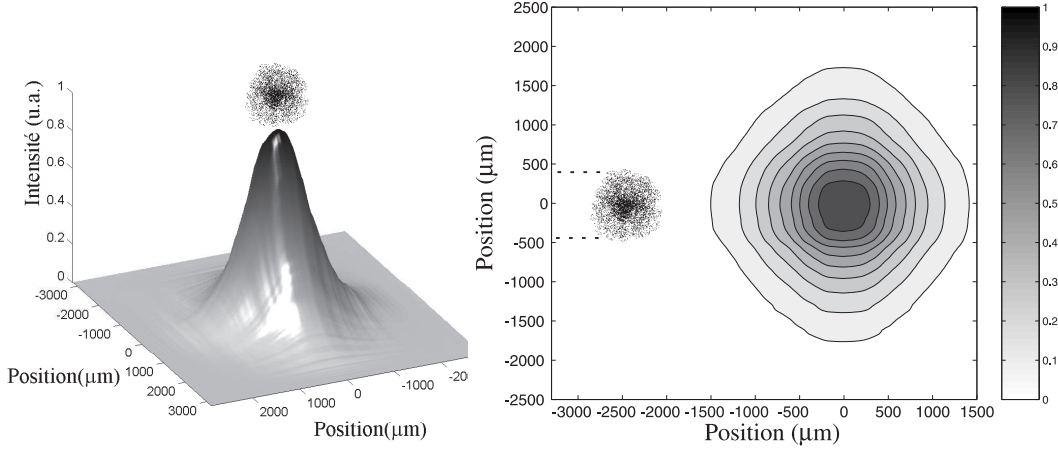


FIG. 2.5 – Deux vues comparant la taille du nuage d'atomes froids avec la distribution d'intensité transverse de l'onde stationnaire. Les dimensions du nuage d'atomes froids sont inférieures à celle de l'onde stationnaire (1 mm contre 1,5 mm à mi-hauteur du profil gaussien). Cette géométrie implique que 75 % des atomes soient soumis au moins à 75 % de l'intensité lumineuse maximale.

le faisceau jusqu'à la cellule). La perte de puissance entre la sortie de l'amplificateur optique et la sortie de la fibre s'élève alors à 75 %. A la sortie de la fibre, le champ laser est collimaté (utilisation d'un télescope) de telle sorte que les dimensions transverses du faisceau soient plus importantes que celle du nuage d'atomes (voir figure 2.5). En fin de compte, à la sortie du télescope, le faisceau possède les caractéristiques suivantes :

- un profil gaussien en intensité d'une largeur à mi-hauteur de  $1490 \pm 10 \mu\text{m}$  ;
- une puissance de  $92,0 \pm 2,0 \text{ mW}$ .

L'onde stationnaire est construite par rétro-réflexion à l'aide d'un miroir placé de l'autre côté de la cellule. Quant à la génération de pulse d'onde stationnaire, nous utilisons deux modulateurs acousto-optiques. Le premier dévie le trajet du faisceau laser maître vers l'amplificateur optique. Déclenché quelques centaines de microsecondes avant la séquence de pulses, il a pour fonction de laisser le temps au laser amplifié de relaxer (cela permet de diminuer les fluctuations de puissance des pulses et d'améliorer l'isolation optique). En aval de l'amplificateur, le second modulateur acousto-optique pilote l'injection de la fibre ; il génère ainsi des pulses d'une durée minimale de 60 ns – mais est généralement fixée entre  $0,6 \mu\text{s}$  et  $1 \mu\text{s}$  – avec des temps de montée et de chute d'environ  $\sim 25 \text{ ns}$  chacun (voir figure 2.6). Le signal radio-fréquence qui pilote ce modulateur acousto-optique est donc à la source de la séquence de pulses. Dans le cas où il s'agit d'une séquence de pulses périodique, un simple commutateur actionné par un signal TTL généré par un monostable se charge de bloquer (temps de vol) ou de laisser passer (pulse) la radio-fréquence. En position bloquante, la coupure est d'au moins 60 dB. Nous verrons dans les chapitre 3 et 4 que le montage radio-fréquence devient un peu plus complexe du fait que la séquence de pulses est modulée en phase ou en amplitude.

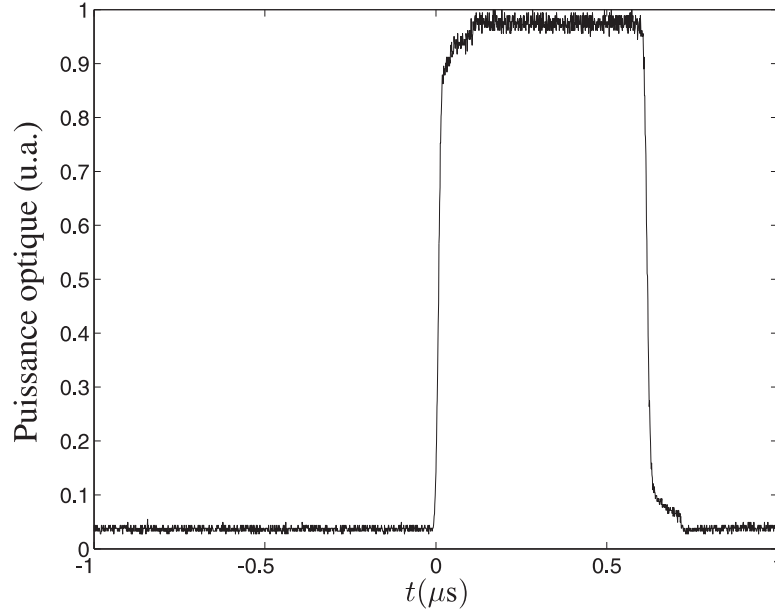


FIG. 2.6 – Pulse d'onde stationnaire de durée  $\tau = 0,6 \mu s$  enregistré par une photo-diode. Les temps de montée et de descente valent approximativement 25 ns chacun. Une séquence de pulse peut contenir jusqu'à 250 pulses de ce type.

### Détermination des valeurs expérimentales de $K$ et $\bar{k}$

Nous possédons désormais tous les éléments nécessaires à l'évaluation du paramètre de stochasticité  $K$ . Au préalable, il nous faut évaluer l'intensité vue par les atomes. A partir de la puissance et de la largeur du profil données précédemment, l'intensité à la sortie de l'objectif est évaluée à son maximum ; nous trouvons  $I_{max,obj} = 3580 \pm 150 \text{ mW/cm}^2$ . Cette valeur doit être corrigée pour deux raisons : d'une part, parce que le faisceau est plus large à l'endroit du nuage qu'à la sortie de la fibre (environ  $10 \pm 1 \%$ ), d'autre part parce que les faisceaux aller et retour perdent  $4 \pm 1 \%$  d'intensité à chaque traversée des faces de la cellule qui enferme le piège – seules les faces extérieures sont couvertes d'un traitement anti-reflet. En définitive, à l'endroit du piège,  $I_{max} = 2580 \pm 180 \text{ mW/cm}^2$ .

En utilisant la formule A.7 de l'annexe A, la fréquence de Rabi  $\Omega_R/2\pi$  au point où l'intensité du champ est maximale ( $I_{max}$ ) vaut donc

$$\frac{\Omega_{R,max}}{2\pi} = 292 \pm 15 \text{ MHz}, \quad (2.4)$$

et le potentiel optique, au niveau des ventres de l'onde stationnaire vaut, pour un désaccord  $\delta_L/2\pi$  exprimé en GHz,

$$V_{0,max} = \frac{5160}{(\delta_L/2\pi)} \hbar\omega_r, \quad (2.5)$$

où  $\hbar\omega_r \approx 1,37 \cdot 10^{-30} \text{ J}$  est l'énergie de recul. Pour les valeurs expérimentale de  $\delta_L$ , la marge d'erreur varie entre 6% et 7% de la valeur calculée par la formule (2.5).

Ceci permet d'évaluer le paramètre de stochasticité au maximum d'intensité ( $K_{max}$ ) ; il suffit d'injecter la valeur de (2.5) dans l'équation (A.28) :

$$K_{max} = 6960 \frac{\tau}{(\delta_L/2\pi)F}, \quad (2.6)$$

où, ici,  $\tau$  est exprimé en  $\mu\text{s}$ ,  $F$  en kHz, et  $(\delta_L/2\pi)$  en GHz. La marge d'erreur est d'environ 7%.

Toutefois, contrairement au modèle théorique du potentiel lumineux (développé dans l'annexe A), nous ne sommes pas en présence d'une onde plane mais d'un faisceau gaussien ; le nuage est en réalité illuminé par une intensité inhomogène. Il en résulte que le paramètre de stochasticité – qui dépend de l'intensité – est inhomogène lui aussi. Pour rendre compte de façon plus réaliste de l'interaction entre l'onde stationnaire et les atomes, nous définissons le paramètre de stochasticité moyen

$$K_{moy} = \int K(x, y)\rho(x, y)dxdy \quad (2.7)$$

où  $K(x, y)$  et  $\rho(x, y)$  sont respectivement le coefficient de stochasticité et la densité atomique (normalisée) dans le plan transverse  $(x, y)$  à l'axe de propagation de l'onde stationnaire. Etant donné que la géométrie du nuage et le profil de l'onde stationnaire sont fixés, la formule (2.7) peut se réduire pratiquement à

$$K_{moy} = (0,80 \pm 0,05) \times K_{max}. \quad (2.8)$$

La valeur de  $\bar{k}$  est beaucoup plus facile à estimer. Elle vaut

$$\bar{k} = \frac{104}{F}, \quad (2.9)$$

où  $F$  est exprimé en kHz.

### Paramètres expérimentaux disponibles

Du fait que nous cherchons à observer des phénomènes dans un cadre strict (chaoticité, quanticité), il en résulte des restrictions sur le choix de la fréquence  $F$ , du désaccord  $\delta_L$ , de la durée des pulses  $\tau$  et de la durée de la séquence  $N/F$ . Nous regroupons ici les points sur lesquels il faut veiller.

1. Pour l'observation de la localisation dynamique, il est préférable que la valeur de  $\bar{k}$  ne soit pas un multiple entier de  $2\pi$ , valeur pour laquelle la diffusion quantique initiale est nulle (phénomène de résonance quantique étudié théoriquement par D. L. Shepelyansky [6] et observé expérimentalement par M. Raizen [7]. Voir aussi la thèse de J. Ringot [23]). Cela implique d'être prudent sur le choix de la fréquence  $F$ .
2. Le paramètre moyen de stochasticité  $K_{moy}$  doit être supérieur à 5 pour que l'ensemble du système satisfasse à la condition de chaoticité (voir section 1.1.2). Il est possible de jouer sur  $\tau$  et  $F$ , mais il faut que la durée des pulses soit suffisamment courte pour qu'ils puissent être considérés comme des pulses de Dirac (dans la dernière partie de l'annexe A, il est montré que ceci se traduit par  $F\tau < 0,1$ ). Couplé au premier point, cela impose des contraintes sur  $\tau$ . Par ailleurs, il est possible de jouer aussi sur le désaccord  $\delta_L$ .

Paramètres	Fréquence ( $F$ )	Durée des pulses ( $\tau$ )	Désaccord ( $\delta_L/2\pi$ )
Gamme d'utilisation	25-75 kHz	0,6-1,2 $\mu$ s	9-21 Ghz

TAB. 2.2 – Gamme d'utilisation courante des trois principaux paramètres de notre expérience. Toutes les combinaisons ne sont pas souhaitables (le nombre d'émissions spontanées pouvant être trop élevé).  $K_{max} \approx 25$  est la valeur du paramètre de stochasticité la plus élevée que l'on puisse atteindre, mais usuellement,  $7 < K_{max} < 12$ , et  $2,9 < \bar{k} < 3,5$ .

3. Le taux d'émission spontanée qui dépend de  $\tau$ ,  $\delta_L$  et du nombre total de pulses ( $N$ ) (et de la puissance laser, mais nous ne la considérons pas comme un paramètre ajustable) doit être le plus faible possible (voir sous-section 2.3.4).
4. Le nombre total de pulses doit tenir dans une durée de 7 ms.

En pratique, respecter ces exigences revient à utiliser les paramètres donnés dans le tableau 2.2.

### 2.1.3 Mesure de la forme de la distribution d'impulsions

La dernière phase de l'expérience consiste à mesurer la distribution d'impulsions. La méthode la plus répandue consiste à laisser tomber le nuage d'atomes (en coupant tous les faisceaux et les champs magnétiques) puis à mesurer, un dizaine de centimètres plus bas, le signal d'absorption d'un faisceau sonde résonnant ; le signal de temps de vol permet de remonter à la distribution initiale (moyennant une déconvolution de la distribution spatiale initiale). Malheureusement, seule la mesure de la distribution selon l'axe vertical est possible. La méthode de M. Raizen [24, 25], qui autorise une mesure selon un axe horizontal, repose sur l'imagerie par caméra CCD de la distribution spatiale du nuage après une vingtaine de millisecondes de chute libre ; la forme de la distribution d'impulsions correspond à cette distribution spatiale convoluée par la distribution spatiale initiale.

En ce qui nous concerne, nous utilisons une technique de Spectroscopie Raman stimulée. Celle-ci présente plusieurs avantages : non seulement, elle fournit une bonne résolution, mais son dispositif expérimental peut être utilisé à d'autres fins, telles que le refroidissement sub-recul [26, 27] ou la sélection d'une classe d'impulsion [28, 29]<sup>4</sup>. Nous exposons ici les principes de cette méthode puis nous décrivons le montage (qui a été légèrement modifié depuis la thèse de J. Ringot [23]).

### Principes de la spectroscopie Raman stimulée

Après l'application de l'onde stationnaire, les atomes se retrouvent majoritairement dans l'état hyperfin  $|F_f = 4\rangle$  et la dynamique de leur centre de masse est caractérisée par une superposition d'états d'impulsion. Le principe de la spectroscopie Raman stimulée repose sur un transfert de population sélectif en impulsion vers un autre état interne, jusqu'alors vide (ici  $|F_f = 3\rangle$ ), que l'on sonde [29]. Les différentes étapes sont résumées sur la figure 2.7.

<sup>4</sup>Voir aussi la thèse de J. Chabé à venir.

Le transfert de population est réalisé en appliquant sur le nuage d'atomes un pulse "Raman", de durée  $\tau_R$ , composé de deux faisceaux contre-propageants de fréquences  $\omega_{R1}/2\pi$  et  $\omega_{R2}/2\pi$  désaccordées des fréquences des transitions respectives  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |e\rangle$  et  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |e\rangle$  (on définit  $|e\rangle \equiv |F_e = 3, 4, 5\rangle$ ) d'une valeur  $\Delta_R \gg \Gamma$  ( $\Gamma/2\pi \approx 5,3$  MHz est la largeur des niveaux composant  $|e\rangle$ ). La population de l'état  $|F_f = 4\rangle$  est alors couplée, de façon cohérente par une transition stimulée à deux photons, à l'état  $|F_f = 3\rangle$  (distants de  $\omega_H/2\pi = 9,2$  GHz) si la vitesse atomique  $\frac{\vec{p}}{m} = \frac{p}{m}\vec{z}$  permet de respecter la condition de résonance

$$\omega'_{R2} - \omega'_{R1} = \omega_H, \quad (2.10)$$

où  $\omega'_{R2}/2\pi$  et  $\omega'_{R1}/2\pi$  sont les fréquences Raman exprimées dans le repère mobile de vitesse  $\frac{\vec{p}}{m}$ . Dans le repère du laboratoire cette condition s'écrit

$$\omega_{R2} - \omega_{R1} = \omega_H + \delta_p, \quad (2.11)$$

où, du fait que les vecteurs d'onde  $\vec{k}_{R1} = |\vec{k}_{R1}|\vec{z}$  et  $\vec{k}_{R2} = -|\vec{k}_{R2}|\vec{z}$  des faisceaux Raman sont dirigés en sens opposés, apparaît le terme

$$\delta_p = (\vec{k}_{R2} - \vec{k}_{R1})\frac{\vec{p}}{m} - \frac{\hbar(\vec{k}_{R1} - \vec{k}_{R2})^2}{2m} \quad (2.12)$$

correspondant<sup>5</sup> à un décalage de la fréquence par effet Doppler (premier terme) ajouté à un décalage induit par l'impulsion de recul acquise après absorption et émission des deux photons (deuxième terme). Comme les normes des vecteurs d'onde sont équivalentes ( $|\vec{k}_{R1}| \cong |\vec{k}_{R2}| \equiv |\vec{k}_R| \equiv k_R$ ), l'expression (2.12) est factorisée et devient, après introduction de l'impulsion de recul  $p_r = \hbar k_R$ ,

$$\delta_p = -2\frac{k_R}{m}(p + p_r). \quad (2.13)$$

Enfin, en définissant le désaccord Raman

$$\delta_R = (\omega_{R2} - \omega_{R1}) - \omega_H, \quad (2.14)$$

la condition de résonance (2.11) devient

$$\delta_R = \delta_p. \quad (2.15)$$

Ainsi, en utilisant l'expression (2.13), il apparaît que le couplage entre les deux états hyperfins conduit à une sélection de l'impulsion  $p_s$  dépendant de  $\delta_R$  suivant la relation

$$p_s = \frac{m}{2k_R}\delta_R - p_r. \quad (2.16)$$

Par ailleurs, le temps d'interaction joue un rôle dans ce processus : la population de la classe d'impulsion  $p_s$  est entièrement transférée vers l'état  $|F_f = 3\rangle$  lorsque  $\tau_R\Omega_{eff} = \pi$  où

$$\Omega_{eff} = -\frac{\Omega_{R1}\Omega_{R2}^*}{2\Delta_R}, \quad (2.17)$$

<sup>5</sup>Dans l'expression (2.12), nous avons omis le terme de déplacement lumineux qui est négligeable pour deux faisceaux équilibrés en puissance.

est la pulsation de Rabi effective moyennée dans le temps ( $\Omega_{R1,R2} = -\frac{d\vec{E}_{1,2}}{\hbar}$  sont les pulsations de Rabi de chacun des deux faisceaux constituant le dispositif). Ainsi pour une puissance donnée des faisceaux (fixant  $\Omega_{eff}$ ), le transfert de population est maximal pour une durée

$$\tau_R = \frac{\pi}{\Omega_{eff}}. \quad (2.18)$$

Les étapes qui succèdent à l'application du pulse Raman ont pour but de récupérer un signal proportionnel à la classe d'impulsion sélectionnée. Tout d'abord, un faisceau laser accordé sur la transition  $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_f = 4\rangle$  est appliqué sur le nuage. Celui-ci a une fonction double. La première est de briser les cohérences qui lient les deux états, c'est-à-dire de transformer la superposition d'états internes en un mélange statistique. La seconde est de pousser – spatialement – les atomes qui sont dans l'état  $|F_f = 4\rangle$ . Il ne reste donc dans cette région de la cellule qu'une proportion d'atomes correspondant à la proportion de la population de la classe d'impulsion  $p_s$ . Ensuite, le faisceau repompeur replace les atomes qui sont dans  $|F_f = 3\rangle$  dans l'état  $|F_f = 4\rangle$ , qu'un faisceau accordé sur la transition  $|F_f = 3\rangle \rightarrow |F_f = 4\rangle$  sonde par absorption. L'absorption est mesurée par une photo-diode dont le signal est transféré à un ordinateur ; le signal temporel d'absorption est enfin intégré. Cette intégration correspond à la population de la classe d'impulsion  $p_s$ .

### Description du montage

La méthode de transition Raman nécessite deux faisceaux lasers cohérents en phase, avec une séparation des fréquences contrôlée d'environ 9,2 GHz. Plusieurs techniques existent : la génération de deux fréquences à partir d'un seul faisceau laser par un modulateur électro-optique [30], l'asservissement en phase de deux diodes laser directement séparées en fréquence [31] ou encore la séparation des fréquences de deux diodes laser asservies en phase avec un acousto-optique haute fréquence [32]. La technique originale que nous employons, basée sur la modulation du courant d'une diode laser maître injectant deux lasers esclaves, a été mise en place pendant la thèse de J. Ringot [23, 33]. Nous renvoyons à son manuscrit pour un exposé complet. Ici, nous nous limiterons à décrire le montage actuel (représenté schématiquement sur la figure 2.8).

La diode laser maître est alimentée par un T de polarisation comportant une entrée pour le courant continu de polarisation et une autre pour un signal micro-onde de pulsation  $\omega_M$  ajustable par ordinateur (autour de  $\omega_H/2 = 4,6$  GHz). Le spectre du faisceau de sortie est ainsi composé d'une raie centrale ("la porteuse") à la pulsation  $\omega_R$  [telle que  $\Delta_R/2\pi \approx 600$  GHz ( $7,5 \cdot 10^5$  T)] flanquée de deux bandes latérales à  $\omega_{R1} = \omega_R - \omega_M$  et  $\omega_{R2} = \omega_R + \omega_M$ , distantes l'une de l'autre de  $2\omega_M$ . Le bruit de phase entre ces deux bandes latérales est comparable à celle du signal micro-onde. En pratique, on observe un battement d'une fréquence de 1 Herz limitée par la résolution de l'analyseur de spectre. La fréquence de la porteuse est asservie selon le même procédé que celui utilisé pour l'onde stationnaire (cavité Pérot-Fabry et rétroaction sur la cavité externe de la diode maître).

Le faisceau maître est injecté dans deux diodes lasers "esclaves" (appelés Raman 1 et 2) pour les asservir aux pulsations  $\omega_{R1}$  et  $\omega_{R2}$ . Du fait que la puissance de chacune des bandes ne s'élève qu'au tiers de celle de la porteuse et que – hormis

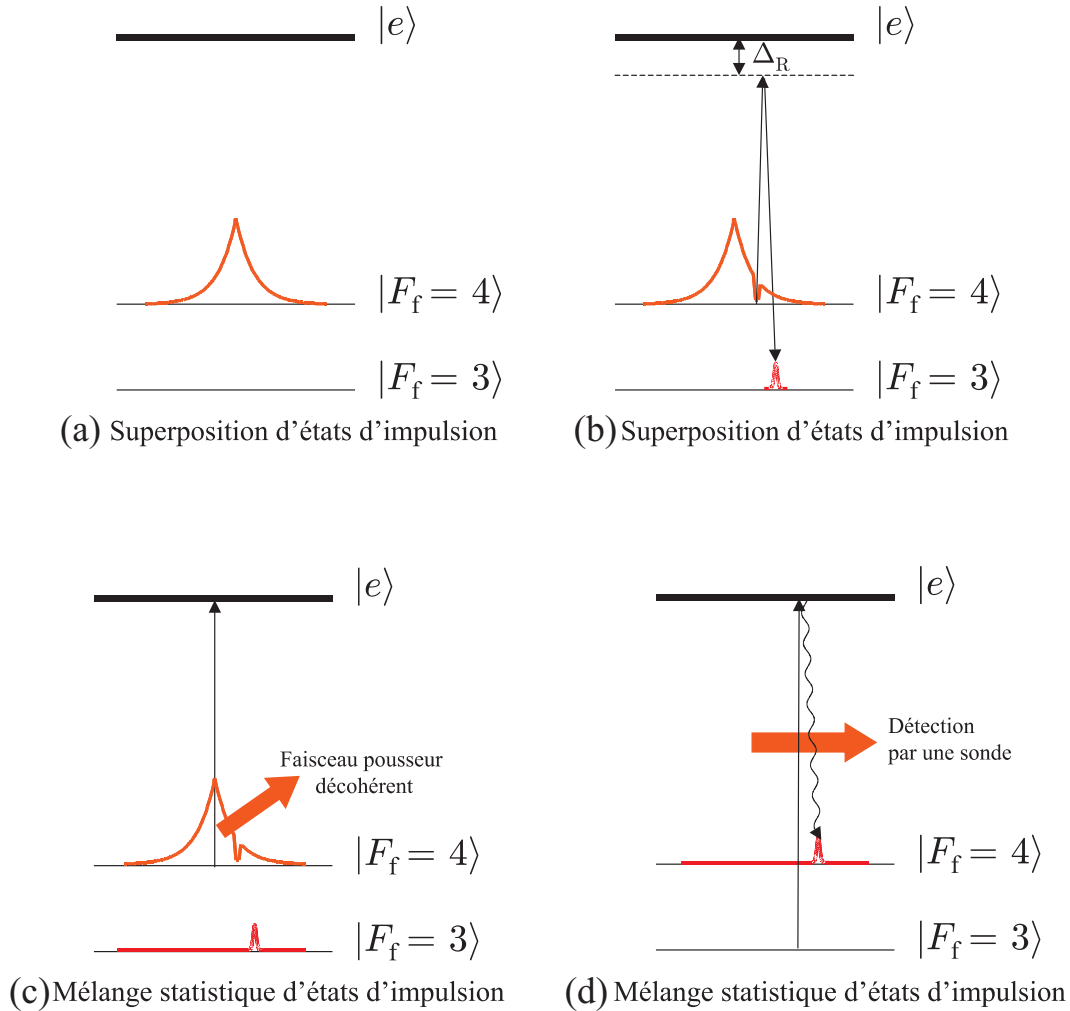


FIG. 2.7 – Principe de la mesure du nombre d'atomes par classe d'impulsion au moyen du processus Raman. (a) Après l'expérience de chaos quantique, les atomes sont dans une superposition d'états d'impulsion (états externes) et dans l'état interne  $|F_f = 4\rangle$  (b) Puis un pulse de deux faisceaux contre-propageants, dits faisceaux Raman, crée une superposition d'états internes et externes (processus cohérent, à ce stade, absolument réversible); en particulier, une classe d'impulsion  $p_s$ , sélectionnée par un choix judicieux de  $\delta_R$ , est placée en  $|F_f = 3\rangle$ . La résolution expérimentale de la classe d'impulsion est environ de  $\hbar/4$  en unités réduites. (c) Ensuite, un faisceau résonnant avec la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  brise les cohérences entre les deux niveaux fondamentaux et dégage les populations de  $|F_f = 4\rangle$ . (d) Enfin, la population de  $|F_f = 3\rangle$  est repompée dans  $|F_f = 4\rangle$  afin d'être sondée par l'absorption d'un faisceau laser résonnant.

la différence entre les modes longitudinaux – aucun autre élément ne discrimine les bandes latérales, l’injection directe est peu stable (il faut alors jouer sur la compétition entre les modes longitudinaux). La solution qui a été adoptée consiste à discriminer les trois raies du faisceau laser Maître par dispersion angulaire. Avant d’injecter les diodes lasers esclaves, le faisceau est donc diffracté par un réseau.

Les faisceaux Raman sont acheminés via trois fibres monomodes à maintien de polarisation vers la cellule du PMO, des modulateurs acousto-optique pilotant l’injection de ces fibres. A leur sortie, la puissance laser est de 13,5 mW et la largeur à mi-hauteur de leur profil transverse gaussien est de quelques millimètres (ce qui est comparable à la taille du nuage). L’utilisation de trois fibres permet soit une configuration contre-propageante, soit une configuration co-propageante.

*Remarque* : la configuration co-propageante des faisceaux Raman permet de réaliser une spectroscopie stimulée avec une condition de résonance quasiment indépendante de l’impulsion, si bien que l’on peut considérer que seul un désaccord  $\delta_R = 0$  permet, en principe, un transfert de toute la population de  $|F_f = 4\rangle$  vers  $|F_f = 3\rangle$ . Toutefois, si la dégénérescence des sous-niveaux magnétiques des états hyperfins est levée par un champ magnétique quelconque (rayonnement électronique, bobines, etc.), plusieurs fréquences de transitions correspondant à  $\Delta m_{F=4 \rightarrow F'=3} = 0, \pm 1, \pm 2$  apparaissent : il existe alors plusieurs valeurs discrètes de  $\delta_R$  pour lesquelles le transfert de population est possible. Les spectres obtenus en balayant  $\delta_R$  retranscrivent ainsi la présence de champ magnétiques parasites. Pratiquement, ceux-ci peuvent être compensés au moyen d’un réglage manuel des bobines de compensation du champ magnétique qui entourent la cellule du PMO ; le résultat est un ramassement du spectre autour de  $\delta_R = 0$ . Lorsque les champs sont compensés au mieux, la largeur  $\Delta\delta_R$  de la raie  $\delta_R = 0$  donne la résolution expérimentale. On trouve généralement  $\Delta\delta_R/2\pi \approx 4$  kHz.

## Performances

La durée  $\tau_R$  du pulse “Raman” est adaptée pour que les atomes dont l’impulsion répond à la condition (2.16) soient le plus efficacement couplés à  $|F_f = 3\rangle$ . Nos conditions expérimentales ne nous permettent malheureusement pas de déterminer  $\tau_R$  aussi simplement qu’en utilisant la formule (aussi 2.18), car la pulsation de Rabi prend des valeurs différentes à cause de l’inhomogénéité en intensité du pulse et du fait que les atomes sont dans des sous-niveaux magnétiques de  $|F_f = 4\rangle$  qui se déplacent avec le bruit du champ magnétique. La superposition de ces différentes pulsations conduit à faire quasiment disparaître les oscillations. Expérimentalement, le couplage maximum apparaît pour  $\tau_R = 1$  ms.

La résolution expérimentale en impulsion ( $\Delta p_s$ ) est directement reliée à la largeur  $\Delta\delta_R$  par la formule (2.16) : elle vaut  $\hbar k_R/2$ <sup>(6)</sup>, ce qui est suffisant pour notre expérience de chaos quantique.

Par ailleurs, afin d’obtenir un signal plus important nous employons une technique qui consiste à balayer automatiquement  $\delta_R$  pendant l’impulsion Raman sur

<sup>6</sup> $\hbar k_R/2 \approx \hbar k_L/2 \rightarrow \hbar/4$  dans le système d’unités réduites du pendule pulsé expérimental.



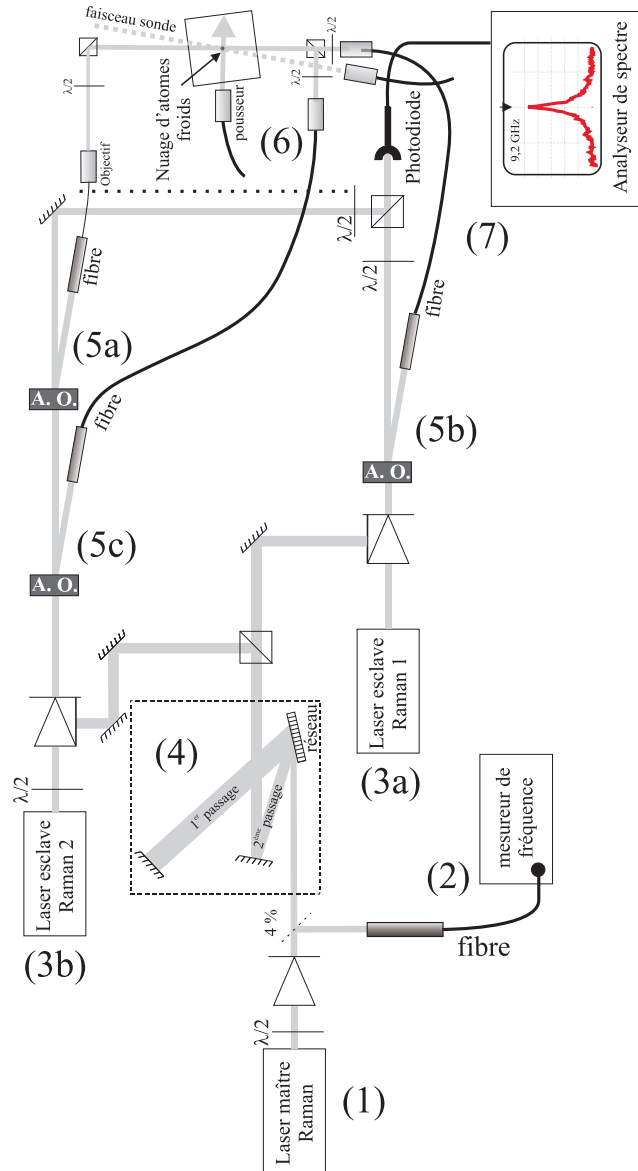


FIG. 2.8 – Schéma du montage de détection Raman. Le spectre de la diode laser maître (1) dont le courant d'alimentation est modulé par un signal micro-onde est composé de trois raies séparés de 4,6 GHz. La fréquence centrale est contrôlée par un mesureur commercial de longueur d'onde optique (2). Deux diodes lasers, Raman 1 (3a) et Raman 2 (3b) sont injectées sur les bandes latérales. Afin de faciliter cette injection, ce faisceau est dispersé angulairement en passant deux fois, grâce à un miroir, sur un réseau de diffraction (4) de 1800 traits/mm et d'une longueur de 5 cm, et optimisé pour favoriser l'ordre 2. Les deux faisceaux Raman sont transportés vers la cellule grâce à des fibres optiques monomodes dont l'injection est contrôlée par des modulateurs acousto-optiques (5a, 5b, 5c). Deux configurations sont possibles : contre-propageante et co-propageante. A la sortie des fibres (6), la puissance de chacun des faisceaux est de 13,5 mW. Parallèlement, nous nous assurons que les faisceaux laser Raman sont bien injectés sur les bandes latérales du laser maître en mesurant leur battement au moyen d'une photo-diode rapide (7).

une plage de fréquence déterminée par l'expérimentateur. Un plus grand nombre de classes d'impulsion est ainsi sélectionné, ce qui augmente le signal (et diminue la résolution bien sûr). Cette technique est connue sous le nom de "chirp", mot anglais signifiant "gazouillis", en référence à la variation progressive de la fréquence du chant de nombreux oiseaux. En pratique, nous utilisons des chirps de 80 kHz.

### Acquérir une distribution d'impulsions

Avec un seule réalisation, la technique que nous venons de décrire ne nous permet pas d'obtenir une distribution d'impulsions complète, mais uniquement un signal proportionnel au nombre d'atomes présents dans une seule classe d'impulsion. Pour obtenir une distribution d'impulsions, nous devons donc réaliser autant de fois l'expérience que le nombre de points dont nous voulons qu'elle soit composée. Cela suppose que les caractéristiques du nuage (le nombre d'atomes qu'il contient<sup>7</sup>, sa température, sa taille, sa position), celles de l'onde stationnaire (fréquence des pulses, puissance, position) et celles de la détection Raman sont reproductibles. Comme ceci n'est que partiellement vrai, nous sommes contraints de réaliser l'expérience plusieurs fois par points afin de moyennner le signal. Pour un jeu de paramètres standards ( $F = 30$  kHz,  $\tau = 1 \mu\text{s}$ ) et une moyenne sur 10 courbes, le rapport signal sur bruit typique est de 50 au maximum de la distribution d'impulsions.

## 2.2 Observation expérimentale de la localisation dynamique

Nous montrons ici à quoi ressemble expérimentalement le phénomène de localisation dynamique avec le dispositif décrit précédemment. Pour cela, les paramètres de l'expérience ont donc été réglés de telle manière à ce que la dynamique du système classiquement équivalent soit chaotique ( $K_{moy} > 5$ ) et que la valeur de  $\tilde{k}$  exclut un phénomène de résonance quantique ( $\tilde{k} < \pi$ ). Nous avons choisi  $F = 30$  kHz,  $\tau = 1 \mu\text{s}$ ,  $\delta_L/2\pi = 21,8$  GHz, qui correspondent à  $\tilde{k} = 3,46$  et, en première approximation, à  $K_{moy} = 8,5 \pm 0,5$ .

### 2.2.1 Forme de la distribution

Une méthode fiable pour détecter une effet de localisation est de regarder la forme de la distribution d'impulsions après le temps de localisation ( $N_{loc}$ ); nous avons vu, dans la sous-section 1.2.2, qu'elle épouse une forme double exponentielle. Pour notre jeu de paramètres expérimentaux, l'application de la formule (1.40) indique que  $N_{loc}$  doit valoir une dizaine de pulses<sup>8</sup>. En conséquence, la distribution d'impulsions est acquise à  $n = 100$ , à un moment où elle est censée être localisée. Le résultat expérimental, présenté sur la figure 2.9 en échelle logarithmique, est une double exponentielle légèrement déformée, ce qui tend à démontrer le caractère quantique du phénomène. La longueur de localisation est évaluée à  $\mathcal{P}_{loc} \approx 7,5 \tilde{k}$ . Une simulation

<sup>7</sup>Le nombre d'atomes dans le piège fluctue lentement sur une amplitude de 10 % et sur une période d'une dizaine de minutes, ce qui se traduit par une variation de l'aire de la distribution.

<sup>8</sup>Le résultat théorique  $N_{loc} \approx 6$  est différent de celui des simulations numériques, qui fournit plutôt  $N_{loc} \approx 15$ . A ce sujet voir la sous-section 1.2.3.

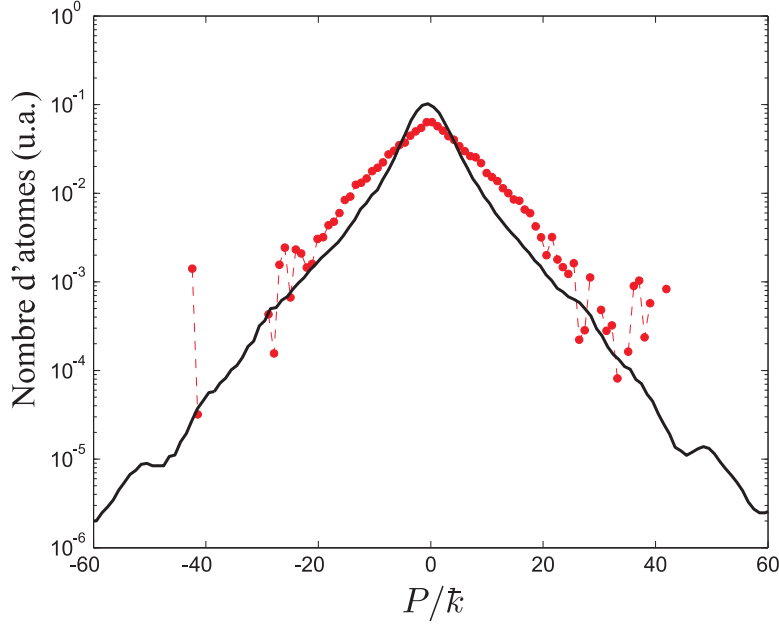


FIG. 2.9 – Distributions d'impulsions à  $n = 100$  expérimentale (cercles pleins) et numérique (trait plein) pour une séquence de pulses périodique dont les paramètres expérimentaux sont évaluées à  $K_{moy} = 8,5$  et  $\bar{k} = 3,46$ . L'échelle logarithmique sur l'axe des ordonnées met en évidence la forme double exponentielle caractéristique de la localisation dynamique.

numérique standard<sup>9</sup> basée sur les valeurs expérimentales de  $K_{moy}$  et  $\bar{k}$  indique que la longueur de localisation devrait être plus petite ( $\mathcal{P}_{loc} \approx 6,2\bar{k}$ ).

### 2.2.2 Evolution de $\langle P^2 \rangle$

Comme nous l'avons vu au chapitre 1, le gel de la diffusion peut s'apprécier en traçant l'évolution de l'énergie cinétique moyenne ( $\langle P^2 \rangle$  à un facteur 1/2 près). Expérimentalement, tracer une telle courbe nécessite l'acquisition de la distribution d'impulsions pour plusieurs valeurs du nombre de pulses, puis le calcul des écarts quadratiques moyens de  $P$ . Il est important de noter que ce calcul est très sensible aux valeurs élevées de  $P$ , pour lesquelles le signal est dominé par le bruit.

Nous avons réalisé une telle opération avec les paramètres expérimentaux précédemment cités, et affiché le résultat au côté de celui d'une simulation basée sur les valeurs expérimentales de  $K_{moy}$  et  $\bar{k}$  sur la figure 2.10. Cette dernière montre, aux temps courts, une évolution diffusive, et aux temps longs, un gel de la diffusion ; le temps de localisation et la longueur de localisation fournis par ces simulations valent respectivement  $N_{loc} \approx 10$  et  $\mathcal{P}_{loc} \approx 6,2\bar{k}$ . Visiblement, l'évolution expérimentale de  $\langle P^2 \rangle$  est similaire à l'évolution numérique jusqu'au temps  $n \approx 30$ . Par contre, aux temps longs, nous constatons qu'au lieu d'un gel de la diffusion, une diffusion persiste. Le taux de cette diffusion résiduelle (noté  $D_\infty$ ) est environ de  $D_q(K_{moy})/20$ . Si la diminution de la diffusion peut être interprétée comme une manifestation –

<sup>9</sup>Les principes de cette simulation sont décrits à la sous-section 1.2.2.

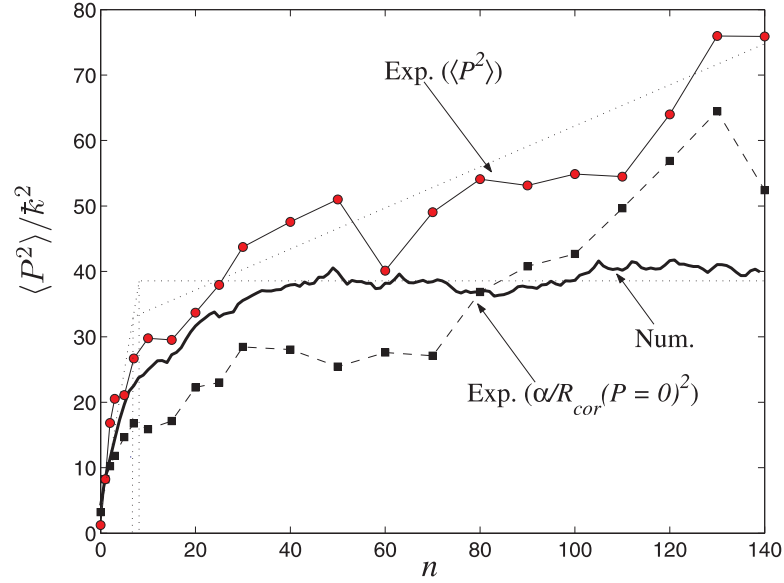


FIG. 2.10 – Evolutions expérimentale et numérique de  $\langle P^2 \rangle / \bar{k}^2$  en fonction du temps pour une séquence de pulses périodique dont les paramètres expérimentaux sont évalués à  $K_{moy} = 8,5$  et  $\bar{k} = 3,46$  repris pour la simulation numérique standard. L'évolution temporelle de  $\alpha/R^2(P=0)$  a aussi été tracée mais en normalisant toutes les aires des distributions. La simulation donne un temps de localisation  $N_{loc} \approx 10$  et une longueur de localisation  $\mathcal{P}_{loc} \approx 6,2\bar{k}$ . L'expérience ne montre pas un gel de la diffusion, mais une réduction de la diffusion par rapport à la diffusion initiale (d'un facteur 20). Pour la courbe expérimentale, le croisement entre sa tangente en  $n = 0$  et sa droite moyenne d'évolution pour  $n > 20$  définit un temps typique de changement de taux de diffusion autour de  $n \approx 8$ , à rapprocher de la notion de "temps de localisation".

imparfaite – de la localisation dynamique, le temps de localisation peut être évalué expérimentalement à  $N_{loc} \approx 8$ .

### 2.2.3 Evolution du maximum de la distribution d'impulsions

Une autre méthode pour appréhender le gel de la diffusion, plus rapide que la précédente, consiste à mesurer uniquement le nombre d'atomes d'impulsion nulle  $R(P=0)$  – autrement dit le maximum – en fonction de  $n$ . En effet, si l'on suppose l'aire des distributions d'impulsions constante,  $R^2(P=0)$  est inversement proportionnel<sup>10</sup> à  $\langle P^2 \rangle$ , et la localisation dynamique se manifeste par un gel de la décroissance de  $R(P=0)$  (tracé sur la figure 2.11). Il apparaît, à la manière de l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$ , que la décroissance de  $R(P=0)$  ne cesse pas mais ne fait que diminuer après  $n \approx 10$ .

Par ailleurs, sur la figure 2.10 a aussi été tracée l'inverse du carré de la population d'atomes d'impulsion nulle  $[\alpha/R^2(P=0)]$  à un coefficient de proportionnalité près,

<sup>10</sup>Le coefficient de proportionnalité entre le maximum et l'inverse de  $\langle P^2 \rangle$  dépend de la forme de la distribution; comme la distribution d'impulsions initiale est gaussienne, puis devient double exponentielle, il devrait varier dans un rapport  $\pi$ .

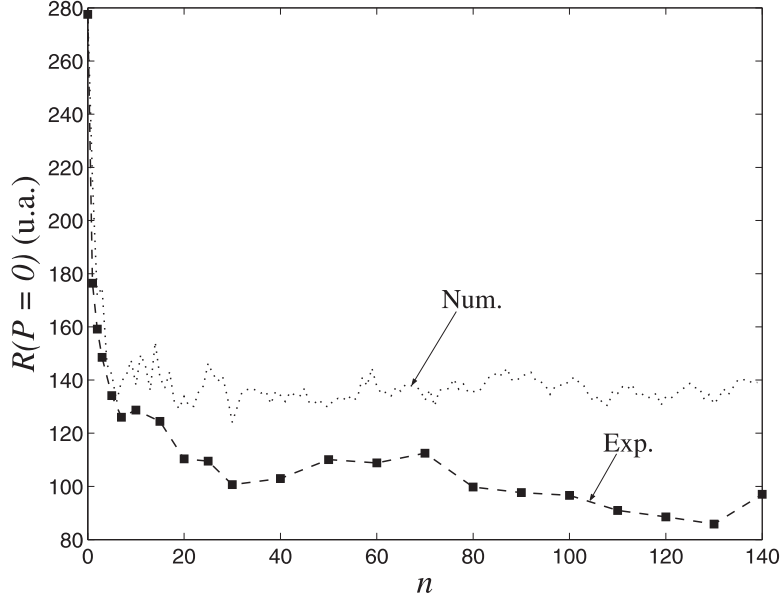


FIG. 2.11 – Evolutions numérique et expérimentale du maximum de la distribution d'impulsions en fonction du temps pour une séquence de pulses périodique (mêmes paramètres que ceux de la figure 2.10).

$\alpha$ , ajusté de telle manière à ce que cette quantité, à  $n = 0$ , soit égale à celle de  $\langle P^2 \rangle$ . Ces deux courbes se superposent pour les premiers pulses, puis se différencient à cause du changement de la forme de la distribution d'impulsions. Cependant le taux de diffusion est du même ordre de grandeur que celui évalué par calcul direct de  $\langle P^2 \rangle$ .

### 2.3 Effets expérimentaux

Il semble que les résultats expérimentaux ne correspondent pas parfaitement à un phénomène de localisation dynamique. D'un côté, la distribution d'impulsions a la forme attendue, mais d'un autre, elle continue de s'élargir (ce qui met nécessairement à mal la notion de longueur de localisation). Toutefois, le taux de diffusion décroît dans la première dizaine de pulses, pour se stabiliser par la suite. La somme de ces faits suggère que nous avons affaire à une dynamique de type chaos quantique que des effets parasites détériorent. Notons que tous les groupes de recherche qui ont tenté d'observer ce phénomène ont obtenu le même type de résultats [34, 35].

Dans cette partie, nous passons en revue les effets expérimentaux susceptibles d'écarter quantitativement et qualitativement la dynamique de la localisation dynamique telle que la simulation numérique standard la prévoit. Nous décrivons ces effets et la façon d'en tenir compte dans le traitement des données et dans les simulations numériques.

### 2.3.1 Signal de fond et perte d'atomes

En principe, en réglant le système de détection Raman sur de très grandes valeurs d'impulsion, le signal obtenu devrait, du fait qu'aucun atome n'atteint ces régions, être indépendant du nombre de pulses de l'onde stationnaire. Pourtant, comme le montre la figure 2.12, deux distributions d'impulsions correspondant à  $n = 5$  et  $n = 100$  semblent posées sur des socles de hauteurs différentes. Ce signal, indépendant de la classe d'impulsion sélectionnée, est appelé signal de *fond*, ou simplement *fond*. Bien qu'il soit mis en évidence par le fait qu'il évolue en fonction du nombre de pulses appliqués, il ne peut être conclu que seul l'onde stationnaire l'alimente.

Ce fond provient d'atomes qui sont placés "par erreur" dans l'état  $|F_f = 3\rangle$ , celui-là même qui devrait être vide et servir à la détection Raman. Pour rejoindre cet état, les atomes empruntent un chemin "inadéquat" : une transition réelle vers l'un des états excités suivie d'une émission spontanée. En moyenne, ils retombent dans  $|F_f = 3\rangle$  avec une probabilité qui dépend de l'état excité. Le photon nécessaire pour cette transition peut provenir de diverses sources lumineuses : rayonnements parasites liés à des réflexions, des coupures imparfaites des lasers résonnants (PMO, sonde, pousseur), de l'onde stationnaire ou encore des faisceaux Raman eux-mêmes. Comme seule l'application de l'onde stationnaire est variable (le nombre de pulses est un paramètre ajustable), le fond produit par les autres sources est une constante qui peut échapper à l'attention, mais qui existe bel et bien.

En ce qui concerne l'expérience du pendule pulsé, il faut ajouter que ce qui est gagné par le signal de fond a pour corollaire une perte du nombre d'atomes, c'est-à-dire une diminution de l'aire de la distribution (soustraite du fond). Cette diminution dépend du nombre de pulses appliqué, du désaccord de l'onde stationnaire, et de la durée des pulses. Dans le cas des expériences présentées à la section précédente, la perte d'atomes s'élève à environ 6 % au bout d'une centaine de pulses.

Il faut donc tenir compte de cet effet en traitant directement les données : le fond doit être soustrait de tous nos signaux et l'aire des distributions normalisée. Pratiquement, le signal de fond est déterminé en sondant les valeurs très élevée de  $P$  (généralement,  $P \approx 600 \text{ k}$ ) pour le nombre de pulses approprié.

### 2.3.2 Inhomogénéité en $K$

L'inhomogénéité en  $K$  n'implique pas d'altération du processus de gel de la diffusion. Toutefois, comme le montre la figure 2.13, simplifier la situation en considérant que tous les atomes sont soumis à  $K_{\text{moy}}$  ou à  $K_{\text{max}}$  conduit à des interprétations erronées sur les caractéristiques de la distribution d'impulsions expérimentale. Par exemple, par rapport à ce que serait le signal si tous les atomes était soumis à  $K_{\text{max}}$ , la diffusion initiale expérimental est plus faible, le temps de localisation est plus court, et la longueur de localisation est, en conséquence, réduite. Il faut ajouter que l'inhomogénéité en  $K$  tend à modifier la forme de la distribution localisée, à l'écarté légèrement d'une fonction double exponentielle (voir la population relativement importante dans les ailes sur la figure 2.13).

La simulation numérique utilisée pour la figure 2.13 consiste simplement à calculer, à partir de la simulation standard, des évolutions de la distribution initiale avec des séquences de pulses dont le paramètre  $K$  est calculé pour plusieurs posi-

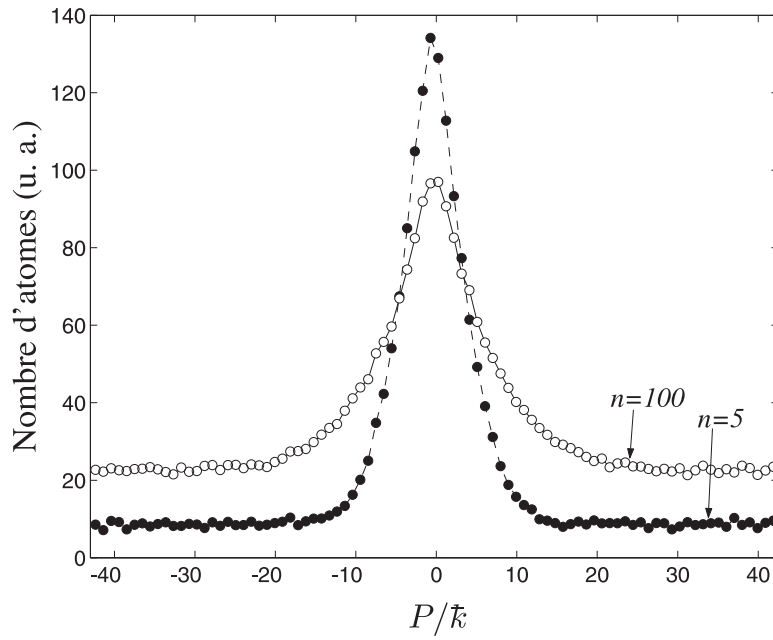


FIG. 2.12 – Deux distributions d'impulsions obtenues avec  $K_{moy} = 8,5$  et  $\hbar = 3,46$  pour  $n = 5$  et  $n = 100$ . Elles reposent toutes deux sur un signal de fond causé par la détection d'atomes ayant subi une émission spontanée. A l'augmentation de ce fond correspond une diminution de l'aire de la distribution d'impulsions. Un traitement de base des données consiste à leur soustraire ce fond.

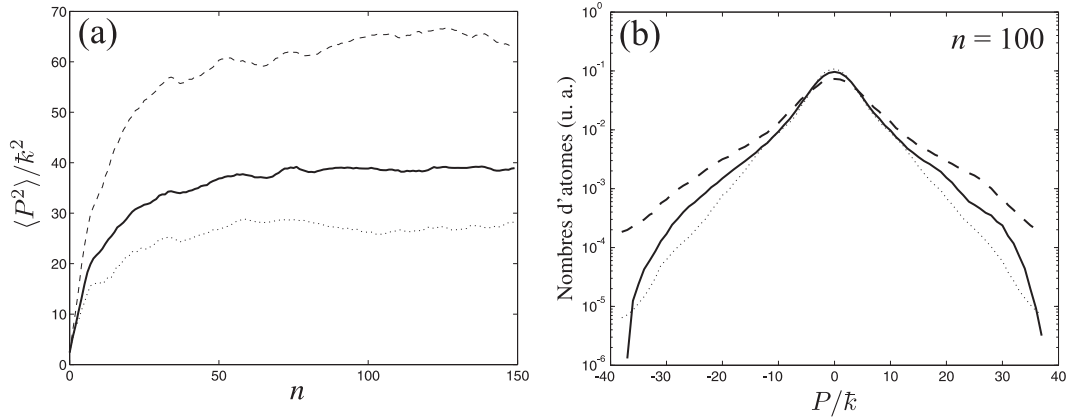


FIG. 2.13 – Evolution de  $\langle P^2 \rangle$  (a) et distribution d’impulsions à  $n = 100 > N_{loc}$  (b) obtenues par trois types de simulation numériques dans le cas d’une distribution gaussienne du nuage d’atomes froids soumis à une séquence de pulses d’onde stationnaire de profil transverse gaussien (le rapport des largeurs à mi-hauteur des gaussiennes est égal à 0,6) :  $\hbar = 3,46$  et  $K_{max} = 9,5$  (tirets),  $K_{moy} = 8,14$  (pointillés), et avec  $K$  calculé pour plusieurs positions transverses avec pondération de la densité atomique (trait continu). Dans ce dernier cas, la distribution d’impulsions s’écarte légèrement de la forme en double exponentielle (typique de la localisation dynamique). L’inhomogénéité en  $K$  ne détruit pas le gel de la diffusion mais modifie la longueur de localisation (respectivement  $\mathcal{P}_{loc} \approx 8, 1, 5, 1, 5, 9$ ).

tions transverses, et ensuite à réaliser une moyenne de ces évolutions pondérée par la densité atomique.

### 2.3.3 Durée finie des pulses

Dans l’annexe A, il est montré qu’il faut que leur durée  $\tau$  soit suffisamment courte pour que les pulses agissent comme des pulses de Dirac. Pour les paramètres expérimentaux, la durée doit respecter le critère d’un dixième de la période de la séquence ( $\alpha \equiv \tau F < 0,1$ ). Mais une autre limite peut être définie sur des arguments de physique classique : pendant l’apparition du potentiel optique, l’impulsion d’un atome – que nous considérons pour l’explication comme un objet ponctuel – varie au cours de son déplacement. Si le pulse est assez long et que l’impulsion de l’atome est assez grande, des échanges périodiques s’effectuent entre énergie potentielle et énergie cinétique. L’impulsion  $P_{lim}$  pour que l’atome se déplace sur une seule période lorsque le pulse est de durée  $\alpha$  s’écrit

$$P_{lim} \times \alpha = 2\pi, \quad (2.19)$$

[en unités non réduites, l’expression (2.19) s’écrit de façon plus parlante :  $\frac{p}{m} \cdot \tau = \frac{\lambda}{2}$ ]. Pour cette valeur de l’impulsion, la diffusion est donc nulle puisque, à la fin de l’application du pulse, l’atome est revenu à la valeur de l’impulsion qui précédait le pulse. La valeur  $P_{lim}$  borne donc une région de l’espace des impulsions appelée *boîte classique*. La taille de cette boîte vaut

$$2 \times P_{lim} = 4\pi/\alpha. \quad (2.20)$$



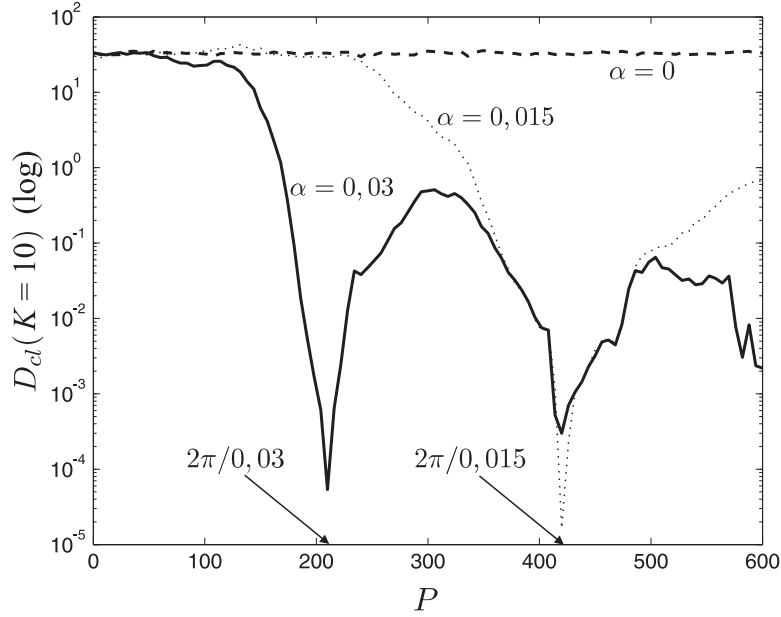


FIG. 2.14 – Taux de diffusion classique en fonction de  $P$  pour trois durées de pulses différentes ( $\alpha = 0, 0,015$  et  $0,03$ ) dans la cas où  $K = 10$  (simulation numérique). Celui-ci s’annule pour  $P = 2\pi/\alpha$ . S’il est généralement plus faible pour une durée  $\alpha \neq 0$  que pour  $\alpha = 0$ , il peut exister des régions de l’espace des impulsions pour lesquelles il est plus élevé (ce qui est ici le cas dans la région  $100 \lesssim P \lesssim 200$  pour  $\alpha = 0,015$ ).

L’exemple de la figure 2.14 montre la dépendance du taux de diffusion classique envers  $P$  pour  $\alpha = 0$  (pulse de Dirac),  $0,01$  et  $0,03$  (situation expérimentale) dans le cas classique ( $\hbar \rightarrow 0$ ). Pour  $\alpha = 0$ , il est constant quelque soit la valeur de  $P$ ; par contre, pour une longueur de pulse finie, il varie nettement en fonction de  $P$  et s’annule effectivement pour la valeur donnée par (2.20). Le taux de diffusion pour  $\alpha \neq 0$  n’est pas nécessairement plus faible que celui donné pour  $\alpha = 0$ , même il l’est en général (voir commentaires de la figure 2.14).

La conséquence principale de la restriction de l’espace des impulsions est l’en-trave à la diffusion de la distribution. Classiquement, cela signifie qu’au bout d’un temps  $n \approx (4\pi)^2/[\alpha^2 D_{cl}(K)]$ , l’élargissement des distributions ralentit fortement. Du point de vue quantique, si cet effet se manifeste aussi, il n’altère significativement l’évolution de la distribution d’impulsions que si, typiquement, la longueur de localisation est comparable à la taille de la boîte classique. On peut prendre comme critère  $\mathcal{P}_{loc} < 2 \times P_{lim}$ . Sur la figure 2.15 sont montrées trois distributions expérimentales acquises à  $n = 30$  pour  $K_{moy} = 13,5 \pm 1$  et  $\hbar = 3,46$  et des durées de pulses  $\alpha = 0,03, 0,075$  et  $0,15$  [ $K_{moy}$  est constant parce que le rapport  $\tau/\delta_L$  l’est aussi, voir formule (2.6)]. Le calcul de la longueur de localisation avec  $K_{moy}$  donne  $\mathcal{P}_{loc} = (10 \pm 1) \hbar$  (longueur que nous savons sous-évaluée à cause de l’inhomogénéité en  $K$ ), ce qui s’accorde avec celle obtenue pour  $\alpha = 0,03$ , qui vaut approximativement  $12,2 \hbar$  (le critère précédent est respecté puisque  $P_{lim} \approx 2,7 \times \mathcal{P}_{loc}$ ). Par contre, pour les autres durées de pulses, le critère n’est plus respecté, et nous constatons

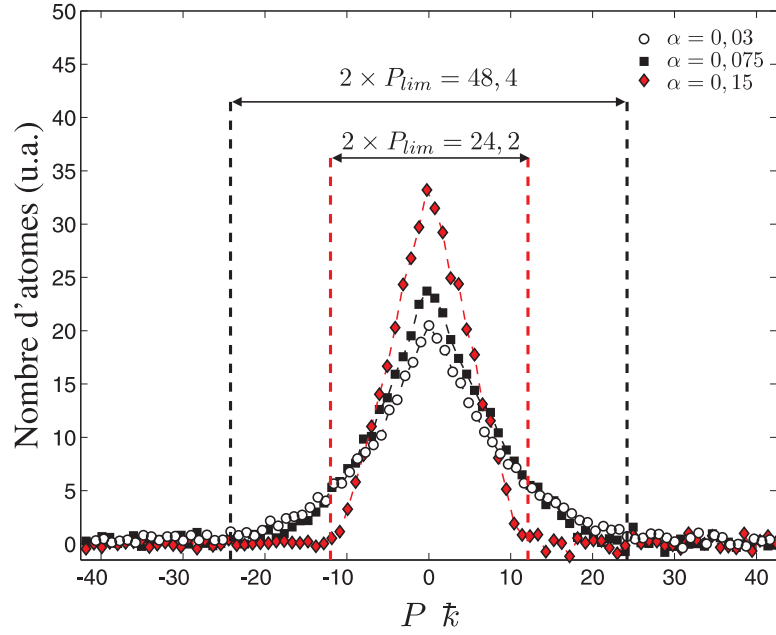


FIG. 2.15 – Distributions d'impulsions expérimentales obtenues avec  $K_{moy} \approx 13,5$  et  $k = 3,46$  pour des durées de pulses  $\tau = 1 \mu s$ ,  $\tau = 2,5 \mu s$  et  $\tau = 5 \mu s$  (désaccords respectifs  $\delta_L/2\pi = 13,7$ ,  $\delta_L/2\pi = 13,7$ ).

que les distributions sont bornées aux valeurs de  $P_{lim} \approx 24 k$  pour  $\alpha = 0,075$  et de  $P_{lim} = 12 k$  pour  $\alpha = 0,15$ . Dans ces conditions, la forme des distributions change et devient triangulaire, ce qui peut être considéré comme un critère visuel équivalent au critère mathématique que nous avons défini auparavant. Nous attirons l'attention sur le fait que, dans les expériences présentées à la section 2.2, la longueur de localisation est plus petite que dans le cas que nous venons juste de voir. La longueur des pulses valant aussi  $\alpha = 0,03$ , cela implique que l'élargissement de la distribution d'impulsions n'est pas limitée par la taille de la boîte classique.

Enfin, en ce qui concerne les simulations numériques, il est possible de rendre compte de tous les effets liés à la durée finie des pulses : il suffit d'appliquer, au lieu d'un seul pulse d'amplitude  $K$ , comme c'est le cas dans la simulation standard, une série de  $N_\alpha$  pulses d'amplitude  $K/N_\alpha$  séparés par des phases d'évolution libre de durée  $\alpha/(N_\alpha - 1)$ . Cette méthode est correcte à condition que les amplitudes de la fonction d'onde soient très peu modifiées par l'évolution de la phase quantique durant  $\alpha/(N_\alpha - 1)$  (le cumul de la phase quantique  $\frac{(P+q)^2}{k} \times \frac{\alpha}{N_\alpha - 1}$  doit être très inférieur à 1 pour tout état  $|P\rangle$  significativement peuplé).

### 2.3.4 Emission spontanée

Plusieurs études, tant théoriques [36] qu'expérimentales [37, 34, 38], ont montré que l'émission spontanée participe à la destruction du gel de la diffusion, et restaure un régime diffusif après le temps de localisation (diffusion caractérisée par son taux  $D_\infty$ ). Dans cette partie, nous étudions les raisons de cette reprise de la diffusion,

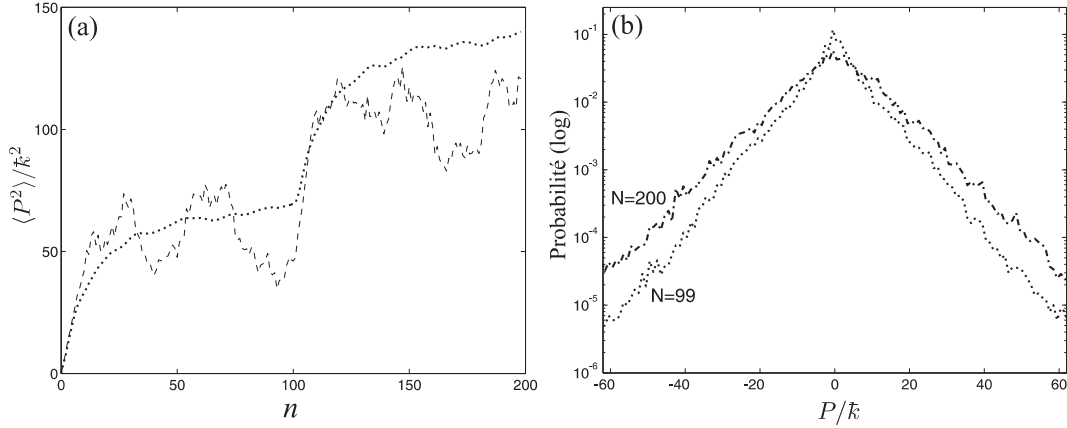


FIG. 2.16 – En (a), évolutions de  $\langle P^2 \rangle / \hbar^2$  lorsque seule une classe d'impulsion initiale est peuplée ( $P = q_1$ ), que  $K = 9,6$ ,  $\hbar = 3,46$  et qu'au pulse  $N = 100$  une émission spontanée survient (changement de  $q$ ). La courbe en pointillés représente le résultat moyenné (300 valeurs initiales de  $q$ ), tandis que la courbe en tirets correspond à une quasi-impulsion initiale  $q_1 = 0,5500$  modifiée en  $q_2 = 0,0252$  après  $n = 100$ . Alors qu'une localisation dynamique prenait place doucement, le système reprend une diffusion – assez proche de la diffusion initiale – dès lors que la quasi-impulsion a été décalée. En (b), deux distributions de probabilité, juste avant ( $n = 99$ ) et bien après ( $n = 200$ ) le changement de la quasi-impulsion.

puis nous évaluons la probabilité d'émission spontanée par pulse d'onde stationnaire (ou taux d'émission spontanée).

### Effets sur la localisation dynamique

Lorsqu'un atome absorbe un photon puis relaxe dans un état fondamental, le photon est émis dans une direction et dans un état de polarisation quelconques. Pour l'atome, cela se traduit par une modification aléatoire de l'impulsion (impulsion de recul), et par conséquent par une destruction des cohérences que l'onde stationnaire avait créées entre les états d'impulsion.

Pour simuler numériquement la présence d'émission spontanée, nous utilisons un modèle basé sur une méthode Monte Carlo [39, 17]. Celle-ci consiste à introduire dans la simulation standard un terme de phase  $[\exp(i\zeta\hat{\theta})]$  tenant compte de la projection sur l'axe de l'onde stationnaire d'une quantité  $\zeta\hbar$  correspondant à l'impulsion de recul – le paramètre  $\zeta$  prenant des valeurs aléatoire entre  $-1$  et  $1$ . Aussi, la quasi-impulsion  $q$ , présente dans la phase de propagation libre, change. A chaque application de pulse, la probabilité de réaliser cette opération est égale au taux d'émission spontanée  $\mathcal{T}_{num}$ .

Pour comprendre l'impact d'une émission spontanée sur l'évolution d'une distribution d'impulsions, nous avons réalisé une simulation de ce type, mais avec  $\mathcal{T}_{num} = 0$  pour tout  $n$  sauf pour  $n = 100$  où  $\mathcal{T}_{num} = 1$ . De cette façon, nous savons à partir de quand les effets dûs à l'émission spontanée doivent se manifester. L'évolution de  $\langle P^2 \rangle$  est présentée sur la figure 2.16(a). Avant  $n = 100$ , le système

évolue normalement selon une dynamique quantique, c'est-à-dire qu'après une diffusion initiale importante, un gel de la diffusion apparaît. Puis, à partir de  $n = 100$ , la diffusion reprend avec un taux équivalent au taux initial. Mais cette reprise est temporaire, car de nouveau, la diffusion se gèle (en un temps comparable au temps de localisation initial). Les formes de la distributions au temps  $n = 99$  et  $n = 200$  [figures 2.16(b)], temps pour lesquels la diffusion est gelée, sont toutes deux de type double exponentielle, avec une longueur de localisation plus grande à  $n = 200$  qu'à  $n = 99$ .

Ce comportement s'explique bien avec les outils théoriques utilisés à la sous-section 1.2.3. Nous simplifions le cas de la simulation numérique en prenant une fonction d'onde préparée dans un quasi-état du système  $|\Psi_0\rangle = |j(q_1)\rangle$ , centrée autour de  $P = 0$ , et correspondant à des valeurs bien définies de  $K$ ,  $\bar{k}$  et  $q_1$ . Dans ce cas la distribution  $|\langle P|\Psi_n\rangle|^2$  n'évolue pas au cours du temps (et donc  $\langle\Psi_n|\hat{P}^2|\Psi_n\rangle = \langle\Psi_0|\hat{P}^2|\Psi_0\rangle \equiv \mathcal{L}^2$ ). Lorsqu'au pulse  $n = 100$ , une émission spontanée modifie la quasi-impulsion  $q_1$  en  $q_2$ , le système est complètement redéfini : de nouveaux quasi-états  $|j(q_2)\rangle$  et un nouveau spectre des quasi-énergies  $[\varepsilon_j(q_2)]$ .  $n'$  pulses après ce bouleversement, on peut écrire, à la manière de l'équation (1.36)

$$\begin{aligned} \langle\Psi_{100+n'}|\hat{P}^2|\Psi_{100+n'}\rangle &= \sum_j |a_j|^2 \langle j(q_2)|\hat{P}^2|j(q_2)\rangle \\ &+ \sum_j \sum_{k \neq j} a_j^* a_k \langle j(q_2)|\hat{P}^2|j(q_2)\rangle e^{-i[\varepsilon_k(q_2) - \varepsilon_j(q_2)]n'} \end{aligned} \quad (2.21)$$

où les amplitudes  $a_j = \sum_{\theta} \langle j(q_2)|\theta\rangle \langle \theta|\Psi_0\rangle \exp(i\zeta\theta)$  prennent en compte l'impulsion de recul. Au bout d'un certain temps, le second terme disparaît par interférences destructives, et laisse alors place au premier : de nouveau, une localisation dynamique apparaît, mais avec une longueur de localisation plus grande que celle qui préexistait au décalage de la quasi-impulsion, car plusieurs quasi-états  $|j(q_2)\rangle$  sont maintenant peuplés.

En résumé, nous pouvons dire, selon cette description, qu'à chaque émission spontanée, le processus de diffusion quantique reprend avec un nombre de quasi-états peuplés significativement toujours plus élevé. Il faut préciser qu'aucune localisation ne peut réapparaître lorsque le taux d'émission spontanée n'est pas nul pour tout pulse, car dans ce cas, chaque atome contribue, à des moments différents, à l'élargissement. Par ailleurs, il a été montré expérimentalement et numériquement [40, 41, 34, 38] qu'il faut un taux d'émission spontanée supérieur à 0, 1 par pulse pour que la distribution perde, après une centaine de pulses, sa forme double exponentielle. Ce qui pourrait s'interpréter par le fait qu'au-delà d'une dizaine d'émissions spontanées, le nombre de quasi-états peuplés correspond à un recouvrement de l'espace des impulsions bien plus large que l'extension en impulsion des quasi-états.

### Evaluation du taux d'émission spontanée due à l'onde stationnaire

L'onde stationnaire n'est qu'une des sources d'émission spontanée mais elle est la seule que l'on puisse caractériser. Il faut donc garder à l'esprit que les rayonnements

$(\tau[\mu\text{s}] - \delta_L/2\pi[\text{GHz}])$	(1 – 21, 8)	(0, 6 – 13, 3)	(0, 3 – 9, 9)	(0, 3 – 13, 3)
$\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$ expérimental ( $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ )	24	37	35	20
$\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$ calculé ( $10^{-4} \text{ s}^{-1}$ )	$6, 0 \pm 1$	$9, 7 \pm 3$	$8, 7 \pm 2, 5$	$4, 8 \pm 1, 2$

TAB. 2.3 – Evaluation expérimentale et calcul du taux d'émission spontanée (le profil transverse a été en pris en compte) par pulse d'onde stationnaire.

parasites ont peut être une action importante, et ne pas nécessairement assimiler les taux qui sont déterminés ici aux taux à utiliser dans nos simulations numériques.

Nous savons que les atomes soumis à une onde lumineuse très désaccordée ont une probabilité  $1/6$  de retomber sur l'état  $|F_f = 3\rangle$  par émission spontanée (rapport de branchement donné par H. Amman et al. [35]). Comme nous l'avons vu, les pulses d'onde stationnaire contribuent à peupler cet état, ce qui est équivalent à dire qu'ils contribuent à augmenter le signal de *fond*. A partir de l'évolution de ce signal en fonction de  $n$ , nous pouvons donc remonter au taux d'émission induit par l'onde stationnaire  $[\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)]$ .

L'évolution du fond peut être directement mesurée en sondant à impulsion très élevée ( $P/\hbar = -606$ ). C'est ce que nous avons fait sur une durée de 100 pulses pour quatre couples de valeurs de  $\tau$  et de  $\delta_L$ . Les quotients de ces évolutions par un signal correspondant au nombre total d'atomes<sup>11</sup> peuplant  $|F_f = 4\rangle$  en absence d'onde stationnaire sont montrés sur la figure 2.17 : il apparaît qu'elles sont linéaires en fonction de  $n$ . Cette opération ne fournit pas la proportion réelle d'atomes ayant fuit vers  $|F_f = 3\rangle$  au temps  $n < 100$  car le fond sans onde stationnaire n'est pas calibré. Par contre, la pente de ces courbes indique la proportion d'atomes qui fuit vers  $|F_f = 3\rangle$  à cause d'un pulse d'onde stationnaire. En multipliant cette dernière par 6, nous trouvons le taux d'émission spontanée  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$  par pulse, et par 5, le taux d'émission spontanée par pulse pour les atomes relaxant dans  $|F_f = 4\rangle$ .

D'un point de vue purement théorique, en utilisant la probabilité d'émission spontanée par seconde  $\Pi_{es}(\delta_L) = \frac{\Gamma\Omega_R^2}{8\delta_L^2}$  [voir équation (A.25)],  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$  peut être évalué par

$$\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L) = \tau\Pi_{es}(\delta_L), \quad (2.22)$$

où  $\Pi_{es}(\delta_L)$  est supposé être très petit devant 1. Le tableau 2.3 compare les valeurs de  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$  établies théoriquement et expérimentalement. Le constat de faibles valeurs nous permet au passage de comprendre pourquoi l'évolution est linéaire : la probabilité qu'au bout de  $n$  pulses, il y ait eu au moins une émission spontanée vaut normalement  $\{[1 - [1 - \mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)]^n]\}$ , mais comme  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L) \ll 1$ , elle se réduit à  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)n$ .

Bien que les valeurs expérimentales de  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$  soient clairement plus importantes que celles déterminées théoriquement, les rapports entre les différents taux

<sup>11</sup>Celui-ci est obtenu en réglant le chirp à 300 kHz, ce qui correspond à une plage d'impulsions ( $18, 2\hbar$ ) bien plus grande que la largeur de la distribution initiale (quelques  $\hbar$ ). Cette méthode est plus directe et beaucoup plus sûre que l'intégration de la distribution d'impulsions initiale.

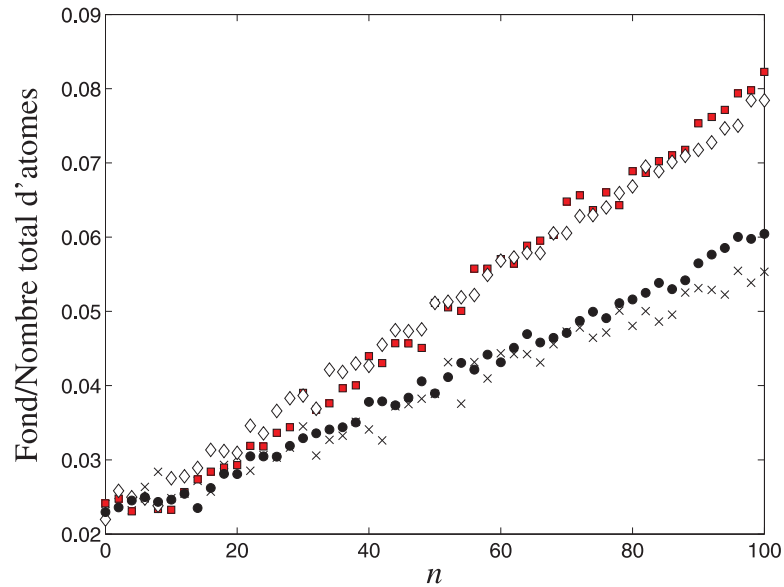


FIG. 2.17 – Evolution du fond sur 100 pulses pour  $\delta_L/2\pi = 21,8$  GHz et  $\tau = 1 \mu s$  (cercles pleins),  $\delta_L/2\pi = 9,9$  GHz et  $\tau = 300$  ns (carrés),  $\delta_L/2\pi = 13,3$  GHz et  $\tau = 300$  ns (croix), et  $\delta_L/2\pi = 13,3$  GHz et  $\tau = 600$  ns (losanges). Ces points ont été obtenus en divisant les données brutes par le signal correspondant au nombre total d'atomes, ce qui permet d'affirmer que les pentes qui leur sont associées (au moyen d'une régression linéaire) représentent la proportion d'atomes ayant transités dans  $|F_f = 3\rangle$  après chaque pulse (appelé taux de transition vers  $|F_f = 3\rangle$ ) : respectivement, elles sont évaluées à  $3,9 \cdot 10^{-4}$ ,  $5,7 \cdot 10^{-4}$  ( $5,7 \cdot 10^{-4}$ ),  $3,3 \cdot 10^{-4}$  ( $3,2 \cdot 10^{-4}$ ) et enfin  $6,2 \cdot 10^{-4}$  ( $6,3 \cdot 10^{-4}$ ). Les valeurs entre parenthèses résultent d'un produit en croix utilisant le taux de transition trouvé pour  $\delta_L/2\pi = 21,8$  GHz et la formule (2.22). Le bon accord entre ces taux suggère que ce sont principalement les pulses qui sont responsables de l'émission spontanée, et non les rayonnements parasites.

expérimentaux sont très proches des rapports entre les taux calculés<sup>12</sup>, ce qui suggère que la source responsable de l'émission spontanée est bien désaccordée de  $\delta_L$ . De plus, les valeurs expérimentales de  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L)$  déterminent bien le taux de diffusion  $D_\infty$  qui se maintient après le temps de localisation si l'on utilise la relation

$$\frac{D_\infty}{D_q(K)} = \frac{N_{loc}\mathcal{T}}{1 - N_{loc}\mathcal{T}} \quad (2.23)$$

donnée par H. Ammann et al. [35], où  $\mathcal{T}$  est un taux d'émission spontanée dont l'origine n'est pas précisée. Les expériences de la section précédente avaient été menées avec  $\delta_L/2\pi = 21,8$  GHz et  $\tau = 1 \mu\text{s}$ . Nous avons déterminé que  $\frac{D_\infty}{D_q(K)} = \frac{1}{20 \pm 5}$  et  $N_{loc} = 8 \pm 2$ . Si seule l'émission spontanée est responsable de cette diffusion, l'expression 2.23 conduit à  $\mathcal{T} = 0,004 \pm 0,001$ . La comparaison avec le taux d'émission spontanée  $\mathcal{T}_L(\tau, \delta_L) \approx 0,0024$  montre que l'émission spontanée induite par l'onde stationnaire est proportionnellement importante.

### 2.3.5 Retrouver les résultats expérimentaux

Dans les résultats expérimentaux présentés à la section 1.1, la localisation dynamique était observée avec quelques éléments de contradiction ; pour résumer, la forme de la distribution à  $n = 100$  était bien double exponentielle mais à la place du gel de la diffusion était observée une légère diffusion. Depuis, nous avons décrit les principaux effets expérimentaux ainsi que la façon d'en rendre compte dans les simulations numériques. Du point de vue des traitements des données expérimentales, nous avons soustrait le fond et normalisé leurs aires. En ce qui concerne les simulations numériques, nous avons utilisé les paramètres suivants<sup>13</sup> :

- $K_{max} = 10 \pm 0,5$ ,  $\bar{k} = 3,46$  ;
- Rapport des largeurs à mi-hauteur des profils gaussiens de la densité atomique du nuage sur le profil de l'onde stationnaire  $0,6 \pm 0,05$  ; conduisant à  $K_{moy} = 9 \pm 0,5$  ;
- Durée des pulses  $\alpha = 0,03$  subdivisés en  $N_\alpha = 50$  pulses ;
- $\mathcal{T}_{num} = 0,005 \pm 0,001$ .

La distribution d'impulsions à  $n = 100$ , l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$  et l'évolution du maximum sont montrés, aux côtés des résultats expérimentaux de la section 2.2, respectivement sur les figures 2.18(a), (b) et (c). Ces résultats numériques s'ajustent aux résultats expérimentaux de manière bien plus satisfaisante que les résultats qui ignorent les effets expérimentaux (voir, pour la comparaison, les figures 2.9, 2.10 et 2.11), ce qui tend à démontrer la réalité de leur rôle. Toutefois, il subsiste une différence relativement importante, notamment sur l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$  que nous supposons provenir, au moins en partie, d'un calcul de  $\langle P^2 \rangle$  faussé par le bruit sur les distributions d'impulsions. Cette raison à elle seule ne suffit cependant pas à expliquer la différence observée. Il est en fait très probable que les atomes de grande impulsion ne soit pas mesurée, pour une raison encore non-identifiée, de façon aussi efficace que pour les atomes proche de  $P = 0$ . En conséquence, la mesure des atomes

<sup>12</sup>Par exemple, à partir des données du tableaux 2.3,  $\frac{37}{24} \approx \frac{9,7}{6}$ ,  $\frac{35}{24} \approx \frac{8,7}{6}$  et  $\frac{20}{24} \approx \frac{4,8}{6}$ .

<sup>13</sup>Les incertitudes sur les paramètres numériques correspondent à la gamme qu'il est possible d'utiliser pour produire des résultats s'ajustant aux courbes expérimentales d'une façon aussi satisfaisante que ceux qui sont montrés ici.

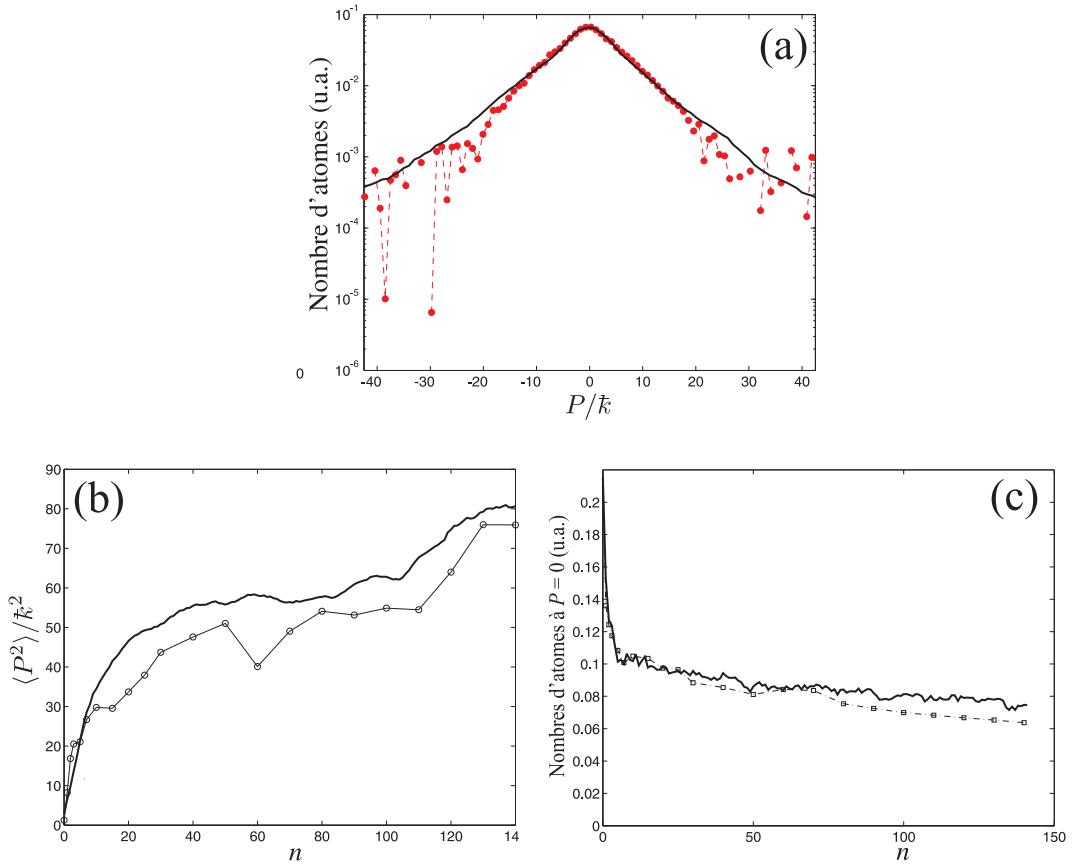


FIG. 2.18 – Distributions d'impulsions à  $n = 100$  (a), évolutions de  $\langle P^2 \rangle$  (b) et du nombre d'atomes d'impulsion nulle (c) obtenus expérimentalement (avec les paramètres de la section 2.2) et par une simulation numérique (trait épais) prenant en compte l'inhomogénéité spatiale du faisceau de l'onde stationnaire, la durée finie des pulses, et la présence d'émission spontanée. La correspondance n'est pas parfaite mais est bien meilleure que celle qui est obtenue sans la prise en compte des effets expérimentaux.



d'impulsion nulle constitue une méthode plus efficace que le calcul de  $\langle P^2 \rangle$  pour l'appréciation de l'évolution de la distribution d'impulsions.

## 2.4 Conclusion

Nous avons vu qu'un échantillon d'atomes de césium refroidis à quelques microkelvins, et soumis à une séquence de pulses d'onde stationnaire lumineuse désaccordée par rapport aux transitions atomiques réalise l'équivalent du pendule pulsé quantique. Nous avons décrit les différentes phases d'une expérience de chaos quantique : formation du nuage d'atomes, application de la séquence de pulses, et détection par spectroscopie Raman stimulée.

L'application d'une séquence de pulses périodique nous a permis d'observer de façon satisfaisante le phénomène de localisation dynamique. La forme double exponentielle des distributions d'impulsions, traduisant l'existence de cohérences quantiques, a été clairement identifiée et le gel de la diffusion s'est traduit expérimentalement par un amoindrissement conséquent de la diffusion initiale. Cette diffusion résiduelle est expliquée par l'existence d'un processus décohérent, l'émission spontanée, dont l'onde stationnaire elle-même est principalement responsable.

## Chapitre 3

# Destruction de la localisation dynamique

L'analyse théorique du *kicked rotor* effectuée au chapitre 1 révèle que la périodicité temporelle de la série de pulses est un des éléments essentiels expliquant la différence entre les dynamiques classique (diffusion d'une distribution d'impulsions au cours du temps) et quantique (localisation d'une distribution d'impulsions après le temps de localisation) : la base propre de l'opérateur d'évolution sur une période est composée de quasi-états qui sont ou délocalisés ( $\hbar \rightarrow 0$ ) ou localisés ( $\hbar \sim 1$ ) en impulsion. En brisant la périodicité, la dynamique quantique risque donc de se trouver profondément modifiée [42, 43]. Qu'advient-il, dans ce cas, de la localisation dynamique, de la forme si spécifique de la distribution d'impulsions localisée ? Quelles différences subsiste-t-il entre les dynamiques classique et quantique ? Pour répondre à ces questions, nous avons étudié dans les sections 2, 3, et 4 de ce chapitre, expérimentalement et numériquement, un système physique, dérivé du *kicked rotor* monocolore, qui permet de détruire la périodicité de la série de pulses. Parce qu'il fait intervenir deux fréquences caractéristiques ( $F_1$  et  $F_2$ ), ce système est dit *bicolore*. Dans la dernière partie, les différents phénomènes que nous avons ainsi mis en évidence sont interprétés théoriquement.

### 3.1 Générer des séquences bicolores

Il existe deux types de systèmes bicolores couramment évoqués dans la littérature : l'un est désigné sous le terme de modulation de phase, et l'autre sous le terme de modulation d'amplitude. La prédominance d'une dynamique classique chaotique sur l'ensemble de l'espace des phases, condition *sine qua non* pour étudier le chaos quantique, est plutôt favorisée par la présence de deux – et non plus d'une seule – fréquences caractéristiques. Quant au caractère quantique (la quanticité) du système bicolore, celui-ci continue d'être appréhendé par la constante de Planck renormalisée (avec la réserve, toutefois, de ne pas l'identifier pleinement à celle qui est donnée par un système monocolore).

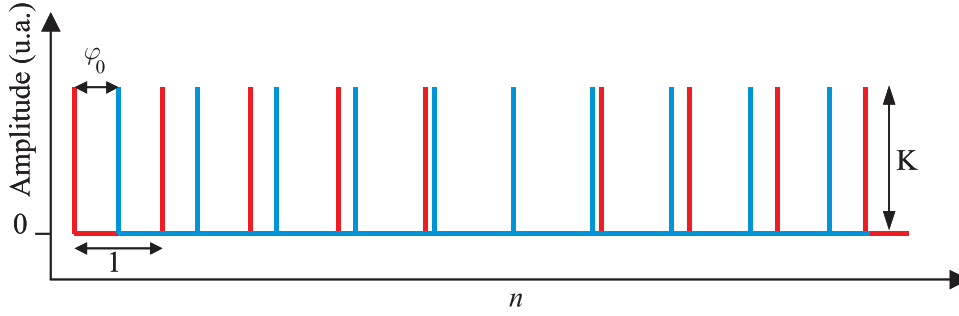


FIG. 3.1 – Schéma de l'amplitude des pulses en fonction du temps dans le cas de la modulation de phase. Les sixièmes pulses de la série primaire et secondaire se recouvrent; l'amplitude qui en résulte est théoriquement double ( $2K$ ). Expérimentalement, elle est nivelée à la valeur standard ( $K$ ) à cause du manque de puissance optique. En jouant sur la phase initiale, il est possible de réduire ces recouvrements.

### 3.1.1 La modulation de phase

La modulation de phase désigne le fait de varier, au cours du temps, la durée (appelée *phase*) entre deux pulses successifs. Dans le cas bicolore, cette variation est obtenue en mélangeant deux séries de pulses – dites primaire et secondaire – aux amplitudes égales  $K$  et aux périodes  $T_1 = 1/F_1$  et  $T_2 = 1/F_2$  éventuellement différentes (figure 3.1). Le hamiltonien correspondant s'écrit

$$H_{phase}(n) = \frac{P^2}{2} + K \cos \theta \left[ \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \delta(n - n_1) + \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \delta(n - \varphi_0 - \frac{n_2}{r}) \right], \quad (3.1)$$

où les variables normalisées utilisées au chapitre 1, section 2.1, ont directement été introduites :  $p \rightarrow P = \frac{2k_L T_1}{M} p$ ,  $x \rightarrow \theta = 2k_L x$ ,  $t \rightarrow n = \frac{t}{T_1}$ ,  $K = \frac{8\omega_r T_1 \tau}{\hbar} V_0$ , et  $0 < \varphi_0 \leq 1$  représente la *phase initiale* (entendue comme la position du premier pulse de la série secondaire par rapport à la période de la première série) entre les deux séquences de pulses, et  $r = \frac{T_1}{T_2} = \frac{F_2}{F_1}$ , le *rapport bicolore*.

Dans le cas particulier où  $r = 1$  et  $\varphi_0 = 0,5$ , la série de pulses apparaît comme absolument identique à une série monocolore de période  $T_1/2$  dont le paramètre de stochasticité vaudrait  $K/2$  (la renormalisation de l'amplitude du potentiel diffère selon que l'on considère que le système est bicolore [ $(K = \frac{8\omega_r T_1 \tau}{\hbar} V_0)$ ] ou monocolore [ $(K = \frac{8\omega_r (T_1/2) \tau}{\hbar} V_0)$ ]). De manière générale,  $K$ , tel qu'il est défini dans le système bicolore, ne s'apparente pas au paramètre de stochasticité que nous avons présenté au chapitre 1 : en effet, dès lors que  $r \neq 1$  (ou même que  $\varphi_0 \neq 0,5$ ), la séquence de pulses ne contient plus une unique fréquence, et le choix du temps caractéristique dans le changement d'échelle est arbitraire (nous pourrions utiliser  $T_2$  pour renormaliser le temps). Un moyen simple de situer la chaoticité du système bicolore est de la comparer à celle du système monocolore le plus proche (cette approche est facilitée pour des valeurs de  $r$  peu différentes de 1). Par exemple, pour  $r \simeq 1$ ,  $\varphi_0 = 0,5$ , la dynamique classique peut être mise en parallèle avec celle d'un système monocolore de période  $T_1/2$ . Toutefois, c'est par la construction du portrait de phase que le degré

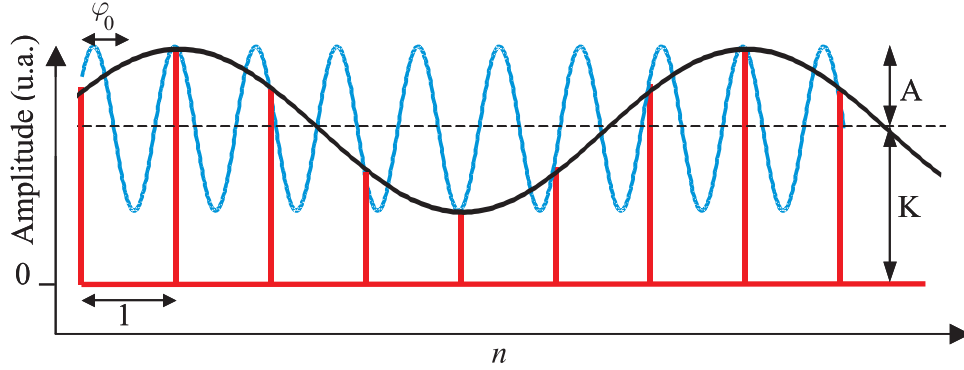


FIG. 3.2 – Schéma d'évolution de l'amplitude des pulses dans le cas de la modulation d'amplitude. Deux fréquences de modulation différentes peuvent produire la même séquence de pulses du moment qu'elles satisfont la condition  $1/r = 1/r' + p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . Ici ont été tracées les modulations sinusoïdales de fréquences  $1/r = 1/6$  et  $1/r = 7/6$

de chaotité est le mieux évalué (la figure 3.5 montre la différence des portraits de phase obtenus avec  $r = 1$  et  $r = 1,01753$ ).

Quant à la quantité du système, il faut considérer la valeur de  $k$  avec prudence. Le cas particulier  $r = 1$  et  $\varphi_0 = 0,5$ , évoqué précédemment, l'illustre bien : la même séquence de pulses conduit à une renormalisation différente selon qu'elle s'effectue dans le cadre monocolor  $[k = 8\omega_R(T_1/2)]$  ou dans le cadre bicolor  $[k = 8\omega_R(T_1)]$ .

### 3.1.2 La modulation d'amplitude

En ce qui concerne la modulation d'amplitude, l'idée repose sur la destruction de la périodicité en jouant sur l'amplitude du pulse. Ainsi, pour une série de pulses ayant pour caractéristiques une amplitude  $K$  et une période  $T_1$ , l'amplitude des pulses est modulée par une fonction sinusoïdale d'amplitude  $A$  et de période  $T_2$  comme indiqué sur la figure 3.2. Exprimé dans le même système d'unités normalisés qu'en (3.1), le hamiltonien de ce système prend la forme

$$H_{ampl.}(n) = \frac{P^2}{2} + K\{1 + A \sin[2\pi(\frac{n}{r} - \varphi_0)]\} \cos \theta \sum_{n_1=0}^{N-1} \delta(n - n_1). \quad (3.2)$$

Du fait que l'apparition du potentiel est discrète et périodique, une séquence de pulses particulière peut être produite par tout un ensemble de fréquences secondaires ( $1/r$  en unités réduites). En effet, pour produire une même modulation d'amplitude, deux fréquences  $1/r$  et  $1/r'$  doivent respecter la condition  $\sin[2\pi(\frac{n}{r} - \varphi_0)] = \sin[2\pi(\frac{n}{r'} - \varphi_0)]$ , avec  $n$ , un nombre entier. En d'autres termes, il faut  $1/r = 1/r' + p$ , avec  $p$  un nombre entier (voir figure 3.2). On a donc affaire à une redondance des séquences en fonction du rapport bicolor, particularité propre à la modulation d'amplitude, qui n'existe pas dans la modulation de phase.

En ce qui concerne le degré de chaotité du système classique, les valeurs  $r$  et  $\varphi_0$  jouent des rôles primordiaux. Dans le cas particulier où  $r = 1/p$ ,  $\varphi_0 = 0,5$ , la

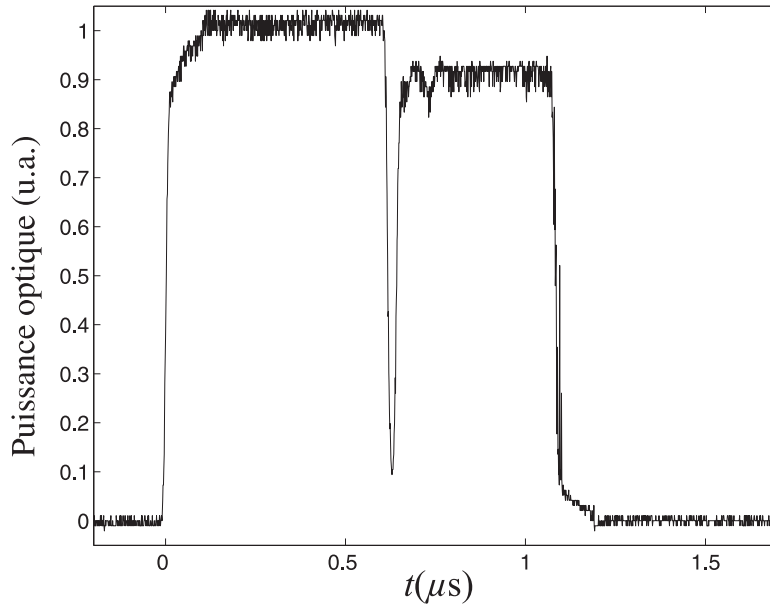


FIG. 3.3 – Chevauchement de deux pulses de  $0,6 \mu\text{s}$  : celui de la série secondaire – d’une puissance volontairement diminuée par rapport à celle de la série primaire afin de le repérer – commence  $0,1 \mu\text{s}$  avant la fin du pulse de la série primaire. La fin du pulse primaire est marquée par une chute brutale de la puissance à cause d’une interférence destructive occasionnée lors du changement de canal radio-fréquence alimentant le modulateur acousto-optique. Ce signal correspond à la puissance optique à la sortie de la fibre transportant le faisceau de l’onde stationnaire.

série de pulses est totalement équivalente à une série monochrome de paramètre de stochasticité égal à  $K(1 - A \sin \varphi_0)$ ; le régime dynamique est alors parfaitement connu. Lorsque la modulation d’amplitude est lente ( $r \simeq 1/p$  mais  $\neq 1/p$ ,  $p \in \mathbb{N}$ ), on peut considérer que le système est équivalent à un système monochrome dont le paramètre de stochasticité varie temporellement à la même vitesse. Dans ce cas, le maintien du régime chaotique à tout l’espace des phases nécessite que  $A < 1 - K_{cr}/K$ . Enfin, pour les valeurs de  $r$  conduisant à une modulation rapide de l’amplitude, il est difficile de se référer à un système monochrome. Il faut alors tracer un portrait de phase.

### 3.1.3 Générer expérimentalement une série bicolore

Pour l’étude de la délocalisation dynamique, nous nous sommes seulement servis de la modulation de la phase; la modulation d’amplitude, sous une forme différente de celle que nous venons de présenter, a aussi été utilisée, mais dans un autre contexte, celui de la relocalisation dynamique (voir chapitre 4). C’est pourquoi nous présentons ici uniquement le dispositif expérimental permettant de générer une série bicolore modulée en phase.

Comme dans le cas monochrome, nous utilisons le modulateur acousto-optique qui injecte le laser de l’onde stationnaire dans la fibre optique. La différence réside

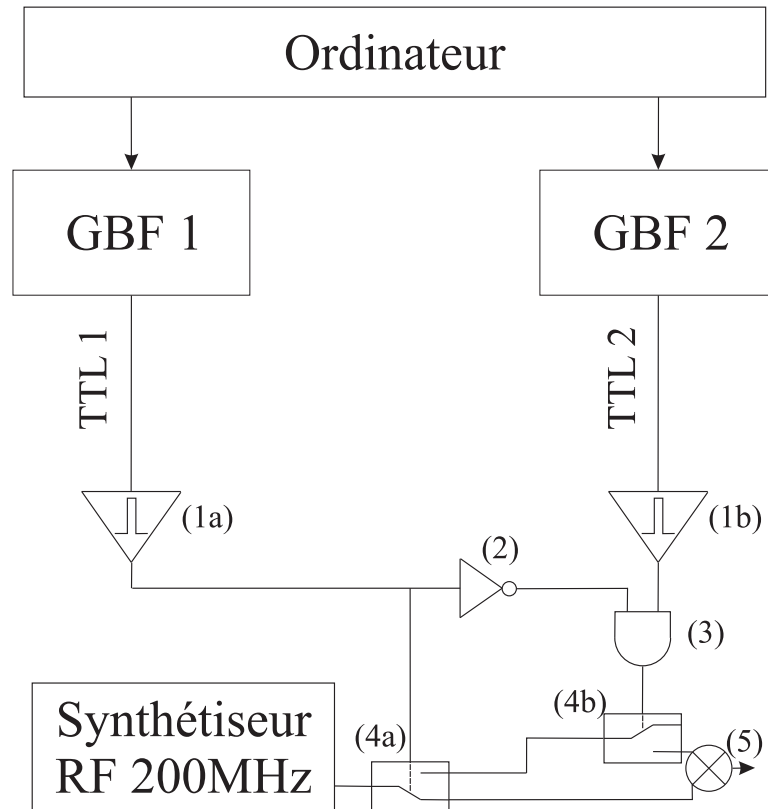


FIG. 3.4 – Schéma du montage électronique RF alimentant le modulateur acousto-optique pour une séquence bicolore en modulation de phase. Le signal RF est pulsé par un système de commutateurs (4a et 4b) montés en série. Ceux-ci sont commandés par deux signaux TTL (TTL 1 et TTL 2) correspondant aux deux séries de pulses ; ces signaux sont générés par deux générateurs basse fréquence (GBF 1 et GBF 2) envoyés sur deux monostables (1a et 1b) et synchronisés par ordinateurs. Le commutateur (4a) laisse passer le signal RF si le signal TTL 1 est non-nul, tandis que le commutateur (4b) laisse passer le signal RF seulement si les signaux TTL 1 et TTL 2 sont respectivement nul et non-nul (afin d’empêcher les interférences entre signaux RF lorsque les pulses se recouvrent) ; ceci est rendu possible par les portes “NON” (2) et “ET” (3) qui associent les signaux TTL 1 et TTL 2 à la sortie des monostables.

dans le fait que nous cherchons à produire deux séries de pulses de fréquences indépendantes et ajustables ( $F_1$  et  $F_2$ ), ce qui nécessite un montage électronique plus compliqué (voir figure 3.4). En effet, en superposant deux séries de pulses de durée finie et de fréquences différentes, il arrive que des pulses se recouvrent au moins partiellement. D’après le hamiltonien (3.1), les amplitudes des deux séries doivent alors s’additionner. Comme la puissance laser est limitée, la seule façon d’assurer le doublement de l’amplitude serait de diminuer de moitié l’intensité des pulses par rapport à l’intensité maximale disponible. Or cela rendrait très difficile la garantie d’une bonne chaoticité du système. C’est pourquoi nous avons opté pour une solution pratiquement peu dommageable quoiqu’en défaut par rapport au système théorique. Elle consiste à imposer à tous les pulses, résultant ou non d’un recouvrement, l’intensité lumineuse maximale. Il existe certains jeux de paramètres ( $r, \varphi_0$ ) pour lesquels cette solution fait disparaître trop de recouvrements; ceux-ci doivent être proscrits si l’on souhaite faire concorder la dynamique théorique et celle observée expérimentalement.

Du point de vue du montage électronique, notre solution nécessite quelque prudence. En effet, les deux séries de pulses sont générées indépendamment sous forme de signaux RF, si bien qu’au moment de leur addition finale, il risque de se produire des interférences destructives diminuant finalement la puissance RF et en fin de compte la puissance optique (c’est d’ailleurs par ce biais que nous avons pris conscience du problème). Afin d’éviter ces effets d’interférence, nous avons donc été conduits à installer deux portes logiques “NON” et “ET” pour éliminer le signal RF de l’un des deux pulses (voir le schéma de montage, plus explicite, figure 3.4 et un exemple de recouvrement sur la figure 3.3).

## 3.2 Etude de la dynamique d’un système bicolore en modulation de phase

Bien que nous soyons avant tout intéressés par le cas quantique, nous présentons, à titre de comparaison, les effets de la brisure de périodicité sur la diffusion classique. Seule la modulation de phase, étudiée expérimentalement, est considérée (notre montage offre une plus grande facilité à contrôler la phase entre les pulses qu’à contrôler l’amplitude du potentiel). Par ailleurs, afin d’établir une comparaison pertinente, l’accent est mis sur l’examen des systèmes quasi-périodiques. Un tel système présente en effet l’avantage de partager des caractéristiques communes avec le système périodique duquel il dérive, telles que le nombre de pulses ou la quantité.

### 3.2.1 Etude numérique de la dynamique classique

Pour comparer les dynamiques classiques des régimes périodique et quasi-périodique, nous avons recours aux simulations numériques. A l’instar du système monocore, l’évolution du système bicolore est déterminée à partir des équations de récurrence

$$\begin{cases} P_{n+1} = P_n - K \sin \theta_n \\ \theta_{n+1} = \theta_n + \varphi_n P_{n+1} \end{cases}, \quad (3.3)$$

que fournissent les équations de Hamilton (1.6) appliquées à  $H_{phase}(t)$ . A la différence des équations de récurrence du système monocore (1.7), il apparaît un paramètre

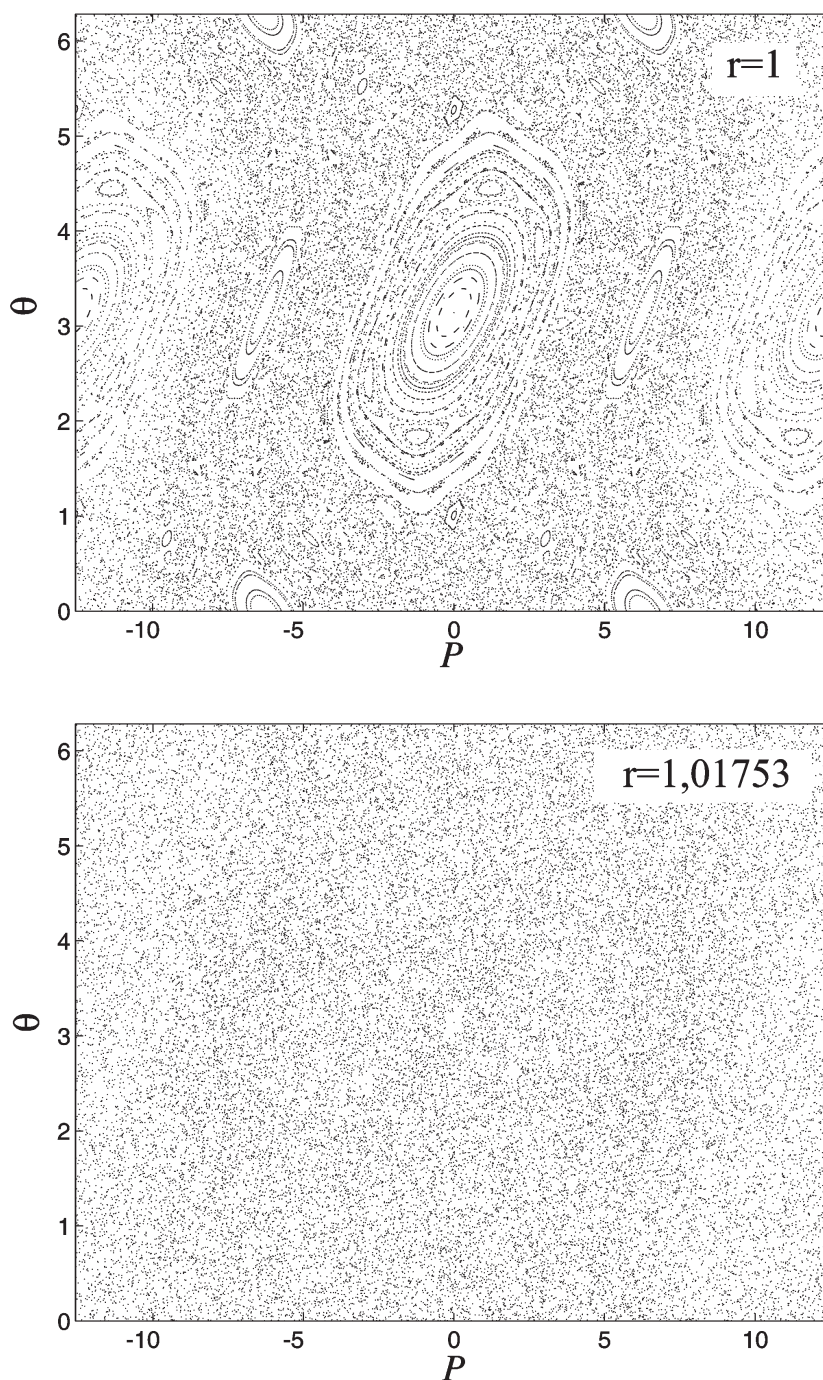


FIG. 3.5 – Portraits de phase classiques de système bicolore (modulation de phase) obtenus avec  $K = 2,5$  dans les cas où  $r = 1$  et  $r = 1,01753$  Alors que des îlots de stabilité sont encore très visibles dans le cas périodique, ils ont déjà disparu dans le cas quasi-périodique. La destruction de la périodicité facilite la destruction des trajectoires stables.



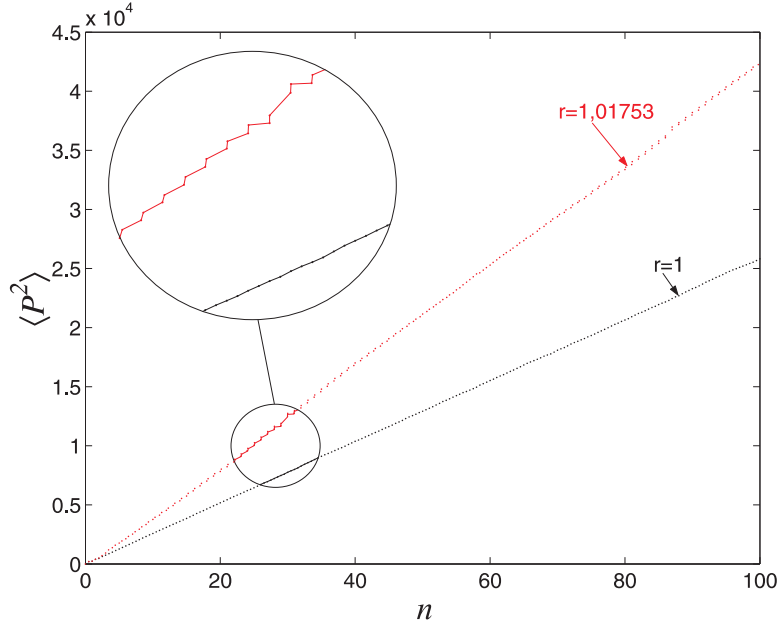


FIG. 3.6 – Evolutions de  $\langle P^2 \rangle$  obtenues par simulation numérique pour une série quasi-périodique ( $r = 1,01753$ ) et une série périodique ( $r = 1$ ) dans le cas où  $K = 20$ ,  $\varphi_0 = 0,5$ . Toutes deux conduisent à une diffusion, mais une observation plus détaillée (voir l'agrandissement dans le médaillon) montre que le taux de diffusion, constant pour  $r = 1$ , alors qu'il est sujet à des fluctuations pour  $r = 1,01753$ . Ces fluctuations sont rapides et se compensent : le taux de diffusion moyenné sur deux pulses est équivalent à celui moyenné sur 100 pulses, d'où une évolution de  $\langle P^2 \rangle$  qui semble linéaire.

supplémentaire,  $\varphi_n$  qui représente la phase de propagation libre après le  $n$ -ième pulse. L'indice  $n$  qui, soit dit en passant, ne correspond plus au temps écoulé comme c'est le cas dans le système monocoloré ; il repère ici le nombre de pulses déjà appliqués, sans distinction entre série primaire et série secondaire. De ce fait, les portraits de phase ne sont pas tracés pour chaque valeur de  $n$ , mais après chaque pulse de la série primaire (donc pour les valeurs entières de  $\sum_{n_1=0}^{n-1} \varphi_{n_1}$ ).

Dans la situation périodique ( $r = 1$  et  $\varphi_0 = 0,5$ ), nous savons que l'allure des portraits de phase ne dépend que de la valeur de  $K$ . Plus  $K$  diminue, plus la surface occupée par les trajectoires stables est importante. C'est un fait déjà établi au chapitre 1 que pour  $K/2 > 5$  (et non  $K > 5$  car la période effective de la séquence est  $T/2$  lorsque  $\varphi_0 = 0,5$ ), les trajectoires chaotiques occupent l'ensemble de l'espace des phases, et que pour  $K/2 < K_{cr}$ , aucune trajectoire chaotique ne peut explorer la totalité de l'espace des impulsions. Dans la situation quasi-périodique ( $r \neq 1$  et  $\varphi_0 = 0,5$ ), la coexistence de deux fréquences favorise la destruction des trajectoires stables si bien que la généralisation du chaos à l'ensemble de l'espace des phases survient pour  $K/2 < K_{cr}$ . Sur la figure 3.5, deux portraits de phases correspondant à  $r = 1$  et  $r = 1,01753$  ont été obtenus pour  $K = 2,5$  ; on voit bien que la totalité de l'espace des phases est déjà gagnée par le régime chaotique pour  $r = 1,01753$ .

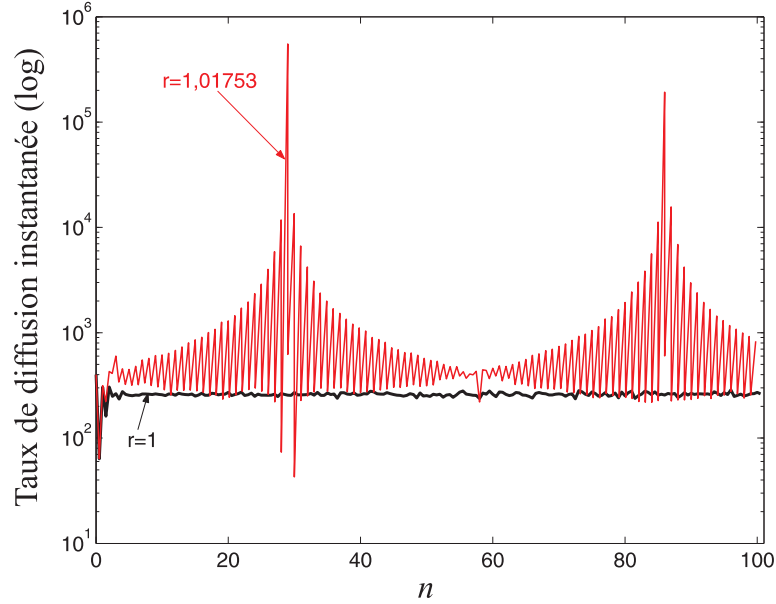


FIG. 3.7 – Evolution temporelle obtenue par simulation numérique du taux de diffusion instantané pour une série quasi-périodique ( $r = 1,01753$ ) et une série périodique ( $r = 1$ ) dans le cas où  $K = 20$ ,  $\varphi = 0,5$ . Respectivement, les taux de diffusion moyens valent 4200 et 2550.

En ce qui concerne l'évolution temporelle de  $\langle P^2 \rangle$ , le caractère périodique de la séquence de pulses a un effet sur le taux de diffusion moyen. Ceci peut être observé sur la figure 3.6 : la diffusion est plus importante pour  $r = 1,01753$  que pour  $r = 1$ . Une analyse plus fine montre que le taux de diffusion “instantané” – défini par  $D_n(K) = (\langle P_{n+1}^2 \rangle - \langle P_n^2 \rangle) / \varphi_n$  – est constant tout au long de la séquence de pulses pour  $r = 1$  alors qu'il présente des variations importantes pour  $r = 1,01753$  (voir l'agrandissement sur la figure 3.6 et l'évolution temporelle du taux de diffusion sur la figure 3.7). Cette différence de comportement entre les systèmes classiques périodique et quasi-périodique s'explique par l'importance des corrélations entre  $\theta_n$  et  $\theta_{n+1}$  qui sont fonction de la valeur de la phase  $\varphi_n$ . Entre deux pulses  $n$  et  $n+1$ , séparés d'une durée  $\varphi_n$ , et d'amplitudes  $K$ , tout se passe comme si, ponctuellement, il s'agissait de deux pulses d'une série monocolore dont le paramètre de stochasticité serait égal à  $\varphi_n K$ . Dans le système d'unités renormalisées correspondant (où  $\varphi_n T_1$  sert de base de temps), le taux de diffusion instantané vaudrait simplement  $D_{cl}(\varphi_n K)$  ; mais dans le système d'unités renormalisées relativement à  $T_1$ , il est pondéré par un terme en  $\varphi_n^{-3}$  :

$$D_n(K) = \frac{1}{\varphi_n^3} D_{cl}(\varphi_n K). \quad (3.4)$$

Si les corrélations étaient nulles, nous aurions  $D_{cl}(\varphi_n K) = (\varphi_n K)^2 / 2$ , comme nous l'avons vu au chapitre 1, et donc  $D_n(K) = K^2 / (2\varphi_n)$ , ce qui ne rendrait pas compte de l'évolution visible sur la figure 3.6 [car, après  $n$  pulses, cela donnerait  $(\langle P_{n+1}^2 \rangle - \langle P_0^2 \rangle) = (n-1)K^2/2$ , c'est-à-dire un résultat indépendant de la valeur de  $r$ ]. En fait,

pour corroborer les résultats numériques, il faut utiliser l'expression de  $D_{cl}(\varphi_n K)$  donnée en (1.11) qui introduit des termes  $(\varphi_n K)$  de puissances supérieures à 2, et, par voie de conséquence, prédit correctement l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$ .

Nous venons ainsi d'établir que le passage d'un système périodique à un système quasi-périodique produit des modifications sur la dynamique. La diffusion n'est pas constante au cours du temps contrairement au cas monocolore, mais, en moyenne, la croissance de  $\langle P^2 \rangle$  est quasiment linéaire (le taux moyen qui gouverne cette croissance est fonction de  $r$  et de  $\varphi_0$ ). La validité de ces résultats vaut aussi pour les cas pseudo-périodiques en général ( $r$  quelconque).

### 3.2.2 Etude expérimentale de la dynamique quantique

L'étude comparée de la dynamique quantique selon le caractère périodique ou quasi-périodique de la série de pulses est ici menée expérimentalement et numériquement, dans la continuité de travaux déjà effectués sur le sujet [44, 45]. Bien que notre orientation soit expérimentale, nous tenons à ne pas négliger ce que le calcul numérique peut révéler.

#### Destruction de la localisation dynamique

Nous reprenons le système monocolore du chapitre 2, aux paramètres  $F = 30$  kHz,  $n = 140$ , comme système ("bicolore") périodique de référence (dont les paramètres deviennent  $F_1 = 15$  kHz,  $n = 70$ ,  $r = 1$ ,  $\varphi_0 = 0, 5$ ), et présentons les résultats obtenus pour un système quasi-périodique dont les paramètres sont  $F_1 = 15$  kHz,  $r = 1, 01753$  ( $F_2 = 15, 263$  kHz),  $\varphi_0 = 0, 5$  (par ailleurs  $\delta_L = 2\pi \cdot 21, 8$  GHz,  $\tau = 1$   $\mu$ s). En guise d'introduction, nous renvoyons à la figure 3.8 qui illustre les évolutions expérimentales de deux distributions d'impulsions initiales identiques. Nous constatons que la distribution d'impulsions s'étale bien plus dans le cas quasi-périodique que dans le cas périodique. De plus, les distributions d'impulsions finales ont nettement des formes différentes : sur la figure 3.9 qui les montre en échelle logarithmique, on retrouve une distribution triangulaire (donc double exponentielle en échelle linéaire) pour  $r = 1$  et une distribution parabolique (donc gaussienne en échelle linéaire) pour  $r = 1, 01753$ .

Par ailleurs, l'aire de la distribution d'impulsions, c'est-à-dire le nombre total d'atomes, diminue avec le nombre de pulses de manière bien plus importante pour  $r = 1, 01753$  que pour  $r = 1$  (figure 3.10). Il semblerait, d'après ce que suggère la figure 3.10, que la détection des atomes se détériore en fonction croissante de leur impulsion. Nous supposons cela du fait que, pour  $r = 1$  et  $r = 1, 01753$ , l'aire et la forme des distributions sont équivalentes jusqu'au temps de localisation ( $N_{loc} \approx 10$ ), et divergent ensuite<sup>1</sup>. Si cette supposition est juste, la perte d'atomes atteint alors principalement les ailes de la distribution d'impulsions, et la dispersion sur  $P$  est sous-estimée par rapport à la réalité.

Ainsi, plutôt que de calculer  $\langle P^2 \rangle / \hbar^2$  qui fait intervenir de manière importante les ailes des distributions d'impulsions, nous préférons calculer  $\alpha / R^2(P = 0)$ , où

---

<sup>1</sup>Les conditions expérimentales susceptibles de modifier la qualité de la détection ou le nombre d'atomes – à savoir le nombre de pulses, les déclenchements et les positions relatives de la sonde, de l'onde stationnaire, et des lasers Raman – sont identiques pour  $r = 1, 01753$  et pour  $r = 1$

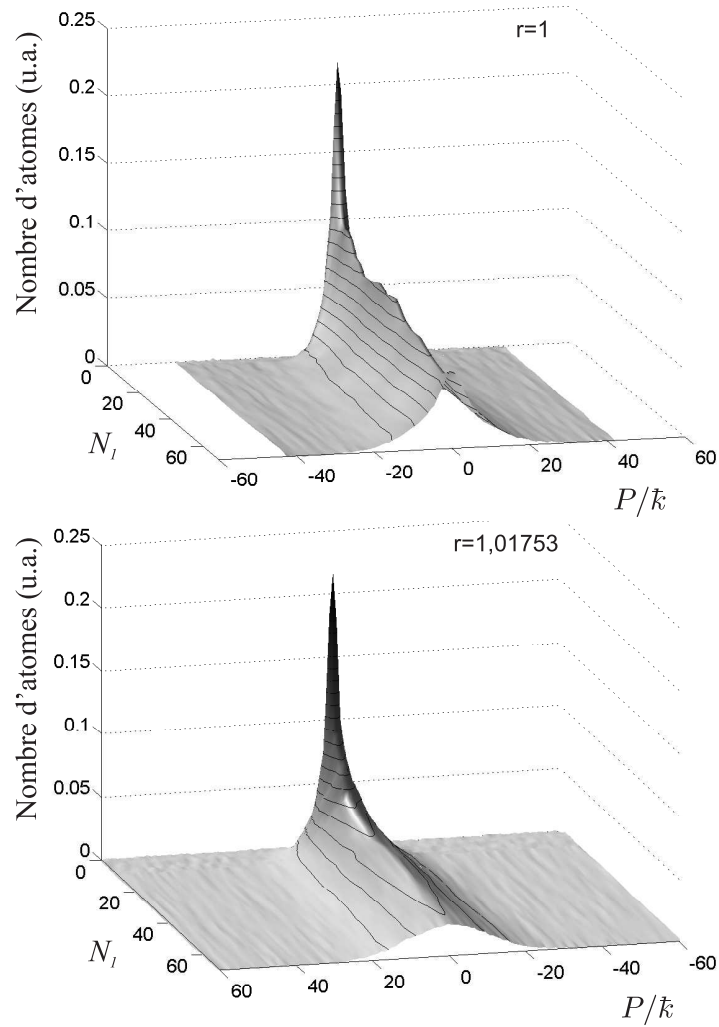


FIG. 3.8 – Evolutions expérimentales de la distribution d'impulsions dans les cas périodique ( $r = 1$ ) et quasi-périodique ( $r = 1,01753$ ). Le seul traitement numérique effectué a consisté à soustraire le fond. Au bout de 140 pulses (70 de la série primaire et 70 de la série secondaire), les distributions d'impulsions ont des formes différentes selon la valeur du rapport bicolore.

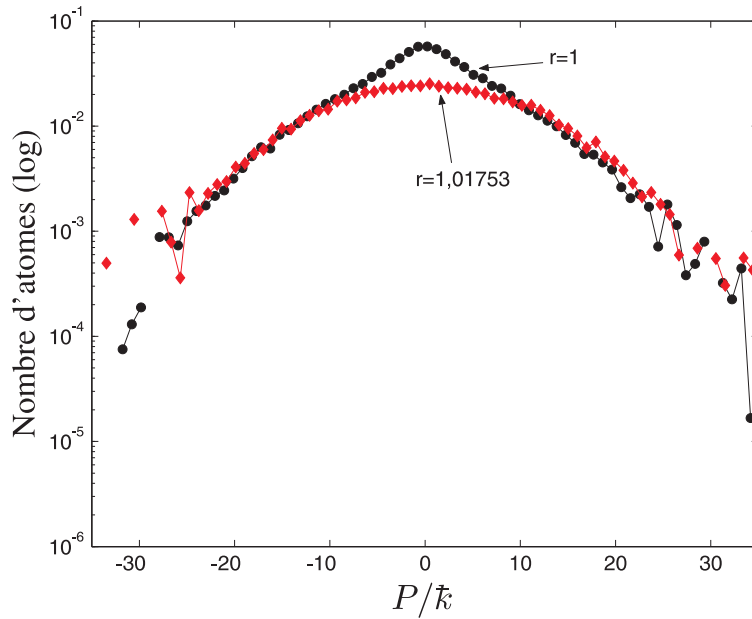


FIG. 3.9 – Distributions d'impulsions en échelle logarithmique pour  $r = 1$  et  $r = 1,01753$  lorsque  $n = 70$  (soit, un total de 140 pulses, séries primaire et secondaire confondues). La forme de la première est triangulaire tandis que celle de la seconde est parabolique.

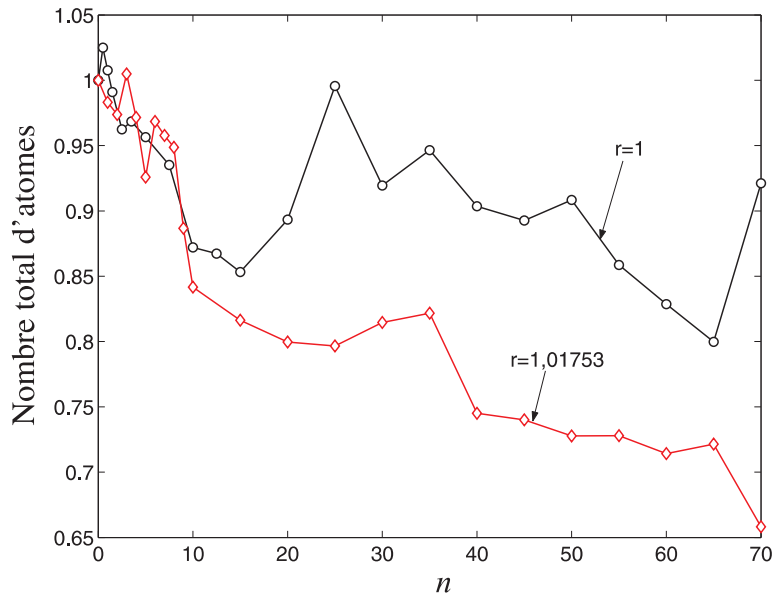


FIG. 3.10 – Evolution temporelle obtenue expérimentalement de l'aire de la distribution d'impulsions. Celle-ci décroît nettement plus pour  $r = 1,01753$  que pour  $r = 1$ . Etant donné que ces deux systèmes sont très proches dans leur mise en œuvre expérimentale, et que la seule différence réside dans les distributions finales d'impulsions, il est raisonnable de supposer que les atomes perdus sont les plus rapides.

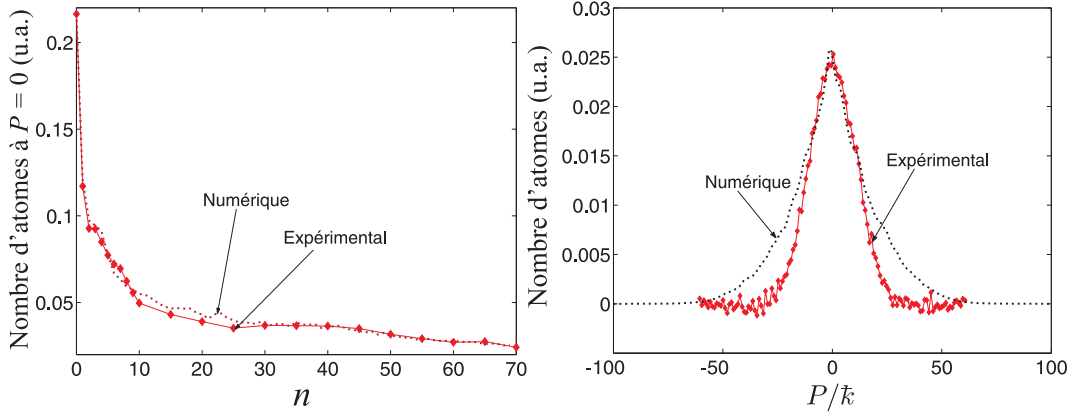


FIG. 3.11 – Evolutions expérimentale et numérique (à gauche) du nombre d’atomes d’impulsion nulle obtenues en fonction du temps : on constate qu’elles sont similaires. Par contre, les distributions complètes d’impulsions numériques et expérimentales (à droite,  $N_1 = 70$ ) présentent d’importantes divergences dans les ailes. L’aire de la distribution expérimentale est inférieure à celle de la distribution numérique (de 65 %). Il semble donc que les atomes rapides ne soient pas efficacement détectés.

$\alpha$  est un coefficient de proportionnalité tel que  $\langle P^2 \rangle / \hbar^2 = \alpha / R^2 (P = 0)$  au temps initial. Les résultats de ces calculs réalisés à partir des données expérimentales sont présentés sur la figure 3.12 : il est à noter que l’évolution  $\alpha / R^2 (P = 0)$  aboutit à un résultat similaire à celui de  $\langle P^2 \rangle / \hbar^2$  calculé numériquement (les paramètres de cette simulation sont identiques à ceux utilisés au chapitre 2 pour rendre compte du cas monocouleur – mis à part le fait que  $r = 1,01753$ ).

De plus, les résultats numériques abondent dans le sens de la supposition de la perte des atomes rapides : alors que les évolutions du nombre d’atomes d’impulsion nulle obtenues numériquement et expérimentalement sont très proches, les formes des distributions sont très différentes (figure 3.11). En particulier, les ailes de la distribution numérique s’enfoncent loin en  $P$ , là où aucun signal atomique ne semble avoir été détecté expérimentalement.

En résumé, une séquence quasi-périodique de pulses conduit à ce que, dans le cas quantique, la distribution initiale d’impulsions diffuse sans cesse et conserve une forme gaussienne. Les deux caractéristiques de la localisation dynamique, à savoir le gel de la diffusion et la forme double exponentielle de la distribution d’impulsions aux temps longs, ont donc disparu. Nous venons de démontrer expérimentalement que le caractère périodique de la séquence de pulses conditionne fortement la dynamique quantique – mais nous nous sommes limités au système quasi-périodique. Nous allons maintenant nous intéresser aux systèmes pseudo-périodiques en général.

### 3.3 Spectre de localisation

Dans cette partie, nous étudions la variation de la diffusion en fonction du rapport bicolore  $r = T_1/T_2$ . Pratiquement, cela signifie que nous mesurons le nombre d’atomes appartenant à la classe  $P = 0$ , pour un nombre de pulses donné, sur

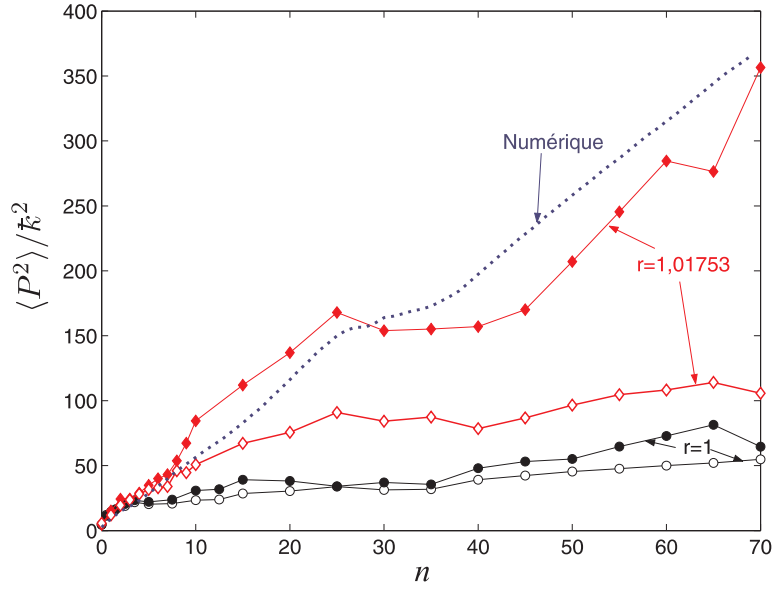


FIG. 3.12 – Evolutions expérimentale et numérique de la largeur de la distribution d'impulsion en fonction du temps obtenues par différentes méthodes. Les courbes avec des marqueurs sont expérimentales. Dans le cas quasi-périodique ( $r = 1,01753$ ) comme dans le cas périodique ( $r = 1$ ), l'évolution est déterminée et par un calcul de l'écart quadratique moyen (marqueurs vides) et par l'inverse au carré du nombre d'atomes d'impulsion nulle (marqueurs pleins). Afin d'établir une comparaison, le résultat de la simulation numérique du cas quasi-périodique est aussi illustré (traits pointillés). La mesure du maximum du nombre d'atomes à  $P = 0$  est plus fiable que le calcul de  $\langle P^2 \rangle$ .

$r \in ]0; 2]$ . Nous nous attendons à ce que, dans le cas quantique, des phénomènes de localisation apparaissent pour les valeurs rationnelles de  $r$  – car, de cette manière, nous retrouvons une série de pulses périodique – et à trouver ainsi un véritable *spectre de localisation*. Avant de nous pencher sur le cas quantique, nous nous atardons quelque peu sur l'homologue classique qui produit aussi, pour des raisons différentes, un *spectre de résonances*.

### 3.3.1 Cas classique : étude numérique

Tous les résultats que nous présentons dans cette partie ont été obtenus au moyen de simulations numériques basées sur les équations de récurrence (3.3). La figure 3.13 représente la population atomique à  $P = 0$  sur  $r \in ]0; 2]$  pour  $n = 25$ ,  $K = 28$ . Nous obtenons un spectre peuplé de raies dont les positions dépendent visiblement de la nature rationnelle ou irrationnelle de  $r$  et dont l'orientation est ici vers le bas.

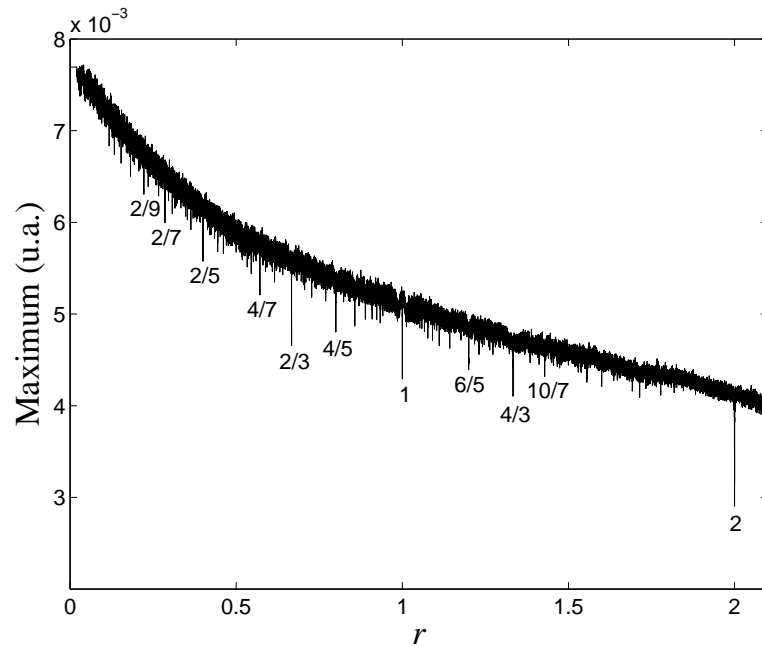


FIG. 3.13 – Maximum de la distribution en fonction du rapport bicolore pour  $n = 25$  et  $K = 28$  et  $\varphi_0 = 0,5$ . Le résultat obtenu est un spectre de diffusion : plus le maximum de la distribution est faible, plus la diffusion est importante, et inversement.

### Origine des raies

L'origine de ces raies peut s'expliquer par quelques arguments qualitatifs. Nous avons déjà vu que le taux de diffusion effectif après  $n$  pulses résulte d'une moyenne des taux de diffusion instantané  $D_n(K)$  (voir section 3.2.1). Lorsque le rapport bicolore est rationnel, les valeurs de  $\varphi_n$  se répètent au bout d'un certain nombre de pulses constituant un *motif* (de répétition). En clair, si  $r = a/b$  ( $a$  et  $b$  entiers) est une fraction irréductible, la taille du motif,  $(a + b)$  pulses [dans le cas particulier où  $\varphi_0 = 0$ , le motif est seulement composé de  $(a + b - 2)$  pulses], implique un nombre restreint de valeurs de  $\varphi_n$ . Ce qui s'oppose au cas où le nombre de valeurs différentes de  $\varphi_n$  avoisine le nombre total de pulses. Cela a pour conséquence, si  $n > a + b$ , que les taux de diffusion instantanés  $D_n(K)$  impliqués sont en nombres différents et modifient de ce fait le taux de diffusion moyen. Cela explique l'existence des raies.

### Forme des raies

L'orientation des raies peut être vers le bas ou vers le haut, ceci dépend des valeurs de  $K$  et de  $\varphi_0$ . Le cas de la raie  $r = 1$  est particulièrement éloquent. Par exemple, si  $\varphi_0 = 0,5$  et  $K = 28$ , alors l'équation (3.4) indique que  $D_n(28) = D_{cl}(14)/0,5^3$  pour tout  $n$ . Or la figure 1.8, qui représente l'évolution du taux de diffusion classique en fonction de  $K$ , montre que  $D_{cl}(14)$  correspond à un maximum local. Comme les différentes valeurs de  $D_n(28)$  sont en grande majorité inférieures à ce maximum de diffusion  $D_{cl}(14)$ , le taux de diffusion moyen pour  $r = 1$  est plus



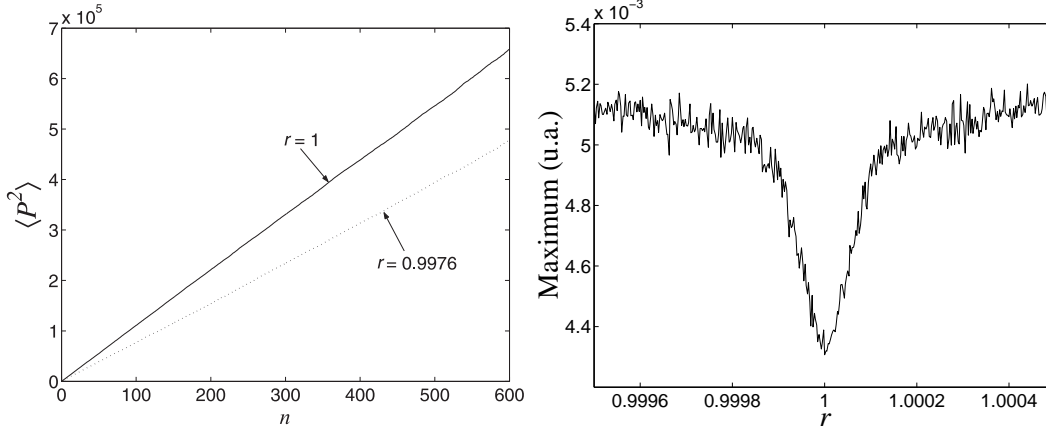


FIG. 3.14 – A gauche, évolution de  $\langle P^2 \rangle$  obtenue numériquement pour deux valeurs du rapport bicolore. Les paramètres de la simulation sont :  $K = 28$ ,  $\varphi = 0,5$ . La diffusion moyenne pour  $r = 1$  est plus importante que celle pour  $r \neq 1$ . A droite, une raie classique de diffusion, orientée vers le bas : le maximum de la distribution d'impulsions est tracé en fonction du rapport bicolore à  $n = 600$ . L'intensité relative de la raie (à droite) ne dépend pas de  $n$  du fait que, pour tout  $r$ , l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$  est en moyenne linéaire.

élevé que pour toute valeur irrationnelle voisine de  $r$ . Consécutivement, le maximum de distribution (correspondant à  $P = 0$ ) chute plus rapidement pour  $r = 1$ , et la raie prend une forme de creux (figure 3.14). A l'inverse, en prenant  $\varphi_0 = 0,5$  et  $K = 32$ , le même raisonnement montre que  $D_n(32) = D_{cl}(16)/0,5^3$  est un minimum local de diffusion : le maximum de distribution chute alors plus lentement pour  $r = 1$  que pour  $r$  voisin de 1, et la raie se présente sous la forme d'une bosse (figure 3.15). En outre, il existe des situations pour lesquelles les raies disparaissent ; par exemple, sur la figure 3.13, les raies  $r = 3/2$  ou encore  $r = 1/2$ , pour lesquels les séquences de pulses sont pourtant constituées de petits motifs, sont absentes. Enfin, il est intéressant de noter que toutes les raies observées ont une forme gaussienne et que leur largeur au temps  $n$  peut être, en fonction de la valeur de  $K$ , légèrement inférieure à  $1/n$  (limite Fourier).

En résumé, dans le cas classique, le spectre bicolore est peuplé de raies aux valeurs rationnelles de  $r$ . Les formes de creux ou de bosse correspondent à des diffusions moyennes accidentelles plus ou moins importantes que les diffusions pour les valeurs irrationnelles avoisinantes. Il faut remarquer que, bien que l'intensité absolue de ces raies augmente avec le nombre de pulses (voir la différence des accroissements linéaire de  $\langle P^2 \rangle$  en fonction de  $n$  pour  $n = 1$  et  $n \neq 1$  sur les figures 3.14 et 3.15), leur extremum, lui, chute avec le nombre de pulses (en  $1/\sqrt{n}$ ) : il s'agit donc d'un accroissement ou d'une diminution locale du taux de diffusion mais pas d'un phénomène de *gel* de la diffusion qui est à l'origine du spectre. Nous allons voir que cette situation change dans le cas quantique.

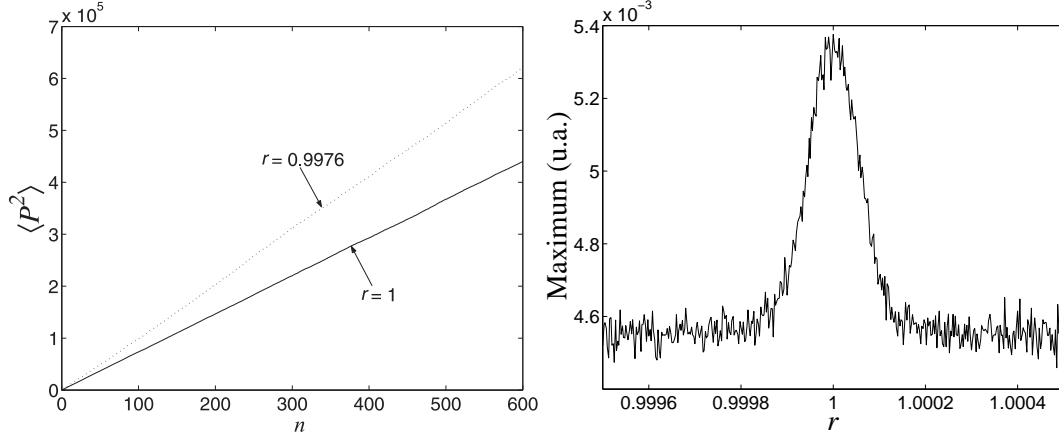


FIG. 3.15 – Evolution de  $\langle P^2 \rangle$  (à gauche) et raie classique de diffusion (à gauche), pour une simulation équivalente à celle de la figure 3.14, mais avec les paramètres  $K = 32$ ,  $\varphi = 0, 5$ ,  $r$  variable. La diffusion moyenne pour  $r = 1$  est cette fois plus faible que celle pour  $r \neq 1$ , ce qui conduit à une raie classique de diffusion orientée vers le haut, à la différence de celle de la figure 3.14. L’intensité relative de cette raie (à droite) ne dépend pas de  $n$ .

### 3.3.2 Cas quantique : étude expérimentale

Pour toute valeur rationnelle de  $r$ , nous avons vu que la séquence de pulses présente une périodicité dont le motif de répétition est constitué de plusieurs pulses. La taille de ce motif est égale à la somme du numérateur ( $a$  entier) et du dénominateur ( $b$  entier) de la fraction irréductible  $r = a/b$  (le numérateur et le dénominateur correspondent respectivement aux nombres de pulses de la série primaire et de la série secondaire). Par exemple, pour  $r = 8/7$ , le motif associe 7 pulses de la série primaire et 8 pulses de la série secondaire. Il faut donc attendre qu’un nombre suffisant de pulses, supérieur à la taille du motif, ait défilé pour que ce dernier soit vu comme tel. Or, à un motif est associé un opérateur de Floquet, et par conséquent, dans le cas quantique, un jeu de quasi-états localisés en impulsion (la longueur de localisation dépend, entre autres, de la taille du motif). *A contrario*, pour une valeur irrationnelle de  $r$ , aucun motif de répétition n’apparaît – par définition. Pour ces raisons, en traçant le maximum de distribution en fonction de  $r$ , on s’attend à l’apparition de raies dont l’origine est imputable à la localisation dynamique; ces raies sont dénommées *raies de localisation*. Les résultats que nous présentons sont autant issus de simulations numériques que d’expériences réelles.

#### Apparition et forme de raies de localisation

Le maximum de la distribution d’impulsions en fonction de  $r$  a été acquis expérimentalement puis tracé pour  $r \in [0; 2]$ ,  $F_1 = 36$  kHz,  $\delta_L = 2\pi \cdot 9, 2$  GHz,  $\varphi_0 = 0, 14$  et  $n = 25$ . Le résultat présenté sur la figure 3.16 est un spectre constitué de raies localisées à des valeurs de  $r = a/b$  pour lesquelles  $b$  est nettement inférieur à  $n = 25$  (cela signifie que les motifs correspondants apparaissent plusieurs fois au cours de la séquence). L’origine de ces raies, eu égard aux résultats déjà établis, est évidente :

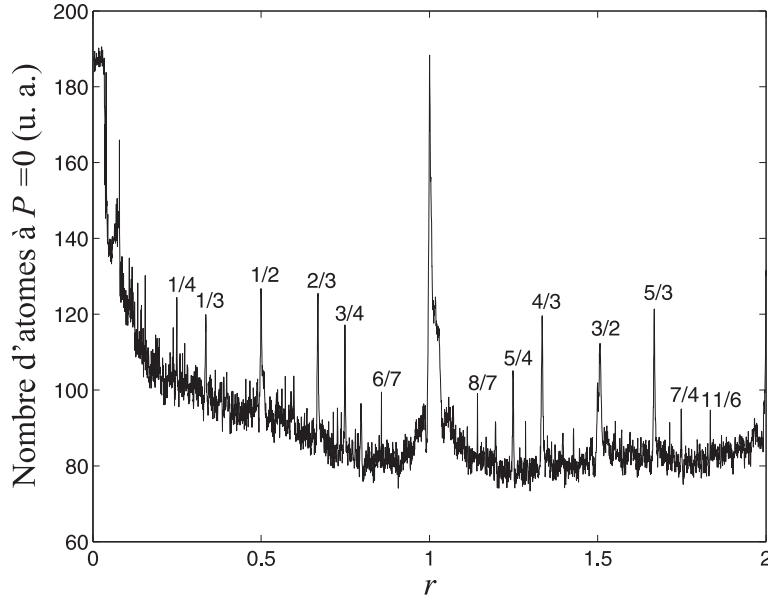


FIG. 3.16 – Spectre de localisation dynamique expérimental obtenu avec les paramètres  $F_1 = 36 \text{ kHz}$ ,  $N_1 = 25$ ,  $\delta_L = 2\pi \cdot 9,2 \text{ GHz}$ ,  $\tau = 0,4 \mu\text{s}$ ,  $\varphi_0 = 0,14$ . On remarque que le maximum des raies est d'autant plus bas que le dénominateur du rapport bicolore est élevée. La montée du fond lorsque  $r \rightarrow 0$  est due à une diminution du nombre de pulses secondaires (diminution globale de la diffusion).

elles apparaissent lorsque, pour la valeur de  $r$  considérée, la diffusion est gelée. Cette localisation dynamique se manifeste notamment par le fait que le maximum des raies, au bout d'un certain temps, est gelé, contrairement à ce qui se passe dans le cas classique où l'extremum des raies chute tout au long de la séquence de pulses. Expérimentalement, il est difficile de constater ce gel à cause des phénomènes de décohérences (vus au chapitre 2) ; en effet, comme l'illustre la figure 3.17 qui présente le cas de  $r = 1$ , la diffusion résiduelle et la perte d'atomes qu'ils impliquent engendrent une décroissance du maximum.

Les raies de rapport différent de 1 apparaissent plus tardivement car les temps de localisation qui leur sont associés sont plus grands (voir figure 3.19). Ceci s'explique bien par une analyse en termes de quasi-états de Floquet. En effet, puisque la séquence de pulses est périodique, il est possible de décrire l'évolution de la distribution d'impulsions au moyen des quasi-états de l'opérateur d'évolution composé, dans le cas où  $r \neq 1$  et rationnel, des pulses du motif de répétition (par exemple, l'opérateur d'évolution associé à  $r = 8/7$  fait intervenir 15 opérateurs décrivant l'action des pulses, du type (1.20), et 15 opérateurs de propagation libre, du type (1.19). Tout comme dans le système monocoloré, dès lors qu'un nombre suffisant de motifs est appliqué, la distribution d'impulsions cesse de diffuser. En conclusion, plus le motif est composé d'un nombre important de pulses de la série primaire, plus le temps de localisation est grand. Sur la figure 3.18, on voit effectivement que l'évolution de  $\langle P^2 \rangle / \hbar^2$  est conditionnée (entre autres) par la taille des motifs (correspondant aux

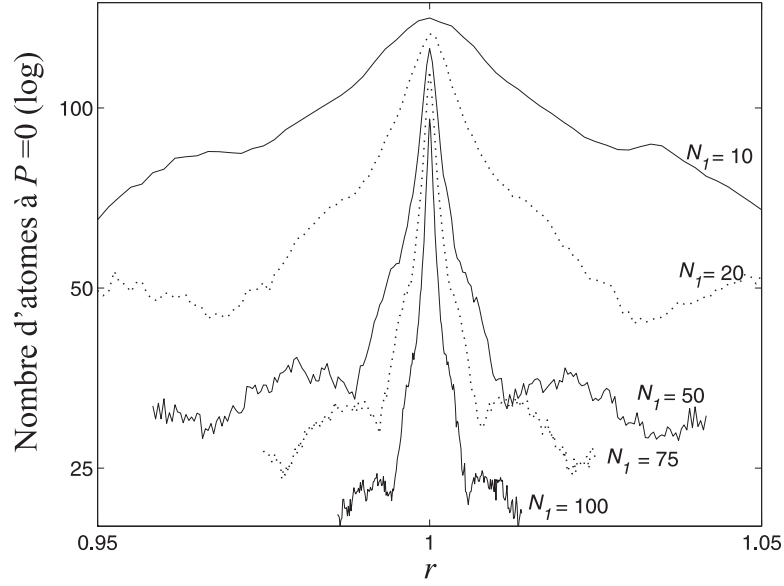


FIG. 3.17 – Evolution temporelle de la raie  $r = 1$  obtenue expérimentalement pour les paramètres  $F_1 = 36 \text{ kHz}$ ,  $\delta_L = 2\pi \cdot 13,3 \text{ GHz}$ ,  $\tau = 800 \text{ ns}$ ,  $\varphi_0 = 0,5$ . Le maximum de la raie, qui devrait se fixer à partir de  $n \approx 30$ , continue de chuter – légèrement – à cause des phénomènes de décohérence. L'échelle logarithmique leur donne une forme quasiment triangulaire (à part dans les ailes), typique des raies de localisation.

valeurs  $r = 8/7, 6/5, 6/5 \cdot 4/3, 4/3$ ).

Expérimentalement, il est plutôt difficile – voire impossible – de créer une séquence de pulses suffisamment longue pour aller jusqu'au gel du maximum des raies lorsque  $r \neq 1$ . Non seulement parce que le laps de temps disponible pour l'application de l'onde stationnaire ne permet pas d'aller au-delà de 175 pulses à la fréquence considérée ici, mais aussi parce que les phénomènes de décohérence se manifestent trop intensément (et détruisent la localisation dynamique). En conséquence, notre protocole expérimental n'autorise que l'apparition de ces raies et non la mise en évidence du gel de leur maximum. A titre d'exemple, sur la figure 3.20, est présentée l'apparition de la raie  $r = 8/7$ ; en se reportant à la figure 3.19, on s'aperçoit que les diffusions pour  $r = 8/7$  et pour une valeur de  $r$  irrationnelle proche de  $8/7$  se distinguent après une vingtaine de pulses de la série primaire, ce qui entraîne l'apparition d'une raie; toutefois, pour atteindre le gel de son maximum, il faudrait produire au moins un millier de pulses, condition impossible à remplir dans le cadre de notre expérience<sup>2</sup>.

Enfin, il faut remarquer que la forme de ces raies présente quelques différences par rapport aux raies classiques; alors que, classiquement, elles sont de forme gaussienne (droite ou inversée), ici, elles prennent une forme qui s'ajuste bien mieux avec une

<sup>2</sup>Même numériquement, le gel du maximum des raies est difficile à observer avec un système a modulation de phase.

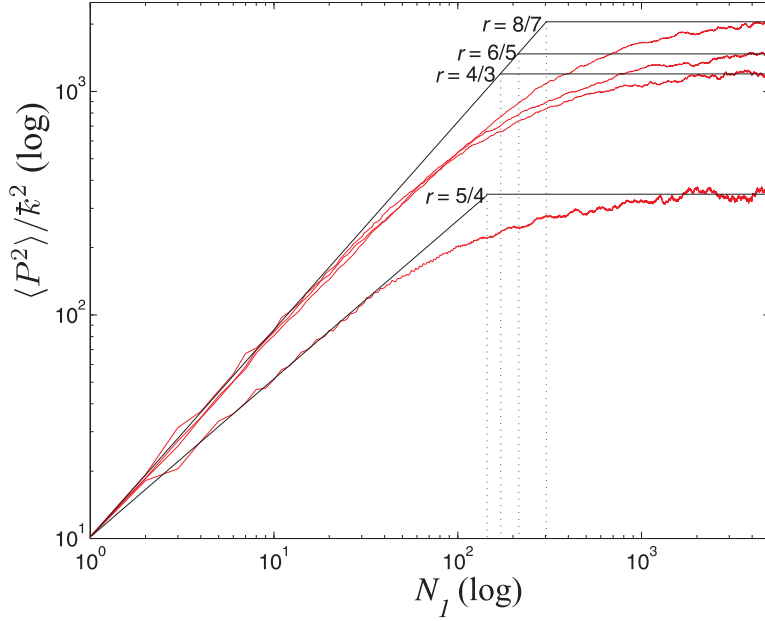


FIG. 3.18 – Evolutions temporelles de  $\langle P^2 \rangle / k^2$  obtenues numériquement pour différentes valeurs rationnelles du rapport bicouleur, les autres paramètres étant égaux par ailleurs :  $F_1 = 30$  kHz,  $K = 19,2$ ,  $\varphi_0 = 0,5$ . Les temps de localisation sont indiqués par les lignes verticales en pointillés :  $N_{loc} \approx 300$  ( $r = 8/7$ ),  $N_{loc} \approx 205$  ( $r = 6/5$ ),  $N_{loc} \approx 175$  ( $r = 5/4$ ) et  $N_{loc} \approx 125$  ( $r = 4/3$ ). Il est à noter que la division du temps de localisation par le dénominateur, c'est-à-dire la durée en unités normalisées du motif, est identique pour les quatre rapports ( $\sim 40$ ).

une fonction algébrique (voir figure 3.24) du type

$$\frac{1}{1 + \beta|r - 1|}. \quad (3.5)$$

### Le problème du recouvrement des pulses

Hormis l'inhomogénéité de  $K$ , les phénomènes de décohérences ou encore la limite de la boîte classique (voir section 2.3), un autre effet dû aux recouvrements accidentels des pulses des séries primaire et secondaire contribue à différencier le système expérimental du système théorique. En effet, la durée finie des pulses provoque des recouvrements qui prennent une importance considérable (parfois plus de 20 % des durées cumulées des pulses de la série primaire) pour certaines valeurs de  $r$ . En traçant le taux de recouvrement en fonction de  $r$ , comme sur la figure 3.21, on découvre un véritable spectre dont les raies sont positionnées à des valeurs rationnelles de  $r$ ; ces raies sont dites de *recouvrement*. Les paramètres  $\varphi_0$  et  $\tau$  agissent respectivement sur l'existence et sur l'intensité de ces raies.

Consécutivement, les variations du taux de diffusion qui apparaissent aux valeurs rationnelles de  $r$  peuvent être causées par un taux de recouvrement accidentellement plus élevé. Il existe donc, expérimentalement, au moins deux raisons pour lesquelles

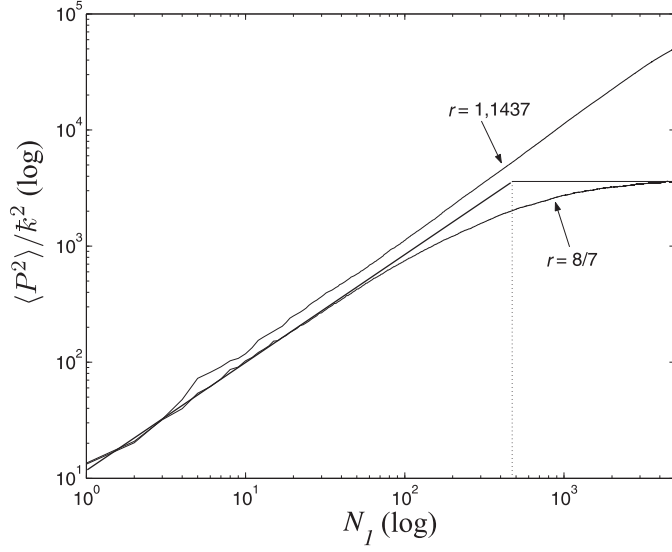


FIG. 3.19 – Diffusion pour deux valeurs proches de  $r$ , dont l’une est rationnelle ( $8/7 \approx 1,14286\dots$ ) et l’autre “irrationnelle” ( $1,1437$ ) (obtenues numériquement avec  $F_1 = 36$  kHz,  $K = 9,5$ ,  $\varphi_0 = 0,14$ , paramètres comparables aux paramètres expérimentaux de la figure 3.20). A partir de  $N_1 \approx 20$ , une différence apparaît entre elles, ce qui se retranscrit sur le spectre de localisation par l’apparition d’une raie. Le gel du maximum de celle-ci ne se manifeste qu’après le temps de localisation (indiqué par la ligne verticale en pointillés)  $n > N_{loc} \approx 500$ .

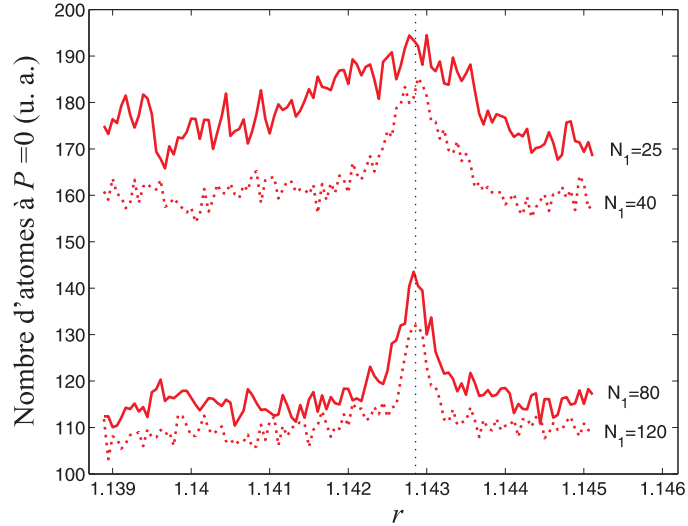


FIG. 3.20 – Apparition expérimentale d’une raie à  $r = 8/7$  obtenue avec les paramètres  $F_1 = 36$  kHz,  $\delta_L/2\pi = 9,2$  GHz,  $\tau = 0,5$   $\mu$ s,  $\varphi_0 = 0,14$ . Chaque courbe est repérée par le nombre de pulses de la série primaire à laquelle elle a été acquise. Le gel du maximum de la raie n’est pas observé ici car le nombre de pulses est insuffisant (voir figure 3.19).

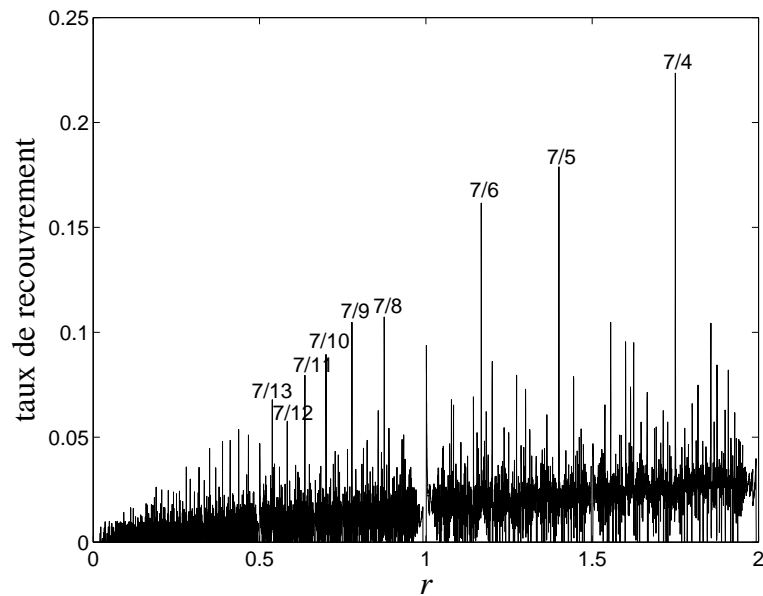


FIG. 3.21 – Taux de recouvrement entre les pulses de la série secondaire et ceux de la série primaire en fonction du rapport bicolore obtenu numériquement pour  $\varphi = 0,14$  et  $\alpha = \tau/T = 0,015$  et  $N_1 = 100$  (ce qui correspond aux conditions expérimentales habituelles). Le taux de recouvrement est défini comme la somme des aires communes aux pulses des deux séries sur l'aire total des pulses de la série primaire (un pulse a la forme d'une créneau). On voit qu'il existe plusieurs valeurs de  $r$  pour lesquelles il existe un maximum local du taux de recouvrement. Enfin, le choix de  $\varphi_0$  et  $\tau$  semble privilégier des recouvrements pour des valeurs de  $r$  dont le numérateur est égal à 7.

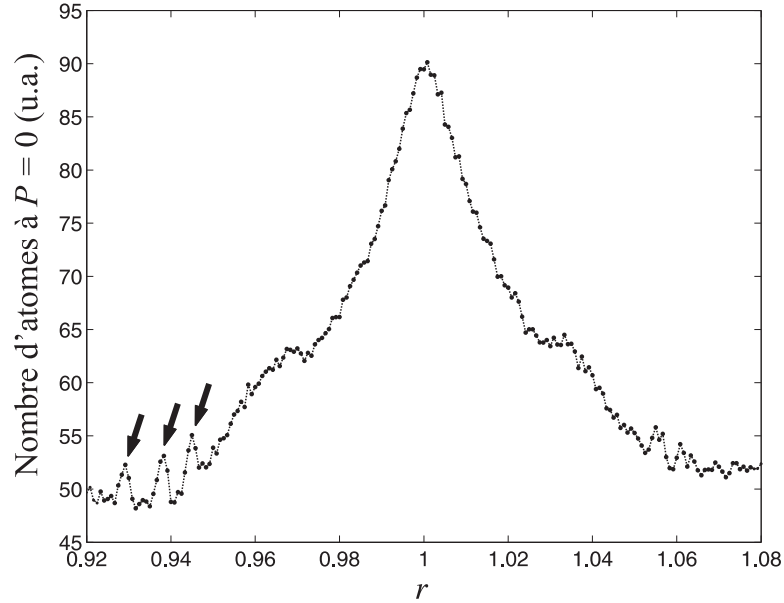


FIG. 3.22 – Manifestation expérimentale du recouvrement de pulses sur la population d’atomes à  $P = 0$ . Les paramètres sont  $\delta_L/2\pi = 9,2$  GHz,  $N_1 = 10$ ,  $F_1 = 36$  kHz et  $\varphi_0 = 0,5/r$ . Les raies pointées, localisées en  $r = 0,944, 0,937, 0,929$  (repérées par les flèches), correspondent respectivement aux recouvrements des pulses primaires et secondaires 9 et 8, 8 et 7, 7 et 6.

la diffusion peut chuter et produire des raies sur l’intervalle  $r \in [0; 2]$  : la localisation dynamique et le recouvrement de pulses. Souvent ces deux phénomènes se cumulent. Par exemple, l’expérience montre que la raie  $r = 8/7$ , figure 3.20, est plus intense lorsque  $\varphi_0 = 0,5$  que lorsque  $\varphi_0 = 0,14$ . Ce surcroît d’intensité est vraisemblablement causé par les recouvrements ; dans le premier cas, 20 % des pulses de la série primaire sont recouverts contre 0 % dans le second cas. Mais il existe aussi des raies résultant uniquement de recouvrements ; celles-ci sont visibles pour de faibles nombres de pulses et des taux de recouvrement élevés. L’exemple le plus criant nous a été révélé lorsque nous cherchions à caractériser la raie  $r = 1$  (voir la section 3.4) : la figure 3.22 montre, sur les flancs de la raie, une série de bosses (ou de “raies”) dont l’origine s’est avérée être le recouvrement des derniers pulses de la séquence (la position en  $r$  des maxima indique quel pulse de la série secondaire recouvre totalement tel pulse de la série primaire).

De manière générale, il n’existe aucune valeur de la phase initiale pour laquelle il n’y aurait aucun recouvrement pour toutes les valeurs de  $r$ . Notamment lorsqu’un spectre bicolore entier est tracé, cet effet apparaît nécessairement. Nous sommes donc réduits à utiliser des valeurs de  $\varphi_0$  minimisant – et non annulant – le taux de recouvrement moyen sur l’intervalle étudié de  $r$ .



### Caractère fractal du spectre

Sans entrer dans le monde très vaste des fractales, avec toutes les subtilités de définitions et la rigueur mathématique que cela supposerait, nous entendons ici souligner la complexité et la profusion des détails des spectres de localisation. En généralisant ce que nous venons de voir précédemment, nous pouvons affirmer qu'un phénomène de localisation dynamique survient nécessairement pour tout rapport bicolore rationnel, et qu'il faut, pour l'observer, atteindre un temps de localisation éventuellement très long. Si l'on regardait l'évolution temporelle du spectre de localisation, les raies apparaîtraient progressivement dans l'ordre croissant des dénominateurs (*b*). Et si, chose expérimentalement impensable, le nombre de pulses appliqués pouvait être infini, le spectre serait composé d'une infinité de raies, et selon Mandelbrot, qui définit un objet fractal comme "*un objet qui continue à présenter une structure détaillée sur un grand éventail d'échelle*", le spectre de localisation serait une fractale. Parmi les caractéristiques les plus communes de ce type d'objet, l'auto-similarité s'y retrouve effectivement (l'auto-similarité est la répétition d'une géométrie bien définie à toutes les échelles). En l'occurrence, dans le spectre de localisation, ce sont les positions des raies qui sont auto-similaires ; par exemple, si l'on considère les raies sur l'intervalle  $r \in [0; 2]$ , leurs positions relatives sont identiques à celles qui existent sur l'intervalle  $r \in [0; 1]$  (cette "auto-similarité" peut être prolongée à l'infini par agrandissements successifs de rapport 2 – l'auto-similarité est observable pour d'autres agrandissements). Expérimentalement plusieurs contraintes interdisent d'explorer cette idée. En effet, l'application d'un nombre élevé de pulses impliquerait une décohérence élevée (qui détruit la localisation), une difficulté à maintenir le nuage d'atomes dans l'onde stationnaire, mais aussi des problèmes relatifs à la durée finie des pulses, tels que le recouvrement, ou à la limite de boîte classique (voir chapitre 2). La vérification de ce caractère fractal est donc très difficile.

### 3.4 Etude expérimentale de la raie de localisation $r = 1$

Nous nous intéressons désormais à la caractérisation de la largeur et à la dynamique de la largeur des raies de localisation. Dans un premier temps, nous menons l'analyse à partir de raies obtenues en traçant le nombre d'atomes à  $P = 0$  autour de  $r = 1$  (au moyen d'une comparaison avec une analyse spectrale de Fourier [46]). Le choix de la raie  $r = 1$  est orienté par le fait que, pour cette valeur, le motif de répétition est minimal : il est constitué de deux pulses et même d'un seul dans le cas particulier où  $\varphi_0 = 0, 5$ , ce qui conduit à une apparition et à un gel du maximum de cette raie en un temps suffisamment court (il faut rappeler que nous ne disposons pas d'un temps arbitrairement long pour appliquer la séquence de pulses, et que, de surcroît, plus la séquence de pulses est longue, plus les effets de décohérence détruisent les manifestations quantiques). Dans un second temps, nous présentons une manière différente d'apprécier le phénomène de délocalisation en traçant le taux de diffusion effectif  $D_{n > N_{loc}}(r)$  après le temps de localisation (temps de localisation qui est défini par le cas  $r = 1$ ), ce qui permet d'éliminer le temps comme grandeur paramétrique de la raie de localisation (après le temps de localisation, nous verrons que le taux de diffusion peut être considéré comme constant).

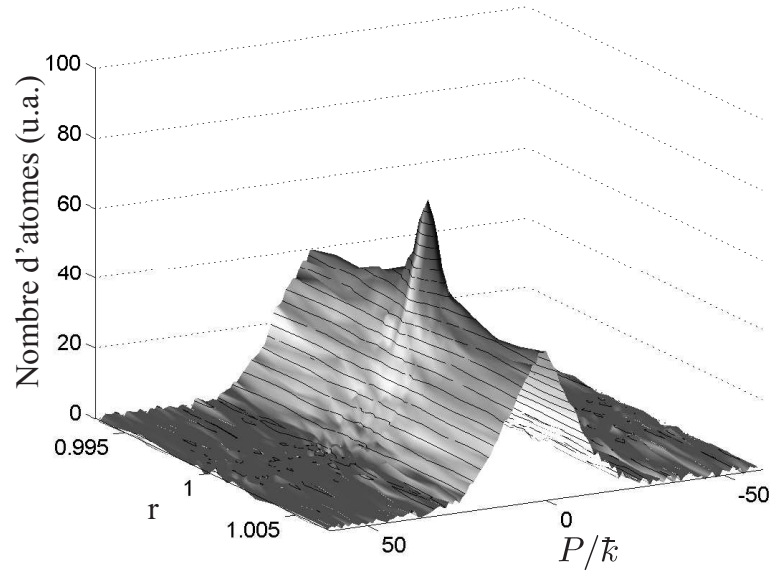


FIG. 3.23 – Evolution expérimentale de la distribution d’impulsions en fonction de  $r$ . Les paramètres sont :  $\delta_L/2\pi = 21,8 \text{ GHz}$ ,  $\tau = 1 \mu\text{s}$ ,  $F_1 = 15 \text{ kHz}$ ,  $N_1 = 60$ , et  $\varphi_0 = 0,5$ . Pour  $r = 1$ , la distribution est localisée en impulsion à cause du caractère périodique de la séquence de pulses.

### 3.4.1 Mesure de la population $P = 0$

Sur la figure 3.23, une évolution typique de la distribution d’impulsions en fonction du rapport bicolore est montrée. Plusieurs raisons nous incitent à travailler sur une coupe (définie par  $P = 0$ ) de ce genre de distribution. D’abord, parce qu’il est beaucoup plus rapide d’acquérir un unique point (correspondant à  $P = 0$ ) que toute une distribution (au minimum une centaine de points). Ceci conduit à ce que le nombre total d’atomes, qui, nous l’avons vu au chapitre 2, fluctue sur un temps caractéristique de l’ordre de la dizaine de minutes, ne varie pas trop. Ensuite parce que, comme nous l’avons fait remarquer dans la sous-section 3.3.2, tout porte à croire que les ailes des distributions expérimentales sont tronquées à cause d’une mauvaise détection des atomes les plus rapides (même s’ils sont peu nombreux, leur perte conduit à des erreurs élevées dans le calcul de  $\langle P^2 \rangle$  étant donné leur contribution importante dans ce calcul).

### Résultats bruts

En première approximation, les raies de localisation prennent une forme algébrique du type (??) comme nous l’avons déjà mentionné autour de  $r = 1$  ([47] et figures 3.17 et 3.24). Bien qu’il soit possible de les ajuster à des fonctions plus complexes, nous nous limitons usuellement à cette description (la forme des raies expérimentales dépendent en fait de beaucoup de phénomènes “parasites” : l’inhomogénéité en  $K$ , la décohérence, etc.). Dans la gamme de paramètres que nous utilisons

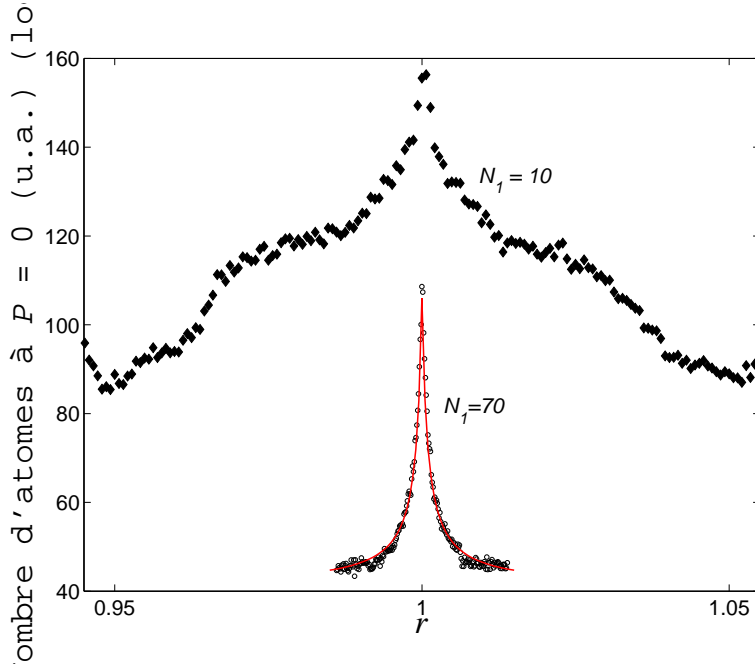


FIG. 3.24 – Deux formes différentes de raies de localisation obtenues avec un nombre de pulses légèrement inférieur ( $n = 10$ ) et nettement supérieur ( $n = 70$ ) au temps de localisation ( $N_{loc} \gtrsim 10$ ) pour les paramètres  $\delta_L/2\pi = 9,2$  GHz,  $\tau = 0,8$   $\mu$ s,  $F_1 = 36$  kHz,  $\varphi_0 = 0,5$ . La courbe qui s’ajuste à la raie à  $n = 70$  a été obtenue en utilisant la forme algébrique donnée en (??) avec  $\beta = 1100$ .

généralement, cette forme est valide tant que le nombre de pulses est suffisamment élevé ( $n > 10$ ). En deçà, les formes sont plus complexes (piédestal important), ce qui empêche une analyse propre ; par exemple la détermination de la largeur, qui est une des caractéristiques abondamment étudiées ici, est rendue difficile (car, en effet, que signifie la largeur à mi-hauteur d’une raie, telle celle présentée sur la figure 3.24, lorsque celle-ci est composée de deux largeurs caractéristiques ?).

### Des raies “sub-Fourier”

Une propriété remarquable de ces raies est qu’elles sont éventuellement très fines, entendre par là que leur largeur peut être bien plus petite que la limite Fourier [47]. Par exemple, sur la figure 3.25, la largeur à mi-hauteur est évaluée à  $\Delta r = (7,8 \pm 0,7) \cdot 10^{-4}$ , soit  $\Delta F_2 = F_1 \times \Delta r = 23,4 \pm 2,1$  Hz (la limite Fourier qui, elle, est donnée par l’inverse de la durée de la séquence de pulses  $\Delta F_{Fourier} = 1/(nT_1)$  prend ici la valeur  $\Delta F_f = 30000/30 = 1000$  Hz). Le rapport entre la largeur à mi-hauteur et la limite Fourier, dans le cas de cette raie, vaut

$$\frac{\Delta F_2}{\Delta F_{Fourier}} \approx \frac{1}{43}.$$

C’est donc au sens où ce rapport n’est pas égal mais est inférieur à 1 que nous parlons du caractère *sub-Fourier* de cette raie. Nous appelons l’inverse de ce rapport

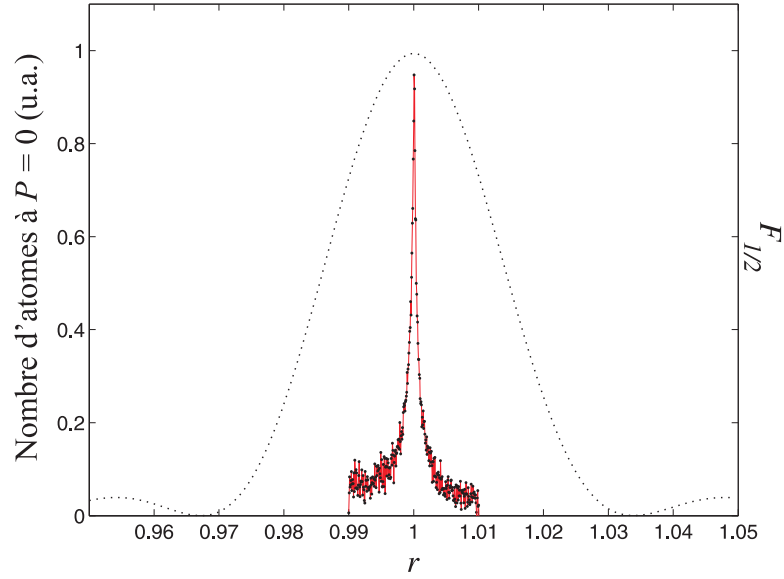


FIG. 3.25 – Raie expérimentale de localisation dont la largeur à mi-hauteur est 43 fois inférieure à celle attendue d’après la transformée de Fourier de la séquence de pulses (fonction  $F_{1/2}$  – voir texte – tracée en pointillés). Une telle raie a été obtenue pour les paramètres :  $\delta_L/2\pi = 9,2$  GHz,  $\tau = 1$   $\mu$ s,  $F_1 = 30$  kHz,  $\varphi_0 = 0,5$ , et  $N_1 = 30$ . Ce qui signifie que  $K_{max} \approx 25$  et  $K_{moy} \approx 20$ .

le coefficient sub-Fourier, noté  $\sigma_{Fourier}$ .

Le concept de limite Fourier tel que nous l’avons introduit pour l’instant reste à préciser. En effet, le spectre de Fourier de la séquence de pulses est relativement complexe. En guise d’exemple explicatif, nous donnons le carré du module (soit l’intensité) de la transformée de Fourier en fonction de la fréquence  $f$  (figure 3.26) pour une séquence proche<sup>3</sup> de celle qui a été utilisée expérimentalement pour produire la raie de la figure 3.25 (pour  $r = 1,00039$ , c’est-à-dire lorsque le signal est à mi-hauteur de l’amplitude de la raie de localisation). On y voit une somme de deux peignes de pics séparés respectivement de  $F_1 = 30$  kHz et de  $F_2 = r \times 30$  kHz. La largeur de chaque pic est inversement proportionnelle à la durée totale de la séquence, leur intensité est modulée par une fonction du type

$$\left[ \frac{\sin(\pi\tau f)}{\pi\tau f} \right]^2 \quad (3.6)$$

à cause de la durée finie des pulses (ce qui signifie que plus  $\tau$  est grand, plus l’intensité des harmoniques élevées est faible).

Comme le montre la figure 3.27, les pics de ces deux peignes se recouvrent d’autant moins que la valeur de  $r$  augmente ; nous pouvons considérer que, pour  $f = F_1$ , les pics des deux séries sont totalement résolus lorsque typiquement  $|F_2 - F_1| >$

<sup>3</sup>La différence réside en ce que  $\varphi = 0$  et non pas  $\varphi = 0,5$  (comme dans l’expérience) afin de ne pas additionner destructivement les transformées de Fourier de chaque “couleur” de la séquence de pulses.

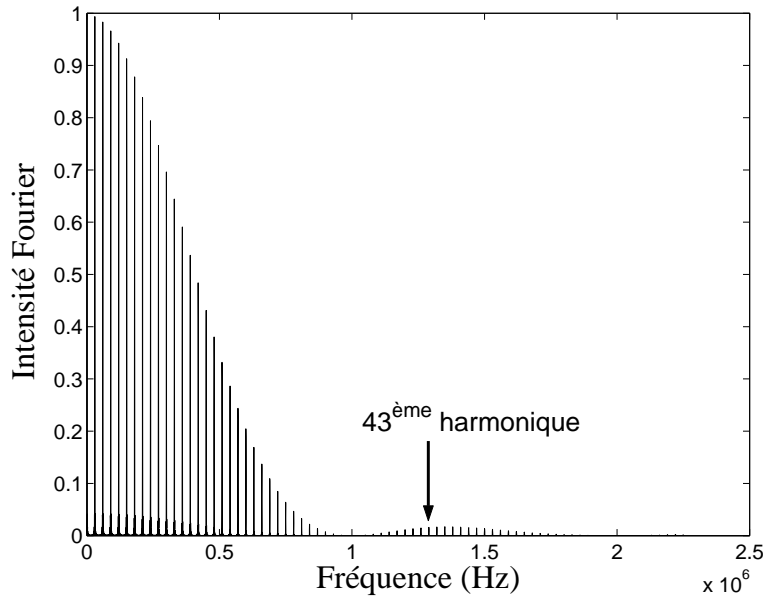


FIG. 3.26 – Spectre de Fourier d'une séquence bicolore à  $F_1 = 30$  kHz et  $F_2 = 30,0177$  kHz avec  $n = 30$  et  $\varphi_0 = 0$ .

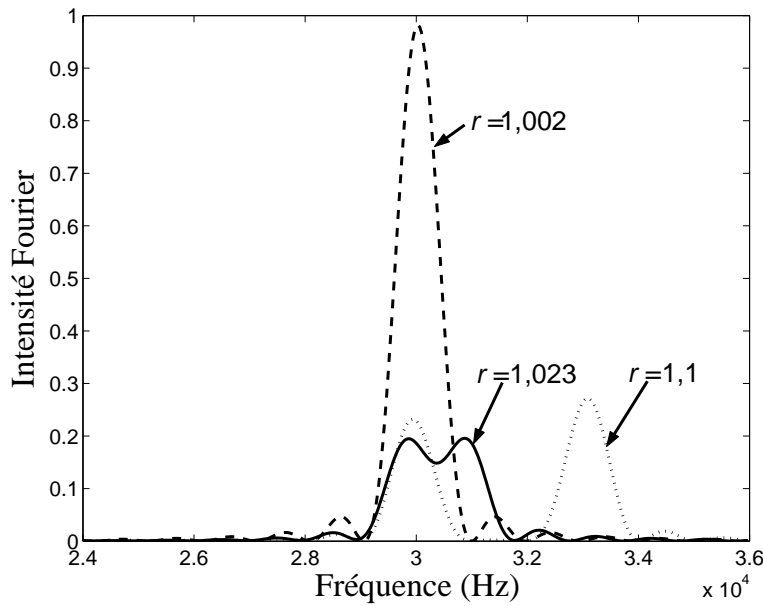


FIG. 3.27 – Spectre de la séquence de pulses autour de la fréquence fondamentale  $F_1 = 30$  kHz pour trois valeurs de  $r$  et une valeur de phase initiale  $\varphi_0 = 0$ . La résolution des contributions des deux séries (primaires et secondaire) augmente avec  $|r - 1|$ . Pour  $r = 1,002$ , les harmoniques des deux séries ne sont pas résolues, pour  $r = 1,023$ , elles le sont partiellement, et pour  $r = 1,1$ , elles le sont clairement. La fonction  $F_{1/2}$  correspond à la valeur de l'intensité pour la fréquence moyenne  $(F_1 + F_2)/2$ .

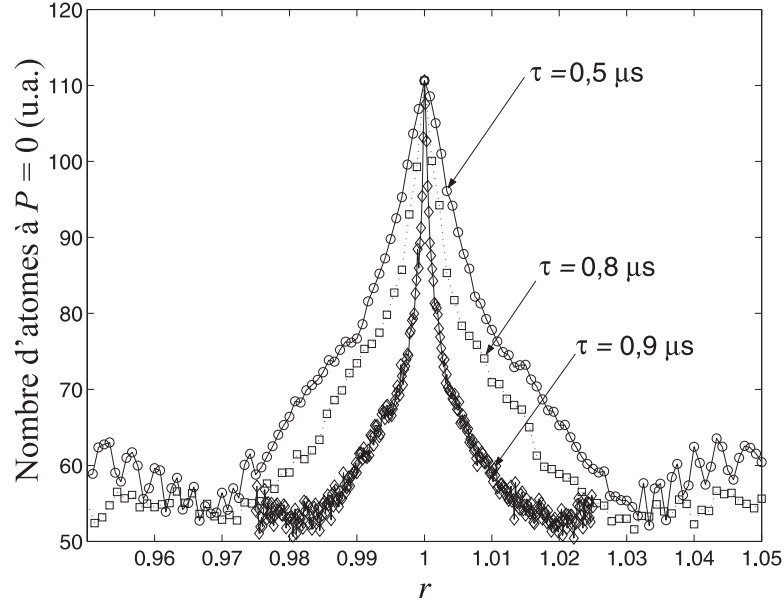


FIG. 3.28 – Raies de localisation  $r = 1$  obtenues avec différentes durées de pulse :  $\tau = 0,5 \mu s$ ,  $\tau = 0,8 \mu s$  et  $\tau = 0,9 \mu s$ , tous les autres paramètres étant égaux par ailleurs :  $n = 30$ ,  $F_1 = 36 \text{ kHz}$ ,  $\varphi_0 = 0,5$ . La largeur à mi-hauteur décroît avec la longueur des pulses (respectivement  $\Delta r = 0,014 \pm 0,002$ ,  $\Delta r = 0,0085 \pm 0,0013$ ,  $\Delta r = 0,0031 \pm 0,0004$ ). L'excitation des atomes par des harmoniques du spectre de Fourier de la séquence de pulses ne peut rendre compte de ce phénomène puisque plus  $\tau$  est grand, plus l'intensité des harmoniques élevées est faible, et donc plus les raies devraient être larges.

$1/(nT_1)$ . Afin d'apprécier quantitativement le recouvrement de ces deux pics, nous définissons une fonction  $F_{1/2}(r)$  comme le carré du module de la transformée de Fourier à la fréquence  $f = (F_1 + F_2)/2$ . Celle-ci prend une valeur maximum lorsque le recouvrement est total, et une valeur minimum lorsque les deux fréquences sont nettement différentes ; sa largeur vaut  $\Delta F_{\text{fourier}} = 1/nT_1$ . Elle peut être comparée à la raie de localisation sur un critère de mi-hauteur ( $F_{1/2}(r)$  est tracée sur la figure 3.25) en ce sens que toutes deux fournissent une résolution des deux fréquences présentes dans la séquence bicolore .

Il est établi que la largeur de la raie de localisation n'est pas limitée par le critère de Fourier, et que nous pouvons même atteindre une résolution expérimentale des dizaines de fois supérieure en utilisant la localisation dynamique plutôt que l'analyse de Fourier. Quelle en est donc l'origine ? On pourrait penser que les atomes sont excités par des harmoniques de  $F_1$  et de  $F_2$ . Bien qu'elles possèdent toutes la même largeur, la distance qui sépare les  $j^{\text{eme}}$  harmoniques de chacune des deux fréquences fondamentales est égale à  $j \times (F_2 - F_1)$ , c'est-à-dire croît avec  $j$ . La conséquence directe est qu'une fonction  $F_{j/2}(r)$  construite sur le modèle de  $F_{1/2}(r)$  (c'est-à-dire donnant le carré du module, en fonction de  $r$ , pour  $f = j \times (F_1 + F_2)/2$ ) est caractérisée par une largeur  $\Delta F_{\text{Fourier}}/j$ . L'idée serait alors d'expliquer, par exemple, la résolution fournie par la raie de localisation de la figure 3.25 par l'excitation des  $43^{\text{eme}}$  harmoniques de chaque série. Deux raisons majeures tenant au

fait que les pulses sont de durée finie invalident cette interprétation. Premièrement, la durée limitée des pulses implique que le poids des harmoniques élevées décroît selon la fonction (3.6), ce qui met en doute le fait que leur contribution puisse être dominante (l'intensité des 43<sup>ème</sup> harmoniques ne s'élèvent qu'à 2 % de l'intensité maximale). Toutefois, on pourrait imaginer que certaines harmoniques excitent de manière particulièrement forte le système à cause d'une résonance particulière. Mais le deuxième argument est radical : plus la durée des pulses augmente, plus, comme le révèlent les résultats expérimentaux, la raie de localisation est sub-Fourier (alors que l'intensité des harmoniques incriminées diminue). A titre d'exemple, sur la figure 3.28 ont été tracées trois raies de localisation obtenues avec des durées  $\tau = 0,5 \mu s$ ,  $\tau = 0,8 \mu s$  et  $\tau = 0,9 \mu s$  ; les coefficients sub-Fourier sont respectivement  $\sigma_{Fourier} = 2,3 \pm 0,3$ ,  $3,9 \pm 0,6$  et  $10,7 \pm 1,5$ . Ce résultat réfute l'interprétation mettant en cause les harmoniques. Même si celle-ci jouent possiblement un rôle, il faut chercher une autre origine. En particulier, il y a tout lieu de se demander si elle ne serait pas liée à des phénomènes d'interférence quantique. La section 3.5 est entièrement consacrée à une analyse dans ce sens.

Auparavant nous souhaitons attirer l'attention sur un point annexe à celui que nous venons de présenter, à savoir l'évolution temporelle de la largeur des raies. La figure 3.29 illustre l'évolution de la largeur  $\Delta r$  multipliée par la durée de la séquence ( $n$ ) en fonction de  $n$  pour différents paramètres  $K$  et  $\tilde{k}$ . Nous remarquons premièrement que les largeurs sont toutes sub-Fourier (comme nous l'avons vu précédemment). Deuxièmement nous nous apercevons que l'évolution de la largeur est différente d'une évolution de type Fourier, ce qui constitue un second point de divergence. Nous aurions effectivement pu nous attendre à observer des raies de largeur sub-Fourier mais dont le comportement était de type Fourier, c'est-à-dire proportionnel à  $n^{-1}$  [sur la figure, l'évolution Fourier est représentée par une droite horizontale correspondant à  $n \times (1/n)$ ]. Mathématiquement, nous aurions noté une telle évolution  $1/(n \cdot \sigma_{Fourier})$ , avec  $\sigma_{Fourier}$  fixé par les paramètres de l'expérience. Or, d'après cette figure, comme d'après nos simulations numériques, la décroissance de la largeur est plus rapide qu'en  $n^{-1}$ , du moins jusqu'au temps de localisation. Elle serait plutôt évaluée à une évolution proportionnelle à  $n^{-g}$  avec  $g \approx 2$ . Après le temps de localisation, par contre, elle revient à un comportement de type Fourier, en conservant l'avance sur la largeur Fourier qu'elle a gagnée initialement ; elle s'écrit alors

$$\Delta r = \frac{1}{n \cdot \sigma_{Fourier}}. \quad (3.7)$$

Les différences obtenues avec ces différentes fréquences primaires ne sont pas aussi importantes que ce que les simulations numériques suggèrent. Le taux de décohérence est sûrement la principale cause de ce nivellement. En effet, comme la décohérence détruit partiellement la localisation dynamique, le sommet de la raie de localisation chute au lieu de se maintenir après le temps de localisation. En conséquence, la hauteur de raie n'augmente pas avec le temps comme elle le devrait (en théorie), et les largeurs mesurées s'en trouvent faussées.

### 3.4.2 Variation du taux de diffusion

La nouvelle approche que nous présentons ici considère le taux de diffusion en fonction de  $r$ , noté  $D_{n>N_{loc}}(r)$ , qui caractérise l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$  après le temps

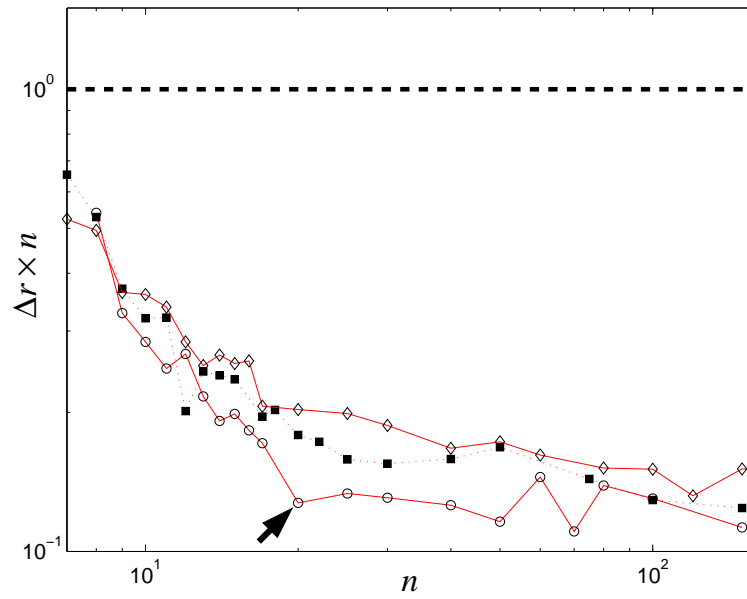


FIG. 3.29 – Evolution temporelle de  $\Delta r \times n$  pour  $F_1 = 30 \text{ kHz}$  [ $K_1 \approx 16$ ,  $k = 3,46$ ] (ronds),  $F_1 = 36 \text{ kHz}$  [ $K_1 \approx 12,8$ ,  $k = 2,89$ ] (carrés noirs) et  $F_1 = 30 \text{ kHz}$  [ $K_1 \approx 11,5$ ,  $k = 2,47$ ] (losanges) avec les paramètres communs  $\tau = 0,8 \mu\text{s}$ ,  $\delta_L/2\pi = 9,2 \text{ GHz}$  et  $\varphi_0 = 0,5$ . Dans cette présentation, la limite Fourier (multipliée par  $n$  aussi) correspond à une droite constante (trait discontinu). Avant le temps de localisation, indiqué dans le cas de  $F_1 = 30 \text{ kHz}$  par une flèche ( $N_{loc} \approx 20$ ), on observe une décroissance en  $n^{-1}$  (soit en  $n^{-2}$  pour  $\Delta r$ ) suivie par une saturation au-delà de ce temps, qui correspond, pour  $\Delta r$ , à un comportement de type Fourier. Pour les autres fréquences, la rupture est moins évidente ou peut-être plus lointaine (tous les autres paramètres expérimentaux étant égaux, le temps de localisation évolue en  $F_1^4$ ).



de localisation. Les données expérimentales présentées ici ont été obtenues indirectement : à partir de l’acquisition du maximum  $R(P = 0)$  en fonction du temps et du fond<sup>4</sup>  $R(P = -606 \text{ k})$ , nous avons déduit l’évolution approximative de  $\langle P^2 \rangle$  (en calculant pour tous les points  $[R(P = 0) - R(P = -606 \text{ k})]^{-2}$  puis en les ajustant aux valeurs réelles de  $\langle P^2 \rangle$  obtenues parallèlement par l’acquisition de quelques distributions d’impulsions).

Comme cela est visible sur la figure 3.30, le taux de diffusion initiale  $D_{n < N_{Loc}}$  dépend très peu du rapport bicolore (du moins tant que l’on reste dans un système quasi-périodique). Par contre, à partir de  $n > N_{Loc}$ , celui-ci a une influence primordiale sur l’évolution de l’énergie cinétique moyenne ; celle-ci augmente quasi-linéairement avec le temps. Par ailleurs, il apparaît clairement que plus  $r$  s’écarte de l’unité, plus le taux de diffusion croît. Le calcul de  $D_{n > N_{Loc}}(r)$  consiste à évaluer la pente au moyen d’une régression linéaire ; étant donné que la pente évolue légèrement en fonction du temps, le résultat dépend un peu de la plage de temps sur laquelle la régression est effectuée. Toutefois, quel que soit cette plage, on trouve toujours une courbe proche de celle présentée sur la figure 3.31 (régression réalisée entre  $n = 20$  et  $n = 100$ ), à savoir une courbe de forme triangulaire ; mathématiquement exprimée par

$$D_{n > N_{Loc}}(r) \propto |r - 1|. \quad (3.8)$$

Contrairement à ce qu’indique cette formule, le taux  $D_{n > N_{Loc}}(r = 1)$ , qui correspond au cas de localisation dynamique, n’est pas nul. Ceci provient des effets de décohérence qui causent une légère diffusion.

En résumé, le taux de diffusion après le temps de localisation varie proportionnellement à  $|r - 1|$ . La largeur de cette courbe dépend faiblement du temps (en fait, elle rétrécit légèrement puisque la pente de  $\langle P^2 \rangle$  augmente avec le temps). Cette caractérisation de la délocalisation est donc *grosso modo* affranchie du temps, et ne dépend plus que des paramètres  $\tilde{k}$  et  $K$ .

### 3.5 Interprétation théorique des résultats expérimentaux

Les observations expérimentales montrent sans équivoque que la raie de localisation  $r = 1$  peut être d’une largeur à mi-hauteur nettement inférieure à ce qu’un raisonnement basé sur une analyse de Fourier de la séquence de pulses prévoit. De plus, l’évolution de la largeur se distingue aussi d’une évolution de type Fourier au sens où elle n’évolue pas en raison inverse du temps écoulé. Dans cette section, nous développons une explication quantique à ces phénomènes à partir d’outils théoriques couramment répandus (distributions statistiques des quasi-énergies et de leurs anticroisements, considérations sur le caractère adiabatique de l’évolution du système, etc.). Tant que faire se peut, nous avons essayé de rendre auto-cohérent cet exposé, mais pour plus de précisions, nous renvoyons bien souvent à la littérature. Afin d’optimiser la clarté du propos, nous présentons séparément les concepts les plus usités (dans la partie Description et vocabulaire), puis fournissons une explication, à partir de ces “briques”, au caractère sub-Fourier des raies de localisation et à la forme

---

<sup>4</sup>Au sujet du fond, voir la sous-section 2.3.1.

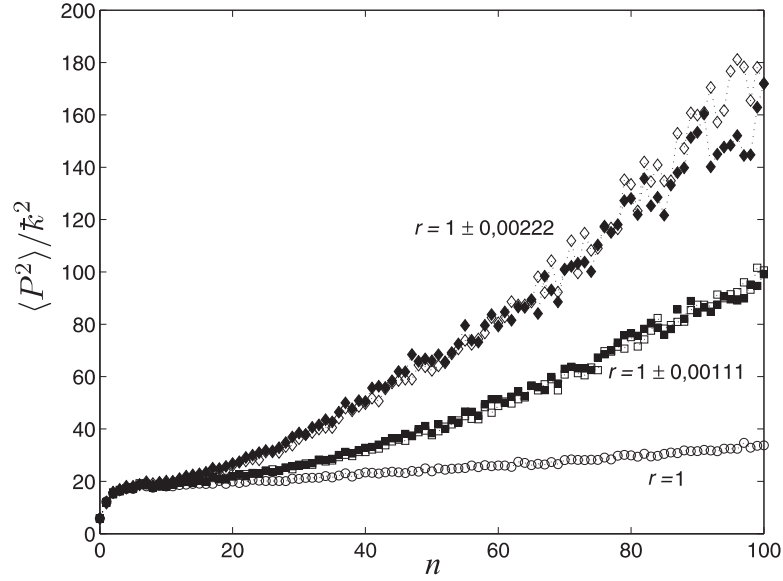


FIG. 3.30 – Evolutions temporelles de  $\langle P^2 \rangle$  obtenues expérimentalement pour quelques valeurs différentes de  $r$ .  $\langle P^2 \rangle$  a été évalué en calculant l'inverse du carré du nombre d'atomes à  $P = 0$ . Les paramètres communs aux séquences utilisées sont :  $\delta_L/2\pi = 13,4$  GHz,  $\tau = 0,8 \mu s$ ,  $F_1 = 36$  kHz,  $\varphi_0 = 0,5$ . Ainsi  $\bar{k} = 2,89$  et  $K_{1,moy} \approx 9,2$ . La diffusion qui apparaît après le temps de localisation ( $N_{loc} \approx 4$ ) est symétrique autour de  $(r - 1)$ .

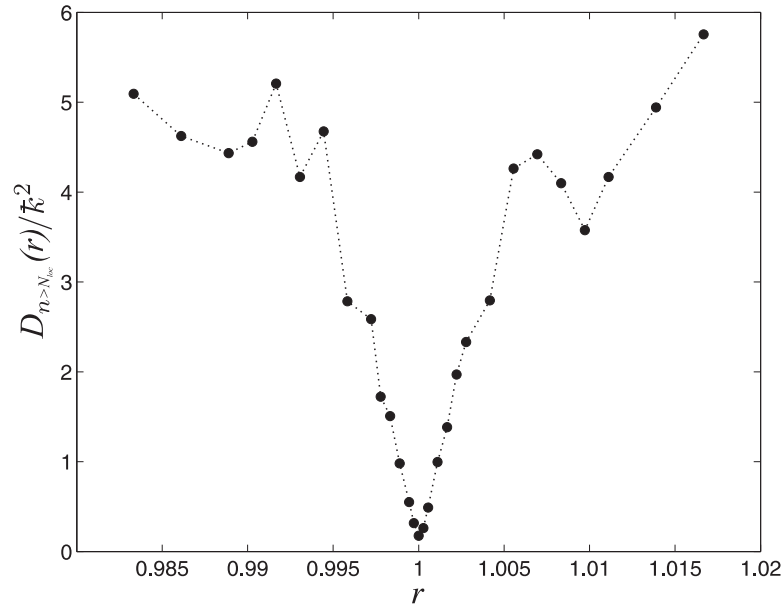


FIG. 3.31 – Dépendance expérimentale du taux de diffusion pour  $n > N_{loc}$  en fonction du rapport bicolore. La courbe a une forme triangulaire dont le minimum est proche de zéro (car pour  $r = 1$ , cas périodique, il y a localisation). Ce minimum est non-nul à cause des processus de décohérence qui maintiennent une légère diffusion. Les paramètres de la séquence de pulses sont les mêmes que ceux utilisés pour la figure 3.30.

triangulaire de l'évolution du taux de diffusion en fonction du rapport bicolore.

### 3.5.1 Description et vocabulaire

#### Spectre de quasi-énergies et méthode numérique

Nous avons vu à la sous-section 1.2.3 que l'évolution d'un système dont la série de pulses est périodique peut être prédite par le spectre de quasi-énergies de l'opérateur de Floquet [défini en (1.30)]. Pour décrire l'évolution d'un système non-périodique, l'utilisation du spectre de quasi-énergie est toujours possible, à la différence près qu'il faut considérer qu'il évolue désormais avec le temps. Dans le cas du pendule pulsé bicolore, il nous faut considérer le spectre de quasi-énergies en fonction d'un paramètre dépendant du temps qui peut être soit la phase entre les pulses primaires et secondaires, soit l'amplitude des pulses. Nous restreignons ici l'étude à la seule modulation de phase et à une situation de quasi-périodicité.

Par commodité, nous changeons la notation ; au lieu que  $\varphi_n$  définisse, comme nous l'avions fait pour le cas bicolore classique, la phase entre deux pulses ( $n$  représentant alors le nombre de pulses déjà appliqués),  $\varphi_n$  définit désormais la phase entre le pulse  $n$  de la série primaire et le pulse de la série secondaire qui le suit immédiatement<sup>5</sup> ;  $(1 - \varphi_n)$  correspond donc à la phase de propagation libre entre ce pulse de la série secondaire et un pulse  $n + 1$  de la série primaire. La phase évolue lentement car  $r$  reste très proche de 1 (nous ne nous intéressons qu'au cas quasi-périodique puisque nous cherchons à expliquer la forme de raie autour de la résonance), et il n'existe aucune situation où il viendrait à manquer un pulse secondaire entre deux pulses primaires (car la longueur totale de la séquence de pulses ne le permet pas). Notons que la phase évolue selon la formule  $\varphi_n = \varphi_0 + n(r - 1)$ .

Le calcul des quasi-énergies requiert de diagonaliser l'opérateur d'évolution instantané défini entre les pulses primaires  $n$  et  $n + 1$  (exclu). Cet opérateur, qui s'écrit

$$U(n \rightarrow n + 1) = e^{-i\frac{(\hat{P}+q)^2}{\hbar}(1-\varphi_n)} e^{i\frac{K}{\hbar} \cos \hat{\theta}} e^{-i\frac{(\hat{P}+q)^2}{\hbar}\varphi_n} e^{i\frac{K}{\hbar} \cos \hat{\theta}}, \quad (3.9)$$

est exprimé initialement dans la base des impulsions pour un jeu donné de  $K$ ,  $\hbar$ ,  $q$  et  $\varphi_n$ . La diagonalisation peut être réalisée numériquement. Les quasi-énergies et les quasi-états obtenus sont respectivement notés  $\varepsilon_j(\varphi_n)$  et  $|j(\varphi_n)\rangle$ , où  $j$  est un nombre entier compris entre 1 et la dimension de la matrice repérant chaque couple de quasi-énergie/quasi-état pour une phase précise. La valeur de  $j$  est attribuée aux quasi-énergies suivant leur ordre croissant entre  $-\pi$  et  $\pi$  (ce qui signifie que si, entre deux valeurs de phase, une quasi-énergie passe d'une valeur inférieure à une valeur supérieure à  $\pi$ , nous obtenons deux spectres quasiment identiques mais dont la numérotation est décalée ; ce point est important pour interpréter les figures dans le détail). Un résultat typique de la dépendance du spectre en fonction de la phase est présenté sur la figure 3.32 ; comme le pas est suffisamment petit sur la phase, nous voyons que les points représentant des valeurs de quasi-énergies s'alignent sur des courbes. Ces niveaux de quasi-énergies sont souvent appelées “*spaghettis*” en raison de leur forme tortueuse.

---

<sup>5</sup>Lorsque nous faisons référence à la phase comme paramètre pouvant évoluer continûment, donc sans considérer une série bicolore particulière, sans valeur de  $r$  particulière, nous la notons simplement  $\varphi$ .

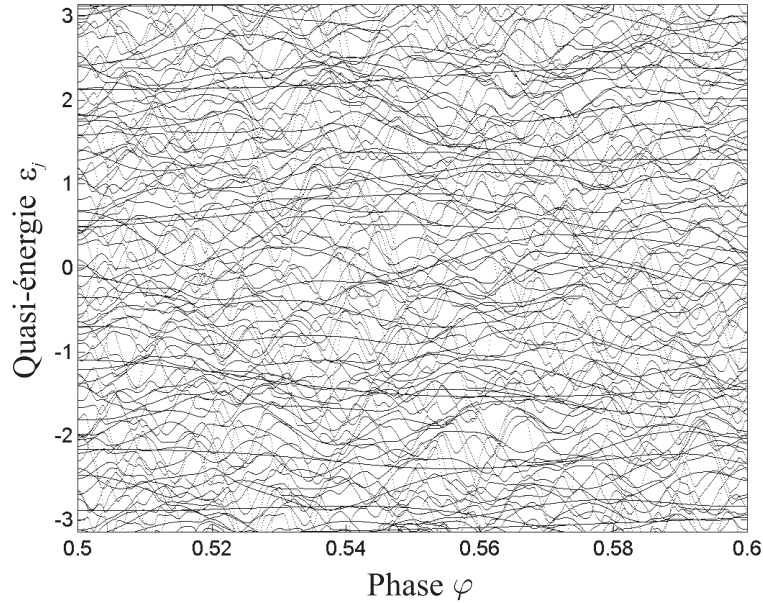


FIG. 3.32 – Exemple de spectre des quasi-énergies en fonction de la phase pour un système périodique doublement pulsé calculé pour les paramètres  $q = 0, 1$ ,  $K = 10$ ,  $k = 2, 9$ , avec un pas sur la phase de  $0,0001$  et une dimension de  $100 \times 100$  pour la matrice des opérateurs d'évolution [de forme donnée par l'expression (3.9)] .

### Anticroisements

Dans un système comme le nôtre, dépourvu de symétries, les spaghettis ne se croisent jamais. Cela à cause du fait qu'un seul paramètre varie alors qu'il faudrait, pour trouver des croisements, au moins deux paramètres variables (d'après un article de M. Wilkinson[48] évoquant des conclusions de von Neumann et Wigner). Néanmoins, les niveaux de quasi-énergies se rapprochent parfois comme s'ils allaient se croiser ; mais en lieu et place de croisements, ils s'écartent. Ces rapprochements sont appelés anticroisements et sont caractérisés par leur taille [49, 50, 51], leur pente asymptotique, ou encore leur courbure [49, 50]. Les distributions statistiques de ces caractéristiques sont souvent étudiées car elle permettent de prévoir l'évolution du système. De plus, leur forme spécifique est une signature du chaos quantique [de la même manière que la distribution des écarts d'énergie entre niveaux voisins est différente si le système est classiquement régulier (distribution poissonnienne) ou chaotique (distribution de Wigner) [52]]. En ce qui concerne notre système, nous avons besoin de connaître la distribution statistique  $[\Pi(C)]$  de la taille  $C$  des anticroisements pour établir comment évolue qualitativement notre système. Il est assez facile, moyennant quelques suppositions raisonnables, de trouver le comportement général de cette distribution. Le raisonnement est le suivant.

#### *Distribution des anticroisements*

Si l'on considère que tous les quasi-états ont *grosso modo* une distribution localisée

en double exponentielle, et un écart-type noté  $\mathcal{L}$ , alors la taille  $C$  d'un anticroisement apparaissant entre deux quasi-états ( $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ ) qui sont définis pour une valeur de  $\varphi$  prise très en avant l'anticroisement considéré est estimée proportionnelle à

$$\exp\left(-\left|\frac{P_1 - P_2}{\mathcal{L}}\right|\right), \quad (3.10)$$

où  $P_1$  et  $P_2$  sont respectivement les positions dans l'espace des impulsions où sont centrés les quasi-états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ <sup>6</sup>. De par le fait que la position des quasi-états dans l'espace des impulsions est uniformément distribué, la différence  $\chi = P_1 - P_2$  est aussi uniforme. En d'autres termes, la distribution  $\Pi(\chi)$  est supposée indépendante de  $\chi$ . Pour trouver  $\Pi(C)$ , il faut utiliser le fait que  $\Pi(C)dC = \Pi(\chi)d\chi \propto d\chi$ . A partir de l'équation (3.10), nous savons que  $\chi \propto \ln C$ , et donc que  $d\chi \propto \frac{dC}{C}$ . Par identification, nous obtenons

$$\Pi(C) \propto \frac{1}{C}. \quad (3.11)$$

La comparaison entre ce résultat et ceux que fournissent typiquement les simulations numériques est présentée sur la figure 3.33. L'accord entre les deux est bon sauf pour les très faibles valeurs de  $C$ ; ceci s'explique par le fait que, numériquement, le nombre de petits anticroisements est tronqué par la dimension finie de la matrice d'évolution. Néanmoins, on peut dire que la forme analytique donne tendanciellement la distribution numérique.

#### *Densité des anticroisements*

Par ailleurs, il semble que les anticroisements soient, toutes tailles confondues, assez régulièrement espacés en fonction de la phase. C'est ainsi que, comme l'illustre à titre d'exemple la figure 3.34, le cumul du nombre d'anticroisements ( $\mathcal{N}$ ) croît linéairement lorsque la phase est balayée dans une direction donnée. Si  $\Delta\varphi$  désigne un intervalle sur la phase, alors  $\mathcal{N} \propto \Delta\varphi$ . Et dans le cas d'une série bicolore, au bout de  $n$  pulses, donc d'un intervalle de phase  $\Delta\varphi = n|r - 1|$ , le nombre d'anticroisements rencontrés

$$\mathcal{N}(r) \propto n|r - 1|. \quad (3.12)$$

### **Forme des quasi-états en fonction de la phase**

Nous avons déjà précisé que les quasi-états ont la propriété d'être localisés dans l'espace des impulsions, mais pour établir l'évolution du système, il est primordiale de savoir comment cette localisation se modifie le long de leur spaghetti. Il apparaît qu'en absence d'anticroisements, la position d'un quasi-état dans l'espace des impulsions varie très peu en fonction de la phase, et qu'à l'inverse, à l'endroit d'un anticroisement, elle change de manière importante. C'est ce que nous pouvons

---

<sup>6</sup>Cette estimation repose sur l'hypothèse clé que le couplage qui lève la dégénérescence des niveaux de quasi-énergie est "local" dans la base des états d'impulsion. Plus précisément, l'opérateur de perturbation ( $\hat{V}$ ) à l'origine de l'élément de matrice qui couple deux quasi-états lorsque la phase change est supposé typiquement s'écrire avec des opérateurs  $\hat{P}^2$  et  $\cos(\theta)$ , qui sont tous deux "locaux" dans la base  $|P\rangle$ . Ainsi, en prenant les états  $|\langle P|1\rangle| \propto \exp(-|P_1 - P|/2\mathcal{L})$  et  $|\langle P|2\rangle| \propto \exp(-|P_2 - P|/2\mathcal{L})$ , et en oubliant les effets d'interférence entre les composantes de  $|P\rangle$  et en supposant que tous les termes s'ajoutent, l'élément de matrice  $\langle 1|\hat{V}|2\rangle$  s'écrit, à quelques corrections algébriques près, du genre  $\langle 1|P^2|1\rangle$  ou  $\langle 2|P^2|2\rangle$ , comme l'expression (3.10).

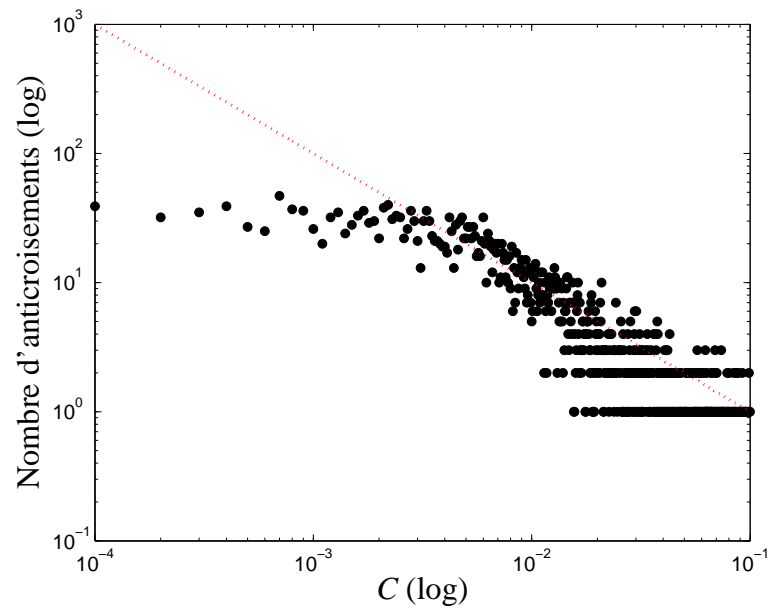


FIG. 3.33 – Distribution de la taille d'anticroisements ( $C$ ) établie par simulation numérique (ronds) comparée à la statistique  $\Pi(C) \propto 1/C$  (pointillés). Les unités sur l'axe des ordonnées représentent le nombre d'anticroisements trouvés dans une région de  $\varphi$  comprise entre 0,5 et 0,6 pour le spectre de la figure 3.32. A petite taille, les tendances ne correspondent pas à cause de la dimension limitée de la matrice ( $100 \times 100$ ) qui a été utilisée pour représenter l'opérateur d'évolution.

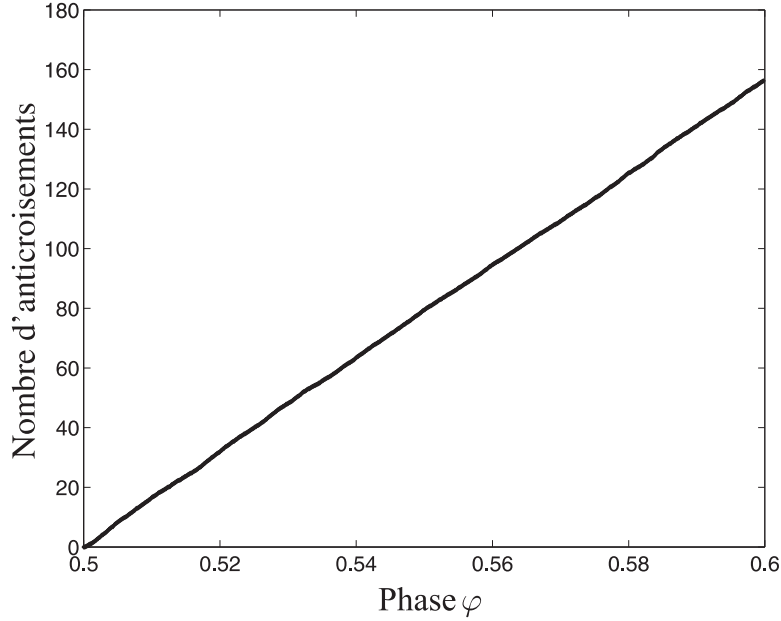


FIG. 3.34 – Cumul moyen d'anticroisements rencontrés par spaghetti en balayant la phase à partir de  $\varphi = 0,5$  jusqu'à  $0,6$  [le nombre d'anticroisements obtenu par simulation numérique dépend de la dimension de la matrice de l'opérateur d'évolution (ici  $100 \times 100$ ) et du pas sur la phase]. La progression linéaire indique que les anticroisements se répartissent de façon homogène sur  $\varphi$ .

constater sur l'exemple de la figure 3.35 où l'évolution d'un quasi-état en fonction de la phase est associée à l'évolution de sa quasi-énergie. Il est nettement visible que le maximum de probabilité du quasi-état reste localisé au même endroit tant qu'il est situé entre deux anticroisements et que ce maximum se décale de part et d'autre des anticroisements [53] (par exemple, sur la figure 3.35, pour  $0,502 \leq \varphi \leq 0,503$ , trois anticroisements provoquent trois sauts du maximum de probabilité dans l'espace des impulsions). Il est intéressant, de plus, de remarquer graphiquement que, plus la taille de l'anticroisement est petite, plus la variation sur la position dans l'espace des impulsions est importante. Ce qui tend à confirmer ce qu'exprime (3.10).

### 3.5.2 Dynamique d'un état initial

Avant de décrire l'évolution du système dans son intégralité, nous passons en revue les dynamiques typiques auxquelles un quasi-état est éventuellement soumis. Pour cela, nous considérons un état initial  $|\Psi_0\rangle$  qui, après l'application d'une séquence bicolore, a évolué sous l'action de l'opérateur d'évolution total correspondant au produit

$$\prod_{n=0}^{N_1-1} U(n \rightarrow n+1). \quad (3.13)$$

Un calcul de l'évolution de  $|\Psi_0\rangle$  requiert donc que soient déterminés toutes les quasi-énergies et tous les quasi-états de chaque phase  $\varphi_n$ . Les questions qui se posent

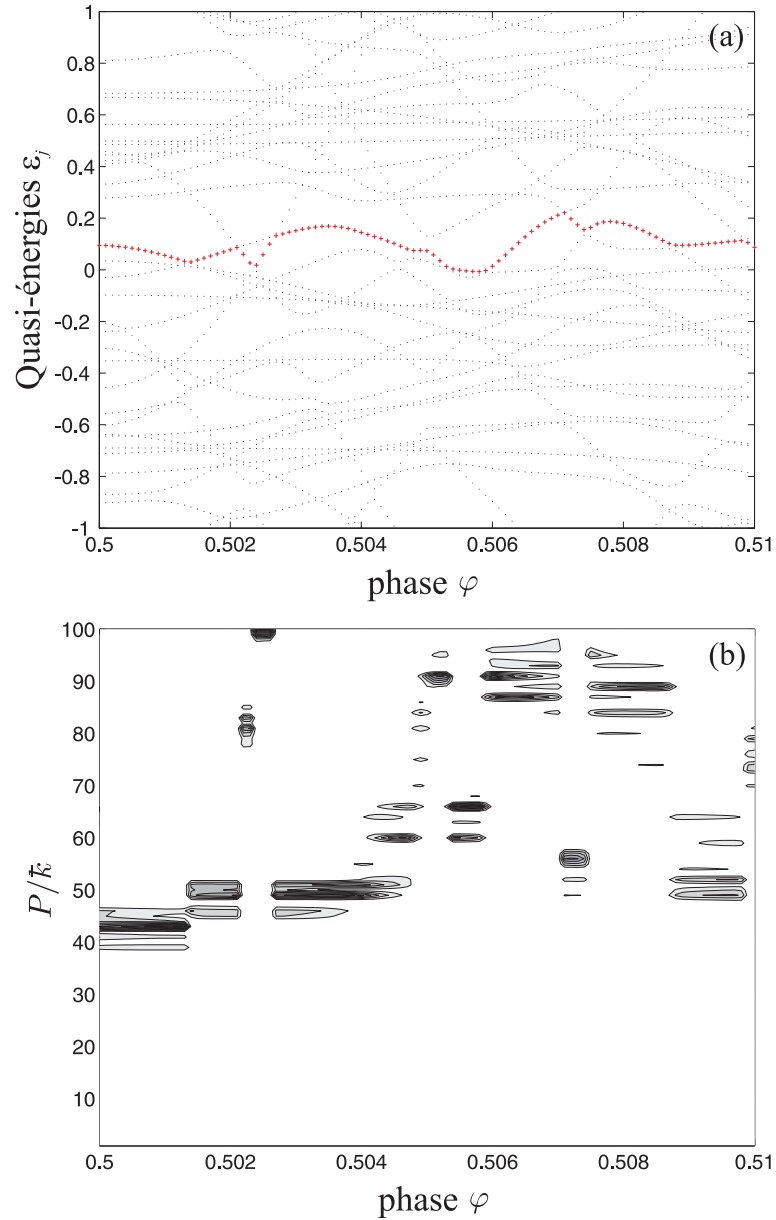


FIG. 3.35 – Correspondance entre l'évolution adiabatique d'un quasi-état [les niveaux de gris en indiquent la probabilité de présence en fonction de l'impulsion et de la phase sur la figure (b)] et celle d'une quasi-énergie [indiquée par des croix sur la figure (a)]. Les paramètres de la simulation numérique sont les mêmes que ceux de la figure 3.32.



désormais sont les suivantes : comment cet état va-t-il se décomposer sur les bases évolutives ? Quelle est l'influence de la vitesse de balayage sur cette décomposition ? Et, enfin et surtout, comment cela se traduit-il en représentation d'impulsion ?

Afin de simplifier la discussion, nous supposons que  $|\Psi_0\rangle$  est préparé dans un seul quasi-état de  $U(\varphi_0)$ ,  $|j(\varphi_0)\rangle$ , avec une quasi-énergie  $\varepsilon_{j_0}(\varphi_0)$ . La dynamique de cet état initial va dépendre de l'allure du spectre sur l'intervalle de phase qui va être balayé, ce qui se résume à deux types d'évolution.

Le premier correspond au cas où le spaghetti lié à la quasi-énergie  $\varepsilon_{j_0}(\varphi_0)$  reste loin des autres spaghettis, n'anticroise nullement. Dans ce cas, la décomposition dans les bases  $|j(\varphi_n)\rangle$  ne s'effectue que sur les quasi-états du spaghetti initial. Ce type d'évolution, dite *adiabatique*, se traduit par une déformation très lente de la fonction d'onde (ou du quasi-état) – et donc de la distribution d'impulsions. De manière plus générale, lorsqu'une fonction d'onde est composée de plusieurs quasi-états, les probabilités associées à leur spaghetti respectif ne varient quasiment pas tant que ces derniers n'anticroisent pas.

Le second correspond au passage d'un anticroisement. En considérant toujours que le spaghetti (appelé  $j_0$ ), auquel est relié l'état  $|j(\varphi_0)\rangle$ , anticroise avec un autre spaghetti, par exemple juste au-dessus (que l'on peut appeler  $j_0+1$  pour faire simple), on assiste à un phénomène de transfert de population de  $j_0$  vers  $j_0 + 1$ . Lorsque l'anticroisement est dépassé, l'état est alors une combinaison linéaire des deux quasi-états correspondant à ces spaghettis. L'importance de ce transfert dépend de la taille de l'anticroisement ( $C$ ), de la pente des quasi-énergies, et de la vitesse de balayage de la phase ( $r-1$ ). Si le transfert est nul, on parle de passage adiabatique ; s'il est total, de passage diabatique ; et s'il est partiel, de passage non-adiabatique. La formule de Landau-Zener [54, 55] donne quantitativement les probabilités de transfert en fonction des paramètres précédemment cités. Cette formule n'est valable que si deux niveaux sont concernés (et si seul l'un des deux quasi-états est initialement peuplé), mais il faut savoir que les anticroisements à deux niveaux sont les plus fréquents comparativement aux anticroisements dits “multiples” [56].

### La formule de Landau-Zener

Les probabilités de transfert entre les niveaux a fourni matière à un travail fructueux, et à une littérature non moins importante. Nous proposons de décrire – avec les notations qui sont les nôtres – ce à quoi se réfèrent ces probabilités, et quels sont les paramètres qui agissent sur celles-ci. De plus, nous accompagnons cette description d'illustrations tirées du système bicolore modulé en phase.

Le système est réduit à deux niveaux de quasi-énergies, deux spaghettis, notés 1 et 2 [constitués respectivement des quasi-énergies  $\varepsilon_1(\varphi)$  et  $\varepsilon_2(\varphi)$ ], se croisant en la valeur de phase  $\varphi_0$  (comme ceux mis en valeur sur la figure 3.36). Les quasi-états respectifs sont appelés  $|1(\varphi)\rangle$  et  $|2(\varphi)\rangle$ . Si l'on considère que les interactions avec les autres niveaux sont faibles, nous pouvons réduire notre système à un système à deux niveaux dans les bases “gelées”, c'est-à-dire considérant la phase comme un paramètre indépendant du temps. Les quasi-états, pour différentes  $\varphi_0$ , peuvent donc être exprimés comme des combinaisons linéaires de  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , les quasi-états “faiblement perturbés” tels qu'ils apparaissent quand le couplage est très faible, c'est-à-dire loin de l'anticroisement (sans aller toutefois jusqu'à rencontrer un autre anticroisement).

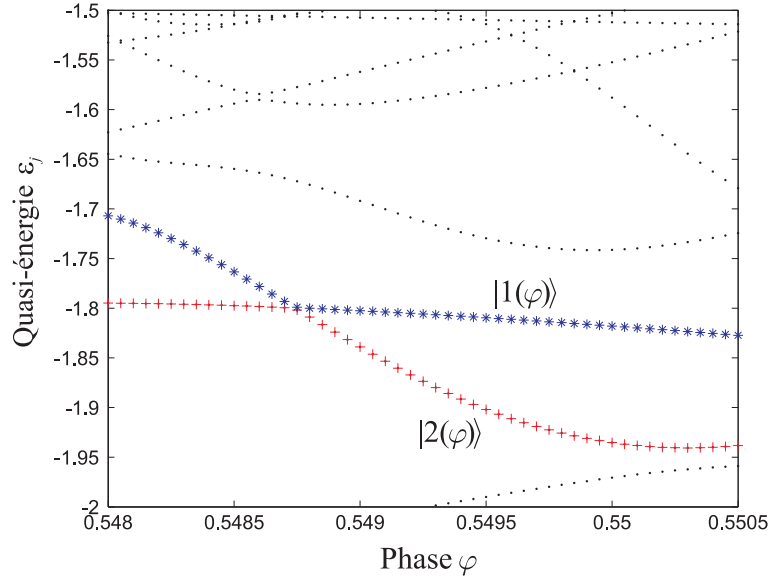


FIG. 3.36 – Exemple d'anticroisement tiré du spectre de la figure 3.32, à la différence près que le pas sur la phase est ici de 0,00002. Les deux spaghetti  $|1(\varphi)\rangle$  et  $|2(\varphi)\rangle$  sont marqués par des symboles différents (croix et astérisques). Les distributions de probabilité dans l'espace des impulsions des quasi-états correspondants sont sur la figure 3.37.

La figure 3.37 montre que les quasi-états définis *asymptotiquement* s'échangent aux niveaux des anticroisements :  $|1(\varphi)\rangle$  passe de  $|1\rangle$  à  $|2\rangle$ , et  $|2(\varphi)\rangle$  passe de  $|2\rangle$  à  $-|1\rangle$ .

La formule de Landau-Zener stipule que, si un état  $|\Psi_n\rangle = a_1(n)|1\rangle + a_2(n)|2\rangle$  a pour valeurs initiales  $|a_1(n_i)| = 1$  et  $|a_2(n_i)| = 0$  bien avant l'anticroisement, alors, après un temps  $n_f$  suffisant pour le traverser, la distribution de probabilité sur  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  est la suivante :

$$\begin{aligned} |a_1(n_f)|^2 &= \Pi_{Zener}, \\ |a_2(n_f)|^2 &= 1 - \Pi_{Zener}, \end{aligned} \quad (3.14)$$

avec

$$\Pi_{Zener} = \exp \left[ -\frac{\pi C^2}{2 \left| \frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{dn} \right|} \right], \quad (3.15)$$

où la dérivée des quasi-énergies par rapport aux temps  $n$  est prise loin de l'anticroisement (pente asymptotique). Adaptant cette formule à notre système, et supposant qu'elle reste valable bien que le temps soit discrétisé, c'est-à-dire considérant que

$$\left| \frac{d(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{dn} \right| \approx \left| \frac{\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\Delta\varphi} \right| |r - 1|, \quad (3.16)$$

on obtient, au final, la formule suivante :

$$\Pi_{Zener} = \exp \left( -\frac{\pi C^2}{2 \left| \frac{\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\Delta\varphi} \right| \cdot |r - 1|} \right). \quad (3.17)$$

Trois types de comportement sont distingués :

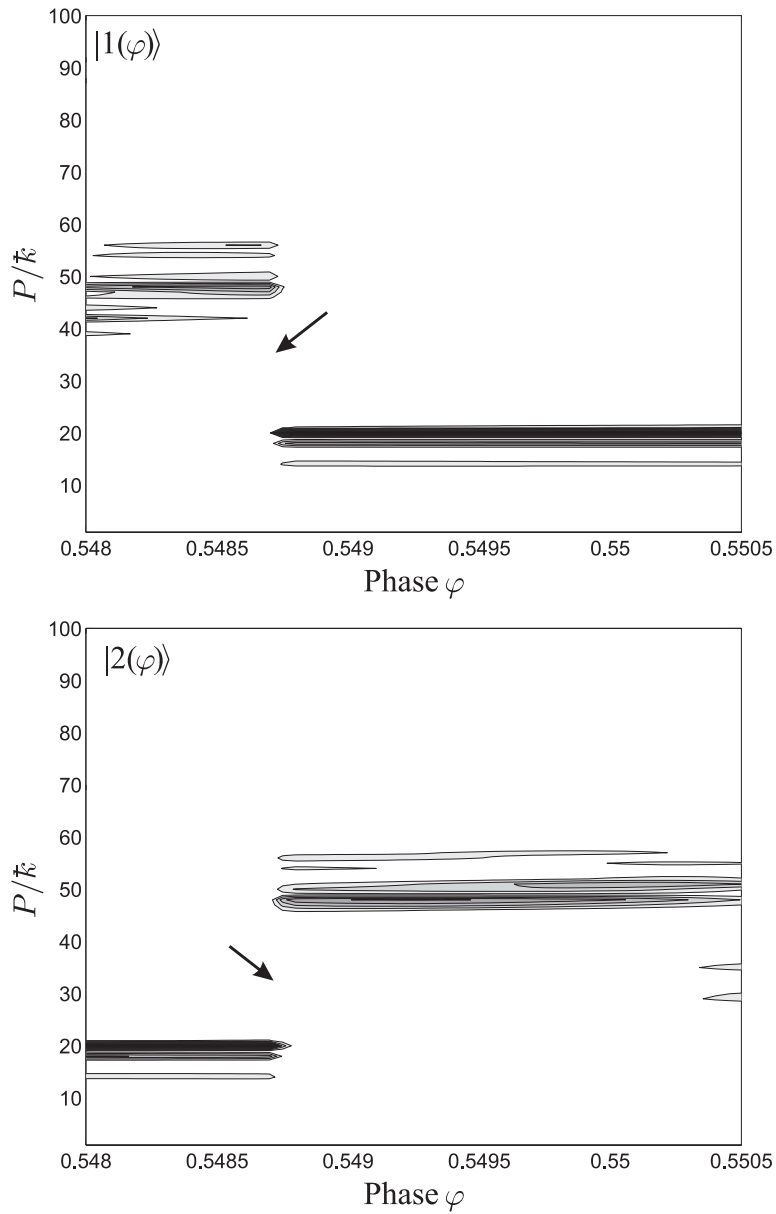


FIG. 3.37 – Distributions de probabilité  $|\langle P|2(\varphi)\rangle|^2$  (figure du bas) et  $|\langle P|1(\varphi)\rangle|^2$  (figure du haut) représentées en niveaux de gris en fonction de la phase. Le spectre de quasi-énergie correspondant est représenté sur la figure 3.36 ; les flèches indiquent le lieu de leur anticroisement.

- $\Pi_{zener} \rightarrow 0$  qui implique que la totalité de la population reste sur le spaghetti  $\varepsilon_1(\varphi)$  avec, en parallèle, une modification continue du quasi-état de  $|1\rangle$  vers  $|2\rangle$ ; il s'agit d'un passage adiabatique. La distribution de probabilité  $|\langle P|\Psi_n\rangle|^2$  change sensiblement car  $|1\rangle$  est généralement localisé loin de  $|2\rangle$ ;
- $\Pi_{zener} \rightarrow 1$  qui implique que la population se transfère complètement du spaghetti  $\varepsilon_1(\varphi)$  au spaghetti  $\varepsilon_2(\varphi)$  : ceci ne provoque aucun changement majeur sur  $|\langle P|\Psi_n\rangle|^2$ . Le passage est diabatique;
- Le cas intermédiaire  $0 < \Pi_{zener} < 1$  qui ramifie la population dans les deux spaghettis. La distribution de probabilité  $|\langle P|\Psi_n\rangle|^2$  correspond à une somme pondérée des distributions de probabilité  $|\langle P|1\rangle|^2$  et  $|\langle P|2\rangle|^2$ . Dans ce cas, le passage est dit non-adiabatique.

L'interprétation physique de ce phénomène de transfert repose sur le rapport de largeur des niveaux à la taille de l'anticroisement. La largeur des niveaux est, selon l'inégalité de Heisenberg, inversement proportionnelle à un temps caractéristique lié au déplacement sur les spaghettis [d'où les termes de dérivées au dénominateur de (3.17)]. *In fine*, si la distance  $C$  entre les spaghettis est du même ordre de grandeur que leur largeur, les deux spaghettis sont comme confondus à l'endroit même du croisement, ce qui rend le transfert de population possible.

Enfin, à partir de ce qui a été établi précédemment, nous pouvons définir une valeur caractéristique de  $C$ , noté  $C_c$ , représentant grossièrement la taille d'un anticroisement traversé non-adiabatiquement ( $\Pi_{zener} = 0,5$ ) :

$$C_{na}(r) = \sqrt{\frac{2 \ln 2}{\pi} \left\langle \left| \frac{\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\Delta\varphi} \right| \right\rangle |r - 1|}, \quad (3.18)$$

où l'on a introduit la moyenne sur la différence des pentes des niveaux,  $\left\langle \left| \frac{\Delta(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)}{\Delta\varphi} \right| \right\rangle$  (sauf au niveau des anticroisements). Cette formule stipule que, pour  $r$  donné, si l'anticroisement à traverser a une taille  $C \gg C_{na}(r)$ , alors le passage est adiabatique, et inversement il est diabatique si  $C \ll C_{na}(r)$ . La figure 3.38 résume ces propos.

### Evolution du nombre d'anticroisements traversés adiabatiquement

Connaissant désormais la forme de la distribution des anticroisements ( $\Pi(C) \propto C^{-1}$ ), leur nombre en fonction de la phase balayée ( $\propto n|r - 1|$ ) et la dépendance de  $C_{na}$  à  $r$ , il est possible, pour une série de pulses de durée  $n$ , d'estimer comment varie le nombre d'anticroisements  $\mathcal{N}_{C > C_{na}}(r, n)$  traversés adiabatiquement en fonction de  $r$ . Il est important de connaître cette variation pour évaluer la dynamique du système quasi-périodique car ce sont les passages adiabatiques qui contribuent majoritairement à modifier la distribution d'impulsions. Etant entendu qu'il n'existe pas de frontière nette entre les différents types de passage d'anticroisements, le nombre d'anticroisements traversés adiabatiquement est évalué sur la base d'un critère qui est, ici, que leur taille soit supérieure à  $C_c$ . Ce cadre posé, il apparaît que deux tendances opposées agissent sur l'évolution  $\mathcal{N}_{C > C_{na}}(r, n)$  en fonction de  $r$ .

D'un côté, selon la formule (3.12), le nombre total  $\mathcal{N}(r, n)$  d'anticroisements qui est proportionnel à l'intervalle de phase balayée, et donc à  $n|r - 1|$ .

D'un autre côté, la proportion d'anticroisements traversés adiabatiquement qui

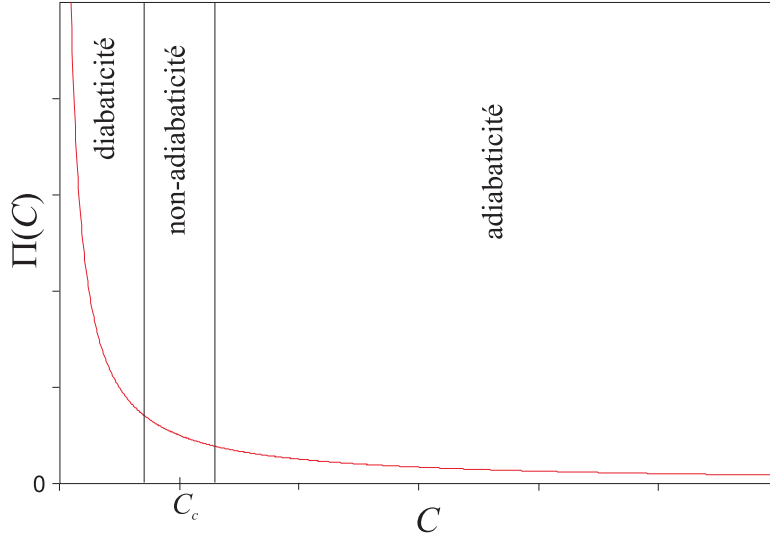


FIG. 3.38 – Schéma représentant la distribution  $\Pi(C)$  et les zones de  $C$  correspondant aux trois types de passages (diabatique, non-adiabatique, adiabatique) pour une valeur  $C_{na}$  donnée. Les traits verticaux font office de frontières entre ces comportements [on peut les définir au moyen d'un seuil  $S$  de probabilité de maintien ( $\Pi_{zener} < S$ ) et de dépeuplement [ $\Pi_{zener} > (1 - S)$ ] des quasi-états portés par le spaghetti initial]. En réalité, le changement de dynamique de la population des quasi-états est continu (formule de Landau-Zener) : un passage d'anticroisement ne peut que tendre à être adiabatique ou diabatique.

s'écrit

$$\frac{\mathcal{N}_{C > C_{na}}(r, n)}{\mathcal{N}(r, n)} \propto \int_{C_{na}(r)}^{C_{max}} \frac{dC}{C}, \quad (3.19)$$

avec  $C_{na}(r)$  proportionnelle à  $\sqrt{|r - 1|}$  [voir équation (3.18)] et avec  $C_{max}$  la plus grande taille d'anticroisement du spectre de Floquet. Une proportion qui diminue donc en  $\ln(|r - 1|)$ .

En première approximation, nous négligeons la dépendance logarithmique de la proportion d'anticroisements traversés adiabatiquement, et considérons que cette proportion est quasiment constante pour  $|r - 1|$  petit (quasi-périodicité), si bien que le nombre de croisements traversés adiabatiquement, pour une séquence de  $n$  pulses, de rapport bicolore  $r$ , croît proportionnellement avec l'intervalle de la phase balayée, soit

$$\mathcal{N}_{C > C_{na}}(r, n) \propto n|r - 1|. \quad (3.20)$$

### Décomposition spectrale en fonction de $r$ .

Pour illustrer l'impact de la valeur de  $r$  sur les transferts de populations entre spaghettis, nous présentons quelques figures issues de simulations numériques. Celles-ci montrent l'évolution d'un état initial composé d'un seul quasi-état que l'on soumet à l'action de l'opérateur (3.13). Les quatre diagrammes représentent des décompositions de l'état initial sur les bases de quasi-état correspondant à la phase  $\varphi_n$  pour différentes valeurs de  $r$ . La côte indique la probabilité qu'au temps  $n$  le système soit

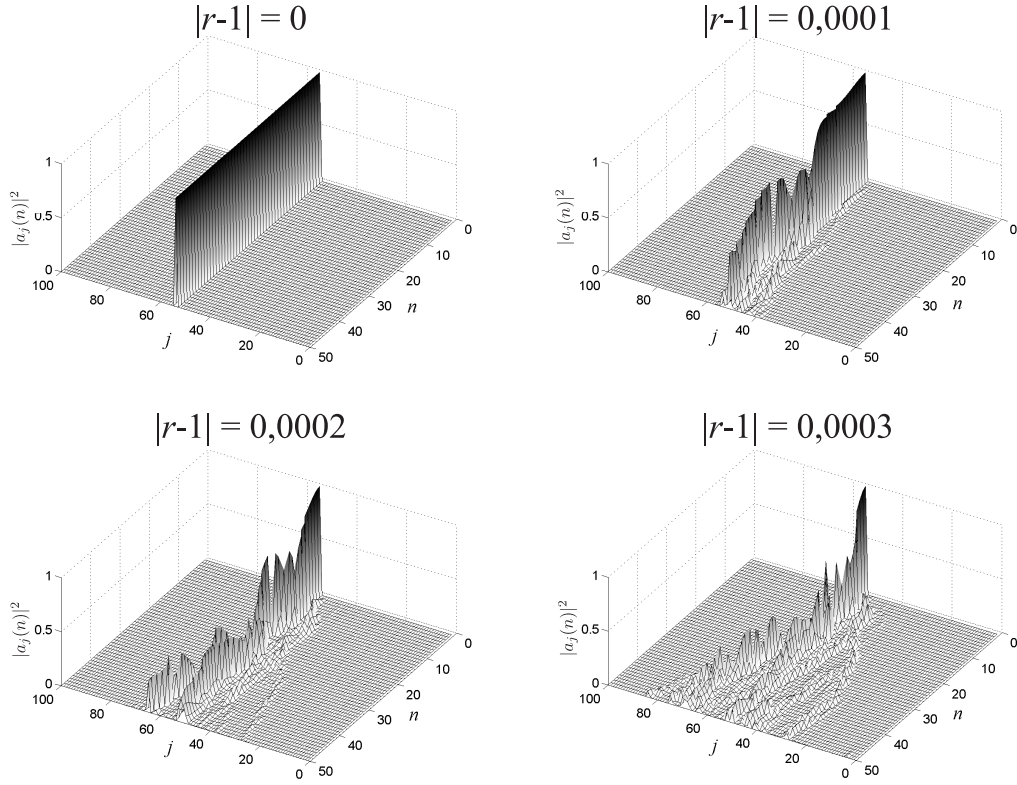


FIG. 3.39 – Différentes décompositions d'un état initial préparé dans un seul quasi-état pour différentes vitesses  $|r-1|$  dans le cas où  $K = 10$  et  $k = 2, 9$ . Plus  $|r-1|$  est grand, plus nombreux sont les niveaux de quasi-énergie peuplés (à cause des passages non-adiabatique).

dans le quasi-état  $|j(\varphi_n)\rangle$ ; il apparaît que plus la vitesse de balayage de la phase  $|r-1|$  augmente, plus la décomposition est importante, ce qui signifie que le nombre de passages non-adiabatiques croît avec  $|r-1|$ . Ceci pourrait sembler contradictoire avec ce qu'affirme l'expression (3.20). Il ne faut en fait pas considérer que l'augmentation du nombre de passages adiabatiques en fonction de  $|r-1|$  a pour corollaire la diminution du nombre de passages non-adiabatiques. Par exemple, avec  $|r-1|$  croissant, la proportion de passages adiabatiques chute mais leur quantité augmente. La proportion et la quantité de passage d'un type donné sont des éléments essentiels à distinguer pour comprendre la dynamique du système.

### 3.5.3 Interprétation des résultats

Nous passons maintenant à l'interprétation des résultats expérimentaux. La fonction d'onde initiale  $\langle P|\Psi_0\rangle$ , large de quelques unités d'impulsion réduite, est soumise à  $n$  pulses d'une série bicolore. Pour rendre compte de l'action d'une série complète, nous utilisons les opérateurs d'évolution 3.9 agencés selon le produit 3.13, et en particulier leurs états propres, les quasi-états  $|j(\varphi_n)\rangle$ . L'état initial  $|\Psi_0\rangle$  peut être décomposé sur la base des quasi-états  $|j(\varphi_0)\rangle$ , avec les poids  $a_j(n=0) = |\langle j(\varphi_0)|\Psi_0\rangle|^2$ , puis, pulse après pulse, sur les bases  $|j(\varphi_n)\rangle$ . Pour les mêmes raisons que dans le cas

monocolore (voir sous-section 1.2.3), l'expression de l'évolution de la largeur

$$\langle \Psi_n | \hat{P}^2 | \Psi_n \rangle = \sum_{j,k} a_k^*(n) a_j(n) e^{-in(\varepsilon_j(\varphi_n) - \varepsilon_k(\varphi_n))} \langle k(\varphi_n) | \hat{P}^2 | k(\varphi_n) \rangle, \quad (3.21)$$

se simplifie lorsque les cohérences, après un certain temps (qui correspond au “temps de localisation” dans le cas monocolore), ont fini par disparaître à cause des termes  $k \neq j$  ayant interférés destructivement. Ce qui donne

$$\langle \Psi_n | \hat{P}^2 | \Psi_n \rangle \approx \sum_j |a_j(n)|^2 \langle j(\varphi_n) | \hat{P}^2 | j(\varphi_n) \rangle. \quad (3.22)$$

Si l'on fait ensuite l'approximation d'adiabaticité parfaite, c'est-à-dire si la valeur  $|r - 1|$  est suffisamment petite pour que les poids  $|a_j(n)|^2$  restent constants en parcourant les spaghettis (aucun transfert de population au niveau des anticroisements), alors on peut réécrire l'équation (3.22) sous la forme

$$\langle \Psi_n | \hat{P}^2 | \Psi_n \rangle \approx \sum_j |a_j(0)|^2 \langle j(\varphi_n) | \hat{P}^2 | j(\varphi_n) \rangle, \quad (3.23)$$

Ce maintien des poids est corrélatif de l'élargissement de la distribution d'impulsions. En effet, puisque la moyenne sur l'impulsion des quasi-états d'un spaghetti change fortement au niveau des anticroisements, leur traversée a pour effet moyen d'élargir la distribution initialement concentrée sur  $P = 0$  (<sup>7</sup>). Quant aux anticroisements traversés adiabatiquement – qui existent nécessairement si l'on se réfère à la forme de la distribution  $\Pi(C)$  –, ils ne produisent aucun effet de délocalisation, puisqu'après leur traversée, il y a changement de niveau de quasi-énergie mais surtout maintien de l'impulsion moyenne. Nous concluons donc que l'élargissement correspond approximativement au nombre d'anticroisements traversés adiabatiquement, résultat très simple et très pratique pour interpréter les comportements expérimentaux de la distribution d'impulsions.

### Caractère sub-Fourier

Nous nous intéressons tout d'abord à ce qui détermine la largeur ( $\Delta r$ ) des raies de localisation. La largeur peut être estimée par la distance  $\Delta\varphi_c$  pour laquelle un quasi-état  $|j(\varphi_n)\rangle$  s'est, en moyenne, délocalisé par rapport au quasi-état  $|j(\varphi_0)\rangle$  peuplé par la distribution d'impulsions initiale ; c'est-à-dire pour qu'un premier anticroisement soit traversé autrement que adiabatiquement (ou non-adiabatiquement). Ceci est réalisé pour une valeur de  $|r - 1| = \Delta r/2$  telle que

$$n \frac{\Delta r}{2} = \Delta\varphi_c. \quad (3.24)$$

La taille de  $\Delta\varphi_c$  dépend de la dynamique classique du système. Si celle-ci est régulière, les quasi-états changent lentement en fonction de  $\varphi$ , et il faut donc que la phase évolue sur une distance  $\Delta\varphi_c \approx 1$  pour qu'ils changent significativement ; dans

<sup>7</sup>A noter que les anticroisements traversés non-adiabatiquement jouent aussi, avec moins d'efficacité, un rôle dans la délocalisation.

ce cas,  $\Delta r \approx 1/n$  correspond à la limite Fourier. Par contre, dans le cas d'un dynamique classiquement chaotique, le spectre de Floquet montre une grande quantité d'anticroisements, conduisant à ce que la distance  $\Delta\varphi_c$  soit plus petite – voire bien plus petite – que l'unité (dépend de  $K$  et de  $\tilde{k}$ ). Nous observons alors que la largeur est plus petite que la limite Fourier d'un facteur

$$\sigma_{Fourier} \approx \frac{1}{2\Delta\varphi_c}. \quad (3.25)$$

Il est possible d'estimer directement  $\Delta\varphi_c$  par une inspection visuelle d'un spectre de Floquet dont les quasi-énergies sont tracées si le recouvrement entre les quasi-états et la distribution initiale est significatif (car la délocalisation dépend des quasi-états initiaux peuplés significativement), c'est-à-dire si  $|\langle j(\varphi_0) | \Psi_0 \rangle|^2 > \mathcal{S}$ , où  $\mathcal{S}$  est un seuil fixé. Ce seuil définit implicitement une taille minimum d'anticroisement pour laquelle les passages se font (non-)adiabaticquement. Le choix du seuil n'affecte le nombre d'anticroisements visibles que par un facteur logarithmique (à cause de la forme de distribution de  $C$ ), ce qui n'introduit pas trop d'erreurs dans l'évaluation de  $\Delta\varphi_c$ . Par contre, la non-prise en compte de la durée des pulses dans le calcul des quasi-énergies conduit à des erreurs sur  $\Delta\varphi_c$  d'un facteur 5 environ. Cette méthode a été appliquée et comparée avec les résultats expérimentaux. Nous prenons, pour l'exemple, une raie de localisation expérimentale obtenue à un temps  $n = 50$  avec les paramètres estimés  $K_{1,moy} \approx 10$  et  $\tilde{k} = 2,89$  [voir figure 3.40(a)]. La largeur de cette raie vaut  $\Delta r = 0,003$ , ce qui signifie, pour  $n = 50$ , que  $\sigma_{Fourier} \approx 6,7$ . D'un autre côté, la figure 3.40(b) montre, pour les mêmes paramètres que ceux de l'expérience, le spectre des quasi-énergies qui sont peuplés significativement par la distribution d'impulsions initiale (la durée des pulses est prise en compte). Le résultat de l'inspection visuelle donne  $\Delta\varphi_c \approx 0,05$ , et donc  $\sigma_{Fourier} \approx 10$ , qui est une valeur légèrement différente du coefficient sub-Fourier expérimental. Deux raisons peuvent expliquer le facteur 1,5 qui les sépare : premièrement, nous avons fait l'approximation que les passages d'anticroisements adiabatiques vidait complètement la classe d'impulsion  $P = 0$ , ce qui est sûrement surestimé ; deuxièmement, le système expérimental diffère de celui considéré pour tracer le spectre de Floquet [expérimentalement,  $K$  est inhomogène, et il y a de l'émission spontanée (voir section 2.3)].

### Evolution de $\langle P^2 \rangle$ et taux de diffusion.

L'équation (3.23) et la rapide analyse que nous avons développé nous a indiqué que  $\langle P^2 \rangle$  croît avec  $n$ . Pour savoir comment, nous continuons de considérer que ce sont surtout les passages adiabatiques qui font la délocalisation. Le nombre d'anticroisement traversés adiabaticquement pour une séquence de durée  $n$  et de rapport bicolore  $r$  [ $\mathcal{N}_{C>C_{na}}(n, r) \propto n|r - 1|$ ] détermine donc la croissance de  $\langle P^2 \rangle$ . En première approximation, nous pouvons donc écrire

$$(\langle P_n^2 \rangle - \langle P_0^2 \rangle) \propto n|r - 1| \quad (3.26)$$

qui permet de retrouver deux résultats expérimentaux. Le premier est la croissance linéaire de l'énergie cinétique moyenne [ $(\langle P_n^2 \rangle - \langle P_0^2 \rangle)$ ] en fonction du temps, ce qui est bien ce que l'on a constaté expérimentalement dans la section 3.4.2 (voir



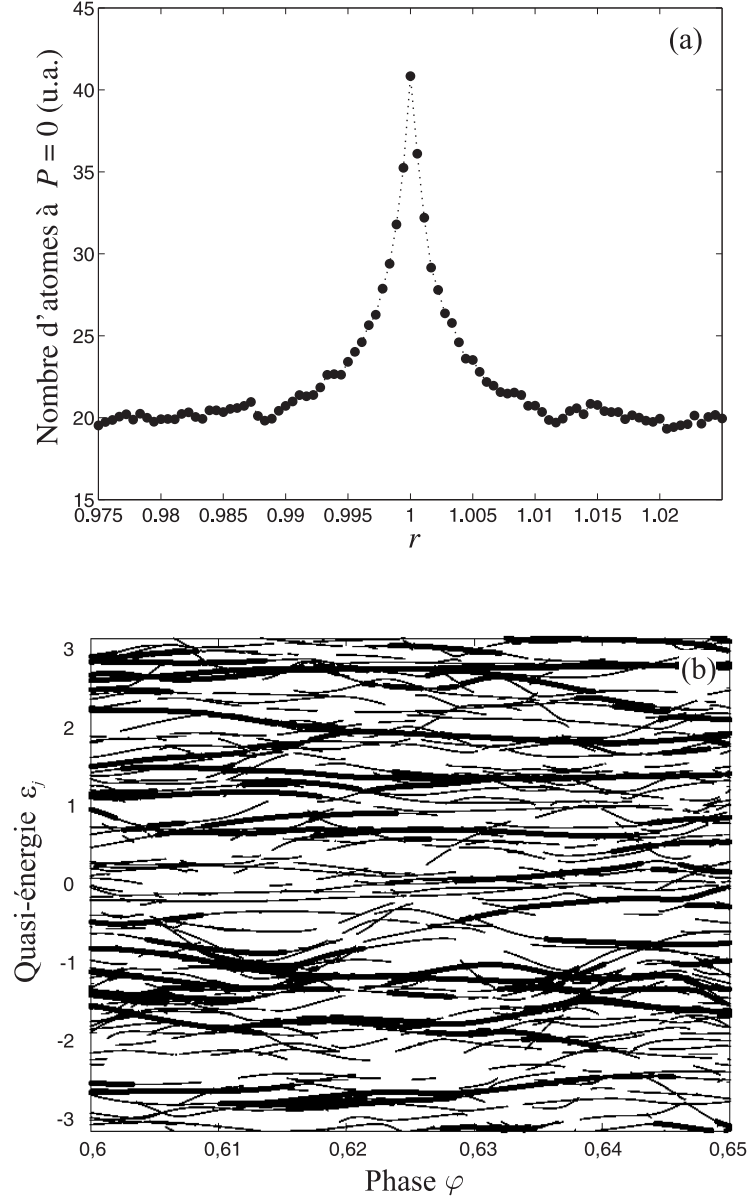


FIG. 3.40 – En (a), raie de localisation expérimentale obtenue pour  $F_1 = 36$  kHz,  $\delta_L/2\pi = 13,3$  GHz,  $\tau = 800$  ns,  $\varphi_0 = 0,5$  et  $n = 50$  ( $K_{1,moy} \approx 10$  et  $k = 2,89$ ). La largeur  $\Delta r = 0,003$  correspond à  $\sigma_{Fourier} = 6,7$ . En (b), spectre de Floquet déterminé pour les paramètres de la raie présentée en (a). Seul les quasi-énergies  $\varepsilon_j(\varphi)$  pour lesquels  $|\langle j(\varphi_0) | \Psi_0 \rangle|^2 > \mathcal{S}$  ont été tracés [ $\mathcal{S} = 10^{-2}$  (trait épais) et  $10^{-4}$  (trait fin)]. La distance entre deux anti-croisements est évaluée à  $\Delta\varphi_a \approx 0,05$ , ce qui, d'après (3.25), donne  $\sigma_{Fourier} \approx 10$ . Cette valeur est un peu plus importante que le coefficient sub-Fourier expérimental.

précisément la figure 3.30). Le deuxième est le taux de diffusion

$$D_{n>N_{loc}}(r) = \frac{(\langle P_n^2 \rangle - \langle P_0^2 \rangle)}{n} \propto |r - 1| \quad (3.27)$$

qui se déduit directement de l'expression (3.26) et qui prédit la forme triangulaire du coefficient de diffusion expérimental observé sur la figure 3.31.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'impact de la brisure de la périodicité de la séquence de pulses (en superposant deux séries périodiques de pulses de fréquences  $F_1$  et  $F_2$  pour obtenir une séquence bicolore) sur la diffusion, ou, ce qui revient pratiquement au même, sur la population d'atomes d'impulsion nulle. Plus précisément, nous en avons étudié l'évolution en fonction du rapport bicolore par des approches classique et quantique. Dans les deux cas, il a été montré que des raies apparaissent autour des valeurs rationnelles de ce rapport. Mais leur origine est différente : alors que, dans le cas classique, elles correspondent à une variation de la diffusion due à des corrélations résiduelles sur l'impulsion entre chaque pulse, dans le cas quantique, elles correspondent à une localisation dynamique (phénomène purement quantique) ; d'où leur nom de raie de localisation. Le cas de la raie  $r = 1$  a été étudié en détail. Classiquement, on lui trouve une forme gaussienne et une largeur à mi-hauteur légèrement sub-Fourier (c'est-à-dire inférieure à l'inverse de la durée totale de la séquence de pulses). Quantiquement, elle prend une forme en double exponentielle dont la largeur à mi-hauteur est non seulement éventuellement très inférieure à la limite Fourier, mais décroît, jusqu'au temps de localisation, plus rapidement qu'un comportement de type Fourier. Ce phénomène – qui permet tout de même de discriminer deux fréquences voisines ( $F_1$  et  $F_2$ ) de manière efficace en des temps jusqu'à 43 fois plus courts que par analyse de Fourier – a été analysé à travers le spectre de Floquet de la série bicolore ; il est apparu que le nombre d'anticroisements traversés adiabatiquement par les composantes spectrales était la cause essentielle de la finesse des largeurs de raies de localisation. Lorsque le système est quantique et chaotique à la fois, le nombre d'anticroisements traversés de la sorte est élevé, dépend de  $\hbar$ , et, de façon croissante, de  $K$ . Il n'existe donc pas de limite à la finesse des raies de localisation.



## Chapitre 4

# Réversibilité de la délocalisation

Au chapitre précédent, nous avons développé un modèle théorique qui explique, pour un système bicolore quasi-périodique, le comportement des distributions d’impulsions en fonction du temps et du rapport  $r$ . La dynamique du système repose alors sur la manière dont les anticroisements des niveaux de quasi-énergies sont traversés, à savoir soit adiabatiquement, soit diabatiquement, ou encore, entre ces deux cas antagonistes, non-adiabatiquement. Il est apparu que la destruction de la localisation dynamique (délocalisation) est causée principalement par les passages adiabatiques. En principe, comme ceux-ci sont réversibles, c’est-à-dire que l’évolution des amplitudes des quasi-états de Floquet est déterministe, il devrait être possible de retrouver au moins en partie les caractéristiques initiales de la distribution d’impulsions. Ce phénomène porte le nom de relocalisation.

Ce chapitre est consacré à la mise en évidence expérimentale de ce phénomène par l’application d’une séquence de pulses dite “inversée”. Dans la première section, la discussion est menée de façon générale. Nous y évoquons, sans trop de distinctions, deux types de séquence inversée, l’une basée sur la modulation de phase, l’autre sur la modulation d’amplitude<sup>1</sup>. Les évolutions de la distribution d’impulsions qu’elles produisent sont bien sûr différentes mais les principes sont communs ; ils reposent sur les conclusions théoriques du chapitre 3 qui restent globalement valables pour la modulation d’amplitude. Dans la deuxième section, nous introduisons la séquence inversée expérimentale, et discutons les résultats de simulations numériques ; ceci conduit, au passage, à se faire une idée plus précise du processus de relocalisation. Enfin, dans la troisième section, les résultats expérimentaux sont présentés et commentés.

### 4.1 Réversibilité et relocalisation

Le terme de séquence inversée désigne l’application de deux sous-séquences bicolores de pulses (qui se succèdent immédiatement) dont la seconde est la “réflexion temporelle” de la première (il y a inversion de l’agencement des pulses). La première est nommée, de façon assez significative, “aller” et la seconde “retour”. Leurs fonctions supposées sont respectivement l’élargissement et le rétrécissement de la distribution

---

<sup>1</sup>La modulation d’amplitude à laquelle il est fait référence est celle utilisée expérimentalement ; elle est introduite explicitement à la section 4.2

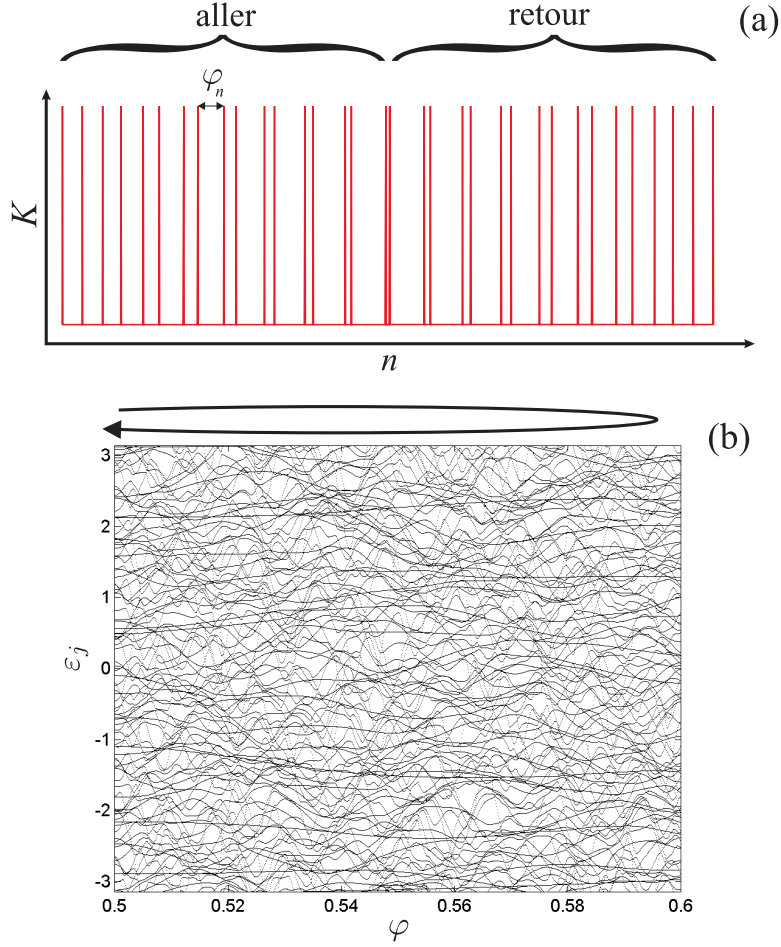


FIG. 4.1 – En (a), séquence de pulses typique en modulation de phase pour une expérience de réversibilité dans le but de faire un aller-retour dans le spectre des quasi-énergies (b).

d'impulsions. Du point de vue des notations, les durées d'aller et de retour valent  $N_{\frac{1}{2}mot}$  unités de temps renormalisé (toujours définie par la période de la série primaire), ce qui conduit à une durée totale de la séquence  $N_{mot} = 2 \times N_{\frac{1}{2}mot} - 1$  (les indices  $mot$  et  $\frac{1}{2}mot$  se référant au terme *motif de réversibilité*).

#### 4.1.1 Un aller-retour dans le spectre des quasi-énergies

L'idée sous-tendue par l'application d'une séquence inversée est de balayer le spectre des quasi-énergies de l'opérateur d'évolution instantanée suivant un paramètre donné (la phase entre les deux séries – dans le cas de la modulation de phase – ou l'amplitude de la série secondaire – dans le cas de la modulation d'amplitude) dans une direction puis dans l'autre. Ce qui, en termes mathématiques, se traduit

par un opérateur d'évolution globale de la forme

$$U_{rev}(N_{mot}) = \prod_{n=N_{\frac{1}{2}mot}}^{N_{mot}-1} U[\xi(N_{\frac{1}{2}mot} - n)] \cdot \prod_{n=0}^{N_{\frac{1}{2}mot}-1} U[\xi(n)], \quad (4.1)$$

où  $U(\xi)$  est l'opérateur d'évolution instantanée défini pour un paramètre  $\xi$  (phase, amplitude) dépendant du temps  $n$ . La figure 4.1(b) montre l'exemple d'un spectre de quasi-énergies d'un système bicolore de type modulation de phase [la séquences de pulses correspondante est montrée figure 4.1(a)].

### 4.1.2 Evolution idéale. Approximation adiabatique

Le caractère réversible du processus de réversibilité repose sur les passages adiabatiques des anticroisements des niveaux de quasi-énergies. Ceci s'appréhende clairement lorsque l'on écrit l'évolution d'une observable, disons l'énergie cinétique moyenne (nous pourrions aussi le faire pour la population à  $P = 0$ ), en faisant l'approximation d'une adiabaticité parfaite, c'est-à-dire en supposant que tous les anticroisements sont passés adiabaticquement.

Pour ce faire, nous supposons une fonction d'onde initiale  $|\Psi(n)\rangle$  décomposée sur la base de Floquet initiale  $[|\Psi(n)\rangle = \sum_j a_j(n)|j(n)\rangle]$  dont l'énergie moyenne sur l'impulsion à l'instant initial vaut

$$\langle P_0^2 \rangle = \sum_{j,k} a_k(0)^* a_j(0) \langle j(0) | P^2 | j(0) \rangle.$$

Celle-ci s'écrit, à la fin de la première partie de la séquence inversée,

$$\langle P_{N_{\frac{1}{2}mot}}^2 \rangle \approx \sum_j |a_j(0)|^2 \langle j(N_{\frac{1}{2}mot}) | P^2 | j(N_{\frac{1}{2}mot}) \rangle,$$

où nous avons considéré que, au temps  $n = N_{\frac{1}{2}mot}$ , les termes croisés dépendant des quasi-énergies sont devenus négligeables par destruction interférentielle (voir sous-section 1.2.3), et où l'approximation adiabatique a été prise en compte en posant  $|a_j(n)|^2 = |a_j(0)|^2$ . A ce moment-là, l'évolution équivaut à celle d'un système bicolore telle que nous l'avons étudiée au chapitre 3 : la localisation dynamique est détruite. Mais après l'application de la séquence retour, si tous les anticroisements ont à nouveau été traversés adiabaticquement, nous trouvons

$$\langle P_{N_{mot}}^2 \rangle \approx \sum_j |a_j(0)|^2 \langle j(0) | P^2 | j(0) \rangle,$$

c'est-à-dire que le système revient à la situation initiale à la différence près que les termes dépendant des phases quantiques n'ont pas réapparu. Ainsi, si le degré de non-adiabaticité est négligeable, il y a relocalisation ; non pas au sens où nous retrouvons l'énergie moyenne initial, mais plutôt au sens où la largeur de la distribution se rapproche de celui de la *longueur de localisation* d'une séquence périodique dont le motif périodique est donné par l'agencement et l'amplitude des pulses de la séquence

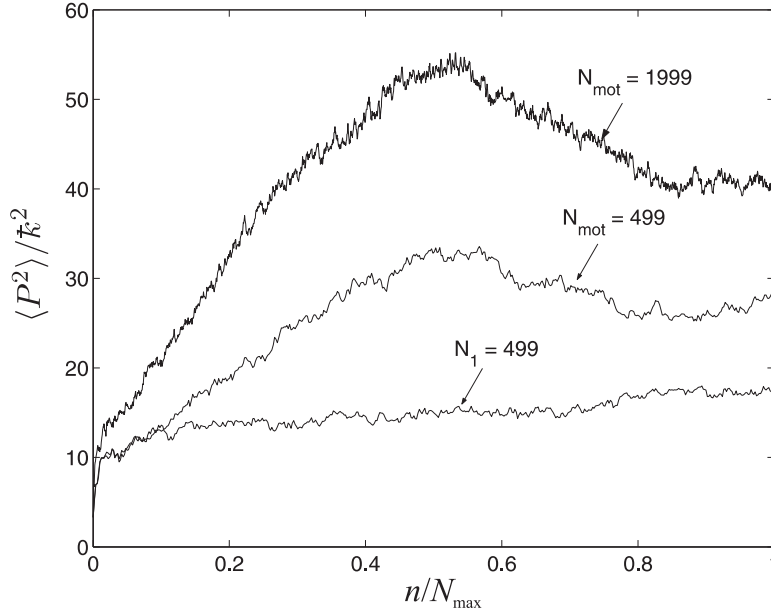


FIG. 4.2 – Evolution numérique de l'énergie moyenne en fonction du temps pour une séquence périodique (correspondant à la série primaire,  $N_1 = 499$ ), et deux séquences inversées à modulation d'amplitude ( $N_{\text{mot}} = 499$  et 1999). La durée totale de la séquence est ramenée à l'unité en divisant le temps par le temps final ( $N_{\text{max}}$ ) et les paramètres communs de la simulation sont  $K_1 = 6, 5$ ,  $\bar{k} = 3, 46$ , et  $\varphi_0 = 0, 15$ . La longueur de localisation ( $P_{\text{loc}}^2 \approx 15$ ) n'est pas atteinte par la relocalisation; il semble même que plus  $N_{\text{mot}}$  est grand, moins le système est susceptible de l'atteindre. Par contre, dans le cas présent, les décroissances relatives de  $\langle P^2 \rangle$  sont équivalentes (relocalisation de 25% par rapport au maximum atteint).

inversée entre  $n = 0$  et  $n = 1$ . Cette longueur de localisation constitue une limite infranchissable pour la réversibilité, une limite d'adiabaticité parfaite. La figure 4.2 montre trois évolutions de l'énergie cinétique moyenne pour différentes séquences de pulses; l'une est une séquence périodique telle que celle qui vient d'être décrite, et les deux autres sont des séquences inversées de type modulation d'amplitude avec des motifs de réversibilité de différentes tailles. Il apparaît, dans ce cas très particulier, que plus la taille du motif augmente, plus la "longueur de relocalisation" s'éloigne de la longueur de localisation (il serait risqué de généraliser ce constat à tout type de séquence inversée).

#### 4.1.3 Evolution réelle. Effets de la non-adiabaticité

L'approximation d'adiabaticité parfaite constitue une approche trop rudimentaire pour comprendre la dynamique réelle. En fait, l'action des passages non-adiabatiques est importante et non négligeable. Ceux-ci conduisent les populations initialement concentrées sur un nombre restreint de niveaux de quasi-énergies à se subdiviser, de manière irréversible, sur un nombre toujours plus important d'entre eux.

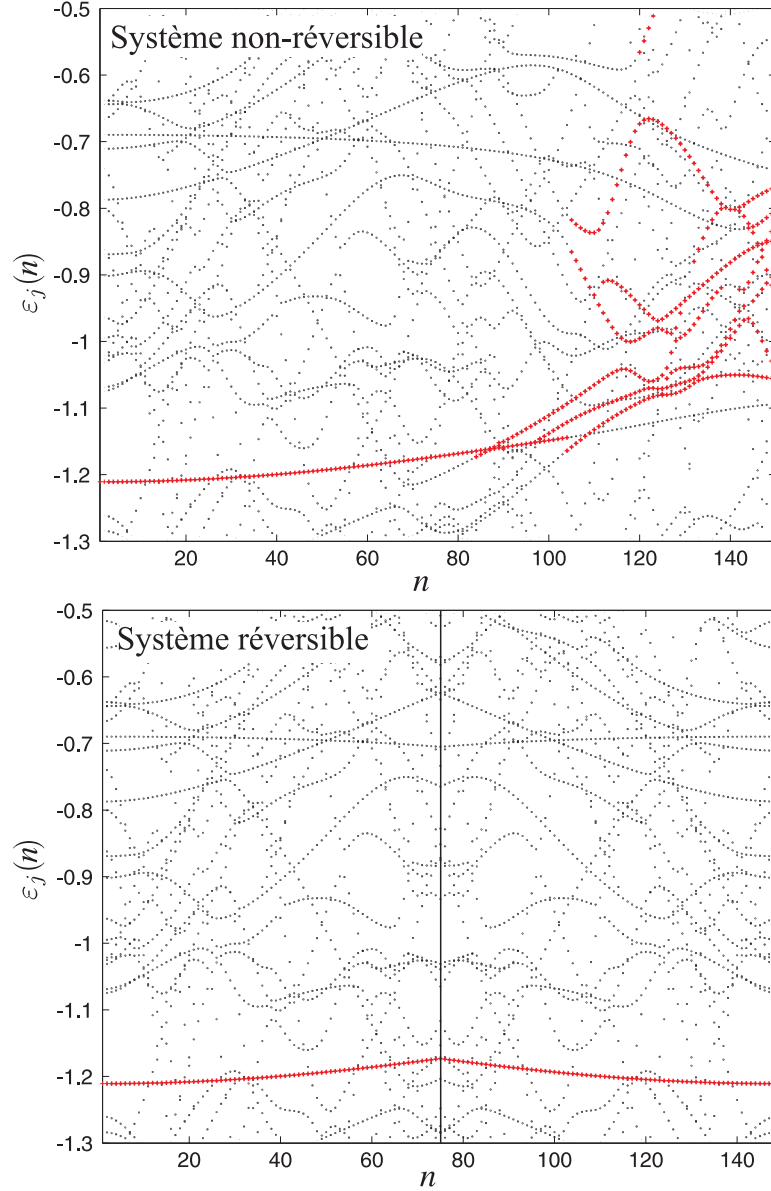


FIG. 4.3 – Evolution numérique des populations significatives ( $|a_j(n)|^2 > 0,01$ ) des niveaux de quasi-énergies en fonction du temps pour une séquence bicolore en modulation de phase “non-inversée” ( $N_1 = 149$ ) et une séquence inversée ( $N_{mot} = 149$ ). Les paramètres communs aux deux simulations sont  $K = 10$ ,  $r = 0,9992$ ,  $\tilde{k} = 2,9$ ,  $\varphi_0 = 0,5$  et  $q = 0,1$ . Les séquences sont telles que, jusqu’à  $n = 75$ , les séquences sont identiques et ensuite se différencient. Aussi la fonction d’onde est initialement préparée dans un seul quasi-état  $j_0$  ( $|a_{j_0}(0)|^2 = 1$ ). Alors que les dynamiques sont identiques durant la première partie de la séquence, dominées par des passages adiabatiques (majoritaires) et non-adiabatiques, elles divergent dans la deuxième : pour la séquence inversée, les passages d’anticroisements se font de la même manière qu’à l’aller, mais pour la séquence non-inversée, des passages non-adiabatiques répartissent la population initiale dans plusieurs niveaux, ce qui implique des différences sur la distribution de probabilité dans l’espace des impulsions (voir figure 4.4).



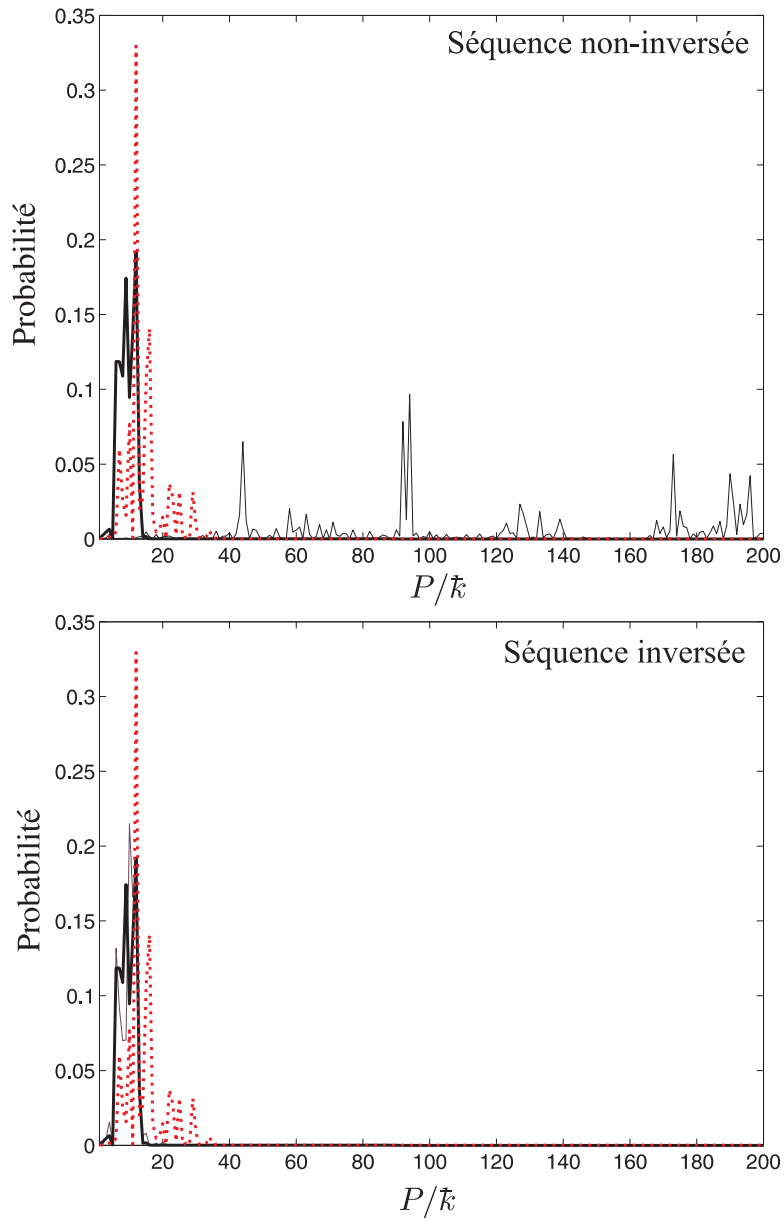


FIG. 4.4 – Distributions de probabilité d'une fonction d'onde dans l'espace des impulsions pour les valeurs de  $n = 0, 75, 149$  (respectivement en trait épais, en tirés, et en trait fin) dans le cas d'une séquence bicolore non-inversée (en haut) et inversée (en bas). Les paramètres de la simulation correspondent à ceux de la figure 4.3. Pour  $n = 0$  et  $75$  les distributions de probabilité sont identiques, avec un léger élargissement en  $n = 75$ . Par contre, elles divergent en  $n = 149$  : le peuplement est large dans le cas du système bicolore, alors qu'il s'est reconcentré autour du quasi-état initial dans le cas du système réversible.

### Rôle de la non-adiabaticité illustrée par une simulation numérique

Afin de mieux cerner ce point, nous avons réalisé des simulations numériques qui consistent à faire évoluer une fonction d'onde initialement préparée dans un unique quasi-état en lui appliquant l'opérateur d'évolution représentant l'action d'une séquence complète de pulses. Nous avons appliqué deux séquences bicolores modulées en phase, l'une inversée et l'autre non-inversée, composées de 149 pulses d'une série primaire. En vue d'effectuer une comparaison, ces deux séquences ont été prises identiques jusqu'à  $n = 75$  ( $= N_{\frac{1}{2}mot}$ ). L'évolution des populations des niveaux de quasi-énergies et l'allure de la fonction d'onde aux temps clés ( $n = 1, 75$ , et 149) sont respectivement illustrées sur les figures 4.3 et 4.4. Sur la première, les niveaux du spectre peuplés significativement ont été marqués d'une croix. En examinant les premières parties des deux spectres (de  $n = 1$  à 75), il semble que la plupart des niveaux sont traversés diabatiquement (ce qui est cohérent avec le fait que la distribution statistique de  $C$  est une hyperbole, voir sous-section 3.5.1), quelques rares adiabatiquement, et aucun non-adiabatiquement ; en conséquence, à  $n = 75$ , un seul niveau est peuplé. Par contre, dans la seconde partie (de  $n = 75$  à 149), les évolutions divergent. La séquence bicolore "non-inversée" induit des rencontres d'anticroisements non-adiabatiques et, de ce fait, une ramification de la population dans plusieurs niveaux alors que la séquence inversée retraverse tous les anticroisements de la même manière qu'à l'aller (son spectre de Floquet est symétrique par rapport à l'abscisse  $n = 75$ ). Sur la figure 4.4, la probabilité de présence en fonction de l'impulsion montre qu'il y a une légère délocalisation à la fin de la première partie de la séquence, puis, dans la deuxième partie, une relocalisation pour la séquence réversible et une délocalisation encore plus importante pour la séquence non-réversible. Nous venons ainsi d'illustrer que les séquences réversible et non-réversible produisent des évolutions quantiques très différentes, en termes de peuplement de l'espace des impulsions.

Remarque : Revenir à la distribution initiale demanderait de repasser, au retour, par les mêmes phases quantiques qu'à l'aller (ce qui est exclu dans notre système car les opérateurs d'évolution au retour ne sont pas les conjugués de ceux à l'aller, ce qui implique une accumulation plutôt qu'un retour des phases quantiques). Atteindre la limite de longueur de localisation, par contre, ne nécessite qu'un retour aux amplitudes initiales. Mais l'évolution des amplitudes est corrélée à celle des phases quantiques dans le cas des passages adiabatiques, et plus particulièrement quand les deux états impliqués dans un tel anticroisement sont peuplés (la formule de Landau-Zener ne donne d'ailleurs pas les probabilités de transfert de population dans ce cas).

#### 4.1.4 Critères pour une observation efficace de la localisation

L'observation de la relocalisation exige que le nombre de passage non-adiabatique soit le plus faible possible. Pour cela, il faut jouer sur la vitesse de balayage du spectre de Floquet et sur l'étendue à explorer. Cette exigence doit être couplée à une autre : il faut produire une délocalisation préalable (sous peine, sinon, de diminuer la visibilité du phénomène). Ces critères imposent généralement des contraintes qu'il faut adap-

ter au type de modulation employée via les paramètres pertinents (taille du motif de réversibilité, rapport bicolore). Nous proposons maintenant d'examiner le cas de la modulation de phase, c'est-à-dire de donner les jeux de paramètres favorables qu'elle requiert pour une relocalisation dynamique efficace. Nous comprendrons pourquoi elle n'a pas été retenue pour la réalisation expérimentale.

A la sous-section 3.5.2, nous avons montré que plus cette vitesse de balayage du spectre  $|r - 1|$  est lente, plus il est probable qu'un anticroisement donné soit traversé adiabatiquement, mais aussi que le nombre d'anticroisements traversés est proportionnel la taille de l'intervalle de phase balayé, c'est-à-dire, dans le cas présent, à  $N_{\frac{1}{2}mot}|r - 1|$ . Cela suggère, dans le cas de la modulation de phase, que l'intervalle de phase à balayer le soit plutôt pour une vitesse petite et une taille de motif grande que l'inverse. Nous avons réalisé une simulation numérique pour vérifier cela. La figure 4.5, qui en est le résultat, montre douze évolutions de  $\langle P^2 \rangle$  correspondant à quatre tailles de motifs ( $N_{mot} = 99, 499, 999$  et  $9999$ ) et trois intervalles sur la phase ( $N_{\frac{1}{2}mot}|r - 1| = 0, 1, 0,05$  et  $0,025$  ce qui, pour chaque motif, modifie les valeurs de  $r$ ). Des comparaisons croisées et multiples peuvent être faites. Nous remarquons qu'aucune courbe ne présente une relocalisation évidente ; au mieux, au début de la seconde partie de la séquence, une légère décroissance ralentit la croissance de  $\langle P^2 \rangle$  (voir la sous-section 4.2.2). Tracer le nombre d'atomes à  $P = 0$  est plus probant, mais aussi plus gourmand en temps de calculs. Il est indéniable, en tout cas, que les effets sont plus manifestes pour des motifs de réversibilité importants et des valeurs de  $|r - 1|$  faibles. Cependant, de trop petites valeurs de  $|r - 1|$  réduisent le contraste. Ajoutons aussi que, ici, les effets les plus visibles de relocalisation s'accompagnent des valeurs les plus élevées de  $\langle P^2 \rangle$  ; ce qui peut sembler paradoxal. Cela s'explique par le fait que l'augmentation du nombre de passages adiabatiques n'implique pas une diminution du nombre de passages non-adiabatiques (il ne s'agit pas d'une somme constante pour tout  $N_{\frac{1}{2}mot}$  ou tout  $|r - 1|$ ), et que l'augmentation de  $N_{\frac{1}{2}mot}$  a pour effet de diminuer la proportion – et non le nombre – de passages non-adiabatiques.

Enfin, cette figure nous renseigne sur la faisabilité expérimentale d'une relocalisation basée sur la modulation de phase. Il semble, et cela a été constaté, que ce soit impossible dans les gammes de paramètres accessibles. Précisément, les temps extrêmement longs exigés ici posent des problèmes sans solution immédiate : celui de maintenir le nuage d'atomes, malgré sa chute sous l'action de la gravité, dans la zone d'interaction avec l'onde stationnaire, ou encore, celui de détruire les effets souhaités à cause de l'émission spontanée (voir la sous-section 4.3.3). En conséquence, il nous faut un autre système pour l'expérience.

## 4.2 Présentation et étude numérique du système expérimental

Expérimentalement, nous avons opté pour un système à modulation d'amplitude, assez différent de celui que nous avons présenté au chapitre 3<sup>(2)</sup> afin d'optimiser l'effet de relocalisation. Nous détaillons ici ces caractéristiques puis, à partir de

---

<sup>2</sup>Il s'agissait alors d'une séquence de pulses séparés périodiquement les uns des autres dont l'amplitude était modulée par une fonction sinusoïdale.

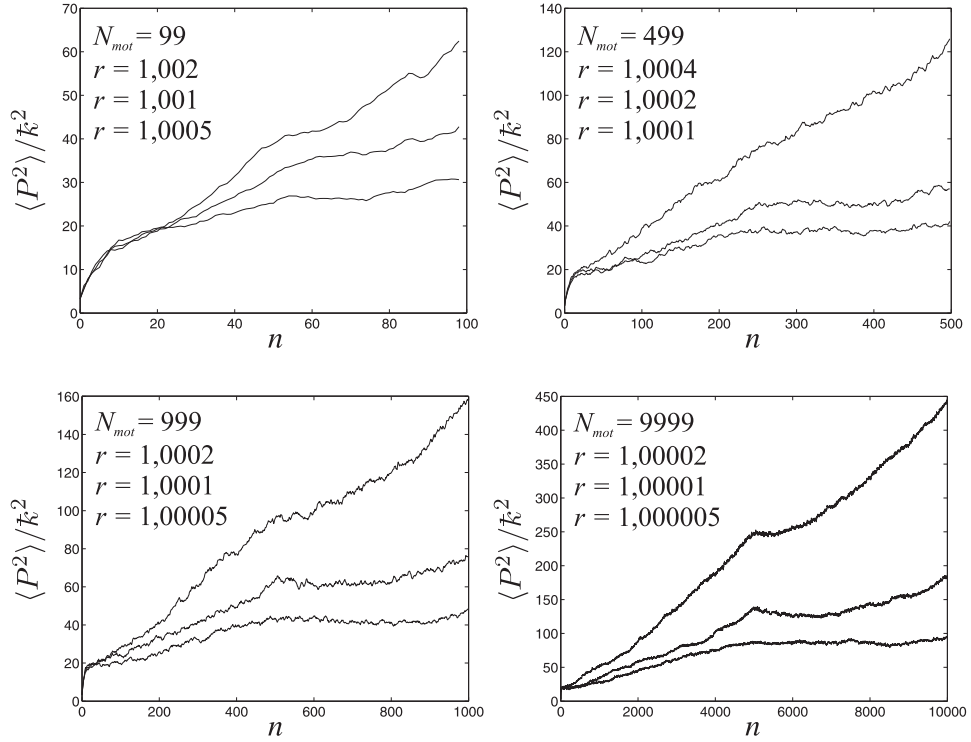


FIG. 4.5 – Evolution de  $\langle P^2 \rangle$  par l'application d'une séquence inversée type modulation de phase pour des motifs de taille  $N_{mot} = 99, 499, 999, 9999$  et des intervalles sur la phase  $N_{mot}|r - 1| = 0, 10, 050, 025$  (les valeurs de  $r$  utilisées sont indiquées en haut à gauche de chaque figure). Les courbes de chaque figure correspondent à une taille de motif et aux trois valeurs d'intervalle de phase (pour les identifier, il suffit de savoir que  $\langle P^2 \rangle$  croît avec  $N_{mot}|r - 1|$ ). L'effet de réversibilité est d'autant plus visible que  $N_{mot}$  est grand et que  $r$  est petit. Toutefois l'énergie moyenne finale croît avec  $N_{mot}$ .

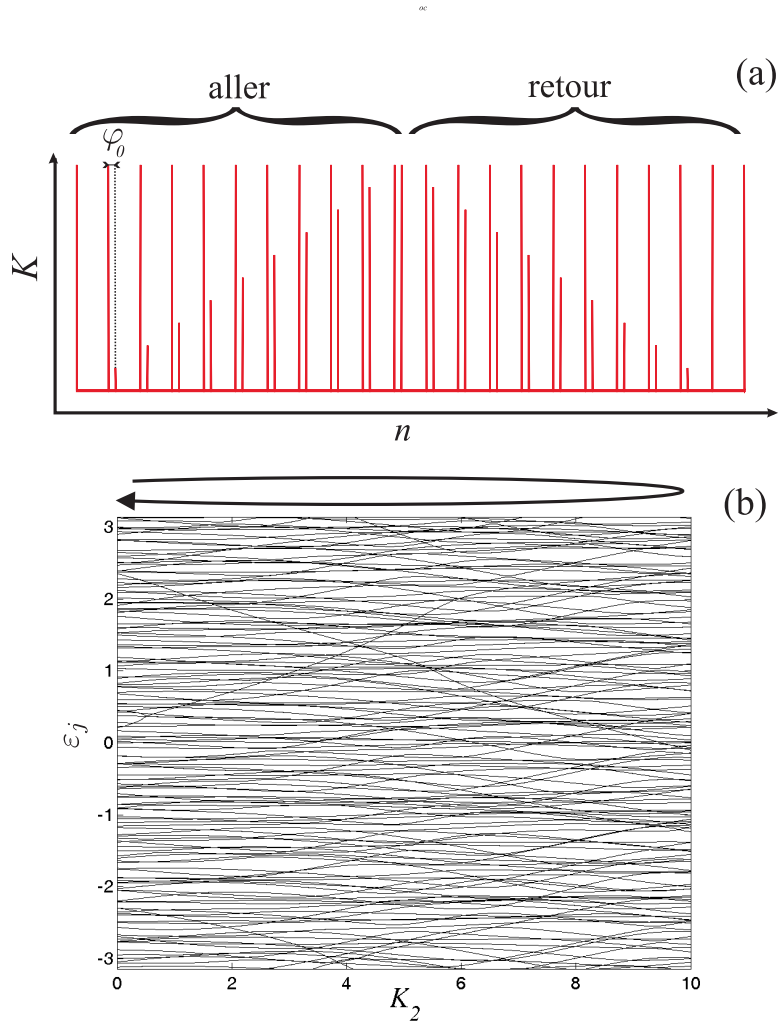


FIG. 4.6 – En (a), séquence de pulses typique en modulation d'amplitude triangulaire pour une expérience de réversibilité dans le but de faire un aller-retour dans le spectre des quasi-énergies (b). Dans le cas présenté en (b), la séquence de pulses est composée d'une série de pulses d'amplitude constante  $K_1 = 10$  et d'une série d'amplitude modulée  $0 < K_{2,n} < K_1$  ( $\bar{k} = 2, 9$ ).

simulations numériques, nous regardons et commentons l'évolution temporelle de l'énergie cinétique moyenne et de la population d'impulsion nulle.

### 4.2.1 La séquence expérimentale

La séquence est composée de deux séries de pulses de même période, l'une étant décalée par rapport à l'autre d'une phase initiale  $\varphi_0$  et étant modulée en amplitude par une fonction triangulaire ; un triangle complet correspond à un *motif de réversibilité* caractérisé par sa taille  $N_{mot}$  (en unité de temps réduit). Le hamiltonien d'un tel système s'écrit :

$$H_{rev}(n) = \frac{P^2}{2} + K_1 \cos \theta \sum_{n_1=0}^{N_{mot}-1} d(n - n_1) + K_2(n) \cos \theta \sum_{n_2=0}^{N_{mot}-1} d(n - \varphi_0 - n_2), \quad (4.2)$$

avec

$$K_2(n) = \begin{cases} \frac{(n-\varphi_0)K_1}{N_{\frac{1}{2}mot}} & \text{pour } \varphi_0 \leq n \leq (N_{\frac{1}{2}mot} + \varphi_0) \\ \frac{[N_{mot}-(n-\varphi_0)]K_1}{N_{\frac{1}{2}mot}+1} & \text{pour } (N_{\frac{1}{2}mot} + \varphi_0) < n \leq (2N_{\frac{1}{2}mot} + \varphi_0). \end{cases} \quad (4.3)$$

La figure 4.6(a), déjà mentionnée, donne un aperçu de ce type de séquence ; le paramètre qui varie est l'amplitude, appelée  $K_2(n)$ , des pulses de la seconde série, et prend des valeurs entre 0 et  $K_1$  (l'amplitude  $K_1$  de la première série est constante). Le paramètre  $K_2(n)$  remplit donc la fonction de la phase  $\varphi_n$  des séquences modulées en phase, et nous pouvons tracer le spectre de quasi-énergies en fonction de ce dernier [figure 4.6(b)].

La figure 4.6(b) donne un exemple de ce type de spectre. On remarque, si on la compare avec la figure 4.1(b), que ce spectre est sensiblement différent (les spaghettis évoluent plus "mollement" dans le cas de la modulation d'amplitude que dans le cas de la modulation de phase). Il faut avouer que, *stricto sensu*, il n'est pas très rigoureux de comparer deux spectres dont les paramètres (la phase  $\varphi$  et l'amplitude  $K_2$ ) sont différents en nature. Toutefois, il est possible de dire que, dans les gammes d'utilisation expérimentales des paramètres de  $\varphi$  et  $K_2$ , les spectres respectifs ne présentent pas les mêmes "types" de spaghetti. Cela pourrait expliquer la plus grande facilité à obtenir expérimentalement un effet de réversibilité avec une modulation d'amplitude qu'avec une modulation de phase.

### 4.2.2 Quelques résultats numériques

Les effets d'une telle séquence de pulses sur certaines grandeurs de la distribution d'impulsions que nous regardons couramment, à savoir les évolutions de la population à  $P = 0$  et l'énergie cinétique moyenne  $\langle P^2 \rangle$  sont maintenant examinés. Cette première étude est conduite au moyen de simulations numériques dont les paramètres ont été choisis proches de ceux auxquels nous avons accès expérimentalement :  $\varphi_0 = 0, 15$ ,  $K_1 = 7, 0$ ,  $k = 3, 46$  et distribution initiale équivalente, en largeur et en forme, à la distribution d'impulsions des atomes froids. Dans ces conditions, la brisure de la localisation dynamique s'effectue à partir de  $n = N_{loc} \approx 10$ .

Afin de faire ressortir les éventuelles reconstructions de localisation, nous appliquons souvent deux motifs de répétition plutôt qu'un seul ; la durée totale d'une expérience est donc de  $2N_{mot}$ .

### Influence de la taille du motif sur la population à impulsion nulle

Nous cherchons ici à observer le phénomène de délocalisation pour différentes vitesses de balayage du spectre de Floquet à travers l'évolution de la population à  $P = 0$ . Pour cela, il suffit de générer des séquences de pulses de diverses tailles de motif de répétition : en effet, plus la taille de celui-ci est élevée (respectivement faible), plus la vitesse de balayage est lente (respectivement rapide).

Sur la figure 4.7, nous fournissons les résultats de simulations numériques pour  $N_{mot} = 49, 499$  et  $9\,999$  pulses. Nous remarquons que la population à  $P = 0$  oscille sur une période égale à la taille du motif. Les deux minima, à  $n/N_{mot} = 0,5$  et  $1,5$ , correspondent à des distributions d'impulsions délocalisées tandis que les deux maxima, à  $n/N_{mot} = 1$  et  $2$  correspondent à des distributions relocalisées. Il apparaît clairement que plus  $N_{mot}$  est grand, plus les minima sont bas. alors que les maxima, eux n'en dépendent que faiblement. On observe qu'aucune taille ne nous permet de retrouver un maximum à un niveau équivalent à la population initiale. Ceci est cohérent avec les conclusions de la sous-section 4.1.2 : le brouillage initial des phases quantiques n'est, lui, pas réversible, même idéalement, au moyen du système que nous utilisons (voir la remarque précédente sur les opérateurs d'évolution du retour qui ne sont pas les conjugués de ceux de l'aller).

### Evolution de l'énergie cinétique moyenne

Nous regardons maintenant l'évolution de  $\langle P^2 \rangle$  fournie par une simulation numérique avec les mêmes paramètres que ceux utilisés pour la courbe d'évolution de la population à  $P = 0$  et  $N_{mot} = 499$ , visible sur la figure 4.7. Le résultat est affiché sur la figure 4.8 où nous avons également tracé l'évolution de  $R^{-2}(P = 0)$ , où  $R(P = 0)$  est la population d'impulsion nulle. Très clairement,  $\langle P^2 \rangle$  et  $R^{-2}(P = 0)$  évoluent tout deux en croissant sur la première moitié (phase de délocalisation dynamique) du motif puis en décroissant sur la deuxième moitié (phase de relocalisation dynamique). Cependant, ces cycles ne sont pas identiques : alors que  $\langle P^2 \rangle$  a une tendance globale à croître<sup>3</sup>,  $R^{-2}(P = 0)$  oscille autour d'une moyenne quasiment constante. Ces différences de comportement révèlent que la distribution d'impulsions change de forme au cours du temps. Mieux, de l'évolution de  $R^{-2}(P = 0)$ , nous inférons que le centre de la distribution ( $P = 0$ ) n'est pas très altéré, et que ce sont surtout les ailes qui doivent être affectées.

Pour s'assurer de cette interprétation, la distribution d'impulsions est tracée en échelle semi-logarithmique pour plusieurs valeurs de  $n$ , (figure 4.9). Effectivement, nous constatons que dans les ailes de la distribution, la population augmente constamment avec le temps, c'est-à-dire ne suit pas le régime des faibles valeurs d'impulsion. Ceci a un impact conséquent sur la valeur de  $\langle P^2 \rangle$  et conduit aux différences observées précédemment. Toutefois, on peut retrouver une évolution de  $\langle P^2 \rangle$  similaire

---

<sup>3</sup>La séquence inversée à modulation de phase avait montré une évolution similaire de  $\langle P^2 \rangle$  mais sur des échelles de temps plus grandes.

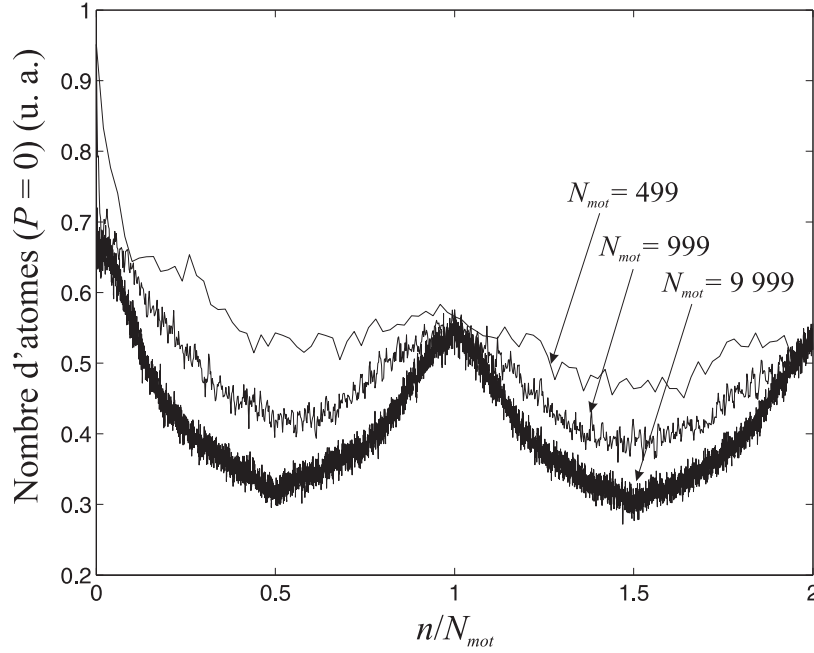


FIG. 4.7 – Trois évolutions de la population à  $P = 0$  sur deux motifs de répétition pour différentes tailles de motif (indiquées par les flèches, de valeur  $N_{mot}$ ). L'abscisse est ramenée au nombre de motifs afin de favoriser la comparaison entre les courbes. On voit que la population décroît puis croît sur un motif, et que ce phénomène est d'autant plus prononcé que la taille du motif est grande.

à celle de  $R^{-2}(P = 0)$  si l'on ne considère que les atomes compris dans une région  $|P/\hbar| \lesssim 10$  (cette région comprend plus de 80 % de la population totale [voir courbe (c) de la figure 4.8]). Par ailleurs, toujours sur la figure 4.9, nous constatons que la forme de la distribution au voisinage de  $P = 0$  est différente selon qu'il s'agit d'une phase de délocalisation ou de relocalisation. Respectivement, nous reconnaissons, à travers l'échelle logarithmique, une forme gaussienne et une forme double exponentielle (du moins sur les flancs de la distributions qui sont effectivement droit en échelle logarithmique). Ce point est essentiel car il renvoie au caractère cohérent du processus de relocalisation.

L'origine de ces comportements est liée au fait que la taille d'anticroisement décroît en fonction de la distance en impulsion qui sépare deux quasi-états impliqués dans un anticroisement. De ce fait, les passages non-adiabatiques, qui sont caractérisés par des anticroisements de plus petites tailles que ceux associés aux passages adiabatiques, expulsent une partie des fonctions d'atomiques vers des régions plus éloignées en  $P$  que les passages adiabatiques ne le font<sup>4</sup>. Sur l'évolution de la distribution, cela implique que les transferts réversibles de population ne s'effectuent que dans une région restreinte de  $P$ , centrée autour de  $P = 0$ , et dont la taille est fonction (décroissante) de la vitesse de balayage  $|r - 1|$ .

<sup>4</sup>Expérimentalement, il est peu probable de pouvoir mesurer un signal si lointain en  $P$  à cause du bruit.



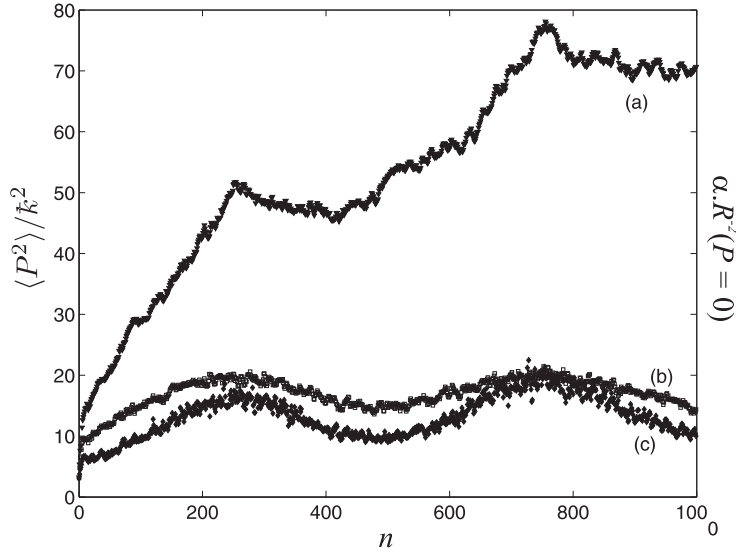


FIG. 4.8 – Evolution numérique de la largeur déterminée numériquement et évaluée selon trois méthodes différentes ( $N_{mot} = 499$ ) : en (a),  $\langle P^2 \rangle$ , en (b),  $\langle P^2 \rangle$  sur des distributions tronquées en  $P/\hbar = 10$  et en (c), l'inverse du carré du maximum de la distribution d'impulsions. Les comportements diffèrent nettement entre le cas (a) et (c) bien qu'il y ait une décroissance visible après chaque application de motif (à  $n = N_{mot}$  et  $n = 2N_{mot}$ ). Par contre les courbes (b) et (c) se ressemblent davantage : l'évolution du maximum est équivalente à celle de la distribution tronquée (au moins 80 % de l'aire de la distribution totale).

### 4.3 Observation expérimentale de la relocalisation

L'expérience que nous avons réalisée a pour objet de faire apparaître des effets de relocalisation à travers l'évolution du nombre d'atomes d'impulsion nulle [ $R(P = 0)$ ] et à travers celle de l'énergie cinétique moyenne ( $\langle P^2 \rangle$ ). La première partie est consacrée à nos résultats. Dans une deuxième, nous nous assurons que les effets en question sont bien quantiques (car d'autres causes, classiques celles-là, pourraient bien conduire à des résultats similaires). Mais avant toute chose, nous décrivons les changements effectués sur le dispositif expérimental.

#### 4.3.1 Dispositif

Le modèle théorique de base sur lequel notre expérience est réalisée correspond à celui présenté dans la sous-section 4.2.1 [voir le hamiltonien (4.2)]. Sa réalisation pratique ne nécessite pas de modifications importantes par rapport au montage qui a servi aux expériences de localisation/délocalisation par modulation de la phase (voir section 2.1). Afin de réduire au mieux les effets de décohérence, nous avons désaccordé l'onde stationnaire de  $\delta_L/2\pi = 20,6$  GHz, c'est-à-dire que sa fréquence est décalée le plus loin possible des résonances atomiques tout en maintenant un régime chaotique. Les seules modifications concernent la génération de la séquence, et, plus précisément, le montage radio-fréquence contrôlant le modulateur acousto-optique. Ici, nous cherchons simplement à moduler en amplitude la deuxième série de pulses

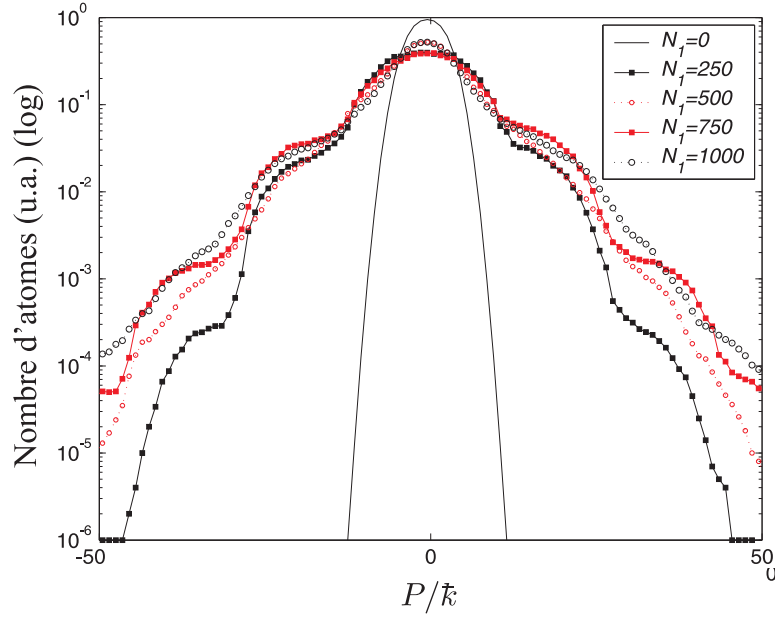


FIG. 4.9 – Distributions d’impulsions relevées à des moments clés d’une double séquence inversée ( $N_{mot} = 500$ ) obtenues par simulation numérique : à  $n = 0, 250, 500, 750, 1000$  Autour de  $P = 0$  (tant que  $|P/k| \lesssim 10$ ), les distributions à  $n = 250$  et  $750$  sont délocalisées avec une forme gaussienne (parabolique en échelle logarithmique), et celles à  $n = 500$  et  $1000$  sont localisées avec une forme double exponentielle déformée (le sommet n’est pas pointu, mais les flancs sont droits). Par contre, la population dans ailes ne présentent ne fait que croître avec  $n$ .

afin d’obtenir des pulses d’amplitudes  $K_2(n)$  suivant la formule (4.3). Pour ce faire, nous séparons les alimentations radio-fréquence de la première et de la deuxième série de pulses. La source radio-fréquence de la deuxième série est modulée en amplitude au moyen d’un Générateur Basse Fréquence comme illustré sur le schéma de la figure 4.10. En ce qui concerne les autres caractéristiques expérimentales, elles sont les suivantes : l’intensité maximale du profil gaussien de l’onde stationnaire est  $I_{max} = 2580 \pm 180 \text{ mW/cm}^2$  (et sa largeur à mi-hauteur est de  $1,5 \text{ mm}$ ) ; les pulses ont tous une durée de  $600 \mu\text{s}$  et la fréquence principale est  $F = 30 \text{ kHz}$  ( $k = 3,46$ ), ce qui, d’après la formule (2.6) signifie que  $K_{max} \approx 7$ , et en moyenne  $K \approx 6,5$  Par ailleurs,  $\varphi_0 = 0,15$  et  $N_{mot} = 35$  pulses, et nous appliquons deux séquences réversibles (la durée de la séquence est donc égale à  $2N_{mot}$ ). Avec ces paramètres, la probabilité d’émission spontanée par atome, sur une durée  $n = N_{mot}$ , est estimée à  $8\%$  (voir, à propos de la détermination d’émission spontanée, la sous-section A), ce qui signifie que  $92\%$  des atomes participent pleinement à l’expérience de relocalisation.

### 4.3.2 Résultats

La figure 4.11 montre l’évolution de la distribution d’impulsions obtenue avec les paramètres précédemment cités. Ses caractéristiques telles que l’évolution du nombre d’atomes d’impulsion nulle et l’évolution de l’énergie cinétique moyenne

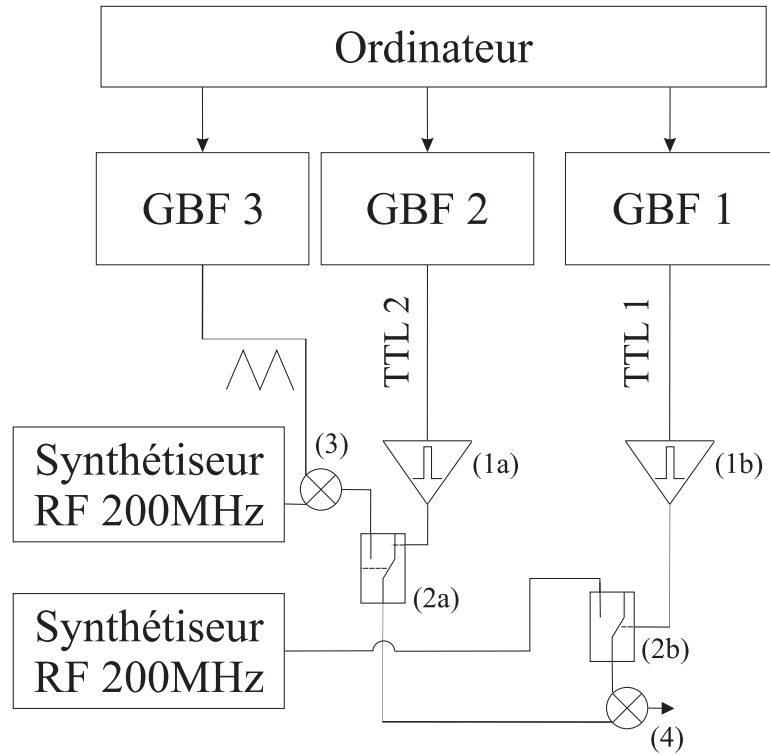


FIG. 4.10 – Schéma du montage RF alimentant le modulateur acousto-optique pour la séquence inversée. Le signal RF est pulsé par un système de commutateurs (2a et 2b) montés en parallèle. Ceux-ci sont commandés par deux signaux TTL (TTL 1 et TTL 2) correspondant aux deux séries de pulses ; ces signaux sont générés par deux générateurs basse fréquence (GBF 1 et GBF 2) envoyés sur deux monostables (1a et 1b) et synchronisés par ordinateurs. Le commutateur (2a) laisse passer le signal RF d'un synthétiseur de puissance fixe alors que le commutateur (2b) laisse passer un signal RF d'un synthétiseur dont la puissance est modulée par un signal triangulaire généré par un GBF (dont la période correspond à un motif  $N_{mot}$ ) au moyen d'un mixeur (3). Les deux séries de pulses RF sont additionnées (4) et envoyées vers le modulateur acousto-optique.

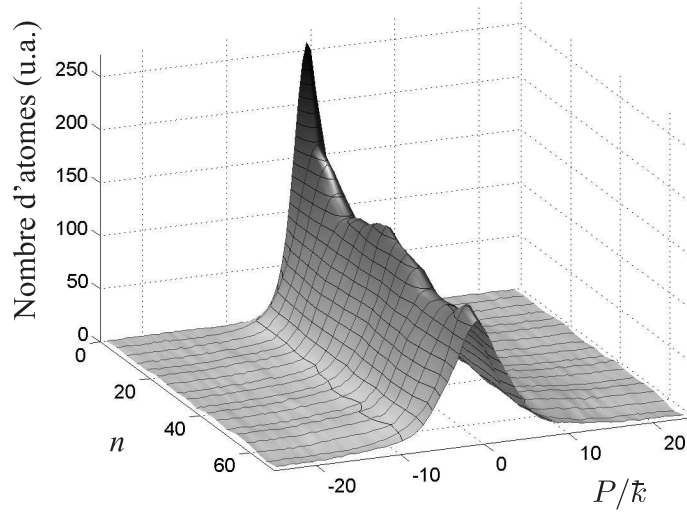


FIG. 4.11 – Evolution expérimentale de la distribution d’impulsions pour  $K_{moy} \approx 6,5$  et  $\hbar = 3,46$  en fonction du temps. Deux séquences inversées ont été appliquées à la suite, avec  $N_{mot} = 35$ . Il semble qu’aux temps  $n = 17$  et  $n = 52$  la distribution est plus étalée (délocalisation) qu’aux temps  $n = 35$  et  $n \approx 70$  (relocalisation) (pour les détails de cette évolution voir les figures 4.12 et 4.13). Cette expérience prouve que la destruction de la localisation est partiellement réversible.

sont respectivement représentées sur les figures 4.12 et 4.13.

Tout d’abord, nous constatons, sur la figure 4.12 par exemple, qu’après le temps de localisation, estimé à  $N_{loc} \approx 10$ , le maximum de la distribution continue de chuter jusqu’à  $n = 18$ , ce qui implique que le régime est diffusif. Nous observons donc pour la première fois dans l’exposé de ces travaux, une délocalisation expérimentale occasionnée par une modulation d’amplitude. Ensuite, il est incontestable au temps  $n = 35$ , qui correspond à l’achèvement de la première séquence inversée, que la distribution s’est relocalisée autour de  $P = 0$ . Nous voyons effectivement la population d’atomes à  $P = 0$  augmenter à partir  $n = 18$  et l’énergie cinétique moyenne décroître (figure 4.13). Toutefois, l’évolution de cette dernière ne correspond pas aux simulations numériques, ce qui était attendu étant donné les difficultés que nous avons à l’évaluer directement (pour rappel, la délocalisation envoie des atomes dans des classes d’impulsion élevée que notre système de détection Raman ne détecte pas bien, voir section 3.2.2). Enfin, la deuxième séquence inversée produit une nouvelle délocalisation suivie d’une dernière relocalisation, et ce aux temps escomptés (minimum local en  $n = 53$  et maximum local en  $n = 70$ ).

Par ailleurs, comme le montre la figure 4.14, les formes de la distribution d’impulsions diffèrent au voisinage de  $P = 0$  aux temps  $n = 18$  et  $n = 35$  (mais sont similaires dans les ailes). Conformément aux prédictions numériques, la forme de la distribution relocalisée tracée en échelle semi-logarithmique est, sur les flancs proche de  $P = 0$ , plus triangulaire (double exponentielle en échelle linéaire) que la forme dé-

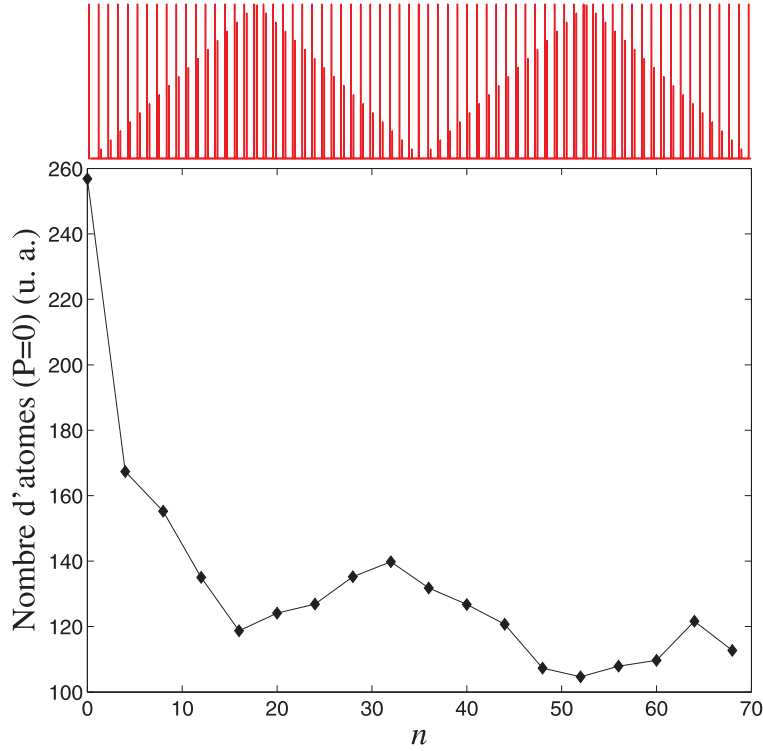


FIG. 4.12 – Evolution expérimentale du maximum de distribution ( $P = 0$ ) en fonction du temps (mêmes données que celle de la figure 4.11) avec la séquence de pulses correspondante au-dessus. Après avoir atteint un minimum à la moitié de la première séquence de délocalisation ( $n = 18$ ), le nombre d'atomes à  $P = 0$  croît de nouveau jusqu'à atteindre un maximum à la fin de cette même séquence ( $n = 35$ ). Le même phénomène se reproduit au cours de la deuxième séquence (minimum en  $n = 53$  et maximum en  $n \approx 70$ ). La relocalisation dynamique est donc observée expérimentalement.

localisée [qui, elle, par contre, s'ajuste bien à une fonction parabolique (gaussienne)].

Ces résultats montrent donc que la relocalisation dynamique est observable lorsque la délocalisation est effectuée par une séquence de pulses bicolores. Mais ils tendent aussi à prouver que notre interprétation des phénomènes de localisation, délocalisation, et relocalisation dynamique par la dynamique des populations des niveaux de quasi-énergie est justifiée étant donné que ces expériences ont été pensées sur la base de cette analyse.

### 4.3.3 Destruction de la relocalisation par décohérence

Les résultats expérimentaux montrent clairement un effet de relocalisation ; toutefois, même si un indice tel que la forme de la distribution au moment de la relocalisation le suggère fortement, il est possible que l'origine du phénomène ne soit pas quantique. Dans l'objectif de valider encore plus vigoureusement l'interprétation quantique, nous cherchons à montrer expérimentalement que le phénomène de relocalisation dépend des cohérences quantiques. Ces cohérences sont fragiles et peuvent

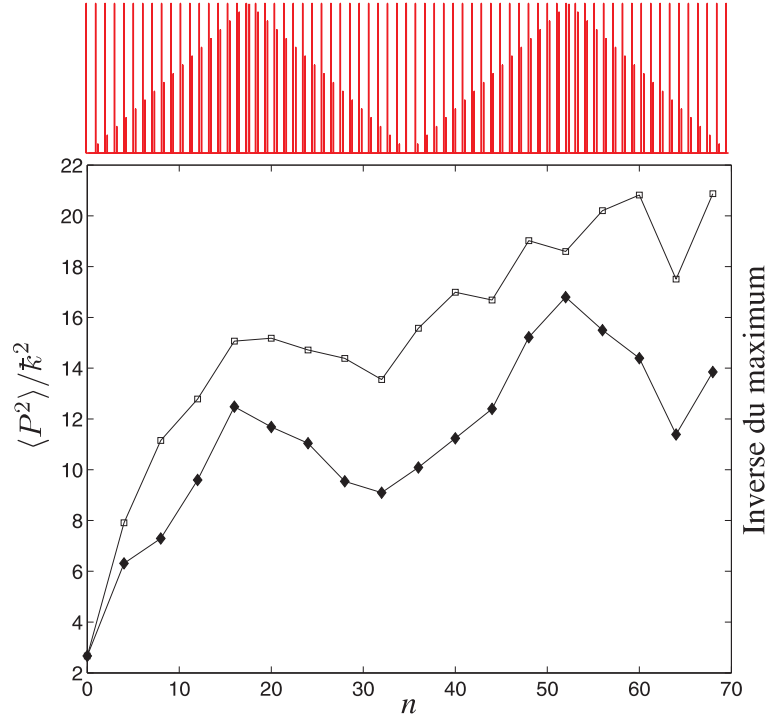


FIG. 4.13 – Evolution expérimentale de  $\langle P^2 \rangle$  en fonction du temps (mêmes données que celle de la figure 4.11) avec la séquence de pulses correspondante au-dessus.  $\langle P^2 \rangle$  diminue nettement à la fin de la première séquence réversible ( $n = 35$ ), ce qui confirme le phénomène de relocalisation; le même phénomène qui devrait se reproduire à la fin de la deuxième séquence ( $n = 70$ ) n’est pas visible.

être brisé par l’introduction d’une source d’émission spontanée [35].

L’expérience présentée maintenant consiste à provoquer une ou deux émissions spontanées par atome juste avant la phase de relocalisation. L’idée consiste à introduire une légère perturbation qui puisse effacer l’information nécessaire à la relocalisation qui est contenue dans les cohérences quantiques. C’est pourquoi il ne faut pas, pour la “démonstration”, que le taux d’émissions spontanées par atome soit élevée, ou dit autrement que le système “chauffe”.

Du point de vue du montage, la source d’émission spontanée est un faisceau laser rétro-réfléchi, prélevé sur la source laser du piège magnéto-optique. Sa puissance, ajustable, peut atteindre  $50 \mu\text{W}$ , et est distribuée transversalement selon une fonction gaussienne, dont la largeur à mi-hauteur vaut environ 1 cm (ce qui donne une intensité maximale de  $45 \mu\text{W}\cdot\text{cm}^{-2}$  et une fréquence de Rabi de l’ordre de 1 MHz). La fréquence est désaccordée de quelques largeurs d’un niveau excité ( $\Gamma$ ) de la transition  $|F_f = 4\rangle \rightarrow |F_e = 5\rangle$  (voir figure 2.2). L’expérience consiste à appliquer un pulse de  $30 \mu\text{s}$  au temps  $n = 17$  (juste avant la partie “relocalisante” de la séquence). Un calcul rapide [57] montre que le taux d’émission spontanée est compris entre  $30\,000 \text{s}^{-1}$  et  $70\,000 \text{s}^{-1}$  si le désaccord est compris entre  $-2\Gamma$  et  $-4\Gamma$ , si bien qu’en  $30 \mu\text{s}$ , il doit se produire entre 1 et 2 émissions spontanées par atomes.

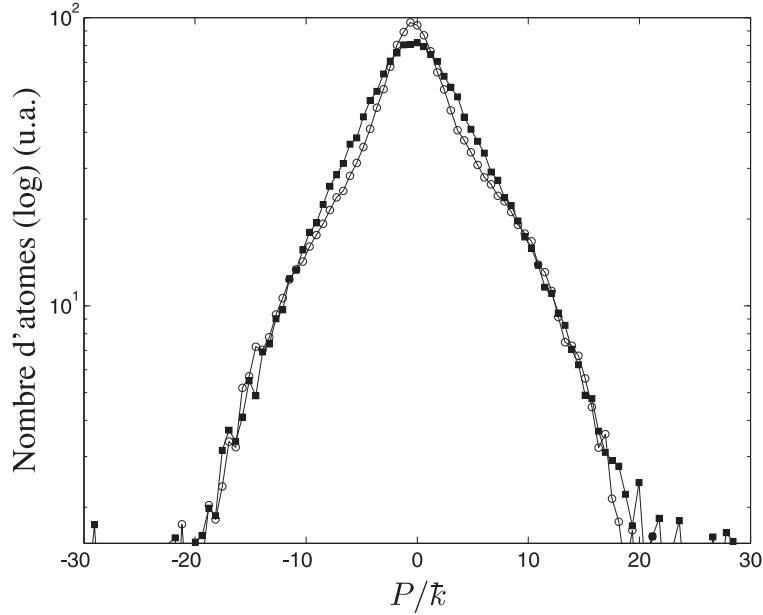


FIG. 4.14 – Distribution expérimentale d'impulsions à  $n = 17$  (carrés noirs) et à  $n = 35$  (ronds) (mêmes données que celle de la figure 4.11). Ces deux temps correspondent respectivement au moment où la distribution est la plus délocalisée et à celui où elle est relocalisée. Les formes sont visiblement différentes surtout au voisinage de  $P = 0$  : elle s'ajuste plutôt à une fonction gaussienne à  $n = 17$  et plutôt à une fonction triangulaire à  $n = 35$ . Cette dernière rappelle la forme de la distribution typique de la localisation dynamique. Ceci constitue un élément favorable à une interprétation quantique du phénomène de relocalisation.

Le résultat est présenté sur la figure 4.15 sous la forme de l'évolution temporelle du maximum de la distribution. Le phénomène de relocalisation n'y apparaît plus. En outre, il apparaît que jusqu'à  $n = 17$ , les évolutions du maximum de distribution, avec ou sans pulse résonnant, sont identiques, ce qui indique que l'échauffement est négligeable<sup>5</sup>. Ainsi, cette expérience appuie-t-elle l'interprétation quantique que nous avons proposée.

## 4.4 Conclusion

L'analyse de la dynamique d'un système bicolore en termes de passage d'anti-croisements des niveaux de quasi-énergie nous a conduit à imaginer que l'application d'une séquence de pulses bicolore inversée permettrait de relocaliser une distribution d'impulsions préalablement délocalisée. Les simulations numériques ont montré que ce phénomène existait pour des séquences inversées basées sur la modulation de phase ou sur la modulation d'amplitude, mais que, dans le cas de la modulation de phase, le phénomène exigeait l'utilisation de séquences de pulses très longues, expérimentalement irréalisable. Nous avons donc opté, dans notre réalisation expé-

<sup>5</sup> En effet, pour les points acquis à des temps  $n < 17$ , le pulse résonnant est tout de même appliqué ; les distributions devraient s'élargir significativement si l'échauffement était conséquent.

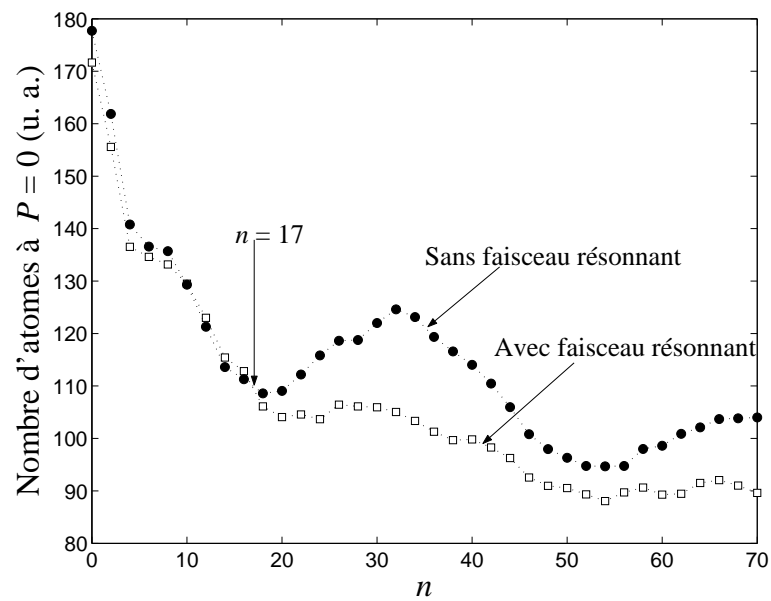


FIG. 4.15 – Evolution expérimentale du maximum de la distribution d'impulsions en fonction du temps pour une double séquence inversée avec application d'un pulse laser quasi-résonnant comparée à l'évolution du maximum pour la même séquence sans pulse. Le pulse, de durée  $\Delta n = 0,9$  et appliqué au temps  $n = 17$ , détruit le processus de relocalisation. Ceci prouve l'importance la nature cohérente de la réversibilité de la localisation dynamique.



rimentale, pour une séquence de pulses particulière composée d'une série primaire périodique et d'une série modulée en amplitude. Les résultats expérimentaux ont montré qu'une distribution d'impulsions initiale soumise à une telle séquence de pulses présente effectivement un phénomène de relocalisation : nous l'avons observé à travers l'évolution des atomes d'impulsion nulle mais aussi à travers l'évolution de l'énergie cinétique moyenne. Enfin, deux éléments sont venus appuyer l'interprétation quantique du phénomène. Le premier est la forme de la distribution localisée qui présente, sur ces flancs, une forme caractéristique des phénomènes de diffusion quantique, à savoir une forme double exponentielle. Le deuxième est issu d'une expérience de décohérence : en perturbant une séquence inversée par une source d'émission spontanée, le phénomène de relocalisation disparaît complètement.

# Conclusion

Ce mémoire a décrit un certain nombre de résultats expérimentaux concernant l'étude du chaos quantique avec des atomes refroidis par laser. Nous avons mis en évidence l'usage des techniques couplées de refroidissement d'atomes par laser, d'utilisation des potentiels optiques et de techniques de mesure par des transitions Raman stimulées pour des études très fines de la dynamique quantique. Plus que simplement l'aspect chaos quantique, nous avons pu étudier la sensibilité des systèmes quantiquement chaotiques aux phénomènes d'interférence quantique et de décohérence. Ceci nous a conduit à une interprétation très affinée du phénomène sub-Fourier. Ce modèle nous a par ailleurs permis d'imaginer et de réaliser une expérience mettant en évidence le caractère réversible du brouillage de phase menant à la destruction de la localisation dynamique.

Nous avons ainsi vu que lorsqu'une séquence de pulses bicolore était appliquée sur un nuage d'atomes froids, le nombre d'atomes d'impulsion nulle dépendait du rapport bicolore (le rapport des deux fréquences caractéristiques qui composent la séquence de pulses). Lorsque ce rapport correspond à une séquence périodique, ce signal chute jusqu'au temps de localisation puis se stabilise (localisation dynamique), alors qu'il continue de chuter pour une séquence non-périodique (délocalisation). En balayant le rapport bicolore, apparaissent de ce fait des raies de localisation. L'étude principale que nous avons menée a consisté à étudier les caractéristiques des raies de rapport bicolore proche de l'unité. Il est apparu que leur largeur, dont on aurait pu s'attendre, en suivant une analyse de Fourier, à ce qu'elle corresponde à l'inverse de la durée de la séquence de pulses, peut être en réalité bien plus fine (jusqu'à 43 fois dans nos observations expérimentales). C'est pourquoi nous avons désigné ces raies par le terme de "raies sub-Fourier" et caractérisé leur largeur par un "coefficient sub-Fourier". Nous avons aussi pu constater que l'évolution de leur largeur ne suit pas, jusqu'au temps de localisation, un comportement de type Fourier, c'est-à-dire que la largeur décroît initialement plus rapidement que l'inverse de la durée la séquence.

Notre analyse théorique de ce phénomène s'est attelée à comprendre comment, *sous condition de quasi-périodicité de la séquence de pulses*, les amplitudes se modifient en évoluant sur les niveaux de quasi-énergies du spectre de Floquet. Nous avons montré que les phénomènes de délocalisation dépendent en fait de la façon dont sont passés les anticroisements entre niveaux de quasi-énergie peuplés par la fonction d'onde initiale. Il s'avère que le nombre de passages effectués adiabatiquement est l'élément clé expliquant la brisure de la localisation. Il a ainsi été possible de retrouver trois résultats expérimentaux : le coefficient sub-Fourier des raies de localisation, l'évolution linéaire de la diffusion après le temps de localisation, et la dépendance du coefficient de diffusion au temps longs en fonction du rapport bicolore.

Ce modèle nous a permis de concevoir une expérience permettant de relocaliser une distribution d'impulsions préalablement délocalisée par une séquence quasi-périodique. En effet, les passages adiabatiques sont des processus réversibles, ce qui signifie que l'information nécessaire à une relocalisation de la distribution d'impulsions n'est pas détruite lors de ces passages. Nous avons donc imaginé et appliqué sur le nuage d'atomes des séquences de pulses dites inversées, c'est-à-dire des séquences permettant de balayer le spectre de Floquet dans un sens puis dans un autre. Le résultat d'une telle opération a répondu à nos attentes : un phénomène de relocalisation a bel et bien été observé à la fin de la séquence inversée. Nous avons réalisé une autre expérience cherchant à démontrer que ce processus s'appuie essentiellement sur les cohérences quantiques. Elle a consisté à induire en moyenne une émission spontanée par atome (processus décohérent) à la fin de la phase de délocalisation afin que le phénomène de relocalisation ne puisse avoir lieu. C'est ce que nous avons pratiquement constaté. Nous remarquons au passage que ces résultats tendent à valider l'analyse théorique sur laquelle était basée cette expérience.

Dans la même optique de caractériser les mécanismes qui conduisent à la destruction de la localisation dynamique, il serait intéressant à l'avenir d'étudier ce phénomène par d'autres approches. Nous pensons notamment à une étude qui porterait sur la façon dont la destruction de localisation dynamique dépend de l'amplitude d'une des séries de pulses composant une séquence bicolore de rapport bicolore incommensurable. Par ailleurs, il est aussi possible d'étudier des systèmes de dimension plus élevée en utilisant des séquences à plusieurs fréquences caractéristiques incommensurables.

Nous espérons avoir convaincu le lecteur que ce travail apporte une contribution, à travers les outils développés et les résultats établis, à l'étude de la dynamique quantique et, de manière générale, à une meilleure compréhension des phénomènes quantiques tels que les effets de décohérences, ou encore la transition entre phénomène classique et quantique.

## Annexe A

# Atome à deux niveaux dans une onde stationnaire

Le traitement théorique qui est présenté ici a pour objectif de montrer que des atomes de césium soumis une onde stationnaire pulsée fortement désaccordée est un système équivalent à une particule placée dans un potentiel sinusoidal pulsé. Cette démonstration est basée sur le modèle d'un atome à deux niveaux. Ceci est justifié par le fait que l'atome de césium, préparé dans un état  $|F_f = 4\rangle \equiv |f\rangle$  est soumis à une source laser spectralement fine (laser) dont le désaccord<sup>1</sup> est très grand par rapport à la largeur des niveaux excités  $|e\rangle = |F_f = 3, 4, 5\rangle$ .

### Détermination du hamiltonien

Considérons un atome se propageant librement dans l'espace dont la structure interne comporte un état fondamental  $|f\rangle$  et un état excité  $|e\rangle$  distants en énergie de  $\hbar\omega_0$ . Son hamiltonien

$$\hat{H}_{at} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| \quad (\text{A.1})$$

agit donc dans deux espaces différents, celui de  $\hat{p}$  –de vecteurs propres  $|p\rangle$ – et celui des états internes. Les vecteurs propres du hamiltonien atomique s'écrivent donc comme des vecteurs produits tensoriels ( $|p, f\rangle$  et  $|p, e\rangle$ ).

Cet atome est plongé dans une onde stationnaire, superposition de deux faisceaux laser contre-propagatifs, de fréquence  $\omega_L$  et de nombre d'onde  $k_L$ . Le champ électrique, dirigé uniquement selon  $\vec{x}$  (polarisation linéaire), s'écrit alors

$$\vec{E}(z, t) = E_0 \cos(\omega_L t - k_L z) \vec{x} + E_0 \cos(\omega_L t + k_L z) \vec{x} \quad (\text{A.2a})$$

$$= E_0 \cos(k_L z) (e^{+i\omega_L t} + e^{-i\omega_L t}) \vec{x}. \quad (\text{A.2b})$$

Dans l'approximation dipolaire, l'énergie d'interaction entre l'atome et le rayonnement

---

<sup>1</sup>Le désaccord expérimental est de l'ordre d'une dizaine de GHz, les états hyperfins composant  $|e\rangle$  et accessibles depuis  $|F_f = 4\rangle$  sont de largeur  $\Gamma \approx 5$  MHz et se répartissent sur 450 MHz.

$$\hat{H}_{int} = -\hat{\vec{d}} \cdot \vec{E} \quad (\text{A.3})$$

s'exprime au moyen de l'opérateur moment dipolaire atomique

$$\hat{\vec{d}} = \hat{\vec{d}}_{ef}|e\rangle\langle f| + \hat{\vec{d}}_{fe}|e\rangle\langle f|, \quad (\text{A.4a})$$

$$= (d_{ef})_x(\hat{s}^\dagger + \hat{s}), \quad (\text{A.4b})$$

où, puisque le dipôle suit le champ  $\vec{E}$ ,  $(d_{ef})_x$  est le seul élément non nul de la matrice  $\hat{\vec{d}}$  (supposé réel). Par ailleurs,  $\hat{s} = |f\rangle\langle e|$  et  $\hat{s}^\dagger$ , son adjoint, font respectivement “descendre” et “monter” l'atome de  $|e\rangle$  vers  $|f\rangle$  et de  $|f\rangle$  vers  $|e\rangle$ . En tenant compte de l'expression précédente, la relation (A.3) se développe de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{int} &= \frac{\hbar\Omega_R}{2} \cos(k_L\hat{z})(\hat{s}e^{+i\omega_L t} + \hat{s}^\dagger e^{-i\omega_L t} \\ &\quad + \hat{s}^\dagger e^{+i\omega_L t} + \hat{s}e^{-i\omega_L t}), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

où la quantité

$$\Omega_R = -\frac{2(d_{ef})_xE_0}{\hbar} \quad (\text{A.6})$$

est la *pulsation de Rabi*. En fonction de l'intensité lumineuse, elle se réécrit

$$\Omega_R = -\frac{2(d_{ef})_x}{\hbar\sqrt{\frac{1}{2}\varepsilon_0 c}}\sqrt{I}, \quad (\text{A.7})$$

où  $\varepsilon_0$  est la permittivité du vide et  $c$  la vitesse de la lumière dans le vide. Pour le calcul expérimental, l'élément de matrice dipolaire considéré prend en compte la multiplicité des niveaux excités et le fort désaccord, ce qui donne  $(d_{ef})_x \approx 2, 2 \text{ C} \cdot \text{m}$  [57].

En ajoutant le hamiltonien atomique (A.1) à le hamiltonien d'interaction (A.5), on détermine le hamiltonien total :

$$\begin{aligned} \hat{H}_{tot} &= \frac{\hat{p}^2}{2m} + \hbar\omega_0|e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \cos(k_L\hat{z})(\hat{s}e^{+i\omega_L t} + \hat{s}^\dagger e^{-i\omega_L t} \\ &\quad + \hat{s}^\dagger e^{+i\omega_L t} + \hat{s}e^{-i\omega_L t}). \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Notons que les effets liés à l'émission spontanée en sont absents. Ceci pour deux raisons. Premièrement parce que le formalisme hamiltonien ne convient pas à la description d'une relaxation. Deuxièmement parce qu'il est légitime de les négliger si le désaccord

$$\delta_L = \omega_L - \omega_0, \quad (\text{A.9})$$

est grand comparé à la largeur naturelle  $\Gamma$  du niveau excité (ce qui signifie une faible population d'atomes dans  $|e\rangle$ ).

## Evolution dynamique

Considérons maintenant une superposition d'états atomiques

$$|\Psi(t)\rangle \equiv |\Psi_{ext}(t), \Psi_{int}(t)\rangle = \sum_p a_{f,p}(t)|p, f\rangle + a_{e,p}(t)e^{-i\omega_L t}|p, e\rangle \quad (\text{A.10})$$

où  $a_{f,p}(t)$  et  $a_{e,p}(t)e^{-i\omega_L t}$  sont respectivement les amplitudes de probabilité pour une impulsion  $p$  donnée des états fondamental et excité. Par conséquent,  $a_{e,p}(t)$  représente l'amplitude de l'état excité dans le repère tournant du champ : c'est une façon d'éliminer les variations très rapides relatives à l'évolution libre en  $\omega_0$  de  $|e\rangle$  et à l'évolution en  $\omega_L$  du champ. Les distributions d'impulsion  $|a_{f,p}(t)|^2$  et  $|a_{e,p}(t)|^2$  ne dépendent pas directement de ces fluctuations.

L'évolution temporelle de  $|\Psi(t)\rangle$  répond à l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{d|\Psi(t)\rangle}{dt} = \hat{H}_{tot}|\Psi(t)\rangle \quad (\text{A.11})$$

qui, après avoir négligé les termes d'oscillations rapides en  $\exp(\pm i2\omega_L t)$  et avoir projeté sur  $|p\rangle$ , donne un système de deux équations différentielles couplées

$$i\hbar \frac{da_{e,p}(t)}{dt} = \frac{p^2}{2m} a_{e,p}(t) + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \left( \sum_{p'} \langle p | \cos(k_L \hat{z}) | p' \rangle a_{f,p'}(t) \right) \quad (\text{A.12a})$$

$$i\hbar \frac{da_{f,p}(t)}{dt} = \frac{p^2}{2m} a_{f,p}(t) + \frac{\hbar\Omega_R}{2} \left( \sum_{p'} \langle p | \cos(k_L \hat{z}) | p' \rangle a_{e,p'}(t) \right). \quad (\text{A.12b})$$

Ensuite nous nous plaçons dans l'approximation adiabatique. Cela consiste à ignorer les variations les plus rapides de  $a_{e,p}(t)$  et de  $a_{f,l}(t)$  et à ne garder que celles liées aux échanges de photons. Dans les équations différentielles (A.12a) et (A.12b), les ordres de grandeur des termes du second membre indiquent les temps caractéristiques de ces variations :

- le terme d'énergie cinétique dont le temps caractéristique est de l'ordre  $\omega_r^{-1}$  (avec  $\omega_r = \frac{\hbar k_L^2}{2m} \approx 2\pi \times 2,07$  kHz pour le césium) ;
- le terme d'évolution libre qui induit une oscillation de l'état excité (dans le repère tournant du champ) sur un temps caractéristique de l'ordre de  $\delta_L^{-1}$ , très court dans notre expérience puisque  $\delta_L$  vaut quelques GHz ;
- les termes d'interaction photon-atome correspondant à la *fréquence de Rabi*  $\Omega_R$  (une centaine de MHz dans l'expérience).

Il faut donc bien garder à l'esprit les rapports

$$\omega_r \ll \Omega_R \ll \delta_L \quad (\text{A.13})$$

sur lesquels se fondent l'approximation adiabatique. L'élimination des termes "rapides" revient à poser  $\frac{d\Psi_{e,l}(t)}{dt} = 0$  (en effet, cette opération impose à  $\Psi_{e,l}(t)$  le temps

caractéristique le plus court de l'évolution de  $\Psi_{g,l}(t)$ , soit  $1/\Omega_R$ ). Dans ces conditions, l'équation (??) fournit la relation

$$a_{e,p}(t) = \frac{\Omega_R}{2\left(\delta_L - \frac{p^2}{2m}\right)} \left( \sum_{p'} \langle p | \cos(k_L \hat{z}) | p' \rangle a_{f,p'}(t) \right) \quad (\text{A.14})$$

qui est ensuite réinjecté dans l'équation différentielle (A.12b) :

$$i\hbar \frac{da_{f,p}(t)}{dt} = \frac{p^2}{2m} a_{f,p}(t) + \frac{\hbar\Omega_R^2}{4\left(\delta_L - \frac{\hbar^2}{2m}\right)} \left( \sum_{p'} \langle p | \cos^2(k_L \hat{z}) | p' \rangle a_{f,p'}(t) \right), \quad (\text{A.15})$$

où, désormais, plus aucun terme ne fait référence à l'état excité. En supposant que  $\delta_L \gg \frac{p^2}{2m}$  (puisque  $\omega_r \ll \delta_L$ ) et en exprimant l'équation (??) au moyen d'opérateurs et non plus d'éléments de matrices, nous obtenons l'équation de Schrödinger

$$i\hbar \frac{da_f(t)}{dt} = \frac{\hat{p}^2}{2m} a_f(t) + \frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_L} (\cos(2k_L \hat{z}) + 1) a_f(t) \quad (\text{A.16})$$

à laquelle obéit l'amplitude associée à l'état fondamental  $a_f = \langle f | \Psi_{int} \rangle$ . Nous y reconnaissons enfin le hamiltonien agissant sur son centre de masse

$$\hat{H}_{tot} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \cos(2k_L \hat{z}) \quad (\text{A.17})$$

dont l'énergie potentielle a été décalée d'une quantité  $\frac{V_0}{2}$  et où

$$V_0 = \frac{\hbar\Omega_R^2}{8\delta_L}. \quad (\text{A.18})$$

Par ailleurs, en utilisant l'équation (A.14), nous trouvons la relation entre la population de l'état excité  $|a_e|^2$  et celle de l'état fondamental  $|a_f|^2$

$$\langle \Psi_{ext} | \Psi_{ext} \rangle |\langle e | \Psi_{int} \rangle|^2 = |a_e|^2 = \frac{\Omega_R^2}{4\delta_L^2} \langle \Psi_{ext} | \cos^2(k_L \hat{z}) | \Psi_{ext} \rangle |a_f|^2 \quad (\text{A.19})$$

qui, intégrée sur la position, donne

$$|a_e|^2 \approx \frac{\Omega_R^2}{8\delta_L^2} |a_f|^2. \quad (\text{A.20})$$

Puisque  $\delta_L \gg \Omega_R$ , l'état excité est très peu peuplé (ce qui était prévisible puisque le laser est loin de la résonance atomique) et l'évolution de l'atome peut être confondue avec celle de l'état fondamental. En conséquence, l'équation (A.16) est assimilée à l'équation de Schrödinger de l'atome.

## Couplage sélectif

Il est très instructif de travailler les sommes présentes aux deuxièmes termes de l'équation (A.15) car en écrivant

$$\langle p | \cos(k_L \hat{z}) | p' \rangle = \frac{1}{2} \langle p | e^{ik_L \hat{z}} + e^{-ik_L \hat{z}} | p' \rangle, \quad (\text{A.21})$$

nous mettons à jour des opérateurs de translations<sup>2</sup> qui mènent à

$$\begin{aligned} \langle p | \cos^2(k_L \hat{z}) | p' \rangle &= \frac{1}{2} (\langle p | e^{i2k_L \hat{z}} | p' \rangle + \langle p | e^{-i2k_L \hat{z}} | p' \rangle + \langle p | p' \rangle), \\ &= \frac{1}{2} (\langle p | p' + 2\hbar k_L \rangle + \langle p | p' - 2\hbar k_L \rangle + \langle p | p' \rangle), \\ &= \frac{1}{2} (\delta(p - p' - 2\hbar k_L) + \delta(p - p' + 2\hbar k_L)), \quad (\text{A.22}) \\ &\quad + \delta(p - p'), \end{aligned}$$

où les  $\delta()$  sont des fonctions de Dirac. Replacées sous le signe  $\sum$  de l'équation (A.15), cela donne

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{da_{f,p}(t)}{dt} &= \frac{p^2}{2m} a_{f,p}(t) + \frac{\hbar\Omega_R^2}{4 \left( \delta_L - \frac{\hbar^2}{2m} \right)} a_{f,p+2\hbar k_L}(t) \quad (\text{A.23}) \\ &\quad + a_{f,p-2\hbar k_L}(t) + a_{f,p}(t). \end{aligned}$$

Cette nouvelle formulation montre clairement que le champ ne couple les éléments  $a_{f,p}(t)$  entre eux que par quantités  $0, \pm 2\hbar k_L$ . En effet, l'atome, initialement dans son état fondamental, peut absorber un photon dans une des deux ondes progressives puis le ré-émettre de façon induite, soit dans la même onde, soit dans l'autre. Par exemple, si l'atome absorbe un photon d'impulsion  $\hbar k_L$  dans l'onde se propageant dans le sens  $+\vec{z}$  puis l'émet de façon stimulée dans le sens opposé  $-\vec{z}$ , son impulsion initiale a varié de  $2\hbar k_L$ . En contre partie, l'impulsion du champ a aussi varié d'une quantité  $-2\hbar k_L$  permettant ainsi la conservation de l'impulsion du système champ + atome.

## Force réactive

Le processus d'échange de photons précédemment décrit correspond à l'application d'une force appelée *force réactive*<sup>3</sup>. Sa valeur moyenne est déterminée comme étant la dérivée de l'énergie potentielle :

$$\vec{F}_{reac}(z) = \frac{\hbar k_L \Omega_R^2 \sin(2k_L z)}{4\delta_L} \vec{z}. \quad (\text{A.24})$$

<sup>2</sup>En représentation  $|p\rangle$ ,  $e^{ik\hat{z}}|p\rangle = |p + \hbar k\rangle$

<sup>3</sup>Nous retrouvons ainsi la conservation de la quasi-impulsion évoquée dans la sous-section 1.2.2 puisque nous venons de montrer que, pour un atome à l'impulsion initiale  $p_0$ , les seules impulsions accessibles par interaction avec l'onde stationnaire sont de la forme  $p_0 + n(2\hbar k_L)$  avec  $n \in \mathbb{N}$ .



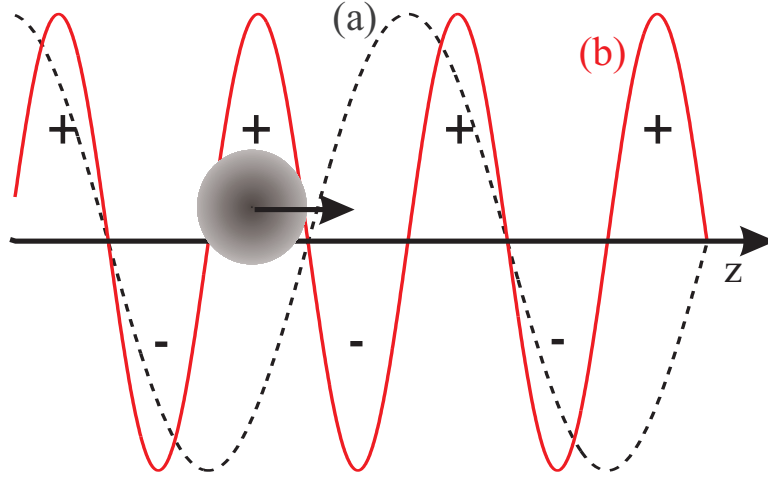


FIG. A.1 – L’atome, par interaction avec une onde stationnaire  $E_x$  (forme (a)), est soumis à une force dite réactive (forme (b)) dont le sens dépend du désaccord  $\delta_L$ . Ici, le désaccord vers le bleu ( $\delta_L > 0$ ) force les atomes à se diriger vers les noeuds de l’onde stationnaire (le sens de la force est marqué par les signes  $\pm$ ).

Il apparaît que le sens de cette force dépend du signe du désaccord présent au dénominateur. Une onde stationnaire désaccordée vers le bleu ( $\delta_L > 0$ ) induit une force dirigée vers le noeud du champ le plus proche de l’atome et inversement, une onde désaccordée vers le rouge ( $\delta_L < 0$ ) produit une force dirigée vers le ventre le plus proche (voir figure A.1).

## Emission spontanée

Lorsque le nombre d’atomes est important, la relation (A.20) nous fournit une information statistique importante : la part relative d’atomes dans l’état excité susceptibles d’émettre un photon dans un autre mode du champ que dans l’un des modes de l’onde stationnaire. La durée de vie dans cette état est typiquement de l’ordre de  $2\pi/\Gamma$  (où  $\Gamma = 2\pi \cdot 5,2$  MHz), ce qui permet d’évaluer le taux d’émissions spontanées à

$$\Pi_{es}(\delta_L) \approx \frac{\Gamma \Omega_R^2}{8\delta_L^2}. \quad (\text{A.25})$$

Pour l’atome de césium, le désaccord  $\delta_L$  doit prendre en compte la répartition des niveaux excités (un désaccord vers le rouge soustrait 200 MHz et un désaccord vers le bleu ajoute 200 MHz).

## Onde stationnaire pulsée

Le potentiel optique est dorénavant pulsé périodiquement dans le temps afin d’établir la correspondance avec le modèle de la section 1.2. Le nouvel hamiltonien

du centre de masse atomique

$$\hat{H}' = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V_0 \cos(2k_L \hat{z}) \sum_{n=0}^{N-1} D(t' - nT) \quad (\text{A.26})$$

est obtenu en modulant le potentiel par une fonction  $D(\tilde{t} - nT)$  caractérisée par une période  $T$  et des pulses carrés de durée  $\tau$ . Le passage à des unités réduites donne

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2} + k \cos(\hat{\theta}) \sum_{n=1}^N d(t - n), \quad (\text{A.27})$$

où  $t = \frac{t'}{T}$ ,  $\theta = 2k_L \hat{z} \{\text{modulo } 2\pi\}$ ,  $\hat{P} = \frac{2k_L T}{m} \hat{p}$ ,  $k = \frac{8\omega_r T^2}{\hbar} V_0$ ,  $\hat{H} = \frac{8\omega_r T^2}{\hbar} \hat{H}'$  et  $d(t)$  est une fonction dont les pulses sont de durée  $\alpha = \frac{\tau}{T}$  et d'aire unitaire. Le paramètre de stochasticité se définit alors comme

$$K = \alpha k = \frac{8\omega_r T \tau}{\hbar} V_0. \quad (\text{A.28})$$

et la constante de Planck renormalisée comme

$$\hbar k = 8\omega_r T. \quad (\text{A.29})$$

Evidemment, introduire la modulation du potentiel tout en conservant les résultats établis précédemment n'est envisageable qu'à condition que la durée de chaque pulse soit plus longue que le temps caractéristique des échanges entre champ et atome, c'est-à-dire

$$\tau > \frac{1}{\Omega_R}. \quad (\text{A.30})$$

Dans notre expérience, cela correspond à une durée du pulse supérieure à 10ns (puisque  $\Omega_R$  est de l'ordre de la centaine de MHz). A l'inverse, notre objectif de réaliser le *kicked rotator* exige que cette durée soit suffisamment courte pour que les pulses aient un effet similaire à des pulses de Dirac. Car en effet, alors que pour un pulse instantanée, la fonction d'onde évolue uniquement sous l'action du potentiel, pour un pulse fini, elle évolue aussi à cause de sa propre impulsion. En conséquence, l'opérateur d'évolution lié au pulse fini s'écrit

$$\hat{U}_{pulse}(\alpha) = e^{-\frac{i}{\hbar} \left( \frac{\hat{P}^2}{2} \alpha - K \cos \hat{\theta} \right)}. \quad (\text{A.31})$$

Le modèle théorique du *kicked rotator* reste correctement décrit tant que le premier terme de l'argument de l'exponentielle reste négligeable devant le second. Cela signifie que la condition

$$\left\langle \left( \frac{\hat{P}^2}{2} \alpha \right)^2 \right\rangle \ll K^2 \langle \cos^2 \hat{\theta} \rangle \quad (\text{A.32})$$

qui, en supposant  $\langle \cos^2 \hat{\theta} \rangle = \frac{1}{2}$ , devient

$$\alpha \ll \frac{K}{\sqrt{\langle \hat{P}^4 \rangle}} \quad (\text{A.33})$$

doit être respectée. Expérimentalement, pour des formes de distributions d'impulsions localisées,  $\sqrt{\langle \hat{P}^4 \rangle} \approx \mathcal{P}_{loc}^2 \approx D_q^2(K)/\hbar^2$ , ce qui implique

$$\alpha \ll \frac{K\hbar^2}{D_q^2(K)}. \quad (\text{A.34})$$

Avec les paramètres  $K = 8.5$  et  $\hbar = 3,46$  (paramètres expérimentaux), l'application de (A.34) donne  $\alpha \ll 0,1$ . La durée d'un pulse doit donc impérativement être inférieure au dixième de la période.

## Annexe B

### Articles publiés



---

## Experimental study of quantum chaos with cold atoms

Commun. Nonlin. Sc. Num. Sim. 8 301-313 (2003)



Available online at [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)

SCIENCE @ DIRECT®

Communications in Nonlinear Science  
and Numerical Simulation 8 (2003) 301–313

Communications in  
Nonlinear Science and  
Numerical Simulation

[www.elsevier.com/locate/cnsns](http://www.elsevier.com/locate/cnsns)

# Experimental study of quantum chaos with cold atoms

Pascal Szriftgiser <sup>a,\*</sup>, Hans Lignier <sup>a</sup>, Jean Ringot <sup>a</sup>, Jean Claude Garreau <sup>a</sup>,  
Dominique Delande <sup>b</sup>

<sup>a</sup> *Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523, Centre d'Etudes et de Recherches Laser et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

<sup>b</sup> *Laboratoire Kastler-Brossel, Tour 12, Etage 1, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*

---

## Abstract

We investigate experimentally the quantum behavior of laser-cooled atoms in a pulsed standing wave, a system that is an atomic analog of the quantum kicked rotor. In particular, it may display the well-known phenomenon of “dynamical localization”, when the standing wave is driven periodically. Furthermore, we study some interesting properties of a *quasi-periodically* driven kicked rotor, which presents resonances that are shown to be sharper than the inverse of the driven–excitation duration, thus presenting a *sub-Fourier* character.

© 2003 Elsevier B.V. All rights reserved.

*PACS:* 05.45.Mt; 32.80.Pj; 42.50.Vk

*Keywords:* Kicked-rotor; Dynamical localization; Quantum chaos; Cold atoms

---

## 1. Introduction

The kicked rotor is a paradigmatic simple system for studies of classical and quantum chaos. Due to its simplicity—a particle rotating on a circular orbit freely except for instantaneous, position dependent, kicks—it can be easily simulated even with a modest computer. The classical system, whose dynamics is described by the well-known Chirikov’s *standard map*, depends on just one parameter, the kick amplitude, and presents a whole set of dynamical behaviors as the kick strength varies. For weak enough kicks, the dynamics is regular, becoming mixed as the onset of

---

\* Corresponding author.

*E-mail address:* [pascal.szriftgiser@univ-lille.fr](mailto:pascal.szriftgiser@univ-lille.fr) (P. Szriftgiser).

*URL:* <http://www.phlam.univ-lille1.fr/atfr/cq>.

chaos is passed up, and tending to an ergodic, completely chaotic behavior as the kick strength increases further. In the latter regime, the diffusion process leads to a continuous spread of the momentum in phase space, and the mean kinetic energy of the system roughly increases linearly with time. The dynamical behavior of the quantum counterpart of the kicked rotor is completely different. The quantum system follows the classical diffusive dynamics only for a short time. After some *localization time* quantum interference freezes its evolution and there is no further increase of the average energy. This behavior, numerically observed at the end of the 70s [1], is named “dynamical localization” (DL), and has been recognized as a *signature* of quantum chaos. It is very similar to the so-called Anderson localization which is observed in disordered quantum systems; in both cases, complex destructive quantum interferences are responsible for the localization. Anderson localization takes place in configuration space while dynamical localization happens in momentum space. The connection between the two phenomena is discussed in [2].

In the present paper, we describe how DL can be very clearly observed in a relatively simple experimental system, the “atomic kicked rotor”, constituted by a cloud of cold atoms periodically driven by a standing wave [3–5]. We experimentally demonstrate that DL is intimately related to the time-periodic character of the system, and that it is destroyed if the driving becomes quasi-periodic by adding a second driving frequency incommensurable with the first one [5]. The system thus presents “localization resonances” for commensurable values of the driving frequencies. We finally show that these lines have an interesting property: their width is smaller than the inverse of the time during which the driving is applied to the system, thus evidencing a “sub-Fourier” behavior that we discuss and for which we provide a heuristic interpretation.

## 2. The system

One can obtain an atomic kicked rotor by placing a sample of cold atoms created in a standard magneto-optical trap setup in a laser standing wave (SW). Let the SW be oriented along the  $x$  axis (a horizontal axis, to be insensitive to the gravitational field), with the laser beams having frequency  $\omega_L$  and wavenumber  $k_L = \omega_L/c$ .

The atoms can interact with the radiation via two kinds of processes. Firstly, they can absorb a photon from the SW and spontaneously re-emit it, thus accomplishing a fluorescence cycle. The temporal rate of such process is roughly  $\Gamma\Omega^2/\Delta_L^2$  (assuming that  $|\Delta_L| \gg \Gamma, \Omega$ ), where  $\Omega$  is the resonance Rabi frequency of the beams forming the SW,  $\Delta_L$  is the detuning between the frequency of the beams and the closest atomic transition frequency,  $\Gamma$  is the natural width of the transition. Note that  $\Omega/\Gamma^2$  is equal to the ratio of the intensity of the SW to the saturation intensity of the transition. This process is dissipative, due to the random character of spontaneous emission; as a general consequence, the phase coherence of the atomic wave function is lost in such a process, which implies that purely quantum effects such as interferences are washed out. Spontaneous emission is thus a stray effect in our experiment.

Secondly, the atoms and the SW can interact via the so-called “dipole force” [6,7], which is conservative. A simple physical picture of the origin of this force can be drawn by considering the interaction of the light beams with the atoms in the frame of second order perturbation theory. One can then show [8] that the interaction with the SW shifts the energy of the ground state level by an amount proportional to  $\hbar\Omega^2 \sin^2(k_L x)/\Delta_L$  (this relation is valid for  $|\Delta_L| \gg \Omega, \Gamma$ ). The atom



then “sees” the SW as a sinusoidal potential of amplitude  $\hbar\Omega^2/2\Delta_L$ . If  $\Delta_L > 0$ , the minima of the potential correspond to the knots of the SW, if  $\Delta_L < 0$  the situation is reversed. The force associated to this potential (often called “optical potential”) is thus conservative. An equivalent interpretation of the physical origin of the dipole force is to consider the quantum process in which the atom absorbs one photon in one of the beams of the SW and re-emits it, *by stimulated emission*, in the other beam. In such a process, the radiation field and the atom *coherently* exchange a momentum  $2\hbar k_L$ . There is no coupling to other modes of the radiation field; the process is thus conservative. The relative phase of the monochromatic laser beams is of course important. As it depends on the position of the atom in the SW, it is not surprising that the resulting conservative force depends on position.

A most interesting feature of the optical potential is that it is proportional to  $\Delta_L^{-1}$ , whereas spontaneous emission is proportional to  $\Delta_L^{-2}$ , which means that, if the SW beam has a large enough intensity, one can arbitrarily reduce the spontaneous emission rate by increasing the laser-atom detuning, and perform the experiment in a almost conservative configuration. As an order of magnitude, the experiment described below is performed with a detuning  $|\Delta_L| \approx 2 \times 10^3 \Gamma$ , producing a spontaneous emission rate of about  $10^3 \text{ s}^{-1}$  per atom. This puts a upper limit of the order of few ms for an experiment where pure quantum interferences are to be observed.

Another interesting point to mention is that there are many simple techniques for manipulating laser beams, which make the present system highly flexible. For example, if the SW is constituted of two coherent but independent counterpropagating beams, it is easy to vary the phase of one of the beams with respect to the other. By varying this relative phase quadratically in time, one obtains an accelerated standing wave, which is equivalent to a linear potential. This technique has been used to experimentally observe Bloch oscillations [9] with cold atoms.

In order to realize an atomic version of the quantum-kicked rotor (QKR), we simply place an acousto-optic shutter in the path of the beams constituting the SW. This allows us to turn the optical potential on and off at will. If the potential is turned periodically on for a very short time, during which the motion of the atoms can be neglected, we obtain a system whose effective Hamiltonian is:

$$H_1 = \frac{P^2}{2M} + V_{\text{opt}} \cos(2k_L x) \sum_n \delta_\tau(t - nT_1) \tag{1}$$

where  $V_{\text{opt}}$  is the amplitude of the optical potential and  $\delta_\tau(t) = 1/\tau$  if  $|t| \leq \tau/2$  and zero otherwise, tends to the Dirac  $\delta$ -function when  $\tau \rightarrow 0$ . The purpose of the variable  $\tau$  is to model the pulse duration in a real experiment. By introducing standard normalized variables [4],  $p \rightarrow P = (2k_L T_1)p/M$ ,  $x \rightarrow X = 2k_L x$ ,  $t \rightarrow t/T_1$ ,  $K = \Omega^2 T_1 \tau \hbar k_L^2 / (2M \Delta_L)$ , and  $\hbar_{\text{eff}} = 8\hbar k_L^2 T_1 / M$ , the corresponding Schrödinger equation can be written:

$$i\hbar_{\text{eff}} \frac{\partial \psi}{\partial t} = \left( \frac{P^2}{2M} + K \cos X \sum_n \delta_\tau(t - n) \right) \psi \tag{2}$$

which is the standard Schrödinger equation for the QKR.

A *quasi-periodic* atomic kicked rotor can be obtained simply by adding to the primary kick sequence a secondary series of kicks at frequency  $f_2$ . If the frequency ratio  $r = f_2/f_1 = f_2 T_1$  is an

irrational number, the kick sequence is quasi-periodic. We thus obtain the following Hamiltonian, for the case where the sequences have the same kick amplitude:

$$H_2 = \frac{P^2}{2M} + K \cos X \left[ \sum_{n=1}^{N_1} \delta_\tau(t - n) + \sum_{n=1}^{N_2=rN_1} \delta_\tau \left( t - \frac{n + \varphi/2\pi}{r} \right) \right] \tag{3}$$

where  $\varphi$  is the initial phase difference between the two series of kicks.

An interesting variation of the quasi-periodic QKR is obtained by modulating the strength of a single series of kicks at the frequency  $f_2$  with an amplitude  $A$ , giving the Hamiltonian:

$$H_3 = \frac{P^2}{2M} + K \cos X [1 + A \cos(2\pi r t)] \sum_{n=1}^N \delta_\tau(t - n). \tag{4}$$

Let us note before closing this section that a system of units widely used in the context of laser cooling is the “recoil units”. The recoil momentum  $p_r$  is the momentum acquired by the atom in absorbing or emitting a photon of wavelength  $k_L$ :  $p_r = \hbar k_L$ . One can accordingly define a recoil velocity  $v_r = p_r/M$ , a recoil energy  $E_r = p_r^2/2M$ , a recoil frequency  $\omega_r = E_r/\hbar$  and so on. Typically, in this paper, the subscript  $r$  refers to recoil units. It is important to realize the connection between these natural “quantum” units and the units used for getting the standard normalized variables, Eq. (1). Not surprisingly, the elementary “quantum” momentum,  $2p_r$ —which represents the momentum change of the atom in an elementary quantum process, see above—appears to be exactly the effective Planck constant  $\hbar_{\text{eff}}$  in normalized classical units.

### 3. Experimental setup

Our realization of the kicked rotator (Fig. 1) is similar to that of Ref. [4]. Cold cesium atoms issued from a magneto-optical trap (MOT) are placed in a far-detuned ( $\Delta_L \sim 2 \times 10^3 \Gamma$ ) standing wave. The beam forming the SW passes through an acousto-optical modulator (AOM), allowing the SW to be easily switched on and off, with a switching time of 50 ns. The modulation is thus an almost perfect square, at the time scale of the atomic motion, and its duration and period are controlled by a microcomputer. The beam is then injected in an optical fiber that brings it to the

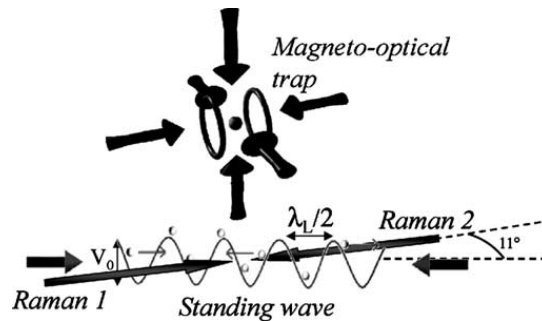


Fig. 1. Schematic view of the experimental setup. Cesium atoms are first laser-cooled in a standard magneto-optical trap. They are then released from the trap and fall freely to the region of interaction with the standing wave. Finally, counterpropagating Raman beams are applied in order to measure the population of a velocity class. The experiment is repeated with a different Raman detuning in order to measure another velocity class. In this picture, scales are not respected, the standing wave is in fact less than 1 mm below the trap.

interaction region, and the SW is simply obtained by back-reflection of this beam. The SW has a waist of 1 mm and a typical power of 100 mW in each direction. Typical values of the pulse frequency and duration are  $f_1 = 36$  kHz and  $\tau = 500$  ns, producing a stochasticity parameter  $K_1 \approx 12$  and an effective Planck constant  $\hbar_{\text{eff}} = 8\omega_r T_1 = 2.9$ .

The atomic velocity distribution is measured by velocity-selective Raman stimulated transitions between the  $F_g = 3$  and  $F_g = 4$  hyperfine ground-state sublevels [10–13], whose separation is 9.2 GHz (the cesium clock frequency). The two counterpropagating Raman beams have a constant frequency difference, which is shifted from the hyperfine sublevel separation by a controllable Raman detuning  $\delta_R$ . An atom can thus absorb one photon in one of the Raman beams, be excited to a virtual intermediate electronic state (the optical frequency of the beams is detuned from the atomic transition frequency by an amount  $|\Delta_R| \gg \Gamma$ ) and then emit a stimulated photon in the other beam, decaying to the other ground state hyperfine sublevel. Because of the high value of  $\Delta_R$ , the natural width of the intermediate state does not play any role in the process, and the width of the observed line is in principle limited only by the duration of the Raman pulses. The counterpropagating beam configuration insures that the process is sensitive to the atomic velocity via the Doppler effect. A Raman pulse of detuning  $\delta_R$  brings the atoms in the velocity class  $v = v_r + \delta_R/(2k_R)$  ( $k_R$  is the wave number of the Raman beams) to the  $F_g = 3$  hyperfine sublevel. A laser pulse resonant with the  $F_g = 4$  hyperfine sublevel is then applied to push the atoms of other velocity classes (that is, those not affected by the Raman pulses) out of the experimental region. A frequency modulated probe beam is applied and its absorption signal detected by a lock-in amplifier, yielding a signal proportional to the population in a sharply defined velocity class. Experimentally, the typical velocity distribution of the atoms issued from the magneto-optical setup is a Gaussian of full width at half maximum (FWHM) equal to  $8\hbar k_L$ , corresponding to a temperature of 3.3  $\mu\text{K}$ , which is typical of a ‘‘Sisyphus-boosted’’ laser cooling device.

The generation of the Raman beams is based on a direct modulation (at 4.6 GHz) of a diode laser, detuned by 200 GHz ( $4 \times 10^4 \Gamma$ ) with respect to the atomic transition. The two symmetric first optical sidebands are used to inject two diode lasers that produce 150 mW beams with a 9.2 GHz beat-note of sub-Hertz spectral width [14]. The Raman beams pass through a combination of AOMs allowing the generation of the Raman pulses. These beams are then injected into optical fibers that carry them to the atomic trap.

Stray magnetic fields are harmful for the Raman velocity measurement, due to the complex structure of Zeeman sublevels of the ground state of cesium. In the present setup, the variations of the local magnetic field (essentially low frequency electromagnetic perturbations) are corrected by an active compensation system, giving a residual field of about 300  $\mu\text{G}$  and an compensation bandwidth of 500 Hz [13]. The final momentum resolution obtained is  $\hbar k_L/2$ , largely sufficient for this experiment, and is much better than that obtained by time of flight methods [4]. The obtained resolution is so good that in the experiment we voluntarily reduced it. The Raman  $\delta_R$  detuning is swept around its mean value during the Raman pulse, in order to increase the signal to noise ratio.

#### 4. The quasi-periodic quantum kicked rotor

DL is a well-known signature of ‘‘quantum chaos’’ (by which we mean the behavior of a quantum system whose classical counterpart is chaotic). DL is present in periodically driven

systems [1], and manifests itself by a “freezing” of the quantum evolution under the action of destructive quantum interferences after some “localization time”. The mean momentum distribution of the system then takes a characteristic exponential shape  $\exp(-|P|/L)$ , where  $L$  is the “localization length” in the momentum space. Although it presents some strong connection with Anderson localization in disordered quantum systems [2], it should be emphasized that localization takes place in momentum space, not in configuration space. This is very convenient for cold atomic gases, as experimental techniques like the velocity-selective Raman technique described above allows for accurate measurements of the momentum distribution, while the spatial distribution is much more difficult to measure at the scale of one laser wavelength.

In order to observe DL, the following experimental sequence is realized. The magneto-optical trap is first turned off. This is necessary to make the atomic motion free between kicks and to prevent dissipation effects due to spontaneous emission. At that moment, the momentum distribution of the atoms is a Gaussian of FWHM  $8 \hbar k_L$  (see Section 3). The kick series then starts. When the SW excitation ends, the Raman measurement sequence, described in the previous section, is used to measure the population of a velocity class. The whole sequence starts over again to probe a new velocity class.

The pulse sequence driving the SW is produced by two synthesizers at frequencies  $f_1$  and  $f_2$  with a fixed phase relation, thus corresponding to the Hamiltonian modeled by Eq. (3). We show in Fig. 2 the initial momentum distribution (just before the kicks are applied) [trace (a)] and the final distribution (after interaction with the standing wave) for  $f_2/f_1 = 1.000$  and  $f_2/f_1 = 1.083$ , with a phase of  $\varphi = 180^\circ$ . Both final distributions show a clear broadening with respect to the initial one. For the “resonant” case ( $f_2/f_1 = 1$ ) [trace (b)], the distribution presents the characteristic DL exponential shape  $P(p) \simeq \exp(-|p|/L)$ , with a localization length (along the momentum coordinate)  $L \approx 8.5\hbar k_L$ , evidencing dynamical localization. This is not surprising as for  $f_1 = f_2$ , the system is strictly time-periodic. The measured localization length agrees fairly well with theoretical estimates. Trace (c) corresponds to a non-resonant quasi-periodic case, as the ratio  $f_2/f_1 = 1.083$  is sufficiently far from any simple rational number. The momentum distribution presents a broader and more complex shape. The thin solid lines in Fig. 2 correspond, for each trace, to “exact” numerical solutions of the Schrödinger equation [15] (which are easy to calculate thanks

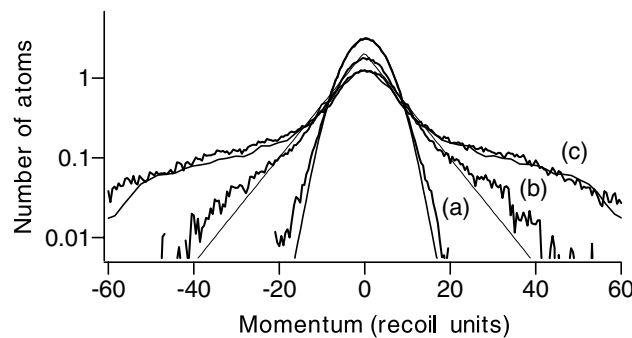


Fig. 2. Measured momentum distributions (vertical scale is logarithmic). Plot (a) corresponds to the initial momentum distribution when the atoms are released from the magneto-optical trap. Plot (b) corresponds to the velocity distribution after a series of 50 kicks with  $r = f_2/f_1 = 1.000$ . Plot (c) corresponds to the velocity distribution after a series of 50 kicks with  $r = 1.083$ . In both cases, the initial relative phase of the kick series is  $\varphi = 180^\circ$ .

to the kicked structure of the Hamiltonian). The resulting momentum distribution is averaged over the measured initial momentum distribution of the atoms and over the transverse profile of the SW beam. Indeed, because of the finite transverse size of the laser beams, different atoms experience slightly different  $K$  values, leading to some “inhomogeneous broadening” of the DL signal. We have used  $K_1 = K_2 = 10$  at the center of the laser beam, in accordance with the value deduced from the laser power, detuning and geometrical properties. For  $f_1 = f_2 = 36$  kHz, we obtain a dynamically localized (exponential) distribution with a localization length which agrees with the experimentally observed one (at the 10% level). For  $f_2/f_1 = 1.083$ , the result of the simulation—shown in the figure—agrees very well with the experimental data. The fact that the broad contribution is significantly larger than the “resonant” distribution—together with the fact that the classical diffusion constant is practically identical in the two cases—shows that diffusion has persisted during a longer time in the non-resonant case. Furthermore, the fact that the distribution is not exponential strongly suggests that we did not reach DL and that diffusion should persist for longer times.

A simple and useful method to detect the presence of DL is to probe only the zero-velocity class: localized (thinner) distribution correspond to a higher zero-velocity signal, while delocalized (broader) distributions give lesser values of the zero-velocity class population. This allows us to sweep the frequency  $f_2$  of the secondary kick, keeping all other parameters ( $f_1$ ,  $\varphi$ ,  $K_1$  and  $K_2$ ) fixed and search for the values of the frequency ratio presenting localization. The result is shown in Fig. 3. One clearly sees peaks at the simple rational values of  $r = f_2/f_1$ . Each peak is associated with an increased number  $\mathcal{N}(0)$  of zero-velocity atoms, that is an increased degree of localization. The most prominent peaks are associated with integer values of  $r$ , a rather natural result. Smaller peaks are associated with half-integers values of  $r$ , even smaller ones with  $r = p/3$  rational numbers, etc. All these features are very well reproduced by the numerical simulation as shown in the inset of Fig. 3.

By varying the total duration of the experiment, it is possible to show directly that localization is responsible for the observed curves. Indeed, for an increased duration, it is expected that, for

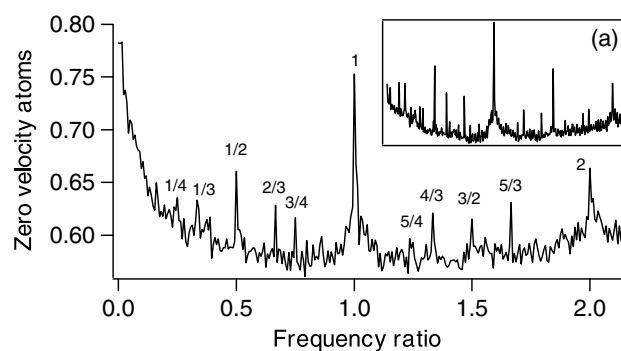


Fig. 3. The population of zero-velocity atoms  $\mathcal{N}(0)$  (probed with the Raman setup) as a function of the frequency ratio  $r = f_2/f_1$  (with  $f_1 = 36$  kHz) and phase  $\varphi = 52^\circ$ . The increase of the zero-velocity signal is a signature of dynamical localization. Dynamical localization for commensurate frequencies—and simple rational  $r$  values—is clearly seen. For incommensurate frequencies, like in Fig. 2, no dynamical localization is visible. The inset (a) shows the corresponding curve obtained by numerical simulation (see text), which reproduces almost perfectly the features of the experimental curve.

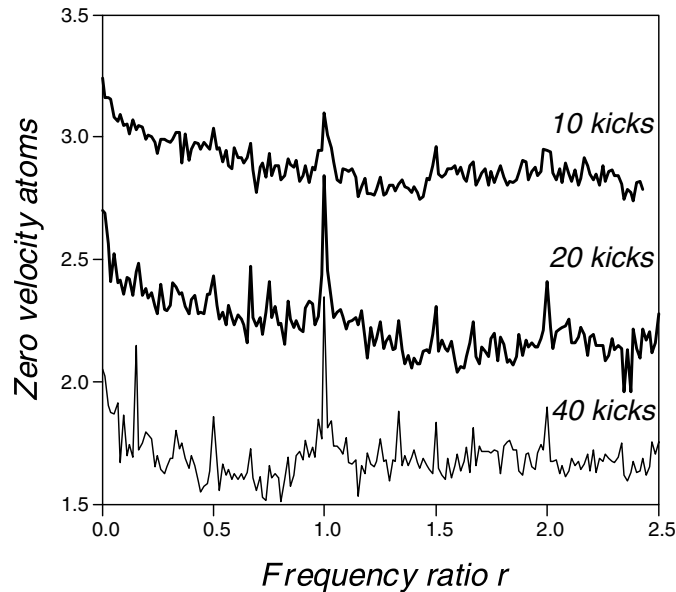


Fig. 4. Same as Fig. 3, but for increasing duration of the experiment (from top to bottom: 10, 20 and 40 kicks). At long times, more and more resonance lines are visible. The rational numbers which emerge are those for which dynamical localization has taken place during the duration of the experiment. The increase of the visibility of the resonance peaks with increasing interaction time is a clear proof of localization.

rational values of  $r$  where localization has already taken place, no further evolution will take place while, at irrational values of  $r$ , chaotic diffusion will continue and the signal will thus drop, improving the visibility of the resonances. This is indeed what is experimentally observed in Fig. 4 where the population in the zero-velocity class is shown as a function of  $r$ , for increasing durations. While, for 10 kicks, only the  $r = 1$  resonance is clearly visible, a number of rational values emerge for 20 and 40 kicks. For irrational numbers with large denominators, the localization time is expected to be rather long. At 40 kicks, only simple rational numbers (with denominator smaller than 3 or 4) lead to localization. For a larger number of kicks, more complicated rational numbers should be visible. In any case, the increase of the visibility of peaks with increasing interaction time is a clear proof of localization.

## 5. Sub-Fourier resonances

A point of immediate interest, both for experimentalists and theoreticians, is the width of the lines observed with the quasi-periodic quantum kicked rotor, as described in the previous section [16]. In particular, it is interesting to identify the physical process responsible for their width. Here we shall concentrate in the study of the most intense line, corresponding to kick series of frequency ratio  $r = 1$ . A zoom of that line is shown in Fig. 5 (this curve was obtained for a different set of parameters than in Figs. 3 and 4). A more detailed analysis shows that it presents a rather remarkable feature: its width  $\Delta r$  is extremely narrow, that is  $\Delta r_{\text{exp}} = 0.0026$ , (FWHM) and thus  $\Delta f_2 = f_1 \Delta r_{\text{exp}} \approx 47$  Hz. Relating that width to the duration of the pulse excitation  $T = N_1 T_1$ , we find:

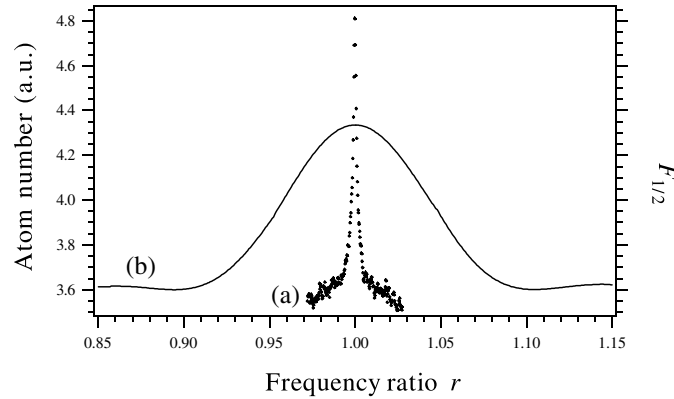


Fig. 5. Below the Fourier limit. (a) Experimental measurement of the zero-velocity atom number,  $\mathcal{N}(0)$ , as a function of the ratio  $r = f_2/f_1$  of the two excitation frequencies. Parameters:  $f_1 = 18$  kHz,  $K = 42$ ,  $N_1 = 10$ ,  $\tau = 3 \mu\text{s}$  and in order to avoid pulses overlap we set  $\varphi = \pi$ . Averaging: 100 times. (b)  $F_{1/2}(r)$ , for comparison with the Fourier transform of the kick sequence (amplitude and offset are arbitrary for  $F_{1/2}$ ).

$$\Delta f_2 T \approx \frac{1}{38} \ll 1. \tag{5}$$

The line is thus, “sub-Fourier” in the sense that, from the Fourier inequality, one would expect to have  $\Delta f_2 T \approx 1$ . The Fourier inequality implies that a narrow frequency spectrum corresponds to a long temporal signal, as it links the width  $\Delta f$  of the frequency spectrum and the temporal width  $\Delta t$  of the signal:  $\Delta f \Delta t \geq 1/2$ . Strictly speaking,  $\Delta f$  is the square root of the variance of the frequency distribution,  $\Delta t$  is the square root of the variance of the temporal distribution of the signal. For most signal shapes, they can be associated resp. with the width of the frequency distribution and its time duration. A rule usually deduced from the above one states that two frequencies cannot be distinguished before a time proportional to the inverse of their difference. Of course, if the signal/noise ratio is infinite, two unresolved frequencies can still be distinguished using a good fit. This is not the problem we are interested in. We shall consider the raw width of a resonance signal, before any analysis. Physically, the Fourier inequality limits the minimum width of a resonance line to the inverse of the time duration of the experiment. However, these conclusions rely on the linear response of the system to the excitation, and this limit can in principle be overcome if a suitable non-linearity is introduced. The simplest example is to use a multiphoton resonance: the frequency width of a  $n$ -photon excitation line is divided by a factor up to  $n$  compared to a one photon excitation, as recently observed with multiphoton Raman transitions [17]. The sub-Fourier character then originates from the fact that it is the  $n$ th harmonic of the external driving frequency that has to be compared to the atomic frequency, and not the driving frequency itself.

Let us first quantify more precisely the “sub-Fourier” character of the lines. When two sequences with slightly different frequencies are combined, the resulting Fourier spectrum has two series of peaks that may overlap. This is visible in Fig. 6, which shows, for different values of  $r$ , the squared modulus of the Fourier transform of the double kick sequence (with  $\varphi = 0$ ), in the neighborhood of the fundamental frequency  $f_1$ . Consider the function  $F_{1/2}(r)$ , defined as the squared modulus of the Fourier transform at frequency  $f_{1/2} = (f_1 + f_2)/2$ . This function is large

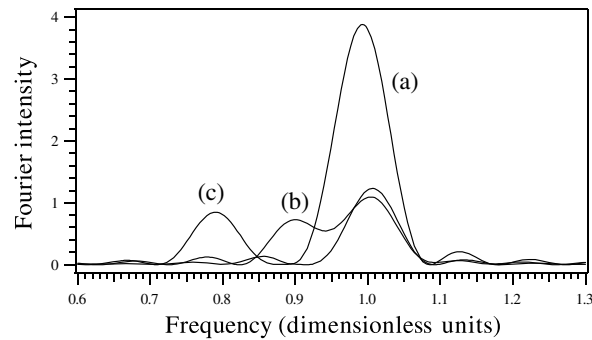


Fig. 6. First harmonic of the Fourier transform of the kick sequence. The parameters are:  $\tau = 0.5 \mu\text{s}$ , and  $f_1 = 18 \text{ kHz}$ . (a) For  $r = 0.98$  the two frequencies are not resolved; (b)  $r = 0.93$  the two frequencies are barely resolved; (c)  $r = 0.80$ , the two frequencies are clearly resolved.

when the two peaks overlap and goes to zero when the two frequencies are completely resolved, giving a quantitative measure of the Fourier resolution. In order to make a comparison with the experimental data,  $F_{1/2}(r)$  is also plotted in Fig. 5. Its width  $\Delta F_{1/2}(r)$  is 0.091, and  $\Delta F_{1/2}(r)/\Delta r_{\text{exp}} \approx 35$ , clearly showing that Fourier limit has been overcome.

What is the origin of the process giving such a resolution? It could be argued that the atoms are excited by the harmonics of  $f_1$  and  $f_2$ . The  $j$ th harmonic of each fundamental frequency has the same width  $1/T$ , but their frequency separation  $j(f_1 - f_2)$  is increased by a factor  $j$ . One would thus attribute the high resolution of the system to the presence of the high harmonics in the excitation spectrum itself. This interpretation is invalid for several reasons. Firstly, the experimental kicks are not real  $\delta$ -peaks, but have a finite duration  $\tau$ . Wide pulses imply that the overall excitation spectrum is multiplied by a  $\sin(x)/x$ -type curve, which becomes sharper as  $\tau$  increases. This means that the weights of the high harmonics are small and cannot be responsible for the observed behavior. This is illustrated in Fig. 7 which shows the Fourier spectrum of the excitation. The harmonics above the 35th are so small that they cannot be responsible for the sub-Fourier

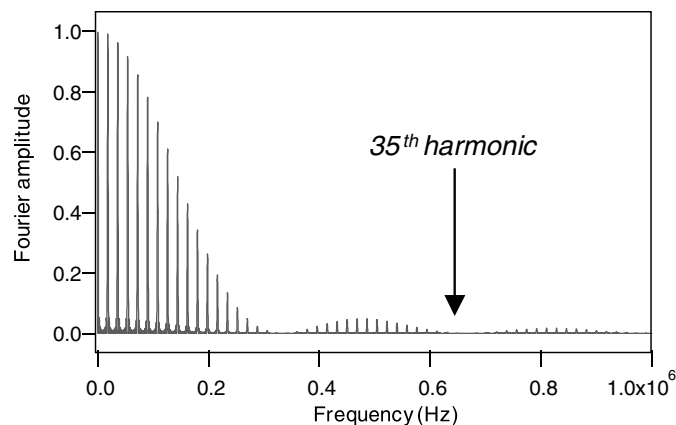


Fig. 7. Fourier transform of the excitation spectrum (Eq. (3))  $f_1 = f_2 = 18 \text{ kHz}$ ,  $\tau = 3 \mu\text{s}$ . Because of the finite duration of the pulses, the intensities of the high harmonics are rapidly decreasing. The harmonics above the 35th are so small that they cannot be responsible for the sub-Fourier character of the resonance line.



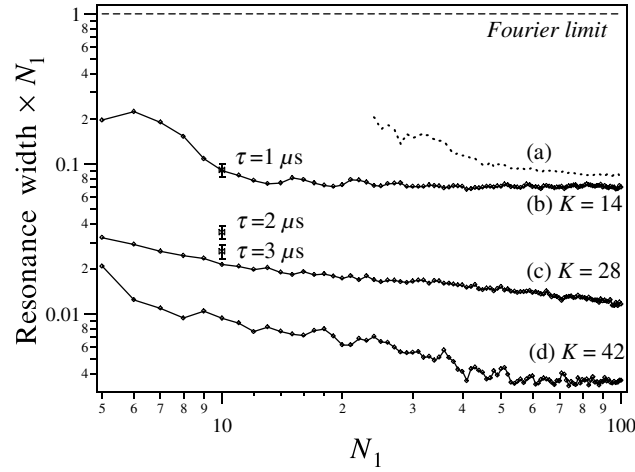


Fig. 8. Temporal evolution of the width of the resonance. The numerically calculated width is multiplied by the number of kicks  $N_1$  and plotted as a function of  $N_1$ , the total excitation time in normalized units. The Fourier limit thus corresponds to the horizontal line of ordinate 1. The solid lines (b), (c) and (d) correspond to three different values of the parameter  $K$ . The displayed experimental points correspond to three different values of the pulse duration  $\tau = 1, 2$  and  $3 \mu\text{s}$ . The dotted line (a) corresponds to the numerical simulation using the modulated series described by Eq. (4).

character of the resonance line. Secondly, when  $\tau$  is increased, with a constant pulse height (which implies that  $K$  is increased, as it is proportional to  $\tau$ ), the relative weight of the high harmonics *decreases*. But we verified both experimentally and numerically that the system's resolution *increases*: the resonance lines becomes narrower (see Fig. 8).

We also performed numerical simulations using the slightly different Hamiltonian, Eq. (4). The spectrum of this excitation is composed of series of peaks at frequencies  $\omega/2\pi = j$  ( $j$  is an integer) with related sidebands at  $\omega/2\pi = j \pm (r - 1)$ . The frequency separation between the two series of peaks in the spectrum is  $r - 1$ , independent of  $j$ : the high harmonics do not provide higher resolution. Despite that, the numerical simulation shown in Fig. 8 is clearly below the Fourier limit. The above arguments thus neatly rule out the effect of high harmonics as a dominant process at work in our experiment. The observed ultra-narrow resonance line is due to the highly sensitive response of the quantum chaotic system itself to the excitation, as we will now explain with semi-heuristic elements.

In the experiment, the atomic wave packet undergoes a series of kicks separated by a free evolution. In momentum representation, a free evolution during a time  $t$  amounts in multiplying the wave function by a phase factor  $\exp(-i\Phi)$  with  $\Phi = P^2t/(2\hbar_{\text{eff}})$ . For simplicity, consider the particular case  $\varphi = 0$ . In this case, the time interval between the last kick ( $N$ th kick) of the first series and the corresponding kick of the second the series is  $N(r - 1)/r$ . The system can resolve the two frequencies if the phase evolution  $\Phi$  during this interval is of the order of one:

$$\Phi(N) = \frac{\langle P^2 \rangle}{2\hbar_{\text{eff}}} N \frac{r - 1}{r} \approx 1. \tag{6}$$

It is important to distinguish two different regimes: (a) before the localization time,  $N < N_L$  (where  $N_L = t_L/T_1$  and  $t_L$  is the localization time), the dynamics is a classical diffusion, and  $\langle P^2 \rangle \propto N$ ; (b) for  $N > N_L$  the momentum distribution is localized and  $\langle P^2 \rangle$  is roughly constant.

Thus, according to Eq. (6), the resolution  $(r - 1)$  has a fast, unusual, decrease as  $N^{-2}$  as long as  $N < N_L$ , and a slower decrease as  $N^{-1}$  for  $N > N_L$ . Otherwise stated, for times  $t < t_L$  the system takes an advance over the Fourier limit that it preserves when  $t > t_L$ . Effectively, the numerical simulations in Fig. 8 indicate that the linewidth decreases faster than the standard Fourier limit. The higher resolution results, on the one hand, of the sensitivity of the quantum interference process to frequency differences, and, on the other hand, from the amplification of such sensitivity by a chaotic diffusion. The underlying physical process relies on long-range correlations in the momentum space. Breaking exact time periodicity of the excitation destroys those correlations and, as a consequence, the localization. This also suggests that the frequency resolution improves as the dynamics becomes more chaotic, as  $K$  increases. Numerically, no lower limit has been found to the resolution, which can reach several orders of magnitude below the Fourier limit.

A few additional remarks might be done. Firstly, the sub-Fourier behavior is allowed because the resonance lines are not the direct Fourier transform of a temporal signal. Secondly, the observation of sub-Fourier lines is not limited to a specific choice of parameters. The curve displayed in Fig. 5 is the most sub-Fourier one that we have observed, but sub-Fourier widths are a standard behavior. Thirdly, since the process involves two frequencies, it is quite analogous to a frequency measurement by the heterodyning technique. This might be exploited for realizing ultra-fast frequency locking to a standard frequency, using  $\mathcal{N}(0)$  as an error signal, that would thus respond in a sub-Fourier time.

Overcoming the Fourier limit has been studied in many areas, noticeably in optics and signal processing. In the latter case, there are well known algorithms, for example the *maximum entropy* algorithm or the *optimal filtering* technique [18] which allows to resolve two different frequencies in a signal. In optics, “super-resolution” methods can be used, which usually rely on a priori knowledge of the spectral properties of the system, that are used to enlarge the measured bandwidth of the system, thus creating a higher effective bandwidth [19,20]. Similarly, in near-field optical microscopy, details of size below the diffraction limit can be resolved. In all cases, the resolution is obtained at the price of a signal loss. Our method is different, as it does not require any processing of the observed signal, which is intrinsically sub-Fourier. This is because the non-linearity of the quantum chaotic device itself is responsible for the sub-Fourier character.

## 6. Conclusion

In conclusion, we have shown that, in the presence of a quasi-periodic driving with two base frequencies, the kicked rotator does not show any “short time” dynamical localization except when the ratio of the frequencies is close to a rational number. In the latter case, the system is time periodic and displays clear evidence of dynamical localization. This conclusion is drawn from experiments performed with both 50 and 100 primary kicks, whereas the localization time is of the order of 15 kicks. Longer kick sequences are impossible because of the free fall of the atoms under gravity, but numerical simulations show the same behavior up to few thousands kicks. Although it is currently impossible, experimentally or numerically, to decide if the DL is effectively suppressed by the secondary kicks or if it corresponds to a much longer localization time, the results presented here clearly evidence a dramatic change in the behavior of the system due to a secondary irrational frequency.

Additionally, the destruction of the localization by periodicity breaking is highly sensitive and it displays a sub-Fourier behavior. We have experimentally demonstrated the possibility of using a quantum-chaotic device to discriminate two frequencies, far below the Fourier limit. The effect relies on the sensitivity of quantum interferences to periodicity breaking, amplified by a chaotic diffusive process. No physical law has been broken, but the very widely used “rule of thumb” stating that the minimum width of a resonance should be limited by the excitation time is here not valid, opening the way to a new field of quantum-chaotic signal processing.

## Acknowledgements

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM) is Unité Mixte de Recherche UMR 8523 du CNRS et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Laboratoire Kastler-Brossel de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure is UMR 8552 du CNRS. CPU time on a NEC SX5 computer has been provided by IDRIS.

## References

- [1] Casati G, Chirikov BV, Ford J, Izrailev FM. *Lect Notes Phys* 1979;93:334.
- [2] Grepel DR, Prange RE, Fishman S. *Phys Rev A* 1984;29:1639.
- [3] Graham R, Schlautman M, Zoller P. *Phys Rev A* 1992;45:19.
- [4] Klappauf BG, Oskay WH, Steck DA, Raizen MG. *Phys Rev Lett* 1998;81:1203.
- [5] Ringot J, Szriftgiser P, Garreau JC, Delande D. *Phys Rev Lett* 2000;85:2741.
- [6] Cohen-Tannoudji C. *Fundamental Systems in Quantum Optics*. In: Dalibard JMRJ, Zinn-Justin J, editors. *Ecole des Houches*. Amsterdam: North-Holland; 1992. p. 1–164.
- [7] Meystre P. *Atom Optics*. New York: Springer; 2001.
- [8] Cohen-Tannoudji C, Dupond-Roc J, Grynberg G. *Photons et Atomes—Processus d'interaction*. Paris: InterEditions; 1988.
- [9] Bendahan M, Peik E, Reichel J, Castin Y, Salomon C. *Phys Rev Lett* 1996;76:4508.
- [10] Kasevich M, Weiss DS, Riis E, Moler K, Kasapi S, Chu S. *Phys Rev Lett* 1991;66:2297.
- [11] Vuletic V, Chin C, Kerman AJ, Chu S. *Phys Rev Lett* 1998;81:5768.
- [12] Morinaga M, Bouchoule I, Karam JC, Salomon C. *Phys Rev Lett* 1999;83:4037.
- [13] Ringot J, Szriftgiser P, Garreau JC. *Phys Rev A* 2002;65:013403.
- [14] Ringot J, Lecoq Y, Garreau JC, Szriftgiser P. *Eur Phys J D* 1999;7:285.
- [15] Cohen D. *Phys Rev A* 1991;44:2292.
- [16] Szriftgiser P, Ringot J, Delande D, Garreau JC. *Phys Rev Lett* 2002;89:224101.
- [17] Cataliotti FS, Scheunemann R, Hänsch TW, Weitz M. *Phys Rev Lett* 2001;87:113601.
- [18] Press W, Teukolsky SA, Vetterling WT, Flannery BP. *Numerical recipes in C*. Cambridge, UK: Cambridge University Press; 1992.
- [19] Bershada NJ. *J Opt Soc Am* 1969;59:157.
- [20] Bertero M, Mol CD. In: Wolf E, editor. *Progress in optics*, University of Rochester. Amsterdam: Elsevier; 1996. p. 129–78.

---

Quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor

Europhys. Lett. 69, 327-333 (2005)

## Quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor

H. LIGNIER<sup>1</sup>, J. C. GARREAU<sup>1</sup>, P. SZRIFTGISER<sup>1</sup> and D. DELANDE<sup>2</sup>

<sup>1</sup> *Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, UMR CNRS 8523  
Université des Sciences et Technologies de Lille  
F-59655, Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

<sup>2</sup> *Laboratoire Kastler Brossel, Tour 12, Etage 1  
4 Place Jussieu, F-75005 Paris, France*

received 1 July 2004; accepted in final form 19 November 2004

published online 24 December 2004

PACS. 05.45.Mt – Quantum chaos; semiclassical methods.

PACS. 32.80.Lg – Mechanical effects of light on atoms, molecules, and ions.

PACS. 32.80.Pj – Optical cooling of atoms; trapping.

**Abstract.** – We study the mechanisms responsible for quantum diffusion in the quasiperiodic kicked rotor. We report experimental measurements of the diffusion constant on the atomic version of the system and develop a theoretical approach (based on the Floquet theorem) explaining the observations, especially the “sub-Fourier” character of the resonances observed in the vicinity of exact periodicity, *i.e.* the ability of the system to distinguish two neighboring driving frequencies in a time shorter than the inverse of the difference of the two frequencies.

Quantum chaos is the study of *quantum* systems whose classical limit is chaotic. A major challenge of quantum chaos is to understand the mechanisms that make quantum chaos different from classical chaos. An important difference between classical and quantum systems is the existence in the latter of *interferences* between various paths. At long times, a large number of complicated trajectories interfere. One could expect the contributions of the various paths to have uncorrelated phases, so that the interference terms vanish in the average after some time, implying that quantum and classical transport should be identical. This simple expectation is however too naive, because phases of the various paths are actually correlated; this is, for example, the case for the kicked rotor.

The quantum kicked rotor has been extensively studied experimentally in recent years [1–4]. In its atomic version it consists of a cloud of laser-cooled atoms exposed to short pulses of a far-detuned, standing laser wave, corresponding to the Hamiltonian (for the external motion of the atoms)

$$H_0 = \frac{p^2}{2} + \frac{K}{T} \cos \theta \sum_n \delta(t - nT), \quad (1)$$

where  $\theta$  is the  $2\pi$ -periodic position of the rotor,  $p$  the conjugate momentum,  $T$  the period and  $K$  is proportional to the strength of the kicks. In the classical limit, this system is chaotic for  $K \gtrsim 1$  [5], and the motion is an ergodic diffusion in momentum space for  $K > 5$ . Dynamical localization (DL) is the *suppression* of such a diffusion in the quantum system by subtle quantum interference effects [6].

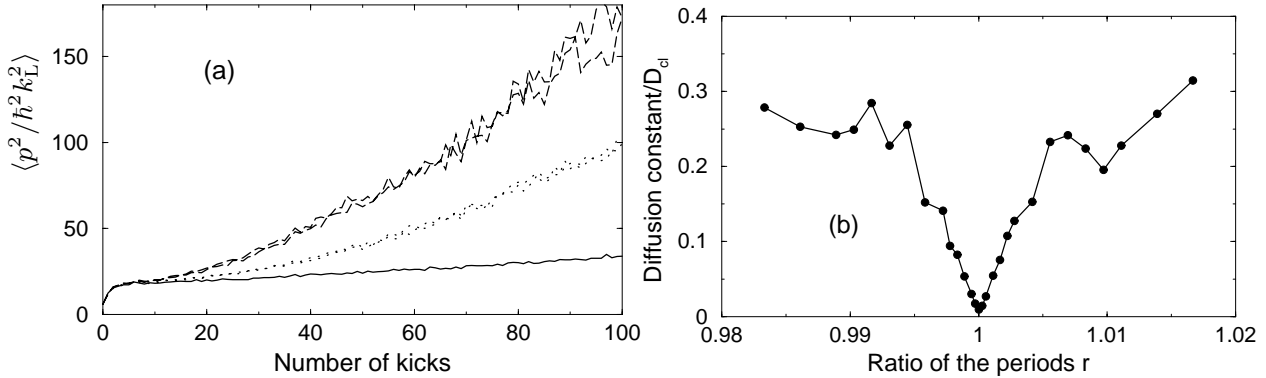


Fig. 1 – (a) Averaged squared momentum  $\langle p^2 \rangle$  ( $p$  is in recoil momentum units) vs. number of double kicks. All curves show DL after 5-10 kicks. After this break-time, the dynamics is frozen for the periodic system ( $r = 1$ , solid curve), but a residual quantum diffusion is observed in the quasiperiodic case, for  $r = 1 + 0.00111$  and  $r = 1 - 0.00111$  (dotted curves) and  $r = 1 \pm 0.00222$  (dashed curves). (b) The quantum diffusion constant (in units of the classical diffusion constant) vs.  $r$ , from data shown in (a). It (almost) vanishes at  $r = 1$  because of DL, and rapidly increases symmetrically on both sides, displaying a triangular cusp.

DL is expected to disappear if the time periodicity is broken [7], as experimentally observed in [3]. This can be done simply by adding a second series of kicks with a different period  $rT$ , giving

$$H(r, \lambda) = \frac{p^2}{2} + \frac{K}{T} \cos \theta \sum_n [\delta(t - nT) + \delta(t - nrT - \lambda T)], \quad (2)$$

where  $\lambda$  is the initial phase between the two kick sequences. If  $r$  is rational, the system is strictly time-periodic and DL takes place, but it is rapidly destroyed around any rational number. One way of characterizing this sensitivity to the time-periodicity is to measure the average kinetic energy  $\langle p^2 \rangle$  of the system as a function of time (or number of kicks), which allows to deduce its diffusion constant. In this paper, we present new experimental results and a theoretical interpretation of the physical mechanism responsible for the destruction of DL in the vicinity of rational  $r$ .

Our experimental setup is described in [8]. Cold cesium atoms are produced in a magneto-optical trap, the trap is turned off, and a series of short pulses of a far-detuned (13.5 GHz  $\sim$  2600  $\Gamma$ ) standing wave (around 65 mW in each direction) is applied. At the end of the pulse series, pulses of counter-propagating phase-coherent beams perform velocity-selective Raman stimulated transitions between the hyperfine ground-state sublevels  $F_g = 4$  and  $F_g = 3$ . A resonant probe beam is then used to measure the fraction of transferred atoms, which corresponds to the population in a velocity class. Repeated measurements allow to reconstruct the atomic momentum distribution  $P(p)$ . In the periodic case, one observes, for  $t > t_\ell$ , where  $t_\ell$  is the so-called *localization time*, two manifestations of DL: i)  $P(p)$  is frozen in a characteristic exponential shape  $P(p) \sim \exp[-|p|/\ell]$ , where  $\ell$  is the *localization length*, and ii) the average kinetic energy of the system tends to a constant value, or, equivalently, the diffusion constant  $D = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle p^2 \rangle / t$  vanishes.

Experimental measurements of  $\langle p^2 \rangle$  and the corresponding diffusion constant are displayed in fig. 1. In the periodic case  $r = 1$  (solid line), after an initial linear increase, the kinetic energy saturates to a constant value —corresponding to  $D(r = 1) \approx 0$  in fig. 1(b). Due to residual spontaneous emission by the kicked atoms [9],  $D(r = 1)$  is not strictly zero. In the

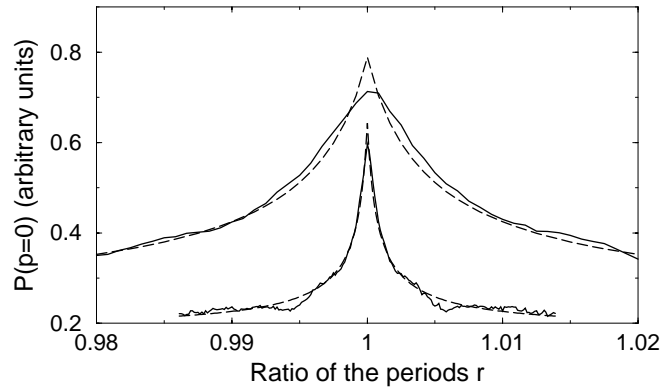


Fig. 2 – Sub-Fourier resonances. The measured atomic population in the zero-momentum class, after 20 (upper solid curve) and 100 (lower solid curve) double kicks is plotted *vs.* the ratio  $r$  of the periods. The period of the first sequence is  $T = 27.8 \mu\text{s}$ , and  $K \approx 10$ . At  $r = 1$ , dynamical localization is responsible for the large number of zero-momentum atoms. Away from the exact resonance, localization is progressively destroyed. Note the narrowness (5 times smaller than Fourier limit) and the triangular shape of the resonance line. Dashed lines are fits to the experimental lines using eq. (7).

quasiperiodic cases, there is a residual diffusion due to the quasiperiodicity, and fig. 1(b) shows that  $D(r) \propto |r - 1|$ .

Another way to characterize the observed residual diffusion is to measure the population  $P_0$  of the zero-momentum class<sup>(1)</sup>, as a function of  $r$ . Figure 2 shows the experimentally measured  $P_0$  after 20 and 100 double kicks. This “localization resonance” displays a sharp peak at  $r = 1$ , indicating the presence of DL, and decreases rapidly on both sides, evidencing the residual diffusion. The plot presents two surprising features: i) The resonance is very narrow: after  $N$  kicks, it could be argued that the two quasiperiods can be distinguished only if they differ by  $1/N$  (in relative value). This would predict a width of the order of  $\Delta r = 1/N = 0.01$  for 100 kicks, whereas we experimentally observe a width five times smaller,  $0.0018$ <sup>(2)</sup>. ii) The “sub-Fourier” resonance is not smooth, but has a marked cusp at the maximum. The understanding of the underlying mechanism behind the quantum behavior of the system shall also allow us to explain these features.

Our analysis of the residual diffusion takes the periodic case as the reference system, because, being periodic, it can be analyzed using the *Floquet theorem*. A Floquet state (FS)  $|\varphi_k\rangle$  is defined as an *eigenstate of the unitary evolution operator*  $U(T)$  of  $H_0$  over one period  $T$ :  $U(T)|\varphi_k\rangle = \exp[-i\epsilon_k]|\varphi_k\rangle$ , where  $\epsilon_k$  is called the eigenphase. The temporal evolution of any state  $|\psi\rangle$  after  $n$  periods is  $|\psi(nT)\rangle = \sum_k c_k e^{-in\epsilon_k} |\varphi_k\rangle$  with  $c_k = \langle\varphi_k|\psi(0)\rangle$ . The evolution of any quantity can be calculated using the basis of FS, for example:

$$\langle p^2(nT) \rangle = \sum_{k,k'} c_k c_{k'}^* e^{-in(\epsilon_k - \epsilon_{k'})} \langle \varphi_{k'} | p^2 | \varphi_k \rangle. \quad (3)$$

The FS of the chaotic kicked rotor are well known: they are *on the average exponentially localized in momentum space* around a most probable momentum  $p_k$ , with a characteristic localization length  $\ell$  [11, 12]. Such a localization —from which DL originates— is far from

<sup>(1)</sup>As the total number of atoms is constant, measuring  $P(p = 0)$  is equivalent to measure the width of the momentum distribution:  $P(p = 0) \propto \langle p^2 \rangle^{-1/2}$ .

<sup>(2)</sup>Sub-Fourier factors of  $1/37$  have been reported in [10], and factors of  $1/60$  have been experimentally observed by us.

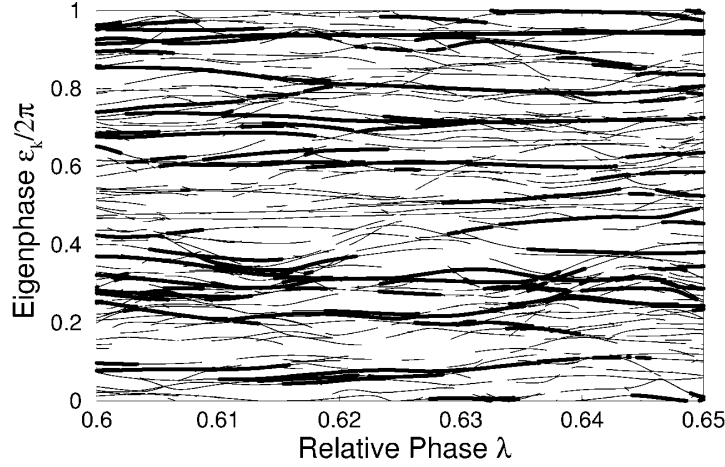


Fig. 3 – Eigenphases  $\epsilon_k$  of the evolution operator over one period for the doubly-kicked rotor, corresponding to the experimental conditions, *vs.* the phase  $\lambda$ . The finite duration of the kicks (800 ns) is taken into account. We have only plotted initially populated Floquet states having a significant weight:  $|\langle\psi(0)|\varphi_k(\lambda_0)\rangle|^2 > 10^{-4}$  (thin line), or  $> 10^{-2}$  (thick line). States appear (disappear) as their weights go above (below) the threshold. Note that Floquet states rapidly change when avoided crossings with other states are encountered.

obvious and is closely related to the Anderson localization in time-independent disordered one-dimensional systems [13].

The initial state is supposed to be localized in momentum space around zero momentum, with a width much smaller than the width  $\ell$  of the FS (which is the case in the experiment). Hence, only FS with roughly  $|p_k| \lesssim \ell$  will play a significant role in the dynamics; we shall call such states *initially populated* FS. Equation (3) is a *coherent* sum over FS. However, as times goes on, non-diagonal interference terms accumulate larger and larger phases. In a typical chaotic system, these phases will be uncorrelated at long enough times, leaving an *incoherent* sum over FS:

$$\langle p^2 \rangle \approx \sum_k |c_k|^2 \langle \varphi_k | p^2 | \varphi_k \rangle. \quad (4)$$

This equation is valid once DL is established (*i.e.*, for  $t > t_\ell$ ). How long does it take for the phases  $n(\epsilon_k - \epsilon_{k'})$  to be scrambled? This can be simply estimated from the level spacing between initially populated FS, and turns out to be roughly  $t_\ell = \ell T$ , while  $\langle p^2 \rangle$  saturates to a value  $\propto \ell^2$ .

A key point is to realize that, if  $r$  is close enough to 1, the sequence of kicks is very similar to a *periodic* doubly kicked rotor for  $r = 1$ , except that the phase  $\lambda$  between the two sequences *slowly* drifts along the sequence. A small part of the kick sequence around the  $n$ -th kick will seem “instantaneously” periodic, with a phase difference  $\lambda(n) = \lambda_0 + n(r - 1)$ , where  $\lambda_0$  is the initial phase between the two kick sequences. The evolution operator of the quasiperiodic system from time  $(n - 1)T$  to  $nT$  is thus given by the evolution operator  $U(\lambda) = \exp[-ip^2\lambda T/\hbar] \exp[-iK \cos \theta/\hbar T] \exp[-ip^2(1 - \lambda)T/\hbar] \exp[-iK \cos \theta/\hbar T]$  of the periodic doubly kicked rotor. The total evolution operator can thus be written as a product of the “instantaneous” evolution operators  $\prod_{n=1}^N U(\lambda_0 + n(r - 1))$ . For small enough  $|r - 1|$ , the *adiabatic approximation* [14] applies: if the system is initially in a FS of  $U(\lambda_0)$ , it remains in the corresponding FS of the “*instantaneous*” evolution operator as  $\lambda$  changes. This is illustrated in fig. 3, which shows the Floquet spectrum of the periodic doubly kicked rotor,



obtained by numerically diagonalizing  $U(\lambda)$ . When  $\lambda$  is varied, the eigenenergies evolve along complicated “spaghetti”, characteristic of quantum-chaotic systems, with a large number of avoided crossings (AC).

In the experiment, the initial state is a linear combination of FS. The adiabatic approximation implies that it remains a linear combination of the “instantaneous” FS with the *same weights* (the phases evolve, but the squared moduli remain constant). As discussed above, the coherences between FS vanish after  $t_\ell$ , which implies that eq. (4) remains valid close to the resonance, provided one uses the “instantaneous” Floquet eigenbasis:

$$\langle p^2(\lambda) \rangle \approx \sum_k |c_k|^2 \langle \varphi_k(\lambda) | p^2 | \varphi_k(\lambda) \rangle. \quad (5)$$

The adiabatic approximation implies that there are no population exchanges among Floquet eigenstates. This means that the weights  $|c_k|^2$  are constant all along the evolution; they are evaluated at the initial time, corresponding to the initial wave function  $|\psi(0)\rangle$  and to  $\lambda = \lambda_0$ :  $|c_k|^2 = |\langle \psi(0) | \varphi_k(\lambda_0) \rangle|^2$ , where  $|\varphi_k(\lambda_0)\rangle$  are the “instantaneous” eigenstates corresponding to the initial time. The evolution of the average kinetic energy  $\langle p^2 \rangle$  is thus entirely due to the evolution of the “instantaneous” Floquet spectrum with the parameter  $\lambda$ , which evolves adiabatically from its initial value  $\lambda_0$  to the final value  $\lambda = \lambda_0 + N(r - 1)$  corresponding to the end of the kick sequence. Thus, two distinct types of localization properties come into eq. (5): those of the *initial* Floquet spectrum, present in the constants  $|c_k|^2$ , and those of the “instantaneous” Floquet spectra, present in the “instantaneous” eigenstates  $|\varphi_k(\lambda)\rangle$ . The  $|c_k|^2$  coefficient gives important weights to the FS represented in the initial distribution (that we shall call “initially populated” FS), which, because the initial momentum distribution is very sharp compared to the localization length, are mostly localized around zero momentum. This limits the range of the sum in eq. (5) to eigenstates  $|\varphi_k(\lambda_0)\rangle$  centered at momenta  $|p_k(\lambda_0)| < \ell$ . As  $\lambda$  moves away from  $\lambda_0$ , the center  $p_k(\lambda)$  of  $|\varphi_k(\lambda)\rangle$  moves away from zero momentum. As these eigenstates keep the *same* weight in the sum, this *enlarges* the momentum distribution. This is the mechanism at the origin of the quantum diffusion responsible for the growth of the average kinetic energy in the quasiperiodic case. One thus expects  $\langle p^2(\lambda) \rangle$  to have a minimum at  $\lambda = \lambda_0$  and to rapidly increase as the kicks are applied, that is, as  $\lambda$  evolves. Since  $\lambda - \lambda_0$  is proportional to  $r - 1$ ,  $\langle p^2 \rangle$  shall also present a sharp minimum at  $r = 1$ , which implies that the population in the zero-momentum class shall present a sharp maximum at  $r = 1$ , as experimentally observed in fig. 2.

What determines the linewidth of the resonance? A FS may considerably change because of its AC with other FS, as tiny AC may be crossed diabatically. On the average, the typical variation  $\lambda - \lambda_0$  of the phase between kick series for which  $|\varphi_k(\lambda)\rangle$  loses the localization property of  $|\varphi_k(\lambda_0)\rangle$ , is the distance  $\Delta\lambda_c$  to the next AC. We immediately deduce that the full width  $\Delta f$  (in frequency) of the sub-Fourier line is such that

$$2\Delta\lambda_c = (NT)\Delta f. \quad (6)$$

If the classical dynamics is regular, the Floquet eigenstates evolve smoothly with the parameter  $\lambda$ ; a change in  $\lambda$  of the order of one is thus required to significantly modify the Floquet states:  $2\Delta\lambda_c \approx 1$ , which corresponds to  $\Delta f = 1/(NT)$ , that is, the Fourier limit. In a classically chaotic system, however, the level dynamics displays plenty of AC, see fig. 3,  $\Delta\lambda_c$  is then much smaller than unity, leading to sub-Fourier resonances. Equation (6) also predicts the linewidth to be inversely proportional to the temporal length of the kick sequence beyond the localization time (*i.e.* the sub-Fourier character is independent of  $N$ ), as numerically observed [10]. The critical value  $\Delta\lambda_c$  depends on the detailed dynamics of the system. It can

be roughly estimated by visual inspection of the quasienergy level dynamics, fig. 3, to be of the order of 0.05 and a “factor 10” sub-Fourier line, about twice the experimentally observed factor (the additional experimental broadening is due to the transverse profile of the laser mode leading to spatial inhomogeneities in  $K$ ).

From eq. (5) and the previous analysis, it is expected that  $\langle p^2 \rangle$  significantly increases from its minimum value at  $\lambda = \lambda_0$ . AC between FS localized around the same momentum are rather large (this is what determines  $\Delta\lambda_c$ ), whereas AC between states localized a distance  $L \gg \ell$  apart in momentum space are typically much smaller and scale like  $\exp[-L/\ell]$ , as a consequence of the exponential localization of the FS. There is thus a very broad distribution of AC widths, with a large number of tiny AC. A tiny AC typically extends over a small  $\lambda$  interval and thus tends to produce small values of  $\Delta\lambda_c$ . The increase of  $\langle p^2 \rangle$  with  $\lambda$  thus depends on the number of small AC encountered. In the presence of exponential localization, the AC density scales with size  $C$  as  $1/C$  for  $C \rightarrow 0$ , and  $\langle p^2(\lambda) \rangle - \langle p^2(\lambda_0) \rangle$  shall behave like  $|\lambda - \lambda_0|^{(3)}$ , producing the cusp experimentally observed in the resonance line, fig. 2a. The large number of extremely small AC is responsible for the singularity of the sub-Fourier resonance line. Another consequence is the diffusive behavior observed in the vicinity of the resonance, see fig. 1(b). Indeed,  $\langle p^2(\lambda) \rangle - \langle p^2(\lambda_0) \rangle$  increases linearly with  $|\lambda - \lambda_0|$ , itself a linear function of time and of  $|r - 1|$ . Thus, our model correctly predicts two non-trivial properties:  $\langle p^2 \rangle$  increases linearly with time and the corresponding diffusion constant is proportional to  $|r - 1|$ . This is distinct from the prediction of Random Matrix Theory, which implies an increase of  $\langle p^2 \rangle$  initially quadratic in  $\lambda - \lambda_0$  [15].

There will always be some degree of non-adiabaticity. Whatever small  $|r - 1|$  is, tiny enough AC will be crossed diabatically. This puts a lower bound on the size of the AC effectively participating in the quantum dynamics and produces a rounding of the top of the sub-Fourier resonance line, too small to be seen in the experiment after 100 kicks, but easily visible after 20 kicks, fig. 2.

Our approach concentrates on the immediate vicinity of the resonance. What happens in the wings of the sub-Fourier line? Equation (5) indicates that this depends on the residual correlation between  $|\varphi_k(\lambda_0)\rangle$  and  $|\varphi_k(\lambda)\rangle$  for  $|\lambda - \lambda_0| > \Delta\lambda_c$ . A quantitative answer to this question is difficult. However, it seems clear that the quantum diffusion constant does not exceed the classical one, which corresponds to vanishingly small interference terms. Random Matrix Theory tells us that this type of parametric correlation usually decays algebraically with  $\lambda - \lambda_0$ . We thus propose the following *ansatz*:

$$\langle p^2(nT) \rangle = \langle p^2 \rangle_{\text{DL}} + D_{\text{cl}} \frac{|r - 1|}{|r - 1| + \Delta\lambda/t_\ell} nT, \quad (7)$$

where  $D_{\text{cl}}$  is the classical diffusion constant and  $\langle p^2 \rangle_{\text{DL}}$  the saturation value of  $p^2$  due to DL. This equation fits (using  $P(p = 0) \propto \langle p^2 \rangle^{-1/2}$ ) very well the experimental curves in fig. 2, reproducing the linear behavior at the center of the resonance and the classical diffusion in the wings. The parameters are however fitted, not extracted from the previous analysis. The reason for this is that, in the experiment, the standing-wave laser beams creating the kicking potential have a Gaussian profile whose width is only a few times the width of the spatial atomic distribution. This means that atoms away from the center of the beam see a smaller value of  $K$  than the atoms at the center of the beam. There is thus an averaging effect over  $K$  to which the dynamics is sensitive, unfortunately preventing us from directly comparing the fitted values to the theoretical values of the parameters.

---

<sup>(3)</sup>This basically comes from the fact that the probability to encounter a “bad” AC which expels the atoms from the zero-momentum region is proportional to the length of the interval  $|\lambda - \lambda_0|$ .

In summary, we have developed a theoretical approach for the mechanism of sub-Fourier resonances, which correctly predicts the unexpected observed features. In particular, our approach evidences the role of chaotic dynamics for producing narrow sub-Fourier resonances. Deviations from exact periodicity are treated in the framework of the adiabatic approximation for the Floquet spectrum of the system, which thus goes beyond a perturbative approach. The dynamics is governed by instantaneous Floquet eigenstates, which are non-trivial objects, as they need to have very well-defined internal (*i.e.* between the various parts of the wave function for each Floquet state) phase coherence to be stationary states of the periodic system, but at the same time, the inter-state coherences do not play any role (beyond the localization time, Floquet states effectively add incoherently). The dynamics is dominated by an *incoherent* sum of internally extremely *coherent* states. It shows that the role of interferences in quantum mechanics is far from obvious, and can produce unexpected behaviors.

\* \* \*

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM) is Unité Mixte de Recherche UMR 8523 du CNRS et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille. Laboratoire Kastler Brossel is laboratoire de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure, UMR 8552 du CNRS. CPU time on various computers has been provided by IDRIS.

## REFERENCES

- [1] MOORE F. L., ROBINSON J. C., BHARUCHA C. F., WILLIAMS P. E. and RAIZEN M. G., *Phys. Rev. Lett.*, **73** (1994) 2974.
- [2] AMMANN H., GRAY R., SHVARCHUCK I. and CHRISTENSEN N., *Phys. Rev. Lett.*, **80** (1998) 4111.
- [3] RINGOT J., SZRIFTGISER P., GARREAU J. C. and DELANDE D., *Phys. Rev. Lett.*, **85** (2000) 2741.
- [4] D'ARCY M. B., GODUN R. M., OBERTHALER M. K., CASSETTARI M. K. and SUMMY G. S., *Phys. Rev. Lett.*, **87** (2001) 74102.
- [5] CHIRIKOV B. V., *Phys. Rep.*, **52** (1979) 263.
- [6] CASATI G., CHIRIKOV B. V., FORD J. and IZRAILEV F. M., *Lect. Notes Phys.*, **93** (1979) 334; WIMBERGER S. and BUCHLEITNER A., *J. Phys. A*, **34** (2001) 7181.
- [7] CASATI G., GUARNIERI I. and SHEPELYANSKY D. L., *Phys. Rev. Lett.*, **62** (1989) 345; GLÜCK M., KOLOVSKY A. R. and KORSCH H. J., *Europhys. Lett.*, **51** (2000) 255; BUCHLEITNER A., SIRKO L. and WALTER H., *Europhys. Lett.*, **16** (1990) 35.
- [8] SZRIFTGISER P., LIGNIER H., RINGOT J., GARREAU J. C. and DELANDE D., *Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul.*, **8** (2003) 301.
- [9] KLAPPAUF B. G., OSKAY W. H., STECK D. A. and RAIZEN M. G., *Phys. Rev. Lett.*, **81** (1998) 1203.
- [10] SZRIFTGISER P., RINGOT J., DELANDE D. and GARREAU J. C., *Phys. Rev. Lett.*, **89** (2002) 224101.
- [11] CASATI G., GUARNIERI I., IZRAILEV F. M. and SCHARF R., *Phys. Rev. Lett.*, **64** (1990) 5.
- [12] CASATI G., GUARNIERI I. and SHEPELYANSKY D. L., *IEEE J. Quantum Electron.*, **24** (1988) 1420.
- [13] GREMPER D. R., PRANGE R. E. and FISHMAN S., *Phys. Rev. A*, **29** (1984) 1639.
- [14] LANDAU L. and LIFCHITZ E., *Mécanique Quantique* (Mir, Moscou) 1966.
- [15] SIMONS B. D. and ALTSHULER B. L., *Phys. Rev. Lett.*, **70** (1993) 4063.

---

## Reversible Destruction of Dynamical Localization

Phys. Rev. Lett. 95, 234101 (2005)

## Reversible Destruction of Dynamical Localization

Hans Lignier,<sup>1</sup> Julien Chabé,<sup>1</sup> Dominique Delande,<sup>2</sup> Jean Claude Garreau,<sup>1</sup> and Pascal Szriftgiser<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules, Centre d'Études et de Recherches Laser et Applications, Université des Sciences et Technologies de Lille, F-59655 Villeneuve d'Ascq Cedex, France*

<sup>2</sup>*Laboratoire Kastler-Brossel, Case 74, Université Pierre et Marie Curie, 4 Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*

(Received 28 July 2005; published 29 November 2005)

Dynamical localization is a localization phenomenon taking place, for example, in the quantum periodically driven kicked rotor. It is due to subtle quantum destructive interferences and is thus of intrinsic quantum origin. It has been shown that deviation from strict periodicity in the driving rapidly destroys dynamical localization. We report experimental results showing that this destruction is partially reversible when the deterministic perturbation that destroyed it is slowly reversed. We also provide an explanation for the partial character of the reversibility.

DOI: [10.1103/PhysRevLett.95.234101](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.95.234101)

PACS numbers: 05.45.Mt, 03.65.Yz, 05.60.-k, 32.80.Lg

Dynamical localization (DL) is one of the most dramatic manifestations of how the quantum behavior of a complex system may differ from that of its classical counterpart [1]. It takes place in one-dimensional time-periodic Hamiltonian systems where the deterministic motion is classically chaotic and, on the average, equivalent to a diffusive expansion in momentum space (the so-called chaotic diffusion behavior). Because of subtle destructive interference effects, the quantum dynamics is substantially different: while this dynamics is similar to the classical one for short times, the diffusive behavior stops after some break time and the quantum momentum distribution gets frozen to a steady state at long times. Interest in the DL also comes from the fact that it can be easily observed experimentally, e.g., by placing laser-cooled atoms in a periodically kicked laser standing wave, the so-called “kicked rotor” [2]. The quantum inhibition of classical transport is a rather generic behavior in one-dimensional time-periodic Hamiltonian systems. It relies on the existence of a class of states which are stationary under the one-cycle evolution operator, the so-called Floquet states, forming a basis of the Hilbert space. DL is thus a rather robust feature, which can be observed for a large class of initial states, either pure states or statistical mixtures.

Another fascinating feature of DL is its sensitivity to external nonperiodic perturbations or deviations from the temporal periodicity of the system [3]. Various ways of breaking DL have been studied experimentally and theoretically. One way is to add amplitude noise to the kicks [4]. In such cases, it has been observed that DL is destroyed, i.e., that the quantum motion remains diffusive at long times, as the classical motion. This destruction has also been observed by adding a second series of kicks at an incommensurate frequency [5], an experiment that has also evidenced a very high sensitivity to frequency differences, allowing observation of sub-Fourier resonances [6]. Another qualitatively different way of destroying DL is to introduce a small amount of spontaneous emission in the system, thus breaking its quantum coherences [4,7]. While

the first two examples correspond to a purely Hamiltonian evolution, the latter one introduces an irreversible dissipative evolution.

In the case of a purely Hamiltonian dynamics, a fundamental question remains, concerning the nature of the DL destruction: is this destruction complete and irreversible or is it possible to stop the diffusive behavior? Even better, is it possible to reverse the evolution and reconstruct a more localized state? The purpose of this Letter is to report experimental results showing that such a relocalization is possible (at least partially) when the nonperiodic perturbation that destroys DL is slowly reversed in time.

Let us first consider the standard kicked rotor Hamiltonian of a single atom in a pulsed standing wave (SW):

$$H_0 = \frac{P^2}{2} + K \sin\theta \sum_{n=0}^{N-1} \delta_\tau(t - n), \quad (1)$$

where  $P$  is the reduced momentum along the SW axis in units of  $M/(2k_L T_1)$  ( $k_L$  is the laser wave number and  $M$  the mass of the atom),  $\theta = 2k_L z$  the reduced position of the atom along the SW axis, and  $K = \Omega^2 T_1 \tau \hbar k_L^2 / (2M \Delta_L)$  the kick strength ( $\Omega$  is the resonant Rabi frequency of the SW,  $\Delta_L$  its detuning from the atomic resonance). The time  $t$  is measured in units of the period  $T_1$  of the kicks.  $N$  is the number of kicks, and  $\delta_\tau$  is a Dirac-like function;  $\tau$  is the finite duration of the kicks. In the limit  $\tau \rightarrow 0$ , the dynamics of this Hamiltonian system is well known and relies upon only two parameters:  $K$  and the effective Planck constant  $\hbar = 4\hbar k_L^2 T_1 / M$ . For  $K \gg 1$ , the classical dynamics is a chaotic diffusion; a localized set of initial conditions will spread in momentum space like a Gaussian of width  $\propto t^{1/2}$ . Below the break time, the classical and the quantum dynamics of an initially localized state are identical. After the localization time, the quantum dynamics is frozen, the average kinetic energy ceases to grow; at the same time, the momentum distribution evolves from a characteristic Gaussian shape in the diffusive regime to

an exponential shape  $\sim \exp(-|P|/L)$  (with  $L$  being the localization length) characteristic of the localized regime [8,9].

Consider now an experiment in which a slowly increasing and then decreasing perturbation is added. This perturbation is added to Hamiltonian (1) as a second series of kicks with the same frequency but with a time dependent amplitude (see upper frame in Fig. 2):

$$H = H_0 + \frac{K}{2} \sin\theta \left[ 1 - \varepsilon \cos\left(\frac{2\pi t}{\Theta}\right) \right] \sum_{n=0}^{N-1} \delta_\tau\left(t - n - \frac{\phi}{2\pi}\right) \quad (2)$$

where  $\Theta \gg 1$  is the period of the perturbation,  $\phi$  the relative phase between the two kick series, and  $\varepsilon$  the modulation amplitude, with  $\varepsilon \sim 1$ . Experimental values are  $\Theta = 35$ ,  $\phi/2\pi = 1/6$ , and  $\varepsilon = 0.94$ . At time  $t = N$ , the system has been exposed to  $N$  kicks of the primary sequence (with fixed strength  $K$ ) and  $N$  kicks of the secondary sequence (with time-varying strength), i.e., to a total of  $2N$  pulses.

In order to experimentally realize the Hamiltonian equation (2), a sample of cold cesium atoms is produced in a standard magneto-optical trap and released in the  $F_g = 4$  hyperfine ground-state sublevel. A double sequence of  $N$  pulses built according to Eq. (2) is applied. The SW is detuned by  $\Delta_L/2\pi = 20$  GHz ( $\sim 3800$   $\Gamma$ , where  $\Gamma$  is the natural width of the atomic transition) with respect to the  $6S_{1/2}$ ,  $F_g = 4 \rightarrow 6P_{3/2}$ ,  $F_e = 5$  hyperfine transition of the Cesium  $D2$  line ( $\lambda_L = 852$  nm). Such largely detuned radiation essentially induces *stimulated* transitions responsible for conservative momentum exchanges with the atoms, so that the dynamics is Hamiltonian. However, the SW laser line presents a very broad low-level background (several hundreds of GHz) responsible for a significant rate of dissipative spontaneous transitions. To get rid of this problem, the SW passes through a 10 cm cesium cell before interacting with the cold atoms. This filtering reduces the background by more than 1 order of magnitude in a bandwidth of about 500 MHz around the cesium transitions. Finally, after being transported by a polarization-maintaining fiber, 92 mW of laser light, collimated to a 1.5 mm waist, is available for the experiment, and retro-reflected to build the SW. The frequency of each kick series is set to 30 kHz, and the duration of each kick to  $\tau = 0.6$   $\mu$ s. The parameter  $K$  is  $\sim 9$ ,  $\tilde{k} \sim 3.46$ , and the localization time  $\sim 10$  periods. The localization time measured in units of the pulse period and the localization length  $L$  measured in units of  $2\hbar k_L$  coincide, and both scale roughly as  $(K/\tilde{k})^2 \approx 7$ . These parameters have been chosen in order to optimize the experimentally detected signal. (The setup allows variations of  $K$  from  $\sim 0$  to 15, and  $\tilde{k}$  from  $\sim 1.5$  to 6). The spontaneous emission rate is estimated to 0.06 per atom for the maximum duration of the experiment. Once the SW sequence is over, the atomic momentum distribution is

probed with a *velocity selective* Raman pulse. Thanks to the Doppler effect, and a well-chosen detuning, this pulse transfers the atoms in a well-defined velocity class from the hyperfine sublevel  $F_g = 4$  to the  $F_g = 3$  sublevel [10,11]. The atoms remaining in the  $F_g = 4$  sublevel are pushed away by a resonant laser beam. A resonant pulse brings the selected atoms back in the  $F_g = 4$  level where their number is measured by a resonant probe. The whole cycle starts again to measure the population in another velocity class, allowing us to reconstruct the full atomic momentum distribution. Such a measurement is then performed for increasing pulse numbers  $N$ .

A last precaution must, however, be taken. As discussed above, the SW is intense enough to induce—for a few atoms—a real transition from the level  $F_g = 4$  to the excited state, followed by spontaneous emission leading possibly to the hyperfine level  $F_g = 3$ , whatever their momentum. Those atoms would be optically repumped to the  $F_g = 4$  sublevel and detected, generating an incoherent,  $N$  dependant, background. For each experiment, the Raman detuning is set very far away (at 10 MHz, more than 1000 recoil velocities), where the probability of finding a Raman resonant atom is very low. Except for this modification, the experiment is launched in exactly the same conditions. The stray background is corrected by subtracting the resulting signal from the resonant one.

Figure 1 shows the velocity distribution as a function of  $N$ . As expected, the early dynamics is diffusive. DL is expected around  $t = 10$ . Since the perturbation starts increasing from  $t = 0$ , DL is not visible and one could assume it is destroyed before it could be seen. However,

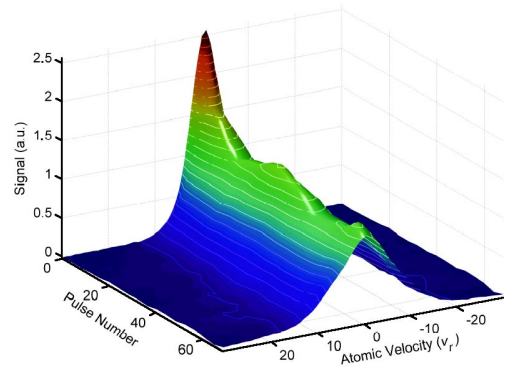


FIG. 1 (color online). Experimentally measured velocity distributions as a function of time. The atomic velocity is measured in units of the recoil velocity  $v_r = \hbar k_L/M \approx 3.5$  mm/s. At short times, the diffusive broadening (or the reduction of the zero-velocity population) of the velocity distribution is observed. When the slowly changing perturbation is reversed (around  $t = 17$ ), the velocity distribution *starts to shrink*. This is highly nontrivial behavior, showing that the destruction of dynamical localization by a slowly time-varying kick sequence is reversible. After a second cycle of the perturbation a second relocalization of the velocity distribution is observed (around  $t = 70$ ).

when the perturbation is reversed, the distribution *shrinks* and takes an exponential shape (see Fig. 2), signing a partial “revival” of the localization. This is clearly visible in Fig. 2 which displays the zero-velocity population  $\Pi_0$  as a function of  $N$  (red crossed solid line), which is inversely proportional to the width of the distribution and therefore directly proportional to the degree of localization. Figures 2(a) and 2(b) display, respectively, the velocity distribution at  $t = 17 \sim \Theta/2$ , where the perturbation reaches its maximum amplitude, and at  $t = \Theta = 35$ , where it is back to its minimum initial value. In 2(a), the distribution is very well fitted by a Gaussian, whereas the distribution in 2(b) is better fitted by an exponential. The exponential shape at  $t = \Theta$  is not the only remarkable fact. The fact that the momentum distribution gets narrower ( $\Pi_0$  increases) is highly significative. Indeed, the classical dynamics is diffusive and irreversible, forbidding, in the general case [12], a return to a narrower distribution. Furthermore, DL leads to the suppression of the classical diffusion, i.e., a freezing of the velocity distribution; but it cannot lead to a narrowing of the distribution, which is precisely what is experimentally observed in Fig. 2. This is a key point of the present experiment: it proves that the exponential shape observed at  $t = \Theta$ , where the perturbation is zero, does not simply results from the DL that would be observed in the periodic case, with no perturbation.

It is even possible to go further by proving the coherent nature of the reversibility process. We have performed an

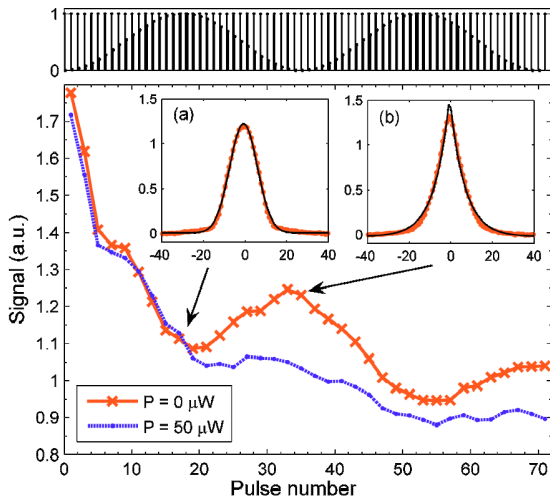


FIG. 2 (color online). Upper frame: kick sequence. Main frame: Population in the zero-velocity class as a function of the duration  $N$  of the pulse sequence with no resonant light (crossed solid line) and with a  $50 \mu\text{W}$  pulse of resonant light applied at  $t = 17$  (dashed line). The absence of revival in the presence of resonant light (decoherence) is a clear-cut proof of the importance of quantum interference for the reversibility of the DL destruction. The inset (a) shows the Gaussian velocity distribution at  $t = 17$ , near the maximum of the perturbation, in the absence of resonant light; inset (b) shows an exponential shape near the minimum of the perturbation,  $t = 35$ .

additional experiment where a resonant laser pulse irradiates the atomic cloud at  $t = 17$ . The intensity and detuning of this pulse are set such that, on average, only one or two spontaneous photons are emitted per atom. Its purpose is to destroy the quantum coherences, with minimal heating and mechanical effects. The two curves in Fig. 2 (with and without the resonant pulse) are practically identical before  $t = 17$ , which indicates that heating resulting from the resonant pulse is negligible [13]. In the presence of resonant light, the revival at  $t = 35$  disappears almost completely (dashed line curve in Fig. 2). Moreover, the velocity distribution (not shown in Fig. 2) is Gaussian around  $t = 35$ . This clearly proves that, in the absence of spontaneous emission, although DL is not observed before  $t = 17$ , there is a memory in the system which is destroyed by spontaneous emission. This reinforces the idea that, when the perturbation is reversed, a dynamically localized state is recovered, at least partially. In fact, the revival of DL is only partial, and a part of it is irremediably destroyed. As shown in Figs. 1 and 2, a second perturbation cycle from  $t = \Theta$  to  $2\Theta$  has been performed, and a second revival is observed. However, its amplitude is smaller than the first one, and the shape of the velocity distribution is also damaged. This is due to fundamental reasons, although spontaneous emission or experimental imperfections could also contribute.

A detailed discussion of the physical processes at work in our experiment is beyond the scope of this Letter, and will be published elsewhere. We give here a few guidelines to the theoretical interpretation. The robust structure behind DL is the existence of Floquet states for a time-periodic Hamiltonian system, which are eigenstates of the evolution operator over one period. By their definition, such states repeat identically (except for a phase factor) at each kick and thus do not spread in momentum space. Any initial state can be expanded on the complete set of Floquet states. Chaotic diffusion is—in this picture—due to a gradual dephasing of the various Floquet states (of different eigenenergies) that contribute to the initial state. However, a nontrivial property of the periodically kicked rotor is that all Floquet states are *localized* in momentum space [14]: this is the temporal analogy to Anderson localization in disordered one-dimensional systems, as put on firm ground in Ref. [15]. Only Floquet states localized close to the initial (zero) momentum significantly overlap with the initial state and contribute to the long term dynamics. At sufficiently long times, the various Floquet states significantly contributing to the dynamics are completely dephased (in a characteristic time which is but the break time), the momentum distribution covers all significantly populated Floquet states, but cannot extend further in momentum space, leading to the freezing of the diffusive growth. When the dynamics is no longer exactly periodic, population is transferred among the various Floquet states, and Floquet states localized farther from  $P = 0$



can be populated. In this situation, DL is thus expected to be destroyed. There is, however, a situation where such an evolution can be controlled: if, at any time, the Hamiltonian is almost periodic with, for example, a kick strength  $K(t)$  slowly changing with time  $t$ , an adiabatic approximation can be used. The atomic state at time  $t$  can be expanded in terms of the “instantaneous” Floquet eigenbasis corresponding to the local value of  $K(t)$ . If the variation of  $K(t)$  is slow enough, the evolution is adiabatic in the Floquet basis, meaning that the populations of the Floquet eigenstates do not change with time, while the eigenstates themselves evolve [16,17]. This leads to an apparent diffusive broadening of the momentum distribution [18], but the robust Floquet structure is still underlying. To recover the localization, it is sufficient to reverse the evolution of  $K(t)$  back to its initial value. One then recovers the initial well localized Floquet eigenstates with unchanged populations, i.e., a dynamically localized momentum distribution. This is the deep origin of the revival of the localization experimentally observed above. Any phenomenon breaking phase coherence (such as a spontaneous emission) will redistribute the atomic wave function over other Floquet states, eliminating all possibility of revival. However, the revival is only partial, because the evolution cannot be made 100% adiabatic. Indeed, even for very slow changes of  $K(t)$ , there are some avoided crossings between various Floquet states of such size that they will be crossed neither diabatically, nor adiabatically, and will consequently redistribute the population over the Floquet states, partially destroying the reversibility.

To summarize, we have observed that the destruction of dynamical localization in the kicked rotor, induced by a nonperiodic driving can be partially reversed. If the external driving evolves sufficiently slowly, some information is carefully stored in the populations of the various Floquet states. Although it is not visible in the momentum distribution—which seems to follow an irreversible diffusive broadening—it can be easily restored by reverting the driving back to its initial value, producing a relocalization of the wave function. We have also shown that this intrinsically quantum behavior is destroyed by decoherence, i.e., by adding spontaneous emission to the experiment.

Laboratoire de Physique des Lasers, Atomes et Molécules (PhLAM) is UMR 8523 du CNRS et de l'Université des Sciences et Technologies de Lille.

Centre d'Études et de Recherches Laser et Applications (CERLA) is supported by Ministère de la Recherche and Région Nord-Pas de Calais. Laboratoire Kastler-Brossel de l'Université Pierre et Marie Curie et de l'École Normale Supérieure is UMR 8552 du CNRS. CPU time on various computers has been provided by IDRIS.

- 
- [1] G. Casati, B.V. Chirikov, D.L. Shepelyansky, and I. Guarneri, *Phys. Rep.* **154**, 77 (1987); F.M. Izrailev, *Phys. Rep.* **196**, 299 (1990).
  - [2] F.L. Moore, J.C. Robinson, C.F. Bharucha, P.E. Williams, and M.G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2974 (1994).
  - [3] G. Casati, I. Guarneri, M. Lechaz, D.L. Shepelyansky, and C. Sinha, *Phys. Lett. A* **154**, 19 (1991).
  - [4] B.G. Klappauf, W.H. Oskay, D.A. Steck, and M.G. Raizen, *Phys. Rev. Lett.* **81**, 1203 (1998).
  - [5] J. Ringot, P. Szriftgiser, J.C. Garreau, and D. Delande, *Phys. Rev. Lett.* **85**, 2741 (2000).
  - [6] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J.C. Garreau, *Phys. Rev. Lett.* **89**, 224101 (2002).
  - [7] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen, *Phys. Rev. Lett.* **80**, 4111 (1998).
  - [8] D.L. Shepelyansky, *Physica (Amsterdam)* **28D**, 103 (1987).
  - [9] D. Cohen, *Phys. Rev. A* **44**, 2292 (1991).
  - [10] M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2297 (1991).
  - [11] J. Ringot, P. Szriftgiser, and J.C. Garreau, *Phys. Rev. A* **65**, 013403 (2002).
  - [12] One can indeed conceive carefully prepared initial states that would evolve to a narrower shape, but this is clearly not the case here.
  - [13] Each point in Fig. 2 represents a different experiment with a different  $N$ . The resonant pulse of light is always applied at  $t = 17$  and the Raman detection then performed. Any significant heating effect would enlarge the momentum distribution and would be detected.
  - [14] G. Casati, I. Guarneri, F.M. Izrailev, and R. Scharf, *Phys. Rev. Lett.* **64**, 5 (1990).
  - [15] D.R. Grempel, R.E. Prange, and S. Fishman, *Phys. Rev. A* **29**, 1639 (1984).
  - [16] J. Zakrzewski and D. Delande, *J. Phys. B* **28**, L667 (1995).
  - [17] D.W. Hone, R. Ketzmerick, and W. Kohn, *Phys. Rev. A* **56**, 4045 (1997).
  - [18] H. Lignier, J.C. Garreau, P. Szriftgiser, and D. Delande, *Europhys. Lett.* **69**, 327 (2005).





# Bibliographie

- [1] B. V. Chirikov. *A universal instability of many-dimensional Oscillator System*. Phys. Rep **52**, 263–379 (1979).
- [2] I. Dana and S. Fishman. *Diffusion in the Standard Map*. Physica D **17**, 63–74 (1985).
- [3] A. B. Rechester, M. N. Rosenbluth, and R. B. White. *Fourier-space paths applied to the calculation of diffusion for the Chirikov-Taylor Model*. Phys. Rev. A **23**, 2664–2672 (1981).
- [4] E. Ott. *Chaos in Dynamical Systems*. Cambridge University Press.
- [5] F. M. Izrailev. *Simple models of quantum chaos : spectrum and eigenfunctions*. Phys. Rep. **196**, 299–392 (1990).
- [6] D. L. Shepelyansky. *Localization of diffusive excitation in multi-level systems*. Physica D **28**, 103–114 (1987).
- [7] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen. *Experimental study of quantum dynamics in a regime of classical anomalous diffusion*. Phys. Rev. Lett. **81**(19), 4044–4047 (1998).
- [8] P. W. Anderson. *Absence of diffusion in certain random lattices*. Phys. Rev. **109**, 1492–150 (1958).
- [9] S. Fishman, D. R. Grempel, and R. E. Prange. *Chaos, Quantum Recurrences, and Anderson Localization*. Phys. Rev. Lett. **49**(8), 509–512 (1982).
- [10] D. R. Grempel, R. E. Prange, and S. Fishman. *Quantum dynamics of a nonintegrable system*. Phys. Rev. A **29**, 1639–1647 (1984).
- [11] R. P. Feynman. *The Principle of Least Action in Quantum Mechanics*. PhD thesis Princeton University. Disponible sous le titre "Feynman's Thesis. A New Approach to Quantum Theory", Ed. World Scientific (2005).
- [12] C. Cohen-Tannoudji and S. Haroche. *Compléments de mécanique quantique*. non publié, Paris, E.N.S.
- [13] R. Graham, M. Schlautman, and P. Zoller. *Dynamical localization of atomic-beam deflection by a modulated standing light wave*. Phys. Rev. A **45**, 19–22 (1992).

- [14] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen. *Observation of dynamical localization in atomic momentum transfer : a new testing ground for quantum chaos*. Phys. Rev. Lett. **73**, 2974–2977 (1994).
- [15] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. Bharucha, B. Sundaran, and M. G. Raizen. *Atom Optics Realization of the Quantum delta-Kicked Rotor*. Phys. Rev. Lett. **75**(25), 4598–4601 (1995).
- [16] M. G. Raizen, F. L. Moore, J. C. Robinson, C. F. bharucha, and B. Sundaram. *An experimental realization of the Quantum delta-Kicked Rotor*. Quantum and Semiclass. Optics **8**, 687–692 (1996).
- [17] K. Vant, G. Ball, and N. Christensen. *Momentum distributions fot the quantum  $\delta$ -kicked rotor with decoherence*. Phys. Rev. E **61**(5), 5994–5996 (2000).
- [18] H. J. Metcalf and P. van der Straten. *Laser Cooling and Trapping*. Springer Verlag, Berlin.
- [19] P. Meystre. *Atom Optics*. Springer Verlag, Berlin.
- [20] W. D. Phillips. *Laser Cooling, Optical Traps and Optical Molasses*. In J. Dalibard, J. M. Raimond, , , and J. Zinn-Justin, editors, *Fundamental Systems in Quantum Optics* pages 165–210 Amsterdam. Ecole des Houches North-Holland.
- [21] P. J. Ungar, D. S. Weiss, E. Riis, and S. Chu. *Optical molasses and multilevel atoms : theory*. J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2058–2071 (1989).
- [22] J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji. *Laser cooling below the Doppler limit by polarization gradients : simple theoretical models*. J. Opt. Soc. Am. B **6**, 2023–2045 (1989).
- [23] J. Ringot. *Chaos quantique avec des atomes froids dans une onde stationnaire pulsée*. PhD thesis Université des Sciences et technologies de Lille.
- [24] F. L. Moore, J. C. Robinson, C. Bharucha, P. E. Williams, and M. G. Raizen. *Observation of Dynamical Localization in Atomic Momentum Transfert : A New Testing Ground for Quantum Chaos*. Phys. Rev. Lett. **73**(22), 2974–2977 (1994).
- [25] D. A. Steck. *Quantum Chaos, transport, and decoherence in Atom Optics*. PhD thesis The University of Texas. Cf. pages 94-98.
- [26] M. Kasevich and S. Chu. *Laser cooling below photon recoil with three-level atoms*. Phys. Rev. Lett. **69**, 1741–1744 (1992).
- [27] J. Reichel. *Refroidissement Raman et vols de lévy : atomes de Césium au nanokelvin*. PhD thesis Université Paris VI.
- [28] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu. *Atomic velocity selection using stimulated Raman transitions*. Phys. Rev. Lett. **66**, 2297–2300 (1991).

- 
- [29] K. Moler, D. S. Weiss, M. Kasevich, and S. Chu. *Theoretical analysis of velocity-selective Raman transitions*. Phys. Rev. A **45**(1), 342–348 (1992).
- [30] K. Szymaniec, S. Ghezali, L. Cognet, and A. Clairon. *Injection locking of diode lasers to frequency modulated source*. Optics Comm. (1).
- [31] G. Santarelli, A. Clairon, S. N. Lea, and G. M. Tino. *Heterodyne optical phase-locking of extended-cavity semiconductor lasers at 9 GHz*. Optics Comm. (4).
- [32] P. Bouyer, T. L. Gustavson, K. G. Haritos, and M. A. Kasevitch. *Microwave signal generation with optical injection locking*. Optics Lett. **21**(18), 1502–1504 (1996).
- [33] J. Ringot, Y. Lecoq, J. C. Garreau, and P. Szriftgiser. *Generation of phase-coherent laser beams for Raman spectroscopy and cooling by direct modulation of a diode laser*. Eur. Phys. J. D **7**, 285–288 (1999).
- [34] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen. *Observation of noise and dissipation effects on dynamical localization*. Phys. Rev. Lett. **81**, 1203–1206 (1998).
- [35] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen. *Quantum Delta-Kicked Rotor : experimental Observation of Decoherence*. Phys. Rev. Lett **80**(19), 4111–4115 (1998).
- [36] R. Graham and S. Miyazaki. *Dynamical localization of atomic de Broglie waves : the influence of spontaneous emission*. Phys. Rev. A **53**(4), 2683–2693 (1996).
- [37] H. Ammann, R. Gray, I. Shvarchuck, and N. Christensen. *Quantum Delta-Kicked Rotor : Experimental Observation of Decoherence*. Phys. Rev. Lett **80**(19), 4111–4115 (1998).
- [38] B. G. Klappauf, W. H. Oskay, D. A. Steck, and M. G. Raizen. *Erratum : Observation of Noise and Dissipation Effects on Dynamical Localization*. Phys. Rev. Lett. **82**(1), 241 (1998).
- [39] P. Goetsch and R. Graham. *Decoherence by spontaneous emission in an atomic-momentum transfer experiments*. Phys. Rev. A **54**(6), 5345–5348 (1996).
- [40] K. Vant, G. Ball, and N. Christensen. *Momentum distributions for the quantum delta-kicked rotor with decoherence*. Phys. Rev. E **61**(5), 5994–5996 (2000).
- [41] D. A. Steck, V. Milner, W. H. Oskay, and M. G. Raizen. *Quantitative study of amplitude noise effects on dynamical localization*. Phys. Rev. E **62**(3), 3462–3475 (2000).
- [42] E. Doron and S. Fishman. *Anderson localization for a two-dimensional rotor*. Phys. Rev. Lett. **60**(10), 867–870 (1988).
- [43] G. Casati, I. Guarneri, and D. L. Shepelyansk. *Anderson transition in a one-dimensional system with three incommensurable frequencies*. Phys. Rev. Lett. **62**(4), 345–348 (1989).

- [44] J. Ringot, P. Szriftgiser, J. C. Garreau, and D. Delande. *Experimental evidence of dynamical localization and delocalization in a quasiperiodic driven system.* Phys. Rev. Lett. **85**(13), 2741–2744 (2000).
- [45] G. Abal, R. Donangelo, A. Romanelli, A. C. S. Schifino, and R. Siri. *Dynamical localization in quasiperiodic driven systems.* Phys. Rev. E **65**(4), 046236 (2002).
- [46] P. Szriftgiser, H. Lignier, J. Ringot, J. C. Garreau, and D. Delande. *Experimental study of quantum chaos with cold atoms.* Commun. Nonlin. Sci. Num. Simul. **8**, 301–313 (2003).
- [47] P. Szriftgiser, J. Ringot, D. Delande, and J. C. Garreau. *Observation of sub-Fourier resonances in a quantum-chaotic system.* Phys. Rev. Lett. **89**(22), 224101–4 (2002).
- [48] M. Wilkinson. *Narrowly avoided crossings.* J. Phys. A : Math. Gen. **20**, 635–645 (1987).
- [49] J. Zakrzewski, D. Delande, and M. Kuś. *Parametric motion of energy levels in quantum chaos systems. II. Avoided-crossing distributions.* Phys. Rev. E **47**(3), 1665 (1993).
- [50] M. Wilkinson. *Statistics of multiple avoiding crossings.* J. Phys. A : Math. Gen. **22**, 2795–2805 (1989).
- [51] J. Goldberg and W. Schweizer. *Distribution of multiple avoided crossings : numerical evaluation.* J. Phys. A : Math. Gen. **24**, 2785–2791 (1991).
- [52] T. A. Brody, J. Flores, J. B. French, P. A. Mello, A. Pandey, and S. S. M. Wong. *Random-matrix physics : spectrum and strength fluctuations.* Rev. Mod. Phys. **53**, 385 (1981).
- [53] T. Timberlake and L. E. Reichl. *Changes in Floquet State Structure at Avoided Crossings : Delocalization and Harmonic Generation.* Phys. Rev. A **59**(4), 2886 (1999).
- [54] L. D. Landau. *Zur Theorie der EnergieÜbertragung, II.* Phys. Z. Sowjetunion **2**, 46 (1932).
- [55] C. Zener. *Non-Adiabatic Crossing of Energy Levels.* Proc. R. Soc. London Ser. A **137**(833), 696 (1932).
- [56] J. Zakrzewski and M. Kuś. *Distributions of Avoided Crossings for Quantum Chaotic Systems.* Phys. Rev. Lett. **67**(20), 2749 (1991).
- [57] D. A. Steck. *Quantum Chaos, Transport, and Decoherence in Atom Optics.* PhD thesis The University of Texas at Austin. Cf. appendix A "Cesium D Line Data".