



**HAL**  
open science

# Théorie des Consensus

Pierre Tison

► **To cite this version:**

Pierre Tison. Théorie des Consensus. Modélisation et simulation. Université Joseph-Fourier - Grenoble I, 1965. Français. NNT: . tel-00011675

**HAL Id: tel-00011675**

**<https://theses.hal.science/tel-00011675>**

Submitted on 23 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

N° d'ordre:

# THESE

présentée à

LA FACULTE DES SCIENCES DE L'UNIVERSITE DE GRENOBLE

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR - INGENIEUR

---

par

**Pierre TISON**

Ingénieur Civil des Mines

Ingénieur automaticien de Grenoble

---

## THEORIE DES CONSENSUS

Thèse soutenue le 18 Juin 1965 devant la Commission d'examen :

Monsieur J. KUNTZMANN, Président

Messieurs B. VAUQUOIS,  
R. PERRET } Examineurs



LISTE DES PROFESSEURS

DOYENS HONORAIRES : M. FORTRAT P.  
M. MORET L.

DOYEN : M. WEIL L.

PROFESSEURS TITULAIRES

MM. NEEL L.	Magnétisme et Physique du Solide	MM. GALLISSOT F.	Mathématiques appliquées
HEILMANN R.	Chimie organique	LUTZ E.	Mathématiques
KRAVTCHENKO J.	Mécanique rationnelle	BLAMBERT M.	Mathématiques
CHABAUTY C.	Calcul différentiel et intégral	BOUCHEZ R.	Physique nucléaire
PARDE M.	Potamologie	ILIBOUTRY	Géophysique
BENOIT J.	Radioélectricité	MICHEL R.	Géologie et minéralogie
CHENE M.	Chimie papetière	BONNIER E.	Electrochimie
BESSION J.	Electrochimie	DESSAUX G.	Physiologie animale
WEIL L.	Thermodynamique	PILLET E.	Electrotechnique
FELICI N.	Electrostatique	DEBELMAS J.	Géologie
KUNTZMANN J.	Mathématiques appliquées	GERBER R.	Mathématiques
BARBIER R.	Géologie appliquée	PAUTHENET R.	Electrotechnique
SANTON L.	Mécanique des fluides	VAUQUOIS B.	Mathématiques appliquées
OZENDA P.	Botanique	BUYLE-BODIN M.	Electronique
FALLOT M.	Physique industrielle	KOSZUL J.L.	Mathématiques
GALVANI O.	Mathématiques	SILBER R.	Mécanique des fluides
MOUSSA A.	Chimie nucléaire	DREYFUS B.	Thermodynamique
TRAYNARD P.	Chimie	VAILLANT F.	Zoologie
SOUTIF M.	Physique	MOUSSEOT J.	Electronique
CRAYA A.	Hydrodynamique	BARBIER J.C.	Physique
REULOS R.	Théorie des champs	Mme LUMER L.	Mathématiques
AYANT Y.	Physique approfondie	KLEIN J.	Mathématiques

PROFESSEURS SANS CHAIRE

Mme KOFLER L.	Botanique	MM. COHEN J.	Electrotechnique
MM. GIRAUD P.	Géologie	DEPASSEL R.	Mécanique
QIDON P.	Géologie et minéralogie	GASTINEL A.	Mathématiques appliquées
ARNAUD P.	Chimie	LACAZE A.	Thermodynamique
PERRRET R.	Servomécanismes	GLENAT R.	Chimie
Mme BARBIER M.J.	Electrochimie	DUCROS P.	Minéralogie et cristallographie
Mme SOUTIF J.	Physique	ANGLES D'AURIAC P.	Mécanique des fluides
M. BRISSONNEAU P.	Physique		

PROFESSEURS ASSOCIES

M. LUMER G.	Mathématiques	M. WAGNER	Botanique
-------------	---------------	-----------	-----------

MAITRES DE CONFERENCES

MM. ROBERT A.	Chimie Papetière	MM. DEPORTES C.	Chimie
BIAREZ J.P.	Mécanique physique	BARRA J.	Mathématiques appliquées
COUMES A.	Electronique	Mme BOUCHE L.	Mathématiques
DODU J.	Mécanique des fluides	MM. DOLIQUE	Electronique
HACQUES G.	Calcul numérique	PERRIAUX J.	Géologie
LANCIA R.	Physique automatique	SARROT-REYNAUD J.	Géologie
PEBAY-PEROULA J.C.	Physique	CAUQUIS G.	Chimie générale
Mme KAHANE J.	Physique	BONNET G.	Physique générale
MM. DEORANGE C.	Zoologie	BARNOUD F.	Biosynthèse de la cellulose
GAGNAIRE D.	Chimie papetière	Mme BONNIER M.J.	Chimie
RASSAT A.	Chimie Systématique	MM. KAHANE	Physique générale
BETHOUX P.	Mathématiques appliquées	COLOBERT L.	Physiologie animale
POLOUJADOFF M.	Electrotechnique	PAYAN J.	Mathématiques
DEPOMMIER P.	Physique nucléaire		

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. QUATTROPANI	Thermodynamique
----------------	-----------------





## II

*Je tiens à exprimer ici ma profonde gratitude à tous ceux, de l'Université et de l'Industrie, qui m'ont permis de mener ce travail à bien.*

*Je veux tout d'abord dire toute ma reconnaissance à Monsieur KUNTZMANN, professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, Directeur du Service de Mathématiques Appliquées, qui m'a dirigé avec autorité et bienveillance tout au long de cette étude ; je suis particulièrement sensible à l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.*

*Je sais gré à Monsieur VAUQUOIS, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, Directeur du Centre d'Etudes pour la Traduction Automatique, d'avoir bien voulu accepter de faire partie du jury.*

*Je remercie vivement Monsieur PERRET, Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble, Directeur Adjoint de la Section Spéciale d'Automatique de l'Institut Polytechnique, qui m'a formé à l'Algèbre de Boole, pour l'intérêt avec lequel il suit mes travaux.*

*C'est en tant qu'ingénieur aux Houillères du Bassin de Lorraine que j'ai pu acquérir d'abord ma formation d'Automaticien, puis poursuivre mes recherches en Mathématiques Appliquées jusqu'à leur présent aboutissement. Je veux ici remercier tout particulièrement Monsieur ACHILLE, Directeur Général des Charbonnages de France, Monsieur LORIMY, Directeur Général des Houillères du Bassin de Lorraine, et Monsieur BIHL, Directeur Délégué aux Houillères du Bassin de Lorraine, qui ont rendu mon effort possible et m'on aidé de leurs encouragements et de leurs conseils.*

*Dans l'effort de modernisation entrepris par les Houillères, les Mathématiques Appliquées ont conquis droit de cité et jouent un rôle de plus en plus notable. En retour, l'industrie minière peut contribuer à leur développement en les soumettant à une vérification pratique et en indiquant des directions dans lesquelles il conviendrait de poursuivre des recherches. C'est dans le cadre de cette collaboration que j'ai réalisé ce travail de thèse.*

Pierre TISON



## INTRODUCTION

Tout système peut être représenté fonctionnellement par un ensemble aux frontières bien définies, communiquant avec le monde extérieur par un double courant d'information. Le courant issu du système, constitué par les signaux de sortie, est caractérisé par les variables de sortie ou "sorties". Le courant affluent d'informations est formé des variables d'entrée ou "entrées". La fonction qui relie l'état des sorties aux entrées est la fonction de transfert du système.

Un système est booléen si toutes les variables qui constituent ses entrées et ses sorties sont booléennes, c'est-à-dire à deux états possibles. Nous ne nous occuperons ici que des systèmes dont la fonction de transfert est indépendante du temps : les sorties sont alors des fonctions booléennes bien définies des variables d'entrée. Ce sont les systèmes combinatoires qui jouent un rôle essentiel dans les dispositifs numériques de commande automatique et de traitement de l'information modernes.

La synthèse d'un tel système est aisée puisque l'on dispose maintenant de nombreux opérateurs booléens. Mais les circuits ainsi obtenus ont des caractéristiques souvent différentes. Il apparaît alors des critères de performances, dont on doit tenir compte pour réaliser les circuits de la façon la plus satisfaisante possible.

Ces critères dépendent, dans chaque cas particulier, des opérateurs utilisés, des contraintes imposées au système par ce qui lui est extérieur, de la fiabilité que l'on veut obtenir.

Dans la plupart des cas, on est ramené à la minimalisation des formes "Sommes de produits" qui sont les formes normales des fonctions booléennes.

Dans le cas particulier où l'on n'a qu'une seule sortie, dont la valeur est impérativement fixée pour chaque état des variables, nous sommes ramenés au problème de QUINE : trouver les impliquants premiers, puis les bases premières d'une fonction booléenne.

La recherche des impliquants premiers d'une fonction simple et complète, pour un nombre quelconque de variables d'entrée, est un problème assez bien résolu par QUINE, grâce à l'opération consensus appliquée sur des paires d'impliquants pouvant être canoniques ou quelconques [1] [2]\*. On peut aussi former les impliquants premiers par la méthode de GAVRILOV [3] en partant de l'ensemble des variables sous leurs formes directe ou complémentée et en formant de toutes les façons possibles des monômes par multiplication de ces lettres entre elles jusqu'à ce que l'on ait formé un impliquant de la fonction qui est alors forcément premier.

Disposant de l'ensemble des impliquants premiers d'une fonction, il s'agit d'en trouver la base de coût minimal. Celle-ci figure forcément dans l'ensemble des bases. La connaissance de cet ensemble nous permet, par application des critères de performance, de trouver la solution au problème posé.

Diverses méthodes conduisent à l'ensemble des bases. La méthode utilisée par QUINE et McCLUSKEY [4] et GAVRILOV est basée sur la recherche des impliquants premiers couvrant chaque monôme canonique de la fonction. En considérant l'indice de chaque impliquant premier comme une nouvelle variable, on est ramené à un produit de facteurs, chaque facteur constituant la condition de couverture d'un impliquant canonique de la fonction. Ce produit étant exprimé en somme de produits, chaque terme fournit une base de la fonction. Il suffit de choisir la plus intéressante.

La méthode a été améliorée par la suite, d'abord par PYNE et McCLUSKEY [5], puis par MUKHERJEE et SARKAR [6].

La méthode de QUINE-McCLUSKEY peut être facilement étendue au cas des fonctions incomplètes, KAZAKOV [7] trouve, pour une telle fonction, une base de coût réduit, en formant un certain nombre d'impliquants premiers par la méthode de GAVRILOV, ce nombre étant suffisant pour couvrir tous les impliquants canoniques de la borne inférieure de la fonction.

La méthode peut être également étendue aux systèmes de fonctions. BARTEE [8] adjoint pour cela, à chaque monôme, des variables indiquant la couverture de ce terme par chacune des fonctions simples du système.

.../...

---

\* Les chiffres entre crochets permettent de se reporter à la bibliographie.

Le passage d'un produit de sommes en somme de produits, utilisé dans les méthodes précédentes, est toujours appliqué sur des expressions où toutes les variables sont monômes. Il nous a paru intéressant de généraliser ce processus pour une expression quelconque. Il devient alors une méthode de passage d'une forme quelconque à sa duale. On voit apparaître ici des règles permettant la simplification des calculs. Les éléments trouvés apparaissent comme des impliquants (ou facteurs) premiers. On a donc bien, en fait, une méthode permettant de trouver les impliquants premiers puis l'ensemble des bases [9].

L'obligation de partir des éléments canoniques dans les méthodes précédentes de recherche des bases est gênante car elle conduit à des calculs assez longs. On a donc cherché à les réduire en partant d'un produit de facteurs plus simple.

Une méthode très intéressante est celle de HOCKNEY [10], qui réduit les impliquants de la borne inférieure de la fonction en monômes plus petits disjoints entre eux. L'auteur forme ces termes par intersection, en éliminant ceux qui sont inclus dans des impliquants essentiels. Les termes restants sont alors traités comme les monômes canoniques dans les méthodes précédentes, mais l'ensemble du calcul est notablement allégé.

Si l'on considère un impliquant quelconque de la fonction, on peut le couvrir, soit par un impliquant premier qui lui est supérieur ou égal, soit par une somme de ces termes jouissant de cette propriété. On forme alors des sommes partielles constituant une couverture possible de l'impliquant considéré et l'on est ramené au problème du passage d'une forme "produit de sommes de produits" en "somme de produits". Les calculs sont alors plus simples, car cette forme PSP peut être considérée comme une expression contractée des formes PS précédentes. Ces méthodes ont été proposées par GHAZALA [11] et MOTT [12], qui ont présenté des processus de recherche de sommes partielles d'impliquants premiers couvrant chacun un monôme d'une implication quelconque de la fonction.

La méthode de GHAZALA est particulièrement intéressante. Un impliquant premier quelconque de la fonction peut être éliminé si tout état des variables qui le rend égal à 1 rend égales à 1 des sommes formées avec les autres. On est donc amené à former les résidus des monômes donnés par suppression de variables dans leur écriture (on définit ainsi le rapport des monômes) et on cherche à les grouper de façon à former des égalités à 1. Chaque groupement ayant cette propriété peut être retenu pour remplacer le monôme utilisé pour former les résidus.

Si l'on examine l'opération consensus présentée par SAMSON [13] et utilisée par QUINE, qui permet de former le monôme  $X.Y$  à partir de deux autres tels que  $X.a$  et  $Y.a'$ , on retrouve une telle égalité :

.../...

$a + a' = 1$ , qui est irrédondante. On voit donc apparaître un lien entre la méthode de QUINE et celle de GHAZALA. Il suffit de chercher à former des sommes de résidus égales à 1 d'une façon irrédondante, pour définir le consensus généralisé d'un nombre quelconque de monômes. C'est cette idée qui a permis le développement de la présente théorie des consensus.

La recherche des relations de consensus généralisés résout de façon élégante le problème de GHAZALA et de MOTT.

La propriété de réduction de classe de ces relations montre que tout consensus généralisé peut être obtenu par une succession de consensus simples de deux monômes. On retrouve le processus de MOTT que l'on justifie tout en le simplifiant. Cette propriété de réduction apparaît après la mise en facteur, dans une égalité à 1, d'une variable et de son complément, par un processus analogue à celui de SAMSON [14].

Tout impliquant premier étant un consensus généralisé, on énonce alors une méthode basée sur la réduction permettant de trouver facilement l'ensemble des impliquants premiers [15].

Une autre propriété très intéressante des consensus permet de les trouver par un processus d'exclusion [16].

On se retrouve, avec les méthodes de GHAZALA, de MOTT, ou des consensus généralisés devant le problème du passage d'une forme PSP en forme SP que l'on sait résoudre grâce à un théorème de M. KUNTZMANN [17].

On peut vouloir obtenir non l'ensemble des bases premières, mais l'une quelconque d'entre elles. La théorie des consensus nous permet d'énoncer une méthode systématique d'élimination des termes redondants, mettant en jeu le processus d'intersection de HOCKNEY et les résidus de GHAZALA. On arrive rapidement à une solution de coût réduit, ne nécessitant aucune manipulation d'indices, ce qui limite la capacité de mémoire nécessaire pour mener les calculs à bien.

Le processus de GHAZALA conduit à des égalités à 1 irrédondantes. On a pu définir un certain ordre d'irrédondance, ce qui nous a donné des consensus d'ordre quelconque. Un ensemble de monômes, constituant une génération d'ordre  $q$  d'un consensus, présente, par rapport à une génération d'ordre inférieur, une certaine redondance. Cette redondance améliorant la fiabilité des circuits, on a obtenu ainsi des circuits permettant notamment la suppression de ce que l'on appelle "les aléas de fonctionnement".

.../...

Le cas des fonctions incomplètes est traité de façon satisfaisante par McCLUSKEY et HOCKNEY, en considérant les impliquants premiers de la borne supérieure et en ne couvrant que les impliquants de la borne inférieure. On peut aussi faire apparaître, avec CHU [18], la partie "indifférente" d'une fonction incomplète. On est alors dans l'obligation de traiter simultanément deux fonctions simples liées à une fonction incomplète.

Il est intéressant de n'avoir qu'une seule fonction simple associée à une fonction incomplète. C'est la fonction associée, présentée par M. KUNTZMANN [19].

Il nous est apparu, au cours de ce travail, qu'il était difficile, vu l'arbitraire des conventions initiales et la dualité parfaite existant entre une fonction et son complément, de donner à l'une d'elles un rôle privilégié. Ceci nous a conduit à traiter simultanément la fonction et son complément. La fonction simple associée à une fonction incomplète n'est alors plus à deux, mais à trois états.

L'introduction d'un troisième état est une nécessité en Algèbre de Boole. L'apparition d'une variable booléenne dans un monôme est déjà un phénomène à trois états puisqu'elle peut y être présente sous sa forme directe, sous sa forme complémentée ou absente. Ce troisième état a donc été introduit et utilisé par de nombreux auteurs. QUINE et HOWARD [20] le représentent par un tiret. MORREALE [21] utilise pour noter les trois états les chiffres 0, 1 et 2, et CURTISS et ALLEN [22] des matrices double ligne.

Il nous a paru finalement plus normal d'introduire quatre états, les fonctions booléennes incomplètes à trois états apparaissant comme des cas particuliers de ces fonctions plurales.

On a pu encore généraliser au cas du système de fonctions, par un processus analogue à celui de M. KUNTZMANN [19] et de BARTEE [9]. On associe à chaque monôme une matrice indiquant l'appartenance de ce terme à chacune des  $g$  fonctions du système. On aboutit, en fait, à une fonction plurale à  $g^4$  états.

On retrouve, en algèbre plurale, les propriétés présentées dans la première partie de cet ouvrage : passage d'une forme à sa duale, consensus généralisé de classe et d'ordre quelconques, recherche des impliquants premiers et des bases premières.

La dernière partie est consacrée à la réalisation des fonctions booléennes. On y montre l'intérêt des formes normales, quelle que soit la technologie choisie. On retrouve les relations de NASLIN [23] entre les différents opérateurs utilisables pour la construction des circuits.

.../...



A la fin de cette étude, la généralisation du "consensus" apparaît nettement. Il ne s'agit plus d'une opération booléenne, mais d'un processus beaucoup plus général de traitement des informations. Toute donnée informationnelle relative à un fait quelconque peut être définie et caractérisée par l'ensemble de ses composantes et représentée par une matrice informationnelle. L'ensemble des informations connues relatives à un fait apparaît comme une suite de matrices informationnelles de mêmes dimensions. On peut alors par consensus former de nouvelles matrices informationnelles relatives à ce fait : il faut faire la réunion d'une composante et l'intersection des autres. Les matrices maximales ainsi formées jouent un rôle identique à celui joué par les impliquants premiers en algèbre booléenne.

On retrouve sur les matrices informationnelles relatives à un fait quelconque les propriétés mises en relief dans la présente étude : relations d'ordre, complémentation, redondance, dualité. Le consensus apparaît finalement comme une opération fondamentale en algèbre logique.

# 1 - PRESENTATION DES CONSENSUS

## 11 - RAPPEL DE DEFINITIONS

Une variable booléenne est définie lorsque l'on se donne son état qui est forcément 0 ou 1.

Une fonction booléenne est définie lorsque l'on se donne sa valeur (0 ou 1) pour chaque état des variables.

Deux fonctions  $F_1$  et  $F_2$  sont EGALES si pour tout état des variables, elles prennent toutes deux la même valeur.

On note cette relation:  $F_1 = F_2$ .

On dit qu'une fonction  $F_1$  est INFERIEURE OU EGALE à une autre  $F_2$  si tout état des variables qui fait  $F_1 = 1$ , fait aussi  $F_2 = 1$ .

S'il existe un état au moins des variables qui fait  $F_1 = 0$ , et  $F_2 = 1$ , on dit que  $F_1$  est STRICTEMENT INFERIEURE à  $F_2$ .

Ces relations d'ordre se notent :  $F_1 \leq F_2$  et  $F_1 < F_2$ .

S'il n'existe pas l'une des relations d'ordre précédentes entre  $F_1$  et  $F_2$ , on dit que ces fonctions sont NON-COMPARABLES.

On trouve alors un état des variables qui fait  $F_1 = 0$  et  $F_2 = 1$ , et un autre qui fait  $F_1 = 1$  et  $F_2 = 0$ .

Cette relation se note :  $F_1 \not\leq F_2$ .

.. / ...

On dit qu'un monôme est IMPLIQUANT d'une fonction F si sa valeur M pour tout état des variables est inférieure ou égale à la valeur de la fonction pour cet état des variables.

$$\text{On a : } (M = 1) \implies (F = 1)$$

Un ensemble d'impliquants  $A_1, \dots, A_n$  d'une fonction F la définit si l'on a :  $F = A_1 + \dots + A_n$ .

Cet ensemble forme une IMPLICATION de la fonction.

De la même façon, étant donné un monôme X et un ensemble  $A_1, \dots, A_n$  quelconque, on dit que X est INCLUS dans l'ensemble si l'on a :

$$X \leq A_1 + \dots + A_n$$

Une telle inégalité est dite relation d'INCLUSION d'un monôme dans un ensemble.

## 12 - DEFINITION DES CONSENSUS

Etant donné un monôme  $A_i$  contenant x dans son écriture, on note le monôme résidu obtenu par suppression de x dans  $A_i$  par  $\frac{A_i}{x}$ .

Soit l'égalité :  $M_1 + \dots + M_p = 1$  et une variable x qui y figure. Nous pouvons écrire cette égalité après mise en facteur de x et de  $x'$  :

$$x \cdot \sum_1^k \frac{M_i}{x} + \sum_{k+1}^m M_i + x' \cdot \sum_{m+1}^p \frac{M_i}{x'} = 1$$

Ceci est justifié par le fait que, étant donné une somme de p monômes  $M_1, \dots, M_p$ , non nuls, l'affectation de leur indice i est arbitraire puisque la somme ne change pas de valeur si on les permute. On peut donc s'arranger pour les classer par rapport à x et  $x'$  : d'abord ceux qui contiennent x, ensuite ceux qui ne contiennent ni x, ni  $x'$ , et enfin ceux qui contiennent  $x'$  dans leur écriture.

.../...

Définition 1-1 :

Toute égalité d'un polynôme à 1 est dite EGALITE à 1 D'ORDRE ZERO AU MOINS.

Exemple 1-1

$a + a' + ab = 1$  est une égalité à 1 d'ordre zéro au moins.

Définition 1-2 :

Une égalité  $M_1 + \dots + M_p = 1$  est dite EGALITE à 1 D'ORDRE q AU MOINS si en la mettant sous la forme :

$$x \cdot \sum_{i=1}^k \frac{M_i}{x} + \sum_{i=k+1}^m M_i + x' \cdot \sum_{i=m+1}^p \frac{M_i}{x'} = 1$$

x étant une variable quelconque figurant ou non dans l'écriture des monômes, le polynôme  $M_{k+1} + \dots + M_m$  est égal à 1 d'ordre q - 1 au moins.

Exemple 1-2

$a + a' + b + b' + a'b' + c = 1$  est une égalité à 1 d'ordre 1 au moins, car :

$$b + b' + c = 1 \quad (\text{ordre zéro au moins})$$

$$a + a' + c = 1 \quad (\text{ordre zéro au moins})$$

$$a + a' + b + b' + a'b' = 1 \quad (\text{ordre zéro au moins})$$

.../...

Définition 1-3

Une égalité à 1 est dite d'ORDRE  $q$ , si elle est d'ordre  $q$  au moins et qu'elle n'est pas d'ordre  $q + 1$  au moins.

Exemple 1-3

L'égalité  $b + b' + c = 1$  est une égalité à 1 d'ordre zéro, car elle n'est pas d'ordre 1, et elle est forcément au moins d'ordre zéro.

L'égalité  $a + a' + b + b' + a'b' + c = 1$  est alors d'ordre 1 car :

- 1) elle est d'ordre 1 au moins
- 2) elle n'est pas d'ordre 2, puisque  $b + b' + c$  n'est pas d'ordre 1 au moins.

Définition 1-4

Une égalité  $M_1 + \dots + M_p = 1$  d'ordre  $q$  est dite IRREDONDANTE d'ordre  $q$ , lorsque la suppression d'un  $M_\lambda$  quelconque la rend d'ordre  $q - 1$ .

Exemple 1-4

L'égalité  $a + a'b + b' + c + c' = 1$  est irrédondante d'ordre 1.

L'ordre d'une égalité à 1 est donc un nombre positif ou nul.

.../...

L'ordre et l'irrédondance se notent à la suite des égalités, entre parenthèses.

Exemple 1-5 :

$$\begin{array}{ll} a + a' + b + b' + a'b' = 1 & (\text{ordre } 1) \\ x + y + x'y' = 1 & (\text{ordre } 0, \text{ irréd.}) \\ a + a' + b + b' = 1 & (\text{ordre } 1, \text{ irréd.}) \end{array}$$

Remarque 1-1

Considérons le cas où les monômes  $M_{ij}$  se réduisent en un seul terme qui est 1. On a l'égalité:  $1 = 1$  qui est d'ordre zéro au moins, d'ordre 1 au moins ...

L'ordre de cette égalité n'est donc pas défini.

Considérons une implication  $A_1, \dots, A_p$  d'une fonction F. Chacun des  $A_{ij}$  est le produit de deux monômes  $B_{ij}$  et  $C_{ij}$ ;  $B_{ij}$  étant le produit des variables de  $A_{ij}$  monoformes dans l'implication (c'est-à-dire n'y figurant que sous une seule forme directe ou complémentée),  $C_{ij}$  étant le produit des variables de  $A_{ij}$  biformes (s'il n'y a pas de variables monoformes ou biformes, on fait  $B_{ij}$  ou  $C_{ij} = 1$ ).

Formons alors le produit  $X = B_1 \dots B_p$  des variables monoformes et la somme  $S = C_1 + \dots + C_p$  des résidus obtenus en supprimant dans chaque monôme  $A_{ij}$  les variables monoformes.

Pour tout état des variables qui fait  $X = 1$ , S prend la valeur 0 ou 1.

Si  $S = 0$  pour l'un d'eux au moins, X n'est pas impliquant de la fonction F. En effet, pour cet état des variables d'entrée, tous les monômes donnés sont nuls, leur  $C_{ij}$  étant égal à zéro, alors que X est égal à 1.

.../...

Si  $S = 1$  pour tout état des variables qui rend  $X$  égal à 1, on a forcément  $X$  inférieur ou égal à la somme  $A_1 + \dots + A_p$  qui vaut  $F$ , ce qui montre que  $X$  est impliquant de  $F$ .

D'où le théorème :

Théorème 1-1- Etant donné une fonction  $F$  par l'une de ses implications  $A_1, \dots, A_p$ , la condition nécessaire et suffisante pour que le produit  $X = B_1 \dots B_p$  des variables monoformes dans l'implication soit inférieur ou égal à  $F$  est que la somme  $S = C_1 + \dots + C_p$  des produits des variables biformes dans chaque monôme constitue une égalité à 1.

Le processus utilisé permet ainsi, à partir d'une implication, d'obtenir de nouveaux impliquants.

Exemple 1-6 :

Soit la fonction  $F = ax + by + x'y'$ .

Le monôme  $ab$  trouvé par application du processus est impliquant de  $F$ , car on a :  $x + y + x'y' = 1$ .

Remarque 1-2

Il y a intérêt à obtenir des monômes les plus grands possibles, c'est-à-dire contenant le nombre le plus faible de lettres dans leur écriture.

Considérons alors un composant  $A_j$  conduisant à un résidu  $C_j$  inutile ou redondant dans l'égalité  $S = 1$ . Un tel monôme risque de présenter dans son écriture une variable monoforme  $x$  absente dans l'écriture des autres qui aurait comme effet de diminuer le monôme  $X$  trouvé par le processus étudié.

On s'intéressera donc plus particulièrement au cas où l'égalité  $S = 1$  est irrédondante.

Définition 1-5

Le monôme  $X$  produit des variables monofomes dans l'écriture d'un ensemble de monômes  $A_1, \dots, A_p$  est dit CONSENSUS D'ORDRE  $q$  de ces monômes si la somme  $S = C_1 + \dots + C_p$  des résidus formés par les produits des variables bifomes dans chacun d'eux constitue une égalité à 1 d'ordre  $q$  irrédondante.

Exemple 1-7

Les monômes  $ax, by, x'y'$  admettent comme consensus d'ordre ZERO le monôme  $ab$ .

On a, en effet :  $x + y + x'y' = 1$  (ordre 0 irréd.)

La relation de consensus d'ordre  $q$  entre les monômes  $A_1, \dots, A_p$  de l'ensemble  $E$  et leur consensus  $X$  se note :

$$X = \mathcal{C}^q(A_1 \dots A_p) \quad \text{ou} \quad X = \mathcal{C}^q(E)$$

Lorsque l'on ne précisera pas l'ordre d'un consensus, il s'agira toujours de l'ordre ZERO.

Etant donné une relation de consensus  $X = \mathcal{C}^q(A_1 \dots A_p)$ , les monômes  $A_1, \dots, A_p$  sont dits GENERATEURS de  $X$  et en forment une GENERATION.

On appelle CLASSE d'une relation de consensus  $X = \mathcal{C}^q(A_1 \dots A_p)$  le nombre  $p$  des générateurs.

On appelle EGALITE CARACTERISTIQUE d'une relation de consensus l'égalité irrédondante :  $C_1 + \dots + C_p = 1$  obtenue en égalant à 1 la somme des résidus obtenus en supprimant les variables monofomes dans l'écriture de chaque générateur.

.../...



L'ordre d'un consensus est égal à l'ordre de son égalité caractéristique.

Remarque 1-3 :

Un monôme quelconque est lui-même son propre consensus de classe 1 :

$$X = \mathcal{C}^q(X)$$

En effet, l'égalité caractéristique se réduit à  $1 = 1$ , qui est une égalité irrédondante d'ordre indéfini.

Conventionnellement, on dira qu'un monôme est son propre consensus de classe 1, d'ordre quelconque.

La justification de cette convention devra être faite à chaque fois que l'on aura à employer les consensus de classe 1.

Remarque 1-4 :

Il n'y a jamais de relation de classe 2 entre un consensus et l'un de ses générateurs.

Considérons, en effet, la relation :  $X = \mathcal{C}^q(A_1 \dots A_p)$ . Toutes les variables figurant dans l'écriture de  $X$  sont forcément monformes dans la génération  $A_1, \dots, A_p$ . Le consensus  $X$  ne fera jamais partie d'une génération de classe 2 d'ordre quelconque où l'autre générateur serait un  $A_i$  de l'ensemble  $A_1, \dots, A_p$ .

Par contre, ces deux monômes peuvent entrer dans une génération de classe supérieure à 2 à condition que l'un de leur co-générateur rende une variable du consensus biforme.

Exemple 1-8 :

Soit la relation :  $bc'd = \mathcal{C}(abc', a'bd)$ . Les monômes  $bc'd$  et  $a'bd$  peuvent entrer dans une génération avec d'autres monômes qui devront rendre biforme une variable au moins du consensus  $bc'd$ .

.../...

C'est le cas du monôme  $acd$  qui rend  $c$  biforme. On a :

$$bd = \mathcal{L}(abc', a'bd, acd).$$



## 2 - PROPRIETES DES CONSENSUS D'ORDRE ZERO

21 - INCLUSION D'UN CONSENSUS DANS L'UNE DE SES GENERATIONS

Il résulte du théorème 1-1 que tout consensus

$X = \mathcal{C}(A_1 \dots A_p)$  est lié à ses générateurs par la relation d'inclusion :

$$X \leq A_1 + \dots + A_p$$

Nous aurons besoin de deux lemmes préliminaires pour démontrer la propriété d'inclusion IRREDONDANTE d'un consensus dans l'une quelconque de ses générations.

Lemme 2-1 :

Etant donnée une égalité à 1 irrédondante d'ordre zéro  $C_1 + \dots + C_p = 1$ , on peut toujours trouver un état des variables y figurant, tel que le seul terme du premier membre qui vaille 1 soit un terme de rang quelconque choisi à l'avance.

En effet, soit  $C_k$  le terme choisi. Si pour tout état des variables :  $C_1 + \dots + C_{k-1} + C_{k+1} + \dots + C_p = 1$ ,  $C_k$  apparaîtrait comme inutile ce qui est contraire au caractère d'irrédondance de l'égalité donnée.

Lemme 2-2 :

Dans toute égalité à 1 irrédondante d'ordre zéro, il ne peut y avoir de variables monofformes.

Soit  $x$  (ou  $x'$ ) une telle variable. En la rendant égale à 0, on annule un certain nombre de termes. Le résidu constitue encore une égalité à 1 par hypothèse pour tout état possible des variables  $y$  figurant. Donc les termes contenant  $x$  (ou  $x'$ ) étaient inutiles, ce qui est contraire au caractère d'irrédondance de l'égalité à 1 donnée.

Soit la relation de consensus :  $X = \mathcal{C}(A_1 \dots A_p)$ . Considérons un état quelconque des variables faisant  $X = 1$ . Cet état rend tous les  $B_i$  égaux à 1. On a par ailleurs :  $C_1 + \dots + C_p = 1$ , ce qui prouve qu'il y a au moins un résidu  $C_i$  qui vaut 1, donc le monôme  $A_i$  correspondant vaut 1 également, ainsi que la somme  $A_1 + \dots + A_p$ . Plaçons-nous en un état des variables bifformes faisant  $C_k = 1$  et  $C_i = 0$  pour tout  $i \neq k$ . Ceci est possible d'après le lemme 2-1. En fixant aux variables monofformes la valeur 1, et aux variables absentes une valeur quelconque, on obtient un état des variables qui fait :  $X = 1$  et  $C_1 + \dots + C_k - 1 + C_k + 1 + \dots + C_p = 0$ .

On peut alors affirmer que  $X$  n'est pas inférieur ou égal à toute somme de  $p - 1$  des générateurs provenant d'une génération de classe  $p$ . D'où le théorème :

Théorème 2-1 :

Un consensus est inclus dans l'une quelconque de ses générations de classe  $p$ , mais non dans tout ensemble de  $p - 1$  monômes que l'on peut former par suppression de l'un des termes de cette génération.

Inversement, considérons un monôme  $A$  jouissant de la propriété d'être inférieur ou égal à la somme de  $p$  monômes  $A_1, \dots, A_p$ , mais non dans toute somme de  $p - 1$  d'entre eux.

Nous pouvons considérer  $A$  comme le produit B.C.D. de 3 monômes,  $B$  étant le produit des variables de  $A$  monofformes dans l'écriture des monômes  $A_1, \dots, A_p$ ,  $C$  étant le produit des variables de  $A$  bifformes,  $D$  étant le produit des variables de  $A$  absentes dans cette écriture.

Soit  $x$  une variable de  $C$ . Tous les monômes  $A_{\lambda}$  inférieurs ou égaux à  $x$  ont une intersection nulle avec  $A$ , ce qui est contraire à l'hypothèse qu'on ne peut enlever aucun monôme de la somme. Donc, il est impossible qu'il existe une telle variable, et  $C$  se réduit à 1 et  $A$  à  $B.D$ . Chacun des  $B_{\lambda}$  peut s'écrire comme le produit  $B_{\lambda}^1.B_{\lambda}^2$  avec  $B_{\lambda}^1 =$  produit des variables de  $B_{\lambda}$  figurant dans  $B$  et  $B_{\lambda}^2 =$  produit des variables de  $B_{\lambda}$  ne figurant pas dans  $B$ .

Tout état des variables qui rend  $A$  égal à 1 fait  $B$  égal à 1, donc tous les produits  $B_{\lambda}^1$  sont égaux à 1.

Considérons la somme  $B_1^2.C_1 + \dots + B_p^2.C_p$  et cherchons sa valeur pour tout état des variables qui y figurent. On peut à chacun de ces états associer un état de toutes les variables du problème obtenu en donnant la valeur 1 aux variables figurant dans  $A$  et une valeur quelconque aux variables absentes. Ce dernier état rend  $A$  égal à 1 et la somme  $A_1 + \dots + A_p$  égale à 1. Or, cette somme devient  $B_1^2.C_1 + B_p^2.C_p$  qui est donc une égalité à 1. Montrons qu'elle est irrédondante. Considérons un monôme  $A_k$  quelconque. On peut toujours trouver et se placer en un état des variables qui fait  $A = 1$  et  $A_k$  égal à 1, tous les autres  $A_j$  étant nuls. Il y a donc dans l'écriture de chaque monôme  $A_j$  (pour  $j \neq k$ ) une variable qui est nulle et annule  $C_j$ . Tous les monômes  $B_j^2.C_j$  sont donc nuls.

$C_k$  apparaît ainsi comme indispensable dans l'égalité  $B_1^2.C_1 + \dots + B_p^2.C_p = 1$ . Comme  $k$  peut être quelconque, cette égalité est irrédondante d'ordre zéro.

D'après le lemme 2-2, nous pouvons affirmer qu'il n'y a pas de variable monoforme, donc tous les  $B_{\lambda}^2$  se réduisent à 1 et  $A$  à  $B_1^1 \dots B_p^1.D$ . Appliquons alors le processus de formation des consensus sur l'ensemble des monômes  $A_1, \dots, A_p$ . On trouve un monôme  $B_1 \dots B_p = B_1^1 \dots B_p^1$  qui est leur consensus  $X$  et  $A$  apparaît comme son produit par un certain nombre (pouvant être nul) de variables absentes dans l'écriture des générateurs. Le théorème réciproque du théorème 2-1 s'énonce :

.../...

Théorème 2-2 :

Si un monôme A est inférieur ou égal à la somme de p monômes, mais non à la somme de p-1 d'entre eux, ces monômes admettent un consensus qui lui est supérieur ou égal.

Remarque 2-1

Dans le cas particulier où il n'y a pas de variables absentes, le seul monôme qui jouisse de la propriété précédente est le consensus lui-même.

Remarque 2-2

Le consensus est un impliquant premier de la somme des monômes formant l'une de ses générations. C'est, en effet, le plus grand vérifiant l'inégalité :

$$X \leq A_1 + \dots + A_p$$

Dans cette inégalité, on ne peut enlever ni une variable du monôme constituant le premier membre, ni un monôme du second membre.

Définition 2-1

On dit qu'une relation d'inclusion :  $X \leq A_1 + \dots + A_n$  est IRREDONDANTE D'ORDRE ZERO lorsque, en supprimant une variable quelconque dans le premier membre, ou un monôme quelconque dans le second, la nouvelle relation ainsi formée n'est plus vraie.

Théorème 2-3

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un monôme X soit lié à un ensemble  $A_1, \dots, A_p$  par une relation d'inclusion d'ordre zéro, est qu'il soit leur consensus d'ordre zéro.

.../...

Exemple 2-1

Considérons la relation :  $ab = \mathcal{C}(ax, by, x'y')$

On a :  $ab \leq ax + by + x'y$

mais :  $a \not\leq ax + by + x'y$

$b \not\leq ax + by + x'y$

$ab \not\leq ax + by$

$ab \not\leq ax + x'y'$

$ab \not\leq by + x'y'$

22 - REDUCTION DE LA CLASSE D'UNE RELATION DE CONSENSUS

Soit la relation  $X = \mathcal{C}(A_1 \dots A_p)$ . Son égalité caractéristique peut s'écrire après mise en facteur de  $x$  et de  $x'$  et redistribution des indices :

$$x \cdot \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{x} + \sum_{i=k+1}^m c_i + x' \cdot \sum_{i=m+1}^p \frac{c_i}{x'} = 1 \quad (1)$$

D'où l'on déduit :

$$\text{- en faisant } x = 1 : \sum_{i=1}^k \frac{c_i}{x} + \sum_{i=k+1}^m c_i = 1 \quad (2)$$

et

$$\text{- en faisant } x = 0 : \sum_{i=k+1}^m c_i + \sum_{i=m+1}^p \frac{c_i}{x'} = 1 \quad (3)$$

Ces deux égalités peuvent être redondantes. On peut alors supprimer des termes inutiles, jusqu'à ce qu'elles deviennent irrédondantes.

Lemme 2-3 :

Dans les deux égalités :

.../...



$$\sum_{1}^{k} \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^{m} C_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k+1}^{m} C_i + \sum_{m+1}^{p} \frac{C_i}{x'} = 1,$$

les termes inutiles proviennent tous du groupe de monômes  $C_{k+1}$  à  $C_m$ .

Il est suffisant de le montrer pour l'une d'elles, étant donné la dualité existant entre  $x$  et  $x'$ . Prenons, par exemple, la seconde.

Considérons donc un monôme  $\frac{C_g}{x}$  qui serait inutile dans l'égalité (2).

Ceci signifie que l'on a :

$$\sum_{1}^{g-1} \frac{C_i}{x} + \sum_{g+1}^{k} \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^{m} C_i = 1$$

Nous pouvons donc écrire :

$$\frac{C_g}{x} \ll \sum_{1}^{g-1} \frac{C_i}{x} + \sum_{g+1}^{k} \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^{m} C_i$$

et en multipliant les deux membres par  $x$  :

$$C_g \ll \sum_{1}^{g-1} C_i + \sum_{g+1}^{k} C_i + \sum_{k+1}^{m} (C_i \cdot x)$$

On a par ailleurs :  $C_i \cdot x \ll C_i$ , donc :  $\sum_{k+1}^{m} (C_i \cdot x) \ll \sum_{k+1}^{m} C_i$

$$\text{D'où : } C_g \ll \sum_{1}^{g-1} C_i + \sum_{g+1}^{k} C_i + \sum_{k+1}^{m} C_i$$

$$C_g \ll \sum_{1}^{g-1} C_i + \sum_{g+1}^{m} C_i$$

.../...

$$\sum_1^{g-1} C_i + \sum_{g+1}^m C_i = \sum_1^m C_i = \sum_1^p C_i = 1$$

Donc  $C_g$  est inutile dans l'égalité caractéristique, ce qui est impossible par hypothèse. Le lemme 2-3 est donc démontré.

Lemme 2-4 :

Dans les deux égalités :

$$\sum_1^k \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^m C_i = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{k+1}^m C_i + \sum_{m+1}^p \frac{C_i}{x'} = 1$$

les termes inutiles dans l'une sont forcément obligatoires dans l'autre.

Considérons un terme  $C_h$  du lot  $C_{k+1}, \dots, C_m$  qui serait simultanément inutile dans les deux égalités. Il est inutile dans la première, ce qui prouve que l'on y trouve une somme de monômes qui lui est supérieure ou égale.

$$\text{On a :} \quad C_h \leq \sum_1^k \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^{h-1} C_i + \sum_{h+1}^m C_i$$

$$\text{D'où : } x \cdot C_h \leq \sum_1^k C_i + \sum_{k+1}^{h-1} (C_i \cdot x) + \sum_{h+1}^m (C_i \cdot x)$$

$$\text{et : } x \cdot C_h \leq \sum_1^{h-1} C_i + \sum_{h+1}^m C_i$$

$$\text{On trouverait de même : } x' \cdot C_h \leq \sum_1^{h-1} C_i + \sum_{h+1}^p C_i$$

.../...

On a par addition des deux inégalités :  $C_h \ll \sum_{1}^{h-1} C_i + \sum_{h+1}^p C_i$

D'où :  $\sum_{1}^{h-1} C_i + \sum_{h+1}^p C_i = \sum_{1}^p C_i = 1$ , ce qui est impossible

Le lemme 2-4 est donc démontré.

Revenons aux deux égalités :  $\sum_{1}^k \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^m C_i = 1$  (2)

et :  $\sum_{k+1}^m C_i + \sum_{m+1}^p \frac{C_i}{x'}$  (3)

Après suppression des termes inutiles et redistribution des indices, on a :

$\sum_{1}^k \frac{C_i}{x} + \sum_{k+1}^{m'} C_i = 1$  (irréd.) (4)

et :  $\sum_{k'+1}^m C_i + \sum_{m+1}^p \frac{C_i}{x'} = 1$  (irréd.) (5)

avec :  $1 \leq k \leq k' \leq m' \leq m \leq p - 1$

On peut, en effet, affecter aux monômes  $C_{k+1}$  à  $C_m$  de nouveaux indices de façon à ce que les termes inutiles soient respectivement  $C_{m'+1}$  à  $C_m$  pour la première (si  $m' = m$ , il n'y en a pas) et  $C_{k+1}$  à  $C_{k'+1}$  pour la deuxième (si  $k' = k$ , il n'y en a pas).

On peut alors considérer (4) et (5) comme de nouvelles égalités caractéristiques qui nous définissent les relations de consensus :

.../...

$$X_1 = x.B_1 \dots B_{m'} = \mathcal{C}(A_1 \dots A_{m'}) \text{ de classe } m' \text{ avec } m' \leq m \leq p - 1$$

$$X_2 = x'.B_{k'+1} \dots B_p = \mathcal{C}(A_{k'+1} \dots A_p) \text{ de classe } p - k' \text{ avec}$$

$$p - k' \leq p - k \leq p - 1$$

$$\text{On a donc : } X = \prod_1^p B_i = B_1 \dots B_p = (B_1 \dots B_{m'}) \cdot (B_{k'+1} \dots B_p)$$

$$\text{D'où : } X = \mathcal{C}(X_1 X_2)$$

C'est une relation de consensus de classe 2 où les générateurs sont eux-mêmes des consensus de classe inférieure à p.

Exemple 2-2 :

Soit la relation de consensus :  $c'd = \mathcal{C}(ac', a'b, b'd)$ .

L'égalité caractéristique  $a + a'b + b' = 1$  se réduit par rapport à a en :  $1 + b' = 1$  (en faisant  $a = 1$ ) et  $b + b' = 1$  (en faisant  $a = 0$ ), ce qui nous donne les deux égalités caractéristiques  $1 = 1$  et  $b + b' = 1$ , qui correspondent aux relations de consensus  $ac' = \mathcal{C}(ac')$  et  $a'd = \mathcal{C}(a'b, b'd)$ .

On a bien  $c'd = \mathcal{C}(ac', a'd)$  de classe 2. La classe a diminué d'une unité.

Théorème 2-4 :

Tout consensus de classe p,  $X = \mathcal{C}(A_1 \dots A_p)$  est consensus de classe 2 de deux monômes  $X_1$  et  $X_2$  eux-mêmes liés aux générateurs initiaux  $A_1, \dots, A_p$  par des relations de consensus de classe inférieure à p, telles que tout générateur  $A_i$  initial figure forcément dans l'une d'elles.

.../...

Remarque 2-3 :

La réduction par rapport à une variable figurant dans l'égalité caractéristique permet de diminuer la classe. On aboutira donc finalement à des relations de consensus de classe 1 qui seront les générateurs  $A_1, \dots, A_p$ . On utilisera cette propriété pour passer d'un consensus à ses générateurs et inversement pour le former à partir de l'une de ses générations.

Remarque 2-4 :

La réduction a été faite par rapport à une variable  $x$  quelconque. Il sera donc possible d'effectuer les réductions successives dans un ordre arbitraire des variables biformes.

Remarque 2-5 :

La variable  $x$ , par rapport à laquelle a été faite la réduction, ne figure pas dans les égalités caractéristiques (3) et (4), mais dans l'écriture des monômes  $x.B_1 \dots B_m$  et  $x'.B_{k'+1} \dots B_p$ .

Il y a donc eu passage d'une variable du groupe des variables biformes dans celui des variables monoformes.

Remarque 2-6 :

On peut admettre que la réduction d'un consensus par rapport à une variable absente dans son égalité caractéristique le conserve en lui-même.

Exemple 2-3 :

Considérons la relation :

$$de = \mathcal{C}(ace, a'b', bd, b'c'd)$$

.../...

Son égalité caractéristique s'écrit :

$$ac + a'b' + b + b'c' = 1 \quad (\text{irr.})$$

Réduction par rapport à a :

Pour  $a = 0$  on a :  $b' + b + b'c' = 1$   
 qui se simplifie en :  $b' + b = 1 \quad (\text{irr.})$   
 qui donne la relation :  $a'd = \mathcal{C}(a'b', bd)$

Pour  $a = 1$ , on a :  $c + b + b'c' = 1 \quad (\text{irr.})$   
 qui donne la relation :  $ade = \mathcal{C}(ace, bd, b'c'd)$   
 de est donc réduit en  $a'd$  et  $ade$ .

Réduction par rapport à b :

1 -  $a'd$  se réduit en  $a'b'$  et  $bd$ .

2 - Réduisons la relation  $ade = \mathcal{C}(ace, bd, b'c'd)$  dont  
 l'égalité caractéristique s'écrit :  $c + b + b'c' = 1$

Pour  $b = 0$ , on a :  $c + c' = 1 \quad (\text{irr.})$   
 qui correspond à :  $ab'de = \mathcal{C}(ace, b'c'd)$

Pour  $b = 1$ , elle devient :  $1 + c' = 1$   
 qui se simplifie en  $1 = 1$  et correspond à  $bd = \mathcal{C}(bd)$   
 de est donc finalement réduit en  $a'b'$ ,  $bd$ ,  $ab'de$ .

Réduction par rapport à c :

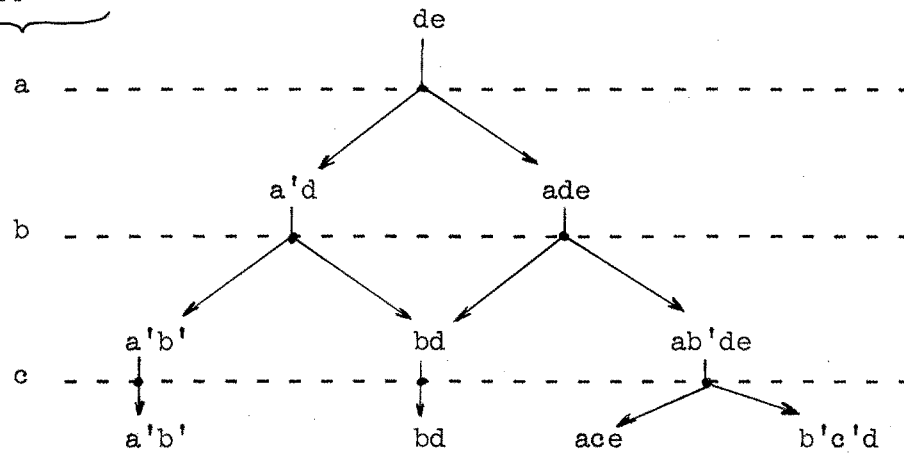
1 -  $a'b'$  est inchangé.

2 -  $bd$  est inchangé.

3 -  $ab'de$  se réduit en  $ace$  et  $b'c'd$ . On a donc réduit de  
 en  $a'b'$ ,  $bd$ ,  $ace$  et  $b'c'd$ , qui sont ses générateurs.

On peut représenter la réduction graphiquement.

Réduction par rapport à



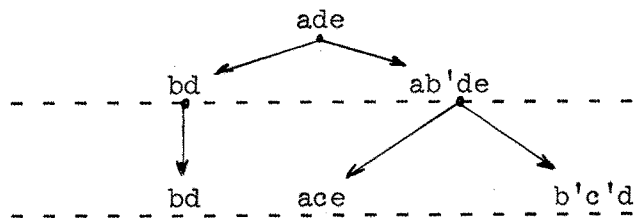
On peut donc passer d'un consensus à ses générateurs par une suite de réductions de classe. Le graphique représentant ces opérations sera dit GRAPHE DE REDUCTION de la relation de consensus, chaque réduction étant représentée par deux flèches ayant une origine commune (correspondant au consensus) et aboutissant à deux monômes qui en sont les générateurs.

Remarque 2-7 :

Tout noeud d'un graphe de réduction est forcément le consensus des générateurs auxquels aboutit toute branche orientée partant de ce noeud. Cette propriété est démontrée par application du théorème 2-4.

Exemple 2-4 :

Considérons le noeud ade du graphe de l'exemple 2-3. Les branches partant de ce noeud aboutissent en bd, ace, b'c'd.



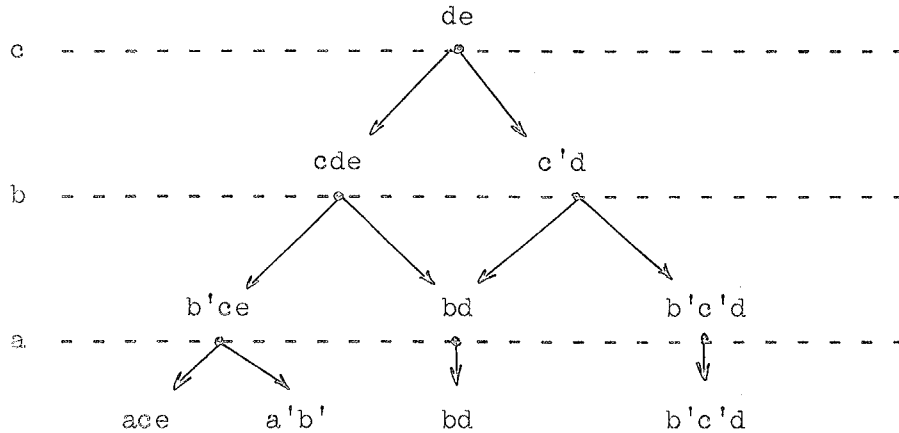
On a bien :  $ade = \mathcal{C}(bd, ace, b'c'd)$  .../...

Remarque 2-8 :

Une même relation de consensus peut avoir plusieurs graphes de réduction. Il y en a au moins un par ordre possible de prise en considération des variables biformes.

Exemple 2-5 :

Reprenons la relation :  $de = \mathcal{C}_a(ace, a'b', bd, b'c'd)$   
 Nous trouvons un graphe différent en changeant l'ordre des variables :



Remarque 2-9 :

Si  $x_1 \dots x_l$  sont les  $l$  variables biformes, le nombre maximal de réductions qu'il faut pour passer de  $X$  à ses générateurs est de  $2^l - 1$ .

Remarque 2-10 :

La réduction permet de passer du consensus à ses générateurs. Le processus inverse permet de passer des générateurs au consensus par une suite d'opérations dont le nombre est inférieur ou égal à  $2^l - 1$ .

.../...



Remarque 2-11 :

Avant réduction, on dispose du consensus  $X$  qui forme un ensemble  $G^0$  dont il est le seul élément. On a :  $X = \mathcal{C}(G^0)$ .

Après réduction par rapport à  $X_1$ , on dispose de deux monômes  $X_1$  et  $X_2$  qui forment une génération  $G^1$  de  $X$ .

Après réduction par rapport à  $X_k$ , on a un ensemble de monômes formant une génération  $G^k$  de  $X$ .

Après réduction par rapport à  $X_l$ , on a obtenu la génération  $G^l$  formée des générateurs  $A_1, \dots, A_p$  de classe  $p$ .

On a :  $X = \mathcal{C}(G^i)$  pour  $i$  variant de 0 à  $l$ . Si on fait la somme  $\sum (G^i)$  des monômes figurant dans  $G^i$ , on a :

$$X \leq X_1 + X_2 \leq \sum (G^2) \leq \sum (G^i) \leq \dots \leq A_1 + \dots + A_n$$

23 - EXCLUSION D'UN MONOME D'UNE GENERATION

Considérons un consensus  $X$  et l'une quelconque de ses générations  $A_1, \dots, A_p$ .

Nous nous proposons d'éliminer de la génération l'un quelconque des générateurs,  $A_1$  par exemple (on peut redistribuer les indices de façon que le monôme choisi devienne  $A_1$ ).

Lemme 2-5 :

On peut toujours, dans une égalité  $M_1 + \dots + M_p = 1$ , remplacer l'un quelconque des  $M_i$  par la somme des consensus par rapport à une variable quelconque de son écriture, qu'il admet avec chacun des autres monômes, sans détruire l'égalité à 1 du premier membre.

.../...

Si un terme contient dans son écriture une variable monoforme, il est inutile d'après le lemme 2-2 et peut donc être supprimé, même sans chercher et introduire ses consensus dans la somme.

Nous ne nous occuperons donc que des égalités de la forme  $C_1 + \dots + C_p = 1$  où toutes les variables sont biformes. Nous allons essayer de faire disparaître  $C_1$  en le remplaçant par la somme des consensus qu'il admet avec tous les autres monômes  $C_2, \dots, C_p$  et ceci par rapport à une variable quelconque  $x$  de son écriture. L'égalité  $C_1 + \dots + C_p = 1$  peut s'écrire :

$$x \cdot \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{x} + \sum_{i=k+1}^m C_i + x' \sum_{i=m+1}^p \frac{C_i}{x'} = 1$$

et devient pour  $x = 0$  :

$$\sum_{i=k+1}^m C_i + \sum_{i=m+1}^p \frac{C_i}{x'} = 1$$

Soit  $R_i$  le monôme résidu obtenu en rendant égales à 1 toutes les variables de  $C_i$  figurant dans l'écriture de  $C_1$ .

$$\begin{aligned} \text{On a } C_1 &= C_1 \sum_{i=k+1}^m C_i + \sum_{i=m+1}^p \frac{C_i}{x'} \\ &= \sum_{i=k+1}^m (C_1 \cdot C_i) + \sum_{i=m+1}^p (C_1 \cdot \frac{C_i}{x'}) \\ &= \sum_{i=k+1}^m (C_1 \cdot R_i) + \sum_{i=m+1}^p (C_1 \cdot \frac{R_i}{x'}) \end{aligned}$$

Que représente  $C_1 \cdot R_i$  pour  $i$  variant de  $k+1$  à  $m$  ? C'est le produit des monômes  $C_1$  et  $C_i$ . On a donc  $C_1 \cdot R_i \leq C_i$  et

$$\sum_{i=k+1}^m (C_1 \cdot R_i) \leq \sum_{i=k+1}^m C_i \quad \dots/\dots$$

Que représente  $C_1 \cdot \frac{R_i}{x'}$  pour  $i$  variant de  $m+1$  à  $p$  ? C'est le produit par  $x$  de  $\frac{C_1 \cdot C_i}{x \cdot x'}$  qui est le consensus de  $C_1$  et de  $C_i$ .

Soit  $C_{p+1}$  à  $C_q$  ces consensus. Nous avons :

$$\sum_{m+1}^p (C_1 \cdot \frac{R_i}{x'})^* = x \sum_{m+1}^p (\frac{C_1 \cdot R_i}{x \cdot x'}) = x \sum_{p+1}^q C_i$$

$$\text{D'où : } C_1 \leq \sum_{k+1}^m C_k + \sum_{p+1}^q C_i$$

Remplaçons  $C_1$  par le second membre de cette inégalité dans  $C_1 + \dots + C_p = 1$ .

Nous obtenons :  $C_2 + \dots + C_q = 1$  et le lemme 2-5 est démontré.

Lemme 2-6 :

On peut dans toute inclusion de la forme :  $X \leq A_1 + \dots + A_p$  remplacer un monôme quelconque de second membre par les consensus  $A_{p+1}, \dots, A_q$  qu'il admet avec chacun des autres termes  $A_2, \dots, A_p$  par rapport à une variable  $x$  quelconque de son écriture, biforme dans le second membre.

Considérons une inégalité de la forme :  $X \leq A_1 + \dots + A_p$  redondante ou non. Formons l'ensemble des consensus  $A_{p+1}, \dots, A_q$  que  $A_1$  admet avec  $A_2, \dots, A_p$  par rapport à une variable quelconque  $x$  de son écriture biforme dans le second membre (ce qui sera démontré pour  $A_1$  le sera aussi pour  $A_i$  puisque l'on peut aussi redistribuer les indices).

La somme  $A_1 + \dots + A_q$  est égale à  $A_1 + \dots + A_p$  puisque l'on n'a

.../...

fait que lui ajouter des monômes qui lui sont inférieurs ou égaux. D'où :

$$A_1 + \dots + A_q \geq X$$

Rendons égales à 1 toutes les variables de X. Le second membre de l'inégalité étant égal à 1, le premier membre devient forcément égal à 1. L'inégalité devient :

$$M_1 + \dots + M_q = 1$$

Dans cette inégalité, nous pouvons supprimer  $M_1$  d'après le lemme 2-5, puisque les consensus qu'il admet avec  $M_2 \dots M_p$  sont déjà trouvés et sont  $M_p + 1 \dots M_q$ , et qu'il n'en admet pas avec  $M_p + 1, \dots, M_q$  (remarque 1-4).

Donc :

$$M_2 + \dots + M_q = 1$$

Tout état des variables qui fait  $X = 1$  fait  $M_2 + \dots + M_q = 1$  et  $A_2 + \dots + A_q = 1$ . On a bien  $X \leq A_2 + \dots + A_q$  et le lemme 2-6 est démontré.

Considérons maintenant la relation de consensus  $X = \mathcal{C}(A_1, \dots, A_p)$ .

Nous avons :

$$X \leq A_1 + \dots + A_p \text{ (irréd.)}$$

Appliquons le processus d'exclusion de  $A_1$ . Nous obtenons  $X \leq A_2 + \dots + A_q$  que nous pouvons rendre irrédondante par suppression de termes inutiles, ce qui nous donne :  $X \leq A_u + \dots + A_v$  (irréd.) qui conduit à une nouvelle relation de consensus  $X = \mathcal{C}(A_u, \dots, A_v)$  où le générateur exclu ne figure pas. Ce qui a été démontré pour  $A_1$  l'est pour  $A_i$  puisque l'on peut encore redistribuer les indices.

Théorème 2-5 :

L'exclusion d'un monôme d'une génération et son remplacement par les consensus de classe 2 qu'il admet par rapport à une

variable biforme quelconque de son écriture avec les autres générateurs conduit toujours à une nouvelle génération du consensus où il ne figure plus, après élimination des termes inutiles.

Exemple 2-6 :

Soit la génération :  $a'b' / bd / ace / b'c'd$  du consensus de. Eliminons  $a'b'$  par rapport à l'une de ses variables,  $a$  par exemple. On forme le consensus  $b'ce$  avec  $ace$  qui donne un ensemble de monômes  $bd / ace / b'c'd / b'ce$  dont le sous-ensemble  $bd / b'c'd / b'ce$  admet de comme consensus.

Remarque 2-12 :

Le nombre de variables biformes ne peut pas augmenter dans cette opération. Il peut rester stationnaire ou diminuer si  $x$  disparaît.

Remarque 2-13 :

On dispose d'un processus permettant de passer d'une génération à une autre. On pourra par ce procédé arriver à la génération de classe 1, qui est le consensus lui-même, à partir d'une génération quelconque.

Remarque 2-14 :

Reprenons l'inégalité :  $C_1 \leq \sum_{k+1}^m C_i + \sum_{p+1}^q C_i$

considérée dans la démonstration du lemme 2-5.

$C_1$  contient  $x$  dans son écriture, alors que cette variable ne figure pas au second membre.

.../...

On a donc : 
$$C_1 < \sum_{k+1}^m C_i + \sum_{p+1}^q C_i$$

Multiplions les deux membres par X :

$$X.C_1 < \sum_{k+1}^m (C_i.X) + \sum_{p+1}^q (C_i.X)$$

Or : 
$$C_i.X \leq A_i$$

D'où : 
$$X.C_1 < \sum_{k+1}^m A_i + \sum_{p+1}^q A_i$$

et : 
$$\frac{X.C_1}{X} \leq \sum_{k+1}^m A_i + \sum_{p+1}^q A_i$$

qui est une relation d'inclusion dans laquelle x ne figure plus.



### 3 - RECHERCHE DES CONSENSUS D'ORDRE ZERO

#### 31 - EXPOSE DU PROBLEME

Dans la recherche des bases premières des fonctions, on est amené à rechercher des relations d'inclusion d'ordre zéro irrédondantes de la forme :  $X \leq A_1 + \dots + A_p$ , où tous les monômes du premier et second membre sont des impliquants premiers d'une fonction.

Ceci n'est valable que pour les bases des fonctions simples et complètes, c'est-à-dire considérées seules et sans valeurs indifférentes pour certains états des variables.

En fait, on sera plus généralement amené dans la recherche des circuits de coût minimal à utiliser les relations d'inclusion irrédondantes d'ordre zéro de la forme :  $X \leq A_u + \dots + A_v$ , où les monômes  $A_u, \dots, A_v$  figurent dans un ensemble donné  $A_1, \dots, A_n$  et tels que  $X$  et chaque  $A_i$  ne sont pas forcément impliquants premiers de la fonction  $F = A_1 + \dots + A_n$ .

Le problème se pose donc de la façon suivante :

Etant donné un ensemble de monômes  $A_1, \dots, A_n$ , trouver l'ensemble de toutes les relations de consensus de la forme  $X = \mathcal{G}(A_u \dots A_v)$  où les générateurs  $A_u, \dots, A_v$  sont des monômes de l'ensemble donné.



Remarque 3-1 :

A chaque monôme  $A_i$  de l'ensemble correspond une solution évidente :  $A_i = \mathcal{C}(A_i)$  de classe 1 qui est une solution TRIVIALE du problème.

Exemple 3-1 :

Soit l'ensemble des monômes :

$$ab / abc / a'c / a'd / bc / bd / c'd$$

Parmi les solutions non-triviales figureront les relations :

$$a'd = \mathcal{C}(a'c, c'd)$$

$$bd = \mathcal{C}(ab, a'c, c'd)$$

$$bd = \mathcal{C}(abc, a'c, c'd)$$

$$abd = \mathcal{C}(abc, c'd)$$

-----

On voit que le consensus  $abd$  ne figurait pas dans l'ensemble initial.

A la troisième relation correspond l'inclusion irrédondante d'ordre zéro :  $bd \leq abc + a'c + c'd$ , qui n'est pas "minimale" puisque l'inclusion irrédondante :  $bd \leq ab + a'c + c'd$  est obtenue à partir de la précédente par suppression d'une variable dans un monôme du deuxième membre.

32 - DEFINITION DE LA FONCTION "VERACITE"

Soit l'ensemble  $A_1, \dots, A_n$  des monômes susceptibles de figurer comme générateurs dans les relations de consensus cherchées.

Tout consensus possible sera le produit de variables figurant dans l'ensemble.

On peut, pour trouver les relations cherchées, opérer de la façon suivante :

- 1 - former un monôme  $Y$  comme produit de variables figurant dans l'ensemble initial sous leur forme directe ou complémentée ;
- 2 - former une somme  $S$  de monômes pris dans l'ensemble ;
- 3 - tester si l'on a ou non la relation :  $Y \leq S$  ;
- 4 - l'ensemble de ces inclusions étant trouvé, les relations de consensus cherchées seront celles qui correspondent aux inclusions irrédondantes.

Ne considérons pour l'instant que les monômes  $Y$  contenant dans leur écriture toutes les variables sous une de leurs deux formes possibles.

Nous pouvons former  $Y$  de  $2^m$  façons (s'il y a  $m$  variables). Associons à chaque variable  $a$  figurant dans l'écriture de l'ensemble donné, une variable booléenne  $\alpha$  qui vaut 1 si  $a$  figure dans  $Y$  sous sa forme directe, et 0 si  $a$  apparaît sous sa forme complémentée dans ce monôme. A tout terme  $Y$  correspond alors un monôme formé des variables associées  $\alpha \beta \dots$  sous leur forme directe ou complémentée.

Associons de la même façon à tout monôme  $A_x$  une variable booléenne  $x$  qui vaut 1 si l'on place  $A_x$  dans le second membre de l'inégalité à tester, et 0 dans le cas contraire.

Exemple 3-2 :

Soit l'ensemble des monômes  $A_x, A_y, A_z$  où figurent les variables  $a, b, c$  et  $d$ .

Au monôme :  $Y = ab'cd$  correspond l'état 1011 des variables  $\alpha \beta \gamma \delta$  associées qui rend le monôme  $\alpha \beta \gamma \delta$  égal à 1.

A la somme  $A_x + A_y$  correspond l'état 110 des variables associées  $xy$  et  $z$ , donc le monôme  $xyz'$  est égal à 1. Si l'on forme pour la vérifier l'inégalité :  $ab'cd \leq A_x + A_y$  on a l'état des variables associées  $\alpha\beta\gamma\delta xyz$  : 101110, qui rend le monôme  $\alpha\beta\gamma\delta xyz$  égal à 1.

La véracité de l'inégalité formée est évidemment fonction des éléments choisis, c'est-à-dire de l'état correspondant des variables associées.

On peut donc définir une fonction associée que l'on peut appeler fonction "VERACITE"  $\mathcal{V}$  de l'inégalité formée. Pour tout état des variables associées, la fonction "VERACITE" vaut 1 si l'inégalité est vérifiée et 0 dans le cas contraire. On peut donc se donner sa valeur pour tout état des variables associées. On voit qu'il s'agit bien d'une fonction booléenne ordinaire.

Remarque 3-2 :

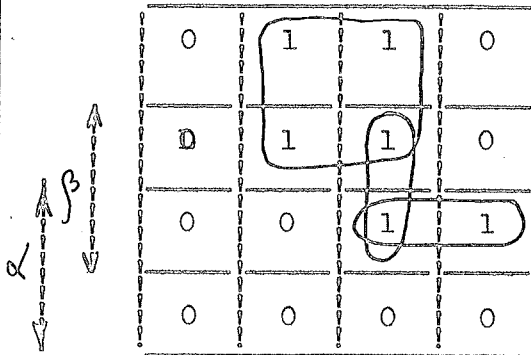
Tout impliquant canonique de  $\mathcal{V}$  ainsi formé comprend deux groupes distincts de variables.

Le premier est formé des variables  $\alpha\beta\dots$  dont l'état est lié au premier membre de l'inégalité formée, le deuxième groupe étant formé des variables liées à la présence des monômes dans le second membre de la relation dont la véracité devra être testée.

Exemple 3-3 :

Considérons l'ensemble des deux monômes:  $A_x = ab$  et  $A_y = a'$ . Il y a deux variables dans ce problème :  $a$  et  $b$  auxquelles nous associons  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous pouvons alors remplir le tableau définissant  $\mathcal{V}$  en y plaçant dans la première colonne les états possibles des variables  $\alpha\beta$ , dans une deuxième, l'inégalité à tester, dans une troisième la valeur de la fonction associée " $\mathcal{V}$ " et dans une quatrième, l'impliquant canonique correspondant de  $\mathcal{V}$ .

Variables				Inégalité	$V$	Impliquant
$\alpha$	$\beta$	x	y			
0	0	0	0	$a'b'$	-	0
0	0	0	1	$a'b'$	$a'$	$\alpha'\beta'x'y$
0	0	1	0	$a'b'$	ab	0
0	0	1	1	$a'b'$	$ab+a'$	$\alpha'\beta'xy$
0	1	0	0	$a'b$	-	0
0	1	0	1	$a'b$	$a'$	$\alpha'\beta x'y$
0	1	1	0	$a'b$	ab	0
0	1	1	1	$a'b$	$ab+a'$	$\alpha'\beta xy$
1	0	0	0	$ab'$	-	0
1	0	0	1	$ab'$	$a'$	0
1	0	1	0	$ab'$	ab	0
1	0	1	1	$ab'$	$ab+a'$	0
1	1	0	0	ab	-	0
1	1	0	1	ab	$a'$	0
1	1	1	0	ab	ab	$\alpha\beta xy'$
1	1	1	1	ab	$ab+a'$	$\alpha\beta xy$



D'où  $V = \alpha'\beta'x'y + \alpha'\beta'xy + \alpha'\beta x'y + \alpha'\beta xy + \alpha\beta xy' + \alpha\beta xy.$

Le tableau de Karnaugh nous donne les trois impliquants premiers :

$\alpha'y, \beta xy$  et  $\alpha\beta x$  de  $V$

.. / ...

33 - PROPRIETES DE LA FONCTION VERACITE

Considérons un monôme  $\mathbb{M}$  quelconque formé de variables associées.

$\alpha \dots x \dots$  sous une forme quelconque. Il est par définition impliquant de  $\mathcal{V}$  si tout état des variables associées qui fait  $\mathbb{M} = 1$  fait forcément  $\mathcal{V} = 1$

Chaque monôme  $\mathbb{M}$  peut être considéré comme le produit de deux monômes  $\mathbb{M}^1$  et  $\mathbb{M}^2$  avec  $\mathbb{M}^1$  formé des variables du premier groupe et  $\mathbb{M}^2$  des variables du second groupe.

A tout monôme  $\mathbb{M}^1$  on peut faire correspondre un monôme  $M$  que l'on peut placer au premier membre de l'inégalité dont la véracité devra être testée.

A tout monôme  $\mathbb{M}^2$ , on peut faire correspondre l'ensemble des monômes  $A_i$  tels que leur variable associée  $i$  y figure sous sa forme directe et dont la somme est représentée par  $S$ .

Au monôme  $\mathbb{M}^1$  peut être associé l'ensemble de ses impliquants canoniques  $Y_j$  de  $Y_1$  à  $Y_q$ . Si  $\mathbb{M}$  est impliquant de  $\mathcal{V}$ , on a pour tout  $Y_j$  :

$$Y_j \leq S$$

En effet,  $\mathbb{M}$  étant impliquant de  $\mathcal{V}$ , l'un de ses impliquants canoniques, celui que l'on trouve en groupant les variables associées à  $Y_j$ ,  $\mathbb{M}^2$  et toutes les autres variables associées du deuxième groupe sous leur forme complétée nous donne la relation d'inclusion précédente.

D'autre part, nous avons  $M = Y_1 + \dots + Y_q$ . D'où en additionnant membre à membre les inégalités pour  $j$  variant de 1 à  $q$  :

$$M \leq S$$

A tout impliquant de  $\mathcal{V}$  correspond donc une inégalité du type testé.

Inversement, considérons une inégalité de la forme :  $M \leq S$  où  $M$  est un monôme quelconque formé des variables du problème (il n'y en a plus  $2^m$  mais  $3^m$ , car pour en former un, on peut prendre, soit une variable sous sa forme directe, soit sous sa forme complémentée, soit ne pas la prendre du tout).

A  $M$  correspond le monôme  $\mathcal{M}_0^1$ . A  $S$  correspond un monôme  $\mathcal{M}_0^2$  dans lequel on ne fait entrer les variables associées du deuxième groupe que sous leur forme directe.

Si l'inégalité  $M \leq S$  est bien vérifiée, le monôme  $\mathcal{M} = \mathcal{M}_0^1 \cdot \mathcal{M}_0^2$  est impliquant de  $\mathcal{V}$ , puisque toutes les inégalités qui correspondent à chacun des impliquants canoniques de  $\mathcal{M}$  sont dérivées de l'inégalité  $M \leq S$  par multiplication de  $M$  par un certain nombre de variables (pouvant être nul) ce qui ne peut avoir pour effet que de le diminuer, et par addition au second membre d'un certain nombre (pouvant être nul) de monômes  $A_x$ , ce qui ne peut avoir pour effet que de l'augmenter.

Théorème 3-1 :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une inclusion soit vérifiée est que son monôme associé soit impliquant de la fonction "VERACITE"

Exemple 3-4 (suite de l'exemple 3-3)

Le monôme  $\alpha' \beta x'y$  est impliquant de  $\mathcal{V}$ , ce qui prouve que l'on a :  $a'b \leq A_y$

Inversement à l'inégalité  $ab \leq A_y$  correspond le monôme  $\alpha' \beta x$  qui est impliquant de  $\mathcal{V}$ .

Remarque 3-3 :

Considérons un monôme  $\mathbb{M}_0 = \mathbb{M}_0^1 \cdot \mathbb{M}_0^2$  impliquant de  $\mathcal{V}$ .

Considérons le monôme  $\overline{\mathbb{M}}_0^2$  déduit de  $\mathbb{M}_0^2$  par suppression des variables complémentées.

On a :  $\mathbb{M}_0^2 \leq \overline{\mathbb{M}}_0^2$  et  $\mathbb{M}_0 \leq \overline{\mathbb{M}}_0 = \mathbb{M}_0^1 \cdot \overline{\mathbb{M}}_0^2$

On a donc toujours intérêt à supprimer les variables complémentées de  $\mathbb{M}_0^2$ , ce qui allège l'écriture de  $\mathbb{M}_0$  et rend les variables associées du deuxième groupe uniquement monoformes.

Remarque 3-4 :

Soit deux impliquants non égaux  $\mathbb{M}_0^1$  et  $\mathbb{M}_0^2$  de  $\mathcal{V}$ . Supposons que l'on ait :  $\mathbb{M}_0^1 < \mathbb{M}_0^2$ ;  $\mathbb{M}_0^2$  apporte plus d'information que  $\mathbb{M}_0^1$  et présente donc plus d'intérêt. On cherchera donc les monômes les plus grands possibles qui sont alors les impliquants premiers de  $\mathcal{V}$ .

Considérons un impliquant premier  $\mathbb{M}_0$  de  $\mathcal{V}$ . Il lui correspond une inégalité  $M \leq S$  dans laquelle on ne peut,  $\mathbb{M}_0$  étant premier, ni supprimer une variable de  $M$ , ni un monôme de  $S$ . Cette inégalité est donc une relation d'inclusion irrédondante d'ordre zéro.

Inversement, considérons une relation irrédondante :  $M_1 \leq S_1$  (irréd.) Il lui correspond un impliquant  $\mathbb{M}_0^1$  de  $\mathcal{V}$ . Supposons que  $\mathbb{M}_0^1$  ne soit pas impliquant premier de  $\mathcal{V}$ . Après suppression d'une de ses variables, on pourrait associer au monôme  $\mathbb{M}_0^1$  un monôme  $\mathbb{M}_0^2$  tel que  $\mathbb{M}_0^2 > \mathbb{M}_0^1$  auquel correspondrait une relation d'inclusion

$$- \text{ ou } M_2 \leq S_1 \text{ avec } M_2 > M_1$$

- ou  $M_1 \leq S_2$  avec  $S_2$  déduit de  $S_1$  par suppression d'un terme, ce qui est impossible vu l'irrédondance de l'inclusion :  
 $M \leq S$ .

Or, à chaque inclusion irrédondante correspond l'une des relations de consensus cherchées.

On peut alors énoncer le théorème :

Théorème 3-4 :

A toute relation de consensus correspond un impliquant premier de  $\mathcal{V}$  et inversement.

Exemple 3-5 : (suite de l'exemple 3-4)

Les relations de consensus existant entre les monômes :  $A_x = ab$  et  $A_y = a'$ , sont données par les impliquants premiers de la fonction  $\mathcal{V} : \alpha'y, \beta'xy, \alpha\beta x$ .

Ce sont :  $a' = \mathcal{C}(a')$ ,  $b = \mathcal{C}(ab, a')$  et  $ab = \mathcal{C}(ab)$ .

Remarque 3-5 :

Dans tout monôme  $\mathcal{M}_2$  formé des variables du deuxième groupe (forcément monoformes), il y a au moins une variable puisque l'absence de toute variable signifierait la nullité du second membre de l'inégalité à vérifier.

D'autre part, le processus utilisé ne peut faire apparaître au premier membre que des monômes  $M$  non nuls, inférieurs ou égaux à 1 (ce dernier cas étant obtenu lorsqu'on ne prend aucune variable pour former  $M$ ).

La remarque est donc justifiée.

Remarque 3-6 :

A toute solution triviale du problème correspond un impliquant de  $\mathcal{V}$ , qui est premier et ne comprend qu'une seule variable dans son groupe  $\mathcal{M}_2$ .



Exemple 3-6 (suite de l'exemple 3-5)

L'impliquant premier  $\alpha\beta x$  correspond à la solution triviale  $ab = \mathcal{C}(ab)$ .

Considérons l'ensemble des impliquants premiers liés aux solutions triviales.

N'importe quel impliquant premier de  $\mathcal{V}$  peut être trouvé à partir de cet ensemble puisque toute relation de consensus de classe quelconque peut être reconstituée par une série d'opérations de consensus de classe 2. Donc l'ensemble des solutions triviales constitue une base de la fonction.

Cette base triviale est telle que chaque impliquant premier qui y figure est seul à avoir dans son écriture la variable qui constitue son groupe  $\mathcal{M}_2$ . Si on supprime l'un des impliquants premiers triviaux de  $\mathcal{V}$ , on ne pourra donc pas le reconstituer à partir des autres.

Théorème 3-3 :

L'ensemble des solutions triviales du problème fournit une base première de  $\mathcal{V}$ .

Cette base est dite BASE PREMIERE TRIVIALE.

Remarque 3-7 :

Dans tout impliquant de  $\mathcal{V}$  figure forcément un indice. On peut donc, sans confusion possible, remplacer les variables  $\alpha\beta\dots$  par  $ab\dots$ . On retrouve des suites de signes formés d'un groupe de variables et d'indices qui se traduit directement sous forme d'inégalité.

Exemple 3-7 :

Au monôme  $ab'd$  125 correspond l'inégalité :

$$ab'd \leq A_1 + A_2 + A_5$$

Pour la recherche des relations de consensus entre un lot de monômes  $A_1, \dots, A_n$  donné, on est ramené à la recherche des impliquants premiers d'une fonction  $V$  dont on connaît une base première :  $A_1.1/A_2.2/\dots/A_n.n$ .

Exemple 3-8 :

Soit l'ensemble de monômes :  $ax / abx / by' / x'y$  entre lesquels on cherche les relations de consensus. La fonction  $V$  associée est donnée par sa base première triviale :  $ax1 / abx2 / by'3 / x'y4$ .

Ses impliquants premiers sont :  $ax1 / abx2 / by'3 / x'y4 / ay14 / aby'24 / bx'34 / ab134 / ab'234$ . Il y a neuf impliquants qui nous donnent quatre relations triviales de classe 1, trois relations de classe 2, deux relations de classe 3.

Remarque 3-8 :

On a toujours considéré comme générateurs possibles des monômes quelconques. On peut, en particulier, avoir dans le lot deux monômes  $A_i$  et  $A_j$  tels que :  $A_i < A_j$ . Par contre, le cas :  $A_i = A_j$  ne présente pas d'intérêt et ne sera pas considéré.

L'affectation d'un indice à chacun permet alors de supprimer cette relation d'ordre.  $A_{i.i}$  et  $A_{j.j}$  sont tous deux impliquants premiers de  $V$  et non comparables.



## 4 - APPLICATION A LA RECHERCHE DES IMPLIQUANTS PREMIERS ET DES BASES PREMIERES

### 41 - INTRODUCTION A LA RECHERCHE DES IMPLIQUANTS PREMIERS

Considérons une fonction F donnée par l'une de ses implications  $A_1, \dots, A_n$ . Soit X l'un de ses impliquants premiers.

On a :  $X \leq A_1 + \dots + A_n$ , inclusion que l'on peut rendre irrédondante d'ordre zéro uniquement par suppression de monômes au second membre :  $X \leq A_u + \dots + A_v$  (irréd.).

#### Théorème 4-1 :

Tout impliquant premier X d'une fonction est le consensus d'ordre zéro d'un certain nombre de monômes pris dans l'une quelconque de ses implications.

La théorie des consensus permettra de présenter deux nouvelles méthodes utilisables pour trouver les impliquants premiers d'une fonction, donc également les relations de consensus entre monômes par application sur les fonctions "Véracité".

L'ensemble des impliquants premiers d'une fonction permet de trouver ses bases premières.

Dans cette recherche, il est nécessaire de passer de la forme "Produit de sommes" à sa duale "Somme de produits". Du processus utilisé, on déduira une troisième méthode, nouvelle, de recherche des impliquants premiers qui, par application sur la fonction "Véracité", pourra fournir également les relations de consensus recherchées.

42 - METHODE DE REDUCTION

Cette méthode est basée sur la reconstitution d'un graphe de réduction d'une relation de consensus de classe p d'ordre zéro.

Soit l'implication  $A_1, \dots, A_n$  d'une fonction F, et l'un de ses impliquants premiers X tel que :  $X = \mathcal{G}(A_u \dots A_v)$  avec  $A_u, \dots, A_v$  figurant dans l'implication donnée.

Appliquons le processus de réduction de classe. Nous passons du consensus X formant sa propre génération  $G^0$  de classe 1 à ses générateurs  $A_u, \dots, A_v$  formant une génération  $G^1$  de classe p, à la suite de la réduction des monômes de  $G^{i-1}$  successivement par rapport à chaque variable  $x_i$  biforme dans l'égalité caractéristique de  $x_1$  à  $x_p$ .

Nous savons qu'un monôme peut être réduit en lui-même par rapport à une variable ne figurant pas dans son écriture. Nous pouvons alors, au lieu des variables  $x_1, \dots, x_p$  de l'égalité caractéristique que nous ne connaissons pas au départ, considérer l'ensemble des variables  $y_1, \dots, y_m$  biformes dans l'implication donnée de F.

On passe alors de X à ses générateurs  $A_u, \dots, A_v$  par des générations successives  $L^0, \dots, L^m$  obtenues par réduction par rapport aux variables  $y_i$  de  $y_1$  à  $y_m$  ( $L^0$  est formé du générateur X de classe 1 et  $L^m$  des générateurs  $A_u, \dots, A_v$ ).

Appliquons le processus inverse. Nous disposons d'un ensemble  $E^0$  de monômes  $A_1, \dots, A_n$  qui admet comme sous-ensemble la génération  $L^m$  de X. Nous cherchons les relations de consensus entre ces monômes par rapport à  $y_m$ . Nous obtenons un ensemble de termes dont la réunion avec l'ensemble  $E^0$  fournit, en ne gardant que des monômes non égaux à d'autres, un ensemble  $E^1$  qui admet  $L^{m-1}$  comme sous-ensemble.

Nous pouvons continuer. Au début de la  $k^{\text{ème}}$  étape du calcul, nous disposons d'un ensemble  $E^{k-1}$  de monômes qui admet  $L^{m+1-k}$  comme sous-ensemble. Nous cherchons la relation de consensus par rapport à  $y_{m+1-k}$ . A la fin de l'étape, nous réunissons les consensus trouvés avec  $E^{k-1}$  en ne gardant que des monômes non égaux à d'autres, ce qui nous donne l'ensemble  $E^k$ , qui admet  $L^{m-k}$  comme sous-ensemble.

Au début de  $m^{\text{ème}}$  étape, nous disposons d'un ensemble  $E^{m-1}$  admettant  $L^1$  comme sous-ensemble. Après réunion avec lui des consensus formés par rapport à  $y_1$ , nous obtenons, en ne gardant que des monômes non égaux à d'autres, un ensemble  $E^m$  admettant  $L^0$  comme sous-ensemble.

$X$  est élément de  $E^m$  et a donc été trouvé par le calcul.

Il peut arriver que l'on trouve, à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  étape, dans l'ensemble  $E^k$  des monômes  $Y_1$  et  $Y_2$  tels que  $Y_1 < Y_2$ . Supposons que  $Y_1$  soit un monôme de la génération  $L^{m-k}$ . Nous pouvons l'y remplacer par  $Y_2$ . Le monôme  $Y_1$  provenait de l'ensemble  $E^0$  ainsi que  $Y_2$ , par applications successives de l'opération consensus. Nous pouvons alors, au lieu de  $L^m$ , considérer une nouvelle génération de  $X$ ,  $L_1^m$  dont la réduction nous donnera à la fin de la  $k^{\text{ème}}$  étape l'ensemble  $L_1^{m-k}$  contenant  $Y_2$ , aucun monôme n'y étant inférieur à d'autres.

Nous pouvons continuer le processus. Nous aboutirons finalement à  $X$  par un graphe de réduction dans lequel, dans aucun ensemble  $L^{m-k}$ , il n'y a de monôme inférieur à un autre figurant dans l'ensemble  $E^k$  des monômes trouvés dans cette étape.

Nous pouvons alors énoncer l'algorithme :

.../...

### Algorithme n° 1 de recherche des impliquants premiers

La recherche s'effectue par étapes successives, chaque étape étant relative à une variable  $x$  biforme dans le lot des impliquants dont on dispose. On cherche tous les consensus de classe 2 entre ces impliquants par rapport à  $x$ . Dès qu'un monôme est formé, on le compare aux autres impliquants déjà connus. S'il est inférieur ou égal à l'un d'eux, on l'élimine. Sinon, on l'introduira en fin d'étape dans le lot des impliquants en faisant les simplifications possibles.

A chaque étape, on ne cherche les consensus qu'entre un monôme  $A_j$  et chacun des monômes qui le suivent jusqu'à épuisement. Lorsque  $A_j$  est le dernier de l'ensemble, l'étape est terminée. Le calcul est achevé lorsqu'on a effectué une étape pour chacune des variables biformes.

#### Remarque 4-1 :

Lorsque l'on opère à la main, on peut agir de la façon suivante pour simplifier les calculs :

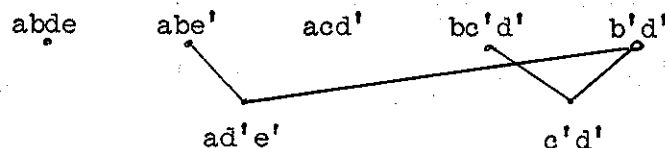
Soit  $x$  la variable biforme de l'étape. On peut marquer les monomes par le signe  $\cdot$  lorsqu'ils contiennent dans leur écriture  $x$  sous sa forme directe, et par le signe  $\circ$  lorsque l'on y trouve  $x'$ . La recherche s'effectue alors beaucoup plus simplement.

#### Exemple 4-1 :

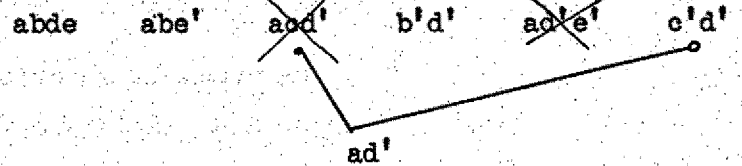
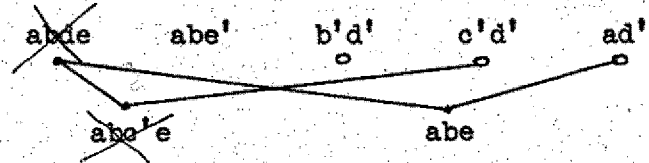
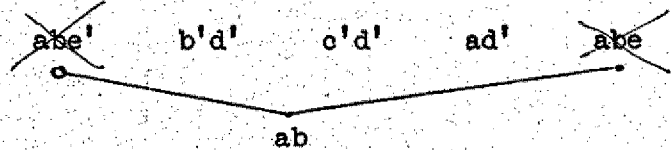
Soit la fonction  $F = abde + abe' + acd' + bc'd' + b'd'$

Les variables biformes sont  $b$   $c$   $d$  et  $e$ .

1ère étape (relative à  $b$ ) :



On élimine  $bc'd'$  inférieur à  $c'd'$ .

2e étape : c3e étape : d4e étape : e

Le calcul est terminé. On a trouvé les quatre impliquants premiers :  $b'd'/c'd'/ad'/ab$ . A partir des 5 monômes donnés, on est arrivé au résultat par la formation de 6 termes nouveaux, au prix de 6 opérations de consensus alors qu'il aurait fallu dans la méthode classique des consensus itératifs former 7 termes au prix de 10 opérations. L'intérêt est donc assez marqué.

Remarque 4-2 :

On peut opérer différemment. Pour chacune des variables biformes  $x$ , on forme un tableau des résidus  $\frac{M}{x}$  et un autre des résidus  $\frac{M}{x'}$ . On forme le produit de ces tableaux terme à terme, et on porte les monômes trouvés dans l'ensemble initial en effectuant les simplifications possibles.

.../...



Exemple 4-2 :

Reprenons la fonction F de l'exemple 4-1 et indiquons les calculs relatifs à chaque étape :

Ensemble des impliquants de F	Variable x considérée dans l'étape	Résidus par rapport à		Impliquants formés par le produit terme à terme
		x	x'	
<del>abde</del> / <del>be'd'</del> / <del>acd'</del> / abe' / b'd'	b	ade ae' c'd'	d'	ad'e' c'd'
<del>abde</del> / <del>abe'</del> / <del>acd'</del> / b'd' / <del>ad'e'</del> / c'd'	c	ad'	d'	ad'
<del>abde</del> / <del>abe'</del> / <del>b'd'</del> / c'd' / ad'	d	abe	b' c' a	<del>abc'e</del> abe
<del>abe'</del> / <del>b'd'</del> / <del>c'd'</del> / ad' / <del>abe</del>	e	ab	ab	ab

Il reste en fin de calcul les quatre impliquants premiers de F :  $b'd' / c'd' / ad' / ab$ .

Remarque 4-3 :

Si l'on se reporte au graphe de réduction, on voit qu'il est inutile de former un consensus entre deux monômes, l'un contenant une variable x dans son écriture, l'autre ayant été formé par rapport à cette même variable x. Pour tenir compte de cette remarque, on peut affecter à chaque consensus la suite V des variables par rapport auxquelles il a été formé.

Exemple 4-3 :

Ainsi aux monômes  $ab'$  et  $bc$  correspond le consensus  $ac$  que nous écrivons  $ac-b$  pour indiquer qu'il a été formé par rapport à  $b$ . Il est inutile de former le consensus de  $ab'$  et de  $bc-a$ .

On peut définir des relations d'ordre entre les monômes marqués  $X_1 V_1$  et  $X_2 V_2$ .

Si  $X_1 < X_2$ , on peut essayer de supprimer  $X_1$  qui paraît moins intéressant que  $X_2$ . Cette simplification ne peut être faite que si elle ne peut conduire à des erreurs par la non formation de termes nécessaires. Il faut donc que toutes les variables qui figurent dans  $V_2$  figurent aussi dans  $V_1$ . Ainsi tous les monômes que l'on peut former avec  $X_1 V_1$  et les termes qui s'en déduisent pourront l'être aussi avec  $X_2 V_2$ , ce qui légitime la simplification.

Si  $V_1$  et  $V_2$  étaient des monômes normaux,  $X_1 V_1$  serait simplifié si l'on avait :  $X_1 V_1 \ll X_2 V_2$ . En fait, il faut dire que  $X_1 V_1$  est simplifié si l'on a simultanément :

$$X_1 \ll X_2 \quad \text{et} \quad V_1 \supseteq V_2$$

Si  $X_1 = X_2$  avec  $V_1 \neq V_2$ , on peut garder le terme  $X_3 V_3$  tel que :

$$X_3 = X_1 = X_2$$

$$V_3 = V_1 \cap V_2$$

On est, en effet, sûr que tous les monômes que l'on peut former avec  $X_1 V_1$  et  $X_2 V_2$  le seront aussi avec  $X_3 V_3$ .

On peut aussi garder les deux termes initiaux si on en a la place en mémoire. Ceci peut nous éviter la formation de termes inutiles.

Si l'on a  $X V_1$  et  $X V_2$  avec  $V_1 \subset V_2$  (ou  $V_2 \subset V_1$ ), on a intérêt à garder  $X_2 V_2$ . On évite ainsi la formation de termes inutiles et l'on aboutit forcément au même résultat.

Exemple 4-4 :

Si on a les monômes :

.../...

ab'c - d	et	ab' - d,	on retient ab' - d
ab' - cd	et	ab' - d,	on retient ab' - cd
ab'c - d	et	ab' - de,	on retient les deux
ab' - cd	et	ab' - de,	on retient soit ab' - d, soit les deux

L'intérêt du groupe V apparaît lorsque le nombre de variables monofomes du problème augmente. C'est le cas, en particulier, lorsque, dans la recherche des relations de consensus, on travaille sur les fonctions "Véracité".

Il est d'ailleurs intéressant de noter que l'on obtient ainsi non seulement les relations de consensus cherchées, mais, en outre, la liste des variables bifomes dans leurs égalités caractéristiques.

Remarque 4-4 :

Il est impossible de former un consensus entre un monôme et l'un des consensus qui l'admet comme générateurs (remarque 1-4). On peut donc réunir dans le même tableau les consensus que l'on vient de former et les monômes que l'on avait au début de l'étape. Cette remarque permet d'alléger les calculs.

Exemple 4-5 :

Soit la fonction  $V = ax^1 + ay^2 + bx^3 + by^4 + bz^5 + xy^6 + xz^7 + x'y^8 + yz^9$ . Les variables bifomes sont : x, y, z et les monofomes a,b,1,2,3,4,5,6,7,8,9.

Le calcul se réduit à :

ax<sup>1</sup> / ay<sup>2</sup> / bx<sup>3</sup> / by<sup>4</sup> / bz<sup>5</sup> / xy<sup>6</sup> / xz<sup>7</sup> / x'y<sup>8</sup> /  
yz<sup>9</sup> / ay<sup>18</sup> x / by<sup>38</sup> x / yz<sup>78</sup> x / ax<sup>26</sup> y / bx<sup>46</sup> y /  
xz<sup>69</sup> y / bx<sup>57</sup> z / by<sup>59</sup> z / by<sup>578</sup> xz / bx<sup>569</sup> yz.

On obtient les relations de consensus cherchées avec la suite des variables bifomes dans l'égalité caractéristique.

.../...

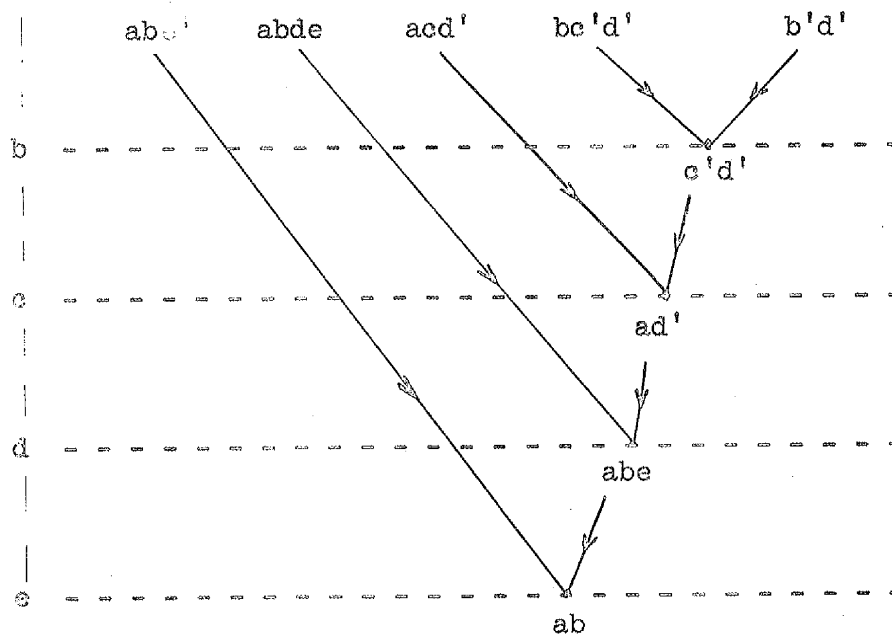
Remarque 4-5 :

A tout consensus obtenu par cette méthode correspond un graphe montrant sa formation depuis ses générateurs par opérations de consensus successifs de classe 2.

Exemple 4-6 :

Traçons le graphe correspondant à la formation de  $ab$  dans l'exemple 4-1.

Consensus par rapport à



On voit qu'une opération de consensus de classe 2 par rapport à une variable figurant dans l'écriture de l'impliquant cherché peut avoir pour effet de remplacer un générateur par un monôme supérieur. Cette opération ne peut pas, par contre, conduire à l'augmentation de la partie utile des générateurs. On peut donc supprimer les branches du graphe partant de monômes ayant une intersection nulle avec le consensus. On voit alors que, contrairement à ce qui se passait dans le graphe de réduction, les monômes ne se conservent pas forcément en passant d'une ligne à la suivante du graphe.

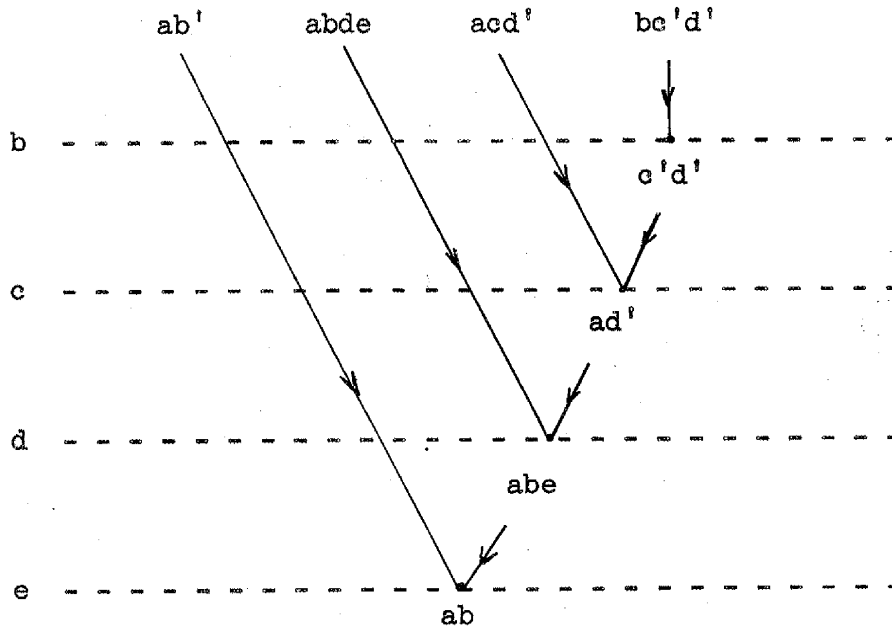
Exemple 4-7 : (suite de l'exemple 4-6)

Après formation des consensus par rapport à b, le générateur bc'd' de ab est devenu c'd'. Sa partie utile : abc'd' n'a pas changé dans cette opération.

On appellera GRAPHE DE FORMATION d'un consensus X le graphe montrant les opérations successives qu'il a suffi d'effectuer pour passer des générateurs au consensus.

Exemple 4-8 : (suite de l'exemple 4-7)

Le graphe de formation de ab est :

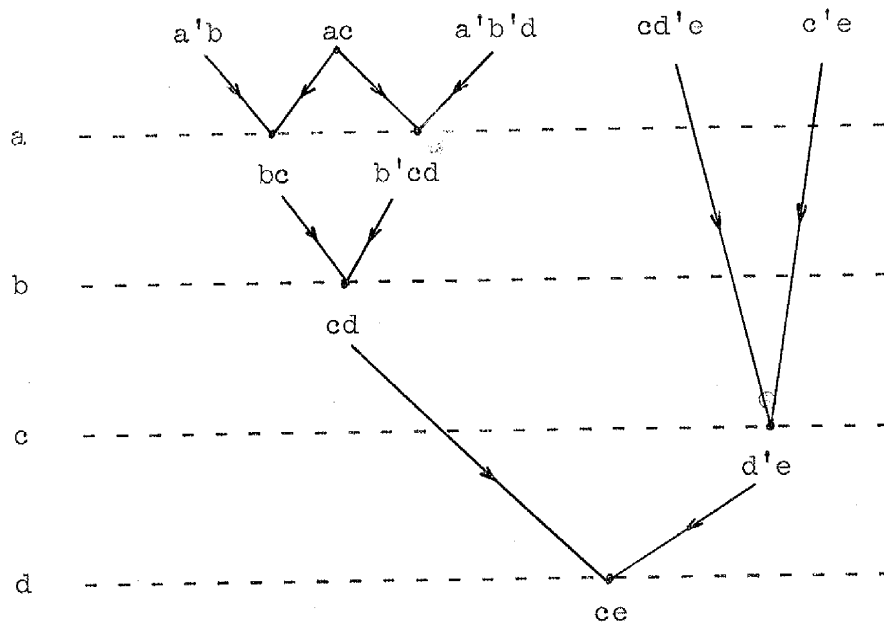


D'un noeud N du graphe de formation, il peut partir plusieurs branches aboutissant aux noeuds  $M_1, \dots, M_n$ . On peut remplacer le graphe partiel aboutissant en N, par n graphes identiques aboutissant en  $N_1, \dots, N_n$ , et relier chaque  $N_i$  à chaque  $M_i$ . En répétant autant de fois qu'il le faut cette opération, on arrive forcément à un arbre que nous appellerons ARBRE DE FORMATION.

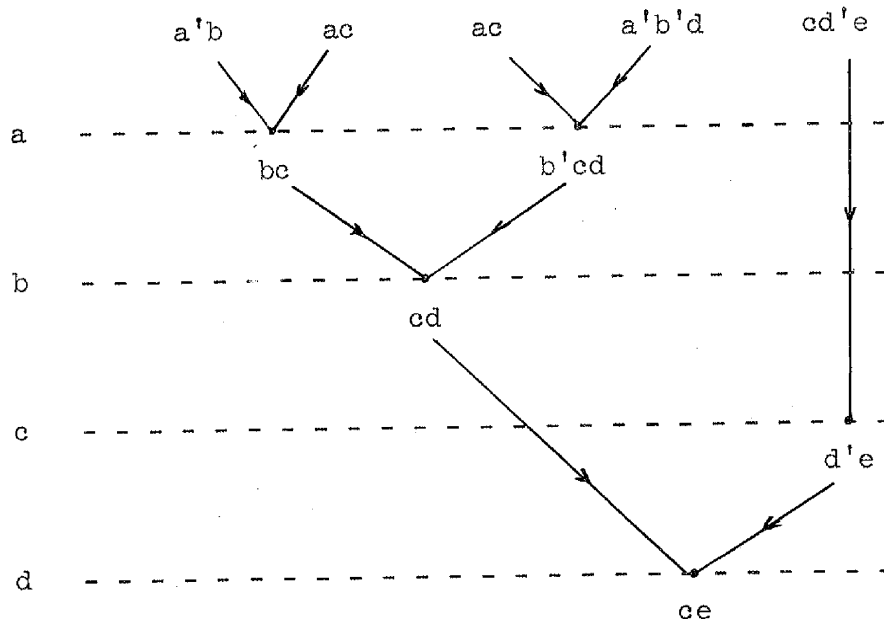
Chaque noeud d'un arbre de formation est supérieur ou égal au consensus qu'admettent tous les monômes origines des branches qui y aboutissent.

Exemple 4-9 :

Considérons les monômes :  $a'b$  /  $ac$  /  $a'b'd$  /  $cd'e$  et  $c'e$ .  
Formons le terme  $ce$  par consensus successivement par rapport aux variables  $a$ ,  $b$ ,  $c$  et  $d$ . Nous effectuons notamment les opérations suivantes :



qui nous donnent l'arbre de formation de  $ce$  :



43 - METHODE D'EXCLUSION

Cette méthode est basée sur la formation de générations nouvelles à partir d'une génération donnée par exclusion successive des générateurs.

Soit  $A_1, \dots, A_n$  une implication donnée de la fonction  $F$  dont on veut trouver tous les impliquants premiers  $X_1, \dots, X_m$ . On a pour tout  $X$  au moins une relation de consensus de la forme :  $X = \mathcal{C}(A_p \dots A_s)$ , où  $A_p, \dots, A_s$  sont des éléments de l'implication  $A_1, \dots, A_n$ , ces monômes formant la génération  $G_0$  de  $X$ . Eliminons  $A_p$  en le remplaçant dans  $G_0$  par les consensus par rapport à une variable biforme quelconque de son écriture qu'il admet avec les autres termes de  $G_0$ . On obtient un nouvel ensemble  $A_u, \dots, A_v$  tel que :  $X \leq A_u + \dots + A_v$  d'où, en rendant irrédondante cette relation d'inclusion, une nouvelle génération de  $X$ . Le processus continuera jusqu'à ce que la génération de classe 1, qui est  $X$  lui-même, soit trouvée.

On remarque que l'on peut dans le second membre de l'inégalité :  $X \leq A_u + \dots + A_v$  éliminer des monômes inférieurs ou égaux à d'autres.

On peut alors, en partant d'une implication quelconque, sortir un impliquant. Comme on ne sait pas s'il est premier ou non, ou générateur d'un autre, ni par rapport à quelle variable il faudrait prendre les consensus, on décide de l'exclure après formation de tous les consensus possibles par rapport à chacune de ses variables.

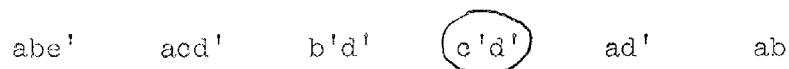
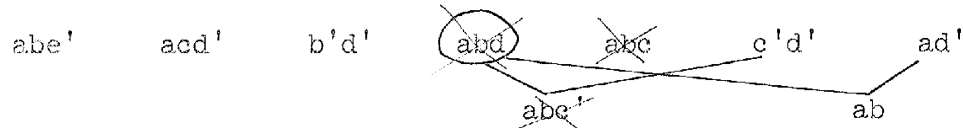
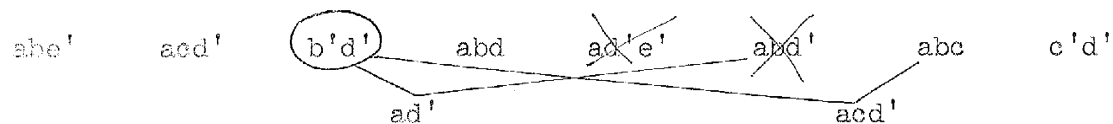
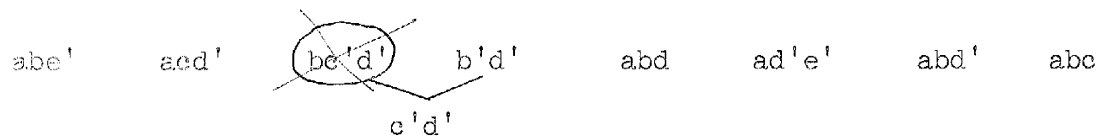
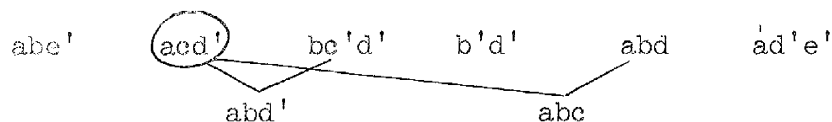
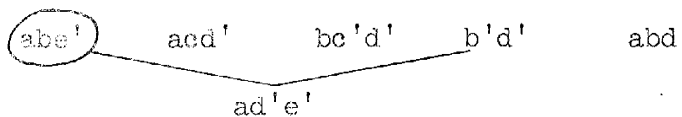
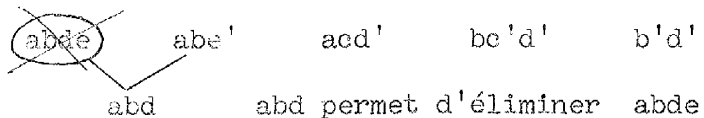
En fin de processus, lorsque tous les monômes sont exclus, on a forcément formé tous les impliquants premiers qu'on est alors sûr de trouver dans l'ensemble des impliquants sortis.

On est donc amené à distinguer deux ensembles : l'ensemble des termes à exclure et l'ensemble des monômes exclus. A chaque instant, on peut éliminer dans un ensemble un monôme inférieur ou égal à un autre. On opère pratiquement sur un seul ensemble en repérant le terme en cours d'exclusion et en cherchant les consensus uniquement entre ce monôme et ceux qui le suivent dans l'ensemble.

.../...

Exemple 4-10 :

Reprenons la fonction de l'exemple 4-1. Cherchons ses impliquants premiers par cette méthode (le monôme en cours d'exclusion est cerclé).





Il n'y a plus que des variables monoformes à droite du monôme  $c'd'$ . Il n'y aura donc plus de consensus. Le calcul est terminé. Les monômes sortis et non éliminés au moment de leur exclusion sont :  $abe'$ ,  $acd'$ ,  $b'd'$ ,  $c'd'$ ,  $ad'$ ,  $ab$ . Après élimination de  $abe'$  et  $acd'$ , il reste les quatre impliquants premiers de  $F$  :  $b'd' / c'd' / ad' / ab$ .

Remarque 4-6 :

S'il apparaît un consensus  $Y$  au cours du calcul, on peut dès sa formation supprimer tout terme de la forme  $Y.Z$  qui serait déjà sorti de l'ensemble. En effet, on est sûr que  $Y.Z$  n'est pas impliquant premier et ne sera donc pas retenu à la fin du calcul.

On peut encore définir, comme on avait fait pour la méthode basée sur la reconstitution d'un graphe de réduction, le graphe de formation et l'arbre de formation d'un consensus.

Exemple 4-11 :

Reconstituons le consensus  $ab$  à partir de sa génération  
 $G_0 : xyz / bx'yz' / axz' / y' / bx'z$ .

Excluons  $xyz$  par rapport à  $z$ . Nous obtenons :

$G_1 : bx'yz' / y' / bx'z / axy$

L'exclusion de  $bx'yz'$  par rapport à  $y$  donne

$G_2 : y' / bx'z / axy / bx'z'$ .

L'exclusion de  $y'$  donne

$G_3 : bx'z / bx'z' / ax$ .

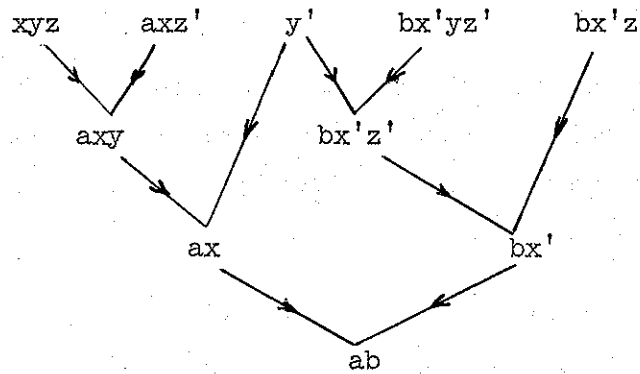
L'exclusion de  $bx'z$  par rapport à  $z$  donne

$G_4 : ax / bx'$

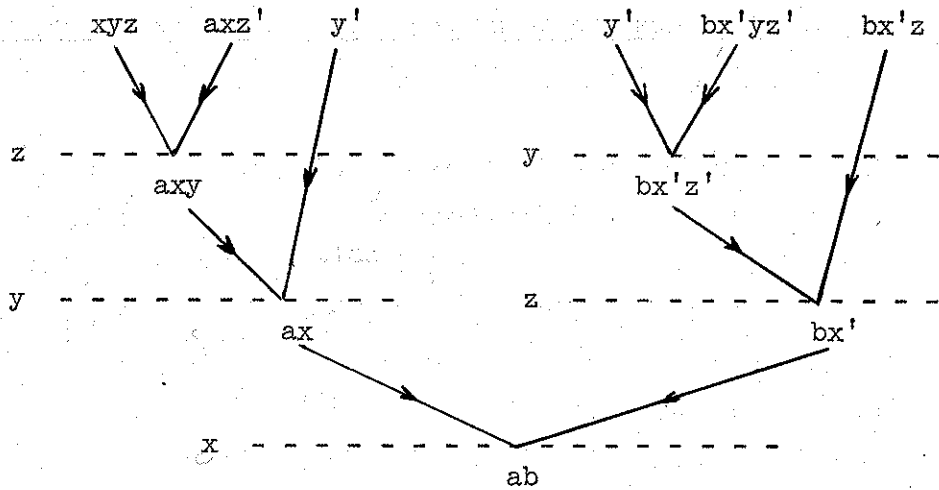
D'où  $G_5 : ab$

.../...

On peut tracer le graphe de formation



et l'arbre de formation en faisant apparaître les variables utilisées pour chercher les consensus



Il est intéressant de comparer les arbres de formation obtenus par les méthodes de réduction et d'exclusion.

On peut, à chaque branche, affecter une variable, celle qui disparaîtra par consensus à l'extrémité de la branche.

Etant donné un arbre de formation, on aura un ensemble de monômes en remontant chaque branche depuis le consensus jusqu'à l'un des générateurs.

Pour un arbre obtenu par la méthode de réduction, les variables figurant dans chaque monôme ainsi trouvé seront classées dans l'ordre inverse de celui considéré pour chercher les consensus. On a donc une ordination lexicographique totale des variables.

Pour un arbre obtenu par la méthode d'exclusion, on aura des monômes présentant des ordinations lexicographiques locales. On trouve encore une propriété qui apparaît comme fondamentale pour les arbres de formation.

Etant donné un noeud d'un arbre de formation, tous les monômes origines des branches aboutissant à ce noeud admettent un consensus qui est égal ou inférieur au monôme lié au noeud considéré.

Pour un arbre de formation d'un consensus :  $X = \mathcal{C}(A_1 \dots A_p)$  par réduction, on connaissait une méthode permettant de développer l'égalité caractéristique :  $1 = 1$  de la relation :  $X = \mathcal{C}(X)$  en l'égalité :  $C_1 + \dots + C_p = 1$  de la relation donnée. On peut appliquer une méthode analogue pour les arbres obtenus par exclusion. Mais, dans ce cas, on laisse libre à tout moment le choix des variables pour la décomposition d'un noeud de l'arbre.

On voit que la méthode de réduction apparaît comme un cas particulier de la méthode d'exclusion plus générale.

On peut utiliser un artifice pour transformer un arbre de formation par exclusion en un arbre de formation par réduction.

Soit  $A_1$  le monôme que l'on décide d'exclure de la génération  $G_0 : A_1, \dots, A_p$  du consensus  $X$ . On forme les monômes :  $A_{p+1}, \dots, A_q$ .

.../...

On a :  $X \subseteq A_2 + \dots + A_q$ , relation d'inclusion qui se simplifie en :

$$X \subseteq A_u + \dots + A_v \text{ (irr.)}$$

Les termes  $A_u, \dots, A_v$  constituent la nouvelle génération  $G_1$ .

On peut décomposer  $G_1$  en trois sous-ensembles :

$E_{11}$  : monômes provenant de l'ensemble  $A_{p+1}, \dots, A_q$  des consensus formés avec  $A_1$ .

$E_{12}$  : monômes provenant de  $G_0$  ne contenant ni  $x$ , ni  $x'$  dans leur écriture.

$E_{13}$  : monômes provenant de  $G_0$  contenant  $x$  ou  $x'$  dans leur écriture.

$G_0$  se décompose en :

$E_{01}$  : contenant  $A_1$  comme élément unique.

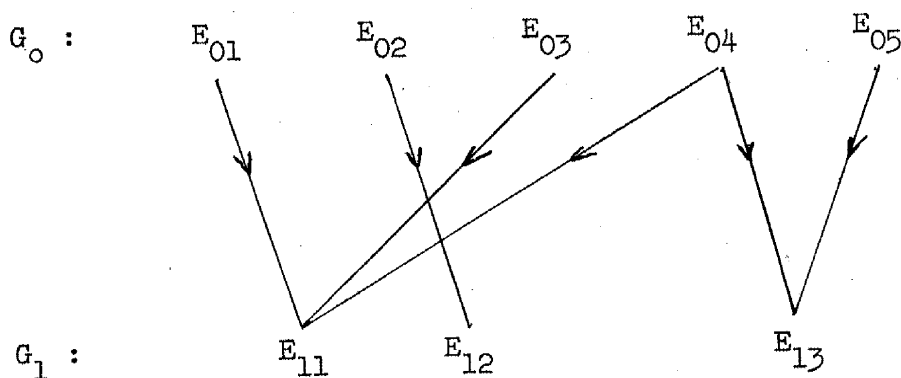
$E_{02}$  : ensemble identique à  $E_{12}$

$E_{03}$  : ensemble de monômes utilisés pour former les éléments de  $E_{11}$  et ne figurant pas dans  $E_{13}$

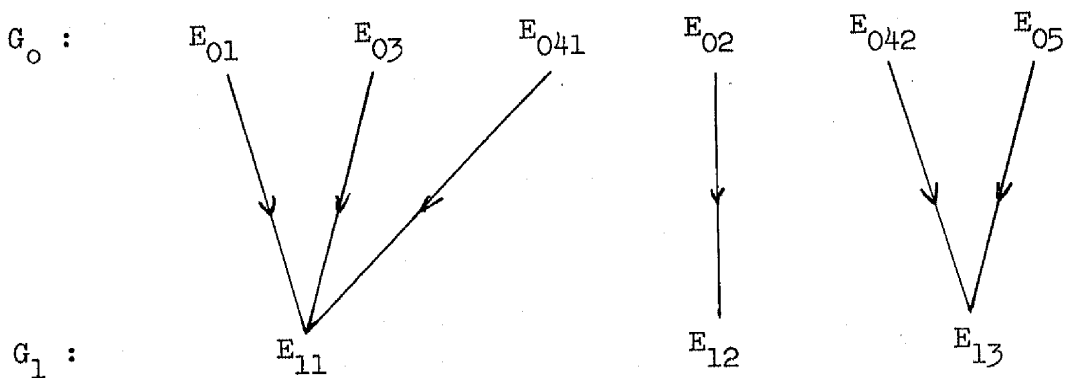
$E_{04}$  : ensemble de monômes utilisés pour former  $E_{11}$  et figurant dans  $E_{13}$

$E_{05}$  : ensemble des monômes contenant  $x$  ou  $x'$  dans leur écriture, éléments de  $E_{13}$  ne figurant pas dans  $E_{04}$

On peut représenter les différents ensembles par le graphe :



On peut transformer ce graphe en arbres par dédoublement de l'ensemble  $E_{04}$  en  $E_{041}$  et  $E_{042}$ .



Dans  $G_1$ ,  $x$  et  $x'$  n'apparaissent plus que dans  $E_{13}$ . On peut alors faire un changement de variable en remplaçant  $x$  et  $x'$  par  $x_1$  et  $x'_1$  ( $x_1$  étant une nouvelle variable associée à  $x$ ) dans les ensembles  $E_{042}, E_{05}$  et  $E_{13}$ .  $G_0$  et  $G_1$  deviennent  $G_0^*$  et  $G_1^*$ .

L'opération d'exclusion de  $A_1$  hors de  $G_0^*$  est identique à celle d'élimination de la variable  $x$  dans  $G_0^*$  par le processus inverse de la réduction. Ces deux opérations conduisent toutes deux à  $G_1^*$ .

On peut dire que l'élimination d'une variable  $x$  par la méthode de réduction est équivalente à l'exclusion successive de tous les monômes de la génération contenant  $x$  ou  $x'$  dans leur écriture.

Remarque 4-7 :

Tout noeud d'un arbre de formation d'un consensus par exclusion étant supérieur ou égal au consensus (forcément de classe supérieure à 1) qu'admettent les monômes origines des branches qui y aboutissent, on peut dire que l'on n'aura jamais dans un arbre de formation un noeud qui soit inférieur ou égal à un monôme origine d'une branche. Il en résulte que si au cours du calcul il apparaît un monôme  $Y$  qui soit inférieur ou égal à un monôme déjà connu, déjà exclu ou non, on pourra l'éliminer aussitôt car il n'est pas noeud d'un arbre de formation conduisant à un impliquant premier.

On peut alors énoncer l'algorithme :

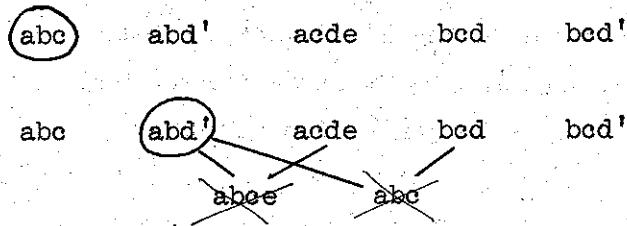
Algorithme n° 2 de recherche des impliquants premiers

On considère l'ensemble des impliquants et on exclut successivement chacun d'eux en le remplaçant par les consensus qu'il admet avec chacun des monômes qui le suit par rapport à chacune des variables de son écriture. Dès qu'un consensus est formé, on effectue toutes les simplifications possibles et on le place à la fin de l'ensemble s'il n'a pas été éliminé.

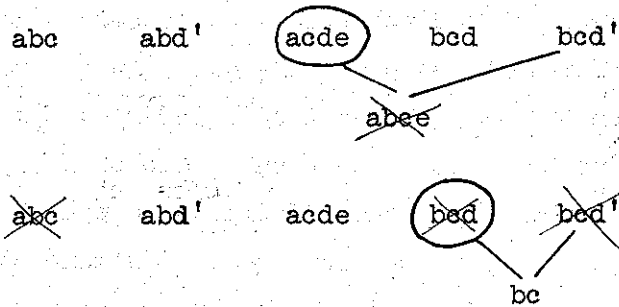
Exemple 4-12 :

Proposons-nous de trouver par la méthode d'exclusion les impliquants premiers de la fonction :

$$F = abc + abd' + acde + bcd + bcd'$$



Les consensus trouvés disparaissent comme inférieurs ou égaux à abc déjà exclu.



bc permet de supprimer abc (déjà exclu) bed et bed'.  
Il reste les trois impliquants premiers : abd', acde, bc.

Remarque 4-8 :

Il est encore impossible de former un consensus entre un monôme et l'un des consensus qui l'admet comme générateur.

On peut donc réunir dans le même tableau les termes que l'on forme et ceux qui restaient à exclure au début de l'étape. On progresse dans un seul ensemble de monômes, dans lequel on repère le terme en cours d'exclusion.

Exemple 4-13 :

Reprenons la fonction des exemples 4-1 et 4-6

$$F = abde + abe' + acd' + bc'd' + b'd'$$

Le calcul se réduit à :

$$\begin{aligned} & \cancel{abde} / \cancel{abe'} / \cancel{acd'} / \cancel{bc'd'} / \cancel{b'd'} / \cancel{abd} / \cancel{ad'e'} / \\ & \cancel{abd'} / \cancel{abe} / \cancel{c'd'} / \cancel{ad'} / \cancel{abc'} / ab \end{aligned}$$

.../...

Remarque 4-9 :

On peut de la même façon que pour la méthode de réduction éviter de prendre le consensus d'un monôme contenant une variable  $x$  dans son écriture avec un autre terme formé par consensus par rapport à cette même variable  $x$ . On retrouvera de la même façon que dans la méthode de réduction les monômes marqués XV avec les mêmes règles de simplification.

Cette remarque est intéressante dès que le nombre de variables monofomes devient notable. C'est encore le cas lors de la recherche des relations de consensus.

Exemple 4-14 :

Reprenons la fonction de l'exemple 4-5 :

$$q = ax^1 + ay^2 + bx^3 + by^4 + bz^5 + xy^6 + xz^7 + x'y^8 + yz^9$$

Le calcul se réduit à :

$$ax^1 / ay^2 / bx^3 / by^4 / bz^5 / xy^6 / xz^7 / x'y^8 / yz^9 / ay^{18}x / ax^{26}y / by^{38}x / bx^{46}y / bx^{57}z / by^{59}z / xz^{69}y / bx^{569}yz / yz^{78}x / by^{578}xz.$$



44 - METHODE DES FORMES DUALES

Généralement, une fonction booléenne est donnée par l'une de ses implications, qui correspond à une forme polynomiale "Somme de produits".

On peut aussi se donner la fonction F par une forme "produit de sommes". Il faut alors se donner un ensemble de sommes de variables sous leur forme directe ou complémentée dont chacune est égale ou supérieure à F et dont le produit lui est égal.

Une suite de variables dont la somme est supérieure à une fonction F est dite COUVERTURE de F ; l'ensemble des couvertures qui définit la fonction est dite ENVELOPPE de cette fonction.

Exemple 4-15

Une fonction F peut être donnée :

- soit par l'implication :  $abd' / a'bc / a'bd / a'b'd$
- soit par l'enveloppe :  $abd / acd / a'bc' / a'b'd' / bcd$

On a bien :

- $F = abd' + a'bc + a'bd + a'b'd$
- $F = (a + b + d) (a + c + d) (a' + b + c') (a' + b' + d')$   
 $(a' + c + d') (b + c + d)$

Une couverture est dite PREMIERE si en y supprimant une seule variable la suite résiduelle n'est plus couverture de F.

On définit de la même façon une enveloppe PREMIERE qui est une enveloppe telle que, si l'on y supprime un seul terme (qui représente une couverture de F), le produit des couvertures restantes n'est plus égal, mais supérieur à F.

.../...

Exemple 4-16: (suite de l'exemple 4-15)

$acd$  est une couverture première de  $F$  car :

$$a + c \not\leq F$$

$$a + d \not\leq F$$

$$c + d \not\leq F$$

$acd / a'd' / bd$  est une enveloppe première, car on a :

$$F < (a + c + d) (a' + d') = ad' + a'c + a'd$$

$$F < (a + c + d) (b + d) = ab + bc + d$$

$$F < (a' + d') (b + d) = a'b + a'd + bd'$$

Théorème 4-2 :

A tout élément  $X$  de  $F$  il correspond par complémentation des variables un élément  $Y$  de  $F'$ , avec :

X	Y
- impliquant	- couverture
- impliquant premier	- couverture première
- implication	- enveloppe
- base	- enveloppe formée uniquement de couvertures premières
- base première	- enveloppe irrédondante formée uniquement de couvertures premières
- base complète	- enveloppe formée de toutes les couvertures premières

Lemme 4-1 :

Les impliquants premiers de la fonction  $P_2$  obtenue en faisant le produit d'un polynôme  $P_1$  par une somme  $S$  de variables sous leur forme directe ou complétée sont obtenus directement par le calcul à condition que  $P_2$  soit exprimée comme somme de ses impliquants premiers.

Considérons, en effet, le produit d'un polynôme  $P_1$  représentant la somme des impliquants premiers d'une fonction et une somme  $S$  de variables. Effectuons terme à terme le produit  $P_1.S = P_2$ :

Soit un impliquant premier  $M_2$  de  $P_2$ . Tout état des variables qui fait  $M_2 = 1$  fait aussi  $P_1 = 1$  et  $S = 1$ . Donc, il existe un impliquant premier  $M_1$  de  $P_1$  tel que  $M_1 \gg M_2$ . De même, il y a une variable  $x$  de  $S$  telle que  $x \gg M_2$ . Donc, on a forcément formé le monôme  $M_1.x$  dans le produit, avec  $M_1.x \gg M_2$ . Comme  $M_2$  est impliquant premier de  $P_2$ , on a forcément  $M_1.x = M_2$ ;  $M_2$  a donc été formé.

Tous les impliquants premiers de  $P_2$  figurent donc dans les termes obtenus. On ne garde qu'eux en supprimant ceux qui ne sont pas premiers, donc inférieurs à d'autres.

Remarque 4 -10

Si on a dans le polynôme  $P_1$  un terme ne contenant qu'une variable  $x$  et que celle-ci figure aussi dans la somme  $S$ , elle se retrouve dans  $P_2$ , et on peut faire les calculs en la supprimant dans  $S$  après l'avoir placée dans  $P_2$ . De même, si un impliquant premier de  $P_1$  a une variable de son écriture figurant dans  $S$ , on le retrouve inchangé dans  $P_2$  et il est inutile de chercher ses produits avec les autres variables de  $S$ .

On peut alors énoncer le théorème :

.../...

Théorème 4-3 :

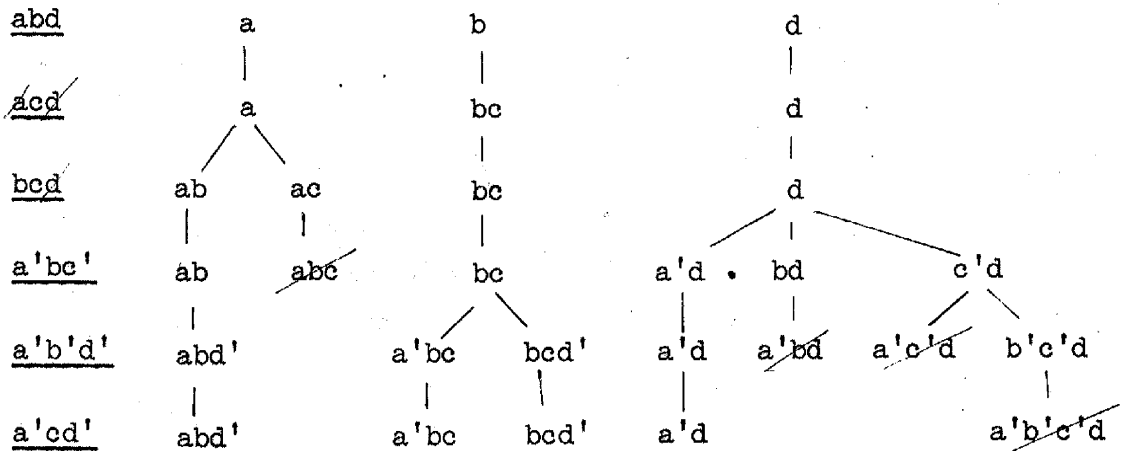
Etant donné une fonction par l'une quelconque de ses enveloppes, le passage en forme "somme de produits" fournit, après élimination des termes inférieurs à d'autres, sa base complète.

En effet, cherchons les impliquants premiers d'une fonction F donnée par un produit de sommes de variables  $S_1 \dots S_n$ . La somme  $S_1$  peut être assimilée à une fonction  $P_1$  donnée par la somme de ses impliquants premiers. On peut alors passer de la fonction  $P_i$  à une autre,  $P_{i+1}$ , par application du lemme 4-1 sur le produit  $P_i \cdot S_{i+1}$  avec  $i$  variant de 1 à n. La fonction  $P_n$  est égale à F, dont on obtient bien tous les impliquants premiers.

On peut remarquer que le lemme 4-1 apparaît comme un cas particulier du théorème de M. KUNTZMANN [17], puisque toute couverture est forcément exprimée comme la somme de ses impliquants premiers.

Exemple 4-17 :

Soit la fonction F donnée par l'une de ces enveloppes :  $abd / acd / a'bc' / a'b'd' / a'cd' / bcd$ . Appliquons le processus de passage en somme de produits.



D'où la base complète de F :  $abd' / a'bc / bcd' / a'd$ .

.../...

Remarque 4-17 :

On a intérêt à partir d'une enveloppe minimale et à classer les couvertures dans l'ordre où il y a le plus de simplifications possibles.

Complémentons toutes les variables. On passe d'une implication de F à une enveloppe de F'. En fin de calcul, on retrouve par complémentation une enveloppe de F. D'où le théorème :

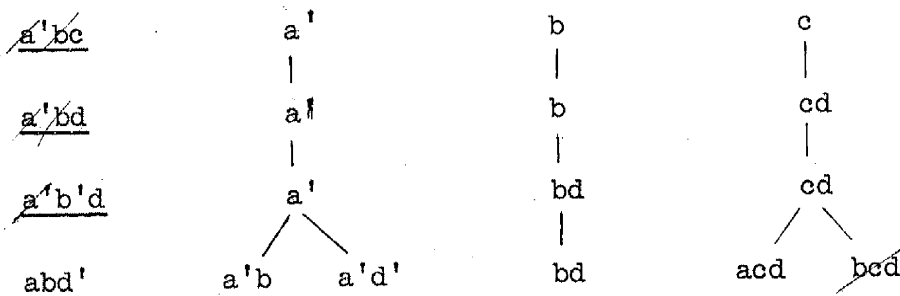
Théorème 4-4 :

L'application du processus sur une implication d'une fonction permet de trouver l'enveloppe formée de toutes les couvertures premières.

Exemple 4-18 :

Soit la fonction F donnée par l'une de ses implications :  $abd' / a'bc / a'bd / a'b'd$ .

Appliquons le processus :



On obtient l'ensemble des couvertures premières de F.  
 On a :  $F = (a' + b) (a' + d') (b + d) (a + c + d)$ .

Nous avons donc, en fait, UN PROCESSUS DE PASSAGE D'UNE FORME DUALE A L'AUTRE.

.../...

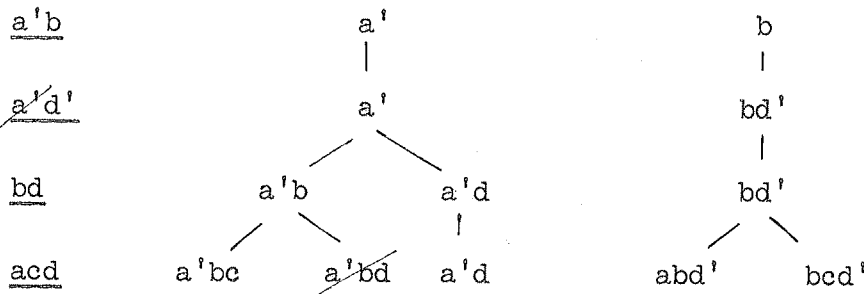
Algorithme n° 3 de recherche des éléments premiers

Etant donné une fonction  $F$  par l'une quelconque de ses implications (ou de ses enveloppes), on trouve l'ensemble de ses impliquants premiers (ou couvertures premières) par la double application du processus de passage d'une forme duale à l'autre.

Exemple 4-19 :

Soit la fonction  $F$  donnée par l'une de ses implications :  $abd' / a'bc / a'bd' / a'b'd$ .

1ère application : On trouve l'ensemble des couvertures premières :  $a'b / a'd' / bd' / acd$  (voir ex. 4-18).

2ème application :

On a trouvé la base complète de  $F$  :  $a'bc / a'd / abd' / bcd'$ .

Remarque 4-12 :

La méthode permet de trouver non seulement les impliquants premiers de  $F$ , mais aussi ceux du complément  $F'$ . Il suffit pour cela de complémentariser les couvertures premières de  $F$ .

Elle est valable aussi bien pour les fonctions classiques que pour les fonctions "Véracité" mises en oeuvre dans la recherche des relations de consensus.

Exemple 4-20 :

Soit les monômes :  $ax / by / x'y'$  entre lesquels nous cherchons les relations de consensus, qui sont les impliquants premiers de la fonction :

$$V = ax^1 + by^2 + x'y'^3$$

1ère application :

<u><math>ax^1</math></u>	$a$	$x$	$1$
<u><math>by^2</math></u>	$ab / ay / a^2 / bx / xy / x^2 / b^1 / y^1 / 1^2$		
<u><math>x'y'^3</math></u>	$abx' / aby' / ab^3 / ax'y / ay^3 / ax'^2 / ay'^2 / a^2^3 / bxy' / bx^3 / xy^3 / xy'^2 / x^2^3 / bx'^1 / by'^1 / b^1^3 / x'y^1 / y^1^3 / x'^1^2 / y'^1^2 / 1^2^3$		

Nous avons obtenu l'enveloppe de F, formée de toutes ses couvertures premières.

D'où :

$$V = (a + b + x') (a + b + y') (a + b + 3) \dots (1 + 2 + 3)$$

2ème application :

On classe les couvertures dans l'ordre qui semble le plus intéressant :

.../...

123

x'12

y'12

bx'1

by'1

b13

y13

x'y1

a23

x23

ab3

ay3

bx3

xy3

ax'2

ay'2

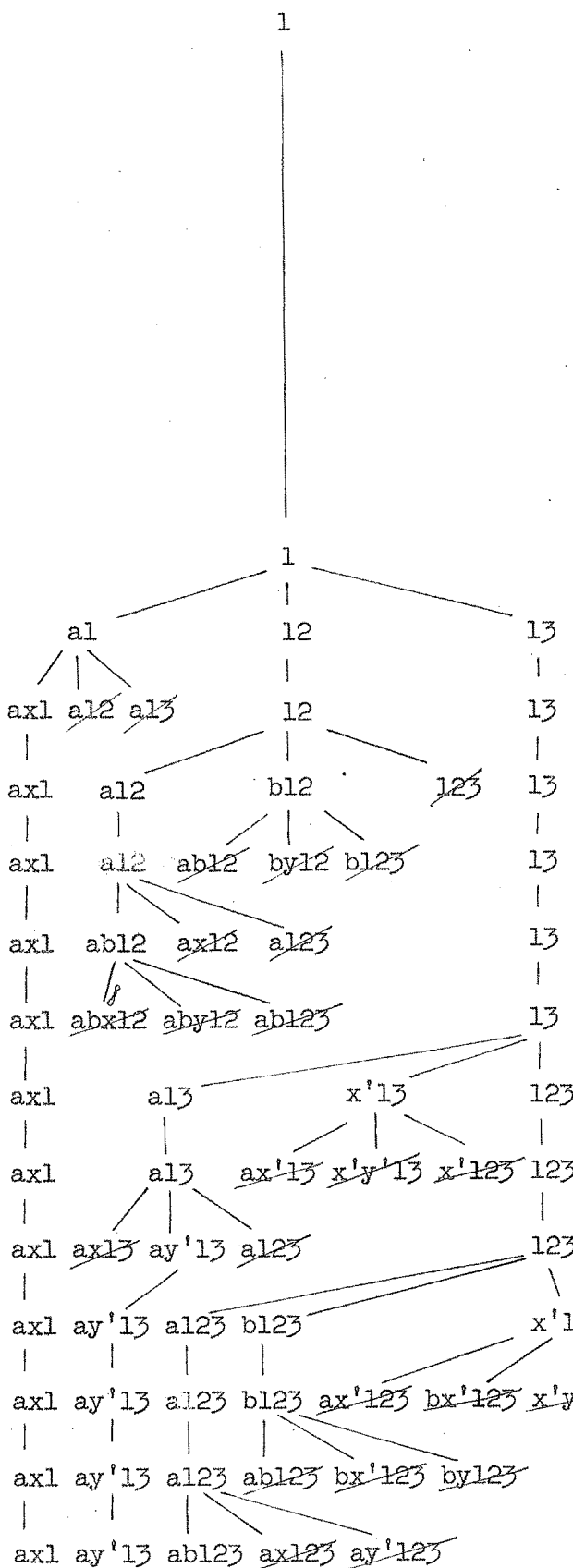
xy'2

abx'

aby'

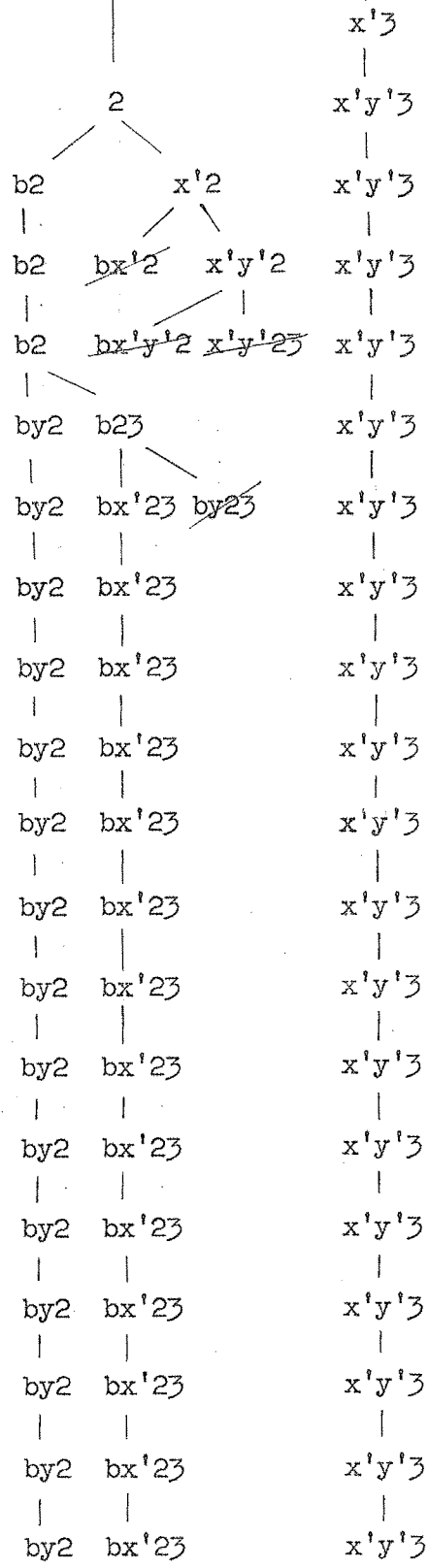
ax'y

bx'y



2

3



.../...



On a trouvé les six relations de consensus existantes :

$ax = A_1 = \mathcal{C}(A_1)$ ,  $by = A_2 = \mathcal{C}(A_2)$ ,  $x'y' = A_3 = \mathcal{C}(A_3)$  de classe 1

$ay' = \mathcal{C}(A_1, A_3)$ ,  $bx' = \mathcal{C}(A_2, A_3)$  de classe 2

$ab = \mathcal{C}(A_1, A_2, A_3)$  de classe 3

#### 45 - APPLICATION A LA RECHERCHE DES BASES PREMIERES

Considérons une fonction  $F$  donnée par sa base complète  $A_1, \dots, A_n$ . Proposons-nous de trouver l'ensemble de ses bases premières.

Nous allons introduire des variables et des fonctions associées, comme nous l'avons fait lors de la recherche des relations de consensus.

Soit  $i$  une variable associée à la présence de l'impliquant premier  $A_i$  dans un ensemble d'impliquants premiers que nous voulons former arbitrairement.  $i$  prend la valeur 1 si  $A_i$  figure dans cet ensemble et 0 dans le cas contraire.

A chaque état possible des variables associées  $1, \dots, n$  correspond un ensemble d'impliquants premiers :  $A_r, \dots, A_s$  formant un sous-ensemble de la base complète.

Le fait que la somme de ces monômes est ou non supérieure ou égale à un impliquant premier  $A_i$  apparaît comme une fonction que nous pouvons noter  $\mathcal{Y}_i$  et qui vaut 1 si l'on a :  $A_i \leq A_r + \dots + A_s$ , et 0 dans le cas contraire.

$\mathcal{Y}_i$  est donc une fonction de la même nature que les fonctions "Véracité" déjà rencontrées. On l'appellera FONCTION "INCLUSION" de  $A_i$ .

Exemple 4-21 :

Soit la fonction F donnée par sa base complète :  
 $A_x = ac$ ,  $A_y = ad$ ,  $A_z = a'd'$ ,  $A_u = cd'$ .

Les variables associées à la présence des monômes dans l'ensemble formé sont x, y, z, u.

A l'état 0101 des variables associées correspond l'ensemble ad, cd' qui est tel que :  $ac < ad + cd'$ . Donc x'yz'u est un impliquant de la fonction  $\mathcal{Y}_x$ .

Remarque 4-13 :

Soit un monôme  $\mathcal{M}_0$  dans lequel ne figurent pas toutes les variables associées du problème. Il sera impliquant de  $\mathcal{Y}_j$  si la somme des monômes associés qui y figurent sous leur forme directe est égale ou supérieure à  $A_j$ .

Il en résulte qu'étant donné un monôme  $\mathcal{M}_0$  impliquant de  $\mathcal{Y}_j$ , le monôme  $\mathcal{M}_0$  obtenu à partir de  $\mathcal{M}_0$  par suppression des variables complémentées dans son écriture sera encore impliquant de  $\mathcal{Y}_j$ .

A la suite de cette remarque dont nous tiendrons dorénavant toujours compte, toutes les variables associées ne pourront plus être que monofformes.

Théorème 4-5 :

A tout impliquant premier r...s de  $\mathcal{Y}_j$  correspond une relation de consensus :  $A_j = \mathcal{C}(A_r \dots A_s)$ , et inversement.

Il en résulte que l'on connaît la fonction  $\mathcal{Y}_j$  par sa base complète dès que l'on dispose de l'ensemble des relations de consensus de la forme :  $A_j = \mathcal{C}(A_r \dots A_s)$ , où  $A_r, \dots, A_s$  sont des impliquants premiers de F.

Exemple 4-22 :

Soit la fonction F donnée par sa base complète, chacun des impliquants premiers étant affecté d'un chiffre le numérotant :

ax 1 / ay 2 / bx 3 / by 4 / bz 5 / xy' 6 / xz' 7 / x'y 8 /  
yz' 9

L'ensemble des relations de consensus est donné par les termes : (voir exemple 4-5)

ax 1 / ay 2 / bx 3 / by 4 / bz 5 / xy' 6 / xz' 7 / x'y 8 /  
yz' 9 / ay 18 / by 38 / yz' 78 / ax 26 / bx 46 / xz' 69 /  
bx 57 / by 59 / by 578 / bx 569.

$$\text{On a : } \gamma_1 = 1 + 26$$

$$\gamma_2 = 2 + 18$$

$$\gamma_3 = 3 + 46 + 57 + 569$$

$$\gamma_4 = 4 + 38 + 59 + 578$$

$$\gamma_5 = 5$$

$$\gamma_6 = 6$$

$$\gamma_7 = 7 + 69$$

$$\gamma_8 = 8$$

$$\gamma_9 = 9 + 78$$

On peut définir une autre fonction des variables associées. Si l'ensemble formé est une base de la fonction F, cette fonction vaut 1 et 0 dans le cas contraire. C'est la fonction "BASE" notée  $\mathfrak{B}$  ou  $\mathfrak{B}(F)$ .

Exemple 4-23 :

Reprenons la fonction F de l'exemple 4-22.

.../...

Le monôme  $12'34'567'89$  est un impliquant canonique de la fonction  $\mathcal{B}$  car :

$$F = ax + bx + bz + xy' + x'y + yz' + au$$

Remarque 4-14 :

Etant donné un monôme  $\mathcal{M}$  impliquant de  $\mathcal{B}$ , tout monôme  $\overline{\mathcal{M}}$  obtenu par suppression des variables associées complémentées est encore impliquant de  $\mathcal{B}$ . On ne travaillera donc que sur des variables monoformes.

Considérons un impliquant quelconque de  $\mathcal{B}$ . Il lui correspond une base de  $F$ . Supposons que l'impliquant soit premier, il lui correspond une base première.

Inversement, une base première de  $F$  est telle que le monôme qui lui correspond est impliquant premier de  $\mathcal{B}$ .

D'où la propriété :

Théorème 4-6 :

A tout impliquant premier de  $\mathcal{B}$  correspond une base première de  $F$  et inversement.

La connaissance de la fonction  $\mathcal{B}$  est donc très intéressante. Nous pouvons l'obtenir par le processus utilisé pour la définir. Le procédé est toutefois très long, vu le grand nombre de cas possibles.

Nous allons présenter une autre méthode plus simple, utilisant une propriété très intéressante de la fonction  $\mathcal{B}$ .

Considérons simultanément la fonction  $\mathcal{B}$  et toutes les fonctions  $\mathcal{Y}_j$ . Si l'état des variables associées rend toutes les fonctions  $\mathcal{Y}_j$  égales à 1, l'ensemble de monômes  $A_r, \dots, A_s$  choisi est tel que :  $A_j \leq A_r + \dots + A_s$ .

On a donc :

$$\sum_1^n A_j \leq A_r + \dots + A_s$$

Comme  $\sum_1^n A_j$  est égale à  $F$ , on a donc forcément :

$F = A_r + \dots + A_s$ . L'ensemble choisi est une base de  $F$ , et  $\mathcal{B} = 1$ .

$$\text{D'où : } \prod_1^n \gamma_j \leq \mathcal{B} \quad (1)$$

Supposons maintenant que l'on ait  $\mathcal{B} = 1$  pour l'état considéré des variables. L'ensemble des monômes choisis  $A_r, \dots, A_s$  est tel que :

$$F = A_r + \dots + A_s$$

Donc pour chaque  $A_j$  :  $A_j \leq A_r + \dots + A_s$

Nous pouvons rendre cette inégalité irrédondante  $A_j \leq A_u + \dots + A_v$  (irr.), ce qui montre que :  $A_j = \mathcal{C}(A_u \dots A_v)$  et que le monôme  $u \dots v$  est égal à 1, donc, comme il est impliquant de  $\gamma_j$ , que  $\gamma_j = 1$ .

$$\text{D'où : } \gamma_j \geq \mathcal{B},$$

$$\text{et : } \prod_1^n \gamma_j \geq \mathcal{B} \quad (2)$$

Nous avons, en comparant les relations (1) et (2) :

$$\prod_1^n \gamma_j = \mathcal{B}$$

Nous connaissons chaque fonction "Inclusion" par sa base complète. Nous pouvons donc obtenir facilement  $\mathcal{B}$  par emploi du théorème de M. KUNTZMANN.

Exemple 4-24 :

Reprenons l'exemple 4-22. Nous avons :

$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \gamma_1 \dots \gamma_n \\ &= (1 + 26) (2 + 18) (3 + 46 + 57 + 569) (4 + 38 + 59 + 578) \\ &\quad 5 \ 6 \ (7 + 69) \ 8 \ (9 + 78) \\ &= (1 + 2) (3 + 4 + 7 + 9) \ 5 \ 6 \ 8 \ (7 + 9) \\ &= (1 + 2) \ 5 \ 6 \ 8 \ (7 + 9) \\ &= (17 + 19 + 27 + 29) \ 5 \ 6 \ 8 \\ &= 15678 + 15689 + 25678 + 25 \ 689 \end{aligned}$$

La fonction  $F$  admet donc 4 bases premières :

- 1)  $ax / bz / xy' / xz' / x'y$
- 2)  $ax / bz / xy' / x'y / yz'$
- 3)  $ay / bz / xy' / xz' / x'y$
- 4)  $ay / bz / xy' / x'y / yz'$

Remarque 4-15 :

La fonction  $\gamma_i$  admet  $i$  comme impliquant premier. Si c'est son seul impliquant premier, nous pouvons alors affirmer que  $A_i$  est un impliquant premier essentiel de la fonction  $F$ .

$A_i$  est donc élément de toute base de  $F$ .

Nous pouvons alors supprimer  $i$  dans les autres fonctions "Inclusion".

Après avoir ainsi procédé pour chacun des impliquants  $A_i$  essentiels, nous considérons les fonctions "inclusion" relatives aux autres impliquants premiers. Deux cas sont possibles pour chacune d'elles :

- 1) Un impliquant premier de  $\mathcal{J}_j$  au moins est entièrement supprimé. Cela montre que l'impliquant premier  $A_j$  est inclus dans l'ensemble des impliquants premiers essentiels. C'est donc un monôme inutile, qui ne figurera dans aucune base première de  $F$ . On peut donc éliminer les fonctions  $\mathcal{J}_j$ .
- 2) Il n'y a pas disparition d'un impliquant premier de  $\mathcal{J}_k$ , qui s'est transformée en  $\mathcal{J}_k^*$  telle que  $\mathcal{J}_k^* \geq \mathcal{J}_k$ .

Aucune variable des  $\mathcal{J}_i$  ne figure dans les  $\mathcal{J}_k^*$ , dont le produit égal à  $\mathcal{B}^*$  peut être facilement calculé. Il suffit alors de multiplier par les variables  $i$  les impliquants premiers de  $\mathcal{B}^*$  pour avoir ceux de  $\mathcal{B}$ .

Exemple 4-25 :

Soit la fonction donnée par sa base complète :  
 $ac' / ad / a'bc / a'bd' / be' / bf / cd / c'd' / ef$ . Nous nous proposons de trouver sa fonction  $\mathcal{B}$ .

Cherchons les relations de consensus par la méthode des produits.

ac'1

ad 2

a'bc 3

a'bd' 4

be' 5

bf 6

cd 7

c'd' 8

ef 9

bc'd' 14 a

bcd 23 a

a'bd' 38 c

ad 17 c

ac' 28 d

a'bc 47 d

bf 59 e

a	a'	
c' 1 d 2	bc 3 bd' 4	bc'd' 14 a bed 23 a

c	c'	
a'b 3 d 7 bd 23 a	a 1 d' 8 bd' 14 a	a'bd' 38 c ad 17 c

d	d'	
a 2 c 7 bc 23 a a 17 c	a'b 4 c' 8 bc' 14 a a'b 38 c	ac' 28 d a'bc 47 d

e	e'	
f 9	b 5	bf 59 e

Les fonctions "Inclusion" sont pour

- ac' :  $\sum_1 = 1 + 28$
- ad :  $\sum_2 = 2 + 17$
- a'bc :  $\sum_3 = 3 + 47$
- a'bd' :  $\sum_4 = 4 + 38$
- be' :  $\sum_5 = 5$
- bf :  $\sum_6 = 6 + 59$
- cd :  $\sum_7 = 7$
- c'd' :  $\sum_8 = 8$
- ef :  $\sum_9 = 9$

.../...



Les impliquants premiers essentiels sont :  $be'$ ,  $cd$ ,  $c'd'$ ,  $ef$ .

Nous pouvons alors supprimer les variables 5 7 8 et 9 dans les fonctions "Inclusion".

$\mathcal{Y}_6$  disparaît.  $A_6$  est donc inutile.

$$\text{Il reste : } \mathcal{Y}_1^* = \mathcal{Y}_2^* = 1 + 2$$

$$\mathcal{Y}_3^* = \mathcal{Y}_4^* = 3 + 4$$

$$\text{D'où : } \mathcal{B}^* = (1 + 2) (3 + 4) = 13 + 14 + 23 + 24$$

$$\mathcal{B} = 135789 + 145789 + 235789 + 245789$$

Remarque 4-16 :

On peut encore utiliser les produits des résidus en groupant les termes :  $X. \mathcal{Y}_1$  et  $X. \mathcal{Y}_2$  en  $X(\mathcal{Y}_1 + \mathcal{Y}_2)$ .

Exemple 4-26 :

Soit la fonction donnée par l'implication :  $ax\ 1 / ay\ 2 / bx\ 3 / by\ 4 / bz\ 5 / xy'\ 7 / x'y\ 8 / yz'\ 9$ .

Ensemble des monômes	Variable biforme $\mathcal{L}$	Résidus par		Produit des résidus
		$\mathcal{L}$	$\mathcal{L}'$	
$ax\ 1 / ay\ 2 / bx\ 3 / by\ 4 / bz\ 5 / xy'\ 7 / x'y\ 8 / yz'\ 9$	$x$	$a\ 1 / b\ 3 / y'\ 6 / z'\ 7$	$y\ 8$	$ay\ 18 / by\ 38 / yz'\ 78$
$ax\ 1 / ay\ (2+18) / bx\ 3 / by\ (4+38) / bz\ 5 / xy'\ 6 / xz'\ 7 / x'y\ 8 / yz'\ (9+78)$	$y$	$a\ (2+18) / b\ (4+38) / x'\ 8 / z'\ (9+78)$	$x\ 6$	$ax\ (26 + 168) / bx\ (46 + 368) / xz'\ (69 + 678)$

.../...

Ensemble des monômes	Variable biforme $\alpha$	Résidus par		Produit des résidus
		$\alpha$	$\alpha'$	
ax (1+26) / ay (2+18) / bx (3+46) / by (4+38) / bz 5 / xy' 6 / xz' (7+69) / x'y 8 / yz' (9+78)	z	b 5	x (7+69) y (9+78)	bx (57 + 569) by (59 + 578)

D'où l'ensemble final : ax (1 + 26) / ay (2 + 18) / bx (3 + 46 + 57 + 569) / by (4 + 38 + 59 + 578) / bz 5 / xy'6 / xz' (7 + 69) / x'y 8 / yz' (9 + 78). On a trouvé directement les fonctions "Inclusion" relatives à chacun des impliquants premiers.

Remarque 4-17 :

La méthode de recherche de l'ensemble des bases d'une fonction est intéressante puisqu'elle permet d'en trouver la forme minimale. Mais elle est difficile à mettre en oeuvre, car elle exige l'affectation et la manipulation des indices liés à chacun des impliquants premiers.

Il est plus simple de trouver l'une des bases premières seulement par un processus d'élimination successive des impliquants premiers de la base complète. Il n'est alors plus nécessaire de faire intervenir les indices liés aux monômes.

La méthode consiste à considérer un monôme d'un ensemble et à tester si la somme des autres lui est ou non supérieure. Si ce test est positif, on peut alors former le monôme par consensus à partir des autres et il peut être éliminé. Si le test est négatif, le monôme considéré reste dans l'ensemble.

46 - TEST D'INCLUSION D'UN MONÔME DANS UN ENSEMBLE

Considérons un ensemble  $E_0$  de monômes  $X_1, \dots, X_n$  et un monôme  $X$  n'y figurant pas. Proposons-nous de tester la relation d'inclusion :

$$X \leq X_1 + \dots + X_n$$

La méthode est la suivante :

- a) On prend l'intersection de chaque monôme  $X_i$  de  $E_0$  avec  $X$ , ce qui nous donne un nouvel ensemble  $E_{01}$  (après suppression des monômes nuls).
- b) On supprime dans  $E_{01}$  les monômes inférieurs ou égaux à d'autres, ce qui nous donne un nouvel ensemble  $E_{02}$ .
- c) On remplace chaque monôme  $X.X_i$  de  $E_{02}$  par son résidu  $\frac{X.X_i}{X}$  obtenu par suppression dans son écriture des variables de  $X$ , ce qui donne l'ensemble  $E_{03}$ .
- d) On supprime jusqu'à épuisement des possibilités tout monôme de  $E_{03}$  contenant dans son écriture une variable monoforme. Notons qu'au cours de ces simplifications une variable biforme peut devenir monoforme puis disparaître. On obtient alors l'ensemble  $E_{04}$ , dans lequel les variables sont toutes biformes. Ce sont :  $X_1, \dots, X_j, \dots, X_\ell$ .
- e) On forme avec  $E_{04}$  l'ensemble initial  $E_{11}$ .
- f) On divise  $E_{11}$  en trois sous-ensembles :
  - $E_{12}$  qui contient les monômes n'ayant ni  $x_1$  ni  $x_1'$  dans leur écriture,
  - $E_{13}$  qui contient ceux ayant  $x_1$ ,
  - $E_{14}$  qui contient ceux ayant  $x_1'$ .

g) Etape relative à  $x_1$  :

On forme les consensus possibles par rapport à  $x_1$  entre les monômes de  $E_{13}$  et ceux de  $E_{14}$ , ce qui donne l'ensemble  $E_{15}$ .

On réunit  $E_{12}$  et  $E_{15}$  pour former après simplification un nouvel ensemble  $E_{16}$ .

On supprime dans  $E_{16}$  les monômes contenant dans leur écriture des variables monoformes, ce qui conduit à l'ensemble final  $E_{21}$ .

-----

Le calcul se poursuit ainsi par étapes successives, chacune d'elles étant relative à une variable  $x_j$ .

Etape relative à  $x_k$  :

On part de l'ensemble  $E_{k1}$  que l'on divise encore en trois sous-ensembles :  $E_{k2}$ ,  $E_{k3}$  et  $E_{k4}$ .

-----

Le calcul continue de la même façon et aboutit à  $E_{(k+1)1}$ .

Fin de calcul :

La fin du calcul s'obtient à la fin de la  $l$ -ième étape (relative à  $x_l$ ). A ce moment, deux cas sont possibles :

- L'ensemble  $E_{(l+1)1}^j$  contient 1. Le test est positif.
- L'ensemble " est vide. Le test est négatif.

Théorème 4-7

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inclusion soit vérifiée est que l'on trouve un 1 à la fin du calcul.

Remarque 4-18

Dès que l'on trouve au cours du calcul un ensemble contenant 1, on peut dire que le test sera positif.

De même, dès que l'on trouve un ensemble  $E_0 E_{01} E_{02} E_{04} E_{k1} E_{k6}$  vide, on peut dire que le test sera négatif.

Exemple 4-27 :

Soit le monôme  $X = ab$  et l'ensemble  $E_0 : ax / by / x'y' / cy / b'y / uv' / x'z' / at / bz / av / bt'$ .

Testons la véracité de la relation d'inclusion :

$$ab \leq ax + by + x'y' + cy + b'y + uv' + x'z' + at + bz + av + bt'$$

On a :

$$E_{01} : abx / aby / abx'y' / abcy / abuv' / abx'z' / abt / abz / abv / abt'$$

$$E_{02} : abx / aby / abx'y' / abuv' / abx'z' / abt / abz / abv / abt'$$

$$E_{03} : x / y / x'y' / uv' / x'z' / t / z / v / t'$$

$$E_{04} : x / y / x'y' / x'z' / t / z / t'$$

lère variable : x

$$E_{11} : x / y / x'y' / x'z' / t / z / t'$$

$$E_{12} : y / t / z / t'$$

$$E_{13} : x$$

$$E_{14} : x'y' / x'z'$$

$$E_{15} : y' / z'$$

$$E_{16} : y / t / z / t' / y' / z'$$

2ème variable : y

$$E_{21} : y / t / z / t' / y' / z'$$

$$E_{22} : t / z / t' / z'$$

$$E_{23} : y$$

$$E_{24} : y'$$

$$E_{25} : 1 \quad \text{Le test est positif.}$$

L'inclusion testée est donc vérifiée.

Supposons que l'on connaisse une fonction complète  $F$  par sa base complète  $A_1, \dots, A_n$ , dont on désire une base première quelconque.

Il suffit d'éliminer des impliquants de la base complète jusqu'à épuisement des cas possibles.

On considère successivement chaque  $A_i$  et on teste s'il est ou non inclus dans l'ensemble des monômes restants.

- Si le test est positif,  $A_i$  est exclu.
- Si le test est négatif,  $A_i$  est nécessaire et reste dans l'ensemble. Il s'agit soit d'un impliquant premier essentiel, soit d'un monôme devenu nécessaire à la suite de l'exclusion des impliquants considérés précédemment.

Lorsque tous les impliquants ont été testés, l'ensemble des monômes non exclus constitue une base première de la fonction

Exemple 4-28

Soit la fonction F donnée par sa base complète :  
 $ax / ay / bx / by / bz / xy' / xz' / x'y / yz'$

Proposons-nous d'en trouver une base première.

Test sur ax

$axy / abx / aby / ~~abxz~~ / axy' / axz' / ~~axyz'~~ / y / ~~b~~ / ~~by~~ / y' / ~~z'~~$

$y / y'$  - le test est positif - ax est exclu. Il reste l'ensemble :

$ay / bx / by / bz / xy' / xz' / x'y / yz'$

Test sur ay

$~~axy~~ / aby / ~~abyz~~ / ~~axyz'~~ / ax'y / ayz'$

$b / x' / z'$  - le test est négatif - ay est nécessaire.

L'ensemble considéré est inchangé et ay est souligné pour marquer qu'il a été testé. Il reste :

ay / bx / by / bz / xy' / xz' / x'y / yz'

Test sur bx

$~~axy~~ / bxy / bxz / bxy' / bxz' / ~~bxyz'~~$

$y / z / y' / z'$  - le test est positif et bx éliminé.

Il reste : ay / by / bz / xy' / xz' / x'y / yz'

Test sur by

$aby / byz / ~~bxyz'~~ / bx'y / byz'$

$a / z / x' / z'$  - le test est positif, by est éliminé.

Il reste : ay / bz / xy' / xz' / x'y / yz'

Test sur bz

abyz / bxy'z / bx'yz

ay / xy' / x'y - le test est négatif.

On a l'ensemble : ay / bz / xy' / xz' / x'y / yz'

Test sur xy'

bxy'z / xy'z'

bz / z' - test négatif

ay / bz / xy' / xz' / x'y / yz'

Test sur xz'

~~axyz'~~ / xy'z' / xyz'

y' / y - le test est positif

ay / bz / xy' / x'y / yz'

Test sur x'y

ax'y / bx'yz / x'yz'

a / bz / z' - test négatif

Test sur yz'

ayz' / x'yz'

a / x' - le test est négatif d'où l'ensemble final :

ay / bz / xy' / x'y / yz' qui constitue une base première de la fonction.





## 5 - ETUDE DES CONSENSUS D'ORDRE QUELCONQUE

51 - INCLUSION D'UN CONSENSUS D'ORDRE q DANS SES GENERATEURSDéfinition 5-1 :

On dit qu'un monôme X est INCLUS D'ORDRE ZERO AU MOINS dans un ensemble de termes  $A_1, \dots, A_p$  si l'on a l'inégalité :

$$X \leq A_1 + \dots + A_p$$

Définition 5-2 :

On dit qu'un monôme X est INCLUS D'ORDRE q AU MOINS dans un ensemble de monômes  $A_1^1, \dots, A_{p_1}^1$  lorsque, après q mises en facteur d'une variable quelconque dans la somme  $A_1^1 + \dots + A_{p_1}^1$ , de la forme :

$$x_j \cdot \sum_{1}^{k_j} \frac{A_{\tilde{a}}^j}{x_j} + \sum_{k_j+1}^{m_j} A_{\tilde{a}}^j + x_j' \sum_{m_j+1}^{p_j} \frac{A_{\tilde{a}}^j}{x_j'}$$

on aboutit à une somme  $A_{k_q+1}^q + \dots + A_{m_q}^q$  qui est encore supérieure ou égale à X.

Cette relation est encore dite relation d'INCLUSION D'ORDRE q AU MOINS.

Définition 5-3 :

On dit qu'une relation d'inclusion est D'ORDRE q lorsqu'elle est d'ordre q au moins et qu'elle n'est pas d'ordre q + 1 au moins.

Exemple 5-1 :

La relation :  $abcd \leq abx + cx' + ay + bcy' + az$   
est une relation d'inclusion d'ordre 1.

En effet :

1) elle n'est pas d'ordre 2 au moins ;

2) les relations d'inclusion :

$$abcd \leq abx + cx' + ay + bcy'$$

$$abcd \leq abx + cx' + az$$

$$abcd \leq ay + bcy' + az$$

sont d'ordre zéro au moins.

Définition 5-4 :

Une relation d'inclusion d'ordre  $q$  est dite **IRREDONDANTE** si en supprimant une variable quelconque dans l'écriture du premier membre, ou un monôme quelconque dans le second membre, la nouvelle relation ainsi trouvée n'est plus une relation d'inclusion d'ordre  $q$ .

Exemple 5-2 :

$$abc \leq abx + cx' + ay + by'$$

est une relation d'inclusion irrédondante d'ordre 1  
car on a :

$$bc \not\leq abx + cx' + ay + by'$$

$$abc \leq abx + cx' + ay \quad (\text{ordre zéro})$$

$$abc \leq abx + cx' + by' \quad (\text{ordre zéro})$$

$$abc \leq abx + ay + by' \quad (\text{ordre zéro})$$

$$abc \leq cx' + ay + by' \quad (\text{ordre zéro})$$

.../...

Nous pouvons alors constater qu'un consensus X d'ordre q est lié à ses générateurs par une relation d'inclusion d'ordre q.

En effet, considérons un état des variables qui fait  $X = 1$ . Toutes les variables monformes de l'égalité caractéristique valent 1. La somme  $A_1 + \dots + A_p$  est donc devenue la somme  $C_1 + \dots + C_p$  qui est égale à 1. Cette égalité étant d'ordre q, nous pouvons, après q mises en facteur d'une variable, trouver un polynôme  $C_{k_q+1} + \dots + C_{m_q}$  égal à 1, ce qui nous montre que l'on a bien

$$A_{k_q+1} + \dots + A_{m_q} \text{ égal à } 1.$$

La propriété est donc démontrée.

Nous pouvons encore dire, étant donné le caractère d'ir-rédondance de l'égalité caractéristique, que si on enlève un seul générateur de l'ensemble, la propriété précédente n'est plus vraie.

Montrons enfin que le consensus est le plus grand monôme la vérifiant. Considérons un ensemble  $E^q$  formé des monômes  $A_1, \dots, A_p$  et un terme A inclus d'ordre q dans cet ensemble et qui ne l'est plus si on supprime un seul monôme de cet ensemble.

On peut écrire  $A = B.C.D.$  avec :

- . B produit des variables de A monformes dans  $E^q$
- . C " " " " " biformes " "
- . D " " " " " absentes " "

Soit une variable x de C. Tous les monômes contenant x' dans leur écriture ont une intersection nulle avec A, donc peuvent être supprimés, ce qui est impossible. Il n'existe pas de telle variable x et C se réduit à 1 et A à B.D.

Tout  $B_i$  d'un  $A_i$  peut s'écrire :  $B_i = B_i^1 \cdot B_i^2$ , avec :

- $B_i^1$  = produit des variables de  $B_i$  figurant dans B
- $B_i^2$  = produit des variables de  $B_i$  ne figurant pas dans B.

$$\text{Nous avons : } A = \prod_1^p B_i^1$$

Faisons  $A = 1$ . On obtient comme somme des résidus des  $A_i$  une égalité irrédondante d'ordre q. Donc :

$$\sum_1^p B_i^2 \cdot C_i = 1 \text{ (ordre } q \text{ - irréd.)}$$

Dans une égalité irrédondante d'ordre quelconque, il ne peut pas y avoir de variables monofomes. Donc :

$$B_i^2 = 1 \text{ et } C_1 + \dots + C_p = 1 \text{ (} q \text{ - irréd.)}$$

Ceci nous montre que l'ensemble  $E^q$  admet un consensus d'ordre q, qui s'écrit :

$$X = \mathcal{C}^q(A_1 \dots A_p) = \prod_1^p B_i = \prod_1^p B_i^1$$

$$\text{Donc : } A = X \cdot D$$

X est donc supérieur ou égal à tout monôme A.

Nous pouvons alors énoncer le théorème :

Théorème 5-1 :

Un consensus d'ordre q est lié à ses générateurs, par une relation d'inclusion irrédondante d'ordre q, et inversement, à toute relation irrédondante d'ordre q correspond une telle relation de consensus.

.../...

Exemple 5-3 :

L'inclusion :  $abc \leq abx + cx' + ay + by'$  (ordre 1, irréd.)  
 nous montre que l'on a :

$$abc = \mathcal{C}^1(abx, cx', ay, by').$$

## 52 - REDUCTION DE L'ORDRE DES RELATIONS DE CONSENSUS

Soit l'ensemble  $E^q$  formé des monômes  $A_1, \dots, A_p$  dans lequel les variables  $x_1 \dots x_p$  sont biformes et le monôme  $X$  vérifiant la relation :

$$X = \mathcal{C}^q(A_1 \dots A_p)$$

On peut donc écrire, après redistribution des indices, son égalité caractéristique sous la forme :

$$x_1 \sum_{i=1}^k \frac{C_i}{x_1} + \sum_{i=k+1}^m C_i + x_1' \sum_{i=m+1}^p \frac{C_i}{x_1'} = 1 \quad (q \text{ irréd.})$$

D'où :

$$\sum_{i=k+1}^m C_i = 1 \quad (\text{ordre } q-1)$$

On peut supprimer les termes qui seraient inutiles dans cette égalité pour obtenir, après redistribution des indices, la relation :

$$\sum_{i=k+1}^{m'} C_i = 1 \quad (q-1, \text{ irréd.})$$

Les monômes  $A_{k+1}, \dots, A_m$  définissent un ensemble  $E_1^{q-1}$  qui admet un consensus  $Y_1$  d'ordre  $q-1$  :

$$Y_1 = \mathcal{C}^{q-1}(E_1^{q-1})$$

.../...

De cette nouvelle relation, on peut dire que, par rapport à la relation initiale :

- 1) L'ordre a diminué d'une unité.
- 2) La classe a diminué d'au moins deux unités.
- 3) Dans l'écriture de  $X$  figurent toutes les variables de  $Y_1$ .  
Donc :  $X \leq Y_1$
- 4) La variable  $x_1$  n'apparaît plus, ni dans l'écriture des monômes de  $E_1^{q-1}$ , ni dans celle de  $Y_1$ .

On aurait pu, au lieu de prendre la variable  $x_1$ , prendre une autre variable  $x_j$  biforme dans  $E^q$ . On aurait obtenu encore un consensus  $Y_j$  jouissant de propriétés analogues. Les variables  $x_1, \dots, x_\ell$  permettent donc de définir un ensemble de consensus  $Y_1, \dots, Y_\ell$  d'ordre  $q-1$ .

Tout monôme  $A_j$  de l'ensemble  $E^q$  figure forcément dans l'une des générations d'ordre  $q-1$  des consensus précédents. En effet, s'il existait un  $A_j$  inutile, on pourrait le supprimer, ce qui est contraire à l'hypothèse d'irrédondance d'ordre  $q$  de l'égalité caractéristique de la relation initiale.

Chaque variable de  $A_j$  monôme du sous-ensemble  $E_j^{q-1}$ , monoforme dans  $E^q$ , se retrouve donc dans  $Y_j$ . Toutes les variables monoformes dans  $E^q$  se retrouvent donc simultanément dans le produit  $Y_1 \dots Y_\ell$  et dans  $X$ .

$$\text{D'où : } X \geq Y_1 \dots Y_\ell$$

Comme on a d'autre part :  $X \leq Y_j$ , on a donc :  $X = Y_1 \dots Y_\ell$

D'où le théorème :

.../...

Théorème 5-2 :

Toute relation de consensus d'ordre  $q$  peut être réduite en relations de consensus d'ordre  $q-1$  (  $q$  étant le nombre de variables dans l'égalité caractéristique d'ordre  $q$ ), chaque relation de rang  $j$  ne comprenant pas ni dans son écriture ni dans son égalité caractéristique la variable biforme  $x_j$ . Le consensus d'ordre  $q$  est le produit de ces consensus d'ordre  $q-1$ .

Exemple 5-4 :

Soit la relation :

$$X = \mathcal{C}^2(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7) = \mathcal{C}^2(G)$$

avec :	$X = abcd$	$A_1 = ax$
	$A_2 = az$	$A_3 = by'$
	$A_4 = cz'$	$A_5 = cu$
	$A_6 = du'$	$A_7 = x'y$

L'égalité caractéristique s'écrit :

$$x + z + y' + z' + u + u' + x'y = 1 \text{ (ordre 2 irréd.)}$$

Réduisons-la par rapport à  $x$ . On obtient en supprimant les termes contenant  $x$  ou  $x'$  :

$$z + y' + z' + u + u' = 1 \text{ (ordre 1),}$$

égalité que l'on peut rendre irrédondante :



$z + z' + u + u' = 1$  (ordre 1, irréd.) qui est l'égalité caractéristique de la relation d'ordre 1 :

$$Y_x = \mathcal{C}^1(A_2, A_4, A_5, A_6) = \mathcal{C}^1(G_x), \text{ avec } Y_x = \text{acd.}$$

On obtient de la même façon :

$$Y_y = \text{acd} = \mathcal{C}^1(A_2, A_4, A_5, A_6) = \mathcal{C}^1(G_y)$$

$$Y_z = \text{abcd} = \mathcal{C}^1(A_1, A_3, A_5, A_6, A_7) = \mathcal{C}^1(G_z)$$

$$Y_u = \text{abc} = \mathcal{C}^1(A_1, A_2, A_3, A_4, A_7) = \mathcal{C}^1(G_u)$$

On a bien :

$$X = Y_x \cdot Y_y \cdot Y_z \cdot Y_u$$

$$G = G_u \cup G_y \cup G_z \cup G_x$$

Remarque 5-1 :

Considérons un consensus  $Y_i$  d'ordre  $q-1$  figurant dans l'ensemble  $Y_1, \dots, Y_\ell$ . On peut lui associer la suite  $V_i$  des variables figurant dans son égalité caractéristique.

Les variables de  $Y_i$  étant des variables monoformes dans l'égalité caractéristique du consensus  $X$  d'ordre  $q$ , et celles figurant dans  $V_i$  des variables biformes, cette propriété étant commune à tous les  $Y_i$  de  $Y_1$  à  $Y_\ell$ , nous pouvons dire :

Il n'y aura jamais une variable figurant simultanément dans l'un des consensus  $Y_i$  et dans la suite  $V_j$  associée à un autre  $Y_j$ .

Remarque 5-2 :

Associons à chaque consensus  $Y_i$  les variables biformes dans  $E^q$  et qui ne figurent pas dans  $V_i$ . Soit  $W^*$  cet ensemble. On a forcément :

- 1)  $x_1 \in W^*$
- 2) La réunion des ensembles  $W_i^*$  de  $W_1^*$  à  $W_l^*$  fournit forcément l'ensemble  $x_1, \dots, x_l$  des variables biformes dans l'égalité caractéristique.

Remarque 5-3 :

Par le processus inverse de celui utilisé dans la réduction de l'ordre, nous pourrions passer des consensus d'ordre  $q-1$  aux consensus d'ordre  $q$ . Comme on connaît, par ailleurs, plusieurs méthodes pour obtenir les consensus d'ordre zéro, il sera donc possible de trouver les relations de consensus d'ordre quelconque.

53 - RECHERCHE DES RELATIONS DE CONSENSUS D'ORDRE  $q$ 

On peut encore former une fonction  $\mathcal{V}$  "Véracité", fonction des variables associées d'une part à la présence des variables du problème dans l'écriture d'un monôme  $X$  que l'on forme, d'autre part des variables associées  $u, \dots, v$  à la présence des monômes  $A_u, \dots, A_v$ , générateurs possibles dans un ensemble que l'on constitue arbitrairement. Un état des variables associées étant donné, la fonction vaut 1 si l'on a l'inclusion d'ordre  $q$  :  $X \leq A_u + \dots + A_v$  ( $q$ ). Les impliquants premiers de  $\mathcal{V}$  donnent les relations de consensus d'ordre  $q$ .

On dispose donc d'un processus pour trouver l'ensemble des relations de consensus d'ordre  $q$  admettant comme générateurs des monômes pris dans un ensemble donné. Toutefois, le calcul est difficile et on a intérêt à utiliser une méthode plus simple basée sur les propriétés mises en évidence par la réduction de l'ordre.

Considérons donc un ensemble donné de monômes  $A_1, \dots, A_n$  où les variables  $x_1, \dots, x_m$  sont biformes, et cherchons un processus susceptible de nous donner les relations de consensus d'ordre  $q$  de la forme :

$$X = \mathcal{C}^q(A_u \dots A_v) \quad (1) \text{ avec } A_u, \dots, A_v \text{ pris dans l'ensemble } A_1, \dots, A_n$$

Supposons connu l'ensemble des consensus  $Y_i$  de  $Y_1$  à  $Y_r$  d'ordre  $q-1$  admettant également comme générateurs des monomes de l'ensemble initial.

Réduisons l'ordre de la relation (1) par rapport aux variables  $x_s, \dots, x_t$  biformes dans son égalité caractéristique. Nous obtenons les consensus  $Y_s, \dots, Y_t$  d'ordre  $q-1$ , qui figurent donc forcément dans l'ensemble des consensus  $Y_i$ . Si ces monômes étaient connus, leur produit donnerait  $X$ .

Nous allons donc former des produits en gardant en mémoire les indices des générateurs de façon à connaître la génération de tout consensus d'ordre  $q$  formé. Nous aurons donc à manipuler des groupes  $Y$  et  $I$  avec :  
 $Y$  = monomes produit de variables sous leur forme directe ou complémentée et  $I$  ensemble d'indices de monomes initiaux.

Le produit de deux termes  $Y_1 I_1$  et  $Y_2 I_2$  est  $Y_3 I_3$  avec  $Y_3 = Y_1 \cdot Y_2$  et  $I_3 = I_1 \cup I_2$

Lorsque l'on a formé tous les produits possibles, on est sûr que tous les produits relatifs à des relations de consensus existantes d'ordre  $q$  ont été trouvés.

Il faut encore les distinguer des autres.

#### Remarque 5-4 :

Tenons compte d'abord de la remarque 5-1 et affectons à chaque consensus  $Y$  d'ordre  $q-1$  la suite  $V$  des variables biformes dans son égalité caractéristique. Décidons de ne pas former le produit de deux termes dont le  $Y_i$  de l'un contient une variable figurant dans le  $V_j$  de l'autre. Nous évitons ainsi la formation de monômes inutiles.

Le produit de deux termes  $Y_1 I_1 V_1$  et  $Y_2 I_2 V_2$  est  $Y_3 I_3 V_3$  avec :

$$Y_3 = Y_1 \cdot Y_2$$

$$I_3 = I_1 \cup I_2$$

$$V_3 = V_1 \cup V_2$$

Tenons compte de la remarque 5-2 et associons à chaque consensus  $Y_i$  d'ordre  $q-1$  la suite  $W_i$  des variables biformes dans l'ensemble initial ne figurant pas dans son écriture. Nous avons pour chaque  $Y$  :

$$W_i^* \subseteq W_i$$

Nous savons que la réunion des  $W_i^*$  donnait l'ensemble des variables biformes de l'égalité caractéristique : Nous pouvons donc affirmer que la réunion des  $W_i$  fournira un ensemble qui admettra comme sous-ensemble la totalité des variables biformes du problème ne figurant pas dans l'écriture du consensus  $X$  d'ordre  $q$  cherché.

Nous pouvons donc définir le produit de deux termes  $Y_1 I_1 V_1 W_1$  et  $Y_2 I_2 V_2 W_2$  comme le terme  $Y_3 I_3 V_3 W_3$  avec :

$$Y_3 = Y_1 \cdot Y_2$$

$$I_3 = I_1 \cup I_2$$

$$V_3 = V_1 \cup V_2$$

$$W_3 = W_1 \cup W_2$$

Inversement considérons un produit  $Y$  avec ses ensembles associés  $V$ ,  $I$  et  $W$ . Supposons que l'ensemble des variables biformes du problème figure dans la réunion des variables de  $Y$  et  $W$ . Lui correspond-il une relation de consensus d'ordre  $q$  ?

Montrons que  $Y$  est égal ou inférieur à un consensus d'ordre  $q$  dont les indices des générateurs sont compris dans le groupe  $I$ .

.../...

Grâce à l'application de la remarque 5-4, aucune variable n'est commune à Y et V. Chaque variable des monômes dont les indices forment I figure dans Y si elle est monoforme, dans V si elle est biforme dans l'ensemble des termes repérés par la suite I.

Considérons la somme S des résidus obtenus en supprimant dans chaque monôme d'indice figurant dans I les variables monoformes dans l'ensemble des monômes dont les indices forment I. Nous obtenons une égalité d'ordre q au moins.

En effet, considérons une variable  $x_j$  figurant dans V. Elle figure aussi dans le lot W où elle a été amenée par un consensus  $Y_j$  d'ordre  $q-1$  ne comprenant pas  $x_j$  dans son égalité caractéristique. Si on la met en facteur, la somme des monômes pris dans la somme S ne contenant ni  $x$  ni  $x'$  constitue une égalité d'ordre  $q-1$  au moins. Donc, par définition, la somme S est égale à 1 d'ordre q. Rendons cette égalité à 1 d'ordre 1 irrédondante. Les résidus restants proviennent des monômes  $A_u, \dots, A_v$  qui admettent un consensus X d'ordre q.

On a la relation :  $Y \leq X$

Théorème 5-3 :

L'existence d'un terme YIVW formé par produit tel que son groupe W contienne toutes les variables biformes du problème ne figurant pas dans son groupe Y montre que le monôme Y est inférieur ou égal à un consensus X d'ordre q. Les indices de ses générateurs figurent tous dans le groupe I.

Remarque 5-5 :

Supposons que l'on trouve à un moment quelconque du calcul deux termes tels que l'on ait :  $Y_i \leq Y_j$  et  $I_i \supseteq I_j$ . Ceci signifie que toutes les variables figurant dans  $Y_j$  figurent dans  $Y_i$  et que tous les indices figurant dans  $I_j$  se trouvent également dans  $I_i$ .

.../...

Il en résulte que les variables formant  $V_j$ , biformes dans les monômes représentés par  $I_j$ , sont forcément biformes dans l'ensemble représenté par  $I_i$  et figurent donc dans  $V_i$ .

On a donc :  $\left[ (Y_i \leq Y_j) \text{ et } (I_i \supseteq I_j) \right] \implies (V_j \subseteq V_i)$

Remarque 5-6 :

Supposons que l'on ait au cours des calculs deux termes :  $Y_1 I_1 V_1 W_1$  et  $Y_2 I_2 V_2 W_2$  tels que :

$$Y_1 \leq Y_2$$

$$I_1 \supseteq I_2$$

$$V_1 \supseteq V_2$$

$$W_1 \subseteq W_2$$

Tout consensus d'ordre  $q$  formé avec le premier au cours du calcul peut être formé de la même façon avec le second. On arrivera donc à deux produits finaux dont on peut dire a priori que le second permettra l'élimination du premier.

Donc, il suffit de ne garder que  $Y_2 I_2 V_2 W_2$  et on peut éliminer  $Y_1 I_1 V_1 W_1$ .

Nous sommes donc amenés à poser :  $Q = YIVW$

- Y est un monôme formé de variables figurant dans l'ensemble initial (sous leur forme directe ou complémentée).
- I est la suite des indices de monômes initiaux constituant une génération d'ordre  $q-1$  de Y.
- V est une suite de variables (sous leur forme directe), ces variables étant forcément biformes dans l'ensemble initial et étant celles qui figurent dans l'égalité caractéristique de la relation de consensus exprimée par Y et I.

- W est une suite de variables (sous leur forme directe), ces variables étant forcément biformes dans l'ensemble initial, et étant celles qui ne figurent ni dans X (sous une forme quelconque), ni dans V.

Les groupes V et W étant formés de variables d'écriture identique mais n'ayant pas la même signification, seront séparés par un tiret pour ne pas les confondre. Nous pouvons alors définir des relations d'ordre.

On dira que deux termes  $Q_1$  et  $Q_2$  sont liés par la relation  $Q_1 = Q_2$ , si on a simultanément :  $Y_1 = Y_2$ ,  $I_1 = I_2$ ,  $V_1 = V_2$ ,  $W_1 = W_2$

On dira que  $Q_1 < Q_2$  si on a :  $Q_1 \neq Q_2$  et  $Y_1 I_1 V_1 \leq Y_2 I_2 V_2$  et  $W_1 = W_2$ , ou  $Y_1 I_1 V_1 = Y_2 I_2 V_2$  et  $W_1 \subset W_2$ .

Au cours des calculs on sera donc amené à éliminer  $Q_1$  s'il en existe un autre  $Q_2$  tel que :  $Q_1 \leq Q_2$ .

#### Exemple 5-5 :

Soit l'ensemble des monômes initiaux :  $ax/az/by'/cz'/cu/du'/x'y$

Numérotons-les et cherchons les relations de consensus d'ordre zéro :

$ax \ 1/az \ 2/by' \ 3/cz' \ 4/cu \ 5/du' \ 6/x'y \ 7/ay \ 17 \ x/bx' \ 37 \ y/ab \ 137 \ xy/$   
 $ac \ 24 \ z/cd \ 56 \ u.$

A ces douze relations de consensus, nous pouvons associer les termes Q :

$Q_1 = ax \ 1 \ -- \ yzu/Q_2 = az \ 2 \ -- \ xyu/..../Q_8 = ay \ 17 \ x \ - \ zu/$   
 $..../ Q_{12} = cd \ 56 \ u \ - \ xyz.$

.../...

Remarque 5-7 :

Supposons que l'on ait au cours du calcul deux termes tels que le  $W_i$  de l'un soit inférieur ou égal au  $W_j$  de l'autre. Le produit  $Q_k$  sera alors tel que :  $W_k = W_i$ , et comme on aura forcément  $W_k I_k V_k \leq W_i I_i V_i$ ,  $Q_k$  sera éliminé. Il n'est donc utile de faire le produit de deux termes  $Q_i$  et  $Q_j$  que si  $W_i \not\subseteq W_j$  (c'est-à-dire s'il existe au moins dans chaque  $W_i$  une variable ne figurant pas dans l'autre).

Remarque 5-8 :

Il en résulte en particulier que tous les termes  $Q$  dont les groupes  $Y I V$  sont tels que toutes les variables biformes du problème  $y$  figurent, auront un  $W$  vide, donc ne pourront donner aucun terme utile.

Remarque 5-9 :

Considérons une relation de consensus de classe 1 d'ordre  $q-1$ . Il lui correspond un terme  $Q_1$  dont le groupe  $W_1$  contient toutes les variables biformes du problème ne figurant pas dans son groupe  $Y_1$ , donc un terme qui sera gardé dans ceux correspondant aux relations de consensus d'ordre  $q$ .

On retrouve donc bien là la propriété qu'un consensus de classe 1 est d'ordre quelconque.

Remarque 5-10 :

Considérons un terme  $Q_1$  dont les groupes  $Y_1$  et  $W_1$  contiennent à eux deux l'ensemble des variables biformes du problème.



Supposons qu'on utilise pour former le produit :  $Q_3 = Q_1 \cdot Q_2$ ,  $Q_2$  étant un autre terme.

Le monôme  $Y_1$  (ou un autre  $Y_1^*$  plus grand) figurera forcément dans l'ensemble des consensus  $X$  trouvés. Donc  $Y_3 I_3$  qui est inférieur ou égal à  $Y_1 I_1$  sera éliminé.

Il est inutile d'utiliser  $Q_1$  pour former des termes nouveaux.

On peut alors énoncer l'algorithme :

Algorithme de recherche des consensus d'ordre  $q$

Nous supposons connu l'ensemble des termes  $Q$  relatifs aux relations d'ordre  $q-1$ . Nous les rangeons dans deux ensembles  $E_1$  et  $E_2$  :

- $E_2$  contient les termes  $Q$  tels que l'ensemble des variables biformes du problème ne figure pas dans ses groupes  $Y$  et  $W$ .
- $E_1$  contient les autres.

Nous formons de toutes les façons possibles les produits de deux termes de l'ensemble  $E_2$ . Soit :  $Q_3 = Q_1 \cdot Q_2$ , un terme formé.  $Q_3$  sera placé dans  $E_1$  ou  $E_2$  suivant qu'il contient ou non l'ensemble des variables biformes dans ses groupes  $Y$  et  $W$ .

En le rangeant dans l'ensemble correspondant, on effectue les simplifications possibles. Un terme  $Q_i$  est éliminé s'il en existe un autre  $Q_j$  tel que :  $Q_i \leq Q_j$ .

Lorsque l'on ne peut plus former de termes nouveaux, le calcul est terminé et l'ensemble  $E_1$  contient tous les termes relatifs aux consensus d'ordre  $q$  cherchés, et uniquement eux.

On tient compte évidemment dans ce calcul des remarques 5-4 et 5-7. La remarque 5-8 nous permet de supprimer dans  $E_2$  les termes dont le  $W$  est vide.

Remarque 5-11 :

Le calcul peut être fait par étapes successives. Dans chaque étape, on considère un terme de  $E_2$  et on l'élimine après l'avoir comparé à tous les autres du tableau  $E_2$ .

Remarque 5-12 :

En rangeant un terme dans l'ensemble  $E_1$ , on peut éliminer son groupe  $W$  associé qui n'apporte plus par la suite d'information utile. On peut donc immédiatement ranger dans  $E_1$  les termes  $YI$  correspondant aux relations triviales de classe 1.

Exemple 5-6 : (suite de l'exemple 5-5)

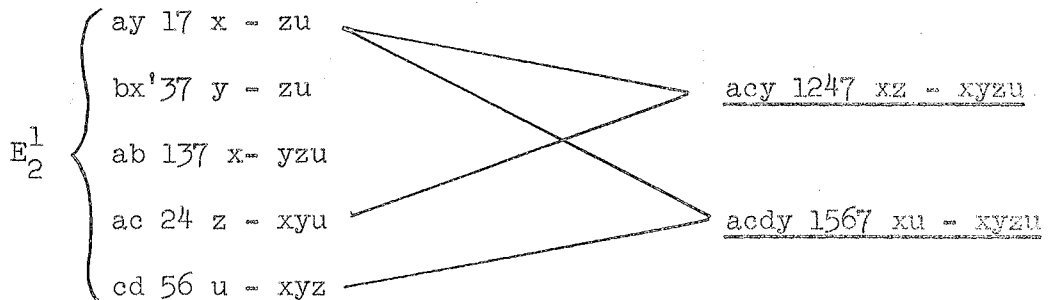
Les consensus d'ordre zéro sont connus et sont donnés par les termes :  $ax \ 1/az \ 2/by \ 3/cz \ 4/cu \ 5/du \ 6/x'y \ 7/ay \ 17 \ x/bx \ 37 \ y/ab \ 137 \ xy/ac \ 24 \ z/cd \ 56 \ u$ .

Nous pouvons alors effectuer le calcul des consensus d'ordre 1.

Recherche des consensus d'ordre 1 :

1ère étape : élimination de  $ay \ 17 \ x - zu$

$E_1^1 : \left\{ \begin{array}{l} \text{solutions triviales : } ax \ 1/az \ 2/\dots/x'y \ 7 \end{array} \right.$



(Les termes soulignés sont ceux qui passent dans  $E_1$ ).

2e étape : élimination de  $bx'37 y - zu$

$$E_1^2 = E_1^1 / acy'1247 xz / acdy'1567 xu$$

$$E_2^2 \left\{ \begin{array}{l} bx'37 y - zu \\ ab'137 x - yzu \\ ac'24 z - xyu \\ cd'56 u - xyz \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \underline{abcx'2347 yz - xyzu} \\ \xrightarrow{\quad} \underline{bcdx'3567 yu - xyzu} \end{array}$$

3e étape : élimination de  $ab'137 xy - zu$

$$E_1^3 \left\{ \begin{array}{l} E_1^2 / abcx'2347 yz / bcdx'3567 yu \\ ab'137 xy - zu \\ ac'24 z - xyu \\ cd'56 u - xyz \end{array} \right. \begin{array}{l} \xrightarrow{\quad} \underline{abc'12347 xyz - xyzu} \\ \xrightarrow{\quad} \underline{abcd'13567 xyu - xyzu} \end{array}$$

4e étape : élimination de  $ac'24 z - yzu$

$$E_1^4 \left\{ \begin{array}{l} E_1^3 / abc'12347 xyz / abcd'13567 xyu \\ ac'24 z - yzu \\ cd'56 u - xyz \end{array} \right. \xrightarrow{\quad} \underline{acd'2456 zu - xyzu}$$

5e étape : élimination de  $cd'56 u - xyz$

$$E_1^5 = E_1^4$$

$$E_2^5 \left\{ \begin{array}{l} cd'56 u - xyz \end{array} \right.$$

Le calcul est terminé. Les termes intéressants correspondant à des relations de consensus d'ordre 1 non triviales sont :

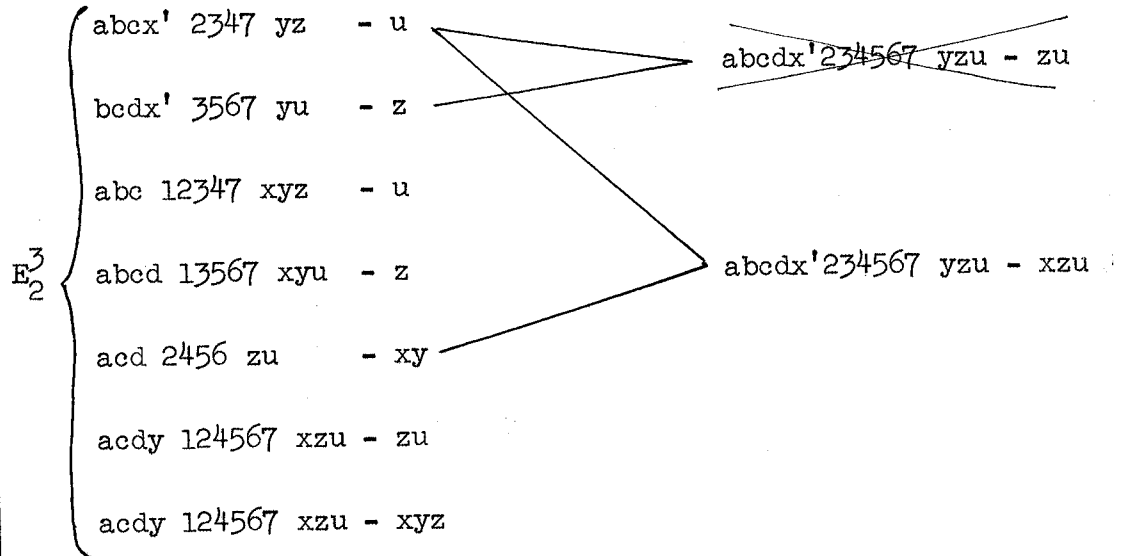
$acy'1247 xz / acdy'1567 xu / abcx'2347 yz / bcdx'3567 yu / abc'12347 xyz / abcd'13567 xyu / acd'2456 zu.$

.../...



3e étape : élimination de  $abcx' 2347 yz - u$

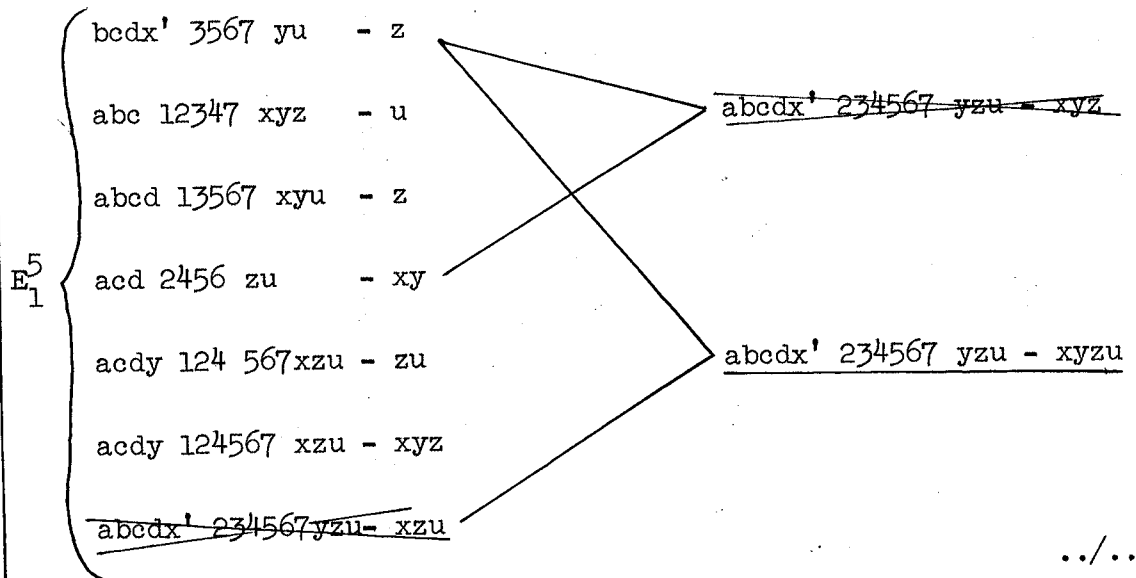
$$E_1^3 = E_1^2$$



Le terme  $abcdx' 234567 yzu - zu$  disparaît comme inclus dans  $abcdx' 234567 yzu - xzu$ .

4e étape : élimination de  $bc dx' 3567 yu - z$

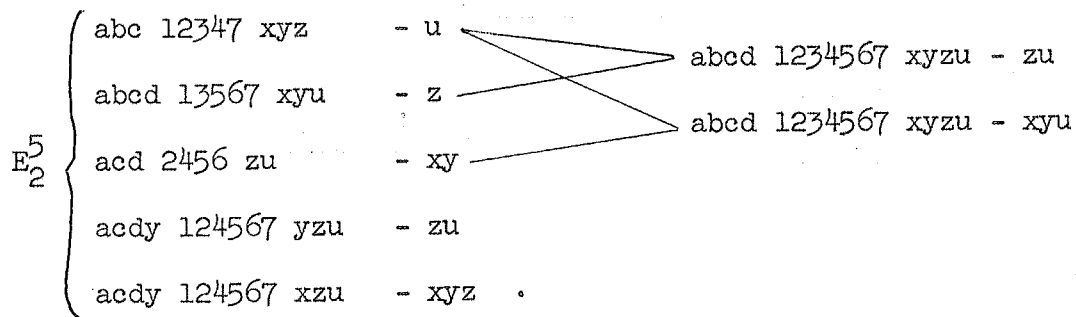
$$E_1^4 = E_1^3$$



.../...

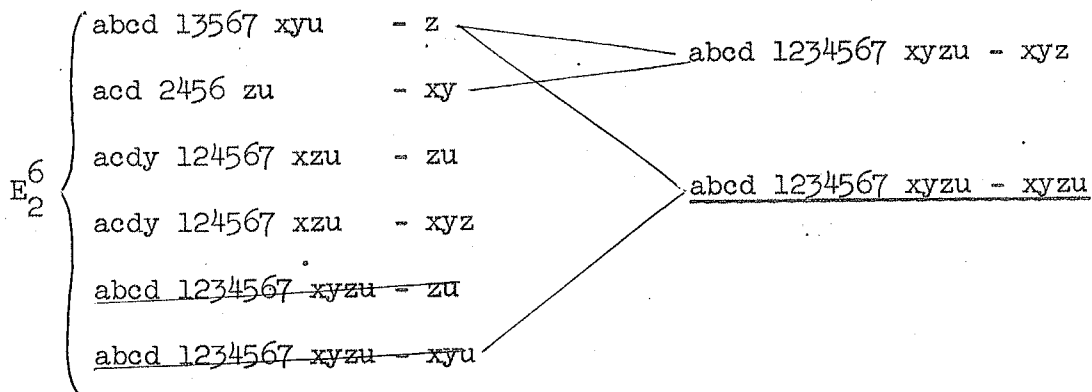
5e étape : élimination de abc 12347 xyz - u

$$E_1^5 = E_1^4 + abcdx' 234567 yzu$$



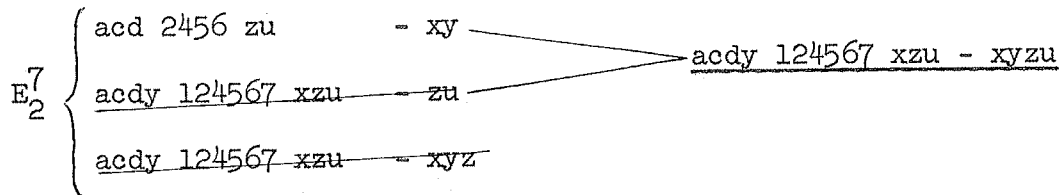
6e étape : élimination de abcd 13567 xyu - z

$$E_1^6 = E_1^5$$



7e étape : élimination de acd 2456 zu - xy

$$E_1^7 = E_1^6 + abcd 1234567 xyzu$$



8e étape :  $E_1^8 = E_1^7 + \text{acdy } 124567 \text{ xzu}$

$E_2^8$  : vide.

Le calcul relatif à l'ordre 2 est terminé. On a trouvé trois relations de consensus non triviales d'ordre 2.

$$\text{abcdx}' = \mathcal{C}^2 \quad (A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7)$$

$$\text{abcd} = \mathcal{C}^2 \quad (A_1 A_2 A_3 A_4 A_5 A_6 A_7)$$

$$\text{acdy} = \mathcal{C}^2 \quad (A_1 A_2 A_4 A_5 A_6 A_7)$$

### Consensus d'ordre 3

Il n'y a aucun terme initial dans l'ensemble  $E_2$  car tous les W sont vides.

Le calcul est terminé.

### Remarque 5-13 :

Lorsqu'on opère à la main, on peut encore fusionner les ensembles  $E_1$  et  $E_2$ , la recherche des produits utiles entre le terme en cours d'élimination et l'un des produits formés avec lui ne pouvant donner aucun terme utile nouveau.

On progresse alors dans un ensemble en rangeant tous les produits intéressants trouvés à la fin après avoir effectué les simplifications possibles.

Dès que l'étape relative à un terme est terminée, on le barre dans l'ensemble, sauf si la réunion de son groupe Y et de son groupe W contient toutes les variables biformes du problème.

Les calculs sont alors très réduits :

../...

Exemple 5-7 : reprenons l'exemple 5-6

On dispose des relations de consensus d'ordre zéro :

$ax^1 / az^2 / by^3 / cz^4 / cu^5 / du^6 / x^1y^7 / ay^1x^7 /$   
 $bx^1z^7y / ab^1z^7xy / ac^2z^4 / cd^5u.$

1ère étape : ordre 1 :

~~$ay^1x^7z^7u / bx^1z^7y^7z^7u / ab^1z^7xy^7z^7u / ac^2z^4xy^7u /$~~   
 ~~$cd^5u^7xyz / acy^1z^4x^7z^7 - xyz^7u / acdy^1z^4x^7u^7 - xyz^7u /$~~   
 ~~$abcx^1z^4y^7z^7 - xyz^7u / bcdx^1z^5y^7z^7u - xyz^7u / abc^1z^3z^4y^7z^7 -$~~   
 ~~$xyz^7u / abcd^1z^5y^7z^7u - xyz^7u / acd^2z^4z^6z^7u - xyz^7u.$~~

(en dehors des solutions triviales).

2ème étape : ordre 2 :

~~$acy^1z^4x^7z^7u^7 / acdy^1z^5x^7z^7u^7 - z^7 / abcx^1z^4y^7z^7u^7 - u^7 /$~~   
 ~~$bcdx^1z^5y^7z^7u^7 - z^7 / abc^1z^3z^4y^7z^7u^7 - u^7 / abcd^1z^5y^7z^7u^7 - z^7 /$~~   
 ~~$acd^2z^4z^6z^7u^7 - xy^7 / acdy^1z^4z^5z^6z^7x^7z^7u^7 - zu^7 / acdy^1z^4z^5z^6z^7x^7z^7u^7 -$~~   
 ~~$xyz^7 / abcdx^1z^4z^5z^6z^7y^7z^7u^7 - zu^7 / abcdx^1z^4z^5z^6z^7y^7z^7u^7 - xy^7 /$~~   
 ~~$abcdx^1z^4z^5z^6z^7y^7z^7u^7 - xyz^7 / abcdx^1z^4z^5z^6z^7y^7z^7u^7 - xyz^7u / abcd^1z^5z^4z^5z^6z^7$~~   
 ~~$z^7xyz^7u^7 - zu^7 / abcd^1z^5z^4z^5z^6z^7xyz^7u^7 - xy^7u / abcd^1z^5z^4z^5z^6z^7$~~   
 ~~$xyz^7u^7 - xyz^7 / abcd^1z^5z^4z^5z^6z^7xyz^7u^7 - xyz^7u / acdy^1z^4z^5z^6z^7x^7z^7u^7 - xyz^7u.$~~

3ème étape : ordre 3 :

Pas de termes initiaux.

Le calcul est terminé.



54 - BASES IRREDONDANTES D'ORDRE q

Considérons une fonction quelconque F donnée par sa base complète  $A_1, \dots, A_n$ , et reprenons le processus de formation des bases.

Nous allons introduire des variables et des fonctions associées comme dans le recherche des bases premières. Soit  $i$  une variable associée à la présence de  $A_i$  dans un ensemble d'impliquants premiers que nous décidons de former arbitrairement. A chaque état possible des variables associées  $1, \dots, n$  correspond un ensemble d'impliquants premiers  $A_r, \dots, A_s$  formant un sous-ensemble de la base complète. Le fait que la somme de ces monômes est supérieure ou égale à  $A_i$  d'ordre q apparaît comme une fonction qui sera appelée fonction INCLUSION  $\mathcal{Y}_i^q$  RELATIVE à  $A_i$ .

La fonction  $\mathcal{Y}_i$  qui est apparue dans la recherche des bases premières est donc un cas particulier de  $\mathcal{Y}_i^q$  pour  $q = 0$ . Comme nous le faisons généralement, l'absence de l'indice supérieur q signifie que l'ordre de la fonction "Inclusion" considérée est zéro.

Nous avons la propriété :

Théorème 5-4 :

A tout impliquant premier  $r \dots s$  de  $\mathcal{Y}_i^q$  correspond une relation de consensus :  $A_j = \mathcal{C}^q(A_r \dots A_s)$  d'ordre q, et inversement.

Il est simple de trouver les fonctions  $\mathcal{Y}_i^q$  puisque l'on dispose d'algorithmes pour la recherche des relations d'ordre q.

Remarque 5-14 :

Tout impliquant de  $\mathcal{Y}_i^q$  est forcément impliquant de  $\mathcal{Y}_i^{q-k}$  (pour k supérieur ou égal à 1). Donc, nous avons :

$$\mathcal{Y}_i^q \leq \mathcal{Y}_i^{q-k}$$

.../...

Le produit des fonctions  $\gamma_1^q$  à  $\gamma_n^q$  est une fonction que nous pouvons encore introduire.

Définition 5-4 :

On appelle fonction BASE D'ORDRE  $q$  d'une fonction, le produit des fonctions "Inclusion d'ordre  $q$ " relatives à ses impliquants premiers.

Cette fonction est notée  $\mathcal{B}^q$ .

Tout impliquant de  $\mathcal{B}^q$  définit un ensemble de monômes qui est une BASE D'ORDRE  $q$  de  $F$ .

A un impliquant premier de  $\mathcal{B}^q$  correspond une base irrédondante d'ordre  $q$  de  $F$  par définition.

Une base première est donc une base irrédondante d'ordre zéro.

Remarque 5-15 :

Pour  $q = 0$ , on retrouve les fonctions  $\mathcal{B}$  définies lors de la recherche des bases premières.

Remarque 5-16 :

Les bases d'ordre  $q$  d'une fonction  $F$  ont une propriété très intéressante. Si l'on considère un impliquant premier quelconque  $A$  de  $F$ , on peut trouver un ensemble de monômes  $A_u, \dots, A_v$  pris dans la base tels que :

$$A_i = \mathcal{C}^q(A_u \dots A_v)$$

Remarque 5-17 :

Nous trouvons au cours des calculs des fonctions "Inclusion" de la forme :  $\gamma_i^q = i$ . L'impliquant  $A_i$  est alors impliquant ESSENTIEL pour toute base d'ordre  $q$ , car il y figurera forcément.

Un impliquant essentiel pour une base d'ordre  $q$  l'est forcément pour toute base d'ordre supérieur, la réciproque n'étant pas vraie.

Remarque 5-18 :

La classe augmentant avec l'ordre, on n'aura plus à partir d'une certaine valeur  $q_1$  de l'ordre qu'une seule base irrédondante d'ordre  $q_2$  pour  $q_2 \gg q_1$  : c'est la base complète.

Remarque 5-19 :

Dans la recherche des bases, un terme trouvé ne pourra être intéressant que s'il correspond à un consensus qui soit impliquant premier de la fonction. Or l'intersection de deux impliquants premiers ne peut jamais être un impliquant premier.

De ce fait, on est amené à distinguer dans les termes initiaux, ceux qui sont relatifs à chacun des impliquants premiers, et à faire les calculs entre eux seulement, de façon à ne pas former de termes à priori inutiles.

Si on n'a qu'un seul terme initial relatif à un impliquant premier, il ne pourra que rester lui-même et on peut donc le supprimer de suite. Cet impliquant devient alors essentiel.

Remarque 5-20 :

Dans l'ensemble des termes initiaux, pour le calcul des bases d'ordre  $q$ , on peut supprimer les indices des impliquants premiers  $A_{\lambda}$  apparus comme essentiels au cours de l'étape précédente, c'est-à-dire tels que :  $y_i^{q-1} = i$ . On obtient ainsi des termes plus simples dont certains peuvent alors être éliminés suivant les règles habituelles, ce qui simplifie les calculs.

Un terme de la forme XIV - W initial, tel que tous les monômes d'indices formant I sont essentiels, s'écrit alors: X - V - W.

En fin de calcul, si on retrouve des termes de cette forme, on sait de suite que X ne figurera pas dans aucune des bases irrédondantes.

Exemple 5-8 :

Soit la fonction F donnée par sa base complète : ab / ac / ax / ay / az / bx' / by' / bz' / cx' / yz'.

Proposons-nous de trouver ses bases irrédondantes d'ordre quelconque.

1) ordre zéro au moins

Numérotons les monômes et cherchons les relations de consensus.

ab 0 / ac 1 / ax 2 / ay 3 / az 4 / bx'5 / by'6 / bz'7 / cx'8 / yz'9 / ab 25 x / ac 28 x / ab 36 y / ab 47 z / ay 49 z / bz'69 y / ab 469 yz.

D'où les fonctions inclusions d'ordre zéro :

$$\text{Pour ab : } \gamma_0^0 = 0 + \cancel{25} + \cancel{36} + \cancel{47} + \cancel{469}$$

$$\text{ac : } \gamma_1^0 = 1 + \cancel{28}$$

$$\text{ax : } \gamma_2^0 = 2$$

$$\text{ay : } \gamma_3^0 = 3 + \cancel{49}$$

$$\text{az : } \gamma_4^0 = 4$$

$$\text{bx' : } \gamma_5^0 = 5$$

$$\text{by' : } \gamma_6^0 = 6$$

$$\text{bz' : } \gamma_7^0 = 7 + \cancel{69}$$

$$\text{cx' : } \gamma_8^0 = 8$$

$$\text{yz' : } \gamma_9^0 = 9$$

.../...

On voit que les monômes  $ax, az, bx', by', cx'$  et  $yz'$  sont essentiels pour l'ordre zéro. On peut donc supprimer les variables correspondantes dans les fonctions  $y_0^0$  des autres, qui deviennent alors égales à l'unité.

Donc, on a une base première seulement constituée par les impliquants essentiels :  $ax / az / bx' / by' / cx' / yz'$ .

## 2) Ordre 1 au moins

On a 7 relations de consensus d'ordre zéro non triviales dont :

4 relatives à  $ab$   
 1 " à  $ac$   
 1 " à  $ay$   
 1 " à  $bz'$

Donc,  $ac, ay, bz'$  deviennent ESSENTIELS pour l'ordre 1.

Il ne reste que les 4 relations utiles :  $ab_{25} x / ab_{36} y / ab_{47} z / ab_{469} yz$ .

Nous pouvons y supprimer les chiffres qui correspondent à des impliquants essentiels. Les termes deviennent :  $ab-x / ab-y / ab-z / ab-~~yz~~$ .

Nous pouvons supprimer  $ab-~~yz~~$  <  $ab-z$ . Il reste trois termes, qui donneront 2 à 2 des relations intéressantes puisque ils ne contiennent qu'une seule lettre dans leur groupe V.

Nous avons :  $ab-x / ab-y / ab-z / \underline{ab-xy} / \underline{ab-xz} / \underline{ab-yz}$ .

Il y a trois termes intéressants.

On a encore  $y_0^1$  égal à l'unité.

Donc :  $\mathcal{B}^1 = 1\ 2\ \dots\ 9$

.. / ...

Il y a une seule base irrédondante d'ordre 1 au moins de  $F$  qui est donnée par la base complète à laquelle on a enlevé le monôme  $ab$ .

### 3) Ordre 2

Les termes initiaux sont :

$$ab - xy - z / ab - xz - y / ab - yz - x.$$

$$\text{D'où le calcul : } ab - xy - z / ab - xz - y / ab - yz - x / \\ \underline{ab - xyz - yz} / \underline{ab - xyz - xz} / \underline{ab - xyz - xy} / \underline{ab - xyz - xyz}.$$

Il y a un terme utile pour  $ab$ .

Donc  $\int_0^2$  est encore égale à l'unité.

Il y a une base irrédondante d'ordre 2 au moins qui a été trouvée déjà pour l'ordre 1. Donc, elle est d'ordre 1 au moins, mais non d'ordre 1.

### 4) Ordre 3

Il y a un seul terme initial. Donc pas de solutions possibles. La seule base d'ordre 3 au moins est la base complète, ce qui prouve que la solution trouvée pour l'ordre 2 au moins est, en fait, d'ordre deux.

On peut récapituler les résultats en un tableau où l'on a indiqué par une croix l'appartenance de chaque monôme à la base irrédondante trouvée.

Ordre	Impliquants premiers numérotés									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0			x		x	x	x		x	x
1 et 2		x	x	x	x	x	x	x	x	x
3 et plus	x	x	x	x	x	x	x	x	x	x

Remarque 5-21 :

On peut encore vouloir non pas l'ensemble des bases irrédondantes d'ordre  $q$ , mais seulement l'une quelconque d'entre elles. Il suffit, pour cela, d'appliquer un processus de test d'inclusion d'ordre  $q$ , analogue à celui utilisé pour la recherche d'une base première.

55 - TEST D'INCLUSION D'ORDRE  $q$  D'UN MONOME DANS UN ENSEMBLE

Le processus est celui utilisé pour le test d'inclusion d'ordre zéro, jusqu'à la formation de l'ensemble  $E_{04}$ . Il faut alors effectuer, pour  $q \neq 0$ , des opérations différentes.

Explicitons le procédé pour  $q = 1$ .

a) On forme à partir de  $E_{04}$  des sous-ensembles  $E_{10}^j$ , chacun d'eux contenant les monômes de  $E_{04}$  qui ne comprennent pas  $x_j$  ou  $x_j'$  dans leur écriture.

b) Etape relative à  $x_j$

On forme avec  $E_{10}^j$  l'ensemble  $E_{11}^j$  par suppression des monômes comprenant dans leur écriture une ou plusieurs variables monofor-  
mes jusqu'à épuisement.

Il reste alors les variables biformes  $y_1^j, \dots, y_m^j$ .

c) Sous-étape pour  $y_1^j$

On divise  $E_{11}^j$  en trois sous-ensembles :

- $E_{12}^j$  qui contient les monômes n'ayant ni  $y_1^j$  ni  $(y_1^j)'$  dans leur écriture,
- $E_{13}^j$  qui contient ceux ayant  $y_1^j$  dans leur écriture,
- $E_{14}^j$  qui contient ceux ayant  $(y_1^j)'$  dans leur écriture.

On forme alors tous les consensus possibles par rapport à  $y_1^j$  entre les monômes de  $E_{13}^j$  et ceux de  $E_{14}^j$ , ce qui nous donne un ensemble  $E_{15}^j$ .

On réunit  $E_{12}^j$  et  $E_{15}^j$  pour former après simplification un ensemble  $E_{16}^j$ .

.../...

On supprime dans  $E_{16}^j$  les monômes contenant dans leur écriture des variables monoformes, ce qui nous donne l'ensemble final  $E_{21}^j$ .

d) Sous-étape pour  $y_k^j$

On part de l'ensemble  $E_{k1}^j$  que l'on divise en trois sous-ensembles :

$E_{k2}^j$  qui contient les monômes ne contenant pas  $y_k^j$  dans leur écriture.

- - - - -

On retrouve en fin de sous-étape :  $E_{(k+1)1}^j$

e) Fin de l'étape relative à  $x_j$

La fin de l'étape relative à  $x_j$  arrive au plus tard après la m-ième sous-étape.

On trouve alors dans l'ensemble  $E_{(m+1)1}^j$  :

- 1) soit : 1 - Dans ce cas, le test d'étape est positif ;
- 2) soit : 0 (ensemble vide) - Le test est négatif.

Théorème 5-5 :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'inclusion d'ordre 1 soit vérifiée est que le test soit positif pour tous les  $x_j$ .

Remarque 5-22 :

Dès que l'on a un 1 dans l'ensemble  $E_0$  ou  $E_{03}$ , on peut dire que le test sera positif.

Dès que l'on trouve un 1 dans l'un des ensembles  $E_{k0}^j$ ,  $E_{k5}^j$ ,  $E_{k6}^j$ , on peut dire que le test sera positif pour l'étape relative à  $x_j$ .

.../...



Dès que l'on trouve un ensemble  $E_0 E_{01} E_{04} E_{k0}^j E_{k1}^j E_{k6}^j$  vide, on peut dire que le test sera négatif.

Exemple 5-9 :

Testons la véracité de la relation d'inclusion d'ordre 1 :

$$ab \leq ax + by + x'y' + cy + b'y + uv' + x'z' + at + bz + av + bt' \quad (\text{ordre 1})$$

(suite de l'exemple 4-27)

On a :

$$E_{04} : x / y / x'y' / x'z' / t / z / t'$$

$$E_{10}^x : y / t / z / t'$$

$$E_{10}^y : x / x'z' / t / z / t'$$

$$E_{10}^z : x / y / x'y' / t / t'$$

$$E_{10}^t : x / y / x'y' / x'z' / z$$

lère étape relative à x :

$$E_{11}^x : t / t', \text{ d'où : } E_{15}^x = 1$$

Test positif

De la même façon, tous les tests apparaissent positifs. L'inégalité testée est donc d'ordre 1 au moins.

Le processus de test est analogue pour les inclusions d'ordre  $q$ . On forme au départ des ensembles  $E_{10}^{x \dots y}$ , chacun d'eux étant formé des monômes de  $E_{04}$  ne contenant dans leur écriture aucune des  $q$  variables  $x, \dots, y$  prises dans l'ensemble des variables biformes.

S'il y a  $m$  variables, on forme  $\frac{m!}{q!(m-q)!}$  sous-ensembles  $E_{10}^{x\dots y}$ .

Pour chacun d'eux, on applique la méthode appliquée sur les ensembles  $E_{10}^j$  dans le cas de l'ordre 1.

Exemple 5-10 :

Reprenons l'exemple 5-9.

Testons l'ordre 2 :

$$E_{04} : x / y / x'y' / x'z' / t / z / t'$$

$$E_{10}^{xy} : t / z / t' \quad - \text{Le test est positif.}$$

$$E_{10}^{xz} : y / t / t' \quad - \text{Le test est positif.}$$

$$E_{10}^{xt} : y / z \quad - \underline{\text{Le test est négatif.}}$$

L'inclusion n'est donc pas d'ordre 2 au moins. Elle est donc d'ordre 1.

Etant donné une fonction  $F$  par sa base complète  $A_1, \dots, A_n$ , il suffit, pour obtenir une base irrédondante d'ordre  $q$ , de tester successivement l'inclusion d'ordre  $q$  de chaque  $A_i$  dans les monômes restants.

Si le test est positif,  $A_i$  est éliminé. Il reste dans l'ensemble si le test est négatif.

Après application du test pour chacun des impliquants premiers, il reste une base irrédondante d'ordre  $q$  de  $F$ .

## 6 - INTRODUCTION A L'ALGEBRE PLURALE

### 61 - VARIABLES INFORMATIONNELLES

En algèbre booléenne classique, les variables et fonctions sont associées à des faits à deux états possibles : ouvert ou fermé - vrai ou faux, la valeur de la variable étant liée directement à l'état du fait.

#### Exemple 6-1 :

Un contact  $x$  peut être ouvert ou fermé.

La valeur  $x = 1$  peut être liée à l'état fermé du contact, et la valeur  $x = 0$  à son état ouvert.

On peut à un fait affecter une autre variable booléenne qui ne caractérise pas l'état du fait, mais la connaissance qu'on en a.

#### Définition 6-1 :

On appelle VARIABLE BOOLEENNE INFORMATIONNELLE une variable dont la valeur 1 n'est pas liée à un fait mais à l'affirmation de ce fait.

La valeur 0 d'une variable booléenne informationnelle est donnée lorsque l'on n'est pas dans le cas du 1, ce qui peut être réalisé par :

- 1) la non-affirmation du fait,
- 2) l'affirmation de la négation de ce fait,
- 3) l'ignorance de l'état du fait.

Exemple 6-2 :

Soit un contact et la variable booléenne  $a$  associée à son état, telle que  $a = 1$  quand il est fermé et  $a = 0$  quand il est ouvert. Soit une variable booléenne informationnelle liée au fait "contact fermé".

1) Si j'ai  $a = 1$ , je peux avoir :

$\alpha = 1$  ; j'affirme que le contact est fermé

$\alpha = 0$  ; je n'affirme pas que le contact est fermé, bien qu'il le soit.

2) Si j'ai  $a = 0$ , je peux avoir :

$\alpha = 0$  ; je n'affirme pas que le contact est fermé

Le cas  $\alpha = 1$  est impossible, je ne peux affirmer que le contact est fermé puisqu'il est ouvert.

Etant donné un fait plus complexe, on peut lui affecter toute une série de variables booléennes informationnelles groupées en une matrice :

$$M = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^m \\ \alpha_g^1 & \dots & \alpha_g^m \end{bmatrix}$$

Les variables booléennes informationnelles prennent les valeurs 0 ou 1. On peut donc leur appliquer les opérations classiques de l'algèbre de Boole.

La valeur 1 du produit  $\alpha \cdot \beta$  correspond à l'affirmation simultanée des deux faits liés à  $\alpha$  et  $\beta$ .

A la valeur 1 de la somme  $\alpha + \beta$  correspond l'affirmation d'au moins l'une des deux informations liées à  $\alpha$  et  $\beta$ .

On peut appliquer ces opérations simultanément sur des matrices les groupant. On ne pourra comparer que les matrices ayant le même nombre de lignes et de colonnes et se rapportant élément par élément au même fait.

Définition 6-2 :

On définit le produit de 2 matrices :

$$M_1 = \begin{bmatrix} \alpha_1^1 & \dots & \alpha_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_g^1 & \dots & \alpha_g^m \end{bmatrix} \quad \text{et } M_2 = \begin{bmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \beta_g^1 & \dots & \beta_g^m \end{bmatrix}$$

comme la matrice :

$$M_3 = \begin{bmatrix} \gamma_1^1 & \dots & \gamma_1^m \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_g^1 & \dots & \gamma_g^m \end{bmatrix}$$

avec :  $\gamma_i^j = \alpha_i^j \cdot \beta_i^j$

Le produit s'écrit :  $M_1 \cdot M_2 = M_3$

Au produit de deux matrices correspond "l'intersection" des informations apportées par chacune d'elles.

Définition 6-3 :

On définit la somme des deux matrices  $M_1$  et  $M_2$  comme la matrice  $M_3$  de terme général  $\gamma_i^j = \alpha_i^j + \beta_i^j$

Cette opération se note :  $M_1 + M_2 = M_3$

A la somme de deux matrices correspond la "réunion" des informations apportées par chacune d'elles.

Une matrice informationnelle telle que tous ses  $\alpha_{ij}^j = 0$  est vide d'information.

Définition 6-4 :

On appelle matrice ZERO, notée  $[0]$ , toute matrice informationnelle dont tous les termes sont nuls.

Inversement la matrice telle que tous ses  $\alpha_{ij}^j = 1$  représente l'affirmation de toutes les informations liées à elle.

Définition 6-5 :

On appelle matrice UNITE, notée  $[1]$ , toute matrice informationnelle dont tous les termes sont égaux à 1.

On trouve encore, M étant une matrice informationnelle quelconque :

$$[0] \cdot M = [0]$$

$$[0] + M = M$$

$$[1] \cdot M = M$$

$$[1] + M = [1]$$

On peut aussi définir des relations d'ordre entre matrices informationnelles.

Soient deux matrices  $M_1$  et  $M_2$

On dira que :  $M_1 = M_2$  si tous les  $\alpha_{ij}^j = \beta_{ij}^j$

avec  $\alpha_{ij}^j$  terme courant de  $M_1$

$\beta_{ij}^j$  terme courant de  $M_2$

De même, on a :  $M_1 < M_2$ , si tous les  $\alpha_i^j$  et les  $\beta_i^j$  sont tels que  $\beta_i^j = 1$  si  $\alpha_i^j = 1$ , c'est-à-dire :  $\alpha_i^j \leq \beta_i^j$  avec la condition :  $M_1 \neq M_2$ .

La grandeur d'une matrice est donc liée à la quantité d'information qu'elle apporte. Une matrice  $M_1$  qui est supérieure à une autre  $M_2$  apporte outre tous les renseignements contenus dans cette dernière, d'autres qui n'y figuraient pas.

Deux matrices  $M_1$  et  $M_2$  sont dites non comparables si l'on n'a pas :  $M_1 = M_2$ , ou  $M_1 < M_2$  ou  $M_1 > M_2$ . Chacune des matrices non comparables fournit alors une information ne figurant pas dans l'autre.

Cette absence de relation d'ordre se note :  $M_1 \not\leq M_2$ .

#### Remarque 6-1

Pour simplifier l'écriture, on peut écrire à la suite toutes les lignes. On a alors une matrice ligne, dont la lecture peut être plus difficile. On peut remplacer les  $m$  chiffres représentant chaque ligne par l'équivalent, dans un système de numérotation à base égale ou supérieure à  $2^m$ , du nombre binaire ayant une écriture identique à la suite formant la ligne. Il est alors simple de distinguer les lignes, chacune d'elles étant représentée par un seul chiffre qui apparaît comme un état d'une variable informationnelle à  $2^m$  états.

#### Exemple 6-3 :

A la matrice double colonne :

$$\begin{bmatrix} 00 \\ 01 \\ 11 \\ 10 \\ 00 \end{bmatrix}$$

correspond

la matrice ligne  $[00 \ 01 \ 11 \ 10 \ 00]$  qu'on peut écrire  $[0 \ 1 \ 3 \ 2 \ 0]$

.../...

Remarque 6-2 :

Si l'on veut opérer les opérations booléennes simultanément sur tous les termes d'une ligne, on a intérêt à écrire les nouvelles règles applicables sur ces valeurs décimales.

Exemple 6-4 :

Pour faciliter les opérations sur les matrices à trois colonnes, on pourra écrire des règles entre les chiffres de 0 à 7 représentant en décimal le nombre binaire formé par une ligne. Ces règles seront de la forme :

$$2 + 0 = 2$$

$$3.0 = 0$$

$$2 + 1 = 3$$

$$3.1 = 1$$

$$2 + 2 = 2$$

$$3.2 = 2$$

$$2 + 3 = 3$$

$$3.3 = 3$$

$$2 + 4 = 3$$

$$3.4 = 0$$

$$2 + 5 = 7$$

$$3.5 = 1$$

$$2 + 6 = 6$$

$$3.6 = 2$$

$$2 + 7 = 7$$

$$3.7 = 3$$

Remarque 6-3 :

Grouper les  $m$  variables d'une ligne, c'est remplacer  $m$  variables booléennes par une nouvelle variable informationnelle à  $2^m$  états possibles entre lesquels il existe des relations d'ordre.

La matrice est alors transformée en une matrice ligne à  $g$  colonnes, chaque élément  $y$  figurant étant une nouvelle variable informationnelle à  $2^m$  états.

On retrouve les mêmes relations d'ordre entre matrices, après avoir défini des relations d'ordre entre les variables informationnelles à  $2^m$  états.

.. / ...



Soient  $\alpha$  et  $\beta$  deux variables informationnelles à  $2^m$  états. Ces variables représentent chacune une matrice ligne de  $m$  variables informationnelles booléennes  $[\alpha_1 \dots \alpha_m]$  et  $[\beta_1 \dots \beta_m]$ . On a :  $\alpha = \beta$  (ou  $\alpha < \beta$ ) si on a les mêmes relations sur les matrices  $[\alpha_1 \dots \alpha_m]$  et  $[\beta_1 \dots \beta_m]$

Exemple 6-5 :

Reprenons les variables informationnelles à 8 états 01...7. On a des relations d'ordre de la forme :

$2 > 0$   
 $2 \not< 1$   
 $2 = 2$   
 $2 < 3$   
 $2 \not< 4$   
 $2 \not< 5$   
 $2 < 6$   
 $2 < 7$

Remarque 6-4 :

Dès que le nombre  $m$  de variables dans la ligne devient supérieur à deux, le nombre de relations devient trop élevé.

Pratiquement, on travaillera sur des matrices double colonne, ce qui conduira à travailler sur des variables à quatre états 0 1 2 et 3 entre lesquels existent les relations:

$0 + 0 = 0$	$1 + 0 = 1$	$2 + 0 = 2$	$3 + 0 = 3$
$0 + 1 = 1$	$1 + 1 = 1$	$2 + 1 = 3$	$3 + 1 = 3$
$0 + 2 = 2$	$1 + 2 = \bar{3}$	$2 + 2 = 2$	$3 + 2 = 3$
$0 + 3 = 3$	$1 + 3 = 3$	$2 + 3 = 3$	$3 + 3 = 3$
$0 \cdot 0 = 0$	$1 \cdot 0 = 0$	$2 \cdot 0 = 0$	$3 \cdot 0 = 0$
$0 \cdot 1 = 0$	$1 \cdot 1 = 1$	$2 \cdot 1 = 0$	$3 \cdot 1 = 1$
$0 \cdot 2 = 0$	$1 \cdot 2 = 0$	$2 \cdot 2 = 2$	$3 \cdot 2 = 2$
$0 \cdot 3 = 0$	$1 \cdot 3 = 1$	$2 \cdot 3 = 2$	$3 \cdot 3 = 3$
$0 = 0$	$1 > 0$	$2 > 0$	$3 > 0$
$0 < 1$	$1 = 1$	$2 \not< 1$	$3 > 1$
$0 < 2$	$1 \not< 2$	$2 = 2$	$3 > 2$
$0 < 3$	$1 < 3$	$2 < 3$	$3 = 3$

A une variable booléenne pouvant prendre la valeur 0 ou 1, on associe un digit la caractérisant qui prend la valeur 0 ou 1 comme la variable, et qui en est donc sa représentation "digitale".

A une variable à quatre états 0 1 2 ou 3, on associera de la même façon un "QUADRIT" pouvant prendre la valeur 0 1 2 ou 3 et qui en constitue sa représentation "quadritale".

## 62 - VALEUR D'UNE FONCTION REELLE

Une variable booléenne ne peut prendre par définition que l'une des deux valeurs 0 ou 1. Une fonction obtenue à partir de ces variables par l'emploi d'opérateurs booléens ne peut alors prendre également que l'une de ces deux valeurs qui apparaîtra donc comme impérative pour chaque état des variables. C'est la fonction SIMPLE et COMPLETE considérée habituellement en algèbre booléenne classique.

En fait, lorsque l'on doit faire la synthèse d'une fonction pour résoudre un problème pratique, on est amené à lui donner, pour chaque état possible des variables la valeur :

- 1 d'une façon impérative (valeur notée 1)
- 0 d'une façon impérative (valeur notée 0)
- 1 ou 0 indifféremment (valeur notée  $\varnothing$ )

Une telle fonction apparaît donc comme incomplètement spécifiée. Elle est appelée fonction INCOMPLETE ou fonction  $\varnothing$  - booléenne.

Il est nécessaire, pour définir une fonction incomplète, de se donner deux fonctions simples complètes.

Définition 6-6 :

On appelle BORNE SUPERIEURE [ ou INFERIEURE ] d'une fonction simple  $F$ , la fonction simple associée  $M(F)$  [ ou  $m(F)$  ] obtenue pour chaque état des variables en lui donnant la valeur :

- 0 si  $F = 0$  pour cet état des variables
- 1 [ ou 0 ] si  $F = \varnothing$  pour cet état des variables
- 1 si  $F = 1$  pour cet état des variables

Remarque 6-5 :

On peut définir les bornes pour une fonction simple réelle sans chercher à préciser si elle est complète ou non. Si la fonction est complète, on aura :  $m(F) = F = M(F)$ .

Définition 6-7 :

On appelle COMPLEMENT d'une fonction  $F$  la fonction associée  $F'$  qui vaut pour chaque état des variables :

- 0 si  $F = 1$  pour cet état des variables
- 1 si  $F = 0$  -
- $\varnothing$  si  $F = \varnothing$  -

.. / ...

On a entre les bornes d'une fonction simple, les relations suivantes :

$$\begin{aligned} m(F) &\leq M(F) \\ m(F) &= [M(F')]', \\ M(F) &= [m(F')]', \\ m(F) \cdot m(F') &= 0 \end{aligned}$$

Le produit  $M(F) \cdot M(F')$  représente une fonction associée à  $F$  qui vaut 1 pour tout état des variables qui fait  $F$  et  $F'$  égal à  $\mathcal{C}$  et 0 pour tout autre état.

Définition 6-8 :

On appelle PARTIE INDIFFERENTE d'une fonction  $F$ , la fonction qui a la valeur 1 pour tout état des variables qui fait  $F = \mathcal{C}$  et 0 pour tout autre état.

La partie indifférente se note  $\emptyset(F)$ .

$$\begin{aligned} \text{On a :} \quad \emptyset(F) &\leq M(F) \\ \emptyset(F) &= M(F) \cdot M(F') \\ m(F) \cdot \emptyset(F) &= 0 \\ \emptyset(F) &= \emptyset(F') \\ m(F) + \emptyset(F) + M(F') &= 1 \\ \emptyset(F) &= [m(F) + m(F')]', \end{aligned}$$

On peut, pour définir une fonction simple incomplète, se donner deux fonctions prises dans les cinq possibles :  $m(F)$ ,  $M(F)$ ,  $\emptyset(F)$ ,  $m(F')$ ,  $M(F')$ , à condition qu'elles ne soient pas complémentaires.

Les définitions précédentes permettent de coder les trois valeurs possibles d'une fonction. Il suffit pour cela de se donner la suite des deux valeurs prises par  $M(F)$  et  $M(F')$  :

- le 1 impératif est codé par 10
- le 0 impératif est codé par 01
- le  $\mathcal{C}$  est codé par 11

..../...

Il faut donc introduire, pour représenter la valeur d'une fonction incomplète une suite de deux digîts ou mieux un quadrit, dont on n'utilisera que trois des quatre états possibles.

On pourra donc, au lieu des valeurs 1, 0,  $\varnothing$  de la fonction  $F$ , parler des valeurs des bornes supérieures de  $F$  et de  $F'$ , ou des trois valeurs utilisables : 1, 2 et 3 du quadrit associé.

On voit donc que les variables booléennes étant par définition à deux états, les fonctions simples qu'elles engendrent en réalité sont à deux ou trois états.

Remarque 6-6 :

Il est courant en algèbre booléenne classique de ne faire les opérations que sur une seule fonction à la fois. Or, dans la réalité, on a plusieurs fonctions  $F_1, \dots, F_g$  à considérer simultanément.

Soit un état des variables. Cet état rend chaque fonction  $F_i$  égale à 0, 1 ou  $\varnothing$ , c'est-à-dire, selon nos conventions à 1, 2 ou 3. On peut alors considérer l'ensemble des  $g$  valeurs prises par chacune des  $F_i$  et parler d'une fonction qui, pour tout état des variables, prend une certaine valeur constituée par une suite de  $g$  chiffres pris dans le groupe : 1, 2 ou 3.

On voit que plus généralement les variables booléennes engendrent, non pas une fonction à trois états, mais un système de  $g$  fonctions à 3 états, c'est-à-dire, en fait une fonction plus générale à  $3^g$  états que l'on définira comme une fonction plurale, chaque fonction simple du problème apparaissant comme une dimension particulière de cette fonction plurale.



A = 0 - je ne sais rien sur F qui peut valoir 0, 1 ou  $\varphi$ .

On peut remplacer  $\alpha$  et  $\beta$  par une variable informationnelle à quatre états 0, 1, 2 ou 3.

Supposons que l'on ait affaire, non à une seule fonction F simple, mais à un système de g fonctions simples  $F_1, \dots, F_g$  complètes ou non. On peut affecter à chaque borne  $M(F_{\lambda})$  ou  $M(F'_{\lambda})$  une variable booléenne informationnelle  $\alpha$  ou  $\beta$ , ce qui nous donne une matrice booléenne à double colonne et g lignes.

On peut encore affecter à chaque fonction simple une variable  $\lambda$  à 4 états : 0, 1, 2, 3. On obtient alors une matrice ligne à g éléments  $\lambda_1 \dots \lambda_g$ . Cette matrice est encore équivalente à une matrice contenant une seule variable à  $4^g$  états. Mais les opérations étant alors trop compliquées sur cette variable, on travaillera uniquement sur une suite de g quadrits qui sera donc la représentation codée d'une variable informationnelle  $\mu$  à  $4^g$  états.

Exemple 6-6 :

Soit le terme  $ab'd$  01032. Il est formé du monôme  $ab'd$  et d'une variable informationnelle  $\mu$  à  $4^5 = 1024$  états apparaissant sous la forme 01032. On connaît ainsi quelques relations d'ordre de  $ab'd$  par rapport aux fonctions données.

On sait que si un état des variables fait  $ab'd = 1$ , on a forcément :

$$M(F'_2) = 1$$

$$\emptyset(F_4) = 1$$

$$M(F_5) = 1$$

mais on ne sait rien d'autre.

.. / ...

On voit donc que la matrice informationnelle liée à un monôme par rapport à un système de fonctions  $F_1, \dots, F_g$  apporte une certaine dose d'informations relatives à cette fonction. La matrice liée à ce monôme en constitue donc sa "VALEUR INFORMATIONNELLE" par rapport à un système  $F_1, \dots, F_g$  donné de fonctions.

La valeur informationnelle du terme n'est pas suffisante pour connaître  $F_1, \dots, F_g$ , mais peut être utilisée pour définir une fonction plus générale pouvant prendre une valeur constituée par la suite de  $g$  chiffres pris dans l'ensemble 0, 1, 2, 3.

Définition 6-9 :

On définit une FONCTION PLURALE à  $g$  dimensions en se donnant sa valeur pour chaque état des variables du problème, cette valeur étant constituée par une suite  $\lambda_1 \dots \lambda_g$  de  $g$  chiffres, chacun de ces chiffres étant le 0, le 1, le 2 ou le 3.

Exemple 6-7 :

Le tableau de vérité ci-dessous définit une fonction plurale  $P$  à deux dimensions :

Variables a b c	Valeur de P
0 0 0	3 2
0 0 1	1 0
0 1 0	2 1
0 1 1	1 3
1 0 0	1 1
1 0 1	2 2
1 1 0	3 3
1 1 1	0 0



Un système de  $g$  fonctions simples, complètes ou non  $F_1, \dots, F_g$  permet de définir une fonction plurale  $P$  qui aura la propriété particulière de n'avoir dans ses valeurs que les chiffres 1, ou 2, ou 3, le 0 étant exclu.

Définition 6-10:

On dit qu'une fonction plurale est REELLE lorsque les chiffres entrant dans n'importe laquelle de ses valeurs sont 1, 2 ou 3 à l'exclusion du 0.

Elle est dite IMAGINAIRE dans le cas contraire.

Remarque 6-3 :

Un monôme auquel on a associé une matrice informationnelle permet de définir une fonction plurale réelle ou imaginaire.

Considérons un monôme quelconque. Il ne peut prendre que les deux valeurs 0 ou 1. On peut alors lui adjoindre une suite  $J$  de  $g$  valeurs prises dans le lot 0, 1, 2, 3 des valeurs possibles pour une fonction plurale à  $g$  dimensions en admettant que cette suite constituera sa "valeur" pour tout état des variables qui fait  $A = 1$ . On a ainsi défini une valeur de la même forme que les valeurs des fonctions plurales. Pour un état des variables qui fait  $A = 0$ , la valeur de  $A$  peut être prise comme nulle ou encore :  $\underbrace{0 \dots 0}_g$ .

Définition 6-11:

On appelle MONOME PLURAL  $K$  à  $g$  dimensions un terme  $AJ$  formé de la juxtaposition d'un monôme booléen classique  $A$  et d'une suite  $J$  de  $g$  valeurs 0, 1, 2 ou 3.

Définition 6-12 :

On appelle VALEUR d'un monôme plural AJ à g dimensions pour un état des variables :

- 1 - la suite J si cet état fait :  $A = 1$
- 2 - la suite  $\underbrace{0 \dots 0}_g$  si cet état fait  $A = 0$ , cette valeur pouvant tout simplement être notée 0.

Remarque 6-9 :

La suite J apparaît comme un état d'une variable informationnelle à  $4^g$  états possibles, codée par quadrits. L'information apportée par cette variable est la valeur que peuvent prendre les différentes fonctions  $M(F_{i_j})$ , pour tout état des variables qui fait  $A = 1$ . La suite J apparaît ainsi comme une matrice informationnelle.

Exemple 6-8 :

Soit le monôme plural  $a'b \ 1 \ 3 \ 2 \ 0$ . Il définit la fonction plurale K :

Etat des variables		Valeur de
a	b	K
0	0	0
0	1	1 3 2 0
1	0	0
1	1	0

Définition 6-13

On appelle POLYNOME PLURAL à g dimensions une somme de monômes pluraux à g dimensions.

Exemple 6-9 :

$a'c \ 1 \ 3 \ 2 + bc' \ 0 \ 0 \ 1$  est un polynôme plural.

Définition 6-14 :

On appelle VALEUR d'un polynôme plural à g dimensions pour un état des variables, la suite obtenue en faisant la somme quadrit par quadrit (de même rang) des valeurs prises par les différents monômes pluraux constituant le polynôme.

Soit  $P = K^1 + \dots + K^n$  un polynôme plural. La valeur  $\lambda_1 \dots \lambda_g$  de P pour un état quelconque des variables est telle que :  $\lambda_c = \lambda_c^1 + \dots + \lambda_c^n$ , cet état des variables rendant les monômes  $K^1, \dots, K^n$  égaux à :  $\lambda_1^1 \dots \lambda_g^1, \dots, \lambda_1^n \dots \lambda_g^n$

Remarque 6-10 :

Il est commode d'introduire les calculs sur les suites de quadrits. En fait, on pourrait parler de sommes des matrices, les opérations sur les matrices valeurs étant les mêmes que celles qui ont été définies pour les matrices informationnelles.

Exemple 6-10 :

Donnons le tableau des valeurs du polynôme:  $P = a'b'132 + c'320 + a'b'311 + ac'020 + a'b'c'011$  pour chaque état possible des variables abc :

Variables a b c	Valeur des monomes						Valeur de P
	a'b' 132	c' 320	a'b' 311	ac' 020	a'b'c'011		
0 0 0	1 3 2	0	0	0	0 1 1	1 3 3	
0 0 1	1 3 2	3 2 0	0	0	0	3 3 2	
0 1 0	0	0	3 1 1	0	0	3 1 1	
0 1 1	0	3 2 0	3 1 1	0	0	3 3 1	
1 0 0	0	0	0	0	0	0	
1 0 1	0	3 2 0	0	0 2 0	0	3 2 0	
1 1 0	0	0	0	0	0	0	
1 1 1	0	3 2 0	0	0 2 0	0	3 2 0	

Un polynôme fournit donc une valeur pour chaque état des variables, ce qui nous définit une fonction, qui peut être l'une quelconque des fonctions que l'on peut définir avec  $n$  variables et une suite de  $g$  valeurs  $\lambda_1 \dots \lambda_g$ , c'est-à-dire l'une quelconque des  $(4^g)^{2^n}$  fonctions possibles.

On peut définir le produit de plusieurs fonctions plurales, de la même façon que l'on a défini la somme de monômes pluraux.

Définition 6-15 :

On appelle **PRODUIT** [ ou **SOMME** ] de  $n$  fonctions plurales  $P^1, \dots, P^n$  à  $g$  dimensions, une nouvelle fonction plurale  $P$  dont la valeur  $\lambda_1 \dots \lambda_g$  pour chaque état des variables est telle que :

$$\lambda_i = \prod_{j=1}^{j=g} \lambda_{ij} \left[ \text{ou } \sum_{j=1}^{j=g} \lambda_{ij} \right], \lambda_1^j \dots \lambda_g^j \text{ étant la valeur de } P^j$$

pour cet état considéré des variables.

Exemple 6-11 :

Variables!	Valeur de		
	$P^1$	$P^2$	$P = P^1 \cdot P^2$
0 0	0	0 1 2	0
0 1	0 3 3	3 1 3	0 1 3
1 0	2 1 3	1 1 2	0 1 2
1 1	2 0 1	2 0 3	2 0 1

On peut donc définir des fonctions plurales de la même façon que l'on définissait une fonction simple par application des opérations produits et sommes à partir de monômes pluraux quelconques. On trouvera donc en particulier des formes produit de sommes, et sommes de produits canoniques ou non.

.. / ...

On définit facilement des relations d'ordre :

Définition 6-16 :

On dit que deux fonctions plurales  $P^1$  et  $P^2$  sont égales si leur valeur pour chaque état des variables est la même.

Cette relation se note:  $P_1 = P_2$ .

Définition 6-17 :

On dit qu'une fonction plurale  $P^1$  est supérieure [ou inférieure] à une autre  $P^2$  si  $P^1 \neq P^2$  et si pour tout état des variables, les valeurs  $\lambda_1^1 \dots \lambda_g^1$  de  $P^1$  et  $\lambda_1^2 \dots \lambda_g^2$  de  $P^2$  sont telles que :

$$\lambda_i^1 \geq \lambda_i^2 \text{ [ou } \lambda_i^1 \leq \lambda_i^2 \text{]}$$

Cette relation se note:  $P^1 > P^2$ , [ou  $P^1 < P^2$ ]

Définition 6-18 :

Deux fonctions  $P_1$  et  $P_2$  sont dites NON-COMPARABLES si on n'a pas l'une des relations d'ordre:  $P_1 = P_2$ ,  $P_1 < P_2$  ou  $P_2 < P_1$ .

Cette relation se note :  $P_1 \not< P_2$ .

Théorème 6-1 :

On ne change pas une fonction plurale  $P_1$  en lui ajoutant une autre  $P_2$  telle que:  $P_2 \leq P_1$ .

$$(P_2 \leq P_1) \implies (P_1 = P_1 + P_2).$$

Cette propriété est évidente par la nature même du processus retenu pour définir une fonction plurale.

.. / ...

Inversement :Théorème 6-2 :

Etant donné une fonction  $P_1 = P_2 + P_3$  avec :  $P_3 \leq P_2$ , on a  $P_1 = P_2$ .

$$(P_1 = P_2 + P_3 \text{ avec } P_3 \leq P_2) \implies (P_1 = P_2)$$

Théorème 6-3 :

Etant donné une fonction  $P_1$  et une autre  $P_2$  telle que :  $P_2 \geq P_1$ , on a :  $P_1 = P_1 \cdot P_2$  et inversement.

Théorème 6-4 :

Etant donné une fonction  $P_1 = P_2 \cdot P_3$  avec :  $P_2 \leq P_3$ , on a :  $P_1 = P_2$ .

Remarque 6-11 :

Il résulte des définitions précédentes que, à tout polynôme plural, on peut ajouter un monôme plural dont la suite J est formée uniquement de zéros. On peut alors considérer ces monômes comme nuls, de la même façon qu'un monôme classique écrit sous la forme habituelle est nul si on trouve une variable x sous ses deux formes dans son écriture.

Définition 6-19 :

On appelle IMPLIQUANT d'une fonction plurale P un monôme plural K de mêmes dimensions tel que :  $K \leq P$

Définition 6-20 :

On appelle IMPLICATION d'une fonction plurale P un ensemble de monômes pluraux  $K_1, \dots, K_n$  tels que :  $P = K_1 + \dots + K_n$ .

Exemple 6-12 :

Soit la fonction P donnée par l'une de ses implications :

a 20/ab 01/ab'12/a'cd' 02/a'c'02/ad 13/a'bc 10/a'd'10/  
bd'01/b'c'20/b'd 01/c 01/d 20.

Sa valeur est donnée par le tableau de vérité :

a	b	c	d	P
0	0	0	0	3 2
0	0	0	1	2 3
0	0	1	0	1 3
0	0	1	1	2 1
0	1	0	0	1 3
0	1	0	1	2 2
0	1	1	0	1 3
0	1	1	1	3 1
1	0	0	0	3 2
1	0	0	1	3 3
1	0	1	0	3 3
1	0	1	1	3 3
1	1	0	0	2 1
1	1	0	1	3 3
1	1	1	0	2 1
1	1	1	1	3 3

On voit que c'est une fonction plurale réelle.

Remarque 6-12 :

On voit par l'exemple précédent qu'une fonction plurale réelle peut être donnée comme une somme de fonctions plurales imaginaires. C'est ce qui justifie leur introduction.

Supposons que le monôme A soit un monôme canonique. S'il n'y a qu'un seul 1 dans l'écriture codée par digits de sa valeur J (un seul 1 ou un seul 2 dans sa valeur codée par quadrits), l'information apportée par le terme AJ est minimale pour un monôme non nul. Ce monôme plural présente donc une caractéristique analogue à celle des impliquants canoniques en algèbre booléenne classique.

Définition 6-21 :

On appelle IMPLIQUANT PLURAL CANONIQUE un impliquant plural formé d'un monôme A canonique et ne contenant qu'un seul 1 dans l'écriture digitale sa valeur J.

Exemple 6-13 :

$a'bcd$  20 est un impliquant canonique de la fonction F de l'exemple 6-12. L'écriture digitale de sa variable informationnelle est en effet 1000 et il n'y a que les quatre variables a, b, c, d qui apparaissent dans le problème.

Remarque 6-13 :

Toute fonction plurale peut être exprimée par un polynôme plural canonique. Il est intéressant de noter que ceci n'était pas possible en algèbre booléenne classique, une fonction simple incomplète exigeant la donnée de deux polynômes.

Définition 6-22 :

On appelle IMPLIQUANT PREMIER d'une fonction plurale P un impliquant plural AJ tel que si l'on y remplace A par un monôme A\* plus grand, ou J par un état J\* plus grand de la variable informationnelle, ou les deux à la fois, les monômes pluraux A\*J ou AJ\* ne sont plus impliquants de P.



Exemple 6-14 :

$b'c'd'32$  est un impliquant premier de la fonction P de l'exemple.6-12.

#### 64 - ECRITURE CODEE D'UN MONOME PLURAL

Considérons un état quelconque des variables  $x_1, \dots, x_n$ . Cet état peut être représenté par une suite de n digits, chacun d'eux ayant la valeur 0 ou 1 et étant affecté selon son rang à chacune des variables. Cette suite constitue une matrice booléenne informationnelle caractérisant l'état donné des variables.

A tout état correspond une fonction et une seule, qui prend la valeur 1 pour cet état des variables et zéro pour tous les autres. C'est un monôme canonique qui est donc caractéristique de cet état.

Un groupe de n digits permet donc de définir une fonction comprenant un seul monôme canonique. Pour définir ainsi une fonction quelconque il faut donc se donner l'ensemble de ses monômes canoniques, c'est-à-dire l'ensemble des états des variables qui rendent la fonction égale à 1.

Un monôme quelconque X permet de caractériser l'ensemble des états qui le rendent égal à 1. Dans l'écriture de X, chaque variable  $x_i$  peut :

- soit apparaître sous sa forme directe  $x_i$
- soit apparaître sous sa forme complémentée  $x_i'$
- soit ne pas apparaître du tout.

L'apparition d'une variable x dans l'écriture d'un monôme X est donc une nouvelle variable à trois états pouvant être codée par deux variables booléennes  $\alpha$  et  $\beta$ . Nous pouvons par exemple admettre le codage suivant :

.../...

	$\alpha$	$\beta$
! Apparition de x sous sa forme directe .....	! 1 !	! 0 !
! Apparition de x sous sa forme complétementée .....	! 0 !	! 1 !
! Non-apparition de x .....	! 1 !	! 1 !

L'intérêt de ce codage est de traduire simplement certaines relations entre monômes. Comparons l'écriture codée par digits des monômes. Soient  $d_i^1, d_i^2, d_i^3$  les digits de rang  $i$  dans l'écriture des monômes non nuls  $M^1, M^2$  et  $M^3$ . On a :

$$(M^1 = M^2) \iff (d_i^1 = d_i^2)$$

$$(M^1 < M^2) \iff (d_i^1 \leq d_i^2) \text{ avec } M^1 \neq M^2$$

$$(M^1 \cdot M^2 = M^3) \iff (d_i^1 \cdot d_i^2 = d_i^3)$$

$$(M^1 \not\propto M^2) \iff (d_i^1 = 1 \text{ et } d_i^2 = 0, d_j^1 = 0 \text{ et } d_j^2 = 1).$$

A un monôme correspond, s'il y a  $n$  variables  $x_1, \dots, x_n$  dans le problème, une suite de  $2n$  digits ou encore de  $n$  quadrits.

Dans la représentation d'un monôme aucun quadrit n'a la valeur 0.

Remarque 6-14 :

La représentation précédente ne permet que le codage des monômes non nuls.

Considérons le produit  $M^3 = M^1 \cdot M^2$ . Si  $M^3$  est différent de zéro, on obtient par l'intersection des digits la représentation de  $M^3$ . Si  $M^3$  est nul, on peut admettre que l'intersection digit par digit des représentations codées de  $M^1$  et  $M^2$  donnera encore son écriture digitale. Dans ce cas  $M^3$  est codé par une suite de quadrits, dont l'un au moins à la valeur 0.

On peut donc se donner, pour représenter un monôme, une suite de  $n$  quadrits pouvant être dans l'un quelconque de leurs états possibles 0, 1, 2, 3.

Un monôme canonique est alors représenté par une suite de quadrits qui ont tous la valeur 1 ou 2. Le nombre de digits valant 1 est alors minimal pour un terme non nul. Ce nombre est  $n$ .

Le monôme particulier qui n'a plus aucune variable dans son écriture est représenté par une suite de digits valant tous 1, ou encore par une suite de quadrits valant tous 3.

Un impliquant premier d'une fonction est tel que l'on ne peut changer en 3 la valeur d'un quadrit apparaissant sous sa forme 1 ou 2 dans la suite de quadrits le représentant.

Chaque quadrit apparaît comme une matrice informationnelle. En effet, si une suite de quadrits représente un monôme, on peut y remplacer tout digit valant 1 par un autre valant 0, mais on ne peut pas toujours remplacer un 0 par un 1.

La valeur d'un monôme  $A$  est obtenue pour un état quelconque des variables de la façon suivante : On fait l'intersection quadrit par quadrit des suites représentant  $A$  d'une part, le monôme canonique correspondant à l'état considéré des variables d'autre part. On obtient ainsi une nouvelle suite de  $n$  quadrits. Si l'un de ces quadrits est nul, le monôme  $A$  vaut 0. Il vaut 1 dans le cas contraire.

On peut encore dire qu'un état des variables auquel correspond le monôme canonique  $A_1$  rend le terme  $A_2$  égal à 1, si on a quadrit par quadrit :  $\lambda_1^i \leq \lambda_2^i$ ,  $\lambda_j^i$  étant le quadrit de rang  $i$  dans la représentation codée de  $A_j$ .

.../...

Au produit de deux monômes correspond forcément un monôme. Il est intéressant d'étudier la deuxième opération permettant à partir de deux monômes donnés d'en trouver un troisième. Cette opération est le consensus.

Sur les matrices "quadritales" représentant les monômes, l'opération consensus est faite en effectuant la somme de quadrits de même rang qui ont les valeurs complémentaires 01 et 10 et l'intersection de tous les autres.

Il est intéressant de noter que, si plusieurs quadrits de même rang sont complémentaires, on peut prendre l'un quelconque d'entre eux. Tous les consensus trouvés seront tous nuls.

Exemple 6-15 :

Le consensus de  $ab'$  et de  $bd'$  est  $ad'$ .

On l'obtient également sur les matrices quadritales représentant les monômes :

$ab'$	:	2	1	3	3
$bd'$	:	3	2	3	1
opération effectuée	:	.	+	.	.
résultat	:	2	3	3	1

On trouve la matrice 2 3 3 1 qui correspond au monôme  $ad'$ .

..../...



## 7 - LES CONSENSUS EN ALGEBRE PLURALE

### 71 - DEFINITION DU CONSENSUS EN ALGEBRE PLURALE

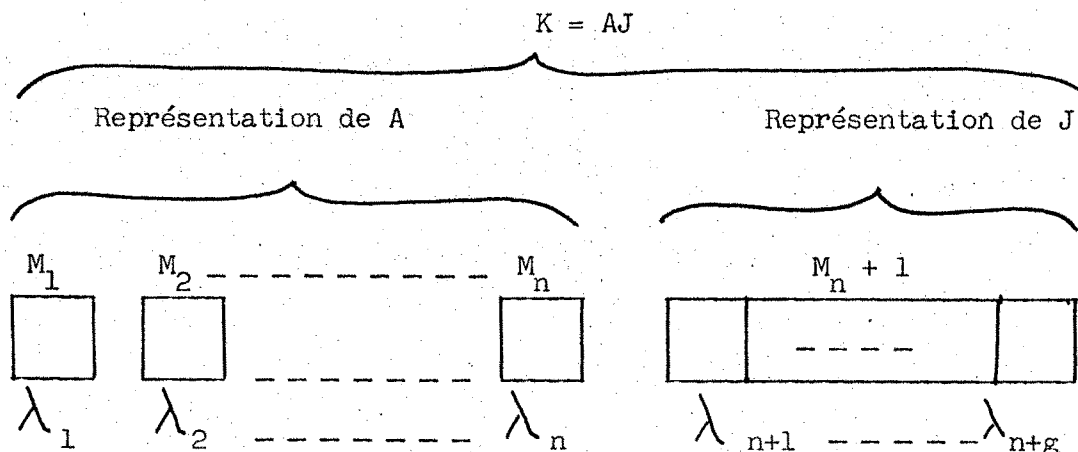
Etant donné deux impliquants  $K^1$  et  $K^2$  d'une fonction plurale  $P$ , on peut essayer d'en trouver d'autres en appliquant sur eux les opérations habituelles. Tout multiple d'un impliquant est encore un impliquant. On a donc intérêt à trouver les monômes les plus grands possibles.

Commençons par le produit :

Formons  $K^3 = K^1 \cdot K^2$ . On a :  $K^3 \ll K^1$ .

Donc  $K^3$  est un impliquant de  $P$ , mais qui n'est pas intéressant, puisque l'on en a un autre  $K^1$  qui est connu et qui lui est supérieur.

Considérons l'écriture quadritale d'un monôme  $K = AJ$  dans un problème à  $n$  variables et  $g$  dimensions. Il est représenté par une suite de  $n + 1$  matrices  $M$ , les  $n$  premières représentant  $A$ , la dernière représentant  $J$ .



Considérons les deux matrices  $M_i^1$  et  $M_i^2$  relatives à deux monômes  $K^1$  et  $K^2$ . Faisons leur somme, et le produit des matrices  $M_i^1$  et  $M_j^2$  pour  $j \neq i$ .

Nous formons ainsi une suite de  $n + 1$  matrices  $M_j^3$  constituant la représentation d'un monôme  $K^3$ .

Nous avons la propriété très intéressante :  $K^3 \leq K^1 + K^2$ .

En effet, soit un état des variables qui fasse :

1er cas :  $A^3 = 0$

La valeur de  $K^3$  est  $[0]$ . La propriété est donc vérifiée.

2ème cas :  $A^3 = 1$

La valeur de  $K^3$  est  $J^3$ .

Deux cas sont encore possibles :

1er sous-cas

La somme a été effectuée sur les matrices de rang  $n + 1$ . Dans ce cas, on a forcément  $A^1$  et  $A^2 = 1$ . Donc les valeurs de  $K^1$  et  $K^2$  sont respectivement  $J^1$  et  $J^2$ .

On a alors :  $J^3 = J^1 + J^2$ , la relation est donc vérifiée.

2ème sous-cas

La somme a été effectuée sur les matrices de rang  $i \leq n$ .

$A^3$  se présente alors comme le consensus de  $A^1$  et  $A^2$  (et ce consensus n'est pas nul puisque  $A^3$  peut prendre la valeur 1). Il y a donc un monôme  $A^k$  (qui est  $A^1$  ou  $A^2$ ) qui vaut 1, pour cet état des variables. La valeur de  $K^k$  est alors  $J^k$ .

La valeur de  $K^1 + K^2$  est alors égale ou supérieure à  $J^k$ , qui est elle-même égale ou supérieure à  $J^3$ . On a :  $J^3 \leq J^k$ .

Donc la propriété est encore vérifiée.

Exemple 7-1 : Soit les monômes :

ab 132, b'c 331 et bc 101

On forme ainsi

ac 130 avec ab 132 et b'c 331

abc 133 avec ab 132 et bc 101

c 101 avec b'c 331 et bc 101

.../...

$$\left. \begin{array}{l} \text{On a bien : } ac \ 130 \leq ab \ 132 + b'c \ 331 \\ abc \ 133 \leq ab \ 132 + bc \ 109 \\ c \ 101 \leq b'c \ 331 + bc \ 101 \end{array} \right\}$$

Si les deux monomes  $K^1$  et  $K^2$  sont impliquants d'une fonction plurale  $P$ ,  $K^3$  l'est aussi. On peut donc former de nouveaux impliquants lorsqu'on en connaît un certain nombre.

Exemple 7-2 : (suite de l'exemple 7-1)

Soit la fonction:  $P = ab \ 132 + b'c \ 331 + bc' \ 101$ . Le processus donne de nouveaux impliquants de  $P$  qui sont :  $ac \ 130$ ,  $abc \ 133$  et  $c \ 101$ .

Remarque 7-1 :

Supposons maintenant que l'on ait:  $M_{\lambda}^1 \leq M_{\lambda}^2$  (la somme étant effectuée sur ces matrices).

On a alors forcément:  $K^3 \leq K^2$ .

Pour que l'opération soit intéressante, il faut donc que l'on ait deux matrices de même rang non comparables, et que ce soit sur elles qu'on effectue l'opération "somme".

La condition est nécessaire. Est-elle suffisante ? Supposons que l'on ait :  $M_{\lambda}^1 \not\leq M_{\lambda}^2$ . Appliquons le processus en faisant la somme sur les matrices de rang  $\lambda$ . Supposons que  $K^3$  ne soit pas nul. On ne pourra avoir, ni  $K^3 \leq K^1$ , ni  $K^3 \leq K^2$ .

Supposons que  $K^3$  soit nul. On aura alors  $K^3 = 0$  donc  $\leq K^1$  et  $\leq K^2$ , mais si l'on compare les différentes matrices  $M_{\lambda}^1, M_{\lambda}^2$  et  $M_{\lambda}^3$  on n'aura pas  $M_{\lambda}^3 \leq M_{\lambda}^1$  ou  $M_{\lambda}^3 \leq M_{\lambda}^2$  pour  $1 \leq \lambda \leq n+1$ .

Le processus donne forcément un terme intéressant si l'on a deux matrices de même rang  $\lambda$  non comparables, si l'on effectue la somme sur ces matrices et si le produit des autres matrices de même rang  $j$  n'est pas nul (pour  $j \neq \lambda$ ).



C'est bien ce qui se passe en algèbre booléenne classique. Pour qu'un consensus soit défini, il faut que l'on ait deux monômes  $X.x$  et  $Y.x'$ . Leur consensus est alors  $X.Y$ . Si l'on passe à l'écriture codée par quadrits à 4 valeurs 0 1 2 3, on retrouve l'opération étudiée précédemment.

Si l'on ne travaille que sur des matrices à deux digits, il ne doit donc y avoir qu'un seul ensemble de matrices de même rang non-comparables, car les matrices non-comparables à deux digits ont forcément une intersection nulle.

Si l'on a  $g$  quadrits dans la matrice ( $g > 1$ ), on a un produit non nul de deux matrices non-comparables.

Remarque 7-2 :

On a donc formé par cette opération un monôme  $K^3$  qui est inclus dans les deux monômes initiaux et non dans chacun d'eux pris séparément. On montre facilement que c'est le plus grand qui jouit de cette propriété. On retrouve les propriétés connues des consensus.

On peut alors étendre comme on l'a fait en algèbre simple, la notion de consensus à la classe  $p$ .

Considérons le processus suivant :

Etant donné un ensemble de monômes  $K_1, \dots, K_p$  tels que  $K_i = A_i J_i$ , on commence par repérer les variables monoformes dans les différents  $A_i$ . On les rend égales à 1 et on fait la somme des résidus (même processus qu'en algèbre simple), qui deviennent  $K_1^*, \dots, K_p^*$ .

Pour tout état des variables biformes, cette somme prend une certaine valeur. Soit  $J_0$  la valeur la plus faible,  $A_0$  étant le produit des variables monoformes dans l'ensemble  $A_1, \dots, A_p$ .

Définition 7-1 :

Le monôme  $K_0 = A_0 J_0$  est le consensus des monômes  $K_1, \dots, K_p$  donnés si l'inégalité :

$$J_0 \leq K_1^* + \dots + K_p^*$$

est irrédondante.

.../...

Remarque 7-3 :

L'inégalité précédente est irrédondante au sens habituel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas augmenter  $A_0$  ou  $J_0$ , ou supprimer un monôme du second membre sans qu'elle devienne erronée.

Cette inégalité est dite INEGALITE CARACTERISTIQUE du consensus.

Exemple 7-3 :

Soient les monômes  $K_1 = ac\ 330$ ,  $K_2 = c'023$ ,  $K_3 = bc\ 003$ .

Les variables monoformes sont a et b d'où  $A_0 = ab$ . La somme des résidus est :

$c\ 330 + c'023 + c\ 003$  dont la valeur pour  $c = 1$  est  $333$   
et pour  $c = 0$  est  $023$

$J_0 = 023$ . Le monome formé est donc  $ab\ 023$ .

L'inégalité  $023 \leq c\ 330 + c'023 + c\ 003$  est irrédondante.

Donc  $ab\ 023$  est le consensus des trois monômes donnés.

Remarque 7-4 :

On garde les notations habituelles et les définitions relatives aux consensus en algèbre classique (générateurs, classe, ...).

On a donc :  $ab\ 023 = \mathcal{C}(ac\ 330, c'023, bc\ 003)$ .

Remarque 7-5 :

On peut de la même façon qu'en algèbre simple introduire l'ordre des consensus. Nous admettrons qu'en cas de non indication, il s'agit toujours de l'ordre zéro.

Remarque 7-6 :

Avec l'écriture mixte AJ admise conventionnellement pour un monôme plural K, nous nous trouvons devant deux opérations apparemment différentes :

.../...

- 1 - Le consensus de deux monômes  $A_1$  et  $A_2$  suivi d'une intersection de leurs matrices informationnelles associées  $J_1$  et  $J_2$ .
- 2 - Le produit de deux monômes  $A_1$  et  $A_2$  suivi d'une réunion des matrices informationnelles.

Mais, ce n'est là qu'une apparence, qui provient des conventions différentes adoptées pour écrire les quadrits (forcément non nuls) formant les monômes pluraux.

Dans l'écriture du monôme  $A$ , on n'utilise pas les quadrits mais directement la variable  $x$ , lorsqu'elle n'est pas absente sous l'une de ses deux formes possibles. Dans la matrice  $J$  les quadrits apparaissent sous leurs formes possibles 0 1 2 ou 3.

L'intérêt de l'écriture  $AJ$  est de faciliter les calculs par la manipulation d'expressions plus simples, et de garder un sens physique aux opérations.

Exemple 7-4 :

Considérons une fonction  $P$  associée à un système de cinq fonctions, et deux de ses impliquants  $ab' 12130$  et  $bc 13202$ .

Leur consensus est  $ac 12000$ . L'information apportée par la matrice informationnelle  $12000$  est moins grande que pour les autres, mais elle intéresse un monôme nouveau  $ac$ .

Si on avait eu les impliquants  $ab 12130$  et  $bc 13202$ , on aurait formé le terme  $abc 13332$ , qui a une matrice  $13332$  plus grande, mais qui est relative à un monôme plus petit.

72 - PROPRIETE DES CONSENSUS

Un consensus de classe  $p$  est inférieur ou égal à la somme de ses générateurs, mais non à la somme de  $p-1$  d'entre eux.

Réciproquement, si un monôme  $K$  est tel qu'il est inférieur ou égal à la somme de  $p$  monômes, mais non à la somme de  $p-1$  d'entre eux, ces monômes admettent un consensus qui est supérieur ou égal à  $K$ .

Le consensus est donc le plus grand monôme inférieur ou égal à la somme de ses générateurs, mais non à celle de  $p-1$  d'entre eux. On peut alors énoncer le théorème :

Théorème 7-1 :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un monôme soit inclus dans la somme de  $p$  autres, mais non dans celle de  $p-1$  d'entre eux, est qu'il soit leur consensus.

On retrouve une propriété très intéressante et qui provient de l'irrédondance de l'inégalité caractéristique du consensus: Un consensus  $K_0$  est lié à ses générateurs  $K_1, \dots, K_p$  formant l'une de ses générations par la relation :  $K_0 \leq K_1 + \dots + K_p$  (irréd.)

Exemple 7-5 :

$K_0 = ab\ 023$  est le consensus de  $K_1 = ac\ 330$ ,  $K_2 = c'023$ ,  
 $K_3 = bc\ 003$ .

On a :  $K_0 \leq K_1 + K_2 + K_3$  (irréd.)

Cette relation, vérifiée forcément pour tout état qui fait  $A_0 = 0$ , l'est également pour  $A_0 = 1$ . Elle devient :

$$023 \leq c\ 330 + c'023 + c\ 003$$

Pour  $c = 1$  :  $023 \leq 333$ . C'est vérifié.

$c = 0$  :  $023 \leq 023$ . C'est vérifié.

Il faut remarquer que  $K_1$  est nécessaire ainsi que  $K_3$  pour  $c = 1$ , alors que  $K_2$  l'est pour  $c = 0$ .

L'inégalité est donc irrédondante.

Voyons si les monômes plus grands que  $K_0$  la vérifient également.

- 1) a 023 : On doit avoir :  $023 \leq c 330 + c'023 + bc 003$ .  
Pour  $b = 0$  et  $c = 1$ , on a  $023 \leq 330$ , ce qui est faux.
- 2) b 023 : On doit avoir :  $023 \leq ac 330 + c'023 + c 003$   
Pour  $a = 0$  et  $c = 1$ , on a  $023 \leq 003$ , ce qui est faux.
- 3) ab 123 : Pour  $a = 1$ ,  $b = 1$ ,  $c = 0$ , on aurait :  
 $123 \leq 023$ , ce qui est faux.
- 4) ab 223 : - idem -
- 5) ab 033 : - idem -

On a donc bien :  $ab 023 = \mathcal{C}(ac 330, c'023, bc 003)$ .

On retrouve encore les propriétés de réduction de classe par rapport à l'une quelconque des variables biformes. Ici, on fera la réduction de l'inégalité caractéristique par rapport à une variable pouvant être une variable classique ou la variable informationnelle donnée par la matrice J.

Considérons la relation :  $K_0 = \mathcal{C}(K_1 \dots K_p)$ . L'inégalité caractéristique s'écrit :  $J_0 \leq K_1^* + \dots + K_p^*$  (irréd.).

1er cas : Soit une variable  $x$  biforme dans l'écriture des  $A_i$ .

On peut écrire le second membre (après redistribution des indices) sous la forme :

$$x \sum_{l=1}^k \frac{K_{i,l}^*}{x} + \sum_{k+1}^m K_{i,l}^* + x' \sum_{m+1}^p \frac{K_{i,l}^*}{x'}$$

.../...

On a donc de nouvelles inégalités de la forme :

$$J_0 \leq \sum_1^k \frac{K_i^*}{x} + \sum_{k+1}^m K_i^*$$

On retrouve des propriétés analogues à celles des consensus en algèbre classique.

$K_0$  se présente comme le consensus de deux monômes  $K_{01}$  et  $K_{02}$  avec (après redistribution des indices) :

$$K_{01} = \mathcal{C}(K_1 \dots K_m) \quad \text{et} \quad K_{02} = \mathcal{C}(K_k \dots K_p).$$

L'ensemble  $K_1, \dots, K_p$  est égal à la réunion des générations  $K_1, \dots, K_m$  de  $K_{01}$  et  $K_k, \dots, K_p$  de  $K_{02}$ .

2ème cas : Cherchons à réduire la classe par rapport à la variable informationnelle  $J$ .

Considérons chaque résidu  $K_i^*$ . Il s'écrit  $A_i^* J_i$ .

$$\text{On a forcément :} \quad A_1^* + \dots + A_p^* = 1 \quad (1)$$

En effet, si cette relation n'était pas vérifiée, on aurait un état des variables biformes faisant  $A_1^* + \dots + A_p^* = 0$  donc  $K_1^* + \dots + K_p^* = 0$  et  $J_0 \leq 0$ , ce qui est impossible pour un consensus non nul.

Supposons l'égalité (1) irrédondante. On retrouve une égalité classique dans la théorie des consensus en algèbre classique.

Tout  $J_i$  de  $J_1$  à  $J_p$  est alors forcément supérieur ou égal à  $J_0$ , avec l'un d'eux égal à  $J_0$ .

Supposons l'inégalité (1) rédundante. Soit  $A_j^*$  un monôme que l'on peut y supprimer. Ceci n'est possible que parce que  $K_j$  amenait dans sa matrice  $J_j$  un élément au moins nécessaire pour former  $J_0$ . Supprimons-y ces éléments. Nous passons à une nouvelle matrice  $J^1$ . Nous avons alors :

$$J^1 \leq K_1^* + \dots + K_{j-1}^* + K_{j+1}^* + \dots + K_p^*$$

.../...

inégalité que nous pouvons rendre irrédondante en ajoutant des 1 au premier membre et en supprimant des  $K_j^*$  au second. Nous obtenons alors une nouvelle inégalité :

$$J^{11} \leq K_u^* + \dots + K_v^* \quad (\text{irréd.}) \quad \text{qui nous montre que l'on a un consensus}$$

$$K^1 = \mathcal{C}(K_u \dots K_v)$$

$K_u, \dots, K_v$  étant un ensemble de monômes pluraux pris dans les générateurs initiaux avec  $K_j$  n'y figurant plus.

Inversement : Considérons la matrice  $J^2$  complément à  $J_0$  de  $J^{11}$ .

On a  $J^2 = J_0 \cdot (J^{11})'$ . Elle est telle que l'on a :

$$J^2 + J^{11} = J_0 \quad \text{et} \quad J^2 \cdot J^{11} = 0.$$

Ecrivons l'inégalité :

$$J^2 \leq K_1^* + \dots + K_p^*.$$

Nous pouvons la rendre irrédondante de la même manière que précédemment. Nous avons :

$$J^{22} \leq K_r^* + \dots + K_s^* \quad (\text{irréd.})$$

avec  $K_j^*$  figurant dans l'ensemble  $K_r^*, \dots, K_s^*$  sous-ensemble de  $K_1^*, \dots, K_p^*$  qui nous montre que l'on a une relation :

$$K^2 = \mathcal{C}(K_r \dots K_s)$$

Formons le consensus  $K = \mathcal{C}(K^1, K^2)$  par rapport à la variable informationnelle.

Nous obtenons un monome AJ avec :

$$A = A^1 \cdot A^2$$

$$\text{et } J = J^{11} + J^{22} = J_0$$

$$\text{D'où : } J^{11} \leq K_u^* + \dots + K_v^*$$

$$J^{22} \leq K_r^* + \dots + K_s^*$$

$$J^0 \leq K_u^* + \dots + K_v^* + K_r^* + \dots + K_s^*$$

.../...

ce qui nous prouve que la réunion des ensembles  $K_u, \dots, K_v$  et  $K_r, \dots, K_s$  constitue l'ensemble initial  $K_1, \dots, K_p$

Nous pouvons alors constater que l'on a décomposé la relation de consensus de classe p en deux nouvelles relations de classe forcément inférieure à p conduisant à deux consensus  $K^1$  et  $K^2$  admettant entre eux  $K_0$  comme consensus de classe 2.

Nous retrouvons là la propriété bien connue de la réduction de classe d'une relation de consensus.

Remarque 7-7 :

La variable informationnelle apparaît biforme si l'on a dans l'ensemble des matrices  $J_i$  des générateurs, une seulement qui n'est pas supérieure ou égale à  $J_0$ .

Nous pouvons alors énoncer le théorème :

Théorème 7-2 :

Toute relation de consensus de classe p peut être décomposée par réduction de classe par rapport à une variable quelconque (informationnelle ou non) en deux relations de consensus de classe inférieure, dont les consensus sont eux-mêmes générateurs de classe 2 du consensus initial, la réunion des générations de ces nouvelles relations reconstituant la génération de la relation initiale.

Remarque 7-8 :

La réduction se fait dans un ordre quelconque des variables prises en considération (qu'elles soient informationnelles ou non).

Remarque 7-9 :

Une variable quelconque considérée pour la réduction, est absente ou monoforme dans l'écriture du consensus de la relation à réduire et biforme dans son inégalité caractéristique. Après la réduction, elle apparaît monoforme dans l'écriture des nouveaux consensus et absente (ou monoforme) dans l'écriture des nouvelles inégalités caractéristiques.

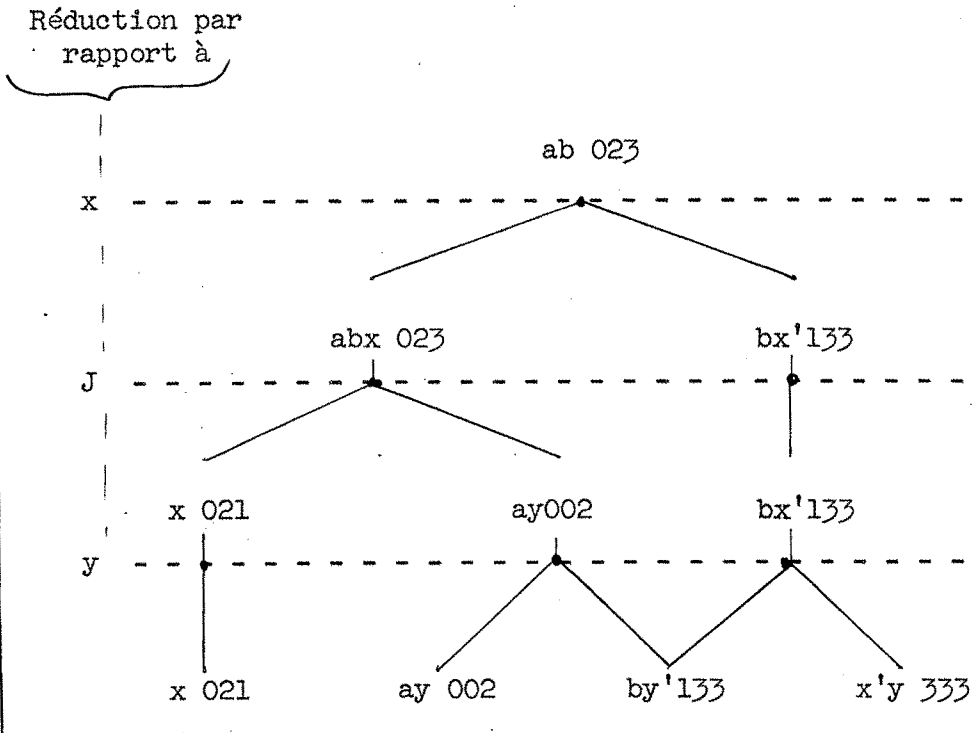


Exemple 7-6 :

Soit la relation :

$$ab\ 023 = \mathcal{C}(ay\ 002, by'133, x\ 021, x'y\ 333)$$

On retrouve un graphe de réduction :



On retrouve encore la propriété d'élimination d'un générateur d'une génération à condition de le remplacer par certains des consensus qu'il admet par rapport à une variable biforme quelconque de son écriture (la variable biforme pouvant encore être la variable informationnelle).

On le démontre aisément comme en algèbre booléenne classique, en partant de l'inégalité caractéristique :

$$J_0 \leq K_1^* + \dots + K_p^* \quad (\text{irréd.})$$

Considérons un monôme quelconque (que l'on peut prendre comme monôme  $K_1^*$  au prix d'une redistribution d'indices).

Soit une variable biforme dans l'écriture de  $K_1^*$ .

.../...

Cette variable peut être :

- soit une variable  $x$  de l'écriture de  $A_1^*$ ,
- soit la variable informationnelle  $J_1$  à condition que  $J_1$  ne soit pas supérieur ou égal à  $J_0$  (la variable informationnelle est alors biforme ou plutôt multiforme).

Nous pouvons, s'il y a une variable  $x$  dans l'écriture de  $A_1^*$ , la mettre en facteur. L'égalité caractéristique s'écrit alors :

$$J_0 \leq x \sum_1^k \frac{K_{\dot{i}}^*}{x} \sum_{k+1}^m K_{\dot{i}}^* + x' \sum_{m+1}^p \frac{K_{\dot{i}}^*}{x'}$$

D'où :

$$J_0 \leq \sum_{k+1}^m K_{\dot{i}}^* + \sum_{m+1}^p \frac{K_{\dot{i}}^*}{x'}$$

On a donc :

$$K_1^* \cdot J_0 \leq K_1^* \left[ \sum_{k+1}^m K_{\dot{i}}^* + \sum_{m+1}^p \frac{K_{\dot{i}}^*}{x'} \right]$$

$$K_1^* \cdot J_0 \leq \sum_{k+1}^m (K_1^* \cdot K_{\dot{i}}^*) + x \sum_{m+1}^p \left( \frac{K_1^*}{x} \cdot \frac{K_{\dot{i}}^*}{x'} \right)$$

On a pour tout  $K_{\dot{i}}^*$  :  $K_1^* \cdot K_{\dot{i}}^* \leq K_{\dot{i}}^*$

Soit  $K_{p+1}^*$  à  $K_q^*$  les consensus que  $K_1^*$  admet avec ses cogénérateurs par rapport à  $x$ . On a alors :

$$\sum_{m+1}^p \left( \frac{K_1^*}{x} \cdot \frac{K_{\dot{i}}^*}{x'} \right) = \sum_{p+1}^q K_{\dot{i}}^*$$

D'où :

$$K_1^* \cdot J_0 \leq \sum_{k+1}^m K_{\dot{i}}^* + x \sum_{p+1}^q K_{\dot{i}}^*$$

.../...

et en faisant  $x = 1$  dans le second membre :

$$K_1^* \cdot J_0 \leq \sum_{k=1}^m K_{\lambda}^* + \sum_{p=1}^q K_{\lambda}^*$$

et :

$$K_1^* \cdot J_0 \leq \sum_2^q K_{\lambda}^*$$

Donc la suppression de  $K_1^*$  est légitime.

On a donc obtenu la relation d'inclusion :  $K_0 \leq K_2 + \dots + K_q$  que l'on peut rendre irrédondante par suppression de monômes du second membre.

D'où :

$$K_0 \leq K_u + \dots + K_v \quad (\text{irréd.})$$

et :

$$K_0 = \mathcal{C}(K_u \dots K_v)$$

Supposons que  $K_1$  ait une matrice informationnelle  $J_1$  apparaissant comme une variable biforme (c'est-à-dire que l'on n'a pas  $J_0 \leq J_1$ ).

Ceci signifie que l'on a un 1 au moins qui y figure et qui est nécessaire comme ne figurant pas dans  $J_0$ .

Supposons un état des variables tel que la présence de  $J_1$  soit nécessaire. Comme on n'a pas  $J_1 \geq J_0$ , il existe forcément un autre  $J_k$  (ou plusieurs autres  $J_{k_1}, J_{k_2}, \dots$ ) tel que :

$$J_0 \leq J_1 + J_{k_1} + J_{k_2} + \dots$$

Si on fait les consensus par rapport à la variable informationnelle, on aura forcément formé des termes ayant des matrices  $J_k^* = J_1 + J_k$ .

Donc :  $J_1 + J_{k_1} + J_{k_2} + \dots$  sera égal à  $J_{k_1}^* + J_{k_2}^* + \dots$ , ce qui justifie l'élimination de  $K_1^*$ . .../...

D'où le théorème :

Théorème 7-3 :

L'élimination d'un générateur  $K_1$  d'une génération d'un consensus  $K_0$  conduit à une nouvelle génération où il ne figure plus à condition de le remplacer par un certain nombre de consensus qu'il admet avec ses cogénérateurs par rapport à une variable biforme de son écriture (informationnelle ou pas).

Exemple 7-7 :

Revenons à l'exemple 7-6

Excluons ay 002 de la génération ay 002, x 021, x'y 333, by'133 du consensus ab023.

Les variables biformes de ay 002 sont :

- 1) J car 002  $\leq$  023
- 2) y

Par rapport à J nous formons axy 023 avec x 021.

D'où :

$$ab\ 023 \leq x\ 021 + x'y\ 333 + by'133 + axy\ 023$$

qui est une inégalité que nous rendons irrédondante par suppression du terme x 021.

$$D'où : ab\ 023 = \mathcal{C}(x'y\ 333, by'133, axy\ 023).$$

Par rapport à y nous formons ab 002 avec by'133. D'où :

$$ab\ 023 \leq x\ 021 + x'y\ 333 + by'133 + ab\ 002$$

qui est une inégalité irrédondante.

$$Donc : ab023 = \mathcal{C}(x021, x'y333, by'133, ab002).$$

.. / ...

73 - RECHERCHE DES RELATIONS DE CONSENSUS

A toute inégalité irrédondante de la forme  $K_0 \leq K_1 + \dots + K_p$  correspond une relation de consensus  $K_0 = \mathcal{C}(K_1, \dots, K_p)$  et inversement. Nous pouvons encore définir la fonction "Véracité".

On se donne un ensemble de monômes pluraux  $K_1, \dots, K_n$ , et on désire trouver toutes les relations de consensus de la forme  $K = \mathcal{C}(K_u \dots K_v)$  où les générateurs  $K_u, \dots, K_v$  sont éléments de l'ensemble donné :  $K_1, \dots, K_n$ .

A chaque monôme  $K_i$  de l'ensemble correspond encore une solution triviale, qui est  $K_i = \mathcal{C}(K_i)$  de classe 1.

Le monôme A de tout consensus K possible sera le produit de variables figurant dans l'écriture des  $A_i$  de l'ensemble  $K_1 = A_1 J_1, K_2 = A_2 J_2 \dots$

On peut alors opérer de la façon suivante :

- former un monôme canonique A comme produit d'un certain nombre de lettres de l'écriture des  $A_i$  sous l'une des deux formes possibles : directe ou complémentée ;
- former une somme S de monômes pluraux  $K_i$  pris dans l'ensemble initial ;
- choisir une matrice J comportant un seul 1 dans son écriture digitale ;
- tester si l'on a ou non la relation :  $AJ \leq S$ .

Nous pouvons encore affecter à la présence de la variable a dans A, une variable booléenne  $\alpha$  qui vaut 1 si a figure dans A sous sa forme directe et à tout monôme  $K_x$  de l'ensemble initial, une variable x qui vaut 1 si  $K_x$  figure dans le second membre de l'inégalité à tester.

La "Véracité" de l'inégalité formée est une fonction booléenne qui dépend des variables  $\alpha \beta \dots xy \dots J$ . C'est donc une fonction liée à une fonction plurale dont on connaît la valeur par un tableau de vérité, et que l'on appellera encore fonction  $\mathcal{V}$ . La véracité de l'inégalité est vérifiée lorsque la fonction plurale  $\mathcal{V}$  n'est pas nulle.

Exemple 7-8 :

Soit l'ensemble initial formé des deux monômes  $K_x = ab\bar{3}$  et  $K_y = b'2$ . Les variables associées sont  $\alpha \beta x y J$ .

Nous ne placerons dans le tableau que les états des variables associées qui conduisent à la vérification de l'inégalité formée. A chaque état correspond un impliquant canonique de  $V$

Etat des variables associées					Inégalité formée	Impliquant canonique de
$\alpha$	$\beta$	x	y	J		
0	0	0	1	2	$a'b'2 \leq b'2$	$\alpha'\beta'x'y2$
0	0	1	1	2	$a'b'2 \leq ab\bar{3}+b'2$	$\alpha'\beta'xy2$
1	0	0	1	2	$a'b'2 \leq b'2$	$\alpha\beta'x'y2$
1	0	1	1	2	$ab'2 \leq ab\bar{3}+b'2$	$\alpha\beta'xy2$
1	1	1	0	1	$ab1 \leq ab\bar{3}$	$\alpha\beta xy'1$
1	1	1	0	2	$ab2 \leq ab\bar{3}$	$\alpha\beta xy'2$
1	1	1	1	1	$ab1 \leq ab\bar{3}+b'2$	$\alpha\beta xy1$
1	1	1	1	2	$ab2 \leq ab\bar{3}+b'2$	$\alpha\beta xy2$

On a donc obtenu la fonction  $V$  par ses 8 impliquants canoniques. On peut encore, par consensus itératifs, chercher les impliquants premiers de  $V$ . On arrive aux impliquants premiers.

$$\alpha\beta x\bar{3}, \alpha xy2 \text{ et } \beta'y2.$$

On retrouve très facilement les propriétés de la fonction "Véracité" étudiée en algèbre booléenne classique. On a en particulier :

Théorème 7-4 :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une inclusion soit vérifiée est que son monôme associé soit impliquant de la fonction "Véracité".

.. / ...

On pourra également supprimer dans tout impliquant de  $\mathcal{V}$  les variables du type  $x\dots$  liées à la présence des monômes dans le second membre de l'inégalité formée, lorsqu'elles se présentent sous leur forme complémentaire.

Théorème 7-5 :

A toute relation de consensus correspond un impliquant premier de  $\mathcal{V}$  et inversement.

Exemple 7-9 : (suite de l'exemple 7-8)

Les relations de consensus existant entre les monômes  $K_x = ab^3$ ,  $K_y = b'^2$  sont données par les impliquants premiers de  $\mathcal{V}$ .

A	$\alpha\beta x^3$	correspond	$ab^3 = \mathcal{C}(ab^3)$
	$\alpha xy^2$	"	$a^2 = \mathcal{C}(ab^3, b'^2)$
	$\beta'y^2$	"	$b'^2 = \mathcal{C}(b'^2)$

On retrouve encore la propriété :

Théorème 7-6 :

L'ensemble des solutions triviales du problème fournit une base première de  $\mathcal{V}$ .

Cette base est dite BASE PREMIERE TRIVIALE.

Remarque 7-10 :

On peut encore remplacer les lettres associées  $\alpha\beta\dots$  par  $ab\dots$  puisqu'il y a encore au moins un indice de monôme dans l'écriture du monôme A de tout impliquant AJ de  $\mathcal{V}$ .

Remarque 7-11 :

Les indices  $xy\dots$  sont des variables forcément monoformes et leur présence a encore pour effet de rendre non-comparables deux monômes  $A_1 J_1$  et  $A_2 J_2$  tels que  $A_1 J_1 \not\leq A_2 J_2$ . On a alors :  $A_1 J_1 \not\leq A_2 J_2$ .

.../...

On a donc ramené, de la même façon qu'en algèbre booléenne classique, le problème de la recherche des relations de consensus à un problème de recherche des impliquants premiers d'une fonction plurale.

74 - CONSENSUS D'ORDRE qDéfinition 7-2 :

On dit qu'un monôme plural  $K$  est inclus d'ordre  $q$  au moins dans un ensemble de monômes pluraux  $K_1, \dots, K_{p_1}$  lorsque après  $q$  mises en facteur successives d'une variable quelconque  $x_j$  non informationnelle biforme dans l'écriture des monômes simples  $A_i$  dans la somme  $K_1 + \dots + K_{p_1}$  de la forme :

$$x_j \sum_{i=1}^{k_j} \frac{K_i}{x_j} + \sum_{i=k_j+1}^{m_j} K_i + x_j' \sum_{i=m_j+1}^{p_j} \frac{K_i}{x_j'}$$

On aboutit à une somme  $K_{k_q+1} + \dots + K_{m_q}$  qui est encore supérieure ou égale à  $K$ .

La relation  $K \leq K_1 + \dots + K_p$  est encore dite INCLUSION d'ordre  $q$  au moins. Elle est d'ordre  $q$  si elle n'est pas d'ordre  $q+1$  au moins et irrédondante si, en enlevant un monôme du second membre ou en ajoutant un digit dans l'écriture matricielle du premier membre, elle perd son caractère d'inclusion d'ordre  $q$ .

Définition 7-3 :

On dit qu'un monôme  $K_0 = A_0 J_0$  est le consensus de  $p$  monômes  $K_1, \dots, K_p$  lorsque, après suppression des variables de l'écriture de  $A_0$  dans celle des  $K_i$ , les résidus  $K_i^*$  vérifient la relation d'inclusion irrédondante d'ordre  $q$  :

$$J_0 \leq K_1^* + K_2^* + \dots + K_p^* \quad (\text{irréd.})$$



On retrouve donc les consensus d'ordre  $q$  en algèbre plurale, qui sont liés à leurs générateurs par des relations d'inclusion d'ordre  $q$ , avec les propriétés habituelles et les définitions utilisées pour les consensus d'ordre  $q$  en algèbre booléenne classique.

Exemple 7-10 :

ab 221 est le consensus de classe 5 d'ordre 1 des monômes ac 330, ad 233, bc 003, bd'331, c' 023.

Son inégalité caractéristique est :

$$221 \leq c 330 + d 333 + c 003 + d'331 + c'023.$$

Théorème 7-7 :

Un consensus d'ordre  $q$  est lié à ses générateurs par une relation d'inclusion irrédondante d'ordre  $q$  et inversement à toute relation irrédondante d'ordre  $q$  correspond une telle relation de consensus.

On peut de la même façon qu'en algèbre booléenne classique réduire l'inégalité caractéristique. On peut l'écrire :

$$J_0 \leq x \sum_1^k \frac{K_i^*}{x} + \sum_{k+1}^m K_i^* + x' \sum_{m+1}^p \frac{K_i^*}{x'} \quad (q)$$

$$\text{D'où : } J_0 \leq \sum_{k+1}^m K_i^* \quad (q-1)$$

Nous pouvons rendre cette inégalité irrédondante, ce qui nous définit une relation d'inclusion correspondant à une relation de consensus d'ordre  $q-1$ . Dans cette relation :

- l'ordre a diminué d'une unité,
  - la classe a diminué d'au moins deux unités,
  - dans l'écriture de  $K_0$  figurent toutes les variables du nouveau consensus,
  - la variable  $x$  ne figure plus, ni dans l'écriture des générateurs, ni dans celle du consensus.
- .../...

On retrouve le théorème 5-2 généralisé.

Théorème 7-8 :

Toute relation de consensus d'ordre  $q$  peut être réduite en  $\ell$  relations de consensus d'ordre  $q-1$  ( $\ell$  étant le nombre de variables dans l'inégalité caractéristique d'ordre  $q$ ) chaque relation de rang  $j$  ne comprenant ni dans son écriture, ni dans son égalité caractéristique la variable biforme  $x_j$ . Le consensus d'ordre  $q$  est le produit de ces consensus d'ordre  $q-1$ .

Exemple 7-11 :

Réduisons la relation :

$$K = \mathcal{C} (K_1 K_2 K_3 K_4 K_5) \text{ avec :}$$

$$\begin{array}{l|l} K = ab221 & K_3 = c003 \\ K_1 = ac330 & K_4 = bd'331 \\ K_2 = d233 & K_5 = c'223 \end{array}$$

L'inégalité caractéristique s'écrit :

$$221 \leq c330 + d233 + c003 + d'331 + c'223$$

Elle devient pour  $c = c' = 0$

$$221 \leq d233 + d'331 \text{ que nous rendons irrédondante :}$$

$$231 \leq d233 + d'331 \text{ (irréd.)}$$

ce qui nous montre que  $d233$  et  $bd'331$  admettent  $b231$  comme consensus d'ordre zéro.

Pour  $d = d' = 0$ , on a :

$$221 \leq c330 + c003 + c'233 \text{ que nous pouvons rendre irrédondante :}$$

$$223 \leq c330 + c003 + c'223 \text{ (irréd.)}$$

D'où :

$ac330$ ,  $c003$  et  $c'223$  admettent un consensus qui est  $a223$ .

$$\text{On a bien :} \quad ab221 = b231.a223$$

.../...

On peut encore associer les groupes V et dans le cas de la recherche des relations de consensus les groupes I. On retrouve les groupes X I V que l'on peut considérer comme des monômes, ce qui nous donne des monômes pluraux X I V J, avec les règles de formation et de simplification habituelles.

On peut également, au terme X I V J, associer la suite W des variables biformes qui ne figurent ni dans son monôme X, ni dans son groupe V. On peut alors reprendre les opérations habituelles sur ces termes.

Le produit de deux termes  $X_1 I_1 V_1 J_1 W_1$  et  $X_2 I_2 V_2 J_2 W_2$  est  $X_3 I_3 V_3 J_3 W_3$  avec :

$$X_3 = X_1 \cdot X_2$$

$$I_3 = I_1 \cdot I_2$$

$$V_3 = V_1 \cdot V_2$$

$$J_3 = J_1 \cdot J_2$$

$$W_3 = W_1 \cup W_2$$

les groupes I V et J  
étant considérés comme  
des monômes

Au lieu d'écrire  $W_j$  comme un monôme, considérons une matrice ligne à  $l$  cases ( $l$  est le nombre de variables biformes ne figurant pas dans l'écriture du monôme X) et plaçons dans cette matrice un 1 dans la case de rang  $j$  si  $x_j$  figure dans  $W_j$  et un 0 si  $x_j$  n'y figure pas.

Nous voyons alors que nous avons, lorsque nous formons  $W_1 \cup W_2$ , la somme des matrices digitales représentant les groupes W.

Le produit défini et utilisé dans les consensus d'ordre  $q$  en algèbre classique ou en algèbre plurale apparaît donc comme le consensus par rapport à la variable nouvelle ainsi définie.

D'où le théorème :

Théorème 7-9 :

Tout terme X I V J W formé par consensus par rapport à W et tel que sa matrice W soit complète permet de dire que X J est inférieur ou égal à un consensus d'ordre  $q$  dont les indices des générateurs figurent tous dans le groupe I.

Exemple 7-12 : (Suite de l'exemple 7-11)

Les relations de consensus d'ordre zéro sont :

$$b\ 231 = \mathcal{C}(d233 \text{ et } bd'331)$$

$$a\ 223 = \mathcal{C}(ac330, c003, c'223)$$

Il leur correspond les termes  $b24d231c$  et  $a135c223d$ . Nous pouvons remplacer  $W$  par une matrice à 2 digits. Nous trouvons :  $b24d231-10$  et  $a135c223-01$ . D'où par consensus  $ab12345cd221-11$   $ab221$  est donc le consensus d'ordre 1 de classe 5 de  $K_1, \dots, K_5$ .

Remarque 7-12 :

Revenons à la base triviale de la fonction Véracité. On peut à ce moment affecter à chaque solution de classe 1 un terme  $X\ I\ V\ J\ W$  :  $XJ$  est l'écriture du monôme plural :  $I$  son indice,  $V$  est vide et  $W$  contient les variables biformes du problème (non informationnelles) ne figurant pas dans  $X$ .

On peut alors, en considérant  $W$  comme une matrice habituelle, chercher les impliquants premiers de cette nouvelle fonction Véracité. En fin de calcul, on aura dans ses impliquants premiers et simultanément :

- les relations de consensus de classe quelconque et d'ordre zéro
- les relations de consensus de classe quelconque et d'ordre 1.

On pourra d'abord par le test sur  $W$  sortir les relations d'ordre 1. Puis, en ne tenant plus compte des matrices  $W$ , on aura après simplification les relations d'ordre zéro.

Il faut noter que l'on retrouve encore le fait qu'un monôme apparaît comme son propre consensus d'ordre quelconque et de classe 1.

.. / ...



## 8 - RECHERCHE DES IMPLIQUANTS PREMIERS ET BASES PREMIERES EN ALGEBRE PLURALE

### 81 - PROPRIETES DES IMPLIQUANTS PREMIERS D'UNE FONCTION PLURALE

Considérons une implication  $K_1, \dots, K_n$  d'une fonction plurale  $P$ . On a :  $P = K_1 + \dots + K_n$ .

Soit  $K$  un impliquant premier de  $P$ . On a :

$K \leq K_1 + \dots + K_n$ , inégalité que nous pouvons rendre irrédondante :

$K \leq K_u + \dots + K_v$  (irréd.), ce qui nous donne une relation de consensus :  $K = \mathcal{C}(K_u \dots K_v)$ .

#### Théorème 8-1 :

Tout impliquant premier d'une fonction plurale  $P$  est le consensus d'un certain nombre de monômes pris dans une implication quelconque de la fonction.

La recherche des consensus fournira donc des impliquants premiers. Elle pourra être faite par l'une des méthodes présentées en algèbre booléenne ordinaire, c'est-à-dire par :

- la méthode de reconstitution d'un arbre de réduction
- la méthode d'élimination des monômes d'une implication
- la méthode des formes duales.

#### Remarque 8-1 :

Au cours des calculs, nous aurons à former des consensus de classe 2 par rapport à une des variables biformes dans l'écriture des générateurs. Etant donnés deux monômes  $K_1$  et  $K_2$  la variable informationnelle  $J$  apparaîtra biforme si l'on a :  $J_1 \times J_2$ .

Etant donné un ensemble de monômes  $K_1, \dots, K_n$ . La variable  $J$  y sera biforme s'il est possible de trouver deux monômes  $K_i$  et  $K_j$  tels que  $J_i \not\propto J_j$ .

On peut encore remarquer que lorsque l'on a fait le consensus des deux monômes par rapport à l'une de leurs variables biformes du type classique  $x$ , celle-ci a disparu de l'écriture du consensus, ce qui n'est pas le cas en algèbre plurale. On pourra donc avoir un consensus par rapport à la variable informationnelle entre deux monômes dont l'un au moins a été formé par consensus par rapport à cette même variable. Il y aura donc lieu de faire plusieurs tours de consensus jusqu'à épuisement des possibilités.

Avec les impliquants premiers, nous retrouvons les bases d'une fonction plurale  $P$ .

L'ensemble des impliquants premiers d'une fonction plurale constitue la BASE COMPLETE de cette fonction.

Tout ensemble d'impliquants premiers dont la somme est égale à la fonction en constitue une BASE.

Une base est dite PREMIERE si, en enlevant un monôme quelconque de cet ensemble, le sous-ensemble formé n'est plus une base de la fonction.

Dans toute base, qu'elle soit première ou non, on trouve une génération de tout impliquant premier de la fonction. On retrouvera donc la recherche des bases par utilisation de la fonction BASE.

Si on trouve dans une base de la fonction une génération d'ordre  $q$  de tout impliquant de la fonction, on dira que l'on a affaire à une base d'ordre  $q$ .

.../...

82 - METHODE DE RECONSTITUTION D'UN GRAPHE DE REDUCTION

On part de l'ensemble initial que l'on modifie par étapes (chaque étape étant relative à une variable biforme dans l'ensemble) de la façon suivante :

A chaque étape, on forme tous les consensus possibles par rapport à une certaine variable biforme. On rentre les consensus dans l'ensemble en effectuant les simplifications possibles.

Exemple 8-1 :

Soit l'implication initiale d'une fonction P :

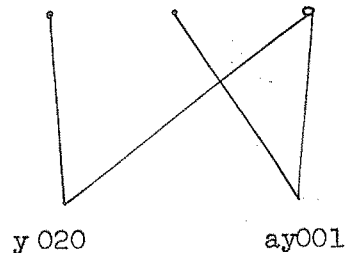
$ay002 / x020 / ax001 / x'y133 / by'133$ .

Proposons-nous de trouver ses impliquants premiers. Les variables biformes sont :

- 1) la variable informationnelle car on a  $002 \not\sim 020$  pour les deux premiers monômes
- 2) les variables x et y.

Consensus par rapport à x

$ay002 / x020 / ax001 / x'y133 / by'133$



D'où le nouvel ensemble :

$ay002 / x020 / ax001 / x'y133 / by'133 / y020 / ay001$

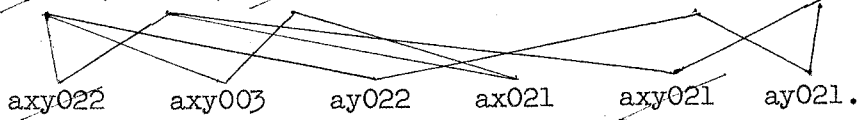
Consensus par rapport à la variable informationnelle

.../...



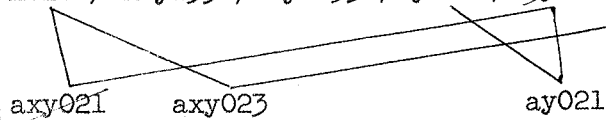
1er tour de consensus

~~ay002 / x020 / ax001 / x'y133 / by'133 / y020 / ay001.~~



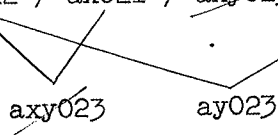
2e tour de consensus

~~x020 / x'y133 / by'133 / y020 / ay001 / axy003 / ay022 / ax021 / ay021~~



3e tour de consensus

~~x020 / x'y133 / by'133 / y020 / ay022 / ax021 / axy023 / ay021~~



Il reste les impliquants :

$x020 / x'y133 / by'133 / y020 / ax021 / ay023$ . La variable J est devenue monoforme car :  $020 < 021 < 023 < 133$ .

Consensus par rapport à y :

Appliquons la méthode des produits de résidus :

Résidus par rapport à :		Produit
y	y'	
x'133	b133	bx'133
020		b020
a023		ab023

.../...

Il reste les neuf impliquants premiers :

$x020 / x'y133 / by'133 / y020 / ax021 / ay023 / bx'133 /$   
 $b020 / ab023.$

Remarque 8-2 :

On peut encore affecter à chaque consensus l'ensemble des variables par rapport auxquelles il a été formé. Soit  $V$  cette suite.

Si l'on considère l'arbre de réduction, on voit qu'il est inutile de former le consensus de deux monômes, l'un contenant la variable  $x$  dans son écriture, l'autre ayant été formé par rapport à cette même variable. On retrouve alors les groupes  $V$ , ce qui nous donne dans le cas général des suites  $X I V J$ .

On peut encore définir des relations d'ordre. Si l'on considère  $V$  comme un monôme, on a :

$$X_{11} I_1 V_1 J_1 \leq X_{22} I_2 V_2 J_2$$

$$\text{ou : } X_{11} I_1 V_1 \quad X_{22} I_2 V_2 \quad \text{et} \quad J_1 \leq J_2$$

Exemple 8-2 :

Soit la base première d'une fonction  $q$  :

$x021 / x'y333 / by'133 / ab002.$

Numérotons les impliquants en plaçant leur indice après le monôme  $X$  et avant  $J$ .

Ils deviennent :

$ax1-021 / x'y2-333 / by'3-133 / ab4-002 / x'y'5-333$

Les variables biformes sont :  $x$ ,  $y$  et  $J$  (car  $021 \not\leq 002$ ).

.. / ...

1ère variable : J

ax 1-021 / x'y 2-333 / by'3-133 / ab 4-002 / x'y'5-333

abx 14-023

D'où le nouvel ensemble :

ax 1-021 / x'y 2-333 / by'3-133 / ab 4-002 / x'y'5-333 /

abx 14-023

2ème variable : x

x	x'	produit
a1-021	y2-333	ay12x021
		ay'15x021
ab14-023	y'5-333	aby124x023
		aby'145x023

D'où le nouvel ensemble :

ax1-021 / x'y 2-333 / by'3-133 / ab 4-002 / x'y'5-333 /  
 abx 14-023 / ay 12 x 021 / ay'15 x 021 / aby 124 x 023 /  
 aby'145 x 023.

3ème variable : y

y	y'	produit
x'2-333	b3-133	bx'23y133
a12x-021	x'5-333	ab123xy021
ab124x023	a15x-021	a125xy021
	ab145x-023	<del>ab1245xy021</del>
		ab1234xy023
		<del>ab1245xy021</del>
		ab1245xy023

.../...

D'où l'ensemble final :

ax1-021 / x'y2-333 / by'3 - 133 / ab4-002 / x'y'5-333 / abx14-023 /  
 ayl2x-021 / ay'15x-021 / aby124x-023 / aby'145x-023 / bx'23y-133 /  
 ab123xy-021 / a125xy-021 / **ab1234xy023** / ab1245xy-023.

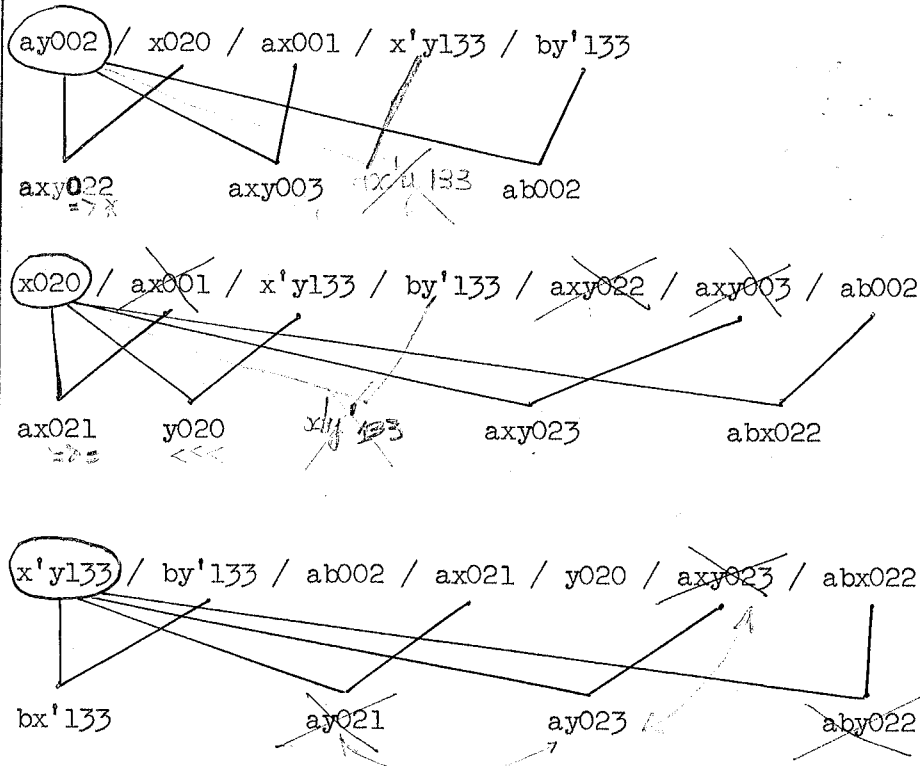
83 - METHODE D'EXCLUSION DES GENERATEURS

On part d'un ensemble de monômes admettant comme sous-ensemble une génération du consensus cherché. On exclut chaque monôme de l'ensemble en le remplaçant par les consensus qu'il admet avec les autres. Lorsque l'ensemble est vide, le consensus cherché a forcément été formé et exclus.

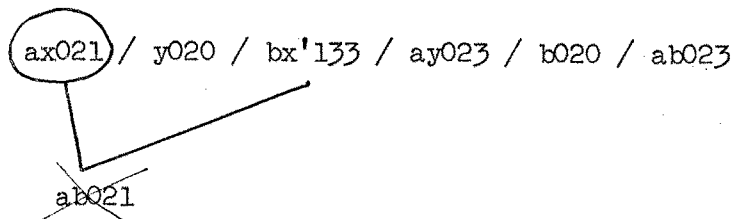
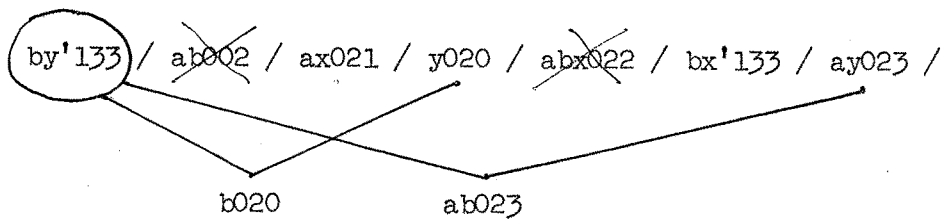
Exemple 8-3 :

Soit la fonction P donnée par son implication ay002 / x020 / ax001 / x'y133 / by'133.

Eliminons chacun des impliquants :



.../...



L'ensemble des impliquants restants devient :

$y020 / bx'133 / ay023 / b020 / ab023$  où toutes les variables sont monofomes, y compris la variable informationnelle (puisque  $020 < 023 < 133$ ).

On peut donc exclure les monômes restants.

L'ensemble des impliquants exclus devient :

~~ay002~~ / ~~x020~~ / ~~x'y133~~ / ~~by'133~~ / ~~ax021~~ /  $y020 / bx'133 / ay023 / b020 / ab023$  / où  $ay002$  peut être éliminé, comme inférieur à  $ay023$ . Il reste les 9 impliquants premiers de la fonction.

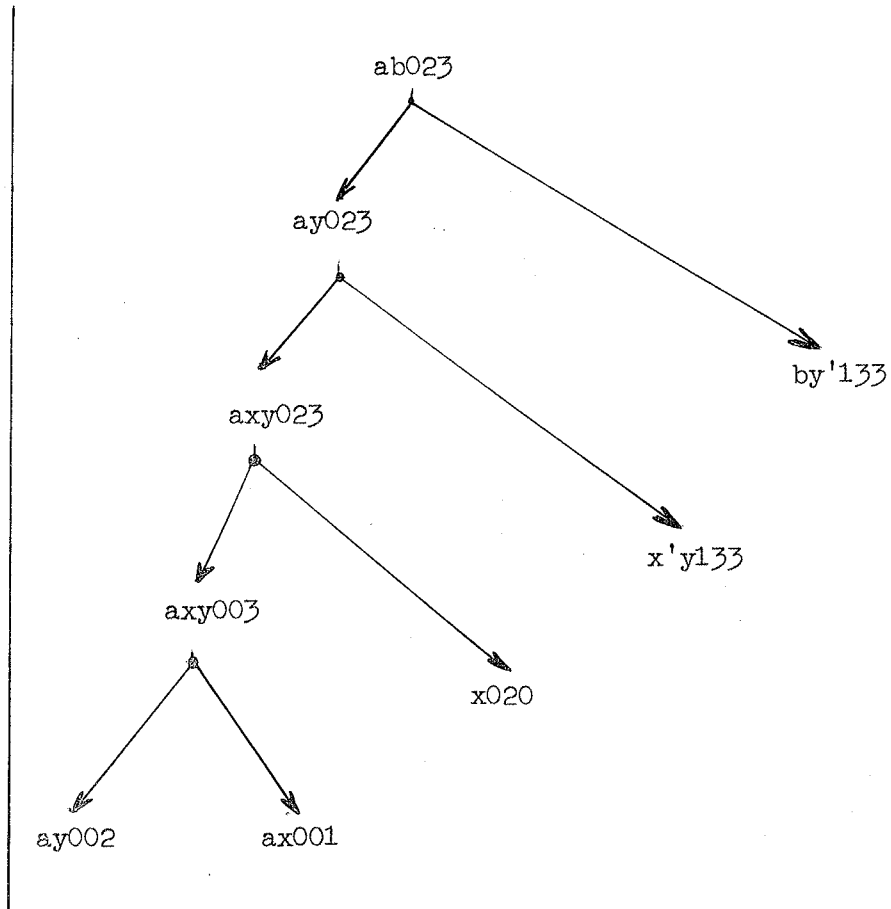
Remarque 8-3 :

On peut encore définir le graphé de formation d'un consensus. C'est un graphe tel que chaque noeud est un monôme inférieur ou égal à la somme des monômes auquel aboutit tout chemin orienté qui en part.

Exemple 8-4 :

L'arbre de formation du consensus  $ab023$  dans l'exemple est le suivant :

.../...



C'est d'ailleurs une remarque très générale. Dans tout arbre de formation d'un monôme par consensus successifs de classe 2, obtenu par la méthode des consensus itératifs, de réduction ou d'exclusion, chaque noeud est lié aux monômes auxquels aboutit tout chemin orienté en partant par une relation d'inclusion. Certaines branches peuvent être éliminées, ce qui conduit forcément alors à des relations de consensus.

Remarque 8-4 :

On peut remplacer tout noeud d'un graphe de formation d'un impliquant premier par un monôme supérieur. Cette opération permet de trouver un autre arbre de formation par élimination des branches inutiles. On peut donc alors, de la même façon qu'en algèbre booléenne classique, éliminer dès la formation d'un monôme ceux qui sont inutiles, par comparaison avec l'ensemble formé des monômes exclus et des monômes restant à exclure.

En particulier, un consensus formé peut être éliminé s'il existe un monôme précédemment exclu qui le couvre.

Remarque 8-5 :

Un noeud du graphe ne comprend plus dans son écriture une variable par rapport à laquelle il a été formé (pour les variables autres que la variable informationnelle). Il en résulte que l'on peut encore introduire les groupes V, et manipuler alors des termes de la forme X I V J.

On aura encore des relations d'ordre, un terme  $T_1 = X_1 I_1 V_1 J_1$  disparaissant s'il en existe un autre  $T_2 = X_2 I_2 V_2 J_2$  tel que :

$$\begin{aligned} X_1 I_1 &\leq X_2 I_2 \\ V_1 &\supseteq V_2 \\ J_1 &\leq J_2 \end{aligned}$$

On peut encore considérer V comme un produit de variables. On aura alors des monomes pluraux classiques  $T_1$  étant éliminé si :

$$X_1 I_1 V_1 J_1 \leq X_2 I_2 V_2 J_2$$

84 - METHODE DES FORMES DUALES

Généralement, une fonction plurale P est donnée par l'une de ses implications, qui correspond à une forme polynomiale "somme de produits".

On peut, de la même façon, se donner la fonction P par une forme "produit de sommes". Il faut alors se donner un ensemble de sommes de variables sous une de leurs formes possibles, dont chacune est égale ou supérieure à P et dont le produit lui est égal. Une variable apparaît alors comme un monôme plural particulier dans lequel toutes les variables, sauf une, apparaissent sous forme de la matrice unité.

Une suite de variables, dont la somme est supérieure à P, est dite COUVERTURE de cette fonction. L'ensemble des couvertures qui la définit est dite ENVELOPPE de cette fonction.

.../...

Exemple 8-5 :

Soit la fonction:  $P_1 = xy213 + x'113 + y202$ .

$x'y$ ,  $y113$ ,  $x'213$ ,  $313$  sont des couvertures de  $P_1$  car :

$$\begin{aligned} P_1 &\leq x' + y \\ P_1 &\leq y + 113 \\ P_1 &\leq x' + 213 \\ P_1 &\leq 313 \end{aligned}$$

Remarque 8-6 :

Dans l'exemple précédent, la variable  $y$  seule représente le monôme plural  $K = AJ$  où  $A = y$  et  $J = 333$ . De même, le terme  $113$  représente le monome  $AJ$  où  $A = 1$  (pas de variable dans son écriture) et  $J = 113$ .

Exemple 8-6 : suite de l'exemple 8-5

L'ensemble des couvertures données de  $P_1$  en constitue une enveloppe.

$$\text{On a : } P_2 = (x' + y)(y + 113)(x' + 213)313$$

$$P_2 = (y + x'113)(x' + 213)313$$

$$P_2 = (x'y + y213 + x'113)313$$

$$P_2 = x'y313 + y213 + x'113$$

On retrouve  $P_2$  à partir de  $P_1$  en cherchant les impliquants premiers de  $P_1$  à partir de l'implication donnée.

$$\cancel{xy213} / \cancel{x'113} / \cancel{y202} / \cancel{y013} / x'y313 / y213.$$

Une couverture est dite PREMIERE si, en supprimant un seul 1 dans l'écriture digitale de ses variables, on n'a plus une couverture. On définit de même une enveloppe première de  $P$ .

..//...



Définition 8-1 :

On appelle COMPLEMENT d'une fonction plurale P une fonction plurale P' définie en prenant comme valeur pour chaque état des variables la valeur J' donnée par le complément à la matrice unité de la matrice J valeur de P.

Exemple 8-7 :

Soit la fonction P définie par son tableau de vérité. On obtient P' par complémentation.

Etat des variables xy	P	P'
00	113	220
01	313	020
10	000	333
11	213	120

On retrouve facilement le théorème 4-2 de correspondance entre les bases et les enveloppes, les impliquants et les couvertures premières ou non de P et de P'.

On a une loi semblable à celle de Morgan :

Exemple 8-8 :

Soit la fonction :

$$P = xy213 + x'113 + y202$$

$$\text{On a } P' = (x' + y' + 120)(x + 220)(y' + 131)$$

$$P' = (x'220 + xy' + y'220 + x120 + 020)(y' + 131)$$

$$P' = y'220 + x'020 + xy' + 020$$

On retrouve par complémentation l'enveloppe :

$$y113 / x213 / x'y333 / 313 \text{ de } P.$$

.../...

On retrouve facilement :

Lemme 8-1 :

Les impliquants premiers d'une fonction  $P$  obtenue en faisant le produit d'un polynôme plural  $P_1$  par un autre  $P_2$  terme à terme, sont obtenus directement par le calcul à condition que  $P_1$  et  $P_2$  soient donnés comme la somme de leurs impliquants premiers.

Pour ne garder qu'eux, il suffit de supprimer les termes inclus dans d'autres.

D'où, par récurrence, l'extension en algèbre plurale du théorème de M. KUNTZMANN :

Théorème 8-2 :

Une fonction plurale étant définie comme un produit de polynômes pluraux, le calcul fournit directement les impliquants premiers, si chacun des facteurs est donné comme somme de ses impliquants premiers.

On retrouve également le processus de passage d'une forme duale à l'autre :

Théorème 8-3 :

L'application du processus de passage d'une forme duale à l'autre appliqué sur une implication d'une fonction, permet de trouver l'enveloppe formée de toutes les couvertures premières.

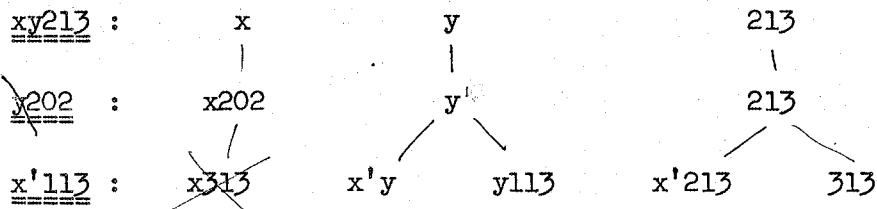
On est alors amené à grouper des variables : grouper  $x$  et  $y$  donne  $xy$ , grouper  $x$  et  $J$  donne  $xJ$ , grouper  $J_1$  et  $J_2$  ne donne pas leur intersection  $J_1 \cdot J_2$  mais leur somme  $J_1 + J_2$ , car on retrouvera dans la même couverture les monômes  $AJ_1$  et  $AJ_2$ , dont la somme donnera bien  $A(J_1 + J_2)$ .

On retrouve les simplifications habituelles.

.. / ...

Exemple 8-9 :

Soit la fonction :  $P = xy213 + x'113 + y202$



On a  $P = (x' + y)(y + 113)(x' + 213)313$

$$P' = xy'333 + y'220 + x120 + 020$$

$P'$  est donné par sa base complète.

De la même façon :

Théorème 8-4 :

L'application du processus de passage d'une forme duale à l'autre appliqué sur une enveloppe, permet de trouver sa base complète.

Remarque 8-7 :

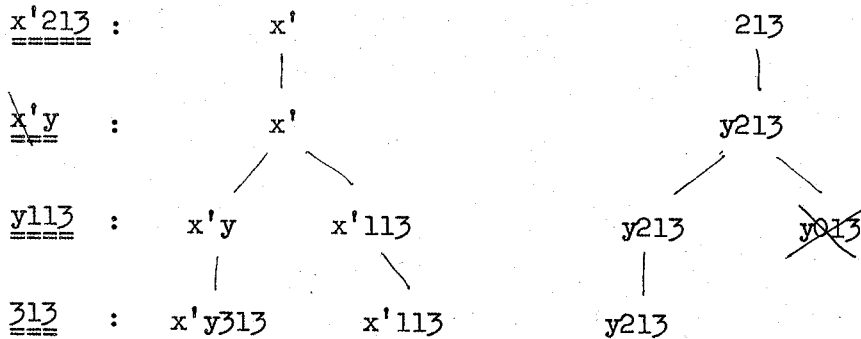
On forme ici des monômes, donc on aura intérêt à grouper deux variables informationnelles  $J_1$  et  $J_2$  en faisant leur produit  $J_1 \cdot J_2$ .

Exemple 8-10 :

Soit la fonction P donnée par son enveloppe complète :

$$x'213 / x'y / y113 / 313.$$

Appliquons le processus:



On a formé les trois impliquants premiers de la fonction.

On a donc bien retrouvé l'algorithme de recherche des impliquants premiers par double passage d'une forme duale à l'autre.

Remarque 8-8 :

Il faut retenir que dans ces deux passages, on a la règle  $J_1 \cdot J_2$  pour le passage des impliquants aux couvertures premières, et la règle  $J_1 + J_2$  dans l'autre cas.

## 85 - RECHERCHE DES BASES PREMIERES

Nous retrouvons les méthodes présentées en algèbre booléenne classique.

Etant donnée une fonction plurale par sa base complète, la recherche des relations de consensus fournira pour chaque impliquant premier  $K$  l'ensemble des relations de consensus d'ordre  $q$ , ce qui nous conduira aux fonctions  $\mathcal{Y}_i^q$  ou "inclusion d'ordre  $q$ ". Ceci nous permet de déterminer :

- les impliquants premiers essentiels : ce sont les  $K_i$  dont la fonction  $\mathcal{Y}_i^q$  se réduit à  $i$ .
- les impliquants premiers inutiles de première espèce : ce sont ceux pour lesquels nous avons un impliquant  $u \dots v$  de  $\mathcal{Y}_i^q$  tel que tous les monomes  $K_u, \dots, K_v$  soient essentiels.

Nous obtenons alors les fonctions "inclusion" réduites  $\mathcal{Y}_i^{q*}$ , dont le produit  $\mathcal{B}^{q*}$  est tel que :  $\mathcal{B}^q = u \dots v \cdot \mathcal{B}^{q*}$ ,  $u \dots v$  représentant le produit des indices des impliquants essentiels.

Nous retrouvons le théorème :

Théorème 8-5 :

A tout impliquant premier de la fonction "base d'ordre  $q$ "  $\mathcal{B}^q$ , il correspond une base première d'ordre  $q$  de la fonction, et inversement.

.. / ...

Exemple 8-11 :

Soit la fonction P donnée par sa base complète :  $a_{133} / b_{021} /$   
 $bx'_{133} / by'_{133} / c_{021} / cx'_{133} / cy'_{121} / x_{021} / xy'_{121} /$   
 $x'_{100} / x'y_{333} / y_{021} / y'_{100}$ . Proposons-nous de trouver  
 l'ensemble de ses bases premières d'ordre zéro.

La variable informationnelle est biforme puisque nous avons  
 $100 \times 021$ .

Nous allons numéroter les monômes, ce qui nous donne des  
 termes X I V J sur lesquels nous allons appliquer la méthode  
 de recherche des impliquants premiers par reconstitution d'un  
 graphe de réduction. Nous cherchons les consensus d'abord par  
 rapport à la variable informationnelle puis par rapport à x,  
 puis par rapport à y, la séparation entre les monômes ainsi  
 formés étant constituée par le signe ///.

$a_{0-133} / b_{1-021} / bx'_{2-133} / by'_{3-133} / c_{4-021} / cx'_{5-133} /$   
 $cy'_{6-121} / x_{7-021} / xy'_{8-121} / x'_{9-100} / x'y_{\alpha-333} /$   
 $y_{\beta-021} / y'_{\gamma-100} /// bx'_{19-121} / by'_{1\gamma-121} / cx'_{49-121} /$   
 $cy'_{4\gamma-121} / xy'_{7\gamma-121} / x'y_{9\beta-121} /// b_{27}x_{021} / c_{57}x_{021} /$   
 $y_{7\alpha}x_{021} / by'_{28}x_{121} / cy'_{58}x_{121} / y'_{89}x_{100} / by'_{189}x_{121} /$   
 $cy'_{489}x_{121} / by'_{27\gamma}x_{121} / cy'_{57\gamma}x_{121} /// bx'_{3\alpha}y_{133} /$   
 $cx'_{6\alpha}y_{121} / x'_{\alpha}\gamma y_{100} / bx'_{1\alpha}\gamma y_{121} / cx'_{4\alpha}\gamma y_{121} /$   
 $b_{3\beta}y_{021} / c_{6\beta}y_{021} / x_{8\beta}y_{021} / b_{28\beta}xy_{021} / c_{58\beta}xy_{021} /$   
 $bx'_{39\beta}y_{121} / cx'_{69\beta}y_{121} / b_{37\alpha}xy_{021} / c_{67\alpha}xy_{021}$ .

On en déduit pour chaque impliquant premier  $K_{\lambda}$  de P, la  
 fonction  $\mathcal{G}_{\lambda}$ , inclusion d'ordre zéro :

$$\begin{aligned} a_{133} & : \mathcal{J}_0 = 0 \\ b_{021} & : \mathcal{J}_1 = 1 + 27 + 3\beta + 28\beta + 37\alpha \\ bx'_{133} & : \mathcal{J}_2 = 2 + 3\alpha \\ by'_{133} & : \mathcal{J}_3 = 3 \\ c_{021} & : \mathcal{J}_4 = 4 + 57 + 6\beta + 58\beta + 67\alpha \\ cx'_{133} & : \mathcal{J}_5 = 5 \end{aligned}$$

.../...

$$\begin{aligned}
 cy'121 & : J_6 = 6 + 4\gamma + 58 + 489 + 57\gamma \\
 x021 & : J_7 = 7 + 8\beta \\
 xy'121 & : J_8 = 8 + 7\gamma \\
 x'100 & : J_9 = 9 + \alpha\gamma \\
 x'y333 & : J_\alpha = \alpha \\
 y021 & : J_\beta = \beta + 7\alpha \\
 y'100 & : J_\gamma = \gamma + 89
 \end{aligned}$$

Les fonctions "inclusion" nous montrent que les monomes d'indice 0, 3, 5 et  $\alpha$  sont essentiels. On voit également que  $K_2 = bx'133$  est inutile de première espèce comme couvert par  $K_3$  et  $K_\alpha$  qui sont essentiels. On écrit alors les fonctions "inclusion" réduites après simplification pour les autres monômes.

$$\begin{aligned}
 J_1^* & = 1 + \beta + 7 \\
 J_4^* & = 4 + 7 + 6\beta + 8\beta \\
 J_6^* & = 6 + 4\gamma + 8 + 7\gamma \\
 J_7^* & = 7 + 8\beta \\
 J_8^* & = 8 + 7\gamma \\
 J_9^* & = 9 + \gamma \\
 J_\beta^* & = \beta + 7 \\
 J_\gamma^* & = \gamma + 89
 \end{aligned}$$

On peut écrire la fonction "Base" réduite  $\mathcal{B}^*$  qui est le produit des  $J_i^*$

Appliquons le processus de passage d'une forme duale à l'autre.

.. / ...

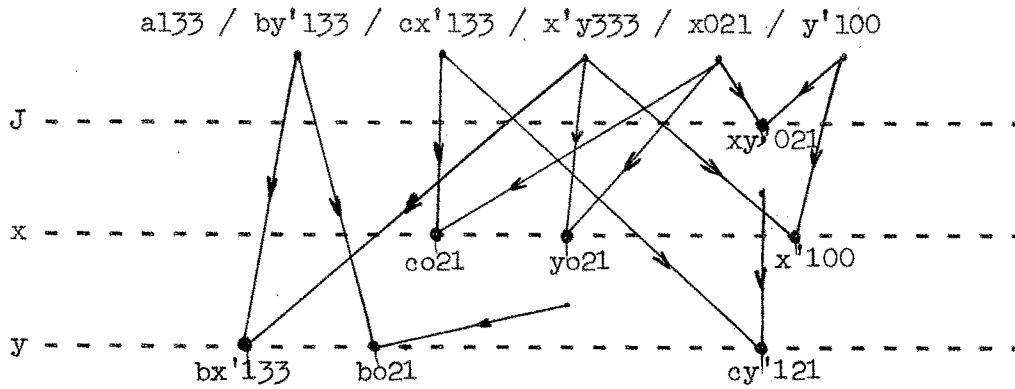
$\underline{1 + \beta + 7}$		1		$\beta$		7	
$\underline{4 + 7 + 6\beta + 8\beta}$	14	<del>16<math>\beta</math></del>	<del>18<math>\beta</math></del>	4 $\beta$	6 $\beta$	8 $\beta$	7
$\underline{6 + 4\gamma + 8 + 7\gamma}$	146	14 $\gamma$	148	<del>147<math>\gamma</math></del>	46 $\beta$	4 $\beta\gamma$	<del>48<math>\beta</math></del> <del>47<math>\beta\gamma</math></del>
	6 $\beta$		8 $\beta$	67	47 $\gamma$	78	7 $\gamma$
$\underline{7 + 8\beta}$	<del>1467</del>	<del>1468<math>\beta</math></del>	<del>147<math>\gamma</math></del>	<del>148<math>\beta\gamma</math></del>	<del>1478</del>	<del>148<math>\beta</math></del>	<del>47<math>\beta\gamma</math></del>
	<del>48<math>\beta\gamma</math></del>	<del>67<math>\beta</math></del>	<del>68<math>\beta</math></del>	8 $\beta$	67	47 $\gamma$	78 7 $\gamma$
$\underline{8 + 7\gamma}$	8 $\beta$	<del>678</del>	<del>67<math>\gamma</math></del>	78	7 $\gamma$		
$\underline{9 + \gamma}$	89 $\beta$	8 $\beta\gamma$	789	<del>78<math>\gamma</math></del>	7 $\gamma$		
$\underline{\beta + 7}$	89 $\beta$	8 $\beta\gamma$	789	7 $\gamma$			
$\underline{\gamma + 89}$	89 $\beta$	8 $\beta\gamma$	789	7 $\gamma$			

D'où  $\mathcal{B}^* = 89\beta + 8\beta\gamma + 789 + 7\gamma$

et  $\mathcal{B} = 035 \alpha \mathcal{B}^*$   
 $= 035 \alpha 89\beta + 035 \alpha 8\beta\gamma + 035 \alpha 789 + 035 \alpha 7\gamma$

Il y a quatre bases premières d'ordre zéro, dont une de coût minimal, donnée par l'impliquant premier  $035 \alpha 7\gamma$  de  $\mathcal{B}$  correspond à l'implication de P :  $a133 / by'133 / cx'133 / x'y333 / x021 / y'100$

Montrons que l'on peut facilement retrouver la base complète.



.. / ...

Remarque 8-9 :

Dans la recherche des consensus nous formons des monômes auxiliaires dont certains ne sont pas des impliquants premiers. C'est le cas de monômes tels que  $cx'121$  dans l'exemple 8-11 où il existe l'impliquant premier  $cx'133$ .

On dispose encore de la méthode de recherche d'une base première par élimination successive des impliquants pour lesquels un test d'inclusion dans l'ensemble restant s'est révélé positif.

86 - TEST D'INCLUSION D'UN MONOME PLURAL DANS UN ENSEMBLE

Soit :  $K \leq K_1 + \dots + K_n$  l'inégalité à tester.

Le processus est le même qu'en algèbre booléenne classique et on retrouve les mêmes ensembles.

- $E_0$ . C'est l'ensemble initial :  $K_1, \dots, K_n$ .
- $E_{01}$ . C'est l'ensemble des monômes  $K.K_1, \dots, K.K_n$  (après élimination de ceux qui sont nuls).
- $E_{02}$ . C'est  $E_{01}$  où l'on a supprimé les termes inférieurs ou égaux à d'autres.
- $E_{03}$ . C'était, en algèbre classique, l'ensemble rassemblant les résidus  $\frac{X.X_i}{X}$ . Etudions ce que devient cette opération en algèbre plurale.

Soit  $M$  un monôme classique contenant  $x$  dans son écriture. Il s'écrit  $N.x$  avec  $N$  ne contenant pas  $x$ , c'est-à-dire le plus grand possible.

Supprimer la variable  $x$  dans  $M$ , c'est la remplacer par la somme  $(x + x')$  qui est égale à 1.

Soit  $M_1$  un monôme classique multiple d'un autre  $M_2$ .  $M_1 = M_2 \cdot N$ .  $N$  étant un monôme ne contenant dans son écriture aucune variable de  $M_2$ , c'est-à-dire encore le plus grand possible.

$$\text{On a : } \frac{M_1}{M_2} = N = N.(M_2 + M_2')$$

.../...



Exemple 8-12 :

$$\frac{ab'ce}{b'c} = ae (b'c + b + c')$$

$$= ae$$

Considérons de la même façon deux monômes pluraux  $K_1$  et  $K_2$  tels que  $K_1$  soit multiple de  $K_2$ .

Nous avons :  $K_1 = K_2.K$ , avec :

- $A_1 = A_2.A$ . Le monôme  $A$  est le plus grand possible (il ne contient alors dans son écriture aucune variable de l'écriture de  $A_2$ ).
- $J_1 = J_2.J$ . La matrice  $J$  étant la plus grande possible. Comme nous avons :  
 $J_2 \geq J_1$  puisque  $K_1$  est multiple de  $K_2$ , nous avons :  
 $J = J_1 + J'_2$ .

Exemple 8-13 :

Soient les monômes :  $K_1 = ab'd0132$  et  $K_2 = ab'1332$

$$K_1 = K.K_2 \text{ avec } K = AJ \text{ et } A = \frac{ab'd}{ab'} = d$$

$$J = 0132 + 2001 = 2133$$

$$\text{D'où : } \frac{ab'd0132}{ab'1332} = d2133$$

Revenons au test d'inclusion d'un monôme plural.

On forme un ensemble  $E_{03}$  avec les résidus  $\frac{K.K_i}{K}$

On supprime les monômes contenant dans leur écriture une variable monoforme.

Remarque 8-10 :

Supposons que l'on ait  $J_1 = J_2$ . Nous avons  $J$  égal à la matrice unité. La variable informationnelle est devenue monoforme et disparaît à son tour.

.../...

On reprend alors la recherche du consensus en abandonnant après examen des consensus par rapport à une variable ceux qui la contiennent dans leur écriture, ceux qui ont dans leur écriture une variable monoforme et ceux qui sont inclus dans d'autres.

On aboutit finalement à l'une des deux solutions possibles :

- 1) On n'a plus aucun monôme dans l'ensemble, le test est négatif, l'inclusion n'est pas vérifiée.
- 2) On arrive à un terme dont l'écriture matricielle n'est constituée que par des matrices unités. C'est le monome plural AJ tel que  $A = 1$  et  $J = 33...3$ .

Le test est positif, il y a inclusion.

Exemple 8-14 :

Soit la fonction P donnée par ses impliquants premiers  
 $b021 / bx'133 / by'133 / c021 / cx'133 / cy'121 / x021 /$   
 $xy'121 / x'100 / x'y333 / y021 / y'100 / a133.$

Testons b021

$E_{01} : bx'021 / by'021 / bc021 / \cancel{bcx'021} / \cancel{bcy'021} /$   
 $bx021 / \cancel{bxy'021} / \cancel{bx'y021} / by021 / ab021.$

$E_{03} : x' / y' / c / x / y / a$

$E_{04} : x' / y' / x / y'$

On obtient le consensus 1.

Le test est positif et b021 éliminé.

Testons bx'133

$E_{02} : bx'y'133 / \cancel{bcx'021} / bcx'133 / \cancel{bcx'y'121} / bx'100 /$   
 $bx'y133 / \cancel{bx'y133} / \cancel{bx'y021} / \cancel{bx'y'100} / abx'133.$

$E_{03} : y' / c / 300 / y / a$

$E_{04} : y' / y$       Test positif

.. / ...

Test sur by'133

$E_{02}$  : ~~bcy'021~~ / bcx'y'133 / bcy'121 / ~~bxy'021~~ / bxy'121 /  
bx'y'100 / aby'133.

$E_{03}$  : cx' / c321 / x321 / x'300 / a

$E_{04}$  : cx' / x321 / x'300.

Test négatif - by'133 est nécessaire.

On continue ainsi jusqu'à épuisement des monômes.

Les impliquants b021, bx'133, c021, cy'121, x021, x'100  
sont éliminés. Il reste la base première d'ordre zéro de P :  
by'133 / cx'133 / xy'121 / x'y333 / y021 / y'100 / a133  
qui correspond à la solution 035  $\alpha$  8  $\beta$   $\gamma$  trouvée dans  
l'exemple 8-11, mais qui n'est pas la base première de  
coût minimal.

Remarque 8-11 :

On retrouve facilement le test d'inclusion d'ordre q, ce qui nous  
permet encore de retrouver les bases premières d'ordre q.

Remarque 8-12 :

On peut encore de la même façon qu'en algèbre booléenne classique,  
chercher les couvertures premières et les enveloppes premières par  
un processus identique à celui utilisé normalement sur les impli-  
quants.

## 9 - REALISATION DES FONCTIONS BOOLEENNES

### 91 - EXPOSE DU PROBLEME

Nous ne nous occuperons ici que des circuits combinatoires à deux étages, les sorties des composants du deuxième étage étant les sorties du système et leurs entrées les variables ou les sorties du premier étage.

Il en résulte que pour tout circuit ainsi réalisé, on obtiendra une fonction prenant la valeur 0 ou 1 d'une façon bien définie pour tout état des variables. Il est donc possible de réaliser les fonctions complètes, qu'elles soient prises isolément ou par systèmes.

Par contre, une fonction  $F$  incomplète ne pourra être réalisée qu'au moyen d'une fonction complète  $R$  qui sera telle que  $m(F) \subseteq R \subseteq M(F)$ , c'est-à-dire où l'on a fixé à une valeur impérative la valeur de la fonction  $F$  pour tout état des variables qui la rendait égale à  $\varnothing$

Nous pouvons, avant de commencer l'étude des réalisations, faire les deux remarques préliminaires :

#### Remarque 9-1 :

Dans les systèmes automatiques, on dispose, dans la plupart des cas, d'une variable et de son complément. Ceci résulte de l'arbitraire avec lequel on définit la valeur 1 d'une variable et du fait que la plupart des capteurs procurent les variables sous leurs deux formes possibles.

.../...

Dans la plupart des cas, on a besoin aussi bien d'une variable que de son complément. On est donc amené à former dans un troisième étage le complément si on a formé la fonction dans le premier. Il résulte que l'on peut aussi bien former le complément dans le second et la fonction dans le troisième.

Réaliser une fonction, c'est donc construire un circuit qui réalisera aussi bien la fonction sous sa forme directe que sous sa forme complémentée.

Les composants les plus couramment utilisés pour la réalisation des circuits sont les opérateurs booléens classiques : ET, NI et NAND, dont la sortie S est liée aux entrées  $a_1, \dots, a_n$  par la relation :

$$S = a_1 \dots a_n \quad \text{pour le ET}$$

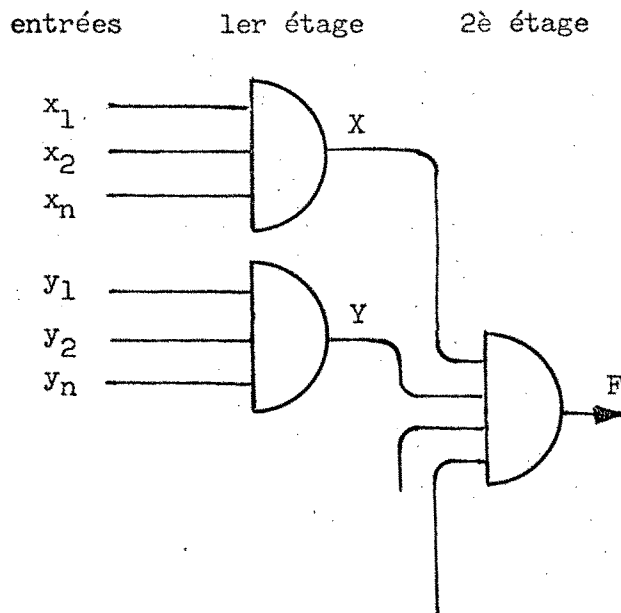
$$S = a_1 + \dots + a_n \quad \text{pour le OU}$$

$$S = a_1' \dots a_n'$$

$$S = a_1' + \dots + a_n' \quad \text{pour le NAND}$$

Il en résulte immédiatement que le troisième étage de complémentation devra être fait impérativement avec un NI ou avec un NAND.

Nous supposons que tous les éléments d'un étage sont identiques et nous ne nous occuperons pas pour l'instant des contraintes dues à la limitation du nombre des entrées et sorties des opérateurs.



Considérons le circuit réalisant une fonction F en fonction des variables  $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ , entrées des opérateurs du premier étage, dont les sorties X, Y, ... apparaissent comme des variables secondaires à l'entrée du deuxième étage.

.../...

Nous allons écrire dans un tableau les diverses fonctions possibles selon la nature des opérateurs.

Nous obtenons huit combinaisons utiles, susceptibles de fournir le circuit correspondant à n'importe quelle fonction donnée :

1er étage		2e étage	
Opérateur	Sorties des composants du premier étage	Opérateur	Fonction obtenue
ET	$x_1 x_2 \dots$	OU	$F = x_1 x_2 \dots + y_1 y_2 \dots + \dots$
	$y_1 y_2 \dots$ .....	NI	$F = (x'_1 + x'_2 + \dots)(y'_1 + y'_2 + \dots) \dots$
OU	$x_1 + x_2 + \dots$	ET	$F = (x_1 + x_2 + \dots)(y_1 y_2 + \dots) \dots$
	$y_1 + y_2 + \dots$ .....	NAND	$F = x'_1 x'_2 \dots + y'_1 y'_2 \dots + \dots$
NI	$x'_1 \cdot x'_2 \dots$	OU	$F = x'_1 x'_2 \dots + y'_1 y'_2 \dots + \dots$
	$y'_1 \cdot y'_2 \dots$ .....	NI	$F = (x_1 + x_2 + \dots)(y_1 + y_2 + \dots) \dots$
NAND	$x'_1 + x'_2 + \dots$	ET	$F = (x'_1 + x'_2 + \dots)(y'_1 + y'_2 + \dots)$
	$y'_1 + y'_2 + \dots$ .....	NAND	$F = x_1 x_2 \dots + y_1 y_2 \dots + \dots$

Les huit autres combinaisons ne sont pas intéressantes car elles ne peuvent fournir que des monômes de la forme :  $x_1 x_2 \dots$ , ou  $x'_1 x'_2 \dots$ , ou des sommes de variables de la forme :  $x_1 + x_2 + \dots$ , ou  $x'_1 + x'_2 + \dots$ .

Puisque nous disposons suivant la remarque 9-1 des variables sous leurs deux formes possibles, nous voyons que nous sommes ramenés à la réalisation minimale d'une fonction F soit sous forme "somme de produits" c'est-à-dire par une base, soit sous forme "produit de sommes" c'est-à-dire par une enveloppe ou encore à une dualité près sur les variables, par la base de F' qui correspond à cette enveloppe de F.

.. / ...

On peut alors préciser la notion de réalisation.

Définition 9-1 :

On appelle REALISATION d'une fonction sous sa forme directe  $F$  [ou sous sa forme complémentée  $F'$ ] une implication d'une fonction  $R(F)$  [ou  $R(F')$ ] telle que  $m(F) \leq R(F) \leq M(F)$  [ou telle que  $m(F') \leq R(F') \leq M(F')$ ].

A toute réalisation correspond, lorsque l'on s'est donné la nature des opérations, un circuit à deux étages réalisant la fonction ou son complément.

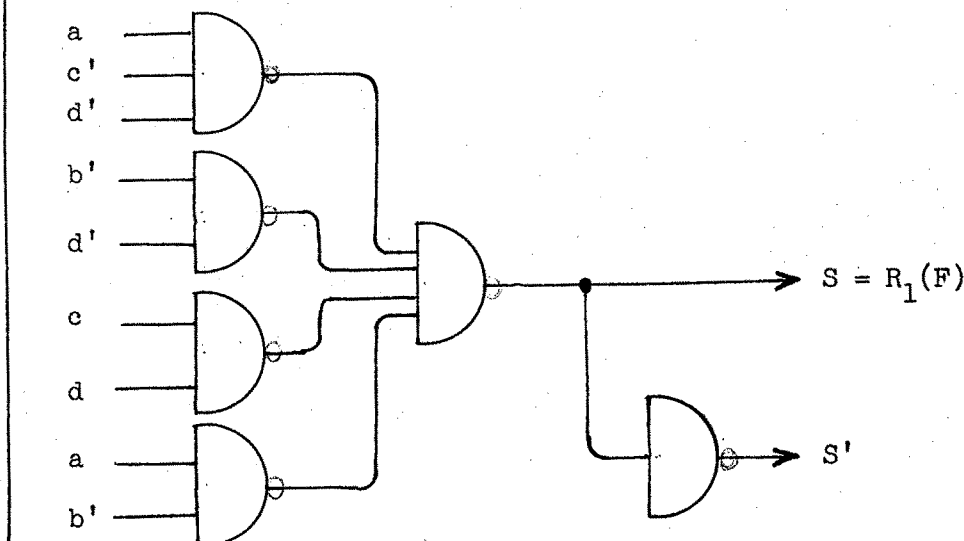
Exemple 9-1 :

Soit la fonction complète donnée par ses bornes :

$$\begin{cases} M(F) = ab' + a'bc' + b'd' + cd + c'd' \\ m(F) = ab'd' + ac'd' + b'cd' \end{cases}$$

Nous avons une réalisation :

$R_1(F) = ac'd' + b'd' + cd + ab'$  à laquelle il correspond une réalisation à NAND :



Etudions les propriétés d'une réalisation donnant un circuit que nous voulons de coût minimal. Il est probable que l'on a intérêt à opérer de la façon suivante :

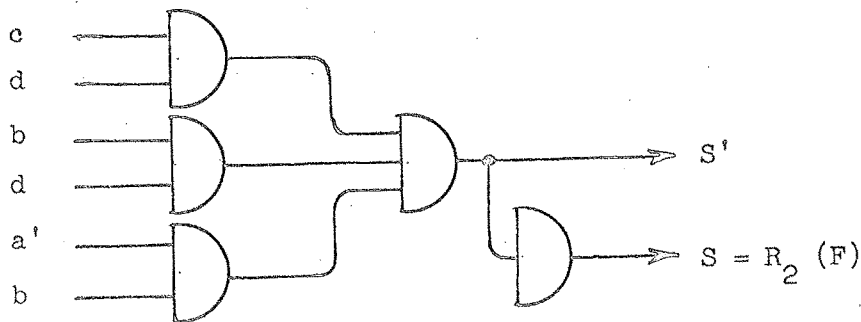
- 1) Réduire le nombre d'opérateurs du premier étage. Il faut donc supprimer les monômes inutiles dans l'implication, c'est-à-dire, la rendre irrédondante.

2) Réduire pour les opérateurs restants le nombre d'entrées possibles, c'est-à-dire prendre les monômes les plus grands possibles.

Exemple 9-2 : (suite de l'exemple 9-1)

Nous aurions pu prendre la réalisation :

$R_2(F) = c'd' + b'd' + ab'$ , qui nous aurait conduits à un circuit probablement moins cher comme celui ci-dessous réalisé en NI :



Il en résulte que toute réalisation de coût minimal d'une fonction simple et complète constituera une base irrédondante de la fonction (ou de son complément)

Une réalisation  $R(F)$  de coût minimal d'une fonction incomplète est un ensemble irrédondant d'impliquants premiers de  $M(F)$ , dont l'intersection avec  $m(F)$  n'est pas nulle.

Il reste à préciser l'ordre de cette irrédondance.

Considérons un circuit réalisant dans un premier niveau les monômes  $A_1 A_2, \dots$  et dans un second la fonction  $S = A_1 + A_2 + \dots$

Nous supposons dans tout ce qui suit que nous avons à la fois au plus une variable qui change d'état.

Supposons que l'on ait deux états des variables, différents entre eux par la valeur d'une variable, et tels que  $A_i = 1$  pour le premier avec  $A_k = 0$  pour  $k \neq i$  et  $A_j = 1$  pour le second avec  $A_k = 0$  pour  $k \neq j$ .

Il s'agit en fait de deux états correspondant à des points voisins sur l'hypercube représentatif de la fonction.

Lorsque l'on passe d'un état à l'autre, la fonction devrait garder la valeur 1, mais le temps de basculement des composants du premier étage n'étant pas nul, il est possible d'obtenir pendant un instant plus ou moins long  $A_i$  et  $A_j$  nuls simultanément.

..//...



Il en résulte que la fonction  $F$  peut prendre en fait pendant un instant très court, mais non négligeable, la valeur 0.

On retrouve des cas analogues avec les autres opérateurs utilisables pour construire les circuits. Ceci peut conduire à des fonctionnements intempestifs du système. On ne cherche pas, en général, à les prévoir par une analyse de ce qui se passe pendant les changements d'états. L'apparition de ces phénomènes prend donc un aspect aléatoire qui leur a fait donner le nom d'"aléas de fonctionnement".

Remarquons que ce phénomène ne peut être gênant que si l'on passe d'un état à un autre des variables faisant tous deux :  $m(F) = 1$ .

Nous avons alors la propriété fondamentale :

Théorème 9-1 :

Pour qu'une réalisation  $R(F)$  d'une fonction  $F$  ne puisse conduire à des circuits pouvant présenter des aléas de fonctionnement, il faut et il suffit que chaque impliquant de  $m(F)$  soit inférieur ou égal à un consensus d'ordre 1 admettant comme générateurs des impliquants de  $M(F)$  figurant dans la réalisation  $R(F)$ .

Si les aléas ne sont pas à craindre, chaque impliquant de  $m(F)$  est inférieur ou égal à un monôme consensus d'ordre zéro au moins, dont les générateurs figurent dans  $R(F)$ .

Remarque 9-3 :

Pour une fonction simple et complète  $F$ , toute réalisation de coût minimal sera :

- une base d'ordre zéro si les aléas ne sont pas à craindre
- une base d'ordre 1 si les aléas doivent être évités.

Remarque 9-4 :

Dans une réalisation d'ordre zéro d'une fonction  $F$ , tous les sommets de  $m(F)$  sur l'hypercube représentatif sont couverts.

Dans une réalisation sans aléas, toutes les arêtes de  $m(F)$  le sont.

../...

Définition 9-2 :

On appellera REALISATION d'ordre 0 [ou 1] d'une fonction F, ou encore réalisation SANS [ou AVEC] COUVERTURE des ARETES, un ensemble d'impliquants de M(F) qui admet pour chaque impliquant de m(F) un sous-ensemble formant une génération d'ordre zéro (ou d'ordre 1) d'un consensus supérieur ou égal à l'impliquant considéré de m(F).

Remarque 9-5 :

Une réalisation avec couverture des arêtes permet de supprimer les aléas de fonctionnement et ceci quelle que soit la nature des composants choisis pour former le circuit.

92 - CAS D'UNE FONCTION SIMPLE ET COMPLETE

Tous les monômes susceptibles de figurer dans une réalisation de coût minimal d'une fonction F, sont des impliquants premiers de F. C'est donc une base première d'ordre zéro ou d'ordre 1 suivant que l'on cherche ou non à éviter les aléas.

On connaît une méthode pour en trouver une. On peut aussi chercher l'ensemble des bases premières. Il suffit alors de prendre la moins coûteuse. On peut aussi prendre la moins chère des réalisations de F'.

Exemple 9-3 :

Soit la fonction F donnée par sa base complète :  $ax / ay / bx / by / bz / xy' / xz' / x'y / yz'$ .

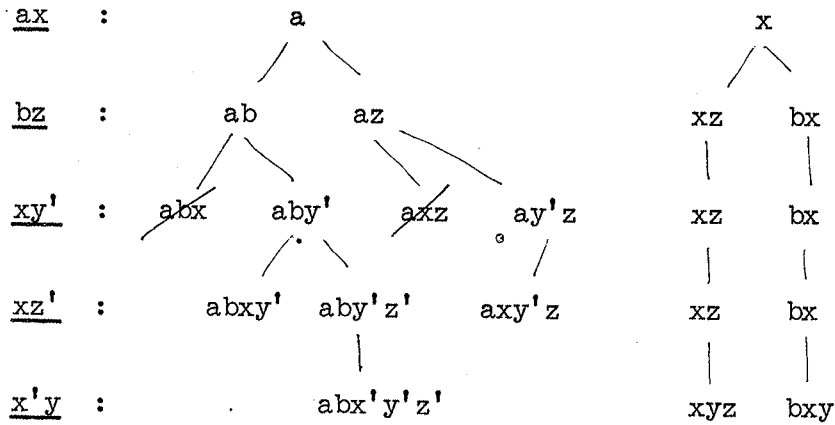
Proposons-nous donc de trouver ses réalisations minimales d'ordre zéro.

Nous avons vu par les exemples 4-18 et 4-20 qu'elle admettait quatre bases premières d'ordre zéro :

.. / ...

- 1)  $ax / bz / xy' / xz' / x'y$
- 2)  $ax / bz / xy' / x'y / yz'$
- 3)  $ay / bz / xy' / xz' / x'y$
- 4)  $ay / bz / xy' / x'y / yz'$

Cherchons les enveloppes premières de F, et d'abord ses couvertures premières, en partant de la base n° 1 :



F admet donc trois couvertures premières seulement, qui constituent une enveloppe première d'ordre quelconque.

On a donc intérêt à réaliser la fonction F par son enveloppe, c'est-à-dire à réaliser F'.

On peut représenter une fonction simple et complète par une fonction plurale à une dimension, qui est réelle comme ne prenant jamais la valeur 0, et qui, en outre, ne prend pour aucun état des variables la valeur 3.

Exemple 9-4 :

La fonction de l'exemple 9-3 est représentable par la fonction plurale P donnée par sa base complète :  $ax^2 / ay^2 / bx^2 / by^2 / bz^2 / xy'^2 / xz'^2 / x'y^2 / yz'^2 / a'b'xyz^1 / x'y'z'1 / b'x'y'1$ .

Cherchons par les tests d'inclusion une base première d'ordre zéro de P.

.../...

Test sur ax<sup>2</sup> :  $y^2 / b^2 / \cancel{by^2} / \cancel{bz^2} / y'^2 / z'^2 / \cancel{yz'^2} /$

Le test est positif et ax<sup>2</sup> exclus.

Test sur ay<sup>2</sup> :  $\cancel{bx^2} / \cancel{b^2} / \cancel{bz^2} / \cancel{xz'^2} / x'^2 / \cancel{z'^2}.$

Le test est négatif.

On arrive finalement à la base première de P:  $ay^2 / bz^2 / xy'^2 / x'y^2 / yz'^2 / a'b'xyz_1 / x'y'z'_1 / b'x'y'_1.$

Théorème 9-2 :

Etant donnée une base première d'une fonction plurale à une dimension, on obtient simultanément :

- une base première de F en prenant les monômes dont la variable informationnelle vaut 2
- une base première de F' en prenant ceux où l'on a 1.

On voit donc immédiatement quelle est la façon la plus intéressante de réaliser la fonction.

Remarque 9-6 :

La fonction plurale fait mieux apparaître la similitude des rôles joués par la forme directe d'une fonction, et par sa forme complétée.

### 93 - CAS D'UNE FONCTION SIMPLE INCOMPLETE

Les monômes susceptibles de figurer dans toute réalisation en deux étages d'une fonction F, sont les impliquants premiers de la borne supérieure M(F), dont l'intersection avec m(F) n'est pas nulle. On peut alors rechercher pour chacun d'eux les relations de consensus d'ordre zéro ou 1 suivant l'ordre de la réalisation à trouver, où les générateurs sont des monômes de l'ensemble :  $A_1, \dots, A_n.$

Soient  $X_1$  à  $X_m$  ces consensus. Pour chacun d'eux, on peut alors définir une fonction inclusion  $\mathcal{Y}^q$  d'ordre q de la même façon que lors de la recherche des bases premières.

.. / ...



D'où :

$$\mathcal{R}_0 = (2 + 18)(4 + 37)(5 + 67)(7 + 145 + 45)$$

$$\mathcal{R}_0 = 2357 + 13578 + 2467 + 14678 + 2367 + 13678 + 245 + 1458.$$

Il y a une solution minimale donnée par la somme  $ad' + a'bd + b'c$  et qui correspond à la suite 245 qui donne  $R(F) = ad' + a'bd + b'c$ .

Cherchons la réalisation minimale de  $F'$ . On a :

$$\begin{cases} M(F') = ab' + ad + a'bd' + a'c'd' + b'c' \\ m(F') = abc'd + a'bcd' + a'b'c'd. \end{cases}$$

La réalisation de coût minimal de  $F'$  est :

$$R(F') = ad + a'bd' + b'c'$$

Nous pouvons donc prendre  $R(F)$  ou  $R(F')$  qui sont de coût probablement identique.

Considérons la fonction plurale  $P$  associée à la fonction incomplète  $F$ . On trouve facilement quels sont les impliquants qui ne sont pas utiles : ce sont les impliquants premiers de  $P$  où la variable informationnelle apparaît sous la forme 3.

On obtient alors, après suppression de ces termes, une fonction plurale réduite  $P^*$  qui ne prend plus la valeur 3 pour aucun état des variables. Les impliquants premiers de  $P^*$  où la variable informationnelle apparaît sous la forme 2 (ou 1) sont susceptibles de figurer dans la réalisation de  $F$  (ou de  $F'$ ). Ce sont des impliquants premiers de  $M(F)$  et de  $M(F')$ . On est alors ramené au cas de l'algèbre booléenne classique.

Exemple 9-6 :

Reprenons la fonction  $F$  de l'exemple 9-5, donnée par les bases complètes de ses bornes supérieures :

../...

$$\left\{ \begin{array}{l} M(F) : ac / ad' / a'bc' / a'bd / b'c / b'd' / cd / c'd' / ab' \\ M(F') : ab' / ad / a'bd' / a'c'd' / b'c'. \end{array} \right.$$

Il lui correspond la fonction plurale P donnée par l'implication :  $ac^2 / ad'^2 / \dots / ab'^2 / ab'1 / \dots / b'c'1$ .

Cherchons ses impliquants premiers :

$$\begin{array}{l} \cancel{ab'^2} / ac^2 / ad'^2 / a'bc'^2 / a'bd^2 / b'c^2 / b'd'^2 / \\ cd^2 / c'd'^2 / \cancel{ab'1} / ad1 / a'c'd'1 / b'c'1 / ab'^3 / \\ \cancel{acd^3} / \cancel{a'bc'd'^3} / \cancel{a'b'c'd'^3} / b'c'd'^3 / a'c'd'^3. \end{array}$$

On en déduit la fonction P\* réduite donnée par sa base complète :  $ac^2 / ad'^2 / a'bc'^2 / a'bd^2 / b'c^2 / b'd'^2 / cd^2 / c'd'^2 / ad1 / a'c'd'1 / b'c'1$ .

On en déduit les monômes susceptibles de figurer dans les réalisations minimales :

- 1) de F :  $ac / ad' / a'bc' / a'bd / b'c$
- 2) de F' :  $ad / a'c'd' / b'c'$ .

Remarque 9-7 :

A une base première de P\* il ne correspond plus forcément une base première de F et une de F'.

On peut avoir, en effet, dans une base première de P, deux monômes  $A_1 J_1$  et  $A_2 J_2$  tels que  $A_1 \leq A_2$  et  $J_1 > J_2$ .

Si la suppression des 3 dans les matrices informationnelles transforme  $J_1$  et  $J_2$  en  $J_1^*$  et  $J_2^*$  tels que  $J_1^* \leq J_2^*$ , on peut alors supprimer  $A_1 J_1^*$  qui est inférieur ou égal à  $A_2 J_2$ .

Remarque 9-8 :

On peut encore, comme pour les fonctions complètes, trouver une réalisation irrédondante de la fonction, par un test d'inclusion.

On applique encore le processus d'exclusion des impliquants premiers d'une base de M(F). Un monôme est exclu, si pour tous les monômes  $X_1, \dots, X_p$  qui sont ses intersections avec tous les impliquants d'une base quelconque de m(F), le test d'inclusion dans l'ensemble des monômes restants est vérifié.

.../...

Exemple 9-7 :

Soit la fonction incomplète donnée par les bases complètes de ses bornes.

$$\left\{ \begin{array}{l} M(F) = ab' + ac + ad' + a'bc' + a'bd + b'c + b'd' + cd \\ \quad \quad \quad + c'd' \\ m(F) = abd' + a'bd + a'b'c + a'cd \end{array} \right.$$

1) Exclusion de  $ab'$ 

Son intersection avec  $m(F)$  est nulle. Donc  $ab'$  peut être éliminé. Il reste :

$$ac / ad' / a'bc' / a'bd / b'c / b'd'$$

2) Exclusion de  $ac$ 

Son intersection avec  $m(F)$  est  $abcd'$ .

On vérifie l'inclusion de  $abcd'$  dans l'ensemble  $ad' / a'bc' / a'bd / b'c / b'd' / cd / c'd'$

Un seul monôme pour l'intersection :  $abcd'$ . Le test est positif et  $ac$  éliminé.

$$\text{Il reste : } ad' / a'bc' / a'bd / b'c / b'd'.$$

3) Exclusion de  $ad'$ 

Son intersection avec  $m(F)$  est  $abd'$ .

Testons l'inclusion de  $abd'$  dans  $a'bc' + a'bd + b'c + b'd$ .

Le test est négatif. Donc  $ad'$  est nécessaire.

4)  $a'bc'$ 

$$a'bc'. m(F) = a'bc'd$$

Testons  $a'bc'd$  : Test positif.

$a'bc'$  peut être éliminé. Il reste :

$$ad' / a'bd / b'c / b'd.$$

5)  $a'bd$ 

$$a'bd. m(F) = a'bd$$

Testons  $a'bd$  : Test négatif

L'ensemble est inchangé.

.. / ...



6) b'c

$$b'c.m(F) = a'b'c$$

Testons a'b'c : Test négatif.

7) b'd

$$b'd.m(F) = a'b'cd$$

Testons a'b'cd : Test positif.

Il reste l'ensemble  $ad' / a'bd / b'c$  qui est une réalisation irrédondante de la fonction incomplète et qui se trouve être celle de coût minimal parmi les 8 réalisations de la fonction que l'on a trouvée par la méthode de la fonction  $\mathcal{B}$ . (voir exemple 9-5).

#### 94 - CAS D'UN SYSTEME DE FONCTIONS

Nous ne nous occuperons ici que des fonctions incomplètes, toute fonction complète n'étant que le cas particulier d'une fonction incomplète où  $\mathcal{F}(F) = 0$  et  $m(F) = M(F)$ .

Considérons un système de  $g$  fonctions simples  $F_1, \dots, F_g$ .

Les monômes susceptibles de figurer dans une réalisation minimale d'une fonction  $F_i$ , sont des impliquants de  $M(F_i)$ , formés dans le premier étage. Or, un tel monôme  $X$  peut aussi entrer dans la réalisation d'une autre fonction  $F_j$ . C'est donc un impliquant premier du produit  $M(F_i).M(F_j)$ .

D'où la propriété : les monômes formés dans le premier étage sont des impliquants premiers des intersections des bornes supérieures  $M(F_i)$  [ou  $M(F'_i)$ ] prises 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, ...,  $g$  à  $g$ .

Soit  $M$  un tel monome. Supposons qu'il ait été formé par l'intersection de plusieurs bornes supérieures dont  $M(F_i)$ . Pour qu'il serve à former  $R(F_i)$  il est nécessaire que son intersection avec  $m(F_i)$  ne soit pas nulle.

.../...

On disposera donc, pour réaliser une fonction simple  $F_{\lambda}$ , d'un certain nombre de monômes qui ne seront pas forcément impliquants premiers de  $M(F_{\lambda})$ . Il faudra alors chercher les relations de consensus entr'eux et l'on sera ramené au problème de la réalisation d'une fonction simple incomplète.

On voit ici apparaître l'intérêt de la recherche des relations de consensus entre des monômes d'un ensemble où figurent deux termes  $A_{\lambda}$  et  $A_j$  tels que :  $A_{\lambda} < A_j$ .

On obtient alors, pour chaque fonction  $F_{\lambda}$ , une fonction Réalisation  $\mathcal{R}_{\lambda}^q$  du type classique avec  $q = 0$  ou  $1$ .

Remarque 9-9 :

Dans un même système de fonctions à réaliser, on peut avoir  $q = 0$  pour certaines fonctions et  $q = 1$  pour les autres.

Chaque  $\mathcal{R}_{\lambda}$  étant connue avec son ordre particulier, on obtient pour l'ensemble du système une fonction  $\mathcal{R}$  en faisant leur produit :

$$\mathcal{R} = \prod_1^g \mathcal{R}_{\lambda_i}$$

Chaque impliquant premier de  $\mathcal{R}$  donne encore un ensemble irrédondant de monômes à former dans le premier étage.

Pour diminuer le nombre de liaisons entre les deux étages, on peut affecter à chaque variable un indice indiquant pour quelle fonction le monôme correspondant est nécessaire. On a alors, au moment du passage de  $\mathcal{R}$  en sommes de produits, à admettre l'égalité :

$$u_{\lambda} \cdot u_j = u_{\lambda j}$$

L'intersection du fait que  $A_u$  est nécessaire pour  $F_{\lambda}$  et du fait que  $A_u$  l'est aussi pour  $F_j$  est, en effet, le fait qu'il l'est à la fois pour les deux.

.../...

Exemple 9-8 :

Soit le système :

$$\begin{cases} F_1 = ab + bc' \\ F_2 = a'c + bc \\ F_3 = ab' + ac \end{cases}$$

Proposons-nous de trouver sa réalisation minimale d'ordre zéro.

On a  $F_1 \cdot F_2 = F_1 \cdot F_3 = F_2 \cdot F_3 = F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 = abc$ .

Numérotons les monômes intéressants :  $ab1 / abc2 / ab'3 / ac4 / a'c5 / bc6 / bc'7$ .

Formons  $F_1$ . On peut utiliser  $ab, bc'$  et  $abc$ , les relations de consensus sont :  $ab1 / abc2 / bc'7 / ab27$ .

D'où  $\mathcal{R}_1 = (1 + 27)7 = 17 + 27$ .

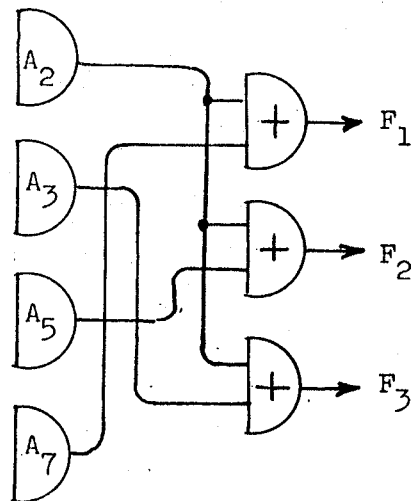
De même  $\mathcal{R}_2 = 25 + 56$  et  $\mathcal{R}_3 = 23 + 34$ .

D'où  $\mathcal{R} = (1_1 7_1 + 2_1 7_1)(2_2 5_2 + 5_2 6_2)(2_3 3_3 + 3_3 4_3)$   
 $= 1_1 3_3 4_3 5_2 6_2 7_1 + 2_1 2_3 3_3 5_2 7_1$

Le deuxième terme de  $\mathcal{R}$  nous donne un circuit pouvant être de coût minimal.

Il faut ensuite effectuer les mêmes opérations pour toutes les combinaisons possibles :

$F_1 F_2 F_3', F_1 F_2' F_3, \dots$



Exemple 9-9 :

Soit le système de fonctions dont nous nous proposons de trouver la réalisation minimale d'ordre 1 :

$$\begin{cases} m(F_1) = ab + ad' + bc'd' + ac \\ M(F_1) = ab + ac + ad' + bc' + a'c'd \\ m(F_2) = abc + ad + ab'c' + b'c'd \\ M(F_2) = ab' + ac + ad + a'bc' + c'd \end{cases}$$

$M(F_1)$  et  $M(F_2)$  sont donnés par la somme de leurs impliquants premiers (base complète).

$a'c'd$  est inutile dans  $M(F_1)$  car il est extérieur à  $m(F_1)$

De même  $a'bc'$  est inutile dans  $M(F_2)$ .

Le produit  $M(F_1) \cdot M(F_2)$  donné par sa base complète est

$$abd + ab'd' + ac + a'bc' + a'c'd + bc'd$$

$a'bc'$  y est inutile comme extérieur à  $m(F_1)$

$a'c'd$  " " " "

On dispose de dix impliquants premiers utilisables.

Finalement, nous trouvons les fonctions "Inclusion" :

	Ordre ZERO	Ordre 1
$m(F_1)$ $\left\{ \begin{array}{l} ab \\ ad' \\ bc'd' \\ ac \end{array} \right.$	$0 + 47 + 16 + 468$ $6 + 03 + 347$ $7$ $4$	$0 + 1467$ $6$ $7$ $4$
$m(F_2)$ $\left\{ \begin{array}{l} ad \\ ab'c' \\ abc \\ b'c'd \end{array} \right.$	$5 + 12 + 49 + 248$ $2 + 35 + 39 + 349$ $4 + 47 + 16 + 468$ $9$	$5 + 1249$ $2$ $4$ $9$

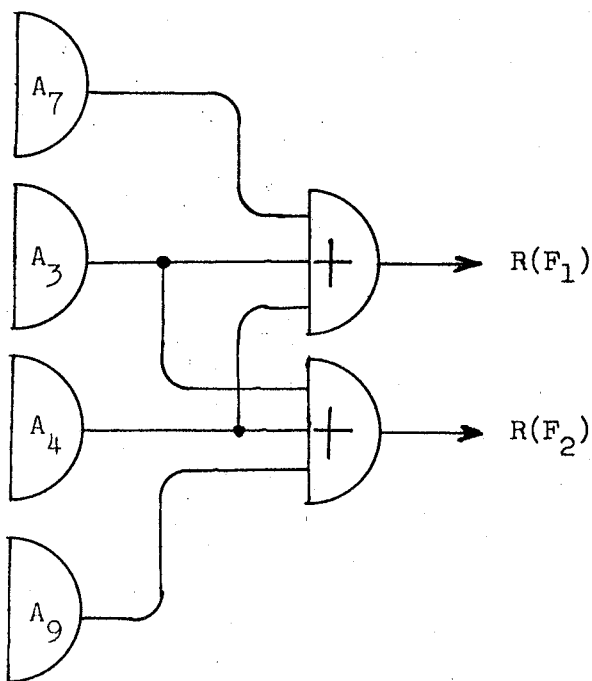
$$\mathcal{B}^0 = (0_1 + 4_1 7_1 + 1_1 6_1) \dots (4_2 + 1_2 6_2) 9_2$$

$\mathcal{B}^0$  admet 8 impliquants premiers :

$$1_2 3_{12} 4_{15} 6_{27} 9_2 / \dots / 3_2 4_{12} 6_{17} 9_2$$

Celui qui paraît le plus économique est  $3_{12} 4_{12} 7_1 9_2$  qui correspond au circuit de coût minimal d'ordre zéro.

.../...



De la même façon on a quatre impliquants premiers pour  $\mathcal{B}_1^1$ , celui donnant le circuit du coût minimal étant  $1_{12} 2_{12}^4 6_{11} 7_{11} 9_{12}$ . Le circuit comprend donc six éléments dans le premier étage, au lieu de quatre pour l'ordre zéro. Il est toutefois plus économique que celui que l'on aurait eu en prenant l'ensemble des impliquants premiers des bornes supérieures, ce qui nous aurait conduits à un circuit à sept éléments dans le premier niveau.

L'introduction des fonctions plurales associées au système de fonction simple est également très intéressante.

On commence par rechercher la base complète de la fonction plurale P associée à un système de fonctions.

On transforme cette base par remplacement de tous les  $\exists$  des variables informationnelles J par des zéros. on supprime les monômes  $A_J$  ou  $J = 0 \dots 0$

On obtient ainsi une fonction plurale P\* associée à P, dont on obtient la base complète par suppression des monômes inclus dans d'autres à la suite de la transformation des  $\exists$  en 0. ou  $n^2$

.../...

Supposons que l'on veuille former par le circuit  $F_1, F'_2, F'_3, F_4, \dots$ , on multipliera les impliquants premiers de  $P^*$  par la matrice  $2 \ 1 \ 1 \ 2 \ \dots$  (le chiffre 2 [ou 1] au  $i$ -ième rang correspondant au fait que l'on décide de former  $F_i$  [ou  $F'_i$ ]).

Il restera alors un ensemble de monômes qui seront tels que tous les monômes ayant ou 2 (ou un 1) dans le  $i$ -ième rang de leur matrice seront intéressants pour réaliser  $F_i$  (ou  $F'_i$ ).

On est alors ramené au problème classique de la réalisation des systèmes de fonctions.

Exemple 9-10 :

Au système de fonctions de l'exemple 9-9 correspond la fonction plurale  $P$  donnée par sa base complète :

$a20 / ab21 / ab'33 / ab'c33 / ac21 / ad33 / a'bc11 /$   
 $a'bd'13 / a'cd'13 / a'c'02 / a'd'12 / bcd31 / bd'01 /$   
 $b'cd'13 / b'c'22 / b'c'd23 / b'c'd'32 / b'd21 / b'd'12 /$   
 $c01 / cd21 / c'd22 / d20.$

Il lui correspond la fonction  $P^{**}$  :

$a20 / ab21 / ac21 / a'bc11 / a'bd'10 / a'cd'10 / a'c'02 /$   
 $a'd'12 / bcd01 / bd'01 / b'cd'10 / b'c'22 / b'c'd20 /$   
 $b'c'd'02 / b'd21 / b'd'12 / c01 / cd21 / c'd22 / d20.$

On en déduit facilement les monômes intéressants suivant ce que l'on veut réaliser.

Ainsi, pour réaliser  $F_1$  et  $F'_2$ , on utilisera les monômes ayant 20, 21, 01, 11 ou 21, comme variable informationnelle.

$a20 / ab21 / ac21 / a'bc11 / b'c'22 / b'd21 / c01 / cd21 /$   
 $c'd22 / d20$  qui deviennent après leur intersection avec  $\boxed{21}$   
 $a20 / ab21 / ac21 / a'bc01 / b'c'20 / b'd20 / c01 /$   
 $cd21 / c'd20 / d20.$  (suppression des monômes b'c'd'10)

Pour former  $R(F_3)$  on prendra ceux ayant 2 comme premier chiffre, et pour  $R(F'_2)$  ceux ayant un 1 comme second chiffre dans leur  $J$ .

On peut encore opérer de la même façon que pour les systèmes de fonctions, en cherchant les relations de consensus entre les différents monômes et en formant pour chaque impliquant de  $m(F_i)$  une fonction "Inclusion" et pour l'ensemble une fonction "Réalisation".

Il est possible d'opérer pour la recherche d'une base première seulement comme on l'a fait dans le cas d'une fonction incomplète.

Pour cela, on multiplie la fonction  $P^*$  par la matrice  $J = \begin{matrix} 2 & 1 & 1 & 2 & \dots \end{matrix}$  pour la réalisation du système  $F_1, F_2, F_3, F_4 \dots$

On obtient alors un ensemble de monômes formant l'implication d'une fonction  $P^{**} \leq P^*$ .

On élimine alors de l'implication de  $P^*$  chaque monôme après avoir testé que ses différentes intersections avec les impliquants de  $P^{**}$  sont toutes couvertes par les monômes restants.

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] W.V. QUINE : "The problem of simplifying truth functions" - Am. math. monthly vol. 59 - Octobre 1952 - p. 521-531
- [ 2 ] W.V. QUINE : "A way to simplify truth functions" - Am. math. monthly - vol. 62 - Novembre 1955 - p. 627-631
- [ 3 ] M.A. GAVRILLOV : "Minimization to the boolean functions characterising switching circuits" - IRE Transactions on electronic computers EC 9 - Décembre 1960 - p. 517
- [ 4 ] McCLUSKEY E.J. : "Minimization of boolean functions" - Bell system tech. journal n° 6 - Novembre 1956 - p. 1417-1444
- [ 5 ] I.B. PYNE and E.J. McCLUSKEY : "The reduction of redundancy in solving prime implicant tables" - IRE Transactions on electronic computers - Août 1962 - p.473 à 482
- [ 6 ] T. MUKHERJEE et P.K. SARKAR : "On a method of finding the irredundant forms of a boolean function" - Journal Electrocontrol 1963 - vol. 14 - p. 563-580
- [ 7 ] KAZAKOV : "The minimization of a large number of variables" - Automation and Remote Control - Mars 1963
- [ 8 ] T.C. BARTEE : "Computer Design of multiple Output logical Networks" - IRE Trans. on electronic computers - vol. EC 10 - Mars 1961 - p. 21-30
- [ 9 ] P. TISON : "Recherche des termes premiers d'une fonction booléenne - Applications" Automatisation - Tome IX n° 1 - Janvier 1964
- [ 10 ] R. HOCKNEY : "An intersection algorithm giving all irredundant normal forms from a prime implicant list" - IRE Transactions on electronic computers - Correspondence Avril 1962 - p. 289-290
- [ 11 ] J. GHAZALA : "Irredundant disjunctive conjunctive forms of a boolean function" - IBM Journal - Avril 1957 - p. 171 à 176
- [ 12 ] T.H. MOYTT : "Determination of the irredundant normal forms of a truth function by iterated consensus of the prime implicants" - IRE Transactions on electronic computers - Juin 1960 - p. 245 à 252
- [ 13 ] E.W. SAMSON et B.E. MILLS : "Circuit Minimization : Algebra and Algorithms for new boolean canonical expressions" - AFCRC Techn. Report 5421 - Avril 1954
- [ 14 ] E.W. SAMSON et L. CALABI : "On the theory of boolean formulas : minimal including sums" - J. Soc. Indust. Appl. Math. - Vol. II n° 2 - Juin 1963
- [ 15 ] P. TISON : "Théorie des consensus" - Congrès AFCAITI de Versailles - Avril 1964
- [ 16 ] P. TISON : "Théorie des consensus ; algorithmes de recherche des bases premières" - Colloque d'Algèbre de Boole de Grenoble - Janvier 1965
- [ 17 ] J. KUNTZMANN : "Un théorème sur les composants premiers d'une fonction booléenne et ses applications" - Automatisation - Tome IX - n° 1 - Janvier 1964
- [ 18 ] J.T. CHU : "Some methods for simplifying switching circuits using don't care conditions" - J.A.C.M. - Vol. 8 - p. 497-512 - Octobre 1961
- [ 19 ] J. KUNTZMANN : "Algèbre de Boole" - DUNOD - Avril 1965
- [ 20 ] R.L. HOWARD : "New methods of simplifying boolean functions" - Appl. and ind. AIEE Trans. Part 2 - Vol. 78 - Juillet 1959 - p. 134-143
- [ 21 ] E. MORREALE : "Une méthode pour la détermination des impliquants premiers à partir de formes canoniques totalement ordonnées" - Colloque d'Algèbre de Boole de Grenoble - Janvier 1965
- [ 22 ] CURTIS, ALLEN H. : "A functional canonical form" - IRE Transactions on electronic computers - Vol. EC 9 n° 4 - Décembre 1960 - p. 515
- [ 23 ] P. NASLIN : "Note sur la simplification des fonctions logiques" - Automatisation - Novembre 1962 - p. 433-438
- [ 24 ] P. NASLIN : "Circuits logiques et Automatismes à séquences" - DUNOD - Avril 1965





# TABLE DES MATIERES

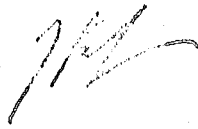
LISTE DES PROFESSEURS	I
REMERCIEMENTS	II
INTRODUCTION	III
1 - PRESENTATION DES CONSENSUS	1 - 1
11 - Rappel de définitions	1 - 1
12 - Définition des consensus	1 - 2
2 - PROPRIETES DES CONSENSUS D'ORDRE ZERO	2 - 1
21 - Inclusion d'un consensus dans l'une de ses générations	2 - 1
22 - Réduction de la classe d'une relation de consensus	2 - 5
23 - Exclusion d'un monôme d'une génération	2 - 14
3 - RECHERCHE DES CONSENSUS D'ORDRE ZERO	3 - 1
31 - Exposé du problème	3 - 1
32 - Définition de la fonction "Véracité"	3 - 2
33 - Propriétés de la fonction "Véracité"	3 - 6
4 - APPLICATIONS A LA RECHERCHE DES IMPLIQUANTS PREMIERS ET DES BASES PREMIERES	4 - 1
41 - Introduction à la recherche des impliquants premiers	4 - 1
42 - Méthode de réduction	4 - 2
43 - Méthode d'exclusion	4 - 12
44 - Méthode des formes duales	4 - 22
45 - Application à la recherche des bases premières	4 - 30
46 - Test d'inclusion d'un monôme dans un ensemble	4 - 40
5 - ETUDE DES CONSENSUS D'ORDRE QUELCONQUE	5 - 1
51 - Inclusion d'un consensus d'ordre $q$ dans ses générateurs	5 - 1
52 - Réduction de l'ordre des relations de consensus	5 - 5
53 - Recherche des relations de consensus d'ordre $q$	5 - 9
54 - Bases irrédondantes d'ordre $q$	5 - 23
55 - Test d'inclusion d'ordre $q$ d'un monôme dans un ensemble	5 - 29
6 - INTRODUCTION A L'ALGEBRE PLURALE	6 - 1
61 - Variables informationnelles	6 - 1
62 - Valeur d'une fonction réelle	6 - 8
63 - Fonctions plurales	6 - 12
64 - Ecriture codée d'un monôme plural	6 - 23
7 - LES CONSENSUS EN ALGEBRE PLURALE	7 - 1
71 - Définition du consensus en algèbre plurale	7 - 1
72 - Propriétés des consensus	7 - 6
73 - Recherche des relations de consensus	7 - 16
74 - Consensus d'ordre $q$	7 - 19
8 - RECHERCHE DES IMPLIQUANTS PREMIERS ET BASES PREMIERES EN ALGEBRE PLURALE	8 - 1
81 - Propriétés des impliquants premiers en algèbre plurale	8 - 1
82 - Méthode de reconstitution d'un graphe de réduction	8 - 3
83 - Méthode d'exclusion des générateurs	8 - 5
84 - Méthode des formes duales	8 - 10
85 - Recherche des bases premières	8 - 15
86 - Test d'inclusion d'un monôme plural dans un ensemble	8 - 19
9 - REALISATION DES FONCTIONS BOOLEENNES	9 - 1
91 - Exposé du problème	9 - 1
92 - Cas d'une fonction simple et complète	9 - 7
93 - Cas d'une fonction simple incomplète	9 - 9
94 - Cas d'un système de fonctions	9 - 14
BIBLIOGRAPHIE	IV
TABLE DES MATIERES	V



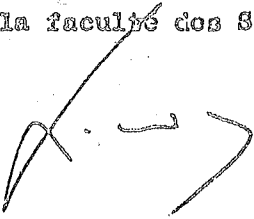
VU

Grenoble, le 2 juin 1965

Le Président de la thèse



Grenoble, le 14 JUIN 1965  
Le Doyen de la faculté des Sciences



VU, et permis d'imprimer,

Le Recteur de l'académie de Grenoble

