



**ECOLE NATIONALE DU GENIE RURAL, DES EAUX ET DES FORÊTS**

*N° attribué par la bibliothèque*  
/ / / / / / / / / / / / / / / /

## **THESE**

*pour obtenir le grade de*

**Docteur de l'ENGREF**  
**Spécialité : Sciences de l'eau**

*présentée et soutenue publiquement par*

**David Crevoisier**

*le 12 décembre 2005*

*à l'Ecole Nationale du Génie Rural, des Eaux et Forêts*  
*Centre de : Paris*

### **MODELISATION ANALYTIQUE DES TRANSFERTS BI- ET TRIDIRECTIONNELS EAU-SOLUTE** **APPLICATION A L'IRRIGATION A LA RAIE ET A LA MICRO- IRRIGATION**

*devant le jury suivant :*

<b>M. Eric Gaume</b>	CEREVE - ENPC	Président
<b>M. André Chanzy</b>	INRA Avignon	Rapporteur
<b>M. Alexandre Ern</b>	CERMICS - ENPC	Rapporteur
<b>M. Jean-Claude Mailhol</b>	CEMAGREF Montpellier	Directeur de thèse
<b>M. Gerd H. Schmitz</b>	IHM - TU Dresden	Examineur
<b>M. Michel Vauclin</b>	LTHE Grenoble	Examineur
<b>M. Xavier Litrico</b>	CEMAGREF Montpellier	Examineur



## Remerciements

*3 ans + 1 thésard*  $\approx$  200 pages + *expérience professionnelle* est évidemment une approximation très insuffisante. Hormis le fait que les unités ne soient pas homogènes, ce travail a été rendu possible grâce à de nombreux appuis et conseils scientifiques, administratifs et amicaux. Tous ces contacts ont également été pour moi une expérience très enrichissante sur le plan professionnel et personnel. Je tiens ici à remercier toutes les personnes qui ont pris de leur temps pour m'aider à mener ce travail à son terme.

Un grand merci tout d'abord à Jean-Claude Mailhol qui a bien voulu me faire confiance sur ce travail et sur mes choix de méthodes permettant d'atteindre les objectifs de la thèse (choix qui ne se sont avérés judicieux qu'en fin de thèse). Mon DEA de Mathématiques Appliquées m'incitait à ne voir le problème que sous forme d'équations, la grande expérience de Jean-Claude dans le domaine de l'irrigation et sa disponibilité ont empêché ce mémoire de se transformer en un recueil de formules mathématiques.

Le compromis *travail accompli - date de fin de thèse* est un équilibre difficile à trouver. J'ai dû, pour y parvenir, proposer aux membres de mon jury un délai de relecture relativement court. L'intérêt et la pertinence de leurs remarques et de leurs questions ont été inversement proportionnels au délai laissé. Ils m'ont permis d'apporter plus de précision et de clarté à ce mémoire. Je tiens à remercier particulièrement mes rapporteurs, Alexandre Ern notamment pour une relecture complète du mémoire par téléphone et André Chanzy pour les conseils qu'il continue encore à me donner pour valoriser mon travail de thèse. Merci à Eric Gaume pour m'avoir fait l'honneur de présider ma soutenance, Michel Vauclin, Gerd Schmitz et Xavier Litrico pour leurs remarques lors de la soutenance et leur appui pendant ces trois années de travail.

A mon arrivée au CEMAGREF, les mots *tarière*, *sonde à neutrons* et plus généralement *relevés expérimentaux* n'avaient pour moi qu'un sens théorique relativement flou. La partie expérimentale de ce mémoire a pu être étoffée notamment grâce au projet ECONET, auquel j'ai été intégré et qui a été géré d'une main de maître par Pierre Ruelle, personne que je tenais également à remercier pour sa gentillesse et sa disponibilité. Ce projet m'a permis de travailler avec Lubomir Hanisko du Hydromélioracie de Bratislava et Zornitsa Popova de l'ISS de Sophia. Plusieurs mois de travail avec Zornitsa sur trois années de données expérimentales, ainsi qu'une mission en Bulgarie, enrichissante et très agréable quant à l'accueil, ont permis d'aboutir à des résultats de qualité. Cette collaboration m'a permis de compléter mes connaissances de l'irrigation grâce à l'expérience du terrain de Zornitsa. L'avis et les suggestions de Serge Marlet sur les premiers résultats obtenus m'ont été également d'une grande aide.

S'il est facile de se perdre dans le labyrinthe de la recherche scientifique, les dédales administratifs semblent également faits pour égarer le pauvre doctorant concentré sur son sujet de thèse. Sami Bouarfa m'a apporté son aide dans les deux cas, je tiens à le remercier pour ses conseils avisés d'animateur de TR (mon *chef hiérarchique direct*), de chercheur, sa constante bonne humeur et son optimisme communicatif. Cette thèse a été réalisée grâce à une bourse CEMAGREF et soutenue par l'ENGREF. Je remercie Patrice Garin de m'avoir accueilli à l'UMR G-Eau pour réaliser cette thèse. Alain Delacourt, responsable de la formation doctorale ENGREF et Paulette Robert m'ont apporté leur aide précieuse notamment en fin de thèse, moment où le temps disponible diminue et

les tâches à accomplir se multiplient (remise du mémoire, organisation de la soutenance, composition finale du jury,...). Je remercie également Christine, Josiane, l'ensemble du service compta, du service informatique et tous ces travailleurs de l'ombre de la recherche au CEMAGREF qui assurent sa logistique complexe (déplacements, frais de mission, budget, suivi de projet, parc informatique... bref, l'encadrement de chercheurs souvent très absorbés par leurs recherches). Ces remerciements sont également l'occasion d'insister sur la très bonne ambiance dans laquelle se sont déroulées ces trois années de thèse au CEMAGREF, cette ambiance particulière qui participait grandement à me rendre agréable le trajet du matin pour aller au boulot.

Et si j'ai pu mener ce travail de thèse en conservant une vie équilibrée, je le dois à un tas d'amis qui m'ont soutenu pendant ces trois années. Je pense à tous ceux que j'ai rencontré à Montpellier : Caro, merci pour ton regard sur certaines de mes errances mathématiques, pour ces très agréables soirées chansons françaises et pour m'avoir associé avec Pierre Yves aux activités fortes en émotions de Boutonnet ; Rafik, pour ces grandes soirées Champion's League au Fitz où j'ai beaucoup amélioré mon anglais ; Thomas pour ces discussions philosophiques sur le fonctionnement d'un four micro-onde ou la vitesse d'un corps en chute libre ; Olivier pour m'avoir fait souffrir sur quelques parois verticales (mais c'était pour mon bien) ; les stagiaires et doctorants du Cemagref, pour des pique-niques sur la plage immanquablement conclus par un orage. Ludo, encore désolé pour le coup de froid que tu as pris à Montpellier en venant à ma soutenance quelques jours avant la tienne, Alix, merci pour tes corrections consciencieuses de mon mémoire et de tes petites visites de ta jolie région (j'insiste). Merci à Toulouse, Bordeaux, Paris, Wissembourg de recéler tant d'asiles sympathiques et accueillants pour qu'un thésard puisse passer des week-ends de détente. Merci également à Eric, Céline et maintenant depuis quelques mois Louann, mon petit bout d'chou de filleule pour votre amitié qui a résisté à la distance et au temps.

Enfin, Papa, Maman, Céline, votre soutien, lui, dure depuis ma plus tendre enfance, il n'a jamais failli, s'est renforcé au moment où j'en avais le plus besoin (ces soirées au téléphone pour corriger mon mémoire, sa relecture complète, jusqu'à la bibliographie en anglais, vos *vacances* à Montpellier où vous vous arrangez pour je puisse me concentrer uniquement sur mon travail et tant d'autres attentions de votre part) et je sais que pourrai toujours y compter. Merci pour ce que vous m'avez fait devenir.

## Résumé

L'irrigation à la raie compte parmi les techniques d'irrigation les plus répandues dans le monde et le recours à la micro-irrigation, qui permet d'adapter les apports d'eau et de fertilisants selon les besoins de la plante au cours de la saison de culture, est en forte augmentation. La maîtrise des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés dans le contexte de ces pratiques est très importante. Elle permet leur amélioration afin de limiter les gaspillages d'eau, le lessivage d'azote et d'optimiser le rendement des cultures.

La modélisation développée ici se propose de représenter les transferts eau-soluté en se basant sur une résolution semi-analytique des équations de transferts bi- et tridirectionnels (équation de Richards et équation de convection-diffusion de solutés). Le caractère analytique de ce type de modélisation permet de simuler des événements dont les pas de temps varient entre l'heure pour une irrigation et la journée pour la redistribution de l'eau et des solutés dans le sol. Cette méthode permet en outre de s'affranchir des contraintes propres aux schémas numériques : conditions de convergence de la solution et temps de calculs conséquents. Cette modélisation fondée sur des bases mécanistes conserve, en dépit de certaines hypothèses simplificatrices, un caractère hautement prédictif.

Compte tenu de la complexité de la géométrie du domaine, notamment en irrigation à la raie, et afin de pouvoir traiter des conditions initiales hétérogènes, le problème général est décomposé en problèmes élémentaires dont la résolution analytique est rendu possible par l'utilisation de la fonction de Green. La solution du problème général est alors obtenue par superposition des solutions analytiques de ces problèmes élémentaires.

La méthode utilisée a l'avantage d'être adaptative. Elle permet de modéliser différentes pratiques d'irrigation et de fertilisation sur une vaste gamme de temps caractéristiques de l'événement. La résolution analytique peut également être appliquée de la même façon sur les transferts hydriques, les transferts de solutés et permet également la modélisation de l'extraction racinaire. Son efficacité et son domaine de validité sont cependant limités par les hypothèses sur lesquelles repose sa construction. Des méthodes permettant d'accroître les potentialités de cette modélisation sont à cet égard proposées.

**Mots-clés** Irrigation à la raie, micro-irrigation, transferts eau-soluté, modélisation bi- et tridirectionnelle, semi-analytique, fonction de Green

## Abstract

Furrow irrigation is one of the most commonly used irrigation techniques in the world and the use of micro-irrigation, which is an irrigation technique that enables the farmer to adjust to plant needs the amount of water and fertilizer applied in the field during the crop season, has increased significantly. The tight control of water and solute bi- and three directional transfers in the context of these practices is very important and enables the improvement of these techniques by limiting water wastage, nitrogen leaching and by optimizing crop yields.

Modelling developed here proposes to represent water and solute transfers based on a semi-analytical resolution of the bi- and three-directional transfer equations (Richard's equation and the solute convection-diffusion equation). The analytical character of this model makes it possible to simulate events with variable time steps : the hour for irrigation events and the day for water and solute redistribution in the ground. In addition, it allows us to free ourselves from constraints specific to numerical methods : conditions of solution convergence and significant computing time. This model, which is based on mechanistic principles maintains, in spite of certain simplifying assumptions, a highly predictive character.

Taking into account the complexity of field geometry, particularly in furrow irrigation, and to better manage heterogeneous initial conditions, the general problem is split into elementary problems of which the analytical resolution is made possible by the use of Green's function. The solution of the general problem is then obtained by superposing the analytical solutions of these elementary problems.

The method used has the advantage of being adaptable. It facilitates the modelling of different irrigation and fertilization practices of for a wide range of time steps. Analytical resolution can similarly be applied to water and solute transfers while allowing the modelling of root uptake. Its effectiveness and its scope of validity are however limited by the assumptions on which its construction is based. Methods that improve the potential of this modelling technique in this respect are proposed.

**Keywords** Furrow irrigation, micro-irrigation, water and solute transfers, two- and three-directional modelisation, semi-analytical, Green's function

# Table des matières

Remerciements	iii
Résumé	v
Abstract	vi
Table des matières	vii
Liste des figures	xiii
Liste des tableaux	xvii
Introduction	1
<b>I Etat de l’art de la modélisation des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés : recherche d’une technique de résolution adaptée à la problématique</b>	<b>5</b>
<b>1 Le recours à la modélisation pour représenter les processus de transferts dans un sol cultivé</b>	<b>9</b>
1.1 L’intérêt de la modélisation . . . . .	9
1.2 Les différents types de modélisation . . . . .	10
<b>2 L’eau et les solutés dans le sol</b>	<b>13</b>
2.1 Représentation du sol . . . . .	13
2.2 L’eau dans le sol . . . . .	14
2.2.1 Le cycle de l’eau . . . . .	14
2.2.2 Teneur en eau et charge hydraulique . . . . .	14
2.2.3 Courbe de rétention du sol . . . . .	15
2.2.4 Conductivité hydraulique . . . . .	15
2.2.5 Equation de Richards . . . . .	16
2.3 Le soluté dans le sol . . . . .	17
2.3.1 Le cycle de l’azote . . . . .	17
2.3.2 Les différentes phases d’un élément chimique dans le sol . . . . .	18

2.3.3	Flux d'un soluté dans le sol . . . . .	19
2.3.4	Equation de diffusion-convection de solutés . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Simulation numérique des transferts eau-solutés</b>	<b>23</b>
3.1	Principes . . . . .	23
3.2	Avantages et contraintes de la méthode . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Modélisation de type capacitif</b>	<b>27</b>
4.1	Principes . . . . .	27
4.1.1	Transferts hydriques . . . . .	27
4.1.2	Transferts de solutés . . . . .	28
4.2	Adaptation au cas bidirectionnel . . . . .	29
<b>5</b>	<b>Adaptation d'un modèle analytique d'infiltration bidirectionnel au calcul des transferts hydriques</b>	<b>31</b>
5.1	Le modèle FURINF . . . . .	31
5.1.1	Principes généraux . . . . .	31
5.1.2	Validation du modèle . . . . .	33
5.2	Adaptation de FURINF à la problématique . . . . .	35
5.2.1	Représentation monodirectionnelle du profil hydrique . . . . .	35
5.2.2	Représentation bidirectionnelle du profil hydrique . . . . .	36
<b>6</b>	<b>La modélisation analytique fondée sur des bases mécanistes</b>	<b>39</b>
6.1	Résolution de l'équation de Richards . . . . .	39
6.1.1	Résolution analytique de Berthomé appliquée sur une raie d'irrigation trapézoïdale . . . . .	40
6.1.2	Elimination d'un des termes de l'équation de Richards . . . . .	41
6.1.3	Linéarisation complète de l'équation de Richards . . . . .	44
6.2	Résolution de l'équation de convection-diffusion . . . . .	46
6.2.1	Résolutions monodirectionnelles de l'équation de convection-diffusion à coefficients constants . . . . .	46
6.2.2	Résolutions bidirectionnelles de l'équation de convection-diffusion à coefficients constants . . . . .	47
6.2.3	Résolution de l'équation de convection-diffusion à coefficients variables . . . . .	47
<b>II</b>	<b>Analyse de campagnes expérimentales et des simulations numériques de systèmes concertés d'irrigation</b>	<b>51</b>
<b>1</b>	<b>Devenir de l'azote sous irrigation gravitaire (Nemeth, 2001)</b>	<b>55</b>
1.1	Description du protocole expérimental . . . . .	55
1.1.1	Les parcelles étudiées . . . . .	55
1.1.2	Les pratiques de culture . . . . .	56
1.2	Résultats expérimentaux . . . . .	58
1.2.1	Suivi de l'évolution du profil et du bilan hydrique . . . . .	58



1.2.2	Suivi de l'évolution du profil et du bilan azoté . . . . .	59
<b>2</b>	<b>Essais d'infiltration statique (Triki, 2002)</b>	<b>63</b>
2.1	Enjeux de la campagne de mesures et de sa modélisation . . . . .	63
2.2	Analyse des relevés expérimentaux . . . . .	63
2.3	Simulation numérique de la saison culturale . . . . .	64
<b>3</b>	<b>Etude expérimentale de deux types de pratiques culturales grâce à des cases lysimétriques</b>	<b>67</b>
3.1	Présentation de la campagne d'expérimentations . . . . .	67
3.2	Résultats expérimentaux . . . . .	68
3.3	Intérêt de la modélisation numérique . . . . .	69
<b>4</b>	<b>Expérimentations en micro-irrigation</b>	<b>73</b>
4.1	Intérêt des relevés expérimentaux dans le contexte de l'étude . . . . .	73
4.2	Transferts tridirectionnels de l'eau en goutte à goutte . . . . .	73
4.3	Transferts tridirectionnels de soluté en micro-irrigation . . . . .	75
 <b>III Développement d'outils mathématiques et algorithmiques nécessaires à la modélisation</b>		 <b>81</b>
<b>1</b>	<b>L'utilisation de la fonction de Green dans la résolution d'équations aux dérivées partielles</b>	<b>85</b>
1.1	Principes généraux de la fonction de Green . . . . .	85
1.2	Utilisation de la fonction de Green sur l'équation de diffusion pure . . . . .	86
1.2.1	Domaine quelconque . . . . .	86
1.2.2	Domaine bidirectionnel semi-infini . . . . .	87
1.2.3	Domaine tridirectionnel semi-infini . . . . .	88
1.2.4	Expression d'une solution à variables séparables . . . . .	89
1.2.5	Remarques sur l'utilisation de ces solutions dans le contexte du travail . . . . .	89
<b>2</b>	<b>La notion d'arbre binaire et d'algorithmique récursif</b>	<b>91</b>
2.1	Définition d'un pointeur et d'une liste chaînée . . . . .	91
2.2	Représentation d'une expression algébrique sous forme d'arbre binaire . . . . .	92
2.3	Algorithmique récursive . . . . .	93
<b>3</b>	<b>Définition d'une famille de fonctions adaptée à l'utilisation de la fonction de Green</b>	<b>95</b>
3.1	La famille de fonctions $\mathbb{L}$ . . . . .	95
3.2	Opérations récursives sur les fonctions $\Lambda$ . . . . .	96
3.2.1	Opérations préliminaires . . . . .	96
3.2.2	Dérivation d'une fonction $\Lambda$ par rapport à la variable $X$ . . . . .	101
3.2.3	Intégration d'une fonction $\Lambda$ par rapport à la variable $X_s$ . . . . .	102
3.3	Remarques sur la programmation récursive . . . . .	102

## **IV Principes généraux de la modélisation semi-analytique des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés** **107**

<b>1 Principes généraux de décomposition d'un problème complexe en problèmes élémentaires</b>	<b>111</b>
1.1 Contexte . . . . .	111
1.2 Décomposition des conditions aux limites . . . . .	111
1.3 Décomposition des conditions initiales . . . . .	112
1.4 Construction des problèmes élémentaires . . . . .	115
<b>2 Modélisation des transferts hydriques sur les problèmes élémentaires</b>	<b>117</b>
2.1 Linéarisation et adimensionnement de l'équation de Richards bidirectionnelle . . . . .	117
2.1.1 Rappel de l'équation générale de l'écoulement . . . . .	117
2.1.2 Changement de repère . . . . .	119
2.1.3 Adimensionnement des équations et changement de fonction . . . . .	120
2.1.4 Cas particulier du traitement des conditions aux limites . . . . .	120
2.1.5 Remarques sur le cas tridirectionnel . . . . .	122
2.2 Solutions des problèmes élémentaires . . . . .	122
2.2.1 Expressions symboliques représentant les solutions . . . . .	122
2.2.2 Visualisation des solutions . . . . .	124
<b>3 Modélisation des transferts de solutés sur les problèmes élémentaires</b>	<b>127</b>
3.1 Simplification et adimensionnement de l'équation de convection-diffusion . . . . .	127
3.1.1 Rappel de l'équation de convection-diffusion bidirectionnelle . . . . .	127
3.1.2 Adimensionnement de l'équation et changement de fonction . . . . .	129
<b>4 Recomposition de la solution générale</b>	<b>131</b>
4.1 Principes généraux . . . . .	131
4.1.1 Recomposition des conditions aux limites . . . . .	131
4.1.2 Recomposition des conditions initiales . . . . .	133
4.2 Remarques sur l'évaluation du flux Darcien et de l'humidité du sol . . . . .	135
4.3 Prise en compte d'un flux Darcien non constant dans la modélisation des transferts de solutés . . . . .	135
4.3.1 Choix de la vitesse moyenne . . . . .	136
4.3.2 Anamorphose du domaine étudié . . . . .	137
4.3.3 Interpolation des maillages . . . . .	138
4.3.4 Application du procédé . . . . .	138

## **V Analyse des résultats et améliorations** **145**

<b>1 Définition des cas tests</b>	<b>149</b>
1.1 Différents types de sols . . . . .	149
1.1.1 Choix des sols . . . . .	149
1.1.2 Caractéristiques hydrodynamiques des sols . . . . .	151

1.2	Représentation des systèmes d'irrigation . . . . .	154
1.2.1	L'irrigation à la raie . . . . .	154
1.2.2	Le système du goutte à goutte . . . . .	155
<b>2</b>	<b>Simulation de cas concrets de systèmes d'irrigation</b>	<b>159</b>
2.1	Adaptation des paramètres des sols . . . . .	159
2.2	Première approche d'une modélisation de l'état hydrique d'un sol après irrigation . .	160
2.2.1	Le cas de la micro-irrigation . . . . .	160
2.2.2	Le cas de l'irrigation à la raie . . . . .	163
2.3	Représentation complète d'une irrigation . . . . .	165
2.3.1	Principes de la construction du profil hydrique à partir de plusieurs jeux de paramètres moyens . . . . .	165
2.3.2	Evaluation de la qualité de la modélisation sur différents cas d'irrigation . . .	167
2.4	Redistribution du profil hydrique après irrigation . . . . .	170
2.5	Evolution des solutés dans le domaine . . . . .	171
2.6	Bilan sur les capacités du modèle à ce moment de l'étude . . . . .	175
<b>3</b>	<b>Perspectives de développement du modèle semi-analytique</b>	<b>177</b>
3.1	Prise en compte d'actions extérieures variables en espace et en temps . . . . .	177
3.2	Impact de la plante sur l'état du sol . . . . .	178
3.3	Description d'une saison culturale complète . . . . .	178
	<b>Conclusion</b>	<b>182</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>185</b>
<b>A</b>	<b>Manuel d'utilisation de DeGETES (Décomposition gaussienne des équations de transferts eau-soluté)</b>	<b>191</b>
A.1	Présentation du code de calcul . . . . .	191
A.2	Lancement de DeGETES . . . . .	191
A.3	Définition des paramètres numériques . . . . .	192
A.3.1	Contenu du fichier de données générales . . . . .	192
A.3.2	Contenu du fichier des propriétés hydrodynamiques du sol . . . . .	193
A.3.3	Contenu du fichier des paramètres concernant le transfert de solutés . . . . .	194
A.3.4	Contenu du fichier comparaison Hydrus-2D . . . . .	194
A.3.5	Enregistrement et ouverture de fichiers existants . . . . .	194
A.4	Définition des conditions initiales et aux limites . . . . .	195
A.4.1	Définition des conditions initiales . . . . .	195
A.4.2	Définition des conditions aux limites . . . . .	195
A.5	Calcul de la solution du problème . . . . .	197
A.6	Visualisation des résultats . . . . .	198
A.7	Cas test . . . . .	200
A.8	Choix d'un sol prédéfini . . . . .	200

<b>B</b>	<b>Impact of water application conditions on nitrogen leaching under furrow irrigation : experimental and modelling approaches</b>	<b>203</b>
<b>C</b>	<b>Application of Hydrus-2D model for simulating water transfer under furrow irrigation. Bulgarian case study in cropped lysimeters on Chromic Luvisol</b>	<b>205</b>

# Liste des figures

## Figures de la partie I

2.1.1 Triangle des textures du Soil survey Manual permettant de classer les sols selon leur granulométrie . . . . .	13
3.1.1 Construction du maillage et définition des conditions initiales et aux limites par HYDRUS-2D (cas de l'irrigation à la raie) . . . . .	24
4.1.1 Modélisation capacitive monodirectionnel des transferts hydriques . . . . .	27
4.1.2 Modélisation du sol utilisée dans STICS (Mary et al., 2002) . . . . .	28
4.2.1 Principe d'une adaptation du modèle capacitif au cas bidirectionnel . . . . .	30
4.2.2 Résultat du modèle capacitif au cas bidirectionnel (unités et caractéristiques du sol arbitraires) . . . . .	30
5.1.1 Le modèle FURINF : représentation des directions d'infiltration considérées orthogonales à la raie . . . . .	32
5.1.2 Courbes d'infiltration cumulée obtenues par FURINF et Hydrus-2D . . . . .	34
5.2.1 Comparaison des profils analytiques avec ceux donnés par Hydrus-1D . . . . .	36
5.2.2 Notations utilisées dans l'ajustement du front d'humectation bidirectionnel . . . . .	37
5.2.3 Comparaison des profils analytiques avec ceux donnés par Hydrus-2D . . . . .	37
6.1.1 Solution de Raats - figure et notations tirées de (Revol, 1994) . . . . .	42
6.1.2 Evolution du bulbe humide en micro irrigation selon Philip et Clothier . . . . .	43

## Figures de la partie II

1.1.1 Pratique traditionnelle de fertilisation en irrigation à la raie . . . . .	56
1.1.2 Parcelle expérimentale - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	56
1.1.3 Précipitations cumulées pour l'année 99 - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	57
1.2.1 Humidité avant et après la seconde irrigation sur le site $T_a$ -moyen - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	58
1.2.2 Humidité avant et après la seconde irrigation sur le site $T_e$ -moyen - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	59
1.2.3 Stock d'azote minéral du site $T_a$ -moyen - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	60

1.2.4	Stock d'azote minéral du site $T_e$ -aval - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	60
1.2.5	Différentes phases en irrigation à la raie - figure tirée de (Nemeth, 2001) . . . . .	61
2.3.1	Simulation numérique de la concentration de nitrate sur les sites 1 (profil de gauche) et 2 (profil de droite) 13 jours après une irrigation . . . . .	65
2.3.2	Simulation numérique du flux Darcien sur les sites 1 (profil de gauche) et 2 (profil de droite) après 2 h d'irrigation . . . . .	65
3.1.1	Schéma d'une case lysimétrique . . . . .	67
3.3.1	Concentration de nitrate le 20 juillet après une irrigation, sous le billon (ridge) et la raie (furrow) dans la pratique EFI . . . . .	70
3.3.2	Concentration de nitrate le 20 juillet après une irrigation, sous la raie sèche (dry furrow), le billon (ridge) et la raie humide (wet furrow) dans la pratique AFI . . . . .	71
3.3.3	Concentration de nitrate en fin de saison de culture, sous le billon (ridge) et la raie (furrow) dans la pratique EFI . . . . .	71
3.3.4	Concentration de nitrate en fin de saison de culture, sous la raie sèche (dry furrow), le billon (ridge) et la raie humide (wet furrow) dans la pratique AFI . . . . .	72
4.2.1	Evolution des rayons moyens de la zone saturée et du front d'humectation - figure tirée de (Revol et al., 1991) . . . . .	74
4.2.2	Evolution de la tâche humide - figure tirée de (Clothier et al., 1985) . . . . .	74
4.2.3	Evolution du bulbe humide dans une section du champ - figure tirée de (Clothier et al., 1985) . . . . .	75
4.3.1	Cinq stratégies différentes de fertigation ( $P$ représente en $h$ la durée d'un cycle d'irrigation) - figure tirée de (Gärdenäs et al., 2005) . . . . .	76
4.3.2	Profils de nitrate après un cycle d'irrigation au goutte à goutte - figure tirée de (Gärdenäs et al., 2005) . . . . .	76

### Figures de la partie III

2.1.1	Représentation récursive d'une liste chaînée . . . . .	91
2.2.1	Représentation récursive d'un arbre binaire . . . . .	92
3.1.1	Représentation récursive d'une fonction $\Lambda$ . . . . .	96
3.2.1	Erreur relative de l'approximation à 5 fonctions $\mathcal{G}$ de la fonction $\operatorname{erfc}$ . . . . .	98
3.2.2	Arbre d'une fonction $\Lambda$ développée . . . . .	102

### Figures de la partie IV

1.1.1	Décomposition du problème initial en problèmes élémentaires (les isolignes représentent ici les lignes d'iso-humidité relative) . . . . .	112
1.2.1	Traitement des conditions de flux latéral nul sur les frontières verticales du domaine . . . . .	113
1.3.1	Evaluation de l'influence du nombre de gaussiennes, $N = 10$ (magenta), 25 (rouge) et 50 (bleu), dans l'approximation des conditions initiales (vert) pour $\sigma = a/N$ . . . . .	114

1.3.2	Evaluation de l'influence de la relation $\frac{N\sigma}{a}$ , valant 1/2 (magenta), 1 (rouge) et 2 (bleu) dans l'approximation des conditions initiales (vert) pour $N = 25$ . . . . .	114
1.3.3	Décomposition d'une fonction en série de gaussiennes pour $\frac{N\sigma}{a} = 1/2, 1$ et $2$ . . . . .	115
2.1.1	Impact de la suite $t_{s_n}$ sur l'intégration numérique de la solution aux problèmes élémentaires (à gauche suite arithmétique, à droite suite utilisée) . . . . .	121
2.2.1	Représentation sous forme d'arbre binaire d'une solution élémentaire . . . . .	123
2.2.2	Profil initial, potentiel de flux à $1h$ et à $4h$ du problème GDN . . . . .	124
2.2.3	Profil initial, potentiel de flux à $1h$ et à $4h$ du problème GCN . . . . .	124
2.2.4	Profil initial, potentiel de flux à $1h$ et à $4h$ du problème NDV . . . . .	125
2.2.5	Profil initial, potentiel de flux à $1h$ et à $4h$ du problème NCV . . . . .	125
4.1.1	Recomposition des conditions aux limites sur une surface composée de deux segments	132
4.1.2	Juxtaposition d'une condition de charge imposée et d'une condition de flux nul (à gauche sommation simple, à droite prise en compte d'un profil particulier) . . . . .	133
4.1.3	Domaine d'influence utilisé dans la recomposition des conditions initiales . . . . .	133
4.1.4	Recomposition des conditions initiales sur une surface composée de deux segments (à gauche condition initiale, à droite une simulation de $1 h$ ) . . . . .	134
4.3.1	Anamorphose du domaine régulier en un domaine adapté à la vitesse de pore (cas d'une irrigation apportée sur le premier tiers de la surface) . . . . .	137
4.3.2	Interpolation du maillage après anamorphose sur le maillage régulier . . . . .	138
4.3.3	Anamorphose du domaine régulier dans le cas d'un flux trop important . . . . .	139
4.3.4	Profil du flux Darcien et profil initial de nitrate . . . . .	140
4.3.5	Différentes étapes d'une itération permettant la prise en compte d'un flux Darcien variable . . . . .	140
4.3.6	Evolution du profil de la concentration en nitrate et profil final de flux dans le cas d'un domaine soumis à un flux d'eau imposé en surface . . . . .	140

## Figures de la partie V

1.1.1	Choix de 3 sols test sur le triangle des textures . . . . .	150
1.1.2	Propriétés hydrodynamiques du sol 1 . . . . .	152
1.1.3	Propriétés hydrodynamiques du sol 2 . . . . .	152
1.1.4	Propriétés hydrodynamiques du sol 3 . . . . .	153
1.1.5	L'hypothèse d'un sol linéaire sur la diffusivité du sol 3 . . . . .	153
1.2.1	Profil de la raie modélisée . . . . .	154
1.2.2	Schéma d'une raie triangulaire pour le calcul de la charge imposée en surface . . . . .	155
1.2.3	Maillage et conditions aux limites d'HYDRUS-2D en irrigation à la raie . . . . .	155
1.2.4	Maillage et conditions aux limites d'HYDRUS-2D en goutte à goutte . . . . .	156
1.2.5	Maillage et conditions aux limites d'HYDRUS-2D en goutte à goutte . . . . .	157
2.2.1	Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour le sol 1 en goutte à goutte . . . . .	161

2.2.2 Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour le sol 2 en goutte à goutte . . . . .	161
2.2.3 Comparaison de la modélisation semi-analytique (1) (en haut à gauche) et (2) (en haut à droite)/ HYDRUS-2D (en bas) pour le sol 3 en goutte à goutte . . . . .	162
2.2.4 Comparaison modélisation semi-analytique / HYDRUS-2D pour le sol 1 en irrigation à la raie . . . . .	164
2.2.5 Comparaison modélisation semi-analytique / HYDRUS-2D pour le sol 2 en irrigation à la raie . . . . .	164
2.2.6 Comparaison modélisation semi-analytique / HYDRUS-2D pour le sol 3 en irrigation à la raie . . . . .	165
2.3.1 Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour le sol 3 en goutte à goutte (recomposition du profil à partir de trois simulations)	166
2.4.1 Profil hydrique initial construit utilisé dans la simulation d'une redistribution après irrigation . . . . .	170
2.4.2 Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour la redistribution du sol 2 après irrigation à la raie . . . . .	171
2.5.1 Profil initial de concentration du soluté [ $mgN.cm^{-3}$ ] . . . . .	172
2.5.2 Profil de flux Darcien calculé par la modélisation semi-analytique après 3 h d'irriga- tion à la raie . . . . .	173
2.5.3 Profil de concentration de soluté calculé par la modélisation semi-analytique pour un coefficient de dispersion moyen élevé . . . . .	174
2.5.4 Profil de concentration de soluté calculé par la modélisation semi-analytique pour un coefficient de dispersion nul . . . . .	174
2.5.5 Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour l'évolution de la concentration en nitrate sous irrigation à la raie . . . . .	175

## Figures des annexes

A.2.1 Menu général de DEGETES . . . . .	192
A.3.1 Définition des paramètres généraux de DEGETES . . . . .	193
A.4.1 Définition des conditions initiales et aux limites . . . . .	195
A.4.2 Visualisation des conditions initiales du problème . . . . .	196
A.4.3 Visualisation des conditions aux limites du problème . . . . .	196
A.6.1 Visualisation des solutions du problème . . . . .	199



# Liste des tableaux

## Tableaux de la partie II

1.1.1 Apports d'eau totaux durant la saison de culture en $mm$ . . . . .	57
1.1.2 Apports d'azote durant la saison de culture en $kgN.ha^{-1}$ . . . . .	57

## Tableaux de la partie III

2.3.1 Evaluation récursive d'une expression algébrique . . . . .	93
3.2.1 Développement récursif d'une fonction $\Lambda$ . . . . .	101
3.2.2 Distribution récursive de deux fonctions $\Lambda$ . . . . .	101
3.2.3 Dérivation récursive d'une fonction $\Lambda$ . . . . .	102
3.2.4 Intégration récursive d'une fonction $\Lambda$ entre $X_a$ et $X_b$ . . . . .	102

## Tableaux de la partie IV

1.4.1 Enumération des problèmes élémentaires traités par le modèle . . . . .	115
2.2.1 Caractéristiques des solutions élémentaires . . . . .	123

## Tableaux de la partie V

1.1.1 Plages de variation des paramètres utilisés par le modèle du sol linéaire (Broadbridge and White, 1988) . . . . .	151
1.1.2 Caractéristiques hydrodynamiques des sols (modèle de van Genuchten) . . . . .	152
2.2.1 Paramètres du modèle du sol linéaire calculés comme moyenne des fonctions de van Genuchten (cas du goutte à goutte) . . . . .	160
2.2.2 Paramètres du modèle du sol linéaire calculés comme moyenne des fonctions de van Genuchten (cas de l'irrigation à la raie) . . . . .	163
2.3.1 Critères numériques des performances de la modélisation semi-analytique . . . . .	168

## Tableaux des annexes

A.3.1Détails des données à initialiser . . . . .	193
A.6.1Profils pouvant être visualisés . . . . .	199
A.7.1Liste de fichiers d'entrée des cas tests . . . . .	201

# Introduction

L'irrigation gravitaire occupe dans le monde une place très importante. Elle représente 80% des surfaces irriguées et est réalisée principalement par irrigation à la raie. Son faible coût d'investissement et son fonctionnement au niveau de la parcelle font de ce mode d'irrigation, une technique qui est difficilement concurrencée dans l'irrigation des grandes cultures (maïs, canne à sucre, sorgho, tournesol, soja,...). De plus, de récentes modernisations (planage au laser, distributeurs d'eau en tête) permettent de réduire la pénibilité des travaux et d'améliorer l'efficacité de l'eau distribuée.

Ce chiffre de 80%, qui reste encore très élevé, tend cependant à diminuer au profit de la micro-irrigation. Ce mode de distribution permet une meilleure utilisation de l'eau en l'apportant directement au niveau des racines et en adaptant la quantité apportée aux besoins de la plante au cours de la saison de culture. Selon la culture à irriguer, ce mode de distribution est préféré à d'autres, il est souvent utilisé dans l'irrigation des arbres fruitiers ou des vignes, comme en Californie par exemple (Zapata, 1999). Le coût de sa mise en place est beaucoup plus important que celui de l'irrigation à la raie, cependant sa souplesse et son confort d'utilisation ont poussé de nombreux exploitants à cet investissement.

Ces deux techniques d'irrigation font l'objet de nombreuses recherches théoriques et expérimentales visant à leur amélioration. En effet, compte tenu de leur utilisation prépondérante en irrigation des sols cultivés, des pratiques mal adaptées au contexte pédoclimatique peuvent entraîner des risques environnementaux importants (gaspillage d'eau, pollution du sous-sol par les nitrates) et nuire au rendement des cultures. L'efficacité de l'eau distribuée par irrigation à la raie peut varier entre 50%, si elle est mal maîtrisée, et 80% (Playàn et al., 2000), et entre 75% et 90% par micro-irrigation (Clemmens and Dedrick, 1994). On comprend donc l'enjeu des améliorations de ces systèmes de distribution, particulièrement en irrigation à la raie.

En irrigation à la raie, les pratiques traditionnelles de fertilisation, combinées au traçage des sillons, provoquent une forte hétérogénéité de la répartition horizontale de l'azote en surface du sol. Une mauvaise redistribution de l'azote pendant la saison de culture peut entraîner des lessivages importants en période hivernale et une utilisation du fertilisant par les plantes qui n'est pas optimale, particulièrement dans un contexte d'apport d'engrais adapté aux besoins de la plante (Fernandez et al., 1994). Des expérimentations *in situ* ont permis de montrer qu'il existe des pratiques permettant de réduire le lessivage d'azote (Benjamin et al., 1998; Mailhol et al., 2001; Popova et al., 2000). Ces expérimentations mettent en évidence l'importance des transferts latéraux lors de la redistribution de l'azote dans un sol irrigué. La micro-irrigation est fréquemment utilisée en

dissolvant le fertilisant sous forme gazeuse dans l'eau d'irrigation. Ce procédé permet de distribuer l'azote nécessaire à la plante en suivant le parcours de l'eau. Celui-ci fait intervenir des transferts tridirectionnels en raison du principe de fonctionnement des systèmes de micro-irrigation.

Les modèles permettant de représenter les transferts eau-solutés à l'échelle de la saison de culture sont souvent monodirectionnels (Brisson et al., 1998; Mailhol et al., 1997; Jones and Kinity, 1986; Vanclooster et al., 1993). Leur principe est fondé sur l'écriture des bilans hydrique et de masse de solutés. Ils permettent de rendre compte à l'échelle de la saison de l'état général du sol et de prévoir le rendement de la culture dans de nombreuses pratiques culturales. Ils sont cependant incapables de tenir compte des transferts bidirectionnels, phénomènes qui dans la problématique de cette étude, sont essentiels. Des modèles permettant de représenter les transferts bidirectionnels existent également. Ils sont basés sur une représentation plus fine de la dynamique du sol en résolvant les équations de transferts. Ils sont cependant adaptés à l'échelle événementielle (Berthomé, 1991; Schmitz, 1993; Wöhling et al., 2003) et limités dans leur domaine de validité (Revol, 1994; Coelho and Or, 1997). Ils sont par exemple incapable de rendre compte d'un état initial du sol hétérogène ou d'une géométrie irrégulière de la surface. Le type de modélisation permettant de traiter de manière satisfaisante les situations complexes représentant des cas concrets d'irrigation est la simulation numérique (Simunek et al., 1999). Elle est cependant peu opérationnelle à l'échelle de la saison. Elle demande tout d'abord une connaissance précise de l'état initial du sol et d'un nombre important de paramètres permettant son application. De plus, pendant la saison de culture, des événements d'irrigation (d'une durée de plusieurs heures) et de redistribution (d'une durée de plusieurs journées) se succèdent. La simulation numérique, soumise à des relations contraignantes liant la discrétisation spatiale et temporelle, doit traiter ces événements séparément, limitant son utilisation dans le contexte d'une modélisation à l'échelle de la saison.

La modélisation des transferts eau-solutés que nous proposons de mettre en oeuvre a donc plusieurs objectifs :

- Elle doit être capable de rendre compte des transferts bi- ou tridirectionnels sur un domaine de validité proche de celui rencontré dans des utilisations concrètes de systèmes d'irrigation.
- Elle doit pouvoir simuler ces transferts à l'échelle de la saison de culture, pour cette raison, une gestion efficace des pas de temps représentatifs des événements à simuler est essentielle.
- Elle doit être adaptable afin de faciliter l'intégration de modules ultérieurs comme un modèle de culture calculant le rendement prévu ou des modules améliorant la description de la dynamique du sol.

Ce travail est divisé en cinq parties. Une première partie rappelle les notions liées au contexte de l'étude et présente différents type de modélisation développée pour représentation les transferts eau-solutés. Elle présente également les caractéristiques de chacune de ces modélisations et les compare aux critères définissant une modélisation efficace dans le contexte de ce travail. La deuxième partie traite de campagnes d'expérimentation mettant en évidence l'importance des transferts bi- ou tridirectionnels en irrigation à la raie et en micro-irrigation. Les pratiques de culture testées dans ces expériences ont été reproduites par une simulation numérique (HYDRUS-2D). Cette deuxième partie présente également ces simulations afin de justifier l'emploi d'HYDRUS-2D comme outil de

comparaison avec le modèle développé. La troisième partie rassemble les outils mathématiques et algorithmiques utilisés au cours de ce travail. Ces outils permettent le développement du modèle dont les principes sont présentés dans la quatrième partie. Celle-ci traite du développement d'un modèle basé sur la résolution semi-analytique des équations de transferts. La solution générale du problème est considérée comme la superposition de problèmes plus simples dont la solution analytique est accessible grâce aux outils développés dans la troisième partie. Enfin, la cinquième et dernière partie présente les résultats de la modélisation sur des pratiques concrètes d'irrigation. Elle définit le domaine de validité du modèle développé en évaluant ses applications possibles sur différents types de sol, d'événements et de pratiques culturales. Des méthodes permettant d'étendre ce domaine de validité du modèle et d'y adapter des modules supplémentaires seront également proposées dans cette partie.



## Première partie

Etat de l'art de la modélisation des  
transferts bi- et tridirectionnels  
eau-solutés : recherche d'une  
technique de résolution adaptée à la  
problématique





# Introduction de la partie

L'objectif de ce travail est de rendre compte des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés dans un sol cultivé et irrigué. Depuis le début du XXème siècle, les moyens et les outils à disposition n'ont cessé de se développer et de représenter ces phénomènes avec une connaissance de plus en plus précise. Cette partie dresse un état de l'art des modélisations existantes. Elles peuvent être de différents types, conceptuelles, analytiques, numériques, basées sur des relations mécanistes ou empiriques. Le choix d'appliquer un type de modélisation dépend des contraintes de précisions voulues et des données initiales à disposition. Ainsi, les modèles conceptuels donneront une bonne première approximation pour un faible coût de calcul, alors que les modèles numériques pourront prendre en compte de nombreux phénomènes se produisant dans le sol si on cherche à représenter les concepts physiques de manière plus précises.

Cette partie présente tout d'abord les principes de bases des transferts eau-solutés. Elle définit les notions utilisées tout au long de cette étude, en précisant les hypothèses sous lesquelles elles peuvent être appliquées. Les différentes modélisations existantes sont ensuite introduites. Pour chacune de ces modélisations, on précisera leurs principes généraux et le cadre dans lequel elles peuvent être efficaces.

Cette présentation non exhaustive des modélisations disponibles permet de choisir le type de modélisation le mieux adapté à la problématique du travail entrepris ici. Ainsi, les contraintes de représentations bi- ou tridirectionnelles des transferts sur des événements dont le pas de temps varie entre l'heure et la journée vont permettre d'orienter le choix de la modélisation à privilégier.



# Chapitre 1

## Le recours à la modélisation pour représenter les processus de transferts dans un sol cultivé

### 1.1 L'intérêt de la modélisation

Outre l'intérêt d'approfondir les connaissances du domaine scientifique concerné, la modélisation est utilisée pour simuler des scénarii, évitant la mise en oeuvre d'expériences complexes et coûteuses à réaliser. Pour des phénomènes physiques se produisant dans des conditions de pression et de vitesse extrême (aéronautique), nécessitant la destruction du matériel testé lors de l'expérience (résistance des matériaux) ou qui requièrent une période d'essai très longue (changement global du climat), la modélisation est essentielle pour estimer l'évolution du phénomène physique considéré. Elle consiste à désigner les phénomènes physiques prépondérants, à les représenter mathématiquement, soit à partir de bases mécanistes, ou d'observations et de fixer les limites de validité de la représentation. Une modélisation ne peut cependant s'affranchir de mesures expérimentales. Celles-ci doivent être réalisées en amont de la modélisation, afin de dégager les processus essentiels du phénomène physique, et en aval, afin de valider la modélisation et les limites entre lesquelles elle peut être appliquée.

L'impact d'une pratique culturale n'est souvent visible qu'en fin de saison, et ce sur le niveau de production obtenue. Si les suivis tensiométriques (mesures de charges hydrauliques) nous renseignent sur l'état de l'eau dans le sol, celui des solutés est quant à lui plus difficile d'accès, aucun dispositif ne permettant une connaissance directe et précise. La modélisation dans ce cadre permet d'éviter des campagnes d'expérimentation longues, parfois perturbées par des conditions climatiques défavorables.

Dans un sol, eau et air évoluent entre les constituants solides du sol et les éléments chimiques se retrouvent sous les trois phases de la matière (en solution dans l'eau du sol, adsorbés par les particules solides du sol et sous forme gazeuse après volatilisation). On devine alors la difficulté

d'une modélisation dans un milieu aussi complexe. Les phénomènes physiques et biochimiques qui participent à l'évolution du milieu sont très nombreux et interagissent entre eux. Une modélisation efficace doit donc définir très précisément les phénomènes dont elle tient compte et surtout les limites de validité qu'elle se donne lorsqu'on envisage de négliger certains de ces phénomènes. Le sol étant un milieu souvent très hétérogène et parfois localement discontinu (effets macropores), il sera très important de trouver le compromis adéquate entre les simplifications facilitant la modélisation et un domaine de validité le plus large possible.

## 1.2 Les différents types de modélisation

Différents types de modélisation peuvent être adoptés pour représenter les transferts hydriques. Avant de choisir le type de modélisation à utiliser, il faut donc définir les contraintes liées au phénomène à modéliser. Elles vont orienter le choix de la modélisation. Ces contraintes sont relatives aux données dont on dispose, à la complexité des processus physiques et à la précision recherchée des résultats finaux.

Par ordre de complexité croissante, on trouve dans la classification de la modélisation :

- la modélisation par analogie. Elle consiste à reproduire les concepts du processus physique à modéliser par analogie à un processus connu plus simple. Cette modélisation revêt un caractère opérationnel. Elle a l'avantage de ne mettre en jeu qu'un faible nombre de paramètres mais dont le sens physique est parfois discutable. Elle nécessite en général la connaissance d'une faible quantité de données initiales et le temps de calcul est réduit. Cependant, elle ne permet de reproduire que partiellement un événement donné. Certains phénomènes physiques doivent donc être écartés ou supposés négligeables ce qui n'est pas toujours le cas.
- la modélisation empirique. Elle permet de définir des lois mathématiques représentant un phénomène physique grâce à la mesure et à l'observation. Ce type de modélisation nécessite de nombreuses campagnes d'expérimentation afin de vérifier la validité et la répétitivité de la loi établie. Bien souvent, chaque paramètre ne peut être utilisé en dehors du domaine propre à l'expérience, ce qui limite à l'évidence l'utilisation de cette approche.
- la modélisation mécaniste. Cette modélisation est fondée sur la résolution d'équations établies sur des bases physiques. Elle permet une représentation plus précise de l'événement modélisé. Cette précision n'est cependant possible qu'au prix de développement analytique et théorique souvent lourd à mettre en oeuvre ou d'une résolution numérique nécessitant un long temps de calcul et des données initiales difficiles d'accès.
- la modélisation stochastique. Elle reprend généralement un modèle existant en introduisant l'étude de la variabilité des paramètres. Il s'agit d'un processus qui fait varier selon une loi de distribution aléatoire adaptée, les paramètres d'entrée du modèle. Cette étude statistique permet de définir un résultat final moyen ainsi que la probabilité de s'écarter de ce résultat. Dans ce type de modélisation, le problème essentiel est le temps de calcul qui peut rapidement prendre des proportions importantes.

Tout phénomène physique peut être représenté grâce à ces quatre types de modélisation. Cependant, choisir une modélisation adaptée au phénomène revient à trouver le compromis adéquat entre précision et rapidité d'exécution. Ainsi, le gain de précision d'une modélisation mécaniste sur une modélisation plus simple n'est pas toujours suffisant pour équilibrer le poids d'une complexité et d'un temps de calcul accrus.



## Chapitre 2

# L'eau et les solutés dans le sol

### 2.1 Représentation du sol

Avant d'entrer dans la description des phénomènes physiques existants dans le sol, il convient de rappeler l'importance d'une des plus fines couches constituant la Terre : le sol. Le sol fournit aux plantes un réservoir d'eau et de matière minérale et organique essentiel à leur développement. Il transforme le flux intermittent d'eau issu des précipitations en un flux généralement continu pour les racines des plantes. Ainsi, la plante a à sa disposition l'eau nécessaire à ses fonctions physiologiques.

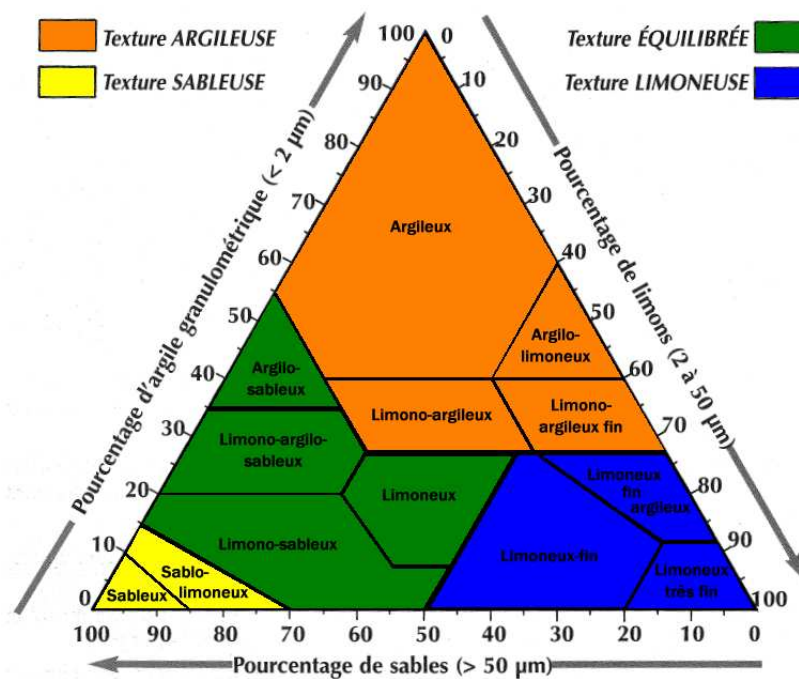


FIG. 2.1.1 – Triangle des textures du Soil survey Manual permettant de classer les sols selon leur granulométrie

Sa composition fait intervenir des constituants minéraux et organiques. Celle-ci est complexe du fait de l'hétérogénéité de ces constituants en taille et en propriétés physiques et biochimiques. Cependant, la distribution des particules de sable, limon, argile et de matières organiques entrant dans sa composition permet de définir une classification en différents sols type (FIG. 2.1.1). Cette classification donne une première approche du comportement général d'un sol et la définition de caractéristiques homogénéisées est un premier pas vers une modélisation des phénomènes physiques.

Le système sol considéré dans le cadre de ce travail est défini sur une profondeur de 1 à 2 mètres. Cette profondeur correspond à la profondeur racinaire dans la plupart des grandes cultures. La modélisation entreprise dans cette étude s'intéresse plus particulièrement au devenir de l'eau et de l'azote dans le contexte de leur utilisation par la plante. Dans le cas du maïs, par exemple, cette profondeur est environ de 1,5 m au maximum du développement racinaire. Au delà de cette profondeur, les racines n'étant plus présentes, l'eau et les solutés qu'elle entraîne par drainage échappe à la plante en sortant du système.

## 2.2 L'eau dans le sol

### 2.2.1 Le cycle de l'eau

La modélisation des transferts hydriques doit tenir compte du cycle de l'eau, celui-ci définit les entrées-sorties en eau du système sol. Ce système n'est pas isolé : à la quantité  $S_{hi}$  d'eau initialement présente dans le sol s'ajoute les apports de surface  $P_h, I_h$  et  $R$  correspondant aux apports sous forme de précipitations, d'irrigations ou de ruissellement venant d'autres parcelles et selon la position de la nappe souterraine, les apports  $RC$  dus aux remontées capillaires. Cette masse d'eau n'est conservée que partiellement par le sol. Une quantité  $ETR$  (évaporation réelle) est prélevée par la culture, les quantités  $D_h$  et  $R$  sont drainées vers les couches profondes du sol ou ruissellent en surface. Ainsi, le stock final d'eau dans le sol  $S_{hf}$  peut s'écrire

$$S_{hf} = S_{hi} + P_h + I_h + RC - ETR - D_h \pm R \quad (2.2.1)$$

### 2.2.2 Teneur en eau et charge hydraulique

Deux variables permettent de définir l'état de l'eau dans le sol.

Dans un volume de sol donné, l'eau n'occupe qu'une fraction de ce volume, cette fraction, appelée teneur en eau ou humidité volumique, exprimée en  $[L^3.L^{-3}]$ , sera notée  $\theta$  dans la suite de l'étude.

En un point donné, l'énergie potentielle de l'eau dans le sol est définie principalement par deux types d'énergie potentielle : celle due à la différence de profondeur entre une profondeur de référence (la surface) et la profondeur du point considéré et celle due à la structure même de la matrice poreuse du sol. Cette énergie totale ramenée à un poids d'eau unitaire donne la charge hydraulique en  $[L]$  notée  $H = h - z$  ou  $h$  est la pression matricielle ou succion et  $z$  la profondeur verticale orientée positive vers le bas.



### 2.2.3 Courbe de rétention du sol

La pression matricielle est directement reliée à la répartition entre air et eau dans les pores du sol, ainsi il existe une relation entre la pression matricielle et la teneur en eau du sol. Cette relation dépend du type de sol. Elle est différente entre une phase d'absorption de l'eau par le sol et une phase de désorption et doit donc être définie par une relation à hystérésis. Cependant, on considère généralement que cette relation est une fonction. Différentes représentations peuvent être utilisées, elles ont souvent une forme proche de la fonction  $|h| = a\theta^b$  avec  $a$  et  $b$  des paramètres empiriques. Parmi les représentations les plus fréquemment utilisées, on trouve celles de Brooks et Corey (Brooks and Corey, 1964) (2.2.2) et celles de van Genuchten (van Genuchten, 1980) (2.2.3)

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \left( \frac{h_A}{h} \right)^\lambda \quad (2.2.2)$$

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{(1 + (\alpha|h|)^n)^m} \quad (2.2.3)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \theta_r & : \text{ la teneur en eau résiduelle en } [L^3.L^{-3}] \\ \theta_s & : \text{ la teneur en eau à saturation en } [L^3.L^{-3}] \\ h_A & : \text{ la pression d'entrée d'air en } [L] \\ \alpha & : \text{ paramètre empirique en } [L^{-1}] \\ \lambda, n, m & : \text{ paramètres empiriques en } [-] \end{cases}$$

### 2.2.4 Conductivité hydraulique

La structure du sol peut être considérée comme un milieu poreux, à ce titre, il est soumis à l'équation de Darcy-Buckingham (Buckingham, 1907) (2.2.4), généralisation de l'équation de Darcy (Darcy, 1856) pour le milieu non-saturé.

$$\vec{q}_h = -K(h)\vec{\nabla}H \quad (2.2.4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \vec{q}_h & : \text{ le flux de l'eau du sol en } [L.T^{-1}] \\ K(h) & : \text{ la conductivité hydraulique en } [L.T^{-1}] \\ \vec{\nabla}f & = \sum_i \partial_{x_i} f \vec{e}_i \end{cases}$$

On voit ici apparaître la conductivité hydraulique  $K(h)$  qui lie linéairement le flux de l'eau du sol au gradient de la charge hydraulique. Cette fonction dépend de  $h$ . Les formes (2.2.5) et (2.2.6) sont dérivées des fonctions de rétention en eau du sol citées plus haut. La forme (2.2.7) développée par Gardner et Mayhugh (Gardner and Mayhugh, 1958) est également largement utilisée.

$$\frac{K(h)}{K_s} = \left(\frac{h_A}{h}\right)^\nu \quad (2.2.5)$$

$$\frac{K(h)}{K_s} = \theta_e^a(h) \left[1 - (1 - \theta_e^{1/m}(h))^m\right]^b \quad (2.2.6)$$

$$\frac{K(h)}{K_s} = e^{-\frac{h-h_A}{\lambda_c}} \quad (2.2.7)$$

avec  $\left\{ \begin{array}{l} K_s : \text{ la conductivité hydraulique à saturation en } [L.T^{-1}] \\ \theta_e(h) : \text{ la fonction de rétention du sol du modèle de van Genuchten (2.2.3) en } [-] \\ \nu, a, b : \text{ paramètre empirique en } [-] \\ \lambda_c : \text{ la longueur capillaire en } [L] \end{array} \right.$

Les équations (2.2.5), (2.2.6) ou (2.2.7) définissant la forme de la conductivité hydraulique, comme celles définissant la courbe de rétention du sol du paragraphe précédent, ont été établies sur des données expérimentales. Cependant, les limitations des outils de mesure ne permettent pas cette validation pour toute humidité du sol. Dans un sol trop sec par exemple, les mesures expérimentales sont particulièrement difficile à effectuer en raison du dispositif tensiométrique utilisé, limitant la mesure des tensions à un maximum de l'ordre de 800 *mbar*. Les notions de conductivité hydraulique ou de rétention du sol sont conservées et leurs valeurs sont obtenues par extrapolation des équations vérifiées expérimentalement. Il ne faut cependant pas perdre de vue le domaine de validité expérimentale de ces équations.

## 2.2.5 Equation de Richards

L'équation générale de l'écoulement (2.2.8) ou équation de Richards est obtenue en combinant l'équation de Darcy avec celle de la conservation de la masse.

$$\partial_t \theta = \vec{\nabla} \cdot [K(h) \vec{\nabla}(h - z)] \quad (2.2.8)$$

Selon la fonction privilégiée pour une réécriture de cette équation, celle-ci peut prendre deux nouvelles formes, parfois désignées comme équations de Fokker-Planck, dans lesquelles seule la fonction  $h$  ou la fonction  $\theta$  intervient. La forme diffusivité de l'équation de Richards (2.2.9) privilégie la résolution de (2.2.8) en  $\theta$  et introduit la diffusivité  $D(\theta)$  d'un sol, exprimée en  $[L^2.T^{-1}]$  qui représente  $K(\theta)\partial_\theta h$ . La forme capacitive de l'équation de Richards (2.2.10) privilégie la résolution de (2.2.8) en  $h$  et introduit la capacité capillaire ou de rétention  $C(h)$  d'un sol, exprimée en  $[L^{-1}]$  qui représente  $\partial_h \theta$ .

$$\partial_t \theta = \vec{\nabla} \cdot \left[ D(\theta) \vec{\nabla} \theta \right] - \frac{dK(\theta)}{d\theta} \partial_z \theta \quad (2.2.9)$$

$$C(h) \partial_t h = \vec{\nabla} \cdot \left[ K(h) \vec{\nabla} h \right] - \frac{dK(h)}{dh} \partial_z h \quad (2.2.10)$$

Notons que l'utilisation de l'équation de Darcy, et donc de l'équation de Richards, repose sur des hypothèses très fortes quand elles sont appliquées à un sol. De nombreux auteurs, (Flühler and Roth, 2003), (Morel-Seytoux, 1973) ou (Mailhol and Gonzalez, 1993) insistent sur les limites qu'il convient de fixer à l'utilisation de cette équation :

- Le milieu poreux représentant le sol est considéré homogène, les flux préférentiels dus notamment aux fentes de retrait dans le cas de sols argileux ne sont pas pris en compte par cette équation.
- Il est également considéré indéformable, or les phases d'absorption et désorption du sol peuvent localement mettre à mal cette hypothèse. Lors d'une première irrigation sur un sol initialement sec, une forte hauteur d'eau appliquée dans une raie d'irrigation peut modifier la structure du sol en surface.
- La relation linéaire entre le flux et le gradient de pression matricielle n'est pas toujours vérifiée, notamment en présence de flux importants dans le cas de sol à texture grossière, ou en présence d'adsorption d'eau par les sols à texture fine.
- L'air présent dans le sol est un gaz compressible, dans certaines situations, il peut être piégé dans les pores du sol lors d'une infiltration et la pression n'est plus égale à la pression atmosphérique. Ce phénomène peut réduire de manière notable l'infiltration de l'eau.
- Une partie de l'eau du sol peut être également transporté sous forme de vapeur d'eau, particulièrement sous des climats arides, ce qui n'est prévu par l'équation.

Ce modèle est cependant un modèle universellement utilisé et son application dans ce travail devra toujours être accompagnée de la vérification de son domaine de validité.

## 2.3 Le soluté dans le sol

### 2.3.1 Le cycle de l'azote

Dans le système sol, le stock final  $S_{Nf}$  d'azote minéral (la forme d'azote directement utilisable par la plante) est calculé sur la base des phénomènes faisant varier le stock  $S_{Ni}$  d'azote initialement disponible. Celui-ci peut être augmenté grâce aux précipitations  $P_N$ , contenant de l'azote en solution, aux irrigations fertilisantes  $I_N$  et aux engrais  $E$  déposés en surface du sol. Dans le sol, des processus biochimiques comme la fixation  $F$  par la culture ou la minéralisation  $M$  de l'azote organique contenu dans l'humus ou dans les résidus de culture participent également à l'augmentation du stock initial. Le stock d'azote du sol est diminué par l'absorption des racines de la plante  $A$  et par le lessivage  $L$  due à l'eau drainée en profondeur. Des phénomènes biochimiques ici encore entrent en jeu et réduisent le stock, comme l'organisation de l'azote minéral  $O$  en azote organique, la dénitrification  $D$  de l'azote minéral et la volatilisation  $V$  des apports de surface.

$$S_{Nf} = S_{Ni} + P_N + I_N + E + F + M - A - L - O - D - V \quad (2.3.1)$$

### 2.3.2 Les différentes phases d'un élément chimique dans le sol

Pour illustrer la complexité de la modélisation des transferts de solutés dans le sol, on a noté précédemment qu'un élément chimique peut se trouver sous les trois phases de la matière. Nous nous intéresserons principalement à la concentration des nitrates en solution dans l'eau du sol. C'est en effet sous cette forme que la plante prélève sa ressource nutritive. Cette concentration sera notée  $c_N$  exprimée en  $[M.L^{-3}]$ . En présence de plusieurs formes d'azote en solution dans l'eau du sol, il faudra préciser  $c_{NO_3^{2-}}$ ,  $c_{NH_4^+}$  ou  $c_{NO_2^-}$  pour une présence de nitrate, d'ammonium ou de nitrite, principales sources d'azote en solution.

L'azote peut également se trouver sous forme solide. Si le nitrate n'est que très faiblement adsorbé par la matrice poreuse du sol, l'ammonium l'est dans une proportion non négligeable (Vereecken et al., 1991), (Wang and Alva, 2000). Cette forme d'azote en présence dans le sol doit être prise en compte. En effet, le processus d'adsorption est un processus qui permet la fixation réversible d'ions de la solution sur la matrice poreuse du sol. Cette interaction peut être représentée par une relation linéaire, en évaluant l'expression (2.3.2) avec  $\beta = \eta = 0$ , ou plus complexe en gardant l'expression générale entre la concentration de soluté dans l'eau du sol  $c_N$  et celle adsorbée par le sol  $s_N$ .

$$s_N = \frac{K_d c_N^\beta}{1 + \eta c_N} \quad (2.3.2)$$

$$\text{avec } \begin{cases} K_d & : \text{ le coefficient d'adsorption } [M^{-1}.L^3] \\ \beta, \eta & : \text{ paramètres en } [-] \text{ et } [M^{-1}.L^3] \end{cases}$$

Cette fixation étant réversible, l'ammonium est donc toujours disponible dans le sol. Il peut donc, à la faveur de réactions biochimiques, donner à nouveau du nitrate.

Enfin, la dernière forme d'azote présente dans le sol est la forme gazeuse. Cette concentration notée  $g_N$  en  $[M.L^{-3}]$  est surtout élevée en surface du sol et dépend des paramètres du milieu, du climat, des pratiques culturales et de la source d'azote. La volatilisation est par exemple réduite dans le cas d'une fertilisation par apports sous forme de granulés alors qu'elle peut dépasser 30% dans le cas d'apports organiques (lisier, fumier) (Olesen et al., 1997). L'aération du sol par labour permet également de réduire les pertes par voie gazeuse (Stanford and Epstein, 1974). En profondeur du sol, la forme gazeuse est moins présente, en particulier sur un sol sec, dans lequel la présence d'oxygène limite la réduction des nitrates. Elle est due essentiellement à des réactions biochimiques dont l'importance dépend principalement de la présence d'eau et d'oxygène, du pH et de la température (Wendland, 1994).

L'étude des formes solides et gazeuses sera peu abordée dans ce travail. Nous nous focaliserons sur l'évolution de la concentration de l'élément azote en solution dans l'eau du sol en notant cependant les cas où les interactions avec les autres phases pourront être importantes.

### 2.3.3 Flux d'un soluté dans le sol

La diffusion d'un soluté dans l'eau pure au repos est régie par la première loi de Fick (Fick, 1855) (2.3.3) qui relie proportionnellement le flux du soluté au gradient de sa concentration.

$$\vec{q}_N = -D_0 \vec{\nabla} c_N \quad (2.3.3)$$

$D_0$  est le coefficient de diffusion moléculaire du soluté dans l'eau pure exprimé en  $[L^2.T^{-1}]$ . La diffusion correspond aux mouvements aléatoires des molécules dus aux échanges d'énergie par translation, rotation et vibration. Ce phénomène fait migrer le soluté des fortes concentrations vers les concentrations plus faibles et tend à homogénéiser la concentration du milieu.

Dans le cas de l'étude, nous sommes en présence d'une solution évoluant dans une matrice poreuse. Dans ce cas, la diffusion est perturbée par la structure de la matrice et dépend de la quantité d'eau disponible dans le milieu. Le coefficient de diffusion doit donc être corrigé par un coefficient représentant cette perturbation. Ce coefficient est le facteur de tortuosité du milieu, noté  $\tau[-]$ . Un modèle simple permettant de représenter la tortuosité fait intervenir la porosité du milieu (qui en général est proche de la teneur en eau à saturation) et la quantité d'eau dans laquelle le soluté peut évoluer (Millington and Quirk, 1961) (2.3.4). Des modèles plus complexes existent, cependant, celui-ci permet de représenter de manière satisfaisante le phénomène de tortuosité sans rajouter de paramètres supplémentaires.

$$\tau = \frac{\theta^{\frac{2}{3}}}{\theta_s} \quad (2.3.4)$$

L'eau du sol dans les cas étudiés n'est que rarement au repos. Un flux principalement vertical, mais qui peut comporter localement une composante latérale importante anime le profil hydrique du sol. Ce flux influence l'évolution de la concentration de soluté dans le milieu, par convection et par dispersivité mécanique. La dispersivité mécanique rend compte du brassage d'agrégats de fluide ayant des compositions différentes. Un flux supplémentaire doit donc être introduit pour compléter le flux diffusif pur. Ce flux dépend de la structure du milieu et du flux de l'eau dans le sol. Le flux de soluté total résultant (2.3.5) permet de rendre compte des mouvements de solutés dans le sol. En représentation bi- ou tridirectionnelle, les coefficients de dispersivité mécanique et de diffusion moléculaire peuvent être réunis sous la forme d'un tenseur global  $\overline{D}$  exprimé en  $[L^2.T^{-1}]$  qui dépend du flux Darcien et de la teneur en eau du milieu.

$$\vec{q}_N = -\overline{D}(q_h, \theta) \vec{\nabla} c_N + q_h c_N \quad (2.3.5)$$

Cette équation donnant une forme mathématique au flux de soluté est également écrite sous des contraintes de milieu homogène et indéformable. Dans certains cas, son application peut donc être discutable. A chacune des applications de cette équation, il convient de confronter, comme pour le flux Darcien, les conditions du milieu au domaine de validité de l'équation.

### 2.3.4 Equation de diffusion-convection de solutés

De la même manière que dans le cas des transferts hydriques, l'équation générale régissant l'évolution d'un profil de soluté est obtenue en combinant l'équation de la conservation de la masse avec les équations de flux définies ci-dessus. Son écriture est cependant plus complexe, car elle doit prendre en compte les différentes phases dans lesquelles le soluté est présent dans le sol. L'équation de conservation de la masse relie ainsi les variations temporelles des concentrations de l'azote sous forme liquide, solide et gazeuse à la divergence de leurs flux. Les réactions biochimiques qui définissent la création ou la disparition de l'azote sous les trois états de la matière sont aussi à intégrer dans l'équation générale. Celle-ci peut donc s'écrire de la manière suivante

$$\begin{aligned} \partial_t(\rho s_N) + \partial_t(\theta c_N) + \partial_t(a_\nu g_N) = \\ \vec{\nabla} \cdot (\theta \overline{D}^h \vec{\nabla} c_N) + \vec{\nabla} \cdot (a_\nu \overline{D}^g \vec{\nabla} g_N) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}_h c_N) - S_{c_{Nr}} \\ - \mu_s(\rho s_N) - \mu_h(\theta c_N) - \mu_g(a_\nu g_N) - \gamma_s \rho - \gamma_h \theta - \gamma_g a_\nu \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} \rho(x, z, t) & : \text{ la densité apparente du sol en } [M.L^{-3}] \\ a_\nu(x, z, t) & : \text{ la teneur en air volumique en } [L^3.L^{-3}] \\ \overline{D}^h & : \text{ le tenseur de dispersion du soluté en phase liquide en } [L^2.T^{-1}] \\ \overline{D}^g & : \text{ le tenseur de dispersion du soluté en phase gazeuse en } [L^2.T^{-1}] \\ \mu_s, \mu_h, \mu_g & : \text{ les constantes de réactions du premier ordre en } [T^{-1}] \\ \gamma_s, \gamma_h, \gamma_g & : \text{ les constantes de réactions d'ordre zéro en } [T^{-1}], [M.L^{-3}.T^{-1}] \text{ et } [T^{-1}] \\ S_{c_{Nr}} & : \text{ l'extraction de solutés par les racines de la plante en } [M.L^{-3}.T^{-1}] \end{array} \right.$$

Cette équation très complexe peut cependant être simplifiée en négligeant certains termes qui n'entrent pas ou peu en jeu dans notre étude. Ainsi, en première approche, la phase gazeuse peut être négligée et les réactions réunies sous un seul terme du premier ordre. En utilisant l'équation de conservation de la masse d'eau et la relation linéaire liant  $s_N$  et  $c_N$  introduite précédemment, on obtient

$$(\theta + \rho K_d) \partial_t c_N = \vec{\nabla} \cdot (\theta \overline{D}^h \vec{\nabla} c_N) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}_h c_N) - \mu_h \theta c_N - S_{c_{Nr}} \quad (2.3.7)$$

Malgré ses nombreuses simplifications, cette équation rend compte de manière satisfaisante des transferts de nitrate se produisant dans un sol cultivé. En effet, considérer la phase gazeuse négligeable est possible dans certaines conditions. Le paragraphe 2.3.2 fait remarquer que dans des cas où le sol est bien aéré et où le fertilisant n'est pas apporté sous forme organique, les pertes par voies gazeuses sont réduites de manière notable.

Les transferts d'eau et de nitrate ont été ici présentés à deux échelles différentes. Un bilan global du système permettant de décrire les grandes tendances des transferts et une description obtenue par l'utilisation d'équations de transferts et de paramètres homogénéisés sur un sol considéré comme un milieu poreux. La première description est utilisée sur des grands pas de temps (pas de temps

journaliers) et respecte les équations de conservation de la masse. Elle est cependant incapable de représenter la dynamique de l'eau et des solutés dans le sol à une échelle de temps plus faible. La seconde approche, fondée sur des bases mécanistes, permet quant à elle une description plus précise des phénomènes se produisant dans le système. Les différents types de modélisation capables de rendre compte des transferts utilisent ces deux échelles de représentation. Leurs principes généraux sont présentés dans la suite de ce document. Cette présentation est suivie par une analyse des contraintes et des avantages dans le contexte de la problématique de l'étude. Leur analyse permettra de choisir le type de modélisation le mieux adapté.





## Chapitre 3

# Simulation numérique des transferts eau-solutés

### 3.1 Principes

La modélisation numérique des transferts bidirectionnels permet de représenter le plus fidèlement possible les phénomènes se produisant dans le sol. HYDRUS-2D, code de calcul qui fait référence dans la simulation de l'écoulement de l'eau dans un sol, utilise ce type de modélisation. Celle-ci consiste à résoudre les équations générales des transferts en les discrétisant sur un maillage représentant le sol étudié.

Les étapes de ce type de modélisation sont

- La construction du maillage (FIG. 3.1.1 à gauche, dans le cas d'HYDRUS-2D, il s'agit de mailles triangulaires) qui doit prendre en compte les particularités de la géométrie du domaine et peut être raffinée localement là où l'écoulement risque d'être rapide (en général, à proximité de la surface humide de la raie d'irrigation).
- La définition des conditions initiales et aux limites (FIG. 3.1.1 à droite) afin de définir l'état initial du sol et les contraintes à la frontière du domaine pendant la simulation (charge ou flux imposé sur une partie de la frontière).
- La discrétisation des équations de transferts sur le maillage en utilisant la méthode des éléments finis de Galerkin.
- Leur résolution qui se résume, après utilisation des éléments finis, à une itération de résolutions numériques d'un système linéaire.

La méthode des éléments finis consiste à projeter la solution des équations de transferts sur une base de fonctions  $\mathcal{U}_n$  continues. Ainsi, la solution  $h$  de l'équation de Richards bidirectionnelle peut être approchée par  $h'$

$$h'(x, z, t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{U}_n(x, z) h_n(t) \quad (3.1.1)$$

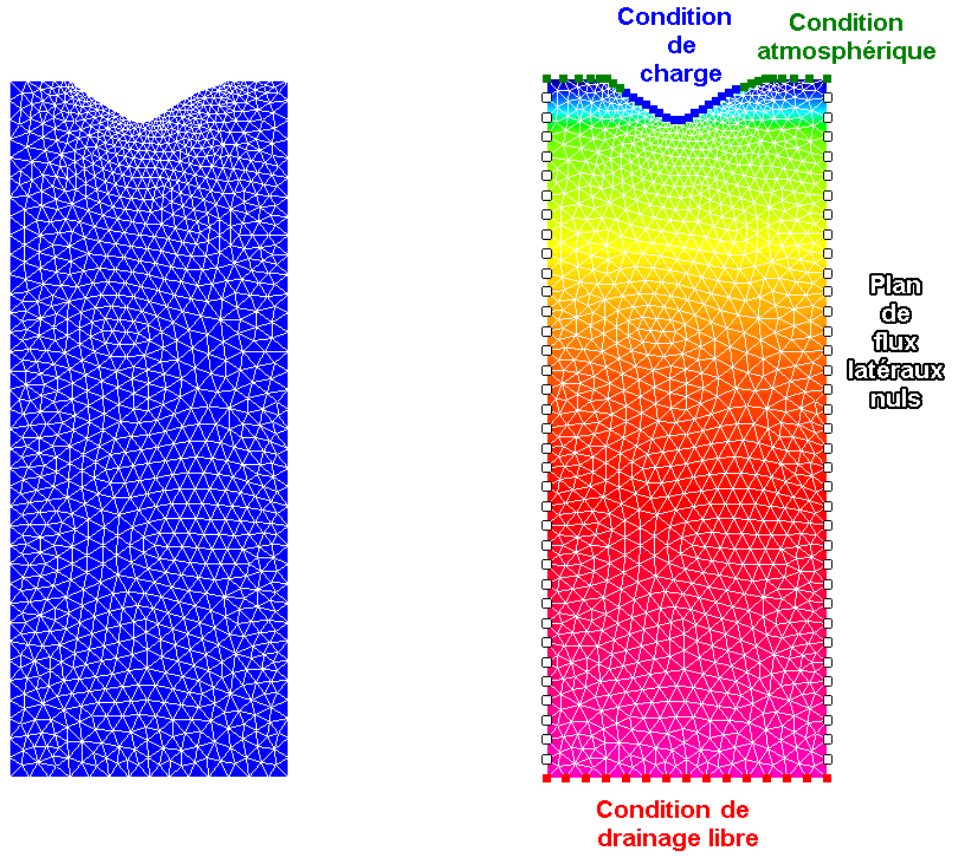


FIG. 3.1.1 – Construction du maillage et définition des conditions initiales et aux limites par HYDRUS-2D (cas de l'irrigation à la raie)

$$\text{avec } \begin{cases} N & : \text{ le nombre de noeuds du maillage} \\ h_n(t) & : \text{ les } N \text{ coefficients à déterminer définissant } h \text{ aux noeuds} \\ \mathcal{U}_n(x_m, z_m) & = \delta_{nm} \end{cases}$$

La teneur en eau  $\theta$  et la conductivité hydraulique  $K$  qui sont liées à la pression matricielle  $h$  par le modèle de van Genuchten, peuvent être projetées sur la même base.

$$\theta'(x, z, t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{U}_n(x, z) \theta_n(t) \quad (3.1.2)$$

$$K'(x, z, t) = \sum_{n=1}^N \mathcal{U}_n(x, z) K_n(t) \quad (3.1.3)$$

Pour discrétiser l'équation de Richards, on écrit tout d'abord que l'opérateur différentiel associé à l'équation de Richards est orthogonal à toutes fonctions  $\mathcal{U}_m$  de la base  $(\mathcal{U}_n)_{n=1,N}$  (3.1.4). Le domaine  $\Omega$  est ensuite écrit comme la réunion des cellules du maillage, chacune occupant le domaine  $\Omega_e$ . L'application de la transformation de Green permet de faire apparaître une intégrale sur la frontière afin de prendre en compte les conditions aux limites (3.1.5). Enfin, la substitution de la solution  $h$  par  $h'$  définie par (3.1.2), ainsi que celle de  $\theta$  et  $K$  par  $\theta'$  et  $K'$  transforment la somme d'intégrales sur les domaines  $\Omega_e$  en un système linéaire (3.1.6) dont les inconnues sont les vecteurs  $\vec{\theta} = (\theta_n(t))_{n=1,N}$  et  $\vec{h} = (h_n(t))_{n=1,N}$ .

$$\int_{\Omega} \mathcal{U}_m \left( \partial_t \theta - \vec{\nabla} \cdot (K(h) \vec{\nabla} h) + \partial_z K(h) \right) d\Omega = 0 \quad (3.1.4)$$

$$\begin{aligned} \sum_e \int_{\Omega_e} \left( \partial_t \theta \mathcal{U}_m + K(h) \vec{\nabla} h \cdot \vec{\nabla} \mathcal{U}_m - K(h) \partial_z \mathcal{U}_m \right) d\Omega \\ - \sum_e \int_{\Gamma_e} (K(h) \partial_{\vec{n}} h \mathcal{U}_m - K(h) \vec{e}_z \cdot \vec{n} \mathcal{U}_m) d\Gamma = 0 \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\bar{A} \partial_t \vec{\theta}(t) + \bar{B} \vec{h}(t) = \bar{C} \quad (3.1.6)$$

Les valeurs de  $\theta$  et  $K$  sont obtenues grâce aux modèles de van Genuchten et la résolution de ce système linéaire est effectuée par une méthode numérique adaptée (celle utilisée par HYDRUS-2D est le gradient conjugué). En considérant  $\Delta t$  le pas de temps, cette résolution permet de calculer la valeur de  $\vec{h}(t + \Delta t)$  en fonction de  $\vec{h}(t)$ . La solution  $h(x, z, t)$  est alors obtenue par un processus itératif dont la convergence dépend principalement de la condition de Courant-Friedrichs-Lewy (condition CFL). Celle-ci définit une valeur limite de chaque pas de temps dépendant des caractéristiques du milieu et des pas d'espace.

L'équation de Richards peut être complétée par la prise en compte d'un terme source, représentant l'extraction racinaire. L'équation de convection-diffusion utilisée pour représenter l'évolution du profil de soluté est également résolue de la même manière et peut prendre en compte, l'extraction racinaire, la création ou la dégradation du soluté, ainsi que son adsorption et sa volatilisation.

HYDRUS-2D est un code de calcul très général. D'autres modélisations numériques ont été développées. Elles permettent la prise en compte d'une quantité de phénomènes moins importante, mais approfondissent, en revanche, l'étude d'un phénomène en particulier dont la complexité requiert une modélisation très précise. Ainsi, grâce à ce type de modélisation, certains auteurs (Aboujaoudé et al., 1991) étudient l'infiltration dans un sol encroûté en utilisant un maillage structuré adapté à la géométrie de la surface et d'autres (Mansell et al., 2002) proposent des méthodes permettant de mieux rendre compte des flux du sol en modifiant le maillage selon l'évolution du profil hydrique à chaque pas de temps.

## 3.2 Avantages et contraintes de la méthode

Cette méthode comporte de nombreux avantages.

- Elle permet de représenter un nombre très important de phénomènes entrant en jeu dans l'évolution des profils hydriques et de concentration du soluté, chaque terme des équations de transferts pouvant être discrétisé par la méthode décrite plus haut.
- Les conditions initiales et aux limites peuvent être considérées variables en espace et en temps, ce qui est généralement le cas dans un problème réel.
- Des théorèmes mathématiques permettent de prouver la convergence de la méthode vers la solution exacte du problème et de définir l'erreur de la solution approchée. Ces informations sont de grands intérêts, puisqu'elles permettent de juger de la validité de la solution obtenue.

Cependant, dans le contexte de la problématique de ce travail, ce type de modélisation présente des contraintes importantes dont on ne peut négliger les impacts.

- Les théorèmes mathématiques prouvant la convergence de la méthode reposent principalement sur une relation entre pas de temps et pas d'espace. Selon l'événement simulé, cette relation peut être contraignante et entraîner une consommation importante de temps de calcul. En considérant la même maillage, simuler une irrigation ou une redistribution ne fera pas intervenir le même pas de temps (la gestion de pas de temps variables intégrée à HYDRUS-2D n'est pas suffisante pour traiter la différence d'échelle temporelle très importante entre les deux événements). Il est donc exclu de simuler un cycle cultural complet en une seule simulation sans une adaptation en profondeur de la modélisation.
- Ce type de modèle permet de représenter un grand nombre de phénomènes physiques. Leur mise en équation est cependant tributaire de la définition d'un jeu de paramètres importants. L'obtention de ces paramètres ou leur calage si on dispose de mesures expérimentales, peut se révéler être une opération délicate. Ainsi, bien que le gain en précision dû à la complexité du modèle soit un avantage, il n'est pas toujours possible d'exploiter celui-ci à son maximum.

Sa capacité à donner des résultats fiables et précis fait de ce type de modélisation une référence pour la simulation de phénomènes qui ne peuvent pas être représentés par d'autres moyens plus simples. Cependant, sa complexité lors de sa mise en place et son besoin important de données initiales et de paramètres militent en faveur du développement d'un modèle plus opérationnel pour atteindre les objectifs fixés.

La simulation numérique restera cependant la référence avec laquelle nous compléterons les données expérimentales à disposition pour juger de la validité du travail effectué (mais dans des conditions particulières de fonctionnements événementiels).

## Chapitre 4

# Modélisation de type capacitif

### 4.1 Principes

#### 4.1.1 Transferts hydriques

Une modélisation simple, mais qui est cependant utilisée avec des résultats satisfaisants dans de nombreux cas est la modélisation conceptuelle. Le sol est représenté de manière monodirectionnelle par un empilement de réservoirs se déversant les uns dans les autres (FIG. 4.1.1). Lors d'un apport d'eau en surface du sol, le premier réservoir se remplit. Dès qu'il a atteint sa contenance maximale, il se déverse dans le réservoir inférieur. Le procédé est répété jusqu'à épuisement de la quantité apportée.

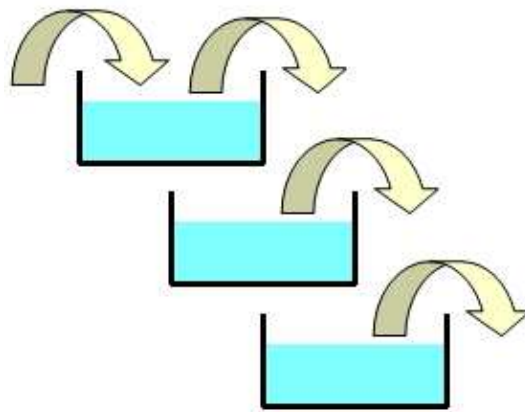


FIG. 4.1.1 – Modélisation capacitif monodirectionnel des transferts hydriques

Ce principe est utilisé dans de nombreux codes de recherche ou des codes commerciaux, comme par exemple PILOTE, modèle de culture développé au Cemagref (Mailhol et al., 1997), (Mailhol, 2001) ou STICS (Brisson et al., 1998), code de référence dans la simulation des pratiques de culture développé à l'INRA. Les données initiales à fournir sont le remplissage de chaque réservoir avant la simulation (l'état initial du sol) ainsi que sa capacité maximale (la capacité de stockage de chaque

couche de sol : la réserve utile (RU), différence entre la capacité au champ - quantité d'eau retenue par le sol après une période de pluie et un ressuyage partiel d'une durée conventionnelle de 48 heures - et le point de flétrissement permanent - humidité du sol au delà de laquelle les racines de la plante ne sont plus capables de prélever l'eau du sol, valeur déterminée en laboratoire proche de 15 bars).

En poussant l'analogie plus loin et en complétant la représentation d'un réservoir (FIG. 4.1.2), STICS est capable de représenter les phénomènes de macro-porosité, la présence de cailloux et celle de fissures dans le cas de sol argileux gonflant.

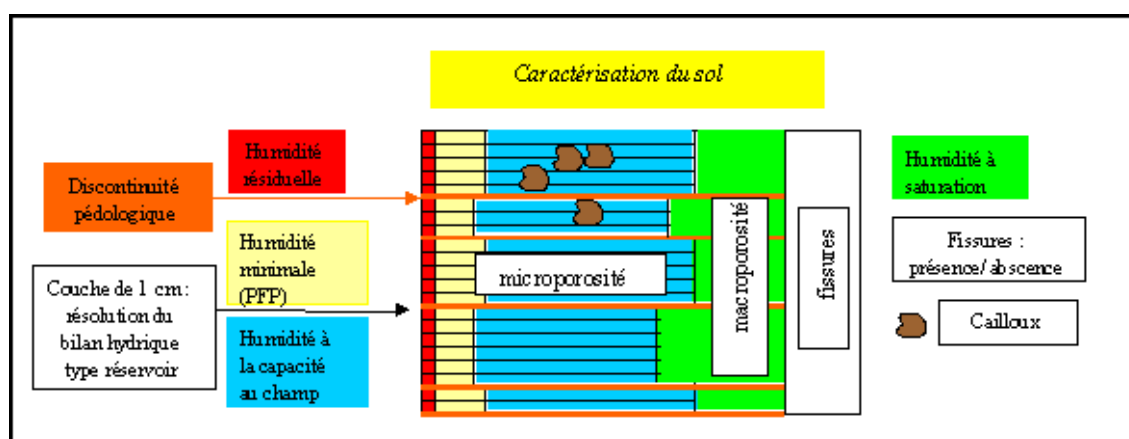


FIG. 4.1.2 – Modélisation du sol utilisée dans STICS (Mary et al., 2002)

Ce type de modèle, malgré ses principes de base simples, permet de représenter, pour un faible coût de calcul, un grand nombre de phénomènes physiques participant aux transferts hydriques dans le sol au pas journalier (pas de temps retenu pour ce type d'approche où le principe de la conservation de la masse est respectée alors que la dynamique y est difficilement représentable). De plus, la description du sol comme empilement de réservoirs permet la prise en compte d'un sol hétérogène, en affectant des caractéristiques particulières à chaque réservoir. Les remontées capillaires ne sont cependant pas décrites dans ce type de modèle au même titre que le phénomène de diffusion. Un réservoir est soit rempli complètement et transfère la quantité d'eau qu'il ne peut retenir, soit reçoit la quantité d'eau restante à répartir. Le profil hydrique dans le cas d'une irrigation est donc abrupte. Ce qui ne représente pas toujours un cas réel.

#### 4.1.2 Transferts de solutés

Le transfert de nitrate peut également être décrit par cette analogie de type réservoir. Elle a été développée tout d'abord par Burns (Burns, 1975) qui définit sur un sol au profil initial uniforme la fraction  $f_N$  de la quantité totale de nitrate lessivée au delà d'une profondeur  $h$  grâce à l'équation (4.1.1).

$$f_N = \left( \frac{Q_h}{Q_h + \theta_{cc} t} \right)^{\frac{h}{t}} \quad (4.1.1)$$

avec  $\begin{cases} Q_h & : \text{ la quantité d'eau drainée à travers le sol en } [L] \\ \theta_{cc} & : \text{ la capacité au champ volumique en } [L^3.L^{-3}] \\ t & : \text{ l'épaisseur du réservoir (supposée constante sur tout le profil du sol) en } [L] \end{cases}$

Ce modèle est utilisé notamment dans STICS sous une forme modifiée permettant une meilleure description des processus. Tout le nitrate arrivant par convection avec l'eau dans un réservoir se mélange avec le nitrate déjà présent. L'excès d'eau repart ensuite avec la nouvelle concentration du mélange. En choisissant une épaisseur de réservoir égale au double de la dispersivité du sol, cette description donne des résultats très similaires au modèle de convection-dispersion monodirectionnel (Mary et al., 1999) (elle était fixée à 1 cm jusqu'à la version 4 du logiciel ce qui conduisait souvent à une dispersion trop faible, elle est désormais paramétrable dans la dernière version).

## 4.2 Adaptation au cas bidirectionnel

La modélisation que l'on cherche à développer doit représenter les transferts bi- ou tridirectionnel. Ce type de modélisation efficace pour un événement monodirectionnel est cependant plus complexe à mettre en place dans un cas bi- ou tridirectionnel. En effet, le principe de ce type de modélisation définit naturellement un flux vertical descendant. En rajoutant une ou deux directions dans la représentation, le profil de flux reste globalement descendant, mais des flux latéraux doivent être introduits. La transposition d'une modélisation de type capacitif dans le cas bidirectionnel pourrait consister en la représentation du sol par plusieurs empilements de réservoirs côte à côte échangeant latéralement des quantités d'eau entre eux. Dans ce cas, il faut être capable de définir dans quelles proportions un réservoir se déverse dans le réservoir inférieur, celui de droite et celui de gauche. Ces proportions peuvent être définies grâce à la connaissance des caractéristiques du sol. Un sol à texture grossière sera plus soumis à la gravité qu'un sol à texture fine et la vidange dans le réservoir inférieur sera plus importante que dans les réservoirs latéraux.

La FIG. 4.2.1 représente cette adaptation du modèle capacitif. Pour raisons de symétrie du système d'irrigation, la frontière à gauche du domaine est soumise à un flux latéral nul, nous considérons donc uniquement la moitié du domaine. Une quantité d'eau initiale est apportée sur un des réservoirs supérieurs et se distribue dans les autres réservoirs selon le principe décrit plus haut. On a choisi arbitrairement les coefficients  $\frac{2}{3}$ ,  $\frac{1}{3}$  comme les proportions d'eau se déversant dans le réservoir inférieur et à droite.

La prise en compte de proportions de déversement constant ne donne pas de résultats satisfaisants. La FIG. 4.2.2 représente le résultat de cette adaptation sur un sol initialement homogène. Les

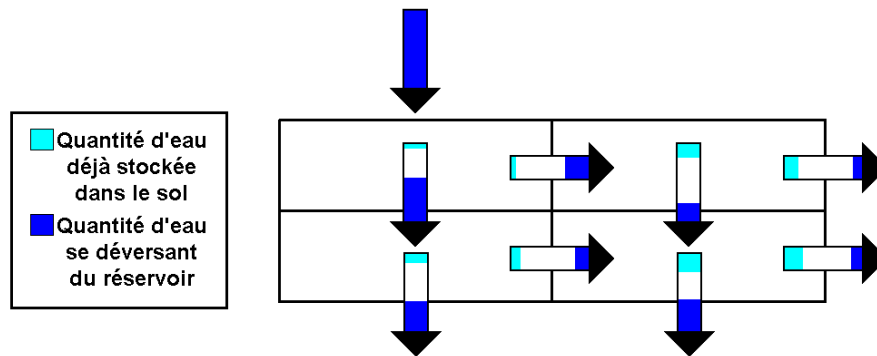


FIG. 4.2.1 – Principe d’une adaptation du modèle capacitif au cas bidirectionnel

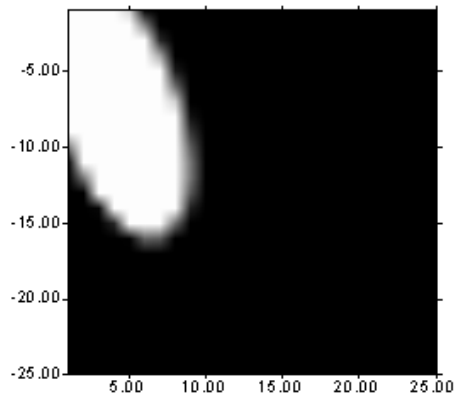


FIG. 4.2.2 – Résultat du modèle capacitif au cas bidirectionnel (unités et caractéristiques du sol arbitraires)

proportions de déversement dépendent certes de la nature du sol (et ceux-ci définissent la proportion d’effets de la gravité et d’effets diffusifs du sol), mais la nature du sol définit également la forme du profil du flux de l’eau. Il faudrait donc connaître plus en détail ce profil. C’est précisément l’objet de la problématique. Ce mode de représentation ne semble donc pas adapté aux objectifs de travail présenté ici.



## Chapitre 5

# Adaptation d'un modèle analytique d'infiltration bidirectionnel au calcul des transferts hydriques

### 5.1 Le modèle FURINF

#### 5.1.1 Principes généraux

FURINF est un modèle bidirectionnel de transfert d'eau appliqué à l'irrigation à la raie. Le calcul de l'infiltration cumulée totale est réalisé par intégration de l'infiltration cumulée monodirectionnelle sur un nombre fini de directions, celles-ci étant considérées orthogonales au profil de la raie (FIG. 5.1.1). Le modèle prend également en compte l'influence de la gravité selon l'angle réalisé entre la direction d'infiltration et la verticale, donnant ainsi plus d'importance aux forces de gravité pour une direction proche de la verticale et privilégiant les effets capillaires dans le cas d'une direction proche de l'horizontale. Le modèle tient aussi compte de l'évolution de la hauteur de la lame d'eau en fonction du temps, il peut ainsi simuler un remplissage de la raie d'irrigation et sa vidange.

Hormis les conditions de sol indéformable, homogène et isotrope dans lesquelles on se place pour résoudre l'équation de Richards, les hypothèses du modèle reposent sur trois points essentiels.

- Les lignes de flux sont considérées comme étant orthogonales au profil de la raie.
- Les conditions initiales de teneur en eau sont homogènes dans tout le milieu.
- Les plans de flux nul ne sont pas pris en compte par le modèle.

Des études théoriques et expérimentales montrent qu'il existe une différence entre le taux d'infiltration sur sol plat et sur sol incurvé. Un facteur de forme tributaire du temps est pris en compte dans la formulation de l'infiltration cumulée afin de représenter cet effet. Il s'agit d'un coefficient multiplicatif intégré au calcul de l'infiltration cumulée et du taux d'infiltration. Ce phénomène a été étudié par Philip (Philip, 1984a) et repris par Schmitz (Schmitz, 1993). Philip (Philip, 1984a)

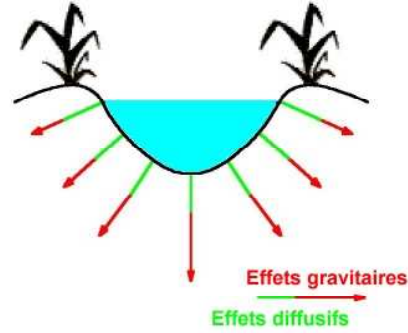


FIG. 5.1.1 – Le modèle FURINF : représentation des directions d’infiltration considérées orthogonales à la raie

montre une relation entre le taux d’infiltration en régime stationnaire  $\overline{Q_0}$  et la variable adimensionnée  $\overline{R_0} = \frac{r_0}{2\lambda_c}$  avec  $r_0$  le rayon de la cavité et  $\lambda_c$  la longueur capillaire du sol. Des ajustements ont été apportés récemment (Wöhling et al., 2003) et définissent le paramètre de forme par l’expression suivante

$$\lambda(t) = 1 + (\lambda_\infty - 1) \left( 1 - e^{-\frac{z_s(t)}{2r_0}} \right) \quad (5.1.1)$$

et

$$\overline{R_0} \leq 0.2 \Rightarrow \lambda_\infty = -\frac{\pi}{2} \frac{1}{\overline{R_0} (E + \ln \frac{\overline{R_0}}{2})} \quad (5.1.2)$$

$$0.2 \leq \overline{R_0} \leq 0.5 \Rightarrow \lambda_\infty = -6.547\overline{R_0} + 5.859 \quad (5.1.3)$$

$$\overline{R_0} \geq 0.5 \Rightarrow \lambda_\infty = \left( 1 + \frac{1}{\overline{R_0}^{\frac{2}{3}}} \right) \quad (5.1.4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} E & : & \text{la constante d'Euler} \\ z_s(t) & : & \text{la profondeur de la zone saturée en } [L] \\ \overline{R_0} & = & \frac{\overline{r_0}}{2\lambda_c} \\ \overline{r_0} & : & \text{le rayon de courbure moyen de la raie en } [L] \end{cases}$$

La dépendance en temps est traduite par le terme  $z_s(t)$ . Il permet de rendre compte de la prédominance des effets capillaires en début d’infiltration et de simuler la diminution de leur importance à mesure que le temps augmente jusqu’à une inversion du phénomène pour les temps d’infiltration plus long. L’infiltration cumulée de la raie d’irrigation est ensuite calculée en intégrant l’infiltration cumulée monodirectionnelle sur un nombre fini de directions.

$$\begin{aligned}
I(t) &= \lambda(t) \int_{s_L(t)}^{s_R(t)} I_{1D}(s, \tau) ds \\
&= \lambda(t) \sum_{j=0}^m \int_{\sigma_j}^{\sigma_{j+1}} I_{1D}(s, \tau) ds \\
&= \lambda(t) \sum_{j=0}^m \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{\tau_{j+1} - \tau_j} \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} I_{1D}(\sigma(\tau), \tau) d\tau
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

$$\text{avec } \begin{cases} I(t) & : \text{ infiltration cumulée totale en } [L^2] \\ \lambda(t) & : \text{ facteur de forme en } [-] \\ \sigma & : \text{ abscisse curviligne en } [L] \\ \tau & : \text{ temps d'opportunité en } [T] \\ I_{1D}(t) & : \text{ infiltration cumulée 1D en } [L] \end{cases}$$

On obtient une formule similaire pour le taux d'infiltration total en dérivant la formule de l'infiltration cumulée (5.1.5).

$$q(t) = \lambda(t) \int_{s_L(t)}^{s_R(t)} q_{1D}(s, \tau) ds + \frac{d_t \lambda(t)}{\lambda(t)} I(t) \tag{5.1.6}$$

Les calculs de l'infiltration cumulée ou du taux d'infiltration 1D sont réalisés grâce à une formule analytique à base physique : Haverkamp-Parlange (Haverkamp et al., 1990) ou empirique : Kostiakov-Lewis (Kostiakov, 1932) ou grâce à une résolution numérique de l'équation 1D de Richards. Cette équation est modifiée pour tenir compte de l'effet de la gravité. Celui-ci dépend de l'orientation de la direction considérée. L'équation monodimensionnelle à résoudre est la suivante

$$\partial_t \theta = \vec{\nabla} \cdot \left( K(h) \vec{\nabla} (h + \gamma z) \right) \tag{5.1.7}$$

$$\gamma = \cos \omega \tag{5.1.8}$$

avec  $\omega$  : angle entre la direction d'infiltration et la verticale.

## 5.1.2 Validation du modèle

Des tests de validation du modèle ont été effectués. Leurs buts étaient à la fois de comparer les résultats de FURINF avec ceux d'un modèle numérique (Hydrus-2D) et d'évaluer l'impact des hypothèses fortes du modèle. Des sols à caractéristiques très différentes ont été choisis afin de tester la robustesse de ce modèle. Un sol type Yolo Clay, le sol de Lavalette, sol à texture limono-argilo-sableuse et un sol à texture plus grossière, le silt de Roth.

L'hypothèse du flux radial est valide dans le cas de sol à texture fine où la conductivité hydraulique est faible et où les forces gravitaires ne prédominent pas sur les effets capillaires (dans le cas

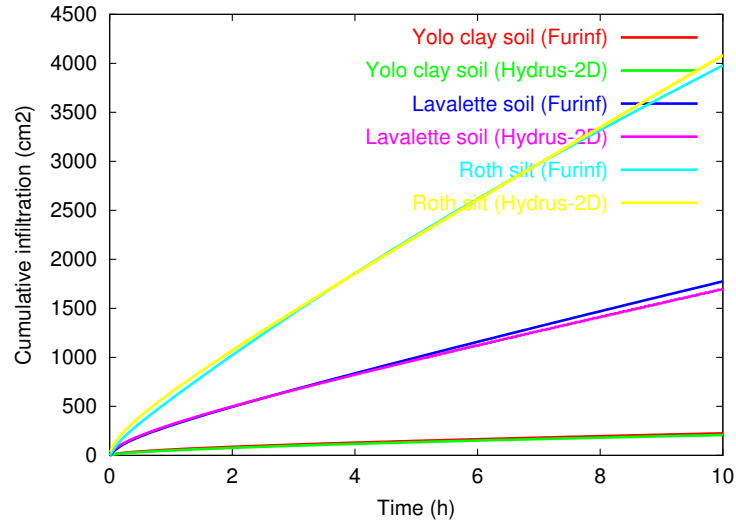


FIG. 5.1.2 – Courbes d’infiltration cumulée obtenues par FURINF et Hydrus-2D

d’un sol Yolo Clay par exemple où  $K_s = 0,044\text{cm/h}$  et  $\lambda_c = 27.6\text{cm}$ ). A mesure que les caractéristiques du sol favorisent les effets gravitaires, les lignes de flux s’éloignent d’une distribution radiale. Cependant, même pour un sol à conductivité hydraulique élevée, sol peu utilisé en irrigation à la raie, les résultats sont satisfaisants concernant l’évaluation de l’infiltration cumulée (FIG. 5.1.2)

L’influence du plan de flux nul a été évaluée en simulant avec Hydrus-2D plusieurs essais d’infiltration pour différents écartements de raie. Pour un espacement de raie de 80 cm (espacement assez souvent utilisé), on voit apparaître une différence entre les deux modèles à partir de 7 heures d’irrigation pour le sol de Lavalette. Ces durées d’irrigation sont cependant rarement atteintes sur des longueurs de raies ne dépassant pas 250m.

Concernant l’hypothèse de teneur en eau initiale homogène, l’utilisation du code de calcul Hydrus-2D montre peu d’impact sur la courbe d’infiltration cumulée en prenant une teneur en eau moyenne à la place d’une répartition réelle. Cette remarque est à nuancer à mesure que l’hétérogénéité du profil de teneur en eau augmente, l’erreur sur l’infiltration cumulée n’excède cependant pas les 15% en conditions d’hétérogénéité fortes sur le cas du sol de Lavalette (Mailhol, 2001).

Les hypothèses fortes du modèle FURINF ne semblent donc pas nuire à la qualité du calcul de l’infiltration cumulée. Ce modèle a l’avantage d’être peu consommateur en temps de calcul, d’être opérationnel (peu de paramètres sont à fournir en entrée du modèle) et de donner des résultats dont la précision est satisfaisante.

De nombreux modèles et équations proposent un calcul de l’infiltration cumulée. Elles n’ont pas été présentées dans ce document, car ce calcul ne permet pas en général d’apporter des informations suffisantes concernant les transferts hydriques dans le sol. FURINF présente l’intérêt de calculer l’infiltration cumulée par directions d’infiltration et permet ainsi une meilleure connaissance de la

répartition de l'eau dans le sol. A partir de ce modèle, nous allons donc estimer dans quelles mesures ce modèle peut être adapté à la problématique de l'étude. En effet, même si les lignes de flux sont considérées comme étant orthogonales au périmètre de la raie, la prise en compte des effets gravitaires permet de définir une profondeur de saturation et une profondeur moyenne du front d'humectation spécifiques à chaque direction d'infiltration. La suite de l'étude consistera à évaluer la précision de l'approximation du profil hydrique en utilisant ces données.

## 5.2 Adaptation de FURINF à la problématique

Grâce aux caractéristiques de l'infiltration calculées par FURINF, et sous les mêmes hypothèses, nous allons proposer une formule analytique pour le cas de l'irrigation à la raie qui décrira les profils de teneur en eau, pression hydraulique et flux de Darcy grâce à une méthode proche de Green et Ampt (Green and Ampt, 1911).

### 5.2.1 Représentation monodirectionnelle du profil hydrique

Dans le cas monodimensionnel, Green et Ampt définissent le front d'humectation :

$$z_f(t) = \frac{I_{1D}(t)}{\Delta\theta} \quad (5.2.1)$$

Furinf calcule la profondeur de la zone saturée en utilisant Darcy :

$$z_s(t) = K_s \frac{h_{\text{charge}} - h_{\text{entrée d'air}}}{q_{1D}(t) - \gamma K_s} \quad (5.2.2)$$

La solution de l'équation de convection-diffusion à coefficients constants peut s'écrire en utilisant la fonction d'erreur complémentaire. Une solution de l'équation de Richards pour la teneur en eau peut être proposée en utilisant la même forme ( $\beta$  est un paramètre de calage de la fonction sur les valeurs remarquables de l'écoulement  $\theta(z_s) = \theta_s$  et  $\theta(z_f) = \frac{1}{2}(\theta_i + \theta_s)$ ). Il ne dépend que faiblement du type de sol puisque cette dépendance est prise en compte dans le calcul de  $z_s$  et  $z_f$ .  $\beta$  est sans unité et de l'ordre de 2,5).

$$\theta(z, t) = \theta_i + \frac{\Delta\theta}{2} \operatorname{erfc} \left( \beta \frac{z - z_f(t)}{z_f(t) - z_s(t)} \right) \quad (5.2.3)$$

On peut ainsi calculer le flux de Darcy en utilisant l'équation de conservation de la masse en prenant comme condition initiale un flux nul à l'infini.

$$q(z, t) = - \int_{z_{\max}}^z \partial_t \theta(z, t) dz \quad (5.2.4)$$

L'intégrale est convergente, elle donne certes une forme complexe mais explicite. Ainsi, le calcul des profondeurs de saturation et du front d'humectation permettent à eux seuls de représenter de

manière satisfaisante les profils de teneur en eau et de flux de Darcy. Les comparaisons des profils issus de FURINF et de Hydrus-1D sont représentés sur la FIG. 5.2.1 dans le cas d'une infiltration monodirectionnelle.

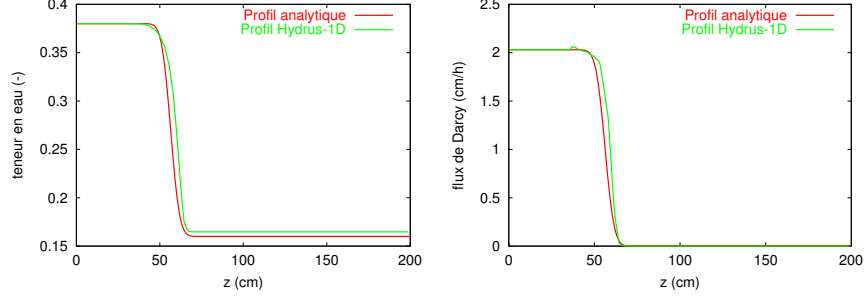


FIG. 5.2.1 – Comparaison des profils analytiques avec ceux donnés par Hydrus-1D

## 5.2.2 Représentation bidirectionnelle du profil hydrique

Dans le cas bidirectionnel de l'irrigation à la raie, on reprend le même principe en se plaçant en coordonnées polaires. La valeur de la teneur en eau reste inchangée, en revanche, en considérant les lignes de courant radiales selon les hypothèses de FURINF, la valeur du flux de Darcy devient :

$$q(r, t) = -\frac{1}{r} \int_{r_{\max}}^r r \partial_t \theta(r, t) dr \quad (5.2.5)$$

Il convient cependant d'ajuster les valeurs données par FURINF concernant l'infiltration cumulée et le taux d'infiltration par direction d'infiltration. En effet, ces valeurs sont issues d'une résolution d'un problème monodirectionnel et le passage au cas bidirectionnel s'effectue par intégration sur l'ensemble de la raie et par ajustement grâce à un facteur de forme. FURINF, qui donnait les caractéristiques de l'infiltration en moyenne, a tout d'abord été modifié afin qu'il donne ces valeurs pour chaque direction d'infiltration. Des ajustements ont ensuite été réalisés pour mieux illustrer le caractère bidirectionnel de l'infiltration.

Concernant l'infiltration cumulée, l'égalité suivante permet de déterminer la profondeur du front d'humectation ajustée (Les variables utilisées sont illustrées sur la FIG. 5.2.2). Cette égalité signifie que l'eau infiltrée dans le sol entre les abscisses curvilignes  $s_j$  et  $s_{j+1}$  est répartie dans la surface du secteur circulaire délimité par les directions d'infiltration  $\omega_j$  et  $\omega_{j+1}$ .

$$\lambda(t) \int_{s_j}^{s_{j+1}} I_{1D} ds = \Delta\theta \frac{(\omega_{j+1} - \omega_j)}{2} [(z_f + R_c)^2 - R_c^2] \quad (5.2.6)$$

Concernant l'ajustement sur le taux d'infiltration, la même démarche que pour l'infiltration cumulée est utilisée. La profondeur de la zone saturée est ajustée de la manière suivante.

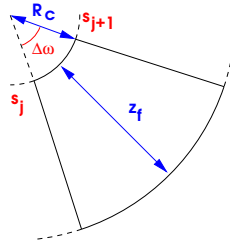


FIG. 5.2.2 – Notations utilisées dans l’ajustement du front d’humectation bidirectionnel

$$\lambda(t) \int_{s_j}^{s_{j+1}} q_{1D} ds + \partial_t \lambda(t) \int_{s_j}^{s_{j+1}} I_{1D} ds = \int_{s_j}^{s_{j+1}} q(r_0) ds \quad (5.2.7)$$

$$z_s = K_s \frac{h_{\text{eff}} - h_s}{q(r_0) - \gamma K_s} \quad (5.2.8)$$

Nous parvenons à obtenir une correspondance satisfaisante entre le profil issu de FURINF et celui donné par Hydrus-2D comme le montre la FIG. 5.2.3. Cette figure représente une infiltration d’une durée de 4h sur un sol de type limono-argilo-sableux ( $K_s = 1,4 \text{ cm.h}^{-1}$  et  $\lambda_c = 10 \text{ cm}$ ), en arrière plan, la figure représente les résultats obtenus avec Hydrus-2D, les rayons orthogonaux à la surface de la raie, superposés aux résultats d’Hydrus-2D, représentent les résultats obtenus avec l’adaptation de FURINF. Les écarts les plus importants sont observés sur les directions d’infiltration trop proches de l’horizontale, là où les lignes de flux s’incurvent dès le début de l’infiltration.

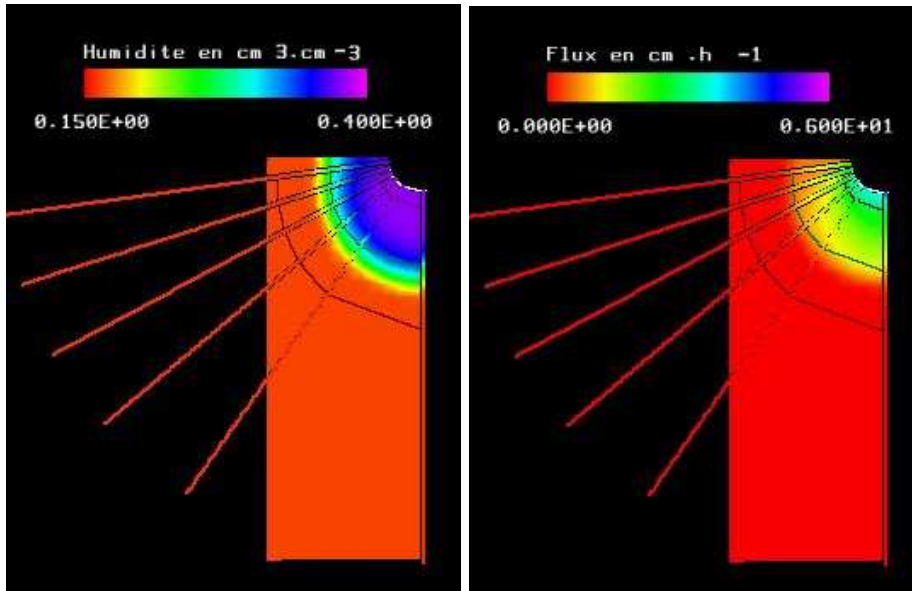


FIG. 5.2.3 – Comparaison des profils analytiques avec ceux donnés par Hydrus-2D

Le modèle représente de manière satisfaisante l'infiltration cumulée lors d'une irrigation à la raie sur un sol au profil uniforme. Le prise en compte d'un facteur de forme permet de corriger l'infiltration monodirectionnelle pour la faire correspondre au cas bidirectionnel. L'adaptation du modèle FURINF représente également correctement le profil hydrique dans le cas d'une irrigation à la raie. Les impacts de l'hypothèse d'un flux orthogonal à la surface de la raie sont réduits par la prise en compte des effets gravitaires selon l'angle des rayons d'infiltration.

Cependant, dans l'optique d'une représentation des transferts eau et solutés, les plans de flux nul jouent un rôle particulièrement important. Ils participent en grande partie au lessivage des nitrates concentrés en partie haute des billons vers les couches profondes, ainsi qu'à l'homogénéisation du profil de solutés. L'adaptation de FURINF n'est pas capable de simuler ces plans de flux nul. Il faudrait pousser encore plus loin cette adaptation, en considérant par exemple des transferts d'eau entre les directions d'infiltration lorsque le front d'humectation atteint les plans de flux nul. Cette nouvelle adaptation permettra certainement d'améliorer le modèle. Il restera cependant le traitement de la redistribution de l'eau dans le sol après irrigation. Le modèle FURINF n'est pas adapté à ce problème. Il faut donc étudier d'autres types de modélisation permettant de représenter directement le profil de flux, problème principal qui ici encore nuit à l'efficacité de l'adaptation du modèle.



## Chapitre 6

# La modélisation analytique fondée sur des bases mécanistes

Précédemment, nous avons évoqué les fortes contraintes de la simulation numérique appliquée à notre cas d'étude et la difficulté d'adapter les modélisations de type capacitif et le modèle FURINF à la problématique. Dans le premier cas, la complexité de la modélisation n'était pas toujours nécessaire, ni exploitable à son maximum, de plus, cette complexité menait à une mise en place peu opérationnelle des simulations réalisées. Dans le second cas, le modèle ne représentait pas avec suffisamment de précision les phénomènes physiques à modéliser.

La modélisation analytique peut pallier dans certaines situations ces carences. Elle permet de représenter les phénomènes physiques de manière plus complexe qu'une modélisation conceptuelle, tout en évitant les fortes contraintes de convergence des simulations numériques. Elle a également l'avantage de donner une solution exacte à l'équation considérée en un point donné sans avoir recours à un processus itératif évaluant la solution dans tout le domaine de l'étude. La capacité de cette solution à représenter un phénomène réel reste cependant dépendant des approximations effectuées pour obtenir l'équation à résoudre.

Le principe de ce type de modélisation est de résoudre les équations de transferts dans des cas particuliers où les solutions existent et dont l'expression est exploitable. De nombreuses simplifications sont en général nécessaires pour atteindre ces cas particuliers. Ce type de modélisation doit être traité avec précaution car aux hypothèses de l'équation de Richards ou celles de l'équation de convection-diffusion se rajoutent de nouvelles hypothèses qui réduisent encore le domaine de validité. Parfois, des restrictions trop limitantes peuvent rendre ce type de modèle peu exploitable.

### 6.1 Résolution de l'équation de Richards

L'équation de Richards est une équation fortement non-linéaire à cause de la non-linéarité de la conductivité hydraulique ou de la diffusivité du sol. La transformation de Kirchhoff introduit le

potentiel de flux (6.1.1) qui permet une première simplification de l'équation de Richards (6.1.2) et (6.1.3) (où  $\nabla^2$  est le laplacien) sans introduire aucune hypothèse supplémentaire.

$$\phi = \int_{h_i}^h K(h) dh = \int_{\theta_i}^{\theta} D(\theta) d\theta \quad (6.1.1)$$

$$C(h(\phi))\partial_t\phi = K(h(\phi))\nabla^2\phi - \partial_h K(h(\phi))\partial_z\phi \quad (6.1.2)$$

$$\partial_t\phi = D(\theta(\phi))\nabla^2\phi - \partial_\theta K(\theta(\phi))\partial_z\phi \quad (6.1.3)$$

Cette nouvelle écriture est très souvent utilisée dans la résolution analytique de l'équation de Richards. En effet, l'introduction de modèles de conductivité hydraulique et de diffusivité adaptés permet la linéarisation partielle ou complète de cette équation. Le modèle du sol quasi-linéaire, utilisant l'équation de Gardner  $K(h) = K_s e^{\alpha h}$  pour représenter la conductivité hydraulique a par exemple l'avantage de transformer l'équation de Richards en l'équation quasi-linéaire (6.1.4) ou (6.1.5).

$$\frac{C(h(\phi))}{K(h(\phi))}\partial_t\phi = \nabla^2\phi - \alpha\partial_z\phi \quad (6.1.4)$$

$$\frac{1}{D(\theta(\phi))}\partial_t\phi = \nabla^2\phi - \alpha\partial_z\phi \quad (6.1.5)$$

### 6.1.1 Résolution analytique de Berthomé appliquée sur une raie d'irrigation trapézoïdale

Cette méthode de résolution a été développée dans le cas particulier d'une raie d'irrigation de forme trapézoïdale (Berthomé, 1991). Alors que, comme nous le verrons plus loin, de nombreuses études traitent du cas de la micro-irrigation, les études théoriques concernant l'irrigation à la raie, l'un des systèmes d'irrigation les plus utilisés au monde, sont moins fréquentes. Cette méthode de résolution de Berthomé est peu connue du monde scientifique, car elle n'a pas été publiée dans des revues scientifiques. Elle présente cependant l'intérêt de donner des solutions intéressantes dans le cas d'un système d'irrigation peu traité par des méthodes alternatives. Ce travail datant de 1991, une critique formulée était sa consommation importante en temps de calcul. Aujourd'hui, compte tenu des gains conséquents en capacité de calcul, ce critère n'a plus autant de poids.

Berthomé propose ici une résolution de l'équation de Richards bidirectionnelle par deux approximations successives. La forme de l'équation de Richards traitée est l'équation (6.1.2) exprimée en coordonnées polaires  $(r, \omega)$ .

$$C(h(\phi))\partial_t\phi = K(h(\phi))\nabla^2\phi - \partial_h K(h(\phi)) \left( \cos\omega\partial_r\phi - \frac{1}{r}\sin\omega\partial_\omega\phi \right) \quad (6.1.6)$$

Une première approximation  $\phi_0$  est la solution de l'équation de Laplace  $\nabla^2\phi = 0$  en prenant une condition de flux latéral nul à la frontière du domaine, sauf à la surface de la raie mouillée où  $\phi = \phi_{\max}$ . Le domaine  $\Omega$  de frontière  $\delta\Omega$  correspond à une section verticale du sol prise entre l'axe

de la raie et l'axe du billon. Cette première approximation s'exprime sous la forme d'une série du type (6.1.8), solution classique de l'équation de Laplace ( $\frac{1}{g}$  est le flux à travers la surface du sol saturé et  $\gamma$  dépend de la géométrie de la raie et de  $K_s$ ).

$$\nabla^2 \phi_0 = 0 \quad (6.1.7)$$

$$\phi_0 = \phi_{\max} \left( 1 - \left( \frac{1}{g} - \gamma \right) \sum_{n=1}^N a_n (1 - r^{-n} \cos n\omega) \right) \quad (6.1.8)$$

La seconde approximation permettant d'apporter plus de détails à la première approximation  $\phi_0$  est obtenue en résolvant l'équation de Poisson (6.1.11).

$$\nabla^2 \phi_1 = f(\phi_0) \quad (6.1.9)$$

$$f(\phi_0) = \frac{C(h(\phi_0))}{K(h(\phi_0))} \partial_t \phi_0 + \frac{\partial_h K(h(\phi_0))}{K(h(\phi_0))} \left( \cos \omega \partial_r \phi - \frac{1}{r} \sin \omega \partial_\omega \phi \right) \quad (6.1.10)$$

$$\phi_1 = \frac{1}{2\pi} \left( \int_{\Omega} f(\phi_0) r \ln r dr d\omega + \int_{\delta\Omega} (\phi_0 \vec{\nabla} \ln r - \ln r \vec{\nabla} \phi_0) \cdot \vec{n} d\sigma \right) \quad (6.1.11)$$

Ces deux approximations donnent une solution analytique de l'équation de Richards dans le cas d'une raie d'irrigation. Cependant, les coefficients  $a_n$  de (6.1.8) doivent être calculés par optimisation. La méthode utilisée par Berthomé est itérative et s'inspire de celle de Parlange (Parlange, 1971) et des techniques permettant de calculer les séries d'infiltration de Philip (Philip, 1957a).

Aux prix de certaines adaptations et d'une augmentation de la complexité des développements mathématiques, cette méthode permet également de prendre en compte des profils hydriques initialement non uniformes ainsi que des sols hétérogènes.

Le domaine de validité de cette méthode est donc relativement large. Les calculs et les optimisations à l'époque longs à réaliser informatiquement auraient désormais une durée acceptable. Cependant, cette technique reste encore particulièrement complexe à mettre en place, l'optimisation numérique permettant le calcul des coefficients  $a_n$  de la série nécessite des développements mathématiques importants qui n'ont pas été présentés dans ce document. De plus, les fonctions caractéristiques du sol, qui apparaissent dans les expressions analytiques des solutions, doivent être remplacés par des modèles classiques existants. Ces modèles seront utilisés par d'autres méthodes analytiques pour des efforts de calcul et de formalisations moindres. Cette méthode ne sera donc pas exploitée dans la suite de l'étude.

## 6.1.2 Elimination d'un des termes de l'équation de Richards

L'équation de Richards, même dans l'hypothèse d'un sol quasi-linéaire, reste complexe à résoudre. Afin de permettre sa résolution et d'obtenir ainsi une première approximation du profil hydrique, il faut se placer dans des situations qui permettent de négliger un des termes de l'équation. L'étude du cas stationnaire permet d'éliminer le terme  $\partial_t \phi$  et l'étude d'un cas où les effets gravitaires sont négligeables permet de réduire l'équation à une équation de diffusion pure. Ces situations mènent bien souvent à une solution explicite de l'équation de Richards.

## Cas stationnaire

Traitons tout d'abord le cas stationnaire. Cette situation appliquée à l'équation (6.1.4) permet d'obtenir une équation aux dérivées partielles à coefficients constants.

Wooding (Wooding, 1968) et Raats (Raats, 1971) se sont penchés sur le cas de l'infiltration en régime stationnaire à partir de sources ponctuelles ou à géométries simples. Dans ce cas, l'équation de Richards peut être écrite en coordonnées cylindriques (dans lesquelles  $r$  et  $z$  sont les nouvelles coordonnées). Sous cette forme, en considérant une humidité du sol initialement homogène, une source ponctuelle de débit  $Q$  et située en surface au point  $(0, 0)$ , la solution analytique existe et, selon Raats, a la forme (6.1.12). De cette expression, on peut obtenir le flux de Darcy le long d'une ligne de courant (6.1.13).

$$\phi(R, Z) = \frac{\alpha Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\rho} e^{(Z-\rho)} - e^{2Z} \int_{-\infty}^{(Z+\rho)} \frac{e^u}{u} du \right] \quad (6.1.12)$$

$$J(R, Z) = \frac{\alpha^2 Q}{8\pi} \frac{Z}{\rho} e^{(Z-\rho)} \sqrt{\left[ \frac{1+Z}{ZR} - \frac{Z}{R} \left( \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right) \right]^2 + \left[ \frac{1}{\rho} + \frac{1}{\rho^2} \right]^2} \quad (6.1.13)$$

$$\text{avec } \begin{cases} R &= \frac{\alpha r}{2} \\ Z &= \frac{\alpha z}{2} \\ \rho &= \sqrt{R^2 + Z^2} \end{cases}$$

Cette solution dans le cas stationnaire permet de définir les lignes de potentiel et les lignes de courant lors d'une irrigation. La FIG. 6.1.1 illustre cette équation.

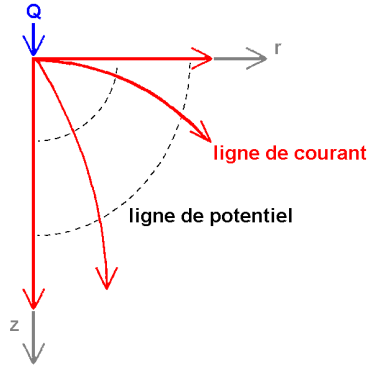


FIG. 6.1.1 – Solution de Raats - figure et notations tirées de (Revol, 1994)

Ce résultat a été généralisé par Raats (Raats, 1972) dans le cas d'une source ponctuelle placée à une profondeur donnée.

Cette étude, dans le cas d'un écoulement stationnaire a été complétée par (Philip, 1984b) et (Clothier, 1984). L'expression analytique permettant de calculer le temps de parcours d'une particule

d'eau pour atteindre un point donné (6.1.14) a été tiré de la valeur du flux de Darcy (6.1.13) calculé par Raats. Cette expression est même explicite pour un point situé directement sous la source (6.1.15) ou en un point de la surface (6.1.16). Ceci n'est possible cependant qu'en déterminant l'humidité moyenne du sol  $\bar{\theta}$  pendant l'irrigation. Les auteurs soulignent cependant la difficulté qui peut être rencontrée dans la recherche de  $\bar{\theta}$ .

$$t(R, Z) = \int_0^\rho \frac{\theta(\rho)}{J(\rho)} d\rho \quad (6.1.14)$$

$$t(0, Z) = \frac{16\pi\bar{\theta}}{\alpha^3 Q} \left[ \frac{Z^2}{2} - Z + \ln 1 + Z \right] \quad (6.1.15)$$

$$t(R, 0) = \frac{32\pi\bar{\theta}}{\alpha^3 Q} \left[ e^R \left( 1 - R + \frac{R^2}{2} \right) - 1 \right] \quad (6.1.16)$$

Ces deux temps de parcours permettent de donner une première description de l'évolution du bulbe humide observée en micro-irrigation, une intégration numérique de l'expression (6.1.14) permet de préciser cette première estimation (FIG. 6.1.2). Cette figure a été réalisée pour un débit  $Q = 2,5 \text{ L.h}^{-1}$ , une humidité moyenne  $\bar{\theta} = 0,22 \text{ cm}^3.\text{cm}^{-3}$  et sur un sol de longueur capillaire  $\lambda_c = \frac{1}{\alpha} = 10 \text{ cm}$ .

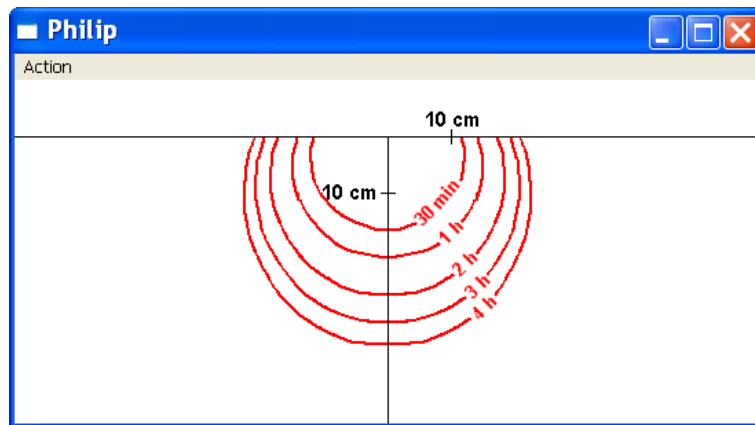


FIG. 6.1.2 – Evolution du bulbe humide en micro irrigation selon Philip et Clothier

### Effets gravitaires négligeables

On se place maintenant en régime transitoire, mais dans le cas où les effets de la gravité sont négligeables. Dans un sol à texture fine ou pour des temps d'infiltration courts, cette hypothèse n'est que peu restrictive.

L'étude de ce cas a été développée notamment par (Clothier et al., 1985) qui reprennent l'approche "flux-concentration" de (Philip and Knight, 1974) sur les mêmes hypothèses que précédemment (humidité initiale uniforme égale à  $\theta_i$ ). On considère ici une infiltration dans une cavité

hémisphérique de rayon  $r_0$  dont le débit d'entrée est égal à  $Q$ . La gravité négligée, la solution de l'équation de Richards est caractérisée par des lignes de potentiel circulaires de centre le milieu de la cavité. Ainsi, définir l'état d'humidité du sol revient à définir le rayon  $r(\theta)$  (6.1.17) et le temps  $t(\theta)$  (6.1.18) pour lesquels l'humidité est égale à  $\theta$ .

$$r(\theta) = r_0 \left[ 1 - \frac{\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{D}{F} d\theta}{r_0 v_0} \right]^{-1} \quad (6.1.17)$$

$$t(\theta) = \frac{r_0}{3v_0} \int_{\theta_i}^{\theta_0} \left[ 1 - \frac{\int_{\theta}^{\theta_0} \frac{D}{F} d\theta}{r_0 v_0} \right]^{-3} d\theta \quad (6.1.18)$$

$$\text{avec } \begin{cases} F = \frac{r^2}{r_0^2} \frac{v}{v_0}, \text{ relation "flux-concentration"} \\ v : \text{ densité de flux} \\ v_0 = \frac{Q}{2\pi r_0^2}, \text{ densité de flux à } r_0 \\ \theta_0 : \text{ humidité en } r_0 \end{cases}$$

En considérant  $F = 1$  et en utilisant une représentation de la diffusivité du sol sous la forme de l'exponentielle  $D(\theta) = ae^{b\theta}$ , deux hypothèses qui ne restreignent que faiblement le domaine de validité, l'évaluation des expressions précédentes devient plus simple. L'expression de  $r(\theta)$  est explicite et le calcul de  $t(\theta)$  ne nécessite plus qu'une seule intégration numérique.

Ces deux types de modélisation analytique ont permis de proposer des solutions en régime transitoire pour des temps courts et d'autres solutions en régime stationnaire. Ces solutions peuvent être complémentaires dans certains cas et permettent de proposer une solution globale pour une durée d'irrigation plus longue. Cependant, il s'avère souvent que ces solutions sont tout de même encore trop restrictives et une prise en compte de tous les termes de l'équation est nécessaire.

### 6.1.3 Linéarisation complète de l'équation de Richards

La linéarisation complète de l'équation de Richards repose sur l'hypothèse du sol linéaire qui permet de définir une diffusivité constante. Même si certains auteurs considèrent cette hypothèse très forte, notamment (Ababou, 1981), (Clothier and Scotter, 1982), elle permet cependant la linéarisation complète de l'équation de Richards (6.1.19) et dans le cas de faibles variations de l'humidité du sol, elle peut donner des résultats intéressants. En micro-irrigation, l'eau est apportée directement aux racines des plantes et la technologie du système de distribution permet de maintenir une humidité élevée autour des racines pendant toute la saison de culture. Cette situation reste donc proche du domaine de validité de l'hypothèse.

$$\partial_t \phi = \frac{\kappa}{\alpha} \nabla^2 \phi - \kappa \partial_z \phi \quad (6.1.19)$$

$$D = \frac{\kappa}{\alpha} \quad (6.1.20)$$

$$\partial_\theta K = \kappa \quad (6.1.21)$$

Warrick tout d'abord exploita cette hypothèse (Warrick, 1974). Elle lui permit de définir la solution de l'équation de Richards grâce à des techniques de résolution développées dans (Carslaw and Jaeger, 1956) appliquées à la résolution de l'équation de la chaleur. Philip définit également les valeurs optimales des coefficients constants de l'équation en fonction de l'état initial du sol et de ses propriétés (Philip, 1986). Il propose une forme pour  $\kappa$  (simplifiée dans l'expression 6.1.22) dans laquelle intervient la sorptivité  $S$  introduite par (Philip, 1957a). Enfin, Coelho et Or reprennent ces différents développements théoriques et évaluent leurs capacités à être appliquées dans des cas concrets de micro-irrigation (Coelho and Or, 1997).

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{4}{\alpha\pi} \left( \frac{K_s}{S} \right)^2 \\ &= \frac{2K_s}{\pi(\theta_s - \theta_i)} \end{aligned} \quad (6.1.22)$$

Ces différents développements permettent de définir l'état du sol dans le cas d'infiltration à partir de sources ponctuelles enterrées (6.1.23) ou en surface (6.1.24) en considérant un état initial du sol uniforme et un débit d'entrée constant égal à  $Q$  (les adimensionnements des variables et les notations sont les mêmes que précédemment et  $T = \alpha\kappa t/4$ ).

$$\phi_B(R, Z, T) = \frac{\alpha Q}{8\pi} \frac{e^Z}{2\rho} \left[ e^\rho \operatorname{erfc} \left( \frac{\rho}{2\sqrt{T}} + \sqrt{T} \right) + e^{-\rho} \operatorname{erfc} \left( \frac{\rho}{2\sqrt{T}} - \sqrt{T} \right) \right] \quad (6.1.23)$$

$$\phi_S(R, Z, T) = 2 \left[ \phi_B - e^{2Z} \int_Z^\infty e^{-2Z'} (\phi_B)_{Z=Z'} dZ' \right] \quad (6.1.24)$$

Enfin, Basha réunit différentes études et résume une méthode générale pour résoudre l'équation de Richards dans différents cas simples d'infiltration (Basha, 1999). Celle-ci ne traite plus uniquement du cas de la micro-irrigation mais peut être appliquée de manière plus large. Il propose la valeur pour  $\kappa$  et la fonction de rétention (6.1.25) permettant la linéarisation de l'équation de Richards.

$$\kappa = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} \quad (6.1.25)$$

$$\theta(h) = \theta_r + \frac{K(h)}{\kappa} \quad (6.1.26)$$

Ces différentes méthodes prenant en compte tous les termes de l'équation après l'avoir linéarisée donnent des résultats satisfaisants si le domaine de validité est respecté (Coelho and Or, 1997).

Celui-ci est encore relativement éloigné des situations réelles : les cas d'infiltration traités concernent des géométries simples et des conditions initiales uniformes. Cependant, un problème d'écoulement complexe peut être décomposé en somme de problèmes plus simples qui sont résolus grâce à l'une de ces méthodes. Ce type de modélisation semi-analytique semble être un choix intéressant à développer pour traiter les transferts hydriques bi- et tridirectionnels et sera détaillé dans la suite de l'étude.

## 6.2 Résolution de l'équation de convection-diffusion

Rappelons l'équation à résoudre pour représenter l'évolution d'un profil de soluté dans le sol. Elle a été simplifiée afin de ne prendre en compte que les phénomènes prépondérants et permettre une résolution analytique.

$$(\theta + \rho K_d) \partial_t c_N = \vec{\nabla} \cdot (\theta \bar{D}^h \vec{\nabla} c_N) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q}_h c_N) - \mu_h \theta c_N - S c_{N_r} \quad (6.2.1)$$

La similitude formelle de l'équation de transferts des solutés et de l'équation de Richards linéarisée permet de les traiter avec les mêmes techniques de résolution. Ce paragraphe ne sera donc pas aussi complet que le précédent, d'autant plus que la littérature ne fournit pas autant d'articles traitant du sujet que ceux concernant les transferts hydriques. Il détaillera cependant certaines particularités de l'équation de convection-diffusion des solutés.

### 6.2.1 Résolutions monodirectionnelles de l'équation de convection-diffusion à coefficients constants

Tout d'abord, les premiers résultats fournis par une résolution analytique concernent l'équation à coefficients constants sans terme de réactions ni terme puits dans un cas monodirectionnel. La concentration initiale est nulle. Ces solutions permettent une première description du profil de solutés dans un sol : (6.2.2) pour un problème aux limites de Dirichlet (Lapidus and Amundson, 1952) et (6.2.3) pour un problème aux limites de Cauchy (Lindstrom et al., 1967). La variable  $\frac{c_N}{c_0}$  est la concentration relative du milieu.

$$\frac{c_N}{c_0} = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{Pe}{4RT}} (R - T) \right) + \frac{1}{2} e^{Pe} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{Pe}{4RT}} (R + T) \right) \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} \frac{c_N}{c_0} = & \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{Pe}{4RT}} (R - T) \right) + \sqrt{\frac{PeT}{\pi R}} e^{-\frac{Pe}{4RT}} (R - T)^2 \\ & - \frac{1}{2} \left( 1 + Pe + \frac{PeT}{R} \right) e^{Pe} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{Pe}{4RT}} (R + T) \right) \end{aligned} \quad (6.2.3)$$



$$\text{avec } \begin{cases} Pe = \frac{vL}{D}, \text{ coefficient adimensionné de Peclet} \\ T = \frac{vt}{L}, \text{ variable de temps adimensionné} \\ L : \text{ longueur caractéristique du domaine et de l'écoulement} \\ R = 1 + \frac{\rho K_d}{\theta}, \text{ valeur moyennée sur le domaine de l'étude} \end{cases}$$

### 6.2.2 Résolutions bidirectionnelles de l'équation de convection-diffusion à coefficients constants

Sur le même type de conditions initiales et aux limites, en considérant toujours des géométries simples, plusieurs publications (Cleary and Ungs, 1978), (Javandel et al., 1984) proposent la résolution de l'équation bidirectionnelle suivante

$$R\partial_t c_N = D_T \frac{\partial c_N}{\partial x} + D_L \frac{\partial c_N}{\partial z} - v\partial_z c_N - \lambda R c_N \quad (6.2.4)$$

Cette équation présente l'intérêt de représenter un cas bidirectionnel introduisant un tenseur de dispersion plus complexe. Celui-ci prend en compte une dispersion différente du soluté dans les directions latérale et verticale. Elle fait également intervenir un modèle d'adsorption linéaire et une réaction du soluté. La solution de cette équation est la suivante dans le cas d'une condition aux limites de type Dirichlet (la concentration en surface est constamment égale à  $c_0$  sur un segment de la surface compris entre  $-a$  et  $a$ ).

$$c_N(x, z, t) = \frac{c_0 z}{4\sqrt{\pi D_L}} e^{\frac{vz}{2D_L}} \int_0^{\frac{t}{R}} \frac{1}{\tau\sqrt{\tau}} e^{-\left(\lambda R + \frac{v^2}{4D_L}\tau - \frac{z^2}{4D_L\tau}\right)} \left[ \operatorname{erf}\left(\frac{a-x}{2\sqrt{D_T\tau}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{a+x}{2\sqrt{D_T\tau}}\right) \right] d\tau \quad (6.2.5)$$

Cette résolution est cependant soumise à des hypothèses assez limitantes. Elle a donc été complétée par d'autres auteurs, (Lindstrom and Boersma, 1989), (Leij et al., 1991) ou (Shan and Javandel, 1997) qui décrivent des situations plus complexes et traitent différents types de conditions initiales ou le cas tridirectionnel. Ces solutions étant calculées sur le même principe que celle présentée ci-dessus, elles ne sont pas détaillées ici. Elles reprennent en général les mêmes hypothèses de concentrations initiales nulles et de coefficients de l'équation constants.

### 6.2.3 Résolution de l'équation de convection-diffusion à coefficients variables

Plusieurs études ont été menées afin de préciser ces approches simplifiées des transferts de solutés. Jusqu'alors, le coefficient de dispersion était considéré constant. Dans (de Smedt and Wierenga, 1978b) et (de Smedt and Wierenga, 1978a), ce coefficient est considéré comme fonction affine de la

vitesse de pore,  $D = D_0 + av$ , où  $a$  est une constante dépendante des caractéristiques du sol. Après changement de fonctions et de variables, l'équation de convection-diffusion monodirectionnelle sur un sol en régime hydrique stationnaire ( $q$  constant) (6.2.6) devient (6.2.7)

$$\theta(z)\partial_t c_N = \partial_z [D(z)\theta(z)\partial_z c_N] - q\partial_z c_N \quad (6.2.6)$$

$$\partial_z c_N = \frac{(D\theta^3)(z)}{q^3}\partial_t^2 c_N - \left[ \frac{\theta(z)}{q} + \frac{1}{q^2} \frac{d(D\theta^2)(z)}{dz} \right] \partial_t c_N \quad (6.2.7)$$

Cette dernière équation peut être résolue en posant le changement de variable  $t' = t - \alpha(z)$  (Warrick et al., 1972). Elle prend donc en compte une certaine dépendance des coefficients en fonction du profil hydrique. Celui-ci reste encore considéré uniforme dans le temps.

Une autre méthode pour tenir compte de l'hétérogénéité de l'état du sol dans les équations de transferts est de considérer l'équation en coordonnées lagrangiennes et non pas eulériennes comme jusqu'à présent. Un développement théorique est proposé par (Smiles, 2000). Cette description permet de suivre le parcours d'une particule dans la matrice poreuse du sol au lieu d'évaluer la concentration en soluté d'un point du sol. Elle a l'avantage de mieux représenter les processus physiques et de conserver naturellement le bilan de masse. Cette méthode donne des résultats analytiques intéressants, mais ne permet pas une exploitation facile de ces solutions.

Après un tour d'horizon des différents types de solutions analytiques de l'équation de convection-diffusion, il apparaît que celles-ci, à l'image des solutions de l'équation de Richards, concernent souvent des cas simplifiés. Ces solutions peuvent cependant, en étant superposées, représenter un phénomène plus complexe que les différentes situations exposées jusqu'ici.

# Conclusion de la partie

L'état de l'art fait apparaître de nombreux types de modélisations susceptibles de rendre compte des transferts eau-solutés qui se produisent dans un sol irrigué. Dans le contexte de l'étude, la simulation numérique permet d'obtenir une solution fiable et précise, cependant la lourdeur des calculs, le nombre important de paramètres à définir et les relations de convergence numérique à respecter font de cette modélisation un outil peu opérationnel et contraignant à utiliser en liaison avec l'objectif d'une simulation à l'échelle du cycle cultural.

Des modèles plus simples à mettre en place existent, cependant leurs adaptations ont posé problème, car ils ne permettent pas une description suffisamment détaillée des phénomènes physiques du domaine de l'étude. Une représentation précise du profil de flux hydrique est notamment indispensable à l'étude.

L'analyse des résolutions analytiques des équations de transferts montre l'intérêt de ces méthodes sur des cas théoriques simples. Ces cas simples ne sont pas suffisants pour satisfaire les contraintes de l'étude, cependant, leur superposition peut permettre de concilier le caractère opérationnel de ce type de modélisation et la capacité à représenter des situations complexes d'infiltration ou de redistribution.



Deuxième partie

Analyse de campagnes  
expérimentales et des simulations  
numériques de systèmes concertés  
d'irrigation



# Introduction de la partie

Comme nous l'avons rappelé en début de première partie, des mesures expérimentales sont indispensables à la mise en oeuvre d'une modélisation efficace. Dans le cas de notre étude, plusieurs campagnes expérimentales sont à disposition. Elles ont été à l'origine du travail entrepris actuellement. Ces expérimentations ont été réalisées dans l'objectif d'analyser les impacts agro-environnementaux de différentes pratiques culturales. Elles permettent également d'apprécier l'importance des transferts bidirectionnels.

La première campagne d'expérimentation réalisée de 1999 à 2001 sur le site expérimental de Lavalette (Montpellier) a permis de comparer les bilans hydriques et azotés sur des cultures de maïs irriguées par aspersion et à la raie. Une deuxième série de mesures sur le même site s'est intéressée aux impacts de l'effet combiné des hauteurs d'eau et des durées d'apport dans une raie d'irrigation sur l'homogénéisation du profil de solutés dans le sol et son lessivage. Une troisième série d'expériences réalisée entre 1997 et 1999 sur le site de Chelopechene (Bulgarie) a permis de tester deux pratiques d'irrigation et de fertilisation (la pratique traditionnelle et une pratique consistant à irriguer une raie sur deux et apporter le fertilisant dans la raie sèche). Enfin, ce document reprend des expériences réalisées en laboratoire et sur site (Clothier and Scotter, 1982; Revol et al., 1991; Gårdenäs et al., 2005) sur la micro-irrigation qui permettra d'analyser les mécanismes physiques des flux latéraux liés à cette technique d'irrigation.

La présentation du dispositif et de l'analyse des données expérimentales seront suivies d'une simulation numérique réalisée avec HYDRUS-2D (Simunek et al., 1999). Cette simulation a trois intérêts principaux.

- Le calage des paramètres d'HYDRUS-2D sur les données expérimentales permet de tester les impacts environnementaux d'autres scénarii de précipitations ou d'apports d'eau et d'azote sans avoir à mettre en place cette nouvelle pratique sur site et devoir procéder à de nouvelles mesures. On peut ainsi définir la pratique respectant au mieux l'environnement en limitant les lessivages d'azote sous la zone racinaire tout en vérifiant l'efficacité de la répartition des nitrates dans la zone racinaire.
- La simulation numérique permet de compléter la connaissance des phénomènes physiques se produisant dans le sol à tout moment de la saison. Même si ces informations ne sont que des approximations des phénomènes réels, elles permettent de préciser les mécanismes des transferts bidirectionnels mis en jeu lors d'une irrigation ou d'une redistribution.
- Les expériences décrites dans cette partie sont pour la plupart réalisées sur site. Même si le dispositif expérimental permet de suivre au mieux les profils hydriques et azotés, de nom-

breux événements participent à leur évolution. Nous verrons que tous ces événements ne sont pas encore tous pris en compte dans le développement du modèle proposé, particulièrement dans le cas des réactions biochimiques faisant varier la concentration de nitrate dans le sol. Ainsi, la validation du modèle sera effectuée par comparaison avec les résultats donnés par HYDRUS-2D. La simulation numérique des expériences développées dans cette partie permet de justifier ce mode de validation.



# Chapitre 1

## Devenir de l'azote sous irrigation gravitaire (Nemeth, 2001)

De 1997 à 1999, plusieurs expériences ont été menées sur le site de Lavalette dans le but de suivre les bilans hydriques et azotés sous culture de maïs irrigués. Pendant les deux premières années, les expériences concernaient l'irrigation par aspersion et avaient pour objectif le calage et la validation du modèle de culture STICS (Brisson et al., 1998). La dernière année, elles ont été axées sur l'irrigation à la raie dans le but d'analyser les processus de transferts d'eau et d'azote dans un contexte bidirectionnel.

Nous nous intéresserons plus particulièrement à cette dernière saison de mesures expérimentales. L'analyse des résultats de ces expériences nous permettra dans un premier temps de comparer les bilans d'eau et d'azote entre l'irrigation par aspersion et l'irrigation à la raie et dans un second temps de démontrer l'insuffisance d'une modélisation monodirectionnelle pour décrire l'évolution du profil d'azote dans le sol en liaison avec une pratique traditionnelle de fertilisation.

Ces expérimentations et leurs analyses ont été réalisées par Nemeth (Nemeth, 2001) et les conclusions de ces expériences ont été reprises par (Triki, 2002).

### 1.1 Description du protocole expérimental

#### 1.1.1 Les parcelles étudiées

L'expérimentation a été réalisée sur la parcelle expérimentale de Lavalette, située au nord de Montpellier (latitude 48,5, longitude 4,3, altitude 50 m) à environ 10 km de la mer Méditerranée au bord du fleuve Lez. La parcelle instrumentalisée a une superficie de 1,5 ha, une longueur de 130 m et une pente de 0,25% réalisée par planage au laser. Le texture du sol de la parcelle est de type limono-argilo-sableux et les analyses granulométriques montrent une assez faible hétérogénéité de cette texture sur toute la parcelle étudiée (Revol, 1994; Ruelle, 1995). 100 raies ont été suivies durant cette campagne de mesures et ont bénéficié de deux pratiques de fertilisations différentes sur 30 raies chacune.

- Le traitement amélioré, noté  $T_a$ , où  $180 \text{ kgN.ha}^{-1}$  ont été apportés sous forme de granulés. La moitié de l'apport a été réalisé lors du semis du maïs, l'autre moitié 36 jours plus tard juste avant le traçage des raies. Cette technique de fertilisation combinée au traçage des raies concentre l'engrais aux parties hautes des billons (FIG. 1.1.1).
- Le traitement excédentaire, noté  $T_e$ , où la quantité totale d'engrais apportée est de  $210 \text{ kgN.ha}^{-1}$  répartie en trois apports. Les deux premiers apports ont été réalisés au même moment que dans le traitement  $T_a$  (40% au semis et 35% avant le traçage des raies), complétée par un troisième apport d'azote supplémentaire sous forme gazeuse dissoute dans l'eau d'irrigation.



FIG. 1.1.1 – Pratique traditionnelle de fertilisation en irrigation à la raie

Afin de suivre l'évolution des profils hydriques et d'azote, neuf sites de mesures ont été mis en place. Six d'entre eux ont été implantés sur la parcelle dédiée à l'irrigation gravitaire, pour chacun des traitements  $T_a$  et  $T_e$ , trois sites de mesures sont disposés le long des raies : amont, moyen et aval. Les trois autres sites de mesures ont été implantés sur une partie de la parcelle irriguée par aspersion (FIG. 1.1.2). Sur chaque site sont installés deux tubes d'accès pour une sonde à neutrons, le premier installé dans la raie, le second dans le billon, sont installés également des tensiomètres et éventuellement des sondes TDR.

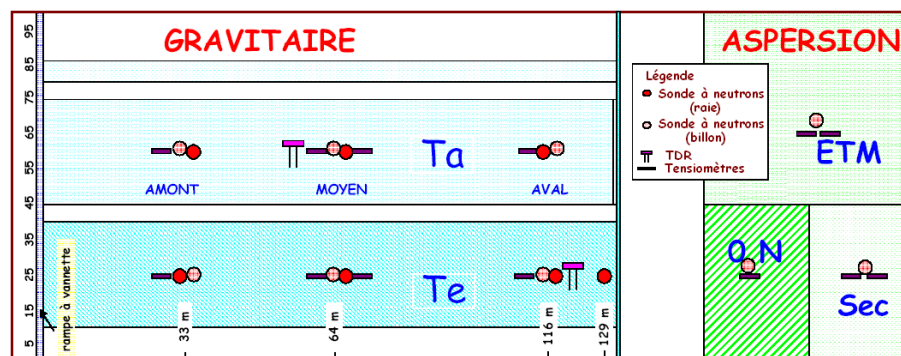


FIG. 1.1.2 – Parcelle expérimentale - figure tirée de (Nemeth, 2001)

## 1.1.2 Les pratiques de culture

Le semis du maïs (de la variété Samsara) a été effectué le 26 mai avec une densité de 115000 grains à l'hectare. Deux irrigations (fin mai et mi juin) ont été réalisées par canon enrouleur afin

de faire germer les plantes et les raies ont été tracées le 5 juillet lorsque les plantes ont eu atteint le stade de 6 feuilles. Ces raies ont une forme moyenne trapézoïdale de profondeur 15 cm, une largeur au fond de 10 cm et 40 cm de largeur maximale.

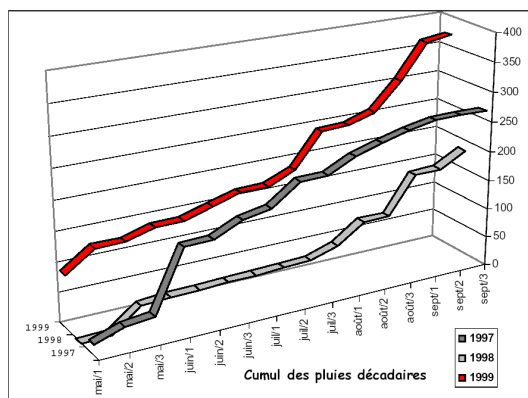


FIG. 1.1.3 – Précipitations cumulées pour l’année 99 - figure tirée de (Nemeth, 2001)

Compte tenu d’une saison abondante en précipitations par rapport à l’année moyenne (FIG. 1.1.3), trois irrigations gravitaires ont été réalisées seulement. L’apport d’eau a été réalisé par poste de 15 à 30 raies en fonction des débits utilisés (0,7 à 1,2  $L.s^{-1}$  par raie) au moyen de la rampe à vannettes. L’irrigation a été effectué en raies bouchées. Le TAB. 1.1.1 résume les apports totaux d’eau de la période de culture selon les traitements et la position dans la raie.

Précipitation	$T_a$ amont	$T_a$ moyen	$T_a$ aval	$T_e$ amont	$T_e$ moyen	$T_e$ aval
392	226	223	342	539	380	389

TAB. 1.1.1 – Apports d’eau totaux durant la saison de culture en mm

Enfin, les doses d’azote apportées pendant la saison culturale ont été effectuées en fonction du traitement appliqué. Le TAB. 1.1.2 décrit le calendrier des fertilisations apportées pendant la saison.

	$T_a$ amont	$T_a$ moyen	$T_a$ aval	$T_e$ amont	$T_e$ moyen	$T_e$ aval
25 mai	109	93	89	91	98	90
1 <sup>er</sup> juillet	89	93	82	72	71	66
23 juillet (irrigation fertilisante)	0	0	0	50	50	50
Total	226	223	342	539	380	389

TAB. 1.1.2 – Apports d’azote durant la saison de culture en  $kgN.ha^{-1}$

## 1.2 Résultats expérimentaux

### 1.2.1 Suivi de l'évolution du profil et du bilan hydrique

Durant les campagnes de mesures, la teneur en eau du sol a été suivie grâce aux sondes à neutrons et aux sondes TDR. Les tensiomètres ont permis quant à eux le suivi du profil des charges hydriques. Ces mesures ont été effectuées avant et après chaque irrigation ainsi que tous les 4 jours. Les profils d'humidité dans les deux sites  $T_a$ -moyen et  $T_e$ -moyen, avant et après la 2ème irrigation, sont présentés dans les FIG. 1.2.1 et 1.2.2.

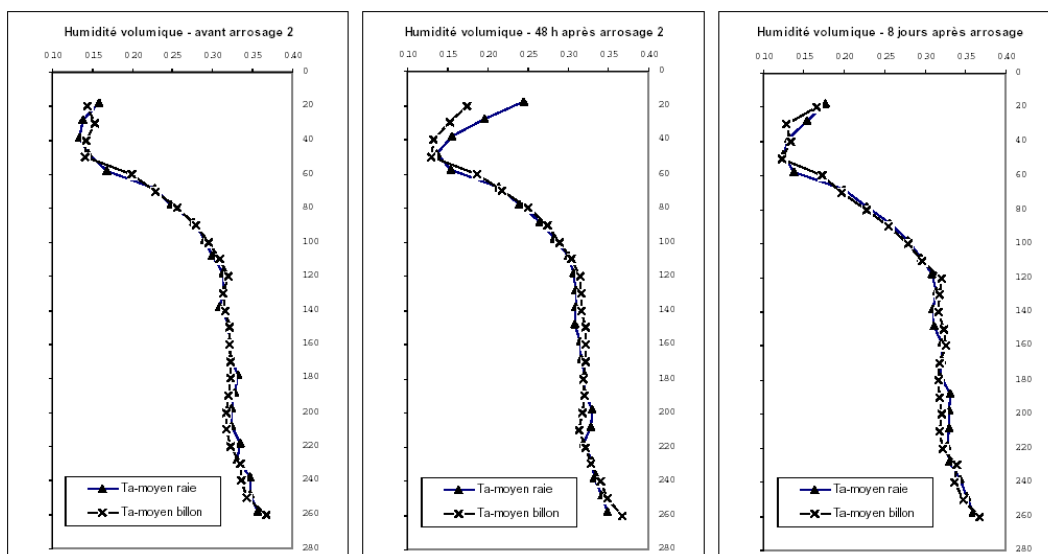


FIG. 1.2.1 – Humidité avant et après la seconde irrigation sur le site  $T_a$ -moyen - figure tirée de (Nemeth, 2001)

Ces profils d'humidité montrent qu'à partir d'une profondeur de l'ordre de 20 *cm*, l'homogénéisation des teneurs en eau entre le billon et la raie est manifeste. Ce phénomène est observable à partir de quelques jours après une irrigation. Ce phénomène d'homogénéisation est également visible sur les mesures de charges hydrauliques. Il faut considérer des pas de temps nettement plus courts (de l'ordre de l'heure) pour voir apparaître le caractère bidirectionnel des transferts hydriques dû à la géométrie de la raie. En outre, celui-ci est d'autant plus marqué que les doses délivrées au cours d'un arrosage sont faibles.

Ceci nous amène à conclure qu'en irrigation à la raie, à une échelle de temps du jour, les transferts d'eau peuvent être considérés comme monodirectionnels, permettant ainsi une simulation du bilan hydrique selon un modèle monodirectionnel.

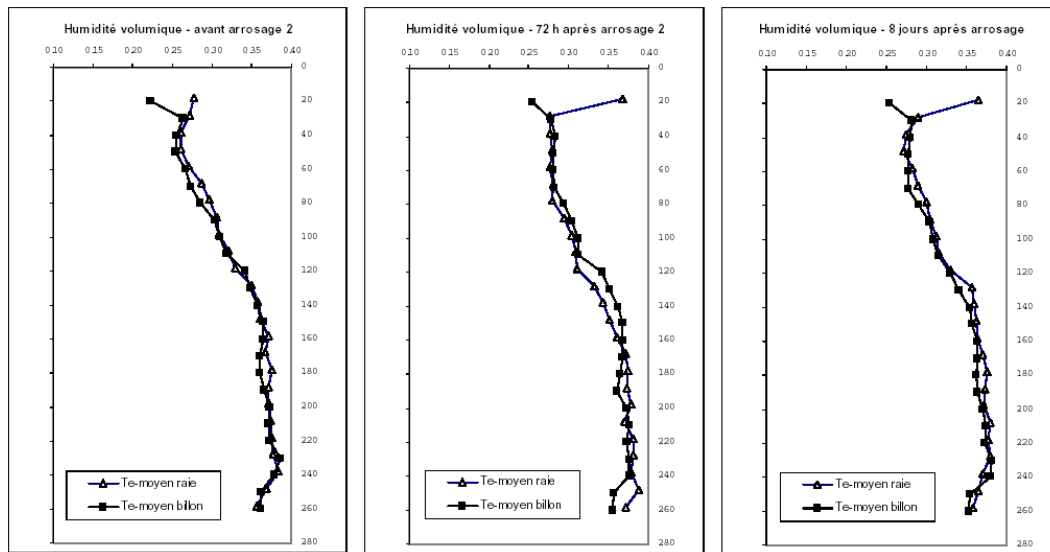


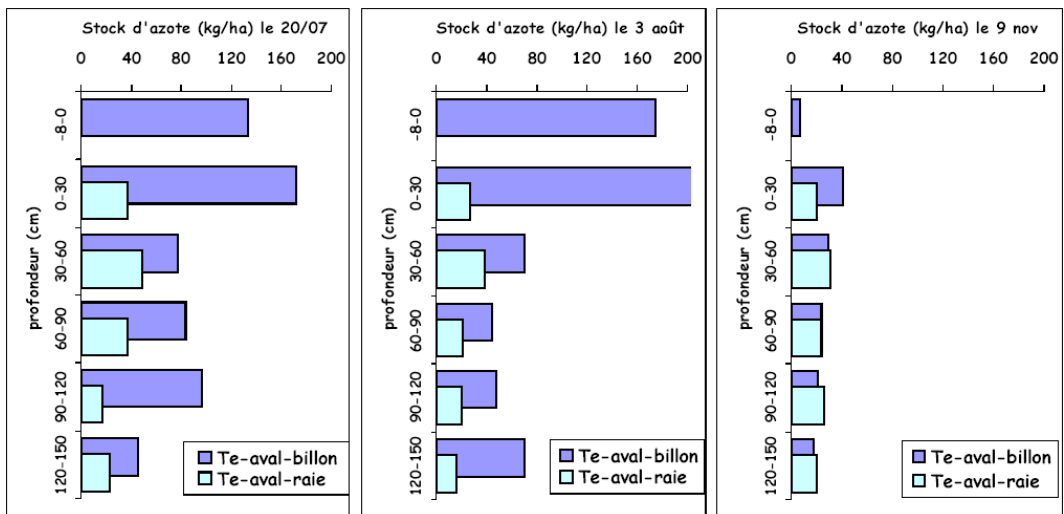
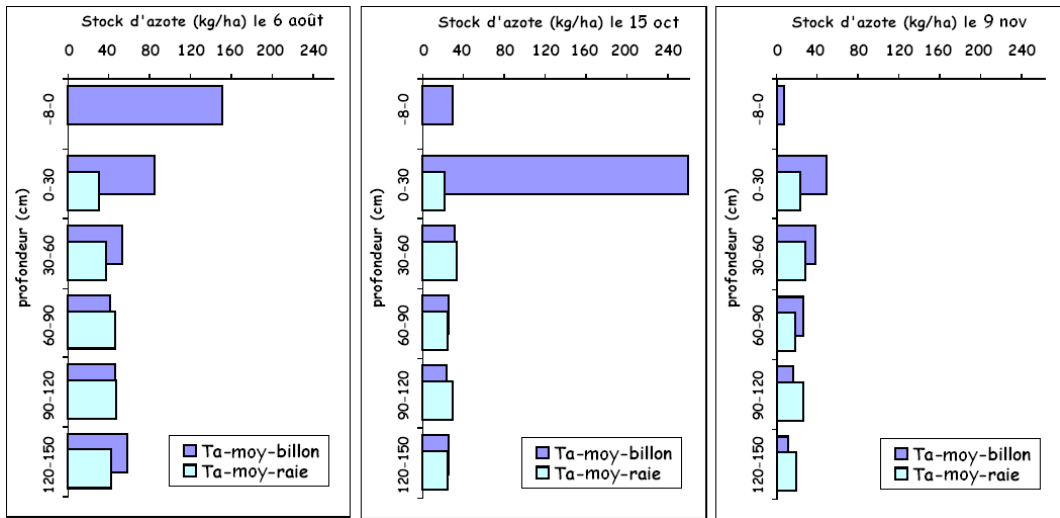
FIG. 1.2.2 – Humidité avant et après la seconde irrigation sur le site  $T_e$ -moyen - figure tirée de (Nemeth, 2001)

## 1.2.2 Suivi de l'évolution du profil et du bilan azoté

La détermination des stocks d'azote dans le sol constitue une opération plus délicate et ceci pour plusieurs raisons.

- La concentration du fertilisant en partie haute du billon lors du traçage des raies juste après apport d'engrais rend plus complexe encore cette détermination. Cette forte hétérogénéité est mise en évidence par les relevés expérimentaux. Cependant, ces relevés ne sont effectués qu'en un faible nombre de points dans le profil afin de perturber le moins possible les écoulements (création d'écoulements préférentiels). Il est donc difficile d'extrapoler la répartition latérale du fertilisant en ne connaissant que sa concentration sous la raie et sous le billon.
- Les phénomènes physiques ou biochimiques faisant varier la concentration d'azote dans le sol sont plus nombreux et complexes que ceux qui régissent l'évolution des profils hydriques. L'hétérogénéité de la concentration en azote est plus grande d'un site à l'autre à cause des variations de température et du rôle de la biomasse microbienne en présence dans le sol.
- Les mesures expérimentales sont également complexes à réaliser. Deux méthodes ont été adoptées dans cette étude. Le prélèvement d'échantillons à la tarière analysés en laboratoire risque de modifier la structure du sol ou détériorer la culture. Ici, le nombre de prélèvements a été de trois. Les mesures par bougies poreuses qui ont été placées sous la zone racinaire ne permettent que de connaître la quantité azote lessivée tout au long de la saison de culture. Ce renseignement est précieux (même si les résultats ont une forte hétérogénéité d'un site à l'autre) mais ne permet pas de suivre l'évolution du profil azoté dans la zone racinaire.

Les figures représentent les trois campagnes de mesures par prélèvement de la saison. On observe tout d'abord la forte hétérogénéité des stocks d'azote minéral sous le billon et sous la raie, particuliè-



rement en début de saison et pour les profondeurs faibles (entre 0 et 30 *cm*). On observe également les différences entre les deux traitements expérimentés tant au niveau de la quantité totale apportée par granulés, qu'au niveau de celle apportée par irrigation fertilisante. Celle-ci n'a d'impacts visibles que sur les premières couches de sol sous le billon, mettant en évidence le caractère bidirectionnel des transferts d'azote associé à l'irrigation à la raie et l'importance des effets capillaires. Enfin, dans les deux traitements étudiés, on observe à la récolte que le profil d'azote n'a toujours pas été homogénéisé, même pendant une saison caractérisée par des précipitations loin d'être négligeables (deux orages pendant cette période). Une précipitation, contrairement à une irrigation à la raie, favorise plus l'homogénéisation car elle entraîne naturellement la création de flux hydriques verti-

caux. Le reliquat d'azote concentré en parties hautes du billon est susceptible d'être entraîné dans les couches profondes du sol à la faveur des pluies hivernales et pourra provoquer une pollution de la nappe souterraine (même si une partie des précipitations est évacuée par ruissellement dans les raies).

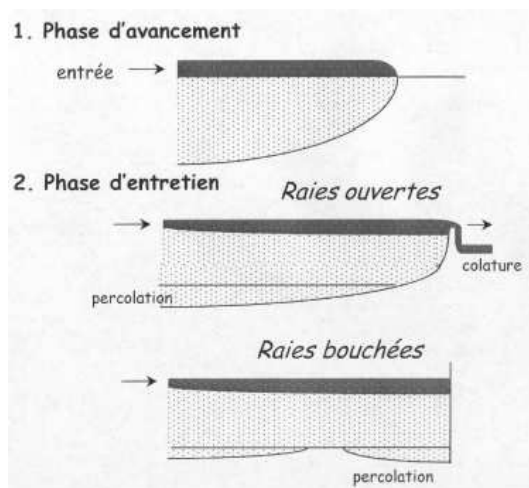


FIG. 1.2.5 – Différentes phases en irrigation à la raie - figure tirée de (Nemeth, 2001)

La pratique d'irrigation en raie bouchée entraîne une accumulation d'eau en fin de raie comme l'illustre la FIG. 1.2.5. Lors de la récolte en fin de saison 1999, le rendement sur les parties de la parcelle en fin de raie était visiblement meilleur qu'ailleurs (Mailhol et al., 2001). Une hypothèse avancée pour expliquer ce phénomène est que la hauteur d'eau plus importante en fin de raie due aux raies bouchées a permis une meilleure répartition de l'engrais dans le sol et une meilleure utilisation par la plante. Cette observation amène à s'interroger sur l'impact de la hauteur d'eau dans une raie d'irrigation sur la répartition des nitrates dans le sol.





## Chapitre 2

# Essais d'infiltration statique (Triki, 2002)

### 2.1 Enjeux de la campagne de mesures et de sa modélisation

En 2002, Triki a mené une série d'expériences visant à étudier le phénomène présenté lors de la campagne de 1999, relatif à l'impact de tirants d'eau élevés (Triki, 2002). L'objectif de cette étude était de mieux appréhender la dynamique des transferts dans cette situation afin de minimiser les risques environnementaux et les pertes de rendement. En effet, des reliquats d'azote en fin de saison culturale prouvent que la plante n'a utilisé qu'une partie de l'azote apporté. Dans un contexte d'apports d'engrais adaptés aux besoins de la plante, un défaut d'utilisation des nitrates par la culture peut réduire l'efficacité de l'azote. En fin de cycle cultural le résidu d'azote peut être lessivé en direction des nappes souterraines pendant la période hivernale. L'enjeu de cette étude est donc important.

Ces expériences ont été réalisées sur des raies de 1,5 m de longueur, alimentées chacune avec deux types de hauteur d'eau : une forte hauteur d'eau sur le site 1 (12 cm), une hauteur d'eau moyenne sur le site 2 (7 cm). Le protocole expérimental et l'analyse des résultats sont résumés dans (Mailhol et al., 2005a). Cet article est repris dans son intégralité en annexe B. Comme il est rappelé en introduction, les objectifs de la modélisation numérique grâce à HYDRUS-2D sont multiples. Elle apporte notamment des informations précieuses pour la compréhension des mécanismes de transferts, indispensables à la construction du modèle développé dans ce travail et permet de justifier la comparaison de ce modèle avec HYDRUS-2D.

### 2.2 Analyse des relevés expérimentaux

Les expériences menées par Triki confirment les conclusions de Nemeth rappelées dans le chapitre précédent. Dans les deux cas traités, l'homogénéisation du profil hydrique est réalisée 48 h après irrigation. Cette remarque peut être à nuancer dans les couches supérieures du sol (entre la

surface et une profondeur de 30 cm). Ces observations justifient l'utilisation d'un modèle de culture monodirectionnel pour proposer des bilans hydriques au cours de la saison culturale et des prévisions de rendement de la plante, dans une hypothèse de disponibilité de l'azote suffisante pour tout le cycle cultural. La dynamique des phénomènes de transferts hydriques est cependant difficile à rendre avec ce mode de représentation.

Concernant l'évolution des concentrations en nitrate, l'impact des différentes hauteurs d'eau est beaucoup plus visible. Sur le site 2, le stock d'azote sous la raie n'est que de  $55\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  alors qu'il est de  $72\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$  sous le billon. Dans le cas d'une hauteur d'eau importante, cette différence n'existe pas, les stocks après apport d'eau sous le billon et sous la raie sont pratiquement identiques et valent  $52\text{kg}\cdot\text{ha}^{-1}$ . Il est délicat de réaliser des bilans de masse dans ce contexte. Une représentation monodirectionnelle des phénomènes affiche ici ses limites. Bien que ces valeurs soient indicatives, elles permettent cependant de rendre compte des différences significatives entre les deux types de traitements. Cette différence est due à la différence d'eau appliquée qui induit une meilleure homogénéisation latérale sous fort tirant d'eau.

## 2.3 Simulation numérique de la saison culturale

La modélisation de ces expériences a été réalisée avec le code de calcul numérique HYDRUS-2D. Les relevés expérimentaux ainsi que les études antérieures réalisées sur le site de Lavalette (Mailhol, 2001; Muller, 2001) ont permis de caler les paramètres hydrodynamiques du modèle. Les phases d'irrigation et de redistribution ont dues être traitées séparément du fait de la forte différence des pas de temps nécessaires à la convergence de la résolution numérique. Les jeux de paramètres choisis permettent une bonne concordance entre teneur en eau du sol mesurées et simulées que ce soit dans le cas d'une irrigation ou d'une redistribution (voir article en annexe B). Les différences observées peuvent être attribuées aux incertitudes de mesures ou à l'apparition de flux préférentiels dans le sol que le modèle est incapable de prendre en compte.

La modélisation des transferts de solutés est plus complexe. De nombreux phénomènes entrent en jeu et contribuent ensemble à l'évolution du profil de concentration (voir la première partie du travail, paragraphe 2.3.2). Les imprécisions des mesures expérimentales et le nombre de paramètres à caler augmentent donc fortement. L'approche retenue pour réaliser la modélisation a été de considérer trois espèces en solution dans l'eau du sol (l'ammonium, les nitrites et les nitrates) et leurs coefficients d'adsorption et de dégradation ont été calés sur les mesures expérimentales en respectant la plage des valeurs utilisées dans la littérature (voir article en annexe B). La simulation reproduit effectivement la différence de profil d'azote entre les deux types de traitement, même si elle la sous-estime par rapport aux relevés expérimentaux. Ces écarts entre mesures et simulation peuvent avoir les mêmes origines : la difficulté de suivre expérimentalement la concentration en azote et les simplifications effectuées lors de la modélisation des transferts de solutés venant aggraver les erreurs introduites lors de la simulation des transferts hydriques.

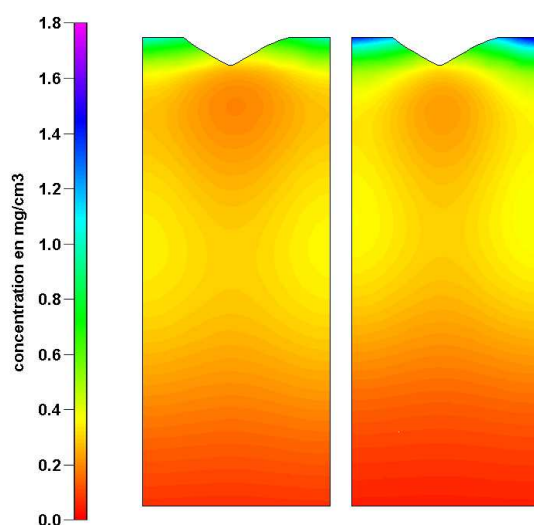


FIG. 2.3.1 – Simulation numérique de la concentration de nitrate sur les sites 1 (profil de gauche) et 2 (profil de droite) 13 jours après une irrigation

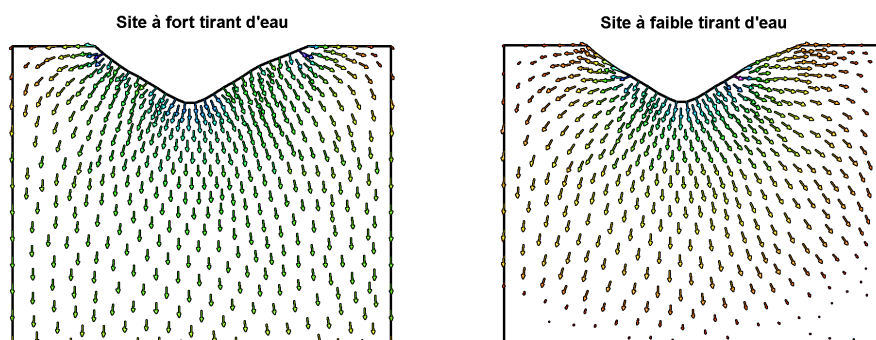


FIG. 2.3.2 – Simulation numérique du flux Darcien sur les sites 1 (profil de gauche) et 2 (profil de droite) après 2 h d'irrigation

La simulation numérique, si elle ne reproduit que de manière imparfaite les mesures expérimentales, apporte cependant des précisions que l'expérience est incapable de fournir directement. Une fois la concordance des mesures et des valeurs simulées réalisée au mieux, il est possible de suivre l'évolution de l'état du sol afin de mieux comprendre la dynamique des transferts mis en jeu ainsi que de donner les quantités d'eau drainée et d'azote lessivé au delà de la zone racinaire. Ces données sont particulièrement intéressantes car elles permettent d'évaluer les risques environnementaux pendant la saison culturale et prévoir ceux de la période hivernale. Dans le cas présenté dans l'article (Mailhol et al., 2005a), la simulation a été réalisée sur 13 jours pendant la saison de culture, le lessivage d'azote pendant cette période est faible. La simulation permet cependant de mieux appréhender l'impact des différentes hauteurs d'eau lors de l'irrigation. On observe ici que l'apport d'eau élevé pratiqué sur le site 1 homogénéise le profil de fertilisant de manière plus efficace

que dans le cas du site 2 (FIG. 2.3.1). Ce phénomène est dû à une intensité plus forte des flux latéraux en parties hautes des billons (FIG. 2.3.2), qui surviennent plus tôt au cours de l'irrigation. Pour réduire les différences d'homogénéisation observées en conservant les mêmes tirants d'eau, il aurait fallu augmenter la durée de l'irrigation du site 2, augmentant ainsi la quantité d'eau apportée et prolongeant de ce fait la présence d'un flux relativement important (même s'il est moins conséquent que celui du site 1) en parties hautes des billons. Si la tendance observée sur le site 2 demeure inchangée en fin de saison culturale (précipitations insuffisantes pour lessiver le nitrate en surface des billons), le reliquat de nitrate sera emporté par les pluies hivernales vers la nappe.

## Chapitre 3

# Etude expérimentale de deux types de pratiques culturales grâce à des cases lysimétriques

### 3.1 Présentation de la campagne d'expérimentations

Nous avons noté précédemment l'importance des quantités d'eau drainée et d'azote lessivée. Ces données peuvent être mesurées expérimentalement grâce à l'utilisation de cases lysimétriques. Ce lourd système expérimental permet d'isoler une portion de sol et de recueillir l'eau drainée sous la zone racinaire de la culture pour l'analyser (FIG. 3.1.1).

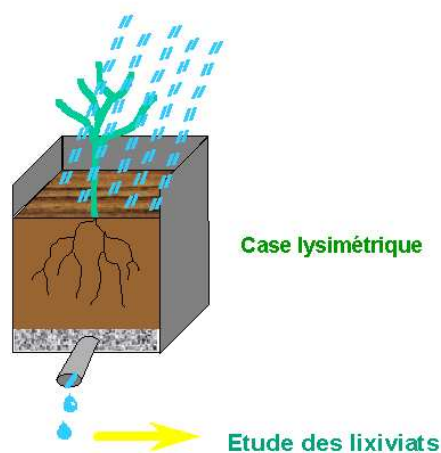


FIG. 3.1.1 – Schéma d'une case lysimétrique

L'institut des sciences du sol N. Poushkarov de Sofia (Bulgarie) a réalisé entre 1997 et 1999 des campagnes expérimentales visant à comparer la pratique de culture traditionnelle (celle décrite précédemment), notée EFI (every furrow irrigation) avec une pratique consistant à irriguer une raie sur deux et apporter l'engrais dans la raie sèche, notée AFI (alternative furrow irrigation). Cette technique de fertilisation permet, sous certaines conditions pedoclimatiques, de réaliser des économies d'eau et de réduire jusqu'à 30% le lessivage d'azote sans diminuer de façon significative le rendement de la culture (Benjamin et al., 1998; Popova et al., 1998). Dans le contexte du projet scientifique européen ECONET, nous avons repris l'analyse de ces résultats expérimentaux avec comme objectif une meilleure compréhension des transferts bidirectionnels eau-solutés en s'appuyant sur l'outil de modélisation (Popova et al., 2005a). Les éléments de cette collaboration sont repris en annexe C et dans ce chapitre.

## 3.2 Résultats expérimentaux

Ces expériences ont été menées en lysimètres sur un sol comportant trois couches : une première couche de type limono-argileuse jusqu'à une profondeur de 40 *cm*, une couche argileuse entre 40 et 70 *cm* et une dernière couche de texture plus grossière. Différentes techniques d'irrigation et de fertilisation ont été testées durant ces trois années d'expérimentations. Nous nous intéresserons principalement à la campagne de mesures réalisée en 1997 comparant les deux techniques d'irrigation EFI et AFI pour un même apport d'azote de  $250\text{kgN}\cdot\text{ha}^{-1}$ . Cet apport a été réparti ainsi : un premier apport avant la confection des raies de  $200\text{kgN}\cdot\text{ha}^{-1}$ , le reste avant la deuxième irrigation dans chaque raie pour la technique EFI, dans la raie sèche pour la technique AFI. Trois irrigations ont été réalisées pendant la saison en respectant un apport total d'eau égal entre les deux pratiques (dans le cas AFI, une raie sur deux étant utilisé, l'avancement du processus d'irrigation est moins rapide. A débit égal, il faut donc augmenter la durée d'irrigation de cette pratique pour atteindre un apport similaire à celui de la pratique EFI).

Ici encore les transferts latéraux ont un impact particulièrement marqué, et ce, même sur la répartition de l'eau dans le profil. En effet, l'homogénéisation du profil hydrique sur des raies espacées de 80 *cm*, comme il était question dans les expériences précédentes, est accélérée par la présence de plan de flux latéraux nul sous le billon. En général, deux raies successives reçoivent au même moment la même quantité d'eau, ce qui provoque l'apparition d'un plan de flux latéral nul à la rencontre des deux fronts d'humectation sous le billon. La variabilité des caractéristiques du sol et les techniques de traçage des sillons (Mailhol et al., 2005b) ont une influence majeure sur le processus d'avancement de l'eau à l'échelle de la parcelle. Il n'en reste pas moins vrai que l'écartement des raies joue un rôle important sur l'influence des flux latéraux. Ainsi, dans la pratique AFI, l'écartement entre deux raies irriguées est le double de celui de la pratique EFI. Les mesures expérimentales mettent en évidence ce phénomène. L'homogénéisation du profil du sol est en retard dans la pratique AFI sur la pratique EFI (voir annexes C).

Ce phénomène est confirmée également par la quantité d'eau drainée au delà de 2 *m*. L'augmentation de la durée d'irrigation de la pratique AFI pour égaler l'apport d'eau de la pratique EFI

au niveau de la parcelle est à l'origine d'un drainage plus important. Sur une période de 106 jours, le drainage dans la pratique AFI est de 20% de l'apport total d'eau (irrigations et précipitations), alors qu'il n'est que de 12% dans le cas EFI (Koutev et al., 1999). Cette situation entraîne sur cette même période un lessivage d'azote légèrement plus important dans la pratique AFI ( $9,2 \text{ kgN.ha}^{-1}$  contre  $6 \text{ kgN.ha}^{-1}$  dans la pratique EFI). Ces mesures vont donc à l'encontre de l'utilisation de la pratique AFI dans les conditions pédoclimatiques de la campagne. En effet, le type de sol sur lequel ont été réalisés les expériences a une capacité de rétention d'eau relativement faible et le sol, peu humide du fait d'une saison de culture qui a bénéficié de peu de précipitations, a favorisé davantage un drainage important.

### 3.3 Intérêt de la modélisation numérique

Les connaissances acquises grâce à ces données expérimentales ont également pu être complétées par des outils de modélisation. L'article en annexe C présente la mise en place et les résultats de la simulation numérique HYDRUS-2D concernant les transferts hydriques. Le domaine d'étude a été borné latéralement par les plans de flux nul. Dans le cas de la pratique EFI, il consiste en une demi raie (la raie étant considérée comme symétrique, l'axe de la raie un plan de flux nul), dans le cas AFI, le domaine d'étude s'étend entre les axes de deux raies consécutives. Verticalement, il est borné en surface par une condition atmosphérique (permettant de traiter les précipitations et la transpiration du sol), remplacée par une condition de charge sur la surface humidifiée lors d'une irrigation. La frontière inférieure du domaine est une condition de drainage libre. La structure du sol en trois couches a été reproduite en adaptant les caractéristiques hydrodynamiques aux mesures en laboratoires et aux champs. Les profils en humidité et en concentration d'azote ont été initialisés sur les mesures réalisées après la première précipitation suivant le traçage des raies. On a supposé qu'à cette date, la durée depuis l'apport (40 jours) et la quantité d'eau reçue par le sol (37 mm), étaient suffisantes pour dissoudre totalement le fertilisant appliqué sous forme de granulés dans l'eau du sol.

Concernant les transferts hydriques, les concordances entre modèle et mesure sont satisfaisantes. La différence notable entre raie sèche et raie humide est également bien rendue, ainsi que la quantité d'eau drainée dans les deux pratiques. Le décalage observé peut être de l'ordre de la journée entre l'évolution des profils mesurés et simulés, probablement dus à l'existence de flux préférentiels. Qualitativement, les transferts d'eau simulés sont cependant proches de ceux mesurés. Ceci permet de valider l'utilisation d'HYDRUS-2D pour représenter les transferts hydriques bidirectionnels dans des pratiques d'irrigation relativement complexes. Ce type de modélisation pourra ensuite être reprise et permettre de tester l'impact de cette technique d'irrigation et de fertilisation sous d'autres conditions climatiques par exemple.

Cette modélisation des transferts de solutés s'est heurtée à plusieurs difficultés : la durée de la simulation entreprise et les propriétés du sol étudié, caractérisé par un taux de production d'ammonium important. Afin de limiter les paramètres à caler avec HYDRUS-2D sur ce type de simulation, nous avons choisi de ne représenter que l'évolution des nitrates dans le profil, contrairement aux simulations réalisées précédemment. La production des nitrates provenant de la dégradation de

l'ammonium et d'autres réactions biochimiques (voir chapitre 2.3.2) a été calée tout au long de la simulation grâce aux mesures effectuées. L'ammonium étant peu mobile (Mishra and Misra, 1993; Nemeth, 2001) et n'étant pas absorbé par la plante, sa répartition dans le sol évolue moins rapidement que celle des nitrates. Nous avons donc défini sommairement (afin de ne pas multiplier le nombre de paramètres à caler) des zones dans le domaine simulé en fonction de la concentration en ammonium et des conditions d'aération du sol. Sur chacune de ces zones, un coefficient de production de nitrate a été calé sur les résultats expérimentaux. Cette technique peut être critiquable car elle nuit à la reproductibilité de la simulation sur d'autres sols. Elle est cependant efficace pour tester d'autres scénarii d'irrigation sur le même sol. Elle permet également d'obtenir des résultats corrects et ce en devant réaliser le calage d'un faible nombre de paramètres. Ces résultats de simulation sont reproduits dans (Popova et al., 2005b) et sur les figures suivantes, présentant la concentration en nitrate le 20 juillet - (D)ay (O)f the (Y)ear 202 - 3 jours après une irrigation et le 25 septembre - DOY268 - avant la récolte.

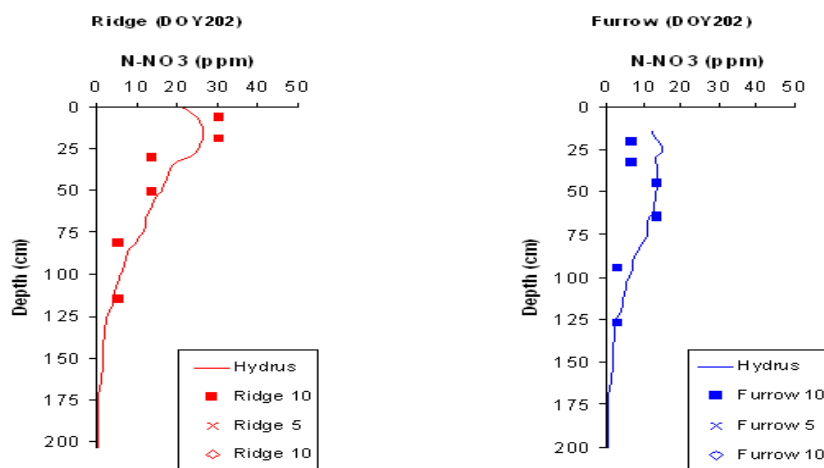


FIG. 3.3.1 – Concentration de nitrate le 20 juillet après une irrigation, sous le billon (ridge) et la raie (furrow) dans la pratique EFI

On peut remarquer, sur ces figures représentant la concentration en nitrate après une irrigation, que la technique utilisée pour limiter la complexité des phénomènes à représenter est globalement efficace. La simulation de l'évolution des solutés sous la raie humide sous-estime le lessivage de nitrate sous la pratique AFI. Là encore, des flux préférentiels ont pu apparaître et accélérer le lessivage. L'hétérogénéité en surface du profil de nitrate est cependant bien rendu et la simulation reproduit l'hétérogénéité plus forte encore dans la pratique AFI.

La simulation a été menée jusqu'à quelques jours avant la récolte, de nombreuses données disponibles permettant de contrôler la validité de la simulation jusqu'à cette période. L'état du sol à cette date permet de prévoir les risques de lessivage pendant la période hivernale. On peut tout d'abord noter la forte variabilité des mesures illustrée par la FIG. 3.3.3. Dans ce cas, deux séries de ces mesures ont été effectuées sur deux raies distantes de quelques mètres et soumises au même type de fertilisation et d'irrigation, une troisième série a été effectuée à un emplacement plus en



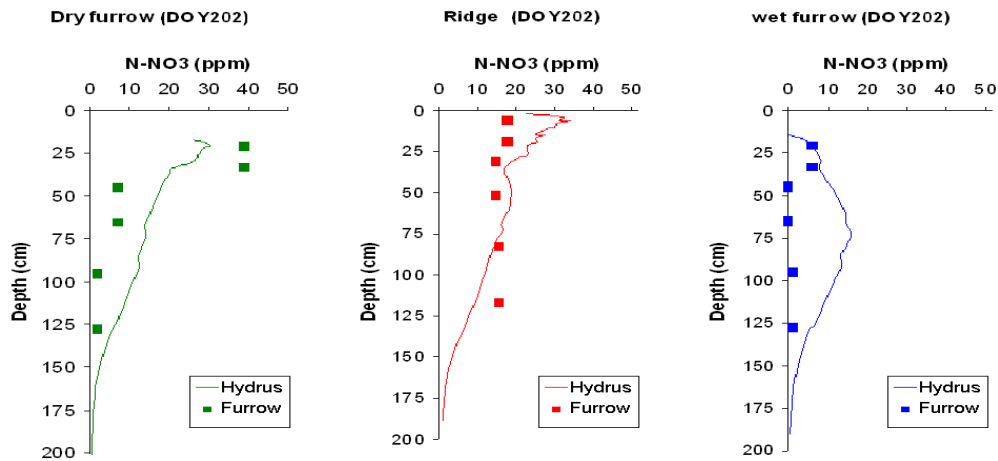


FIG. 3.3.2 – Concentration de nitrate le 20 juillet après une irrigation, sous la raie sèche (dry furrow), le billon (ridge) et la raie humide (wet furrow) dans la pratique AFI

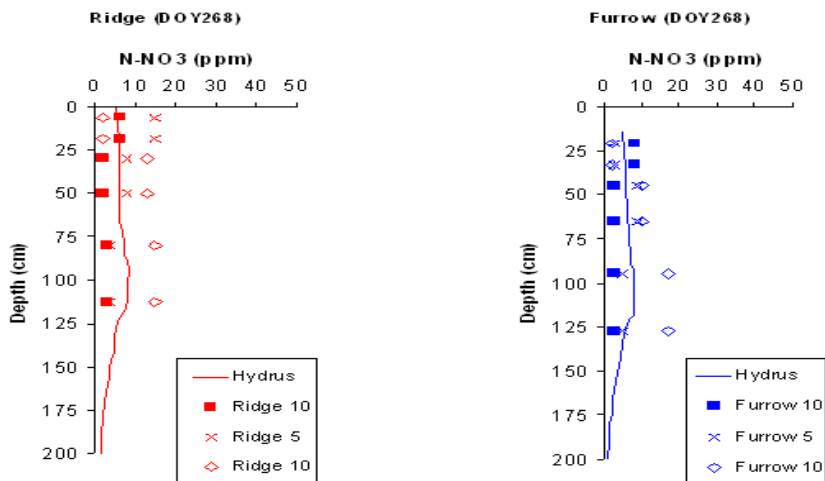


FIG. 3.3.3 – Concentration de nitrate en fin de saison de culture, sous le billon (ridge) et la raie (furrow) dans la pratique EFI

amont d'une de ces deux raies d'irrigation. L'observation de la FIG. 3.3.3 et la FIG. 3.3.4 montre que, sous les conditions climatiques particulières de l'année 1997, le stock d'azote en fin de saison culturale est globalement équivalent dans les deux pratiques étudiées. Sa répartition dans la zone racinaire reflète cependant la différence de pratique utilisée. La pratique AFI où l'apport d'eau sur chaque raie irriguée a été important a favorisé le lessivage du profil.

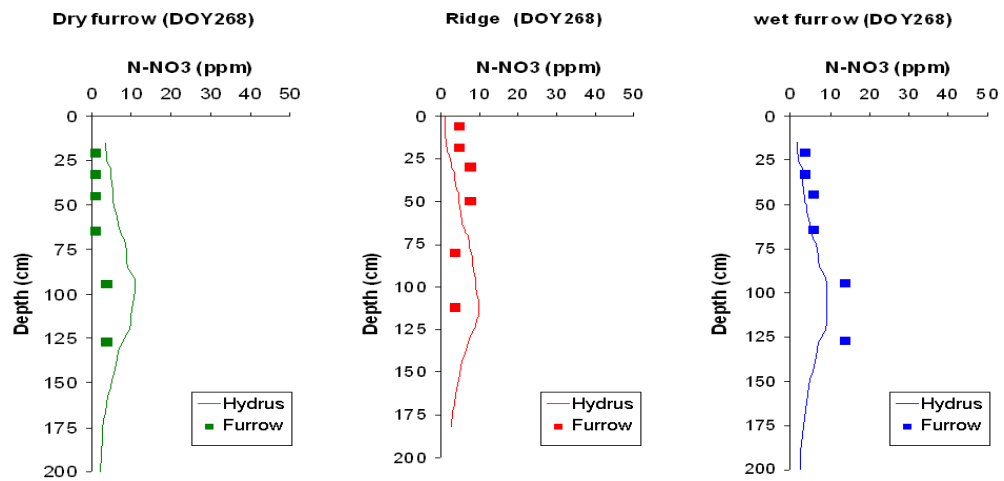


FIG. 3.3.4 – Concentration de nitrate en fin de saison de culture, sous la raie sèche (dry furrow), le billon (ridge) et la raie humide (wet furrow) dans la pratique AFI

## Chapitre 4

# Expérimentations en micro-irrigation

### 4.1 Intérêt des relevés expérimentaux dans le contexte de l'étude

En irrigation à la raie, un bilan hydrique monodirectionnel est suffisant pour décrire l'état général du sol à l'échelle d'une saison, les transferts bidirectionnels ne sont importants que pour une représentation événementielle. C'est la forte hétérogénéité du profil de nitrate due à la pratique de fertilisation qui impose une description plus précise de ces transferts. En micro-irrigation, la source de l'eau qui entre dans le domaine est quasi ponctuelle et représente l'origine de la distribution de l'eau dans la totalité du domaine. L'évolution du profil hydrique dans ces conditions ne peut être représentée que par une description bi- ou tridirectionnelle de la dynamique des transferts. Cette remarque est à nuancer en fin d'irrigation lorsque celle-ci est excédentaire. Les systèmes utilisés au champ étant constitués d'un réseau de sources de distribution d'eau, les bulbes humides de deux sources consécutives se rencontrent et provoquent la création d'un plan de flux latéral nul. Dans ce cas, les flux verticaux redeviennent prédominants, notamment lorsque les lignes de culture sont faiblement espacées (cultures maraîchères, tomates de plein champ).

Ce chapitre présente quelques caractéristiques de la micro-irrigation mises en évidence par l'expérience et l'intérêt de la modélisation pour améliorer cette technique et réduire les risques environnementaux qui y sont liés. Nous nous fonderons, pour réaliser ces objectifs, sur plusieurs articles présentant des expériences en laboratoire ou sur site, ainsi qu'une modélisation HYDRUS-2D sur les conséquences de différentes pratiques de fertilisation en micro-irrigation sur l'état du sol et l'environnement.

### 4.2 Transferts tridirectionnels de l'eau en goutte à goutte

La micro-irrigation est une irrigation localisée. Contrairement à l'irrigation à la raie, qui est difficilement reproductible en laboratoire sans un lourd dispositif expérimental, il est possible de suivre en laboratoire un événement de micro-irrigation. Les relevés expérimentaux réalisés en laboratoire ont pour objectifs de contrôler les phénomènes participant à l'évolution du profil hydrique, comme l'homogénéité du milieu, le débit effectif appliqué en surface et les conditions climatiques,

alors que ceux réalisés au champ vise à tester une technique dans des conditions réelles d'utilisation.

Une première approche pour suivre l'évolution du profil hydrique en goutte à goutte (technique de micro-irrigation consistant à apporter l'eau à l'aide d'un goutteur en surface) est de suivre l'évolution de la tâche humide visible au cours de l'irrigation. Cette approche à l'avantage d'être facilement réalisable en laboratoire comme au champ. La FIG. 4.2.1 montre l'évolution du rayon moyen de la tâche humide, ainsi que celui de la zone saturée, la FIG. 4.2.2 illustre quant à elle l'évolution de la tâche humide au cours de l'irrigation.

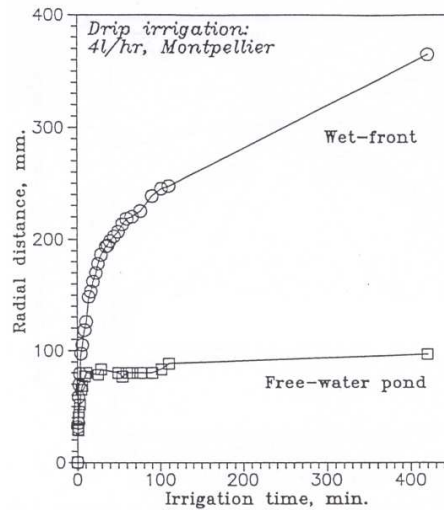


FIG. 4.2.1 – Evolution des rayons moyens de la zone saturée et du front d'humectation - figure tirée de (Revol et al., 1991)

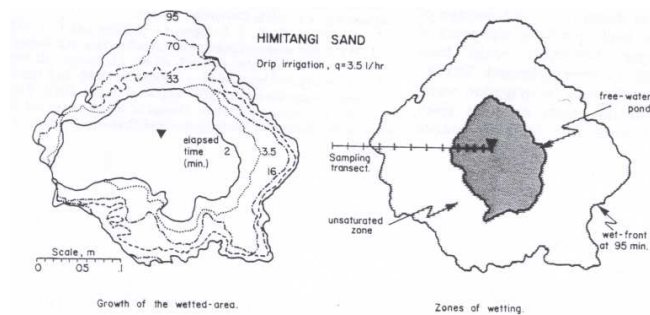


FIG. 4.2.2 – Evolution de la tâche humide - figure tirée de (Clothier et al., 1985)

Ces deux figures sont issues de relevés réalisés au champ, la première a été réalisée sur le site de Lavalette (voir chapitre 1.1.1) pour un débit de  $4\text{ L.h}^{-1}$ , la seconde sur un sable fin pour un débit de  $3,5\text{ L.h}^{-1}$ . Sur ces deux figures on peut noter qu'en surface, les fronts de saturation et d'humectation atteignent rapidement un état stationnaire, conformément aux recherches menées sur le sujet (Raats, 1971; Wooding, 1968; Philip and Knight, 1974; Revol, 1994). La FIG. 4.2.2

met également en évidence la difficulté du passage entre expérience sur site et modélisation, la topographie du terrain et son hétérogénéité apparaissent de manière flagrante dans cette figure.

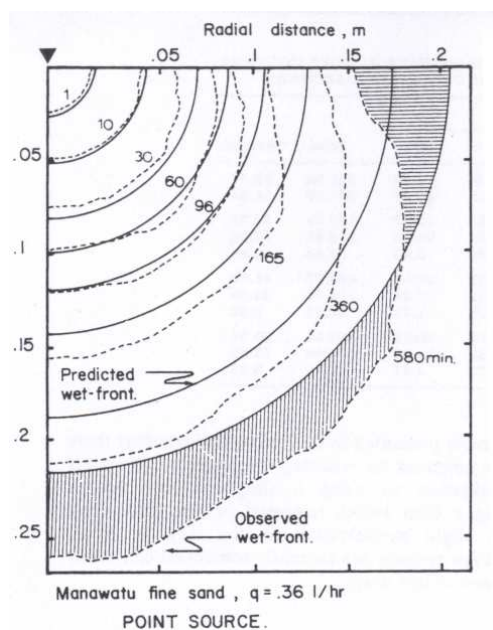


FIG. 4.2.3 – Evolution du bulbe humide dans une section du champ - figure tirée de (Clothier et al., 1985)

Un moyen de contrôler au mieux ces phénomènes qui perturbent la comparaison entre expérience sur site et modélisation est de réaliser les mesures en laboratoire sur le même type de sol, la FIG. 4.2.3 permet de comparer ces mesures avec une solution analytique (Clothier et al., 1985) prédisant l'évolution du bulbe humide. Cette résolution analytique est fondée sur une hypothèse d'effets gravitaires négligeables dont l'impact est visible sur la figure. On peut en effet remarquer que sur des durées courtes (inférieures à 100 min) le modèle analytique utilisé restitue de manière satisfaisante le profil mesuré, cependant, il est incapable de rendre compte de l'évolution du bulbe humide pour des durées supérieures, les effets gravitaires devenant trop importants. Cette observation rend nécessaire le passage à un modèle plus complexe pouvant représenter une plus grande variété de situations.

### 4.3 Transferts tridirectionnels de soluté en micro-irrigation

Ce paragraphe exploite des simulations HYDRUS-2D concernant le test de différentes pratiques de fertilisation en micro-irrigation sur différents type de sols (Gärdenäs et al., 2005). Ces simulations numériques permettent de définir pour chacune des pratiques les risques environnementaux et la disponibilité du fertilisant pour la plante en fonction des caractéristiques générales d'un sol.

Trois types de sol ont été testés : limono-sableux (sandy loam), limoneux (loam), limono-argileux (silty-clay). Ce choix permet de rassembler un large panel de sol pour lesquels la micro-irrigation est utilisée. Les simulations ont été réalisées avec une condition initiale en azote nulle sur une période de 28 jours. Les doses apportées ont été introduites conformément aux recommandations agronomiques. La FIG. 4.3.1 schématise les quatre manières différentes dont les apports ont été répartis sur la durée de chaque cycle d'irrigation. Les concentrations de chaque apport ont été calculées afin de fournir à la plante la même quantité de fertilisant dans chaque scénario. Les systèmes de distribution comparés sont au nombre de quatre. Nous allons cependant uniquement présenter sur la FIG. 4.3.2 les résultats obtenus dans le cas du goutte à goutte, le but étant ici d'illustrer l'intérêt d'une telle modélisation dans l'objectif de limiter les risques environnementaux.

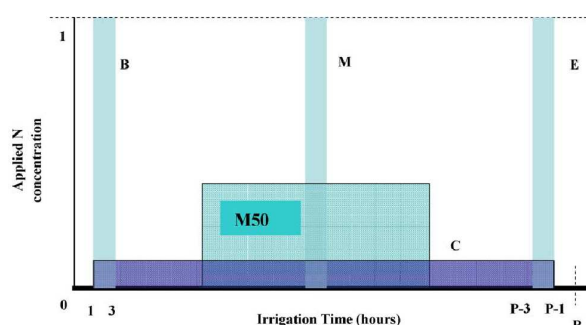


FIG. 4.3.1 – Cinqu stratégies différentes de fertigation ( $P$  représente en  $h$  la durée d'un cycle d'irrigation) - figure tirée de (Gärdenäs et al., 2005)

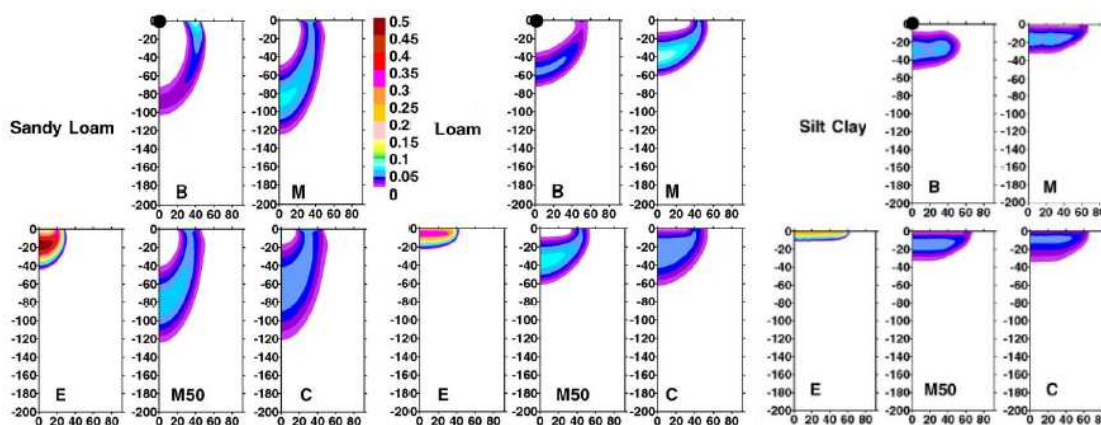


FIG. 4.3.2 – Profils de nitrate après un cycle d'irrigation au goutte à goutte - figure tirée de (Gärdenäs et al., 2005)

Les cultures irriguées en micro-irrigation ont un système racinaire dont la densité maximale est à faible profondeur. Dans les cas illustrés par la FIG. 4.3.2, cette profondeur est de l'ordre de 50  $cm$ . Le nitrate lessivé doit donc prendre en compte le nitrate qui sort du domaine de la simulation ainsi

que la quantité d'azote stockée sous cette profondeur. Le principe d'une fertigation efficace est d'apporter le fertilisant dans la zone racinaire en respectant un taux inférieur à celui que la plante est capable d'absorbée. Ainsi, on peut formuler plusieurs observations après l'analyse des résultats de la simulation. De manière évidente, les risques de lessivage sont accrus sur un sol à texture grossière, comme le sol limono-sableux, dans tous les scénarii de fertigation (mis à part le scénario E). L'azote apporté peut dépasser rapidement la zone racinaire, et celui-ci est perdu pour la plante. On peut noter également que la technique C, apportant une faible dose de fertilisant pendant toute la durée d'irrigation présente l'intérêt de diffuser le nitrate de manière homogène dans la zone racinaire alors que l'apport d'une forte dose d'azote en début d'irrigation (technique B) crée une forte hétérogénéité du profil azoté. Ces deux dernières techniques favorisent cependant le lessivage de l'azote apporté en début de cycle par un flux hydrique qui demeure important pendant le reste de la période d'irrigation. La méthode E produit le phénomène inverse, l'azote apporté reste concentré en surface et la redistribution de l'eau jusqu'au prochain cycle d'irrigation permettra de le diffuser dans le domaine. Sa forte concentration peut cependant être plus importante que la capacité d'absorption des racines.

Cette simulation illustre l'intérêt d'une modélisation des pratiques de fertigation en micro-irrigation. Selon la profondeur du système racinaire des cultures et le type de sol, on peut définir la pratique qui favorisera le moins le lessivage et permettra de rendre le fertilisant disponible dans la zone racinaire. Même si peu de mesures ont été effectuées pour valider cette simulation (Gårdenäs et al., 2005) et qu'aucune n'ont été présentée ici, HYDRUS-2D a été validé dans d'autres circonstances, plus haut dans ce document, ainsi que par (Mailhol et al., 2001; Mailhol et al., 2005a; Abbasi et al., 2003) sur des campagnes d'irrigation à la raie et par (Assouline, 2002) dans le cas de la micro-irrigation.





# Conclusion de la partie

Ce chapitre a présenté plusieurs campagnes de mesures qui ont permis de suivre l'évolution de l'état du sol, quant à sa teneur en eau et en azote, à l'échelle de la saison de culture. Ces campagnes, complétées par des simulations numériques, ont permis de préciser la connaissance des mécanismes de transferts eau-solutés mis en jeu dans le contexte de l'étude. Différents systèmes de distribution d'eau et de fertilisant ainsi que différentes pratiques culturales ont été étudiés. Dans chacune d'entre elles, l'importance des transferts bi- ou tridirectionnels est avérée. En irrigation à la raie, ils conditionnent l'homogénéisation d'un profil initial d'azote particulièrement hétérogène, ce profil étant du à la technique de fertilisation combiné au traçage des raies d'irrigation. En micro-irrigation, le principe même des systèmes de distribution impose une représentation tridirectionnelle des transferts. Les transferts latéraux sont particulièrement importants en début de l'irrigation créant parfois des profils hétérogènes de nitrate (dans des cas particuliers de fertigation). Ainsi, la représentation tridirectionnelle des transferts doit être conservé même pour la redistribution de l'azote.

L'utilisation d'HYDRUS-2D pour représenter l'évolution de l'état du sol a été validée sur les campagnes de mesures présentées dans cette partie. Si la concordance entre mesures et simulations n'est pas toujours exacte, HYDRUS-2D permet dans tous les cas de décrire qualitativement les processus se produisant dans le sol. Il représente donc un outil fiable pour comparer différentes pratiques culturales à l'échelle événementielle. En revanche, n'étant pas couplé à un modèle de culture et étant peu opérationnel pour simuler cette pratique à l'échelle de la saison, un modèle mieux adapté doit être développé et HYDRUS-2D constituera la référence pour comparer ce nouveau modèle à l'échelle événementielle.



Troisième partie

Développement d'outils  
mathématiques et algorithmiques  
nécessaires à la modélisation



# Introduction de la partie

La première partie de ce mémoire a permis de dresser l'état de l'art des modélisations existantes concernant le suivi du profil hydrique et du profil de concentration des solutés dans le sol. L'objectif de cette partie était de confronter ces différents types de modélisations, d'analyser leurs avantages et leurs inconvénients dans le contexte de l'étude actuelle. Celle-ci repose sur une représentation bidirectionnelle des transferts et doit être capable de gérer la prise en compte d'événements dont les pas de temps varient entre l'heure et la journée.

Le but de la deuxième partie a été d'analyser des jeux de données expérimentales mis à disposition. Cette analyse a permis de comprendre les processus physiques mis en jeu lors de l'infiltration et de la redistribution de l'eau et des solutés dans un sol irrigué. Une modélisation numérique sur ces jeux de données a permis de détailler ces processus afin d'en améliorer leur compréhension.

A la lumière de ces deux premières parties, l'étude s'est dirigée vers une modélisation bidirectionnelle basée sur la résolution analytique ou semi-analytique des équations de transferts. Ce type de modélisation permet ainsi de représenter les profils recherchés sur des bases mécanistes sans tenir compte d'une discrétisation temporelle contraignante.

Le choix de cette modélisation entraîne cependant un développement mathématique important. Des outils mathématiques doivent donc être introduits. Ils sont essentiels à la justification de l'orientation du travail vers ce choix. Des outils algorithmiques sont également utilisés afin de simplifier la représentation analytique de la solution des équations de transferts. Cette partie rassemble ici ces différents éléments afin de consacrer la partie suivante uniquement aux principes généraux de la modélisation développée. Les calculs symboliques de cette partie ont été réalisés à l'aide d'un logiciel de calcul formel et le langage de programmation FORTRAN90 a permis de valider les développements algorithmiques, d'évaluer et de visualiser les résultats.



# Chapitre 1

## L'utilisation de la fonction de Green dans la résolution d'équations aux dérivées partielles

### 1.1 Principes généraux de la fonction de Green

La fonction de Green porte le nom du mathématicien britannique George Green qui développa le premier ce concept dans les années 1830. Il s'agit d'une fonction utilisée pour résoudre, sur un domaine  $\Omega$  de dimension  $n$ , une équation aux dérivées partielles (EDP) en la fonction  $\Psi$  représentée par l'opérateur différentiel linéaire  $L$  (1.1.1) et soumise à un ensemble de conditions aux limites sur la frontière du domaine  $\delta\Omega$ , elles-mêmes représentées par l'opérateur  $D$  (1.1.2).

$$(L\Psi) = f \quad \text{sur } \Omega \quad (1.1.1)$$

$$(D\Psi) = 0 \quad \text{sur } \delta\Omega \quad (1.1.2)$$

La fonction de Green  $G : (U, U_s) \in \Omega^2 \rightarrow G(U, U_s) \in \mathbb{R}$  d'un opérateur différentiel linéaire  $L$  est solution de l'équation (1.1.3) ( $\delta$  étant la distribution de Dirac) vérifiant les conditions aux limites (1.1.4).

$$(LG)(U, U_s) = \delta(U - U_s) \quad (1.1.3)$$

$$(DG)(U, U_s) = 0 \quad (1.1.4)$$

Selon l'opérateur  $L$ ,  $G$  n'est pas toujours unique. Notons également que  $G$  est en général une distribution. Elle ne peut donc pas être représentée dans ce cas par une fonction même discontinue. Elle joue un rôle analogue dans la résolution des EDP à l'analyse de Fourier dans la résolution des équations différentielles ordinaires. La solution de l'EDP considérée est alors l'intégrale du produit de la fonction de Green  $G$  et de la fonction  $f$  (1.1.5).

$$\Psi(U) = \int_{\Omega} f(U_s)G(U, U_s)dU_s \quad (1.1.5)$$

Ces principes généraux sont développés en détail notamment par (Garabedian, 1964) ou (Arfken, 1985).

## 1.2 Utilisation de la fonction de Green sur l'équation de diffusion pure

### 1.2.1 Domaine quelconque

L'utilisation de la fonction de Green est un moyen de résoudre l'équation de diffusion pure 1.2.1 sur un domaine et pour des conditions aux limites quelconques (Carslaw and Jaeger, 1956), (Crank, 1956). Ici, le domaine  $\Omega$  introduit dans le cas général est constitué d'un domaine de dimension  $d = n - 1$  auquel appartiennent les variables d'espace (représentées par le vecteur  $\chi$ ) et d'un domaine de dimension 1 auquel appartient la variable de temps  $t$ .

$$\partial_t \Psi = \nabla^2 \Psi \quad \text{sur } \Omega_{\chi} \quad (1.2.1)$$

$$\Psi = \Psi_{CI} \quad \text{pour } t = 0 \quad (1.2.2)$$

$$a\partial_{\vec{n}}\Psi + b\Psi = \Gamma_{CL} \quad \text{sur } \delta\Omega_{\chi} \quad (1.2.3)$$

$$(1.2.4)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \Omega &= \Omega_{\chi} \times \mathbb{R}^+ \\ U &= (\chi, t) \\ \chi &= (\chi_i)_{i=1,d} \end{cases}$$

Selon le type de résolution, le vecteur  $\chi$  sera égal à  $(x)$ ,  $(x, z)$  ou  $(x, y, z)$  et  $d$  à 1, 2 ou 3 respectivement pour une résolution mono-, bi- ou tridirectionnelle. Notons que l'écriture  $\nabla^2 \Psi$  désigne le laplacien  $\sum \partial_{\chi_i}^2 \Psi$ , que  $\vec{n}$  est le vecteur normal à la frontière orienté vers l'extérieur.

En intégrant  $\partial_{t_s}(\Psi G)$  en temps et en espace et en utilisant le fait que  $G$  et  $\Psi$  sont solutions de l'équation de diffusion, on obtient

$$\int_0^t \oint_{\Omega_{\chi}} \partial_{t_s}(\Psi(U_s)G(U, U_s)) d\chi_s dt_s = \int_0^t \oint_{\Omega_{\chi}} (G(U, U_s)\nabla^2 \Psi(U_s) - \Psi(U_s)\nabla^2 G(U, U_s)) d\chi_s dt_s \quad (1.2.5)$$



La fonction de Green vérifie l'EDP soumis à des conditions aux limites nulles et a comme propriété  $\oint_{\Omega_x} G = 1$ . Après avoir appliqué le théorème de Green, généralisation à la dimension  $d$  de l'intégration par partie, l'équation (1.2.5) mène à la solution (1.2.6) pour  $a \neq 0$  et à la solution (1.2.7) pour  $b \neq 0$ . Notons que dans le cas  $a \neq 0$  et  $b \neq 0$  les deux écritures sont valables. Même si ces deux constantes n'apparaissent pas dans les écritures suivantes, leur influence sur la solution est alors représenté par  $\Gamma_{CL}$  et par la forme de la fonction de Green vérifiant l'EDP.

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, t) = & \oint_{\Omega_x} [G(U, U_s)]_{t_s=0} \Psi_{CI}(\chi_s) d\chi_s \\ & + \int_0^t \oint_{\delta\Omega_x} \left[ \frac{G(U, U_s)}{a} \right]_{\chi_s \in \delta\Omega_x} \Gamma_{CL}(\chi_s \in \delta\Omega_x, t_s) d\chi_s dt_s \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

$$\begin{aligned} \Psi(\chi, t) = & \oint_{\Omega_x} [G(U, U_s)]_{t_s=0} \Psi_{CI}(\chi_s) d\chi_s \\ & + \int_0^t \oint_{\delta\Omega_x} \left[ \frac{\partial_{\vec{n}} G(U, U_s)}{b} \right]_{\chi_s \in \delta\Omega_x} \Gamma_{CL}(\chi_s \in \delta\Omega_x, t_s) d\chi_s dt_s \end{aligned} \quad (1.2.7)$$

Ces écritures sont analytiques. Cependant, selon la valeur des conditions initiales et aux limites ainsi que celle de la fonction de Green, ces solutions sont rarement explicites. Elles ne peuvent donc être exploitables que dans certains cas simples.

## 1.2.2 Domaine bidirectionnel semi-infini

Dans le cas d'un domaine infini  $\mathbb{R}^d$  avec  $U = ((\chi_i)_{i=1,d}, t)$ , la fonction de Green a la forme de la gaussienne suivante

$$G(U, U_s) = \prod_{i=1}^d \left( \frac{1}{\sqrt{4\pi(t-t_s)}} e^{-\frac{(\chi_i - \chi_{is})^2}{4(t-t_s)}} \right) \quad (1.2.8)$$

On se place désormais sur un domaine bidirectionnel semi-infini  $\mathbb{R} \times [0, \infty[$ , la droite d'équation  $z = 0$  est donc la seule frontière fermée du domaine. Dans ce cas, la fonction de Green est une combinaison linéaire de la gaussienne (1.2.8). En choisissant des conditions initiales et aux limites sous des formes particulières, la solution peut devenir explicite. Deux types de conditions aux limites sont étudiées, une condition aux limites de type Dirichlet (1.2.9) ou de type Cauchy (1.2.10).

$$\Psi(\chi, t) = \Psi_{CL}(\chi, t) \quad \chi \in \delta\Omega_x \quad (1.2.9)$$

$$\partial_{\vec{n}} \Psi(\chi, t) + b\Psi(\chi, t) = q_{CL}(\chi, t) \quad \chi \in \delta\Omega_x \quad (1.2.10)$$

Les fonctions de Green associées  $G_h$  (1.2.11) pour une condition aux limites de type Dirichlet et  $G_f$  (1.2.12) pour une condition aux limites de type Cauchy sont les suivantes

$$G_h(U, U_s) = \frac{1}{4\pi(t-t_s)} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} \left( e^{-\frac{(z-z_s)^2}{4(t-t_s)}} - e^{-\frac{(z+z_s)^2}{4(t-t_s)}} \right) \quad (1.2.11)$$

$$\begin{aligned} G_f(U, U_s) &= \frac{1}{4\pi(t-t_s)} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} \left( e^{-\frac{(z-z_s)^2}{4(t-t_s)}} + e^{-\frac{(z+z_s)^2}{4(t-t_s)}} - 2e^{z_s} \int_{z_s}^{\infty} e^{-\left(\lambda + \frac{(z+\lambda)^2}{4(t-t_s)}\right)} d\lambda \right) \\ &= \frac{1}{4\pi(t-t_s)} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} \left( e^{-\frac{(z-z_s)^2}{4(t-t_s)}} + e^{-\frac{(z+z_s)^2}{4(t-t_s)}} \right) \\ &\quad - e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} e^{(z+z_s+t-t_s)} \operatorname{erfc} \left( \frac{z+z_s}{\sqrt{4(t-t_s)}} + \sqrt{t-t_s} \right) \end{aligned} \quad (1.2.12)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \operatorname{erfc}(v) &= 1 - \operatorname{erf}(v) \\ \operatorname{erf}(v) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^v e^{-\tilde{v}^2} d\tilde{v} \end{cases}$$

### 1.2.3 Domaine tridirectionnel semi-infini

On se place désormais sur un domaine tridirectionnel. Le volume considéré est le volume semi-infini  $\mathbb{R}^2 \times [0, \infty[$  et la frontière du domaine est ici la surface d'équation  $z = 0$ . Une solution explicite à l'équation de diffusion pure existe également en choisissant des conditions initiales et aux limites adaptées de la même manière que dans le cas bidirectionnel. Nous considérons ici le même type de conditions aux limites que précédemment. La fonction de Green est la même que dans le cas précédent en ajoutant uniquement une composante en la variable  $y$ . Comme la composante  $y$  ne contient aucune frontière fermée, la fonction de Green devient  $G_h$  (1.2.13) et  $G_f$  (1.2.14) respectivement pour une condition aux limites de type Dirichlet et Cauchy

$$G_h(U, U_s) = \frac{1}{8(\pi(t-t_s))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} e^{-\frac{(y-y_s)^2}{4(t-t_s)}} \left( e^{-\frac{(z-z_s)^2}{4(t-t_s)}} - e^{-\frac{(z+z_s)^2}{4(t-t_s)}} \right) \quad (1.2.13)$$

$$\begin{aligned} G_f(U, U_s) &= \frac{1}{8(\pi(t-t_s))^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} e^{-\frac{(y-y_s)^2}{4(t-t_s)}} \left( e^{-\frac{(z-z_s)^2}{4(t-t_s)}} + e^{-\frac{(z+z_s)^2}{4(t-t_s)}} \right) \\ &\quad - e^{-\frac{(x-x_s)^2}{4(t-t_s)}} e^{-\frac{(y-y_s)^2}{4(t-t_s)}} e^{(z+z_s+t-t_s)} \operatorname{erfc} \left( \frac{z+z_s}{\sqrt{4(t-t_s)}} + \sqrt{t-t_s} \right) \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

### 1.2.4 Expression d'une solution à variables séparables

Les deux cas particuliers cités plus haut permettent de définir une fonction de Green bi- ou tridirectionnelle qui a la propriété très importante d'être à variables spatiales séparables, c'est à dire de répartir les dépendances en les variables spatiales de la manière suivante  $G(U, U_s) = \prod_{i=1}^d G_{\chi_i}(\chi_i, t, \chi_{si}, t_s)$ . En choisissant le même type de propriété sur les conditions initiales ( $\Psi_{CI}(\chi) = \prod_{i=1}^d \Psi_{CI\chi_i}(\chi_i)$ ) et sur les conditions aux limites ( $\Gamma_{CL}(\chi, t) = \prod_{i=1}^d \Gamma_{CL\chi_i}(\chi_i, t)$ ), on peut réécrire les solutions de l'équation de diffusion pure comme produits d'intégrales, plus rapides et plus simples à évaluer. Dans le cas  $d = 2$  par exemple où la frontière est la droite d'équation  $z = 0$ , les solutions (1.2.6) et (1.2.7) s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} [G_x(x_s, 0, x, t) \Psi_{CIx}(x_s)] dx_s \int_0^{\infty} [G_z(z_s, 0, z, t) \Psi_{CIz}(z_s)] dz_s \\ & + \int_0^t \left[ \frac{1}{a} G_z(0, t_s, z, t) \Gamma_{CLz}(0, t_s) \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x_s, t_s, x, t) \Gamma_{CLx}(x_s, t_s) dx_s \right] dt_s \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} \Psi(x, z, t) = & \int_{-\infty}^{\infty} [G_x(x_s, 0, x, t) \Psi_{CIx}(x_s)] dx_s \int_0^{\infty} [G_z(z_s, 0, z, t) \Psi_{CIz}(z_s)] dz_s \\ & + \int_0^t \left[ \frac{1}{b} \partial_z G_z(0, t_s, z, t) \Gamma_{CLz}(0, t_s) \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x_s, t_s, x, t) \Gamma_{CLx}(x_s, t_s) dx_s \right] dt_s \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

La première partie de la somme composant la solution est à variables séparables. La seconde ne l'est pas tout à fait à cause de l'intégration en temps. Ce problème sera réglé par une approximation numérique de l'intégrale qui permet de rendre une solution totalement à variables séparables. Le principe de cette intégration numérique est détaillé dans la partie suivante.

### 1.2.5 Remarques sur l'utilisation de ces solutions dans le contexte du travail

Ce type de solution sur un domaine semi-infini semble peu compatible avec la problématique du travail entrepris, les équations régissant les phénomènes étudiés n'est pas l'équation de diffusion pure, le domaine est beaucoup plus complexe, notamment dans le cas de l'irrigation à la raie. Ces solutions seront pourtant largement utilisées dans la partie suivante. Grâce à un changement de fonction et de variables, il est possible de transformer l'équation de diffusion pure en une équation de transferts adaptée à la problématique du travail.

L'utilisation rapide et efficace de ces solutions se heurte cependant à la difficulté d'évaluer celles-ci. On remarque, en effet, la présence dans l'écriture de ces solutions d'intégrales doubles dans le cas bidirectionnel ou triples dans le cas tridirectionnel. Leurs valeurs sont certes explicites, mais le calcul effectif est fastidieux et difficilement exploitable du fait de la lourdeur de l'expression obtenue. De plus, plusieurs opérations sur des fonctions du même type apparaissent et doivent être répétées plusieurs fois. A la suite de cette analyse, il est apparu essentiel de mettre en place une technique adaptée d'évaluation des solutions. Cette technique est basée sur l'utilisation d'arbres

binaires décrivant la structure des solutions à évaluer et décomposant ces solutions en fonctions appartenant toutes à la même famille de fonctions.

## Chapitre 2

# La notion d'arbre binaire et d'algorithmique récursif

### 2.1 Définition d'un pointeur et d'une liste chaînée

En algorithmique, un pointeur est un type de donnée dont la valeur fait directement référence à (pointe sur) une autre valeur stockée en mémoire via son adresse (Knuth, 1997). Généralement, une adresse correspond de manière unique à une unité de la mémoire du système. Seule une adresse particulière représente le pointeur nul qui ne fait référence à aucune unité de la mémoire.

Dans ce travail, le pointeur est utilisé en tant que pointeur sur une variable de type structure de donnée. Cette structure comporte plusieurs champs (variables entières, réelles, logiques,...) et un pointeur. Ce type de variable permet de réaliser une liste chaînée terminée par le pointeur nul, indiquant la fin de la liste, et de définir celle-ci de manière récursive (FIG. 2.1.1). En effet, une liste peut être considérée comme une suite d'éléments, les maillons de la chaîne. Mais cette liste  $\mathcal{L}_n$  de  $n$  maillons peut être également considérée comme la succession d'un premier élément  $u_1$ , la *tête* de la liste, et d'une autre liste  $\mathcal{L}_{n-1}$  de  $n - 1$  maillons, la *queue* de la liste, ayant les mêmes propriétés que la liste initiale.

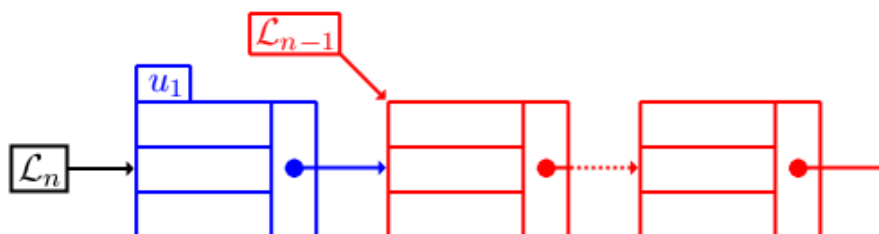


FIG. 2.1.1 – Représentation récursive d'une liste chaînée

Il est à noter que même si les problèmes de limitation de la mémoire machine n'est plus la préoccupation première en programmation, un avantage des listes chaînées sur le stockage d'une suite sous forme de tableau est sa gestion dynamique. En effet, dans certaines situations, la taille de la suite n'atteint pas, ou pas toujours, la taille maximale allouée au tableau. La taille du tableau est donc dimensionnée en fonction du cas le plus défavorable et l'emplacement mémoire réservé aux cases vides est perdu. Une liste chaînée n'occupe que la taille strictement nécessaire à chaque appel dans le déroulement du programme.

Notons également qu'une liste sous la forme décrite plus haut ne peut être parcourue que dans un seul sens. Atteindre un élément précis de la liste sous-entend le parcours complet des éléments précédents. Dans ce travail, les listes seront toujours utilisées dans leur globalité et leur parcours sera fait complètement, n'engendrant donc aucun parcours de liste inutile.

## 2.2 Représentation d'une expression algébrique sous forme d'arbre binaire

Un arbre binaire est une structure proche de la liste chaînée. La structure récursive est conservée, mais chaque nœud de l'arbre, au lieu d'avoir au plus un successeur, en possède au plus deux, appelés ses *filles*. Le premier nœud de l'arbre est la *racine*, seul nœud sans *père* de l'arbre, les éléments sans fils sont appelés les *feuilles*. Une structure en arbre binaire est particulièrement adaptée pour représenter une expression algébrique (Cormen et al., 1990) et traduit exactement cette expression en notation polonaise directe. L'expression algébrique  $2 + (5 - 7)$  se transcrit en notation polonaise directe (Hamblin, 1962)  $+ 2 - 5 7$  et l'arbre binaire correspondant est l'arbre FIG. 2.2.1 avec l'opérateur  $+$  comme racine des deux arbres fils :  $2$  et  $5 + (-7)$  (afin d'éviter la prise en compte d'une notion d'ordre dans l'écriture de l'arbre, la soustraction  $a - b$  sera en effet transformée en l'addition  $a + (-b)$ ). Notons également que les nœuds sont les opérateurs et que les feuilles sont les entiers.

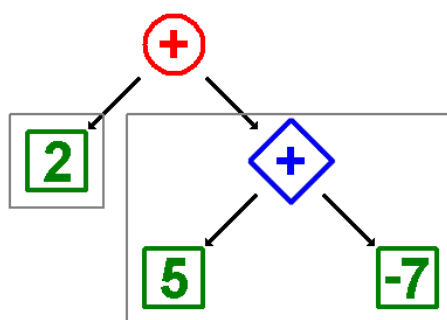


FIG. 2.2.1 – Représentation récursive d'un arbre binaire

Ce type de notation permet tout d'abord de composer rapidement une expression algébrique quelconque. Une expression résultant de l'application d'un opérateur binaire quelconque  $\odot$  (somme,

différence,...) sur deux expressions  $E_1$  et  $E_2$  est représentée facilement par construction d'un nouvel arbre. Cet arbre a pour racine l'opérateur binaire  $\odot$  et pour fils les représentations sous forme d'arbre des expressions  $E_1$  et  $E_2$ . Concernant des actions plus complexes, le recours à l'algorithmique récursive s'avère être un moyen de programmation naturel.

## 2.3 Algorithmique récursive

La programmation par procédure récursive sur un arbre binaire consiste à définir deux types d'actions (McCarthy, 1960) :

- L'action à effectuer sur une feuille ou sur un arbre vide, le *cas d'arrêt*.
- L'action à effectuer sur un arbre en supposant cette action connue sur ses deux arbres fils.

Lors de l'exécution, la procédure est lancée sur la racine de l'arbre. Cet appel déclenche des appels de la procédure sur les arbres fils, qui de même déclenche de nouveaux appels de la procédure sur leurs fils. La procédure parcourt l'arbre en profondeur. Les appels de la procédure sont interrompus dès que celle-ci est appelée sur une feuille. L'action à effectuer sur une feuille étant connue, elle est exécutée et la procédure peut alors remonter l'arbre et effectuer les actions demandées lors des appels précédents. Ainsi, sans connaître avec précision l'action globale à effectuer, celle-ci est effectuée par récurrence.

En notant par exemple  $f(E)$  l'évaluation de l'expression représentée par l'arbre  $E$ , le résultat de l'expression représentée par l'arbre FIG. 2.2.1 peut être calculé en parcourant celui-ci de la manière suivante (TAB. 2.3.1)

Profondeur 1	$f(2 + (5 + (-7))) = f(2) + f(5 + (-7))$
Profondeur 2.a	$f(2) = 2$
Profondeur 2.b	$f(5 + (-7)) = f(5) + f(-7)$
Profondeur 3.a	$f(5) = 5$
Profondeur 3.b	$f(-7) = -7$
Profondeur 2	$f(5 + (-7)) = -2$
Profondeur 1	$f(2 + (5 + (-7))) = 0$

TAB. 2.3.1 – Evaluation récursive d'une expression algébrique

Deux types d'actions ont été définies :

- Si l'arbre est une feuille, l'évaluation de l'expression est l'entier contenu dans la feuille :  $f(n) = n$ .
- Sinon, l'évaluation de l'expression est l'application de l'opérateur binaire en racine de l'arbre sur les deux fils de l'arbre :  $f(E_1 \odot E_2) = f(E_1) \odot f(E_2)$ .

Dans toute programmation récursive, il faut s'assurer que les cas d'arrêt sont atteints afin que l'opération puisse se terminer. Dans le cas d'un arbre, il suffit de s'assurer qu'à chaque appel ré-

cursif l'opération est effectuée sur des arbres de profondeur strictement décroissante. C'est le cas de l'opération résumée dans le TAB. 2.3.1. Les appels de la procédure sur un arbre sont chaque fois effectués sur les arbres fils ayant donc une profondeur strictement inférieure à l'arbre initial.

Le principe reste le même pour n'importe quelle action. Si l'évaluation d'une expression algébrique paraît immédiate et ne nécessite pas une représentation sous forme d'arbre binaire ni une programmation récursive, des actions plus complexes à implémenter de manière linéaire sont grandement simplifiées par ce type de programmation. La structure récursive de l'objet qui subit l'action rend également naturelle le recours à la programmation récursive. Dans le cas d'un arbre binaire, cette structure récursive est évidente et lors de la réalisation d'actions sur un arbre, la programmation gagnera en lisibilité si elle exploite au maximum ses propriétés récursives.

L'exemple utilisé plus haut illustre la représentation d'une expression algébrique sous forme d'arbre. Les solutions (1.2.6) et (1.2.7) issues de l'utilisation de la fonction de Green peuvent être de la même manière représentées par un arbre binaire. Les feuilles ne contiendront plus des éléments de l'ensemble des entiers mais des éléments d'une famille de fonctions. Le chapitre suivant définit cette famille de fonctions et quelques opérations nécessaires à l'évaluation des solutions.



## Chapitre 3

# Définition d'une famille de fonctions adaptée à l'utilisation de la fonction de Green

### 3.1 La famille de fonctions $\mathbb{L}$

Considérons l'ensemble  $\mathbb{G}$  des fonctions  $\mathcal{G}$  de la forme suivante.

$$\mathbb{G} = \left\{ \mathcal{G} \mid \mathcal{G}(X_s, X) = P(X_s, X) e^{-Q(X_s, X)} \right\} \quad (3.1.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} P(X_s, X) = \sum_{i,j} P_{ij} X_s^i X^j \\ Q(X_s, X) = Q_{20} X_s^2 + Q_{02} X^2 + Q_{11} X_s X + Q_{10} X_s + Q_{01} X + Q_{00} \end{cases}$$

Considérons maintenant l'ensemble  $\mathbb{L}$  des fonctions  $\Lambda$ , combinaisons de produits ou de sommes de fonctions de  $\mathbb{G}$ . A chaque fonction  $\mathcal{G}_j$  composant  $\Lambda$ , est associé un intervalle de validité  $I_{s_j} \times I_j$  en dehors duquel la fonction est nulle.

$$\mathbb{L} = \left\{ \Lambda \mid \Lambda(X_s, X) = \bigodot_{j=1}^n \left( \mathcal{G}_j^{I_{s_j}, I_j}(X_s, X) \right) \right\} \quad (3.1.2)$$

avec

$$\begin{aligned} \bigodot_{j=1}^n f_j &= f_1 (+ \text{ ou } \times) f_2 (+ \text{ ou } \times) f_3 \dots (+ \text{ ou } \times) f_n \\ \mathcal{G}_j^{I_{s_j}, I_j}(X_s, X) &= \begin{cases} \mathcal{G}_j(X_s, X) & \text{si } (X_s, X) \in I_{s_j} \times I_j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

Toute fonction de  $\mathbb{L}$  peut être notée de manière récursive sous forme d'arbre binaire. Chaque nœud de l'arbre binaire contient l'opérateur  $+$  ou  $\times$  ainsi que les liens vers les deux arguments de l'opération. Chaque feuille représente une fonction  $\mathcal{G}_j$  à laquelle est associée son intervalle de validité  $I_{s_j} \times I_j$ . L'expression (3.1.3) peut ainsi être représentée par l'arbre binaire TAB. 3.1.1.

$$\Lambda(X_s, X) = \mathcal{G}_1^{I_{s1}, I_1}(X_s, X) + \left[ \mathcal{G}_2^{I_{s2}, I_2}(X_s, X) + \mathcal{G}_3^{I_{s3}, I_3}(X_s, X) \right] \left[ \mathcal{G}_4^{I_{s4}, I_4}(X_s, X) + \mathcal{G}_5^{I_{s5}, I_5}(X_s, X) \right] \quad (3.1.3)$$

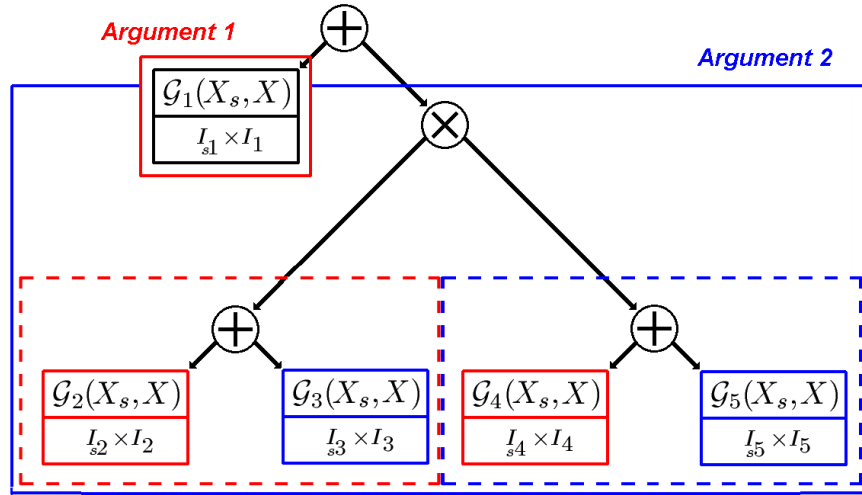


FIG. 3.1.1 – Représentation récursive d'une fonction  $\Lambda$

Ici, la somme, le produit de deux fonctions  $\Lambda$  et l'évaluation d'une fonction  $\Lambda$  sont effectués de la même manière que dans le cas de l'expression algébrique classique illustré par la FIG. 2.2.1. Cependant, sommes et produits ne sont pas suffisants pour évaluer les solutions issues de l'utilisation de la fonction de Green. Il faut donc introduire les schémas récursifs permettant de réaliser l'intégration d'une fonction  $\Lambda$ . Sa dérivation sera également nécessaire ultérieurement, notamment dans le calcul du flux Darcien.

## 3.2 Opérations récursives sur les fonctions $\Lambda$

### 3.2.1 Opérations préliminaires

Afin de réaliser la dérivation et l'intégration de fonctions  $\Lambda$ , il convient de définir auparavant quelques opérations préliminaires indispensables pour la suite de l'étude :

- la fonction  $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$  qui apparaît dans les fonctions de Green et qui est nécessaire au calcul de l'intégrale d'une fonction  $\Lambda$ ,
- la multiplication de deux fonctions  $\mathcal{G}$ ,

- la primitive d'une fonction  $\mathcal{G}$ ,
- le développement d'une fonction  $\Lambda$ .

### Approximation de $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$ comme fonction de $\mathbb{L}$

Afin d'évaluer les solutions issues de l'utilisation de la fonction de Green et d'être capable de représenter celles-ci comme appartenant à l'ensemble  $\mathbb{L}$ , il a fallu réaliser une approximation de la fonction d'erreur complémentaire  $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$  adaptée. Cette fonction a été approchée par une combinaison linéaire des fonctions particulières de l'ensemble  $\mathbb{G}$  (3.2.1) : une fonction définie par des morceaux de gaussiennes. La méthode pour réaliser cette approximation consiste à résoudre un système d'équations permettant d'obtenir les coefficients des polynômes  $Q$  des gaussiennes et les intervalles de validité  $I_{sj} \times I_j$  de telle manière que l'erreur d'approximation soit inférieure à une précision donnée. Le choix du nombre de gaussiennes de la somme dépend du type d'expressions dans laquelle celle-ci intervient. Une approximation d'erreur absolue de l'ordre de 1%, n'utilisant qu'une gaussienne, suffit pour représenter de manière satisfaisante la majorité des expressions où la fonction d'erreur complémentaire apparaît. En effet, la fonction d'erreur complémentaire étant la seule approximation de l'expression, cette erreur absolue de 1% est l'erreur maximale commise dans l'évaluation de l'expression. Dans des cas particuliers, la fonction d'erreur complémentaire prend une valeur très faible mais est multipliée par une fonction exponentielle qui prend une valeur très élevée. Il a donc fallu augmenter la précision afin de réduire l'erreur relative de l'approximation. La forme choisie pour l'approximation est la suivante

$$\operatorname{erfc}(x) \approx \sum_{i=1}^{N_{\text{approx}}} \mathcal{G}_i(x) \quad (3.2.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} \mathcal{G}_i(x) = e^{-(a_i x^2 + b_i x + c_i)} & \text{si } x \in [x_i, x_{i+1}] \\ \mathcal{G}_i(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le système d'équations à résoudre  $\forall i \in [1, N_{\text{approx}}]$  est le suivant

$$\begin{cases} \mathcal{G}_i(x_i) = \operatorname{erfc}(x_i) \\ \mathcal{G}_i(x_{i+1}) = \operatorname{erfc}(x_{i+1}) \\ \frac{d\mathcal{G}_i}{dx}(x_i) = \frac{d(\operatorname{erfc}(x))}{dx}(x_i) \end{cases}$$

Lors du calcul de la solution du système, il convient de différencier le cas  $i = N_{\text{approx}}$  des autres cas. En effet, dans ce cas,  $x_{i+1} = \infty$ , ce qui simplifie l'expression des coefficients. La solution de ce système est donc pour  $i \neq N_{\text{approx}}$

$$\begin{cases} a_i = \frac{x_i \frac{d(\operatorname{erfc}(x))}{dx}(x_i) - x_{i+1} \frac{d(\operatorname{erfc}(x))}{dx}(x_i) - \ln \frac{\operatorname{erfc}(x_i)}{\operatorname{erfc}(x_{i+1})} \operatorname{erfc}(x_i)}{\operatorname{erfc}(x_i) (x_i - x_{i+1})^2} \\ b_i = \frac{x_i^2 \frac{d(\operatorname{erfc}(x))}{dx}(x_i) - x_{i+1}^2 \frac{d(\operatorname{erfc}(x))}{dx}(x_i) - 2x_i \ln \frac{\operatorname{erfc}(x_i)}{\operatorname{erfc}(x_{i+1})} \operatorname{erfc}(x_i)}{\operatorname{erfc}(x_i) (x_i - x_{i+1})^2} \\ c_i = -ax_i^2 - bx_i - \ln(\operatorname{erfc}(x_i)) \end{cases}$$

et pour  $i = N_{\text{approx}}$

$$\begin{cases} a_i &= 1 \\ b_i &= -2x_i - \frac{d(\operatorname{erfc}(x))}{dx}(x_i) \frac{1}{\operatorname{erfc}(x_i)} \\ c_i &= -ax_i^2 - bx_i - \ln(\operatorname{erfc}(x_i)) \end{cases}$$

Le choix du système à résoudre permettant l'obtention des coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  a été motivé par deux raisons principales. Les deux premières équations du système permettent tout d'abord d'approcher la fonction d'erreur complémentaire par une fonction continue. Le choix de la dernière équation peut être discutable. Des approximations plus classiques auraient pu être choisies, comme par exemple la minimisation de la norme  $L^1$ ,  $L^2$  ou  $L^\infty$  de l'erreur d'approximation (respectivement la minimisation de  $\int(\mathcal{G}(x) - \operatorname{erfc}(x))dx$ ,  $\int(\mathcal{G}(x) - \operatorname{erfc}(x))^2dx$  ou  $\max(\mathcal{G}(x) - \operatorname{erfc}(x))$ ). Une approximation au sens de la norme  $L^2$  donne les meilleurs résultats, une approximation au sens de la norme  $L^1$  ou  $L^\infty$  a l'avantage de fournir une équation explicite. L'équation choisie ici vise à égaliser la dérivée au point  $x_i$  des deux fonctions et permet de restituer une bonne approximation pour  $x = 0$  là où le gradient de  $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$  est le plus important. Elle donne de plus une forme explicite relativement simple à la solution du système.

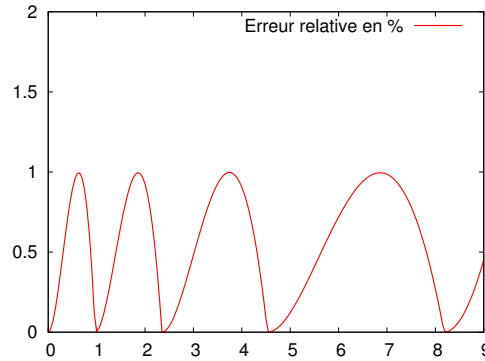


FIG. 3.2.1 – Erreur relative de l'approximation à 5 fonctions  $\mathcal{G}$  de la fonction  $\operatorname{erfc}$

En choisissant une suite  $(x_i)_{i=1, N_{\text{approx}}}$  adaptée à la précision recherchée, on obtient un jeu de coefficients permettant de réaliser une approximation fiable de la fonction  $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$ . La résolution du système donne les coefficients  $a_i$ ,  $b_i$  et  $c_i$  pour lesquels les valeurs de la suite  $(x_i)$  sont des paramètres. Chaque terme de cette suite a donc été défini par dichotomie grâce à un logiciel de calcul formel de manière à vérifier la précision requise. Les valeurs de cette suite, ainsi que les coefficients des gaussiennes, ont été ensuite considérés comme des paramètres de l'approximation. Ainsi, un jeu de paramètres a été associé à un type d'approximation, caractérisé par le nombre de gaussiennes entrant dans sa composition. La FIG. 3.2.1 montre la valeur en pourcentage de l'erreur relative de l'approximation pour le cas d'une somme de 5 fonctions  $\mathcal{G}$ . Dans cette figure, les abscisses pour lesquelles l'erreur est nulle correspondent aux termes de la suite  $(x_i)_{i=1, N_{\text{approx}}}$ .

Le contrôle de l'erreur a été réalisé ici sur l'intervalle  $[0 : 9]$ . Pour  $x > x_{N_{\text{approx}}}$ , l'approximation repose uniquement sur la gaussienne  $\mathcal{G}_{N_{\text{approx}}}$ . La décroissance de la fonction d'erreur complémentaire étant bien plus rapide que celle d'une gaussienne, l'erreur d'approximation augmente donc rapidement. Pour évaluer des expressions faisant intervenir ces ordres de grandeurs, il convient alors d'augmenter le nombre de gaussiennes de l'approximation. Il faut cependant noter que  $\text{erfc}(6, 5) \approx 1\text{E}-38$ , correspondant à la valeur minimale que peut atteindre la représentation informatique d'un réel sur 32 bits (simple précision) (Saad, 2002).

Le choix du nombre de fonctions  $\mathcal{G}$  de l'approximation est important. En effet, il conditionne le compromis entre précision et temps de calcul. Il est apparu qu'une approximation à 3 fonctions  $\mathcal{G}$  donne des résultats très satisfaisants sans augmenter de manière sensible les temps de calcul.

### Multiplication de deux fonctions $\mathcal{G}$

En notant  $\mathcal{G}(X_s, X) = P(X_s, X) e^{-Q(X_s, X)}$  le produit des deux fonctions  $\mathcal{G}'$  et  $\mathcal{G}''$  (fonctions appartenant à l'ensemble  $\mathbb{G}$ ), on obtient de manière triviale

$$\begin{cases} P(X_s, X) &= P'(X_s, X)P''(X_s, X) \\ Q(X_s, X) &= Q'(X_s, X) + Q''(X_s, X) \end{cases}$$

### Dérivée d'une fonction $\mathcal{G}$ selon la variable $X$

La dérivée  $\tilde{\mathcal{G}}(X_s, X) = \tilde{P}(X_s, X) e^{-\tilde{Q}(X_s, X)}$  d'une fonction  $\mathcal{G}(X_s, X)$  est également une opération simple à réaliser. Elle appartient à l'ensemble  $\mathbb{G}$ . En reprenant les notations introduites en définition (3.1.1), elle est définie par ses polynômes

$$\begin{cases} \tilde{P}(X_s, X) &= \partial_X P(X_s, X) - (2Q_{02}X + Q_{11}X_s + Q_{01}) P(X_s, X) \\ \tilde{Q}(X_s, X) &= Q(X_s, X) \end{cases}$$

### Primitive d'une fonction $\mathcal{G}$ selon la variable $X_s$

L'expression de la primitive d'une fonction  $\mathcal{G}$  selon la variable  $X_s$  est plus complexe. Il est nécessaire de la représenter par une fonction de l'ensemble  $\mathbb{L}$ . Celle-ci prend la forme

$$\begin{aligned} \int \mathcal{G}(X_s, X) dX_s &= J_{\mathcal{G}}(X_s, X) e^{-Q(X_s, X)} \\ &+ \sqrt{\frac{\pi}{Q_{20}}} K_{\mathcal{G}}(X) \operatorname{erf}\left(\sqrt{Q_{20}} X_s + \frac{1}{2} \frac{Q_{11}}{\sqrt{Q_{20}}} X + \frac{1}{2} \frac{Q_{01}}{\sqrt{Q_{20}}}\right) \\ &\times e^{-\left[\left(Q_{02} - \frac{1}{4} \frac{Q_{11}^2}{Q_{20}}\right) X^2 + \left(Q_{01} - \frac{1}{2} \frac{Q_{11}Q_{10}}{Q_{20}}\right) X + \left(Q_{00} - \frac{1}{4} \frac{Q_{10}^2}{Q_{20}}\right)\right]} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

$$\text{avec } \begin{cases} J_{\mathcal{G}}(X_s, X) &= \sum_{i,j} P_{ij} J_i(X_s, X) X^j \\ K_{\mathcal{G}}(X) &= \sum_{i,j} P_{ij} K_i(X) X^j \end{cases}$$

Les polynômes  $J_i$  et  $K_i$  sont définis grâce aux formules de récurrence

$$\begin{cases} J_0 &= 0 \\ J_1 &= -\frac{1}{2Q_{20}} \\ J_{n(n \geq 2)}(X_s, X) &= -\frac{X_s^{n-1}}{2Q_{20}} - \frac{Q_{11}X + Q_{10}}{2Q_{20}} J_{n-1}(X_s, X) + \frac{n-1}{2Q_{20}} J_{n-2}(X_s, X) \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_0 &= \frac{1}{2} \\ K_1 &= -\frac{Q_{11}X + Q_{10}}{4Q_{20}} \\ K_{n(n \geq 2)}(X) &= -\frac{Q_{11}X + Q_{10}}{2Q_{20}} K_{n-1}(X) + \frac{n-1}{2Q_{20}} K_{n-2}(X) \end{cases}$$

Afin de faciliter le calcul des polynômes  $J_i$  et  $K_i$ , définis par une formule de récurrence, le stockage informatique de tous les polynômes utilisés dans ce travail est effectué sous forme de listes chaînées (voir paragraphe 2.1). Ce stockage aura également l'avantage de ne pas limiter le degré des polynômes. Chaque maillon de la liste représente un monôme  $P_{ij} X_s^i X^j$  du polynôme  $\sum_{i,j} P_{ij} X_s^i X^j$ , contenant le coefficient  $P_{ij}$ , le degré de la variable  $X_s$ , celui de la variable  $X$  et un pointeur sur le monôme suivant. Le pointeur nul représentant le polynôme constant égal à 0.

## Développement d'une fonction $\Lambda$ en somme de fonctions $\mathcal{G}$

Compte tenu de la représentation sous forme d'arbre binaire d'une fonction  $\Lambda$ , développer cette expression revient à réorganiser l'arbre binaire représentatif. Cette opération est faite de manière récursive. Nommons *develop* l'opération appliquée sur un arbre représentant une fonction  $\Lambda$  rendant un arbre représentant le développement de cette fonction. Rappelons que définir une opération récursive revient à définir l'opération à réaliser dans le cas d'un arbre réduit à une feuille et celle à réaliser dans le cas d'un arbre quelconque en supposant connue l'opération à réaliser sur ses arbres fils. Le schéma récursif est représenté par le TAB. 3.2.1. La première colonne contient la valeur de la fonction  $\Lambda$  à développer, la seconde contient l'action réaliser.

Précisons que la gestion des intervalles de validité  $I_{s_j} \times I_j$  associés à chaque fonction  $\mathcal{G}$  composant la fonction  $\Lambda$  est effectuée ici dans des cas particuliers. En effet, les intervalles de validité n'ont été introduits que pour le cas de l'approximation de la fonction  $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$ . Les multiplications apparaissant dans l'évaluation des solutions du problème ne font jamais intervenir deux fonctions  $x \rightarrow \operatorname{erfc}(x)$ . L'intersection de deux intervalles de validité dans ce cas est donc un des intervalles de validité utilisé dans l'approximation. Lors du développement d'une fonction  $\Lambda$  et quand il concerne

$\Lambda$	$develop(\Lambda)$
$\Lambda_1 + \Lambda_2$	$develop(\Lambda_1) + develop(\Lambda_2)$
$\Lambda_1 \times \Lambda_2$	$distrib(develop(\Lambda_1), develop(\Lambda_2))$
$\mathcal{G}$	$\mathcal{G}$

TAB. 3.2.1 – Développement récursif d’une fonction  $\Lambda$

$\Lambda_1$	$\Lambda_2$	$distrib(\Lambda_1, \Lambda_2)$
$\Lambda_{1a} + \Lambda_{1b}$	$\Lambda_{2a} + \Lambda_{2b}$	$distrib(\Lambda_{1a}, \Lambda_{2a}) + distrib(\Lambda_{1a}, \Lambda_{2b})$ $+ distrib(\Lambda_{1b}, \Lambda_{2a}) + distrib(\Lambda_{1b}, \Lambda_{2b})$
$\mathcal{G}_1$	$\Lambda_{2a} + \Lambda_{2b}$	$distrib(\mathcal{G}_1, \Lambda_{2a}) + distrib(\mathcal{G}_2, \Lambda_{2b})$
$\Lambda_{1a} + \Lambda_{1b}$	$\mathcal{G}_2$	$distrib(\Lambda_{1a}, \mathcal{G}_2) + distrib(\Lambda_{1b}, \mathcal{G}_2)$
$\mathcal{G}_1$	$\mathcal{G}_2$	$\mathcal{G}_1 \times \mathcal{G}_2$

TAB. 3.2.2 – Distribution récursive de deux fonctions  $\Lambda$

un produit de fonctions  $\mathcal{G}$ , la gestion des intervalles se limite donc à conserver l’intersection des intervalles de validité. Pour alléger les explications, cette gestion ne sera pas intégrée au schéma récursif le TAB. 3.2.1 qui détaille l’algorithme développant une fonction  $\Lambda$ . Elle est cependant effectuée dans le code informatique.

Ce schéma est le suivant. Dans le cas d’une fonction  $\Lambda$  réduite à une unique fonction  $\mathcal{G}$ , aucune opération n’est effectuée. Développer une somme de deux fonctions  $\Lambda$  revient à sommer le développement de ces deux fonctions. Et développer le produit de deux fonctions  $\Lambda$  revient à distribuer le développement des deux fonctions  $\Lambda$  entre elles. La distribution est également réalisée récursivement et le schéma récursif est illustré par le TAB. 3.2.2. Dans ce tableau n’apparaît que le cas où la fonction  $\Lambda$  est une somme. En effet, l’opération développant une fonction  $\Lambda$  rend cette fonction sous forme d’une somme. Le cas du produit n’est donc pas à envisager. Les appels récursifs de la distribution cessent lorsque les deux sommes à distribuer sont réduites chacune à un élément. Dans ce cas, l’opération à réaliser est la multiplication de deux fonctions  $\mathcal{G}$  dont la formule est explicitée plus haut.

Ainsi, le développement de la fonction (3.1.3) utilisée en exemple au début de ce chapitre est représenté par un arbre dont tous les arbres fils à gauche sont réduits à une feuille (FIG. 3.2.2). Les intervalles de validité des fonctions  $\mathcal{G}$  ne sont pas repris dans la figure pour ne pas la surcharger. Leur gestion est expliquée plus haut.

Ces opérations préliminaires définies, l’intégration et la dérivation d’une fonction  $\Lambda$  sont désormais possibles.

### 3.2.2 Dérivation d’une fonction $\Lambda$ par rapport à la variable $X$

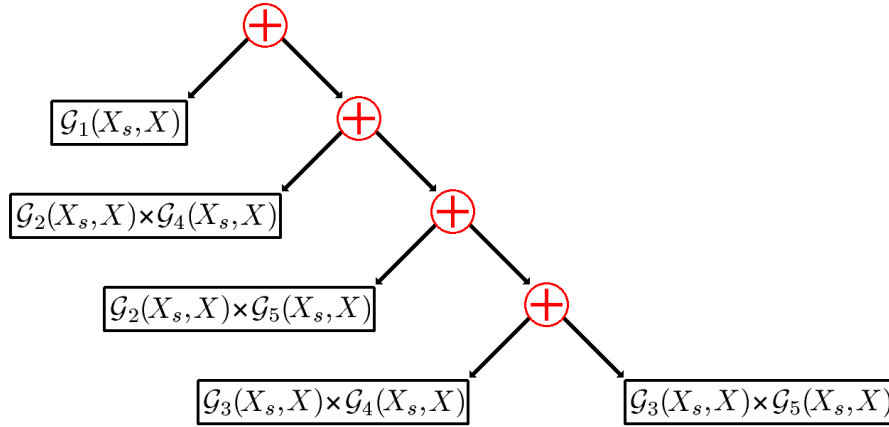


FIG. 3.2.2 – Arbre d’une fonction  $\Lambda$  développée

La dérivée d’une fonction  $\mathcal{G}$  ayant été définie, celle d’une fonction  $\Lambda$  suit le schéma récursif TAB. 3.2.3

$\Lambda$	$deriv(\Lambda)$
$\Lambda_1 + \Lambda_2$	$deriv(\Lambda_1) + deriv(\Lambda_2)$
$\Lambda_1 \times \Lambda_2$	$deriv(\Lambda_1) \times \Lambda_2 + deriv(\Lambda_2) \times \Lambda_1$
$\mathcal{G}$	$\partial_X \mathcal{G}(X, X_s)$

TAB. 3.2.3 – Dérivation récursive d’une fonction  $\Lambda$

### 3.2.3 Intégration d’une fonction $\Lambda$ par rapport à la variable $X_s$

De même l’intégration d’une fonction  $\Lambda$  entre  $X_a$  et  $X_b$  suit le schéma récursif TAB. 3.2.4. La fonction  $\Lambda$  doit être tout d’abord développée en somme de fonctions  $\mathcal{G}$  afin de rendre possible son intégration. Les cas à étudier sont donc uniquement l’intégration d’une somme d’une fonction  $\mathcal{G}$  avec une fonction  $\Lambda$  et celle d’un arbre réduit à une feuille. Les intégrations intervenant dans les solutions du problème ont pour intervalles d’intégration  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^+$ . Ces deux uniques cas seront donc prévus.

$\Lambda$	$integral(\Lambda)$
$\mathcal{G} + \Lambda_1$	$[\int \mathcal{G}(X_s, X) dX_s](X_b) - [\int \mathcal{G}(X_s, X) dX_s](X_a) + integral(\Lambda_1)$
$\mathcal{G}$	$[\int \mathcal{G}(X_s, X) dX_s](X_b) - [\int \mathcal{G}(X_s, X) dX_s](X_a)$

TAB. 3.2.4 – Intégration récursive d’une fonction  $\Lambda$  entre  $X_a$  et  $X_b$

## 3.3 Remarques sur la programmation récursive



La programmation récursive n'est jamais plus rapide que la programmation itérative. En effet, lors de l'exécution d'une procédure récursive, les appels de la procédure sur elle-même sont stockés dans une *pile*. Si le nombre d'appels est importants, cette pile peut prendre un espace mémoire conséquent et ralentir l'exécution de l'opération. On notait dans le chapitre l'intérêt d'un stockage dynamique. Ce gain d'espace mémoire est rapidement compensé par le remplissage de la pile. C'est pourquoi, les codes industriels ou commerciaux utilisent rarement ce type de programmation et les transforment en programmation itérative pour une utilisation optimale.

Cependant, dans ce travail, la représentation des expressions symboliques sous forme d'arbres est un outil efficace qui rend naturel le recours à ce type de programmation. La programmation est simplifiée, le nombre de calculs symboliques permettant d'obtenir la forme finale des solutions est réduit (la composition des expressions, leur intégration ou leur dérivation aurait dû être calculée complètement et de manière symbolique avant leur codage sans programmation récursive). L'objectif de ce travail est surtout de valider le modèle développé. Une reprogrammation optimisée pourra être envisagée une fois cette validation effectuée.



# Conclusion de la partie

Cette partie a permis de définir les outils mathématiques et informatiques qui seront appliqués dans la résolution analytique des équations de transferts bi- ou tridirectionnels. Le développement de ces outils est théorique et fastidieux, mais nécessaire pour une bonne compréhension de la suite de l'étude et pour justifier le choix d'une telle modélisation.

Ces développements théoriques ainsi présentés, les parties suivantes pourront donc être consacrés uniquement au modèle en lui-même et à ses résultats, en insistant sur ses principes fondamentaux sans entrer dans les détails techniques.

De même, lors du codage informatique, ces développements théoriques ont permis de définir des procédures effectuant des opérations de manière très générale. Une fois ces opérations validées, le codage a été largement simplifié, une commande unique permettant la construction d'une expression symbolique, une autre permettant son intégration, etc... Ce système de programmation a permis ainsi de définir des actions basiques qui ont servi à traduire de manière symbolique les expressions issues de la résolution analytique des équations de transferts. Celles-ci pourront être également utilisées ultérieurement pour compléter et améliorer le modèle.



## Quatrième partie

# Principes généraux de la modélisation semi-analytique des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés



# Introduction de la partie

Cette partie développe les principes généraux d'une modélisation semi-analytique des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés dans un profil de sol irrigué. Ce type de modélisation permet de s'affranchir d'une discrétisation temporelle contraignante et facilite la prise en compte de pas de temps variant entre un ou quelques multiples de l'heure, pour une irrigation, et la journée, pour une redistribution de l'eau et des solutés dans le sol avec pour objectif la description de l'état du sol à l'échelle de la saison culturale.

Cette modélisation est basée sur la résolution semi-analytique des équations de transferts (Richards et convection-diffusion de solutés). La partie précédente a défini un ensemble d'outils mathématiques et algorithmiques qui permettent de résoudre des équations aux dérivées partielles simplifiées sur des domaines réguliers. Nous détaillons ici la décomposition d'un problème initial complexe en problèmes élémentaires plus simples. Ces problèmes élémentaires peuvent être résolus grâce aux développements théoriques de la partie précédente.

La première phase de la modélisation consiste à résoudre l'équation de Richards. Cette équation est linéarisée, moyennant certaines hypothèses, puis adimensionnée. La décomposition en problèmes élémentaires et la superposition de leur solution permettent de proposer une approximation de la solution générale et de définir ainsi l'état hydrique du sol étudié. Ce profil hydrique est nécessaire pour connaître les coefficients de l'équation de convection-diffusion de solutés. La seconde phase peut donc être initialisée. Elle concerne la description du profil de concentration en soluté. Le même procédé de décomposition du problème est utilisé en considérant tout d'abord un flux Darcien moyen. La solution ainsi obtenue est ensuite raffinée en appliquant une transformation lagrangienne (également désignée par anamorphose dans la suite de ce document) sur le domaine dont les caractéristiques sont définies par le profil des flux hydriques.





# Chapitre 1

## Principes généraux de décomposition d'un problème complexe en problèmes élémentaires

### 1.1 Contexte

La partie précédente développe les techniques de résolution d'EDP à coefficients constants sur des géométries et des conditions initiales et aux limites simplifiées. Ce chapitre décrit les principes de la décomposition d'un problème complexe en problèmes élémentaires (Crevoisier, 2005) qui peuvent être résolus grâce aux éléments de la partie précédente. Plaçons-nous dans un cas complexe (FIG. 1.1.1). Considérons une géométrie irrégulière représentant une demi raie d'irrigation. Les conditions initiales sont quelconques. Ce cas ne peut être résolu en utilisant les techniques classiques.

Le profil à gauche de FIG. 1.1.1 représente le profil initial d'humidité relative du sol au début d'une irrigation à la raie. Le profil utilisé est quelconque et ne correspond pas à un profil issu d'une mesure. Le choix arbitraire de ce profil illustre le fait que n'importe quel profil d'humidité réel peut être traité par le modèle.

Ce profil initial peut également être considéré comme un profil de concentration de solutés. Les processus de décomposition du problème initial sont valables dans le cas de l'étude des transferts d'eau ou de solutés. Les paragraphes suivants vont définir les modalités de cette décomposition.

### 1.2 Décomposition des conditions aux limites

Le deuxième profil de FIG. 1.1.1 représente le profil modélisé. Le principe est tout d'abord de décomposer la géométrie du domaine en géométries régulières. La surface de la raie est donc discrétisée en segments de droite. Chacun de ces segments est associé à une condition à la limite. Ici, deux types de conditions aux limites existent. Sur l'ensemble des segments correspondant à une surface sèche, la condition à la limite est définie comme une condition de flux nul orthogonalement

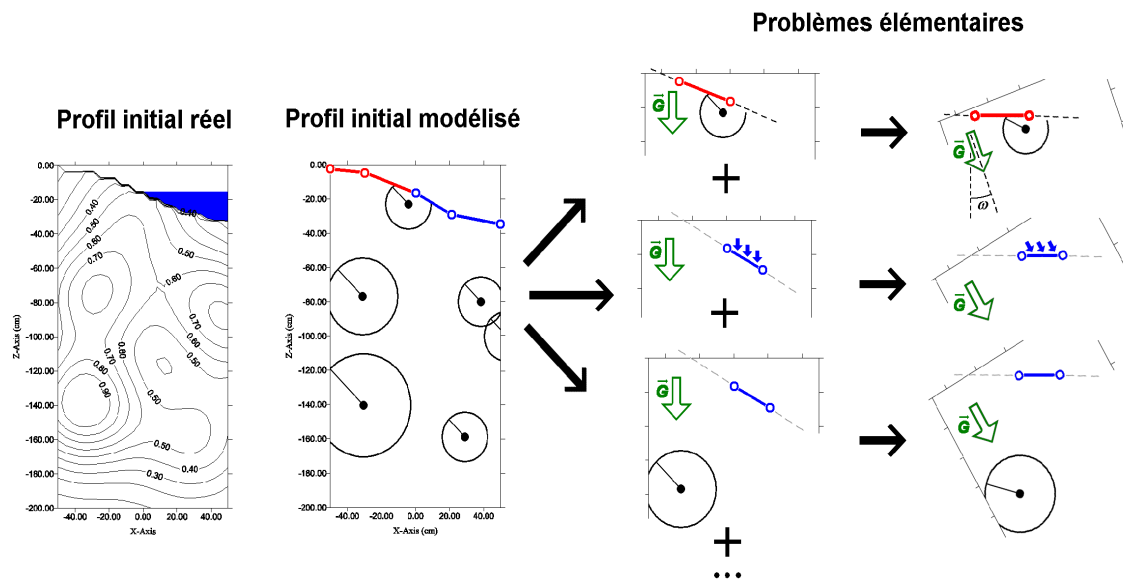


FIG. 1.1.1 – Décomposition du problème initial en problèmes élémentaires (les isolignes représentent ici les lignes d'iso-humidité relative)

à la surface, qui se traduit mathématiquement par une condition de Cauchy. La partie en contact avec l'eau d'irrigation est soumise à une condition de charge, mathématiquement, une condition de Dirichlet. Dans le cas d'une micro-irrigation, un autre type de condition aux limites est défini, il s'agit d'une condition de flux non nul sur une partie de la surface, correspondant à la tâche humide observée lors de l'irrigation. Ces conditions aux limites peuvent être constantes dans les cas les plus simples, mais le modèle a été développé de manière à pouvoir traiter également les conditions variables en espace et en temps.

Ces segments ont donc comme caractéristiques le type et la valeur des conditions aux limites qui leur sont associés, mais aussi leur longueur et l'angle qu'ils forment avec la verticale. Cet angle est particulièrement important, puisqu'il définit l'impact de la gravité sur la solution des problèmes élémentaires.

Le problème général fait également apparaître des conditions de flux latéral nul sur les frontières verticales du domaine. Celles-ci seront représentées en reproduisant la symétrie du système dans la modélisation. Ainsi, pour représenter la condition de flux latéral nul sous le billon, les problèmes élémentaires seront reproduits par symétrie sur un domaine fictif à gauche du domaine considéré (domaine plus clair sur FIG. 1.2.1).

### 1.3 Décomposition des conditions initiales

Les conditions initiales sont également décomposées en fonctions simples qui permettent une résolution analytique. Ces fonctions sont des gaussiennes. Mathématiquement, toute fonction  $x \rightarrow$

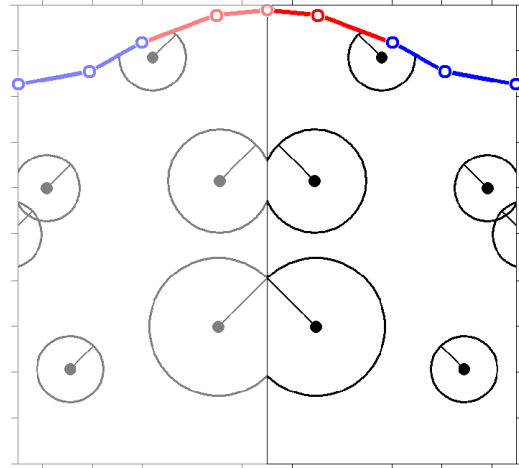


FIG. 1.2.1 – Traitement des conditions de flux latéral nul sur les frontières verticales du domaine

$f(x)$  régulière sur  $[-a, a]$  peut être considérée comme limite d'une série de gaussiennes (1.3.3). Cette propriété vient du fait que le produit de convolution d'une fonction avec la distribution de Dirac donne la fonction elle-même (1.3.1) et que la distribution de Dirac peut être considérée comme la limite d'une gaussienne (1.3.2) centrée sur 0 et d'écart type  $\sigma$  qui tend vers 0. Cette propriété vraie sur  $\mathbb{R}$  peut être étendue sur  $\mathbb{R}^2$  ou  $\mathbb{R}^3$ .

$$f(x) = \int_{-a}^a f(u)\delta(x-u)du \quad (1.3.1)$$

$$\delta(x) = \lim_{\sigma \rightarrow 0} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}} \quad (1.3.2)$$

$$f(x) = \lim_{(N,\sigma) \rightarrow (\infty,0)} \sum_{i=-N}^N \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{a}{N} f\left(i\frac{a}{N}\right) e^{-\frac{(x-i\frac{a}{N})^2}{2\sigma^2}} \right] \quad (1.3.3)$$

Pratiquement, il est donc possible d'approcher une condition initiale quelconque comme combinaison linéaire de gaussiennes. Le nombre de gaussiennes à prendre en compte ainsi que leurs caractéristiques varient selon la forme des conditions initiales et la présence éventuelle de discontinuités.

Les graphiques ci-dessous représentent quelques exemples d'approximations de fonctions usuelles. Les fonctions créneau, triangle et sinus valident l'efficacité et la robustesse de l'approximation. FIG. 1.3.1 évalue l'influence du nombre de gaussiennes sur la qualité de l'approximation, FIG. 1.3.2 celle de l'écart type de chaque gaussienne de l'approximation. Pour éviter les effets de bord, le graphique représente les approximations sur l'intervalle  $[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}]$ .

De manière évidente, la qualité de l'approximation des conditions initiales dépend du nombre de gaussiennes utilisé. On remarque cependant que dans le cas de fonctions sans forte discontinuité

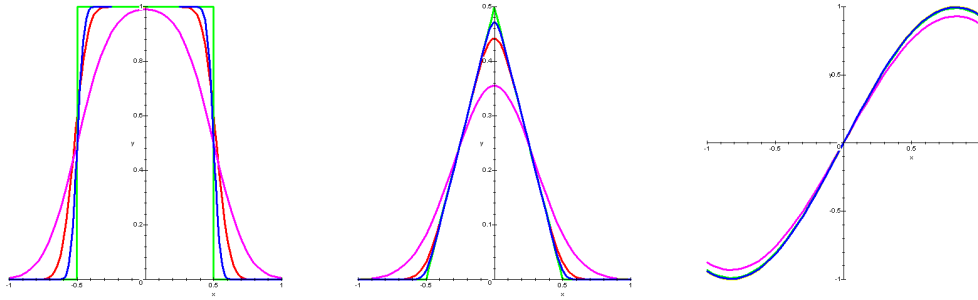


FIG. 1.3.1 – Evaluation de l’influence du nombre de gaussiennes,  $N = 10$  (magenta), 25 (rouge) et 50 (bleu), dans l’approximation des conditions initiales (vert) pour  $\sigma = a/N$

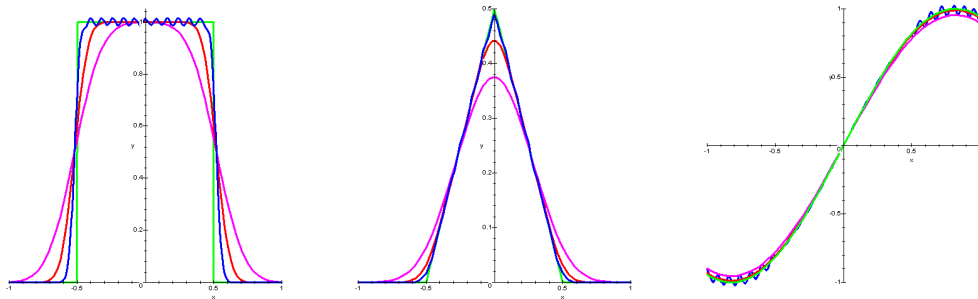


FIG. 1.3.2 – Evaluation de l’influence de la relation  $\frac{N\sigma}{a}$ , valant 1/2 (magenta), 1 (rouge) et 2 (bleu) dans l’approximation des conditions initiales (vert) pour  $N = 25$

(fonction sinus), le nombre de gaussiennes nécessaire à une approximation satisfaisante reste relativement faible, alors qu’il augmente très vite pour représenter de fortes discontinuités.

La relation entre l’écart type des gaussiennes  $\sigma$  et le nombre  $N$  d’éléments de la série est également un paramètre important à prendre en compte. La valeur critique est  $\sigma_c = \frac{a}{N}$  (FIG. 1.3.3). Pour cette valeur, aucune oscillation n’apparaît et les discontinuités sont représentées le mieux possible à  $N$  fixé. Si  $\sigma > \sigma_c$ , des oscillations apparaissent, l’écart type de la gaussienne n’est pas assez grand pour recouvrir l’intervalle entre deux centres de gaussiennes. Dans certains cas cependant, l’approximation est meilleure, car les fortes discontinuités sont mieux représentées. Dans le cas contraire, si  $\sigma < \sigma_c$ , l’approximation sous-estime la fonction, les oscillations n’apparaissent pas, car les gaussiennes se superposent, cependant, leur valeur maximale n’est pas suffisante pour atteindre la valeur de la fonction.

Dans des cas particuliers, il est également possible de construire la série en se basant sur ce principe, mais en ajustant quelques coefficients “à la main” afin de minimiser le nombre de gaussiennes composant les conditions initiales tout en conservant la qualité de l’approximation. Des processus

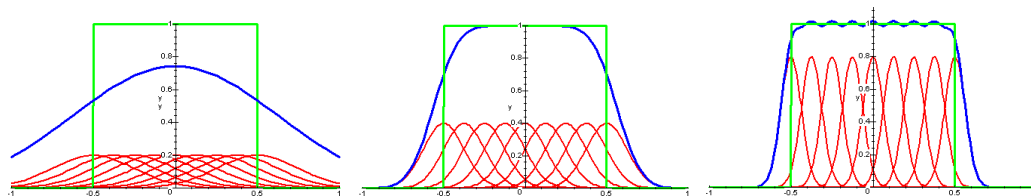


FIG. 1.3.3 – Décomposition d’une fonction en série de gaussiennes pour  $\frac{N\sigma}{a} = 1/2, 1$  et  $2$

plus complexes pourront être mis en place pour automatiser ces ajustements.

## 1.4 Construction des problèmes élémentaires

Une fois cette décomposition des conditions initiales et aux limites accomplie, il faut procéder à la construction des problèmes élémentaires (troisième partie de FIG. 1.1.1). Ceux-ci sont de quatre types. Les deux premiers types consistent en l’association d’une gaussienne de la série (représentant une partie élémentaire des conditions initiales) et d’un segment de la surface (représentant une partie élémentaire des conditions aux limites) mais en conservant uniquement le type de condition à la limite (Dirichlet ou Cauchy) et en considérant une valeur de condition à la limite nulle. Les deux seconds consistent en l’association d’une condition initiale nulle, d’un segment de la surface, du type et de la valeur des conditions à la limite qui lui sont associés. TAB. 1.4.1 résume cette qualification ( $x_0$  correspond à la demi longueur du segment considéré).

Problème	Condition initiale	Type de condition aux limites	Valeur de la condition à la limite
GDN	Gaussienne	Dirichlet	Nulle
GCN	Gaussienne	Cauchy	Nulle
NDV	Nulle	Dirichlet	Valeur non nulle sur $[-x_0, x_0]$
NCV	Nulle	Cauchy	Valeur non nulle sur $[-x_0, x_0]$

TAB. 1.4.1 – Enumération des problèmes élémentaires traités par le modèle

Enfin, la quatrième série d’images de FIG. 1.1.1 représente la rotation et la translation des problèmes élémentaires. Ceux-ci permettent d’orienter le segment associé au problème élémentaire dans la direction de la droite  $z = 0$  et de le centrer sur l’origine.

Toutes ces étapes permettent de se placer dans un contexte proche de celui traité dans la partie précédente. Le domaine des problèmes élémentaires sont des demi espaces infinis, les conditions initiales et aux limites ont été simplifiées. Seules les équations à résoudre n’ont pas encore été abordées. C’est l’objectif des chapitres qui vont suivre.



## Chapitre 2

# Modélisation des transferts hydriques sur les problèmes élémentaires

Les modèles mécanistes basés sur la résolution analytique de l'équation de Richards sont très nombreux (Basha, 1999), (Berthomé, 1991), (Coelho and Or, 1997), (Philip, 1986) et d'autres encore. Le début de ce chapitre reprend rapidement ces principes généraux de linéarisation et d'adimensionnement de l'équation qui ont été abordés dans la première partie et les adapte au cas des problèmes élémentaires.

## 2.1 Linéarisation et adimensionnement de l'équation de Richards bidirectionnelle

### 2.1.1 Rappel de l'équation générale de l'écoulement

Rappelons tout d'abord l'équation générale de l'écoulement bidirectionnel (2.1.1), l'équation de Richards, combinaison de l'équation de Darcy et de l'équation de conservation de la masse.

$$\partial_t \theta(h)(x, z, t) = \vec{\nabla} \cdot \left( K(h)(x, z, t) \vec{\nabla} (h(x, z, t) - z) \right) \quad (2.1.1)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{ll} \theta(h)(x, z, t) & : \text{teneur en eau volumique en } [L^3.L^{-3}] \\ h(x, z, t) & : \text{pression hydrique en } [L] \\ z & : \text{profondeur orientée positive vers le bas en } [L] \\ K(h)(x, z, t) & : \text{conductivité hydraulique en } [L.T^{-1}] \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{u} & = \partial_x u_x + \partial_z u_z \\ \vec{\nabla} f & = (\partial_x f) \vec{e}_x + (\partial_z f) \vec{e}_z \end{array} \right.$$

Cette équation est associée aux conditions initiales

$$h(x, z, 0) = h_{CI}(x, z) \quad (2.1.2)$$

Et selon que le type de conditions aux limites soit de Dirichlet ou de Cauchy (conditions aux limites en charge (2.1.3) ou en flux (2.1.4)), les conditions aux limites associées à la frontière du domaine  $\delta\Omega$  sont

$$h[(x, z) \in \delta\Omega, t] = h_{CL}(x, z, t) \quad (2.1.3)$$

$$\vec{q}[(x, z) \in \delta\Omega, t] = \vec{q}_{CL}(x, z, t) \quad (2.1.4)$$

Cette équation est fortement non linéaire du fait de la non linéarité de la conductivité hydraulique  $K$  et de la fonction de rétention du sol  $\theta(h)$ . Sa linéarisation est réalisée au moyen d'hypothèses et de transformations adaptées : la transformation de Kirchhoff (2.1.5), le modèle de conductivité hydraulique de Gardner (2.1.6) et l'hypothèse d'un sol linéaire (2.1.7) concernant la fonction de rétention du sol. En notant  $\kappa = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r}$ , ces hypothèses se traduisent respectivement de la manière suivante

$$\phi(h)(x, z, t) = \int_{-\infty}^{h(x, z, t)} K(\tilde{h}) d\tilde{h} \quad (2.1.5)$$

$$K(h)(x, z, t) = K_s e^{\alpha h(x, z, t)} \quad (2.1.6)$$

$$\theta(h)(x, z, t) = \theta_r + \frac{K(h)(x, z, t)}{\kappa} \quad (2.1.7)$$

Notons que l'hypothèse (2.1.7) imposant une forme spécifique pour la rétention du sol est restrictive. Elle définit une diffusivité du sol constante, élément indispensable pour rendre constant les coefficients de l'EDP à résoudre. Cette hypothèse de diffusivité constante peut cependant être valide dans le cas d'une faible variation de l'humidité du sol. Ce cas est réalisé en micro-irrigation, où le sol peut être maintenu à une humidité élevée. Dans le cas d'une irrigation à la raie, la durée entre deux irrigations est plus longue, les variations de l'humidité du sol sont donc plus importantes. Nous reviendrons sur l'impact de cette hypothèse en dernière partie, lors de l'analyse des résultats de la modélisation.

Ces hypothèses permettent néanmoins d'obtenir l'EDP suivante (2.1.8), passant d'une équation non linéaire en la fonction  $h$  à une équation à coefficients constants en la fonction  $\phi$ , le potentiel de flux (de manière à ne pas alourdir inutilement les écritures,  $\phi(h)(x, z, t)$  sera désormais noté  $\phi(x, z, t)$ ).

$$\partial_t \phi(x, z, t) = \frac{\kappa}{\alpha} \nabla^2 \phi(x, z, t) - \kappa \partial_z \phi(x, z, t) \quad (2.1.8)$$

Elle sera associée aux conditions initiales et aux limites suivantes (on distingue toujours les conditions aux limites en charge de celles en flux)



$$\phi(x, z, 0) = \phi_{CI}(x, z) \quad (2.1.9)$$

$$\phi[(x, z) \in \delta\Omega, t] = \phi_{CL}(x, z, t) \quad (2.1.10)$$

$$\alpha\phi[(x, z) \in \delta\Omega, t]\vec{e}_x - \vec{\nabla}\phi[(x, z) \in \delta\Omega, t] = \vec{q}_{CL}(x, z, t) \quad (2.1.11)$$

## 2.1.2 Changement de repère

Lors de la décomposition du problème en problèmes élémentaires, une translation et une rotation du repère ont permis de se ramener à un problème connu. Cependant, ce changement de repère modifie également la forme de l'équation à résoudre. Le domaine subit le changement de repère qui correspond au changement de variables suivant

$$\begin{cases} x' &= (x - x_M) \cos \omega + z \sin \omega \\ z' &= -x \sin \omega + (z - z_M) \cos \omega \\ t' &= t \end{cases}$$

Ici,  $\omega$  représente l'angle que fait le segment avec l'horizontale,  $(x_M, z_M)$  sont les coordonnées du milieu du segment. Ce changement de variables appliqué sur l'équation (2.1.8) donne l'équation suivante à résoudre.

$$\partial_t \phi(x', z', t') = \frac{\kappa}{\alpha} \nabla^2 \phi(x', z', t') - \kappa (\sin \omega \partial_{x'} \phi(x', z', t') + \cos \omega \partial_{z'} \phi(x', z', t')) \quad (2.1.12)$$

Celle-ci est associée aux conditions initiales et aux limites correspondantes. Concernant les conditions initiales, le choix d'une décomposition en une série de gaussiennes est particulièrement bien adapté au problème. En effet, le choix de représenter les conditions initiales sous forme de gaussiennes bidirectionnelles permet de traiter une fonction à variables séparables ( $f(x, z) = f_x(x)f_z(z)$ ). Les intégrales doubles ou triples apparaissant dans les solutions théoriques développées dans la partie précédente sont donc réduites au produit de deux ou trois intégrales, plus simple et plus rapide à évaluer.

Un autre avantage de ce choix de représentation est que la rotation du repère n'a aucun effet sur une telle condition initiale si on choisit le même écart type dans les directions  $x$  et  $z$ . Un autre type de fonction aurait été sujet à cette rotation et la condition initiale transformée n'aurait plus eu la propriété de séparation des variables.

L'équation sur laquelle nous allons poursuivre l'étude est donc l'équation (2.1.12) sur un domaine semi-infini  $\mathbb{R} \times [0, \infty]$ . Une dernière série d'opérations sur cette équation permet de retrouver l'équation de diffusion pure, équation pour laquelle une méthode de résolution a été définie dans la partie précédente.

### 2.1.3 Adimensionnement des équations et changement de fonction

On introduit maintenant successivement le changement de fonction et les variables adimensionnées suivants

$$\begin{cases} x'' & = \alpha x'/2 \\ z'' & = \alpha z'/2 \\ t'' & = \alpha \kappa t'/4 \\ \Phi(x'', z'', t'') & = \alpha/K_s \phi(x'', z'', t'') \\ \Psi(x'', z'', t'') & = e^{(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega + t'')} \Phi(x'', z'', t'') \end{cases}$$

Pour finalement obtenir l'équation de diffusion pure

$$\partial_{t''} \Psi(x'', z'', t'') = \nabla^2 \Psi(x'', z'', t'') \quad (2.1.13)$$

Le domaine de résolution des problèmes élémentaires est simplifié à un espace semi-infini. La rotation de repère a permis de ramener la frontière sur la droite ou le plan d'équation  $z = 0$ , les nouvelles conditions initiales et aux limites sont les suivantes

$$\begin{cases} \Psi(x'', z'', 0) & = e^{(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega)} \frac{\alpha}{K_s} \phi_{CI}(x'', z'') \\ \Psi(x'', 0, t'') & = e^{(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega + t'')} \frac{\alpha}{K_s} \phi_{CL}(x'', t'') \\ \Psi(x'', 0, t'') \cos \omega - \partial_{z''} \Psi(x'', 0, t'') & = e^{(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega + t'')} \frac{2}{K_s} q_{z''CL}(x'', z'', t'') \end{cases}$$

Dans la suite de la rédaction, nous reprendrons la notation  $(x, z, t)$  pour nommer les variables d'espace et de temps  $(x'', z'', t'')$  afin d'alléger les écritures.

Les développements de la partie précédente permettent de résoudre cette EDP associée à ce type de conditions initiales et aux limites. La représentation informatique des expressions sous forme d'arbres binaires permet d'effectuer complètement les calculs symboliques nécessaires à l'évaluation des solutions dans le cas du traitement des conditions initiales. Dans ce cas, les intégrations à effectuer sont des intégrations sur les variables d'espace uniquement. Concernant le traitement des conditions aux limites, une intégrale en temps intervient. La représentation informatique considère la variable de temps comme un paramètre. L'intégration sur la dimension temporelle sera donc effectuée grâce à une intégration numérique.

### 2.1.4 Cas particulier du traitement des conditions aux limites

Plaçons-nous dans le cas du problème bidirectionnel noté NDV dans TAB. 1.4.1. Rappelons l'expression symbolique représentant la solution de l'EDP (2.1.13) dans ce cas.

$$\Psi(x, z, t) = \int_0^t \left[ \partial_z G_z(0, t_s, z, t) \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x_s, t_s, x, t) \Gamma_{CLx}(x_s, t_s) dx_s \right] dt_s \quad (2.1.14)$$

La solution peut être approchée par la somme suivante. Dans cette somme, l'intégrale en la variable  $x_s$  est réalisée symboliquement en utilisant la représentation définie dans la partie précédente.

$$\Psi(x, z, t) \approx \sum_{n=0}^{N-1} \left[ \partial_z G_z(0, t_{s_{n+\frac{1}{2}}}, z, t) \int_{-\infty}^{\infty} G_x(x_s, t_{s_{n+\frac{1}{2}}}, x, t) \Gamma_{CLx}(x_s, t_{s_{n+\frac{1}{2}}}) dx_s \right] (t_{s_{n+1}} - t_{s_n}) \quad (2.1.15)$$

En prenant le cas d'une suite  $t_{s_n} = \frac{n}{N}t$ , on obtient la méthode d'intégration numérique appelée méthode des trapèzes. Cependant la fonction à intégrer possède de forts gradients. La courbe rouge de la FIG. 2.1.4 illustre une fonction de la forme 2.1.14. Elle a été représentée en fixant ses paramètres dans une de ses situations défavorables à l'intégration numérique classique. L'utilisation d'une suite linéaire d'intervalles ne permet pas de traiter efficacement ces forts gradients et impose l'augmentation du nombre d'intervalles pour obtenir une approximation de qualité. Ces gradients sont particulièrement importants pour des valeurs de  $t_s$  proche de 0. La suite  $t_{s_n}$  a donc été adaptée pour diviser l'intervalle global d'intégration  $[0, t]$  en intervalles courts pour des valeurs de  $t_s$  proches de 0 et des intervalles plus larges pour les valeurs supérieures. La suite retenue est la suite définie par récurrence (2.1.16), initialisée par  $t_{s_0} = 0$  et dont la différence entre deux termes successifs est une suite géométrique.  $A_t$  est le paramètre définissant la croissance exponentielle des longueurs des intervalles.

$$t_{s_{n+1}} = t_{s_n} + A_t^n \frac{1 - A_t}{1 - A_t^N} t \quad (2.1.16)$$

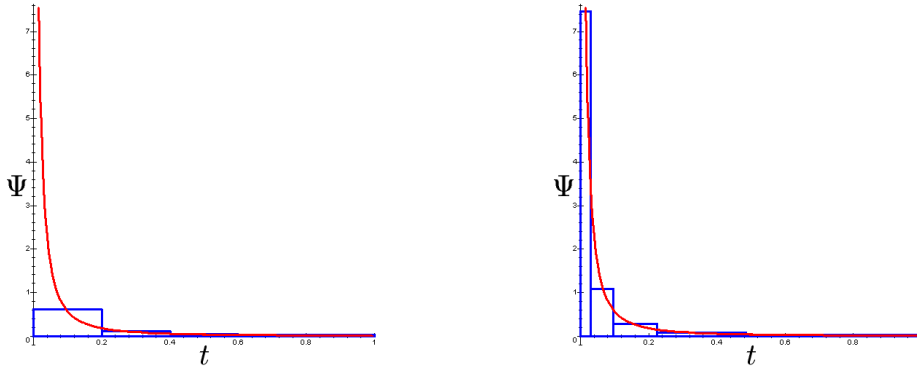


FIG. 2.1.1 – Impact de la suite  $t_{s_n}$  sur l'intégration numérique de la solution aux problèmes élémentaires (à gauche suite arithmétique, à droite suite utilisée)

Ce type d'intégration numérique adaptée à la fonction à intégrer permet d'obtenir une précision satisfaisante à partir de  $N = 10$ . Le critère définissant cette précision satisfaisante est une erreur absolue inférieure à 2% entre la condition à la limite imposée  $\Gamma_{CLx}(x, t)$  et la solution  $\Psi(x, z, t)$  calculée grâce à l'approximation et évalué en  $z = 0$ . Ces deux fonctions sont théoriquement égales

tout au long de la simulation. Pour une condition à la limite en forme de porte, ce critère est respecté. Ce type de fonction présente de fortes discontinuités, un test de précision concluant sur cette fonction valide l'utilisation de cette approximation numérique sur d'autres fonctions plus régulières.

### 2.1.5 Remarques sur le cas tridirectionnel

Tous ces développements ont été traités sur un cas bidirectionnel. Le passage au cas tridirectionnel, modélisant les transferts hydriques d'un sol sous micro-irrigation, est réalisé en ajoutant la composante sur la direction  $y$ . La difficulté dans le cas bidirectionnel est de gérer les conditions aux limites en surface. Dans le cas de la micro-irrigation, on considère une surface plane. La composante dans la direction  $y$  est donc la même que celle sur la direction  $x$ . Le passage au cas tridirectionnel ne comporte donc aucune difficulté majeure et se limite à multiplier la solution du cas bidirectionnel par une intégrale supplémentaire réalisée sur la variable  $y$ .

## 2.2 Solutions des problèmes élémentaires

### 2.2.1 Expressions symboliques représentant les solutions

Une fois ces problèmes élémentaires construits, ils sont résolus en utilisant la représentation symbolique et l'intégration numérique définie plus haut dans le cas de problèmes aux limites.

La FIG. 2.2.1 représente la construction de la solution du problème élémentaire composé d'une condition initiale sous forme de gaussienne et d'une condition à limite de type Dirichlet nulle. La fonction de Green et la condition initiale étant à variables séparables, la solution  $\Psi$  de ce problème peut s'écrire comme produit de deux intégrales  $\Psi_x, \Psi_z$ . L'intérêt de la représentation sous forme d'arbre binaire réside essentiellement dans la construction de cette solution. Lors du codage, les fonctions  $\mathcal{G}$  sont construites indépendamment puis assemblées en appelant les procédures appropriées (ici, sommes, produits et intégrations sur la variable  $x_s$  et  $z_s$ ). Ce procédé permet d'éviter le codage de formules symboliques longues représentant les solutions des problèmes élémentaires et l'ajout d'un nouveau terme dans l'équation initiale (terme puits/source dans l'équation de Richards par exemple) peut être géré sans reprendre le code en profondeur.

Le tableau suivant décrit le nombre de fonctions  $\mathcal{G}$  (voir paragraphe 3.1 de la partie précédente) et d'opérations algébriques contenues dans chaque solution élémentaire dans le cas d'une modélisation bidimensionnelle. Les valeurs contenues dans le tableau sont obtenues avec une approximation de la fonction  $v \rightarrow \operatorname{erfc}(v)$  à 3 fonctions  $\mathcal{G}$  et pour une quadrature numérique divisant l'intervalle d'intégration en 10 pas. Dans chaque case du tableau, le premier chiffre de l'addition vaut pour la partie de la solution dépendant de la variable  $x$ , le second de  $z$ . Dans le cas tridirectionnel, il faut ajouter à ces valeurs, le nombre de fonctions et d'opérations algébriques constituant les intégrales sur la direction  $y$ .

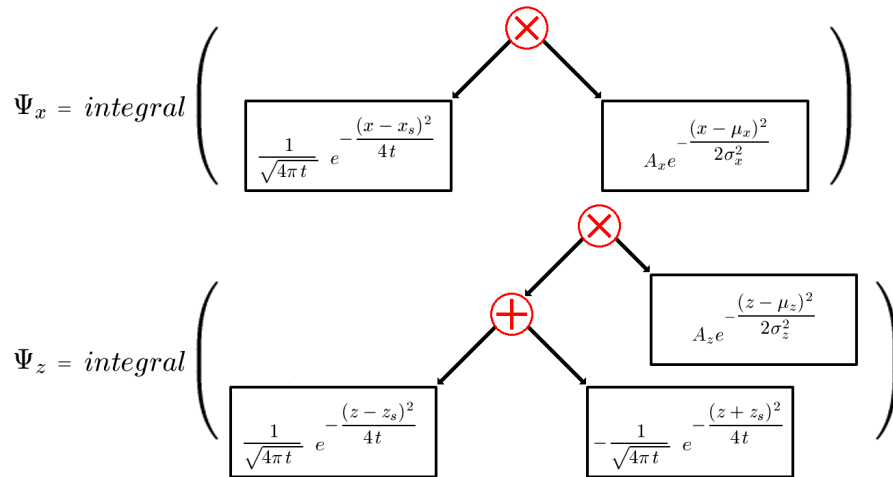


FIG. 2.2.1 – Représentation sous forme d’arbre binaire d’une solution élémentaire

Problème	Nombre de fonctions $\mathcal{G}$	Nombre d’additions	Nombre de multiplications
GDN	26 + 76	3 + 39	2 + 16
GCN	26 + 190	3 + 129	2 + 40
NDV	161 + 286	150 + 259	0 + 19
NCV	161 + 305	150 + 275	0 + 19

TAB. 2.2.1 – Caractéristiques des solutions élémentaires

Ces valeurs concernent l’évaluation d’une solution d’un problème élémentaire. En reprenant le premier chapitre de cette partie concernant la décomposition du problème global, on s’aperçoit que le nombre de problèmes élémentaires dépend de la discrétisation de la surface du domaine étudié et de celle des conditions initiales. On peut ainsi craindre une augmentation très rapide de ces valeurs, donc du temps de calcul, sur la modélisation complète du problème général.

Ce nombre de problèmes élémentaires est effectivement en rapide augmentation sur la modélisation du problème global. Une raie d’irrigation peut être cependant discrétisée grossièrement, le tracé de la surface n’étant certes pas plat, mais à pentes faibles et régulières. De même, les conditions initiales en humidité ou en solutés sont également des fonctions qui peuvent être approximées par un nombre restreint de gaussiennes. Notons également que les valeurs de TAB. 2.2.1 ne représentent que le nombre de gaussiennes construites lors de la modélisation et que cette construction consomme très peu de temps de calcul. Ces fonctions ne sont ensuite pas toutes évaluées en tout point du domaine. Nous verrons plus loin que certaines de ces fonctions ne sont utilisées que sur une zone particulière du domaine. Le temps de calcul reste donc raisonnable par rapport au temps de calcul d’une modélisation numérique classique. Ces données concernant le temps de calcul seront prises en compte dans l’analyse des résultats de la modélisation.

## 2.2.2 Visualisation des solutions

Les images suivantes représentent les solutions  $\phi(x, z, t)$  des problèmes élémentaires notés GDN, GCN, NDV et NCV en considérant un segment incliné à 20%. Ces simulations, sont réalisées pour des paramètres  $\alpha = 2$  et  $\kappa = 1.5$  après  $1h$  et  $4h$  de simulation. Les problèmes NDV et NCV traitent de conditions aux limites sous forme de porte, ils valent 1 sur  $[-x_0, x_0]$  et 0 ailleurs ( $x_0$  est la demi longueur d'un segment de la surface). Les problèmes GDN et GCN sont résolus avec une condition initiale de la forme d'une gaussienne de maximum 1 centrée au milieu de la surface.

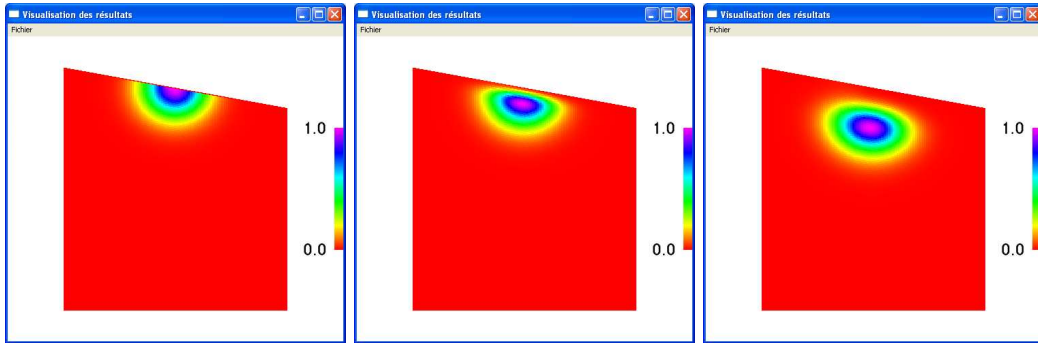


FIG. 2.2.2 – Profil initial, potentiel de flux à  $1h$  et à  $4h$  du problème GDN

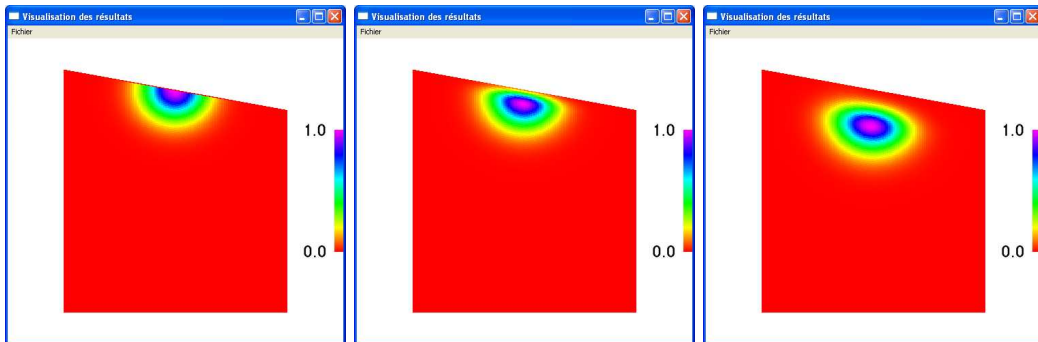


FIG. 2.2.3 – Profil initial, potentiel de flux à  $1h$  et à  $4h$  du problème GCN

Sur ces exemples, les effets de la gravité sur les profils obtenus est plus important que celui de la diffusivité. Le choix du jeu de paramètres définissant cette prédominance des effets gravitaires permet de valider la prise en compte de la pente du domaine étudié dans les calculs. Un jeu de paramètres définissant une situation inverse aurait cependant permis de mieux différencier les deux types de conditions aux limites, en charge et en flux. Ici, la convection prédominante empêche cette différenciation. La partie suivante analyse les résultats du modèle sur différents types de sol, nous y analyserons donc en détail les impacts des paramètres du modèle sur la forme du profil hydrique.

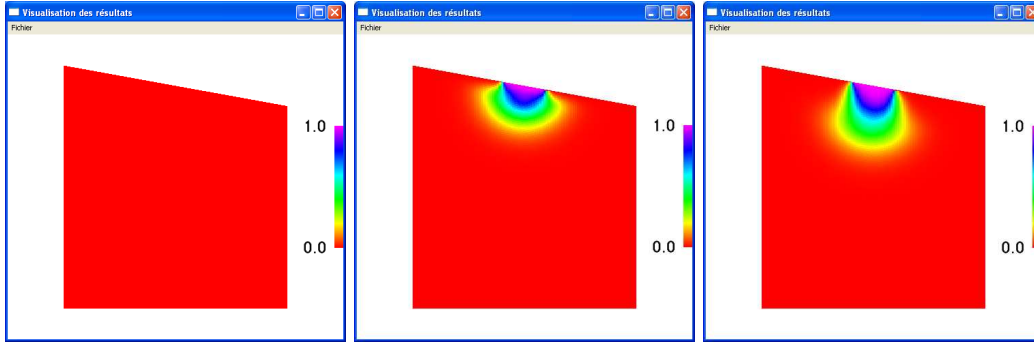


FIG. 2.2.4 – Profil initial, potentiel de flux à  $1h$  et à  $4h$  du problème NDV

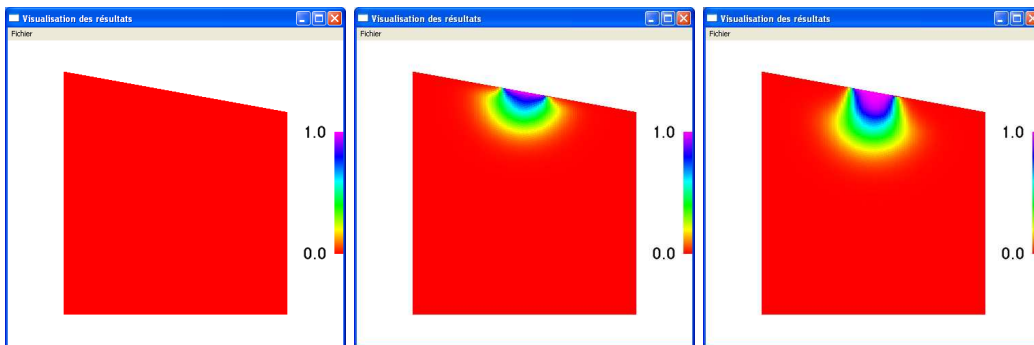


FIG. 2.2.5 – Profil initial, potentiel de flux à  $1h$  et à  $4h$  du problème NCV





## Chapitre 3

# Modélisation des transferts de solutés sur les problèmes élémentaires

A la manière de la modélisation des transferts hydriques, la modélisation des transferts de solutés a bénéficié de nombreux développements analytiques. Ceux-ci sont également basés sur une résolution analytique exploitant la même technique que celle utilisée pour les transferts hydriques. Cette équation est formellement proche de l'équation de Richards, ce qui permet de la traiter de la même manière. Le chapitre qui va suivre ne rentre donc pas autant dans les détails comme l'a fait le chapitre 2 concernant les transferts hydriques, puisque de nombreuses opérations qui doivent être effectuées sur l'équation ont déjà été développées. Il insiste plutôt sur l'établissement des équations générales représentant l'évolution d'un profil de solutés, les hypothèses posées pour permettre leurs résolutions et les particularités de la modélisation dans le contexte de la problématique.

### 3.1 Simplification et adimensionnement de l'équation de convection-diffusion

#### 3.1.1 Rappel de l'équation de convection-diffusion bidirectionnelle

L'équation gérant l'évolution d'un profil de soluté dans un sol est basée sur l'équation de convection-diffusion. Cette équation peut ensuite être complétée par des fonctions puits et sources représentant un prélèvement ou une production de solutés (dans le cas du nitrate, extraction racinaire ou dégradation d'ammonium en nitrate par exemple). Une espèce chimique peut être présente sous différentes phases dans le sol : en solution dans l'eau, adsorbé dans la matrice poreuse du sol ou sous forme gazeuse après volatilisation. Des échanges entre les différentes phases peuvent intervenir. On comprend donc la complexité de l'équation à résoudre. Rappelons ci-dessous l'équation complète (3.1.1) déjà détaillée dans le paragraphe 2.3.4 de la première partie. Les interactions entre les différentes phases et la complexité de l'équation empêche sa résolution analytique sous cette forme. L'équation que nous nous proposons de résoudre prend en compte uniquement les événements prédominants et sera appliquée dans les cas où les autres événements peuvent être considéré

négligeables. Ces cas et les justifications permettant ces hypothèses sont notés dans la première partie de ce travail au paragraphe 2.3.2.

$$\begin{aligned}
& \partial_t(\theta c_N)(x, z, t) + \partial_t(\rho(x, z, t)s_N)(x, z, t) + \partial_t(a_\nu g_N)(x, z, t) = \\
& \vec{\nabla} \cdot (\theta \overline{D}^w \vec{\nabla} c_N)(x, z, t) + \vec{\nabla} \cdot (a_\nu \overline{D}^g \vec{\nabla} g_N)(x, z, t) - \vec{\nabla} \cdot (\vec{q} c_N)(x, z, t) \\
& - S c_{Nr}(x, z, t) - \mu_w(\theta c_N)(x, z, t) - \mu_s(\rho s_N)(x, z, t) - \mu_g(a_\nu g_N)(x, z, t) \\
& + \gamma_w \theta(x, z, t) - \gamma_s \rho(x, z, t) - \gamma_g a_\nu(x, z, t)
\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{ll} c(x, z, t) & : \text{ la concentration du soluté dans la phase liquide en } [M.L^{-3}] \\ s(x, z, t) & : \text{ la concentration du soluté dans la phase solide en } [M.M^{-1}] \\ g(x, z, t) & : \text{ la concentration du soluté dans la phase gazeuse en } [M.M^{-1}] \\ \theta(x, z, t) & : \text{ la teneur en eau volumique en } [L^3.L^{-3}] \\ \rho(x, z, t) & : \text{ la densité apparente du sol en } [M.L^{-3}] \\ a_\nu(x, z, t) & : \text{ la teneur en air volumique en } [L^3.L^{-3}] \\ \overline{D}^w & : \text{ le tenseur de dispersion du soluté en phase liquide en } [L^2.T^{-1}] \\ \overline{D}^g & : \text{ le tenseur de dispersion du soluté en phase gazeuse en } [L^2.T^{-1}] \\ \vec{q} & : \text{ le flux Darcien dans le domaine en } [L.T^{-1}] \\ \mu_w, \mu_s \text{ et } \mu_g & : \text{ les constants de réactions du premier ordre en } [T^{-1}], [M.L^{-3}.T^{-1}] \text{ et } [T^{-1}] \\ \gamma_w, \gamma_s \text{ et } \mu_g & : \text{ les constants de réactions d'ordre zéro en } [T^{-1}], [M.L^{-3}.T^{-1}] \text{ et } [T^{-1}] \end{array} \right.$$

$$R \partial_t c_N(x, z, t) = D \nabla^2 c_N(x, z, t) - v_z \partial_z c_N(x, z, t) - \mu R c_N(x, z, t) \tag{3.1.2}$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{ll} R = & 1 - \frac{\rho K_d}{\theta} \text{ le coefficient de retard en } [-] \\ K_d = & \text{ le coefficient d'adsorption en } [L^3.M^{-1}] \\ D : & \text{ la dispersion du soluté en } [L^2.T^{-1}] \\ v_z = & \frac{q_z}{\theta} \text{ la vitesse de pore en } [L.T^{-1}]\mu \\ : & \text{ constante de réaction en phase liquide en } [T^{-1}] \end{array} \right.$$

Cette équation est soumise aux conditions initiales et aux limites suivantes.

$$c_N(x, z, 0) = c_{N \text{ CI}}(x, z) \tag{3.1.3}$$

$$\vec{q}_N(x, z, t) = \vec{q}_{N \text{ CL}}(x, z, t) \tag{3.1.4}$$

En comparant l'équation générale (3.1.1) et cette dernière équation (3.1.3), on remarque que de nombreuses simplifications ont été réalisées. Les interactions entre les différentes phases ont été réduite à une adsorption linéaire de la matrice poreuse ( $s_N = K_d c_N$ ), les termes réactifs réduits à un simple terme, le tenseur de diffusivité a été ramené à un scalaire constant et le flux Darcien est considéré constant et monodirectionnel.

Sur ce dernier point, notre problématique étant l'étude bidirectionnelle des transferts de solutés, la simplification est trop restrictive. Cette simplification permet pourtant d'obtenir une équation à coefficients constants qui sera résolue avec les mêmes outils que ceux développés pour les transferts hydriques. Sa solution permet d'avoir une première approximation qui est ensuite raffinée par un procédé expliqué ci-après.

### 3.1.2 Adimensionnement de l'équation et changement de fonction

L'EDP de convection-diffusion considérée pour la résolution des problèmes élémentaires doit subir de même que pour l'équation de Richards linéarisée des transformations. Tout d'abord un changement de repère pour ramener la frontière à l'horizontale, un adimensionnement des variables et un changement de fonction. Les deux équations de transferts d'eau et de solutés étant formellement identiques, les transformations à effectuer sont obtenues en changeant les coefficients  $\frac{\kappa}{\alpha}$  par  $\frac{D}{R}$  et  $\kappa$  par  $\frac{v_z}{R}$  et en tenant compte des termes réactifs, ce qui donne

$$\begin{cases} x' &= (x - x_M) \cos \omega + z \sin \omega \\ z' &= -x \sin \omega + (z - z_M) \cos \omega \\ t' &= t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x'' &= \frac{v_z}{2D} x' \\ z'' &= \frac{v_z}{2D} z' \\ t'' &= \frac{v_z^2}{4D} t' \\ c_{N\text{adim}}(x'', z'', t'') &= \frac{c_N}{c_{N\text{max}}} e^{\left(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega + \left(1 + \frac{4D\mu R}{v_z^2}\right)t''\right)} c_N(x'', z'', t'') \end{cases}$$

On retrouve alors l'équation de diffusion pure (3.1.5) traitée par les développements de la partie dédiée aux outils mathématiques.

$$\partial_t c_{N\text{adim}}(x'', z'', t'') = \nabla^2 c_{N\text{adim}}(x'', z'', t'') \quad (3.1.5)$$

Ces transformations sont également effectuées sur les conditions initiales et aux limites. Les conditions aux limites traditionnellement utilisées correspondent à des pratiques de fertilisation. Le nitrate est apporté soit sous forme d'engrais, et sera mathématiquement représenté en condition initiale, soit il est apporté sous forme gazeuse dissout dans l'eau d'irrigation, mathématiquement traduit par une condition de flux imposé. Sur le reste de la frontière du domaine, le flux orthogonal à la surface est nul.

$$c_{N\text{adim}}(x'', z'', 0) = \frac{c_N}{c_{N\text{max}}} e^{\left(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega + \left(1 + \frac{4D\mu R}{v_z^2}\right)t''\right)} c_{N\text{CI}}(x'', z'') \quad (3.1.6)$$

$$c_{N\text{adim}}(x'', z'', t'') \cos \omega - \partial_z'' c_{N\text{adim}}(x'', z'', t'') = e^{\left(-x'' \sin \omega - z'' \cos \omega + \left(1 + \frac{4D\mu R}{v_z^2}\right)t''\right)} q_{zN\text{CL}}(x'', z'', t'') \quad (3.1.7)$$

La solution des problèmes élémentaires concernant les transferts de solutés sont proches de celles obtenues pour les transferts hydriques aux coefficients des équations près. Un type de problème élémentaire est éliminé. En effet, physiquement, le cas de conditions aux limites en charge n'est pas représenté. Il correspondrait à une concentration en soluté contrôlée sur une partie de la surface. En irrigation à la raie ou en micro-irrigation, ce cas n'apparaît jamais.

On peut noter que la prise en compte d'un coefficient de dispersion différent selon l'axe vertical et horizontal rend impossible cette transformation en une équation de diffusion pure. Dans les cas qui seront étudiés plus loin dans ce document, il faudra donc vérifier que l'hypothèse consistant à considérer un coefficient de dispersion isothrope est bien fondée. Les cas traités font intervenir en général un flux pondérant sur les effets dispersifs. Cette hypothèse sera donc valide dans des sols à texture grossière, il faudra cependant tenir compte de cette hypothèse pour analyser les résultats de simulation sur un sol à texture plus fine.

L'hypothèse d'un flux vertical constant pèse plus lourdement sur la qualité de représentation des cas traités. Les problèmes élémentaires sont cependant résolus en considérant cette hypothèse. La solution générale est tout d'abord recomposée selon des techniques adaptées et un procédé permettant une représentation plus précise est ensuite appliqué sur la solution générale. Ces éléments sont proposés dans le chapitre qui suit.

## Chapitre 4

# Recomposition de la solution générale

Les solutions aux problèmes élémentaires permettent de définir les *briques* élémentaires de la reconstruction de la solution du problème général. Cette reconstruction suit des règles précises. En effet, une sommation simple des problèmes élémentaires ne suffit pas à rendre compte d'une surface non plane, notamment concernant la reconstruction des conditions initiales. Une gaussienne participant à la composition des conditions initiales peut être influencée par deux ou plusieurs segments composant la surface. Ce chapitre définit les modalités de cette recombinaison.

### 4.1 Principes généraux

Les principes de recombinaison de la solution du problème ont été développés dans le but de rendre une approximation de bonne qualité de la solution exacte des équations linéarisées. Nous ne nous sommes donc pas attachés à prouver complètement leur validité mathématique. Les procédés utilisés dans cette recombinaison sont généralement basés sur des formules empiriques qui ont prouvé leur robustesse par la qualité des résultats obtenus. Ces résultats seront présentés dans la partie suivante.

#### 4.1.1 Recombinaison des conditions aux limites

En reprenant l'expression symbolique de la solution des problèmes élémentaires, on s'aperçoit que les conditions aux limites sont représentées par une intégrale sur la frontière et sur la variable temporelle. Ainsi, fractionner la condition aux limites du problème général revient à fractionner l'intégrale la représentant sur chacun de ses segments constitutifs. Prenons le cas d'une condition de flux constant sur une surface anguleuse. La recombinaison de la solution générale peut être approchée en sommant les problèmes élémentaires correspondants (FIG. 4.1.1).

Dans le cas d'une même inclinaison pour les deux segments composant l'angle, cette recombinaison représente exactement la solution de l'équation linéarisée initiale. Dans le cas d'une faible différence d'inclinaison entre les deux segments, l'approximation donne des résultats satisfaisants.

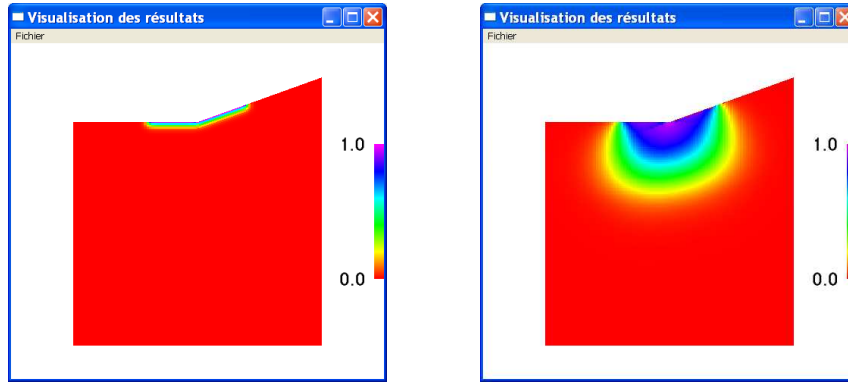


FIG. 4.1.1 – Recomposition des conditions aux limites sur une surface composée de deux segments

Dans le cas de différences plus importantes, l'approximation n'est plus valable. Ces problèmes peuvent être cependant atténués en discrétisant de manière plus fine la géométrie de la surface. Ceci peut être réalisé par exemple en intercalant un segment supplémentaire d'angle moyen. Les angles doivent cependant être extrêmes pour que ces cas de figure apparaissent. En irrigation à la raie, il est peu fréquent de les rencontrer (des profils moyens de raie sont représentés dans (Mailhol, 2001) au chapitre 5, (Nemeth, 2001) au chapitre 2 ou (Triki, 2002)).

Un cas particulier peut apparaître en irrigation à la raie lors de la recomposition de la solution générale. Ce système d'irrigation est représenté en juxtaposant en surface un segment ayant en condition à la limite une charge imposée avec un segment ayant une condition de flux orthogonal à la surface nul. Cette représentation n'est pas satisfaisante. Elle aboutit à FIG. 4.1.2 de gauche. Le segment caractérisé par un flux nul doit prendre en compte les effets capillaires induit par le segment soumis à une charge. Le point de contact entre les deux segments est lui aussi soumis à une charge constante. Il a donc fallu définir dans ce cas l'évolution du profil sur le segment soumis à un flux nul (FIG. 4.1.2 de droite).

Le segment soumis à un flux nul est alors remplacé par un segment sur lequel on impose ce profil, variable en temps et en espace. Ce segment correspond en théorie à une ligne de flux. L'évolution de l'humidité sur ce segment est donc la solution de l'équation d'écoulement monodirectionnel dont l'origine du segment est maintenue à une charge constante. Cette valeur est définie par l'équation (4.1.1) dans laquelle les effets gravitaires sont pris en compte en considérant l'angle du segment. Cette fonction correspond à l'écoulement monodirectionnel sur la demi-droite positive dont l'origine ( $x = 0$ ) est maintenue à la valeur 1, on translatera donc cette fonction pour l'adapter aux coordonnées du segment et à la position relative des segments l'un par rapport à l'autre.

$$\phi(x, t) = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} - \sin \omega \sqrt{t} \right) + \frac{1}{2} e^{2 \sin \omega} \operatorname{erfc} \left( \frac{x}{2\sqrt{t}} + \sin \omega \sqrt{t} \right) \quad (4.1.1)$$

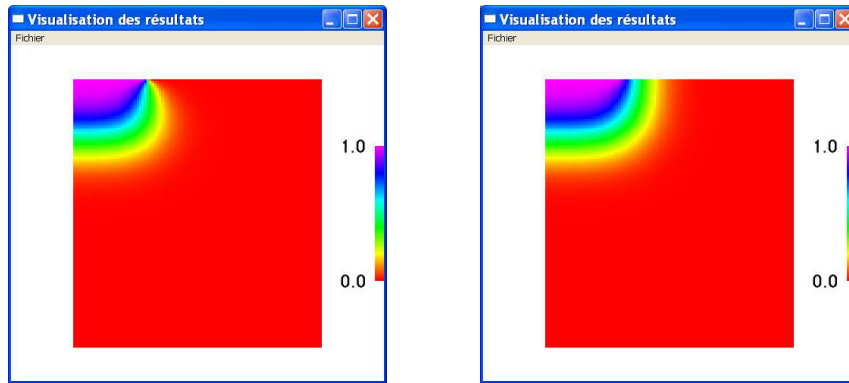


FIG. 4.1.2 – Juxtaposition d’une condition de charge imposée et d’une condition de flux nul (à gauche sommation simple, à droite prise en compte d’un profil particulier)

Si la valeur de la fonction (4.1.1) n’est pas négligeable à l’autre extrémité du segment considéré, on recommence ce procédé en reportant cette valeur sur le segment adjacent.

#### 4.1.2 Recomposition des conditions initiales

La recombinaison des conditions initiales doit prendre en compte l’irrégularité de la surface. Nous avons calculé, grâce à la résolution des problèmes élémentaires, l’évolution de chaque gaussienne participant à la définition de l’état initial du sol sur un domaine ayant comme frontière la droite incluant un des segments de la surface. Selon la position d’un point du domaine, l’influence de chaque segment sur l’évolution des conditions initiales ne sera pas la même. Il faut donc définir des domaines d’influence et des coefficients de pondération d’un point par rapport à chaque segment. Dans le cas de deux segments, on peut définir deux domaines d’influence et les coefficients de pondération par rapport aux frontières de ces domaines d’influence comme le montre FIG. 4.1.3.

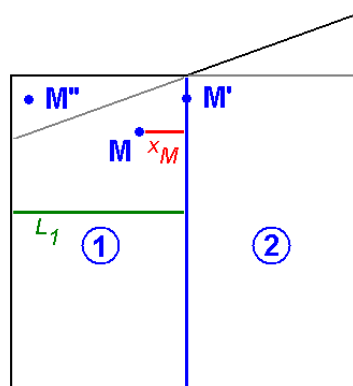


FIG. 4.1.3 – Domaine d’influence utilisé dans la recombinaison des conditions initiales

Considérons une condition initiale représentée par une seule gaussienne  $\mathcal{G}_0(x, z)$ . Les deux problèmes élémentaires permettant de représenter l'évolution de ce profil au cours du temps ont pour solution  $\mathcal{G}_1(x, z, t)$  et  $\mathcal{G}_2(x, z, t)$ . Ainsi, la première fonction  $\mathcal{G}_1(x, z, t)$  représente la solution du problème d'écoulement sur un demi plan infini de frontière la droite définie par le segment du domaine (1) sur laquelle on impose une condition à la limite nulle (de type Dirichlet ou Cauchy). De même  $\mathcal{G}_2(x, z, t)$  représente la solution du même problème en considérant le deuxième segment comme frontière du domaine. Au point  $M$  la solution est approchée comme combinaison linéaire de  $\mathcal{G}_1(x, z, t)$  et  $\mathcal{G}_2(x, z, t)$  avec  $\mu_1$  et  $\mu_2$  les coefficients de pondération (qui auront la forme 4.1.2) et  $\mu_1 + \mu_2 = 1$ . Dans le cas du point  $M$  de FIG. 4.1.3, le coefficient  $\mu_1$  sera proche de 1 et  $\mu_2$  proche de 0. Dans le cas du point  $M'$ , les coefficients de pondération sera égaux à  $\frac{1}{2}$ . D'où la forme (4.1.2) choisie pour ces coefficients qui permet de définir une solution recomposée continue et dérivable (pour  $\beta \neq 1$ ). Le point  $M''$  n'est compris que dans le domaine de résolution du problème élémentaire (1), dans ce cas, il n'y aura pas de pondération et la solution générale en ce point sera celle du problème élémentaire (1). Le paramètre  $\beta$  permet de définir des coefficients de pondération dépendant linéairement de la distance du point à la frontière s'il est égal à 1, ou des relations plus complexes sous forme de fonctions puissance. Il est égale à  $\frac{3}{2}$  dans FIG. 4.1.4.

$$\mu_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \left( 1 - \left( 1 - \frac{2x_M}{L_1} \right)^\beta \right)^{\frac{1}{\beta}} \quad (4.1.2)$$

FIG. 4.1.4 est obtenue pour un écoulement de 1 h avec une condition à la limite de type Dirichlet. On observe effectivement l'influence de chacun des deux segments. La discontinuité de la surface est reproduite de manière satisfaisante sur la solution du problème recomposé, même juste en dessous du changement de pente. La pondération réalisée à l'aide des coefficients  $\mu$  permet justement d'éviter de reproduire cette discontinuité dans la solution.

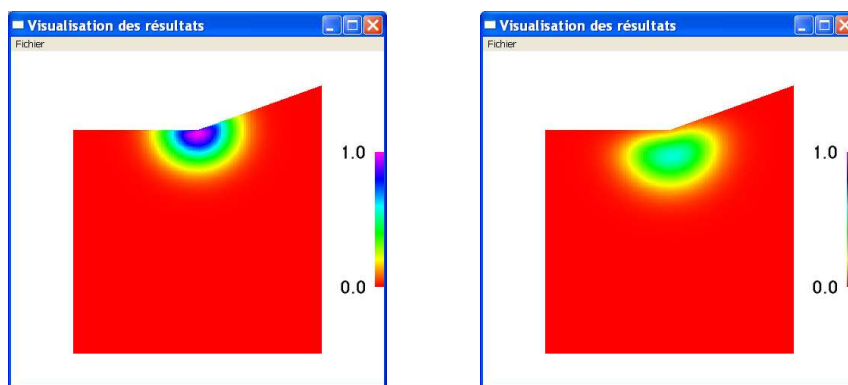


FIG. 4.1.4 – Recomposition des conditions initiales sur une surface composée de deux segments (à gauche condition initiale, à droite une simulation de 1 h)



## 4.2 Remarques sur l'évaluation du flux Darcien et de l'humidité du sol

La résolution de l'équation de Richards (2.1.8) sur des problèmes élémentaires et la recombinaison de la solution générale donne l'expression du potentiel de flux. Cette fonction permet d'obtenir toutes les autres fonctions décrivant l'état du sol en un point du domaine et à un instant donné. En effet, on extrait directement la charge hydraulique en inversant la forme du potentiel de flux définie par l'expression (2.1.5) du paragraphe 2.1.1 et le flux de Darcy dont les composantes sont notées  $q_{wx}$  et  $q_{wz}$  est obtenu en prenant le gradient du potentiel de flux.

$$h(x, z, t) = \frac{1}{\alpha} \ln \frac{\alpha \phi(x, z, t)}{K_s} \quad (4.2.1)$$

$$q_{wx}(x, z, t) = -\partial_x \phi(x, z, t) \quad (4.2.2)$$

$$q_{wz}(x, z, t) = -\partial_z \phi(x, z, t) + \alpha \phi(x, z, t) \quad (4.2.3)$$

$$(4.2.4)$$

Il est à noter que la dérivation en espace du potentiel de flux peut être effectuée grâce aux outils algorithmiques qui ont servis à la résolution de l'équation de Richards ou par une approche numérique. L'approche numérique est dans ce cas moins consommatrice en temps de calcul, la première approche a cependant l'intérêt de donner une valeur symbolique exacte et sera intéressante à utiliser dans des cas où l'approche numérique a besoin d'une discrétisation spatiale fine pour une bonne précision (par exemple là où les gradients hydriques sont les plus forts, en surface du sol et à proximité de l'origine de l'irrigation).

Concernant l'évaluation du profil d'humidité du sol, l'hypothèse du sol linéaire permettant la linéarisation de l'équation de Richards, impose une relation entre  $h$  et  $\theta$ . Cette relation représente donc le modèle de rétention du sol à utiliser pour évaluer la teneur en eau du domaine.

$$\theta(h)(x, z, t) = \theta_r + (\theta_s - \theta_r) e^{\alpha h(x, z, t)} \quad (4.2.5)$$

## 4.3 Prise en compte d'un flux Darcien non constant dans la modélisation des transferts de solutés

Nous avons noté plus haut que l'hypothèse consistant à prendre une vitesse de pore verticale constante dans l'équation de convection-diffusion est trop restrictive dans le contexte bidirectionnel des transferts de soluté. Elle est cependant un moyen efficace de linéariser cette équation afin de permettre sa résolution. Les techniques permettant cette résolution dans des cas complexes ont été décrites plus haut. A partir de cette solution de l'équation linéarisée, nous allons désormais proposer un processus en trois étapes permettant de prendre en compte une vitesse de pore variable en norme et en direction.

1. La résolution de l'équation de transferts de solutés en considérant une vitesse de pore verticale moyenne. Ce calcul de moyenne est différent selon l'événement considéré (irrigation ou redistribution) et son calcul est à justifier.
2. L'anamorphose du domaine adaptée au flux Darcien et à la teneur en eau du sol précédemment calculés. Cette anamorphose doit respecter la conservation de la masse.
3. L'interpolation des maillages (maillage du domaine ayant subit l'anamorphose sur celui du domaine initial).

Les développements ultérieurs sont réalisés sur un domaine bidirectionnel, mais sont facilement transposables à un domaine tridirectionnel.

### 4.3.1 Choix de la vitesse moyenne

L'intérêt de choisir une vitesse de pore moyenne adaptée est de proposer une première approximation de la solution la moins éloignée possible de la solution réelle. Selon l'événement considéré, la vitesse moyenne n'est pas évaluée de la même manière. S'il s'agit d'une redistribution, le flux Darcien et la teneur en eau ont tendance à s'homogénéiser au cours du temps dans le domaine de l'étude. Une moyenne en temps sur l'ensemble du domaine (4.3.1) permet donc de définir la vitesse de pore à considérer pour résoudre l'équation de convection-diffusion des nitrates.

$$\bar{v}_z = \frac{1}{S_\Omega t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} \int_\Omega \left(\frac{q_{wz}}{\theta}\right)(x, z, t) d\Omega dt \quad (4.3.1)$$

$$\text{avec } \begin{cases} S_\Omega & : \text{ la surface du domaine de l'étude } \Omega \\ t_{\max} & : \text{ la durée de la simulation } \\ q_{wz} & : \text{ la composante verticale du flux de Darcy } \end{cases}$$

En revanche, lors d'une irrigation, les gradients les plus importants du flux Darcien et de l'humidité du sol sont principalement concentrés dans une zone proche de la source d'irrigation. La vitesse de pore moyenne est donc calculée sur cette zone particulière où l'évolution de l'état du sol est la plus visible. En général, cette zone se trouve en surface du sol. On considère donc la moyenne en temps (4.3.2) au point  $(x_S, z_S)$  où le flux Darcien est le plus important.

$$\bar{v}_z = \frac{1}{t_{\max}} \int_0^{t_{\max}} \left(\frac{q_{wz}}{\theta}\right)(x_S, z_S, t) dt \quad (4.3.2)$$

La résolution de l'équation de Richards permet d'évaluer le flux Darcien et l'humidité du sol en tout point et à tout instant. Ces calculs permettent donc d'approcher les vitesses moyennes à calculer grâce à une intégration numérique. Une grande précision n'est pas nécessaire pour cette intégration, le choix de la vitesse moyenne permet uniquement de donner une première approximation de la solution du problème qui sera ensuite améliorée. De plus, la connaissance du flux et de l'humidité en un faible nombre de points et d'instantants suffit pour avoir une bonne approximation de la vitesse de pore moyenne. Dans le cas d'une irrigation à la raie, la condition initiale est une

condition de charge, le flux Darcien d'entrée de l'eau peut être approché par une expression de la forme  $kt^{-\frac{1}{2}}$  (Philip, 1957b). Dans le cas d'une micro-irrigation, le flux est imposé, on connaît donc exactement sa valeur en surface dans le temps. De plus, la teneur en eau varie faiblement en comparaison du flux Darcien. Ces observations permettent d'approcher efficacement la vitesse de pore moyenne sans augmenter de manière importante le nombre des calculs numériques.

### 4.3.2 Anamorphose du domaine étudié

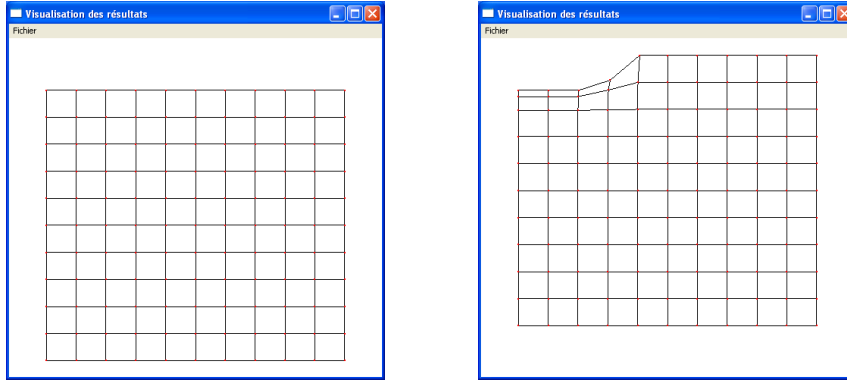


FIG. 4.3.1 – Anamorphose du domaine régulier en un domaine adapté à la vitesse de pore (cas d'une irrigation apportée sur le premier tiers de la surface)

Le profil de la vitesse de pore calculé grâce au flux de Darcy et à la teneur en eau du sol est  $\vec{V}(x, z, t) = \theta(x, z, t)^{-1} \vec{q}_w(x, z, t)$ . La prise en compte d'une vitesse moyenne dans la résolution de l'équation de transferts sous-estime le transport de nitrate aux points où  $\bar{v}_z < V_z(x, z, t)$  et le sur-estime quand  $\bar{v}_z > V_z(x, z, t)$  ( $V_z$  étant la composante verticale de  $\vec{V}$ ). L'anamorphose du domaine vise à rétablir une convection plus proche de la solution réelle. Elle ne prend pas en compte la dispersion car celle-ci a déjà été considérée dans la résolution de l'équation à coefficients constants. L'anamorphose du domaine transforme un réseau de points réguliers en un réseau de points tenant compte de la vitesse de pore réelle. Chacun de ces points subit donc la translation de vecteur  $\int (\vec{V}(x, z, t) - \bar{v}_z \vec{e}_z) dt$  comme le montre FIG. 4.3.1 dans le cas d'une irrigation où l'apport d'eau est effectué sur le premier tiers de la surface. Les points du réseau sont indicés  $M_{i,j}$  avant transformation (réseau régulier) et  $\tilde{M}_{i,j}$  après transformation (réseau anamorphosé). Chacun de ces points est associé à une concentration en nitrate  $c_N(M_{i,j})$  (issue de la résolution de l'équation de transfert à coefficients constants). Afin de respecter la conservation de la masse, on associe à chaque point une surface  $\delta S(M_{i,j})$  sur laquelle la concentration est supposée constante. La concentration du point ayant subi la translation  $c_N(\tilde{M}_{i,j})$  est égale en fin de simulation à

$$c_N(\tilde{M}_{i,j}) = c_N(M_{i,j}) \frac{\theta(M_{i,j}) \delta S(M_{i,j})}{\theta(\tilde{M}_{i,j}) \delta S(\tilde{M}_{i,j})} \quad (4.3.3)$$

### 4.3.3 Interpolation des maillages

Une fois l'anamorphose réalisée, il reste à exprimer le maillage ayant subi l'anamorphose dans le maillage régulier. Ce passage peut sembler superflu, en effet, les deux premières étapes suffisent à donner une approximation de la solution de l'équation de convection-diffusion en tenant compte d'une vitesse de pore variable. Cette dernière étape prendra tout son sens dans la suite du développement. FIG. 4.3.2 illustre la manière dont les maillages sont interpolés en respectant la conservation de la masse.

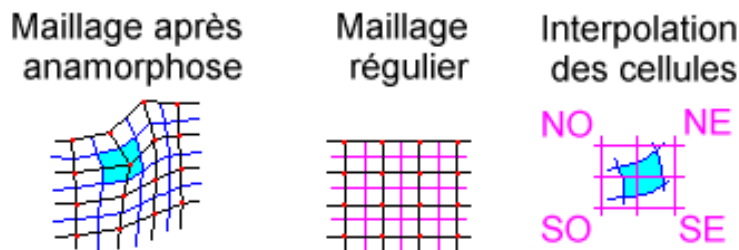


FIG. 4.3.2 – Interpolation du maillage après anamorphose sur le maillage régulier

Le maillage source de l'interpolation est le maillage qui a subi l'anamorphose, il est interpolé sur un maillage destination qui est le maillage régulier. Une cellule du maillage est constituée par l'aire  $\delta S$  (en bleu clair sur FIG. 4.3.2) centrée sur un point (en rouge). Ses limites correspondent aux médianes des quadrilatères formés par ces points. La masse de nitrate contenue dans la cellule du maillage source (qui vaut  $c_N \theta \delta S$ ) est répartie sur les cellules du maillage destination de la manière suivante : elle est fonction de la surface de la cellule source contenue dans chaque cellule destination. En considérant la concentration de la cellule source égale à  $c_{N_{srce}}$ ,  $c_{N_{destNO}}$  celle reçue par la cellule NO du maillage destination vaut

$$c_{N_{destNO}} = c_{N_{srce}} \frac{\theta_{srce} \delta S_{NO}}{\theta_{dest} \delta S} \quad (4.3.4)$$

Par ce procédé, on exprime le profil de nitrate sur le maillage régulier initial en respectant la conservation de la masse. Cette étape permet de réaliser un processus itératif afin d'obtenir une meilleure approximation de la solution réelle dans le cas de flux trop important ou de maillage trop serré.

### 4.3.4 Application du procédé

Dans le cas d'un flux important ou de réseau de points trop serré, l'ordre initial des points du réseau peut ne pas être respecté dans l'anamorphose et donner le maillage représenté à FIG. 4.3.3. Cette situation pourrait entraîner de nombreuses complications au niveau du calcul de la conservation de la masse et de la distribution des solutés lors de la simulation. Afin d'éviter ce cas de figure, il est possible de discrétiser le temps total de la simulation en pas de temps grossier (dimensionnés afin d'éviter le cas où le déplacement d'un point lors de l'anamorphose est plus grand que le pas en

espace du maillage). Cette dernière remarque fait référence à une condition CFL et de même que la condition CFL d'un schéma numérique classique, les contraintes sur le temps de calcul qu'elle engendre dépendent du phénomène simulé. Un phénomène où la vitesse de pore est faible engendra une condition CFL peu restrictive et les pas de temps pourront être pris grands. À l'inverse, un phénomène à dynamique rapide imposera la réduction des pas de temps et augmentera le temps de calcul. Cependant, contrairement à une méthode numérique, la méthode semi-analytique proposée n'est pas sensible à la discrétisation spatiale. Ainsi, dans le cas d'un écoulement rapide qui entraînerait une diminution significative du pas de temps pour atteindre la convergence dans une méthode numérique, la méthode semi-analytique peut conserver le même pas de temps en diminuant la définition du réseau de points du domaine sans perdre de précision sur les points (moins nombreux) où la concentration sera calculée.

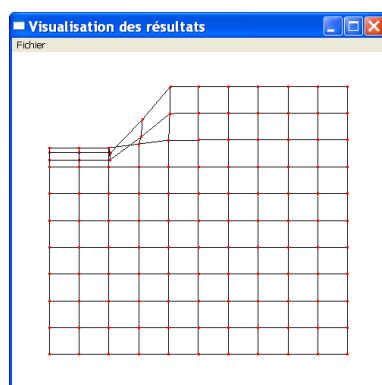


FIG. 4.3.3 – Anamorphose du domaine régulier dans le cas d'un flux trop important

La première étape de la méthode développée ici reste inchangée, l'équation à coefficient constant est résolue en considérant la vitesse de pore moyenne définie dans le paragraphe 4.3.1. L'anamorphose est ensuite effectuée sur un pas de temps assez faible pour respecter l'ordre des points du maillage initial. Le maillage qui a subi l'anamorphose est alors interpolé sur le maillage initial. Enfin, le processus d'anamorphose est repris sur ce dernier maillage. Sur le profil initial de nitrate et le flux Darcien représentés sur FIG. 4.3.4, ces étapes réalisées pour une itération sont illustrées sur FIG. 4.3.5. Le pas du maillage a été choisi volontairement grand pour une meilleure compréhension des principes du procédé.

En menant ce processus itératif à son terme, on aboutit au profil de FIG. 4.3.6 sur une irrigation de 4 h. Sur la figure, nous avons fait apparaître le profil final de flux. Nous avons choisi ici un coefficient de dispersion faible pour pouvoir mieux suivre la prise en compte d'une vitesse de pore variable grâce au procédé itératif décrit plus haut.

Nous rappelons que le profil illustré sur les figures sont des concentrations, on observe bien ici que cette concentration a baissé là où l'eau s'est infiltrée dans le domaine. Ce phénomène de dilution est plus visible en surface, là le temps de présence de l'eau a été le plus important au cours de la simulation. Cette simulation peut donner des résultats meilleurs encore en considérant des pas de temps plus faibles. Le temps de calcul s'en trouve cependant augmenté d'autant.

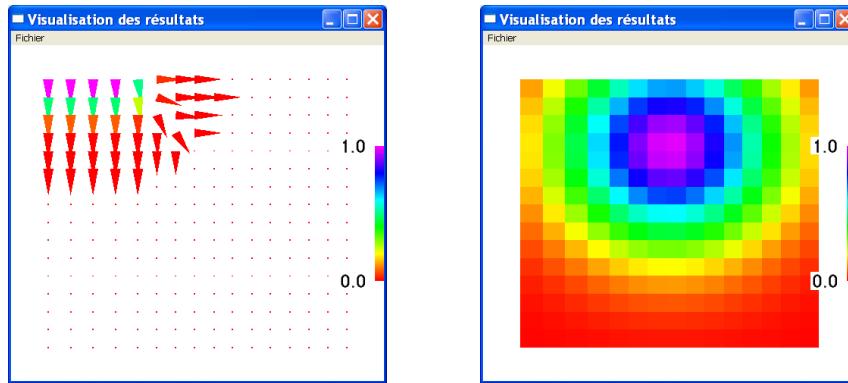


FIG. 4.3.4 – Profil du flux Darcien et profil initial de nitrate

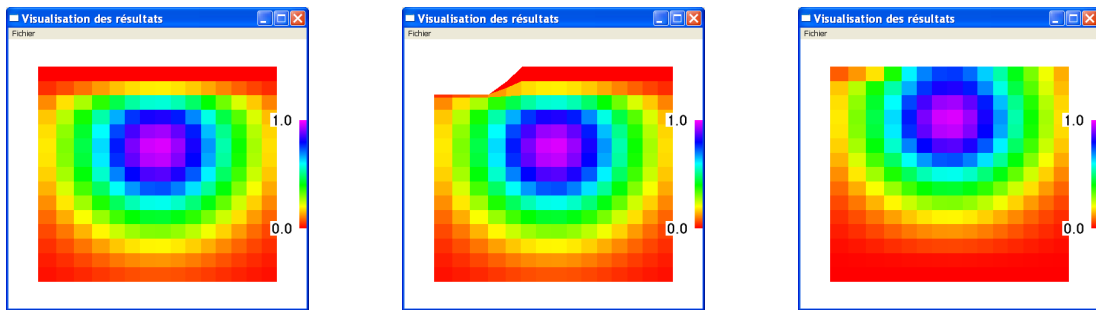


FIG. 4.3.5 – Différentes étapes d’une itération permettant la prise en compte d’un flux Darcien variable

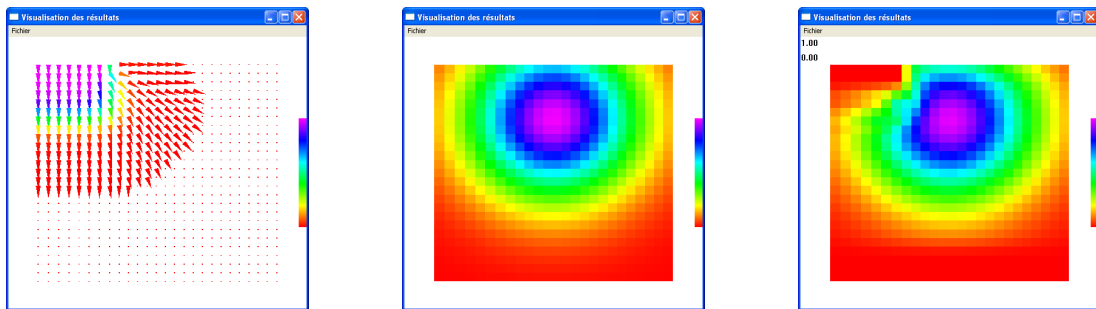


FIG. 4.3.6 – Evolution du profil de la concentration en nitrate et profil final de flux dans le cas d’un domaine soumis à un flux d’eau imposé en surface

Dans ce procédé qui permet de rendre compte avec plus de précision l’impact d’une vitesse de pore variable en espace et en temps, nous avons introduit un maillage, des pas de temps et une relation entre ces deux paramètres. Cependant, cette relation est beaucoup moins contraignante que celle utilisée par des méthodes numériques. Rappelons que les vitesses de pores calculées sont des expressions analytiques, et donc que leur évaluation ne dépend aucunement de pas d’espace ou de

temps. La première approximation du profil de concentration en soluté est également une expression analytique. Le fait de fixer un pas d'espace définit la finesse de la description des profils à visualiser et le pas de temps minimal à utiliser pour le processus itératif développé dans ce paragraphe.





# Conclusion de la partie

Dans cette partie nous avons tout d'abord développé la décomposition d'un problème général en problèmes élémentaires, les moyens utilisés pour résoudre ces problèmes théoriques simples, puis les principes de leur superposition permettant d'obtenir une approximation de la solution générale. Cette approche a été appliquée sur l'équation de Richards linéarisée et sur une équation de convection-diffusion simplifiée. Pour cette dernière équation, une approche itérative a été proposée afin d'améliorer la prise en compte d'un flux variable en temps et en espace.

Cette méthode analytique ou semi-analytique a de nombreux avantages. Les solutions des problèmes élémentaires sont les solutions exactes des équations linéarisées, les approximations réalisées lors de leur superposition ne réduisent que faiblement leur précision dans le contexte de l'étude. Le processus itératif améliorant la description du profil de concentration des solutés augmente certes les temps de calcul de l'approche, mais pour une prise en compte de phénomènes essentiels à l'étude. L'approche choisie pour résoudre ces équations est opérationnelle, peu de paramètres sont à définir et la description de l'évolution de l'état du sol au cours d'un cycle cultural complet est facilitée par l'allègement des contraintes sur le pas de temps (même si ces contraintes ne sont pas complètement éliminées dans le cas de la simulation des transferts de solutés).

Reste maintenant à évaluer l'impact des hypothèses retenues pour linéariser les équations de transfert. En effet, ces équations ont été simplifiées de manière importante afin de permettre leur résolution. Il convient maintenant de valider cette approche en définissant précisément leur domaine de validité.



## Cinquième partie

# Analyse des résultats et améliorations



# Introduction de la partie

Cette partie est dédiée à la présentation et à l'analyse des résultats obtenus grâce au modèle développé. Ce dernier sera testé sur deux systèmes d'irrigation (la raie et le goutte à goutte avec leur mode de fertilisation) et sur différents types de sol. Il sera comparé à HYDRUS-2D, code de référence ayant fait l'objet d'une validation dans la deuxième partie de ce document à partir des mesures expérimentales dans le cas de phénomènes événementiels.

Les caractéristiques du modèle à contrôler sont celles qui ont été avancées tout au long du développement de ce travail :

- Son adaptabilité. L'intérêt de ce modèle est de pouvoir traiter un large panel de techniques d'irrigation dans lesquelles interviennent des transferts bi- ou tridirectionnels. Il a été conçu afin de pouvoir décrire des conditions initiales hétérogènes et peut représenter une géométrie de surface irrégulière. La manière dont est conçu le modèle permet également de rajouter simplement des modules améliorant la description de la dynamique du sol.
- Son caractère opérationnel. L'abandon des méthodes numériques a été justifié par la lourdeur de leur mise en oeuvre ainsi que leurs difficultés à suivre l'état du sol à l'échelle de la saison de culture. Il faudra donc vérifier la capacité du modèle à palier ces inconvénients.
- L'étendue de son domaine de validité. Lors de la création du modèle, de nombreuses hypothèses simplificatrices ont été introduites diminuant son domaine de validité. Cette partie permettra de quantifier cette diminution et de définir précisément les conditions permettant l'utilisation de cette modélisation.

Afin d'améliorer chaque point de contrôle précédemment cité, cette partie apporte également des perspectives de développement à ce modèle. Elle décrit et teste l'efficacité d'une technique permettant d'étendre le domaine de validité pour une prise en charge d'un plus grand nombre de sols. Elle pose les bases d'ajouts de modules supplémentaires, permettant notamment de traiter l'extraction racinaire des plantes et la mise en place d'un calcul du rendement prévu. Enfin, elle indique les principes d'une méthode améliorant la description de l'état du sol, quant à l'humidité et la concentration en soluté, à l'échelle de la culture.



# Chapitre 1

## Définition des cas tests

La modélisation développée a pour objectif de représenter l'évolution de l'état d'un sol irrigué et cultivé. Les cas à tester doivent donc être adaptés à ces objectifs et correspondre à une certaine réalité. Par exemple, il n'est pas conseillé d'irriguer à la raie un sol sableux. De même, les durées d'irrigation ou de redistribution sont fonction du système d'irrigation et de la nature du sol. Afin de ne pas multiplier les cas à tester, trois types de sols sont choisis de manière à couvrir le plus largement possible les sols utilisés en agriculture avec leur système d'irrigation adapté. Nous rappelons que les deux systèmes que nous avons choisi pour valider le modèle sont l'irrigation à la raie et le goutte à goutte. Ce chapitre présente le cadre dans lequel on se place pour réaliser ces cas tests.

### 1.1 Différents types de sols

#### 1.1.1 Choix des sols

La classification des sols selon leur distribution granulométrique a été présentée dans la première partie de ce document au paragraphe 2.1. Cette classification ne tient pas compte de la matière organique en présence dans le sol, celle-ci pouvant avoir un impact important sur l'évolution de l'état du sol et de ses caractéristiques hydrodynamiques, particulièrement concernant la répartition des solutés. Un choix de sols basé sur cette classification physique permet cependant de cerner les capacités et les limites du modèle dans la représentation des transferts. Sur ce triangle de textures des sols, trois zones sont choisies (FIG. 1.1.1). Elles correspondent à trois types de sols adaptés à l'agriculture dont les caractéristiques couvrent un large domaine de valeurs et permettent de tester la prise en compte du modèle d'une grande diversité de phénomènes physiques.

Les trois sols testés sont les suivants :

1. Un sol de type argilo-limoneux. La texture de ce sol est fine et sa dynamique est la plus lente des trois sols choisis. Ces caractéristiques sont favorables à la modélisation. En effet, des gradients faibles assouplissent les contraintes de convergence des modélisations numériques et réduisent l'impact des hypothèses simplificatrices des solutions analytiques sur la précision des résultats. Ce sol est cependant plus sensible que les autres aux phénomènes de flaquage

en surface (un débit en surface supérieur à la conductivité hydraulique ne peut être absorbé que partiellement par ce type sol) et à la formation de fentes de retrait lors de l'assèchement du sol. Ces propriétés sont importantes à noter dans le cadre de la validation. En effet, ni la version d'HYDRUS-2D utilisée, ni le modèle développé, tous deux fondés sur l'équation de Darcy, ne traitent ces phénomènes. Avant que toutes comparaisons ne soient effectuées sur ce type de sol, le domaine de validité du modèle est donc limité aux conditions d'humidité et de débit d'entrée d'eau n'entraînant pas ce type de situations.

2. Un sol de type limoneux. Ses caractéristiques sont intermédiaires entre celles des deux autres sols. Il est le plus représentatif d'une situation respectant les hypothèses de Darcy. Il présente généralement une importante capacité de rétention d'eau (Duchauffour, 1991), permettant ainsi de conserver des conditions d'humidité relativement élevées. Ces conditions sont favorables à l'hypothèse d'un sol linéaire.
3. Un sol de type sablo-limoneux. Dans ce type de sol, la dynamique est plus rapide. Cette caractéristique, en plus d'imposer aux modèles la gestion de flux plus intenses, peut également entraîner le non respect des hypothèses de Darcy, rappelées en première partie au paragraphe 2.2.5 (les flux intenses peuvent mettre à mal les hypothèses du modèle de Darcy, notamment celle de la relation linéaire entre le flux et le gradient de pression matricielle ou celle d'incompressibilité de l'air du sol).

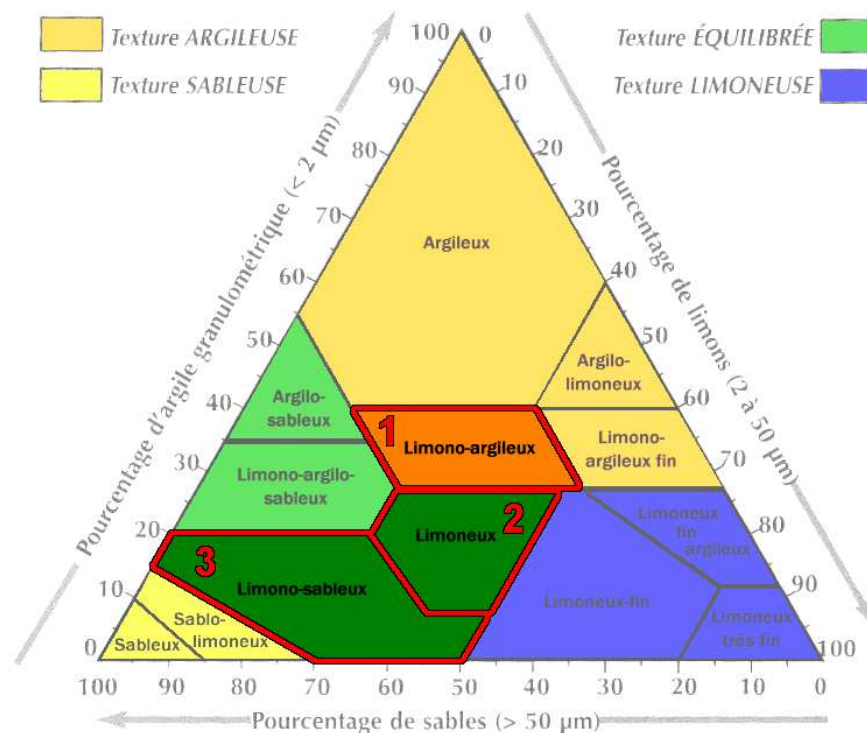


FIG. 1.1.1 – Choix de 3 sols test sur le triangle des textures



## 1.1.2 Caractéristiques hydrodynamiques des sols

Le paragraphe 2.2.3 de la première partie présente deux modélisations fréquemment utilisées pour représenter les caractéristiques hydrodynamiques d'un sol. HYDRUS-2D peut utiliser ces deux modèles. Dans les tests qui vont suivre, nous utiliserons le modèle de van Genuchten pour les simulations numériques. Ce modèle est plus robuste que celui de Brooks et Corey dans le contexte d'une simulation numérique (car moins de discontinuités ou de forts gradients) et sa description des phénomènes physiques plus précise (Kutilek and Nielsen, 1994, chapitre 4.3). Les expressions définissant les propriétés du sol sont rappelées ici. Celles du modèle du sol linéaire sont décrites par (1.1.1) et (1.1.2) respectivement pour la rétention d'eau du sol et sa conductivité hydraulique, celles du modèle de van Genuchten par (1.1.3) et (1.1.4).

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} e^{\alpha h} & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.1)$$

$$\frac{K(h)}{K_s} = \begin{cases} e^{\alpha h} & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.2)$$

$$\frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} = \begin{cases} \frac{1}{(1 + (\alpha_{vgn}|h|)^n)^{1-1/n}} & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.3)$$

$$\frac{K(h)}{K_s} = \begin{cases} \sqrt{\frac{1}{(1 + (\alpha_{vgn}|h|)^n)^{1-1/n}}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{1}{(1 + (\alpha_{vgn}|h|)^n)^{1-1/n}} \right)^2 \right] & \text{si } h < 0 \\ 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1.4)$$

Les tableaux suivants rassemblent les paramètres nécessaires à ces modèles sur les trois types de sol définis plus haut. Le TAB. 1.1.1 indique les plages de valeurs relevées dans la littérature concernant les paramètres du modèle du sol linéaire. Dans cette plage de valeur, nous avons choisi les paramètres de van Genuchten dans la base de données d'HYDRUS-2D selon la nature des sols. Ces valeurs utilisées dans les simulations numériques sont rassemblées dans le TAB. 1.1.2.

Sol	$\theta_r$ [ $cm^3.cm^{-3}$ ]	$\theta_s$ [ $cm^3.cm^{-3}$ ]	$K_s$ [ $cm.h^{-1}$ ]	$\alpha$ [ $cm^{-1}$ ]
1	0,10-0,30	0,50-0,55	0,4-1,0	0,02-0,05
2	0,10-0,20	0,40-0,50	0,8-4,2	0,05-0,10
3	0,05-0,10	0,35-0,50	2,0-20,0	0,10-0,50

TAB. 1.1.1 – Plages de variation des paramètres utilisés par le modèle du sol linéaire (Broadbridge and White, 1988)

A partir de ces tableaux sont tracées sur les FIG. 1.1.2, 1.1.3 et 1.1.4, pour chaque type de sol, les courbes de rétention d'eau du sol et de conductivité hydraulique de van Genuchten qu'utilise HYDRUS-2D. Concernant le modèle linéaire, une région a été délimitée en utilisant les valeurs minimales et maximales des paramètres du modèle et un jeu de paramètres approchant au mieux le

Sol	$\theta_r$ [cm <sup>3</sup> .cm <sup>-3</sup> ]	$\theta_s$ [cm <sup>3</sup> .cm <sup>-3</sup> ]	$K_s$ [cm.h <sup>-1</sup> ]	$\alpha_{VGN}$ [cm <sup>-1</sup> ]	$n$ [—]
1	0,20	0,50	0,5	0,05	1,6
2	0,10	0,45	1,5	0,09	1,7
3	0,05	0,40	4,0	0,15	2,2

TAB. 1.1.2 – Caractéristiques hydrodynamiques des sols (modèle de van Genuchten)

modèle de van Genuchten a été défini. Ces figures permettent de mieux comprendre les impacts de l'hypothèse du sol linéaire.

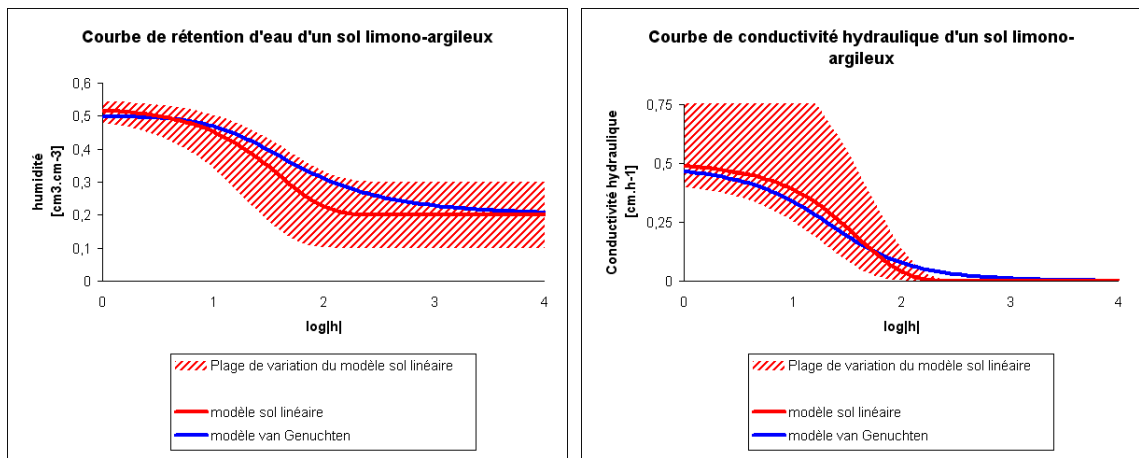


FIG. 1.1.2 – Propriétés hydrodynamiques du sol 1

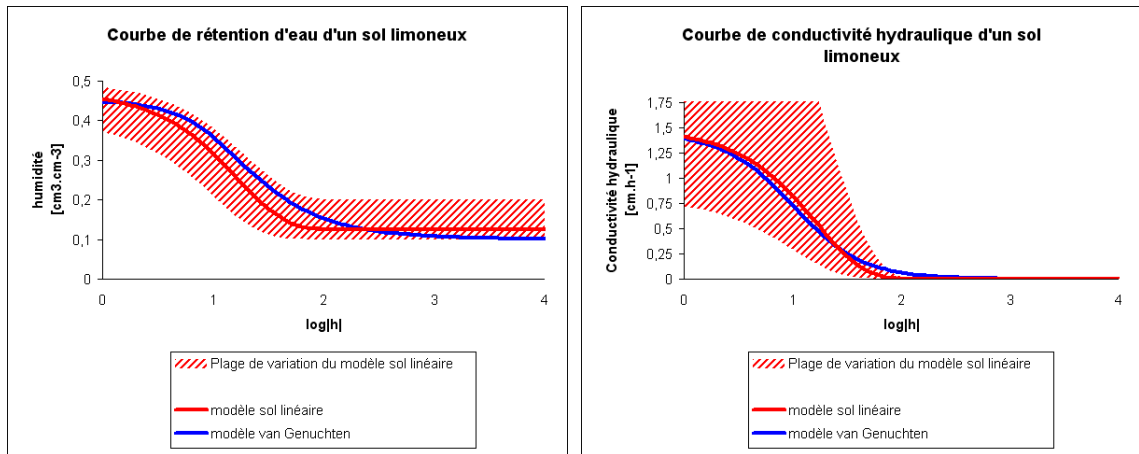


FIG. 1.1.3 – Propriétés hydrodynamiques du sol 2

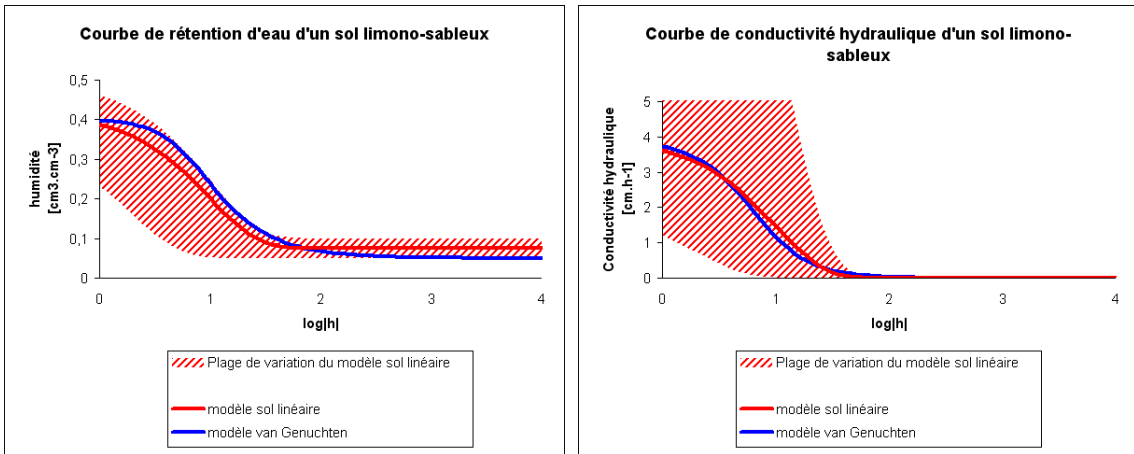


FIG. 1.1.4 – Propriétés hydrodynamiques du sol 3

Concernant la conductivité hydraulique, la forme simple du modèle de Gardner (modèle du sol linéaire), peut être rapprochée de manière satisfaisante de celle de van Genuchten qui est plus complexe. La comparaison des modèles de rétention d'eau du sol doit être menée sur deux points, les valeurs des fonctions et leurs gradients. En effet, la diffusivité est fonction de  $K$  et  $\partial_h \theta$ ,  $h$  variant sur les figures entre 1 cm et 10 000 cm, les gradients de la courbe de rétention d'eau sont très importants. Les faibles écarts observés sur les figures ont donc des conséquences importantes sur l'évaluation de la diffusivité comme l'illustre la FIG. 1.1.5 sur le type de sol où la correspondance des modèles semble la meilleure.

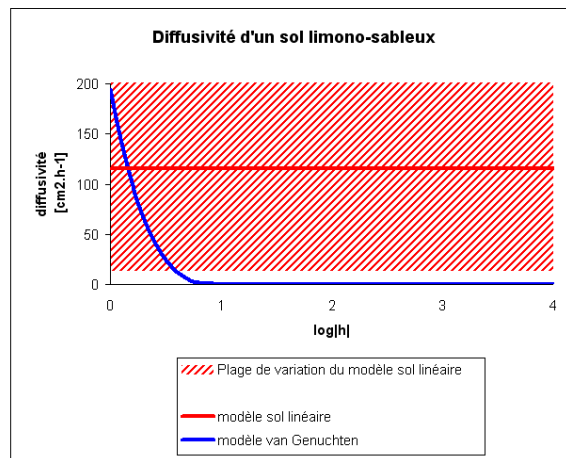


FIG. 1.1.5 – L'hypothèse d'un sol linéaire sur la diffusivité du sol 3

## 1.2 Représentation des systèmes d'irrigation

Deux systèmes de distribution sont utilisés pour valider la modélisation, toutes deux caractérisées par des transferts bidirectionnels : l'irrigation à la raie et le système du goutte à goutte. Le domaine de simulation est une portion d'un champ irrigué. Les résultats sont présentés sur une section verticale du champ de 50 cm de largeur sur une profondeur de 100 cm. L'extraction racinaire et la transpiration ( $TP$ ) du sol ne sont pas représentées dans les simulations. Pendant une phase d'irrigation à la raie, celles-ci peuvent être négligées au vu des doses ( $DA$ ) généralement appliquées (en moyenne  $DA > 10TP$ ). Dans les autres cas, des approches pour intégrer au modèle l'action de la plante et de l'atmosphère en surface du sol seront proposées plus loin dans cette partie.

### 1.2.1 L'irrigation à la raie

L'irrigation à la raie est simulée selon son utilisation traditionnelle (toutes les raies sont irriguées, le fertilisant est déposé avant le traçage des sillons). On considère la raie symétrique, le système peut donc être représenté par une demi raie. Le choix du profil de la raie à modéliser est fondé sur sa comparaison à des profils relevés au champ. Au cours de la saison de culture, ce profil évolue. Cette évolution est principalement due aux précipitations et aux irrigations. Cependant, un profil moyen peut être établi. Celui qui est utilisé ici est représenté sur la FIG. 1.2.1, il est accompagné de profils mesurés au champ au cours de la saison de culture (Mailhol, 2001; Nemeth, 2001). La figure montre la raie complète pour justifier l'hypothèse de symétrie de la raie.

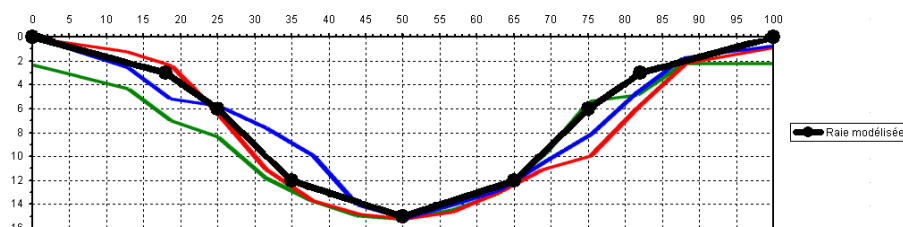


FIG. 1.2.1 – Profil de la raie modélisée

Le maillage et le type de conditions aux limites utilisés par HYDRUS-2D sont illustrés sur la FIG. 1.2.3. Elles seront identiques pour le modèle semi-analytique. La condition à la limite sur la partie humide de la raie consiste à maintenir une charge hydraulique  $h_C L(x)$  sur la surface en contact avec l'eau. Cette charge hydraulique est égale à la différence entre la profondeur de la raie en un point donné  $z_R(x)$  et la hauteur d'eau  $h_0$  appliquée dans la raie. Dans le cas d'une raie symétrique triangulaire de largeur  $2a$  et de profondeur  $b$  et en prenant le point le plus profond de la raie comme origine (FIG. 1.2.2), on aura sur la partie en contact avec l'eau  $h_C L(x) = h_0 - \frac{b}{a}|x|$ . On peut noter que le maillage est plus fin au niveau de la raie afin de pouvoir améliorer le traitement numérique de flux hydriques importants. Les simulations réalisées concernent une irrigation de 3 h (durée correspondant à l'irrigation d'une parcelle d'une longueur de 100 à 150 m en sol limoneux). Durant la saison de culture, le nombre d'irrigations peut varier de 3 à 7 ou 8 selon les conditions climatiques

de la saison considérée. A chaque irrigation, l'apport en eau peut être important selon la nature du sol et la longueur des parcelles, ce qui a des conséquences sur la fréquence des apports. Dans les campagnes expérimentales décrites dans la deuxième partie, seulement trois apports ont été réalisés. Cette pratique provoque des variations importantes d'humidité du sol au cours de la saison et avant le début de chaque irrigation, le profil d'humidité a été homogénéisé par le système racinaire. En conséquence, l'humidité moyenne du domaine avant arrosage est faible. Nous prendrons cette condition d'humidité pour initialiser les simulations d'irrigation à la raie.

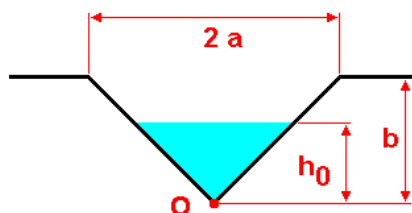


FIG. 1.2.2 – Schéma d'une raie triangulaire pour le calcul de la charge imposée en surface

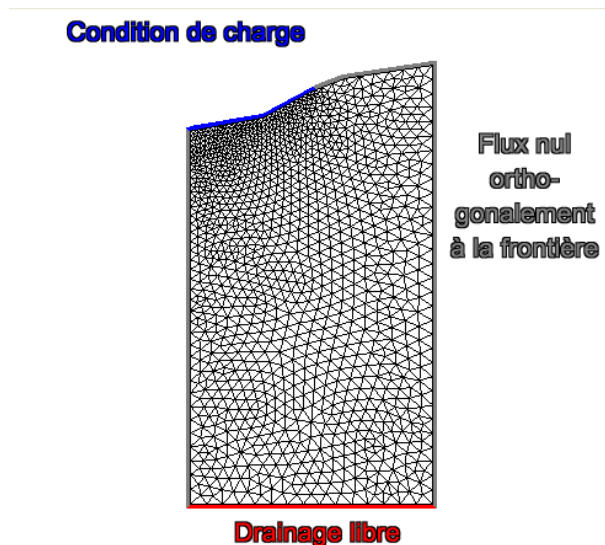


FIG. 1.2.3 – Maillage et conditions aux limites d'HYDRUS-2D en irrigation à la raie

## 1.2.2 Le système du goutte à goutte

Le second système testé est le goutte à goutte. Pour simuler ce système, la surface est considérée plane et une partie de cette surface reçoit un débit d'eau constant pendant une durée de 10 h. HYDRUS-2D peut traiter des cas axi-symétriques d'écoulement. Il est cependant très contraignant à utiliser selon cette configuration. En effet les forts gradients créés localement par le débit d'entrée

entraînent une importante augmentation des contraintes de convergence et le débit d'entrée doit rester faible sous peine de voir s'accroître considérablement les temps de calcul. Pour ces premiers tests, on a donc préféré une représentation bidirectionnelle dont la représentation HYDRUS-2D est illustrée par la FIG. 1.2.5. Cette représentation peut cependant être valide dans le cas d'un réseau composé de lignes de goutteurs avec un espacement important entre chaque ligne et un espacement faible entre les goutteurs de chaque ligne. Le débit d'entrée testé dans les simulations correspond à un flux imposé égal à la conductivité hydraulique sur un segment de la surface de  $2\text{ cm}$ . HYDRUS-2D propose de représenter ce système d'irrigation par un quart de cercle de faible diamètre soumis à un flux donné. Cette représentation peut être réalisée avec le modèle semi-analytique, cependant, elle augmente le nombre de segments et de problèmes élémentaires à considérer dans la résolution. Cette première approche permet de valider simplement le modèle sur l'irrigation en goutte à goutte. De plus, hormis dans les sols à texture très fine et pour des durées d'irrigation relativement faibles, la différence entre les deux représentations n'est pas significative. La FIG. 1.2.4 illustre cette remarque, il s'agit d'un agrandissement du résultat de la simulation réalisée sur le sol 1, présentée plus bas. La même simulation a été réalisée en considérant une condition de flux imposé sur un quart de cercle (le flux a été divisé par  $\pi/2$  pour conserver le même débit en entrée). Hormis un léger décalage dû au changement de géométrie, les différences, sur cette simulation de  $10\text{ h}$ , sont négligeables.

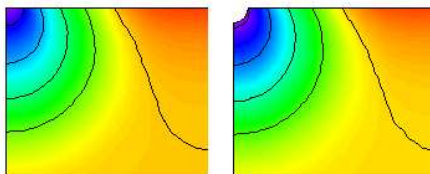
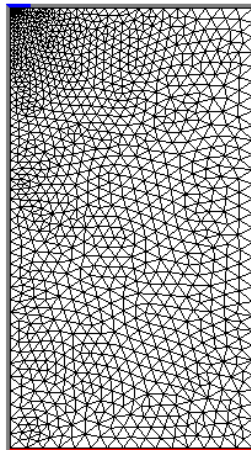


FIG. 1.2.4 – Maillage et conditions aux limites d'HYDRUS-2D en goutte à goutte

Le gain en souplesse et en confort de ce système d'irrigation permet de distribuer l'eau de manière plus régulière, avec des quantités plus faibles. Il est ainsi possible d'adapter les apports aux besoins de la plante (4 à 7 /j en moyenne). De ce fait, l'état hydrique du sol est en moyenne plus humide qu'en irrigation à la raie tout au long de la saison de culture. Les simulations seront réalisées en initialisant l'humidité du sol avant chaque irrigation à une valeur plus élevée que celles concernant l'irrigation à la raie.

**Condition de flux**



**Flux nul  
orthogonalement  
à la frontière**

**Drainage libre**

FIG. 1.2.5 – Maillage et conditions aux limites d'HYDRUS-2D en goutte à goutte





## Chapitre 2

# Simulation de cas concrets de systèmes d'irrigation

### 2.1 Adaptation des paramètres des sols

Nous avons vu dans la FIG. 1.1.5 que l'hypothèse du sol linéaire est très forte. Cette hypothèse nous conduit à considérer la diffusivité, ainsi que la dérivée de la conductivité hydraulique par rapport à la teneur en eau, comme constante. Rappelons les équations de Richards résolues par les deux modélisations. Elles sont décrites par les expressions 2.1.1 pour le modèle du sol linéaire et 2.1.2 pour HYDRUS-2D.

$$\partial_t \theta t = \frac{K_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} \partial_x^2 \theta + \frac{K_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} \partial_z^2 \theta - \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} \partial_z \theta \quad (2.1.1)$$

$$\partial_t \theta t = \partial_x(D(\theta)\partial_x \theta) + \partial_z(D(\theta)\partial_z \theta) - \partial_\theta K(\theta)\partial_z \theta \quad (2.1.2)$$

La définition du jeu de paramètres utilisés dans le modèle du sol linéaire doit donc s'adapter au mieux aux fonctions de van Genuchten sur l'intervalle de teneur en eau  $[\theta_{\min}, \theta_{\max}]$  du domaine de l'étude. Ainsi, les paramètres  $K_s$  et  $\alpha$  doivent satisfaire

$$c_D = \frac{K_s}{\alpha(\theta_s - \theta_r)} = \frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} D(\theta) d\theta \quad (2.1.3)$$

$$c_H = \frac{K_s}{\theta_s - \theta_r} = \frac{1}{\theta_{\max} - \theta_{\min}} \int_{\theta_{\min}}^{\theta_{\max}} \partial_\theta K(\theta) d\theta \quad (2.1.4)$$

Du fait des fortes variations des fonctions dont la moyenne est calculée, lorsque l'on s'approche de  $\theta_s$ , les paramètres du modèle du sol linéaire définis par (2.1.3) et (2.1.4) sont valables dans le cas d'une teneur en eau faible ou dans le cas d'une faible variation d'une humidité proche de la saturation. Les figures illustrant ces résultats sont représentées dans le paragraphe suivant.

$\theta_s - \theta_r$ ,  $K_s$  et  $\alpha$  ont un sens physique dans le modèle du sol linéaire. Ils sont caractéristiques d'un type de sol. Notons que la définition des paramètres de ce modèle  $c_D$  et  $c_H$  par la moyenne

des fonctions  $D$  et  $\partial_\theta K$  de van Genuchten transforme  $\theta_s - \theta_r$ ,  $K_s$  et  $\alpha$  en paramètres de calage qui n'ont plus de signification physique. Cette signification physique de la modélisation est reportée sur les paramètres  $c_D$  et  $c_H$  qui définissent, pour un intervalle de teneur en eau donné, la diffusivité et la conductivité moyennes du sol.

## 2.2 Première approche d'une modélisation de l'état hydrique d'un sol après irrigation

### 2.2.1 Le cas de la micro-irrigation

Les premiers résultats présentés concernent le système goutte à goutte. La variation de teneur en eau au cours du cycle cultural est moins grande que dans le cas d'une irrigation à la raie. Les résultats sont donc plus satisfaisants, car la moyenne des fonctions du modèle de van Genuchten est moins éloignée des valeurs extrêmes.

Afin de réduire encore l'intervalle des teneurs en eau à considérer, la teneur en eau résiduelle a été ramenée à la teneur en eau initiale minimale dans le modèle du sol linéaire et reste inchangée dans celui de van Genuchten. Cette humidité initiale étant relativement élevée, les effets gravitaires simulés par HYDRUS-2D l'entraînent en profondeur, provoquant un assèchement progressif de la surface, plus marqué dans les cas où ces effets gravitaires sont importants (cas du sol 3, sol à texture grossière). L'approche choisie dans la simulation semi-analytique ne permet pas ici d'obtenir des teneurs en eau du sol inférieures à  $\theta_i$ . Elle a cependant été retenue comme première approche pour valider la représentation d'une phase d'irrigation. Le domaine de variation de  $D$  et  $\partial_\theta K$  est égal à  $\mathbb{R}^+$ . Il n'est donc pas possible de trouver une valeur moyenne adaptée pour toute humidité variant entre l'humidité résiduelle et l'humidité à saturation. Il a donc fallu définir un premier intervalle d'humidité pour représenter les résultats du modèle dans une phase d'irrigation. Cet intervalle est égal à  $[\theta_i, \theta_s]$ , intervalle d'humidité particulièrement sensible lors de ces simulations.

Le TAB. 2.2.1 rassemble les paramètres du modèle du sol linéaire utilisés pour réaliser ces simulations ainsi que les conditions initiales homogènes  $\theta_i$  pour chaque type de sol.

Sol	$\theta_r = \theta_i$ [cm <sup>3</sup> .cm <sup>-3</sup> ]	$\theta_s$ [cm <sup>3</sup> .cm <sup>-3</sup> ]	$c_D$ [cm <sup>2</sup> .h <sup>-1</sup> ]	$c_H$ [cm.h <sup>-1</sup> ]
1	0,4	0,5	6,0	0,7
2	0,325	0,45	8,0	2,0
3(1)	0,275	0,4	25	12,5
3(2)	0,275	0,4	12	6

TAB. 2.2.1 – Paramètres du modèle du sol linéaire calculés comme moyenne des fonctions de van Genuchten (cas du goutte à goutte)

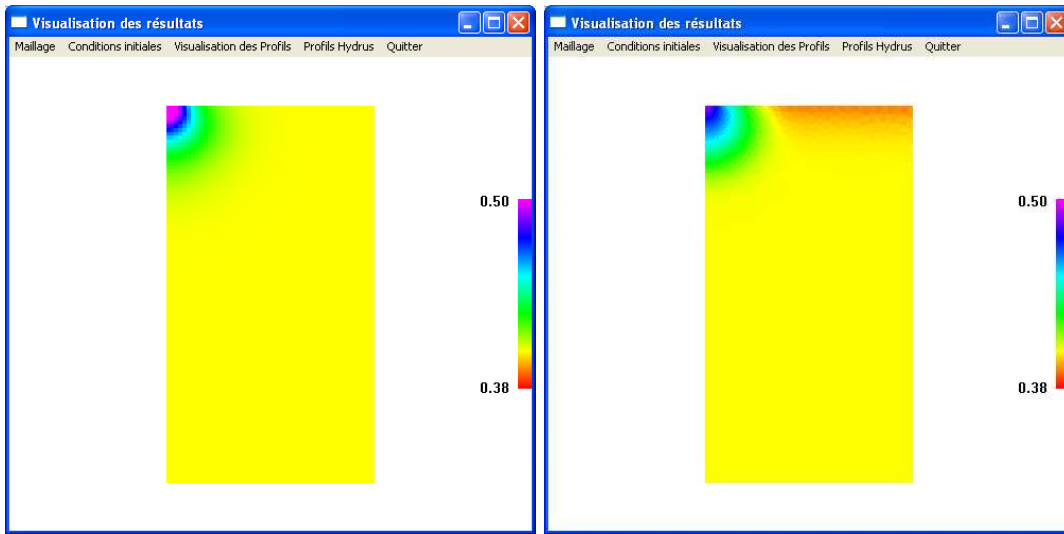


FIG. 2.2.1 – Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour le sol 1 en goutte à goutte

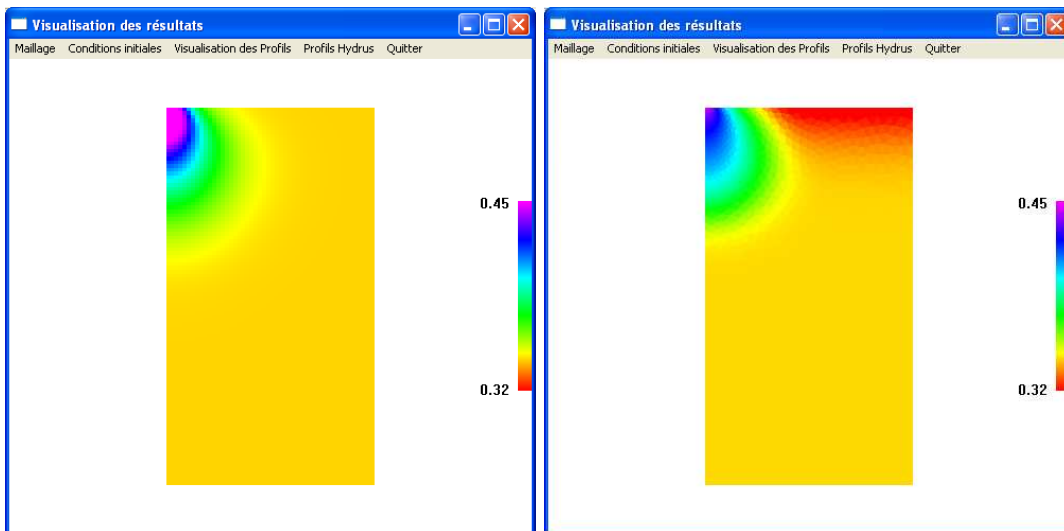


FIG. 2.2.2 – Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour le sol 2 en goutte à goutte

La simulation menée sur les deux premiers sols donnent des résultats satisfaisants (FIG. 2.2.1 et FIG. 2.2.2), hormis la redistribution du profil initial (pour les raisons expliquées plus haut) et compte tenu des hypothèses simplificatrices prises. Le calage des paramètres  $c_D$  et  $c_H$  a été effectué en prenant comme base les définitions (2.1.3) et (2.1.4), puis affiné manuellement par essais successifs. Ce calage s'est concentré sur l'obtention d'un résultat satisfaisant sur les valeurs de teneur en

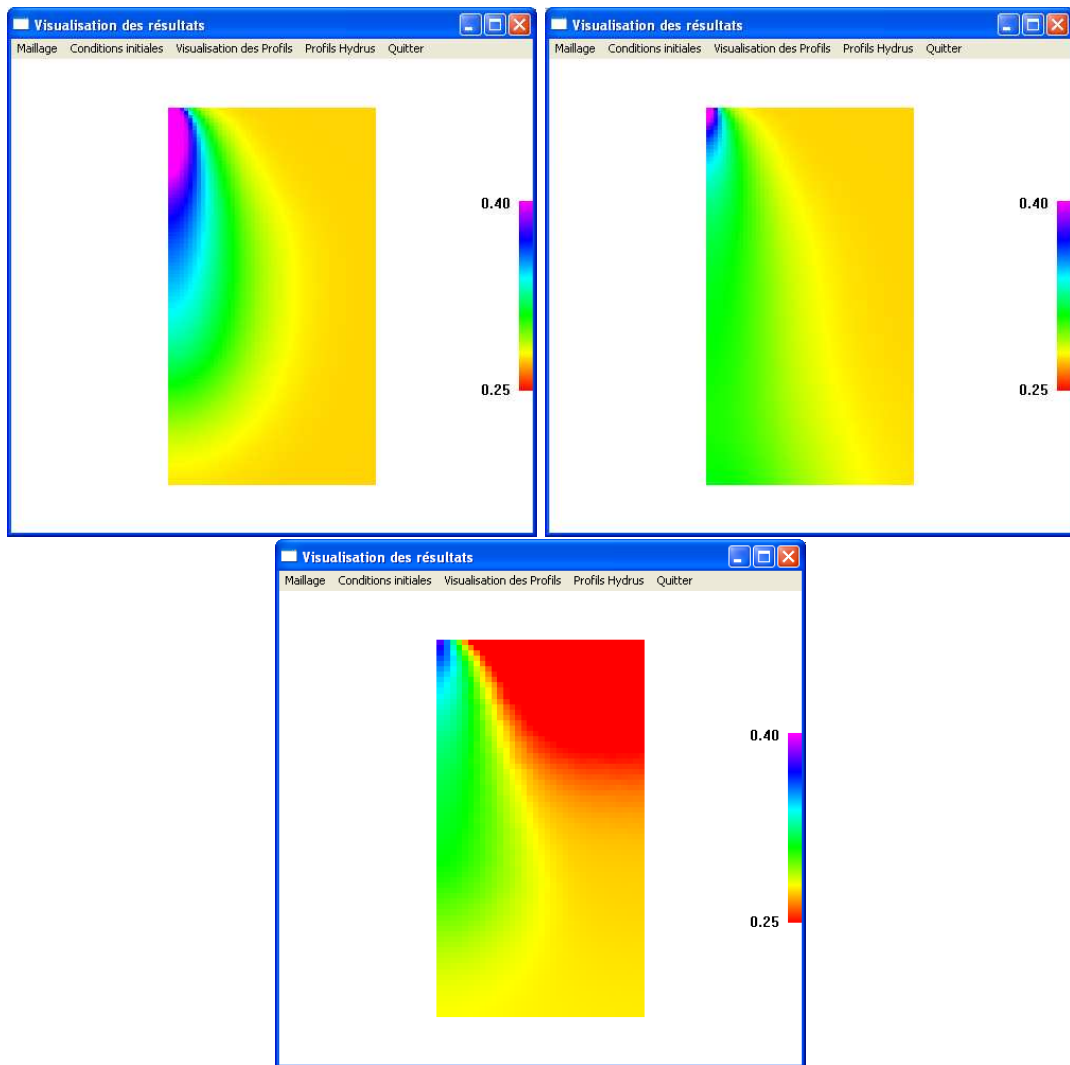


FIG. 2.2.3 – Comparaison de la modélisation semi-analytique (1) (en haut à gauche) et (2) (en haut à droite)/ HYDRUS-2D (en bas) pour le sol 3 en goutte à goutte

eau intermédiaire entre  $\theta_i$  et  $\theta_s$ .

Le sol 3 a une dynamique plus rapide. Les variations de la teneur en eau sont plus importantes, celles des fonctions de van Genuchten le sont aussi. Ainsi, la moyenne de ces fonctions n'est pas suffisante pour représenter de manière satisfaisante l'écoulement. Il a fallu définir deux jeux de paramètres, l'un valable pour les teneurs en eau proches de la teneur en eau initiale (simulation (1) FIG. 2.2.3 en haut à gauche), l'autre pour les teneurs en eau proches de la teneur en eau à saturation (simulation (2) FIG. 2.2.3 en haut à droite). Le profil HYDRUS-2D est compris entre les deux simulations (1) et (2) ainsi obtenues.

## 2.2.2 Le cas de l'irrigation à la raie

Ici encore la teneur en eau résiduelle est portée à la valeur de la teneur en eau initiale, dans le même souci de réduire l'intervalle de variation de l'humidité du domaine et de concentrer la qualité de la simulation sur l'eau entrant dans le domaine au détriment de la redistribution du profil initial. Cette impossibilité à représenter l'assèchement du sol en effet par cette approche est notamment la cause du phénomène observé sur le profil simulé par HYDRUS-2D sur la FIG. 2.2.6 et noté (1). Ce phénomène est commun à chaque simulation, mais plus visible sur le sol 3. L'assèchement de la surface provoque une augmentation du gradient de charge hydraulique renforçant ainsi les effets capillaires dans cette région. Le modèle semi-analytique ne peut représenter ce phénomène par l'approche développée ici. La comparaison entre modèle semi-analytique et HYDRUS-2D doit donc être considérée sur les valeurs d'humidité supérieures à la teneur en eau initiale. L'humidité initiale a été légèrement diminuée de manière à respecter les conditions d'une utilisation réelle de ce système d'irrigation (elle reste cependant encore relativement élevée par rapport à une pratique au champ). La durée des irrigations simulées est de 3 h pour les deux premiers sols dont les textures sont les plus fines, la durée d'irrigation sur le sol 3 est de 1 h30 min afin d'obtenir une meilleure visualisation des résultats et de mieux correspondre à la réalité d'une irrigation sur un sol limono-sableux.

Les conditions de charge ont été traitées en prenant en compte une charge variable telle qu'elle est décrite au paragraphe 1.2.1. La résolution de l'équation de Richards est effectuée sur le potentiel de flux (voir (2.1.8) dans la quatrième partie). La condition de charge doit donc être exprimée sur celui-ci. La condition de charge hydraulique s'exprime donc en terme de potentiel de flux de la manière suivante

$$\phi_{CL}(x) = \frac{K_s}{\alpha} e^{\alpha h_{CL}(x)} \quad (2.2.1)$$

Une condition de charge hydraulique linéaire, comme celle représentée sur une raie triangulaire sera donc exprimée en terme de potentiel de flux comme une fonction de  $x$  à décroissance exponentielle.

Le TAB. 2.2.2 rassemble les paramètres du modèle du sol linéaire utilisés pour réaliser ces simulations ainsi que les conditions initiales homogènes  $\theta_i$  pour chaque type de sol.

Sol	$\theta_r = \theta_i$ [ $cm^3.cm^{-3}$ ]	$\theta_s$ [ $cm^3.cm^{-3}$ ]	$c_D$ [ $cm^2.h^{-1}$ ]	$c_H$ [ $cm.h^{-1}$ ]
1	0,35	0,5	9,0	2,75
2	0,3	0,45	15,0	6,0
3	0,25	0,4	35	17,5

TAB. 2.2.2 – Paramètres du modèle du sol linéaire calculés comme moyenne des fonctions de van Genuchten (cas de l'irrigation à la raie)

Contrairement à ce qui était attendu, les résultats de la simulation paraissent meilleurs qu'en goutte à goutte. Une variation plus importante de l'humidité dans le domaine de simulation aurait

due augmenter l'écart type des paramètres moyens  $c_D$  et  $c_H$  par rapport aux fonctions de van Genuchten, augmentant ainsi l'écart entre les deux modèles.

On note également que les paramètres utilisés pour ces simulations sont plus élevés que ceux utilisés pour simuler une irrigation au goutte à goutte pour un même sol.

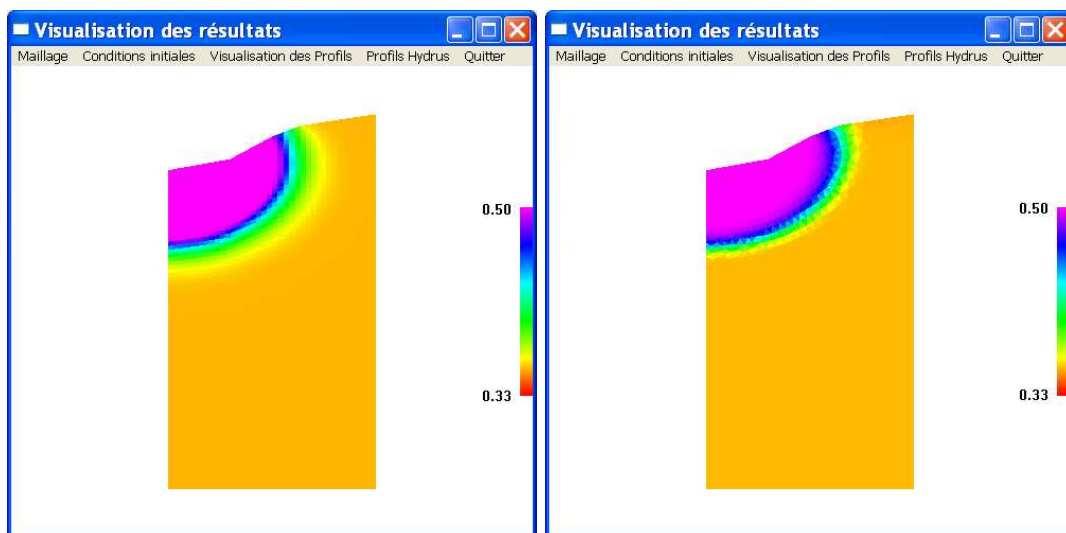


FIG. 2.2.4 – Comparaison modélisation semi-analytique / HYDRUS-2D pour le sol 1 en irrigation à la raie

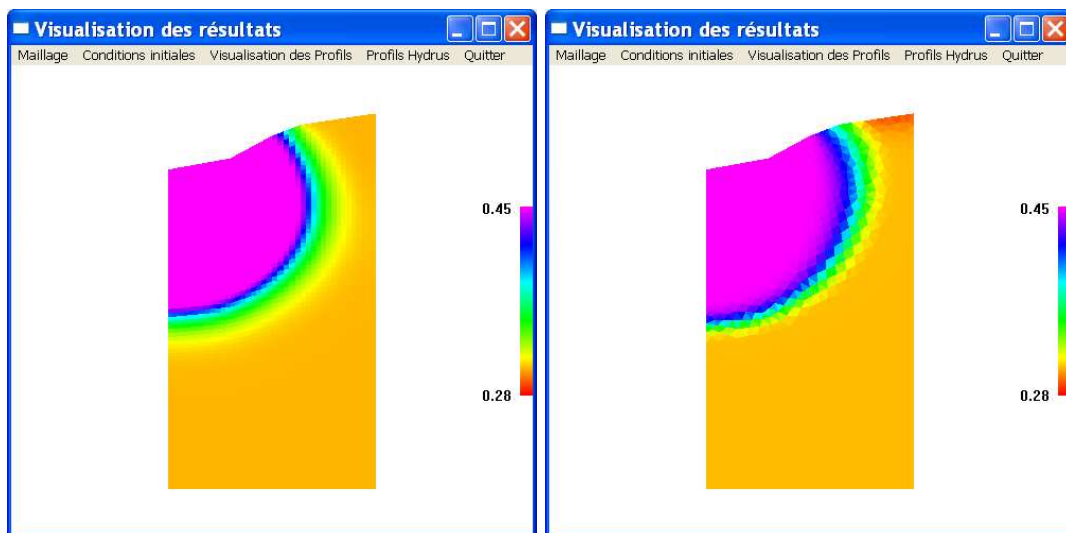


FIG. 2.2.5 – Comparaison modélisation semi-analytique / HYDRUS-2D pour le sol 2 en irrigation à la raie

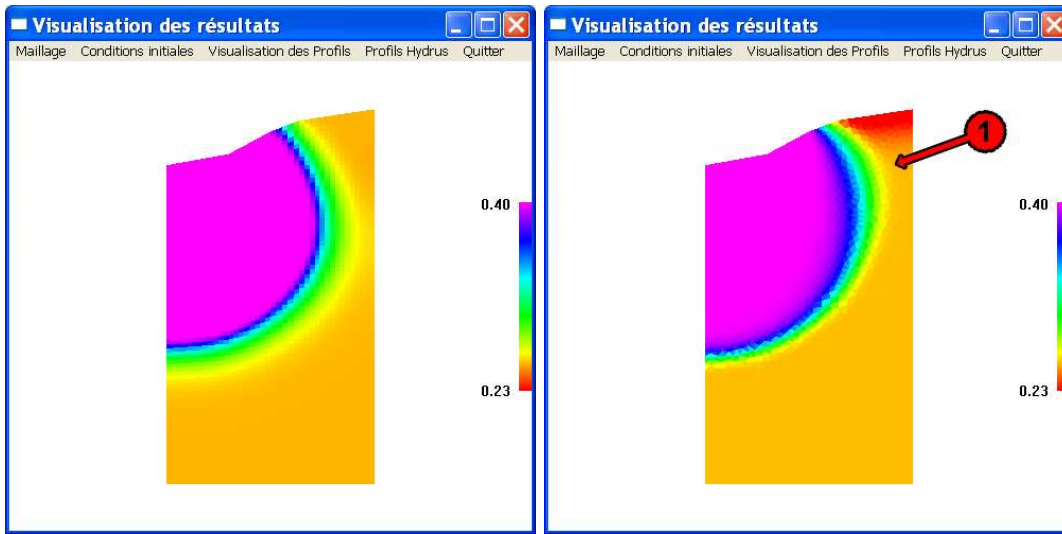


FIG. 2.2.6 – Comparaison modélisation semi-analytique / HYDRUS-2D pour le sol 3 en irrigation à la raie

Ces deux dernières remarques sont liées. En effet, l'irrigation à la raie impose en condition à la limite, contrairement au goutte à goutte, une charge hydraulique positive sur une grande partie de la surface. Ce type de condition à la limite induit une zone saturée très étendue dans le domaine de simulation, la teneur en eau moyenne au cours de la simulation est donc plus élevée ici que dans les cas du goutte à goutte simulés ultérieurement, impliquant des paramètres moyens  $c_D$  et  $c_H$  plus élevés. En irrigation à la raie, le passage de la zone saturée à la zone qui n'a pas été affectée par l'irrigation est beaucoup plus brutal qu'en goutte à goutte. La région de teneur en eau moyenne est donc faiblement étendue et est représentée, sur les figures, par une couronne de faible épaisseur reliant les deux zones. Les différences entre modélisation semi-analytique et modélisation numérique sont bien présentes sur ces figures pour les teneurs en eau proche de la teneur en eau initiale. Cependant, la zone correspondant à ce type d'humidité, à laquelle les paramètres moyens du modèle semi-analytique ne sont pas adaptés, est faiblement étendue, réduisant ainsi l'erreur moyenne visible sur les figures.

## 2.3 Représentation complète d'une irrigation

### 2.3.1 Principes de la construction du profil hydrique à partir de plusieurs jeux de paramètres moyens

Dans les deux paragraphes précédents, nous nous sommes intéressés principalement au profil hydrique obtenu lors d'une irrigation pour les humidités supérieures à une humidité initiale homogène, en négligeant volontairement l'humidité inférieure à celle-ci. Le but était de limiter l'intervalle dans lequel évoluait l'humidité du milieu afin de réduire l'impact de l'utilisation de paramètres moyens sur la qualité de la modélisation et de focaliser ainsi la modélisation sur l'événement d'irrigation

en lui-même. La simulation d'une irrigation au goutte à goutte sur le sol 3 a eu recours à deux jeux de paramètres pour borner le profil obtenu avec HYDRUS-2D, un premier jeu de paramètres moyens représentant les fortes humidités, un second, les humidités proches de l'humidité initiale. Le recours à un troisième jeu de paramètres traitant les humidités entre la teneur en eau résiduelle et la teneur en eau initiale permet de représenter la redistribution du profil initial. Trois simulations sont ainsi réalisées, les paramètres moyens  $c_D^i$  et  $c_H^i$  de chacune de ces simulations sont associés à un intervalle  $[\theta_m^i, \theta_M^i]$  dans lequel la solution  $\theta^i(x, z, t)$  est valide. Le profil d'humidité final est obtenu en superposant les plages d'humidité valides de chaque simulation.

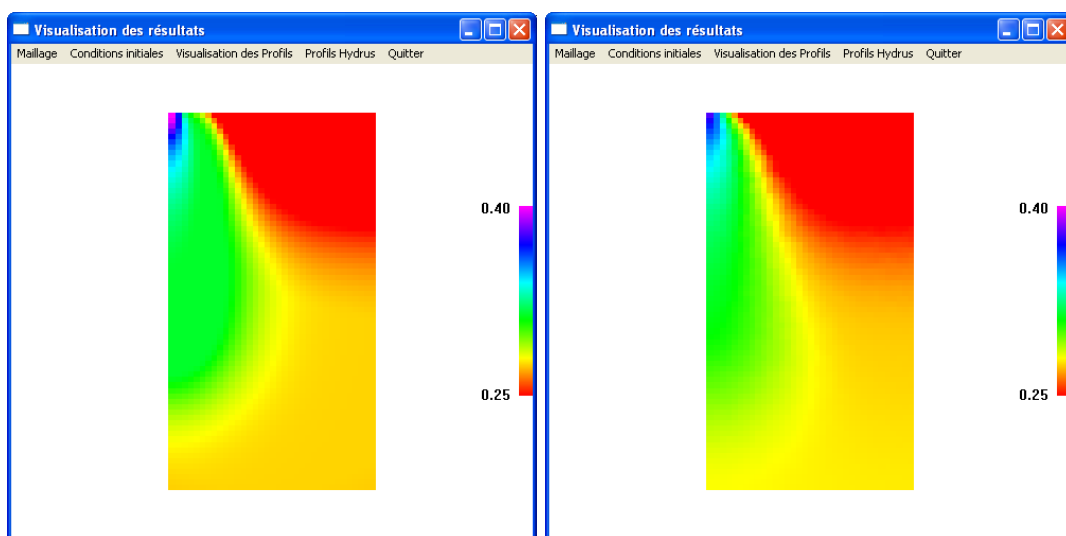


FIG. 2.3.1 – Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour le sol 3 en goutte à goutte (recomposition du profil à partir de trois simulations)

Cette méthode permet de reconstituer un profil à partir des  $n$  simulations réalisées et de représenter les effets capillaires dans la zone asséchée du profil initial (phénomène observé sur le profil simulé par HYDRUS-2D sur la FIG. 2.2.6 et noté (1)).

La reconstitution du profil donne la FIG. 2.3.1. La comparaison avec HYDRUS-2D permet de constater une bonne cohérence entre les deux modèles, même si certains écarts subsistent. Une meilleure qualité de la simulation pourrait être obtenue en utilisant plus de trois simulations. Ceci entraînerait cependant le calage de nouveaux paramètres et une augmentation du temps de calcul.

Cette nouvelle approche permet d'étendre le domaine de validité d'un modèle fondé sur l'hypothèse du sol linéaire. Les fortes restrictions de cette hypothèse ont été contournées en adaptant le domaine où cette hypothèse peut être valide à celui de l'étude. Le domaine d'humidité de l'étude a donc été divisé en plusieurs domaines dans lesquels la variation des propriétés hydrodynamiques du sol sont moins importantes que sur le domaine complet. Notons cependant que si ce procédé semble donner des premiers résultats satisfaisants, il ne permet pas de respecter la conservation de la masse. Indépendamment, chaque simulation conserve la masse, mais rien ne garantit cette conservation sur



la recomposition du profil d'humidité. Le non respect de la conservation de la masse pourra être quantifié par l'observation de l'erreur commise sur l'infiltration cumulée lors d'une irrigation par exemple.

### 2.3.2 Evaluation de la qualité de la modélisation sur différents cas d'irrigation

Ce nombre de trois simulations, divisant l'intervalle  $[\theta_r, \theta_s]$  en trois intervalles d'humidité, est conservé pour évaluer les nouvelles bornes du domaine de validité du modèle avec cette nouvelle approche. Nous allons donc définir des critères objectifs pour évaluer la qualité de la modélisation sur différents types de sol, en la comparant au code de référence HYDRUS-2D.

Ces critères sont au nombre de 5 :

- L'écart quadratique moyen relatif entre le profil obtenu par HYDRUS-2D et celui obtenu par le modèle développé ( $\varepsilon_\theta$ ).
- Le maximum des écarts quadratiques moyens relatifs entre les modèles sur une section horizontale du graphique ( $\varepsilon_X$ ).
- Le maximum des écarts quadratiques moyens relatifs entre les modèles sur une section verticale du graphique ( $\varepsilon_Z$ ).
- L'erreur relative entre l'infiltration cumulée simulée par HYDRUS-2D et celle simulée par le modèle semi-analytique ( $\varepsilon_I$ ).
- Le rapport entre les temps de calcul des deux modèles ( $\tau_{\text{CPU}}$ ).

$$\varepsilon_\theta = \sqrt{\frac{1}{n_X n_Z} \sum_{i=1}^{n_X} \sum_{j=1}^{n_Z} \left[ \frac{\theta_{\text{H2D}}(i, j) - \theta_{\text{MSA}}(i, j)}{\theta_{\text{H2D}}(i, j)} \right]^2} \quad (2.3.1)$$

$$\varepsilon_X = \max_{j_0=1, n_Z} \sqrt{\frac{1}{n_X} \sum_{i=1}^{n_X} \left[ \frac{\theta_{\text{H2D}}(i, j_0) - \theta_{\text{MSA}}(i, j_0)}{\theta_{\text{H2D}}(i, j_0)} \right]^2} \quad (2.3.2)$$

$$\varepsilon_Z = \max_{i_0=1, n_X} \sqrt{\frac{1}{n_Z} \sum_{j=1}^{n_Z} \left[ \frac{\theta_{\text{H2D}}(i_0, j) - \theta_{\text{MSA}}(i_0, j)}{\theta_{\text{H2D}}(i_0, j)} \right]^2} \quad (2.3.3)$$

$$\varepsilon_I = \frac{|I_{\text{H2D}} - I_{\text{MSA}}|}{I_{\text{H2D}}} \quad (2.3.4)$$

$$\tau_{\text{CPU}} = \frac{\text{CPU}_{\text{MSA}}}{\text{CPU}_{\text{H2D}}} \quad (2.3.5)$$

$$\text{avec} \left\{ \begin{array}{l} \theta_{\text{H2D}}(i, j) : \text{ humidité simulée par HYDRUS-2D au point } (x_i, z_j) \\ \theta_{\text{MSA}}(i, j) : \text{ humidité simulée par le modèle semi-analytique au point } (x_i, z_j) \\ I_{\text{H2D}} : \text{ infiltration cumulée simulée par HYDRUS-2D} \\ I_{\text{MSA}} : \text{ infiltration cumulée simulée par le modèle semi-analytique} \\ \text{CPU}_{\text{H2D}} : \text{ temps CPU utilisé par HYDRUS-2D} \\ \text{CPU}_{\text{MSA}} : \text{ temps CPU utilisé par le modèle semi-analytique} \end{array} \right.$$

Concernant les temps de calcul, il convient de préciser les données de chaque simulation. La simulation avec le modèle semi-analytique a été réalisée en évaluant la solution du problème d'écoulement sur un maillage de 35 cellules en largeur sur 70 en profondeur, permettant une bonne précision de la visualisation des résultats. Ces valeurs peuvent être diminuées, car dans de nombreux cas, une telle précision de visualisation n'est pas nécessaire. Les simulations HYDRUS-2D ont été réalisées sur un maillage non structuré comportant 3252 cellules dans le cas du goutte à goutte et 3637 dans le cas de l'irrigation à la raie. Le nombre de cellules utilisé par HYDRUS-2D est donc plus élevé que celui du modèle semi-analytique, il est cependant nécessaire pour une convergence de la solution dans de bonnes conditions.

Le TAB. 2.3.1 donne ces critères numériques permettant de juger de la qualité de la modélisation. Il rassemble les caractéristiques des cas testés (type de sol et humidité initiale humide ou plus sèche, système d'irrigation simulé), les écarts quadratiques moyens, les erreurs relatives de simulation de l'infiltration cumulée et le rapport entre les temps de calculs requis pour la simulation.

Sol	Type d'irrigation	Humidité initiale [ $cm^3.cm^{-3}$ ]	$\varepsilon_\theta$	$\varepsilon_X$	$\varepsilon_Z$	$\varepsilon_I$	$\tau_{CPU}$
1	Micro	0,4	0,36 %	0,79 %	0,91 %	9,5 %	35,0 %
1	Raie	0,35	0,51 %	0,80 %	2,02 %	3,2 %	25,8 %
1	Micro	0,35	0,67 %	0,97 %	1,21 %	7,0 %	15,2 %
1	Raie	0,3	0,87 %	1,14 %	2,42 %	6,7 %	23,5 %
2	Micro	0,325	1,01 %	1,98 %	2,50 %	7,5 %	26,9 %
2	Raie	0,3	3,17 %	5,33 %	8,77 %	4,6 %	25,0 %
2	Micro	0,275	1,54 %	2,13 %	2,76 %	8,0 %	13,5 %
2	Raie	0,25	2,51 %	5,03 %	7,21 %	6,7 %	22,9 %
3	Micro	0,275	6,03 %	13,24%	12,91%	12,5%	13,8 %
3	Raie	0,25	3,20 %	5,76 %	8,62 %	4,5 %	14,3 %
3	Micro	0,2	7,56 %	14,20%	13,02%	11,6 %	14,0 %
3	Raie	0,175	4,12 %	6,32 %	9,79 %	6,2 %	11,9 %

TAB. 2.3.1 – Critères numériques des performances de la modélisation semi-analytique

Plusieurs points sont à noter concernant ce tableau. Tout d'abord, pour un type d'irrigation donné, la différence entre les deux modèles croît en général à mesure que la texture du sol devient plus grossière. Ce phénomène peut être dû à deux causes. En premier lieu, les variations des fonctions de van Genuchten sont moins importantes sur un sol à texture fine, les paramètres moyens représentent donc mieux ces fonctions sur un intervalle d'humidité donné. Une seconde raison est que le bulbe humide est moins étendu sur la totalité du domaine de l'étude et l'assèchement de la surface moins prononcé sur les sols à texture fine, l'écart quadratique y est donc négligeable sur une plus grande partie du domaine que dans les sols à dynamique plus rapide, abaissant ainsi l'écart quadratique moyen. Une humidité initiale plus faible nuit également à la qualité de la modélisa-

tion semi-analytique car elle entraîne une plus grande variation d'humidité au cours de la simulation.

L'erreur relative sur l'évaluation de l'infiltration cumulée est une information précieuse. L'écart quadratique moyen évalue l'erreur entre les deux modélisations sur le domaine complet de l'étude. Certains points ne sont pas affectés par l'écoulement (points éloignés de la surface, par exemple) et l'humidité en ces points ne varie pas pendant toute la durée de la simulation pour les deux types de modélisations. Ces points ne sont pas significatifs pour quantifier l'efficacité de la modélisation, ils participent cependant au calcul de l'écart quadratique moyen et contribuent donc à sa diminution. L'erreur relative sur le calcul de l'infiltration cumulée ne commet pas cette sous-estimation puisqu'elle concerne directement la variation du stock hydrique dans le sol. La simulation semble meilleure dans le cas du sol 2. Les conditions aux limites sont les seuls problèmes élémentaires qui subissent un traitement numérique partiel. Le débit de faible intensité sur un segment de 2 cm, imposé dans le cas du sol 1, est difficilement représentable par le traitement numérique grossier mis en place actuellement dans le code. Le flux imposé est sous-estimé par le modèle dans le cas du goutte à goutte. Dans le cas du sol 3, ce sont les variations importantes de l'humidité qui sont à l'origine des écarts plus importants constatés.

Sur ces mêmes valeurs, on peut remarquer que l'écart quadratique maximum dans la direction verticale est plus élevé que celui de la direction horizontale dans le cas de l'irrigation à la raie. Ceci peut venir du fait que la condition à la limite d'une charge variable a été représentée de manière trop simple. En effet, celle-ci a été représentée dans un souci d'économie de temps de calcul par un polynôme de degré 2 qui n'est pas une approximation assez précise de la décroissance exponentielle attendue (voir paragraphe 2.2.2).

Concernant les temps de calculs, ils sont largement favorables à l'emploi de la modélisation semi-analytique. Notons cependant que les temps de calcul d'HYDRUS-2D peuvent être légèrement réduits. En effet, nous n'avons pas cherché à optimiser le rapport entre pas d'espace du maillage et pas de temps, permettant ainsi de définir le meilleur temps de calcul. Même si les pas de temps gérés par HYDRUS-2D sont adaptables en fonction de la dynamique de l'écoulement, une valeur initiale des pas de temps trop faible a pu augmenter les temps de calcul utilisés par la simulation numérique. Nous pouvons cependant rappeler que le temps de calcul du modèle semi-analytique dépend de la complexité du problème à décrire en termes de problèmes élémentaires (segments composant la surface et fonctions composant la condition initiale). Il traitera donc un événement de 2 jours ou de 2 h en utilisant le même temps de calcul si le nombre de problèmes élémentaires est le même. Le temps de calcul d'HYDRUS-2D est quant à lui sensible aux gradients des variables mais également à la durée du phénomène simulé. Cependant, dans le cas d'un phénomène long, les gradients ont généralement tendance à s'atténuer et HYDRUS-2D adapte ses pas de temps, réduisant ainsi le temps de calcul en fin de simulation. Notons également qu'une condition initiale complexe pourra produire des gradients importants (pénalisant les temps de calcul d'une méthode numérique) ainsi que l'augmentation du nombre de problèmes élémentaires dans le modèle semi-analytique.

## 2.4 Redistribution du profil hydrique après irrigation

Le profil obtenu après la simulation d'une irrigation est issu de la résolution et la recombinaison de problèmes élémentaires. Du fait de la décomposition de toutes fonctions du problème en fonctions  $\mathcal{G}$  proches de gaussiennes (voir troisième partie), ce profil pourrait être entré sous cette forme comme condition initiale d'une nouvelle simulation. Le TAB. 2.2.1 de la quatrième partie décrit le nombre de fonctions  $\mathcal{G}$  à considérer pour composer une solution élémentaire. Le code informatique permettant de calculer et de visualiser les résultats du modèle semi-analytique n'est pas encore optimisé. Certaines des fonctions  $\mathcal{G}$  composant la solution du problème sont redondantes ou pourraient être éliminées car très proches de zéro quelque soit le point où elles sont évaluées. Ces raisons rendent actuellement difficile la simulation d'une redistribution du profil exact obtenu après la simulation d'une irrigation. Nous avons donc choisi de construire un profil proche du profil hydrique consécutif à une irrigation en utilisant un nombre restreint de fonctions le composant. Les simulations HYDRUS-2D et semi-analytique seront réalisées en utilisant ce profil. Un exemple du type de profil pouvant être construit à partir de quelques fonctions  $\mathcal{G}$  est représenté par la FIG. 2.4.1 (5 fonctions constituent le profil). Il montre qu'il est possible de s'approcher d'un profil caractéristique d'une fin d'irrigation avec ce procédé, reste à coder l'automatisation de ce procédé pour une utilisation du code dans l'optique d'une succession de période d'irrigation et de redistribution.

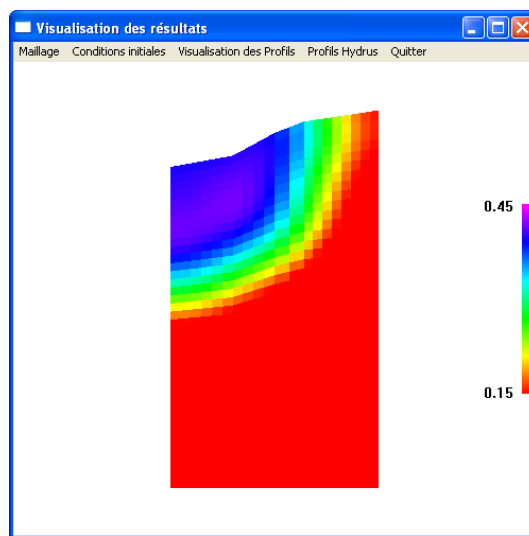


FIG. 2.4.1 – Profil hydrique initial construit utilisé dans la simulation d'une redistribution après irrigation

La technique employée pour simuler la redistribution est la même que celle utilisée dans le cas d'une irrigation. Selon l'intervalle dans lequel varie l'humidité initiale, le découpage de celui-ci pourra induire une simulation, dans des cas d'humidité initiale faible, deux ou trois simulations, pour les variations d'humidité initiale plus fortes. Nous ne représenterons ici qu'un exemple de redistribution. Les commentaires effectués sur les irrigations sont, pour la plupart, valables également dans le cas d'une redistribution et les écarts quadratiques varient de la même manière selon la nature du sol et la variation de l'humidité au cours de la simulation.

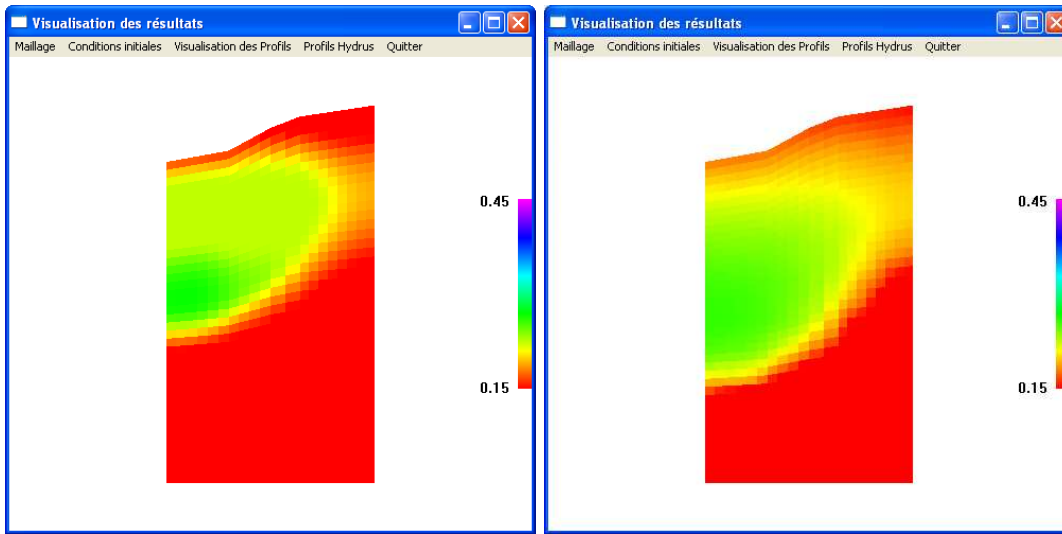


FIG. 2.4.2 – Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour la redistribution du sol 2 après irrigation à la raie

Le résultat illustré sur cet exemple par la FIG. 2.4.2 a été obtenu en utilisant deux jeux de paramètres. Même si une évolution similaire peut être constatée dans les deux simulations, la modélisation semi-analytique est plus éloignée du résultat d'HYDRUS-2D que les situations précédentes. La durée de la période simulée étant plus longue, la sensibilité de chaque paramètre est très importante, rendant le calage complexe à réaliser. Les critères de qualité de la modélisation  $\varepsilon_\theta$ ,  $\varepsilon_X$  et  $\varepsilon_Z$  confirment ces observations. Ils sont respectivement égaux à 8,24 %, 13.29 % et 14.78 %. La différence entre les temps de calcul est également réduite. Les figures ont été obtenues avec une moins bonne définition que les simulations des irrigations, pourtant,  $\tau_{CPU}$  atteint 85 %, le temps de calcul est quasiment le même que la simulation HYDRUS-2D en ayant réduit de moitié la définition de la visualisation. Suivant linéairement l'augmentation du nombre des problèmes élémentaires, il peut être rapidement plus lent qu'HYDRUS-2D si des optimisations du code informatique ne sont pas effectuées.

## 2.5 Evolution des solutés dans le domaine

Le calcul des transferts de soluté est plus long à obtenir. Il faut calculer les valeurs du flux Darcien en différents temps de la simulation afin de suivre son évolution au cours du temps et traiter le profil de soluté en conséquence selon la méthode décrite dans la quatrième partie au paragraphe 4.3.

Le processus semi-analytique décrivant les transferts de soluté impose cependant de considérer un maillage large, afin de pouvoir conserver sa structure lors de son anamorphose. Les itérations du modèle sont donc réalisées sur un nombre de maille réduit, conservant ainsi un temps de calcul satisfaisant et toujours inférieur à celui d'HYDRUS-2D.

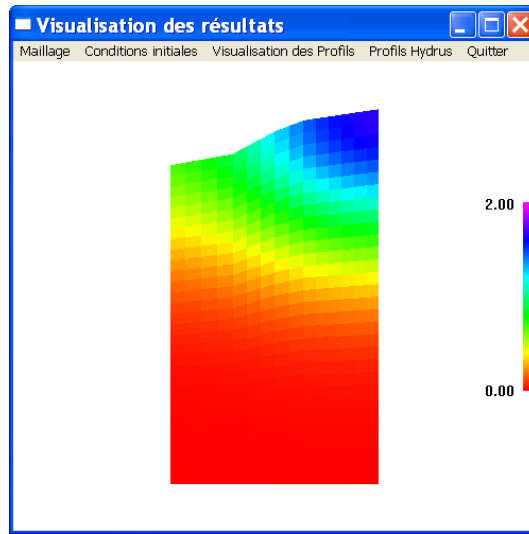


FIG. 2.5.1 – Profil initial de concentration du soluté [ $mgN.cm^{-3}$ ]

Le profil initial de soluté que l'on se propose de traiter est celui décrit par la FIG. 2.5.1. Il peut être considéré comme l'état du sol après un apport d'engrais suivi du traçage des sillons : le soluté se trouve concentré en parties hautes des billons. L'unité choisie est une unité arbitraire de concentration en unité de masse de soluté par unité de volume d'eau [ $mgN.cm^{-3}$ ]. Ce profil de soluté est soumis à l'irrigation à la raie traitée plus haut sur le sol 2.

Les paramètres de transfert de solutés choisis pour la simulation HYDRUS-2D sont les suivants. La diffusion moléculaire du nitrate dans l'eau pure  $D_0$  a été fixée à  $1,55cm^2.h^{-1}$ , comme le propose (Beven et al., 1993). La dispersivité mécanique est définie par les coefficients  $D_L$  et  $D_T$  valant respectivement  $1,5 cm$  et  $0,5 cm$ . Ces paramètres sont les paramètres proposés par défaut par HYDRUS-2D. Ils dépendent des dimensions du domaine de la simulation, et le rapport entre  $D_L$  et  $D_T$  peut varier entre 2 et 10 (Beven et al., 1993). Notons cependant que dans le cas de flux Darcien importants, le nombre de Peclet des cellules du maillage  $Pe_i = \frac{v_i \Delta x_i}{D_i}$  (où  $v_i$ ,  $\Delta x_i$  et  $D_i$  sont respectivement la vitesse de pore, une longueur caractéristique et la dispersion de la cellule  $i$ ) est élevé, les effets convectifs sont prépondérants sur les effets dispersifs. Dans le cas d'un nombre de Peclet faible, les effets dispersifs sont prépondérants sur les effets convectifs et la dispersion moléculaire prend le pas sur la dispersivité mécanique. Les paramètres  $D_L$  et  $D_T$  ont donc peu d'influence sur l'évolution du profil de concentration du soluté. Le profil obtenu par HYDRUS-2D en négligeant les autres phénomènes que cette modélisation peut prendre en compte (adsorption, réaction chimique du soluté, extraction racinaire) est illustré par la FIG. 2.5.5 à droite. La durée de la simulation est de  $3 h$ .

La modélisation semi-analytique a été réalisée en résolvant l'équation de transfert de soluté à coefficients constants. Afin de privilégier la représentation des zones du domaine où les flux hydriques sont les plus importants au cours de la simulation, nous avons choisi un coefficient de dispersion moyen élevé ( $10 cm^2.h^{-1}$ ) correspondant aux valeurs les plus élevées du tenseur de dispersion utilisé par HYDRUS-2D (voir première partie, paragraphe 2.3.3 pour le détail de l'évaluation de ce tenseur).

La FIG. 2.5.2 représente le profil de flux Darcien obtenu au terme de la simulation de 3 h. Ce profil est un exemple des profils calculés à différents instants de la simulation afin de définir le profil de flux moyen en temps. Ce profil a permis de délimiter la zone de validité de la simulation pour un coefficient de dispersion élevé. Il a également permis de fournir les paramètres nécessaires au processus itératif décrit en quatrième partie, au paragraphe 4.3 basé sur l'anamorphose du domaine selon le profil des flux Darcien. Ce dernier a ensuite été appliqué sur la solution de l'équation de transferts à coefficients constants. Le résultat est illustré sur la FIG. 2.5.3. Cette figure représente également la frontière de validité associée à ces coefficients moyens.

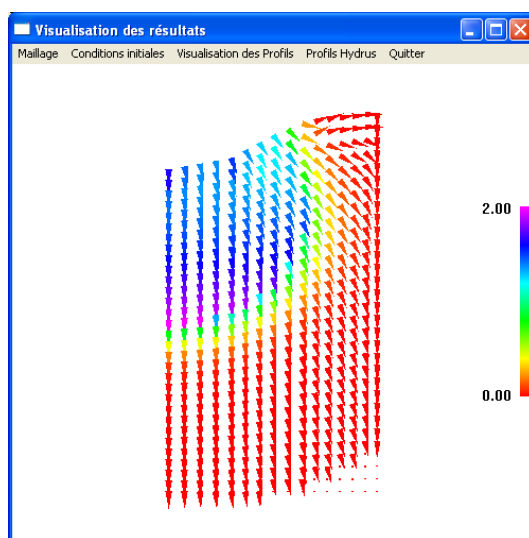


FIG. 2.5.2 – Profil de flux Darcien calculé par la modélisation semi-analytique après 3 h d'irrigation à la raie

Cette simulation a été reprise en considérant un coefficient de dispersion moyen nul afin de représenter les zones du domaine d'étude dans lesquelles le flux moyen est faible. Cette simulation est représentée par la FIG. 2.5.4. De même que dans le cas de la simulation de l'évolution du profil hydrique, l'évolution de la concentration du soluté dans le sol est obtenue en combinant ces deux simulations selon leur domaine de validité (FIG. 2.5.5 à gauche). Ici, la résolution de l'équation de transferts des solutés a été complétée par un processus itératif basé sur l'anamorphose du domaine permettant la prise en compte du caractère bidirectionnel des flux Darcien.

La qualité de cette simulation est satisfaisante ( $\varepsilon_\theta = 4,12\%$ ,  $\varepsilon_X = 7,24\%$  et  $\varepsilon_Z = 7,56\%$ ). Le temps de calcul est accru dans une proportion importante par rapport aux simulations précédentes. Le profil initial de nitrate a été constitué avec un faible nombre de fonctions  $\mathcal{G}$ , le rapport  $\tau_{CPU}$  reste inférieur à 1 (63% en considérant un seul jeu de paramètres pour la résolution de l'équation de Richards et 6 itérations pour le processus prenant en compte un profil de flux spatialement variable). Cependant, des profils initiaux plus complexes ou une variation de l'humidité du sol plus importante nécessitant la prise en compte de plusieurs jeux de paramètres peuvent entraîner une augmentation de ce rapport.

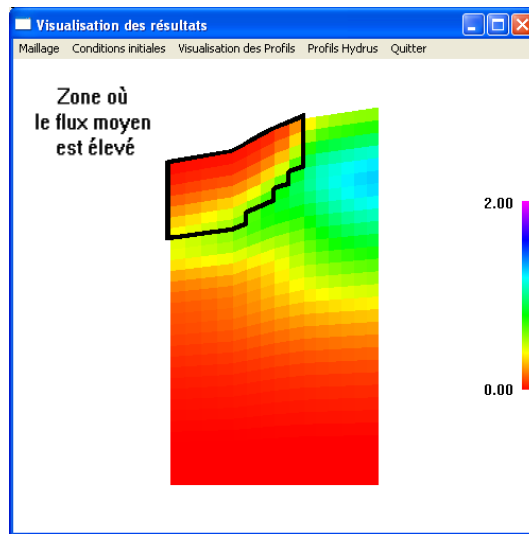


FIG. 2.5.3 – Profil de concentration de soluté calculé par la modélisation semi-analytique pour un coefficient de dispersion moyen élevé

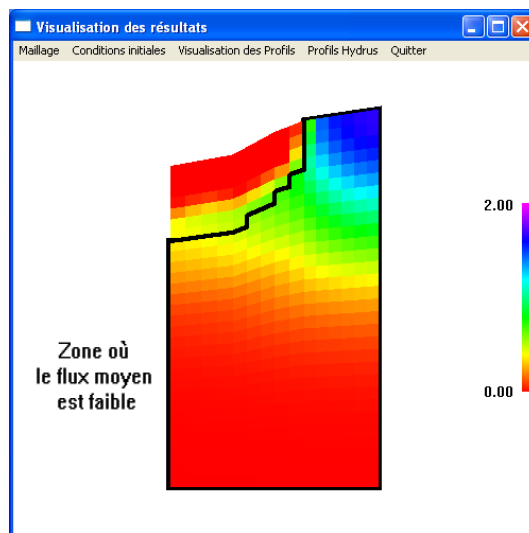


FIG. 2.5.4 – Profil de concentration de soluté calculé par la modélisation semi-analytique pour un coefficient de dispersion nul

L'évolution du profil de soluté lors de la redistribution du profil hydrique sur une durée de plusieurs jours est représentée de la même manière. Des flux moyens d'intensité plus faible et moins variables au cours de la simulation améliorent la qualité de la simulation, cependant la durée de simulation plus longue pourra rendre le calage des paramètres plus complexes.



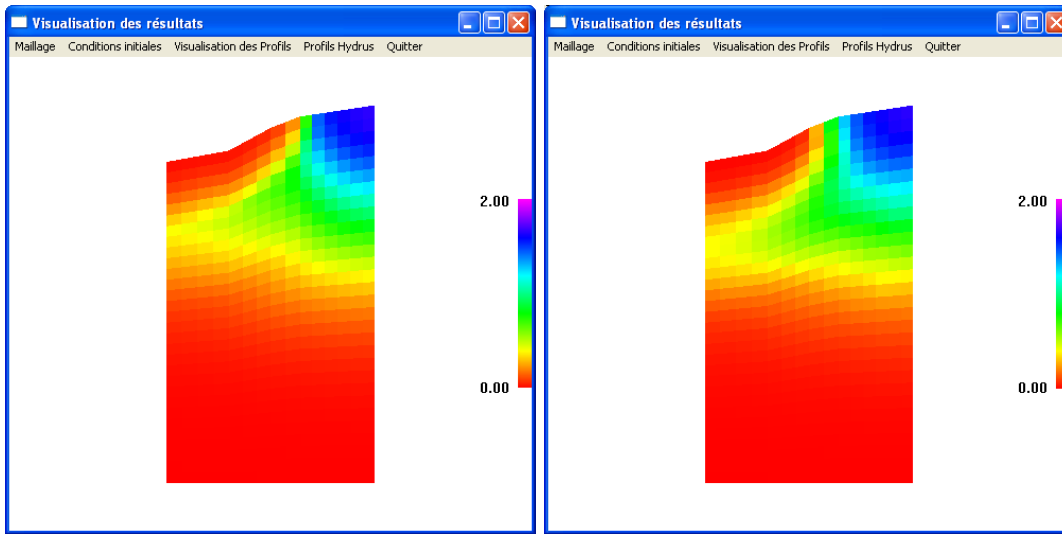


FIG. 2.5.5 – Comparaison de la modélisation semi-analytique (à gauche) / HYDRUS-2D (à droite) pour l'évolution de la concentration en nitrate sous irrigation à la raie

Enfin, la fertigation peut également être traitée par ce modèle semi-analytique. Celle-ci consiste à intégrer le fertilisant à l'eau d'irrigation. Cette technique est fréquemment employée en micro-irrigation. L'apport de fertilisant est représenté dans le modèle par un flux imposé, sur la même surface qui reçoit l'irrigation. La solution de l'équation de transferts de soluté est formellement la même que celle de l'équation de Richards sous des conditions aux limites similaires. Cette configuration a été testée. Il reste cependant certaines améliorations à apporter concernant la gestion des flux Darcien bidirectionnels dans cette situation.

## 2.6 Bilan sur les capacités du modèle à ce moment de l'étude

Le début de cette cinquième partie a testé les possibilités du modèle semi-analytique décrit théoriquement dans la quatrième partie. Tout d'abord, une seule simulation sur un cas pratique d'irrigation a permis de représenter la répartition de l'humidité dans le domaine à un instant donné. Cependant, le domaine de validité du modèle était restreint aux faibles variations d'humidité, limitant les simulations valables à celles considérant un sol initialement humide avant l'irrigation et des propriétés hydrodynamiques qui varient faiblement avec l'humidité. Ces conditions sont celles de l'hypothèse du sol linéaire. Une deuxième étape a consisté à étendre le domaine de validité à des plages d'humidité plus vastes et des types de sol plus nombreux. Cette étape a été réalisée en effectuant plusieurs simulations sur une plage d'humidité donnée, permettant ainsi de reconstituer une solution valable sur la totalité du domaine. Les sols à texture grossière sont également plus complexes à représenter avec cette approche, mais des résultats satisfaisants peuvent cependant être obtenus en augmentant la discrétisation de l'intervalle d'humidité  $[\theta_r, \theta_s]$ . La redistribution de l'eau du sol a également été traitée avec la même approche. Le calage des paramètres moyens de

l'équation de Richards linéarisée est cependant plus complexe, leur sensibilité étant accrue du fait de l'augmentation de la durée de simulation (de l'ordre de plusieurs jours). Ceci nuit à la qualité des résultats. Enfin, les transferts de solutés ont été représentés. Le profil d'humidité simulé au préalable a permis de définir le profil de flux au cours de la simulation. Celui-ci est essentiel à la résolution de l'équation de transferts de soluté, mais nécessite un temps de calcul plus long pour représenter de manière satisfaisante la distribution du soluté. Actuellement, ce modèle néglige cependant certains phénomènes dont la représentation est essentielle à son utilisation sur une saison de culture complète. La suite de cette partie propose donc les principes généraux de la représentation de ces phénomènes par le modèle.

## Chapitre 3

# Perspectives de développement du modèle semi-analytique

### 3.1 Prise en compte d'actions extérieures variables en espace et en temps

Ce modèle étant basé sur l'utilisation de la fonction de Green, il est capable de gérer de nombreux types de conditions aux limites. Nous avons vu que la condition de charge dans le cas de l'irrigation a été considérée variable dans les simulations testées plus haut. Des conditions aux limites variables permettent de représenter de nombreux phénomènes qui agissent de l'extérieur sur le domaine étudié.

Concernant le système d'irrigation en lui-même, les conditions aux limites imposées jusqu'alors étaient indépendantes du temps. Le débit d'un goutteur est en général régulier, de faibles variations peuvent apparaître mais ne nécessitent pas le recours à une modélisation plus complexe. Cependant, la hauteur d'eau dans une raie est un processus qui varie dans le temps, principalement en début et en fin de la phase d'irrigation. En couplant ce modèle avec un modèle d'avancement de l'eau dans une raie, une condition à la limite variable en temps peut permettre la simulation d'un remplissage et d'une vidange de la raie.

De même, l'évaporation du sol (ET) est un phénomène très variable à l'échelle de la saison et celle de la journée. ET est représentée par une condition de flux d'eau sortant du domaine qui dépend des conditions climatiques. Cette condition accentue l'assèchement du sol dû aux effets gravitaires qui entraînent naturellement l'eau du sol en profondeur.

Enfin, les précipitations peuvent être également représentées par le modèle. Elles consistent en un flux d'eau entrant dans le domaine. Ici encore, ce flux n'est jamais constant et une modélisation tenant compte de la variation de l'intensité de la pluie dans le temps permet une meilleure description de ce phénomène. Il faut tout de même noter qu'un débit supérieur à la conductivité hydraulique à saturation sera mal traité par le modèle semi-analytique et que le passage d'une condition de

flux (débit inférieur à  $K_s$ ) à une condition de charge (flaquage en surface pour un débit supérieur à  $K_s$ ) qui peut être traité dans certaines versions modifiées d'HYDRUS-2D ne peut pas ici être effectué.

## 3.2 Impact de la plante sur l'état du sol

L'utilisation de la fonction de Green dans ce modèle permet également de traiter des termes sources. Un terme source ajouté dans l'équation de transfert induira l'ajout d'un terme dans la solution analytique proposée dans ce travail. Ce terme aura également une forme intégrale, en espace et en temps, faisant intervenir la fonction de Green. Les outils algorithmiques développés dans la troisième partie permettront de traiter ce terme supplémentaire de la même manière que les autres.

Ce terme source peut représenter l'extraction racinaire de la plante en eau ou en azote ainsi qu'une production de soluté dans le domaine. Concernant l'extraction racinaire, elle modifie non seulement l'état du sol, mais la connaissance des quantités d'eau et d'azote prélevées permettent de vérifier que les demandes de la plante sont bien satisfaisantes et de prévoir ainsi son rendement à la récolte.

Un effort de modélisation devra cependant être fait dans ce contexte. En effet, la transpiration de la plante est contrôlée par la demande climatique. La quantité d'eau dans le sol n'est pas toujours suffisante pour satisfaire cette demande, dans ce cas, on dit que la plante est en condition de stress hydrique. Cette situation peut également se produire dans le cas d'une eau difficilement utilisable par la plante, c'est à dire dont la pression matricielle est inférieure à la capacité de succion des racines. La résolution mathématique par l'utilisation de la fonction de Green permet de traiter des termes sources dépendant des variables d'espace et de temps, il est donc possible de définir une extraction racinaire variant selon le temps (pour représenter les changements climatiques au cours de la journée ou de la saison) et l'espace (pour représenter la distribution des racines de la plante dans le sol). Cependant, elle ne permet pas directement de rendre compte de la variation du terme source en fonction de l'état du sol à un instant donné. De plus, le besoin en eau de la plante est décrit généralement par une demande climatique globale qui est répartie de manière uniforme sur toute la zone racinaire. En pratique, dans le cas de l'assèchement d'une région du domaine colonisée par des racines, la plante reporte ses potentiels d'extraction sur d'autres racines, permettant ainsi de satisfaire finalement la demande (Mailhol, 2005, conversations professionnelles). Ce phénomène suppose que le modèle puisse pondérer l'extraction racinaire selon l'état hydrique local du sol.

## 3.3 Description d'une saison culturale complète

Un des objectifs de ce travail était de décrire l'évolution de l'état du sol à l'échelle de la saison et de pouvoir simuler une succession de phases d'irrigation et de redistribution. Le modèle développé peut être adapté à ce contexte. Nous avons vu que les irrigations peuvent être traitées avec des temps de calcul faibles et que la méthode générale pour décrire irrigations ou redistributions est la même. Cependant plusieurs points sont encore à améliorer pour atteindre cet objectif.

Les simulations réalisées dans ce travail ont nécessité un calage qui a parfois été complexe. La définition des paramètres moyens  $c_D$  et  $c_H$  a été délicate du fait de la forte variation des propriétés hydrodynamiques du sol en fonction de l'humidité. Un procédé permettant d'automatiser ce calage sur le modèle de van Genuchten, comme il a été réalisé ici, sur un autre modèle, ou sur des données expérimentales doit être mis en place pour augmenter le caractère opérationnel du modèle.

Le passage d'une phase d'irrigation à une phase de redistribution est actuellement délicat à effectuer. La simulation d'une irrigation doit permettre de définir le profil qui servira de condition initiale à la simulation d'une redistribution. Nous avons vu que ce passage est pour l'instant effectué en recomposant manuellement cette condition initiale, mais que le profil obtenu est conforme au profil attendu. Il faudra donc automatiser également ce passage.

Enfin, des imprécisions ont été décelées dans ce modèle du fait du manque d'efficacité de certaines méthodes numériques. Les conditions de flux imposés en surface ont notamment été sous-estimées par ces méthodes trop simples. L'objectif premier de ce travail étant de valider les principes de cette modélisation et sa capacité à satisfaire aux exigences du contexte, ces méthodes numériques ont été négligées au profit de cet objectif. Pour les mêmes raisons, la représentation symbolique des fonctions composant la solution du problème d'écoulement n'est pas optimisée. Une amélioration de ces points permettra de diminuer le temps de calcul et d'améliorer la représentation des phénomènes physiques simulés.



# Conclusion de la partie

Cette partie a permis d'évaluer les capacités et le domaine de validité de la modélisation développée. Trois critères devaient être testés.

- Son adaptabilité. Nous avons vu que ce modèle était en mesure de simuler différents types de système d'irrigation, sous différentes contraintes d'humidité initiale et de conditions aux limites. Entre chaque phase d'irrigation, la redistribution peut être simulée en utilisant les mêmes mécanismes de résolution que ceux employés dans le cas d'une irrigation. Même si des améliorations restent à accomplir pour obtenir une meilleure précision, le modèle reproduit l'évolution générale de l'humidité du sol. Il propose enfin un processus permettant de représenter l'évolution du profil de soluté en partant des principes de résolutions des équations de transferts hydriques. Enfin, des perspectives sont envisagées pour augmenter le nombre des phénomènes pouvant être traités par le modèle tout en gardant et en exploitant les principes fondateurs de la modélisation.
- Son caractère opérationnel. Ce point reste à améliorer, cependant, les cas testés dans cette partie et les propositions de développements ultérieurs montrent que la marge de progrès est relativement étendue en ce sens. En effet, le caractère opérationnel est pour le moment détérioré par la lourdeur de certaines méthodes et par des processus qui ne sont pas encore pris en charge automatiquement par le code de calcul.
- L'étendue de son domaine de validité. Ce point était important à vérifier. Les hypothèses prises pour construire le modèle étaient très contraignantes et risquaient de nuire à la qualité des résultats. La validité des premières simulations n'étaient effectives que sur des plages de valeurs faiblement étendues. Une approche consistant à rassembler plusieurs simulations sur ce type de domaine de validité a permis d'étendre les capacités du modèle à une plus grande variété de sols et à un plus grand nombre de situations.

Ces trois points de contrôle sont donc, pour la plupart, relativement satisfaisants. Le modèle en l'état actuel permet la simulation de nombreuses situations à l'échelle événementielle et ses principes pourront servir à intégrer de nouveaux modules permettant de compléter le nombre des phénomènes physiques qui peuvent être simulés. Certains points, notamment l'extraction racinaire d'une plante en stress hydrique, devront cependant faire l'objet d'études complémentaires, ce travail, en l'état actuel, ne permettant pas leur prise en compte directe.





# Conclusion

L'objectif de ce travail était de développer une modélisation permettant la représentation des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés. Cette modélisation devait être capable de combler certaines lacunes des modélisations existantes. Dans le cas des modélisations analytiques, il s'agissait de prendre en compte un domaine de validité plus important et d'être capable de représenter un plus grand nombre de phénomènes physiques et de situations pratiques d'irrigation et de fertilisation. Concernant les modélisations numériques, le modèle développé devait avoir un caractère plus opérationnel, permettant de décrire par les mêmes principes, différents événements caractérisés par différentes échelles de temps.

La première partie de ce travail a consisté à dresser l'état de l'art des modélisations existantes en rapport avec cette problématique. Elle a permis de déceler plus précisément les difficultés de chaque méthode à représenter les transferts bi- et tridirectionnels dans des situations relativement complexes et les contraintes auxquelles elles devaient faire face en liaison avec la problématique. Mais cette étude a permis également de retenir les avantages de chaque modélisation afin de les intégrer au modèle à développer. L'étude des données expérimentales a suivi logiquement cette étude théorique. Après avoir analysé les outils de modélisation à disposition, nous avons cherché à compléter la connaissance des transferts eau-solutés et des phénomènes physiques mis en jeu dans le contexte de l'étude par une analyse de campagnes expérimentales. Ces campagnes ont mis en évidence le besoin d'une modélisation bi- ou tridirectionnelle pour décrire certaines techniques d'irrigation et de fertilisation. Elles ont permis également de cerner les contraintes et les besoins pratiques que la modélisation doit satisfaire dans la problématique de l'étude.

Les apports de ces deux analyses réalisées au niveau théorique et expérimental nous ont orienté vers le développement d'une modélisation semi-analytique fondée sur la résolution des équations de transferts. Le choix d'une modélisation à partir de bases mécanistes a été motivé par le besoin d'une description détaillée des processus physiques à représenter. La construction d'un tel modèle a donné lieu à la définition d'outils mathématiques et algorithmiques permettant la résolution des équations de transferts. Cette résolution a été effectuée en décomposant le problème général en problèmes élémentaires plus simples à traiter. L'efficacité de cette modélisation a enfin été testée sur des cas concrets d'irrigation et de fertilisation. Ce fut alors l'occasion de vérifier l'étendue de son domaine de validité. Celui-ci, trop restreint du fait de fortes hypothèses imposées lors de la construction du modèle, a été étendu par la superposition de plusieurs simulations réalisées chacune sur un domaine de validité restreint, mais dont la réunion permettait de toucher un plus grand nombre de sols et de situations pouvant être représentées.

L'apport de cette modélisation par rapport aux modélisations existantes est conforme aux attentes, même si elle doit faire l'objet d'améliorations et d'études complémentaires pour des applications pratiques. En l'état actuel du développement, ce modèle est capable de décrire l'évolution d'un profil initial d'humidité et de concentration d'azote hétérogène et de gérer des géométries irrégulières lors de la simulation d'une irrigation ou d'une redistribution. Cette remarque est particulièrement valide sur des sols à dynamique lente ou des durées de simulations faibles. Dans le cas de sols à texture plus grossière ou sur des durées de simulation plus longues (de l'ordre de quelques jours), cette remarque doit être nuancée. Une meilleure qualité de la modélisation peut être obtenue, mais au prix d'une augmentation des temps de calculs et d'un calage de paramètres plus complexe. Cette option rend la modélisation plus difficile à mettre en oeuvre et la rapproche d'une modélisation numérique et de toutes les contraintes qu'elle implique.

Ce travail a permis cependant de définir un outil adaptable avec de nombreuses perspectives d'améliorations. Les processus actuellement utilisés au sein du code de calcul peuvent être optimisés et la structure de cet outil permet l'ajout de modules supplémentaires. Cet ajout est facilité par le développement, au cours de ce travail, de méthodes génériques qui pourront s'adapter à ces modules supplémentaires, permettant ainsi la prise en compte de phénomènes pour l'instant négligés.

# Bibliographie

- Ababou, R. (1981). *Modélisation des transferts hydriques dans le sol en irrigation localisée*. Thèse, Institut national polytechnique de Grenoble.
- Abbasi, F., Feyen, J., Roth, R. L., Sheedy, M., and van Genuchten, M. T. (2003). Water flow and solute transport in furrow-irrigated fields. *Irrig. Sci.*, 22 :57–65.
- Aboujaoudé, A., Belleudy, P., and Vauclin, M. (1991). A numerical study of infiltration through crusted soils : flat and other surface configurations. *Soil technology*, 4 :1–18.
- Arfken, G. (1985). *Mathematical Methods for Physicists, 3rd ed.* Academic Press, Orlando.
- Assouline, S. (2002). The effects of microdrip and conventional drip irrigation on water distribution and uptake. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 66 :1630–1636.
- Basha, H. A. (1999). Multidimensional nonsteady infiltration with prescribed boundary conditions at the soil surface. *Water resources research*, 35 :75–84.
- Benjamin, J. G., Porter, L. K., Duke, H. R., Ahuja, L. R., and Butters, G. (1998). Nitrogen movement with furrow irrigation method and fertiliser band placement. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 62 :1103–1108.
- Berthomé, P. (1991). *Modélisation de l'infiltration en irrigation à la raie - Résolution numérique et analytique - Application à l'étude de la conduite des arrosages*. Thèse, Institut national polytechnique de Toulouse.
- Beven, K. J., Henderson, D. E., and Reeves, A. D. (1993). Dispersion parameters for undisturbed partially saturated soil. *Journal of hydrology*, 143 :19–43.
- Brisson, N., Mary, B., Ripoche, D., Jeuffroy, M.-H., Ruget, F., Nicoullaud, B., Gate, P., Devienne-Barret, F., Antonioletti, R., Durr, C., Richard, G., Beaudoin, N., Recous, S., Tayot, X., Plenet, D., Cellier, P., Machet, J.-M., Meynard, J.-M., and Delecolle, R. (1998). Stics : a generic model for the simulation of crops and their water and nitrogen balances. i. theory and parameterization applied to wheat and corn. *Agronomie*, 18(5-6) :311–346. 140CV AGRONOMIE.
- Broadbridge, P. and White, I. (1988). Constant rate rainfall infiltration : A versatile non-linear model. 1. analytic solution. *Water Resour. Res.*, 24 :145–154.
- Brooks, R. H. and Corey, A. T. (1964). Hydraulic properties of porous media. Rapport technique 3, Colorado St. Univ., Fort Collins.
- Buckingham, E. (1907). Studies on the movement of soil moisture. Rapport technique 38, U.S. Dept. of Agr. Bureau of Soils, Washington, D.C.
- Burns, I. G. (1975). An equation to predict the leaching of surface-applied nitrate. *J. agric. Sci., Camb.*, 85 :443–454.

- Carslaw, H. S. and Jaeger, J. C. (1956). *Conduction of heat in solids, 2nd ed.* Clarendon Press, Oxford.
- Cleary, R. W. and Unger, M. J. (1978). Groundwater pollution and hydrology, mathematical models and computer programs. In *Water Resour. Program - Research report No. 78-WR-15*, Princeton Univ. Princeton, New Jersey.
- Clemmens, A. J. and Dedrick, A. R. (1994). *Irrigation techniques and evaluations*, volume 22 of *Management of Water Use in Agriculture. p.64η103*. In *Adv. Series in Agricultural Sciences*. K. K. Tanja and B. Yaron (ed.), Springer Verlag, Berlin.
- Clothier, B. E. (1984). Solute travel times during trickle irrigation. *Water resources research*, 20 :1848–1852.
- Clothier, B. E. and Scotter, D. R. (1982). Constant-flux infiltration from a hemispherical cavity. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 46 :696–1700.
- Clothier, B. E., Scotter, D. R., and Harper, E. R. (1985). Three-dimensional infiltration and trickle irrigation. *Transaction of the ASAE*, 28 :497–501.
- Coelho, F. E. and Or, D. (1997). Applicability of analytical solutions for flow from point sources to drip irrigation management. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 61(6) :1331–1341.
- Cormen, T. H., Leiserson, C. E., and Rivest, R. L. (1990). *Introduction to Algorithms*. MIT Press.
- Crank, J. (1956). *The mathematics of diffusion*. Oxford Univ. Press, London.
- Crevoisier, D. (2005). Analytical approach predicting water bidirectional transfers. In *the Third International Conference on Water Resources Management - 11 to 13 April - Algarve, Portugal*, Wessex Institute of technology.
- Darcy, H. (1856). Les fontaines publiques de la ville de Dijon. *Dalmont, Paris*.
- de Smedt, F. and Wierenga, P. J. (1978a). Approximate analytical solution for solute flow during infiltration and redistribution. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 42 :407–412.
- de Smedt, F. and Wierenga, P. J. (1978b). Solute transport through soil with nonuniform water content. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 42 :7–10.
- Duchauffour, P. (1991). *Pédologie*. Masson.
- Fernandez, J. E., Moreno, F., Cabrera, J. M., and Murillo, E. F.-B. (1994). Water and nitrogen use efficiency in a maize crop in southern Spain. In *Confer. on land and water resource management, in the mediterranean region*, Inst. Mediter. Bari, Italy.
- Fick, A. (1855). Über diffusion. *Ann. der phys.*, 94 :59–86.
- Flühler, H. and Roth, K. (2003). *Physik der ungesättigten zone*. Technische Universität Braunschweig, pages 184–185.
- Garabedian, P. R. (1964). *Partial Differential Equations*. Wiley, New York.
- Gardner, W. R. and Mayhugh, M. S. (1958). Solution and tests of the diffusion equation for the movement of water in soil. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 22 :197–201.
- Gärdenäs, A. I., Hopmans, J. W., Hanson, B. R., and Simunek, J. (2005). Two-dimensional modeling of nitrate leachnig for various fertigation scenarios under micro-irrigation. *Agricultural water management*, 74 :219–242.

- Green, W. H. and Ampt, G. A. (1911). Studies of soil physics : I. flow of air and water through soils. *J. agric. sc.*, 4 :1–24.
- Hamblin, C. L. (1962). A note estimating finite difference interblock hydraulic conductivity values for transient unsaturated flow problems. *Computer Journal*, 5 :210–213.
- Haverkamp, R., Parlange, J. Y., Starr, J. L., Schmitz, G. H., and Fuentes, C. (1990). Infiltration under ponded conditions : 3. a predictive equation based on physical parameters. *Soil science*, 149(5) :292–300.
- Javandel, I., Ch., D., and Chin-Fu, T. (1984). *Groundwater transport : handbook of mathematical models*. Water resour. monograph No. 10, Am. Geophys. Union, Washington D.C.
- Jones, C. A. and Kinity, J. R. (1986). *CERES-MAIZE, a Simulation Model of Maize Growth and Development*. Texas A.M. University Press.
- Knuth, D. (1997). *The Art of Computer Programming, Volume 1 : Fundamental Algorithms, 3rd Edition*. Reading, Massachusetts : Addison-Wesley.
- Kostiakov, A. N. (1932). On the dynamics of the coefficient of water-percolation in soils and on the necessity of studying it from a dynamic point of view for purposes of amelioration. *Trans. sixth comm. intl. soc. soil sci.*, Part A :17–21.
- Koutev, V., Ikononova, E., Popova, Z., Varlev, V., and Mladenova, B. (1999). Alternate-furrow irrigation and fertilization. In *8. Gumpensteiner Lysimetertagung*, pages 161–162. Bundesanstalt für alpenländische Landwirtschaft Gumpenstein, Irnding.
- Kutilek, M. and Nielsen, D. R. (1994). *Soil hydrology*. GeoEcology textbook. Catena Verlag.
- Lapidus, L. and Amundson, N. R. (1952). Mathematics of adsorption in beds. vi. the effect of longitudinal in ion exchange and chromatographic columns. *J. phys. chem.*, 56 :984–988.
- Leij, F. J., Skaggs, T. H., and van Genuchten, M. T. (1991). Analytical solutions for solute transport in three dimensional semi-infinite porous media. *Water resources research*, 27(10) :2719–2733.
- Lindstrom, F. T. and Boersma, L. (1989). Analytical solutions for convective-dispersive transport in confined aquifer with different initial and boundary conditions. *Water resources research*, 25(2) :241–256.
- Lindstrom, F. T., Haque, R., Freed, V. H., and Boersma, L. (1967). Theory on the movement of some herbicides in soils : linear diffusion and convection of chemicals in soils. *Environ. sci. technol.*, 1 :561–565.
- Mailhol, J. C. (2001). *Contribution à l'amélioration des pratiques d'irrigation à la raie par une modélisation simplifiée à l'échelle de la parcelle et de la saison*. Thèse, Université de Montpellier II.
- Mailhol, J. C. (2005). conversations professionnelles.
- Mailhol, J. C., Crevoisier, D., and Triki, K. (2005a). Impact of water application conditions on nitrogen leaching under furrow irrigation : Experimental and modelling approaches. A paraitre dans Agricultural water management.
- Mailhol, J. C. and Gonzalez, G. (1993). Furrow irrigation model for real-time applications on cracking soils. *Journal of Irrig. Drain. Engin. ASCE*, 119(5) :768–783.

- Mailhol, J. C., Ruelle, P., and Nemeth, I. (2001). Impact of fertilisation practices on nitrogen leaching under irrigation. *Irrigation science*, 20 :139–147.
- Mailhol, J. C., Ruelle, P., and Popova, Z. (2005b). Simulation of furrow irrigation practices (sofip) : a field-scale modelling of water management and crop yield for furrow irrigation. *Irrigation science*, 24(1) :37–48.
- Mailhol, J. C., Ruelle, P., Revol, P., Delage, L., and Lescot, J. M. (1997). Operative modelling for actual evapotranspiration assessment : calibration methodology. In *ASAE*.
- Mansell, R. S., Liwang, M., Ahuja, L. R., and Bloom, S. A. (2002). Adaptive grid refinement in numerical models for water flow and chemical transport in soil : a review. *Vadose Zone Journal*, 1 :222–238.
- Mary, B., Beaudoin, N., Justes, E., and Machet, J. (1999). Calculation of nitrogen mineralization and leaching in fallow soil using a simple dynamic model. *European Journal of Soil Science*, 50(4) :549–566.
- Mary, B., Brisson, N., Cabidoche, Y. M., Beaudoin, N., and Nicoullaud, B. (2002). *Transferts d'eau et de nitrate dans le sol non drainé*. INRA.
- McCarthy, J. (1960). Recursive functions of symbolic expressions and their computation by machine, part i. In *Communications of the ACM*.
- Millington, R. J. and Quirk, J. M. (1961). Permeability of porous solids. *Trans. Faraday Soc.*, 57 :1200–1207.
- Mishra, B. K. and Misra, C. (1993). Nitrogen transformation during miscible displacement of ammonium nitrate solution through the root zone of maize. *Journal of the Indian society of soil science*, 41(4) :630–635.
- Morel-Seytoux, H. J. (1973). Pour une théorie modifiée de l'infiltration - 1ère partie : pourquoi ? *Cahier de l'O.R.S.T.O.M., série Hydrol.*, X(2) :185–194.
- Muller, A. (2001). Estimation of hydraulic soil parameters of till soil using direct and inverse methods. Mémoire de fin d'étude, IHM, Technische Universität, Dresden.
- Nemeth, I. (2001). *Devenir de l'azote sous irrigation gravitaire - Application au cas d'un périmètre irrigué au Mexique*. Thèse, Université de Montpellier II.
- Olesen, T., Griffiths, B. B., Henriksen, K., Moldrup, P., and Wheatley, R. (1997). Modeling diffusion and reaction in soils : V. nitrogen transformations in organic manure-amended soil. *Soil science*, 162(3) :157–168.
- Parlange, J. Y. (1971). Theory of water movement in soils : 1. one-dimensional absorption. *Soil science*, 114 :1–4.
- Philip, J. R. (1957a). The theory of infiltration : 1. the infiltration equation and its solution. *Soil science*, 83 :345–357.
- Philip, J. R. (1957b). The theory of infiltration : 4. sorptivity and algebraic infiltration equations. *Soil science*, 84 :257–267.
- Philip, J. R. (1984a). Steady infiltration from circular cylindrical cavities. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 48 :270–278.

- Philip, J. R. (1984b). Travels times from buried and surface infiltration point sources. *Water resources research*, 20(7) :990–994.
- Philip, J. R. (1986). Linearized unsteady multidimensional infiltration. *Water resources research*, 22(12) :1717–1727.
- Philip, J. R. and Knight, J. H. (1974). On solving the unsaturated flow equation : 3. new quasi-analytical technique. *Soil Sci.*, 117 :1–13.
- Playàn, E., Slatni, A., Castillo, R., and Faci, J. M. (2000). A case study for irrigation modernisation : Ii. scenario analysis. *Agricultural water management*, 42 :335–354.
- Popova, Z., Crevoisier, D., Mailhol, J. C., and Ruelle, P. (2005a). Assessment and simulation of water and nitrogen transfer under furrow irrigation - part i : Application of hydrus-2d model for simulate water transfer. soumis au Journal of Hydrology.
- Popova, Z., Crevoisier, D., Mailhol, J. C., and Ruelle, P. (2005b). Assessment and simulation of water and nitrogen transfer under furrow irrigation - part ii : Application of hydrus-2d model for simulate nitrogen transfer. soumis au Journal of Hydrology.
- Popova, Z., Varlev, I., Ikonomo, E., and Kutev, V. (1998). Irrigation and cropping techniques to prevent natural water pollution. In *Papers of the 1st Inter-Regional Conference "Environment - Water : Innovative Issues in Irrigation and Drainage*, pages 6–13, Lisbon, Portugal.
- Popova, Z., Varlev, I., Kutev, V., and Shoppova, D. (2000). Lysimeter study on ground water degradation due to different fertilisation and irrigation management. In *International conference on water ressources management in the 21st century with particular reference to Europe*, Budapest, Hungary.
- Raats, P. A. C. (1971). Steady infiltration from point sources, cavities and bassins. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 35 :689–694.
- Raats, P. A. C. (1972). Steady infiltration from sources at arbitrary depth. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 36 :399–401.
- Revol, P. (1994). *Caractérisation hydrodynamique des sols par infiltration bidimensionnelle axisymétrique et modélisation simplifiée de la micro-irrigation*. Thèse, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- Revol, P., Clothier, B., Vachaud, G., and Thony, J.-L. (1991). Predicting field characteristics of drip irrigation. *Soil technology*, 4 :125–134.
- Ruelle, P. (1995). *Variabilité spatiale à l'échelle de parcelles de cultures : étude expérimentale et modélisation des bilans hydriques et des rendements*. Thèse, Université Joseph Fourier - Grenoble I.
- Saad, M. (2002). Le type réel (<http://www.math.u-bordeaux1.fr/saad/coursf90/node9.html>).
- Schmitz, G. H. (1993). Transient infiltration from cavities - i : theory. *Journal of irrigation and drainage engineering*, 119(3) :443–457.
- Shan, C. and Javandel, I. (1997). Analytical solutions for solute transport in a vertical aquifer section. *Journal of contaminent hydrology*, 27 :63–82.
- Simunek, J., Sejna, M., and Van Genuchten, M. T. (1999). The hydrus-1d and hydrus-2d codes for estimating unsaturated soil hydraulic and solutes transport parameters. *Agron abstr*, 357.

- Smiles, D. E. (2000). Material coordinates and solute movement in consolidating clay. *Chemical engineering science*, 55 :773–781.
- Stanford, G. and Epstein, E. (1974). Nitrogen mineralisation - water relation in soils. *Soil Sci. Soc. Am. Proc.*, 38 :103–107.
- Triki, K. (2002). Etude expérimentale et modélisation des transferts 2d eau-solutés - cas de l'irrigation à la raie. Mémoire de fin d'étude, Ecole supérieure de mécanique de Marseille.
- van Genuchten, M. T. (1980). A closed form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44 :892–898.
- Vancloster, M., Viaene, P., Diels, J., and Christiaens, K. (1993). *WAVE (Water and Agrochemicals in soil, crop and Vadose Environment), reference and user's manual*. Institute for land and water management, K.U. Leuven.
- Vereecken, H., Vancloster, M., Swerts, M., and Diels, J. (1991). Simulating water and nitrogen behavior in soil cropped with wheat. *Fert. Res.*, 27 :233–243.
- Wang, F. L. and Alva, A. K. (2000). Ammonium adsorption and desorption in sandy soils. *Soil sci. soc. Am. Proc.*, 64 :1669–1674.
- Warrick, A. W. (1974). Time-depend linearized infiltration. i. point sources. *Soil sci. soc. Am. Proc.*, 38(12) :383–386.
- Warrick, A. W., Kichen, J. H., and Thames, J. L. (1972). Solutions for miscible displacement of soil water with time-dependent velocity and dispersion coefficients. *Soil sci. soc. Am. Proc.*, 36 :863–867.
- Wendland, F. (1994). Modelling nitrate flow in the ground-water provinces of the "old" federal states of the federal republic of germany. *Ecological modelling*, 75 :385–397.
- Wöhling, T., Schmitz, G. H., and Mailhol, J. C. (2003). Modelling 2d-infiltration from irrigation furrow. analysis of analytical and numerical approaches. *submitted to ASCE*.
- Wooding, R. A. (1968). Steady infiltration from a shallow circular pond. *Water resources research*, 4 :1259–1273.
- Zapata, N. (1999). *Improvement of surface irrigation systems using simulation models and field data*. Thèse, E.T.S.E.A. of Lleida (Spain).



## Annexe A

# Manuel d'utilisation de DeGETES (Décomposition gaussienne des équations de transferts eau-soluté)

### A.1 Présentation du code de calcul

Le logiciel DEGETES est un code de calcul permettant de résoudre les équations de transferts eau-soluté en décomposant celles-ci sous forme de gaussiennes. Les principes généraux de cette décomposition sont décrits dans le mémoire, nous présenterons ici un manuel pratique d'utilisation du logiciel développé. Le langage de programmation utilisé est FORTRAN90, concernant la partie calculs scientifiques. La partie graphique est réalisée par des appels de routines WIN32.

Trois types de fichiers sont utilisés ici.

- Des fichiers d'entrée (\*.in, \*.h2d) permettant de définir les paramètres du modèle.
- Des fichiers exécutables (\*.exe) qui permettent de définir, calculer et visualiser grâce à des interfaces graphiques le problème et sa solution.
- Des fichiers sortie (\*.dat) qui contiennent les informations concernant la solution du problème.

Le lancement du fichier DeGETES.exe déclenche le lancement des autres fichiers exécutables et la définition des deux autres types de fichiers.

### A.2 Lancement de DeGETES

Le lancement de DeGETES.exe fait apparaître l'écran suivant (FIG. A.2.1). A partir de cette fenêtre, quatre options sont disponibles.

1. La définition des paramètres numériques et données générales du problème (nom des fichiers d'entrée, dimension du domaine, type de résolution, caractéristiques du sol).
2. La définition des conditions aux limites et initiales du problème.
3. La résolution du problème.

4. La visualisation des résultats (profil hydrique, profil de soluté, comparaison avec HYDRUS-2D).

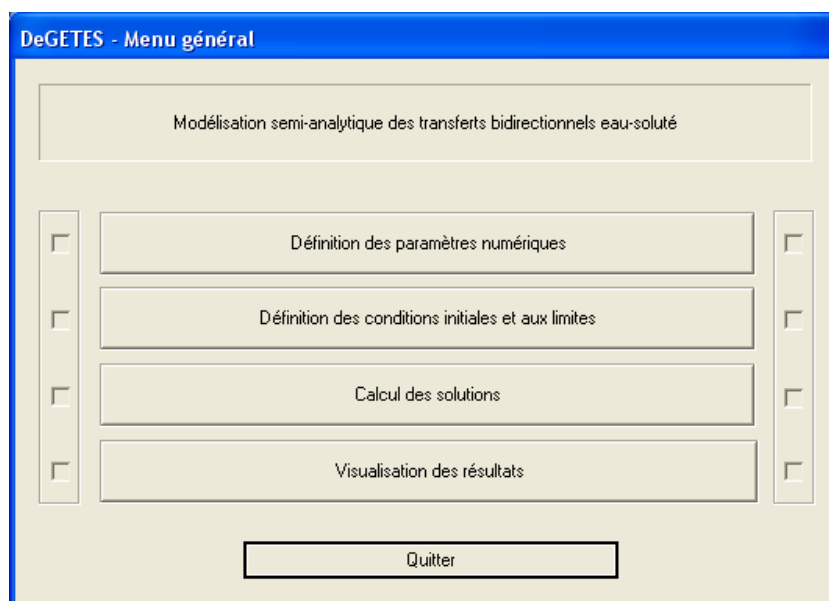


FIG. A.2.1 – Menu général de DEGETES

Lors d'un premier lancement du logiciel, ces quatre options doivent être réalisées en respectant cet ordre.

### A.3 Définition des paramètres numériques

La fenêtre (FIG. A.3.1) qui apparaît en sélectionnant la première option du menu permet de définir les paramètres généraux du problème. Ceux-ci sont regroupés dans les fichiers d'entrée dont les noms sont spécifiés sur le côté gauche de la fenêtre. Ces fichiers peuvent être enregistrés ou un ancien jeu de fichiers précédemment défini peut être ouvert.

#### A.3.1 Contenu du fichier de données générales

Ce fichier renseigne sur les types de phénomènes à simuler (les transferts hydriques étant toujours simulés et pouvant être complétés par le calcul du flux Darcien et celui du profil de solutés). Il est également possible de comparer les résultats du modèle avec ceux d'HYDRUS-2D (des précisions sur cette option seront données plus loin dans ce manuel).

Le fichier contient ensuite des données numériques sur le domaine de l'étude et la durée des phénomènes à simuler. Les noms des variables à renseigner sont reprises dans le TAB. A.3.1.

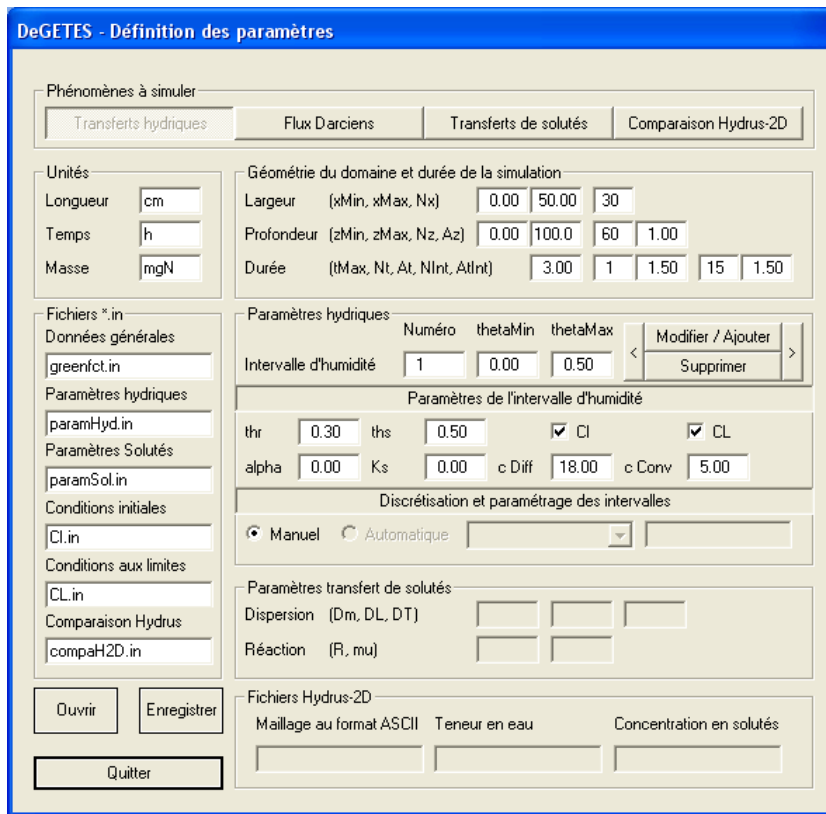


FIG. A.3.1 – Définition des paramètres généraux de DEGETES

Nom	Définition	Remarques
xMin	abscisse minimale du domaine	nombre de points de visualisation
xMax	abscisse maximale du domaine	
Nx	discrétisation en abscisse	
zMin	profondeur minimale du domaine	nombre de points de visualisation
zMax	profondeur maximale du domaine	
Nz	discrétisation en profondeur	
Az	paramètre de discrétisation	Az > 1 raffine la discrétisation près de la surface
tMax	durée totale de l'événement	utile surtout pour le transfert des solutés
Nt	nombre d'intervalles en temps	
At	paramètre de discrétisation	
NInt	nombre d'intervalles d'intégration	NInt < 20 donne des résultats satisfaisants
AtInt	paramètre d'intégration numérique	voir le mémoire au chapitre 2.1.4

TAB. A.3.1 – Détails des données à initialiser

### A.3.2 Contenu du fichier des propriétés hydrodynamiques du sol

Cette fenêtre permet également de définir les propriétés hydrodynamiques du sol à partir de modèles connus ou de manière empirique. Ces informations sont enregistrées dans le fichier des

paramètres hydriques. Le mémoire décrit la décomposition de l'intervalle d'humidité comprise entre  $\theta_r$  et  $\theta_s$  permettant de réduire les impacts de l'hypothèse du sol linéaire sur la qualité des résultats. La première étape dans l'initialisation des propriétés hydrodynamiques est de définir le nombre d'intervalles d'humidité qui seront considérés dans la modélisation. Si l'option de discrétisation et paramétrage des intervalles est « manuel », il faut définir également les bornes de ces intervalles et les coefficients associés. Ces derniers doivent être définis pour chaque intervalle soit en renseignant les valeurs de  $K_s$ , la conductivité hydraulique à saturation et  $\alpha$  l'inverse de la longueur capillaire ou en renseignant les coefficients de diffusion et de convection de l'équation de Richards linéarisée. Si l'option de discrétisation et paramétrage des intervalles est « automatique », un choix de sol type est disponible et les définitions des intervalles et des coefficients de l'équation de Richards linéarisée sont réalisées par le code de calcul (pour de plus amples informations sur cette option, voir A.8). Il est cependant possible d'ajuster les paramètres proposés en sélectionnant à nouveau « manuel ». Une modification de ces paramètres (comme l'ajout d'un nouvel intervalle d'humidité) doit toujours être suivie de sa validation en cliquant sur le bouton « modifier/ajouter ».

### A.3.3 Contenu du fichier des paramètres concernant le transfert de solutés

L'équation de transfert de solutés est également résolue par DEGETES. Ici, contrairement aux développements théoriques décrits par le mémoire, il n'est pas encore possible de discrétiser l'intervalle de flux Darcien en plusieurs intervalles. Les paramètres à définir sont la diffusion moléculaire ( $D_m$ ), la dispersivité longitudinale (DL) et transversale (DT), ce qui permet de définir un coefficient moyen de dispersion. Le code peut également prendre en compte deux types de réactions : un modèle linéaire d'adsorption représenté par le coefficient de retard R et une réaction du premier ordre, représentée par le coefficient  $\mu$ .

### A.3.4 Contenu du fichier comparaison Hydrus-2D

Enfin, le dernier fichier complété dans cette étape est le fichier contenant les simulations HYDRUS-2D dans l'optique d'une comparaison avec les résultats de DEGETES. Les simulations doivent avoir été réalisées par HYDRUS-2D au préalable et copiées dans le répertoire où se trouve le fichier DeGETES.exe. Trois types de fichiers sont à indiquer : le fichier du maillage HYDRUS-2D traduit en ASCII (MESHTRIA.TXT), le profil d'humidité simulé par HYDRUS-2D (th.out) et celui de la distribution de soluté (concl.out).

### A.3.5 Enregistrement et ouverture de fichiers existants

Les modifications effectuées dans cette étape doivent être enregistrées avant de passer à l'étape suivante (en modifiant au besoin le nom de fichier d'entrée et en cliquant sur le bouton « enregistrer »). De même, il est possible d'ouvrir des fichiers existants en changeant le nom de fichiers d'entrée et en cliquant sur « ouvrir ». Notons qu'ici, on définit uniquement le nom des fichiers décrivant les conditions initiales et aux limites. La création de ces fichiers est réalisée dans l'étape suivante.

## A.4 Définition des conditions initiales et aux limites

La deuxième étape consiste à définir les conditions initiales et aux limites du problème. L'écran FIG. A.4.1 apparaît. Il est composé de quatre parties : définition du profil hydrique initial, définition du profil de soluté initial, définition de la géométrie de la surface et des conditions aux limites (eau-soluté) et enfin définition des fichiers de données.

Condition initiale profil hydrique			
X centre	Z centre	Ecart type	Valeur
0.00	35.00	25.00	0.00

Condition initiale profil soluté			
X centre	Z centre	Ecart type	Valeur
10.00	5.00	27.50	0.50

Géométrie et conditions aux limites			
xCL(i)	zCL(i)	xCL(i+1)	zCL(i+1)
0.00	15.00	15.00	12.00

CL eau:  Charge  Flux

CL soluté: 0.00

Fichier *.in	
Conditions initiales	Conditions aux limites
Cl.in	CL.in

FIG. A.4.1 – Définition des conditions initiales et aux limites

### A.4.1 Définition des conditions initiales

Les conditions initiales en humidité ou en soluté sont décomposées sur forme de somme de gaussiennes. Les données à renseigner concernent les centres de ces gaussiennes ainsi que leurs écarts types et leurs amplitudes. A chaque modification, il faut cliquer sur « modifier/ajouter » pour visualiser le résultat sur une fenêtre graphique (FIG. A.4.2). Actionner les flèches droite et gauche permet de visualiser la position du centre, l'écart type et le maximum de chaque gaussienne.

### A.4.2 Définition des conditions aux limites

Pour la discrétisation de la géométrie de la surface et la définition des conditions aux limites associées à chaque segment, le principe est le même. Le menu illustré à la figure FIG. A.4.1 permet de définir le nombre de segments, les coordonnées de ses extrémités, le type et la valeur des conditions

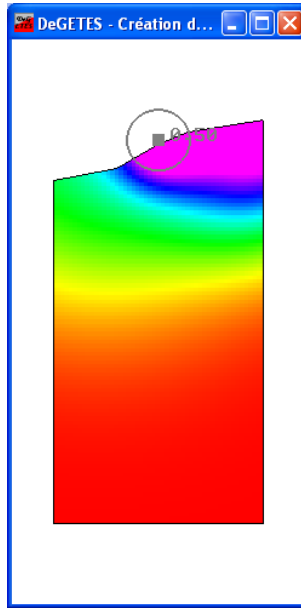


FIG. A.4.2 – Visualisation des conditions initiales du problème

aux limites (altitude de la hauteur d'eau pour une condition de charge, valeur du débit pour une condition de flux) qu'il est possible de visualiser segment par segment sur la fenêtre graphique illustrée par la FIG. A.4.3.

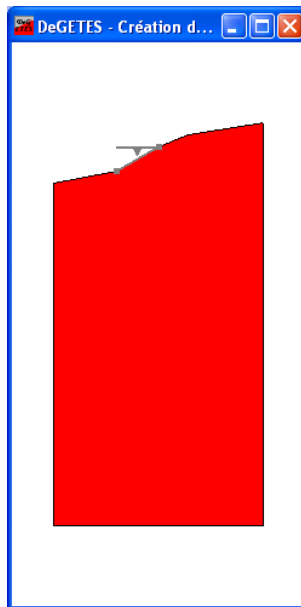


FIG. A.4.3 – Visualisation des conditions aux limites du problème

## A.5 Calcul de la solution du problème

La troisième étape effectue les calculs de la solution du problème défini par la première et la deuxième étape. Une fenêtre s'ouvre alors et permet de suivre l'évolution des calculs.

```
*** MODELE SEMI-ANALYTIQUE DE PREDICTION DE L'ETAT DU SOL ***
```

- Calcul du profil hydrique : ACTIF
- Calcul des flux hydriques : INACTIF
- Calcul du profil de solute : INACTIF

Etape 1. 1. 1. Resolution de l equation de Richards pour t = 3.00 h

- o Parametres hydrodynamiques valables entre 0.100 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup> et 0.200 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | thetaR = 0.200 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | thetaS = 0.400 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | alpha = 0.500 cm<sup>-1</sup>
  - | Ks = 1.000 cm.h<sup>-1</sup>
- o Creation des 0 problemes elementaires CI
- o Creation des 12 problemes elementaires CL
- o Evaluation du potentiel de flux
  - | Nombre de fonctions sur la composante X : 2241
  - | Nombre de fonctions sur la composante Z : 3996

Etape 1. 1. 2. Resolution de l equation de Richards pour t = 3.00 h

- o Parametres hydrodynamiques valables entre 0.200 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup> et 0.300 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | thetaR = 0.200 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | thetaS = 0.400 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | alpha = 0.500 cm<sup>-1</sup>
  - | Ks = 2.000 cm.h<sup>-1</sup>
- o Creation des 0 problemes elementaires CI
- o Creation des 12 problemes elementaires CL
- o Evaluation du potentiel de flux
  - | Nombre de fonctions sur la composante X : 2241
  - | Nombre de fonctions sur la composante Z : 3996

Etape 1. 1. 3. Resolution de l equation de Richards pour t = 3.00 h

- o Parametres hydrodynamiques valables entre 0.300 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup> et 0.400 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | thetaR = 0.200 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | thetaS = 0.400 cm<sup>3</sup>.cm<sup>-3</sup>
  - | alpha = 0.500 cm<sup>-1</sup>
  - | Ks = 3.000 cm.h<sup>-1</sup>

- o Creation des 0 problemes elementaires CI
- o Creation des 12 problemes elementaires CL
- o Evaluation du potentiel de flux
  - | Nombre de fonctions sur la composante X : 2241
  - | Nombre de fonctions sur la composante Z : 3996
- o Evaluation de l infiltration cumulee : 38.68cm

#### Etape 2. Enregistrement des fichiers de resultats

- o Noms des fichiers resultats (a visualiser avec affProfil.exe)
  - | Humidite : humdite.dat
  - | Flux : fluxX.dat, fluxZ.dat, fluxN.dat
  - | Concentration solute : concN.dat, concNAnam.dat, concNVar.dat
- o Temps CPU requis
  - | Temps CPU utilisateur : 8.05 secondes
  - | Temps CPU systeme : 0.03 secondes
  - | Temps CPU total : 8.08 secondes

#### FIN DU PROGRAMME

Le listing alors obtenu, et repris ci-dessus, rassemble les informations essentielles de la progression des calculs.

- Tout d'abord, le type de simulation effectué : évaluation des flux Darcien, simulation des transferts de soluté.
- Ensuite et pour chaque pas de temps considéré (ici, un seul) : la plage d'humidité dans laquelle le problème est résolu, les caractéristiques du sol associées à cette plage d'humidité, le nombre de problèmes élémentaires, la composition de la solution et à la fin de chaque pas de temps, la valeur de l'infiltration cumulée.
- Enfin, le code de calcul procède à l'enregistrement dans des fichiers et indique le temps de calcul utilisé.

## A.6 Visualisation des résultats

La dernière étape de DEGETES permet de visualiser les résultats du problème. Une fenêtre apparaît (FIG. A.6.1) et propose la visualisation de l'état initial du sol, celui après simulation et la comparaison avec un profil simulé par HYDRUS-2D.

Les différentes options de visualisation sont rassemblées dans le tableau suivant

Des précisions doivent être apportées sur certaines de ces options. Leur objectif étant plutôt pédagogique que pratique, elles concernent principalement la simulation des transferts de solutés.

- (1) Ce maillage est obtenu suite à la transformation Lagrangienne réalisée au dernier pas de temps de la simulation. Il permet de vérifier que la déformation du maillage reste admissible.



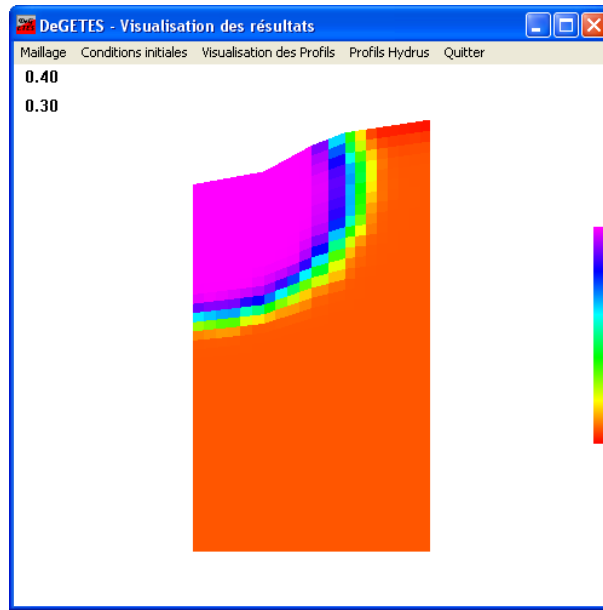


FIG. A.6.1 – Visualisation des solutions du problème

Maillage	Maillage régulier		(1)
	Maillage anamorphose		
	Maillage Hydrus		
Conditions initiales	Humidité		(2)
	Soluté		(3)
Visualisation des profils	Profils hydriques	Humidité	
		Flux de Darcy	
	Profils de concentration	Soluté - convection constante	(4)
		Soluté - après anamorphose	(5)
	Soluté - convection variable	(6)	
Profils Hydrus	Humidité		
	Soluté		
Quitter			

TAB. A.6.1 – Profils pouvant être visualisés

- (2) (3) Si l'option comparaison avec Hydrus est activée, la visualisation des conditions initiales du problème crée les fichiers thI.out et cNI . out, fichiers permettant d'initialiser une simulation Hydrus.
- (4) La simulation des transferts de soluté procède en trois étapes, cette option permet de visualiser la concentration en soluté en considérant une convection constante (moyenne des flux Darcien calculés auparavant).
- (5) On représente ici la solution précédente sur le maillage déformé au dernier pas de temps considéré.

- (6) Enfin, cette dernière option permet d’observer la solution précédente interpolée sur le maillage régulier. Elle représente la solution finale du problème de convection-diffusion de soluté.

## A.7 Cas test

Les cas testés dans le mémoire peuvent être utilisés en exemple d’application. Les jeux de fichiers d’entrée sont repris dans le TAB. A.7.1 et sont disponibles au même emplacement que les autres fichiers du code DEGETES.

## A.8 Choix d’un sol prédéfini

Concernant l’option « automatique » de la définition des paramètres hydriques du code, trois types de sol ont été définis : le sol Yolo Clay, le sol de Lavalette (Montpellier), sol à texture moyenne et le silt de Roth, sol à texture plus grossière. Les courbes de rétention d’eau du sol et de conductivité hydraulique ont été construites grâce au modèle de van Genuchten. D’autres sols peuvent être introduits en complétant le fichier `solTyp.dat` en respectant la structure de données utilisée pour les autres sols. La définition d’un sol peut être réalisée en entrant les paramètres de Brooks et Corey, ceux de van Genuchten ou même des relevés expérimentaux ; courbe de rétention et conductivité hydraulique pouvant être définies par des modes distincts.

Événement simulé	Durée	Type de sol	Fichiers d'entrée
Micro-irrigation	10h	argilo-limoneux	genM.in hyd1M.in CI1M.in CL1M.in h2d1M.in
Irrigation à la raie	3h	argilo-limoneux	genF.in hyd1F.in CI1F.in CLF.in h2d1F.in
Micro-irrigation	10h	limoneux	genM.in hyd2M.in CI2M.in CL2M.in h2d2M.in
Irrigation à la raie + transfert de nitrate	3h	limoneux	genFN.in hyd2FN.in sol2FN.in CI2FN.in CLF.in h2d2FN.in
Micro-irrigation	10h	sablo-limoneux	genM.in hyd3M.in CI3M.in CL3M.in h2d3M.in
Irrigation à la raie	1h30min	sablo-limoneux	genF.in hyd3F.in CI3F.in CLF.in h2d3F.in
Redistribution dans une raie	2j	limoneux	genFR.in hyd3FR.in CI3FR.in CLFR.in h2d3FR.in

TAB. A.7.1 – Liste de fichiers d'entrée des cas tests



## Annexe B

Impact of water application  
conditions on nitrogen leaching under  
furrow irrigation : experimental and  
modelling approaches



Impact of water application conditions on nitrogen leaching under furrow irrigation:  
Experimental and modelling approaches

**J. C. Mailhol<sup>1\*</sup>, D. Crevoisier, K. Triki**

<sup>1</sup> Cemagref, French Institute of Agricultural and Environmental Research (Irrigation Division)  
361, rue J.F. Breton, BP 5095, F34033 Montpellier, France.

**Abstract**

Local infiltration tests on 1.5 m long blocked furrows were carried out on a loamy soil plot to assess N fertiliser leaching under furrow irrigation when fertilization entails placing nitrogen on the upper part of the ridge during the ridging operation. This article focuses on the impact of flow depths, or water application depth (WAD) on nitrogen migration in seven 1.5m-long blocked furrows. When WAD for a first irrigation event is greater or equal to 240 mm, the high spatial variability of N concentrations in the soil was reduced significantly in both the ridge and beneath the furrow. The virtually homogenous nitrogen soil profile that results, allows an estimation of the standard nitrogen balance. This is not possible when a heterogeneous N soil profile exists at the end of the irrigation season as observed under moderate WAD conditions. In addition, a substantial WAD delivered during the first irrigation event, and at a period where the plant N requirements are high, does not affect crop yield potential.

A modelling approach adapted to 2D water and solute transfer allowed us to validate the estimated N leaching resulting from nitrogen balance performed under high WAD conditions. 22 kg/ha of nitrogen leaching (around 10% of the nitrogen application) was obtained during the irrigation season under high WAD (240 mm during a first irrigation and around 200 mm for the following irrigation events). Modelling should be used to estimate N leaching under low or moderate WAD because of the heterogeneous N distribution within the root domain.

\* corresponding author: ☎ (33) 04 67 04 63 00 - Fax (33) 04 67 63 57 95

E-mail: [jean-claude.Mailhol@cemagref.fr](mailto:jean-claude.Mailhol@cemagref.fr)

Key words: Furrow irrigation, infiltration tests, nitrogen leaching, nitrogen use efficiency

**1. Introduction**

In spite of the modernisation of furrow irrigation techniques, high irrigation rates under furrow irrigation coupled with substantial field N fertilisation, in some countries (Fernandez et al., 1994), has lead to increased groundwater pollution risks. This situation has motivated some work on the research topic regarding the risks of N leaching resulting from irrigation and fertilisation practices. Better fertiliser placement combined with irrigation management can lessen NO<sub>3</sub>-N leaching according to Robbins and Carter (1980). When a N fertiliser application matches plant requirements (taking into account initial N soil conditions), irrigation must be managed with care to maximize N use efficiency and reduce

risks of N leaching. This assessment results from the field experiments described in Mailhol et al, (2001) where the fertiliser technique consists of removing a portion of the fertiliser application which was spread before furrow ridging. This operation concentrates the fertiliser on the top part of the ridge as shown on Fig. 1.

Field experiments, combining fertiliser placement techniques with furrow irrigation management, have been mainly carried out for agronomic purposes i.e nitrogen use efficiency evaluation. Benjamin et al. (1998) analysed the impact of fertiliser placement under alternate and every furrow irrigation systems over two irrigation seasons. The study shows that placing fertiliser in the non irrigated furrow of an alternate–furrow irrigation system, or placing fertiliser in the row, with either alternate or every-furrow irrigation, has the potential to decrease fertiliser leaching without reducing crop production. The results of this work tend to prove that there is an increase in nitrogen use efficiency using these techniques when compared with the broadcasting method. Lehrsch et al. (2000), also analysed the impact of fertiliser placement (urea) using banding and side-dressing methods while applying water to the same furrow and alternating furrow for an every second irrigated furrow system. Banding N on one side of a row rather than broadcasting it, and applying water throughout the season to the same furrow on the other side of the row maintained or increased silage yield by up to 26% and increased N uptake in silage by up to 21%. The water application depths (7 or 8 water applications per year) were always moderate, i.e. 40 and 60 mm except for the first irrigation of the second experimented year (147 mm). As a result, it can be hypothesized that with a low saturated conductivity value ( $K_s \leq 0.5$  cm/h) of the silt loam soil the risks of leaching are low. As for this soil the capillary effects are greater than those of gravity, irrigation management (same or alternating irrigated furrow) is less of an issue.

Popova et al, (2000) have quantified the N leaching during both irrigation and the inter-cropping season resulting from two fertilisation/watered methods using lysimeters (10 m<sup>2</sup> area on 2 m depth) installed on a chromic luvisol with corn. In the first lysimeter, all the furrows were fertilised/watered while in a second lysimeter only half of them were alternatively supplied with water and nitrogen. Fertilisation rate of 200 Kg/ha for the two lysimeters gave a combined result of 14 kg N/ha transport to ground water i.e. 7% of the applied nitrogen. 33 kg N/ha (i.e.8.3%) were leached for the third lysimeter fertilised at a rate of 400 kg/ha with furrows alternatively fertilised/watered. A fourth lysimeter fertilised at the same rate, but where all the furrows were fertilised/watered, generated the highest risks of groundwater pollution since 42 kg N/ha were leached (i.e.11%). But it must be noted that irrigation rates was only 120 mm (in two applications) while rainfall levels amount to around 360 mm. Such conditions may explain why no significant yield differences were observed between the treatments, but clearly N application rates greater than 200 kg/ha should be considered environmentally hazardous and economically unjustified.

The field experiments carried out on a bare soil by Abassi et al., (2003) were only based on water and solute transport, the solute (i.e. bromide) being dissolved in the irrigation water. The author's objective was to analyse the impact of water depth and water application depth on N leaching. Abassi's objectives also rejoin those of this article. The conclusions relative to the impact of high water flow depths on WAD and the risks of N leaching are very close to those presented in this paper.

In a previous work published in Mailhol et al., (2001) the fertilisation technique described in Fig.1 was analysed based on field experiments carried out in 1999 on the loamy soil plot of Lavalette (Montpellier) where the corn crop was irrigated using 130 m long



furrows. Due a lack of data, the role that water depth in the furrow may play on the nitrogen use efficiency (NUE) and the risks of N leaching was only briefly discussed at the end of the article. We also mentioned in the cited article that the corn cobs seemed bigger over the last few meters of the blocked-end furrows than at other parts of the plot. At this location, the water levels could reach the maximal furrow depth (i.e. 12-15cm), especially for furrows having short advance time (fast furrows), whereas on the other parts, the water depths did not exceed 5 cm. Note that due to the well known heterogeneity of the advance process in furrow irrigation, variable situations may occur at the downstream end. For instance, moderate WAD may result from both water flow depth of 7 cm (for example) and weak opportunity time in the case of furrows for which advance time is close to cut-off time.

As at the downstream site, the crop yield measurement location was too far (around 15 m) from the plot end, it was not possible to affirm our presumptions about the impact of the high water flow depths on N leaching or on NUE. Measured crop yields at the 3 sites (7 plots) located at upstream, mid and downstream parts of the plot were not significantly different and averaged 12.7 T/ha ( $C_v \leq 5\%$ ). The corn yield of 13.8 T/ha obtained with a full irrigated sprinkler treatment, although not much higher than for the furrow irrigated plot, raises the issue of the dependence of nitrogen use efficiency on the fertilisation practice. The fertilisation technique used in the experiments consisted of applying N just before sowing and just before furrow ridging. N fertiliser accumulates at the top part of the ridge, during the ridging operation, and can migrate to the deeper layers if high water depth conditions exist in the furrow or as the result of substantial rainfall events.

Soil samples collected under the furrow bed and under the ridge, using the auger method, show that N residues remain in the upper part of the ridge at the end of the cropping season. The N residues located on the top of the ridge should be less affected by low flow depth conditions than high flow depth conditions that existed at downstream part of the furrow. These hypothesis have been tested using model simulations in Mailhol, (2001) and Mailhol et al, (2001) using the water and solute transport numerical code HYDRUS-2D (Simunek et al., 1999). The N homogenisation within the root system (transfer of N from top ridge to the vertical of the furrow bed) was shown. This result is consistent with the findings of Abassi et al, (2003) and Abassi et al., 2004.

With low water levels, capillary forces are mainly responsible for nitrogen displacement that generally results in a N increase on the upper part of the ridge. With high water levels, both capillary and gravity forces contribute to nitrogen displacement from the top to the deeper soil layers. Assuming that the nitrogen movement is limited to the root zone, one can say that all the conditions required to obtain a good NUE are met. Nevertheless, if the water application depth is too high the risks of nitrogen leaching increase significantly and as a result the NUE can decrease when the nitrogen application matches plant requirements.

Infiltration tests on 1.5 m blocked furrow have been performed in order to validate the previous findings-interpretations and to evaluate risks of N leaching under high irrigation rates, linked to inlet discharge rates, opportunity times or ponding.

## 2. Materials and methods

### 2.1. The experimental approach

Infiltration tests on 1.5 m blocked furrow have been performed during the 2002 cropping season on the experimental plot of Lavalette at the Cemagref Institute in Montpellier (42.5°N , 85° W) on a silty (49%) sandy (30%) clay (21%) soil. The furrow infiltration treatment takes place inside a corn plot irrigated using a travelling rain gun system. Precautions were taken to prevent system impacts on the furrow treatment by maintaining a large non irrigated area between them (Fig.2). The limited size of the test allows a better control of water application depths and reduces the impacts of large scale heterogeneity sources on results interpretation (Abassi and al., 2004). In addition, this protocol suits the objective of this work which focuses on nitrogen fate when a furrow is locally affected by high water flow depths. The corn (Samsara grain species) was sown on May the 5<sup>th</sup> two days after the first fertiliser application (90 kg of N per ha). A second fertiliser application was made (100 kg of N per ha) just before furrow ridging (7 furrows only on a limited length of few meters) at the 5 leaf stage. During the same period an equivalent amount of fertiliser was applied to the part of the plot irrigated with the rain gun system.

The experimental apparatus is presented in Fig.2b,c. Metallic plaques were used to block the furrows. In order to satisfactorily simulate real furrow irrigation conditions (all the furrows were concurrently irrigated in 1999) a constant water depth was maintained within 7 furrows. A constant water depth is also maintained at upstream and downstream parts of the blocked furrows by adding a given water volume within two metallic plaques. The furrow treatment experiment was carried out at two sites. At each site a given water depth in the furrow was maintained:  $h_1$  for site 1 and  $h_2$  for site 2 (Fig2b). The values of  $h_1$  (site 1) and  $h_2$  (site 2) were 12 and 7 cm respectively for the first irrigation event, then 10 and 5 cm for the subsequent irrigation events (Fig.2b). An initial volume of water equivalent to the required water depth was delivered within the furrow, covered beforehand with a plastic film. The latter was pulled away at initial time  $t = 0$ . The estimation of the initial volume was based on furrow cross section measurements and was subsequently calculated using the furrow geometry parameters generated. These water depths were maintained by adding a given water volume as soon as the water level reached the corresponding graduation of the thick metallic scale installed in the furrow bed. A cumulative infiltration curve was thus obtained for each event and furrow monitored.

A neutron access tube was inserted in the furrow bottom and a second at the ridge top, both allowing the soil water content to be measured to a depth of 190 cm. Two 30 cm CS6115 Campbell TDR probes were inserted into the soil on the top ridge (at 10 cm depth) to monitor the soil water content in the first soil layer. Bulk density was measured before the first and the second infiltration test using a surface Gamma densimeter.

Three irrigation treatments were performed during the cropping season. Just before the first irrigation event, then 8 days later and on the 25 of September. Before harvesting, soil samples for N analysis were collected under the ridge using the auger at the following depths: 0-6.5, 6.5-13, 13-36.5, 36.5-66.5, 66.5-96.5, 96.5-126.5 cm and under the furrow bed : 0-6.5, 6.5-23.5, 23.5-53.5, 53.5-83.5, 83.5-113.5, 113.5-143.5 cm. For each depth, four soil samples were mixed. Precautions were taken to ensure that the infiltration tests were not disturbed (careful refilling of the holes where soil was collected). Lastly, the crop status was observed during the cropping cycle on the area concerned by the furrow infiltration sites. This

observation refers to elements linked to leaf area index estimation (number of active leafs and leaf size and plant elevation) and cobs dimensions. These elements reflecting the crop status were compared to those of the full irrigated treatment (FIT) using the rain gun system. FIT, for which water supply matches plant requirements (a water amount of 340 mm was delivered in 11 applications at a rate that prevents ponding), is assumed to provide yield potential. Fertiliser applications and the initial soil nitrogen profile are similar to those of the furrow treatments. In addition to FIT, a N zero (irrigated by the same way as FIT) and a dry treatment (having only received irrigation at sowing) were also monitored. Each of these three treatment sites had an area of 0.25 ha approximately. Soil samples were also collected for soil N profile determination for these 3 treatments. A first collection of soil-samples (at 0-10 cm then at each 30 cm depth until 150 cm) was made just before sowing and a second at the end of September, a few days before harvesting. For yield estimation, 7 sub-plots were harvested on FIT whereas the two ridges belonging to the each furrow sites (site 1 and site 2) were harvested along a 2 m strip. The sample taken for each furrow site contained approximately 16 plants (cut at the soil level) in an area of 1.6 m<sup>2</sup>.

## 2.2 The Modelling approach using the 2D water and solute transport model HYDRUS-2D

Due to the importance of 2D water and the solute transfer process with regards to the fertilisation technique, a nitrogen balance under furrow irrigation is not easy to obtain when the irrigation conditions result in a significant difference in the soil N profile between the ridge and the furrow bed. A modelling approach, taking into account these circumstances, is required to analyse risks of N leaching resulting from irrigation and fertilisation practices.

Modelling is used to simulate the water and nitrogen transport process occurring during the irrigation period. Due to domain geometry and the specificity of the fertilisation practice, the 2D water and solute transport model HYDRUS-2D (Simunek et al. 1999) is used. This modelling approach of the 2D transfer process, which is outlined in a following section, allowed us to ascertain the reliability of previous nitrogen leaching values estimated from the nitrogen balance approach.

The governing flow equation is given by the following modified form of the Richard equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K(K_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + K_{iz}^A) \right] - S \quad (1),$$

where  $h$  is the pressure head [L],  $S$  a sink term [T<sup>-1</sup>],  $x_j$  ( $j=1,2$ ) are the spatial coordinates [L],  $t$  is time [T],  $K_{ij}^A$  are components of a dimensionless anisotropy tensor  $K^A$ , and  $K$  is the unsaturated hydraulic conductivity function [L T<sup>-1</sup>] given by:

$$K(h,x,z) = K_s(x,z)K_r(h,x,z) \quad (2).$$

The sink term,  $S$ , represents the volume of water removed per unit time from a unit volume of soil due to plant water uptake.  $S$  is defined according to the Feddes et al (1978) approach. The Galerkin finite element method with linear basis functions is used to obtain a solution to the flow equation, subject to the imposed initial and boundary conditions.

## Initial and boundary conditions

Initial and boundary conditions for the simulation of an irrigation event are presented in Fig. 3. Note that initial  $\theta(x,z)$  conditions to simulate the redistribution, are those calculated by the model at the end of the irrigation event that precedes redistribution;  $h_0$  is set to 0 so, the evapotranspiration flux condition affects both the furrow bed and the ridge.

The governing solute transport equation:

The Galerkin finite element method is also used to solve the following solute transport equation subject to appropriate initial and boundary conditions:

$$\frac{\partial \theta c}{\partial t} + \frac{\partial \rho s}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\theta D_{ij} \frac{\partial c}{\partial x_j}) - \frac{\partial q_i c}{\partial x_i} + \mu_w \theta c + \mu_s \rho s + \gamma_w \theta + \gamma_s \rho - S c_s \quad (3)$$

where  $c$  is the solution concentration [ $\text{ML}^{-3}$ ],  $s$  is the adsorbed solute concentration [-]  $q_i$  is the  $i$ -th component of the volumetric flux [ $\text{LT}^{-1}$ ],  $\mu_w$  and  $\mu_s$  are first-order rate constants for solutes in the liquid [ $\text{ML}^{-3}\text{T}^{-1}$ ] and solid phases [ $\text{T}^{-1}$ ], respectively;  $\rho$  is the soil bulk density [ $\text{ML}^{-3}$ ],  $S$  is the sink term of the water flow in Eq(1),  $c_s$  is the concentration of the sink term [ $\text{ML}^{-3}$ ],  $D_{ij}$  is the dispersion coefficient tensor [ $\text{L}^2\text{T}^{-1}$ ]. The four zero- and first-order rate constant in Eq(3) may be used to represent a variety of reactions or changes including biodegradation, volatilization, precipitation and radioactive decay.

The adsorption isotherm relating  $s$  and  $c$  is described by the linear equation:

$$s = K_d c \quad (4)$$

where  $K_d$  is an empirical constant [ $\text{L}^3\text{M}^{-1}$ ].

The component of the dispersion tensor,  $D_{ij}$  in Eq(3) is given by:

$$\theta D_{ij} = D_T |q| \delta_{ij} + (D_L - D_T) \frac{q_j q_i}{|q|} + \theta D_m \tau \delta_{ij} \quad (5)$$

where  $D_m$  is the molecular diffusion coefficient in free water [ $\text{L}^2\text{T}^{-1}$ ],  $\tau$  is a tortuosity factor [-],  $|q|$  is the absolute value of the Darcian fluid flux density [ $\text{LT}^{-1}$ ],  $\delta_{ij}$  is the Kronecker delta function ( $\delta_{ij} = 1$  if  $i = j$  and  $\delta_{ij} = 0$  if  $i \neq j$ ), and  $D_L$  and  $D_T$  are the longitudinal and transverse dispersivities, respectively [L].

## Initial and boundary conditions

The initial concentration within the flow region required by Eq(3) is

$$c(x, z, t_0) = c(x,z) \quad (6)$$

A  $c(x,z)$  value is set at each top of the triangular elements constituting the network within which the flow region is divided (the solution of Eq(3) being derived from a finite element method). Before the first irrigation this  $c$  value is obtained from the measured N soil profile, where interpolations are made between the ridge profile and furrow bed profile. Initial nitrogen conditions required to simulate redistribution, are obtained from the last time step of

the previous simulated irrigation event. The third type (Cauchy type) of boundary conditions are used with a value  $c_0 = 0$  of the water concentration entering the flow region.

### 3. Results and discussion

#### 3.1. Cumulative infiltration

The impact of water flow depth on the cumulative infiltration (CI) is more significant after the first irrigation event, although a cross section shape evolution mitigates the water depth impact on CI. For short times, the cumulative infiltration curves are similar during first irrigation unlike those that follow. This is probably due to soil conditions (dry soil unstructured). For an opportunity time of three hours the difference in cumulative infiltration reaches 30 mm (around 15%) only (210 mm for  $h_1 = 12$  cm versus 180 mm for  $h_2 = 7$  cm). The water depth impact on cumulative infiltration is a little bit higher (20%) following the first irrigation. But the impact of water depth on infiltration rate is significant as shown in Abassi et al (2003). The shallow bulk density values are much lower before the first irrigation test (1.3 g/cm<sup>3</sup>) than before the second (1.5 g/cm<sup>3</sup>) as the compaction effect brought about by the subsequent water applications allows the soil to regain its structure (Or, 1996, Mailhol et al., 1999).

The results of infiltration tests are presented in Table 1. To comply with standard furrow irrigation practices, the greatest amount of water was delivered during first irrigation event. The WAD of 240 mm on site 1 results from a water depth of 12 cm over 5 hours and that of 175 mm on site 2 results in a water depth of 7 cm during 3.5 hours. Opportunity times, which comprise both the required time for water supply and recession time, differ due to the different flow depths. The WAD difference is due both to the water depths and opportunity time. Although not detailed here, as it is beyond the scope of this article, it should be noted that the wetted perimeter impact on cumulative infiltration concurs with the results of Oyonarte et al., (2002).

In the farm context, WAD can often exceed 150 mm for the first irrigation event as plots are often longer than 200 m (Gonzalez, 1991; Mailhol and Gonzalez, 1993; Mailhol et al., 1999, Zairi, et al, 1998). With these very high WAD resulting from high advance times, the risks of deep percolation and N fertiliser leaching are considerably greater than for the others irrigation events. Although high, the 240 mm WAD on site 1 is not unrealistic for a first irrigation event. However, it should be noted that our objective is also to test the fertilisation technique in relation to environmental risk and yield loss, the latter resulting from leaching at the cropping stage where the nitrogen requirements are highest.

The total WAD delivered to site 1 and site 2 is 424 and 292 mm respectively, while that delivered to the full sprinkler irrigated treatment is 346 mm. Rainfall during the cropping cycle amounted to 310 mm, and was most intense at the beginning and at the end of the cropping cycle).

The great differences in soil water content variation (SWCV) before irrigation and 24 h after and WAD, for the first irrigation, probably result from drainage over the depth explored by the neutron probe system

The soil water-content profiles under ridge and under furrow bed are not very different over the first soil cm depth only 48 hours after irrigation, for both heavy WAD: first

irrigation (Fig. 4a), as for moderate WAD: second irrigation (Fig. 4b). Soil water content profiles performed 5 and 10 days after irrigation give the same result. Root water uptake helps to homogenise the soil water content at a given depth. It can therefore be stated that, from the soil surface to a depth subject to root influence (i.e., 1.4 m for corn), a water balance estimation based on a 1D water transfer process may be carried out. This means that crop models based on 1D water transfer process could be used for water balance and crop yield predictions for furrow irrigated systems when N is assumed not to limit crop production. This can no longer be assumed when the amount of fertiliser is well adjusted to plant requirements and applied according to the method previously described.

### 3.2. Nitrogen balance

The nitrogen profile (0-150 cm) obtained on the 25 of September yields a nitrogen amount of 55 kg/ha under the furrow bed and 72 kg/ha under the ridge for site 2, whereas no difference exists between the nitrogen amount under ridge and furrow bed on site 1 : 52 kg/ha for both. The nitrogen measured on the plant components is of 242, 122 and 88 kg/ha for FIT, for dry and 0N treatments respectively. Assuming that no N leaching occurred on the dry treatment, mineralization levels of 133 and 104 kg/ha can be proposed for the FIT and the dry treatment respectively. With a N initial profile of 63 kg/ha and a N final profile of 77 kg/ha, a value of 67 kg/ha of N leaching can be obtained for FIT. Owing to moderate WAD rates (lower than 35 mm/day) and a high soil water storage capacity (MAWS =160 mm/m) there is no drainage on FIT until the end of August as confirmed by the tensiometer readings. As a result, one can state that N leaching on FIT is due to the rainfall events occurring at the end of the cropping cycle, the first on 08/25 of 85 mm, the second on 09/16 of 70 mm. N leaching may also have resulted from these rainfall events as the furrows remained blocked.

Assuming that site 1 and site 2 have the same mineralization values and N plant uptake, and as the nitrogen profile for site 1 is considered to be sufficiently homogeneous at the end of cropping cycle, the amount of N leaching proposed for this site is 92 kg/ha. The lower WAD on site 2 may explain why its N profile is less homogeneous than that of site 1. But one can presume that N leaching levels on site 2 is somewhere between that of site 1 and FIT. Note that no denitrification and no gas losses are assumed in this nitrogen balance.

In spite of high WADs, especially for the first irrigation event, N leaching resulting solely from irrigation is not as high as expected for the furrow system. Indeed, non negligible, a N leaching value of 25 kg/ha can be estimated when the values of 67 kg/ha derived from the FIT treatment is assumed to be the result of rainfall at the end of the cropping season on a soil near field capacity. The method which consists of estimating a N leaching value resulting from irrigation only is open to criticism. Indeed, from a theoretical point of view, it is difficult to distinguish the fraction of N leaching resulting from irrigation from that resulting from rainfall. The assumption, on which this estimation is based, is questionable even when the water and solute transfer conditions, on the FIT and the furrow sites, are very similar. Note that in the case of a free draining furrow system (i.e. runoff at the end of the field), possible runoff during rainfall can reduce the risks of N leaching.

### 3.3 Nitrogen distribution

Water depth impact on N removal is shown on Fig. 5a and Fig. 5b where nitrogen profiles both under ridge and furrow bed, before and after first irrigation, are presented. On site 1 the nitrogen transfer is much higher under ridge than on site 2. It should be noted that

differences in the concentration profile, between ridge and furrow, are not as marked on site 1 as on site 2. This may be explained by a better N redistribution from the ridge to the furrow due to higher water depths. The N redistribution impact illustrated on Fig. 4a, shows higher N concentration levels on site 1 than on site 2 over the 23 cm depth profile. The difference in N transfer between the two sites is particularly high between 15 and 65 cm depth markings. In 1999 (under low WAD and water depth level), the N concentration peak under ridge was attained at a much shallower depth (at 15 cm at the end of cropping cycle) than that obtained at site 2 in 2002. Such a N soil profile at the development stage, when nitrogen requirements are high, should result in a better NUE for 2002 conditions than for those of 1999.

### 3.4. Impact on the crop Yield

One of the objectives of our work was to identify WAD levels that could lead to yield loss (due to N stress) resulting from N leaching in the context of the analysed fertilisation practice. It was for this reason that a high water application depth (WAD  $\cong$  250 mm), more than two times greater than that delivered during the first irrigation of 1999, was applied on site 1. As evoked earlier, such a WAD is often delivered to longer plots ( $L > 250$  m) during initial irrigation. It is to be assumed that such a high WAD provokes N leaching and N stress to plants when a 1D transfer process such as that prevailing for the sprinkler treatment is assumed.

Yield estimations for a 1.6 m<sup>2</sup> area does not allow reliable conclusions to be made on possible corn yield variations resulting from a water depth difference (or WAD difference). That is the reason why comparisons were made at a given development stage between plant status indicators measured on the two sites and those measured on FIT. These indicators are the leaf area index (LAI) during flowering and cobs size and weight at maturity. On the basis of these comparisons, a value of 14.2 T/ha is proposed as a yield estimation for site 1 and 13.6 T/ha for site 2.

These yield values are very close to the potential yield value of the corn variety (i.e. 14.5 T/ha), although not fully reached with the FIT (13.8 T/ha,  $C_v = 4\%$ ). Hence it can be stated that crop development was not affected by N stress resulting from eventual N leaching or a nitrogen use efficiency problem. One can even guess that the higher yield gains obtained in 2002 (under high flow depths or WAD conditions) in comparison with those of 1999 (12.7 T/ha), results from a better NUE.

### 3.5. Hydrus-2D application

The water transfer parameters

The retention curve ( $h(\theta)$ ) parameters  $\theta_s$ ,  $\theta_r$ ,  $\alpha$ ,  $n$  and  $m$  ( $m=1 - 1/n$  according to the Mualem model) of the Van Genuchten equation (Van Genuchten (1980) used in Mailhol et al., (2001) did not result in a satisfactory simulation of the cumulative infiltration. As discussed above, the hydraulic parameters of the soil change from the first to subsequent irrigation events. A new calibration was made using the parameters sets (i.e.  $\theta_s = 0.37$  and  $\theta_r = 0.05$ ), obtained from an infiltration test (using the double ring method) performed on the plot near our experiment (Mailhol, 2003). Two layers were considered in order to take into account the tillage effect which results in a lower bulk density from the surface to a 20 cm depth. Manual calibration is preferred to the automatic inverse method proposed by HYDRUS

because the two objective functions: cumulative infiltration and  $\theta$  ( $z$ ) profile were not monitored at the same time. The soil water content profile was established 48 h after irrigation. The parameters shown on Table 2 give acceptable results for both cumulative infiltration and soil water redistribution. Acceptable concordance between measured and simulated cumulative infiltration for the 3<sup>rd</sup> irrigation event is obtained (Fig. 6a and Fig. 6b) when saturated conductivity is reduced from 4.0 to 1.7 cm/h for the first layer and from 2.0 to 1.6 cm/h for the second layer, the latter is close to the value proposed in Mailhol et al., (2001). Due to shallow cracks, some discrepancies are nevertheless noticeable at short times. Modification of soil hydraulic properties from the first to subsequent irrigation events, along with the presence of cracks, highlight the limitations of the mechanistic approach.

### The solute transfer parameters

The solute transport Eq (3) has to be solved for each solute present in the soil. There are three solutes are present in the soil before first irrigation:  $\text{NH}_4^+$ ,  $\text{NO}_2^-$  and  $\text{NO}_3^-$  as ammonitrate is the fertilizer used in these experiments. These three solutes have different characteristics and can inter-react. Adsorption is only considered for  $\text{NH}_4^+$ ; as its isotherm partition coefficient  $K_d$  (L/kg), which linearly relates the solute in the soil solution and in the sorption sites, is in the range of 0.3 –3 L/kg (Vereecken et al, 1991). These are suitable values for the soil type of Lavalette, whereas those of  $\text{NO}_2^-$  and  $\text{NO}_3^-$  are very low ( $10^{-6}$  L/kg) because they are not absorbed by the porous matrix. We also consider degradation from  $\text{NH}_4^+$  to  $\text{NO}_2^-$  and from  $\text{NO}_2^-$  to  $\text{NO}_3^-$ , with a first order rate constant  $\mu_{\text{NH}_4\text{-NO}_2}$  and  $\mu_{\text{NO}_2\text{-NO}_3}$  respectively. No other reaction or degradation is considered. A sink term is added corresponding to the solute consumed by the plants. The three coupled equations to be solved become the following:

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{\rho}{\theta} K_d\right) \frac{\partial \theta c_{\text{NH}_4^+}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta D_{ij} \frac{\partial c_{\text{NH}_4^+}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial q_i c_{\text{NH}_4^+}}{\partial x_i} - \mu_{\text{NH}_4\text{-NO}_3} \theta c_{\text{NH}_4^+} \\ \frac{\partial \theta c_{\text{NO}_2^-}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta D_{ij} \frac{\partial c_{\text{NO}_2^-}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial q_i c_{\text{NO}_2^-}}{\partial x_i} + \mu_{\text{NH}_4\text{-NO}_2} \theta c_{\text{NH}_4^+} \\ \frac{\partial \theta c_{\text{NO}_3^-}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \theta D_{ij} \frac{\partial c_{\text{NO}_3^-}}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial q_i c_{\text{NO}_3^-}}{\partial x_i} + \mu_{\text{NO}_2\text{-NO}_3} \theta c_{\text{NO}_2^-} - S c_s \end{aligned} \quad (7)$$

A week after the first irrigation event the soil samples show that only  $\text{NO}_3^-$  is present in the soil. Except for bulk density in the upper part of the ridge, the solute transport parameters are assumed to be constant according to soil depth. The molecular diffusion  $D_m$  is set at 1.55  $\text{cm}^2/\text{h}$ , (as proposed by Beven et al., (1993)), and longitudinal ( $D_L$ ) and transversal ( $D_T$ ) diffusivity values are those obtained in Mailhol et al. (2001), i.e. 15 and 2 cm respectively. They are assumed to be independent of the initial soil water content, as considered by some authors cited by Abassi (2004). Generally the longitudinal dispersivity can be considered equal to one-tenth of the profile depth and  $D_T = D_L/10$ , as proposed by some authors (Beven, et al., 1993; Cote et al., 2001). The values of first order degradation rate constants are set to 0.05  $\text{h}^{-1}$  for  $\mu_{\text{NH}_4\text{-NO}_2}$  and 0.1  $\text{h}^{-1}$  for  $\mu_{\text{NO}_2\text{-NO}_3}$  as proposed in Mishra and Misra, (1993). Using these values and the minimal value for the isotherm partition coefficient  $K_d$  (0.3 L/kg) a simulation of the nitrogen profile is presented on Fig.7a and Fig.7b. Higher N concentration values are well simulated compared with the lower values, which are significantly over estimated. The results are given using 1D curves in order to provide a better visual comparison. Note that a third nitrogen profile between ridge and furrow would have been useful to improve our understanding of the nitrogen redistribution process and for better



model simulation. But the infiltration conditions within our blocked furrow set would have probably been significantly affected by a supplementary N soil profile.

The model simulation confirms experimental results: solute profile homogenisation is better under high WAD and solute concentrations remain high in the first layers of site 2. The latter represents an environmental risk in the case of heavy rains after the cropping season.

Simulation of solute transport along the cropping cycle.

The sink terms of Eq(2) and Eq(7) cannot be neglected when the simulation is carried out along the cropping cycle in contrast with irrigation events. The Feddes approach (Feddes et al., 1978), where a root density value is assigned to the specific nodes, allows plant water uptake to be simulated. The sink term of the solute transport equation (not simulated by HYDRUS), corresponding to the plant water uptake, is set using a N concentration in the transpired water (calculated on the basis of plant N requirements at specific stages). This corresponds to mineralisation and is set at a constant value of 0.8 kg/ha/day derived from the sprinkler treatments (0N and dry treatments). This value is a little lower than that obtained by Nemeth (2001) for the experiments of 1999.

The evolution of the nitrogen concentration at  $z = 1.4$  m (maximal root depth being 1.2 m for corn at Lavalette) along the cropping cycle is presented in Fig. 8. The simulation results show that nitrogen concentration has significantly increased under furrow beds and decreased under ridge. This results in a homogenised N soil profile just after the first irrigation event, especially for high WAD (site 1). Simulation results concur with the measured nitrogen profile at the end of the cropping cycle. The small changes in N concentrations just under the root zone and along the cropping cycle, attests to the moderate risks of N leaching even under high WAD.

The amount of N leaching over a 1.4 m depth is 22 and 10 kg/ha for site 1 and site 2 respectively just before the 08/25 rainfall event. The N leaching value of 22 kg/ha/day is close to the N leaching value (i.e. 25 kg/ha) deduced from the nitrogen balance estimation based on measured N soil profiles. The values obtained (approximately 11% of the nitrogen application) in the context of Lavalette for high infiltration rates seem realistic compared to those obtained by Popova et al, (2000) with 2-m depth lysimeters (7 -8% of nitrogen application). The 22 kg of N leaching cannot be considered negligible. But we have to keep in mind that this probable value results from extreme flow conditions. Although the fertilisation technique, which involves depositing the fertiliser in the irrigated furrow, can generate more leaching risks than the one tested at Lavalette, the much higher WAD of Lavalette would result in a significantly higher N leaching value on a soil with similar hydraulic properties. But one must recognize that the comparison with the Popova results is more sustainable (the values being so much close) when the simulation is performed over a 2 m depth instead of 1.4 m.

#### 4. Conclusion

About the 2002 study:

The impact of water flow depths (in the furrow bed) and water application depth (WAD) on nitrate displacement from the upper part of the ridge to the deeper soil layers is shown in this work and is based on field measurements and modelling. Under high flow

depths and WAD this nitrogen removal results in a homogeneous N profile within the root reservoir that should contribute to an increase in nitrogen use efficiency. In spite of a substantial WAD, the amount of N leaching is not considerably high: 22 kg N/ha under the soil conditions of Lavalette (a deep soil with a high MAWS value). This value which represents 11% of nitrogen application was obtained through field measurements and simulations using a modelling approach suited to 2D water and solute transfer: HYDRUS-2D. The measured soil nitrogen profile both under ridge and under furrow confirms previous research work which underlines the utility of a 2D water and solute transfer modelling rather than a 1D approach to simulate the nitrogen distribution and to estimate leaching risks according to the fertilisation technique analysed in this study.

The changes in soil conditions over subsequent irrigations (mainly from first to second watering) affects the predictive character of the mechanistic model. Indeed, it is highly recommended to calibrate the model parameters for each irrigation events (especially for the first and second irrigation simulations). The knowledge of the temporal variability process of the soil hydraulic parameters would improve model predictions. This concurs with the conclusions of Abassi et al., (2004).

In spite of first irrigation levels of 240 mm and nitrogen applications calibrated with plant requirements, no N stress occurred as attested by the grain yield level obtained. As suggested in previous works, the fertilisation technique mitigates the risks of nitrogen leaching over the irrigation season. But, as under sprinkler irrigation conditions, these risks are simply postponed to the winter period if inadequate WADs are delivered. Moreover, low WADs may provoke water stress conditions which can impact on nitrogen use efficiency.

About the 1999 study:

There was a marked difference in the average yield value (12.7 T/ha) obtained on the furrow irrigated plot in 1999 at Lavalette and that obtained (13.8 T/h) for the same year on the full irrigated sprinkler treatment. It was of course stated that this difference did not result from water stress. The fact that there is no yield difference between the two analysed systems in 2002 is noteworthy, and leads us believe that nitrogen use efficiency under the conditions of 1999 (low flow depths and WAD in the area of the measured sites) is probably lower than under the experimental conditions of 2002. The presence of nitrogen, on the upper part of the ridge at the end of the 1999 cropping cycle, and thereby not consumed by the plants, strengthens this assumption, as the amount of N applied (i.e. 180 Kg/ha) in 1999 was adjusted to plant requirements and local conditions.

The results established for the two years further highlight the necessity of good management practices for both irrigation and fertilisation to increase N plant uptake and to reduce N leaching over the irrigation and the inter cropping season.

## References

- Abassi, F., Adamsen, D., Hunsaker, J., Feyen, J., Shouse, P., and van Genuchten, M Th., 2003a Effects of flow depth on water flow and solute transport in furrow irrigation. Field data analysis. *J. Irrig. Drain. Eng.*, 129(4): 237-246.
- Abassi, F., Feyen, J., Roth, R.L, Sheedy, M., and van Genuchten, M. Th., 2003b. Water flow and solute transport in furrow irrigated-fields. *Irrig. Sci.*, 22(2): 57-65.
- Abassi, F., Feyen, J and van Genuchten, M. Th., 2004. Two dimensional simulation of water

- flow and solute transport below furrows: Model calibration and validation. *J. Hydr.*, 290 (1-2): 63-79.
- Benjamin J.G., Porter, L.K., Duke, H.R., Ahuja, L.R., Butters, G., 1998. Nitrogen movement with furrow irrigation method and fertiliser band placement. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 62 1103-1108.
- Beven, K.J., Henderson, D. Ed. and Reeves, A., D., 1993. Dispersion parameters for undisturbed partially saturated soil. *J. of Hydrol.*, 143:19-43.
- Cote CM, Bristow K.L., Ford E-J, Verbug K, Keating B (2001). Measurement of water and solute movement in large undisturbed soil cores: analysis of Macknade and Bundaberg data. CSIRO Land and Water, Technical Report 07/2001.
- Feddes, R. A., Kowalik, P.J., and Zaradny, H., 1978. Simulation of field water use and crop yield, simulation monographs, 188p., Pudoc, Wageningen, The Netherlands.
- Fernandez, J.E., Moreno, F., Cabrera, J.M., Murillo, E. Fernandez-Boy, 1994. Water and nitrogen use efficiency in a maize crop in southern Spain. Intern. Confer. on land and water resource management. In the mediterranean region. Vol I. Inst. Mediter. Bari, Italy.
- Gonzalez, J.M, 1991. Modélisation stochastique d'une irrigation à la raie. Thèse de doctorat (PhD) Univ. Montpellier II, 222p. + annexes.
- Lehrsch, G. A., Sojka, R.E, Westermann, D.T., 2000. Nitrogen placement, row, spacing, and furrow irrigation water positioning effects on corn yield. *Agron., J.* 92: 1266-1275.
- Mailhol, J.C., and Gonzalez G., 1993. Furrow irrigation model for real-time applications on cracking soils. *Journal of Irrig. and Drain. Engin. ASCE*, Vol. 119, No. 5. 768- 783
- Mailhol, J.C., Priol, M., and Benali, M., 1999. A furrow irrigation model to improve irrigation practices in the Gharb valley of Morocco. *Agric. Water Manag.* 42, 65-80.
- Mailhol, J.C., 2001. Contribution à l'amélioration des pratiques d'irrigation à la raie par une modélisation simplifiée à l'échelle de la parcelle et de la saison. Thèse de doctorat (PhD) Univ. Montpellier II, 276p + annexes.
- Mailhol, J.C., Ruelle, P., Nemeth, I., (2001). Impact of fertilisation practices on nitrogen leaching under irrigation. *Irrig. Sci.* 20: 139-147.
- Mailhol, J.C. 2003. A validation of a predictive form of Horton infiltration for simulating furrow irrigation. *J of Irrig. and Drain Engin., ASCE*, (129): 412-421.
- Mishra, B.k., and Misra C., 1993. Nitrogen transformation during miscible displacement of ammonium nitrate solution through the root zone of maize. *J India Soc Soil Sci.* 41 : 630-635.
- Nemeth, I., 2001. Devenir de l'azote sous irrigation gravitaire. Application au cas d'un perimetre irrigué au Mexique. Thèse (PhD) Univ. Montpellier II. 205 p + Annexes.
- Or, D., 1996. Wetting-induced soil structure changes. The theory of liquid phase sintering. *Water resour. Res.* 2(10), 3041-3049.
- Oyonarte, N.A., Mateos, L., and Palomo M.J., 2002. Infiltration variability in furrow irrigation. *J. of Irrig. and Drain. Engin.*, 128: 1(26), 26-33.
- Popova, Z., Varlev, I., Kutev, V, Shopova, D., 2000. Lysimeter study on ground water degradation due to different fertilisation and irrigation management. In Proceeding of ICID-ICWRM in the 21<sup>st</sup> Century, Budapest (Hungary) 1-2 June 2000.177-181.
- Robbins, C.W., and Carter, D.L., 1980., Nitrate-nitrogen leached below the root zone during and following alfafa. *J. Environ. Qual.* 9:447- 450.
- Simunek, J., Sejna, M., and Van Genuchten, M.Th., 1999. The HYDRUS-1D and HYDRUS-2D codes for estimating unsaturated soil hydraulic and solutes transport parameters. *Agron Abstr* 357.
- Van Genuchten, M.Th., 1980. A close-form equation for predicting the hydraulic conductivity

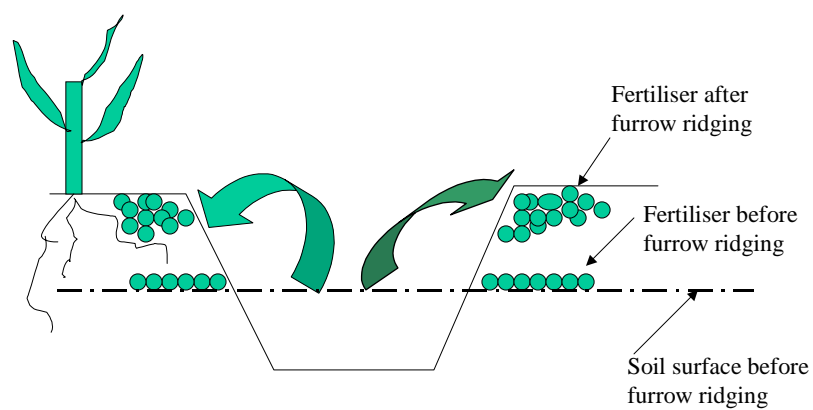
- of unsaturated soils. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, Vol. 44:892-898.
- Vereecken, H., Vanclooster, M., Swerts M., and Diels, J., 1991. Simulating water and nitrogen behavior in soil cropped with wheat. *Fert. Res.* , Vol. 27, 233-243
- Zairi, A., Mailhol, J.C., and Sltani, A., 1998. Water restriction impact on surface irrigation efficiency in cracking soil. 1<sup>st</sup> Inter Regional Conference on environment –water innovative issues in irrigation and drainage. Lisbon, 16-18 Sept. 1988.

Table 1: Comparison between soil water content variation (SWCV in mm) and water application depth (WAD in mm)

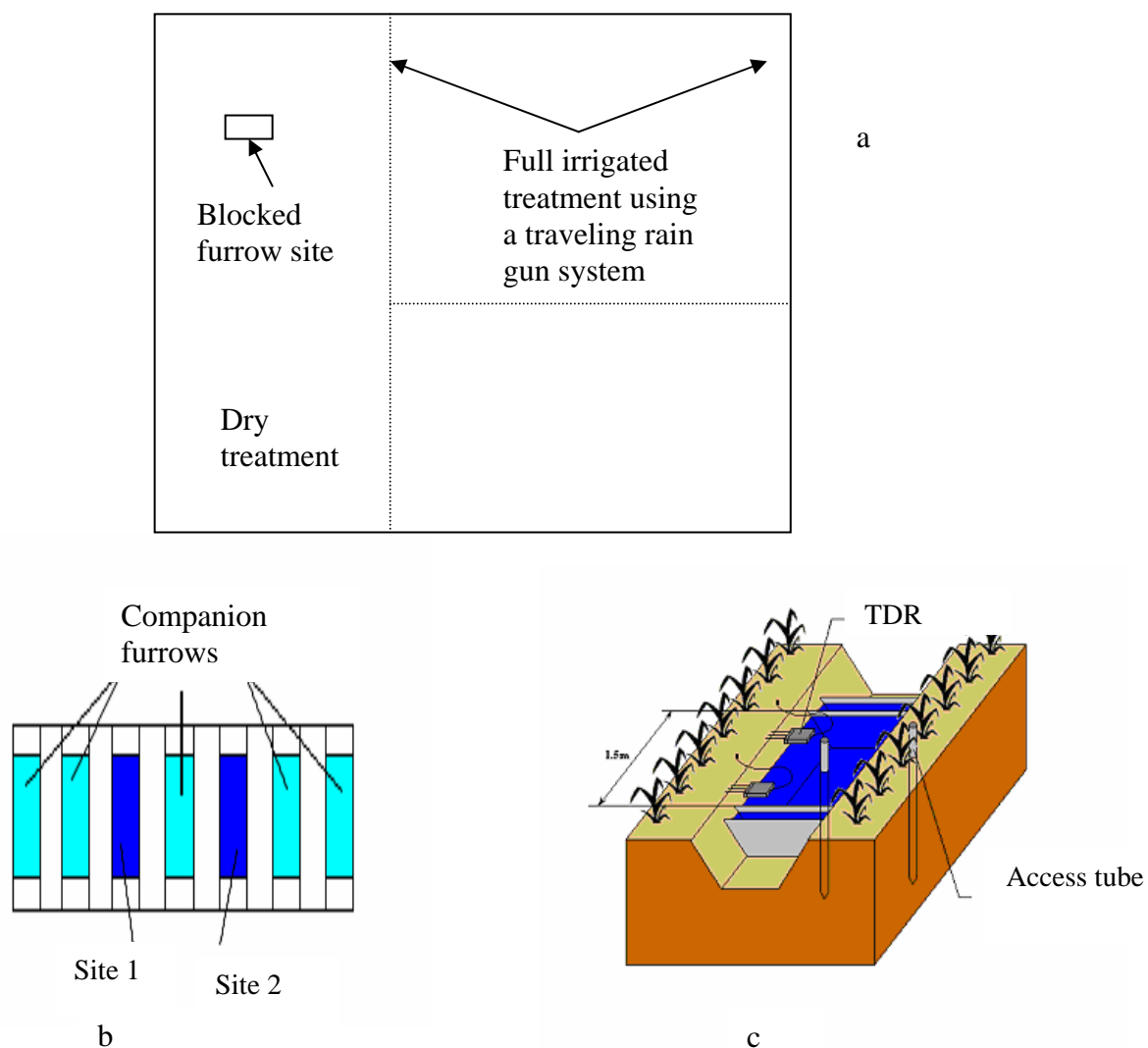
Irrigation	Site 1		Site 2	
	SWCV	WAD	SWCV	WAD
1	119	240	87	175
2	103	104	67	60
3	52	80	53	57

Table 2: Calibration results of the water transfer parameter for irrigation 1

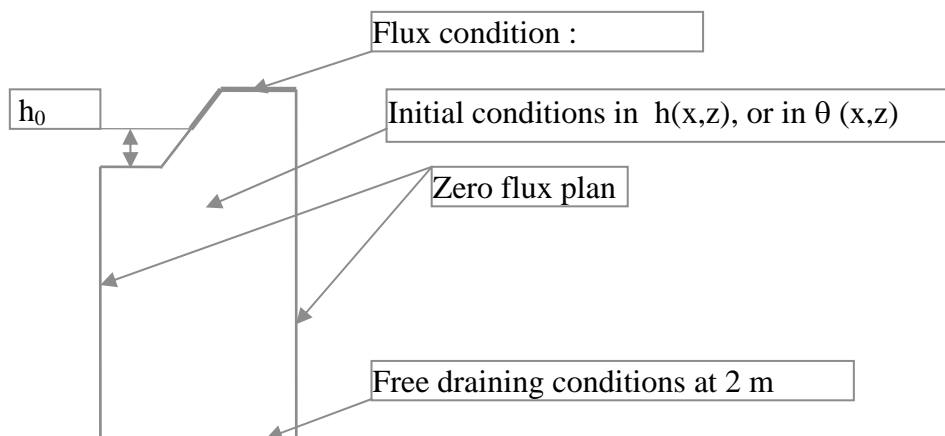
Soil layer (cm)	$\theta_r$	$\theta_s$	$\alpha$ (cm <sup>-1</sup> )	n (-)	Ks (cm/h)
0-20	0.05	0.37	0.1	1.87	4.0
20-150	0.05	0.36	0.007	1.65	2.0

**Figures and captions**

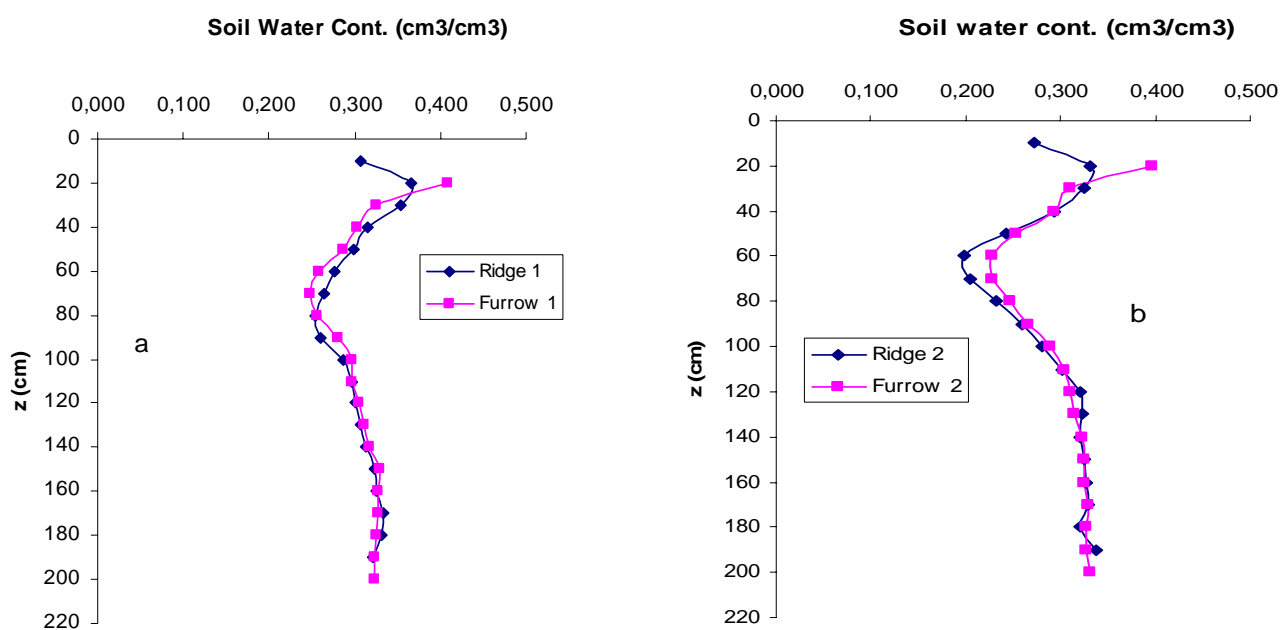
**Fig.1.** Schematic representation of the fertiliser technique: fertiliser accumulation on the top of the ridge during the furrow ridging.



**Fig 2.** Presentation of the field experiments (a) general view, (b) the blocked furrow experiment, (c) the measurement apparatus used for site 1 and site 2.

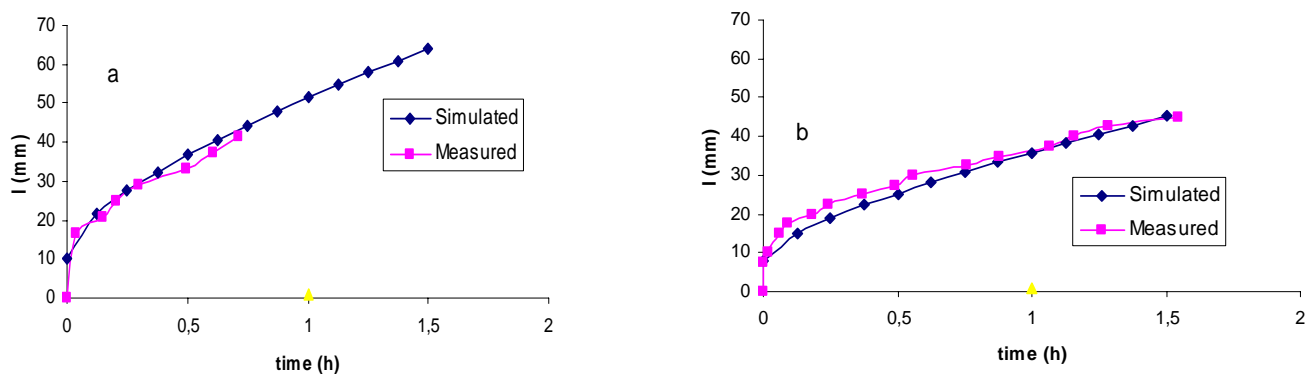


**Fig.3.** Schematic representation of the initial and boundary conditions for an irrigation event

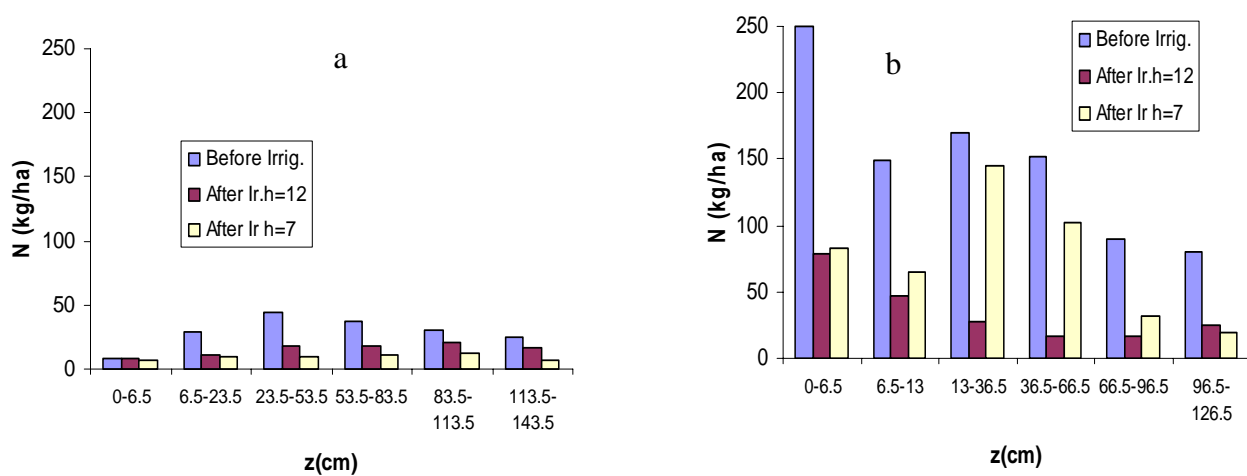


**Fig.4.** Soil water content profile 48 h after 1<sup>st</sup> irrigation on site 1 (a) and after 2<sup>nd</sup> irrigation on site 2 (b)

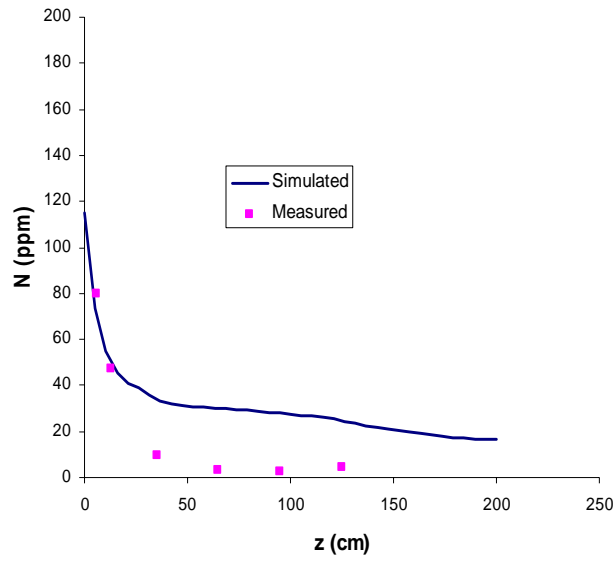




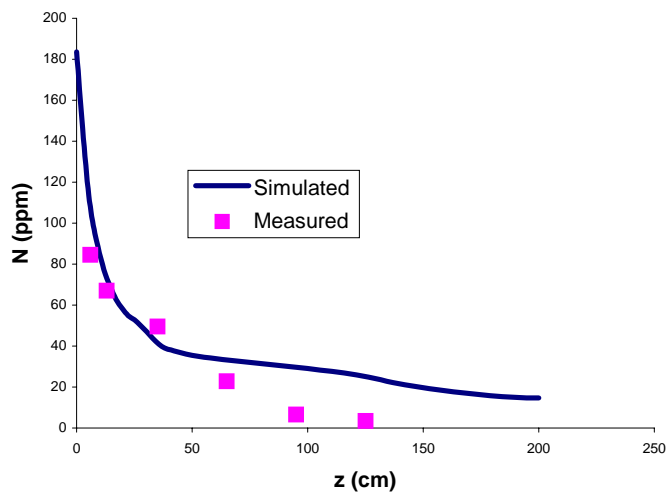
**Fig.5** Nitrogen profile under the furrow bed (a) and under the ridge (b) before and few days after 1<sup>st</sup> irrigation on site 1 ( $h = 12$  cm) and site 2 ( $h = 7$  cm)



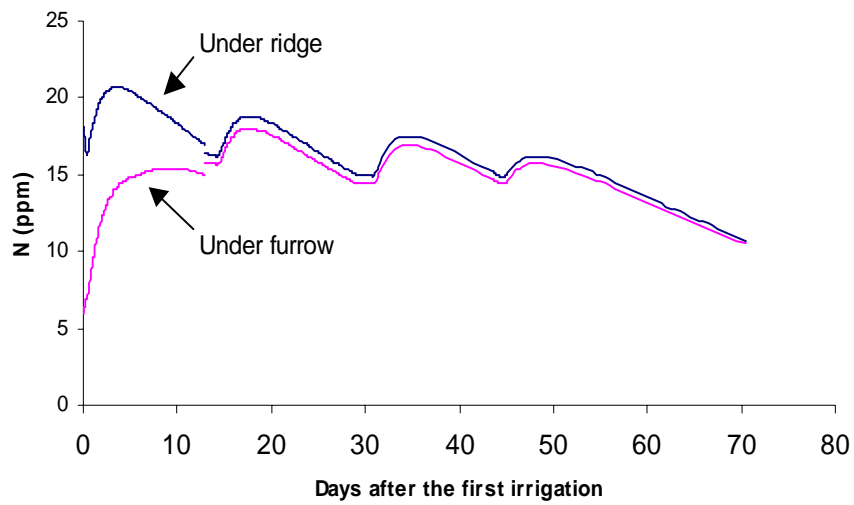
**Fig. 6.** Simulated vs Measured cumulative infiltration for 3<sup>rd</sup> irrigation on site 1 (a) and site 2 (b)



**Fig.7a.** Simulated vs measured nitrogen profile under the ridged after 1<sup>st</sup> irrigation on site 1



**Fig 7b** Simulated vs measured nitrogen profile under the ridged after 1<sup>st</sup> irrigation on site 2



**Fig. 8** Simulation of the nitrogen concentration from 07/01 to 09/10 just under the root zone at the vertical of the furrow and the ridge



## Annexe C

Application of Hydrus-2D model for simulating water transfer under furrow irrigation. Bulgarian case study in cropped lysimeters on Chromic Luvisol



## **Application of Hydrus2D model for simulating water transfer under furrow irrigation – Bulgarian case study in cropped lysimeters on Chromic Luvisol**

**Z. Popova**

N. Poushkarov Institute of Soil Science  
7, Shosse Bankya Str, Sofia 1080, Bulgaria  
email: [zornitsa@techno-link.com](mailto:zornitsa@techno-link.com)

**D. Crevoisier, P. Ruelle, J.-C. Mailhol**

CEMAGREF; UR Irrigation BP 5095, 34033 Montpellier, France  
e-mail: [jean-claude.mailhol@cemagref.fr](mailto:jean-claude.mailhol@cemagref.fr)

**Condensed abstract:** Nitrate leaching in furrow irrigation depends on the way of water and fertilizer application. Previous experimental studies carried out under certain climatic and soil conditions showed that risk of ground water pollution could be reduced by 20-30 % if water and fertilizer are applied separately (by Alternative Furrow Irrigation-AFI). Model simulations are very efficient for optimization of joint water and fertilization practices in different climate and soil context. The objective of this paper is to optimize the modeling approach in order to simulate acceptably precisely water and nitrogen transfer under different water/fertilization practices. Since water and nitrogen are applied over a part of the surface in furrow irrigation, a bi-dimensional water and solutes transport modeling approach (HYDRUS2D model, SIMUNEK et al.1999) is adopted. Four-step operative procedure is elaborated for HYDRUS2D model calibration for every furrow irrigation (EFI) and AFI practices on Chromic Luvisol (Sofia, Bulgaria). Detailed data, as water and nitrogen profiles in the ridge and the furrow bed, variables at the boundaries of the system (as precipitation, drainage, water by plant roots) observed in cropped lysimeters are used to verify mathematical accuracy. In a first calibration step, the hydrological components of the soil are derived by regression of laboratory and field water retention data. Obtained parameters of Van Genuchten water retention curve (VGWRC) are adjusted by comparing simulated soil water, pressure head and drainage with field observations in EFI lysimeter (step ii and step iii). Furrow irrigation is approximated by a one-dimensional (1D) water flow in step (ii) while step (iii) is made of the same data when a two-dimensional (2D) flow is adopted. Step iv is made in a similar way of data from the trials carried out in AFI lysimeter. Model predictions of soil water/nitrogen contents and water pressure heads in irrigated/non-irrigated furrows and furrow ridge and drainage are in agreement with observed values for both EFI/AFI practices. Model does a better job in simulating 2D water transfers in furrow irrigation compared with 1D simulation. The calibrated model can be used to predict the impact of application depth distribution along the furrow length on Chromic Luvisol.

**Key words:** HYDRUS2D model calibration, lysimeter experiments, water/nitrogen transfer, furrow irrigation

### **1 INTRODUCTION**

Furrow irrigation is used on almost 60 % of irrigated surfaces in USA and Bulgaria. About 90 % of irrigated areas in the world are under surface irrigation on the average (FAO.1994). Even though this ratio is behind 10 % in some European countries (France and Slovakia for instance), it is obvious that surface irrigation is still the most widespread in the world. It is low energy and investment consuming and it could be equivalent to other modern techniques in terms of performances and efficiency in case of favorable pedo-climatic conditions and appropriate management of water and fertilizer application.

Environmental impacts of furrow irrigation were studied in different countries in the 90-ties (POPOVA 1990, ARITOLA 1991, POPOVA & PETROVA 1993, FERNANDEZ et al. 1994, BENJAMIN et al. 1998, LEHRSCHE et al. 2000). Lysimeter experiments on traditional and environmentally oriented alternative furrow irrigation/fertilization were carried out in Chelopechene field (Sofia) in the period 1996-2000. It appears that under certain conditions N-leaching could be reduced by 20-30% by separate water and fertilizer application (BENJAMIN et al. 1998, POPOVA, IKONOMOVA, VARLEV & KUTEV 1998a, VARLEV, POPOVA & MLADENOVA 1998b, POPOVA, VARLEV, KUTEV & IKONOMOVA 1998b, POPOVA, VARLEV, KUTEV & SHOPOVA 2000). Evaluation of environmental impacts of joint irrigation and fertilization practices requires accurate estimation of different water and nitrogen (N) fluxes within the “soil-plant” system and at its boundaries. Field observations and model simulations assess system variables, as water and N crop uptake and soil storage, drainage, N-leaching and yield. One-dimensional (1D) models, as CERES (JONES & KINIRY 1986), are able to describe accurately the phenomena of transport of water and solutes in the soil-crop system after detailed calibration/validation procedure (POPOVA et al. 2002, POPOVA et al. 2004). When water is applied only over a part of the field, that is the case with furrow irrigation, transfers are rather bi-dimensional (2D) thought. A modeling approach adapted to 2D water and solute transfer could be much more appropriate to simulate water and nitrogen balance in this case (MAILHOL et al. 2001).

The objective of this paper is to elaborate an operative methodology for HYDRUS2D model (SIMUNEK et al. 1999) calibration in order to use it for simulating joint transfer of water and nitrogen under different furrow irri-

gation/fertilization practices. The calibrated HYDRUS2D model could be later used to study the impact variable irrigation/fertilization practices on N-leaching in different climate context.

## 2 MATERIALS AND METHODS

### 2.1 Experimental approach

Maize was cultivated under furrow irrigation and non-limited fertilization in two lysimeters (2 m depth and 20 m<sup>2</sup> cross-sectioned) in the field of Chelopechene (Sofia region) in the period 1997. The soil is Chromic Luvisol and its texture is presented in Table 1. Soil water retention capacity (125 mm/m soil water storage at field capacity) and saturation conductivity  $K_{sat}$  are moderate.

**Table 1.** Soil texture and laboratory based saturated hydraulic conductivity ( $K_{sat-lab}$ ), Chelopechene field.

Depth, cm	Soil texture Classification	Soil particles, %			$K_{sat-lab}$ cm/day
		Clay <0.002 mm	Silt 0,002- 0.05 mm	Sand 0.05-2.00 mm	
0-28	clay loam	32	32	36	93.30
33-45	clay	43	27	30	15,90
61-71	clay	42	25	33	20.20
95-130	Sandy clay loam	24	15	61	39.90

Table 2 presents the monthly totals of precipitation for the year of experiments compared with the corresponding parameters of an average (1975), a wet (1963) and a dry (1985) year. Data in the table prove that irrigation season (July-August) in 1997 was moderately wet ( $P_1 = 26\%$ ).

**Table 2.** Monthly sums of precipitation in Sofia MTO-station during experimental and reference years.

Years	Apr	May	June	July	Aug	Sept	$\Sigma$
1997	31	87	<b>19</b>	<b>69</b>	80.3	7.7	294.0
Average	63.3	92.3	91.3	77.9	55.6	1.5	381.9
Wet	66.6	56	105	78.3	11.3	16.8	334.0
Dry	33.5	24.5	50.3	11.8	110	18.8	248.9

Two techniques of water and fertilizer application were studied. The first technique was referred to as Alternative Furrow Irrigation-AFI since water and fertilizer were applied separately. Every other furrow was watered while ammonium fertilizer was spread over “dry” furrows only. The second management was traditional and referred to as Every Furrow Irrigation-EFI. The fertilization practice consisted on ammonium nitrate fertilizer uniform application before sowing while the remaining part was distributed according to the studied technologies.

Observed data (VARLEV et al. 1998b, POPOVA et al. 1998a, POPOVA et al. 1998b) and analytical results (POPOVA et al. 2000, POPOVA et al. 2001, POPOVA et al. 2002) were used for HYDRUS2D model calibration. A variety Kneja 509 was sown on 14.05.1997 with a plant density 5,6 pl/m<sup>2</sup>. First uniform application of 200 kg N/ha was made on 24.04. The second doze of 50 kg N/ha was distributed according to the studied EFI and AFI technologies on 05.08. Two irrigation events (60 mm each) were performed according to the studied irrigation practices. Tensiometers were installed to monitor soil water pressure head (PH) under dry and/or wet furrow beds and under ridges at 40, 70, 100 and 130 cm depth before the first irrigation on 08.08.1997. Soil water content (SW) was measured under furrow beds and ridges at eight different depths (10, 20, 30, 40, 50, 60, 80 and 100 cm) by gravimetric method.

Water balance terms, as precipitation – P, irrigation – Ir and drainage flowing below the bottom boundary – Dr, were measured volumetrically all over the experimental year. Dr was measured not smaller then once a week during vegetation period. Water balance was performed over decades in order to derive observed crop evapotranspiration ETcrop (POPOVA et al. 2000).

Daily rate of water uptake by the crop roots and reference surface evaporation were taken from previous CERES-maize model application for the same lysimeter case (POPOVA et al. 1999, POPOVA et al. 2001, POPOVA et al. 2004).



## 2.2 Modelling approach

Modelling is used for simulating the water and nitrogen transport process occurring during the vegetation period in the lysimeters. Due to the domain geometry and the specificity of the fertilization practice, the 2D water and solute transport model HYDRUS-2D (SIMUNEK et al. 1999) is used.

The governing flow equation is given by the following modified form of the Richards' equation:

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[ K(K_{ij}^A \frac{\partial h}{\partial x_j} + K_{iz}^A) \right] - S \quad (2)$$

where  $h$  is the pressure head [L],  $S$  a sink term [ $T^{-1}$ ],  $x_j$  ( $j=1,2$ ) are the spatial coordinates [L],  $t$  is time [T],  $K_{ij}^A$  are components of a dimensionless anisotropy tensor  $K^A$ , and  $K$  is the unsaturated hydraulic conductivity function [ $L T^{-1}$ ] given by:

$$K(h,x,z) = Ks(x,z)Kr(h,x,z) \quad (3)$$

The sink term,  $S$ , represents the volume of water removed per unit time from a unit volume of soil due to plant water uptake.  $S$  is defined according to the FEDDES et al. (1978) approach. The Galerkin finite element method with linear basis functions is used to obtain a solution to the flow equation, subject to the imposed initial and boundary conditions.

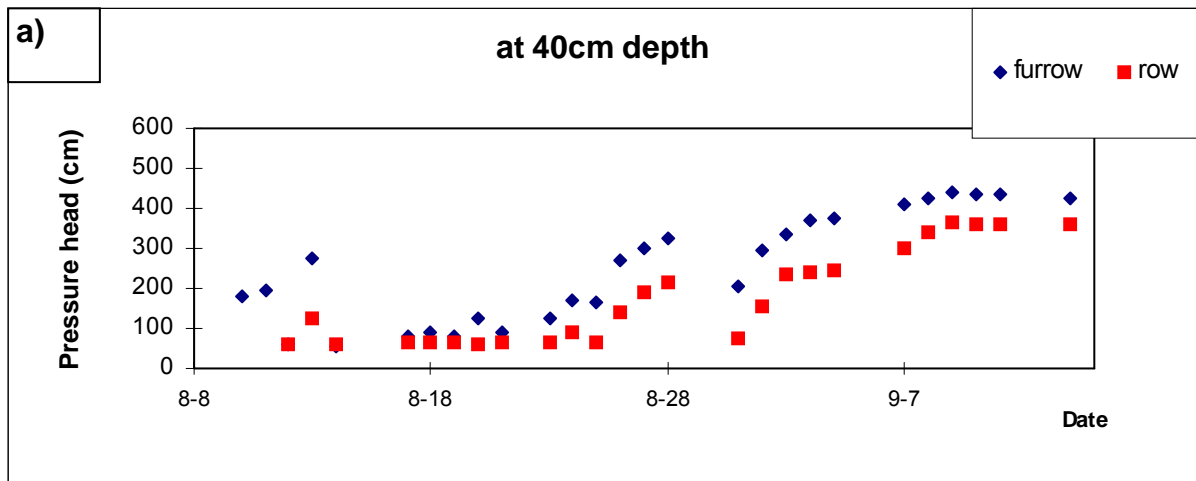
## 2.3 Calibration procedure

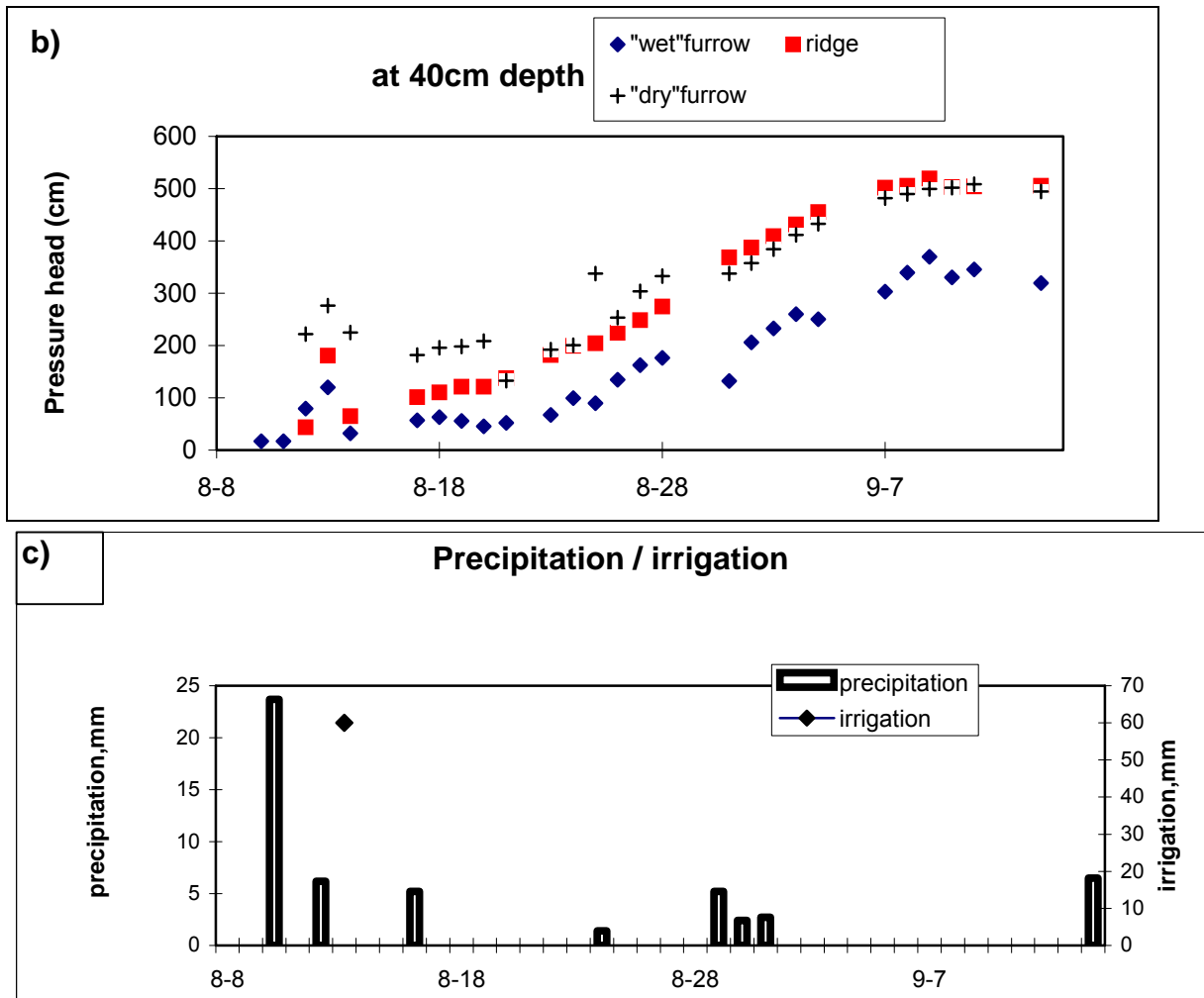
CERES-maize model, previously calibrated in details (POPOVA et al. 2001, POPOVA et al. 2004), was used to provide daily water uptake by the crop roots and evaporation for the input blocks of HYDRUS2D. Then a four-step calibration procedure was used to adjust 2D water transfer in HYDRUS2D. In a first step, the hydrological components were derived by regression of laboratory and field data. Obtained parameters were adjusted by comparison of SW/PH and drainage simulated by 1D (step ii) and 2D modeling approach (step iii) with field observations in EFI lysimeter. Step iv was made of data from the trials carried out in AFI lysimeter. Finally (in another paper) the nitrogen components will be calibrated in order to predict 2D nitrogen transfer in case of EF and AF irrigation/fertilizer application.

## 3 RESULTS AND DISCUSSIONS

### 3.1 Experimental results

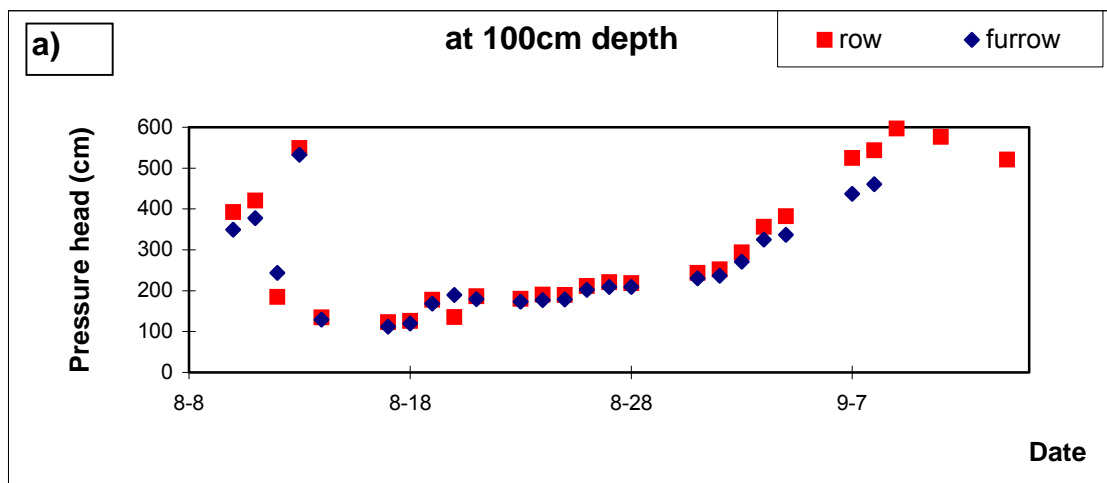
Pressure head (PH) evolution at 40 cm under AFI and EFI technology are presented in Fig 1a and Fig. 1b while Fig. 1c relates soil water behavior to daily precipitation and irrigation.





**Figure 1.** Pressure head evolution at 40cm under EFI (a) and AFI technology (b); c) precipitation and irrigation.

Observed PH at 100 cm is illustrated respectively in Fig. 2a and Fig. 2b. There is significant difference in the pressure head under the wet and dry furrows at 40, 70 and 100 cm depth in case of AFI and water transfer is made predominantly under the wet furrow (Fig. 1b and Fig. 2b). PH at 100cm is equivalent under the furrow and the row under EFI practice (Fig. 2b). It is evident that water is transferred almost throughout the whole soil monolith for EFI.



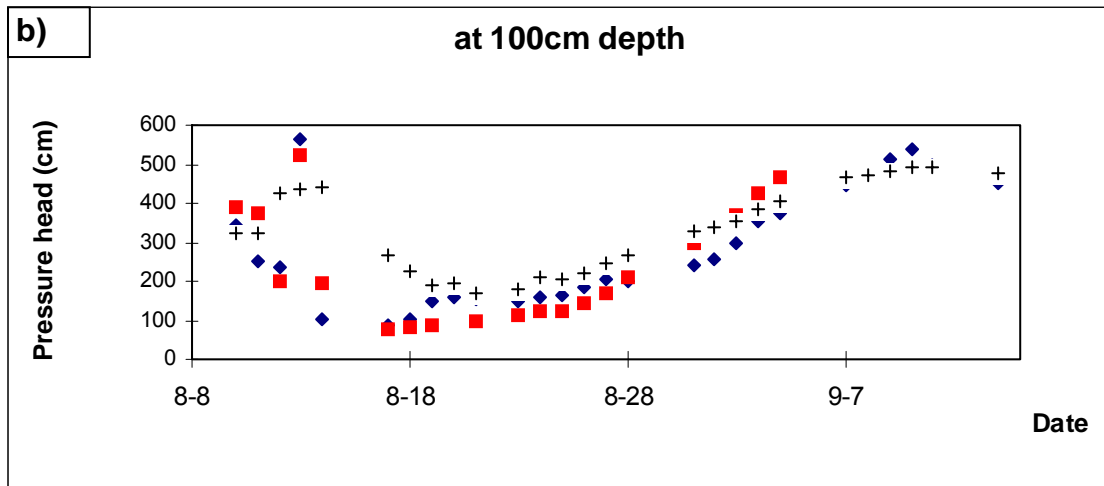


Figure 2. Evolution of pressure head at 100 cm under: a) EFI and b) AFI.

### 3.2 Results of water transport modeling by HIDRUS2D model

Simulation of the 2D water and nitrogen transport processes during lysimeter experiments in 1997 turned to be quite complicated due to the numerous parameters and processes involved. An operative stepwise methodology of model adaptation was elaborated. Each step used the parameters optimized in the previous one/ones and calibrated the remaining parameters. Model adaptation and test in terms of water transfer was performed in the four following steps.

During Step (i) water transfer parameters  $\theta_s$ ,  $\theta_r$ ,  $\alpha$ ,  $n$  and  $m$  ( $m = 1 - 1/n$  according to the Mualem model) of the Van Genuchten (VG) retention curve  $h(\theta)$  equation (VAN GENUCHTEN 1980) were derived for the different genetic soil layers. Three independent sources of soil water retention data were used: laboratory measurements for three soil layers (KOLEVA 1976), field tensiometer PH readings related to observed SW during three experimental seasons (POPOVA et al. 2001) and pedotransfer functions (PTFs) incorporated in HYDRUS2D model. Laboratory data (KOLEVA 1976) were regressed (Fig. 3) and obtained VG curves were compared with these predicted by PTFs and field observations (Fig. 3b). Derived VG parameters for soil layers 1, 2, 3 and 4 are given in Table 3. Some differences were established in water retention curves depending on the method of estimation.

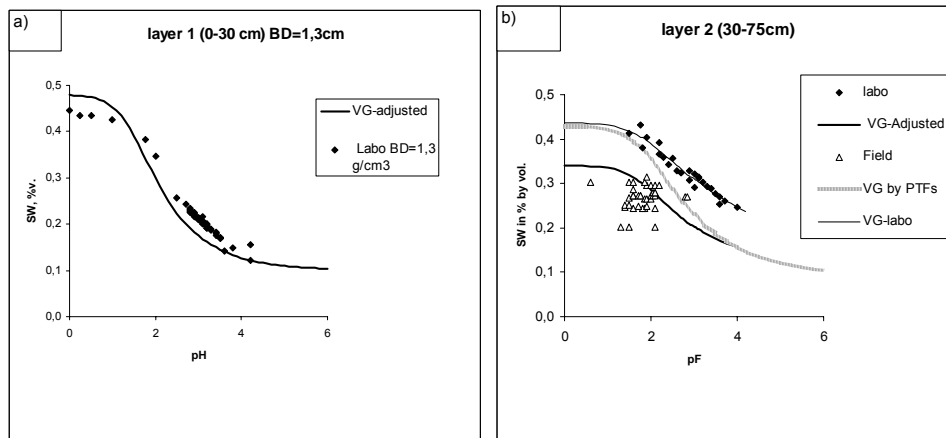
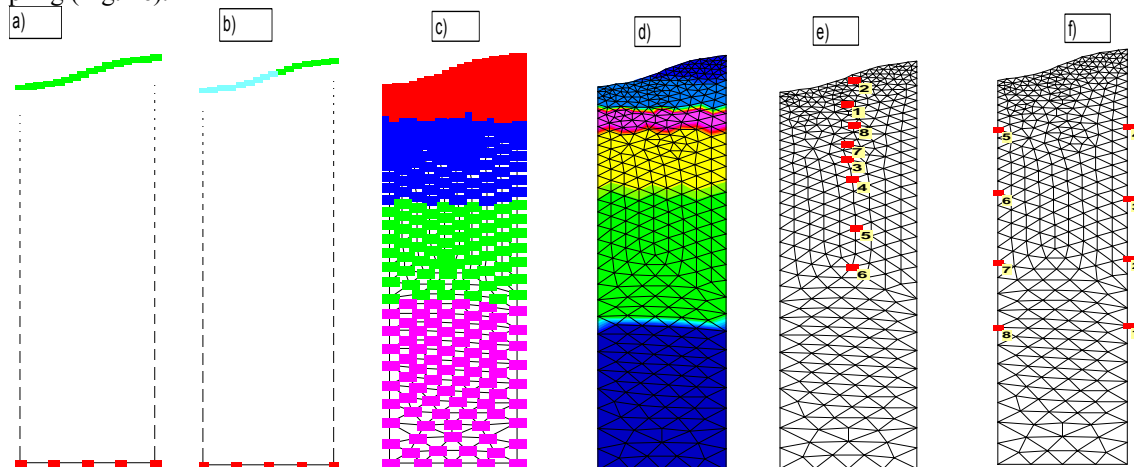


Figure 3. Adjusted VG water retention curve and laboratory measurements (KOLEVA 1976) for: a) layer 1 (0-30cm) and b) layer 2 (30-75cm), field observations of PH versus SW and PTFs.

**Table 3.** Water transfer parameters of the Van Genuchten water retention curves, Chromic Luvisol soil profile, Chelophechene.

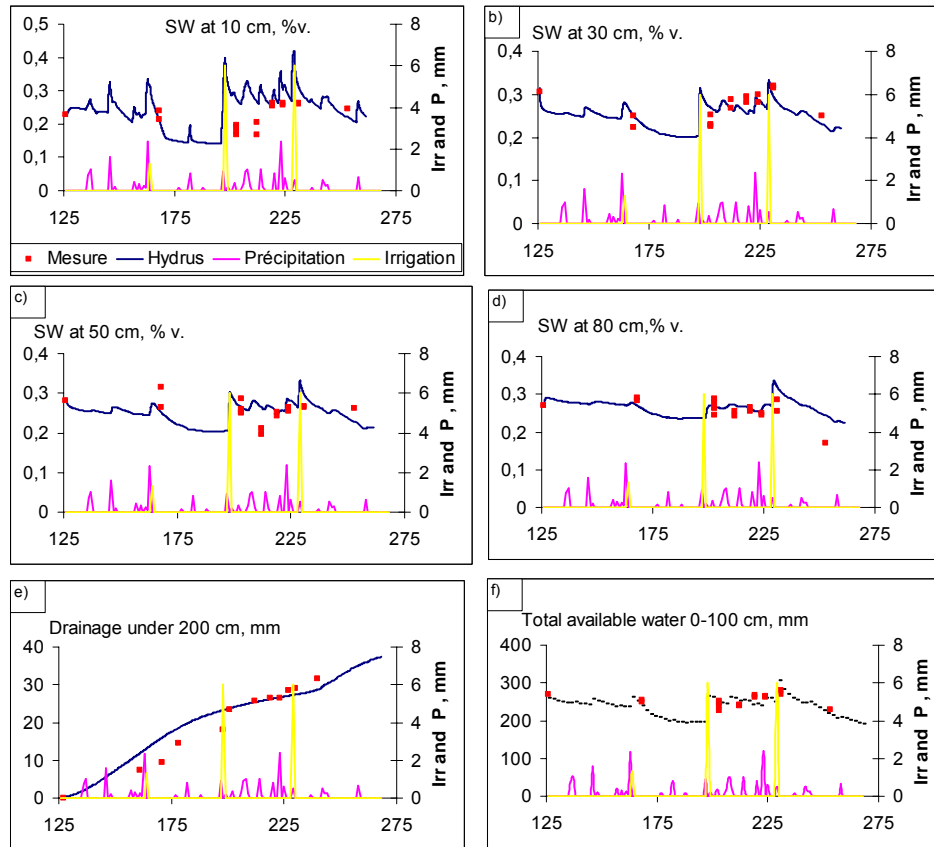
Layer-source	Depth, cm	BD g/cm <sup>3</sup>	n	alpha, cm <sup>-1</sup>	thetar, % by v.	thetas, % by v.	m
1-labo	0-28	1,3	1,33	0,04	0,10	0,48	0,25
1-pedotransfer	0-28		1,44	0,012	0,08	0,45	0,3
1-adjusted	0-30		1,44	0,04	0,10	0,48	0,25
2-labo	33-45	1,47	1,17	0,02	0,113	0,44	0,15
2-pedotransfer	33-45		1,32	0,016	0,09	0,43	0,24
2-adjusted	30-75		1,32	0,018	0,113	0,34	0,24
3-pedotransfer	61-71	1,47	1,32	0,016	0,09	0,44	0,24
3-adjusted	75-120		1,32	0,018	0,110	0,38	0,24
4-labo	90-100	1,54	1,34	0,004	0,06	0,39	0,25
4-pedotransfer	95-130		1,34	0,023	0,06	0,39	0,25
4-adjusted	120-200		1,34	0,06	0,06	0,39	0,25

Step (ii) and step (iii) served to adjust VG parameters and verify the accuracy of water transport by comparing numerical results against those obtained during vegetation season in EFI lysimeter. Infiltration under EFI was approximated by one-dimensional water flow in step (ii) (Fig. 4a) and bi-dimensional flow in step (iii) (Fig. 4b). Soil surface boundary conditions in step (ii) (Fig. 4a) involved precipitation, irrigation depths, evaporation and transpiration for a maize crop as average daily rates distributed uniformly over each day. The bottom boundary consisted of a free drainage flux, which represented the gravel layer at the bottom of the lysimeters. No-flow plain was assumed at the vertical boundaries. Figure 4c gives a graphical representation of the 2-m soil column consisted of four soil layers: a 30-cm A-horizon, a B-horizon composed of 2 similar soil layers (30-75 cm and 75-120 cm) and a C-horizon which extended as a homogenous soil layer 4 to 200 cm. The depth of the root zone was accepted 100 cm. Initial soil water content was taken from SW observations on 26.05.1997 (Fig. 4d). Eight observation nodes of SW were defined between the furrow and the row at the depths corresponding to soil sampling (Fig. 4e).


**Figure 4.** HYDRUS2D model calibration for EFI lysimeter: a) boundary conditions for step (ii); b) boundary conditions for step (iii); c) soil layers; d) initial SW (26.05.1997), e) observation nodes for SW in step (ii); f) observation nodes for PH for step (ii) and step (iii).

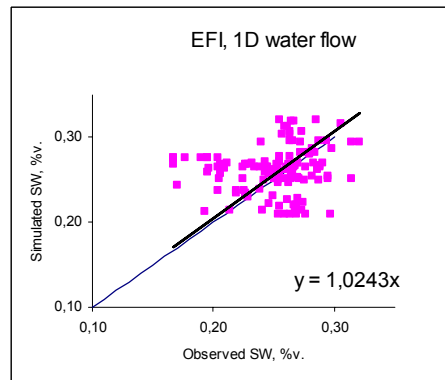
Finite element mesh of numerical simulations was designed to be denser near the top boundary to avoid numerical divergence where moisture gradients are the highest. The laboratory based VG hydraulic functions from step (i) were initially used. Hydraulic parameters of the soil were the same for the first and subsequent irrigations. In order to take in to account the tillage effect a lower bulk density (1.3 g/cm<sup>3</sup>) for the first 30 cm was considered.

Simplified approximation of EFI by one-dimensional flow (Fig. 4a) allowed to carry out the simulation in a single model run from sowing (DOY126) to harvest (DOY268) and thus to observe the impact of VG parameters on simulated SW and drainage over the total season. Acceptable agreements between measured and simulated SW were obtained in Fig. 5a, Fig. 5b, Fig. 5c and Fig. 5d when n-parameter was modified from n = 1.33 to n = 1.44 (for A-horizon) and from n = 1.17 to n = 1.32 (for B-horizons) and when saturated water content of B-horizon was reduced from 44 % to 34 % (Table 3). Adjusted VG curves gave lower SW estimates (about 10 %v. for layer 2, Fig. 3b) when compared to laboratory SW measured at the same PH. Soil reservoir volume (the slope of the curves) was kept the same in model tuning. Adjusted VG parameters (Table 3) gave acceptable numerical results regarding both observed total available water in the root zone (Fig. 5f) and drainage at 2 m (Fig. 5e).



**Figure 5.** Comparison between numerical results of step (ii) and observations in EFI lysimeter, 1997.

Statistical test of predicted SW by 1D water transfer against measured one under EFI is presented in Fig. 6. Data of observed versus simulated SW were equally distributed along the 1:1 line. Linear regression through the origin gave 1.02-slope coefficient. The test showed significant variation of data points.

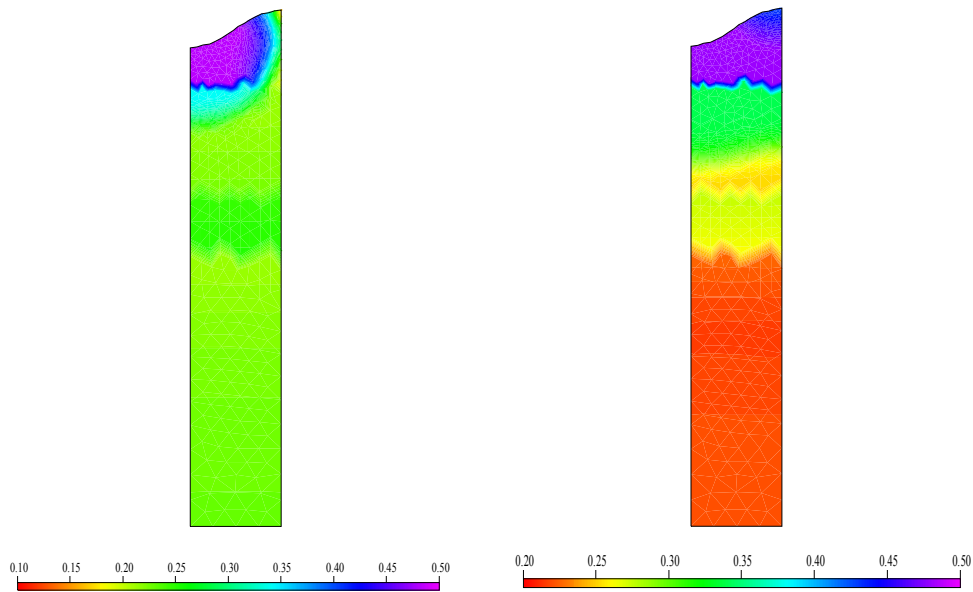


**Figure 6.** One-to-one graph of observed versus simulated SW when 1D water transfer was considered (step ii), EFI lysimeter 1997.

Adjusted VG parameters in step (ii) were consecutively used as input in HYDRUS2D for simulating the bi-dimensional water transfer for EFI, in step (iii), and AFI, in step (iv). Six model runs carried out calculations: from sowing (14.05. or DOY126) to a soil sampling date (DOY171), from DOY171 to first irrigation (17.07. or 198DOY), for the irrigation events on 17.07. (DOY198) and 14.08. (DOY229) and the period between them and from second irrigation to harvest (DOY268). SW profile observed at sowing was used as starting for the first period. Simulated SW profile at the end of each period was introduced as initial for the next one.

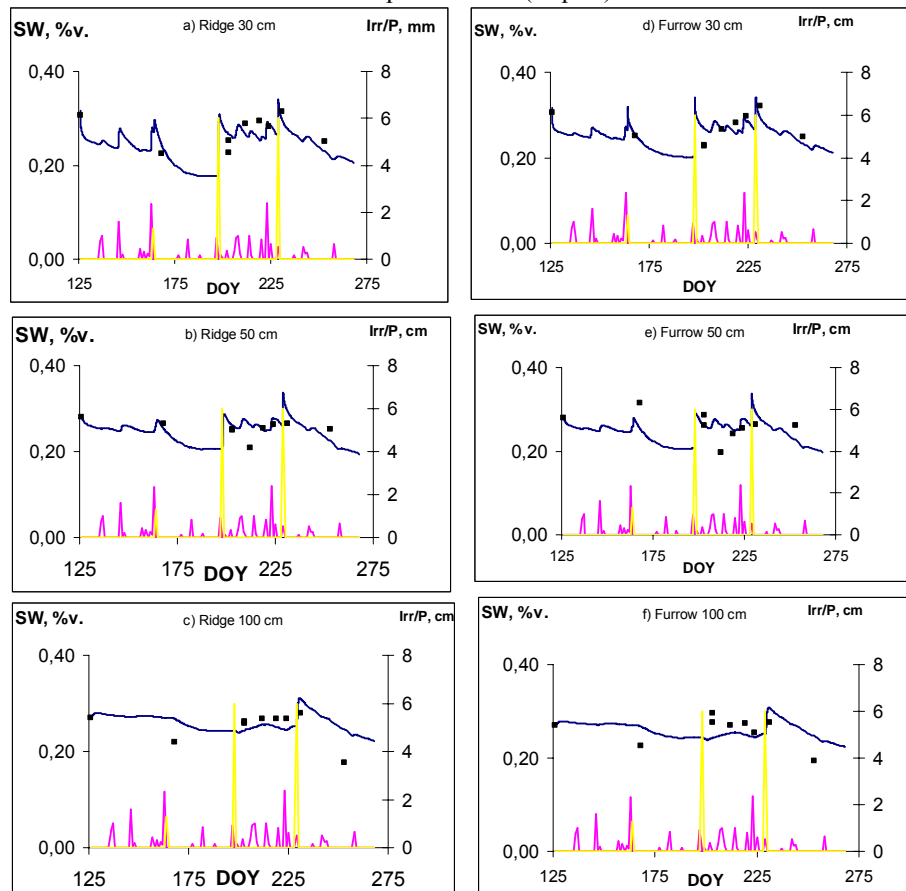
Boundary conditions of the simulations in step (iii) for EFI are presented in Fig. 4b. Irrigation duration (1h7min for the first irrigation and 2 h for the next one), wet perimeter and height of pounded water in the furrow as well as application depth (60 mm) corresponded to the practiced irrigation during EFI experiments in 1997. Figure 7a and Fig. 7b illustrate the calculated advancement of irrigation water front at the end of first and

second EFI event. The bulb of saturated soil under the furrow bed was more pronounced in case of “dry” initial soil profile that was the case with first water application.



**Figure 7.** Numerical advancement of the irrigation water for EFI lysimeter at the end of simulation of: a) first irrigation event (1h15min) on 17.07.1997 and b) second irrigation event (2h) on 14.08.1997.

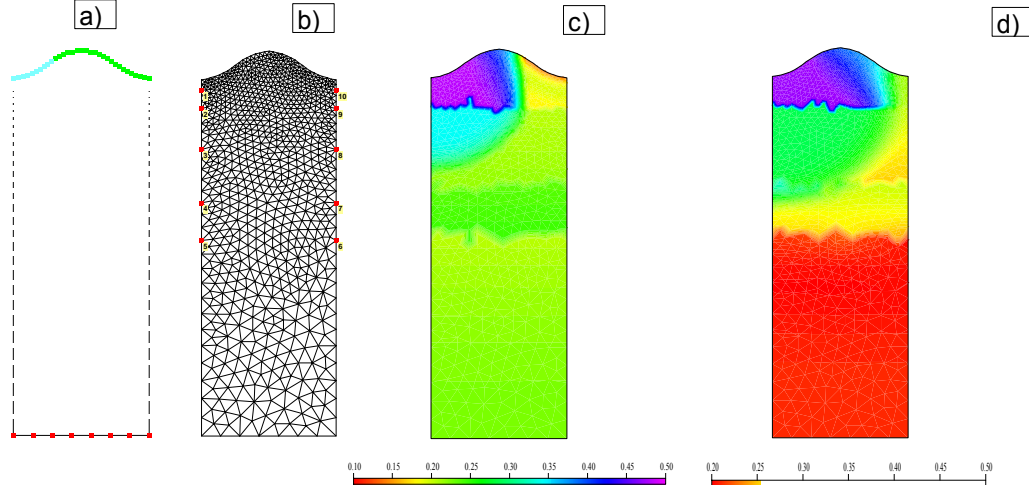
Figure 8 presents the comparison between simulated and observed SW evolution at 30, 50 and 100 cm depth for ridge and furrow bed when 2D water transfer was adopted for EFI (step iii).



**Figure 8.** Graphical test of numerical SW results against field observations, 2D water transfer for EFI (step iii).

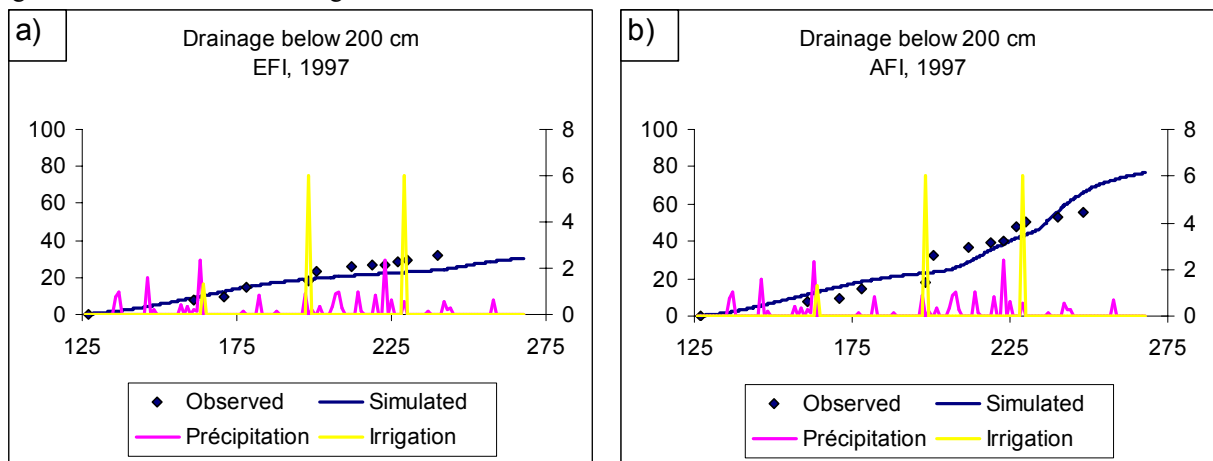
Visual analyses of this figure showed that simulated SW (full line) followed the trend of observations (symbols) in the ridge (Fig. 8a; Fig. 8b; Fig. 8c) and furrow bed (Fig. 8d; Fig. 8e; Fig. 8f) for the sampling dates from sowing to harvest.

Step (vi) considered 2D water flow when water was applied in every other furrow according to the procedure realized in AFI lysimeter. Schematic representation of the boundary conditions of an AFI event is given in Fig. 9a. Ten observation nodes of SW content were defined at the depths of soil samplings for the dry/wet furrow and the ridge (Fig. 9b). Figure 9c illustrates the calculated advancement of irrigation waterfront for first (17.07.1997) and Fig. 9d for the second (14.08.1997) irrigation event. Simulated SW profiles at the end of application time (respectively 3h20min and 4h15min water application) are visible. The bulb of saturated soil advanced under the wet furrow bed while soil profile remained “dry” below the non-irrigated furrow.



**Figure 9.** HYDRUS2D model test for AFI, calibration step (iv): a) boundary conditions; b) observation nodes for SW; c) advancement of the irrigation water at the end of first irrigation event (3h20min); d) advancement of the irrigation water at the end of second irrigation event (4h15min).

Graphical test of SW in the wet and dry furrow was acceptable. Cumulative drainage predictions are plotted against field observations in Fig. 10b.



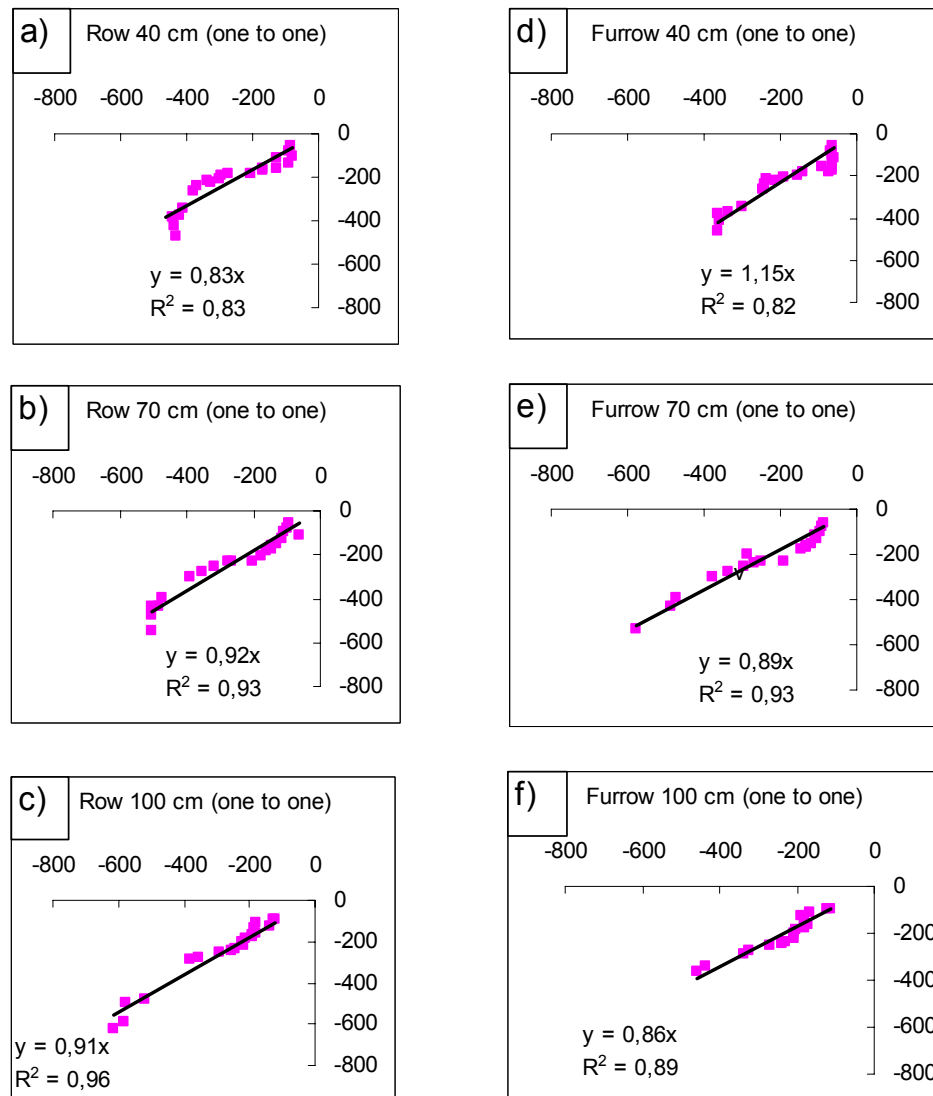
**Figure 10.** Graphical test of numerical Drainage results against field observations, 2D water transfer for EFI (step iii) and AFI (step iv).

AFI required treble application time for the same application depth (60 mm). Compared with EFI treatment (Fig. 10a), cumulative drainage for AFI treatment is almost double. Drainage was smooth in simulations while observed evolution was stepwise especially after the first irrigation (Fig. 10b). Preferential fluxes should have happened through the cracks that were not taken into account in the model simulations. Nevertheless it could be accepted that simulated total seasonal drainage is close to observed one.

Independent observations of the dynamic of PH (cm) by tensiometer readings in EFI and AFI lysimeters were used to validate both step iii and step iv. Calculations were carried out for four consecutive periods starting with first irrigation on 17.07. (DOY198), period between irrigations, second irrigation on 14.08. (DOY229) and the period between second irrigation and harvest (DOY268). PH profile observed before first irrigation was used as starting for the first period. Simulated PH profile at the end of each period was introduced as initial for the next

one. Eight observation nodes for PH were defined under furrow bed and row at the depths corresponding to tensiometer installation in EFI treatment (Fig. 4f). Ten observation nodes of PH were defined at the depths of tensiometers installation for the dry/wet furrow and the ridge in AFI lysimeter. Tensiometers, observed every other day, allowed checking the simulated evolution of PH within the root zone (at 40, 70 and 100 cm depth) and below it (130 cm depth). When PH remained the same over periods of 0 water supply and intensive crop absorption i. e. readings were out of range of reliable tensiometer functioning (PH = -420 cm at 40 cm depth and PH = -650 cm respectively at 70 and 100 cm depth), they were excluded from analyses.

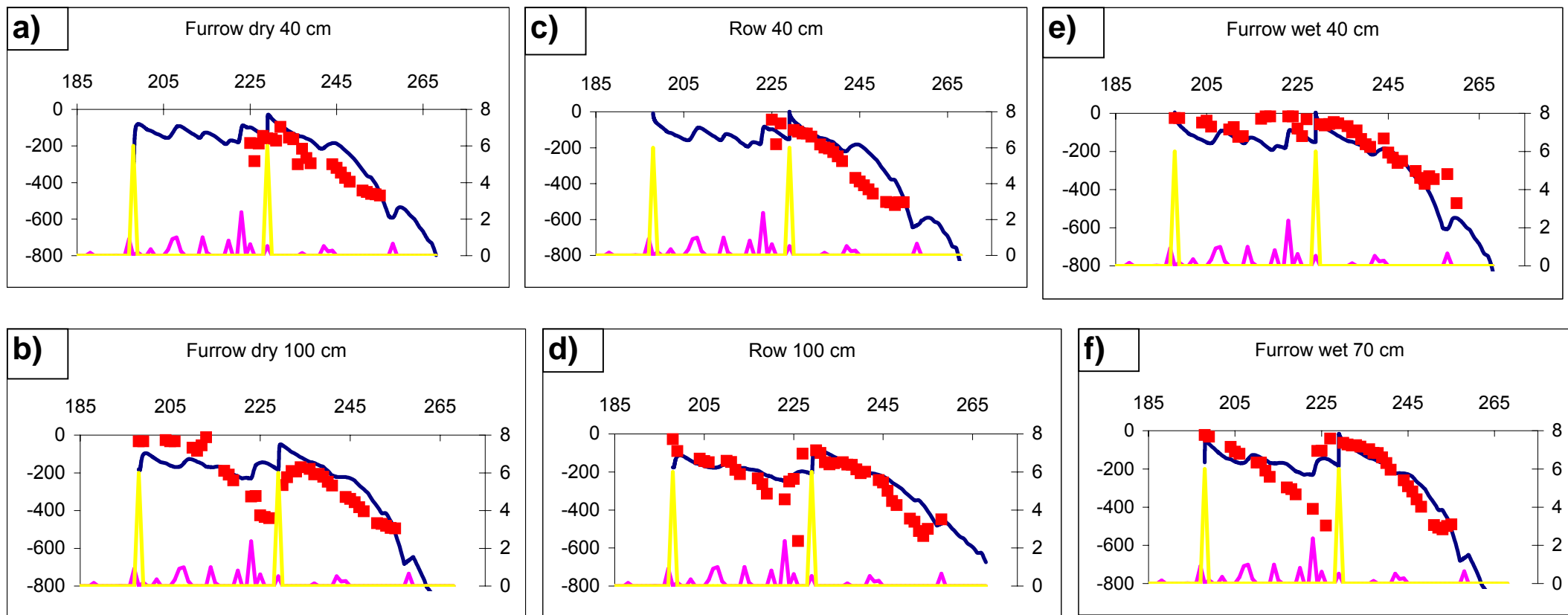
Validation graphical test of adopted 2D modeling approach showed that simulated PH was close to tensiometer observations both for furrow bed and furrow ridge in EFI lysimeter. Figure 11 presented the summary of statistical analyses of observed versus simulated PH in the soil profile in order to evaluate precision of predictions. 1:1 data points were regressed separately for ridge (Fig. 11a, b, c) and furrow bed (Fig. 11d, e, f). Statistical analyses showed that model predictions by adopting 2D water transport were better (fig.11) then using 1D-modeling approach (Fig. 6). Coefficient of determination  $R^2$  was within the range 0.82-0.92 in Fig. 11 (valid for the period DOY230-DOY268) and it was from 0.50 to 0.80 when data of the whole irrigation season were regressed. Lost in accuracy in the latter could be explained by the multiple wetting and drying of the soil in the season while hysteresis of water retention curve was not taken into account in the simulations. Slope coefficient of the regression through the origin "a" was about 0.9 ( $0.86 < a < 0.92$ ) at the depth 70 and 100 cm regardless the considered period that meant that the regression was stable. It was different for ridge ( $a = 0.84$ ) and furrow bed ( $a = 1.15$ ) at 40 cm depth.



**Figure 11.** Comparison 1:1 between observed and simulated PH (cm) for the period DOY230-DOY268 and regression through the origin, 2D water transfer for EFI, 1997(step iii validation).

Figure 12 presents some graphical results of step (vi) validation against independent PH observations in irrigated and non-irrigated furrow and ridge in AFI.





**Figure 12.** Validation of step (iv) : comparison of predicted PH with observed in irrigated/nonirrigated furrow and ridge in AFI lysimeter.

The comparison between simulated and observed PH evolution at 40, 70, 100 and 130 cm depth was acceptably precise. Simulated PH followed the trend of tensiometers observations in dry/wet furrow and ridge during irrigation season.

Statistical 1:1 test showed that model predictions were better in the ridge (Fig. 12 c, d) than in the non-irrigated furrow (Fig. 12 a, b). Slope coefficient of regression through the origin was within the range  $0.77 < a < 0.87$  for the ridge and the dry furrow and  $0.91 < a < 1.29$  for the wet furrow. The slight overestimation of simulated PH (in abs. terms) before irrigation event could be explained by the fact that tensiometers lose accuracy in dry soil.

#### 4 CONCLUSIONS

Following conclusions could be drawn of the study:

1. In irrigation risks of nitrate leaching depends on the way of water and fertilizer application. Model simulations are very efficient for optimization of joint water and fertilization practices in different climate and soil context. Since water and nitrogen are applied over a part of the surface in furrow irrigation, a modeling approach by bi-dimensional water and solutes transport is chosen in this study.
2. A four-step operative calibration procedure of HYDRUS2D model (SIMUNEK ET AL. 1999) was elaborated for simulating bi-dimensional water transfer under EFI/AFI practices. Variables monitored in cropped EFI lysimeter (as precipitation, drainage) and simulated by 1D CERES-maize model (water uptake by plant roots, soil evaporation) were used as input in HYDRUS model. Soil water content-SW and pressure head-PH in irrigated/non-irrigated furrows and furrow ridge and drainage-Dr observed both under EFI/AFI practices were used to verify mathematical accuracy of HYDRUS2D model predictions. Model did a better job in simulating 2D transfers that accounts different way of water application.
3. The calibrated model could be used to predict the impact variable irrigation/fertilization practices on nitrogen movement and leaching under Chromic Luvisol in different climate context.

#### ACKNOWLEDGEMENTS

We gratefully acknowledge the contribution of Prof. Varlev, Prof. Ikonomova and Dr. Kutev to initiate an interdisciplinary experimental study of joint fertilization and irrigation practices in EFI and AFI lysimeters in Chelopechene almost 10 years ago. The discussions and common work in the 90-ies was very important in getting insight the problem and latter model use. ECONET 2004 program of French Foreign Office sponsored partially the research by financing the exchange of the international team for preparing this paper.

#### REFERENCES

- FAO (1994) Politique de l'eau et agriculture . In FAO (Editor). La situation mondiale de l'alimentation et de l'agriculture en 1993. Rome.
- Artiola, J.F. (1991) Nonuniform leaching of nitrate and other solutes in a furrow-irrigated, sludge amended field. *Commun. Soil Sci. Plant Anal.* 22:1013-1030.
- Benjamin J.G., Porter, L.K., Duke, H.R., Ahuja, L.R., Butters, G., (1998) Nitrogen movement with furrow irrigation method and fertilizer band placement. *Soil Sci. Soc. Am. J.* 62 1103-1108.
- Crabtree, R.J., et al. (1985) Effects of alternate-furrow irrigation: Water conservation on the yields of two soybean cultivars. *Agric. Water Manage.* 10:253-264.
- Jones, C.A., Kiniry, J.R., 1986. CERES-Maize A simulation model of Maize Growth and Development, Texas A&M University Press, College Station.
- Koleva, S., 1973. Water retention curves at different soil density level. *Soil science and agrochemistry.* 4. ( in Bulgarian).
- Lehrsch, G.A., Sojka, R.E., Westermann, D.T., 2000. Nitrogen placement, row, spacing, and furrow irrigation water positioning effects on corn yield. *Agron. J.* 92: 1266-1275.
- Fischbach, P.E. and H.R. Mulliner. 1974. Every-other furrow irrigation of corn. *Trans. ASAE* 17:426-428
- Mailhol, J.C., Ruelle, P., Nemeth, I., (2001). Impact of fertilisation practices on nitrogen leaching under irrigation. *Irrig. Sci.* 20: 139-147.
- Simunek, J., Sejna, M., and Van Genuchten, M.Th., (1999) The HYDRUS-1D and HYDRUS-2D codes for estimating unsaturated soil hydraulic and solutes transport parameters. *Agron Abstr* 357.
- Popova Z. (1900) Water application efficiency in surface irrigation. PhD thesis. University of Architecture Civil engineering and Geodesy. Sofia.
- Popova Z., I. Petrova, (1993) Impact of Modelling in Furrow Irrigation Erosion, International symposium "Farm lands erosion in temperate plains, environment and hills", Saint-Cloud, Paris, Elsevier Science Publishers. pp.347-355.
- Popova Z., I. Varlev, V. Kutev (1994a). Soil erosion in continuous and surge furrow irrigation, Transactions of the 15th International Congress of Soil Science, Volume 2b, Commission I. Acapulco, Mexico. pp.25-26.
- Popova Z., I. Varlev, I. Gospodinov (1994b) Surge irrigation as an environment friendly technology. Regional European Conference of ICID, Varna, Bulgaria, May. pp.241-350.
- Popova Z., E. Ikonomova, I. Varlev and V. Kutev (1998a) Alternative Furrow Irrigation under the conditions of cinnamonic forest red soils (part two): deep percolation and environmental impact. Transactions of the International Conference "Hydro-melioration" 98, Sofia
- Popova Z., I. Varlev, V. Kutev, E. Ikonomova (1998b) Irrigation and cropping techniques to prevent natural water pollution. Papers of the 1st Inter-Regional Conference "Environment - Water: Innovative Issues in Irrigation and Drainage, Lisbon, pp.6-13.

- Popova Z., Leviel B., Kercheva M., Varlev I., Gosse G. (1999) Linking water in N-dynamics of cropped soil into risk of ground water pollution. In Musy A., Pereira L.S., Fritsch M. (eds.) Proceedings of 2nd Inter-Regional Conference on Environment-Water "Emerging Technologies for Sustainable Land Use and Water Management", 1-3 Sept. 1999, Lausanne, PPUR, pp41-42.
- Popova Z., Varlev I., Kutev V., Shopova D. (2000) Lysimeter study on ground water degradation due to different fertilisation and irrigation management. Soil science and agrochemistry. Vol.XXXV N 4, pp.19-23.
- Popova Z., B. Gabrielle, B.Leviel, M.Kercheva (2001) Test of biological module of CERES-maize model in lysimeters on Chromic Luvisol. Soil science and agrochemistry. Vol.XXXVI N 4-6, pp.105-110.
- Popova Z., D.Shopova (2002) Water balance under maize in lysimeters on Chromic Luvisol. Soil science and agrochemistry. Vol.XXXVI I N 1-3, pp.5-10.
- Popova Z., Kercheva M. (2004) Integrated strategies for maize irrigation and fertilisation under water scarcity and environmental pressure in Bulgaria.
- Van Genuchten, M.Th., (1980) A close-form equation for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated soils. Soil Sci. Soc. Am. J., Vol. 44:892-898.
- Varlev I., Z.Popova & I.Gospodinov. (1998a). Furrow surge irrigation as water saving technique. Selected papers of the first inter-Regional Conference "Environment - Water: Innovative Issues in Irrigation and Drainage" edited by L.S.Pereira and J.Gowing, pp.131-140.
- Varlev I., Popova Z., B.Mladenova. (1998b.) Alternative Furrow Irrigation under the conditions of cinnamonic forest red soils (part one): uniformity of water distribution and yield. Transactions of the International Conference "Hydro-melioration" 98, Sofia.
- Waskom R.M., G.E.Gardon and M.A.Crooktan (1994) Best management practices. A guide for Colorado Producers. Colorado State University.





# Résumé

L'irrigation à la raie compte parmi les techniques d'irrigation les plus répandues dans le monde et le recours à la micro-irrigation, qui permet d'adapter les apports d'eau et de fertilisants selon les besoins de la plante au cours de la saison de culture, est en forte augmentation. La maîtrise des transferts bi- et tridirectionnels eau-solutés dans le contexte de ces pratiques est très importante. Elle permet leur amélioration afin de limiter les gaspillages d'eau, le lessivage d'azote et d'optimiser le rendement des cultures.

La modélisation développée ici se propose de représenter les transferts eau-soluté en se basant sur une résolution semi-analytique des équations de transferts bi- et tridirectionnels (équation de Richards et équation de convection-diffusion de solutés). Le caractère analytique de ce type de modélisation permet de simuler des événements dont les pas de temps varient entre l'heure pour une irrigation et la journée pour la redistribution de l'eau et des solutés dans le sol. Cette méthode permet en outre de s'affranchir des contraintes propres aux schémas numériques : conditions de convergence de la solution et temps de calculs conséquents. Cette modélisation fondée sur des bases mécanistes conserve, en dépit de certaines hypothèses simplificatrices, un caractère hautement prédictif.

Compte tenu de la complexité de la géométrie du domaine, notamment en irrigation à la raie, et afin de pouvoir traiter des conditions initiales hétérogènes, le problème général est décomposé en problèmes élémentaires dont la résolution analytique est rendu possible par l'utilisation de la fonction de Green. La solution du problème général est alors obtenue par superposition des solutions analytiques de ces problèmes élémentaires.

La méthode utilisée a l'avantage d'être adaptative. Elle permet de modéliser différentes pratiques d'irrigation et de fertilisation sur une vaste gamme de temps caractéristiques de l'événement. La résolution analytique peut également être appliquée de la même façon sur les transferts hydriques, les transferts de solutés et permet également la modélisation de l'extraction racinaire. Son efficacité et son domaine de validité sont cependant limités par les hypothèses sur lesquelles repose sa construction. Des méthodes permettant d'accroître les potentialités de cette modélisation sont à cet égard proposées.