



HAL
open science

Cohomologie quantique orbifolde des espaces projectifs à poids

Etienne Mann

► **To cite this version:**

Etienne Mann. Cohomologie quantique orbifolde des espaces projectifs à poids. Mathématiques [math]. Université Louis Pasteur - Strasbourg I, 2005. Français. NNT : 2005STR13084 . tel-00011651

HAL Id: tel-00011651

<https://theses.hal.science/tel-00011651>

Submitted on 20 Feb 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Étienne Mann

**COHOMOLOGIE QUANTIQUE
ORBIFOLDE DES ESPACES
PROJECTIFS À POIDS**

E. Mann
SISSA, Via Beirut 2-4, I-34014 Trieste, Italie
E-mail : mann@sissa.it
Url : <http://www-irma.u-strasbg.fr/~mann/>

2000 Mathematical Subject Classification.— 53D45, 14N35, 32S30, 32S20

Key words and phrases.— Cohomologie orbifolde, invariant de Gromov-Witten orbifold, cohomologie quantique orbifolde, variété de Frobenius, réseau de Brieskorn, système de Gauss-Manin

ORBIFOLD QUANTUM COHOMOLOGY OF WEIGHTED PROJECTIVE SPACES

Etienne Mann

Abstract :

In 2001, S. Barannikov showed that the Frobenius manifold coming from the quantum cohomology of the complex projective space of dimension n is isomorphic to the Frobenius manifold associated to the Laurent polynomial $x_1 + \dots + x_n + 1/x_1 \dots x_n$.

The purpose of this thesis is to generalize this result. More precisely, given some positive integers w_0, \dots, w_n , we show, up to a conjecture on the value of some orbifold Gromov-Witten invariants, that the Frobenius structure obtained on the orbifold quantum cohomology of the weighted projective spaces with weights w_0, \dots, w_n is isomorphic to the one obtained from the Laurent polynomial $f(u_0, \dots, u_n) := u_0 + \dots + u_n$ restricted to $U := \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \prod_i u_i^{w_i} = 1\}$.

Résumé :

En 2001, S. Barannikov a montré que la variété de Frobenius provenant de la cohomologie quantique de l'espace projectif complexe de dimension n est isomorphe à la variété de Frobenius associée au polynôme de Laurent $x_1 + \dots + x_n + 1/x_1 \dots x_n$.

L'objectif de cette thèse est de généraliser ce résultat. Plus précisément, étant des entiers strictement positifs w_0, \dots, w_n , nous montrons, modulo une conjecture sur la valeur de certains invariants de Gromov-Witten orbifold, que la structure de Frobenius obtenue sur la cohomologie quantique orbifold de l'espace projectif de poids w_0, \dots, w_n est isomorphe à celle obtenue à partir du polynôme $f(u_0, \dots, u_n) := u_0 + \dots + u_n$ restreint à $U := \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \prod_i u_i^{w_i} = 1\}$.

Table des matières

Chapitre I. Introduction	3
I.1. Historique du problème	3
I.2. Les variétés de Frobenius	6
I.3. Le côté A	7
I.4. Le côté B	8
Chapitre II. Préliminaires combinatoires	11
II.1. Notations	11
II.2. La combinatoire des nombres σ	11
Chapitre III. Orbifolds complexes et <i>commutatives</i>	15
III.1. Les cartes, atlas et applications orbifolds	15
III.2. Les fibrés vectoriels complexes orbifolds	25
III.3. Faisceaux des formes différentielles sur une orbifold et intégrale orbifold	35
III.4. Classes de Chern orbifoldes par la théorie de Chern-Weil	37
III.5. Bonne application orbifold et image inverse de fibrés vectoriels orbifolds	45
Chapitre IV. Cohomologie orbifold des espaces projectifs à poids	49
IV.1. La structure orbifold sur $\mathbb{P}(w)$	49
IV.2. Les fibrés vectoriels orbifolds $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(k)$ sur $\mathbb{P}(w)$	59
IV.3. La cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w)$ vue comme \mathbb{C} -espace vectoriel gradué	61
IV.4. La dualité de Poincaré orbifold des espaces projectifs à poids	68
IV.5. Cup produit orbifold des espaces projectifs à poids	71
Chapitre V. Cohomologie quantique orbifold des espaces projectifs à poids	87
V.1. Les invariants de Gromov-Witten orbifolds	87
V.2. Potentiel de Gromov-Witten pour $\mathbb{P}(w)$	90
V.3. Calcul de certains invariants de Gromov-Witten orbifolds	97

V.4. Remarques sur la conjecture V.3.6	100
Chapitre VI. Structure de Frobenius associée au polynôme de Laurent f	111
VI.1. Le système de Gauss-Manin et le réseau de Brieskorn associés au polynôme f	112
VI.2. Les conditions initiales du potentiel	124
VI.3. Définition d'une structure d'algèbre de Frobenius graduée sur $\mathrm{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$	126
Chapitre VII. Correspondances	133
VII.1. Démonstration de la correspondance classique	133
VII.2. Démonstration de la correspondance quantique	133
Chapitre VIII. Annexe	135
Bibliographie	139

CHAPITRE I

Introduction

I.1. Historique du problème

En 1991, B. Dubrovin a défini la structure de Frobenius sur une variété complexe pour axiomatiser une partie de la riche structure mathématique de la théorie topologique des champs (cf. introduction de [Dub96]). Il s'est inspiré des travaux des quatre physiciens E. Witten [Wit90], R. Dijkgraaf, E. Verlinde et H. Verlinde [DVV91]. Les variétés de Frobenius sont des variétés complexes munies d'une forme bilinéaire non dégénérée plate et d'un produit sur le fibré tangent complexe qui satisfont certaines conditions de compatibilité. Elles possèdent aussi un potentiel qui satisfait le système d'équations aux dérivées partielles WDVV du nom des quatre physiciens cités plus haut. B. Dubrovin a montré qu'une variété de Frobenius semi-simple est déterminée par des « conditions initiales » en un point. Ces variétés ont une structure assez riche et elles apparaissent naturellement dans différents domaines des mathématiques : notamment en théorie des singularités et en cohomologie quantique.

La cohomologie quantique, découverte par les physiciens E. Witten, R. Dijkgraaf et C. Vafa dans la théorie des modèles sigma, a été axiomatisée en géométrie algébrique par M. Kontsevich et Y. Manin en 1994. En 1995, Y. Ruan et G. Tian ont donné une version de la cohomologie quantique en géométrie symplectique.

Dans ces deux approches toute la difficulté réside dans la définition des invariants de Gromov-Witten. Ces invariants « comptent » le nombre de courbes de genre et de degré fixé qui vérifient certaines conditions d'incidence dans une variété compacte (symplectique ou projective). Si l'on ne considère que les invariants de Gromov-Witten qui comptent les courbes de genre 0 alors on obtient la cohomologie quantique et elle est naturellement munie d'une structure de variété de Frobenius. Son potentiel, appelé potentiel de Gromov-Witten, est la série génératrice formée par ces invariants de Gromov-Witten. La forme bilinéaire non dégénérée plate est donnée par la dualité de Poincaré et le produit, qui est une déformation du cup produit, est défini à l'aide du potentiel de Gromov-Witten et la dualité de Poincaré.

Une autre source d'exemples de variété de Frobenius vient de la théorie des singularités. Dans les années soixante-dix et quatre-vingt, K. Saito a étudié les déploiements universels des singularités isolées d'hypersurfaces. En 1983, K. Saito a introduit la notion de structure plate, et a conjecturé qu'une telle structure existe de manière naturelle sur la base du déploiement universel d'une singularité isolée d'hypersurface. Cette conjecture a été montrée par M. Saito en 1983. Par ailleurs, la notion de structure plate s'est révélée être identique à la notion de structure de Frobenius, considérée plus tard par B. Dubrovin.

La symétrie miroir peut se formuler en termes d'isomorphisme entre les variétés de Frobenius provenant de la cohomologie quantique (côté A) et celle provenant de la théorie des singularités (côté B).

Inspiré par un article de A. Givental [**Giv95**], S. Barannikov a montré en 2000 dans l'article [**Bar00**] que la variété de Frobenius provenant de la cohomologie quantique des espaces projectifs complexes est isomorphe à une variété de Frobenius naturelle sur la base du déploiement universel du polynôme de Laurent $x_1 + \dots + x_n + 1/x_1 \dots x_n$.

L'objectif de cette thèse est de généraliser ce résultat aux espaces projectifs à poids. Pour cela, nous utilisons la théorie des orbifolds et les constructions qui s'y rattachent. Dans les articles [**CR04**] et [**CR02**], W. Chen et Y. Ruan définissent l'anneau de cohomologie orbifold via les invariants de Gromov-Witten orbifolds. Le cup produit orbifold est défini comme la partie de degré zéro du produit quantique orbifold et il se calcule via la classe d'Euler d'un fibré obstruction. Le produit quantique orbifold est défini par le potentiel de Gromov-Witten. Ainsi, comme dans le cas des variétés, la cohomologie quantique orbifold est naturellement munie d'une structure de Frobenius.

D'un autre côté, A. Douai et C. Sabbah (cf. [**DS03**]) ont expliqué comment construire une variété de Frobenius canonique sur la base d'un déploiement universel de tout polynôme de Laurent commode et non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton. En particulier, dans l'article [**DS04**], les auteurs ont mis cette construction en pratique sur le polynôme $w_0 u_0 + \dots + w_n u_n$ restreint à $U := \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \prod_i u_i^{w_i} = 1\}$ où w_0, \dots, w_n sont des entiers strictement positifs et premiers entre eux. Les travaux de A. Douai et C. Sabbah ou ceux de S. Barannikov portent sur le polynôme de Laurent lui-même et non sur une étude locale de ses singularités.

Dans cette thèse, nous comparons les structures de Frobenius, dont l'existence est assurée par les résultats généraux rappelés ci-dessus, obtenues sur la cohomologie

quantique orbifold de des espaces projectifs à poids $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ (côté A) et celles obtenues à partir du polynôme $f(u_0, \dots, u_n) := u_0 + \dots + u_n$ restreint à U (côté B).

Nous démontrons d'abord une correspondance entre « les limites classiques ». Pour expliquer cela, introduisons quelques notations. Pour le côté A, nous notons $H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n), \mathbb{C})$ la cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$, \cup le cup produit orbifold et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ la dualité de Poincaré orbifold. Pour le côté B, nous considérons l'espace vectoriel $\Omega^n(U)/df \wedge \Omega^{n-1}(U)$. Il est naturellement muni d'une filtration croissante, appelée filtration de Newton et notée \mathcal{N}_\bullet , et d'une forme bilinéaire non dégénérée. Le choix d'une forme volume sur U nous permet de définir un produit sur cet espace vectoriel. Comme le produit et la forme bilinéaire non dégénérée respectent la filtration de Newton, nous avons un produit, noté \cup , et une forme bilinéaire non dégénérée, notée $\llbracket g \rrbracket$, sur le gradué de $\Omega^n(U)/df \wedge \Omega^{n-1}(U)$ par rapport à la filtration de Newton. Le théorème suivant est démontré au paragraphe VII.1.

THÉORÈME I.1.1 (Correspondance classique). *On a un isomorphisme d'algèbres de Frobenius graduées entre*

$$(H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C}), \cup, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

et

$$(\text{gr}_*^{\mathcal{N}}(\Omega^n(U)/df \wedge \Omega^{n-1}(U)), \cup, \llbracket g \rrbracket(\cdot, \cdot)).$$

Signalons que dans un contexte algébrique et plus général, A. Borisov, L. Chen et G. Smith [BCS05] ont calculé l'anneau de cohomologie orbifold pour un champ de Deligne-Mumford associé à une variété torique simpliciale et, dans le cas des espaces projectifs à poids, trouvent le même résultat, sans la forme bilinéaire non dégénérée cependant.

Puis, nous énonçons une conjecture (cf. V.3.6) sur la valeur de certains invariants de Gromov-Witten orbifolds et nous montrons au paragraphe VII.2 que cette conjecture implique un isomorphisme entre les variétés de Frobenius provenant du côté A et du côté B.

Les deux énoncés de correspondance sont démontrés, modulo la conjecture V.3.6, au chapitre VII. Ils utilisent les résultats des chapitres IV et V pour le côté A et les résultats du chapitre VI pour le côté B.

Au paragraphe I.3 (resp. I.4) de l'introduction, nous reviendrons plus en détails sur les contenus des chapitres IV et V (resp. VI).

I.2. Les variétés de Frobenius

Rappelons d'abord la définition d'une variété de Frobenius, introduite par Dubrovin dans [Dub96].

Soit M une variété complexe. Notons \mathcal{O}_M le faisceau des fonctions holomorphes sur M et Θ_M le faisceau des champs de vecteurs holomorphes sur M .

DÉFINITION I.2.1 ([Dub96] Lecture 1, voir aussi [Man99] p.19, [Her02] p.146, [Sab02] p.240). *Étant donné un champ de vecteurs \mathfrak{E} , appelé champ d'Euler, une forme bilinéaire non dégénérée g , un produit \star associatif et commutatif d'élément unité e sur le fibré tangent complexe TM . On dit que $(M, g, \star, e, \mathfrak{E})$ est une structure de Frobenius si les conditions suivantes sont satisfaites :*

- (1) *la forme bilinéaire non dégénérée g est plate et $\nabla(e) = 0$, où ∇ est la connexion sans torsion associée à g ;*
- (2) *pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ , on a*

$$\nabla_\xi(\eta \star \zeta) - \eta \star \nabla_\xi \zeta - \nabla_\eta(\xi \star \zeta) + \xi \star \nabla_\eta \zeta - [\xi, \eta] \star \zeta = 0 ;$$

- (3) *pour tous champs de vecteurs ξ, η, ζ , on a $g(\xi \star \eta, \zeta) = g(\xi, \eta \star \zeta)$;*
- (4) *pour tous champs de vecteurs ξ, η , on a $\mathcal{L}_e(\xi \star \eta) - \mathcal{L}_e \xi \star \eta - \xi \star \mathcal{L}_e \eta = \xi \star \eta$.*
- (5) *il existe un nombre complexe D tels qu'on a $\mathcal{L}_e(g(\xi, \eta)) - g(\mathcal{L}_e \xi, \eta) - g(\xi, \mathcal{L}_e \eta) = D \cdot g(\xi, \eta)$ pour tous champs de vecteurs ξ, η où \mathcal{L} est la dérivée de Lie ;*

REMARQUE I.2.2. (1) D'après les conditions (1) et (5), l'endomorphisme $\nabla \mathfrak{E}$ de Θ_M est une section ∇ -horizontale du faisceau $\text{End}_{\mathcal{O}_M}(\Theta_M)$.

- (2) Supposons que M soit simplement connexe. Soit (t_1, \dots, t_n) un système de coordonnées plates sur M . D'après le lemme 1.2 du cours 1 de [Dub96] (voir aussi le paragraphe VII.2.b de [Sab02]), il existe une fonction holomorphe, appelée potentiel, $F : M \rightarrow \mathbb{C}$ telle que pour tous i, j, k dans $\{1, \dots, n\}$, nous ayons

$$F_{ijk} := \frac{\partial^3 F}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} = g(\partial_{t_i} \star \partial_{t_j}, \partial_{t_k}).$$

Le potentiel n'est déterminé qu'à l'addition près d'un polynôme de degré 2.

Comme le produit \star est associatif, le potentiel est solution des équations WDVV suivantes, qu'on appelle aussi équations d'associativité, Pour tout

i, j, k, ℓ dans $\{1, \dots, n\}$, nous avons

$$\sum_{a,b} F_{ija} g^{ab} F_{bkl} = \sum_{a,b} F_{jka} g^{ab} F_{bil} \quad \forall i, j, k, \ell \in \{1, \dots, n\}$$

où (g^{ab}) est l'inverse de la matrice de la forme bilinéaire non dégénérée g dans les coordonnées (t_1, \dots, t_n) . De plus, ce potentiel vérifie la condition d'homogénéité suivante par rapport au champ d'Euler : la fonction $\mathfrak{E}(F) - (D+1)F$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à deux.

- (3) La condition (4) implique que $[e, \mathfrak{E}] = e$. Si nous prenons $\xi = \zeta = e$ et $\eta = \mathfrak{E}$ dans l'égalité (2) nous obtenons $\nabla_e \mathfrak{E} = e$. Nous avons aussi les égalités

$$\nabla \mathfrak{E} + (\nabla \mathfrak{E})^* = D \cdot \text{id} \quad \text{et} \quad (\mathfrak{E} \star)^* = \mathfrak{E} \star$$

où $(\cdot)^*$ est l'adjoint par rapport à la métrique g .

Pour montrer un isomorphisme entre deux variétés de Frobenius, nous utilisons le théorème suivant.

THÉORÈME I.2.3 ([**Dub96**], lecture 3 ; voir aussi [**Sab02**], p.250). *Soit $g^\circ : \mathbb{C}^\mu \times \mathbb{C}^\mu \rightarrow \mathbb{C}$ une forme bilinéaire non dégénérée. Soit A_0° une matrice complexe de taille $\mu \times \mu$ semi-simple régulière telle que $(A_0^\circ)^* = A_0^\circ$. Soit A_∞ une matrice complexe de taille $\mu \times \mu$ telle que $A_\infty + A_\infty^* = w \cdot \text{id}$ avec $w \in \mathbb{Z}$. Soit e° un vecteur propre de A_∞ pour la valeur propre q tel que $(e^\circ, A_0^\circ e^\circ, \dots, A_0^{\circ \mu-1} e^\circ)$ soit une base de \mathbb{C}^μ . Le quadruplet $(A_0^\circ, A_\infty, g^\circ, e^\circ)$ détermine un unique germe de variété de Frobenius $((M, 0), \star, e, \mathfrak{E}, g)$ (avec la constante $D := 2q + 2 - w$) tels que via l'isomorphisme entre $T_0 M$ et \mathbb{C}^μ on ait $g^\circ = g(0)$, $A_0^\circ = \mathfrak{E} \star$, $A_\infty = (q+1)\text{id} - \nabla \mathfrak{E}$ et $e^\circ = e(0)$.*

Signalons que ce théorème a été généralisé par C. Hertling et Y. Manin dans [**HM04**](cf. théorème 4.5).

Pour montrer un isomorphisme entre la variété de Frobenius provenant de $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ et celle provenant du polynôme de Laurent f , nous allons montrer que leurs conditions initiales vérifient les hypothèses du théorème ci-dessus et qu'elles sont égales.

I.3. Le côté A

Nous construisons la structure de Frobenius sur l'espace vectoriel complexe $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n), \mathbb{C})$ de dimension $\mu := w_0 + \dots + w_n$. La forme bilinéaire non dégénérée est donnée par la dualité de Poincaré pour les orbifolds, nous la notons $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Au paragraphe IV.3, nous définirons une base $(\eta_0, \dots, \eta_{\mu-1})$ de

l'espace vectoriel $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n), \mathbb{C})$. Notons $(t_0, \dots, t_{\mu-1})$ les coordonnées sur $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n), \mathbb{C})$ dans cette base. Le champ d'Euler est donné par la formule suivante

$$\mathfrak{E} := \mu \partial_{t_1} + \sum_{i=0}^{\mu-1} (1 - \sigma(i)) t_i \partial_{t_i}$$

où $\sigma(i)$ est la moitié du degré orbifold de η_i . Le produit quantique, noté \star , est défini à l'aide du potentiel de Gromow-Witten orbifold, noté F^{GW} , par la formule suivante

$$\frac{\partial^3 F^{GW}(t_0, \dots, t_{\mu-1})}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} = \langle \partial t_i \star \partial t_j, \partial t_k \rangle$$

Les conditions initiales de la variété de Frobenius sont les données $(A_0^\circ, A_\infty, \langle \cdot, \cdot \rangle, \eta_0)$ où $A_0^\circ := \mathfrak{E} \star|_{t=0}$ et $A_\infty := \text{id} - \nabla \mathfrak{E}$ ($q = 0$ et $w = n$). On peut calculer facilement la matrice A_∞ , mais pour calculer la matrice A_0° , il faut calculer le cup produit orbifold et certains invariants de Gromow-Witten orbifolds.

Le chapitre III est composé de rappels sur les orbifolds complexes et commutatifs que nous utiliserons aux chapitres IV et V.

Au chapitre IV, nous étudions la cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_n)$ et nous en donnons une base naturelle. Puis, nous exprimons la dualité de Poincaré, notée $\langle \cdot, \cdot \rangle$, et le cup produit orbifold dans cette base. En particulier, le fibré obstruction est calculé dans le théorème IV.5.13.

Au chapitre V, nous étudions la cohomologie quantique orbifold des espaces projectifs à poids. Nous définissons le champ d'Euler et nous calculons la matrice A_∞ à la proposition V.2.11. Puis, nous décrivons précisément les invariants de Gromow-Witten orbifolds qui nous permettent de calculer la matrice A_0° . A l'aide du cup produit orbifold, du théorème V.3.3 et de la conjecture V.3.6, nous pouvons calculer la matrice A_0° .

I.4. Le côté B

Soit $U := \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid \prod_i u_i^{w_i} = 1\}$. Dans l'article [DS04], le polynôme considéré est $w_0 u_0 + \dots + w_n u_n$ restreint à U et les poids sont premiers entre eux dans leur ensemble. Dans notre cas, nous ne faisons pas cette hypothèse sur les poids et le polynôme f est $u_0 + \dots + u_n$ restreint à U . Néanmoins, nous pouvons utiliser les mêmes techniques et nous démontrons le théorème suivant.

THÉORÈME I.4.1. *Il existe une structure de Frobenius canonique sur tout germe de déploiement universel du polynôme de Laurent restriction de $f(u_0, \dots, u_n) = u_0 + \dots + u_n$ à U .*

Le chapitre VI est consacré à l'étude de cette structure de Frobenius associée au polynôme de Laurent f . Au paragraphe VI.1, nous calculons les conditions initiales de cette structure de Frobenius.

Au deuxième paragraphe, nous montrerons que le potentiel de la structure est définie par certaines conditions initiales, en fait les mêmes que celles pour le côté A , si la correspondance est exacte.

Au troisième paragraphe, nous considérons l'espace vectoriel $\Omega^n(U)/df \wedge \Omega^{n-1}(U)$ muni d'une filtration croissante, appelée filtration de Newton, et d'une forme bilinéaire non dégénérée. Le choix d'une forme volume sur U nous permet de définir un produit sur cet espace vectoriel. Nous montrerons que le gradué de cet espace vectoriel par rapport à la filtration V_\bullet est muni d'une structure d'algèbre de Frobenius.

CHAPITRE II

Préliminaires combinatoires

II.1. Notations

Dans la suite de ce travail, nous utiliserons les notations ci-dessous.

Soient n et w_0, \dots, w_n des entiers strictement positifs. Posons $\mu = w_0 + \dots + w_n$. Pour tout sous-ensemble $I = \{i_1, \dots, i_\delta\}$ de $\{0, \dots, n\}$, notons $w_I = (w_{i_1}, \dots, w_{i_\delta})$.

Pour tout $\gamma \in [0, 1[$, posons $I(\gamma) := \{i \in \{0, \dots, n\} \mid \gamma w_i \in \mathbb{N}\}$ et notons $\delta(\gamma)$ son cardinal. Posons $a(\gamma) := \{\gamma w_0\} + \dots + \{\gamma w_n\}$ où $\{\cdot\}$ désigne la partie fractionnaire. Nous avons les relations suivantes :

$$\begin{aligned} I(\gamma) &= I(\{1 - \gamma\}); \\ \text{(II.1.1)} \quad a(\gamma) + a(\{1 - \gamma\}) &= n + 1 - \delta(\gamma); \\ \text{(II.1.2)} \quad \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N} &\Leftrightarrow e^{2i\pi\gamma_0} e^{2i\pi\gamma_1} e^{2i\pi\gamma_\infty} = 1 \Leftrightarrow \gamma_\infty = \{1 - \{\gamma_0 + \gamma_1\}\}. \end{aligned}$$

II.2. La combinatoire des nombres σ

Considérons l'ensemble $\bigsqcup_{i=0}^n \{\ell/w_i \mid \ell \in \{0, \dots, w_i - 1\}\}$ où \bigsqcup désigne la réunion disjointe. Soit \mathcal{V} l'application naturelle

$$\bigsqcup_{i=0}^n \{\ell/w_i \mid \ell \in \{0, \dots, w_i - 1\}\} \rightarrow \mathbb{Q} \cap [0, 1[$$

d'image notée S_w . Choisissons une bijection

$$s : \{0, \dots, \mu - 1\} \rightarrow \bigsqcup_{i=0}^n \{\ell/w_i \mid \ell \in \{0, \dots, w_i - 1\}\}$$

telle que $\mathcal{V} \circ s$ soit croissante. Pour tout γ dans S_w , posons $k^{\max}(\gamma) := \max\{i \in \{0, \dots, \mu - 1\} \mid s(i) = \gamma\}$. Nous avons

$$\text{(II.2.1)} \quad 1 + k^{\max}(\gamma) = \#\{i \in \{0, \dots, \mu - 1\} \mid s(i) \leq \gamma\}.$$

Dans la suite, nous allons utiliser la notation suivante

$$\text{(II.2.2)} \quad k^{\min}(\gamma) := \min\{i \in \{0, \dots, \mu - 1\} \mid s(i) = \gamma\}.$$

Pour tout $\gamma \in S_w$, le cardinal de $\mathcal{V}^{-1}(\gamma)$ est $\delta(\gamma)$. Il est clair que nous avons l'égalité

$$(II.2.3) \quad k^{\min}(\gamma) = k^{\max}(\gamma) - \delta(\gamma) + 1.$$

PROPOSITION II.2.4. *Soit γ dans S_w . Alors, on a :*

$$k^{\max}(\gamma) = n + [\gamma w_0] + \cdots + [\gamma w_n]$$

où $[x]$ désigne la partie entière de x .

DÉMONSTRATION. Soit $\gamma \in S_w$. Les éléments de S_w inférieurs ou égaux à γ sont

$$0, \frac{1}{w_0}, \dots, \frac{[\gamma w_0]}{w_0}, 0, \frac{1}{w_1}, \dots, \frac{[\gamma w_1]}{w_1}, \dots, 0, \frac{1}{w_n}, \dots, \frac{[\gamma w_n]}{w_n}.$$

Ainsi, $\#\{i \in \{0, \dots, n\} \mid s(i) \leq \gamma\} = n + 1 + \sum_{i=0}^n [\gamma w_i]$. Puis, l'égalité (II.2.1) démontre la proposition. \square

COROLLAIRE II.2.5. *Soit $\gamma > 0$ dans S_w . On a l'égalité*

$$k^{\max}(\gamma) + k^{\max}(\{1 - \gamma\}) = n + \mu + \delta(\gamma) - 1.$$

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE II.2.5. Si $\gamma > 0$ alors nous avons $\{1 - \gamma\} = 1 - \gamma$. La proposition II.2.4 implique que $k^{\max}(\{1 - \gamma\}) = k(1 - \gamma) = n + \mu + \sum_{i=0}^n [-\gamma w_i]$. Comme on a

$$[\gamma w_i] + [-\gamma w_i] = \begin{cases} 0 & \text{si } i \in I(\gamma); \\ -1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

nous en déduisons que $k^{\max}(\gamma) + k^{\max}(\{1 - \gamma\}) = 2n + \mu - \#I(\gamma)^c$ où $I(\gamma)^c$ est le complémentaire de $I(\gamma)$ dans $\{0, \dots, n\}$. \square

Considérons, comme dans l'article [DS04], les nombres rationnels suivants :

$$\sigma(i) = i - \mu s(i) \text{ pour } i \in \{0, \dots, \mu - 1\}.$$

PROPOSITION II.2.6. *Soient γ dans S_w et $d \in \{0, \dots, \delta(\gamma) - 1\}$. On a les égalités*

$$\sigma(k^{\max}(\gamma) - d) = n - (d + a(\gamma)) \text{ et } \sigma(k^{\max}(\{1 - \gamma\}) - d) = \delta(\gamma) - 1 - d + a(\gamma).$$

REMARQUE II.2.7. La proposition précédente et la formule (II.1.1) impliquent l'équivalence suivante :

$$\sigma(k^{\max}(\gamma) - d) + \sigma(k^{\max}(\{1 - \gamma\}) - d') = n \Leftrightarrow d + d' = \delta(\gamma) - 1.$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION II.2.6 . Par définition, nous avons

$$\sigma(k^{\max}(\gamma) - d) = k^{\max}(\gamma) - d - \sum \gamma w_i.$$

Puis, la proposition II.2.4 nous donne la première égalité.

Pour la seconde égalité, il suffit d'appliquer la première partie de la proposition et d'utiliser la formule (II.1.1). \square

CHAPITRE III

Orbifolds complexes et *commutatifs*

Dans ce chapitre, nous rappelons des définitions et des propriétés générales sur les orbifolds complexes et *commutatifs* (c'est-à-dire que tous les groupes considérés seront *commutatifs*).

III.1. Les cartes, atlas et applications orbifolds

La notion d'orbifold (ou de V -variété) a été introduite par Satake dans l'article [Sat56]. Nous allons utiliser les notations de Chen et Ruan dans leurs articles [CR02] et [CR04]. Dans ce paragraphe, nous allons définir les objets que nous utiliserons par la suite et nous ne donnerons pas les énoncés les plus généraux. Pour plus de détails, les lecteurs pourront consulter l'article original de Satake [Sat57] ou les articles plus récents de Chen et Ruan [CR04] et [CR02] voire celui de Fukaya et Ono [FO99].

Dans cette section, nous allons d'abord définir les cartes orbifolds puis les atlas orbifolds et enfin les applications entre orbifolds.

III.1.a. Les cartes orbifolds. Soit U un espace topologique connexe. Une *carte* de U est un triplet (\tilde{U}, G, π) où \tilde{U} est un ouvert connexe de \mathbb{C}^n , G est un groupe *fini* qui agit de manière holomorphe sur \tilde{U} et π une application de \tilde{U} sur U telle que π induise un homéomorphisme entre \tilde{U}/G et U . Dans les exemples que nous allons considérer par la suite, les groupes seront commutatifs. Ainsi, pour simplifier, nous supposons dorénavant que *tous les groupes sont commutatifs*. Quand nous n'aurons pas besoin de préciser le groupe ou la projection, nous noterons simplement \tilde{U} pour une carte de U .

Deux cartes $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$ d'un même ouvert U sont *isomorphes* s'il existe un biholomorphisme $\varphi : \tilde{U}_1 \rightarrow \tilde{U}_2$ et un isomorphisme de groupes $\kappa : G_1 \rightarrow G_2$ tels que φ soit κ -équivariant et $\pi_2 \circ \varphi = \pi_1$. Si (φ, κ) est un automorphisme d'une carte (\tilde{U}, G, π) alors il existe $g \in G$ tel que $\varphi(x) = g \cdot x$ et $\kappa = \text{id}$. Un tel automorphisme est noté (φ_g, id) . L'élément g est unique si le groupe G agit de manière effective sur \tilde{U} . Notons $\text{Ker}(G)$ le sous-groupe de G qui agit trivialement sur \tilde{U} . Remarquons que $\varphi_g = \varphi_{g'}$ si et seulement si gg'^{-1} est dans $\text{Ker}(G)$.

Soit U un ouvert connexe de U' . Soit (\tilde{U}', G', π') une carte de U' . Une carte (\tilde{U}, G, π) de U est *induite* par (\tilde{U}', G', π') s'il existe un monomorphisme de groupes $\kappa : G \rightarrow G'$ et un plongement ouvert κ -équivariant α de \tilde{U} dans \tilde{U}' tels que κ induise un isomorphisme entre $\text{Ker}(G)$ et $\text{Ker}(G')$ et $\pi' = \alpha \circ \pi$. Satake appelle un tel couple $(\alpha, \kappa) : (\tilde{U}, G, \pi) \hookrightarrow (\tilde{U}', G', \pi')$ une *injection* de cartes. Quand nous n'aurons pas besoin d'explicitier κ , nous noterons simplement une injection par $\alpha : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{U}'$.

LEMME III.1.1. *Soient (α_1, κ_1) et (α_2, κ_2) deux injections de (\tilde{U}, G, π) dans (\tilde{U}', G', π') . Alors il existe $g' \in G'$ tel que $\alpha_1 = \varphi_{g'} \circ \alpha_2$.*

REMARQUE III.1.2. (1) Si G' agit effectivement c'est-à-dire $\text{Ker}(G') = \{\text{id}\}$ alors nous avons l'unicité de g' dans le lemme ci-dessus.

(2) Le lemme ci-dessus implique que $\kappa_1 = \kappa_2$.

DÉMONSTRATION DU LEMME III.1.1. Pour tout \tilde{x} dans \tilde{U} , nous avons $\pi' \circ \alpha_1(\tilde{x}) = \pi' \circ \alpha_2(\tilde{x})$. Il existe donc $g' \in G'$ tel que $\alpha_1(\tilde{x}) = g' \cdot \alpha_2(\tilde{x})$. Nous en déduisons que

$$\tilde{U} = \bigcup_{g' \in G'} \{\tilde{x} \in \tilde{U} \mid \alpha_1(\tilde{x}) = g' \cdot \alpha_2(\tilde{x})\}.$$

Ainsi, \tilde{U} est une réunion finie d'ensembles fermés. Il existe $g' \in G'$ tel que l'ensemble $E_{g'} := \{\tilde{x} \in \tilde{U} \mid \alpha_1(\tilde{x}) = g' \cdot \alpha_2(\tilde{x})\}$ ne soit pas d'intérieur vide. En particulier, les applications holomorphes α_1 et $\varphi_{g'} \circ \alpha_2$ coïncident sur un ouvert inclus dans $E_{g'} \subset \tilde{U}$. D'après le théorème du prolongement analytique, nous en déduisons que $\alpha_1 = \varphi_{g'} \circ \alpha_2$ sur \tilde{U} car \tilde{U} est connexe. \square

Le lemme suivant est dû à Chen et Ruan (cf. lemme 4.1.1 dans l'article [CR02]).

LEMME III.1.3. *Soit (\tilde{U}', G', π') une carte de U' . Si U est un ouvert connexe de U' , alors il existe une carte de U , unique à isomorphisme près, qui s'injecte dans (\tilde{U}', G', π') .*

DÉMONSTRATION. *Existence* : Soit \tilde{U} une composante connexe de $\pi'^{-1}(U)$. Soit G le sous-groupe de G' formé des éléments qui laissent stable \tilde{U} . Soit π la restriction de π' à \tilde{U} . Nous avons ainsi construit une carte (\tilde{U}, G, π) de U .

Unicité :

– Nous allons d'abord montrer que deux composantes connexes différentes de $\pi'^{-1}(U)$ donnent deux cartes isomorphes. Soient \tilde{U}_1 et \tilde{U}_2 deux composantes connexes de $\pi'^{-1}(U)$. Nous en déduisons deux cartes $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$.

Pour tout $g \in G$, l'application de $\varphi_g|_{\pi'^{-1}(U')} : \pi'^{-1}(U') \rightarrow \pi'^{-1}(U')$ qui à \tilde{x} associe $g\tilde{x}$ est un homéomorphisme. Ainsi, il existe $g \in G$ tel que $\varphi_g(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2$. Finalement (φ_g, id) est un isomorphisme entre $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$.

– Soit $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ une carte de U qui s'injecte dans (\tilde{U}', G', π') . Par définition, il existe un couple (α, κ) tel que :

(i) κ soit un monomorphisme de groupes de G_1 dans G' tel que $\text{Ker}(G_1) = \text{Ker}(G')$;

(ii) α soit un plongement κ -équivariant de \tilde{U}_1 dans \tilde{U}' .

Comme \tilde{U}_1 est connexe, $\alpha(\tilde{U}_1)$ est contenu dans une composante connexe de $\pi'^{-1}(U)$. Notons \tilde{U}_2 cette composante connexe. Soit $(\tilde{U}_2, G_2, \pi'|_{\tilde{U}_2})$ la carte de U construite dans la partie existence. Nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$G_1 \xrightarrow{\kappa} G' \supset G_2$$

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{U}_2 \subset \tilde{U}' \\ & \searrow \pi_1 & \downarrow \pi' \\ & & U \subset U' \end{array}$$

Nous allons montrer que $\alpha(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2$ par un argument de connexité. Par construction, nous avons $\alpha(\tilde{U}_1)$ ouvert dans \tilde{U}_2 . Il reste à montrer que $\alpha(\tilde{U}_1)$ est fermé dans \tilde{U}_2 . Soit $(\tilde{x}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite dans \tilde{U}_1 telle que $\alpha(\tilde{x}_n)$ converge vers $\tilde{y} \in \tilde{U}_2$. Il suffit de montrer que $\tilde{y} \in \alpha(\tilde{U}_1)$. La suite $\pi_1(\tilde{x}_n) = \pi'(\alpha(\tilde{x}_n))$ converge vers $\pi'(\tilde{y}) \in U'$. Ainsi, il existe $\tilde{x} \in \pi_1^{-1}(\pi'(\tilde{y}))$ et il existe une suite $(\tilde{x}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dans \tilde{U}_1 telle que

(i) $\pi_1(\tilde{x}'_n) = \pi_1(\tilde{x}_n)$;

(ii) $(\tilde{x}'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers \tilde{x} .

Comme \tilde{x}_n et \tilde{x}'_n sont dans la même orbite, il existe $g_n \in G_1$ tel que $g_n \tilde{x}'_n = \tilde{x}_n$ pour tout n . Comme G_1 est un groupe fini, quitte à extraire une sous-suite, nous pouvons supposer que $g_n = g$. Puis, nous avons $\alpha(\tilde{x}_n) = \alpha(g\tilde{x}'_n) = \kappa(g)\alpha(\tilde{x}'_n)$. En passant à la limite nous obtenons l'égalité $\tilde{y} = \kappa(g)\alpha(\tilde{x}) \in \alpha(\tilde{U}_1) \subset \tilde{U}_2$, ce qui prouve que $\tilde{U}_2 = \alpha_1(\tilde{U}_1)$.

Il reste à montrer que $\kappa(G_1) = G_2$. Comme $\kappa(G_1)$ stabilise $\alpha(\tilde{U}_1) = \tilde{U}_2$, nous en déduisons que $\kappa(G_1) \subset G_2$. Inversement, soit $g_2 \in G_2$. Pour tout $\tilde{x} \in \tilde{U}_1$, il existe $g_1 \in G_1$ tel que $g_2\alpha(\tilde{x}) = \alpha(g_1\tilde{x}) = \kappa(g_1)\alpha(\tilde{x})$. Nous en déduisons que \tilde{U}_1 est la

réunion sur $G_1 \times G_2$ des ensembles fermés

$$\{\tilde{x} \in \tilde{U}_1 \mid g_2 \alpha(\tilde{x}) = \kappa(g_1) \alpha(\tilde{x})\}.$$

Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme III.1.1 implique que $g_2 \alpha = \kappa(g_1) \alpha$. En d'autres termes, $g_2^{-1} \kappa(g_1)$ appartient à $\text{Ker}(G_2) = \text{Ker}(G') \simeq \text{Ker}(G_1)$. Nous obtenons que g_2 est dans $\kappa(G_1)$. \square

COROLLAIRE III.1.4. *Soient $(\tilde{U}, G_U, \pi_U), (\tilde{V}, G_V, \pi_V), (\tilde{W}, G_W, \pi_W)$ trois cartes de respectivement U, V, W telles qu'il existe deux injections $\tilde{U} \hookrightarrow \tilde{W}$ et $\tilde{V} \hookrightarrow \tilde{W}$. Si U est inclus dans V alors il existe une injection $\tilde{U} \hookrightarrow \tilde{V}$.*

DÉMONSTRATION. Comme $U \subset V$, d'après le lemme III.1.3 il existe une carte \tilde{U}_V de U qui s'injecte dans \tilde{V} . Par hypothèse, nous avons deux cartes \tilde{U} et \tilde{U}_V de U qui s'injectent dans \tilde{W} . Ainsi, le lemme III.1.3 montre que ces deux cartes \tilde{U} et \tilde{U}_V sont isomorphes. Nous en déduisons le corollaire. \square

III.1.b. Les atlas orbifolds. Soit $|X|$ un espace topologique. D'après l'article [MP97], un *atlas orbifold* $\mathcal{A}(|X|)$ de $|X|$ est la donnée d'un recouvrement de $|X|$ par des ouverts connexes $(U_i)_{i \in I}$ tels que

(III.1.5) chaque ouvert U_i de ce recouvrement ait une carte $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$;

(III.1.6) pour tout $x \in U_i \cap U_j$, il existe un ouvert $U_k \subset U_i \cap U_j$ contenant x et deux injections $\tilde{U}_k \hookrightarrow \tilde{U}_i$ et $\tilde{U}_k \hookrightarrow \tilde{U}_j$.

D'après le lemme III.1.3, nous pouvons toujours affiner l'atlas orbifold c'est-à-dire rajouter toutes les cartes induites. Deux atlas orbifolds sont dits équivalents s'il existe un troisième atlas orbifold plus fin que chacun d'eux.

DÉFINITION III.1.7. *Une orbifold est un espace topologique séparé, muni d'une classe d'équivalence d'atlas orbifold. Pour alléger les notations, nous notons simplement X pour l'orbifold $(|X|, [\mathcal{A}(|X|)])$.*

Nous dirons qu'une orbifold est compacte, connexe, ... si son espace topologique l'est.

LEMME III.1.8. *Soit X une orbifold. Soient x dans $|X|$ et (\tilde{U}, G, π) une carte d'un voisinage U de x . Soit \tilde{x} un relevé de x dans \tilde{U} . Le groupe $\{g \in G \mid g \cdot \tilde{x} = \tilde{x}\}$ ne dépend que de x .*

Ce groupe est appelé *groupe d'isotropie* au point x et nous le notons G_x .

DÉMONSTRATION DU LEMME III.1.8. Notons $G_x^{\tilde{U}}$ le sous-groupe de G défini par

$$\{g \in G \mid g \cdot \tilde{x} = \tilde{x}\}.$$

Montrons que $G_x^{\tilde{U}} = G_{g\tilde{x}}^{\tilde{U}}$ pour tout g dans G . Soit h dans $G_x^{\tilde{U}}$. Comme G est commutatif, nous avons $h(g\tilde{x}) = g\tilde{x}$ c'est-à-dire $h \in G_{g\tilde{x}}^{\tilde{U}}$. L'autre inclusion est directe. Notons $G_x^{\tilde{U}} := G_x^{\tilde{U}}$.

Montrons que s'il existe une injection $(\alpha, \kappa) : (\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}}) \hookrightarrow (\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}})$ alors nous avons $G_x^{\tilde{U}} = G_x^{\tilde{V}}$. D'après le lemme III.1.3, nous pouvons supposer que \tilde{V} est une composante connexe de $\pi_{\tilde{U}}^{-1}(V)$, $G_{\tilde{V}}$ est le sous-groupe de $G_{\tilde{U}}$ qui agit sur \tilde{V} et $\pi_{\tilde{V}} = \pi_{\tilde{U}}|_{\tilde{V}}$. Il est clair que $G_x^{\tilde{V}} \subset G_x^{\tilde{U}}$. Inversement, soit $g \in G_x^{\tilde{U}}$. Soit \tilde{x} un relevé de x dans \tilde{V} . Il suffit de montrer que $g \in G_{\tilde{V}}$. L'application $\varphi_g|_{\pi_{\tilde{V}}^{-1}(U)} : \pi_{\tilde{V}}^{-1}(U) \rightarrow \pi_{\tilde{V}}^{-1}(U)$ qui à \tilde{y} associe $g\tilde{y}$ est un homéomorphisme donc elle envoie les composantes connexes sur les composantes connexes. Or nous avons $g\tilde{x} = \tilde{x}$, donc $\varphi_g(\tilde{V}) = \tilde{V}$, c'est-à-dire $g \in G_{\tilde{V}}$.

Soit x dans $U_1 \cap U_2$. Comme X est une orbifold, il existe une carte $(\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}})$ d'un ouvert $V \subset U_1 \cap U_2$ contenant x et il existe deux injections $(\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}}) \hookrightarrow (\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}}) \hookrightarrow (\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$. Nous en déduisons que $G_x^{\tilde{V}} = G_x^{\tilde{U}_1} = G_x^{\tilde{U}_2}$. \square

REMARQUE III.1.9. Soit X une orbifold. Soit x un point de X . D'après le lemme III.1.3, quitte à prendre un ouvert U_x , contenant x , assez petit, il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ de U_x .

LEMME III.1.10. *Soit X une orbifold connexe. Le groupe $\text{Ker}(G_x)$ ne dépend pas du point x dans $|X|$.*

Notons $\text{Ker}(X)$ ce groupe qui agit globalement trivialement.

DÉMONSTRATION DU LEMME III.1.10. Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . D'après le lemme III.1.3 et la définition d'une injection, pour tous x, y dans U , nous avons $\text{Ker}(G_x) = \text{Ker}(G_y) = \text{Ker}(G)$. Ceci montre que l'ensemble $\{p \in |X| \mid \text{Ker}(G_p) \simeq \text{Ker}(G)\}$ est ouvert et fermé dans $|X|$. \square

Une orbifold est dite *réduite* si $\text{Ker}(X)$ est réduit à l'identité. A toute carte (\tilde{U}, G, π) de U d'un atlas $\mathcal{A}(|X|)$, nous lui associons la carte réduite

$$(\tilde{U}, G/\text{Ker}(X), \pi_{\text{red}})$$

de U où $\pi_{\text{red}} : \tilde{U} \rightarrow U$ induit un homéomorphisme entre $\tilde{U}/(G/\text{Ker}(X)) \simeq \tilde{U}/G$ et U . Ainsi, à l'atlas $\mathcal{A}(|X|)$, nous lui associons un unique atlas réduit. Nous obtenons alors une orbifold réduite noté X_{red} .

La partie *régulière* de X , notée X_{reg} , est $\{x \in |X| \mid G_x = \text{Ker}(X)\}$. Remarquons que X_{reg} est une variété complexe munie d'une action triviale du groupe $\text{Ker}(X)$. Cette définition est différente de celle de Chen et Ruan (cf. définition 4.1.2 de [CR02]) où ils définissent $\widehat{X}_{\text{reg}} := \{x \in |X| \mid G_x = \{\text{id}\}\}$.

EXEMPLE III.1.11. (1) Une variété complexe X est une orbifold où nous avons $\text{Ker}(X) = \{\text{id}\}$, $G_x = \{\text{id}\}$ pour tout $x \in X$ et $X_{\text{reg}} = \widehat{X}_{\text{reg}} = X$.

(2) Soit G un groupe commutatif fini qui agit trivialement sur une variété complexe Y . Le quotient $X := Y/G$ est naturellement munie d'une structure orbifold. Nous avons $\text{Ker}(X) = G$, $G_x = G$ pour tout $x \in X$, $X_{\text{reg}} = Y$ mais $\widehat{X} = \{\emptyset\}$.

(3) Notons D le disque unité ouvert de \mathbb{C} . Soit $\pi : \widetilde{D} \rightarrow D$ l'application qui à z associe z^n où $\widetilde{D} = D$. Le triplet $(\widetilde{D}, \boldsymbol{\mu}_n, \pi)$, où $\zeta \cdot z := \zeta z$ pour tout $(\zeta, z) \in \boldsymbol{\mu}_n \times \widetilde{D}$, est une carte de D . L'ensemble formé de la seule carte $(\widetilde{D}, \boldsymbol{\mu}_n, \pi)$ est un atlas orbifold. Nous avons

- $G_z = \{\text{id}\}$ sauf pour $z = 0$ où $G_0 = \boldsymbol{\mu}_n$;
- $D_{\text{reg}} = \widehat{D}_{\text{reg}} = D - \{0\}$.

(4) Soit \mathbb{P}^1 la droite projective complexe. Soient $U_0 := \{[x, y] \mid x \neq 0\}$ et $U_1 := \{[x, y] \mid y \neq 0\}$. Soit $(\widetilde{U}_0, \boldsymbol{\mu}_{w_0}, \pi_0)$ (resp. $(\widetilde{U}_1, \boldsymbol{\mu}_{w_1}, \pi_1)$) la carte de U_0 (resp. U_1) définie par $\widetilde{U}_0 = \mathbb{C}$ (resp. $\widetilde{U}_1 = \mathbb{C}$), $\zeta \cdot z = \zeta z$ pour tout $(\zeta, z) \in \boldsymbol{\mu}_{w_0} \times \widetilde{U}_0$ (resp. $\zeta \cdot t = \zeta t$ pour tout $(\zeta, t) \in \boldsymbol{\mu}_{w_1} \times \widetilde{U}_1$) et $\pi_0(z) = z^{w_0}$ (resp. $\pi_1(t) = t^{w_1}$). Soit U un ouvert connexe de \mathbb{P}^1 . Une carte $(\widetilde{U}, G_{\widetilde{U}}, \pi_{\widetilde{U}})$ de U est dite admissible s'il existe $i \in \{0, 1\}$ tel que

- \widetilde{U} est une composante connexe de $\pi_i^{-1}(U)$;
- $G_{\widetilde{U}}$ est le sous-groupe de $\boldsymbol{\mu}_{w_i}$ qui agit sur \widetilde{U} , c'est-à-dire que $G_{\widetilde{U}} := \{g \in \boldsymbol{\mu}_{w_i} \mid g\widetilde{U} \subset \widetilde{U}\}$;
- $\pi_{\widetilde{U}} := \pi_i|_{\widetilde{U}}$.

PROPOSITION III.1.12. *L'ensemble des cartes admissibles est un atlas orbifold. Notons \mathbb{P}_{w_0, w_1}^1 l'orbifold ainsi construite.*

DÉMONSTRATION. Le point (III.1.5) est évident. Nous allons montrer le point (III.1.6). Soit $x \in V \cap W$.

Supposons que \widetilde{V} et \widetilde{W} soient dans \widetilde{U}_0 . Soit $\widetilde{V \cap W}$ une composante connexe de $\pi_0^{-1}(V \cap W)$ qui contient un relevé de x . Soit $G_{\widetilde{V \cap W}}$ le sous-groupe de $\boldsymbol{\mu}_{w_0}$ qui agit sur $\widetilde{V \cap W}$. Ainsi, le triplet $(\widetilde{V \cap W}, G_{\widetilde{V \cap W}}, \pi_{\widetilde{V \cap W}})$ est une

carte de $V \cap W$ où $\pi_{\widetilde{V \cap W}} = \pi_0|_{\widetilde{V \cap W}}$. Il est clair qu'il existe $g_0, g_1 \in \boldsymbol{\mu}_{w_0}$ tels que $\varphi_{g_0} : \widetilde{V \cap W} \hookrightarrow \widetilde{V}$ et $\varphi_{g_1} : \widetilde{V \cap W} \hookrightarrow \widetilde{W}$.

Supposons que $\widetilde{V} \subset \widetilde{U}_0$ et $\widetilde{W} \subset \widetilde{U}_1$. Comme les applications $\pi_i|_{\widetilde{U}_i - \{0\}}$ sont des revêtements, il existe un disque ouvert $D(x, \varepsilon)$ tel que pour $i \in \{0, 1\}$, $\pi_i^{-1}(D(x, \varepsilon))$ soit la réunion disjointe de w_i disques. Tous ces disques sont biholomorphes à $D(x, \varepsilon)$. Soient \widetilde{D}_V (resp. \widetilde{D}_W) une composante connexe de $\pi_0^{-1}(D(x, \varepsilon)) \cap \widetilde{V}$ (resp. $\pi_1^{-1}(D(x, \varepsilon)) \cap \widetilde{W}$). Ainsi, les triplets $(\widetilde{D}_V, \text{id}, \pi_0|_{\widetilde{D}_V})$ et $(\widetilde{D}_W, \text{id}, \pi_1|_{\widetilde{D}_W})$ sont des cartes de $D(x, \varepsilon)$ et elles sont isomorphes. De plus, elles s'injectent dans respectivement \widetilde{V} et \widetilde{W} . \square

Cet exemple est important car les cartes induites sur $U_0 \cap U_1$ par celles de U_0 et U_1 ne sont pas isomorphes : elles sont respectivement $(\widetilde{U}_0 - \{0\}, \boldsymbol{\mu}_{w_0}, \pi_0|_{\widetilde{U}_0 - \{0\}})$ et $(\widetilde{U}_1 - \{0\}, \boldsymbol{\mu}_{w_1}, \pi_1|_{\widetilde{U}_1 - \{0\}})$. Ainsi, pour vérifier la condition (III.1.6) de la définition d'un atlas orbifold, il faut prendre des ouverts assez petits, ce qui complique les démonstrations.

III.1.c. Les applications entre orbifolds. Soient (\widetilde{U}, G, π) et $(\widetilde{U}', G', \pi')$ deux cartes de respectivement U et U' . Soit f une application continue de U dans U' . Un relèvement holomorphe (resp. C^∞) de f est une application $\widetilde{f} : \widetilde{U} \rightarrow \widetilde{U}'$ holomorphe (resp. C^∞) telle que

- (1) $\pi' \circ \widetilde{f} = f \circ \pi$;
- (2) pour tout g dans G , il existe g' dans G' tel que pour tout \widetilde{x} dans \widetilde{U} on ait $g' \cdot \widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{f}(g \cdot \widetilde{x})$.

LEMME III.1.13. *Soient (\widetilde{U}, G, π) et $(\widetilde{U}', G', \pi')$ deux cartes de respectivement U et U' . Soit \widetilde{f} un relèvement d'une application continue $f : U \rightarrow U'$. Supposons que l'action de G' soit effective. Alors il existe un morphisme de groupe $\kappa : G \rightarrow G'$ tel que \widetilde{f} soit κ -équivariante.*

DÉMONSTRATION. Comme l'action de G' est effective, pour tout $g \in G$ il existe un unique $g' \in G'$ tel que $g' \cdot \widetilde{f}(\widetilde{x}) = \widetilde{f}(g \cdot \widetilde{x})$. Posons $\kappa(g) := g'$. Ceci définit un morphisme de groupes $\kappa : G \rightarrow G'$. \square

Deux relèvements \widetilde{f}_1 et \widetilde{f}_2 sont *isomorphes* s'il existe deux isomorphismes de cartes (φ, κ) et (φ', κ') tels que $\varphi' \circ \widetilde{f}_1 = \widetilde{f}_2 \circ \varphi$.

Soit $\widetilde{f} : \widetilde{U} \rightarrow \widetilde{U}'$ un relèvement de $f : U \rightarrow U'$. Soient $V \subset U$ et $V' \subset U'$ deux ouverts connexes tels que $f|_V : V \rightarrow V'$. Un relèvement $h : \widetilde{V} \rightarrow \widetilde{V}'$ de $f|_V$ est *induit*

par le relèvement \tilde{f} si pour toute injection $(\alpha, \kappa) : (\tilde{V}, G_V, \pi_V) \rightarrow (\tilde{U}, G, \pi)$ il existe une injection $(\alpha', \kappa') : (\tilde{V}', G_{V'}, \pi_{V'}) \rightarrow (\tilde{U}', G', \pi')$ telle que $\tilde{h} = (\alpha')^{-1} \circ \tilde{f} \circ \alpha$.

LEMME III.1.14. *Soit $\tilde{f} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}'$ un relèvement de $f : U \rightarrow U'$. Soient $V \subset U$ et $V' \subset U'$ tel que $f|_V : V \rightarrow V'$. Alors il existe un unique, à isomorphisme près, relèvement de $f|_V$ induit par \tilde{f} .*

DÉMONSTRATION. *Existence* : Soient (\tilde{U}, G, π) une carte de U et (\tilde{U}', G', π') une carte de U' . Soient $V \subset U$ et $V' \subset U'$ tels que $f|_V : V \rightarrow V'$. Soit \tilde{V} une composante connexe de $\pi^{-1}(V)$. Ainsi, l'ensemble $\tilde{f}(\tilde{V})$ est contenu dans une unique composante connexe, notée \tilde{V}' , de $\pi'^{-1}(V')$. Montrons que l'application $\tilde{f}|_{\tilde{V}} : \tilde{V} \rightarrow \tilde{V}'$ est un relèvement induit de f . Soit $(\alpha, \kappa) : (\tilde{V}, G_V, \pi_V) \hookrightarrow (\tilde{U}, G, \pi)$ une injection. D'après le lemme III.1.1, il existe $g \in G$ tel que $\alpha(\tilde{x}) = g \cdot \tilde{x}$ et d'après la définition d'un relèvement, il existe $g' \in G'$ tel que $\tilde{f}(g \cdot \tilde{x}) = g' \cdot \tilde{f}|_{\tilde{V}}(\tilde{x})$.

Unicité : D'après le lemme III.1.3, nous pouvons supposer que \tilde{f}_1 et \tilde{f}_2 sont deux relèvements entre les mêmes cartes. Ainsi, nous avons $f|_V \circ \pi = \pi' \circ \tilde{f}_1 = \pi' \circ \tilde{f}_2$. Pour tout \tilde{x} dans \tilde{V} il existe $g' \in G'$ tel que $\tilde{f}_1(\tilde{x}) = g' \cdot \tilde{f}_2(\tilde{x})$. Nous en déduisons que \tilde{V} est la réunion sur les éléments g' de G' des ensembles fermés

$$\{\tilde{x} \in \tilde{V} \mid \tilde{f}_1(\tilde{x}) = g' \cdot \tilde{f}_2(\tilde{x})\}.$$

Le même raisonnement que dans la démonstration du lemme III.1.1 montre que $\tilde{f}_1 = g' \cdot \tilde{f}_2$ sur \tilde{V} . \square

DÉFINITION III.1.15. *Soient X et Y deux orbifolds. Une application holomorphe orbifold entre X et Y est une application continue $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ telle que, pour tout point x de $|X|$ il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x qui contient x et une carte $(\tilde{U}_{|f|(x)}, G_{|f|(x)}, \pi_{|f|(x)})$ d'un ouvert $U_{|f|(x)}$ qui contient $|f|(x)$, satisfaisant aux propriétés suivantes :*

- (1) $|f|(U_x)$ est inclus dans $U_{|f|(x)}$;
- (2) il existe un relèvement $\tilde{f}_x : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_{|f|(x)}$ de $f|_U$;
- (3) si $y \in \pi_x(\tilde{U}_x)$ alors \tilde{f}_x et \tilde{f}_y induisent des relèvements isomorphes sur un voisinage de y .

Deux applications orbifoldes $f_1, f_2 : X \rightarrow Y$ sont isomorphes si $|f_1| = |f_2|$ et si pour tout x dans $|X|$, $\tilde{f}_{1,x}$ et $\tilde{f}_{2,x}$ induisent des relèvements isomorphes sur un voisinage de x .

Une application orbifold $f : X \rightarrow Y$ est un *plongement orbifold* si les relèvements \tilde{f}_x sont des immersions et l'application continue sous-jacente $|f| : |X| \rightarrow |Y|$

est un homéomorphisme sur son image. Une *sous-orbifold* de Y est l'image d'un plongement orbifold.

EXEMPLE III.1.16. Soit μ_2 agissant sur $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ de la façon suivante $g(x, y) = (gx, y)$. Le quotient $Y := \mathbb{C} \times \mathbb{C}/\mu_2$ est une orbifolde. Nous avons $G_{(0,y)} = \mu_2$ et $G_{(x,y)} = \{\text{id}\}$ si $x \neq 0$. Le lieu singulier du quotient est $(\{0\} \times \mathbb{C})/\mu_2$.

Soit l'orbifold $X_1 := \mathbb{C}/\mu_2$ où μ_2 agit trivialement sur \mathbb{C} . L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ qui à y associe $(0, y)$ induit un plongement orbifold $X_1 \rightarrow Y$. Ainsi, $(\{0\} \times \mathbb{C})/\mu_2$ est une sous-orbifold de Y . Nous pouvons voir X_1 comme le lieu singulier de Y que nous avons « sorti » de $|Y|$.

Soit l'orbifold $X_2 := \mathbb{C}/\mu_2$ où μ_2 agit sur \mathbb{C} par multiplication. L'application $\mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C} \times \mathbb{C}$ qui à x associe $(x, 0)$ induit un plongement orbifold $X_2 \rightarrow Y$. Ainsi, $(\mathbb{C} \times \{0\})/\mu_2$ est une sous-orbifold de Y .

Nous définissons le faisceau des fonctions holomorphes sur $|X|$. Notons $\mathcal{O}_{X_{\text{reg}}}$ le faisceau des fonctions holomorphes sur la variété complexe X_{reg} . Notons $j : X_{\text{reg}} \hookrightarrow X$ l'inclusion naturelle. Nous allons définir le faisceau d'anneaux commutatifs et unitaires $\mathcal{O}_{|X|}$ comme le sous-faisceau de $j_*\mathcal{O}_{X_{\text{reg}}}$ formé des fonctions localement bornées. Ainsi, $(|X|, \mathcal{O}_{|X|})$ est un espace annelé. Remarquons que la donnée de l'espace annelé $(|X|, \mathcal{O}_{|X|})$ est plus faible que la donnée d'une structure orbifolde sur $|X|$. Sur un espace annelé $(|X|, \mathcal{O}_{|X|})$ nous « oublions » les actions de groupes. La proposition suivante explique cette perte.

EXEMPLE III.1.17. Il est clair que l'espace annelé $(|\mathbb{P}^1_{w_0, w_1}|, \mathcal{O}_{|\mathbb{P}^1_{w_0, w_1}|})$ est isomorphe à l'espace annelé $(|\mathbb{P}^1|, \mathcal{O}_{|\mathbb{P}^1|})$.

PROPOSITION III.1.18. *Soit X une orbifold. Soit U un ouvert de X . Soit f dans $\mathcal{O}_{|X|}(U)$. Pour tout x dans $U - U \cap X_{\text{reg}}$, il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x et $f_1 \in (\pi_{x*}\mathcal{O}_{\tilde{U}_x})^{G_x}(U_x)$ tel que $f_1 = f \circ \pi_x$.*

DÉMONSTRATION. Posons $f_1 := f \circ \pi_x \big|_{\pi_x^{-1}(U_x \cap X_{\text{reg}})} : \pi_x^{-1}(U_x \cap X_{\text{reg}}) \rightarrow \mathbb{C}$. La fonction f_1 est holomorphe sur l'ouvert dense $\pi_x^{-1}(U_x \cap X_{\text{reg}}) \subset \tilde{U}_x$ et elle est G_x -invariante. Comme f est localement bornée, f_1 est localement bornée sur \tilde{U}_x . Ainsi, la fonction f_1 se prolonge en une fonction holomorphe G_x -invariante sur \tilde{U}_x . \square

Pour finir ce paragraphe, nous allons définir le faisceau, noté $\mathcal{C}_{|X|}^\infty$, des fonctions C^∞ sur une orbifold complexe X .¹ Le faisceau $\mathcal{C}_{|X|}^\infty$ est le sous-faisceau de $j_*\mathcal{C}_{X_{\text{reg}}}^\infty$

¹Ce faisceau est l'analogue pour les orbifolds du faisceau des fonctions C^∞ sur une variété complexe.

défini par

$$\mathcal{C}_{|X|}^\infty(U) := \left\{ \begin{array}{l} f \in j_* \mathcal{C}_{X_{\text{reg}}}^\infty(U) \mid \forall x \in U_{\text{sing}}, \exists (\tilde{U}_x, G_x, p_x) \text{ une carte} \\ \text{de } U_x \text{ et } f_1 \in \left(\pi_{x*} \mathcal{C}_{\tilde{U}_x}^\infty \right)^{G_x}(U_x) \text{ telles que } f_1 = f \circ \pi_x \text{ sur } U_{x,\text{reg}} \end{array} \right\}$$

Soit $\mathcal{U} := (U_\alpha)_{\alpha \in A}$ un recouvrement ouvert de $|X|$. Une *partition de l'unité* sur l'orbifold X subordonnée au recouvrement \mathcal{U} est une famille $(\rho_\alpha)_{\alpha \in A}$ de fonctions C^∞ telle que

- (1) pour tout $\alpha \in A$ et pour tout $x \in |X|$, $\rho_\alpha(x) \in [0, 1]$;
- (2) pour tout $\alpha \in A$, les supports de ρ_α sont inclus dans U_α ;
- (3) la famille des supports des fonctions ρ_α est un recouvrement localement fini;
- (4) pour tout $x \in |X|$, nous avons $\sum_{\alpha \in A} \rho_\alpha(x) = 1$.

PROPOSITION III.1.19 (cf. lemme 4.2.1 dans [CR02]). *Soit $|X|$ un espace topologique paracompact. Soit $\mathcal{A}(|X|)$ un atlas orbifold de $|X|$. Soit $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$ le recouvrement de $|X|$ associé à cet atlas. Il existe une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$.*

DÉMONSTRATION. Comme $|X|$ est paracompact, il existe un raffinement $(V_i)_{i \in I}$ localement fini du recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. Chaque V_i admet une carte $(\tilde{V}_i, G_i, \pi_i)$.

Montrons qu'il existe une famille de fonctions C^∞ $\tilde{f}_i : \tilde{V}_i \rightarrow \mathbb{C}$ G_i -invariantes et positives telle que les fonctions induites f_i sur V_i soient à support dans V_i et que la réunion des supports des fonctions f_i recouvre $|X|$. Il existe un recouvrement B_i de $|X|$ tel que $\overline{B_i} \subset V_i$. Il existe une famille $(h_i)_{i \in I}$ de fonctions continues telle que

- $h_i \geq 0$;
- $h_i \equiv 1$ sur $\overline{B_i}$;
- le support de h_i est inclus dans V_i .

Nous relevons les fonctions h_i en des fonctions continues \tilde{h}_i G_i -invariantes sur \tilde{V}_i . Remarquons que $\tilde{h}_i \equiv 1$ sur $\pi_i^{-1}(\overline{B_i})$. Nous lisons ses fonctions et nous obtenons des fonctions C^∞ , notées \tilde{h}_i^∞ , telles que $\tilde{h}_i^\infty \equiv 1$ sur $\pi_i^{-1}(\overline{B_i})$. Puis, nous posons

$$\tilde{f}_i := \frac{1}{\#G_i} \sum_{g \in G} \tilde{h}_i^\infty \circ \varphi_g.$$

Pour tout $i \in I$, la fonction \tilde{f}_i est positive, G_i -invariante, C^∞ et son support contient $\pi_i^{-1}(\overline{B_i})$. Notons f_i la fonction induite par \tilde{f}_i sur V_i . Le support de f_i contient $\overline{B_i}$ et donc l'ensemble des supports des fonctions f_i recouvre $|X|$.

Puis, nous prolongeons les fonctions f_i par 0 en dehors de U_i . Nous en déduisons que $f := \sum_i f_i$ est une fonction strictement positive sur $|X|$. La famille des fonctions $\rho_i := f_i/f$ est une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(V_i)_{i \in I}$. Comme le recouvrement $(V_i)_{i \in I}$ est un raffinement du recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$, nous en déduisons une partition de l'unité subordonnée au recouvrement $(U_\alpha)_{\alpha \in A}$. \square

III.2. Les fibrés vectoriels complexes orbifolds

Dans ce paragraphe, nous allons d'abord définir les fibrés vectoriels complexes orbifolds triviaux et définir leurs faisceaux des sections. Puis, nous donnerons la définition générale des fibrés vectoriels complexes orbifolds et de leur faisceau des sections.

III.2.a. Les fibrés vectoriels complexes orbifolds triviaux. Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Soient E une orbifold et $\text{pr} : E \rightarrow U$ une application orbifold surjective. L'application $\text{pr} : E \rightarrow U$ est un *fibré vectoriel complexe orbifold trivial de rang r* sur U si

$$(III.2.1) \quad \text{Ker}(E) = \text{Ker}(U);$$

$$(III.2.2) \quad (\tilde{U} \times \mathbb{C}^r, G, \pi_E) \text{ est une carte de } E;$$

$$(III.2.3) \quad \text{l'application } \text{pr} \text{ se relève en la projection } \tilde{\text{pr}} : \tilde{U} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U} \text{ c'est-à-dire } \pi \circ \tilde{\text{pr}} = \text{pr} \circ \pi_E;$$

$$(III.2.4) \quad \text{l'action de } G \text{ sur } \tilde{U} \times \mathbb{C}^r \text{ est donnée par } g(\tilde{x}, w) = (g\tilde{x}, \rho(\tilde{x}, g)w) \text{ où l'application } \rho : \tilde{U} \times G \rightarrow GL_r(\mathbb{C}) \text{ est holomorphe telle que}$$

$$\rho(\tilde{x}, gh) = \rho(h\tilde{x}, g) \circ \rho(\tilde{x}, h).$$

La condition (III.2.1) implique que

- $\rho(\tilde{x}, g) = \text{id}$ pour tout $\tilde{x} \in \tilde{U}$ et pour tout $g \in \text{Ker}(U)$;
- l'application $\text{pr}|_{E_{\text{reg}}} : E_{\text{reg}} \rightarrow U_{\text{reg}}$ est un fibré vectoriel complexe trivial sur la variété complexe X_{reg} ;
- l'application $\text{pr}|_{E_{\text{red}}} : E_{\text{red}} \rightarrow U_{\text{red}}$ est un fibré vectoriel orbifold trivial.

La fibre $E_x := \text{pr}^{-1}(x)$ est isomorphe à \mathbb{C}^r/G_x où l'action de G_x sur \mathbb{C}^r est donnée par l'application $\rho(x, \cdot)$. La fibre E_x contient l'espace vectoriel $E_x^{G_x} := \{\pi_E(\tilde{x}, \tilde{v}) \mid \forall g \in G_x, g(\tilde{x}, \tilde{v}) = (\tilde{x}, \tilde{v})\}$.

Une section holomorphe d'un fibré orbifold trivial $\text{pr} : E \rightarrow U$ est une application orbifold $s : U \rightarrow E$ qui se relève en une application holomorphe $(\text{id}, \tilde{s}) : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U} \times$

\mathbb{C}^r G -équivariante. En d'autres termes, une section est la donnée d'une application holomorphe $\tilde{s} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^r$ telle que

$$\tilde{s}(g\tilde{x}) = \rho(\tilde{x}, g)\tilde{s}(\tilde{x}).$$

Ainsi, l'ensemble des sections holomorphes est un faisceau de $\mathcal{O}_{|U|}$ -modules. Nous le notons $\mathcal{E}_{|U|}$. Nous définissons l'action de G sur l'ensemble des applications holomorphes $\tilde{s} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^r$ par la formule

$$(III.2.5) \quad g \cdot \tilde{s}(\tilde{x}) = \rho(g^{-1}\tilde{x}, g)\tilde{s}(g^{-1}\tilde{x}).$$

Une application holomorphe $\tilde{s} : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}^r$ G -invariante induit par passage au quotient une section holomorphe $s : U \rightarrow E$. Le faisceau $\mathcal{E}_{|U|}$ des sections holomorphes du fibré $\text{pr} : E \rightarrow U$ est isomorphe au faisceau $(\pi_* \mathcal{O}_{\tilde{U}}^r)^G$.

En remplaçant le mot holomorphe par C^∞ au paragraphe précédent, nous définissons le faisceau des sections C^∞ d'un fibré orbifold $\text{pr} : E \rightarrow U$.² Ce faisceau, noté $\mathcal{E}_{|U|}^\infty$, est un faisceau de $\mathcal{C}_{|U|}^\infty$ -module. Il est isomorphe au faisceau $(\pi_* \mathcal{C}_{\tilde{U}}^{\infty r})^G$.

Soit $s : U \rightarrow E$ une section holomorphe ou C^∞ du fibré $\text{pr} : E \rightarrow U$. Nous en déduisons que

- si $\tilde{s}(\tilde{x})$ est non nul alors $\tilde{s}(\tilde{x})$ est un vecteur propre de la matrice $\rho(\tilde{x}, g)$ pour la valeur propre 1 pour tout $g \in G_x$;
- pour tout x dans U , $s(x)$ appartient à l'espace vectoriel $E_x^{G_x}$.

Contrairement au cas des variétés, le faisceau des sections d'un fibré vectoriel orbifold ne permet de reconstruire le fibré vectoriel orbifold car nous perdons l'action du groupe G sur le fibré.

EXEMPLE III.2.6. Nous reprenons les notations de l'exemple III.1.11.(3). Considérons le fibré orbifold trivial défini par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{D} \times \mathbb{C} & \xrightarrow{\pi_E} & (\tilde{D} \times \mathbb{C})/\mu_n \\ \tilde{\text{pr}} \downarrow & & \downarrow \text{pr} \\ \tilde{D} & \xrightarrow{\pi} & D \end{array}$$

où $\zeta \cdot (z, v) := (\zeta z, \zeta v)$. Soit s une section de ce fibré. Ainsi, nous avons

$$\tilde{s}(\zeta\tilde{x}) = \zeta\tilde{s}(\tilde{x}).$$

Ceci implique que $\tilde{s}(0) = 0$.

²Ce faisceau est l'analogue du faisceau des sections C^∞ pour un fibré holomorphe sur une variété complexe.

REMARQUE III.2.7. Au paragraphe 4.1 de l'article [CR02], un fibré vectoriel orbifold trivial vérifie les conditions (III.2.2), (III.2.3) et (III.2.4). Un fibré vectoriel qui vérifie aussi (III.2.1) est appelé un *bon fibré* (cf. paragraphe 4.3 de [CR02]). Nous avons l'équivalence suivante :

$$\begin{aligned} E \rightarrow U \text{ est un bon fibré orbifold trivial} \\ \Leftrightarrow E_{\text{red}} \rightarrow U_{\text{red}} \text{ est un fibré orbifold trivial.} \end{aligned}$$

Modifions légèrement l'exemple du fibré vectoriel III.2.6 de la façon suivante : l'action de μ_n sur \tilde{D} est trivial et l'action de μ_n sur $\tilde{D} \times \mathbb{C}$ est donnée par $\zeta \cdot (z, v) := (z, \zeta v)$. Pour ce fibré, nous avons $\text{Ker}(E) = \{\text{id}\}$ et $\text{Ker}(\tilde{D}) = \mu_n$. Soit s une section de ce fibré alors nous avons

$$\tilde{s}(\tilde{x}) = \tilde{s}(\zeta \tilde{x}) = \zeta \tilde{s}(\tilde{x}).$$

Ceci implique que la seule section possible d'un tel fibré est la section nulle. C'est pour cette raison que nous ne considérons que les bons fibrés orbifolds.

Soient $(\tilde{U}_1, G_1, \pi_1)$ et $(\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$ deux cartes de U . Deux fibrés vectoriels orbifolds triviaux $\text{pr}_1 : E_1 \rightarrow U$ et $\text{pr}_2 : E_2 \rightarrow U$ sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme de cartes $(\varphi, \kappa) : (\tilde{U}_1, G_1, \pi_1) \hookrightarrow (\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$ et s'il existe une application $\delta : \tilde{U}_1 \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ telle que l'application

$$\begin{aligned} \text{(III.2.8)} \quad \tilde{U}_1 \times \mathbb{C} &\longrightarrow \tilde{U}_2 \times \mathbb{C} \\ (\tilde{x}, w) &\longmapsto (\varphi(\tilde{x}), \delta(\tilde{x})w) \end{aligned}$$

soit κ -équivariante.

Soient $\text{pr}_1 : E_1 \rightarrow U$ et $\text{pr}_2 : E_2 \rightarrow U$ deux fibrés orbifolds triviaux. Soient (\tilde{U}, G, π) une carte de U et $(\tilde{U} \times \mathbb{C}^{r_1}, G, \pi_{E_1})$ (resp. $(\tilde{U} \times \mathbb{C}^{r_2}, G, \pi_{E_2})$) une carte de E_1 (resp. E_2). Un *morphisme entre deux fibrés orbifolds triviaux* est une application orbifolde $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ qui commute avec les projections pr_1 et pr_2 telle qu'il existe un relèvement linéaire $(\text{id}, \tilde{\varphi}) : \tilde{U} \times \mathbb{C}^{r_1} \rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{C}^{r_2}$ G -équivariant c'est-à-dire que nous avons

$$\text{(III.2.9)} \quad \tilde{\varphi}(g\tilde{x})\rho^{E_1}(\tilde{x}, g) = \rho^{E_2}(\tilde{x}, g)\tilde{\varphi}(\tilde{x}) \quad \forall (\tilde{x}, g) \in \tilde{U} \times G.$$

Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Soit $\text{pr} : E \rightarrow U$ un fibré vectoriel orbifold trivial. Soit V un ouvert connexe de U . Soit $(\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}}) \hookrightarrow (\tilde{U}, G, \pi)$ une injection. Soit $\text{pr}_V : F \rightarrow V$ un fibré vectoriel orbifold trivial. Le fibré $\text{pr}_V : F \rightarrow V$ s'*injecte*

dans le fibré $\text{pr} : E \rightarrow U$ s'il existe une application holomorphe $\psi_\alpha : \tilde{V} \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ telle que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{V} \times \mathbb{C}^r &\longrightarrow \tilde{U} \times \mathbb{C}^r \\ (\tilde{x}, w) &\longmapsto (\alpha(\tilde{x}), \psi_\alpha(\tilde{x})w) \end{aligned}$$

soit une injection de cartes. En particulier, nous avons

$$\psi_\alpha(g\tilde{x}) \circ \rho_{\tilde{V}}(\tilde{x}, g) = \rho_{\tilde{U}}(\alpha(\tilde{x}), \kappa(g)) \circ \psi_\alpha(\tilde{x}).$$

LEMME III.2.10. *Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Soit $\text{pr} : E \rightarrow U$ un fibré vectoriel orbifold trivial. Soit V un ouvert connexe de U . Il existe un unique, à isomorphisme de fibrés près, fibré vectoriel orbifold $F \rightarrow V$ qui s'injecte dans $\text{pr} : E \rightarrow U$.*

DÉMONSTRATION. *Existence :* Soit \tilde{V} une composante connexe de $\pi^{-1}(V)$. Notons $G_{\tilde{V}}$ le sous-groupe de G qui stabilise \tilde{V} . Ainsi, $\tilde{V} \times \mathbb{C}^r \subset \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ est une composante connexe de $\pi_E^{-1} \text{pr}^{-1}(V)$. Le groupe $G_{\tilde{V}}$ agit sur $\tilde{V} \times \mathbb{C}^r$. Finalement, $(\tilde{V} \times \mathbb{C}^r, G_{\tilde{V}}, \pi_E|_{\tilde{V} \times \mathbb{C}^r})$ est une carte de $\text{pr}^{-1}(V)$ et $\text{pr}|_{\text{pr}^{-1}(V)} : \text{pr}^{-1}(V) \rightarrow V$ est un fibré trivial qui s'injecte dans $\text{pr} : E \rightarrow U$.

Unicité : Soit $F \rightarrow V$ un fibré trivial qui s'injecte dans $\text{pr} : E \rightarrow U$. Soit $(\tilde{V}_F, G_{\tilde{V}_F}, \pi_{\tilde{V}_F})$ une carte de V . Soit $(\alpha_F, \kappa) : (\tilde{V}_F, G_{\tilde{V}_F}, \pi_{\tilde{V}_F}) \hookrightarrow (\tilde{U}, G, \pi)$ une injection. D'après le lemme III.1.3, il existe un isomorphisme de cartes $(\varphi, \kappa') : (\tilde{V}_F, G_{\tilde{V}_F}, \pi_{\tilde{V}_F}) \rightarrow (\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}}) \subset (\tilde{U}, G, \pi)$. Alors, l'application $\tilde{V}_F \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{V} \times \mathbb{C}^r$ qui à (\tilde{x}, w) associe $(\varphi(\tilde{x}), \psi_{\alpha_F}(\tilde{x})w)$ est un isomorphisme de fibrés triviaux. \square

III.2.b. Le cas général : les fibrés vectoriels complexes orbifolds.

DÉFINITION III.2.11. *Une application $\text{pr} : E \rightarrow X$ surjective entre deux orbifolds est un fibré vectoriel complexe orbifold de rang r si pour tout x dans X , il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x telle que*

- (1) *l'application $\text{pr}|_{\text{pr}^{-1}(U_x)} : \text{pr}^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$ est un fibré vectoriel complexe orbifold trivial de rang r ;*
- (2) *pour toute injection $(\alpha, \kappa) : (\tilde{U}_y, G_y, \pi_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$, le fibré orbifold trivial $\text{pr}^{-1}(U_y) \rightarrow U_y$ s'injecte dans $\text{pr}^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$.*

Soit $\text{pr} : E \rightarrow X$ un fibré vectoriel orbifold de rang r . Une carte (\tilde{U}, G, π) de $U \subset X$ est dite *trivialisante* si $(\tilde{U} \times \mathbb{C}^r, G, \pi_E)$ est une carte de $\text{pr}^{-1}(U)$. Remarquons que

- $\text{pr}|_{E_{\text{reg}}} : E_{\text{reg}} \rightarrow X_{\text{reg}}$ est un fibré vectoriel complexe de rang r sur la variété complexe X_{reg} ;
- $E_{\text{red}} \rightarrow X_{\text{red}}$ est un fibré vectoriel orbifold.

Une section holomorphe (resp. C^∞) d'un fibré orbifold $\text{pr} : E \rightarrow X$ est une application orbifold $s : X \rightarrow E$ qui localement se relève en une application holomorphe (resp. C^∞) de $(\text{id}, \tilde{s}_x) : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_x \times \mathbb{C}^r$ G_x -invariante c'est-à-dire que nous avons pour tout $g \in G_x$

$$g \cdot \tilde{s}_x = \tilde{s}_x.$$

Notons $\mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}$ (resp. $\mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}^\infty$) le faisceau des sections holomorphes (resp. C^∞) du fibré vectoriel $\text{pr}|_{E_{\text{reg}}} : E_{\text{reg}} \rightarrow X_{\text{reg}}$. Nous allons définir le faisceau, noté $\mathcal{E}_{|X|}$ (resp. $\mathcal{E}_{|X|}^\infty$), des sections holomorphes (resp. C^∞) d'un fibré orbifold $\text{pr} : E \rightarrow X$ comme un sous-faisceau de $j_*\mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}$ (resp. $j_*\mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}^\infty$), où j est l'inclusion naturelle de X_{reg} dans X .

Pour tout ouvert U dans $|X|$, nous posons

$$\mathcal{E}_{|X|}(U) := \left\{ \begin{array}{l} s \in j_*\mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}(U) \mid \forall x \in U - U_{\text{reg}}, \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \text{ une carte} \\ \text{trivialisante d'un voisinage de } U_x \text{ et } \exists (\text{id}, \tilde{s}) : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_x \times \mathbb{C}^r \\ G_x\text{-équivariante tels que } \pi_x^E \circ (\text{id}, \tilde{s}) = s \circ \pi_x \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{E}_{|X|}^\infty(U) := \left\{ \begin{array}{l} s \in j_*\mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}^\infty(U) \mid \forall x \in U - U_{\text{reg}}, \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \text{ une carte} \\ \text{trivialisante d'un voisinage de } U_x \text{ et } \exists (\text{id}, \tilde{s}) : \tilde{U}_x \rightarrow \tilde{U}_x \times \mathbb{C}^r \\ G_x\text{-équivariante tels que } \pi_x^E \circ (\text{id}, \tilde{s}) = s \circ \pi_x \end{array} \right\}$$

Nous pouvons aussi définir le faisceau $\mathcal{E}_{|X|}$ (resp. $\mathcal{E}_{|X|}^\infty$) en recollant les faisceaux $(\pi_{x*}\mathcal{O}_{\tilde{U}_x}^r)^{G_x}$ (resp. $(\pi_{x*}\mathcal{C}_{\tilde{U}_x}^{\infty r})^{G_x}$).

En général, on ne peut pas reconstruire le fibré à partir du faisceau de ses sections c'est-à-dire que la donnée d'un fibré orbifold est plus riche que la donnée de son faisceau des sections.

LEMME III.2.12. *Soit $E \rightarrow X$ un fibré orbifold. Soient $(\tilde{U}, G_U, \pi_U), (\tilde{V}, G_V, \pi_V)$ et (\tilde{W}, G_W, π_W) trois cartes trivialisantes telles qu'il existe des injections $(\alpha, \kappa_\alpha) : (\tilde{U}, G_U, \pi_U) \hookrightarrow (\tilde{V}, G_V, \pi_V)$ et $(\beta, \kappa_\beta) : (\tilde{V}, G_V, \pi_V) \hookrightarrow (\tilde{W}, G_W, \pi_W)$. Pour tout \tilde{x} dans \tilde{U} , nous avons*

$$\psi_{\beta \circ \alpha}(\tilde{x}) = \psi_\beta(\alpha(\tilde{x})) \circ \psi_\alpha(\tilde{x}).$$

DÉMONSTRATION. Par hypothèse, nous en déduisons deux injections de $(\tilde{U} \times \mathbb{C}^r, G_U, \pi_E) \hookrightarrow (\tilde{W} \times \mathbb{C}^r, G_W, \pi_E)$. La première injection est donnée par la formule suivante $(\tilde{x}, w) \mapsto (\beta \circ \alpha(\tilde{x}), \psi_{\beta \circ \alpha}(\tilde{x})w)$ et la deuxième injection par $(\tilde{x}, w) \mapsto (\beta \circ$

$\alpha(\tilde{x}), \psi_\beta(\alpha(\tilde{x})) \circ \psi_\alpha(x)w$). D'après le lemme III.1.3, il existe $g \in G_W$ tel que pour tout $\tilde{x} \in \tilde{U}$ et pour tout $w \in \mathbb{C}^r$ nous ayons

$$g \cdot (\beta \circ \alpha(\tilde{x}), \psi_{\beta \circ \alpha}(x)w) = (\beta \circ \alpha(\tilde{x}), \psi_\beta(\alpha(\tilde{x})) \circ \psi_\alpha(x)w).$$

Nous en déduisons que pour tout \tilde{x} dans \tilde{U}

$$\begin{cases} g \cdot \beta \circ \alpha(\tilde{x}) = \beta \circ \alpha(\tilde{x}); \\ \rho_{\tilde{U}}(\beta \circ \alpha(\tilde{x}))(g) \psi_{\beta \circ \alpha}(x) = \psi_\beta(\alpha(\tilde{x})) \circ \psi_\alpha(x)w. \end{cases}$$

La première condition implique que $g \in \text{Ker}(U)$ et donc que $\rho_{\tilde{U}}(\beta \circ \alpha(\tilde{x}))(g) = \text{id}$ car $\text{Ker}(E) = \text{Ker}(X)$. \square

Deux fibrés orbifolds $\text{pr}_1 : E_1 \rightarrow X$ et $\text{pr}_2 : E_2 \rightarrow X$ sont *isomorphes* s'il existe une application $\psi : E_1 \rightarrow E_2$ telle que pour tout x dans X , il existe un isomorphisme $(\tilde{U}_x^1 \times \mathbb{C}^r, G_x^1, \pi_x^{E_1}) \rightarrow (\tilde{U}_x^2 \times \mathbb{C}^r, G_x^2, \pi_x^{E_2})$ qui soit linéaire entre les fibres de $\tilde{\text{pr}}_1$ et celles de $\tilde{\text{pr}}_2$ et qui induise un isomorphisme entre les cartes $(\tilde{U}_x^1, G_x^1, \pi_x^1)$ et $(\tilde{U}_x^2, G_x^2, \pi_x^2)$. En d'autres termes, pour chaque $x \in X$, il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert contenant x telle que nous ayons un isomorphisme entre les fibrés orbifolds triviaux $E_1|_{U_x} \rightarrow U_x$ et $E_2|_{U_x} \rightarrow U_x$.

Soient fibrés orbifolds $\text{pr}_1 : E_1 \rightarrow X$ et $\text{pr}_2 : E_2 \rightarrow X$. Un *morphisme* entre les fibrés $\text{pr}_1 : E_1 \rightarrow X$ et $\text{pr}_2 : E_2 \rightarrow X$ est une application orbifolde $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ qui commute avec les projections pr_1 et pr_2 telle que pour tout $x \in X$, il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x qui vérifie

(1) $\varphi|_{U_x} : \text{pr}_1^{-1}(U_x) \rightarrow \text{pr}_2^{-1}(U_x)$ est un morphisme de fibrés orbifold trivial;

(2) pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_y \hookrightarrow \tilde{U}_x$, nous avons

$$(III.2.13) \quad \psi_\alpha^{E_2} \circ \tilde{\varphi}|_{U_y} = \tilde{\varphi}|_{U_x} \circ \psi_\alpha^{E_1}$$

où $\tilde{\varphi}|_{U_y} : \tilde{E}_1|_{U_y} := \tilde{U}_y \times \mathbb{C}^{r_1} \rightarrow \tilde{E}_2|_{U_y} := \tilde{U}_y \times \mathbb{C}^{r_2}$ (resp. $\tilde{\varphi}|_{U_x}$) est un relevé linéaire G_y -équivariant (resp. G_x -équivariant) de $\varphi|_{U_x}$ (resp. $\varphi|_{U_y}$).

Soit $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ un morphisme de fibrés orbifolds. Pour tout $x \in |X|$, nous avons une application $\varphi_x : E_{1,x} := \text{pr}_1^{-1}(x) \rightarrow E_{2,x} := \text{pr}_2^{-1}(x)$ qui se relève en une application $\tilde{\varphi}|_{U_x}(\tilde{x}) : \{\tilde{x}\} \times \mathbb{C}^{r_1} \rightarrow \{\tilde{x}\} \times \mathbb{C}^{r_2}$ G_x -équivariante où \tilde{x} est un relevé de x . Nous posons

$$\text{Ker } \varphi := \bigcup_{x \in |X|} \pi_x^{E_1}(\text{Ker}(\tilde{\varphi}|_{U_x}(\tilde{x})));$$

$$\text{Im } \varphi := \bigcup_{x \in |X|} \pi_x^{E_2}(\text{Im}(\tilde{\varphi}|_{U_x}(\tilde{x}))).$$

Remarquons que $\text{Ker } \varphi \subset E_1$ et $\text{Im } \varphi \subset E_1$ ne dépendent pas du choix des cartes et des relevés.

PROPOSITION III.2.14. *Soient $\text{pr}_1 : E_1 \rightarrow X$ et $\text{pr}_2 : E_2 \rightarrow X$ deux fibrés orbifolds. Soit $\varphi : E_1 \rightarrow E_2$ un morphisme de fibrés orbifolds tel que pour tout $x \in U_x$ le rang de $\tilde{\varphi}|_{U_x}$ est constant. Les espaces topologiques $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ sont des fibrés vectoriels orbifolds.*

DÉMONSTRATION. Nous allons décrire les fonctions de transition de ses fibrés orbifolds puis nous appliquerons le théorème III.2.15. Pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_y \hookrightarrow \tilde{U}_x$, nous avons le diagramme commutatif suivant (cf. l'égalité (III.2.13))

$$\begin{array}{ccc} \tilde{E}_1|_{U_x} & \xrightarrow{(\text{id}, \tilde{\varphi}|_{U_x})} & \tilde{E}_2|_{U_x} \\ (\alpha, \psi_\alpha^{E_1}) \downarrow & & \downarrow (\alpha, \psi_\alpha^{E_2}) \\ \tilde{E}_1|_{U_y} & \xrightarrow{(\text{id}, \tilde{\varphi}|_{U_y})} & \tilde{E}_2|_{U_y} \end{array}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{E_1}|_{\text{Ker } \tilde{\varphi}|_{U_x}} : \text{Ker } \tilde{\varphi}|_{U_x} &\longrightarrow \text{Ker } \tilde{\varphi}|_{U_y}; \\ \psi_\alpha^{E_2}|_{\text{Im } \tilde{\varphi}|_{U_x}} : \text{Im } \tilde{\varphi}|_{U_x} &\longrightarrow \text{Im } \tilde{\varphi}|_{U_y}. \end{aligned}$$

D'après les résultats sur les fibrés vectoriels sur une variété, $\text{Ker } \tilde{\varphi}|_{U_x}$ et $\text{Im } \tilde{\varphi}|_{U_x}$ sont des fibrés sur \tilde{U}_x car le rang de $\tilde{\varphi}|_{U_x}$ est constant. Nous posons

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{\text{Ker } \varphi} &:= \psi_\alpha^{E_1}|_{\text{Ker } \tilde{\varphi}|_{U_x}}; \\ \psi_\alpha^{\text{Im } \varphi} &:= \psi_\alpha^{E_2}|_{\text{Im } \tilde{\varphi}|_{U_y}}. \end{aligned}$$

Ces fonctions de transition satisfont bien les hypothèses du théorème III.2.15. Nous en déduisons que $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \varphi$ sont des fibrés vectoriels orbifolds sur X . \square

THÉORÈME III.2.15. *Soit X une orbifold. Les données suivantes définissent un unique, à isomorphisme près, fibré orbifold de rang r :*

- (1) un atlas orbifold $\mathcal{A}(|X|)$;
- (2) pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{U}_j$ entre deux cartes de l'atlas, on se donne une application holomorphe $\psi_\alpha : \tilde{U}_i \rightarrow GL_r(\mathbb{C})$ telle que
 - (a) l'application

$$\begin{aligned} \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r &\longrightarrow \tilde{U}_j \times \mathbb{C}^r \\ (\tilde{x}, w) &\longmapsto (\alpha(\tilde{x}), \psi_\alpha(\tilde{x})w) \end{aligned}$$

soit un plongement ouvert ;

(b) pour deux injections successives α, β nous ayons

$$\psi_{\beta \circ \alpha}(\tilde{x}) = \psi_{\beta}(\alpha(\tilde{x})) \circ \psi_{\alpha}(\tilde{x}).$$

REMARQUE III.2.16. Soit $E \rightarrow X$ un fibré vectoriel orbifold donnée par ses fonctions de transition c'est-à-dire donnée par les ψ_{α} . Soit $(U_i)_{i \in I}$ le recouvrement de $|X|$ induit par $\mathcal{A}(|X|)$. Supposons que pour tout $i \in I$, il existe $\tilde{s}_i : \tilde{U}_i \rightarrow \mathbb{C}^r$ G_i -équivariante tel que pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{U}_j$ nous ayons

$$\tilde{s}_j(\alpha(\tilde{x})) = \psi_{\alpha}(\tilde{x})\tilde{s}_i(\tilde{x}).$$

Ces données se recollent en une section globale du fibré $E \rightarrow X$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $i \in I$, notons $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$ la carte de U_i dans l'atlas orbifold $\mathcal{A}(|X|)$. Nous définissons l'action de G_i sur $\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r$ de la façon suivante. Pour tout $g \in G_i$, l'application $\varphi_g : \tilde{U}_i \rightarrow \tilde{U}_i$ qui à \tilde{x} associe $g\tilde{x}$ est une injection. Nous posons $g \cdot (\tilde{x}, w) := (\varphi_g(\tilde{x}), \psi_{\varphi_g}(\tilde{x})w)$ pour tout $(\tilde{x}, w) \in \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r$. Remarquons que nous avons $\rho(\tilde{x}, g) = \psi_{\varphi_g}(\tilde{x})$.

Considérons l'espace topologique $\bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r / G_i$. Notons $[\tilde{x}_i, w_i]$ la classe de (\tilde{x}_i, w_i) .

Nous dirons que $[\tilde{x}_i, w_i] \sim [\tilde{x}_j, w_j]$ s'il existe deux injections $\alpha_i : \tilde{U}_{ij} \hookrightarrow \tilde{U}_i$ et $\alpha_j : \tilde{U}_{ij} \hookrightarrow \tilde{U}_j$ et $(\tilde{x}_{ij}, w_{ij}) \in \tilde{U}_{ij} \times \mathbb{C}^r$ tels que

$$\begin{aligned} [\alpha_i(\tilde{x}_{ij}), \psi_{\alpha_i}(\tilde{x}_{ij})w_{ij}] &= [\tilde{x}_i, w_i]; \\ [\alpha_j(\tilde{x}_{ij}), \psi_{\alpha_j}(\tilde{x}_{ij})w_{ij}] &= [\tilde{x}_j, w_j]. \end{aligned}$$

Quitte à modifier les injections, nous pouvons supposer que les égalités ci-dessus sont sur les couples et non sur les classes.

Montrons que cette relation est une relation d'équivalence. Le seul point délicat est la transitivité. Soient $[\tilde{x}_i, w_i], [\tilde{x}_j, w_j], [\tilde{x}_k, w_k]$ tels que $[\tilde{x}_i, w_i] \sim [\tilde{x}_j, w_j]$ et $[\tilde{x}_j, w_j] \sim [\tilde{x}_k, w_k]$. Ainsi, il existe $\beta_j : \tilde{U}_{jk} \hookrightarrow \tilde{U}_j$ et $\beta_k : \tilde{U}_{jk} \hookrightarrow \tilde{U}_k$ et $(\tilde{x}_{jk}, w_{jk}) \in \tilde{U}_{jk} \times \mathbb{C}^r$ tels que

$$\begin{aligned} (\alpha_i(\tilde{x}_{ij}), \psi_{\alpha_i}(\tilde{x}_{ij})w_{ij}) &= (\tilde{x}_i, w_i); \\ (\alpha_j(\tilde{x}_{ij}), \psi_{\alpha_j}(\tilde{x}_{ij})w_{ij}) &= (\tilde{x}_j, w_j). \end{aligned}$$

Comme $x := \varphi_{ij}(\tilde{x}_{ij}) = \varphi_{jk}(\tilde{x}_{jk})$, il existe deux injections $\gamma_{ij} : \tilde{U}_{ijk} \hookrightarrow \tilde{U}_{ij}$ et $\gamma_{jk} : \tilde{U}_{ijk} \hookrightarrow \tilde{U}_{jk}$ et $\tilde{x}_{ijk} \in \tilde{U}_{ijk}, w_{ijk}, w'_{ijk} \in \mathbb{C}^r$ tels que $\gamma_{ij}(\tilde{x}_{ijk}) = \tilde{x}_{ij}, \gamma_{jk}(\tilde{x}_{ijk}) = \tilde{x}_{jk}$ et $\psi_{\gamma_{ij}}(\tilde{x}_{ijk})w_{ijk} = w_{ij}, \psi_{\gamma_{jk}}(\tilde{x}_{ijk})w'_{ijk} = w_{jk}$. D'après le lemme III.1.1, il existe $g_j \in G_j$

tel que $\alpha_j \circ \gamma_{ij} = \varphi_{g_j} \circ \beta_j \circ \gamma_{jk}$. Pour résumer, nous avons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & \tilde{U}_{ijk} & & \\
 & \nearrow \gamma_{ij} & & \searrow \gamma_{jk} & \\
 & \tilde{U}_{ij} & & \tilde{U}_{jk} & \\
 \alpha_i \nearrow & & \downarrow \alpha_j & & \downarrow \beta_j \\
 \tilde{U}_i & & \tilde{U}_j & \xleftarrow[\varphi_{g_j}]{\cong} & \tilde{U}_j & \xrightarrow{\beta_k} & \tilde{U}_k
 \end{array}$$

Nous en déduisons que $g_j \in G_x \subset G_j$. Ainsi, il existe $g_{ijk} \in G_x \subset G_{ijk}$ tel que $\varphi_{g_j} \circ \beta_j \circ \gamma_{jk} = \beta_j \circ \gamma_{jk} \circ \varphi_{g_{ijk}}$. Comme nous avons

$$w_j = \psi_{\alpha_j \circ \gamma_{ij}}(\tilde{x}_{ijk})w_{ijk} = \psi_{\varphi_{g_j} \circ \beta_j \circ \gamma_{jk}}(\tilde{x}_{ijk})w_{ijk}$$

et

$$w_j = \psi_{\beta_j \circ \gamma_{jk} \circ \varphi_{g_{ijk}}}(\tilde{x}_{ijk})w'_{ijk}.$$

nous obtenons que $w'_{ijk} = \psi_{\varphi_{g_{ijk}}}(\tilde{x}_{ijk})w_{ijk}$. Finalement, les injections $\beta_j \circ \gamma_{jk} \circ \varphi_{g_{ijk}} : \tilde{U}_{ijk} \hookrightarrow \tilde{U}_k$ et $\alpha_j \circ \gamma_{ij} : \tilde{U}_{ijk} \hookrightarrow \tilde{U}_j$ et $(\tilde{x}_{ijk}, w_{ijk}) \in \tilde{U}_{ijk} \times \mathbb{C}^r$ montre que $[\tilde{x}_i, w_i] = [\tilde{x}_k, w_k]$.

Posons $|E| := \left(\bigsqcup_{i \in I} \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r / G_i \right) / \sim$. Notons $[[\tilde{x}_i, w_i]]$ la classe de $[\tilde{x}_i, w_i]$ pour $(\tilde{x}_i, w_i) \in \tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r$. L'application $|\text{pr}| : |E| \rightarrow |X|$ qui à $[[\tilde{x}_i, w_i]]$ associe $\pi_i(\tilde{x}_i)$ est bien définie et elle est continue. De plus, $(\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r, G_i, \pi_{E,i})$, où $\pi_{E,i}$ est la projection de $\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r$ dans $\tilde{U}_i \times \mathbb{C}^r / G_i$, est une carte de $\text{pr}^{-1}(U_i)$. Nous en déduisons un atlas orbifold sur $|E|$. Finalement, $\text{pr} : E \rightarrow X$ est un fibré orbifold de rang r sur X . \square

REMARQUE III.2.17. Soit $\text{pr} : E \rightarrow X$ un fibré orbifold sur X . Soit Y une sous-orbifold de X . L'application $\text{pr}_Y : \text{pr}^{-1}(Y) \rightarrow Y$ est naturellement munie d'une structure de fibré orbifold. De plus, la restriction $\mathcal{E}_{|X|} |_{|Y|}$, comme faisceau de $\mathcal{O}_{|X|}$ -modules, du faisceau des sections $\mathcal{E}_{|X|s}$ est le faisceau des sections de $\text{pr}_Y : \text{pr}^{-1}(Y) \rightarrow Y$.

EXEMPLE III.2.18 (Le fibré tangent complexe orbifold). Soit X une orbifold complexe de dimension n . Nous allons définir le fibré tangent complexe orbifold. Soit $\alpha : (\tilde{U}, G, \pi) \hookrightarrow (\tilde{U}', G', \pi')$ une injection. Soient (u_i) des coordonnées complexes sur

\tilde{U} et (u'_i) des coordonnées complexes sur \tilde{U}' . Nous notons $\psi_\alpha(\tilde{x})$ la matrice suivante

$$(III.2.19) \quad \left(\frac{\partial u'_i \circ \alpha}{\partial u_j} \right)_{i,j \in \{1, \dots, n\}}.$$

Les conditions du théorème III.2.15 sont vérifiées et nous obtenons un fibré orbifold qu'on appelle *fibré tangent complexe orbifold* de X . Le faisceau des sections du fibré tangent est noté $\Theta_{|X|}$.

Une section du fibré tangent complexe orbifold est appelée un *champ de vecteurs complexe*. Soit l'injection $\varphi_g : \tilde{U} \rightarrow \tilde{U}$ qui à \tilde{x} associe $g\tilde{x}$. Nous avons les égalités suivantes

$$\rho(\tilde{x}, g) = \psi_{\varphi_g}(\tilde{x}) = d\varphi_g(\tilde{x}).$$

Ainsi, localement un champ de vecteurs est une application $\mathcal{X} : U \rightarrow TU$ qui se relève en un champ de vecteurs $\tilde{\mathcal{X}} : \tilde{U} \rightarrow T\tilde{U}$ où $T\tilde{U}$ est le fibré vectoriel tangent complexe de \tilde{U} tel que $\tilde{\mathcal{X}}(g\tilde{x}) = d\varphi_g(\tilde{x})(\tilde{\mathcal{X}}(\tilde{x}))$.

Remarquons, que si l'on se restreint à $|X_{\text{reg}}|$, alors le fibré tangent complexe orbifold n'est rien d'autre que le fibré tangent complexe de la variété $|X_{\text{reg}}|$.

EXEMPLE III.2.20 (Le fibré cotangent complexe orbifold). Nous allons définir le fibré cotangent complexe. Soit $\alpha : (\tilde{U}, G, \pi) \hookrightarrow (\tilde{U}', G', \pi')$ une injection. Nous posons

$$(III.2.21) \quad \psi_\alpha^{T^*X}(\tilde{x}) := {}^t\psi_\alpha^{TX}(\tilde{x})^{-1}.$$

Les conditions du théorème III.2.15 sont vérifiées et nous obtenons un fibré orbifold qu'on appelle *fibré cotangent complexe orbifold* de X . Nous notons ce fibré T^*X . Ainsi, nous avons $\rho_{T^*X}(\tilde{x}, g) = {}^t\rho_{TX}(\tilde{x}, g)^{-1} = {}^t d\varphi_g(\tilde{x})^{-1}$. Le faisceau des sections du fibré orbifold T^*X est noté $\Omega_{|X|}^1$. Une section du fibré T^*X est appelée une 1-forme holomorphe. Localement une 1-forme holomorphe est une application $\omega : U \rightarrow T^*U$ qui se relève en une application $\tilde{\omega} : \tilde{U} \rightarrow T^*\tilde{U}$ telle que

$$(III.2.22) \quad \tilde{\omega}(g\tilde{x})(X) = \tilde{\omega}(\tilde{x})(d\varphi_g(\tilde{x})^{-1}(X))$$

où $X \in T_{g\tilde{x}}\tilde{U}$. La condition (III.2.22) est équivalente à $g \cdot \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ où l'action de G sur les 1-formes holomorphes de \tilde{U} est donnée par la formule

$$(III.2.23) \quad g \cdot \tilde{\omega} = (\varphi_g^{-1})^* \tilde{\omega} = (\varphi_{g^{-1}})^* \tilde{\omega}.$$

Soit $\alpha : (\tilde{U}, G, \pi) \hookrightarrow (\tilde{U}', G', \pi')$ une injection. Nous posons

$$(III.2.24) \quad \psi_\alpha^{\wedge^k T^*X} := \wedge^k \psi_\alpha^{T^*X}.$$

Les conditions du théorème III.2.15 sont vérifiées et nous obtenons un fibré orbifold qu'on appelle *fibré des k -formes holomorphes* de X . Nous notons ce fibré $\wedge^k T^*X$.

III.3. Faisceaux des formes différentielles sur une orbifold et intégrale orbifold

Dans ce paragraphe, nous allons définir le faisceau des k -formes différentielles C^∞ sur une orbifold. Puis, nous montrerons que ces faisceaux permettent d'interpréter une classe de cohomologie de l'espace topologique sous-jacent à une orbifold comme la classe d'une forme différentielle fermée. Ceci nous permettra de définir l'intégrale orbifold.

Dans ce paragraphe X est une orbifold complexe connexe de dimension n .

Notons $\mathcal{E}_{|X_{\text{reg}}|}^k$ le faisceau des k -formes différentielles C^∞ à valeur complexe sur la variété complexe X_{reg} . Soit j l'inclusion de $|X_{\text{reg}}|$ dans $|X|$. Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Nous notons $\mathcal{E}_{\tilde{U}}^k$ le faisceau des k -formes différentielles à valeur complexe sur \tilde{U} . Notons $(\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k)^G$ le sous-faisceau G -invariant de $\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k$. Nous allons définir le faisceau des k -formes différentielles sur l'orbifold X comme un sous-faisceau de $j_* \mathcal{E}_{|X_{\text{reg}}|}$. Pour tout ouvert U dans $|X|$, posons

$$\mathcal{E}_{|X|}^k(U) := \left\{ \begin{array}{l} \omega \in j_* \mathcal{E}_{X_{\text{reg}}}^k(U) \mid \forall x \in U_{\text{sing}}, \exists (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \text{ carte de } U_x \\ \text{et } \omega' \in (\pi_{x*} \mathcal{E}_{\tilde{U}_x}^k)^{G_x}(U_x) \text{ telles que } \omega' = \omega \text{ sur } U_{x, \text{reg}} \end{array} \right\}.$$

De la même manière que dans l'exemple III.2.20, nous pouvons définir le complexifié du fibré cotangent réel orbifold de X . Nous le notons $T_{\mathbb{C}}^*X$. Son faisceau des sections est $\mathcal{E}_{|X|}^1$. De manière générale, le faisceau des sections du fibré orbifold $\wedge^k T_{\mathbb{C}}^*X$ est $\mathcal{E}_{|X|}^k$.

PROPOSITION III.3.1. *Supposons $|X|$ paracompact.*

- (1) *Les faisceaux $\mathcal{E}_{|X|}^k$ sont acycliques pour le foncteur $\Gamma(|X|, \cdot)$.*
- (2) *Il existe une différentielle d telle que*

$$\mathcal{E}_{|X|}^\bullet : \quad \mathcal{E}_{|X|}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{|X|}^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{|X|}^n \xrightarrow{d} 0$$

soit une résolution du faisceau constant $\mathbb{C}_{|X|}$.

DÉMONSTRATION. (1) D'après la fin du paragraphe III.1, le faisceau $\mathcal{E}_{|X|}^0$ est le faisceau des fonctions C^∞ sur X . Comme $|X|$ est paracompact, il existe des partitions de l'unité dans $\mathcal{E}_{|X|}^0$ (cf. proposition III.1.19). Ainsi, le faisceau

$\mathcal{E}_{|X|}^0$ est fin. Comme $\mathcal{E}_{|X|}^k$ est un faisceau de $\mathcal{E}_{|X|}^0$ -modules, nous en déduisons que le faisceau $\mathcal{E}_{|X|}^k$ est fin.

- (2) Comme la condition est locale, il suffit de la vérifier pour tout ouvert assez petit. Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Comme \tilde{U} est un ouvert de \mathbb{C}^n , le complexe de De Rham

$$\mathcal{E}_{\tilde{U}}^\bullet : \quad \mathcal{E}_{\tilde{U}}^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\tilde{U}}^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}_{\tilde{U}}^n \xrightarrow{d} 0$$

est une résolution de $\mathbb{C}_{\tilde{U}}$. Puis, nous appliquons le foncteur exact à gauche π_* à $\mathcal{E}_{\tilde{U}}^\bullet$. Pour tout $x \in U$, nous avons

$$(R^i \pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k)_x = \lim_{V|x \in V} H^i(\pi^{-1}(V), \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k|_V).$$

Comme $\mathcal{E}_{\tilde{U}}^k$ est un faisceau fin, nous avons $H^i(\pi^{-1}(V), \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k|_V) = 0$ pour $i > 0$. Ainsi, $(R^i \pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k)_x$ est nul c'est-à-dire que le complexe

$$\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^\bullet : \quad \pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^0 \xrightarrow{\pi_* d} \pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^1 \xrightarrow{\pi_* d} \cdots \xrightarrow{\pi_* d} \pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^n \xrightarrow{\pi_* d} 0$$

est une résolution de $\pi_* \mathbb{C}_{\tilde{U}}$. Les différentielles $\pi_* d$ sont les restrictions de la différentielle d .

Puis, nous appliquons le foncteur covariant exact à gauche qui à un faisceau \mathcal{F} sur lequel G agit, associe le sous-faisceau G -invariant, noté \mathcal{F}^G . Nous en déduisons le complexe

$$(\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^\bullet)^G : \quad (\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^0)^G \xrightarrow{\pi_* d} (\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^1)^G \xrightarrow{\pi_* d} \cdots \xrightarrow{\pi_* d} (\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^n)^G .$$

Il reste à montrer que ce complexe est encore exact.

Soit x un point de U . Soit $\tilde{\omega} \in (\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^k)^G_x$ tel que $(\pi_* d)\tilde{\omega} = 0$ où k est un entier strictement positif. Le complexe $\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^\bullet$ est exact, il existe $\tilde{\eta}$ dans $\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U},x}^{k-1}$ tel que $(\pi_* d)\tilde{\eta} = \tilde{\omega}$. Puis on pose $\tilde{\alpha} := \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g^* \tilde{\eta}$. Il est clair que $\tilde{\alpha}$ est G -invariante et

$$\begin{aligned} (\pi_* d)\tilde{\alpha} &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} (\pi_* d)(g^* \tilde{\eta}) \\ &= \frac{1}{\#G} \sum_{g \in G} g^*(\pi_* d)\tilde{\eta} \\ &= \tilde{\omega}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons aisément que le complexe $(\pi_* \mathcal{E}_{\tilde{U}}^\bullet)^G$ est une résolution de $(\pi_* \mathbb{C}_{\tilde{U}})^G$. Or nous avons les égalités suivantes $(\pi_* \mathbb{C}_{\tilde{U}})^G = \underline{\mathbb{C}}_{|U|} = \underline{\mathbb{C}}_{|X|} \big|_{|U|}$. \square

La proposition précédente implique directement le corollaire suivant.

COROLLAIRE III.3.2. *Pour $k \in \{0, \dots, n\}$, on a un isomorphisme d'espace vectoriel entre $H^k(|X|, \mathbb{C})$ et $H^k\left(\Gamma(|X|, \mathcal{E}_{|X|}^\bullet)\right)$.*

Supposons que $|X|$ soit compacte. Soit ω dans $H^n(|X|, \mathbb{C})$. Grâce au corollaire III.3.2, nous voyons ω comme une classe de forme différentielle et nous définissons

$$(III.3.3) \quad \int_X^{\text{orb}} \omega := \frac{1}{\# \text{Ker}(X)} \int_{|X_{\text{reg}}|} \omega.$$

III.4. Classes de Chern orbifoldes par la théorie de Chern-Weil

Dans cette section, nous allons définir les classes de Chern pour les fibrés vectoriels complexes orbifolds. Nous adaptons l'appendice C du livre de Milnor et Stasheff [MS74] aux orbifolds.

Nous commençons par une étude locale. Soit $\text{pr} : F \rightarrow U$ un fibré vectoriel complexe orbifold trivial sur une orbifold complexe U . Soient (\tilde{U}, G, π) une carte de U et $(\tilde{U} \times \mathbb{C}^r, G, \pi_F)$ une carte de F . L'action de G sur $\tilde{F} := \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$ est donnée par

$$g \cdot (x, w) = (gx, \rho(x, g)w), \quad \forall (g, x, w) \in G \times \tilde{U} \times \mathbb{C}^r$$

où $\rho : \tilde{U} \times G \rightarrow \text{GL}(r, \mathbb{C})$ est holomorphe. Rappelons que l'action de G sur une section s est donnée par

$$g \cdot s(\tilde{x}) := \rho(g^{-1}\tilde{x}, g)s(g^{-1}\tilde{x}).$$

Soit s une section C^∞ du fibré trivial $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$. Soit ω une 1-forme C^∞ sur \tilde{U} . Nous définissons l'action de G sur $\omega \otimes s$ par la formule suivante

$$g \cdot (\omega \otimes s) := (g \cdot \omega) \otimes (g \cdot s).$$

Une *connexion* $\tilde{\nabla}$ G -*équivariante* sur le fibré trivial $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$ est une connexion qui vérifie $\tilde{\nabla}(g \cdot s) = g \cdot (\tilde{\nabla}s)$ où s est une section C^∞ du fibré trivial $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$.

³Les connexions G -équivariantes existent. En effet, si nous avons une connexion ∇ sur le fibré trivial $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$, la connexion

$$\tilde{\nabla} := \sum_{g \in G} g \cdot \nabla(g^{-1} \cdot)$$

LEMME III.4.1. *Soit $\tilde{\nabla}$ une connexion G -équivariante sur le fibré trivial $\tilde{U} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U}$. Soit $\tilde{\omega}$ la matrice de cette connexion dans une base s_1, \dots, s_r de sections du fibré $\tilde{U} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U}$. Pour tout $g \in G$, nous avons*

$$\varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\omega} = \rho(\cdot, g)^{-1} \tilde{\omega} \rho(\cdot, g) + \rho(\cdot, g)^{-1} d\rho(\cdot, g).$$

DÉMONSTRATION. Nous allons calculer $\tilde{\nabla}(gs_i)$ de deux manières. D'abord, nous utilisons la G -équivariance de la connexion $\tilde{\nabla}$. Pour tout $g \in G$, nous avons

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}(gs_i) &= g \tilde{\nabla} s_i \\ &= g \sum_{j=1}^r \tilde{\omega}_{ij} \otimes s_j \\ &= \sum_{j=1}^r \varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\omega}_{ij} \otimes gs_j. \end{aligned}$$

D'un autre côté, nous savons comment la matrice d'une connexion se comporte par un changement de base. Ainsi dans la base gs_1, \dots, gs_r , la matrice de la connexion est

$$\rho(\cdot, g)^{-1} \tilde{\omega} \rho(\cdot, g) + \rho(\cdot, g)^{-1} d\rho(\cdot, g).$$

Nous en déduisons le lemme. □

Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Le fibré orbifold trivial $\text{pr} : F \rightarrow U$ est muni d'une connexion ∇ s'il existe $(\tilde{F} := \tilde{U} \times \mathbb{C}^r, G, \pi_F)$ une carte de F et une connexion G -équivariante telles que l'application $\tilde{\text{pr}} : \tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$ relève pr .

Pour $i \in \{1, 2\}$, soient (F_i, ∇_i) deux fibrés orbifolds triviaux sur U munis d'une connexion. Nous dirons que (F_1, ∇_1) et (F_2, ∇_2) sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme φ entre les cartes $(\tilde{F}_1, G_1, \pi_{F_1})$ et $(\tilde{F}_2, G_2, \pi_{F_2})$ de respectivement F_1 et F_2 tel que $\varphi^* \tilde{\nabla}_2 = \tilde{\nabla}_1$.

Le fibré trivial $F_1 \rightarrow U_1$ muni d'une connexion ∇_1 s'injecte dans le fibré $F_2 \rightarrow U_2$ muni d'une connexion ∇_2 s'il existe une injection de fibrés orbifolds (α, ψ_α) c'est-à-dire un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}_1 & \xrightarrow{(\alpha, \psi_\alpha)} & \tilde{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{U}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{U}_2 \end{array}$$

est G -équivariante.

telle que $(\alpha^* \tilde{F}_2, \alpha^* \tilde{\nabla}_2)$ soit isomorphe à $(\tilde{F}_1, \tilde{\nabla}_1)$.

LEMME III.4.2. *Soit (F_2, ∇_2) un fibré orbifold trivial sur U_2 muni d'une connexion. Soit F_1 un fibré orbifold trivial sur U_1 qui s'injecte dans F_2 . Il existe une connexion ∇_1 unique, à isomorphisme près, sur F_1 telle que (F_1, ∇_1) s'injecte dans (F_2, ∇_2) .*

DÉMONSTRATION. Pour $i \in \{1, 2\}$, soient $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$ deux cartes de U_i . Soient $(\tilde{F}_i, G_i, \pi_{F_i})$ deux cartes de F_i . Soit $\tilde{\nabla}_2$ la connexion sur le fibré trivial $\tilde{F}_2 \rightarrow \tilde{U}_2$. D'après le lemme III.2.10, nous pouvons supposer que $\tilde{U}_1 \subset \tilde{U}_2$ et $\tilde{F}_1 \subset \tilde{F}_2$.

Existence : Nous posons $\tilde{\nabla}_1 := \tilde{\nabla}_2|_{\tilde{F}_1}$. Ceci définit bien une connexion G_1 -équivariante sur $\tilde{F}_1 \rightarrow \tilde{U}_1$.

Unicité : Soient $(\tilde{F}_3, G_3, \pi_{F_3})$ une carte de F_1 et $\tilde{\nabla}_3$ une connexion G_3 -équivariante sur le fibré trivial $\tilde{F}_3 \rightarrow \tilde{U}_1$ telles qu'on ait le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}_3 & \xrightarrow{(\alpha, \psi_\alpha)} & \tilde{F}_2 \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{U}_1 & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{U}_2 \end{array}$$

Supposons que $(\alpha^* \tilde{F}_2, \alpha^* \tilde{\nabla}_2)$ soit isomorphe à $(\tilde{F}_3, \tilde{\nabla}_3)$. D'après le lemme III.2.10, le fibré $\tilde{F}_3 \rightarrow \tilde{U}_1$ est isomorphe au fibré $\tilde{F}_1 := (\alpha, \psi_\alpha)(\tilde{F}_3) \rightarrow \alpha(\tilde{U}_1)$. Pour finir, il suffit de remarquer que $\alpha^* \tilde{F}_2 = \alpha^* \tilde{F}_1$ et $\alpha^*(\tilde{\nabla}_2|_{\tilde{F}_1}) = \alpha^* \tilde{\nabla}_2$. \square

DÉFINITION III.4.3. *Soit $\text{pr} : F \rightarrow X$ un fibré orbifold. Une connexion orbifold sur le fibré orbifold $\text{pr} : F \rightarrow X$ est la donnée pour chaque $x \in X$ d'une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x telle que*

- (1) $\text{pr}^{-1}(U_x) \rightarrow U_x$ est un fibré orbifold trivial muni d'une connexion ∇_x ;
- (2) pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_x \hookrightarrow \tilde{U}_y$, il existe une injection $(\text{pr}^{-1}(U_x), \nabla_x) \hookrightarrow (\text{pr}^{-1}(U_y), \nabla_y)$.

Rappelons que le fibré orbifold $T_{\mathbb{C}}^*X$ est le complexifié du fibré cotangent réel de X et que son faisceau des sections est $\mathcal{E}_{|X|}^1$ (cf. paragraphe III.3).

PROPOSITION III.4.4. *Soit X une orbifold paracompacte. Soit $F \rightarrow X$ un fibré orbifold.*

- (1) *Il existe une connexion sur F .*

- (2) *La différence entre deux connexions orbifoldes est une section du fibré $T_{\mathbb{C}}^*X \otimes_{C_{|X|}^{\infty}} \text{End}(F)$.*

DÉMONSTRATION. La première partie de la proposition est démontrée dans le lemme 4.3.2 de [CR02]. Soit $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$ un fibré trivial orbifold muni de deux connexions G -équivariantes notées $\tilde{\nabla}_1$ et $\tilde{\nabla}_2$. Il suffit de voir que $\tilde{\nabla}_1 - \tilde{\nabla}_2$ est une section orbifold du fibré $T_{\mathbb{C}}^*\tilde{U} \otimes_{C_{\tilde{U}}^{\infty}} \text{End}(\tilde{F})$. Soit s_1, \dots, s_r une base de sections du fibré $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$. Notons $\tilde{\eta}$ la matrice de $\tilde{\nabla}_1 - \tilde{\nabla}_2$ dans cette base. Montrons que $g \cdot \tilde{\eta} = \tilde{\eta}$, où l'action de G sur la matrice de 1-forme différentielle est donnée par

$$g \cdot \tilde{\eta} = \rho(\cdot, g) (\varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\eta}) \rho(\cdot, g)^{-1} \text{ où } (\varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\eta})_{ij} = \varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\eta}_{ij}.$$

L'égalité ci-dessus est une conséquence directe du lemme III.4.1. \square

LEMME III.4.5. *Soit (\tilde{U}, G, π) une carte de U . Soit $\text{pr} : F \rightarrow U$ un fibré orbifold trivial muni d'une connexion ∇ . Soit $\tilde{\text{pr}} : \tilde{F} := \tilde{U} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U}$ le relevé du fibré orbifold trivial $\text{pr} : F \rightarrow U$ muni d'une connexion $\tilde{\nabla}$ G -équivariante. La courbure, notée $K(\tilde{\nabla})$, de la connexion $\tilde{\nabla}$ est une section G -invariante du fibré $\wedge^2 T_{\mathbb{C}}^*\tilde{U} \otimes_{C_{\tilde{U}}^{\infty}} \text{End}(\tilde{F}) \rightarrow \tilde{U}$.*

DÉMONSTRATION. Soit s_1, \dots, s_r une base de sections du fibré trivial $\tilde{U} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U}$. Notons $\tilde{\Omega}$ la matrice de la courbure dans cette base. Montrons que $g \cdot \tilde{\Omega} = \tilde{\Omega}$, où l'action du groupe G sur la matrice de 2-formes est donnée par

$$(III.4.6) \quad g \cdot \tilde{\Omega} = \rho(\cdot, g) (\varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\Omega}) \rho(\cdot, g)^{-1} \text{ où } (\varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\Omega})_{ij} = \varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\Omega}_{ij}.$$

Avant de démontrer cette égalité, nous allons montrer que

$$K(\tilde{\nabla})(gs) = gK(\tilde{\nabla})(s),$$

pour tout $(g, s) \in G \times \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{U}}(\tilde{U})$, où $\tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{U}}$ est le faisceau des sections C^{∞} du fibré $\tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$. La courbure $K(\tilde{\nabla})$ est la composée de $\hat{\nabla}$ avec $\tilde{\nabla}$ où

$$\hat{\nabla} : \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{U}} \otimes_{C_{\tilde{U}}^{\infty}} \mathcal{E}_{\tilde{U}}^1 \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{U}} \otimes_{C_{\tilde{U}}^{\infty}} \mathcal{E}_{\tilde{U}}^2$$

est définie par

$$\hat{\nabla}(\theta \otimes s) := d\theta \otimes s - \theta \wedge \tilde{\nabla}s.$$

Un calcul direct montre que $\hat{\nabla}(g \cdot (\theta \otimes s)) = g\hat{\nabla}(\theta \otimes s)$ pour tout $g \in G$ et pour tout $(\theta, s) \in \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{U}}(\tilde{U}) \times \mathcal{E}_{\tilde{U}}^1(\tilde{U})$. Nous en déduisons que $K(\tilde{\nabla})(gs) = gK(\tilde{\nabla})(s)$ pour tout $(g, s) \in G \times \tilde{\mathcal{F}}_{\tilde{U}}(\tilde{U})$.

Pour démontrer l'égalité (III.4.6), nous allons calculer $K(\tilde{\nabla})(gs_i)$ de deux façons. D'un côté nous avons

$$\begin{aligned}
 K(\tilde{\nabla})(gs_i) &= gK(\tilde{\nabla})(s_i) \\
 &= g \left(\sum_{j=1}^r \tilde{\Omega}_{ij} \otimes s_j \right) \\
 \text{(III.4.7)} \quad &= \sum_{j=1}^r \varphi_{g^{-1}}^* \tilde{\Omega}_{ij} \otimes gs_j.
 \end{aligned}$$

D'un autre côté, le changement de base entre (s_1, \dots, s_r) et (gs_1, \dots, gs_r) montre que la matrice de $K(\tilde{\nabla})$ dans la base (gs_1, \dots, gs_r) est

$$\text{(III.4.8)} \quad \rho(\cdot, g) \tilde{\Omega} \rho(\cdot, g)^{-1}.$$

En comparant les égalités (III.4.7) et (III.4.8), nous en déduisons l'égalité (III.4.6) c'est-à-dire que $K(\tilde{\nabla})$ est une section G -équivariante du fibré $\bigwedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \tilde{U} \otimes_{\mathcal{C}_{\tilde{U}}} \text{End } \tilde{F} \rightarrow \tilde{U}$. \square

Soit $\text{pr} : F \rightarrow X$ un fibré orbifold de rang r muni d'une connexion ∇ . Pour tout $x \in |X|$, il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x telle que le fibré trivial $\tilde{F}_x := \tilde{U}_x \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U}_x$ soit muni d'une connexion, noté $\tilde{\nabla}_x$, G_x -équivariante où $\tilde{U}_x \times \mathbb{C}^r$ est une carte de $\text{pr}^{-1}(U_x)$. D'après le lemme III.4.5, la courbure $K(\tilde{\nabla}_x)$ est une section G_x -invariante du fibré $\bigwedge^2 T_{\mathbb{C}}^* \tilde{U}_x \otimes_{\mathcal{C}_{\tilde{U}_x}} \text{End}(\tilde{F}_x)$.

Pour $i \in \{1, \dots, n\}$, notons σ_i le i -ième polynôme symétrique élémentaire en r variables. Soit A une matrice carrée de taille r . Notons $\sigma_i(A)$ le polynôme σ_i évalué en les valeurs propres de A . Nous avons

$$\det(\text{id} + tA) = 1 + t\sigma_1(A) + \dots + t^n \sigma_n(A).$$

Pour tout $x \in |X|$, soit $s_{1,x}, \dots, s_{r,x}$ une base de sections du fibré $\tilde{F}_x \rightarrow \tilde{U}_x$. Notons $\tilde{\Omega}_x$ la matrice de la courbure $K(\tilde{\nabla}_x)$ dans cette base. Comme les 2-formes différentielles commutent entre elles, nous pouvons évaluer les polynômes σ_i en $\tilde{\Omega}_x$. La forme différentielle $\sigma_i(\tilde{\Omega}_x)$ est de degré $2i$. Dans une nouvelle base de sections, la matrice de la courbure est $P^{-1} \tilde{\Omega}_x P$ où P est la matrice de changement de base. Comme $\sigma_i(P^{-1}AP) = \sigma_i(A)$, la forme différentielle $\sigma_i(\tilde{\Omega}_x)$ ne dépend pas de la base choisie. Dorénavant, nous notons $\sigma_i(K(\tilde{\nabla}_x))$ cette forme différentielle. Pour tout

$g \in G_x$, nous avons

$$\begin{aligned} \varphi_g^* \sigma_i(\tilde{\Omega}_x) &:= \sigma_i(\varphi_g^* \tilde{\Omega}_x) \\ &= \sigma_i(\tilde{\Omega}_x) \quad \text{d'après l'égalité (III.4.6).} \end{aligned}$$

Ainsi, $\sigma_i(K(\tilde{\nabla}_x))$ définit une forme différentielle de degré $2i$ G_x -invariante sur \tilde{U}_x qui, par passage au quotient, définit une forme différentielle, notée $\sigma_i(K(\nabla_x))$, dans $\mathcal{E}_{|U_x|}^{2i}(U_x)$.

LEMME III.4.9. *Soit $F \rightarrow X$ un fibré orbifold muni d'une connexion ∇ . Nous gardons les notations ci-dessus. Pour tout $i \in \{1, \dots, r\}$, les formes différentielles $\sigma_i(K(\nabla_x))$ dans $\mathcal{E}_{|U_x|}^{2i}(U_x)$ se recollent en une forme différentielle, notée $\sigma_i(K(\nabla))$, dans $\mathcal{E}_{|X|}^{2i}(|X|)$.*

DÉMONSTRATION. Soit $\alpha : \tilde{U}_x \hookrightarrow \tilde{U}_y$. Il suffit de montrer que

$$\sigma_i(K(\nabla_y))|_{U_x} = \sigma_i(K(\nabla_x)).$$

Par définition d'un fibré orbifold muni d'une connexion, il existe deux applications ψ_α et $\varphi : \tilde{F}_x \rightarrow \alpha^* \tilde{F}_y$ telles que

– le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{F}_x & \xrightarrow{(\alpha, \psi_\alpha)} & \tilde{F}_y \\ \downarrow & & \downarrow \\ \tilde{U}_x & \xrightarrow{\alpha} & \tilde{U}_y \end{array}$$

- φ soit un isomorphisme de cartes ;
- $\varphi^* \alpha^* \tilde{\nabla}_y = \tilde{\nabla}_x$.

Nous en déduisons l'égalité $\varphi^* \alpha^* K(\tilde{\nabla}_y) = K(\tilde{\nabla}_x)$. Puis, nous obtenons l'égalité $\sigma_i(K(\nabla_y))|_{U_x} = \sigma_i(K(\nabla_x))$. \square

PROPOSITION III.4.10. *Soit $F \rightarrow X$ un fibré orbifold muni d'une connexion ∇ . Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la forme différentielle $\sigma_i(K(\nabla))$ est fermée.*

DÉMONSTRATION. Soit $F \rightarrow X$ un fibré orbifold muni d'une connexion ∇ . Nous en déduisons une connexion, notée ∇_{reg} , sur le fibré vectoriel $F_{\text{reg}} \rightarrow X_{\text{reg}}$. Nous en obtenons l'égalité

$$\sigma_i(K(\nabla_{\text{reg}})) = \sigma_i(K(\nabla))|_{X_{\text{reg}}}.$$

Dans le cas des variétés, on sait que $\sigma_i(K(\nabla_{\text{reg}}))$ est fermée. Ainsi $d\sigma_i(K(\nabla))$ est nulle sur un ouvert dense. Nous en déduisons que $\sigma_i(K(\nabla))$ est fermée. \square

Cette proposition montre que les formes différentielles $\sigma_0(K(\nabla)), \dots, \sigma_r(K(\nabla))$ sont fermées de degré respectivement $0, \dots, 2r$. Nous noterons $[\sigma_i(K(\nabla))]$ la classe de cette forme différentielle dans $H^{2i}(|X|, \mathbb{C})$ (cf. le corollaire III.3.2).

COROLLAIRE III.4.11. *Soit $F \rightarrow X$ un fibré orbifold muni d'une connexion. La classe de la forme différentielle $\sigma_i(K(\nabla))$ ne dépend pas du choix de la connexion sur F .*

DÉMONSTRATION. Soit $\text{pr} : F \rightarrow X$ un fibré vectoriel orbifold muni de deux connexions ∇_0 et ∇_1 . Pour tout $x \in X$, nous avons deux connexions $\tilde{\nabla}_{0,x}$ et $\tilde{\nabla}_{1,x}$ sur $\tilde{F}_x \rightarrow \tilde{U}_x$ où \tilde{U}_x est une carte d'un ouvert U_x contenant x et \tilde{F}_x une carte de $\text{pr}^{-1}(U_x)$. Posons $\tilde{\eta}_x := \tilde{\nabla}_{1,x} - \tilde{\nabla}_{0,x}$. D'après la proposition III.4.4, $\tilde{\eta}_x$ est une section G_x -invariante de $T_{\mathbb{C}}^* \tilde{U}_x \otimes_{\mathcal{C}_{\tilde{U}_x}} \text{End}(\tilde{F}_x)$. Pour $t \in [0, 1]$, nous définissons une connexion sur le fibré $\tilde{F}_x \rightarrow \tilde{U}_x$ par la formule

$$\tilde{\nabla}_{t,x} := \tilde{\nabla}_{0,x} + t\tilde{\eta}_x.$$

D'après les calculs dans [GH94] p.405, nous avons

$$(III.4.12) \quad d \left(\int_0^1 \tilde{\sigma}_i \left(\tilde{\eta}_x, K(\tilde{\nabla}_{t,x}), \dots, K(\tilde{\nabla}_{t,x}) \right) dt \right) = \sigma_i(K(\tilde{\nabla}_{1,x})) - \sigma_i(K(\tilde{\nabla}_{0,x}))$$

où $\tilde{\sigma}_i$ est l'application i -linéaire de $M_r(\mathbb{C}) \times \dots \times M_r(\mathbb{C})$ dans \mathbb{C} telle que

$$\tilde{\sigma}_i(A, \dots, A) = \sigma_i(A) \text{ pour toute matrice } A \in M_r(\mathbb{C}).$$

L'égalité (III.4.12) montre que $\sigma_i(K(\tilde{\nabla}_{1,x})) - \sigma_i(K(\tilde{\nabla}_{0,x}))$ est une forme exacte.

Montrons que pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_y \hookrightarrow \tilde{U}_x$, nous avons

$$\alpha^* \tilde{\sigma}_i \left(\tilde{\eta}_x, K(\tilde{\nabla}_{t,x}), \dots, K(\tilde{\nabla}_{t,x}) \right) = \tilde{\sigma}_i \left(\tilde{\eta}_y, K(\tilde{\nabla}_{t,y}), \dots, K(\tilde{\nabla}_{t,y}) \right).$$

D'après le lemme III.4.2, nous pouvons supposer que $\alpha^*(\tilde{\nabla}_{i,x}) = \tilde{\nabla}_{i,y}$ pour $i \in \{1, 2\}$. Ceci implique que $\alpha^*\tilde{\eta}_x = \tilde{\eta}_y$ et que $\alpha^*K(\tilde{\nabla}_{t,x}) = K(\tilde{\nabla}_{t,y})$. Finalement, nous avons

$$\begin{aligned} \alpha^* \tilde{\sigma}_i \left(\tilde{\eta}_x, K(\tilde{\nabla}_{t,x}), \dots, K(\tilde{\nabla}_{t,x}) \right) &= \tilde{\sigma}_i \left(\alpha^* \tilde{\eta}_x, \alpha^* K(\tilde{\nabla}_{t,x}), \dots, \alpha^* K(\tilde{\nabla}_{t,x}) \right) \\ &= \tilde{\sigma}_i \left(\tilde{\eta}_y, K(\tilde{\nabla}_{t,y}), \dots, K(\tilde{\nabla}_{t,y}) \right). \end{aligned}$$

Les égalités ci-dessus nous montrent que les formes différentielles

$$\tilde{\sigma}_i \left(\tilde{\eta}_x, K(\tilde{\nabla}_{t,x}), \dots, K(\tilde{\nabla}_{t,x}) \right)$$

de degré $2i - 1$ sur \tilde{U}_x sont G_x -invariantes. Elles définissent par passage au quotient une forme différentielle de degré $2i - 1$, notée $\tilde{\sigma}_i(\eta_x, K(\nabla_{t,x}), \dots, K(\nabla_{t,x}))$, sur $|X|$. Nous en déduisons que $\sigma_i(K(\nabla_1)) - \sigma_i(K(\nabla_0))$ est une forme exacte. \square

Soit $F \rightarrow X$ un fibré orbifold. Nous définissons la i -ième classe de Chern du fibré $F \rightarrow X$ par

$$c_i(F) := [\sigma_i(K(\nabla))] / (2\sqrt{-1}\pi)^i$$

où ∇ est une connexion sur F . D'après le corollaire III.4.11, les classes de Chern de F ne dépendent pas de la connexion choisie et la i -ième classe de Chern définit une classe de cohomologie dans $H^{2i}(|X|, \mathbb{C})$. La classe de Chern totale est

$$c(F) = c_0(F) + tc_1(F) + \dots + t^n c_n(F).$$

PROPOSITION III.4.13. *Soit*

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\alpha} F \xrightarrow{\beta} G \longrightarrow 0$$

une suite exacte de fibrés orbifolds sur l'orbifold X . Nous avons l'égalité

$$c(F) = c(E)c(G).$$

DÉMONSTRATION. Cette propriété est locale. Soit p (resp. r) le rang du fibré E (resp. F). Pour tout $x \in |X|$, il existe une carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x qui trivialise les trois fibrés. Soient $\tilde{E}|_{U_x}$, $\tilde{F}|_{U_x}$ et $\tilde{G}|_{U_x}$ trois cartes de respectivement $\text{pr}_E^{-1}(U_x)$, $\text{pr}_F^{-1}(U_x)$ et $\text{pr}_G^{-1}(U_x)$. Nous avons une suite exacte de fibrés triviaux sur \tilde{U}_x

$$0 \longrightarrow \tilde{E}|_{U_x} \xrightarrow{\tilde{\alpha}|_{U_x}} \tilde{F}|_{U_x} \xrightarrow{\tilde{\beta}|_{U_x}} \tilde{G}|_{U_x} \longrightarrow 0.$$

Soit (s_1^E, \dots, s_p^E) une base des sections du fibré $\tilde{E}|_{U_x} \rightarrow \tilde{U}_x$. Notons $s_i^F := \tilde{\alpha}|_{U_x}(s_i^E)$. On complète (s_1^F, \dots, s_p^F) en une base (s_1^F, \dots, s_r^F) des sections du fibré trivial $\tilde{F}|_{U_x} \rightarrow \tilde{U}_x$. Pour $i \in \{p+1, \dots, r\}$, les sections $s_i^G := \tilde{\beta}|_{U_x}(s_i^F)$ forment une base des sections du fibré trivial $\tilde{G}|_{U_x} \rightarrow \tilde{U}_x$.

Nous choisissons une connexion $\tilde{\nabla}_{F,x}$ G_x -équivariante de matrice $\tilde{\omega}_x^F$ sur $\tilde{F}|_{U_x}$ telle que sa matrice soit triangulaire supérieure sur \tilde{U}_x dans la base (s_1^F, \dots, s_r^F) .

Nous en déduisons deux connexions $\tilde{\nabla}_{E,x}$ de matrice $\tilde{\omega}_x^E$ et $\tilde{\nabla}_{G,x}$ de matrice $\tilde{\omega}_x^G$ sur $\tilde{E}|_{U_x}$ et sur $\tilde{G}|_{U_x}$ qui sont définis par les matrices

$$\begin{aligned} (\tilde{\omega}_x^E)_{ij} &:= (\tilde{\omega}_x^F)_{ij} && \text{pour } i, j \in \{1, \dots, p\}; \\ (\tilde{\omega}_x^G)_{ij} &:= (\tilde{\omega}_x^F)_{i+p, j+p} && \text{pour } i, j \in \{1, \dots, r-p\}. \end{aligned}$$

La courbure $K(\tilde{\nabla}_{F,x})$ sur $\tilde{F}|_{U_x}$ est triangulaire supérieure. Nous en déduisons que

$$\det(\text{id} + tK(\tilde{\nabla}_{F,x})) = \det(\text{id} + tK(\tilde{\nabla}_{E,x})) \det(\text{id} + tK(\tilde{\nabla}_{G,x})).$$

□

III.5. Bonne application orbifolde et image inverse de fibrés vectoriels orbifolds

Dans la théorie générale des orbifolds, l'image inverse d'un fibré vectoriel orbifold n'existe pas toujours. C'est pour cette raison que Chen et Ruan ont défini la notion de bonne application orbifolde (cf. paragraphe 4.4 de [CR02]). Soit $|X|$ un espace topologique séparé. D'après Satake [Sat57], un recouvrement $\mathcal{U} = (U_i)_{i \in I}$ est dit *compatible* si

(III.5.1) chaque ouvert U_i de ce recouvrement a une carte $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$;

(III.5.2) pour tout $x \in U_i \cap U_j$, il existe un ouvert $U_k \subset U_i \cap U_j$ tel que $x \in U_k$;

(III.5.3) si $U_i \subset U_j$ alors il existe une injection de $(\tilde{U}_i, G_i, \pi_i)$ dans $(\tilde{U}_j, G_j, \pi_j)$.

Un recouvrement compatible sur $|X|$ est un atlas orbifold (cf. le début du paragraphe III.1.b).

Nous avons la proposition suivante.

PROPOSITION III.5.4 (cf. paragraphe 4.1 p.67 de [CR02]). *Soit $|X|$ un espace topologique paracompact. Étant donné un atlas orbifold sur $|X|$, il existe un recouvrement compatible plus fin sur $|X|$.*

REMARQUE III.5.5. Si X est une variété complexe, un atlas orbifold est aussi un atlas de X en tant que variété. Or un atlas de variété vérifie bien les conditions (III.5.1), (III.5.2) et (III.5.3). C'est-à-dire que pour une variété, la proposition ci-dessus est vraie.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III.5.4. Soit $\mathcal{A}(|X|)$ un atlas orbifold sur $|X|$. Comme $|X|$ est paracompact, on peut supposer que le recouvrement associé à $\mathcal{A}(|X|)$ est localement fini. Notons-le $(U_i)_{i \in I}$. Soit $x \in |X|$. Le point x appartient

à un nombre fini d'ouverts de $(U_i)_{i \in I}$. Notons-les $U_{i_1}, \dots, U_{i_{n(x)}}$. Ainsi, il existe une carte $(\tilde{V}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert V_x contenant x tel que

- (1) V_x est inclus dans $U_{i_1} \cap \dots \cap U_{i_{n(x)}}$;
- (2) la carte \tilde{V}_x s'injecte dans \tilde{U}_{i_α} pour tout $\alpha \in \{1, \dots, n(x)\}$.

Notons \mathcal{U} le recouvrement formé par de tels ouverts V_x et les ouverts inclus dans V_x et contenant x . Montrons que \mathcal{V} est un recouvrement compatible. Les conditions (III.5.1) et (III.5.2) sont clairement vérifiées.

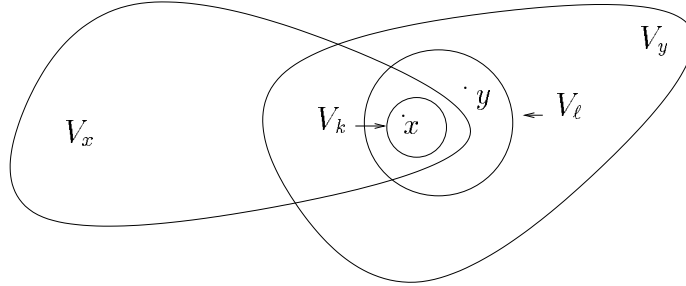


FIG. 1 –

Il nous reste à montrer la condition (III.5.3). Soient V_k, V_ℓ deux ouverts de \mathcal{V} tels que $V_k \subset V_\ell$. Montrons qu'il existe une injection entre une carte de V_k et une carte de V_ℓ . Il existe $x, y \in |X|$ tels que $V_k \subset V_x$ et $V_\ell \subset V_y$ (cf. la figure 1). Par définition, s'il existe $i \in I$ tel que nous ayons $V_k \subset U_i$ (resp. $V_\ell \subset U_i$) alors $i \in \{i_1, \dots, i_{n(x)}\}$ (resp. $i \in \{j_1, \dots, j_{n(y)}\}$). L'inclusion de V_k dans V_ℓ implique que l'ensemble $\{j_1, \dots, j_{n(y)}\}$ est un sous-ensemble de $\{i_1, \dots, i_{n(x)}\}$. Soit $\tilde{V}_{k,x}$ (resp. $\tilde{V}_{\ell,y}$) une carte de V_k (resp. V_ℓ) induite par \tilde{V}_x (resp. \tilde{V}_y). Nous en déduisons qu'il existe $i \in I$ tel que \tilde{V}_x et \tilde{V}_y s'injectent dans \tilde{U}_i . Finalement, le corollaire III.1.4 appliqué avec $U := V_k$, $V := V_\ell$ et $W := U_i$ montre qu'il existe une injection de $\tilde{V}_{k,x}$ dans $\tilde{V}_{\ell,y}$. \square

DÉFINITION III.5.6 (cf. paragraphe 4.4 de [CR02]). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application orbifolde. On dit que f est une bonne application s'il existe deux recouvrements compatibles \mathcal{U}_X et \mathcal{V}_Y de respectivement $|X|$ et $|Y|$ tels que*

- (1) *il existe une correspondance bijective, notée \mathfrak{F} , entre les ouverts de \mathcal{U}_X et ceux de \mathcal{V}_Y telle que pour tout U ouvert de \mathcal{U}_X , nous ayons $f(U) \subset \mathfrak{F}(U)$ et que si $U_1 \subset U_2$ alors $\mathfrak{F}(U_1) \subset \mathfrak{F}(U_2)$;*

- (2) l'ensemble des relèvements $\tilde{f}_{UV} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ vérifie la condition suivante : à chaque injection $\alpha : (\tilde{U}_1, G_1, \pi_1) \hookrightarrow (\tilde{U}_2, G_2, \pi_2)$, correspond une injection, notée $\mathfrak{F}(\alpha) : (\tilde{V}_1, H_1, \rho_1) \hookrightarrow (\tilde{V}_2, H_2, \rho_2)$ où $\rho_i(\tilde{V}_i) := \mathfrak{F}(U_i)$ telle que
- le diagramme suivant soit commutatif

$$\begin{array}{ccc} (\tilde{U}_1, G_1, \pi_1) & \xhookrightarrow{\alpha} & (\tilde{U}_2, G_2, \pi_2) \\ \tilde{f}_{U_1 V_1} \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_{U_2 V_2} \\ (\tilde{V}_1, H_1, \rho_1) & \xhookrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha)} & (\tilde{V}_2, H_2, \rho_2) \end{array}$$

- pour toutes composées d'injections $\alpha \circ \beta$, on ait $\mathfrak{F}(\alpha \circ \beta) = \mathfrak{F}(\alpha) \circ \mathfrak{F}(\beta)$.

Soit $f : X \rightarrow Y$ une application orbifold. Nous appelons *système compatible* l'ensemble des données supplémentaires $\{\tilde{f}_{UV}, \mathfrak{F}\}$ tel que l'application $f : X \rightarrow Y$ soit une bonne application. Remarquons que la notation \mathfrak{F} est utilisée pour deux correspondances : la première au niveau des ouverts des recouvrements compatibles et la deuxième au niveau des injections.

Chen et Ruan ont démontré les deux propositions suivantes dans l'article [CR02].

PROPOSITION III.5.7 (cf. lemme 4.4.3 dans [CR02]). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une bonne application entre deux orbifolds. Supposons qu'on ait un fibré vectoriel orbifold E sur Y alors on peut définir un fibré vectoriel, noté f^*E , sur X par les fonctions de transition suivantes : pour toute injection $\alpha : \tilde{U}_1 \hookrightarrow \tilde{U}_2$ entre deux cartes du recouvrement compatible de $|X|$, on pose*

$$\psi_\alpha^{f^*E}(\tilde{x}) := \psi_{\mathfrak{F}(\alpha)}^E(\tilde{f}(\tilde{x})).$$

PROPOSITION III.5.8 (cf. lemme 4.4.3 de [CR02]). *Les classes de Chern orbifoldes sont fonctorielles c'est-à-dire que pour tout fibré vectoriel orbifold complexe $E \rightarrow Y$ et pour toute bonne application orbifold $f : X \rightarrow Y$, on a $f^*c(\mathcal{E}_{|Y|}^\infty) = c(f^*\mathcal{E}_{|Y|}^\infty)$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION III.5.8. Soient \mathcal{U}_X et \mathcal{V}_Y deux recouvrements compatibles de respectivement $|X|$ et $|Y|$. Notons \mathfrak{F} la bijection

$$\{\text{ouverts de } \mathcal{U}_X\} \rightarrow \{\text{ouverts de } \mathcal{V}_Y\}.$$

Soit ∇ une connexion sur le fibré $\text{pr} : E \rightarrow Y$. Soit V un ouvert du recouvrement \mathcal{V}_Y . Comme \mathfrak{F} est bijective, il existe un unique U tel que $\mathfrak{F}(U) = V$. Soit $\tilde{f}_{U,V} : \tilde{U} \rightarrow \tilde{V}$ un relèvement de $f|_U : U \rightarrow V$. Soit $\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}$ la connexion sur le fibré $\tilde{E}_V := \tilde{V} \times \mathbb{C} \rightarrow \tilde{V}$ où \tilde{E}_V est une carte de $\text{pr}^{-1}(V)$. Notons $\tilde{\omega}_{\tilde{V}}$ la matrice de la connexion $\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}$ dans une base

de sections du fibré $\tilde{E}_V \rightarrow \tilde{V}$. Considérons la matrice $\tilde{f}_{\tilde{U},V}^* \tilde{\omega}_{\tilde{V}}$ de 1-formes sur \tilde{U} . Le diagramme commutatif appliqué avec $\alpha := \varphi_g$ de la définition III.5.6 montre que la matrice de 1-formes $\tilde{f}_{\tilde{U},V}^* \tilde{\omega}_{\tilde{V}}$ est $G_{\tilde{U}}$ -invariante. Cette matrice définit une connexion, notée $\tilde{f}_{\tilde{U},V}^* \tilde{\nabla}_{\tilde{V}}$, sur le fibré $\tilde{U} \times \mathbb{C}^r \rightarrow \tilde{U}$. Le diagramme commutatif de la définition III.5.6 montre que nous avons bien défini une connexion, notée $f^* \nabla$, sur le fibré $f^* E \rightarrow X$. Nous en déduisons l'égalité suivante, qui implique la proposition,

$$\tilde{f}_{\tilde{U},V}^* K(\tilde{\nabla}_{\tilde{V}}) = K(f_{\tilde{U},V}^* \tilde{\nabla}_{\tilde{V}}).$$

□

DÉFINITION III.5.9 (cf. définition 4.4 de [CR02]). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application orbifold. Deux systèmes compatibles ξ et ξ' sont isomorphes si pour tout fibré vectoriel orbifold $E \rightarrow Y$, les deux fibrés vectoriel orbifold $f_\xi^* E$ et $f_{\xi'}^* E$ sont isomorphes.*

Nous rappelons que la partie régulière d'une orbifold X d'après Chen et Ruan est $\widehat{X}_{\text{reg}} = \{x \in |X'| \mid G_x = \{\text{id}\}\}$.

PROPOSITION III.5.10 (cf. lemme 4.4.11 dans [CR02]). *Soit $f : X \rightarrow Y$ une application entre deux orbifolds. Si $f^{-1}(\widehat{X}_{\text{reg}})$ est un ouvert dense et connexe de X alors il existe un unique système compatible, à isomorphisme près.*

CHAPITRE IV

Cohomologie orbifolde des espaces projectifs à poids

Dans ce chapitre, nous calculons l'anneau de cohomologie orbifolde des espaces projectifs à poids muni de la dualité de Poincaré orbifolde.

Dans le premier paragraphe, nous définissons la structure orbifolde sur les espaces projectifs à poids. Dans le deuxième, nous définissons les fibrés $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\cdot)$ sur $\mathbb{P}(w)$.

Les trois derniers suivants se présentent de la façon suivante. Dans chaque début de paragraphe, nous rappelons rapidement les définitions et les propriétés générales puis nous les appliquerons à notre exemple préféré $\mathbb{P}(w)$.

Le paragraphe IV.3 traite de la cohomologie orbifolde en temps qu'espace vectoriel et la proposition IV.3.14 donne une base, notée $\boldsymbol{\eta}$, de la cohomologie orbifolde des espaces projectifs à poids.

Le troisième paragraphe IV.4 est consacré à la dualité de Poincaré orbifolde et la proposition IV.4.4 calcule la dualité de Poincaré de $\mathbb{P}(w)$ dans la base $\boldsymbol{\eta}$.

Le dernier paragraphe concerne le cup produit orbifold. Le théorème IV.5.13 explicite le fibré obstruction et le corollaire IV.5.26 donne une formule explicite pour le cup produit orbifold de $\mathbb{P}(w)$ dans la base $\boldsymbol{\eta}$.

IV.1. La structure orbifolde sur $\mathbb{P}(w)$

Dans ce paragraphe, nous définissons l'atlas orbifold des espaces projectifs à poids. Nous définissons l'action du groupe multiplicatif \mathbb{C}^* sur $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ par

$$(IV.1.1) \quad \lambda \cdot (y_0, \dots, y_n) := (\lambda^{w_0} y_0, \dots, \lambda^{w_n} y_n).$$

L'espace projectif à poids est le quotient de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ par cette action. Notons $|\mathbb{P}(w)|$ cet espace topologique quotient et π_w l'application de passage au quotient. Notons $[y_0 : \dots : y_n]_w$ la classe de $\pi_w(y_0, \dots, y_n)$ dans $|\mathbb{P}(w)|$. Pour tout $y := [y_0 : \dots : y_n]_w$ dans $|\mathbb{P}(w)|$, posons

$$(IV.1.2) \quad I_y := \{k \mid y_k \neq 0\}.$$

On a le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
(z_0, \dots, z_n) & \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{\pi} & \mathbb{P}^n & [z_0 : \dots : z_n] \\
\downarrow & \tilde{f}_w \downarrow & & \downarrow f_w & \downarrow \\
(z_0^{w_0}, \dots, z_n^{w_n}) & \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} & \xrightarrow{\pi_w} & |\mathbb{P}(w)| & [z_0^{w_0} : \dots : z_n^{w_n}]_w
\end{array}$$

où π est l'application standard de passage au quotient pour les espaces projectifs complexes. Notons μ_k le groupe des racines k -ièmes de l'unité. L'espace projectif à poids peut être muni de deux structures orbifoldes différentes.

(i) Le groupe $\mu_{w_0} \times \dots \times \mu_{w_n}$ agit sur \mathbb{P}^n de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\mu_{w_0} \times \dots \times \mu_{w_n} \times \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^n \\
((\lambda_0, \dots, \lambda_n), [z_0 : \dots : z_n]) &\longmapsto [\lambda_0 z_0 : \dots : \lambda_n z_n]
\end{aligned}$$

L'application f_w induit un homéomorphisme entre $\mathbb{P}^n / \mu_{w_0} \times \dots \times \mu_{w_n}$ et $|\mathbb{P}(w)|$. Ainsi, l'espace topologique $|\mathbb{P}(w)|$ est muni d'une structure orbifolde, dite globale.

(ii) L'espace topologique $|\mathbb{P}(w)|$ peut aussi être muni d'une structure orbifolde via l'application π_w . L'atlas orbifold qui définit cette structure est décrit ci-dessous.

Dans la suite de la thèse, nous nous intéressons uniquement à la structure orbifolde provenant de (ii). Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, notons $U_i := \{[y_0 : \dots : y_n]_w \mid y_i \neq 0\} \subset |\mathbb{P}(w)|$. Soit \tilde{U}_i l'ensemble des points de $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ tels que $y_i = 1$. Le sous-groupe de \mathbb{C}^* qui stabilise \tilde{U}_i est μ_{w_i} . L'application $\pi_i := \pi_w |_{\tilde{U}_i} : \tilde{U}_i \longrightarrow U_i$ induit un homéomorphisme entre \tilde{U}_i / μ_{w_i} et U_i .

Soit U un ouvert connexe de $|\mathbb{P}(w)|$. Une carte $(\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}})$ de U est dite admissible s'il existe $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que

(IV.1.3) \tilde{U} soit une composante connexe de $\pi_i^{-1}(U)$;

(IV.1.4) $G_{\tilde{U}}$ soit le sous-groupe de μ_{w_i} qui stabilise \tilde{U} ;

(IV.1.5) $\pi_{\tilde{U}} = \pi_i |_{\tilde{U}}$.

En particulier, les cartes $(\tilde{U}_i, \mu_{w_i}, \pi_i)$ de U_i sont des cartes admissibles. Notons $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$ l'ensemble des cartes admissibles. L'ensemble des cartes de $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$ induit un recouvrement, noté \mathcal{U}_w , de $|\mathbb{P}(w)|$.

LEMME IV.1.6. Soit $\alpha : (\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}}) \hookrightarrow (\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}})$ une injection entre deux cartes de $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$. Il existe une unique fonction holomorphe $\lambda_\alpha : \tilde{U} \rightarrow \mathbb{C}$ telle que $\alpha(y_0, \dots, y_n) = (y_0 \lambda_\alpha^{w_0/\text{pgcd}(w)}(y), \dots, y_n \lambda_\alpha^{w_n/\text{pgcd}(w)}(y))$. Pour deux injections successives α, β , on a

$$\lambda_{\beta \circ \alpha}(y) = \lambda_\beta(\alpha(y)) \lambda_\alpha(y).$$

REMARQUE IV.1.7. Soit $\tilde{p} = (p_0, \dots, p_n)$ dans $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$. Notons $D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)$ le produit des disques $D^1(p_i, \varepsilon)$ de centre p_i et de rayon ε . Pour tout $k \in I_{\pi(\tilde{p})}$ et pour toute détermination de l'argument $\arg_k(\cdot)$ dans $D^1(p_k, \varepsilon)$, considérons l'application

$$\begin{aligned} \psi_{\tilde{p}, \arg_k} : D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon) &\longrightarrow \tilde{U}_k \\ (y_0, \dots, y_n) &\longmapsto (y_0/y_k^{w_0/w_k}, \dots, 1_k, \dots, y_n/y_k^{w_n/w_k}) \end{aligned}$$

où $y_k^{1/w_k} := |y_k|^{1/w_k} \exp(i \arg_k(y_k)/w_k)$.

Soit \arg'_k une autre détermination de l'argument sur $D^1(p_k, \varepsilon)$. Il existe un unique $\alpha \in \mathbb{Z}$ tel que $\arg_k - \arg'_k = 2\pi\alpha$. Nous en déduisons que

$$(IV.1.8) \quad \psi_{\tilde{p}, \arg_k} = e^{2i\pi\alpha/w_k} \cdot \psi_{\tilde{p}, \arg'_k}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME IV.1.6. – Il existe une fonction

$$\tilde{\lambda}_\alpha : \tilde{U} \cap \bigcap_{k=0}^n \{y \in \mathbb{C}^{n+1} \mid y_k \neq 0\} \longrightarrow \mathbb{C}^*$$

telle que

$$\tilde{\lambda}_\alpha(y) \cdot y = \alpha(y) = (\alpha_0(y), \dots, \alpha_n(y)).$$

Ainsi pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, nous avons $\tilde{\lambda}_\alpha(y)^{w_k} y_k = \alpha_k(y)$. Nous en déduisons que la fonction $\tilde{\lambda}_\alpha^{w_k} = \alpha_k/y_k$ est holomorphe sur $\tilde{U} \cap \{y_k \neq 0\}$.

Montrons que $\tilde{\lambda}_\alpha^{w_k}$ est holomorphe sur \tilde{U} . Il existe un unique j tel que $\tilde{V} \subset \tilde{U}_j$. Pour tout $\tilde{p} \in \tilde{U} \cap \{y_k = 0\}$, la remarque IV.1.7 implique qu'il existe \arg_j tel que nous ayons une application holomorphe

$$\psi_{\tilde{p}, \arg_j} |_{\tilde{U} \cap D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)} : \tilde{U} \cap D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon) \rightarrow \tilde{U}_j$$

Nous vérifions sans peine que cette application est une injection. Nous obtenons alors deux injections $\alpha |_{\tilde{U} \cap D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)}$ et $\psi_{\tilde{p}, \arg_j} |_{\tilde{U} \cap D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)}$ de $\tilde{U} \cap D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)$ dans \tilde{U}_j . D'après le lemme III.1.1 et l'égalité (IV.1.8), nous pouvons choisir une détermination de l'argument \arg'_j tel que $\psi_{\tilde{p}, \arg'_j} = \alpha$ sur $\tilde{U} \cap D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)$. Nous obtenons que $\tilde{\lambda}_\alpha^{w_k}$ est holomorphe sur \tilde{U} . D'après Bézout, $\lambda_\alpha := \tilde{\lambda}_\alpha^{\text{pgcd}(w)}$ est aussi holomorphe sur \tilde{U} . L'unicité découle de Bézout.

– Nous avons l'égalité

$$\beta \circ \alpha(y) = \tilde{\lambda}_{\beta \circ \alpha}(y) \cdot y = \left(\tilde{\lambda}_\beta(\alpha(y)) \tilde{\lambda}_\alpha(y) \right) \cdot y.$$

Ainsi, il existe $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{\text{pgcd}(w)}$ tel que $\tilde{\lambda}_{\beta \circ \alpha}(y)\zeta = \tilde{\lambda}_\beta(\alpha(y))\tilde{\lambda}_\alpha(y)$. Nous élevons cette équation à la puissance $\text{pgcd}(w)$ et nous en déduisons l'égalité voulue. \square

NOTATION IV.1.9. Soit $\alpha : (\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}}) \hookrightarrow (\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}})$ une injection entre deux cartes de $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$. Supposons que $\tilde{U} \subset \tilde{U}_i$ et que $\tilde{V} \subset \tilde{U}_j$. Nous avons alors deux possibilités

- (1) soit $i = j$ et α est simplement l'action d'un élément de $\boldsymbol{\mu}_{w_i}$, c'est-à-dire que $\alpha(y) = \zeta \cdot y$ avec $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{w_i}$. Dans ce cas, nous avons $\lambda_\alpha(y) \cdot y = \zeta^{\text{pgcd}(w)} \cdot y$.
- (2) Soit $i \neq j$ et alors nous avons $\lambda_\alpha^{w_j/\text{pgcd}(w)}(y) = 1/y_j$. Ainsi, nous notons $1/y_j^{\text{pgcd}(w)/w_j} := \lambda_\alpha(y)$.

PROPOSITION IV.1.10. *L'ensemble $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$ est un atlas orbifold.*

Nous noterons $\mathbb{P}(w)$ l'orbifold $(|\mathbb{P}(w)|, \mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|))$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.1.10. Il faut vérifier les conditions (III.1.5) et (III.1.6) p.18. La première condition est trivialement vraie, il reste à montrer la seconde condition.

Considérons des cartes $(\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}})$ de U et $(\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}})$ de V dans $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$. Soit p dans $U \cap V$. Il existe i et j tels que $\tilde{U} \subset \tilde{U}_i$ et $\tilde{V} \subset \tilde{U}_j$.

Puisque $\pi_i^{-1}(p) \cap \tilde{U}_i$ est fini, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que les polydisques $D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon)$ avec $\tilde{p} \in \pi_i^{-1}(p)$ soient disjoints (cf. figure 1).

Fixons $\tilde{p}^U = (p_0^U, \dots, 1_i, \dots, p_n^U)$ un relevé de p dans \tilde{U} . Quitte à diminuer ε , on peut supposer que $D^{n+1}(\tilde{p}^U, \varepsilon) \cap \tilde{U}_i \subset \tilde{U}$ et que $\pi_i(D^{n+1}(\tilde{p}^U, \varepsilon) \cap \tilde{U}_i) \subset U \cap V$. Posons $\tilde{W} := D^{n+1}(\tilde{p}^U, \varepsilon) \cap \tilde{U}_i$ et $W := \pi_i(\tilde{W})$. Nous avons $\pi_i^{-1}(W) = \bigsqcup_{\tilde{p} \in \pi_i^{-1}(p)} D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon) \cap \tilde{U}_i$ car $\boldsymbol{\mu}_{w_i}$ agit transitivement sur $\{D^{n+1}(\tilde{p}, \varepsilon) \cap \tilde{U}_i \mid \tilde{p} \in \pi_i^{-1}(p)\}$. Ainsi, \tilde{W} est une composante connexe de $\pi_i^{-1}(W)$.

Posons $G_{\tilde{W}} := \cap_{k \in I_p} \boldsymbol{\mu}_{w_k}$ où I_p est défini par (IV.1.2). Le groupe $G_{\tilde{W}}$ fixe \tilde{p}^U et il stabilise \tilde{W} . De plus, comme $\pi_i^{-1}(p) \cap \tilde{W} = \{\tilde{p}^U\}$, un élément qui stabilise \tilde{W} doit fixer \tilde{p}^U . Finalement, $G_{\tilde{W}}$ est le sous-groupe de $\boldsymbol{\mu}_{w_i}$ qui stabilise \tilde{W} .

Posons $\pi_{\tilde{W}} := \pi_i|_{\tilde{W}}$. Ainsi, $(\tilde{W}, G_{\tilde{W}}, \pi_{\tilde{W}})$ est bien une carte de W et elle est dans $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$.

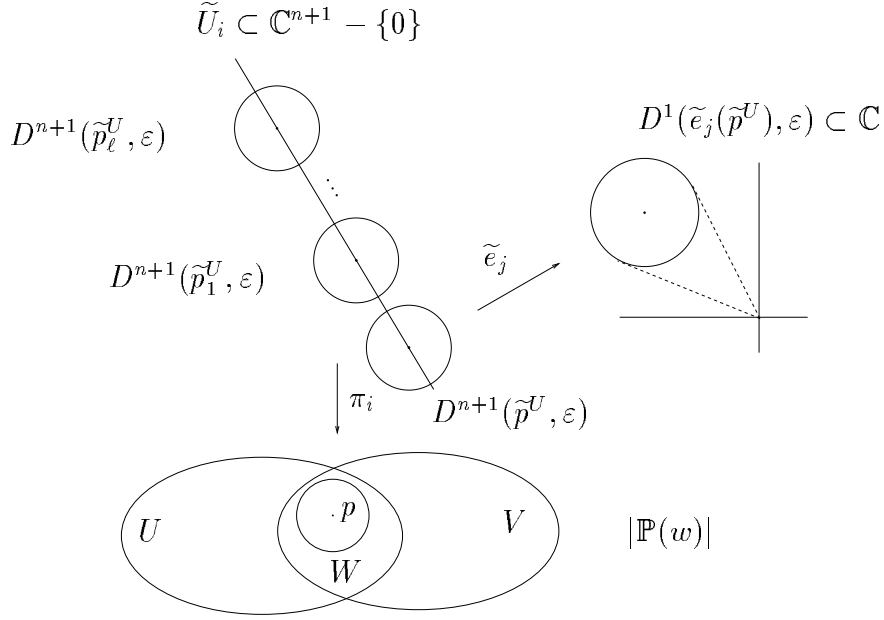


FIG. 1 – $\tilde{e}_j : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \rightarrow \mathbb{C}$ est la projection sur la j -ième coordonnée.

Montrons que $(\tilde{W}, G_{\tilde{W}}, \pi_{\tilde{W}})$ s'injecte dans $(\tilde{U}, G_U, \pi_{\tilde{U}})$. Pour cela il suffit de montrer que $G_{\tilde{W}}$ est inclus dans $G_{\tilde{U}}$. Supposons qu'il existe $g \in G_{\tilde{W}} - G_{\tilde{U}}$. Comme la carte $(\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}})$ est dans $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$, g envoie \tilde{U} sur une autre composante connexe de $\pi_i^{-1}(U)$ or ceci est impossible car g stabilise $\tilde{W} \subset \tilde{U}$.

Finalement, nous avons montré que $\tilde{W} \subset \tilde{U}$, $G_{\tilde{W}} \subset G_{\tilde{U}}$ et $\pi_{\tilde{W}} = \pi_{\tilde{U}}|_{\tilde{W}}$ c'est-à-dire que nous avons une injection $(\tilde{W}, G_{\tilde{W}}, \pi_{\tilde{W}}) \hookrightarrow (\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}})$ qui est donnée par l'inclusion.

Montrons qu'il existe une injection $(\tilde{W}, G_{\tilde{W}}, \pi_{\tilde{W}}) \hookrightarrow (\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}})$.

Comme p_j^U est non nul, nous appliquons la remarque IV.1.7 pour $k = j$. Notons $\alpha := \psi_{\tilde{p}^U, \arg_j}|_{\tilde{W}}$. D'après l'égalité (IV.1.8), on peut choisir \arg_j tel que $\alpha(\tilde{W}) \subset \tilde{V}$.

Montrons que α est injective. Soient \tilde{y} et \tilde{y}' dans \tilde{W} tels que $\alpha(\tilde{y}) = \alpha(\tilde{y}')$. Pour tout k , nous avons

$$\frac{y_k}{y_j^{w_k/w_j}} = \frac{y'_k}{y'_j^{w_k/w_j}}.$$

En particulier, pour $k = i$, nous obtenons

$$\left(\frac{y_j^{1/w_j}}{y_j'^{1/w_j}} \right)^{w_i} = 1.$$

Ceci implique que $(\arg_j(y_j) - \arg_j(y_j')) w_i/w_j$ est dans $2\pi\mathbb{Z}$. Quitte à diminuer ε (cf. figure 1), on peut supposer que $\arg_j(y_j) = \arg_j(y_j')$. Nous obtenons $y_j = y_j'$ et nous en déduisons que α est injective.

Il reste à montrer que $G_{\widetilde{W}}$ est un sous-groupe de $G_{\widetilde{V}}$. Pour tout $g \in G_{\widetilde{W}}$, nous avons $g \cdot \alpha(\widetilde{y}) = \alpha(g \cdot \widetilde{y})$. Ainsi, $G_{\widetilde{W}}$ stabilise l'ouvert $\alpha(\widetilde{W})$. Nous utilisons le même raisonnement que précédemment pour montrer que $G_{\widetilde{W}} \subset G_{\widetilde{V}}$. \square

REMARQUE IV.1.11. (1) D'après la démonstration précédente, le groupe d'isotropie au point $p \in \mathbb{P}(w)$ est $G_p = \cap_{k \in I_p} \boldsymbol{\mu}_{w_k}$.

(2) Nous avons $\text{Ker}(\mathbb{P}(w)) = \cap_{i=0}^n \boldsymbol{\mu}_{w_i}$ et $\# \text{Ker}(\mathbb{P}(w)) = \text{pgcd}(w)$.

(3) Nous avons $|\mathbb{P}(w)_{\text{reg}}| = \{p \in |\mathbb{P}(w)| \mid \cap_{k \in I_p} \boldsymbol{\mu}_{w_k} = \cap_{i=0}^n \boldsymbol{\mu}_{w_i}\}$. Par contre $|\widehat{\mathbb{P}(w)}_{\text{reg}}| = \{\emptyset\}$ si $\text{pgcd}(w) > 1$.

(4) Soient w_0, w_1 deux entiers premiers entre eux. Il est facile de voir que les orbifolds $\mathbb{P}(w_0, w_1)$ et \mathbb{P}_{w_0, w_1}^1 (cf. proposition III.1.12) sont isomorphes.

(5) Nous définissons l'espace topologique $|\mathbb{P}(w)_I| := \{p \in |\mathbb{P}(w)| \mid \forall i \in I^c, p_i = 0\}$. Montrons que l'orbifold $\mathbb{P}(w)$ induit une structure orbifold sur $|\mathbb{P}(w)_I|$. Pour tout $i \in I$, posons $U_i|_I := U_i \cap |\mathbb{P}(w)_I|$ et $\widetilde{U}_i|_I := \{(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \mid y_i = 1 \text{ et } \forall k \in I^c, y_k = 0\}$. Nous avons $\widetilde{U}_i|_I = \pi_i^{-1}(U_i|_I)$. Posons $\pi_i|_I := \pi_i|_{\widetilde{U}_i|_I}$. Ainsi, $(\widetilde{U}_i|_I, \boldsymbol{\mu}_{w_i}, \pi_i|_I)$ est une carte de $U_i|_I$. Soit $U|_I$ un ouvert connexe de $|\mathbb{P}(w)_I|$. Une carte $(\widetilde{U}|_I, G_{\widetilde{U}|_I}, \pi_{\widetilde{U}|_I})$ de $U|_I \subset |\mathbb{P}(w)_I|$ est dite I -admissible s'il existe $i \in I$ tel que :

(IV.1.12) $\widetilde{U}|_I$ soit une composante connexe de $(\pi_i|_I)^{-1}(U|_I)$;

(IV.1.13) $G_{\widetilde{U}|_I}$ soit le sous-groupe de $\boldsymbol{\mu}_{w_i}$ qui stabilise $\widetilde{U}|_I$;

(IV.1.14) $\pi_{\widetilde{U}|_I} = (\pi_i|_I)|_{\widetilde{U}|_I}$.

Notons $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)|_I$ l'ensemble des cartes I -admissibles et notons $\mathcal{U}_w|_I$ le recouvrement de $|\mathbb{P}(w)_I|$ induit par les cartes de $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)|_I$. Le même type de raisonnement que dans la démonstration de la proposition IV.1.10 montre que $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)|_I$ est un atlas orbifold. Notons $\mathbb{P}(w)_I$ l'orbifold $(|\mathbb{P}(w)_I|, \mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)|_I)$.

Pour tout sous-ensemble $I := \{i_0, \dots, i_\delta\}$ de $\{0, \dots, n\}$, considérons les applications \mathbb{C}^* -équivariantes :

$$\begin{aligned} \tilde{\iota}_I : \mathbb{C}^{\#I} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ (y_{i_0}, \dots, y_{i_\delta}) &\longmapsto (0, \dots, 0, y_{i_0}, 0, \dots, 0, y_{i_\delta}, 0, \dots, 0) \\ \tilde{\pi}_I : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{\#I} \\ (y_0, \dots, y_n) &\longmapsto (y_{i_0}, \dots, y_{i_\delta}) \end{aligned}$$

Notons $\iota_I : |\mathbb{P}(w_I)| \rightarrow |\mathbb{P}(w)|$ l'application quotient.

PROPOSITION IV.1.15. *L'application*

$$\begin{aligned} \iota_I : \mathbb{P}(w_I) &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [z_0 : \dots : z_\delta]_{w_I} &\longmapsto [0 : \dots : 0 : z_{i_0} : 0 : \dots : 0 : z_{i_\delta} : 0 : \dots : 0]_w \end{aligned}$$

est une bonne application orbifold.

DÉMONSTRATION. Pour simplifier la démonstration, nous allons démontrer la proposition pour $I = \{0, \dots, \delta\}$. Il faut vérifier les conditions (1) et (2) de la définition III.5.6. Mais, nous allons d'abord expliciter les recouvrements compatibles que nous allons considérer.

La structure orbifold sur $|\mathbb{P}(w_I)|$ est donnée par l'atlas orbifold $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w_I)|)$. D'après la proposition III.5.4, il existe un recouvrement compatible, noté \mathcal{U}_I , associé à cet atlas. Pour tout ouvert U_I dans \mathcal{U}_I nous considérons l'ouvert de $\mathbb{P}(w)$ défini par $\mathfrak{F}(U_I) := \{[y_0 : \dots : y_n]_w \mid [y_0 : \dots : y_\delta]_{w_I} \in U_I\}$. Soit $(\tilde{U}_I, G_{U_I}, \pi_{U_I})$ une carte de U_I dans \mathcal{U}_I . Il existe $i \in I$ tel que $\tilde{U}_I \subset \tilde{U}_{I,i}$. Posons $\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)} := \{y \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \mid \tilde{\pi}_I(y) \in \tilde{U}_I\} = \tilde{U}_I \times \mathbb{C}^{n-\delta} \subset \tilde{U}_i$. L'ensemble $\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}$ est une composante connexe de $\pi_i^{-1}(\mathfrak{F}(U_I))$. Notons $G_{\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}}$ le sous-groupe de μ_{w_i} qui stabilise $\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}$ et posons $\pi_{\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}} := \pi_i|_{\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}}$. Ainsi $(\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}, G_{\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}}, \pi_{\widetilde{\mathfrak{F}(U_I)}})$ est une carte de $\mathfrak{F}(U_I)$. L'ensemble des ouverts $\mathfrak{F}(U_I)$ avec U_I dans \mathcal{U}_I forme un recouvrement compatible de $\mathbb{P}(w)$.

Soit \mathfrak{F} la correspondance qui à U_I associe $\mathfrak{F}(U_I)$. Cette correspondance vérifie clairement le point (1) de la définition III.5.6. Nous avons le diagramme commutatif

suivant :

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_I & \xrightarrow{\widetilde{\iota}_I |_{\widetilde{U}_I}} & \widetilde{\mathfrak{F}}(U_I) \\ \pi_{U_I} \downarrow & & \downarrow \pi_{\mathfrak{F}(U_I)} \\ U_I & \xrightarrow{\iota_I |_{U_I}} & \mathfrak{F}(U_I) \end{array}$$

Le même raisonnement que dans la démonstration de la proposition IV.1.10 montre que $G_{U_I} = G_{\mathfrak{F}(U_I)}$. Soit $\alpha : (\widetilde{U}_I, G_{U_I}, \pi_{U_I}) \hookrightarrow (\widetilde{V}_I, G_{V_I}, \pi_{V_I})$ une injection. Soient $(\widetilde{\mathfrak{F}}(U_I), G_{\mathfrak{F}(U_I)}, \pi_{\mathfrak{F}(U_I)})$ et $(\widetilde{\mathfrak{F}}(V_I), G_{\mathfrak{F}(V_I)}, \pi_{\mathfrak{F}(V_I)})$ les cartes de $\mathfrak{F}(U_I)$ et $\mathfrak{F}(V_I)$ construites ci-dessus. Posons $\mathfrak{F}(\alpha) := (\alpha, \text{id})$ c'est-à-dire qu'on applique α aux $\delta + 1$ premières coordonnées et l'identité aux autres.

L'application $\mathfrak{F}(\alpha) : \mathfrak{F}(U_I) \rightarrow \mathfrak{F}(V_I)$ est injective. Comme G_{U_I} est un sous-groupe de G_{V_I} , $G_{\mathfrak{F}(U_I)}$ est un sous-groupe de $G_{\mathfrak{F}(V_I)}$. Finalement, $\mathfrak{F}(\alpha)$ est une injection qui satisfait la condition (2) de la définition III.5.6. \square

COROLLAIRE IV.1.16. *Pour tout sous-ensemble I de $\{0, \dots, n\}$, l'application orbifold $\iota_I : \mathbb{P}(w_I) \rightarrow \mathbb{P}(w)$ induit un isomorphisme entre $\mathbb{P}(w_I)$ et $\mathbb{P}(w)_I$.*

Dans la suite, nous identifions les orbifolds $\mathbb{P}(w_I) \hookrightarrow \mathbb{P}(w)$ et $\mathbb{P}(w)_I \subset \mathbb{P}(w)$.

DÉMONSTRATION DU COROLLAIRE IV.1.16. L'application

$$\iota_I : |\mathbb{P}(w_I)| \longrightarrow |\mathbb{P}(w)_I|$$

est un homéomorphisme. Pour toute carte $(\widetilde{U}_I, G_{U_I}, \pi_{U_I})$ de U_I dans $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w_I)|)$, $\widetilde{\iota}_I |_{\widetilde{U}_I} : (\widetilde{U}_I, G_{U_I}, \pi_{U_I}) \rightarrow (\widetilde{\iota}_I(\widetilde{U}_I), G_{U_I}, \pi |_{\widetilde{\iota}_I(\widetilde{U}_I)})$ est un isomorphisme de carte et $(\widetilde{\iota}_I(\widetilde{U}_I), G_{U_I}, \pi |_{\widetilde{\iota}_I(\widetilde{U}_I)})$ est une carte de $\iota_I(U_I) \cap |\mathbb{P}(w)_I|$ dans $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|) |_I$. \square

Le corollaire suivant est une conséquence de la proposition III.5.7.

COROLLAIRE IV.1.17. *Soit I un sous-ensemble de $\{0, \dots, n\}$. Pour tout fibré vectoriel orbifold E sur $\mathbb{P}(w)$, l'image inverse de E , noté $\iota_I^* E$, par l'application ι_I est un fibré vectoriel orbifold.*

PROPOSITION IV.1.18. *L'application*

$$\begin{aligned} f_w : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [z_0 : \dots : z_n] &\longmapsto [z_0^{w_0} : \dots : z_n^{w_n}]_w \end{aligned}$$

est une bonne application orbifold.

REMARQUE IV.1.19. Le degré de f_w , vue comme une application entre espaces topologiques, est $\prod w_i / \text{pgcd}(w_0, \dots, w_n)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.1.18. Rappelons que l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f}_w : \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \\ (z_0, \dots, z_n) &\longmapsto (z_0^{w_0}, \dots, z_n^{w_n}) \end{aligned}$$

est \mathbb{C}^* -équivariante et qu'elle relève $|f_w| : |\mathbb{P}^n| \rightarrow |\mathbb{P}(w)|$. L'application f_w est surjective et ouverte.

Remarquons que si les poids sont premiers entre eux, nous avons $\mathbb{P}(w)_{\text{reg}} = \widehat{\mathbb{P}(w)}_{\text{reg}}$ (cf. remarque IV.1.11.(3)). Ainsi, l'application f_w est une application orbifold régulière c'est-à-dire que $f_w^{-1}(\widehat{|\mathbb{P}(w)|}_{\text{reg}})$ est un ouvert connexe et dense. Puis, la proposition III.5.10 montre que l'application f_w est bonne.

Dans la suite, nous démontrons la proposition dans le cas général. Soit U un ouvert de \mathbb{P}^n . Soit $(\tilde{U}, \text{id}, \pi_U)$ une carte de U où \tilde{U} est un ouvert de $\tilde{U}_i = \{(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\} \mid y_i = 1\}$. Soit $\widetilde{f_w(U)} \subset \tilde{U}_i$ la composante connexe de $\pi_i^{-1}(f_w(U))$ qui contient $\tilde{f}_w(\tilde{U})$. Nous obtenons une carte $(\widetilde{f_w(U)}, G_{f_w(U)}, \pi_{f_w(U)})$ de $f_w(U)$ et nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} & \xrightarrow{\tilde{f}_w} & \widetilde{f_w(\tilde{U})} \\ \downarrow \pi_U & & \downarrow \pi_{f_w(U)} \\ U & \xrightarrow{f_w} & f_w(U) \end{array}$$

Pour tout $p \in \mathbb{P}^n$, il existe un ouvert connexe U_p contenant p tel que

- (1) la carte $\widetilde{f_w(U_p)}$ s'injecte dans $\tilde{U}_{i_1}, \dots, \tilde{U}_{i_{n(p)}}$ où $\{i_1, \dots, i_{n(p)}\} = I_{f_w(p)}$ (cf. définition (IV.1.2));
- (2) la carte $\widetilde{f_w(U_p)}$ soit incluse dans $D^{n+1}(f_w(p), \varepsilon) \cap \tilde{U}_i$ où ε est choisi pour qu'on ait une détermination de l'argument (cf. remarque IV.1.7).

La famille $\mathcal{U}_{\mathbb{P}^n} := (U_p)_{p \in \mathbb{P}^n}$ de tels ouverts est un recouvrement compatible de \mathbb{P}^n . Montrons que la famille $\mathcal{U}_{\mathbb{P}(w)} := (f_w(U_p))_{p \in \mathbb{P}^n}$ est un recouvrement compatible de $\mathbb{P}(w)$. Le point (III.5.1) est trivialement vrai. Soit $f_w(y) \in f_w(U_p) \cap f_w(U_q)$. D'après la preuve de la proposition IV.1.10, il existe une carte $\tilde{U}_{f_w(y)}$ de $U_{f_w(y)}$ qui s'injecte dans $\widetilde{f_w(U_p)}$ et dans $\widetilde{f_w(U_q)}$. Nous prenons un ouvert $U_y \subset \mathbb{P}^n$ tel que $f_w(U_y) \subset U_{f_w(y)}$. Ainsi, nous avons l'injection $\widetilde{f_w(U_y)} \hookrightarrow \tilde{U}_{f_w(y)}$, ce qui nous montre le point (III.5.2).

Supposons que $f_w(U_p) \subset f_w(U_q)$. Ainsi, la carte $\widetilde{f_w(U_p)}$ s'injecte dans \widetilde{U}_i pour $i \in I_{f_w(p)}$ et la carte $\widetilde{f_w(U_q)}$ s'injecte dans \widetilde{U}_j pour $j \in I_{f_w(q)}$. Comme $f_w(U_p) \subset f_w(U_q)$, nous avons $I_{f_w(q)} \subset I_{f_w(p)}$. Soit $\widetilde{f_w(U_p)}_q \subset \widetilde{f_w(U_q)}$ une carte de $f_w(U_p)$ induite par la carte $\widetilde{f_w(U_q)}$. Ainsi, $\widetilde{f_w(U_p)}_q$ et $\widetilde{f_w(U_p)}$ s'injectent dans les cartes \widetilde{U}_j pour $j \in I_{f_w(q)}$. Le lemme III.1.3 montre que les cartes $\widetilde{f_w(U_p)}_q$ et $\widetilde{f_w(U_p)}$ sont isomorphes. Nous en concluons que $\widetilde{f_w(U_p)}$ s'injecte dans $\widetilde{f_w(U_q)}$. Ce qui montre le point (III.5.3).

Nous allons maintenant vérifier que les conditions de la définition III.5.6 sont satisfaites. La correspondance $\mathfrak{F} : \mathcal{U}_{\mathbb{P}^n} \rightarrow \mathcal{U}_{\mathbb{P}(w)}$ définie par $U_p \mapsto f_w(U_p)$ vérifie la condition (1) de la définition III.5.6.

Soit $\alpha : \widetilde{U}_p \subset \widetilde{U}_i \hookrightarrow \widetilde{U}_q \subset \widetilde{U}_j$ une injection. Nous avons deux cas

- (1) soit $i = j$ et α est simplement une inclusion ;
- (2) soit $i \neq j$ et nous avons

$$\alpha(z_0, \dots, 1_i, \dots, z_n) = (z_0/z_j, \dots, 1_j, \dots, z_n/z_j).$$

Dans le premier cas, $\mathfrak{F}(\alpha)$ est simplement l'inclusion de $\widetilde{f_w(U_p)}$ dans $\widetilde{f_w(U_q)}$. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_p & \xrightarrow{\alpha} & \widetilde{U}_q \\ \downarrow \widetilde{f_w} & & \downarrow \widetilde{f_w} \\ \widetilde{f_w(U_p)} & \xrightarrow{\mathfrak{F}(\alpha)} & \widetilde{f_w(U_q)} \end{array}$$

Nous avons unicité de $\mathfrak{F}(\alpha)$ car d'après le lemme III.1.1 une autre injection aurait la forme $\varphi_g \circ \mathfrak{F}(\alpha)$ avec $g \in G_{f_w(U_q)}$ mais le diagramme ci-dessus ne serait commutatif que si $g \in \text{Ker}(\mathbb{P}(w))$ c'est-à-dire $\varphi_g = \text{id}$.

Dans le second cas, $\mathfrak{F}(\alpha)$ est l'injection

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}(\alpha) : \widetilde{f_w(U_p)} &\hookrightarrow \widetilde{f_w(U_q)} \\ (y_0, \dots, 1_i, \dots, y_n) &\mapsto (y_0/y_j^{w_0/w_j}, \dots, 1_j, \dots, y_n/y_j^{w_n/w_j}) \end{aligned}$$

Cette injection est bien définie car nous avons choisi ε assez petit pour avoir une détermination de l'argument. Nous avons un diagramme commutatif comme le précédent et l'unicité de $\mathfrak{F}(\alpha)$ se déduit de la même manière.

L'unicité montre que pour deux injections successives, nous avons $\mathfrak{F}(\alpha \circ \beta) = \mathfrak{F}(\alpha) \circ \mathfrak{F}(\beta)$. Ce qui termine la démonstration. \square

IV.2. Les fibrés vectoriels orbifolds $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(k)$ sur $\mathbb{P}(w)$

Avant de définir les fibrés vectoriels orbifolds $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w))$, nous allons faire une remarque sur les notations. Remarquons que la notation $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(k)$ est ambiguë car elle désigne à la fois un fibré vectoriel holomorphe sur \mathbb{P}^n et son faisceau des sections. Cette confusion n'est pas gênante car nous avons une équivalence de catégories entre les faisceaux de \mathcal{O}_M -modules localement libres de rang r et les fibrés vectoriels holomorphes de rang r sur une variété M . Pour les orbifolds, nous n'avons pas cette équivalence de catégories : le fibré vectoriel orbifold contient plus d'informations que son faisceau des sections (cf. paragraphe III.2.b).

PROPOSITION IV.2.1. *Il existe un fibré vectoriel complexe orbifold de rang 1, noté $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w))$, sur $\mathbb{P}(w)$ tel que $f_w^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w))$ soit isomorphe au fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\text{pgcd}(w))$ sur \mathbb{P}^n .*

DÉMONSTRATION. Pour alléger les notations, notons $d(w) := \text{pgcd}(w)$. Nous utilisons les résultats du paragraphe III.5.

Nous allons définir le fibré vectoriel orbifold $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))$ sur $\mathbb{P}(w)$ par ses fonctions de transition. D'après le lemme IV.1.6 et la notation IV.1.9, pour toute injection $\alpha : (\tilde{U}, G_{\tilde{U}}, \pi_{\tilde{U}}) \hookrightarrow (\tilde{V}, G_{\tilde{V}}, \pi_{\tilde{V}})$ entre deux cartes de $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$, notons $\psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(y)$ l'application de \mathbb{C} dans \mathbb{C} qui à t associe $\lambda_{\alpha}(y)t$. Plus précisément (cf. notation IV.1.9), supposons que $\tilde{U} \subset \tilde{U}_i$ et $\tilde{V} \subset \tilde{U}_j$ alors nous avons

- (1) soit $i = j$ et $\psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(y)(t) = \zeta^{d(w)}t$ où $\zeta \in \mu_{w_i}$;
- (2) soit $i \neq j$ et $\psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(y)(t) = t/y_j^{d(w)/w_j}$.

D'après le lemme IV.1.6, nous avons la relation de cocycle orbifolde suivante

$$\psi_{\beta \circ \alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(y)(t) = \psi_{\beta}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(\alpha(y)) \left(\psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(t) \right).$$

Nous avons ainsi défini un fibré vectoriel orbifold de rang 1, noté $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))$, sur $\mathbb{P}(w)$ et $\text{Ker}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))) = \text{Ker}(\mathbb{P}(w))$.

D'après la proposition IV.1.18, l'application f_w est une bonne application orbifolde. D'après la proposition III.5.7 le fibré $f_w^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w)))$ existe.

Montrons que les fonctions de transition de $f_w^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w)))$ sont les mêmes que les fonctions de transition de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d(w))$. Soit $p \in U_i^{\mathbb{P}^n} \cap U_j^{\mathbb{P}^n}$ avec $i \neq j$. Ainsi, $f_w(p)$ est dans $U_i^{\mathbb{P}(w)} \cap U_j^{\mathbb{P}(w)}$. Soit $(\tilde{W}_{f_w(p)}, G_{\tilde{W}_{f_w(p)}}, \pi_{\tilde{W}_{f_w(p)}})$ une carte de $W_{f_w(p)}$ de $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$ telle que

- $f_w(p) \in W_{f(p)} \subset U_i^{\mathbb{P}(w)} \cap U_j^{\mathbb{P}(w)}$;
- il existe une injection

$$\alpha : \left(\widetilde{W}_{f_w(p)}, G_{\widetilde{W}_{f_w(p)}}, \pi_{\widetilde{W}_{f_w(p)}} \right) \hookrightarrow \left(\widetilde{U}_j^{\mathbb{P}(w)}, \boldsymbol{\mu}_{w_j}, \pi_j \right)$$

Soit $U_p^{\mathbb{P}^n}$ la composante connexe de $f_w^{-1}(W_{f_w(p)})$ qui contient p . Posons

$$\widetilde{U}_p^{\mathbb{P}^n} := f_w^{-1} \left(\widetilde{W}_{f_w(p)} \right) \cap \widetilde{U}_i^{\mathbb{P}^n}.$$

Ainsi, $(\widetilde{U}_p^{\mathbb{P}^n}, \text{id}, \pi|_{\widetilde{U}_p^{\mathbb{P}^n}})$ est une carte de $U_p^{\mathbb{P}^n}$.

Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U}_p^{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{\widetilde{f}_w|_{\widetilde{U}_p^{\mathbb{P}^n}}} & \widetilde{W}_{f_w(p)} \\ \beta \downarrow & & \downarrow \alpha \\ \widetilde{U}_j^{\mathbb{P}^n} & \xrightarrow{\widetilde{f}_w|_{\widetilde{U}_j^{\mathbb{P}^n}}} & \widetilde{U}_j^{\mathbb{P}(w)} \end{array}$$

où $\beta((z_0, \dots, 1_i, \dots, z_n)) = (z_0/z_j, \dots, 1_j, \dots, z_n/z_j)$. Ainsi, nous avons

$$\psi_{\beta}^{f_w^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(z)(t) = \psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(d(w))}(f_w(z))(t) = t/z_j^{d(w)}.$$

□

REMARQUE IV.2.2. (1) Soit m un entier. Nous définissons le fibré orbifold de rang 1, noté $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(m \cdot \text{pgcd}(w))$, en prenant m fois le produit tensoriel du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w))$ avec lui-même. Avec les notations ci-dessus, les fonctions de transition du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(m \cdot \text{pgcd}(w))$ sont

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(m \cdot \text{pgcd}(w))}(y) &: \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ t &\longmapsto t \lambda_{\alpha}^m(y) \end{aligned}$$

(2) A l'orbifold $\mathbb{P}(w)$, on peut associer l'orbifold, dite réduite, $\mathbb{P}(w/\text{pgcd}(w))$ en quotientant par le groupe $\text{Ker}(\mathbb{P}(w))$. Comme nous avons

$$\text{Ker}(\mathbb{P}(w)) = \text{Ker}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w))),$$

le fibré orbifold $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w)) \rightarrow \mathbb{P}(w)$ peut aussi être réduit en un fibré vectoriel orbifold $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w/\text{pgcd}(w))}(1) \rightarrow \mathbb{P}(w/\text{pgcd}(w))$.

On peut définir un fibré vectoriel orbifold, au sens de Chen et Ruan (cf. remarque III.2.7), $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)$ sur $\mathbb{P}(w)$. Mais ce n'est pas un fibré vectoriel orbifold au sens de la définition III.2.11 car

$$\text{Ker}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)) = \{\text{id}\} \neq \text{Ker}(\mathbb{P}(w)).$$

- (3) D'après le corollaire IV.1.17, pour tout sous-ensemble I de $\{0, \dots, n\}$, le fibré orbifold $\iota_I^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(\text{pgcd}(w_I))$ est isomorphe au fibré vectoriel orbifold $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_I)}(\text{pgcd}(w_I))$.

LEMME IV.2.3. *Pour toute carte (\tilde{U}, G_U, π_U) de U où $\tilde{U} \subset \tilde{U}_i$, nous posons*

$$\begin{aligned} \tilde{s}_{k, \tilde{U}} : \tilde{U} &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (y_0, \dots, 1_i, \dots, y_n) &\longmapsto y_k \end{aligned}$$

Ces sections locales sont compatibles avec les changements de cartes et elles définissent une section, notée s_k , du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_k) \rightarrow \mathbb{P}(w)$.

DÉMONSTRATION. D'après la remarque III.2.16, il suffit de montrer que ces sections locales sont compatibles avec les changements de cartes c'est-à-dire que

$$(IV.2.4) \quad \tilde{s}_{k, \tilde{V}}(\alpha(y)) = \psi_{\alpha}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_k)}(y)(\tilde{s}_{k, \tilde{U}}(y)) = \lambda_{\alpha}^{w_k / \text{pgcd}(w)}(y) \tilde{s}_{k, \tilde{U}}(y)$$

pour toute injection $\alpha : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{V}$. Nous utilisons les notations de IV.1.9, supposons que $\tilde{U} \subset \tilde{U}_i$ et $\tilde{V} \subset \tilde{U}_j$, nous avons

– soit $i = j$ et $\alpha(y) = \zeta \cdot y$ où $\zeta \in \boldsymbol{\mu}_{w_i}$ et nous avons

$$\tilde{s}_{k, \tilde{V}}(\zeta \cdot y) = \zeta^{w_k} y_k = \lambda_{\alpha}^{w_k / d(w)}(y) \tilde{s}_{k, \tilde{U}}(y).$$

– Soit $i \neq j$ et nous avons

$$\tilde{s}_{k, \tilde{V}}(y_0 / y_j^{w_0 / w_j}, \dots, 1_j, \dots, y_n / y_j^{w_n / w_j}) = y_k / y_j^{w_k / w_j} = \lambda_{\alpha}^{w_k / d(w)}(y) \tilde{s}_{k, \tilde{U}}(y).$$

□

IV.3. La cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w)$ vue comme \mathbb{C} -espace vectoriel gradué

Dans ce paragraphe, nous allons d'abord donner la définition de la structure de \mathbb{C} -espace vectoriel gradué de la cohomologie orbifold pour les orbifolds complexes et commutatives. Nous nous appuyerons sur l'article de Chen et Ruan [CR04]. Puis, nous appliquerons cette définition à notre exemple favori $\mathbb{P}(w)$. En particulier, nous expliciterons une base (cf. proposition IV.3.14) de la cohomologie orbifold des espaces projectifs à poids.

IV.3.a. Définition de la cohomologie orbifold. Nous allons rappeler la définition de la cohomologie orbifold pour une orbifold complexe et commutative. Pour plus de précisions, nous renvoyons le lecteur à l'article de Chen et Ruan [CR04] paragraphe 3.2.

Soit X une orbifold complexe, compacte et commutative de dimension n . Notons $\Sigma X := \bigsqcup_{x \in X} G_x$. Nous définissons une topologie sur ΣX à l'aide d'une base d'ouverts. Pour tout $(x, g) \in \Sigma X$ et pour toute carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x , nous posons

$$(IV.3.1) \quad \mathcal{V}_{(x,g)}(\tilde{U}_x) := \left\{ (y, h) \in \Sigma X \mid \exists (\alpha, \kappa) : (\tilde{U}_y, G_y, \pi_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \right. \\ \left. \text{qui vérifie } \kappa(h) = g \right\}.$$

LEMME IV.3.2. (1) *La collection de ces sous-ensembles de ΣX définit une topologie sur ΣX .*

(2) *L'ensemble ΣX muni de cette topologie est séparé.*

DÉMONSTRATION. (1) Il est clair que (x, g) appartient à $\mathcal{V}_{(x,g)}(\tilde{U}_x)$.

Il reste à montrer que si $(z, k) \in \mathcal{V}_{(x,g)}(\tilde{U}_x) \cap \mathcal{V}_{(y,h)}(\tilde{U}_y)$ alors il existe une carte \tilde{W}_z d'un ouvert contenant z telle que

$$\mathcal{V}_{(z,k)}(\tilde{W}_z) \subset \mathcal{V}_{(x,g)}(\tilde{U}_x) \cap \mathcal{V}_{(y,h)}(\tilde{U}_y).$$

Soit $(z, k) \in \mathcal{V}_{(x,g)}(\tilde{U}_x) \cap \mathcal{V}_{(y,h)}(\tilde{U}_y)$. Il existe deux injections

$$(\alpha, \kappa_\alpha) : \tilde{U}_z \hookrightarrow \tilde{U}_x;$$

$$(\alpha', \kappa_{\alpha'}) : \tilde{U}'_z \hookrightarrow \tilde{U}_y$$

telles que $\kappa_\alpha(k) = g$ et $\kappa_{\alpha'}(k) = h$. Il existe une carte $(\tilde{W}_z, G_z, \pi_z)$ d'un ouvert $W_z \subset U_z \cap U'_z$ qui s'injecte dans respectivement \tilde{U}_z et \tilde{U}'_z . Nous en concluons que $\mathcal{V}_{(z,k)}(\tilde{W}_z) \subset \mathcal{V}_{(x,g)}(\tilde{U}_x) \cap \mathcal{V}_{(y,h)}(\tilde{U}_y)$.

(2) Soient (x_1, g_1) et (x_2, g_2) deux éléments différents dans ΣX . Si $x_1 \neq x_2$ alors il existe deux cartes \tilde{U}_{x_1} et \tilde{U}_{x_2} de U_{x_1} et U_{x_2} contenant respectivement x_1 et x_2 telles que $U_{x_1} \cap U_{x_2} = \{\emptyset\}$. Nous en déduisons que $\mathcal{V}_{(x_1, g_1)}(\tilde{U}_{x_1}) \cap \mathcal{V}_{(x_2, g_2)}(\tilde{U}_{x_2}) = \{\emptyset\}$. Supposons que $x := x_1 = x_2$ et $g_1 \neq g_2$. Soit \tilde{U}_x une carte d'un ouvert contenant x . Supposons qu'il existe $(y, h) \in \mathcal{V}_{(x, g_1)}(\tilde{U}_x) \cap \mathcal{V}_{(x, g_2)}(\tilde{U}_x)$. Il existe deux injections

$$(\alpha, \kappa_\alpha) : (\tilde{U}_y, G_y, \pi_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x);$$

$$(\alpha', \kappa_{\alpha'}) : (\tilde{U}'_y, G_y, \pi_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$$

telles que $\kappa_\alpha(h) = g_1$ et $\kappa_{\alpha'}(h) = g_2$. Quitte à diminuer U'_y , on peut supposer que $U'_y \subset U_y$. Puis le corollaire III.1.4 implique qu'il existe une injection de \tilde{U}'_y dans \tilde{U}_y . Le morphisme de groupes $\kappa : G_y \rightarrow G_y$ associé à cette injection est l'identité. Nous en concluons que $\kappa_\alpha(h) = \kappa_{\alpha'}(h)$. Ce qui contredit l'hypothèse $g_1 \neq g_2$. □

L'application $P : \Sigma X \rightarrow |X|$ qui à (x, g) associe x est une application continue et $\#P^{-1}(x) = \#G_x$.

LEMME IV.3.3. *Soit X une orbifold complexe, compacte et commutative. L'espace topologique ΣX n'a qu'un nombre fini de composantes connexes.*

DÉMONSTRATION. Nous allons montrer que $P : \Sigma X \rightarrow |X|$ est une application propre. Il faut montrer que, pour tout x dans X , $P^{-1}(x)$ est quasi-compact, c'est-à-dire que de tout recouvrement ouvert on peut en extraire un sous-recouvrement fini¹, et que l'application P est fermée. Le premier point est évident car $P^{-1}(x)$ est un ensemble fini.

Montrons que l'application P est fermée. Soit F un fermé de ΣX . Soit $x \in \overline{P(F)}$. Pour toute carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ de U_x , il existe $y \in P(F) \cap U_x$. Nous en déduisons qu'il existe $h \in G_y$ tel que $(y, h) \in F \subset \Sigma X$ et qu'il existe une injection

$$(\alpha, \kappa) : (\tilde{U}_y, G_y, \pi_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$$

Considérons $(U_{x,n})_{n \in \mathbb{N}}$ une suite d'ouverts emboîtés contenant x telle que

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} U_{x,n} = \{x\}.$$

Nous en déduisons une suite $(y_n, h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de F telle que y_n converge vers x . Comme G_x est fini, quitte à prendre une sous-suite, nous pouvons supposer que la suite $(\kappa_n(h_n))_{n \in \mathbb{N}}$ dans G_x est constamment égale à un élément $\kappa(h) \in G_x$. Nous en déduisons que la suite $(y_n, h_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(x, \kappa(h))$. Comme F est fermé, l'élément $(x, \kappa(h))$ appartient à F . Nous en concluons que P est une application fermée puis qu'elle est propre.

Comme ΣX est un espace topologique séparé (cf. lemme IV.3.2) et que X est compacte, nous en déduisons (cf. Proposition 7 du chapitre I paragraphe 10.3 de [Bou71]) que pour tout compact K de $|X|$, l'ensemble $P^{-1}(K)$ est compact. Finalement, l'espace topologique ΣX est compact et n'a qu'un nombre fini de composantes connexes. □

¹Rappelons qu'en France un espace topologique est compact s'il est quasi-compact et séparé.

Nous dirons que $(x, g) \sim (y, h)$ si (x, g) et (y, h) sont dans la même composante connexe de ΣX . Soit T l'ensemble des classes d'équivalence. Pour tout $g \in G_x$, nous notons (g) la classe d'équivalence de (x, g) . Cette notation (g) sous-entend que $g \in G_x$ pour un certain $x \in |X|$. Notons $X_{(g)}$ la composante connexe de ΣX qui contient (x, g) . Nous avons la décomposition suivante de ΣX

$$(IV.3.4) \quad \Sigma X = \bigsqcup_{(g) \in T} X_{(g)}.$$

Les espaces topologiques $X_{(g)}$ sont naturellement munis d'une structure orbifold (cf. lemme 3.1.1 de [CR04] ou l'article [Kaw78]). Dans le cas des espaces projectifs à poids, cette structure orbifold sera claire.

Remarquons que pour $g \in \text{Ker}(X)$, nous avons $|X_{(g)}| = |X|$.

Dans l'article [Kaw78], Kawasaki donne une stratification canonique d'une orbifold. Heuristiquement, nous pouvons voir les composantes connexes de ΣX comme des adhérences de strates de l'orbifold X qu'on a « sorties » de $|X|$. Regardons sur l'exemple suivant ce qu'il se passe.

EXEMPLE IV.3.5. Considérons l'orbifold $\mathbb{P}^1_{w_0, w_1}$. L'ensemble T est en bijection avec $\mu_{w_0} \sqcup \mu_{w_1}$. L'ensemble $\Sigma \mathbb{P}^1_{w_0, w_1}$ se décompose de la façon suivante

$$\Sigma \mathbb{P}^1_{w_0, w_1} = \mathbb{P}^1 \times \{\text{id}\} \bigsqcup \{[1 : 0]\} \times (\mu_{w_0} - \{\text{id}\}) \bigsqcup \{[0 : 1]\} \times (\mu_{w_1} - \{\text{id}\}).$$

Soit x dans $|X|$. Soit $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ une carte d'un voisinage U_x de x . L'action du groupe d'isotropie G_x sur l'espace vectoriel tangent $T_x \tilde{U}_x$ induit une représentation $\rho_x : G_x \rightarrow GL(n, \mathbb{C})$ qui ne dépend pas de la carte choisie. Comme g est d'ordre fini, la matrice $\rho_x(g)$ est diagonalisable. Dans une telle base, la matrice $\rho_x(g)$ s'écrit

$$\text{diag}(\exp(2i\pi r_1), \dots, \exp(2i\pi r_n))$$

où les r_i sont dans l'intervalle $[0, 1[\cap \mathbb{Q}$.

L'âge de $g \in G_x$ est défini $\text{age}(g, x) := r_1 + \dots + r_n$.

LEMME IV.3.6 (cf. lemme 3.2.1 de [CR04]). (1) L'application $\text{age} : X_{(g)} \rightarrow \mathbb{Q}$ est constante.

(2) Nous avons $\text{age}(g, x) + \text{age}(g^{-1}, x) = n - \dim X_{(g)}$.

D'après le lemme, l'âge d'un élément $g \in G_x$ ne dépend que de la composante connexe $X_{(g)}$. Dorénavant, nous le notons $\text{age}(g)$.

DÉFINITION IV.3.7 (cf. définition 3.2.3 de [CR04]). *Soit X une orbifold complexe et commutative. Nous définissons les espaces vectoriels complexes de cohomologie orbifold de X par*

$$H_{\text{orb}}^*(X, \mathbb{C}) := \bigoplus_{(g) \in T} H^{*-2 \text{age}(g)}(X_{(g)}, \mathbb{C}).$$

REMARQUE IV.3.8. Remarquons que $|X_{(\text{id})}|$ est simplement $|X|$. Ainsi, la cohomologie ordinaire de $|X|$ est un sous-espace vectoriel de la cohomologie orbifold de X .

IV.3.b. Cohomologie orbifold des espaces projectifs à poids. Pour l'espace projectif à poids, l'ensemble T est en bijection avec $\bigcup_{i=0}^n \boldsymbol{\mu}_{w_i}$ (ou avec S_w défini dans le paragraphe II.2). Pour $\gamma \in S_w$, nous avons $\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})} = \{p \in |\mathbb{P}(w)| \mid e^{2i\pi\gamma} \in G_p\} \times \{e^{2i\pi\gamma}\}$ (nous utilisons la notation définie juste avant l'égalité (IV.3.4) avec $X = \mathbb{P}(w)$).

Soit p dans $|\mathbb{P}(w)|$. Soit $(\tilde{U}_p, G_p, \pi_p)$ une carte d'un voisinage U_p de p . Notons \tilde{p} le relevé de p dans \tilde{U}_p . L'action de G_p sur l'espace tangent $T_{\tilde{p}}\tilde{U}_p$ induit la représentation de groupe suivante

$$\begin{aligned} G_p &\longrightarrow GL(n, \mathbb{C}) \\ \exp(2i\pi\gamma) &\longmapsto \text{diag}(e^{2i\pi\gamma w_0}, \dots, e^{2i\pi\gamma w_n}) \end{aligned}$$

PROPOSITION IV.3.9. *La structure de \mathbb{C} -espace vectoriel gradué de la cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C}) &= \bigoplus_{\gamma \in S_w} H^{2(*-a(\gamma))}(|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}|, \mathbb{C}) \\ &\simeq \bigoplus_{\gamma \in S_w} H^{2(*-a(\gamma))}(|\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})|, \mathbb{C}) \end{aligned}$$

où $a(\gamma) = \{\gamma w_0\} + \dots + \{\gamma w_n\}$ et $I(\gamma) = \{i \mid \gamma w_i \in \mathbb{N}\}$ (cf. le paragraphe II.1).

REMARQUE IV.3.10. (1) Pour $\gamma = 0$, nous avons $|\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})| = |\mathbb{P}(w)|$. Ainsi, la cohomologie ordinaire de $|\mathbb{P}(w)|$ est un sous-espace vectoriel de la cohomologie orbifold de $\mathbb{P}(w)$.

- (2) Sur la deuxième page de l'article [**Kaw73**], T. Kawasaki démontre le résultat suivant

$$H^{2i}(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{C}) = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } i \in \{0, \dots, n\}; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, d'après la proposition précédente, nous avons une description explicite du \mathbb{C} -espace vectoriel $H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$.

- (3) Nous avons $|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}| = |\mathbb{P}(w)_{I(\gamma)}|$. D'après la remarque IV.1.11.(5), l'espace topologique $|\mathbb{P}(w)_{I(\gamma)}|$ est muni d'une structure orbifold. En effet, nous avons les équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} [p_0 : \dots : p_n]_w \in |\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}| &\Leftrightarrow e^{2i\pi\gamma} \cdot (p_0, \dots, p_n) = (p_0, \dots, p_n) \\ &\Leftrightarrow p_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ tels que } \gamma w_i \notin \mathbb{N} \\ &\Leftrightarrow p_i = 0 \text{ pour tout } i \text{ dans } I^c(\gamma). \end{aligned}$$

- (4) Prenons l'exemple des poids $w = (1, 2, 4)$. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \Sigma\mathbb{P}(1, 2, 4) &= |\mathbb{P}(1, 2, 4)| \times \{1\} \bigsqcup |\mathbb{P}(2, 4)| \times \{-1\} \\ &\bigsqcup |\mathbb{P}(4)| \times \{\sqrt{-1}\} \bigsqcup |\mathbb{P}(4)| \times \{-\sqrt{-1}\}. \end{aligned}$$

Les « strates » définies par Kawasaki dans [**Kaw78**] sont $\{[0 : 0 : 1]\}$, $\{[0, y, z] \mid y \neq 0\}$ et $\{[x : y : z] \mid x \neq 0\}$. Remarquons que l'adhérence des strates est respectivement $\mathbb{P}(4)$, $\mathbb{P}(2, 4)$ et $\mathbb{P}(1, 2, 4)$, et qu'elle est isomorphe comme orbifold aux composantes connexes de $\Sigma\mathbb{P}(1, 2, 4)$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.3.9. L'âge de l'élément $e^{2i\pi\gamma}$ est $a(\gamma)$. Nous en déduisons l'égalité de la proposition. D'après la remarque IV.3.10 (3), l'espace topologique $|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}|$ est égal à $|\mathbb{P}(w)_{I(\gamma)}|$. Puis le corollaire IV.1.16 permet d'identifier $\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})$ et $\mathbb{P}(w)_{I(\gamma)}$. \square

De la remarque IV.3.10 (2), nous en déduisons directement le corollaire suivant.

COROLLAIRE IV.3.11. *Soit γ dans S_w . Les degrés de la cohomologie orbifold qui proviennent de l'espace topologique $|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}|$ sont les nombres rationnels suivants :*

$$2(d + a(\gamma)) \text{ avec } d \in \{0, \dots, \delta(\gamma) - 1\}$$

où $\delta(\gamma) = \#I(\gamma)$ (cf. paragraphe II.1).

COROLLAIRE IV.3.12. *La dimension du \mathbb{C} -espace vectoriel $H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$ est μ .*

DÉMONSTRATION. D'après la proposition IV.3.9, la dimension de l'espace vectoriel $H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$ est

$$\sum_{\gamma \in S_w} \dim_{\mathbb{C}} H^*(|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}|, \mathbb{C}) = \sum_{\gamma \in S_w} \delta(\gamma) = \mu.$$

□

Pour tout γ dans S_w posons

$$\eta_{\gamma}^d := \left(\frac{c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})}(\text{pgcd}(w_{I(\gamma)})))}{\text{pgcd}(w_{I(\gamma)})} \right)^d \in H^{2d}(|\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})|, \mathbb{C}).$$

Remarquons que η_{γ}^d est nul pour $d \geq \delta(\gamma)$.

Nous renvoyons à la formule (III.3.3) pour la définition de l'intégrale orbifolde.

PROPOSITION IV.3.13. *On a l'égalité suivante*

$$\int_{\mathbb{P}(w)}^{\text{orb}} \eta_0^n = \left(\prod_{i=0}^n w_i \right)^{-1}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition d'une intégrale orbifolde (III.3.3) et la remarque IV.1.11, nous avons

$$\int_{\mathbb{P}(w)}^{\text{orb}} \eta_0^n = \frac{1}{\text{pgcd}(w)} \int_{|\mathbb{P}(w)_{\text{reg}}|} \eta_0^n.$$

Puis les propositions IV.2.1 et III.5.8 impliquent les égalités suivantes :

$$\int_{|\mathbb{P}(w)_{\text{reg}}|} \eta_0^n = \frac{1}{\deg(f_w)} \int_{\mathbb{P}^n} \left(\frac{c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\text{pgcd}(w)))}{\text{pgcd}(w)} \right)^n = \frac{1}{\deg(f_w)}.$$

La remarque IV.1.19 termine la démonstration. □

PROPOSITION IV.3.14. *L'ensemble $\boldsymbol{\eta} := \{\eta_{\gamma}^d \mid \gamma \in S_w, d \in \{0, \dots, \delta(\gamma) - 1\}\}$ est une base du \mathbb{C} -espace vectoriel $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$. Le degré orbifold de η_{γ}^d est $2(d + a(\gamma))$.*

DÉMONSTRATION. D'après la remarque IV.3.10, la classe η_{γ}^d engendre le \mathbb{C} -espace vectoriel $H^{2d}(|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}|, \mathbb{C})$. Ainsi, les éléments $\eta_{\gamma}^0, \dots, \eta_{\gamma}^{\delta(\gamma)-1}$ forment une base de $H^*(|\mathbb{P}(w)_{(e^{2i\pi\gamma})}|, \mathbb{C})$. Nous en déduisons que $\boldsymbol{\eta}$ est une base de l'espace vectoriel $H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$ et que $\deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma}^d) = 2(d + a(\gamma))$. □

EXEMPLE IV.3.15. Considérons les poids $w = (1, 2, 2, 3, 3, 3)$ (cet exemple est considéré dans l'article [Jia03]). Nous avons

$$\begin{aligned} n &= 5, \mu = 14, \\ S_w &= \left\{ 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3} \right\}, \\ \delta(0) &= 6, \delta(1/3) = \delta(2/3) = 3, \delta(1/2) = 2 \\ I(0) &= \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}, I(1/3) = I(2/3) = \{3, 4, 5\}, I(1/2) = \{1, 2\}. \end{aligned}$$

Les ages sont $a(0) = 0$, $a(1/3) = 5/3$, $a(1/2) = 2$ et $a(2/3) = 4/3$. La cohomologie orbifolde $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3, 3))$ est

$$\begin{aligned} &H^{2*}(|\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3, 3)|) \oplus H^{2*-10/3}(|\mathbb{P}(3, 3, 3)|) \\ &\oplus H^{2*-4}(|\mathbb{P}(2, 2)|) \oplus H^{2*-8/3}(|\mathbb{P}(3, 3, 3)|). \end{aligned}$$

Nous visualisons cette cohomologie « en ligne ». Chaque ligne correspond à la cohomologie de $|\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})|$ et chaque groupe de cohomologie, noté H^i , qui apparaît dans le tableau ci-dessous est \mathbb{C} .

$$\begin{array}{ll} \gamma = 0, & |\mathbb{P}(w_{I(0)})| = |\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3, 3)| & H^0 \oplus H^2 \oplus H^4 \oplus H^6 \oplus H^8 \oplus H^{10} \\ \gamma = 1/3, & |\mathbb{P}(w_{I(1/3)})| = |\mathbb{P}(3, 3, 3)| & H^{10/3} \oplus H^{2+10/3} \oplus H^{4+10/3} \\ \gamma = 1/2, & |\mathbb{P}(w_{I(1/2)})| = |\mathbb{P}(2, 2)| & H^4 \oplus H^6 \\ \gamma = 2/3, & |\mathbb{P}(w_{I(2/3)})| = |\mathbb{P}(3, 3, 3)| & H^{8/3} \oplus H^{2+8/3} \oplus H^{4+8/3} \end{array}$$

Nous visualisons la base $\boldsymbol{\eta}$ de la même manière.

$$\begin{array}{ll} \gamma = 0, & \mathbb{C}\eta_0^0 \oplus \mathbb{C}\eta_0^1 \oplus \mathbb{C}\eta_0^2 \oplus \mathbb{C}\eta_0^3 \oplus \mathbb{C}\eta_0^4 \oplus \mathbb{C}\eta_0^5 \\ \gamma = 1/3, & \mathbb{C}\eta_{1/3}^0 \oplus \mathbb{C}\eta_{1/3}^1 \oplus \mathbb{C}\eta_{1/3}^2 \\ \gamma = 1/2, & \mathbb{C}\eta_{1/2}^0 \oplus \mathbb{C}\eta_{1/2}^1 \\ \gamma = 2/3, & \mathbb{C}\eta_{2/3}^0 \oplus \mathbb{C}\eta_{2/3}^1 \oplus \mathbb{C}\eta_{2/3}^2 \end{array}$$

IV.4. La dualité de Poincaré orbifolde des espaces projectifs à poids

Dans un premier paragraphe, nous donnerons la définition générale de la dualité de Poincaré pour les orbifolds complexes et commutatifs (cf. l'article de [CR04]). Puis, nous appliquerons cette définition sur notre exemple fétiche $\mathbb{P}(w)$. La proposition IV.4.4 nous donne une formule explicite de cette dualité dans la base $\boldsymbol{\eta}$.

IV.4.a. Définition générale de la dualité de Poincaré orbifold. Nous suivons le paragraphe 3.3 de [CR04]. Soit X une orbifold complexe, commutative et compacte de dimension complexe n . L'application $I : X_{(g)} \rightarrow X_{(g^{-1})}$ qui à (x, g) associe (x, g^{-1}) est un isomorphisme entre orbifolds.

Pour tout g et pour tout $0 \leq d \leq n$, posons

$$\begin{aligned} \langle \cdot, \cdot \rangle_g : H^{2(d-\text{age}(g))}(X_{(g)}, \mathbb{C}) \times H^{2(n-d-\text{age}(g^{-1}))}(X_{(g^{-1})}, \mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (\alpha, \beta) &\longmapsto \int_{X_{(g)}}^{\text{orb}} \alpha \wedge I^* \beta \end{aligned}$$

La dualité de Poincaré orbifold est un accouplement

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : H_{\text{orb}}^d(X, \mathbb{C}) \times H_{\text{orb}}^{2n-d}(X, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}$$

pour tout $0 \leq d \leq n$, défini par la somme directe des accouplements $\langle \cdot, \cdot \rangle_g$.

PROPOSITION IV.4.1 (cf. proposition 3.3.1 de [CR04]). *La dualité de Poincaré orbifold est une forme bilinéaire non dégénérée.*

REMARQUE IV.4.2. D'après l'article de [Sat56], l'espace topologique sous-jacent à une orbifold a une dualité de Poincaré qui est donnée par l'intégrale orbifold. Ainsi, la restriction de la dualité de Poincaré orbifold à $X_{(\text{id})} = |X|$ est la dualité de Poincaré de Satake sur $H^*(|X|, \mathbb{C})$. Remarquons que si l'orbifold n'est pas réduite c'est-à-dire que $\text{Ker}(X)$ n'est pas réduit à $\{\text{id}\}$, alors d'après la formule (III.3.3) l'intégrale orbifold est un multiple de l'intégrale ordinaire.

EXEMPLE IV.4.3. (1) Soit Y une variété complexe vue comme orbifold. La dualité de Poincaré orbifold est exactement la dualité de Poincaré ordinaire sur Y car l'intégrale orbifold est l'intégrale ordinaire.

(2) Soit G un groupe commutatif qui agit trivialement sur une variété complexe Y de dimension n . Le quotient $X := Y/G$ est une orbifold. Nous avons $|X| = |Y|$ mais pour tout $\alpha \in H^{2n}(Y, \mathbb{C})$, nous avons

$$\int_X^{\text{orb}} \alpha = \frac{1}{\#G} \int_Y \alpha.$$

Ainsi, la dualité de Poincaré orbifold restreint à $X_{(\text{id})} = X$ est à un multiple près la dualité de Poincaré de la variété Y .

IV.4.b. Dualité de Poincaré orbifold de $\mathbb{P}(w)$. La proposition suivante exprime la dualité de Poincaré orbifold de $\mathbb{P}(w)$ dans la base $\boldsymbol{\eta}$.

PROPOSITION IV.4.4. *Soient η_γ^d et $\eta_{\gamma'}^{d'}$ deux éléments de la base $\boldsymbol{\eta}$.*

- (1) *Si $\gamma' \neq \{1 - \gamma\}$, alors on a $\langle \eta_\gamma^d, \eta_{\gamma'}^{d'} \rangle = 0$.*
- (2) *Si $\gamma' = \{1 - \gamma\}$ alors on a $I(\gamma') = I(\gamma)$ et*

$$\langle \eta_\gamma^d, \eta_{\{1-\gamma\}}^{d'} \rangle = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(\gamma)} w_i \right)^{-1} & \text{si } \deg^{\text{orb}}(\eta_\gamma^d) + \deg^{\text{orb}}(\eta_{\{1-\gamma\}}^{d'}) = 2n ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE IV.4.5. (1) La remarque II.2.7 et la proposition IV.3.14 impliquent que la condition $\deg^{\text{orb}}(\eta_\gamma^d) + \deg^{\text{orb}}(\eta_{\{1-\gamma\}}^{d'}) = 2n$ est équivalente à la condition $d + d' = \delta(\gamma) - 1$.

- (2) Soient $\gamma \in S_w$ et $d \in \{0, \dots, \delta(\gamma)\}$. Le dual de η_γ^d pour la forme bilinéaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est $\left(\prod_{i \in I(\gamma)} w_i \right) \eta_{\{1-\gamma\}}^{\delta(\gamma)-1-d}$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION IV.4.4. D'après la définition de la dualité de Poincaré, si $\gamma' \neq \{1 - \gamma\}$ ou $d + d' \neq \delta(\gamma) - 1$ alors $\langle \eta_\gamma^d, \eta_{\{1-\gamma\}}^{d'} \rangle = 0$. Si $d + d' = \delta(\gamma) - 1$, alors nous avons

$$\begin{aligned} \langle \eta_\gamma^d, \eta_{\{1-\gamma\}}^{d'} \rangle &= \int_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})}^{\text{orb}} \eta_\gamma^d \wedge \eta_{\{1-\gamma\}}^{d'} \\ &= \int_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})}^{\text{orb}} \left(\frac{c_1^{\text{orb}}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma)})}(\text{pgcd}(w_{I(\gamma)})))}{\text{pgcd}(w_{I(\gamma)})} \right)^{d+d'}. \end{aligned}$$

Puis la proposition IV.3.13 implique que cette intégrale vaut $\left(\prod_{i \in I(\gamma)} w_i \right)^{-1}$. Finalement, la remarque IV.4.5.(1) nous permet de conclure. \square

EXEMPLE IV.4.6. Pour les poids $w = (1, 2, 2, 3, 3, 3)$, la dualité de Poincaré dans la base $\boldsymbol{\eta}$ (cf. l'exemple IV.3.15) s'exprime par

$$\left(\begin{array}{c|c|c|c} 2^{-2}3^{-3} \text{ antidiag}_6 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3^{-3} \text{ antidiag}_3 \\ \hline 0 & 0 & 2^{-2} \text{ antidiag}_2 & \\ \hline 0 & 3^{-3} \text{ antidiag}_3 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

où antidiag_n est la matrice antidiagonale de taille $n \times n$ avec des 1 sur l'antidiagonale.

IV.5. Cup produit orbifold des espaces projectifs à poids

Dans un premier paragraphe, nous donnons la définition du cup produit orbifold pour les orbifolds complexes, compactes et commutatives (cf. l'article [CR04]).

Dans un second paragraphe, nous expliciterons le cup produit orbifold de $\mathbb{P}(w)$ dans la base $\boldsymbol{\eta}$. Ce résultat est donné explicitement dans le corollaire IV.5.26. En particulier, le fibré obstruction est calculé dans le théorème IV.5.13.

IV.5.a. La définition du cup produit orbifold. Avant de commencer la définition, a priori surprenante, du cup produit orbifold, nous allons expliquer l'heuristique du problème. Si on veut couper une classe d'homologie de $X_{(g)}$ avec une classe de $X_{(h)}$, on ne peut pas forcément choisir des représentants de ces classes d'homologie de façon qu'ils soient transverses. En effet ces représentants doivent rester dans leur espace tordu respectif, ce qui est une contrainte supplémentaire. Ainsi, il se peut que l'intersection des représentants n'ait pas la bonne dimension. Pour remédier à ce phénomène, on doit introduire un fibré correcteur. Dans la littérature, on l'appelle aussi fibré obstruction.

Nous suivons le paragraphe 4.1 de [CR04]. Soit X une orbifolde complexe, compacte et commutative.

Considérons l'ensemble

$$\Sigma_3 X = \{(x, g_1, g_2, g_3) \in \sqcup_{x \in X} G_x \times G_x \times G_x \mid g_1 g_2 g_3 = \text{id}\}.$$

Comme au paragraphe IV.3, nous définissons une topologie sur $\Sigma_3 X$ à l'aide d'une base d'ouverts. Pour tout $(x, g_1, g_2, g_3) \in \Sigma_3 X$ et pour toute carte $(\tilde{U}_x, G_x, \pi_x)$ d'un ouvert U_x contenant x , nous posons

$$\left\{ \begin{array}{l} (y, h_1, h_2, h_3) \in \Sigma_3 X \mid \exists (\alpha, \kappa) : (\tilde{U}_y, G_y, \pi_y) \hookrightarrow (\tilde{U}_x, G_x, \pi_x) \\ \text{qui vérifie } \kappa(h_i) = g_i. \end{array} \right\}$$

Le lemme suivant se démontre de la même façon que le lemme IV.3.2.

LEMME IV.5.1. (1) *La collection de ces sous-ensembles de $\Sigma_3 X$ définit une topologie sur $\Sigma_3 X$.*

(2) *L'ensemble $\Sigma_3 X$ muni de cette topologie est séparé.*

L'application $P_3 : \Sigma_3 X \rightarrow |X|$ qui à (x, g_1, g_2, g_3) associe x est continue. Le lemme suivante se démontre de la même façon que le lemme IV.3.3.

LEMME IV.5.2. *Soit X une orbifolde complexe, compacte et commutative. L'espace topologique $\Sigma_3 X$ a un nombre fini de composantes connexes.*

Nous dirons que $(x, g_1, g_2, g_3) \sim (y, h_1, h_2, h_3)$ si (x, g_1, g_2, g_3) et (y, h_1, h_2, h_3) sont dans la même composante connexe de $\Sigma_3 X$. Soit T_3 l'ensemble des classes d'équivalence. Nous notons (g_1, g_2, g_3) la classe d'équivalence de (x, g_1, g_2, g_3) . La notation (g_1, g_2, g_3) sous-entend que g_1, g_2, g_3 sont dans un groupe G_x pour un certain point $x \in |X|$. Notons $X_{(g_1, g_2, g_3)}$ la composante connexe de ΣX qui contient (x, g_1, g_2, g_3) . Nous avons la décomposition suivante de ΣX

$$\Sigma_3 X = \bigsqcup_{(g_1, g_2, g_3) \in T_3} X_{(g_1, g_2, g_3)}.$$

D'après le lemme 4.1.1 de [CR04], les espaces topologiques $X_{(g_1, g_2, g_3)}$ sont naturellement munis d'une structure d'orbifold. Nous ne donnerons pas de précision supplémentaire concernant le cas général mais dans le cas des espaces projectifs à poids, cette structure orbifold est donnée par la remarque IV.3.10.(3).

Soit \mathbb{P}^1 la sphère de Riemann avec trois points marqués $(0, 1, \infty)$. Soit U_0 la carte affine de \mathbb{P}^1 contenant 0. Notons z une coordonnée sur U_0 . Soit $z = 1/2$ le point base noté $*$. Nous considérons les lacets suivants :

$$\begin{aligned} \lambda_0 : [0, 2\pi] &\rightarrow U_0 \\ &t \mapsto \exp(it)/2; \\ \lambda_1 : [0, 2\pi] &\rightarrow U_0 \\ &t \mapsto 1 - \frac{1}{2} \exp(it); \\ \lambda_\infty &:= (\lambda_0 \lambda_1)^{-1}. \end{aligned}$$

Le groupe fondamental de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ est engendré par les lacets $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_\infty$ (nous notons de la même façon le lacet et sa classe dans le groupe fondamental). Soit (x, g_0, g_1, g_∞) un élément de $\Sigma_3 X$. Nous avons un morphisme de groupes surjectif $\rho : \pi_1(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, *) \rightarrow H$ qui à λ_i associe g_i où H est le sous-groupe de G_x engendré par g_0, g_1, g_∞ . Nous en déduisons un revêtement galoisien de $\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}$ de groupe d'automorphismes H . Nous complétons ce revêtement en un revêtement ramifié, noté $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$. La variété Σ est une surface de Riemann compacte. Considérons l'application $ev : X_{(g_0, g_1, g_\infty)} \rightarrow X$ qui à (x, g_0, g_1, g_∞) associe x . L'application ev est une bonne application. Nous renvoyons le lecteur à l'article de Chen et Ruan pour la démonstration dans le cas général (cf. le lemme 4.2.3 dans [CR04]). Cependant, dans le cas des espaces projectifs à poids, nous verrons que l'application ev est une bonne application orbifold (cf. 5 lignes avant l'équation (IV.5.12)). Nous définissons

le fibré orbifold sur $X_{(g_0, g_1, g_\infty)}$ par

$$(IV.5.3) \quad E(g_0, g_1, g_\infty) := (\text{ev}^* TX \otimes H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C}))^H.$$

Ce fibré est appelé fibré d'obstruction.

D'après la preuve du théorème 4.1.5 p.20 de l'article [CR04], le rang du fibré $E(g_0, g_1, g_\infty)$ est

$$(IV.5.4) \quad \dim_{\mathbb{C}} X_{(g_0, g_1, g_\infty)} - \dim_{\mathbb{C}} X + \text{age}(g_0) + \text{age}(g_1) + \text{age}(g_\infty).$$

DÉFINITION IV.5.5 (cf. définition 4.1.2 dans [CR04]). *Soient α, β, γ dans $H_{\text{orb}}^*(X, \mathbb{C})$. On définit*

$$(\alpha, \beta, \gamma) := \sum_{(g_1, g_2, g_3) \in T_3} \int_{X_{(g_1, g_2, g_3)}}^{\text{orb}} \text{ev}_1^* \alpha \wedge \text{ev}_2^* \beta \wedge \text{ev}_3^* \gamma \wedge c_{\text{max}}(E(g_1, g_2, g_3))$$

où $c_{\text{max}}(E(g_1, g_2, g_3)) \in H^{2 \text{rang}(E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty))}(|X_{(g_0, g_1, g_\infty)}|, \mathbb{C})$ est la classe de Chern maximale du fibré orbifold $E(g_1, g_2, g_3)$ et $\text{ev}_i : X_{(g_1, g_2, g_3)} \rightarrow \Sigma X$ est l'application qui à $(x, (g_1, g_2, g_3))$ associe (x, g_i) pour $i \in \{1, 2, 3\}$.

Puis, nous définissons le cup produit orbifold.

DÉFINITION IV.5.6 (cf. définition 4.1.3 dans [CR04]). *On définit le cup produit orbifold sur $H_{\text{orb}}^*(X, \mathbb{C})$ par la formule*

$$\langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle = (\alpha, \beta, \gamma).$$

EXEMPLE IV.5.7. (1) Soit Y une variété complexe vue comme orbifold. Le fibré obstruction est de rang 0 et le cup produit orbifold est simplement le cup produit ordinaire car l'intégrale orbifolde est l'intégrale ordinaire.

(2) Soit G un groupe commutatif qui agit trivialement sur une variété complexe Y de dimension n . Le quotient $X := Y/G$ est une orbifold. Le rang du fibré obstruction est 0. Le cup produit ordinaire sur $|Y| = |X|$ est le cup produit orbifold restreint à $X_{(id)} = X$. En effet, comme dans la définition IV.5.5, nous intégrons avec l'intégrale orbifolde, nous avons la même constante qui apparaît de part et d'autre de l'égalité dans la définition IV.5.6.

Nous énonçons les propriétés du cup produit orbifold données dans le théorème 4.1.5 de [CR04] mais nous renvoyons à la preuve dans l'article [CR04].

THÉORÈME IV.5.8. *Soit X une orbifold complexe, commutative, compacte et connexe.*

(1) *Le cup produit orbifold respecte la graduation de $H_{\text{orb}}^*(X, \mathbb{C})$, c'est-à-dire*

$$\cup : H_{\text{orb}}^p(X, \mathbb{C}) \times H_{\text{orb}}^q(X, \mathbb{C}) \rightarrow H_{\text{orb}}^{p+q}(X, \mathbb{C}).$$

(2) *Le cup produit est associatif et son unité est la classe de 1 dans $H^0(|X|, \mathbb{C})$.*

(3) *Pour tout $(\alpha, \beta) \in H_{\text{orb}}^d(X, \mathbb{C}) \times H_{\text{orb}}^{2n-d}(X, \mathbb{C})$, nous avons*

$$\int_X^{\text{orb}} \alpha \cup \beta = \langle \alpha, \beta \rangle.$$

(4) *Le cup produit orbifold restreint à la cohomologie ordinaire $H^*(|X|, \mathbb{C})$ est le cup produit ordinaire sur $|X|$.*

IV.5.b. Calcul du cup produit pour l'orbifold $\mathbb{P}(w)$. Avant de calculer le fibré obstruction dans le cas de $\mathbb{P}(w)$, nous démontrons quelques résultats préliminaires.

Nous allons calculer le fibré tangent orbifold de $\mathbb{P}(w)$. Considérons l'injection suivante (cf. notation IV.1.9) :

$$\alpha : \tilde{U} \hookrightarrow \tilde{V}$$

$$(y_0, \dots, 1_i, \dots, y_n) \mapsto (y_0/y_j^{w_0/w_j}, \dots, 1_j, \dots, y_n/y_j^{w_n/w_j})$$

où $\tilde{U} \subset \tilde{U}_i$ et $\tilde{V} \subset \tilde{U}_j$. Pour $k \neq j$, nous notons $t_k := y_k/y_j^{w_k/w_j}$. La fonction de transition sur $U \cap V$ est donnée par la matrice :

$$(IV.5.9) \quad \psi_\alpha(y_0, \dots, 1_i, \dots, y_n) = \left(\frac{\partial t_k}{\partial y_\ell} \right)_{(k, \ell) \in \{0, \dots, n\} \times \{0, \dots, n\} - \{(j, i)\}}$$

D'après le corollaire IV.1.17, un fibré vectoriel orbifold sur $\mathbb{P}(w)$ se restreint à $\mathbb{P}(w_I)$.

LEMME IV.5.10. *Pour tout sous-ensemble I de $\{0, \dots, n\}$, on a la décomposition suivante :*

$$T\mathbb{P}(w) |_{\mathbb{P}(w_I)} \simeq \left(\bigoplus_{i \in I^c} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_I)}(w_i) \right) \oplus T\mathbb{P}(w_I).$$

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer le résultat pour $I = \{0, \dots, \delta\}$. Soient i, j dans $\{0, \dots, n\}$. Nous reprenons les notations ci-dessus. En coordonnées, la matrice de transition de $T\mathbb{P}(w)$ est donnée par

$$(IV.5.11) \quad \frac{\partial}{\partial y_\ell} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n -\frac{w_k}{w_j} \frac{y_k}{y_j^{\frac{w_k}{w_j}-1}} \frac{\partial}{\partial t_k} & \text{si } \ell = j; \\ \frac{1}{y_j^{\frac{w_\ell}{w_j}}} \frac{\partial}{\partial t_\ell} & \text{si } \ell \neq j. \end{cases}$$

pour $\ell \neq i$.

Restreindre le fibré $T\mathbb{P}(w)$ à $\mathbb{P}(w_I)$ revient à poser $y_\ell = 0$ pour $\ell > \delta$. Ainsi, les fonctions de transition du fibré orbifold $T\mathbb{P}(w)|_{\mathbb{P}(w_I)}$ sont données par les relations (IV.5.11) où on ne fait la somme que jusqu'à δ . Finalement, la matrice de transition du fibré $T\mathbb{P}(w)|_{\mathbb{P}(w_I)}$ qui correspond à l'injection α est du type suivant

$$\begin{pmatrix} A_{ij} & 0 \\ 0 & B_{ij} \end{pmatrix}$$

où A_{ij} est une matrice (de taille $\delta \times \delta$) de transition du fibré $T\mathbb{P}(w_I)$ et B_{ij} est la matrice diagonale

$$\text{diag} \left(\frac{1}{y_j^{\frac{w_{\delta+1}}{w_j}}}, \dots, \frac{1}{y_j^{\frac{w_n}{w_j}}} \right).$$

D'après la remarque IV.2.2(1), l'ensemble des matrices $\{B_{ij} \mid i, j \in \{0, \dots, \delta\}\}$ forme les fonctions de transition du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_I)}(w_{\delta+1}) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_I)}(w_n)$. \square

Soient γ_0, γ_1 et γ_∞ dans S_w tels que $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N}$. Nous posons

$$I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) := I(\gamma_0) \cap I(\gamma_1) \cap I(\gamma_\infty).$$

Soit H le groupe abélien engendré par $e^{2i\pi\gamma_0}, e^{2i\pi\gamma_1}$ et $e^{2i\pi\gamma_\infty}$. De la construction expliquée dans le début du paragraphe IV.5, nous déduisons un revêtement ramifié de groupe d'automorphismes H , noté $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ où Σ est une surface de Riemann compacte.

L'application ev est simplement une inclusion de $\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})$ dans $\mathbb{P}(w)$. C'est une bonne application d'après la proposition IV.1.15. Nous en déduisons que le fibré obstruction, défini par la formule (IV.5.3) est

$$E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) := \left(T\mathbb{P}(w)|_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})} \otimes H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C}) \right)^H.$$

D'après la formule (IV.5.4), le rang de ce fibré est

$$(IV.5.12) \quad \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)}) - \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(w) + a(\gamma_0) + a(\gamma_1) + a(\gamma_\infty).$$

THÉORÈME IV.5.13. *Soient γ_0, γ_1 et γ_∞ dans S_w tels que $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N}$. Le fibré orbifold $E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)$ est isomorphe à*

$$\bigoplus_{j \in J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})(w_j)}$$

où $J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = \{i \in \{0, \dots, n\} \mid \{\gamma_0 w_i\} + \{\gamma_1 w_i\} + \{\gamma_\infty w_i\} = 2\}$.

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME IV.5.13. D'après la décomposition du lemme IV.5.10, le fibré obstruction $E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)$ est

$$\left(\bigoplus_{i \in I^c(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})(w_i)} \otimes H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C}) \right)^H \oplus \left(T\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)}) \otimes H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C}) \right)^H.$$

Puisque H agit trivialement sur $T\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})$ et

$$H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C})^H = 0 \text{ car } H^1(\mathbb{P}^1, \mathbb{C}) = 0,$$

nous obtenons la décomposition suivante :

$$E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = \left(\bigoplus_{i \in I^c(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})(w_i)} \otimes H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C}) \right)^H.$$

Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, notons χ_i le caractère du groupe H qui à $e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_j}$ associe $e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_j w_i}$ pour $j \in \{0, 1, \infty\}$. Le groupe H agit sur $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})(w_i)}$ par multiplication par χ_i . Soit ω une $(1,0)$ -forme différentielle fermée telle que $\varphi_g^* \omega = \chi_i(g)\omega$. Nous avons

$$\begin{aligned} \overline{\varphi_g^* \omega} &= \overline{\chi_i(g)\omega} \\ &= \chi_i(g)^{-1} \overline{\omega}. \end{aligned}$$

Nous en déduisons que $\overline{H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})}_{\chi_i} = H^{0,1}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i^{-1}}$. Finalement, nous obtenons

$$E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = \bigoplus_{i \in I^c(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} \left(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})(w_i)} \otimes \overline{H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})}_{\chi_i} \right).$$

Pour finir la démonstration, il suffit d'appliquer le lemme suivant. □

LEMME IV.5.14. *Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on a*

$$H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \{\gamma_0 w_i\} + \{\gamma_1 w_i\} + \{\gamma_\infty w_i\} = 2; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE IV.5.15. Nous avons l'inclusion suivante

$$J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) \subset (I(\gamma_0) \bigcup I(\gamma_1) \bigcup I(\gamma_\infty))^c.$$

Soit χ un caractère du groupe H . Avant de démontrer ce lemme, nous allons d'abord calculer la caractéristique d'Euler $e(\mathbb{P}^1, (\pi_* \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi)$ dans les lemmes IV.5.16 et IV.5.17 puis le lemme IV.5.19 calculera $H^1(\Sigma, \mathbb{C})_\chi$.

Pour tout ouvert U dans \mathbb{P}^1 , notons $h_0(\pi^{-1}(U))$ le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}(U)$. Le groupe H agit transitivement sur $\pi_* \underline{\mathbb{C}}_\Sigma(U) = \mathbb{C}^{h_0(\pi^{-1}(U))}$ en permutant les coordonnées de $\mathbb{C}^{h_0(\pi^{-1}(U))}$. Posons

$$(\pi_* \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi(U) = \{x \in \mathbb{C}^{h_0(\pi^{-1}(U))} \mid \forall h \in H, h \cdot x = \chi(h)x\}.$$

Notons \mathcal{F} le faisceau $(\pi_* \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi$. Comme $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un revêtement ramifié aux points $0, 1$ et ∞ de \mathbb{P}^1 , le faisceau $\mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}}$ est un faisceau localement constant de rang 1. En effet, une fonction constante $f : \pi^{-1}(U) \rightarrow \mathbb{C}$, qui vérifie $f(hx) = \chi(h)f(x)$ pour tout $(h, x) \in H \times \pi^{-1}(U)$, est déterminée par sa valeur sur une composante connexe de $\pi^{-1}(U)$.

LEMME IV.5.16. *On a l'égalité suivante :*

$$e(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = e(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}}) + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_0 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_1 + \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_\infty$$

où e est la caractéristique d'Euler.

DÉMONSTRATION DU LEMME IV.5.16. On a la suite exacte de Mayer-Vietoris suivante :

$$\cdots \rightarrow H_{\{0, 1, \infty\}}^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) \rightarrow H^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) \rightarrow H_{\{0, 1, \infty\}}^i(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}}) \rightarrow \cdots$$

où $H_{\{0, 1, \infty\}}^i(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})$ désigne la cohomologie à support dans $\{0, 1, \infty\}$. Nous en déduisons l'égalité suivante :

$$e(H_{\{0, 1, \infty\}}^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})) - e(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) + e(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}}) = 0.$$

Comme nous avons

$$e(H_{\{0, 1, \infty\}}^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})) = e(H_{\{0\}}^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})) + e(H_{\{1\}}^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})) + e(H_{\{\infty\}}^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})),$$

il suffit de montrer que $e(H_{\{0\}}^*(\mathbb{P}^1, \mathcal{F})) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_0$. Soit V un disque ouvert centré en 0 ne contenant ni 1 ni ∞ tel que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(V) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_0$. Le lemme d'excision nous donne la suite exacte suivante :

$$\cdots \longrightarrow H_{\{0\}}^i(V, \mathcal{F}|_V) \longrightarrow H^i(V, \mathcal{F}|_V) \longrightarrow H^i(V - \{0\}, \mathcal{F}|_{V - \{0\}}) \longrightarrow \cdots$$

Nous obtenons l'égalité

$$e(H_{\{0\}}^*(V, \mathcal{F}|_V)) - e(V, \mathcal{F}|_V) + e(V - \{0\}, \mathcal{F}|_{V-\{0\}}) = 0.$$

Or comme $\mathcal{F}|_{V-\{0\}}$ est un faisceau localement constant de rang 1, d'après [DM86] p.11, nous avons $e(V - \{0\}, \mathcal{F}|_{V-\{0\}}) = e(V - \{0\}) = 0$ car $V - \{0\}$ est homéomorphe à S^1 .

Finalement, nous obtenons $e(H_{\{0\}}^*(V, \mathcal{F}|_V)) = e(V, \mathcal{F}|_V)$. Le complexe de faisceaux $(\pi_* \mathcal{E}_\Sigma^\bullet)_\chi$, défini dans la démonstration du théorème VIII.3, est une résolution acyclique pour le foncteur $\Gamma(\mathbb{P}^1, \cdot)$ du faisceau \mathcal{F} . Nous en déduisons que le complexe $(\pi_* \mathcal{E}_\Sigma^\bullet)_\chi|_V$ est une résolution acyclique pour le foncteur $\Gamma(V, \cdot)$ du faisceau $\mathcal{F}|_V$. Comme V est convexe, le lemme de Poincaré et le théorème VIII.3 impliquent que $H^i(V, \mathcal{F}|_V) = 0$ pour $i > 0$. Nous en déduisons que $e(V, \mathcal{F}|_V) = \dim_{\mathbb{C}} H^0(V, \mathcal{F}|_V)$. \square

LEMME IV.5.17. *Soit χ un caractère non trivial de H . On a*

$$e(\mathbb{P}^1, (\pi_* \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi) = \begin{cases} -1 & \text{si } \chi(e^{2i\pi\gamma_0}) \neq 1, \chi(e^{2i\pi\gamma_1}) \neq 1 \text{ et } \chi(e^{2i\pi\gamma_\infty}) \neq 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

REMARQUE IV.5.18. Rappelons que H est engendré par $e^{2i\pi\gamma_0}, e^{2i\pi\gamma_1}$ et $e^{2i\pi\gamma_\infty}$ et que $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N}$ c'est-à-dire que $e^{2i\pi\gamma_0} \cdot e^{2i\pi\gamma_1} \cdot e^{2i\pi\gamma_\infty} = 1$. Nous en déduisons que si χ est un caractère non trivial de H alors le cardinal de l'ensemble $\{j \in \{0, 1, \infty\} \mid \chi(e^{2i\pi\gamma_j}) = 1\}$ est au plus 1.

DÉMONSTRATION DU LEMME IV.5.17. D'après le lemme IV.5.16, il suffit de calculer les nombres $e(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}})$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_0$, $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_1$ et $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_\infty$. D'après la relation (2.2.1) de [DM86], on a

$$e(\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}, \mathcal{F}|_{\mathbb{P}^1 - \{0, 1, \infty\}}) = e(\mathbb{P}^1) - e(\{0, 1, \infty\}) = 2 - 3 = -1.$$

Montrons l'égalité suivante :

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_0 = \begin{cases} 1 & \text{si } \chi(e^{2i\pi\gamma_0}) = 1; \\ 0 & \text{si } \chi(e^{2i\pi\gamma_0}) \neq 1. \end{cases}$$

Soit V un voisinage ouvert de 0 tel que $\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(V) = \dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}_0$ et que le nombre de composantes connexes de $\pi^{-1}(V)$ soit $\#H/\langle e^{2i\pi\gamma_0} \rangle$, où $\langle e^{2i\pi\gamma_0} \rangle$ est le sous-groupe engendré par $e^{2i\pi\gamma_0}$. La condition $\chi(e^{2i\pi\gamma_0}) = 1$ est équivalente à l'existence d'un élément non nul dans $\mathcal{F}(V)$. Ainsi nous avons

$$\dim_{\mathbb{C}} \mathcal{F}(V) = 1 \Leftrightarrow \chi(e^{2i\pi\gamma_0}) = 1.$$

Le même raisonnement pour les points 1 et ∞ et la remarque IV.5.18 nous donne l'alternative suivante :

- soit $\chi(e^{2i\pi\gamma_0}) \neq 1, \chi(e^{2i\pi\gamma_1}) \neq 1$ et $\chi(e^{2i\pi\gamma_\infty}) \neq 1$ et alors $\dim \mathcal{F}_0 = \dim \mathcal{F}_1 = \dim \mathcal{F}_\infty = 0$;
- soit il existe $\gamma \in \{\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty\}$ tel que $\chi(e^{2i\pi\gamma}) = 1$ et alors $\dim \mathcal{F}_0 + \dim \mathcal{F}_1 + \dim \mathcal{F}_\infty = 1$.

□

Les deux lemmes précédents IV.5.16 et IV.5.17, nous permettent de calculer $H^1(\Sigma, \mathbb{C})_\chi$.

LEMME IV.5.19. *Soit χ un caractère non trivial de H . On a*

$$H^1(\Sigma, \mathbb{C})_\chi = \begin{cases} \mathbb{C} & \text{si } \chi(e^{2i\pi\gamma_0}) \neq 1, \chi(e^{2i\pi\gamma_1}) \neq 1 \text{ et } \chi(e^{2i\pi\gamma_\infty}) \neq 1; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME IV.5.19. Montrons que

$$H^0(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = 0.$$

Le théorème VIII.3 implique que $H^j(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = H^j(\Sigma, \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi$ pour tout j . Or Σ est connexe donc $H^0(\Sigma, \underline{\mathbb{C}}_\Sigma) = \mathbb{C}$ et $H^2(\Sigma, \underline{\mathbb{C}}_\Sigma) = \mathbb{C}$. Puisque χ n'est pas le caractère trivial, nous avons $H^0(\Sigma, \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi = H^2(\Sigma, \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi = 0$.

Finalement, d'après le théorème VIII.3 et le lemme IV.5.16, nous obtenons

$$\dim_{\mathbb{C}} H^1(\Sigma, \underline{\mathbb{C}}_\Sigma)_\chi = \dim_{\mathbb{C}} H^1(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}) = -e(\mathbb{P}^1, \mathcal{F}).$$

□

Il nous reste à démontrer le lemme IV.5.14.

DÉMONSTRATION DU LEMME IV.5.14. Rappelons que $\pi : \Sigma \rightarrow \mathbb{P}^1$ est un revêtement ramifié aux points 0, 1 et ∞ de \mathbb{P}^1 de groupe d'automorphismes H où Σ est une surface de Riemann compacte. Nous avons

$$\begin{aligned} \#\pi^{-1}(0) &= \#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}); \\ \#\pi^{-1}(1) &= \#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_1}); \\ \#\pi^{-1}(\infty) &= \#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_\infty}). \end{aligned}$$

D'après le lemme IV.5.19, nous pouvons nous restreindre au cas où $i \in (I(\gamma_0) \cup I(\gamma_1) \cup I(\gamma_\infty))^c$.

– Montrons d'abord que si $H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} = \mathbb{C}$ alors $i \in J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)$.

Notons t la coordonnée sur $\mathbb{P}^1 - \{\infty\}$. Soit f une fonction holomorphe sur Σ . Posons $\omega = f\pi^*(dt/t(t-1))$.

Nous cherchons une condition sur f pour que

- (i) ω soit holomorphe;
- (ii) on ait $(h^{-1})^*\omega = \chi_i(h)\omega$ quelque soit h dans H .

Soit z_0 la coordonnée dans un voisinage d'un point de $\pi^{-1}(0)$. Dans ces coordonnées, la 1-forme holomorphe $\pi^*(dt/t(t-1))$ s'écrit

$$o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})dz_0/z_0(z_0^{o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})} - 1)$$

où $o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})$ est l'ordre de $e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}$ dans H . La condition (ii) avec $h = e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}$ se traduit par

$$f(\exp(-2\sqrt{-1}\pi/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}))z_0) = \exp(2\sqrt{-1}\pi\gamma_0 w_i)f(z_0).$$

Posons $f(z_0) = \sum_{n \geq n_0} a_n z_0^n$ avec $a_{n_0} \neq 0$. Cette condition sur f impose que si $a_n \neq 0$ alors $\gamma_0 w_i + n/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})$ est dans \mathbb{Z} . Ainsi, nous avons

$$n_0/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}) = -\{\gamma_0 w_i\} + \alpha_0 \text{ avec } \alpha_0 \in \mathbb{Z}.$$

La condition (i) implique que $n_0 \geq 1$ c'est-à-dire $\alpha_0 \geq 1$ car α_0 est un entier supérieur ou égal à $1/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}) + \{\gamma_0 w_i\}$.

Nous en déduisons que le nombre de zéros de ω comptés avec multiplicité² aux $\#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})$ points de $\pi^{-1}(0)$ est

$$(IV.5.20) \quad (n_0 - 1)\#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0}) = \#H(-\{\gamma_0 w_i\} + \alpha_0 - 1/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})).$$

Les conditions (i) et (ii) appliquées dans un voisinage d'un point de $\pi^{-1}(1)$ impliquent que $\alpha_1 \geq 1$ et que le nombre de zéros de ω comptés avec multiplicité aux $\#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_1})$ points de $\pi^{-1}(1)$ est

$$(IV.5.21) \quad \#H(-\{\gamma_1 w_i\} + \alpha_1 - 1/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_1})).$$

Soit z_∞ la coordonnée dans un voisinage d'un point de $\pi^{-1}(\infty)$. Dans ces coordonnées, nous avons

$$\pi^*(dt/t(t-1)) = -o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_\infty})dz/(1 - z^{o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_\infty})}).$$

²Ne pas confondre la multiplicité des zéros et la multiplicité des points de ramifications. Chaque point de ramification de $\pi^{-1}(0)$ a pour multiplicité $o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})$. Dans notre calcul, nous comptons les multiplicités des zéros sans les multiplicités des points de ramifications.

De même, les conditions (i) et (ii) impliquent $\alpha_\infty \geq 0$ et le nombre de zéros de ω comptés avec multiplicité aux $\#H/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_\infty})$ points de $\pi^{-1}(\infty)$ est

$$(IV.5.22) \quad \#H(-\{\gamma_\infty w_i\} + \alpha_\infty + 1 - 1/o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_\infty})).$$

La formule de Riemann-Hurwitz nous donne le genre de Σ , noté g_Σ .

$$(IV.5.23) \quad 2g_\Sigma - 2 = \#H \left(1 - \frac{1}{o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_0})} - \frac{1}{o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_1})} - \frac{1}{o(e^{2\sqrt{-1}\pi\gamma_\infty})} \right).$$

Comme ω est une 1-forme holomorphe sur une surface de Riemann compacte Σ , la somme de ses zéros vaut $2g_\Sigma - 2$. D'après les relations (IV.5.20), (IV.5.21), (IV.5.22) et (IV.5.23), nous en déduisons

$$\{\gamma_0 w_i\} + \{\gamma_1 w_i\} + \{\gamma_\infty w_i\} = \alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_\infty.$$

Vu les conditions sur α_0, α_1 et α_∞ , l'égalité ci-dessus n'est possible que si $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$ et $\alpha_\infty = 0$.

- Pour finir la démonstration, il suffit de démontrer que si $H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} = 0$ alors $\{w_i \gamma_0\} + \{w_i \gamma_1\} + \{w_i \gamma_\infty\} \neq 2$. D'après le lemme IV.5.19, nous avons l'implication suivante

$$i \notin I(\gamma_0) \cup I(\gamma_1) \cup I(\gamma_\infty) \Rightarrow H^1(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} = \mathbb{C}.$$

Or, nous avons la décomposition

$$H^1(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} = H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} \oplus \overline{H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i^{-1}}}.$$

Ainsi si $H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i} = 0$ alors $H^{1,0}(\Sigma, \mathbb{C})_{\chi_i^{-1}} = \mathbb{C}$. Puis la première partie de la démonstration implique que nous avons

$$\{-w_i \gamma_0\} + \{-w_i \gamma_1\} + \{-w_i \gamma_\infty\} = 2$$

c'est-à-dire

$$\{w_i \gamma_0\} + \{w_i \gamma_1\} + \{w_i \gamma_\infty\} = 1 \neq 2$$

car pour $i \notin I(\gamma_0) \cup I(\gamma_1) \cup I(\gamma_\infty)$, nous avons $\{-w_i \gamma_j\} = 1 - \{w_i \gamma_j\}$ pour tout $j \in \{0, 1, \infty\}$.

□

Les applications ev_j de la définition IV.5.5 sont simplement des inclusions naturelles de $\mathbb{P}(w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)})$ dans $\mathbb{P}(w)_{e^{2i\pi\gamma_j}}$, pour j dans $\{0, 1, \infty\}$.

Le corollaire suivant calcule l'expression du 3-tenseur (\cdot, \cdot, \cdot) dans la base $\boldsymbol{\eta}$ de $H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$.

COROLLAIRE IV.5.24. Soient $\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}$ et $\eta_{\gamma_\infty}^{d_\infty}$ des éléments de la base $\boldsymbol{\eta}$.

- (1) Si $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty$ n'est pas un entier, alors $(\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma_\infty}^{d_\infty}) = 0$.
- (2) Si $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty$ est un entier, alors on a

$$(\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma_\infty}^{d_\infty}) = \begin{cases} \frac{\prod_{i \in J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} w_i}{\prod_{i \in I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} w_i} & \text{si } \sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_i}^{d_i}) = 2n ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. (1) La première partie du corollaire découle de la définition et de la formule II.1.2.

- (2) Notons $w_{0,1,\infty} := w_{I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)}$. Soient γ_0, γ_1 et γ_∞ dans S_w tels que $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty$ soit un entier. Par définition, $(\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma_\infty}^{d_\infty})$ est non nul si

$$d_0 + d_1 + d_\infty + \text{rang}(E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)) = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(w_{0,1,\infty}).$$

Sous cette condition, qui est exactement $\sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_i}^{d_i}) = 2n$ (cf. la formule (IV.5.12)), nous avons

$$\begin{aligned} (\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma_\infty}^{d_\infty}) &= \int_{\mathbb{P}(w_{0,1,\infty})}^{\text{orb}} \iota_{\gamma_0}^* \eta_{\gamma_0}^{d_0} \wedge \iota_{\gamma_1}^* \eta_{\gamma_1}^{d_1} \wedge \iota_{\gamma_\infty}^* \eta_{\gamma_\infty}^{d_\infty} \wedge c_{\max}(E(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)) \\ &= \prod_{i \in J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} w_i \int_{\mathbb{P}(w_{0,1,\infty})}^{\text{orb}} \left(\frac{c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w_{0,1,\infty})})(\text{pgcd}(w_{0,1,\infty}))}{\text{pgcd}(w_{0,1,\infty})} \right)^{\dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(w_{0,1,\infty})}. \end{aligned}$$

Puis la proposition IV.3.13 termine la démonstration. \square

EXEMPLE IV.5.25. Pour l'exemple $w = (1, 2, 2, 3, 3, 3)$, nous allons regrouper les 3-tenseurs non nuls selon le triplet $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)$. Pour $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = (0, 0, 0)$ le fibré obstruction est de rang 0 et nous avons

$$\begin{aligned} (\eta_0^0, \eta_0^0, \eta_{10}^0) &= 2^{-2} 3^{-3}, & (\eta_0^0, \eta_0^1, \eta_0^4) &= 2^{-2} 3^{-3}, \\ (\eta_0^0, \eta_0^2, \eta_0^3) &= 2^{-2} 3^{-3}, & (\eta_0^1, \eta_0^1, \eta_0^3) &= 2^{-2} 3^{-3}, \\ (\eta_0^1, \eta_0^2, \eta_0^2) &= 2^{-2} 3^{-3}. \end{aligned}$$

Ceci va nous donner le cup produit sur $H^*(|\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3, 3)|)$ (cf. le théorème IV.5.8). Pour $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = (0, 1/2, 1/2)$ le fibré obstruction est de rang 0 et nous avons

$$(\eta_0^0, \eta_{1/2}^0, \eta_{1/2}^1) = 2^{-2}, \quad (\eta_0^1, \eta_{1/2}^0, \eta_{1/2}^0) = 2^{-2}.$$

Pour $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = (0, 1/3, 2/3)$ le fibré obstruction est de rang 0 et nous avons

$$\begin{aligned} (\eta_0^0, \eta_{1/3}^0, \eta_{2/3}^2) &= 3^{-3}, & (\eta_0^0, \eta_{1/3}^2, \eta_{2/3}^0) &= 3^{-3}, \\ (\eta_0^0, \eta_{1/3}^1, \eta_{2/3}^1) &= 3^{-3}, & (\eta_0^1, \eta_{1/3}^1, \eta_{2/3}^0) &= 3^{-3}, \\ (\eta_0^1, \eta_{1/3}^0, \eta_{2/3}^1) &= 3^{-3}, & (\eta_0^2, \eta_{1/3}^0, \eta_{2/3}^0) &= 3^{-3}. \end{aligned}$$

Pour $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = (1/3, 1/3, 1/3)$, le fibré obstruction est $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(2)$ et nous avons

$$(\eta_{1/3}^0, \eta_{1/3}^0, \eta_{1/3}^0) = 4 \cdot 3^{-3}.$$

Pour $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) = (2/3, 2/3, 2/3)$, le fibré obstruction est $\mathcal{O}(1)$ et nous avons

$$(\eta_{2/3}^0, \eta_{2/3}^0, \eta_{2/3}^1) = 1 \cdot 3^{-3}.$$

D'après la définition 4.1.3 de l'article [CR04], le cup produit orbifold est défini par l'égalité $(\alpha, \beta, \gamma) = \langle \alpha \cup \beta, \gamma \rangle$. Comme (\cdot, \cdot, \cdot) est symétrique en ses 3 arguments, $(H_{\text{orb}}^*(\mathbb{P}(w), \mathbb{C}), \cup, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ est une algèbre de Frobenius graduée.

COROLLAIRE IV.5.26. *Soient $\eta_{\gamma_0}^{d_0}$ et $\eta_{\gamma_1}^{d_1}$ des éléments de la base η . On a*

$$\eta_{\gamma_0}^{d_0} \cup \eta_{\gamma_1}^{d_1} = \left(\prod_{i \in K(\gamma_0, \gamma_1)} w_i \right) \eta_{\{\gamma_0 + \gamma_1\}}^d$$

où

$$K(\gamma_0, \gamma_1) := J_w(\gamma_0, \gamma_1, \{1 - \{\gamma_0 + \gamma_1\}\}) \sqcup I(\{\gamma_0 + \gamma_1\}) - I(\gamma_0) \cap I(\gamma_1)$$

$$\text{avec } d := \frac{\text{deg}^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_0}^{d_0})}{2} + \frac{\text{deg}^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_1}^{d_1})}{2} - a(\{\gamma_0 + \gamma_1\}).$$

REMARQUE IV.5.27. (1) Si $d \geq \delta(\{\gamma_0 + \gamma_1\})$ alors $\eta_{\{\gamma_0 + \gamma_1\}}^d = 0$.

(2) Pour tout $\gamma \in S_w$ et pour tout $d \in \{0, \dots, \delta(\gamma)\}$, nous avons

$$\eta_0^1 \cup \eta_\gamma^d = \eta_\gamma^{d+1}.$$

DÉMONSTRATION. D'après la définition du cup produit orbifold, nous avons

$$\eta_{\gamma_0}^{d_0} \cup \eta_{\gamma_1}^{d_1} = \sum_{\substack{\gamma \in S_w \\ \delta \in \{0, \dots, \delta(\gamma)-1\}}} (\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma}^{\delta}) \eta_{\gamma}^{\delta*}.$$

La remarque IV.4.5 nous donne le dual de η_{γ}^{δ} . Le corollaire IV.5.24 et la formule (II.1.2) impliquent que si $(\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma}^{\delta}) \neq 0$ alors $\gamma = 1 - \{\gamma_0 + \gamma_1\}$.

Pour finir la démonstration, il suffit de vérifier que la condition

$$\deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_0}^{d_0}) + \deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_1}^{d_1}) + \deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma}^{\delta}) = 2n$$

est équivalente à

$$\delta = a(\{\gamma_0 + \gamma_1\}) - 1 + \delta(\{\gamma_0 + \gamma_1\}) - \deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_0}^{d_0})/2 - \deg^{\text{orb}}(\eta_{\gamma_1}^{d_1})/2.$$

□

EXEMPLE IV.5.28. Pour les poids $w = (1, 2, 2, 3, 3, 3)$, nous donnons la table du cup produit orbifold dans la base $\boldsymbol{\eta}$.

	η_0^0	η_0^1	η_0^2	η_0^3	η_0^4	η_0^5	$\eta_{1/3}^0$	$\eta_{1/3}^1$	$\eta_{1/3}^2$	$\eta_{1/2}^0$	$\eta_{1/2}^1$	$\eta_{2/3}^0$	$\eta_{2/3}^1$	$\eta_{2/3}^2$
η_0^0	η_0^0	η_0^1	η_0^2	η_0^3	η_0^4	η_0^5	$\eta_{1/3}^0$	$\eta_{1/3}^1$	$\eta_{1/3}^2$	$\eta_{1/2}^0$	$\eta_{1/2}^1$	$\eta_{2/3}^0$	$\eta_{2/3}^1$	$\eta_{2/3}^2$
η_0^1		η_0^2	η_0^3	η_0^4	η_0^5	0	$\eta_{1/3}^1$	$\eta_{1/3}^2$	0	$\eta_{1/2}^1$	0	$\eta_{2/3}^1$	$\eta_{2/3}^2$	0
η_0^2			η_0^4	η_0^5	0	0	$\eta_{1/3}^2$	0	0	0	0	$\eta_{2/3}^2$	0	0
η_0^3				0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
η_0^4					0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
η_0^5						0	0	0	0	0	0	0	0	0
$\eta_{1/3}^0$							$4 \cdot \eta_{2/3}^2$	0	0	0	0	$4\eta_0^3$	$4\eta_0^4$	$4\eta_0^5$
$\eta_{1/3}^1$								0	0	0	0	$4\eta_0^4$	$4\eta_0^5$	0
$\eta_{1/3}^2$									0	0	0	$4\eta_0^5$	0	0
$\eta_{1/2}^0$										$3^3 \eta_0^4$	$3^3 \eta_0^5$	0	0	0
$\eta_{1/2}^1$											0	0	0	0
$\eta_{2/3}^0$												$1 \cdot \eta_{1/3}^1$	$1 \cdot \eta_{1/3}^2$	0
$\eta_{2/3}^1$													0	0
$\eta_{2/3}^2$														0

La partie en haut à gauche est simplement le cup produit sur $H^*(|\mathbb{P}(1, 2, 2, 3, 3, 3)|)$. Parmi ces produits, le calcul explicite du fibré obstruction est nécessaire pour les

produits

$$\eta_{1/3}^0 \cup \eta_{1/3}^0 = 4.\eta_{2/3}^2$$

où le fibré obstruction est $\mathcal{O}(2) \oplus \mathcal{O}(2)$;

$$\eta_{2/3}^0 \cup \eta_{2/3}^0 = 1.\eta_{1/3}^1$$

où le fibré obstruction est $\mathcal{O}(1)$;

$$\eta_{2/3}^0 \cup \eta_{2/3}^1 = 1.\eta_{1/3}^2$$

où le fibré obstruction est $\mathcal{O}(1)$.

CHAPITRE V

Cohomologie quantique orbifold des espaces projectifs à poids

V.1. Les invariants de Gromov-Witten orbifolds

Nous suivons le paragraphe 2.3 de l'article [CR02].

DÉFINITION V.1.1. Une courbe nodale de genre 0 avec k points marqués est la donnée suivante :

- un ensemble fini I et pour tout i dans I , une application continue $\varphi_i : C_i \rightarrow C$ entre une courbe complexe lisse de genre 0 et un espace topologique ;
- k points distincts sur C , notés $\mathbf{z} := (z_1, \dots, z_k)$.

Ces données vérifient les conditions suivantes :

- (1) l'espace topologique C est la réunion des $\varphi_i(C_i)$;
- (2) pour tout p_i dans C_i , il existe un voisinage U_{p_i} de p_i tel que l'application $\varphi_i|_{U_{p_i}} : U_{p_i} \rightarrow C$ soit un homéomorphisme sur son image ;
- (3) pour tout p dans C , nous avons $\sum_i \varphi_i^{-1}(p) \leq 2$;
- (4) pour tout $z_j \in \mathbf{z}$, nous avons $\sum_i \varphi_i^{-1}(z_j) = 1$;
- (5) l'ensemble des points nodaux $\{p \in C \mid \sum_i \varphi_i^{-1}(p) = 2\}$ est fini.

REMARQUE V.1.2. (1) Les points nodaux ne sont pas marqués.

- (2) Nous dirons qu'un point $p \in C_i$ est marqué (resp. nodal) si nous avons $\varphi_i(p) \in \mathbf{z}$ (resp. $\varphi_i(p)$ est nodal).

Une application $\theta : (C, \mathbf{z}) \rightarrow (C', \mathbf{z}')$ est un *isomorphisme* si θ est un homéomorphisme qui se relève en un biholomorphisme $\theta_{ij} : C_i \rightarrow C'_j$ sur chaque composante C_i de C et si $\theta(z_i) = z'_i$.

Pour tout $(t, r) \in \mathbb{R}^+ \times (\mathbb{R}^+ - \{0\})$, posons $X(t, r) = \{(x, y) \in \mathbb{C}^2 \mid |x|, |y| \leq r, xy = t\}$. Le groupe μ_n agit sur $X(t, r)$ par la formule $\zeta(x, y) = (\zeta x, \zeta^{-1}y)$. Notons $\varphi_n : X(t, r) \rightarrow X(t^n, r^n)$ l'application qui à (x, y) associe (x^n, y^n) . Nous en déduisons que le triplet $(X(t, r), \mu_n, \varphi_n)$ est une carte de $X(t^n, r^n)$.

DÉFINITION V.1.3. Une orbicourbe nodale est une courbe nodale marquée (C, \mathbf{z}) avec une structure orbifold qui vérifie

- (1) tout point orbifold p_i de C_i , c'est-à-dire $\#G_{p_i} > 1$, est un point marqué ou un point nodal ;
- (2) pour tout point $z_j \in \mathbf{z}$, il existe une carte d'un voisinage de p qui est donnée par le revêtement ramifié $z \mapsto z^{m_j}$;
- (3) pour tout point nodal, il existe une carte donnée par $(X(0, r_\ell), \boldsymbol{\mu}_{n_\ell}, \varphi_{n_\ell})$.

Notons $(C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$, ou plus simplement (C, \mathbf{z}) quand il n'y a pas d'ambiguïté, une telle orbicourbe nodale.

Un isomorphisme entre deux orbicourbes nodales

$$\tilde{\theta} : (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) \rightarrow (C', \mathbf{z}', \mathbf{m}', \mathbf{n}')$$

est une collection d'isomorphismes θ_{ij} entre les orbicourbes C_i et C'_j telle qu'ils induisent un isomorphisme $\theta : (C, \mathbf{z}) \rightarrow (C', \mathbf{z}')$.

DÉFINITION V.1.4. Soit X une orbifold complexe et commutative. Une application orbifold stable est la donnée suivante :

- une orbicourbe nodale $(C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n})$;
- une application $f : C \rightarrow X$ continue ;
- et une classe d'isomorphisme de structures compatibles notée ξ .

Ce triplet $(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi)$ vérifie

- (1) pour tout $i \in I$, l'application $f_i := f \circ \varphi_i$ est holomorphe de C_i dans X ;
- (2) pour tout point z_i marqué ou nodal, le morphisme de groupes induit par ξ de G_{z_i} dans $G_{f(z_i)}$ est injectif ;
- (3) et si f_i est l'application constante sur C_i alors C_i a au moins trois points singuliers (i.e. nodal ou marqué).

Nous munissons l'ensemble des applications orbifoldes stables d'une relation d'équivalence de la manière suivante. Nous dirons que les deux applications orbifoldes stables $(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi)$ et $(f', (C', \mathbf{z}', \mathbf{m}', \mathbf{n}'), \xi')$ sont équivalentes s'il existe un isomorphisme

$$\tilde{\theta} : (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}) \rightarrow (C', \mathbf{z}', \mathbf{m}', \mathbf{n}')$$

tel que $f' \circ \tilde{\theta} = f$ et que l'image inverse de ξ par $\tilde{\theta}$ soit isomorphe à ξ' . Notons $[f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi]$ la classe d'équivalence de l'application orbifold stable $(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi)$.

Soit $(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi)$ une application stable. Nous pouvons associer à cette application stable la classe d'homologie dans $H_2(|X|, \mathbb{Z})$ définie par $f_*([C]) = \sum_i (f \circ \varphi_i)_*[C_i]$. Cette classe d'homologie ne dépend que de la classe d'équivalence de l'application stable. Pour chaque point marqué z_i , la classe de structure compatible ξ induit un monomorphisme de groupes $\kappa_i : G_{z_i} \hookrightarrow G_{f(z_i)}$. Ce monomorphisme ne dépend que de la classe d'équivalence de l'application stable.

Rappelons que $\Sigma X = \bigsqcup_{x \in X} G_x = \bigsqcup_{(g) \in T} X_{(g)}$ où $X_{(g)}$ est une composante connexe (cf. paragraphe IV.3.a). Nous avons une application d'évaluation, notée ev , qui à chaque classe $[f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi]$ d'applications orbifoldes stables associe $((f(z_1), \kappa_1(e^{2i\pi/m_1})), \dots, (f(z_k), \kappa_k(e^{2i\pi/m_k}))) \in \Sigma X^k$.

Une application orbifold stable $(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi)$ est dite de *type* (g_1, \dots, g_k) si $((f(z_1), \kappa_1(e^{2i\pi/m_1})), \dots, (f(z_k), \kappa_k(e^{2i\pi/m_k})))$ appartient à $X_{(g_1)} \times \dots \times X_{(g_k)}$. S'il n'y a pas d'ambiguïté dans la notation, nous écrirons \underline{g} pour le k -uplet (g_1, \dots, g_k) .

DÉFINITION V.1.5. *Soit X une orbifold complexe et commutative. Soit $A \in H_2(|X|, \mathbb{Z})$. Nous définissons $\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g})$ l'espace de modules des classes d'équivalence des applications orbifoldes stables avec k points marqués, de classe d'homologie A et de type \underline{g} , c'est-à-dire*

$$\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g}) = \left\{ \begin{array}{l} [(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi)] \mid \#z = k, f_*[C] = A, \\ ev(f, (C, \mathbf{z}, \mathbf{m}, \mathbf{n}), \xi) \in X_{(g_1)} \times \dots \times X_{(g_k)} \end{array} \right\}.$$

D'après les résultats de l'article [CR02] (cf. proposition 2.3.6), l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g})$ est un espace topologique compact et métrisable. Chen et Ruan définissent également une structure de Kuranishi pour l'espace de modules $\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g})$ dont la dimension est donnée par le théorème suivant.

THÉORÈME V.1.6 (cf. théorème A de [CR02]). *Soit X une orbifold complexe et commutative. La dimension¹ de la structure de Kuranishi considérée par Chen et Ruan de $\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g})$ est*

$$2 \left(\int_A c_1(TX) + \dim_{\mathbb{C}} X - 3 + k - \sum_{i=1}^k age(g_i) \right).$$

Cette structure de Kuranishi définit (cf. théorème 6.12 et le paragraphe 17 de l'article [FO99]), une classe d'homologie, appelée classe fondamentale de la structure

¹Dans la littérature, on la trouve également sous le nom de dimension attendue ou dimension virtuelle.

de Kuranishi,

$$(V.1.7) \quad \text{ev}_*[\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g})] \in H_{2(\int_A c_1(TX) + n - 3 + k - \sum_{i=1}^k \text{age}(g_i))}(X_{(g_1)} \times \cdots \times X_{(g_k)}, \mathbb{C}).$$

Pour chaque $i \in \{1, \dots, k\}$, soit α_i une classe dans $H^{2(\star - \text{age}(g_i))}(X_{(g_i)}, \mathbb{C}) \subset H_{\text{orb}}^{2\star}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$. La formule (1.3) de [CR02] définit les invariants de Gromov-Witten orbifolds par

$$(V.1.8) \quad \Psi_{k, \underline{g}}^A : H^*(X_{(g_1)}, \mathbb{C}) \otimes \cdots \otimes H^*(X_{(g_k)}, \mathbb{C}) \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\alpha_1 \otimes \cdots \otimes \alpha_k \longmapsto \int_{\text{ev}_*[\overline{\mathcal{M}}_k(A, \underline{g})]} \alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_k.$$

V.2. Potentiel de Gromov-Witten pour $\mathbb{P}(w)$

Dans ce paragraphe, nous allons définir le champ d'Euler et le potentiel de Gromov-Witten. Dans la proposition V.2.11, nous montrons que le potentiel est homogène par rapport au champ d'Euler et nous calculons certaines conditions initiales de la structure de Frobenius sur $H^*(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$.

Nous commençons par un lemme qui va nous permettre de calculer la classe de Chern orbifold du fibré $T\mathbb{P}(w)$.

LEMME V.2.1. *Nous avons une suite exacte de fibrés*

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n) \xrightarrow{\varphi} T\mathbb{P}(w) \longrightarrow 0$$

où $\underline{\mathbb{C}}$ est le fibré orbifold trivial de rang 1 sur $\mathbb{P}(w)$.

Si les poids sont tous égaux à 1, ce lemme est bien connu : on peut le trouver au paragraphe 3 du chapitre 3 de [GH94]. D'ailleurs la preuve de ce lemme s'inspire de la preuve donnée dans le livre de Griffiths et Harris.

DÉMONSTRATION DU LEMME V.2.1. Pour démontrer ce lemme, nous allons d'abord construire les morphismes de fibrés puis montrer que la suite est exacte.

Pour tout $p \in \mathbb{P}(w)$, soit $(\tilde{U}_p, G_p, \pi_p)$ une carte d'un ouvert U_p , qui contient p , dans l'atlas $\mathcal{A}(|\mathbb{P}(w)|)$ qui trivialise les fibrés $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n)$ et $T\mathbb{P}(w)$. Il existe un unique $i \in \{0, \dots, n\}$ tel que $\tilde{U}_p \subset \tilde{U}_i$. Dans la suite, nous allons supprimer l'indice p à la carte $(\tilde{U}_p, G_p, \pi_p)$ pour ne pas alourdir les notations.

Nous allons d'abord construire un morphisme de fibrés, noté φ , entre $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n)$ et $T\mathbb{P}(w)$. Notons y_0, \dots, y_n les coordonnées sur \tilde{U} . Une base du

fibré tangent à \tilde{U} est formé par les champs de vecteurs $\partial_{y_k} := \partial/\partial y_k$ pour $k \neq i$.
Considérons l'application linéaire $(\text{id}, \tilde{\varphi}_{\tilde{U}})$

$$\begin{aligned} \tilde{U} \times \mathbb{C}^{n+1} &\rightarrow \tilde{U} \times \mathbb{C}^n \\ (y, v_0, \dots, v_n) &\mapsto \left(y, \left(-\frac{w_0}{w_i} y_0 v_i + v_0 \right) \partial_{y_0} + \dots + \hat{i} + \dots + \left(-\frac{w_n}{w_i} y_n v_i + v_n \right) \partial_{y_n} \right) \end{aligned}$$

où \hat{i} signifie que le terme en position i n'apparaît pas. Remarquons que cette application est surjective et que $\text{Ker } \tilde{\varphi}_{\tilde{U}}(y) = \mathbb{C} \cdot (y_0 w_0, \dots, y_n w_n)$.

Pour construire ce morphisme, nous allons montrer que pour toute injection $\alpha : \tilde{U} \subset \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{V} \subset \tilde{U}_j$, nous avons

$$(V.2.2) \quad \psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)} \circ \tilde{\varphi}_{\tilde{U}} = \tilde{\varphi}_{\tilde{V}} \circ \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}.$$

D'après les notations IV.1.9, nous avons

- (1) soit $i = j$ et alors $\alpha(y) = \zeta y$ avec ζ dans $\boldsymbol{\mu}_i$,
- (2) soit $i \neq j$ et alors

$$\alpha(y) = (y_0/y_j^{w_0/w_j}, \dots, 1_j, \dots, y_n/y_j^{w_n/w_n}).$$

Dans le cas où $i = j$, nous avons

$$\begin{aligned} \psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)}(y)(\underline{v}) &= (\zeta^{w_0} v_0, \dots, \zeta^{w_n} v_n) = \zeta \underline{v} \\ \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(\underline{v}) &= \zeta \underline{v} \end{aligned}$$

où $y = (y_0, \dots, 1_i, \dots, y_n)$ et $\underline{v} = (v_0, \dots, v_n)$.

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned} &\tilde{\varphi}_{\tilde{V}} \circ \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(\underline{v}) \\ &= \tilde{\varphi}_{\tilde{V}}(\zeta y)(\zeta \underline{v}) \\ &= \left(\left(-\frac{w_0}{w_i} \zeta^{w_0} y_0 v_i + v_0 \zeta^{w_0} \right), \dots, \hat{i}, \dots, \left(-\frac{w_n}{w_i} \zeta^{w_n} y_n v_i + \zeta^{w_n} v_n \right) \right) \\ &= \zeta \tilde{\varphi}_{\tilde{U}}(y)(\underline{v}) \\ &= \psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)} \circ \tilde{\varphi}_{\tilde{U}}(y)(\underline{v}). \end{aligned}$$

Dans le cas où $i \neq j$, nous avons

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)}(y)(\underline{v}) &= \left(\frac{\partial t_k}{\partial y_\ell} \right)_{k \neq j, \ell \neq i} \underline{v}; \\ \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(\underline{v}) &= (1/y_j^{1/w_j}) \underline{v} = \left(v_0/y_j^{w_0/w_j}, \dots, v_n/y_j^{w_n/w_j} \right)\end{aligned}$$

où $t_k = y_k/y_j^{w_k/w_j}$ pour $k \in \{0, \dots, n\} - \{j\}$ et

$$\left(\frac{\partial t_k}{\partial y_\ell} \right)_{k \neq j, \ell \neq i}$$

est une matrice de taille $n \times n$ (cf. (IV.5.9)). Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_{\tilde{V}} \circ \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(\underline{v}) &= \tilde{\varphi}_{\tilde{V}}(\alpha(y))(1/y_j^{1/w_j} \underline{v}) \\ &= \left(\left(-\frac{w_0}{w_j} t_0 \frac{v_j}{y_j} + \frac{v_0}{y_j^{w_0/w_j}} \right) \partial_{t_0} + \dots + \hat{j} + \dots + \left(-\frac{w_n}{w_j} t_n \frac{v_j}{y_j} + \frac{v_n}{y_j^{w_n/w_j}} \right) \partial_{t_n} \right).\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)} \circ \tilde{\varphi}_{\tilde{U}}(y)(\underline{v}) &= \psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)}(y) \left(\left(-\frac{w_0}{w_i} y_0 v_i + v_0 \right) \partial_{y_0} + \dots + \hat{i} + \dots + \left(-\frac{w_n}{w_i} y_n v_i + v_n \right) \partial_{y_n} \right).\end{aligned}$$

D'après l'égalité (IV.5.11), pour $\ell \neq i$ nous avons

$$\partial_{y_\ell} = \begin{cases} \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n -\frac{w_k}{w_j} \frac{y_k}{y_j^{\frac{w_k}{w_j}-1}} \partial_{t_k} & \text{si } \ell = j; \\ \frac{1}{y_j^{w_\ell/w_j}} \partial_{t_\ell} & \text{si } \ell \neq j. \end{cases}$$

Le terme devant ∂_{t_0} dans

$$\psi_\alpha^{T\mathbb{P}(w)}(y) \left(\left(-\frac{w_0}{w_i} y_0 v_i + v_0 \right) \partial_{y_0} + \dots + \hat{i} + \dots + \left(-\frac{w_n}{w_i} y_n v_i + v_n \right) \partial_{y_n} \right)$$

est

$$(V.2.3) \quad \left(\left(\frac{-w_0}{w_i} y_0 v_i + v_0 \right) 1/y_j^{w_0/w_j} \right) + \left(-\frac{w_0}{w_j} \frac{y_0}{y_j^{w_0/w_j}} \frac{1}{y_j} \left(-\frac{w_j}{w_i} y_j v_i + v_j \right) \right) \\ = \left(-\frac{w_0}{w_j} t_0 \frac{v_j}{y_j} + \frac{v_0}{y_j^{w_0/w_j}} \right) \partial_{t_0}.$$

Le premier terme de (V.2.3) vient de l'égalité $\partial_{y_0} = 1/y_j^{w_0/w_j} \partial_{t_0}$ et le deuxième terme de (V.2.3) vient du terme $k = 0$ dans l'égalité

$$\partial_{y_j} = \sum_{\substack{k=0 \\ k \neq j}}^n -\frac{w_k}{w_j} \frac{y_k}{y_j^{\frac{w_k}{w_j}-1}} \partial_{t_k}.$$

Nous faisons le même raisonnement pour les termes devant les ∂_{t_k} pour $k \neq j$ et nous obtenons l'égalité (V.2.2). L'ensemble des applications $\tilde{\varphi}_{\tilde{U}}$ définit par passage au quotient une application $\varphi : \oplus \mathcal{O}(w_i) \rightarrow T\mathbb{P}(w)$. Comme nous avons l'égalité (V.2.2) qui est satisfaite pour toute injection α , nous en déduisons que φ est un morphisme surjectif de fibrés entre $\oplus \mathcal{O}(w_i)$ et $T\mathbb{P}(w)$.

Maintenant, nous allons construire un morphisme injectif de fibrés, noté Φ , entre le fibré trivial de rang 1, noté $\underline{\mathbb{C}}$, et le fibré $\oplus \mathcal{O}(w_i)$. Considérons l'application $(\text{id}, \tilde{\Phi}_{\tilde{U}})$

$$\tilde{U} \times \mathbb{C} \longrightarrow \tilde{U} \times \mathbb{C}^{n+1} \\ (y, v) \longmapsto (y, v y_0 w_0, \dots, v y_n w_n)$$

Remarquons que $\text{Im } \tilde{\Phi}_{\tilde{U}}(y) = \mathbb{C} \cdot (w_0 v_0, \dots, w_n v_n) = \text{Ker } \tilde{\varphi}_{\tilde{U}}(y)$. De même que précédemment, pour construire ce morphisme, nous allons montrer que pour toute injection $\alpha : \tilde{U} \subset \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{V} \subset \tilde{U}_j$, nous avons

$$(V.2.4) \quad \psi_{\alpha}^{\oplus \mathcal{O}(w_i)} \circ \tilde{\Phi}_{\tilde{U}} = \tilde{\Phi}_{\tilde{V}} \circ \psi_{\alpha}^{\underline{\mathbb{C}}}.$$

Nous séparons les cas $j = i$ et $j \neq i$. Dans le cas $j = i$, nous avons

$$\psi_{\alpha}^{\underline{\mathbb{C}}}(y)(v) = v; \\ \psi_{\alpha}^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(v) = \zeta v \quad \text{où } v \in \mathbb{C}.$$

Un calcul direct montre l'égalité (V.2.4).

Dans le cas $j \neq i$, nous avons

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{\mathbb{C}}(y)(v) &= v; \\ \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(v) &= (1/y_j^{1/w_j})v = \left(v_0/y_j^{w_0/w_j}, \dots, v_n/y_j^{w_n/w_j}\right).\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}_{\tilde{V}} \circ \psi_\alpha^{\mathbb{C}}(y)(v) &= \tilde{\Phi}_{\tilde{V}}(\alpha(y))(v) \\ &= \left(\frac{y_0}{y_j^{w_0/w_j}}vw_0, \dots, \frac{y_n}{y_j^{w_n/w_j}}vw_n\right).\end{aligned}$$

D'un autre côté, nous avons

$$\begin{aligned}\psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)} \circ \tilde{\Phi}_{\tilde{V}}(y)(v) &= \psi_\alpha^{\oplus \mathcal{O}(w_i)}(y)(vy_0w_0, \dots, vy_nw_n) \\ &= \left(\frac{y_0}{y_j^{w_0/w_j}}vw_0, \dots, \frac{y_n}{y_j^{w_n/w_j}}vw_n\right).\end{aligned}$$

Nous en déduisons l'égalité (V.2.4). La même raisonnement que précédemment nous montre que nous avons un morphisme de fibrés $\Phi : \underline{\mathbb{C}} \rightarrow \oplus \mathcal{O}(w_i)$. Comme l'application $\tilde{\Phi}_{\tilde{V}}$ est injective, le morphisme de fibrés est injectif.

Comme les applications $\tilde{\varphi}_{\tilde{V}}$ et $\tilde{\Phi}_{\tilde{V}}$ sont de rang constant (rang $\tilde{\varphi}_{\tilde{V}} = n$ et rang $\tilde{\Phi}_{\tilde{V}} = 1$), la proposition III.2.14 implique que les fibrés $\text{Ker } \varphi$ et $\text{Im } \Phi$ sont bien définis. Comme $\text{Ker } \tilde{\varphi}_{\tilde{V}}(y) = \text{Im } \tilde{\Phi}_{\tilde{V}}(y)$ pour tout $y \in \tilde{U}$, nous avons bien une suite exacte de fibrés

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{C}} \xrightarrow{\Phi} \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n) \xrightarrow{\varphi} T\mathbb{P}(w) \longrightarrow 0$$

□

Dans la suite de ce chapitre, pour tout $i \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous posons

$$(V.2.5) \quad \eta_i = \eta_{\{1-s(i)\}}^{i-k\min(s(i))}.$$

Le lemme V.2.1 et la proposition III.4.13 implique que

$$\begin{aligned}c(T\mathbb{P}(w)) &= c(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n)) \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_i))) \\ &= \prod_{i=0}^n (1 + w_i \eta_1).\end{aligned}$$

Nous en déduisons que

$$(V.2.6) \quad c_1(T\mathbb{P}(w)) = \mu\eta_1.$$

Soient $\gamma_1, \dots, \gamma_k$ dans S_w . Quand il n'y a pas d'ambiguïté, nous noterons $\underline{\gamma} = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$. D'après le théorème V.1.6, nous avons

$$\deg \text{ev}_* [\mathcal{M}_k(A, \underline{\gamma})] = 2 \left(\mu \int_A \eta_1 + n - 3 - \sum_{i=1}^n a(\gamma_i) \right).$$

Soient $t_0, \dots, t_{\mu-1}$ les coordonnées de $H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C})$ dans la base $\boldsymbol{\eta}$. Posons $T := \sum_{i=0}^{\mu-1} t_i \eta_i$. Le potentiel de Gromov-Witten orbifold de l'espace projectif à poids $\mathbb{P}(w)$, noté F^{GW} , est défini par

$$F^{GW} := \sum_{k \geq 0} \sum_{\substack{A \in H_2(\mathbb{P}(w), \mathbb{Z}), \\ \boldsymbol{\gamma} \in S_w^k}} \frac{\Psi_{k, \boldsymbol{\gamma}}^A(T, \dots, T)}{n!}.$$

LEMME V.2.7. *Le potentiel de Gromov-Witten de $\mathbb{P}(w)$ est de la forme suivante*

$$F^{GW} = \sum_{\alpha} \Psi_{|\alpha|, \boldsymbol{\gamma}}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}) \frac{\mathbf{t}^{\alpha}}{\alpha!}.$$

DÉMONSTRATION. Comme les invariants de Gromov-Witten sont linéaires en chaque variable, nous obtenons

$$F^{GW} = \sum_{\alpha} \sum_{\substack{A \in H_2(\mathbb{P}(w), \mathbb{Z}), \\ \boldsymbol{\gamma} \in S_w^{|\alpha|}}} \Psi_{|\alpha|, \boldsymbol{\gamma}}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}) \frac{\mathbf{t}^{\alpha}}{\alpha!}.$$

D'après la formule (V.1.8), l'invariant $\Psi_{|\alpha|, \boldsymbol{\gamma}}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}})$ n'a de sens que si $\boldsymbol{\gamma} = (\underbrace{s(0), \dots, s(0)}_{\alpha_0 \text{ fois}}, \dots, \underbrace{s(\mu-1), \dots, s(\mu-1)}_{\alpha_{\mu-1} \text{ fois}})$. Ainsi, il est inutile de sommer sur

les $\boldsymbol{\gamma}$ dans S_w^k dans la formule du potentiel. D'après le théorème V.1.6 et la formule (V.1.8), si $\Psi_{|\alpha|, \boldsymbol{\gamma}}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}})$ est non nul alors nous avons l'égalité²

$$(V.2.8) \quad \mu \int_A \eta_1 + n - 3 = \sum_{i=0}^{\mu-1} \alpha_i (\sigma(i) - 1).$$

Ainsi, si l'on fixe α , la classe A est déterminée par l'équation ci-dessus. Ce qui termine la démonstration. \square

²Il suffit de vérifier que $\deg^{\text{orb}} \eta_i = 2\sigma(i)$.

D'après la démonstration ci-dessus, nous pouvons omettre l'indice γ dans la notation $\Psi_{|\alpha|, \gamma}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}})$.

REMARQUE V.2.9. Soit V une variété complexe projective. Posons $H^*(V, \mathbb{C}) = \bigoplus_i \mathbb{C}\Delta_i$ où Δ_i appartient à $H^{\deg(\Delta_i)}(V, \mathbb{C})$. Soit (t_i) les coordonnées plates, par rapport à la dualité de Poincaré, sur $H^*(V, \mathbb{C})$. D'après le paragraphe I.4.4 du livre de Manin [Man99], le champ d'Euler est défini par

$$\mathfrak{E} = \sum_i \left(1 - \frac{\deg(\Delta_i)}{2}\right) t_i \partial_{t_i} + \sum_{b|\deg(\Delta_b)=2} r^b \partial_{t_b}$$

où r_b est défini par $c_1(TV) = \sum_{b|\deg \Delta_b=2} r^b \Delta_b$.

Dans notre cas, nous avons $\deg^{\text{orb}}(\eta_i) = 2\sigma(i)$ (cf. propositions IV.3.14 et II.2.6) et $c_1(T\mathbb{P}(w)) = \mu\eta_1$ (cf. égalité (V.2.6)). Nous définissons le champ d'Euler par

$$(V.2.10) \quad \mathfrak{E} = \sum_{k=0}^{\mu-1} (1 - \sigma(k)) t_k \partial_{t_k} + \mu \partial_{t_1}.$$

PROPOSITION V.2.11. (1) *Le potentiel est homogène de degré $3 - n$ par rapport au champ d'Euler modulo l'addition d'un polynôme de degré inférieur ou égal à deux.*

(2) *La matrice $A_\infty := \text{id} - \nabla \mathfrak{E}$ dans la base $\boldsymbol{\eta}$ est*

$$\text{diag}(\sigma(0), \dots, \sigma(\mu - 1)).$$

Cette matrice vérifie $A_\infty + A_\infty^ = n \text{id}$.*

DÉMONSTRATION. (1) Le coefficient devant $\mathbf{t}^\alpha / \boldsymbol{\alpha}!$ du potentiel F^{GW} est

$$\Psi_{|\alpha|}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}).$$

Le coefficient devant $\mathbf{t}^\alpha / \boldsymbol{\alpha}!$ de $\mathfrak{E} \cdot F^{GW}$ est

$$\Psi_{|\alpha|}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}) \left(\sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k (1 - \sigma(k)) \right) + \mu \Psi_{|\alpha|+1}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \eta_1^{\otimes \alpha_1+1}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}).$$

D'après l'axiome du diviseur (cf. théorème 3.4.2 de l'article [CR02]), nous avons

$$\Psi_{|\alpha|+1}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \eta_1^{\otimes \alpha_1+1}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}) = \int_A \eta_1 \Psi_{|\alpha|}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \eta_1^{\otimes \alpha_1}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}})$$

Nous en déduisons que le coefficient devant $\mathbf{t}^\alpha/\alpha!$ de $\mathfrak{E}F^{GW}$ est

$$\Psi_{|\alpha|}^A(\eta_0^{\otimes \alpha_0}, \dots, \eta_{\mu-1}^{\otimes \alpha_{\mu-1}}) \left(\sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k (1 - \sigma(k)) - \mu \int_A \eta_1 \right).$$

Puis l'égalité (V.2.8) finit la démonstration.

- (2) Les coordonnées $t_0, \dots, t_{\mu-1}$ sont plates pour la forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Comme ∇ est la connexion de Levi-Civita associée à $\langle \cdot, \cdot \rangle$, nous avons

$$\nabla_{\partial_{t_j}} \partial_{t_k} = 0.$$

Ainsi, nous obtenons que $\nabla_{\partial_{t_j}} \mathfrak{E} = (1 - \sigma(j)) \partial_{t_j}$ c'est-à-dire

$$A_\infty = \text{diag}(\sigma(0), \dots, \sigma(\mu - 1)).$$

La matrice duale A_∞^* par rapport à la forme bilinéaire non dégénérée $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est

$$A_\infty^* = \text{diag}(\sigma(n), \dots, \sigma(0), \sigma(\mu - 1), \dots, \sigma(n + 1)).$$

Pour finir la démonstration il suffit de remarquer que si $\overline{j+k} = n$ alors $\sigma(j) + \sigma(k) = n$ où $\overline{j+k}$ est la somme modulo μ .

□

V.3. Calcul de certains invariants de Gromov-Witten orbifolds

Nous rappelons que pour chaque $i \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous posons

$$(V.3.1) \quad \eta_i = \eta_{\{1-s(i)\}}^{i-k \min(s(i))}.$$

Pour calculer les conditions initiales de la variété de Frobenius, il nous reste à calculer la matrice $A_0^\circ := \mathfrak{E} \star |_{\mathbf{t}=0}$. Or le champ d'Euler en $\mathbf{t} = 0$ est simplement $\mu \partial_{t_1}$. Il faut calculer les invariants de Gromov-Witten $\Psi_3^A(\eta_1, \eta_j, \eta_k)$ pour tous j, k et pour tout $A \in H_2(\mathbb{P}(w), \mathbb{Z})$.

THÉORÈME V.3.2. *Soient j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$ tels que $\overline{1+j+k} = n$ et $\sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) = n$ où $\overline{1+j+k}$ est la somme modulo μ . Soit $A(j, k)$ la classe dans $H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})$ définie par l'égalité $\int_{A(j,k)} \eta_1 = (1 + j + k - n)/\mu - s(j) - s(k)$. Nous avons*

$$\Psi_3^A(\eta_1, \eta_j, \eta_k) = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(s(j))} w_i \right)^{-1} & \text{si } A = A(j, k); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Les hypothèses sur j et k impliquent que $A(j, k) = 0$. Ainsi, nous obtenons

$$\Psi_3^A(\eta_1, \eta_j, \eta_k) = \begin{cases} (\eta_1, \eta_j, \eta_k) & \text{si } A = 0 ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis le corollaire IV.5.24 termine la démonstration. \square

THÉORÈME V.3.3. *Supposons que μ et $p_w := \text{ppcm}(w_0, \dots, w_n)$ soient premiers entre eux. Soient j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$ tels que $1 + j + k \neq n$. Pour toute classe A dans $H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{C})$, nous avons $\Psi_3^A(\eta_1, \eta_j, \eta_k) = 0$.*

Avant de démontrer ce théorème, nous allons énoncer un résultat sur les générateurs de $H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})$.

Pour tous i, j dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$, posons $p_{ij} := \text{ppcm}(w_i, w_j)$ et $r_{ij} := p_w / p_{ij}$. Sur la dernière page de l'article [Kaw73], nous avons le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} H_2(\mathbb{P}^1, \mathbb{Z}) & \longrightarrow & H_2(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z}) \\ \downarrow f_{ij*} & & \downarrow f_{w*} \\ H_2(|\mathbb{P}(w_i, w_j)|, \mathbb{Z}) & \xrightarrow{\iota_{ij*}} & H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z}) \end{array} \cong \begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\text{id}} & \mathbb{Z} \\ \downarrow \cdot p_{ij} & & \downarrow \cdot p_w \\ \mathbb{Z} & \xrightarrow{\cdot r_{ij}} & \mathbb{Z} \end{array}$$

PROPOSITION V.3.4. *Il existe un générateur, noté D_w , de $H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})$ tel que nous ayons*

$$\int_{D_w} \eta_1 = \frac{1}{p_w}.$$

DÉMONSTRATION. Comme nous nous intéressons à des notions topologiques, nous pouvons supposer que les poids sont premiers entre eux. Nous en déduisons que les nombres r_{ij} sont premiers entre eux c'est-à-dire qu'il existe des entiers α_{ij} tels que $\sum_{i,j} \alpha_{ij} r_{ij} = 1$. D'après l'article [Kaw73], nous avons

$$H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z}) = \sum_{i,j} \text{im}(H_2(|\mathbb{P}(w_i, w_j)|, \mathbb{Z}) \rightarrow H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})).$$

Nous posons $D_w := \sum_{i,j} \alpha_{ij} [|\mathbb{P}(w_i, w_j)|]$. Finalement nous obtenons

$$\int_{D_w} \eta_1 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \int_{|\mathbb{P}(w_i, w_j)|} \iota_{ij}^* \eta_1 = \sum_{i,j} \alpha_{ij} / p_{ij} = \sum_{i,j} \alpha_{ij} r_{ij} / p_w = 1 / p_w.$$

\square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME V.3.3. Nous allons démontrer la contraposé. Soient $A \in H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})$ et j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$ tels que $\Psi_3^A(\eta_1, \eta_j, \eta_k)$ soit non nul. D'après l'égalité (V.2.8), nous obtenons

$$(V.3.5) \quad \int_A \eta_1 = \frac{1 + j + k - n}{\mu} - s(j) - s(k).$$

Comme la classe A est un multiple entier de D_w , nous en déduisons que

$$\frac{p_w(1 + j + k - n)}{\mu} - p_w(s(j) + s(k)) \in \mathbb{N}.$$

Comme p_w et μ sont premiers entre eux, nous en concluons que $\overline{1 + j + k} = n$. \square

CONJECTURE V.3.6. Soient j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$ tels que $\overline{1 + j + k} = n$ et $\sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) \neq n$. Soit $A(j, k)$ la classe dans $H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})$ définie par l'égalité $\int_{A(j,k)} \eta_1 = (1 + j + k - n)/\mu - s(j) - s(k)$. Nous avons

$$\Psi_3^A(\eta_1, \eta_j, \eta_k) = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(s(j)) \sqcup I(s(k))} w_i \right)^{-1} & \text{si } A = A(j, k); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Posons

$$((\eta_1, \eta_j, \eta_k)) := \frac{\partial^3 F^{GW}}{\partial t_1 \partial t_j \partial t_k} \Big|_{t=0}$$

Les théorèmes V.3.2 et V.3.3 et la conjecture V.3.6 impliquent le corollaire suivant.

COROLLAIRE V.3.7. Supposons que μ et le plus petit commun multiple des poids soient premiers entre eux. Soient j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$.

- (1) Si $\overline{1 + j + k} \neq n$ alors $((\eta_1, \eta_j, \eta_k)) = 0$.
- (2) Si $\overline{1 + j + k} = n$ alors nous avons

$$((\eta_1, \eta_j, \eta_k)) = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(j,k)} w_i \right)^{-1} & \text{si } \sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) \neq n; \\ \left(\prod_{i \in I(s(j))} w_i \right)^{-1} & \text{si } \sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) = n \end{cases}$$

où $I(j, k) := I(s(j)) \sqcup I(s(k))$.

Pour déterminer la matrice $A_0^\circ = \mathfrak{E} \star |_{t=0}$, nous utilisons la formule suivante

$$\frac{\partial^3 F^{GW}(t_0, \dots, t_{\mu-1})}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k} = \langle \partial t_i \star \partial t_j, \partial t_k \rangle.$$

Cette formule montre que la donnée des $((\eta_1, \eta_j, \eta_k))$ pour tout $j, k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$ et la dualité de Poincaré orbifold $\langle \cdot, \cdot \rangle$ nous permettent de calculer la matrice A_0° .

V.4. Remarques sur la conjecture V.3.6

Dans ce paragraphe, nous nous plaçons dans les hypothèses de la conjecture V.3.6 c'est-à-dire que j, k sont dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$ et sont tels que $\overline{1 + j + k} = n$ et $\sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) \neq n$. Notons $A(j, k)$ la classe dans $H_2(|\mathbb{P}(w)|, \mathbb{Z})$ définie par l'égalité $\int_{A(j,k)} \eta_1 = (1 + j + k - n) / \mu - s(j) - s(k)$. Ces hypothèses impliquent que

$$(V.4.1) \quad \begin{aligned} s(k) &= \{1 - s(j + 1)\} > 0, & A(j, k) &\neq 0, \\ 1 + j + k &= n + \mu. \end{aligned}$$

D'après l'axiome du diviseur (cf. théorème 3.4.2. de [CR02]), nous avons

$$\Psi_3^{A(j,k)}(\eta_1, \eta_j, \eta_k) = \left(\int_{A(j,k)} \eta_1 \right) \Psi_2^{A(j,k)}(\eta_j, \eta_k)$$

LEMME V.4.2. *Le degré de la classe*

$$\text{ev}_* [\overline{\mathcal{M}}_2(\mathbb{P}(w), A(j, k), (\{1 - s(j)\}, \{1 - s(k)\}))]$$

est

$$2 \dim_{\mathbb{C}} (\mathbb{P}(w)_{I(s(j))} \times \mathbb{P}(w)_{I(s(k))}).$$

REMARQUE V.4.3. D'après (V.1.7) et le lemme précédent nous avons

$$\text{ev}_* [\overline{\mathcal{M}}_2(\mathbb{P}(w), A(j, k), (\{1 - s(j)\}, \{1 - s(k)\}))] = \text{cst}[\mathbb{P}(w)_{I(s(j))} \times \mathbb{P}(w)_{I(s(k))}].$$

Pour montrer la conjecture V.3.6, il suffit de montrer que cette constante est

$$\left(\int_{A(j,k)} \eta_1 \right)^{-1} = (s(j + 1) - s(j))^{-1} \text{ d'après les égalités (V.4.1).}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME V.4.2. D'après le théorème V.1.6, ce degré est

$$\mu \int_{A(j,k)} \eta_1 + n - 1 - a(\{1 - s(j)\}) - a(\{1 - s(k)\}).$$

D'après les égalités (V.4.1), nous avons

$$\mu \int_{A(j,k)} \eta_1 = \mu(s(j+1) - s(j)) > 0.$$

Nous en déduisons que

$$(V.4.4) \quad j = k^{\max}(s(j)), \quad j+1 = k^{\min}(s(j+1)).$$

D'après l'égalité (II.1.1), le degré cherché est

$$2(\mu(s(j+1) - s(j)) - 2 + \delta(s(j)) + a(s(j)) - a(s(j+1))).$$

Or, nous avons

$$(V.4.5) \quad \mu(s(j+1) - s(j)) = 1 - \sigma(j+1) + \sigma(j).$$

Nous utilisons (V.4.4) dans l'égalité ci-dessus. Finalement, nous déduisons de la proposition II.2.6 que la moitié de ce degré est

$$\delta(s(j)) - 1 + \delta(s(j+1)) - 1 = \dim_{\mathbb{C}} \mathbb{P}(w)_{I(s(j))} \times \mathbb{P}(w)_{I(s(k))}.$$

□

REMARQUE V.4.6. Soient j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$ tels que $\overline{1+j+k} = n$ et $\sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) \neq n$. D'après les égalités (V.4.4), nous en déduisons que

$$j = k^{\max}(s(j)) \text{ et } k = k^{\max}(s(k)).$$

Si nous revenons aux notations du chapitre précédent (cf. (V.2.5)), nous avons

$$\begin{aligned} \eta_j &= \eta_{1-s(j)}^{\delta(s(j))-1} \in H^{2(\delta(s(j))-1)}(|\mathbb{P}(w)_{I(s(j))}|); \\ \eta_k &= \eta_{1-s(k)}^{\delta(s(k))-1} \in H^{2(\delta(s(k))-1)}(|\mathbb{P}(w)_{I(s(k))}|). \end{aligned}$$

Ainsi, l'invariant de Gromov-Witten $\psi_2^{A(j,k)}(\eta_j, \eta_k)$ « compte » le nombre de courbes de degré $A(j, k)$ qui passent par un point général dans $\mathbb{P}(w)_{I(s(j))}$ et un point général dans $\mathbb{P}(w)_{I(s(k))}$.

Dans la suite, nous supposons que les poids sont premiers entre eux deux à deux. Dans ce cas, l'espace des lieux singuliers de $\mathbb{P}(w)$ est réduit à $n+1$ points distincts. Ainsi, toutes les applications orbifoldes non constantes sont bonnes de façon unique d'après la proposition III.5.10. Nous n'avons donc plus de problème avec les classes de systèmes compatibles définis au paragraphe V.1.

Notons

$$(V.4.7) \quad \overline{\mathcal{M}}_{j,k} := \overline{\mathcal{M}}_2(\mathbb{P}(w), A(j, k), (\{1 - s(j)\}, \{1 - s(k)\})).$$

D'après le lemme V.4.2, nous avons

$$\deg \operatorname{ev}_* [\overline{\mathcal{M}}_{j,k}] = \begin{cases} 0 & \text{si } s(j) \neq 0; \\ 2n & \text{si } s(j) = 0. \end{cases}$$

Le cas où $s(j) = 0$ correspond au couple $(j, k) = (n, \mu - 1)$. Comme nous avons

$$\int_{A(n, \mu-1)} \eta_1 = 1/w_n$$

où w_n est le plus grand poids, nous en déduisons que

$$\begin{aligned} \Psi_3^{A(n, \mu-1)}(\eta_1, \eta_n, \eta_{\mu-1}) &= \int_{A(n, \mu-1)} \eta_1 \operatorname{cst} \int_{\mathbb{P}(w) \times \mathbb{P}(w_n)}^{\operatorname{orb}} \eta_n \wedge \eta_{\mu-1} \\ &= \frac{1}{w_n w_n \prod_{i=0}^n w_i} \operatorname{cst} \quad \text{d'après la proposition IV.3.13.} \end{aligned}$$

Finalement, pour montrer la conjecture V.3.6 dans le cas $(j, k) = (n, \mu - 1)$, il faut montrer que cette constante vaut w_n .

PROPOSITION V.4.8. *Il existe une unique application $f : \mathbb{P}(1, w_n) \rightarrow \mathbb{P}(w)$ holomorphe telle que*

- l'application f se relève en une application holomorphe de $\mathbb{C}^2 - \{0\}$ dans $\mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ dont les applications composantes sont des polynômes;
- l'application f envoie les points $[1 : 0]$ et $[0 : 1]$ sur respectivement $[a_0 : \dots : a_n] \neq [0 : \dots : 0 : 1]$ et $[0 : \dots : 0 : 1]$;
- la classe $f_*[\mathbb{P}(1, w_n)]$ soit $A(n, \mu - 1)$.

Avant de démontrer cette proposition, nous allons montrer le lemme suivant.

LEMME V.4.9. *Soit l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(1, w_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [x : y] &\longmapsto [a_0 x^{w_0} : \dots : a_{n-1} x^{w_{n-1}} : b_n y + a_n x^{w_n}] \end{aligned}$$

Le fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)$ est isomorphe au fibré $f^ \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)$.*

DÉMONSTRATION. Comme les poids sont premiers entre eux deux à deux, l'ensemble $f^{-1}(\widehat{\mathbb{P}(w)}_{\operatorname{reg}})$ est un ouvert dense et connexe. Nous en déduisons d'après les propositions III.5.7 et III.5.10 que l'image inverse du fibré orbifold $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)$ existe. D'après les hypothèses sur les nombres complexes a_0, \dots, a_{n-1} , il existe un indice i tel que $a_i \neq 0$. Pour simplifier les notations, nous supposons que $i = 0$

c'est-à-dire que $a_0 \neq 0$. Fixons a_0^{1/w_0} une racine w_0 -ième de a_0 . Remarquons que l'application

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1, w_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(1, w_n) \\ [x : y] &\longmapsto [x/a_0^{1/w_0} : b_n y + a_n x^{w_n}] \end{aligned}$$

est un automorphisme de $\mathbb{P}(1, w_n)$. Quitte à composer par l'isomorphisme ci-dessus, nous pouvons donc supposer que $a_n = 0$, $a_0 = 1$ et $b_n = 1$ dans la formule de l'application f . Notons \tilde{U}_0 et \tilde{U}_1 les cartes affines de $\mathbb{P}(1, w_n)$ et $\tilde{U}_0^w, \dots, \tilde{U}_n^w$ les cartes affines de $\mathbb{P}(w)$. De manière générale, nous rajouterons un exposant w pour les objets définis sur $\mathbb{P}(w)$. Les applications suivantes relèvent $f|_{U_0}$ et $f|_{U_1}$:

$$\begin{aligned} \tilde{f}_{U_0 U_0^w} : \tilde{U}_0 &\longrightarrow \tilde{U}_0^w \\ (1, y_1) &\longmapsto (1, a_1, \dots, a_{n-1}, y_1) \\ \tilde{f}_{U_1 U_n^w} : \tilde{U}_1 &\longrightarrow \tilde{U}_n^w \\ (y_0, 1) &\longmapsto (y_0^{w_0}, \dots, a_{n-1} y_0^{w_{n-1}}, 1) \end{aligned}$$

Comme f est une bonne application orbifold, nous avons une correspondance bijective, notée \mathfrak{F} , entre les ouverts d'un recouvrement compatible \mathcal{U} de $|\mathbb{P}(1, w_n)|$ et les ouverts d'un recouvrement compatible \mathcal{U}^w de $|\mathbb{P}(w)|$. Soient U et V deux ouverts du recouvrement \mathcal{U} tels que $U \subset V$. Soit $\alpha : \tilde{U} \subset \tilde{U}_i \hookrightarrow \tilde{V} \subset \tilde{U}_j$ une injection où $i, j \in \{0, 1\}$ et \tilde{U}, \tilde{V} sont deux cartes de respectivement U et V . Posons

$$k^{\max}(0) = 0 \text{ et } k^{\max}(1) = n.$$

Il existe une injection $\mathcal{F}(\alpha) : \widetilde{\mathfrak{F}}(\tilde{U})^w \hookrightarrow \widetilde{\mathfrak{F}}(\tilde{V})^w$ où $\widetilde{\mathfrak{F}}(\tilde{U})^w \subset \tilde{U}_{k^{\max}(i)}^w$ et $\widetilde{\mathfrak{F}}(\tilde{V})^w \subset \tilde{U}_{k^{\max}(j)}^w$ sont deux cartes de respectivement $\mathfrak{F}(U)$ et $\mathfrak{F}(V)$ qui font commuter le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \tilde{U} \subset \tilde{U}_i & \xhookrightarrow{\alpha} & \tilde{V} \subset \tilde{U}_j \\ \tilde{f}_{U_i U_{k^{\max}(i)}^w} \Big| \tilde{U} \downarrow & & \downarrow \tilde{f}_{U_j U_{k^{\max}(j)}^w} \Big| \tilde{V} \\ \widetilde{\mathfrak{F}}(\tilde{U})^w \subset \tilde{U}_{k^{\max}(i)}^w & \xhookrightarrow{\mathcal{F}(\alpha)} & \widetilde{\mathfrak{F}}(\tilde{V})^w \subset \tilde{U}_{k^{\max}(j)}^w \end{array}$$

D'après la proposition III.5.7, les fonctions de transition de $f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)$ sont définies par

$$(V.4.10) \quad \psi_\alpha^{f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)}(y) := \psi_{\mathfrak{F}(\alpha)}^{\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)}(\tilde{f}_{U_i U_k^w}^w |_{\tilde{U}}(y)) \quad \forall y \in \tilde{U}.$$

Nous avons quatre cas à calculer : $(i, j) = (0, 0), (1, 1), (0, 1), (1, 0)$. Dans le cas où $(i, j) = (0, 0)$, l'injection α est simplement l'inclusion. Nous en déduisons que $\mathcal{F}(\alpha)$ est aussi l'inclusion. Nous obtenons que

$$\psi_\alpha^{f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)}(1, y_1)(v) = v$$

pour tout $(1, y_1) \in \tilde{U}$ et pour tout $v \in \mathbb{C}$.

Dans le cas où $(i, j) = (1, 1)$, l'injection α est l'action par un élément ζ de μ_{w_n} (cf. les notations IV.1.9). Nous en déduisons que $\mathcal{F}(\alpha)$ est aussi l'action par cet élément ζ . Nous obtenons que

$$\psi_\alpha^{f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)}(y_0, 1)(v) = \zeta v$$

pour tout $(y_0, 1) \in \tilde{U}$ et pour tout $v \in \mathbb{C}$.

Dans le cas où $(i, j) = (0, 1)$, l'injection α envoie $(1, y_1)$ sur $(1/y_1^{1/w_n}, 1)$ (cf. les notations IV.1.9). Nous en déduisons que l'injection $\mathcal{F}(\alpha)$ est

$$(1, x_1, \dots, x_n) \longmapsto 1/x_n^{1/w_n}(1, x_1, \dots, x_n).$$

D'après l'égalité (V.4.10), nous obtenons que

$$\psi_\alpha^{f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)}(1, y_1)(v) = v/y_1^{1/w_n}$$

pour tout $(1, y_1)$ dans \tilde{U} et pour tout $v \in \mathbb{C}$.

Dans le cas où $(i, j) = (1, 0)$, l'injection α envoie $(y_0, 1)$ sur $(1, 1/y_0^{w_n})$ (cf. les notations IV.1.9). Nous en déduisons que l'injection $\mathcal{F}(\alpha)$ est

$$(x_0, \dots, x_{n-1}, 1) \longmapsto 1/x_0^{1/w_0}(x_0, \dots, x_{n-1}, 1).$$

D'après l'égalité (V.4.10), nous obtenons que

$$\psi_\alpha^{f^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(1)}(y_0, 1)(v) = v/y_0$$

pour tout $(1, y_1)$ dans \tilde{U} et pour tout $v \in \mathbb{C}$.

Nous retrouvons bien les fonctions de transition du fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)$ (cf. la démonstration de la proposition IV.2.1). \square

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION V.4.8. **Existence** : L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(1, w_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [x : y] &\longmapsto [a_0 x^{w_0} : \dots : a_{n-1} x^{w_{n-1}} : b_n y + a_n x^{w_n}] \end{aligned}$$

envoie bien les deux points marqués $[1 : 0]$ et $[0 : 1]$ sur respectivement $[a_0 : \dots : a_n]$ et $[0 : \dots : 0 : 1]$. Comme $[a_0 : \dots : a_n]$ et $[0 : \dots : 0 : 1]$ sont deux points différents, cette application n'est pas constante. D'après le lemme V.4.9, nous avons

$$\int_{f_*[\mathbb{P}(1, w_n)]} \eta_1 = \int_{\mathbb{P}(1, w_n)} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)) = 1/w_n.$$

Unicité : Soit $h : \mathbb{P}(1, w_n) \longrightarrow \mathbb{P}(w)$ une application qui vérifie les trois conditions du lemme. Notons une application $\tilde{h} : \mathbb{C}^2 - \{0\} \rightarrow \mathbb{P}(w)$ qui relève h . Nous avons $\tilde{h}(\lambda \cdot (x, y)) = \lambda \cdot \tilde{h}(x, y)$ c'est-à-dire que pour tout i dans $\{0, \dots, n\}$, nous avons $\tilde{h}_i(\lambda \cdot (x, y)) = \lambda^{w_i} \tilde{h}_i(x, y)$. Supposons que $\tilde{h}_i(x, y) = c_i x^u y^v$ avec c_i dans \mathbb{C} . Nous obtenons l'égalité

$$u + v w_n = w_i.$$

Comme $w_n > w_i$ pour $i \neq n$, nous en déduisons que

- si $i \neq n$ alors nous avons $v = 0$ et $u = w_i$;
- si $i = n$ alors soit $v = 1$ et $u = 0$ soit $u = w_n$ et $v = 0$.

Comme l'application h envoie $[1 : 0]$ et $[0 : 1]$ sur respectivement $[a_0 : \dots : a_n]$ et $[0 : \dots : 0 : 1]$, nous en déduisons que $h = f$. \square

REMARQUE V.4.11. (1) Si $[a_0 : \dots : a_n] \neq [0 : \dots : 0 : 1]$, l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(1, w_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [x : y] &\longmapsto [a_0 x^{w_0} : \dots : a_{n-1} x^{w_{n-1}} : b_n y + a_n x^{w_n}] \end{aligned}$$

est dans l'espace de modules $\mathcal{M}_{n, \mu-1}$ (cf. notation (V.4.7)).

- (2) Nous allons décrire une autre famille d'applications dans $\mathcal{M}_{n, \mu-1}$. Soit $C := \mathbb{P}(1, w_n) \cup \mathbb{P}_{w_n, w_n}^1$ la courbe nodale dont le point nodal de $\mathbb{P}(1, w_n)$ (resp. \mathbb{P}_{w_n, w_n}^1 cf. exemple III.1.11.(4)) et $[0 : 1]$ (resp. $[0 : 1]$) (cf. figure 1). Les deux points marqués sur C sont les points $z_1 := [1 : 0]$ et $z_2 := [a : b] \neq [1 : 0], [0 : 1]$ sur \mathbb{P}_{w_n, w_n}^1 . Nous définissons une application $g : C \rightarrow \mathbb{P}(w)$ sur chacune de ses composantes. La composante \mathbb{P}_{w_n, w_n}^1 est envoyée sur le point $[0 : \dots : 0 : 1]$ c'est-à-dire que g est constante sur cette composante.

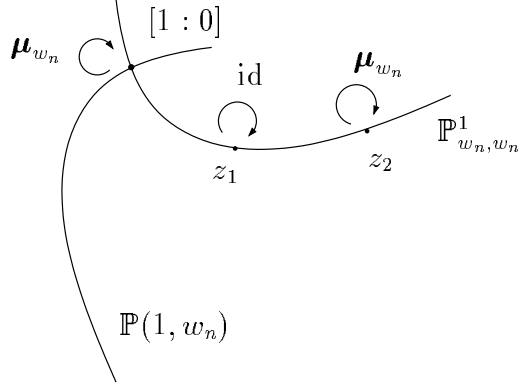


FIG. 1 –

Sur la composante $\mathbb{P}(1, w_n)$, l'application g est définie par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(1, w_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [x : y] &\longmapsto [a_0 x^{w_0} : \dots : a_{n-1} x^{w_{n-1}} : b_n y + a_n x^{w_n}] \end{aligned}$$

où $[a_0 : \dots : a_n] \neq [0 : \dots : 0 : 1]$. L'application stable (C, g) est dans l'espace de modules $\mathcal{M}_{n, \mu-1}$.

Pour les applications dans $\mathcal{M}_{n, \mu-1}$ qui n'ont qu'une seule composante c'est-à-dire celles qui sont comme dans la remarque V.4.11.(1), nous avons le résultat de convexité suivant.

LEMME V.4.12. *Soit $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{C}^{n+1} - \{0\}$ tel que $[a_0 : \dots : a_n] \neq [0 : \dots : 0 : 1]$ dans $\mathbb{P}(w)$. Soit b_n un nombre complexe non nul. Soit l'application*

$$\begin{aligned} f : \mathbb{P}(1, w_n) &\longrightarrow \mathbb{P}(w) \\ [x : y] &\longmapsto [a_0 x^{w_0} : \dots : a_{n-1} x^{w_{n-1}} : b_n y + a_n x^{w_n}] \end{aligned}$$

Alors nous avons $H^1(\mathbb{P}(1, w_n), f^ \Theta_{|\mathbb{P}(w)|}) = 0$ où $\Theta_{|\mathbb{P}(w)|}$ est le faisceau des sections du fibré tangent $T\mathbb{P}(w)$.*

DÉMONSTRATION DU LEMME V.4.12. D'après le lemme V.2.1, nous avons la suite exacte de faisceaux

$$0 \rightarrow \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(w)|} \rightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n) \rightarrow \Theta_{|\mathbb{P}(w)|} \rightarrow 0.$$

Comme l'application orbifold $f : \mathbb{P}(1, w_n) \rightarrow \mathbb{P}(w)$ est continue entre les espaces topologiques sous-jacents, nous en déduisons une suite exacte

$$0 \rightarrow f^* \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(w)|} \rightarrow f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_0) \oplus \cdots \oplus f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_n) \rightarrow f^* \Theta_{|\mathbb{P}(w)|} \rightarrow 0.$$

Nous avons les égalités entre les faisceaux

$$\begin{aligned} f^* \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(w)|} &= \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(1, w_n)|}; \\ f^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}(w)}(w_k) &= \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(w_k) \quad \text{pour } k \in \{0, \dots, n\} \text{ (cf. lemme V.4.9)}. \end{aligned}$$

Comme $H^2(|\mathbb{P}(1, w_n)|, \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(1, w_n)|}) = H^2(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}) = 0$ (cf. l'exemple III.1.17 et la remarque IV.1.11.(4)), nous en déduisons une longue suite exacte en cohomologie

$$\begin{aligned} 0 &\rightarrow H^0(\mathbb{P}(1, w_n), \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(1, w_n)|}) \rightarrow H^0(\mathbb{P}(1, w_n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(w_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(w_n)) \\ &\rightarrow H^0(\mathbb{P}(1, w_n), f^* T\mathbb{P}(w)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}(1, w_n), \mathcal{O}_{|\mathbb{P}(1, w_n)|}) \\ &\rightarrow H^1(\mathbb{P}(1, w_n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(w_0) \oplus \cdots \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(w_n)) \rightarrow H^1(\mathbb{P}(1, w_n), f^* T\mathbb{P}(w)) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Pour démontrer le lemme, le suffit de montrer que $H^1(\mathbb{P}(1, w_n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)) = 0$. Nous allons utiliser la cohomologie de Čech. Nous recouvrons $|\mathbb{P}(1, w_n)|$ avec les ouverts $U_0 := \{[y_0, y_1] \in |\mathbb{P}(1, w_n)| \mid y_0 \neq 0\}$ et $U_1 := \{[y_0, y_1] \in |\mathbb{P}(1, w_n)| \mid y_1 \neq 0\}$.

Remarquons que

- le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)|_{U_0}$ est isomorphe au faisceau des fonctions holomorphes sur \mathbb{C} ;
- le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)|_{U_0 \cap U_1}$ est isomorphe au faisceau des fonctions holomorphes sur \mathbb{C}^* ;
- le faisceau $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)|_{U_1}$ est isomorphe au faisceau $(\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}})^{\mu_{w_n}}$ où $\pi : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ est l'application qui à z associe z^{w_n} . Le corollaire VIII.4 montre que

$$H^i(\mathbb{C}/\mu_{w_n}, (\pi_* \mathcal{O}_{\mathbb{C}})^{\mu_{w_n}}) = H^i(\mathbb{C}, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})^{\mu_{w_n}} = 0 \text{ pour } i > 0.$$

Le recouvrement U_0, U_1 est bien acyclique. Soit s une section de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)(U_0 \cap U_1)$. La carte $(\tilde{U}_0, \text{id}, \pi_0)$ de U_0 induit une carte $(\widetilde{U_0 \cap U_1}^0, \text{id}, \pi_0)$ de $U_0 \cap U_1$. De même, la carte $(\tilde{U}_1, \mu_{w_n}, \pi_1)$ de U_1 induit une carte $(\widetilde{U_0 \cap U_1}^1, \mu_{w_n}, \pi_1)$ de $U_0 \cap U_1$. Notons y_0 (resp. y_1) la coordonnée sur $\widetilde{U_0 \cap U_1}^0$ (resp. $\widetilde{U_0 \cap U_1}^1$). Sur $U_0 \cap U_1$, nous avons

$$[1 : y_1] = [1/y_1^{w_n} : 1].$$

C'est-à-dire $y_0^{w_n} y_1 = 1$. La section $s \in \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)(U_0 \cap U_1)$ se relève en une application

$$\begin{aligned} \tilde{s} : \widetilde{U_0 \cap U_1}^1 &\longrightarrow \mathbb{C} \\ y_0 &\longmapsto y_0 \sum_{p \in \mathbb{Z}} a_p y_0^{w_n p} \end{aligned}$$

Posons $\tilde{s}_1(y_0) := y_0 \sum_{p \geq 0} a_p y_0^{w_n p}$. L'application \tilde{s}_1 est un relevé d'un élément, noté s_1 , de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)(U_1)$. Posons $\tilde{s}_0(y_1) := \sum_{p > 0} a_{-p} y_1^p$. L'application \tilde{s}_0 est un relevé d'un élément, noté s_0 , de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)(U_0)$. Montrons que $s = s_0|_{U_0 \cap U_1} + s_1|_{U_0 \cap U_1}$.

Soit $\tilde{h} : \widetilde{U_0 \cap U_1}^1 \rightarrow \widetilde{U_0 \cap U_1}^0$ l'application qui à y_0 associe $1/y_0^{w_n}$. Nous avons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{U_0 \cap U_1}^1 \times \mathbb{C} & \xrightarrow{(\tilde{h}, \psi_{\tilde{h}})} & \widetilde{U_0 \cap U_1}^0 \times \mathbb{C} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \widetilde{U_0 \cap U_1}^1 & \xrightarrow{\tilde{h}} & \widetilde{U_0 \cap U_1}^0 \\ \pi_1 \downarrow & \swarrow \pi_0 & \\ U_0 \cap U_1 & & \end{array}$$

où $\psi_{\tilde{h}} : \widetilde{U_0 \cap U_1}^1 \rightarrow GL(1, \mathbb{C})$ est l'application qui à y_0 associe la multiplication par $1/y_0$. Le diagramme ci-dessus montre que si nous avons un relevé $\tilde{s}'_1 : \widetilde{U_0 \cap U_1}^1 \rightarrow \mathbb{C}$ d'une section s'_1 de fibré $\mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)|_{U_0 \cap U_1}$, nous en déduisons un autre relevé $\tilde{s}'_0 : \widetilde{U_0 \cap U_1}^0 \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$(V.4.13) \quad y_1 \longmapsto \psi_{\tilde{h}}(\tilde{s}'_1(1/y_1^{1/w_n}))$$

où $1/y_1^{1/w_n}$ est dans $\tilde{h}^{-1}(y_1)$. L'application \tilde{s}'_0 est bien définie car la formule (V.4.13) ne dépend pas du choix de l'élément dans $\tilde{h}^{-1}(y_1)$. Le calcul ci-dessous montre que le relevé \tilde{s}'_1 induit le relevé \tilde{s}'_0 :

$$\tilde{s}'_0(\tilde{h}(y_0)) = \psi_{\tilde{h}}(y_0) \left(y_0 \sum_{p \geq 0} a_{-p} y_0^{-w_n p} \right) = \sum_{p \geq 0} a_{-p} y_0^{-w_n p}.$$

Nous en déduisons que

$$\tilde{s}'_0 \circ \tilde{h} + \tilde{s}'_1 = \tilde{s}$$

sur $\widetilde{U_0 \cap U_1}^1$. Finalement, nous obtenons $s = s_0|_{U_0 \cap U_1} + s_1|_{U_0 \cap U_1}$ c'est-à-dire que nous avons

$$H^1(\mathbb{P}(1, w_n), \mathcal{O}_{\mathbb{P}(1, w_n)}(1)) = 0.$$

□

CHAPITRE VI

Structure de Frobenius associée au polynôme de Laurent f

Nous gardons les notations du chapitre II. Soit $U := \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid u_0^{w_0} \cdots u_n^{w_n} = 1\}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(u_0, \dots, u_n) = u_0 + \cdots + u_n$. Le polynôme f n'est pas exactement celui considéré dans [DS04] mais nous pouvons appliquer les mêmes méthodes.

Un calcul élémentaire montre que les points critiques de f sont les points

$$\zeta \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1/\mu} \quad (w_0, \dots, w_n) \in U$$

où ζ est une racine μ -ième de l'unité. Les valeurs critiques de f sont les nombres complexes

$$\mu \zeta \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1/\mu}.$$

Nous verrons, en utilisant l'article [DS03], qu'il existe une structure de Frobenius canonique sur la base de son déploiement universel.

Soit A_0° la matrice $\mu \times \mu$ telle que les seuls éléments non nuls soient en position $(\overline{j+1}, j)$ (rappelons que $\overline{j+1}$ est la somme modulo μ) et

$$(A_0^\circ)_{\overline{j+1}, j} = \begin{cases} \mu & \text{si } s(\overline{j+1}) = s(j); \\ \mu \left(\prod_{i \in I(s(j))} w_i \right)^{-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les valeurs propres de A_0° sont exactement les valeurs critiques de f . Ainsi, A_0° est une matrice semi-simple régulière.

Soit A_∞ la matrice $\mu \times \mu$ définie par

$$A_\infty = \text{diag}(\sigma(0), \dots, \sigma(\mu-1)).$$

Dans la base canonique $(e_0, \dots, e_{\mu-1})$ de \mathbb{C}^μ , nous définissons la forme bilinéaire non dégénérée g par

$$g(e_k, e_\ell) = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(s(k))} w_i \right)^{-1} & \text{si } \overline{k + \ell} = n ; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

La matrice A_∞ vérifie $A_\infty + {}^t A_\infty = n \cdot \text{id}$ où la transposée est définie par rapport à la forme bilinéaire g .

Les données $(A_0^\circ, A_\infty, g, e_0)$ définissent (cf. théorème I.2.3) un unique germe de structure de Frobenius semi-simple au point

$$\left(\mu \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1}, \mu \zeta \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1}, \dots, \mu \zeta^{\mu-1} \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1} \right)$$

de \mathbb{C}^μ .

THÉORÈME VI.0.14. *La structure de Frobenius canonique de tout germe de déploiement universel du polynôme de Laurent $f(u_0, \dots, u_n) = u_0 + \dots + u_n$ sur U est isomorphe au germe de la structure de Frobenius semi-simple définie par les conditions initiales $(A_0^\circ, A_\infty, e_0, g)$ au point*

$$\left(\mu \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1}, \mu \zeta \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1}, \dots, \mu \zeta^{\mu-1} \left(\prod_{i=0}^n w_i^{w_i} \right)^{-1} \right)$$

de \mathbb{C}^μ .

Au paragraphe suivant, nous allons résoudre le problème de Birkhoff au point 0 de l'espace des paramètres d'un déploiement universel de f . Cette solution sera canonique d'après les résultats du paragraphe 5 de [DS04]. Puis, nous allons calculer les conditions initiales de la variété de Frobenius.

VI.1. Le système de Gauss-Manin et le réseau de Brieskorn associés au polynôme f

Soit l'ensemble $U := \{(u_0, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid u_0^{w_0} \cdots u_n^{w_n} = 1\}$. Soit $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par $f(u_0, \dots, u_n) = u_0 + \dots + u_n$. Dans l'article de Douai et Sabbah [DS04], le polynôme n'est pas exactement le même et les poids sont premiers entre eux dans leur ensemble. Nous aurons deux types de modifications : l'une pour le polynôme et l'autre pour tenir compte du pgcd des poids.

Notons d le plus grand diviseur commun des entiers w_0, \dots, w_n . Pour $\alpha = 0, \dots, d-1$, nous posons

$$U_\alpha := \{(u_{0,\alpha}, \dots, u_{n,\alpha}) \in \mathbb{C}^{n+1} \mid u_{0,\alpha}^{w_0/d} \cdots u_{n,\alpha}^{w_n/d} = \zeta^\alpha\}$$

où $\zeta := \exp(2i\pi/d)$. Nous avons

$$U := \bigsqcup_{\alpha=0}^{d-1} U_\alpha.$$

Chaque U_α est isomorphe à un tore complexe $(\mathbb{C}^*)^n$ et la restriction, noté $f_\alpha = u_{0,\alpha} + \dots + u_{n,\alpha}$, de f à U_α est un polynôme de Laurent. Dans des coordonnées convenable, son polyèdre de Newton, enveloppe convexe dans \mathbb{Q}^n des exposants de ses monômes, est un simplexe contenant l'origine dans son intérieur. On peut montrer comme dans [DS04] (cf. lemme 1.2) qu'il est commode et non dégénéré¹.

Nous rappelons les notations et les principaux résultats des articles de Douai et Sabbah [DS03] et [DS04] adaptés à notre polynôme de Laurent f .

Le système de Gauss-Manin de f_α est défini par :

$$G(f_\alpha) := \Omega^n(U_\alpha)[\theta, \theta^{-1}] / (\theta d - df_\alpha \wedge) \Omega^{n-1}(U_\alpha)[\theta, \theta^{-1}].$$

Le système de Gauss-Manin de f est défini par :

$$G := \Omega^n(U)[\theta, \theta^{-1}] / (\theta d - df \wedge) \Omega^{n-1}(U)[\theta, \theta^{-1}].$$

Comme U a d composantes connexes, nous avons

$$(VI.1.1) \quad G = \bigoplus_{\alpha=0}^{d-1} G(f_\alpha).$$

Le réseau de Brieskorn de f_α , défini par $G_0(f_\alpha) := \text{Im}(\Omega^n(U_\alpha)[\theta] \rightarrow G(f_\alpha))$, est un $\mathbb{C}[\theta]$ -module libre de rang μ/d .

¹Les définitions ci-dessous viennent de l'article de Kouchnirenko [Kou76]. Soit $g \in \mathbb{C}[v, v^{-1}] = \mathbb{C}[v_1, v_1^{-1}, \dots, v_n, v_n^{-1}]$. Le polynôme de Laurent g s'écrit $g = \sum_{i \in \mathbb{Z}^n} a_i v^i$. Notons $\text{Supp}(g) := \{i \in \mathbb{Z}^n \mid a_i \neq 0\}$. Notons $\Gamma(g)$ l'enveloppe convexe de $\text{Supp}(g) - \{0\}$. Le polynôme de Laurent g est *commode* si le point 0 n'appartient à aucune des faces de dimension i pour $1 \leq i \leq n-1$ de $\Gamma(g)$. Le polynôme de Laurent g est *non dégénéré* par rapport à $\Gamma(g)$ si pour chaque face Δ de $\Gamma(g)$ le polynôme de Laurent $\sum_{i \in \mathbb{Z}^n \cap \Delta} a_i v^i$ n'a pas de point critique sur $(\mathbb{C}^*)^n$.

Le réseau de Brieskorn de f , défini par $G_0 := \text{Im}(\Omega^n(U)[\theta] \rightarrow G)$, est un $\mathbb{C}[\theta]$ -module libre de rang μ . Nous avons

$$(VI.1.2) \quad G_0 = \bigoplus_{\alpha=0}^{d-1} G_0(f_\alpha).$$

On note $V.G(f_\alpha)$ la filtration de Malgrange Kashiwara de $G(f_\alpha)$ (cf. le paragraphe 2.e de [DS03]). Cette filtration est croissante et exhaustive. La filtration $V_\bullet G(f_\alpha)$ induit une filtration sur le réseau de Brieskorn définie par $V_\beta G_0(f_\alpha) := V_\beta G(f_\alpha) \cap G_0(f_\alpha)$. D'après les égalités (VI.1.1) et (VI.1.2), la somme directe des filtrations $V_\bullet G(f_\alpha)$ est une filtration croissante et exhaustive sur G . Nous la notons $V.G$. Nous en déduisons une filtration notée $V_\bullet G_0$ sur le réseau de Brieskorn G_0 .

Soit $\omega_{0,\alpha}$ la n -forme

$$\frac{\frac{du_0}{u_0} \wedge \dots \wedge \frac{du_n}{u_n}}{d \left(\prod_i u_i^{w_i} \right)} \Big|_{\prod_i u_i^{w_i/d} = \zeta^\alpha}$$

sur U_α . Nous posons

$$\omega_0 := (\omega_{0,0}, \dots, \omega_{0,d-1}).$$

La n -forme ω_0 est définie sur U .

On définit par récurrence la suite $(\underline{a}_w(k), i_w(k)) \in \mathbb{N}^{n+1} \times \{0, \dots, n\}$ par

$$\begin{aligned} \underline{a}_w(0) &= (0, \dots, 0), & i_w(0) &= 0, \\ \underline{a}_w(k+1) &= \underline{a}_w(k) + 1_{i_w(k)}, & i_w(k+1) &= \min\{j \mid \underline{a}_w(k+1)_j / w_j\}. \end{aligned}$$

Notons $w/d := (w_0/d, \dots, w_n/d)$. Comme nous avons

$$(VI.1.3) \quad i_{w/d}(\cdot) = i_w(\cdot), \quad \underline{a}_{w/d}(\cdot) = \underline{a}_w(\cdot).$$

nous supprimons l'indice dans les notations \underline{a}_w et i_w .

Pour tout k , on a $|\underline{a}(k)| := \sum_i \underline{a}(k)_i = k$. Pour tout $(q, r) \in \{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, nous avons les égalités suivantes :

$$(VI.1.4) \quad \begin{aligned} i\left(\frac{q\mu}{d} + r\right) &= i(r), & \underline{a}\left(\frac{q\mu}{d} + r\right) &= \underline{a}\left(\frac{q\mu}{d}\right) + \underline{a}(r), \\ \underline{a}\left(\frac{q\mu}{d}\right) &= \left(\frac{qw_0}{d}, \dots, \frac{qw_n}{d}\right). \end{aligned}$$

NOTATION VI.1.5. Nous avons besoin de préciser les notations du chapitre II. Nous rajoutons un indice w ou w/d aux notations s, σ du chapitre II pour préciser que les nombres rationnels $s_w(\cdot)$ et $\sigma_w(\cdot)$ (resp. $s_{w/d}(\cdot)$ et $\sigma_{w/d}(\cdot)$) sont calculés avec les poids w_0, \dots, w_n (resp. avec les poids $w_0/d, \dots, w_n/d$).

LEMME VI.1.6. *Pour tout $(q, r) \in \{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, nous avons les égalités*

$$s_w \left(\frac{q\mu}{d} + r \right) = \frac{q}{d} + s_w(r); \quad \sigma_w \left(\frac{q\mu}{d} + r \right) = \sigma_w(r) = \sigma_{w/d}(r).$$

DÉMONSTRATION. Pour $k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous avons $s_w(k) = \underline{a}(k)_{i(k)}/w_{i(k)}$. Pour $k \in \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, nous en déduisons que $s_{w/d}(k) = ds_w(k)$. Comme $\sigma_w(k) = k - \mu s_w(k)$, nous obtenons

$$(VI.1.7) \quad \sigma_{w/d}(k) = \sigma_w(k)$$

pour $k \in \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$. Les égalités (VI.1.4) et (VI.1.7) terminent la démonstration. \square

Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d-1\}$, et pour $k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous définissons les éléments $\omega_{k,\alpha} := u_{\alpha}^{\underline{a}(k)} \omega_{0,\alpha}$ où $u_{\alpha}^{\underline{a}(k)} := u_{0,\alpha}^{\underline{a}(k)_0} \dots u_{n,\alpha}^{\underline{a}(k)_n}$. D'après les égalités (VI.1.4), pour tout $(q, r) \in \{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$ nous avons

$$(VI.1.8) \quad \omega_{\frac{q\mu}{d}+r,\alpha} = \zeta^{\alpha q} \omega_{r,\alpha}.$$

Pour tout k , la classe de $\omega_{k,\alpha}$ appartient à $G_0(f_{\alpha})$. Pour tout $k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous posons

$$\omega_k := (\omega_{k,0}, \dots, \omega_{k,d-1}) \in G_0.$$

Pour tout $(q, r) \in \{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, nous avons

$$(VI.1.9) \quad \omega_{\frac{q\mu}{d}+r} = (1, \zeta^q, \dots, \zeta^{q(d-1)}) \omega_r.$$

La proposition suivante est l'analogie de la proposition de 3.2. de [DS04].

PROPOSITION VI.1.10. *Les classes des éléments $\omega_0, \dots, \omega_{\mu-1}$ forment une $\mathbb{C}[\theta]$ -base de G_0 , notée ω . De plus, pour $k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous avons les relations*

$$-\frac{1}{\mu} \theta(\sigma_w(k) - \theta \partial_{\theta}) \omega_k = \frac{\overline{\omega_{k+1}}}{w_{i(k)}}$$

où $\overline{k+1}$ désigne la réduction modulo μ . De plus, l'ordre de ω_k pour la filtration V est $\sigma_w(k)$ et ω induit une base sur $\bigoplus_{\alpha} \text{gr}_{\alpha}^V(G_0/\theta G_0)$.

DÉMONSTRATION. Pour démontrer cette proposition, il suffit d'adapter la démonstration de la proposition de 3.2. de [DS04].

- Nous allons d’abord démontrer cette proposition pour le polynôme de Laurent f_α sur le tore U_α . En particulier, il faut changer la relation (3.5) de [DS04] en

$$(VI.1.11) \quad \theta \left(\frac{1}{w_i/d} u_{i,\alpha} \partial_{u_{i,\alpha}} - \frac{1}{w_0/d} u_{0,\alpha} \partial_{u_{0,\alpha}} \right) \varphi \omega_{0,\alpha} = \left(\frac{u_{i,\alpha}}{w_i/d} - \frac{u_{0,\alpha}}{w_0/d} \right) \varphi \omega_{0,\alpha}$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{C}[u_\alpha, u_\alpha^{-1}, \theta, \theta^{-1}]$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Le reste de la démonstration est identique à celle de [DS04]. Nous en déduisons la proposition pour le polynôme de Laurent f_α sur le tore U_α . En particulier, pour tout $k \in \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, nous avons les relations

$$(VI.1.12) \quad -\frac{1}{\mu/d} \theta (\sigma_{w/d}(k) - \theta \partial_\theta) \omega_k = \frac{\omega_{k+1}}{w_{i(k)}/d} \quad \text{où } \omega_{\mu/d, \alpha} = \zeta^\alpha \omega_{0, \alpha}.$$

- Montrons que $\omega_0, \dots, \omega_{\mu-1}$ forment une $\mathbb{C}[\theta]$ -base de G_0 . Nous savons que $\omega_{0,\alpha}, \dots, \omega_{(\mu/d)-1,\alpha}$ forment une $\mathbb{C}[\theta]$ -base de $G_0(f_\alpha)$ pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d\}$. D’après l’égalité (VI.1.2), une base $\mathbb{C}[\theta]$ -base de G_0 est formée par les vecteurs suivants

$$\begin{array}{cccc} (\omega_{0,1}, 0, \dots, 0) & (0, \omega_{0,2}, 0, \dots, 0) & \cdots & (0, \dots, 0, \omega_{0,d}) \\ (\omega_{1,1}, 0, \dots, 0) & (0, \omega_{1,2}, 0, \dots, 0) & \cdots & (0, \dots, 0, \omega_{1,d}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ (\omega_{(\mu/d)-1,1}, 0, \dots, 0) & (0, \omega_{(\mu/d)-1,2}, 0, \dots, 0) & \cdots & (0, \dots, 0, \omega_{(\mu/d)-1,d}) \end{array}$$

Pour $(i, j) \in \{1, \dots, d\} \times \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, notons

$$e_{id+j-1} := (0, \dots, 0, \omega_{i,j}, 0, \dots, 0).$$

Pour tout $(q, r) \in \{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, nous avons

$$\omega_{\frac{q\mu}{d}+r} = e_{dr} + \zeta^q e_{dr+1} + \cdots + \zeta^{q(d-1)} e_{dr+d-1}.$$

Nous en déduisons que la matrice de passage entre les $\omega_{\frac{q\mu}{d}+r}$ et les e_i est une matrice diagonale par bloc où les blocs sont tous égaux à la matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \zeta & \cdots & \zeta^{d-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \zeta^d & \cdots & \zeta^{d(d-1)} \end{pmatrix}$$

Cette matrice est inversible. Nous en déduisons que $\omega_0, \dots, \omega_{\mu-1}$ est une $\mathbb{C}[\theta]$ -base de G_0 . Le reste de la proposition découle de la formule (VI.1.11) et du lemme VI.1.6. □

Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d-1\}$, nous avons un produit sur le quotient $G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)$ qui provient d'un isomorphisme entre le quotient jacobien de f_α et $G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)$. Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d-1\}$, notons $[g]$ la classe d'un élément $g \in G_0(f_\alpha)$ dans le quotient $G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)$. Ce produit est donné par la formule

$$(VI.1.13) \quad [h_1\omega_{0,\alpha}] \star_\alpha [h_2\omega_{0,\alpha}] = [h_1h_2\omega_{0,\alpha}]$$

où h_1, h_2 sont dans $\mathbb{C}[u_\alpha, u_\alpha^{-1}]$. Ceci nous permet de définir un produit, noté \star , sur le quotient $G_0/\theta G_0$. D'après la proposition VI.1.10, la base ω de G_0 induit une base $[\omega] := ([\omega_0], \dots, [\omega_{\mu-1}])$ de $G_0/\theta G_0$.

LEMME VI.1.14. *Dans la base $[\omega]$ de $G_0/\theta G_0$, le produit est donné par*

$$[\omega_i] \star [\omega_j] = w^{\underline{a}(i)+\underline{a}(j)-\underline{a}(i+j)}[\omega_{\overline{i+j}}]$$

où $\overline{i+j}$ désigne la somme modulo μ .

DÉMONSTRATION. – D'abord, nous allons montrer que

$$[\omega_k] = [w^{\underline{a}(k)}(u_0/w_0)^k \omega_0].$$

Les relations (VI.1.11) dans le quotient $G_0/\theta G_0$ deviennent

$$(VI.1.15) \quad \left[\frac{u_i}{w_i} \omega_0 \varphi \right] = \left[\frac{u_0}{w_0} \omega_0 \varphi \right],$$

pour tout $\varphi \in \mathbb{C}[u, u^{-1}, \theta, \theta^{-1}]$ et tout $i \in \{0, \dots, n\}$. Nous en déduisons que $[\omega_k] = [w^{\underline{a}(k)}(u_0/w_0)^k \omega_0]$.

– Par définition du produit dans $G_0/\theta G_0$, nous avons

$$[\omega_i] \star [\omega_j] = \left[w^{\underline{a}(i)+\underline{a}(j)} \left(\frac{u_0}{w_0} \right)^{i+j} \omega_0 \right]$$

et

$$\left[\left(\frac{u_0}{w_0} \right)^{i+j} \omega_0 \right] = [w^{-\underline{a}(i+j)} u^{\underline{a}(i+j)} \omega_0].$$

Or la relation $\prod u_i^{w_i} = 1$ sur G induit $[u^{\underline{a}(i+j)} \omega_0] = [u^{\underline{a}(\overline{i+j})} \omega_0] = [\omega_{\overline{i+j}}]$. \square

Pour tout $\gamma \in S_w$, nous notons

$$k^{\min}(\gamma) := \min\{j \in \{0, \dots, (\mu/d) - 1\} \mid s_w(j) = \gamma\}.$$

D'après (II.2.3), nous avons $k^{\min}(\gamma) = k^{\max}(\gamma) - \delta(\gamma) + 1$. Pour tout $i \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, posons

$$(VI.1.16) \quad \tilde{\omega}_i := \frac{w^{\underline{a}(k^{\min}(s_w(i)))}}{w^{\underline{a}(i)}} \omega_i.$$

PROPOSITION VI.1.17. *Dans la base $\tilde{\omega}$ de G_0 , nous avons*

$$\theta^2 \partial_\theta \tilde{\omega} = \tilde{\omega} A_0^\circ + \theta \tilde{\omega} A_\infty.$$

DÉMONSTRATION. D'après la proposition VI.1.10, nous avons

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\mu} \theta (\sigma_w(k) - \theta \partial_\theta) \tilde{\omega}_k &= \tilde{\omega}_{k+1} \frac{w^{\underline{a}(k^{\min}(s_w(k)))}}{w^{\underline{a}(k^{\min}(s_w(k+1)))}} \\ \theta^2 \partial_\theta \tilde{\omega}_k &= \mu \frac{w^{\underline{a}(k^{\min}(s_w(k)))}}{w^{\underline{a}(k^{\min}(s_w(k+1)))}} \tilde{\omega}_{k+1} + \theta \sigma_w(k) \tilde{\omega}_k. \end{aligned}$$

□

Maintenant, nous allons calculer la forme bilinéaire non dégénérée au point 0 de l'espace des paramètres d'un déploiement universel de f .

Soit G un $\mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}]$ -module. Nous notons \overline{G} le \mathbb{C} -espace vectoriel G équipé de la structure de module $p(\theta) \cdot g = p(-\theta)g$ où $p(\theta) \in \mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}]$. Nous notons par \overline{g} les éléments de \overline{G} . Si G est équipé d'un opérateur ∂_θ compatible à la multiplication par θ , alors sur \overline{G} , nous avons un opérateur $\partial_\theta \overline{g} := \overline{-\partial_\theta g}$. Remarquons que $\theta \partial_\theta \overline{g} = \overline{\theta \partial_\theta g}$.

D'après les résultats du paragraphe 4 de l'article [DS04], pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d - 1\}$, il existe une forme $\mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}]$ -bilinéaire non dégénérée

$$S_\alpha : G(f_\alpha) \otimes_{\mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}]} \overline{G(f_\alpha)} \longrightarrow \mathbb{C}[\theta, \theta^{-1}]$$

qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) $\theta \partial_\theta S_\alpha(p_1, \overline{p_2}) = S_\alpha(\theta \partial_\theta p_1, \overline{p_2}) + S_\alpha(p_1, \overline{\theta \partial_\theta p_2})$;
- (2) S_α envoie $V_0 G(f_\alpha) \otimes \overline{V_{<1} G(f_\alpha)}$ dans $\mathbb{C}[\theta^{-1}]$;
- (3) S_α envoie $G_0(f_\alpha) \otimes \overline{G_0(f_\alpha)}$ dans $\theta^n \mathbb{C}[\theta]$;
- (4) $S_\alpha(p_1, \overline{p_2}) = (-1)^n \overline{S_\alpha(p_1, p_2)}$.

LEMME VI.1.18. *Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d - 1\}$, il existe une unique, à une constante près, forme bilinéaire non dégénérée S_α telle que les conditions (1), (2), (3)*

et (4) soient vérifiées. Dans la base $\omega_{0,\alpha}, \dots, \omega_{(\mu/d)-1,\alpha}$ de $G(f_\alpha)$, nous avons

$$S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \omega_{r_k,\alpha}) = \begin{cases} C \cdot S_\alpha(\omega_{0,\alpha}, \omega_{n,\alpha}) & \text{si } r_j + r_k = n; \\ \zeta^\alpha C \cdot S_\alpha(\omega_{0,\alpha}, \omega_{n,\alpha}) & \text{si } r_j + r_k = n + (\mu/d); \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où $C = w_n w^{\underline{a}(r_j) + \underline{a}(r_k) - \underline{a}(n+1) - \underline{a}(r_j + r_k - n)}$.

REMARQUE VI.1.19. Comme $|\underline{a}(k)| = k$, nous avons l'égalité suivante

$$w_n w^{\underline{a}(r_j) + \underline{a}(r_k) - \underline{a}(n+1) - \underline{a}(r_j + r_k - n)} = d w_n (w/d)^{\underline{a}(r_j) + \underline{a}(r_k) - \underline{a}(n+1) - \underline{a}(r_j + r_k - n)}.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME VI.1.18. Nous suivons la preuve du lemme 4.1 de l'article [DS04]. Pour tout $r_j, r_k \in \{0, \dots, (\mu/d) - 1\}$, d'après (3), nous avons $S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \omega_{r_k,\alpha}) \in \theta^n \mathbb{C}[\theta]$ et $S_\alpha(\omega_{0,\alpha}, \omega_{r_k,\alpha}) \in \theta^{[\sigma_{w/d}(r_k)]} \mathbb{C}[\theta]$ d'après (2) où $[\cdot]$ désigne la partie entière. Si $\sigma_{w/d}(r_k) = n$ alors nous avons $S_\alpha(\omega_{0,\alpha}, \omega_{r_k,\alpha}) \neq 0$. Or $\sigma_{w/d}(r_k) = n$ implique que $r_k = n$.

D'après les égalités (1) et (VI.1.12), nous obtenons

$$\begin{aligned} & - \frac{1}{\mu} (-\theta \partial_\theta + n) S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k,\alpha}) \\ &= \frac{\sigma_{w/d}(r_j) + \sigma_{w/d}(r_k) - n}{\mu/d} S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k,\alpha}) \\ &+ \theta^{-1} \left(S_\alpha \left(\omega_{r_j,\alpha}, \frac{\bar{\omega}_{r_k+1,\alpha}}{w_{i(r_k)}/d} \right) - S_\alpha \left(\frac{\omega_{r_j+1,\alpha}}{w_{i(r_j)}/d}, \bar{\omega}_{r_k,\alpha} \right) \right) \end{aligned}$$

où $\omega_{\mu/d,\alpha} = \zeta^\alpha \omega_{0,\alpha}$ (cf. (VI.1.8)). Comme $S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k,\alpha}) \in \theta^n \mathbb{C}[\theta]$, le membre de gauche de l'égalité ci-dessus est nul. Puis, un raisonnement par récurrence montre que si $S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \omega_{r_k,\alpha}) \neq 0$ alors $r_j + r_k \equiv n \pmod{[\mu/d]}$. Nous en déduisons

- Si $r_j + r_k = n$ nous avons

$$S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k+1,\alpha}) = \frac{w_{i(r_k)}}{w_{i(r_j)}} S_\alpha(\omega_{r_j+1,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k,\alpha}).$$

- Si $r_j + r_k = n + (\mu/d)$ nous avons

$$S_\alpha(\omega_{r_j,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k+1,\alpha}) = \zeta^\alpha \frac{w_{i(r_k)}}{w_{i(r_j)}} S_\alpha(\omega_{r_j+1,\alpha}, \bar{\omega}_{r_k,\alpha}).$$

□

Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d-1\}$, nous posons

$$S_\alpha(\omega_{0,\alpha}, \omega_{n,\alpha}) = \theta^n / (d w_n).$$

Pour tout $(p_1, p_2) \in G_0(f_\alpha) \otimes \overline{G_0}(f_\alpha)$, le coefficient devant θ^n de $S_\alpha(p_1, p_2)$ ne dépend que de la classe de p_1, p_2 dans $G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)$. Nous notons $[g_\alpha]([p_1], [p_2])$ ce coefficient. Nous en déduisons une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée, notée $[g_\alpha]$, sur $G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)$. Nous posons $[g] := \sum_{\alpha=0}^{d-1} [g_\alpha]$ et nous obtenons une forme bilinéaire symétrique et non dégénérée sur $G_0/\theta G_0$.

LEMME VI.1.20. *Dans la base $[\tilde{\omega}]$ de $G_0/\theta G_0$, la forme bilinéaire non dégénérée est donnée par*

$$[g]([\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k]) = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(s_w(j))} w_i \right)^{-1} & \text{si } \overline{j+k} = n; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\overline{j+k}$ désigne la réduction modulo μ .

DÉMONSTRATION. Pour tout $j, k \in \{0, \dots, \mu-1\}$, il existe des uniques couples (q_j, r_j) et (q_k, r_k) dans $\{0, \dots, d-1\} \times \{0, \dots, (\mu/d)-1\}$ tels que

$$j = q_j \frac{\mu}{d} + r_j \quad \text{et} \quad k = q_k \frac{\mu}{d} + r_k.$$

Nous en déduisons

$$\begin{aligned} [g]([\omega_j], [\omega_k]) &= \sum_{\alpha=0}^{d-1} [g_\alpha]([\omega_{j,\alpha}], [\omega_{k,\alpha}]) \\ &= \sum_{\alpha=0}^{d-1} \zeta^{\alpha(q_j+q_k)} [g_\alpha]([\omega_{r_j,\alpha}], [\omega_{r_k,\alpha}]) \quad \text{d'après (VI.1.8)}. \end{aligned}$$

D'après le lemme VI.1.18 et un calcul direct, nous obtenons

$$[g]([\omega_j], [\omega_k]) = \begin{cases} w^\alpha & \text{si } \begin{cases} (r_j + r_k = n) \\ \text{et } (q_j + q_k = 0 \text{ ou } d) ; \end{cases} \\ w^\alpha & \text{si } \begin{cases} (r_j + r_k = n + (\mu/d)) \\ \text{et } (q_j + q_k + 1 = d) ; \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\alpha = \underline{a}(r_j) + \underline{a}(r_k) - \underline{a}(n+1) - \underline{a}(r_j + r_k - n).$$

Comme $\overline{j+k} = n$ est équivalent à $s_w(j) = \{1 - s_w(k)\}$, nous avons les équivalences suivantes

$$(VI.1.21) \quad j+k = n \Leftrightarrow r_j + r_k = n \text{ et } q_j + q_k = 0;$$

$$(VI.1.22) \quad j+k = n + \mu \Leftrightarrow \begin{cases} r_j + r_k = n \text{ et } q_j + q_k = d \\ \text{ou} \\ r_j + r_k = n + (\mu/d) \text{ et } q_j + q_k + 1 = d \end{cases}$$

Dans la base $[\omega]$ la forme bilinéaire $[g]$ est donnée par :

$$[g]([\omega_j], [\omega_k]) = \begin{cases} w^{\underline{a}(r_j) + \underline{a}(r_k) - \underline{a}(n+1) - \underline{a}(r_j + r_k - n)} & \text{si } \overline{j+k} = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Puis dans la base $[\tilde{\omega}]$ (cf. égalité (VI.1.16)), nous avons

$$[g]([\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k]) = \begin{cases} \frac{w^\alpha}{w^\beta} & \text{si } \overline{j+k} = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \underline{a}(k^{\min}(s_w(j))) + \underline{a}(k^{\min}(s_w(k))); \\ \beta &= \underline{a}(n+1) + \underline{a}(r_j + r_k - n) + \underline{a}(j) - \underline{a}(r_j) + \underline{a}(k) - \underline{a}(r_k) \end{aligned}$$

D'après les égalités (VI.1.4), nous avons

$$\underline{a}(j) - \underline{a}(r_j) + \underline{a}(k) - \underline{a}(r_k) = a\left((q_j + q_k)\frac{\mu}{d}\right).$$

L'hypothèse $\overline{j+k} = n$, vue à travers les équivalences (VI.1.21) et (VI.1.22), implique que $\beta = \underline{a}(n+1) + \underline{a}(j+k-n)$.

Si $j+k = n$ alors $s_w(j) = s_w(k) = 0$ et nous avons $[g]([\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k]) = (\prod_{i=0}^n w_i)^{-1}$.

Supposons que $j+k = n + \mu$. D'abord nous allons montrer que pour tout $\gamma > 0$ dans S_w , nous avons

$$(VI.1.23) \quad \underline{a}(k^{\min}(\gamma)) + \underline{a}(k^{\max}(\{1 - \gamma\}) + 1) = \underline{a}(\mu) + \underline{a}(n+1).$$

Pour tout $\alpha \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, nous avons

$$\underline{a}(k^{\min}(\gamma))_\alpha = \begin{cases} [w_\alpha \gamma] & \text{si } \alpha \in I(\gamma); \\ [w_\alpha \gamma] + 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme $\underline{a}(k^{\max}(\gamma) + 1)_\alpha = [w_\alpha \gamma] + 1$, nous obtenons

$$\underline{a}(k^{\min}(\gamma))_\alpha + \underline{a}(k^{\max}(\{1 - \gamma\}) + 1)_\alpha = \begin{cases} w_\alpha + [\gamma w_\alpha] + [-\gamma w_\alpha] + 1 & \text{si } \alpha \in I(\gamma); \\ w_\alpha + [\gamma w_\alpha] + [-\gamma w_\alpha] + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'égalité

$$[\gamma w_\alpha] + [-\gamma w_\alpha] = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \in I(\gamma); \\ -1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

montre que

$$\underline{a}(k^{\min}(\gamma))_\alpha + \underline{a}(k^{\max}(\{1 - \gamma\}) + 1)_\alpha = w_\alpha + 1.$$

Puis, les égalités (VI.1.4) impliquent la formule (VI.1.23).

Comme $j + k = n + \mu$, nous avons $s_w(j) = \{1 - s_w(k)\}$. Nous appliquons la formule (VI.1.23) à $\gamma = s_w(k)$ et nous en déduisons que

$$[g](\tilde{\omega}_j, \tilde{\omega}_k) = w^{\underline{a}(k^{\min}(s_w(j))) - \underline{a}(k^{\max}(s_w(j)) + 1)} = \left(\prod_{i \in I(s_w(j))} w_i \right)^{-1}.$$

□

NOTATION VI.1.24. Dorénavant, nous supprimons les indices w dans s_w et σ_w car nous travaillerons toujours avec les poids w_0, \dots, w_n .

Soit $F : U \times X \rightarrow \mathbb{C}$ un déploiement universel de f . La forme $[\omega_0] \in G_0/\theta G_0$ est une section primitive homogène et canonique c'est-à-dire que $[\omega_0]$ vérifie les propriétés suivantes :

- (*primitive*) $[\omega_0]$ induit un isomorphisme entre $G_0/\theta G_0$ est le quotient jacobien de f ;
- (*homogène*) $[\omega_0]$ est un vecteur propre de l'endomorphisme dont la matrice est $-A_\infty$ dans la base $[\omega]$;
- (*canonique*, cf. paragraphe 3.c de [DS03]) $[\omega_0]$ est un vecteur propre de la matrice $-A_\infty$ pour la valeur propre maximale (pour le polynôme de Laurent f cette valeur propre est 0).

Notons $\varphi_{[\omega_0]}^\circ : T_0 X \rightarrow G_0/\theta G_0$ l'application de période infinitésimale en $\underline{x} = \underline{0}$ défini par K. Saito [Sai83] (voir aussi [Sab02] p.244). Nos conditions initiales de la variété de Frobenius sont donc $(A_0^\circ, A_\infty, \varphi_{[\omega_0]}^{-1}[g], \varphi_{[\omega_0]}^{-1}[\omega_0])$.

La matrice A_0° est la multiplication par le champ d'Euler \mathfrak{E} en $\underline{x} = \underline{0}$. Pour faciliter la correspondance entre le côté A et le côté B , nous allons définir un objet

qui va coder cette multiplication par le champ d'Euler en $\underline{x} = \underline{0}$. Nous définissons $(([a], [b], [c])) := [g]([a] \star [b], [c])$ pour tout $[a], [b], [c]$ dans $G_0/\theta G_0$.

PROPOSITION VI.1.25. *Soient j, k dans $\{0, \dots, \mu - 1\}$.*

- (1) *Si $\overline{1 + j + k} \neq n$ alors $(([\tilde{\omega}_1], [\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k])) = 0$.*
- (2) *Si $\overline{1 + j + k} = n$ alors nous avons*

$$(([\tilde{\omega}_1], [\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k])) = \begin{cases} \left(\prod_{i \in I(j,k)} w_i \right)^{-1} & \text{si } \sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) \neq n; \\ \left(\prod_{i \in I(s(j))} w_i \right)^{-1} & \text{si } \sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) = n \end{cases}$$

où $I(j, k) := I(s(j)) \sqcup I(s(k))$.

DÉMONSTRATION. Quitte à changer j et k , on peut supposer que $j \leq k$.

– Dans un premier temps, nous allons démontrer la formule suivante

$$(VI.1.26) \quad (([\tilde{\omega}_1], [\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k])) = \begin{cases} \frac{w^{\underline{a}(k^{\min}(s(j)))}}{w^{\underline{a}(k^{\max}(\{1-s(k)\})+1)}} & \text{si } \overline{1 + j + k} = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'après le lemme VI.1.14 et le lemme VI.1.20, nous obtenons

$$(([\tilde{\omega}_1], [\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k])) = \begin{cases} \frac{w^\alpha}{w^\beta} & \text{si } \overline{1 + j + k} = n; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \underline{a}(k^{\min}(s(j))) + \underline{a}(k^{\min}(s(k))); \\ \beta &= \underline{a}(n + 1) + \underline{a}(1 + j + k - n). \end{aligned}$$

Si $1 + j + k = n$ alors $s(j) = s(k) = 0$. Nous en déduisons la formule (VI.1.26).

Supposons que $1 + j + k = n + \mu$.

Si $(w_0, \dots, w_n) = (1, \dots, 1)$, la seule possibilité est $j = k = n$ et la formule (VI.1.26) est vraie.

Supposons que $(w_0, \dots, w_n) \neq (1, \dots, 1)$. Nous en déduisons que les inégalités suivantes

$$\mu \geq n + 2, \quad n + 1 \leq j + 1 \leq \mu - 1$$

$$\text{et } s(j + 1) > 0.$$

La condition $1 + j + k = n + \mu$ implique que $s(k) = \{1 - s(\overline{j + 1})\} > 0$. Puis, nous appliquons la formule (VI.1.23) à $\gamma = s(k)$ et nous en déduisons la formule (VI.1.26)

– Soient j, k tels que $1 + j + k = \varepsilon + n$ où $\varepsilon = 0$ ou 1 . Nous avons $s(k) = \{1 - s(\overline{j+1})\}$. Pour finir la démonstration, il suffit de vérifier que

$$(VI.1.27) \quad \{1 - s(k)\} = \begin{cases} s(j) & \text{si } \sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) = n; \\ s(\overline{j+1}) \neq s(j) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, nous avons

$$\frac{1}{\mu}(\sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) - n) = \varepsilon - s(j) - s(k) \in]-1, 1[.$$

Finalement, les équivalences suivantes démontrent l'égalité (VI.1.27)

$$\sigma(1) + \sigma(j) + \sigma(k) = n \Leftrightarrow s(j) + s(k) \in \mathbb{N} \Leftrightarrow s(j) = \{1 - s(k)\}.$$

□

VI.2. Les conditions initiales du potentiel

Dans ce paragraphe, nous allons montrer que les nombres $(([\tilde{\omega}_1], [\tilde{\omega}_j], [\tilde{\omega}_k]))$ engendrent le potentiel de la structure de Frobenius du polynôme de Laurent f .

Soit X l'espace de base d'un déploiement universel de f . Soit $t_0, \dots, t_{\mu-1}$ des coordonnées plates au voisinage de 0 dans X .

Le champ d'Euler est défini par

$$(VI.2.1) \quad \mathfrak{E} = \sum_{k=0}^{\mu-1} (1 - \sigma(k)) t_k \partial_{t_k} + \mu \partial_{t_1}.$$

Nous développons le potentiel de la structure de Frobenius en série entière et nous le notons

$$F^{sing}(\mathbf{t}) = \sum_{\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1} \geq 0} A(\boldsymbol{\alpha}) \frac{t^\alpha}{\boldsymbol{\alpha}!}$$

où $\boldsymbol{\alpha} := (\alpha_0, \dots, \alpha_{\mu-1})$ et $\frac{t^\alpha}{\boldsymbol{\alpha}!} := \frac{t_0^{\alpha_0}}{\alpha_0!} \cdots \frac{t_{\mu-1}^{\alpha_{\mu-1}}}{\alpha_{\mu-1}!}$. Nous appelons $|\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_0 + \cdots + \alpha_{\mu-1}$, la longueur de $A(\boldsymbol{\alpha})$.

Notons (g^{ab}) la matrice inverse de la forme bilinéaire non dégénérée dans les coordonnées \mathbf{t} . Pour tout $a \in \{0, \dots, \mu-1\}$, notons par a^* l'unique élément de $\{0, \dots, \mu-1\}$ tel que $g^{aa^*} \neq 0$. Pour tout $i, j, k, \ell \in \{0, \dots, \mu-1\}$, le potentiel vérifie les équations WDVV

$$(VI.2.2) \quad (i, j, k, \ell) : \sum_{a=0}^{\mu-1} F_{ija}^{sing} g^{aa^*} F_{a^*k\ell}^{sing} = \sum_{a=0}^{\mu-1} F_{jka}^{sing} g^{aa^*} F_{a^*i\ell}^{sing},$$

la condition d'homogénéité par rapport au champ d'Euler

$$(VI.2.3) \quad \mathfrak{E} \cdot F^{sing} = (3 - n)F^{sing}$$

et les conditions

$$(VI.2.4) \quad F_{ijk}^{sing}(\mathbf{0}) = g|_{t=0}(\partial_{t_i} \star \partial_{t_j}, \partial_{t_k}) \text{ où } F_{ijk}^{sing} := \frac{\partial^3 F^{sing}}{\partial t_i \partial t_j \partial t_k}.$$

Remarquons que $g|_{t=0}(\partial_{t_i} \star \partial_{t_j}, \partial_{t_k}) = ((\tilde{\omega}_i, \tilde{\omega}_j, \tilde{\omega}_k))$. Notons $A_{ijk}(\boldsymbol{\alpha})$ le nombre $A(\alpha_0, \dots, \alpha_i + 1, \dots, \alpha_j + 1, \dots, \alpha_k + 1, \dots, \alpha_{\mu-1})$.

THÉORÈME VI.2.5. *Le potentiel F^{sing} est déterminé par les nombres $A_{ijk}(\mathbf{0})$ avec $j, k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$ tels que $\overline{1 + j + k} = n$.*

REMARQUE VI.2.6. (1) Nous avons $A_{1jk}(\mathbf{0}) = ((\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_j, \tilde{\omega}_k))$.

(2) Si $\overline{1 + j + k} \neq n$, alors $A_{1jk}(\mathbf{0}) = 0$ d'après l'égalité (VI.2.4).

LEMME VI.2.7. *Le potentiel F^{sing} est déterminé par les nombres $A_{ijk}(\mathbf{0})$ avec $i, j, k \in \{0, \dots, \mu - 1\}$.*

DÉMONSTRATION. Nous allons démontrer le lemme par récurrence sur la longueur des nombres $A(\boldsymbol{\alpha})$. Pour tout $i, j, k, \ell \in \{0, \dots, \mu - 1\}$, le terme de $F_{ija}^{sing} g^{aa^*} F_{a^*k\ell}^{sing}$ devant $\frac{t^\alpha}{\alpha!}$ est

$$g^{aa^*} \sum_{\beta + \gamma = \alpha} \binom{\beta_0}{\alpha_0} \cdots \binom{\beta_{\mu-1}}{\alpha_{\mu-1}} A_{ija}(\boldsymbol{\beta}) A_{a^*k\ell}(\boldsymbol{\gamma}).$$

Ainsi, les termes de plus grande longueur, c'est-à-dire de longueur $|\boldsymbol{\alpha}| + 3$, dans la somme ci-dessus sont $g^{aa^*} A_{ija}(\boldsymbol{\alpha}) A_{a^*k\ell}(\mathbf{0})$ et $g^{aa^*} A_{ija}(\mathbf{0}) A_{a^*k\ell}(\boldsymbol{\alpha})$. Comme le potentiel vérifie les conditions (VI.2.4), nous en déduisons que $A_{ija}(\mathbf{0}) \neq 0$ si et seulement si $a = \overline{i + j}$.

Dans l'équation WDVV $(1, j, k, \ell)$, les termes de longueur $|\boldsymbol{\alpha}| + 3$ devant $\frac{t^\alpha}{\alpha!}$ sont

$$\begin{aligned} & - g^{\overline{1+j}, \overline{1+j^*}} A_{1\overline{1+j^*}}(\mathbf{0}) A_{\overline{1+j}k\ell}(\boldsymbol{\alpha}); \\ & - g^{\overline{k+\ell}, \overline{k+\ell^*}} A_{1\overline{j+k+\ell}}(\boldsymbol{\alpha}) A_{\overline{k+\ell^*}k\ell}(\mathbf{0}); \\ & - g^{\overline{j+k}, \overline{j+k^*}} A_{j\overline{k+j^*}}(\mathbf{0}) A_{\overline{j+k}1\ell}(\boldsymbol{\alpha}); \text{ et} \\ & - g^{\overline{1+\ell}, \overline{1+\ell^*}} A_{j\overline{k1+\ell}}(\boldsymbol{\alpha}) A_{\overline{1+\ell^*}1\ell}(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

Les termes du type $A_{???}(\mathbf{0})$ se calculent par (VI.2.4) et la condition d'homogénéité (VI.2.3) implique

$$A(\alpha_0, \alpha_1 + 1, \alpha_2, \dots, \alpha_{\mu-1}) = \frac{1}{\mu} A(\boldsymbol{\alpha}) d(\boldsymbol{\alpha}) \text{ pour } |\boldsymbol{\alpha}| \geq 3$$

où $d(\boldsymbol{\alpha}) = 3 - n + \sum_{k=0}^{\mu-1} \alpha_k (\sigma(k) - 1)$. Nous en déduisons que les nombres $A_{1??}(\boldsymbol{\alpha})$ s'expriment en fonction de nombres de longueur strictement plus petite. Ainsi, l'équation WDVV $(1, j, k, \ell)$ permet d'obtenir une relation entre $A_{\overline{1+jk\ell}}(\boldsymbol{\alpha})$ et $A_{\overline{j k 1+\ell}}(\boldsymbol{\alpha})$. \square

DÉMONSTRATION DU THÉORÈME VI.2.5. D'après le lemme VI.2.7, il suffit de montrer que les nombres $A_{ijk}(\mathbf{0})$ se calculent en fonction des termes du type $A_{1??}(\mathbf{0})$. Les nombres de longueur 3 dans l'équation $(1, j, k, \ell)$ sont non nuls si et seulement si $\overline{1+j+k+\ell} = n$. Sous cette condition, nous avons $\overline{1+j} = \overline{k+\ell}$ et $\overline{j+k} = \overline{1+\ell}$. Ainsi, les termes de longueur 3 dans l'équation $(1, j, k, \ell)$ sont

$$\begin{aligned} & - A_{1\overline{j1+j^*}}(\mathbf{0}) A_{\overline{1+jk\ell}}(\mathbf{0}) \text{ et} \\ & - A_{\overline{j k 1+\ell}}(\mathbf{0}) A_{\overline{1+\ell^* 1\ell}}(\mathbf{0}). \end{aligned}$$

En considérant successivement les équations WDVV $(1, j-1, k, \ell+1), (1, j-2, k, \ell+2), \dots$, nous pouvons exprimer $A_{\overline{1+jk\ell}}(\mathbf{0})$ en fonction des nombres du type $A_{1??}(\mathbf{0})$. \square

VI.3. Définition d'une structure d'algèbre de Frobenius graduée sur $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$

Dans ce paragraphe nous allons quotienter le produit \star et la forme bilinéaire $[g]$ obtenus sur $G_0/\theta G_0$ par la filtration $V_\bullet G_0$.

PROPOSITION VI.3.1. *Le produit que nous avons défini sur $G_0/\theta G_0$ est compatible avec la filtration $V_\bullet(G_0/\theta G_0)$, c'est-à-dire qu'on a*

$$V_{\beta_1}(G_0/\theta G_0) \star V_{\beta_2}(G_0/\theta G_0) \subset V_{\beta_1+\beta_2}(G_0/\theta G_0).$$

Notons $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$ le gradué $\bigoplus \text{gr}_\beta^V(G_0/\theta G_0)$ et notons \cup le gradué du produit \star sur $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$.

REMARQUE VI.3.2. Soit $\alpha \in \{0, \dots, d\}$. Nous allons rappeler les notations et les résultats du paragraphe 4.a de [DS03]. Le polynôme de Laurent

$$f_\alpha(u_{0,\alpha}, \dots, u_{n,\alpha}) = \sum_{i=0}^n u_{i,\alpha}$$

sur le tore U_α est commode et non dégénéré par rapport à son polyèdre de Newton (cf. bas de page p.113), noté $\Gamma(f_\alpha)$. Soit σ une face de $\partial\Gamma(f_\alpha)$. Soit L_σ la forme linéaire

telle que $L_\sigma = 1$ sur σ . Pour $g \in \mathbb{C}[u_\alpha, u_\alpha^{-1}]$, on pose $\phi_\alpha(g) := \max_\sigma \max\{L_\sigma(a) \mid a \in \text{Supp}(g)\}$. Dans la figure 1, on peut voir ϕ_α comme la jauge du convexe $\Gamma(f_\alpha)$. Comme la jauge d'un convexe vérifie l'inégalité triangulaire, on en déduit l'inégalité suivante :

$$(VI.3.3) \quad \phi_\alpha(gh) \leq \phi_\alpha(g) + \phi_\alpha(h).$$

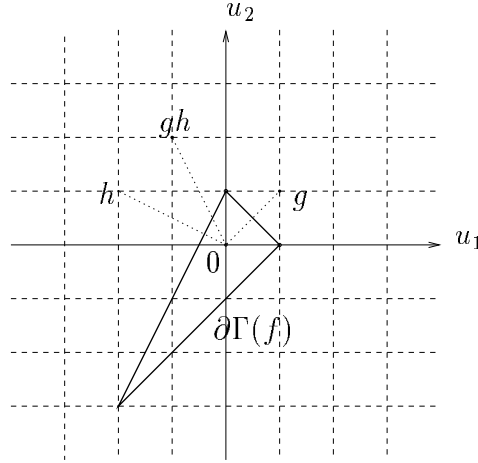


FIG. 1 – Exemple pour $f = u_1 + u_2 + u_1^{-2}u_2^{-3}$, $g = u_1u_2$ et $h = u_1^{-2}u_2$.

Soit $v_{1,\alpha}, \dots, v_{n,\alpha}$ les coordonnées de $(\mathbb{C}^*)^n$ qui paramètrent le tore U_α . On pose $\frac{dv_\alpha}{v_\alpha} := \frac{dv_{1,\alpha}}{v_{1,\alpha}} \wedge \dots \wedge \frac{dv_{n,\alpha}}{v_{n,\alpha}}$. On définit la filtration de $\Omega^n(U)[\theta]$ par

$$\mathcal{N}_\beta \Omega^n(U_\alpha)[\theta] = \mathcal{N}_\beta \Omega^n(U_\alpha) + \theta \mathcal{N}_{\beta-1} \Omega^n(U_\alpha) + \theta^2 \mathcal{N}_{\beta-2} \Omega^n(U_\alpha) \dots$$

où $\mathcal{N}_\beta \Omega^n(U_\alpha) := \{g \frac{dv_\alpha}{v_\alpha} \in \Omega^n(U_\alpha) \mid \phi_\alpha(g) \leq \beta\}$.

Cela induit une filtration, notée $\mathcal{N}_\bullet G_0(f_\alpha)$, du réseau de Brieskorn qui est défini par

$$\mathcal{N}_\beta G_0(f_\alpha) := \mathcal{N}_\beta \Omega^n(U_\alpha)[\theta] / (\theta d - df_\alpha \wedge) \Omega^{n-1}(U_\alpha)[\theta] \cap \mathcal{N}_\beta \Omega^n(U_\alpha)[\theta].$$

Pour plus de précision sur la filtration de Newton, on renvoie au paragraphe 4 de [DS03]. D'après le théorème 4.5 de l'article [DS03], on a $\mathcal{N}_\beta G_0(f_\alpha) = V_\beta G_0(f_\alpha)$. Par passage aux quotients, on obtient $\mathcal{N}_\beta(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)) = V_\beta(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha))$.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI.3.1. Pour démontrer cette proposition, il suffit de vérifier que

$$V_{\beta_1}(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)) \star_\alpha V_{\beta_2}(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)) \subset V_{\beta_1+\beta_2}(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)).$$

pour tout $\alpha \in \{0, \dots, d-1\}$.

Pour $i \in \{1, 2\}$, soit $[h_i]$ dans $V_{\beta_i}(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha))$. Nous avons

$$\begin{aligned} [h_1] \star_\alpha [h_2] &= \left[g_1 \frac{dv_\alpha}{v_\alpha} \right] \star_\alpha \left[g_2 \frac{dv_\alpha}{v_\alpha} \right] \quad \text{où } g_1, g_2 \in \mathbb{C}[v_\alpha, v_\alpha^{-1}] \text{ tels que } \phi_\alpha(g_i) \leq \beta_i \\ &= \left[g_1 g_2 \frac{dv_\alpha}{v_\alpha} \right] \quad \text{d'après (VI.1.13)} \end{aligned}$$

L'inégalité (VI.3.3) montre que $\phi_\alpha(g_1 g_2) \leq \beta_1 + \beta_2$ c'est-à-dire que

$$[h_1] \star [h_2] \in V_{\beta_1+\beta_2}(G_0(f_\alpha)/\theta G_0(f_\alpha)).$$

□

Notons $\llbracket g \rrbracket$ la classe d'un élément $g \in G_0$ dans $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$. D'après le lemme VI.1.14, la base ω de G_0 induit une base $\llbracket \omega \rrbracket := (\llbracket \omega_0 \rrbracket, \dots, \llbracket \omega_{\mu-1} \rrbracket)$ de $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$.

PROPOSITION VI.3.4. *Dans la base $\llbracket \omega \rrbracket$ de $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$, le produit \cup est donné par la formule*

$$\llbracket \omega_i \rrbracket \cup \llbracket \omega_j \rrbracket = \begin{cases} \frac{w^{\underline{a}(i)+\underline{a}(j)}}{w^{\underline{a}(i+j)}} \llbracket \omega_{i+j} \rrbracket & \text{si } \sigma(\overline{i+j}) = \sigma(i) + \sigma(j); \\ 0 & \text{si } \sigma(\overline{i+j}) < \sigma(i) + \sigma(j). \end{cases}$$

La forme bilinéaire non dégénérée $[g]$, définie sur $G_0/\theta G_0$, est compatible à la filtration $V_\bullet(G_0/\theta G_0)$. Notons $\llbracket g \rrbracket(\cdot, \cdot)$ la forme bilinéaire non dégénérée induite sur $\text{gr}_*^V(G_0/\theta G_0)$. Le lemme VI.1.20 implique la proposition suivante.

PROPOSITION VI.3.5. *Soient γ et γ' dans S_w . Soient d et d' dans respectivement $\{0, \dots, \delta(\gamma) - 1\}$ et $\{0, \dots, \delta(\gamma') - 1\}$.*

- (1) *Si $\gamma' \neq \{1 - \gamma\}$ alors on a $\llbracket g \rrbracket(\llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma)-d} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma')-d'} \rrbracket) = 0$.*
- (2) *Si $\gamma' = \{1 - \gamma\}$ alors on a*

$$\begin{aligned} &\llbracket g \rrbracket(\llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma)-d} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\{1-\gamma\})-d'} \rrbracket) \\ &\begin{cases} \left(\prod_{k \in I(\gamma)} w_k \right)^{-1} & \text{si } \sigma(k^{\max}(\gamma) - d) + \sigma(k^{\max}(\{1-\gamma\}) - d') = n; \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. Soient $d_i := k^{\max}(s(i)) - i$ et $d_j := k^{\max}(s(j)) - j$. Nous avons l'équivalence suivante :

$$\overline{i+j} = n \Leftrightarrow \begin{cases} s(j) = \{1 - s(i)\} \\ \text{et } d_i + d_j = \delta(s(i)) - 1. \end{cases}$$

D'après le lemme VI.1.20, l'expression de $\llbracket g \rrbracket(\cdot, \cdot)$ dans la base $\llbracket \omega \rrbracket$ est :

$$\begin{aligned} & \llbracket g \rrbracket(\llbracket \omega_{k^{\max}(\gamma)-d} \rrbracket, \llbracket \omega_{k^{\max}(\gamma')-d'} \rrbracket) = \\ & \begin{cases} \frac{w^{\tilde{\alpha}}}{w^{\tilde{\beta}}} & \text{si } \begin{cases} \gamma' = \{1 - \gamma\} \\ \text{et } d + d' = \delta(\gamma) - 1; \end{cases} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha} &= \underline{a}(k^{\max}(\gamma) - d) + \underline{a}(k^{\max}(\gamma') - d') \\ \tilde{\beta} &= \underline{a}(n + 1) + \underline{a}(k^{\max}(\gamma) - d + k^{\max}(\gamma') - d' - n) \end{aligned}$$

Si nous avons $\gamma' = \{1 - \gamma\}$, la remarque II.2.7 montre que nous avons l'équivalence entre $d + d' = \delta(\gamma) - 1$ et $\sigma(k^{\max}(\gamma) - d) + \sigma(k^{\max}(\{1 - \gamma\} - d')) = n$. Dans la base $\llbracket \tilde{\omega} \rrbracket$, nous obtenons

$$\llbracket g \rrbracket(\llbracket \tilde{\omega}_{k^{\min}(\gamma)+d} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\{1-\gamma\})-d} \rrbracket) = \frac{w^\alpha}{w^\beta}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \underline{a}(k^{\min}(\gamma)) + \underline{a}(k^{\min}(\{1 - \gamma\})) \\ \beta &= \underline{a}(n + 1) + \underline{a}(k^{\max}(\gamma) + k^{\max}(\{1 - \gamma\}) - \delta(\gamma) + 1 - n) \end{aligned}$$

Pour tout j dans $\{0, \dots, n\}$, nous avons $\underline{a}(k^{\max}(\gamma) - \delta(\gamma) + 1)_j = \#\{\ell \in \{0, \dots, w_j - 1\} \mid \ell < \gamma w_j\}$. Nous en déduisons

$$\begin{aligned} & \underline{a}(k^{\max}(\gamma) - \delta(\gamma) + 1)_j + \underline{a}(k^{\max}(\{1 - \gamma\}) - \delta(\{1 - \gamma\}) + 1)_j = \\ & \begin{cases} 0 & \text{si } \gamma = 0; \\ w_j & \text{si } \gamma > 0 \text{ et } j \in I(\gamma); \\ w_j + 1 & \text{si } \gamma > 0 \text{ et } j \in I^c(\gamma). \end{cases} \end{aligned}$$

Pour finir la démonstration, il suffit d'utiliser le corollaire II.2.5 et l'égalité $\underline{a}(n + 1) = (1, \dots, 1)$. \square

Nous définissons une forme 3-linéaire, notée $((\cdot, \cdot, \cdot))$, sur $\text{gr}_*(G_0/\theta G_0)$ par la formule $((a, b, c)) := \llbracket g \rrbracket(a \cup b, c)$.

PROPOSITION VI.3.6. *Soient $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty$ dans S_w . Soient d_0, d_1, d_∞ dans respectivement $\{0, \dots, \delta(\gamma_0) - 1\}, \{0, \dots, \delta(\gamma_1) - 1\}$ et $\{0, \dots, \delta(\gamma_\infty) - 1\}$.*

(1) *Si $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty$ n'est pas un entier alors on a*

$$((\llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_0) - d_0} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_1) - d_1} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_\infty) - d_\infty} \rrbracket)) = 0.$$

(2) *Si $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty$ est un entier alors nous avons :*

$$\begin{aligned} & ((\llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_0) - d_0} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_1) - d_1} \rrbracket, \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_\infty) - d_\infty} \rrbracket)) \\ &= \begin{cases} \frac{\prod_{i \in J_w(\{1-\gamma_0\}, \{1-\gamma_1\}, \{1-\gamma_\infty\})} w_i}{\prod_{i \in I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)} w_i} & \text{si } \sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \sigma(k(\gamma_i) - d_i) = n; \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

où $J_w(\{1 - \gamma_0\}, \{1 - \gamma_1\}, \{1 - \gamma_\infty\}) := \{i \mid \{\{1 - \gamma_0\}w_i\} + \{\{1 - \gamma_1\}w_i\} + \{\{1 - \gamma_\infty\}w_i\} = 2\}$.

REMARQUE VI.3.7. Comme $((\cdot, \cdot, \cdot))$ est symétrique en ses trois arguments, l'algèbre $(\text{gr}_*(G_0/\theta G_0), \cup, \llbracket g \rrbracket(\cdot, \cdot))$ est une algèbre de Frobenius graduée.

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION VI.3.6. Les propositions VI.3.4 et VI.3.5 impliquent l'égalité suivante

$$((\llbracket \omega_i \rrbracket, \llbracket \omega_j \rrbracket, \llbracket \omega_k \rrbracket)) = \begin{cases} \frac{w^{\underline{a}(i) + \underline{a}(j) + \underline{a}(k)}}{w^{\underline{a}(n+1) + \underline{a}(i+j+k-n)}} & \begin{cases} \text{si } \overline{i + j + k} = n \\ \text{et si } \sigma(i) + \sigma(j) + \sigma(k) = n; \end{cases} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par définition des nombres spectraux, nous avons

$$\sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \sigma(k^{\max}(\gamma_i) - d_i) = \sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} k^{\max}(\gamma_i) - d_i - \mu(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty).$$

Nous en déduisons l'équivalence

$$\begin{cases} \overline{\sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} k^{\max}(\gamma_i) - d_i} = n \\ \text{et } \sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \sigma(k^{\max}(\gamma_i) - d_i) = n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N} \\ \text{et } \sum_{i \in \{0, 1, \infty\}} \sigma(k^{\max}(\gamma_i) - d_i) = n \end{cases}$$

Nous avons l'équivalence

$$\begin{aligned} & (([\tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_0)-d_0}], [\tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_1)-d_1}], [\tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_\infty)-d_\infty}])) \neq 0 \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} \gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N} \\ \text{et } \sum_{i \in \{0,1,\infty\}} \sigma(k^{\max}(\gamma_i) - d_i) = n. \end{cases} \end{aligned}$$

Sous les conditions $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N}$ et $\sum_{i \in \{0,1,\infty\}} \sigma(k^{\max}(\gamma_i) - d_i) = n$, nous avons

$$(([\tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_0)-d_0}], [\tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_1)-d_1}], [\tilde{\omega}_{k^{\max}(\gamma_\infty)-d_\infty}])) = \frac{w^\alpha}{w^\beta}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \underline{a}(k^{\min}(\gamma_0)) + \underline{a}(k^{\min}(\gamma_1)) + \underline{a}(k^{\min}(\gamma_\infty)); \\ \beta &= \underline{a}(n+1) + \underline{a}((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty)\mu). \end{aligned}$$

Posons $\alpha_j := \underline{a}(k^{\min}(\gamma_0))_j + \underline{a}(k^{\min}(\gamma_1))_j + \underline{a}(k^{\min}(\gamma_\infty))_j - 1$.

Pour tout $j \in \{0, \dots, n\}$, nous avons

$$(VI.3.8) \quad \underline{a}(k^{\max}(\gamma) - \delta(\gamma) + 1)_j = \begin{cases} [\gamma w_j] & \text{si } \gamma \in I(\gamma); \\ [\gamma w_j] + 1 & \text{si } \gamma \in I^c(\gamma). \end{cases}$$

Comme $\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty \in \mathbb{N}$, nous avons

$$\begin{aligned} \{0, \dots, n\} &= I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) \bigsqcup J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty) \bigsqcup J_w(\{1 - \gamma_0\}, \{1 - \gamma_1\}, \{1 - \gamma_\infty\}) \\ &\quad \bigsqcup \{i \mid \exists ! k \in \{0, 1, \infty\} \text{ tel que } i \in I(\gamma_k)\}. \end{aligned}$$

La formule (VI.3.8) permet de donner la valeur de α_j dans les quatre cas suivants.

- Si $j \in I(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)$ alors $\alpha_j = w_j(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty) - 1$.
- Si $j \in J_w(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_\infty)$ alors $\alpha_j = w_j(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty)$.
- Si $j \in J_w(\{1 - \gamma_0\}, \{1 - \gamma_1\}, \{1 - \gamma_\infty\})$ alors $\alpha_j = w_j(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty) + 1$.
- Si $j \in \{i \mid \exists ! k \in \{0, 1, \infty\} \text{ tel que } i \in I(\gamma_k)\}$ alors $\alpha_j = w_j(\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty)$.

Pour terminer la démonstration, il suffit de remarquer que $\underline{a}((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty)\mu) = ((\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty)w_0, \dots, (\gamma_0 + \gamma_1 + \gamma_\infty)w_n)$. \square

CHAPITRE VII

Correspondances

VII.1. Démonstration de la correspondance classique

Soit Ξ l'application \mathbb{C} -linéaire définie par

$$\begin{aligned} \Xi : H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C}) &\longrightarrow \text{gr}_{*}^{\mathcal{N}}(G_0/\theta G_0) \\ \eta_{\gamma}^d &\longmapsto \llbracket \tilde{\omega}_{k^{\min}\{1-\gamma\}+d} \rrbracket \end{aligned}$$

THÉORÈME VII.1.1. *L'application Ξ est un isomorphisme gradué entre les algèbres de Frobenius graduées entre*

$$(H_{\text{orb}}^{2*}(\mathbb{P}(w), \mathbb{C}), \cup, \langle \cdot, \cdot \rangle)$$

et

$$(\text{gr}_{*}^{\mathcal{N}}(G_0/\theta G_0), \cup, \llbracket g \rrbracket(\cdot, \cdot)).$$

DÉMONSTRATION. – D'après la proposition IV.3.14, nous avons

$$\text{deg}^{\text{orb}}(\eta_{\gamma}^d) = 2(d + a(\gamma)).$$

La proposition II.2.6 et l'égalité (II.2.3) impliquent que $\Xi(\eta_{\gamma}^d)$ est dans le gradué $\text{gr}_{d+a(\gamma)}^{\mathcal{N}}(G_0/\theta G_0)$. Nous en concluons que Ξ est gradué.

– En comparant les propositions IV.4.4 et VI.3.5, nous en déduisons que

$$\langle \eta_{\gamma}^d, \eta_{\gamma'}^{d'} \rangle = \llbracket g \rrbracket(\Xi(\eta_{\gamma}^d), \Xi(\eta_{\gamma'}^{d'})).$$

– De même, le corollaire IV.5.24 et la proposition VI.3.6 impliquent l'égalité

$$(\eta_{\gamma_0}^{d_0}, \eta_{\gamma_1}^{d_1}, \eta_{\gamma_{\infty}}^{d_{\infty}}) = ((\Xi(\eta_{\gamma_0}^{d_0}), \Xi(\eta_{\gamma_1}^{d_1}), \Xi(\eta_{\gamma_{\infty}}^{d_{\infty}}))).$$

□

VII.2. Démonstration de la correspondance quantique

Si nous admettons la conjecture V.3.6, nous obtenons le corollaire suivant.

COROLLAIRE VII.2.1. *Soient w_0, \dots, w_n tels $w_0 + \dots + w_n$ et $\text{ppcm}(w_0, \dots, w_n)$ soient premiers entre eux. Les variétés de Frobenius associées au polynôme de Laurent f et à $\mathbb{P}(w)$ sont isomorphes.*

La condition sur les poids provient du corollaire V.3.7 que nous utilisons dans la démonstration ci-dessous.

DÉMONSTRATION DU COROLAIRE VII.2.1. Nous allons utiliser le théorème I.2.3. Montrons que les variétés de Frobenius ont les mêmes conditions initiales. Puis, d'après le début du chapitre VI, ces conditions initiales vérifient les hypothèses du théorème I.2.3 ce qui montrera que les variétés de Frobenius sont isomorphes.

Le théorème VI.0.14 nous donne les conditions initiales $(A_0^\circ, A_\infty, e_0, g)$ de la variété de Frobenius pour le polynôme de Laurent f . D'après les propositions V.2.11 et IV.4.4 nous avons la même matrice A_∞ , le même vecteur propre e_0 pour la valeur propre $q = 0$ et la même forme bilinéaire non dégénérée. Il reste à comparer les matrices A_0° qui correspondent aux multiplications par les champs d'Euler à l'origine. Les formules (VI.2.1) et (V.2.10) montrent que les champs d'Euler sont égaux. A l'origine, ils sont simplement $\mu \partial_{t_i}$ où $t_0, \dots, t_{\mu-1}$ sont les coordonnées plates de la variété de Frobenius. Le corollaire V.3.7, via la conjecture V.3.6, et la proposition VI.1.25 impliquent l'égalité

$$((\eta_1, \eta_j, \eta_k)) = ((\tilde{\omega}_1, \tilde{\omega}_j, \tilde{\omega}_k))$$

pour tous j, k . Comme les formes bilinéaires non dégénérées sont les mêmes, la formule ci-dessus montre que les multiplications par les champs d'Euler à l'origine sont identiques. Ceci montre que les deux variétés de Frobenius ont les mêmes conditions initiales $(A_0^\circ, A_\infty, e_0, g)$. \square

CHAPITRE VIII

Annexe

Soit Y une variété C^∞ de dimension n . Soit H un groupe fini qui agit sur Y . Soit χ un caractère de H . Notons $\pi : Y \rightarrow Y/H$.

Le complexe de de Rham

$$\mathcal{E}_Y^\bullet : \quad \mathcal{E}_Y^0 \xrightarrow{d} \mathcal{E}_Y^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \mathcal{E}_Y^n \xrightarrow{d} 0$$

est une résolution du faisceau $\underline{\mathbb{C}}_Y$. On a un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$(VIII.2) \quad H^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y)) \xrightarrow{\sim} H^i(Y, \underline{\mathbb{C}}_Y).$$

Comme H agit sur Y , nous avons une action sur $H^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))$ définie par $h \cdot [\omega] := [h^{-1*}\omega]$. Cette action ne dépend pas du représentant choisi. Soit $Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))$ l'ensemble des ω dans $\mathcal{E}_Y^i(Y)$ tels que nous ayons

$$- d\omega = 0,$$

$$- \text{pour tout } h \text{ dans } H, \text{ il existe } \eta(h) \text{ dans } \mathcal{E}_Y^{i-1}(Y) \text{ tel que } h^{-1*}\omega = \chi(h)\omega + d\eta(h).$$

Soit $B^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))$ les formes différentielles exactes c'est-à-dire

$$B^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y)) = \{\omega \in \mathcal{E}_Y^i(Y) \mid \exists \eta \in \mathcal{E}_Y^{i-1}(Y), d\eta = \omega\}.$$

Posons

$$H^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))_\chi := Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))/Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y)) \cap B^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y)).$$

Notons $H^i(Y, \underline{\mathbb{C}}_Y)_\chi \subset H^i(Y, \underline{\mathbb{C}}_Y)$ l'image de $H^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))_\chi$ par l'isomorphisme (VIII.2).

Pour tout ouvert U de Y/H , posons

$$(\pi_*\underline{\mathbb{C}}_Y)_\chi(U) = \{x \in \underline{\mathbb{C}}(\pi^{-1}(U)) \mid \forall h \in H, h \cdot x = \chi(h)x\}.$$

Notons $(\pi_*\underline{\mathbb{C}}_Y)_\chi$ le faisceau ainsi défini sur Y/H .

THÉORÈME VIII.3. *Soit Y une variété paracompacte C^∞ de dimension n . Soit H un groupe fini qui agit sur Y . Soit χ un caractère du groupe H . Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, nous avons un isomorphisme*

$$H^i(Y, \underline{\mathbb{C}}_Y)_\chi \simeq H^i(Y/H, (\pi_*\underline{\mathbb{C}}_Y)_\chi).$$

DÉMONSTRATION. – Nous allons d'abord exprimer la cohomologie $H^*(Y/H, (\pi_*\mathbb{C}_Y)_\chi)$ comme la cohomologie d'un complexe.

Le complexe de faisceaux

$$\pi_*\mathcal{E}_Y^\bullet : \quad \pi_*\mathcal{E}_Y^0 \xrightarrow{d} \pi_*\mathcal{E}_Y^1 \xrightarrow{d} \cdots \xrightarrow{d} \pi_*\mathcal{E}_Y^n \xrightarrow{d} 0$$

est une résolution de $\pi_*\mathbb{C}_Y$ (cf. la démonstration de la proposition III.3.1 (1)).
Considérons le foncteur qui à un faisceau \mathcal{F} sur lequel H agit associe le faisceau \mathcal{F}_χ défini par $\mathcal{F}_\chi(U) = \{s \in \mathcal{F}(U) \mid h \cdot s = \chi(h)s\}$. Nous appliquons ce foncteur au complexe $\pi_*\mathcal{E}_Y^\bullet$ et nous obtenons le complexe

$$(\pi_*\mathcal{E}_Y^\bullet)_\chi : \quad (\pi_*\mathcal{E}_Y^0)_\chi \xrightarrow{\delta} (\pi_*\mathcal{E}_Y^1)_\chi \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} (\pi_*\mathcal{E}_Y^n)_\chi \xrightarrow{\delta} 0$$

Montrons que $(\pi_*\mathcal{E}_Y^0)_\chi$ est fin. Comme Y est paracompacte, il existe des partitions de l'unité sur Y/H . Soit $(f_i)_{i \in I}$ une partition de l'unité de Y/H . Posons $\tilde{f}_i := \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) h^* f_i$. Ainsi, $(\tilde{f}_i)_{i \in I}$ est une partition de l'unité de Y/H et $\tilde{f}_i \in (\pi_*\mathcal{E}_Y^0)_\chi$.

Comme $(\pi_*\mathcal{E}_Y^i)_\chi$ est un $(\pi_*\mathcal{E}_Y^0)_\chi$ -module, le faisceau $(\pi_*\mathcal{E}_Y^i)_\chi$ est fin. Nous en déduisons que la cohomologie du complexe $(\pi_*\mathcal{E}_Y^\bullet)_\chi(Y/H)$ est la cohomologie $H^*(Y/H, (\pi_*\mathbb{C}_Y)_\chi)$.

- Posons $Z^i((\pi_*\mathcal{E}_Y^\bullet)_\chi(Y/H))$ l'ensemble des ω dans $(\pi_*\mathcal{E}_Y^i)_\chi(Y/H)$ tels qu'on ait
 - $d\omega = 0$,
 - pour tout h dans H , on ait $h^{-1*}\omega = \chi(h)\omega$.

Définissons l'application suivante :

$$f^i : Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^i(Y)) \longrightarrow Z^i((\pi_*\mathcal{E}_Y^\bullet)_\chi(Y/H))$$

$$\omega \longmapsto \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) h^* \omega$$

Cette application est bien définie car nous avons

- $d(f^i(\omega)) = 0$ et

– pour tout $h' \in H$, nous avons

$$\begin{aligned} h'^{-1*} \left(\frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) h^* \omega \right) &= \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) (hh'^{-1})^* \omega \\ &= \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{u \in H} \chi(h') \chi(u) u^* \omega \\ &= \chi(h') f^i(\omega) \end{aligned}$$

Comme l'application f^i est surjective, l'application

$$\begin{aligned} \tilde{f}^i : Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^i(Y)) &\longrightarrow H^i(Y/H, (\pi_* \underline{\mathbb{C}}_Y)_\chi) \\ \omega &\longmapsto \left[\frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) h^* \omega \right] \end{aligned}$$

est aussi surjective. Pour finir la démonstration, il suffit de montrer que

$$\left(\tilde{f}^i \right)^{-1}([0]) = Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y)) \cap B^i(\mathcal{E}_Y^i(Y)).$$

Comme $\tilde{f}^i(d\eta) = [0]$, nous avons

$$Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y)) \cap B^i(\mathcal{E}_Y^i(Y)) \subset \left(\tilde{f}^i \right)^{-1}([0]).$$

Inversement, soit $\omega \in Z_\chi^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))$ tel que $\tilde{f}^i(\omega) = [0]$ c'est-à-dire qu'il existe $\eta \in \mathcal{E}_Y^{i-1}(Y)$ tel que

$$d\eta = \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) h^* \omega.$$

Or $h^* \omega = \chi(h^{-1}) \omega + d\eta(h^{-1})$ avec $\eta(h^{-1}) \in \mathcal{E}_Y^{i-1}(Y)$, donc

$$d\eta = \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) \chi(h^{-1}) \omega + \frac{1}{\sum_H \chi(h)} \sum_{h \in H} \chi(h) d\eta(h^{-1}).$$

Finalement, nous en déduisons que $\omega \in B^i(\mathcal{E}_Y^\bullet(Y))$.

□

Nous pouvons appliquer la même technique pour montrer un résultat sur une variété holomorphe Y . Soit Ω_Y^p le faisceau des p -formes différentielles holomorphes

sur Y . Soit $\mathcal{A}^{p,q}$ le faisceau des formes différentielles C^∞ de type (p, q) sur Y . Le complexe

$$\mathcal{A}^{p,\bullet} : \mathcal{A}^{p,0} \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,1} \xrightarrow{d''} \cdots \xrightarrow{d''} \mathcal{A}^{p,n} \xrightarrow{d''} 0$$

est une résolution de Ω_Y^p . On peut définir les mêmes objets que précédemment et nous obtenons le résultat suivant.

COROLLAIRE VIII.4. *Soit Y une variété complexe paracompacte de dimension n . Soit H un groupe fini qui agit sur Y . Soit χ un caractère du groupe H . Pour $i \in \{0, \dots, n\}$, on a un isomorphisme*

$$H^i(Y, \Omega_Y^p)_\chi \simeq H^i(Y/H, (\pi_* \Omega_Y^p)_\chi).$$

Bibliographie

- [Bar00] Serguei Barannikov. Semi-infinite Hodge structures and mirror symmetry for projective spaces. *Math.AG/0010157*, page 17, 2000.
- [BCS05] Lev A. Borisov, Linda Chen, and Gregory G. Smith. The orbifold Chow ring of toric Deligne-Mumford stacks. *J. Amer. Math. Soc.*, (18)(1) :193–215 (electronic), 2005.
- [Bou71] Nicolas Bourbaki. *Éléments de mathématique. Topologie générale. Chapitres 1 à 4*. Hermann, Paris, 1971.
- [CR02] Weimin Chen and Yongbin Ruan. Orbifold Gromov-Witten theory. In *Orbifolds in mathematics and physics (Madison, WI, 2001)*, volume (310) of *Contemp. Math.*, pages 25–85. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2002.
- [CR04] Weimin Chen and Yongbin Ruan. A new cohomology theory of orbifold. *Comm. Math. Phys.*, (248)(1) :1–31, 2004.
- [DM86] Pierre Deligne and G. Daniel Mostow. Monodromy of hypergeometric functions and non-lattice integral monodromy. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.*, (63) :5–89, 1986.
- [DS03] Antoine Douai and Claude Sabbah. Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. I. *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, (53)(4) :1055–1116, 2003.
- [DS04] Antoine Douai and Claude Sabbah. Gauss-Manin systems, Brieskorn lattices and Frobenius structures. II. In *Frobenius manifolds*, Aspects Math., E36, pages 1–18. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [Dub96] Boris Dubrovin. Geometry of 2D topological field theories. In *Integrable systems and quantum groups (Montecatini Terme, 1993)*, volume (1620) of *Lecture Notes in Math.*, pages 120–348. Springer, Berlin, 1996.
- [DVV91] Robbert Dijkgraaf, Herman Verlinde, and Erik Verlinde. Notes on topological string theory and 2D quantum gravity. In *String theory and quantum gravity (Trieste, 1990)*, pages 91–156. World Sci. Publishing, River Edge, NJ, 1991.
- [FO99] Kenji Fukaya and Kaoru Ono. Arnold conjecture and Gromov-Witten invariant for general symplectic manifolds. In *The Arnoldfest (Toronto, ON, 1997)*, volume (24) of *Fields Inst. Commun.*, pages 173–190. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [GH94] Phillip Griffiths and Joseph Harris. *Principles of algebraic geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons Inc., New York, 1994. Reprint of the 1978 original.
- [Giv95] Alexander B. Givental. Homological geometry and mirror symmetry. In *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. 1, 2 (Zürich, 1994)*, pages 472–480, Basel, 1995. Birkhäuser.

- [Her02] Claus Hertling. *Frobenius manifolds and moduli spaces for singularities*, volume (151) of *Cambridge Tracts in Mathematics*. Cambridge University Press, Cambridge, 2002.
- [HM04] Claus Hertling and Yuri Manin. Unfoldings of meromorphic connections and a construction of Frobenius manifolds. In *Frobenius manifolds*, Aspects Math., E36, pages 113–144. Vieweg, Wiesbaden, 2004.
- [Jia03] Yunfeng Jiang. The Chen-Ruan cohomology of weighted projective spaces. *math.AG/0304140*, page 34, 2003.
- [Kaw73] Tetsuro Kawasaki. Cohomology of twisted projective spaces and lens complexes. *Math. Ann.*, (206) :243–248, 1973.
- [Kaw78] Tetsuro Kawasaki. The signature theorem for V -manifolds. *Topology*, (17)(1) :75–83, 1978.
- [Kou76] A. G. Kouchnirenko. Polyèdres de Newton et nombres de Milnor. *Invent. Math.*, 32(1) :1–31, 1976.
- [Man99] Yuri Manin. *Frobenius manifolds, quantum cohomology, and moduli spaces*, volume (47) of *American Mathematical Society Colloquium Publications*. American Mathematical Society, Providence, RI, 1999.
- [MP97] Ieke Moerdijk and Dorette A. Pronk. Orbifolds, sheaves and groupoids. *K-Theory*, (12)(1) :3–21, 1997.
- [MS74] John W. Milnor and James D. Stasheff. *Characteristic classes*. Princeton University Press, Princeton, N. J., 1974. Annals of Mathematics Studies, No. 76.
- [Sab02] Claude Sabbah. *Déformations isomonodromiques et variétés de Frobenius*. Savoirs Actuels (Les Ulis). [Current Scholarship (Les Ulis)]. EDP Sciences, Les Ulis, 2002. Mathématiques (Les Ulis). [Mathematics (Les Ulis)].
- [Sai83] Kyoji Saito. Period mapping associated to a primitive form. *Publ. Res. Inst. Math. Sci.*, (19)(3) :1231–1264, 1983.
- [Sat56] Ichirô Satake. On a generalization of the notion of manifold. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, (42) :359–363, 1956.
- [Sat57] Ichirô Satake. The Gauss-Bonnet theorem for V -manifolds. *J. Math. Soc. Japan*, (9) :464–492, 1957.
- [Wit90] Edward Witten. On the structure of the topological phase of two-dimensional gravity. *Nuclear Phys. B*, (340)(2-3) :281–332, 1990.