



**HAL**  
open science

# Enchaînements dynamiques de tâches pour des manipulateurs mobiles à roues

Vincent Padois

► **To cite this version:**

Vincent Padois. Enchaînements dynamiques de tâches pour des manipulateurs mobiles à roues. Automatique / Robotique. Institut National Polytechnique de Toulouse - INPT, 2005. Français. NNT : . tel-00011677v1

**HAL Id: tel-00011677**

**<https://theses.hal.science/tel-00011677v1>**

Submitted on 24 Feb 2006 (v1), last revised 2 Nov 2006 (v3)

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

THESE

présentée

pour obtenir

LE TITRE DE DOCTEUR DE L'INSTITUT NATIONAL POLYTECHNIQUE DE TOULOUSE

Ecole Doctorale SYSTEMES

SPÉCIALITÉ : Systèmes Automatiques

par

Vincent PADOIS

---

# Enchaînements dynamiques de tâches pour des manipulateurs mobiles à roues

---

Soutenue le 16 Novembre 2005 devant le jury composé de :

Wisama KHALIL	Professeur à l'Ecole Centrale de Nantes	Rapporteur
Pascal MORIN	Chargé de recherche à l'INRIA Sophia Antipolis - HDR	Rapporteur
Marc RENAUD	Professeur à l'INSA de Toulouse	Examineur
Michel COURDESSES	Professeur à l'Université Paul Sabatier de Toulouse	Examineur
Philippe SOUÈRES	Chargé de recherche au LAAS du CNRS de Toulouse - HDR	Invité
Pascale CHIRON	Maître de Conférences à l'ENI de Tarbes	Directrice de thèse
Jean-Yves FOURQUET	Maître de Conférences à l'ENI de Tarbes - HDR	Directeur de thèse

Thèse réalisée au sein de l'équipe Production Automatisée du Laboratoire Génie de Production  
de l'Ecole Nationale d'Ingénieurs de Tarbes

47 Avenue d'Azereix, BP 1629, 65016 TARBES CEDEX

*A celle qui, patiemment, m'attend.*

*A ceux qui, sagement, laissent faire.*



---

# Avant-propos

---

Les travaux présentés dans ce mémoire ont été influencés, directement ou non, par un grand nombre de personnes. Je tiens à remercier ici celles dont le contact m'a été bénéfique.

En premier lieu, je remercie Jérôme Foret qui, par son enthousiasme et son dynamisme, m'a mis le pied à l'étrier de la Robotique et m'a donné le goût de la Recherche. Viennent ensuite mes directeurs de thèse, Pascale et Jean-Yves, qui semblent avoir trouvé la formule subtile pour réaliser un encadrement de thèse harmonieux. Je tiens à souligner ici la manière qu'ils ont eu de me guider sans me contraindre, de me conseiller sans me forcer et de m'écouter...sans s'endormir.

Je remercie bien entendu l'ensemble des membres de mon jury d'avoir accepté de juger ce travail et surtout de m'avoir proposé une évaluation constructive et éclairée qui a rendu nos échanges très intéressants.

Au LGP et plus généralement à l'ENIT, je remercie tous ceux, enseignants ou non, qui n'avancent pas à reculons et ont fait de ces années de thèse (et de DEA) un moment appréciable de ma vie à Tarbes. Je pense notamment à mes collègues de bureau successifs : Alex, Simon, Roberta, Jorge, Paco, Nicolas, Anne et le plus locace d'entre eux : Rafael. Je pense aussi à mes illustres prédécesseurs : Agnès, Smaïn, Mounir, Magali, Gabriel et Holy. J'ai fait ce chemin en compagnie de quelques joyeux drilles parmi lesquels Guilhem, Cédric, Eric et Lotfi se sont particulièrement illustrés. Enfin, parmi les derniers arrivés, il serait malvenu d'oublier Valentin et Benoît dont j'ai maltraité le stock de thé de manière répétée mais aussi Alex qui m'a *debianisé*. Pour les multiples services rendus, je souhaite vivement remercier « mes » stagiaires successifs, Chantal Barutau, Pascal Maffre, Cécile et Henriette, Joël Lacassagne et Serge Ducos.

Je suis aussi reconnaissant envers les personnes du groupe RIA du LAAS qui ont rendu mes séjours toulousains fructueux. Parmi elles, je pense particulièrement à Bernard qui a semé une grande partie de ce que je récolte aujourd'hui et à Sara qui, par sa disponibilité et ses compétences diverses, rend les problèmes compliqués un peu plus facile à résoudre. Je n'oublie pas non plus Matthieu, Christian, Patrick et Xavier qui connaissent les gestes qui sauvent un robot. Au quotidien, j'ai pu apprécier la présence de David et Florent qui m'ont presque réconcilié avec *make*. J'ai aussi cotoyé des gens dont la seule sympathie a suffi à égayer certaines journées : David, Aurélie, Sylvain, Stéphane, Ignacio, Daniel, Viviane, Olivier, Michel, Philippe, Patrick... Enfin, une mention spéciale pour Marc qui a été un supporter indéfectible de mes tribulations expérimentales et un guide plus qu'avisé de mes aventures lagrangiennes.

Je termine par ceux de mes proches qui par leur simple présence ont contribué à me rendre serein et confiant. Je pense bien sûr à mes parents qui depuis un petit bout de temps

maintenant me laissent manœuvrer ma barque à ma guise. Je n'oublie pas ma soeur, mes frères et les « rapportés » qui constituent à eux seuls des raisons plus que valables pour prendre des vacances. Parmi les amis, je décerne deux mentions spéciales : la première à Anne, Carmen et Gaëtan qui ont rempli joyeusement de nombreux moments ; la seconde à Lara et son Didi qui m'ont offert gîte, couvert et rigolade plus d'une fois. Un clin d'oeil aussi aux familles Dubois et Lay pour leur soutien logistique et les moments toulousains passés ensemble.

Enfin, je remercie Lucie et Jackie pour la conception plutôt réussie de celle qui m'attend tout le temps et jamais ne s'impatiente. C'est promis, j'arrive dans un quart d'heure...



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Manipulation mobile : enjeux et problèmes</b>	<b>3</b>
1.1 Les manipulateurs mobiles . . . . .	4
1.1.1 Les « multipèdes » . . . . .	4
1.1.2 Les manipulateurs mobiles sous-marins . . . . .	4
1.1.3 Les manipulateurs mobiles à roues . . . . .	5
1.2 Enjeux pour les manipulateurs mobiles à roues . . . . .	6
1.2.1 Quelques propriétés pour ces systèmes . . . . .	6
1.2.2 Missions types et contraintes associées . . . . .	8
1.2.2.1 Quelles missions pour les manipulateurs mobiles à roues ? . . . . .	8
1.2.2.2 Enchaînement de mouvements en espace libre et au contact . . . . .	10
1.2.2.3 Trajectoire opérationnelle non planifiée . . . . .	11
1.2.3 Approches de résolution . . . . .	12
1.3 Cadre de nos travaux . . . . .	14
<b>2 Modélisation</b>	<b>17</b>
2.1 Paramétrage . . . . .	18
2.1.1 Organe terminal . . . . .	18
2.1.1.1 Repérage de l'organe terminal . . . . .	18
2.1.1.2 Coordonnées opérationnelles . . . . .	18
2.1.1.3 Vitesses et accélérations opérationnelles . . . . .	19
2.1.2 Configuration du système matériel . . . . .	19
2.1.2.1 Notion de liaisons . . . . .	20
2.1.2.2 Coordonnées généralisées . . . . .	21
2.1.2.3 Vitesses et accélérations généralisées . . . . .	21
2.1.3 Application aux manipulateurs mobiles à roues . . . . .	22
2.1.3.1 Coordonnées généralisées d'un bras manipulateur de type série . . . . .	22
2.1.3.2 Coordonnées généralisées pour les plateformes à roues. . . . .	22



2.1.3.3	Coordonnées généralisées d'un manipulateur mobile à roues	25
2.2	Modèles géométrique et cinématique des manipulateurs mobiles à roues	26
2.2.1	Modèle géométrique	26
2.2.2	Modèle cinématique	27
2.2.2.1	Commande cinématique pour une plateforme à roues	29
2.2.2.2	Commande cinématique du bras manipulateur et généralisation au système complet	32
2.2.2.3	Modèle cinématique pour la commande	33
2.2.3	Deux exemples classiques de manipulateurs mobiles à roues	36
2.2.3.1	Relations communes aux deux exemples	36
2.2.3.2	Cas d'une plateforme unicycle	37
2.2.3.3	Cas d'une plateforme voiture	42
2.3	Modèle dynamique associé aux manipulateurs mobiles à roues	45
2.3.1	Formalisme de LAGRANGE	47
2.3.1.1	Equations générales de la dynamique	47
2.3.1.2	Nature des $Q_i$ dans le cas de liaisons parfaites et d'un paramétrage incomplet	47
2.3.1.3	Cas des manipulateurs mobiles à roues	48
2.3.2	Calcul du modèle	50
2.3.2.1	Elimination des multiplicateurs de LAGRANGE	50
2.3.2.2	Cas des manipulateurs mobiles à roues	51
2.3.2.3	Nature de $\bar{\Gamma}$	52
2.3.3	Discussion autour du modèle dynamique réduit des manipulateurs mobiles à roues	54
<b>3</b>	<b>Structure de commande pour des missions de manipulation mobile</b>	<b>55</b>
3.1	Formalisation des contraintes sur le système	56
3.1.1	Contraintes liées aux trajectoires opérationnelles de consigne	56
3.1.2	Contraintes liées au système dans son environnement	57
3.1.2.1	Contraintes intrinsèques au système	57
3.1.2.2	Contrainte liée à l'évitement d'obstacles	58
3.1.2.3	Contrainte liée à l'enchaînement d'une tâche opérationnelle en espace libre et d'une tâche opérationnelle au contact	58
3.1.3	Contraintes liées aux méthodes de commande	62
3.2	Méthodes de commande opérationnelle	65
3.2.1	Schémas de commande opérationnelle	66
3.2.1.1	Contrôle de mouvement	66
3.2.1.2	Contrôle d'effort	67
3.2.2	Génération de consignes articulaires basées sur les modèles	69

3.2.2.1	Inversion cinématique . . . . .	69
3.2.2.2	Principe des méthodes du couple calculé . . . . .	71
3.2.2.3	Approche opérationnelle . . . . .	73
3.2.3	Utilisation de la redondance . . . . .	75
3.2.3.1	Choix de l'inverse généralisée . . . . .	75
3.2.3.2	Méthodes de descente de gradient . . . . .	75
3.2.3.3	Autres approches . . . . .	77
3.3	Structure de commande pour l'enchaînement . . . . .	77
3.3.1	Nature des enchaînements . . . . .	77
3.3.1.1	Tâches opérationnelles de natures différentes . . . . .	77
3.3.1.2	Enchaînements d'objectifs secondaires . . . . .	78
3.3.1.3	Commentaires sur l'algorithme de choix de l'objectif secondaire actif . . . . .	79
3.3.2	Respect des contraintes . . . . .	81
3.3.2.1	Respect des contraintes intrinsèques au système . . . . .	81
3.3.2.2	Autres contraintes . . . . .	82
3.3.2.3	Critère d'efficacité de l'optimisation locale d'un objectif secondaire . . . . .	83
3.3.3	Structure de commande globale . . . . .	84
<b>4</b>	<b>Mise en œuvre : Simulations et Expérimentations</b>	<b>87</b>
4.1	Contexte expérimental . . . . .	88
4.1.1	Système expérimental . . . . .	88
4.1.2	Architecture du LAAS pour la robotique autonome . . . . .	89
4.1.3	Prototypage rapide des solutions . . . . .	89
4.2	Simulateur et résultats de simulation . . . . .	90
4.2.1	Description du simulateur . . . . .	90
4.2.1.1	Système matériel . . . . .	90
4.2.1.2	Asservissements bas niveau . . . . .	91
4.2.1.3	Structure de commande opérationnelle . . . . .	91
4.2.2	Résultats de simulation pour une mission planifiée . . . . .	92
4.2.2.1	Paramètres de la mission . . . . .	93
4.2.2.2	Lois de commande utilisées . . . . .	95
4.2.2.3	Résultats de simulation . . . . .	96
4.2.2.4	Quelques résultats connexes . . . . .	106
4.2.3	Résultats de simulation pour une mission télé-opérée . . . . .	110
4.2.3.1	Dimensionnement du filtre . . . . .	110
4.2.3.2	Résultats de simulation . . . . .	111

4.2.3.3	Perspectives autour de ce type d'application . . . . .	112
4.3	Résultats expérimentaux . . . . .	114
4.3.1	Module logiciel $G^n oM$ : MANMOB . . . . .	114
4.3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	115
4.3.2.1	Aspect opérationnel . . . . .	115
4.3.2.2	Aspect articulaire . . . . .	118
4.3.2.3	Effet du choix de la pseudo-inverse pondérée sur les mou- vements du système . . . . .	120
4.3.3	Conclusion sur l'aspect expérimental de ce travail . . . . .	123
<b>Conclusion</b>		<b>125</b>
<b>A Table des symboles</b>		<b>129</b>
A.1	Symboles du chapitre 1 . . . . .	130
A.2	Symboles du chapitre 2 . . . . .	130
A.3	Symboles du chapitre 3 . . . . .	134
A.4	Symboles du chapitre 4 . . . . .	136
<b>B Résolution des systèmes linéaires et résultats de calcul matriciel</b>		<b>139</b>
B.1	Généralités . . . . .	140
B.1.1	Premier problème . . . . .	140
B.1.2	Second problème . . . . .	140
B.2	Résolution . . . . .	141
B.2.1	Forme de la solution . . . . .	141
B.2.1.1	Inverse à droite . . . . .	141
B.2.1.2	Inverse à gauche . . . . .	141
B.2.1.3	Projecteur . . . . .	142
B.2.2	Cas particulier des pseudo-inverses pondérées . . . . .	142
B.2.3	Deux propriétés des pseudo-inverses pondérées . . . . .	144
B.2.3.1	Réciprocité de la pseudo-inverse pondérée . . . . .	144
B.2.3.2	Transposée de la pseudo-inverse . . . . .	144
B.3	Problème dual . . . . .	144
B.3.1	Définitions . . . . .	144
B.3.2	Résolution . . . . .	145
B.4	Résultats de calcul matriciel . . . . .	146
B.4.1	Décomposition en valeurs singulières . . . . .	146
B.4.1.1	Rappel sur la décomposition en valeurs singulières . . . . .	146
B.4.1.2	Extension pondérée de la décomposition en valeurs singulières	146
B.4.2	$W A^\# \in (AW^{-1}) [1]$ ssi $\text{rang}(A) = m$ ? . . . . .	147
B.4.3	Equivalence opérationnelle de la dérivation avant ou après inversion cinématique . . . . .	147
<b>Bibliographie</b>		<b>149</b>

# Table des figures

1.1	Le robot humanoïde QRIO . . . . .	5
1.2	Deux manipulateurs mobiles sous-marins . . . . .	5
1.3	Deux manipulateurs mobiles à roues évoluant dans des environnements différents . . . . .	6
1.4	Manipulateur mobile à roues franchissant une porte (image extraite de [NAGATANI 96]) . . . . .	9
1.5	Opérations industrielles nécessitant l'emploi de manipulateurs mobiles à roues . . . . .	9
1.6	Principe de la mission type « Va écrire au tableau » . . . . .	10
1.7	Principe d'une mission avec des consignes opérationnelles non planifiées . . . . .	11
2.1	Paramètres de situation d'une plateforme mobile à roues . . . . .	23
2.2	Différents types de roues utilisés pour les plates-formes mobiles . . . . .	24
2.3	Paramétrage pour la description de la configuration des différents types de roues . . . . .	24
2.4	Repères liés à un manipulateur mobile à roues . . . . .	26
2.5	Deux types classiques de manipulateur mobile à roues . . . . .	36
2.6	Manipulateur mobile avec plateforme de type unicycle . . . . .	53
3.1	Orientation de l' <i>OT</i> idéale pour l'évitement de la surface de contact par le bras manipulateur . . . . .	58
3.2	Schéma de principe de la commande hybride position / force . . . . .	68
3.3	Machine à états instanciée représentant les modes et basculements possibles d'une mission exemple composée de deux tâches locales . . . . .	78
3.4	Structure de commande pour la commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues . . . . .	85
4.1	Manipulateur mobile <i>H<sub>2</sub>bis</i> + GT6A du LAAS . . . . .	89
4.2	« Va écrire au tableau » : décomposition en trois tâches locales . . . . .	93
4.3	Profils opérationnels de consigne planifiés en début de mission . . . . .	94
4.4	Profils de mouvement opérationnel réels et de consigne . . . . .	96
4.5	Evolution de la valeur des indicateurs associés aux fonctions potentiel actives et du gradient normalisé associé . . . . .	97

4.6	Effort opérationnel normal à la surface de contact : vue générale et détail de la zone temporelle correspondant au contact . . . . .	98
4.7	Termes de la commande opérationnelle (mouvement et effort) selon la direction contrôlée en effort . . . . .	99
4.8	Décomposition de la consigne de vitesse articulaire et effet de la mise à l'échelle des vitesses . . . . .	100
4.9	Vitesses de consigne articulaires et réelles . . . . .	102
4.10	Vitesses de la plateforme $v$ et $\omega$ . . . . .	102
4.11	Couples moteurs et résistants . . . . .	103
4.12	Part du couple résistant (avant réducteur) liés à l'interaction opérationnelle	104
4.13	Evolution de la configuration du système . . . . .	105
4.14	Evolution de la distance $d(O_p, OT)$ . . . . .	105
4.15	Vue globale de la mission . . . . .	106
4.16	Effet d'un schéma de réduction des efforts d'impact sur le pic d'effort observé	107
4.17	Effet d'un schéma de réduction des efforts d'impact sur les vitesses et coordonnées généralisées du système . . . . .	108
4.18	Phénomène de rebond lors de l'impact . . . . .	109
4.19	Schéma de principe du fonctionnement de l'application associée à une mission de télé-opération . . . . .	110
4.20	Effet du filtrage des consignes de vitesse opérationnelle issues du joystick .	112
4.21	Evolution de la valeur des indicateurs associés aux fonctions potentiel activées . . . . .	113
4.22	Vue globale de la mission de télé-opération . . . . .	113
4.23	Architecture logicielle associée au module ManMob . . . . .	115
4.24	Vitesses linéaires et positions opérationnelles réelles et de consigne . . . .	116
4.25	Erreurs entre vitesses linéaires et positions opérationnelles réelles et de consigne . . . . .	117
4.26	Effort opérationnel normal à la surface de contact : consigne et effort réel .	118
4.27	Nature de la surface de contact utilisée lors des expérimentations. . . . .	119
4.28	Evolution le l'indicateur associé à la fonction potentiel utilisée pour minimiser l'inertie du système . . . . .	119
4.29	Vitesses articulaires réelles et de consigne . . . . .	120
4.30	Evolution de la configuration du système . . . . .	121
4.31	Configurations initiale et finale du système . . . . .	122
4.32	Vue de synthèse des trajectoires de la plateforme et de l' $OT$ . . . . .	122
4.33	Effet du choix de la pseudo-inverse pondérée sur les mouvements du système	123

# Liste des tableaux

2.1	Propriétés des paramètres de description des roues en fonction de leur type	25
2.2	Deux choix différents de pondération qui conditionnent la nature du vecteur de commande de mobilité . . . . .	38
2.3	Détermination de la vitesse des roues pour l'unicycle en fonction de la nature de la commande de mobilité . . . . .	39
2.4	$S_r(\beta_d)$ en fonction de la nature de la commande de mobilité . . . . .	39
2.5	Solutions possibles à deux actionneurs pour la motorisation d'une plateforme unicycle . . . . .	40
2.6	Solutions possibles à deux actionneurs pour la motorisation d'une plateforme de type voiture . . . . .	44
3.1	Algorithme de l'arbitrage du choix de l'objectif secondaire actif . . . . .	80



---

# Introduction

---

Le nombre de projets de recherche en Robotique bénéficiant d'une couverture médiatique importante est croissant. Au delà du caractère informatif d'une telle médiatisation, celle-ci entraîne des attentes de plus en plus fortes de la part du grand public et des industriels : les uns se mettent à rêver d'un compagnon domestique, les autres imaginent l'usine du futur et ses robots dociles. Chacun se construit donc l'image du robot idéal et pense pouvoir retirer un bénéfice de l'utilisation de robots dans son domaine d'activité. De la santé aux services en passant par la médecine, la défense, la recherche ou la culture, une infinité de possibilités d'utilisation de systèmes robotiques apparaît.

La réalité des choses est un peu différente. En effet, si la société actuelle est avide de technologie, l'aspect émotionnel d'une interaction Homme/robot quotidienne et multiple semble toujours délicat à gérer, surtout pour les Hommes. Ainsi, faute de débouchés et de démonstration d'une autonomie réelle, la Robotique de service reste, à de rares exceptions près, à l'état de démonstrateur technologique et les robots sont aujourd'hui encore utilisés de manière privilégiée pour des missions où les objectifs sont quantifiables et clairement définis.

De telles missions n'en sont pour autant pas moins complexes et de bras manipulateurs industriels dédiés à des tâches précises, simples, dans un environnement bien calibré, nous sommes passés à des robots dont l'espace de travail s'est étendu. Cette extension vient en réponse à la nature des missions qui sont aujourd'hui envisagées en Robotique : explorations/interventions/manipulations en milieu hostile (domaine terrestre, sous-marin ou spatial), opérations de fabrication sur des pièces de grandes dimensions (peinture, soudure, polissage) ; les exemples ne manquent pas.

Ces missions sont caractérisées par des environnements souvent peu calibrés et des objectifs de natures différentes : mouvement à effectuer, effort à appliquer ou combinaison des deux au sein d'une même mission. Par ailleurs, l'extension de l'espace de travail va de pair avec la combinaison de moyens de manipulation et de moyens de locomotion. Ces missions sont donc ce qu'il est convenu d'appeler des missions de *manipulation mobile* et les robots employés pour les remplir sont appelés des *manipulateurs mobiles*.

Ces manipulateurs mobiles prennent des formes diverses, adaptées à l'environnement où ils doivent évoluer et parmi eux nous distinguons les manipulateurs mobiles à roues. Ces systèmes qui regroupent une plateforme à roues et un ou des moyens de manipulation (un bras manipulateur par exemple) sont particulièrement adaptés pour évoluer sur des surfaces solides, structurées (le béton lisse d'un hangar par exemple) ou non (les dunes de sable de la planète Mars par exemple).



Ces robots, plus particulièrement ceux d'entre eux qui évoluent sur un sol plan, sont le thème central des travaux de recherche présentés dans ce mémoire. Nous nous sommes intéressés à leur commande dans le cadre de la réalisation de missions de manipulation mobile. Ces missions présentent, comme nous l'avons dit, la particularité de faire cohabiter des objectifs de commande différents qu'il faut savoir enchaîner ou combiner. Nous montrons que cet enchaînement ne peut souvent pas être complètement statique ne serait-ce qu'à cause des incertitudes sur la connaissance de l'environnement. Notre approche de commande se base sur les modèles de ces systèmes que nous avons étendus au cas dynamique. Les lois de commandes basées sur ces modèles sont intégrées au sein d'une structure de commande dédiée à l'enchaînement de tâches de natures différentes au sein d'une même mission. Cette structure permet aussi de tenir compte, de manière systématique, d'un ensemble de contraintes intrinsèques à la commande de tels systèmes pour des missions de manipulation mobile. Le principe de cette structure de commande est validé en simulation ainsi que sur un robot réel.

Ce mémoire, qui présente les différents aspects du travail évoqué ici, s'organise en quatre chapitres :

- *Introduction*
- *Chapitre 1 - Manipulation mobile : enjeux et problèmes* - Ce chapitre pose le problème de la manipulation mobile. Après une courte présentation de la notion de manipulateur mobile, nous définissons ce que nous entendons par *mission de manipulation mobile à roues*. Un aperçu des approches et des méthodes de commande jusqu'ici employées pour la commande de tels système permet d'introduire le cadre que nous avons fixé pour les travaux présentés dans ce mémoire.
- *Chapitre 2 - Modélisation* - Nous présentons dans ce chapitre la modélisation cinématique des manipulateurs mobiles à roues et proposons un modèle dynamique unifié de ces systèmes. Ces développements sont précédés d'un rappel des notions de mécanique qui permettent de paramétrer rigoureusement le système. Les modèles obtenus sont présentés sous une forme particulièrement adaptée à la commande du système.
- *Chapitre 3 - Structure de commande pour des missions de manipulation mobile* - Nous présentons dans ce chapitre la structure de commande proposée pour la commande opérationnelle de manipulateurs mobiles à roues. Cette structure intègre l'ensemble des fonctionnalités nécessaires à la réalisation de missions de manipulation mobile complexes tant par la nature des tâches à réaliser que par les contraintes secondaires agissant sur le système.
- *Chapitre 4 - Mise en œuvre : Simulations et expérimentations* - Ce chapitre aborde le contexte expérimental et de simulation et présente les résultats obtenus dans le cadre de la mise en oeuvre de la structure de commande proposée. Une présentation du système expérimental ainsi que des fonctionnalités du simulateur développé précède la présentation des multiples résultats de simulation et d'expérimentation. Une analyse de ces résultats est proposée.
- *Conclusion*

---

## Chapitre 1

# Manipulation mobile : enjeux et problèmes

---

Ce chapitre vise à introduire notre travail autour du thème de la commande des manipulateurs mobiles à roues. Nous commençons par donner un aperçu de ce qui est entendu lorsque le terme « manipulateur mobile » est employé. Nous présentons ensuite un ensemble de considérations qui permettent de comprendre les tenants et aboutissants de la commande de ces systèmes. Nous terminons alors ce chapitre par un balisage précis du cadre de travail que nous nous sommes fixé autour de ce thème et par une présentation rapide des différents points abordés dans ce mémoire.

## 1.1 Les manipulateurs mobiles

Le concept de manipulateur mobile est très simple. Il s'agit d'associer, dans un même système, un ou des moyens de locomotion à un ou des moyens de manipulation. Le(s) moyen(s) de locomotion assure(nt) au système un *espace de travail* limité principalement par son autonomie énergétique. Le(s) moyen(s) de manipulation assure(nt) des capacités de préhension et de manipulation. Cette définition ouverte laisse la place à un grand nombre de combinaisons possibles, illustrées par la diversité des dispositifs expérimentaux et/ou commerciaux existants à ce jour. Avant de donner quelques exemples de ces systèmes, notons que leur succès est lié à l'espace de travail quasiment infini qu'ils présentent. Quand un bras manipulateur industriel voit son espace de travail limité à quelques mètres cubes, le manipulateur mobile peut lui évoluer sur plusieurs centaines de mètres carrés ou de mètres cubes pour ceux, comme les manipulateurs mobiles sous-marins, dont le moyen de locomotion ne nécessite pas de contact direct avec le sol. Ils ouvrent donc un grand nombre de possibilités qui pour la plupart restent à explorer.

Parmi les systèmes existant actuellement nous pouvons citer trois grandes familles.

### 1.1.1 Les « multipèdes »

Comme leur nom l'indique, les manipulateurs mobiles « multipèdes » peuvent posséder une à plusieurs jambes. Par le défi à la gravité qu'ils représentent, les humanoïdes en sont les plus populaires représentants, tant chez le grand public que chez les chercheurs. Du point de vue de la locomotion, ils posent le problème de la marche. D'un point de vue de la manipulation, le souhait de bio-mimétisme conduit à les équiper de mains sophistiquées dont la conception et la commande restent des sujets encore très ouverts. Leurs utilisations possibles sont limitées d'un point de vue industriel et leur principal débouché se situe dans la Robotique de service (assistance aux personnes âgées, compagnons domestiques) ou, tel le robot QRIO de Sony<sup>1</sup> (voir figure 1.1), comme démonstrateurs technologiques.

### 1.1.2 Les manipulateurs mobiles sous-marins

Les manipulateurs mobiles sous-marins sont aujourd'hui les manipulateurs mobiles les plus utilisés à des fins de travail. Souvent télé-opérés, il s'agit alors de ROV (*Remotely Operated Vehicles*), ils permettent l'accès à des zones maritimes non accessibles aux plongeurs et fournissent des capacités de prélèvement, de manipulation, de mesure et d'acquisition de données adaptables aux missions envisagées. Nous pouvons, à titre d'exemple, citer le robot VICTOR 6000 (voir figure 1.2 (a)) de l'IFREMER<sup>2</sup>, équipé de deux bras manipulateurs et qui peut intervenir à des profondeurs de 6000 mètres ainsi que le robot ACHILLE 2000

---

<sup>1</sup><http://www.sony.net/SonyInfo/QRIO>

<sup>2</sup>Institut Français de Recherche pour l'Exploitation de la MER  
[http://www.ifremer.fr/flotte/systemes\\_sm/engins/victor.htm](http://www.ifremer.fr/flotte/systemes_sm/engins/victor.htm)



FIG. 1.1 – Le robot humanoïde QRIO

(voir figure 1.2 (b)) de la société Comex<sup>3</sup>, lui aussi équipé de deux bras manipulateurs et dont la profondeur principale d'intervention est de 2000 mètres.

(a) *Le robot VICTOR 6000*(b) *Le robot ACHILLE 2000*

FIG. 1.2 – Deux manipulateurs mobiles sous-marins

### 1.1.3 Les manipulateurs mobiles à roues

Moins médiatiques que les premiers, moins exploités que les seconds, les manipulateurs mobiles à roues sont cependant plus répandus que ceux précédemment cités. Cela tient particulièrement à deux faits :

- leur conception mécanique relativement simple ;
- l'adéquation naturelle de leur moyen de locomotion à un grand nombre de terrains.

En lien avec ces deux points, il nous faut aussi citer l'histoire des transports qui a vu les véhicules à roues, de toutes sortes, se hisser au sommet de la hiérarchie des moyens de transport individuel.

Du point de vue de la manipulation, c'est l'état de l'art en robotique qui a amené à d'abord placer un bras manipulateur à chaîne simple sur un véhicule à roues. Et de manière similaire aux engins de chantiers qui en furent les précurseurs, les manipulateurs mobiles à roues prennent aujourd'hui des formes diverses tant du point de vue de leur mode de locomotion que de leur taille ou encore de la fonction attribuée au(x) bras manipulateur(s) dans le système.

Les différences majeures entre ces systèmes à roues sont principalement liées au choix du type de locomotion. Ainsi, nous distinguons :

<sup>3</sup><http://www.comex.fr/suite/dom/index2.htm>

- les manipulateurs mobiles à roues, tels que le robot SPIRIT de la NASA<sup>4</sup> (voir figure 1.3 (a)), dont la plate-forme mobile peut-être dite tout terrain ;
- les manipulateurs mobiles à roues, tels que le robot CARE-O-BOT<sup>5</sup> du Fraunhofer Institut (voir figure 1.3 (b)), utilisant des mécanismes de suspension rudimentaires et plus adaptés à des environnements d'intérieur lisses et assez plats.



(a) Le robot SPIRIT



(b) Le robot CARE-O-BOT

FIG. 1.3 – Deux manipulateurs mobiles à roues évoluant dans des environnements différents

La seconde distinction qui peut être faite porte sur les principes locomoteurs retenus. Les véhicules à roues possèdent une caractéristique commune : leur vitesse instantanée est contrainte dans certaines directions de déplacement. Ce sont donc des systèmes dits *non-holonomes*.

## 1.2 Enjeux pour les manipulateurs mobiles à roues

### 1.2.1 Quelques propriétés pour ces systèmes

L'atout indéniable que présente ce type de système tient dans la combinaison de deux sous-systèmes aux fonctions très différentes. Il est même tentant de résumer cet atout en disant que là où le manipulateur ne peut aller, la plate-forme l'y emmène et que ce que la plate-forme ne peut pas prendre, le manipulateur le prend pour elle. Cette vision est très réductrice. Elle limite fortement le type de mission envisageable et amène à regarder le système comme deux sous-systèmes agissant avec peu de coordination : « *La plate-forme va en  $(x,y)$ . Le manipulateur prend l'objet A. La plate-forme va en  $(u,v)$ . Le manipulateur pose l'objet A sur l'objet B.* » ou encore « *le manipulateur effectue une opération à l'endroit L. La plate-forme va à l'endroit M. Le manipulateur effectue une opération à l'endroit M etc.* ». Ce type d'approche permet bien entendu de réaliser avec un seul système des opérations qui nécessiteraient des dizaines de manipulateurs « non mobiles ». En terme de production industrielle, ce type d'approche est intéressant pour des produits de grande dimension et dont la production se fait quasiment à l'unité. Ce n'est plus le produit qui bouge mais l'outillage permettant sa transformation. Cela permet de ne pas développer des chaînes de production spécifiques, coûteuses, étant donnée la dimension du système à convoier, et de durée de vie très limitée (taille faible des lots de même pièce à produire)<sup>6</sup>.

Malgré cette première famille d'applications, il est des cas simples de mission où ce type de décomposition n'est pas suffisant. En fait, cette première famille est le strict minimum de ce qui peut être demandé à un manipulateur mobile qui est alors utilisé de manière *non coordonnée*, les mouvements de chacun des sous-systèmes étant indépendants les uns

<sup>4</sup><http://marsrovers.jpl.nasa.gov/home>

<sup>5</sup><http://www.care-o-bot.de>

<sup>6</sup>C'est le cadre des travaux du projet de recherche européen NOMAD : Autonomous Manufacture of Large Steel Fabrications, qui s'est terminé fin 2004. <http://www.nomadrobot.org>

des autres. Prenons pour exemple le passage d'une porte dans un couloir : K. NAGATANI *et al.* [NAGATANI 96], malgré une approche *ad hoc*, montrent que ce passage de la porte ne fait pas exclusivement appel à la stricte locomotion ou à la stricte manipulation mais à une combinaison des deux. Pour un manipulateur mobile à roues, cela peut ne pas paraître comme une évidence. En effet, il est toujours possible de décomposer le mouvement coordonné du système en plusieurs mouvements simples et indépendants pour chacun des sous-systèmes. Au delà de l'aspect « non naturel » et non optimal en temps du mouvement généré (l'aspect non naturel est peut-être un peu subjectif quand il est question d'un manipulateur mobile à roues, mais imaginons un humanoïde qui franchirait une porte en avançant de 10 cm puis en bougeant sa main de 5 cm puis en avançant de 10 cm *etc.*), cette approche présente l'inconvénient majeur d'être très spécifique à la tâche considérée. La *coordination* des fonctions de locomotion et de manipulation est donc essentielle et implique la mise au point de modèles spécifiques aux manipulateurs mobiles à roues permettant la *commande opérationnelle*, *i.e.* de l'organe terminal du système, noté *OT* par la suite.

Une seconde caractéristique importante pour ces systèmes est qu'ils sont souvent *redondants* vis à vis de la tâche assignée à l'*OT* (aussi appelée *tâche principale*). De manière non formelle, il est assez juste de dire que cette redondance est liée à la présence d'un plus grand nombre d'actionneurs que le minimum nécessaire pour que le système puisse exécuter sa tâche principale. Cette propriété assure l'existence d'une infinité de solutions au problème de commande opérationnelle, infinité parmi laquelle la solution la meilleure, au sens d'un critère donné, est à choisir. Ce critère est souvent lié aux contraintes inégalités, à respecter, sur les grandeurs du système. Ces contraintes sont liées au robot lui-même : évitement de butées articulaires, saturation des actionneurs, mais aussi à son environnement : c'est le cas de l'évitement d'obstacles.

Une des propriétés des manipulateurs mobiles à roues est aussi leur caractère *non holonome*. Disons pour le moment qu'un système mécanique non holonome est un système soumis à des contraintes sur les vitesses des différents corps qui le composent. L'exemple typique de ce genre de système est la voiture. Les roues d'une voiture doivent respecter une contrainte de roulement sans glissement sur le sol ce qui contraint leurs vitesses respectives à ne pas pouvoir évoluer de manière indépendante les unes des autres. Ces contraintes sont très fortes puisqu'elles limitent à chaque instant les directions du mouvement de chacun des corps du système. Du point de vue de la commande opérationnelle, cela est gênant, d'autant plus que c'est sur la plateforme, c'est-à-dire la partie du système qui garantit un espace de travail illimité, que ces contraintes agissent. Cela dit, sur un intervalle de temps donné, il est possible d'amener la plateforme d'une configuration donnée à une autre, ce qui signifie qu'aucune zone de l'espace de travail 2D n'est inatteignable par le système. C'est ce qu'illustre la nécessité de faire une manœuvre en voiture afin de pouvoir se garer : il est possible d'amener le véhicule dans une *situation* (position et orientation) délimitée par la place de parking mais pas en suivant n'importe quelle trajectoire. Dans le cas d'une approche coordonnée de la commande des deux systèmes, ce n'est pas tant d'amener la plateforme dans une configuration donnée qui nous intéresse, en effet la plateforme n'est pas commandée directement, mais plutôt d'utiliser les capacités d'actionnement de cette plateforme pour effectuer un mouvement opérationnel désiré.

Terminons sur les propriétés en disant que la commande opérationnelle peut aussi bien être un mouvement à effectuer qu'un effort à exercer sur l'environnement avec l'*OT*. Il est alors question d'*interaction opérationnelle*, et, si les robots manipulateurs classiques, du fait de leur positionnement statique, ne sont confrontés qu'à des situations de contact avec l'environnement prévisibles et plutôt calibrées, ce n'est pas le cas des manipulateurs mobiles pour lesquels les possibilités de contact avec l'environnement sont infinies et qui, étant donné leur rayon d'action et leur nature, sont amenés à explorer des zones nouvelles, pas ou peu calibrées.

## 1.2.2 Missions types et contraintes associées

### 1.2.2.1 Quelles missions pour les manipulateurs mobiles à roues ?

Pour traiter le problème de la commande d'un système, il est possible de l'énoncer de plusieurs façons. La plus pragmatique est de se demander : « Que voulons-nous faire avec ce système ? » En robotique, et pour un manipulateur mobile à roues, cette question devient : « Quel type de mission de robotique souhaitons-nous assigner à un manipulateur mobile à roues ? »

Les propriétés de ces systèmes, rapidement évoquées ci-avant, permettent de fournir une première indication sur le type de mission qu'il est possible de leur confier : des missions de manipulation mobile. Une mission de manipulation mobile peut être définie comme une mission de robotique comprenant des phases, simultanées ou non, de déplacement et de manipulation. Sous le terme *manipulation* se cachent de nombreuses réalités et nous définissons donc une manipulation comme le fait d'effectuer un mouvement opérationnel (de l'*OT*) ou d'exercer un effort opérationnel, là encore de manière simultanée ou non, selon un profil temporel donné. Nous utilisons par la suite les termes *trajectoire opérationnelle de mouvement* et *trajectoire opérationnelle d'effort* pour désigner respectivement le mouvement de l'*OT* (chemin géométrique suivi par l'*OT*) selon un profil temporel donné et l'effort exercé par l'*OT* selon un profil temporel donné. Quand nous employons le terme *trajectoire opérationnelle* ou *tâche opérationnelle*, nous sous-entendons *trajectoire opérationnelle de mouvement et/ou d'effort*.

Une mission de manipulation mobile est donc définie plus précisément comme l'exécution d'une trajectoire opérationnelle.

Il existe de multiples natures de trajectoires opérationnelles et elles peuvent être caractérisées par :

- le type de grandeur physique mise en jeu : les mouvements (position, vitesse, accélération) ou les efforts (forces, couples) ;
- l'instant de leur définition : avant le début de la mission, donc de manière planifiée, ou pendant la mission et donc de manière instantanée.

Sur le point particulier des efforts, le type d'outil associé à l'*OT* du robot conditionne beaucoup le type d'effort envisagé. Il peut s'agir d'un effort de prise qui est, la plupart du temps, constant pour un même type d'objet ou d'un effort d'interaction qui dépend alors du but de l'interaction : peinture, insertion, polissage... En laissant de côté l'aspect « manipulation dextre » de l'objet saisi, le deuxième cas est le plus complexe des deux.

Ainsi, un premier type mission simple de manipulation mobile peut consister en la réalisation d'une trajectoire opérationnelle de mouvement à partir d'une trajectoire opérationnelle planifiée. Une réponse à ce problème peut être de planifier, à partir de la trajectoire opérationnelle, les trajectoires articulaires (de chacune des liaisons) du système ou encore de générer les trajectoires articulaires de manière instantanée ce qui autorise un fonctionnement réactif du système, *i.e.* pouvant tenir compte de l'évolution de l'environnement.

Si les grandeurs physiques mises en jeu dans la trajectoire opérationnelle sont de natures différentes et peuvent changer au cours de la mission et si la définition de la trajectoire est instantanée ou peut être modifiée, en raison d'aléas, par rapport à celle initialement prévue, alors le terme de mission *complexe* peut être employé. Faire l'hypothèse de missions complexes revient à supposer une réalisation intrinsèquement non parfaite de la mission (aléas, incertitudes).

Ces aléas peuvent être liés à :

- des erreurs sur la connaissance de l'environnement ;

- des obstacles (non prévus lors de la planification de la trajectoire opérationnelle de mouvement) présents sur le parcours du robot ;
- des erreurs de suivi de trajectoire engendrant des décalages spatiaux et temporels du système par rapport à sa trajectoire opérationnelle de référence.

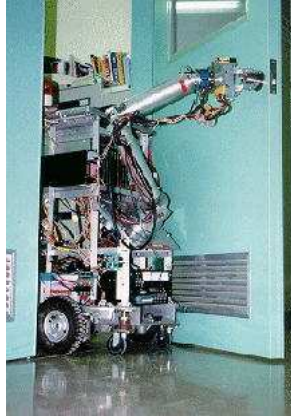
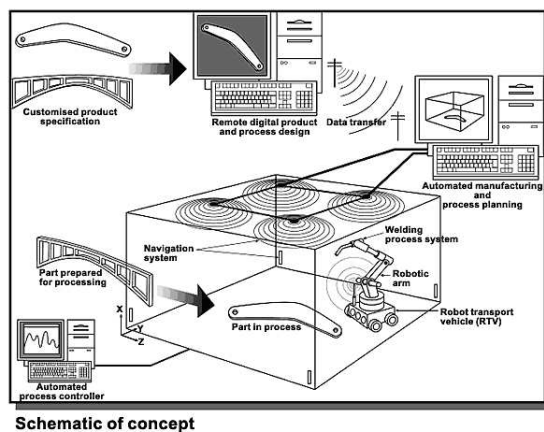


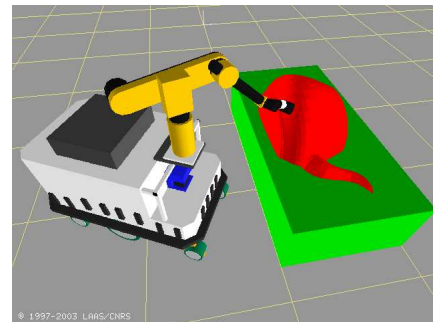
FIG. 1.4 – Manipulateur mobile à roues franchissant une porte (image extraite de [NAGATANI 96])

Remarquons qu'il est tentant d'essayer de décomposer une mission complexe en un ensemble de missions plus simples. Malheureusement cela n'est pas toujours possible notamment quand la transition d'un type de trajectoire opérationnelle à l'autre doit être faite de manière dynamique. Les exemples suivant présentent des missions complexes de robotique ne pouvant être décomposées sans réduire les performances temporelles d'exécution de la mission :

- navigation dans des couloirs avec franchissement de portes et évitements d'obstacles (cf. figure 1.4) ;
- réalisation de cordon de soudure, peinture, polissage de pièces de grande dimension (cf. figure 1.5).



(a) Principe du projet NOMAD



(b) Opération sur une pièce de grande dimension

FIG. 1.5 – Opérations industrielles nécessitant l'emploi de manipulateurs mobiles à roues

Pour illustrer notre approche de la commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues, nous avons, dès le début de ces travaux, fait le choix de deux missions complexes type. Le but de ces missions type est de synthétiser l'ensemble des caractéristiques d'une



mission complexe de manipulation mobile mais aussi d'être, dans le principe, assez simples afin de faciliter leur analyse et leur mise en œuvre. Ces deux missions ainsi que le cahier des charges qui leur est associé sont décrites ci-après.

### 1.2.2.2 Enchaînement de mouvements en espace libre et au contact

La première mission retenue est celle que nous avons intitulée « Va écrire au tableau » : un manipulateur mobile à roues doit suivre une trajectoire opérationnelle de mouvement planifiée jusqu'à une situation de contact située à la surface d'un objet (le tableau en l'occurrence) puis, une fois le contact établi, suivre une trajectoire opérationnelle composite de mouvement et d'effort le long de la surface de contact. Ceci est illustré par la figure 1.6.

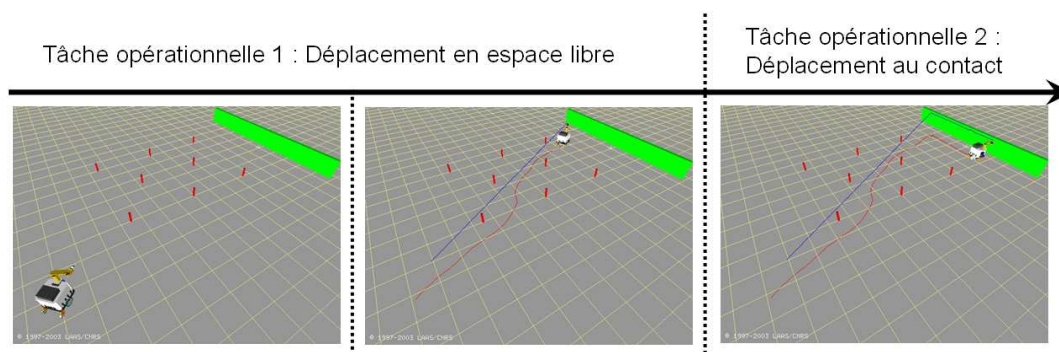


FIG. 1.6 – Principe de la mission type « Va écrire au tableau »

Cette mission regroupe l'ensemble des caractéristiques d'une mission complexe de manipulation mobile :

- elle se décompose en effet en deux tâches opérationnelles de natures différentes, composite pour l'une d'entre elles, qui doivent être enchaînées de manière dynamique, c'est à dire qui ne peuvent être vues comme deux missions distinctes ;
- elle est planifiée mais les incertitudes inhérentes à un environnement partiellement calibré et connu (environnement industriel par exemple) peuvent faire apparaître la nécessité d'adapter le plan aux instants les plus cruciaux de la mission.

Le cahier des charges que nous nous fixons est très succinct :

1. La connaissance de l'environnement est entachée d'incertitudes : la situation de la surface de contact est connue mais avec une précision telle que le contact peut survenir avant l'instant planifié.
2. Des obstacles « bas » (gênant uniquement la plateforme) et statiques peuvent être présents sur le parcours mais cette présence n'est pas connue à l'avance et leur détection se fait lorsque le système s'en approche. Ils ne peuvent donc pas être pris en compte dans le plan initial et doivent cependant être évités lors de la mission.
3. Le chemin géométrique associé à la trajectoire opérationnelle planifiée doit être respecté. Seul le déroulement temporel de la trajectoire peut être modifié afin de répondre aux contraintes secondaires agissant sur le système.
4. Les contraintes secondaires agissant sur le système qui doivent être respectées afin de préserver son intégrité matérielle sont :
  - le fonctionnement en mode nominal des actionneurs : vitesse, couple et accélération de consigne bornés ;
  - l'évitement des butées articulaires ;
  - l'évitement des obstacles bas.

Les problèmes posés par une telle mission et son cahier des charges sont les suivants :

1. Quelles techniques de commande utiliser pour générer de manière instantanée et réactive des consignes pour les actionneurs du système à partir d'une trajectoire opérationnelle donnée? Quels modèles du système utiliser en fonction des grandeurs opérationnelles à asservir?
2. Quelle représentation utiliser pour modéliser l'aspect : « enchaînements discrets de tâches opérationnelles continues » de nos missions? Quelles contraintes sont à respecter à l'instant de l'enchaînement?
3. A quel moment de la mission est il nécessaire de replanifier la trajectoire opérationnelle? Quels sont les indicateurs utiles à cette prise de décision?
4. Comment tenir compte des contraintes secondaires agissant sur le système, qu'elles soient imposées par sa conception, sa commande ou l'environnement?

Notre approche de la commande opérationnelle des manipulateurs à roues se propose, à partir du cahier des charges établi, de répondre à l'ensemble de ces questions.

### 1.2.2.3 Trajectoire opérationnelle non planifiée

Cette seconde mission consiste à commander le système d'un point de vue opérationnel à partir de consignes générées au fur et à mesure de la mission. C'est le cas typique d'une trajectoire opérationnelle de mouvement réalisée par un opérateur humain qui amène, en le tirant par son *OT*, le robot à suivre une trajectoire opérationnelle donnée. Cet exemple est illustré par la figure 1.7. La trajectoire de mouvement opérationnel de consigne est basée sur la vitesse instantanée de la main dans les différentes directions opérationnelles et n'est donc pas connue à l'avance.

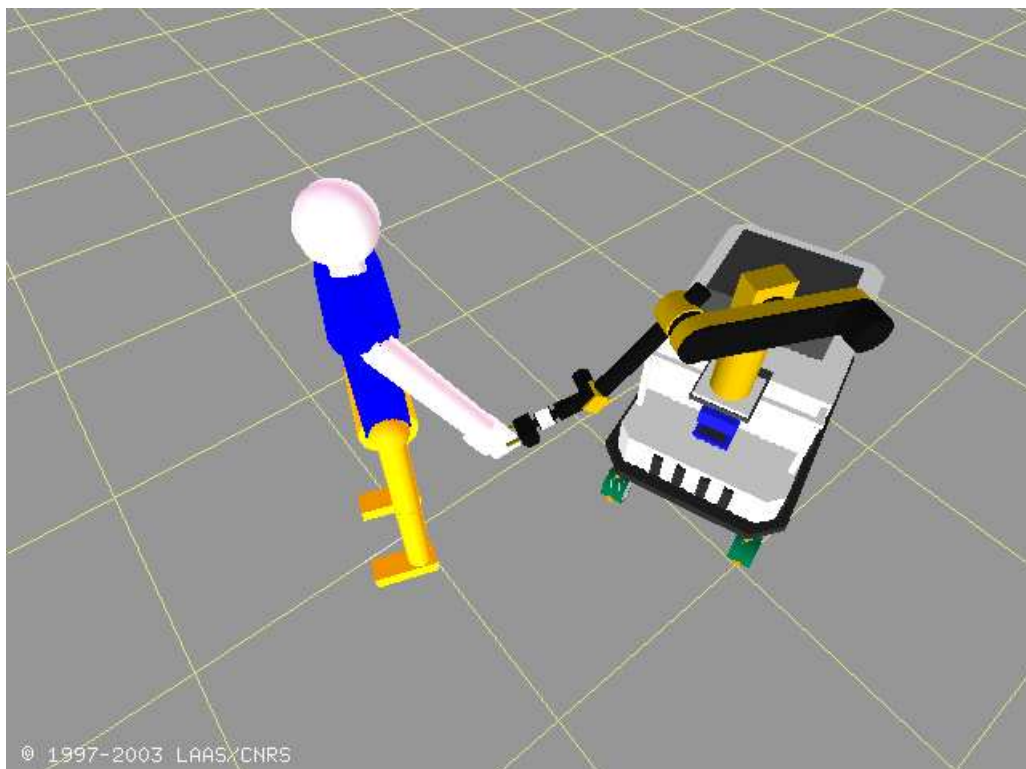


FIG. 1.7 – Principe d'une mission avec des consignes opérationnelles non planifiées

Si aucun enchaînement entre deux tâches opérationnelles de nature différente n'est présent, les contraintes secondaires sur le système restent les mêmes que dans le cas de la mission « Va écrire au tableau ».

Les problèmes sont eux aussi assez similaires :

1. Quelles techniques de commande utiliser pour générer de manière instantanée et réactive des consignes pour les actionneurs du système à partir d'une trajectoire opérationnelle donnée? Quels modèles du système utiliser?
2. Quel est le lien qui existe entre la vitesse de la main de l'opérateur et la vitesse de consigne opérationnelle calculée à chaque instant pour le système? A quel moment est-il nécessaire d'adapter cette vitesse de consigne?
3. Comment tenir compte des contraintes secondaires agissant sur le système, qu'elles soient imposées par sa conception, sa commande ou l'environnement?

La réponse à ces questions constitue le cœur des travaux de recherche présentés dans ce mémoire. D'un point de vue plus pratique, nous pouvons dire que nous avons cherché à développer une structure de commande opérationnelle pour les manipulateurs mobiles à roues permettant de traiter ces problèmes dans le cadre de la réalisation de missions complexes de manipulation mobile telles que les deux missions types introduites ici.

Avant d'exposer le cadre de travail que nous nous sommes fixé et notamment les orientations prises en terme de commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues, nous proposons un tour d'horizon des approches de commande pour les manipulateurs mobiles à roues afin de mettre en perspective nos travaux par rapport à l'existant.

### 1.2.3 Approches de résolution

Le but ici n'est pas d'établir une liste exhaustive des travaux ayant pour thème la commande des manipulateurs mobiles à roues mais plutôt de fixer un cadre qui permet de positionner l'approche de commande que nous proposons par rapport à la littérature.

Il est tout d'abord important de rappeler que l'ensemble des méthodes utilisées pour la commande des systèmes robotisés consiste de manière plus ou moins explicite à appliquer aux instants voulus des tensions ou des courants appropriés aux bornes des actionneurs du système et ce, afin de répondre à des objectifs de commande fixés. Ces objectifs de commande sont au cœur du problème. Quelles grandeurs physiques cherchons nous à asservir? De manière très générale, l'objectif principal est souvent de contrôler l'évolution d'un repère lié au système d'un point de vue spatial (*i. e.* la position et l'orientation de ce repère), physique (*i. e.* le torseur des interactions du système avec son environnement exprimé en ce repère) et temporel (*i. e.* l'évolution dans le temps de ces grandeurs). Ce repère est celui attaché à l'*OT* et le contrôle de l'évolution de ce repère est ce qui définit le principe de la commande opérationnelle. Dans le cas d'un humanoïde, ce repère peut être celui lié à une main ou encore ne pas être unique. Le choix du repère fixe un premier ensemble de contraintes pour le système qui peuvent s'exprimer sous la forme d'une égalité. Comme nous l'avons vu, cela ne règle cependant pas tout et il existe un ensemble de contraintes qui s'expriment sous la forme d'inégalités, c'est-à-dire de frontières de fonctionnement à ne pas franchir.

Cette problématique n'est pas spécifique aux manipulateurs mobiles à roues mais s'applique à une grande majorité des systèmes robotiques. Il est donc tentant de s'inspirer des nombreuses méthodes de commande développées pour les bras manipulateurs. Si les analogies sont nombreuses, des différences majeures subsistent : l'espace de travail d'un manipulateur mobile à roues n'est pas limité dans le plan d'évolution de la plateforme, le

système est non holonome et les sous-systèmes présentent des dynamiques très différentes. Ce qui n'est pas le cas des bras manipulateurs.

Ainsi les différents travaux de référence sur les manipulateurs mobiles à roues visent à tenir compte de ces spécificités. B. BAYLE, J-Y. FOURQUET et M. RENAUD proposent dans [BAYLE 01c] un état de l'art sur la génération de mouvements pour ces systèmes. Parmi les travaux recensés, nous pouvons tout d'abord citer ceux de Y. YAMAMOTO et X. YUN ([YAMAMOTO 93, YAMAMOTO 94]) qui se sont intéressés à la modélisation des manipulateurs mobiles à roues et à la génération de consigne pour la commande opérationnelle à partir du modèle dynamique du système ainsi établi. Leurs travaux mettent particulièrement en avant les effets du couplage dynamique, lié à la présence d'un manipulateur sur la plateforme à roues, sur les lois de commande. D'un point de vue chronologique, ces travaux sont précurseurs en terme de la complétude de l'étude qui a été menée. L'adaptation de lois de commande cinématique au cas des manipulateurs mobiles à roues est abordée par H. SERAJI dans [SERAJI 93]. L'utilisation de la redondance du système est faite par l'écriture d'un modèle cinématique pour la commande opérationnelle augmenté de contraintes secondaires écrites sous la forme de contraintes égalité. Le problème de la génération de consignes pour la commande à mouvement opérationnel imposé est abordé par G. FOULON dans [FOULON 98] mais aussi par C. PERRIER dans [PERRIER 98]. Dans les deux cas, les approches proposées sont cinématiques et laissent une place importante à la planification. Certains travaux se sont intéressés à l'interaction opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues en se focalisant sur les aspects inertiels du problème qui sont d'importance étant données les dynamiques très différentes de chacun des sous-systèmes. Parmi ces travaux, citons ceux de S. KANG *et al.* dans [KANG 01] qui présentent une étude en simulation ainsi que ceux de Y. UMEDA *et al.* dans [UMEDA 99] qui proposent quelques résultats expérimentaux. Enfin, citons les travaux de O. BROCK *et al.* qui, dans [BROCK 02], abordent le problème de la relaxation des contraintes opérationnelles afin de satisfaire des objectifs secondaires tels que l'évitement d'obstacles bas pour un système dont la plateforme est omnidirectionnelle.

L'ensemble de ces contributions s'intéresse particulièrement à une classe de systèmes sans chercher à étendre les résultats obtenus à des systèmes différents notamment du point de vue du type de plateforme utilisée. C'est ce que s'attache à faire B. BAYLE dans son travail de thèse ([BAYLE 01b]) en se basant sur les travaux de G. CAMPION *et al.* sur la classification des plateformes à roues ([CAMPION 96]). B. BAYLE, J-Y. FOURQUET et M. RENAUD se sont aussi attachés à établir les analogies et les différences entre les méthodes de commande classiques des bras manipulateurs et celles qu'ils préconisent pour la commande des manipulateurs mobiles à roues (leurs méthodes se basent sur des modèles cinématiques). Citons notamment les travaux qu'ils présentent dans [BAYLE 03a] et ceux dans [BAYLE 01d] où ils étendent la notion de manipulabilité aux manipulateurs mobiles à roues.

Cette classe d'approches part d'un corpus théorique largement exploré pour les bras manipulateurs holonomes et tend à fournir des modèles et des méthodes semblables lorsque ces bras sont montés sur des plateformes à roues non holonomes. Ce faisant, elle produit des résultats pour lesquels seul le mouvement de l'*OT* est explicitement fourni dans la consigne, et il est implicitement supposé que la plateforme va pouvoir suivre l'*OT*.

Un autre point de vue consiste à partir du constat qu'il est difficile de commander une plateforme mobile à roues quand elle n'est pas omnidirectionnelle et que toute méthode de commande d'un manipulateur mobile à roues doit intégrer explicitement la définition d'une consigne relative à l'évolution de la plateforme. Dans ce cadre, il est naturel de revisiter les approches développées pour la commande - et en particulier la stabilisation par retour d'état - de ces plateformes à roues. La cinématique de ces plateformes est décrite par un système sous-actionné pour lequel on dispose de  $m$  commandes indépendantes pour un espace accessible de dimension  $n$  avec  $n > m$ . L'enjeu des méthodes proposées pour

la stabilisation par retour d'état de ces plateformes est de construire un retour d'état permettant de mettre en œuvre une dynamique interne qui fournit un vecteur de commande de dimension égale à  $n$ . Cette dynamique interne doit intégrer les informations relatives à l'accessibilité et à la commandabilité de ces systèmes contenues dans l'algèbre de Lie des champs de vecteurs qui définissent le modèle cinématique de ces plateformes. Cette démarche, par le biais des notions de stabilisation pratique et de fonctions transverses, a été appliquée avec succès par P. MORIN et C. SAMSON aux plateformes ([MORIN 03]) puis par M. FRUCHARD, P. MORIN et C. SAMSON aux manipulateurs mobiles à roues ([FRUCHARD 05]). Les travaux de K. TCHON et J. JAKUBIAK consacrés aux manipulateurs mobiles à roues ([TCHON 02]) peuvent être rattachés à cette classe de méthodes.

Nous le voyons, les deux classes d'approches diffèrent en raison de l'intérêt porté aux mouvements de la plateforme. Il en résulte des méthodes très différentes. Nous pouvons notamment remarquer, d'ores et déjà, que la première classe ne tient compte que du caractère instantané des déplacements possibles, en se focalisant sur les vitesses instantanées réalisables à chaque instant. *A contrario*, la deuxième classe de méthodes introduit dans le calcul de la commande l'information qu'il est possible de se déplacer dans un temps arbitrairement petit dans une direction qui n'appartient pas au sous espace formé par les vecteurs vitesses instantanées.

### 1.3 Cadre de nos travaux

Nos travaux sont principalement axés sur la commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues. Comme nous l'évoquons ci-avant, ces systèmes présentent des spécificités qui rendent la simple transposition des techniques de commande classiques des bras manipulateurs insuffisantes. Ces insuffisances se cristallisent autour de deux aspects précis :

- un manipulateur mobile à roues est un système non holonome et mis à part dans le cas particulier de plateformes omnidirectionnelles, les propriétés de ces systèmes pour la commande diffèrent de celles des bras manipulateurs. Une partie de notre travail se situe donc autour de la modélisation de ces systèmes en vue de leur commande, notamment du point de vue dynamique.
- l'espace de travail « illimité » et la redondance du système offrent des possibilités en terme de mission qui n'existent pas pour des bras manipulateurs (du point de vue de l'espace de travail en particulier) ou pour des robots mobiles à roues seuls. L'autre facette de notre travail est donc de proposer une structure de commande permettant de mettre en œuvre les techniques développées spécifiquement autour des modèles dédiés à ces systèmes mais aussi d'enchaîner de manière dynamique des tâches opérationnelles de natures différentes tout en prenant en compte l'ensemble des contraintes secondaires inhérentes à la commande de ces systèmes.

En terme de modélisation, nous nous attachons à présenter les modèles cinématique (relations entre les vitesses du système) et dynamique (relations entre les vitesses, les accélérations et les forces/couples du système) des manipulateurs à roues. Ces modèles, s'ils ne sont pas forcément utilisés pour la commande du système, sont nécessaires à la compréhension de son comportement et leurs données peuvent être utilisées indirectement à des fins de commande.

Du point de vue de la commande, nous présentons l'application des techniques d'inversion cinématique et de « couple calculé » à ces systèmes en vue de leur commande coordonnée et instantanée<sup>7</sup> au niveau opérationnel en mouvement et/ou en effort. Ces

---

<sup>7</sup>c'est à dire en ne cherchant pas à mettre à profit de manière directe les propriétés de commandabilité de la plateforme.

techniques visent à générer en temps-réel les consignes destinées à la commande des actionneurs. Elles donnent accès à la redondance du système et nous présentons les méthodes qui permettent d'en tirer le meilleur parti.

En ce qui concerne l'enchaînement, nous raisonnons à deux niveaux.

Le premier niveau est le niveau opérationnel pour lequel nous adoptons une stratégie qui consiste à appliquer pour chacune des tâches opérationnelles de la mission des lois de commande dédiées aux grandeurs à asservir. Il nous semble en effet difficile d'appliquer une seule et même loi de commande opérationnelle à toute la mission, une telle loi présentant le défaut d'être moyennement performante partout et très performante nulle part. L'enchaînement de ces lois de commande nécessite une continuité des grandeurs contrôlées et doit être robuste aux incertitudes géométriques et temporelles sur le déroulement de la mission. Il n'est en effet pas question de changer de loi de commande à une date fixe ou dans une configuration précise mais plutôt de définir des indicateurs permettant la synchronisation du basculement de tâche opérationnelle et de loi de commande et d'autoriser la replanification des consignes opérationnelles afin de les adapter au déroulement réel de la mission

Le second niveau concerne les objectifs ou contraintes secondaires. Leur respect est primordial mais ils ne sont pas tous prioritaires au même moment. Ainsi, il n'est intéressant de chercher à éviter les butées articulaires du système que dans un certain domaine de risque défini autour de ces butées. De manière similaire, quand aucun obstacle n'est à éviter ou que les obstacles présents ne sont pas problématiques en terme de distance critique, il ne sert à rien de chercher à les éviter. Un arbitrage est donc nécessaire à chaque instant pour déterminer quel est le ou les objectifs prioritaires à un instant donné. La priorité de ces objectifs n'est bien entendu pas complètement découplée du type de tâche opérationnelle dans lequel le système évolue. Disons d'ores et déjà que le respect des contraintes secondaires passe par l'exploitation de la redondance mais aussi par une adaptation réactive des consignes opérationnelles qui permet la modification du profil d'évolution temporelle des trajectoires opérationnelles, tout en conservant le respect du suivi de chemin géométrique.

Afin de montrer la faisabilité de l'approche proposée, nous proposons une validation par simulation mais aussi expérimentale sur un robot existant. Cette validation est faite autour des deux missions type présentées ci-avant qui sont caractéristiques du problème que nous évoquons ici.

Le simulateur est développé autour de l'outil commercial *Matlab/Simulink*. Le robot quant à lui est le manipulateur mobile à roues *H<sub>2</sub>bis* + GT6A de l'équipe RIA<sup>8</sup> du LAAS<sup>9</sup> qui nous a permis, dans le cadre de deux projets communs RobEA<sup>10</sup>, d'utiliser ses moyens expérimentaux et l'architecture logicielle qui les entoure. Ces deux projets RobEA s'intitulent :

- « Commande de bras manipulateurs mobiles non holonome »<sup>11</sup>, en collaboration avec l'équipe du projet Icare de l'INRIA Sophia-Antipolis, l'équipe RIA du LAAS et l'équipe EAVR<sup>12</sup> du LSIIT<sup>13</sup>.
- « Enchaînement dynamique de tâches référencées multi-capteurs pour l'exécution de mouvements complexes en robotique mobile »<sup>14</sup>, en collaboration avec le CERCO<sup>15</sup>, l'équipe Lagadic de l'INRIA Rennes et les équipes RIA et MAC<sup>16</sup> du LAAS.

---

<sup>8</sup>Robotique et Intelligence Artificielle.

<sup>9</sup>Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes du CNRS à Toulouse.

<sup>10</sup>Robotique et Entités Artificielles.

<sup>11</sup>[http://www-sop.inria.fr/icare/robea/index\\_robea.html](http://www-sop.inria.fr/icare/robea/index_robea.html)

<sup>12</sup>Equipe Automatique, Vision et Robotique.

<sup>13</sup>Laboratoire des Sciences de l'Image, de l'Informatique et de la Télédétection de Strasbourg

<sup>14</sup><http://www.laas.fr/Egocentre>

<sup>15</sup>Centre de Recherche Cerveau et Cognition de Toulouse

<sup>16</sup>Méthodes et Algorithmes de Commande.



---

Chapitre 2

Modélisation

---



Nous présentons dans ce chapitre les modèles nécessaires à la commande opérationnelle des manipulateurs à roues. Nous nous intéressons d'abord au paramétrage des systèmes mécaniques qui est essentiel à une définition rigoureuse des modèles qui suivent. Nous nous attachons ensuite à établir les modèles géométrique, cinématique et dynamique qui sont utilisés pour la commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues.

## 2.1 Paramétrage

### 2.1.1 Organe terminal

#### 2.1.1.1 Repérage de l'organe terminal

Il est naturel de définir les missions assignées à un robot en terme d'évolution spatiale et temporelle d'un repère associé à un corps particulier du système matériel. Dans le cadre de notre étude sur les manipulateurs mobiles à roues, cette évolution est exprimée dans un repère de référence noté  $\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ . Il est choisi orthonormé, direct, fixe et tel que  $\vec{z}$  est normal à la surface sur laquelle évolue la plateforme à roues. Cette surface est considérée plane, lisse et indéformable. Le corps d'intérêt est, pour sa part, situé en bout de la chaîne cinématique et est appelé *organe terminal*, noté  $OT$  par la suite. Le repère mobile, orthonormé et direct qui lui est associé est noté  $\mathcal{R}_{OT} = (O_{OT}, \vec{x}_{OT}, \vec{y}_{OT}, \vec{z}_{OT})$ .

#### 2.1.1.2 Coordonnées opérationnelles

La *position* et l'*orientation* de ce repère dans  $\mathcal{R}$ , que nous regroupons sous le vocable de *situation* de l' $OT$ , peut être définie *localement* avec un nombre minimum de six coordonnées indépendantes. Ces coordonnées forment le vecteur  $\xi$  dit vecteur des *coordonnées opérationnelles*. En fonction de la mission à accomplir et de la nature du système portant l' $OT$ , seules  $m$  de ces coordonnées sont à contrôler et, par extension, la situation de l' $OT$  est alors définie sur un espace  $\mathcal{M}$  de dimension  $m$ , appelé *espace opérationnel*.  $\xi$  s'écrit :

$$\xi = \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{bmatrix}.$$

Les paramètres de position de l' $OT$  sont classiquement choisis comme étant les coordonnées cartésiennes du point  $O_{OT}$  dans  $\mathcal{R}$ , notées  $x_{OT}$ ,  $y_{OT}$  et  $z_{OT}$ . En ce qui concerne l'orientation, le choix des paramètres n'est pas aussi automatique. M. RENAUD rappelle dans [RENAUD 96] que l'orientation d'un corps par rapport à un repère de référence peut-être définie par une matrice orthogonale de changement de base  $R$ . Cette matrice est un élément de  $SO(3)$  qui est un groupe non isomorphe à  $\mathbb{R}^3$  et l'orientation ne peut donc être que définie localement à partir de coordonnées locales de  $\mathbb{R}^3$ . Par ailleurs, il n'existe aucun choix de paramètres d'orientation dont les dérivées s'identifient aux composantes de la vitesse angulaire du corps considéré. Nous utilisons dans cette étude des paramètres en nombre minimal (représentation non redondante) appelés *angles d'Euler classiques* et notées  $\psi_{OT}$ ,  $\theta_{OT}$  et  $\phi_{OT}$ . Ainsi, notre paramétrage est minimal et si  $m = 6$ , *i. e.* si nous nous intéressons à toutes les coordonnées définissant la situation complète de l' $OT$ , nous

avons :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_{OT} \\ y_{OT} \\ z_{OT} \\ \psi_{OT} \\ \theta_{OT} \\ \phi_{OT} \end{bmatrix}.$$

Dans le cas d'un manipulateur mobile plan, *i. e.* évoluant dans deux dimensions de l'espace uniquement, la situation complète de l' $OT$  est décrite par :

$$\boldsymbol{\xi} = \begin{bmatrix} x_{OT} \\ y_{OT} \\ \theta_{OT} \end{bmatrix}.$$

### 2.1.1.3 Vitesses et accélérations opérationnelles

Les composantes du vecteur des *vitesses opérationnelles*  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  et du vecteur des *accélérations opérationnelles*  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$  sont les dérivées temporelles, respectivement premières et secondes, des composantes du vecteur  $\boldsymbol{\xi}$ . Pour  $m = 6$ , nous avons :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{OT} \\ \dot{y}_{OT} \\ \dot{z}_{OT} \\ \dot{\psi}_{OT} \\ \dot{\theta}_{OT} \\ \dot{\phi}_{OT} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{OT} \\ \ddot{y}_{OT} \\ \ddot{z}_{OT} \\ \ddot{\psi}_{OT} \\ \ddot{\theta}_{OT} \\ \ddot{\phi}_{OT} \end{bmatrix}.$$

Les trois premières composantes de  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  et de  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$  sont les composantes dans  $\mathcal{R}$  de la vitesse et de l'accélération linéaire de l' $OT$ . En ce qui concerne les dérivées temporelles premières et secondes des paramètres définissant l'orientation, elles ne correspondent pas aux composantes dans  $\mathcal{R}$  de la vitesse et de l'accélération angulaire de l' $OT$ . Ainsi, Par abus de notation,  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  et  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$  peuvent aussi être choisis comme étant :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \dot{x}_{OT} \\ \dot{y}_{OT} \\ \dot{z}_{OT} \\ \omega_{x_{OT}} \\ \omega_{y_{OT}} \\ \omega_{z_{OT}} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \ddot{\boldsymbol{\xi}} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_{OT} \\ \ddot{y}_{OT} \\ \ddot{z}_{OT} \\ \dot{\omega}_{x_{OT}} \\ \dot{\omega}_{y_{OT}} \\ \dot{\omega}_{z_{OT}} \end{bmatrix},$$

où  $\omega_{x_{OT}}$ ,  $\omega_{y_{OT}}$ ,  $\omega_{z_{OT}}$  représentent les composantes de la vitesse angulaire de l' $OT$  dans le repère  $\mathcal{R}$ .

### 2.1.2 Configuration du système matériel

Les notions de mécanique générale introduites ici peuvent être complétées par la lecture de [BELLET 88], [BROSSARD 94] ou [RENAUD 03a] dont elles s'inspirent.

### 2.1.2.1 Notion de liaisons

Si elles décrivent complètement la situation de l'*OT*, les coordonnées opérationnelles ne suffisent pas à décrire la situation de chacun des corps composant le système. Ainsi pour un système à  $n_c$  corps quelconques évoluant dans un espace à trois dimensions, le nombre de paramètres nécessaires à cette description vaut  $6n_c$ . Ces paramètres sont appelés paramètres primitifs du système et sont notés  $p_1, p_2, \dots, p_{6n_c}$ . Ils ne sont pas indépendants les uns des autres car contraints par des liaisons.

Nous ne nous intéressons ici qu'aux liaisons mécaniques classiques par contact entre deux corps. Elles limitent l'évolution spatiale et temporelle des différents corps du système :

- les uns relativement aux autres, il est alors question de *liaisons internes* ;
- relativement à des corps externes au système dont le mouvement est supposé connu et le terme *liaisons externes* est alors employé.

Qu'elles soient internes ou externes, la forme générale des équations de liaison fait intervenir les paramètres primitifs, leurs dérivées par rapport au temps et éventuellement le temps :

$$\sum_{i=1}^{6n_c} \alpha_i(p_1, \dots, p_{6n_c}, t) \dot{p}_i + \beta(p_1, \dots, p_{6n_c}, t) = 0. \quad (2.1)$$

Une équation de liaison pour laquelle  $\beta = 0$  dans (2.1) est dite *homogène*.

Une liaison ne dépendant pas explicitement du temps est dite *scléronome* et son équation vérifie par conséquent  $\frac{\partial \alpha_i}{\partial t} = 0$  avec  $i = 1, 2, \dots, 6n_c$  et  $\beta = 0$ . Une liaison scléronome est donc telle que son équation est homogène et s'écrit :

$$\sum_{i=1}^{6n_c} \alpha_i(p_1, \dots, p_{6n_c}) \dot{p}_i = 0. \quad (2.2)$$

A l'inverse, une liaison dépendant explicitement du temps est dite *rhéonome*. Les liaisons externes, définies par le mouvement d'un corps externe au système, sont en général considérées comme rhéonomes.

Lorsque l'équation (2.1) est intégrable, la liaison et l'équation correspondante sont dites *holonomes* et elle peut alors s'écrire :

$$f(p_1, \dots, p_{6n_c}, t) = 0. \quad (2.3)$$

Lorsqu'elle n'est pas intégrable, la liaison et l'équation correspondante sont dites *non holonomes*. Un système contraint par au moins une liaison non holonome est, par extension, dit non holonome.

Enfin, une liaison est dite *parfaite* si elle respecte deux conditions. La première condition est la *rigoureuse indéformabilité* des corps qu'elle met en jeu. Un corps est indéformable si pour tout couple de points appartenant à ce corps, la distance entre ces points reste constante. La seconde condition concerne le caractère *non dissipatif* de la liaison. Une liaison par contact entre deux solides est non dissipative si elle consiste en un glissement sans frottement ou si elle consiste en un roulement ou pivotement sans glissement. Il est d'usage de faire l'hypothèse de liaisons parfaites. Cette hypothèse est très réaliste du point de vue cinématique. D'un point de vue dynamique, les couples résistants induits par les frottements dans les liaisons peuvent prendre des valeurs très importantes et sont donc parfois modélisés.

### 2.1.2.2 Coordonnées généralisées

La prise en compte de certaines équations de liaison holonomes permet de réduire le nombre de paramètres nécessaires à la description du système matériel. Ces équations de liaison sont appelées *équations de liaison primitives*. Ainsi pour un système à  $n_c$  corps, si le nombre d'équations de liaison primitives choisies vaut  $h_p$ , la *configuration* du système est définie par  $n = 6n_c - h_p$  paramètres qui forment le vecteur  $\mathbf{q}$ , dit vecteur des *coordonnées généralisées*. La configuration du système est alors définie sur un espace  $\mathcal{N}$  à  $n$  dimensions, appelé *espace des configurations* ou *espace généralisé*.  $\mathbf{q}$  s'écrit :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_n \end{bmatrix}.$$

Les coordonnées généralisées sont l'ensemble des paramètres suffisants pour décrire la configuration du système, c'est à dire la situation de chacun des corps qui le composent. Ces coordonnées généralisées plus le temps  $t$  forment un *paramétrage* du système matériel.

Les équations de liaison holonomes n'ayant pas été choisies pour réduire le nombre de paramètres nécessaires à la description du système matériel sont dites *équations de liaison complémentaires*. Les équations de liaisons non holonomes ne permettent pas de réduire la taille de l'espace des configurations et sont aussi considérées comme des équations de liaison complémentaires. Les équations de liaison holonomes complémentaires peuvent être écrites à partir des coordonnées généralisées et nous avons :

$$\bar{f}_i(\mathbf{q}, t) = 0 \text{ avec } 1 \leq i \leq h_c, \quad (2.4)$$

où  $h_c$  est le nombre d'équation de liaison holonomes complémentaires. De même, pour les liaisons non holonomes (et donc complémentaires) nous pouvons écrire :

$$\sum_{j=1}^n \bar{\alpha}_{ij}(\mathbf{q}, t) \dot{q}_j + \bar{\beta}_i(\mathbf{q}, t) = 0 \text{ avec } 1 \leq i \leq \bar{h}, \quad (2.5)$$

où  $\bar{h}$  est le nombre d'équations de liaison non holonomes.

**Remarques :** Si  $h_c + \bar{h} = 0$ , le paramétrage du système matériel est *complet*. Sinon, il est *incomplet*. Dans le cas d'un système non holonome, le paramétrage est toujours incomplet. Notons aussi que  $h = h_p + h_c$  est le nombre de liaisons holonomes pour un système matériel donné et que  $h + \bar{h}$  représente l'ensemble des liaisons pour ce même système.

Pour un système holonome tel qu'un bras manipulateur, toutes les équations de liaison sont généralement choisies comme primitives. Les coordonnées généralisées sont alors en nombre minimum. Dans le cas d'un tel système (holonome), l'intérêt d'éventuellement conserver certaines équations de liaison holonomes comme complémentaires apparaît au niveau du modèle dynamique qui permet alors de calculer les forces de réaction des liaisons correspondantes. Ce n'est pas notre but ici.

### 2.1.2.3 Vitesses et accélérations généralisées

Les systèmes pour lesquels le paramétrage est incomplet sont tels qu'il existe une dépendance entre les coordonnées généralisées et seules  $n_{ddl} = n - (h_c + \bar{h})$  de ces coordonnées

peuvent avoir une vitesse choisie indépendamment de celle des autres.  $n_{ddl}$  est appelé le *degré de liberté global* du système matériel. Le vecteur  $\dot{\mathbf{q}}$  des *vitesse généralisées* du système, dont les composantes sont les dérivées temporelles des composantes de  $\mathbf{q}$ , est alors assujéti à évoluer dans un sous-espace de l'espace  $\mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}$  tangent en  $\mathbf{q}$  à  $\mathcal{N}$  et de dimension  $n_{ddl}$ . Il en est de même pour le vecteur  $\ddot{\mathbf{q}}$  des *accélérations généralisées*, dont les composantes sont aussi assujétiées à évoluer dans un sous-espace de dimension  $n_{ddl}$ .

### 2.1.3 Application aux manipulateurs mobiles à roues

#### 2.1.3.1 Coordonnées généralisées d'un bras manipulateur de type série

Ces systèmes sont strictement holonomes. Ainsi, en choisissant les paramètres de DENAVIT-HARTENBERG modifiés, introduits par W. KHALIL et J. KLEINFINGER dans [KHALIL 86], pour décrire leur structure, nous sommes amenés à utiliser les *variables articulaires*, *i.e.* les grandeurs caractéristiques de chacune des articulations<sup>1</sup>, comme coordonnées généralisées. Pour un manipulateur constitué de  $n_b$  corps mobiles rigides reliés en série par  $n_b$  liaisons rotoïdes et/ou prismatiques, nous avons donc un vecteur  $\mathbf{q}_b$  de  $n_b$  coordonnées indépendantes :

$$\mathbf{q}_b = \begin{bmatrix} q_{b1} \\ q_{b2} \\ \vdots \\ q_{bn_b} \end{bmatrix},$$

décrivant complètement la configuration du système. Cette configuration est définie sur l'espace des configurations du bras manipulateur  $\mathcal{N}_b$  de dimension  $n_b$ .

La situation de l'*OT* du bras manipulateur est noté  $\xi_b$  et est définie sur l'espace opérationnel du bras manipulateur  $\mathcal{M}_b$  de dimension  $m_b$ . La plateforme d'un manipulateur mobile à roues pouvant, si la mission l'exige, être amenée à ne pas bouger, il est nécessaire de choisir un bras manipulateur tel que  $m_b = m$ . Cela revient à concevoir le système de manière à ce que le bras manipulateur seul puisse agir sur l'ensemble des coordonnées opérationnelles contenues dans  $\xi$ .

#### 2.1.3.2 Coordonnées généralisées pour les plateformes à roues.

Les propriétés des plateformes à roues sont décrites en détail par G. CAMPION *et al.* dans [CAMPION 96] qui constitue une référence sur laquelle nous basons les éléments de compréhension sur les plateformes à roues apportés dans ce chapitre.

Le type de roues et leur combinaison au sein d'un même système sont tels que les plateformes mobiles à roues peuvent prendre un grand nombre de formes différentes. Sans préjuger, dans un premier temps, de la forme des différentes liaisons des plateformes mobiles à roues, nous nous attachons ici à définir intuitivement l'ensemble des paramètres nécessaires à la description de la configuration de ces systèmes.

Avant toute chose, nous faisons ici une première hypothèse : une plateforme mobile à roues est composée d'au moins trois roues. Sous une allure simpliste, cette hypothèse est nécessaire à l'équilibre d'un tel système et elle a une importance capitale lorsque le thème de la commande est abordé par la suite.

La configuration d'une plateforme mobile à roues est connue lorsque sa situation dans le repère  $\mathcal{R}$  est connue et que la configuration de chacune de ses roues est connue.

<sup>1</sup>un angle dans le cas de deux corps liés par une liaison rotoïde (pivot) et une distance dans le cas de deux corps liés par une liaison prismatique (glissière).

Pour une plateforme mobile à roue évoluant sur un sol lisse et tel que le vecteur  $\vec{z}$  du repère  $\mathcal{R}$  est normal à sa surface, la situation est complètement définie par deux paramètres de position et un d'orientation. Elle est donc définie sur un espace noté  $\mathcal{M}_p$  de dimension  $m_p = 3$ . Soit  $\mathcal{R}_p = (O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$  un repère mobile lié à la plateforme tel que  $\vec{z}$  et  $\vec{z}_p$  sont colinéaires, ces paramètres sont alors  $x$  et  $y$ , les coordonnées de  $O_p$  dans  $\mathcal{R}$ , et  $\vartheta$  l'angle  $(\vec{x}, \vec{x}_p)$ . Ils forment les composantes du vecteur  $\xi_p$  :

$$\xi_p = \begin{bmatrix} x \\ y \\ \vartheta \end{bmatrix}.$$

Le choix du point  $O_p$  est libre mais G. CAMPION *et al.* montre dans [CAMPION 96] qu'un choix judicieux peut être fait en fonction du type de plateforme mobile à roues envisagé. Ce choix est illustré, dans le cas d'une plateforme de type voiture, par la figure 2.1.

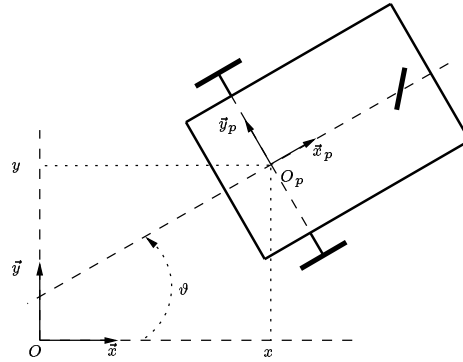


FIG. 2.1 – Paramètres de situation d'une plateforme mobile à roues

La configuration d'une roue et le nombre de paramètres nécessaires à sa description est dépendant du type de roue considéré. Nous introduisons ici les quatre types de roues principalement utilisés en robotique mobile :

- les *roues fixes*, en nombre  $N_f$ , dont l'axe de rotation, parallèle au sol, passe par le centre de la roue ;
- les *roues centrées orientables*, en nombre  $N_c$ , dont l'axe d'orientation, perpendiculaire au sol, passe par le centre de la roue ;
- les *roues décentrées orientables*, en nombre  $N_d$ , dont l'axe d'orientation, perpendiculaire au sol, ne passe pas par le centre de la roue ;
- les *roues suédoises*<sup>2</sup>, en nombre  $N_s$ , pour lesquelles la composante nulle de la vitesse de glissement au point de contact n'est pas dans le plan de la roue.

Ces différents types de roues sont présentés sur la figure 2.2 alors que leur paramétrage respectif est schématisé sur la figure 2.3.

Le tableau 2.1 décrit le caractère constant ou variable des paramètres introduits dans la figure 2.3 en fonction du type de roue. Ainsi, une plateforme mobile à  $N = N_f + N_c + N_d + N_s$  roues requiert  $N + N_c + N_d$  paramètres pour décrire la configuration de l'ensemble de ses roues. Nous notons  $\varphi_f = [\varphi_{f_1} \dots \varphi_{f_{N_f}}]^T$ ,  $\varphi_c = [\varphi_{c_1} \dots \varphi_{c_{N_c}}]^T$ ,  $\varphi_d = [\varphi_{d_1} \dots \varphi_{d_{N_d}}]^T$  et  $\varphi_s = [\varphi_{s_1} \dots \varphi_{s_{N_s}}]^T$  les vecteurs de rotation propre des différentes roues

<sup>2</sup>système de roue breveté en 1973 par BENGT ILON et la société suédoise MECANUM AB (brevet USA n° 03746112).

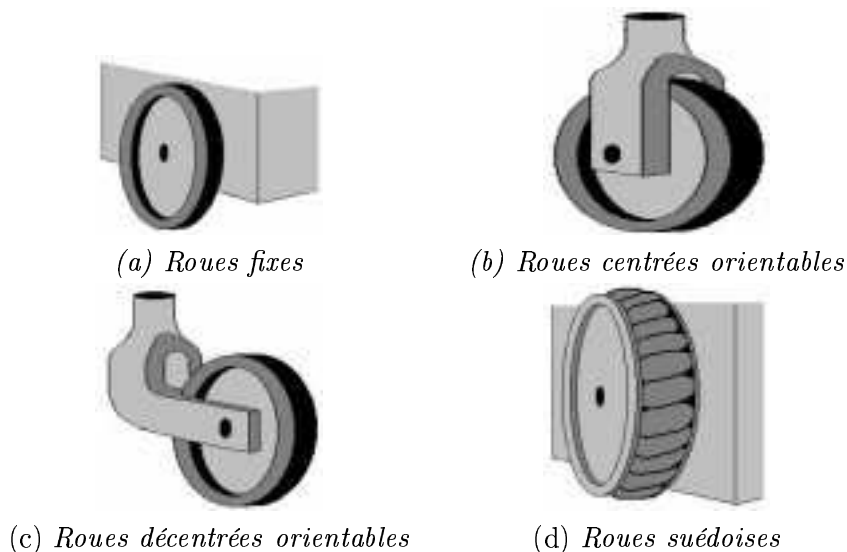


FIG. 2.2 – Différents types de roues utilisés pour les plates-formes mobiles

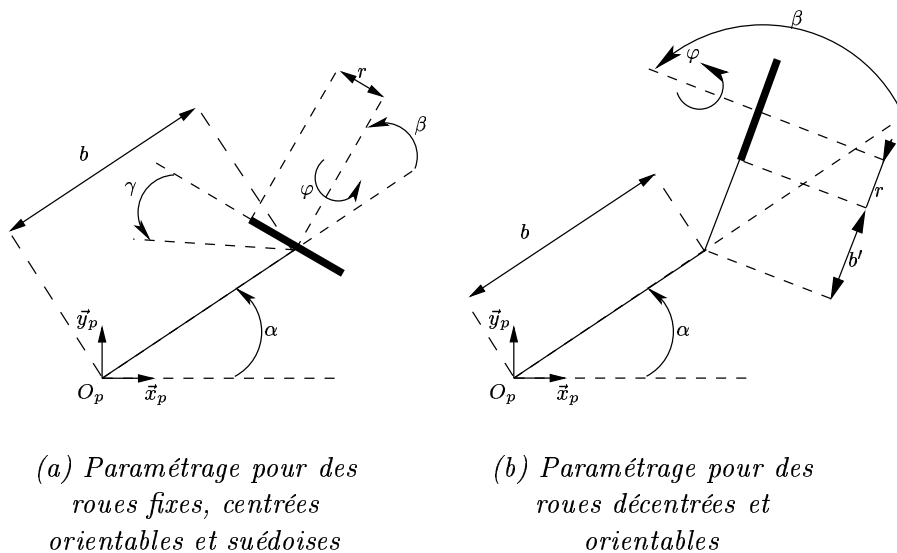


FIG. 2.3 – Paramétrage pour la description de la configuration des différents types de roues

et  $\beta_c = [\beta_{c_1} \dots \beta_{c_{N_c}}]^T$  et  $\beta_d = [\beta_{d_1} \dots \beta_{d_{N_d}}]^T$  les vecteurs d'orientation des roues centrées et décentrées orientables. Posons :

$$\varphi = \begin{bmatrix} \varphi_f \\ \varphi_c \\ \varphi_d \\ \varphi_s \end{bmatrix},$$

la configuration d'une plateforme mobile à roues est alors complètement décrite sur un espace  $\mathcal{N}_p$  par un vecteur de dimension  $n_p = m_p + N + N_c + N_d$  :

$$\mathbf{q}_p = \begin{bmatrix} \xi_p \\ \varphi \\ \beta_d \\ \beta_c \end{bmatrix}.$$

type de roue	(a)	(b)	(c)	(d)
$r$	constant	constant	constant	constant
$b$	constant	constant	constant	constant
$\varphi$	variable	variable	variable	variable
$\beta$	constant	variable	variable	constant
$\alpha$	constant	constant	constant	constant
$\gamma$	0	0	0	constant
$b'$	0	0	0	constant

TAB. 2.1 – Propriétés des paramètres de description des roues en fonction de leur type

### Contrainte de roulement sans glissement

Le vecteur  $\mathbf{q}_p$  décrit la configuration d'une plateforme à roues sans formaliser la notion de *contact* des roues avec le sol. L'hypothèse de liaisons parfaites induit trois hypothèses sur ce contact :

- les roues, comme le sol, sont indéformables ;
- la surface de contact est assimilée à un point ;
- les roues roulent sans glisser sur le sol.

Le *roulement sans glissement* (noté *rsg* par la suite) des roues sur le sol implique des relations entre les paramètres du vecteur  $\dot{\mathbf{q}}_p$ . Ces relations, a priori non intégrables, sont dans un premier temps considérées comme des équations de liaison complémentaires pour le système. Il est possible de montrer que la contrainte rsg d'une roue s'écrit :

- dans le plan vertical de la roue pour tout type de roue :

$$\begin{bmatrix} -S_{\alpha\beta\gamma} & C_{\alpha\beta\gamma} & bC_{\beta\gamma} \end{bmatrix} R(\vartheta)^T \dot{\boldsymbol{\xi}}_p + rC_\gamma \dot{\varphi} = 0, \quad (2.6)$$

- dans le plan orthogonal au plan vertical de la roue (excepté pour les roues suédoises) :

$$\begin{bmatrix} C_{\alpha\beta} & S_{\alpha\beta} & b' + bS_\beta \end{bmatrix} R(\vartheta)^T \dot{\boldsymbol{\xi}}_p + b'\dot{\beta} = 0. \quad (2.7)$$

$R(\vartheta)$  est une matrice orthogonale de changement de base. Elle représente la rotation d'angle  $\vartheta$  autour de l'axe  $\mathbf{z}$  qui permet de passer de l'orientation d'un vecteur dans le repère  $\mathcal{R}_p$  à l'orientation de ce même vecteur dans le repère  $\mathcal{R}$ . Elle s'écrit :

$$R(\vartheta) = \begin{bmatrix} C_\vartheta & -S_\vartheta & 0 \\ S_\vartheta & C_\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.8)$$

**Notations :** Les notations  $C_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_z}$  et  $S_{\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_z}$  sont des raccourcis d'écriture pour  $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_z)$  et  $\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_z)$ .

**Remarque :** Il est intéressant de remarquer que dans le cas d'une roue suédoise telle que  $\gamma = \frac{\pi}{2}$ , l'équation de liaison (2.6) se ramène à une équation de la forme de l'équation (2.7). Ce cas particulier est comparable au cas d'une roue conventionnelle pour laquelle la contrainte rsg ne s'exprimerait que dans le plan orthogonal au plan de la roue. Le bénéfice du choix d'une roue suédoise est alors nul.

#### 2.1.3.3 Coordonnées généralisées d'un manipulateur mobile à roues

La configuration d'un manipulateur mobile à roues est connue dès lors que les configurations de la plateforme et du bras manipulateur qui la composent sont connues. Elle est définie sur un espace  $\mathcal{N}$  de dimension  $n = n_b + n_p$  par un vecteur  $\mathbf{q}$  :

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} \mathbf{q}_b \\ \mathbf{q}_p \end{bmatrix}.$$



Ces  $n$  paramètres sont liés par un maximum de  $2N$  liaisons complémentaires linéairement indépendantes (paramétrage incomplet) et il en résulte les restrictions introduites précédemment (cf 2.1.2.3) sur l'évolution possible des vitesses et accélérations généralisées  $\dot{\mathbf{q}}$  et  $\ddot{\mathbf{q}}$  du système.

## 2.2 Modèles géométrique et cinématique des manipulateurs mobiles à roues

### 2.2.1 Modèle géométrique

Le *modèle géométrique direct* (MGD) d'un manipulateur mobile à roues est, de manière similaire aux autres systèmes robotiques, défini comme le modèle qui permet d'exprimer la situation de l' $OT$  en fonction de la configuration du système. C'est une application non linéaire en les paramètres de configuration du système qui s'écrit :

$$\mathbf{f} : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \text{ telle que } \boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{q}). \quad (2.9)$$

Un modèle géométrique inverse (MGI) du système est un modèle qui permet d'exprimer la configuration du système en fonction de la situation de l' $OT$ . Un MGI du système est une application  $\mathbf{f}^{-1}$ .

Nous présentons sur la figure 2.4 les différents repères et grandeurs intervenant dans la description géométrique d'un manipulateur mobile.

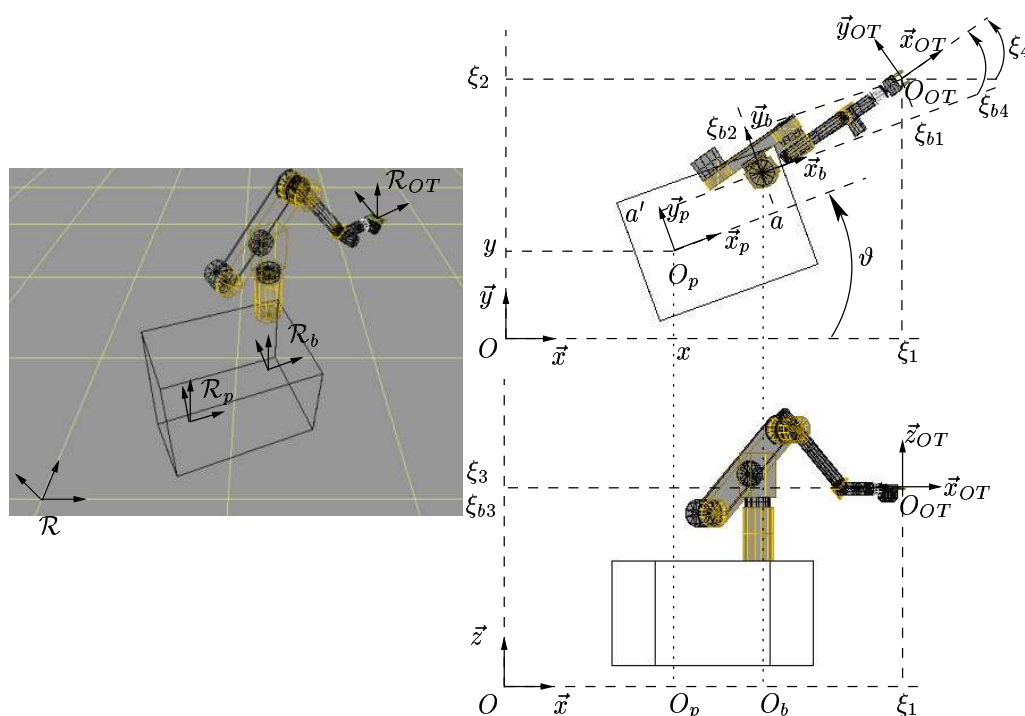


FIG. 2.4 – Repères liés à un manipulateur mobile à roues

La situation  $\boldsymbol{\xi}_b$  de l'organe terminal s'exprime dans le repère  $\mathcal{R}_b = (O_b, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$  via le modèle géométrique du bras manipulateur :

$$\boldsymbol{\xi}_b = \mathbf{f}_b(\mathbf{q}_b) \text{ avec } \xi_{bi} = f_{bi}(\mathbf{q}_b), 1 \leq i \leq m, \quad (2.10)$$

où  $\mathbf{f}_b$  est l'application (non linéaire en les paramètres de configuration du bras) qui représente le MGD du bras manipulateur.

Les coordonnées du point  $O_b$  exprimées dans le repère  $\mathcal{R}_p$  s'écrivent  ${}^{\mathcal{R}_p}O_b = [a \ a' \ 0]^T$  et s'expriment dans  $\mathcal{R}$  via la transformation homogène suivante :

$$\begin{bmatrix} {}^{\mathcal{R}}O_b \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R(\vartheta) & x \\ & y \\ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} {}^{\mathcal{R}_p}O_b \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Les relations (2.10) et (2.11) nous permettent d'écrire, indépendamment du type de plateforme mobile utilisée, le modèle géométrique direct d'un manipulateur mobile :

$$\boldsymbol{\xi} = \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p). \quad (2.12)$$

La forme (2.12) du MGD indique qu'il peut être écrit en fonction de  $\mathbf{q}_b$  et  $\boldsymbol{\xi}_p$  uniquement<sup>3</sup>. Nous appelons *configuration réduite* du manipulateur mobile à roues le vecteur  $\mathbf{q}_r = [\mathbf{q}_b^T \ \boldsymbol{\xi}_p^T]^T$  de dimension  $n_r = n_b + m_p$  qui d'un point de vue strictement géométrique suffit à calculer la situation opérationnelle de l'*OT*.

En détaillant chaque terme, nous obtenons :

$$\begin{aligned} \xi_1 &= x + (a + f_{b1}) C_\vartheta - (a' + f_{b2}) S_\vartheta, \\ \xi_2 &= y + (a + f_{b1}) S_\vartheta + (a' + f_{b2}) C_\vartheta, \\ \xi_3 &= f_{b3}, \\ \xi_4 &= \vartheta + f_{b4}, \\ \xi_5 &= f_{b5}, \\ \xi_6 &= f_{b6}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

## 2.2.2 Modèle cinématique

Le *modèle différentiel direct* (MDD) du système est l'application linéaire qui permet d'exprimer les différentielles des coordonnées opérationnelles de l'*OT*, pour une configuration donnée, en fonction des différentielles des coordonnées généralisées du système. Il s'écrit :

$$d\boldsymbol{\xi} = J(\mathbf{q}) d\mathbf{q}, \quad (2.14)$$

où  $J(\mathbf{q})$  est la matrice jacobienne de l'application  $\mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)$  :

$$J(\mathbf{q}) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{q}} \text{ soit } J_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial q_j} \text{ avec } 1 \leq i \leq m \text{ et } 1 \leq j \leq n. \quad (2.15)$$

Nous considérons indifféremment la dérivée temporelle ou vitesse d'un paramètre  $p$  et sa différentielle. La notation différentielle  $dp$  est donc écartée et remplacée par la notation en vitesse  $\dot{p}$ . Nous pouvons alors parler de *modèle cinématique direct* (MCD) :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = J(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

---

<sup>3</sup>Bien sûr, en considérant que le rsg des roues du système est toujours respecté, la valeur de  $\boldsymbol{\xi}_p$  à un instant donné est liée à l'évolution des autres paramètres de  $\mathbf{q}_p$ . Cependant la modélisation géométrique ne tient pas compte des contraintes cinématiques du type rsg et  $\boldsymbol{\xi}_p$  suffit alors pour la description géométrique de la plateforme.

La description complète de la cinématique du système est donc donnée par l'équation (2.16) et l'ensemble des équations de liaison complémentaires associées au manipulateur mobile à roues. Ces équations de liaison complémentaires peuvent s'écrire sous la forme matricielle suivante qui résulte de la concaténation des équations (2.6) et (2.7) pour l'ensemble des roues du système :

$$\begin{bmatrix} J_{1f} \\ J_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) \\ J_{1d}(\boldsymbol{\beta}_d) \\ J_{1s} \end{bmatrix} R(\vartheta)^T \dot{\boldsymbol{\xi}}_p + \begin{bmatrix} J_{2f} \\ J_{2c} \\ J_{2d} \\ J_{2inds} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varphi}} = 0, \quad (2.17)$$

$$\begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) \\ C_{1d}(\boldsymbol{\beta}_d) \end{bmatrix} R(\vartheta)^T \dot{\boldsymbol{\xi}}_p + \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{N_f \times N_d} \\ \mathcal{O}_{N_c \times N_d} \\ C_{2d} \end{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\beta}}_d = 0. \quad (2.18)$$

Il se déduit aisément que :

- $J_1 = \begin{bmatrix} J_{1f}^T & J_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c)^T & J_{1d}(\boldsymbol{\beta}_d)^T & J_{1s}^T \end{bmatrix}^T$  est une matrice de dimension  $(N \times m_p)$  ;
- $J_2 = \begin{bmatrix} J_{2f}^T & J_{2c}^T & J_{2d}^T & J_{2s}^T \end{bmatrix}^T$  est une matrice diagonale, constante, de dimension  $(N \times N)$  ;
- $C_1 = \begin{bmatrix} C_{1f}^T & C_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c)^T & C_{1d}(\boldsymbol{\beta}_d)^T \end{bmatrix}^T$  est une matrice de dimension  $((N - N_s) \times m_p)$  ;
- et  $C_2 = \begin{bmatrix} \mathcal{O} & \mathcal{O} & C_{2d}^T \end{bmatrix}^T$  une matrice diagonale constante de dimension  $((N - N_s) \times N_d)$ .

Et sous forme plus compacte, les équations (2.17) et (2.18) se ramènent à :

$$D_p(\mathbf{q}_p) \dot{\mathbf{q}}_p = 0, \quad (2.19)$$

où :

$$D_p(\mathbf{q}_p) = \begin{bmatrix} J_1 R(\vartheta)^T & J_2 & \mathcal{O}_{N \times N_d} & \mathcal{O}_{N \times N_c} \\ C_{1f} & \mathcal{O}_{N_f \times N} & \mathcal{O}_{N_f \times N_d} & \mathcal{O}_{N_f \times N_c} \\ C_{1c}(\boldsymbol{\beta}_c) R(\vartheta)^T & \mathcal{O}_{N_c \times N} & \mathcal{O}_{N_c \times N_d} & \mathcal{O}_{N_c \times N_c} \\ C_{1d}(\boldsymbol{\beta}_d) R(\vartheta)^T & \mathcal{O}_{N_d \times N} & C_{2d} & \mathcal{O}_{N_d \times N_c} \end{bmatrix}. \quad (2.20)$$

Ces matrices se construisent directement à partir des différentes équations de rsg.

La description de la cinématique du système, fournie par les équations (2.16) et (2.19), est faite du point de vue de la mécanique. Du point de vue de la commande automatique du système, une forme plus adéquate du MCD est nécessaire. En effet, la commande automatique d'un système mécanique nécessite l'actionnement de certaines des articulations (voire toutes) qui relie les différents corps du système. Dans le cas d'un manipulateur mobile à roues tel que nous le considérons, ces articulations sont :

- internes : rotoïdes (liaison pivot) ou prismatiques (liaison glissière), ce sont elles qui déterminent le nombre des équations de liaison primitives du système ;
- externes : contact des roues sur le sol et condition de rsg, ce sont elles qui déterminent la forme et le nombre des équations de liaison complémentaires du système.

C'est donc à la notion de commande et à la définition d'une forme du MCD dédiée à cette commande que nous nous intéressons dans la partie ci-après en abordant en premier lieu la définition des commandes cinématiques pour chacun des sous systèmes.

### 2.2.2.1 Commande cinématique pour une plateforme à roues

Pour la plateforme, le choix du vecteur de commande n'est pas simple. En effet les composantes de  $\mathbf{q}_p$  ne peuvent pas :

- toutes être actionnées directement, c'est le cas de  $\xi_p$  qui n'est qu'un paramétrage du système et qui est indépendant du type de plateforme ;
- toutes être actionnées indépendamment les unes des autres et ce à cause des équations de liaison complémentaires qui traduisent le rsg des roues sur le sol.

Ainsi, le choix des articulations actionnées et du vecteur de commandes cinématiques indépendantes passe par une étude détaillée des propriétés des équations (2.17) et (2.18).

#### Restriction de la mobilité de la plateforme

Décomposons tout d'abord l'équation (2.18). Pour les roues fixes et centrées orientables, elle s'écrit :

$$\begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix} R(\vartheta)^T \dot{\xi}_p = 0. \quad (2.21)$$

Cette condition sur le mouvement de la plateforme signifie que le vecteur  $\dot{\xi}_p$  est contraint d'évoluer dans un sous-espace de l'espace  $\mathcal{T}_{\xi_p} \mathcal{M}_p$  tangent à  $\mathcal{M}_p$  en  $\xi_p$  et de dimension  $\delta_{mobp} \leq m_p$ . Nous rappelons ici que  $m_p = 3$ .  $\delta_{mobp}$  est appelé le *degré de mobilité* de la plateforme.

Notons :

$$C_{1fc} = \begin{bmatrix} C_{1f} \\ C_{1c}(\beta_c) \end{bmatrix}.$$

Respecter la contrainte (2.21) revient à choisir  $R(\vartheta)^T \dot{\xi}_p$  dans le noyau  $Ker(C_{1fc})$  de  $C_{1fc}$  (cf. Annexe B - (B.3)). La dimension de ce noyau est  $\delta_{mobp} = m_p - rang(C_{1fc})$ .

Une manière de construire ce noyau est d'extraire  $rang(C_{1fc})$  lignes linéairement indépendantes de  $C_{1fc}$ . Ces lignes forment une matrice  $\Upsilon(\beta_c)$  de dimension  $rang(C_{1fc}) \times m_p$ .

D'après B.2.1,  $\mathcal{I}_{m_p} - \Upsilon(\beta_c)^{[1]} \Upsilon(\beta_c)$  est<sup>4</sup> un projecteur dans le noyau  $Ker(\Upsilon(\beta_c))$  de  $\Upsilon(\beta_c)$  et donc dans le noyau  $Ker(C_{1fc})$  de  $C_{1fc}$ .

Notons  $\Sigma(\beta_c)$  une matrice de dimension  $m_p \times \delta_{mobp}$  dont les colonnes forment une base de  $Ker(\Upsilon(\beta_c))$ .  $R(\vartheta)^T$  étant une matrice orthogonale, le choix :

$$\dot{\xi}_p = R(\vartheta) \Sigma(\beta_c) \mathbf{u}_{mobp}, \quad (2.22)$$

où  $\mathbf{u}_{mobp}$  un vecteur quelconque de dimension  $\delta_{mobp}$ , est tel que  $\dot{\xi}_p$  vérifie toujours (2.21).  $\mathbf{u}_{mobp}$  est appelé *commande de mobilité* de la plateforme à roues.

#### Détermination de la vitesse de rotation des roues

Les vitesses de rotation propre des roues doivent respecter la contrainte (2.17). Pour un mouvement possible de la plateforme, cette équation s'écrit :

$$\dot{\varphi} = -J_2^{-1} J_1 \Sigma(\beta_c) \mathbf{u}_{mobp}. \quad (2.23)$$

En ce qui concerne les vitesses d'orientation des roues décentrées orientables, elles doivent respecter la contrainte (2.18). Pour un mouvement possible de la plateforme, cette équation s'écrit :

$$\dot{\beta}_d = -C_{2d}^{-1} C_{1d} \Sigma(\beta_c) \mathbf{u}_{mobp}. \quad (2.24)$$

<sup>4</sup> $\Upsilon(\beta_c)^{[1]}$  est une inverse généralisée de  $\Upsilon(\beta_c)$  (la définition de l'inverse généralisée d'une matrice est rappelée dans l'annexe B - B.2.1).

### Choix du placement et du nombre de roues fixes et centrées orientables

Le but étant de pouvoir faire bouger la plateforme, il faut s'assurer que le nombre  $N_f$  de roues fixes et  $N_c$  de roues centrées orientables ainsi que leur placement sur la plateforme sont tels que  $\delta_{mobp} > 0$ .

La condition nécessaire et suffisante à respecter pour qu'un mouvement soit possible est d'assurer l'existence, à chaque instant, d'un *centre instantané de rotation* (CIR) pour la plateforme. Ce CIR existe si les axes de rotation propre de chacune des roues fixes et centrées orientables, projetés dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , s'intersectent en un seul et même point. Ce point est le CIR de la plateforme. Dans le cas particulier de la translation pure, le CIR est « projeté à l'infini » et le mouvement est alors possible si les axes de rotation propre de chacune des roues fixes et centrées orientables sont parallèles.

**Conditions à respecter afin d'assurer  $\delta_{mobp} = 3$  :** Le rang de  $C_{1fc}$  vaut 0 ce qui n'est possible qu'en l'absence de roue fixe et centrée orientable ( $N_f = N_c = 0$ ). La plateforme possède alors une combinaison de roues décentrées orientables et de roues suédoises dont la somme, nous en avons fait l'hypothèse, est supérieur ou égal 3. Si les conditions (2.23) et (2.24) sont respectées, une telle plateforme est de type *omnidirectionnelle*. Des roues décentrées orientables ou suédoises non-actionnées (*roues libres*) sont appelées des *roues folles*.

**Exemple :** C'est le cas d'un caddie de supermarché. Dans sa version classique (roues folles), si le rsg de chacune des roues est vérifiée, alors pour une vitesse  $\dot{\xi}_p$  donnée, l'évolution de la vitesse de ses roues est donnée par (2.23) et (2.24). Dans une version actionnée, pour assurer une vitesse  $\dot{\xi}_p$  donnée et le rsg de chacune des roues, la vitesse à imprimer aux roues est donnée par (2.23) et (2.24).

**Conditions à respecter afin d'assurer  $\delta_{mobp} = 2$  :** Le rang de  $C_{1fc}$  vaut 1. Ce cas n'est possible que si la contrainte rsg exprimée dans le plan orthogonal aux roues est la même pour toutes les roues. Ceci revient à ce que les axes de rotation propre des roues, projetés dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , soient confondus. Il est évident que dans ce cas  $N_c = 0$  (ou alors des roues centrées orientables sont utilisées mais leur orientation reste constante) et une telle plateforme est de type *unicycle*.

**Conditions à respecter afin d'assurer  $\delta_{mobp} = 1$  :** Le rang de  $C_{1fc}$  vaut 2. C'est le cas d'un mouvement *mono-dimensionnel* et il suffit qu'un CIR existe à chaque instant. Cependant si la position de ce CIR par rapport au point  $O_p$  ne peut évoluer dans le temps, le mouvement possible est alors *mono-directionnel* (une rotation de la plateforme autour d'un point fixe ou une translation pure dans une direction fixe) ce qui présente peu d'intérêt. La position du CIR par rapport à  $O_p$  doit donc pouvoir évoluer dans le temps et il est évident que la condition  $N_c > 0$  doit être respectée. Les autres conditions sont :

- si  $N_f > 0$ , alors les axes de rotation propre des roues fixes, projetés dans le plan  $(O, \vec{x}, \vec{y})$ , doivent être confondus et une seule des  $N_c$  roues centrées orientables peut être orientée de manière indépendante, le mouvement d'orientation des autres roues devant être coordonné afin d'assurer l'existence à chaque instant du CIR. Une telle plateforme est de type *voiture*.
- si  $N_f = 0$ , alors seules deux des  $N_c$  roues centrées orientables peuvent être orientées de manière indépendante, le mouvement d'orientation des autres roues devant être coordonné afin d'assurer l'existence à chaque instant du CIR. Certains engins de chantier nécessitant des rayons de braquage faible pour manœuvrer aisément sont de ce type.

Le nombre de roues centrées orientables pouvant être orientées indépendamment est appelé le *degré de dirigeabilité* de la plateforme et est noté  $\delta_{dirp}$ . Dans le premier cas ( $N_f > 0$ ), il vaut 1 et dans le second ( $N_f = 0$ ) 2. Il est courant de considérer que  $N_c = \delta_{dirp}$ ,

le mouvement d'éventuelles autres roues centrées orientables pouvant se déduire de ces  $\delta_{dirp}$  roues.  $\dot{\beta}_c$  est donc un vecteur de dimension  $\delta_{dirp}$  et son évolution peut être fixée indépendamment des autres paramètres. Il est appelé *commande de dirigeabilité* de la plateforme et nous avons :

$$\dot{\beta}_c = \mathbf{u}_{dirp}. \quad (2.25)$$

### Motorisation des roues

Les relations (2.23), (2.24) et (2.25) reliant la rotation des roues aux vecteurs de commande  $\mathbf{u}_{mobp}$  et  $\mathbf{u}_{dirp}$  peuvent être regroupées et nous pouvons écrire :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi} \\ \dot{\beta}_d \\ \dot{\beta}_c \end{bmatrix} = S_r(\beta_c, \beta_d) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{mobp} \\ \mathbf{u}_{dirp} \end{bmatrix}, \quad (2.26)$$

où :

$$S_r(\beta_c, \beta_d) = \begin{bmatrix} -J_2^{-1} J_1 \Sigma & \mathcal{O}_{N \times \delta_{dirp}} \\ -C_{2d}^{-1} C_{1d} \Sigma & \mathcal{O}_{N_d \times \delta_{dirp}} \\ \mathcal{O}_{N_c \times \delta_{mobp}} & \mathcal{I}_{\delta_{dirp}} \end{bmatrix}. \quad (2.27)$$

Le problème de l'actionnement du système se pose comme suit : combien de paramètres du vecteur  $\begin{bmatrix} \dot{\varphi}^T & \dot{\beta}_d^T & \dot{\beta}_c^T \end{bmatrix}^T$  doivent être actionnés de manière à pouvoir faire évoluer les composantes des vecteurs  $\mathbf{u}_{mobp}$  et  $\mathbf{u}_{dirp}$  de manière indépendante les unes des autres. Notons  $\delta_{motp}$  ce nombre que nous appelons le *degré d'actionnement* d'une plateforme à roues. Il est défini comme le nombre minimum de lignes à extraire de  $S_r$  tel que, pour tout  $\beta_c$  et tout  $\beta_d$ , le rang de la matrice formée par ces lignes est égal à  $\delta_{mobp} + \delta_{dirp}$ . Par définition, nous avons  $\delta_{motp} \geq \delta_{mobp} + \delta_{dirp}$ , c'est à dire que le degré d'actionnement ne peut pas être inférieur à la dimension du vecteur de commande de la plateforme. Dans le meilleur de cas  $\delta_{motp} = \delta_{mobp} + \delta_{dirp}$ .

### Equations de liaison holonomes introduites par les contraintes rsg<sup>5</sup>

Les équations de liaisons introduites par les contraintes de rsg des roues sont considérées comme des équations de liaison complémentaires. Cependant si certaines de ces équations sont holonomes, elle peuvent alors être utilisées pour réduire la taille du vecteur de configuration de la plateforme  $\mathbf{q}_p$ . Elles sont alors envisagées comme des équations de liaisons primitives. Le nombre de ces équations peut être déterminé. Notons  $S_p(\mathbf{q}_p)$  la matrice qui établit la relation entre le vecteur de commande et la dérivée temporelle du vecteur de configuration de la plateforme :

$$\dot{\mathbf{q}}_p = S_p(\mathbf{q}_p) \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{mobp} \\ \mathbf{u}_{dirp} \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

$S_p(\mathbf{q}_p)$  s'écrit :

$$S_p(\mathbf{q}_p) = \begin{bmatrix} R(\vartheta) \Sigma(\beta_c) & \mathcal{O}_{m_p \times \delta_{dirp}} \\ S_r(\beta_c, \beta_d) \end{bmatrix}.$$

A ce stade, il est important de remarquer que pour une valeur de  $\dot{\mathbf{q}}_p$  obtenue par (2.28), l'équation (2.19), qui exprime les contraintes de rsg, est toujours vérifiée. Il est en effet aisé de vérifier que  $D_p(\mathbf{q}_p) S_p(\mathbf{q}_p) = 0$  pour tout  $\mathbf{q}_p$ .

<sup>5</sup>Les résultats présentés dans ce paragraphe font appel à la géométrie différentielle appliquée à la commandes des systèmes non linéaires. Pour plus de détails, se référer à [ISIDORI 89], [LÉVINE 04] ou [MURRAY 94].

Soit  $\Delta(\mathbf{q}_p)$  la *distribution de champs de vecteurs* engendrée par les colonnes de  $S_p(\mathbf{q}_p)$ . Elle est de rang  $\delta_{mobp} + \delta_{dirp}$ . Soit  $\bar{\Delta}(\mathbf{q}_p)$  la *clôture involutive* de  $\Delta(\mathbf{q}_p)$ . Elle est définie comme la plus petite distribution involutive contenant  $\Delta(\mathbf{q}_p)$ . Une distribution est involutive si le *crochet de Lie* de tout couple de champs de vecteurs de cette distribution appartient à cette distribution.

Le *degré de non holonomie* représente le nombre  $\bar{h}$  d'équations de liaisons non holonomes du système et il est défini dans [CAMPION 96] comme :

$$\bar{h} = \dim(\bar{\Delta}(\mathbf{q}_p)) - \dim(\Delta(\mathbf{q}_p)) = \dim(\bar{\Delta}(\mathbf{q}_p)) - (\delta_{mobp} + \delta_{dirp}).$$

Le nombre d'équations de liaisons holonomes liées au rsg des roues, jusque là considérées comme équations de liaison complémentaires, vaut  $h_c$  et est défini comme :

$$h_c = \dim(\mathbf{q}_p) - \dim(\bar{\Delta}(\mathbf{q}_p)).$$

Ces  $h_c$  équations de liaison peuvent être utilisées pour réduire le nombre de coordonnées nécessaires à la définition de la configuration du système. Lorsque ce choix est fait, la nouvelle dimension du vecteur des coordonnées généralisées du système est alors  $(n_p - h_c)$ . Le système est alors dit *complètement non holonome* ([BLOCH 03], chapitre 6, page 302) et  $\bar{h}$  représente alors le nombre de paramètres de ce nouveau vecteur des coordonnées généralisées dont l'évolution est liée à celle des autres paramètres. Cependant, malgré le lien entre ces paramètres, le système est *commandable*, autrement dit il existe une évolution des coordonnées généralisées compatible avec l'ensemble des équations de liaison et telle que la plateforme peut être amenée d'une configuration quelconque à une autre. Cette propriété est essentielle car elle permet notamment d'assurer qu'une plateforme à roues peut être amenée d'une situation quelconque (un point et une orientation dans le plan) à une autre.

Pour notre part, nous considérons que ces équations sont conservées comme complémentaires.

### 2.2.2.2 Commande cinématique du bras manipulateur et généralisation au système complet

Pour le bras manipulateur, le mouvement d'une articulation est cinématiquement indépendant du mouvement des autres et le vecteur de commandes cinématiques indépendantes est naturellement choisi comme étant :

$$\mathbf{u}_b = \dot{\mathbf{q}}_b. \quad (2.29)$$

Nous nous plaçons dans un cadre de travail où toutes les articulations du bras manipulateur sont actionnées.

### Généralisation de la notion de commande de mobilité

Pour une plateforme à roues, la commande de mobilité est celle qui permet l'évolution de la situation  $\xi_p$ . La commande de dirigeabilité seule ne permet pas de faire varier cette situation. Elle modifie uniquement la configuration du système et plus particulièrement la direction de son mouvement instantané.

Par extension, il est possible d'envisager un bras manipulateur comme un système présentant seulement un vecteur de commande de mobilité. En effet, l'évolution d'une composante quelconque de  $\mathbf{u}_b$  entraîne un mouvement de l'*OT*.  $\mathbf{u}_b$  représente donc la commande de mobilité du bras manipulateur et le degré de mobilité vaut  $n_b$ .

Comme B. BAYLE dans [BAYLE 01b], nous introduisons donc la notion de commande de mobilité d'un manipulateur mobile à roues qui est définie par le vecteur :

$$\mathbf{u}_{mob} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_b \\ \mathbf{u}_{mobp} \end{bmatrix},$$

dont la dimension est appelée *degré de mobilité du manipulateur mobile à roues* et est notée  $\delta_{mob} = n_b + \delta_{mobp}$ .

Le vecteur de commande cinématique  $\mathbf{u}$  du système est alors défini comme :

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_{mob} \\ \mathbf{u}_{dirp} \end{bmatrix}.$$

Sa dimension représente le nombre de paramètres du système pouvant varier de manière indépendante. Ce nombre est le degré de liberté  $n_{ddl}$  du système et nous avons donc  $dim(\mathbf{u}) = n_b + \delta_{mobp} + \delta_{dirp} = n_{ddl}$ .

La relation (2.28) qui relie la configuration du manipulateur mobile à la commande peut aussi être généralisée au manipulateur mobile à roues :

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q}_p) \mathbf{u}, \quad (2.30)$$

avec :

$$S(\mathbf{q}_p) = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{n_b} & \mathcal{O}_{n_b \times (\delta_{mobp} + \delta_{dirp})} \\ \mathcal{O}_{n_p \times n_b} & S_p(\mathbf{q}_p) \end{bmatrix}.$$

$S(\mathbf{q}_p)$  peut aussi s'écrire sous la forme :

$$S(\mathbf{q}_p) = \begin{bmatrix} S_{mob}(\mathbf{q}_p) & \mathcal{O}_{(n - \delta_{dirp}) \times \delta_{dirp}} \\ \mathcal{O}_{\delta_{dirp} \times \delta_{mob}} & \mathcal{I}_{\delta_{dirp}} \end{bmatrix}, \quad (2.31)$$

où :

$$S_{mob}(\mathbf{q}_p) = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{n_b} & \mathcal{O}_{n_b \times \delta_{mobp}} \\ \mathcal{O}_{m_p \times n_b} & R(\vartheta) \Sigma(\boldsymbol{\beta}_c) \\ \mathcal{O}_{N \times n_b} & -J_2^{-1} J_1 \Sigma \\ \mathcal{O}_{N_d \times n_b} & -C_{2d}^{-1} C_{1d} \Sigma \end{bmatrix}. \quad (2.32)$$

### 2.2.2.3 Modèle cinématique pour la commande

La cinématique du système est complètement décrite par les relations (2.16) et (2.30). En utilisant les notations introduites dans [BAYLE 01b], ceci peut se résumer par :

$$\dot{\mathbf{z}} = B(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}}, \quad (2.33)$$

et

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q}_p) \mathbf{u},$$

où :

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\xi} \\ \boldsymbol{\beta}_c \end{bmatrix},$$

et :

$$B(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} J(\mathbf{q}) & \\ \mathcal{O}_{\delta_{dirp} \times (n - \delta_{dirp})} & \mathcal{I}_{\delta_{dirp}} \end{bmatrix}. \quad (2.34)$$



La présence de  $\beta_c$  dans  $\mathbf{z}$  est lié au fait que du point de vue cinématique, la valeur de  $\dot{\xi}$  ne fixe aucune contrainte formelle sur celle de  $\dot{\beta}_c$ .

En remplaçant  $\dot{\mathbf{q}}$  par (2.30) dans (2.33), nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (2.35)$$

où :

$$\bar{B}(\mathbf{q}) = B(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p). \quad (2.36)$$

Soit encore :

$$\bar{B}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \bar{J}(\mathbf{q}) & \mathcal{O}_{m \times \delta_{dirp}} \\ \mathcal{O}_{\delta_{dirp} \times \delta_{mob}} & \mathcal{I}_{\delta_{dirp}} \end{bmatrix}.$$

Le modèle cinématique obtenu pour la commande d'un manipulateur mobile à roues est donc décrit de manière synthétique par l'équation (2.35).

**Définition de  $\bar{J}(\mathbf{q})$  :** La matrice  $\bar{J}(\mathbf{q})$ , de dimension  $m \times \delta_{mob}$ , est telle que :

$$\dot{\xi} = \bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c) \mathbf{u}_{mob}. \quad (2.37)$$

$\bar{J}(\mathbf{q})$  s'obtient en remarquant que l'équation (2.16) peut être écrite de manière plus précise :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \mathbf{q}_b} \dot{\mathbf{q}}_b + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \xi_p} \dot{\xi}_p.$$

Or, pour un mouvement faisable<sup>6</sup> de la plateforme,  $\dot{\xi}_p$  doit respecter (2.22). La relation (2.29) permet d'écrire :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \mathbf{q}_b} \mathbf{u}_b + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \xi_p} R(\vartheta) \Sigma(\beta_c) \mathbf{u}_{mobp}. \quad (2.38)$$

$\bar{J}(\mathbf{q})$  est donc :

$$\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c) = \left[ \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \mathbf{q}_b} \quad \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \xi_p} R(\vartheta) \Sigma(\beta_c) \right].$$

Elle est appelée la *matrice jacobienne réduite* du système et est telle que :

$$\left[ \bar{J}(\mathbf{q}) \quad \mathcal{O}_{m \times \delta_{dirp}} \right] = J(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p).$$

### Degré de liberté de l'OT, singularités d'un manipulateur mobile à roues

Rappelons que la dimension du vecteur des coordonnées opérationnelles  $\xi$  est notée  $m$ . Avant d'aller plus loin dans les définitions, nous faisons les hypothèses suivantes :

- Une représentation minimale de la situation opérationnelle est utilisée ( les  $m$  coordonnées opérationnelles sont indépendantes).
- Le système est tel que  $\text{rang}(J(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c)) \leq m$ , ou encore l'ensemble des  $m$  directions opérationnelles à contrôler peut l'être.
- Le rang de  $J(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c)$  et le rang de  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c)$  sont identiques. Il existe en effet des manipulateurs mobiles à roues pour lesquels le rang de la matrice jacobienne réduite est inférieur à celui de la matrice jacobienne. Un exemple de système « mal conçu » de ce type est donné dans [BAYLE 03b].

<sup>6</sup>qui respecte les contraintes de roulement sans glissement.

A partir de là, le *degré de liberté* de l'*OT*, noté  $m_{ddl}$ , est défini comme le nombre de coordonnées opérationnelles qui peuvent varier de manière indépendante. Il est défini comme le rang de la matrice jacobienne (réduite ou non d'après l'hypothèse qui est faite) du système et est donc dépendant de la configuration du système :

$$m_{ddl}(\mathbf{q}) = \text{rang}(J(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)).$$

Nous avons donc  $m_{ddl}(\mathbf{q}) \leq m$ . Le cas où  $m_{ddl}(\mathbf{q}) < m$  correspond à une chute du rang de  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)$  : seules  $m_{ddl}$  des  $m$  coordonnées opérationnelles du système peuvent évoluer de manière indépendante. Une configuration pour laquelle une chute de ce rang se produit est une *configuration singulière* du système qui est alors dit *en singularité*. Les paramètres utilisés pour la représentation de l'orientation de l'*OT* peuvent aussi être à l'origine d'une chute du rang de la jacobienne (réduite ou non). Il s'agit alors d'une *singularité de représentation*. La détermination des configurations singulières nécessite l'étude du rang de  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)$ . De manière générale, cette étude peut être faite par la *décomposition en valeurs singulières* (SVD) de cette matrice. Si une représentation non redondante de la situation de l'*OT* est utilisée alors en *configuration régulière* (non singulière), la matrice  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)$  est de rang plein en lignes et  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c) \bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)^T$  est une matrice définie positive et donc inversible, son déterminant étant non nul. Si le déterminant de  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c) \bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)^T$  s'annule, c'est que  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \boldsymbol{\beta}_c)$  n'est plus de rang plein en lignes et donc que le système est en configuration singulière. Les configurations singulières sont donc celles qui annulent ce déterminant et elles dépendent directement des différentes grandeurs géométriques qui caractérisent le système :  $a, a', \dots$ . Leur calcul analytique est donc complexe même pour les plus simples des manipulateurs mobiles à roues.

## Redondance

La notion de redondance d'un manipulateur mobile à roues peut être définie à deux niveaux distincts : le niveau géométrique et le niveau cinématique. Nous ne nous intéressons qu'au cas où le système est en configuration régulière et donc où le degré de liberté de l'*OT*,  $m_{ddl}(\mathbf{q})$ , est égal à  $m$ .

**Redondance géométrique :** Un manipulateur mobile à roues est dit *redondant géométriquement* si  $n_r - m > 0$ . Le *degré de redondance géométrique* est alors défini comme le nombre  $n_r - m$ . La notion de redondance géométrique signifie que pour une situation donnée de l'*OT*, il existe une infinité de configurations réduites du manipulateur mobile à roues correspondant à une même situation opérationnelle. Cela revient à dire que modèle géométrique inverse (MGI) du système présente une infinité de solutions<sup>7</sup>. Même si le degré de redondance géométrique ne suffit pas à caractériser la cinématique du système, la redondance géométrique peut être utilisée en planification de mouvement de ces systèmes.

**Redondance cinématique :** Un manipulateur mobile à roues est considéré comme *redondant cinématiquement* si  $\delta_{mob} - m > 0$ . Le *degré de redondance cinématique* est alors défini par le nombre  $\delta_{mob} - m$ . La notion de redondance cinématique signifie qu'il existe une infinité de commandes  $\mathbf{u}_{mob}$  associées à une vitesse opérationnelle  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  donnée (infinité de solutions du modèle cinématique inverse). Dans le cas où  $\delta_{mob} - m = 0$ , le système est qualifié de *non redondant* et si  $\delta_{mob} - m < 0$ , le système est considéré comme *sous actionné*.

Pour un système holonome (un bras manipulateur par exemple) ou encore un manipulateur mobile à roues dont la plateforme est omnidirectionnelle ( $\mathbf{u}_{mob} = \mathbf{3} \Rightarrow n_r = \delta_{mob}$ ), les notions de redondance géométrique et cinématique se confondent.

<sup>7</sup>Le MGI étant fortement non linéaire, l'ensemble des solutions du MGI est extrêmement difficile à caractériser de manière formelle.

Remarquons que si il existe une infinité de  $\dot{\beta}_c$  qui ne modifie pas la vitesse de l' $OT$ , la dimension de  $\mathbf{u}_{dirp}$  n'est pour autant pas prise en compte dans la définition de la redondance. Cela est lié au fait que la redondance du système est définie par rapport à la tâche opérationnelle et aux commandes de mobilité.

### 2.2.3 Deux exemples classiques de manipulateurs mobiles à roues

Nous présentons ici le modèle cinématique, tel que défini dans la partie 2.2.2.3, pour deux systèmes particuliers. Ces deux systèmes présentent le même type de bras manipulateur : un bras à deux articulations rotoïdes évoluant dans un plan parallèle à  $(O, \vec{x}, \vec{y})$  classiquement appelé double pendule horizontal. Les exemples proposés sont donc plans (ou  $2D$ ).

Nous nous intéressons à deux types de plateformes à roues très fréquemment rencontrés que se soit dans un contexte robotique et de recherche ou tout simplement dans la vie courante. Le premier est l'unicycle dont la forme la plus connue est le char romain. Le second est la voiture. Un schéma de ces deux systèmes est donné par les figures 2.5 (a) et (b) respectivement. Nous considérons que les roues sont toutes de même rayon.

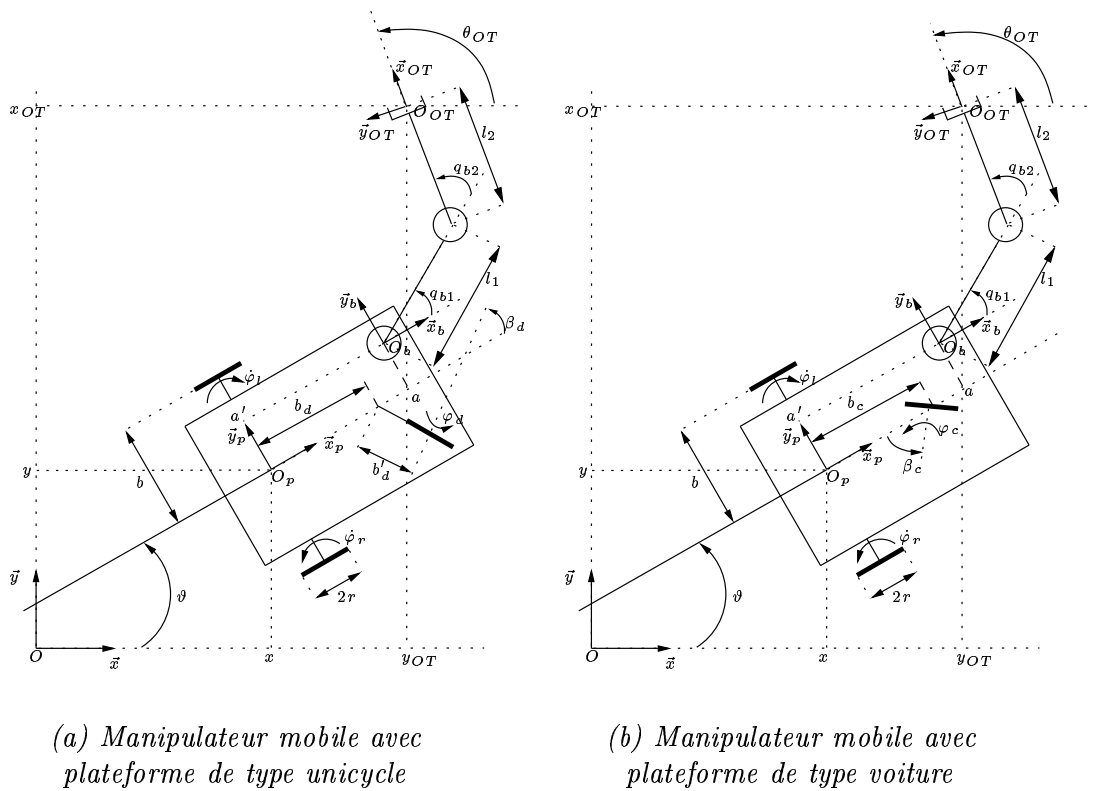


FIG. 2.5 – Deux types classiques de manipulateur mobile à roues

#### 2.2.3.1 Relations communes aux deux exemples

##### Coordonnées opérationnelles

Nous nous plaçons dans le cas où l'ensemble des paramètres servant à décrire la situation de l' $OT$  nous intéresse. Le vecteur des coordonnées opérationnelles est donc un vecteur de dimension  $m = 3$  :

$$\xi = [x_{OT} \quad y_{OT} \quad \theta_{OT}]^T.$$

### Modèle géométrique direct

Il s'écrit dans les deux cas :

$$\begin{aligned} x_{OT} &= x + aC_\vartheta - a'S_\vartheta + l_1C_{\vartheta q_{b1}} + l_2C_{\vartheta q_{b1}q_{b2}} \\ y_{OT} &= y + aS_\vartheta + a'C_\vartheta + l_1S_{\vartheta q_{b1}} + l_2S_{\vartheta q_{b1}q_{b2}} \\ \theta_{OT} &= \vartheta + q_{b1} + q_{b2} \end{aligned} \quad (2.39)$$

#### 2.2.3.2 Cas d'une plateforme unicycle

##### Coordonnées généralisées

Le vecteur des coordonnées généralisées est de dimension  $n = n_b + n_p = 2 + 7 = 9$  :

$$\mathbf{q} = [ q_{b1} \quad q_{b2} \quad x \quad y \quad \vartheta \quad \varphi_r \quad \varphi_l \quad \varphi_d \quad \beta_d ]^T.$$

##### Contraintes de rsg

Nous avons deux roues fixes et une roue décentrée orientable et donc  $3 \times 2 = 6$  équations servant à exprimer le rsg des roues sur le sol.

Pour la roue fixe droite, elles s'écrivent :

$$C_\vartheta \dot{x} + S_\vartheta \dot{y} + b\dot{\vartheta} + r\dot{\varphi}_r = 0, \quad (2.40)$$

$$S_\vartheta \dot{x} - C_\vartheta \dot{y} = 0. \quad (2.41)$$

Pour la roue fixe gauche, elles s'écrivent :

$$-C_\vartheta \dot{x} - S_\vartheta \dot{y} + b\dot{\vartheta} + r\dot{\varphi}_l = 0, \quad (2.42)$$

$$S_\vartheta \dot{x} - C_\vartheta \dot{y} = 0. \quad (2.43)$$

Finalement, pour la roue décentrée orientable, nous avons :

$$-S_{\beta_d \vartheta} \dot{x} + C_{\beta_d \vartheta} \dot{y} + b_d C_{\beta_d} \dot{\vartheta} + r\dot{\varphi}_d = 0, \quad (2.44)$$

$$C_{\beta_d \vartheta} \dot{x} + S_{\beta_d \vartheta} \dot{y} + (b'_d + b_d S_{\beta_d}) \dot{\vartheta} + b'_d \dot{\beta}_d = 0. \quad (2.45)$$

##### Restriction de la mobilité de la plateforme

Nous recherchons ici à calculer le degré de mobilité  $\delta_{mobp}$  de la plateforme. Cela passe par l'étude du rang de  $C_{1fc}$  qui, en l'absence de roues centrées orientables, vaut  $C_{1f}$  soit :

$$C_{1fc} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Le rang de cette matrice vaut 1 et, comme annoncé, le degré de mobilité d'une plateforme de type unicycle est bien  $\delta_{mobp} = 2$ . La matrice  $\Upsilon$  peut être choisie comme :

$$\Upsilon = [ 0 \quad 1 \quad 0 ].$$

Choisissons son inverse généralisée parmi les pseudo-inverses  $M_x$ -pondérées (cf. B.2.2). Cette matrice est de rang plein en ligne (c'est vrai pour toute plateforme mobile à roues) et la famille de ses pseudo-inverses  $M_x$ -pondérées est donnée par :

$$\Upsilon_{M_x}^* = M_x^{-1} \Upsilon^T (\Upsilon M_x^{-1} \Upsilon^T)^{-1},$$

avec  $M_x$  une matrice  $\in \mathbb{R}^{m_p \times m_p}$  symétrique et définie positive. Si  $M_x^{-1}$  s'écrit :

$$M_x^{-1} = \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix},$$

alors il est facile de montrer que :

$$\Upsilon_{M_x}^* = \begin{bmatrix} \frac{m_{12}}{m_{22}} & 1 & \frac{m_{23}}{m_{22}} \end{bmatrix}^T,$$

et que :

$$\mathcal{I}_{m_p} - \Upsilon_{M_x}^* \Upsilon = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{m_{12}}{m_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{m_{23}}{m_{22}} & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous indiquons dans le tableau 2.2 deux valeurs choisies pour la matrice  $\Sigma$  dont les colonnes, nous le rappelons, forment une base de  $\text{Ker}(\Upsilon)$ . L'illustration est faite par la suite que ce choix conditionne la nature du vecteur de commande de mobilité.

	(a)	(b)
$\Sigma$	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -\frac{r}{2} & \frac{r}{2} \\ 0 & 0 \\ -\frac{r}{2b} & -\frac{r}{2b} \end{bmatrix}$

TAB. 2.2 – Deux choix différents de pondération qui conditionnent la nature du vecteur de commande de mobilité

### Détermination des vitesses de rotation des roues

Les vitesses de rotation propre et d'orientation de la roue décentrée orientable sont données par les équations (2.23) et (2.24) ce qui donne ici :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \\ \dot{\varphi}_d \end{bmatrix} = -\frac{1}{r} \begin{bmatrix} 1 & 0 & b \\ -1 & 0 & b \\ -S_{\beta_d} & C_{\beta_d} & b_d C_{\beta_d} \end{bmatrix} \Sigma \mathbf{u}_{mobp}$$

et :

$$\dot{\beta}_d = -\frac{1}{b'_d} \begin{bmatrix} C_{\beta_d} & S_{\beta_d} & b'_d + b_d S_{\beta_d} \end{bmatrix} \Sigma \mathbf{u}_{mobp}.$$

Pour les deux choix de  $\Sigma$  présentés dans le tableau 2.2, la forme de la relation entre  $\mathbf{u}_{mobp}$  et les vecteurs  $\dot{\varphi}$  et  $\dot{\beta}_d$  est donnée dans le tableau 2.3.

Il apparaît clairement que le cas (b) correspond à un cas particulier du choix de la nature du vecteur de commande de mobilité. Les deux paramètres de commande indépendants qui sont retenus ici sont les vitesses de rotation propre  $\dot{\varphi}_r$  et  $\dot{\varphi}_l$  des roues fixes. La signification physique « immédiate » des paramètres de commande retenus n'est pas nécessaire mais elle peut aider à une compréhension plus intuitive du problème. Par ailleurs, l'ordre de grandeur, la dépendance à un repère, les unités des deux paramètres ont une grande importance en terme de conditionnement du problème. Ceci est vrai pour tout système d'équations linéaires et est illustré dans le domaine de la robotique par K. DOTY *et al.* dans [DOTY 93].

La signification physique du vecteur de commande dans le cas (a) n'est pas aussi évidente. La matrice  $\Sigma$  dans ce cas est telle que la relation (2.22) s'écrit :

$$\dot{\xi}_p = \begin{bmatrix} C_{\vartheta} & 0 \\ S_{\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{mobp}.$$

	$\dot{\varphi} = \underbrace{-J_2^{-1}J_1\Sigma}_{\text{matrice}} \mathbf{u}_{mobp}$	$\dot{\beta}_d = \underbrace{-C_{2d}^{-1}C_{1d}\Sigma}_{\text{matrice}} \mathbf{u}_{mobp}$
(a)	$\frac{1}{r} \begin{bmatrix} -1 & -b \\ 1 & -b \\ S_{\beta_d} & -b_d C_{\beta_d} \end{bmatrix}$	$-\frac{1}{b'_d} [ C_{\beta_d} \quad b'_d + b_d S_{\beta_d} ]$
(b)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{b_d}{b} C_{\beta_d} - S_{\beta_d} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{b_d}{b} C_{\beta_d} + S_{\beta_d} \right) \end{bmatrix}$	$\frac{r}{2b'_d} \begin{bmatrix} C_{\beta_d} + \frac{b'_d + b_d S_{\beta_d}}{b} \\ \frac{b'_d + b_d S_{\beta_d}}{b} - C_{\beta_d} \end{bmatrix}^T$

TAB. 2.3 – Détermination de la vitesse des roues pour l'unicycle en fonction de la nature de la commande de mobilité

Notons  $v$  et  $\omega$ , respectivement la première et la seconde composante de  $\mathbf{u}_{mobp}$  dans le cas (a). Nous avons :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v C_{\vartheta} \\ \dot{y} &= v S_{\vartheta} , \\ \dot{\vartheta} &= \omega \end{aligned}$$

et il est aisé de déduire que  $v$  représente la vitesse curviligne de la plateforme, *i.e.* la vitesse du point  $O_p$  dont la direction est perpendiculaire à l'axe des deux roues fixes.  $\omega$  est la vitesse de rotation de la plateforme. Plus que dans le cas (b), ce choix de vecteur de commande de mobilité permet assez aisément d'imaginer le mouvement de la plateforme pour une commande  $\mathbf{u}_{mobp}$  donnée. C'est donc celui que nous retenons de manière préférentielle<sup>8</sup>.

### Motorisations des roues

Nous devons tout d'abord former la matrice  $S_r(\beta_d)$ . Le tableau 2.4 donne son expression dans les différents cas (a) et (b).

	$S_r(\beta_d)$
(a)	$\begin{bmatrix} -\frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{S_{\beta_d}}{r} & -\frac{b_d C_{\beta_d}}{r} \\ -\frac{C_{\beta_d}}{b'_d} & -\frac{b'_d + b_d S_{\beta_d}}{b'_d} \end{bmatrix}$
(b)	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{b_d}{b} C_{\beta_d} - S_{\beta_d} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{b_d}{b} C_{\beta_d} + S_{\beta_d} \right) \\ \frac{r}{2b'_d} \left( C_{\beta_d} + \frac{b'_d + b_d S_{\beta_d}}{b} \right) & \frac{r}{2b'_d} \left( \frac{b'_d + b_d S_{\beta_d}}{b} - C_{\beta_d} \right) \end{bmatrix}$

TAB. 2.4 –  $S_r(\beta_d)$  en fonction de la nature de la commande de mobilité

$\delta_{mobp}$  étant égal à 2, le degré d'actionnement doit être au minimum égal à 2. L'examen de  $S_r(\beta_d)$  dans le cas (a) et (b) fournit immédiatement une solution pour laquelle  $\delta_{motp} = \delta_{mobp}$  ce qui représente le cas le plus favorable. Cette solution est la motorisation des deux roues fixes. Pour tous les couples de motorisation possibles, le tableau 2.5 indique les

<sup>8</sup>Pour un système, dont la distance moyenne  $d(O_p, OT)$  est d'environ 1 m, la vitesse linéaire produite par une rotation de la plateforme est en moyenne de  $\omega \text{ m.s}^{-1}$ . Si  $\omega$  et  $v$  sont du même ordre de grandeur (par exemple  $2 \text{ rad.s}^{-1}$  et  $2 \text{ m.s}^{-1}$ ), ce choix n'est pas préjudiciable en terme de conditionnement du modèle cinématique.

conditions à respecter sur les paramètres géométriques pour que cette motorisation assure un rang  $\delta_{mobp}$  à la matrice formée par les lignes extraites de  $S_r(\beta_d)$ .

	Motorisation valide
$(\varphi_r, \varphi_l)$	oui
$(\varphi_r, \varphi_d)$	non car pour $\beta_d = \arctan\left(\frac{-b_d}{b}\right)$ , $\text{rang} < 2$
$(\varphi_l, \varphi_d)$	non car pour $\beta_d = \arctan\left(\frac{b_d}{b}\right)$ , $\text{rang} < 2$
$(\varphi_r, \beta_d)$	oui si $b'_d + b_d S_{\beta_d} - b C_{\beta_d} \neq 0$ , $\forall \beta_d$ . Dans le cas particulier où $b_d = b$ , cette condition s'écrit $b'_d > \frac{b}{\sqrt{2}}$ .
$(\varphi_l, \beta_d)$	oui si $b'_d + b_d S_{\beta_d} + b C_{\beta_d} \neq 0$ , $\forall \beta_d$ . Dans le cas particulier où $b_d = b$ , cette condition s'écrit $b'_d > \frac{b}{\sqrt{2}}$ .
$(\varphi_d, \beta_d)$	oui si $b'_d < b_d$

TAB. 2.5 – Solutions possibles à deux actionneurs pour la motorisation d'une plateforme unicycle

Diverses raisons poussent en général à choisir la motorisation  $(\varphi_r, \varphi_l)$  (simplicité de la conception mécanique, aspects dynamiques).

### Equations de liaison holonomes introduites par les contraintes rsg

L'étude du degré de non holonomie nécessite l'écriture de la matrice  $S_p(\mathbf{q}_p)$ . Nous nous plaçons dans le cas (a) pour lequel nous avons :

$$\mathbf{u}_{mobp} = \begin{bmatrix} v \\ \omega \end{bmatrix}.$$

$S_p(\mathbf{q}_p)$  est alors donnée par :

$$S_p(\vartheta, \beta_d) = \begin{bmatrix} C_{\vartheta} & 0 \\ S_{\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{1}{r} & -\frac{b}{r} \\ \frac{S_{\beta_d}}{r} & -\frac{b_d C_{\beta_d}}{r} \\ -\frac{C_{\beta_d}}{b_d} & -\frac{b'_d + b_d S_{\beta_d}}{b'_d} \end{bmatrix}.$$

La clôture involutive du système  $\bar{\Delta}(\vartheta, \beta_d)$  est de dimension 6 ([CAMPION 96]). Le degré de non holonomie (ou nombre de contraintes non holonomes agissant sur le système) de la plateforme unicycle telle que nous l'avons représentée est donc  $\dim(\bar{\Delta}(\vartheta, \beta_d)) - \delta_{mobp} = 4$ . Le nombre d'équations holonomes introduites par les contraintes rsg est donné par  $\dim(\mathbf{q}_p) - \dim(\bar{\Delta}(\vartheta, \beta_d)) = n_p - 6 = 1$ . Cette équation de contrainte rsg holonome est obtenue par la combinaison linéaire des équations de liaison (2.40) et (2.42) :

$$\vartheta + \frac{r}{2b}(\varphi_r + \varphi_l) = cte. \quad (2.46)$$

Le vecteur  $\mathbf{q}_p$  peut alors être choisi comme  $\mathbf{q}_p = [x \ y \ \varphi_r \ \varphi_l \ \varphi_d \ \beta_d]^T$ . En effet, pour des conditions initiales connues, un respect parfait des contraintes rsg, la connaissance de  $\vartheta$  est complète dès lors que  $\varphi_r$  et  $\varphi_l$  sont connues. Cependant, nous choisissons de conserver  $\vartheta$  comme coordonnée généralisée car :

- il est, en pratique, risqué de baser sa connaissance à chaque instant sur celle de  $\varphi_r$  et  $\varphi_l$ . En effet, le rsg de l'ensemble des roues n'est jamais parfaitement garanti et un moyen de mesure extéroceptif doit être prévu pour  $\vartheta$  afin de s'affranchir d'erreurs liées à un glissement éventuel des roues.
- la configuration du système est, à un instant  $t$ , une image du système, indépendamment de l'historique de son évolution (constante d'intégration de l'équation de liaison intégrée) et d'éventuelles contraintes sur ses vitesses.

Cela dit, du point de vue de la cinématique et de la dynamique, à moins d'évoluer sur une surface particulièrement propice au glissement, il n'est pas complètement irréaliste de baser la connaissance de  $\dot{\vartheta}$  et de  $\ddot{\vartheta}$  sur celle des vitesses et accélérations des roues fixes droite et gauche.

### Nécessité de la représentation des roues non motorisées

Dans la mesure où une roue du système n'est pas motorisée, il peut être légitime de se poser la question de sa modélisation. Est-elle nécessaire? Au sens de la connaissance complète des vitesses des corps du système, oui. Cependant, il est souvent suffisant de ne représenter et de ne modéliser que les roues motorisées, le mouvement d'éventuelles autres roues n'étant pas indépendant de celui de ces dernières. Ainsi dans le cas de l'unicycle, la roue décentrée orientable est souvent « oubliée » et  $\mathbf{q}_p$  s'écrit alors :

$$\mathbf{q}_p = [ x \quad y \quad \vartheta \quad \varphi_r \quad \varphi_l ]^T.$$

La clôture involutive du système est alors de dimension 4 ([YAMAMOTO 93]). Le degré de non holonomie est alors 2. Ce qui correspond bien aux deux équations de liaison non holonome de la plateforme unicycle à deux roues. Le nombre d'équations complémentaires holonomes reste  $n_p - 4 = 1$ .

### Modèle cinématique pour la commande

Le degré de mobilité du système complet, qui sans roues centrées orientables est équivalent au degré de liberté du système  $n_{ddl}$ , vaut ici 4. Et le vecteur de commande de mobilité est donnée par :

$$\mathbf{u}_{mob} = [ \dot{q}_{b1} \quad \dot{q}_{b2} \quad v \quad \omega ]^T.$$

La relation (2.38) est rappelée ici :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)}{\partial \mathbf{q}_b} \mathbf{u}_b + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} R(\vartheta) \Sigma \mathbf{u}_{mobp}.$$

Ce qui, pour l'exemple considéré, donne :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)}{\partial \mathbf{q}_b} = \begin{bmatrix} -l_1 S_{\vartheta q_{b1}} - l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & -l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} \\ l_1 C_{\vartheta q_{b1}} + l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

et :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} R(\vartheta) \Sigma = \begin{bmatrix} C_{\vartheta} & -(aS_{\vartheta} + a'C_{\vartheta} + l_1 S_{\vartheta q_{b1}} + l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}}) \\ S_{\vartheta} & aC_{\vartheta} - a'S_{\vartheta} + l_1 C_{\vartheta q_{b1}} + l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_b, \vartheta) = \begin{bmatrix} -l_1 S_{\vartheta q_{b1}} + \bar{\mathbf{J}}_{12} & -l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & C_{\vartheta} & -(aS_{\vartheta} + a'C_{\vartheta} - \bar{\mathbf{J}}_{11}) \\ l_1 C_{\vartheta q_{b1}} + \bar{\mathbf{J}}_{22} & l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & S_{\vartheta} & aC_{\vartheta} - a'S_{\vartheta} + \bar{\mathbf{J}}_{21} \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



où  $\bar{J}_{ij}$  représente l'élément de  $\bar{J}$  situé à la  $i$ ème ligne et à la  $j$ ème colonne.

En configuration régulière, le degré de liberté  $m_{ddl}$  de l' $OT$  vaut  $m = 3$  et le système est donc redondant cinématiquement de degré  $\delta_{mob} - m_{ddl} = 1$ . Pour les problèmes plans, un seul paramètre est nécessaire pour représenter l'orientation de l' $OT$  et sa dérivée temporelle correspond à sa vitesse angulaire. Aucune singularité de représentation de l'orientation n'est alors présente. Le calcul du déterminant de  $\bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta) \bar{J}(\mathbf{q}_b, \vartheta)^T$  donne :

$$\det(\bar{J}\bar{J}^T) = 2a^2 + 2al_1C_{q_{b1}} - 2aa'l_1^2C_{q_{b1}}S_{q_{b1}} + l_1^2C_{q_{b1}}^2(2 + a') + l_1^2a^2S_{q_{b1}}^2.$$

Les configurations singulières sont donc fonction des différentes grandeurs géométriques  $l_1$ ,  $a$  et  $a'$ . Dans le cas particulier où  $a = 0$ , le système est en configuration singulière si  $q_{b1} = \frac{\pi}{2} \text{ mod } \pi$ . Dans le cas particulier où  $a \neq 0$  et  $a' = 0$ , le système n'a aucune configuration singulière. Pour tous les autres cas, aucune solution analytique simple ne peut être trouvée et seules des méthodes numériques peuvent permettre d'indiquer l'existence et la valeur des configurations singulières pour un triplet  $(l_1, a, a')$  donné.

### 2.2.3.3 Cas d'une plateforme voiture

#### Coordonnées généralisées

Le vecteur des coordonnées généralisées est de dimension  $n = n_b + n_p = 2 + 7 = 9$  :

$$\mathbf{q} = [q_{b1} \quad q_{b2} \quad x \quad y \quad \vartheta \quad \varphi_r \quad \varphi_l \quad \varphi_c \quad \beta_c]^T.$$

#### Contraintes de rsg

Nous avons deux roues fixes et une roue centrée orientable et donc  $3 \times 2 = 6$  équations servant à exprimer le rsg des roues sur le sol. Ces équations pour les roues fixes sont les mêmes ((2.40), (2.41), (2.42) et (2.43)) que dans le cas du manipulateur mobile avec plateforme unicycle. Pour la roue centrée orientable de la voiture nous avons :

$$-S_{\beta_c\vartheta}\dot{x} + C_{\beta_c\vartheta}\dot{y} + b_cC_{\beta_c}\dot{\vartheta} + r\dot{\varphi}_c = 0, \quad (2.47)$$

$$C_{\beta_c\vartheta}\dot{x} + S_{\beta_c\vartheta}\dot{y} + b_cS_{\beta_c}\dot{\vartheta} = 0. \quad (2.48)$$

#### Restriction de la mobilité de la plateforme

Nous recherchons ici à calculer le degré de mobilité  $\delta_{mobp}$  de la plateforme. Cela passe par l'étude du rang de  $C_{1fc}(\beta_c)$  qui vaut ici :

$$C_{1fc}(\beta_c) = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ C_{\beta_c} & S_{\beta_c} & b_cS_{\beta_c} \end{bmatrix}.$$

Le rang de cette matrice vaut 2 et le degré de mobilité d'une plateforme de type voiture est  $\delta_{mobp} = 1$ . La matrice  $\Upsilon(\beta_c)$  peut être choisie comme :

$$\Upsilon(\beta_c) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ C_{\beta_c} & S_{\beta_c} & b_cS_{\beta_c} \end{bmatrix}.$$

Le calcul de de la pseudo-inverse de  $\Upsilon(\beta_c)$  (pseudo-inverse  $M_x$ -pondérée avec  $M_x = \mathcal{I}_{m_p}$ ) donne :

$$\Upsilon(\beta_c)^* = \frac{1}{C_{\beta_c}^2 + b_c^2S_{\beta_c}^2} \begin{bmatrix} -C_{\beta_c}S_{\beta_c} & C_{\beta_c} \\ C_{\beta_c}^2 + b_c^2S_{\beta_c}^2 & 0 \\ -b_cS_{\beta_c}^2 & b_cS_{\beta_c} \end{bmatrix},$$

et :

$$\mathcal{I}_{m_p} - \Upsilon(\beta_c)^* \Upsilon(\beta_c) = \frac{1}{C_{\beta_c}^2 + b_c^2 S_{\beta_c}^2} \begin{bmatrix} b_c^2 S_{\beta_c}^2 & 0 & -b_c C_{\beta_c} S_{\beta_c} \\ 0 & 0 & 0 \\ -b_c C_{\beta_c} S_{\beta_c} & 0 & C_{\beta_c}^2 \end{bmatrix}.$$

En multipliant la troisième colonne de  $\mathcal{I}_{m_p} - \Upsilon(\beta_c)^* \Upsilon(\beta_c)$  par  $-b_c \frac{S_{\beta_c}}{C_{\beta_c}}$ , il apparaît immédiatement que  $\Upsilon(\beta_c)^*$  est de rang 1.  $\Sigma(\beta_c)$  est donc une matrice colonne, choisie comme :

$$\Sigma(\beta_c) = r \begin{bmatrix} S_{\beta_c} & 0 & -\frac{C_{\beta_c}}{b_c} \end{bmatrix}^T. \quad (2.49)$$

### Détermination des vitesses de rotation des roues

Les vitesses de rotation propre sont données par l'équation (2.23) ce qui, en remplaçant  $\Sigma(\beta_c)$  par (2.49), donne :

$$\begin{bmatrix} \dot{\varphi}_r \\ \dot{\varphi}_l \\ \dot{\varphi}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{b}{b_c} C_{\beta_c} - S_{\beta_c} \\ \frac{b}{b_c} C_{\beta_c} + S_{\beta_c} \\ 1 \end{bmatrix} \mathbf{u}_{mobp}.$$

Ce choix de  $\Sigma(\beta_c)$  correspond au cas particulier où la commande de mobilité est définie par  $\dot{\varphi}_c$ , la vitesse de rotation propre de la roue centrée orientable. Si le choix de  $\Sigma(\beta_c)$  est tel que  $\Sigma(\beta_c) = \begin{bmatrix} S_{\beta_c} & 0 & -\frac{C_{\beta_c}}{b_c} \end{bmatrix}^T$  alors la commande de mobilité  $\mathbf{u}_{mobp}$  correspond à la vitesse linéaire de la roue centrée orientable dont la direction est perpendiculaire à l'axe de la roue. Cette vitesse linéaire est, comme dans le cas de l'unicycle, notée  $v = r\dot{\varphi}_c$ . Nous retenons ce second choix par la suite. Ainsi, la relation (2.22) s'écrit :

$$\dot{\xi}_p = \begin{bmatrix} C_{\vartheta} S_{\beta_c} \\ S_{\vartheta} S_{\beta_c} \\ -\frac{C_{\beta_c}}{b_c} \end{bmatrix} v.$$

La commande de dirigeabilité, nous l'avons vu, correspond à la vitesse d'orientation de la roue centrée orientable :

$$\mathbf{u}_{dirp} = \dot{\beta}_c.$$

### Motorisations des roues

Nous devons tout d'abord former la matrice  $S_r(\beta_c)$  :

$$S_r(\beta_c) = \begin{bmatrix} \frac{1}{r} \left( \frac{b}{b_c} C_{\beta_c} - S_{\beta_c} \right) & 0 \\ \frac{1}{r} \left( \frac{b}{b_c} C_{\beta_c} + S_{\beta_c} \right) & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (2.50)$$

Ici le nombre minimum de moteurs nécessaires est  $\delta_{motp} \geq \delta_{mobp} + \delta_{dirp} = 2$ . Le rang de la matrice formée par les  $\delta_{motp}$  lignes extraites de  $S_r(\beta_c)$  doit donc être 2. L'examen de (2.50) fait apparaître la nécessité de motoriser l'orientation de la roue centrée orientable. Les couples de motorisation envisageables sont présentés dans le tableau 2.6.

Le cas  $(\varphi_c, \beta_c)$  correspond à une voiture de type *traction*. Les deux autres cas correspondent à une voiture de type *propulsion*. L'angle de braquage limité des voitures, au sens grand public du terme, est tel que  $\arctan\left(-\frac{b}{b_c}\right) < \beta_c < \arctan\left(\frac{b}{b_c}\right)$  et donc qu'aucun

	Motorisation valide
$(\varphi_r, \beta_c)$	non car pour $\beta_c = \arctan\left(\frac{b}{b_c}\right)$ , $\text{rang} < 2$
$(\varphi_l, \beta_c)$	non car pour $\beta_c = \arctan\left(-\frac{b}{b_c}\right)$ , $\text{rang} < 2$
$(\varphi_c, \beta_c)$	oui

TAB. 2.6 – Solutions possibles à deux actionneurs pour la motorisation d'une plateforme de type voiture

problème lié à une telle motorisation n'apparaît<sup>9</sup>. Dans le cas d'un système robotique, la variation de  $\beta_c$  n'est pas forcément aussi limitée et il est préférable d'utiliser une motorisation de type *traction*.

### Equations de liaison holonomes introduites par les contraintes rsg

L'étude du degré de non holonomie nécessite l'écriture de la matrice  $S_p(\mathbf{q}_p)$  :

$$S_p(\vartheta, \beta_c) = \begin{bmatrix} C_\vartheta S_{\beta_c} & 0 \\ S_\vartheta S_{\beta_c} & 0 \\ -\frac{C_{\beta_c}}{b_c} & 0 \\ \frac{1}{r} \left( \frac{b}{b_c} C_{\beta_c} - S_{\beta_c} \right) & 0 \\ \frac{1}{r} \left( \frac{b}{b_c} C_{\beta_c} + S_{\beta_c} \right) & 0 \\ \frac{1}{r} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le calcul de la clôture involutive  $\bar{\Delta}(\vartheta, \beta_d)$  du système nous indique qu'elle est de dimension 6. Le degré de non holonomie (ou nombre de contraintes non holonomes agissant sur le système) de la plateforme voiture, telle que nous l'avons représentée, est donc  $\dim(\bar{\Delta}(\vartheta, \beta_d)) - (\delta_{mobp} + \delta_{dirp}) = 4$ . Le nombre d'équations holonomes introduites par les contraintes rsg est donné par  $\dim(\mathbf{q}_p) - \dim(\bar{\Delta}(\vartheta, \beta_d)) = n_p - 6 = 1$ . Cette équation de contrainte rsg holonome est identique au cas de l'unicycle :

$$\vartheta + \frac{r}{2b}(\varphi_r + \varphi_l) = \text{cte}. \quad (2.51)$$

Et pour des raisons identiques au cas de l'unicycle, nous choisissons de conserver  $\vartheta$  comme coordonnée généralisée.

### Modèle cinématique pour la commande

Le degré de mobilité du système complet  $\delta_{mob}$  vaut ici 3 et son degré de liberté  $n_{ddl}$  vaut, comme dans le cas du manipulateur mobile avec la plateforme unicycle, 4. Le vecteur de commande de mobilité est donné par :

$$\mathbf{u}_{mob} = [ \dot{q}_{b1} \quad \dot{q}_{b2} \quad v ]^T.$$

La relation (2.38) est rappelée ici :

$$\dot{\xi} = \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \mathbf{q}_b} \mathbf{u}_b + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \xi_p)}{\partial \xi_p} R(\vartheta) \Sigma(\beta_c) \mathbf{u}_{mobp}.$$

<sup>9</sup>Par ailleurs, les deux roues fixes d'une voiture propulsion sont motorisées (de manière non indépendante via le différentiel).

Ce qui, pour l'exemple considéré, donne :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)}{\partial \mathbf{q}_b} = \begin{bmatrix} -l_1 S_{\vartheta q_{b1}} - l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & -l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} \\ l_1 C_{\vartheta q_{b1}} + l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} \\ 1 & 1 \end{bmatrix},$$

et :

$$\frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{q}_b, \boldsymbol{\xi}_p)}{\partial \boldsymbol{\xi}_p} R(\vartheta) \Sigma(\beta_c) = \begin{bmatrix} S_{\beta_c} C_{\vartheta} + \frac{C_{\beta_c}}{b_c} (aS_{\vartheta} + a'C_{\vartheta} + l_1 S_{\vartheta q_{b1}} + l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}}) \\ S_{\beta_c} S_{\vartheta} - \frac{C_{\beta_c}}{b_c} (aC_{\vartheta} - a'S_{\vartheta} + l_1 C_{\vartheta q_{b1}} + l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}}) \\ -\frac{C_{\beta_c}}{b_c} \end{bmatrix}.$$

Nous pouvons alors écrire :

$$\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c) = \begin{bmatrix} -l_1 S_{\vartheta q_{b1}} + \bar{\mathbf{J}}_{12} & -l_2 S_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & S_{\beta_c} C_{\vartheta} + \frac{C_{\beta_c}}{b_c} (aS_{\vartheta} + a'C_{\vartheta} - \bar{\mathbf{J}}_{11}) \\ l_1 C_{\vartheta q_{b1}} + \bar{\mathbf{J}}_{22} & l_2 C_{\vartheta q_{b1} q_{b2}} & S_{\beta_c} S_{\vartheta} - \frac{C_{\beta_c}}{b_c} (aC_{\vartheta} - a'S_{\vartheta} + \bar{\mathbf{J}}_{21}) \\ 1 & 1 & -\frac{C_{\beta_c}}{b_c} \end{bmatrix}.$$

La cinématique du système est alors décrite par les équations suivantes :

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\xi}} &= \bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c) \mathbf{u}_{mob}, \\ \dot{\beta}_c &= \mathbf{u}_{dirp}. \end{aligned}$$

En configuration régulière, le degré de liberté  $m_{ddl}$  de l' $OT$  vaut  $m = 3$ . Le système n'est donc pas redondant puisque  $\delta_{mob} - m_{ddl} = 0$ . Si seule la position de l' $OT$  est considérée, le système est alors redondant de degré 1.

Le calcul du déterminant de  $\bar{\mathbf{J}}(\mathbf{q}_b, \vartheta, \beta_c)$  donne :

$$\det(\bar{\mathbf{J}}) = \frac{l_1}{b_c} (-aC_{\beta_c} S_{q_{b1}} + b_c S_{\beta_c} C_{q_{b1}} + a' C_{\beta_c} C_{q_{b1}}).$$

Les configurations singulières sont donc fonction des différentes grandeurs géométriques  $b_c$ ,  $a$  et  $a'$ . Dans le cas particulier où  $a = 0$ , le système est en configuration singulière si  $\beta_c = \arctan\left(-\frac{a'}{b_c}\right)$  ou si  $q_{b1} = \frac{\pi}{2} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Dans le cas particulier où  $b_c = a$  et  $a' = 0$ , le système est en configuration singulière si  $\beta_c = q_{b1} + k\pi$  avec  $k \in \mathbb{N}$ . Pour tous les autres cas, aucune solution analytique simple ne peut être trouvée et seules des méthodes numériques peuvent permettre d'indiquer l'existence et la valeur des configurations singulières pour un triplet  $(b_c, a, a')$  donné.

## 2.3 Modèle dynamique associé aux manipulateurs mobiles à roues

Le modèle dynamique d'un système mécanique établit la relation entre les efforts appliqués au système (à chaque articulation, au niveau de l' $OT$ ...) et ses coordonnées, vitesses et accélérations généralisées. En fonction de l'application, ce modèle peut prendre des formes différentes. La première est dite *explicite* et un des formalismes explicites les plus employés est le formalisme de LAGRANGE. Le modèle peut aussi prendre une forme *implicite*. C'est le cas du formalisme de NEWTON-EULER qui, par ailleurs, prend une forme *réursive*. La forme explicite permet l'étude des propriétés du modèle d'un système et peut être obtenue de manière systématique. La seconde forme est plutôt adaptée aux calculs en temps réel

des grandeurs décrivant l'évolution du système dans le temps. Nous nous intéressons ici au formalisme de LAGRANGE qui, en plus de permettre de décrire la dynamique du système sous la forme d'équations simples (non récursives), est très générale et permet, par exemple, de prendre en compte d'éventuelles liaisons non holonomes. Le cas de systèmes présentant des équations de liaisons holonomes et non holonomes, scléronomes et linéaires en les vitesses généralisées a été traité par J. NEĪMARK et N. FUFÆEV dans [NEĪMARK 72].

En ce qui concerne les bras manipulateurs, des méthodes systématiques de calcul existent et peuvent être trouvées dans la plupart des ouvrages de Robotique classique de référence (citons par exemple [KHALIL 02] ou encore [SCIATICCO 00]). Des outils logiciels sont par ailleurs dédiés à ce type de calcul : *Symoro* de l'IRCCYN de Nantes ([KHALIL 97]) ou encore la *Robotic Toolbox* pour Matlab ([CORKE 96]).

Pour les plateformes à roues, G. CAMPION *et al.* donnent, dans [CAMPION 96], la structure du modèle dynamique (forme de LAGRANGE) pour l'ensemble des plateformes à roues considérées sans toutefois entrer dans les détails de la définition des différentes matrices mises en jeu. Un échange privilégié avec M. RENAUD ([RENAUD 03b]) nous a permis de mieux comprendre le formalisme de LAGRANGE dans le cadre de l'obtention du modèle dynamique pour des systèmes non holonomes de type plateformes à roues. Pour le reste, les modèles dynamiques de plateformes à roues évoqués dans la littérature robotique sont souvent présentés sous des formes simplifiées et pour un type unique de plateforme.

La modélisation dynamique des manipulateurs mobiles à roues reste un domaine assez confidentiel. De manière similaire au cas des plateformes à roues, le problème est souvent traité autour d'un exemple particulier. C'est le cas des travaux de Y. YAMAMOTO dans [YAMAMOTO 94] qui, en utilisant le formalisme de LAGRANGE, établit le modèle dynamique d'un manipulateur mobile composé d'une plateforme unicycle. Il calcule notamment les termes de couplage dynamique entre les deux sous-systèmes et montre, en simulation, que du point de vue de la commande, seuls les effets de couplage de la plateforme sur le bras manipulateur influencent réellement les performances. Cette influence est moindre dans le cas d'un mouvement coordonné. O. KHATIB *et al.* utilisent dans [KHATIB 96] la modélisation dynamique de manipulateurs mobiles à roues employés pour un travail de transport collaboratif. Les robots utilisées sont omnidirectionnels et la méthode d'obtention des modèles n'est pas abordée. Y. UMEDA *et al.* abordent dans [UMEDA 99] le thème de la commande opérationnelle au contact d'un manipulateur mobile composé d'une plateforme unicycle et d'un bras manipulateur à 4 degrés de liberté. Le modèle dynamique utilisé est simplifié et son obtention ainsi que sa structure ne sont pas introduites. H. TANNER et K. KYRIAKOPOULOS ([TANNER 01]) proposent, quant à eux, la modélisation dynamique des manipulateurs mobiles à roues à partir du formalisme de T. KANE. Ce formalisme permet d'établir un modèle dynamique sous forme non explicite mais qui peut être transformée sous la forme explicite propre au formalisme de LAGRANGE. Leur méthode s'applique à tout type de manipulateur mobile à roues mais ne fait pas apparaître la structure explicite du modèle dynamique. En outre, la méthode proposée ne tient pas compte d'éventuels efforts opérationnels d'interaction.

Nous proposons pour notre part de développer le modèle dynamique d'un manipulateur mobile à roues en utilisant le formalisme de LAGRANGE. Ce modèle est écrit sous une forme directement exploitable pour la commande dynamique du système et il permet la prise en compte d'éventuels efforts d'interaction. L'analyse de sa structure permet de faire apparaître explicitement les termes de couplage dynamique et donc d'en développer une version simplifiée, sans couplage, basée sur le modèle dynamique de chacun des sous-systèmes.

### 2.3.1 Formalisme de Lagrange

Comme nous l'avons dit, le formalisme de LAGRANGE permet une écriture très générale des problèmes de mécanique. Il est extrêmement difficile de présenter formellement le cheminement qui permet d'aboutir aux équations de la dynamique telles que définies dans ce formalisme sans introduire de manière détaillée un ensemble de notations, principes et théorèmes de la mécanique générale et analytique. Le but n'étant pas ici de redémontrer des résultats connus, les détails de l'obtention de ces équations ne sont pas présentés mais peuvent être trouvés dans des ouvrages de références en mécanique tels que [BROSSARD 95]. Pour des ouvrages consacrés spécifiquement aux systèmes non holonomes [BLOCH 03] et [NEĪMARK 72] constituent des références.

#### 2.3.1.1 Equations générales de la dynamique

Nous rappelons que les équations générales de la dynamique d'un système mécanique sont données par :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} \right) = Q_i, \quad (1 \leq i \leq n), \quad (2.52)$$

ou encore :

$$P_i = Q_i, \quad (1 \leq i \leq n),$$

avec  $P_i = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} \right)$ .

Ce résultat est l'expression du principe des puissances virtuelles, exprimé en terme d'énergie cinétique  $T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$  du système.

$Q_i$  est appelé le coefficient de puissance ou la force réelle généralisée associé au paramètre  $q_i$ . C'est une force quand  $q_i$  est une distance et un couple quand  $q_i$  est un angle. Cette force ou ce couple représente la somme des efforts réels, agissant sur le système, qui, pour un déplacement fini et purement géométrique  $\delta q_i^*$  dit *déplacement virtuel*, travaillent virtuellement ou encore qui, pour toute vitesse virtuelle  $\dot{q}_i^*$ , produisent une puissance virtuelle<sup>10</sup>.

Parmi les efforts agissant sur un système, il faut distinguer les efforts *inter-liaisons* ou encore efforts de liaison. Pour des liaisons parfaites, le travail virtuel correspondant à ces efforts est nul. Les autres efforts agissant sur le système sont les efforts *donnés*. Ils correspondent en général aux efforts extérieurs, supposés connus, exercés sur le système (gravité, efforts moteurs au niveau des articulations, efforts extérieurs exercés sur l'*OT*). Le travail virtuel de ces efforts n'est *a priori* pas nul.

$P_i$  correspond à la puissance virtuelle des quantités d'accélération (efforts liés au mouvement du système), agissant sur le système, et qui travaillent pour le même déplacement virtuel  $\delta q_i^*$ .

#### 2.3.1.2 Nature des $Q_i$ dans le cas de liaisons parfaites et d'un paramétrage incomplet

Dans le cas d'un paramétrage incomplet,  $\bar{h} + h_c$  équations de liaison complémentaires sont à prendre en compte. Ces équations peuvent s'écrire sous la forme :

$$D(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} = 0, \quad (2.53)$$

où  $D(\mathbf{q})$  est la matrice de dimension  $(\bar{h} + h_c) \times n$  des contraintes associées aux équations de liaisons complémentaires.

<sup>10</sup>Pour une définition précise des notions de déplacement et vitesse virtuels, se référer à [BROSSARD 95].

Dans ce cas précis, les  $Q_i$  sont la somme de deux termes.

Le premier est noté  $Q_{id}$ . Il correspond aux efforts donnés et pour une vitesse virtuelle  $\dot{q}_i^*$  compatible avec les équations de liaisons complémentaires (2.53), nous avons :

$$\sum_{i=1}^n (P_i - Q_{id}) \dot{q}_i^* = 0.$$

Ainsi, un vecteur vitesse virtuelle  $\dot{\mathbf{q}}^*$ , compatible avec les équations de liaison complémentaires, est à la fois orthogonal aux  $\bar{h} + h_c$  lignes de  $D(\mathbf{q})$  mais aussi, orthogonal au vecteur  $P - Q_d$ . Ce vecteur peut donc s'écrire comme une combinaison linéaire des lignes de  $D(\mathbf{q})$ , soit :

$$P_i - Q_{id} = \sum_{j=1}^{\bar{h}+h_c} \lambda_j D_{ji},$$

où les  $\lambda_j$  sont  $\bar{h} + h_c$  scalaires. Historiquement appelés *multiplicateurs de LAGRANGE*, ils viennent s'ajouter à la liste des inconnues.

Les équations de la dynamique s'écrivent alors :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} \right) = Q_{id} + \sum_{j=1}^{\bar{h}+h_c} \lambda_j D_{ji}, \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.54)$$

Le terme  $\sum_{j=1}^{\bar{h}+h_c} \lambda_j D_{ji}$ , que nous notons  $Q_{ic}$ , correspond donc à la prise en compte des équations de liaisons complémentaires du système et les  $\lambda_j$  représentent les efforts de liaisons (réactions de liaison), qui travailleraient en cas de non respect des équations de liaisons complémentaires<sup>11</sup>.

Les équations de la dynamique sont donc composées de  $n + \bar{h} + h_c$  équations et les inconnues du problème sont le vecteur  $\mathbf{q}$  de dimension  $n$  et le vecteur  $\boldsymbol{\lambda}$  composé de  $\bar{h} + h_c$  multiplicateurs de LAGRANGE  $\lambda_j$ .

L'équation (2.52) s'écrit donc de manière plus précise :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial \dot{q}_i} \right) - \left( \frac{\partial T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)}{\partial q_i} \right) = Q_{id} + D(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}, \quad (1 \leq i \leq n). \quad (2.55)$$

**Remarque :** Dans le cas de liaisons non parfaites (dissipatives par frottement par exemple), un terme vient s'ajouter à  $Q_i$  correspondant au coefficient de puissance des efforts de réactions et moments dissipatifs. Nous ne modélisons pas par la suite ce frottement qui existe inévitablement dans des liaisons réelles. Cependant il est important de noter que le formalisme de LAGRANGE est assez générique pour en tenir compte.

### 2.3.1.3 Cas des manipulateurs mobiles à roues

Les manipulateurs mobiles à roues sont des systèmes non holonomes et donc à paramétrage incomplet. Nous considérons que leur liaisons sont parfaites même si, comme nous l'avons dit, des phénomènes dissipatifs comme le frottement peuvent être pris en compte avec le formalisme de LAGRANGE.

Les efforts donnés pour ces systèmes sont :

- les efforts moteurs (couples ou forces) au niveau des articulations actionnées ( $Q_{d_m}$ );

<sup>11</sup>Si les liaisons complémentaires sont respectées, ces efforts ne travaillent pas.

- les efforts liés aux efforts extérieurs exercés au niveau de l' $OT$  et sur les roues centrées orientables (couples exercés autour de leurs axes d'orientation) ( $Q_{d_{ext}}$ ) ;
- les efforts liés, le cas échéant, à la gravité ( $Q_{d_g}$ ).

L'effort donné  $Q_d$  s'écrit donc comme la somme des trois termes correspondant respectivement aux efforts listés ci-avant :

$$Q_d = Q_{d_m} + Q_{d_{ext}} + Q_{d_g}.$$

$Q_{d_{ext}}$  se décompose de la manière suivante :

$$Q_{d_{ext}} = \begin{bmatrix} Q_{d_{ext/OT}} \\ Q_{d_{ext/c}} \end{bmatrix},$$

où  $Q_{d_{ext/OT}}$ , de dimension  $n - \delta_{dirp}$ , est lié aux efforts d'interaction au niveau de l' $OT$  et  $Q_{d_{ext/c}}$ , de dimension  $\delta_{dirp}$ , est lié aux efforts éventuellement exercés sur les roues orientables dans leurs directions d'orientation.

### Efforts moteurs

Définissons  $\mathbf{\Gamma}$ , le vecteur de dimension  $n_b + \delta_{motp}$  des efforts actionneurs (couple ou force en fonction du type d'actionneur). En faisant l'hypothèse qu'un actionneur est directement relié à l'évolution d'un des paramètres décrivant la configuration (par exemple le moteur d'une roue fixe de plateforme est directement relié à l'évolution du paramètre  $\varphi$  qui la caractérise), les efforts moteurs donnés pour le système sont :

$$Q_{d_m} = M\mathbf{\Gamma},$$

où  $M$  est une matrice de dimension  $n \times (n_b + \delta_{motp})$  telle  $M_{ij} = 0$  si la coordonnée  $q_i$  n'est pas directement actionnée par l'actionneur  $j$  de  $\mathbf{\Gamma}$  et  $M_{ij} = 1$  si la coordonnée  $q_i$  est directement actionnée par l'actionneur  $j$  de  $\mathbf{\Gamma}$ .

### Efforts extérieurs

L'application du principe des puissances virtuelles permet de déterminer le vecteur des forces généralisées équivalent à des efforts appliqués en tout point de la chaîne cinématique. Cette équivalence est appelée *dualité cinéto-statique* (ou dualité mouvement/effort) dans [SCIAVICCO 00] et dans le cas d'efforts appliqués au niveau de l' $OT$ , nous avons :

$$Q_{d_{ext/OT}} = -J(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext/OT}.$$

$\mathbf{f}_{ext/OT}$  est le vecteur de dimension  $m$  des efforts extérieurs exercés sur l'organe terminal. Ces efforts sont, par opposition aux efforts moteurs  $Q_{d_m}$ , considérés comme des efforts résistants et sont donc de signe opposé à  $Q_{d_m}$ .

Dans un souci d'unification de l'approche de modélisation dynamique des manipulateurs mobiles à roues, il est intéressant d'envisager, en plus d'efforts extérieurs pouvant être exercés au niveau de l' $OT$ , le vecteur des efforts extérieurs pouvant être exercés sur les roues centrées orientables<sup>12</sup>. Pour ces efforts la dualité mouvement/effort conduit à écrire :

$$Q_{d_{ext/c}} = -\mathbf{f}_{ext/c}.$$

<sup>12</sup>Du point de vue pratique d'une application robotique, les composantes de ce vecteur sont à 0 car s'il est envisageable d'avoir à exercer des efforts au niveau de l' $OT$ , il est difficile d'imaginer des situations où, dans un environnement plat et structuré, il faut exercer des efforts sur l'environnement au niveau des roues orientables. Cela peut éventuellement s'envisager si un couple résistant à la rotation de ces roues a été identifié et qu'il est donc nécessaire d'en tenir compte dans le calcul du couple moteur nécessaire à leur mise en rotation.



$\mathbf{f}_{ext/c}^T$  est le vecteur de dimension  $\delta_{dirp}$  des efforts extérieurs exercés sur les roues centrées orientables.

En regroupant les deux termes, nous obtenons :

$$Q_{d_{ext}} = B(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext},$$

avec  $B(\mathbf{q})$  la matrice définie par la relation (2.34) et  $\mathbf{f}_{ext} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{ext/OT}^T & \mathbf{f}_{ext/c}^T \end{bmatrix}^T$ .

### Efforts liés à la gravité

Pour un manipulateur mobile à roues évoluant sur un plan horizontal, les efforts liés à la gravité dépendent uniquement de la configuration du bras manipulateur et peuvent s'écrire :

$$Q_{d_g} = -\mathbf{g}(\mathbf{q}_b),$$

où  $\mathbf{g}(\mathbf{q}_b)$  est de dimension  $n$  et est considéré comme un vecteur d'efforts résistants.

### 2.3.2 Calcul du modèle

La méthode la plus générique et la plus systématique est de calculer l'énergie cinétique du système afin de pouvoir déterminer les  $n$  termes du membre de gauche de l'équation 2.55. Cette méthode ne tient pas compte des spécificités du système étudié mais elle est systématique et indépendante du choix des coordonnées généralisées du système.

Pour un système mécanique à paramétrage incomplet, le résultat peut s'écrire sous la forme suivante :

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = Q_d + D(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.56)$$

La matrice carrée  $A(\mathbf{q})$ , de dimension  $n \times n$ , est appelée matrice *d'inertie*<sup>13</sup> du système. En considérant la définition d'une masse, nous admettons que cette matrice est symétrique et définie positive.

La matrice carrée  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$ , de dimension  $n \times n$ , est appelée la matrice *coriofuge* du système (ou encore, matrice des termes *d'entraînement CORIOLIS et centrifuge*).

#### 2.3.2.1 Elimination des multiplicateurs de Lagrange

L'équation (2.56), accompagnée de l'équation (2.53), détermine complètement la dynamique du système. Nous avons donc un système à  $n + \bar{h} + h_c$  équations et  $n + \bar{h} + h_c$  inconnues  $\mathbf{q}$  et  $\boldsymbol{\lambda}$ .

Si le but n'est pas de calculer les efforts de réactions des liaisons considérées comme complémentaires, il est possible de simplifier cette relation en éliminant les multiplicateurs de LAGRANGE.

L'élimination consiste à multiplier à gauche chaque terme de (2.56) par  $S(\mathbf{q})^T$ . En utilisant le résultat précédemment établi  $D(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) = 0$ , nous obtenons :

$$S(\mathbf{q})^T A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + S(\mathbf{q})^T C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q})^T Q_d. \quad (2.57)$$

Le système sous cette forme présente plus d'inconnues que d'équations mais cependant certaines de ces inconnues sont dépendantes les unes des autres. Cette dépendance peut

<sup>13</sup> encore appelée matrice de *masse*.

s'écrire du point de vue cinématique  $\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q}) \mathbf{u}$  (cf. équation (2.28)). En dérivant cette relation, nous obtenons :

$$\ddot{\mathbf{q}} = \dot{S}(\mathbf{q}) \mathbf{u} + S(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}}.$$

Nous pouvons alors écrire (2.57) en fonction du vecteur  $\mathbf{u}$  de dimension  $n_{ddl}$ . Cela donne :

$$S(\mathbf{q})^T A(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + S(\mathbf{q})^T \left( C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) S(\mathbf{q}) + A(\mathbf{q}) \dot{S}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u} = S(\mathbf{q})^T Q_d. \quad (2.58)$$

En posant  $\bar{A}(\mathbf{q}) = S(\mathbf{q})^T A(\mathbf{q}) S(\mathbf{q})$  et  $\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = S(\mathbf{q})^T \left( C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) S(\mathbf{q}) + A(\mathbf{q}) \dot{S}(\mathbf{q}) \right)$ , (2.58) s'écrit :

$$\bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} = S(\mathbf{q})^T Q_d. \quad (2.59)$$

Nous appelons cette relation le *modèle dynamique réduit* d'un système mécanique. Il comporte  $n_{ddl}$  équations et autant d'inconnues. Ces inconnues sont les  $n_{ddl}$  coordonnées généralisées du système pouvant évoluer indépendamment les unes des autres. L'évolution dynamique des  $\bar{h} + h_c$  coordonnées généralisées non conservées dans le système peut être reconstruite à partir de l'évolution de ces  $n_{ddl}$  coordonnées généralisées indépendantes.

$\bar{A}(\mathbf{q})$  est la matrice d'inertie *réduite* du système. De dimension  $n_{ddl} \times n_{ddl}$ , elle est symétrique et définie positive. La matrice  $\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  est la matrice coriofuge réduite du système de dimension  $n_{ddl} \times n_{ddl}$ .

### 2.3.2.2 Cas des manipulateurs mobiles à roues

Dans notre cas particulier, la relation (2.56) s'écrit :

$$A(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}_b) = M\mathbf{\Gamma} - B(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext} + D(\mathbf{q})^T \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.60)$$

La matrice  $A(\mathbf{q})$  peut s'écrire sous la forme :

$$A(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_b(\mathbf{q}_b) & A_{p/b}(\mathbf{q}) \\ A_{p/b}(\mathbf{q})^T & A_p(\mathbf{q}_p) + A_{bp}(\mathbf{q}) \end{bmatrix},$$

avec :

- $A_b(\mathbf{q}_b)$  la matrice d'inertie (de dimension  $n_b \times n_b$ ) du bras manipulateur seul (base considérée fixe par rapport au repère de référence),
- $A_p(\mathbf{q}_p)$  la matrice d'inertie (de dimension  $n_p \times n_p$ ) de la plateforme seule,
- $A_{p/b}(\mathbf{q})$  une matrice de dimension  $n_b \times n_p$  dont les termes sont liés aux efforts d'accélération de la plateforme agissant sur le bras manipulateur,
- $A_{p/b}(\mathbf{q})^T$  permet de tenir compte des efforts d'accélération du bras manipulateur agissant sur la plateforme,
- $A_{bp}(\mathbf{q})$  une matrice de dimension  $n_p \times n_p$  permettant de tenir compte de la présence du bras manipulateur sur la plateforme.

De manière similaire, la matrice  $C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  peut s'écrire sous la forme :

$$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_b(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b) \Phi_{cb} + C_{p/b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ C_p(\mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}_p) \Phi_{cp} + C_{b/p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix},$$

avec :

- $C_b(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b)$  la matrice coriofuge (de dimension  $n_b \times n_b$ ) du bras manipulateur seul,
- $C_p(\mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}_p)$  la matrice coriofuge (de dimension  $n_p \times n_p$ ) de la plateforme seule,
- $C_{p/b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  une matrice de dimension  $n_b \times n$  dont les termes sont liés aux efforts d'entraînement CORIOLIS et centrifuge de la plateforme agissant sur le bras manipulateur,
- $C_{b/p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  une matrice de dimension  $n_p \times n$  dont les termes sont liés aux efforts d'entraînement CORIOLIS et centrifuge du bras manipulateur agissant sur la plateforme.

Les matrices  $\Phi_{cb}$  et  $\Phi_{cp}$  sont :

$$\Phi_{cb} = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_{n_b} & \mathcal{O}_{n_b \times n_p} \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\Phi_{cp} = \begin{bmatrix} \mathcal{O}_{n_p \times n_b} & \mathcal{I}_{n_p} \end{bmatrix}.$$

Après élimination des multiplicateurs de LAGRANGE, cela donne :

$$\bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) = S(\mathbf{q}_p)^T M \Gamma - S(\mathbf{q}_p)^T B(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext}, \quad (2.61)$$

où  $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) = S(\mathbf{q}_p)^T \mathbf{g}(\mathbf{q}_b)$  est le vecteur réduit des efforts donnés liés à la gravité.

En rappelant la relation (2.36), nous avons  $S(\mathbf{q}_p)^T B(\mathbf{q})^T = \bar{B}(\mathbf{q})^T$  et  $S(\mathbf{q}_p)^T M$  est noté  $\bar{M}$ . Ce qui donne, le modèle dynamique réduit d'un manipulateur mobile à roues :

$$\bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) = \bar{M} \Gamma - \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext}, \quad (2.62)$$

soit, en posant  $\bar{M} \Gamma = \bar{\Gamma}$  :

$$\bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) = \bar{\Gamma} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext}. \quad (2.63)$$

Les matrices  $\bar{A}(\mathbf{q})$  et  $\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  peuvent s'écrire :

$$\bar{A}(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} A_b(\mathbf{q}_b) & \bar{A}_{p/b}(\mathbf{q}) \\ \bar{A}_{p/b}(\mathbf{q})^T & \bar{A}_p(\mathbf{q}_p) + \bar{A}_{bp}(\mathbf{q}) \end{bmatrix} \text{ et}$$

$$\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \begin{bmatrix} C_b(\mathbf{q}_b, \dot{\mathbf{q}}_b) \Phi_{cb} + \bar{C}_{p/b}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \\ \bar{C}_p(\mathbf{q}_p, \dot{\mathbf{q}}_p) \Phi_{cp} + \bar{C}_{b/p}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \end{bmatrix}.$$

Les dimensions et la signification de chacune de sous matrices composant  $\bar{A}(\mathbf{q})$  et  $\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  peuvent aisément se déduire à partir des explications données ci-avant.

### 2.3.2.3 Nature de $\bar{\Gamma}$

Si le choix des paramètres de commande ne correspond pas pour certains d'entre eux à la dérivée temporelle d'une des coordonnées généralisées de  $\mathbf{q}$  (par exemple  $v$  et  $\omega$  pour la plateforme unicycle au lieu de  $\dot{\varphi}_r$  et  $\dot{\varphi}_l$ ), deux situations se présentent :

- $\delta_{motp} = \delta_{mobp} + \delta_{dirp}$  auquel cas il y a autant d'actionneurs que de degré de liberté  $n_{ddl}$  et  $\bar{M}$  est une matrice carrée régulière qui établit une bijection entre l'espace des efforts actionneurs et celui des efforts moteurs associés aux paramètres de commande;
- $\delta_{motp} > \delta_{mobp} + \delta_{dirp}$  auquel cas il y a plus d'actionneurs que de degré de liberté  $n_{ddl}$  et  $\bar{M}$  est une matrice de dimension  $n_{ddl} \times (n_b + \delta_{motp})$ , de rang  $n_{ddl}$  (plein en ligne). L'application linéaire permettant de passer de l'espace des efforts moteurs associés aux paramètres de commande à celui des efforts actionneurs a donc une infinité de solutions. Inversement, il existe un vecteur des efforts actionneurs strictement équivalent à un vecteur donné des efforts moteurs associés aux paramètres de commande si et seulement si ce vecteur donné appartient à  $Im(\bar{M})$ .

**Exemple :** Dans le cas du manipulateur mobile composé d'une plateforme de type unicycle et d'un bras manipulateur à deux degrés de liberté rotoïdes dans le plan (*cf.* figure 2.6), les choix d'actionnement suivants sont possibles :

- roue droite et roue gauche actionnées ;
- roue droite, roue gauche et rotation propre de la roue décentrée actionnées.

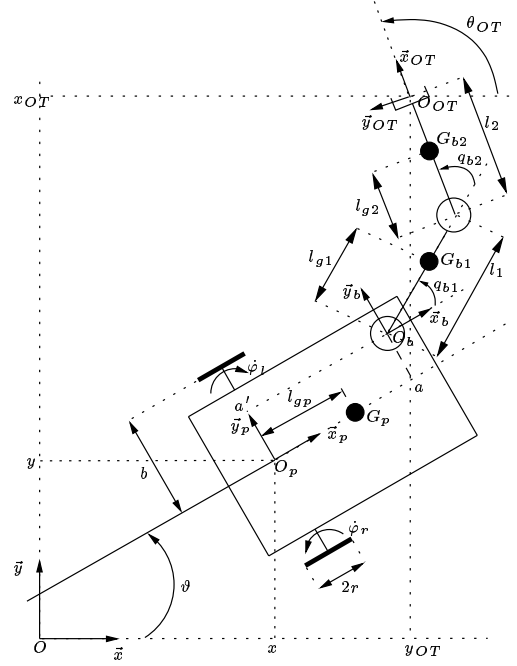


FIG. 2.6 – Manipulateur mobile avec plateforme de type unicycle

Dans le premier cas nous avons  $\delta_{motp} = \delta_{mobp}$  et dans le second  $\delta_{motp} > \delta_{mobp}$ . Si les paramètres de commande retenus pour la plateforme sont  $v$  et  $\omega$ , nous avons alors, dans le premier cas :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{q_{b1}} \\ \Gamma_{q_{b2}} \\ \Gamma_v \\ \Gamma_\omega \end{bmatrix}}_{\bar{\Gamma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} \\ 0 & 0 & -\frac{b}{r} & -\frac{b}{r} \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Gamma_{q_{b1}} \\ \Gamma_{q_{b2}} \\ \Gamma_{\varphi_r} \\ \Gamma_{\varphi_l} \end{bmatrix}}_{\Gamma},$$

qui est une relation toujours inversible. Dans le second cas, nous obtenons :

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{q_{b1}} \\ \Gamma_{q_{b2}} \\ \Gamma_v \\ \Gamma_\omega \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{r} & \frac{1}{r} & \frac{S\beta_d}{r} \\ 0 & 0 & -\frac{b}{r} & -\frac{b}{r} & -\frac{b_d C\beta_d}{r} \end{bmatrix}}_{\bar{M}} \begin{bmatrix} \Gamma_{q_{b1}} \\ \Gamma_{q_{b2}} \\ \Gamma_{\varphi_r} \\ \Gamma_{\varphi_l} \\ \Gamma_{\varphi_d} \end{bmatrix}.$$

Le calcul des couples moteurs  $\Gamma$  correspondant à un vecteur  $\bar{\Gamma} = [\Gamma_{q_{b1}} \ \Gamma_{q_{b2}} \ \Gamma_v \ \Gamma_\omega]^T$  donné peut alors être fait en utilisant une pseudo-inverse pondérée de  $\bar{M}$ . En effet ce type d'inverse présente des propriétés de solutions à norme minimale et est donc intéressante du point de vue de la minimisation de l'énergie dépensée par le système.

### 2.3.3 Discussion autour du modèle dynamique réduit des manipulateurs mobiles à roues

Le modèle dynamique réduit a une forme tout à fait exploitable pour la commande en couple d'un manipulateur mobile. Il permet de calculer les couples moteurs nécessaires à une évolution donnée du vecteur de commande  $\mathbf{u}$ . Cela donne :

$$\mathbf{\Gamma} = \bar{M}_{Mx}^* \left( \bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) + \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext} \right),$$

où  $\bar{M}_{Mx}^*$  est une pseudo inverse  $M_x$ -pondérée de la matrice  $\bar{M}$ .

L'exploitation d'un tel modèle pour la commande nécessite cependant deux pré-requis:

- Un moyen de mesure des efforts extérieurs appliqués au système. En ce qui concerne la mesure des efforts  $\mathbf{f}_{ext/OT}$ , l'utilisation d'un capteur d'effort multi-axial doit être envisagé et ce afin de pouvoir mesurer les efforts dans les  $m$  directions opérationnelles d'intérêt.
- Une connaissance des paramètres du modèle dynamique. L'obtention des paramètres géométriques ne pose pas vraiment de problème, celles des paramètres dynamiques est plus problématique : soit un modèle CAO<sup>14</sup> complet a été développé au moment de la conception du robot et les paramètres dynamiques sont généralement fournis par le logiciel de conception : ils sont alors considérés comme connus ; soit ils ne sont pas connus et il est nécessaire de mettre en œuvre un processus d'identification assez fastidieux.

La connaissance de la structure du modèle et une connaissance partielle (ordre de grandeur) des différents paramètres dynamiques peut toutefois être suffisante à une exploitation du modèle pour la commande. Notons ici que le rapport entre l'ordre de grandeur du moment d'inertie de la plateforme autour d'un axe vertical et le moment d'inertie de la dernière articulation du bras manipulateur atteint la valeur de 3000 pour une plateforme unicycle d'environ 350 *Kg* et un bras manipulateur à 6 liaisons rotoïdes pesant quant à lui 35 *Kg*.

Ainsi, des approximations peuvent être faites tout en conservant un modèle fidèle à la réalité physique du système. Une de ces approximations peut être de considérer que les effets dynamiques des roues de la plateforme sont faibles au regard de ceux liés à la plateforme. Le choix peut, par exemple, être fait de ne pas modéliser les roues qui ne sont pas actionnées.

---

<sup>14</sup> Conception Assistée par Ordinateur

---

## Chapitre 3

# Structure de commande pour des missions de manipulation mobile

---

Ce chapitre introduit une structure de commande pour la réalisation de missions complexes assignées à des manipulateurs mobiles à roues. Cette structure de commande doit répondre à trois exigences :

- calculer en temps-réel, pour une trajectoire opérationnelle donnée, les consignes articulaires destinées aux boucles de régulation de chacun des actionneurs ;
- gérer l'enchaînement dynamique de tâches opérationnelles de natures différentes ainsi que le basculement des lois de commande associées à chacune de ces tâches ;
- assurer le respect des contraintes secondaires agissant sur le système.

Dans une première partie nous formalisons l'ensemble des contraintes opérationnelles et secondaires liées aux trajectoires opérationnelles de consigne, au système dans son environnement et à la méthode utilisée pour générer les consignes articulaires. Nous présentons ensuite les méthodes de génération de consignes articulaires ainsi que les techniques d'utilisation de la redondance du système. Nous terminons en proposant une structure de commande pour la génération de consignes articulaires qui assure le respect des exigences énoncées.

## 3.1 Formalisation des contraintes sur le système

### 3.1.1 Contraintes liées aux trajectoires opérationnelles de consigne

Les trajectoires opérationnelles sont de deux natures différentes : trajectoire opérationnelle de mouvement et trajectoire opérationnelle d'effort. Une trajectoire opérationnelle de mouvement, notée  $\xi^*$  est définie par :

$$\xi^* : \begin{array}{l} [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{M} \\ t \rightarrow \xi(t)^* \end{array} .$$

Lorsqu'un découplage explicite est nécessaire entre le chemin géométrique de consigne et l'évolution temporelle de l' $OT$ ,  $\xi^*$  peut aussi être définie comme :

$$\xi^* : \begin{array}{l} [s_0, s_f] \rightarrow \mathcal{M} \\ s \rightarrow \xi(s)^* \end{array} .$$

et  $s : \begin{array}{l} [t_0, t_f] \rightarrow \mathbb{R} \\ t \rightarrow s(t) \end{array} .$

L'intérêt d'un tel découplage tient au fait qu'en cas d'une trajectoire planifiée, la planification peut s'effectuer en deux étapes distinctes : planification du chemin géométrique puis planification de l'évolution temporelle du parcours de ce chemin.

De manière similaire, une trajectoire opérationnelle d'effort est définie par :

$$\mathbf{f}_{OT}^* : \begin{array}{l} [t_0, t_f] \rightarrow \mathcal{M} \\ t \rightarrow \mathbf{f}_{OT}^*(t) \end{array} ,$$

où  $\mathbf{f}_{OT}^*$  est l'effort opérationnel exercé par l' $OT$  sur l'environnement lors d'une interaction.

Les contraintes liées aux trajectoires opérationnelles de consigne s'écrivent donc simplement :

$$\xi(t) = \xi(t)^*, \tag{3.1}$$

et :

$$\mathbf{f}_{OT}(t) = \mathbf{f}_{OT}^*(t). \tag{3.2}$$

A ces deux contraintes viennent s'ajouter la suivante, liée aux roues orientables de la plateforme :

$$\beta_c(t) = \beta_c(t)^*, \tag{3.3}$$

où  $\beta_c^*$  est la consigne de dirigeabilité.

### 3.1.2 Contraintes liées au système dans son environnement

#### 3.1.2.1 Contraintes intrinsèques au système

Indépendamment de tout contexte (mission, environnement), il existe un ensemble de contraintes propres au système. Il s'agit du fonctionnement en mode nominal des actionneurs, de l'évitement des butées articulaires du bras manipulateur et des éventuelles roues orientables (quand leur orientation est limitée).

Par souci de simplicité, nous ne traitons pas le cas de l'évitement des auto-collisions qui nécessite, si il doit être intégré dans un cadre expérimental, l'utilisation d'un logiciel de détection de collision basé sur le calcul de distance de volumes englobants les différents corps du système. Si les butées articulaires du bras manipulateur sont correctement positionnées, l'occurrence de telles collisions est d'ailleurs rare. Quoi qu'il en soit, les techniques présentées par la suite pour la satisfaction d'objectifs secondaires sont applicables à ce type de contrainte, c'est ce qu'illustre B. BAYLE dans [BAYLE 01b].

En ce qui concerne les butées articulaires, la contrainte associée s'écrit sous la forme d'une inégalité :

$$\mathbf{q}_{b_{min}} \leq \mathbf{q}_b \leq \mathbf{q}_{b_{max}}, \quad (3.4)$$

et :

$$|\beta_c| \leq \beta_{c_{max}}. \quad (3.5)$$

$\mathbf{q}_{b_{min}}$ ,  $\mathbf{q}_{b_{max}}$  et  $\beta_{c_{max}}$  sont les vecteurs des valeurs extrêmes que peuvent prendre les paramètres  $\mathbf{q}_b$  et  $\beta_c$ .

Pour les actionneurs, le fonctionnement nominal est défini par rapport au type de commande employé. Nous faisons l'hypothèse d'actionneurs pouvant être commandés en vitesse et/ou en couple (pas de manière simultanée bien entendu). C'est le cas notamment des moteurs électriques à courant continu, largement répandus en Robotique et qui peuvent être asservis en vitesse ou en couple. Dans le cas d'une commande en vitesse de l'actionneur, le fonctionnement nominal est défini par une vitesse et une accélération maximales de consigne. Ceci peut s'écrire :

$$|\mathbf{u}| \leq \mathbf{u}_{max}, \quad (3.6)$$

et :

$$|\dot{\mathbf{u}}| \leq \dot{\mathbf{u}}_{max}. \quad (3.7)$$

L'hypothèse de contraintes symétriques sur la vitesse et l'accélération maximales d'un moteur est très plausible et elle simplifie par ailleurs la prise en compte de ces contraintes.

Si les actionneurs sont commandés en couple, nous avons :

$$|\bar{\Gamma}| \leq \bar{\Gamma}_{max}. \quad (3.8)$$

De manière générale, les contraintes (3.6) et (3.8) peuvent s'écrire sous la forme générique :

$$|\mathbf{c}| \leq \mathbf{c}_{max}. \quad (3.9)$$

$\mathbf{c}$  représente le vecteur de commande articulaire et dans le cas d'actionneur commandé en vitesse nous avons :  $\mathbf{c} = \mathbf{u}$ , tandis que dans le cas d'actionneurs commandés en couple :  $\mathbf{c} = \bar{\Gamma}$ .



### 3.1.2.2 Contrainte liée à l'évitement d'obstacles

Avant de poursuivre, indiquons ici que nous faisons l'hypothèse de la présence des capteurs nécessaires au calcul de la distance aux obstacles (télémètre laser ou ceinture de capteurs à ultrasons).

Nous n'avons pour le moment évoqué que le cas de l'évitement d'obstacles bas, obstacles que nous avons définis comme des obstacles statiques, seulement gênants pour la plateforme et qui dans le cas d'une trajectoire opérationnelle planifiée ne sont pas pris en compte au moment de la planification. Dans le cas d'une trajectoire opérationnelle d'effort, il est aussi nécessaire de considérer les surfaces de contact comme des obstacles à éviter à la fois par le bras manipulateur et par la plateforme. Pour les raisons, énoncées en 3.1.2.1, de complexité algorithmique liées à la détection des collisions du bras manipulateur, nous choisissons de ne pas traiter ce cas. A ces raisons, vient s'ajouter celle-ci : si seule la direction normale à la surface de contact est contrôlée en terme d'effort opérationnel, l'ensemble des autres directions opérationnelles et notamment l'orientation de l'*OT* peut être contrôlée en mouvement. Ainsi, en maintenant une orientation fixe (en l'occurrence celle indiquée sur la figure 3.1) par rapport à la normale à la surface de contact et en supposant que la plateforme évite la surface de contact de manière à s'en éloigner, il est raisonnable de faire l'hypothèse qu'aucune collision entre le bras manipulateur et la surface de contact ne surviendra (tant que cette surface est convexe).

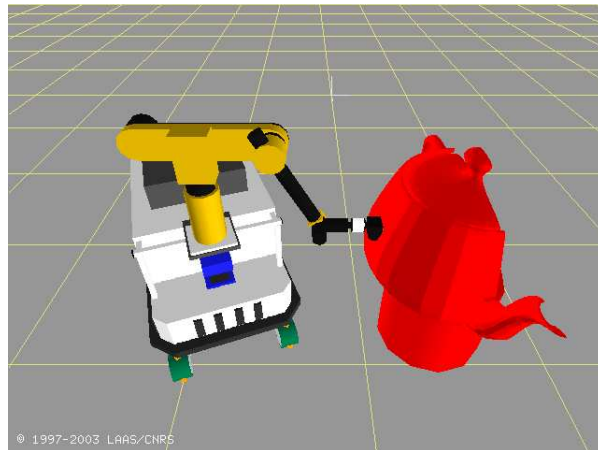


FIG. 3.1 – Orientation de l'*OT* idéale pour l'évitement de la surface de contact par le bras manipulateur

Pour la plateforme, il n'y a pas de différence entre un obstacle bas et un obstacle lié au contact de l'*OT* avec l'environnement. La contrainte associée s'écrit :

$$d(O_p, obstacle) > d_{min}, \quad (3.10)$$

où  $d(O_p, obstacle)$  est la distance du centre de la plateforme (point  $O_p$ ) à l'obstacle le plus proche.  $d_{min}$  est la distance sous laquelle, il y a collision entre la plateforme et l'obstacle.

### 3.1.2.3 Contrainte liée à l'enchaînement d'une tâche opérationnelle en espace libre et d'une tâche opérationnelle au contact

L'enchaînement d'une tâche opérationnelle en espace libre (trajectoire opérationnelle de mouvement) et d'une tâche opérationnelle au contact (trajectoire opérationnelle d'effort, éventuellement composite) pose de réels problèmes. Nous avons annoncé dès le chapitre 1 (1.3) que nous adoptons une stratégie qui consiste à utiliser pour chaque tâche opérationnelle la loi de commande la mieux adaptée. Cela induit qu'au basculement entre deux tâches

opérationnelles ne faisant pas appel à la même loi de commande, doit correspondre un basculement de loi de commande. Dans le cas de l'enchaînement « espace libre/contact », le signal utilisé comme indicateur de basculement est le signal d'effort, en effet, étant donné les incertitudes sur la connaissance de l'environnement, il est risqué de baser le basculement sur une information temporelle ou spatiale. Ainsi, au delà d'un certain seuil  $f_s$  d'effort mesuré par le capteur d'effort placé derrière l'*OT*, les tâches opérationnelles s'enchaînent (la nature des consignes opérationnelles est modifiée en conséquence) et le basculement de loi de commande se produit. Pendant le temps qui s'écoule entre l'instant du contact et la détection du franchissement du seuil d'effort (plusieurs périodes d'échantillonnage du contrôleur), le système est au contact mais la loi de commande et les consignes opérationnelles utilisées sont celles correspondant à la tâche opérationnelle en espace libre. Le système est donc en boucle ouverte du point de vue du contrôle de l'effort opérationnel. Les consignes opérationnelles de mouvement, liées à la tâche précédente, tendent à rapprocher l'*OT* de la surface de contact à une vitesse qui peut être importante si l'incertitude liée à la situation de la surface de contact est grande. L'effort d'interaction, au moment de la détection et du basculement, peut alors être très supérieur à la consigne et engendrer des problèmes importants de stabilité des lois de commande.

L'étude de la stabilité d'une telle transition au contact, pour un bras manipulateur, a été entreprise par J. MILLS ([MILLS 90, MILLS 93]). Il s'attache à démontrer la stabilité de chacune des lois de commande (espace libre et contact) pour les tâches opérationnelles qui ne leur sont pas dédiées, prenant ainsi en compte les effets du retard à la détection. De telles approches *discontinues* sont aussi mises en œuvre pour des bras manipulateurs : en simulation par G. MARTH *et al.* ([MARTH 93]) et sur un bras manipulateur réel (non redondant), utilisé pour des tâches d'usinage, par B. YU et P. PAGILLA ([YU 01]). Aucun travail significatif sur l'étude de stabilité de cette approche discontinue n'a été recensé pour des manipulateurs mobiles. L'inconvénient majeur de ces approches est qu'elles nécessitent une bonne connaissance de la nature de l'interaction mise en jeu. Les paramètres de cette interaction sont difficiles à identifier car cela nécessite la connaissance du modèle de la surface de contact ainsi qu'un modèle de rigidité du manipulateur mobile. Il est en pratique impossible d'envisager connaître parfaitement la nature des surfaces avec lesquelles le robot est susceptible d'entrer en contact. Par ailleurs, une approche basée sur la seule étude de stabilité est passive puisqu'elle ne cherche pas à modifier les conditions dans lesquelles va avoir lieu le contact.

L'approche que nous avons choisie pour traiter les problèmes de transition au contact pose le problème en ces termes : « Quelles sont les conditions à respecter afin de ne pas endommager le robot et/ou la surface de contact au moment du contact ? » Il faut s'assurer que le transitoire lié au retard de détection n'engendre pas d'efforts d'interaction trop importants, dommageables au système. Les travaux de I. WALKER ([WALKER 90, WALKER 94]) vont dans ce sens. Ils sont basés sur la théorie de la collision des corps rigides. I. WALKER propose un modèle de contact impulsif qui permet le calcul d'une grandeur dont la valeur est fortement liée à l'intensité du pic d'effort qui survient pendant le transitoire du basculement.

Nous présentons la démarche qui permet l'obtention d'un tel modèle.

Considérons deux solides indéformables dans l'espace à trois dimensions. Leurs vitesses linéaires avant impact sont respectivement notées  $\mathbf{v}_1$  et  $\mathbf{v}_2$ , deux vecteurs de dimension trois dont les composantes sont les valeurs de la projection de la vitesse dans un repère cartésien. Les accroissements de ces vitesses, après impact des deux solides, sont quant à eux respectivement notés  $\Delta\mathbf{v}_1$  et  $\Delta\mathbf{v}_2$ . En faisant l'hypothèse d'une interaction en un point de contact unique et d'une normale  $\mathbf{n}$  commune aux deux solides en ce point de contact (contact plan/plan), la modification des vitesses des solides en jeu dans l'interaction peut

être décrite par la loi suivante :

$$[(\mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_1) - (\mathbf{v}_2 + \Delta \mathbf{v}_2)]^T \mathbf{n} = -e (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)^T \mathbf{n},$$

avec  $e$  un scalaire appelé *coefficient de restitution du contact* et tel que :  $0 \leq e \leq 1$ . Le cas extrême où  $e = 0$  correspond à une collision purement plastique, c'est à dire une collision où toute l'énergie est absorbée par la déformation non réversible (plastique donc) des deux solides ou de l'un des deux (la vitesse des deux solides qui sont entrés en collision est alors identique après la collision). Pour  $e = 1$ , nous avons une collision purement élastique et toute l'énergie de la collision est restituée aux deux solides qui s'éloignent alors. Si seul le premier des deux solides est en mouvement, le second étant maintenu fixe, la relation précédente s'écrit :

$$(\mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}_1)^T \mathbf{n} = -e \mathbf{v}_1^T \mathbf{n}. \quad (3.11)$$

Le vecteur des efforts (force et couple) impulsionnels est noté  $\hat{\mathbf{f}}$  et est défini comme :

$$\hat{\mathbf{f}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \mathbf{f}(s) ds,$$

où  $t_i$  est l'instant initial de l'impact,  $\Delta t$  la durée considérée infinitésimale de l'instant d'impact et  $\mathbf{f}$  l'effort d'interaction entre les deux corps au point de contact.

En supposant que le corps en mouvement représente un manipulateur mobile à roues, que le corps fixe représente l'environnement avec lequel le robot doit interagir et que le point de contact se situe au niveau de l' $OT$ , il est important de constater que  $\mathbf{f}$  et  $-\mathbf{f}_{ext/OT}$ , l'effort d'interaction entre le robot et son environnement au niveau de l' $OT$ , sont égaux.

Nous rappelons ici que le modèle dynamique d'un manipulateur mobile à roues est donné par la relation (2.63) :

$$\bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) = \bar{\Gamma} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext}.$$

En extrayant de ce modèle la partie ne concernant que les commandes de mobilité, *i. e.* en faisant abstraction de l'effet de la dynamique des roues centrées orientables sur la dynamique de l' $OT$  et en ne conservant que les commandes de mobilité, nous obtenons le modèle restreint suivant :

$$\bar{A}_{mob}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}}_{mob} + \bar{C}_{mob}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u}_{mob} + \bar{\mathbf{g}}_{mob}(\mathbf{q}_b) = \bar{\Gamma}_{mob} - \bar{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext/OT}. \quad (3.12)$$

L'intégration de la relation (3.12) entre les instants  $t_i$  et  $t_i + \Delta t$  donne :

$$\int_{t_i}^{t_i + \Delta t} (\bar{A}_{mob}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}}_{mob} + \bar{C}_{mob}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u}_{mob} + \bar{\mathbf{g}}_{mob}(\mathbf{q}_b)) ds = \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} (\bar{\Gamma}_{mob} - \bar{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext/OT}) ds. \quad (3.13)$$

La vitesse du système étant considérée finie à l'instant de l'impact et le temps d'impact  $\Delta t$  infinitésimal, l'hypothèse est faite que le système conserve sa configuration. La relation (3.13) peut être simplifiée :

$$\bar{A}_{mob}(\mathbf{q}) \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \dot{\mathbf{u}}_{mob} ds = -\bar{J}(\mathbf{q})^T \int_{t_i}^{t_i + \Delta t} \mathbf{f}_{ext/OT} ds,$$

ce qui, après intégration, donne :

$$\bar{A}_{mob}(\mathbf{q}) [\mathbf{u}_{mob}(t_i + \Delta t) - \mathbf{u}_{mob}(t_i)] = \bar{J}(\mathbf{q})^T \hat{\mathbf{f}}.$$

Notons  $\Delta \mathbf{u}_{mob} = \mathbf{u}_{mob}(t_i + \Delta t) - \mathbf{u}_{mob}(t_i)$  et rappelons que le modèle cinématique réduit direct donne  $\Delta \dot{\boldsymbol{\xi}} = \bar{J}(\mathbf{q}) \Delta \mathbf{u}_{mob}$ , nous pouvons alors écrire :

$$\Delta \dot{\boldsymbol{\xi}} = \bar{J}(\mathbf{q}) \bar{A}_{mob}(\mathbf{q})^{-1} \bar{J}(\mathbf{q})^T \hat{\mathbf{f}}.$$

Comme nous le voyons dans la suite de ce chapitre,  $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{A}_{mob}(\mathbf{q})^{-1} \bar{J}(\mathbf{q})^T$  représente l'inverse de la matrice d'inertie du système « vue » au niveau de l'*OT* (pseudo-matrice d'inertie). En restreignant l'étude aux composantes linéaires  $\mathbf{v}$  des vitesses contenues dans  $\hat{\xi}$ , nous avons alors :

$$\Delta \mathbf{v} = R(\mathbf{q}) \hat{\mathbf{F}},$$

où  $R(\mathbf{q})$  représente la restriction de  $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{A}_{mob}(\mathbf{q})^{-1} \bar{J}(\mathbf{q})^T$  aux termes liés à la vitesse opérationnelle linéaire et où  $\hat{\mathbf{F}}$  est la restriction de  $\hat{\mathbf{f}}$  aux seules forces d'interaction.

L'effort d'interaction est considéré comme étant porté par la normale  $\mathbf{n}$  au contact et donc  $\hat{\mathbf{F}}$  peut s'écrire :

$$\hat{\mathbf{F}} = \hat{F} \mathbf{n}.$$

$\hat{F}$  est défini comme le module du vecteur de force impulsionnelle  $\hat{\mathbf{F}}$ . La relation (3.11) donne :

$$\Delta \mathbf{v}^T \mathbf{n} = -(1 + e) \mathbf{v}^T \mathbf{n}.$$

Nous en déduisons alors :

$$\hat{F} = \frac{(1 + e) \mathbf{v}^T \mathbf{n}}{\mathbf{n}^T R(\mathbf{q}) \mathbf{n}}.$$

C'est ce module du vecteur de force impulsionnelle que nous devons chercher à minimiser afin de limiter au maximum les efforts mis en jeu lors de la transition au contact. Pour ce faire, plusieurs pistes sont envisageables.

### Limiter la vitesse opérationnelle au moment de l'impact.

Dans l'hypothèse d'un impact planifié et donc d'une vitesse opérationnelle planifiée, il semble parfaitement logique de planifier une vitesse faible pour l'organe terminal. Cela peut cependant ne pas suffire, les incertitudes sur la connaissance de l'environnement (situation, normale au contact) et sur la connaissance de la situation précise de l'*OT* n'étant pas négligeables, il n'est pas possible d'assurer que le contact se fera à vitesse quasi-nulle, même si celle-ci reste faible.

### Minimiser le coefficient de restitution $e$

Ce coefficient synthétise de manière très peu précise, d'un point de vue local, la dynamique de l'interaction robot/environnement au point de contact. N'ayant aucun moyen d'agir a priori sur le matériau composant l'environnement, réduire  $e$  revient à imposer, via la loi de commande, un comportement compliant au robot. Cela est aisé quand la commande en couple est possible et qu'une grande précision du mouvement opérationnel désiré avant le contact n'est pas requise. Cependant, pour un robot commandé en vitesse, cela n'est pas possible. Reste alors la solution de l'utilisation d'une structure mécanique déformable et passive, placée en bout de chaîne cinématique (*OT*), qui permet d'absorber les efforts d'interaction liés aux erreurs de positionnement du robot. Ces mécanismes, appelés *Remote Center Compliance Devices*, sont propres à la tâche à réaliser puisqu'ils sont dimensionnés à partir de la raideur du contact « robot + environnement ». Cette solution est très spécifique au problème à traiter et, là aussi, elle est passive puisqu'elle ne cherche pas à modifier les conditions dans lesquelles va avoir lieu le contact.

### Maximiser $\mathbf{n}^T R(\mathbf{q}) \mathbf{n}$

Ce terme dépend de la configuration du système, il est donc *a priori* possible de le maximiser et donc de minimiser  $\hat{F}$ . Cela constitue une modification active des conditions du contact qui tend à faire évoluer la configuration du système, en utilisant les mouvements internes liés à la redondance, de manière à modifier ses propriétés inertielles. La contrainte secondaire liée à la transition au contact s'écrit donc :

$$\max (\mathbf{n}^T R(\mathbf{q}) \mathbf{n}). \quad (3.14)$$

### 3.1.3 Contraintes liées aux méthodes de commande

Nous n'avons pas encore abordé les méthodes de commande utilisées pour générer, à partir d'une consigne opérationnelle donnée, les consignes articulaires adéquates. Quoiqu'il en soit, nous pouvons d'ores et déjà indiquer que ces méthodes nécessitent souvent l'inversion explicite de  $\bar{J}(\mathbf{q})$  (ou de  $\bar{B}(\mathbf{q})$ ) et sont donc confrontées à des problèmes numériques au voisinage des configurations singulières du système. Rappelons ici qu'une configuration singulière  $\mathbf{q}_s$  est une configuration du système pour laquelle le rang de  $\bar{J}(\mathbf{q})$  est diminué par rapport à sa valeur maximale. Au delà du problème numérique posé, une configuration singulière est symptomatique d'un blocage pour le système : instantanément il est très difficile, voire impossible, de se déplacer dans une ou plusieurs directions de l'espace opérationnel.

Le problème de la gestion des singularités a été extensivement étudié pour les bras manipulateurs (par exemple dans [MACIEJEWSKI 88]) et nous ne revenons pas ici sur les diverses approches proposées pour le gérer mais présentons plutôt l'approche qui a retenu notre attention : l'évitement de telles configurations et de leurs voisinages ou plus généralement, l'évitement des configurations du système pour lesquelles le problème d'inversion est mal conditionné et risque de générer des vitesses de consigne articulaires anormalement grandes et inaccessibles par les actionneurs.

Il faut donc s'intéresser à la notion de *conditionnement d'une matrice*. Pour cela rappelons que les configurations singulières du système sont celles qui annulent le déterminant de  $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q})^T$ . Pour une matrice de dimension  $m \times \delta_{mob}$  et de rang maximal en lignes telle que la matrice  $\bar{J}(\mathbf{q})$ , le déterminant de  $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q})^T$  s'annule si et seulement si une ou plusieurs des  $m$  valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q})^T$  sont nulles<sup>1</sup>. Les  $m$  racines positives des  $m$  valeurs propres de  $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q})^T$  sont appelées les valeurs singulières  $\sigma_i$  de  $\bar{J}(\mathbf{q})$ . En les classant par ordre croissant  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_m \geq 0$ , le *nombre de conditionnement* de la matrice  $\bar{J}(\mathbf{q})$ , noté  $c(\bar{J}(\mathbf{q}))$ , est défini comme suit :

$$c(\bar{J}(\mathbf{q})) = \frac{\sigma_1}{\sigma_m}.$$

En configuration singulière,  $\sigma_m = 0$  et le problème est alors très mal conditionné. De manière plus générale, disons que plus  $c(\bar{J}(\mathbf{q}))$  est grand, moins le problème est correctement conditionné. Il est donc nécessaire de connaître les configurations autour desquelles se posent ces problèmes de conditionnement. Pour des systèmes à plusieurs liaisons, cela n'est pas une tâche forcément aisée et une manière de résoudre ce problème pour les bras manipulateurs a été proposée par T. YOSHIKAWA ([YOSHIKAWA 90], chapitre 4) et étendue notamment par B. BAYLE *et al.* au cas des manipulateurs mobiles à roues dans [BAYLE 01b]. Elle consiste à construire une grandeur appelée manipulabilité du système et dont la valeur est une image quantitative de l'éloignement aux singularités ou encore de la capacité du système à produire des vitesses dans toutes les directions opérationnelles.

<sup>1</sup>Les  $\lambda_i$  sont les solutions de l'équation  $\det(\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q})^T - \lambda \mathcal{I}_m) = 0$ .

L'idée originale de T. YOSHIKAWA, transposée au cas des manipulateurs mobiles à roues, est de caractériser l'ensemble des vitesses opérationnelles accessibles  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  qui sont telles que :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_{mob}\| \leq 1, \quad (3.15)$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}_{mob} = W \mathbf{u}_{mob}$  avec  $W$  une matrice carrée de dimension  $\delta_{mob} \times \delta_{mob}$ , symétrique et définie positive permettant de tenir compte de l'influence relative des différents paramètres de commandes de  $\mathbf{u}_{mob}$  sur les vitesses opérationnelles. La part de la solution au problème de cinématique inverse correspondant au mouvement opérationnel, dans le cas compatible (c'est à dire le cas où il existe au moins une solution exacte), s'écrit :

$$\mathbf{u}_{mob} = \bar{J}(\mathbf{q})^\# \dot{\boldsymbol{\xi}}.$$

Soit encore :

$$\tilde{\mathbf{u}}_{mob} = W \bar{J}(\mathbf{q})^\# \dot{\boldsymbol{\xi}}.$$

Nous avons donc :

$$\|\tilde{\mathbf{u}}_{mob}\|^2 = \tilde{\mathbf{u}}_{mob}^T \tilde{\mathbf{u}}_{mob} = \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left( \bar{J}(\mathbf{q})^\# \right)^T W W \bar{J}(\mathbf{q})^\# \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq 1,$$

soit,  $W$  étant symétrique :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \left( W \bar{J}(\mathbf{q})^\# \right)^T W \bar{J}(\mathbf{q})^\# \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq 1$$

Nous montrons en B.4.2 qu'une inverse généralisée de  $\bar{J}(\mathbf{q}) W^{-1}$  est  $W \bar{J}(\mathbf{q})^\#$ , ce qui nous permet d'écrire, en utilisant le raccourci d'écriture  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q}) = \bar{J}(\mathbf{q}) W^{-1}$  :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})^{\#T} \tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})^\# \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq 1.$$

En choisissant l'inverse généralisée de  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})$  parmi les pseudo-inverses  $M_x$ -pondérées, nous obtenons :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})_{M_x}^{\#T} \tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})_{M_x}^\# \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq 1.$$

Or, toute matrice  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})$  de dimension de  $m \times \delta_{mob}$  peut s'écrire sous la forme  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q}) = \tilde{U}(\mathbf{q}) \tilde{D}(\mathbf{q}) \tilde{V}(\mathbf{q})^T$  où  $\tilde{U}(\mathbf{q})$  et  $\tilde{V}(\mathbf{q})$  sont deux matrices orthogonales et  $\tilde{D}(\mathbf{q})$  une matrice diagonale de dimension  $m \times \delta_{mob}$  et dont la diagonale est composée des valeurs singulières  $\tilde{\sigma}_i$  de  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})$  classées dans l'ordre décroissant. Cette décomposition est appelée *décomposition en valeurs singulières* de la matrice  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})$  (rappel en B.4.1.1). La méthode de calcul de  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})_{M_x}^\#$  en utilisant la décomposition en valeurs singulières de  $\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})$  est proposée par A. BEN-ISRAEL *et al.* dans [BEN ISRAEL 03]. Elle donne :

$$\tilde{\tilde{J}}(\mathbf{q})_{M_x}^\# = \tilde{V}'(\mathbf{q}) \tilde{D}(\mathbf{q})^+ \tilde{U}'(\mathbf{q})^T,$$

avec les matrices  $\tilde{V}'(\mathbf{q})$  et  $\tilde{U}'(\mathbf{q})$  données en annexe B.4.1.2.

Ceci nous permet d'écrire la relation (3.15) sous la forme :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{U}'(\mathbf{q}) \tilde{D}(\mathbf{q})^+ \tilde{V}'(\mathbf{q})^T \tilde{V}'(\mathbf{q}) \tilde{D}(\mathbf{q})^+ \tilde{U}'(\mathbf{q})^T \dot{\boldsymbol{\xi}} \leq 1.$$

Soit,  $\tilde{V}'(\mathbf{q})$  étant  $M_y$ -orthogonale et  $M_y$  ayant été implicitement choisie comme l'identité (système compatible car  $\bar{J}(\mathbf{q})$  de rang plein) :

$$\left( \dot{\boldsymbol{\xi}}^T \tilde{U}'(\mathbf{q}) \right) \tilde{D}(\mathbf{q})^+ \tilde{D}(\mathbf{q})^+ \left( \tilde{U}'(\mathbf{q})^T \dot{\boldsymbol{\xi}} \right) \leq 1.$$

En notant  $\tilde{\xi} = \tilde{U}'(\mathbf{q})^T \dot{\xi}$ , cela devient

$$\tilde{\xi}^T \tilde{D}(\mathbf{q})^{+T} \tilde{D}(\mathbf{q})^+ \tilde{\xi} \leq 1.$$

En observant que  $\tilde{D}(\mathbf{q})^+$  a la structure suivante :

$$\tilde{D}(\mathbf{q})^+ = \begin{bmatrix} \mathcal{I}_m \\ \mathcal{O}_{(\delta_{mob}-m) \times m} \end{bmatrix} \left[ \frac{1}{\tilde{\sigma}_1} \quad \frac{1}{\tilde{\sigma}_2} \quad \dots \quad \frac{1}{\tilde{\sigma}_m} \right]^T,$$

où  $\frac{1}{\tilde{\sigma}_i}$  est remplacé par 0 quand  $\tilde{\sigma}_i = 0$ , nous aboutissons finalement à la relation :

$$\sum_{i=1, \tilde{\sigma}_i \neq 0}^m \left( \frac{\tilde{\xi}_i}{\tilde{\sigma}_i} \right)^2 \leq 1. \quad (3.16)$$

Ceci représente l'équation d'une ellipsoïde dans l'espace opérationnel. Ces axes principaux sont les colonnes de  $\tilde{U}'(\mathbf{q})$  et les rayons associés sont les  $\tilde{\sigma}_i$ . Son volume est proportionnel au produit  $\tilde{\sigma}_1 \tilde{\sigma}_2 \dots \tilde{\sigma}_m$ .

A partir de là, plusieurs grandeurs sont définies qui représentent toutes une mesure de manipulabilité. Celle que nous retenons, notée  $\omega_b$ , est le produit des valeurs singulières de  $\tilde{J}(\mathbf{q})$ . Il est aussi possible de montrer que  $\omega_b = \sqrt{\det(\tilde{J}(\mathbf{q}) \tilde{J}(\mathbf{q})^T)}$ . Cette mesure est comme nous l'avons dit proportionnelle au volume de l'ellipsoïde et la maximiser revient, en terme de configuration du système, à s'éloigner des configurations singulières et donc à éviter les problèmes de conditionnement lors de l'inversion cinématique. Ainsi la contrainte secondaire liée aux méthodes de commande s'écrit :

$$\max(\omega_b). \quad (3.17)$$

**Choix de la pondération  $W$**  Plusieurs pondérations sont possibles. La plus simple consiste à choisir l'identité et cela revient à considérer que chacune des commandes dans  $\mathbf{u}_{mob}$  peut influencer la vitesse opérationnelle indépendamment d'éventuelles restrictions sur les vitesses ou sur les accélérations des actionneurs. Afin de tenir compte de telles restrictions,  $W$  peut être choisie comme une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont l'inverse des vitesses maximales possibles pour les commandes correspondantes. Cela revient à normaliser  $\mathbf{u}_{mob}$  par rapport aux vitesses maximales de chacune de ses composantes. Pour aller plus loin, cette pondération peut être choisie comme étant l'inverse de la matrice d'inertie du système (roues orientables mises à part). Ceci permet de tenir compte de la répercussion de la dynamique du système sur les capacités motrices des actionneurs. T. YOSHIKAWA nomme la mesure de manipulabilité associée à cette pondération *manipulabilité dynamique* ([YOSHIKAWA 90]).

**Autres considérations autour de la manipulabilité** La notion de manipulabilité peut être étendue, de manière duale, à l'étude de la capacité du système à exercer des efforts opérationnels. La direction préférentielle pour le mouvement opérationnel est associée au plus grand axe de l'ellipsoïde de manipulabilité. Du point de vue des efforts, cette direction correspond à celle dans laquelle il est difficile d'exercer des efforts et, inversement, la direction opérationnelle préférentielle du point de vue des efforts correspond à celle dans laquelle il est difficile de générer des mouvements opérationnels ([WALKER 94], [KIM 00]). Utiliser une mesure de manipulabilité peut aussi être une solution pour limiter le pic d'effort au moment de la transition au contact.

Notons aussi les approches où la mesure de manipulabilité est calculée en tenant compte de la vitesse opérationnelle désirée à chaque instant ([ŽLAJPAH 96]). Des tests effectués dans le cadre du travail de DEA de M. PRIGENT ([PRIGENT 04]) montrent que cette approche :

- nécessite une connaissance a priori de la trajectoire de l' $OT$  ;
- tend à favoriser les mouvements opérationnels dans les directions où le grand axe de l'ellipsoïde de manipulabilité est de taille maximale autrement dit, à placer le système dans des configurations pour lesquelles la jacobienne du système est mal conditionnée, générant ainsi des problèmes de commande.

## 3.2 Méthodes de commande opérationnelle

Ces méthodes ont pour but la génération de consignes en temps-réel pour les actionneurs du système. Indépendamment de la nature de ces consignes (couple ou vitesse), nous pouvons classer les techniques de commande opérationnelle en deux grandes familles. Notons cependant que la frontière entre ces deux familles est finalement assez ténue et qu'elles partagent un grand nombre d'outils.

Historiquement, l'utilisateur définit la tâche à réaliser et le "roboticien" établit puis met en œuvre les modèles qui relient l'évolution des paramètres choisis pour définir la tâche opérationnelle à celle des paramètres décrivant les liaisons et qui sont reliés aux actionneurs. A partir des propriétés de ces modèles, nous avons défini des notions telles que la redondance (par rapport à une tâche opérationnelle donnée). Ces modèles permettent également de construire les lois de commande. Lorsque la tâche impose des contraintes de type égalité en nombre inférieur au degré de liberté du système, les contraintes de type inégalité imposées au système ou des critères supplémentaires peuvent être pris en compte pour choisir une solution particulière parmi toutes celles qui sont admissibles. C'est la première grande famille de techniques et c'est dans ce cadre que s'inscrivent nos travaux.

Les lois de commande construites à partir de ces modèles peuvent présenter des défauts de robustesse. En particulier, le système à résoudre lors de l'inversion du modèle cinématique peut présenter des problèmes de conditionnement notamment autour des configurations singulières. Ces familles de techniques nécessitent donc l'utilisation de méthodes locales permettant d'assurer une gestion des configurations singulières.

Ces problèmes de robustesse ont donné naissance à une seconde famille de méthodes qui posent en préalable la ré-écriture de la tâche sous une forme générique, dotée de bonnes propriétés numériques notamment en ce qui concerne le rang et conditionnement des matrices entrant dans la mise en œuvre de la commande. C'est dans ce cadre de recherche d'une robustesse globale des schémas de commande que s'inscrit l'*approche par fonctions de tâches* introduite par C. SAMSON, M. LE BORGNE et B. ESPIAU dans [SAMSON 91] et reprise par la suite par de nombreux auteurs dans le domaine de l'asservissement visuel en particulier. Dans cette approche, une fonction d'erreur ou *fonction de tâche*  $e(t, \mathbf{q})$  est construite à partir de l'objectif de commande opérationnelle à réaliser et d'objectifs secondaires qui présentent de bonnes propriétés numériques. La construction de  $e(t, \mathbf{q})$  doit obéir à un certain nombre de règles permettant d'assurer la convergence robuste de celle-ci à zéro. L'inconvénient qui peut être trouvé à ces techniques est que la définition d'une fonction de tâche  $e(t, \mathbf{q})$  permettant de répondre au problème posé n'est pas aisée étant donné les hypothèses qui doivent être faites afin d'assurer l'existence et le calcul d'une solution.

Nous avons introduit dans le chapitre 1 (1.2.3) les méthodes de commande développées spécifiquement pour des manipulateurs mobiles à roues. Du point de vue cinématique, le choix fait dans le cadre de ce travail est d'utiliser des méthodes qui n'imposent pas de contrainte a priori sur le déplacement de la plateforme et qui ne considèrent que ses vitesses instantanées admissibles pour former la commande. De ce fait, ces méthodes ne font pas appel à l'information contenue dans les crochets de Lie des champs de vecteurs qui définissent la cinématique des plateformes. La principale raison de ce choix est que, dans le cadre d'une



approche coordonnée de la commande des manipulateurs mobiles à roues, il ne nous semble pas strictement nécessaire de chercher à contrôler, même de manière implicite, les mouvements de la plateforme. Malgré ce choix, nous proposons dans [PADOIS 04b] une étude basée sur l'approche de commande par fonctions transverses des manipulateurs mobiles à roues. Cette étude est basée sur les travaux de DEA de A. CARRIAY ([CARRIAY 02]).

Nous présentons donc dans cette partie une synthèse des schémas de commande opérationnelle en mouvement et en effort classiquement utilisés en Robotique. Puis, après avoir exposé l'approche d'inversion cinématique basée sur le modèle cinématique présenté dans le chapitre 2 (2.2.2), nous proposons une formulation générique de la *méthode du couple calculé* pour les manipulateurs mobiles à roues. Nous terminons par une présentation des méthodes d'utilisation de la redondance en nous attachant particulièrement à l'optimisation locale de *fonctions « potentiel »* associées aux objectifs / contraintes secondaires.

### 3.2.1 Schémas de commande opérationnelle

Notre but, ici, n'est pas de faire une liste exhaustive de l'ensemble des méthodes de commande opérationnelle utilisées en Robotique (pour cela les ouvrages de référence tels que [KHALIL 02] ou [SCIAVICCO 00] sur la modélisation et la commande des bras manipulateurs sont plus appropriés) mais plutôt de présenter les grandes familles de méthodes :

- schémas de commande en vitesse ;
- schémas de commande en effort avec consigne et retour d'effort implicite ou non ;
- schémas composites vitesse/effort ;
- schémas basés sur le modèle dynamique ;
- schémas basés sur le modèle cinématique.

La majeure partie de ces différentes techniques fait l'hypothèse d'actionneurs commandés en couple. En réalité, beaucoup de contrôleurs articulaires livrés avec les robots n'offrent pas cette possibilité et une transformation du signal de consigne, calculé en couple, est nécessaire pour obtenir une vitesse de consigne pour l'actionneur. D. OMRČEN *et al.* évoquent, dans [OMRČEN 03], cette transformation dans le cadre de leurs travaux sur l'évitement d'obstacles en temps réel pour un manipulateur mobile à roues (plateforme omnidirectionnelle).

Nous n'aborderons pas ici les techniques de planification de consignes opérationnelles, mais considérons qu'à chaque instant de la mission une consigne de mouvement et/ou d'effort opérationnel est disponible, qu'elle ait été planifiée ou générée en temps réel.

#### 3.2.1.1 Contrôle de mouvement

Dans le cas du contrôle de mouvement, la problématique du contrôle opérationnel se pose comme suit : soit  $\xi(t)^*$ , la situation de consigne pour l'*OT*, quelles consignes articulaires envoyer aux actionneurs du système afin de faire tendre la situation réelle  $\xi(t)$  vers la situation désirée. Il s'agit en fait de réguler à zéro l'erreur de situation opérationnelle  $e_\xi(t) = \xi^*(t) - \xi(t)$  et de satisfaire ainsi la contrainte (3.1).

Une première famille de méthodes utilise un correcteur PID sur l'erreur de vitesse et de situation opérationnelle pour générer via la transposée de la jacobienne des consignes articulaires  $\bar{\mathbf{F}}$  pour les actionneurs. Le calcul de  $\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b)$  permet d'ajouter un terme compensateur de la gravité agissant sur le système. Des preuves de stabilité de ces méthodes sont fournies dans [SCIAVICCO 00] et [KHALIL 02].

La seconde famille de méthodes se base sur le modèle dynamique du système. Ces méthodes sont appelées *méthodes du couple calculé* car comme précédemment elles consistent à calculer, à partir d'une consigne opérationnelle  $\xi(t)^*$  de mouvement désiré de l'*OT*

(corrigé par PID à partir des erreurs en vitesse et situation opérationnelle), les couples actionneurs nécessaires à la génération de ce mouvement, en compensant les termes d'entraînement coriofuges ainsi que la gravité. Des variantes robustes et adaptatives de ces méthodes et leurs preuves de stabilité sont présentées dans [SCIAVICCO 00]. Notons aussi que le modèle dynamique peut être « projeté » au niveau de l'*OT* et le passage d'une consigne mouvement désiré  $\xi(t)^*$  aux couples actionneurs  $\bar{\Gamma}$  se fait en utilisant le modèle dynamique formulé dans l'espace opérationnel. Les détails de cette approche sont donnés par O. KHATIB dans [KHATIB 80, KHATIB 87, KHATIB 95].

Pour un système équipé d'actionneurs commandés en vitesse, les solutions pratiques mises en œuvre notamment par G. FOULON puis B. BAYLE au LAAS sur le robot H<sub>2</sub>BIS + GT6A s'inspirent de la première famille de méthodes avec une inversion cinématique qui permet le passage d'une consigne  $\xi(t)^*$  à des consignes de vitesse actionneur. La validité de l'approche a été prouvée par des expérimentations multiples mais sous des hypothèses de vitesses et accélérations limitées afin de pas générer d'effets dynamiques d'entraînement trop important qui au même titre que la gravité et les efforts liés aux différents frottements ne peuvent pas être précompensés. L'emploi de coefficients de réduction de vitesse moteur élevés permet par ailleurs de limiter ces effets dynamiques. Notre approche expérimentale, présentée au chapitre suivant, se base sur ces solutions pratiques.

### 3.2.1.2 Contrôle d'effort

Avant de poursuivre, il est important de signaler que les schémas de contrôle rapidement présentés ici sont tous référencés dans les ouvrages de Robotique classique cités ci-avant. Notons tout de même la synthèse concise et précise sur les différentes approches de contrôle d'effort faite par G. DUCHEMIN dans [DUCHEMIN 02]. B. SICILIANO et L. VILLANI consacrent un ouvrage ([SICILIANO 99]), très complet, sur le contrôle d'effort en Robotique. Enfin, l'article [DE SCHUTTER 97] de J. DE SCHUTTER *et al.* fait le point sur les tenants et aboutissants du contrôle d'effort et sur les perspectives de ce domaine de recherche.

La notion de contrôle d'effort opérationnel regroupe un ensemble d'approches répondant à des problèmes spécifiques. Deux niveaux de distinction existent entre ces différentes approches. Une première distinction est faite sur l'existence explicite ou non d'une consigne d'effort opérationnel dans le schéma de commande. Un schéma de contrôle d'effort peut donc être à *consigne implicite* ou *explicite*. La présence d'un capteur d'effort dans la boucle d'asservissement constitue un second niveau de distinction, il est alors question de *retour d'effort implicite* ou *explicite*. Notons que lorsqu'un capteur d'effort est utilisé, il est placé au plus près de l'*OT* afin de limiter les incertitudes sur la mesure de l'effort réel en bout de chaîne cinématique.

Parmi les approches où la consigne d'effort est implicite, citons :

- l'approche dite par *compliance*<sup>2</sup> *passive* qui fait appel aux Remote Center Compliance Devices évoqués en 3.1.2.3.
- l'approche dite par *compliance active* dont la structure de commande est similaire à celle utilisée pour le contrôle de mouvement sans utilisation du modèle dynamique (*cf.* 3.2.1.1). Les gains du correcteur PID sont dimensionnés de manière à conférer au système une raideur apparente donnée.
- l'approche dite par *impédance* (introduite par N. HOGAN dans [HOGAN 87]), utilisant ou non un retour d'effort explicite et s'appuyant ou non sur le modèle dynamique du robot. Le but est de conférer au système un comportement dynamique désiré (inertie,

<sup>2</sup>le mot *compliance* et l'adjectif *compliant* sont des anglicismes couramment employés en Robotique et qui peuvent être traduits par *déformabilité* et *déformable* respectivement. Le mot *compliance* est utilisé en anglais par opposition au mot *stiffness* qui signifie *raideur*.

amortissement, raideur). Ce comportement dynamique est formalisé par une impédance mécanique désirée entre l'évolution des efforts et les déplacements de l'organe terminal.

Les approches pour lesquelles la consigne d'effort est explicite font de manière générale appel à une boucle d'effort explicite. Citons parmi elles :

- l'approche de *commande parallèle situation / force* présentée en détail sous ce nom dans [SICILIANO 99] ou encore, dans [KHALIL 02], sous le nom de *commande hybride externe*. Elle permet le contrôle simultané de l'effort d'interaction  $\mathbf{f}_{OT}(t)$  et de la situation opérationnelle  $\boldsymbol{\xi}(t)$ . Quand les deux sont compatibles, cela est parfaitement réalisé mais quand il y a incompatibilité des deux consignes, c'est la consigne d'effort qui prévaut (précision en régime permanent) grâce à la présence d'une action intégrale dans sa boucle d'asservissement. Duchemin propose une analyse de stabilité de la commande hybride externe dans [DUCHEMIN 02].
- l'approche de *commande hybride force / position* (introduite par M. RAIBERT et J. CRAIG dans [RAIBERT 81]). Cette approche est basée sur le constat suivant : soit une direction de l'espace opérationnel contrainte par l'environnement, l'effort d'interaction entre l'*OT* et l'environnement dans cette direction est lié par le comportement mécanique du couple « robot + environnement » au déplacement possible du robot dans cette direction. Autrement dit, il n'est pas possible d'exercer simultanément des efforts et des déplacements dans une même direction de l'espace opérationnel de manière indépendante. Le repère associé au point de contact entre le robot et l'environnement est appelé *repère de compliance*, dans notre cas nous le considérons confondu avec le repère  $\mathcal{R}_{OT}$ . Les directions commandées en effort et en mouvement doivent être orthogonales dans ce repère. Pour un problème donné, il est donc nécessaire de sélectionner les directions opérationnelles qui sont à commander en effort et celles qui sont à commander en mouvement. Le processus de sélection se formalise par la construction d'une matrice de sélection  $S$ , carrée, de dimension  $m$  et diagonale si elle est exprimée dans le repère de compliance. Dans ce cas,  $s_{ii} = 1$  si la  $i^{\text{ème}}$  direction opérationnelle est à contrôler en mouvement, sinon  $s_{ii} = 0$ . Le schéma de commande est donc constitué de deux boucles d'asservissement distinctes : l'une en mouvement, l'autre en effort. Notons que cette approche a fait l'objet de nombreuses publications et que de multiples déclinaisons existent, chacune pouvant se mettre sous la forme générique donnée sur la figure 3.2. C'est sur ce type de correcteur que se porte notre choix lorsque la tâche opérationnelle considérée est un mouvement au contact de l'environnement.

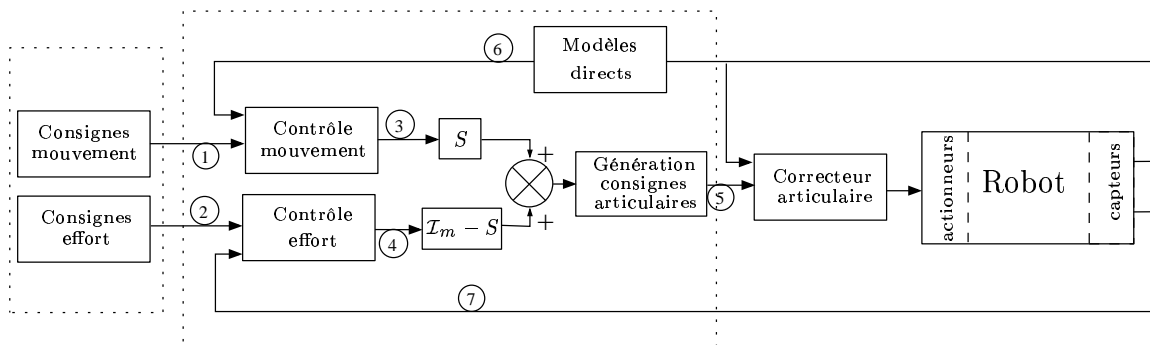


FIG. 3.2 – Schéma de principe de la commande hybride position / force

### 3.2.2 Génération de consignes articulaires basées sur les modèles

Pour des manipulateurs mobiles à roues, la génération de consignes articulaires peut se faire, au même titre que pour les bras manipulateurs, à deux niveaux : cinématique et dynamique.

En ce qui concerne les possibilités de génération de consignes articulaires à partir des modèles cinématique et dynamique, quatre cas de figure se présentent :

1. Actionneurs commandés en couple / Commande opérationnelle de mouvement. Dans ce cas la génération de consigne articulaire passe par l'inversion du modèle cinématique et l'utilisation du modèle dynamique pour calculer le couple actionneur de consigne.
2. Actionneurs commandés en couple / Commande opérationnelle d'effort. Deux choix sont possibles : le premier consiste à utiliser l'équivalence cinéto-statique pour générer les couples actionneurs (méthode cinématique puisque basée sur la jacobienne du système), le second est d'utiliser la même équivalence et d'ajouter à la consigne articulaire de couple un terme de compensation des effets dynamiques et de gravité liés aux mouvements du système. Ce terme est fourni par le modèle dynamique.
3. Actionneurs commandés en vitesse / Commande opérationnelle de mouvement. Dans ce cas la génération de consigne articulaire passe par l'inversion du modèle cinématique.
4. Actionneurs commandés en vitesse / Commande opérationnelle d'effort. Dans ce cas il est nécessaire d'établir un modèle de l'interaction opérationnelle permettant le calcul d'une vitesse de consigne opérationnelle équivalente à l'effort opérationnel de consigne.

Les données d'entrée de ces différentes méthodes de calcul des consignes articulaires sont les grandeurs de commandes issues des lois de commande opérationnelle. Aux consignes de mouvement et d'effort respectivement notées  $\xi^*$  et  $f_{OT}^*$  sont donc associées les grandeurs de commande  $\xi'$  et  $f'_{OT}$ .

Les différentes grandeurs sont présentées sur le schéma bloc de la figure 3.2 qui donne le principe de la commande hybride position / force :

- ① -  $\xi^*$  /  $\dot{\xi}^*$  /  $\ddot{\xi}^*$  : consignes de mouvement opérationnel ;
- ② -  $f_{OT}^*$  : consigne d'effort opérationnel ;
- ③ -  $\xi'$  /  $\dot{\xi}'$  /  $\ddot{\xi}'$  : commande de mouvement opérationnel ;
- ④ -  $f'_{OT}$  : commande d'effort opérationnel ;
- ⑤ -  $\bar{\Gamma}$  ou  $\mathbf{u}$  : consignes articulaires ;
- ⑥ -  $\xi$  /  $\dot{\xi}$  /  $\ddot{\xi}$  : mouvement opérationnel réel ;
- ⑦ -  $f_{OT}$  : effort opérationnel réel.

Nous présentons ci-après la méthode d'inversion cinématique, celle du couple calculé étendue aux manipulateurs mobiles à roues ainsi que la formulation opérationnelle du modèle dynamique.

#### 3.2.2.1 Inversion cinématique

Le modèle cinématique pour la commande, établi au chapitre 2, décrit la relation qui existe, pour une configuration donnée du système, entre la vitesse opérationnelle  $\dot{\xi}$  et le vecteur de commande de mobilité  $\mathbf{u}_{mob}$ . Ses composantes sont des grandeurs homogènes à des vitesses à partir desquelles la vitesse de chacun des paramètres de configuration peut être déterminée. Lorsque le système possède des roues centrées orientables, ce modèle établit aussi une relation simple entre la commande de dirigeabilité et le vecteur vitesse

d'orientation de ces roues. Cette relation est, du point de vue de la cinématique, complètement découplée de la première et, au premier abord, aucune contrainte ne permet de choisir de manière générique l'évolution de l'orientation des roues orientables.

**Remarque :** L'ensemble des résultats de calcul matriciel ou relatifs à la résolution des systèmes linéaires nécessaires à la compréhension de ce qui suit est donné en annexe B.

Soit  $\dot{\xi}(t)'$  et  $\dot{\beta}_c(t)'$  les commandes opérationnelles et de dirigeabilité issues respectivement d'un contrôleur de mouvement opérationnel et de la boucle d'asservissement sur la valeur de  $\dot{\beta}_c(t)$ .

Le vecteur de commande  $\mathbf{u}$  équivalent à la commande  $\dot{\mathbf{z}}'$  est donné par la relation (2.35) que nous rappelons :

$$\dot{\mathbf{z}}' = \bar{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}.$$

Une représentation minimale de la situation de l'*OT* étant utilisée, nous nous plaçons dans le cas où  $\bar{J}(\mathbf{q})$  (et donc  $\bar{B}(\mathbf{q})$ ) est de rang plein. Cela revient à dire que nous nous plaçons dans une configuration régulière. Trois cas de figure se présentent :

### $\bar{J}(\mathbf{q})$ de rang plein et $m > \delta_{mob}$

Le système est tel que l'ensemble des vecteurs  $\dot{\xi}$  vérifiant la relation (2.37) est un sous-ensemble de l'espace tangent à  $\mathcal{M}$  en  $\xi$  et par conséquent il existe des vitesses opérationnelles ne pouvant pas être générées par le système. L'ensemble des vitesses opérationnelles pouvant être générées par le système peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes de  $\bar{J}(\mathbf{q})$ . Ceci constitue la condition de compatibilité pour le système. Ainsi pour une vitesse opérationnelle  $\dot{\xi}$  donnée, l'inversion du modèle cinématique pour la commande s'écrit :

$$\mathbf{u} = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \dot{\mathbf{z}}',$$

où  $\bar{B}(\mathbf{q})^\#$  est une *inverse généralisée* de  $\bar{B}(\mathbf{q})$ . Si le système est compatible alors la solution calculée est exacte, sinon la solution n'est pas exacte mais en choisissant parmi l'infinité d'inverses généralisées de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  celles de la famille des *pseudo-inverses*  $M_y$ -*pondérées*, la solution trouvée est celle pour laquelle la norme de l'erreur  $\dot{\mathbf{z}} - \bar{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}$ , au sens des moindres carrés  $M_y$ -pondérés, est la plus faible. Notons que le calcul de  $\bar{B}(\mathbf{q})^\#$  en fonction de  $\bar{J}(\mathbf{q})$  est aisé :

$$\bar{B}(\mathbf{q})^\# = \begin{bmatrix} \bar{J}(\mathbf{q})^\# & \mathcal{O}_{\delta_{mob} \times \delta_{dirp}} \\ \mathcal{O}_{\delta_{dirp} \times m} & \mathcal{I}_{\delta_{dirp}} \end{bmatrix}.$$

### $\bar{J}(\mathbf{q})$ de rang et $m < \delta_{mob}$

Dans ce cas, le système est redondant cinématiquement et il existe une infinité de solutions exactes au problème d'inversion. Ces solutions s'écrivent :

$$\mathbf{u} = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \dot{\mathbf{z}}' + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0, \quad (3.18)$$

où  $\mathbf{u}_0$  est un vecteur quelconque de dimension  $n_{ddl}$ .

Soit en décomposant :

$$\mathbf{u}_{mob} = \bar{J}^\#(\mathbf{q}) \dot{\xi}' + \left( \mathcal{I}_{\delta_{mob}} - \bar{J}^\#(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_{mob0},$$

et :

$$\mathbf{u}_{dirp} = \dot{\beta}'_c,$$

où  $\mathbf{u}_{mob0}$  est un vecteur quelconque de dimension  $\delta_{mob}$ . Le terme  $\bar{\mathcal{J}}^\#(\mathbf{q}) \dot{\boldsymbol{\xi}}$  est la partie des vitesses articulaires de consigne calculées qui permettent d'assurer la vitesse opérationnelle de consigne  $\dot{\boldsymbol{\xi}}$  au travers du signal de commande  $\dot{\boldsymbol{\xi}}'$ .  $(\mathcal{I}_{\delta_{mob}} - \bar{\mathcal{J}}^\#(\mathbf{q}) \bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q}))$  est un projecteur dans  $Ker(\bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q}))$ . Ce noyau représente l'ensemble des vecteurs  $\mathbf{u}_{mob}$  tels que  $\bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_{mob} = 0$ , *i.e.* l'ensemble des vecteurs vitesse articulaire de consigne ne produisant pas de vitesse opérationnelle. Tout vecteur  $\mathbf{u}_{mob0}$  projeté dans  $Ker(\bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q}))$  ne produit donc pas de vitesse opérationnelle. Nous abordons par la suite les applications d'une telle propriété mais nous pouvons déjà écrire que si nous choisissons parmi l'infinité d'inverses généralisées de  $\bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q})$  celles de la famille des *pseudo-inverses*  $M_x$ -*pondérées* alors la solution  $\mathbf{u}_{mob}$  calculée est celle qui minimise au sens des moindres carrés  $M_x$ -pondérés la norme du vecteur  $(\mathbf{u}_{mob} - \mathbf{u}_{mob0})$ .

$\bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q})$  de rang plein et  $m = \delta_{mob}$

Le système est non redondant et il existe une solution exacte unique qui s'écrit :

$$\mathbf{u} = \bar{B}(\mathbf{q})^{-1} \dot{\mathbf{z}}'.$$

**Remarque :** Nous désignons la commande  $\mathbf{u}$  comme la vitesse articulaire de consigne. Cela est vrai si les paramètres de commande contenus dans  $\mathbf{u}$  sont actionnés. Lorsqu'il ne sont pas directement actionnés, la relation (2.30) permet de calculer le vecteur vitesse des articulations actionnées.

### 3.2.2.2 Principe des méthodes du couple calculé

Soit  $\dot{\boldsymbol{\xi}}'(t)'$  et  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_c(t)'$  les commandes opérationnelles et de dirigeabilité issues respectivement d'un contrôleur de mouvement opérationnel et de la boucle d'asservissement sur la valeur de  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_c(t)$ . Le calcul du vecteur des efforts actionneurs  $\boldsymbol{\Gamma}(t)$  à fournir afin de générer ces mouvements peut se faire par utilisation du modèle dynamique réduit du système. Il est pour cela nécessaire de calculer  $\dot{\mathbf{u}}$  à partir de l'accélération opérationnelle  $\ddot{\mathbf{z}}(t)'$  associée au mouvement  $\mathbf{z}(t)'$ .

Dérivons les relations (2.37) et (2.25), nous obtenons :

$$\ddot{\boldsymbol{\xi}}' = \bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}}_{mob} + \dot{\bar{\mathcal{J}}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}, \quad (3.19)$$

$$\ddot{\boldsymbol{\beta}}_c' = \dot{\mathbf{u}}_{dirp}. \quad (3.20)$$

Ce qui peut s'écrire sous forme synthétique :

$$\ddot{\mathbf{z}}' = \bar{B}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \quad (3.21)$$

Avant de poursuivre, remarquons que la dérivée de la jacobienne réduite  $\bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q})$  fait apparaître des termes en  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_c$ . La dimension de  $\dot{\bar{\mathcal{J}}}(\mathbf{q})$  n'est donc pas  $m \times \delta_{mob}$  mais  $m \times n_{ddl}$ . La relation (3.19) permet alors d'écrire  $\mathbf{u}$  en fonction de  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}'$  et de  $\dot{\mathbf{u}}_{mob}$ . Une relation formelle apparaît donc entre la vitesse d'orientation  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_c$  des roues centrées orientables et l'accélération opérationnelle de consigne. Cette relation peut être utilisée pour générer de manière systématique la consigne de vitesse d'orientation des roues centrées orientables. Cette approche n'est pas abordée dans le cadre de ce mémoire.

L'inversion des relations (3.19) et (3.20) permet d'exprimer  $\dot{\mathbf{u}}$  en fonction de  $\ddot{\boldsymbol{\xi}}$  et  $\dot{\boldsymbol{\beta}}_c$  et, dans le cas redondant, nous avons :

$$\dot{\mathbf{u}}'_{mob} = \bar{\mathcal{J}}^\#(\mathbf{q}) \left( \ddot{\boldsymbol{\xi}}' - \dot{\bar{\mathcal{J}}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}_{mob} \right) + \left( \mathcal{I}_{\delta_{mob}} - \bar{\mathcal{J}}^\#(\mathbf{q}) \bar{\mathcal{J}}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{u}}_{mob0}, \quad (3.22)$$

$$\dot{\mathbf{u}}'_{dirp} = \ddot{\beta}'_c. \quad (3.23)$$

Notons que la dérivation par rapport au temps de la relation (3.18) aboutit également à une relation qui, d'un point de vue opérationnel, est équivalente à (3.22) (démontré en B.4.3). Le modèle dynamique réduit (2.63) permet alors de calculer le couple moteur  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\rightarrow ext}$  nécessaire à la génération de l'accélération  $\dot{\mathbf{u}}$  tout en précompensant les termes coriofuges et liés à la gravité. Nous avons :

$$\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\rightarrow ext} = \bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}}' + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b). \quad (3.24)$$

Le couple calculé  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\rightarrow ext}$  représente le couple nécessaire à l'exécution du mouvement  $\dot{\mathbf{z}}'$ .

### Quelques mots sur l'équivalence cinéto-statique

De manière duale à la relation (3.18), il existe un ensemble de couples qui ne produit pas d'effort opérationnel. Nous montrons en B.3 que l'ensemble des couples actionneurs peut s'écrire sous la forme :

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext} + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_0, \quad (3.25)$$

où :

- $\bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]}$  est une inverse généralisée particulière de  $\bar{B}(\mathbf{q})^T$  dont il existe une inverse généralisée  $\left( \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right)^{[1,2]}$  égale à  $\bar{B}(\mathbf{q})^T$  ;
- $\bar{\mathbf{\Gamma}}_0$  est un vecteur quelconque de dimension  $n_{ddl}$ .

En décomposant, nous obtenons :

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{\Gamma}}_{mob} \\ \bar{\mathbf{\Gamma}}_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext/OT} + \left( \mathcal{I}_{\delta_{mob}} - \bar{J}(\mathbf{q})^T \bar{J}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_{mob0} \\ \mathbf{f}_{ext/c} \end{bmatrix}, \quad (3.26)$$

où :

- $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{mob}$  est le couple associé à la commande de mobilité  $\mathbf{u}_{mob}$  et  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_c$  le couple associé à la commande de dirigeabilité  $\mathbf{u}_{dirp}$  ;
- $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{mob0}$  est un vecteur quelconque de dimension  $\delta_{mob}$  ;
- $\bar{J}(\mathbf{q})^{T[1,2]}$  est une inverse généralisée particulière de  $\bar{J}(\mathbf{q})^T$ .

Le terme  $\left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_0$  correspond à l'ensemble des couples  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  qui ne produisent pas d'effort extérieur (au niveau de l'OT et des roues orientables). En effet  $\left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right)$  est un projecteur dans le noyau de  $\bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]}$  qui est défini comme l'ensemble des vecteurs  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  tels que  $\bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \bar{\mathbf{\Gamma}} = 0$ .

Soit le couple additionnel  $\left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_0$  ajouté à  $\bar{\mathbf{\Gamma}}_{\rightarrow ext}$  calculé pour l'exécution d'un mouvement  $\dot{\mathbf{z}}'$ . Le couple total est alors :

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \bar{\mathbf{\Gamma}}_{\rightarrow ext} + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_0,$$

soit encore :

$$\bar{\mathbf{\Gamma}} = \bar{A}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}}' + \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_0. \quad (3.27)$$

Remplaçons alors  $\bar{\mathbf{\Gamma}}$  par sa valeur calculée (3.27) dans la relation (2.63). Nous obtenons :

$$\dot{\mathbf{u}} = \dot{\mathbf{u}}' + \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\mathbf{\Gamma}}_0.$$

En multipliant à gauche par  $\bar{B}(\mathbf{q})$ , cela donne :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \ddot{\mathbf{z}}' + \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\Gamma}_0. \quad (3.28)$$

Cela signifie que le terme  $\left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\Gamma}_0$  qui ne produit pas d'effort extérieur (au niveau de l'*OT* et des roues orientables), a une influence sur le mouvement  $\ddot{\mathbf{z}}$ , ce qui bien sûr n'est pas souhaitable. Pour  $\bar{\Gamma}_0$  quelconque, il peut être intéressant de poser la question du choix de  $\bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]}$ . Ce choix doit être tel que :

$$\bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} - \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} = 0. \quad (3.29)$$

Remarquons tout d'abord que les pseudo-inverses pondérées constituent un sous-ensemble particulier des inverses généralisées [1, 2] (*cf.* B.2.2). En choisissant  $\bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]}$  comme une pseudo-inverse de  $\bar{B}(\mathbf{q})^T$  au sens des moindres carrées  $M_y$ -pondérées, la condition (3.29) est alors donnée par :

$$\bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} - \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T \left[ \bar{B}(\mathbf{q}) M_y \bar{B}(\mathbf{q})^T \right]^{-1} \bar{B}(\mathbf{q}) M_y = 0.$$

Une matrice de pondération  $M_y$  permettant de respecter cette condition est  $\bar{A}(\mathbf{q})^{-1}$ . D'après B.2.3.2, nous avons :

$$\left( \bar{B}(\mathbf{q})^T \right)_{M_y}^* = \left( \bar{B}(\mathbf{q})_{M_y^{-1}}^* \right)^T.$$

Ceci revient donc à choisir  $\bar{A}(\mathbf{q})$ , la matrice d'inertie du système, comme matrice de pondération pour le calcul de la pseudo-inverse pondérée de  $\bar{B}(\mathbf{q})$ . C'est le choix que fait O. KHATIB dans [KHATIB 87] et il appelle la pseudo-inverse  $\bar{A}(\mathbf{q})$ -pondérée de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  *pseudo-inverse dynamiquement compatible*<sup>3</sup> puisqu'elle assure le découplage dynamique des termes liées à la redondance. Elle s'écrit :

$$\bar{B}(\mathbf{q})_{\bar{A}(\mathbf{q})}^* = \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T \left[ \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T \right]^{-1}.$$

Tout autre choix génère une erreur entre les mouvements ou les efforts opérationnels produits et ceux désirés. Ceci est illustré par les travaux de PARK *et al.* dans [PARK 99b]. PARK traite plus largement dans ces travaux de thèse ([PARK 99a]) des problèmes de découplage cinématique et dynamique dans le cas de bras manipulateurs redondants holonomes, notamment du point de vue de la conception des lois de commande.

### 3.2.2.3 Approche opérationnelle

L'approche opérationnelle de la commande dynamique est issue des travaux de KHATIB dans [KHATIB 80]. Elle a été développée pour les bras manipulateurs et consiste à formuler le modèle dynamique du système directement dans l'espace opérationnel. Nous l'étendons ici au cas des manipulateurs mobiles à roues.

En partant du modèle dynamique réduit synthétisé par la relation (2.63) du chapitre 2, nous pouvons écrire :

$$\dot{\mathbf{u}} = \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \bar{\Gamma} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext} - \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) \right). \quad (3.30)$$

<sup>3</sup>Le terme original en anglais est *dynamically consistent*.



Cette forme du modèle dynamique est appelée *forme directe*. En substituant (3.30) dans (3.21), nous obtenons :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \bar{\Gamma} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext} - \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} - \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) \right) + \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}. \quad (3.31)$$

En posant :

$$\bar{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \mathbf{u} + \bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b) \right) - \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}$$

et en rappelant que le couple moteur  $\bar{\Gamma}$  peut se décomposer sous la forme :

$$\bar{\Gamma} = \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{mot} + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\Gamma}_0,$$

où  $\bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{mot}$  est la part du couple moteur qui a un effet opérationnel et un effet sur les roues centrées orientables.

Nous avons :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{mot} + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\Gamma}_0 - \bar{B}(\mathbf{q})^T \mathbf{f}_{ext} \right) - \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

Ce qui, après simplification, donne :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T (\mathbf{f}_{mot} - \mathbf{f}_{ext}) - \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\Gamma}_0. \quad (3.32)$$

L'influence de  $\left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^T \bar{B}(\mathbf{q})^{T[1,2]} \right) \bar{\Gamma}_0$  sur le mouvement  $\ddot{\mathbf{z}}$  apparaît aussi dans la relation (3.32). En faisant le choix dynamiquement compatible d'inverse généralisée de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  cela devient :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T (\mathbf{f}_{mot} - \mathbf{f}_{ext}) - \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}).$$

En exprimant ce modèle sous sa *forme inverse*, nous obtenons :

$$\bar{\Lambda}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \mathbf{f}_{mot} - \mathbf{f}_{ext}, \quad (3.33)$$

où :

- $\bar{\Lambda}(\mathbf{q}) = \left( \bar{B}(\mathbf{q}) \bar{A}(\mathbf{q})^{-1} \bar{B}(\mathbf{q})^T \right)^{-1}$  est appelée la *pseudo-matrice d'inertie* du système,
- et  $\bar{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) = \bar{\Lambda}(\mathbf{q}) \bar{\mathbf{h}}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$  regroupe les termes d'entraînement coriofuges et les termes liés à la gravité.

Le modèle dynamique réduit exprimé du point de vue opérationnel et des roues centrées orientables permet de calculer les couples moteurs nécessaires à la génération du mouvement  $\mathbf{z}'$  tout en précompensant les termes coriofuges et liés à la gravité. Il peut aussi permettre de tenir compte d'un effort d'interaction  $\mathbf{f}' = \left[ \mathbf{f}_{OT}^T \quad \mathbf{f}_c^T \right]^T$  à contrôler et le couple calculé est dans ce cas :

$$\bar{\Gamma} = \bar{B}(\mathbf{q})^T \left( \bar{\Lambda}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{z}} + \bar{\mu}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{f}' \right). \quad (3.34)$$

Pour l'analyse de la transition au contact présentée en 3.1.2.3 et mise en œuvre dans le cadre de nos travaux, il est possible d'extraire un modèle dynamique purement opérationnel. Cela implique de négliger les termes de couplage dynamique des roues orientables avec le reste du système. Nous avons vu à la fin du chapitre précédent que les ordres de grandeur en terme de masse et d'inertie du système rendent tout à fait raisonnable une telle hypothèse.

### 3.2.3 Utilisation de la redondance

Les méthodes d'inversion cinématique et du couple calculé font apparaître un terme lié à la redondance du système. Il existe donc une infinité de solutions aux problèmes de commande opérationnelle. Le choix d'une solution se pose en terme d'objectifs secondaires de commande à satisfaire : parmi l'infinité de solutions laquelle permet de remplir des objectifs secondaires de commande donnés ? Deux niveaux de décision existent :

- le choix de l'inverse généralisée ;
- le choix des vecteurs  $\mathbf{u}_{mob0}$  ou  $\bar{\mathbf{T}}_0$ .

#### 3.2.3.1 Choix de l'inverse généralisée

En choisissant l'inverse généralisée parmi la famille des pseudo-inverses pondérées, il est possible de montrer, en posant le problème comme un problème d'optimisation, que la norme pondérée de l'erreur (quand le système n'est pas compatible) ainsi que la norme pondérée de la solution sont minimisées (cette propriété est rappelée en B.2.2). Reste à choisir les différentes pondérations. En se plaçant dans le cas de systèmes toujours compatibles, seule la pondération de la norme de la solution intervient. Le choix de cette norme a une influence sur la manière dont sont sollicités les différents actionneurs pour effectuer un mouvement opérationnel donné ou exercer un effort au niveau de l'OT et, si d'un point de vue cinéto-statique les termes liés à la redondance ne génèrent ni effort, ni mouvement opérationnel, cela n'est pas le cas du point de vue dynamique où, comme nous l'avons montré, un choix particulier de pondération est nécessaire pour obtenir un découplage opérationnel complet.

#### 3.2.3.2 Méthodes de descente de gradient

Si l'infinité de solutions au problème d'inversion cinématique provient de l'infinité d'inverses généralisées et plus particulièrement de pseudo-inverses pondérées, elle vient aussi de l'infinité de vecteurs  $\mathbf{u}_0$  ou  $\bar{\mathbf{T}}_0$  qui peuvent être choisis pour le terme lié à la redondance du système. Ces vecteurs peuvent par exemple être choisis de manière à minimiser localement une fonction scalaire  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$ , encore appelée *fonction potentiel*, dépendant de la configuration du système. Pour minimiser localement une telle fonction, les méthodes d'optimisation locale, telle que celle dite de *descente de gradient*, sont depuis longtemps employées en Robotique. Y. NAKAMURA, dans [NAKAMURA 91], attribue l'idée d'employer de telles méthodes pour utiliser la redondance des systèmes robotiques à A. LIEGOIS (1977). Le principe de cette méthode, appliquée au cas de manipulateurs mobiles non holonomes, est très bien décrit par BAYLE *et al.* dans [BAYLE 03b]. Nous reprenons ici la méthode de démonstration de minimisation locale du potentiel  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$  en l'étendant à l'ensemble des inverses généralisées. Calculons tout d'abord  $\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q})$  :

$$\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) = \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}},$$

où  $\nabla \mathcal{P}(\mathbf{q})$  est le gradient de la fonction  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$ .

#### Point de vue cinématique

Il est nécessaire de tenir compte de la restriction sur les vitesses du système et, par ailleurs, nous ne souhaitons conserver que la part de  $\mathbf{u}$  ne générant pas de vitesse opérationnelle, soit, à partir de (3.18) :

$$\dot{\mathbf{q}} = S(\mathbf{q}_p) \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0.$$

Nous avons donc :

$$\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) = \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p) \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0.$$

Afin d'assurer la minimisation locale de  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$ , il est nécessaire de choisir  $\mathbf{u}_0$  tel que  $\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) \leq 0$ . Le choix :

$$\mathbf{u}_0 = -K \left( \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p) \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \right)^T,$$

où  $K$  est une matrice de dimension  $n_{ddl} \times n_{ddl}$  définie positive, est tel que :

$$\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) = -K \left( \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p) \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right)^T S(\mathbf{q}_p)^T \nabla \mathcal{P}(\mathbf{q}) \right).$$

Dans ce cas,  $\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) \leq 0$  est vérifié.

Dans le cas où  $\bar{B}(\mathbf{q})^\#$  est choisie comme étant la pseudo-inverse  $\bar{B}(\mathbf{q})^+$  de  $\bar{B}(\mathbf{q})$ , le projecteur  $(\mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^+ \bar{B}(\mathbf{q}))$  du noyau de  $B(\mathbf{q})$  qui, par définition est idempotent (cf. (B.8)), est aussi symétrique (cf. (B.16)) et donc semi-défini positif.  $\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q})$  devient :

$$\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) = -K \left( \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p) (\mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^+ \bar{B}(\mathbf{q})) (\mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^+ \bar{B}(\mathbf{q}))^T S(\mathbf{q}_p)^T \nabla \mathcal{P}(\mathbf{q}) \right),$$

soit, après simplification :

$$\dot{\mathcal{P}}(\mathbf{q}) = -K \left( \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p) (\mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^+ \bar{B}(\mathbf{q})) S(\mathbf{q}_p)^T \nabla \mathcal{P}(\mathbf{q}) \right).$$

La décroissance de la fonction potentiel  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$  est alors aussi assurée en choisissant :

$$\mathbf{u}_0 = -K \left( \nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q}) S(\mathbf{q}_p) \right)^T.$$

Il est à noter ici que si la contrainte additionnelle représentée par la fonction potentiel  $\mathcal{P}(\mathbf{q})$  est incompatible avec la tâche principale (*i.e.* le mouvement ou l'effort opérationnel à réaliser), la projection de  $\mathbf{u}_0$  dans le noyau de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  produit un terme, lié à la redondance, nul. Ainsi, la fonction potentiel décroît tant que la projection du terme additionnel dans le noyau de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  n'est pas nulle.

### Point de vue des efforts

Le choix de l'inverse généralisée  $\bar{B}(\mathbf{q})^{[1,2]}$  parmi les pseudo-inverses  $M_x$ -pondérées permet d'assurer à chaque instant la minimisation de la norme  $M_x$ -pondérée de  $(\bar{\Gamma} - \bar{\Gamma}_0)$ . Cela revient à faire tendre à chaque instant  $\bar{\Gamma}$  vers  $\bar{\Gamma}_0$ .

### Généralisation

Les relations (3.18) et (3.25) peuvent s'écrire sous la forme générale :

$$\mathbf{c} = \underbrace{\mathbf{c}_p}_{\text{tâche principale}} + \underbrace{(\mathcal{I}_{n_{ddl}} - E(\mathbf{q})^* E(\mathbf{q})) \mathbf{c}_0}_{\mathbf{c}_{red} : \text{redondance}},$$

où, dans le cas cinématique,  $\mathbf{c} = \mathbf{u}$ ,  $\mathbf{c}_p = \bar{B}(\mathbf{q})^* \dot{\mathbf{z}}$ ,  $E(\mathbf{q}) = \bar{B}(\mathbf{q})$  et  $\mathbf{c}_0 = \mathbf{u}_0$ . Dans le cas statique, nous avons  $\mathbf{c} = \bar{\Gamma}$ ,  $\mathbf{c}_p = \bar{\Gamma}_{\rightarrow ext}$ ,  $E(\mathbf{q}) = \bar{B}(\mathbf{q})^{T*}$  et  $\mathbf{c}_0 = \bar{\Gamma}_0$ .

### 3.2.3.3 Autres approches

Une seconde méthode consiste à augmenter de manière statique le nombre de lignes de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  à partir de contraintes additionnelles, rendant ainsi le système linéaire carré et inversible simplement. L'inconvénient principal de cette méthode est son aspect statique. Une version plus souple de cette méthode consiste, de manière similaire à la méthode de descente de gradient, à projeter dans le noyau de  $\bar{B}(\mathbf{q})$  un vecteur  $\mathbf{u}_0$  construit à partir des contraintes additionnelles. Cette méthode permet de tenir compte de différentes contraintes supplémentaires pour lesquelles il est possible de fixer un ordre de priorité et qui sont exécutées au mieux, i.e. en fonction de leur compatibilité avec les tâches de priorité supérieure. Ce type d'approche est présenté de manière extensive par Y. NAKAMURA dans [NAKAMURA 91] et a été, plus récemment, amélioré par S. CHIAVERINI qui dans [CHIAVERINI 97] présente une version robuste aux singularités numériques du problème de prise en compte de contraintes additionnelles et de gestion des priorités entre ces contraintes.

## 3.3 Structure de commande pour l'enchaînement

Dans ce chapitre, nous avons jusque là défini des méthodes pour la commande opérationnelle d'un manipulateur mobile à roues. Nous avons aussi présenté l'ensemble des contraintes secondaires dont il faut tenir compte afin d'assurer le bon fonctionnement des lois de commande ainsi que l'intégrité matérielle du système et de son environnement. Nous proposons une structure de commande qui permet de mettre en œuvre les lois de commande proposées tout en tenant compte des objectifs secondaires. Cette méthode permet par ailleurs l'enchaînement dynamique de tâches opérationnelles de natures différentes.

### 3.3.1 Nature des enchaînements

#### 3.3.1.1 Tâches opérationnelles de natures différentes

Ce type d'enchaînement, consiste au sein d'une même mission à basculer entre deux objectifs de commande de natures différentes. Cela nécessite la définition de  $k_l$  tâches locales ou modes entre lesquelles il faut définir des conditions de basculement. Ces conditions se formalisent comme des combinaisons de conditions logiques ou autres (floues, probabilistes...) sur des valeurs de seuil  $s_{1ij}, \dots, s_{vij}$  où  $v$  représente ici le nombre de seuils mis en jeu dans la condition de basculement de la tâche  $k_{li}$  vers la tâche  $k_{lj}$ . Ces seuils sont associés à des grandeurs physiques issues de capteurs ou estimées telles que la vitesse, la situation et les efforts opérationnels. Le basculement peut être un événement synchrone, c'est à dire planifié avant la mission pour se produire dans une zone temporelle  $t_{ij} \pm \delta t_{ij}$  définie en absolu ou relativement à des événements passés. Il peut aussi être asynchrone, aucune information temporelle n'étant alors utilisée dans la condition de basculement. Dans le cas synchrone ou planifié, la mise à jour du plan initial se fait dès que les informations pertinentes sont disponibles. Ce principe permet de tenir compte des incertitudes liées à une connaissance de qualité moyenne des paramètres du robot (glissement de la plateforme, résolution des capteurs) ou de son environnement. Toute dérive importante dans la date de transition ou dans la valeur d'une des variables contrôlées ou d'une des informations utilisées pour le basculement conduit à l'arrêt prématuré de la mission.

L'ensemble des basculements possibles entre  $k_l$  différentes tâches locales peut être formalisé par une *machine à états* où les tâches représentent les états et où les transitions entre états correspondent aux conditions de basculement. La représentation graphique d'un schéma de basculement formalisé par une machine à états est donnée à titre d'exemple sur la figure 3.3.

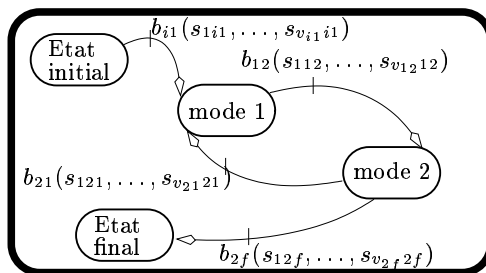


FIG. 3.3 – Machine à états instanciée représentant les modes et basculements possibles d’une mission exemple composée de deux tâches locales

Une telle description permet de représenter un grand nombre de missions robotiques. La planification telle que nous l’envisageons reste à un niveau fonctionnel. La génération d’un schéma de basculement, la gestion de procédures de reprise en cas d’échec se situent à un niveau supérieur dans l’architecture complète de contrôle du système. Ces points précis, au même titre que les techniques de décision associées à des conditions de basculement non strictement binaires, sont des problématiques à part entière associées notamment aux techniques de l’*Intelligence Artificielle*. Nous ne les abordons pas dans le cadre de ce projet de recherche.

### 3.3.1.2 Enchaînements d’objectifs secondaires

La partie précédente de ce chapitre a mis en avant plusieurs objectifs secondaires à satisfaire. Bien entendu le degré de redondance d’un manipulateur mobile à roues, n’est pas suffisant pour tous les satisfaire simultanément, d’autant que certains d’entre eux sont partiellement, voire complètement, incompatibles avec les autres. Si certaines méthodes que nous avons évoquées permettent d’assurer complètement les différents objectifs principaux et secondaires en faisant appel à une notion de priorité, il s’avère dans la pratique que ces priorités évoluent en fonction de la tâche locale dans laquelle se trouve le système mais aussi en fonction des contraintes imposées par le système lui même et son environnement à chaque instant. D’autres approches, dont les travaux de F. PIN et J-C. CULIOLI dans [PIN 90] sont l’illustration, proposent quant à elles d’utiliser la méthode de descente de gradient pour une fonction potentiel multi-critères c’est-à-dire construite à partir de  $n$  différents objectifs secondaires dont l’importance est prise en compte en utilisant une pondération qui peut évoluer en fonction de l’évolution des priorités associées à ces objectifs :

$$\mathcal{P} = \alpha_1 \mathcal{P}_1 + \dots + \alpha_n \mathcal{P}_n$$

Dans le cas où la satisfaction des objectifs secondaires représentés dans la fonction potentiel multi-critères n’est pas critique pour le système, son environnement ou la réalisation de l’objectif principal (opérationnel), ces méthodes peuvent être employées. Dans le cas où le respect des contraintes associées aux objectifs secondaires est critique cette méthode n’assure en rien l’optimisation locale des différents potentiels mais plutôt l’optimisation locale d’une somme pondérée de critères dont il est difficile de connaître la signification.

Pour notre part, nous choisissons de ne chercher à satisfaire qu’un objectif secondaire à la fois. Cela nécessite un arbitrage à chaque instant des priorités attribuées à l’ensemble des  $k_s$  objectifs secondaires. Pour faire cet arbitrage, chaque objectif secondaire et sa fonction potentiel associée sont caractérisés par :

- un entier  $i$  permettant de les désigner.

- Une matrice constante  $N$  de booléens, de dimension  $k_l \times k_s$ . La composante  $n_{ij}$  représente la nécessité éventuelle de l'objectif secondaire  $j$  dans le cadre de la tâche locale  $i$  ( $n_{ij} = 1$  : éventuellement nécessaire,  $n_{ij} = 0$  : pas nécessaire).
- Une matrice constante  $P$  d'entiers positifs, de dimension  $k_l \times k_s$ . La composante  $p_{ij}$  représente la priorité de l'objectif secondaire  $j$  dans le cadre de la tâche locale  $i$ . Plus la valeur  $p_{ij}$  est grande, plus l'objectif secondaire  $j$  est important dans le cadre de la tâche locale  $i$ . Un objectif secondaire  $j$  dont la nécessité  $n_{ij} = 0$  se voit attribuer une priorité  $p_{ij} = 0$ .
- Une matrice constante  $SP_e$  de réels, de dimension  $k_l \times k_s$ . La composante  $sp_{eij}$  représente la valeur de seuil d'entrée de la fonction potentiel associée à l'objectif secondaire  $j$  et à la tâche locale  $i$ . Si cette valeur est franchie de manière « activante », elle rend l'objectif secondaire « activable ». A cette matrice est associé un vecteur  $\mathbf{tp}_e$  de booléens et de dimension  $k_s$  dont la composante  $tp_{ej}$  vaut 1 si le seuil d'entrée  $sp_{eij}$  associé à l'objectif secondaire  $j$  et à la tâche locale **courante**  $i$  est franchi de manière « activante » et 0 sinon. A titre d'exemple : pour une fonction potentiel  $\mathcal{P}_i(t)$  représentant une distance à maximiser, le seuil d'entrée est franchi de manière « activante » à un instant  $t_1$  si  $\dot{\mathcal{P}}_i(t_1) < 0$ .
- Une matrice constante  $SP_s$  de réels, de dimension  $k_l \times k_s$ . La composante  $sp_{sij}$  représente la valeur de seuil de sortie de la fonction potentiel associée à l'objectif secondaire  $j$  et à la tâche locale  $i$ . Si cette valeur est franchie de manière « désactivante », elle rend l'objectif secondaire « désactivable ». A cette matrice est associé un vecteur  $\mathbf{tp}_s$  de booléens et de dimension  $k_s$  dont la composante  $tp_{sj}$  vaut 1 si le seuil de sortie  $sp_{sij}$  associé à l'objectif secondaire  $j$  et à la tâche locale **courante**  $i$  est franchi de manière « activante » et 0 sinon. A titre d'exemple : pour une fonction potentiel  $\mathcal{P}_i(t)$  représentant une distance à maximiser, le seuil de sortie est franchi de manière « désactivante » à un instant  $t_1$  si  $\dot{\mathcal{P}}_i(t_1) > 0$ .

La valeur de la tâche locale en cours est stockée dans l'entier  $tl$  ( $tl = -1$  en début de mission et 0 en fin de mission) et l'objectif secondaire actif dans l'entier  $os$ . Si aucun objectif secondaire n'est actif,  $os = 0$ .

L'algorithme d'arbitrage est donné dans le tableau 3.1 en faisant l'hypothèse que l'ensemble des  $k_s$  fonctions potentiel est à maximiser.

### 3.3.1.3 Commentaires sur l'algorithme de choix de l'objectif secondaire actif

L'algorithme proposé permet de gérer de manière systématique le choix de l'objectif secondaire actif en tenant compte des priorités entre objectifs secondaires, de la nécessité de tel ou tel objectif secondaire dans une tâche locale donnée et des valeurs de seuil d'entrée et de sortie associées à chaque objectif secondaire.

En cas d'objectifs secondaires présentant une priorité similaire et activable dans une même tâche locale, un litige peut apparaître. Nous ne cherchons pas ici à gérer ces litiges mais disons que de manière générale ils ne peuvent être gérés sans remettre en cause la tâche principale. Imaginons un cas de litige entre une butée articulaire et un obstacle à éviter, aucun des deux événements ne doit avoir lieu et il peut être nécessaire, à la manière de P. BAERLOCHER et R. BOULIC dans [BAERLOCHER 04], de relâcher certaines contraintes opérationnelles de manière à pouvoir satisfaire l'ensemble des contraintes secondaires. La relaxation d'une contrainte opérationnelle revient à retirer une ligne de  $\bar{J}(\mathbf{q})$ , le paramètre opérationnel associé étant alors libre d'évoluer indépendamment de la tâche principale (opérationnelle).

Ajoutons ici que l'algorithme d'arbitrage ne met en œuvre aucune technique particulière permettant de se prémunir de basculements très rapprochés dans le temps liés à l'antagonisme de deux objectifs secondaires. Ces basculements peuvent être la source de

```

Procédure arbitrageOS()
Début
  si ( $tl \leq 0$ )
     $os = 0$ 
  sinon
     $somme_1 = somme_2 = 0$ 
    pour  $i$  de 1 à  $k_s$ 
       $\mathcal{P}_i(1) = miseAJour\mathcal{P}(i)$ 
      si  $N(tl, i)$ 
        si  $\mathcal{P}_i(1) < \mathcal{P}_i(0)$ 
          si  $os \neq i$ 
            si  $\mathcal{P}_i(1) < SP_e(tl, i)$ 
               $tp_e(i) = 1$ 
               $somme_1 = somme_1 + 1$ 
            sinon
               $tp_e(i) = 0$ 
            fin si
          fin si
        sinon
          si  $os = i$ 
            si  $\mathcal{P}_i(1) > SP_s(tl, i)$ 
               $tp_s(i) = 1$ 
               $os = 0$ 
            sinon
               $tp_s(i) = 0$ 
            fin si
          fin si
        fin si
      fin si
    fin pour
    si  $somme_1 = 0$ 
       $os = 0$ 
    sinon
       $P_{max} = \max(P(tl))$ 
      pour  $i$  de 1 à  $k_s$ 
        si  $(tp_e(i) = 1) \& (P(tl, i) = P_{max})$ 
           $os = i$ 
           $somme_2 = somme_2 + 1$ 
        fin si
      fin pour
      si  $somme_2 > 1$ 
        !Litige!
      fin si
    fin si
    pour  $i$  de 1 à  $k_s$ 
       $\mathcal{P}_i(0) = \mathcal{P}_i(1)$ 
    fin pour
  fin si
fin

```

TAB. 3.1 – Algorithme de l'arbitrage du choix de l'objectif secondaire actif

sollicitations importantes des actionneurs dégradant les performances globales en précision du système. Nous abordons ci après les techniques permettant de se prémunir de telles sollicitations.

### 3.3.2 Respect des contraintes

Nous avons formalisé en début de chapitre les différentes contraintes sur le système. La satisfaction des contraintes liées aux trajectoires opérationnelles de consigne passe par l'utilisation des lois de commande basées sur les modèles du système présentées précédemment. En ce qui concerne la satisfaction des autres contraintes, nous présentons ici les solutions retenues pour assurer leur respect.

#### 3.3.2.1 Respect des contraintes intrinsèques au système

##### Contraintes sur les vitesses ou couple actionneurs

Le respect de la contrainte (3.9) s'écrit :

$$|\mathbf{c}_p + \mathbf{c}_{red}| \leq \mathbf{c}_{max}.$$

En ne considérant pas le terme associé à la redondance, il faut tout d'abord respecter :

$$|\mathbf{c}_p| \leq \mathbf{c}_{max}. \quad (3.35)$$

$\mathbf{c}_p$  est calculé en fonction de  $\dot{\mathbf{z}}'$  et/ou de  $\mathbf{f}'$  (par inversion cinématique et méthode du couple calculé). Ainsi,  $\dot{\mathbf{z}}'$  et  $\mathbf{f}'$  doivent être tels qu'en toute configuration régulière du système, la contrainte (3.35) soit respectée. En fonction de la configuration du système, le respect de cette contrainte n'induit pas les mêmes bornes  $\dot{\mathbf{z}}_{max}$  et  $\mathbf{f}_{max}$ . La solution la plus simple est de minorer  $\dot{\mathbf{z}}$  et  $\mathbf{f}$  en cherchant les configurations du système dans lesquelles l'application de  $\mathbf{c}_{max}$  comme consigne articulaire induit les plus petits  $\dot{\mathbf{z}}$  et  $\mathbf{f}$ .  $\dot{\mathbf{z}}_{max}$  et  $\mathbf{f}_{max}$  sont alors fixés à ces valeurs. Cette solution présente l'avantage d'assurer le respect inconditionnel de la contrainte (3.35) et elle permet par ailleurs la planification hors-ligne de trajectoire. Cependant, elle ne permet pas d'employer les actionneurs au maximum de leurs capacités et il peut être préférable d'adapter  $\dot{\mathbf{z}}_{max}$  et  $\mathbf{f}_{max}$  au cours de la mission, en fonction de la configuration du système.

Le terme associé à la redondance ne bénéficie alors plus que de la marge laissée par la tâche principale. Ainsi, le terme  $\mathbf{c}_{red}$  calculé pour l'optimisation d'un objectif secondaire peut être trop grand par rapport à la marge laissée par la tâche principale. Il faut donc le mettre à l'échelle. La mise à l'échelle consiste à rechercher le coefficient réel positif  $\alpha$  tel que :

$$|\mathbf{c}_p + \alpha \mathbf{c}_{red}| \leq \mathbf{c}_{max}.$$

La direction de descente du gradient associé à  $\mathbf{c}_{red}$  doit bien sûr être conservée et  $\alpha$  est alors donné par :

$$\alpha = \min \left( \left( \frac{|c_{max,i} \cdot \text{sign}(c_{red,i}) - c_{p,i}|}{|c_{red,i}|} \right)_{i=1..n_{ddl}}, \alpha_{max} \right).$$

Nous avons  $0 \leq \alpha \leq \alpha_{max}$ . La valeur  $\alpha_{max}$  est choisie de manière à limiter l'amplification maximale du terme  $\mathbf{c}_{red}$ . Elle peut par exemple être dimensionnée à partir de la *règle d'Armijo* dont le but consiste à fixer le pas d'itération le meilleur pour les méthodes de descente de gradient ([CULIOLI 94] fournit une bonne base pour la compréhension de cette règle). Elle peut aussi être fixée à 1, interdisant ainsi l'amplification du terme lié à la redondance.



### Contraintes sur accélérations des actionneurs

Le respect de la contrainte (3.7) sur l'accélération, s'écrit :

$$|\dot{\mathbf{c}}_p + \dot{\mathbf{c}}_{red}| \leq \dot{\mathbf{c}}_{max}.$$

En ne considérant pas le terme associé à la redondance, il faut tout d'abord respecter :

$$|\dot{\mathbf{c}}_p| \leq \dot{\mathbf{c}}_{max}. \quad (3.36)$$

De manière similaire au respect de la contrainte sur les vitesses ou les couples, le respect de la contrainte (3.36) nécessite d'établir des bornes fixes ou variables sur les grandeurs de consigne  $\ddot{\mathbf{z}}'$  et  $\dot{\mathbf{f}}'$ . Ces bornes sont respectivement notées  $\ddot{\mathbf{z}}'_{max}$  et  $\dot{\mathbf{f}}'_{max}$ .

En ce qui concerne le terme lié à la redondance, un raisonnement similaire à celui utilisé pour le calcul de  $\alpha$  peut être mené et le facteur de mise à l'échelle choisi est celui qui permet la satisfaction des deux contraintes (3.6) et (3.7) simultanément. Cela suppose que les fonctions potentiel  $\mathcal{P}_i(t)$  sont toutes de classe  $\mathcal{C}^2$  afin d'assurer la continuité de  $\nabla \mathcal{P}_i(t)$  et de  $\frac{d}{dt}(\nabla \mathcal{P}_i(t))$  : hors des configurations singulières, si  $\mathcal{P}_i(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  alors  $\alpha(t)$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  et  $\alpha \mathbf{c}_{red}$  l'est donc aussi. Afin d'éviter le recours à la mise à l'échelle des accélérations (celui ci pouvant ne pas être compatible avec celle des vitesses),  $\nabla \mathcal{P}_i(t)$  est tout d'abord normé à 1 afin de limiter les sauts liés au calcul d'un tel gradient de manière numérique. Cela n'est en soi pas problématique, car dans la méthode de descente du gradient, c'est la direction de la plus grande pente qui compte, le pas d'itération étant fixé par  $\alpha$ .

### Continuité du terme lié à la redondance lors d'un basculement d'objectif secondaire

Lors du basculement d'objectif secondaire, les fonctions potentiel qui sont enchaînées ne présentent aucune garantie de continuité à l'instant de l'enchaînement. Il est donc nécessaire de construire une fonction potentiel de transition, combinaison convexe des deux fonctions à enchaîner qui assure la continuité du terme lié à la redondance. Nous utilisons donc un paramètre  $\beta(t)$ , variant linéairement de 0 à 1 pendant le temps nécessaire à la transition :

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < t_{ti} \\ \left( \frac{1}{t_{tf} - t_{ti}} \right) (t - t_{ti}) & \text{si } t_{ti} \leq t < t_{tf} \\ 1 & \text{si } t \geq t_{tf} \end{cases},$$

où  $t_{ti}$  est le temps de début de transition et  $t_{tf}$  le temps de fin de transition. La fonction potentiel utilisée à l'instant  $t$  est donnée par :

$$\mathcal{P}(t) = \begin{cases} \mathcal{P}_{old}(t) & \text{si } t < t_{ti} \\ \mathcal{P}_{new}(t)\beta(t)^2 + \mathcal{P}_{old}(t)(1 - \beta(t)^2) & \text{si } t_{ti} \leq t < t_{tf} \\ \mathcal{P}_{new}(t) & \text{si } t \geq t_{tf} \end{cases}.$$

#### 3.3.2.2 Autres contraintes

##### Evitement des butées articulaires

La fonction potentiel utilisée pour l'évitement de la butée  $q_{max}$  de l'articulation  $q_i$  peut, par exemple, s'écrire sous la forme d'une fonction à minimiser :

$$\mathcal{P}(\mathbf{q}) = \frac{1}{(q_{max} - q_i)^2}.$$

### Maximisation de la manipulabilité

La fonction potentiel retenue pour la maximisation de la manipulabilité est  $\omega_b(\mathbf{q})$ . Si le gradient d'une fonction telle que celle employée pour éviter les butées articulaires peut être calculé de manière formelle, cela devient assez complexe pour une fonction telle que  $\omega_b(\mathbf{q})$ . Il est alors possible d'estimer numériquement le gradient :

$$\nabla \mathcal{P}(\mathbf{q}) = \left[ \frac{\Delta_1 \mathcal{P}(\mathbf{q})}{\Delta q_1} \quad \frac{\Delta_2 \mathcal{P}(\mathbf{q})}{\Delta q_2} \quad \dots \right]^T,$$

où :

$$\Delta_i \mathcal{P}(\mathbf{q}) = \mathcal{P}(q_1, \dots, q_i + \Delta q_i, \dots, q_n) - \mathcal{P}(\mathbf{q}).$$

### Minimisation des efforts d'impact liés à la transition

Dans ce cas, nous avons vu qu'une préparation active de cette transition nécessite la maximisation de la fonction  $\mathbf{n}^T \mathbf{R}(\mathbf{q}) \mathbf{n}$  où nous rappelons que  $\mathbf{n}$  est la normale à la surface de contact et  $\mathbf{R}(\mathbf{q})$  est extraite de  $\bar{\Lambda}(\mathbf{q})^{-1}$  (extraction de la sous-matrice correspondant aux accélérations linéaires de l'*OT*). Cette maximisation engendre une modification des propriétés inertielles du système qui dans la direction opérationnelle normale au contact voit son inertie diminuer. L'énergie cinétique à dissiper au moment de l'impact est alors moindre et les efforts d'interaction qui résultent de cet impact sont par conséquent eux aussi diminués.

### Maximisation de la distance aux obstacles pour la plateforme

De nombreux travaux ont été réalisés sur ce thème pour des plateformes à roues omnidirectionnelles ou non. Citons par exemple les travaux sur la déformation réactive de trajectoire proposée par D. BONNAFOUS et F. LAMIRAUX dans le cadre de la navigation d'une plateforme à roues de type unicycle avec remorque ([LAMIRAUX 04]).

Notre cas est différent car il nécessite le respect géométrique strict de la trajectoire opérationnelle. Ainsi la fonction potentiel utilisée tend à maximiser la distance du centre de la plateforme à l'obstacle mais surtout à régler la direction instantanée de déplacement de la plateforme vers la direction tangente à l'obstacle. Ceci est en partie l'objet du travail de DEA de A. MAURATILLE ([MAURATILLE 05]).

#### 3.3.2.3 Critère d'efficacité de l'optimisation locale d'un objectif secondaire

Il est important de s'assurer que l'objectif secondaire qui est optimisé va l'être « efficacement ». Les risques sont que :

- la projection du vecteur  $\mathbf{c}_0$  dans  $(\mathcal{I}_{n_{ddt}} - E(\mathbf{q})^* E(\mathbf{q}))$  génère un vecteur  $\mathbf{c}_{red}$  dont la norme est faible par rapport au vecteur non projeté ;
- les vitesses opérationnelles soient importantes, faisant tendre  $\mathbf{c}_p \rightarrow \mathbf{c}_{max}$  et donc  $\alpha \rightarrow 0$ .

Dans le premier cas, O. BROCK *et al.* proposent, dans leur article [BROCK 02] consacré à l'évitement d'obstacle pour des manipulateurs mobiles omnidirectionnels, l'indicateur suivant :

$$\rho = \frac{\|(\mathcal{I}_{n_{ddt}} - E(\mathbf{q})^* E(\mathbf{q})) \mathbf{c}_0\|}{\|\mathbf{c}_0\|}.$$

Pour des valeurs de  $\rho$  inférieures à un seuil donné, ils proposent de relâcher momentanément certaines des contraintes opérationnelles afin de pouvoir optimiser de manière satisfaisante l'objectif secondaire actif. Cela n'est pas conforme avec notre cahier des charges.

Dans le second cas,  $\alpha$  ou  $\frac{\alpha}{\alpha_{max}}$  sont des indicateurs intéressants. Nous proposons de partager l'intervalle  $[0, \alpha_{max}]$  en  $n_\alpha$  intervalles de taille identique. A ces intervalles sont associés des coefficients  $c_\alpha$  de réduction de la vitesse opérationnelle. Cela permet de ralentir le mouvement opérationnel afin de redistribuer les capacités d'actionnement du système vers les objectifs secondaires en fonction de la valeur de  $\alpha$ . Pour  $\alpha = 0$ , *i.e.* les actionneurs sont dédiés uniquement à l'objectif de commande opérationnelle, le coefficient de réduction vaut 0. Le mouvement opérationnel est alors stoppé mais la contrainte de situation opérationnelle est pour autant maintenue. Du point de vue de l'effort cela revient à réduire le niveau de consigne d'effort désiré.

Nous faisons aussi le choix de diminuer la vitesse opérationnelle en nous basant sur la proximité d'une valeur minimale critique pour la valeur de la fonction potentiel active.

La réduction des consignes opérationnelles est réalisée en ligne si les consignes opérationnelles ne sont pas planifiées mais nécessite une replanification dans le cas contraire. Cette replanification, au même titre qu'une replanification liée à la mise à jour du plan initial à l'instant du basculement entre deux tâches opérationnelles, est bien sûr telle que la continuité des vitesses/efforts et des accélérations opérationnelles est assurée.

### 3.3.3 Structure de commande globale

Nous avons présenté dans ce chapitre l'ensemble des techniques nécessaires à la mise en place d'une structure de commande pour la réalisation de missions de manipulation mobile composées de tâches locales de natures différentes.

La figure 3.4 présente le schéma global récapitulatif de la structure de commande ainsi créée.

La mise en œuvre expérimentale et en simulation de cette structure est présentée dans le chapitre suivant.

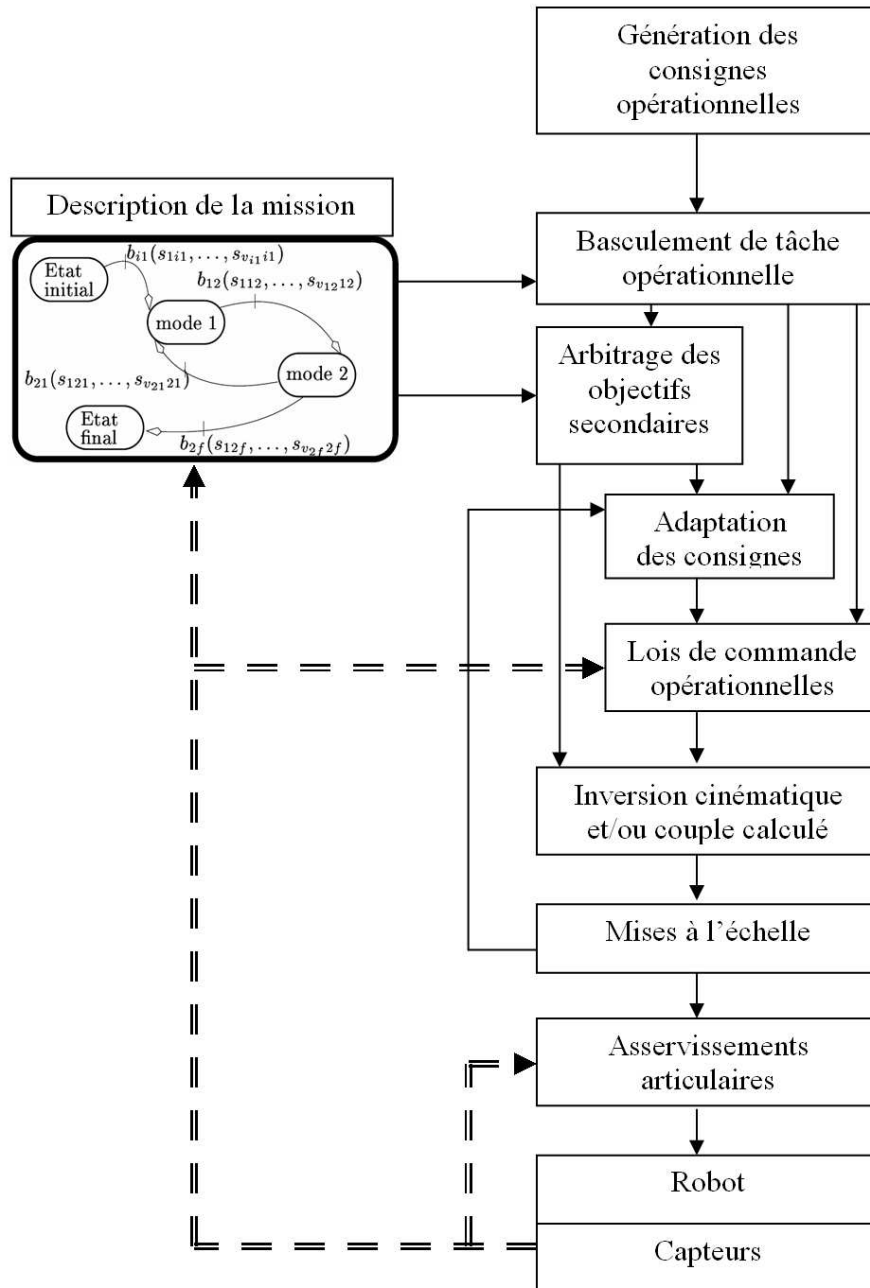


FIG. 3.4 – Structure de commande pour la commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues



---

## Chapitre 4

### Mise en œuvre : Simulations et Expérimentations

---

Il est nécessaire ici de rappeler l'importance de l'expérimentation dans une discipline scientifique telle que la robotique et plus particulièrement la robotique mobile. En effet, si une approche strictement académique permet la mise en place de bases théoriques solides qui sous-tendent l'ensemble des méthodes de commande développées en robotique, elle ne permet cependant pas de capturer fidèlement l'ensemble des difficultés qui sont inhérentes à la mise œuvre d'un système complexe dans un environnement qui ne l'est pas moins. Saturations des actionneurs, frottements statiques, glissements, jeux mécaniques, bruits de mesures, contraintes de calcul temps réel, discrétisation des lois de commande, incertitudes sur les paramètres de la mission : la liste est longue et si chacun de ces problèmes peut être résolu individuellement, leur mise en commun ajoute à la difficulté du problème posé. Ce travail de recherche a donc été pensé et abordé avec l'optique d'une mise en œuvre expérimentale ce qui, au même titre que l'état de l'art dans le domaine de la manipulation mobile et de la robotique, a guidé ou influencé les choix de modèles et d'approches de commande que nous avons présentés dans les deux précédents chapitres.

Avant d'aborder les résultats expérimentaux et de simulation, nous présentons le contexte expérimental du LAAS où dans le cadre de deux projets communs ROBEA nous avons pu mener à bien l'aspect expérimental de ce travail. Ce contexte expérimental sert de base au simulateur que nous avons développé et qui a permis le prototypage rapide de solution pour la commande d'un manipulateur mobile mais aussi l'implémentation complète de la structure de commande décrite au chapitre précédent. Ce simulateur est donc présenté ainsi que de nombreux résultats de simulation. Enfin, nous nous attachons à décrire les expérimentations menées sur le système réel et à présenter les résultats obtenus.

## 4.1 Contexte expérimental

### 4.1.1 Système expérimental

Le système expérimental de manipulation mobile utilisé est composé de la plateforme à roues de type unicycle *H<sub>2</sub>bis* et du bras manipulateur série à six liaisons rotoïdes et poignet concourant GT6A. Afin de fixer les idées, le poids de l'ensemble est d'environ  $400Kg$  dont environ  $35 Kg$  pour le bras manipulateur. La vitesse linéaire maximale de la plateforme est de  $0,9 m.s^{-1}$  et sa vitesse angulaire maximale de  $1,0 rad.s^{-1}$ .

Les actionneurs sont des moteurs à courant continu et leur électronique de commande ne présente pas de boucle de courant, n'autorisant donc pas la commande en couple du système.

Les capteurs d'intérêt présents sur le système sont pour la plateforme :

- un codeur optique et une roue odométrique pour chacune des deux roues motrices ;
- un arceau de sécurité de détection de collision ;

et pour le bras manipulateur :

- un codeur incrémental par liaison ;
- un capteur d'effort GIROBO, 6 axes, placé en bout de chaîne cinématique (entre l'extrémité du bras et l'*OT*) .

Le système d'exploitation temps-réel est *VxWorks* et l'architecture matérielle du système calculateur temps-réel se compose de 5 cartes *Motorola 680x0* ainsi que d'une carte *PowerPC*.

La figure 4.1 donne un aperçu de ce manipulateur mobile.

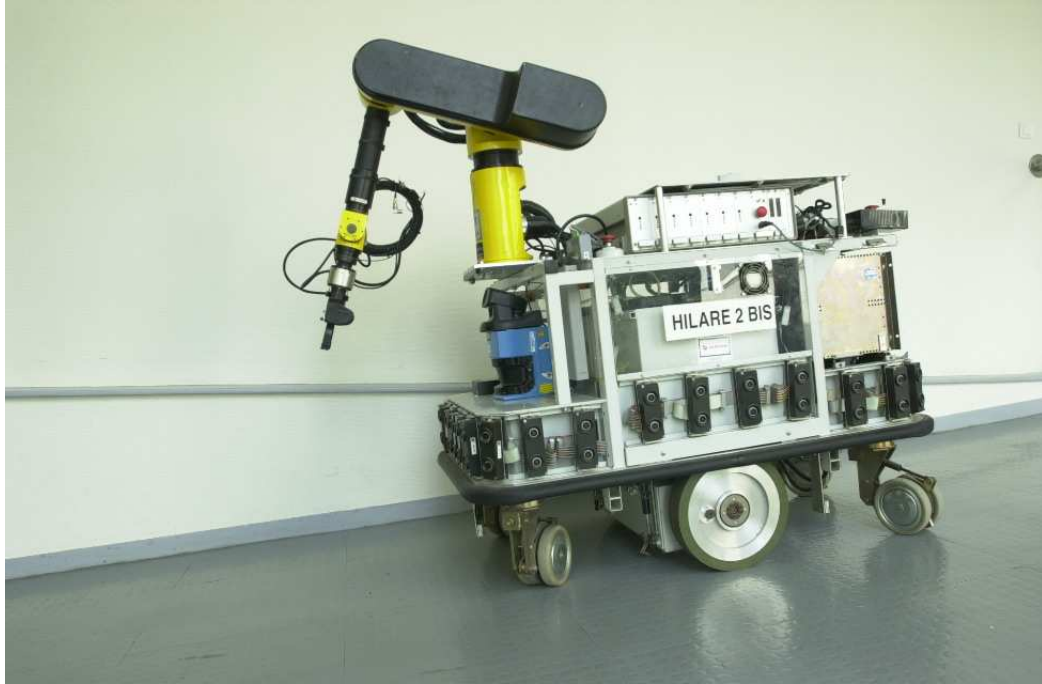


FIG. 4.1 – Manipulateur mobile  $H_2bis+$  GT6A du LAAS

#### 4.1.2 Architecture du LAAS pour la robotique autonome

Le groupe de recherche Robotique et Intelligence Artificielle (RIA) du LAAS focalise une grande partie de son activité de recherche sur le développement d'architectures génériques de contrôle dédiées aux systèmes autonomes. L'architecture existante, mise en œuvre sur les nombreux robots du groupe, fournit un cadre idéal et éprouvé pour l'implémentation de nouveaux algorithmes et méthodes de commande en robotique. S. FLEURY rappelle dans [FLEURY 96] que cette architecture se constitue de deux niveaux distincts :

- un *niveau décisionnel* centralisé qui regroupe le contrôle d'exécution (supervision) et la planification haut-niveau des missions robotiques ;
- un *niveau fonctionnel* distribué qui intègre les fonctionnalités de gestion dynamique des données et des événements (capteurs, asservissements, lois de commandes, planification de trajectoires).

Comme nous l'avons évoqué au début du chapitre, notre approche se positionne clairement au niveau fonctionnel même si certains éléments de notre structure de commande relèvent en partie du niveau décisionnel.

L'intégration de nouvelles lois de commande et de contrôle est standardisée et se fait grâce au logiciel  $G^{en}oM$  (Generator of Modules) et de l'environnement de développement qui lui est associé ([FLEURY 97, FLEURY 01]).  $G^{en}oM$  permet le développement de modules logiciels associés à une ressource matérielle (actionneurs, capteurs) ou logicielle. Une importante partie du code est générée de manière automatique fournissant ainsi une structure robuste pour l'implémentation des algorithmes nécessaires à l'application. Cette structure modulaire permet de faire appel aux services de modules déjà existants via des protocoles d'échange de données standardisés par  $G^{en}oM$ .

#### 4.1.3 Prototypage rapide des solutions

Parmi les outils associés à  $G^{en}oM$ , citons GDHE (Graphical Display for Hilare Experiments) développé par M. HERBB ([HERRB 04]) qui permet la visualisation de scènes 3D,



notamment composées de robots. Ce logiciel ouvert est associé au langage de script Tcl et sa bibliothèque graphique associée Tk qui par ailleurs, via le package tclServ de A. MALLET, autorise la communication avec le système d'exploitation temps réel et l'envoi de requêtes aux modules développés pour l'application robotique en question.

Cette suite d'outils permet le développement rapide d'applications robotiques via la possibilité qui est offerte de faire fonctionner une application en co-simulation. En co-simulation, les variateurs de puissance du robot ne sont pas alimentés (le robot ne bouge donc pas réellement mais son mouvement simulé peut être visualisé grâce à GDHE) et les informations capteurs cohérentes avec la mission sont simulés logiquement et utilisés par les modules associés à l'application qui eux fonctionnent réellement. Cela permet la mise au point du code de manière confortable ainsi que la validation du respect effectif des contraintes temps réel par le code développé.

## 4.2 Simulateur et résultats de simulation

Malgré la souplesse offerte par l'architecture logicielle du groupe RIA, nous avons choisi de mettre au point un simulateur strictement logiciel du système robotique et de la structure de commande que nous proposons. La première raison est purement pratique : n'ayant pas le système expérimental « sous la main », il était nécessaire d'optimiser le temps passé au LAAS et donc de commencer l'intégration expérimentale seulement après avoir validé les solutions théoriques retenues. Au delà d'une question de temps, une telle approche augmente les chances de ne pas faire d'erreur qui pourrait être dommageable au système et à son environnement (l'utilisateur faisant bien entendu partie intégrante de l'environnement). Par ailleurs, les outils utilisés pour développer ce simulateur (*Matlab / Simulink*) autorisent une grande souplesse de programmation et ne nécessitent pas la compilation d'un grand nombre de ligne de codes, le langage utilisé étant principalement interprété. Cela est propice à des tests nombreux qui sont plus difficilement réalisables sur le système réel.

Afin de s'approcher des conditions expérimentales, le robot exemple retenu pour la simulation est un manipulateur mobile composé d'une plateforme unicycle et d'un bras plan à deux liaisons rotoïdes dans le plan tel que celui présenté au chapitre 2. Seule la position de l'organe terminal est contrôlée et d'après la définition que nous donnons du degré de redondance, celui ci vaut donc dans ce cas précis 2.

### 4.2.1 Description du simulateur

Le simulateur développé se décline en deux versions. La première est dédiée à l'exécution de mission pré-planifiée tandis que la seconde sert de base à une simulation de télé-opération avec retour visuel simulé de la scène pour l'utilisateur. Nous présentons par la suite les spécificités de chacune des versions ainsi que les résultats associés mais nous commençons ici par donner une description des constituants du simulateur qui sont identiques d'une version à l'autre.

#### 4.2.1.1 Système matériel

**Robot** Les actionneurs et leurs transmissions mécaniques associées sont modélisés par des systèmes dynamiques linéaires du second ordre perturbés par des couples résistants issus de la simulation de la dynamique de l'ensemble du système. Une formulation explicite du modèle dynamique est employée, autorisant ainsi une visualisation facilitée de l'évolution

de chacun des termes du modèle dynamique tel qu'il a été défini au chapitre 2. Les butées articulaires ainsi que les saturations sur les vitesses et les accélérations sont aussi simulées.

Le robot est modélisé par un ensemble de transferts continus. La gestion du « temps continu » par *Matlab* est faite par l'adaptation du pas de temps de résolution des équations différentielles à la dynamique courante du système. La fréquence d'échantillonnage de l'asservissement articulaire étant fixée à 5 *ms*, le pas de temps variable, choisi par *Matlab*, ne peut pas être supérieur à cette valeur.

**Environnement** Deux types d'éléments environnementaux peuvent être simulés :

- des obstacles « bas », c'est à dire de hauteur inférieure à celle de la plateforme et qui ne peuvent pas entrer en collision avec le bras manipulateur ;
- des surfaces de contact ponctuel dont le comportement est modélisé, localement, par un ressort dans la direction normale à la surface de contact et dont la raideur peut être fixée. Le contact avec l'*OT* est supposé plan/plan et les efforts générés lors d'un contact se décomposent en deux composantes linéaires, l'une normale au plan de contact et liée au modèle du contact, l'autre tangentielle au plan de contact et calculée via un modèle du type coefficient de frottement statique de COULOMB.

**Capteurs** Les capteurs permettant de reconstruire la configuration du système sont considérés comme parfaits et aucun glissement de la plateforme n'est simulé. L'information qu'ils fournissent est cadencée à une fréquence de 5 *ms*. Le capteur d'effort base sa mesure sur le modèle de contact. Cette mesure est cadencée à une fréquence réglée par défaut à 25 *ms*. Cette mesure est bruitée par un bruit aléatoire « continu », de valeur maximale inférieure à 90% du seuil de détection du contact.

La situation des obstacles et des surfaces de contact est supposée connue à une erreur de mesure relative près. L'ajout d'une telle erreur permet notamment de générer des impacts avant l'instant prévu par le plan initial et donc de tester la robustesse de la structure de commande face à de tels écarts.

#### 4.2.1.2 Asservissements bas niveau

Les asservissements bas niveau des actionneurs sont similaires à ceux utilisés sur le robot réel. Ce sont des PID numériques avec saturation et remise à zéro dynamique du terme intégral (anti wind-up). Comme dans leur version réelle, des sécurités logicielles sont codées afin de limiter la sollicitation des actionneurs à un niveau qu'ils peuvent atteindre en mode nominal. Ces sécurités peuvent bien sûr être retirées afin d'appréhender les effets de telles sollicitations. La mise en œuvre de ces asservissements est réalisée en supposant que les paramètres des modèles des actionneurs ne sont pas parfaitement connus.

La période d'échantillonnage de ces asservissements peut être réglée et est par défaut choisie égale à celle des asservissements du manipulateur GT6A (en l'occurrence 5 *ms*).

A ces asservissements bas niveau est associé un modèle simple (gain + saturation) des variateurs de puissance.

#### 4.2.1.3 Structure de commande opérationnelle

Elle est cadencée à une fréquence réglable fixée par défaut à 25 *ms*. Les différents blocs présentés dans le schéma 3.4 décrivant le fonctionnement de cette structure, à la fin du chapitre 3, sont présents dans le simulateur, simulateur dont le fonctionnement peut être décrit par ce schéma.

**Génération des consignes opérationnelles et schéma de basculement** C'est ici que se situe la différence entre les deux versions du simulateur.

Dans la version avec planification, ce bloc permet la génération d'un plan initial (planification de mouvement à partir d'informations fournies par l'utilisateur (situation de départ, d'arrivée, consigne d'effort) et des caractéristiques du système (vitesses admissibles ...). Il permet aussi l'adaptation du plan à partir des informations capteurs et la replanification partielle afin d'adapter la vitesse opérationnelle à l'optimisation des objectifs secondaires.

Dans la version télé-opérée, les consignes opérationnelles sont issues d'un joystick virtuel contrôlé par l'utilisateur. Ces consignes passent par un filtre passe bas conçu et adapté en ligne pour respecter les contraintes sur les vitesses et accélérations du système.

Le schéma de basculement permet quant à lui la gestion du passage d'une tâche locale à une autre et gère la commutation des lois de commande et la génération des indicateurs destinés au planificateur.

**Lois de commande opérationnelle** Diverses lois de commande opérationnelle peuvent être intégrées. Leur paramètres sont bien sûr réglables. La contrainte sur la grandeur de commande des actionneurs impose des lois de commande cinématique. Citons parmi celles qui ont été testées un PID dans l'espace opérationnel pour le contrôle du mouvement en espace libre et une loi de commande hybride pour les tâches locales de manipulation mobile au contact. Nous revenons dans la partie résultat sur la structure de ces lois de commande.

**Inversion cinématique** Ce bloc se décompose en deux parties. La première gère la partie calcul de l'inversion cinématique (calcul de la pseudo-inverse pondérée, du projecteur ...). La seconde s'attache plus particulièrement à la gestion du terme lié à la redondance ( $\mathbf{u}_0$ ). Elle permet l'évaluation des fonctions potentiel, l'arbitrage, la transition entre objectifs secondaires, la mise à l'échelle des vitesses et des accélérations et la génération d'indicateurs destinés au bloc de génération de consignes.

#### 4.2.2 Résultats de simulation pour une mission planifiée

La *mission type* « Va écrire au tableau » retenue est assez complexe pour permettre d'illustrer l'ensemble des développements que nous avons menés mais également assez simple dans son principe afin de faciliter l'analyse des résultats obtenus. Cette mission à trajectoire opérationnelle imposée est composée de trois tâches locales :

1. la première correspond à un mouvement en espace libre du manipulateur mobile de sa situation de départ vers une situation intermédiaire proche de la surface de contact ;
2. la seconde est aussi un mouvement en espace libre mais pour cette tâche locale, à moins qu'un objectif secondaire de priorité supérieure ne soit activé, l'objectif secondaire de minimisation du pic d'effort lors du contact planifié sur la surface est actif par défaut ;
3. enfin, la troisième consiste à effectuer un mouvement opérationnel au contact de la surface du tableau (loi de commande hybride).

Le principe général est rappelé par la figure 4.2. Cette mission type est également celle retenue pour l'expérimentation.

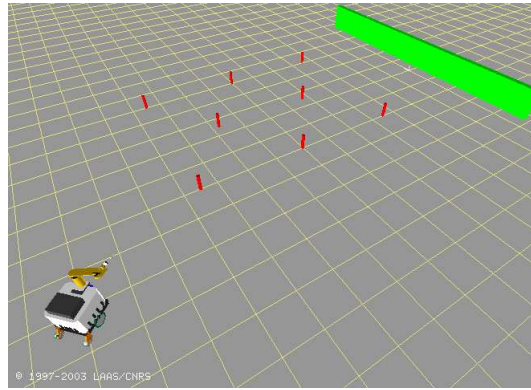
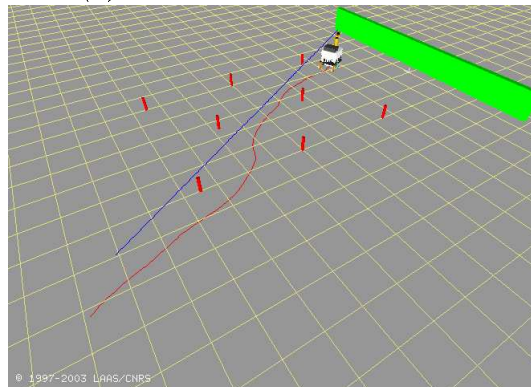
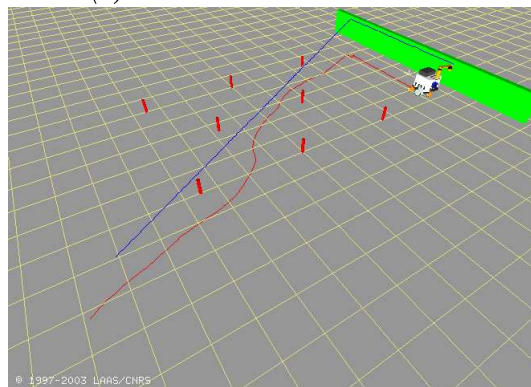
(a) *Mouvement en espace libre*(b) *Transition vers le contact*(c) *Mouvement au contact*

FIG. 4.2 – « Va écrire au tableau » : décomposition en trois tâches locales

#### 4.2.2.1 Paramètres de la mission

Les données d'entrée spécifiques à cette mission sont :

- la situation initiale  $\xi_{01}$  de l'*OT* ;
- la situation intermédiaire  $\xi_{12}$  de l'*OT* à l'instant du basculement de la tâche locale 1 vers la tâche locale 2 ;
- la situation intermédiaire  $\xi_{23}$  de l'*OT* à l'instant du basculement de la tâche locale 2 vers la tâche locale 3 ;
- la situation finale  $\xi_{3f}$  de l'*OT* à la fin de la tâche locale 3 ;
- la consigne d'effort normal à la surface de contact.

A partir de ces données, des profils trapézoïdaux de vitesse et d'effort opérationnels sont calculés. Ces profils correspondent à un déroulement parfait de la mission et sont représentés sur la figure 4.3. Notons tout d'abord que, par convention, le repère de référence est

choisi de telle manière à ce que la normale à la surface de contact soit alignée avec l'axe  $\vec{x}$ . Ainsi, si le plan se déroule parfaitement, la vitesse de l'organe terminal est nulle à l'instant  $t_i$  du contact et la consigne  $\dot{\xi}_1(t)^*$  de vitesse le long de la normale au contact est remplacée par la consigne d'effort  $f_1(t)^*$ .

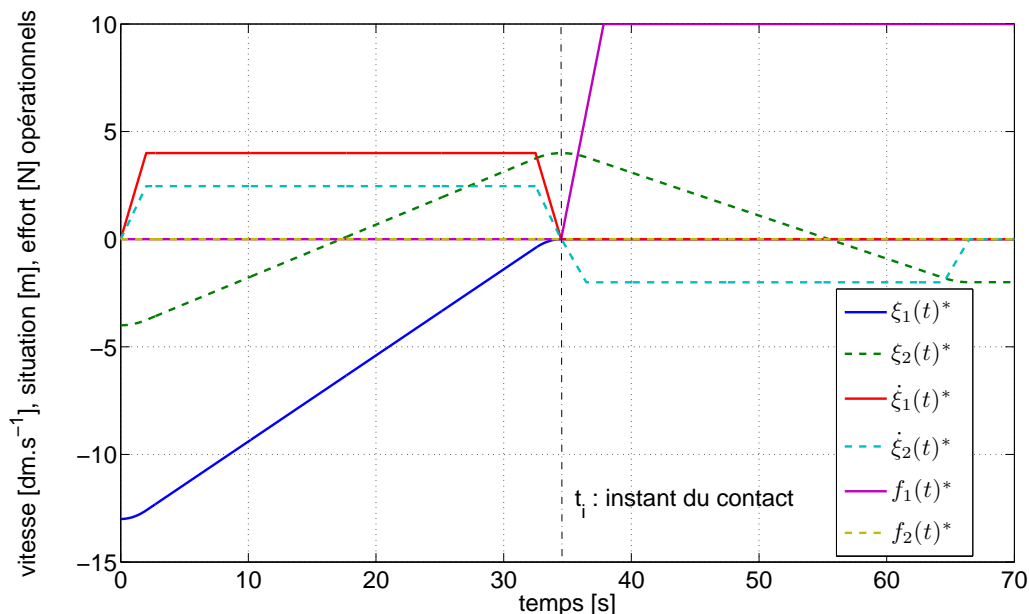


FIG. 4.3 – Profils opérationnels de consigne planifiés en début de mission

En ce qui concerne les objectifs secondaires et leurs fonctions potentiel associées, nous en considérons six :

- 1 - maximisation de la distance à la butée articulaire associée à  $q_{b1}$  ;
- 2 - maximisation de la distance à la butée articulaire associée à  $q_{b2}$  ;
- 3 - maximisation de la manipulabilité  $\omega_b$  ;
- 4 - maximisation de la distance aux obstacles sur le passage de la trajectoire opérationnelle ;
- 5 - maximisation de la distance aux obstacles à longer ;
- 6 - minimisation du pic d'effort à l'impact.

Les matrices  $N$  et  $P$  qui fixent les priorités pour chaque tâche locale entre les différents critères secondaires, sont données par :

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

$$P = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

De manière générale, il est judicieux de donner la priorité aux contraintes pour lesquelles aucun garde-fou logiciel n'existe. Pour toutes les contraintes prises en compte ici, il est possible mettre en place des sécurités logicielles allant de la simple saturation des consignes envoyées aux actionneurs à l'arrêt complet du système (par exemple en coupant les variateurs de puissance). Notre choix de priorité n'est donc ici guidé que par l'exigence que nous avons formulée en terme de suivi du chemin opérationnel. Ainsi nous donnons

la priorité la plus élevée (4) à la maximisation de la distance aux butées articulaires. En effet, le blocage d'une des articulations entraîne nécessairement la perte de coordination du mouvement et donc le non respect de la contrainte opérationnelle (d'un point de vue géométrique et temporel). Ce n'est pas nécessairement le cas des saturations de vitesse qui peuvent être répercutées sur l'ensemble des actionneurs de manière à conserver la coordination du mouvement et donc le respect de la contrainte opérationnelle (du point de vue géométrique).

#### 4.2.2.2 Lois de commande utilisées

La contrainte expérimentale sur le type des consignes qui peuvent être envoyées aux actionneurs nécessite l'emploi de lois de commande qui ne permettent pas de pré-compensation des effets dynamiques (c'est très gênant au moins pour la gravité) ni de prise en compte directe de la mesure issue d'un capteur d'effort. Des déplacements à vitesse et accélération modérées ainsi que des efforts d'interaction à des niveaux d'effort réduits permettent de limiter les effets dynamiques et donc d'assurer un niveau de performance acceptable pour le système. En ce qui concerne la transformation d'une grandeur de type force en une grandeur de type vitesse, un modèle local du comportement de l'interaction permet d'assurer un bon niveau de performance de la boucle d'effort.

Ainsi, en espace libre, seule la vitesse opérationnelle est à contrôler et un contrôleur opérationnel de la forme :

$$\mathbf{u}(t)^* = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \left( \dot{\boldsymbol{\xi}}(t)^* + W_{reg} (\boldsymbol{\xi}(t)^* - \boldsymbol{\xi}(t)) \right) + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0,$$

où  $W_{reg}$  est une matrice définie positive, permet, dans la mesure où les correcteurs articulaires sont capables de rejeter les perturbations liées aux termes non précompensés, d'assurer la convergence de l'erreur  $e_\xi(t) = \boldsymbol{\xi}(t)^* - \boldsymbol{\xi}(t)$  vers 0.

Au contact, la loi de commande hybride s'écrit :

$$\mathbf{u}(t)^* = \mathbf{u}_v(t) + \mathbf{u}_f(t) + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0, \quad (4.1)$$

avec :

$$\mathbf{u}_v(t) = \bar{B}(\mathbf{q})^\# S \dot{\boldsymbol{\xi}}_v(t)', \quad (4.2)$$

$$\mathbf{u}_f(t) = \bar{B}(\mathbf{q})^\# (\mathcal{I}_m - S) \dot{\boldsymbol{\xi}}_f(t)'. \quad (4.3)$$

$S$  est la matrice de sélection des directions opérationnelles commandées en mouvement. Dans notre exemple, si le repère de référence est positionné au point d'impact, avec  $\vec{x}$  colinéaire à la normale au plan de contact, alors  $S$  vaut :

$$S = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

En effet, c'est la direction  $\vec{x}$  qui est contrôlée en effort et la direction  $\vec{y}$  qui est contrôlée en mouvement.

$\dot{\boldsymbol{\xi}}_v(t)'$  et  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_f(t)'$  sont les vecteurs de commande opérationnelle correspondant respectivement au mouvement et à l'effort à produire. De manière similaire à la loi de commande pour le mouvement en espace libre,  $\dot{\boldsymbol{\xi}}_v(t)'$  est choisi comme :

$$\dot{\boldsymbol{\xi}}_v(t)' = \dot{\boldsymbol{\xi}}(t)^* + W_{reg} (\boldsymbol{\xi}(t)^* - \boldsymbol{\xi}(t)).$$

En ce qui concerne  $\dot{\xi}_f(t)'$ , il est donné par :

$$\dot{\xi}_f(t)' = \hat{K}_e^{-1} \left( \mathbf{f}_{OT}(t)^* + W_p (\mathbf{f}_{OT}(t)^* - \mathbf{f}_{OT}(t)) + W_i \int_{t_i}^t (\mathbf{f}_{OT}(s)^* - \mathbf{f}_{OT}(s)) ds \right),$$

où  $W_p$  et  $W_i$  sont deux matrices définies positives et  $\hat{K}_e$  est une estimée de la matrice de raideur de l'interaction. Cette méthode permet de construire à partir de l'erreur sur l'effort opérationnel de consigne, une consigne de vitesse opérationnelle équivalente. C'est une version simplifiée de la commande en impédance dans l'espace opérationnel avec retour d'effort explicite ([SICILIANO 99], [KHALIL 02]).

### 4.2.2.3 Résultats de simulation

#### Mouvement opérationnel

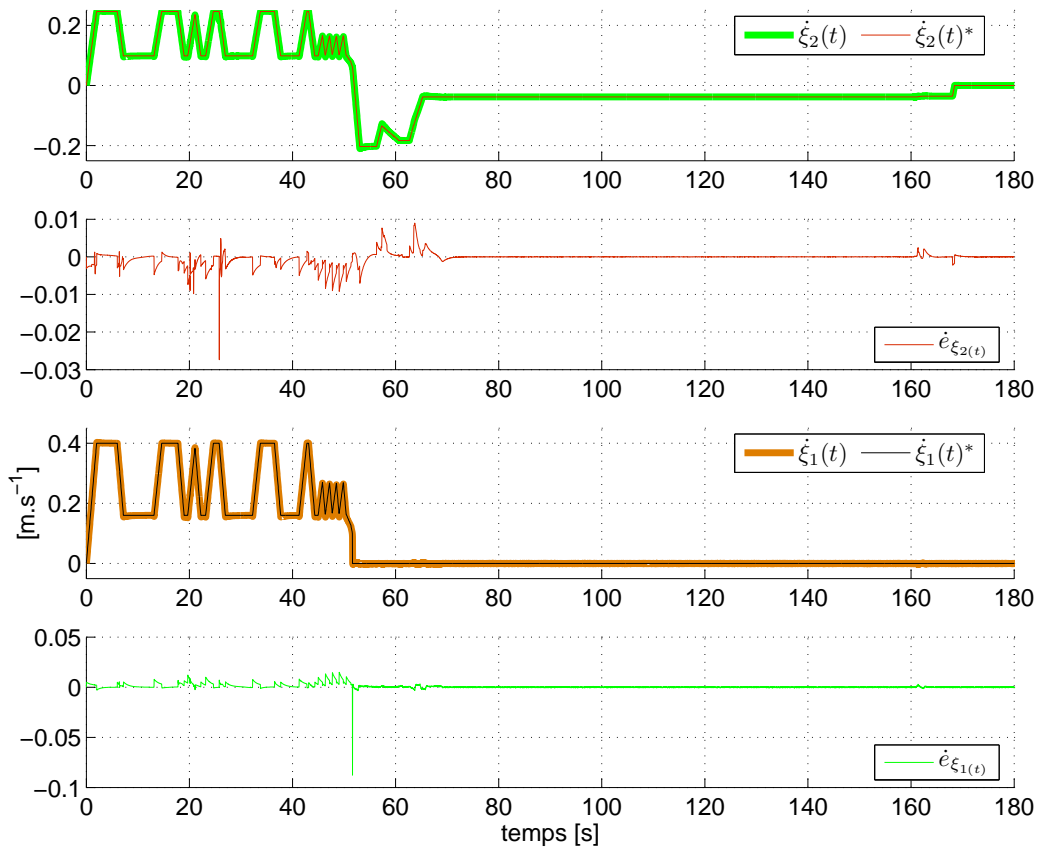


FIG. 4.4 – Profils de mouvement opérationnel réels et de consigne

Le plan initial calculé en début de mission (figure 4.3), ne tient pas compte de la présence éventuelle d'obstacles présents sur le parcours du système. Il tient encore moins compte des éventuelles situations où, par exemple, une butée articulaire est à éviter puisque les consignes articulaires sont générées de manière strictement réactive. Ainsi, comme nous l'avons présenté au chapitre précédent, il peut être utile, au cours de la mission, de replanifier les trajectoires opérationnelles afin de tenir compte des ralentissements nécessaires à une optimisation locale efficace des fonctions potentiel associées aux contraintes secondaires. Ces replanifications engendrent des modifications dans le déroulement temporel de

la mission et le profil opérationnel de consigne en mouvement, adapté et mis à jour tout au long de la mission, est donné sur la figure 4.4. Les consignes opérationnelles en vitesse ( $\dot{\xi}_1(t)^*$ ,  $\dot{\xi}_2(t)^*$ ) ainsi que les vitesses opérationnelles réelles ( $\dot{\xi}_1(t)$ ,  $\dot{\xi}_2(t)$ ) sont données pour chacune des directions opérationnelles contrôlées. Les erreurs entre vitesse de consigne et vitesse réelle ( $\dot{e}_{\xi_1}(t)$ ,  $\dot{e}_{\xi_2}(t)$ ) sont aussi fournies pour chacune des directions opérationnelles. Les replanifications apparaissent clairement et le mouvement opérationnel étant coordonné, elles modifient le profil de vitesse dans chacune des directions opérationnelles. Ces replanifications sont en premier lieu utilisées pour ralentir le mouvement opérationnel ce qui explique la durée plus importante de la mission par rapport à la durée planifiée (environ 171 secondes au lieu des 66 secondes planifiées).

### Objectifs secondaires

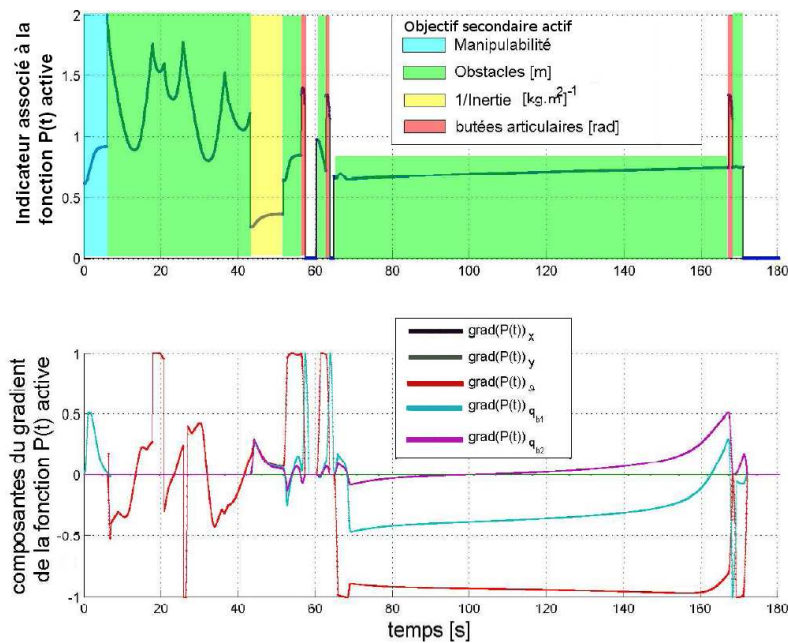


FIG. 4.5 – Evolution de la valeur des indicateurs associés aux fonctions potentiel activées et du gradient normalisé associé

Afin de corréliser les instants de replanification opérationnelle avec le déroulement de la mission, il est intéressant d’observer le déroulement de la mission en terme d’objectif secondaire actif. C’est l’objet de la figure 4.5 qui présente :

- les zones temporelles où chacun des objectifs secondaires a été activé ainsi que la valeur du potentiel associé.
- le gradient normalisé  $\nabla^T \mathcal{P}(\mathbf{q})$  de la fonction potentiel active.

Le premier objectif secondaire activé est celui associé à la maximisation de la manipulabilité. Le gradient correspondant n’a qu’une composante selon  $q_{b1}$ . Cela peut sembler étrange mais en revenant à l’expression du déterminant de  $\bar{J}\bar{J}^T$ , introduite au chapitre 2 dans l’exemple sur le manipulateur mobile à roues similaire à celui utilisé pour ses simulations, nous constatons qu’il ne dépend que de  $q_{b1}$ .

Le second objectif secondaire correspond à l’évitement d’obstacles. Le but ici est de maximiser la distance aux obstacles. En observant l’environnement de la mission sur la figure 4.2, nous observons que le système doit traverser une zone encombrée d’obstacles « bas » (en rouge sur les images). Nous retrouvons ces obstacles sur la figure présentant



les valeurs des indicateurs associés aux fonctions potentiel activées. Ils sont cinq et correspondent aux cinq lobes présents dans la seconde zone de la figure (en vert). Si la distance aux obstacles a tendance à diminuer, l'utilisation de la fonction potentiel permet de limiter cette diminution qui est liée au fait que la trajectoire de l'organe terminal passe à proximité de ces obstacles. Le gestion du passage d'un obstacle à un autre est faite grâce aux seuils de sensibilité définis autour de chaque obstacle et qui sont utilisés pour l'arbitrage entre fonctions potentiel. L'évitement efficace d'obstacle nécessite la diminution de la vitesse opérationnelle et donc une replanification de cette vitesse. Ainsi, la corrélation entre obstacle à éviter et replanification se fait très facilement en comparant la figure 4.5 à la figure 4.4 où nous observons cinq replanifications, une pour chaque obstacle.

La zone jaune correspond à la minimisation de l'inertie du système dans la direction opérationnelle alignée avec la normale à la surface de contact. Elle intervient avant l'impact et nous observons que cette maximisation est bien effective. Elle engendre plusieurs replanifications qui sont liés à un choix trop sensible des conditions de replanification associées à cet objectif secondaire.

Une fois le contact établi, c'est l'évitement de la surface de contact qui devient prioritaire et qui alterne avec des évitements de butés articulaires, l'éloignement entre la plateforme et le mur ayant tendance à étendre le bras manipulateur. Chaque évitement de butée articulaire est associé à une replanification de vitesse opérationnelle.

### Effort d'interaction

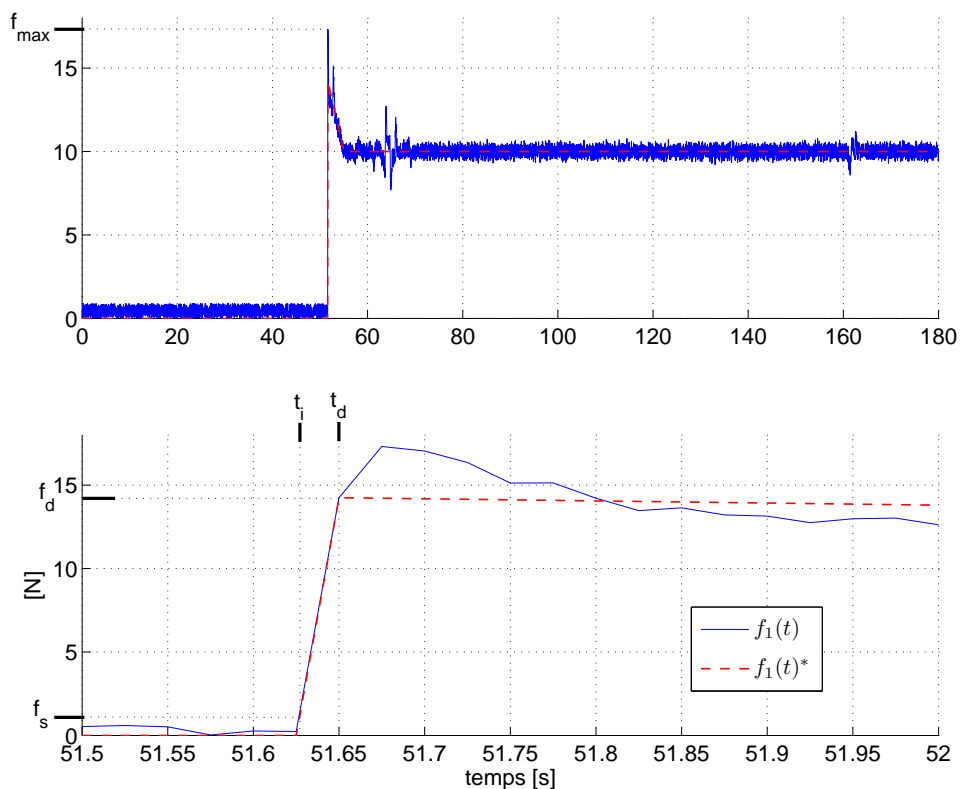


FIG. 4.6 – Effort opérationnel normal à la surface de contact : vue générale et détail de la zone temporelle correspondant au contact

Le contrôle de l'effort opérationnel est illustré par la figure 4.6 qui fournit l'évolution de l'effort opérationnel normal à la surface de contact. Elle indique aussi :

- le retard à la détection ainsi que le profil de consigne replanifié à l'instant du contact  $t_i$  ;
- $f_{max}$ , la valeur maximale de l'effort au moment de l'impact ;
- $f_s$ , le seuil de détection du contact ;
- $f_d$ , la valeur de l'effort à l'instant  $t_d$  où le contact est détecté.

$f_d$  est utilisée pour planifier une trajectoire de ralliement à la consigne d'effort. Ceci permet d'assurer la continuité de la consigne d'effort une fois le contact établi mais aussi d'éviter la génération de grand terme de correction par la loi de commande en effort. De tels termes peuvent engendrer des efforts de consigne calculés dont la norme est supérieure à l'effort d'interaction courant et dont le signe est inversé. Cela peut mener à la perte du contact et des phénomènes de rebond qui peuvent être extrêmement dommageables au robot et à son environnement.

Le fait d'avoir minimisé l'inertie du système avant le contact permet aussi de limiter la valeur  $f_{max}$  du pic d'effort ce qui favorise beaucoup la stabilisation de l'effort autour de sa valeur de consigne.

### Basculement d'objectif opérationnel

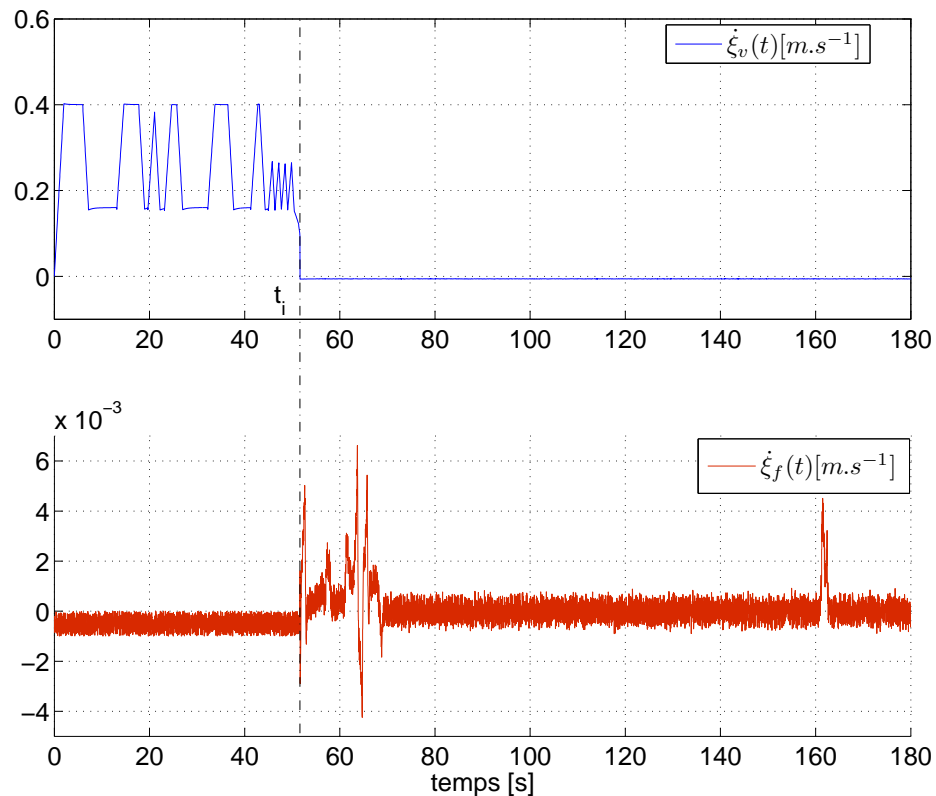


FIG. 4.7 – Termes de la commande opérationnelle (mouvement et effort) selon la direction contrôlée en effort

Le basculement d'objectif opérationnel, qui survient lors de du contact de l'*OT* avec la surface du mur, est apparent sur l'ensemble des figures présentées. Du point de vue

opérationnel, cela se traduit par le contrôle en effort de la direction normale à la surface de contact et le contrôle en vitesse de la direction tangente. C'est l'application des techniques de commande hybride qui permet la composition des signaux de commande opérationnelle à partir d'une matrice de sélection des directions contrôlées. Le signal de commande opérationnelle ainsi formé est donné par les relations (4.1), (4.2) et (4.3). Les termes de consigne opérationnelle  $\dot{\xi}_v(t)^*$  et  $\dot{\xi}_f(t)^*$  (notons que  $\dot{\xi}(t)^* = S\dot{\xi}_v(t)^* + (\mathcal{I}_m - S)\dot{\xi}_f(t)^*$ ) issus des contrôleurs opérationnels en vitesse et en effort sont donnés par la figure 4.7 pour la direction opérationnelle normale au contact. Le terme associé à la vitesse opérationnelle devient nul une fois le contact détecté tandis que le terme associé à l'effort opérationnel commence alors à évoluer. Il faut noter la faible amplitude du signal de consigne associé au contrôle de l'effort opérationnel. Ceci est dû à « l'importante » raideur de la surface de contact :  $9000 \text{ N.m}^{-1}$  ( $\hat{K}_e$  est choisi proche de cette valeur).

### Vitesses articulaires

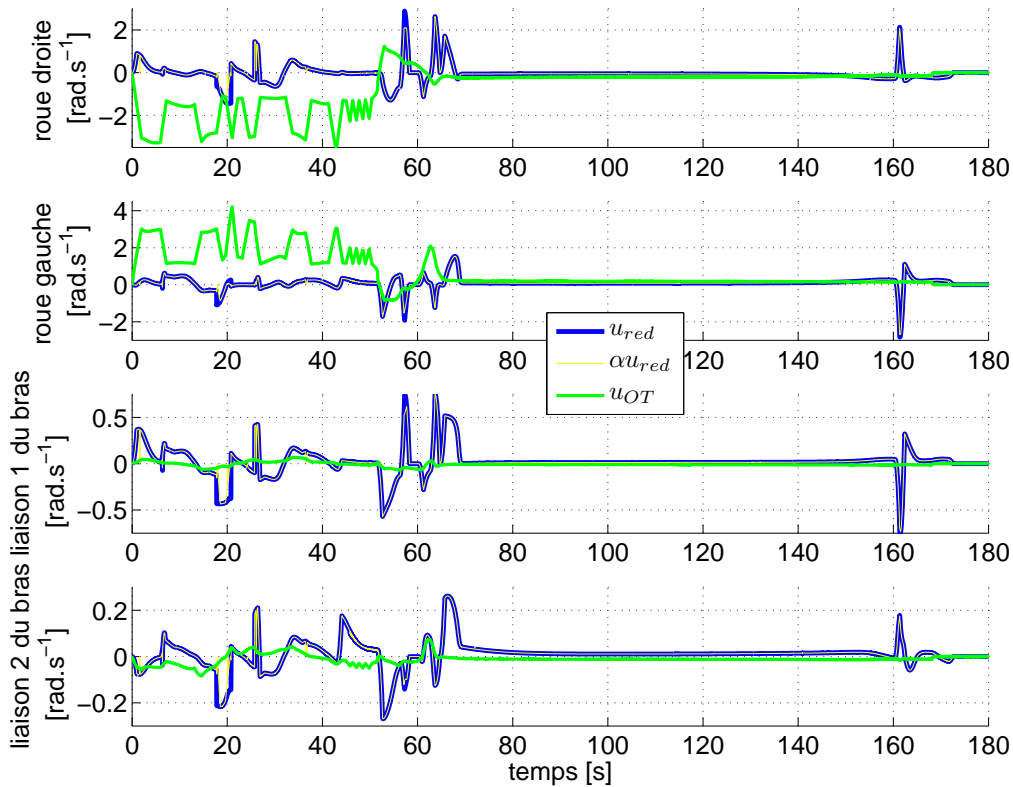


FIG. 4.8 – Décomposition de la consigne de vitesse articulaire et effet de la mise à l'échelle des vitesses

**Consignes** La figure 4.8 fournit la décomposition de la consigne de vitesse articulaire, calculée en utilisant le modèle cinématique inverse. Cette décomposition fait apparaître deux termes, l'un lié au mouvement de l' $OT$  et l'autre à l'utilisation de la redondance du système pour l'optimisation d'objectifs secondaires, ainsi que le coefficient  $\alpha$  de mise à l'échelle des vitesses :

$$\mathbf{u}(t)^* = \mathbf{u}(t)_{OT} + \alpha \mathbf{u}(t)_{red},$$

où :

$$\mathbf{u}(t)_{OT} = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \dot{\xi}(t)'$$

est le terme lié au mouvement opérationnel et :

$$\mathbf{u}(t)_{red} = \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0$$

est le terme lié à la redondance du système et utilisé pour l'optimisation d'objectifs secondaires.

Cette figure met en lumière quatre points importants :

- les actionneurs du bras manipulateur sont peu sollicités par rapport à ceux de la plateforme. Nous n'avons, lors de cette simulation particulière, pas utilisé de pondération pour le calcul de la pseudo-inverse de  $\bar{B}(\mathbf{q})$ . La pondération associée à chaque actionneur est donc similaire. Cette différence est donc intrinsèque au système et s'explique par la faible vitesse opérationnelle fournie par une rotation de  $q_{b2}$  par rapport à celle fournie par une rotation identique de l'actionneur des roues droite ou gauche. Cette différence peut être amplifiée ou gommée en fonction de la pondération choisie au moment du calcul de la pseudo-inverse pondérée utilisée pour l'inversion cinématique.
- la mise à l'échelle intervient peu dans le redimensionnement du terme lié à la redondance. Cela est dû au ralentissement opérationnel qui permet de libérer des capacités d'actionnement en faveur des objectifs secondaires et par ce biais de diminuer les recours à la mise à l'échelle des vitesses articulaires de consigne associées au terme de redondance.
- les pics du terme  $\mathbf{u}(t)_{red}$  sont liés principalement à l'évitement des butées articulaires (par exemple autour de  $t = 160$  s). Ceci est à relier au type de fonction potentiel, utilisé pour cet évitement, qui est fortement répulsif (fonction en cuvette avec une pente nettement marquée autour des valeurs critiques) et donc très efficace. Cela est aussi dû au ralentissement opérationnel important qui est programmé pour ce type d'objectif secondaire.
- nous retrouvons dans le profil  $\mathbf{u}(t)_{OT}$  pour la roue droite et la roue gauche, la forme générale du profil de consigne opérationnel. Ceci illustre encore le fait que la majeure partie du mouvement du système est généré par la plateforme.

Une remarque d'ordre générale peut être faite ici : si l'évolution des vitesses de consigne articulaire peut sembler très rapide, voire discontinue, cela n'est pas le cas et l'ensemble des contraintes sur les vitesses et accélérations maximales est respecté.

**Vitesses réelles** Les vitesses de consigne articulaires  $\mathbf{u}(t)^*$  ainsi que les vitesses articulaires réelles  $\mathbf{u}(t)$  sont données sur la figure 4.9. Même si l'échelle de temps ne permet pas une appréciation fine des performances du correcteur articulaire, cette figure permet d'apprécier le bon comportement global du suivi de consigne articulaire. La différence entre la sollicitation des actionneurs de la plateforme (au maximum  $4 \text{ rad.s}^{-1}$ ) et du bras manipulateur (au maximum  $0,5 \text{ rad.s}^{-1}$ ) se retrouve bien entendu sur ces courbes. Un phénomène similaire est par ailleurs observé au niveau du bras manipulateur où l'actionneur de la première liaison est environ deux fois plus sollicité que celui de la seconde. Ceci est là aussi dû aux capacités de chacune de ces liaisons à produire du mouvement opérationnel.

Les vitesses de la plateforme exprimées en  $v$  et  $\omega$  sont données par la figure 4.10. La vitesse linéaire de la plateforme présente, assez logiquement, un profil similaire au profil opérationnel et des mouvements opérationnels en ligne droite étant planifiés, il est possible de conclure que la rotation de la plateforme est principalement due aux objectifs secondaires. Cela est particulièrement marqué dans la phase de mouvement au contact où les seules rotations d'intensité importante de la plateforme sont dues à l'évitement du mur en début de contact et aux évitements de butée articulaire.

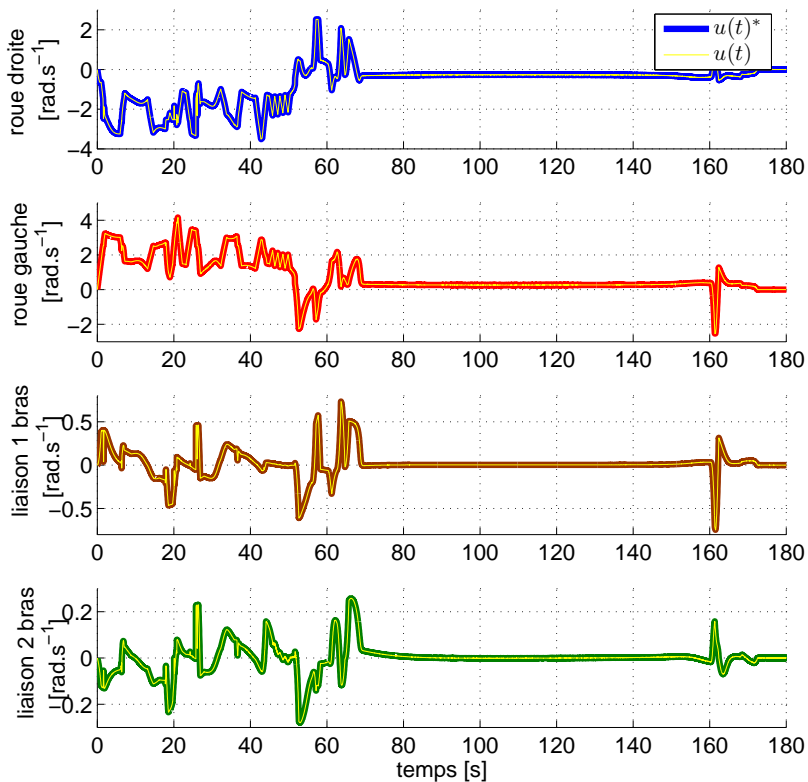


FIG. 4.9 – Vitesses de consigne articulaires et réelles

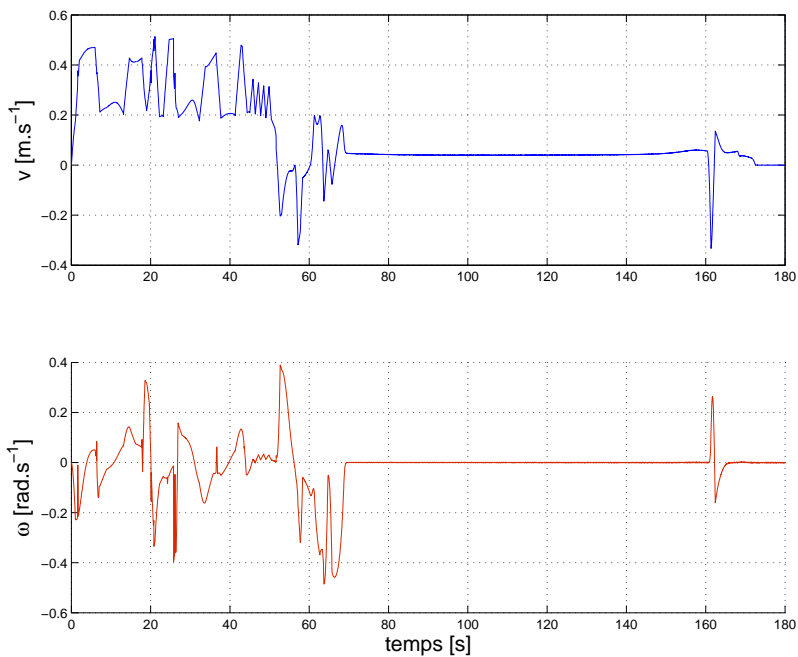


FIG. 4.10 – Vitesses de la plateforme  $v$  et  $\omega$

### Couples moteurs

Les couples moteurs et résistants sont donnés sur la figure 4.11. L'intérêt de telles courbes est de montrer les origines différentes des couples résistants en fonction du type de tâche locale dans lequel se situe la mission. Jusqu'à l'impact, le couple résistant est uniquement dû aux effets dynamiques (inertie et centrifuges). Ainsi le pic de couple résistant présent sur les moteurs des deux roues (à  $t \approx 27$  s) est dû à une manœuvre de rotation rapide (accélération importante  $\Rightarrow$  effets inertiels) de la plateforme qui se retrouve par ailleurs sur la courbe de la figure 4.10 représentant la vitesse  $\omega$  de rotation. Une fois le contact établi, ces couples résistants sont principalement dûs à la répercussion des efforts d'interaction sur les actionneurs (terme  $\bar{J}(\mathbf{q}) \mathbf{f}_{ext/OT}$ ). L'évolution de cette part des couples résistants (avant réducteur) est fournie par la figure 4.12. Bien entendu avant le contact, ces couples résistants sont nuls. Ils prennent leur valeur maximale durant le régime transitoire de l'effort normal (pic d'effort). Leur évolution n'est ensuite pas constante puisqu'elle est liée à l'évolution de  $\bar{J}(\mathbf{q})$  et donc de la configuration  $\mathbf{q}$  du système.

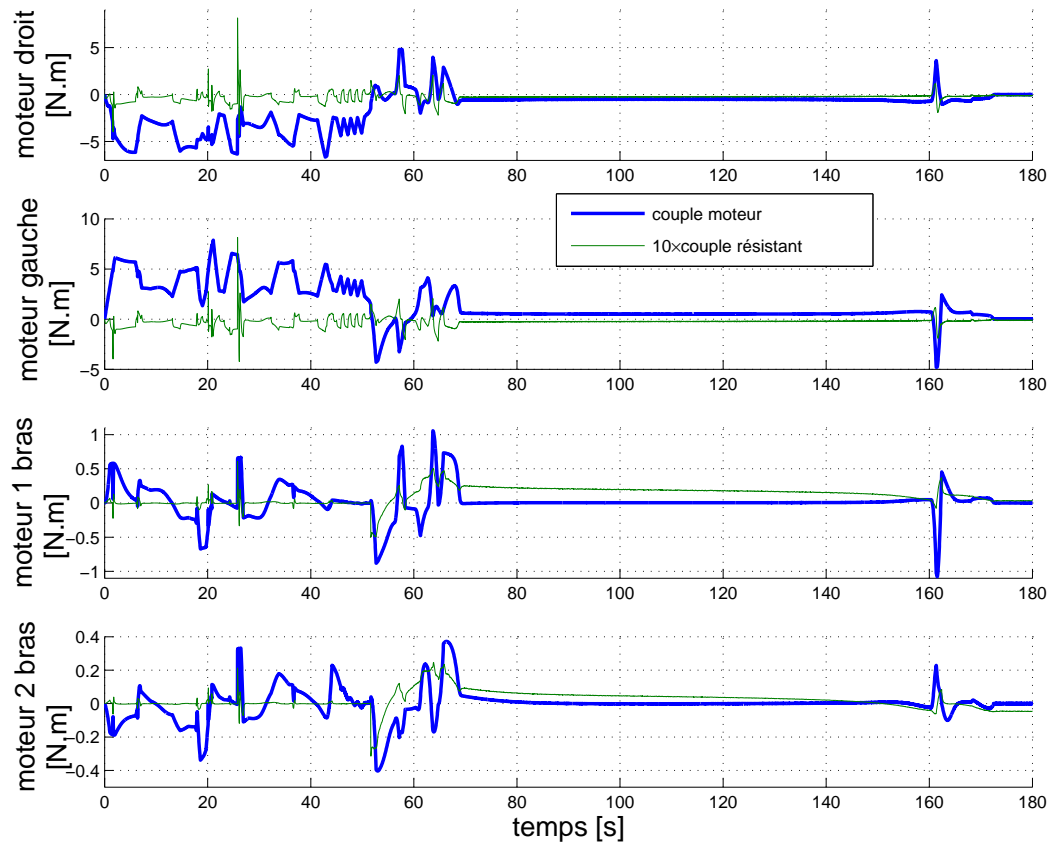


FIG. 4.11 – Couples moteurs et résistants

### Configuration du système

L'évolution de la configuration du système est donnée par la figure 4.13. La position  $(x, y)$  de la plateforme est tracée avec la position  $(\xi_1, \xi_2)$  de l'OT afin de montrer les différences entre le parcours de l'OT et celui du point  $O_p$ . Le chemin suivi par l'OT étant composé de lignes droites, ces différences sont ici aussi principalement liées à la satisfaction

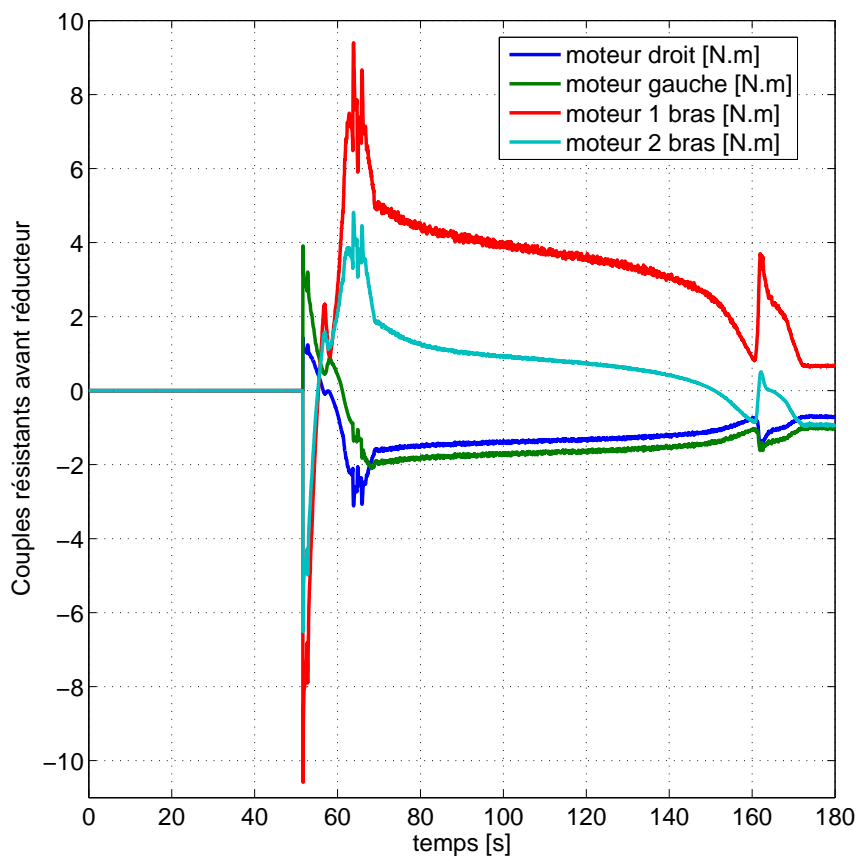


FIG. 4.12 – Part du couple résistant (avant réducteur) liés à l'interaction opérationnelle

des objectifs secondaires. Afin de mettre en avant ces différences de manière plus précise, la figure 4.14 présente l'évolution temporelle de la distance  $d(O_p, OT)$ . La valeur moyenne sur l'ensemble de cette distance est aussi représentée. Cette courbe ainsi que celle représentant les vitesses des articulations  $q_{b1}$  et  $q_{b2}$  montrent que malgré une vitesse d'évolution peu élevée, la configuration du bras manipulateur évolue tout au long de la mission. Elle passe notamment de  $-1,26 \text{ rad}$  à  $1,36 \text{ rad}$  pour  $q_{b1}$  entre le début et la fin de la mission. Les variations de la distance  $d(O_p, OT)$  ne sont d'ailleurs dûes qu'au seul mouvement du bras manipulateur.

Une vue globale de la mission est donnée sur la figure 4.15 où la trace bleue représente le chemin suivi par l' $OT$  et la trace rouge celui suivi par le point  $O_p$  (milieu de l'axe des roues motrices).

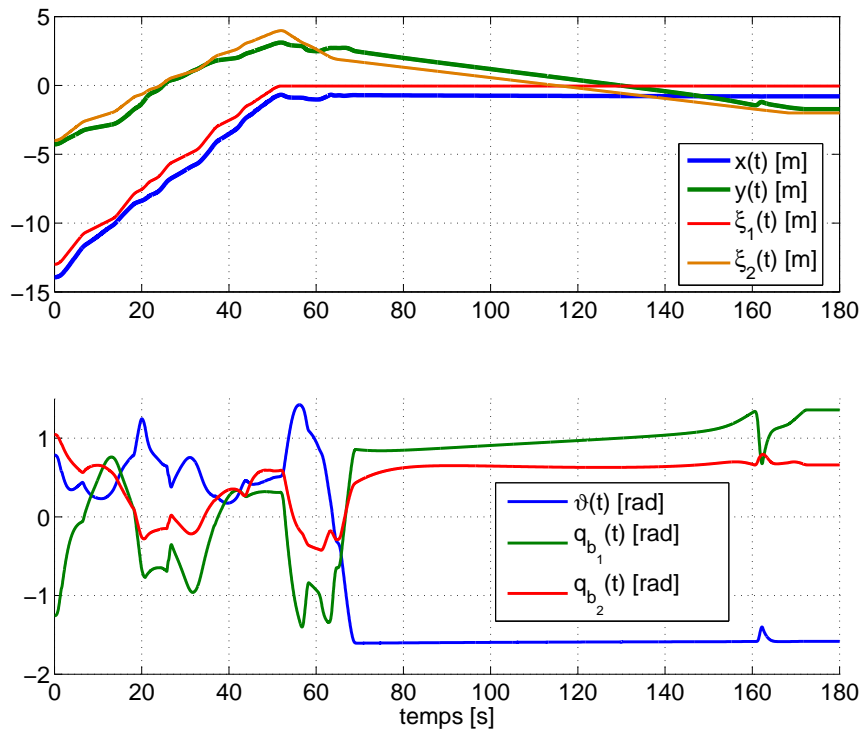
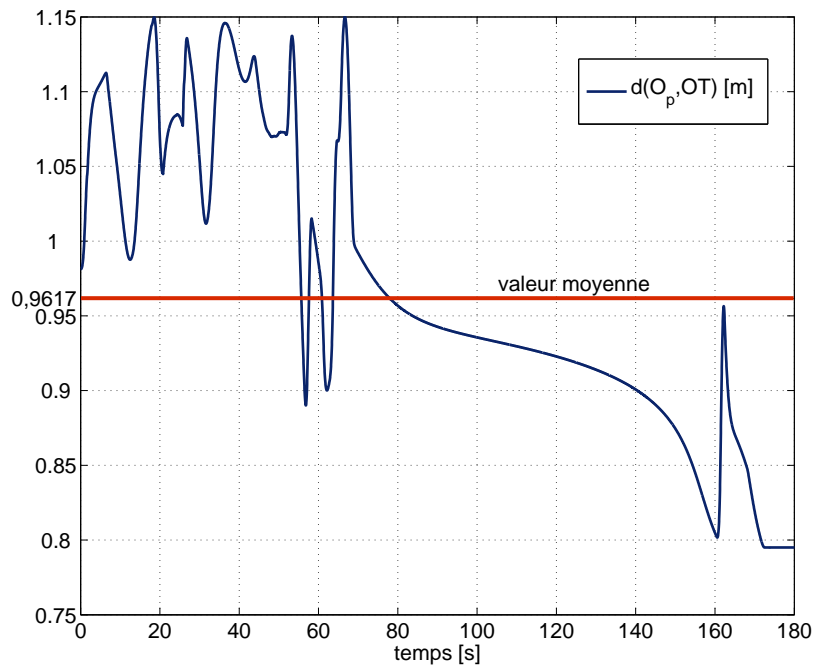


FIG. 4.13 – Evolution de la configuration du système

FIG. 4.14 – Evolution de la distance  $d(O_p, OT)$



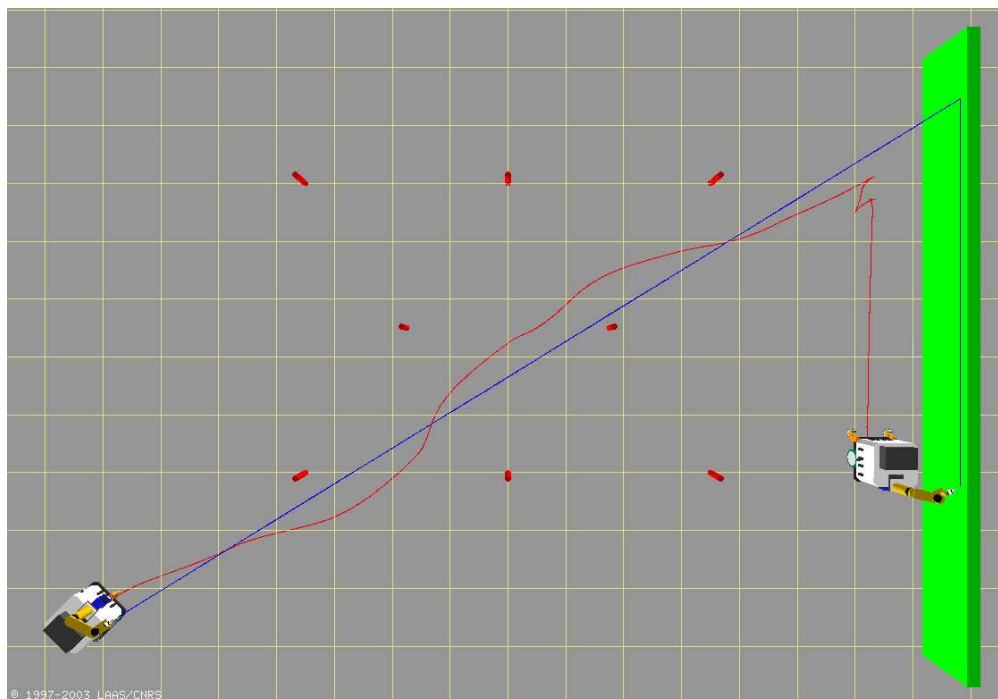


FIG. 4.15 – Vue globale de la mission

#### 4.2.2.4 Quelques résultats connexes

Les résultats présentés ici sont issus d'autres simulations de la même mission et illustrent différents points pas spécifiquement mis en avant par les résultats présentés dans la partie précédente.

##### Pic d'effort

La figure 4.16, extraite des résultats présentés dans [PADOIS 04a], illustre l'effet de l'utilisation d'un schéma de réduction des efforts d'impact sur le pic d'effort observé.

Il est important de remarquer que l'utilisation d'un tel schéma influence surtout la configuration du bras manipulateur, celle de la plateforme étant aussi modifiée afin d'assurer le maintien de la contrainte opérationnelle. Cela est dû à l'expression de la matrice d'inertie  $\bar{A}(\mathbf{q})$  du système dont l'expression dépend majoritairement de la configuration du bras manipulateur plutôt que de celle de la plateforme. Cette influence est illustré sur la figure 4.17 par la comparaison entre les vitesses et coordonnées généralisées du système dans le cas où l'objectif secondaire de réduction des efforts d'impact est présent ou non.

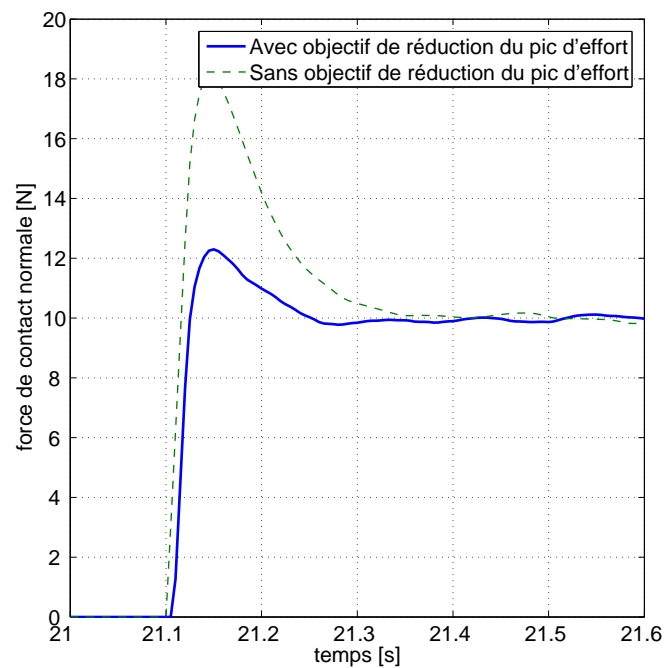
##### Rebonds

Le phénomène de rebond est illustré par la figure 4.18 qui présente le profil d'effort normal (avant capteur donc non bruité pour plus de clarté) au contact ainsi qu'une vue de la mission à l'instant du contact. Ce phénomène est ici dû à une grande sous-estimation ( $100 \text{ N.m}^{-1}$  au lieu de  $9000 \text{ N.m}^{-1}$  en réalité) de la raideur du contact.

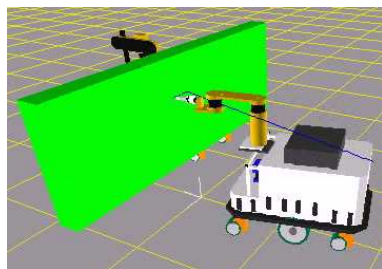
Lorsque cette raideur est sous-estimée, le déplacement équivalent à l'effort désiré est plus grand que celui réellement nécessaire pour exercer l'effort voulu. Cela engendre un effort très important au moment de l'impact et donc un terme de correction calculé lui aussi très important. Si ce terme est supérieur à l'effort d'interaction courant et de signe

inversé par rapport à celui-ci, le contact est rompu. Le correcteur d'effort étant toujours actif, il tend à rétablir le contact et un processus de rebond est lancé qui peut ne pas converger vers l'établissement d'un contact stable (effort d'interaction contrôlé). Cela peut bien sûr être très destructeur pour le robot et son environnement.

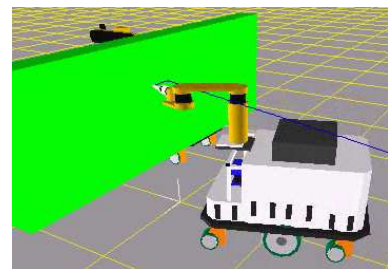
De manière générale, il est conseillé de sur-estimer la raideur du contact, cela n'ayant pour effet que de réduire le pic d'effort, les termes correcteurs calculés et la vitesse de convergence de l'erreur d'effort. Mieux encore, il peut être intéressant de mettre en place un schéma de commande adaptatif basé sur l'identification en ligne de la raideur du contact. C'est ce que proposent J. PARK et O. KHATIB dans leur travaux sur la téléopération haptique robuste d'un manipulateur mobile à roues (plateforme omnidirectionnelle) utilisé notamment pour des tâches de préhension d'objet ([PARK 04]).



(a) Mesure de l'effort normal à la surface de contact



(b) Configuration sans réduction des efforts d'impact



(c) Configuration avec réduction des efforts d'impact

FIG. 4.16 – Effet d'un schéma de réduction des efforts d'impact sur le pic d'effort observé

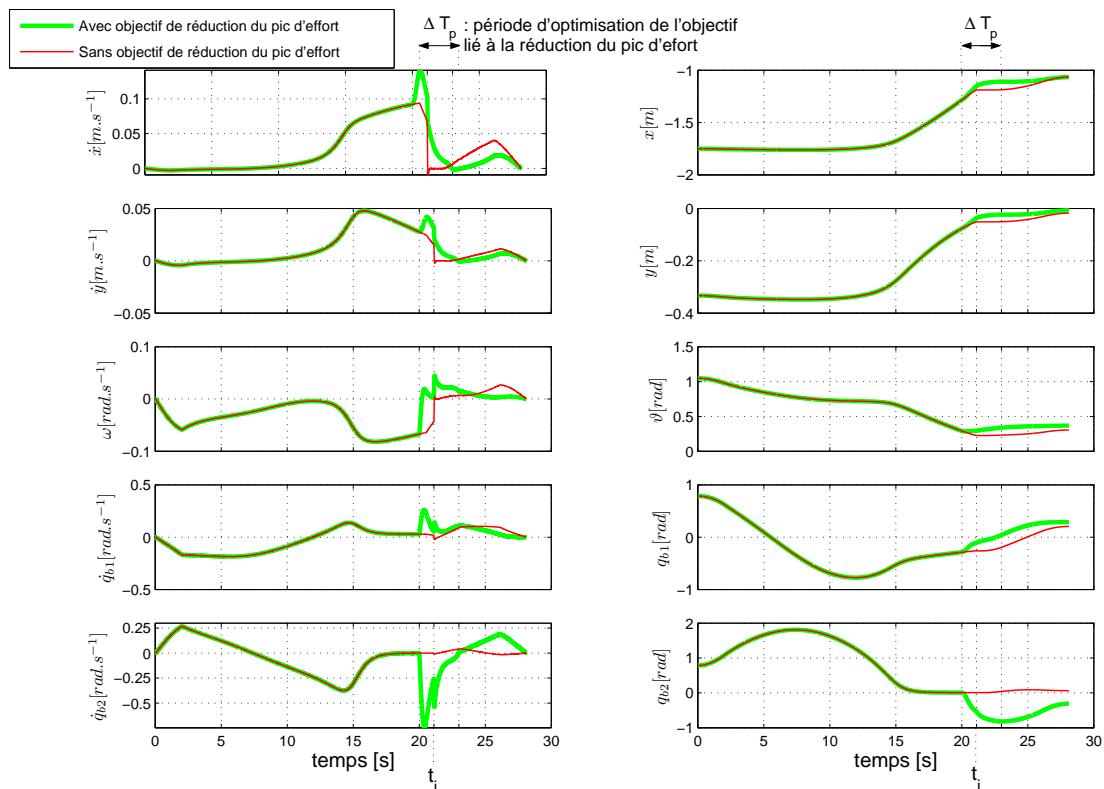
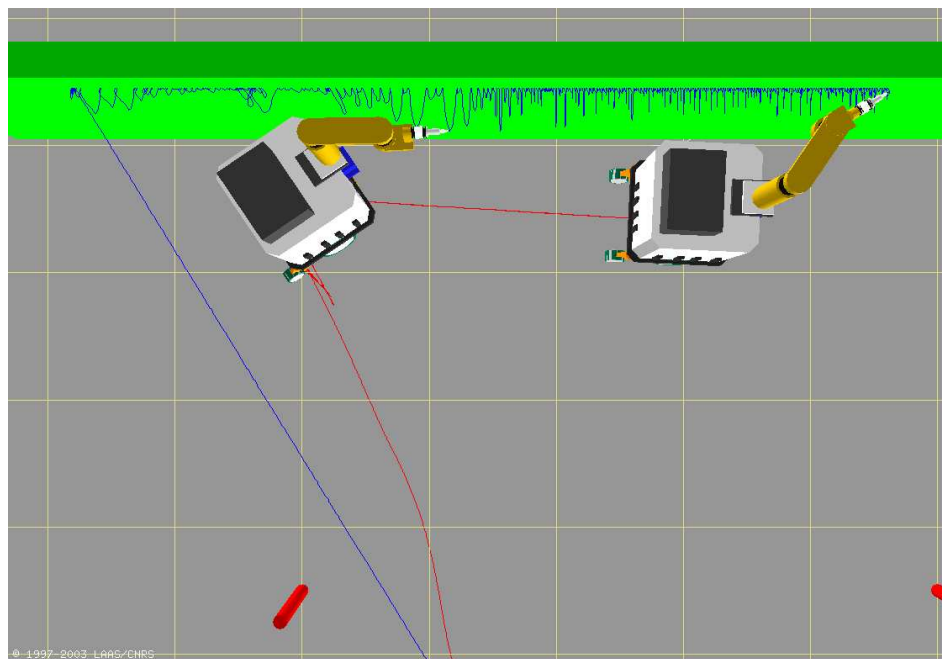
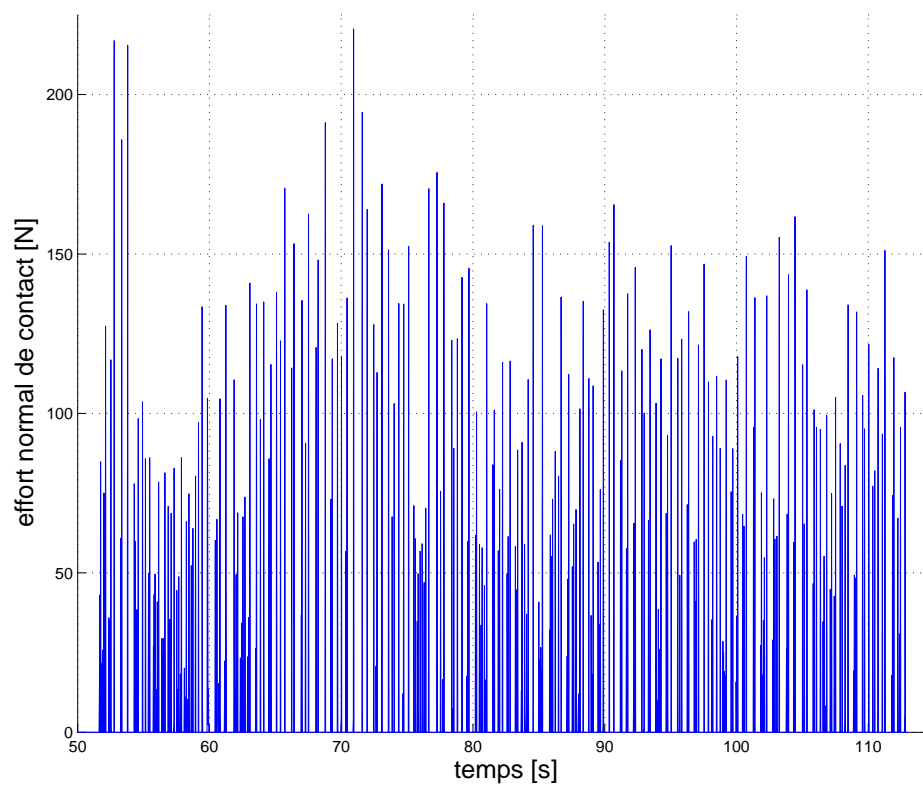


FIG. 4.17 – Effet d'un schéma de réduction des efforts d'impact sur les vitesses et coordonnées généralisées du système



(a) *Vue 3D du phénomène de rebond*



(b) *Profil d'effort normal correspondant*

FIG. 4.18 – Phénomène de rebond lors de l'impact

### 4.2.3 Résultats de simulation pour une mission télé-opérée

Afin d'illustrer la validité de notre approche dans des cas où les consignes opérationnelles ne sont pas pré-planifiées mais générés de manière interactive, nous avons développé une version « temps-réel » du simulateur qui permet l'interaction d'un utilisateur avec le robot. L'interface d'interaction entre l'utilisateur et le système est un joystick logiciel permettant de faire varier les deux composantes de la vitesse opérationnelle de consigne. Cette consigne opérationnelle de mouvement est filtrée afin de limiter son amplitude ainsi que l'accélération opérationnelle. Ce filtrage se fait tout d'abord par l'intermédiaire d'un filtre passe-bas avec gain et constante de temps adaptatifs dimensionnés afin d'assurer le respect des contraintes sur les vitesses et accélérations maximales liées au système ainsi que de permettre une optimisation efficace des objectifs de commande secondaire. Ces travaux sont présentés dans [FOURQUET 05].

Le schéma présenté sur la figure 4.19 synthétise le fonctionnement global de l'application.

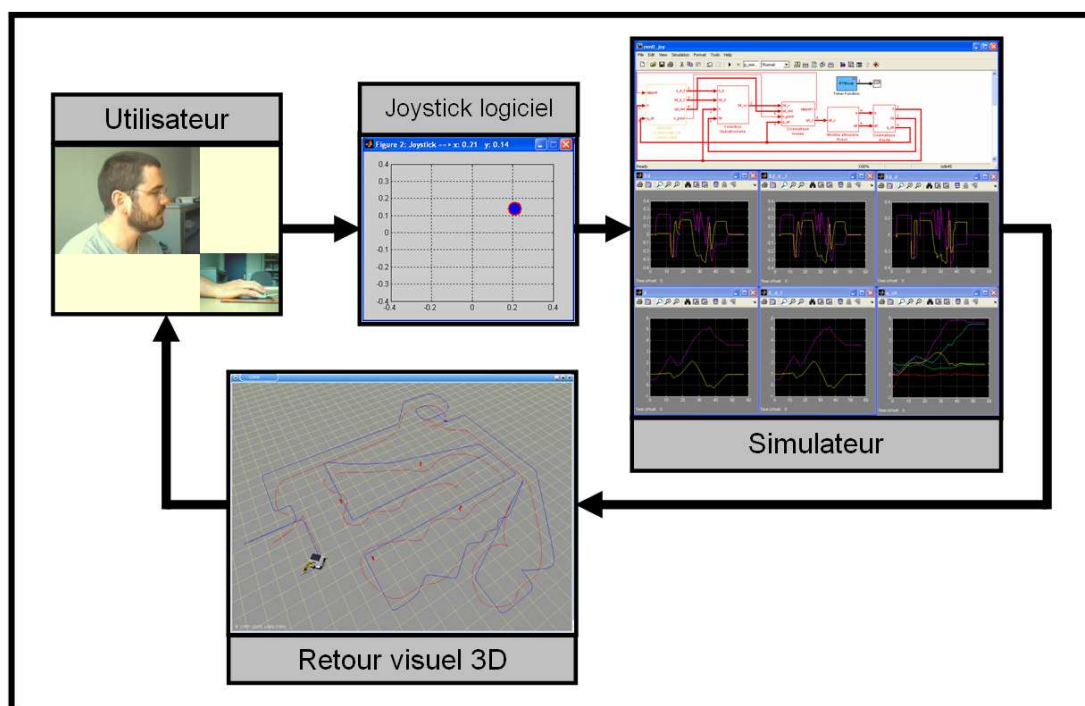


FIG. 4.19 – Schéma de principe du fonctionnement de l'application associée à une mission de télé-opération

Excepté pour la génération de consigne, la structure de commande reste similaire à celle utilisée pour une mission avec consignes pré-planifiées. En ce qui concerne les objectifs secondaires, celui lié à la minimisation des efforts d'impact n'est pas nécessaire, aucun mouvement au contact n'étant prévu. Pour les mêmes raisons, la boucle d'effort n'est pas utilisée. Enfin, pour permettre l'utilisation du système sur un ordinateur de puissance moyenne, la dynamique du système n'est plus simulée.

#### 4.2.3.1 Dimensionnement du filtre

Le but du filtre est de limiter vitesse et accélération de consigne opérationnelles et ce, afin de respecter l'ensemble des contraintes sur le système ainsi que d'assurer une

optimisation efficace des objectifs secondaires. Nous choisissons d'employer un filtre passe-bas de premier ordre. Ce type de filtre peut s'écrire sous la forme :

$$F(p) = \frac{K}{1 + \tau p},$$

où  $p$  est la variable de LAPLACE.

Notons  $\dot{\xi}(p)_{jstck}^*$  la norme de la consigne de vitesse opérationnelle issue du joystick. La consigne opérationnelle filtrée  $\dot{\xi}(p)_f^*$ , utilisée par la structure de commande comme consigne opérationnelle de référence, est donnée par la relation :

$$\dot{\xi}(p)_f^* = F(p)\dot{\xi}(p)_{jstck}^*. \quad (4.4)$$

En régime établi, cela donne :

$$\dot{\xi}(t)_f^* = K\dot{\xi}(t)_{jstck}^*.$$

La limitation de la vitesse se fait donc par le réglage de  $K$ . Ce réglage est basé sur le processus de replanification mis en œuvre dans la structure de commande pour limiter les vitesses opérationnelles et ainsi permettre une meilleure optimisation des objectifs secondaires. Ainsi,  $K$  peut s'écrire  $K(\dot{\xi}_{max}, \alpha, \mathcal{P}_a(t))$  où nous rappelons que :

- $\dot{\xi}_{max}$  est la valeur maximale de la vitesse opérationnelles calculée en fonction des capacités des actionneurs du système ;
- $\alpha$  est le facteur de mise à l'échelle des vitesses articulaires associées à la redondance du système qui fournit une information sur la répartition des capacités d'actionnement du système entre l'objectif opérationnel et l'objectif secondaire actif ;
- $\mathcal{P}_a(t)$  est la valeur de la fonction potentiel active à l'instant considéré.

La limitation de l'accélération opérationnelle est réalisée par le dimensionnement du paramètre  $\tau$ . La relation (4.4) peut s'écrire :

$$\dot{\xi}(t)_f^* + \tau\ddot{\xi}(t)_f^* = K\dot{\xi}(t)_{jstck}^*,$$

soit :

$$\tau = \frac{K\dot{\xi}(t)_{jstck}^* - \dot{\xi}(t)_f^*}{\ddot{\xi}(t)_f^*}.$$

En choisissant  $\ddot{\xi}(t)_f^* = \ddot{\xi}_{max}$ , soit à sa valeur maximale admissible, nous obtenons la valeur minimale de la constante de temps du filtre permettant de respecter la contrainte sur la valeur maximale de l'accélération opérationnelle :

$$\tau = \frac{K\dot{\xi}(t)_{jstck}^* - \dot{\xi}(t)_f^*}{\ddot{\xi}_{max}}.$$

#### 4.2.3.2 Résultats de simulation

##### Filtrage des consignes

L'effet du filtrage des consignes de vitesse opérationnelle issues du joystick est présenté sur la figure 4.20. Les signaux  $\dot{e}_i(t)_f^* = \dot{\xi}_i(t)_{jstck}^* - \dot{\xi}_i(t)_f^*$  représentent la différence entre les consignes opérationnelles avant et après filtrage. Les accélérations trop importantes sont lissées par le filtre et le signal de consigne opérationnelle résultant est complètement compatible avec les caractéristiques physiques des actionneurs du système. L'évolution du gain statique  $K$  du filtre permet de limiter la vitesse de consigne lorsque cela est exigé

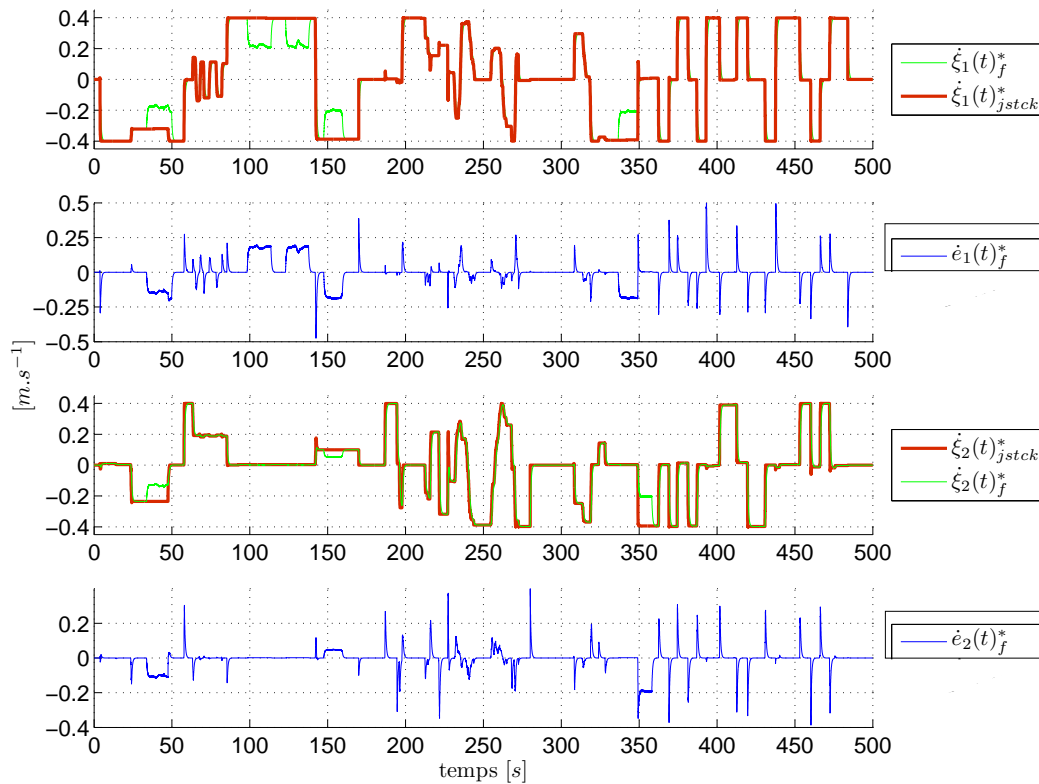


FIG. 4.20 – Effet du filtrage des consignes de vitesse opérationnelle issues du joystick

par la satisfaction d'un objectif secondaire. La figure 4.21, qui présente l'évolution de l'activation des différentes fonctions potentiel activées ainsi que la valeur des indicateurs associés à ces fonctions potentiel, permet de corréliser les zones temporelles présentant un ralentissement de la consigne opérationnelle (figure 4.20) avec les zones temporelles où un objectif secondaire est activé. Pour cette simulation particulière, l'objectif secondaire associé aux butées articulaires n'est jamais activé et les zones temporelles de ralentissement opérationnel correspondent à l'évitement des obstacles rencontrés. Le reste du temps, c'est la manipulabilité du système qui est optimisée et cela ne nécessite pas de ralentissement opérationnel.

### Trajectoire du système

La trajectoire de l' $OT$  et celle du point central de l'axe des roues de la plateforme  $O_p$  sont données sur la vue 3D de la figure 4.22.

#### 4.2.3.3 Perspectives autour de ce type d'application

Afin de perfectionner l'aspect « interaction », il peut être intéressant de considérer le signal issu du joystick comme un signal d'effort exercé au niveau de l' $OT$ . Cette consigne d'effort est transformée en consigne de vitesse opérationnelle au travers d'un filtre du second ordre dont les paramètres peuvent être choisis de manière à simuler une impédance mécanique opérationnelle. Il est alors possible de simuler des types différents de réponse du système à la sollicitation de l'utilisateur, par exemple une interaction « molle » où la dynamique de réponse du système à la sollicitation est très lente. La version actuelle

du simulateur revient à simuler une interaction très rigide, la dynamique de la réponse du robot n'étant limitée que par l'accélération opérationnelle maximale admise par le système.

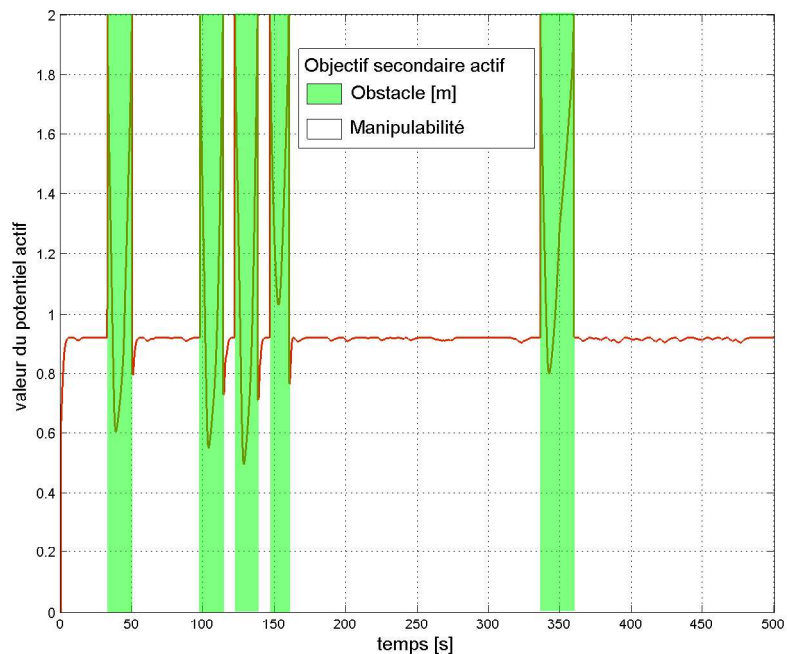


FIG. 4.21 – Evolution de la valeur des indicateurs associés aux fonctions potentiel activées

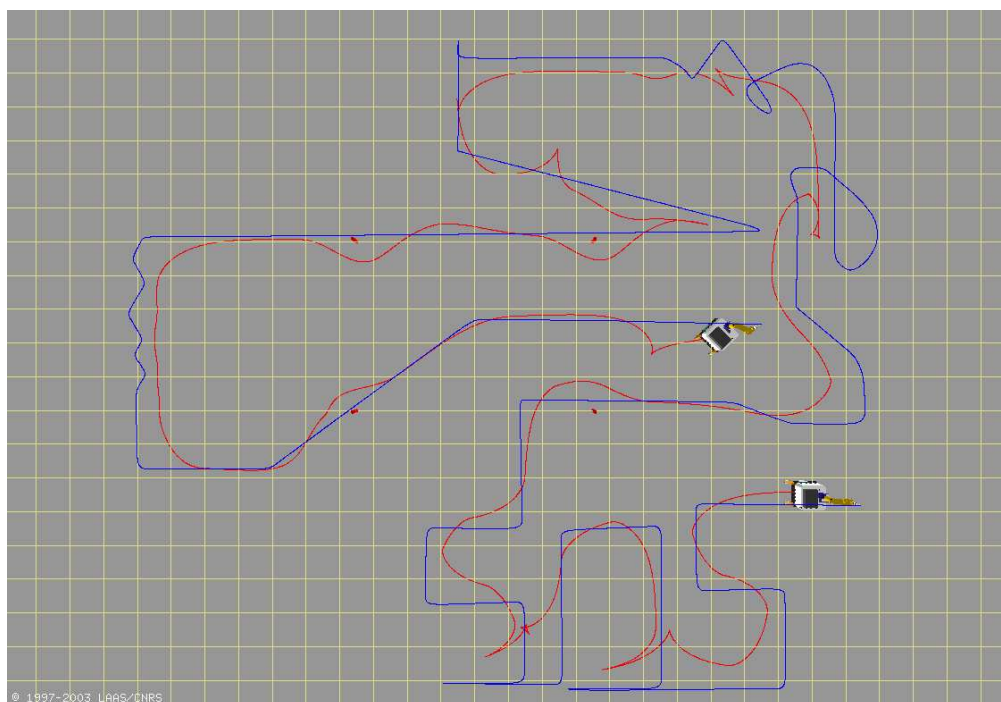


FIG. 4.22 – Vue globale de la mission de télé-opération



### 4.3 Résultats expérimentaux

Du point de vue expérimental, nous nous sommes attachés à démontrer la faisabilité de l'approche proposée. Ainsi, l'ensemble des fonctionnalités présentes dans le simulateur (génération de consigne, basculement de tâche locale, adaptation du plan, inversion cinématique) ont été implémentées et même si toutes les fonctions potentiel présentées dans le cas de la simulation « Va écrire au tableau » ne sont pas mises en œuvre, les aspects de transition entre objectifs secondaires sont quand même bien présents (et pour cause : passer de pas d'objectif secondaire à un objectif secondaire nécessite en soit une transition). Le cahier des charges de ces expérimentations et son lien avec le simulateur et nos développements théoriques sont l'objet du travail présenté dans [PADOIS 04d]. Une partie des résultats expérimentaux est présentée dans [PADOIS 04c].

Nos efforts se sont donc concentrés sur l'aspect de transition entre tâche locale en espace libre et au contact car si la simulation permet de valider dans son principe l'approche utilisée pour l'enchaînement d'objectifs secondaires et la commande opérationnelle réactive d'un manipulateur mobile à roues, le modèle d'effort retenu pour modéliser l'interaction opérationnelle du système avec l'environnement reste assez éloigné de la réalité physique du matériau. Ceci explique donc la nécessité de l'expérimentation.

Nous présentons donc tout d'abord le module logiciel développé grâce au logiciel  $G^{en}oM$  et son intégration dans l'architecture logicielle du LAAS, plus précisément son interaction avec d'autres modules existants. Nous présentons ensuite plusieurs résultats expérimentaux obtenus au cours des campagnes d'expérimentation.

Rappelons ici que le robot utilisé pour ces expérimentations est un manipulateur mobile à roues composé de la plateforme à roues de type unicycle  $H_2bis$  et du bras manipulateur série à six liaisons rotoïdes et poignet concourant GT6A. La dimension de l'espace opérationnel est 6, c'est à dire que l'ensemble des directions de l'espace opérationnel est contrôlé. Ce robot présente un degré de redondance cinématique égal à 2.

#### 4.3.1 Module logiciel $G^{en}oM$ : ManMob

Le module logiciel développé réalise les différentes fonctions suivantes :

- génération des consignes opérationnelles dans le cadre d'une commande à trajectoire opérationnelle imposée ;
- gestion des indicateurs permettant la transition d'une tâche locale à une autre ;
- gestion du basculement des tâches locales et des objectifs secondaires ;
- replanification éventuelle aux instants de basculement de tâche locale ;
- contrôle opérationnel ;
- calcul et mise à jour de la matrice d'inertie du système ;
- inversion cinématique avec gestion de la redondance (mise à l'échelle des termes liés à la redondance).

L'inversion cinématique fait appel à des bibliothèques de calcul des modèles géométriques et cinématiques du système et l'ensemble des calculs matriciels est réalisé grâce à la bibliothèque *Meschach* de calcul matriciel en C développée par D. STEWART et Z. LEYK ([STEWART 94]). Afin de répondre à nos besoins, des fonctionnalités ont été ajoutées à ces bibliothèques comme le calcul par décomposition en valeur singulière de la pseudo-inverse pondérée d'une matrice donnée.

La figure 4.23 présente le schéma qui synthétise l'ensemble des interactions entre le module MANMOB et les modules logiciels utilisés pour notre application.

La période d'échantillonnage associée à chacun des modules est indiquée en vert. La finalité du module MANMOB est de générer des consignes de vitesse articulaire pour chacun

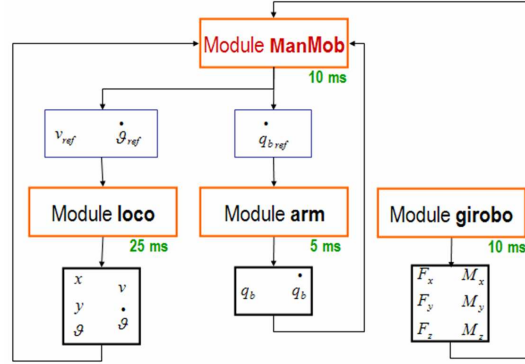


FIG. 4.23 – Architecture logicielle associée au module ManMob

des sous-systèmes composant le robot. Les consignes associées à la plateforme *H<sub>2</sub>bis* sont écrites dans un poster (zone logicielle d'exportation de données d'un module pouvant être lues et utilisées par un ou plusieurs autres modules) et lues par le module LOCO. Ce module permet, entre autres fonctionnalités, l'asservissement de la vitesse de la plateforme à partir des valeurs de vitesse linéaire et angulaire lues dans le poster. Il est lié aux fonctions de bas niveaux qui génèrent les tensions de commande des variateurs de la plateforme mais aussi à celles associées aux différents capteurs permettant la localisation du système (odomètres notamment). Il donne donc aussi accès aux informations renseignant l'état du système (situation de la plateforme et vitesse courante). Ces informations sont bien entendu utilisées par le module MANMOB. Le module ARM présente des fonctionnalités similaires mais sa période d'échantillonnage est 5 fois plus faible<sup>1</sup>. Le module GIROBO ([BAYLE 01a]) permet quant à lui l'accès aux informations issues du capteur d'effort six axes qui mesure les efforts d'interaction opérationnelle. Ce module permet par ailleurs le calibrage du capteur et la précompensation des efforts liés au poids « vu » par le capteur (le poids de l'outil lié à l'*OT*).

### 4.3.2 Résultats expérimentaux

Les résultats présentés ici sont issus de la mise en œuvre du module logiciel MANMOB pour réaliser la mission type « Va écrire au mur ». Nous illustrons au travers de diverses figures les performances de la structure de commande mise en œuvre.

#### 4.3.2.1 Aspect opérationnel

Le mouvement en espace libre est planifié entre les situations de l' *OT* :

$$\xi_{01} = \left[ -2,45 \quad 0,00 \quad 1,16 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \right]^T \text{ et}$$

$$\xi_{23} = \left[ 0,00 \quad 0,50 \quad 1,25 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \right]^T.$$

La situation  $\xi_{12}$ , qui correspond à la transition entre la tâche locale de déplacement en espace libre et la tâche locale de mouvement en espace libre avec préparation au contact n'est pas définie explicitement mais coïncide en fait avec le début de la phase de décélération du profil de mouvement opérationnel. La situation finale planifiée est :

$$\xi_{3f} = \left[ 0,00 \quad 0,95 \quad 1,10 \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \quad \frac{\pi}{2} \right]^T.$$

<sup>1</sup>Cela est lié au niveau de performance attendu de chacun des sous-systèmes.

La configuration initiale du système est :

$$\mathbf{q} = [ 0,00 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0,00 \quad 0,00 \quad \frac{\pi}{4} \quad 0,00 \quad -3,69 \quad 0 \quad 0 ]^T.$$

La valeur de l'effort normal à atteindre et à asservir, une fois le contact établi, est  $2 N$ . Seule la direction normale au contact ( $\vec{x}$ ) est contrôlée en effort une fois le contact établi.

### Mouvement opérationnel

L'évolution des vitesses linéaires et des positions opérationnelles réelles et de consigne est donnée par la figure 4.24. Les erreurs observées sur la vitesse opérationnelle sont liés aux effets de couplage dynamique entre le bras manipulateur et la plateforme (principalement à l'influence du mouvement de la plateforme sur le mouvement du bras manipulateur), mais aussi au niveau de performance moyen des actionneurs du système. Le long de l'axe  $\vec{z}$  viennent s'ajouter les effets du poids qui n'est pas pré-compensé au niveau opérationnel et qui engendre donc un couple résistant perturbateur qui doit être rejeté par les seuls asservissements articulaires. Malgré ces écarts, les signaux d'erreur présentés sur la figure 4.25 montrent que l'erreur de position opérationnelle reste limitée et ne prend pas de valeur supérieure à  $5 \times 10^{-3} m$  ce qui, dans le cadre d'un mouvement en espace libre, est très satisfaisant. L'erreur importante  $e_1$  une fois le contact établi se compose de deux termes ajoutés : l'incertitude liée à la connaissance de la position de la surface de contact et le mouvement dans la direction  $\vec{x}$  lié au contrôle d'effort. En ce qui concerne l'orientation de l' $OT$ , la norme de l'erreur d'orientation n'est jamais supérieure à  $0,55 \text{ deg}$  et ce maximum est atteint au moment de l'impact. En fin de mission, elle vaut  $0,08 \text{ deg}$ .

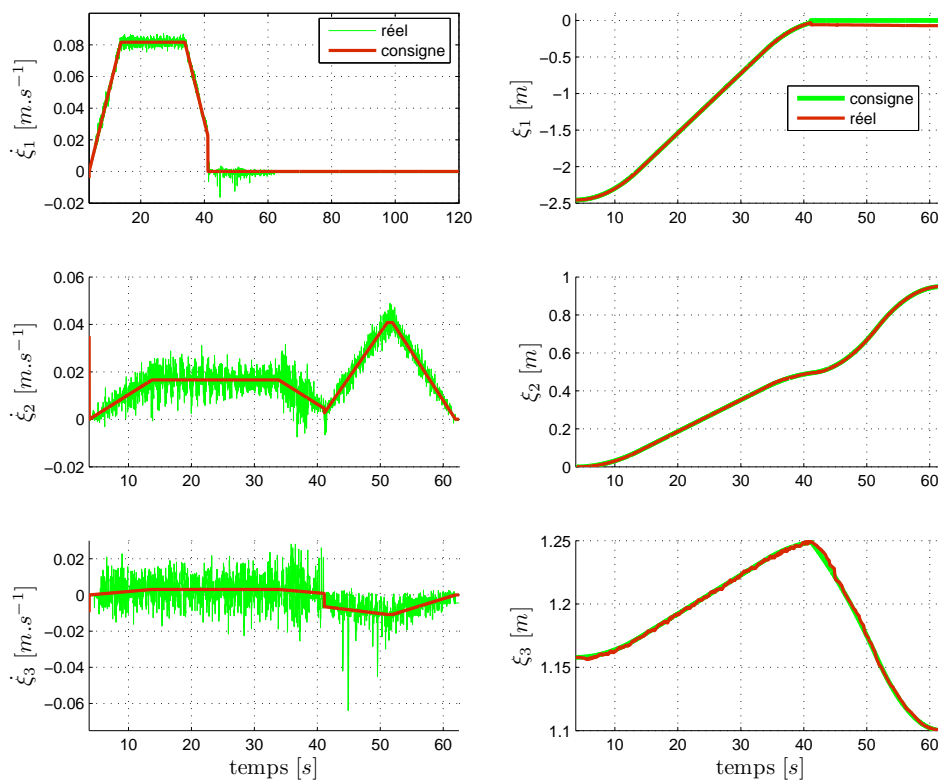


FIG. 4.24 – Vitesses linéaires et positions opérationnelles réelles et de consigne

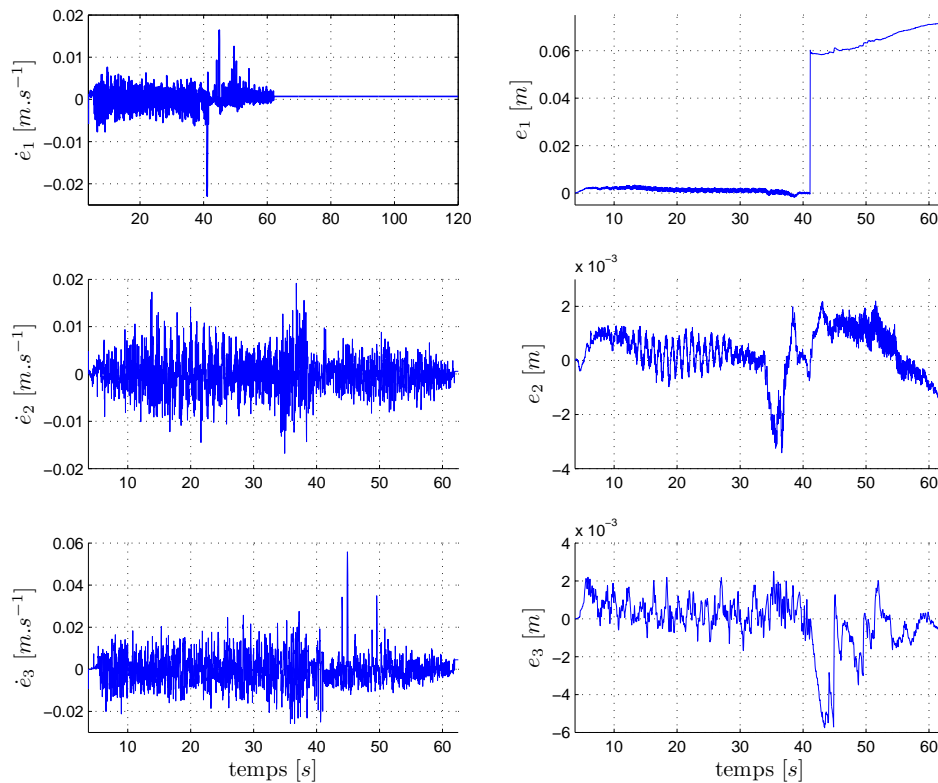


FIG. 4.25 – Erreurs entre vitesses linéaires et positions opérationnelles réelles et de consigne

**Effort opérationnel d'interaction** L'évolution temporelle de l'effort opérationnel normal à la surface du contact est donnée par la figure 4.26.

Nous pouvons tout d'abord remarquer le faible pic d'effort à l'impact. Ceci est en partie dû à l'optimisation de l'objectif secondaire dans la phase d'approche du contact mais aussi à la faible valeur de l'effort au moment de la détection du contact. Cette faible valeur s'explique par la vitesse opérationnelle peu élevée au moment de l'impact qui est elle même liée à l'erreur limitée faite sur l'estimation de la position de la surface de contact et à la vitesse opérationnelle modérée qui est planifiée.

Nous observons aussi que la qualité de l'asservissement n'est pas parfaite.

La première raison est l'irrégularité importante de la surface de contact (cf. la figure 4.27 qui montre l'état de la surface de contact) à laquelle s'ajoute un comportement non strictement élastique du matériau employé pour la surface de contact.

La seconde, plus critique, est liée au capteur d'effort lui même qui n'est pas dimensionné pour mesurer des efforts aussi faibles. Sa gamme de mesure est, le long de l'axe considéré pour l'application de notre effort normal, de  $\pm 50 \text{ daN}$ . Sa précision au pire est, pour ce même axe, de  $\pm 5 \text{ N}$ . Ce décalage est compensé à chaque calibrage du capteur (au début de chaque mission) par le module GIROBO. La compensation d'un tel décalage n'a d'intérêt que si il n'évolue pas pendant le déroulement de la mission. L'étude des courbes de mesure brute de l'effort, montre que cette hypothèse est raisonnable. La gamme de mesure est donc complètement disproportionnée par rapport à l'application mais la fiabilité de la mesure reste convenable et permet un asservissement d'effort aux performances suffisantes pour le type d'application testé.

L'idéal serait de fixer cette consigne à un niveau plus élevé mais les capacités d'action-

nement du bras manipulateur ne permettent pas d'envisager un mouvement opérationnel au contact avec un effort d'interaction dont la norme est supérieure à environ  $10N$ . Au delà, le couple résistant lié à cet effort devient trop important et les actionneurs du bras manipulateur ne peuvent pas assurer le mouvement et l'effort opérationnel simultanément. Nous avons réalisé des essais avec des valeurs de consigne allant jusqu'à  $5 N$  mais la nature du matériau utilisé pour le contact ne permet pas la réalisation correcte du mouvement au contact, l'effort tangentiel engendré devenant trop important (formation d'un bourrelet en avant de la direction de déplacement). La surface de contact utilisée présente une raideur estimée de  $1000 N.m^{-1}$  ce qui est assez faible (avec une telle raideur, un déplacement d'un centimètre équivaut à un effort de  $10 N$ ) et l'emploi d'une surface de contact plus rigide pourrait être envisagé. Cela permettrait d'obtenir des efforts au contact plus important et donc de tester l'efficacité propre du schéma de réduction du pic d'effort à l'impact dans des conditions plus sévères. Le risque d'endommager le robot ou l'environnement n'en serait néanmoins que plus important.

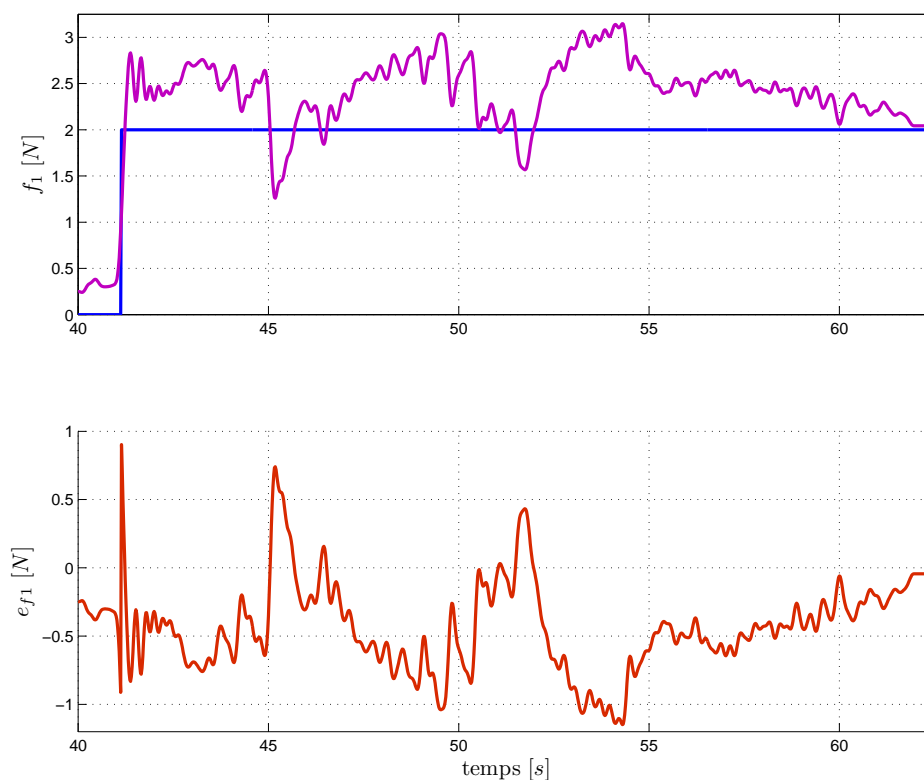


FIG. 4.26 – Effort opérationnel normal à la surface de contact : consigne et effort réel

#### 4.3.2.2 Aspect articulaire

##### Objectif secondaire

Le seul objectif secondaire implémenté d'un point de vue expérimental est la minimisation du pic d'effort à l'impact. Des sécurités logicielles existent pour s'assurer le respect des autres contraintes et en cas d'activation d'une de ces sécurités, la mission est avortée. Malgré cela la notion d'enchaînement d'objectif secondaire est toujours présente car passer de pas d'objectif secondaire à un objectif secondaire est, en soi, un enchaînement. Dans le cadre de cet objectif secondaire, aucun ralentissement opérationnel n'est prévu et la seule

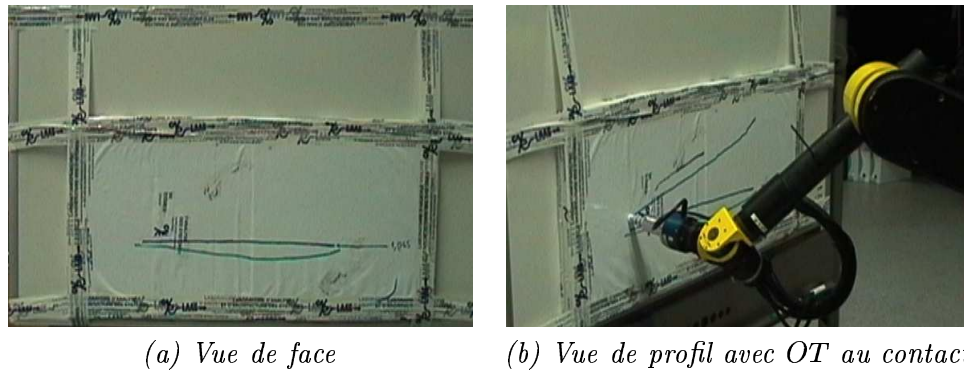


FIG. 4.27 – Nature de la surface de contact utilisée lors des expérimentations.

replanification de toute la mission a lieu au moment du contact. L'évolution temporelle de la fonction potentiel utilisée pour minimiser l'inertie du système dans la direction normale à la surface de contact est donnée par la figure 4.28. La mise en correspondance, sur la figure, avec le profil de vitesse opérationnelle permet d'identifier la zone temporelle pendant laquelle cet objectif secondaire est actif.

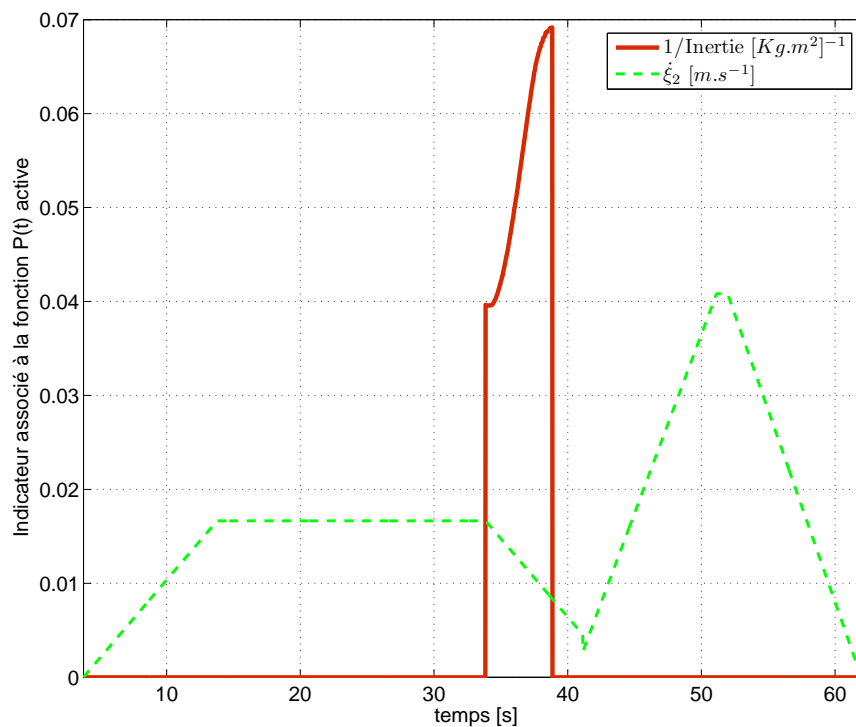


FIG. 4.28 – Evolution de l'indicateur associé à la fonction potentiel utilisée pour minimiser l'inertie du système

### Vitesses articulaires et configuration du système

Les vitesses articulaires réelles et de consigne sont données sur la figure 4.29. L'effet de l'optimisation de l'objectif secondaire présenté précédemment est très net sur chacune des composantes de la vitesse articulaire du système. L'effet sur la configuration est indiqué sur la figure 4.30 qui présente l'évolution de la configuration du système au cours de la

mission. La minimisation de l'inertie du système entraîne un « repliement » logique du bras manipulateur.

Une vue des configurations initiale et finale du système est présentée sur la figure 4.31 et les trajectoires de l'*OT* (bleue) et de la plateforme (rouge) sont présentées sur la vue de synthèse 4.32.

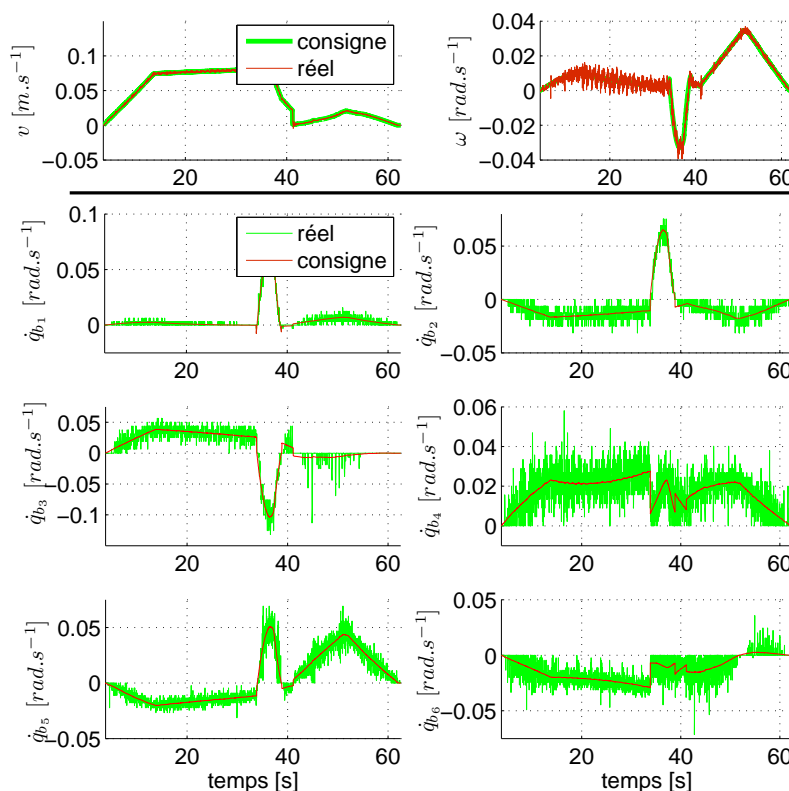


FIG. 4.29 – Vitesses articulaires réelles et de consigne

#### 4.3.2.3 Effet du choix de la pseudo-inverse pondérée sur les mouvements du système

Comme nous l'avons évoqué au chapitre précédent, la norme du vecteur des vitesses articulaires calculé par inversion cinématique est, dans le cas du choix d'une pseudo-inverse pondérée pour l'inverse généralisée de la jacobienne réduite du système, minimale au sens des moindres carrés  $M_x$ -pondérés. Cela signifie qu'il est possible de solliciter plus ou moins tel ou tel actionneur du système en choisissant de manière circonstanciée la matrice  $M_x$ . Le choix par défaut est de la choisir égale à l'identité mais, si, par exemple, il est souhaité de solliciter les actionneurs en fonction de leur comportement dynamique, *i.e.* de plus solliciter ceux présentant une dynamique rapide, le choix de la matrice d'inertie  $\hat{A}(\mathbf{q})$  comme matrice de pondération est le plus approprié. En effet, la matrice d'inertie du système est quantitativement représentative de son comportement dynamique. Ce choix est par ailleurs celui qui minimise à chaque instant l'énergie cinétique du système. Inversement, si c'est la plateforme (dynamique lente) qui, en raison de contraintes de fonctionnement données, doit être majoritairement sollicitée, la matrice de pondération choisie peut être l'inverse de la matrice d'inertie. L'effet d'un tel choix sur les consignes de vitesse articulaire calculées est illustré sur la figure 4.33 qui présente l'évolution de ces consignes pour le robot

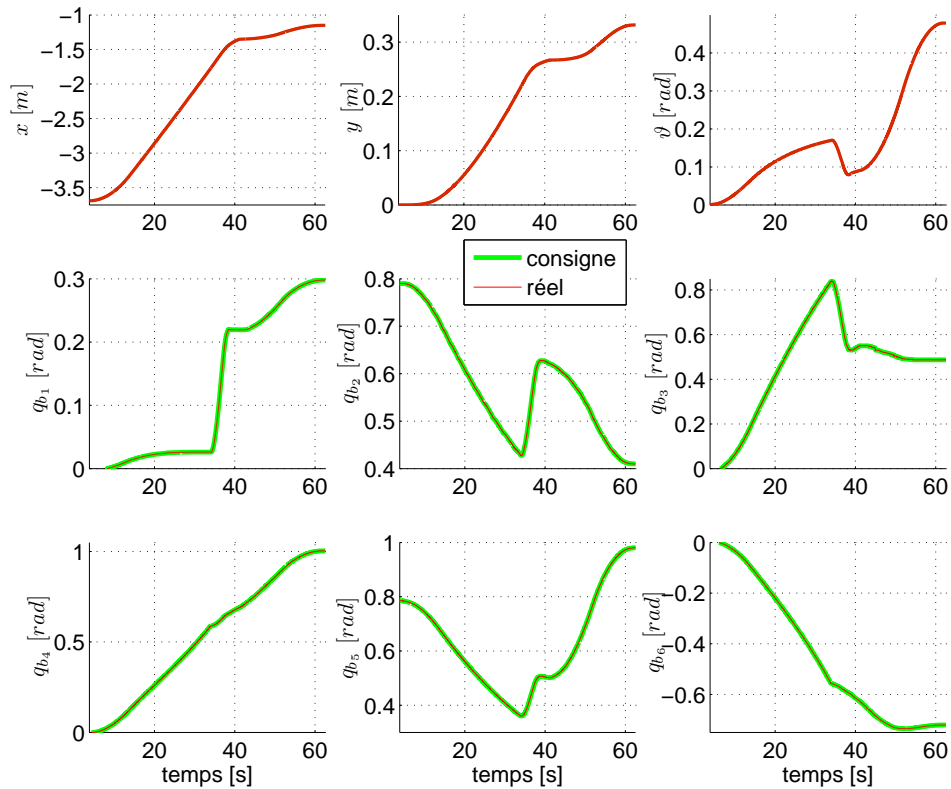


FIG. 4.30 – Evolution de la configuration du système

dans sa phase de mouvement en espace libre. Trois types de matrices de pondération sont employés :

- la matrice identité ;
- la matrice d’inertie modifiée pour atténuer quelque peu les grandes différences entre la plateforme et le bras manipulateur en terme d’inertie (le terme principal d’inertie associé à l’accélération linéaire de la plateforme est divisé par 100 et celui associé à l’accélération angulaire est divisé par 25) ;
- l’inverse de la matrice d’inertie modifiée de manière similaire.

Même si les courbes sont assez explicites, nous pouvons mettre en avant trois points importants :

- le choix de la pondération influe peu sur le profil de vitesse linéaire de la plateforme (9% d’écart au maximum) mais la logique de la pondération est respectée car la courbe bleue majore la courbe verte qui majore la courbe rouge ;
- le profil de vitesse angulaire de la plateforme est nettement modifié par le choix de la pondération et là encore la logique est respectée. Cette plus grande influence est liée au coefficient diviseur appliqué afin d’atténuer les grandes différences de dynamique entre les sous-systèmes ;
- l’influence de la fonction potentiel sur les articulations du bras manipulateur est fonction de l’inertie « vue » par chacun des actionneurs correspondants : moins cette inertie « vue » est grande, plus ces articulations sont sollicitées dans le cas de la pondération par la matrice d’inertie (et inversement).

Il peut être légitime de se poser la question suivante : « Pourquoi avoir réduit l’écart de comportement dynamique entre les sous-systèmes ? » La réponse se situe dans l’analyse



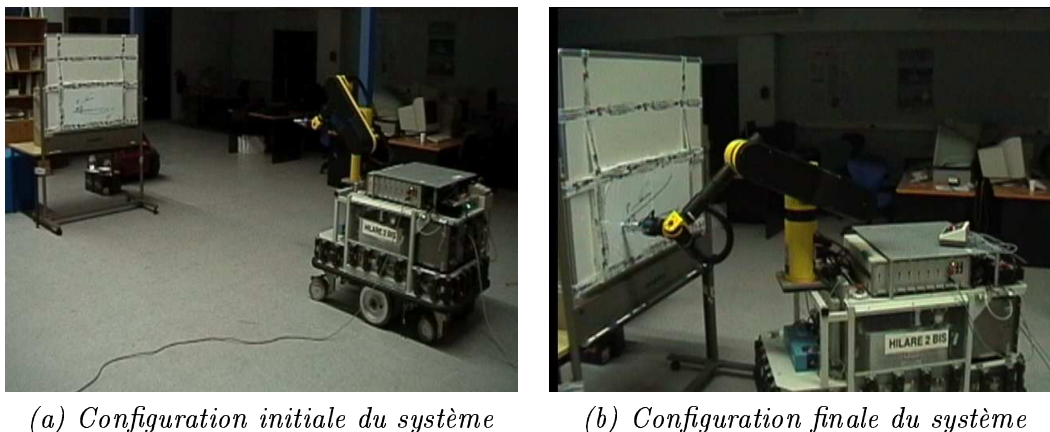


FIG. 4.31 – Configurations initiale et finale du système

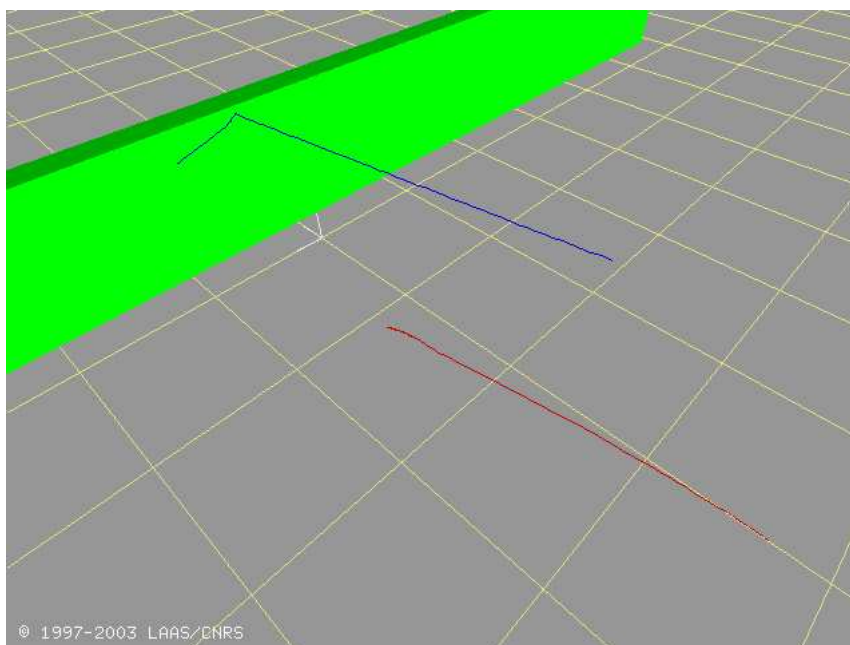


FIG. 4.32 – Vue de synthèse des trajectoires de la plateforme et de l'OT

du cas où une pondération par la matrice d'inertie est employée : dans ce cas précis, le bras manipulateur est plus sollicité que dans le cas d'une pondération par l'identité. Cela signifie que pour un mouvement opérationnel rectiligne, le bras manipulateur va tendre à s'étirer et risque d'atteindre la limite de son espace de travail (qui est défini relativement à la plateforme). Ainsi, afin de réaliser ces tests sur l'influence de la pondération lors de l'inversion cinématique, il était important de ne pas rencontrer un tel cas de figure et c'est la raison majeure de cette « atténuation » de la matrice d'inertie utilisée pour la pondération.

L'utilisation d'une matrice de pondération différente, en fonction du type de mouvement opérationnel de consigne ou des contraintes permanentes ou momentanées sur les liaisons ou ensemble de liaisons du système, peut être une solution permettant par exemple de profiter pleinement des capacités de navigation rapide de la plateforme en espace libre (pondération par l'inverse de la matrice d'inertie) et de la dynamique rapide du bras manipulateur lors de tâches d'interaction avec l'environnement (pondération par la matrice d'inertie). C'est le choix que nous avons fait pour certaines de nos expérimentations.

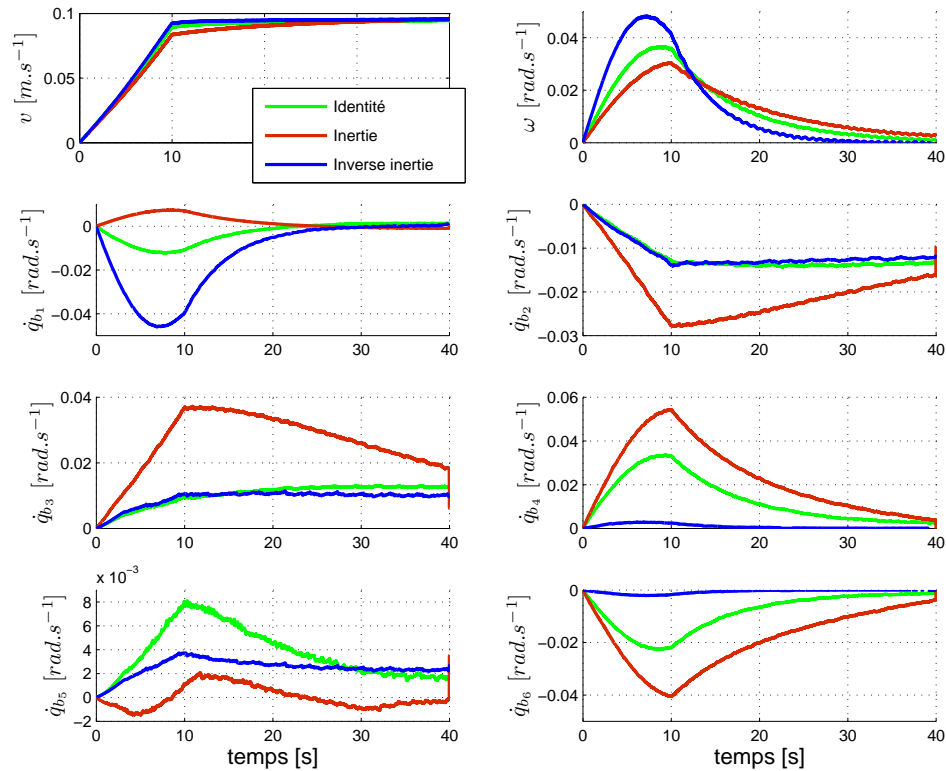


FIG. 4.33 – Effet du choix de la pseudo-inverse pondérée sur les mouvements du système

Enfin, pour pallier l'effet d'extension du bras qui peut se produire en choisissant la matrice d'inertie comme matrice de pondération, il est possible d'utiliser un objectif secondaire ayant pour but de maintenir le bras manipulateur dans une «zone acceptable» ([FOULON 98]). C'est ce que nous faisons, de manière plus flexible, en maximisant la manipulabilité du système.

### 4.3.3 Conclusion sur l'aspect expérimental de ce travail

L'approche expérimentale de la commande opérationnelle des manipulateurs à roues met en exergue plusieurs éléments essentiels et masqués par l'approche basée sur la simulation.

Du point de vue de la modélisation, les non linéarités fortes tels que les frottements statiques, supposés négligeables en première approximation, jouent un rôle très important dans la qualité de l'asservissement de chacun des actionneurs. Ainsi, sur le robot *H2bis* + GT6A ces frottements statiques posent un réel problème. Ce problème est d'autant plus présent que nous exploitons le robot à des vitesses faibles. Afin de vaincre le frottement statique, un pic de couple moteur est nécessaire. Les moteurs de ce robot ne pouvant être commandés directement en couple, l'absence de ce pic entraîne des retards sur la réponse du moteur. Tant qu'un certain niveau de consigne de vitesse n'est pas atteint, un phénomène, imperceptible à l'œil, de démarrage/arrêt du moteur se produit qui s'explique par le fait que le couple moteur correspondant à la vitesse de consigne n'étant pas assez élevé, le frottement statique empêche l'établissement correct de la vitesse du moteur. Les performances du système s'en trouvent assez fortement dégradées et c'est la présence du correcteur opérationnel qui permet de maintenir l'erreur de suivi opérationnel dans des bornes acceptables.

Plus généralement, le fait de ne pas pouvoir commander les actionneurs en couple est très problématique. Cela oblige, comme nous l'avons fait, à utiliser des modèles d'interaction dont les paramètres sont assez difficiles à estimer. Cela empêche aussi de tenir compte des efforts résistants liés à la gravité et si cela est nécessaire d'utiliser directement le modèle dynamique du système pour la commande.

Du point de vue de l'intégration robuste de solutions logicielles sur un système complexe, un minimum est de dire que cela est une activité à part entière qui nécessite une connaissance accrue du système étudié ainsi qu'une vision globale de l'application à implémenter. Dans l'état actuel des choses, le module logiciel MANMOB développé, ainsi que certaines fonctions logicielles d'asservissement articulaire et de calculs matriciels, spécifiquement pour ce travail ne présente pas une application robuste de commande opérationnelle d'un manipulateur mobile à roues mais plutôt un évaluateur de faisabilité. Le pas de l'un à l'autre est assez important car il nécessite l'intégration d'autres objectifs secondaires ainsi que l'approfondissement d'un ensemble d'aspects connexes à ce travail, comme, par exemple, le développement d'une structure de supervision de la mission permettant par exemple une gestion formalisée et systématique des cas d'échecs.

Enfin, les pistes d'amélioration du contexte expérimental et des performances obtenues sont nombreuses et sont liées à l'utilisation :

- de capteurs extéroceptifs pour la localisation d'obstacle « bas » ( télémètre laser, ceinture de capteurs à ultrasons) et pour pallier les effets du glissement de la plateforme sur les erreurs de localisation ;
- d'un capteur d'effort dimensionné pour l'application envisagée.

Mais aussi à :

- la gestion des cas d'auto-collisions du système ;
- l'amélioration du modèle de contact afin de tenir compte de son amortissement ;
- la mise en œuvre des schémas adaptatifs d'identification des paramètres environnementaux : raideur du contact, normale à la surface de contact.

---

# Conclusion

---

Notre contribution à l'étude de la commande opérationnelle des manipulateurs mobiles à roues pour la réalisation de missions complexes de manipulation mobile est présentée dans ce mémoire.

Dans une première partie, nous avons défini, à partir de deux missions type ( l'une avec trajectoire opérationnelle planifiée et enchaînement de tâche en espace libre et au contact, l'autre avec trajectoire opérationnelle de mouvement générée de manière instantanée), le concept de mission complexe de manipulation mobile. Notre approche du problème a été présentée en nous basant sur des repères bibliographiques associés à la commande de ces systèmes et en comparaison avec les méthodes employées dans le cas des bras manipulateurs.

L'approche introduite passe par la définition de lois de commande opérationnelle basées sur les modèles spécifiques aux manipulateurs mobiles à roues. Ces modèles ont fait l'objet de la seconde partie de ce mémoire. Des rappels sur les notions de liaisons en mécanique ont tout d'abord permis de définir rigoureusement la notion de système non holonome et de l'appliquer au cas des manipulateurs mobiles à roues. Une analyse de la cinématique des plateformes à roues, basée sur des travaux de référence dans ce domaine, nous a conduit à l'obtention du modèle cinématique réduit d'un manipulateur mobile à roues. En relation avec ce modèle, nous avons proposé une étude des possibilités de motorisation et du choix des grandeurs de commande pour les plateformes à roues. Deux exemples simples ont servi à illustrer ces développements dans le cas de manipulateurs mobiles à roues dont les plateformes sont de natures différentes. Un modèle dynamique unifié a été développé en employant le formalisme explicite de LAGRANGE. La forme du modèle obtenu permet une application directe à la commande des manipulateurs mobiles à roues et la prise en compte des efforts d'interaction du système avec son environnement.

Dans la troisième partie, nous avons proposé une structure de commande opérationnelle permettant d'intégrer des lois de commande dont les grands principes tirent leur origine de la commande des bras manipulateurs mais que nous avons adaptées, en nous basant sur leur modèle cinématique et dynamique, au cas des manipulateurs mobiles à roues. La génération temps-réel de consignes articulaires pour les actionneurs repose sur l'inversion cinématique et l'utilisation des méthodes de couple calculé que nous avons étendues à ces systèmes.

Cette structure permet aussi une gestion du basculement dynamique entre deux tâches opérationnelles de nature différente. Cette gestion nécessite une description de la mission à partir d'un formalisme faisant apparaître explicitement les différentes tâches opérationnelles d'une même mission ainsi que les conditions de transition entre chacune d'entre

elles. Nous avons retenu le formalisme des machines à états. En parallèle à ce mécanisme d'enchaînement dynamique de tâches opérationnelles, un ensemble de contraintes secondaires doit être respecté afin d'assurer le maintien des conditions de bon déroulement de la mission. Nous avons proposé un mécanisme d'arbitrage qui permet d'évaluer la criticité de telle ou telle contrainte à un moment donné de la mission. La contrainte critique est alors prise en compte au travers de l'optimisation locale d'une fonction potentiel qui assure, en utilisant les mouvements internes du système liés à la redondance cinématique, le respect de la contrainte tout en étant compatible avec la tâche opérationnelle. Parmi les contraintes secondaires envisagées, nous nous sommes en particulier intéressés à celle liée à la transition entre espace libre et contact pour l'*OT* du système. Nous avons montré que cette transition peut être critique pour le système et nous avons proposé l'extension au cas des manipulateurs mobiles à roues d'une méthode visant à préparer de manière active cette transition. Cette méthode utilise les mouvements internes pour minimiser l'inertie du système dans la direction opérationnelle normale à la surface du contact. Nous avons aussi proposé une méthode d'évitement des obstacles bas.

Le fonctionnement en mode nominal des actionneurs impose des conditions sur les grandeurs de consigne articulaires générées. Nous avons énoncé ces conditions et proposé des solutions efficaces qui assurent leur respect. Ces solutions passent par le dimensionnement des consignes opérationnelles ainsi que par une mise à l'échelle des termes de consignes générés pour les mouvements internes du système. En nous basant sur des indicateurs, nous avons proposé une évaluation de l'optimisation des contraintes secondaires et une redistribution réactive des capacités d'actionnement du système de la tâche opérationnelle vers les mouvements internes. Cette redistribution se traduit par un ralentissement de la tâche opérationnelle qui autorise une optimisation de la contrainte secondaire, critique à un instant donné.

La quatrième partie est consacrée à la mise en œuvre de la structure de commande proposée. Cette mise en œuvre a été réalisée en simulation autour d'un simulateur spécifiquement conçu pour tenir compte des contraintes fixées par le contexte expérimental. Des résultats probants ont permis de valider les aspects liés à l'enchaînement de tâches opérationnelles mais aussi les solutions retenues pour le calcul des consignes articulaires. Le mécanisme d'adaptation de la vitesse opérationnelle a été validé pour les deux missions type. Dans le cas de la mission avec trajectoire opérationnelle planifiée, cette adaptation passe par une replanification partielle de la mission. Pour ce qui est de la mission où les consignes sont générées en temps-réel, l'adaptation se fait par filtrage adaptatif. L'aspect réactif de nos méthodes est parfaitement illustré par cette deuxième mission qui fait interagir un utilisateur avec le robot simulé.

Du point de vue de la transition de l'espace libre au contact, nous avons jugé plus qu'opportun de proposer une validation expérimentale. Ces expérimentations se sont faites sur le robot *H<sub>2</sub>bis+ GT6A* du LAAS. Elles ont nécessité le développement d'un module logiciel pour la gestion temps-réel de la mission. Ce module est construit en utilisant l'architecture proposée par l'équipe RIA du LAAS pour la robotique mobile autonome. La première mission type a été testée et les résultats obtenus sont satisfaisants puisqu'ils valident dans son principe la structure de commande proposée et notamment l'aspect transition au contact.

Cette mise en œuvre expérimentale et en simulation démontre donc la viabilité et la faisabilité de l'approche proposée.

La majeure partie des difficultés rencontrées dans ce travail se situe autour de la partie expérimentale qui nous a montré que la mise au point de solutions logicielles robustes pour la robotique expérimentale est une problématique à part entière. La conception des systèmes est aussi un des points clés de la robotique. Un système mal ou sous-dimensionné ne pourra jamais atteindre un niveau de performance très élevé même si les lois de commande

prises en œuvre sont démontrées comme étant les plus performantes. Une des perspectives de ce travail est de mener à bien un travail complet d'intégration des solutions proposées.

D'un point de vue théorique, le parti pris de ne pas tenir compte des propriétés de commandabilité des plateformes à roues mais de plutôt raisonner sur les capacités instantanées de mouvement du système dans son ensemble se montre être une hypothèse crédible pour la commande telle que nous l'envisageons. Il n'en reste pas moins qu'une prise en compte des spécificités des plateformes à roues en terme de commandabilité et d'accessibilité pourrait par exemple permettre de pallier les faiblesses de l'approche d'évitement d'obstacles que nous avons proposée.

Des développements spécifiques à la génération de consignes pour l'orientation des roues centrées orientables peuvent aussi faire l'objet de travaux futurs car, si nous avons évoqué la possibilité de générer ces consignes en nous basant sur la description dynamique du système, cette approche est encore à approfondir.

Du point de vue de l'interaction au contact, l'amélioration des performances des schémas de commande en effort passe par la mise en œuvre de techniques adaptatives basées sur l'identification en ligne des paramètres de contact.

Dans la continuité de la mission type où le robot est amené par un utilisateur à suivre une trajectoire opérationnelle de consigne non planifiée, le développement de modèle d'interaction compliant pour l'interaction Homme/robot ouvre un champ applicatif vaste qui pourrait s'accompagner de développements expérimentaux sur un robot existant.

Enfin, un travail de spécification d'une structure décisionnelle robuste qui viendrait piloter la structure déjà développée semble indispensable à la diversification des missions qui sont imaginées (ou ne le sont peut-être pas encore) pour ces systèmes.



---

Annexe A

Table des symboles

---



Nous indiquons ici deux notations utilisées dans ce mémoire et qui ne sont pas explicitement définies :

- $\mathcal{I}_n$  : matrice identité de dimension  $n$ .
- $\mathcal{O}_{m \times n}$  : matrice nulle de dimension  $n \times m$ .

Tous les autres symboles utilisés dans ce mémoire sont rappelés ici, chapitre par chapitre.

## A.1 Symboles du chapitre 1

Page	Symbole	Définition
7	$OT$	Organe terminal du robot.

## A.2 Symboles du chapitre 2

Page	Symbole	Définition
18	$\mathcal{R} = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$	Repère orthonormé de référence. Il est fixe et tel que $\vec{z}$ soit normal au plan sur lequel évoluent les roues du manipulateur mobile.
18	$\mathcal{R}_{OT} = (O_{OT}, \vec{x}_{OT}, \vec{y}_{OT}, \vec{z}_{OT})$	Repère mobile, orthonormé et direct associé à l' $OT$ d'un manipulateur mobile à roues.
18	$\xi$	Coordonnées opérationnelles d'un manipulateur mobile à roues définissant la situation de l' $OT$ dans $\mathcal{R}$ .
49	$\mathcal{M}$	Espace opérationnel d'un manipulateur mobile à roues.
18	$m$	Dimension de $\mathcal{M}$ .
18	$R$	Matrice de rotation.
18	$[\psi \ \theta \ \phi]^T$	Angles d'Euler classiques.
19	$\omega_{xOT}, \omega_{yOT}, \omega_{zOT}$	Composantes de la vitesse angulaire de l' $OT$ dans le repère $\mathcal{R}$ .
20	$n_c$	Nombre de corps composant un système matériel.
20	$p_1, p_2, \dots, p_{6n_c}$	Paramètres primitifs d'un système matériel.
20	$\alpha_i(p_1, \dots, p_{6n_c}, t)$	Fonction des paramètres primitifs et du temps intervenant dans la description des équations de liaisons.
20	$\beta(p_1, \dots, p_{6n_c}, t)$	Fonction des paramètres primitifs et du temps intervenant dans la description des équations de liaisons.
20	$f(p_1, \dots, p_{6n_c}, t) = 0$	Equation d'une liaison holonome.
21	$h_p$	Nombre d'équations de liaison primitives.
21	$\mathbf{q}$	Coordonnées généralisées d'un manipulateur mobile définissant la configuration du système dans $\mathcal{R}$ .
21	$\mathcal{N}$	Espace des configurations.
21	$n$	Dimension de $\mathcal{N}$ .
21	$\bar{f}_i(\mathbf{q}, t) = 0$	Equation d'une liaison holonome complémentaire.
21	$h_c$	Nombre d'équations de liaison holonomes complémentaires .

21	$\bar{\alpha}_{ij}(\mathbf{q}, t)$	Fonction des paramètres de configuration et du temps intervenant dans la description des équations de liaison non holonomes.
21	$\bar{\beta}_i(\mathbf{q}, t)$	Fonction des paramètres de configuration et du temps intervenant dans la description des équations de liaison non holonomes.
21	$h$	Nombre d'équations de liaison non holonomes.
21	$h$	Nombre total d'équations de liaison.
21	$n_{ddl}$	Degré de liberté global d'un manipulateur mobile.
22	$\dot{\mathbf{q}}$	Vecteur des vitesses généralisées du système.
22	$\mathcal{T}_{\mathbf{q}}\mathcal{N}$	Espace tangent en $\mathbf{q}$ à $\mathcal{N}$ .
22	$\ddot{\mathbf{q}}$	Vecteur des accélérations généralisées du système.
22	$\mathbf{q}_b$	Coordonnées généralisées d'un bras manipulateur à $n_b$ corps mobiles et à $n_b$ liaisons.
22	$\mathcal{N}_b$	Espace des configurations du manipulateur.
22	$n_b$	Dimension de $\mathcal{N}_b$ .
26	$\xi_b$	Coordonnées opérationnelles d'un bras manipulateur définissant la situation de son $OT$ dans $\mathcal{R}_b$ .
22	$\mathcal{M}_b$	Espace opérationnel d'un bars manipulateur.
22	$m_b$	Dimension de $\mathcal{M}_b$ .
23	$\mathcal{R}_p = (O_p, \vec{x}_p, \vec{y}_p, \vec{z}_p)$	Repère mobile, orthonormé et direct associé à une plateforme mobile à roues.
23	$\xi_p = [x \ y \ \vartheta]^T$	Coordonnées opérationnelles d'une plateforme mobile à roues.
23	$\mathcal{M}_p$	Espace opérationnel d'une plateforme mobile à roues.
23	$m_p$	Dimension de $\mathcal{M}_p$ .
23	$N = N_f + N_c + N_d + N_s$	Nombre total de roues fixes, centrées orientables, décentrées orientables et suédoises.
24	$\varphi = [\varphi_f \ \varphi_c \ \varphi_d \ \varphi_s]^T$	Vecteur des rotations propres des roues.
24	$\beta_c, \beta_d$	Vecteur d'orientation des roues centrées et décentrées orientables.
24	$\mathcal{N}_p$	Espace des configurations d'une plateforme mobile à roues.
24	$n_p = m_p + N + N_c + N_d$	Dimension de $\mathcal{N}_p$ .
25	$r, b, b', \alpha, \gamma$	Paramètres géométriques constants associés à la description d'une roue ( <i>cf.</i> figure2.3).
24	$\mathbf{q}_p$	Coordonnées généralisées d'une plateforme mobile à roues définissant la configuration du système dans $\mathcal{R}$ .
25	$R(\vartheta)$	Matrice de rotation d'angle $\vartheta$ .
25	$C_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_i}$	Notation raccourcie de $\cos(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_i)$ .
26	$\mathbf{f}(\mathbf{q})$	Modèle géométrique direct d'un manipulateur mobile à roues.
26	$\mathcal{R}_b = (O_b, \vec{x}_b, \vec{y}_b, \vec{z}_b)$	Repère orthonormé et direct associé à la base du bras manipulateur.

26	$\mathbf{f}_b(\mathbf{q}_b)$	Modèle géométrique direct d'un bras manipulateur.
27	$\mathcal{R}_p O_b = [a \ a' \ 0]^T$	Position du point $O_b$ dans le repère $\mathcal{R}_p$ .
27	$\mathbf{q}_r$	Vecteur de configuration réduite d'un manipulateur mobile à roues.
27	$n_r$	Dimension de $\mathbf{q}_r$ .
27	$J(\mathbf{q})$	Matrice jacobienne de la fonction $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ .
28	$D_p(\mathbf{q}_p)$	Matrice des contraintes de roulement sans glissement des roues d'une plateforme mobile.
29	$\mathcal{T}_{\xi_p} \mathcal{M}_p$	Espace tangent à $\mathcal{M}_p$ en $\xi_p$ .
29	$\delta_{mobp}$	Degré de mobilité d'une plateforme mobile à roues.
29	$\Upsilon(\beta_c)$	Matrice des contraintes sur la mobilité d'une plateforme mobile à roues.
29	$\Sigma(\beta_c)$	Matrice de mobilité d'une plateforme mobile à roues.
29	$\mathbf{u}_{mobp}$	Commande de mobilité d'une plateforme mobile à roues.
30	$\delta_{dirp}$	Degré de dirigeabilité d'une plateforme mobile à roues.
31	$\mathbf{u}_{dirp}$	Commande de dirigeabilité d'une plateforme mobile à roues.
31	$S_r(\beta_c, \beta_d)$	Relation entre commande et vitesse des roues d'une plateforme mobile.
31	$\delta_{motp}$	Degré d'actionnement d'une plateforme mobile à roues.
31	$S_p(\mathbf{q}_p)$	Relation entre commande et vitesse des paramètres de configuration d'une plateforme mobile à roues.
32	$\Delta(\mathbf{q}_p)$	Distribution de champs de vecteurs engendrée par les colonnes de $S_p(\mathbf{q}_p)$ .
32	$\tilde{\Delta}(\mathbf{q}_p)$	Clôture involutive de $\Delta(\mathbf{q}_p)$ .
32	$\mathbf{u}_b$	Commande de mobilité d'un bras manipulateur.
33	$\mathbf{u}_{mob}$	Commande de mobilité d'un manipulateur mobile à roues.
33	$\delta_{mob}$	Degré de mobilité d'un manipulateur mobile à roues.
33	$\mathbf{u}$	Vecteur de commande d'un manipulateur mobile à roues, de dimension $n_{ddl}$ .
33	$S(\mathbf{q}_p)$	Relation entre commande et vitesse des paramètres de configuration d'un manipulateur mobile à roues.
33	$S_{mob}(\mathbf{q}_p)$	Relation entre commande de mobilité et vitesse des paramètres de configuration d'un manipulateur mobile à roues.
33	$\mathbf{z}$	Vecteur de situation opérationnelle et d'orientation des roues centrées orientables.
34	$B(\mathbf{q})$	Matrice jacobienne étendue à l'orientation des roues orientables pour un manipulateur mobile à roues.

34	$\bar{B}(\mathbf{q})$	Matrice jacobienne réduite étendue à l'orientation des roues orientables pour un manipulateur mobile à roues.
34	$\bar{J}(\mathbf{q})$	Matrice jacobienne réduite d'un manipulateur mobile à roues.
35	$m_{ddl}$	Degré de liberté de l' $OT$ d'un manipulateur mobile à roues.
36	$l_i$	Longueur du corps $i$ d'un bras manipulateur plan à liaisons rotoïdes.
39	$v$	Vitesse linéaire du point $O_p$ dans la direction $\bar{x}_p$ .
39	$\omega$	Vitesse angulaire d'une plateforme mobile à roues autour de l'axe $\bar{z}_p$ .
47	$T(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}, t)$	Energie cinétique d'un système mécanique.
47	$Q_i$	Coefficient de puissance ou efforts donnés associés au paramètre $q_i$ .
47	$P_i$	Puissance virtuelle des quantités d'accélération associée au paramètre $q_i$ .
47	$\delta q_i^*$	Déplacement virtuel associé au paramètre $q_i$ .
47	$\dot{q}_i^*$	Vitesse virtuelle associée au paramètre $q_i$ .
48	$Q_{id}$	Efforts donnés associés au paramètre $q_i$ .
48	$Q_{ic}$	Efforts donnés de liaison des liaisons complémentaires associés au paramètre $q_i$ .
2.3.1.2	$\lambda$	Vecteur des multiplicateurs de LAGRANGE associés aux liaisons complémentaires.
48	$Q_{dm}$	Efforts donnés moteurs.
49	$Q_{d_{ext}}$	Efforts donnés liés aux efforts extérieurs exercés au niveau de l' $OT$ et sur les roues centrées orientables.
49	$Q_{dg}$	Efforts donnés liés aux effets de la gravité sur le système.
49	$Q_d$	Efforts donnés autres que ceux de liaisons des liaisons complémentaires.
49	$\Gamma$	Vecteur des efforts actionneurs.
49	$M$	Matrice de répartition des actionneurs.
50	$\mathbf{f}_{ext}$	Vecteur des efforts extérieurs appliqués sur le système via son $OT$ et ses roues centrées orientables.
50	$\mathbf{g}(\mathbf{q}_b)$	Vecteur des efforts de gravité agissant sur le système.
50	$A(\mathbf{q})$	Matrice d'inertie d'un système mécanique.
50	$C(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Matrice des effets d'entraînement CORIOLIS et centrifuge d'un système mécanique.
51	$\bar{A}(\mathbf{q})$	Matrice d'inertie réduite d'un système mécanique.
51	$\bar{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Matrice réduite des effets d'entraînement CORIOLIS et centrifuge d'un système mécanique.
52	$\bar{\mathbf{g}}(\mathbf{q}_b)$	Vecteur réduit des efforts de gravité agissant sur le système.
52	$\bar{M}$	Matrice réduite de répartition des actionneurs.
52	$\bar{\Gamma}$	Vecteur réduit des efforts actionneurs.

## A.3 Symboles du chapitre 3

Page	Symbole	Définition
56	$\xi(t)^*$	Mouvement opérationnel de consigne.
56	$\mathbf{f}_{OT}$	Effort d'interaction opérationnelle.
56	$\mathbf{f}_{OT}(t)^*$	Effort d'interaction opérationnelle de consigne.
56	$\beta_c(t)^*$	Consigne d'orientation des roues centrées orientables.
57	$\mathbf{q}_{b_{min}}, \mathbf{q}_{b_{max}}, \beta_{c_{max}}$	Butées articulaires du bras manipulateur et des roues centrées orientables.
57	$\mathbf{u}_{max}$	Vitesse maximale de consigne articulaire.
57	$\dot{\mathbf{u}}_{max}$	Accélération maximale de consigne articulaire.
57	$\mathbf{\Gamma}_{max}$	Couple maximal de consigne articulaire.
57	$\mathbf{c}$	Vecteur des consignes articulaires ( $\mathbf{\Gamma}$ ou $\mathbf{u}$ ).
57	$\mathbf{c}_{max}$	Vecteur des consignes articulaires maximales.
58	$d(O_p, obstacle)$	Distance du centre de la plateforme à un obstacle.
58	$d_{min}$	Valeur minimale admise pour $d(O_p, obstacle)$ .
59	$f_s$	Seuil de détection d'effort pour la transition entre espace libre et contact.
59	$\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$	Vitesses linéaire de deux solides $s_1$ et $s_2$ avant impact.
59	$\Delta \mathbf{v}_1, \Delta \mathbf{v}_2$	Variation de vitesse linéaire de deux solides $s_1$ et $s_2$ à l'instant de l'impact.
59	$\mathbf{n}$	Normale à la surface de contact.
60	$e$	Coefficient de restitution caractérisant l'impact.
60	$\hat{\mathbf{f}}$	Vecteur des efforts impulsionnels.
60	$t_i$	Instant de l'impact.
60	$\Delta t_i$	Durée de l'impact.
60	$\mathbf{f}$	Effort d'interaction au point de contact entre deux solides $s_1$ et $s_2$ .
61	$R(\mathbf{q})$	Restriction aux termes liés à la vitesse opérationnelle linéaire de l'inverse de la pseudo-matrice d'inertie d'un manipulateur mobile à roues.
61	$\hat{\mathbf{F}}$	Restriction de $\hat{\mathbf{f}}$ aux seules forces d'interaction.
61	$\bar{F}$	Norme de $\hat{\mathbf{F}}$ .
62	$\mathbf{q}_s$	Configuration singulière.
62	$\lambda_i$	$i$ ème valeur propre de la matrice $\bar{J}(\mathbf{q}) \bar{J}(\mathbf{q})^T$ .
62	$\sigma_i$	$i$ ème valeur singulière de la matrice $\bar{J}(\mathbf{q})$ .
62	$c(\bar{J}(\mathbf{q}))$	Conditionnement de $\bar{J}(\mathbf{q})$ .
63	$\tilde{\mathbf{u}}_{mob}$	Vecteur de commande de mobilité pondéré.
63	$W$	Matrice symétrique et définie positive de pondération de la commande de mobilité.
63	$\tilde{\bar{J}}(\mathbf{q})$	Matrice jacobienne réduite et pondérée par $W^{-1}$ .
63	$\tilde{\bar{J}}(\mathbf{q}) = \tilde{U}(\mathbf{q}) \tilde{D}(\mathbf{q}) \tilde{V}(\mathbf{q})^T$	Décomposition en valeurs singulières de la matrice $\tilde{\bar{J}}(\mathbf{q})$ .
63	$\tilde{\sigma}_i$	$i$ ème valeur singulière de la matrice $\tilde{\bar{J}}(\mathbf{q})$ .
64	$\dot{\xi}$	Vitesse opérationnelle pondérée : $\dot{\xi} = \tilde{U}'(\mathbf{q})^T \dot{\xi}$ .

64	$\omega_b(\mathbf{q})$	Mesure de manipulabilité.
65	$e(\mathbf{q}, t)$	Fonction de tâche au sens de [SAMSON 91].
66	$e_\xi(t)$	Erreur de situation opérationnelle.
68	$S$	Matrice de sélection des directions pour la commande hybride position / force.
69	$\xi'$	Commande opérationnelle de mouvement.
69	$\mathbf{f}'_{OT}$	Commande opérationnelle d'effort.
70	$\beta'_c$	Commande d'orientation des roues centrées orientables
70	$\mathbf{z}'$	Vecteur de commande du mouvement opérationnelle et d'orientation des roues centrées orientables.
72	$\mathbf{u}'$	Accélération articulaire de commande.
72	$\bar{\Gamma}_{\rightarrow ext}$	Couple opérationnel calculé pour l'exécution d'un mouvement opérationnel et d'orientation des roues centrées orientables donné.
74	$\mathbf{h}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Vecteur de couplage dynamique.
74	$\Lambda(\mathbf{q})$	Pseudo-matrice d'inertie d'un manipulateur mobile à roues.
74	$\mu(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})$	Vecteur des termes d'entraînement coriofuges et des termes liés à la gravité du point de vue opérationnel et de l'orientation des roues centrées orientables.
74	$\mathbf{f}'$	Vecteur de consigne d'interaction opérationnelle et des roues centrées orientables.
75	$\mathcal{P}(\mathbf{q})$	Fonction potentiel.
76	$K$	Gain associé à l'optimisation locale par méthode de gradient.
76	$\mathbf{c}_p$	Part de la consigne articulaire liée aux mouvements ou aux efforts opérationnels et d'orientation des roues centrées orientables.
76	$\mathbf{c}_{red}$	Part de la consigne articulaire liée aux mouvements ou aux efforts internes autorisés par la redondance cinématique du système.
76	$E(\mathbf{q})$	Matrice $B(\mathbf{q})$ ou pseudo-inverse pondérée de sa transposée.
77	$k_l$	Nombre de tâches opérationnelles composant une même mission.
77	$s_{ijk}$	Seuil $k$ associé au basculement de la tâche $k_{li}$ vers la tâche $k_{lj}$ .
77	$t_{ij}$	Instant du basculement de la tâche $k_{li}$ vers la tâche $k_{lj}$ .
78	$k_s$	Nombre d'objectifs secondaires composant une même mission.
79	$N$	Matrice de nécessité des objectifs secondaires.
79	$P$	Matrice de priorité des objectifs secondaires.
79	$SP_e$	Matrice des seuils d'activation des objectifs secondaires.
79	$\mathbf{tp}_e$	Vecteur de l'état d' « activabilité » d'un objectif secondaire.

79	$SP_s$	Matrice des seuils de désactivation des objectifs secondaires.
79	$\mathbf{tp}_s$	Vecteur de l'état de « désactivabilité » d'un objectif secondaire.
79	$tl$	Nombre associé à la tâche opérationnelle en cours.
79	$os$	Nombre associé à l'objectif secondaire actif.
81	$\dot{\mathbf{z}}_{max}$	Vitesse maximale de consigne opérationnelle et d'orientation des roues centrées orientables.
99	$\mathbf{f}_{max}$	Effort maximale de consigne opérationnelle et d'orientation des roues centrées orientables.
81	$\alpha$	Coefficient de mise à l'échelle des mouvements internes.
81	$\alpha_{max}$	Valeur maximale du coefficient de mise à l'échelle des mouvements internes.
82	$\beta(t)$	Fonction de transition lisse d'une fonction potentiel vers une autre.
82	$t_{ti}$	Début de la transition entre deux objectifs secondaires.
82	$t_{tf}$	Fin de la transition entre deux objectifs secondaires.
83	$\rho$	Indicateur d'efficacité du terme de consigne lié aux mouvements ou efforts internes.

#### A.4 Symboles du chapitre 4

Page	Symbole	Définition
93	$\xi_{01}$	Situation opérationnelle de départ de la mission.
93	$\xi_{12}$	Situation opérationnelle de transition entre les tâches opérationnelles 1 et 2.
93	$\xi_{23}$	Situation opérationnelle de transition entre les tâches opérationnelles 2 et 3.
93	$\xi_{3f}$	Situation opérationnelle finale de la mission.
95	$W_{reg}$	Matrice définie positive de gain sur l'erreur de situation opérationnelle.
95	$\mathbf{u}_v$	Part de la consigne articulaire liée au mouvement opérationnel dans le cadre d'un schéma de commande hybride position / force.
95	$\mathbf{u}_f$	Part de la consigne articulaire liée à l'effort d'interaction opérationnel dans le cadre d'un schéma de commande hybride position / force.
95	$\dot{\xi}'_v$	Signal de commande associé au mouvement opérationnel de consigne dans le cadre d'un schéma de commande hybride position / force.
95	$\dot{\xi}'_f$	Signal de commande associé à l'effort opérationnel de consigne dans le cadre d'un schéma de commande hybride position / force.
96	$W_p$	Matrice définie positive de gain sur l'erreur d'effort d'interaction opérationnel.

96	$W_i$	Matrice définie positive de gain sur l'intégrale de l'erreur d'effort d'interaction opérationnel.
96	$\hat{K}_e$	Estimée de la raideur de l'interaction opérationnelle dans la direction normale à la surface de contact.
99	$f_{max}$	Valeur maximale observée de la force d'interaction normale à la surface de contact.
99	$f_d$	Valeur de la force d'interaction normale à la surface de contact à l'instant de détection du contact.
100	$\mathbf{u}^*$	Vecteur de consigne articulaire.
100	$\mathbf{u}_{OT}$	Part du vecteur de consigne articulaire liée à la tâche opérationnelle.
100	$\mathbf{u}_{red}$	Part du vecteur de consigne articulaire liée aux mouvements internes du système.
111	$F(p)$	Fonction de transfert du filtre passe-bas des consignes de vitesse opérationnelle issues du joystick.
111	$\tau, K$	Constante de temps et gain statique de $F(p)$ .
111	$\dot{\xi}(t)_{jstck}^*$	Norme de la consigne de vitesse opérationnelle issue du joystick.
111	$\dot{\xi}(t)_f^*$	Norme de la consigne de vitesse opérationnelle filtrée.
111	$\dot{\xi}_{max}, \ddot{\xi}_{max}$	Valeurs maximales des normes des vitesses et accélérations opérationnelles.
111	$\dot{e}_i(t)_f^*$	Différence entre la valeur de vitesse consigne dans la direction opérationnelle $i$ et sa valeur filtrée.





---

## Annexe B

### Résolution des systèmes linéaires et résultats de calcul matriciel

---

Cette annexe sur les systèmes linéaires présente les résultats nécessaires à la compréhension des développements théoriques menés dans ce mémoire. Le lecteur peut aussi se référer à l'article de K. DOTY *et al.* ([DOTY 93]) sur la théorie des inverses généralisées appliquée à la Robotique ainsi qu'à l'ouvrage de référence sur les inverses généralisées de A. BEN-ISRAEL et T. GREVILLE ([BEN ISRAEL 03]). Pour ce qui est des généralités sur le calcul matriciel, l'ouvrage [ROTELLA 95] de F. ROTELLA et P. BORNE constitue une bonne référence tandis que G. GOLUB et C. VAN LOAN fournissent dans [GOLUB 96] des détails sur les différents algorithmes de calcul matriciel.

## B.1 Généralités

### B.1.1 Premier problème

Soit une matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et deux vecteurs colonne  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ . Un problème consiste à trouver l'ensemble des  $\mathbf{x}$  tels que :

$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}. \quad (\text{B.1})$$

Si ce système admet au moins une solution exacte, il est dit *compatible*. Une condition nécessaire et suffisante de compatibilité est donnée par :

$$\text{rang}(A) = \text{rang}([A|\mathbf{y}]). \quad (\text{B.2})$$

$\text{rang}(A)$  représente le nombre maximum de lignes ou de colonnes linéairement indépendantes pouvant être extraites de  $A$ .

Un système ne respectant pas cette condition est dit *incompatible* et n'admet pas de solution exacte.

Cette condition revient à vérifier que  $\mathbf{y}$  peut s'écrire comme une combinaison linéaire des colonnes de  $A$  ou encore que  $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$ .  $\text{Im}(A)$  est appelé *l'image* de  $A$ . C'est un sous-espace vectoriel dont la définition est :

$$\text{Im}(A) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \exists \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \mathbf{y} = A\mathbf{x}\}.$$

### B.1.2 Second problème

L'ensemble de solutions au problème :

$$0 = A\mathbf{x},$$

s'écrit :

$$\text{Ker}(A) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, 0 = A\mathbf{x}\}. \quad (\text{B.3})$$

Le sous-espace vectoriel  $\text{Ker}(A)$  est appelé le *noyau* de  $A$ .

La dimension de ces ensembles est :

$$\dim(\text{Im}(A)) = \text{rang}(A),$$

et :

$$\dim(\text{Ker}(A)) = n - \text{rang}(A).$$

Soit :

$$\dim(\text{Im}(A)) + \dim(\text{Ker}(A)) = n.$$

## B.2 Résolution

Nous définissons ici quatre propriétés :

$$\begin{aligned} P_1 & : AXA = A; \\ P_2 & : XAX = X; \\ P_3 & : (AX)^T = AX; \\ P_4 & : (XA)^T = XA. \end{aligned}$$

Nous noterons :

- $A^{[i,j,\dots,k]}$  une matrice  $X$  vérifiant les propriétés  $P_i, P_j, P_k$  parmi  $P_1$  à  $P_4$ .
- $A[i, j, \dots, k]$  l'ensemble des matrices  $X$  vérifiant les propriétés  $P_i, P_j, P_k$  parmi  $P_1$  à  $P_4$ .

### B.2.1 Forme de la solution

La structure de l'ensemble des solutions est donnée par :

$$\mathbf{x}_s = A^{[1]}\mathbf{y} + (I_n - A^{[1]}A)\mathbf{x}_0, \quad (\text{B.4})$$

où  $I_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$  est la matrice identité et  $\mathbf{x}_0$  un vecteur colonne quelconque de  $\mathbb{R}^n$ . Les matrices de type  $A^{[1]}$ , aussi notées  $A^\sharp$ , sont en nombre infini et sont appelées *inverses généralisées* de  $A$ .  $A[1]$  représente l'ensemble des inverses généralisées de  $A$ . Toute matrice  $A^\sharp$  vérifie la propriété  $P_1$  et  $A^{[1]}$  est telle que  $(A^{[1]})^T \in A^T[1]$ . Il est aussi possible de démontrer qu'à partir d'une inverse généralisée particulière  $A^{[1]}$  de  $A$ , l'ensemble  $A[1]$  des inverses généralisées de  $A$  est défini par :

$$A[1] = \left\{ A^{[1]} + Z - A^{[1]}AZAA^{[1]} \right\}, \quad (\text{B.5})$$

où  $Z$ , quelconque,  $\in \mathbb{R}^{n \times m}$ .

La solution  $\mathbf{x}_s$  est exacte si et seulement si le système est compatible. Dans tous les autres cas, cette solution est fautive, *i.e.* elle ne vérifie pas (B.1).

#### B.2.1.1 Inverse à droite

Si  $A$  est de rang plein en lignes, (*i.e.*  $\text{rang}(A) = m$ ) alors  $A^\sharp$  est une *inverse à droite* de  $A$  et elle vérifie :

$$AA^\sharp = \mathcal{I}_m. \quad (\text{B.6})$$

#### B.2.1.2 Inverse à gauche

Si  $A$  est de rang plein en colonnes, (*i.e.*  $\text{rang}(A) = n$ ) alors  $A^\sharp$  est une *inverse à gauche* de  $A$  et elle vérifie :

$$A^\sharp A = \mathcal{I}_n. \quad (\text{B.7})$$

La structure de l'ensemble des solutions est alors donnée par :

$$\mathbf{x}_s = A^{[1]}\mathbf{y}.$$

### B.2.1.3 Projecteur

$(I_n - A^{[1]}A)$  est appelé *projecteur dans le noyau* de  $A$ . Il est *idempotent* c'est à dire qu'il vérifie la relation :

$$(I_n - A^{[1]}A)^2 = (I_n - A^{[1]}A). \quad (\text{B.8})$$

$A^{[1]}A$  est aussi idempotent et c'est un projecteur dans l'image de  $A^{[1]}$ ,  $Im(A^{[1]})$  qui est définie comme suit :

$$Im(A^{[1]}) = \{ \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, \exists \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{x} = A^{[1]}\mathbf{y} \}. \quad (\text{B.9})$$

Tout  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  peut s'écrire comme la somme :

$$\mathbf{x} = A^{[1]}A\mathbf{x}_1 + (I_n - A^{[1]}A)\mathbf{x}_2,$$

où  $\mathbf{x}_1$  et  $\mathbf{x}_2$  sont deux vecteurs de  $\mathbb{R}^n$ .

## B.2.2 Cas particulier des pseudo-inverses pondérées

Au delà de la structure générale de l'ensemble des solutions présentée auparavant, qui d'ailleurs ne fournit pas de méthode de construction, il existe des méthodes qui permettent d'établir des ensembles de solutions qui possèdent des propriétés remarquables.

Nous présentons ici des résultats concernant les *pseudo-inverses pondérées* qui constituent une famille particulière de solutions aux propriétés particulièrement intéressantes.

**Définition :** La norme euclidienne  $W$ -pondérée d'un vecteur  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^\alpha$  est  $\mathbf{v} = \sqrt{\mathbf{v}^T W \mathbf{v}}$  où  $W$  est une matrice de pondération symétrique et définie positive de  $\mathbb{R}^{\alpha \times \alpha}$ .

Ainsi l'ensemble des solutions à (B.1), au sens des moindres carrés  $M_y$ -pondérés et qui minimise la norme euclidienne  $M_x$ -pondérée de  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ , prend la forme :

$$\mathbf{x}_s = A^* \mathbf{y} + (I_n - A^* A) \mathbf{x}_0, \quad (\text{B.10})$$

où :

$$A^* = M_x^{-1} C^T [C M_x^{-1} C^T]^{-1} [F^T M_y F]^{-1} F^T M_y, \quad (\text{B.11})$$

avec  $M_x \in \mathbb{R}^{n \times n}$  et  $M_y \in \mathbb{R}^{m \times m}$  deux matrices symétriques définies positives et  $A = FC$  une décomposition de rang plein de  $A$  ( $F \in \mathbb{R}^{m \times r}$  de rang plein en colonnes et  $C \in \mathbb{R}^{r \times n}$  de rang plein en lignes).

$A^*$  appartient à l'ensemble des inverses généralisées dites *pseudo-inverses pondérées* qui vérifient les propriétés  $P_1$  et  $P_2$  ainsi que :

$$\begin{aligned} P_3' & : (M_y A X)^T = M_y A X; \\ P_4' & : (M_x X A)^T = M_x X A. \end{aligned}$$

Cet ensemble de solutions présentent la particularité de minimiser la norme  $M_x$ -pondérée de la solution trouvée mais surtout de minimiser la norme  $M_y$ -pondérée de l'erreur quand le système n'est pas compatible et qu'il n'existe pas de solution exacte.

A partir de (B.10), nous distinguons trois cas particuliers.

$\text{rang}(A) = n$

Le premier correspond à  $A$  de rang plein en colonnes, soit encore  $A = F$ . Dans ce cas  $A^*$  devient :

$$A_{M_y}^* = [A^T M_y A]^{-1} A^T M_y. \quad (\text{B.12})$$

$A^*$  est une *inverse à gauche* de  $A$  car elle vérifie :

$$A_{M_y}^* A = I_n. \quad (\text{B.13})$$

(B.10) devient alors :

$$\mathbf{x}_s = A_{M_y}^* \mathbf{y},$$

solution qui minimise, au sens des moindres carrés  $M_y$ -pondérées, la norme de l'erreur  $(\mathbf{y} - A\mathbf{x})$ . Dans le cas d'un système compatible cette solution est exacte et donc indépendante de  $M_y$  (*i.e.*  $M_y = I_m$ ). L'inverse à gauche  $A^*$  de  $A$  s'écrit alors  $A^+ = [A^T A]^{-1} A^T$  et elle est appelée la *pseudo-inverse* de  $A$ . Elle vérifie l'ensemble des propriétés  $P_1$  à  $P_4$ .

$\text{rang}(A) = m$

Le second cas correspond à  $A$  de rang plein en lignes, soit encore  $A = C$ . Dans ce cas, le système est toujours compatible et les solutions toujours exactes.  $A^*$  devient alors :

$$A_{M_x}^* = M_x^{-1} A^T [A M_x^{-1} A^T]^{-1}. \quad (\text{B.14})$$

$A^*$  est une *inverse à droite* de  $A$  car elle vérifie :

$$A A_{M_x}^* = I_m. \quad (\text{B.15})$$

(B.10) est dans ce cas la solution qui minimise la norme euclidienne  $M_x$ -pondérée du vecteur  $(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$ . Si  $M_x$  est choisi comme étant l'identité, l'inverse à droite de  $A^*$  s'écrit alors  $A^+ = A^T [A A^T]^{-1}$  et est la pseudo-inverse de  $A$ .

$\text{rang}(A) = n = m$

Enfin, dans le cas où  $A$  est régulière (carrée et de rang plein), toutes les solutions présentées ici mènent à l'unique solution exacte  $\mathbf{x}_s = A^{-1} \mathbf{y}$ .

## Projecteur

Dans le cas de la pseudo-inverse  $A^+$ , le projecteur dans le noyau de  $A$  est aussi symétrique (démonstration triviale) :

$$(I_n - A^+ A)^T = (I_n - A^+ A). \quad (\text{B.16})$$

D'après [BEN ISRAEL 03], c'est donc un *projecteur orthogonal* ce qui permet d'écrire tout vecteur  $\mathbf{x}$  comme la *somme directe* :

$$\mathbf{x} = A^+ A \mathbf{x}_1 \oplus (I_n - A^+ A) \mathbf{x}_2.$$

Les espaces  $\text{Im}(A^+)$  et  $\text{Ker}(A)$  sont donc deux sous-espaces orthogonaux, ce qui s'écrit :

$$[\text{Im}(A^+)]^\perp = \text{Ker}(A).$$

### B.2.3 Deux propriétés des pseudo-inverses pondérées

Nous nous limitons ici à démontrer ces propriétés dans le cas qui nous intéresse :  $A$  est de rang plein en lignes.

#### B.2.3.1 Réciprocité de la pseudo-inverse pondérée

Soit  $B \in \mathbb{R}^{n \times m}$ , une pseudo-inverse  $M_x$ -pondérée de  $A$ . Nous avons donc :

$$B = M_x^{-1} A^T [A M_x^{-1} A^T]^{-1}.$$

Calculons la pseudo-inverse  $M_x$ -pondérée de  $B$  :

$$B_{M_x}^* = \left[ [A M_x^{-1} A^T]^{-1} A M_x^{-1} M_x M_x^{-1} A^T [A M_x^{-1} A^T]^{-1} \right]^{-1} [A M_x^{-1} A^T]^{-1} A M_x^{-1} M_x,$$

soit :

$$B_{M_x}^* = A.$$

Ce résultat peut aussi s'écrire :

$$(A_{M_x}^*)_{M_x}^* = A.$$

#### B.2.3.2 Transposée de la pseudo-inverse

Soit  $A_{M_x}^*$  la pseudo-inverse  $M_x$ -pondérée de  $A$ . Sa transposée vaut :

$$(A_{M_x}^*)^T = \left( M_x^{-1} A^T [A M_x^{-1} A^T]^{-1} \right)^T,$$

soit :

$$(A_{M_x}^*)^T = [A M_x^{-1} A^T]^{-1} A M_x^{-1}.$$

Nous avons donc :

$$(A_{M_x}^*)^T = (A^T)_{M_x^{-1}}^*.$$

## B.3 Problème dual

Nous appelons *problème dual* le système :

$$\mathbf{u} = A^T \mathbf{v}, \tag{B.17}$$

où  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  et  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^m$ .

### B.3.1 Définitions

Définissons les sous-espaces vectoriels  $Im(A^T)$  et  $Ker(A^T)$ .

L'image de  $A^T$  est défini par :

$$Im(A^T) = \{ \mathbf{u} \in \mathbb{R}^n, \exists \mathbf{v} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{u} = A^T \mathbf{v} \}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension  $dim(Im(A^T)) = rang(A)$  et, par définition, nous avons :

$$[Im(A^T)]^\perp = Ker(A).$$

Ainsi tout couple  $(\mathbf{u}, \mathbf{x})$  de vecteurs tels que  $\mathbf{u} \in \text{Im}(A^T)$  et  $\mathbf{x} \in \text{Ker}(A)$  est orthogonal, soit :

$$\mathbf{u}^T \mathbf{x} = 0.$$

Le noyau de  $A^T$  est défini par :

$$\text{Ker}(A^T) = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n, 0 = A^T \mathbf{v}\}.$$

C'est un sous-espace vectoriel de dimension  $\dim(\text{Ker}(A^T)) = \text{rang}(A)$  et, par définition, nous avons :

$$[\text{Ker}(A^T)]^\perp = \text{Im}(A).$$

Ainsi tout couple  $(\mathbf{v}, \mathbf{y})$  de vecteurs tels que  $\mathbf{v} \in \text{Ker}(A^T)$  et  $\mathbf{y} \in \text{Im}(A)$  est orthogonal, soit :

$$\mathbf{v}^T \mathbf{y} = 0.$$

Nous avons :

$$\dim(\text{Im}(A^T)) + \dim(\text{Ker}(A^T)) = m.$$

### B.3.2 Résolution

D'après (B.4), la structure de l'ensemble des solutions à (B.17) est donnée par :

$$\mathbf{v}_s = (A^T)^{[1]} \mathbf{u} + \left( \mathcal{I}_m - (A^T)^{[1]} A^T \right) \mathbf{v}_0.$$

Pour  $A$  de rang plein en lignes,  $(A^T)^{[1]}$  est une inverse à gauche de  $A^T$  et donc  $(A^T)^{[1]} A^T = \mathcal{I}_m$ . L'ensemble des solutions se limite donc à :

$$\mathbf{v}_s = (A^T)^{[1]} \mathbf{u}, \quad (\text{B.18})$$

qui est une solution exacte si et seulement si  $\mathbf{u} \in \text{Im}(A^T)$ .

L'inversion de (B.18) donne :

$$\mathbf{u}_s = \left( (A^T)^{[1]} \right)^{[1]} \mathbf{v} + \left( \mathcal{I}_n - \left( (A^T)^{[1]} \right)^{[1]} (A^T)^{[1]} \right) \mathbf{u}_0.$$

En restreignant l'ensemble des inverses généralisées à celle qui vérifie les propriétés  $P_1$  et  $P_2$ , nous avons :

$$\mathbf{u}_s = \left( (A^T)^{[1,2]} \right)^{[1,2]} \mathbf{v} + \left( \mathcal{I}_n - \left( (A^T)^{[1,2]} \right)^{[1,2]} (A^T)^{[1,2]} \right) \mathbf{u}_0. \quad (\text{B.19})$$

Le sous-ensemble  $X[1,2]$  des inverses généralisées de  $A^T$  est tel que  $A^T \in X[1,2]$ . Il existe donc une séquence d'inversion telle que :

$$\left( (A^T)^{[1,2]} \right)^{[1,2]} = A^T.$$

(B.19) peut alors s'écrire de manière plus complète :

$$\mathbf{u}_s = A^T \mathbf{v} + \left( \mathcal{I}_n - A^T (A^T)^{[1,2]} \right) \mathbf{u}_0.$$



## B.4 Résultats de calcul matriciel

### B.4.1 Décomposition en valeurs singulières

#### B.4.1.1 Rappel sur la décomposition en valeurs singulières

La décomposition en valeurs singulières de la matrice  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  donne :

$$A = UDV^T,$$

où  $U$  et  $V$  sont deux matrices orthogonales<sup>1</sup> de dimension  $m \times m$  et  $n \times n$  respectivement.  $D$  est une matrice diagonale de dimension  $m \times n$  et dont la diagonale est composée des valeurs singulières de  $\sigma_i$  de  $A$ , rangées dans l'ordre décroissant.

Rappelons ici que les valeurs singulières de la matrice  $A$  sont les  $m$  racines positives des  $m$  valeurs propres de  $AA^T$ . Les valeurs propres de  $AA^T$  sont les  $\lambda_i$  solutions de l'équation :  $\det(AA^T - \lambda \mathcal{I}_m)$ .

Soit les  $k$  parmi  $m$  valeurs singulières de  $A$  non nulles, la pseudo-inverse  $D^+$  de  $D$  est une matrice diagonale de dimension  $n \times m$  et dont les éléments diagonaux sont  $\left\{ \frac{1}{\sigma_1}, \frac{1}{\sigma_2}, \dots, \frac{1}{\sigma_k} \right\}$  où  $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_k > 0$ .

La pseudo-inverse de  $A$  est alors donnée par :

$$A^+ = VD^+U^T.$$

L'avantage d'une telle expression est qu'elle peut être calculée indépendamment de toute condition de rang sur  $A$ , ce qui n'est pas le cas de l'inverse  $(AA^T)^{-1}$  de  $AA^T$  qui n'existe que pour  $A$  de rang plein en lignes.

#### B.4.1.2 Extension pondérée de la décomposition en valeurs singulières

Cette extension est proposée par A. BEN-ISRAEL et T. GREVILLE dans [BEN ISRAEL 03].

La décomposition en valeurs singulières  $\{M_y, M_x\}$ -pondérée de la matrice  $A$  permet d'écrire  $A$  sous la forme :

$$A = U'D'V'^T,$$

où :

- $U'$  est une matrice  $M_y$ -orthogonale de dimension  $m \times m$  : elle vérifie  $U'^T M_y U' = \mathcal{I}_m$  ;
- $V'$  est une matrice  $M_x$ -orthogonale de dimension  $n \times n$  : elle vérifie  $V'^T M_x V' = \mathcal{I}_n$  ;
- $D'$  est une matrice diagonale de dimension  $m \times n$  et dont la diagonale est composée des  $n$  solutions  $\mu_i$  de l'équation  $\det(A^T M_y A - \mu^2 M_x) = 0$ .

$M_y$  et  $M_x$  sont les matrices de pondération symétriques et définies positives utilisées dans le calcul de la pseudo-inverse pondérée de  $A$ .

Posons<sup>2</sup>  $B = M_y^{1/2} A M_x^{-1/2}$ . La décomposition en valeurs singulières « classique » de  $B$  donne  $B = U_B D_B V_B^T$ . Nous avons donc :

$$M_y^{1/2} A M_x^{-1/2} = U_B D_B V_B^T$$

et :

$$A = M_y^{-1/2} U_B D_B V_B^T M_x^{1/2}$$

<sup>1</sup>une matrice orthogonale  $U$  est une matrice carrée régulière telle que  $U^T U = \mathcal{I}_m$  soit  $U^T = U^{-1}$ .

<sup>2</sup> $M_y$  symétrique et définie positive induit  $M_y^{1/2}$  et  $M_y^{-1/2}$  symétriques et définies positives. Ces matrices peuvent être calculées en employant une décomposition de SCHUR ([GOLUB 96]).

Par identification, nous obtenons :

$$U' = M_y^{-1/2} U_B, \quad (\text{B.20})$$

$$V' = M_x^{-1/2} V_B \quad (\text{B.21})$$

et :

$$(\text{B.22})$$

La pseudo-inverse pondérée de  $A$  au sens des moindres carrés  $M_y$ -pondérées et qui minimise la norme euclidienne  $M_x$ -pondérée peut donc se calculer en utilisant la relation :

$$A^* = V' D'^+ U'^{-1},$$

avec  $V'$ ,  $D'$  et  $U'$  définis par les relations (B.20), (B.21) et (B.22).

#### B.4.2 $WA^\# \in (AW^{-1})[1]$ ssi $\text{rang}(A) = m$ ?

Soit  $W$  une matrice symétrique et définie positive de dimension  $\delta_{mob} \times \delta_{mob}$ . Montrons que la propriété  $P_1$  est vérifiée :

$$AW^{-1}WA^\#AW^{-1} = AA^\#AW^{-1}.$$

D'après (B.6), pour  $A$  de rang plein en lignes nous avons donc  $AA^\# = \mathcal{I}_m$ . Nous vérifions alors la propriété  $P_1$  :

$$AW^{-1}WA^\#AW^{-1} = AW^{-1}$$

et une inverse généralisée de  $AW^{-1}$  est donc  $WA^\#$ .

#### B.4.3 Equivalence opérationnelle de la dérivation avant ou après inversion cinématique

Nous nous plaçons ici dans le cas régulier et redondant cinématiquement :  $\text{rang}(\bar{B}(\mathbf{q})) = m + \delta_{dirp}$  et  $m + \delta_{dirp} > n_{ddl}$ .

Le modèle cinématique d'un manipulateur mobile à roues peut s'écrire :

$$\dot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}.$$

Dérivons cette relation par rapport au temps. Nous obtenons :

$$\ddot{\mathbf{z}} = \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} + \bar{B}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{u}}.$$

Après inversion cinématique, nous avons :

$$\dot{\mathbf{u}} = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \left( \ddot{\mathbf{z}} - \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{u}} \right) + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{u}}_0. \quad (\text{B.23})$$

En inversant directement  $\dot{\mathbf{z}} = \bar{B}(\mathbf{q}) \mathbf{u}$ , nous obtenons :

$$\mathbf{u} = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \dot{\mathbf{z}} + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0. \quad (\text{B.24})$$

Après dérivation par rapport au temps, nous avons :

$$\dot{\mathbf{u}} = \bar{B}(\mathbf{q})^\# \ddot{\mathbf{z}} + \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \dot{\mathbf{u}}_0 + \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{z}} + \frac{d}{dt} \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0. \quad (\text{B.25})$$

Les relations (B.23) et (B.25) sont équivalentes si et seulement si :

$$\dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{z}} + \frac{d}{dt} \left( \mathcal{I}_{n_{ddl}} - \bar{B}(\mathbf{q})^\# \bar{B}(\mathbf{q}) \right) \mathbf{u}_0 = -\bar{B}(\mathbf{q})^\# \dot{\bar{B}}(\mathbf{q}) \mathbf{u}.$$

En remplaçant  $\mathbf{u}$  par (B.24), ceci peut s'écrire (en abandonnant la dépendance à  $\mathbf{q}$ ) :

$$\left( \dot{\bar{B}}^\# + \bar{B}^\# \dot{\bar{B}} \bar{B}^\# \right) \dot{\mathbf{z}} = \left( \dot{\bar{B}}^\# \bar{B} + \bar{B}^\# \dot{\bar{B}} \bar{B}^\# \bar{B} \right) \mathbf{u}_0. \quad (\text{B.26})$$

En multipliant chaque membre de (B.26) par  $\bar{B}$ , nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \left( \bar{B} \bar{B}^\# \right) \dot{\mathbf{z}} = \frac{d}{dt} \left( \bar{B} \bar{B}^\# \right) \bar{B} \mathbf{u}_0. \quad (\text{B.27})$$

Pour  $\bar{B}$  de rang plein en lignes,  $\bar{B} \bar{B}^\# = \mathcal{I}_m$  et (B.27) est vérifiée. L'équivalence opérationnelle de la dérivation avant ou après inversion cinématique est donc démontrée.

# Bibliographie

- [BAERLOCHER 04] P. BAERLOCHER & R. BOULIC. *An inverse kinematic architecture enforcing an arbitrary number of strict priority levels*. The Visual Computer, vol. 20, no. 6, pages 402–417, août 2004.
- [BAYLE 01a] B. BAYLE. Etude et utilisation du capteur d'effort GIROBO. Rapport N° 01009 du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, janvier 2001.
- [BAYLE 01b] B. BAYLE. *Modélisation et commande cinématiques des manipulateurs mobiles à roues*. Thèse, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, 2001.
- [BAYLE 01c] B. BAYLE, J.-Y. FOURQUET & M. RENAUD. *Génération de mouvements des manipulateurs mobiles. Etat de l'art et perspectives*. Journal Européen des Systèmes Automatisés, vol. 35, no. 6, pages 809–845, 2001.
- [BAYLE 01d] B. BAYLE, J.-Y. FOURQUET & M. RENAUD. *Manipulability Analysis for mobile manipulators*. Dans Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, pages 1251–1256, Séoul - Corée du Sud, mai 2001.
- [BAYLE 03a] B. BAYLE, J.-Y. FOURQUET & M. RENAUD. *From manipulation to wheeled mobile manipulation : analogies and differences*. Dans Proceedings of the 7th IFAC SYROCCO, pages 97–104, Wrocław - Pologne, 2003.
- [BAYLE 03b] B. BAYLE, M. RENAUD & J.-Y. FOURQUET. *Nonholonomic mobile manipulators : kinematics, velocities and redundancies*. Journal of Intelligent and Robotic Systems, vol. 36, pages 45–63, 2003.
- [BELLET 88] D. BELLET. Cours de mécanique générale. Cepadues-Editions, 1988. ISBN 2-85428-178-0.
- [BEN ISRAEL 03] A. BEN ISRAEL & T.N.E. GREVILLE. *Generalized Inverses : Theory and Applications*, second edition. Springer, 2003. ISBN 0-387-00293-6.
- [BLOCH 03] A.M. BLOCH, J. BAILLIEUL, P. CROUCH & J. MARSDEN. *Nonholonomic mechanics and control*. Springer, 2003. ISBN 0-387-95535-6.
- [BROCK 02] O. BROCK, O. KHATIB & S. VIJI. *Task consistent obstacle avoidance and motion behavior for mobile manipulation*. Dans Proceedings of the International Conference on Robotics and Automation, pages 388–393, Washington DC - USA, mai 2002. ISBN 0-7803-7273-5.
- [BROSSARD 94] J.P. BROSSARD. *Cinématique Générale A1661*. Techniques de l'Ingénieur, 1994.
- [BROSSARD 95] J.P. BROSSARD. *Dynamique Générale - Forme analytique A1666*. Techniques de l'Ingénieur, 1995.

- [CAMPION 96] G. CAMPION, G. BASTIN & B. D'ANDRÉA NOVEL. *Structural properties and classification of kinematic and dynamic models of wheeled mobile robots*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 12, pages 47–62, février 1996.
- [CARRIAY 02] A. CARRIAY. *Commmade de robot mobile non holonome par la méthode des fonctions transverses*. Diplôme d'Etudes Approfondies en Systèmes Automatiques. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2002.
- [CHIAVERINI 97] S. CHIAVERINI. *Singularity-robust task priority redundancy resolution for real-time kinematic control of robot manipulators*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 13, no. 3, pages 398–410, juin 1997.
- [CORKE 96] P.I. CORKE. *A Robotics Toolbox for MATLAB*. IEEE Robotics and Automation Magazine, vol. 3, no. 1, pages 24–32, mars 1996.
- [CULIOLI 94] J.C. CULIOLI. Introduction à l'optimisation. Ellipses, 1994.
- [DE SCHUTTER 97] J. DE SCHUTTER, H. BRUYNINCKX, W.-H. ZHU & M. W. SONG. *Force control : a bird's eye view*. Dans Proceedings of IEEE CSS/RAS International Workshopon : "Control Problems in Robotics and Automation : Future Directions", San Diego, USA, décembre 1997.
- [DOTY 93] K. L. DOTY, C. MELCHIORRI & C. BONIVETO. *A theory of generalized inverses applied to Robotics*. The International Journal of Robotics Research, vol. 12, no. 1, pages 1–19, février 1993.
- [DUCHEMIN 02] G. DUCHEMIN. *Commande et programmation d'un robot d'assistance au geste médical pour des tâches de suivi au contact de tissus mous*. Thèse, Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, 2002.
- [FLEURY 96] S. FLEURY. *Architecture de contrôle distribuée pour robots mobiles autonomes : principes, conceptions, applications*. Thèse, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, 1996.
- [FLEURY 97] S. FLEURY, M. HERRB & R. CHATILA. *GenoM : A tool for the specification and the implementation of operating modules in a distributed robot architecture*. Dans Proceedings of the Intelligent Robots and Systems, vol. 2, pages 842–848, Grenoble, septembre 1997.
- [FLEURY 01] S. FLEURY & M. HERRB. *G<sup>e</sup>nOM : Manuel d'utilisation*. Rapport N° 01203 du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, mai 2001.
- [FOULON 98] G. FOULON. *Génération de mouvements coordonnés pour un ensemble constitué d'une plate-forme mobile à roues et d'un bras manipulateur*. Thèse, Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, 1998.
- [FOURQUET 05] J-Y. FOURQUET, V. PADOIS, P. CHIRON & A. MAURATILLE. *Reactive behavior and dynamic sequencing for nonholonomic mobile manipulators*. Dans Proceedings of the 3rd International Conference on Computational Intelligence, Robotics and Autonomous Systems, Singapour, décembre 2005. A paraître.
- [FRUCHARD 05] M. FRUCHARD, P. MORIN & C. SAMSON. *A framework for the control of nonholonomic mobile manipulators*. Rapport de recherche N° 5556 de l'Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique, 2005.
- [GOLUB 96] G. H. GOLUB & C. F. VAN LOAN. *Matrix computations*, third edition. The John Hopkins University Press, 1996. ISBN 0-8018-5414-8.

- [HERRB 04] M. HERRB. GDHE - Graphical Display for Hilare Experiments. Guide d'utilisation - version 3.5, avril 2004.
- [HOGAN 87] N. HOGAN. *Stable execution of contact tasks using impedance control*. pages 1047–1054, 1987.
- [ISIDORI 89] A. ISIDORI. *Nonlinear Control Systems*. Springer-Verlag, 1989. Seconde édition. ISBN 0-387-50601-2.
- [KANG 01] S. KANG, K. KOMORIYA, K. YOKOI, T. KOUTOKU & K. TANIE. *Utilization of inertial effect in damping-based posture control of mobile manipulator*. Dans Proceedings of the 2001 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1277–1282, Seoul, Korea, 2001.
- [KHALIL 86] W. KHALIL & J.F. KLEINFINGER. *A new geometric notation for open and closed-loop robots*. Dans Proceedings of the 1986 International Conference on Robotics and Automation, vol. 2, pages 1174–1179, San Francisco - USA, avril 1986. ISBN 0-8186-0695-9.
- [KHALIL 97] W. KHALIL & D. CREUSOT. *SYMORO+ : A system for the symbolic modelling of robots*. *Robotica*, vol. 15, pages 153–161, 1997.
- [KHALIL 02] W. KHALIL & E. DOMBRE. *Modeling, Identification and Control of Robots*. Hermes Penton Science, 2002.
- [KHATIB 80] O. KHATIB. *Commande dynamique dans l'espace opérationnel des robots manipulateurs en présence d'obstacles*. Thèse, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1980.
- [KHATIB 87] O. KHATIB. *A Unified Approach for Motion and Force Control of Robot Manipulators : The Operational Space Formulation*. *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol. 3, no. 1, pages 43–53, février 1987.
- [KHATIB 95] O. KHATIB. *Inertial Properties in Robotic Manipulation : An Object-Level Framework*. *The International Journal of Robotics Research*, vol. 13, no. 1, pages 19–36, février 1995.
- [KHATIB 96] O. KHATIB, K. YOKOI, K. CHANG, D. RUSPINI, R. HOLMBERG & A. CASAL. *Vehicle/Arm Coordination and Multiple Mobile Manipulator Decentralized Cooperation*. Dans Proceedings of the 1996 International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 546–553, Osaka - Japon, novembre 1996.
- [KIM 00] J. KIM, W. CHUNG & Y. YOUM. *Normalized Impact Geometry and Performance Index for Redundant Manipulators*. Dans Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 1714–1719, San Francisco, USA, 2000.
- [LAMIRAUX 04] F. LAMIRAUX, D. BONNAFOUS & O. LEFEBVRE. *Reactive path deformation for nonholonomic mobile robots*. *IEEE Transactions on Robotics*, vol. 20, no. 6, pages 967–977, décembre 2004.
- [LÉVINE 04] J. LÉVINE. *Analyse et commande des systèmes non linéaires*. Notes de cours de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2004.
- [MACIEJEWSKI 88] A. A. MACIEJEWSKI & C. A. KLEIN. *Numerical filtering for the operation of robotic manipulators through kinematically singular configurations*. *Journal of Robotic Systems*, vol. 5, no. 6, pages 527–552, 1988.
- [MARTH 93] G. T. MARTH, T. J. TARN & A. K. BEJCZY. *Stable phase transition control for robot arm motion*. Dans Proceedings of the 1993 International Conference on Robotics and Automation, vol. 1, pages 355–362, Atlanta - USA, mai 1993.

- [MAURATILLE 05] A. MAURATILLE. *Optimisation de tâches robotiques pour un manipulateur mobile*. Diplôme d'Etudes Approfondies en Systèmes Automatiques. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2005.
- [MILLS 90] J. K. MILLS. *Stability of robotic manipulators during transition to and from compliant motion*. IFAC Automatica, vol. 26, no. 5, pages 861–874, novembre 1990.
- [MILLS 93] J. K. MILLS & D. M. LOKHORST. *Control of robotic manipulators during general task execution : a discontinuous approach*. The International Journal of Robotics Research, vol. 12, no. 2, pages 146–163, avril 1993.
- [MORIN 03] P. MORIN & C. SAMSON. *Practical stabilization of driftless systems on Lie groups : the transverse function approach*. IEEE Transactions on Automatic Control, vol. 48, pages 1496 – 1508, 2003.
- [MURRAY 94] R. M. MURRAY, Z. LI & S. S. SASTRY. *A mathematical introduction to robotic manipulation*. CRC Press, 1994.
- [NAGATANI 96] K. NAGATANI & S. YUTA. *Door-opening behaviour of an autonomous mobile manipulator by sequence of action primitives*. Journal of Robotic Systems, vol. 13, no. 11, pages 709–721, 1996.
- [NAKAMURA 91] Y. NAKAMURA. *Advanced Robotics : redundancy and optimization*. Addison Wesley, 1991. ISBN 0-201-15198-7.
- [NEĬMARK 72] J.I. NEĬMARK & N.A. FUFÆV. *Dynamics of nonholonomic systems*, vol. 33 of *Translations of Mathematical Monographs*. American Mathematical Society, 1972.
- [OMRČEN 03] D. OMRČEN, B. NEMEC & L. ŽLAJPAH. *Torque-velocity control algorithm for on-line obstacle avoidance for mobile manipulators*. Dans Proceedings of the 2003 International Conference on Industrial Technology, vol. 2, pages 784–789, Maribor - Slovénie, 2003.
- [PADOIS 04a] V. PADOIS, P. CHIRON & J-Y. FOURQUET. *Controlling dynamic contact transition for nonholonomic mobile manipulators*. Dans Proceedings of the 2004 International Conference on Intelligent Robots and Systems, vol. 4, pages 3817–3822, Sendai - Japon, octobre 2004. ISBN 0-7803-8464-4.
- [PADOIS 04b] V. PADOIS, P. CHIRON, J-Y. FOURQUET & A. CARRIAY. *Coordination and partial decoupling in tracking control for wheeled mobile manipulators*. Dans Proceedings of the 35th International Symposium on Robotics, Paris - France, mars 2004.
- [PADOIS 04c] V. PADOIS, J-Y. FOURQUET & P. CHIRON. *Motion Coordination of a mobile manipulator for contact transition tasks*. Dans Proceedings of the 10 th IEEE International Conference on Methods and Models in Automation and Robotics, vol. 2, pages 967–972, Miedzyzdroje - Pologne, septembre 2004. ISBN 83-88764-04-7.
- [PADOIS 04d] V. PADOIS, J-Y. FOURQUET, P. CHIRON & M. RENAUD. *On contact transition for nonholonomic mobile manipulators*. Dans Proceedings of the 9th International Symposium on Experimental Robotics, Singapour, juin 2004. ISBN 981-05-1467-0  
A paraître en 2006 dans Springer Tracts in Advanced Robotics, vol. 21 - ISBN 3-540-28816-3.
- [PARK 99a] J. PARK. *Analysis and control of kinematically redundant manipulators : an approach based on kinematically decoupled joint space decomposition*. Thèse, Pohang University of Science and Technology, 1999.

- [PARK 99b] J. PARK, W. CHUNG & Y. YOUM. *On dynamical decoupling of kinematically redundant manipulators*. Dans Proceedings of the 1999 International Conference on Intelligent Robots and Systems, pages 1495–1500, Corée, octobre 1999.
- [PARK 04] J. PARK & O. KHATIB. *Robust haptic teloperation of a mobile manipulation platform*. Dans Proceedings of the 9th International Symposium on Experimental Robotics, Singapore, juin 2004. ISBN 981-05-1467-0.
- [PERRIER 98] C. PERRIER. *Génération de mouvements pour un manipulateur mobile non holonome*. Thèse, Laboratoire d'Informatique de Robotique et de Microélectronique de Montpellier, 1998.
- [PIN 90] F. G. PIN & J. C. CULIOLI. *Multi-criteria position and configuration optimization for redundant platform/manipulator systems*. Dans Proceedings of the 1990 IEEE International Workshop on Intelligent Robots and Systems, pages 103–107, 1990.
- [PRIGENT 04] M. PRIGENT. *Optimisation des mouvements internes lors de l'enchaînement de tâches en robotique mobile*. Diplôme d'Etudes Approfondies en Systèmes Automatiques. Institut National Polytechnique de Toulouse, 2004.
- [RAIBERT 81] M. H. RAIBERT & J. J. CRAIG. *Hybrid position/force control of manipulators*. ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control, no. 102, pages 126–133, 1981.
- [RENAUD 96] M. RENAUD. Comment définir l'orientation d'un corps? Rapport N° 96078 du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes, mars 1996.
- [RENAUD 03a] M. RENAUD. Mécanique Générale classique et analytique. Notes de cours de l'Institut National des Sciences Appliquées de Toulouse, 2003.
- [RENAUD 03b] M. RENAUD. *Modélisation dynamique des plateformes mobiles de type unicycle et voiture*. Communication personnelle, 2003.
- [ROTELLA 95] F. ROTELLA & P. BORNE. Théorie et pratique du calcul matriciel. Editions Technip, 1995.
- [SAMSON 91] C. SAMSON, M. LEBORGNE & B. ESPIAU. Robot Control : The Task Function Approach. Oxford Engineering, Science Series 22. Clarendon Press, 1991.
- [SCIAVICCO 00] L. SCIAVICCO & B. SICILIANO. Modelling and control of robot manipulators, seconde édition. Springer, 2000.
- [SERAJI 93] H. SERAJI. *An on-line approach to coordinated mobility and manipulation*. Dans Proceedings of the 1993 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 28–35, Atlanta, USA, mai 1993.
- [SICILIANO 99] B. SICILIANO & L. VILLANI. Robot force control. Kluwer Academic Publisher, 1999. ISBN 0-7923-7733-8.
- [STEWART 94] D.E. STEWART & Z. LEYK. *Meschach : matrix computations in C*. Dans Proceedings of the Centre for Mathematics and its Applications, Australian National University, Canberra - Australie, 1994. ISBN 0-7315-1900-0.
- [TANNER 01] H. G. TANNER & K.J. KYRIAKOPOULOS. *Mobile manipulator modeling with Kane's approach*. Robotica, vol. 19, pages 675–690, 2001.
- [TCHON 02] K. TCHON & J. JAKUBIAK. *Extended Jacobian Inverse Kinematics Algorithms for Mobile Manipulators*. Journal of Robotic Systems, vol. 19, no. 9, pages 443–454, 2002.



- [UMEDA 99] Y. UMEDA, D. NAKAMURA, T. MUKARAMI & K. OHNISHI. *Hybrid Position/Force Control of a Mobile Manipulator based on Cooperative Task Sharing*. Dans Proceedings of the 1999 IEEE International Symposium on Industrial Electronics, Bled, Slovenia, 1999.
- [ŽLAJPAH 96] L. ŽLAJPAH. *Dexterity measures for optimal path control of redundant manipulators*. Dans Proceedings of the 5th International Workshop on Robotics in Alpe-Adria-Danube Region, pages 85–90, 1996.
- [WALKER 90] I. D. WALKER. *The Use of Kinematic Redundancy in Reducing Impact and Contact Effects in Manipulation*. Dans Proceedings of the 1990 IEEE International Conference on Robotics and Automation, pages 434–439, Cincinnati, USA, 1990.
- [WALKER 94] I. D. WALKER. *Impact configurations and measures for kinematically redundant and multiple armed robot systems*. IEEE Transactions on Robotics and Automation, vol. 10, no. 5, pages 670–683, octobre 1994.
- [YAMAMOTO 93] Y. YAMAMOTO & X. YUN. Recent trends in mobile robots (Y. F. Zheng), chapitre 6 : Coordinating locomotion and manipulation of a mobile manipulator, pages 157–181. World Scientific, 1993.
- [YAMAMOTO 94] Y. YAMAMOTO. *Control and coordination of locomotion and manipulation of a wheeled mobile manipulator*. Thèse, University of Pennsylvania, 1994.
- [YOSHIKAWA 90] T. YOSHIKAWA. Foundations of Robotics : analysis and control. The MIT Press, 1990. ISBN 0-262-24028-9.
- [YU 01] B. YU & P. R. PAGILLA. *A Switching Control Scheme for Constrained Robot Tasks*. Dans Proceedings of the 2001 IEEE Conference on Control Applications, Mexico City, Mexico, septembre 2001.

## Enchaînements dynamiques de tâches pour des manipulateurs mobiles à roues

**Mots-clés :** manipulateurs mobiles à roues, systèmes non holonomes et redondants, modélisation, commande opérationnelle cinématique et dynamique, enchaînements dynamiques, approche réactive

**Résumé :** La nature des missions qui sont aujourd'hui envisagées en Robotique suppose de plus en plus un espace de travail étendu du robot. Cette extension va de pair avec la combinaison de moyens de manipulation et de moyens de locomotion et c'est la raison d'être des manipulateurs mobiles. Parmi ces systèmes, qui prennent des formes diverses, nous distinguons les manipulateurs mobiles à roues qui sont la combinaison d'une plateforme à roues et d'un bras manipulateur. Ce mémoire présente notre contribution à l'étude de leur commande coordonnée (le système est vu comme un tout) au niveau opérationnel et plus particulièrement en vue de missions complexes qui nécessitent l'enchaînement dynamique de tâches de natures différentes : suivi de trajectoire, contrôle d'effort. En nous basant sur la forme générique des modèles cinématiques de ces systèmes, nous avons développé un modèle dynamique unifié, directement exploitable pour les techniques de commande à couple calculé. Afin de tenir compte des contraintes secondaires intrinsèques à tout système robotique mais aussi des contraintes imposées par l'environnement (obstacles par exemple), nous proposons une structure de commande qui permet l'intégration des lois de commande opérationnelle tout en assurant, notamment grâce à l'exploitation de la redondance du système, le respect des différentes contraintes. Cette structure gère l'enchaînement dynamique des tâches à réaliser et permet, qu'elles soient planifiées ou générés en temps réel, l'adaptation des consignes pour la gestion des incertitudes sur la connaissance de l'environnement mais aussi sur le déroulement de la mission. L'approche proposée a été validée en simulation et expérimentalement sur le robot H2Bis+GT6A de l'équipe RIA du LAAS.

### Dynamic sequencing of tasks for wheeled mobile manipulators

**Keywords :** wheeled mobile manipulators, non holonomic and redundant systems, modeling, kinematic and dynamic operational control, dynamic sequencing, reactive approach

Nowadays, robotics missions induce large workspaces of the robots. This extension explains the growing usage of mobile manipulators which are systems combining a mobile platform and means of manipulation. Among those systems that can take various shapes, we distinguish wheeled mobile manipulators which are systems combining a wheeled mobile platform and a manipulator arm. This PhD thesis report presents our contribution to the coordinated control of this kind of system, at an operational level, within the framework of complex missions execution based on the dynamic sequencing of tasks whose natures are different : motion, force. Using generic kinematics models of these systems, we have developed a unified dynamic model which can be used for control purpose (computed torque). We also propose a structure allowing the integration of operational control laws and ensuring the respect of secondary constraints inherent to the system or induced by the environment (obstacles for example). This structure manages the tasks sequencing and permits the reactive adaptation of the desired trajectories (that are planned or generated in real time) in order to handle uncertainties. This approach was validated in simulation but also using robot H2Bis+GT6A of the LAAS laboratory in Toulouse.