



**HAL**  
open science

# Analyse et classification de manipulateurs 3R à axes orthogonaux

Maher Baili

► **To cite this version:**

Maher Baili. Analyse et classification de manipulateurs 3R à axes orthogonaux. Mécanique [physics.med-ph]. Ecole Centrale de Nantes (ECN); Université de Nantes, 2004. Français. NNT: . tel-00011685

**HAL Id: tel-00011685**

**<https://theses.hal.science/tel-00011685>**

Submitted on 26 Feb 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**ÉCOLE DOCTORALE**

**MÉCANIQUE, THERMIQUE ET GÉNIE CIVIL**

Année 2004

N° B.U. :

**Thèse de DOCTORAT**

***Diplôme délivré conjointement par  
l'École Centrale de Nantes et l'Université de Nantes***

Spécialité : Génie Mécanique

Présentée et soutenue publiquement par :

MAHER BAILI

le 13 décembre 2004  
à l'École Centrale de Nantes

***Titre***

***Analyse et classification  
de manipulateurs 3R à axes orthogonaux***

**JURY**

Président :	Michel COSTE	Professeur, IRMAR, Université de Rennes I
Rapporteurs :	Jean Paul LALLEMAND Marc RENAUD	Professeur, LMS, Université de Poitiers Professeur, LAAS, INSA de Toulouse
Examineurs :	Erika OTTAVIANO Damien CHABLAT Philippe WENGER	Maître de Conférences, LARM, Université de Cassino, Italie Chargé de Recherche CNRS, IRCCyN, École Centrale de Nantes Directeur de Recherche CNRS, IRCCyN, École Centrale de Nantes
Invité :	Fabrice ROUILLIER	Chargé de Recherche INRIA, LIP6, Université de Paris 6

---

Directeur de thèse : Philippe WENGER  
Co-encadrant : Damien CHABLAT  
Laboratoire : IRCCyN



*A mes parents*

*Badreddine et Nabiha*



## REMERCIEMENTS

*Le travail présenté dans cette thèse a été réalisé à l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes dirigé par Jean François Lafay.*

*Je voudrais tout d'abord exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Philippe Wenger, directeur de recherche CNRS, pour sa disponibilité, ses remarques scientifiques constructives et ses grandes qualités humaines. Je voudrais remercier aussi mon co-encadrant Damien Chablat, chargé de recherche CNRS, pour sa disponibilité et ses conseils.*

*Je tiens à remercier très sincèrement Monsieur Michel Coste, professeur à l'université de Rennes I, pour sa présidence au jury et pour les contacts que nous avons pu établir pendant ma thèse.*

*Je tiens à remercier tout particulièrement Monsieur Jean Paul Lallemand, professeur à l'université de Poitiers, et Monsieur Marc Renaud, professeur à l'INSA de Toulouse d'avoir accepté la lourde tâche d'être rapporteurs de ma thèse et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux.*

*Que Monsieur Fabrice Rouillier, chargé de recherche INRIA, trouve ma sincère reconnaissance pour ses critiques scientifiques tout le long de ma thèse.*

*Je tiens à remercier Madame Erika Ottaviano, maître de conférences à l'université de Cassino en Italie, d'avoir accepté de participer à ce jury.*

*Je tiens à signaler qu'une partie de ce travail a été réalisé dans le cadre d'un projet Math-Stic. Je remercie tous les membres de ce projet et tout particulièrement Michel Coste, Fabrice Rouillier, Marie Françoise Roy et Solen Corvez.*

*Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur Jean Yves Hascoet, professeur à l'École Centrale de Nantes, pour la confiance qu'il m'a témoigné en me proposant un poste d'ingénieur de recherche sur un contrat Airbus.*

*Un grand merci aux personnels de l'IRCCyN pour leur gentillesse et à mes collègues doctorants pour la bonne ambiance.*

*Je n'ose pas finir mes remerciements sans exprimer mes remerciements les plus chaleureux à mes parents pour leur respect, leur amour et leur confiance, à ma sœur Manel, ma fiancée Asma et mon frère Nadmi pour leur soutien permanent aux moments heureux comme difficiles ainsi qu'à toute ma famille.*



---

<b>TABLE DES MATIÈRES</b>	
<b>INTRODUCTION GÉNÉRALE .....</b>	<b>1</b>
<b>1. CINÉMATIQUE DES MANIPULATEURS SÉRIELS .....</b>	<b>9</b>
1.1. Introduction .....	9
1.2. Analyse et modélisation cinématique et géométrique des manipulateurs ...	9
1.2.1. Mécanismes de type manipulateur.....	9
1.2.2. Modélisation cinématique.....	12
1.2.3. Espace articulaire et espace opérationnel.....	14
1.2.4. Les modèles géométriques direct et inverse .....	15
1.2.5. Le modèle différentiel .....	17
1.3. Les singularités .....	18
1.3.1. Singularités de position.....	19
1.3.2. Branches de singularités .....	21
1.3.3. Calcul des singularités dans l'espace articulaire.....	22
1.3.4. Calcul des singularités dans l'espace opérationnel.....	23
1.3.5. Classification des singularités.....	27
1.4. Propriétés des manipulateurs .....	29
1.4.1. Propriétés d'aspects .....	29
1.4.2. Notion de parcourabilité .....	30
1.4.3. Manipulateurs de morphologie cuspidale .....	33
1.5. Manipulateurs quadratiques et quartiques .....	48
1.5.1. Manipulateurs quadratiques.....	48
1.5.2. Manipulateurs quartiques .....	49
1.6. Manipulateurs binaires et quaternaires .....	50
1.6.1. Manipulateurs binaires .....	50
1.6.2. Manipulateurs quaternaires .....	51
1.7. Manipulateurs génériques et non génériques .....	52
1.8. Classes d'homotopie des manipulateurs génériques.....	54
1.8.1. Définition.....	54
1.8.2. Application : classification des manipulateurs $3R$ quaternaires	
génériques .....	55
1.9. Liens entre les différentes classes .....	57
1.10. Conclusion .....	60

---



---

<b>2. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE MANIPULATEURS ORTHOGONAUX :</b>	
<b>CAS <math>r_3 = 0</math> .....</b>	<b>65</b>
2.1. Introduction .....	65
2.2. Présentation de la famille de manipulateurs étudiée .....	66
2.3. Position du problème .....	70
2.4. Énumération de quelques méthodes mathématiques pour la résolution des systèmes polynomiaux.....	72
2.4.1. Méthode numérique : la continuation .....	72
2.4.2. Méthodes algébriques .....	73
2.4.3. Méthode retenue .....	76
2.5. Classification de la famille de manipulateurs .....	77
2.5.1. Classification selon le nombre de points cusps.....	77
2.5.2. Classification selon le nombre de nœuds .....	93
2.5.3. Synthèse des résultats .....	101
2.6. Étude de cas particuliers.....	106
2.7. Conclusion .....	110
<b>3. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE MANIPULATEURS ORTHOGONAUX :</b>	
<b>CAS <math>r_3 \neq 0</math> .....</b>	<b>115</b>
3.1. Introduction .....	115
3.2. Présentation de la famille de manipulateurs étudiée .....	115
3.3. Position du problème .....	121
3.4. Classification selon le nombre de points cusps .....	126
3.4.1. Présentation des 9 types de manipulateurs correspondants aux 9 domaines .....	126
3.4.2. Paragraphe récapitulatif .....	136
3.4.3. Liens entre les 9 types de manipulateurs, leurs classes d'homotopie et leur nombre d'aspects.....	139
3.4.4. Conclusion .....	140
3.5. Classification selon le nombre de nœuds .....	140
3.5.1. Topologie d'espace de travail dans le cas $r_2 < r_3$ .....	143
3.5.2. Topologie d'espace de travail dans le cas $r_2 > r_3$ .....	152
3.6. Étude de cas particuliers.....	157
3.7. Conclusion .....	161

---

---

<b>4. ANALYSE DES RÉSULTATS DE LA CLASSIFICATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX .....</b>	<b>165</b>
4.1. Introduction .....	165
4.2. Indices de performances .....	165
4.2.1. Mesures de dextérité.....	165
4.2.2. Indice de performance relatif à l'espace de travail.....	168
4.3. Étude du conditionnement.....	169
4.3.1. Étude du cas $r_3 = 0$ .....	170
4.3.2. Étude du cas $r_3 \neq 0$ .....	176
4.4. Étude du volume de l'espace de travail.....	181
4.4.1. Étude du cas $r_3 = 0$ .....	181
4.4.2. Étude du cas $r_3 \neq 0$ .....	186
4.5. Tableau récapitulatif.....	193
4.6. Étude du manipulateur 6R DIESTRO.....	193
4.7. Conclusion .....	197
<b>CONCLUSION GÉNÉRALE .....</b>	<b>201</b>
<b>PERSPECTIVES .....</b>	<b>203</b>
<b>BIBLIOGRAPHIE .....</b>	<b>207</b>
<b>PUBLICATIONS PERSONNELLES .....</b>	<b>217</b>
<b>ANNEXE A.....</b>	<b>221</b>
<b>ANNEXE B.....</b>	<b>223</b>
B.1. Transition entre les manipulateurs binaires et les manipulateurs quaternaires .....	223
B.2. Condition d'existence d'un point quadruple.....	225
B.3. La surface de séparation et la condition nécessaire et suffisante .....	227
B.4. Conclusion .....	232
<b>ANNEXE C.....</b>	<b>233</b>
C.1. Condition d'apparition de cusps en $z = 0$ .....	233
C.2. Condition d'apparition de nœuds en $z = 0$ .....	237
C.3. Conclusion .....	238
<b>ANNEXE D .....</b>	<b>239</b>

---

---

**TABLE DES ILLUSTRATIONS**

Figures	
Figure 1 : Manipulateur sériel.....	10
Figure 2 : Manipulateur à chaîne cinématique fermée .....	11
Figure 3 : Manipulateur hybride à trois degrés de liberté.....	11
Figure 4 : Paramètres de Denavit et Hartenberg modifiés (DHm) [ <b>Khalil 86</b> ] .....	13
Figure 5 : Singularité de type 1 .....	20
Figure 6 : Singularité de type 2 .....	21
Figure 7 : Singularité de type 3 .....	21
Figure 8 : Singularité à 4 branches .....	22
Figure 9 : Espace de travail obtenu par les singularités dans l'espace opérationnel ( <b>[Ranjbaran 94]</b> ) .....	25
Figure 10 : Exemple de singularité évitable .....	28
Figure 11 : Exemple de singularités génériques.....	29
Figure 12 : Exemple de manipulateur 3R cuspidal .....	34
Figure 13 : Un robot industriel de morphologie cuspidale (GMF P150) .....	35
Figure 14 : Un robot industriel de morphologie orthogonale (ABB IRB6400C).....	36
Figure 15 : Robot de morphologie cuspidale ( <b>[Wenger 03]</b> ) .....	37
Figure 16 : Points cusps dans une section de l'espace de travail d'un manipulateur cuspidal .....	37
Figure 17 : Principe des surfaces caractéristiques .....	39
Figure 18 : Singularités et surfaces caractéristiques.....	40
Figure 19 : Les composantes de base et les régions de base .....	41
Figure 20 : les domaines d'unicité.....	42
Figure 21 : Les sous espaces t-parcourables .....	43
Figure 22 : Les sous espaces t-parcourables dans $WA_1(a)$ et dans $WA_2(b)$ .....	44
Figure 23 : Surfaces caractéristiques en présence de butées articulaires.....	44
Figure 24 : Connections entre les différentes couches superposées (a) .....	46
Figure 25 : Trajectoires de changement de posture singulier (a) .....	48
Figure 26 : Manipulateur quadratique .....	49
Figure 27 : Manipulateur quartique non cuspidal .....	50
Figure 28 : Manipulateur quartique cuspidal.....	50
Figure 29 : Manipulateur non générique .....	52
Figure 30 : Instabilité d'un manipulateur non générique .....	54
Figure 31 : Quelques boucles de classes d'homotopie sur le tore.....	55
Figure 32 : Schéma des liens entre les différentes classes de manipulateurs à 3 ddl dans l'espace K.....	58
Figure 33 : Manipulateur orthogonal étudié .....	67
Figure 34 : Manipulateur avec 0 cusp et 0 nœud.....	68
Figure 35 : Manipulateur avec 4 cusps et 0 nœud .....	69
Figure 36 : Manipulateur avec 4 cusps et 4 nœuds .....	69
Figure 37 : Différentes coupe dans $(d_3, d_4)$ pour $r_2$ donné .....	80
Figure 38 : Manipulateur de type 1 .....	81
Figure 39 : Manipulateur de type 2 .....	82

---

---

Figure 40 : Manipulateur de type 3 .....	84
Figure 41 : Manipulateur appartenant à la surface $C_2$ .....	85
Figure 42 : Manipulateur de type 4 .....	86
Figure 43 : Manipulateur appartenant à la surface $C_3$ .....	87
Figure 44 : Manipulateur de type 5 .....	88
Figure 45 : Manipulateur appartenant à la surface $C_4$ .....	89
Figure 46 : Les 4 surfaces de séparation et les 5 domaines dans une section $(d_3, d_4)$ de l'espace des paramètres pour $r_2 = 1$ .....	91
Figure 47 : Transition entre $WT_2$ et $WT_3$ .....	94
Figure 48 : correspondance entre (a) espace de travail d'un manipulateur et (b) croquis de deux configurations avec $d_4 < d_3$ , $\theta_1=0$ , $\theta_2=0$ (à droite) ou $\theta_2=180$ (à gauche).....	96
Figure 49 : Topologie d'espace de travail $WT_4$ .....	97
Figure 50 : Transition entre $WT_3$ et $WT_4$ .....	97
Figure 51 : Topologie d'espace de travail $WT_6$ .....	98
Figure 52 : Topologie d'espace de travail $WT_9$ .....	99
Figure 53 : Transition entre $WT_5$ et $WT_6$ .....	99
Figure 54 : Transition entre $WT_8$ et $WT_9$ .....	100
Figure 55 : Correspondance entre (a) l'espace de travail d'un manipulateur et (b) les croquis de deux configurations avec $d_4 > d_3$ , $\theta_1=0^\circ$ , $\theta_2=0^\circ$ (à droite) ou $\theta_2=180^\circ$ (à gauche) .....	101
Figure 56 : Partition de l'espace des paramètres selon le nombre de points cusps et le nombre des nœuds dans une section $r_2 = 1$ .....	102
Figure 57 : Les surfaces de séparation pour différentes valeurs de $r_2$ .....	103
Figure 58 : Arbre de classification de la famille .....	105
Figure 59 : Arbre de classification des cas particuliers de manipulateurs (Cas $r_3 = 0$ ).....	108
Figure 60 : Espaces articulaires et sections dans l'espace de travail des manipulateurs particuliers présentés dans l'arbre de classification de la Figure 59.....	110
Figure 61 : Manipulateur orthogonal étudié ( $r_3 = 0$ ) .....	116
Figure 62 : Manipulateur quaternaire générique avec 0 cusp et 0 nœud.....	118
Figure 63 : Manipulateur quaternaire générique avec 2 cusps et 0 nœud .....	119
Figure 64 : Manipulateur quaternaire générique avec 4 cusps et 2 nœuds .....	119
Figure 65 : Manipulateur quaternaire générique avec 6 cusps et 4 nœuds .....	120
Figure 66 : Manipulateur quaternaire générique avec 8 cusps et 4 nœuds .....	120
Figure 67 : Différentes sections dans $(d_3, d_4)$ pour $(r_2, r_3)$ donné.....	123
Figure 68 : Les différentes surfaces séparatrices pour $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$ .....	125
Figure 69 : Limites des parties $C_2$ , $C_3$ et $C_4$ dans une section $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$ ...	126
Figure 70 : Les 4 surfaces de séparation et les 9 domaines dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$ .....	127
Figure 71 : Manipulateur de type 1 .....	127
Figure 72 : Manipulateur de type 2 .....	128
Figure 73 : Manipulateur de type 3 .....	129
Figure 74 : Manipulateur de type 4 .....	130
Figure 75 : Transition entre le domaine 1 et le domaine 4.....	130
Figure 76 : Manipulateur de type 5 .....	131
Figure 77 : Manipulateur de type 6 .....	132

---

---

Figure 78 : Transition entre le domaine 5 et le domaine 6.....	133
Figure 79 : Vue de dessus d'un manipulateur représentant la transition entre le domaine 5 et le domaine 6.....	133
Figure 80 : Manipulateur de type 7 .....	134
Figure 81 : Manipulateur de type 8 .....	135
Figure 82 : Manipulateur de type 9 .....	136
Figure 83 : Les 9 manipulateurs représentants des 9 domaines dans une section $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$ .....	137
Figure 84 : Les liens entre les 9 manipulateurs correspondants aux 9 domaines .....	138
Figure 85 : Les deux cas possibles pour $E_{1g\acute{e}n}$ et $E_{3g\acute{e}n}$ .....	142
Figure 86 : Les 8 surfaces de s\eparation et les 18 domaines dans une section ( $d_3, d_4$ ) pour $r_2 = 0,3$ et $r_3 = 0,8$ .....	144
Figure 87 : Topologie d'espace de travail $WT_3$ .....	145
Figure 88 : Topologie d'espace de travail $WT_6$ .....	146
Figure 89 : Topologie d'espace de travail $WT_8$ .....	147
Figure 90 : Topologie d'espace de travail $WT_9$ .....	147
Figure 91 : Topologie d'espace de travail $WT_{11}$ .....	148
Figure 92 : Topologie d'espace de travail $WT_{13}$ .....	149
Figure 93 : Topologie d'espace de travail $WT_{15}$ .....	150
Figure 94 : Topologie d'espace de travail $WT_{16}$ .....	150
Figure 95 : Topologie d'espace de travail $WT_{17}$ .....	151
Figure 96 : Topologie d'espace de travail $WT_{18}$ .....	152
Figure 97 : Les 6 surfaces de s\eparation et les 14 domaines dans une section ( $d_3, d_4$ ) pour $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,15$ (les topologies d'espace de travail suppl\ementaires sont not\ees en Gras et Soulign\ee).....	153
Figure 98 : Topologie d'espace de travail $WT_{19}$ .....	153
Figure 99 : Topologie d'espace de travail $WT_{20}$ .....	154
Figure 100 : Topologie d'espace de travail $WT_{21}$ .....	155
Figure 101 : Arbre de classification des cas particuliers de manipulateurs (Cas $r_3 \neq 0$ )	159
Figure 102 : Espaces articulaires et sections dans l'espace de travail des manipulateurs particuliers pr\esent\ees dans l'arbre de classification de la Figure 101.....	161
Figure 103 : $K^{-1}$ moyen dans trois sections de l'espace des param\etres, .....	171
Figure 104 : $K^{-1}$ maximum dans trois sections de l'espace des param\etres, .....	172
Figure 105 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,2.....	173
Figure 106 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,21 .....	174
Figure 107 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,24.....	174
Figure 108 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,17.....	175
Figure 109 : $K^{-1}$ moyen dans trois sections de l'espace des param\etres .....	177
Figure 110 : $K^{-1}$ maximum dans les m\emes sections de l'espace des param\etres pr\esent\ees dans la Figure 109 .....	178
Figure 111 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,24.....	179
Figure 112 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,13.....	180
Figure 113 : Manipulateur dont le $K^{-1}$ moyen est 0,19.....	180
Figure 114 : Proportions des r\egions \a 2 solutions (a), 4 solutions (b) et accessibles(c) dans une section ( $d_3, d_4$ ) pour $r_2 = 0,2$ .....	182

---

---

Figure 115 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et accessibles(c) dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 1$ .....	183
Figure 116 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et accessibles(c) dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 2$ .....	184
Figure 117 : Manipulateur dont la proportion de la région à 2 solutions est 0,15, la proportion de la région à 4 solutions est 0,41 et la proportion l'espace de travail est de 0,56 ( $WT_9$ ) .....	185
Figure 118 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et de l'espace de travail (c) dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,9$ .....	188
Figure 119 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et de l'espace de travail (c) dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 0,3$ et $r_3 = 0,8$ .....	189
Figure 120 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et de l'espace de travail (c) dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 0,2$ et $r_3 = 0,15$ .....	190
Figure 121 : Manipulateur dont la proportion de la région à 2 solutions est 0,18, la proportion de la région à 4 solutions est 0,32 et la proportion de l'espace de travail est 0,5 ( $WT_{17}$ ) .....	192
Figure 122 : Manipulateur dont la proportion de la région à 2 solutions est 0,14, la proportion de la région à 4 solutions est 0,38 et la proportion de l'espace de travail est 0,52 ( $WT_{18}$ ) .....	192
Figure 123 : $K^{-1}$ maximum (a) et moyen (b) dans une section $(d_3, d_4)$ .....	194
Figure 124 : l'espace articulaire et une section de l'espace de travail du porteur du manipulateur DIESTRO .....	195
Figure 125 : Proportions de la région à 2 solutions (a) et à 4 solutions (b) dans une section $(d_3, d_4)$ pour $r_2 = 1$ et $r_3 = 1$ .....	196
Figure 126 : Norme AFNOR NF EN 23952/ISO 3952-1 NF EN 3952-1 .....	221
Figure 127 : Symboles des liaisons rotoïde et prismatique utilisées dans ce mémoire	221
Figure 128 : Déformation continue de la branche de singularité intérieure lorsque $d_4$ diminue ( $d_3=1,5, r_2=0,5$ ). De 1,1 à 0,5, le manipulateur est quaternaire (a-c). De 0,5 à 0,2, deux cusps et un nœud se transforment en un point quadruple (4 solutions au MGI) qui disparaît par la suite : le manipulateur devient binaire (d-e) .....	224
Figure 129 : Graphes de $C_1$ et $C_{1bis}$ dans différentes sections de l'espace de paramètres de DHM $d_4$ .....	228
Figure 130 : Les trois manipulateurs tests et leurs espaces de travail .....	229
Figure 131 : Représentations numériques des manipulateurs binaires dans les mêmes sections que la Figure 129 .....	231

---

Tableaux

Tableau 1 : Propriétés de la parcourabilité.....	32
Tableau 2 : Les 8 classes d'homotopie possibles des manipulateurs 3R quaternaires génériques .....	56
Tableau 3 : Tableau récapitulatif.....	60
Tableau 4 : Liens entre l'apparition ou la disparition des cusps et les surfaces de séparation .....	89
Tableau 5 : Les 5 domaines et leur nombre d'aspects correspondant.....	90
Tableau 6 : Détermination des propriétés des manipulateurs en fonction des paramètres de DHm et les topologies d'espace de travail correspondantes	106
Tableau 7 : Liens entre l'apparition ou la disparition des cusps .....	138
Tableau 8 : Les 4 classes d'homotopie et les domaines correspondants.....	139
Tableau 9 : Les 9 domaines et leur nombre d'aspects correspondant.....	140
Tableau 10 : Liens entre l'apparition ou la disparition des nœuds et les surfaces de séparation .....	157
Tableau 11 : Topologies d'espace de travail présentant les meilleures performances	193

---

# INTRODUCTION GÉNÉRALE

---





## INTRODUCTION GÉNÉRALE

L'industrie actuelle utilise non seulement des équipements, machines et matériels mais également des mécanismes articulés de type manipulateur. Ces derniers assurent selon le type d'industrie choisie, des tâches différentes et des travaux divers comme la manutention, la peinture, le soudage... L'un des objectifs de la robotique est de pouvoir effectuer des déplacements d'objets selon des trajectoires prédéfinies.

La plupart des manipulateurs employés sont de type sériel. Malgré les progrès technologiques, les industriels n'utilisent que des manipulateurs « standards » pour lesquels les axes des articulations successives peuvent être parallèles. Leurs comportements sont en effet bien maîtrisés. Parmi ces manipulateurs, on peut citer les robots anthropomorphes, les robots cylindriques, les robots SCARA et les robots cartésiens ou portiques.

Pour répondre à des besoins d'implantation particuliers, les concepteurs de sites robotisés ont été demandeurs de solutions innovantes. Par conséquent, des fabricants de robots ont été amenés à employer des morphologies originales avec porteur à axes orthogonaux. Leur mise en œuvre a fait apparaître des comportements inattendus [**Hemmingson 96**] : l'utilisation des lois de commande usuelles conduisait à des réponses erratiques. Des modifications - apparemment simples - de la géométrie rendaient les méthodes classiques (de type Paul ou Pieper) de résolution du modèle géométrique direct (MGD) permettant d'obtenir le modèle géométrique inverse (MGI) inapplicables. Par exemple, pour un manipulateur à six articulations rotoïdes (6R), le fait de rajouter un offset entre les deux derniers axes ne permet plus de décomposer la structure en un porteur et un poignet.

Les roboticiens ont longtemps pris pour acquis que, pour changer de posture, il fallait franchir une singularité. Borrel pensait l'avoir démontré théoriquement en 1986 [**Borrel 86**]. Mais un contre-exemple l'a remis en question : un manipulateur 6R peut changer de posture sans passer par une singularité [**Parenti 88**]. Un résultat analogue

a été publié en 1991 pour des manipulateurs 3R [Burdick 91]. Wenger a vérifié ces deux résultats et a montré que cette propriété peut s'étendre à des manipulateurs simples [Wenger 91]. El Omri a même trouvé par la suite un manipulateur industriel 6R pouvant changer jusqu'à huit fois de posture sans franchir une singularité [El Omri 95].

Ces études ont montré que ces manipulateurs appelés aussi manipulateurs cuspidaux<sup>1</sup> sont nombreux et ne peuvent pas être utilisés comme les autres [Wenger 93], [Wenger 94], [El Omri 95], [Wenger 96], d'où la nécessité de les classer et de connaître leurs propriétés.

Cette thèse a été effectuée dans l'équipe Méthodes de Conception en Mécanique (MCM) de l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes(IRCCyN). L'objet du présent mémoire est d'étudier les propriétés des manipulateurs 3R à axes orthogonaux. Ces études ont pour objectif de donner une classification dans l'espace des paramètres selon les propriétés : (i) binaire / quaternaire, (ii) générique / non générique, (iii) classe d'homotopie, (iv) nombre d'aspects dans l'espace articulaire, (v) présence ou non de cavité toroïdale dans l'espace de travail, (vi) nombre de points cusps (un cusp est une racine triple du MGI) et (vii) nombre de nœuds (un nœuds est défini par la coïncidence de deux solutions doubles du MGI). On a défini une topologie d'espace de travail par le biais du couple : nombre de points cusps, nombre de nœuds. La contribution majeure de cette étude est la classification exhaustive des manipulateurs 3R à axes orthogonaux selon la topologie de leurs espaces de travail.

Ce mémoire se divise en 4 parties :

Dans le premier chapitre, nous présentons quelques notions liées à la cinématique et à la conception de manipulateurs sériels et nous rappelons les différentes études

---

<sup>1</sup> Un manipulateur est cuspidal s'il est apte à changer de posture sans franchir une singularité.

qu'elles ont suscitées. Nous étudierons leurs propriétés cinématiques et leurs singularités.

Dans le second chapitre, nous étudierons le cas d'une famille de manipulateurs telle que le paramètre  $r_3$  est nul. Nous établirons une classification de cette famille selon la topologie de l'espace de travail. Nous chercherons à caractériser chaque topologie d'espace de travail en fonction des paramètres de DHm<sup>2</sup>. Pour chaque topologie d'espace de travail, nous donnerons toutes les propriétés décrites dans le premier chapitre. Nous énoncerons une condition nécessaire et suffisante pour qu'un manipulateur soit cuspidal.

Dans le troisième chapitre, nous étendrons l'étude réalisée dans la partie précédente à une famille de manipulateurs telle que le paramètre  $r_3$  est non nul. De la même manière, nous donnerons une classification exhaustive de toutes les topologies d'espace de travail que nous pouvons rencontrer au sein de cette famille. Nous précisons toutes les propriétés dans chaque topologie d'espace de travail.

Dans le dernier chapitre, nous quantifierons les manipulateurs étudiés lors des deux précédents chapitres selon leur volume d'espace de travail, leur degré d'accessibilité<sup>3</sup> et leur conditionnement. Cette partie sera illustrée par des exemples de manipulateurs ayant de « bons » indices de performance. Une application de cette étude a été réalisée pour le manipulateur isotrope DIESTRO [**Angeles 97**].

---

<sup>2</sup> Denavit et Hartenberg modifiés [**Khalil 86**]

<sup>3</sup> Le degré d'accessibilité est le nombre de solutions du MGI.



---

# CHAPITRE I

---

## CINÉMATIQUE DES MANIPULATEURS SÉRIELS



# 1. CINÉMATIQUE DES MANIPULATEURS SÉRIELS

## 1.1. INTRODUCTION

L'objet de ce chapitre est de rappeler les notions de base de la robotique qui seront utilisées dans ce mémoire. Après avoir défini la notion de manipulateur, on donnera les définitions relatives au calcul de leurs propriétés géométriques et cinématiques ainsi que leur espace de travail et leurs configurations singulières. On pourra alors énoncer plusieurs propriétés des manipulateurs tels que manipulateurs cuspidaux / non cuspidaux, génériques / non génériques, quadratiques / quartiques ou binaires / quaternaires qui seront utilisées pour classifier les manipulateurs orthogonaux.

## 1.2. ANALYSE ET MODÉLISATION CINÉMATIQUE ET GÉOMÉTRIQUE DES MANIPULATEURS

Afin de mieux comprendre les propriétés des manipulateurs étudiées dans ce mémoire, on rappelle dans ce paragraphe quelques définitions souvent rencontrées dans la littérature.

### 1.2.1. MÉCANISMES DE TYPE MANIPULATEUR

#### Définition de mécanisme de type manipulateur

Un mécanisme de type manipulateur est un ensemble de corps rigides liés entre eux par des articulations rotoïdes, prismatiques (voir l'Annexe A) destinées à manipuler des pièces ou un outil. Les articulations sont supposées idéales, sans jeu et sans élasticité. Un mécanisme de type manipulateur peut se présenter sous la forme d'une chaîne cinématique simple ou d'une chaîne cinématique fermée. On rappelle brièvement les trois catégories possibles de manipulateurs ainsi que les avantages et les inconvénients de chacune.



---

Définition du nombre de degrés de liberté

Le nombre de degrés de liberté (ddl) d'une liaison est égal au nombre minimal de paramètres qui déterminent la position du corps  $C_2$  dans son mouvement permis par rapport au corps  $C_1$ .

**1.2.1.1. Chaîne cinématique simple**

C'est une chaîne cinématique dont chaque membre possède un degré de connexion (nombre de liaisons mécaniques) inférieur ou égal à deux [Dombre 88]. Un mécanisme de type manipulateur est sériel s'il est formé d'une chaîne cinématique simple dont la base  $\mathcal{B}$  et l'organe effecteur  $\mathcal{P}$  possèdent un degré de connexion égal à un (donc chacun est relié à un seul corps) tandis que les autres éléments possèdent un degré de connexion égal à deux (Figure 1).

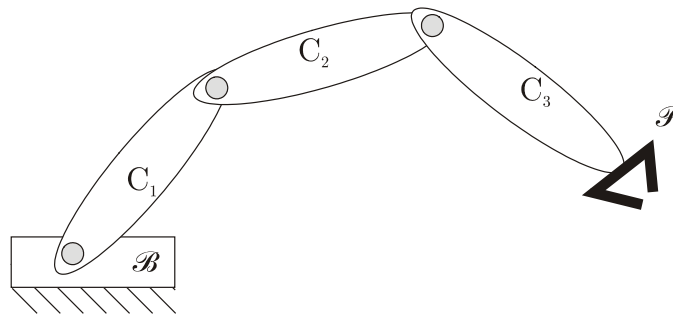


Figure 1 : Manipulateur sériel

Ce type de manipulateurs est le plus utilisé en industrie vue l'importance de son espace de travail. On peut citer, à titre d'exemple, les manipulateurs anthropomorphes, cylindriques, toriques, sphériques et cartésiens. Les inconvénients de tels manipulateurs se résument essentiellement à une faible précision, une faible charge transportable et une faible rigidité.

**1.2.1.2. Chaîne cinématique fermée**

C'est une chaîne cinématique dont l'un des membres, différent de la base, possède un degré de connexion supérieur ou égal à trois [Merlet 97].

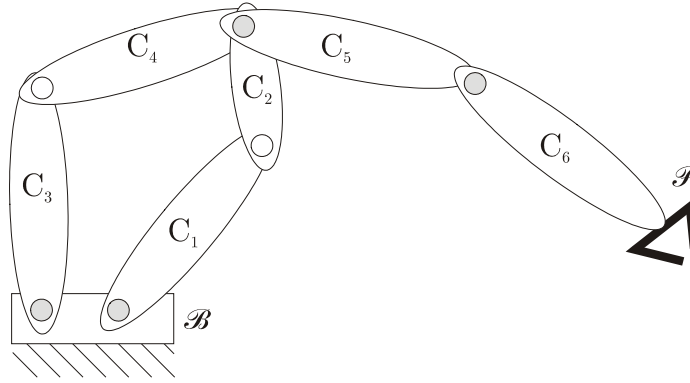


Figure 2 : Manipulateur à chaîne cinématique fermée

Dans la Figure 2, les corps  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  forment une chaîne cinématique fermée. Parmi les manipulateurs à chaîne cinématique fermée, on peut citer les manipulateurs parallèles, les manipulateurs pleinement parallèles et les manipulateurs à boucles fermées pleinement parallèles légers [Chablat 98a]. Les avantages des manipulateurs à chaîne cinématique fermée sont la rigidité et le pouvoir de transporter des charges lourdes. Comme inconvénients, on note essentiellement l'espace de travail restreint.

Les manipulateurs hybrides se présentent comme une structure sérielle dans laquelle on vient insérer une ou plusieurs boucles fermées (Figure 3).

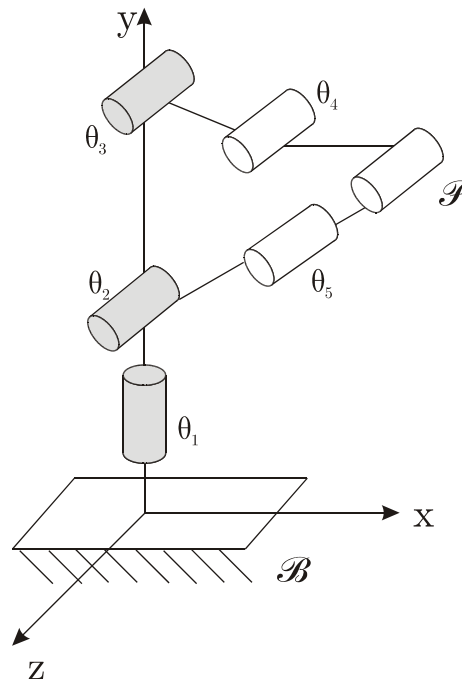


Figure 3 : Manipulateur hybride à trois degrés de liberté

L'insertion des boucles fermées dans une structure sérielle a pour but l'augmentation de la rigidité du manipulateur et la diminution de son poids. De ce fait, la présence d'un parallélogramme dans le manipulateur Hitachi-HPR [Dombre 88] permet de déplacer la motorisation du deuxième axe tout en augmentant la rigidité du manipulateur. Citons comme autre exemple le montage en série d'un poignet sphérique sur les manipulateurs parallèles [Chablat 98b].

Dans ce mémoire, on se limitera à l'étude des manipulateurs sériels.

### 1.2.2. MODÉLISATION CINÉMATIQUE

On rappelle dans ce paragraphe les paramètres géométriques permettant de décrire un mécanisme de type manipulateur sériel et que l'on utilisera tout le long de ce mémoire. Cette description utilise les paramètres de Denavit et Hartenberg modifiés (DHm) [Khalil 86].

Comme défini précédemment, un mécanisme de type manipulateur est une chaîne cinématique constituée d'une succession de corps rigides liés entre eux par des articulations rotoïdes ou prismatiques. On note le repère  $R_j$  lié au corps  $C_j$  successeur du corps  $C_{j-1}$  et antécédent  $C_{j+1}$ .  $R_j$  est défini tel que :

- L'axe  $Z_j$  est porté par l'axe de l'articulation  $j$ .
- L'axe  $X_j$  est porté par la perpendiculaire commune aux axes  $Z_j$  et  $Z_{j+1}$ . Dans le cas où les axes  $Z_j$  et  $Z_{j+1}$  seraient parallèles, le choix de l'axe  $X_j$  n'est pas unique : des considérations de symétrie ou de simplicité sont à prendre en compte.
- L'axe  $Y_j$  est déterminé de telle sorte que le repère  $R_j$  soit direct.

Le passage entre les repères  $R_{j-1}$  et  $R_j$  est fonction de quatre paramètres appelés paramètres géométriques (Figure 4). Ces paramètres sont définis par :

- $d_j$  : distance entre  $Z_{j-1}$  et  $Z_j$  le long de  $X_{j-1}$ .
- $\alpha_j$  : angle entre les axes  $Z_{j-1}$  et  $Z_j$ , correspondant à une rotation autour de  $X_{j-1}$ .

- $r_j$  : distance entre  $X_{j-1}$  et  $X_j$  le long de  $Z_j$ .
- $\theta_j$  : angle entre les axes  $X_{j-1}$  et  $X_j$ , correspondant à une rotation autour de  $Z_j$ .

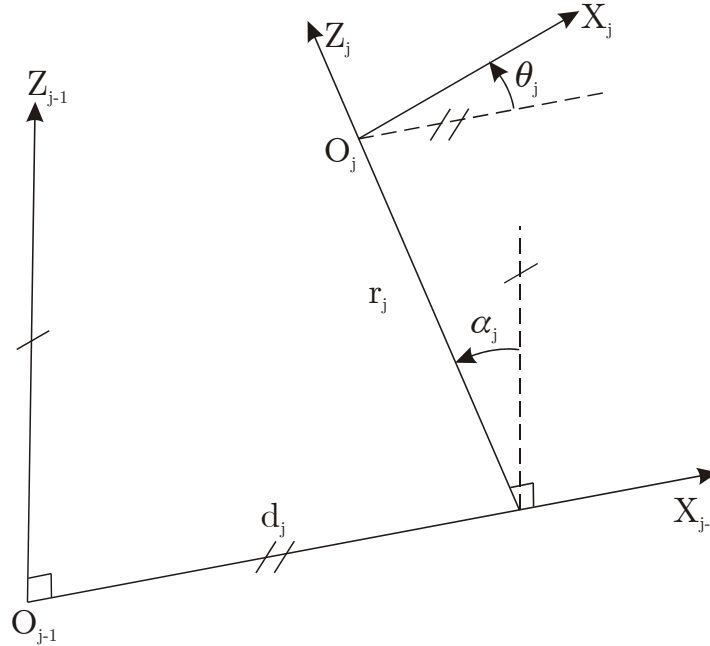


Figure 4 : Paramètres de Denavit et Hartenberg modifiés (DHm) [Khalil 86]

Le passage entre deux repères voisins (les repères  $R_{j-1}$  et  $R_j$  par exemple) peut être caractérisé par la matrice de passage  $T_{j-1,j}$  définie par :

$${}^{j-1}\mathbf{T}_j = \begin{pmatrix} c_j & -s_j & 0 & d_j \\ c\alpha_j s_j & c\alpha_j c_j & -s\alpha_j & -r_j s\alpha_j \\ s\alpha_j s_j & s\alpha_j c_j & c\alpha_j & r_j c\alpha_j \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où :  $c_j = \cos(\theta_j)$ ,  $s_j = \sin(\theta_j)$ ,  $c\alpha_j = \cos(\alpha_j)$  et  $s\alpha_j = \sin(\alpha_j)$

Le point terminal P est situé sur l'axe  $X_3$  à une distance  $d_4$  de  $O_3$  l'origine du repère  $R_3$ .

Dans ce mémoire, le repère  $R_1$  est choisi tels que :  $\alpha_1 = 0$ ,  $d_1 = 0$  et  $r_1 = 0$ .

---

### 1.2.3. ESPACE ARTICULAIRE ET ESPACE OPÉRATIONNEL

Pour un manipulateur à  $n$  degrés de liberté, on définit une relation entre les variables articulaires motorisées (les entrées) notées  $\mathbf{q}$  et les coordonnées opérationnelles de position et d'orientation de l'effecteur (les sorties) notées  $\mathbf{X}$ . Cette relation est définie par un opérateur géométrique  $F$  tel que :

$$\mathbf{X} = F(\mathbf{q}) \quad (1)$$

On note :

- $EA^n$  l'espace articulaire lié aux articulations motorisées  $\mathbf{q}$  ( $n$  est le nombre d'articulations motorisées).
- $EO^m$  l'espace opérationnel de dimension  $m$  lié à la position et à l'orientation de l'effecteur.

Dans le cas où le nombre  $m$  représentant les degrés de liberté de l'effecteur est inférieur au nombre  $n$  d'articulations du manipulateur, celui-ci est redondant et le nombre  $(n - m)$  représente le degré de redondance.

#### 1.2.3.1. Espace articulaire

Les articulations entre les différents corps d'un manipulateur peuvent être rotoïdes ou prismatiques. L'espace articulaire  $EA^n$  est par conséquent le produit cartésien de deux types d'espaces :  $\mathfrak{R}$  pour les prismatiques et le cercle  $S^1$  pour les rotoïdes. Citons l'exemple d'un manipulateur à 6 ddl à porteur cylindrique et poignet rotule, sa morphologie s'écrit RPPRRR et son espace articulaire s'écrit :  $EA^n = EA^6 = S^1 \times \mathfrak{R}^2 \times S^3$ .

#### 1.2.3.2. Espace opérationnel

L'espace opérationnel  $EO^m$  décrit la position et l'orientation de l'effecteur d'un manipulateur à  $n$  ddl. La forme de cet espace opérationnel dépend des paramètres du

manipulateur. Par exemple, dans le cas des manipulateurs non redondants à 3 ddl, l'espace opérationnel est donc l'espace cartésien de dimension 3 :  $EO^m = EO^3 = \mathfrak{R}^3$ .

Concernant les manipulateurs à 6 ddl, six coordonnées de position et d'orientation sont utilisées et on a :  $EO^m = EO^6 = \mathfrak{R}^3 \times SO(3)$ .

Où  $SO(3)$  représente le groupe des rotations propres d'un corps rigide dans  $\mathfrak{R}^3$ .

#### 1.2.4. LES MODÈLES GÉOMÉTRIQUES DIRECT ET INVERSE

Un problème fondamental qui se pose lors d'une étude des manipulateurs est la résolution du modèle géométrique direct et inverse. Le modèle géométrique direct d'un manipulateur sériel permet de trouver la position et l'orientation de l'effecteur en fonction des paramètres articulaires donnés, alors que le modèle géométrique inverse permet de trouver l'ensemble des configurations articulaires possibles pour une position et une orientation données de l'effecteur.

##### 1.2.4.1. Modèle géométrique direct

Le modèle géométrique direct (MGD) est présenté par l'équation (1). La détermination de ce modèle ne pose pas de problème : il s'agit d'une multiplication de matrices. En effet, on considère la matrice de transformation  ${}^{j-1}\mathbf{T}_j$  entre les repères  $R_{j-1}$  lié au corps (j-1) et  $R_j$  lié au corps (j), le résultat est donné par la matrice  ${}^0\mathbf{T}_n$  telle que :

$${}^0\mathbf{T}_n = {}^0\mathbf{T}_1 {}^1\mathbf{T}_2 \dots {}^{j-1}\mathbf{T}_j {}^j\mathbf{T}_{j+1} \dots {}^{n-1}\mathbf{T}_n \quad (2)$$

Dans le cas d'un manipulateur 3R, l'espace  $K$  des paramètres est de dimension 7. Ces 7 paramètres de DHm sont :  $d_2, d_3, d_4, r_2, r_3, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ . L'équation (3) représente le MGD d'un manipulateur 3R.

$$\begin{aligned}
x &= \left[ d_2 + (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s_3) s_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2 \right] c_1 \\
&\quad + \left\{ s \alpha_2 (r_2 + r_3 c \alpha_3 + d_4 s \alpha_3 s_3) \right. \\
&\quad \left. + c \alpha_2 \left[ (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s_3) c_2 - (d_3 + d_4 c_3) s_2 \right] \right\} s_1 \\
y &= \left[ d_2 + (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s_3) s_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2 \right] s_1 \\
&\quad - \left\{ s \alpha_2 (r_2 + r_3 c \alpha_3 + d_4 s \alpha_3 s_3) \right. \\
&\quad \left. + c \alpha_2 \left[ (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s_3) c_2 - (d_3 + d_4 c_3) s_2 \right] \right\} c_1 \\
z &= c \alpha_2 (r_2 + r_3 c \alpha_3 + d_4 s \alpha_3 s_3) \\
&\quad - s \alpha_2 \left[ (r_3 s \alpha_3 - d_4 c \alpha_3 s_3) c_2 - (d_3 + d_4 c_3) s_2 \right]
\end{aligned} \tag{3}$$

#### 1.2.4.2. Modèle géométrique inverse

Dans le cas général, la détermination du modèle géométrique inverse (MGI) des manipulateurs sériels est un problème complexe. On doit inverser un système d'équations non linéaires ce qui n'est pas trivial. Toutefois et selon la structure du manipulateur étudié, il existe des méthodes permettant de résoudre le MGI sous une forme explicite. Par exemple pour la plupart des manipulateurs utilisés dans l'industrie, la méthode de Paul permet de donner les solutions du MGI sous forme explicite [Paul 81].

Dans le cas général, la résolution du MGI pour un manipulateur à 3 ddl consiste à résoudre un polynôme de degré 4 en la tangente de l'angle moitié de l'une des articulations. Les coefficients de ce polynôme dépendent des paramètres de DHm du manipulateur étudié ainsi que de la position de l'effecteur dans l'espace cartésien. Le nombre maximal de solutions est de 4 [Pieper 68].

Quant aux manipulateurs à 6 ddl de morphologie générale, le MGI s'écrit sous la forme d'un polynôme de degré 16 et dont les coefficients dépendent des paramètres de DHm, de la position et de l'orientation de l'effecteur. Le nombre maximal de solutions au MGI est de 16 [Lee 88] et [Raghavan 89].

Exemples :

- Un manipulateur à 6 ddl à poignet rotule (3 articulations rotoïdes à axes concourants) a 8 solutions au MGI [Dombre 88], [Gorla 84].
- Le manipulateur GMF-150 à 6 ddl dédié à la peinture possède 16 solutions au MGI [El Omri 96].
- Le manipulateur ROBOX à 6 ddl dédié à la peinture a 16 solutions au MGI [Zoppi 02].
- Le manipulateur prototype à 6 ddl proposé par STAUBLI a 14 solutions au MGI [Wenger 03].

Ces trois derniers exemples présentent un poignet non sphérique (axes non concourants).

### 1.2.5. LE MODÈLE DIFFÉRENTIEL

Ce modèle lie les différentielles élémentaires des coordonnées opérationnelles aux différentielles élémentaires des coordonnées articulaires par la relation (4) :

$$d\mathbf{X} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot d\mathbf{q} \quad (4)$$

où  $\mathbf{J}(\mathbf{q})$  : est une matrice de dimension (m x n) appelée matrice cinématique du manipulateur.

On peut aussi écrire :

$$\mathbf{t} = \mathbf{J}(\mathbf{q}) \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad (5)$$

avec :

- $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{c} \end{bmatrix}$  dans le cas des manipulateurs plans, où  $\omega$  représente la vitesse de rotation plane et  $\dot{c}$  la vitesse de déplacement dans le plan.
- $\mathbf{t} = [\omega]$  dans le cas des manipulateurs sphériques, où  $\omega$  représente le vecteur de rotation.



- $\mathbf{t} = \begin{bmatrix} \omega \\ \dot{\mathbf{c}} \end{bmatrix}$  dans le cas des manipulateurs spatiaux, où  $\omega$  représente le vecteur de rotation et  $\dot{\mathbf{c}}$  la vitesse de déplacement dans l'espace.
- $\dot{\mathbf{q}} = [\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n]^T$  représente le vecteur des vitesses articulaires liées aux articulations motorisées.

### 1.3. LES SINGULARITÉS

#### Définition d'une singularité

Une singularité est définie par l'ensemble des configurations qui annulent le déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$ .

Sur le plan pratique, l'équation (5) est importante étant donnée que les singularités de la matrice jacobienne correspondent aux singularités du manipulateur étudié.

La connaissance des lieux de singularités est importante pour la commande des robots dans l'espace de travail. Par ailleurs, il existe une relation étroite entre les propriétés cinématiques globales d'un manipulateur et la topologie des lieux des singularités. Peu d'auteurs s'intéressent à leurs analyses globales. Pourtant, la géométrie et la topologie des singularités représentent un moyen pertinent pour l'analyse et la classification des propriétés cinématiques des manipulateurs.

Les lieux des singularités divisent l'espace articulaire en différentes zones dépourvues de singularités qu'on appelle aspects [Borrel 86]. Par le biais de l'opérateur géométrique  $F$  défini dans (1), l'espace de travail est lui aussi divisé en différentes régions dont le degré d'accessibilité (i.e. nombre de postures pour atteindre le même point dans une région) est variable [Tsai 90].

Sur les singularités, la matrice jacobienne n'est pas de rang plein. Par suite, elle n'est plus inversible.

Sur le plan physique, sur une singularité, le manipulateur ne peut pas exécuter n'importe quelle vitesse articulaire selon une et plusieurs directions.

### Définition de notion d'aspect

La notion d'aspect a été introduite par [Borrel 86]. Un aspect est un domaine connexe du domaine articulaire accessible  $Q$  sur lequel aucun des mineurs d'ordre  $m$  ( $m$  est le nombre de ddl indépendant de l'effecteur) de la matrice jacobienne n'est nul, sauf si ce mineur est nul sur tout le domaine  $Q$ . Pour les manipulateurs non redondants, un aspect est défini comme le plus grand domaine connexe de  $Q$  dépourvu de configurations singulières.

Pour un manipulateur donné, la détermination du nombre d'aspects est complexe étant donné qu'il dépend non seulement de la forme des singularités mais aussi des butées articulaires.

Des notions voisines de la notion d'aspect sont développées par [Burdick 88] et [Parenti 88]. Il s'agit des « c-sheets » et des « régions ». On peut définir ces notions comme des aspects pour des manipulateurs non redondants à articulations rotoïdes et sans butées articulaires.

Une autre notion plus générale a été développée par [Chedmail 87a] et [Wenger 89]. Il s'agit des aspects libres qui sont une généralisation des aspects en tenant compte la présence d'obstacles ce qui est nécessaire pour l'étude de faisabilité des trajectoires continues en milieu encombré. Un aspect libre n'est pas nécessairement une composante connexe. Pour le calculer, on part d'un aspect et on retranche les domaines qui donnent lieu à des collisions.

On présente maintenant quelques cas particuliers de singularités.

#### **1.3.1. SINGULARITÉS DE POSITION**

[Burdick 91], [Smith 93], [Kohli 87]

Les singularités de positions des manipulateurs 3R sont de trois types. La matrice jacobienne n'est plus de rang plein dans l'un des cas suivants :

- *Singularité de type 1* : L'une des colonnes de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est nulle. Ceci se présente dans le cas où l'effecteur serait sur un axe articulaire rotoïde. Par suite, cette articulation n'influe pas sur le mouvement de l'effecteur. La Figure 5 représente un manipulateur dont l'effecteur coupe l'axe de la première articulation. Dans ce cas, l'effecteur ne peut pas se déplacer dans les directions définies par  $Z_2$  ou  $Z_3$ .

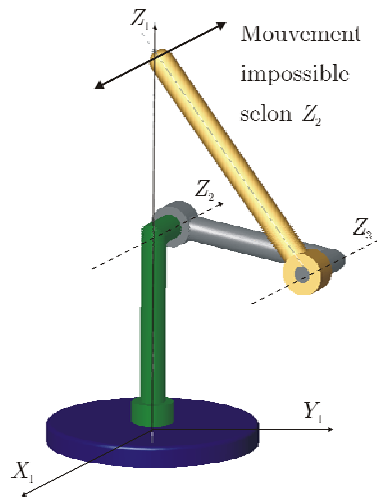


Figure 5 : Singularité de type 1

- *Singularité de type 2* : Deux colonnes de la matrice  $\mathbf{J}$  sont proportionnelles. Dans ce cas la contribution de deux articulations au mouvement de l'effecteur est la même. La Figure 6 représente un manipulateur en configuration singulière de type 2 : les deux derniers axes sont parallèles donc les deux articulations jouent le même rôle.

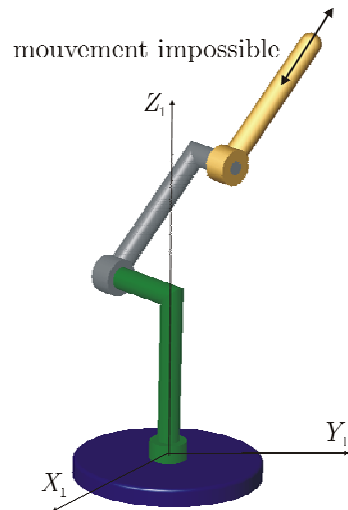


Figure 6 : Singularité de type 2

- *Singularité de type 3* : C'est le cas le plus général : les colonnes de  $\mathbf{J}$  forment un système lié. Pour un manipulateur 3R, ce type de singularité est défini lorsque l'effecteur est sur une ligne appelée direction singulière qui rencontre tous les axes articulaires (Figure 7).

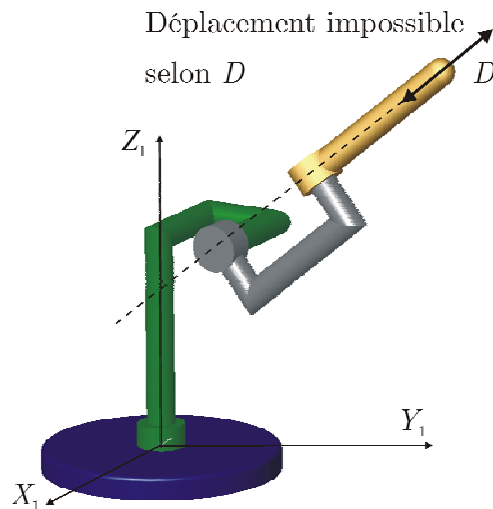


Figure 7 : Singularité de type 3

### 1.3.2. BRANCHES DE SINGULARITÉS

Étant donné qu'une singularité est définie par l'ensemble des configurations qui annulent le déterminant de la matrice  $\mathbf{J}$ , lorsque ce dernier se factorise, chaque facteur en s'annulant définit une singularité (en l'absence de butées articulaires). Une

branche de singularité est définie comme une composante connexe de singularité dans l'espace articulaire.

Dans le cas où le déterminant ne se factorise pas, la seule singularité sera donnée par  $\det(\mathbf{J}) = 0$ . Pour un manipulateur 3R, cette singularité est composée de plusieurs branches. [Burdick 88] a montré qu'un manipulateur 3R dont le déterminant ne se factorise pas peut avoir jusqu'à 4 branches de singularités.

Exemple :

Soit un manipulateur 3R dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 2,5$ ,  $d_3 = 0,5$ ,  $d_4 = 2$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0,6$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ . Le déterminant s'écrit sous une forme décrite par l'équation (6) dont la factorisation représente un problème théorique très difficile. La Figure 8 montre la seule singularité du manipulateur composée de 4 branches dans l'espace articulaire, ainsi que l'espace de travail dans le plan ( $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z$ ).

$$\det(\mathbf{J}) = (d_3 + d_4 c_3) \cdot [d_2 s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2] + (d_3 s_3 - r_2 c_3) r_3 s_2 \quad (6)$$

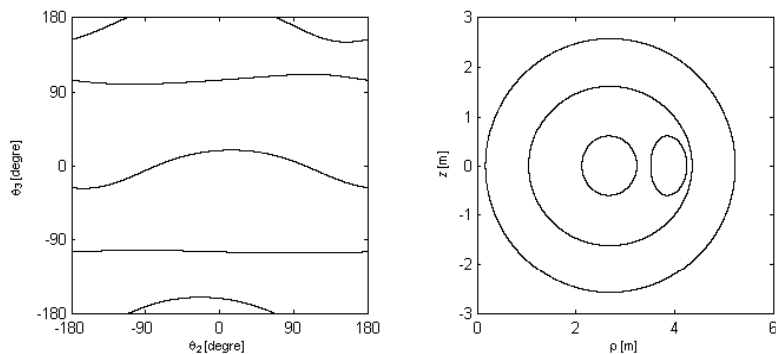


Figure 8 : Singularité à 4 branches

### 1.3.3. CALCUL DES SINGULARITÉS DANS L'ESPACE ARTICULAIRE

Les singularités sont les configurations pour lesquelles la matrice jacobienne n'est pas de rang plein. Dans le cas des manipulateurs 3R, les singularités sont obtenues en résolvant directement l'équation :

$$\det(\mathbf{J}) = 0 \quad (7)$$

Il existe d'autres méthodes de calcul de singularités dans l'espace articulaire. Citons par exemple la méthode récursive de [Burdick 88] valable pour les manipulateurs 3R. C'est une méthode purement géométrique et qui ne nécessite pas le calcul de la matrice jacobienne ni de son déterminant.

### 1.3.4. CALCUL DES SINGULARITÉS DANS L'ESPACE OPÉRATIONNEL

Dans le cas général, les singularités dans l'espace opérationnel sont obtenues en calculant l'image des singularités dans l'espace articulaire par l'opérateur géométrique  $F$  : [Kohli 87], [Rastegar 87], [Burdick 88], [Tsai 93a], [El Omri 96].

L'inconvénient majeur de ces méthodes se base sur le fait qu'elles ne tiennent pas compte des butées articulaires dans le calcul des frontières de l'espace de travail.

[Dombre 82] détermine ces frontières dans des plans de coupe de l'espace opérationnel. Dans chaque plan, on considère un point  $\mathbf{P}$ . On choisit ensuite une configuration articulaire solution au MGI en  $\mathbf{P}$ . On déplace le point  $\mathbf{P}$  le long d'une droite par calcul du modèle différentiel inverse jusqu'à atteindre une limite articulaire ou une singularité le long de cette droite. On note tous les points limites. On déplace après la droite parallèlement à elle-même. On obtient finalement un ensemble de points délimitant la portion de plan de coupe accessible. Toutefois, cette méthode dépend du choix du point  $\mathbf{P}$  initial et ne permet pas en général d'obtenir la totalité de la zone accessible dans le plan de coupe considéré.

#### Définition « du » polynôme du MGI

Dans tout ce mémoire, on définira « le » polynôme du MGI d'un manipulateur 3R comme le polynôme  $P(t)$  donné dans l'équation (8). Il représente une équation caractéristique que l'on peut obtenir en tentant d'obtenir les MGI en fonction de  $\tan(\theta_3/2)$ . Le polynôme  $P(t)$  est de degré 4 en fonction de  $t = \tan(\theta_3/2)$ , ses coefficients  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $d$  et  $e$  dépendent des paramètres de DHm et de la position de

l'effecteur (définie par  $\rho$  et  $z$ ). Notons que l'on peut obtenir deux autres équations caractéristiques en fonction de  $\tan(\theta_1/2)$  et  $\tan(\theta_2/2)$ .

$$P(t) = at^4 + bt^3 + ct^2 + dt + e \quad (8)$$

[Ranjbaran 94] exprime explicitement l'équation des singularités dans l'espace opérationnel en partant du polynôme du MGI.

Le lieu des points où ce polynôme admet des racines multiples est exactement le lieu des singularités dans l'espace opérationnel. Sur le plan pratique, ces singularités sont obtenues en traçant le graphe de l'équation (9) dans le plan  $(\rho, z)$  qui découle de l'annulation du discriminant du polynôme du MGI [Kohli 85], [Tsai 93a], [Ranjbaran 94], [El Omri 96].

$$(2c^3 + 27ad^2 + 27b^2e - 9bcd - 72ace)^2 - 4(c^2 - 3bd + 12ae)^3 = 0 \quad (9)$$

Les coefficients  $a, b, c, d$  et  $e$  sont donnés par :

$$\begin{cases} a = 4d_2^2 A_1^2 + s\alpha_2^2 F_1^2 - 4d_2^2 s\alpha_2^2 \rho^2 \\ b = 16d_2^2 H_1 A_1 + 4s\alpha_2^2 D_1 F_1 \\ c = 8d_2^2 A_1^2 + 2s\alpha_2^2 B_1 F_1 + 16d_2^2 H_1^2 + 4s\alpha_2^2 D_1^2 - 8d_2^2 s\alpha_2^2 \rho^2 \\ d = 16d_2^2 H_1 A_1 + 4s\alpha_2^2 B_1 D_1 \\ e = 4d_2^2 A_1^2 + s\alpha_2^2 B_1^2 - 4d_2^2 s\alpha_2^2 \rho^2 \end{cases} \quad (10)$$

Où :

$$\begin{cases} A_1 = r_2 + r_3 c\alpha_3 - z c\alpha_2 \\ B_1 = d_3^2 + d_4^2 + r_2^2 + r_3^2 - d_2^2 - \rho^2 - z^2 + 2r_2 r_3 c\alpha_3 + 2d_3 d_4 \\ F_1 = d_3^2 + d_4^2 + r_2^2 + r_3^2 - d_2^2 - \rho^2 - z^2 + 2r_2 r_3 c\alpha_3 - 2d_3 d_4 \\ D_1 = 2d_4 r_2 s\alpha_3 \\ H_1 = d_4 s\alpha_3 \\ \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \end{cases} \quad (11)$$

L'équation (9) est de degré 8 en  $\rho^2$  et en  $z^2$  et permet de tracer les frontières externes de l'espace de travail ainsi que toutes les frontières internes séparant les régions de degrés d'accessibilité différents.

La Figure 9 montre l'espace de travail en utilisant cette méthode. En effet, on trace l'équation (9) dans une section génératrice qui est le plan  $(\rho, z)$  puis on réalise une rotation selon le premier axe du manipulateur dans un environnement CAO. Elle correspond au manipulateur 3R dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 3.5$ ,  $d_3 = 6$ ,  $d_4 = 1.6$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0.5$ ,  $\alpha_2 = -10^\circ$  et  $\alpha_3 = 75$ .

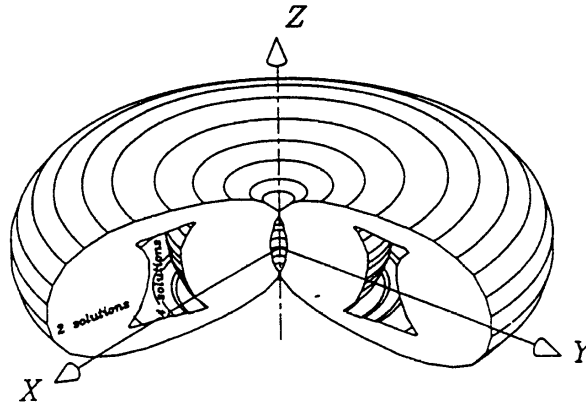


Figure 9 : Espace de travail obtenu par les singularités dans l'espace opérationnel ([Ranjbaran 94])

Une autre méthode permettant de déterminer l'espace de travail en utilisant les surfaces toroïdales a été introduite dans [Ceccarelli 89]. Cette méthode s'applique pour les manipulateurs 3R dont les deux premiers axes ne sont pas parallèles et l'espace de travail peut être obtenu ainsi. On fixe la valeur de la troisième articulation à une valeur  $\theta_3$  donnée et on trace la surface toroïdale  $ST(\theta_3)$  engendrée par les deux premières articulations. En faisant varier  $\theta_3$  entre 0 et  $2\pi$ , la réunion de toutes les surfaces toroïdales constitue l'espace de travail en entier. La frontière de l'espace de travail est par suite l'enveloppe de toutes les surfaces toroïdales  $ST(\theta_3)$ . L'équation (12) est celle d'une surface toroïdale  $ST(\theta_3)$  obtenue en éliminant  $\theta_1$  et  $\theta_2$  à partir des équations du MGD.

$$(x^2 + y^2 + z^2 - A_2)^2 + (F_2 z + D_2)^2 + B_2 = 0 \quad (12)$$



où :

$$\begin{cases} A_2 = d_2^2 + R^2 + U^2 \\ B_2 = -4d_2^2 R^2 \\ F_2 = \frac{2d_2}{s\alpha_2} \\ D_2 = -2d_2 U \cotan(\alpha_2) \end{cases} \quad (13)$$

et :

$$\begin{cases} R = \sqrt{(d_3 + d_4 c_3)^2 + [d_4 s_3 c\alpha_3 - r_3 s\alpha_3]^2} \\ U = r_2 + r_3 c\alpha_3 + d_4 s_3 s\alpha_3 \end{cases} \quad (14)$$

Dans le cas des manipulateurs dont les deux premiers axes sont parallèles ( $s\alpha_2 = 0$ ), les surfaces toroïdales  $ST(\theta_3)$  dégèrent et les formules précédentes ne sont plus valables. L'équation paramétrique de l'enveloppe de toutes les surfaces toroïdales  $ST(\theta_3)$  peut être obtenue en dérivant l'équation (12) par rapport à  $\theta_3$ . En exprimant les coordonnées  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$  et  $z$ , on obtient les équations de la frontière de l'espace de travail dans une section génératrice :

$$\begin{cases} \rho = \sqrt{(A_2 - z^2) + \frac{(G(F_2 z + D_2) + F)}{H_2}} \\ z = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - KN}}{KF_2} - \frac{D_2}{F_2} \end{cases} \quad (15)$$

où :

$$\begin{cases} H_2 = 2d_4 (r_2 s\alpha_3 c_3 - d_3 s_3) \\ F_2 = 4d_2^2 d_4 (d_4 s\alpha_3^2 s_3 c_3 + d_3 s_3 + r_3 s\alpha_3 c\alpha_3 c_3) \\ G = -\frac{2d_2 d_4 s\alpha_3 c\alpha_2 c_3}{s\alpha_2} \\ K = G^2 + H_2^2 \\ L = F_2 G \\ N = F_2^2 + B_2 H_2^2 \end{cases} \quad (16)$$

La section génératrice est alors obtenue en traçant le graphe de  $\rho(\theta_3)$  et  $z(\theta_3)$  par balayage de  $\theta_3$ . Ces formules peuvent être généralisées aux manipulateurs 6R d'une manière récursive, toutefois, les équations deviennent plus complexes [Ceccarelli 95].

Une formulation algébrique permettant de représenter les surfaces de singularité dans l'espace de travail des manipulateurs 3R a été introduite dans [Ottaviano 04].

D'autres méthodes utilisant la représentation par balayage aussi bien dans l'espace articulaire ([Wenger 89]) que dans l'espace de travail ([Dombre 82], [Shiller 89], [Lueth 92], [Lallemant 94]) peuvent être utilisées. L'inconvénient majeur du balayage dans l'espace de travail est la difficulté de les généraliser dans le cas des environnements encombrés d'obstacles : sauf pour les cas particuliers simples, il n'est pas facile d'obtenir les frontières correspondant au contact du manipulateur avec les obstacles. Une synthèse des principales méthodes de calcul de l'espace de travail est détaillée dans [Chedmail 98].

### 1.3.5. CLASSIFICATION DES SINGULARITÉS

Dans ce paragraphe, on va présenter quelques types de singularités classées selon leurs natures et selon leurs influences sur les manipulateurs.

- *Singularités séparables* : Une singularité est dite séparable si elle sépare l'espace articulaire en différentes régions [Burdick 88]. Pour un manipulateur 3R et en l'absence de limites articulaires, une singularité à une seule branche est non séparable puisqu'elle ne rajoute pas d'aspects supplémentaires.
- *Singularités évitables* : Une singularité est dite évitable si l'image réciproque de son image peut contenir des surfaces de l'espace articulaire qui ne sont pas des branches de singularité. Dans l'espace de travail, l'effecteur du manipulateur peut donc être sur la trace d'une singularité évitable sans être dans une configuration singulière. Étant donné qu'une singularité est une racine double du MGI, un manipulateur ne peut avoir de singularités évitables que lorsque son MGI a plus de 2 solutions. La Figure 10 illustre les

singularités à 4 branches d'un manipulateur dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 2,5$ ,  $d_3 = 0,5$ ,  $d_4 = 2$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0,3$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ . La seule singularité non évitable est  $(S_1)$ , son image dans l'espace de travail est  $F(S_1)$  formant la frontière extérieure. Les images inverses des autres surfaces de singularité dans l'espace de travail donnent lieu dans l'espace articulaire, en plus des 3 branches autres que  $S_1$ , à des surfaces (marquées par des \*) qui ne sont pas des branches de singularités.

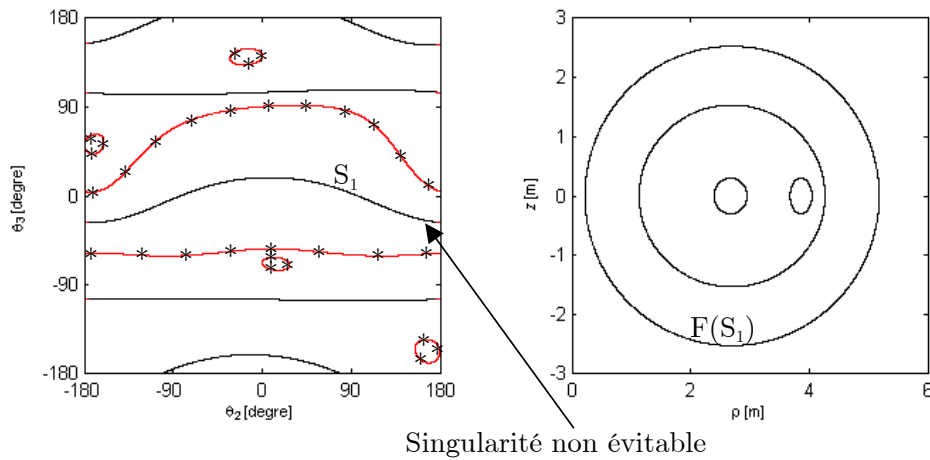


Figure 10 : Exemple de singularité évitable

- *Singularités génériques* : Une singularité est dite générique si elle satisfait aux deux conditions suivantes :

- (1) La matrice jacobienne est de rang 2 en toute configuration singulière.
- (2) Tous les points singuliers,  $\theta_s$ , doivent satisfaire la condition suivante:

$$\frac{\partial[\det(\mathbf{J}(\theta_s))]}{\partial\theta_i} \neq 0 \text{ pour au moins } i = 2 \text{ ou } 3.$$

Les singularités génériques forment des surfaces régulières dans l'espace articulaire où on ne rencontre pas d'autres singularités. En pratique et dans l'espace articulaire, dès que les branches de singularités se coupent, on peut affirmer que ces singularités sont non génériques [Pai 92]. La Figure 11 représente les singularités génériques d'un manipulateur dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 3$ ;  $d_3 = 1,1$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1,3$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ .

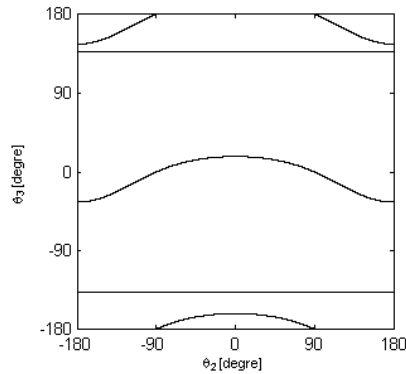


Figure 11 : Exemple de singularités génériques

Les singularités non génériques sont instables. En effet, une petite perturbation des paramètres géométriques provoque un grand changement de leurs propriétés ([Pai 92], [Burdick 95]).

#### 1.4. PROPRIÉTÉS DES MANIPULATEURS

Depuis longtemps, les industriels se sont contentés d'utiliser des manipulateurs « standards » dont les propriétés sont parfaitement maîtrisées. Les principales tâches de ces manipulateurs consistent à réaliser des opérations de manutention, de soudage ou de peinture. Or, avec le progrès technologique, la diversité des tâches à réaliser ou pour satisfaire la tendance de minimisation des coûts des manipulateurs et de la concurrence, les concepteurs se retrouvent obligés de proposer des manipulateurs nouveaux satisfaisant les demandes du marché. Cette innovation n'est pas automatique puisqu'elle exige une connaissance globale de leurs propriétés. Dans ce paragraphe, on va décrire les généralités et les propriétés importantes des manipulateurs qu'un concepteur doit maîtriser afin de satisfaire un cahier des charges imposé.

##### 1.4.1. PROPRIÉTÉS D'ASPECTS

Pour la plupart des manipulateurs industriels, les aspects sont des domaines d'unicité des solutions du MGI. [Borrel 86] a affirmé aussi qu'un aspect est associé à une posture. Par exemple la Figure 8 représente un manipulateur à 4 branches de singularités et 4 aspects. Chaque aspect est un domaine d'unicité du MGI.

Cependant, les limites de ce résultat se sont clarifiées avec la découverte en 1988 de manipulateurs jusqu'ici alors inconnus qu'on a appelé par la suite les manipulateurs cuspidaux et qui peuvent avoir plus d'une solution au MGI dans le même aspect. On détaillera les propriétés de ce type de manipulateurs dans le reste de ce mémoire.

### 1.4.2. NOTION DE PARCOURABILITÉ

L'espace de travail nous permet d'analyser les performances globales d'accessibilité. Cette notion reste limitée si le manipulateur doit exercer des tâches de type soudage à l'arc ou de découpe. En effet, le manipulateur ne peut pas toujours suivre une trajectoire continue entre deux points A et B même s'il peut les atteindre. Une notion plus forte que l'accessibilité est exigée : il s'agit de la parcourabilité. Cette notion a été formalisée par [Chedmail 87b], [Chedmail 87c], [Wenger 88], [Wenger 89] et [Wenger 91]. Selon que la trajectoire suivie entre deux points donnés de l'espace opérationnel est spécifiée ou pas, on a deux niveaux de parcourabilité. Pour chaque niveau, il est donc important de déterminer les régions parcourables de l'espace opérationnel.

#### 1.4.2.1. Terminologie [Wenger 89]

- *Trajectoire discrète* : c'est une trajectoire définie par la donnée de p points de l'espace de travail sans spécifier un chemin entre ces p points.
- *Trajectoire continue* : c'est une trajectoire de longueur finie entre une origine et une extrémité. Elle est faisable lorsque l'effecteur peut la suivre de manière continue.
- *Espace des configurations libres* : noté  $Q_l$ . On considère la partition de  $Q_l$  en plusieurs composantes connexes  $Q_{l_i}$  avec  $i \in I = \{1, 2, \dots, N\}$  tel que  $Q_l = \bigcup_{i \in I} Q_{l_i}$  et  $\forall i \neq j, i \in I, j \in I, Q_{l_i} \cap Q_{l_j} = \emptyset$ .
- *Domaine de travail* :  $W_{l_i}$  est défini ainsi :  $\forall i \neq j, W_{l_i} = F(Q_{l_i})$ .

- 
- *Espace de travail libre* : on peut le définir par  $Wl = F(Ql)$  ou encore :  

$$Wl = \bigcup_{i \in I} Wl_i.$$

#### 1.4.2.2. La n-parcourabilité :

La n-parcourabilité garantit la faisabilité de toute trajectoire discrète dans l'espace de travail libre  $Wl$ . Autrement dit, tous les points d'une trajectoire discrète choisie sont contenus dans un domaine de travail. Un espace de travail libre d'un manipulateur est n-parcourable, si et seulement si, il existe un domaine de travail qui contient tous les autres et qui recouvre tout l'espace de travail libre. On note qu'en l'absence d'obstacles, l'espace de travail est toujours n-parcourable. En effet le domaine articulaire accessible est connexe, par suite, il n'y a qu'un seul domaine de travail constituant tout l'espace de travail.

Dans le cas où l'espace de travail libre  $Wl$  n'est pas n-parcourable, on montre que les sous-espaces n-parcourables principaux sont les domaines de travail  $Wl_i$ .

#### 1.4.2.3. La t-parcourabilité :

La notion de n-parcourabilité ne garantit pas la faisabilité des trajectoires continues. Par suite on a besoin de définir une notion plus forte dans le cas de manipulateurs devant suivre une courbe imposée pour effectuer des tâches telles que le soudage continu, la peinture ou la découpe. Dans le cas des manipulateurs non cuspidaux évoluant dans des environnements dépourvus d'obstacles, [Borrel 86] a démontré qu'une trajectoire continue est faisable si et seulement si tous les points de cette trajectoire sont accessibles dans le même aspect. Ce qui veut dire que toute la trajectoire continue doit être dans l'image d'un même aspect. Afin de généraliser ce résultat aux environnements encombrés, on doit distinguer les manipulateurs redondants et non redondants.

- *Les manipulateurs non redondants* : pour qu'une trajectoire continue soit faisable dans l'espace de travail libre  $Wl$ , il faut et il suffit qu'elle soit

totalelement contenue dans l'image d'une composante connexe d'un aspect libre ou qu'elle passe par une zone de changement d'aspect qui est un domaine de dimension  $m-1$  [Wenger 89].

- *Les manipulateurs redondants* : pour qu'une trajectoire continue soit faisable dans l'espace de travail libre  $W_l$ , il faut et il suffit qu'il existe une composante connexe de  $F^{-1}$ (trajectoire continue) dont l'image recouvre cette trajectoire. Toutefois, cette condition ne permet pas d'analyser la t-parcourabilité de tout l'espace de travail [Wenger 89]. La technique des cartes de faisabilité peut être utilisée pour résoudre ce problème. Une étude de cette technique est détaillée dans [Chedmail 98].

Le Tableau 1 récapitule les différentes propriétés et résultats de chaque notion définie dans ce paragraphe. La première notion est relative aux tâches nécessitant des trajectoires discrètes comme le soudage par points. Tandis que la deuxième notion est relative aux tâches faisant intervenir des trajectoires continues comme le soudage à l'arc ou la peinture homogène.

Notion	Définition	Application	Conditions pour l'espace de travail	Sous-espaces parcourables
n-parcourabilité	Aptitude à relier un ensemble de points	Mouvement point à point	L'espace de travail libre est engendré par un domaine de travail	Les domaines de travail $W_l$
t-parcourabilité	Aptitude à suivre une trajectoire continue	Suivi de trajectoires continues	L'espace de travail libre est engendré par l'image d'une composante connexe d'un aspect libre	Les images des composantes connexes des aspects libres

Tableau 1 : Propriétés de la parcourabilité

### 1.4.3. MANIPULATEURS DE MORPHOLOGIE CUSPIDALE

Il a longtemps été acquis que pour changer de posture, un manipulateur devait franchir une singularité. Ce résultat a été démontré théoriquement par [Borrel 86] en utilisant la notion d'aspect. Une étude faite par [Parenti 88] sur un manipulateur 6R a remis en question cet acquis. [Burdick 88] a prouvé l'inverse de cet acquis pour quelques manipulateurs 3R. Il existe donc d'autres types de manipulateurs appelés manipulateurs cuspidaux qui peuvent changer de posture sans passer par une singularité. D'autres études ont été conduites par la suite sur ce type de manipulateurs [Burdick 91], [Wenger 91], [Smith 93], [Wenger 93], [Wenger 94], [El Omri 95], [Wenger 96] et [Wenger 98].

#### 1.4.3.1. Définition

Un manipulateur est dit cuspidal s'il peut changer de posture sans passer par une singularité. Ceci veut dire que le changement de posture peut s'effectuer au sein d'un même aspect, qui n'est donc plus un domaine d'unicité de l'opérateur géométrique  $F$ . Un manipulateur dont les aspects sont des domaines d'unicité doit nécessairement passer par une singularité pour changer de posture, il est donc non cuspidal. Un manipulateur cuspidal doit avoir des singularités évitables [El Omri 96].

Un manipulateur non cuspidal qui suit une trajectoire continue (lors de la réalisation d'une tâche de soudage à l'arc, par exemple) doit quitter la trajectoire pour changer de posture en allant sur la frontière de son espace de travail. Ce qui n'est pas forcément le cas pour un manipulateur cuspidal si toutes les postures le long de la trajectoire appartiennent à un même aspect.

- Exemple :

Soit un manipulateur à trois articulations rotoïdes dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ , On montre que le point  $\mathbf{X}$  de coordonnées  $x = 2,5$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0,6$  dans le repère  $R_0$  est accessible selon les 4 postures suivantes (valeurs exprimées en degrés) :



$$\mathbf{q}^{(1)} = (-101,52, -158,19, 104,88)^T, \mathbf{q}^{(2)} = (-50,92, -46,17, 141,16)^T$$

$$\mathbf{q}^{(3)} = (-164,56, -170,02, -12,89)^T \text{ et } \mathbf{q}^{(4)} = (10,13, -22,33, -106,28)^T$$

Dans la Figure 12 et en l'absence de butées articulaires, les singularités divisent le domaine articulaire de ce manipulateur en deux aspects (dont l'un comprend toute la zone non hachurée). On voit que les configurations  $\mathbf{q}^{(2)}$  et  $\mathbf{q}^{(3)}$  (respectivement  $\mathbf{q}^{(1)}$  et  $\mathbf{q}^{(4)}$ ) appartiennent au même aspect. Par conséquent, le passage de  $\mathbf{q}^{(2)}$  et  $\mathbf{q}^{(3)}$  (respectivement  $\mathbf{q}^{(1)}$  et  $\mathbf{q}^{(4)}$ ) se fait sans franchissement de singularités.

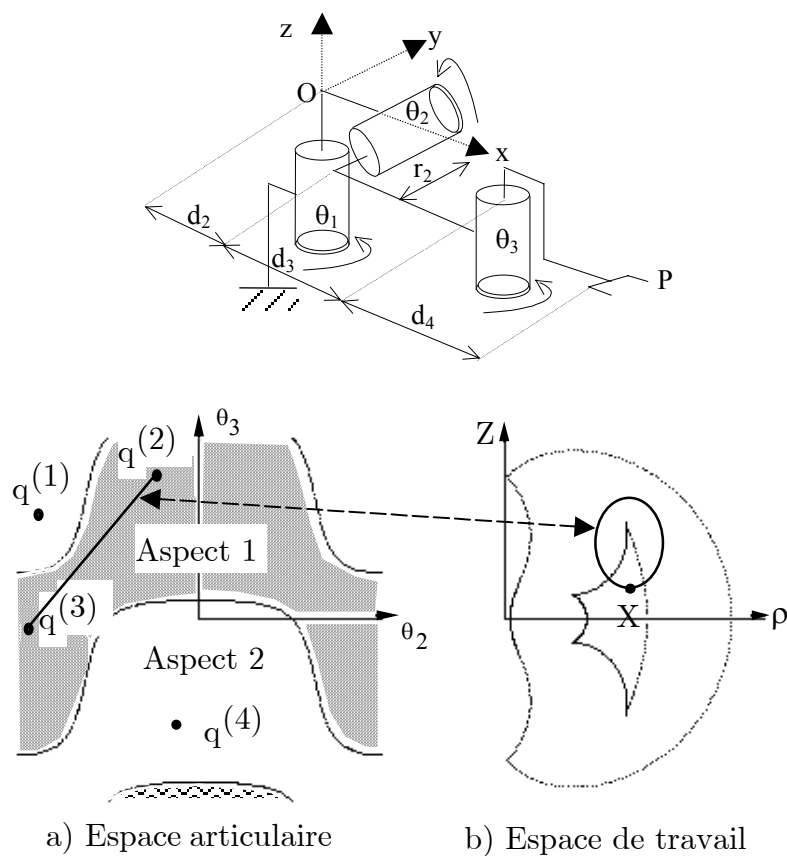


Figure 12 : Exemple de manipulateur 3R cuspidal

### 1.4.3.2. Identification des morphologies cuspidales

Classifier les manipulateurs cuspidaux et non cuspidaux reste un problème difficile. Certes, l'observation d'exemples de manipulateurs a permis la formulation de quelques conjectures. [Smith 93] et [Burdick 95] ont émis l'hypothèse qu'un manipulateur présentant des simplifications géométriques telles que les intersections,

l'orthogonalité ou le parallélisme de ses axes ne peut pas éviter les singularités lors d'un changement de posture. [Burdick 88] et [Tsai 93a-b], ont pensé qu'un manipulateur dont les paramètres de DHm sont arbitraires est nécessairement cuspidal. Toutefois aucune de ces deux conjectures ne peut être démontrées dans le cas général.

### Exemples industriels de manipulateurs cuspidaux

- Le robot GMF P150 (voir la Figure 13) est un robot 6R dédié à la peinture. Ce robot a une architecture proche des robots anthropomorphes classiques dont on maîtrise parfaitement les propriétés. La seule différence est l'ajout d'un offset entre les deux derniers axes afin d'éliminer les singularités du poignet. Cet offset a complètement modifié le comportement du robot. En effet on ne peut pas décomposer la structure en un porteur et un poignet. En plus on ne peut plus décomposer les équations du MGI en deux systèmes indépendants traduisant la position et l'orientation de l'effecteur. Par suite les méthodes classiques de résolution du MGI de type Paul ou Pieper ne sont plus valables. Ce robot est cuspidal malgré sa géométrie simple. Il possède 16 solutions au MGI et seulement 2 aspects [El Omri 96].

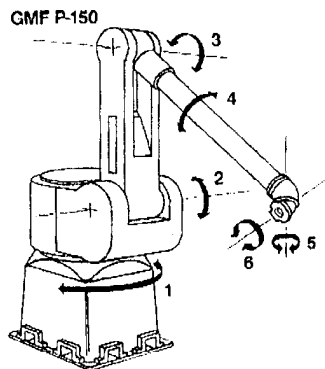


Figure 13 : Un robot industriel de morphologie cuspidale (GMF P150)

- Le robot ABB IRB6400C (voir Figure 14) est un robot 6R qui a été conçu pour minimiser le volume balayé dans des tâches de soudage et

d'assemblage dans l'industrie automobile [Hemmingson 96]. Son porteur est un manipulateur à axes orthogonaux et son premier axe est un mécanisme à 4 barres. Avec une telle morphologie, on peut concevoir plusieurs versions permettant d'avoir différents espaces de travail satisfaisant les tâches à exécuter dans la chaîne de montage. Si on remplace le mécanisme à 4 barres par une liaison pivot, le manipulateur sera cuspidal.

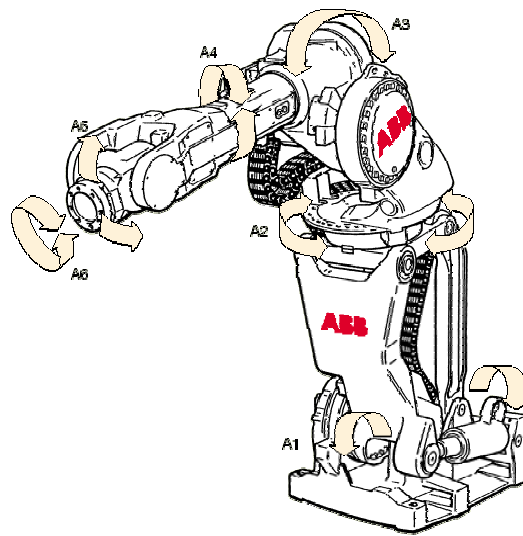


Figure 14 : Un robot industriel de morphologie orthogonale (ABB IRB6400C)

- Le troisième exemple de robot industriel de morphologie cuspidale est le robot STAUBLI dont la structure est présentée par la Figure 15. Ce manipulateur présente, comme le robot GMF P150, un offset au poignet. Cet offset a été rajouté afin d'abaisser le coût de fabrication du poignet. Il a 14 solutions au MGI et seulement 2 aspects [Wenger 03]. Toutefois, le problème d'identification des solutions (répartition des solutions inverses dans les aspects) est complexe. En effet, pour un robot cuspidal, les solutions du MGI sont séparées par les surfaces caractéristiques (voir définition au §1.4.3.3) qui ne sont pas faciles à tracer pour un manipulateur à 6 ddl.

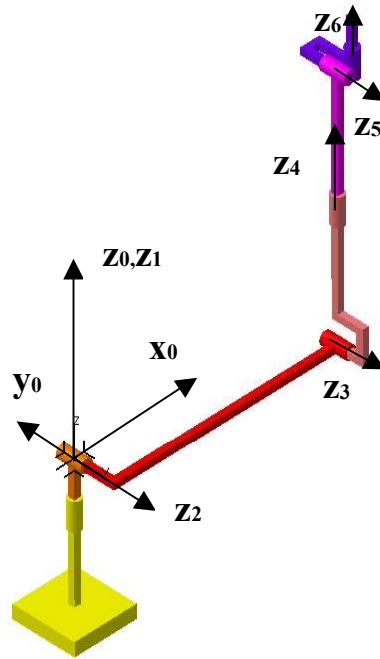


Figure 15 : Robot de morphologie cuspidale ([Wenger 03])

Dans [El Omri 95], un nouveau résultat a permis la classification des manipulateurs cuspidaux : un manipulateur à 3 ddl peut changer de posture sans passer par une position singulière, si et seulement si, il existe dans son espace de travail trois solutions au modèle géométrique inverse qui coïncident ; Un tel point est appelé point cusp. La Figure 16 montre dans une section de l'espace de travail, les singularités d'un manipulateur cuspidal (paramètres de DHm :  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ ). Il existe 4 points cusps, deux régions avec 2 et 4 postures possibles.

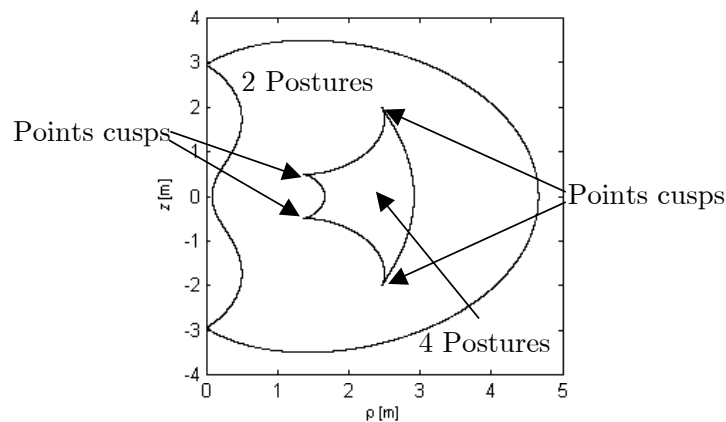


Figure 16 : Points cusps dans une section de l'espace de travail d'un manipulateur cuspidal

Des méthodes numériques ou graphiques peuvent être utilisées pour vérifier les conditions d'existence de points cusp. Elles constituent une aide intéressante pour le concepteur dans le choix d'un manipulateur. Toutefois, dans le cas général, il n'existe pas d'écriture simple des conditions d'existence de point cusp en fonction des paramètres DHm sous forme explicite [El Omri 96].

Étant donné que l'existence d'un point cusp prouve que le manipulateur est cuspidal, ceci peut être utilisé comme critère de classification.

Notre but est donc de chercher les racines triples du polynôme du MGI  $P(t)$ . S'il existe au moins une, on peut affirmer que le manipulateur est cuspidal, et réciproquement. Cette condition est introduite par donnée le système (17) :

$$\begin{cases} P(t) = 0 \\ \frac{\partial P(t)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 P(t)}{\partial t^2} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

Le système (17) conduit à des équations de degré très élevé qu'on ne peut pas résoudre de façon symbolique avec les outils mathématiques courants [El Omri 96]. On présentera dans le reste de ce mémoire des outils mieux appropriés permettant de résoudre le système (17) pour une famille de manipulateurs 3R à axes orthogonaux.

#### 1.4.3.3. Les surfaces caractéristiques

Elles ont été définies pour des manipulateurs non redondants sériels, avec ou sans butées articulaires [Wenger 04a]. On considère un aspect  $(A_i)$  de l'espace articulaire  $(Q)$ . Les surfaces caractéristiques de l'aspect  $(A_i)$  notées  $Sc(A_i)$  sont définies comme étant l'image réciproque dans  $(A_i)$  de l'image  $F(A_i^*)$  des frontières  $(A_i^*)$  qui délimitent  $(A_i)$  :  $Sc(A_i) = F^{-1}(F(A_i^*)) \cap (A_i)$ .

avec :

- $F$  : l'opérateur géométrique,

- $(A_i^*)$  : les frontières de l'aspect  $(A_i)$ ,
- $F^{-1}(E) = \{ x / y = F(x), y \in E \}$ ,

La Figure 17 illustre la définition des surfaces caractéristiques.

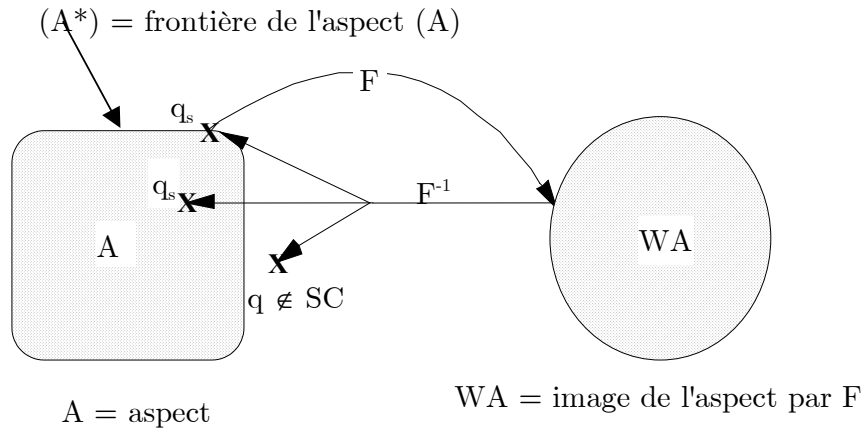


Figure 17 : Principe des surfaces caractéristiques

Par définition, on ne parle de surfaces caractéristiques que pour les manipulateurs cuspidaux. On considère un aspect  $(A_i)$ , ses surfaces caractéristiques constituent un ensemble de configurations non singulières plaçant l'organe terminal du manipulateur sur l'image de la frontière  $(A_i^*)$  de  $(A_i)$ . Les surfaces caractéristiques sont générées par les singularités et les butées articulaires (si elles existent). Dans le cas où on a des butées articulaires sur toutes les articulations d'un manipulateur 3R, les surfaces caractéristiques dépendront de la première articulation. Dans le cas où la première articulation n'a pas de butées, une représentation dans le plan  $(q_2, q_3)$  est suffisante [Wenger 92].

La Figure 18 illustre la différence entre singularités et surfaces caractéristiques dans l'espace articulaire d'un manipulateur cuspidal dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ .

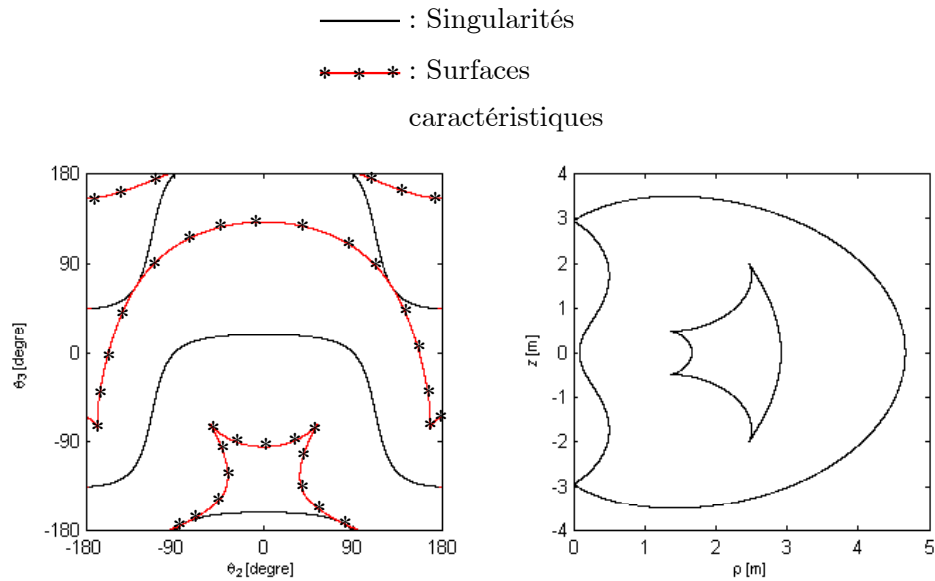


Figure 18 : Singularités et surfaces caractéristiques

#### 1.4.3.4. Les pseudo-singularités

Elles sont définies dans [Tsai 93a-b] comme l'image réciproque de l'image des frontières ( $A_i^*$ ) d'un aspect ( $A_i$ ), elles peuvent ne pas appartenir à l'aspect ( $A_i$ ).

On a donc  $Sc(A_i) = \{\text{pseudo-singularités}\} \cap (A_i)$ . Les surfaces caractéristiques se confondent avec les pseudo-singularités dans le cas où l'on n'a que deux aspects (ils partagent donc la même frontière). L'existence des pseudo-singularités en l'absence de limites articulaires prouve l'existence de singularités évitables mais ne prouve pas que le manipulateur est cuspidal, contrairement aux surfaces caractéristiques. Dans le cas du manipulateur non cuspidal représenté par la Figure 10, les pseudo-singularités (marquées par \*) ne prouvent que l'existence de singularités évitables puisque le manipulateur a 4 aspects. Toutefois, pour le manipulateur cuspidal représenté dans la Figure 18, les pseudo singularités sont confondues avec les surfaces caractéristiques puisque le manipulateur n'a que 2 aspects.

#### 1.4.3.5. Composantes de base et région de base

Les surfaces caractéristiques ( $Sc$ ) divisent un aspect ( $A_i$ ) en différents domaines connexes ouverts appelés composantes de base notées ( $Ab_{ij}$ ). Un aspect est donc la

réunion de toutes les composantes de base qui le constituent et des surfaces caractéristiques qui séparent ces composantes de base :  $(A_i) = (\bigcup_{j \in I} Ab_{ij}) \cup Sc(A_i)$ .

Les régions de base notées  $(WAb_{ij})$  ne sont que l'image des composantes de base  $(Ab_{ij})$  par l'opérateur géométrique  $F$ . Une démonstration a été faite dans [Wenger 92] prouvant que les composantes de base sont des domaines d'unicité pour un manipulateur cuspidal.

La Figure 19 illustre les composantes de base dans l'espace articulaire et les régions de base dans l'espace de travail.

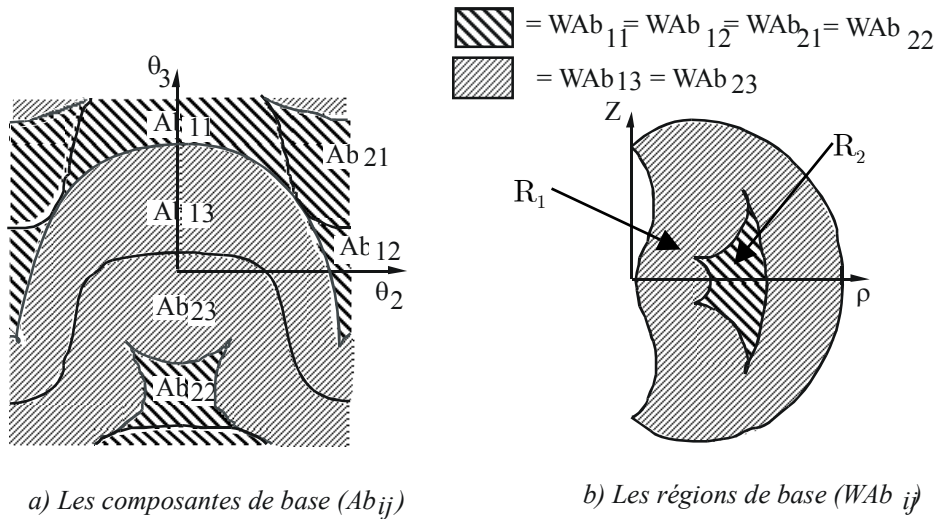


Figure 19 : Les composantes de base et les régions de base

#### 1.4.3.6. Domaines d'unicité

Les domaines d'unicité les plus grands, notés  $(Q_{uk})$ , sont obtenus par la réunion de :

- L'ensemble des composantes de base adjacentes  $(\bigcup_{i \in I'} Ab_i)$  du même aspect  $(A_i)$ , dont les images par  $F$  sont disjointes.
- Le sous-ensemble des surfaces caractéristiques  $(Sc(I'))$  séparant ces composantes de base.

Avec  $I' \subset I$  tel que  $\forall i_1, i_2 \in I', F(Ab_{i_1}) \cap F(Ab_{i_2}) = \emptyset$ .



Si l'on revient au manipulateur dont l'espace articulaire et l'espace de travail sont représentés par la Figure 19, on voit, par exemple, que les deux composantes de base ( $Ab_{11}$ ) et ( $Ab_{13}$ ) sont adjacentes et appartiennent au même aspect, de plus leurs images respectives ( $WAb_{11}$ ) et ( $WAb_{13}$ ) sont disjointes. On peut donc conclure que la réunion de ( $Ab_{11}$ ) et ( $Ab_{13}$ ) forme un domaine d'unicité.

On obtient ainsi 4 domaines d'unicité représentés en Figure 20 et qui sont :

- $Qu_1 = Ab_{11} \cup Ab_{13}$                        $Qu_2 = Ab_{12} \cup Ab_{13}$
- $Qu_3 = Ab_{21} \cup Ab_{23}$                        $Qu_4 = Ab_{22} \cup Ab_{23}$

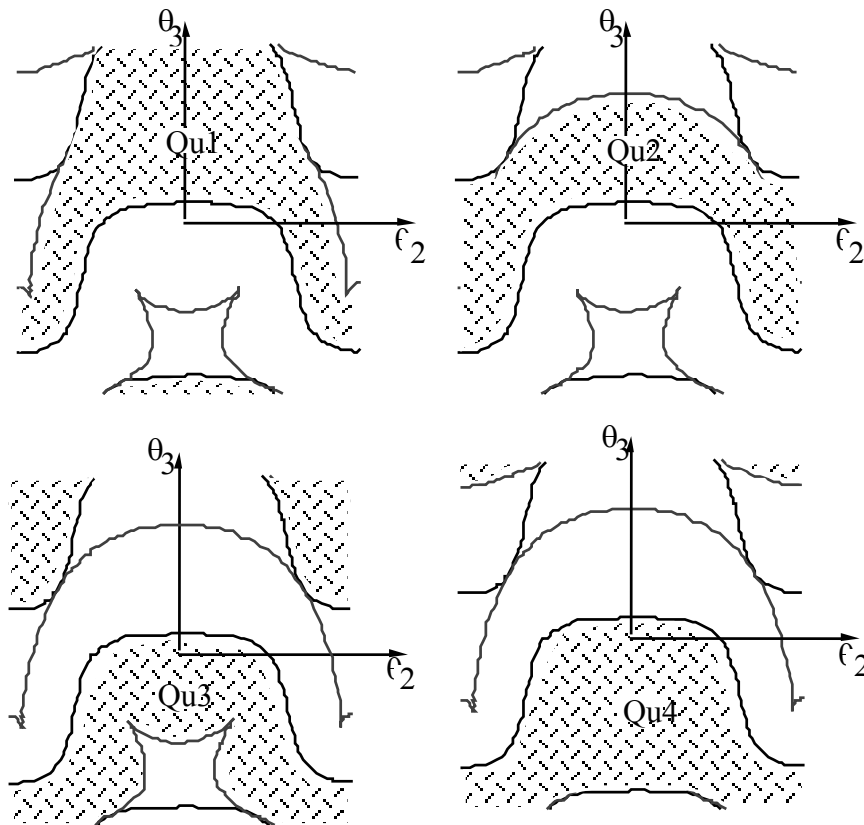


Figure 20 : les domaines d'unicité

#### 1.4.3.7. Les sous espaces t-parcourables des manipulateurs cuspidaux

Un sous espace t-parcourable noté ( $WAtk$ ) est une région où toute trajectoire continue est faisable (voir définition au §1.4.2.3). Les sous-espaces t-parcourables les

plus grands sont les images par l'opérateur géométrique  $F$  des domaines d'unicité ( $Qu_k$ ).

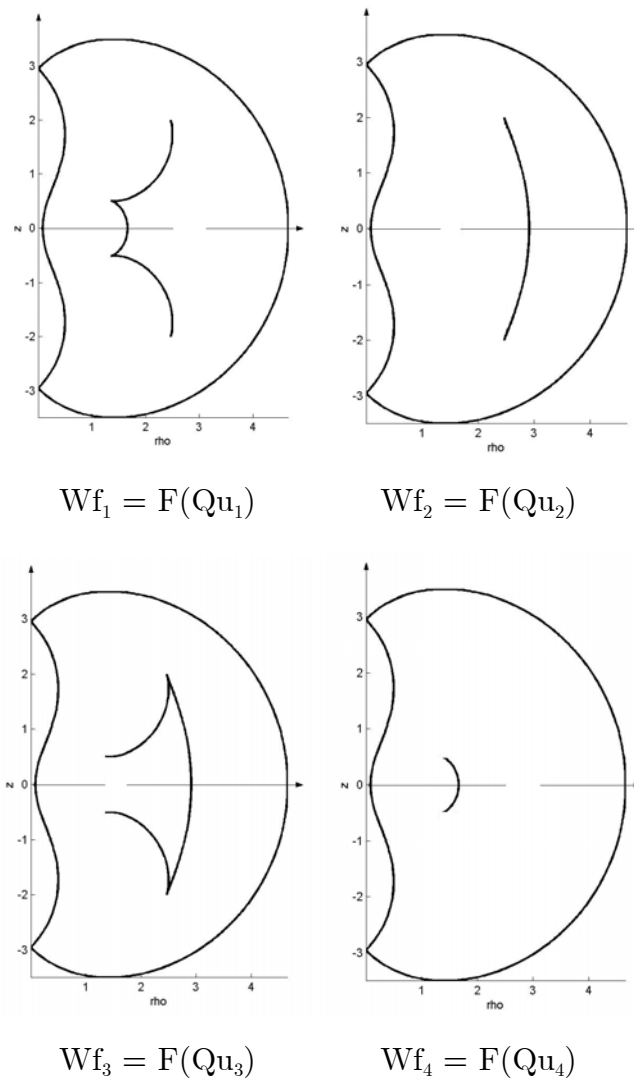


Figure 21 : Les sous espaces t-parcourables

Un espace t-parcourable contient des limites internes qu'on ne peut pas traverser, ce qui explique donc les raisons pour lesquelles certaines trajectoires continues dans l'image d'un aspect ne sont pas réalisables par un manipulateur cuspidal. Cependant, le formalisme de Borrel reste valable pour un manipulateur non cuspidal : les domaines d'unicité restent les aspects et les sous espaces t-parcourables sont les images de ces aspects.

La Figure 21 représente les 4 sous espaces t-parcourables du manipulateur cuspidal de la Figure 18. On peut aussi obtenir les deux domaines où toute trajectoire

est faisable en « collant »  $Wf_1$  et  $Wf_2$  (respectivement  $Wf_3$  et  $Wf_4$ ) et on obtient la surface  $WA_1 = F(A_1)$ , (respectivement  $WA_2 = F(A_2)$ ) que l'on trace dans  $(\rho, z, \cos(\theta_2))$ , (Figure 22). Ce modèle permet de mieux représenter les régions t-parcourables [Wenger 04a].

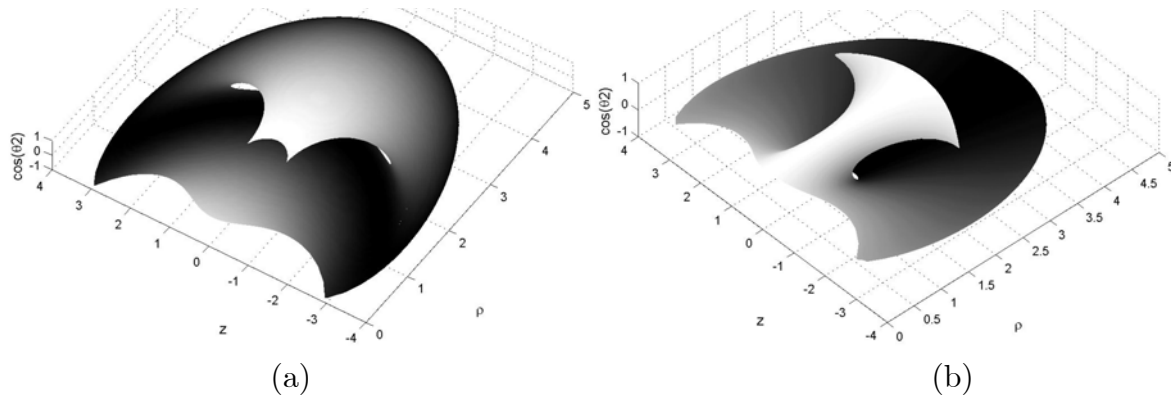


Figure 22 : Les sous espaces t-parcourables dans  $WA_1$ (a)et dans  $WA_2$ (b)

Les surfaces caractéristiques correspondent à des configurations non singulières plaçant l'organe terminal sur l'image des frontières d'un aspect ( $A_i$ ), elles sont définies pour des manipulateurs avec ou sans butées articulaires. Pour un manipulateur qui a des butées articulaires, la forme des surfaces caractéristiques change : quelques portions des surfaces caractéristiques disparaissent tandis que de nouvelles apparaissent. La Figure 23 représente les surfaces caractéristiques et les singularités dans l'espace articulaire du même manipulateur que la Figure 18 sur lequel on a rajouté les limites articulaires :  $-2,6 \leq \theta_2 \leq 2,6$  et  $-2,6 \leq \theta_3 \leq 2,6$ .

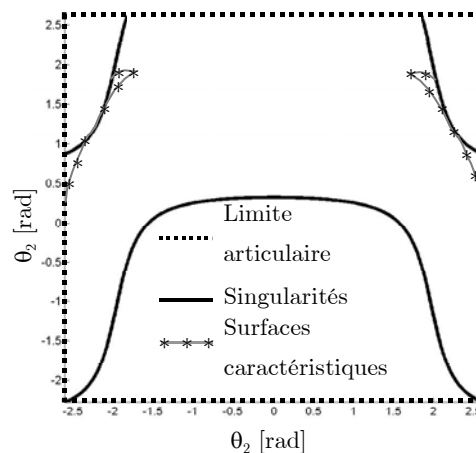


Figure 23 : Surfaces caractéristiques en présence de butées articulaires

---

De même, lors de l'utilisation de manipulateurs en milieux encombrés, les obstacles influent sur la géométrie et la topologie des espaces articulaire et de travail, ainsi que sur les surfaces caractéristiques [El Omri 96].

#### 1.4.3.8. Changements de posture non singuliers [Wenger 96], [Wenger 04a]

Pour un manipulateur cuspidal, le changement de posture s'effectue sans franchissement de singularité. On cherche donc à comprendre comment s'effectue un tel changement. Pour mieux illustrer ce problème, on prend comme exemple le manipulateur 3R défini dans le paragraphe 3.2.1 dont on rappelle les paramètres de DHm:  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ . La Figure 19 montre que la région centrale R2 est accessible selon 4 postures différentes, elle est associée à 4 composantes de base adjacentes. R2 peut être vue comme une superposition de 4 couches appelées L21, L22, L23 et L24, chaque couche correspond donc à une solution inverse. De même, R1 étant associée à deux composantes de base, on peut considérer qu'elle est un empilement de deux couches L11 et L12.

Un changement de posture non singulier peut être défini comme le passage d'une couche à une autre au sein d'une même région. La connaissance des connexions entre les différentes couches est primordiale étant donné que le passage d'une couche à l'autre s'effectue selon un chemin bien précis et qui dépend de ces connexions. Ces connexions existent à travers les frontières de R1 et R2. Elles sont définies par les adjacences des composantes de base correspondantes dans le domaine articulaire. La Figure 24 illustre ces connexions entre les différentes couches superposées (Figure 24(a)) et les liaisons entre les couches disjointes (Figure 24(b)).

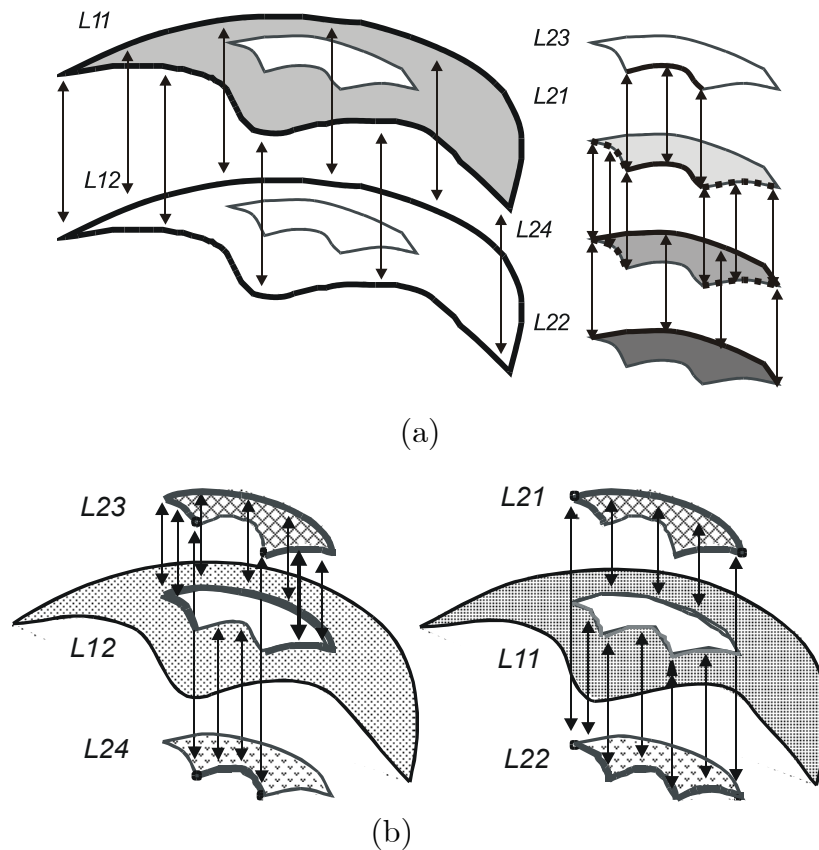


Figure 24 : Connections entre les différentes couches superposées (a)  
et adjacentes (b)

La connexion des couches superposées est assurée par des segments représentant des configurations singulières (traits en gras sur la Figure 24). Une connexion est représentée par des flèches dans la Figure 24(a). Par exemple les deux couches L11 et L12 sont reliées par la frontière externe de l'espace de travail, de même L22 et L24 sont reliées par le segment arrière de leur frontière, L24 est reliée à L21 via les segments latéraux tandis que les couches L23, L21 et L24 sont reliées par les points cusps avant.

D'un autre coté, les couches adjacentes sont reliées par des segments représentés par des flèches et correspondant à des segments non singuliers (traits fins sur la Figure 24(b)).

L'analyse de ces résultats permet d'affirmer que :

- 
- Le passage entre les deux couches L11 et L12 est un changement de posture singulier et notamment par passage par la frontière extérieure de l'espace de travail, de même le passage de L21 à L23, de L21 à L24 et de L22 à L24 se fait nécessairement en franchissant une singularité, qui peut être un point cusp.
  - Pour passer de L24 depuis L23, on passe par L12. Il suffit pour cela de sortir de L23 par un segment latéral ou arrière, on se retrouve ainsi sur la couche L12, on passera ensuite dans L24 par le segment avant. Ce changement de posture est non singulier puisque aucun des segments traversés ne représente une configuration singulière.

Un changement de posture peut donc être effectué de deux manières différentes :

- Un changement de posture singulier qui peut avoir lieu dans une région à 2 ou à 4 solutions, le manipulateur doit atteindre une frontière singulière sur laquelle coïncident deux solutions au MGI.
- Un changement de posture non singulier caractéristique des manipulateurs cuspidaux et qui ne peut avoir lieu que dans une région à 4 solutions au MGI, ce changement a lieu en transitant par une région à deux solutions au MGI et en contournant un point cusp.

La Figure 25 illustre ces deux types de changement de posture singulier (Figure 25(a)) et non singulier (Figure 25(b)).

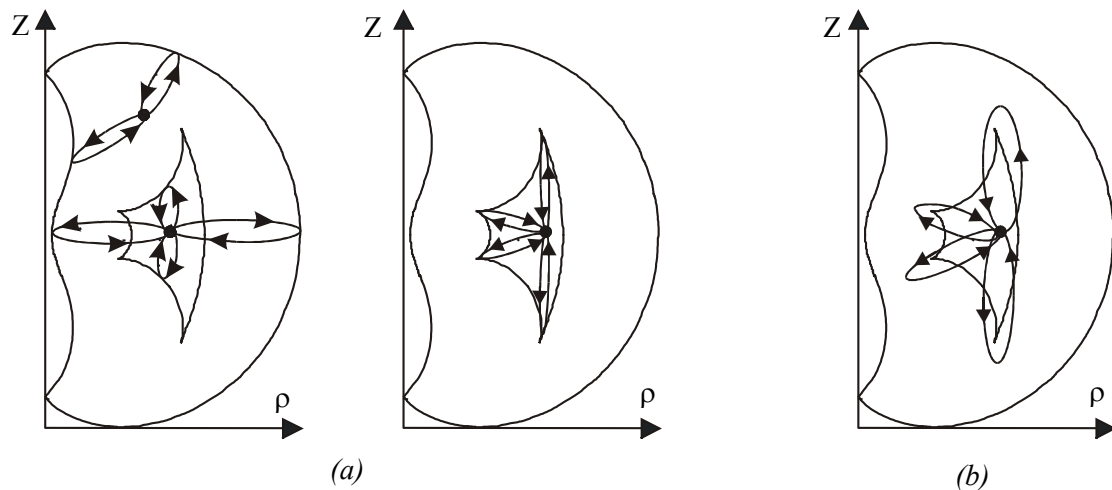


Figure 25 : Trajectoires de changement de posture singulier (a)  
et non singulier (b)

## 1.5. MANIPULATEURS QUADRATIQUES ET QUARTIQUES

Un des paramètres influant sur le comportement d'un manipulateur est son MGI. En effet, l'obtention du MGI permet de définir le degré d'accessibilité (nombre de postures). Obtenir le MGI peut se résumer à la résolution d'un polynôme en l'une des variables articulaires. Pour les manipulateurs à 3 ddl, ce polynôme peut être de degré 2 ou de degré 4.

### 1.5.1. MANIPULATEURS QUADRATIQUES

On appelle manipulateur quadratique tout manipulateur dont le polynôme du MGI est un polynôme de degré 2. Dans le cas général, et pour la plupart des manipulateurs usuels, un manipulateur dont les deux premiers axes sont concourants ou parallèles est quadratique.

[Smith 90] propose une méthode basée sur les coniques permettant de trouver toutes les conditions sur les paramètres de DHm conduisant à des manipulateurs quadratiques. Un manipulateur à 3 ddl et vérifiant l'une des 3 conditions suivantes est quadratique :

- Ses deux axes articulaires (1 et 2) ou (2 et 3) sont concourants ou parallèles. Ceci confirme le résultat connu dans la littérature.

➤  $r_2 = 0$ ,  $ca_2 = 0$  et  $ca_3 = 0$ .

➤  $r_2 = 0$ ,  $ca_2 = 0$  et  $r_3 = 0$ .

La Figure 26 illustre l'espace articulaire et l'espace de travail d'un manipulateur quadratique dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 1$ ;  $d_3 = 0,6$ ,  $d_4 = 0,3$ ,  $r_2 = 0$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ .

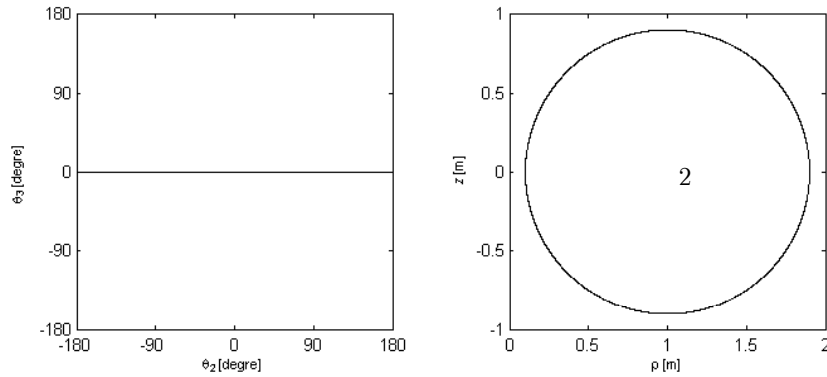


Figure 26 : Manipulateur quadratique

### 1.5.2. MANIPULATEURS QUARTIQUES

Ce sont des manipulateurs dont le polynôme du MGI peut s'écrire sous forme d'un polynôme de degré 4. Ces manipulateurs sont les plus nombreux dans le cas général.

La classe des manipulateurs quartiques peut contenir des manipulateurs cuspidaux et d'autres non cuspidaux. Par exemple, le manipulateur représenté dans la Figure 27 (dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 2,4$ ,  $d_3 = 0,5$ ,  $d_4 = 2$ ,  $r_2 = 1,2$ ,  $r_3 = 0,5$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ ) est un manipulateur quartique non cuspidal tandis que le manipulateur représenté par la Figure 28 (dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ ) est quartique cuspidal.



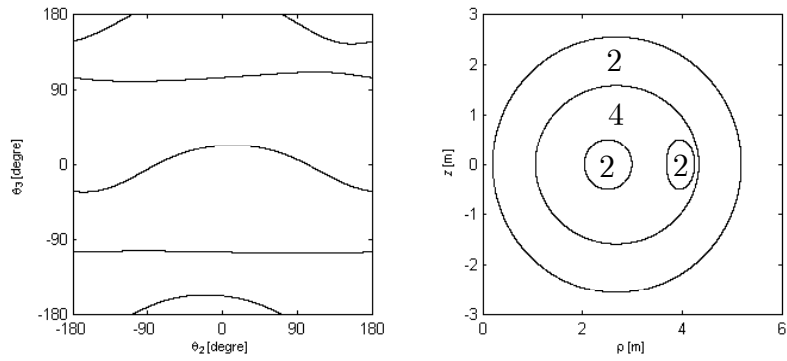


Figure 27 : Manipulateur quartique non cuspidal

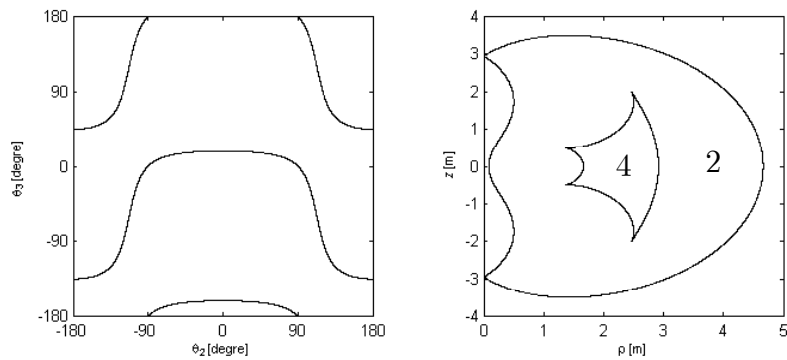


Figure 28 : Manipulateur quartique cuspidal

## 1.6. MANIPULATEURS BINAIRES ET QUATERNAIRES

La résolution du polynôme du MGI permet de déterminer toutes les variables articulaires permettant à l'effecteur d'atteindre un point donné. Selon que ce polynôme a 2 ou 4 solutions réelles (dans la suite de ce mémoire, le mot solution représentera solution réelle), on définit deux classes de manipulateurs à savoir les binaires et les quaternaires.

À l'exception des manipulateurs PPP dont le polynôme du MGI possède une seule solution, tous les autres manipulateurs à 3 ddl, ne peuvent être que binaires ou quaternaires.

### 1.6.1. MANIPULATEURS BINAIRES

Ce sont les manipulateurs qui ont 2 solutions au plus au MGI. Pour les manipulateurs à 3 ddl et dans le cas général, aucune condition générale dépendant des paramètres de DHm n'a été établie pour qu'un manipulateur soit binaire.

Toutefois, et pour quelques morphologies de manipulateurs particulières, des conditions ont été démontrées.

Il a été montré que les manipulateurs à 3 ddl ayant deux articulations prismatiques sont tous binaires (voir [Bennis 91] par exemple).

En plus, les manipulateurs de morphologie RRR, PRR, RPR et RRP qui sont quartiques et dont les polynômes de leurs MGI admettent toujours deux solutions complexes sont, par suite, binaires. On peut citer comme exemple de tels manipulateurs, ceux satisfaisant la condition de Bennett :  $r_2 = 0$  et  $d_3 s \alpha_2^2 = d_2 s \alpha_3^2$ .

Finalement, [El Omri 96] a démontré que les manipulateurs orthogonaux sans offset ( $r_2 = r_3 = 0$ ) et tel que  $d_2 \neq d_3$  sont binaires si et seulement s'ils vérifient la relation suivante :  $d_2 > d_3 > d_4$ .

La Figure 26 représente un manipulateur quadratique qui est aussi binaire.

### 1.6.2. MANIPULATEURS QUATERNAIRES

Contrairement aux manipulateurs binaires, les manipulateurs quaternaires peuvent avoir jusqu'à 4 solutions au MGI et représentent la majorité des manipulateurs. Quelques résultats pour qu'un manipulateur soit quaternaire ont été établis. [Burdick 95] a montré que les manipulateurs 3R tel que :  $d_2 = 0$  ou  $d_3 = 0$  (manipulateurs dont deux axes se coupent) sont des manipulateurs quaternaires. On a montré que tous les manipulateurs sans offset à l'axe 3 ( $r_3 \neq 0$ ) et tel que le dernier bras est supérieur à son précédent ( $d_3 < d_4$ ) sont quaternaires [Baili 03a]. Toutefois, cette condition est suffisante mais non nécessaire puisqu'il existe des manipulateurs tel que :  $r_3 = 0$  et  $d_3 > d_4$  qui sont quaternaires (le manipulateur représenté par la Figure 28 par exemple). Une condition nécessaire et suffisante dépendant des paramètres de DHm pour qu'un manipulateur 3R orthogonal et tel que  $r_3 = 0$  soit quaternaire est établie dans [Wenger 04b], on détaillera la démonstration dans le prochain chapitre.

Dans certains cas, des manipulateurs quadratiques peuvent être quaternaires. En effet, le polynôme du MGI est de degré 2, chacune des deux solutions en  $\theta_3$  donne lieu à deux solutions en  $\theta_2$ . Par suite on aura 4 solutions au MGI qui sont représentées par les 4 combinaisons possibles des couples  $(\theta_2, \theta_3)$ .

### 1.7. MANIPULATEURS GÉNÉRIQUES ET NON GÉNÉRIQUES

#### Définition d'un manipulateur générique

Un manipulateur est dit générique si ses singularités sont génériques (elle ne se coupent pas dans l'espace articulaire). La généricité est par suite directement liée aux singularités du manipulateur (cf. les singularités génériques du paragraphe §1.3.5).

La Figure 29 représente un manipulateur dont les branches de singularités dans l'espace articulaire se coupent, il est par suite non générique. Les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 1,1$ ,  $d_3 = 1,1$ ,  $d_4 = 1,4$ ,  $r_2 = 1,3$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ .

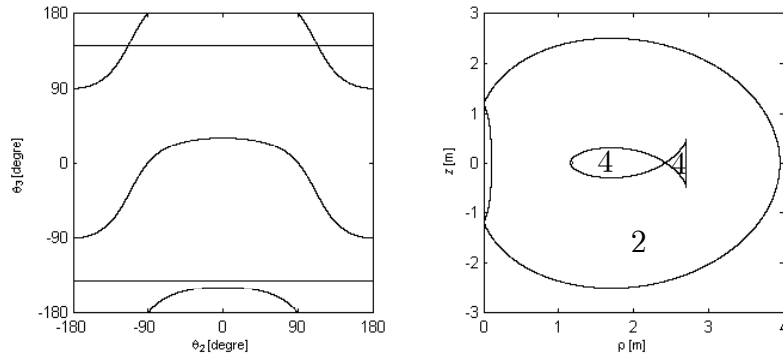


Figure 29 : Manipulateur non générique

Les manipulateurs génériques sont les plus répandus. En effet, si on donne un jeu arbitraire des paramètres de DHm, on a toutes les chances d'obtenir un manipulateur générique. Les paramètres de DHm des manipulateurs non génériques sont situés sur les hypersurfaces divisant l'espace des manipulateurs en différentes régions contenant des manipulateurs génériques.

Les propriétés topologiques des singularités génériques restent stables vis à vis des variations des paramètres géométriques (des défauts de fabrication par exemple). En revanche, pour les manipulateurs non génériques, une petite perturbation modifie

énormément les propriétés des singularités et par suite le comportement du manipulateur [Pai 92], [Burdick 95].

Les simplifications géométriques dans la morphologie d'un manipulateur conduisent généralement à des manipulateurs non génériques. Ce qui explique que la plupart des manipulateurs industriels sont non génériques. Les tolérances sur la fabrication de ces manipulateurs entraînent des erreurs sur les paramètres géométriques et peuvent déstabiliser par la suite leurs comportements. Un tel manipulateur n'a donc en réalité qu'un comportement d'un manipulateur générique dont les paramètres de DHm sont voisins et non le comportement prévu pour lequel il a été fabriqué. Une étude de la sensibilité des propriétés des manipulateurs 3R aux incertitudes des paramètres géométriques a ainsi été menée [Caro 04]. La Figure 30(a) représente un manipulateur non générique et non cuspidal à 4 aspects dont les deux premiers axes se coupent (les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 0$ ,  $d_3 = 2$ ,  $d_4 = 1,5$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ ). En introduisant un petit décalage entre ces deux premiers axes ( $d_2 = 0,1$ ), le manipulateur devient générique, cuspidal et a seulement 2 aspects (Figure 30(b)).

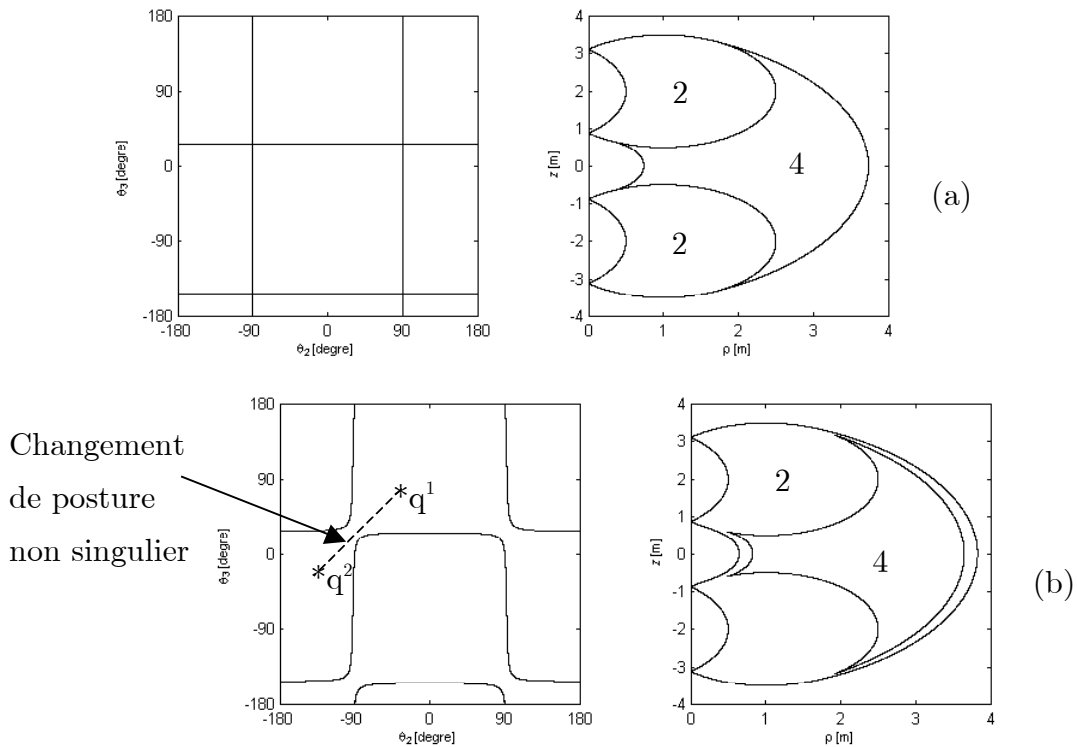


Figure 30 : Instabilité d'un manipulateur non générique

## 1.8. CLASSES D'HOMOTOPIE DES MANIPULATEURS GENERIQUES

### 1.8.1. DÉFINITION

Les classes d'homotopie ont été définies dans [Burdick 95] pour les manipulateurs génériques quaternaires. Deux manipulateurs génériques quaternaires sont homotopes si le passage des singularités de l'un vers celles de l'autre s'effectue par déformation régulière et continue. [Burdick 95] montre que deux manipulateurs homotopes ont le même nombre maximal de solutions inverses par aspect. Par suite, si le manipulateur est cuspidal (respectivement non cuspidal), tous les manipulateurs appartenant à sa classe d'homotopie sont cuspidaux (respectivement non cuspidaux).

Une singularité forme une boucle sur le tore  $(\theta_2, \theta_3)$  représentant l'espace articulaire d'un manipulateur. Il existe autant de classes d'homotopie que de manières d'encercler le tore selon ses deux génératrices. La Figure 31 montre 3 classes d'homotopie différentes. Les lignes L1 et L2 représentées dans le carré  $(-\pi \leq \theta_2 \leq \pi, -\pi \leq \theta_3 \leq \pi)$  correspondent respectivement aux cercles selon la génératrice  $\theta_2$  et la

génératrice  $\theta_3$  du tore. Par contre L3 n'encercle aucune des deux génératrices du tore donc elle est homotope à un point.

La classe d'homotopie d'une singularité d'un manipulateur est définie par le couple  $(n_2, n_3)$  où :

- $n_2$  est le nombre de fois que la singularité encercle la génératrice  $\theta_2$ .
- $n_3$  est le nombre de fois que la singularité encercle la génératrice  $\theta_3$ .

Par exemple, la classe d'homotopie de L1 (respectivement L2, L3) est  $(1,0)$ , (respectivement  $(0,1)$ ,  $(0,0)$ ).

Par suite, la classe d'homotopie d'un manipulateur est définie par les classes d'homotopie de ses singularités. Par exemple, un manipulateur ayant deux surfaces de singularité de type  $(1,0)$  sera dit  $2(1,0)$ . Pour identifier la classe d'homotopie d'un manipulateur, l'idée est de choisir une singularité, de compter le nombre de sauts entre les deux cotés opposés du carré représenté. A chaque saut,  $n_2$  et  $n_3$  croissent ou décroissent selon que le saut est réalisé de  $-\pi$  à  $\pi$  ou de  $\pi$  à  $-\pi$  ([Wenger 98]).

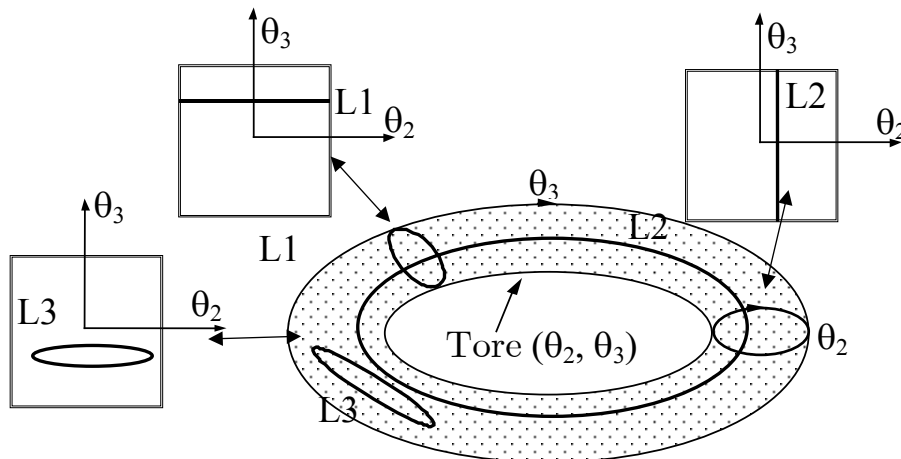


Figure 31 : Quelques boucles de classes d'homotopie sur le tore

### 1.8.2. APPLICATION : CLASSIFICATION DES MANIPULATEURS 3R QUATERNAIRES GÉNÉRIQUES

Dans [Wenger 98], une classification générale et complète de tous les manipulateurs 3R quaternaires génériques a été établie en utilisant les classes

d'homotopie. En effet [Wenger 98] a démontré qu'il existe seulement 8 classes d'homotopie possibles dans cette famille de manipulateurs. Ces 8 classes sont :  $1(0,0)$ ,  $2(0,0)$ ,  $1(0,0)+2(1,0)$ ,  $2(1,0)$ ,  $4(1,0)$ ,  $2(0,1)$ ,  $2(1,1)$  et  $2(2,1)$ . Seuls les manipulateurs appartenant à la classe d'homotopie  $4(1,0)$  sont non cuspidaux. De plus, ils sont peu nombreux. En revanche, les manipulateurs appartenant à la classe d'homotopie  $2(1,0)$  sont cuspidaux et les plus nombreux.

Le Tableau 2 illustre les 8 classes d'homotopie possibles avec le nombre d'aspects d'un manipulateur représentant chaque classe ainsi que sa propriété de cuspidalité.

Classe	Nombre d'aspects	Cuspidal
$1(0,0)$	2	Oui
$2(0,0)$	3	Oui
$1(0,0)+2(1,0)$	3	Oui
$2(1,0)$	2	Oui
$4(1,0)$	4	Non
$2(0,1)$	2	Oui
$2(1,1)$	2	Oui
$2(2,1)$	2	Oui

Tableau 2 : Les 8 classes d'homotopie possibles des manipulateurs 3R quaternaires génériques

Le Tableau 2 montre qu'un manipulateur 3R quaternaire générique ne peut avoir que 2, 3 ou 4 aspects. En outre, il prouve qu'un tel manipulateur est non cuspidal si et seulement s'il a 4 aspects. En effet chaque solution au MGI parmi les 4 possibles se trouve dans un aspect, par suite, pour changer de posture on doit absolument franchir une singularité donc le manipulateur est non cuspidal.

---

### 1.9. LIENS ENTRE LES DIFFÉRENTES CLASSES

[Wenger 96] a classifié les manipulateurs à 3 ddl selon plusieurs critères ce qui a permis de définir plusieurs classes de manipulateurs. En effet, un manipulateur à 3 ddl peut être :

- Quadratique ou quartique.
- Binaire ou quaternaire.
- Générique ou non générique.
- Cuspidal ou non cuspidal.

Il est difficile de donner une liste exhaustive de manipulateurs appartenant à chaque classe définie ci dessus. Toutefois, il existe des relations entre ces différentes classes qu'on va détailler dans ce paragraphe.

On commence tout d'abord par définir l'ensemble  $K$  des paramètres géométriques d'un manipulateur à 3 ddl. Un tel manipulateur est caractérisé par ses 7 paramètres de DHm :  $d_2, d_3, d_4, r_2, r_3, \alpha_2$  et  $\alpha_3$ .  $K$  est donc un espace de dimension 7 (qu'on va ramener à 6 en normalisant par  $d_2$  dans la suite de ce mémoire) comportant les 8 sous espaces des manipulateurs. Ces sous espaces sont représentées par les 4 couples (quadratique, quartique), (binaire, quaternaire), (générique, non générique) et (cuspidal, non cuspidal). Chaque couple couvre tout l'espace  $K$ . Les relations entre les différentes classes sont représentées graphiquement par les chevauchements de plusieurs sous espaces dans  $K$  (Figure 32).

Le premier couple couvrant l'espace  $K$  est formé par les deux sous espaces de manipulateurs quadratiques et quartiques. L'ensemble des manipulateurs quadratiques est de mesure nulle puisque de tels manipulateurs doivent vérifier quelques conditions particulières (axes parallèles ou concourants...).

Le deuxième couple, dont les deux sous espaces formant  $K$  sont représentés dans la Figure 32, comporte les manipulateurs binaires et quaternaires. Quelques



manipulateurs quadratiques et quartiques sont binaires. En effet les manipulateurs satisfaisant la condition de Bennett sont quadratiques et binaires alors que le manipulateur dont les paramètres de DHm sont :  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 0,6$ ,  $d_4 = 0,3$ ,  $r_2 = 0,2$ ,  $r_3 = 0$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$  est quartique et binaire. Dans le cas général, la plupart des manipulateurs sont quaternaires.

Les manipulateurs génériques et non génériques forment le troisième couple étudié. Les manipulateurs non génériques sont détectés par l'intersection de leurs singularités dans l'espace articulaire. Ce point d'intersection est l'image inverse d'un point de l'espace de travail possédant 4 solutions identiques. De ce résultat on peut affirmer que tous les manipulateurs binaires sont génériques étant donné qu'ils ont 2 solutions au MGI au maximum. Les manipulateurs non génériques sont de mesure nulle et ils divisent l'espace K en plusieurs classes de manipulateurs génériques homotopes.

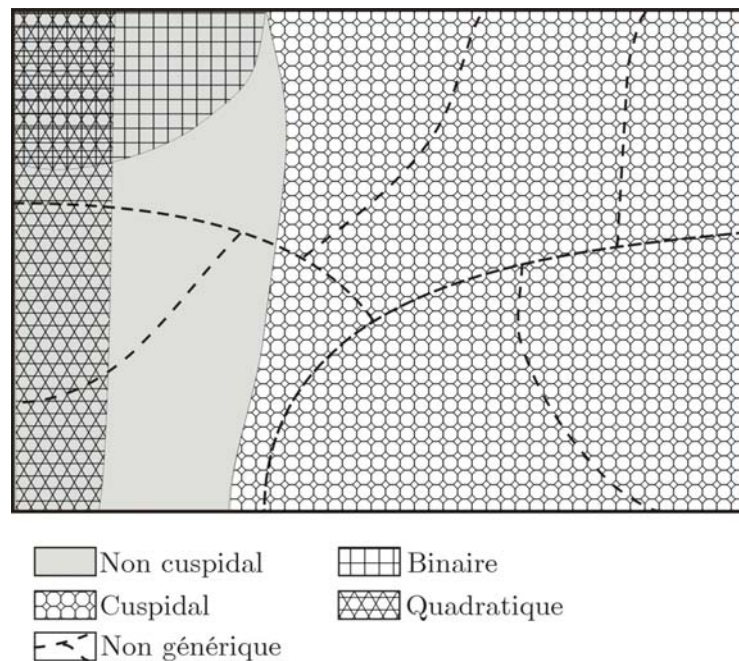


Figure 32 : Schéma des liens entre les différentes classes de manipulateurs à 3 ddl dans l'espace K

Le dernier couple, dont les deux sous espaces forment K, est constitué des manipulateurs cuspidaux et non cuspidaux. Tous les manipulateurs quadratiques ainsi que tous les manipulateurs binaires sont non cuspidaux puisqu'ils ne peuvent

pas avoir plus de 2 solutions au MGI donc pas de point cusp. Pour les autres manipulateurs quaternaires et génériques, ils sont divisés en plusieurs classes d'homotopie par des manipulateurs quaternaires et non génériques. Dans une classe d'homotopie, il suffit qu'un seul manipulateur soit cuspidal (ou non cuspidal) pour dire que tous les manipulateurs de la classe en question sont cuspidaux (resp. non cuspidaux).

Le Tableau 3 récapitule toutes les classes des manipulateurs à 3 ddl rencontrées dans la littérature ainsi que leurs caractéristiques et les conséquences sur leurs comportements.

	<b>Caractéristiques</b>	<b>Conséquences</b>
Quadratique	Polynôme du MGI de degré 2, $\det(\mathbf{J})$ se factorise, ensemble de mesure nulle dans l'espace des paramètres	Non cuspidal, non générique
Quartique	Polynôme du MGI de degré 4	*****
Binaire	2 solutions maximum au MGI	Non cuspidal et générique
Quatenaire	4 solutions maximum au MGI	*****
Générique	Stable, pas d'intersections des singularités dans l'espace articulaire	*****
Non générique	Instable, intersections des singularités dans l'espace articulaire, de mesure nulle	*****
Cuspidal	Peut changer de posture sans franchir une singularité, a un point au moins cusp dans l'espace de travail	Quatenaire et quartique
Non cuspidal	Doit franchir une singularité pour changer de posture, pas de point cusp dans l'espace de travail	*****

Tableau 3 : Tableau récapitulatif

### 1.10. CONCLUSION

Dans ce chapitre, les notions de base de la robotique qui seront utilisées dans ce mémoire ont été rappelées. Quelques méthodes permettant d'analyser les propriétés géométriques et cinématiques des manipulateurs ont été citées. Les liens étroits qui existent entre les singularités et les propriétés des manipulateurs ont été évoqués. Parmi ces propriétés, on cite : cuspidal / non cuspidal, générique / non générique, quadratique / quartique ou binaire / quaternaire.

Ces propriétés constituent des critères pouvant être attribués à un manipulateur donné. En effet, pour un jeu de paramètres de DHm donné, il est possible de décrire toutes les propriétés qu'un tel manipulateur peut avoir. Toutefois, et à notre connaissance, il n'y a pas de résultats permettant de retrouver les paramètres d'un manipulateur satisfaisant un certain nombre de propriétés.

Dans les deux prochains chapitres de ce mémoire, on va diviser l'espace des paramètres de deux familles de manipulateurs 3R à axes orthogonaux en plusieurs sous espaces que l'on va nommer topologies d'espace de travail. Dans chaque topologie d'espace de travail, tous les manipulateurs partagent les mêmes propriétés.



---

## CHAPITRE II

---

### ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE MANIPULATEURS ORTHOGONAUX : CAS $r_3 = 0$



## 2. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE MANIPULATEURS ORTHOGONAUX : CAS $r_3 = 0$

### 2.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente une classification d'une famille de manipulateurs à axes orthogonaux. Cette classification est basée sur la topologie des espaces de travail. Une topologie d'espace de travail est définie à partir de points singuliers particuliers qui apparaissent sur les lieux de singularité. Ces points particuliers sont les cusps et les nœuds<sup>4</sup>. Nous verrons par la suite l'importance de ces points singuliers pour définir des propriétés d'un manipulateur tel que le caractère cuspidal et le degré d'accessibilité par région dans son espace de travail.

Dans la première partie de ce chapitre, on présente tout d'abord la famille de manipulateurs étudiée. En écrivant les conditions d'existence de points cusps et en utilisant successivement les bases de Groebner et la Décomposition Cylindrique Algébrique (DCA), l'espace des paramètres de DHm est divisé en 105 cellules [Corvez 02]. Dans chaque cellule, tous les manipulateurs ont le même nombre de points cusps. On démontre que dans ces 105 cellules, seulement 5 types différents de manipulateurs existent. Les surfaces séparant les domaines représentatifs des 5 types sont déterminées en analysant les singularités dans l'espace articulaire lors des différentes transitions. Notons que l'on retrouve les équations de ces surfaces de séparation dans [Corvez 02]. Pour la première fois, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un manipulateur de la famille étudiée soit cuspidal est présentée sous la forme d'une inéquation dépendant des paramètres de DHm.

La deuxième partie de ce chapitre est consacrée à l'étude des topologies des espaces de travail en intégrant les nœuds. Ainsi, chaque domaine contenant des

---

<sup>4</sup> Un nœud est défini dans une section  $(\rho, z)$  de l'espace de travail comme un point d'intersection de courbes singulières, c'est un point où coïncide deux solutions doubles au MGI.



manipulateurs à même nombre de points cusps est subdivisé en plusieurs topologies d'espace de travail. Les équations des nouvelles surfaces de séparation sont déterminées en utilisant une méthode d'analyse géométrique des transitions. On montre qu'il existe exactement 9 topologies d'espace de travail différentes pour les manipulateurs appartenant à la famille étudiée. Pour chaque topologie d'espace de travail, on détermine pour le manipulateur représentant, le nombre de points cusps, de nœuds et d'aspects. En outre, on précisera le degré d'accessibilité par région dans l'espace de travail et si le manipulateur est binaire ou quaternaire ainsi que sa classe d'homotopie. Finalement, une classification de cas particuliers de manipulateurs non cuspidaux (ayant certains paramètres de DHm nuls) est présentée en fonction du nombre de nœuds, de l'existence de cavité toroïdale ou pas et de la t-parcourabilité.

## 2.2. PRÉSENTATION DE LA FAMILLE DE MANIPULATEURS ÉTUDIÉE

La famille étudiée dans ce chapitre est composée de manipulateurs à 3 articulations rotoïdes, à axes orthogonaux ( $\alpha_2 = -90^\circ$ ,  $\alpha_3 = 90^\circ$ ) et sans décalage sur le dernier axe ( $r_3 = 0$ ). L'étude d'un tel type de manipulateur se fera en fonction des paramètres de DHm restants qui sont :  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  et  $r_2$ . Les trois variables articulaires considérées sont :  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . On ne considèrera pas de butées articulaires ; les trois variables articulaires sont donc illimitées. La Figure 33(a) représente l'architecture cinématique d'un manipulateur de la famille étudiée dans la configuration zéro. La Figure 33(b) représente un tel manipulateur en modèle CAO (qui n'est pas dans la configuration zéro). L'effecteur est représenté par le point P qui est repéré par ses 3 coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans le repère de référence  $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  attaché à la base du manipulateur.

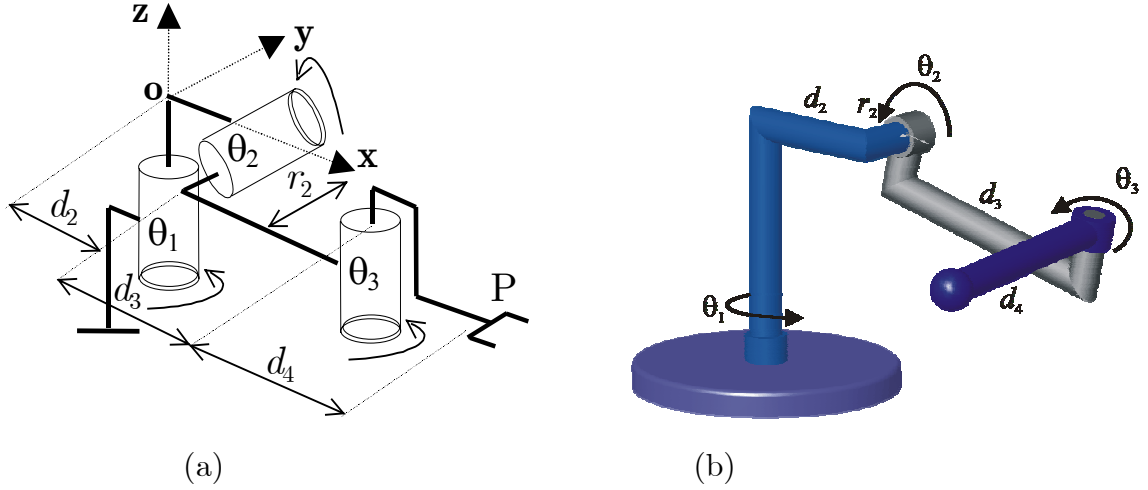


Figure 33 : Manipulateur orthogonal étudié

On commence tout d'abord par rappeler le MGD donné par les équations (18) :

$$\begin{aligned}
 x &= [d_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] c_1 - (r_2 + d_4 s_3) s_1 \\
 y &= [d_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2] s_1 + (r_2 + d_4 s_3) c_1 \\
 z &= -(d_3 + d_4 c_3) s_2
 \end{aligned} \tag{18}$$

L'étude de la famille de manipulateurs se base sur la topologie des surfaces de singularités dans l'espace de travail. Ces singularités sont définies comme les lieux où le déterminant de la matrice jacobienne s'annule.

On rappelle donc la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  préférentielle d'un manipulateur appartenant à cette famille :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -s_3 c_2 d_4 - c_2 r_2 & 0 & -s_3 d_4 \\ s_3 s_2 d_4 + s_2 r_2 & d_3 + c_3 d_4 & 0 \\ c_2 d_3 + c_2 c_3 d_4 + d_2 & 0 & c_3 d_4 \end{pmatrix} \tag{19}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne s'écrit :

$$\det(\mathbf{J}) = d_4 (d_3 + d_4 c_3) [d_2 s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2] \tag{20}$$

Un manipulateur appartenant à la famille étudiée peut avoir une cavité toroïdale ou pas dans son espace de travail. En plus, il peut être cuspidal/non cuspidal, générique/non générique et binaire/quaternaire.

La topologie d'une surface de singularité dans l'espace de travail peut être caractérisée par le nombre de points cusps et le nombre de nœuds. Au sein de la famille étudiée et dans une section de l'espace de travail, on va montrer qu'un manipulateur peut avoir 0, 2 ou 4 points cusps et 0, 1, 2, 3 ou 4 nœuds. Ces points singuliers particuliers sont un moyen efficace pour caractériser la topologie de l'espace de travail. En effet, ils servent à définir des propriétés importantes comme le degré d'accessibilité (régions à 2 ou 4 solutions au MGI), la présence ou non de cavité toroïdale, le caractère cuspidal (le fait que les solutions inverses ne soient pas séparées par une singularité dans l'espace articulaire). Avant de commencer la classification, on donne quelques exemples qui illustrent quelques topologies de l'espace de travail. Ces topologies sont directement liées à la forme des singularités ainsi qu'à la présence ou non d'un ou de plusieurs points singuliers particuliers ; à savoir les cusps et les nœuds. Dans chaque région de l'espace de travail, on indiquera le degré d'accessibilité.

La Figure 34 représente l'espace articulaire et une section de l'espace de travail dans le plan  $(\rho, z)$  d'un manipulateur binaire générique ayant 2 aspects. Dans cette section de son espace de travail, les singularités ne forment ni cusp ni nœud. Néanmoins, elles délimitent une région centrale intérieure à 0 solution au MGI (cavité toroïdale) et une région extérieure à 2 solutions au MGI.

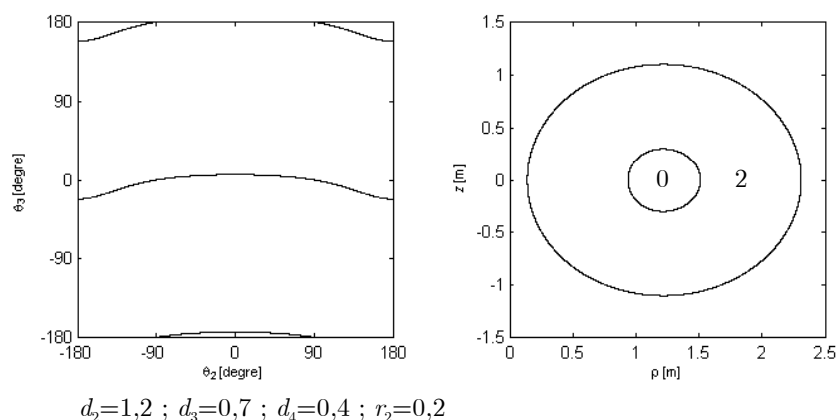


Figure 34 : Manipulateur avec 0 cusp et 0 nœud

La Figure 35 représente l'espace articulaire et une section de l'espace de travail d'un autre manipulateur de la même famille. Toutefois, il est quaternaire et générique. Ce manipulateur a 2 aspects et appartient à la classe d'homotopie  $2(1, 0)$ . Dans cette section de son espace de travail, les singularités ne forment aucun nœud mais 4 points cusps. Le degré d'accessibilité est de 4 pour la région intérieure et de 2 pour la région extérieure.

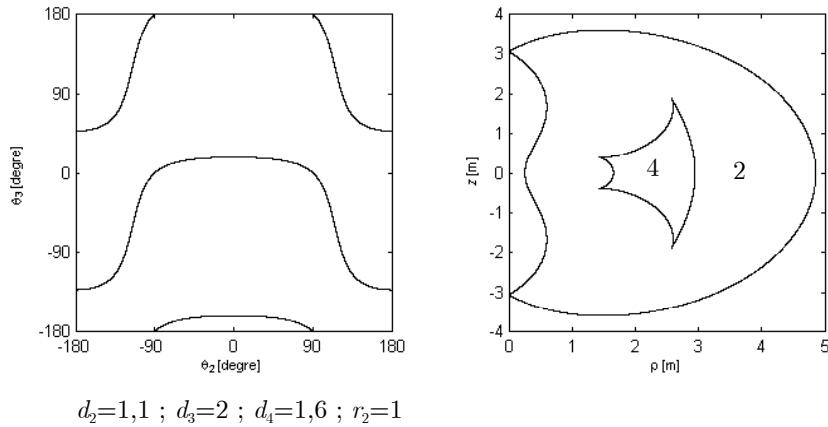


Figure 35 : Manipulateur avec 4 cusps et 0 nœud

L'espace articulaire et la section de l'espace de travail représentés par la Figure 36 appartiennent à un manipulateur quaternaire et non générique (les surfaces de singularités dans l'espace articulaire se coupent). Dans son espace articulaire, ce manipulateur a 6 aspects. En observant l'espace de travail, on remarque l'existence de 4 cusps, 4 nœuds, 2 régions à 2 solutions au MGI et 3 régions à 4 solutions.

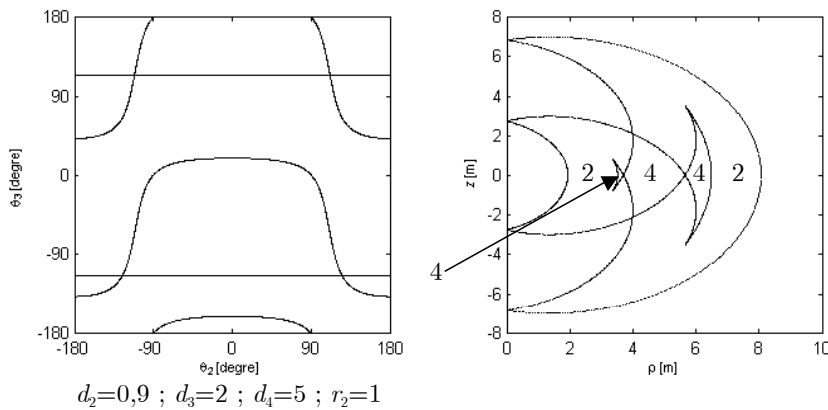


Figure 36 : Manipulateur avec 4 cusps et 4 nœuds

Ces trois exemples de manipulateurs donnent une idée de la diversité des topologies de l'espace de travail que l'on peut rencontrer dans la famille étudiée. Autrement dit, il est important d'étudier les singularités dans l'espace de travail et plus précisément l'apparition ou la disparition de points singuliers particuliers à savoir les cusps et les nœuds.

### 2.3. POSITION DU PROBLÈME

Au début, le but de ce travail était de classifier la famille de manipulateurs étudiée selon les critères générique / non générique, binaire / quaternaire et cuspidal / non cuspidal ainsi que le nombre de points cusps dans le cas où le manipulateur serait cuspidal [Baili 03a]. Ensuite et pour affiner l'étude, on a intégré le nombre de nœuds dans l'espace de travail. Le travail effectué dans ce chapitre permet de partager l'espace des paramètres de DHm en plusieurs topologies d'espace de travail tout en déterminant les équations mathématiques des différentes surfaces qui les limitent. Cette classification exhaustive est un moyen intéressant pour aider le concepteur à choisir les paramètres de DHm d'un manipulateur qui doit satisfaire un cahier des charges donné. Autrement dit, si le concepteur connaît d'avance la topologie de l'espace de travail du manipulateur recherché, il va pouvoir la trouver dans la classification proposée.

On commence tout d'abord par présenter le problème de recherche des conditions sur les paramètres de DHm pour qu'un manipulateur soit cuspidal. Pour qu'un manipulateur appartenant à la famille étudiée soit cuspidal, il faut que le polynôme  $P(t)$  de son MGI donné par l'équation (8) admette une ou plusieurs racines triples. Dans ce cas on a :

$$\begin{cases} A_1 = r_2 \\ B_1 = L_1 - K_1 + 2d_3d_4 \\ F_1 = L_1 - K_1 - 2d_3d_4 \\ D_1 = 2r_2d_4 \\ H_1 = d_4 \end{cases} \quad \text{où :} \quad \begin{cases} K_1 = d_2^2 + R \\ L_1 = r_2^2 + d_3^2 + d_4^2 \\ R = \rho^2 + z^2 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 = d_2^2(Z - R) + d_2^2 r_2^2 + \frac{(L_1 - K_1)^2}{4} \\ m_1 = 2d_2^2 d_4 r_2 + (L_1 - K_1) d_4 r_2 \\ m_2 = d_3 d_4 (L_1 - K_1) \\ m_3 = 2d_3 r_2 d_4^2 \\ m_4 = d_4^2 (r_2^2 + d_2^2) \\ m_5 = d_3^2 d_4^2 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} a = 4[m_0 - m_2 + m_5] \\ b = 4[2m_1 - 2m_3] \\ c = 4[2m_0 + 4m_4 - 2m_5] \\ d = 4[2m_1 + 2m_3] \\ e = 4[m_0 + m_2 + m_5] \end{array} \right. \quad (21)$$

$P(t)$  admet une ou plusieurs racines triples revient à dire que le système (22) suivant admet des solutions.

$$S(t, a, b, c, d, e) : \left\{ \begin{array}{l} P(t, Z, R, d_2, d_3, d_4, r_2) = 0 \\ \frac{\partial P(t, Z, R, d_2, d_3, d_4, r_2)}{\partial t} = 0 \\ \frac{\partial^2 P(t, Z, R, d_2, d_3, d_4, r_2)}{\partial t^2} = 0 \end{array} \right. \quad (22)$$

Dans le système polynomial (22), les variables du problème sont  $t$ ,  $R$  et  $Z$  tandis que les paramètres strictement positifs du problème sont  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  et  $r_2$  (l'annulation d'un de ces paramètres conduit à un manipulateur non cuspidal [El Omri 96]). Afin d'écrire une condition dépendant des paramètres de DHm uniquement, on doit éliminer les variables  $t$ ,  $R$  et  $Z$  entre les équations du système (22). Cette élimination peut être effectuée en utilisant des outils algébriques développés dans [Buchberger 82]. De tels outils sont disponibles dans quelques logiciels de calcul symbolique notamment Maple (on utilise la fonction « *Resultant* »). On obtient des équations très complexes et difficilement exploitables. Afin de réduire le nombre de paramètres et sans perte de généralité, on normalise tous ces paramètres par rapport à  $d_2$ . Ceci veut dire que désormais, les paramètres à considérer sont  $d_3$ ,  $d_4$  et  $r_2$  (dans la suite de ce mémoire, on considèrera donc  $d_2 = 1$ ).

---

## 2.4. ÉNUMÉRATION DE QUELQUES MÉTHODES MATHÉMATIQUES POUR LA RÉOLUTION DES SYSTÈMES POLYNOMIAUX

Il existe plusieurs méthodes permettant la résolution des systèmes polynomiaux. Quelques-unes sont des méthodes classiques utilisées dans le domaine de la robotique et qui sont très connues [Khalil 99], [Angeles 97]. On cite :

- La méthode de Pieper [Pieper 68] qui permet de résoudre le MGI des manipulateurs à 6 ddl possédant 3 articulations rotoïdes d'axes concourants ou trois articulations prismatiques.
- La méthode de Paul [Paul 81] qui traite séparément chaque cas particulier et qui convient à la plupart des robots industriels.

Dans ce paragraphe, on va citer d'autres méthodes utilisées dans le but de résoudre des systèmes polynomiaux résultant de la détermination du MGI des manipulateurs sériels et du MGD des manipulateurs parallèles. De telles méthodes peuvent aussi servir à la résolution des systèmes polynomiaux similaires à  $S$  donné par l'équation (22) ([Nielsen 99], [Cox 98]). Les méthodes de résolutions les plus utilisées sont basées sur les méthodes de continuation ou d'élimination. La méthode de continuation est purement numérique. En revanche, la méthode d'élimination (appelée aussi méthode des résultants) est basée sur une formulation algébrique et permet l'élimination d'un grand nombre de variables en une seule étape. En une seule étape, cette méthode permet de réduire un système de polynômes non linéaires en plusieurs variables, en un polynôme en une seule variable.

Une troisième méthode permettant de résoudre un système de polynômes non linéaires est basée sur les bases de Groebner. Ces derniers présentent une technique itérative d'élimination algébrique de variables.

### 2.4.1. MÉTHODE NUMÉRIQUE : LA CONTINUATION

Dans les problèmes d'analyse cinématique, on cherche à déterminer toutes les solutions d'un système de polynômes non linéaires. Les méthodes numériques

classiques de type Newton-Raphson convergent vers une seule solution. Toutefois la méthode de continuation permet de retrouver toutes les solutions du problème.

Morgan [Morgan 87] utilise cette technique pour déterminer le nombre de solutions d'un manipulateur 6R. Le principe de cette méthode est le suivant. En partant d'un système d'équations polynomiales dont on connaît les solutions, on définit une homotopie avec un paramètre  $t$  considéré souvent comme paramètre temps. Cette homotopie transforme le système dont on connaît les solutions par continuation jusqu'à ce que l'on retrouve le système que l'on cherche à résoudre. Ainsi, le système initial et ses solutions sont « déformés » d'une manière continue à chaque étape de la continuation jusqu'à la solution recherchée. À chaque étape de la continuation, les solutions peuvent être trouvées en utilisant la méthode de Newton-Raphson standard.

Notons que le choix d'une homotopie ne provoque pas des erreurs considérables sur les solutions finales grâce à la robustesse de la méthode. En effet, une petite perturbation des coefficients du système polynomial se traduit par des petites variations des solutions.

La méthode de continuation permet de résoudre des systèmes polynomiaux complexes. En plus, elle est générique donc on n'a pas à modifier la procédure pour résoudre un nouveau système. En outre, toutes les solutions du système sont garanties. Son inconvénient majeur est la lenteur du temps de calcul. Par suite, cette méthode ne peut pas être utilisée dans la commande en temps réel ou les autres applications où la vitesse de calcul est importante.

### 2.4.2. MÉTHODES ALGÈBRIQUES

Ce sont des méthodes symboliques et rigoureuses. Elles permettent de résoudre des systèmes polynomiaux dont les coefficients peuvent être des entiers ou des rationnels. Ces méthodes présentent néanmoins des limites. En effet, elles peuvent donner des équations complexes et difficilement exploitables. Lorsque le système est



de dimension positive (on a plus d'inconnues que d'équations), leur résolution peut présenter des difficultés. Parmi ces méthodes, on peut citer la méthode d'élimination et les bases de Groebner.

#### 2.4.2.1. Les bases de Groebner

C'est une technique itérative d'élimination algébrique de variables. En utilisant les bases de Groebner et dans le but de diminuer le nombre d'inconnues, on peut utiliser l'élimination lexicographique. L'ordre de l'élimination lexicographique a été développé dans [Buchberger 82]. Cette technique produit un système triangulaire d'équations dont les solutions représentent les solutions du système initial. L'inconvénient de cette méthode est tel que l'algorithme de Buchberger peut donner un nombre important de polynômes intermédiaires complexes avant de converger vers le système triangulaire recherché. Par suite, le temps de calcul peut se révéler relativement long. En plus, la complexité du problème est imprévisible. Toutefois, cette méthode a prouvé sa réelle efficacité dans l'analyse cinématique de manipulateurs. Par exemple, elle a permis de confirmer le nombre de solutions au MGD dans le cas général de la plate forme de Gough-Stewart. Notons que la technique des bases de Groebner est implémentée dans la plupart des nouveaux logiciels de résolution de systèmes algébriques.

#### 2.4.2.2. Méthodes d'élimination

Elles sont basées sur des approches classiques de type matrice de Sylvester ou déterminant de Dixon. Ces méthodes sont souvent utilisées pour le calcul des MGI de robots puisqu'elles sont rapides en temps de calcul pour les petits systèmes. Toutefois, elles peuvent conduire à des équations complexes et divergent dans quelques cas. De plus et dans le cas général, ce sont des méthodes heuristiques donc les calculs peuvent être très lents.

On peut citer par exemple la méthode d'élimination dialytique. Cette méthode a été utilisée par de Raghavan et Roth ([**Raghavan 89-93**]) afin de donner la solution générale des MGI des manipulateurs 6R. Dans un premier temps, on calcule une variable articulaire à travers un polynôme donnant toutes les solutions possibles du MGI pour cette variable. Les autres variables sont obtenues dans un second temps d'une façon unique. Ce polynôme est appelé polynôme caractéristique. En général, pour résoudre un système d'équations non linéaires, la méthode dialytique peut se résumer en 5 étapes :

- Choisir les produits de puissance de façon à avoir un nombre minimum d'inconnues.
- Considérer l'une des inconnues comme coefficient : elle devient alors la variable du polynôme final.
- Ajouter des équations pour avoir un système homogène.
- Obtenir une équation polynomiale à une seule inconnue du système initial à partir de la condition que le système homogène soit singulier (le déterminant de la matrice de Sylvester est nul).
- Calculer les autres variables en résolvant le système linéaire.

#### 2.4.2.3. Méthode se basant sur les bases de Groebner

On se donne un système polynomial  $S = \{p_1=0, \dots, p_r=0\}$  où les  $p_i$  sont des polynômes à coefficients rationnels dépendant des paramètres  $U_1, \dots, U_d$  et des indéterminés  $X_{d+1}, \dots, X_n$ . On pose  $U=U_1, \dots, U_d$  et  $X=X_{d+1}, \dots, X_n$ . On note  $[U, X]$  pour désigner ces polynômes.

On suppose que  $S$  admet un nombre fini de solutions complexes pour presque toutes les valeurs des paramètres.

Dans [**Lazard 04**], les auteurs proposent une méthode pour partitionner l'espace des paramètres  $(U_1, \dots, U_d)$  en régions, au-dessus desquelles le nombre de zéros

complexes (et donc réels) de  $S$  est constant. Cette partition est définie dans  $\mathcal{O}^d$  par une variété algébrique (variété discriminante de  $S$  relativement à la projection sur l'espace des paramètres) et les ouverts connexes constituant son complémentaire dans  $\mathcal{O}^d$ . Parmi les propriétés les plus notables, cette partition est optimale dans ce sens qu'il n'existe pas de plus petite variété algébrique assurant la constance du nombre de zéros complexes au-dessus de chaque composante connexe de son complémentaire. Toujours dans [Lazard 04], cette notion est étendue dans le cas des ensembles dit basiques constructibles (de la forme  $S = \{p_1=0, \dots, p_r=0, q_1 \neq 0, \dots, q_s \neq 0\}$ ) et basiques semi-algébriques (de la forme  $S = \{p_1=0, \dots, p_r=0, q_1 > 0, \dots, q_s > 0\}$ ).

Le calcul explicite de ces variétés discriminantes peut se faire simplement par quelques calculs de bases de Groebner (voir [Lazard 04]). La méthode proposée dans [Lazard 04] est très générale : nul besoin de supposer que le système admet un nombre fini de solutions pour presque toutes les valeurs des paramètres.

En pratique, la variété discriminante est l'ensemble des solutions d'un système algébrique de la forme  $\{f_1=0, \dots, f_l=0\}$  où les  $f_i$  sont des polynômes à coefficients rationnels ne dépendant que des paramètres (polynômes de  $[U]$ ). Une fois celle-ci calculée, il faut en écrire le complémentaire autrement dit décrire les régions de  $\mathcal{O}^d$  où au moins l'une des égalités  $f_i=0$  n'est pas vérifiée. L'outil adapté pour cela est la DCA (voir [Collins 75]).

### 2.4.3. MÉTHODE RETENUE

Dans le cadre d'un projet Math-Stic avec l'IRMAR<sup>5</sup> et l'INRIA<sup>6</sup>, la méthode retenue pour la résolution du système  $S$  donné par l'équation (22) est l'utilisation des bases de Groebner. Pour permettre une meilleure compréhension des résultats, une DCA a été réalisée à partir des équations du système triangulaire obtenu grâce aux

---

<sup>5</sup> Institut de Recherche Mathématique de Rennes.

<sup>6</sup> Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique.

bases de Groebner. De nouveaux développements ont été réalisés afin de résoudre des problèmes de dimension positive. Ces outils sont interfacés avec Maple (sous LINUX et plus récemment sous WINDOWS). Cependant la résolution de ces problèmes n'est pas encore totalement automatisée.

## 2.5. CLASSIFICATION DE LA FAMILLE DE MANIPULATEURS

Comme on l'a expliqué au début de ce chapitre, la classification établie se base sur les deux critères permettant de définir une topologie de l'espace de travail : le nombre de points cusps et le nombre de nœuds. On commence tout d'abord par établir les différents cas possibles d'espaces de travail selon leur nombre de points cusps. On donnera les équations des différentes surfaces limitant les différents domaines. Un domaine est donc caractérisé par un ensemble de manipulateurs ayant le même nombre de points cusps. On démontrera comment retrouver chaque surface en partant d'une analyse géométrique. Dans la deuxième partie de ce paragraphe et en partant de la classification selon les points cusps, on affinera l'étude en tenant compte des nœuds. Ainsi on aura classifié la famille de manipulateurs 3R orthogonaux en 9 topologies d'espace de travail différentes.

### 2.5.1. CLASSIFICATION SELON LE NOMBRE DE POINTS CUSPS

La résolution du système polynomial  $S$  représenté par l'équation (22) consiste à partitionner le premier cadran de l'espace des paramètres ( $d_3 > 0$ ,  $d_4 > 0$ ,  $r_2 > 0$ ) en plusieurs régions où le nombre de solutions du problème est constant. Dans chaque région, on précise le nombre de solutions du problème et on donne un jeu de paramètres d'un manipulateur représentant la région en question [Corvez 02]. Il n'est pas intéressant d'étudier les manipulateurs dont les paramètres se trouvent sur les surfaces délimitant les différentes régions. En effet, compte tenu des tolérances de fabrication, on ne pourra jamais construire un manipulateur dont les paramètres géométriques sont sur une surface délimitant deux régions. Toutes les régions comportant des manipulateurs ayant les mêmes propriétés que l'on définira par la suite sont regroupées dans un domaine. On montrera à chaque passage entre deux

domaines, l'espace articulaire et une section de l'espace de travail d'un manipulateur appartenant à la surface de séparation afin d'illustrer la transition.

Sous les hypothèses  $Z > 0$  et  $R-Z > 0$ , l'élimination des variables  $(t, Z, R)$  après plusieurs changements de variables et l'utilisation des bases de Groebner conduit à un système triangulaire [Corvez 02]. La résolution du problème initial revient à la résolution du nouveau système triangulaire trouvé. L'étude et l'analyse de ce système triangulaire permettent de trouver 5 polynômes. Les régions sont retrouvées en utilisant l'algorithme de la DCA. L'entrée de cet algorithme est la liste des 5 polynômes à trois variables et en sortie, on récupère une description en régions de toutes les conditions de signes réalisables par ces polynômes. La restriction aux solutions génériques du problème (les manipulateurs dont les paramètres de DHm ne vérifient aucune équation des 5 surfaces) facilite la phase de projection des différentes régions sur un plan  $(d_3, r_2)$ . Enfin, dans chaque région, un point test est donné : il caractérise un manipulateur représentant la région. Ceci est possible grâce à une phase de remontée [Corvez 02]. La première classification s'opère selon le signe des ces 5 polynômes représentant les surfaces  $f_1, f_2, lct, Z_{01}$  et  $Z_{02}$  (on a gardé la même notation donnée dans [Corvez 02]).

$$f_1 : r_2^2 + d_3^2 - d_4^2 = 0 \quad (23)$$

$$f_2 : d_4^2 \left[ (1 + r_2^2 + d_3^2)^2 - 4d_3^2 \right] (r_2^2 + d_3^2 - d_4^2) - r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (24)$$

$$lct : r_2^2 d_4 - d_3 + d_4 = 0 \quad (25)$$

$$Z_{01} : (d_3 - 1)^2 (d_3^2 - d_4^2) + r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (26)$$

$$Z_{02} : (d_3 + 1)^2 (d_3^2 - d_4^2) + r_2^2 d_3^2 = 0 \quad (27)$$

Chaque combinaison de signe de ces 5 polynômes définit plusieurs régions. Dans chaque région, tous les manipulateurs ont le même nombre de points cusps. Ces surfaces ont permis de partitionner l'espace des paramètres en 105 régions différentes ayant 0, 2 ou 4 cusps. Dans chaque région, le nombre de point cusps ainsi qu'un

point test est donné [Corvez 02]. La DCA ne donne pas le nombre minimal de régions. Le problème qui se pose est donc de pouvoir regrouper le maximum de régions adjacentes en un domaine. Un domaine est caractérisé par un ensemble de manipulateurs ayant les mêmes propriétés suivantes : binaire ou quaternaire, nombre de points cusps et nombre d'aspects dans l'espace articulaire. Autrement dit, on doit déterminer les surfaces pertinentes parmi les surfaces définies par :  $f_1, f_2, lct, Z_{01}$  et  $Z_{02}$ .

Pour avoir une idée sur le nombre de domaines que l'on peut avoir ainsi que sur les surfaces les séparant, on effectue un balayage dans une section  $(d_3, d_4)$  pour un  $r_2$  donné. Cette section est divisée en plusieurs zones correspondant à un même nombre de cusps. Pour chaque jeu de paramètres correspondant à un manipulateur, on écrit le polynôme traduisant la condition d'existence de points cusps. On détermine ensuite numériquement le nombre de solutions de ce polynôme. Dans le cas de la famille de manipulateurs étudiée et en effectuant plusieurs coupes différentes, trois cas se présentent : des manipulateurs à 0, 2 ou 4 cusps. Ces trois cas sont répertoriés en 5 domaines différents délimités par 4 surfaces ( $C_1, C_2, C_3$  et  $C_4$ ). La Figure 37 représente 4 sections pour 4 valeurs différentes de  $r_2$ . Dans chaque section, on voit clairement l'existence de 2 zones correspondant à des manipulateurs ayant 4 cusps (domaine 2 et domaine 4), une zone correspondant à des manipulateurs ayant 2 cusps (domaine 3) et deux zones correspondant à des manipulateurs non cuspidaux (domaine 1 et domaine 5). Dans la suite du chapitre, on étudiera un manipulateur choisi dans chaque domaine. Afin de déterminer les équations des 4 surfaces, on analysera les différentes transitions entre les domaines en choisissant un manipulateur sur chaque frontière.

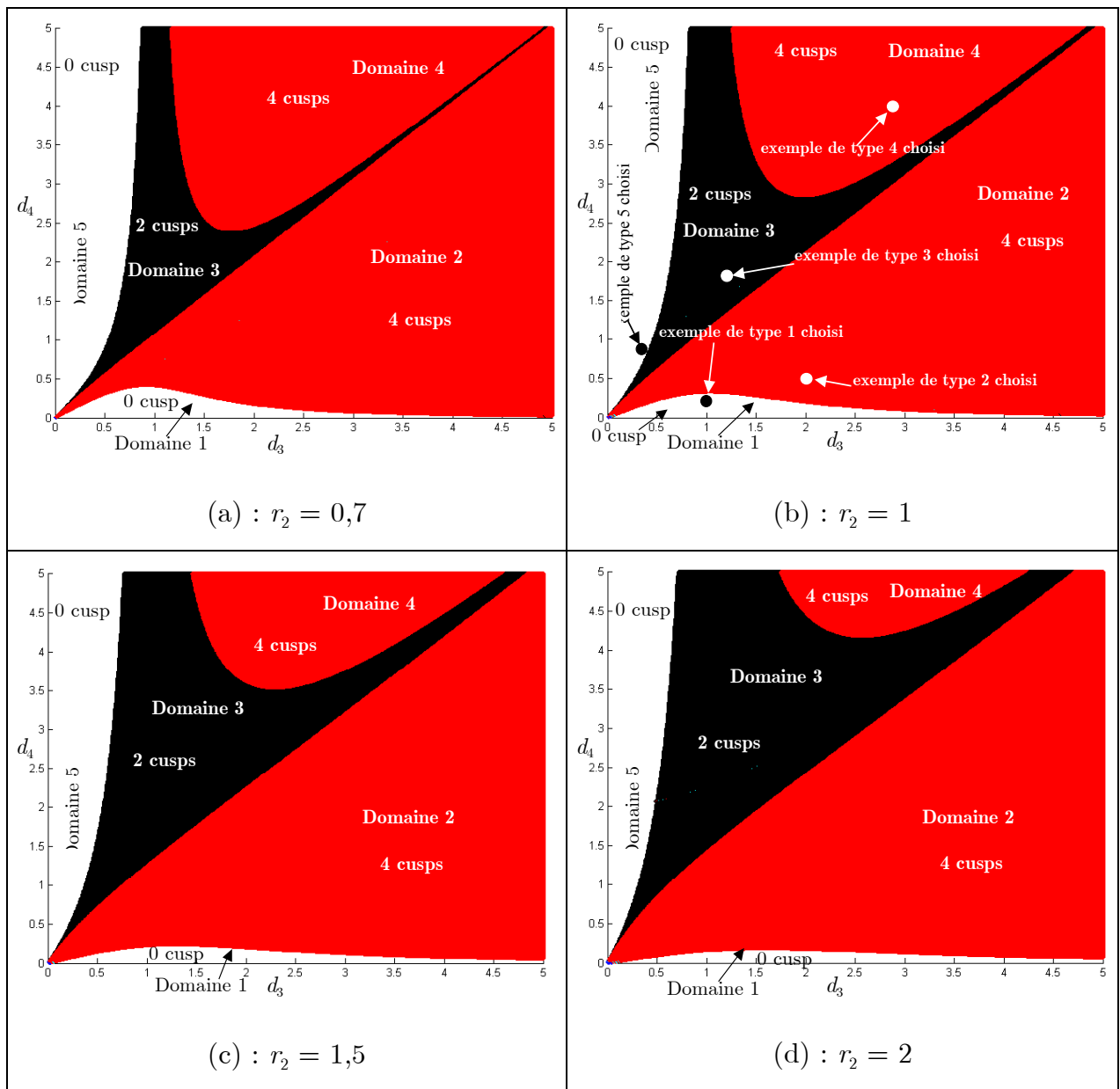


Figure 37 : Différentes coupe dans  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2$  donné

Parmi les 105 régions initialement proposées, on va montrer qu'il existe seulement 5 types différents de manipulateurs [Baili 03a]. Les critères considérés sont : le nombre de points cusps, si le manipulateur est générique / non générique et s'il est binaire / quaternaire. Afin de déterminer les équations des surfaces de séparation, on doit étudier les transitions entre les 5 types de manipulateurs. On commence d'abord par présenter ces 5 types de manipulateurs et on déterminera ensuite les équations des surfaces délimitant les 5 domaines correspondants. Pour cela et à partir des sections représentées dans la Figure 37, on va choisir un manipulateur dans chaque

domaine et sur chaque transition. On note qu'un manipulateur de type  $i$  est un représentant du domaine  $i$  où  $1 \leq i \leq 5$ .

### 2.5.1.1. Présentation des 5 types de manipulateurs correspondant aux 5 domaines

On choisit un manipulateur dans le domaine 1 que l'on représente sur la Figure 37(b). Ce manipulateur correspond à la Figure 38 et caractérise le premier type de manipulateurs. Celui-ci est un manipulateur binaire (les 4 types restants sont des manipulateurs quaternaires). Il est non cuspidal et contient une cavité toroïdale dans son espace de travail, cette cavité est délimitée par la surface de singularité intérieure. Dans son espace articulaire, ce manipulateur ne peut avoir que 2 aspects.

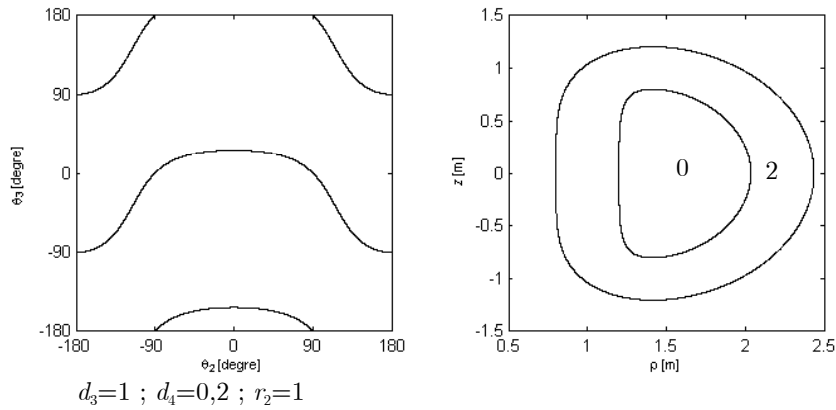


Figure 38 : Manipulateur de type 1

La Figure 39 correspond à un manipulateur quaternaire et cuspidal de type 2. Il est aussi représenté sur la Figure 37(b). Dans son espace de travail, le manipulateur a 4 cusps, une cavité toroïdale, deux zones à 4 solutions et une zone à 2 solutions au MGI. Ce manipulateur a 2 aspects dans son espace articulaire et appartient à la classe d'homotopie  $2(1, 0)$ . On note que le manipulateur correspondant à la Figure 35 est une autre catégorie des manipulateurs du type 2, en effet il a 4 cusps mais pas de nœud ni de cavité toroïdale.



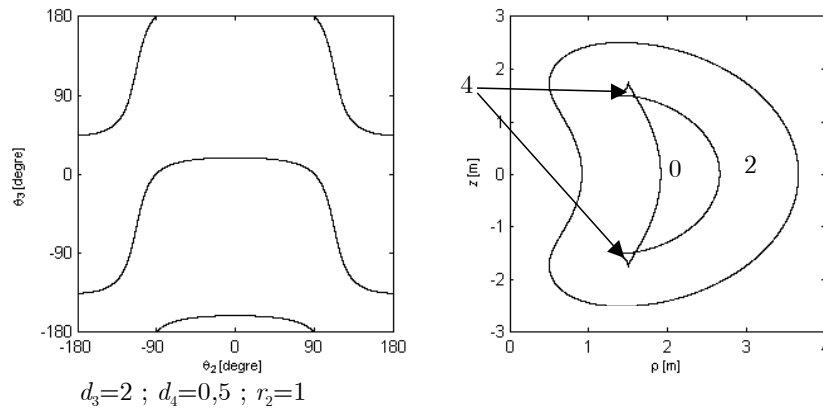


Figure 39 : Manipulateur de type 2

Sur la Figure 37(b), on choisit un manipulateur sur la transition entre les domaines 1 et 2. Ce manipulateur caractérise la transition entre les manipulateurs de type 1 et de type 2. Cette transition est représentée par un manipulateur ayant un point quadruple (4 solutions au MGI qui coïncident) où deux points cusps et un nœud coïncident. En effet, un manipulateur quaternaire avec 4 cusps devient binaire par déformation continue de la surface de singularité intérieure dans son espace de travail. Les deux zones à 4 solutions au MGI deviennent de plus en plus petites lorsque  $d_4$  diminue, par suite les deux cusps et le nœud se rapprochent puis se confondent : un point quadruple est alors créé. Afin de déterminer l'équation de la surface de séparation entre les manipulateurs binaires et les manipulateurs quaternaires, on écrit la condition d'existence d'un point quadruple à partir du polynôme du MGI de degré 4 en  $t = \tan(\theta_3/2)$ . Cette condition doit être écrite en fonction des paramètres de DHm, la méthode de calcul est détaillée dans l'annexe B. Cette condition recherchée est donnée dans l'équation (28) et définit l'équation de la surface  $C_1$  séparant les manipulateurs de type 1 et de type 2.

$$\text{On note : } C_{1d} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)}$$

$$C_1 : d_4 = C_{1d} \tag{28}$$

où :

$$A = \sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \text{ et } B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2} \quad (29)$$

Dans l'espace articulaire, on va voir que tous les manipulateurs qui n'appartiennent ni au type 1 ni au type 2 ont 4 branches de singularité. En effet, dès que la condition  $d_4 > d_3$  est vérifiée, deux droites singulières supplémentaires apparaissent dans l'espace articulaire. Rappelons que les branches de singularités sont déterminées à partir de l'annulation de l'équation (20) ce qui donne le système :

$$\begin{cases} s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2 = 0 \\ d_3 + d_4 c_3 = 0 \end{cases} \quad (30)$$

La première équation du système (30) donne les deux branches de singularités  $S_1$  et  $S_2$  que l'on retrouve pour tous les manipulateurs de la famille étudiée tandis que la deuxième équation donne les deux droites  $D_1$  et  $D_2$  définies respectivement par :

$$\theta_3 = \arccos\left(-\frac{d_3}{d_4}\right) \text{ et } \theta_3 = -\arccos\left(-\frac{d_3}{d_4}\right).$$

On peut définir les branches de singularité  $S_1$  et  $S_2$  telles que  $(\theta_2, \theta_3) \in [-\pi, \pi] \times [0, \pi]$ . Ces deux branches sont décalées de  $\pi$  selon  $\theta_3$ . Les 2 droites  $D_1$  et  $D_2$  se situent entre  $\frac{\pi}{2}$  et  $\pi$  d'une part et entre  $-\pi$  et  $-\frac{\pi}{2}$  d'autre part (selon  $\theta_3$  aussi).

L'équation  $d_3 + c_3 d_4 = 0$  donne  $c_3 = -\frac{d_3}{d_4}$  et  $s_3 = \varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}$  avec  $d_3 \leq d_4$  et  $\varepsilon = \pm 1$ .

Le manipulateur de type 3 est représenté dans le domaine 3 de la Figure 37(b). Ce manipulateur correspond à la Figure 40. Il a seulement 2 cusps sur la surface de singularité intérieure ayant la forme d'un poisson. Ce manipulateur est non générique et a 5 aspects dans son espace articulaire. Dans l'espace de travail, Les deux zones contenues dans la surface de singularité intérieure sont des zones à 4 solutions au MGI. Toutefois, la zone délimitée par les surfaces de singularité intérieure et extérieure est une zone à 2 solutions. En partant de l'espace de travail du

---

manipulateur caractérisé par la Figure 39 et en augmentant progressivement  $d_4$ , la surface de singularité intérieure se déforme d'une manière continue et donne lieu à un autre manipulateur de type 2. Ce manipulateur a 4 cusps et 2 nœuds sur sa surface de singularité intérieure : cette surface forme 3 zones à 4 solutions au MGI dont les deux situées aux extrémités ressemblent à 2 queues de poisson (Figure 49). Si on augmente d'avantage  $d_4$ , la surface de singularité intérieure continue à se déformer et on trouve le manipulateur correspondant à la Figure 40.

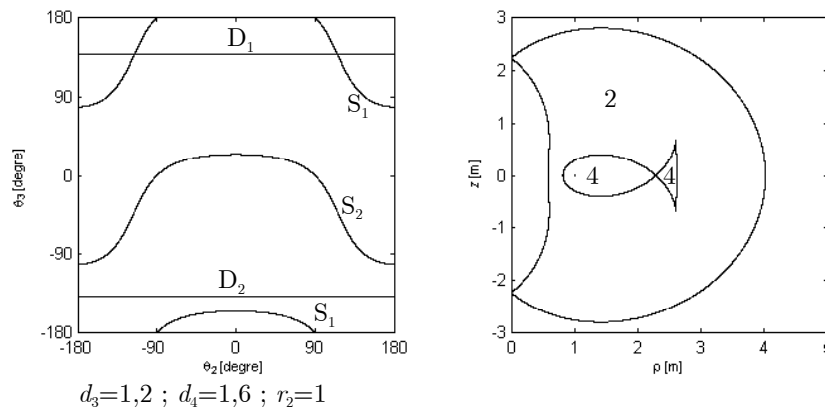


Figure 40 : Manipulateur de type 3

A partir de la Figure 37(b), on choisit un manipulateur sur la surface de transition entre les manipulateurs de type 2 et ceux de type 3. On s'aperçoit que cette transition est caractérisée par un manipulateur dont la droite  $D_2$  est tangente à la branche de singularité  $S_1$  dans l'espace articulaire (voir Figure 41). En exprimant cette condition de tangence, on déduit l'équation (32) représentant la surface  $C_2$  séparant les manipulateurs de type 2 et ceux de type 3, où  $A$  est donné par l'équation (29).

En remplaçant  $c_3$  et  $s_3$  dans la première équation du système (30), on peut déterminer  $c_2$  :

$$c_2 = - \frac{\varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}}{\left(\varepsilon \sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}\right) d_3 + \left(\frac{d_3}{d_4}\right) r_2}$$

La condition d'intersection entre les branches de singularité de la première équation et celles de la deuxième équation du système est donnée par l'inéquation (31).

$$|c_2| \leq 1 \quad (31)$$

La condition d'intersection entre la droite  $D_2$  et la branche de singularité  $S_1$  s'écrit :

$$\frac{1}{d_3} \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) \leq - \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) + \left( \frac{r_2}{d_4} \right) \Rightarrow \left( \frac{1 + d_3}{d_3} \right) \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) \leq \left( \frac{r_2}{d_4} \right)$$

$$\text{Par suite : } \left( \frac{1 + d_3}{d_3} \right)^2 \cdot \left( 1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2 \right) \leq \left( \frac{r_2}{d_4} \right)^2$$

Ce qui donne :

$$\left( \frac{1}{d_4} \right)^2 \cdot (r_2^2 + (1 + d_3)^2) \geq \left( \frac{1 + d_3}{d_3} \right)^2 \Rightarrow d_4 \leq \left( \frac{d_3}{1 + d_3} \right) \sqrt{r_2^2 + (1 + d_3)^2}$$

$$\text{Donc } d_4 \leq C_{2d} \text{ où : } C_{2d} = \frac{d_3}{1 + d_3} \cdot A$$

La surface de séparation  $C_2$  entre les domaines 2 et 3 est définie par l'équation (32) :

$$C_2 : d_4 = C_{2d} \quad (32)$$

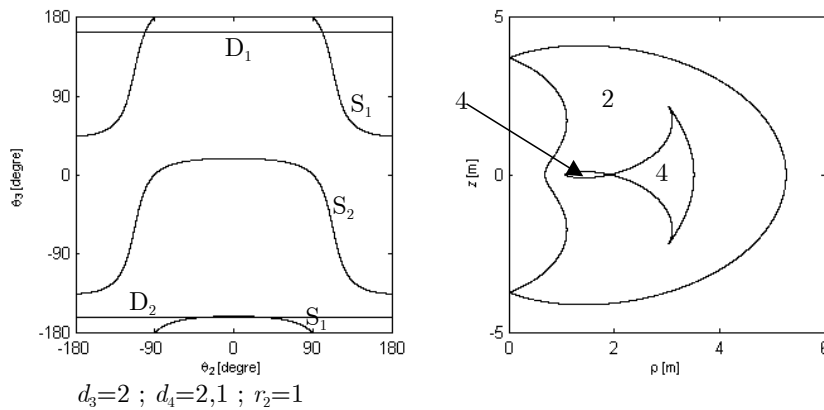


Figure 41 : Manipulateur appartenant à la surface  $C_2$

Le manipulateur correspondant à la Figure 42 est de type 4 (représenté sur la Figure 37(b)), il est cuspidal, non générique et a 6 aspects dans son espace articulaire. Dans l'espace de travail, les 4 cusps sont partagés à égalité entre la surface de singularité intérieure et extérieure. En augmentant le paramètre  $d_4$ , on trouve un manipulateur entre celui de la Figure 40 et de la Figure 42. Ce manipulateur intermédiaire est de type 3 avec 2 nœuds supplémentaires résultants de l'intersection entre les surfaces de singularité intérieure et extérieure dans l'espace de travail (voir Figure 51).

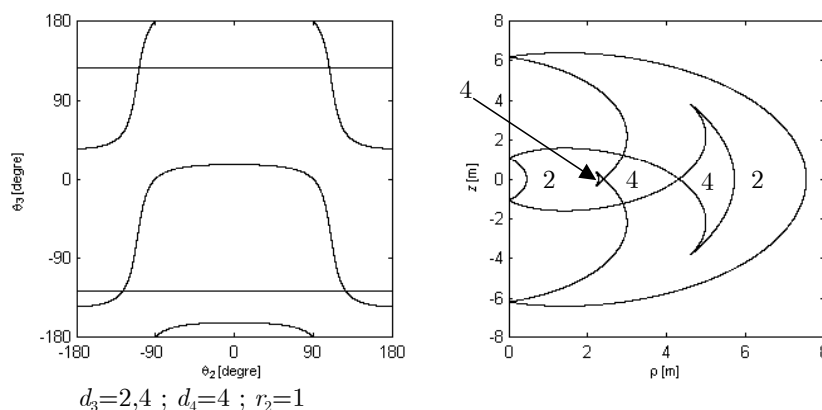


Figure 42 : Manipulateur de type 4

A partir de la Figure 37(b), on choisit un manipulateur correspondant à la transition entre les manipulateurs de type 3 et ceux de type 4. Cette transition est caractérisée par un manipulateur dont la droite  $D_2$  est tangente à la branche de singularité  $S_2$  dans l'espace articulaire (voir Figure 43). En exprimant cette condition de tangence, on déduit l'équation (33) représentant la surface  $C_3$  séparant les manipulateurs de type 3 et ceux de type 4, où  $B$  est donné par l'équation (29).

La condition d'intersection entre la droite  $D_2$  et la branche de singularité  $S_2$  s'écrit :

$$\frac{1}{d_3} \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) \leq \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) - \left( \frac{r_2}{d_4} \right) \Rightarrow \left( \frac{1 - d_3}{d_3} \right) \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) \leq - \left( \frac{r_2}{d_4} \right)$$

Ce qui donne :

$$\left(\frac{d_3 - 1}{d_3}\right) \cdot \left(\sqrt{1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2}\right) \geq \left(\frac{r_2}{d_4}\right) \Rightarrow \left(\frac{d_3 - 1}{d_3}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{d_3}{d_4}\right)^2\right) \geq \left(\frac{r_2}{d_4}\right)^2$$

$$\left(\frac{1}{d_4}\right)^2 \cdot (r_2^2 + (d_3 - 1)^2) \leq \left(\frac{d_3 - 1}{d_3}\right)^2 \Rightarrow d_4 \geq \frac{d_3}{|1 - d_3|} \cdot \sqrt{r_2^2 + (d_3 - 1)^2} \text{ avec } d_3 > 1$$

$$\text{Donc } d_4 \geq \frac{d_3}{|1 - d_3|} \cdot \sqrt{r_2^2 + (d_3 - 1)^2} \text{ avec } d_3 > 1$$

$$\text{On note : } C_{3d} = \frac{d_3}{d_3 - 1} \cdot B \text{ et } d_3 > 1$$

La tangence entre la droite  $D_2$  et la branche de singularité  $S_2$  donne l'équation (33) qui définit de la surface  $C_3$  :

$$C_3 : d_4 = C_{3d} \quad (33)$$

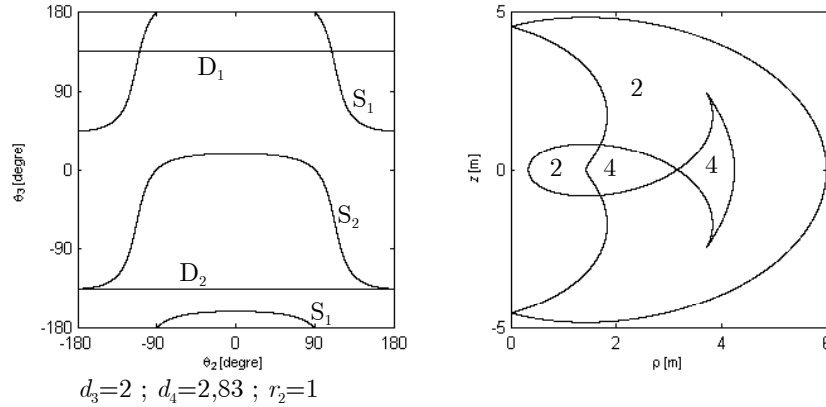


Figure 43 : Manipulateur appartenant à la surface  $C_3$

La Figure 44 correspond à un manipulateur non cuspidal de type 5 (représenté sur la Figure 37(b)). Ce manipulateur est générique, a 4 aspects et appartient à la classe d'homotopie  $4(1, 0)$ . Contrairement à un manipulateur de type 1 (non cuspidal lui aussi), la surface de singularité intérieure ne délimite pas une cavité toroïdale mais une zone à 4 solutions au MGI. Les deux points dans la zone intérieure de l'espace de travail correspondent aux images des deux droites  $D_1$  et  $D_2$  de l'espace articulaire.

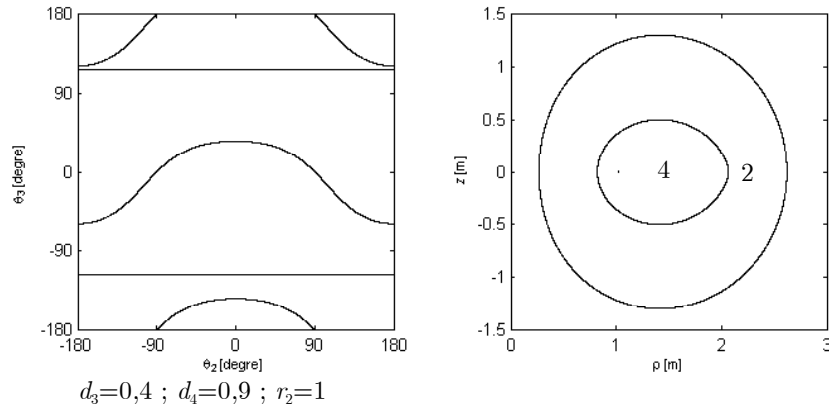


Figure 44 : Manipulateur de type 5

On choisit un manipulateur sur la surface de transition entre les domaines 3 et 5 sur Figure 37(b). On constate alors que la transition est définie par un manipulateur dont la droite  $D_1$  est tangente à la branche de singularité  $S_1$  dans l'espace articulaire (voir Figure 45). En exprimant cette condition de tangence, on déduit l'équation (34) représentant la surface  $C_4$  où  $B$  est donné par l'équation (29).

Pour un manipulateur de type 5, il n'y a pas d'intersection entre la droite  $D_1$  et la branche de singularité  $S_1$ , on écrit alors :

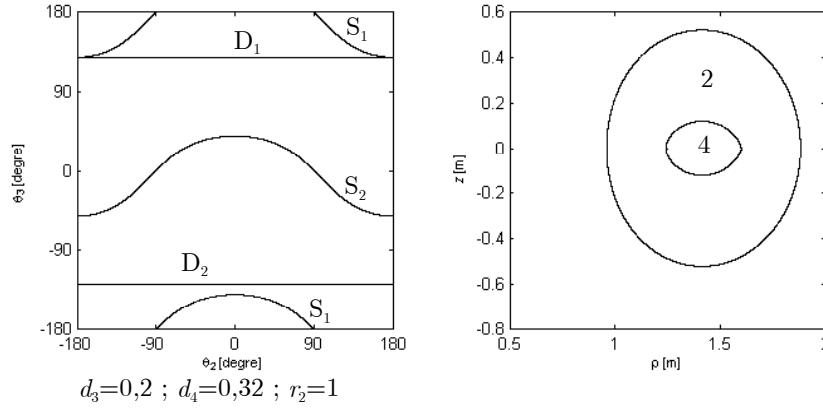
$$\begin{aligned} \frac{1}{d_3} \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) &> \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) + \left( \frac{r_2}{d_4} \right) \\ \left( \frac{1 - d_3}{d_3} \right) \cdot \left( \sqrt{1 - \left( \frac{d_3}{d_4} \right)^2} \right) &> \left( \frac{r_2}{d_4} \right) \\ \left( \frac{1}{d_4} \right)^2 \cdot (r_2^2 + (1 - d_3)^2) < \left( \frac{1 - d_3}{d_3} \right)^2 &\Rightarrow d_4 > \frac{d_3}{|1 - d_3|} \cdot \sqrt{r_2^2 + (d_3 - 1)^2} \text{ avec } d_3 < 1 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } d_4 > \frac{d_3}{|1 - d_3|} \cdot B \text{ avec } d_3 < 1$$

$$\text{On note : } C_{4d} = \frac{d_3}{1 - d_3} \cdot B \text{ et } d_3 < 1$$

La tangence entre la droite  $D_1$  et la branche de singularité  $S_1$  donne l'équation (34) qui définit la surface  $C_4$  :

$$C_4 : d_4 = C_{4d} \quad (34)$$


 Figure 45 : Manipulateur appartenant à la surface  $C_4$ 

### 2.5.1.2. Paragraphe récapitulatif

Les manipulateurs appartenant au domaine 1 sont binaires et non cuspidaux, ceux appartenant au domaine 5 sont quaternaires et non cuspidaux. Les manipulateurs appartenant aux domaines restants, c'est-à-dire ceux qui appartiennent aux domaines 2, 3 et 5 sont quaternaires et cuspidaux.

Pour lier l'apparition ou la disparition des cusps dans l'espace de travail avec les différentes surfaces de séparation, on dresse le Tableau 4.

Cusps apparus ou disparus	État lors de la transition	Surfaces correspondantes
4 cusps (2 paires de cusps)	Racine quadruple en $z \neq 0$	$C_1$
2 cusps	2 cusps apparaissent forcément en $z = 0$	$C_2, C_3$ et $C_4$

Tableau 4 : Liens entre l'apparition ou la disparition des cusps et les surfaces de séparation

Parmi les 8 classes d'homotopie données dans [Wenger 98], seulement 2 ont été trouvées lors de cette étude. Il s'agit des classes  $2(1, 0)$  correspondant au domaine 2 et la classe  $4(1, 0)$  correspondant au domaine 5. Rappelons que les manipulateurs appartenant au domaine 1 sont binaires et ceux appartenant aux domaines 3 et 4 sont non génériques.



Le Tableau 5 représente le lien entre les 5 types de manipulateurs et leur nombre d'aspects (on ne décrit que les cas génériques et pas ceux appartenant aux surfaces de séparation entre les 5 domaines).

Nombre d'aspects	Domaines correspondants
2 aspects	Domaines 1 et 2
4 aspects	Domaine 5
5 aspects	Domaine 3
6 aspects	Domaine 4

Tableau 5 : Les 5 domaines et leur nombre d'aspects correspondant

### 2.5.1.3. Conclusion

On a divisé l'espace des paramètres  $(d_3, d_4, r_2)$  de la famille de manipulateurs orthogonaux étudiée en 5 domaines où le nombre de points cusps est constant. On a déterminé les surfaces séparant ces domaines. Les domaines 1, 2, 3, 4 et 5 sont associés aux manipulateurs de type 1, 2, 3, 4 et 5 respectivement. Les surfaces  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$ , et  $C_4$  sont définies par les équations (28), (32), (33), et (34) respectivement. La Figure 46 représente les surfaces de séparation ainsi que les 5 domaines dans une section  $(d_3, d_4)$  de l'espace des paramètres pour  $r_2 = 1$ .

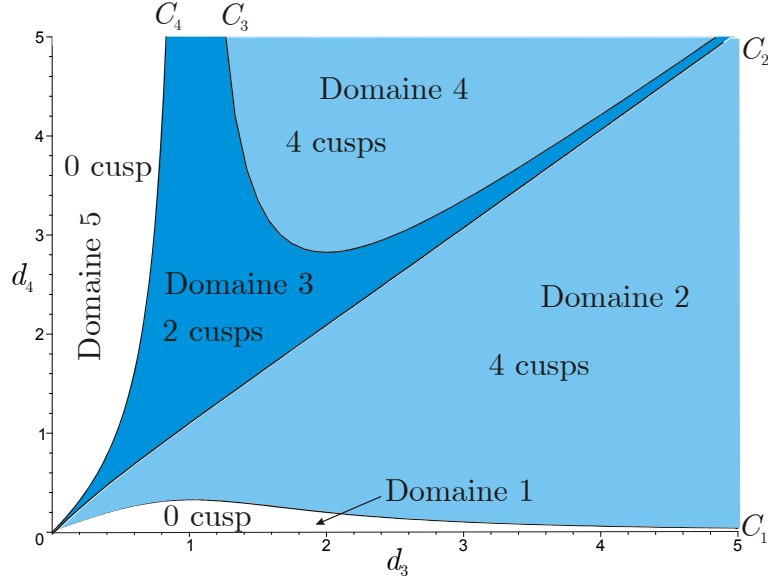


Figure 46 : Les 4 surfaces de séparation et les 5 domaines dans une section  $(d_3, d_4)$  de l'espace des paramètres pour  $r_2 = 1$

Dans cette partie, on va faire la correspondance des surfaces trouvées en utilisant des raisonnements géométriques avec celles données par les équations (23), (24), (25), (26) et (27) [Corvez 02]. En effet, l'équation (24) représente un polynôme de degré 2 en  $d_4^2$ . La résolution de cette équation en  $d_4$  donne les deux racines suivantes :

$$d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \text{ ou}$$

$$d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)}$$

Où  $A$  et  $B$  sont donnés dans les équations (29).

La première racine représente l'équation de la surface  $C_1$  donnée par l'équation (28) et qui sépare les manipulateurs binaires (que l'on a appelé manipulateurs de type 1) des autres manipulateurs quaternaires et plus précisément le domaine directement voisin contenant les manipulateurs de type 2. La deuxième racine est représentée par une branche dans l'espace des paramètres qui n'est pas pertinente pour les manipulateurs orthogonaux avec  $r_3 = 0$  (on ne retrouve pas cette surface en utilisant la méthode numérique). On verra dans le prochain chapitre quand on

étudiera une famille plus générale de manipulateurs orthogonaux avec  $r_3 \neq 0$ , que cette branche deviendra pertinente.

L'équation (26) représente un polynôme du second degré en  $d_4$ . En résolvant cette équation en  $d_4$  pour des valeurs positives de  $d_4$  et  $r_2$ , on trouve les deux racines suivantes :

$$\left( d_4 = \frac{d_3}{d_3 - 1} \cdot B \text{ et } d_3 > 1 \right) \text{ ou } \left( d_4 = \frac{d_3}{1 - d_3} \cdot B \text{ et } d_3 < 1 \right)$$

Où  $B$  est donné dans les équations (29).

Ces deux racines représentent les équations des surfaces  $C_3$  et  $C_4$  respectivement.

De la même façon, la résolution de l'équation (27) en  $d_4$ , donne la racine suivante :

$$d_4 = \frac{d_3}{1 + d_3} \cdot A$$

Où  $A$  est donné dans les équations (29).

Cette racine représente l'équation de la surface  $C_2$ .

A partir de la classification de cette famille de manipulateurs 3R orthogonaux selon le nombre de points cusps, on peut établir une condition nécessaire et suffisante dépendant des paramètres de DHm sous forme explicite pour qu'un manipulateur soit cuspidal. En effet, on remarque en observant la Figure 46 que les manipulateurs cuspidaux se trouvent dans les domaines 2, 3 et 4. Par conséquent, pour qu'un manipulateur de cette famille soit cuspidal, il faut et il suffit que ses paramètres de DHm satisfassent la condition :  $(d_4 > C_{1d})$  et  $(d_4 < C_{4d} \text{ ou } d_3 > 1)$ .

Ainsi, un manipulateur orthogonal tel que  $r_3 = 0$  est cuspidal, si et seulement si, ses paramètres vérifient la condition (35).

$$d_4 > \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_2^2 (d_3^2 - r_2^2)}{\sqrt{(d_3 + d_2)^2 + r_2^2} \cdot \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2}} \right)}$$

et

$$d_3 > d_2 \text{ ou } \left( d_3 < d_2 \text{ et } d_4 < \frac{d_3}{d_2 - d_3} \cdot \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2} \right)$$
(35)

En résumé, pour une famille de manipulateurs orthogonaux avec  $r_3 = 0$ , les équations (23) et (25) données dans [Corvez 02] ne définissent pas de surfaces de séparation pertinentes entre les différents domaines où le nombre de points cusps est constant (par comparaison avec la méthode numérique explicitée au début du paragraphe). En plus, une seule branche de l'équation (24) est pertinente. Lors de l'étude d'une famille plus générale de manipulateurs orthogonaux avec  $r_3 \neq 0$  dans le prochain chapitre, on verra que toutes les équations (23), (24), (25), (26) et (27) fournies dans [Corvez 02] donneront des surfaces pertinentes.

En outre et pour la première fois, une condition nécessaire et suffisante pour qu'un manipulateur orthogonal tel que  $r_3 = 0$  soit cuspidal a été établie sous forme explicite de ses paramètres de DHm.

### 2.5.2. CLASSIFICATION SELON LE NOMBRE DE NŒUDS

Dans ce paragraphe, on va affiner l'étude de la famille de manipulateurs 3R orthogonaux. En effet, on partira de chaque domaine ayant un nombre de points cusps constant et on le partagera en plusieurs sous-domaines ayant le même nombre de nœuds. Chaque sous-domaine définira une topologie de l'espace de travail que l'on notera  $WT_i$ . On déterminera les surfaces séparant deux topologies d'espace de travail différentes au sein du même domaine en utilisant des raisonnements géométriques. A chaque transition, on tracera les lieux de singularité dans l'espace articulaire et dans l'espace de travail d'un manipulateur dont les paramètres géométriques vérifient l'équation de la surface de séparation. On montrera que tous les manipulateurs appartenant à la famille étudiée peuvent avoir 0, 1, 2, 3 ou 4 nœuds uniquement et qu'il existe exactement 9 topologies différentes d'espace de travail.

### 2.5.2.1. Domaine 1

Tous les manipulateurs appartenant à ce domaine sont binaires et ont une cavité toroïdale dans leur espace de travail. Il ne peut y avoir ni point cusp ni nœud. Par suite, tous les manipulateurs appartenant au domaine 1 ont la même topologie d'espace de travail c'est à dire 0 cusp et 0 nœud. On note cette première topologie d'espace de travail  $WT_1$ . La Figure 38 illustre l'espace articulaire et l'espace de travail d'un manipulateur représentant de  $WT_1$ .

### 2.5.2.2. Domaine 2

La Figure 35 et la Figure 39 caractérisent deux manipulateurs appartenant au domaine 2 (ils ont 4 points cusps). Toutefois, ils n'ont pas le même nombre de nœuds : 0 nœud pour le premier et 2 nœuds pour le deuxième. La topologie d'espace de travail  $WT_2$  est représentée par la Figure 35 (manipulateur ayant 4 cusps, 2 nœuds et une cavité toroïdale) tandis que  $WT_3$  (manipulateur ayant 4 cusps, 0 nœud et pas de cavité toroïdale) est représentée par la Figure 39. La transition entre les topologies d'espace de travail  $WT_2$  et  $WT_3$  est telle que les deux segments latéraux de la surface de singularité intérieure dans l'espace de travail sont tangents (voir Figure 47).

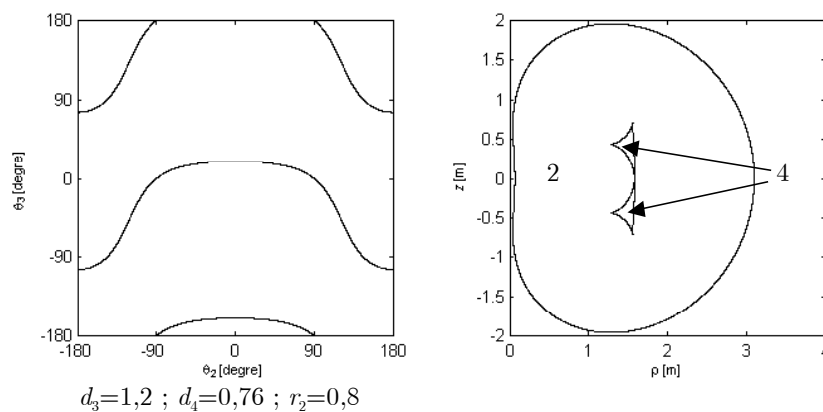


Figure 47 : Transition entre  $WT_2$  et  $WT_3$

Cette transition correspond à la limite entre les manipulateurs ayant ou non une cavité toroïdale dans leur espace de travail. Afin de déterminer l'équation de cette

surface, on va examiner le cas limite pour lequel un manipulateur aura une cavité toroïdale dans son espace de travail.

L'espace de travail étant symétrique par rapport au plan  $z = 0$ , la transition apparaît par suite en  $z = 0$ .

La Figure 48(b) représente deux configurations d'un manipulateur avec  $d_4 < d_3$ ,  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=0$  (à droite) ou  $\theta_2=180$  (à gauche). Pour la première configuration ( $\theta_2=0$ ), on effectue une rotation de  $360^\circ$  autour de l'axe 3 passant par  $O_3$ , la trace de l'effecteur est un cercle noté  $\text{Cer}_1$  de centre  $O_3$  et de rayon  $d_4$ . Sur  $\text{Cer}_1$ , on place le point  $X$  à l'endroit le plus proche de l'axe 1 passant par  $O_1$ . En effectuant une rotation de  $360^\circ$  de ce point  $X$  autour de  $O_1$ , on obtient un nouveau cercle de centre  $O_1$  et de rayon  $O_1X$  que l'on note  $\text{Cer}_3$ . Pour la seconde configuration ( $\theta_2=180$ ), en effectuant une rotation de  $360^\circ$  selon  $\theta_3$  et autour de l'axe 3 passant par  $O_3'$ , l'effecteur décrit un cercle de centre  $O_3'$  et de rayon  $d_4$  que l'on note  $\text{Cer}_4$ , on a donc  $O_1O_3' = d_3$ . Sur  $\text{Cer}_4$ , on définit le point  $X'$  comme le point le plus éloigné de  $O_1$ .  $\text{Cer}_2$  de centre  $O_1$  et de rayon  $O_1X'$ , est la trace du point  $X'$  si on effectue une rotation de  $360^\circ$  autour de  $O_1$ . Sur la Figure 48(a), on représente les positions de  $X$  et  $X'$  dans une section d'espace de travail afin de voir la correspondance avec la Figure 48(b). Remarquons que l'expression de  $O_1O_3$  (respectivement  $O_1O_3'$ ) correspond à celle de  $A$  (respectivement de  $B$ ) définie dans l'équation (29).

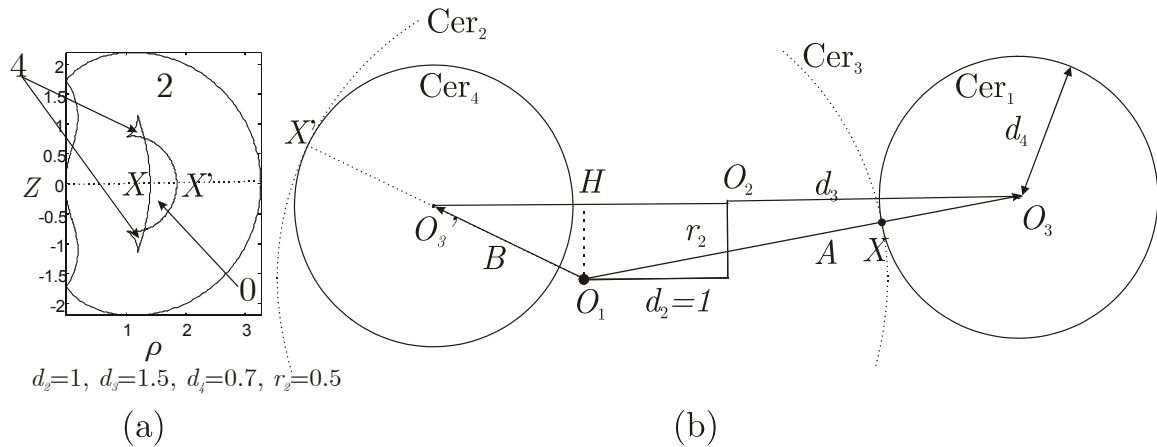


Figure 48 : correspondance entre (a) espace de travail d'un manipulateur et (b) croquis de deux configurations avec  $d_4 < d_3$ ,  $\theta_1=0$ ,  $\theta_2=0$  (à droite) ou  $\theta_2=180$  (à gauche)

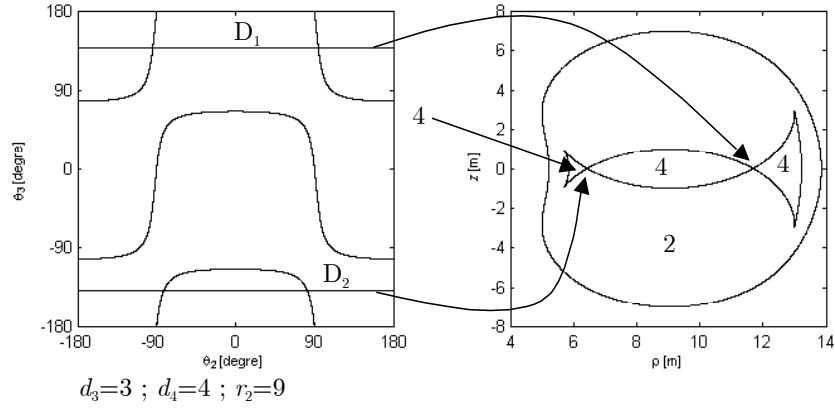
La transition entre les topologies d'espace de travail  $WT_2$  et  $WT_3$  est définie par la coïncidence des deux cercles  $Cer_2$  et  $Cer_3$  en  $X$  ou en  $X'$ . Cette coïncidence se traduit par la condition :  $A - d_4 = B + d_4$ .

$$\text{On note : } E_{1d} = \frac{1}{2}(A - B)$$

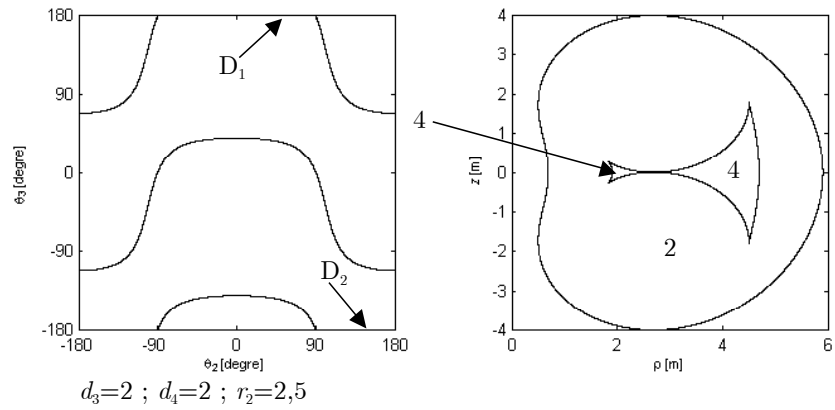
L'équation (36) définit la surface de séparation entre  $WT_2$  et  $WT_3$  que l'on nomme  $E_1$ .

$$E_1 : d_4 = E_{1d} \tag{36}$$

Une troisième topologie d'espace de travail représenté par le manipulateur caractérisé par la Figure 49 existe dans le domaine 2. Cette topologie d'espace de travail nommée  $WT_4$  contient 4 cusps et 2 nœuds dans le plan  $z = 0$ . Ces nœuds sont différents de ceux de  $WT_2$  puisqu'ils coïncident avec les deux images des deux droites singulières  $D_1$  et  $D_2$ . En plus, ces nœuds ne délimitent pas une cavité toroïdale mais une région à 4 solutions au MGI.


 Figure 49 : Topologie d'espace de travail  $WT_4$ 

La transition entre les topologies d'espace de travail  $WT_3$  et  $WT_4$  est telle que les segments singuliers supérieur et inférieur dans l'espace de travail sont tangents. Le manipulateur caractérisé par la Figure 50 illustre cette transition.


 Figure 50 : Transition entre  $WT_3$  et  $WT_4$ 

La transition entre  $WT_3$  et  $WT_4$  est due à l'occurrence des deux droites singulières  $D_1$  et  $D_2$  dès que la deuxième équation du système (30) :  $d_3 + c_3 d_4 = 0$  admet des solutions. Ceci n'est vrai que pour  $d_4 \geq d_3$ , le cas transitoire se présente lorsque  $d_4 = d_3$  ce qui définit la surface  $E_2$  séparant les deux topologies d'espace de travail  $WT_3$  et  $WT_4$  (équation (37)).

$$E_2 : d_4 = d_3 \quad (37)$$



### 2.5.2.3. Domaine 3 et 5

Dans l'espace de travail, la surface de singularité intérieure contient 2 cusps (domaine 3) ou bien 0 cusp (domaine 5). Cette surface de singularité intérieure peut être entièrement contenue dans la surface de singularité extérieure (cas de la Figure 40 et la Figure 44). Elle peut également couper la surface de singularité extérieure ce qui fait apparaître deux nœuds. Contrairement à la Figure 40 caractérisant un manipulateur appartenant à la topologie d'espace de travail  $WT_5$  (2 cusps et 1 nœud), la Figure 51 caractérise un manipulateur appartenant à la topologie d'espace de travail  $WT_6$ , celui-ci a 2 cusps et 3 nœuds.

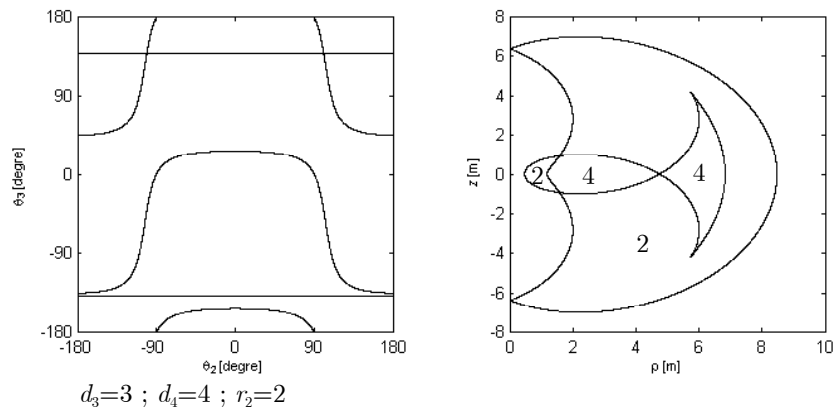


Figure 51 : Topologie d'espace de travail  $WT_6$

De même, la Figure 52 caractérise un manipulateur appartenant à la topologie d'espace de travail  $WT_9$ , cette topologie correspond aux manipulateurs ayant 0 cusp et 2 nœuds. Toutefois, la topologie d'espace de travail  $WT_8$  représentée par la Figure 44 correspond aux manipulateurs ayant 0 cusp et 0 nœud.

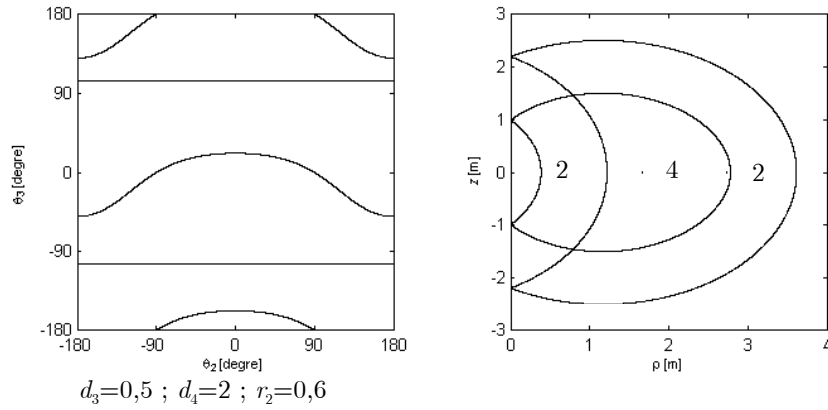


Figure 52 : Topologie d'espace de travail  $WT_9$

La transition entre  $WT_5$  et  $WT_6$  et la transition entre  $WT_8$  et  $WT_9$  sont définies par des manipulateurs dont la surface de singularité intérieure est tangente à la surface de singularité extérieure. La Figure 53 caractérise un manipulateur dont les paramètres de DHm vérifient l'équation de la surface séparant les deux topologies d'espace de travail  $WT_5$  et  $WT_6$ .

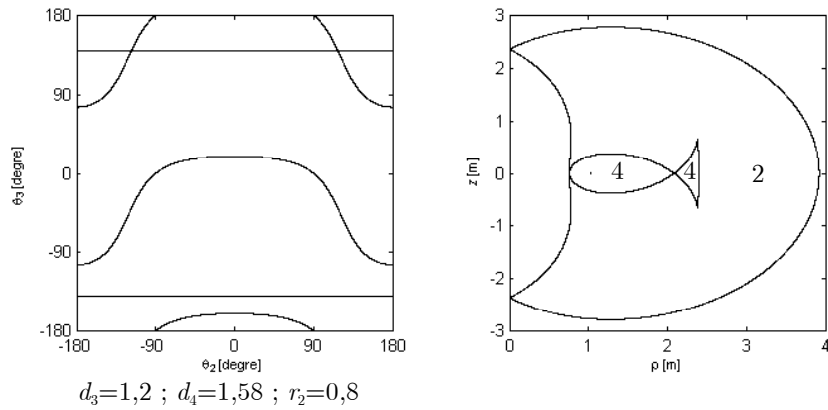


Figure 53 : Transition entre  $WT_5$  et  $WT_6$

La Figure 54 caractérise un manipulateur appartenant à la surface séparant les deux topologies d'espace de travail  $WT_8$  et  $WT_9$ .

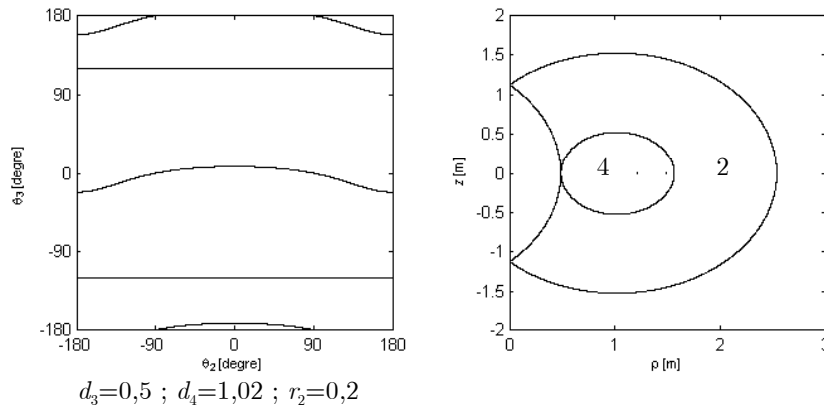


Figure 54 : Transition entre  $WT_8$  et  $WT_9$

Géométriquement, cette transition se produit lorsque l'on quitte directement l'espace de travail en sortant de la zone à 4 solutions au MGI (délimitée par la surface de singularité intérieure) en se déplaçant dans le plan  $z = 0$  et en se rapprochant de l'axe  $\rho = 0$  (voir Figure 53 et Figure 54).

La Figure 55 représente deux configurations d'un manipulateur avec  $d_4 > d_3$ ,  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$  (à droite) et  $\theta_2 = 180^\circ$  (à gauche). En utilisant la même approche géométrique qui a permis de déterminer la surface  $E_1$ , on retrouve facilement les significations des cercles  $Cer_3$  et  $Cer_4$ . Dans le cas général, les régions délimitées par les cercles  $Cer_1$  et  $Cer_2$  ont 2 solutions au MGI (Figure 55(b)). En plus, lorsque  $\theta_1 = 0^\circ$ ,  $\theta_2 = 0^\circ$  ou  $\theta_2 = 180^\circ$ , la région comprise entre les deux cercles  $Cer_3$  et  $Cer_4$  est une région à 4 solutions au MGI (région de chevauchement des deux cercles  $Cer_3$  et  $Cer_4$ ). Suivre la flèche en pointillés indiquée dans la Figure 55(a) dans une section de l'espace de travail dans le plan  $z = 0$  correspond à partir d'une région à 2 solutions, à traverser ensuite une région à 4 solutions, pour arriver finalement à une région à 2 solutions avant de quitter l'espace de travail dicté par la surface de singularité  $WS_1$ . La condition recherchée (cas de la Figure 53 et la Figure 54) correspond à, partir d'une région à 2 solutions, traverser une autre à 4 solutions avant de quitter l'espace de travail puisque les deux surfaces de singularité  $WS_1$  et  $WS_2$  sont tangentes en  $z = 0$ . D'après la Figure 55(b), cette condition est vérifiée lorsque :  $A + B = 2d_4$ .

On note :  $E_{3d} = \frac{1}{2}(A + B)$

L'équation (38) définit la surface de séparation entre les topologies d'espace de travail  $WT_5$  et  $WT_6$  et les topologies d'espace de travail  $WT_8$  et  $WT_9$ . Cette surface est nommée  $E_3$  et on a :

$$E_3 : d_4 = E_{3d} \quad (38)$$

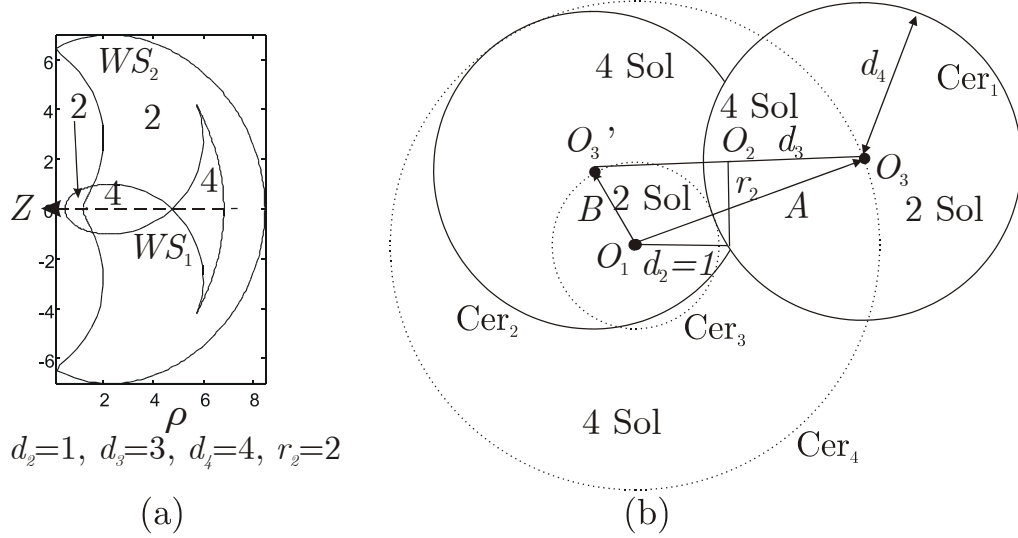


Figure 55 : Correspondance entre (a) l'espace de travail d'un manipulateur et (b) les croquis de deux configurations avec  $d_4 > d_3$ ,  $\theta_1=0^\circ$ ,  $\theta_2=0^\circ$  (à droite) ou  $\theta_2=180^\circ$  (à gauche)

#### 2.5.2.4. Domaine 4

Tous les manipulateurs du domaine 4 ont 4 cusps et 4 nœuds (Figure 42). Une telle topologie est notée  $WT_7$ .

### 2.5.3. SYNTHÈSE DES RÉSULTATS

Dans ce paragraphe, on propose d'abord une classification selon le nombre de points cusps et le nombre de nœuds (qui définissent une topologie d'espace de travail). On divise l'espace des paramètres de DHm en 9 topologies d'espace de travail. On représente quelques sections  $(d_3, d_4)$  de cet espace pour des différentes valeurs de  $r_2$ . On propose ensuite un arbre de classification dans lequel on présente l'espace articulaire et une section de l'espace de travail d'un manipulateur pour

chaque topologie d'espace de travail. On dressera enfin un tableau de synthèse qui définit les propriétés ainsi que les surfaces délimitant les différentes topologies d'espace de travail.

### 2.5.3.1. Partition de l'espace des paramètres

En partant de la partition de l'espace des paramètres de la famille de manipulateurs orthogonaux étudiée selon le nombre de point cusps (Figure 46), et en tenant compte du nombre de nœuds, on propose une nouvelle partition de l'espace des paramètres en plusieurs topologies d'espace de travail. La Figure 56 représente une section de l'espace des paramètres dans le plan  $r_2 = 1$ . Les surfaces séparant les régions dont le nombre de points cusps varie sont les  $C_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) tandis que les surfaces séparant les régions dont le nombre de nœuds varie sont les  $E_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ). Dans chacune des 9 topologies d'espaces de travail, on note le couple (nombre de point cusps, nombre de nœuds).

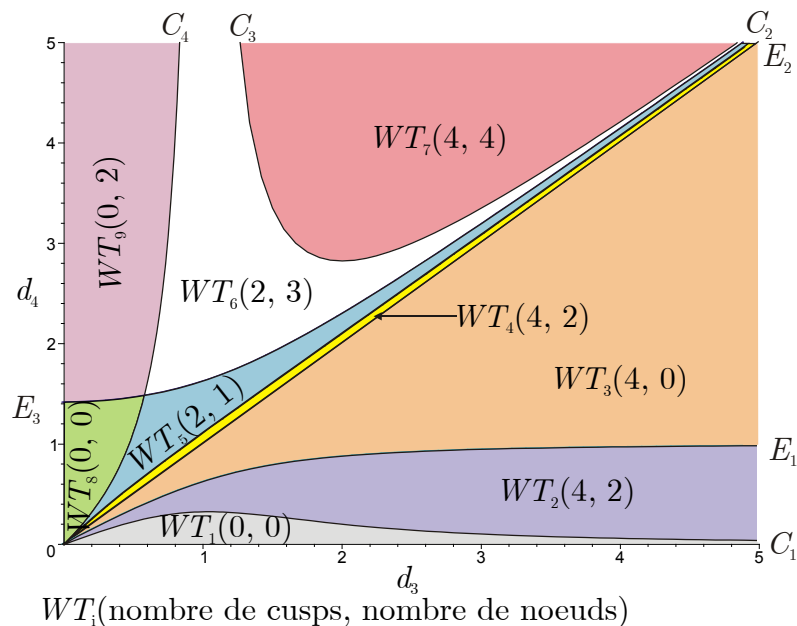


Figure 56 : Partition de l'espace des paramètres selon le nombre de points cusps et le nombre des nœuds dans une section  $r_2 = 1$

En traçant les surfaces de séparation entre les différentes topologies d'espace de travail dans plusieurs sections pour différentes valeurs de  $r_2$ , on remarque que les

surfaces occupées par les topologies d'espace de travail  $WT_i$  ( $1 \leq i \leq 9$ ) se déforment (Figure 57). Notons que toutes les surfaces délimitant les 9 topologies d'espace de travail ne génèrent pas de nouvelles intersections et que par suite la partition représentée reste la même. Les aires des surfaces associées aux topologies d'espace de travail  $WT_1$ ,  $WT_2$ ,  $WT_7$  et  $WT_9$  diminuent lorsque  $r_2$  augmente. En plus, très peu de manipulateurs ont la topologie d'espace de travail  $WT_4$  puisque le domaine associé à ce type de topologie est très petit (on ne l'a pas représenté dans la coupe  $r_2=0,3$  de la Figure 57).

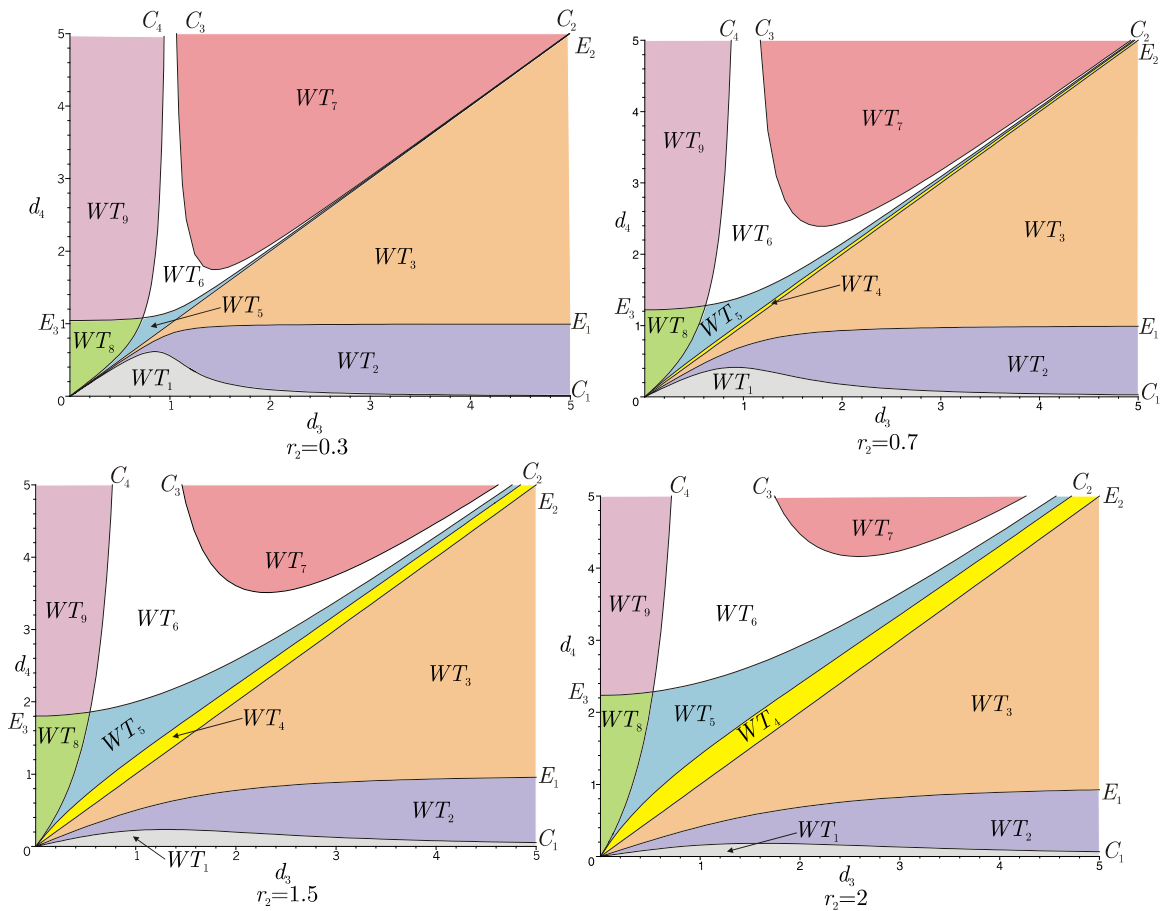


Figure 57 : Les surfaces de séparation pour différentes valeurs de  $r_2$

### 2.5.3.2. Arbre de classification

Afin de résumer tous les résultats déterminés dans ce chapitre d'une manière plus symbolique, on propose l'arbre de classification suivant (Figure 58) représenté selon plusieurs niveaux. Pour plus de lisibilité et de clarté, on ne présente que les cas

génériques (les manipulateurs appartenant aux surfaces de transitions ne seront pas représentés). Le but de cette représentation est d'établir une classification complète et exhaustive de la famille de manipulateurs orthogonaux étudiée. Le premier niveau montre que les manipulateurs de la famille étudiée peuvent avoir 2 aspects ou peuvent être quaternaires et sans cavité toroïdale. Le second niveau montre que :

- Les manipulateurs à 2 aspects sont ou bien binaires avec 0 cusp, 0 nœud et une cavité toroïdale ( $WT_1$ ), ou bien quaternaires avec 4 cusps.
- Les manipulateurs quaternaires peuvent avoir 4 cusps et 6 aspects, 2 cusps et 5 aspects ou alors 0 cusps et 4 aspects.

Le troisième niveau donne les 9 topologies d'espace de travail possibles. Dans la Figure 58, pour chaque topologie d'espace de travail on donne le triplet  $(n_1, n_2, n_3)$  où  $n_1 = 1$  s'il existe une cavité toroïdale,  $n_1 = 0$  s'il y en a pas,  $n_2$  est le nombre de régions à 2 solutions et  $n_3$  le nombre de régions à 4 solutions au MGI.

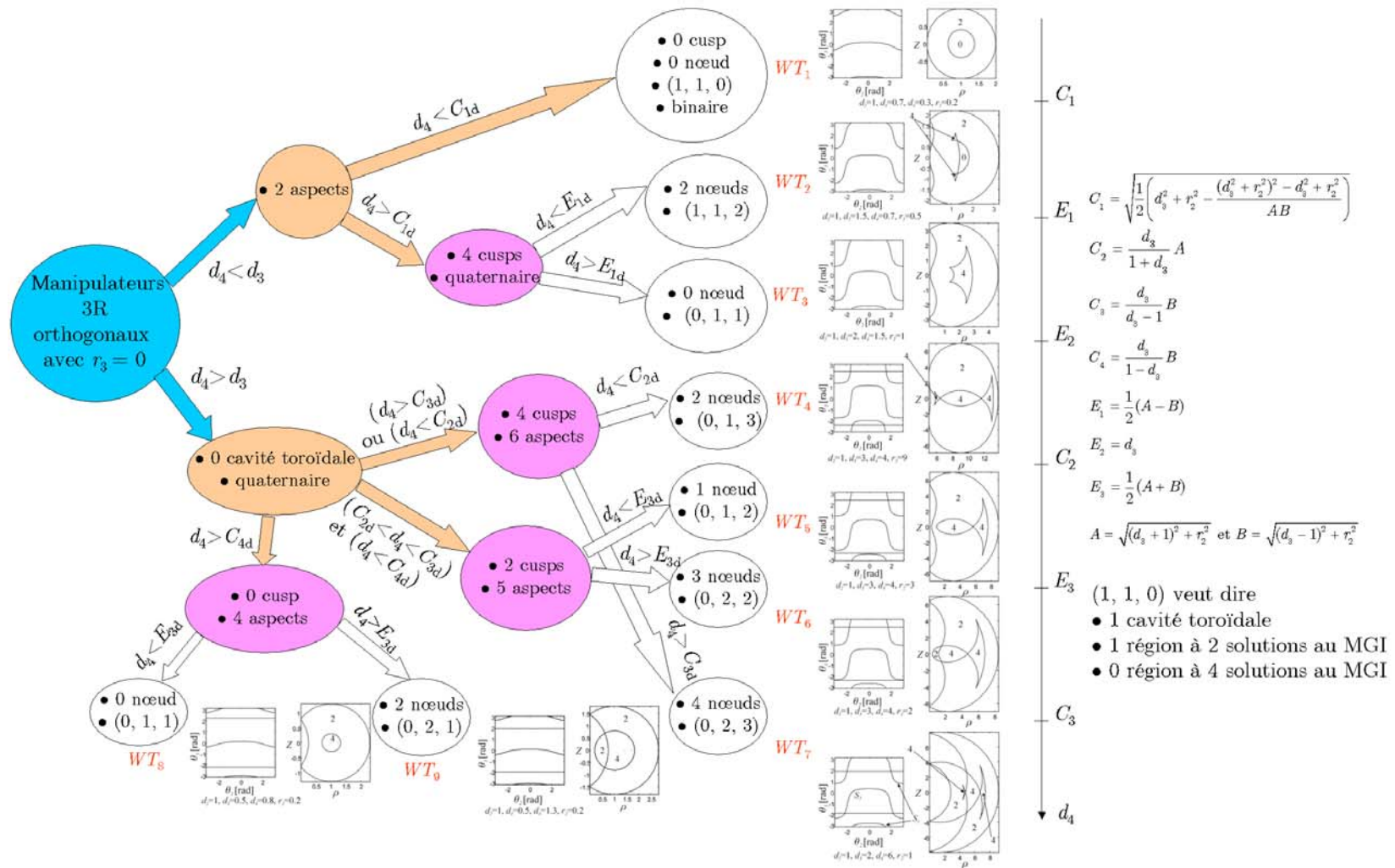


Figure 58 : Arbre de classification de la famille

des manipulateurs 3R orthogonaux tels que  $r_3 = 0$  en 9 topologies d'espace de travail



### 2.5.3.3. Tableau récapitulatif

Dans ce paragraphe, on résume les différentes propriétés des manipulateurs appartenant à la famille étudiée. Chaque propriété est déterminée sous la forme d'une inégalité faisant intervenir les surfaces de séparation  $C_i$  ( $1 \leq i \leq 4$ ) et  $E_i$  ( $1 \leq i \leq 3$ ) qui dépendent explicitement des paramètres de DHm.

Propriétés des manipulateurs	Conditions associées	Topologies d'espace de travail associées
Binaire	$d_4 < C_{1d}$	$WT_1$
Quatenaire et aucune cavité toroïdale	$(d_4 > d_3)$ ou $(E_{1d} < d_4 < d_3)$	$WT_3, WT_4, WT_5, WT_6, WT_7, WT_8$ et $WT_9$
2 aspects et 2 branches de singularité	$d_4 < d_3$	$WT_1, WT_2$ et $WT_3$
4 aspects et 4 branches de singularité	$d_4 > C_{4d}$	$WT_8$ et $WT_9$
5 aspects et 4 branches de singularité	$(d_4 > C_{2d})$ et $(d_4 < C_{3d})$ et $(d_4 < C_{4d})$	$WT_5$ et $WT_6$
6 aspects et 4 branches de singularité	$(d_3 < d_4 < C_{2d})$ ou $(d_4 > C_{3d})$	$WT_4$ et $WT_7$
Cuspidal	$(d_4 > C_{1d})$ et $(d_4 < C_{4d}$ ou $d_4 > 1)$	$WT_2, WT_3, WT_4, WT_5, WT_6$ et $WT_7$

Tableau 6 : Détermination des propriétés des manipulateurs en fonction des paramètres de DHm et les topologies d'espace de travail correspondantes

## 2.6. ÉTUDE DE CAS PARTICULIERS

Dans ce paragraphe on va étudier des manipulateurs particuliers appartenant à la famille étudiée. En effet, la particularité de ces manipulateurs se présente sous forme de certains paramètres de DHm nuls. Évidemment comme on l'a annoncé dans le

premier chapitre de ce mémoire, tous ces manipulateurs sont non-cuspidaux mais peuvent avoir des nombres de nœuds différents. Cette étude est importante puisque de tels manipulateurs particuliers élargissent le champs de choix pour le concepteur. On montre que ceci s'explique par le fait que la plupart de ces manipulateurs n'ont pas de cavité toroïdale dans leur espace de travail et que ce dernier est complètement t-parcourable. En plus quelques manipulateurs particuliers ont un degré d'accessibilité de 4 dans tout leur espace de travail. Une classification selon les critères nombre de nœuds, l'existence ou non de cavité toroïdale et la t-parcourabilité a été établie dans le cadre d'un travail de DEA à l'Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes [Zein 04]. Tous les cas possibles sont :

- $d_2 = 0$ 
  - Cas 1 :  $r_2 \neq 0$ ,  $d_3 \neq 0$  et  $r_3 = 0$ .
  - Cas 2 :  $r_2 \neq 0$ ,  $d_3 = 0$  et  $r_3 = 0$ .
  - Cas 3 :  $r_2 = 0$ ,  $d_3 \neq 0$  et  $r_3 = 0$
- $r_2 = 0$ 
  - Cas 4 :  $d_2 \neq 0$ ,  $d_3 \neq 0$  et  $r_3 = 0$ .
  - Cas 5 :  $d_2 \neq 0$ ,  $d_3 = 0$  et  $r_3 = 0$ .

L'étude des ces manipulateurs particuliers permet d'établir l'arbre de classification représenté par la Figure 59.

Dans la Figure 60, Chaque cas particulier est illustré par l'espace articulaire et une section de l'espace de travail d'un manipulateur représentatif.

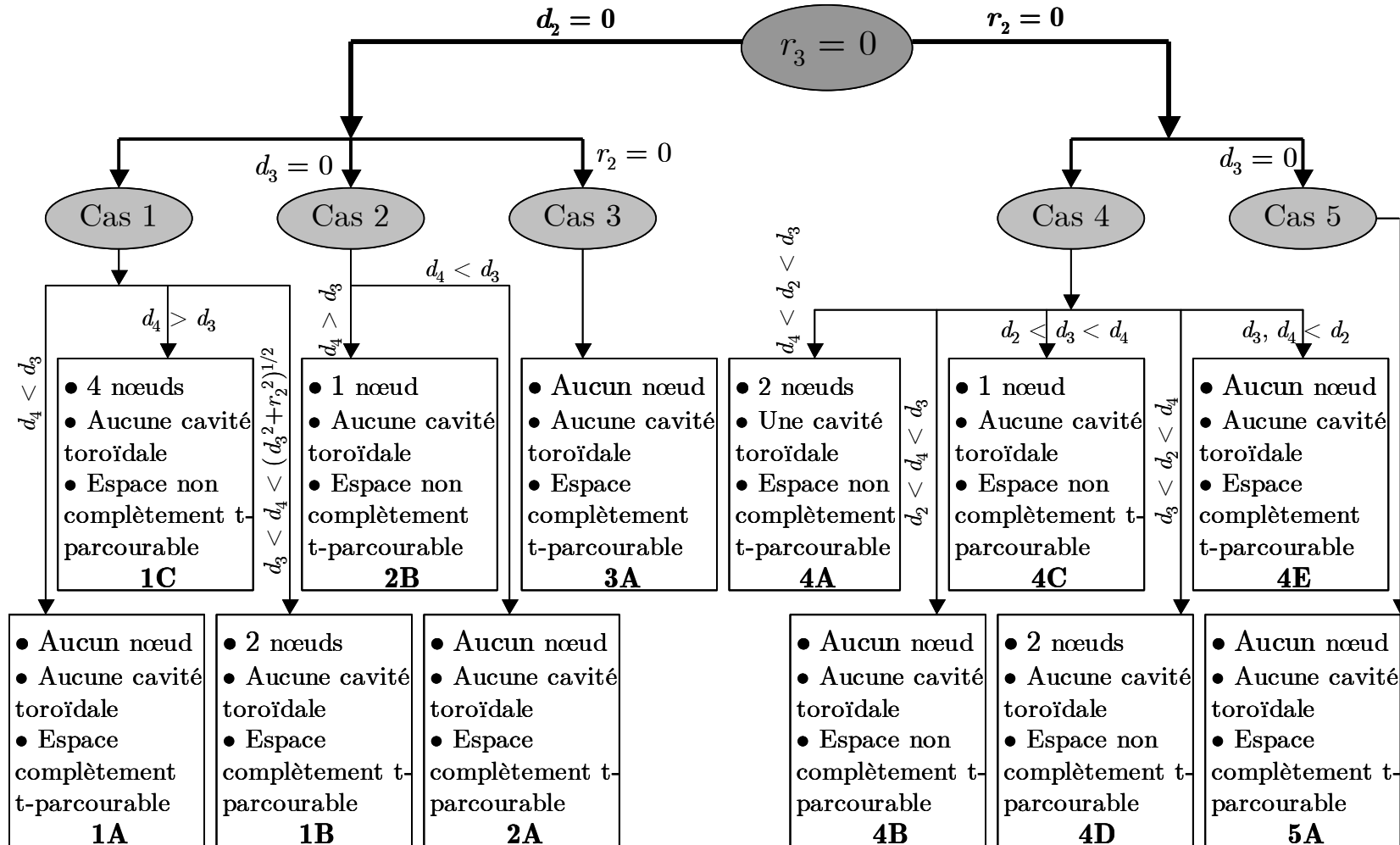
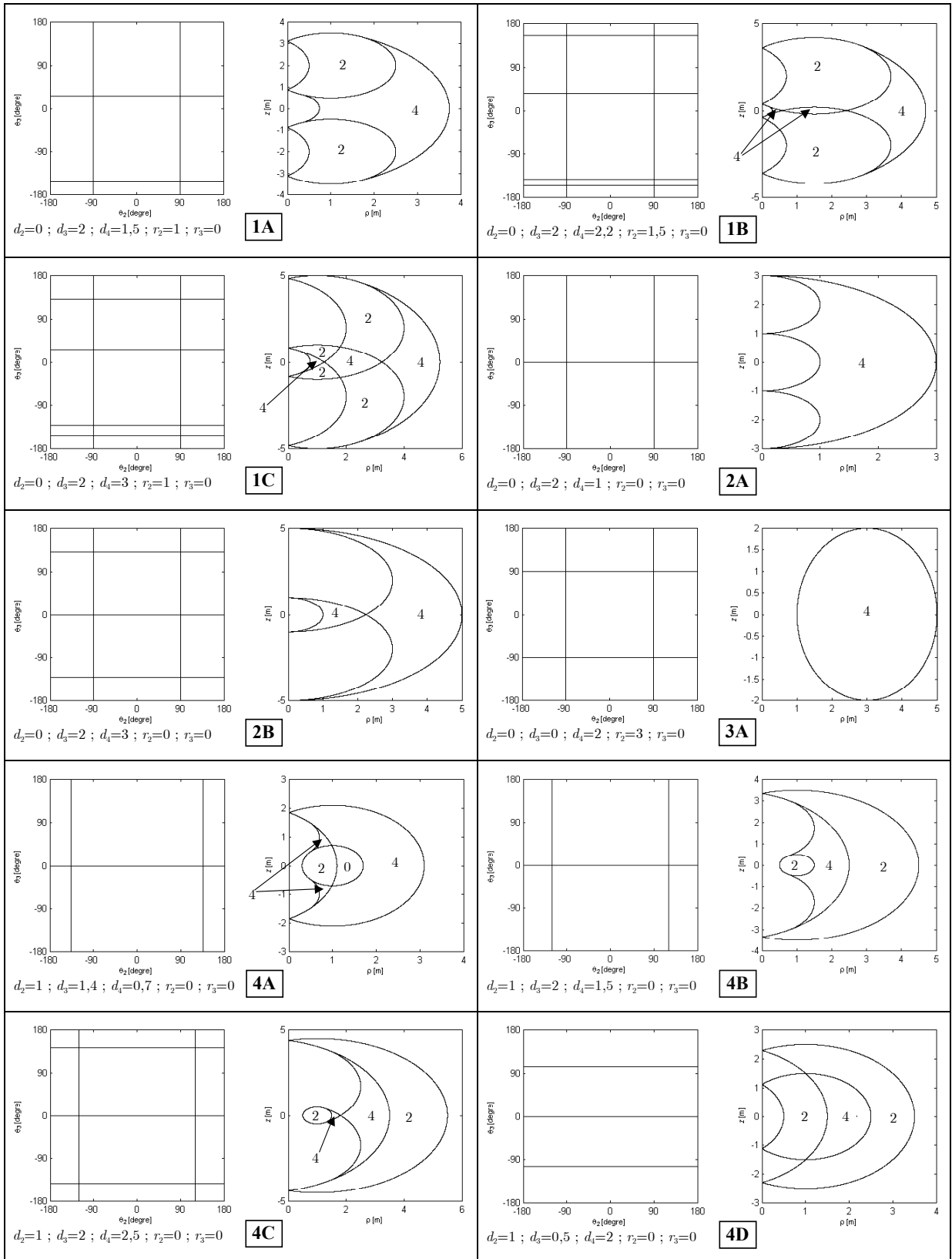


Figure 59 : Arbre de classification des cas particuliers de manipulateurs (Cas  $r_3 = 0$ )

Étude d'une famille de manipulateurs orthogonaux : cas  $r_3 = 0$



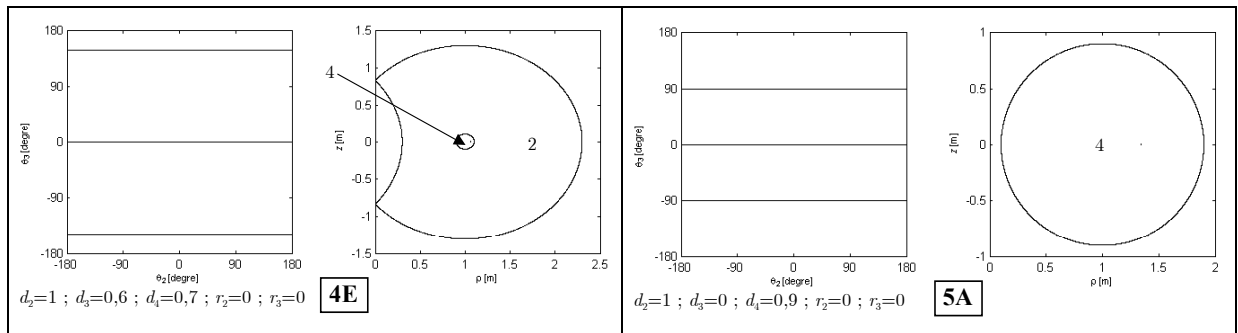


Figure 60 : Espaces articulaires et sections dans l'espace de travail des manipulateurs particuliers présentés dans l'arbre de classification de la Figure 59

## 2.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous présentons notre contribution en classifiant une famille de manipulateurs à axes orthogonaux tel que  $r_3 = 0$  selon la topologie d'espace de travail. On montre que dans l'espace des paramètres  $(d_3, d_4, r_2)$ , il existe seulement 5 domaines dans lesquels le nombre de points cusps est constant parmi les 105 fournis par un calcul effectué dans le cadre d'une coopération et en utilisant les bases de Groebner et la décomposition cylindrique algébrique. Les équations des surfaces séparant ces 5 domaines sont déterminées en fonction des paramètres de DHm par une analyse géométrique des transitions et sont retrouvées parmi les équations données par un calcul mathématique. Nous avons donné et pour la première fois une condition pour qu'un manipulateur de la famille étudiée soit cuspidal. Cette condition s'écrit sous la forme d'une inéquation et dépend des paramètres de DHm.

Nous subdivisons ensuite ces 5 domaines en fonction du nombre de nœuds. Les propriétés de chaque topologie sont détaillées. Dans chaque topologie d'espace de travail, il s'agit de donner le nombre de zones à 2 ou à 4 solutions au MGI, de dire si les manipulateurs appartenant à cette topologie ont une cavité toroïdale ou pas et d'affirmer si les manipulateurs sont binaires ou quaternaires. Ces équations sont déterminées par une interprétation géométrique des singularités lors des transitions entre les différentes topologies d'espace de travail. On propose finalement un arbre de classification de manipulateurs particuliers non cuspidaux (ayant un ou plusieurs

paramètres de DHm nuls). Cette classification est basée sur le nombre de nœuds, l'existence ou pas de cavité toroïdale ainsi que la notion de parcourabilité.

Afin d'aider un concepteur à choisir entre plusieurs manipulateurs appartenant à une topologie d'espace de travail vérifiant un cahier des charges donné, on propose dans le dernier chapitre de ce mémoire une analyse quantitative se basant sur quelques critères de performances. Parmi ces critères de performances, on étudiera le volume de la zone à 4 solutions, celle à 2 solutions au MGI par rapport au volume total de l'espace de travail et le conditionnement.

Dans le chapitre suivant, on étudiera une famille de manipulateurs plus générale. Il s'agit de manipulateurs à axes orthogonaux avec un décalage sur le dernier bras ( $r_3 \neq 0$ ).



---

## CHAPITRE III

---

### ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE MANIPULATEURS ORTHOGONAUX : CAS $r_3 \neq 0$





### 3. ÉTUDE D'UNE FAMILLE DE MANIPULATEURS ORTHOGONAUX : CAS $r_3 \neq 0$

#### 3.1. INTRODUCTION

Ce chapitre présente une classification d'une famille de manipulateurs à axes orthogonaux avec un décalage sur le dernier bras ( $r_3 \neq 0$ ). De la même façon que le chapitre précédent, cette classification est basée sur la topologie des espaces de travail. On rappelle qu'une topologie d'espace de travail est définie à partir de points singuliers particuliers qui apparaissent sur les surfaces de singularité à savoir les cusps et les nœuds.

On présente tout d'abord la famille de manipulateurs étudiée. On trace ensuite quelques sections  $(d_3, d_4)$  pour des valeurs données de  $r_2$  et  $r_3$ . En utilisant la même méthode numérique du chapitre précédent, chaque section  $(d_3, d_4)$  est subdivisée en plusieurs domaines. Un domaine correspond à un même nombre de points cusps. Les surfaces de séparation sont déterminées en interprétant géométriquement les transitions entre deux domaines voisins. De même, en utilisant les interprétations géométriques des transitions, on donne les équations de deux surfaces permettant de subdiviser ces domaines en 22 topologies d'espace de travail différentes. On propose enfin un arbre classifiant des manipulateurs particuliers (ayant un ou plusieurs paramètre(s) de DHm nul(s)) selon leur nombre de nœuds, l'existence ou non d'une cavité toroïdale ainsi que la t-parcourabilité.

#### 3.2. PRÉSENTATION DE LA FAMILLE DE MANIPULATEURS ÉTUDIÉE

La famille étudiée dans ce chapitre est composée de manipulateurs à 3 articulations rotoïdes, à axes orthogonaux ( $\alpha_2 = -90^\circ$ ,  $\alpha_3 = 90^\circ$ ) et, contrairement au chapitre II, avec un décalage sur le dernier axe ( $r_3 \neq 0$ ). L'étude d'un tel type de manipulateur se fera en fonction des paramètres de DHm :  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$ ,  $r_2$  et  $r_3$ . Les trois variables articulaires considérées sont :  $\theta_1$ ,  $\theta_2$  et  $\theta_3$ . On ne considèrera pas de butées articulaires donc les trois variables articulaires sont illimitées. La Figure 33(a)

représente l'architecture cinématique d'un manipulateur de la famille étudiée dans la configuration zéro. La Figure 33(b) représente un tel manipulateur en modèle CAO. L'effecteur est représenté par le point P qui est repéré par ses 3 coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$  dans le repère de référence  $(\mathbf{o}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$  attaché au manipulateur.

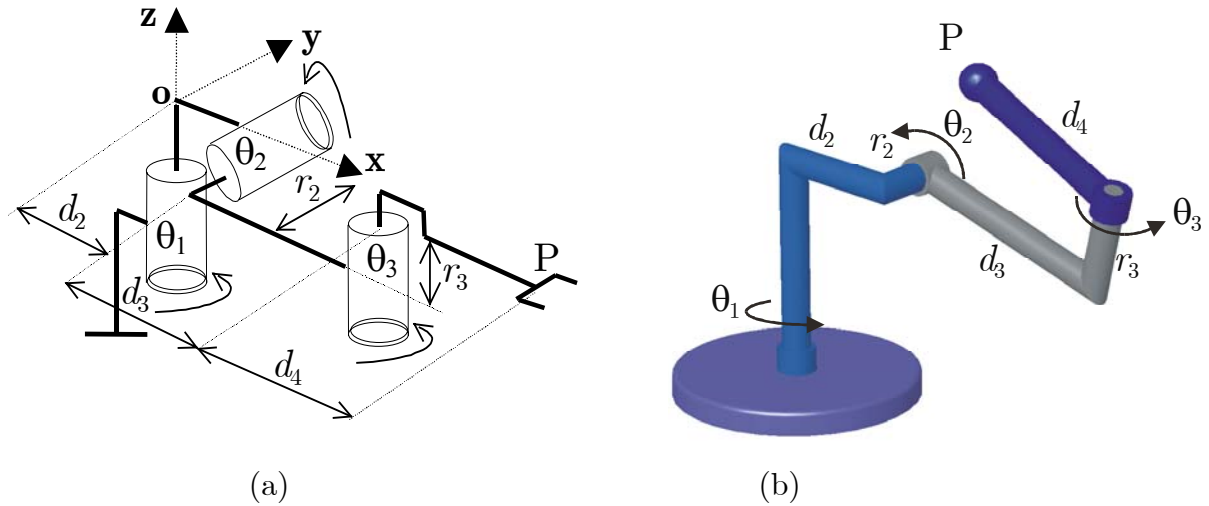


Figure 61 : Manipulateur orthogonal étudié ( $r_3 \neq 0$ )

Pour la famille de manipulateurs étudiée, les équations (39) représentent le MGD :

$$\begin{aligned}
 x &= \left[ d_2 + r_3 s_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2 \right] c_1 - (r_2 + d_4 s_3) s_1 \\
 y &= \left[ d_2 + r_3 s_2 + (d_3 + d_4 c_3) c_2 \right] s_1 + (r_2 + d_4 s_3) c_1 \\
 z &= r_3 c_2 - (d_3 + d_4 c_3) s_2
 \end{aligned} \tag{39}$$

L'étude de la famille de manipulateurs se base sur la topologie des surfaces de singularités dans l'espace de travail. On rappelle la matrice jacobienne préférentielle d'un manipulateur appartenant à cette famille :

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} -s_3 c_2 d_4 - c_2 r_2 & r_3 & -s_3 d_4 \\ s_3 s_2 d_4 + s_2 r_2 & d_3 + c_3 d_4 & 0 \\ c_2 d_3 + c_2 c_3 d_4 + d_2 + s_2 r_3 & 0 & c_3 d_4 \end{pmatrix} \tag{40}$$

Le déterminant de la matrice jacobienne s'écrit :

$$\det(\mathbf{J}) = d_4 \left\{ (d_3 + d_4 c_3) [(d_2 + r_3 s_2) s_3 + (d_3 s_3 - r_2 c_3) c_2] + r_3 (r_2 + d_4 s_3) s_2 c_3 \right\} \tag{41}$$

On caractérise un manipulateur appartenant à la famille étudiée par l'existence ou non d'une cavité toroïdale dans son espace de travail, le caractère cuspidal / non cuspidal ainsi que les propriétés générique / non générique et binaire / quaternaire.

D'une manière similaire au chapitre précédent, on définit la topologie d'une surface de singularité dans l'espace de travail à partir du nombre de points cusps et du nombre de nœuds. On montrera par la suite qu'au sein de la famille étudiée et dans une section de l'espace de travail, un manipulateur peut avoir 0, 2, 4, 6 ou 8 points cusps et 0, 2 ou 4 nœuds. Comme on l'a montré dans le chapitre précédent, ces points singuliers particuliers permettent de caractériser la topologie de l'espace de travail.

Avant de commencer la classification, on donne quelques exemples qui illustrent les différentes topologies de l'espace de travail directement liées à la forme des singularités ainsi qu'au nombre de cusps et de nœuds. En outre, dans chaque région de l'espace de travail, on notera le degré d'accessibilité. On verra que ces topologies d'espace de travail sont nouvelles et n'existent pas dans la famille de manipulateurs étudiée dans le chapitre précédent. De la même manière que la chapitre précédent, on normalise les paramètres de DHm par rapport à  $d_2$  pour diminuer le nombre d'inconnues.

- La Figure 62 correspond à un manipulateur non cuspidal, quaternaire et générique. Dans une section de son espace de travail dans le plan  $(\rho, z)$ , les singularités ne forment ni cusp ni nœud. Ce manipulateur ressemble aux manipulateurs appartenant à la famille étudiée dans le chapitre précédent et dont la topologie de leur espace de travail est  $WT_8$ . Toutefois, les deux branches de singularité dans l'espace articulaire sous forme de droites, que l'on a notées  $D_1$  et  $D_2$ , se tordent avec le paramètre  $r_3$  non nul et donnent lieu à deux zones à deux solutions au MGI dans l'espace de travail et non pas à deux points (on les nomme surfaces de singularité  $D_1$  et surface de

singularité  $D_2$ ). Lorsque ces deux nouvelles surfaces de singularité existent, on verra par la suite que plusieurs cas de figures sont possibles :

- Ces deux surfaces de singularité peuvent se couper entre elles.
- La surface de singularité  $D_1$  peut s'associer la surface de singularité intérieure et former ainsi deux cusps.
- La surface de singularité  $D_2$  peut couper la surface de singularité intérieure.
- La surface de singularité  $D_2$  peut couper à la fois la surface de singularité intérieure et extérieure.

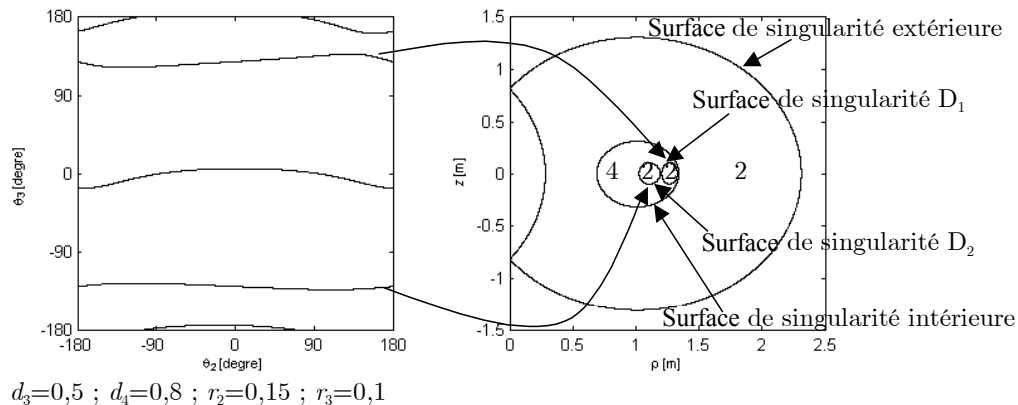


Figure 62 : Manipulateur quaternaire générique avec 0 cusp et 0 nœud

- La Figure 63 caractérise un manipulateur cuspidal, quaternaire et générique. Contrairement aux manipulateurs de la famille étudiée dans le chapitre précédent et ayant deux cusps sur leurs surfaces de singularité intérieures ( $WT_4$  et  $WT_5$ ), les deux cusps de ce manipulateur sont formés sur une troisième surface de singularité sous forme d'un croissant. Ce dernier est l'image d'une branche de singularité fermée dans l'espace articulaire. À l'intérieur de ce croissant, le degré d'accessibilité est de 4.

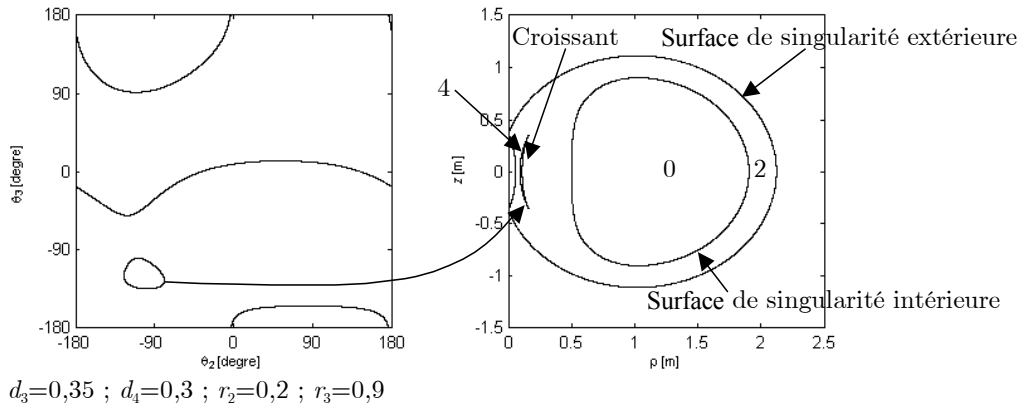


Figure 63 : Manipulateur quaternaire générique avec 2 cusps et 0 nœud

- Un autre cas que l'on ne peut rencontrer dans le chapitre précédent est représenté par la Figure 64. En effet, il s'agit d'un manipulateur cuspidal, quaternaire et générique ayant 4 cusps, 2 nœuds et 2 branches de singularité dans son espace articulaire. Les 4 cusps des manipulateurs rencontrés dans le chapitre précédent sont formés sur la surface de singularité intérieure ( $WT_2$ ,  $WT_3$  et  $WT_4$ ) ou alors sont partagés à égalité entre les surfaces de singularité intérieure et extérieure ( $WT_7$ ). Mais, les 4 cusps du manipulateur représenté par la Figure 64 sont tous formés sur la surface de singularité extérieure.

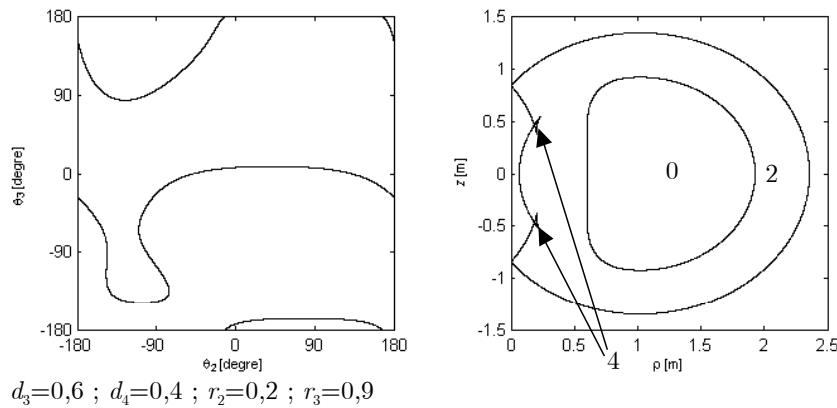


Figure 64 : Manipulateur quaternaire générique avec 4 cusps et 2 nœuds

- La Figure 65 correspond à un manipulateur cuspidal, quaternaire et générique ayant 3 branches de singularité dans son espace articulaire, 6 cusps et 4 nœuds dans son espace de travail. Pour ce manipulateur, 4 cusps sont formés sur la surface de singularité intérieure (le même cas que

les manipulateurs dont la topologie de l'espace de travail est  $WT_2$  du chapitre précédent). Les 2 cusps supplémentaires sont formés sur le croissant, qui, contrairement à la Figure 63, coupe la surface de singularité extérieure.

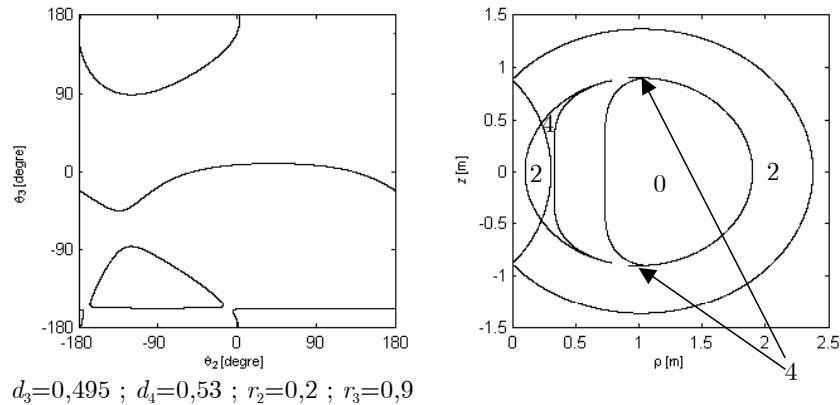


Figure 65 : Manipulateur quaternaire générique avec 6 cusps et 4 nœuds

- Un autre cas que l'on n'a pas rencontré lors de l'étude menée dans le chapitre précédent est illustré par la Figure 66. Il s'agit d'un manipulateur cuspidal, quaternaire et générique ayant 8 cusps et 4 nœuds dans son espace de travail. Quatre cusps sont formés sur la surface de singularité intérieure et les 4 restants sur la surface de singularité extérieure.

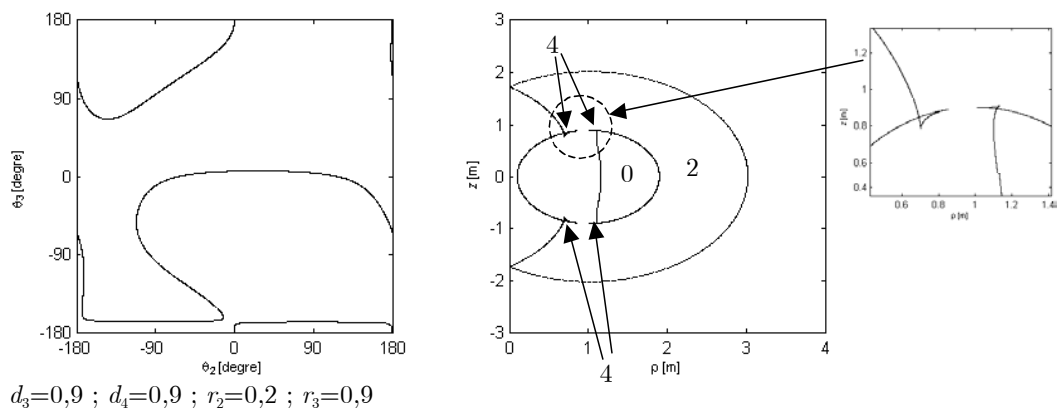


Figure 66 : Manipulateur quaternaire générique avec 8 cusps et 4 nœuds

Ces quelques exemples de manipulateurs donnent une idée sur la diversité des topologies d'espaces de travail que l'on peut rencontrer en plus des 9 topologies possibles présentées dans le chapitre précédent.

### 3.3. POSITION DU PROBLÈME

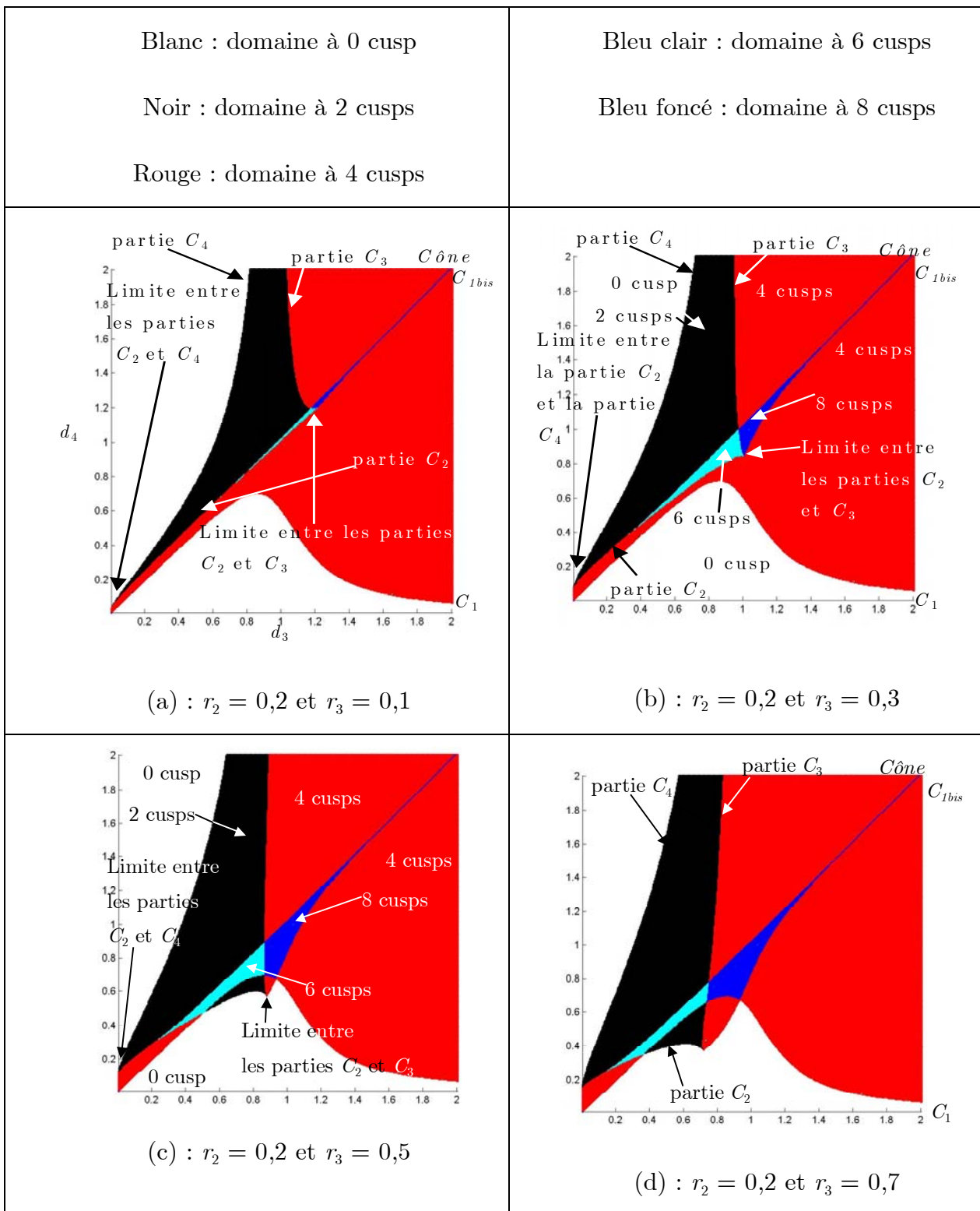
D'une manière similaire au chapitre précédent, le but de ce chapitre est de déterminer toutes les topologies d'espace de travail possibles ainsi que les équations des surfaces les séparant et dont chacune représente la transition entre deux topologies d'espace de travail.

Pour ceci, on doit commencer tout d'abord par déterminer si un manipulateur appartenant à la famille étudiée est cuspidal ou non. Par suite, on doit résoudre le système polynomial  $S$  (équations (22)). Comme on l'a déjà annoncé dans le chapitre précédent, la résolution de ce système est complexe. En effet, en plus des 3 variables  $x$ ,  $y$  et  $z$  représentant la position de l'effecteur et les 3 paramètres de DHm :  $d_3$ ,  $d_4$  et  $r_2$ , on rajoute un autre paramètre de DHm à savoir  $r_3$ . Ceci complique naturellement le problème et le rend très difficile à aborder. Dans le cas où on pourrait le résoudre en utilisant les bases de Groebner, on obtiendra un nombre très élevé de cellules et leurs analyses ne sera pas une tâche aisée.

On commence tout d'abord par déterminer les domaines à nombre de points cusps constant. Comme on l'a annoncé au début du paragraphe, la complexité du problème nous a poussé à commencer par une exploration numérique des différents domaines comme dans le chapitre précédent. On effectue un balayage dans plusieurs sections  $(d_3, d_4)$  de l'espace des paramètres pour un couple  $(r_2, r_3)$  donné. On peut trouver alors plusieurs domaines à différents nombres de cusps. En plus, cette méthode numérique permettra d'avoir une idée sur le nombre et la nature des surfaces séparant ces différents domaines.

La Figure 67 illustre différentes coupes dans plusieurs sections  $(d_3, d_4)$  pour des valeurs des couples  $(r_2, r_3)$  donnés. On voit clairement que l'on retrouve des domaines contenant des manipulateurs non cuspidaux et des domaines contenant des manipulateurs cuspidaux ayant 2, 4, 6 ou 8 cusps. On représente aussi les différentes surfaces séparant les domaines à nombre de cusps constant. On verra en détail dans la suite de ce paragraphe l'équation et la signification de chaque surface.





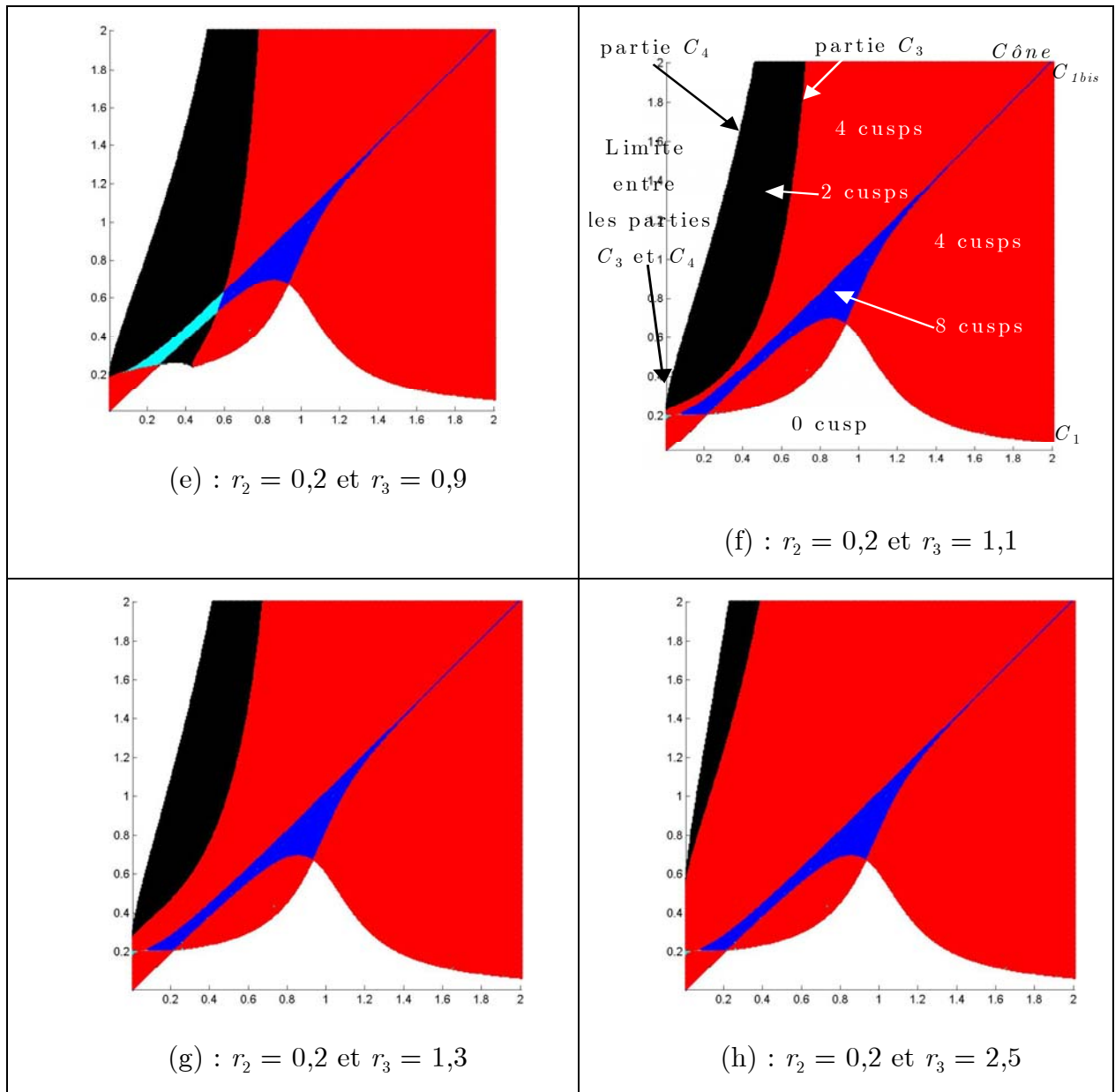


Figure 67 : Différentes sections dans  $(d_3, d_4)$  pour  $(r_2, r_3)$  donné

Sur la Figure 67, les sections (c), (d) et (e) donnent lieu au maximum de domaines. Chacune de ces 3 sections contient 9 domaines dont : 2 domaines à 0 cusps (blanc), 2 domaines à 2 cusps (noir), 3 domaines à 4 cusps (rouge), un domaine à 6 cusps (bleu clair) et un domaine à 8 cusps (bleu foncé).

Pour définir les surfaces séparant les domaines présents dans la Figure 67, on part des surfaces données par le système polynomial  $S$  dans le cas  $r_3$  non nul (équations (23), (24), (25), (26) et (27)). En superposant ces courbes sur la Figure 67, on constate que certaines sont indépendantes de  $r_3$ . La surface  $C_1$  obtenue dans le cas

$r_3 = 0$  reste pertinente lors de cette étude. De plus, on peut constater que deux surfaces qui avaient été obtenues par [Corvez 02] et qui n'étaient pas pertinentes dans le cas  $r_3 = 0$ , le deviennent lorsque  $r_3$  est non nul. La première surface, que l'on nomme  $C_{1\text{bis}}$  (représentée par son équation (42)). Notons que son équation est la seconde racine de l'équation (24) (bicarrée en  $d_4^2$ ) avec l'équation de la surface  $C_1$  (obtenue dans la cas  $r_3 = 0$ ). On note :

$$C_{1\text{bis},d} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)}$$

$$C_{1\text{bis}} : d_4 = C_{1\text{bis},d} \tag{42}$$

La seconde surface qui est devenue pertinente dans ce chapitre est la surface *Cône* définie par l'équation (43). On rappelle que l'on avait nommée  $f_1$  dans le chapitre précédent (23).

$$C\hat{o}n\hat{e} : d_4 = \sqrt{d_3^2 + r_2^2} \tag{43}$$

On vérifie facilement qu'il s'agit bien de ces deux surfaces  $C_{1\text{bis}}$  et *Cône* en traçant leur graphe et en les superposant avec la Figure 67.

Cependant, les surfaces  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  ne divisent plus l'espace des paramètres lorsque  $r_3$  est non nul. Aussi dans ce cas, on est en présence d'une surface nouvelle délimitant le domaine à 2 cusps que l'on nomme  $d_4 = C_{234}$ . On verra dans le paragraphe §3.4.1.4 la signification physique de cette surface et on verra aussi que son équation ne peut pas se factoriser lorsque  $r_3$  est non nul. Mais lorsque  $r_3 = 0$ , son équation peut s'écrire sous la forme d'un produit de 3 facteurs correspondant aux équations des surfaces  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  du chapitre précédent. En observant les différentes sections, on remarque que la surface  $C_{234}$  est composée de 2 ou 3 « parties ». Ces parties ne sont pas des composantes connexes et ne peuvent pas être écrites sous forme explicite. Par commodité et par similitude avec le chapitre précédent, on appellera ces trois « parties » de la surface  $C_{234}$  : partie  $C_2$ , partie  $C_3$  et partie  $C_4$ .

La Figure 68 représente une section de l'espace des paramètres dans le plan  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$ ,  $r_3 = 0,9$ . Les 4 surfaces séparatrices  $C_1$ ,  $C_{1bis}$ ,  $C_{234}$  (que l'on décompose en partie  $C_2$ , partie  $C_3$  et partie  $C_4$ ) et *Cône* sont indiquées. Ces surfaces séparent les domaines à différents nombres de points cusps.

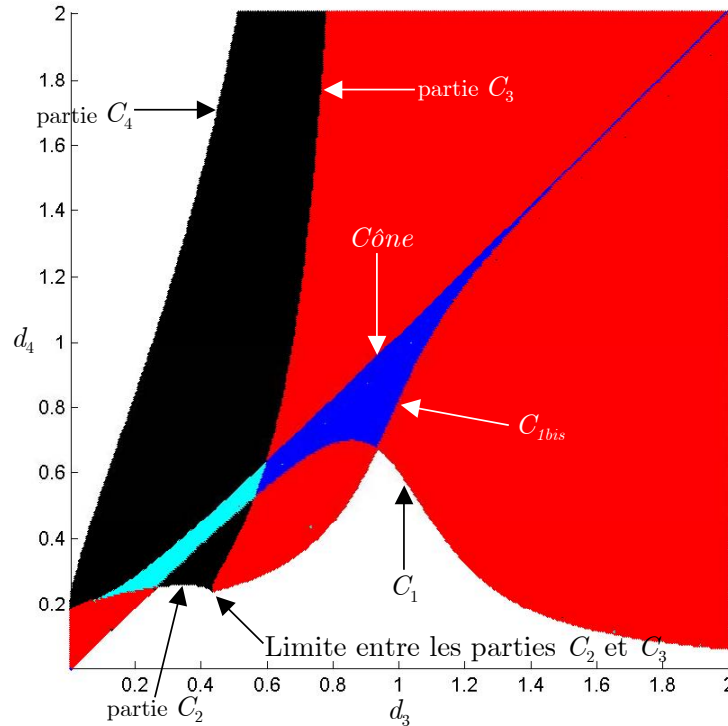


Figure 68 : Les différentes surfaces séparatrices pour  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$

Dans certains cas (sections (c), (d) et (e) de la Figure 67 et Figure 68), on note que la partie  $C_2$  passe en dessous de  $C_1$ . Dans le cas des sections (a) et (b) de la Figure 67, la partie  $C_2$  est au-dessus de  $C_1$ . On constate que le maximum de domaines est obtenu lorsque la partie  $C_2$  passe en dessous de  $C_1$  (sections (c), (d) et (e) de la Figure 67).

Pour illustrer ces règles, la Figure 69 représente les limites entre les 3 parties de  $C_{234}$  lorsque l'on est en présence d'un cas de figure similaire à celui représenté par les sections (c), (d) et (e) de la Figure 67. La limite entre la partie  $C_2$  et la partie  $C_3$  est représentée par la Figure 69, la limite entre la partie  $C_2$  et la partie  $C_4$  est définie par l'intersection avec l'axe des ordonnées. De la même façon, pour les sections (a) et (b) de la Figure 67, la limite entre la partie  $C_2$  et la partie  $C_4$  est définie par l'intersection

avec l'axe des ordonnées tandis que la limite entre la partie  $C_2$  et la partie  $C_3$  est représentée par la Figure 67(a) et la Figure 67(b). Dans les cas (f), (g) et (h) de la Figure 67, on définit seulement la partie  $C_3$  et la partie  $C_4$ . La limite entre ces deux parties est définie par l'intersection avec l'axe des ordonnées (voir Figure 67(f)).

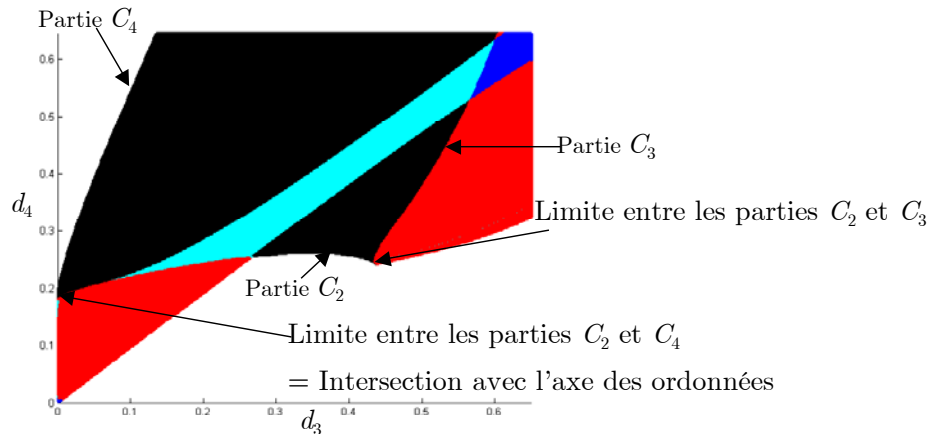


Figure 69 : Limites des parties  $C_2$ ,  $C_3$  et  $C_4$  dans une section  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$

### 3.4. CLASSIFICATION SELON LE NOMBRE DE POINTS CUSPS

Le but de ce paragraphe est d'étudier les différentes formes des espaces de travail en ne tenant compte que du nombre de points cusps. Au sein de la famille de manipulateurs étudiée dans ce chapitre, on va montrer que l'on trouve 9 types de manipulateurs et 4 surfaces pertinentes séparant ces 9 domaines (un manipulateur de type  $i$  correspond au domaine  $i$  où  $1 \leq i \leq 9$ ).

#### 3.4.1. PRÉSENTATION DES 9 TYPES DE MANIPULATEURS CORRESPONDANTS AUX 9 DOMAINES

Les 9 types de manipulateurs sont déterminés en prenant un représentant dans chacun des domaines illustrés par la Figure 70. Les surfaces de séparation sont déterminées en analysant toutes les transitions entre les 9 domaines. Cette analyse est possible en étudiant l'espace articulaire et l'espace de travail d'un manipulateur dont les paramètres de DHm se trouvent sur les frontières des domaines.

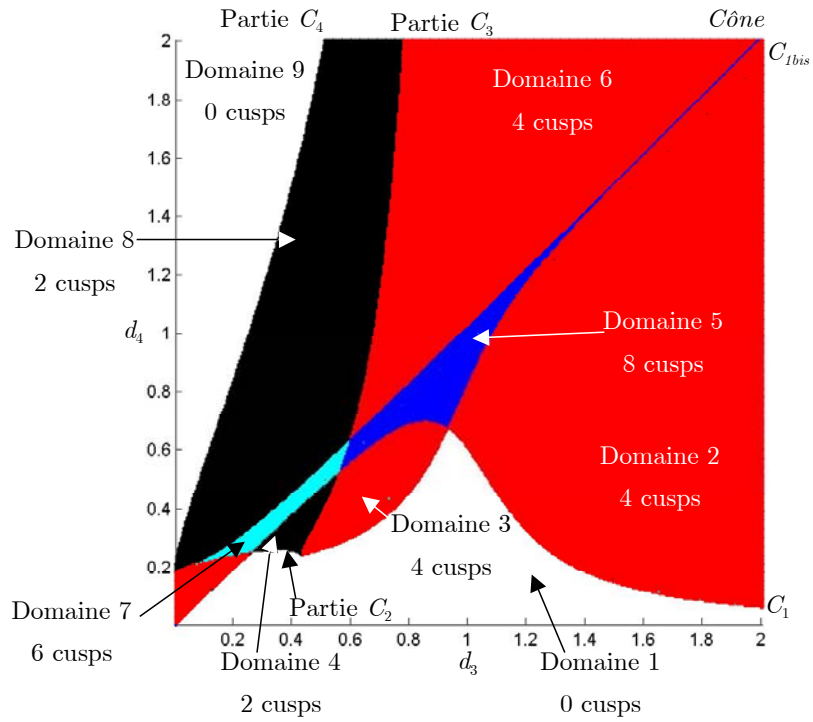


Figure 70 : Les 4 surfaces de séparation et les 9 domaines dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$

### 3.4.1.1. Domaine 1

Le premier type de manipulateurs est caractérisé par la Figure 71. Il est binaire et par suite non cuspidal. Il contient une cavité toroïdale dans son espace de travail, cette cavité est délimitée par la surface de singularité intérieure. Dans son espace articulaire, ce manipulateur a deux aspects.

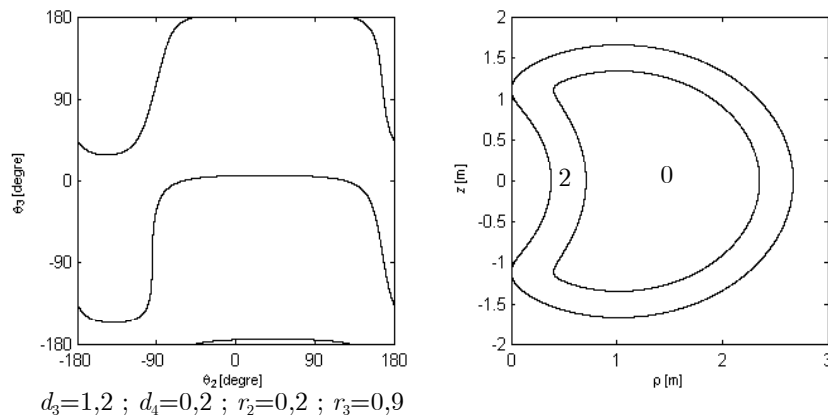


Figure 71 : Manipulateur de type 1

### 3.4.1.2. Domaine 2

La Figure 72 correspond à un manipulateur de type 2. Ce dernier est quaternaire et cuspidal. Dans son espace de travail, le manipulateur a 4 cusps et contient une cavité toroïdale, une zone à 2 solutions et deux zones à 4 solutions au MGI. Ce manipulateur a deux aspects et appartient à la classe d'homotopie  $2(1, 0)$ . Notons qu'une autre catégorie de manipulateur ne contenant ni nœuds ni cavité toroïdale mais 4 cusps est aussi de type 2.

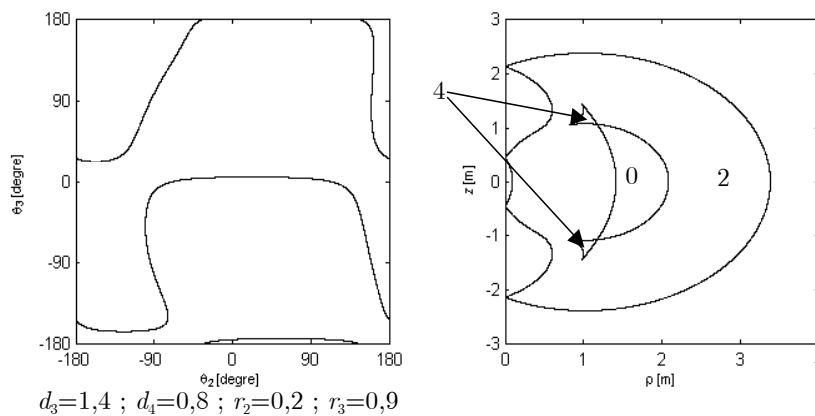


Figure 72 : Manipulateur de type 2

La transition entre les manipulateurs de type 1 et de type 2 est similaire à la transition entre les manipulateurs de type 1 et de type 2 étudiée dans le cas  $r_3 = 0$ . On rappelle que cette transition est représentée par un manipulateur ayant une paire de points quadruples (voir l'annexe B). La Figure 70 montre que le passage du domaine 1 au domaine 2 s'effectue en franchissant la surface de séparation  $C_1$  définie par l'équation (28).

$$C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (44)$$

### 3.4.1.3. Domaine 3

Le troisième type de manipulateurs correspond au domaine 3 et est caractérisé par la Figure 73. Ce manipulateur est quaternaire, cuspidal, a deux aspects dans son

espace articulaire et contient une cavité toroïdale dans son espace de travail. On remarque que les 4 cusps sont formés sur la surface de singularité extérieure et forment ainsi 2 zones à 4 solutions au MGI. La classe d'homotopie d'un tel manipulateur est  $2(1, 0)$ .

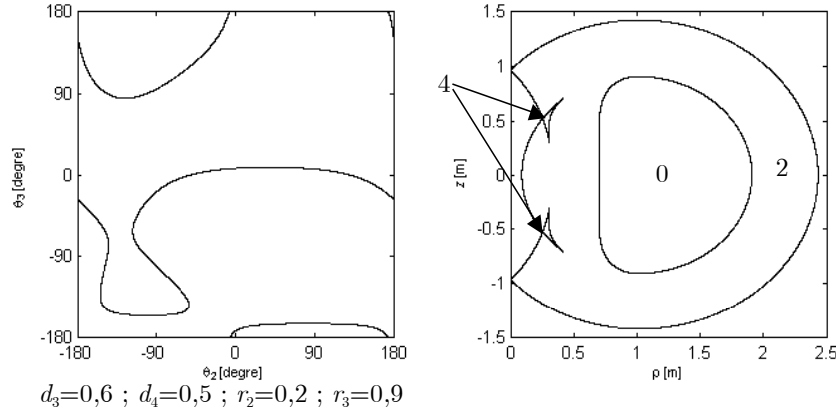


Figure 73 : Manipulateur de type 3

En observant la Figure 70, on remarque que la transition entre un manipulateur de type 1 et un autre de type 3 s'effectue en franchissant la surface de séparation  $C_{1bis}$  (définie par l'équation (42)) dans l'espace des paramètres de DHm. Physiquement, la transition correspond à la création d'une paire de points quadruples sur la surface de singularité extérieure et dont chaque point quadruple donne lieu par la suite à 2 points cusps et un nœud. Rappelons qu'en écrivant la condition d'existence d'un point quadruple, on avait obtenu une expression indépendante de  $r_3$  et faisant apparaître les équations des surfaces  $C_1$  et  $C_{1bis}$  (voir l'annexe B). Dans le cas  $r_3 = 0$ ,  $C_{1bis}$  n'est pas pertinente, on voit qu'elle le devient ici. De la même manière que pour la surface  $C_1$ , la surface  $C_{1bis}$  ne se caractérise pas par l'intersection de branches de singularité dans l'espace articulaire.

#### 3.4.1.4. Domaine 4

Le quatrième type de manipulateurs est caractérisé par la Figure 74. C'est un manipulateur générique, quaternaire cuspidal et a 3 aspects dans son espace articulaire. Dans son espace de travail, il contient une cavité toroïdale, une zone à 2



solutions au MGI et une nouvelle surface de singularité sous forme d'un croissant. Cette dernière contient les deux cusps et délimite une zone à 4 solutions au MGI. Elle est aussi l'image d'une branche de singularité fermée dans l'espace articulaire. Ce manipulateur appartient à la classe d'homotopie  $2(1\ 0) + 1(0, 0)$ . Cette classe d'homotopie n'existait pas dans le cas  $r_3 = 0$ .

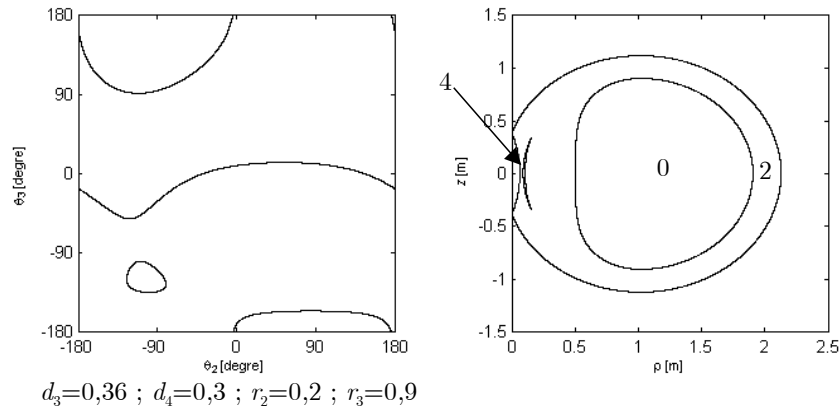


Figure 74 : Manipulateur de type 4

La transition entre un manipulateur de type 1 et un manipulateur de type 4 se fait en franchissant la partie  $C_2$  dans l'espace des paramètres de DHm (voir Figure 70). Une telle transition est caractérisée par le manipulateur correspondant à la Figure 75.

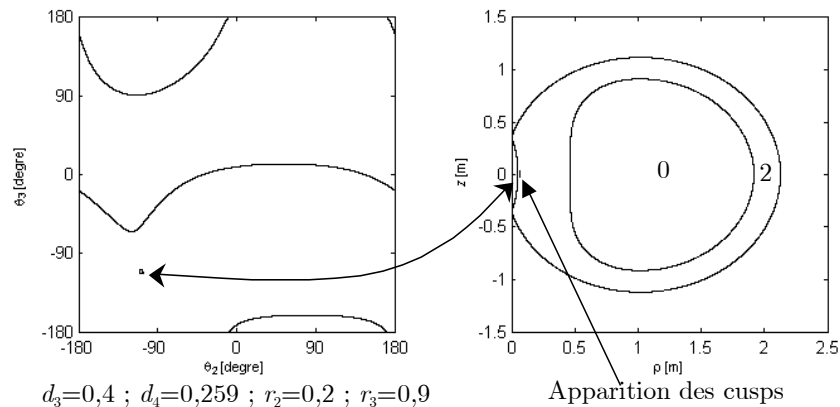


Figure 75 : Transition entre le domaine 1 et le domaine 4

On remarque que la surface de singularité sous forme de croissant dans l'espace de travail se crée en  $z = 0$ , ceci veut dire que les deux points cusps se forment en  $z = 0$ . L'idée est donc de rechercher une condition d'apparition simultanée de ces

deux points cusps sur l'axe  $z = 0$  ce qui permettra de déterminer l'équation de la surface de séparation. On commence alors par déterminer l'équation des singularités dans l'espace de travail en calculant le discriminant du polynôme du MGI. On écrit ensuite la condition d'apparition d'une paire de cusps en  $z = 0$  en fonction des paramètres de DHm et en éliminant le paramètre  $\rho$ . En utilisant le logiciel de calcul symbolique Maple, on obtient une équation très compliquée de degré 12 en  $d_3^2$ ,  $d_4^2$ ,  $r_2^2$  et  $r_3^2$ , ayant 536 monômes (voir l'annexe C). L'algorithme de Charles Wampler [Sommese 01] montre que l'équation trouvée ne peut pas être factorisée. Cette dernière représente la surface  $C_{234}$ .

### 3.4.1.5. Domaine 5

La Figure 76 correspond à un manipulateur de type 5. C'est un manipulateur quaternaire, générique et cuspidal. Ce manipulateur a 2 aspects et appartient à la classe d'homotopie  $2(1, 0)$ . Il a 8 cusps dont 4 sur la surface de singularité intérieure et 4 sur la surface de singularité extérieure. En outre, il a une cavité toroïdale, une zone à 2 solutions et 4 zones à 4 solutions au MGI.

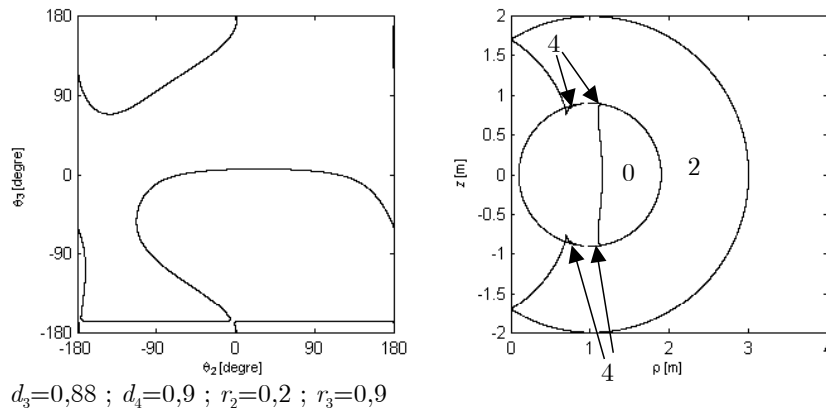


Figure 76 : Manipulateur de type 5

La transition entre un manipulateur de type 2 et un manipulateur de type 5 se fait en franchissant la surface  $C_{1bis}$  dans l'espace des paramètres de DHm. La transition correspond à la création d'une paire de points quadruples en  $z \neq 0$  sur la

surface de singularité extérieure. Chaque point quadruple donnera par la suite 2 cusps et un nœud qui englobent une zone à 4 solutions au MGI.

La transition entre un manipulateur de type 3 et un manipulateur de type 5 se fait en franchissant la surface  $C_1$  dans l'espace des paramètres de DHm. La transition correspond à la création d'une paire de points quadruples en  $z \neq 0$  sur la surface de singularité intérieure. Chaque point quadruple donnera par la suite 2 cusps et un nœud qui englobent une zone à 4 solutions au MGI.

### 3.4.1.6. Domaine 6

La Figure 77 représente un manipulateur de type 6, c'est un manipulateur quaternaire, générique et cuspidal. Ce manipulateur a 3 aspects et appartient à la classe d'homotopie  $2(0, 0)$ , qui n'existait pas dans le cas  $r_3 = 0$ . Dans son espace de travail, 2 cusps sont formés sur la surface de singularité intérieure sous forme d'un poisson tandis que les 2 autres cusps sont formés sur la surface de singularité extérieure. Ce manipulateur contient une zone à 4 solutions et 2 zones à 2 solutions au MGI.

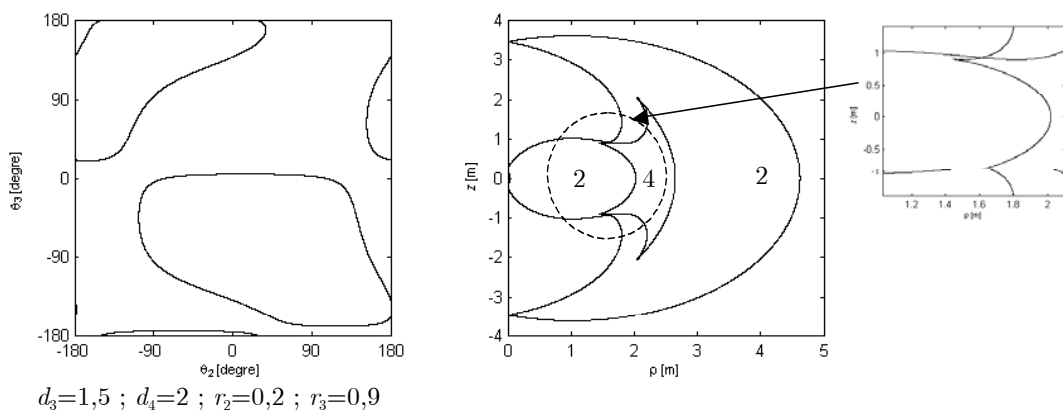


Figure 77 : Manipulateur de type 6

La transition entre un manipulateur de type 5 et un manipulateur de type 6 s'effectue en franchissant la surface *Cône* dans l'espace des paramètres de DHm (voir Figure 70). Cette transition est caractérisée par le manipulateur correspondant à la Figure 78.

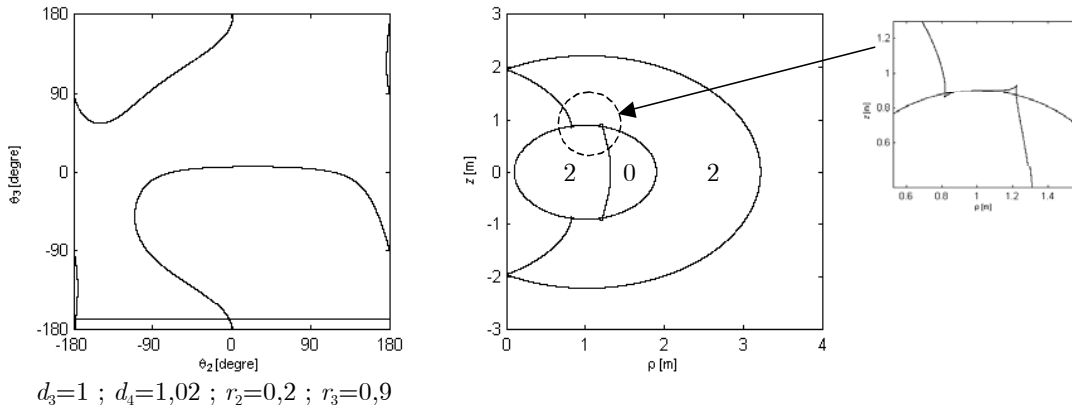


Figure 78 : Transition entre le domaine 5 et le domaine 6

Sur cette transition, on assiste à une coïncidence entre 2 cusps. En effet, un point cusp de la surface de singularité intérieure coïncide avec un autre cusp de surface de singularité extérieure. On passera donc d'un manipulateur à 8 cusps (de type 5) à un manipulateur à 4 cusps (de type 6).

Du côté de l'espace articulaire, la transition correspondant au franchissement de la surface *Cône* s'accompagne de l'apparition d'une singularité supplémentaire sous forme d'une droite. On va déterminer une interprétation géométrique de cette droite. En effet, cette droite singulière est définie par une équation de type :  $d_4 = r_2 c_3 + d_3 s_3$  tel que  $d_4 = \sqrt{r_2^2 + d_3^2}$ . La Figure 79 représente une vue de dessus d'un manipulateur correspondant à la transition entre le domaine 5 et le domaine 6. On remarque que les cotés  $r_2$ ,  $d_3$  et  $d_4$  forment un triangle rectangle. L'organe terminal rencontre une droite parallèle à l'axe 3 et qui coupe l'axe 1 et l'axe 2. Dans le cas particulier où  $\theta_2 = 0$ , cette droite est parallèle à l'axe 3 et l'axe 1, passe par le point terminal et coupe l'axe 2 seulement. Sous la contrainte :  $d_4 = \sqrt{r_2^2 + d_3^2}$ , la droite singulière est une solution unique de l'équation :  $d_4 = r_2 c_3 + d_3 s_3$ .

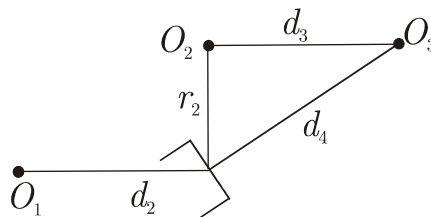


Figure 79 : Vue de dessus d'un manipulateur représentant la transition entre le domaine 5 et le domaine 6

### 3.4.1.7. Domaine 7

Le septième type de manipulateur correspond à la Figure 80. C'est un manipulateur quaternaire et cuspidal ayant 3 aspects dans son espace articulaire et appartenant à la classe d'homotopie  $2(1, 0) + 1(0, 0)$ , qui n'existait pas dans le cas  $r_3 = 0$ . Dans son espace de travail, ce manipulateur a une cavité toroïdale, 2 zones à 2 solutions et 3 zones à 4 solutions au MGI. Deux de ses 6 cusps se trouvent sur le croissant, tandis que les 4 restants se trouvent sur la surface de singularité intérieure.

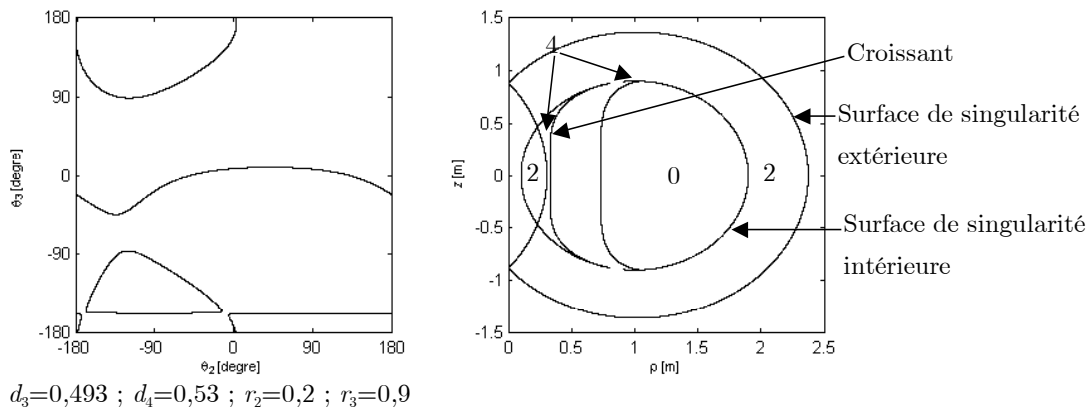


Figure 80 : Manipulateur de type 7

La transition entre un manipulateur de type 2 et un manipulateur de type 7 se fait en franchissant la partie  $C_2$  qui correspond à la création d'une paire de cusps en  $z = 0$  sur le croissant. On passe alors de 4 cusps à 6 cusps.

Une autre transition existe et permet de franchir la surface  $C_1$  pour passer d'un manipulateur de type 4 (2 cusps) à un manipulateur de type 7 (6 cusps). Comme on l'a évoqué précédemment, on aura création de deux paires de cusps en  $z \neq 0$  sur la surface de singularité intérieure à partir de deux points quadruples symétriques par rapport à  $z = 0$ .

On peut en outre passer d'un manipulateur de type 7 à un manipulateur de type 5 en franchissant la partie  $C_3$ . Dans ce cas, on a création d'une paire de cusps en  $z = 0$  exactement comme le cas de la partie  $C_2$ .

### 3.4.1.8. Domaine 8

La Figure 81 représente un manipulateur de type 8, il est quaternaire, générique et cuspidal. Les deux cusps sont formés sur le croissant. Ce manipulateur a une cavité toroïdale, 2 zones à 2 solutions et une zone à 4 solutions au MGI. Ce manipulateur a 4 aspects dans son espace articulaire et appartient à la classe d'homotopie  $2(1, 0) + 1(0, 0)$ .

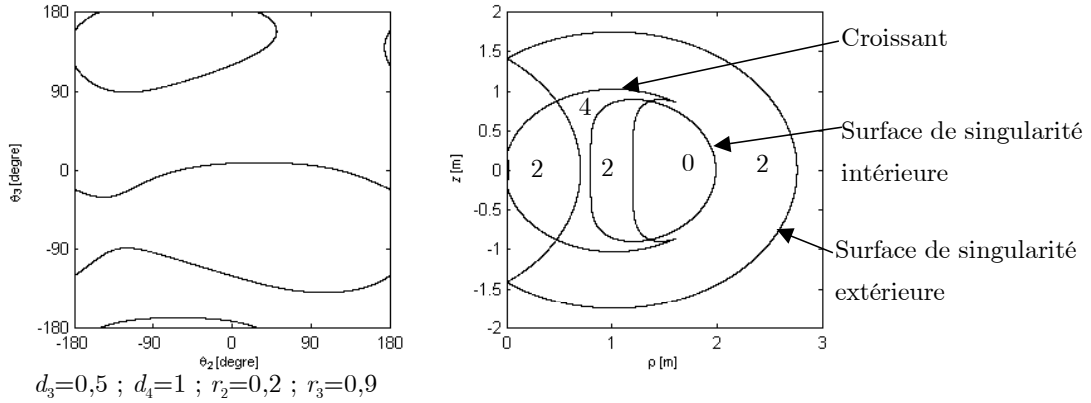


Figure 81 : Manipulateur de type 8

En regardant la section de l'espace des paramètres représentée par la Figure 70 et à partir d'un manipulateur de type 8, 3 transitions sont possibles. La première permet d'avoir un manipulateur de type 7, ce qui veut dire franchissement de la surface *Cône*. Dans l'espace de travail, les 2 cusps contenus dans le croissant du manipulateur de type 7 coïncident avec 2 des 4 cusps contenus dans la surface de singularité intérieure en  $z \neq 0$ . Le croissant récupère ensuite les 2 cusps restants.

La deuxième transition permet de trouver un manipulateur de type 6 en franchissant la partie  $C_3$ . On aura par conséquent création d'une paire de cusps en  $z = 0$  sur la surface de singularité extérieure.

### 3.4.1.9. Domaine 9

La dernière transition permet de trouver un manipulateur de type 9 qui correspond à la Figure 82. C'est un manipulateur quaternaire, générique et non cuspidal. Il appartient à la classe d'homotopie  $4(1, 0)$  et a 4 aspects dans son espace

articulaire. Ce manipulateur a une zone à 4 solutions à l'intérieur de laquelle on trouve deux zones à 2 solutions délimitées par deux surfaces de singularité que l'on a nommé surface de singularité  $D_1$  et surface de singularité  $D_2$  (voir début du chapitre). La zone résultante du chevauchement entre les surfaces de singularité  $D_1$  et  $D_2$  est une cavité toroïdale.

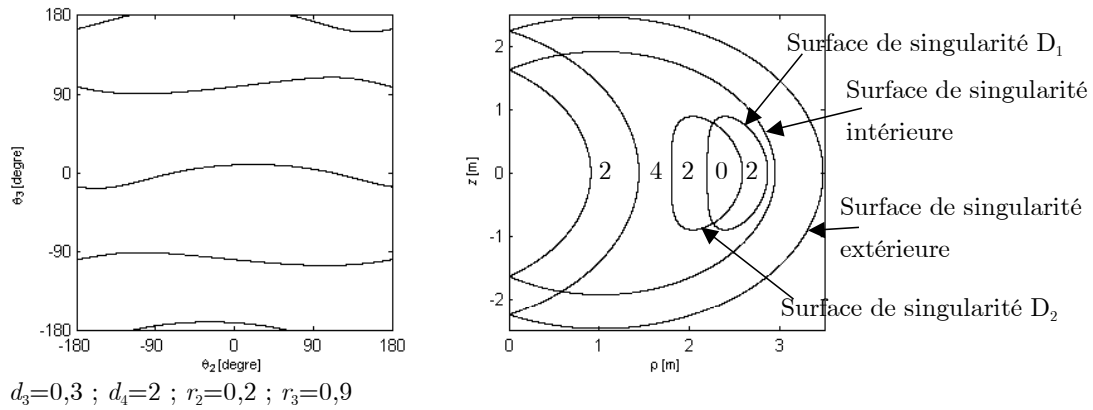


Figure 82 : Manipulateur de type 9

La transition entre le manipulateur de type 9 et le manipulateur de type 8 s'effectue en franchissant la partie  $C_4$ . Par conséquent, on a création de 2 cusps en  $z = 0$  entre la surface de singularité intérieure et la surface de singularité  $D_1$ .

### 3.4.2. PARAGRAPHE RÉCAPITULATIF

Les manipulateurs appartenant au domaine 1 sont binaires et non cuspidaux, ceux appartenant au domaine 9 sont quaternaires et non cuspidaux. En revanche, tous les autres manipulateurs, c'est-à-dire ceux qui appartiennent aux domaines 2 à 8 sont quaternaires et cuspidaux.

La Figure 83 représente une section  $(d_3, d_4)$  dans l'espace des paramètres avec  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$  subdivisée en 9 domaines. Dans chaque domaine, un manipulateur représentant est donné.

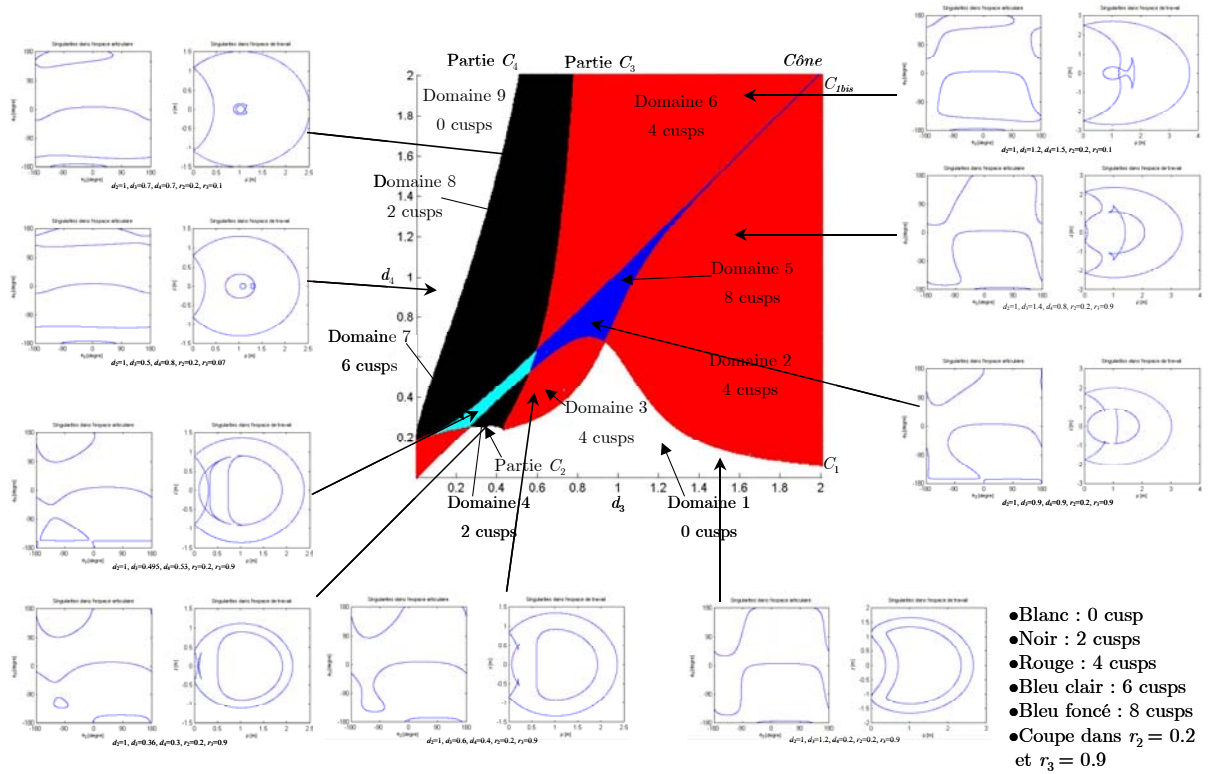


Figure 83 : Les 9 manipulateurs représentants des 9 domaines dans une section  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$

La Figure 84 montre tous les liens entre les 9 types de manipulateurs trouv es. Chaque lien entre deux manipulateurs est traduit par une surface définissant la frontière entre les deux domaines correspondants. Chaque manipulateur est repr esent e par une section de son espace de travail dans le plan  $(\rho, z)$ . Le nombre de points cusps des manipulateurs est pr ecis e.



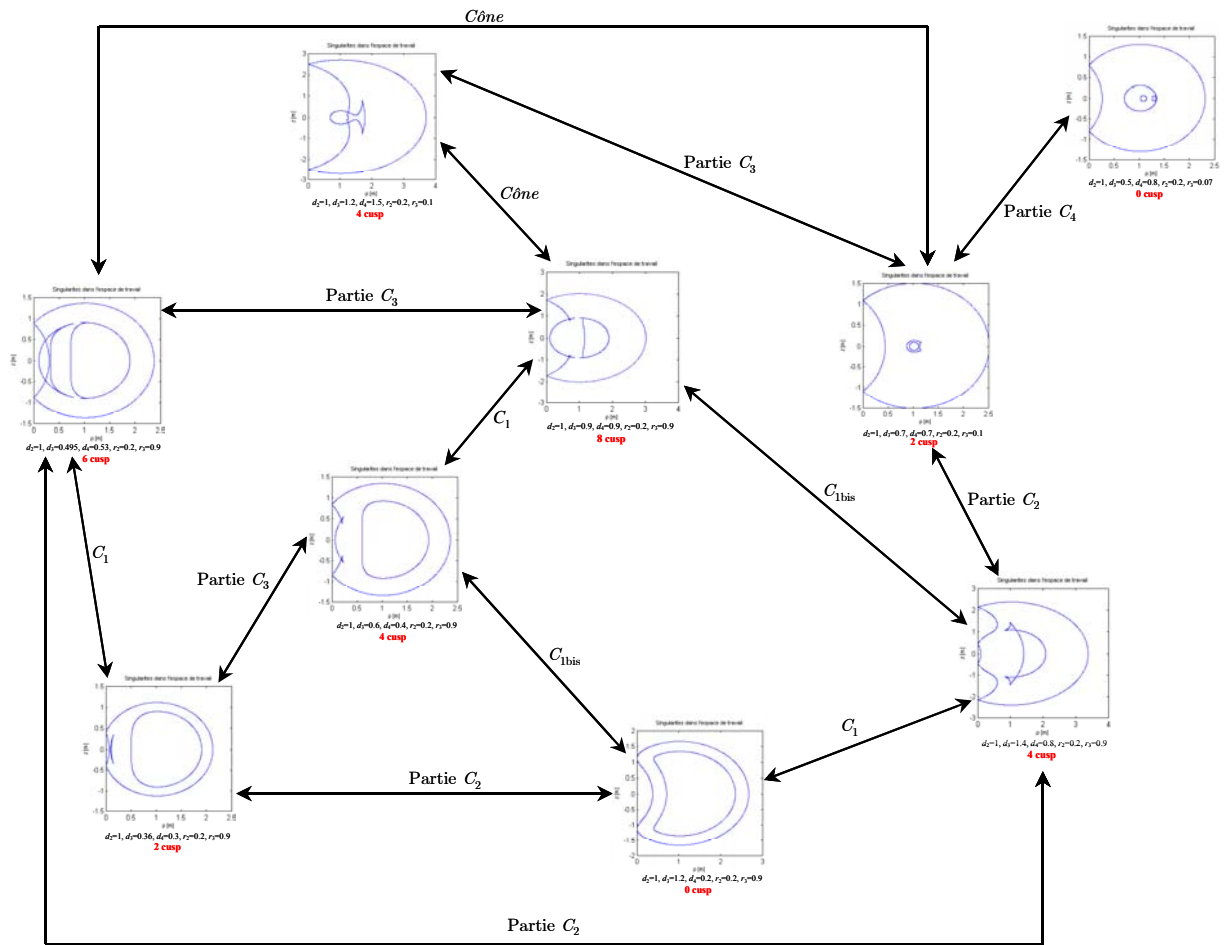


Figure 84 : Les liens entre les 9 manipulateurs correspondants aux 9 domaines

Pour lier l'apparition ou la disparition des cusps dans l'espace de travail avec les différentes surfaces de séparation, on dresse le Tableau 4.

Cusps apparus ou disparus	état lors de la transition	Surfaces correspondantes
4 cusps (2 paires de cusps)	Racine quadruple en $z \neq 0$	$C_1$ et $C_{1bis}$
	2 cusps co�cident en $z \neq 0$	$C\acute{o}ne$
2 cusps	2 cusps apparaissent forcément en $z = 0$	$C_{234}$

Tableau 7 : Liens entre l'apparition ou la disparition des cusps et les surfaces de séparation

### 3.4.3. LIENS ENTRE LES 9 TYPES DE MANIPULATEURS, LEURS CLASSES D'HOMOTOPIE ET LEUR NOMBRE D'ASPECTS

Parmi les 8 classes d'homotopie données dans [Wenger 98], seulement 4 ont été trouvées lors de cette étude. Il s'agit des classes  $2(1, 0)$ ,  $4(1, 0)$ ,  $2(0, 0)$  et  $2(1, 0) + 1(1, 0)$ . Rappelons que dans le cas  $r_3 = 0$ , nous n'avions retrouvé que les deux classes d'homotopie  $2(1, 0)$  et  $4(1, 0)$ . Ces 4 classes d'homotopie ainsi que les domaines correspondants sont présentés dans le Tableau 8. Une remarque importante est à noter : contrairement à ce que l'on aurait pu croire suite aux travaux de [Burdick 95] et [Wenger 98], une classe d'homotopie ne définit pas un nombre constant de points cusps. En effet, les domaines 2, 3 et 5 n'ont pas le même nombre de points cusps tout en appartenant à la même classe d'homotopie  $2(1, 0)$ . Notre classification en fonction du nombre de points cusps est donc plus précise que celle de [Wenger 98].

Classes d'homotopie	Domaines correspondants
$2(1, 0)$	Domaines 2, 3 et 5
$4(1, 0)$	Domaine 9
$2(0, 0)$	Domaine 6
$2(1, 0) + 1(1, 0)$	Domaines 4, 7 et 8

Tableau 8 : Les 4 classes d'homotopie et les domaines correspondants

Le Tableau 5 représente le lien entre les 9 types de manipulateurs et leur nombre d'aspects (on ne décrit que les cas génériques).

Nombre d'aspects	Domaines correspondants
2 aspects	Domaines 1, 2, 3 et 5
3 aspects	Domaines 4, 6 et 7
4 aspects	Domaines 8 et 9

Tableau 9 : Les 9 domaines et leur nombre d'aspects correspondant

### 3.4.4. CONCLUSION

On a divisé l'espace des paramètres  $(d_3, d_4, r_2, r_3)$  de la famille de manipulateurs étudiée en 9 domaines où le nombre de points cusps est constant. Les équations des surfaces séparant ces 9 domaines sont déterminées en analysant les différentes transitions entre deux manipulateurs appartenant à deux domaines voisins. Les surfaces  $C_1$ ,  $C_{1\text{bis}}$  et  $C\hat{o}ne$  sont définies respectivement par les équations (28), (42) et (43) tandis que la surface  $C_{234}$  est définie par l'équation donnée dans l'annexe C.

Pour la famille de manipulateurs étudiée dans ce chapitre, il est impossible d'établir une condition nécessaire et suffisante sous forme explicite des paramètres de DHm pour qu'un manipulateur soit cuspidal tel que nous l'avons fait dans le chapitre précédent. Ceci est dû au fait que l'équation de la surface  $C_{234}$  ne peut pas être factorisée. En effet, la transition entre un manipulateur cuspidal et un manipulateur non cuspidal se situe soit sur  $C_{1\text{bis}}$ , soit sur la partie  $C_2$ , soit sur la partie  $C_4$ . Or, si on connaît l'expression de  $C_{1\text{bis}}$ , on ne connaît ni celle de la partie  $C_2$  ni celle de la partie  $C_4$ .

### 3.5. CLASSIFICATION SELON LE NOMBRE DE NŒUDS

Dans ce paragraphe, on va déterminer toutes les topologies d'espace de travail que l'on peut rencontrer dans la famille de manipulateurs étudiée. Pour ceci, on partira de chaque domaine et on les subdivisera en plusieurs sous-domaines. Dans chaque sous-domaine, le nombre de points cusps et le nombre de nœuds sont constants ce qui définira une topologie d'espace de travail que l'on notera  $WT_i$ . On

déterminera les équations des deux surfaces séparant les topologies d'espace de travail au sein du même domaine.

Au sein d'un même domaine et en choisissant un manipulateur appartenant à une transition entre deux topologies d'espace de travail, on a remarqué que l'apparition ou la disparition de nœuds se fait sur l'axe  $z = 0$ . On rappelle qu'un nœud est défini comme un point où deux racines doubles au MGI coïncident. En recherchant à l'aide de la fonction Résultant de MAPLE, la relation permettant de traduire l'existence d'un tel point sur l'axe  $z = 0$ , on obtient le produit des facteurs donné par l'équation (45) dont les expressions sont données par les équations (46) et (47). Pour plus de détail, voir dans l'annexe C.

$$E_{1\text{gén}, d} \cdot E_{3\text{gén}, d} \cdot C_{234, d} = 0 \quad (45)$$

où :

$$E_{1\text{gén}, d} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 - AB \left| \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)}$$

$$E_{3\text{gén}, d} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left| \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)}$$

Les surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  sont définies par les équations (46) et (47) respectivement. Elles divisent l'espace des paramètres de DHm et les 9 domaines en sous-domaines dont chacun correspond à une seule topologie d'espace de travail. On note que lorsque le paramètre  $r_3$  est nul, on retrouve bien les équations des surfaces  $E_1$  et  $E_3$  données dans le chapitre précédent, ce qui permet de dire que  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  sont la généralisation de  $E_1$  et  $E_3$  dans le cas  $r_3 \neq 0$ . Notons qu'il n'existe pas d'équivalent à la surface  $E_2$  dans le cas  $r_3 \neq 0$ . Rappelons que la surface  $E_2$  provenait de l'apparition de deux branches de singularité supplémentaires liées au fait que l'effecteur pouvait rencontrer l'axe 2, ce qui n'est plus possible avec  $r_3 \neq 0$ .

On distingue les deux cas :  $r_2 < r_3$  et  $r_2 > r_3$ . En effet, lorsque  $r_2 < r_3$ , la surface  $E_{1\text{gén}}$  est au-dessus de la surface  $E_{3\text{gén}}$  (Figure 85(a)) et lorsque  $r_2 > r_3$  la surface  $E_{1\text{gén}}$  passe en dessous de la surface  $E_{3\text{gén}}$  (Figure 85(b)). En étudiant ces deux cas, on arrive à donner une classification exhaustive de toutes les topologies d'espace de travail que l'on peut rencontrer dans la famille de manipulateurs  tudi e au sein de ce chapitre. La Figure 85 repr ente les deux cas possibles.

$$E_{1\text{gén}} : d_4 = E_{1\text{gén}, d} \tag{46}$$

$$E_{3\text{gén}} : d_4 = E_{3\text{gén}, d} \tag{47}$$

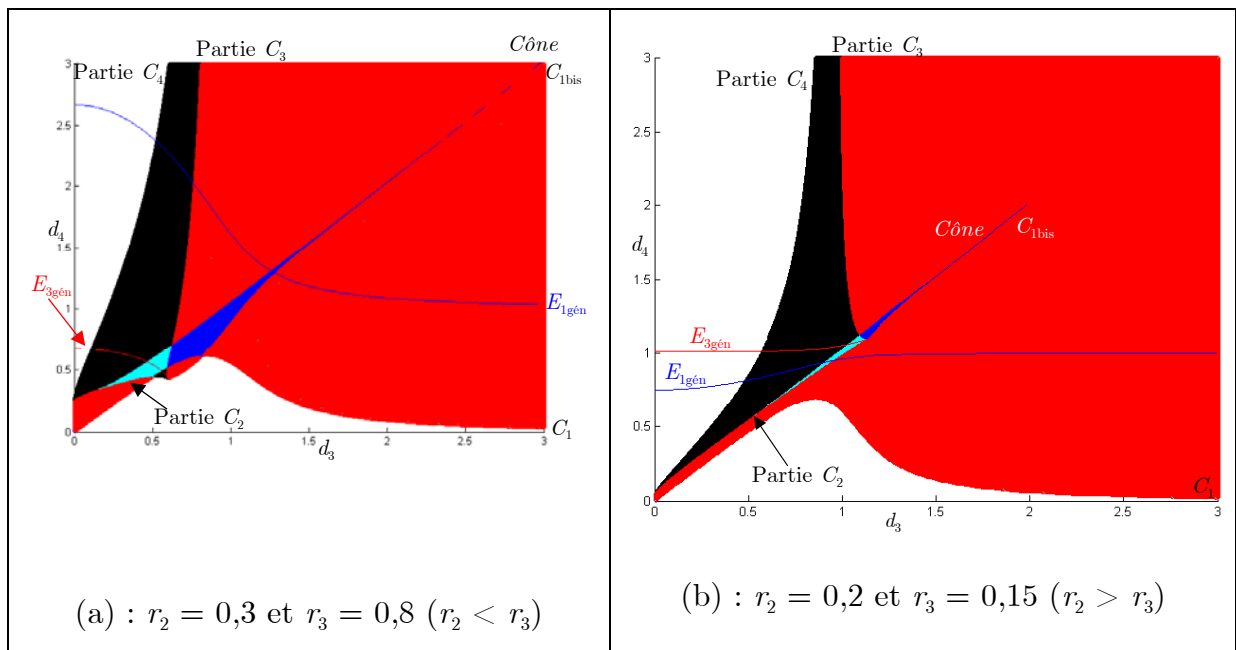


Figure 85 : Les deux cas possibles pour  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$

Notons que lorsque  $r_2 = r_3$ , les deux surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  coïncident et auront comme équation  $d_4 = 1$ . Ce cas particulier ne rajoute pas d'autres topologies d'espace de travail.

Notons aussi que dans le cas  $r_2 < r_3$ , la surface  $E_{3\text{gén}}$  ne peut pas diviser le domaine 1 selon plusieurs sous-domaines ayant différents nombres de nœuds puisque ce domaine ne contient que des manipulateurs binaires (géométriquement, ils ne peuvent pas avoir de nœuds). Dans le cas  $r_2 > r_3$ , la surface  $E_{3\text{gén}}$  ne divise pas le domaine 2. En effet, à partir de la Figure 85(b), on choisit deux manipulateurs

appartenant au domaine 2 (domaine susceptible d'être divisé en deux sous-domaines par  $E_{3\text{gén}}$ ) et situés de part et d'autre de la surface  $E_{3\text{gén}}$ , on constate que le nombre de nœuds reste constant.

$C_{234, d}$  représente l'équation que l'on a trouvée dans le paragraphe précédent et qui définit l'apparition d'une paire de cusps en  $z = 0$ . Le fait de retrouver cette équation est tout à fait normal puisque l'apparition d'une paire de cusps en  $z = 0$  se fait en même temps que l'apparition d'un nœud. En revanche, on ne retrouve pas les équations des surfaces  $C_1$ ,  $C_{1\text{bis}}$  et *Cône* puisque l'apparition des racines triples n'est pas en  $z = 0$ .

### 3.5.1. TOPOLOGIE D'ESPACE DE TRAVAIL DANS LE CAS $r_2 < r_3$

Dans ce paragraphe, on va étudier toutes les topologies d'espace de travail que l'on peut rencontrer dans le cas où  $r_2 < r_3$ . On montre que les manipulateurs vérifiant cette condition peuvent avoir 0, 2 ou 4 nœuds et qu'il existe 18 topologies d'espace de travail différentes.

La Figure 86 représente les 6 surfaces de séparations ( $C_1$ ,  $C_{1\text{bis}}$ ,  $C_{234}$ , *Cône*,  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$ ) et les 18 topologies d'espace de travail dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,3$  et  $r_3 = 0,8$ .

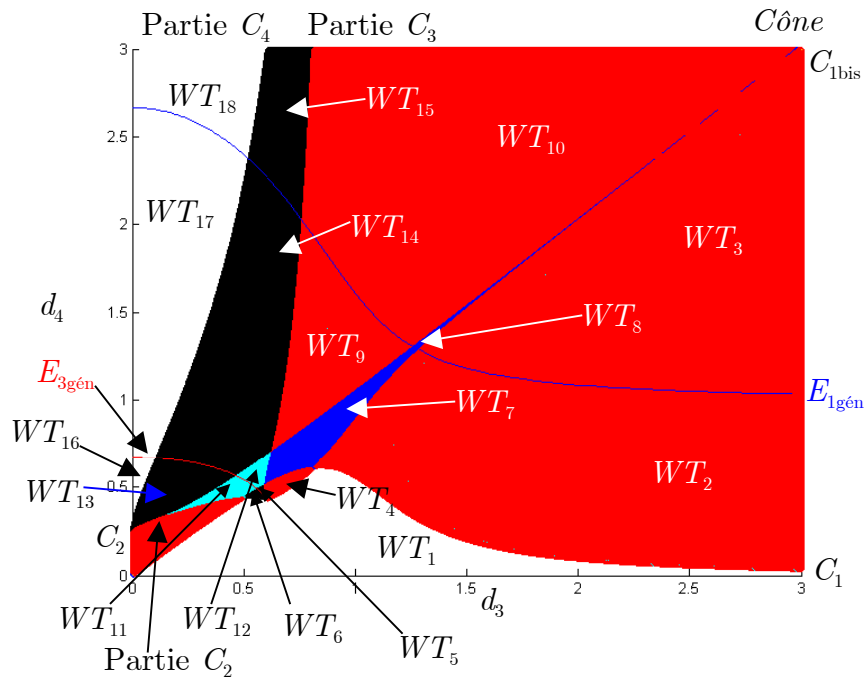


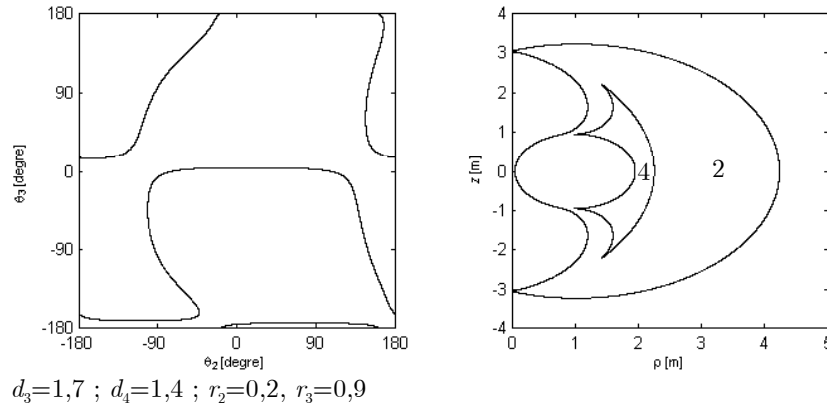
Figure 86 : Les 8 surfaces de séparation et les 18 domaines dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,3$  et  $r_3 = 0,8$

### 3.5.1.1. Domaine 1

Tous les manipulateurs appartenant à ce domaine sont binaires donc non cuspidaux et ont une cavité toroïdale dans leur espace de travail. Par ailleurs, ils ont la même topologie d'espace de travail  $WT_1$  c'est à dire 0 cusp et 0 nœud. Cette topologie d'espace de travail est similaire à la topologie d'espace de travail  $WT_1$  du chapitre précédent. La Figure 71 représente l'espace articulaire et l'espace de travail d'un manipulateur dont la topologie d'espace de travail est  $WT_1$ .

### 3.5.1.2. Domaine 2

La surface  $E_{1g\acute{e}n}$  divise le domaine 2 en deux sous-domaines, il existe donc deux topologies d'espace de travail. Les manipulateurs correspondant à la Figure 72 et la Figure 87 appartiennent tous les deux au domaine 2. Toutefois le premier contient une cavité toroïdale, 2 cusps et 2 nœuds tandis que le deuxième ne contient ni cavité toroïdale ni nœud. Le premier manipulateur représente la topologie d'espace de travail  $WT_2$  tandis que le deuxième représente la topologie d'espace de travail  $WT_3$ .


 Figure 87 : Topologie d'espace de travail  $WT_3$ 

La transition entre ces deux topologies d'espace de travail  $WT_2$  et  $WT_3$  est telle que les deux segments latéraux de la surface de singularité intérieure dans l'espace de travail sont tangents. Le passage de  $WT_3$  à  $WT_2$  correspond à l'apparition d'une paire de nœuds sur l'axe  $z = 0$ . Cette transition est possible en franchissant la surface de séparation  $E_{1\text{gén}}$ .

### 3.5.1.3. Domaine 3

En regardant la Figure 86, on remarque qu'aucune des deux surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  ne passe pas le domaine 3. Par suite, tous les manipulateurs de ce domaine ont la même topologie d'espace de travail  $WT_4$  qui est caractérisée par 4 cusps et 2 nœuds sur la surface de singularité extérieure. La surface de singularité intérieure délimite une cavité toroïdale. Une telle topologie est représentée par le manipulateur de la Figure 73.

### 3.5.1.4. Domaine 4

La surface  $E_{3\text{gén}}$  coupe le domaine 4 en deux sous-domaines, par suite, deux topologies d'espace de travail sont possibles. Le manipulateur correspondant à la Figure 74 a deux cusps sur la surface de singularité sous forme de croissant. En outre, il a une cavité toroïdale et aucun nœud, ce manipulateur définit la topologie d'espace de travail  $WT_5$ . Une autre catégorie de manipulateurs appartenant au domaine 4 existe néanmoins, il s'agit d'un manipulateur ayant une cavité toroïdale, 2 cusps et 2



nœuds. En effet, le croissant coupe la surface de singularité extérieure et fait apparaître ainsi les 2 nœuds. Cette topologie d'espace de travail notée  $WT_6$  est caractérisée par le manipulateur correspondant à la Figure 88. La transition entre ces deux topologies d'espace de travail est réalisée en franchissant la surface de séparation  $E_{3g\acute{e}n}$ . Cette transition est définie pour un manipulateur dont le croissant est tangent la surface de singularité extérieure.

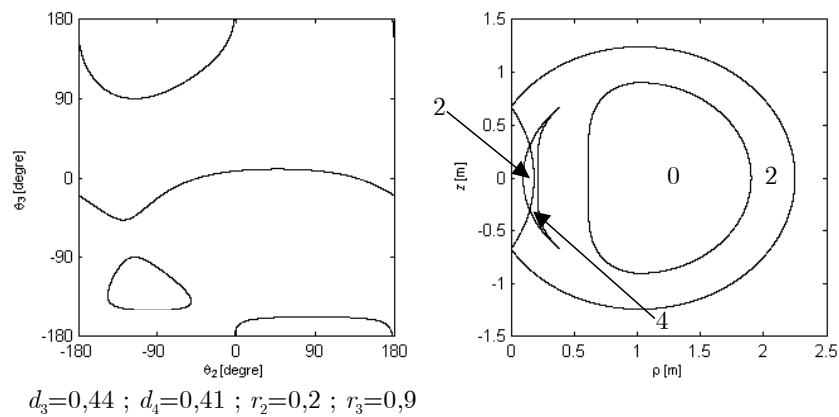


Figure 88 : Topologie d'espace de travail  $WT_6$

### 3.5.1.5. Domaine 5

La surface de séparation  $E_{1g\acute{e}n}$  divise le domaine 5 en deux sous-domaines dont chacun représente une topologie d'espace de travail. La première topologie d'espace de travail est représentée par un manipulateur ayant 4 cusps et 2 nœuds sur la surface de singularité intérieure, ainsi que sur la surface de singularité extérieure et une cavité toroïdale : la  $WT_7$  est par suite définie par 8 cusps, 4 nœuds et une cavité toroïdale (voir Figure 76). En franchissant la surface de séparation  $E_{1g\acute{e}n}$  tout en restant dans le domaine 5, la seconde topologie d'espace de travail que l'on peut rencontrer est la  $WT_8$ . Un manipulateur ayant cette dernière topologie a 8 cusps et 2 nœuds. La surface de singularité intérieure contient 4 cusps tandis que la surface de singularité extérieure contient les 4 cusps restants et 2 nœuds. Lors de la transition entre  $WT_7$  et  $WT_8$ , les 2 nœuds situés sur la surface de singularité intérieure disparaissent avec la cavité toroïdale. Un manipulateur ayant cette topologie d'espace de travail est caractérisé par la Figure 89.

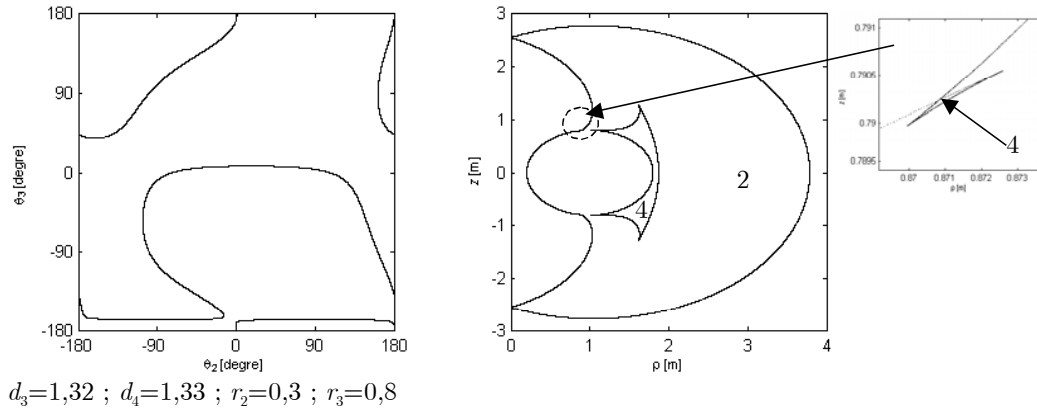


Figure 89 : Topologie d'espace de travail  $WT_8$

### 3.5.1.6. Domaine 6

De la même manière que pour le domaine 5, la surface de séparation  $E_{1\text{gén}}$  divise le domaine 6 en deux sous-domaines dont chacun représente une topologie d'espace de travail. La topologie d'espace de travail  $WT_9$  est représentée par le manipulateur correspondant à la Figure 90. C'est un manipulateur ayant 2 cusps sur la surface de singularité intérieure, 2 cusps sur la surface de singularité extérieure, 4 nœuds dus à l'intersection de ces deux surfaces et une cavité toroïdale. L'autre catégorie de manipulateur appartenant au domaine 6 diffère par son nombre de nœuds qui est de 2 et de l'absence de cavité toroïdale. Cette catégorie est notée  $WT_{10}$  (voir Figure 77). La transition est définie par une tangence verticale entre les surfaces de singularité intérieure et extérieure.

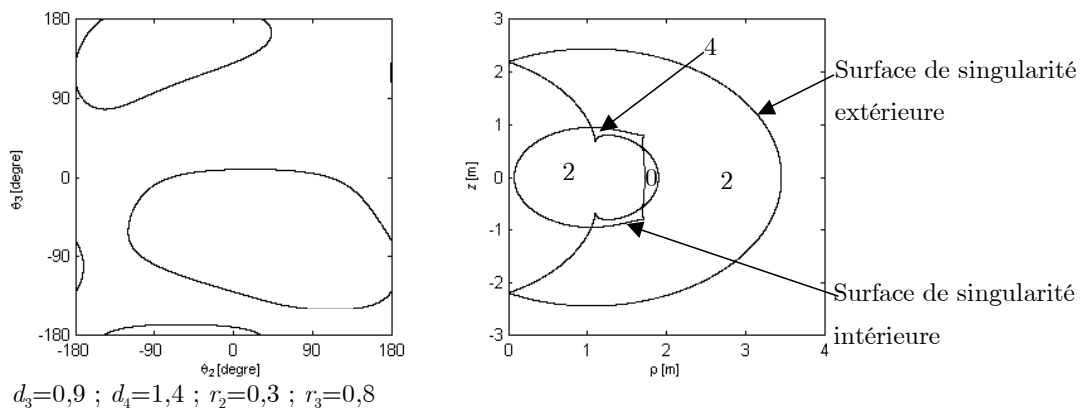


Figure 90 : Topologie d'espace de travail  $WT_9$

**3.5.1.7. Domaine 7**

Le domaine 7 est divisé en deux topologies d'espace de travail par la surface  $E_{3\text{gén}}$ . Chaque topologie d'espace de travail a 6 cusps. La première est notée  $WT_{11}$ , elle est caractérisée par le manipulateur correspondant à la Figure 91. Ce manipulateur contient une cavité toroïdale et deux nœuds. L'autre catégorie est notée  $WT_{12}$ , elle diffère de  $WT_{11}$  par le fait que le croissant coupe la surface de singularité extérieure et rajoute ainsi 2 nœuds (voir Figure 80). La transition entre ces deux topologies d'espace de travail est caractérisée par un manipulateur dont le croissant est tangent à la surface de singularité extérieure. Les paramètres de DHm d'un tel manipulateur doivent vérifier l'équation de la surface  $E_{3\text{gén}}$ .

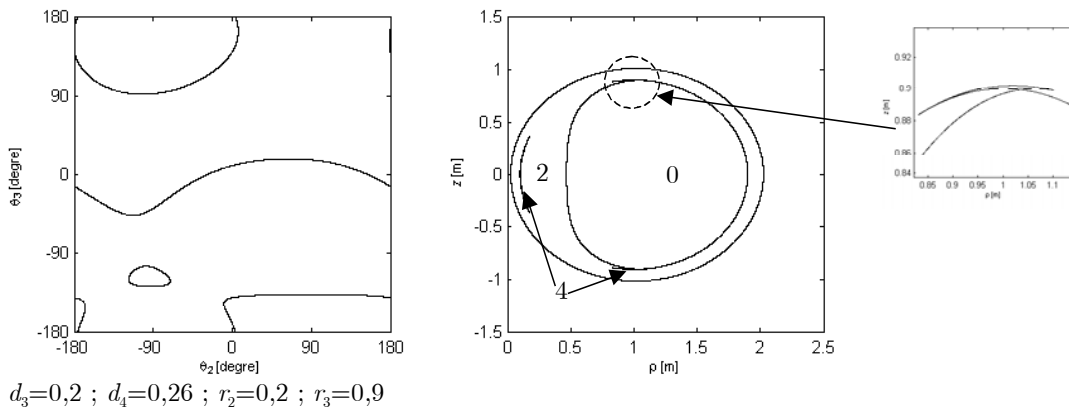


Figure 91 : Topologie d'espace de travail  $WT_{11}$

**3.5.1.8. Domaine 8**

Ce domaine est traversé par les deux surfaces de séparation  $E_{3\text{gén}}$  et  $E_{1\text{gén}}$  à la fois. Comme ces deux surfaces ne se coupent pas, 3 topologies d'espace de travail sont possibles. La première est notée  $WT_{13}$ , elle est représentée par le manipulateur correspondant à la Figure 92. Un manipulateur ayant une topologie d'espace de travail  $WT_{13}$  a une cavité toroïdale, 2 cusps et 2 nœuds résultant de l'intersection entre la surface de singularité intérieure et le croissant.

La Figure 86 montre qu'en franchissant la surface de séparation  $E_{3\text{gén}}$ , on rencontre la topologie d'espace de travail  $WT_{14}$  qui est représentée par le

manipulateur correspondant à la Figure 81. Cette topologie est caractérisée par une cavité toroïdale, 2 cusps, 2 nœuds dus à l'intersection entre la surface de singularité intérieure et le croissant et 2 nœuds supplémentaires dus à l'intersection entre la surface de singularité extérieure et le croissant. Un manipulateur traduisant la transition entre  $WT_{13}$  et  $WT_{14}$  est telle que ses paramètres de DHm vérifient l'équation de la surface  $E_{3\text{gén}}$ . Dans son espace de travail, le croissant est tangent à la surface de singularité extérieure.

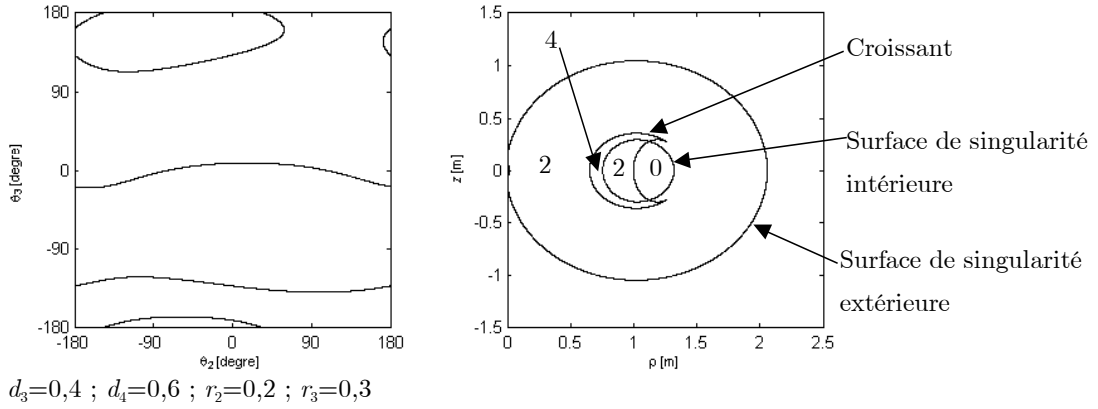


Figure 92 : Topologie d'espace de travail  $WT_{13}$

Le manipulateur illustré par la Figure 93 représente la troisième topologie d'espace de travail  $WT_{15}$  du domaine 8. Une telle topologie est caractérisée par 2 cusps, 2 nœuds dus à l'intersection entre le croissant et la surface de singularité extérieure et aucune de cavité toroïdale. En observant la Figure 86, on remarque que la transition est traduite par un manipulateur dont les paramètres de DHm vérifient l'équation de la surface  $E_{1\text{gén}}$ . Dans son espace de travail, la surface de singularité intérieure est totalement contenue dans le croissant. En plus, elle est tangente à celui-ci.

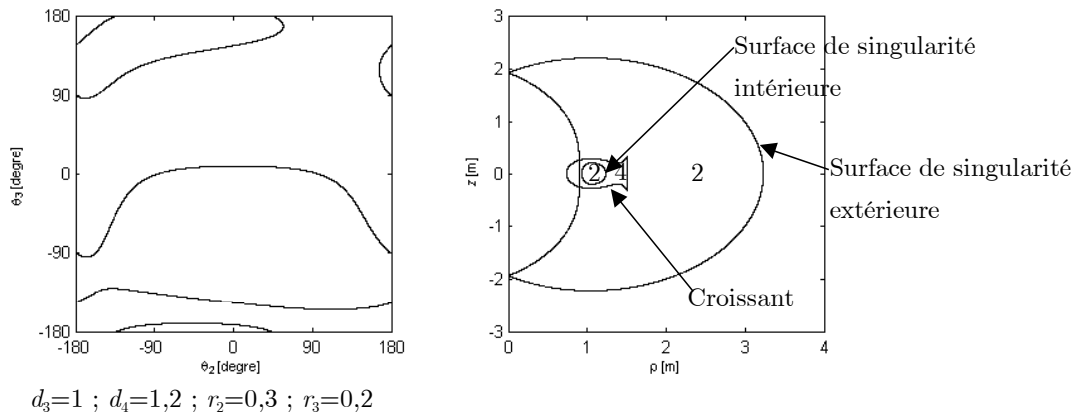


Figure 93 : Topologie d'espace de travail  $WT_{15}$

### 3.5.1.9. Domaine 9

Le dernier domaine étudié ne contient que des manipulateurs quaternaires et non cuspidaux. Ce domaine est aussi traversé par les deux surfaces de séparation  $E_{1g\acute{e}n}$  et  $E_{3g\acute{e}n}$  à la fois, qui ne se coupent pas, par conséquent on va étudier les trois topologies d'espace de travail possibles.

La Figure 94 représente un manipulateur ayant 2 nœuds et une cavité toroïdale, il représente la topologie d'espace de travail  $WT_{16}$ . Les 2 nœuds sont dus à l'intersection entre les deux surfaces de singularité  $D_1$  et  $D_2$ . La zone de chevauchement entre les deux régions délimitées par ces deux surfaces de singularité conduit à une cavité toroïdale.

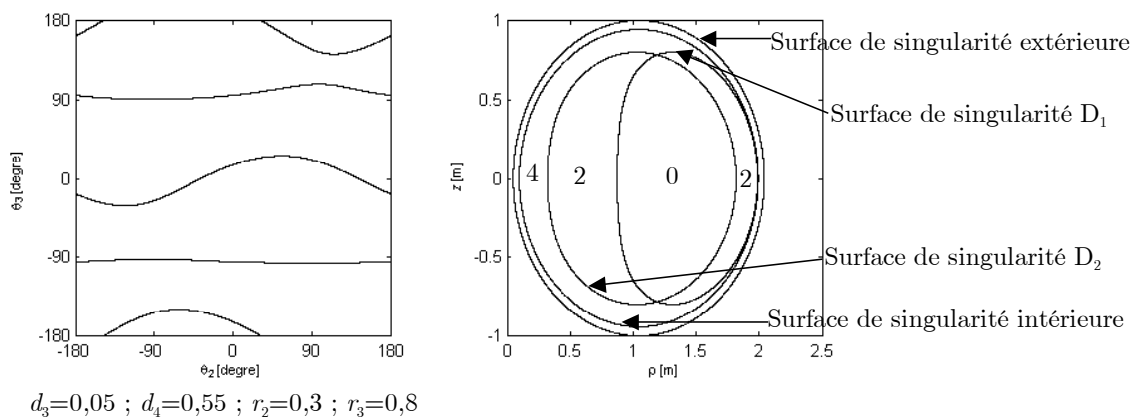


Figure 94 : Topologie d'espace de travail  $WT_{16}$

La deuxième topologie d'espace de travail  $WT_{17}$  est représentée par le manipulateur correspondant à la Figure 95. Ce manipulateur est quaternaire et non

cuspidal. Il a par ailleurs une cavité toroïdale et 4 nœuds : les deux premiers sont dus à l'intersection entre la surface de singularité  $D_1$  et la surface de singularité  $D_2$  tandis que les deux derniers sont dus à l'intersection entre la surface de singularité intérieure et la surface de singularité extérieure. La transition entre les topologies d'espace de travail  $WT_{16}$  et  $WT_{17}$  est définie par un manipulateur dont la surface de singularité intérieure est tangente à la surface de singularité extérieure. Les paramètres de DHm d'un tel manipulateur doivent vérifier l'équation de la surface  $E_{3\text{gén}}$ .

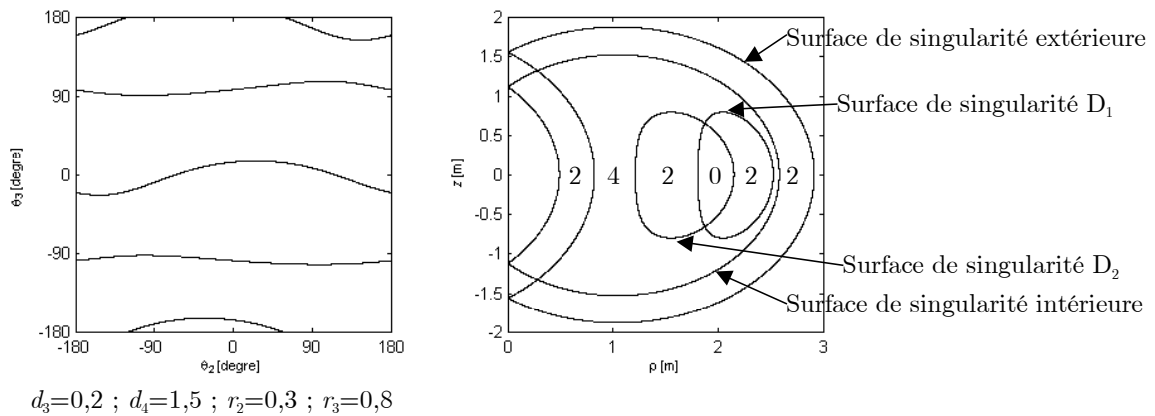


Figure 95 : Topologie d'espace de travail  $WT_{17}$

Une troisième catégorie d'espace de travail notée  $WT_{18}$  est représentée par le manipulateur correspondant à la Figure 96. Il s'agit d'un manipulateur ayant 2 nœuds dus à l'intersection des deux surfaces de singularité extérieure et intérieure. Les nœuds dus à l'intersection entre la surface de singularité  $D_1$  et la surface de singularité  $D_2$  disparaissent avec la cavité toroïdale.

La transition entre les topologies d'espace de travail  $WT_{17}$  et  $WT_{18}$  est définie par un manipulateur dont les deux surfaces de singularité  $D_1$  et  $D_2$  sont tangentes. Sur le plan de l'espace des paramètres de DHm, cette transition correspond à un franchissement de la surface de séparation  $E_{1\text{gén}}$  (voir Figure 86).

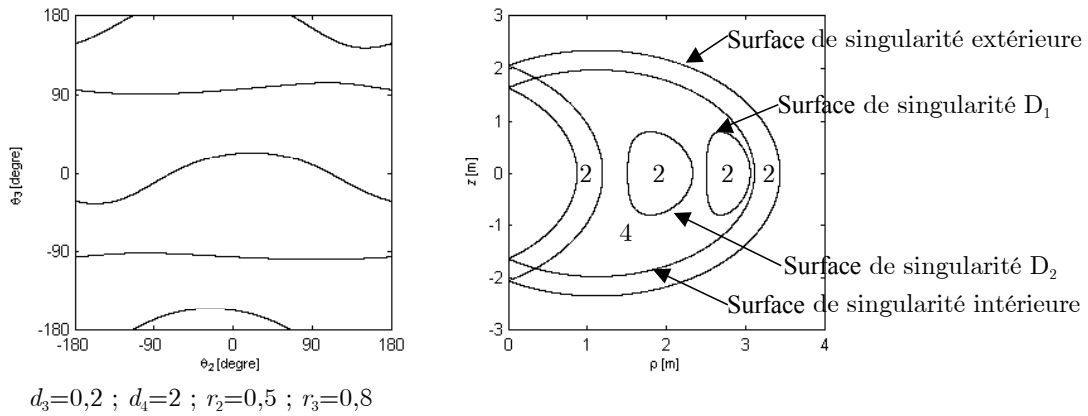


Figure 96 : Topologie d'espace de travail  $WT_{18}$

En résumé, dans le cas  $r_2 < r_3$ , les 9 domaines initiaux peuvent être divisés en 18 topologies d'espace de travail différentes.

### 3.5.2. TOPOLOGIE D'ESPACE DE TRAVAIL DANS LE CAS $r_2 > r_3$

Dans ce paragraphe, on va étudier les topologies d'espace de travail supplémentaires que l'on n'a pas rencontrées dans le cas précédent. On va montrer que les manipulateurs représentant ces nouvelles topologies d'espace de travail peuvent avoir 0, 2 ou 4 nœuds. Toutefois, ces topologies supplémentaires n'apparaissent pas dans tous les domaines à nombre de points cusps constants. On ne citera donc que les domaines les faisant intervenir.

Dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$ , la Figure 97 représente les 6 surfaces de séparations ( $C_1$ ,  $C_{1bis}$ ,  $C_{234}$ ,  $Cône$ ,  $E_{1géné}$  et  $E_{3géné}$ ). Les dix anciennes topologies d'espace de travail que l'on a rencontré dans le paragraphe précédent ainsi que 4 topologies d'espace de travail supplémentaires que l'on peut trouver dans le cas  $r_2 > r_3$  sont présentées.

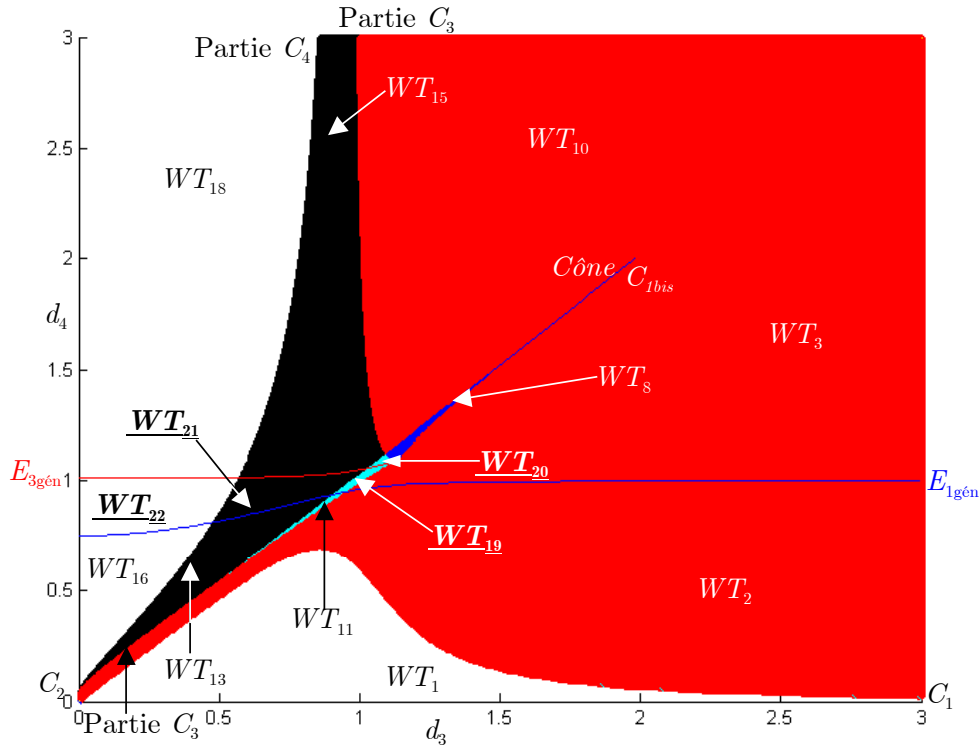


Figure 97 : Les 6 surfaces de séparation et les 14 domaines dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,15$  (les topologies d'espace de travail supplémentaires sont notées en Gras et Souligné)

Dans le cas où  $r_2 > r_3$ , le domaine 7 rajoute deux topologies d'espace de travail supplémentaires :  $WT_{19}$  et  $WT_{20}$ .

La Figure 98 correspond à un manipulateur de topologie d'espace de travail  $WT_{20}$ . Ce manipulateur contient 6 cusps (dont 4 sur la surface de singularité intérieure et 2 sur le croissant) et pas de nœud. Dans son espace de travail, ce manipulateur contient une zone à 2 solutions et 2 zones à 4 solutions au MGI.

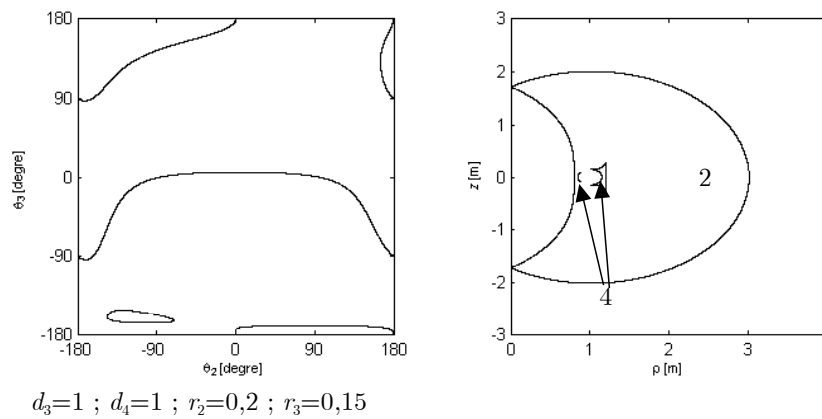


Figure 98 : Topologie d'espace de travail  $WT_{19}$



La seconde catégorie de topologie d'espace de travail appartenant au domaine 7 est la  $WT_{20}$ . Un manipulateur appartenant à cette topologie est caractérisé par la Figure 99. Ce manipulateur a 6 points cusps et 2 nœuds dans son espace de travail. Les 2 nœuds sont donnés par l'intersection de la surface de singularité extérieure avec le croissant. Ce manipulateur contient 2 zones à 4 solutions et 2 zones à 2 solutions au MGI.

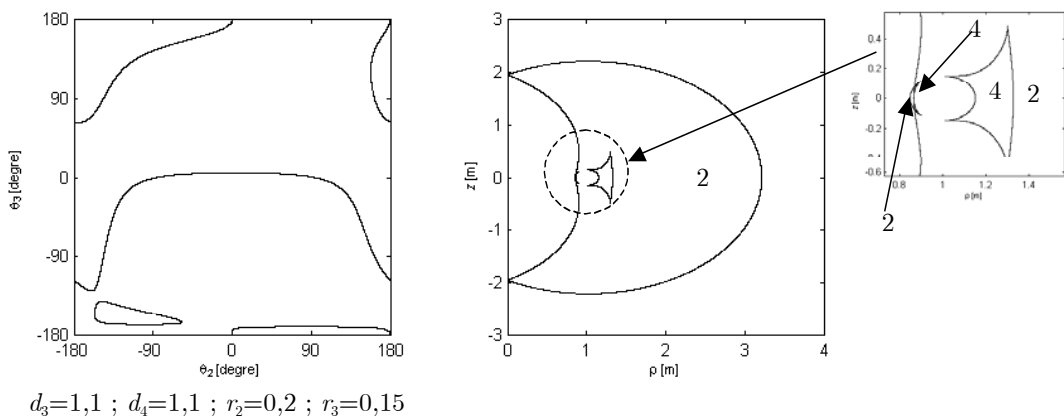


Figure 99 : Topologie d'espace de travail  $WT_{20}$

La transition entre les deux topologies d'espace de travail  $WT_{19}$  et  $WT_{20}$  est définie par un manipulateur dont le croissant est tangent à la surface de singularité extérieure. Dans l'espace des paramètres de DHm, cette transition correspond à un franchissement de la surface de séparation  $E_{3\text{gén}}$  (voir Figure 97).

La troisième topologie d'espace de travail dans le cas où  $r_2 > r_3$  et appartenant au domaine 7 est la  $WT_{11}$  rencontrée dans le paragraphe précédent. En effet, la zone contenant les manipulateurs dont la topologie d'espace de travail est la  $WT_{11}$  est située en dessous des deux courbes  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$ . Par suite, le changement de positions de ces deux dernières n'influencera pas la forme de l'espace de travail.

En observant la Figure 97, on remarque que la transition entre  $WT_{11}$  et  $WT_{19}$  correspond à un franchissement de la surface de séparation  $E_{1\text{gén}}$ . Ceci correspond à la disparition de la cavité toroïdale formée par la surface de singularité intérieure.

Le changement de position relative des deux surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  donne lieu à une autre subdivision du domaine 8 en rajoutant une topologie d'espace de travail

supplémentaire, à savoir  $WT_{21}$ , en plus de  $WT_{13}$  et  $WT_{15}$ . Une telle topologie d'espace de travail est représentée par le manipulateur correspondant à la Figure 100. Ce manipulateur a 2 cusps et aucun nœud. De plus, il a une zone à 4 solutions et 2 zones à 2 solutions au MGI.

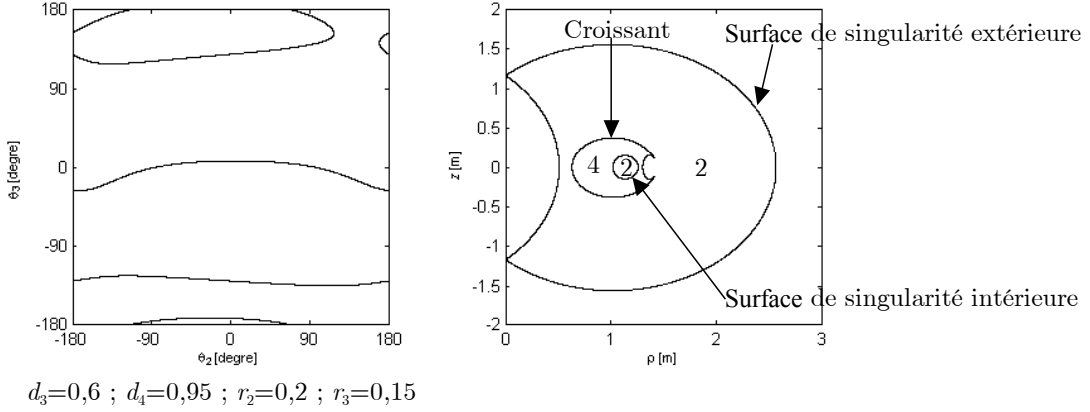


Figure 100 : Topologie d'espace de travail  $WT_{21}$

Étant donné que le domaine 8 est subdivisé en 3 topologies d'espace de travail différentes, deux transitions sont possibles. La première transition correspond au franchissement de la surface de séparation  $E_{1\text{gén}}$  et permet le passage de  $WT_{21}$  à  $WT_{13}$ . Ceci donne lieu à la création de 2 nœuds par l'intersection du croissant et de la surface de singularité intérieure. Le cas limite se présente lorsque la surface de singularité intérieure est totalement contenue dans le croissant et tangente à celui-ci. La deuxième transition correspond au franchissement de la surface de séparation  $E_{3\text{gén}}$  et permet le passage de  $WT_{21}$  à  $WT_{15}$ . Ceci correspond à la création de 2 nœuds dus à l'intersection entre le croissant et la surface de singularité extérieure.

Le dernier domaine introduisant une topologie d'espace de travail supplémentaire dans le cas où  $r_2 > r_3$  est le domaine 9. Cette topologie est  $WT_{22}$ , elle est représentée par le manipulateur correspondant à la Figure 62. Ce manipulateur est quaternaire non cuspidal et n'a aucun de nœud. Il a une zone à 4 solutions et 3 zones à 2 solutions au MGI. Au sein de ce domaine, deux transitions sont possibles. La Figure 97 montre que la première transition permet de passer de  $WT_{16}$  à  $WT_{22}$  en franchissant la surface de séparation  $E_{1\text{gén}}$ . Ceci permet la disparition de 2 nœuds par

l'intersection des deux surfaces de singularité  $D_1$  et  $D_2$ . Le cas limite se présente lorsque ces 2 surfaces sont tangentes.

La deuxième transition entre  $WT_{22}$  à  $WT_{18}$  est définie par la création de deux nœuds par l'intersection entre les surfaces de singularité intérieure et extérieure. En observant la Figure 97, on peut définir cette transition par un manipulateur dont les paramètres de DHm vérifient l'équation de la surface de séparation  $E_{3\text{gén}}$ . Dans l'espace de travail d'un tel manipulateur, les deux surfaces de singularité intérieure et extérieure sont tangentes.

- Conclusion

On a subdivisé les 9 domaines à nombre de points cusps constant en plusieurs topologies d'espace de travail. En effet, deux surfaces  $E_{1\text{gén}}$  (donnée par l'équation (46)) et  $E_{3\text{gén}}$  (donnée par l'équation (47)) ont subdivisé l'espace des paramètres  $(d_3, d_4, r_2, r_3)$  de la famille de manipulateurs étudiée en plusieurs topologies d'espace de travail. Deux cas se présentent :  $r_2 < r_3$  et  $r_2 > r_3$ . Par suite et selon chacun des deux cas étudiés,  $E_{1\text{gén}}$  est au-dessus (respectivement en dessous) de  $E_{3\text{gén}}$ . On trouve en totalité 22 topologies d'espace de travail différentes. Tous les manipulateurs appartenant à ces 22 topologies d'espace de travail ne peuvent avoir que 0, 2 ou 4 nœuds.

Afin de rappeler le rôle de chacune de deux surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  sur l'apparition ou la disparition des nœuds dans l'espace de travail ainsi que son interprétation géométrique, on dresse le Tableau 10.

Nœuds apparus ou disparus	Interprétation géométrique de la surface	Surfaces correspondantes
Un couple de nœuds en $z = 0$	Limite entre manipulateurs ayant ou pas une cavité toroïdale	$E_{1\text{gén}}$
	La surface de singularité extérieure rencontre une autre (la surface de singularité intérieure ou le croissant)	$E_{3\text{gén}}$

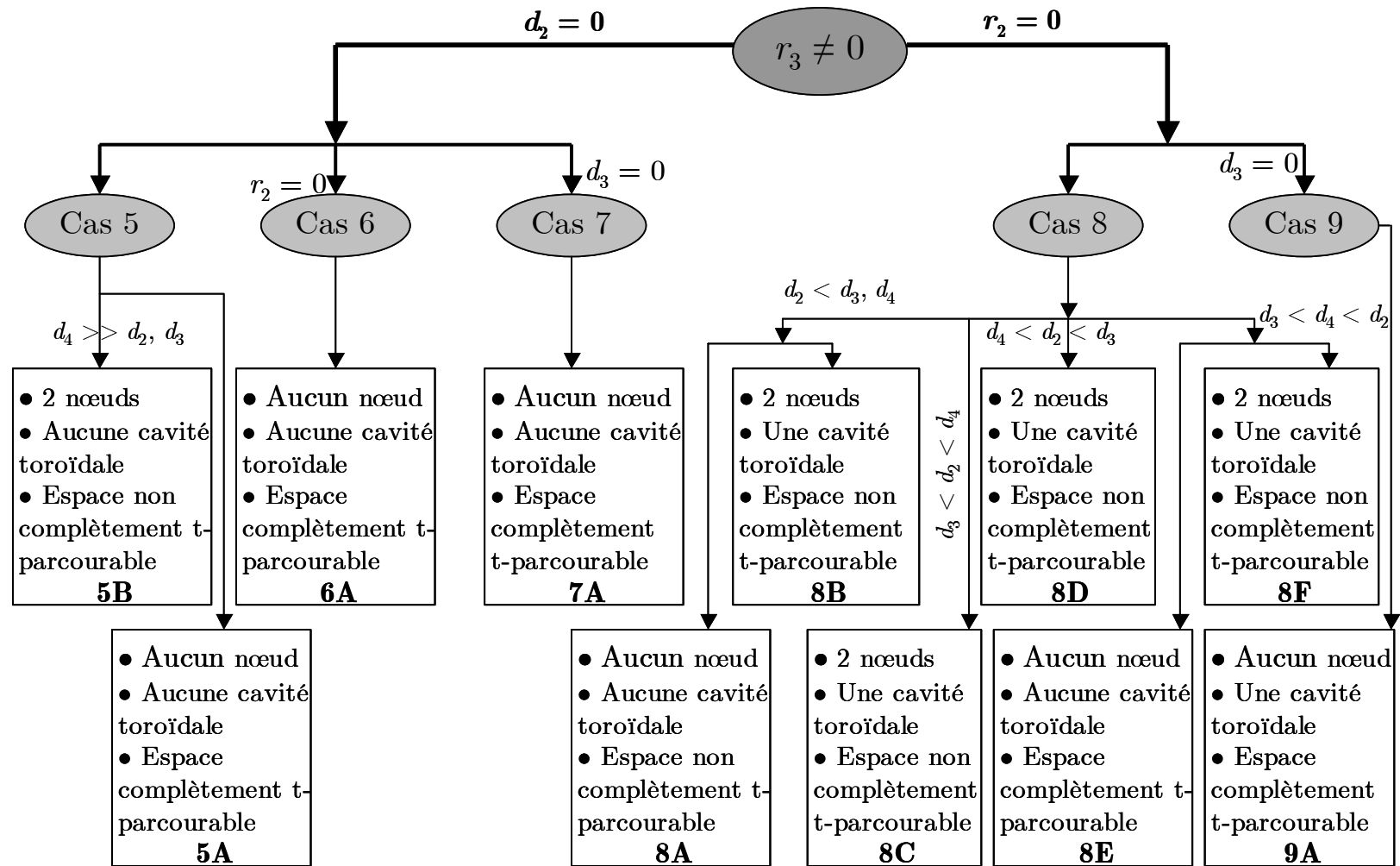
Tableau 10 : Liens entre l'apparition ou la disparition des nœuds et les surfaces de séparation

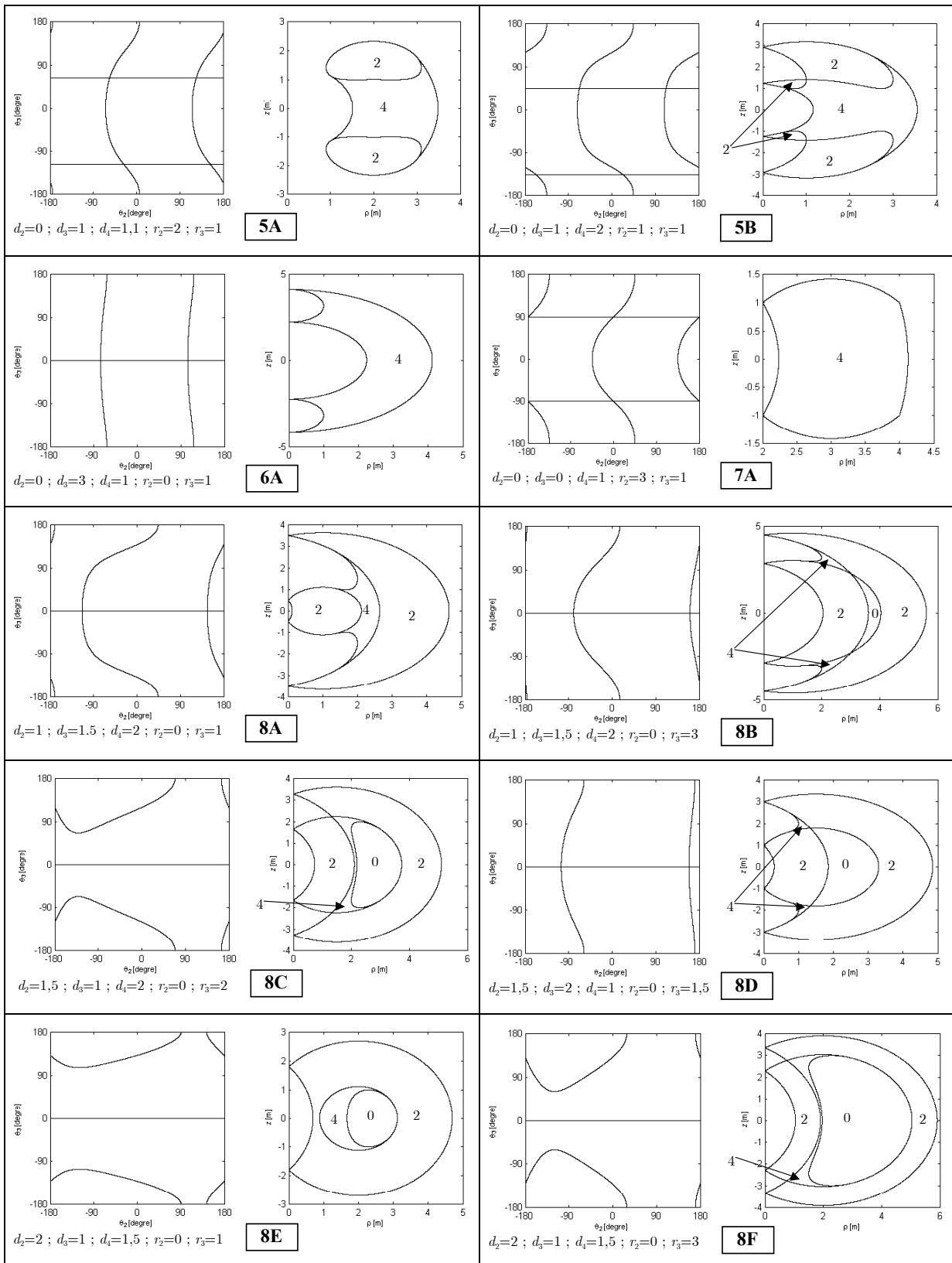
### 3.6. ÉTUDE DE CAS PARTICULIERS

Dans ce paragraphe on va étudier des manipulateurs particuliers appartenant à la famille étudiée. En effet, ces manipulateurs présentent certains paramètres de DHm nuls. On rappelle que de tels manipulateurs sont non-cuspidaux. Comme dans le chapitre précédent, la classification établie au sein de ce chapitre se base sur les critères : (i) nombre de nœuds, (ii) l'existence ou non de cavité toroïdale et (iii) la t-parcourabilité. Ce travail a été effectué dans le cadre d'un DEA [Zein 04]. Tous les cas possibles se présentent comme suit :

- $d_2 = 0$ 
  - Cas 5 :  $r_2 \neq 0$ ,  $d_3 \neq 0$  et  $r_3 \neq 0$ .
  - Cas 6 :  $r_2 \neq 0$ ,  $d_3 = 0$  et  $r_3 \neq 0$ .
  - Cas 7 :  $r_2 = 0$ ,  $d_3 \neq 0$  et  $r_3 \neq 0$
- $r_2 = 0$ 
  - Cas 8 :  $d_2 \neq 0$ ,  $d_3 \neq 0$  et  $r_3 \neq 0$ .
  - Cas 9 :  $d_2 \neq 0$ ,  $d_3 = 0$  et  $r_3 \neq 0$ .

L'étude des ces manipulateurs particuliers permet d'établir l'arbre de classification représenté par la Figure 101.


 Figure 101 : Arbre de classification des cas particuliers de manipulateurs (Cas  $r_3 \neq 0$ )



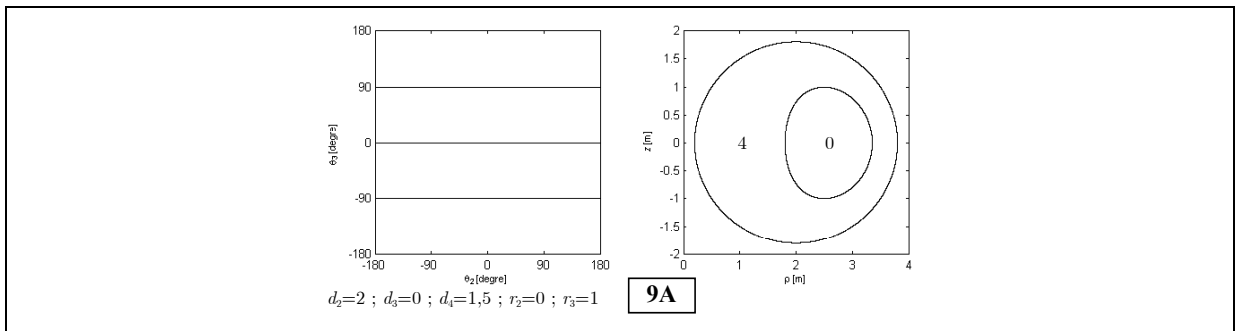


Figure 102 : Espaces articulaires et sections dans l'espace de travail des manipulateurs particuliers présentés dans l'arbre de classification de la Figure 101

### 3.7. CONCLUSION

Dans ce chapitre, une famille de manipulateurs à axes orthogonaux et avec un décalage sur le dernier bras a été classifiée selon la topologie d'espace de travail. On montre qu'il existe exactement 9 domaines dans lesquels le nombre de points cusps est constant. Nous subdivisons ensuite ces 9 domaines en 22 topologies d'espace de travail en fonction du nombre de nœuds. Les propriétés de chaque topologie sont citées. Dans chaque topologie d'espace de travail, il s'agit de donner le nombre de zones à 2 ou à 4 solutions au MGI, de dire si les manipulateurs appartenant à cette topologie ont une cavité toroïdale ou pas et d'affirmer si les manipulateurs sont binaires ou quaternaires. Les équations des 6 surfaces ( $C_1$ ,  $C_{1bis}$ ,  $C_{234}$ ,  $Cône$ ,  $E_{1g\acute{e}n}$  et  $E_{3g\acute{e}n}$ ) séparant les différents domaines et les différentes topologies d'espace de travail sont données en fonction des paramètres de DHm. Ces équations sont déterminées en utilisant une méthode d'interprétation géométrique des transitions entre ces domaines et les topologies d'espace de travail. Nous proposons finalement un arbre de classification de manipulateurs particuliers non cuspidaux (ayant un ou plusieurs paramètres de DHm nuls). Cette classification est basée sur le nombre de nœuds, l'existence ou pas de cavité toroïdale ainsi que la t-parcourabilité.

L'étude menée dans ce chapitre reste qualitative et nous donne une idée seulement sur la forme de l'espace de travail. En effet deux manipulateurs ayant la même topologie d'espace de travail peuvent être différents quant au volume de la zone à 4 solutions ou le conditionnement de la matrice jacobienne par exemple. Dans



le chapitre suivant, on va mener une étude de comparaison des manipulateurs selon quelques indices de performance que l'on détaillera.

---

## **CHAPITRE IV**

---

### **ANALYSE DES RÉSULTATS DE LA CLASSIFICATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX**



## 4. ANALYSE DES RÉSULTATS DE LA CLASSIFICATION DES MANIPULATEURS 3R ORTHOGONAUX

### 4.1. INTRODUCTION

La classification des topologies d'espace de travail pour les manipulateurs orthogonaux avec  $r_3 = 0$  ou  $r_3$  non nul est un outil pour l'ingénieur dans sa recherche de manipulateurs innovants. L'objet de ce chapitre est d'analyser les propriétés de ces manipulateurs en fonction du volume de leur espace de travail, du degré d'accessibilité et de leur conditionnement. Un exemple de manipulateur prototype a été étudié selon les indices de performances choisis : il s'agit du porteur du manipulateur DIESTRO. Cette étude peut servir par exemple à évaluer l'aptitude d'un manipulateur à orienter facilement son outil afin de suivre une trajectoire imposée. Plus généralement, l'étude est à mettre en relation avec la tâche du manipulateur et les trajectoires discrètes ou continues.

### 4.2. INDICES DE PERFORMANCES

On a proposé dans les deux chapitres précédents une classification de manipulateurs 3R à axes orthogonaux selon la topologie d'espace de travail en fonction de leurs paramètres de DHm. Les informations que l'on a données sont souvent destinées à des analyses globales d'accessibilité ou de parcourabilité. Si l'on veut compléter cette étude, on se retourne vers l'évaluation des performances du manipulateur en un point de l'espace de travail ou bien d'une configuration articulaire. Dans ce paragraphe, on va rappeler quelques outils permettant l'évaluation des performances des manipulateurs.

#### 4.2.1. MESURES DE DEXTÉRITÉ

On peut définir la dextérité comme « *l'agilité de la main* ». C'est aussi l'aptitude de l'organe terminal du manipulateur à effectuer « *facilement* » des petits déplacements autour du point de travail considéré. La dextérité est liée à une

configuration articulaire et fait intervenir la matrice jacobienne. Cette notion est donc en rapport avec les vitesses articulaires et les vitesses opérationnelles. La dextérité peut être mesurée de trois manières différentes [Angeles 92] que l'on va détailler dans les paragraphes suivants :

- La manipulabilité

Ce concept a été introduit par Yoshikawa en 1985 [Yoshikawa 85]. C'est un moyen d'évaluer « *la facilité de changer de manière arbitraire la position et l'orientation de l'organe terminal* ». Il définit deux outils (i) l'ellipsoïde des vitesses opérationnelles et (ii) l'indice de manipulabilité. L'ellipsoïde des vitesses opérationnelles est défini par l'inéquation (48) :

$$\dot{\mathbf{X}}^T (\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1} \dot{\mathbf{X}} \leq 1 \quad (48)$$

où  $\dot{\mathbf{X}}$  définit la vitesse opérationnelle. On montre que les axes principaux de l'ellipsoïde sont les vecteurs propres de  $(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)^{-1}$  et que les longueurs de ses demi-axes sont les valeurs singulières  $\sigma_i$  de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$  c'est-à-dire les racines carrées des valeurs propres  $\lambda_i$  de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ .

L'indice de manipulabilité est défini par l'équation (49).

$$w = \sqrt{\det(\mathbf{J}\mathbf{J}^T)} \quad (49)$$

Cet indice est relatif au volume de l'ellipsoïde des vitesses et peut être calculé comme le produit des valeurs singulières de  $\mathbf{J}\mathbf{J}^T$ . Cet indice constitue une mesure de l'aptitude de l'effecteur à se déplacer à partir d'un point donné et pour une configuration articulaire donnée. Par définition, il est nul sur une configuration singulière. Notons qu'une valeur « correcte » de cet indice peut traduire une forte disproportion entre les longueurs des axes principaux de l'ellipsoïde des vitesses.

[Singh 92] propose une méthode permettant d'obtenir le volume de l'ellipsoïde des vitesses pour les manipulateurs non redondants. Cette méthode est basée sur une approche de probabilité. Elle permet aussi de calculer le volume de l'ellipsoïde des

forces et les limites de l'espace de travail. Les résultats sont obtenus sans aucun calcul direct de singularités ou du MGI.

- La plus petite valeur singulière

La détermination de la plus petite valeur singulière de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  est une autre méthode de mesure de la dextérité d'un manipulateur. On a vu que l'indice de manipulabilité constitue une mesure moyenne de l'aptitude d'un manipulateur à déplacer son effecteur dans toutes les directions autour d'un point donné. La plus petite valeur singulière est néanmoins plus fiable et mieux recommandée lorsque l'effecteur évolue à proximité d'une singularité. En effet, elle évalue l'aptitude du déplacement de l'effecteur dans la direction la plus défavorable (le plus petit axe de l'ellipsoïde des vitesses).

- Indice d'isotropie

L'indice d'isotropie  $k$  est défini comme l'indice de conditionnement de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$ , que l'on peut définir comme le rapport entre la plus grande et la plus petite valeur singulière de  $\mathbf{J}$  [Salisbury 82] :

$$k = \frac{\sigma_{\max}}{\sigma_{\min}} \quad (50)$$

Cette définition est valable uniquement lorsque les éléments de la matrice jacobienne  $\mathbf{J}$  ont la même dimension. Dans le cas où la tâche est définie en position et en orientation, il est possible d'homogénéiser les dimensions en divisant les lignes de  $\mathbf{J}$  correspondant aux positions par « la longueur caractéristique » du manipulateur étudié [Angeles 97]. On obtient alors une matrice sans dimensions. La longueur caractéristique correspond au minimum du conditionnement de la nouvelle matrice jacobienne sans dimensions. En robotique, l'indice d'isotropie traduit la précision de suivi des vitesses opérationnelles de consigne à partir des vitesses articulaires calculées à l'aide de l'inverse de  $\mathbf{J}$ . Cet indice évolue dans l'intervalle  $[1, +\infty]$ . Lorsque sa valeur est grande, ceci se traduit par un mauvais conditionnement. Dans ce cas, les vitesses opérationnelles de l'effecteur du

manipulateur sont très sensibles aux erreurs des vitesses articulaires. La valeur 1 de cet indice traduit une isotropie : l'ellipsoïde des vitesses prend la forme d'une sphère. Physiquement, lorsque le manipulateur est dans une position isotrope, l'effecteur aura la même facilité pour se déplacer dans toutes les directions.

#### **4.2.2. INDICE DE PERFORMANCE RELATIF À L'ESPACE DE TRAVAIL**

Un des critères d'évaluation des différentes caractéristiques globales de l'espace de travail est la mesure du volume de l'espace des positions accessibles. Or, on a vu que l'espace de travail d'un manipulateur n'est en général pas compact et peut comporter des cavités toroïdales, des trous et des cavités centrales. Dans [Wenger 89], une mesure de la proportion du vide dans l'espace de travail est donnée par la valeur :

$$V = 1 - \frac{\text{Volume de (trous + cavités toroïdales + cavités cantrales)}}{\text{Volume de l'espace de travail}}$$

Ce paramètre ne renseigne pas sur les répartitions des trous, des cavités centrales et toroïdales dans l'espace de travail. Le paramètre de compacité alors été introduit. Ce paramètre compare la forme de l'espace de travail à celle d'une sphère, qui est le corps le plus compact.

Pour les manipulateurs 3R, un autre paramètre d'évaluation de la taille de l'espace de travail peut être utilisé. Il s'agit de l'envergure de l'espace de travail caractérisée par la portée du manipulateur (représente la position la plus éloignée qu'un manipulateur 3R peut atteindre) [Wenger 89]. Dans la suite de ce chapitre et pour étudier les proportions des régions à 2, 4 solutions et de l'espace de travail par rapport à une sphère englobant l'espace de travail, on va utiliser le paramètre : portée du manipulateur qui définira le rayon de cette sphère.

- Conclusion

Dans ce chapitre, on choisira deux outils d'analyse de performance :

- Le conditionnement relatif à l'espace articulaire qui est un indice d'évaluation que l'on a exposé dans le paragraphe précédent.
- Les proportions des volumes des zones à 2 et à 4 solutions, et de tout le volume de travail, par rapport au volume d'une sphère dont on précisera le rayon dans chaque cas.

### 4.3. ÉTUDE DU CONDITIONNEMENT

Le calcul du conditionnement de la matrice jacobienne repose sur la connaissance de la position articulaire  $(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$  et de la position de l'effecteur  $(x, y, z)$ . Pour atteindre cet objectif, deux possibilités nous sont offertes : un balayage de l'espace articulaire ou un balayage de l'espace de travail.

Pour des raisons de présentation, on calculera l'inverse du conditionnement de la matrice jacobienne cinématique qui évolue entre 0 et 1. On le notera  $K^{-1}$  pour exprimer le conditionnement inverse de la matrice jacobienne. On a choisi de calculer deux indices à partir du  $K^{-1}$  :  $K^{-1}$  maximum et la  $K^{-1}$  moyen.

Le premier indice est un indice local qui permet de trouver un ensemble de manipulateurs possédant une configuration isotrope [Angeles 97] alors que le second est une mesure globale. Le travail présenté dans ce chapitre ne peut donner tous les résultats possibles car on est obligé de faire des coupes dans l'espace des paramètres (pour une valeur de  $r_2$  donnée, par exemple). On recherchera dans chaque coupe les exemples les plus représentatifs. Ces courbes d'iso-valeurs doivent nous permettre de définir des tendances sur l'évolution des indices par rapport aux topologies d'espace de travail définies dans les deux chapitres précédents. On utilisera principalement les valeurs de  $r_2$  et  $r_3$  utilisées dans les chapitres II et III.

Pour calculer  $K^{-1}$  maximum et  $K^{-1}$  moyen, on va utiliser une technique de discrétisation de l'espace de travail. D'autres méthodes telles que l'analyse par intervalles ou Monte-Carlo auraient pu être utilisées. Notre choix a été guidé par un souci de simplicité et de rapidité de mise en œuvre.



Afin de pouvoir obtenir des résultats facilement compréhensibles, on effectue un balayage dans une section  $(d_3, d_4)$  de l'espace des paramètres pour un  $r_2$  et un  $r_3$  donnés. L'algorithme utilisé est détaillé dans l'annexe D.

Grâce à cet algorithme, on obtient dans une section de l'espace des paramètres, des courbes d'iso-valeurs dont chacune représente les manipulateurs ayant la même valeur de  $K^{-1}$  moyen et maximal.

### 4.3.1. ÉTUDE DU CAS $r_3 = 0$

On commence par appliquer l'algorithme permettant de calculer  $K^{-1}$  moyen et maximum pour la famille de manipulateurs tel que  $r_3 = 0$ . Les sections choisies, pour le calcul de  $K^{-1}$  maximum et  $K^{-1}$  moyen, sont celles étudiées dans le chapitre II.

La Figure 103 représente les courbes d'iso-valeurs de  $K^{-1}$  moyen dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  (Figure 103(a)),  $r_2 = 1$  (Figure 103(b)) et  $r_2 = 2$  (Figure 103(c)). Par ailleurs, la Figure 104 représente les courbes d'iso-valeurs de  $K^{-1}$  maximum dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  (Figure 104 (a)),  $r_2 = 1$  (Figure 104 (b)) et  $r_2 = 2$  (Figure 104 (c)).

Les flèches que l'on voit sur les sections illustrées par la Figure 103 (respectivement la Figure 104) représentent dans chaque topologie d'espace de travail, les tendances vers les valeurs de  $K^{-1}$  moyen (respectivement maximum) les plus élevées. Dans chaque section, la zone contenant des manipulateurs ayant une valeur de  $K^{-1}$  moyen (respectivement maximum) élevée est marquée par (\*). On choisit un manipulateur dans chacune de ces zones et on calcule son  $K^{-1}$  moyen et son  $K^{-1}$  maximum. Les valeurs de  $K^{-1}$  calculées ont une précision de  $10^{-4}$ . Toutefois et après arrondissement, on note deux chiffres après la virgule. Ces valeurs sont données après une vérification de leurs faibles variations par rapport à la variation du pas de calcul. En effet, si on divise le pas de calcul par  $10^2$ , les valeurs de  $K^{-1}$  ne varient que de l'ordre de  $10^{-4}$ .

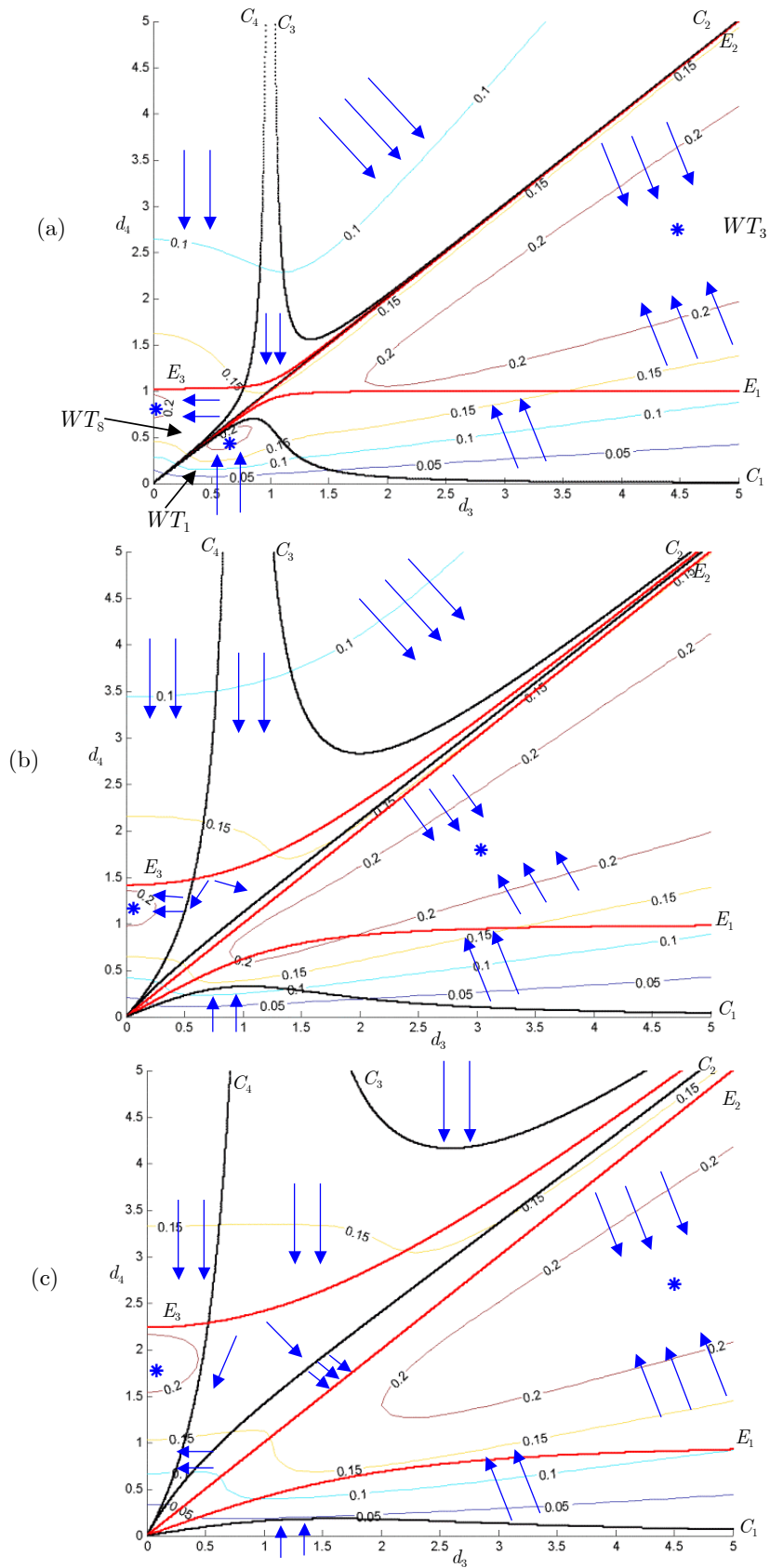


Figure 103 :  $K^{-1}$  moyen dans trois sections de l'espace des paramètres,

(a) :  $r_2 = 0,2$  ; (b) :  $r_2 = 1$  ; (c) :  $r_2 = 2$

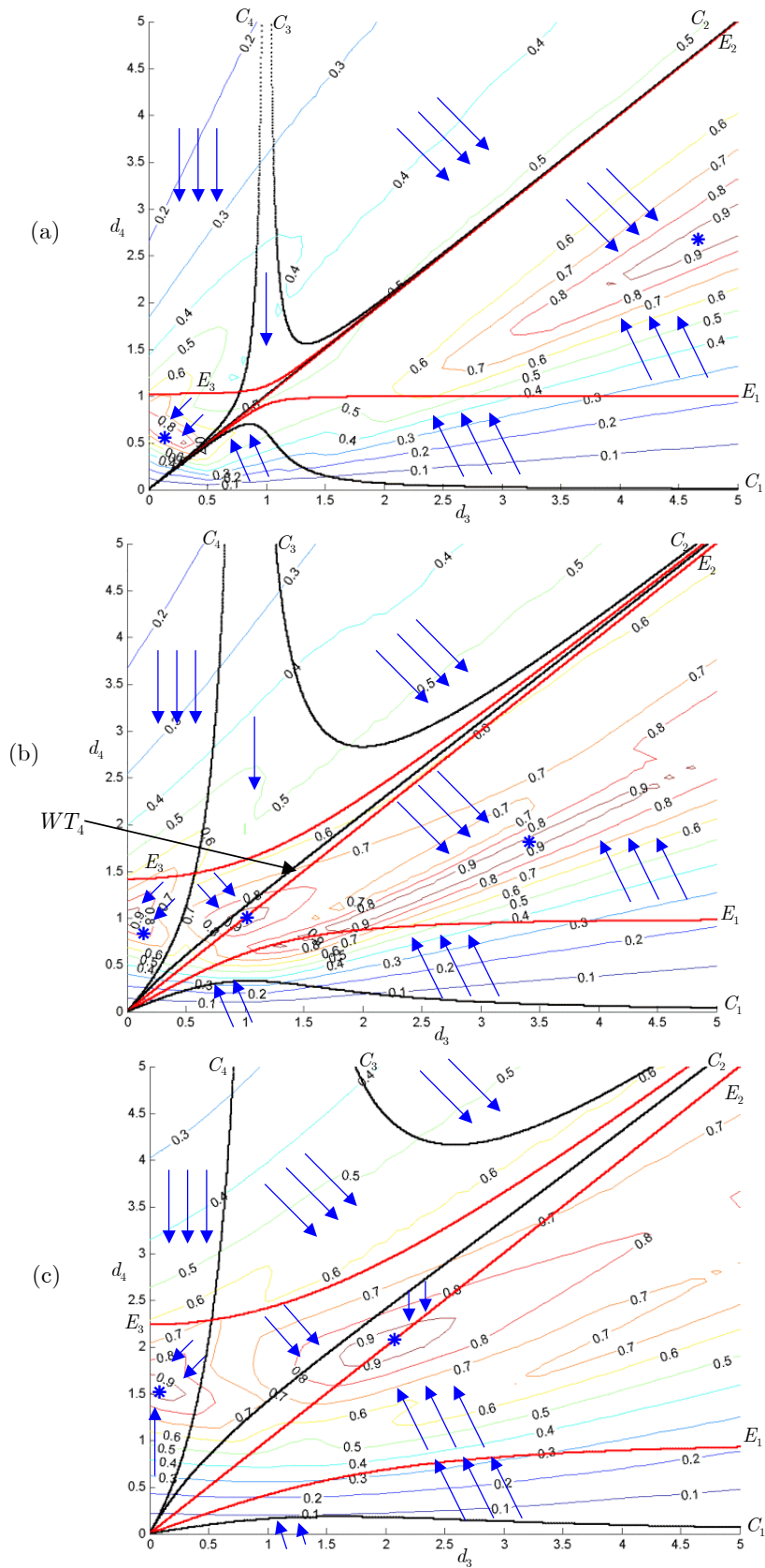


Figure 104 :  $K^{-1}$  maximum dans trois sections de l'espace des paramètres,

(a) :  $r_2 = 0,2$  ; (b) :  $r_2 = 1$  ; (c) :  $r_2 = 2$

À partir de la Figure 103(a), on choisit trois manipulateurs se situant dans des zones correspondant au maximum de  $K^{-1}$  moyen. Le premier manipulateur représenté dans la Figure 105 possède une topologie d'espace de travail de type  $WT_8$ . Ce manipulateur est quaternaire, générique, non cuspidal et a 4 aspects dans son espace articulaire. On présente aussi son  $K^{-1}$  moyen et maximal. On remarque que la zone marquée dans  $WT_3$  contient des manipulateurs ayant des  $K^{-1}$  moyen et maximum élevés.

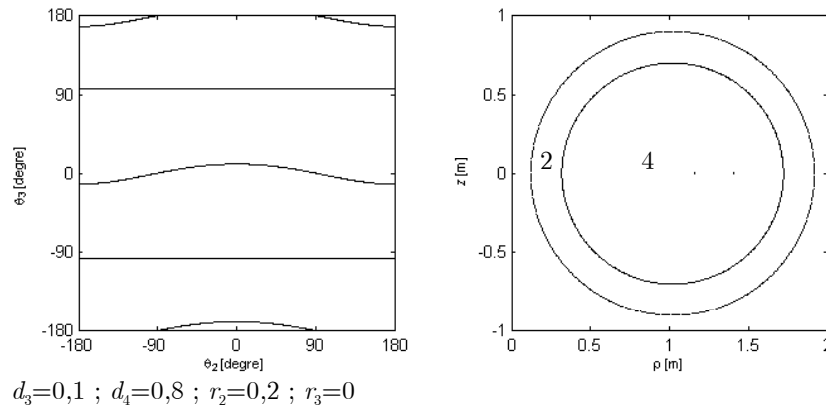


Figure 105 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,2  
et le  $K^{-1}$  maximum est 0,76 ( $WT_8$ )

Le deuxième manipulateur montré en Figure 106 a une topologie d'espace de travail de type  $WT_1$ . Il est binaire et par suite non cuspidal. Ce manipulateur a 2 aspects dans son espace de travail. Étant donné qu'un tel manipulateur possède une cavité toroïdale dans son espace de travail, on peut affirmer que c'est un mauvais manipulateur. En effet, cette cavité toroïdale est pénalisante pour la génération de trajectoires.

Les manipulateurs de type  $WT_1$  ne présentent pas de valeurs de  $K^{-1}$  maximum élevées et on n'a pas trouvé de manipulateurs possédant une position isotrope.

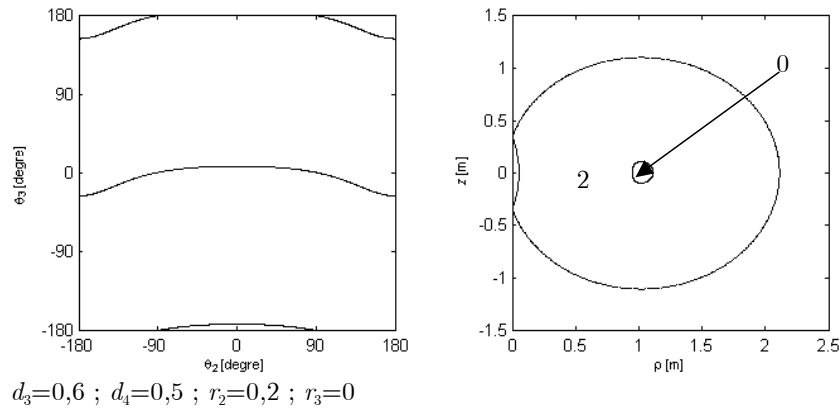


Figure 106 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,21  
 et le  $K^{-1}$  maximum est 0,62 ( $WT_1$ )

Le dernier manipulateur choisi est représenté sur la Figure 107. Il est cuspidal (il a 4 cusps) et sa topologie d'espace de travail est  $WT_3$ . Étant donné que ce manipulateur n'a que 2 aspects dans son espace articulaire, ses pseudo-singularités et ses surfaces caractéristiques coïncident. Ainsi, ses domaines d'unicité sont délimités par ses pseudo-singularités, plus faciles à calculer.

On note que les manipulateurs ayant des valeurs des paramètres de DHm très voisines des paramètres du manipulateur caractérisé par la Figure 107, ont les meilleures valeurs de  $K^{-1}$  moyen et maximum.

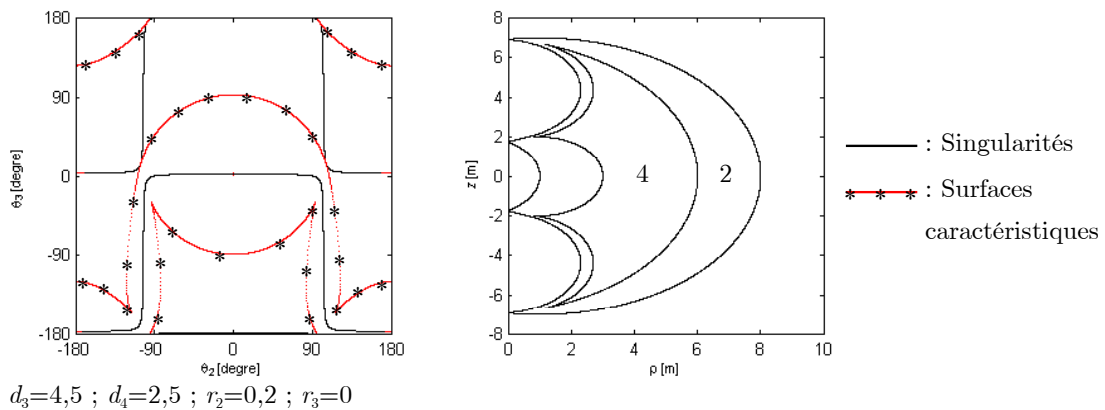


Figure 107 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,24  
 et le  $K^{-1}$  maximum est 0,93 ( $WT_3$ )

Toutes les topologies d'espace de travail des sections de l'espace des paramètres présentées dans la Figure 103 ont les mêmes tendances (les flèches représentées ont les

mêmes sens dans deux topologies similaires). Dans les 3 sections, chacune des topologies  $WT_3$  et  $WT_8$  contient une zone où les manipulateurs ont la valeur de  $K^{-1}$  moyen la plus élevée. En revanche, la Figure 103(a) contient une zone supplémentaire dans la topologie  $WT_1$  qui est constituée de manipulateurs binaires et ayant une valeur de  $K^{-1}$  élevée.

En analysant les 3 sections présentées dans la Figure 104 et pour des topologies d'espace de travail similaires, on remarque que les tendances vers les valeurs de  $K^{-1}$  maximum sont les mêmes. En plus, chacune des topologies d'espace de travail  $WT_3$  et  $WT_8$  contient une zone d'isotropie, les manipulateurs appartenant à de telles zones ont un  $K^{-1}$  moyen proche de 1. Dans les 2 sections présentées par la Figure 104(b) et la Figure 104(c), on assiste à la présence d'une troisième zone contenant des manipulateurs ayant un  $K^{-1}$  maximum élevé. Cette zone se trouve entre les topologies d'espace de travail  $WT_3$  et  $WT_4$ . Ainsi, il serait intéressant de choisir un manipulateur dans cette zone et plus précisément sur la surface  $E_2$ . Ce manipulateur correspond à la Figure 108, il est cuspidal et a deux aspects dans son espace articulaire. Toutefois, il présente un inconvénient qui se traduit par une région à 4 solutions qui est relativement faible.

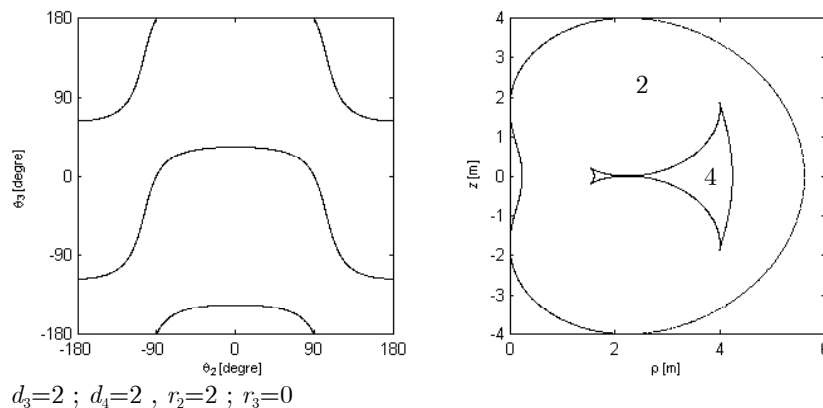


Figure 108 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,17  
et le  $K^{-1}$  maximal est 1 (transition entre  $WT_3$  et  $WT_4$ )

---

### 4.3.2. ÉTUDE DU CAS $r_3 \neq 0$

Dans ce paragraphe, on va appliquer l'algorithme de calcul de  $K^{-1}$  moyen et maximum à la famille des manipulateurs ayant un décalage sur le dernier bras ( $r_3 \neq 0$ ).

On commence par représenter des sections dans l'espace des paramètres dans  $(d_3, d_4)$  correspondante à un couple  $(r_2, r_3)$  donné. La Figure 109(a) (respectivement la Figure 109(b) et la Figure 109(c)) représente des iso-valeurs de  $K^{-1}$  moyen dans la section définie par  $(r_2, r_3) = (0,2, 0,9)$  (respectivement  $(r_2, r_3) = (0,3, 0,8)$  et  $(r_2, r_3) = (0,2, 0,15)$ ). La Figure 110 représente les iso-valeurs de  $K^{-1}$  maximum dans les mêmes sections données par la Figure 109.

Comme dans le paragraphe précédent, dans chaque topologie d'espace de travail, on note par des flèches les tendances de  $K^{-1}$  moyen et maximum vers les valeurs les plus élevées. Par ailleurs, on marque les zones contenant des manipulateurs ayant une valeur du  $K^{-1}$  moyen ou maximum élevée.

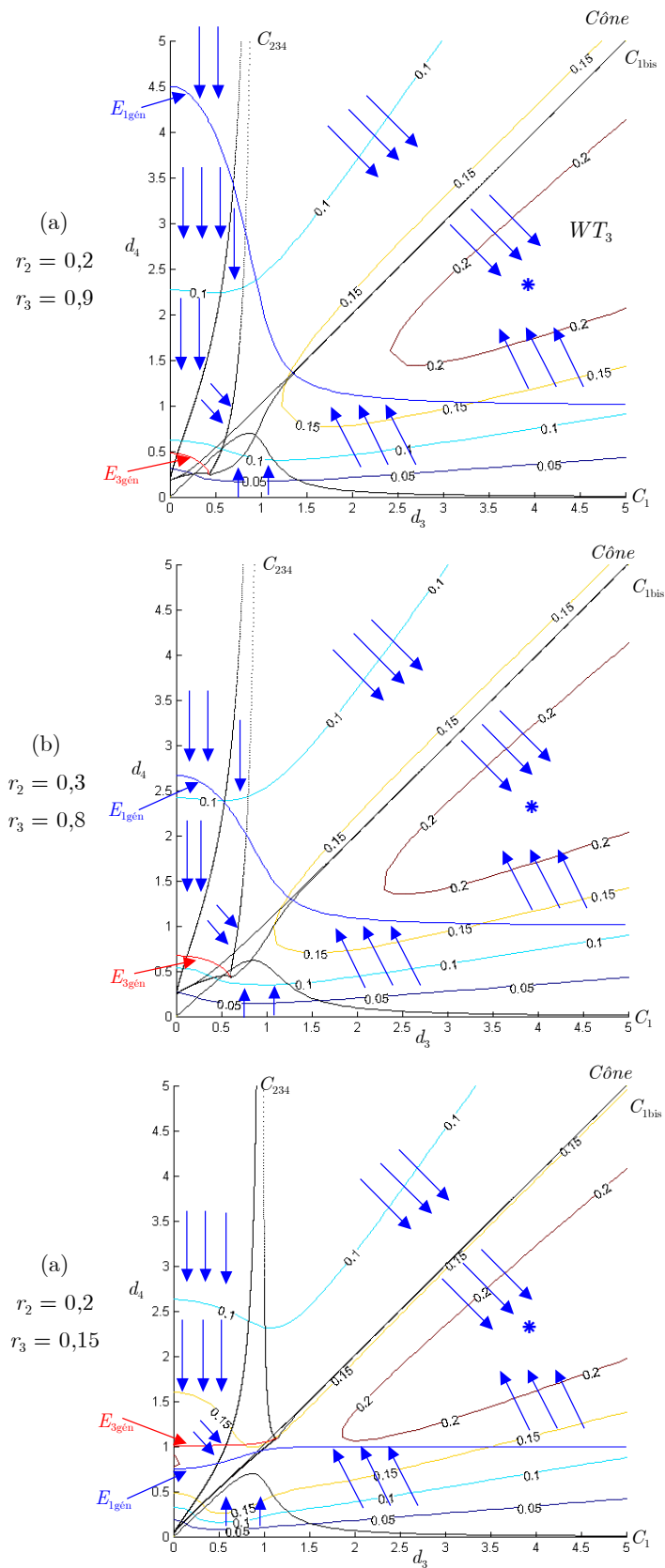


Figure 109 :  $K^{-1}$  moyen dans trois sections de l'espace des paramètres



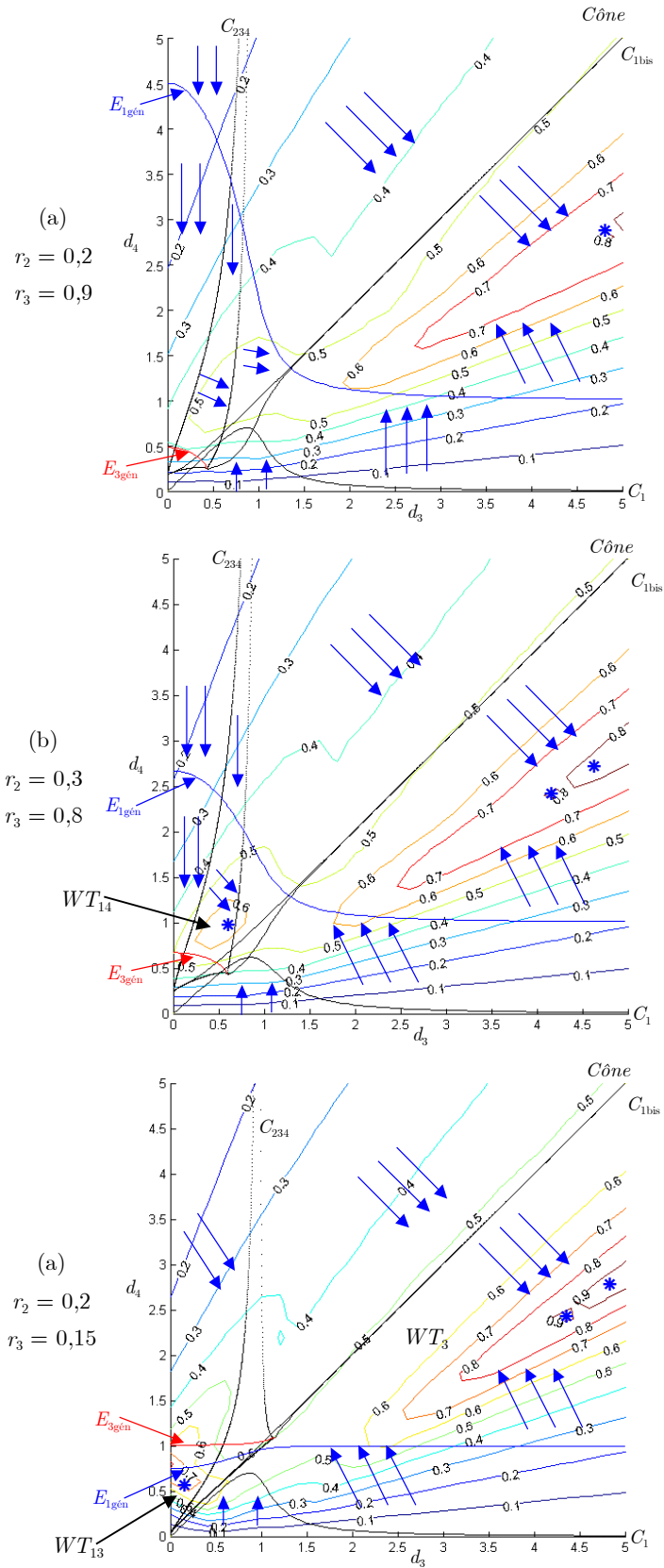


Figure 110 :  $K^{-1}$  maximum dans les mêmes sections de l'espace des paramètres présentées dans la Figure 109

En observant la Figure 109 et la Figure 110, on constate qu'il existe une zone dans la topologie d'espace de travail  $WT_3$  où les manipulateurs ont des valeurs de  $K^{-1}$  moyen et maximum élevées. Pour cela, on choisit un manipulateur dans cette zone. On peut caractériser cette zone par la Figure 111. C'est un manipulateur cuspidal ayant 2 aspects dans l'espace articulaire. On représente ses surfaces caractéristiques. Pour calculer ses domaines d'unicité, on peut utiliser l'algorithme de Wenger [Wenger 04].

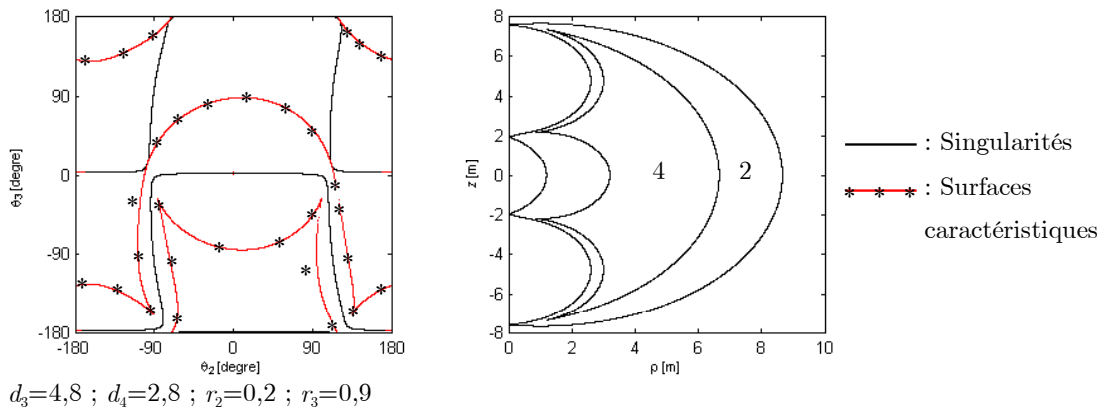


Figure 111 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,24  
et le  $K^{-1}$  maximal est 0,81 ( $WT_3$ )

La Figure 110 montre qu'il existe d'autres zones ayant des manipulateurs dont la valeur de  $K^{-1}$  maximum est élevée. En effet, chacune des topologies  $WT_{14}$  (Figure 110(b)) et  $WT_{16}$  (Figure 110(c)) contient une zone marquée par (\*) où les manipulateurs ont une valeur de  $K^{-1}$  maximum élevée. La Figure 112 caractérise un manipulateur appartenant à la topologie d'espace de travail  $WT_{14}$ . Ce manipulateur est cuspidal et a 3 aspects dans son espace articulaire. Ce manipulateur a un bon  $K^{-1}$  moyen et maximum. En revanche, il a une cavité toroïdale et une petite zone à 4 solutions au MGI ce qui est aussi pénalisant.

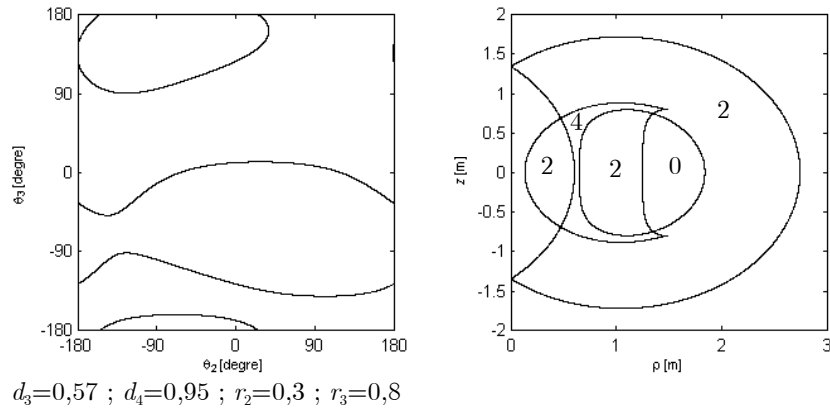


Figure 112 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,13  
et le  $K^{-1}$  maximal est 0,65 ( $WT_{14}$ )

La seconde zone se trouve dans la topologie d'espace de travail  $WT_{16}$  (Figure 110(c)). Le manipulateur présentant cette zone correspond à la Figure 113. Il est quaternaire, générique et non cuspidal. Dans son espace articulaire, ce manipulateur a 4 aspects. De plus, il a une grande zone à 4 solutions et son espace de travail est dépourvu de cavité toroïdale. On peut donc affirmer que c'est bon manipulateur.

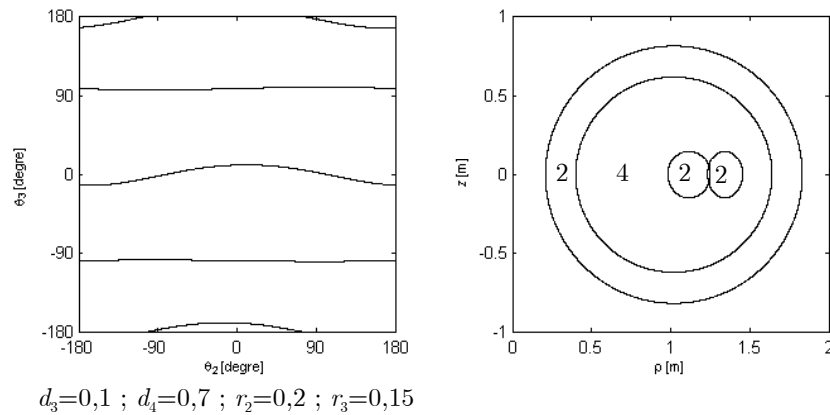


Figure 113 : Manipulateur dont le  $K^{-1}$  moyen est 0,19  
et le  $K^{-1}$  maximal est 0,84 ( $WT_{16}$ )

Notons qu'il existe une seconde zone de manipulateurs ayant une valeur de  $K^{-1}$  élevée au sein de la topologie d'espace de travail  $WT_{13}$  (voir Figure 110(b) et Figure 110(c)).

#### 4.4. ÉTUDE DU VOLUME DE L'ESPACE DE TRAVAIL

Cet indice permet, pour un manipulateur donné, de déterminer la proportion du volume de la région à 4 solutions, 2 solutions et la région accessible par l'effecteur par rapport au volume d'une sphère de rayon  $\rho_{\max}$  (représentant la portée du manipulateur). Cette sphère englobe tout l'espace de travail. Selon le cas  $r_3 = 0$  ou  $r_3 \neq 0$ , la valeur de la portée  $\rho_{\max}$  n'est pas identique. Dans les paragraphes suivants on définira la manière permettant de déterminer la valeur de  $\rho_{\max}$ . Pour des raisons de symétrie de l'espace de travail, le balayage sera effectué dans la section  $(\rho, z)$  et pour des valeurs de  $\rho$  et  $z$  positives. L'algorithme utilisé est donné en annexe D.

Grâce à cet algorithme, on obtient trois sections de l'espace des paramètres. La section 1 (respectivement la section 2 et la section 3) représente des courbes d'iso-valeurs de manipulateurs ayant la même proportion du volume de la région à 2 solutions (respectivement à 4 solutions ainsi que la toute la région accessible par le manipulateur) par rapport à la sphère englobant l'espace de travail. On choisit de présenter les mêmes sections rencontrées dans les deux chapitres précédents.

##### 4.4.1. ÉTUDE DU CAS $r_3 = 0$

On applique l'algorithme pour la famille des manipulateurs telle que  $r_3 = 0$ . Dans le cas de cette famille, une analyse géométrique simple permet de déterminer la portée du manipulateur représentant la valeur du rayon de la sphère de référence et qui est :  $\rho_{\max} = d_4 + \sqrt{r_2^2 + (d_3 + 1)^2}$ .

La Figure 114 (respectivement la Figure 115 et la Figure 116) représente, dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  (respectivement  $r_2 = 1$  et  $r_2 = 2$ ), les proportions des régions à 2, 4 solutions et de l'espace de travail par rapport à la sphère englobant l'espace de travail.

De la même manière, on utilise des flèches pour montrer les tendances dans chaque topologie d'espace de travail vers les manipulateurs dont la proportion des régions à 2, 4 solutions ou accessible est importante.

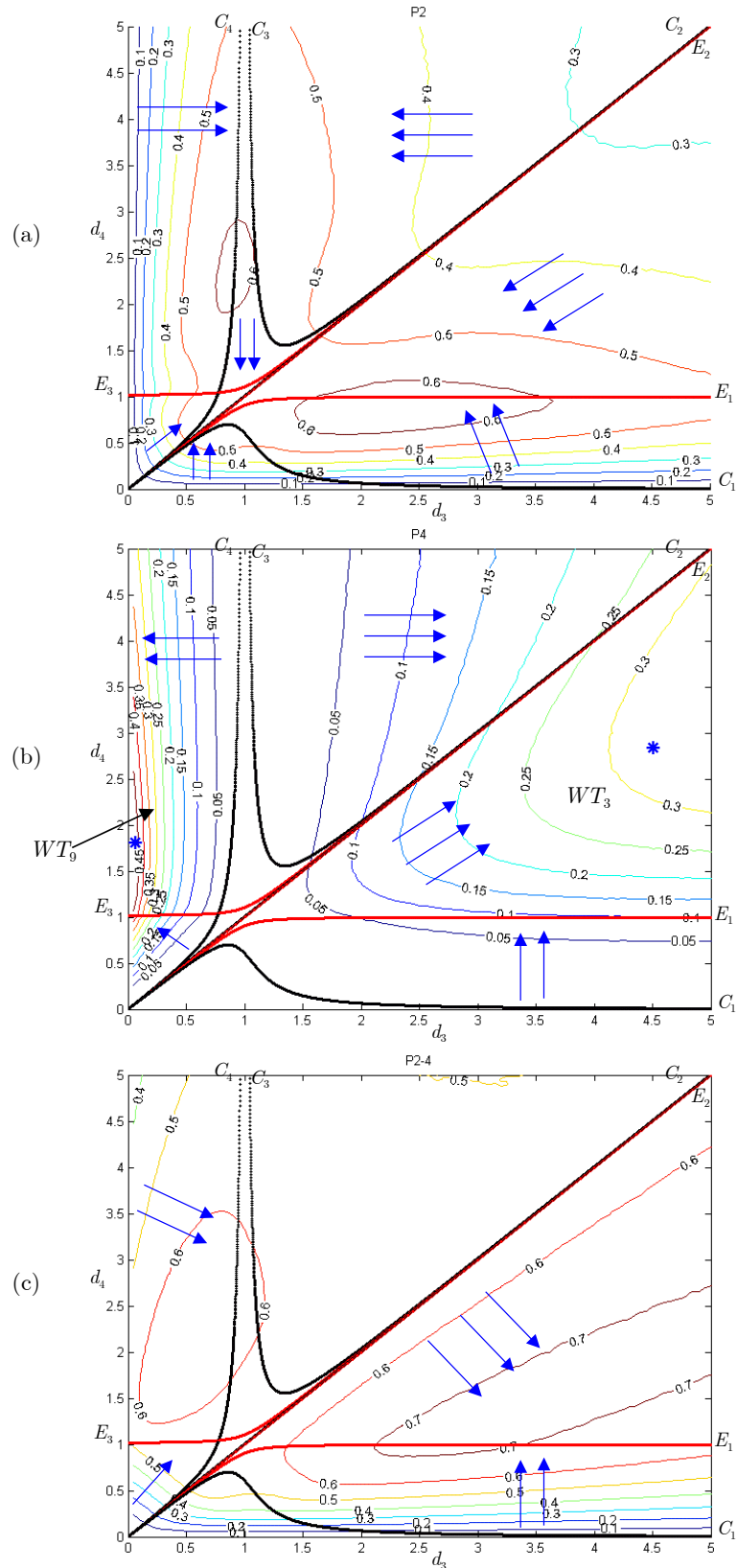


Figure 114 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et accessibles(c) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$

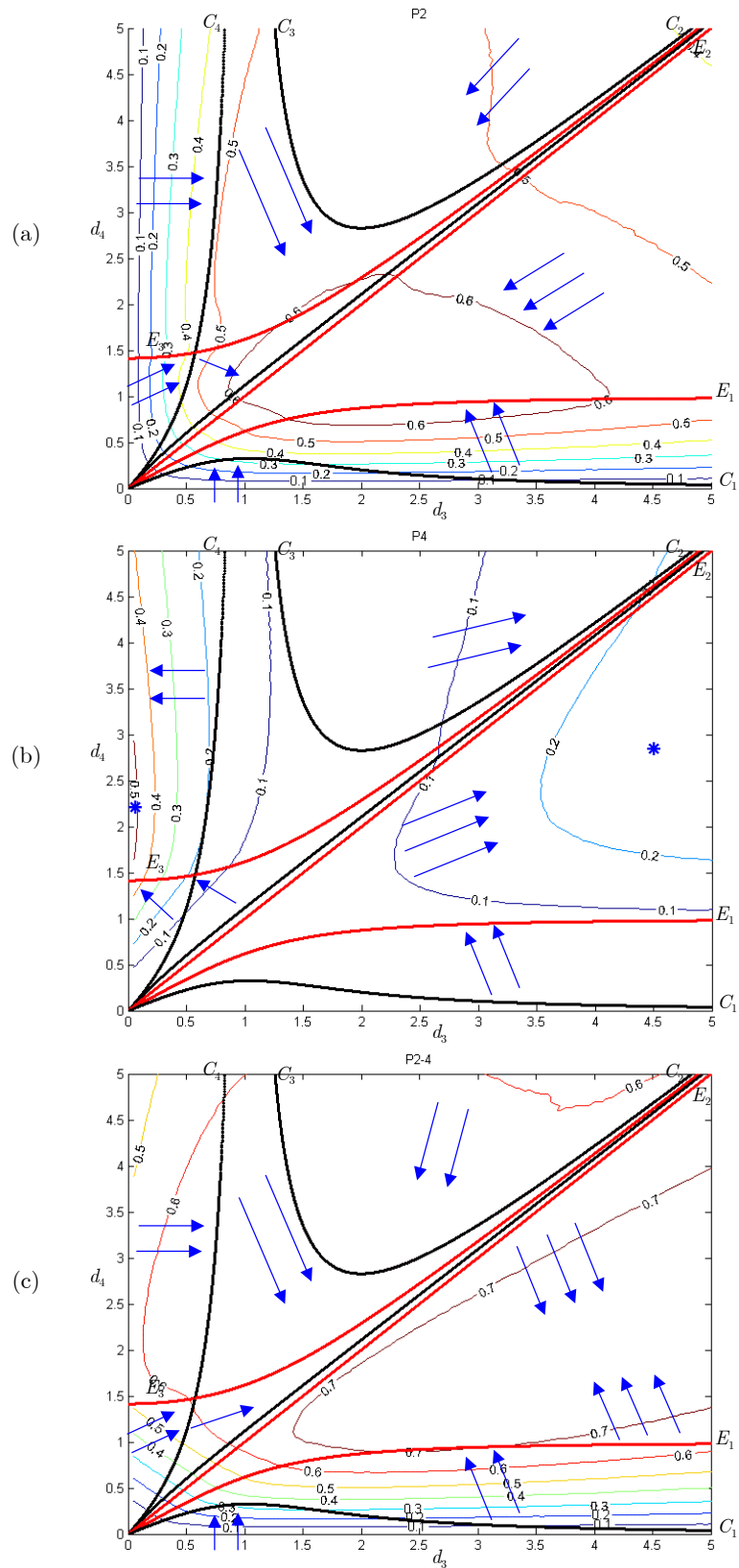


Figure 115 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et accessibles(c) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 1$

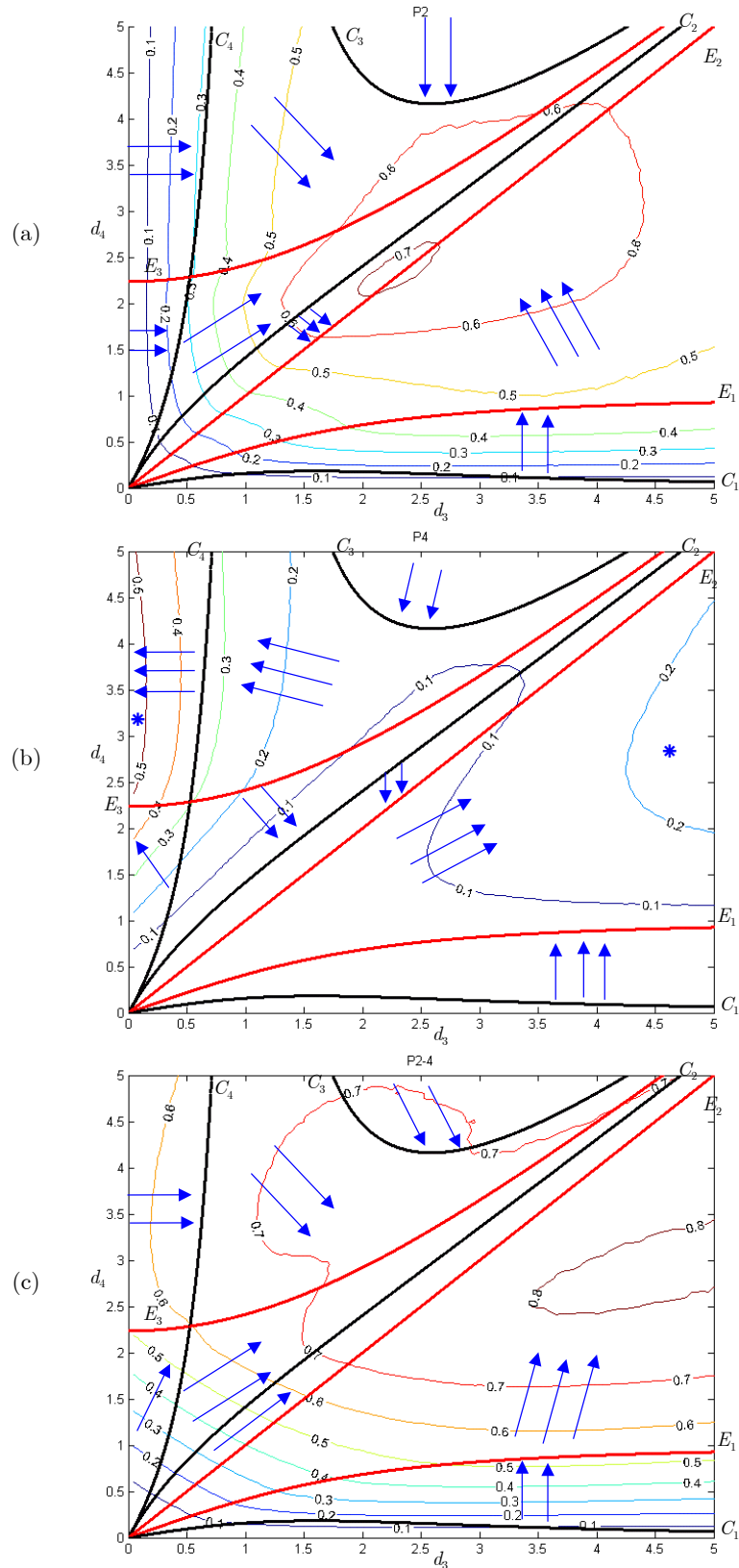


Figure 116 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et accessibles(c) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 2$

En comparant la Figure 114(a) et la Figure 114(b), on remarque que dans toutes les topologies d'espace de travail, le sens des flèches est inversé. Exception faite pour  $WT_1$  de la Figure 114(b) où on ne représente pas de flèches puisque cette topologie ne contient que des manipulateurs binaires. Pour chaque manipulateur choisi, on donnera les 3 proportions, par rapport à la sphère englobant l'espace de travail, des régions à 2, à 4 solutions, et de l'espace de travail.

A partir de la Figure 114(b), on a choisi un manipulateur qui représente une proportion de 0,37 pour sa région à 2 solutions, 0,31 pour la région à 4 solutions et de 0,68 pour la région accessible. Rappelons que ce manipulateur a déjà été sélectionné lors de l'étude de  $K^{-1}$  moyen et maximum (voir Figure 107) et qu'il a une topologie d'espace de travail de type  $WT_3$ . Le deuxième manipulateur choisi sur la Figure 114(b) est représenté dans la Figure 117. Il est générique, non cuspidal, a 4 aspects et a une topologie d'espace de travail de type  $WT_9$ . En revanche, il ne présente pas les meilleurs  $K^{-1}$  moyen et maximum.

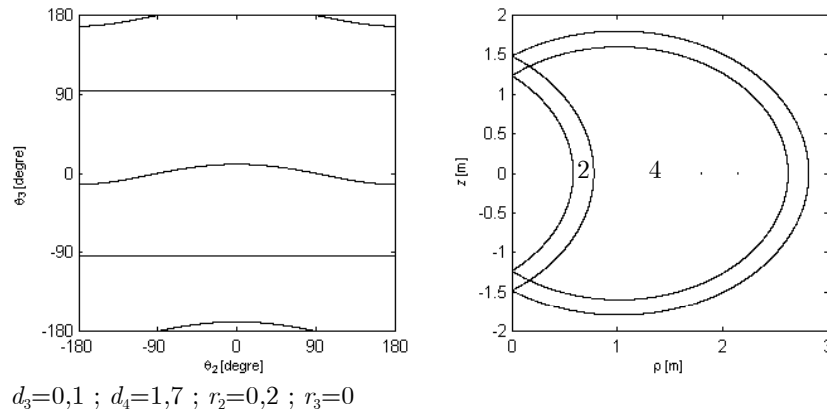


Figure 117 : Manipulateur dont la proportion de la région à 2 solutions est 0,15, la proportion de la région à 4 solutions est 0,41 et la proportion l'espace de travail est de 0,56 ( $WT_9$ )

En considérant les deux critères de performance étudiés dans ce chapitre, on peut affirmer que le premier manipulateur sélectionné est le plus intéressant.



De la même manière, en analysant la Figure 115 et la Figure 116, on remarque que les manipulateurs présentant les meilleures proportions de la région à 4 solutions ont des topologies d'espace de travail de type  $WT_3$  et  $WT_9$ .

- Conclusion

En analysant les différentes sections traduisant les proportions des régions à 2, 4 solutions et de l'espace de travail, on déduit que les manipulateurs ayant une valeur de la proportion de la région à 4 solutions élevée ont une topologie d'espace de travail de type  $WT_3$  et  $WT_9$ . Si l'on considère en plus le premier indice de performance étudié au début du chapitre et relatif aux  $K^{-1}$  moyen et maximum, on éliminera les manipulateurs ayant une topologie d'espace de travail de type  $WT_9$ . Par conséquent, les meilleurs manipulateurs à axes orthogonaux et avec  $r_3 = 0$ , ayant un bon  $K^{-1}$  moyen, un bon  $K^{-1}$  maximum, une grande région à 4 solutions au MGI et aucune cavité toroïdale auront nécessairement une topologie d'espace de travail de type  $WT_3$ .

#### 4.4.2. ÉTUDE DU CAS $r_3 \neq 0$

Dans ce paragraphe, on va analyser une famille de manipulateur à axes orthogonaux avec  $r_3 \neq 0$  selon leurs proportions des régions à 2, 4 solutions et de l'espace de travail par rapport à la sphère englobant l'espace de travail, dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $(r_2, r_2) = (0,2, 0,9)$  (respectivement  $(0,3, 0,8)$  et  $(0,2, 0,15)$ ). Pour ceci, on utilise le deuxième algorithme donné dans l'annexe D. Dans le cas où  $r_3 \neq 0$ , il est difficile de déterminer la valeur de la portée  $\rho_{\max}$  du manipulateur sous forme symbolique. La solution était donc de calculer le rayon de la sphère englobant l'espace de travail numériquement. On a effectué les calculs dans les mêmes sections présentées lors de l'étude du premier indice de performance.

La Figure 118 (respectivement la Figure 119 et la Figure 120) représente les proportions des régions à 2, 4 solutions et de l'espace de travail. Les flèches montrent les tendances dans chaque topologie d'espace de travail vers les manipulateurs ayant

la valeur la plus élevée de la proportion des régions à 2, 4 solutions ou de l'espace de travail.

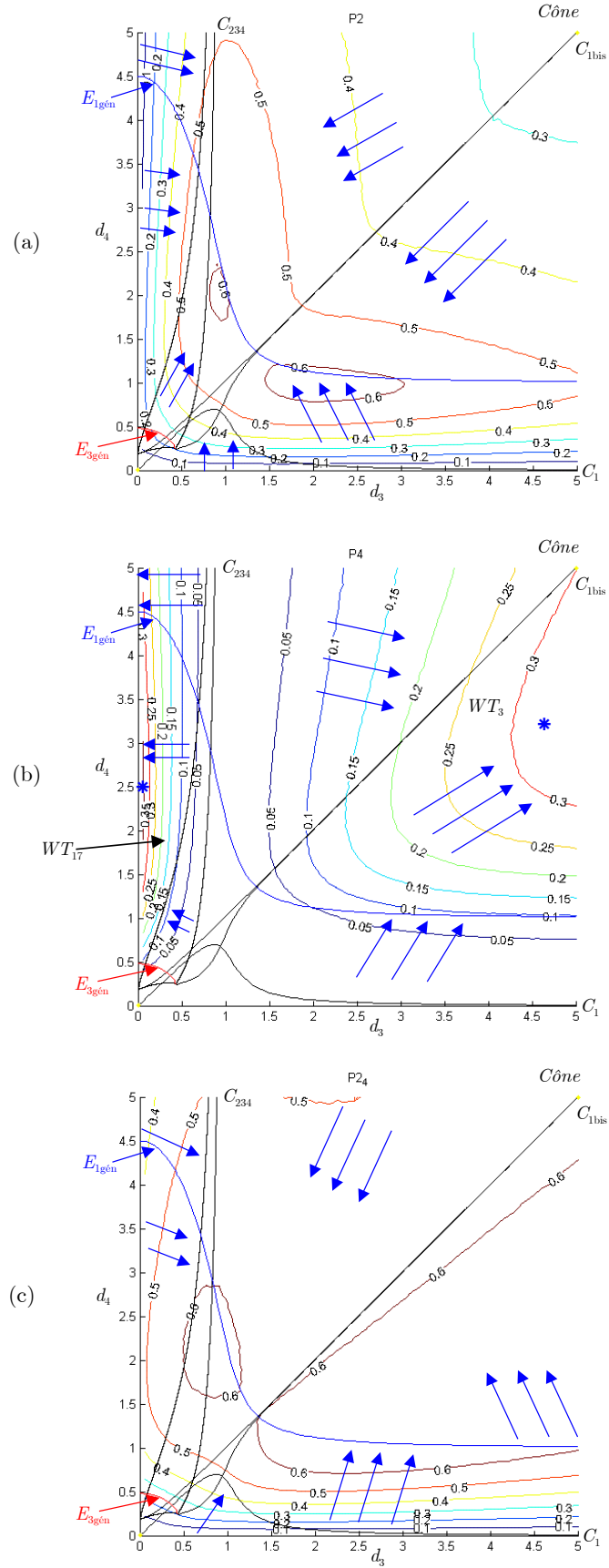


Figure 118 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et de l'espace de travail (c) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,9$

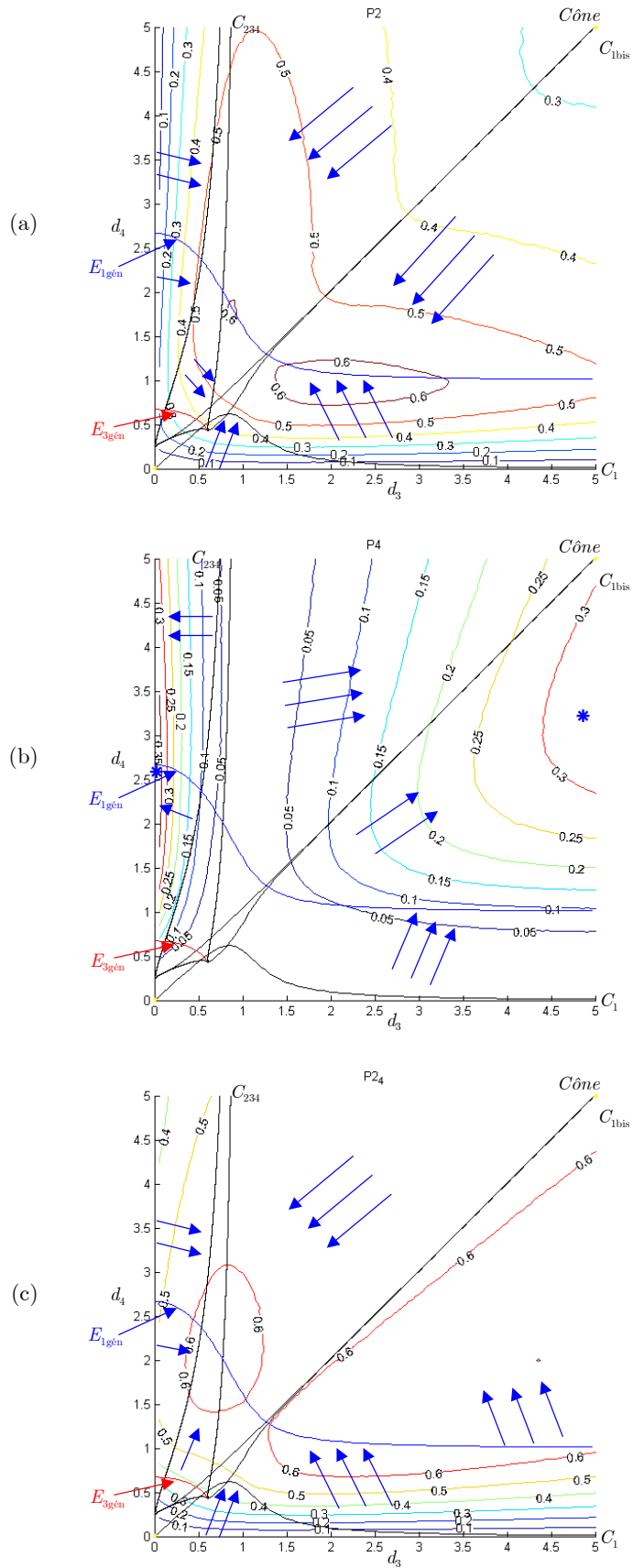


Figure 119 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et de l'espace de travail (c) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,3$  et  $r_3 = 0,8$

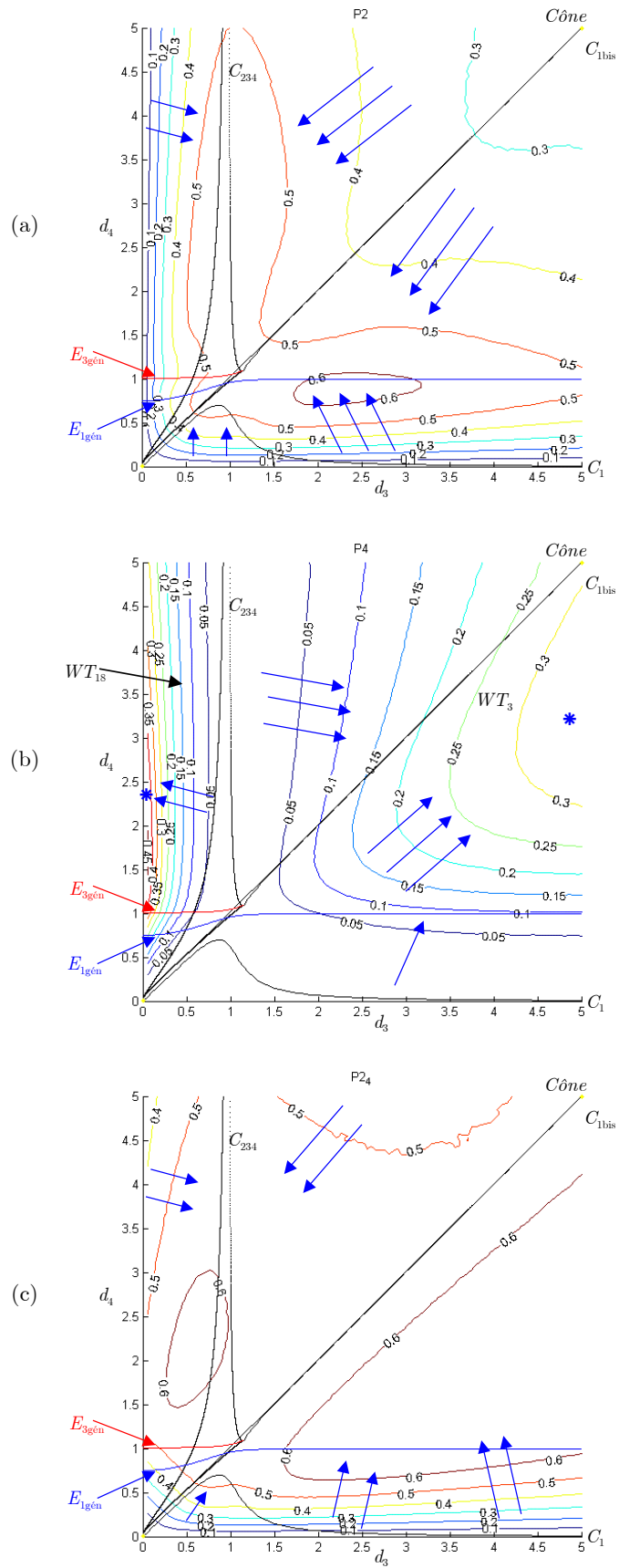


Figure 120 : Proportions des régions à 2 solutions (a), 4 solutions (b) et de l'espace de travail (c) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 0,2$  et  $r_3 = 0,15$

L'analyse des 3 figures présentées ci-dessus montre que les manipulateurs ayant les valeurs des proportions des régions à 4 solutions les plus élevées ont les topologies d'espace de travail de type :

- $WT_3$  et  $WT_{17}$  lorsque  $r_2 < r_3$ .
- $WT_3$  et  $WT_{18}$  lorsque  $r_2 > r_3$ .

Le manipulateur représenté par la Figure 111 a une topologie d'espace de travail de type  $WT_3$ . On a vu dans le §4.3.2 que  $WT_3$  contient des manipulateurs ayant un bon  $K^{-1}$  moyen et des configurations isotropes. Ce paragraphe montre que de tels manipulateurs peuvent aussi avoir une grande région à 4 solutions au MGI par rapport au volume total de l'espace de travail. Rappelons que ces manipulateurs ne présentent aucune cavité toroïdale. On peut alors affirmer qu'ils présentent des avantages quant aux indices de performance que l'on a étudiés.

Lorsque  $r_2 < r_3$ , la Figure 118(b) montre que des manipulateurs ayant une topologie d'espace de travail  $WT_{17}$  peuvent avoir une grande région à 4 solutions. La Figure 121 représente un manipulateur de type  $WT_{17}$ . Ce manipulateur est quaternaire, générique et non cuspidal. Dans son espace de travail, il a une région à 4 solutions au MGI relativement grande. En revanche, il n'est pas intéressant vis-à-vis de l'indice de performance relatif au  $K^{-1}$ . En effet, son  $K^{-1}$  moyen est de 0.1 et son  $K^{-1}$  maximum est de 0,22. En plus, il présente une cavité toroïdale dans son espace de travail. On peut donc affirmer qu'il n'est pas un bon manipulateur.

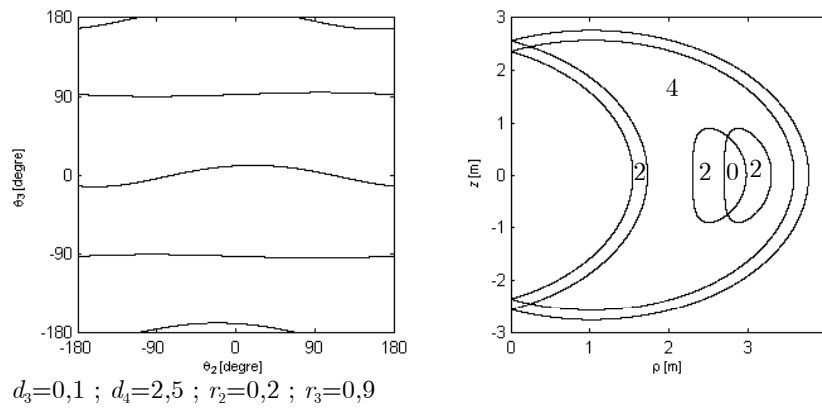


Figure 121 : Manipulateur dont la proportion de la région à 2 solutions est 0,18, la proportion de la région à 4 solutions est 0,32 et la proportion de l'espace de travail est 0,5 ( $WT_{17}$ )

Dans le cas où  $r_2 > r_3$ , la Figure 120(b) montre que la topologie d'espace de travail  $WT_{18}$  contient des manipulateurs ayant une grande région à 4 solutions. La Figure 121 représente un manipulateur de type  $WT_{18}$ . Ce manipulateur est quaternaire, générique et non cuspidal. Dans son espace de travail, il a une région à 4 solutions au MGI relativement grande et aucune cavité toroïdale. Le  $K^{-1}$  moyen de ce manipulateur est de 0,11 et son  $K^{-1}$  maximum est de 0,24. Ce manipulateur présente alors quelques inconvénients en rapport avec le  $K^{-1}$ .

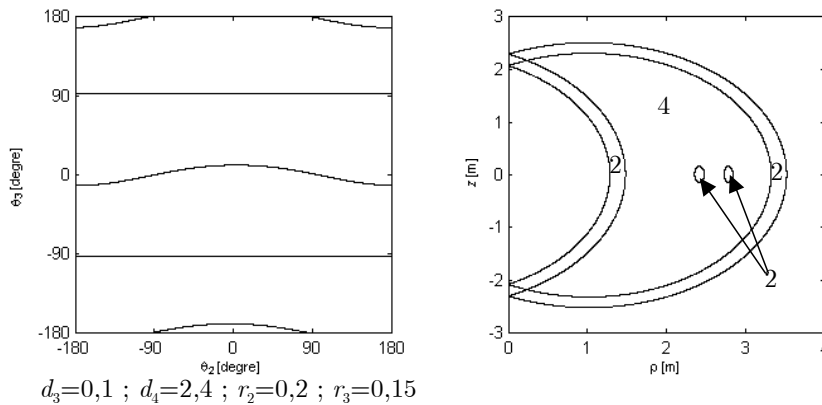


Figure 122 : Manipulateur dont la proportion de la région à 2 solutions est 0,14, la proportion de la région à 4 solutions est 0,38 et la proportion de l'espace de travail est 0,52 ( $WT_{18}$ )

- Conclusion

Les manipulateurs ayant une grande région à 4 solutions au MGI ont une topologie d'espace de travail de type  $WT_3$ ,  $WT_{17}$  et  $WT_{18}$ . En revanche seul les manipulateurs dont la topologie d'espace de travail est de type  $WT_3$  ont un bon  $K^{-1}$  moyen et maximum. Ce sont donc les meilleurs manipulateurs par rapport aux indices étudiés dans ce mémoire.

#### 4.5. TABLEAU RÉCAPITULATIF

Le Tableau 11 récapitule les topologies de manipulateurs présentant les meilleurs indices étudiés.

Indices de performance	Manipulateurs orthogonaux tels que $r_3 = 0$	Manipulateurs orthogonaux tels que $r_3 \neq 0$
$K^{-1}$ moyen	$WT_{17}$ , $WT_3$ et $WT_8$	$WT_3$
$K^{-1}$ maximum	$WT_3$ , $WT_4$ et $WT_8$	$WT_3$ , $WT_{14}$ et $WT_{16}$
Proportion de la région à 4 solutions	$WT_3$ , $WT_{17}$ et $WT_{18}$	$WT_3$ et $WT_9$

Tableau 11 : Topologies d'espace de travail présentant les meilleures performances

#### 4.6. ÉTUDE DU MANIPULATEUR 6R DIESTRO

Dans ce paragraphe, on va étudier les propriétés d'un manipulateur 3R dont les paramètres de DHm sont issus d'un manipulateur isotrope à 6 articulations rotoïdes appelé DIESTRO [Angeles 97]. Bien que pour ce manipulateur, le porteur et le poignet soient couplés, on appellera, par la suite, les trois premières articulations du DIESTRO "porteur". Ce manipulateur est caractérisé par des longueurs de bras et des décalages d'axes égaux à 1. En plus, tous ses axes successifs sont orthogonaux. Les paramètres de DHm du porteur d'un tel manipulateur sont donc :  $d_2 = 1$ ,  $d_3 = 1$ ,  $d_4 = 1$ ,  $r_2 = 1$ ,  $r_3 = 1$ ,  $\alpha_2 = -90^\circ$  et  $\alpha_3 = 90^\circ$ . On a calculé ses  $K^{-1}$  maximum et



moyen. On a trouvé que son  $K^{-1}$  maximum vaut 1 ce qui prouve l'isotropie ce manipulateur. Toutefois la valeur de son  $K^{-1}$  moyen est faible et vaut 0,175. Dans le but de comparer ce manipulateur avec d'autres se situant dans la même section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 1$  et  $r_3 = 1$ , on trace les courbes d'iso-valeurs de  $K^{-1}$  maximum (Figure 123(a)) et de  $K^{-1}$  moyen (Figure 123(b)).

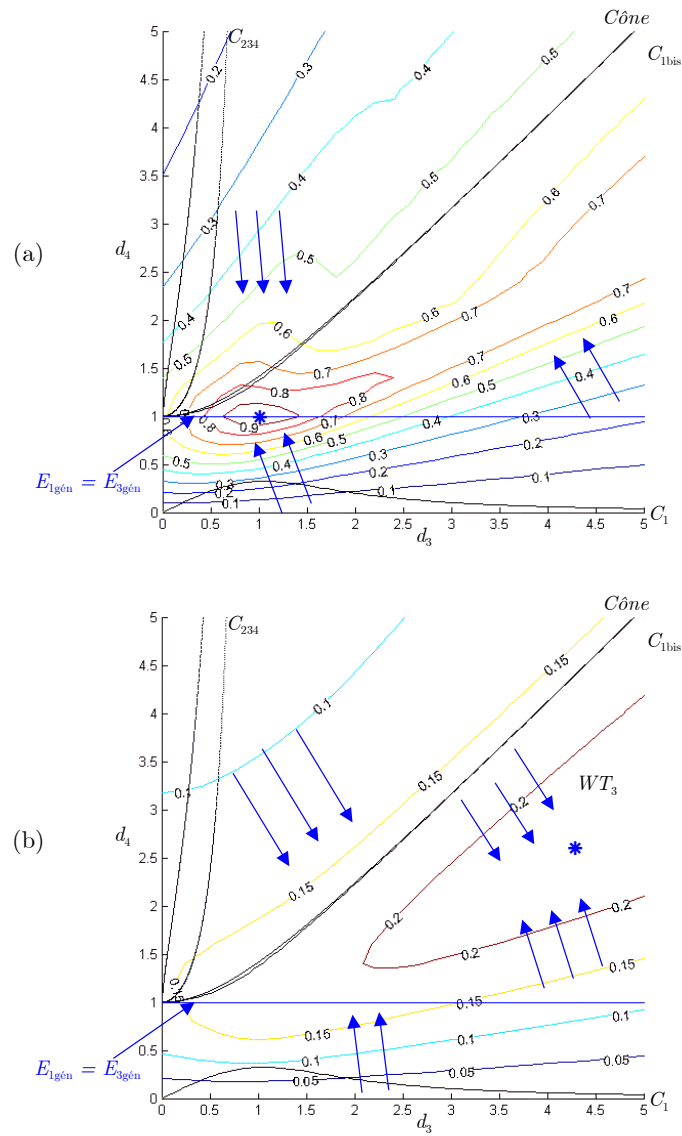


Figure 123 :  $K^{-1}$  maximum (a) et moyen (b) dans une section  $(d_3, d_4)$   
pour  $r_2 = 1$  et  $r_3 = 1$

La Figure 123(a) montre que les tendances dans toutes les topologies d'espace de travail vont vers le porteur du DIESTRO ( que l'on a marqué par \*). Toutefois, la

Figure 123(b) montre que les manipulateurs ayant un bon  $K^{-1}$  moyen sont situés dans la région voisine du signe ( $*$ ) et dont leur topologie d'espace est de type  $WT_3$ .

La Figure 124 représente l'espace articulaire et une section de l'espace de travail dans  $(\rho, z)$  du porteur du manipulateur DIESTRO. Ce porteur est générique, a deux aspects dans son espace articulaire et appartient à la classe d'homotopie  $2(1, 0)$ . Il est cuspidal et est situé entre les deux topologies d'espace de travail  $WT_2$  et  $WT_3$  ( $r_2 = r_3$  donc ses paramètres de DHm vérifient l'équation de la surface  $E_{1\text{gén}}$ ).

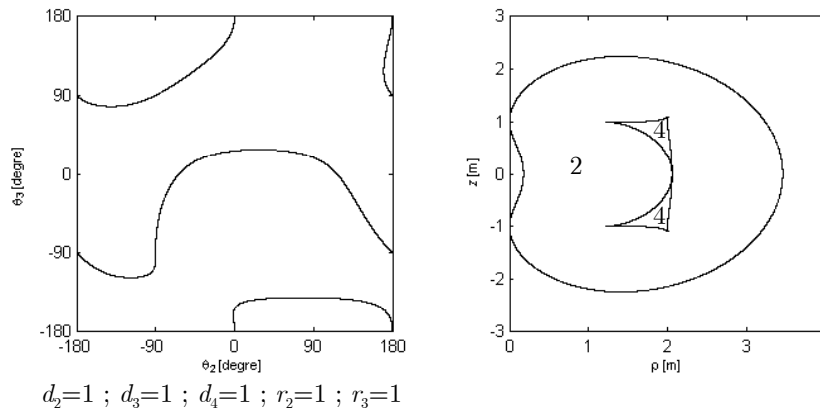


Figure 124 : l'espace articulaire et une section de l'espace de travail du porteur du manipulateur DIESTRO

En analysant la section de l'espace de travail représentée dans la Figure 124, on voit clairement que la région à 4 solutions au MGI est petite par rapport à celle à 2 solutions. Afin de comparer ce porteur avec les manipulateurs 3R appartenant à la même section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 1$  et  $r_3 = 1$ , on trace les courbes d'iso-valeurs représentant les proportions des régions à 2, 4 solutions par rapport à la sphère englobant tout l'espace de travail (on rappelle que son rayon représente la portée de manipulateur). Les flèches montrent les tendances dans chaque topologie d'espace de travail vers les manipulateurs ayant la valeur la plus élevée de la proportion des régions à 2, 4 solutions.

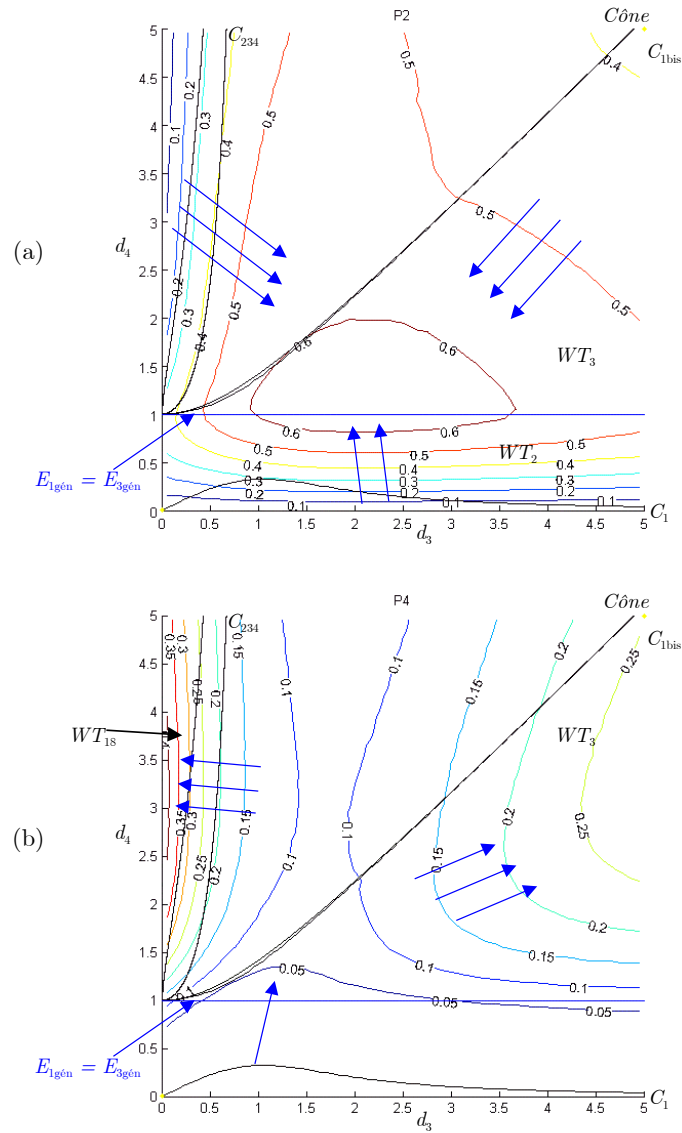


Figure 125 : Proportions de la région à 2 solutions (a) et à 4 solutions (b) dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2 = 1$  et  $r_3 = 1$

La Figure 125(a) montre que les manipulateurs ayant une valeur  lev e de la proportion à 2 solutions sont situés dans la région voisine de celle contenant le porteur du DIESTRO. La Figure 125(a) illustre que les manipulateurs ayant une valeur  lev e de la proportion de la région à 4 solutions sont loin de région contenant le porteur du DIESTRO et ne peuvent avoir qu'une topologie d'espace de travail de type  $WT_3$  ou  $WT_{18}$ . Pour le porteur du DIESTRO, la proportion de la région à 2 solutions par rapport à la sphère englobant l'espace de travail vaut 0,61 tandis que la proportion de la région à 4 solutions ne vaut que 0,02. En calculant le pourcentage du

volume de la région à 2 solutions et à 4 solutions par rapport au volume de l'espace de travail total, on trouve 96.82% et 3.18% respectivement. Ceci montre donc que la région à 4 solutions est très petite par rapport à celle à 2 solutions et par rapport à l'espace de travail. Selon les critères choisis dans ce chapitre, le porteur du manipulateur DIESTRO présente deux inconvénients : un  $K^{-1}$  moyen faible et une petite région à 4 solutions au MGI. Il présente néanmoins, deux avantages : il est isotrope et n'a pas de cavité toroïdale dans son espace de travail.

#### 4.7. CONCLUSION

Le but de ce chapitre était de partir des classifications établies dans les deux chapitres précédents et d'analyser ces manipulateurs en utilisant des indices de performance. Notre choix a été partagé entre une analyse globale et une analyse locale. L'analyse globale a reposé sur le  $K^{-1}$  moyen dans l'espace articulaire et les proportions des régions à 2, 4 solutions et de l'espace de travail. L'analyse locale se résume en la détermination de  $K^{-1}$  maximum. En plus, lors de cette analyse, on a tenu compte de l'existence ou non de cavité toroïdale dans l'espace de travail puisqu'elle est pénalisante lors de la planification des trajectoires. On a pu constater que la seule topologie d'espace de travail qui satisfait tous les indices de performance que l'on a étudiés est la  $WT_3$ . Finalement, on a étudié un porteur à axes orthogonaux d'un manipulateur 6R isotrope : le DIESTRO. En se basant sur les critères de performance cités au-dessus, on a fait une comparaison entre le DIESTRO et les autres manipulateurs ayant les mêmes valeurs de  $r_2$  et  $r_3$ . On a pu conclure que celui-ci a un faible  $K^{-1}$  moyen et une petite région à 4 solutions au MGI.



---

## **CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES**

---



## CONCLUSION GÉNÉRALE

Les études qui ont été menées dans le cadre de ce travail de thèse ont porté sur l'analyse et la classification des manipulateurs 3R à axes orthogonaux. Nous avons introduit une nouvelle classification de ces manipulateurs qui repose sur la notion de topologie d'espace de travail. Nous avons défini une topologie d'espace de travail par le nombre de points cusps et le nombre de nœuds qui apparaissent sur les surfaces de singularité.

La contribution majeure de ces recherches a été la classification exhaustive de toutes les topologies d'espaces de travail en fonction des paramètres de DHM. Dans chaque topologie d'espace de travail, nous avons déterminé les propriétés : (i) binaire / quaternaire, (ii) générique / non générique, (iii) la classe d'homotopie, (iv) le nombre d'aspects dans l'espace articulaire, (v) la présence ou non de cavité toroïdale dans l'espace de travail, (vi) le nombre de points cusps et (vii) le nombre de nœuds.

Nous avons montré que pour une famille de manipulateurs vérifiant :  $r_3 = 0$ , l'espace des paramètres se divise en 9 topologies d'espace de travail uniquement en donnant les équations de 7 surfaces qui les délimitent. Nous avons caractérisé les propriétés de chaque topologie d'espace de travail. Ainsi nous avons pu établir une condition nécessaire et suffisante, dépendant des paramètres de DHM, pour qu'un manipulateur soit cuspidal. Nous avons déterminé l'équation de la surface délimitant les manipulateurs binaires des quaternaires. Nous avons présenté un arbre de classification de manipulateurs particuliers ayant un ou plusieurs paramètres nuls. Étant non cuspidaux, ces manipulateurs sont classifiés selon le nombre de nœuds, l'existence ou non de cavité toroïdale et la t-parcourabilité en 12 cas. De tels manipulateurs sont intéressants du moment où nous avons trouvé que certains parmi eux ont un espace de travail totalement t-parcourable tout en ayant 4 solutions au MGI.



Ensuite, nous avons étudié une famille de manipulateurs plus générale en relaxant le paramètre  $r_3$ . Nous avons prouvé numériquement que cette famille se divise en 22 topologies d'espace de travail. Nous avons déterminé les équations de 6 surfaces séparant ces topologies, au moyen de l'analyse géométrique des surfaces de singularité lors des transitions. Nous avons établi une condition suffisante pour qu'un manipulateur soit quaternaire et une autre pour qu'un manipulateur soit cuspidal. Ces conditions ne dépendent que des paramètres de DHM. Nous avons présenté les manipulateurs ayant un ou plusieurs paramètres nuls et appartenant à cette famille de manipulateurs. En utilisant la même démarche que celle introduite pour  $r_3 = 0$ , nous avons caractérisé 11 nouveaux cas.

Nous avons consacré la dernière partie de ce mémoire à l'analyse des manipulateurs selon deux critères de performance représentatifs. Le premier critère est relatif à l'espace articulaire et permet de calculer le conditionnement maximum et moyen. Le deuxième est relatif à l'espace de travail. Il permet de calculer les proportions des zones à 2 et 4 solutions ainsi que tout le domaine accessible par rapport à une sphère, centrée sur l'origine et englobant l'espace de travail. Ces deux critères nous ont permis de tracer, dans des sections de l'espace des paramètres, des courbes d'iso-valeurs. L'analyse de ces courbes représente un outil pour le concepteur de robots. En effet, et grâce aux résultats proposés dans ce mémoire, celui-ci pourra mieux choisir la topologie de l'espace de travail souhaitée et ajuster les paramètres de DHM du manipulateur satisfaisant aux critères proposés. L'analyse des manipulateurs selon les deux critères de performance cités ci-dessus a été appliquée aux trois premières articulations d'un manipulateur isotrope : le DIESTRO. Grâce à notre étude, nous avons prouvé que les trois premières articulations du DIESTRO constitue un manipulateur possédant un conditionnement moyen faible et une petite région à 4 solutions au MGI.

## PERSPECTIVES

On peut résumer les perspectives de ce travail en quatre voies.

Dans ce mémoire, nous avons analysé et classifié des manipulateurs 3R à axes orthogonaux selon plusieurs critères. Pour permettre à l'ingénieur de faire son choix, ces critères sont à mettre en relation avec d'autres indices de performance (comme par exemple les performances dynamiques qui n'ont pas été abordée dans ce mémoire) et avec la tâche à réaliser (n- ou t-parcourabilité). Dans l'objectif de trouver un manipulateur optimal, nous nous retrouverons face à un problème multi-critères. Nous pourrions aussi être amenés à utiliser les outils de conception et d'aide à la décision en collaboration avec d'autres chercheurs de l'équipe MCM<sup>7</sup> [Giassi 04]. Nous pourrions ainsi définir la frontière de Pareto, à partir de nos contraintes d'optimisation. Une seconde direction de recherche pourrait être envisagée. Il s'agit d'étudier la robustesse<sup>8</sup> des manipulateurs 3R à axes orthogonaux vis-à-vis de la précision de fabrication et d'assemblage et du placement du manipulateur dans son environnement. Une partie de cette recherche a déjà été initiée dans les travaux de thèse de Caro [Caro 04]. L'apport de la classification suivant la topologie de l'espace de travail est un outil supplémentaire pour ce travail.

Les résultats donnés dans ce mémoire restent valables si nous considérons que les manipulateurs 3R étudiés constituent des porteurs de manipulateurs 6R dont le poignet est à axes concourants. Une nouvelle voie de recherche est intéressante : classifier les manipulateurs 6R à géométrie quelconque en fonction des mêmes propriétés utilisées dans ce mémoire. Une partie de ces recherches a déjà été initiée

---

<sup>7</sup> Méthodes de Conception en Mécanique (Institut de Recherche en Communications et Cybernétiques de Nantes)

<sup>8</sup> Un mécanisme est robuste si ses performances (parcourabilité, précision...) sont le moins sensible possible aux variations des paramètres géométriques de conception et environnementaux (température, pression...)

sur un prototype STAUBLI [**Wenger 03**]. Cependant la complexité des modèles augmente compte tenu du nombre croissant de paramètres de DHM à prendre en compte. De plus, la représentation des singularités et des frontières de l'espace de travail ne peut plus se faire uniquement en deux dimensions.

La dernière perspective peut se résumer à une extension de cette étude aux manipulateurs parallèles. En effet, depuis les travaux d'Innocenti [**Innocenti 92**], nous savons que les manipulateurs parallèles peuvent avoir un comportement similaire aux manipulateurs sériels cuspidaux. En effet, certains manipulateurs parallèles ont la possibilité de changer de solution à leur modèle géométrique direct sans franchir une singularité. Les travaux de Chablat [**Chablat 98a**] ont permis de définir les aspects et les domaines d'unicité de ces manipulateurs mais il n'existe pas encore de classification de ces manipulateurs. Récemment, [**Chablat 04**] a pu montrer que des manipulateurs possédant des dimensions simples peuvent être cuspidaux et que cette propriété pourrait avoir pour conséquence une augmentation du volume de leur espace de travail.

---

## **BIBLIOGRAPHIE**

---



---

**BIBLIOGRAPHIE**

- [Angeles 92] Angeles J., Ranjbaran F., Patel R. V., « On the Design of the Kinematic Structure of Seven-Axes Redundant Manipulators for Maximum Conditioning », Proceeding IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 494-499, Nice, Mai 1992.
- [Angeles 97] Angeles J., « Fundamentals of Robotic Mechanical Systems », Theory, Methods and Algorithms, Springer, 1997.
- [Baili 03a] Baili M., Wenger Ph., Chablat D., « Classification of One Family of 3R Positioning Manipulators », The 11<sup>th</sup> International Conference on Advanced Robotics, University of Coïmbra, Portugal, 2003.
- [Bennis 91] Bennis F., « Contribution à la Modélisation Géométrique et Dynamique des Robots à Structure Simple et Complexes », Thèse de Doctorat, ENSM, Nantes, Janvier 1991.
- [Borrel 86] Borrel P., Liegeois A., « A Study of Manipulator Inverse Kinematic Solutions with Application to Trajectory Planning and Workspace Determination », Proceeding IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1180-1185, 1986.
- [Buchberger 82] Buchberger B., Collins G. E., Loos R., « Computer Algebra: Symbolic & Algebraic Computation », Springer-Verlag, Wien, pp. 115-138, 1982.
- [Burdick 88] Burdick J. W., « Kinematic Analysis and Design of Redundant Manipulators », PhD Thesis, Stanford, 1988.

- [Burdick 91] Burdick J. W., « A Classification of 3R regional manipulator Singularities and Geometries », Proceeding IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 2670-2675, Sacramento, California, Avril 1991.
- [Burdick 95] Burdick J. W., « A Recursive method for Finding Revolute-Jointed Manipulator Singularities », Journal of mechanical Design, Vol. 117, pp. 55-63, 1995.
- [Caro 04] Caro S., « Conception Robuste de Mécanismes », Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Décembre 2004, à paraître.
- [Ceccarelli 89] Ceccarelli M., « On the Workspace of General 4R robot arm », International Symposium on Linkages and Computer aided Design Methods, pp. 37-46, Bucarest, Roumanie, Juillet 1989.
- [Ceccarelli 95] Ceccarelli M., « On the Workspace of 3R Manipulator », The International journal of Robotics Research, Vol. 14, N°2, pp. 152-160, Avril 1995.
- [Chablat 98a] Chablat D., « Domaines d'unicité et Parcourabilité pour les Manipulateurs Pleinement Parallèles », Thèse de Doctorat, École Centrale de Nantes, Novembre 1998.
- [Chablat 98b] Chablat D., Wenger Ph., Angeles J., « The Kinematic Design of a 3-DOF Hybrid Manipulator », 2<sup>nd</sup> International Conference on Integrated Design and manufacturing in Mechanical Engineering, Compiègne, France, Mai 1998.
- [Chablat 04] Chablat D., Wenger Ph., « The Kinematic Analysis of a Symmetrical Three Degree of Freedom Planar Parallel Manipulator », CISM-IFTToMM Symposium on Robot Design, Dynamics and Control, Montréal, Juin 2004..

- 
- [**Chedmail 87a**] Chedmail P., Wenger Ph., « Domaine Atteignable par un Robot : Généralisation de la Notion d'Aspects à un Environnement avec Obstacles, Application aux Robots Articulés Plans », Proceeding AUM'87, pp. 312-314, Nantes, 1987.
- [**Chedmail 87b**] Chedmail P., Wenger Ph., « Condition Nécessaire et Suffisante de Parcourabilité de l'Espace Opérationnel Accessible par un Robot dans un Environnement avec Obstacles », Note Interne du LAN, N°06, Nantes, Novembre 1987.
- [**Chedmail 87c**] Chedmail P., Wenger Ph., « Parcourabilité de l'Espace Opérationnel Accessible par un Robot dans un Environnement avec Obstacles », Note Interne du LAN, N°09, Nantes, Novembre 1987.
- [**Chedmail 98**] Chedmail P., Dombre E., Wenger Ph., « La CAO en Robotique, Outils et Méthodologies », Hermès, Paris, 1998.
- [**Collins 75**] Collins G.E., « quantifier elimination for real closed fields by cylindrical algebraic decomposition », Spring lecture, Notes in Computer Science, N°3, pp. 515-532, 1975.
- [**Corvez 02**] Corvez S., Rouillier F., « Using computer algebra tools to classify serial manipulators », Proceeding Fourth International Workshop on Automated Deduction in Geometry, Linz, 2002..
- [**Cox 98**] Cox D., Little J., O'Shea D., « Using Algebraic Geometry », Springer-Verlag, New York, 1998.
- [**Dombre 82**] Dombre E., Borrel P., Liégeois A., « A Rate Control Algorithm for Obtaining the Workspaces and the Strategies of an Underwater Manipulator », Proceeding Conf. IASTED-MECO, pp. 59.1-59.3, Tunis, Septembre 1982.
-



- [**Dombre 88**] Dombre E., Khalil W., « Modélisation et Commande des Robots », Hermès, Paris, 1988.
- [**El Omri 95**] El Omri J., Wenger Ph., « How to Recognize Simply a Nonsingular Posture Changing 3-DOF Manipulators », 7<sup>th</sup> International Conference on Advanced Robotics, ICAR'95, Vol. 1, pp. 215-222, San Felieu de Glixol, Espagne, Septembre 1995.
- [**El Omri 96**] El Omri J., « Analyse Géométrique et Cinématique des Mécanismes de Type Manipulateur », Thèse de Doctorat, Nantes, Février 1996.
- [**Giassi 04**] Giassi A., « Optimisation et Conception Collaborative dans le cadre de l'Ingénierie Simultanée », Thèse de Doctorat, Ecole Centrale de Nantes, Septembre 2004.
- [**Gorla 84**] Gorla B., Renaud M., « Modèles des Robots Manipulateurs ; Application à leur Commande », Cepadues Édition, Toulouse, 1984.
- [**Hemmingson 96**] Hemmingson E., Ellqvist S., Pauxels J., « New Robot Improves Cost-Efficiency of Spot Welding », ABB Review, Spot Welding Robots, pp. 4-6, 1996.
- [**Innocenti 92**] Innocenti C., Parenti-Castelli V., « Singularity-Free Evolution from one Configuration to another in Serial and fully-Parallel Manipulators », Robotic, Spatial Mechanisms and Mechanical Systems, ASME 1992.
- [**Khalil 86**] Khalil W., Kleinfinger J. F., « A New Geometric Notation for Open and Closed Loop Robots », Proceeding IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1174-1179, 1986.

- 
- [Khalil 99] Khalil W., Dombre E., « Modélisation Identification et Commande des Robots, 2<sup>ème</sup> édition revue et augmentée », Hermès, Paris, 1999.
- [Kohli 85] Kohli D., Spanos J., « Workspace Analysis of Mechanical Manipulator Using Polynomial Discriminants », Journal of Mechanism, Transmissions and Automation in Design, Vol. 107, pp. 209-215, Juin 1985.
- [Kohli 87] Kohli D., Hsu M. S., « The Jacobian Analysis of Workspaces of Mechanical Manipulators », Journal of Mechanism and Machine Theory, Vol. 22, N°3, pp. 265-275, 1987.
- [Lallemand 94] Lallemand J-P., Zegloul S., « Robotique, Aspects Fondamentaux », Edition Masson, Paris, 1994.
- [Lazard 04] Lazard D., Rouillier F., « Solving parametric polynomial systems », Technical Report, RR-5322, INRIA, October 2004.
- [Lee 88] Lee H. Y., Liang C-G., « A New Vector Theory for the Analysis of Spatial Mechanism », Mechanism and Machine Theory, Vol. 23, N°3, pp. 209-217, 1987.
- [Lueth 92] Lueth T. C., « Automatic Planning of Robot Workcell Layouts », IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 1103-1108, Nice, Mai 1992.
- [Merlet 97] Merlet J-P., « Les Robots Parallèles », 2<sup>ème</sup> édition, Hermès, Paris, 1997.
- [Morgan 87] Morgan A. P., « Solving Polynomial Systems Using Continuation for Scientific and Engineering Problems », Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1987.

- [Nielsen 99] Nielsen J., Roth B., « On the Kinematic Analysis of Robotic Mechanism », The International journal of Robotics Research, Vol. 18, N°12, pp. 1147-1160, Décembre 1999.
- [Ottaviano 04] Ottaviano E., Husty M., Ceccarelli M., « A Cartesian Representation for The Boundary Workspace of 3R Manipulators », Proceeding On Advanced in Robot Kinematics, ARK'04, Kluwer Academic Publisher, pp. 247-254, Sestri Levante, Italie, Juin 2004.
- [Pai 92] Pai D. K., Lieu M. C., « Genericity and Singularities of Robot Manipulators », IEEE International Conference on Robotics and Automation, Vol. RA-8, PP. 545-559, 1992.
- [Parenti 88] Parenti C. V., Innocenti C., « Spatial Open Kinematic Chains: Singularities, Regions and Subregions », Proceeding, 7<sup>th</sup> CISM-IFTOMM Romansy, pp. 400-407, Udine, Italy, Septembre 1988.
- [Paul 81] Paul R-P., « Robot Manipulators : Mathematics, Programming and Control », M.I.T Press, 1981.
- [Pieper 68] Pieper D. L., « The Kinematics of Manipulators under Computer Control », PhD Thesis, Stanford University, Stanford, 1968.
- [Raghavan 89] Raghavan M., Roth B., « Kinematic Analysis of the 6R Manipulators of General Geometries », The 5<sup>th</sup> International Symposium on robotic Research, University of Tokyo, 28-31 Août 1989.
- [Raghavan 93] Raghavan M., Roth B., « Inverse Kinematic of the General 6R Manipulator and related linkages », ASME Journal of Mechanical Design , Vol. 115, pp. 502-508, 1993.

- 
- [Ranjbaran 94] Ranjbaran F., Angeles J., « On positioning Singularities of 3-Revolute Robotic Manipulators », Proceeding, 12<sup>th</sup> Symposium on Engineering Applications in Mechanics, pp. 273-282, Montreal, Canada, June 1994.
- [Rastegar 87] Rastegar J., Deravi P., « Methods to Determine Workspace with Different Number of Configurations and all the Possible Configurations of a Manipulator », Mechanism and Machine Theory, Vol. 22, N°4, pp. 343-350, 1987.
- [Salisbury 82] Salisbury J. K., Craig J. J., « Articulated Hands : Force and Kinematic Issues », The International journal of Robotics Research, Vol. 1, N°1, pp. 4-17, 1982.
- [Shiller 89] Shiller Z., « Interactive Time Optimal Robot Motion Planning and Work-Cell Layout Design », IEEE International Conference on Robotics and Automation, pp. 964-969, Scottsdale, Mai 1993.
- [Singh 92] Singh J. R., Rastegar J., Snee S., « Determination of Manipulator Kinematic Characteristics : A Probabilistic Approach », International Journal of Robotics and Automation, Vol. 7, N°4, pp. 161-170, 1992.
- [Smith 90] Smith D. R., « Design of Solvable 6R Manipulators », PhD Thesis, Georgia Institute of Technology, Atlanta, 1990.
- [Smith 93] Smith D. R., Lipkin H., « Higher Order Singularities of Regional Manipulators », IEEE International Conference on Robotics and Automation, 1993.
- [Sommese 01] Sommese A., Verschelde J., Wampler C., « Numerical Decompositon of the Solution Sets of Polynomial Systems into Irreducible Components », SIAM Journal of Numerical Analysis, Vol. 38, N°6, pp. 2022-2046, 2001
-

- [Tsai 90] Tsai K. Y., « Admissible Motion in Manipulator's Workspace », PhD. Thesis, Wisconsin University.
- [Tsai 93a] Tsai K. Y., Kohli D., « Trajectory Planning in Task Space for General Manipulators », ASME Journal Of Mechanical Design, Vol. 115, pp. 909-914, Décembre 1993.
- [Tsai 93b] Tsai K. Y., Kohli D., Arnold J., « Trajectory Planning in Joint Space for Mechanical Manipulators », ASME Journal Of Mechanical Design, Vol. 115, pp. 915-921, Décembre 1993.
- [Wenger 88] Wenger Ph., Chedmail P., « Ability of Robot to Travel through its Workspace with an Encumbered Environment : Five Characterizations », proceeding International Symposium on Robotics and Manufacturing, ISRAM'88, pp. 1011-1018, New Mexico, Novembre 1988.
- [Wenger 89] Wenger Ph., « Aptitude d'un Robot Manipulateur à Parcourir son Espace de Travail en Présence d'Obstacles », Thèse de Doctorat, École Nationale Supérieure de Mécanique de Nantes, Octobre 1989.
- [Wenger 91] Wenger Ph., « Nouveaux Résultats sur la Cinématique des Robots : Généralisation des Aspects et Classification des morphologies », Rapport Interne, N°91.21, LAN, Ecole Centrale de Nantes, Septembre 1991.
- [Wenger 92] Wenger Ph., « A New General Formalism for the Kinematic Analysis for all Non-Redundant Manipulators », Proceeding International Conference on Robotics and automation, pp. 442-447, Nice, France, Mai 1992.

- 
- [Wenger 93] Wenger Ph., Chedmail P., Reynier E., « Global Analysis of Following Trajectories by redundant Manipulators in the Presence of Obstacles », Proceeding International Conference on Robotics and automation, pp. 3901-3906, Atlanta, Mai 1993.
- [Wenger 94] Wenger Ph., El Omri J., « On the Kinematics Of Singular and Nonsingular Posture Changing Manipulators », Proceeding Advanced Robotics in Kinematics, ARK'94, Kluwer Academic Publisher, pp. 29-38, Ljubjana, Juillet 1994.
- [Wenger 96] Wenger Ph., El Omri J., « Changing Posture for Cuspidal Robot Manipulators », Proceeding International Conference on Robotics and automation, pp. 3173-3178, Philadelphia, Mai 1996.
- [Wenger 98] Wenger P., « Classification of 3R Positioning Manipulators », ASME Journal of Mechanical Design, Vol.120, pp. 327-332, June 1998.
- [Wenger 03] Wenger Ph., Chablat D., Baili M., « Étude d'un Manipulateur de Morphologie Cuspidale », Rapport de Contrat, École Centrale de Nantes/STAUBLI, Février 2003.
- [Wenger 04a] Wenger Ph., « Uniqueness Domains and Regions of Feasible Paths for Cuspidal Manipulators », IEEE Transactions on Robotics and Automation, 2004, à paraître.
- [Wenger 04b] Wenger Ph., Chablat D., Baili M., « A DH-Parameter Based Condition for 3R Orthogonal Manipulators to have 4 Distinct Inverse Kinematic Solutions », ASME Journal of Mechanical Design, 2004, à paraître.

- [**Yoshikawa 85**] Yoshikawa ., « Manipulability and Redundant Control of Mechanisms », Proceeding International Conference on Robotics and automation, pp. 1004-1009, St Luis, Mars 1985.
- [**Zein 04**] Zein M., « Conception Géométrique de Robots », DEA, École Centrale de Nantes, Juillet 2004.
- [**Zoppi 02**] Zoppi M., « Effective Backward Kinematics for an Industrial 6R Robot », ASME Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference, Montreal, Canada, 2002.

**PUBLICATIONS PERSONNELLES**

- Publications en Revues Spécialisées avec Comité de Lecture

[Baili 04a] Baili M., Wenger Ph., Chablat D., « Kinematic Analysis of a Family of 3R Manipulators », Problems of Applied Mechanics, Vol. 2, N°15, pp. 27-32, 2004

[Wenger 04b] Wenger Ph., Chablat D., Baili M., « A DH parameter Based Condition for 3R Orthogonal Manipulators to have Four Distinct Inverse Kinematic Solutions », ASME Journal of Mechanical design, à paraître 2004.

- Publications en Congrès Internationaux

[Baili 03a] Baili M., Wenger Ph., Chablat D., « Classification of One Family of 3R Positioning Manipulators », The 11<sup>th</sup> International Conference on Advanced Robotics, University of Coïmbra, Portugal, 2003.

[Baili 04b] Baili M., Wenger Ph., Chablat D., « A Classification of 3R Orthogonal Manipulators by the Topology of their Workspace », IEEE International Conference On Robotics And Automation, pp. 1933-1938. 2004.

[Wenger 04c] Wenger Ph., Baili M., Chablat D., « A Workspace Based Classification of 3R Orthogonal Manipulators », 8<sup>th</sup> International Symposium on Advances in Robot Kinematics, Kluwer Academic Publishers, 2004.

- Publications en Congrès Nationaux



**[Baili 03b]** Baili M., Wenger Ph., Chablat D., « Classification d'une Famille de Manipulateurs 3R », 9ème colloque AIP PRIMECA, La Plagne, pp. 151-159, Avril 2003,

- Rapports

**[Wenger 03]** Wenger Ph., Chablat D., Baili M., « Etude d'un Manipulateur de Morphologie Cuspide », Rapport de Contrat, Ecole Centrale de Nantes/STAUBLI, Février 2003.

**[Baili 03c]** Baili M., « Etude Bibliographique des Robots Cuspides », Rapport interne, N°3, IRCCyN, Nantes, Mars 2003.

---

## **ANNEXES**

---



## ANNEXE A

Dans cette annexe, on représente les symboles des liaisons mécaniques de type pivot et glissière fixés par l'Association Française de Normalisation (AFNOR). Cette norme est indiquée sur la Figure 126. On désigne par ddl, l'abréviation pour degré de liberté.

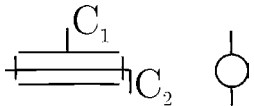
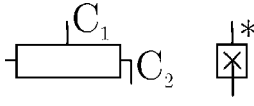
Nom de la liaison	Mouvements relatifs	Nombre de ddl	Représentations planes
Liaison pivot	1 rotation 0 translation	1	
Liaison glissière	0 rotation 1 translation	1	

Figure 126 : Norme AFNOR NF EN 23952/ISO 3952-1 NF EN 3952-1

Afin de normaliser le vocabulaire de ce mémoire avec celui utilisé dans la littérature internationale, on utilise le terme liaison rotoïde (R) associé à une liaison pivot ainsi que le terme liaison prismatique (P) associé à une liaison glissière. On utilise aussi les symboles indiqués sur la Figure 127.

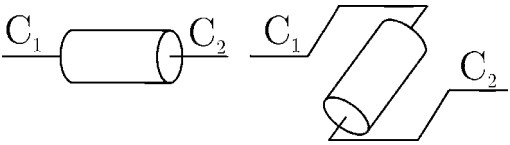
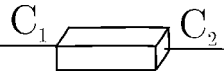
Liaison rotoïde (R)	Liaison prismatique (P)
	

Figure 127 : Symboles des liaisons rotoïde et prismatique utilisées dans ce mémoire

(\* ) ancienne normalisation NF E 04-015



---

## ANNEXE B

Dans cette annexe, on va démontrer une condition nécessaire et suffisante pour qu'un manipulateur orthogonal ( $r_3 = 0$ ) ait 4 solutions distinctes au MGI. Cette condition dépend des paramètres de DHM du manipulateur.

### B.1. TRANSITION ENTRE LES MANIPULATEURS BINAIRES ET LES MANIPULATEURS QUATERNAIRES

On démontre dans cette partie que la transition entre les manipulateurs binaires et les manipulateurs quaternaires est un ensemble de manipulateurs ayant un point quadruple pour le MGI. Ce résultat est une conséquence de la classification donnée par [Baili 03a] et [Corvez 02]. En utilisant les bases de Groebner et la décomposition cylindrique algébrique, [Corvez 02] donne les différentes surfaces qui divisent l'espace des paramètres de DHM en 105 cellules contenant des manipulateurs ayant le même nombre de points cusps dans leurs espaces de travail. L'étude de ces 105 cellules et l'analyse d'un manipulateur type par cellule conduit aux résultats suivants :

- Tous les manipulateurs tels que  $d_3 \leq d_4$  sont quaternaires.
- L'ensemble des manipulateurs tels que  $d_3 > d_4$  est composé de deux domaines adjacents dont l'un contient des manipulateurs quaternaires et l'autre contient des manipulateurs binaires. Autrement dit, les manipulateurs binaires existent seulement lorsque  $d_3 > d_4$ . Dans ce cas, il existe une surface dans l'espace des paramètres  $(d_3, d_4, r_2)$  qui sépare les manipulateurs quaternaires des manipulateurs binaires.

On montre dans la Figure 128 comment un manipulateur quaternaire avec 4 cusps devient binaire par déformation continue de la branche de singularité intérieure dans son espace de travail en diminuant progressivement la valeur du paramètre  $d_4$  ( $d_3=1,5$ ,  $r_2=0,5$ ). La Figure 128(a) représente un manipulateur quaternaire ayant 4 cusps et pas de cavité toroïdale. Lorsque  $d_4=0,9$ , les deux segments latéraux se

coupent : deux nœuds apparaissent ce qui donne une cavité toroïdale ainsi que deux régions à 4 solutions au MGI (Figure 128(b)). Plus  $d_4$  diminue, plus les deux cusps et le nœud de chaque région à 4 solutions se rapprochent (Figure 128(c) et Figure 128(d)). Ensuite ces deux cusps, le nœud et la région à 4 solutions se transforment en un unique point quadruple. Ce point quadruple disparaît par la suite et le manipulateur est alors binaire (Figure 128(e)). La transition entre manipulateur binaire et manipulateur quaternaire est définie par l'existence d'une paire de points quadruple.

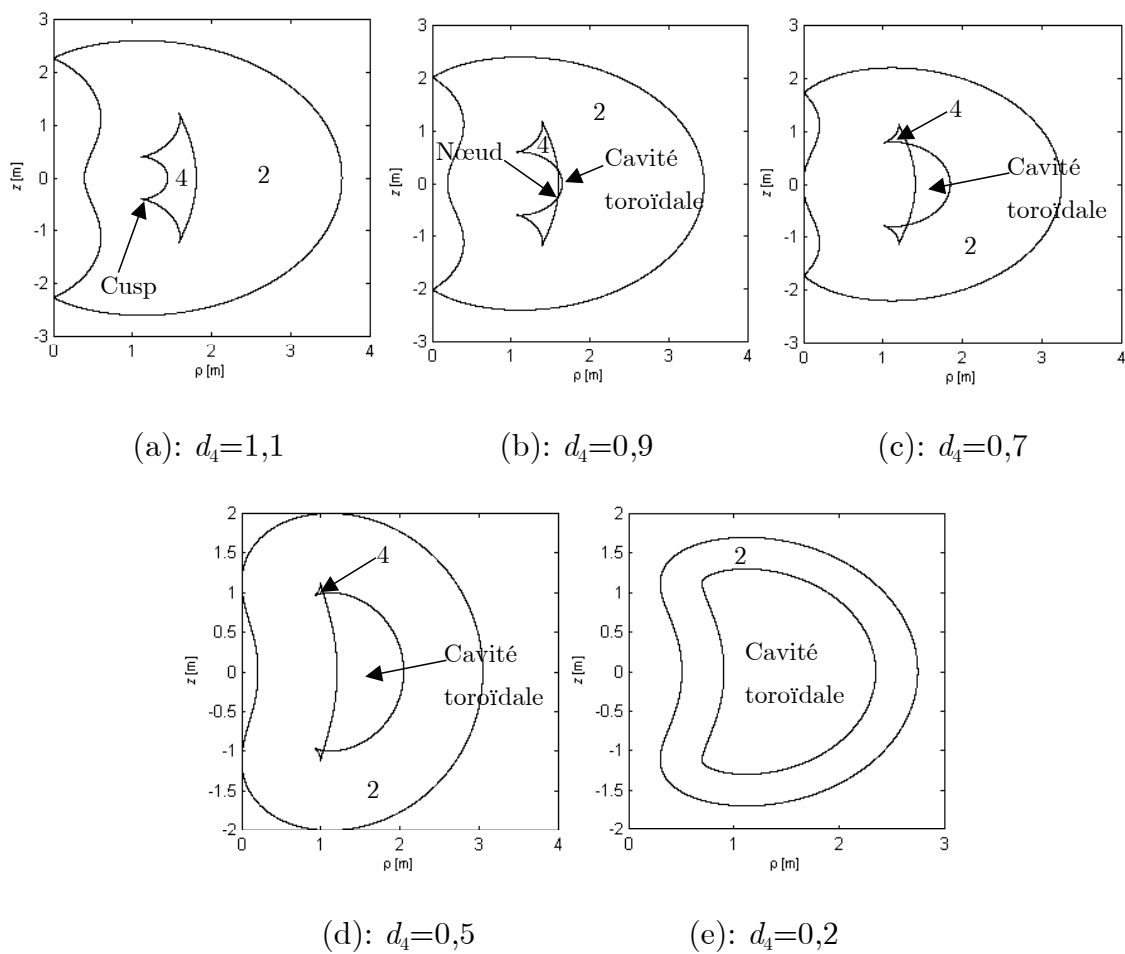


Figure 128 : Déformation continue de la branche de singularité intérieure lorsque  $d_4$  diminue ( $d_3=1,5$ ,  $r_2=0,5$ ). De 1,1 à 0,5, le manipulateur est quaternaire (a-c).

De 0,5 à 0,2, deux cusps et un nœud se transforment en un point quadruple (4 solutions au MGI) qui disparaît par la suite : le manipulateur devient binaire (d-e)

## B.2. CONDITION D'EXISTENCE D'UN POINT QUADRUPLE

Afin de déterminer l'équation de la surface de séparation entre les manipulateurs binaires et les manipulateurs quaternaires, on écrit la condition d'existence d'un point quadruple à partir du polynôme du MGI de degré 4 en  $t = \tan(\theta_3/2)$ . Ce polynôme peut s'écrire sous la forme :  $P(t) = C_{01}t^4 + 4C_{11}t^3 + 6C_{21}t^2 + 4C_{31}t + C_{41} = 0$  où  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{31}$  et  $C_{41}$  sont fonction de  $t = \tan(\theta_3/2)$ ,  $z$  et les paramètres de DHM. Pour la famille de manipulateurs étudiée, on a  $\alpha_2 = -90^\circ$ ,  $\alpha_3 = 90^\circ$ ,  $d_2 = 1$  et  $r_3 = 0$ .  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{31}$  et  $C_{41}$  s'écrivent alors :

$$C_{01} = d_3^2 d_4^2 - d_3 d_4 V - R_{11} + \frac{V^2}{4} + r_2^2$$

$$C_{11} = \frac{d_4 r_2 (-2d_3 d_4 + V + 2)}{2}$$

$$C_{21} = -\frac{d_3^2 d_4^2}{3} + \frac{2d_4^2 r_2^2}{3} + \frac{2d_4^2}{3} - \frac{R_{11}}{3} + \frac{V^2}{12} + \frac{r_2^2}{3}$$

$$C_{31} = \frac{d_4 r_2 (2d_3 d_4 + V + 2)}{2}$$

$$C_{41} = d_3^2 d_4^2 + d_3 d_4 V - R_{11} + \frac{V^2}{4} + r_2^2$$

où  $V = -\rho^2 - z^2 - 1 + d_3^2 + r_2^2 + d_4^2$  et  $R_{11} = \rho^2$ .

Pour que  $P(t)$  admette une racine quadruple, les trois équations suivantes doivent être vérifiées :

$$C_{01}C_{41} - C_{11}C_{31} = 0 \tag{51}$$

$$C_{01}C_{31} - C_{11}C_{21} = 0 \tag{52}$$

$$C_{01}C_{21} - C_{11}^2 = 0 \tag{53}$$

Afin d'écrire une condition dépendant des paramètres de DHM uniquement, on doit éliminer les coordonnées cartésiennes  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Autrement dit, on doit éliminer  $V$  et  $R_{11}$ . Cette élimination peut être effectuée en utilisant des outils algébriques



développés dans [Buchberger 82]. De tels outils sont disponibles dans quelques logiciels de calcul symbolique et notamment à travers la fonction “*Resultant*” de Maple. A partir des deux équations (51) et (53), on élimine d’abord  $R_{11}$ . on obtient un polynôme de degré 4 en  $V$ . On élimine ensuite  $R_{11}$  des équations (52) et (53). On obtient un polynôme de degré 3 en  $V$ . On élimine enfin  $V$  des deux polynômes trouvés ce qui donne le polynôme suivant :

$$d_3^{12}d_4^2r_2^4Q_1Q_2Q_3 \quad (54)$$

où  $Q_1$ ,  $Q_2$  et  $Q_3$  sont trois polynômes en  $d_3$ ,  $d_4$  et  $r_2$  :

$$Q_1 = d_3^6d_4^2 - 2d_3^4d_4^2 - d_3^4d_4^4 + 3r_2^2d_3^4d_4^2 + d_3^2d_4^2 + 2d_3^2d_4^4 - 2r_2^2d_3^2d_4^4 + 3r_2^4d_3^2d_4^2 - d_4^4 + r_2^2d_4^2 - 2r_2^2d_4^4 + 2r_2^4d_4^2 - r_2^4d_4^4 + r_2^6d_4^2 - r_2^2d_3^2 \quad (55)$$

$$Q_2 = -543d_4^5d_3^2r_2^2 + 648d_4^5d_3^4 - 81d_4^5d_3^2 - 32d_4^4r_2^4d_3 - 8d_4^4r_2^2d_3 + 1110d_3^3r_2^2d_4^4 - 25r_2^2d_3^5 - 47d_3^2d_4^3r_2^2 - 141d_3^2d_4^3r_2^4 - 47d_3^2d_4^3r_2^8 - 210d_3^6d_4r_2^2 + 486d_3^{10}d_4^3 + 972d_3^6d_4^3 - 1215d_3^8d_4^3 - 1458d_3^5d_4^4 - 8d_3^4d_4^4r_2^{10} - 48d_3^4d_4^4r_2^6 - 32d_3^4d_4^4r_2^8 - 141d_3^2d_4^3r_2^6 + 243d_3^3d_4^4 + 81d_3^5d_4^4 - 162d_3^7d_4^2 + 81d_3^9d_4^2 - 243d_3^4d_4^3 + 1224d_3^3d_4^4r_2^6 + 300d_3^3d_4^4r_2^8 + 1791d_3^3d_4^4r_2^4 - 801d_3^4d_4^3r_2^2 + 35d_3^4d_4r_2^4 + 29d_3^3d_4^2r_2^6 + 444d_3^5d_4^2r_2^2 + 58d_3^3d_4^2r_2^4 + 35d_3^4d_4r_2^2 + 16d_4^5r_2^{12} + 80d_4^5r_2^{10} + 160d_4^5r_2^8 + 160d_4^5r_2^6 + 80d_4^5r_2^4 + 16d_4^5r_2^2 - 177d_3^5d_4^2r_2^4 - 813d_3^7d_4^2r_2^2 - 2340d_3^8d_4^5r_2^2 + 2052d_3^4d_4^5r_2^4 - 2025d_3^6d_4^5 + 3078d_3^8d_4^5 + 1872d_3^8d_4^5r_2^4 - 3096d_3^7d_4^4r_2^4 + 1440d_3^5d_4^4r_2^6 - 459d_3^6d_4^3r_2^4 + 72d_3^9d_4^4r_2^2 + 2268d_3^{10}d_4^5r_2^2 + 648d_3^{12}d_4^5 + 972d_3^{11}d_4^4 - 2268d_3^{10}d_4^5 + 3159d_3^7d_4^4 - 1188d_3^5d_4^4r_2^4 + 2601d_3^6d_4^3r_2^2 - 72d_3^6d_4^5r_2^6 + 180d_3^4d_4^5r_2^6 + 2340d_3^6d_4^5r_2^4 + 2352d_3^4d_4^5r_2^2 - 1773d_3^8d_4^3r_2^2 - 2682d_3^5d_4^4r_2^2 - 1557d_3^6d_4^5r_2^2 + 1872d_3^7d_4^4r_2^2 - 2916d_3^9d_4^4 + 29d_3^3d_4^2r_2^2 - 168d_3^4d_4^5r_2^8 - 552d_3^2d_4^5r_2^8 - 1227d_3^2d_4^5r_2^4 - 1233d_3^2d_4^5r_2^6 - 84d_3^2d_4^5r_2^{10} - 1845d_3^4d_4^3r_2^4 - 1287d_3^4d_4^3r_2^6 \quad (56)$$

$$Q_1 = -d_3 + d_4r_2^2 + d_4 \quad (57)$$

On note qu’on obtient exactement les mêmes équations lorsque  $r_3 \neq 0$ . En effet, et pour  $r_3 \neq 0$ , les coefficients  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{31}$  et  $C_{41}$  gardent les mêmes expressions en fonction de  $R_{11}$  et  $V$  puisque  $r_3$  n’apparaît que dans l’expression de  $V$  sous la forme :

$V(\text{pour } r_3 \neq 0) = V(\text{pour } r_3 = 0) + r_3^2$ . Du moment où on élimine  $V$  des équations (51), (52) et (53), le résultat reste inchangé. On en conclut alors que la condition d'apparition d'un point quadruple ne dépend pas de  $r_3$ .

### B.3. LA SURFACE DE SÉPARATION ET LA CONDITION NÉCESSAIRE ET SUFFISANTE

Puisque l'élimination de variables entre une ou plusieurs équation peut rajouter des solutions supplémentaires [Buchberger 82], les solutions de (54) peuvent contenir d'autres surfaces non pertinentes en plus de la surface qui sépare les manipulateurs binaires des quaternaires dans l'espace des paramètres  $(d_3, d_4, r_2)$ . Or, on sait déjà que la surface séparant les manipulateurs binaires des quaternaires doit nécessairement être parmi les surfaces données dans [Corvez 02]. On rappelle ces surfaces :

$$f_1 : d_3^2 - d_4^2 + r_2^2 = 0 \quad (58)$$

$$f_2 : d_4^2((r_2^2 + d_3^2 + 1)^2 - 4d_3^2)(-d_4^2 + (r_2^2 + d_3^2)) - d_3^2 r_2^2 = 0 \quad (59)$$

$$lct : d_4 r_2^2 + d_4 - d_3 = 0 \quad (60)$$

$$Z_{01} : (d_3 - 1)^2(d_3^2 - d_4^2) + d_3^2 r_2^2 = 0 \quad (61)$$

$$Z_{02} : (d_3 + 1)^2(d_3^2 - d_4^2) + d_3^2 r_2^2 = 0 \quad (62)$$

La comparaison entre les équations (54), (55), (56) et (57) et les équations (58), (59), (60), (61) et (62) montre que l'équation (55) ( $Q_1 = 0$ ) est la même que l'équation (59). En plus, les équations (56) et (57) sont différentes des équations (58), (60), (61) et (62). On déduit alors que la seule solution pertinente est :  $Q_1 = 0$ . On remarque que cette équation est de degré 2 en  $d_4^2$ . La résolution de cette équation en  $d_4$  permet d'écrire les équations des deux surfaces  $C_1$  et  $C_{1\text{bis}}$  suivantes :

$$C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (63)$$

$$C_{1\text{bis}} : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 + \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)} \quad (64)$$

$$\text{où : } A = \sqrt{(d_3 + 1)^2 + r_2^2} \text{ et } B = \sqrt{(d_3 - 1)^2 + r_2^2}$$

La Figure 129 représente le graphe des deux surfaces  $C_1$  et  $C_{1\text{bis}}$ . Le graphe de ces deux surfaces est tracé dans une section  $(d_3, d_4)$  pour  $r_2=0,5$  puis  $r_2=1$  (Figure 129(a) et Figure 129(b)) et dans une section  $(r_2, d_4)$  pour  $d_3=0,5$  puis  $d_3=1,5$  (Figure 129(c) et Figure 129(d)).

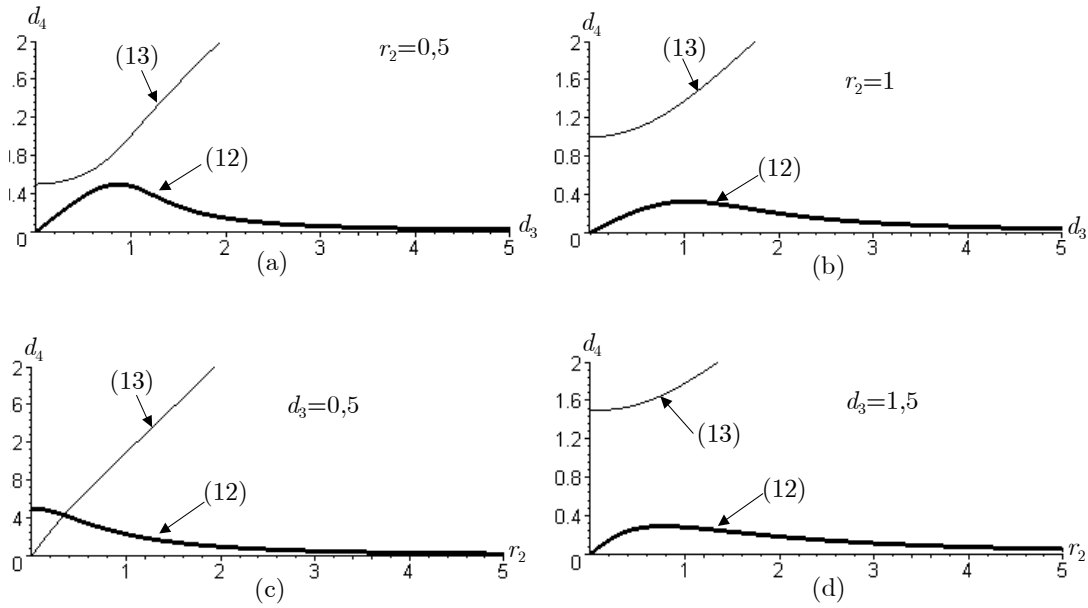


Figure 129 : Graphes de  $C_1$  et  $C_{1\text{bis}}$  dans différentes sections de l'espace de paramètres de DHM  $d_4$

Les sections représentées par les Figure 129(a-b-d), montrent que la limite entre les manipulateurs binaires et les manipulateurs quaternaires est donnée par l'équation (28) seulement. En revanche, l'équation (42) admet des solutions pour  $d_4 > d_3$  uniquement (pour les manipulateurs quaternaires). Toutefois, on assiste à une intersection des deux graphes dans la section  $d_3=0,5$  (Figure 129(c)) et l'équation (42) admet des solutions lorsque  $d_4 < d_3$  pour des petites valeurs de  $r_2$ . L'équation (42) ne joue aucun rôle pour séparer les manipulateurs binaires des quaternaires et la seule surface pertinente est donnée par l'équation (28). Afin de prouver ce résultat, on

choisit les 3 manipulateurs tests (1), (2) et (3) dans la section  $d_3=0,5$  définis par  $(d_4=0,15, r_2=0,21)$ ,  $(d_4=0,4, r_2=0,1)$  et  $(d_4=0,45, r_2=0,4)$  respectivement. Les deux manipulateurs (1) et (2) sont séparé par la surface  $C_1$  (équation (28)) alors que les manipulateurs (2) et (3) sont séparés par la surface  $C_{1bis}$  (équation (42)). La Figure 130 montre les espaces de travail de ces trois manipulateurs tests. Les deux manipulateurs (1) et (2) sont binaires alors que le manipulateur (3) est quaternaire. On conclut que la surface de séparation entre les manipulateurs binaires et quaternaires est la surface  $C_1$  (équation (28)). Ainsi un manipulateur 3R orthogonal tel que  $r_3 \neq 0$  est quaternaire si et seulement si ses paramètres de DHM vérifient la condition suivante :

$$d_4 > \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_3^2 + r_2^2}{AB} \right)}$$

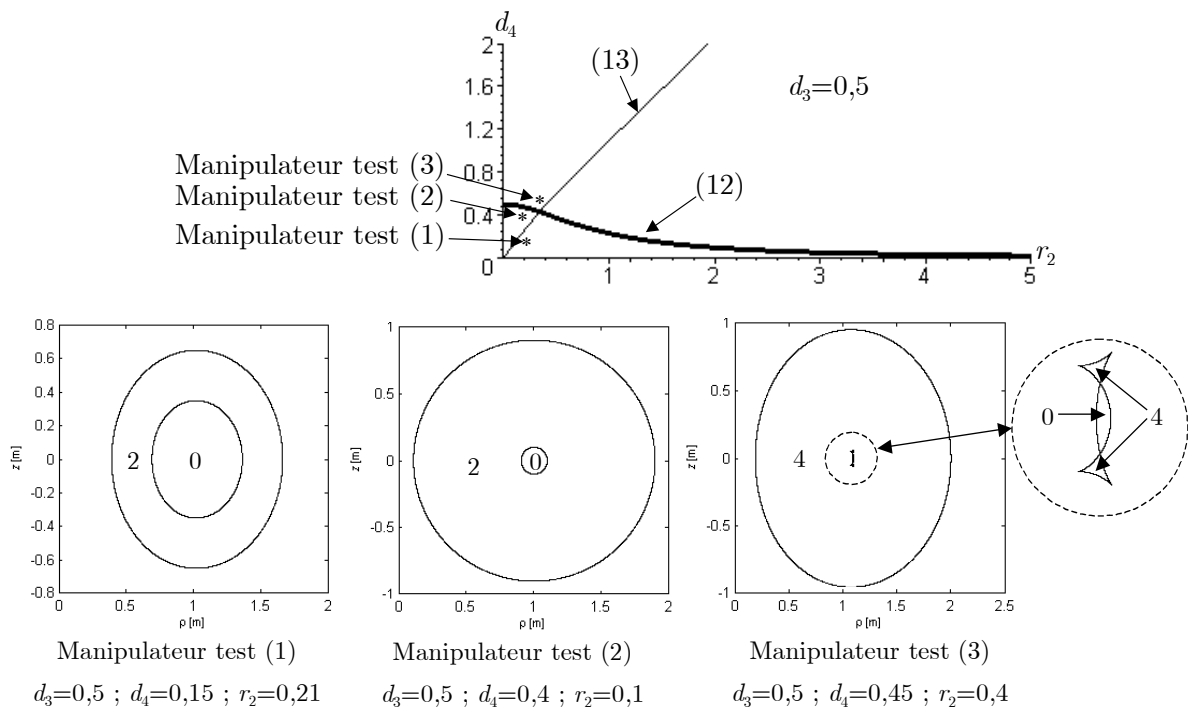


Figure 130 : Les trois manipulateurs tests et leurs espaces de travail

Afin de vérifier ce résultat, on utilise une méthode numérique. Il s'agit d'effectuer un balayage dans plusieurs sections de l'espace des paramètres et de tracer les manipulateurs binaires. Pour chaque manipulateur, le programme vérifie l'existence

de points cusps dans une section de l'espace de travail. Dans le cas  $d_4 < d_3$  et en l'absence de cusps, on en déduit que le manipulateur est binaire et on le représente par une marque dans la section de l'espace des paramètres. La Figure 131 représente les mêmes sections que celles représentées dans la Figure 129. Le pas de balayage utilisé est de 0,03. La comparaison des Figure 129(a-b-c-d) avec les Figure 131(a-b-c-d) confirme que la surface pertinente qui sépare les manipulateurs binaires des quaternaires est donnée par l'équation (28).

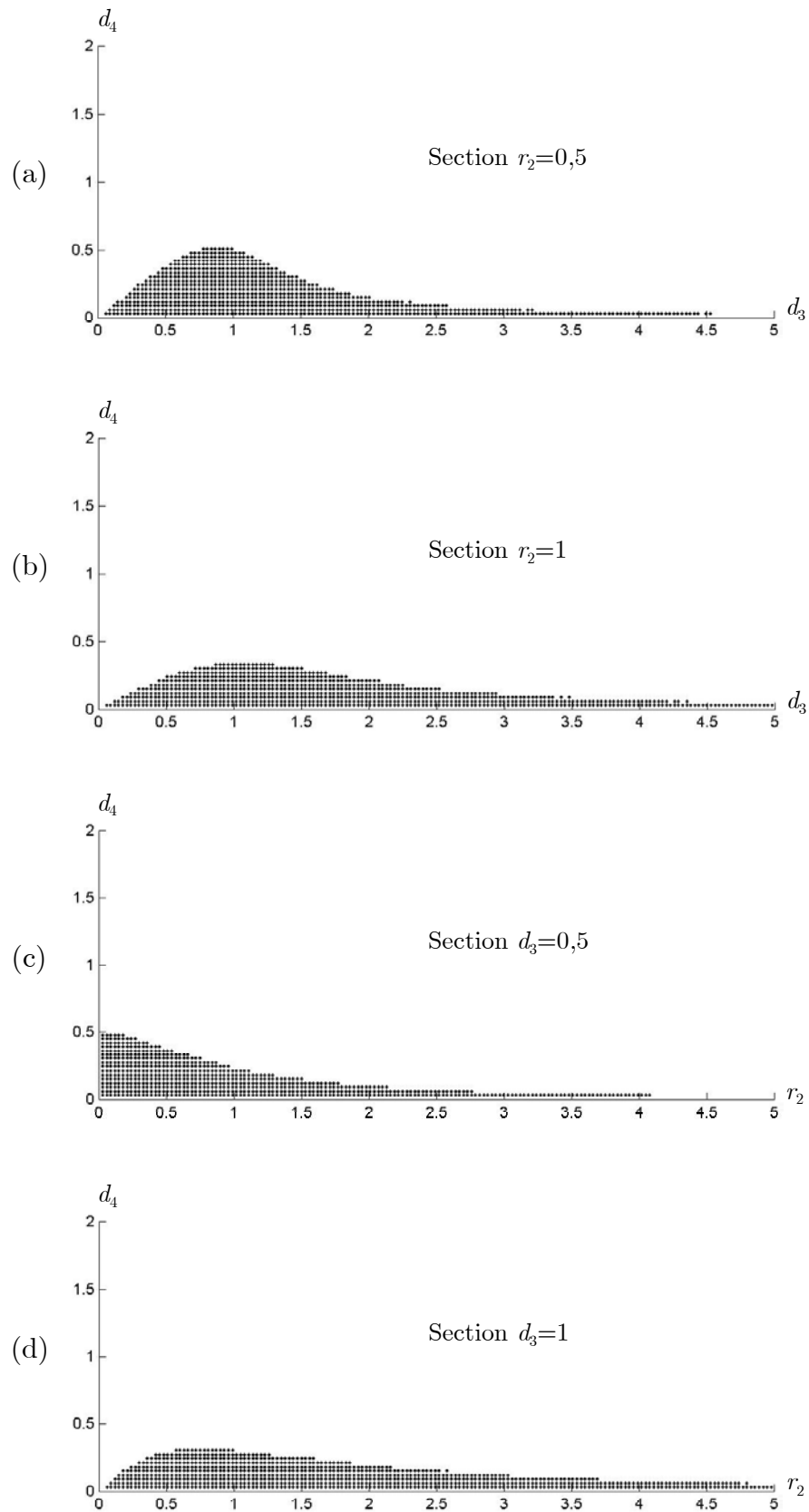


Figure 131 : Représentations numériques des manipulateurs binaires dans les mêmes sections que la Figure 129

Pour un manipulateur orthogonal tel que  $d_2 \neq 1$ , la surface de séparation entre les manipulateurs binaires et les manipulateurs quaternaires est donnée par l'équation suivante :

$$C_1 : d_4 = \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_2^2 (d_3^2 - r_2^2)}{AB} \right)}$$

$$\text{où : } A = \sqrt{(d_3 + d_2)^2 + r_2^2} \text{ et } B = \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2}$$

#### B.4. CONCLUSION

En résumé, un manipulateur orthogonal défini par ses paramètres de DHM  $d_2$ ,  $d_3$ ,  $d_4$  et  $r_2$  est quaternaire si et seulement si :

$$d_4 > \sqrt{\frac{1}{2} \left( d_3^2 + r_2^2 - \frac{(d_3^2 + r_2^2)^2 - d_2^2 (d_3^2 - r_2^2)}{\sqrt{(d_3 + d_2)^2 + r_2^2} \sqrt{(d_3 - d_2)^2 + r_2^2}} \right)} \quad (65)$$

L'étude menée dans cette annexe suppose que les manipulateurs étudiés n'ont pas de décalage sur le dernier bras ( $r_3 = 0$ ). La condition nécessaire et suffisante donnée par l'équation (65) ne dépend pas de  $r_3$ . Ceci prouve que dans le cas  $r_3 \neq 0$ , cette condition reste pertinente. Toutefois, elle n'est plus nécessaire mais seulement suffisante.

## ANNEXE C

Dans cette annexe, on va déterminer les équations des surfaces  $C_{234}$ ,  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  qu'on a introduit dans le chapitre III pour des manipulateurs tels que  $r_3 \neq 0$ . On rappelle que la surface  $C_{234}$  (avec ses 3 parties) sépare les domaines 1-9. Cette surface correspond à la création de deux cusps en  $z = 0$ . Les surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  correspondent à la création de deux n oeuds en  $z = 0$ . Ces deux surfaces partagent l'espace des paramètres de DHm (qui a déjà été subdivis e par les surfaces  $C_1$ ,  $C_{1\text{bis}}$ ,  $C_{234}$  et  $C one$  en 9 domaines) en 22 topologies d'espace de travail. Lorsque  $r_2 < r_3$  (respectivement  $r_2 > r_3$ ), la surface  $E_{1\text{gén}}$  est au-dessus (respectivement en dessous) de la surface  $E_{3\text{gén}}$ . La surface  $E_{1\text{gén}}$  caractérise la limite entre les manipulateurs ayant ou non une cavité toroïdale dans leur espace de travail. En revanche, la surface  $E_{3\text{gén}}$  caractérise la limite entre les manipulateurs dont la surface de singularité extérieure coupe ou non une autre surface (le croissant ou la surface de singularité intérieure).

L'apparition des cusps et des n oeuds s'effectue nécessairement par couple et en  $z = 0$  en raison de la symétrie de l'espace de travail par rapport au plan  $z = 0$ .

### C.1. CONDITION D'APPARITION DE CUSPS EN $z = 0$

Afin de déterminer l'équation de la surface traduisant l'apparition d'un couple de points cusps en  $z = 0$ , on écrit la condition d'existence d'un point triple à partir du polynôme du MGI de degré 4 en  $t = \tan(\theta_3/2)$ . Ce polynôme peut s'écrire sous la forme :  $P(t) = C_{01}t^4 + 4C_{11}t^3 + 6C_{21}t^2 + 4C_{31}t + C_{41} = 0$ .

Pour la famille de manipulateurs étudiée, on a  $\alpha_2 = -90^\circ$ ,  $\alpha_3 = 90^\circ$  et  $d_2 = 1$ . Les coefficients  $C_{01}$ ,  $C_{11}$ ,  $C_{21}$ ,  $C_{31}$  et  $C_{41}$  sont donn es dans l'annexe B.

Pour que  $P(t)$  admette une racine triple, les deux équations suivantes doivent être vérifiées :

$$C_{01}C_{41} - 4C_{11}C_{31} + 3C_{21}^2 = 0 \quad (66)$$

$$C_{01}C_{21}C_{41} + 2C_{11}C_{21}C_{31} - C_{01}C_{31}^2 - C_{11}^2C_{41} - C_{21}^3 = 0 \quad (67)$$



Afin d'écrire une condition dépendant des paramètres de DHm uniquement, on doit éliminer les coordonnées cartésiennes  $x, y$ , on doit donc éliminer  $R_{11}$ . De la même manière que dans l'annexe B, cette élimination peut être effectuée en utilisant la fonction “*Resultant*” de Maple. On obtient alors l'équation en  $z$  des points triples. En utilisant la symétrie de l'espace de travail par rapport à au plan  $z = 0$ , la condition d'apparition d'un couple de cusps en  $z = 0$  correspond au coefficient constant de l'équation des points triples. Ce coefficient caractérise l'équation de la surface  $C_{234}$  donnée par l'équation (68). Cette équation contient 536 monômes, elle est de degré 12 en  $d_3^2, d_4^2, r_2^2$  et  $r_3^2$ . D'après l'algorithme de Charles Wampler ([Sommese 01]), l'équation de la surface  $C_{234}$  ne peut pas être factorisée dans le cas  $r_3 \neq 0$ . Lorsque  $r_3 = 0$ , on peut l'écrire sous la forme d'un produit de 3 facteurs représentant les équations des surfaces  $C_2, C_3$  et  $C_4$ .

$$\begin{aligned}
C_{234} := & -12 r_2^4 d_3^{10} d_4^8 + 180 r_2^8 d_3^{10} r_3^4 + 90 r_2^8 d_3^{12} r_3^2 - 18 r_3^2 d_3^{14} d_4^8 + 60 r_3^2 d_3^8 d_4^{10} - 60 r_3^2 d_3^{14} d_4^6 \\
& - 30 r_2^8 d_3^{10} d_4^2 + 15 r_2^4 d_3^8 r_3^4 - 20 r_3^6 d_3^6 d_4^6 - 90 d_4^8 d_3^6 - 20 d_3^{18} d_4^6 + 60 r_2^{10} d_3^6 r_3^6 \\
& - 24 r_2^4 d_3^{10} r_3^6 + 96 r_2^8 d_3^8 d_4^2 r_3^2 + 18 r_2^8 d_3^{14} - 60 d_3^{16} r_3^2 + 36 d_3^{12} d_4^{10} - 90 r_2^2 d_3^{18} r_3^2 \\
& - 60 d_3^{10} d_4^2 r_2^6 - 36 r_2^4 d_3^{10} r_3^4 + 30 r_2^8 d_3^4 d_4^2 r_3^{10} + 120 d_3^{16} d_4^2 + 15 d_3^4 d_4^8 r_2^4 - 90 r_2^8 d_3^{12} d_4^2 r_3^2 \\
& + 306 r_2^4 r_3^6 d_3^6 d_4^6 - 20 d_3^6 d_4^6 + 60 d_3^8 d_4^4 r_2^2 - 300 d_3^{14} d_4^6 - 36 d_3^{12} d_4^4 r_2^4 - 102 r_2^8 d_3^2 d_4^4 r_3^6 \\
& + 120 r_2^2 d_3^{14} d_4^4 + 24 r_2^8 d_3^2 d_4^2 r_3^8 + 60 r_2^4 r_3^{10} d_3^8 d_4^2 + 90 d_3^8 d_4^8 r_3^4 + 240 r_2^8 d_3^8 d_4^4 r_3^2 \\
& - 18 r_2^2 d_3^{20} - 6 d_3^{10} d_4^{12} - 24 r_2^4 d_3^2 d_4^8 r_3^2 - 36 r_3^4 d_3^{12} d_4^4 - 12 d_3^6 d_4^6 r_3^4 + 102 r_2^{10} d_3^4 d_4^2 r_3^6 \\
& + 48 r_2^2 d_3^{16} r_3^2 - 138 r_2^8 r_3^4 d_3^8 d_4^2 + 180 r_2^4 r_3^8 d_3^{10} d_4^2 + 24 r_2^{10} d_3^8 d_4^2 r_3^2 + 15 r_3^4 r_2^4 d_4^8 \\
& - 60 r_2^8 d_3^{10} d_4^2 r_3^4 + 12 r_2^6 d_3^{14} - 138 r_2^4 r_3^8 d_3^8 d_4^2 - 6 d_3^{22} d_4^2 - 60 r_2^4 d_3^{16} r_3^2 + 102 r_3^4 r_2^4 d_4^6 d_3^2 \\
& - 90 d_3^{10} d_4^{10} + 120 d_3^{16} d_4^6 + 12 r_2^2 d_3^{16} - 6 d_3^{12} r_3^2 + 15 d_3^4 d_4^8 + 24 r_2^4 d_3^{10} d_4^6 + 12 r_2^8 d_3^{10} d_4^4 r_3^2 \\
& + 102 r_2^{10} r_3^4 d_3^6 d_4^2 - 18 r_2^6 d_3^6 d_4^2 r_3^8 - 36 r_2^4 r_3^4 d_3^{10} d_4^6 - 12 r_2^4 d_3^{14} - 24 r_2^4 d_3^{14} r_3^2 \\
& - 1548 r_3^4 r_2^4 d_4^6 d_3^4 + 60 d_3^{14} r_3^6 - 12 r_2^4 d_3^6 d_4^8 - 24 r_3^2 r_2^2 d_4^8 d_3^2 + 18 r_2^{10} d_3^4 d_4^2 r_3^8 + 36 d_3^{20} d_4^2 \\
& - 12 r_2^2 d_3^8 d_4^{10} - 18 r_2^8 d_3^6 d_4^2 r_3^6 + 15 d_3^8 d_4^4 + 60 d_3^{18} r_3^2 - 6 d_3^{14} d_4^{10} + 72 r_2^4 r_3^6 d_3^{10} d_4^4 \\
& + 120 d_3^8 d_4^6 - 60 d_3^{16} r_3^6 - 90 d_3^{14} d_4^8 - 6 r_2^2 d_4^{10} r_3^2 + 204 r_2^8 d_3^4 d_4^2 r_3^6 - 72 r_2^4 d_3^{14} d_4^4 \\
& - 900 d_3^{10} r_3^4 r_2^2 d_4^2 + 306 r_2^4 r_3^8 d_3^6 d_4^4 - 6 d_4^{10} d_3^2 + 400 d_3^{12} d_4^6 - 18 r_2^{10} d_3^{10} d_4^2 r_3^2 - 90 d_3^{10} d_4^4 \\
& + 6 r_2^{10} d_3^{12} - 120 r_2^4 r_3^4 d_3^{14} d_4^2 + 102 r_2^4 r_3^4 d_4^8 d_3^2 + 24 r_2^4 d_3^{14} d_4^2 + 24 r_2^8 d_3^2 d_4^4 r_3^8
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -12 r_2^2 d_3^6 d_4^{10} - 102 r_2^8 d_3^6 d_4^4 r_3^2 - 90 d_3^{18} d_4^4 + 12 r_2^2 d_3^{10} r_3^6 - 198 r_2^8 d_3^6 d_4^4 r_3^4 \\
& + 24 r_2^{10} d_3^2 d_4^2 r_3^8 - 978 r_2^4 r_3^6 d_3^{10} d_4^2 - 90 d_3^{18} d_4^2 + 36 r_2^2 d_3^{14} r_3^2 + 306 r_2^8 r_3^4 d_3^6 d_4^2 - 20 d_3^6 d_4^{12} \\
& + 12 r_2^{10} d_3^6 d_4^2 r_3^6 + 6 r_2^{10} d_3^2 d_4^2 r_3^{10} - 12 r_2^4 d_3^8 r_3^6 + 90 r_2^8 d_3^6 d_4^2 r_3^8 + 6 d_3^{22} r_2^2 \\
& - 504 r_2^4 r_3^6 d_3^8 d_4^4 - 60 d_3^{18} r_3^4 + 36 d_3^{12} d_4^2 + 36 d_4^{10} d_3^4 - 24 r_2^2 r_3^4 d_4^8 d_3^2 - 6 d_3^{10} d_4^2 - 6 d_3^{12} r_3^{10} \\
& - 282 r_2^4 d_3^{10} d_4^4 r_3^2 - 12 r_2^{10} r_3^4 d_3^8 d_4^2 + d_3^{12} r_3^{12} + d_3^{12} r_2^{12} + r_3^{12} r_2^{12} + d_3^{12} d_4^{12} + 120 d_3^8 d_4^{10} \\
& - 300 d_3^{10} d_4^6 + 225 d_3^{12} d_4^4 + 225 d_3^8 d_4^8 + 15 d_3^4 d_4^{12} + 15 d_3^{20} r_3^4 + 15 d_3^{16} r_2^8 + 15 d_3^{20} r_2^4 \\
& + 15 d_3^{12} r_3^8 + 90 d_3^{16} r_3^4 + 15 d_3^{12} r_2^8 - 6 d_3^{16} r_2^4 + 15 d_3^{16} r_3^8 + 15 d_3^{20} d_4^4 + 225 d_3^{16} d_4^4 - 90 d_3^{14} d_4^2 \\
& + 15 d_3^8 d_4^{12} + 15 d_3^{16} d_4^8 + 15 d_3^{12} r_3^4 + 15 d_3^{12} r_2^4 + 225 d_3^{12} d_4^8 - 90 d_4^{10} d_3^6 - 6 d_3^2 d_4^{12} + 6 d_3^{14} r_3^{10} \\
& + 30 d_3^{14} r_3^2 + 6 r_3^2 d_3^{22} + 20 d_3^{18} r_3^6 - 12 r_2^4 d_3^{18} + 12 r_2^2 d_3^{18} - 300 d_3^{14} d_4^4 + 20 d_3^{18} r_2^6 - 30 d_3^{14} r_3^8 \\
& - 18 r_2^2 d_3^{14} - 30 r_3^2 d_3^{20} - 60 d_3^{14} r_3^4 + 6 r_2^2 d_3^{12} - 20 d_3^{12} r_3^6 + 12 r_2^6 d_3^{16} + 6 d_3^{14} r_2^{10} + 20 d_3^{12} r_2^6 \\
& - 300 d_3^{10} d_4^8 + d_3^{12} + 15 d_3^{20} + 15 d_3^{16} - 6 d_3^{14} - 6 d_3^{22} - 20 d_3^{18} - 12 d_3^8 d_4^4 r_3^6 + 30 r_2^4 d_3^{10} r_3^2 \\
& + 60 d_3^8 d_4^6 r_3^2 - 12 d_3^6 d_4^6 r_3^2 - 12 d_3^8 d_4^4 r_3^2 - 6 d_3^8 d_4^4 r_3^4 - 60 d_4^6 r_2^2 d_3^6 + 90 d_4^4 r_2^4 d_3^8 \\
& - 60 d_4^6 r_2^4 d_3^6 - 90 d_4^8 r_2^2 d_3^6 + 30 d_4^8 r_2^2 d_3^4 + 60 d_3^8 d_4^4 r_2^6 - 180 d_3^{10} d_4^4 r_2^2 - 60 d_3^{14} d_4^2 r_2^2 \\
& + 60 d_3^{10} d_4^4 r_3^2 - 120 d_3^{10} d_4^6 r_2^2 + 60 d_3^8 d_4^8 r_2^2 + 6 r_2^2 d_3^{10} r_3^2 - 60 d_4^2 r_2^4 d_3^{10} + 18 d_3^{10} d_4^2 r_3^2 \\
& + 180 d_3^8 d_4^8 r_3^2 - 120 d_3^{10} d_4^6 r_3^2 + 90 d_4^2 r_2^2 d_3^{12} - 30 d_4^2 r_2^2 d_3^{10} + 48 d_3^8 d_4^6 r_3^4 - 90 d_3^6 d_4^8 r_3^2 \\
& + 18 d_3^4 d_4^8 r_3^2 + 90 r_2^8 d_3^6 r_3^8 + 180 r_2^8 d_3^8 r_3^6 + 60 r_2^8 d_3^{10} r_3^2 - 30 r_2^8 d_3^{14} d_4^2 + 18 r_2^8 d_3^4 r_3^{10} \\
& - 36 r_2^8 d_3^{12} d_4^2 + 90 r_3^2 d_3^{12} d_4^8 - 6 r_3^2 d_4^{10} d_3^2 + 30 r_3^2 d_4^{10} d_3^4 - 60 r_3^2 d_3^6 d_4^{10} + 120 r_3^2 d_3^{14} d_4^4 \\
& - 180 r_3^2 d_3^{16} d_4^2 + 120 r_3^2 d_3^{12} d_4^6 - 30 r_3^2 d_3^{10} d_4^{10} + 90 r_3^2 d_3^{18} d_4^2 + 12 r_3^2 d_3^{16} d_4^6 + 6 r_3^2 d_3^{12} d_4^{10} \\
& - 18 r_3^2 d_3^{20} d_4^2 + 12 r_3^2 d_3^{18} d_4^4 + 60 r_2^8 d_3^6 r_3^6 + 90 r_2^8 d_3^{14} r_3^2 + 15 r_2^8 d_3^8 d_4^4 + 300 r_2^8 d_3^{10} r_3^6 \\
& + 90 r_2^8 d_3^6 r_3^{10} + 60 r_3^6 d_3^8 d_4^6 + 12 r_3^6 d_3^{14} d_4^4 + 36 r_3^6 d_3^{12} d_4^2 + 36 r_3^6 d_3^{10} d_4^4 + 12 r_3^6 d_3^{16} d_4^2 \\
& + 20 r_3^6 d_3^{12} d_4^6 - 36 r_3^6 d_3^{12} d_4^4 - 60 r_3^6 d_3^{10} d_4^6 + 18 r_3^8 d_3^{14} d_4^2 - 36 r_3^8 d_3^{12} d_4^2 - 30 r_3^8 d_3^{10} d_4^4 \\
& + 18 r_3^8 d_3^{10} d_4^2 + 15 r_3^8 d_3^8 d_4^4 - 6 r_3^{10} d_3^{10} d_4^2 + 6 r_3^{10} d_3^{12} d_4^2 - 72 r_3^4 d_3^{10} d_4^6 - 72 r_3^4 d_3^{14} d_4^2 \\
& + 24 r_3^4 d_3^{14} d_4^4 - 60 r_3^4 d_3^6 d_4^8 + 48 r_3^4 d_3^{16} d_4^2 + 48 r_3^4 d_3^{12} d_4^6 - 12 r_3^4 d_3^{14} d_4^6 - 12 r_3^4 d_3^{18} d_4^2 \\
& - 60 r_3^4 d_3^{10} d_4^8 - 180 r_3^2 d_3^{10} d_4^8 + 60 r_2^2 d_3^{10} d_4^8 - 60 r_2^2 d_3^{16} d_4^4 + 36 r_2^2 d_3^{12} r_3^{10} + 48 r_2^2 d_3^{12} r_3^6 \\
& + 6 r_2^2 d_3^{10} r_3^{12} - 18 r_2^2 d_3^{10} r_3^{10} + 12 r_2^2 d_3^{10} r_3^8 + 90 r_2^2 d_3^{18} r_3^4 + 120 r_2^2 d_3^{16} r_3^6 - 180 r_2^2 d_3^{14} r_3^6 \\
& + 72 r_2^2 d_3^{14} r_3^4 + 36 r_2^2 d_3^{20} r_3^2 - 60 r_2^2 d_3^{16} d_4^2 - 120 r_2^2 d_3^{12} d_4^6 + 18 r_2^2 d_3^{10} d_4^{10} + 90 r_2^2 d_3^{18} d_4^2 \\
& - 60 r_2^2 d_3^{16} d_4^6 + 30 r_2^2 d_3^{14} d_4^8 - 6 r_2^2 d_3^{12} d_4^{10} - 30 r_2^2 d_3^{20} d_4^2 + 60 r_2^2 d_3^{18} d_4^4 + 180 r_2^2 d_3^{14} d_4^6 \\
& + 36 r_2^{10} d_3^4 r_3^{10} - 6 r_2^{10} d_3^{12} d_4^2 + 6 r_2^{10} d_3^2 r_3^{12} - 36 r_3^6 d_3^{14} d_4^2 + 300 r_2^4 d_3^{14} r_3^6 - 120 r_2^4 d_3^{14} r_3^4 \\
& + 48 r_2^4 d_3^{16} d_4^2 + 48 r_2^4 d_3^{12} d_4^6 - 60 r_2^4 d_3^{14} d_4^6 - 36 r_2^4 d_3^{12} r_3^2 - 60 r_2^4 d_3^{18} d_4^2 - 180 r_2^2 d_3^{16} r_3^4 \\
& - 90 r_2^2 d_3^{12} r_3^8 - 180 r_2^2 d_3^{16} d_4^4 - 90 r_2^2 d_3^{12} d_4^8 + 36 r_2^2 d_3^{12} r_3^4 - 6 r_2^2 d_4^{10} d_3^2 + 18 r_2^2 d_4^{10} d_3^4 \\
& - 306 r_3^2 r_2^6 d_4^4 d_3^6 - 102 d_3^6 r_3^2 r_2^2 d_4^4 - 138 d_3^8 r_3^2 r_2^2 d_4^4 + 24 d_3^8 r_3^2 r_2^2 d_4^2 + 978 r_3^2 r_2^2 d_4^4 d_3^{10} \\
& - 702 r_3^2 r_2^2 d_4^6 d_3^8 + 18 r_3^2 r_2^2 d_4^6 d_3^6 + 990 r_3^4 r_2^6 d_4^4 d_3^4 + 306 d_3^6 r_3^4 r_2^6 d_4^2 - 198 d_3^6 d_4^2 r_3^6 r_2^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 108 d_3^{10} d_4^2 r_3^2 r_2^4 - 168 r_3^4 r_2^2 d_4^4 d_3^8 + 102 d_3^4 d_4^6 r_3^2 r_2^2 + 144 d_3^8 r_3^2 r_2^6 d_4^2 - 306 d_3^6 d_4^4 r_3^2 r_2^4 \\
& + 495 d_3^4 d_4^4 r_3^4 r_2^4 + 102 d_3^4 d_4^2 r_2^6 r_3^6 + 198 d_3^6 r_3^4 r_2^2 d_4^4 + 240 d_3^8 r_3^4 r_2^2 d_4^2 - 504 d_4^4 r_2^4 d_3^8 r_3^2 \\
& + 96 d_4^2 r_2^4 d_3^8 r_3^2 - 648 d_4^4 r_2^4 r_3^4 d_3^6 + 102 d_4^2 r_2^4 r_3^4 d_3^6 + 204 d_4^6 r_2^4 r_3^2 d_3^4 - 432 d_4^2 r_2^2 d_3^{12} r_3^2 \\
& + 126 d_3^{10} r_3^2 r_2^2 d_4^2 + 18 r_3^2 r_2^2 d_4^8 d_3^6 + 54 r_3^2 r_2^2 d_4^8 d_3^4 + 828 d_3^6 d_4^6 r_3^4 r_2^2 - 396 d_3^4 d_4^6 r_3^4 r_2^2 \\
& - 528 d_3^8 r_3^6 r_2^2 d_4^2 + 198 d_3^6 d_4^4 r_3^6 r_2^2 + 828 d_3^6 d_4^6 r_2^4 r_3^2 - 138 d_3^8 d_4^2 r_3^4 r_2^4 - 102 r_3^6 r_2^6 d_4^4 d_3^2 \\
& - 702 d_3^4 d_4^4 r_3^6 r_2^4 - 126 r_2^8 d_3^{10} d_4^2 r_3^2 + 12 r_2^8 d_3^6 d_4^4 r_3^6 - 396 r_2^8 d_3^4 d_4^4 r_3^6 + 60 r_2^8 r_3^6 d_3^8 d_4^2 \\
& + 54 r_2^8 d_3^4 d_4^2 r_3^8 - 90 r_2^2 r_3^2 d_3^{18} d_4^2 + 6 r_2^2 r_3^2 d_3^{10} d_4^{10} - 432 r_2^2 r_3^2 d_3^{12} d_4^6 + 72 r_2^2 r_3^2 d_3^{16} d_4^2 \\
& + 300 r_2^2 r_3^2 d_3^{14} d_4^4 + 24 r_2^2 r_3^2 d_3^8 d_4^{10} + 300 r_2^2 r_3^2 d_3^{14} d_4^2 - 102 r_2^2 r_3^2 d_3^6 d_4^{10} \\
& + 978 r_2^2 r_3^2 d_3^{10} d_4^6 + 102 r_2^2 r_3^2 d_4^{10} d_3^4 - 138 r_2^2 r_3^2 d_3^8 d_4^8 - 24 r_2^2 r_3^2 d_4^{10} d_3^2 \\
& - 1086 r_2^2 r_3^2 d_3^{12} d_4^4 - 36 r_2^2 r_3^2 d_3^{12} d_4^8 + 48 r_2^2 r_3^2 d_3^{16} d_4^4 + 126 r_2^2 r_3^2 d_3^{10} d_4^8 + 30 r_2^2 r_3^4 d_3^{10} d_4^8 \\
& - 36 r_2^2 r_3^4 d_3^{12} d_4^6 - 60 r_2^2 r_3^4 d_3^{16} d_4^2 - 282 r_2^2 r_3^4 d_3^{10} d_4^4 - 306 r_2^2 r_3^4 d_3^6 d_4^8 + 1020 r_2^2 r_3^4 d_3^{12} d_4^2 \\
& - 24 r_2^2 r_3^4 d_3^{14} d_4^4 - 504 r_2^2 r_3^4 d_3^8 d_4^6 - 300 r_2^2 r_3^4 d_3^{14} d_4^2 + 96 r_2^2 d_3^8 d_4^8 r_3^4 + 204 r_2^2 d_3^4 d_4^8 r_3^4 \\
& + 36 r_2^2 r_3^2 d_3^{14} d_4^6 + 276 r_2^2 r_3^4 d_3^{12} d_4^4 + 60 r_2^2 r_3^6 d_3^{14} d_4^2 - 306 r_2^2 r_3^6 d_3^6 d_4^6 - 138 r_2^2 r_3^6 d_3^8 d_4^4 \\
& + 900 r_2^2 r_3^6 d_3^{10} d_4^2 + 48 r_2^2 r_3^6 d_3^{12} d_4^4 - 108 r_2^2 r_3^6 d_3^{10} d_4^4 - 432 r_2^2 r_3^6 d_3^{12} d_4^2 + 144 r_2^2 r_3^6 d_3^8 d_4^6 \\
& + 102 r_2^2 r_3^6 d_3^4 d_4^6 + 108 r_2^2 r_3^4 d_3^{10} d_4^6 + 24 r_2^2 r_3^{10} d_3^8 d_4^2 + 30 r_2^2 r_3^{10} d_3^{10} d_4^2 + 240 r_2^2 r_3^8 d_3^8 d_4^2 \\
& + 96 r_2^2 r_3^8 d_3^8 d_4^4 - 126 r_2^2 r_3^8 d_3^{10} d_4^2 + 60 r_2^2 r_3^8 d_3^{10} d_4^4 + 90 r_2^2 r_3^8 d_3^{12} d_4^2 - 102 r_2^2 r_3^8 d_3^6 d_4^4 \\
& + 60 r_2^2 r_3^6 d_3^{10} d_4^6 + 276 r_2^4 d_3^{12} d_4^2 r_3^2 + 282 r_2^4 d_3^{10} d_4^2 r_3^4 - 168 r_2^4 r_3^6 d_3^8 d_4^2 - 648 r_2^4 d_3^6 d_4^6 r_3^4 \\
& + 648 r_2^4 d_3^6 d_4^4 r_3^6 - 198 r_2^4 d_3^6 d_4^2 r_3^8 + 198 r_2^4 d_3^6 d_4^8 r_3^2 - 168 r_2^4 d_3^8 d_4^6 r_3^2 + 120 r_2^4 r_3^6 d_3^{12} d_4^2 \\
& + 60 r_2^4 r_3^6 d_3^8 d_4^6 + 990 r_2^4 r_3^6 d_3^4 d_4^6 + 102 r_2^4 r_3^6 d_3^2 d_4^6 + 102 r_2^4 r_3^{10} d_3^6 d_4^2 - 396 r_2^4 d_3^4 d_4^8 r_3^2 \\
& + 36 r_2^4 r_3^2 d_3^{12} d_4^6 - 180 r_2^4 r_3^2 d_3^{16} d_4^2 + 72 r_2^4 r_3^2 d_3^{14} d_4^4 - 300 r_2^4 r_3^2 d_3^{14} d_4^2 - 900 r_2^4 r_3^2 d_3^{10} d_4^6 \\
& + 240 r_2^4 r_3^2 d_3^8 d_4^8 + 1020 r_2^4 r_3^2 d_3^{12} d_4^4 - 18 r_2^4 r_3^2 d_3^{10} d_4^8 + 282 r_2^4 r_3^4 d_3^{10} d_4^4 + 102 r_2^4 r_3^4 d_3^4 d_4^8 \\
& - 1086 r_2^4 r_3^4 d_3^{12} d_4^2 - 138 r_2^4 r_3^4 d_3^8 d_4^6 + d_4^{12} + d_3^{24} - 120 r_2^4 d_3^{12} r_3^6 - 12 r_2^4 d_3^8 r_3^{10} \\
& + 90 r_2^4 d_3^{10} r_3^{10} - 60 r_2^4 d_3^{10} r_3^8 + 90 r_2^4 d_3^{18} r_3^2 + 36 r_2^{10} d_3^{12} r_3^2 + 30 r_2^{10} d_3^{10} r_3^2 + 120 r_2^{10} d_3^8 r_3^6 \\
& + 90 r_2^{10} d_3^{10} r_3^4 + 90 r_2^{10} d_3^6 r_3^8 + 48 d_3^{12} d_4^2 r_2^4 - 6 r_2^{10} r_3^{10} d_4^2 + 6 r_2^{10} r_3^{10} d_3^2 - 6 d_3^8 d_4^8 r_2^4 \\
& + 15 d_3^4 d_4^8 r_3^4 + 15 d_3^{12} d_4^8 r_3^4 + 90 r_2^2 d_3^{14} r_3^8 - 18 r_2^2 d_3^{10} r_3^4 + 30 r_2^{10} d_3^4 r_3^8 + 60 r_2^{10} d_3^8 r_3^4 \\
& - 6 r_2^{10} d_3^{10} d_4^2 + 12 r_2^6 d_3^6 r_3^{10} + 6 r_2^{12} d_3^{10} r_3^2 + 6 r_2^{12} r_3^{10} d_3^2 + 20 r_2^{12} d_3^6 r_3^6 - 60 r_2^6 d_3^{16} d_4^2 \\
& - 20 r_2^6 d_3^{12} d_4^6 + 48 r_2^6 d_3^{12} r_3^2 + 60 r_2^6 d_3^{14} r_3^2 + 20 r_2^6 d_3^6 r_3^6 - 36 r_2^6 d_3^{14} d_4^2 - 20 r_2^6 r_3^6 d_4^6 \\
& + 72 r_2^6 d_3^{10} r_3^4 + 12 r_2^6 d_3^6 r_3^8 + 48 r_2^6 d_3^8 r_3^6 + 60 r_2^6 d_3^{10} r_3^2 - 12 r_2^6 d_3^8 d_4^6 + 60 r_2^6 d_3^{14} d_4^4 \\
& - 36 r_2^6 d_3^{12} d_4^2 + 36 r_2^6 d_3^{10} d_4^4 + 20 r_2^6 d_3^6 r_3^{12} + 120 r_2^6 d_3^{16} r_3^2 + 400 r_2^6 d_3^{12} r_3^6 + 120 r_2^6 d_3^8 r_3^{10} \\
& + 300 r_2^6 d_3^{10} r_3^8 + 300 r_2^6 d_3^{14} r_3^4 + 120 r_2^6 d_3^{12} r_3^4 + 60 r_2^6 d_3^8 r_3^8 + 15 d_3^4 r_3^{12} r_2^8 + 225 d_3^8 r_3^8 r_2^8 \\
& + 225 d_3^{12} r_3^4 r_2^8 + 15 d_3^8 r_3^{12} r_2^4 + 225 d_3^{12} r_3^8 r_2^4 + 90 d_3^{16} d_4^4 r_2^4 - 6 d_3^{16} d_4^4 r_3^4 + 15 d_3^{12} d_4^4 r_3^8 \\
& + 15 d_3^{12} d_4^8 r_2^4 + 15 d_3^{12} d_4^4 r_2^8 + 15 r_3^8 r_2^8 d_4^4 + 15 d_3^4 r_3^8 r_2^8 + 90 d_3^8 r_3^4 r_2^8 - 6 d_3^8 r_3^8 r_2^4
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -36 d_3^{12} r_3^4 r_2^4 + 60 r_2^6 d_3^8 r_3^4 + 36 r_2^6 d_3^{12} d_4^4 - 20 r_2^6 d_3^6 d_4^6 - 12 r_2^6 d_3^{10} d_4^6 + 120 r_2^6 d_3^{10} r_3^6 \\
& + 15 d_3^4 r_3^8 r_2^{12} + 15 d_3^8 r_3^4 r_2^{12} + 225 d_3^{16} r_3^4 r_2^4 + 180 d_3^{14} d_4^2 r_3^2 + 48 d_3^{12} d_4^2 r_3^4 - 12 d_3^{10} d_4^2 r_3^6 \\
& - 36 d_3^{12} r_3^2 r_2^2 - 72 d_3^{10} d_4^4 r_2^4 + 180 d_3^8 d_4^6 r_2^2 - 90 d_3^{12} d_4^2 r_3^2 - 12 d_3^{10} d_4^2 r_3^4 + 120 d_3^{12} d_4^4 r_2^2 \\
& + 24 d_3^{10} d_4^4 r_3^4 - 120 d_3^{12} d_4^4 r_3^2 + 48 d_3^8 d_4^6 r_2^4 + 18 r_2^8 d_3^{10} d_4^4 - 528 r_2^6 d_3^8 d_4^6 r_3^2 \\
& - 432 r_2^6 d_3^{12} d_4^2 r_3^2 - 978 r_2^6 d_3^{10} d_4^2 r_3^4 - 702 r_2^6 d_3^6 d_4^6 r_3^4 - 1548 r_2^6 d_3^4 d_4^4 r_3^6 \\
& - 702 r_2^6 r_3^6 d_3^8 d_4^2 - 198 r_2^6 d_3^6 d_4^6 r_3^4 - 828 r_2^6 d_3^6 d_4^4 r_3^6 - 396 r_2^6 d_3^4 d_4^2 r_3^8 - 108 r_2^6 d_3^{10} d_4^2 r_3^2 \\
& + 102 r_2^6 d_3^4 d_4^6 r_3^2 + 648 r_2^6 d_3^6 d_4^4 r_3^4 - 828 r_2^6 d_3^6 d_4^2 r_3^6 - 504 r_2^6 r_3^4 d_3^8 d_4^2 + 198 r_2^6 d_3^6 d_4^6 r_3^2 \\
& - 138 r_2^6 d_3^8 d_4^4 r_3^2 + 102 r_2^6 r_3^4 d_3^2 d_4^6 + 204 r_2^6 d_3^4 d_4^4 r_3^8 - 168 r_2^6 d_3^8 d_4^4 r_3^4 + 15 d_3^8 d_4^8 r_3^4 r_2^4 \\
& - 180 r_2^6 r_3^2 d_3^{14} d_4^2 + 12 r_2^6 r_3^2 d_3^{10} d_4^6 + 48 r_2^6 r_3^2 d_3^{12} d_4^4 - 24 r_2^6 r_3^4 d_3^{10} d_4^4 - 120 r_2^6 r_3^4 d_3^{12} d_4^2 \\
& - 12 r_2^6 r_3^4 d_3^8 d_4^6 + 900 r_2^6 d_3^{10} d_4^4 r_3^2 + 180 r_2^6 r_3^8 d_3^8 d_4^2 + 60 r_2^6 r_3^8 d_3^6 d_4^4 + 20 r_2^6 r_3^6 d_3^6 d_4^6 \\
& + 48 r_2^6 r_3^6 d_3^8 d_4^4 + 120 r_2^6 r_3^6 d_3^{10} d_4^2 + 102 r_2^6 r_3^6 d_3^4 d_4^6 - 102 r_2^6 r_3^6 d_3^2 d_4^6 + 60 r_2^6 r_3^{10} d_3^6 d_4^2 \\
& + 102 r_2^6 d_3^4 d_4^2 r_3^{10} - 102 r_2^6 d_3^2 d_4^4 r_3^8 + 495 r_3^4 r_2^4 d_4^8 d_3^4 - 36 d_3^{12} r_3^4 r_2^4 d_4^4 + 90 d_3^8 r_3^8 r_2^4 d_4^4 \\
& + 2331 r_3^4 d_3^8 d_4^4 r_2^4 + 495 d_3^4 d_4^4 r_3^8 r_2^4 + 495 d_3^4 d_4^4 r_2^8 r_3^4 - 6 d_3^8 r_3^4 r_2^8 d_4^4 + 24 r_2^8 d_3^2 d_4^2 r_3^{10} \\
& + 15 r_3^8 r_2^8 d_4^4 d_3^4
\end{aligned} \tag{68}$$

## C.2. CONDITION D'APPARITION DE NŒUDS EN $Z = 0$

Afin de déterminer l'équation de la surface traduisant l'apparition d'un couple de nœuds en  $z = 0$ , on écrit la condition d'existence d'une racine double à partir du polynôme du MGI.

La méthode consiste tout d'abord à écrire l'équation en  $(R_{11}, z)$  des singularités dans l'espace de travail. Cette équation peut être déterminée en écrivant le discriminant du MGI donné par (69).

$$(C_{01}C_{41} - 4C_{11}C_{31} + 3C_{21}^2)^3 - 27(C_{01}C_{21}C_{41} + 2C_{11}C_{21}C_{31} - C_{01}C_{31}^2 - C_{11}^2C_{41} - C_{21}^3)^2 = 0 \tag{69}$$

Ensuite, on se place dans le plan  $z = 0$  et on calcule le discriminant de l'équation (69) afin de trouver une condition d'apparition de racines doubles. Cette condition dépend des paramètres  $r_2$ ,  $r_3$ ,  $d_3$  et  $d_4$ . Elle s'écrit sous la forme d'un produit de 3 facteurs dont chacun représente l'équation d'une surface de séparation. Cette condition est donnée par l'équation (70).

$$E_{1\text{gén}, d} \cdot E_{3\text{gén}, d} \cdot C_{234} = 0 \tag{70}$$

avec :

$$E_{1\text{gén}, d} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 - AB \left| \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)}$$

$$E_{3\text{gén}, d} = \sqrt{\frac{1}{2} \left( 1 + r_2^2 + d_3^2 \left( 1 - \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 \right) + \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - r_3^2 + AB \left| \left( \frac{r_3}{r_2} \right)^2 - 1 \right| \right)}$$

Les surfaces  $C_{234}$ ,  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  sont définies respectivement par les équations (68), (71) et (72).

$$E_{1\text{gén}} : d_4 = E_{1\text{gén}, d} \tag{71}$$

$$E_{3\text{gén}} : d_4 = E_{3\text{gén}, d} \tag{72}$$

Les expressions de  $A$  et  $B$  sont donn es dans l'annexe B.

Lorsque  $r_3 = 0$ , l'équation de la surface  $E_{1\text{gén}}$  (respectivement  $E_{3\text{gén}}$ ) donne l'équation de la surface  $E_1$  (respectivement  $E_3$ ).

Lorsque  $r_2 < r_3$  (respectivement  $r_2 > r_3$ ), la surface  $E_{1\text{gén}}$  est au-dessus (respectivement en dessous) de  $E_{3\text{gén}}$ . Dans le cas où  $r_2 = r_3$ , les deux surfaces se confondent avec le plan défini par l'équation :  $d_4 = 1$ .

### C.3. CONCLUSION

Dans cette annexe, on a déterminé l'équation de la surface  $C_{234}$  traduisant l'apparition d'une paire de cusps en  $z = 0$  en écrivant la condition d'existence de racines triples. En utilisant la même référence bibliographique, on a écrit la condition traduisant l'existence d'une racine double. Cette condition nous a permis de d'écrire les équations des 2 surfaces  $E_{1\text{gén}}$  et  $E_{3\text{gén}}$  permettant de subdiviser les 9 domaines (  nombre de cusps constant) en 22 topologies d'espace de travail dont chacune est définie par un couple (nombre de cusps, nombre de nœuds).

## ANNEXE D

Dans cette annexe, on donne les algorithmes qui nous ont permis de calculer les deux indices de performances que l'on a détaillé dans le dernier chapitre de ce mémoire.

Le premier algorithme permet de calculer, dans une section de l'espace des paramètres, le conditionnement moyen et le conditionnement maximum. Cet algorithme est le suivant :

```

Calcul du conditionnement maximum et moyen :
Pour un  $(r_2, r_3)$  donné et un pas donné,
Pour  $d_3 = 0$  : pas : 5 et pour  $d_4 = 0$  : pas : 5 Faire
    Somme_conditionnement = 0
    Max_conditionnement = 0
    Pour  $\theta_2 = -\pi$  : Pas :  $\pi$  et pour  $\theta_3 = -\pi$  : Pas :  $\pi$  Faire
         $(x, y, z) = \text{Calcul du MGD}(0, \theta_2, \theta_3)$ 
        Jacobienne = Calcul de la jacobienne  $(0, \theta_2, \theta_3, x, y, z)$ 
        Somme_conditionnement = Somme_conditionnement +
Conditionnement(Jacobienne)
        Max_conditionnement = Maximum(Conditionnement(Jacobienne))
    Fin pour
    Conditionnement_moyen  $(d_3, d_4) = \text{Somme\_conditionnement} / \text{Nombre de}$ 
conditionnements calculés
    Fin pour
Afficher les iso-valeurs de Conditionnement moyen
Afficher les iso-valeurs de Conditionnement maximum

```

Le deuxième algorithme permet de déterminer la proportion du volume de la région à 4 solutions, à 2 solutions ainsi que l'espace de travail par rapport au volume d'une sphère de rayon  $\rho_{\max}$ . Le rayon de cette sphère représente la portée du manipulateur. Selon que le paramètre  $r_3$  est nul ou non, la valeur de  $\rho_{\max}$  n'est pas la

même. Dans le cas où  $r_3 = 0$ , la portée du manipulateur est donnée par l'équation :

$$\rho_{\max} = d_4 + \sqrt{(d_3 + d_2)^2 + r_2^2}$$

Lorsque  $r_3 \neq 0$ , cette valeur est calculée numériquement en déterminant la plus valeur maximale de tous les  $\rho$  et les  $z$  représentant les coordonnées des points singuliers dans l'espace de travail.

En raison de la symétrie de l'espace de travail, le balayage sera effectué dans la section  $(\rho, z)$  pour des valeurs de  $\rho$  et  $z$  positives. L'algorithme utilisé est le suivant :

*Calcul de la proportion du volume de la région à 2 et 4 solutions ainsi que la région accessible par le manipulateur ((2+4) solutions) par rapport au volume de la sphère englobant l'espace de travail :*

*Pour un  $(r_2, r_3)$  donné et un pas donné,*

*Pour  $d_3 = 0$  : pas : 5 et pour  $d_4 = 0$  : pas : 5 Faire*

*Nombre\_2\_solutions = 0*

*Nombre\_4\_solutions = 0*

*Nombre\_2+4\_solutions = 0*

*Pour a = 0 : Pas :  $\rho_{\max}$  et pour b = 0 : Pas :  $\sqrt{\rho_{\max}^2 - a^2}$  Faire*

*Nbre\_solutions = Calcul du MGI( $d_2, d_3, d_4, r_2, r_3, \alpha_2, \alpha_3, b, 0, a$ )*

*Si Nbre\_solutions = 4, alors Nombre\_2\_solutions = Nombre\_2\_solutions+1*

*Si Nbre\_solutions = 2, alors Nombre\_4\_solutions = Nombre\_4\_solutions+1*

*Sinon Nombre\_2+4\_solutions = Nombre\_2+4\_solutions+1*

*Fin pour*

*Proportion\_2\_solutions = Nombre\_2\_solutions / (Nombre\_2\_solutions + Nombre\_4\_solutions + Nombre\_2+4\_solutions)*

*Proportion\_4\_solutions = Nombre\_4\_solutions / (Nombre\_2\_solutions + Nombre\_4\_solutions + Nombre\_2+4\_solutions)*

*Proportion\_2+4\_solutions = Proportion\_2\_solutions + Proportion\_2+4\_solutions*

*Fin pour*

*Afficher les iso-valeurs de la proportion à 2 solutions*

*Afficher les iso-valeurs de la proportion à 4 solutions*

*Afficher les iso-valeurs de la proportion à 2+4 solution*





## Résumé :

Les travaux présentés dans cette thèse portent sur la classification et l'analyse des manipulateurs 3R à axes orthogonaux. Le but final est de proposer une classification exhaustive de ces manipulateurs selon leur topologie d'espace de travail. On définit une topologie d'espace de travail par un couple (nombre de points cusps, nombre de nœuds). Ces points particuliers apparaissent sur les surfaces de singularités. Notre étude se décompose en 4 parties. La première partie de ce travail est consacrée à une étude bibliographique de quelques notions liées à la cinématique et à la conception des manipulateurs sériels et plus particulièrement leurs singularités. Dans la deuxième partie de ce travail, nous établissons une classification exhaustive de toutes les topologies d'espace de travail d'une famille de manipulateurs 3R à axes orthogonaux telle que  $r_3 = 0$  en fonction des paramètres de DHm. Pour chaque topologie d'espace de travail, nous donnons toutes les propriétés cinématiques décrites dans la première partie. Une nouvelle condition nécessaire et suffisante pour qu'un manipulateur soit cuspidal (peut changer de posture sans franchir une singularité) a été établie sous forme d'une relation entre les paramètres de DHm. La troisième partie a été consacrée à étendre la classification réalisée dans la partie précédente à une famille de manipulateurs orthogonaux plus large ( $r_3 \neq 0$ ). La quatrième partie a été consacrée à l'analyse des manipulateurs selon deux critères de performance. Le premier est relatif aux conditionnements maximum et moyen. Le second permet de calculer les proportions des régions à 2 et 4 solutions au MGI ainsi que tout le domaine accessible par rapport à une sphère centrée sur l'origine et englobant l'espace de travail. Les résultats proposés dans ce travail constituent une aide intéressante pour la conception de mécanismes innovants. En effet, en utilisant ce travail, nous pouvons choisir la topologie d'espace de travail la mieux adaptée à la tâche souhaitée. Nous venons ensuite ajuster les paramètres de DHm du manipulateur satisfaisant les critères proposés.

## Mots clés :

Manipulateur orthogonal, singularité, aspect, cusp, nœud, classification, topologie d'espace de travail.

## Abstract :

The work presented in this thesis deals with the classification and analysis of 3-revolute (3R) orthogonal positioning manipulators. The goal is to establish an exhaustive classification based on the topology of their workspace. The workspace is characterized in a half-cross section by the singular curves. The workspace topology is defined by the number of cusp and node points that appear on these singular curves. This dissertation is divided into four sections. The first section is dedicated to a state of the art on serial positioning manipulators and more precisely on their kinematic properties and their singular curves. In the second section, an exhaustive classification of one family of 3R manipulators such that  $r_3 = 0$  is proposed. The design parameter space is divided into nine workspace topologies. All kinematic properties are given for each workspace topology. A new necessary and sufficient condition for a manipulator to be cuspidal (can change posture without meeting singularity) is established as function as the DHm parameters. The third section deals with the classification of a larger family of manipulators ( $r_3 \neq 0$ ). Last section is dedicated to the analysis of these manipulators according to two performance criteria. The first one is relative to the maximum and average condition numbers. The second one is relative to the proportions of regions of two and four inverse kinematic solutions, the domain reachable by the end effector compared to a sphere centred on the origin and including the workspace. Results presented in this thesis can be used as an efficient help for the design of new manipulators. In effect, for a particular task, the designer can choose the most suitable workspace topology. Then, manipulator DHm parameters are set according to the performance criteria studied.

## Key words:

Orthogonal manipulator, singularity, aspect, cusp, node, classification, workspace topology.