



HAL
open science

Etude du bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale (VCSELs) et les lasers à solide Nd:YVO4

Jean-Pierre Hermier

► **To cite this version:**

Jean-Pierre Hermier. Etude du bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale (VCSELs) et les lasers à solide Nd:YVO4. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 2000. Français. NNT: . tel-00011773

HAL Id: tel-00011773

<https://theses.hal.science/tel-00011773>

Submitted on 7 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



**LABORATOIRE
KASTLER BROSSSEL**



Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique quantique

présentée par

Jean-Pierre Hermier

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**Etude du bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs
à cavité verticale (VCSELs) et les lasers à solide Nd:YVO₄**

Soutenue le 4 décembre 2000 devant le jury composé de :

M. Claude Delalande	Président
Mme Elisabeth Giacobino	Directrice de thèse
M. Philippe Grangier	
M. Luigi Lugiato	
M. Jean-Paul Pocholle	Rapporteur
M. Maxi San Miguel	Rapporteur



**LABORATOIRE
KASTLER BROSSEL**



Thèse de doctorat de l'Université Paris VI

Spécialité : Physique quantique

présentée par

Jean-Pierre Hermier

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**Etude du bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs
à cavité verticale (VCSELs) et les lasers à solide Nd:YVO₄**

Soutenue le 4 décembre 2000 devant le jury composé de :

M. Claude Delalande	Président
Mme Elisabeth Giacobino	Directrice de thèse
M. Philippe Grangier	
M. Luigi Lugiato	
M. Jean-Paul Pocholle	Rapporteur
M. Maxi San Miguel	Rapporteur

Ce travail de thèse a été effectué au Laboratoire Kastler Brossel de 1997 à 2000. Je remercie ses directrices successives Michèle Leduc et Elisabeth Giacobino de m'y avoir accueilli et de m'avoir permis de profiter de conditions de recherche exceptionnelles. Pendant ces trois années, j'ai bénéficié d'une bourse de docteur ingénieur du Centre National de la Recherche Scientifique. Je tiens à remercier Jean Dalibard grâce à qui j'ai pu également bénéficier d'une allocation de moniteur.

Elisabeth Giacobino a dirigé ce travail. Je la remercie pour ses précieux conseils qui ont guidé mes travaux, pour la confiance qu'elle m'a accordée tout au long de ma thèse et pour son soutien. Je la remercie également pour l'attention qu'elle a portée à la correction de ce mémoire.

Je remercie pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de faire partie du jury Claude Delalande, Philippe Grangier, Luigi Lugiato, Jean-Paul Pocholle et Maxi San Miguel.

A mon arrivée au laboratoire, j'ai travaillé pendant 18 mois avec Alberto Bramati dont j'ai beaucoup apprécié la gentillesse et la compétence. Il a grandement participé à la réussite de ce travail et m'a permis de travailler dans une ambiance très agréable. Je le remercie pour l'aide qu'il m'a apporté tout au long de ma thèse, lors de ses séjours répétés au laboratoire et au travers de nos fréquents échanges par e-mail.

J'ai eu également la grande chance et le grand plaisir de travailler pendant 9 mois avec Antonio Zelaquett-Khoury. J'ai énormément profité de ses talents de théoricien et de ses qualités d'expérimentateur. Je le remercie vivement pour nos longues discussions de physique et pour sa gentillesse.

A la fin de ma thèse, Michaël Kolobov m'a apporté une aide précieuse pour mener à terme le calcul du bruit d'intensité des VCSEs. A son contact, j'ai beaucoup appris dans le domaine du calcul de bruit quantique.

Isabelle Maurin a débuté sa thèse sur cette expérience. Je l'ai beaucoup appréciée pour son dynamisme. Travailler avec elle fut très agréable et très stimulant. Je lui souhaite une grande réussite pour la suite de ses travaux.

Je voudrais aussi remercier toutes les personnes qui ont contribué à la réussite de ce travail :

- les membres permanents du laboratoire : Claude Fabre, toujours disponible pour une explication sur une question délicate d'optique quantique, Agnès Maître, pour ses conseils pertinents lors de mes présentations orales, Michel Pinard, Serge Reynaud, Astrid Lambrecht, François Nez, François Biraben, Jean-Michel Courty, Catherine Schwob, Lucille Julien, Nicolas Billy, Thomas Coudreau, Benoît Grémaud, Dominique Delande, Antoine Heidmann, Paul Indelicato, Laurent Hilico, Jean-Pierre Faroux, Saïda Guelatti, Bernard Cagnac et Corinne Poisson.

- les thésitifs, stagiaires et visiteurs qui ont eux aussi contribué à maintenir une ambiance chaleureuse et dynamique : Francesco Marin (qui m'a fait profité de ses talents d'expérimentateur), Francesca Grassia, Gaétan Messin, Laurent Vernac, Yassine Hadjar, Jean-Philippe Karr, Stéphane Boucard, Pascal El Khoury, Thibaud Jonckerre, Matthias Vaupel, Laurent Longchambon, Sara Ducci, Marcello Martinelli, Vincent Josse, Augustin Baas, Gaétan Hagel, Bruno Manil, Cyriaque Genet, Eric-Olivier Le Bigot, Gustavo Rodrigues, Kuanshou Zhang, Battesti Rémi et Tristan Briant.

Un grand merci aussi à mes partenaires « sportifs » Nicolas Treps et Pierre-François Cohadon pour les agréables pauses de midi. Je remercie aussi Pierre-François pour sa relecture attentive de mon manuscrit.

J'ai aussi bénéficié du précieux concours des techniciens et ingénieurs du laboratoire et je tiens à les en remercier. Les membres de l'atelier d'électronique m'ont beaucoup aidé. Mohamed Boujrad, Jean-Pierre Okpizs et Philippe Pace en particulier ont toujours été disponibles pour concevoir et réaliser les montages dont j'avais besoin. Je tiens à remercier Francis Tréhin, Pascal Travers et Bernard Rodriguez qui ont trouvé les solutions les mieux adaptées pour les montages mécaniques que j'ai utilisés.

Je remercie les secrétaires Monique Bonnamy, Karima Nouira, Karine Vasseur et Blandine Moutiers pour leur efficacité et leur gentillesse.

Enfin je remercie ma famille pour son soutien au cours de cette thèse. Cette réussite est aussi la sienne.

Table des matières

Table des matières	i
Table des figures	v
Introduction	1
1. Éléments de théorie sur le bruit quantique	5
1.1 Description des faisceaux lumineux	5
1.1.1 En optique classique	5
1.1.2 En optique quantique	6
1.1.3 Quadratures du champ	8
1.1.4 Intensité du champ électrique	9
1.2 Bruit dans les mesures optiques	10
1.2.1 Définition des fluctuations	10
1.2.2 Variance de bruit	10
1.2.3 Définition quantique des fluctuations	11
1.3 Relation d'incertitude	11
1.3.1 Relation d'incertitude sur les spectres de bruit	11
1.3.2 Limite quantique standard	12
1.3.3 Bruit d'intensité et de phase	12
1.3.4 Représentation des états du champ	13
1.4 Mesure du bruit d'intensité	15
1.4.1 Détection homodyne	15
1.4.2 Effet des pertes	17
1.5 Représentations semi-classiques des états du champ	18
1.5.1 Introduction	18
1.5.2 La représentation P	20
1.5.3 La représentation de Wigner-Weyl	21

2. Étude théorique du bruit d'intensité dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale (VCSELs)	23
2.1 Introduction	23
2.1.1 La réduction de bruit dans les lasers	23
2.1.2 Spécificités des VCSELs	25
2.2 Le modèle semi-classique de San Miguel	26
2.2.1 Équations fondamentales	26
2.2.2 Solutions stationnaires	29
2.3 Modèle quantique pour les VCSELs	33
2.3.1 Les équations de Langevin quantiques microscopiques	34
2.3.2 Les équations de Langevin quantiques macroscopiques	35
2.3.3 Équations en nombres complexes et élimination adiabatique des populations des niveaux inférieurs et des polarisations	39
2.3.4 Spectres de bruit	42
2.3.5 Prévisions du modèle	49
3. Étude expérimentale du bruit d'intensité des VCSELs	57
3.1 Introduction	57
3.2 Présentation des lasers à semi-conducteurs	57
3.2.1 Gain	58
3.2.2 Confinement optique	61
3.3 Les VCSELs	62
3.3.1 Gain	62
3.3.2 Confinement optique	62
3.3.3 Polarisation du faisceau	63
3.4 Systèmes de détection	64
3.4.1 Détection équilibrée	64
3.4.2 Détection avec référence	70
3.5 Les VCSELs en régime libre	72
3.5.1 Présentation des VCSELs	72
3.5.2 Caractéristiques des VCSELs en continu	74
3.5.3 Caractéristiques de bruit des VCSELs	76
3.6 Injection optique des VCSELs	90
3.6.1 Introduction	90
3.6.2 Montage à injection des VCSELs	91
3.6.3 Résultats expérimentaux	97

3.6.4	Conclusion	97
3.7	Structure spatiale du bruit d'intensité des VCSELs	99
3.7.1	Introduction	99
3.7.2	Modèle quantique phénoménologique	100
3.7.3	Montage expérimental	104
3.7.4	Résultats expérimentaux	105
4.	Étude du bruit d'intensité dans le laser Nd:YVO ₄	109
4.1	Rappels sur le modèle à deux niveaux	109
4.1.1	Description	109
4.1.2	Prévisions	112
4.1.3	Résultats expérimentaux	113
4.2	Ordre de grandeur des termes non linéaires	115
4.3	Amélioration des caractéristiques du bruit à basse fréquence du laser Nd:YVO ₄	115
4.4	Injection de l'YVO ₄	117
4.4.1	Extension du modèle Kolobov <i>et al.</i> au cas des lasers injectés	117
4.4.2	Réalisation expérimentale de l'injection du laser Nd:YVO ₄	119
4.4.3	Résultats	120
4.5	Articles sur le bruit quantique dans le laser Nd:YVO ₄	123
	Conclusion	167
	Annexe	171
A	Introduction	171
B	Coefficients de diffusion microscopiques	172
C	Coefficients de diffusion macroscopiques	181
C.1	Calcul de $2D_{\hat{D}\hat{D}}$	182
C.2	Calcul de $2D_{\hat{D}'\hat{D}'}$	184
C.3	Calcul de $2D_{\hat{a}\hat{a}}$	186
C.4	Calcul de $2D_{\hat{a}'\hat{a}'}$	186
C.5	Calcul de $2D_{\hat{p}_+\hat{p}_+}$ et de $2D_{\hat{p}_-\hat{p}_-}$	187
D	Coefficients de diffusion dans l'ordre normal	187
E	Coefficients de diffusion après élimination adiabatique des polarisations	198
	Bibliographie	207

Table des figures

1.1	Représentation du champ électrique dans l'espace des phases.	9
1.2	Représentation d'un état cohérent.	14
1.3	Représentation du vide.	14
1.4	Représentation d'un état comprimé en intensité.	14
1.5	Représentation d'un état comprimé en phase.	15
1.6	Représentation d'un état comprimé selon une quadrature quelconque.	15
1.7	Schéma de la détection homodyne.	16
1.8	Modélisation des pertes optiques par une lame séparatrice.	17
1.9	Modélisation des pertes optiques expérimentales.	18
2.1	Structure des bandes d'énergie dans un matériau semi-conducteur.	26
2.2	Système à quatre niveaux de notre modèle.	26
2.3	Solutions stationnaires du modèle SFM : la solution de la figure (a) est polarisée linéairement selon (Ox), la solution de la figure (b) est polarisée linéairement selon (Oy) et les solutions des figures (c) et (d) sont polarisées elliptiquement.	31
2.4	Diagramme de stabilité des polarisations linéaires prévu par le modèle SFM. On a considéré les paramètres suivants : $\kappa = 100 GHz$, $\gamma_a = 1 GHz$, $\gamma_{\perp} = 1000 GHz$, $\gamma_J = 50 GHz$, et $\alpha = 3$	33
2.5	Analogie entre la division de la pompe entre les deux niveaux supérieurs et le franchissement d'une lame semi-transparente par un faisceau lumineux.	37
2.6	Notations.	45
2.7	Spectres de bruit d'intensité du faisceau total. Au-dessus de chaque spectre, on a indiqué la valeur du taux de pompe total 2μ . Pour les autres paramètres, on a : $\kappa = 100 GHz$, $\gamma_a = 1 GHz$, $\gamma_{\perp} = 1000 GHz$, $\gamma_J = 50 GHz$, $\gamma_p = 40 GHz$, $\alpha = 3$, $\Omega = 2\pi 10 MHz$ et $p = 1$	49

2.8	Spectre de bruit d'intensité du faisceau total (courbe <i>a</i>) et de la composante à $\varphi = 45^\circ$ (courbe <i>b</i>). Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 0 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $\tau = 6$ et $p = 1$	51
2.9	Spectre de bruit d'intensité du faisceau total (courbe <i>a</i>) et de la composante à $\varphi = 45^\circ$ (courbe <i>b</i>). Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $\tau = 6$ et $p = 1$	52
2.10	Bruit d'intensité du faisceau filtré par un polariseur en fonction de l'angle entre le polariseur et le mode au-dessus du seuil. La courbe (<i>a</i>) représente le bruit d'intensité, la courbe (<i>b</i>) la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau et la courbe (<i>c</i>) le bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total et la même intensité que notre faisceau. Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $\tau = 1,85$, $\Omega = 2\pi 10 \text{ MHz}$ et $p = 1$	52
2.11	Bruit d'intensité du faisceau filtré par un polariseur en fonction de l'angle entre le polariseur et le mode au-dessus du seuil. La courbe (<i>a</i>) représente le bruit d'intensité, la courbe (<i>b</i>) la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau et la courbe (<i>c</i>) le bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total et la même intensité que notre faisceau. Les valeurs des paramètres sont identiques à celles de la figure (2.10) à l'exception du taux de pompage τ qui vaut 6.	53
2.12	Faisceaux corrélés obtenus par traversée d'une lame semi-transparente.	54
2.13	Évolution de la corrélation entre les composantes de polarisation $\varphi = \pi/4$ et $\varphi = 3\pi/4$ en fonction de la fréquence. Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $\tau = 6$ et $p = 1$	55
2.14	Évolution de la corrélation entre les deux composantes de polarisations φ et $\varphi + \pi/2$ en fonction de l'angle φ . Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $\tau = 6$, $\Omega = 2\pi 10 \text{ MHz}$ et $p = 1$	56
3.1	Niveaux d'énergie d'une jonction p-n soumise à une tension V	59
3.2	Schéma des niveaux d'énergie dans une hétérojonction.	60
3.3	Schéma des niveaux d'énergie dans une structure à puits quantiques.	60

3.4	Schéma des niveaux d'énergie dans une structure à trois puits quantiques.	60
3.5	Comparaison de la géométrie des diodes lasers et des VCSELs.	61
3.6	Réseau bidimensionnel de VCSELs.	62
3.7	Schéma des différents types de confinement optique possible pour les VCSELs: (a) guidage par implantation de protons (guidage par gain), (b) guidage par l'indice de l'air (guidage par indice) et (c) guidage par oxydation sélective (guidage par indice).	63
3.8	Détail des amplificateurs des photodiodes.	66
3.9	Montage sommateur des MiniCircuits.	67
3.10	Montage soustracteur des MiniCircuits.	68
3.11	Réjection en fonction du branchement des MiniCircuits.	69
3.12	Montage permettant la mesure de la réjection des photodiodes et des amplificateurs.	69
3.13	Détection équilibrée du faisceau d'une diode pour la calibration de la limite quantique standard.	71
3.14	Montage de la détection directe.	71
3.15	Photographie de nos VCSELs. Sur cette photographie, la plaque contient 168 VCSELs.	72
3.16	Détail d'un VCSEL.	72
3.17	Schéma des contacts électriques d'un VCSEL.	73
3.18	Caractéristique courant - puissance d'un VCSEL de 5 μm de diamètre.	74
3.19	Seuil et efficacité quantique des VCSELs en fonction de leur diamètre.	74
3.20	Montage du monochromateur pour identifier les modes transverses (ainsi que leur polarisation) émis par les VCSELs.	76
3.21	Modes transverses émis par un VCSEL de 16 μm de diamètre pour un courant égal à cinq fois le courant de seuil. Sous chaque image, on a reporté les deux nombres de l'indexation standard des modes de Laguerre-Gauss.	77
3.22	Montage de l'expérience pour mesurer le bruit d'intensité de chaque composante de polarisation.	78

3.23	Bruit d'intensité mesuré sur la photodiode en fonction de l'angle entre le polariseur et la polarisation du mode TEM ₀₀ . Les résultats expérimentaux sont représentés par les (▲). La courbe (a) représente les prévisions théoriques, la courbe (b) la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau et la courbe (c) le bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total que notre faisceau. Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $r = 1,85$, $\Omega = 2\pi 10 \text{ MHz}$ et $p = 1$	79
3.24	Corrélation normalisée entre les deux composantes orthogonales de polarisation φ et $\varphi + \pi/2$ en fonction de l'angle φ . La courbe (a) correspond aux prévisions théoriques et la courbe (b) aux résultats expérimentaux. Les valeurs des paramètres sont identiques à celles de la figure (3.23).	79
3.25	Montage de notre monochromateur pour caractériser la largeur de raie de l'émission de la composante de polarisation orthogonale à la polarisation du mode au-dessus du seuil.	81
3.26	Allure des spectres des émissions suivant les deux composantes (Ox) et (Oy) dans le cas où le spectre de l'émission suivant (Oy) est étroit.	81
3.27	Lame semi-transparente représentant l'effet du polariseur sur les deux composantes de polarisation.	82
3.28	Variation du bruit d'intensité avec la position du polariseur dans le cas où la raie de l'émission selon (Oy) est étroite. Les (▲) correspondent aux mesures; la courbe (a) correspond aux prévisions théoriques, la courbe (b) au bruit d'intensité du faisceau global, la courbe (c) à la limite quantique standard et la courbe (d) au bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total et la même intensité que notre faisceau.	85
3.29	Allure des spectres des émissions suivant les deux composantes (Ox) et (Oy) dans le cas où le spectre de l'émission suivant (Oy) est large.	86
3.30	Variation du bruit d'intensité avec la position du polariseur dans le cas où la largeur de raie de l'émission selon (Oy) est importante. Les (▲) correspondent aux mesures expérimentales et la courbe (a) au bruit d'intensité du faisceau global.	87
3.31	Spectre de bruit d'intensité normalisé d'un faisceau émis par un VCSEL. On observe dans ce cas une compression du bruit d'intensité.	88

3.32	Décomposition spectrale du faisceau de la figure (3.31). Les modes (▲) sont polarisés verticalement, les modes (■) sont polarisés horizontalement.	88
3.33	Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB). La courbe (a) correspond au bruit d'intensité total, la courbe (b) au bruit du mode TEM_{00} et la courbe (c) au bruit d'intensité du mode TEM_{01}	90
3.34	Montage expérimental pour l'injection des VCSELs par une diode laser.	91
3.35	Montage du réseau.	93
3.36	Photodiode interne permettant d'optimiser le seuil de la diode.	93
3.37	Puissance lumineuse détectée par la photodiode interne lorsque l'on module le courant d'alimentation de la diode près du seuil. Cette courbe est observée grâce à un oscilloscope.	94
3.38	Profils transverses d'intensité de la diode suivant les axes horizontal (Ox) et vertical (Oy).	95
3.39	Spectres de bruit d'intensité d'un VCSEL de $7 \mu m$. Le taux de pompage vaut $r = 5$. La courbe (a) correspond au bruit d'intensité lorsque le VCSEL n'est pas injecté. La courbe (b) correspond au bruit d'intensité pour le même courant de pompage et une puissance d'injection de 2 %. On n'observe pas de compression du bruit d'intensité.	98
3.40	Spectres de bruit d'intensité d'un VCSEL de $7 \mu m$. Le taux de pompage vaut $r = 3, 25$. La courbe (a) correspond au bruit d'intensité lorsque le VCSEL n'est pas injecté. La courbe (b) correspond au bruit d'intensité pour le même courant de pompage et une puissance d'injection de 2 %. On observe une compression du bruit d'intensité.	98
3.41	Profils transverses d'intensité des modes TEM_{00} et TEM_{01}	100
3.42	Principe de l'expérience : pour mesurer le profil transverse du bruit d'intensité, on coupe le faisceau dans le plan transverse par une lame de rasoir.	100
3.43	Lame semi-transparente utilisée pour modéliser les pertes introduites par la lame de rasoir sur les deux modes.	101
3.44	Spectre théorique du bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. On a $v_0 = 480, 6$, $v_1 = 28, 22$, $q = 0, 11$ et $C = -1$. On observe pour certaines positions de la lame une compression du bruit d'intensité.	104

3.45	Spectre théorique du bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. On a $v_0 = 24,37$, $v_1 = 598,2$, $q = 2,7$ et $C = -1$. Dans ce cas, on n'obtient pas de compression du bruit d'intensité.	105
3.46	Spectres de bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. La courbe (a) représente les prévisions théoriques, la courbe (b) les résultats expérimentaux et la courbe (c) les résultats d'un filtrage global du faisceau. Dans ce cas, $v_0 = 25,82$, $v_1 = 330,9$, $q = 6,13$ et $C = -0,75$. La fréquence d'analyse est de 15 MHz.	107
3.47	Spectres de bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. La courbe (a) représente les prévisions théoriques, la courbe (b) les résultats expérimentaux et la courbe (c) les résultats d'un filtrage global du faisceau. Dans ce cas, $v_0 = 80,2$, $v_1 = 3648$, $q = 34,8$ et $C = -0,98$. La fréquence d'analyse est de 15 MHz.	107
4.1	Schéma atomique à deux niveaux.	110
4.2	Spectre de bruit d'intensité typique prévu par le modèle à deux niveaux.	112
4.3	Spectres de bruit d'intensité normalisé du laser Nd:YVO ₄ (dB) pour une pompe au bruit d'intensité comprimé (courbe a) et pour une pompe bruyante (courbe b).	113
4.4	Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB) entre 0 et 20 MHz. La courbe (a) représente les prévisions théoriques et la courbe (b) les résultats expérimentaux.	113
4.5	Spectres de bruit d'intensité normalisé entre 0 et 300 kHz. La courbe (a) représente les prévisions théoriques et la courbe (b) les résultats expérimentaux.	114
4.6	Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB) entre 0 et 20 MHz. La courbe (a) (respectivement c) représente les résultats expérimentaux (respectivement théoriques) sans rétroaction et la courbe (b) (respectivement d) les résultats expérimentaux (respectivement théoriques) avec rétroaction.	116

4.7	Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB) entre 0 et 200 kHz pour le laser Nd:YVO ₄ . La courbe (a) représente les résultats expérimentaux sans rétroaction, la courbe (b) les résultats expérimentaux avec rétroaction et la courbe (c) les résultats théoriques avec rétroaction.	116
4.8	Spectres de bruit d'intensité théoriques entre 0 et 20 MHz pour diverses puissances d'injection ($x=0,16$, $x=0,23$, $x=0,28$, $x=0,32$ et $x=0,36$). . .	121
4.9	Spectres de bruit d'intensité théoriques et expérimentaux entre 0 et 20 MHz pour diverses puissances d'injection ($x=0,16$, $x=0,23$, $x=0,28$, $x=0,32$ et $x=0,36$).	121
4.10	Spectres de bruit d'intensité théorique (courbe a) et expérimental (courbe b) entre 0 et 300 kHz	122

Introduction

Au début du 20^{ème} siècle, la théorie de Planck permettant d'interpréter la distribution spectrale du rayonnement du corps noir est la première indication de la nature quantique du champ électromagnétique. Einstein remarque que la démonstration de Planck présuppose implicitement que l'énergie du champ électromagnétique ne peut varier que par quanta de grandeur $h\nu$. Il démontre aussi en 1905 que l'effet photoélectrique peut être compris en considérant qu'un rayonnement suffisamment faible se comporte "comme un milieu discontinu, constitué de quanta d'énergie de grandeur $h\nu$ " : le concept de photon est né. Plus tard dans les années 20, la formulation par Heisenberg des inégalités qui portent son nom fait apparaître la notion d'incertitude quantique : le produit des variances de deux observables conjuguées ne peut être inférieur à une certaine valeur finie. Ainsi, la position et l'impulsion d'une particule ne peuvent être définies simultanément avec une précision arbitraire. Appliquées au champ lumineux, ces inégalités imposent par exemple une relation entre les fluctuations d'intensité et de phase.

La mise au point du laser constitua à la fin des années 50 une étape cruciale pour se rapprocher de la limite imposée par cette relation. En comparaison des sources classiques utilisées jusqu'alors, le laser offrait des qualités exceptionnelles en termes de précision, de puissance et de géométrie. Rapidement, les progrès dans la réalisation des lasers permirent de s'affranchir de nombreuses sources de bruit d'origine technique et les fluctuations d'intensité des faisceaux produits par ces lasers constituèrent alors une illustration expérimentale des fluctuations quantiques décrites par les inégalités de Heisenberg. La limite atteinte, dite limite quantique standard, constituait une réelle limitation à la sensibilité dans les mesures de précision en spectroscopie ou encore en interférométrie.

Cependant, dès les années 70, apparaissent les premières propositions visant à dépasser cette limite. En effet l'inégalité de Heisenberg n'impose une limite que sur le produit des variances de deux observables conjuguées. Au prix d'une incertitude accrue sur une observable, il est possible d'améliorer la précision au-delà de la limite quan-

tique standard sur son observable conjuguée. De tels états non classiques sont dits états comprimés. C'est en 1985 qu'un tel état fut réalisé expérimentalement pour la première fois [Slusher 85]. Slusher *et al.* utilisèrent la non linéarité de type $\chi^{(3)}$ d'une vapeur de sodium. Grâce à cette technique, plusieurs auteurs ont démontré des compressions de bruit sous la limite quantique standard d'environ 50 % [Shelby 86, Shirasaki 90]. Depuis, le recours à des matériaux non linéaires s'est généralisé aux matériaux possédant une non linéarité de type $\chi^{(2)}$, encore plus performants en termes de réduction du bruit d'intensité [Polzik 92, Schneider 96]. Au laboratoire Kastler Brossel, un oscillateur paramétrique optique a permis d'obtenir jusqu'à 86 % de réduction du bruit sous la limite quantique standard [Mertz 91a].

Une autre approche s'applique aux lasers eux-mêmes et permet d'obtenir des états comprimés en agissant sur le mécanisme de pompe du laser [Golubev 84]. Le principe est appelé "principe de la pompe régulière". Il consiste à supprimer le bruit de pompe. Si le taux de conversion de la puissance de pompage en puissance lumineuse est important, la statistique du flux de photons émis par le laser reproduira celle de la pompe. L'application de ce principe aux diodes lasers a permis d'obtenir 70 % de compression du bruit d'intensité [Kilper 96]. Le travail présenté ici est consacré à l'application du principe de la pompe régulière et plus généralement à l'étude du bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale (VCSELs, dont l'acronyme anglais signifie *Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers*) et les lasers à solide Nd:YVO₄.

Après une introduction sur les principes généraux de la théorie quantique du champ électromagnétique et ses conséquences sur le bruit d'intensité d'un faisceau lumineux, nous présentons en détail le modèle théorique qui permet de calculer les caractéristiques de bruit du faisceau émis par un VCSEL lorsqu'un seul mode longitudinal et transverse oscille. Pour cela, nous appliquons la méthode des forces de Langevin aux équations de Heisenberg du modèle dit de San Miguel [San Miguel 95]. San Miguel, Feng et Moloney ont en effet développé un modèle semi-classique qui est tout à fait adapté aux lasers semi-conducteurs à microcavité comme les VCSELs. Il tient compte des moments cinétiques des bandes de conduction et de valence autour de la transition laser et a permis de mieux comprendre les variations de la polarisation du faisceau émis par les VCSELs avec le courant électrique d'alimentation [Regalado 97]. Notre modèle, fondé sur les équations de San Miguel, permet d'inclure les effets quantiques. Même lorsqu'un seul mode transverse oscille, notre modèle prévoit des anticorrélations entre ce mode et les modes en dessous du seuil. Ce phénomène a déjà été observé avec les diodes lasers [Marin 95, Zhang 95]. Aussi la polarisation du faisceau à l'aide d'un élément polarisant peut induire une augmentation du bruit d'intensité.

Dans le chapitre suivant, nous présentons tout d'abord une étude expérimentale détaillée des caractéristiques de bruit des faisceaux émis par les VCSELs lorsqu'ils oscillent librement. Nous montrons que certains de ces lasers peuvent produire des états comprimés. De tels faisceaux sont composés de plusieurs modes transverses polarisés linéairement, les deux directions de polarisation possibles étant orthogonales. Ces modes considérés individuellement sont très bruyants ce qui met en lumière l'importance des anticorrélations entre ces modes dans la détermination des propriétés de bruit d'intensité des VCSELs. Nous comparons aussi les résultats de nos mesures aux prévisions théoriques décrites dans le second chapitre et nous constatons un excellent accord entre théorie et expérience. Nous présentons ensuite les résultats concernant la réduction du bruit d'intensité des faisceaux émis par les VCSELs à l'aide de l'injection optique. Grâce à cette méthode, nous démontrons que l'on peut obtenir de la compression de bruit à partir de VCSELs qui montrent toujours de l'excès de bruit en régime libre. Cette réduction du bruit s'accompagne de la réduction de la puissance des modes transverses non injectés. Enfin, la dernière partie de ce chapitre est consacrée à l'étude de la structure spatiale du bruit d'intensité des faisceaux produits par les VCSELs. En effet, les modes transverses fortement anticorrélés qui peuvent osciller simultanément n'ont pas la même répartition d'intensité dans le plan transverse. Si on filtre spatialement le faisceau, on peut donc faire varier la contribution respective de chaque mode au bruit d'intensité total. On étudie en détail le cas simple de deux modes transverses polarisés orthogonalement au-dessus du seuil. Dans ce cas, on peut développer un modèle quantique phénoménologique simple sans paramètres libres et comparer les résultats expérimentaux aux prévisions de ce modèle. L'accord obtenu entre théorie et expérience est excellent.

Dans le dernier chapitre, nous étudions en détail le bruit d'intensité des faisceaux émis par les lasers à solide Nd:YV0₄. Nous démontrons que le désaccord à basse fréquence observé expérimentalement par rapport aux prévisions du modèle couramment utilisé [Kolobov 93] pour caractériser leur bruit provient d'effets non linéaires dus à l'importance du pic de bruit de l'oscillation de relaxation. Nous donnons enfin les résultats de deux méthodes pour réduire l'importance de ce pic. La première s'appuie sur une rétroaction optique, la seconde sur l'injection optique. La réduction du bruit d'intensité observée est en partie en accord avec la réduction attendue.

1. Éléments de théorie sur le bruit quantique

Nous présentons ici une description quantique du rayonnement développée dans le cours de Claude Fabre donné en 1995 à l'École d'été des Houches [Fabre 95]. Son approche consiste à quantifier le faisceau émis par un laser quasi-monomode dont les distributions spatiale transverse et spectrale sont finies. Moins habituelle que la quantification du champ dans une boîte de dimension finie, cette description est plus proche de la réalité expérimentale des expériences d'optique quantique.

1.1 Description des faisceaux lumineux

1.1.1 En optique classique

Considérons un champ électromagnétique quasi-monomode centré à la fréquence ω_0 , dont on ne considère que les modes compris dans une bande de fréquence de largeur $\delta\omega \ll \omega_0$ autour de ω_0 , de polarisation déterminée, de dimension transverse finie et se propageant suivant un axe (Oz). Classiquement, le champ électrique d'un tel faisceau est donné par :

$$E(\vec{r}, t) = E^{(+)}(\vec{r}, t) + (E^{(+)}(\vec{r}, t))^* \quad (1-1)$$

avec :

$$E^{(+)}(\vec{r}, t) = e^{-i\omega_0(t - \frac{z}{c})} u(z, \vec{\rho}) \varepsilon(t, z) \quad (1-2)$$

Dans cette dernière équation, $e^{-i\omega_0(t - \frac{z}{c})}$ est appelée porteuse et décrit les variations rapides du champ. La fonction $u(z, \vec{\rho})$ définit la structure transverse du champ et l'enveloppe du champ $\varepsilon(t, z)$ les variations résiduelles et lentes du champ suivant l'axe (Oz) non contenues dans la porteuse.

Le terme $u(z, \vec{\rho})$ peut être développé sur la base des modes gaussiens (d'Hermite ou de Laguerre). Souvent, le mode gaussien fondamental TEM_{00} est une bonne ap-

proximation de la structure transverse des champs émis par des lasers. On a alors :

$$u(z, \vec{\rho}) = u_{00}(z, \vec{\rho}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{w(z)} e^{-\frac{\rho^2}{w^2(z)} - i\varphi_z(\rho)} \quad (1-3)$$

où :

$$w(z) = w_0 \left(1 + \frac{z^2}{z_R^2}\right)^{1/2} \quad (1-4-a)$$

$$z_R = \frac{\pi w_0^2}{\lambda_0} \quad (1-4-b)$$

$$\varphi_z(\rho) = -\frac{\pi \rho^2 z}{\lambda_0 (z^2 + z_R^2)} + \tan^{-1} \frac{z}{z_R} \quad (1-4-c)$$

λ_0 étant la longueur du mode, z_R sa longueur de Rayleigh et w_0 le waist du faisceau.

1.1.2 En optique quantique

Dans le point de vue de Heisenberg, l'analogie quantique de la fonction $E^{(+)}(\vec{r}, t)$ est l'opérateur $\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t)$, combinaison linéaire d'opérateurs d'annihilation a_l , l'indice l représentant une des ondes planes définies dans une boîte cubique de dimension L . Plus précisément, on a :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2\varepsilon_0}} f_l(\vec{r}) e^{-i\omega_l t} \hat{a}_l \quad (1-5)$$

avec :

$$f_l(\vec{r}) = L^{-3/2} \vec{e}_l e^{i \vec{k}_l \cdot \vec{r}} \quad (1-6)$$

\vec{k}_l et \vec{e}_l sont respectivement le vecteur d'onde et la polarisation du mode l .

Les coefficients $f_l(\vec{r})$ vérifient la relation d'orthogonalité :

$$\int_0^L dx \int_0^L dy \int_0^L dz f_l(\vec{r}) f_{l'}(\vec{r}) = \delta_{ll'} \quad (1-7)$$

Si on se restreint à l'approximation paraxiale, on ne retient dans la somme de l'équation (1-5) que les vecteurs \vec{k}_l de direction proche de (Oz) , ce qui donne :

$$\hat{E}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_{l,p,q} \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2\varepsilon_0}} u_{pq}^l(z, \vec{\rho}) \frac{1}{\sqrt{L}} e^{-i\omega_l(t - \frac{z}{c})} \hat{a}_{l,p,q} \quad (1-8)$$

Dans cette expression, les fonctions $u_{pq}^l(z, \vec{\rho})$ donnent les dépendances transverses des modes gaussiens de vecteur d'onde \vec{k}_l , et $\hat{a}_{l,p,q}$ sont les opérateurs de création correspondant aux différents modes.

Nous effectuons maintenant un certain nombre d'approximations. Dans la dernière équation, on a développé le champ sur la base des modes gaussiens $u_{pq}^l(z, \vec{\rho})$. Restreignons-nous au mode gaussien fondamental (voir la remarque ci-dessus). Le faisceau étant quasi-monomode, on limite la somme \sum_l aux modes tels que $|\omega_l - \omega_0| \ll \omega_0$. Enfin, la faible largeur spectrale du faisceau nous permet de négliger la variation de u_{00}^l avec l . Finalement, on obtient :

$$\widehat{E}_{00}^{(+)}(\vec{r}, t) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2 \varepsilon_0 L}} u_{00}(z, \vec{\rho}) e^{-i \omega_l (t - \frac{z}{c})} \widehat{a}_{l00} \quad (1-9)$$

(La notation \sum_l exprime la restriction de la sommation à l'ensemble des modes contenus dans l'intervalle de fréquence considéré).

On définit alors l'opérateur enveloppe par analogie avec l'équation (1-2) :

$$\widehat{E}_{00}^{(+)}(\vec{r}, t) = u_{00}^l(z, \vec{\rho}) e^{-i \omega_0 (t - \frac{z}{c})} \widehat{\varepsilon}(t, z) \quad (1-10)$$

avec :

$$\widehat{\varepsilon}(t, z) = i \sum_l \sqrt{\frac{\hbar \omega_l}{2 \varepsilon_0 L}} e^{-i \Omega_l (t - \frac{z}{c})} \widehat{a}_{l00} \quad (1-11)$$

où $\Omega_l = \omega_l - \omega_0$.

La transformée de Fourier de l'opérateur enveloppe est alors donnée par :

$$\widehat{\varepsilon}_z(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{\varepsilon}(t, z) e^{i \Omega t} dt \quad (1-12)$$

avec :

$$\widehat{\varepsilon}_z^+(\Omega) = (\widehat{\varepsilon}_z(-\Omega))^+ \quad (1-13)$$

Les relations de commutation de $\widehat{\varepsilon}(t, z)$ se calculent aisément à partir de celles des opérateurs d'annihilation. On obtient :

$$[\widehat{\varepsilon}(t, z), \widehat{\varepsilon}(t', z')] = [\widehat{\varepsilon}^+(t, z), \widehat{\varepsilon}^+(t', z')] = 0 \quad (1-14-a)$$

$$[\widehat{\varepsilon}(t, z), \widehat{\varepsilon}^+(t', z')] = \sum_l \frac{\hbar (\omega_0 + \Omega_l)}{2 \varepsilon_0 L} e^{-i \Omega_l [(t-t') - \frac{z-z'}{c}]} \quad (1-14-b)$$

Si l'on fait tendre L vers l'infini, la somme \sum_n devient une intégrale de la forme $\frac{L}{2\pi} \int d\Omega$ et l'équation (1-14-b) devient :

$$[\widehat{\varepsilon}(t, z), \widehat{\varepsilon}^+(t', z')] = C_{\omega_0} \delta_1 \left(t - t' - \frac{z - z'}{c} \right) \quad (1-15)$$

avec :

$$C_{\omega_0} = \frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 c} \quad (1-16)$$

La fonction δ_1 peut être approximée aux temps longs ($t \gg 2\pi/\omega_0$) par une distribution de Dirac.

On démontre alors aisément :

$$[\hat{\varepsilon}(\Omega), \hat{\varepsilon}(\Omega')] = [\hat{\varepsilon}^+(\Omega), \hat{\varepsilon}^+(\Omega')] = 0 \quad (1-17-a)$$

$$[\hat{\varepsilon}(\Omega), \hat{\varepsilon}^+(\Omega')] = 2\pi C_{\omega_0} \delta_1(\Omega + \Omega') \quad (1-17-b)$$

1.1.3 Quadratures du champ

On définit les deux opérateurs de quadratures du champ $\hat{\varepsilon}_P(t, z)$ et $\hat{\varepsilon}_Q(t, z)$ par :

$$\hat{\varepsilon}_P(t) = (\hat{\varepsilon}(t) + \hat{\varepsilon}^+(t)) \quad (1-18-a)$$

$$\hat{\varepsilon}_Q(t) = -i(\hat{\varepsilon}(t) - \hat{\varepsilon}^+(t)) \quad (1-18-b)$$

L'expression de $\hat{E}(\vec{r}, t)$ en fonction de ces deux opérateurs s'écrit alors :

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi w(z)}} \exp(-\rho^2/w^2(z)) \{ \hat{\varepsilon}_P(t) \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_z(\rho)] + \hat{\varepsilon}_Q(t) \sin[\omega_0(t - z/c) + \varphi_z(\rho)] \} \quad (1-19)$$

Les deux composantes de quadratures sont alors définies par :

$$\hat{E}(\vec{r}, t) = \hat{E}_P(\vec{r}, t) \cos[\omega_0(t - z/c) + \varphi_z(\rho)] + \hat{E}_Q(\vec{r}, t) \sin[\omega_0(t - z/c) + \varphi_z(\rho)] \quad (1-20)$$

À partir des relations de commutation (1-14-a) et (1-14-b), on obtient :

$$[\hat{\varepsilon}_{zP}(\Omega), \hat{\varepsilon}_{zQ}^+(\Omega')] = 4i\pi C_{\omega_0} \delta_1(\Omega + \Omega') \quad (1-21)$$

$\hat{\varepsilon}_P(t, z)$ et $\hat{\varepsilon}_Q(t, z)$ représentent deux projections de l'opérateur enveloppe $\hat{\varepsilon}(t, z)$ dans deux directions orthogonales. Le diagramme de Fresnel de la figure (1.1) illustre la signification géométrique de ces deux opérateurs.

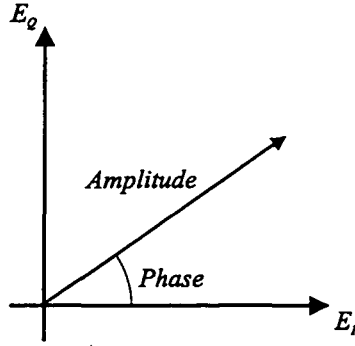


Fig. 1.1 – Représentation du champ électrique dans l'espace des phases.

1.1.4 Intensité du champ électrique

Nous avons présenté ci-dessus la quantification d'un faisceau laser quasi-monomode. Examinons maintenant les conséquences de cette quantification sur les mesures de photodétection, essentielles en optique, que l'on pourrait effectuer sur un tel faisceau. Nous définissons l'opérateur intensité par :

$$\hat{I}(t) = \int \hat{E}^{(-)}(z, \vec{\rho}) \hat{E}^{(+)}(z, \vec{\rho}) d^2\rho \quad (1-22)$$

l'intégrale s'effectuant sur la surface du photodétecteur.

Si on effectue une mesure de photodétection avec un appareil de surface suffisamment étendue pour absorber l'intégralité du faisceau, l'intégrale (1-22) sur tous les modes transverses vaut 1 et on a :

$$\hat{I}(t) = \hat{\varepsilon}^{(+)}(z, \vec{\rho}) \hat{\varepsilon}(z, \vec{\rho}) \quad (1-23)$$

Pour un photodétecteur d'efficacité quantique unitaire, chaque photon est transformé en électron. Si $N(t)$ est le flux de photons et $i(t)$ le courant débité par le photodétecteur, on peut écrire :

$$i(t) = qN(t) = \frac{q}{\hbar\omega_0} P(t) = \frac{2q\varepsilon_0 c}{\hbar\omega_0} |\varepsilon(t, z)|^2 \quad (1-24)$$

Par analogie, on démontre [Gardiner 91] que l'on peut alors définir des opérateurs $\hat{i}(t)$ et $\hat{N}(t)$ pour traiter quantiquement la photodétection :

$$\hat{i}(t) = q\hat{N}(t) = \frac{q}{C_{\omega_0}} \hat{I}(t) = \frac{q}{C_{\omega_0}} \hat{\varepsilon}^+(t, z) \hat{\varepsilon}(t, z) \quad (1-25)$$

1.2 Bruit dans les mesures optiques

1.2.1 Définition des fluctuations

Un photodétecteur permet de transformer un flux de photons en courant électrique $i(t)$, de valeur moyenne $\overline{i(t)}$. Le courant $i(t)$ est affecté d'un certain bruit. Pour caractériser les fluctuations de $i(t)$, on définit la fonction d'autocorrélation :

$$C_i(t, t') = \overline{i(t)i(t')} - \overline{i(t)}\overline{i(t')} \quad (1-26)$$

Pour un processus stationnaire, C_i ne dépend que de $\tau = t - t'$. On peut alors définir la densité spectrale de bruit par :

$$S_i(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_i(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (1-27)$$

On démontre aisément que $S_i(\Omega)$ est une quantité réelle, positive et paire. Les fluctuations d'intensité $\delta i(t) = i(t) - \overline{i(t)}$ sont reliées à $S_i(\Omega)$ par :

$$\overline{\delta i(\Omega) \delta i(\Omega')} = S_i(\Omega) 2\pi \delta(\Omega + \Omega') \quad (1-28)$$

avec :

$$\delta i(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta i(t) e^{i\Omega t} dt \quad (1-29-a)$$

$$\delta i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta i(\Omega) e^{-i\Omega t} \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (1-29-b)$$

1.2.2 Variance de bruit

La variance de bruit est donnée par :

$$(\Delta i)^2 = \overline{\delta i^2(t)} = C_i(\tau)|_{\tau=0} = \int_{-\infty}^{+\infty} S_i(\Omega) \frac{d\Omega}{2\pi} \quad (1-30)$$

Cette quantité peut diverger (pour un bruit blanc par exemple), mais en pratique, les fluctuations sont toujours mesurées sur une bande passante δf de taille finie. Soient $f(\Omega)$ la fonction du filtre de largeur δf et $(\Delta i_F)^2$ la variance du bruit du courant i_F obtenu à partir de $i(t)$ après filtrage. Dans le cas d'un filtre approximé par un créneau de largeur δf autour de Ω_0 , on a :

$$(\Delta i_F)^2 = 2 \delta f S_i(\Omega_0) \quad (1-31)$$

Expérimentalement, c'est cette quantité que l'on mesure à l'aide d'un analyseur de spectre. Pour connaître $S_i(\Omega_0)$, il suffit de diviser la quantité mesurée par la bande passante de mesure utilisée.

1.2.3 Définition quantique des fluctuations

À partir des équations (1-25) et (1-26), on peut traiter quantiquement les fluctuations du champ :

$$C_{\hat{v}}(t, t') = \langle \hat{v}(t)\hat{v}(t') \rangle - \langle \hat{v}(t) \rangle \langle \hat{v}(t') \rangle \quad (1-32)$$

La densité spectrale est définie de la même façon qu'en (1-27).

1.3 Relation d'incertitude

1.3.1 Relation d'incertitude sur les spectres de bruit

Nous avons défini précédemment deux opérateurs de quadrature $\hat{\varepsilon}_P(t, z)$ et $\hat{\varepsilon}_Q(t, z)$ du champ électromagnétique. Nous avons vu que ces deux opérateurs ne commutent pas. Il en découle que le produit de leur variance ne peut être inférieur à une certaine valeur. Si l'on définit les fonctions d'autocorrélation de ces deux quadratures de la façon suivante :

$$C_{\hat{\varepsilon}_P}(t, t') = \langle \hat{\varepsilon}_P(t)\hat{\varepsilon}_P(t') \rangle - \langle \hat{\varepsilon}_P(t) \rangle \langle \hat{\varepsilon}_P(t') \rangle \quad (1-33-a)$$

$$C_{\hat{\varepsilon}_Q}(t, t') = \langle \hat{\varepsilon}_Q(t)\hat{\varepsilon}_Q(t') \rangle - \langle \hat{\varepsilon}_Q(t) \rangle \langle \hat{\varepsilon}_Q(t') \rangle \quad (1-33-b)$$

et les densités spectrales de bruit correspondantes :

$$S_{\hat{\varepsilon}_P}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\hat{\varepsilon}_P}(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (1-34-a)$$

$$S_{\hat{\varepsilon}_Q}(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} C_{\hat{\varepsilon}_Q}(\tau) e^{i\Omega\tau} d\tau \quad (1-34-b)$$

On déduit de la relation de commutation (1-21) la relation d'incertitude suivante :

$$S_{\hat{\varepsilon}_P}(\Omega) \cdot S_{\hat{\varepsilon}_Q}(\Omega) \geq C_{\omega_0}^2 \quad (1-35)$$

À partir de cette équation et de l'équation (1-31), on peut démontrer que :

$$\Delta \hat{E}_P(\rho = 0, z)_F \cdot \Delta \hat{E}_Q(\rho = 0, z)_F \geq \frac{\hbar\omega_0}{2\varepsilon_0 c} \frac{2}{\pi w^2(z)} \delta f \quad (1-36)$$

où l'on considère les variances des deux quadratures mesurées au centre du faisceau sur la bande de fréquence δf du filtre F .

1.3.2 Limite quantique standard

Considérons le cas d'un champ quasi monomode cohérent qui vérifie :

$$\widehat{\varepsilon}(t, z) |\Psi_{cs}\rangle = \langle \widehat{\varepsilon}(t, z) \rangle |\Psi_{cs}\rangle \quad (1-37)$$

$|\Psi_{cs}\rangle$ est une généralisation au cas multimode des états cohérents habituels, états propres de l'opérateur annihilation. On peut montrer aisément que :

$$S_{\widehat{\varepsilon}_{zP}}(\Omega) = S_{\widehat{\varepsilon}_{zQ}}(\Omega) = C_{\omega_0} \quad (1-38)$$

et donc que :

$$S_{\widehat{\varepsilon}_{zP}}(\Omega) \cdot S_{\widehat{\varepsilon}_{zQ}}(\Omega) = C_{\omega_0}^2 \quad (1-39)$$

Les deux densités de bruit sont égales et leur produit est minimal compte tenu de l'inégalité (1-35). C_{ω_0} est donc une valeur particulière appelée limite quantique standard ou bruit quantique standard. Pour un état cohérent, le résultat sur les variances des deux quadratures est en fait valable quelles que soient les quadratures du champ considérées.

Un état vérifiant (1-39) est dit minimal. Il existe aussi des états minimaux pour lesquels la densité spectrale sur l'une des quadratures est inférieure à la limite quantique standard tandis que la densité de l'autre est évidemment supérieure à cette limite pour respecter (1-35). De tels états sont des états non classiques dits états comprimés.

1.3.3 Bruit d'intensité et de phase

Lorsque l'intensité moyenne du champ est très supérieure à ses fluctuations, nous pouvons linéariser les fluctuations du champ selon l'équation :

$$\delta \widehat{I} = \text{Re} \langle \widehat{\varepsilon} \rangle \delta \widehat{\varepsilon}_P + \text{Im} \langle \widehat{\varepsilon} \rangle \delta \widehat{\varepsilon}_Q \quad (1-40)$$

Pour un champ réel, les fluctuations d'intensité sont donc proportionnelles aux fluctuations de la quadrature $\widehat{\varepsilon}_P$. Les fluctuations de phase sont quant à elles proportionnelles aux fluctuations de la quadrature $\widehat{\varepsilon}_Q$:

$$\delta \widehat{\varphi} = \frac{1}{\langle \widehat{\varepsilon} \rangle} \delta \widehat{\varepsilon}_Q \quad (1-41)$$

Cette définition intuitive (les fluctuations de phase sont calculées dans la direction orthogonale à celles de l'intensité) reste valable pour les champs intenses mais ne peut

être étendue aux champs de faible intensité pour lesquels il faut définir rigoureusement un opérateur de phase.

L'inégalité de Heisenberg pour les spectres des fluctuations en phase et intensité s'écrit :

$$S_I(\Omega) \cdot S_\varphi(\Omega) \geq C_{\omega_0}^2 \quad (1-42)$$

Dans le cas des champs multimodes, on peut définir l'opérateur nombre de photons par $\hat{N} = \sum_l a_l^\dagger a_l$, la somme s'étendant sur les modes considérés. Pour un tel opérateur, on a :

$$S_N(\Omega) \cdot S_\varphi(\Omega) \geq 1 \quad (1-43)$$

Nous pouvons maintenant calculer les fluctuations en intensité d'un courant émis par un photodétecteur éclairé par un état cohérent. À partir des équations (1-25), (1-16) et (1-26), on peut démontrer que la fonction d'autocorrélation de ce courant $i(t)$ vaut :

$$\begin{aligned} C_i(t, t') &= \left(\frac{q}{C_{\omega_0}} \right)^2 \{ \langle \hat{\varepsilon}^+(t) \hat{\varepsilon}(t) \hat{\varepsilon}^+(t') \hat{\varepsilon}(t') \rangle - \langle \hat{\varepsilon}^+(t) \hat{\varepsilon}(t) \rangle \langle \hat{\varepsilon}^+(t') \hat{\varepsilon}(t') \rangle \} \\ &= \left(\frac{q}{C_{\omega_0}} \right)^2 C_I(t, t') \end{aligned} \quad (1-44)$$

où $I(t)$ est l'intensité électrique du champ cohérent, et :

$$S_i(\Omega) = \left(\frac{q}{C_{\omega_0}} \right)^2 (S_I(\Omega)) \quad (1-45)$$

On obtient aussi pour un champ cohérent :

$$C_i(t, t') = q \langle i \rangle \delta_1(t - t') \quad (1-46)$$

et

$$S_i(\Omega) = q \langle i \rangle \quad (1-47)$$

On reconnaît dans cette formule une caractéristique de la statistique de Poisson : le bruit de grenaille. D'un point de vue corpusculaire, un état cohérent correspond à un flux de photons obéissant à une statistique poissonnienne.

1.3.4 Représentation des états du champ

Pour illustrer les propriétés quantiques du champ électromagnétique, on représente le champ dans l'espace des phases (diagramme de Fresnel). Dans cet espace, le champ

électrique classique est représenté par un vecteur d'extrémité bien définie. Si l'on considère le champ quantifié, toute mesure du champ est entachée d'un bruit. On peut schématiser ces fluctuations par une surface centrée à l'extrémité du champ électrique moyen. Les fluctuations dans l'axe du champ correspondent aux fluctuations d'intensité alors que les fluctuations dans la direction orthogonale correspondent aux fluctuations de phase.

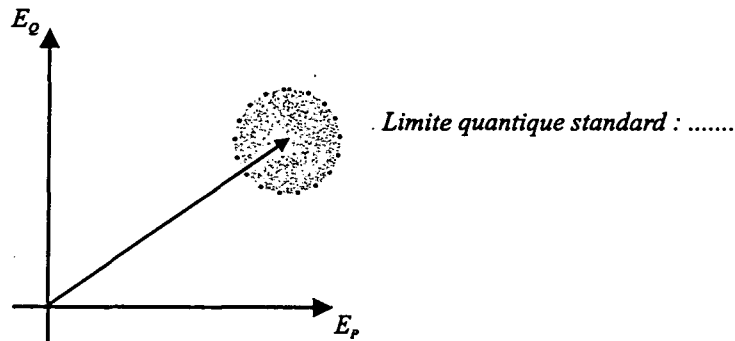


Fig. 1.2 - Représentation d'un état cohérent.

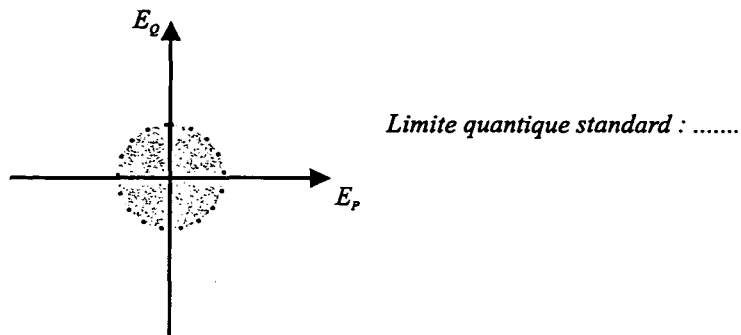


Fig. 1.3 - Représentation du vide.

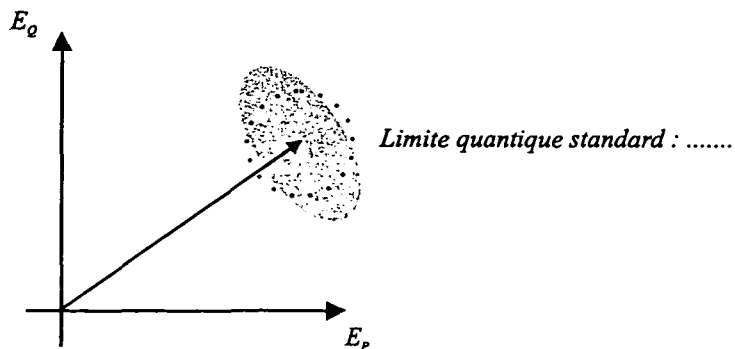


Fig. 1.4 - Représentation d'un état comprimé en intensité.

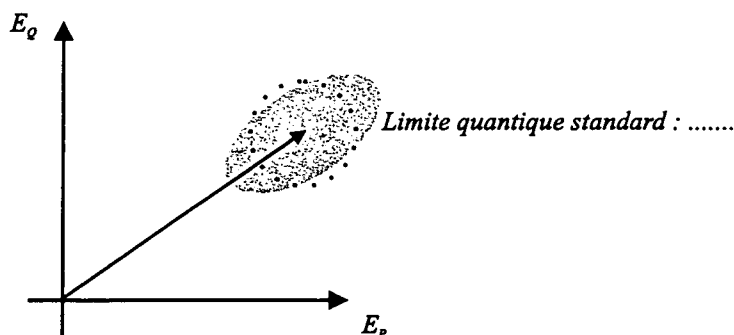


Fig. 1.5 - Représentation d'un état comprimé en phase.

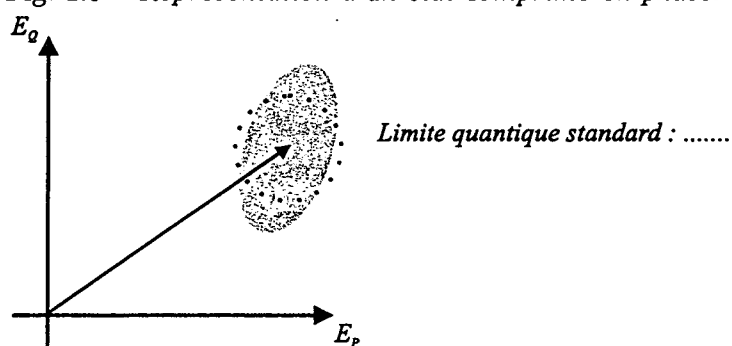


Fig. 1.6 - Représentation d'un état comprimé selon une quadrature quelconque.

L'inégalité de Heisenberg exprime que cette aire doit occuper une surface minimale. La figure (1.2) représente un état cohérent : quelle que soit la quadrature, les fluctuations sont égales à C_{ω_0} . La figure (1.3) représente un état cohérent particulier : le vide, un cercle centré sur l'origine des axes. Les fluctuations d'un état comprimé sont représentées sur la figure (1.4) pour un état comprimé en intensité, (1.5) pour un état comprimé en phase et (1.6) pour un état comprimé suivant une quadrature quelconque.

1.4 Mesure du bruit d'intensité

1.4.1 Détection homodyne

Les mesures d'intensité du bruit de la lumière peuvent s'effectuer directement à l'aide d'un seul photodétecteur. Dans ce cas, la difficulté de ces mesures réside dans la détermination de la limite quantique standard. A priori, on pourrait utiliser un faisceau cohérent ayant la même intensité que le faisceau étudié comme référence. Toutefois, une

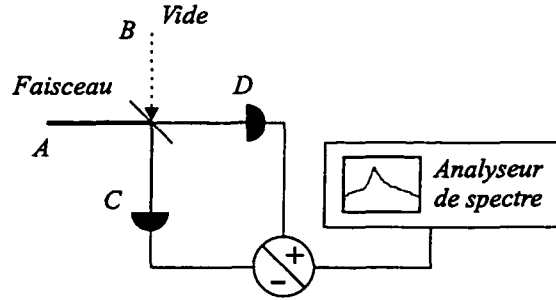


Fig. 1.7 – Schéma de la détection homodyne.

telle mesure est délicate : comment être sûr que le faisceau de référence est réellement cohérent et que les intensités des deux faisceaux sont identiques ?

On préfère en pratique une mesure beaucoup plus simple à mettre en oeuvre : la détection homodyne équilibrée qui s'appuie sur l'effet d'une lame séparatrice. Considérons les deux faisceaux A et B représentés sur la figure (1.7) traversant une lame séparatrice de coefficients de transmission t et de réflexion r tels que $r = t = 1/\sqrt{2}$. Les deux photodétecteurs mesurant les intensités des champs sortants par les voies C et D sont supposés parfaits (chaque photon reçu par un photodétecteur donne naissance à un électron). Calculons la somme et la différence des photocourants i_C et i_D :

$$\hat{i}_C - \hat{i}_D = \frac{q}{C_{\omega_0}} (\hat{I}_C - \hat{I}_D) = \frac{q}{C_{\omega_0}} (\hat{\varepsilon}_A \hat{\varepsilon}_B^+ + \hat{\varepsilon}_A^+ \hat{\varepsilon}_B) \quad (1-48-a)$$

$$\hat{i}_C + \hat{i}_D = \frac{q}{C_{\omega_0}} (\hat{I}_C + \hat{I}_D) = \frac{q}{C_{\omega_0}} (\hat{\varepsilon}_A^+ \hat{\varepsilon}_A + \hat{\varepsilon}_B^+ \hat{\varepsilon}_B) \quad (1-48-b)$$

Si le champ de la voie B est dans un état cohérent, on a :

$$\hat{\varepsilon}_B |\Psi_B\rangle = \langle \hat{\varepsilon}_B | \Psi_B \rangle \quad (1-49)$$

Nous écrirons $\langle \hat{\varepsilon}_B \rangle = E_0 e^{i\varphi}$, ou E_0 est un réel. Alors :

$$\langle \hat{I}_C - \hat{I}_D \rangle = E_B \langle \hat{\varepsilon}_\varphi \rangle \quad (1-50)$$

avec :

$$\hat{\varepsilon}_\varphi = e^{i\varphi} \hat{\varepsilon}_A^+ + e^{-i\varphi} \hat{\varepsilon}_A \quad (1-51)$$

On peut alors calculer la densité spectrale de bruit de $\hat{i}_C + \hat{i}_D$, en utilisant le fait que $S_{i_B}(\Omega) = q \langle i_B \rangle$ (voir équation 1-47) :

$$S_{i_C+i_D}(\Omega) = \left(\frac{q}{C_{\omega_0}} \right)^2 S_{i_A}(\Omega) + q \langle i_B \rangle \quad (1-52)$$

La fonction d'autocorrélation associée à $i_C - i_D$ s'écrit :

$$C_{i_C - i_D}(t, t') = \frac{q}{C_{\omega_0}} \langle i_B \rangle C_{\varepsilon_\varphi}(t, t') + q \langle i_A \rangle \delta_1(t - t') \quad (1-53)$$

où $C_{\varepsilon_\varphi}(t, t')$ est défini de la même manière qu'en (1-33), et où δ_1 a été défini en (1-15). En prenant la transformée de Fourier, on a :

$$S_{i_C - i_D}(\Omega) = \frac{q}{C_{\omega_0}} \langle i_B \rangle S_{\varepsilon_\varphi}(\Omega) + q \langle i_A \rangle \quad (1-54)$$

Si le champ entrant par la voie B est le vide, on obtient pour les deux densités spectrales de bruit :

$$S_{i_C + i_D}(\Omega) = \left(\frac{q}{C_{\omega_0}} \right)^2 S_{i_A}(\Omega) \quad (1-55-a)$$

$$S_{i_C - i_D}(\Omega) = q \langle i_A \rangle \quad (1-55-b)$$

$S_{i_C - i_D}(\Omega)$ donne donc accès à la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau étudié. Le rapport de (1-55-a) et (1-55-b) permet quant à lui de connaître l'excès ou le taux de compression de bruit d'intensité. Comparée à la détection directe, la détection homodyne équilibrée présente l'avantage de nous donner directement accès à la limite quantique standard et nous l'utiliserons chaque fois que cela est possible.

1.4.2 Effet des pertes

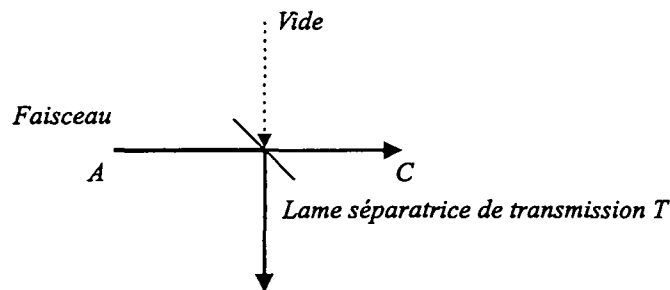


Fig. 1.8 – Modélisation des pertes optiques par une lame séparatrice.

Le calcul précédent permet aussi de comprendre l'effet des pertes optiques sur le bruit d'intensité d'un faisceau. En effet, on peut modéliser les pertes optiques linéaires qui se produisent à la traversée d'un milieu matériel par une lame séparatrice de coefficient de transmission en intensité T (voir figure 1.8). En reprenant le calcul précédent, on trouve que le spectre du photocourant vaut :

$$S_{i_C}(\Omega) = T^2 S_{i_A}(\Omega) + (T - T^2) q \langle i_A \rangle \quad (1-56)$$

Si les fluctuations du champ entrant sont égales à la limite quantique standard, on trouve que les fluctuations du champ sortant sont égales à $Tq \langle i_a \rangle = q \langle i_c \rangle$, soit la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau filtré. En revanche, si les fluctuations du champ entrant sont inférieures ou supérieures à la limite quantique standard, les pertes ont pour effet de rapprocher les fluctuations du champ de cette limite. Ainsi, que le faisceau incident ait un bruit supérieur ou inférieur à la limite quantique standard, son bruit est ramené vers cette limite. De même, ce calcul permet de rendre compte de l'efficacité limitée d'un photodétecteur. Cette formule démontre aussi le caractère néfaste des pertes sur la lumière dont le bruit d'intensité est comprimé.

La formule (1-55-a) permet aussi d'écrire :

$$\frac{S_{i_c}}{LQS_{i_c}} = T \times \frac{S_{i_a}}{LQS_{i_a}} + 1 - T \quad (1-57)$$

où LQS signifie limite quantique standard.

Cette équation lie les spectres de bruit d'intensité des champs avant (S_{i_a}) et après (S_{i_c}) la lame. Cette formule nous sera utile par la suite lors de nos expériences. Examinons l'expérience représentée sur la figure (1.9). Si on connaît les pertes en transmission des éléments optiques et le bruit mesuré par la photodiode (au point C), on peut, grâce à l'équation (1-57), connaître le bruit du faisceau laser à la sortie de la cavité (au point A).

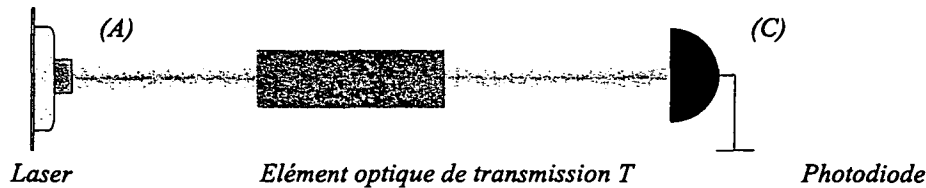


Fig. 1.9 – Modélisation des pertes optiques expérimentales.

1.5 Représentations semi-classiques des états du champ

1.5.1 Introduction

Comme nous l'avons vu précédemment, il existe des fluctuations associées au champ électromagnétique. La théorie quantique donnée jusqu'à présent ne considère implicitement que les états purs. Cependant, la description générale des fluctuations quantiques (en présence de fluctuations thermiques par exemple) requiert le formalisme

de l'opérateur densité ρ afin de pouvoir prendre en compte les mélanges statistiques d'états.

Une alternative intéressante pour décrire ces fluctuations consiste à les représenter par des fluctuations quasi-classiques. La méthode semi-classique définit une correspondance entre les moments des variables classiques et les moments quantiques. Il existe donc de multiples représentations semi-classiques associées chacune à un type d'ordre pour les moments quantiques. Chaque représentation présente ces avantages, calculs simplifiés ou images semi-classiques plus satisfaisantes.

Dans la suite ce paragraphe, nous nous limiterons au cas d'un champ monomode de pulsation ω , d'amplitude E_0 et de polarisation $\vec{\epsilon}$ décrit par :

$$E(t) = E_0 \vec{\epsilon} (ae^{-i\omega t} + a^\dagger e^{i\omega t}) \quad (1-58)$$

où a et a^\dagger sont respectivement les opérateurs annihilation et création du mode considéré. Dans ce cas simple, l'inégalité de Heisenberg s'écrit :

$$\Delta X_1 \cdot \Delta X_2 \geq 1/4 \quad (1-59)$$

si l'on définit :

$$X_1 = \frac{1}{2}(a + a^\dagger) \quad (1-60-a)$$

$$X_2 = \frac{1}{2i}(a - a^\dagger) \quad (1-60-b)$$

De façon générale [Scully 97], on définit une représentation $F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*)$ (α est une variable complexe) de l'opérateur densité ρ par :

$$\rho = \pi \int F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*) \Delta^{(\Omega)}(\alpha - a, \alpha^* - a^\dagger) d^2\alpha \quad (1-61)$$

où :

$$\Delta^{(\Omega)}(\alpha - a, \alpha^* - a^\dagger) = \frac{1}{\pi^2} \int \exp[\Omega(\beta, \beta^*)] \exp[-\beta(\alpha^* - a^\dagger) + \beta^*(\alpha - a)] d^2\beta \quad (1-62)$$

Dans cette expression, $\Omega(\beta, \beta^*)$ est la fonction qui caractérise les différentes représentations. Parmi ces représentations, examinons les plus couramment utilisées en optique quantique.

1.5.2 La représentation P

Considérons la représentation $F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*)$ pour laquelle :

$$\Omega(\beta, \beta^*) = -\frac{|\beta|^2}{2} \quad (1-63)$$

On démontre à partir de l'équation (1-62) que :

$$\Delta^{(\Omega)}(\alpha - a, \alpha^* - a^\dagger) = \frac{1}{\pi} |\alpha\rangle \langle \alpha| \quad (1-64)$$

et :

$$\rho = \frac{1}{\pi} \int P(\alpha, \alpha^*) |\alpha\rangle \langle \alpha| d^2\alpha \quad (1-65)$$

La représentation $F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*)$ correspondante est notée dans ce cas $P(\alpha, \alpha^*)$. Soient $O_N(a, a^\dagger)$ un opérateur fonction de a et a^\dagger rangés dans l'ordre normal (les opérateurs créations a^\dagger sont situés à gauche des opérateurs d'annihilation a) et $O_N(\alpha, \alpha^*)$ son analogue classique. On peut démontrer que $P(\alpha, \alpha^*)$ vérifie :

$$\langle O_N(a, a^\dagger) \rangle = \int P(\alpha, \alpha^*) O_N(\alpha, \alpha^*) d^2\alpha \quad (1-66)$$

La représentation P est donc particulièrement commode pour calculer la valeur moyenne d'opérateurs rangés dans l'ordre normal. On peut aussi calculer la variance de l'opérateur X_i ($i \in \{1, 2\}$) défini par (1-60-a) ou (1-60-b) dans l'ordre normal (noté : ΔX_i :). On trouve :

$$\begin{aligned} \Delta X_i &= \frac{1}{4} + : \Delta X_i : \\ &= \frac{1}{4} (1 + \int P(\alpha, \alpha^*) [(\alpha + \alpha^*) - (\langle \alpha \rangle + \langle \alpha^* \rangle)]^2 d^2\alpha) \end{aligned} \quad (1-67)$$

Étant donné les équations (1-60-a) et (1-60-b), la condition de compression du bruit sur la quadrature X_i s'écrit :

$$: \Delta X_i : \leq 0 \quad (1-68)$$

La variance écrite en représentation P donne donc directement le taux de compression ou l'excès de bruit. On voit aussi qu'il existe des valeurs pour lesquelles $P(\alpha, \alpha^*)$ est négative. $P(\alpha, \alpha^*)$ n'est donc pas une distribution de probabilité au sens classique du terme. De plus, la représentation P peut être singulière : de l'équation (1-65), on déduit que la représentation P d'un état cohérent est une distribution de Dirac. Cette représentation nous sera utile dans les chapitres (2) et (3).

1.5.3 La représentation de Wigner-Weyl

Considérons maintenant la représentation $F^{(\Omega)}(\alpha, \alpha^*)$ pour laquelle :

$$\Omega(\beta, \beta^*) = 0 \quad (1-69)$$

La représentation correspondante est dite de Wigner-Weyl et notée $W(\alpha, \alpha^*)$. On peut montrer à partir de l'équation (1-62) qu'elle s'écrit :

$$W(\alpha, \alpha^*) = \frac{1}{\pi^2} \int \text{Tr}[\rho \exp i(\beta a^\dagger + \beta^* a)] \exp(-i(\beta \alpha^* + \beta^* \alpha)) d^2 \beta \quad (1-70)$$

C'est la première des distributions de quasi-probabilité introduites en mécanique quantique [Wigner 32]. Cette fonction, contrairement à $P(\alpha, \alpha^*)$ est toujours définie mais pas toujours positive. L'intérêt de la représentation de Wigner est de faciliter le calcul des moyennes d'opérateurs rangés dans l'ordre symétrique. On a par exemple :

$$\frac{1}{2} \langle aa^\dagger + a^\dagger a \rangle = \int W(\alpha, \alpha^*) \alpha \alpha^* d^2 \alpha \quad (1-71)$$

2. Étude théorique du bruit d'intensité dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale (VCSELs)

2.1 Introduction

2.1.1 La réduction de bruit dans les lasers

Depuis 15 ans, de nombreuses méthodes ont été mises en oeuvre pour réaliser expérimentalement des états comprimés. On peut les regrouper en deux catégories principales :

- les processus non linéaires de type $\chi^{(2)}$ et $\chi^{(3)}$ qui modifient les fluctuations d'un faisceau initial,
- les processus pour lesquels on agit sur la statistique de pompe d'un laser, processus auxquels nous allons nous intéresser plus en détail.

Les premiers travaux théoriques sur les lasers à pompe régulière sont dus à Golubev et Sokolov en 1984 [Golubev 84]. Les premières observations expérimentales d'états au bruit d'intensité comprimé obtenus par pompage régulier ont été effectuées sur des émetteurs luminescents ne fonctionnant pas dans le régime laser : la première expérience date de 1985 [Teich 85]. Teich et Saleh ont utilisé une lampe à vapeur de mercure pompée par un faisceau d'électrons dont les fluctuations sont limitées par des effets de charge d'espace (les électrons se repoussent du fait de l'interaction coulombienne). En 1987, Tapster *et al.* ont quant à eux observé des états comprimés produits à l'aide de diodes électroluminescentes [Tapster 87]. L'efficacité de ces processus étant réduite, les taux de compression demeurent faibles avec ces deux méthodes.

Les lasers à semi-conducteurs permettent de pallier cet inconvénient. Leur efficacité quantique, paramètre qui donne le taux d'électrons injectés par l'alimentation convertis en photons, est beaucoup plus proche de l'unité. Pour déterminer les autres conditions nécessaires à l'obtention d'un faisceau au bruit d'intensité comprimé, supposons pour

simplifier que l'efficacité quantique vaut 1. Tout électron est alors converti tôt ou tard en photon. Les photons doivent être émis dans le faisceau laser, ce qui implique de pouvoir négliger le taux d'émission spontané devant le taux de désexcitation stimulée. Cela impose de travailler à des courants de pompage très supérieurs au courant de seuil. De plus, il faut que le couplage de la cavité laser avec l'extérieur soit suffisamment grand pour pouvoir négliger les pertes internes au laser. Ce raisonnement n'est valable que sur les temps d'observation longs devant le temps de stockage moyen des photons dans la cavité, de manière à ce que les temps aléatoires de sortie des photons de la cavité soient moyennés lors de la mesure. Le temps de mesure doit donc être important devant les temps caractéristiques du laser.

Les diodes lasers furent les premiers lasers à semi-conducteurs à produire des états comprimés [Yamamoto 86, Yamamoto 87a, Machida 88a]. Pendant les dix années suivantes, les recherches menées par différents groupes ont permis d'améliorer les performances de compression du bruit d'intensité [Freeman 93a, Freeman 93b, Freeman 95, Richardson 91 a, Machida 88b]. Les meilleurs résultats (70 %) [Kilper 96] ont quasiment pu atteindre la limite imposée par l'efficacité quantique. L'étude détaillée de leur fonctionnement [Freeman 93a, Freeman 93b, Zhang 95, Marin 95, Bramati 97] a montré que les conditions énoncées ci-dessus sont nécessaires mais pas toujours suffisantes pour obtenir des états comprimés. En particulier, la prise en compte du bruit des modes longitudinaux sous le seuil peut être primordiale pour déterminer les caractéristiques de ces lasers. Du fait de l'homogénéité du gain de ces lasers, ces modes sont fortement corrélés avec le mode principal. Toutefois, des pertes saturables [Marin 95, Lathi 99a, Lathi 99b] rendent le gain partiellement inhomogène et les corrélations imparfaites. Ces modes longitudinaux introduisent alors un excès de bruit.

Les lasers semi-conducteurs à microcavité paraissent être des sources prometteuses pour la réduction du bruit quantique. La longueur de cavité pour ces lasers est de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière émise. Dans ces conditions, les effets d'électrodynamique quantique sont non négligeables [Kleppner 81]. Ainsi l'émission spontanée peut être fortement inhibée dans les modes sous le seuil, ce qui augmente d'autant l'efficacité quantique du laser [Yamamoto 91]. Si ce régime n'a pas encore été atteint expérimentalement, on a déjà observé que ces lasers avaient des seuils très faibles. Ainsi, on peut atteindre des taux de pompage (rapport du courant de pompage au courant de seuil) très élevés, favorisant ainsi la production d'états comprimés.

Parmi les lasers semi-conducteurs à microcavité, un type de dispositif est promis à un grand avenir : les VCSELs (pour *Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers*). Ces lasers miniatures ont une géométrie très pratique pour les montages optoélectroniques. Il est

possible de fabriquer des réseaux bi-dimensionnels avec ces lasers pour la réalisation de liaisons tout optique. De plus, la symétrie cylindrique de ces lasers est très intéressante en vue du couplage de leur faisceau avec des fibres optiques. Enfin, leur faible dimension permet de moduler très rapidement leur courant d'alimentation, caractéristique primordiale pour obtenir de hauts débits d'information. Dans ce manuscrit, nous nous intéressons tout particulièrement aux caractéristiques de bruit d'intensité de ces VCSELs. Nous étudions en détail ce bruit en régime libre monomode ou multimode, en régime injecté ainsi que sa structure spatiale dans le plan transverse.

Le principe de la pompe régulière est donc le principe simple à la base de l'obtention d'états comprimés avec des lasers à semi-conducteurs. Au-delà de ce simple argument, divers modèles ont été proposés pour rendre précisément compte des caractéristiques de bruit de ces lasers. Le principal modèle, établi par Kolobov *et al.* [Kolobov 93], repose sur une approche de Langevin quantique. C'est ce modèle qui sert de base aux calculs quantiques présentés ici.

2.1.2 Spécificités des VCSELs

Nous présentons ici une généralisation du modèle de Kolobov *et al.* permettant de déterminer les caractéristiques du bruit d'intensité d'un faisceau émis par un microlaser semi-conducteur à cavité verticale. Ces lasers sont décrits en détail dans la partie expérimentale (section 3.3). Nous ne donnons ici que leurs caractéristiques importantes pour la modélisation. Ces lasers ont une cavité très courte, de l'ordre de la longueur d'onde. Elle contient un milieu actif constitué de plusieurs puits quantiques semi-conducteurs, parallèles aux miroirs (contrairement aux lasers semi-conducteurs standards à ruban). Le gain par passage est faible ce qui impose une réflectivité élevée pour les miroirs. Les VCSELs ont une haute symétrie transverse qui n'impose pas de contrainte a priori sur la polarisation. Même si près du seuil, le mode fondamental est en général polarisé linéairement, deux polarisations sont possibles. Un modèle semi-classique ou quantique pour les VCSELs doit donc nécessairement prendre en compte une base de deux modes de polarisations orthogonales (linéaires ou circulaires). Nous rappelons tout d'abord le modèle communément adopté pour calculer les caractéristiques du champ lumineux pour de tels lasers. Nous appliquons ensuite la méthode des forces de Langevin aux équations de ce modèle pour calculer le bruit d'intensité du faisceau.

2.2 Le modèle semi-classique de San Miguel

Plusieurs modèles ont été proposés pour intégrer de façon cohérente les variations de la polarisation des faisceaux émis par les VCSELs [Choquette 95, Valle 97]. De façon fondamentale, l'origine de l'état de polarisation des faisceaux émis par les VCSELs provient des moments angulaires des porteurs impliqués dans les transitions lasers. Ainsi l'émission d'un photon polarisé circulairement plus (respectivement moins) correspond à une variation de \hbar (respectivement $-\hbar$) du moment cinétique total des porteurs.

2.2.1 Équations fondamentales

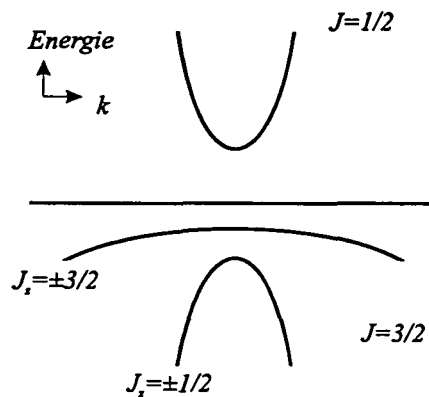


Fig. 2.1 – Structure des bandes d'énergie dans un matériau semi-conducteur.

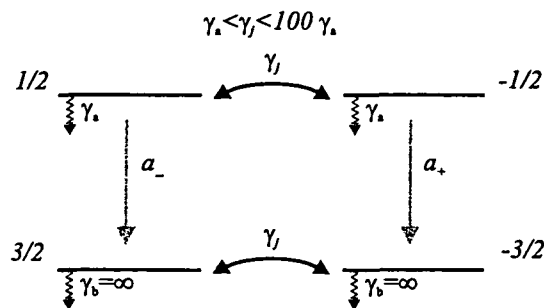


Fig. 2.2 – Système à quatre niveaux de notre modèle.

En 1995, San Miguel, Feng et Moloney ont développé un modèle dit Spin Flip Model (SFM) [San Miguel 95] qui prend en compte les moments cinétiques des niveaux d'énergie des bandes de valence et de conduction impliqués dans les transitions lasers.

La structure de bande d'un semi-conducteur autour de la bande interdite a l'allure présentée sur la figure (2.1). Le couplage spin-orbite sépare la bande de valence en deux sous-bandes de spin $J_z = \pm 1/2$ et $J_z = \pm 3/2$. Dans la bande de conduction, le spin vaut $J_z = \pm 1/2$. Les transitions optiques sur lesquelles fonctionne le laser se produisent entre les moments cinétiques $J_z = \pm 1/2$ pour la bande de conduction et les moments cinétiques $J_z = \pm 3/2$ pour la bande de valence. San Miguel, Feng et Moloney modélisent cet ensemble de sous-bandes par un système à quatre niveaux représenté sur la figure (2.2) : les états supérieurs $|-1/2\rangle$ et $|+1/2\rangle$ peuvent se désexciter dans les états $|-3/2\rangle$ et $|+3/2\rangle$ pour donner naissance à des photons polarisés circulaires + et circulaires -. Par simplicité, nous considérons les taux de désexcitation non radiative de ces deux niveaux égaux. On note ce taux γ_a . Les deux niveaux inférieurs représentent les deux états finals de ces recombinaisons radiatives. Adoptant une hypothèse communément utilisée pour les lasers à semi-conducteurs, nous considérerons les taux de désexcitation des niveaux inférieurs infinis. Les termes de populations des niveaux de ce système peuvent alors être ramenés aux seules inversions de population (les niveaux du bas sont toujours vides).

Soient :

- $n_{a_+}(t)$, $n_{a_-}(t)$, $n_{b_+}(t)$ et $n_{b_-}(t)$ les populations des différents niveaux,
- $a_+(t)$ et $a_-(t)$ les enveloppes des deux champs polarisés circulairement,
- $\sigma_{\pm}(t)$ les enveloppes des polarisations associées aux deux transitions possibles,
- g_0 la constante de couplage entre les porteurs et les champs,
- ν_{\pm} les fréquences de la cavité associées aux deux champs,
- ω_{\pm} les fréquences associées aux deux transitions possibles pour les porteurs,

Les équations de Maxwell-Bloch du système sont :

$$\partial_t a_{\pm}(t) = -ig_0 \sigma_{\pm}(t) \quad (2-1-a)$$

$$\partial_t \sigma_{\pm}(t) = -i(\omega_{\pm} - \nu_{\pm}) \sigma_{\pm}(t) + ig_0(n_{a_{\pm}}(t) - n_{b_{\pm}}(t)) a_{\pm}(t) \quad (2-1-b)$$

$$\partial_t n_{a_{\pm}}(t) = -ig_0 a_{\pm}(t) \sigma_{\pm}^*(t) + ig_0 a_{\pm}^*(t) \sigma_{\pm}(t) \quad (2-1-c)$$

$$\partial_t n_{b_{\pm}}(t) = ig_0 a_{\pm}(t) \sigma_{\pm}^*(t) - ig_0 a_{\pm}^*(t) \sigma_{\pm}(t) \quad (2-1-d)$$

On rajoute à ces équations les termes non hamiltoniens suivants :

- κa_{\pm} : ce terme décrit le couplage de la cavité avec l'extérieur. On a :

$$\kappa = \frac{cT}{4nL} \quad (2-2)$$

où T est la transmission de la cavité, n l'indice du milieu et L la longueur de la cavité.

- $\gamma_a n_{a_{\pm}}$: γ_a est le taux de relaxation des niveaux supérieurs,
- $\gamma_b n_{b_{\pm}}$: γ_b est le taux de relaxation des niveaux inférieurs,
- $\gamma_{\perp} \sigma_{\pm}$: γ_{\perp} est le taux de relaxation de la polarisation,
- $\gamma_j (n_i - n_j)$: est le taux de relaxation intrabande,
- μ le courant d'alimentation des niveaux supérieurs.

On pose par ailleurs $\alpha = (\omega_{\pm} - \nu_{\pm})/\gamma_{\perp}$ où α est le facteur d'élargissement de la largeur de raie.

On obtient alors :

$$\partial_t a_{\pm}(t) = -\kappa a_{\pm}(t) - ig_0 \sigma_{\pm}(t) \quad (2-3-a)$$

$$\partial_t \sigma_{\pm}(t) = -\gamma_{\perp}(1 + i\alpha) \sigma_{\pm}(t) + ig_0 (n_{a_{\pm}}(t) - n_{b_{\pm}}(t)) a_{\pm}(t) \quad (2-3-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t n_{a_{\pm}}(t) = & \mu - \gamma_a n_{a_{\pm}}(t) - \gamma_j (n_{a_{\pm}}(t) - n_{a_{\mp}}(t)) \\ & - ig_0 a_{\pm}(t) \sigma_{\pm}^*(t) + ig_0 a_{\pm}^*(t) \sigma_{\pm}(t) \end{aligned} \quad (2-3-c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t n_{b_{\pm}}(t) = & -\gamma_b n_{b_{\pm}}(t) - \gamma_j (n_{b_{\pm}}(t) - n_{b_{\mp}}(t)) \\ & + ig_0 a_{\pm}(t) \sigma_{\pm}^*(t) - ig_0 a_{\pm}^*(t) \sigma_{\pm}(t) \end{aligned} \quad (2-3-d)$$

Lorsque l'on fait tendre γ_b vers l'infini, les populations $n_{b_{\pm}}(t)$ deviennent nulles. Si on définit les quantités somme et différence des différences de population des deux sous-systèmes à deux niveaux :

$$D(t) = \frac{1}{2} (n_{a_+}(t) + n_{a_-}(t)) \quad (2-4-a)$$

$$d(t) = \frac{1}{2} (n_{a_+}(t) - n_{a_-}(t)) \quad (2-4-b)$$

on obtient :

$$\partial_t a_{\pm}(t) = -\kappa a_{\pm}(t) - ig_0 \sigma_{\pm}(t) \quad (2-5-a)$$

$$\partial_t \sigma_{\pm}(t) = -\gamma_{\perp}(1 + i\alpha) \sigma_{\pm}(t) + ig_0 (D(t) \pm d(t)) a_{\pm}(t) \quad (2-5-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t D(t) = & -\gamma_a D(t) + \mu + ig_0 (a_+^*(t) \sigma_+(t) + a_-^*(t) \sigma_-(t)) \\ & - ig_0 (a_+(t) \sigma_+^*(t) + a_-(t) \sigma_-^*(t)) \end{aligned} \quad (2-5-c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t d(t) = & -\gamma_J d + ig_0 (a_+^*(t) \sigma_+(t) - a_-^*(t) \sigma_-(t)) \\ & - ig_0 (a_+(t) \sigma_+^*(t) - a_-(t) \sigma_-^*(t)) \end{aligned} \quad (2-5-d)$$

avec $\gamma_J = \gamma_a + 2\gamma_j$.

Étant donné que le taux de relaxation de la polarisation γ_{\perp} est très supérieur, dans les lasers à semi-conducteurs, aux taux de relaxation γ_a et γ_j , on peut éliminer

adiabatiquement la polarisation des porteurs. On a donc $\partial_t \sigma_{\pm}(t) = 0$ et :

$$\sigma_{\pm}(t) = \frac{g_0 \gamma_{\perp} (i + \alpha)}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} (D(t) \pm d(t)) a_{\pm}(t) \quad (2-6)$$

En remplaçant σ_{\pm} dans les autres équations, on trouve :

$$\partial_t a_{\pm}(t) = -\kappa a_{\pm}(t) + c(1 - i\alpha) (D(t) \pm d(t)) a_{\pm}(t) \quad (2-7-a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t D(t) &= \mu - \gamma_a D(t) - c(|a_+|^2 + |a_-|^2) D(t) \\ &\quad - c(|a_+|^2 - |a_-|^2) d(t) \end{aligned} \quad (2-7-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t d(t) &= -\gamma_J d(t) - c(|a_+|^2 - |a_-|^2) D(t) \\ &\quad - c(|a_+|^2 + |a_-|^2) d(t) \end{aligned} \quad (2-7-c)$$

où on a posé :

$$c = \frac{g_0^2}{\gamma_{\perp} (1 + \alpha^2)} \quad (2-8)$$

Ce sont les équations fondamentales du modèle SFM.

2.2.2 Solutions stationnaires

Les solutions présentées dans cette section sont décrites en détail dans les références [Regalado 96, Regalado 97]. Elles ont permis d'analyser les sauts de polarisation du faisceau des VCSEs [Regalado 96]. On recherche les solutions de la forme :

$$a_{\pm}(t) = Q_{\pm} e^{i(\omega_{\pm} t \pm \psi) + i\theta} \quad (2-9-a)$$

$$D(t) = D_0 \quad (2-9-b)$$

$$d(t) = d_0 \quad (2-9-c)$$

où θ est une phase arbitraire et ψ la phase relative entre les deux composantes circulaires du champ total. Nous examinerons successivement le cas complètement symétrique, où le milieu ne présente pas de biréfringence et celui où le milieu présente une biréfringence linéaire.

2.2.2.1 En l'absence de biréfringence

En l'absence de biréfringence, on trouve qu'il existe des solutions polarisées linéairement. Les amplitudes des polarisations circulaires sont alors égales :

$$Q_{\pm} = \sqrt{\frac{\gamma_a (r - 1)}{2c}} \quad (2-10-a)$$

$$D(t) = \frac{\kappa}{c} \quad (2-10-b)$$

$$d(t) = 0 \quad (2-10-c)$$

$$\omega_{\pm} = -\kappa\alpha \quad (2-10-d)$$

où on a posé :

$$\mu_{th} = \frac{\gamma_a \kappa}{c} \quad (2-11-a)$$

$$r = \frac{\mu}{\mu_{th}} \quad (2-11-b)$$

La phase ψ est arbitraire et son choix détermine la direction de la polarisation linéaire. En l'absence de biréfringence, la symétrie de révolution est conservée, ce qui est cohérent avec l'absence de contraintes sur ψ . On peut réécrire ces solutions dans une base de polarisations linéaires en posant :

$$a_x(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_+(t) + a_-(t)) \quad (2-12-a)$$

$$a_y(t) = \frac{-i}{\sqrt{2}}(a_+(t) - a_-(t))$$

On obtient :

$$a_x(t) = |a_x(t)| e^{-i\kappa\alpha t} \quad (2-13-a)$$

$$a_y(t) = |a_y(t)| e^{-i\kappa\alpha t} \quad (2-13-b)$$

$$|a_x(t)| = \sqrt{\frac{\gamma_a(r-1)}{c}} \cos \psi \quad (2-13-c)$$

$$|a_y(t)| = \sqrt{\frac{\gamma_a(r-1)}{c}} \sin \psi \quad (2-13-d)$$

On peut démontrer que ces solutions polarisées linéairement sont les seules stables, les solutions polarisées circulairement et elliptiquement étant instables [Regalado 96, Regalado 97].

2.2.2.2 En présence de biréfringence linéaire

Les axes de référence peuvent toujours être choisis de telle sorte que les axes propres de la biréfringence soient orientés selon (Ox) et (Oy) . La biréfringence produit un déphasage entre les champs de polarisation (Ox) et (Oy) lors de la propagation. Cela

se traduit par des termes de couplage entre les deux composantes de polarisation circulaires: elle conduit à rajouter le terme $-i\gamma_p a_+(t)$ à l'équation d'évolution de $a_-(t)$ et le terme $-i\gamma_p a_-(t)$ à l'équation d'évolution de $a_+(t)$. Lorsque la biréfringence est non nulle, nous obtenons quatre types de solutions stationnaires représentées sur la figure (2.3).

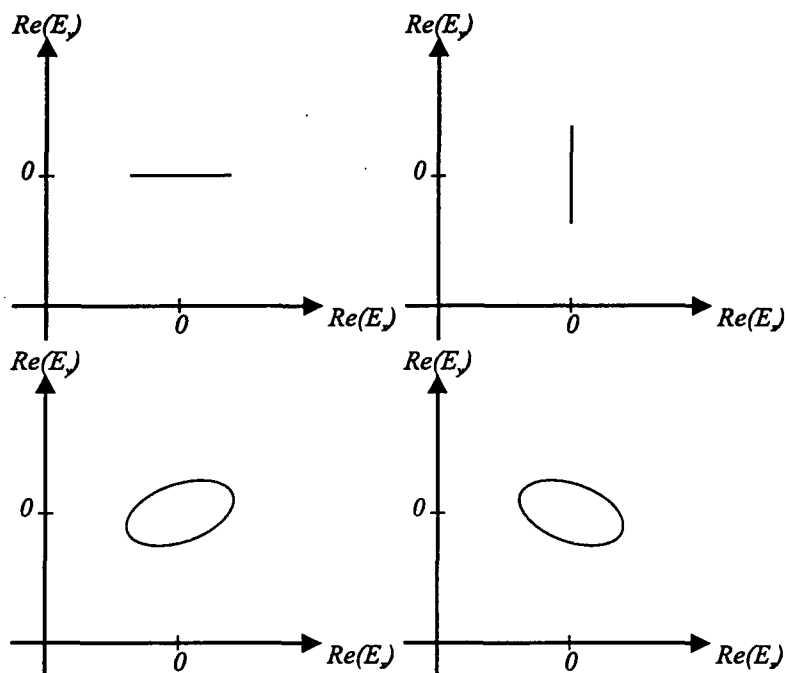


Fig. 2.3 – Solutions stationnaires du modèle SFM: la solution de la figure (a) est polarisée linéairement selon (Ox) , la solution de la figure (b) est polarisée linéairement selon (Oy) et les solutions des figures (c) et (d) sont polarisées elliptiquement.

Pour toutes ces solutions, la biréfringence brisant l'invariance de rotation, ψ n'est plus arbitraire. En revanche, comme dans un laser à deux niveaux, la phase globale n'est pas fixée; nous prendrons $\theta = 0$. Ainsi, les solutions polarisées linéairement sont polarisées le long de l'axe (Ox) ou le long de l'axe (Oy) . Les valeurs stationnaires correspondant aux diverses solutions se calculent aisément:

- la solution polarisée selon l'axe (Ox) :

$$a_x(t) = \sqrt{\frac{\gamma_a(r-1)}{c}} e^{i\omega_{\pm}t} \quad (2-14-a)$$

$$a_y(t) = 0 \quad (2-14-b)$$

$$D(t) = \frac{\kappa}{c} \quad (2-14-c)$$

$$d(t) = 0 \quad (2-14-d)$$

$$\omega_{\pm} = -\kappa\alpha - \gamma_p \quad (2-14-e)$$

$$\psi = 0 \quad (2-14-f)$$

- la solution polarisée selon l'axe (Oy) :

$$a_x(t) = 0 \quad (2-15-a)$$

$$a_y(t) = \sqrt{\frac{\gamma_a(r-1)}{c}} e^{i\omega_{\pm}t} \quad (2-15-b)$$

$$D(t) = \frac{\kappa}{c} \quad (2-15-c)$$

$$d(t) = 0 \quad (2-15-d)$$

$$\omega_{\pm} = -\kappa\alpha + \gamma_p \quad (2-15-e)$$

$$\psi = \frac{\pi}{2} \quad (2-15-f)$$

- les solutions polarisées elliptiquement : nous n'avons pas rencontré de telles situations expérimentalement. C'est pourquoi nous ne détaillerons pas les solutions analytiques correspondant à ces solutions.

Une analyse de stabilité permet de connaître les solutions stables en fonction des différents paramètres. Sur la figure (2.4), on a tracé les domaines de stabilité des polarisations linéaires présentés dans [Regalado 97] pour des paramètres correspondant à nos expériences. La solution linéaire selon (Ox) est stable pour tout taux de pompe tel que :

$$r < r_x = 1 + \gamma_J \gamma_p / [\gamma(\kappa\alpha - \gamma_p)] \quad (2-16)$$

ce qui est le cas sous la ligne continue. La polarisation linéaire selon (Oy) est quant à elle stable pour tout taux de pompe tel que :

$$r > r_y = 1 - \frac{\gamma_J}{\gamma_a} + 2\alpha \frac{\gamma_p}{\gamma_a} \quad (2-17)$$

ce qui correspond à la zone à gauche du trait pointillé. En somme, il existe quatre zones distinctes :

- dans la région I, les deux polarisations linéaires sont stables,
- dans la région II, les deux polarisations linéaires sont instables,
- dans la région III, seule la polarisation selon (Ox) est stable,
- dans la région IV, seule la polarisation selon (Oy) est stable.

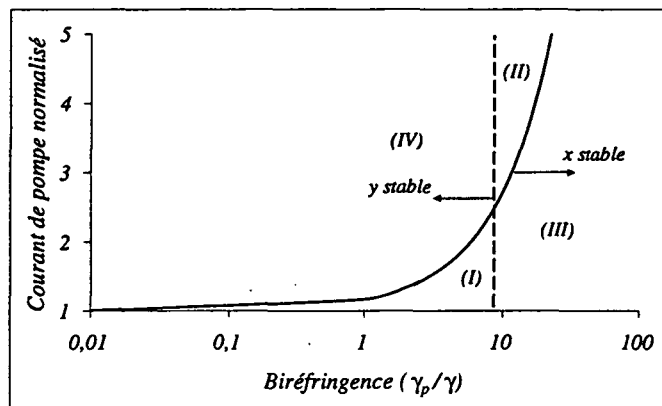


Fig. 2.4 – Diagramme de stabilité des polarisations linéaires prévu par le modèle SFM. On a considéré les paramètres suivants : $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, et $\alpha = 3$.

On peut procéder de même pour les polarisations elliptiques. On démontre que ces solutions sont stables dans une étroite région pour laquelle r est légèrement supérieur à r_x .

Ce modèle a permis d'interpréter les variations de polarisation expérimentalement observées dans les faisceaux émis par les VCSELs et est maintenant considéré comme un modèle standard pour ces lasers. C'est pourquoi, nous avons appliqué la méthode des forces de Langevin aux systèmes des équations du modèle SFM pour obtenir des équations de Heisenberg-Langevin et caractériser le bruit d'intensité quantique des VCSELs.

2.3 Modèle quantique pour les VCSELs

Pour calculer les fluctuations quantiques qui se produisent autour des valeurs stationnaires que nous venons de décrire, nous devons considérer les diverses sources de bruit qui affectent les porteurs. Ces sources sont de deux types : le champ du vide électromagnétique qui entre sur le mode du laser et sur les autres modes dans toutes les directions de l'espace, provoquant l'émission spontanée, et le bruit du processus de pompage. L'effet du champ quantique du vide se traite de manière standard par la méthode des forces de Langevin quantiques [Cohen-Tannoudji 91, Walls 95]. Pour traiter l'effet du pompage, nous suivons la méthode utilisée dans [Kolobov 93, Davidovich

96]. Nous décrivons la statistique du pompage en supposant que les porteurs injectés dans la diode laser, porteurs qui forment le courant de pompage, arrivent à des instants t_j dans un des états supérieurs du diagramme (2.2) et commencent, à cet instant, à interagir avec le champ. Nous avons ici un système à quatre niveaux et non pas à deux niveaux comme dans [Kolobov 93, Davidovich 96]. Les porteurs peuvent arriver dans l'un ou l'autre des états supérieurs, ce qui impose de reprendre le calcul du bruit provenant du pompage. Nous écrivons tout d'abord les équations de Heisenberg-Langevin microscopiques correspondant aux porteurs individuels, interagissant avec le champ, sans tenir compte de leur temps d'arrivée.

2.3.1 Les équations de Langevin quantiques microscopiques

Les opérateurs quantiques qui décrivent l'atome j se définissent aisément à partir des grandeurs physiques définies dans la partie précédente :

- $\widehat{n}_i^j(t)$ est la population du niveau i ,
- $\widehat{a}_+(t)$ et $\widehat{a}_-(t)$ sont les enveloppes des deux champs polarisés circulairement,
- $\widehat{\sigma}_\pm^j(t)$ sont les enveloppes des polarisations correspondantes associées aux deux transitions possibles ,
- $\widehat{f}_{\widehat{a}_\pm}^j(t)$, $\widehat{f}_{\widehat{\sigma}_\pm}^j(t)$, $\widehat{f}_{\widehat{n}_{a_\pm}}^j(t)$ et $\widehat{f}_{\widehat{n}_{b_\pm}}^j(t)$ sont les forces de Langevin microscopiques correspondant aux différentes variables.

Les équations de Heisenberg-Langevin qui régissent les évolutions de ces opérateurs sont les suivantes :

$$\partial_t \widehat{a}_\pm(t) = -\kappa \widehat{a}_\pm(t) - ig_0 \sum_j \widehat{\sigma}_\pm^j(t) - i\gamma_p \widehat{a}_\mp(t) + \widehat{f}_{\widehat{a}_\pm}^j(t) \quad (2-18-a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{\sigma}_\pm^j(t) &= -\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_\pm^j(t) + ig_0 \left(\widehat{n}_{a_\pm}^j(t) - \widehat{n}_{b_\mp}^j(t) \right) \widehat{a}_\pm(t) \\ &\quad + \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_\pm}^j(t) \end{aligned} \quad (2-18-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{n}_{a_\pm}^j(t) &= -\gamma_a \widehat{n}_{a_\pm}^j(t) - \gamma_j (\widehat{n}_{a_\pm}^j(t) - \widehat{n}_{a_\mp}^j(t)) \\ &\quad - ig_0 \widehat{a}_\pm(t) \widehat{\sigma}_\pm^{j\dagger}(t) + ig_0 \widehat{a}_\pm^\dagger(t) \widehat{\sigma}_\pm^j(t) + \widehat{f}_{\widehat{n}_{a_\pm}}^j(t) \end{aligned} \quad (2-18-c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \widehat{n}_{b_\pm}^j(t) &= -\gamma_b \widehat{n}_{b_\pm}^j(t) - \gamma_j (\widehat{n}_{b_\pm}^j(t) - \widehat{n}_{b_\mp}^j(t)) \\ &\quad + ig_0 \widehat{a}_\pm(t) \widehat{\sigma}_\pm^{j\dagger}(t) - ig_0 \widehat{a}_\pm^\dagger(t) \widehat{\sigma}_\pm^j(t) + \widehat{f}_{\widehat{n}_{b_\pm}}^j(t) \end{aligned} \quad (2-18-d)$$

Pour caractériser les forces de Langevin, on doit calculer les différents coefficients de diffusion microscopiques. On utilise, dans ce but, la relation d'Einstein généralisée (A-5). Le détail des calculs est donné dans l'appendice (B).

2.3.2 Les équations de Langevin quantiques macroscopiques

Pour décrire l'interaction de l'ensemble des atomes avec le champ électromagnétique, on définit les opérateurs macroscopiques suivants [Benkert 90] :

$$\begin{aligned}\widehat{N}_i(t) &= \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{n}_i^j(t) \\ \widehat{P}_\pm(t) &= -i \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{\sigma}_\pm^j(t)\end{aligned}\quad (2-19-a)$$

Nous supposons que le porteur j entre dans la cavité à l'instant t_j alors qu'il est dans un des niveaux supérieurs de la transition. On caractérise la statistique des instants t_j [Benkert 90] par le paramètre p compris entre 0 et 1 (on rappelle que la valeur de p égale à 1 correspond à une pompe parfaitement régulière, la valeur de p égale à 0 correspond à une statistique poissonnienne). Nous supposons aussi par la suite que la probabilité qu'il soit à cet instant dans l'état $|J_z = -1/2\rangle$ est égale à celle qu'il soit dans l'état $|J_z = 1/2\rangle$, soit la valeur $1/2$. À partir des équations (2-18-a), (2-18-b), (2-18-c) et (2-18-d), on obtient les équations d'évolution pour ces variables :

$$\partial_t \widehat{a}_\pm(t) = -\kappa \widehat{a}_\pm(t) + g_0 \widehat{P}_\pm(t) - i\gamma_p \widehat{a}_\pm(t) \quad (2-20-a)$$

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{P}_\pm(t) &= -\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{P}_\pm(t) + g_0 (\widehat{N}_{a_\pm}(t) - \widehat{N}_{b_\pm}(t)) \widehat{a}_\pm(t) \\ &\quad + \widehat{F}_{\widehat{P}_\pm}(t)\end{aligned}\quad (2-20-b)$$

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{N}_{a_\pm}(t) &= \mu - \gamma_a \widehat{N}_{a_\pm}(t) - \gamma_j (\widehat{N}_{a_\pm}(t) - \widehat{N}_{a_\mp}(t)) \\ &\quad - g_0 \widehat{a}_\pm^\dagger(t) \widehat{P}_\pm(t) - g_0 \widehat{a}_\pm(t) \widehat{P}_\pm^\dagger(t) + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a_\pm}}(t)\end{aligned}\quad (2-20-c)$$

$$\begin{aligned}\partial_t \widehat{N}_{b_\pm}(t) &= -\gamma_b \widehat{N}_{b_\pm}(t) - \gamma_j (\widehat{N}_{b_\pm}(t) - \widehat{N}_{b_\mp}(t)) \\ &\quad + g_0 \widehat{a}_\pm^\dagger(t) \widehat{P}_\pm(t) + g_0 \widehat{a}_\pm(t) \widehat{P}_\pm^\dagger(t) + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b_\pm}}(t)\end{aligned}\quad (2-20-d)$$

Dans ces équations, μ est le taux de pompage de chaque niveau supérieur. Au total, le taux de pompage est donc égal à 2μ . Le taux de pompage μ vérifie la relation [Benkert 90] :

$$2\mu = \left\langle \sum_j \delta(t - t_j) \right\rangle_S \quad (2-21)$$

où $\langle \rangle_S$ est une moyenne statistique sur les instants t_j . $\widehat{F}_{\widehat{P}_\pm}(t)$, $\widehat{F}_{\widehat{N}_{a_\pm}}(t)$, $\widehat{F}_{\widehat{N}_{b_\pm}}(t)$ sont les forces de Langevin associées aux opérateurs macroscopiques. Elles sont définies à partir

des forces de Langevin microscopiques de telle sorte que leur moyenne soit nulle. On a ainsi :

$$\widehat{F}_{\widehat{P}_{\pm}}(t) = \sum_j \delta(t - t_j) \widehat{\sigma}_{\pm}^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_{\pm}}^j(t) \quad (2-22-a)$$

$$\widehat{F}_{\widehat{N}_{a_{\pm}}}(t) = \sum_j \delta(t - t_j) \widehat{n}_{a_{\pm}}^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{n}_{a_{\pm}}}^j(t) - \mu \quad (2-22-b)$$

$$\widehat{F}_{\widehat{N}_{b_{\pm}}}(t) = \sum_j \delta(t - t_j) \widehat{n}_{b_{\pm}}^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{n}_{b_{\pm}}}^j(t) \quad (2-22-c)$$

Les coefficients de diffusion correspondant à ces nouvelles forces de Langevin peuvent être calculés à partir des coefficients de diffusion des forces de Langevin microscopiques et de l'hypothèse sur l'état de l'atome à l'instant t_j :

$$\langle \widehat{n}_{a_{\pm}}^j(t_j) \rangle = 1/2 \quad (2-23-a)$$

$$\langle \widehat{n}_{b_{\pm}}^j(t_j) \rangle = 0 \quad (2-23-b)$$

$$\langle \widehat{\sigma}_{\pm}^j(t_j) \rangle = 0 \quad (2-23-c)$$

comme dans les références [Kolobov 93, Davidovich 96, Scully 97]. Le détail des calculs est donné dans l'appendice (C). À partir des expressions obtenues, on constate que les coefficients de diffusion macroscopiques contiennent deux contributions : l'une venant des équations microscopiques, obtenue en changeant dans les expressions des coefficients microscopiques les variables microscopiques en leur analogue macroscopiques, l'autre venant de la statistique de pompe.

Par la suite, nous aurons aussi besoin d'utiliser la demi-somme et la demi-différence de populations qui apparaissent dans les équations (2-4-a) et (2-4-b). Les équations d'Heisenberg-Langevin microscopiques correspondant à ces quantités contiennent les forces de Langevin, combinons linéaires des forces de Langevin précédemment définies. Les coefficients de diffusion microscopiques associés à ces forces de Langevin se déduisent donc des coefficients précédemment calculés par simple combinaison linéaire. On définit aussi les opérateurs macroscopiques pour ces quantités :

$$\widehat{D}(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{D}^j(t) \quad (2-24-a)$$

$$\widehat{d}(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{d}^j(t) \quad (2-24-b)$$

avec :

$$\widehat{D}^j(t) = \frac{1}{2} (\widehat{n}_{a_{+}}^j(t) + \widehat{n}_{a_{-}}^j(t)) \quad (2-25-a)$$

$$\widehat{d}^j(t) = \frac{1}{2} (\widehat{n}_{a_+}^j(t) - \widehat{n}_{a_-}^j(t)) \quad (2-25-b)$$

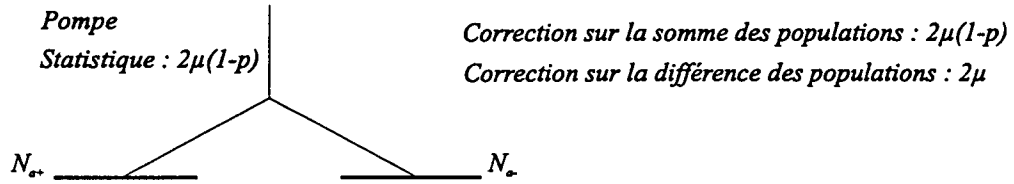
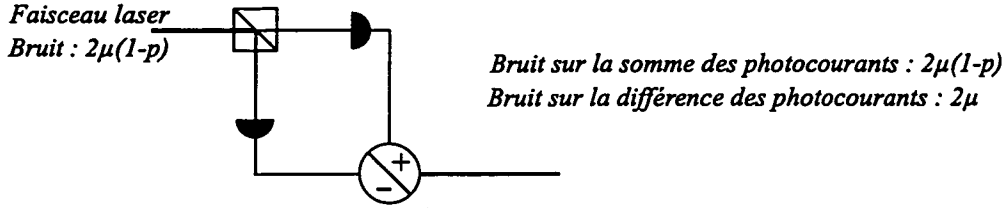


Fig. 2.5 – Analogie entre la division de la pompe entre les deux niveaux supérieurs et le franchissement d'une lame semi-transparente par un faisceau lumineux.

Pour interpréter physiquement les termes de bruit provenant de la pompe, il est aussi utile d'introduire les opérateurs microscopiques $\widehat{D}^{ij}(t)$ et $\widehat{d}^{ij}(t)$ définis par :

$$\widehat{D}^{ij}(t) = \widehat{n}_{a_+}^j(t) + \widehat{n}_{a_-}^j(t) \quad (2-26-a)$$

$$\widehat{d}^{ij}(t) = \widehat{n}_{a_+}^j(t) - \widehat{n}_{a_-}^j(t) \quad (2-26-b)$$

ainsi que les opérateurs macroscopiques correspondants :

$$\widehat{D}'(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{D}^{ij}(t) \quad (2-27-a)$$

$$\widehat{d}'(t) = \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{d}^{ij}(t) \quad (2-27-b)$$

$\widehat{D}'(t)$ correspond au nombre total de porteurs en interaction avec le laser, $\widehat{d}'(t)$ correspond à la différence des nombres de porteurs interagissant avec les transitions σ_+ et σ_- .

Dans l'appendice (C), on donne le détail des corrections dues à la prise en compte de la statistique de la pompe. Les résultats obtenus sont les suivants :

$$\left\langle \widehat{F}_D(t) \widehat{F}_D(t') \right\rangle = \left\langle \sum_j \theta(t - t_j) \left\langle \widehat{f}_D^j(t) \widehat{f}_D^j(t') \right\rangle \right\rangle_S$$

$$+\frac{\mu}{2}(1-p)\delta(t-t') \quad (2-28-a)$$

$$\langle \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t) \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t') \rangle = \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t') \rangle \right\rangle_s + 2\mu(1-p)\delta(t-t') \quad (2-28-b)$$

$$\langle \widehat{F}_{\widehat{a}}(t) \widehat{F}_{\widehat{a}}(t') \rangle = \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{a}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{a}}^j(t') \rangle \right\rangle_s + \frac{1}{2}\mu\delta(t-t') \quad (2-28-c)$$

$$\langle \widehat{F}_{\widehat{a}'}(t) \widehat{F}_{\widehat{a}'}(t') \rangle = \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{a}'}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{a}'}^j(t') \rangle \right\rangle_s + 2\mu\delta(t-t') \quad (2-28-d)$$

$$\langle \widehat{F}_{\widehat{P}_{\pm}}^{\dagger}(t) \widehat{F}_{\widehat{P}_{\pm}}^{\dagger}(t') \rangle = \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{P}_{\pm}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{P}_{\pm}}^j(t') \rangle \right\rangle_s + \mu\delta(t-t') \quad (2-28-e)$$

Dans chacun des seconds membres des équations (2-28), le second terme provient des fluctuations de la pompe. Les autres coefficients de diffusion, ne contenant pas de correction due à la statistique de pompe, se déduisent directement des coefficients microscopiques.

Pour interpréter ces résultats, on peut établir une analogie entre la situation décrite ci-dessus et l'étude du bruit d'un faisceau traversant une lame semi-transparente (voir figure 2.5) : la pompe dont la statistique est caractérisée par un paramètre p est partagée en deux pour pomper les deux niveaux supérieurs des transitions, de même que le faisceau qui traverse la lame semi-transparente.

Supposons le bruit du faisceau égal à $2\mu(1-p)$ et son intensité égale à 2μ . On déduit des résultats sur la détection homodyne (section 1.4.1) et l'équation (1-57) que les bruits mesurés par les photodiodes A et B sont égaux à :

$$(\Delta I_A)^2 = \mu(1-p/2) \quad (2-29-a)$$

$$(\Delta I_B)^2 = \mu(1-p/2) \quad (2-29-b)$$

et que les bruits sur la somme et la différence des photocourants valent :

$$(\Delta I_{A+B})^2 = 2\mu(1-p) \text{ (bruit d'intensité du faisceau)} \quad (2-30-a)$$

$$(\Delta I_{A-B})^2 = 2\mu \text{ (limite quantique standard)} \quad (2-30-b)$$

Ces résultats sont parfaitement analogues aux corrections calculées pour les opérateurs $D'(t)$ et $d'(t)$:

- pour $2D_{D'D'}$, correspondant à la somme des nombres de porteurs interagissant avec les transitions σ_+ et σ_- , on trouve une correction égale à $2\mu(1-p)$, un terme proportionnel au bruit de la pompe caractérisé par le paramètre p ,

- pour $2D_{d'd'}$, correspondant à la différence des nombres de porteurs interagissant avec les transitions σ_+ et σ_- , la correction est égale à 2μ , un terme indépendant du bruit de la pompe (comme la limite quantique standard pour le faisceau). Les fluctuations proviennent du bruit de partition de la pompe.

Pour les opérateurs $\widehat{D}(t)$ et $\widehat{d}(t)$, on retrouve les termes de diffusion à partir de ceux de $\widehat{D}'(t)$ et $\widehat{d}'(t)$ en notant que, comme $\widehat{D}(t) = \widehat{D}'(t)/2$ et $\widehat{d}(t) = \widehat{d}'(t)/2$, les coefficients de diffusion sont divisés par 4.

Enfin, les coefficients de diffusion des polarisations \widehat{P}_+ et \widehat{P}_- ont une contribution du bruit de pompe analogue à celle d'un laser à deux niveaux.

2.3.3 Équations en nombres complexes et élimination adiabatique des populations des niveaux inférieurs et des polarisations

En pratique, il est plus facile d'utiliser des nombres complexes que des opérateurs. On sait que l'on peut remplacer les opérateurs par des nombres complexes à condition d'écrire les opérateurs apparaissant dans les équations de Heisenberg-Langevin dans un ordre donné. On utilise l'ordre normal défini par l'équation (D-1) de l'appendice (D) pour lequel, à 0 K, les forces de Langevin liées aux champs sont nulles [Davidovich 96, Scully 97]. À 300 K, aux fréquences visibles ou de l'infrarouge proche, ce résultat reste une très bonne approximation. Ce passage a pour conséquence de modifier les coefficients de diffusion (le calcul de ces coefficients de diffusion pour les nombres complexes est donné dans l'appendice D). Les équations (2-20) peuvent être écrites dans l'ordre normal, elles ne sont pas modifiées vu les propriétés de commutation des opérateurs impliqués :

$$\partial_t a_{\pm}(t) = -\kappa a_{\pm}(t) + g_0 P_{\pm}(t) - i\gamma_p a_{\mp}(t) \quad (2-31-a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t P_{\pm}(t) &= -\gamma_{\perp}(1+i\alpha)P_{\pm}(t) \\ &\quad + g_0(N_{a_{\pm}}(t) - N_{b_{\pm}}(t))a_{\mp}(t) + F_{P_{\pm}}(t) \end{aligned} \quad (2-31-b)$$

$$\partial_t N_{a_{\pm}}(t) = \mu - \gamma_a N_{a_{\pm}}(t) - \gamma_j(N_{a_{\pm}}(t) - N_{a_{\mp}}(t))$$

$$-g_0 a_{\pm}^*(t) P_{\pm}(t) - g_0 a_{\pm(t)} P_{\pm}^*(t) + F_{N_{a_{\pm}}}(t) \quad (2-31-c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t N_{b_{\pm}}(t) = & -\gamma_b N_{b_{\pm}}(t) - \gamma_j (N_{b_{\pm}}(t) - N_{b_{\mp}}(t)) \\ & + g_0 a_{\pm}^*(t) P_{\pm}(t) + g_0 a_{\pm}(t) P_{\pm}^*(t) + F_{N_{b_{\pm}}}(t) \end{aligned} \quad (2-31-d)$$

(dans ces équations, les variables sont des nombres complexes).

2.3.3.1 Élimination adiabatique des populations N_{b_+} et N_{b_-}

Dans un semi-conducteur, nous avons vu que γ_b pouvait être considéré infini. On peut donc procéder à l'élimination des variables N_{b_+} et N_{b_-} :

$$\begin{aligned} \partial_t N_{b_{\pm}}(t) = 0 = & -\gamma_b N_{b_{\pm}}(t) - \gamma_j (N_{b_{\pm}}(t) - N_{b_{\mp}}(t)) \\ & + g_0 a_{\pm}(t) P_{\pm}^*(t) + g_0 a_{\pm}^*(t) P_{\pm}(t) + F_{N_{b_{\pm}}}(t) \end{aligned} \quad (2-32)$$

soit :

$$N_{b_{\pm}}(t) = \frac{-\gamma_j (N_{b_{\pm}}(t) - N_{b_{\mp}}(t)) + g_0 a_{\pm}(t) P_{\pm}^*(t) + g_0 a_{\pm}^*(t) P_{\pm}(t) + F_{N_{b_{\pm}}}(t)}{\gamma_b} \quad (2-33)$$

Si on fait tendre γ_b vers l'infini, on constate que :

$$N_{b_{\pm}}(t) = \frac{F_{N_{b_{\pm}}}(t)}{\gamma_b} \quad (2-34)$$

Par conséquent, on a :

$$\langle N_{b_{\pm}}(t) \rangle = 0 \quad (2-35)$$

Si on définit :

$$F_{\tilde{N}_{b_{\pm}}}(t) = \frac{F_{N_{b_{\pm}}}(t)}{\gamma_b} \quad (2-36)$$

le passage à la limite sur γ_b dans l'expression des coefficients de diffusion de l'appendice (B) définis avec cette nouvelle force montre que seuls les coefficients mettant en jeu $N_{b_{\pm}}$ et $P_{b_{\pm}}$ sont non nuls. On a ainsi :

$$2D_{\tilde{N}_{b_{\pm}}P_{\pm}} = \langle P_{\pm} \rangle \quad (2-37)$$

Même si la population du niveau inférieur est nulle en moyenne, elle intervient par l'intermédiaire de ses fluctuations.

2.3.3.2 Élimination adiabatique de la polarisation

De la même manière, le coefficient γ_{\perp} étant grand devant le coefficient γ_a , on peut éliminer adiabatiquement la polarisation :

$$\begin{aligned} \partial_t P_{\pm}(t) = 0 = & -\gamma_{\perp}(1+i\alpha)P_{\pm}(t) + g_0(N_{a_{\pm}}(t) \\ & - N_{b_{\pm}}(t))a_{\pm}(t) + F_{P_{\pm}}(t) \end{aligned} \quad (2-38)$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} P_{\pm}(t) = & \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0 N_{a_{\pm}}(t) a_{\pm}(t) \right. \\ & \left. - g_0 a_{\pm}(t) \tilde{F}_{N_{b_{\pm}}}(t) + F_{P_{\pm}}(t) \right] \end{aligned} \quad (2-39)$$

Remplaçons P_{\pm} dans les autres équations :

a Pour les champs :

$$\partial_t a_{\pm}(t) = -\kappa a_{\pm}(t) + g_0^2 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} N_{a_{\pm}}(t) a_{\pm}(t) - i\gamma_p a_{\mp}(t) + G_{a_{\pm}}(t) \quad (2-40)$$

avec :

$$G_{a_{\pm}}(t) = g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[F_{P_{\pm}}(t) - g_0 a_{\pm}(t) \tilde{F}_{N_{b_{\pm}}}(t) \right] \quad (2-41)$$

b Pour les populations :

$$\begin{aligned} \partial_t N_{a_{\pm}} = & \mu - \gamma_a N_{a_{\pm}}(t) - \gamma_j(N_{a_{\pm}}(t) - N_{a_{\mp}}(t)) \\ & - g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0 N_{a_{\pm}}(t) |a_{\pm}(t)|^2 \right] \\ & - g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0 N_{a_{\pm}}(t) |a_{\pm}(t)|^2 \right] + G_{N_{a_{\pm}}}(t) \end{aligned} \quad (2-42)$$

avec :

$$\begin{aligned} G_{N_{a_{\pm}}}(t) = & -g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[a_{\pm}^*(t) F_{P_{\pm}}(t) - g_0 |a_{\pm}(t)|^2 \tilde{F}_{N_{b_{\pm}}}(t) \right] \\ & - g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[a_{\pm}(t) F_{P_{\pm}}^*(t) - g_0 |a_{\pm}(t)|^2 \tilde{F}_{N_{b_{\pm}}}(t) \right] \\ & + F_{N_{a_{\pm}}}(t) \end{aligned} \quad (2-43)$$

Pour les champs comme pour les populations, l'élimination adiabatique se traduit par l'apparition de nouveaux termes de bruit. On en déduit alors les équations pour la somme et la différence des différences de populations $D(t)$ et $d(t)$:

$$\begin{aligned} \partial_t D(t) &= \mu - \gamma_a D(t) \\ &\quad - g_0^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} [(|a_+(t)|^2 + |a_-(t)|^2) D(t) \\ &\quad + (|a_+(t)|^2 - |a_-(t)|^2) d(t)] + G_D(t) \end{aligned} \quad (2-44-a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t d(t) &= -\gamma_J d(t) \\ &\quad - g_0^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} [(|a_+(t)|^2 - |a_-(t)|^2) D(t) \\ &\quad + (|a_+(t)|^2 + |a_-(t)|^2) d(t)] + G_d(t) \end{aligned} \quad (2-44-b)$$

avec :

$$\begin{aligned} G_D(t) &= \frac{1}{2} (F_{N_{a_+}}(t) + F_{N_{a_-}}(t)) + g_0^2 |a_+(t)|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}}(t) \\ &\quad + g_0^2 |a_-(t)|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}}(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\perp} (1 - i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} g_0 (a_+^*(t) F_{P_+} + a_-^*(t) F_{P_-}) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\perp} (1 + i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} g_0 (a_+(t) F_{P_+}^* + a_-(t) F_{P_-}^*(t)) \end{aligned} \quad (2-45-a)$$

$$\begin{aligned} G_d(t) &= \frac{1}{2} (F_{N_{a_+}}(t) - F_{N_{a_-}}(t)) + g_0^2 |a_+(t)|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}}(t) \\ &\quad - g_0^2 |a_-(t)|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}}(t) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\perp} (1 - i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} g_0 (a_+^* F_{P_+}(t) - a_-^*(t) F_{P_-}(t)) \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\perp} (1 + i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2 (1 + \alpha^2)} g_0 (a_+(t) F_{P_+}^* - a_-(t) F_{P_-}^*(t)) \end{aligned} \quad (2-45-b)$$

Les termes $G_i(t)$ sont des forces de Langevin. Le calcul des coefficients de diffusion correspondant à ces nouvelles forces est détaillé dans l'appendice (E).

2.3.4 Spectres de bruit

Pour calculer le bruit d'intensité du faisceau, on linéarise le système autour de ses valeurs stationnaires. Dans la suite, nous nous limitons aux solutions polarisées

linéairement dont nous avons vu qu'elle étaient les plus intéressantes dans notre cas. Le système d'équations à linéariser est le suivant :

$$\begin{aligned} \partial_t a_{\pm}(t) &= -\kappa a_{\pm}(t) + c(1 - i\alpha)(D(t) \pm d(t)) a_{\pm}(t) \\ &\quad - i\gamma_p a_{\mp}(t) + G_{a_{\pm}}(t) \end{aligned} \quad (2-46-a)$$

$$\begin{aligned} \partial_t D(t) &= \mu - \gamma_a D(t) - c(|a_+|^2 + |a_-|^2) D(t) \\ &\quad - c(|a_+|^2 - |a_-|^2) d(t) + G_D(t) \end{aligned} \quad (2-46-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t d(t) &= -\gamma_J d(t) - c(|a_+|^2 + |a_-|^2) d(t) \\ &\quad - c(|a_+|^2 - |a_-|^2) D(t) + G_d(t) \end{aligned} \quad (2-46-c)$$

D'après les solutions décrites dans la section (2.2.2), on sait que les solutions sont polarisées linéairement selon (Ox) ou (Oy). Examinons les deux possibilités :

- La polarisation est selon (Ox). Dans ce cas, on pose :

$$a_{\pm}(t) = (Q + \delta a_{\pm}(t)) e^{-i(\kappa\alpha + \gamma_p)t} \quad (2-47-a)$$

$$D(t) = D_0 + \delta D(t) \quad (2-47-b)$$

$$d(t) = \delta d(t) \quad (2-47-c)$$

Nous introduisons les variables :

$$\delta a_x(t) = \frac{\delta a_+(t) + \delta a_-(t)}{\sqrt{2}} \quad (2-48-a)$$

$$\delta a_y(t) = -i \frac{\delta a_+(t) - \delta a_-(t)}{\sqrt{2}} \quad (2-48-b)$$

On obtient après substitution le système suivant :

$$\partial_t \delta a_x(t) = \sqrt{2}c(1 - i\alpha) Q \delta D(t) + G_{a_x}(t) \quad (2-49-a)$$

$$\partial_t \delta a_x^*(t) = \sqrt{2}c(1 + i\alpha) Q \delta D(t) + G_{a_x}^*(t) \quad (2-49-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \delta D(t) &= -(\gamma_a + 2cQ^2) \delta D(t) \\ &\quad - \sqrt{2}cQD_0 (\delta a_x(t) + \delta a_x^*(t)) + G_D(t) \end{aligned} \quad (2-49-c)$$

$$\partial_t \delta a_y(t) = -i\sqrt{2}c(1 - i\alpha) Q \delta d(t) + 2i\gamma_p \delta a_y(t) + G_{a_y}(t) \quad (2-49-d)$$

$$\partial_t \delta a_y^*(t) = -i\sqrt{2}c(1 + i\alpha) Q \delta d(t) - 2i\gamma_p \delta a_y^*(t) + G_{a_y}^*(t) \quad (2-49-e)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \delta d(t) &= -(\gamma_J + 2cQ^2) \delta d(t) \\ &\quad - i\sqrt{2}cQD_0 (\delta a_y(t) + \delta a_y^*(t)) + G_d(t) \end{aligned} \quad (2-49-f)$$

avec :

$$G_{a_x}(t) = \frac{G_{a_+}(t) + G_{a_-}(t)}{\sqrt{2}} \quad (2-50-a)$$

$$G_{a_y}(t) = -i \frac{G_{a_+}(t) - G_{a_-}(t)}{\sqrt{2}} \quad (2-50-b)$$

On remarque que le système (2-49) se sépare en deux sous-systèmes indépendants, l'un correspondant aux fluctuations d'intensité $\delta a_x(t)$ qui sont couplées aux fluctuations de la population totale, l'autre aux fluctuations de polarisation $\delta a_y(t)$ qui sont couplées aux fluctuations de la différence de population entre les deux sous-systèmes.

- La polarisation est selon (Oy). Dans ce cas, on pose :

$$a_{\pm}(t) = (Q + \delta a_{\pm}(t)) e^{-i(\kappa\alpha - \gamma_p)t} \quad (2-51-a)$$

$$D(t) = D_0 + \delta D(t) \quad (2-51-b)$$

$$d(t) = \delta d(t) \quad (2-51-c)$$

On obtient après substitution :

$$\partial_t \delta a_x(t) = \sqrt{2}c(1 - i\alpha) Q \delta d(t) + G_{a_x}(t) \quad (2-52-a)$$

$$\partial_t \delta a_x^*(t) = \sqrt{2}c(1 + i\alpha) Q \delta d(t) + G_{a_x}^*(t) \quad (2-52-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \delta d(t) = & -(\gamma_J + 2cQ^2) \delta d(t) \\ & -\sqrt{2}cQD_0(\delta a_x(t) + \delta a_x^*(t)) + G_d(t) \end{aligned} \quad (2-52-c)$$

$$\partial_t \delta a_y(t) = -i\sqrt{2}c(1 - i\alpha) Q \delta D(t) - 2i\gamma_p \delta a_y(t) + G_{a_y}(t) \quad (2-52-d)$$

$$\partial_t \delta a_y^*(t) = -i\sqrt{2}c(1 + i\alpha) Q \delta D(t) + 2i\gamma_p \delta a_y^*(t) + G_{a_y}^*(t) \quad (2-52-e)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \delta D(t) = & -(\gamma_a + 2cQ^2) \delta D(t) \\ & -i\sqrt{2}cQD_0(\delta a_y(t) + \delta a_y^*(t)) + G_D(t) \end{aligned} \quad (2-52-f)$$

avec, cette fois :

$$G_{a_x}(t) = G_{a_+}(t) - G_{a_-}(t) \quad (2-53-a)$$

$$G_{a_y}(t) = G_{a_+}(t) + G_{a_-}(t) \quad (2-53-b)$$

Plutôt que de résoudre le système d'équations différentielles couplées obtenues, on résout le système algébrique constitué par les transformées de Fourier des différentes

variables complexes. Pour une fonction $\delta a(t)$, on définit sa transformée de Fourier par :

$$\delta a(\Omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta a(t) \exp(i\Omega t) dt \quad (2-54-a)$$

$$\delta a(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta a(\Omega) \exp(-i\Omega t) d\Omega \quad (2-54-b)$$

Le système étant supposé stationnaire, les transformées de Fourier des forces de Langevin obéissent à la relation :

$$\langle F_i(\Omega) F_j(\Omega') \rangle = 2\mathcal{D}_{i,j} \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-55)$$

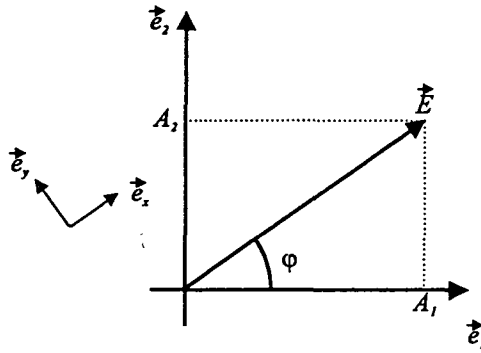


Fig. 2.6 – Notations.

Nous allons maintenant calculer les fluctuations du champ total $\vec{E}(t)$ et de deux composantes de polarisation \vec{e}_1 et \vec{e}_2 (voir figure 2.6) faisant respectivement un angle φ et $\varphi + \pi/2$ avec le champ total $\vec{E}(t)$ (nous considérons le cas où le champ est polarisé selon l'axe (Ox)).

2.3.4.1 Bruit d'intensité des composantes de polarisation

Avec les notations précédentes, on a :

$$\vec{E}(t) = A_1(t) \vec{e}_1 + A_2(t) \vec{e}_2 \quad (2-56)$$

Les vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 peuvent être calculés à partir des vecteurs \vec{e}_+ et \vec{e}_- , qui définissent les polarisations circulaires positives et négatives. On a ainsi :

$$\vec{e}_1 = \vec{e}_x \cos \varphi - \vec{e}_y \sin \varphi \quad (2-57-a)$$

$$\vec{e}_2 = \vec{e}_x \sin \varphi + \vec{e}_y \cos \varphi \quad (2-57-b)$$

Si $\varphi = 0$, \vec{e}_1 et \vec{e}_2 correspondent aux vecteurs \vec{e}_x et \vec{e}_y .

Les définitions du système d'équations (2-48) permettent de calculer les fluctuations d'intensité pour les composantes de polarisation \vec{e}_1 et \vec{e}_2 connaissant les fluctuations $\delta a_x(t)$ et $\delta a_y(t)$:

$$\delta a_1(t) = \delta a_x(t) \cos \varphi - \delta a_y(t) \sin \varphi \quad (2-58-a)$$

$$\delta a_2(t) = \delta a_x(t) \sin \varphi + \delta a_y(t) \cos \varphi \quad (2-58-b)$$

Pour un champ intense d'amplitude A_0 et d'intensité I_0 , les fluctuations d'amplitude sont données par la linéarisation de la relation $I_0 = |A_0|^2$. Elles sont alors directement proportionnelles aux fluctuations d'amplitude $\delta X(\Omega)$ [Davidovich 96]:

$$\delta I(\Omega) = 2 |A_0| \delta X(\Omega) \quad (2-59)$$

avec :

$$\delta X(\Omega) = \frac{1}{2} (\delta a(\Omega) + \delta a^*(\Omega)) \quad (2-60)$$

Aussi, les spectres des fluctuations d'intensité des composantes de polarisation \vec{e}_1 et \vec{e}_2 sont donnés par :

$$\langle \delta X_1(\Omega) \delta X_1(\Omega') \rangle = \frac{[\cos^2 \varphi S_x(\Omega) + \sin^2 \varphi S_y(\Omega) - \cos \varphi \sin \varphi (S_{xy}(\Omega) + S_{yx}(\Omega))]}{\delta(\Omega + \Omega')} \quad (2-61-a)$$

$$\langle \delta X_2(\Omega) \delta X_2(\Omega') \rangle = \frac{[\sin^2 \varphi S_x(\Omega) + \cos^2 \varphi S_y(\Omega) + \cos \varphi \sin \varphi (S_{xy}(\Omega) + S_{yx}(\Omega))]}{\delta(\Omega + \Omega')} \quad (2-61-b)$$

avec :

$$\langle \delta X_x(\Omega) \delta X_x(\Omega') \rangle = S_x(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-62-a)$$

$$\langle \delta X_y(\Omega) \delta X_y(\Omega') \rangle = S_y(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-62-b)$$

$$\langle \delta X_x(\Omega) \delta X_y(\Omega') \rangle = S_{xy}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-62-c)$$

$$\langle \delta X_y(\Omega) \delta X_x(\Omega') \rangle = S_{yx}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-62-d)$$

et :

$$\delta X_x = \frac{1}{2} (\delta a_x(\Omega) + \delta a_x^*(\Omega)) \quad (2-63-a)$$

$$\delta X_y = \frac{1}{2} (\delta a_y(\Omega) + \delta a_y^*(\Omega)) \quad (2-63-b)$$

On peut relier les fluctuations à l'intérieur de la cavité aux fluctuations mesurées par photodétection à l'extérieur de la cavité, notées S_i^{out} ($i = 1, 2$), par [Davidovich 96]:

$$S_1^{out}(\Omega) = 1 + 8\kappa S_1(\Omega) \quad (2-64-a)$$

$$S_2^{out}(\Omega) = 1 + 8\kappa S_2(\Omega) \quad (2-64-b)$$

avec :

$$\langle \delta X_1(\Omega) \delta X_1(\Omega') \rangle = S_1(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-65-a)$$

$$\langle \delta X_2(\Omega) \delta X_2(\Omega') \rangle = S_2(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-65-b)$$

Les spectres de bruit ainsi obtenus sont normalisés à la limite quantique standard. En utilisant l'équation (2-59), on peut en déduire les spectres de bruit d'intensité absolu, notés $B_i(\Omega)$ ($i = 1, 2$). Ainsi, pour les composantes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , on a :

$$\begin{aligned} B_1(\Omega) &= 4I_1 (1 + 8\kappa S_1(\Omega)) \\ &= 4I_0 \cos^2 \varphi \left\{ 1 + 8\kappa \left[\cos^2 \varphi S_x(\Omega) + \sin^2 \varphi S_y(\Omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos \varphi \sin \varphi (S_{xy}(\Omega) + S_{yx}(\Omega)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-66-a)$$

$$\begin{aligned} B_2(\Omega) &= 4I_2 (1 + 8\kappa S_1(\Omega)) \\ &= 4I_0 \sin^2 \varphi \left\{ 1 + 8\kappa \left[\sin^2 \varphi S_x(\Omega) + \cos^2 \varphi S_y(\Omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \varphi \sin \varphi (S_{xy}(\Omega) + S_{yx}(\Omega)) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-66-b)$$

où I_1 et I_2 sont les intensités moyennes des composantes de polarisation \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Ce sont les prévisions de ces expressions que nous pouvons comparer aux résultats expérimentaux obtenus en filtrant le faisceau par un polariseur.

La définition des axes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 étant arbitraire, on peut connaître le bruit pour une position quelconque du polariseur avec une exception cependant : le polariseur ne peut être placé perpendiculairement au champ moyen. En effet, la linéarisation (2-59) n'est plus valable dans ce cas.

2.3.4.2 Bruit d'intensité total

Pour calculer le bruit d'intensité total, on utilise l'orthogonalité des vecteurs \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . Soient $I_1(t)$ et $I_2(t)$ les intensités des composantes \vec{e}_1 et \vec{e}_2 et $I(t)$ l'intensité du

faisceau, on a :

$$I(t) = I_1(t) + I_2(t) \quad (2-67)$$

ce qui implique pour les composantes de Fourier de leurs fluctuations :

$$\delta I(\Omega) = \delta I_1(\Omega) + \delta I_2(\Omega) \quad (2-68)$$

En utilisant l'équation (2-59), l'équation (2-68) peut s'écrire :

$$\delta I(\Omega) = 2|A_1| \delta X_1(\Omega) + 2|A_2| \delta X_2(\Omega) \quad (2-69)$$

Si on définit, pour les polarisations \vec{e}_1 et \vec{e}_2 , le système d'équations analogue au système (2-65) :

$$\langle \delta X_1(\Omega) \delta X_1(\Omega') \rangle = S_1(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-70-a)$$

$$\langle \delta X_2(\Omega) \delta X_2(\Omega') \rangle = S_2(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-70-b)$$

$$\langle \delta X_1(\Omega) \delta X_2(\Omega') \rangle = S_{12}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-70-c)$$

$$\langle \delta X_2(\Omega) \delta X_1(\Omega') \rangle = S_{21}(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (2-70-d)$$

on obtient l'expression suivante pour le bruit d'intensité total intracavité $S(\Omega)$:

$$S(\Omega) = \cos^2 \varphi S_1(\Omega) + \sin^2 \varphi S_2(\Omega) + \cos \varphi \sin \varphi S_{12}(\Omega) + \cos \varphi \sin \varphi S_{21}(\Omega) \quad (2-71)$$

On en déduit les fluctuations totales normalisées hors cavité $S^{out}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} S^{out}(\Omega) &= 1 + 8\kappa S(\Omega) \\ &= 1 + 8\kappa \left[\cos^2 \varphi S_1(\Omega) + \sin^2 \varphi S_2(\Omega) \right. \\ &\quad \left. + \cos \varphi \sin \varphi S_{12}(\Omega) + \cos \varphi \sin \varphi S_{21}(\Omega) \right] \end{aligned} \quad (2-72)$$

ainsi que les fluctuations totales :

$$\begin{aligned} B(\Omega) &= 4I_0 (1 + 8\kappa S(\Omega)) \\ &= 4I_0 \left\{ 1 + 8\kappa \left[\cos^2 \varphi S_1(\Omega) + \sin^2 \varphi S_2(\Omega) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \cos \varphi \sin \varphi S_{12}(\Omega) + \cos \varphi \sin \varphi S_{21}(\Omega) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2-73)$$

2.3.4.3 Corrélation entre deux directions de polarisation orthogonales du faisceau

Notre modèle permet aussi de calculer la corrélation entre deux composantes de polarisation orthogonales du faisceau \vec{e}_1 et \vec{e}_2 . On définit le degré de corrélation

entre les deux composantes par :

$$C(\Omega) = \frac{B(\Omega) - (B_1(\Omega) + B_2(\Omega))}{2\sqrt{B_1(\Omega)B_2(\Omega)}} \quad (2-74)$$

Dans le cas où $C(\Omega) = -1$, les anticorrélations sont parfaites tandis que lorsque $C(\Omega) = 1$ les corrélations sont parfaites. Pour $C(\Omega) = 0$, il n'y a pas de corrélation.

À partir des équations (2-66-a), (2-66-b) et (2-73), on obtient l'expression suivante pour $C(\Omega)$:

$$C(\Omega) = \frac{4I_0 [\cos \varphi \sin \varphi S_{12}(\Omega) + \cos \varphi \sin \varphi S_{21}(\Omega)]}{\sqrt{B_1(\Omega)B_2(\Omega)}} \quad (2-75)$$

2.3.5 Prévisions du modèle

2.3.5.1 Spectre de bruit d'intensité du faisceau

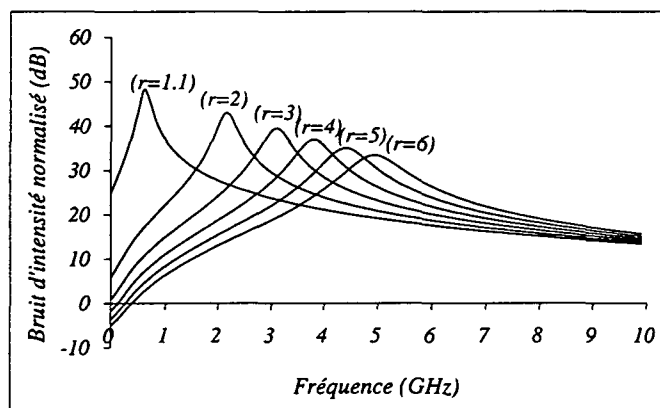


Fig. 2.7 – Spectres de bruit d'intensité du faisceau total. Au-dessus de chaque spectre, on a indiqué la valeur du taux de pompe total 2μ . Pour les autres paramètres, on a : $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $\Omega = 2\pi 10 \text{ MHz}$ et $p = 1$.

Sur la figure (2.7), nous avons tracé un ensemble de spectres d'intensité totale du faisceau émis par un VCSEL pour une pompe régulière ($p = 1$) et des paramètres :

- calculés à partir de données correspondant aux VCSELS que nous avons étudiés, des données fournies par l'équipe du professeur Ebeling ($\kappa = \frac{cT}{4nL}$ avec $T = 0,01$, $n = 3,7$, $L = 2 \mu\text{m}$)

- relevés dans la littérature (γ_a , γ_{\perp} , α , γ_j) ou encore mesurés (γ_p).

Étant donné la valeur de ces paramètres, la polarisation (Ox) est stable pour un taux de pompe inférieur à 6,5 (voir équation 2-16) et la polarisation (Oy) pour un taux de pompe supérieur à 131 (voir équation 2-17). Entre ces taux de pompe, les deux polarisations linéaires sont instables. Expérimentalement, nous nous sommes limités pour cette étude de bruit de polarisation à des taux de pompe peu élevés (inférieurs à 5). Dans ce cas, un seul mode oscille, et il est polarisé linéairement selon (Ox). Sur la figure (2.7), nous avons fait varier le paramètre de pompe entre 1,1 et 6.

Les spectres de cette figure sont analogues à ceux obtenus avec un modèle à deux niveaux. Le spectre est dominé par un pic de bruit correspondant à l'oscillation de relaxation. À des taux de pompage suffisamment élevés, le modèle prévoit de la compression du bruit d'intensité à basse fréquence. En effet, comme nous l'avons remarqué plus haut, les fluctuations d'intensité sont uniquement couplées aux fluctuations de la population totale, qui est pompée globalement par une pompe régulière.

2.3.5.2 Bruit d'intensité d'une composante de polarisation

Le bruit d'intensité d'une composante de polarisation a un comportement spécifique provenant du modèle à quatre niveaux. Le bruit d'intensité prévu par notre modèle n'est pas celui d'un faisceau parfaitement polarisé : c'est la différence fondamentale entre les prévisions de notre modèle et le modèle standard à deux niveaux. En présence de bruit dans la direction de polarisation perpendiculaire à la direction (Ox), lorsque l'on filtre le faisceau par un polariseur, on fait interférer le bruit dans la direction du champ et le bruit dans la direction orthogonale.

Si la biréfringence n'a aucune influence sur le bruit total du faisceau (elle n'ajoute aux équations que des termes hamiltoniens), il n'en est pas de même pour le bruit des composantes de polarisation. Nous distinguons donc deux cas, en fonction de la valeur de la biréfringence :

a En l'absence de biréfringence

Si la biréfringence est nulle, la direction de la polarisation du faisceau n'est pas fixée (dans les solutions stationnaires décrites section (2.2.2.1), la phase ψ n'est pas fixée). Les fluctuations de polarisation, calculées par la quantité $\delta a_y(t)$, sont donc très importantes dans ce cas. Les formules (2-58-a) et (2-58-b) impliquent que ces fluctuations importantes sur $\delta a_y(t)$ ont une contribution non nulle aux fluctuations de polarisation. Sur la figure (2.8), nous avons tracé la variation du bruit d'intensité total ainsi que celle

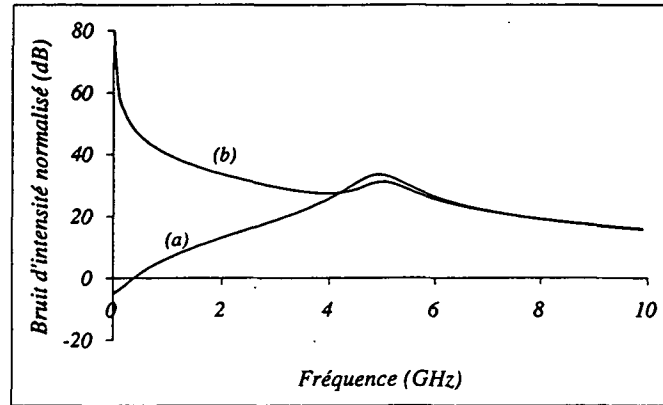


Fig. 2.8 – Spectre de bruit d'intensité du faisceau total (courbe a) et de la composante à $\varphi = 45^\circ$ (courbe b). Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 0 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $r = 6$ et $p = 1$.

du bruit d'intensité de la composante de polarisation à $\varphi = \pi/4$. À basse fréquence, on constate que les fluctuations sont très importantes. Elles divergent même lorsque la fréquence d'analyse tend vers 0.

Ce résultat peut aussi s'interpréter comme un bruit de phase: ψ est la phase entre deux composantes circulaire + et circulaire -. Si ψ n'est pas fixée par une anisotropie du système, on observe une diffusion de cette phase et le spectre de ψ diverge à fréquence nulle. Ce résultat est analogue aux prévisions sur le bruit de phase dans un système à deux niveaux (voir [Kolobov 93]).

b En présence de biréfringence

Si la biréfringence est non nulle, les solutions stationnaires polarisées linéairement ont une direction de polarisation bien déterminée (Ox) ou (Oy). Par rapport au cas sans biréfringence, on attend donc des fluctuations beaucoup plus réduites sur les différentes composantes de polarisation. Sur la figure (2.9), on a tracé la variation du bruit d'intensité total ainsi que le bruit d'intensité de la composante de polarisation à $\varphi = \pi/4$, pour les mêmes valeurs des paramètres que pour la figure (2.8) à l'exception de la biréfringence. Par rapport au cas précédent, le bruit d'intensité à basse fréquence est beaucoup plus faible et la divergence à fréquence nulle a totalement disparu.

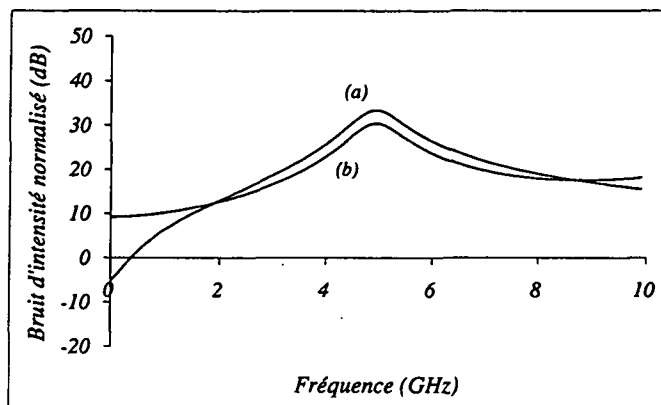


Fig. 2.9 – Spectre de bruit d'intensité du faisceau total (courbe a) et de la composante à $\varphi = 45^\circ$ (courbe b). Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $r = 6$ et $p = 1$.

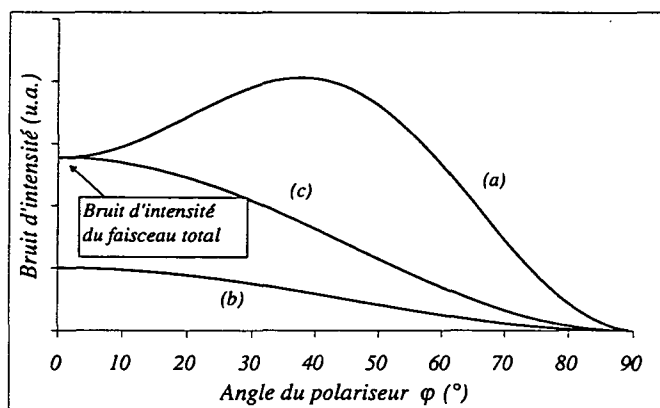


Fig. 2.10 – Bruit d'intensité du faisceau filtré par un polariseur en fonction de l'angle entre le polariseur et le mode au-dessus du seuil. La courbe (a) représente le bruit d'intensité, la courbe (b) la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau et la courbe (c) le bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total et la même intensité que notre faisceau. Les valeurs des paramètres sont les suivantes: $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_\perp = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $r = 1,85$, $\Omega = 2\pi 10 \text{ MHz}$ et $p = 1$.

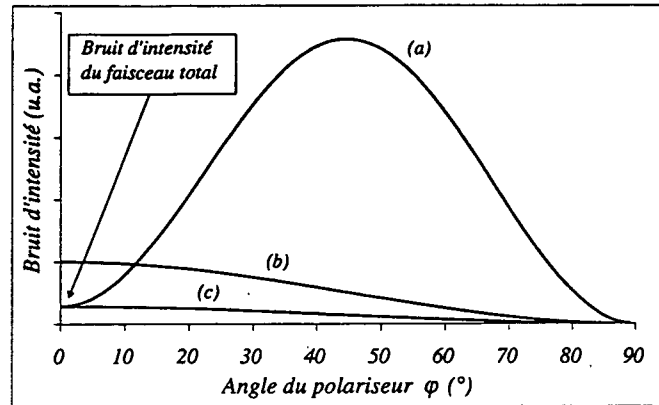


Fig. 2.11 – Bruit d'intensité du faisceau filtré par un polariseur en fonction de l'angle entre le polariseur et le mode au-dessus du seuil. La courbe (a) représente le bruit d'intensité, la courbe (b) la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau et la courbe (c) le bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total et la même intensité que notre faisceau. Les valeurs des paramètres sont identiques à celles de la figure (2.10) à l'exception du taux de pompage r qui vaut 6.

c Variation du bruit de polarisation avec l'angle φ

Sur la figure (2.10), on a tracé le bruit d'intensité du faisceau filtré par un polariseur faisant un angle φ avec l'axe (Ox) (courbe a), axe de polarisation du mode au-dessus du seuil pour $r = 1,85$. Sur cette figure, on a aussi porté la valeur du bruit quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau filtré par le polariseur (courbe b) et la variation du bruit du faisceau s'il était monomode, polarisé linéairement et également filtré par un polariseur (courbe c). Le bruit d'intensité prévu par notre modèle n'est pas celui d'un faisceau parfaitement polarisé. Sur la figure (2.11), où le taux de pompage est plus important ($r = 6$) et où le faisceau total a un bruit d'intensité comprimé, cet effet est encore plus marqué.

L'augmentation du bruit lorsque φ augmente se comprend bien dans le cadre de notre modèle. En effet, celui-ci prédit des corrélations nulles entre les composantes de polarisation (Ox) et (Oy) : les termes $S_{xy}(\Omega)$ et $S_{yx}(\Omega)$ sont nuls. L'équation (2-66-a) montre alors que le bruit à 0° est égal au bruit d'intensité total, comme on le voit sur les figures (2.10) et (2.11), soit :

$$B_{0^\circ}(\Omega) = 4I_0 \{1 + 8\kappa S_x(\Omega)\} \quad (2-76)$$

De plus, en utilisant toujours la formule (2-66-a), on voit que le bruit de la polarisation à 45° est donné par :

$$B_{45^\circ}(\Omega) = 2I_0 \{1 + 4\kappa [S_x(\Omega) + S_y(\Omega)]\} \quad (2-77)$$

Cette formule indique que, si le bruit normalisé $S_y(\Omega)$ est très important, le bruit de cette polarisation peut dépasser le bruit à 0° .

Ce résultat illustre l'importance du bruit d'intensité normalisé suivant la composante sous le seuil. Sur la figure (2.10), nous remarquons aussi que le bruit d'intensité absolu tend vers 0 lorsque l'angle φ tend vers 90° . Cela correspond à l'annulation du champ moyen pour cette valeur de φ . Rappelons que notre traitement linéaire du bruit n'est plus valable pour décrire le bruit d'intensité au voisinage de $\varphi = 90^\circ$.

2.3.5.3 Corrélation entre deux directions de polarisation orthogonales du faisceau

a Variation de la corrélation avec la fréquence

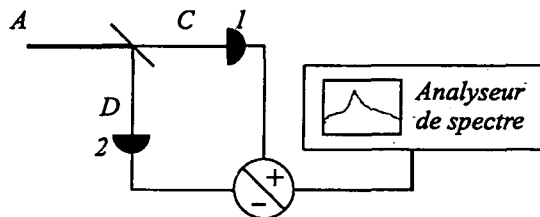


Fig. 2.12 - Faisceaux corrélés obtenus par traversée d'une lame semi-transparente.

Numériquement, nous avons vu que les corrélations entre les amplitudes des composantes selon (Ox) et (Oy) étaient nulles. Examinons les corrélations entre d'autres composantes de polarisation orthogonales. Sur la figure (2.13), pour $\varphi = \pi/4$, nous avons tracé l'évolution de la corrélation avec la fréquence correspondant aux spectres de bruit de la figure (2.9). À basse fréquence, le bruit total est gouverné par le principe de la pompe régulière et présente une importante compression. Quant aux deux composantes de polarisation, elles sont fortement anticorrélées (C est voisin de -1). À plus haute fréquence, le bruit d'intensité est dominé par le pic d'excès de bruit de l'oscillation de relaxation, qui peut être considéré comme classique. Les deux composantes de polarisation sont elles-mêmes très bruyantes et leur corrélation tend vers 1. En effet, pour $\varphi = \pi/4$, la corrélation que nous étudions est équivalente à la corrélation entre les deux composantes d'un faisceau issues d'une lame semi-transparente (voir figure

2.12). Si le faisceau A a un bruit très supérieur à la limite quantique standard, on peut traiter tous les faisceaux classiquement. Dans ce cas, la différence entre les photocourants des deux photodiodes est égale à zéro tandis que la somme est égale au bruit d'intensité total du faisceau initial, ce qui revient à dire que les deux faisceaux sont parfaitement corrélés.

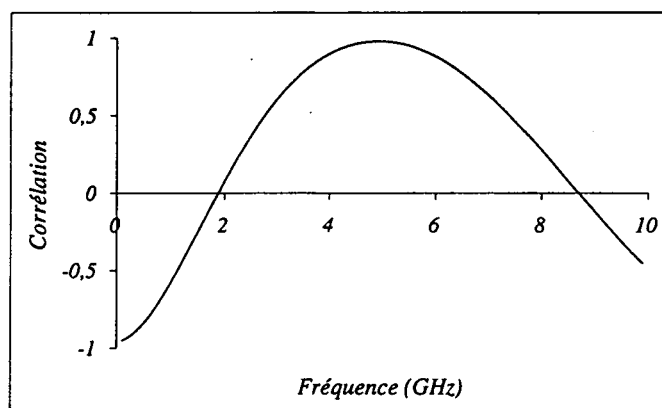


Fig. 2.13 – Évolution de la corrélation entre les composantes de polarisation $\varphi = \pi/4$ et $\varphi = 3\pi/4$ en fonction de la fréquence. Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $r = 6$ et $p = 1$.

b Variation de la corrélation avec l'angle φ

Sur la figure (2.14), nous avons tracé la variation de la corrélation C entre les composantes de polarisation φ et $\varphi + \pi/2$ avec l'angle φ à la fréquence de 10 MHz et des paramètres donnés en légende. Ainsi pour $\varphi = \pi/4$, le bruit d'intensité est inférieur à la limite quantique standard (-72%) alors que les deux composantes de polarisation $\pi/4$ et $3\pi/4$ présentent un excès de bruit (738% chacune) et la corrélation est égale à $-98,3 \%$. Pour caractériser l'importance des corrélations, on peut leur appliquer le critère défini par Treps *et al.* [Treps 00] et déterminer si ces corrélations sont quantiques. Rappelons tout d'abord ce critère. Soient deux champs \hat{E}_a et \hat{E}_b corrélés. On note $\delta\hat{E}_a^2$ et $\delta\hat{E}_b^2$ leur fluctuations d'intensité à une certaine fréquence et $L.Q.S._a$ la limite quantique standard correspondant au champ \hat{E}_a . On dit que la corrélation entre les deux champs est quantique si la mesure de $\delta\hat{E}_b^2$ permet de réduire les fluctuations de $\delta\hat{E}_a^2$ sous la limite quantique standard (par une boucle de rétroaction électronique par exemple). Mathématiquement, ce critère se traduit par la condition suivante sur la

corrélation :

$$1 - \frac{L.Q.S.a}{\delta \widehat{E}_a^2} < |C|^2 \leq 1 \quad (2-78)$$

Dans notre cas, cette condition est bien vérifiée puisque l'on a :

$$1 - \frac{L.Q.S.a}{\delta \widehat{E}_a^2} = 0,88 \quad (2-79)$$

$$|C|^2 = 0,97 \quad (2-80)$$

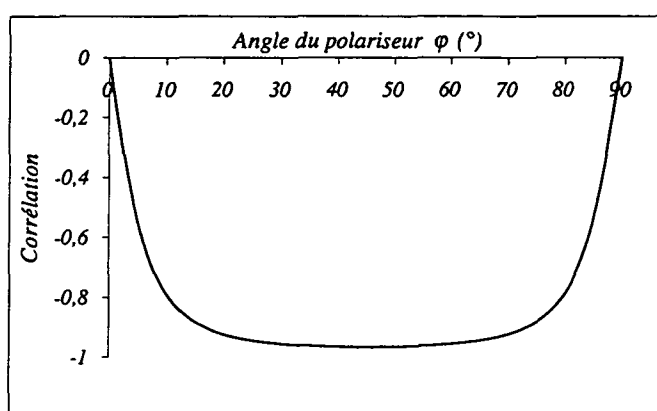


Fig. 2.14 - Évolution de la corrélation entre les deux composantes de polarisations φ et $\varphi + \pi/2$ en fonction de l'angle φ . Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $\kappa = 100$ GHz, $\gamma_a = 1$ GHz, $\gamma_{\perp} = 1000$ GHz, $\gamma_J = 50$ GHz, $\gamma_p = 40$ GHz, $\alpha = 3$, $\tau = 6$, $\Omega = 2\pi 10$ MHz et $p = 1$.

3. Étude expérimentale du bruit d'intensité des VCSELs

3.1 Introduction

Les VCSELs, comme nous le verrons dans ce chapitre, présentent des caractéristiques intrinsèques intéressantes du point de vue du bruit :

- une haute efficacité quantique différentielle,
- un seuil très bas,
- la possibilité d'être monomodes longitudinaux et transverses.

Ils sont donc, en principe, des candidats très prometteurs pour l'obtention de faisceaux à faible bruit. De plus, on peut à terme envisager le remplacement des diodes lasers par les VCSELs dans le domaine des télécommunications faibles et moyennes distances et de l'optoélectronique. Pour les taux de modulation élevés exigés par les télécommunications actuelles, le bruit devient un problème critique, susceptible de limiter les performances des systèmes. Les caractéristiques de bruit des VCSELs sont donc non seulement importantes du point de vue de la physique fondamentale mais sont aussi un enjeu majeur pour leur utilisation à venir dans ce champ d'application.

Dans ce chapitre, nous nous attachons à étudier les caractéristiques de bruit des VCSELs dans diverses configurations : libres ou injectés, monomodes ou multimodes. Après un rappel sur les caractéristiques techniques des lasers à semi-conducteurs, nous décrivons en détail les VCSELs. Nous comparons nos résultats expérimentaux aux prévisions du modèle présenté dans le chapitre précédent. Nous examinons l'évolution de la polarisation du faisceau avec l'augmentation du courant de pompe.

3.2 Présentation des lasers à semi-conducteurs

Les caractéristiques communes aux lasers à semi-conducteurs sont les suivantes :

3.2.1 Gain

Les matériaux semi-conducteurs sont caractérisés par l'existence d'une bande d'énergie interdite. Cette bande sépare les bandes de valence et de conduction. Étant donné la faible largeur de cette bande (environ 1,5 eV pour les semi-conducteurs que nous considérons), l'agitation thermique peut exciter certains électrons de la bande de valence vers la bande de conduction. Le taux d'occupation des états de chaque bande est donné par la distribution de Fermi-Dirac :

$$f(E) = \frac{1}{e^{(E-E_f)/kT} + 1} \quad (3-1)$$

où :

- E est l'énergie de l'état considéré,
- T est la température du semi-conducteur,
- E_f est l'énergie de Fermi.

À l'équilibre thermique et en l'absence de défauts cristallins, l'énergie de Fermi E_f est située au milieu de la bande interdite. Lorsque le matériau est dopé, cette énergie est déplacée vers la bande de conduction (dopage par des donneurs) ou vers la bande de valence (dopage par des accepteurs). Si l'équilibre thermodynamique n'est pas réalisé (en présence de courant électrique par exemple), on utilise un niveau de Fermi, dit quasi niveau de Fermi, pour chaque bande.

Dans le laser à semi-conducteurs le plus simple à concevoir, la transition laser est due à la recombinaison radiative entre un électron et un trou autour de la frontière d'une jonction p-n. Une jonction p-n est formée de deux semi-conducteurs accolés, l'un dopé n (dopage par des donneurs) l'autre dopé p (dopage par des accepteurs). En présence d'un potentiel externe, on peut montrer qu'un courant apparaît à la jonction et qu'il existe une région où trous et électrons coexistent. On a dans cette zone une inversion de population équivalente à celle d'un laser. Dans cette région, une recombinaison radiative d'un trou et d'un électron peut donner naissance à un photon. La longueur d'onde de ce photon est déterminée par la largeur de la bande interdite. Le choix de cette longueur d'onde s'effectue en sélectionnant le semi-conducteur (actuellement, les lasers à semi-conducteurs couvrent un large spectre optique allant du proche UV à l'infrarouge lointain). Ce photon peut lui-même redonner après absorption un électron et un trou. La valeur du courant électrique pour laquelle la probabilité d'absorption est égale à la probabilité d'émission définit le courant de seuil I_{seuil} . Le milieu est alors transparent. Pour des courants inférieurs à I_{seuil} , le semi-conducteur est absorbant ; pour des courants supérieurs à I_{seuil} , le milieu se comporte comme un amplificateur.

L'émission du photon peut être stimulée ou spontanée. Dans le premier cas, on peut obtenir de la lumière cohérente et donc un effet laser.

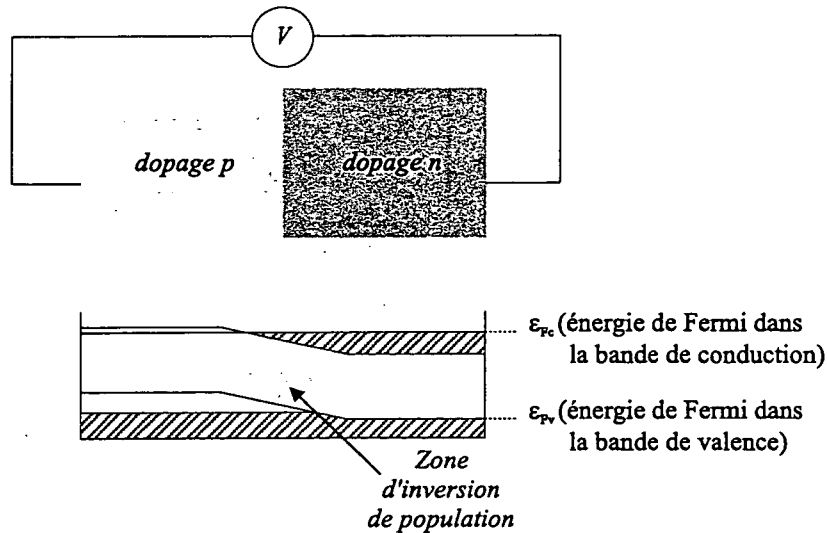


Fig. 3.1 – Niveaux d'énergie d'une jonction p-n soumise à une tension V .

En plus des pertes internes (recombinaison par effet Auger, défauts cristallins) le gain est limité par la taille très réduite de la zone active car, dans une homojonction telle qu'une jonction p-n, l'inversion de population est réalisée dans une région très restreinte. La majeure partie du courant sert alors uniquement à réaliser la transparence du milieu. Les premiers lasers à semi-conducteurs avaient donc un seuil très élevé. Les principaux progrès qu'a connus la technologie des lasers à semi-conducteurs ont donc consisté à augmenter le confinement des porteurs afin d'atteindre plus facilement la transparence du milieu et de réduire le courant de seuil.

Un des progrès majeurs a été apporté par l'utilisation de la double hétérojonction (voir figure 3.2)

La double hétérojonction est constituée d'une zone active d'un semi-conducteur d'un premier type prise en sandwich entre deux couches de semi-conducteur d'un second type, la bande d'énergie interdite du second type de semi-conducteur étant plus importante que celle du premier type. La position relative des énergies de Fermi est portée sur la figure (3.2). Les porteurs sont alors confinés dans la zone active plus efficacement. De plus, on obtient un bon confinement optique : l'écart d'indice entre les deux types de semi-conducteurs maintient par réflexion totale les photons émis dans la zone active, le faisceau lumineux se propageant parallèlement aux couches semi-conductrices.

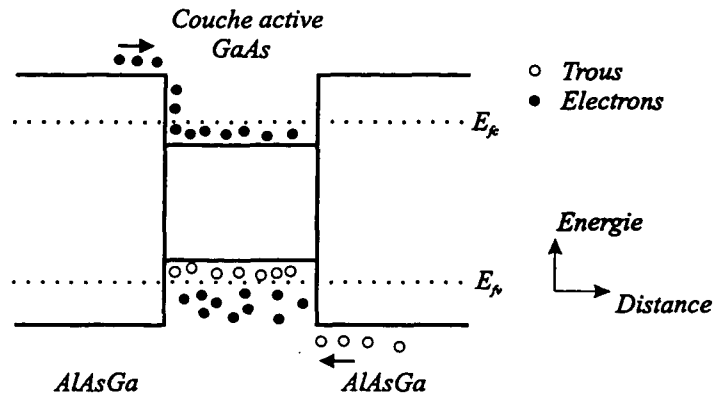


Fig. 3.2 – Schéma des niveaux d'énergie dans une hétérojonction.

Le dernier progrès repose sur la mise au point de structures à puits quantique. Ce sont des hétérostructures dont la couche active est si fine que les porteurs sont confinés dans la direction perpendiculaire aux puits. Les niveaux d'énergie dans cette direction sont quantifiés et l'on parle de structure bidimensionnelle (voir figure 3.3). Il en résulte une meilleure efficacité et un seuil encore plus faible. On peut utiliser de multiples puits quantiques en alternant barrières et puits (voir figure 3.4). On obtient ainsi des lasers plus puissants.

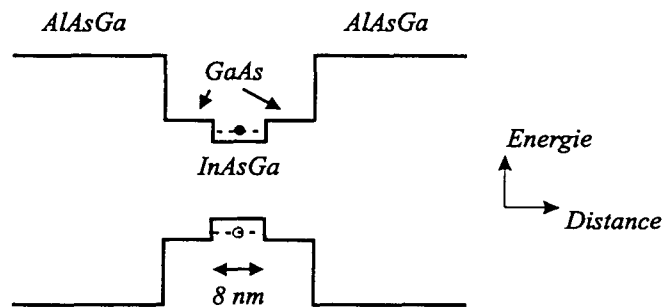


Fig. 3.3 – Schéma des niveaux d'énergie dans une structure à puits quantiques.

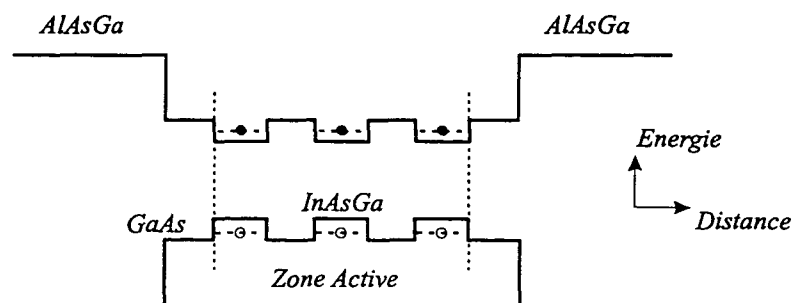


Fig. 3.4 – Schéma des niveaux d'énergie dans une structure à trois puits quantiques.

3.2.2 Confinement optique

Dans beaucoup de lasers à semi-conducteurs, l'effet de cavité optique est obtenu par clivage du matériau parallèlement à des plans cristallographiques particuliers. On peut aussi utiliser des couches multiples d'indices variables qui agissent comme un réseau. Cette structure peut être intégrée dans le milieu amplificateur (Distributed FeedBack - DFB) ou remplacer un miroir de sortie (Distributed Bragg Reflector - DBR). Pour confiner transversalement la lumière, on utilise deux techniques : le guidage par gain ou par indice. Dans le cas du guidage par indice, on constitue un guide diélectrique. Dans le cas du guidage par gain, c'est le profil spatial du gain déterminé par la géométrie du courant de porteurs qui confine la lumière.

Récemment, une approche différente a été adoptée avec les lasers à émission verticale comme les VCSELs [Iga 88]. Pour ces structures, les miroirs sont parallèles aux puits quantiques. Les géométries des diodes lasers et des VCSELs sont comparées sur la figure (3.5).

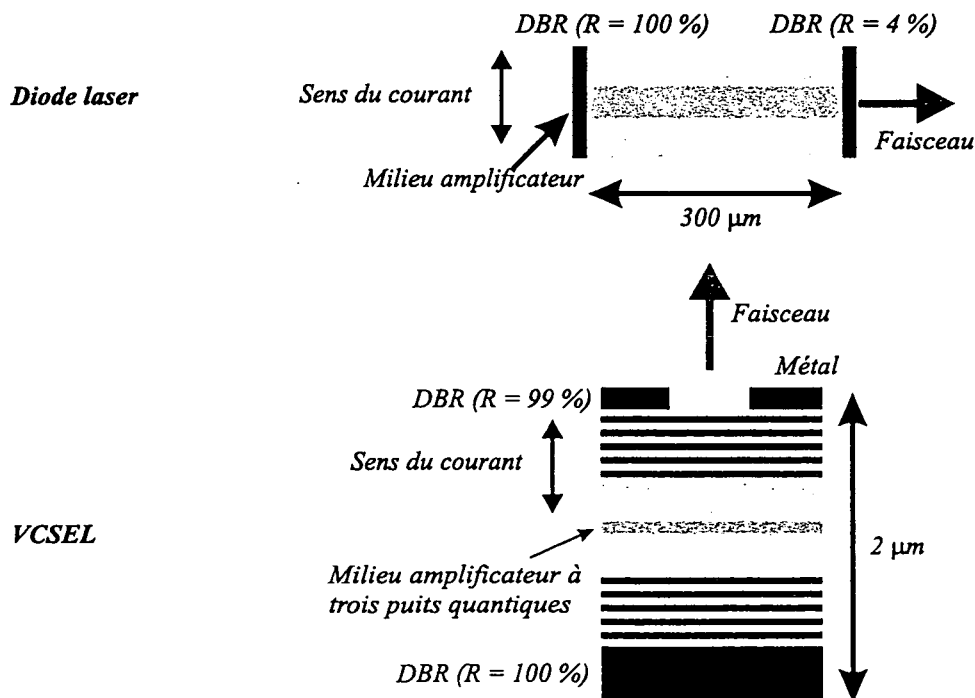


Fig. 3.5 - Comparaison de la géométrie des diodes lasers et des VCSELs.

3.3 Les VCSELs

Après ce bref résumé sur la technologie des lasers à semi-conducteurs, nous allons examiner en détail la structure des VCSELs. Ce sont des lasers pour lesquels la zone active est parallèle aux miroirs. Étant donné les techniques de croissance épitaxiale utilisées pour les fabriquer, cette caractéristique permet de construire sur un même échantillon de nombreux VCSELs (voir figure 3.6). On assure ainsi l'homogénéité des propriétés électriques et optiques des différents lasers [Jewell 91]. La structure détaillée commune à tous les VCSELs est donnée sur la figure (3.5).

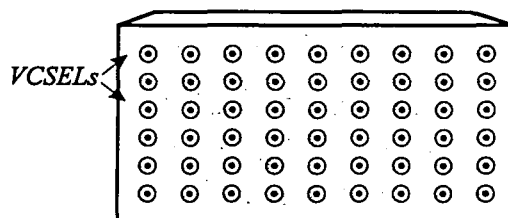


Fig. 3.6 – Réseau bidimensionnel de VCSELs.

3.3.1 Gain

La zone active est constituée de plusieurs puits quantiques (typiquement 3) placés à un maximum du champ stationnaire dans la cavité [Corzine 89]. La cavité a une longueur très courte, de l'ordre de la longueur d'onde soit environ $1 \mu m$. L'écart de fréquence entre deux modes longitudinaux est donc très important. Étant donné la finesse de la courbe de gain du matériau, deux modes longitudinaux ne peuvent avoir simultanément un gain important. Contrairement aux diodes lasers dont la longueur de cavité est de l'ordre de $300 \mu m$, les VCSELs sont donc toujours monomodes longitudinaux. La fréquence d'oscillation du mode longitudinal varie avec la température (changements de la courbe de gain du milieu amplificateur, de la fréquence de résonance de la cavité) avec un taux de $0,1 \text{ \AA}/^{\circ}C$. Elle dépend aussi fortement du courant injecté.

3.3.2 Confinement optique

Les miroirs de Bragg qui forment la cavité sont constitués d'un empilement de lames $\lambda/4$. Le gain par passage dans la cavité étant faible, leur réflectivité doit être élevée. Le coefficient de réflexion du miroir de sortie pourra atteindre une valeur de

99 % (à comparer à quelques pourcent dans le cas d'une diode laser). Pour réaliser le confinement transverse, on utilise les deux techniques citées ci-dessus :

- guidage par gain : l'implantation de protons est employée pour constituer une enveloppe de haute résistance qui confine les porteurs dans la zone active [Chang 90] (voir figure 3.7 a),

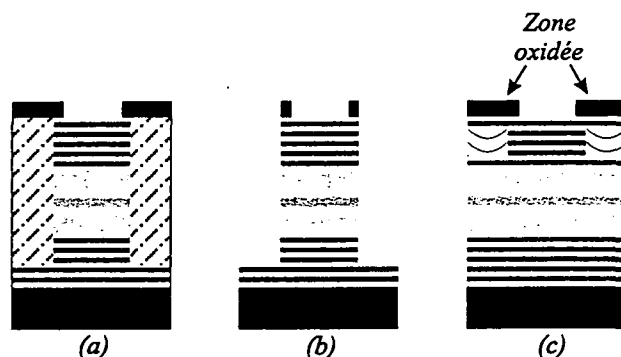


Fig. 3.7 – Schéma des différents types de confinement optique possible pour les VCSELs : (a) guidage par implantation de protons (guidage par gain), (b) guidage par l'indice de l'air (guidage par indice) et (c) guidage par oxydation sélective (guidage par indice).

- guidage par indice : on peut entourer la cavité d'une couche d'indice de réfraction plus faible [Chang 93]. Éventuellement, on peut utiliser l'air comme milieu [Choquette 91] (voir figure 3.7 b). Une alternative consiste à oxyder de façon sélective une zone du semi-conducteur. On obtient ainsi une enveloppe de faible indice de réfraction et de haute résistance [Huffaker 94] (voir figure 3.7 c).

Si les VCSELs sont monomodes longitudinaux, le nombre de Fresnel [Siegman 81] qui les caractérise est souvent très grand. Plusieurs modes transverses peuvent osciller simultanément. Ce sont des modes de Laguerre-Gauss ou d'Hermite-Gauss. Le premier mode à osciller est le mode gaussien fondamental TEM_{00} . La séquence d'apparition des modes transverses d'ordre supérieur varie en revanche d'un échantillon à l'autre.

3.3.3 Polarisation du faisceau

Contrairement aux diodes lasers, les VCSELs n'ont pas une géométrie propre à fixer la polarisation du faisceau. Leur haute symétrie transverse n'impose a priori aucune contrainte sur la direction ou le type (linéaire, circulaire, elliptique) de la polarisation. Cependant, cette symétrie est brisée par diverses anisotropies qui fixent des axes

préférentiels pour la polarisation. Près du seuil, le mode fondamental est bien polarisé linéairement [Koyama 91, Chang 93, Choquette 94a] mais à plus fort courant d'alimentation, la polarisation du faisceau varie fortement avec ce courant. Des expériences ont même montré que l'augmentation du courant peut faire basculer la polarisation du faisceau de 90° . Des phénomènes d'instabilité [Travagnin 97, Hofmann 97], de bistabilité [Pan 93, Kawaguchi 95] de la polarisation du faisceau en fonction du courant ont aussi été observés et étudiés théoriquement [Travagnin 97]. Ils ont pour origine des anisotropies linéaires [Jansen 97a]. Enfin, pour la plupart des VCSELs, le second mode transverse à osciller est polarisé orthogonalement au premier.

Après analyse spectrale du faisceau, on a constaté que deux modes de même structure transverse mais polarisés orthogonalement pouvaient osciller simultanément [Choquette 94a, Choquette 94b]. Ils peuvent donner naissance en oscillant à la même fréquence à une polarisation elliptique [Travagnin 96]. Une séparation en fréquence de 10 GHz entre ces modes est aussi couramment constatée [Choquette 94a, Pan 93, Jiang 93]. De façon générale, le même écart de fréquence a été observé pour des modes de même ordre transverse et de polarisations orthogonales [Jansen 97b], démontrant la présence de biréfringence dans ces lasers. Cette biréfringence peut atteindre 20 GHz [Van-Exter 97]. Diverses solutions ont été proposées pour annuler cette anisotropie [Mukaihara 95, Ser 95] comme des cavités de géométrie anisotrope [Choquette 94a], des anisotropies structurelles [Mukaihara 93, Chavez 93] ou des rétroactions optiques sélectives en polarisation [Besnard 97]. Woerdman *et al.* ont développé des méthodes d'analyse fine [Jansen 96a, Jansen 96b] et montré que cette anisotropie dominait toutes les autres (dichroïsme par exemple). Ils ont aussi montré que cette biréfringence avait deux origines : l'effet élasto-optique et l'effet électro-optique [Jansen 96a, Van-Exter 97].

3.4 Systèmes de détection

Les mesures de bruit décrites dans ce manuscrit ont été effectuées selon deux méthodes : la détection directe ou la détection équilibrée.

3.4.1 Détection équilibrée

Comme nous l'avons déjà indiqué dans le chapitre 1, la détection équilibrée requiert la séparation du faisceau dont on souhaite connaître le bruit d'intensité en deux faisceaux d'intensité égales. On mesure ensuite l'intensité des deux faisceaux à l'aide de deux photodiodes couplées à un amplificateur. La différence des signaux donne le bruit

quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau initial tandis que leur somme donne accès à son bruit d'intensité. Toute la difficulté réside donc dans l'équilibrage des chaînes de détection et dans la séparation du faisceau.

3.4.1.1 Séparation du faisceau

Afin de séparer un faisceau en deux faisceaux d'intensités égales, on peut utiliser une lame séparatrice. Toutefois, le pouvoir séparateur d'une telle lame dépend de la polarisation du faisceau, ce qui n'est pas acceptable dans le cas d'un faisceau dont la polarisation peut varier.

On peut aussi utiliser un cube polariseur et une lame $\lambda/2$. Ce procédé plus souple et plus précis que celui à base d'une lame séparatrice n'est évidemment utilisable que pour les faisceaux polarisés linéairement. Pour vérifier le pouvoir séparateur du cube, on mesure son taux de réjection, c'est-à-dire le rapport entre la valeur minimale et la valeur maximale de l'intensité lumineuse transmise par le cube lorsque l'on tourne la lame $\lambda/2$. Expérimentalement, on trouve des valeurs de l'ordre de 0,5 %. Un microwattmètre de précision permet enfin de vérifier la séparation du faisceau en deux parties d'intensité précisément égales.

3.4.1.2 Photodiodes et amplificateurs

a Photodiodes

Nous avons utilisé des photodiodes FND-100 d'EG&G pour effectuer toutes nos mesures de bruit sur les faisceaux émis par les diodes et les VCSELs. Elles présentent en effet d'excellentes caractéristiques. Tout d'abord, elles ont une très bonne efficacité quantique, qui peut atteindre 90 % lorsque l'on élimine leur fenêtre de protection. Cette caractéristique est, rappelons-le, fondamentale puisque toute perte optique ramène le bruit d'intensité d'un faisceau vers la limite quantique standard. Elles ont aussi une très large bande de fréquence (environ 350 MHz) grâce à leur faible capacité parasite (environ 10 pF). De plus, leur surface est suffisante pour contenir l'intégralité des faisceaux que nous avons eu à détecter. Lors de nos mesures, nous avons aussi pris garde à utiliser le maximum de surface du photodétecteur afin d'éviter toute saturation uniquement due à une focalisation excessive.

Les deux photodiodes choisies pour constituer la détection équilibrée doivent présenter des caractéristiques aussi similaires que possible. Dans un premier temps, nous avons retenu deux photodiodes d'efficacité quantique très proches : l'écart d'efficacité

est inférieur à 1 %. Leur réponse en fréquence ne peut être déterminée que lorsque l'on les branche avec leur amplificateur.

b Amplificateurs

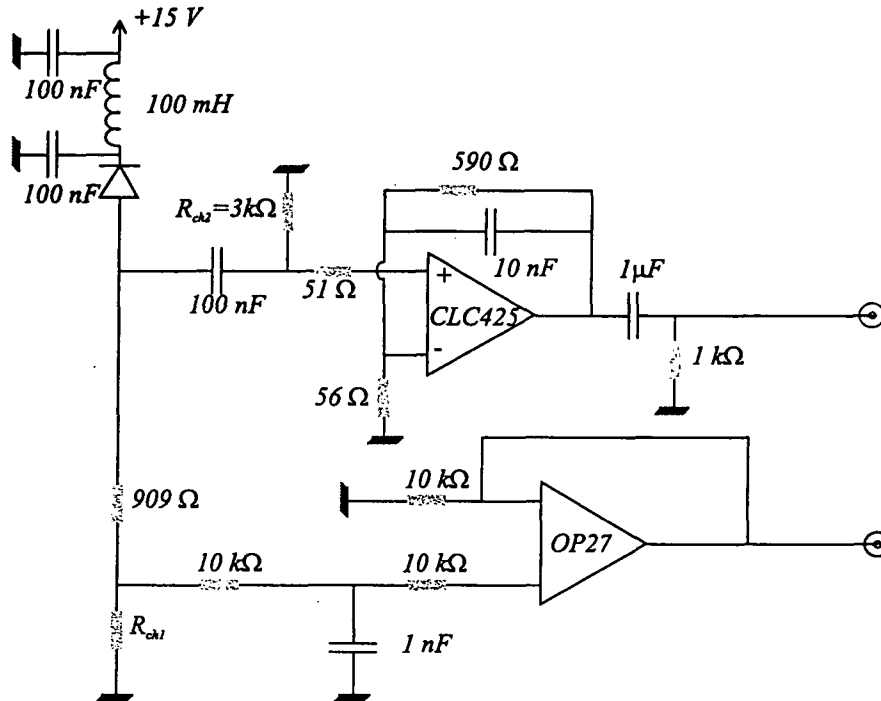


Fig. 3.8 – Détail des amplificateurs des photodiodes.

Les photodiodes, éclairées par un faisceau lumineux, génèrent un courant d'électrons. Le rôle des amplificateurs est de transformer ce courant en une tension mesurable sur une certaine bande de fréquence. Ces amplificateurs doivent être aussi peu bruyants que possible afin de ne pas perturber nos mesures de bruit.

Le montage retenu est présenté sur la figure (3.8). Un filtre passif sépare les parties continue et haute fréquence du photocourant. La partie continue est envoyée sur une résistance dite de charge R_{ch1} qui transforme le courant en tension. Cette tension est transmise par un montage suiveur, à base d'un amplificateur OP27. La résistance de charge en continu doit être choisie en fonction des puissances lumineuses des faisceaux étudiés. On doit en effet veiller à ce que le produit du photocourant par la résistance de charge ne s'approche pas de la tension de polarisation de la photodiode qui vaut 75 V. Pour les VCSELs pour lesquels la puissance lumineuse est de l'ordre du milliwatt, nous avons utilisé un gain pour la partie continu de 10 V/mA. Dans le cas des diodes, les puissances lumineuses peuvent atteindre 100 mW et l'on choisit une résistance

de charge de 100 mV/mA . On s'assure ainsi que les photodiodes ne saturent pas en continu. Cependant, on constate une saturation de la caractéristique haute fréquence de la photodiode pour des puissances bien inférieures (environ 10 mW).

La partie haute fréquence, après filtrage par un filtre passe-haut, est amplifiée par un amplificateur faible bruit CLC425 monté en transimpédance, ce qui permet de négliger l'effet de la capacité parasite des photodiodes. La résistance de charge R_{ch2} vaut $3 \text{ k}\Omega$. Avec un tel montage, le rapport signal à bruit reste supérieur à 3 dB pour les bruits que nous avons à mesurer.

c Équilibrage des amplificateurs

L'équilibrage des deux chaînes amplificatrices est vérifié à haute fréquence grâce à un générateur de signaux dont on fait varier la fréquence. La qualité des composants utilisés (amplificateur CLC425 et composants passifs de précision) permet d'obtenir des réponses quasiment identiques à la précision des mesures près ($0,1 \%$).

d Soustracteur-sommeur

Pour réaliser la somme et la soustraction des signaux issus des photocourants, nous avons utilisé des composants MiniCircuits (ZSCJ 2-2). Ces modules à trois bornes présentent deux entrées et une sortie tels que les tensions de sortie V_s et d'entrée V_1 et V_2 vérifient :

$$V_s = V_1 - V_2 \quad (3-2)$$

Les éléments passifs présentent une très large bande et des pertes d'environ 3 dB . Ils exigent aussi une impédance de 50Ω .

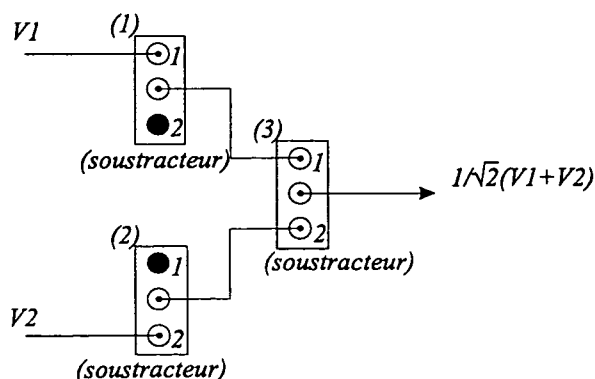


Fig. 3.9 – Montage sommateur des MiniCircuits.

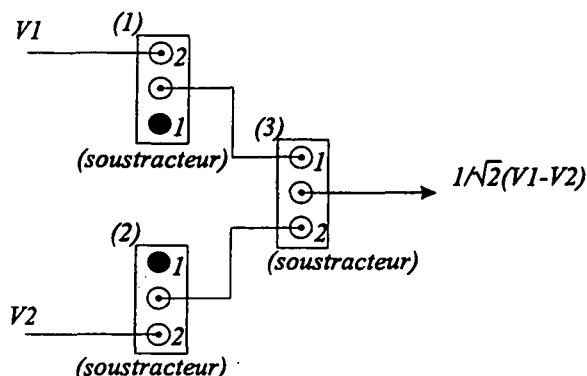


Fig. 3.10 – Montage soustracteur des MiniCircuits.

Les montages des trois MiniCircuits sont représentés sur les figures (3.9) et (3.10). Dans les deux cas, le signal de l'amplificateur des photodiodes est envoyé sur une entrée de MiniCircuit (MiniCircuits 1 et 2). Sur l'autre entrée, on place un bouchon 50Ω . Les sorties de ces deux MiniCircuits sont reliées aux deux entrées du MiniCircuit 3. Si les signaux amplifiés sont reliés aux mêmes bornes d'un soustracteur, on obtient à la sortie du MiniCircuit 3 la somme des signaux amplifiés (figure 3.9) ; sinon, on obtient la différence des signaux (figure 3.10).

En utilisant ces trois MiniCircuits pour faire la somme et la différence des signaux issus des photocourants, on garde toujours les mêmes éléments passifs et donc les mêmes pertes dans le montage. Pour déterminer la meilleure association entre les amplificateurs et les MiniCircuits, on teste toutes les configurations de la façon suivante : à l'aide du générateur de signaux, entre 0 et 30 MHz, on mesure le taux de réjection du système, c'est-à-dire le rapport entre la somme et la différence des signaux en sortie, lorsque l'on soumet l'entrée de chaque amplificateur au même signal (ces deux signaux sont obtenus par division d'un même signal à l'aide d'un MiniCircuit sommateur). Nous avons retenu la meilleure des 8 configurations possibles (la réjection de chacun des montages est portée sur la figure 3.11).

e Amplificateurs et photodiodes

Enfin, il faut mesurer la réjection du montage complet : photodiodes, amplificateurs et MiniCircuits. Ce taux de réjection est mesuré suivant le montage de la figure (3.12). Le courant de pompe de la diode est ici modulé grâce au générateur de signaux et un pic de bruit est observé sur le spectre de bruit à la fréquence de modulation. Les combinaisons possibles ont été testées et le meilleur taux de réjection mesuré atteint 40 dB. Aussi nos mesures de bruit seront valables tant que l'excès ou la réduction de

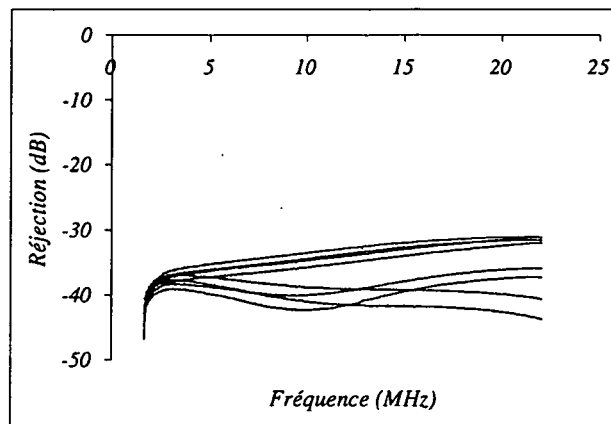


Fig. 3.11 – Réjection en fonction du branchement des MiniCircuits.

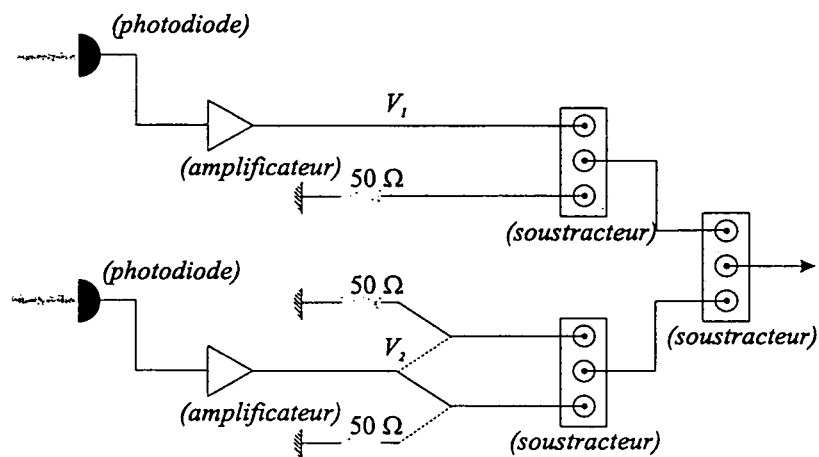


Fig. 3.12 – Montage permettant la mesure de la réjection des photodiodes et des amplificateurs.

bruit ne s'approche pas de cette valeur.

Nous utilisons un amplificateur ZHL connecté à la sortie du montage sommateur et soustracteur. Ainsi, le bruit propre de l'analyseur de spectre est négligeable devant le bruit restitué par notre montage. L'ensemble du montage décrit ci-dessus constitue la détection équilibrée dont nous nous sommes servis pour mesurer le bruit d'intensité, lorsque cela était possible.

3.4.2 Détection avec référence

La mesure du bruit d'intensité par détection équilibrée présentée ci-dessus est la plus fiable. Cependant, étant donné l'utilisation d'une lame $\lambda/2$ et d'un cube polariseur pour séparer le faisceau, elle ne peut être utilisée que pour les faisceaux polarisés linéairement. Les VCSELs peuvent émettre des faisceaux composés de plusieurs modes transverses de polarisation variée. Dans ce cas, nous avons été amenés à détecter le faisceau directement, avec une seule photodiode. Ainsi, on obtient le bruit d'intensité total du faisceau, mais on ne peut connaître le bruit quantique standard correspondant à l'intensité de ce même faisceau. Pour obtenir cette référence, nous pouvons mettre en oeuvre deux méthodes.

3.4.2.1 Référence au bruit quantique standard

Cette première méthode consiste à envoyer sur la photodiode utilisée un faisceau de même intensité que le faisceau étudié, mais au bruit d'intensité égal au bruit quantique standard. On obtient une référence que l'on enregistre et à laquelle on peut comparer le spectre du faisceau. Nous disposons en pratique de deux sources lumineuses au bruit d'intensité très proche du bruit quantique standard : une lampe blanche que l'on filtre par un filtre rouge pour éviter le chauffage de la photodiode et une diode laser montée sur réseau.

La comparaison des références obtenues grâce à ces deux sources montre que cette méthode n'est pas des plus fiables. Un écart de $0,5 \text{ dB}$ est souvent constaté. C'est pourquoi nous lui avons préféré une seconde méthode.

3.4.2.2 Référence par détection équilibrée

Ici, on constitue un ensemble de références de bruit quantique standard à diverses puissances lumineuses. Pour cela, on utilise une détection équilibrée constituée de deux

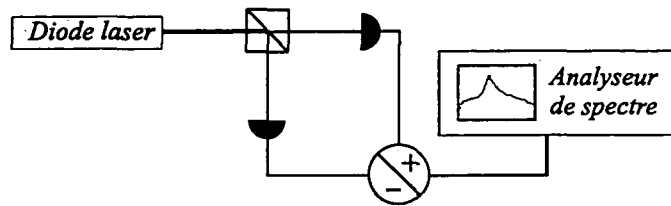


Fig. 3.13 – Détection équilibrée du faisceau d'une diode pour la calibration de la limite quantique standard.

photodiodes. Les faisceaux utilisés sont obtenus en atténuant le faisceau d'une diode laser montée sur réseau à l'aide de filtres de densité optique variable. Le bruit d'intensité du faisceau initial est très proche de la limite quantique standard (l'écart est inférieur à 1 *dB*). L'ensemble des bruits quantiques standards mesurés est enregistré et on vérifie ensuite numériquement leur dépendance linéaire avec l'intensité (voir équation 1-47).

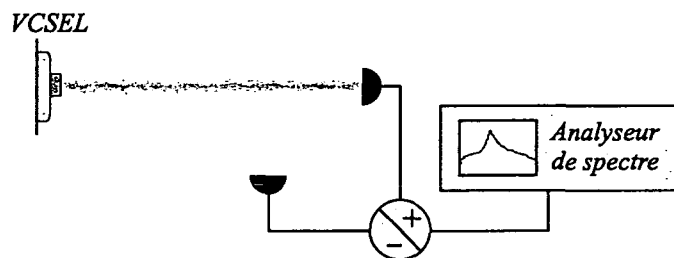


Fig. 3.14 – Montage de la détection directe.

Pour mesurer le bruit d'intensité des VCSELs, on utilise ensuite une des deux photodiodes du montage de la détection équilibrée tout en la laissant connectée au reste de la détection équilibrée (voir figure 3.14). Ainsi, on conserve les conditions expérimentales de la mesure des références. Supposons que le faisceau étudié ait une intensité I_1 , on recherche dans l'ensemble de références enregistrées une référence R_2 d'intensité voisine. On s'affranchit ainsi au mieux d'éventuelles distorsions introduites par le changement de calibre sur l'analyseur de spectre. Soit I_2 , l'intensité correspondant à R_2 . La référence R_1 que nous recherchons est alors calculée selon la formule :

$$R_2 = \frac{R_1 I_1}{I_2} \quad (3-3)$$

Cette méthode a démontré une très grande fiabilité et sa précision avoisine celle de la détection équilibrée (l'incertitude est de 2 à 3 %). Cependant, on doit prendre soin de vérifier régulièrement que ces références ne varient pas dans le temps suite, par exemple, au vieillissement de composants électroniques de l'analyseur de spectre ou des systèmes amplificateurs.

3.5 Les VCSELs en régime libre

3.5.1 Présentation des VCSELs

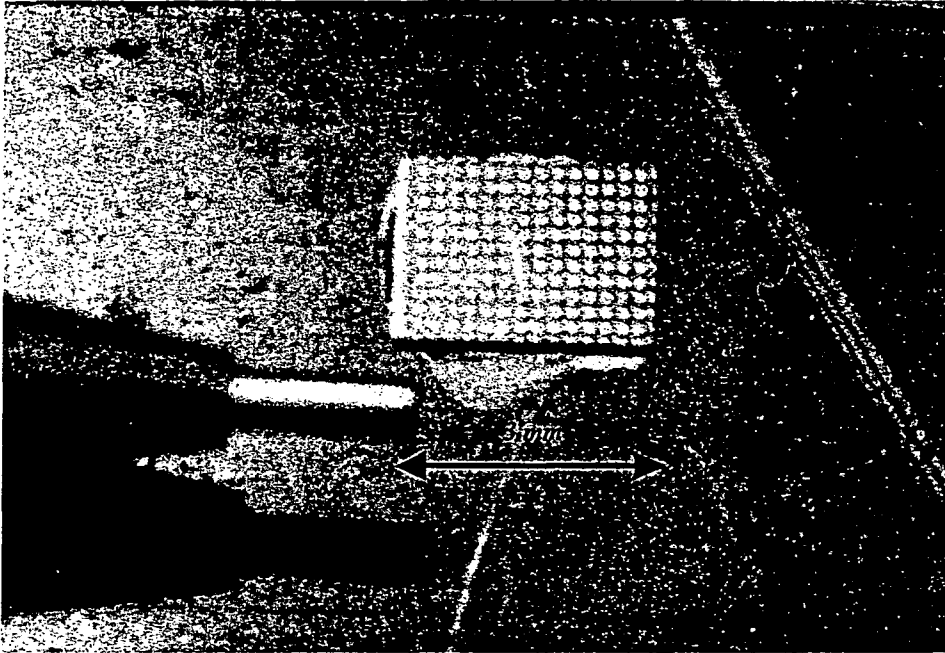


Fig. 3.15 – Photographie de nos VCSELs. Sur cette photographie, la plaque contient 168 VCSELs.

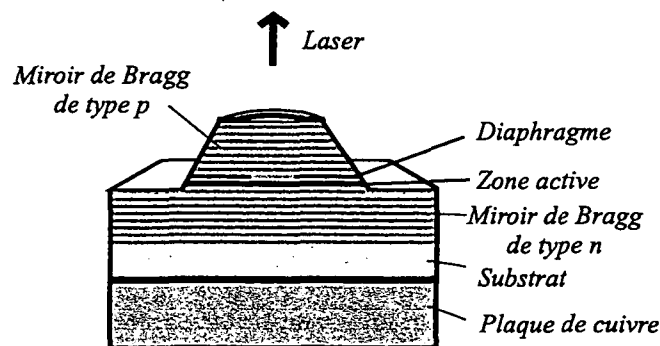


Fig. 3.16 – Détail d'un VCSEL.

Nous avons utilisé dans nos expériences des VCSELs fabriqués et gracieusement fournis par l'équipe du Professeur Ebeling de l'Université d'Ulm en Allemagne [Ebeling 96]. Ces VCSELs montrent d'excellentes caractéristiques en vue de leur utilisation dans le domaine des télécommunications. Ces caractéristiques permettent d'obtenir

des taux de modulation à des fréquences élevées et de faibles taux d'erreurs [Schnitzer 99, Wiedenmann 99]. Ce sont des VCSELS dont le confinement optique est assuré par oxydation sélective. Nous possédons environ 250 lasers répartis sur 4 plaques distinctes comme celle présentée sur la figure (3.15). Leur diamètre varie entre 3 et 20 μm . Sur la figure (3.16), on a représenté schématiquement leur structure. Le milieu amplificateur est constitué de trois puits quantiques de 3 nm d'épaisseur d'AsGa. Les deux miroirs de coefficient 99 % (miroir de sortie) et 99,8 % (miroir du bas) sont des miroirs de Bragg de type n. Ces VCSELS sont alimentés par un dispositif fabriqué au laboratoire. Le courant délivré par cette alimentation est caractérisé par un très faible bruit : le bruit mesuré aux bornes d'une résistance de charge de 100 Ω , comparé à la limite quantique standard théorique (égale à $2eI\Delta\nu$, où I est le courant, et $\Delta\nu$ la bande spectrale de l'analyseur de spectre), est inférieur de 99 % à cette limite. Ainsi, on peut tirer profit du principe de la pompe régulière. L'alimentation possède aussi une entrée pour la modulation du courant à basse fréquence (inférieure à 1 kHz). Chaque VCSEL possède une interface, schématisée sur la figure (3.17), sur laquelle on peut poser une fine aiguille de diamètre 1 μm en tungstène pour réaliser une des deux connexions avec l'alimentation. Pour amener l'aiguille, on dispose de vis micrométriques et on visualise l'opération grâce à un microscope de grossissement 100. L'autre connexion est assurée par le substrat sur lequel on a fait croître les VCSELS par croissance moléculaire épitaxiale.

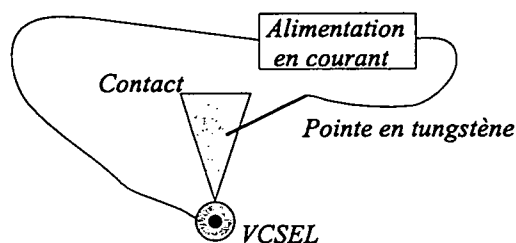


Fig. 3.17 -- Schéma des contacts électriques d'un VCSEL.

Afin de stabiliser leur fonctionnement, les VCSELS sont aussi régulés en température par un élément Peltier, la température du VCSEL étant mesurée grâce à une thermistance de précision de la marque Philips. La température du VCSEL peut ainsi être réglée entre 10° et 35° avec une dérive inférieure à 0,01 °C/h. Une boîte en plexiglas entoure les VCSELS et les isole des fluctuations thermiques de la pièce et un radiateur passif évacue le flux thermique éventuellement dégagé par le Peltier.

La position des VCSELS est ajustable dans l'espace grâce à trois vis micrométriques. On peut ainsi les placer avec précision derrière un objectif de microscope. De grande ouverture numérique ($o.n. = 0,6$), il collimate le faisceau et réduit les pertes à leur

minimum (environ 15 %).

3.5.2 Caractéristiques des VCSELS en continu

3.5.2.1 Caractéristiques courant - puissance

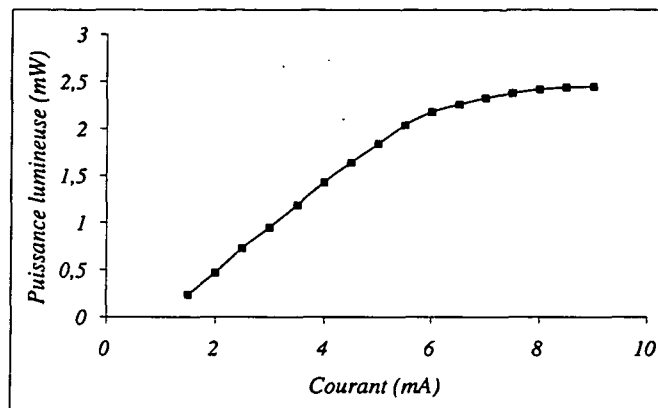


Fig. 3.18 – Caractéristique courant - puissance d'un VCSEL de 5 μm de diamètre.

Une caractéristique courant - puissance typique des VCSELS est représentée sur la figure (3.18). Le seuil des VCSELS est compris entre 0,5 mA et 2 mA. La pente de la droite au-delà du seuil permet de calculer l'efficacité quantique différentielle qui rend compte du taux de conversion des électrons de pompe en photons. Si l'on retient les meilleurs échantillons de la plaque qui a donné les meilleurs résultats du point de vue du bruit, on peut regrouper leurs caractéristiques dans le tableau de la figure (3.19). On dispose sur cette plaque de 18 lasers répartis en 3 séries de 6 lasers de 5, 7 et 10 μm de diamètre. Les lasers de même diamètre présentent des caractéristiques très voisines : la variance pour une série donnée est inférieure à 5 %. De façon générale, le seuil ainsi que l'efficacité quantique différentielle des VCSELS diminuent avec leur diamètre transverse. Le processus de fabrication des VCSELS est donc bien maîtrisé du point de vue de ces deux caractéristiques.

Diamètre du VCSEL (μm)	Seuil (mA)	Efficacité quantique (%)
5	0,67	51,5
7	1,15	46,6
10	1,73	42

Fig. 3.19 – Seuil et efficacité quantique des VCSELS en fonction de leur diamètre.

3.5.2.2 Accordabilité en fréquence

Les échantillons émettent des faisceaux dont les modes ont des longueurs d'onde comprises entre 820 et 850 nm . Comme pour les diodes lasers, cette longueur d'onde varie avec la température du laser et le courant d'alimentation. Typiquement, la longueur d'onde d'un mode varie de $2 \text{ \AA}/mA$ et de $0,65 \text{ nm}/^\circ C$, données compatibles avec celles trouvées dans la littérature [McMahon 95, Hasnain 91, Young 93]. Cette dépendance de la longueur d'onde avec la température est due à la modification de l'indice et, plus indirectement, à la variation du nombre de porteurs. Ces deux variations assurent une accordabilité en fréquence qui peut être utile lorsque l'on injecte ces lasers (voir section 3.6).

Par ailleurs, à cause de la variation de la largeur de la bande interdite [Casey 78, Scott 95], le maximum du profil de gain se déplace de $3 \text{ \AA}/^\circ C$. L'écart entre les deux taux de variation (fréquence de résonance de la cavité et courbe de gain) explique la baisse de l'efficacité quantique de ces lasers avec la température.

3.5.2.3 Stabilité en intensité

Nos VCSELs ont montré une grande sensibilité aux variations de température. C'est pourquoi nous avons utilisé une régulation en température et une boîte en plexiglas pour entourer les VCSELs et l'objectif de microscope (on évite ainsi les perturbations dues aux courants d'air dans la pièce). Comme les diodes lasers [Richardson 90], les VCSELs sont très sensibles au retour de la lumière qu'ils produisent [Chung 91, Jiang 93, Jiang 94]. Dans ce cas, on utilise généralement un isolateur optique. Toutefois ces isolateurs ne peuvent être employés qu'avec des faisceaux polarisés linéairement ; on ne pourra donc pas les utiliser avec les VCSELs qui peuvent émettre différents modes transverses de polarisations variées.

En conséquence, on prendra garde à éviter tout retour de lumière dû à une réflexion sur un élément optique, en particulier une photodiode.

3.5.2.4 Modes transverses

Si les VCSELs sont monomodes longitudinaux, ils peuvent, en revanche, émettre plusieurs modes transverses. Juste au-dessus du seuil, le faisceau est monomode transverse : seul le mode TEM_{00} oscille. Il est polarisé linéairement dans la direction (Ox) (voir section 2.2.2). Pour nos VCSELs, le caractère monomode transverse n'est jamais

conservé lorsque le courant dépasse 5 fois la valeur du courant de seuil. Le second mode à osciller est le mode TEM_{10} ou TEM_{01} de polarisation orthogonale à (Ox) , soit (Oy) . Les modes qui oscillent lorsque l'on augmente le courant de pompe varient selon le laser mais ils sont toujours polarisés selon (Ox) ou (Oy) . Ils peuvent être des modes de Laguerre-Gauss ou d'Hermite-Gauss [Hua 94, Giudici 98]. Plus le diamètre d'un VCSEL est important, plus le nombre de Fresnel qui le caractérise est grand. Les modes transverses au-dessus du seuil peuvent alors atteindre des ordres élevés pour les VCSELs de grand diamètre. Sur la figure (3.21), nous montrons les photographies des modes observés à partir de l'émission d'un VCSEL de diamètre $16 \mu m$. Un monochromateur (figure 3.20) de résolution $0,3 \text{ nm}$ à 830 nm permet de séparer les différents modes transverses présents dans le faisceau. Une caméra CCD permet de les numériser. Par ailleurs, on a constaté que deux modes de même profil transverse mais de polarisations linéaires et orthogonales peuvent osciller simultanément. Leur écart de fréquence (jusqu'à 80 GHz) dénote une biréfringence importante.

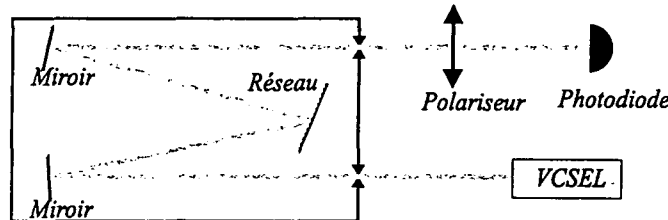


Fig. 3.20 – Montage du monochromateur pour identifier les modes transverses (ainsi que leur polarisation) émis par les VCSELs.

3.5.3 Caractéristiques de bruit des VCSELs

3.5.3.1 Cas monomode

Nous traiterons successivement les situations où les VCSELs oscillent sur un ou plusieurs modes. Dans le cas monomode, en général réalisé à relativement faible pompage (moins de 5 fois le seuil), nous comparerons les prévisions de notre modèle pour les bruits d'intensité et de polarisation aux résultats expérimentaux. Dans le cas multimode, nous ne disposons pas de modèle *ab initio*. En effet, le calcul quantique qui nécessite de faire intervenir les structures spatiales des divers modes et les distribution de gain correspondantes est fort complexe et n'a pas été développé. Nous avons utilisé des modèles phénoménologiques pour interpréter nos expériences.

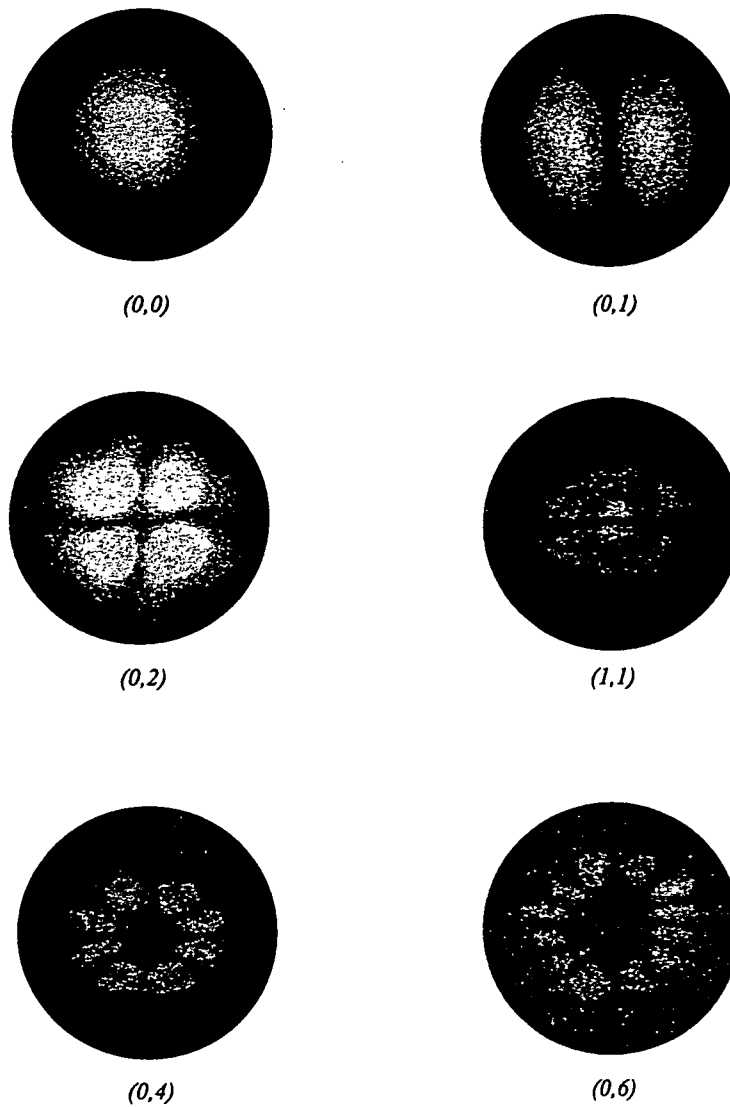


Fig. 3.21 – Modes transverses émis par un VCSEL de $16 \mu\text{m}$ de diamètre pour un courant égal à cinq fois le courant de seuil. Sous chaque image, on a reporté les deux nombres de l'indexation standard des modes de Laguerre-Gauss.

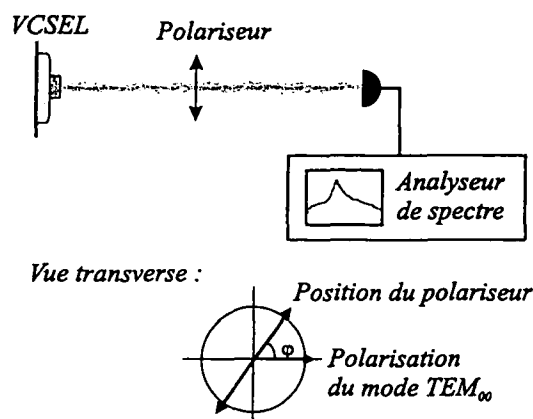


Fig. 3.22 – Montage de l'expérience pour mesurer le bruit d'intensité de chaque composante de polarisation.

Dans le cas où un seul mode transverse oscille, les caractéristiques en continu des lasers décrits dans le tableau de la figure (3.19) sont telles que l'on peut espérer produire des états comprimés à partir de ces VCSELs. Cependant les VCSELs dont nous disposons ont toujours montré un excès de bruit lorsqu'ils étaient monomodes contrairement aux travaux de Degen *et al.* [Degen 98].

Pour l'ensemble de nos échantillons, ce mode (le TEM_{00}) est toujours polarisé linéairement, résultat en accord avec les prévisions du modèle de San Miguel (voir section 2.2.2). Nous avons distingué plusieurs situations suivant l'importance du bruit de la composante de polarisation orthogonale à la polarisation du mode qui oscille. Selon les cas, le bruit de polarisation a un comportement complètement différent, qui nous permet de caractériser nettement deux situations : une où le bruit est directement détectable et l'autre où il ne l'est pas. Notons que chacune des situations correspond à un ensemble précis de VCSELs. Cela confirme que la pureté de la polarisation des VCSELs est liée au procédé de fabrication.

a Le bruit de la composante sous le seuil est faible

Pour nos échantillons de VCSELs les plus récents, le bruit d'intensité dans la direction de polarisation orthogonale à la polarisation du mode sous le seuil (notée Oy) s'est révélé très faible (il n'est pas détectable à l'aide d'une photodiode mesurant l'intensité dans cette direction de polarisation). Dans ce cas, nous nous attendons à une bonne fidélité de notre modèle (voir section 2.3.5). En effet, du fait du traitement linéarisé des fluctuations d'amplitude des champs, notre modèle suppose un bruit d'intensité négligeable pour la composante de polarisation sous le seuil. Sur la figure (3.23),

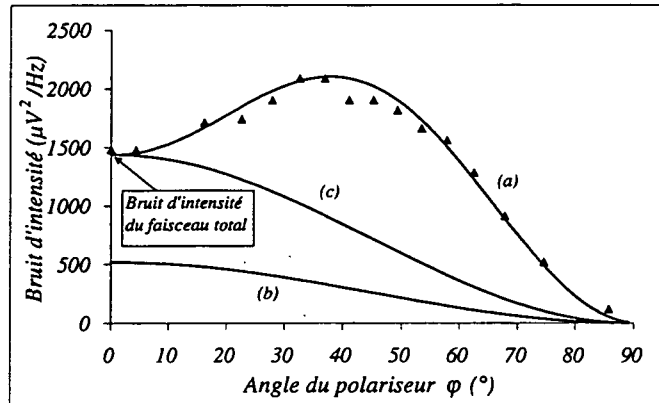


Fig. 3.23 – Bruit d'intensité mesuré sur la photodiode en fonction de l'angle entre le polariseur et la polarisation du mode TEM_{00} . Les résultats expérimentaux sont représentés par les (\blacktriangle). La courbe (a) représente les prévisions théoriques, la courbe (b) la limite quantique standard correspondant à l'intensité du faisceau et la courbe (c) le bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total que notre faisceau. Les valeurs des paramètres sont les suivantes : $\kappa = 100 \text{ GHz}$, $\gamma_a = 1 \text{ GHz}$, $\gamma_{\perp} = 1000 \text{ GHz}$, $\gamma_J = 50 \text{ GHz}$, $\gamma_p = 40 \text{ GHz}$, $\alpha = 3$, $r = 1,85$, $\Omega = 2\pi 10 \text{ MHz}$ et $p = 1$.

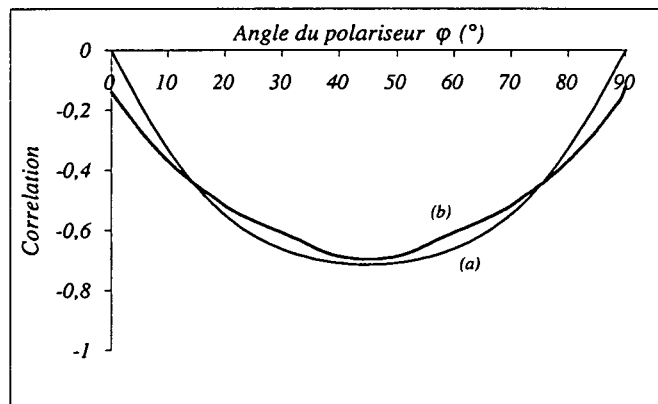


Fig. 3.24 – Corrélation normalisée entre les deux composantes orthogonales de polarisation φ et $\varphi + \pi/2$ en fonction de l'angle φ . La courbe (a) correspond aux prévisions théoriques et la courbe (b) aux résultats expérimentaux. Les valeurs des paramètres sont identiques à celles de la figure (3.23).

nous avons tracé les résultats obtenus à partir de l'expérience présentée sur la figure (3.22). Dans cette expérience, nous mesurons le bruit d'intensité de la composante de polarisation faisant un angle φ avec la polarisation du mode sous le seuil. Cette grandeur a été calculée théoriquement et tracée au paragraphe (2.3.5.2). Pour comparer les résultats expérimentaux aux prévisions théoriques, la valeur de la limite quantique standard à $\varphi = 0$ dans la formule théorique est prise égale à la valeur expérimentale correspondante. Ceci correspond à une normalisation de l'ensemble des courbes. Les paramètres utilisés dans le modèle sont ceux qui correspondent à l'échantillon étudié; il n'y a aucun autre paramètre ajustable. On constate un très bon accord entre prévisions théoriques et résultats expérimentaux.

Cette expérience permet aussi de mesurer la corrélation entre deux composantes de polarisation orthogonales. Sur la figure (3.24), nous avons porté les résultats concernant les corrélations entre deux composantes de polarisations orthogonales. Là encore, l'accord est très bon: les résultats expérimentaux confirment que la corrélation est nulle entre la composante de polarisation sous le seuil et celle au-dessus du seuil. On retrouve à travers ces résultats les prévisions selon lesquelles le VCSEL n'émet pas un faisceau parfaitement polarisé linéairement. Le mode orthogonal a une intensité non détectable et le bruit d'intensité total est égal au bruit du faisceau filtré par un polariseur à $\varphi = 0^\circ$, mais le bruit à $\varphi = 45^\circ$ révèle un net excès de bruit par rapport à un faisceau monomode. La corrélation entre les composantes de polarisation à $\varphi = 45^\circ$ sont négatives, conformément à la théorie. Contrairement au cas discuté dans la partie théorique, la valeur atteinte (-68 %) montre que la corrélation n'est pas quantique. En appliquant le critère de la section (2.3.5.3), on calcule que la corrélation devrait dépasser 95 % pour être quantique. Dans le cas d'un faisceau parfaitement polarisé, elle serait nulle pour un faisceau au bruit quantique standard et positive pour un faisceau comportant un excès de bruit.

b Le bruit de la composante sous le seuil est important

Pour les VCSELs d'une plaque fabriquée antérieurement à la précédente, le bruit dans la direction (Oy) est important. Cela se traduit par le fait que l'on peut mesurer une faible intensité à l'aide d'une photodiode dans la direction de polarisation perpendiculaire à celle du mode principal. De plus, le bruit d'intensité total est inférieur au bruit d'intensité suivant la polarisation principale, ce qui démontre une anticorrélation entre le mode de polarisation principale et l'émission de la composante de polarisation sous le seuil. Nous ne pouvons plus appliquer les résultats de notre modèle car le traitement linéaire de l'équation (2-59) n'est plus valable. Dans ce cas, une meilleure approxima-

tion consiste à écrire les équations de San Miguel non plus en champ mais en intensité. Ceci n'est possible qu'au prix d'un certain nombre d'approximations [Willemsen 99]. Nous pouvons cependant interpréter les résultats expérimentaux que nous avons obtenus à l'aide d'un modèle phénoménologique. Nous allons distinguer deux sous-cas, en fonction de la largeur de raie de l'émission dans la direction (Oy) :

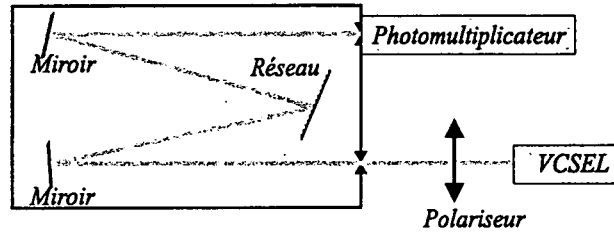


Fig. 3.25 – Montage de notre monochromateur pour caractériser la largeur de raie de l'émission de la composante de polarisation orthogonale à la polarisation du mode au-dessus du seuil.

b.α. La largeur de raie est faible

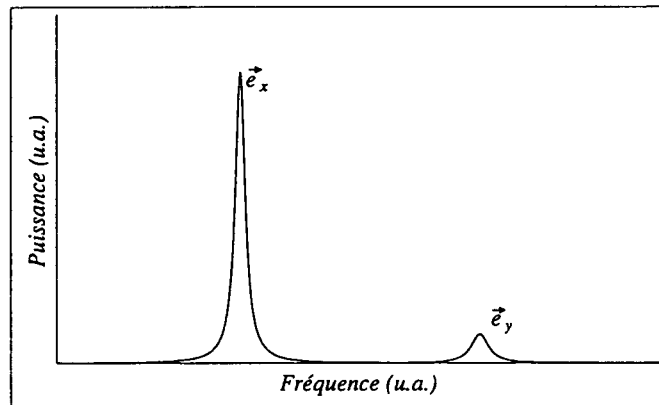


Fig. 3.26 – Allure des spectres des émissions suivant les deux composantes (Ox) et (Oy) dans le cas où le spectre de l'émission suivant (Oy) est étroit.

Le mode principal étant polarisé suivant (Ox), nous avons mesuré la largeur de raie de l'émission de polarisation (Oy) en utilisant le montage de la figure (3.25). Nous alignons le monochromateur avec l'ensemble du faisceau. Nous atténuons ensuite très fortement le faisceau à l'aide d'une densité optique de telle sorte que son intensité (mesurée par un microwattmètre) soit égale à l'intensité de l'émission dans la direction

(Oy) (soit quelques μW). Nous vérifions ensuite que le pic correspondant au mode polarisé suivant (Ox) est toujours visible à la sortie du monochromateur. En pratique, la présence du photomultiplicateur donne au montage une très grande sensibilité puisque le rapport signal à bruit du pic du mode principal dépassait 10. Ensuite nous polarisons le faisceau dans la direction (Oy) et nous enlevons la densité optique. Pour de nombreux VCSELS, l'émission dans la direction (Oy) présente un spectre avec une fréquence bien définie et distante de plus de 20 GHz de la fréquence du mode principal (voir figure 3.26). Dans ce cas, il n'y a pas d'interférence détectable entre les émissions suivant (Ox) et (Oy) (nos fréquences d'analyse de bruit ne dépassent pas les 20 MHz). À partir de l'expérience décrite par la figure (3.22), nous pouvons alors comparer les résultats aux prévisions du modèle phénoménologique que nous allons maintenant présenter en détail.

Dans notre calcul, nous considérons les émissions suivant les deux polarisations (Ox) et (Oy). Nous repérons ces modes respectivement par les indices (Ox) et (Oy). Pour calculer le bruit d'intensité en fonction de la position du polariseur, on peut utiliser une analogie entre les pertes introduites par le polariseur sur chaque polarisation et celles introduites par une lame semi-transparente de coefficient de transmission et de réflexion r et t . Les deux coefficients de transmission en intensité pour chaque direction de polarisation, notés respectivement $T_x(\varphi)$ et $T_y(\varphi)$, sont donnés par :

$$T_x(\varphi) = \cos^2 \varphi \quad (3-4-a)$$

$$T_y(\varphi) = \sin^2 \varphi \quad (3-4-b)$$

si φ est l'angle entre le polariseur et l'axe (Ox).

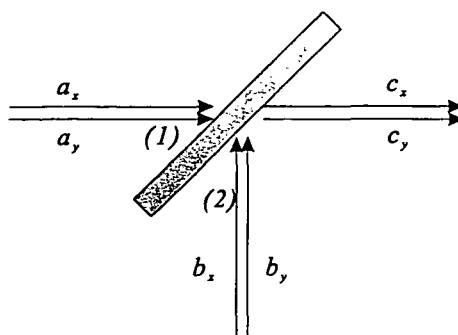


Fig. 3.27 – Lame semi-transparente représentant l'effet du polariseur sur les deux composantes de polarisation.

Pour notre calcul, définissons les paramètres suivants :

- a_i, a_i^\dagger ($i = x, y$) sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de la polarisation i entrant par le port 1 de la lame semi-transparente (voir figure 3.27),

- b_i, b_i^\dagger sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création de la polarisation i entrant par le port 2 de la lame semi-transparente (voir figure 3.27). Dans notre cas, ces modes sont vides,

- $c_i(\varphi), c_i^\dagger(\varphi)$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création du mode i transmis par la lame semi-transparente (voir figure 3.27),

Avec nos définitions, nous avons les relations :

$$c_i(\varphi) = t_i(\varphi)a_i + ir_i(\varphi)b_i \quad (3-5)$$

ce qui donne pour les opérateurs hermitiques conjugués :

$$c_i^\dagger(\varphi) = t_i(\varphi)a_i^\dagger - ir_i(\varphi)b_i^\dagger \quad (3-6)$$

Étant donné que les deux modes sont polarisés orthogonalement, l'opérateur nombre de photon après la lame est défini par :

$$n(\varphi) = c_x^\dagger(\varphi)c_x(\varphi) + c_y^\dagger(\varphi)c_y(\varphi) \quad (3-7)$$

avec :

$$T_i(\varphi) = t_i^2(\varphi) \quad (3-8)$$

En utilisant les relations de commutation bien connues des différents opérateurs ($[a_i, a_i^\dagger] = [b_i, b_i^\dagger] = [c_i(\varphi), c_i^\dagger(\varphi)] = 1$) et le fait que le vide rentre par la voie 2 de la lame semi-transparente, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle n(\varphi) \rangle &= \langle c_x^\dagger(\varphi)c_x(\varphi) \rangle + \langle c_y^\dagger(\varphi)c_y(\varphi) \rangle \\ &= t_x^2(\varphi) \langle a_x^\dagger a_x \rangle + t_y^2(\varphi) \langle a_y^\dagger a_y \rangle \\ &= \cos^2 \varphi \langle n_x \rangle + \sin^2 \varphi \langle n_y \rangle \end{aligned} \quad (3-9)$$

où $\langle n_i \rangle$ est le nombre moyen de photons dans le mode i avant la lame. On peut aussi calculer $\langle n^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n^2(\varphi) \rangle &= \cos^4 \varphi \langle n_x^2 \rangle + \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \langle n_x \rangle \\ &\quad + \sin^4 \varphi \langle n_y^2 \rangle + \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \langle n_y \rangle + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \langle n_x n_y \rangle \end{aligned} \quad (3-10)$$

ce qui permet de calculer la variance totale du nombre de photons :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(\varphi) \rangle &= \langle n^2(\varphi) \rangle - \langle n(\varphi) \rangle^2 \\ &= \cos^4 \varphi \langle n_x^2 \rangle + \cos^2 \varphi (1 - \cos^2 \varphi) \langle n_x \rangle + \sin^4 \varphi \langle n_y^2 \rangle \\ &\quad + \sin^2 \varphi (1 - \sin^2 \varphi) \langle n_y \rangle + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \langle n_x n_y \rangle \\ &\quad - \cos^4 \varphi \langle n_x \rangle^2 - \sin^4 \varphi \langle n_y \rangle^2 - 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi \langle n_x \rangle \langle n_y \rangle \end{aligned} \quad (3-11)$$

Soit : Δn_i^2 : la variance de n_i dans l'ordre normal (voir section 1.5.2). Si : Δn_i^2 : est positif, le mode i présente de l'excès de bruit tandis que si : Δn_i^2 : est négatif, le mode i est comprimé en intensité. En utilisant la relation qui relie la variance à la variance dans l'ordre normal [Scully 97] :

$$: \Delta n_i^2 := \Delta n_i^2 - \langle n_i \rangle \quad (3-12)$$

on a :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(\varphi) \rangle &= \cos^2 \varphi \langle n_x \rangle + \cos^4 \varphi \langle : \Delta n_x^2 : \rangle + \sin^2 \varphi \langle n_y \rangle + \sin^4 \varphi \langle : \Delta n_y^2 : \rangle \\ &\quad + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi (\langle n_x n_y \rangle - \langle n_x \rangle \langle n_y \rangle) \end{aligned} \quad (3-13)$$

Si on définit la corrélation entre les 2 modes par :

$$C = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle - (\langle \Delta n_x^2 \rangle + \langle \Delta n_y^2 \rangle)}{2\sqrt{\langle \Delta n_x^2 \rangle \langle \Delta n_y^2 \rangle}} \quad -1 \leq C \leq 1 \quad (3-14)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(\varphi) \rangle &= \cos^2 \varphi \langle n_x \rangle + \cos^4 \varphi \langle : \Delta n_x^2 : \rangle + \sin^2 \varphi \langle n_y \rangle + \sin^4 \varphi \langle : \Delta n_y^2 : \rangle \\ &\quad + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi C \sqrt{\langle \Delta n_x^2 \rangle \langle \Delta n_y^2 \rangle} \end{aligned} \quad (3-15)$$

Dans cette équation, les quantités $\cos^2 \varphi \langle n_x \rangle$ et $\sin^2 \varphi \langle n_y \rangle$ correspondent aux limites quantiques standard de chaque composante. Dans notre cas, l'intensité $\langle n_y \rangle$ est très faible et nous pouvons négliger le terme $\sin^2 \varphi \langle n_y \rangle$ (le mode sous le seuil ne contient que de l'excès de bruit), ce qui permet d'écrire finalement :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(\varphi) \rangle &= \cos^2 \varphi \langle n_x \rangle + \cos^4 \varphi \langle : \Delta n_x^2 : \rangle + \sin^4 \varphi \langle : \Delta n_y^2 : \rangle \\ &\quad + 2 \cos^2 \varphi \sin^2 \varphi C \sqrt{\langle \Delta n_x^2 \rangle \langle \Delta n_y^2 \rangle} \end{aligned} \quad (3-16)$$

L'équation (3-16) permet donc de calculer le bruit d'intensité du faisceau quelle que soit la position du polariseur à partir des mesures faites à $\varphi = 0$. En effet, nous pouvons mesurer la limite quantique standard $\cos^2 \varphi \langle n_x \rangle$, les excès de bruit de chaque composante ce qui donne accès aux quantités $\langle : \Delta n_x^2 : \rangle$ et $\langle : \Delta n_y^2 : \rangle$. Connaissant le bruit d'intensité total, on en déduit la valeur de la corrélation C .

Sur la figure (3.28), nous avons tracé les prévisions du modèle phénoménologique ainsi que les résultats de nos mesures. On constate un bon accord entre les deux résultats. Nous sommes donc bien en présence d'un mode principal et d'une émission

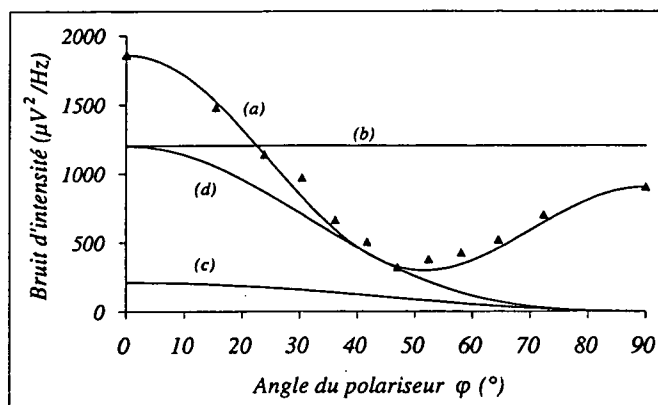


Fig. 3.28 – Variation du bruit d'intensité avec la position du polariseur dans le cas où la raie de l'émission selon (Oy) est étroite. Les (\blacktriangle) correspondent aux mesures ; la courbe (a) correspond aux prévisions théoriques, la courbe (b) au bruit d'intensité du faisceau global, la courbe (c) à la limite quantique standard et la courbe (d) au bruit d'intensité d'un faisceau parfaitement monomode ayant le même bruit total et la même intensité que notre faisceau.

faible décalée en fréquence et présentant une nette anticorrélation avec le mode principal. Sur la figure (3.28), le bruit mesuré (courbe a) est bien différent du bruit prévu dans le cas d'un laser monomode (courbe d). Le bruit d'intensité total présente en particulier un minimum. Par rapport aux prévisions du modèle théorique complet, on a donc dans ce cas des anticorrélations entre les amplitudes des deux composantes.

b.β. La largeur de raie est importante

Pour certains VCSELs, l'émission suivant (Oy) a une largeur de raie très importante (on ne distingue pas de pic à la sortie du monochromateur), tout en ayant un bruit d'intensité important. Dans ce cas, lorsque l'on place le polariseur, on fait interférer les parties du spectre qui se recouvrent (voir figure 3.29). On réalise un homodynage de l'émission suivant (Oy) par le mode au-dessus du seuil [Poizat 98, Hermier 99]. Sur la figure (3.30), on a représenté une courbe obtenue pour ce type de VCSEL. L'effet des interférences est net : bien que les corrélations soient négatives (le bruit d'intensité total est inférieur au bruit d'intensité des composantes (Ox) et (Oy)), on observe une hausse du bruit d'intensité pour les positions intermédiaires du polariseur (dans le cas d'un mode sous le seuil de fréquence bien définie, cas pour lequel on n'a pas d'interférence, la formule (3-16) montre que le bruit d'intensité d'une composante quelconque de

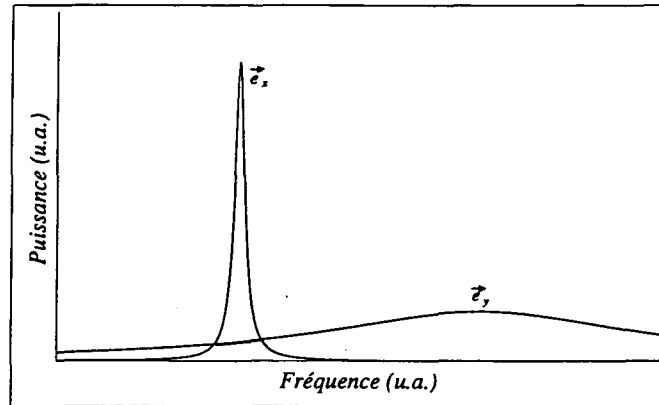


Fig. 3.29 – Allure des spectres des émissions suivant les deux composantes (O_x) et (O_y) dans le cas où le spectre de l'émission suivant (O_y) est large.

polarisation est inférieur au plus grand des bruits des deux modes).

L'ensemble de ces résultats démontre que les VCSELs ne peuvent être considérés comme monomodes même lorsqu'un seul mode transverse oscille. Notre modèle prévoit dans ce cas et pour un pompage fort une réduction du bruit au-dessous de la limite quantique standard, que nous n'avons pas observée. Cela provient du fait que les VCSELs dont nous disposons ne se comportent conformément au modèle linéarisé présenté que pour des taux de pompage faibles (inférieurs à 2). Cependant, dès que le bruit d'intensité sur la polarisation orthogonale est détectable, de fortes anticorrélations sont observées entre les deux composantes orthogonales de polarisation. On retrouve ces fortes anticorrélations en régime multimode et nous allons montrer que, pour des taux de pompages plus importants, elles permettent d'obtenir des états comprimés en intensité.

3.5.3.2 Cas multimode

Pour des taux de pompage supérieurs à 5 fois le courant de seuil, les VCSELs sont toujours multimodes transverses. Même si l'oscillation d'un seul mode est préférable pour obtenir de la compression de bruit [Degen 98], certains modèles [Vey 98, Vey 99] comme l'expérience [Kilper 97] montrent qu'il est possible d'en observer dans le cas où deux modes sont simultanément au-dessus du seuil. Les deux modes sont alors fortement anticorrélés, c'est-à-dire que le bruit total du faisceau est très inférieur au bruit de chaque mode considéré individuellement.

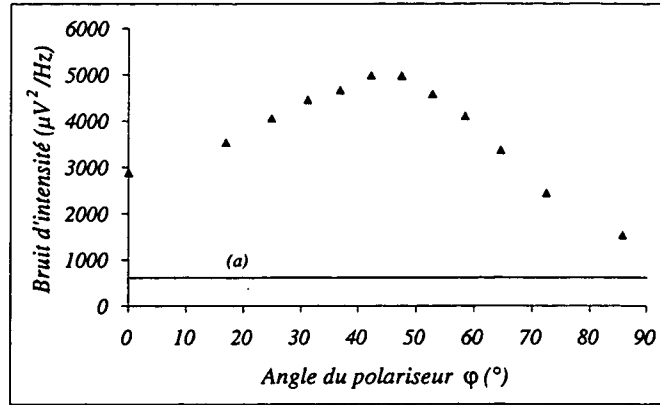


Fig. 3.30 – Variation du bruit d'intensité avec la position du polariseur dans le cas où la largeur de raie de l'émission selon (Oy) est importante. Les (\blacktriangle) correspondent aux mesures expérimentales et la courbe (a) au bruit d'intensité du faisceau global.

Dans ce paragraphe, nous nous intéressons plus particulièrement aux caractéristiques de bruit d'intensité des VCSELS dont le seuil et l'efficacité sont décrits dans le tableau de la figure (3.19). Parmi les VCSELS de $5 \mu m$ de diamètre, trois ont produit des faisceaux au bruit d'intensité comprimé pour des courants modérés. Après correction des pertes optiques du système de détection et de collimation, le meilleur taux de compression mesuré est de $-0,75 dB$ (le spectre de bruit correspondant à ce résultat est tracé sur la figure 3.31) en régime multimode. Pour le faisceau correspondant à ce spectre (figure 3.32), grâce au monochromateur et à un polariseur placé à sa sortie (voir figure 3.20), nous avons représenté la puissance et la polarisation de chaque mode transverse au-dessus du seuil en fonction de sa fréquence (le mode TEM_{00} sert de référence pour les 2 échelles).

Pour des courants plus élevés, le bruit peut atteindre plusieurs dB au-dessus de la limite quantique standard. Dans ce cas, bien que le taux de pompage soit plus élevé, aucune compression de bruit n'est obtenue. L'apparition de trop nombreux modes transverses semble dégrader le bruit d'intensité. Nous avons aussi obtenu des faisceaux au bruit d'intensité comprimé avec deux des six VCSELS de $7 \mu m$ de diamètre. Le taux de compression atteint $-0,6 dB$, toujours en régime multimode. Les autres VCSELS de ce diamètre peuvent produire des faisceaux au bruit proche de la limite quantique standard (environ $1 dB$ au-dessus) pour des courants d'alimentation modérés. Au-delà, le bruit dépasse parfois de $10 dB$ la limite quantique standard. Quant aux VCSELS de

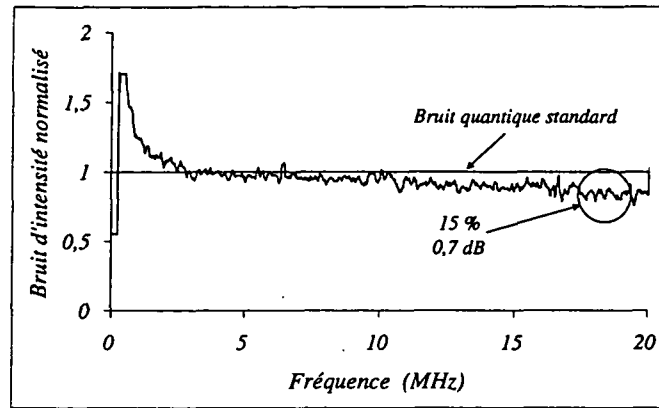


Fig. 3.31 – Spectre de bruit d'intensité normalisé d'un faisceau émis par un VCSEL. On observe dans ce cas une compression du bruit d'intensité.

10 μm de diamètre, leur bruit d'intensité est toujours resté au-dessus de cette limite : de 5 dB pour les courants moyens à 10 dB à fort courant.

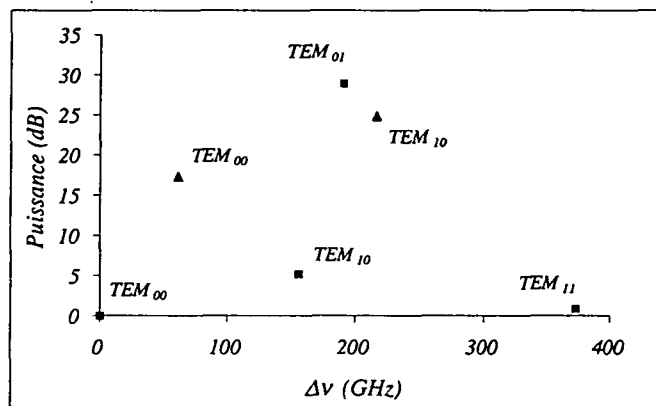


Fig. 3.32 – Décomposition spectrale du faisceau de la figure (3.31). Les modes (▲) sont polarisés verticalement, les modes (■) sont polarisés horizontalement.

Comme prévu, les VCSELs de plus faible diamètre qui présentent les meilleurs efficacités quantiques et les seuils les plus bas ont aussi les meilleurs caractéristiques de bruit. Le bruit d'intensité est aussi clairement lié au nombre de modes transverses qui oscillent. Plus le VCSEL a un grand diamètre, plus le nombre de modes transverses pouvant osciller est grand et le bruit d'intensité élevé. À travers ces chiffres, on voit aussi que les caractéristiques de bruit varient fortement d'un VCSEL à l'autre.

L'ensemble de ces résultats démontre la possibilité d'obtenir de la compression de bruit en régime multimode à condition que le nombre de modes ne soit pas trop grand, ce qui est le cas pour les VCSELs de petit diamètre. Des résultats comparables ont été observés avec des diodes lasers [Marin 95, Zhang 95, Bramati 97], même si, dans ce cas, un seul mode oscille tandis que les autres sont au-dessous du seuil. Le bruit de chaque mode considéré individuellement est très au-dessus de la limite quantique standard mais pris ensemble, leur bruit total peut descendre sous cette limite : il y a de très fortes anticorrélations entre les modes, anticorrélations dues à l'homogénéité importante du milieu amplificateur des lasers à semi-conducteurs.

Pour démontrer l'importance de ce phénomène dans le cas des VCSELs en régime multimode, nous avons examiné en détail le cas simple où les deux modes transverses TEM_{00} et TEM_{10} polarisés linéairement et orthogonalement sont les seuls à osciller. Grâce à un polariseur de Glan, dont le coefficient d'extinction atteint 10^4 , on peut séparer ces deux modes et mesurer indépendamment leur bruit. Sur la figure (3.33), nous avons porté les résultats obtenus à partir d'un VCSEL de diamètre $7 \mu m$. Nous avons tracé le bruit de chaque mode ainsi que le bruit d'intensité total. Même si ce dernier est au-dessus de la limite quantique standard, on constate qu'il est très en dessous des bruits de chaque mode. Comme précédemment, on définit le degré de corrélation entre les deux modes par :

$$C = \frac{\langle \Delta I^2 \rangle - (\langle \Delta I_0^2 \rangle + \langle \Delta I_1^2 \rangle)}{2\sqrt{\langle \Delta I_0^2 \rangle \langle \Delta I_1^2 \rangle}} \quad (3-17)$$

où :

- $\langle \Delta I^2 \rangle$ est le bruit total du faisceau,
- $\langle \Delta I_0^2 \rangle$ est le bruit du mode TEM_{00} ,
- $\langle \Delta I_1^2 \rangle$ est le bruit du mode TEM_{01} .

À $10 MHz$, on calcule une anticorrélation de $-0,993$ à partir des données de la figure (3.33), soit une anticorrélation proche du cas idéal. De tels effets ont aussi été démontrés [Kilper 97, Marin 99] précédemment sur d'autres lasers à microcavité.

Si les anticorrélations sont parfaites, on sait [Marin 95] que le laser est équivalent à un laser monomode ; le bruit d'intensité est indépendant du nombre de modes au-dessus du seuil. Il ne dépend alors que du taux de pompage et de l'efficacité quantique du laser. Cependant, si les anticorrélations sont fortes [Inoue 92, Zhang 95] et proches de -1 , elles ne sont pas parfaites. Des saturations du milieu amplificateur en seraient la cause [Lathi 99a, Lathi 99b, Marin 95]. De l'augmentation du nombre de modes

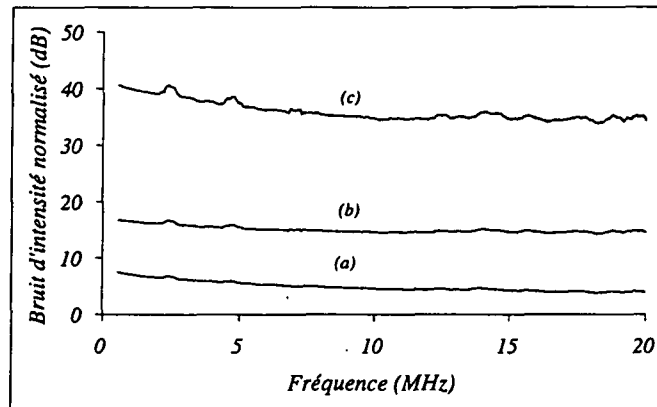


Fig. 3.33 – Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB). La courbe (a) correspond au bruit d'intensité total, la courbe (b) au bruit du mode TEM_{00} et la courbe (c) au bruit d'intensité du mode TEM_{01} .

oscillants résulte donc une augmentation du bruit d'intensité. C'est encore une raison qui explique les moins bonnes caractéristiques de bruit des VCSELs de grand diamètre. Ceci explique aussi pourquoi, de trop forts taux de pompage dégradent le bruit.

Pour améliorer les caractéristiques de bruit des VCSELs dont le bruit d'intensité est toujours au-dessus de la limite quantique standard, on peut utiliser une technique déjà employée avec succès sur les diodes lasers : l'injection [Wang 93, Zhang 95].

En conclusion, ces mesures de bruit dans le régime libre démontrent l'importance des anticorrélations dans les VCSELs, que ce soit en régime monomode ou en régime multimode.

3.6 Injection optique des VCSELs

3.6.1 Introduction

Le principe de la pompe régulière justifie l'idée d'obtenir des états comprimés à partir de lasers à semi-conducteurs pompés par un courant régulier. Cependant, observer des états comprimés avec une diode laser, par exemple, exige une rétroaction optique (avec un réseau) ou l'injection d'un laser peu bruyant.

Ces deux dispositifs permettent de diminuer l'intensité des modes latéraux proches du seuil. Ceux-ci sont très bruyants et, dans le cas où les anticorrélations ne sont pas parfaites, introduisent un excès de bruit.

L'injection optique grâce à un laser dit maître ou la rétroaction via un réseau permettent de réduire l'intensité de ces modes et de se rapprocher du cas du laser monomode. Nous verrons (section 4.4.1.2) que l'injection optique n'affecte pas l'effet de la pompe régulière pour des fréquences très inférieures à la fréquence d'oscillation de relaxation (quelques GHz pour les lasers à semi-conducteurs). L'obtention de compression du bruit d'intensité résulte donc uniquement de la réduction de l'intensité des modes latéraux et de l'amélioration des anticorrélations qui en découlent. Dans le cas de l'injection des diodes lasers, cette réduction des modes latéraux peut atteindre 20 dB mais il faut toujours prendre en compte le bruit de ces modes pour déterminer les caractéristiques de bruit du faisceau.

Dans le cas des VCSELs, nous avons vu que certains de nos échantillons peuvent produire des états comprimés en oscillant librement. D'autres, en revanche, présentent systématiquement un excès de bruit. De plus, nous avons constaté que le faisceau émis par les VCSELs était fortement multimode transverse. Ces modes sont très bruyants et anticorrélés entre eux comme dans le cas des diodes lasers. Notons toutefois que les modes transverses des VCSELs oscillent réellement alors que les modes longitudinaux de la diode, à part le mode principal, sont au-dessous du seuil. Les VCSELs apparaissent donc comme d'excellents candidats pour l'injection optique.

3.6.2 Montage à injection des VCSELs

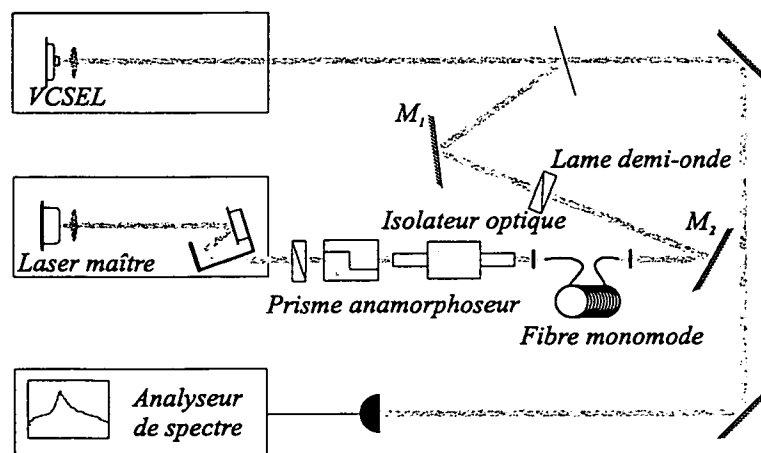


Fig. 3.34 – Montage expérimental pour l'injection des VCSELs par une diode laser.

Le montage à injection est représenté sur la figure (3.34). Le laser maître est une diode laser montée sur réseau. Son faisceau est filtré spatialement par une fibre optique

puis couplé au faisceau émis par le VCSEL. Le bruit d'intensité du VCSEL est mesuré par la même méthode qu'au chapitre précédent : une détection directe à l'aide d'une seule photodiode. Examinons en détail chaque élément du montage.

3.6.2.1 Diode sur réseau

a *La diode laser d'injection*

Nous utilisons comme laser maître d'injection une diode laser SDL 5422 H1 dont la longueur d'onde nominale est 830 nm. Libre, son seuil vaut 24 mA et son efficacité quantique 65 %. Elle est alimentée, tout comme les VCSELs, par un dispositif à très faible bruit. Pour stabiliser la température de la diode, nous utilisons aussi un élément Peltier, la diode étant insérée dans une boîte métallique dont la température est régulée. Un objectif de courte focale permet de collimater le faisceau fortement divergent (30°).

Telle quelle, la diode a une stabilité insuffisante. Elle présente des sauts de modes ; la moindre réflexion par des éléments optiques extérieurs perturbe son bon fonctionnement. Elle présente aussi un excès de bruit important, en particulier si l'on ne considère que le mode principal : on peut montrer qu'il existe d'importantes corrélations entre le mode longitudinal de la diode et les autres modes longitudinaux sous le seuil [Marin 95, Bramati 97]. C'est pour cette raison que nous avons décidé d'améliorer ses caractéristiques en utilisant un réseau. Grâce à cette méthode, on rend la diode parfaitement monomode.

L'utilisation d'un réseau pour former une double cavité avec celle du laser est une technique classique de réduction de bruit et de largeur de raie d'une diode laser [Harvey 91, Labachellerie 92]. La réalisation d'un tel montage est décrite en détail dans la référence [MacAdam 92]. Le réseau, blazé à l'ordre 1, est monté en configuration de Littrow : l'ordre 1 est renvoyé dans la diode tandis que l'ordre 0 constitue le faisceau de sortie. En pratique, nous disposons d'un réseau ayant des pertes de 15 %, un coefficient de réflexion à l'ordre 0 de 60 % et de 25% à l'ordre 1. La longueur d'onde dont l'ordre 1 est correctement renvoyée dans la diode est nettement favorisée par rapport aux autres : c'est le principe de la rétroaction optique.

b *Seuil*

Le premier réglage du réseau consiste à assurer la verticalité des ses traits. Le réglage est d'abord effectué grossièrement. Le réseau est maintenu par une monture munie de deux vis micrométriques. L'une d'entre elles permet de choisir la longueur d'onde qui est renvoyée précisément dans la diode (rotation autour de l'axe (Ox) de la figure du

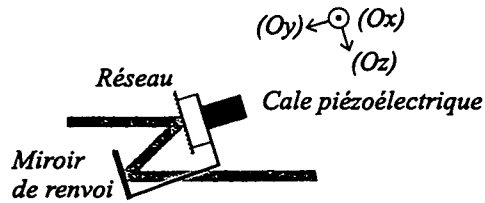


Fig. 3.35 – Montage du réseau.

réseau 3.35). L'autre, combinée au bon positionnement des traits du réseau, permet de régler la hauteur du faisceau renvoyé (rotation suivant l'axe (Oz)). Afin d'ajuster le réseau, nous disposons de deux critères très pratiques. Tout d'abord, lorsque le réseau est bien réglé, l'abaissement du seuil de la diode est important. On passe typiquement d'un seuil de 24 mA à 18 mA . De plus la courbe caractéristique courant-puissance lumineuse montre une rupture de pente très nette au seuil. Ces deux critères nous fournissent une méthode pour régler le réseau : on module le courant d'alimentation de la diode à une fréquence de 100 Hz environ et on visualise l'émission de la diode grâce à une photodiode interne placée à l'arrière de la diode (voir figure 3.36). On obtient typiquement une caractéristique comme celle présentée sur la figure (3.37). Une fois la diode montée sur réseau, son efficacité quantique est réduite du fait des pertes du réseau et des pertes des éléments optiques, comme l'objectif de collimation de la diode. On mesure expérimentalement une perte d'efficacité quantique de l'ordre de 30 %. Cependant, avec ce montage, la diode présente une stabilité très accrue, qui se traduit sur ses caractéristiques de bruit. Pour terminer, un miroir de renvoi est couplé au réseau (voir figure 3.35) de telle sorte que le faisceau de la diode a en sortie une direction indépendante de la position du réseau : lorsque l'on change la longueur d'onde de la diode en jouant sur le réseau, cette direction ne varie pas.

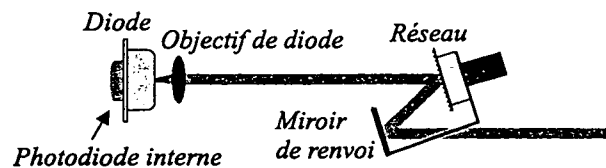


Fig. 3.36 – Photodiode interne permettant d'optimiser le seuil de la diode.

c Caractéristiques de bruit de la diode sur réseau

Si cette même diode en régime libre présente un léger excès de bruit (30 % au-dessus de la limite quantique standard au mieux), on obtient une compression de bruit (environ 20 % corrigés des pertes) grâce au réseau. De plus, la diode peut être considérée

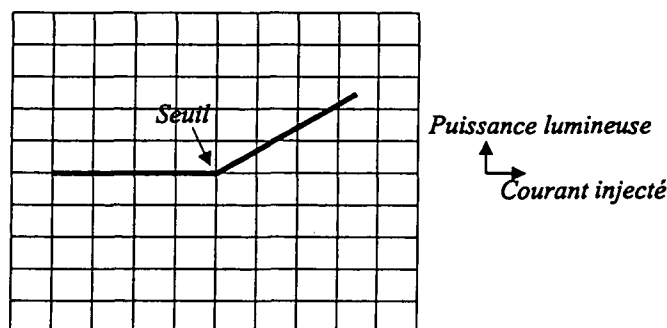


Fig. 3.37 – Puissance lumineuse détectée par la photodiode interne lorsque l'on module le courant d'alimentation de la diode près du seuil. Cette courbe est observée grâce à un oscilloscope.

comme un laser parfaitement monomode du point de vue du bruit d'intensité: le seul mode au-dessus du seuil a un bruit égal au bruit du faisceau dans sa totalité.

Étant donné que le faisceau injecté est fortement filtré, on peut considérer que celui-ci a un bruit d'intensité égal au bruit quantique standard.

3.6.2.2 Ajustement en fréquence

L'ajustement de la longueur d'onde de la diode est essentiel puisque les lasers maître et esclave doivent avoir la même longueur d'onde. La position du réseau permet, nous l'avons vu dans le montage de la diode, de changer la longueur d'onde du faisceau émis par la diode de façon discontinue par saut de mode de 45 GHz . Chaque saut de mode correspond à une variation de longueur d'onde égale à l'intervalle spectrale libre de la diode. Une cale piézoélectrique [Maki 93] sur laquelle est fixée le réseau permet aussi de faire varier continûment la longueur de la cavité formée par la diode et le réseau. En pratique ce balayage permet de faire varier continûment de 15 GHz la fréquence de la diode (on ne peut augmenter la longueur de la cale piézoélectrique au-delà d'une certaine limite sans l'endommager). Contrairement au cas des diodes libres, dans cette configuration, il n'est pas possible d'ajuster la longueur d'onde de la diode par variation du courant d'alimentation ou de la température. Ainsi la variation de la température détermine la plage de fréquence sur laquelle la rétroaction optique est effective mais, le réseau réglé, ce paramètre n'influe pas sur la longueur d'onde de la diode. Quant au courant, il n'a quasiment pas d'influence.

Au total, on peut régler la longueur d'onde de la diode sur 30 nm par plages de 15 GHz séparées de 30 GHz , ce qui est suffisant pour notre montage d'injection. En effet, on peut aussi balayer la fréquence du VCSEL de façon à ce que la longueur d'onde du mode que l'on souhaite injecter soit comprise dans une des plages de 15 GHz .

3.6.2.3 Correction des caractéristiques transverses du faisceau de la diode

La réalisation de l'injection optique exige que le faisceau de la diode ait une géométrie transverse la plus proche possible de celle du mode du VCSEL que l'on souhaite injecter. En pratique, nous avons décidé d'injecter le mode fondamental TEM_{00} du VCSEL car c'est le mode principal pour la plupart des courants de pompe.

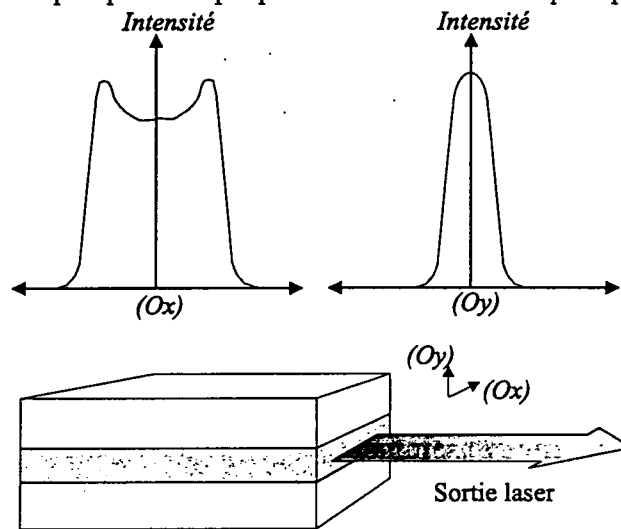


Fig. 3.38 – Profils transverses d'intensité de la diode suivant les axes horizontal (Ox) et vertical (Oy).

Après le miroir de renvoi, le faisceau de la diode présente un astigmatisme important : le rapport entre les dimensions horizontales et verticale du faisceau est égal à 3. On emploie un prisme anamorphoseur. Une lame $\lambda/2$ placée devant cet élément permet d'en optimiser le rendement. On utilise ensuite deux isolateurs optiques pour éviter tout retour de lumière réfléchi dans la diode laser. Au total, l'isolation dépasse 50 dB. Après les deux isolateurs optiques, le profil transverse de la diode est proche de celui représenté sur la figure (3.38). Pour le filtrer et le rendre plus proche du mode TEM_{00} , nous utilisons une fibre optique monomode de 20 m de long. Des montures de précision Newport comportant une vis micrométrique pour chaque degré de liberté de translation ainsi que des vis micrométriques pour régler l'inclinaison de la fibre permettent d'ajuster au mieux la position de celle-ci par rapport à la lentille qui focalise le faisceau de la diode. La direction du faisceau est elle-même ajustable grâce à deux miroirs M_1 et M_2 en "baïonnette" montés sur vis micrométriques. Des réglages très minutieux nous ont permis d'atteindre 70 % de transmission pour la fibre. À la sortie, le faisceau de la diode a une répartition transverse d'intensité très proche de celle du mode TEM_{00} .

De plus, les waists et les longueurs de Rayleigh des faisceaux maître et esclave sont aussi très voisins. Afin d'ajuster la puissance globale du faisceau de la diode, on peut éventuellement le filtrer par un des nombreux filtres gris à notre disposition. Enfin une lame $\lambda/2$ permet de tourner la polarisation du faisceau de la diode pour qu'elle soit identique à celle du mode TEM_{00} émis par le VCSEL.

Pour coupler les faisceaux maître et esclave, on emploie généralement les ports d'un isolateur optique. Toutefois, cet élément optique est polarisant et on ne peut l'utiliser avec un VCSEL qui émet des modes de polarisations différentes. On lui préfère donc une simple lame de verre de forte transmission (96 %).

3.6.2.4 Puissance injectée

La théorie de l'injection développée par Siegman [Siegman 81] montre que la plage de fréquence dans laquelle doit se trouver la fréquence du laser maître pour que l'injection soit possible est d'autant plus étroite que la puissance d'injection est faible. Les miroirs des VCSELS ayant un très fort coefficient de réflexion, la puissance du laser maître doit cependant être suffisamment faible pour ne pas perturber les mesures de bruit (on veut mesurer le bruit d'intensité du faisceau du VCSEL injecté et non le bruit du faisceau de la diode réfléchi par le miroir du VCSEL). Lorsque le VCSEL est éteint, on a en effet constaté que 50 % de la lumière injectée dans le VCSEL pouvait être réfléchi et parvenir jusqu'à la photodiode qui sert à faire la mesure de bruit. Nous avons donc systématiquement utilisé des puissances d'injection qui ne dépassaient pas 2 % de la puissance du faisceau des VCSELS. Dans ces conditions, la plage de fréquence est très étroite et les fréquences des lasers maître et esclave sont ajustées en jouant sur le réseau de la diode mais aussi sur le courant d'alimentation et la température de régulation du VCSEL.

3.6.2.5 Visualisation de l'injection

Pour visualiser l'injection, nous utilisons un Fabry-Perot de finesse 100 dont la longueur peut varier grâce à une cale piezoélectrique sur laquelle est monté un de ses miroirs. Un miroir amovible situé devant la photodiode permet de rediriger le faisceau éventuellement injecté vers ce Fabry-Perot. La lumière transmise par le Fabry-Perot est détectée par une photodiode dont le signal est transmis à un oscilloscope. Lorsque le VCSEL oscille librement, on observe plusieurs pics dont le plus important correspond au mode TEM_{00} . Un petit pic correspond à la fraction du faisceau de la diode réfléchi par le VCSEL (on augmente temporairement la puissance du faisceau de la diode pour

le voir). Quand on effectue le balayage en fréquence de la longueur d'onde de la diode, on constate une augmentation brutale du petit pic au détriment du grand pic qui semble absorbé par le petit pic : c'est l'injection. On peut alors baisser la puissance de la diode quitte à recorriger légèrement sa fréquence.

3.6.3 Résultats expérimentaux

Nous nous sommes attachés à réduire le bruit d'intensité des VCSELs qui présentaient toujours un excès de bruit en régime d'oscillation libre. Nous avons utilisé deux VCSELs de $7 \mu\text{m}$ de diamètre. Un premier résultat de l'injection est représenté sur le spectre de la figure (3.39). En régime libre, on a un fort excès de bruit, supérieur à 10 dB (courbe a). La courbe (b) représente pour le même courant d'alimentation le bruit d'intensité du VCSEL lorsque l'injection est réalisée. On constate donc une réduction importante du bruit d'intensité. Un second exemple est donné sur la figure (3.40). On constate, cette fois, que l'injection permet d'obtenir un faisceau au bruit d'intensité comprimé : le bruit du VCSEL en régime libre était bien plus faible que dans le premier cas et l'injection permet de dépasser la limite quantique standard. Après correction des pertes optiques, on obtient $-0,8 \text{ dB}$ (soit 17%) de réduction de bruit. Avec des VCSELs de plus gros diamètre, on a observé les mêmes phénomènes de réduction du bruit. Toutefois, l'excès de bruit sans injection est trop important pour permettre l'obtention de compression de bruit.

Grâce au Fabry-Perot, on peut aussi montrer que l'injection augmente nettement l'intensité du mode TEM_{00} relativement aux autres modes transverses. Cependant, malgré l'injection, d'autres modes transverses que le mode fondamental peuvent tout de même rester au-dessus du seuil. En effet, lorsque l'on injecte le mode TEM_{00} dans la cavité VCSEL, on favorise ce mode au détriment des autres en particulier au centre du plan transverse. Mais le gain des zones les plus extérieures de la cavité restent disponibles pour les modes de plus haut degré. Si ce gain est suffisamment important, ces modes peuvent alors osciller.

3.6.4 Conclusion

La technique de l'injection a donc permis d'obtenir de la compression de bruit à partir de VCSELs dont l'oscillation libre présente systématiquement de l'excès de bruit.

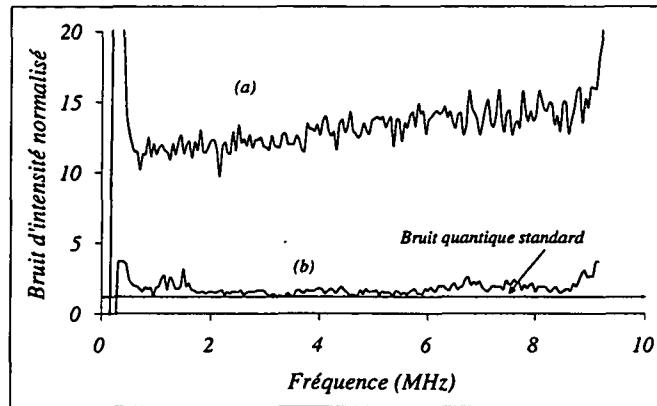


Fig. 3.39 – Spectres de bruit d'intensité d'un VCSEL de $7 \mu\text{m}$. Le taux de pompage vaut $r = 5$. La courbe (a) correspond au bruit d'intensité lorsque le VCSEL n'est pas injecté. La courbe (b) correspond au bruit d'intensité pour le même courant de pompage et une puissance d'injection de 2 %. On n'observe pas de compression du bruit d'intensité.

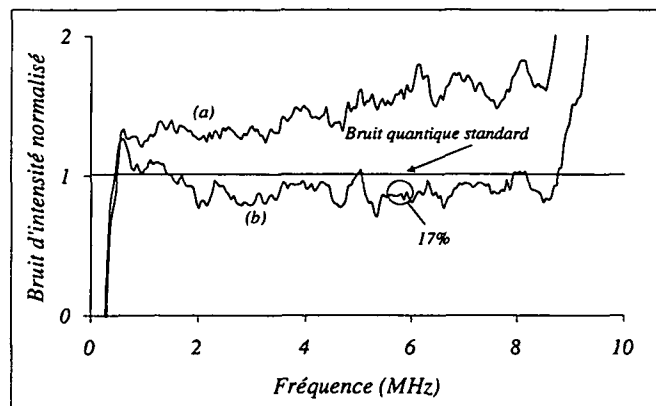


Fig. 3.40 – Spectres de bruit d'intensité d'un VCSEL de $7 \mu\text{m}$. Le taux de pompage vaut $r = 3,25$. La courbe (a) correspond au bruit d'intensité lorsque le VCSEL n'est pas injecté. La courbe (b) correspond au bruit d'intensité pour le même courant de pompage et une puissance d'injection de 2 %. On observe une compression du bruit d'intensité.

Toutefois, elle ne rend pas le laser strictement monomode. Nous avons aussi essayé de réduire le bruit des VCSELs grâce à un réseau, sans obtenir de résultats très probants. Nous avons tout d'abord rencontré des difficultés dans l'ajustement de la polarisation du faisceau par rapport au réseau, ce qui nous a obligés à introduire une lame $\lambda/2$ à l'intérieur de la cavité étendue. Mais surtout, nous ne sommes pas dans les mêmes conditions que pour les diodes : le miroir de sortie du VCSEL a un coefficient de réflexion de 99 % contre 4 % pour la diode. La notion de cavité étendue s'applique donc mal à ce système. Comme nous l'avons déjà noté, le fonctionnement monomode peut être amélioré en modifiant les caractéristiques internes du laser au cours du processus de fabrication. Les prototypes de VCSELs fabriqués récemment peuvent être monomodes jusqu'à 3,5 fois le seuil. Nos études montrent que les nouveaux composants sont de bons candidats pour produire des faisceaux au bruit d'intensité comprimé.

3.7 Structure spatiale du bruit d'intensité des VCSELs

3.7.1 Introduction

Dans les deux chapitres précédents, nous avons démontré le rôle fondamental que jouaient les corrélations entre les différents modes transverses dans le bruit des VCSELs. Le fait qu'il s'agisse de modes transverses au-dessus du seuil implique que ces anticorrélations donnent au bruit d'intensité une structure spatiale complexe dans le plan transverse au faisceau. La compréhension de cette structure revêt une grande importance pour améliorer le couplage du faisceau laser avec une fibre optique, ce qui est fondamental pour l'utilisation des VCSELs dans les télécommunications. En effet, le bruit des modes transverses d'ordre supérieur au mode TEM_{00} peut être interprété comme une fluctuation sur la position transverse du faisceau, ce qui est un inconvénient pour le couplage du faisceau avec une fibre optique.

Si on coupe le faisceau partiellement, on fait varier les contributions de chaque mode au bruit d'intensité total car ils n'ont pas les mêmes profils transverses d'intensité (voir figure 3.41). Pour étudier cette structure, nous avons coupé progressivement le faisceau avec une lame de rasoir. De plus, nous nous limitons au cas de 2 modes transverses au-dessus du seuil : les modes TEM_{00} et TEM_{10} polarisés orthogonalement. Dans cette situation, nous pouvons comparer nos résultats expérimentaux aux prévisions d'un modèle quantique phénoménologique simple, sans aucun paramètre libre. Dans ce cha-

pitre, nous présentons ce modèle quantique puis notre montage expérimental et les résultats obtenus.

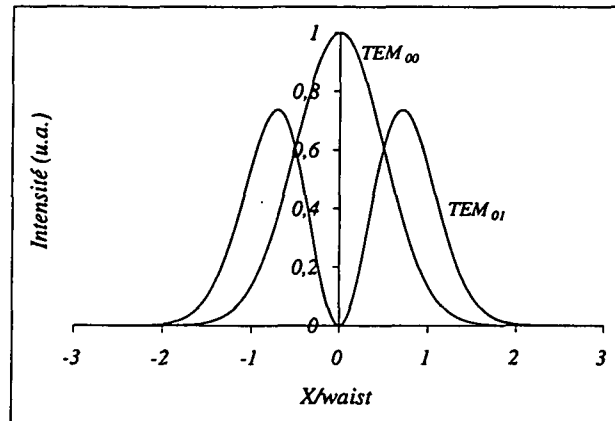


Fig. 3.41 – Profils transverses d'intensité des modes TEM_{00} et TEM_{01} .

3.7.2 Modèle quantique phénoménologique

3.7.2.1 Calcul du bruit d'intensité après la lame de rasoir

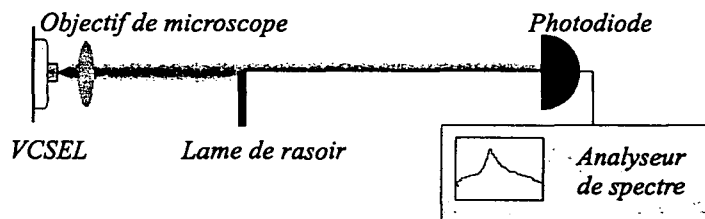


Fig. 3.42 – Principe de l'expérience : pour mesurer le profil transverse du bruit d'intensité, on coupe le faisceau dans le plan transverse par une lame de rasoir.

Dans notre calcul, nous considérons deux modes TEM_{00} (mode d'indice 0) et le mode TEM_{10} (mode d'indice 1) et négligeons le bruit de tous les autres modes. La validité de cette hypothèse devra être vérifiée. Le principe de notre expérience est de couper le faisceau par une lame de rasoir (voir figure 3.42). Pour calculer le bruit d'intensité en fonction de la position de la lame, on peut utiliser une analogie entre les pertes introduites par la lame de rasoir et celles introduites par une lame semi-transparente

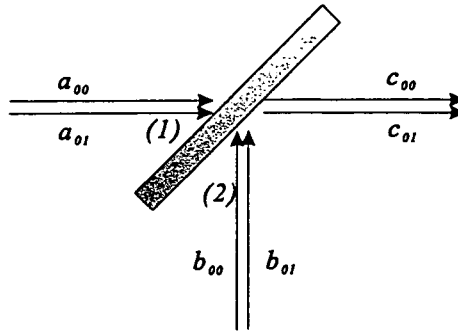


Fig. 3.43 – *Lame semi-transparente utilisée pour modéliser les pertes introduites par la lame de rasoir sur les deux modes.*

de coefficient de transmission et de réflexion r et t . Comme les distributions transverses des deux modes diffèrent, on définit des coefficients différents pour chaque mode.

Pour notre calcul, définissons les paramètres suivants :

- x est la position du bord de la lame de rasoir,
- $t_i(x)$ ($i = 0, 1$) est la transmission de la lame en amplitude du mode i pour une position x donnée,
- a_i, a_i^\dagger sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création du mode i entrant par le port 1 de la lame semi-transparente (voir figure 3.43). Les deux modes au-dessus du seuil entrent par ce port,
- b_i, b_i^\dagger sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création du mode i entrant par le port 2 de la lame semi-transparente (voir figure 3.43). Les deux modes qui entrent par ce port sont vides,
- $c_i(x), c_i^\dagger(x)$ sont respectivement les opérateurs d'annihilation et de création du mode i transmis par la lame semi-transparente (voir figure 3.43).

Les coefficients $t_i(x)$ sont obtenus à partir des profils transverses des deux modes :

$$t_0(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{w} \int_x^{+\infty} \exp(-2x'^2/w^2) dx'} \quad (3-18-a)$$

$$t_1(x) = \sqrt{\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{w} \int_x^{+\infty} 4(x'^2/w^2) \exp(-2x'^2/w^2) dx'} \quad (3-18-b)$$

On vérifie aisément que $t_i(-\infty) = 1$ et que $t_i(+\infty) = 0$.

Avec nos définitions, nous avons les relations :

$$c_i(x) = t_i(x)a_i + ir_i(x)b_i \quad (3-19)$$

ce qui donne pour les opérateurs hermitiques conjugués :

$$c_i^\dagger(x) = t_i(x)a_i^\dagger - ir_i(x)b_i^\dagger \quad (3-20)$$

Étant donné que les deux modes sont polarisés orthogonalement, l'opérateur nombre de photons après la lame est défini par :

$$n(x) = c_0^\dagger(x)c_0(x) + c_1^\dagger(x)c_1(x) \quad (3-21)$$

En utilisant les relations de commutation bien connues des différents opérateurs ($[a_i, a_i^\dagger] = [b_i, b_i^\dagger] = [c_i(x), c_i^\dagger(x)] = 1$) et le fait que le vide rentre par la voie 2 de la lame semi-transparente, on obtient :

$$\begin{aligned} \langle n(x) \rangle &= \langle c_0^\dagger(x)c_0(x) \rangle + \langle c_1^\dagger(x)c_1(x) \rangle \\ &= t_0^2(x) \langle a_0^\dagger a_0 \rangle + t_1^2(x) \langle a_1^\dagger a_1 \rangle \\ &= T_0(x) \langle n_0 \rangle + T_1(x) \langle n_1 \rangle \end{aligned} \quad (3-22)$$

où $\langle n_i \rangle$ est le nombre moyen de photons dans le mode i avant la lame et $T_i(x) = t_i^2(x)$. On peut aussi calculer $\langle n^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle n^2(x) \rangle &= T_0^2(x) \langle n_0^2 \rangle + T_0(x)(1 - T_0(x)) \langle n_0 \rangle \\ &\quad + T_1^2(x) \langle n_1^2 \rangle + T_1(x)(1 - T_1(x)) \langle n_1 \rangle + 2T_0(x)T_1(x) \langle n_0 n_1 \rangle \end{aligned} \quad (3-23)$$

ce qui permet de calculer la variance totale du nombre de photons :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(x) \rangle &= \langle n^2(x) \rangle - \langle n(x) \rangle^2 \\ &= T_0^2(x) \langle n_0^2 \rangle + T_0(x)(1 - T_0(x)) \langle n_0 \rangle + T_1(x) \langle n_1^2 \rangle \\ &\quad + T_1(x)(1 - T_1(x)) \langle n_1 \rangle + 2T_0(x)T_1(x) \langle n_0 n_1 \rangle \\ &\quad - T_0^2(x) \langle n_0 \rangle^2 - T_1^2(x) \langle n_1 \rangle^2 - 2T_0(x)T_1(x) \langle n_0 \rangle \langle n_1 \rangle \end{aligned} \quad (3-24)$$

Soit : Δn_i^2 : la variance de n_i dans l'ordre normal (voir section 1.5.2). Si : Δn_i^2 : est positive, le mode i présente de l'excès de bruit tandis que si : Δn_i^2 : est négative, le mode i est comprimé en intensité. En utilisant la relation qui relie la variance à la variance dans l'ordre normal [Scully 97] :

$$: \Delta n_i^2 := \Delta n_i^2 - \langle n_i \rangle \quad (3-25)$$

on a :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(x) \rangle &= T_0(x) \langle n_0 \rangle + T_0^2(x) \langle : \Delta n_0^2 : \rangle + T_1(x) \langle n_1 \rangle + T_1^2(x) \langle : \Delta n_1^2 : \rangle \\ &\quad + 2T_0(x)T_1(x) (\langle n_0 n_1 \rangle - \langle n_0 \rangle \langle n_1 \rangle) \end{aligned} \quad (3-26)$$

Si on définit la corrélation entre les 2 modes par :

$$C = \frac{\langle \Delta n^2 \rangle - (\langle \Delta n_0^2 \rangle + \langle \Delta n_1^2 \rangle)}{2\sqrt{\langle \Delta n_0^2 \rangle \langle \Delta n_1^2 \rangle}} \quad -1 \leq C \leq 1 \quad (3-27)$$

on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \langle \Delta n^2(x) \rangle &= T_0(x) \langle n_0 \rangle + T_0^2(x) \langle : \Delta n_0^2 : \rangle + T_1(x) \langle n_1 \rangle + T_1^2(x) \langle : \Delta n_1^2 : \rangle \\ &\quad + 2T_0(x)T_1(x)C\sqrt{\langle \Delta n_0^2 \rangle \langle \Delta n_1^2 \rangle} \end{aligned} \quad (3-28)$$

Sachant que la limite quantique standard du faisceau vaut pour une position x de la lame :

$$T_0(x) \langle n_0 \rangle + T_1(x) \langle n_1 \rangle \quad (3-29)$$

on peut calculer le bruit total normalisé :

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{T_0(x)q}{qT_0(x) + T_1(x)} [1 + qT_0(x)v_0] \\ &\quad + \frac{T_1(x)}{qT_0(x) + T_1(x)} [1 + T_1(x)v_1] \\ &\quad + \frac{2T_0(x)T_1(x)}{qT_0(x) + T_1(x)} C [q(1 + v_0)(1 + v_1)]^{1/2} \end{aligned} \quad (3-30)$$

avec $q = \langle n_0 \rangle / \langle n_1 \rangle$, et $v_i = : \Delta n_i^2 : / \langle n_i \rangle$.

L'équation (3-30) permet donc de calculer le bruit normalisé du faisceau quelle que soit la position de la lame. Examinons deux cas simples :

a $C = 0$ (pas de corrélations entre les modes)

L'équation (3-30) devient :

$$S(x) = 1 + \frac{q^2 T_0^2(x) v_0 + T_1^2(x) v_1}{T_1(x) + q T_0(x)} \quad (3-31)$$

Si les deux modes présentent de l'excès de bruit, $: \Delta n_i^2 :$ est positif pour $i \in \{1, 2\}$ et $q^2 T_0^2(x) v_0 + T_1^2(x) v_1$ aussi. Le bruit d'intensité normalisé reste toujours supérieur à 1 quelle que soit la position de la lame ce qui revient à dire que le faisceau présente toujours de l'excès de bruit.

b $C = -1$ (anticorrélations parfaites)

Considérons le cas où les deux modes ainsi que le faisceau total présentent un excès de bruit. Sur la figure (3.44), nous avons tracé le bruit normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du laser pour des paramètres donnés en

légende. On constate que le bruit normalisé varie très fortement avec la position de la lame. Mais le fait le plus marquant est que l'on peut obtenir une compression du bruit d'intensité pour certaines positions. En somme, on peut obtenir une compression de bruit en coupant un faisceau présentant de l'excès de bruit et composé de modes ayant aussi cette caractéristique. La condition de très forte anticorrélation n'est toutefois pas une condition suffisante (voir figure 3.45).

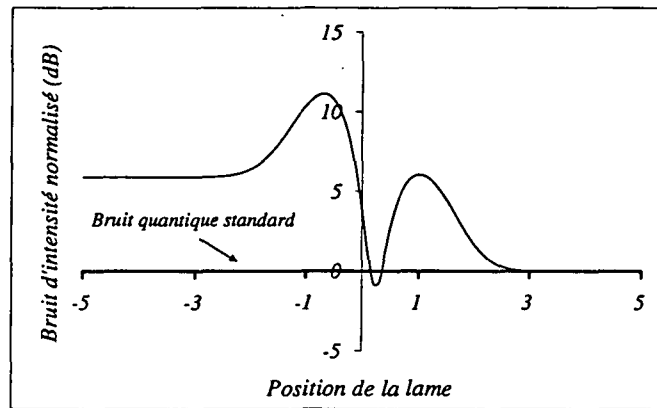


Fig. 3.44 – Spectre théorique du bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. On a $v_0 = 480,6$, $v_1 = 28,22$, $q = 0,11$ et $C = -1$. On observe pour certaines positions de la lame une compression du bruit d'intensité.

3.7.3 Montage expérimental

Nous conservons le montage des VCSELs décrit précédemment. De plus, pour couper le faisceau, nous utilisons une lame de rasoir montée sur une monture munie de deux vis micrométriques qui permettent de contrôler la position de la lame dans le plan transverse. Pour éviter toute réflexion du faisceau sur la lame, nous couvrons celle-ci d'une peinture noire mate. Chaque vis micrométrique est couplée à des moteurs pas à pas. En effet, sans moteur, le temps de mesure nécessaire est trop long : pour chaque position de la lame, il faut relever sur l'analyseur de spectre la valeur du bruit. Entre temps, le VCSEL risque de changer de régime de fonctionnement. Ces moteurs permettent de couper graduellement horizontalement ou verticalement (en une minute environ) le faisceau, ce temps pouvant être augmenté ou diminué. En même temps,

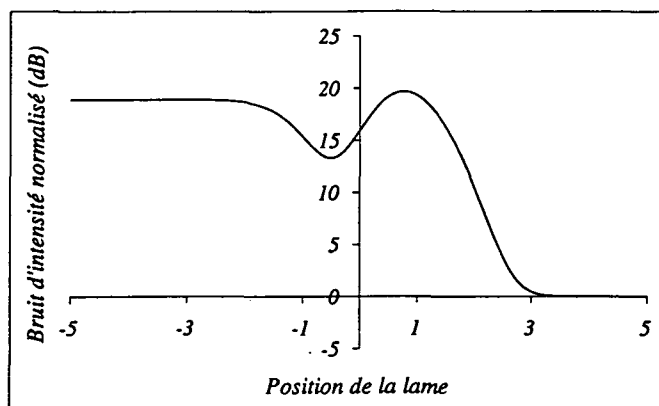


Fig. 3.45 – Spectre théorique du bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. On a $v_0 = 24,37$, $v_1 = 598,2$, $q = 2,7$ et $C = -1$. Dans ce cas, on n'obtient pas de compression du bruit d'intensité.

on enregistre le spectre de bruit mesuré par la photodiode à une fréquence donnée (15 MHz, avec une bande passante de 100 kHz) et le profil d'intensité. Pour mesurer l'intensité et le bruit de chacun des modes, on utilise un polariseur de Glan pour séparer les deux modes suivant la méthode décrite au chapitre 3.

3.7.4 Résultats expérimentaux

3.7.4.1 Mesure du waist du faisceau

Pour comparer nos résultats expérimentaux aux prédictions de notre modèle, nous devons tout d'abord connaître le waist du laser à l'endroit où est située la photodiode (étant donné que nous collimatons le faisceau, toutes nos mesures sont effectuées en champ lointain). Le faisceau du VCSEL étudié peut comporter plusieurs modes transverses, le nombre de ces modes au-dessus du seuil dépendant du courant d'alimentation. Soient I_{th0} le seuil du premier mode (TEM_{00}), I_{th1} celui du deuxième (TEM_{10}) et I_{th2} celui du troisième (TEM_{01}). On choisit un courant d'alimentation I_{op} tel que $I_{th0} < I_{op} < I_{th1}$. Le faisceau est alors monomode transverse (TEM_{00}). Dans ce régime, nous mesurons l'intensité du faisceau transmis en fonction de la position de la lame et nous normalisons cette mesure à l'intensité totale du faisceau. Connaissant la distribution spatiale d'intensité du mode TEM_{00} , nous savons que l'intensité du faisceau coupé

a une intensité normalisée égale à :

$$I_{tot}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \frac{1}{w} \int_x^{+\infty} \exp(-2x'^2/w^2) dx' \quad (3-32)$$

lorsque le bord de la lame de rasoir a atteint la position x .

Dans cette équation, le seul paramètre libre est le waist du faisceau et l'ajustement de la courbe obtenue expérimentalement par l'équation (3-32) permet donc de déduire la valeur du waist. Cette valeur calculée (elle est de l'ordre de 1 *mm*), on peut connaître la valeur de $t_0(x)$ et $t_1(x)$ à partir des équations (3-18-a) et (3-18-b).

3.7.4.2 Profil transverse de bruit

Nous ajustons alors le courant à une valeur I_{op} telle que $I_{th1} < I_{op} < I_{th2}$. En utilisant notre monochromateur et notre polariseur de Glan, nous pouvons vérifier que les deux modes sont bien polarisés orthogonalement. De plus grâce au seul polariseur, nous mesurons l'intensité et le bruit de chaque mode à la fréquence de 15 *MHz* ce qui nous donne les valeurs de q , v_0 et v_1 (corrigés des pertes du polariseur qui sont de 15 %). En mesurant enfin le bruit du faisceau total, on peut déduire grâce à l'équation (3.33), la valeur de la corrélation C entre les deux modes. Pour terminer, il ne nous reste plus qu'à enregistrer le profil spatial d'intensité et le profil spatial de bruit, toujours à la fréquence de 15 *MHz*. Le profil spatial d'intensité nous permet de calculer la valeur de la limite quantique standard pour chaque position de la lame.

Sur la figure (3.46), nous avons représenté les résultats obtenus pour un premier VCSEL. La corrélation C vaut dans ce premier cas -0,75. Comme v_0 et v_1 sont importants ($v_0 = 25,82$ et $v_1 = 330,9$), nous observons comme prévu des variations importantes du bruit d'intensité avec la position de la lame. L'accord entre prévisions théoriques et résultats expérimentaux est excellent sauf lorsque l'intensité du faisceau transmis devient très faible. L'incertitude sur l'intensité devient alors trop forte pour calculer correctement la limite quantique standard. Sur la figure (3.47), nous avons tracé les résultats correspondant à un second VCSEL pour lequel la corrélation vaut -0,98. La corrélation entre les deux modes étant plus forte, les variations du bruit sont encore plus importantes. En comparant les figures (3.46) et (3.47), nous constatons aussi que la forme de la courbe dépend des paramètres propres au VCSEL (excès de bruit de chaque mode, corrélations). L'excellent accord entre résultats expérimentaux

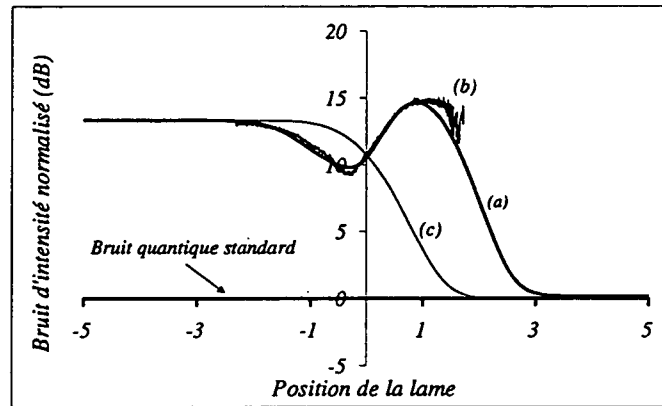


Fig. 3.46 – Spectres de bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. La courbe (a) représente les prévisions théoriques, la courbe (b) les résultats expérimentaux et la courbe (c) les résultats d'un filtrage global du faisceau. Dans ce cas, $v_0 = 25,82$, $v_1 = 330,9$, $q = 6,13$ et $C = -0,75$. La fréquence d'analyse est de 15 MHz.

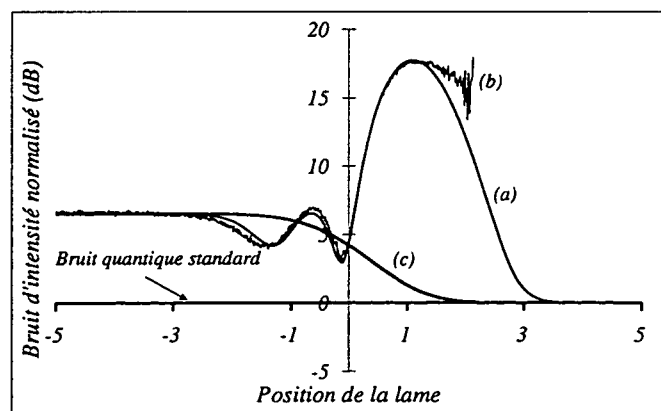


Fig. 3.47 – Spectres de bruit d'intensité normalisé en fonction de la position de la lame normalisée au waist du faisceau. La courbe (a) représente les prévisions théoriques, la courbe (b) les résultats expérimentaux et la courbe (c) les résultats d'un filtrage global du faisceau. Dans ce cas, $v_0 = 80,2$, $v_1 = 3648$, $q = 34,8$ et $C = -0,98$. La fréquence d'analyse est de 15 MHz.

et prévisions théoriques prouve aussi la validité de notre hypothèse qui consistait à négliger tous les modes au-dessous du seuil.

Dans les courbes théoriques comme expérimentales des figures (3.46) et (3.47) nous n'avons pas obtenu de compression du bruit. Toutefois, nous avons constaté une réduction du bruit d'intensité qui dépasse un simple effet de filtrage. Pour le montrer, nous avons tracé sur ces figures les courbes correspondant à une atténuation globale du faisceau initial jusqu'à atteindre l'intensité du faisceau coupé. Pour diverses positions de la lame, le bruit d'intensité est inférieur pour le faisceau coupé. Pour terminer, nous pouvons vérifier que pour $x = 0$, le bruit d'intensité est égal au bruit du faisceau atténué globalement de 50 %. Ce résultat découle de la parité des fonctions qui donnent les profils d'intensité des modes TEM_{00} et TEM_{10} (voir les équations 3-18-a et 3-18-b).

4. Étude du bruit d'intensité dans le laser Nd:YVO₄

Le principe de la pompe régulière peut aussi être appliqué aux lasers à solide, comme Nd:YVO₄ ou YAG, pompés par des diodes lasers au bruit d'intensité inférieur à la limite quantique standard. En effet, ces cristaux présentent des traits communs avec les diodes lasers comme un taux de conversion de la pompe élevé. Expérimentalement, si l'influence de la statistique de pompe est indéniable (voir ci-dessous), il n'a pas été possible d'obtenir des états comprimés avec ces cristaux pour diverses raisons sur lesquelles nous reviendrons dans ce chapitre.

Dans ce chapitre, nous rappelons tout d'abord en détail le modèle de Kolobov *et al.* Ce modèle s'applique aussi très bien aux lasers à solide pompés par une diode laser. Nous comparons les prévisions de ce modèle aux résultats expérimentaux obtenus par notre équipe. Nous démontrons que le désaccord observé à basse fréquence dans les spectres de bruit provient d'effets non linéaires. Pour réduire ces effets, nous avons testé des montages de rétroaction et d'injection optique. Les résultats obtenus sont comparés aux prévisions d'une extension du modèle de Kolobov *et al.* qui tient compte des effets de la rétroaction ou de l'injection.

4.1 Rappels sur le modèle à deux niveaux

4.1.1 Description

Ce modèle décrit les lasers en considérant un système atomique à deux niveaux (voir figure 4.1), en supposant que le niveau du bas n'est pas le niveau atomique fondamental. Les atomes interagissent avec le champ électromagnétique au sein d'une cavité de longueur L , possédant des miroirs de transmission T , ce qui définit le couplage de la cavité avec l'extérieur : $\kappa = cT/2L$. Ce champ électromagnétique est constitué d'un mode de la cavité considéré comme une onde plane monomode de pulsation ω_c . Ce système comprend diverses constantes de relaxation :

- γ_a et γ'_a désignent respectivement les taux de transition non radiative et radiative à partir du niveau supérieur $|a\rangle$,
- γ_b désigne le taux de transition à partir du niveau $|b\rangle$
- γ_{ab} est le taux de relaxation de la polarisation.

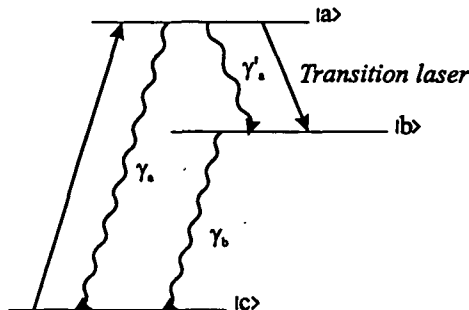


Fig. 4.1 - Schéma atomique à deux niveaux.

Afin de décrire la statistique de pompe, l'atome j est injecté à l'instant t_j et interagit avec le champ à cet instant. Les injections constituent une série d'événements dont on peut décrire la statistique. Ce modèle est particulièrement adapté aux lasers à solide tels que Nd:YAG et Nd:YVO₄ pompés par une diode laser peu bruyante. Dans ce cas, le principe de la pompe régulière est appliqué au pompage optique. Elle peut aussi être étendue aux lasers à semi-conducteurs en faisant tendre γ_b vers l'infini. Dans ce cas, les porteurs (paires électrons/trous) sont l'équivalent des atomes : l'image des atomes injectés est une image simple et immédiate de l'injection des porteurs dans le laser à semi-conducteurs (nous retrouvons ici les mêmes considérations que dans le chapitre 2). Pour calculer le bruit d'intensité, on introduit les paramètres suivants :

- $\hat{n}_i^j(t)$ est la population du niveau i ,
- \hat{a} est l'enveloppe lentement variable du champ,
- $\hat{\sigma}^j(t)$ est l'enveloppe de la polarisation atomique,
- $\hat{f}_{\hat{a}}(t)$, $\hat{f}_{\hat{\sigma}^j}(t)$, $\hat{f}_{\hat{n}_a^j}(t)$ et $\hat{f}_{\hat{n}_b^j}(t)$ sont les forces de Langevin microscopiques correspondant aux différentes variables.

Les équations de Heisenberg-Langevin qui régissent les évolutions de ces opérateurs sont les suivantes :

$$\partial_t \hat{a}(t) = -\kappa \hat{a}(t) - ig_0 \sum_j \hat{\sigma}^j(t) + \hat{f}_{\hat{a}}(t) \quad (4-1-a)$$

$$\partial_t \hat{\sigma}^j(t) = -\gamma_{ab} \hat{\sigma}^j(t) + ig_0 (\hat{n}_a^j(t) - \hat{n}_b^j(t)) \hat{a}(t) + \hat{f}_{\hat{\sigma}^j}(t) \quad (4-1-b)$$

$$\partial_t \hat{n}_a^j(t) = -(\gamma_a + \gamma'_a) \hat{n}_a^j(t) - ig_0 \hat{a}(t) \hat{\sigma}^{j\dagger}(t) + ig_0 \hat{a}^\dagger(t) \hat{\sigma}^j(t) + \hat{f}_{\hat{n}_a^j}(t) \quad (4-1-c)$$

$$\partial_t \hat{n}_b^j(t) = -\gamma_b \hat{n}_b^j(t) + \gamma'_a \hat{n}_a^j(t) - ig_0 \hat{a}(t) \hat{\sigma}^{j\dagger}(t) + ig_0 \hat{a}^\dagger(t) \hat{\sigma}^j(t) + \hat{f}_{\hat{n}_b^j}(t) \quad (4-1-d)$$

Le calcul des coefficients de diffusion microscopiques, macroscopiques et dans l'ordre normal est détaillé dans [Kolobov 93] (le calcul est analogue à celui détaillé dans le chapitre 2). Lorsque l'on passe des opérateurs à la représentation en variables complexes (dans l'ordre normal comme au chapitre 1), les équations s'écrivent :

$$\partial_t a(t) = -\kappa/2a(t) + gP(t) + F_\gamma(t) \quad (4-2-a)$$

$$\partial_t P(t) = -\gamma_{ab}P(t) + g[N_a(t) - N_b(t)]a(t) + F_P(t) \quad (4-2-b)$$

$$\begin{aligned} \partial_t N_a(t) = & R - (\gamma_a + \gamma'_a) N_a(t) \\ & -g[a^*(t)P(t) + P^*(t)a(t)] + F_a(t) \end{aligned} \quad (4-2-c)$$

$$\begin{aligned} \partial_t N_b(t) = & -\gamma_b N_b(t) + \gamma'_a N_a(t) \\ & +g[a^*(t)P(t) + P^*(t)a(t)] + F_b(t) \end{aligned} \quad (4-2-d)$$

où :

- R est le taux de pompage,
- $a(t)$ est le champ électromagnétique,
- $N_a(t)$ et $N_b(t)$ représentent les populations macroscopiques des niveaux atomiques,
- $P(t)$ est la polarisation atomique macroscopique,
- F_i sont les forces de Langevin correspondant à ces variables,
- $\kappa = \kappa_{out} + \kappa_p$; κ_{out} rend compte du couplage du champ avec l'extérieur et κ_p des pertes optiques internes à la cavité. Le spectre de bruit d'intensité devient :

$$S_{\eta'}(\Omega) = 1 + \eta'(S_{out}(\Omega) - 1) \quad (4-3)$$

où $\eta' = \frac{\kappa_{out}}{\kappa}$ et $S_{out}(\Omega)$ est le spectre de bruit prévu par [Kolobov 93]. Les coefficients de diffusion pour ces forces de Langevin sont quant à eux égaux à :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{aa} = & (\gamma_a + \gamma'_a) \langle N_a(t) \rangle + R(1 - p) \\ & -g[\langle P^*(t)a(t) + a^*(t)P(t) \rangle] \end{aligned} \quad (4-4-a)$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{bb} = & \gamma_b \langle N_b(t) \rangle + \gamma'_a \langle N_a(t) \rangle \\ & -g[\langle P^*(t)a(t) + a^*(t)P(t) \rangle] \end{aligned} \quad (4-4-b)$$

$$2\mathcal{D}_{ab} = -\gamma'_a \langle N_a(t) \rangle + g[\langle P^*(t)a(t) + a^*(t)P(t) \rangle] \quad (4-4-c)$$

$$2\mathcal{D}_{PP} = 2g \langle P(t)a(t) \rangle \quad (4-4-d)$$

$$2\mathcal{D}_{P^*P} = (2\gamma_{ab} - \gamma_a - \gamma'_a) \langle N_a(t) \rangle + R \quad (4-4-e)$$

$$2\mathcal{D}_{bP} = \gamma_b \langle P(t) \rangle \quad (4-4-f)$$

4.1.2 Prévisions

Le bruit de ces lasers est dominé par une oscillation de relaxation [Khandokhin 96] qui donne un pic de bruit très important (voir figure 4.2). À basse fréquence (pour des fréquences inférieures à celle de l'oscillation de relaxation), la statistique de bruit peut suivre la statistique de pompe.

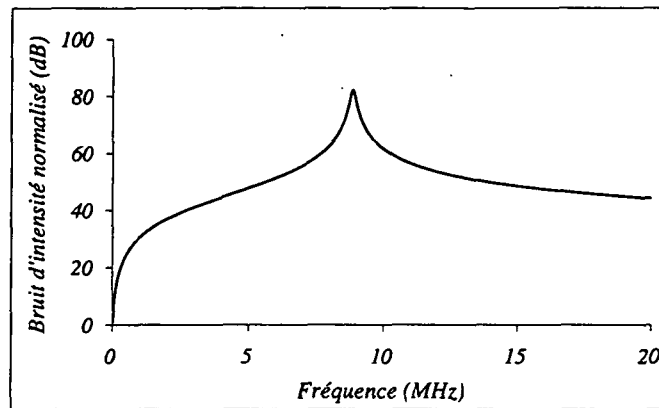


Fig. 4.2 – Spectre de bruit d'intensité typique prévu par le modèle à deux niveaux.

À fréquence nulle et dans le cas simple où on peut faire tendre γ_b et γ_{ab} vers l'infini, le spectre de bruit normalisé à la limite quantique standard $V(0)$ est donné par :

$$V(0) = 1 - \frac{\kappa_{out}}{\kappa} p \quad (4-5)$$

où p est le paramètre qui caractérise la statistique de la pompe. La valeur de p égale à 1 correspond à une pompe parfaitement régulière, la valeur p égale à 0 correspond à une statistique poissonnienne. Ce modèle prévoit donc qu'à fort taux de pompage, pour une pompe régulière ($p = 1$) et à fréquence nulle, la réduction de bruit est égale à l'efficacité quantique différentielle.

Cette situation correspond assez bien au cas des diodes laser. Pour les minilasers à YVO, γ_b ne peut être considéré comme infini. Par ailleurs, l'oscillation de relaxation se trouvant à une fréquence beaucoup plus basse que dans les lasers à semi-conducteurs, on ne peut plus considérer que les fréquences d'étude de notre système, de l'ordre de quelques mégahertz, sont pratiquement nulles devant les fréquences caractéristiques du laser. Nous avons donc étudié expérimentalement l'ensemble des spectres de bruit de ces lasers.

4.1.3 Résultats expérimentaux

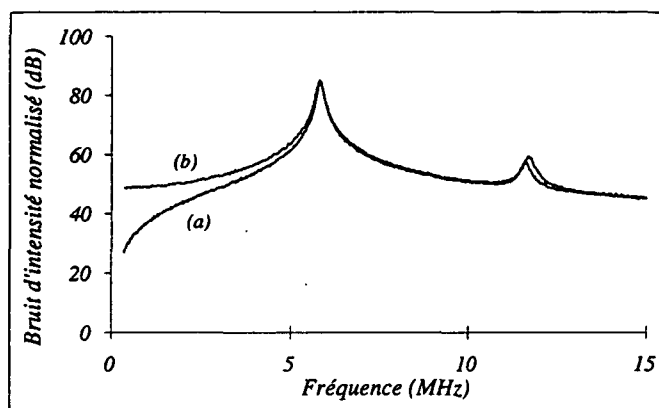


Fig. 4.3 – Spectres de bruit d'intensité normalisé du laser Nd:YVO₄ (dB) pour une pompe au bruit d'intensité comprimé (courbe a) et pour une pompe bruyante (courbe b).

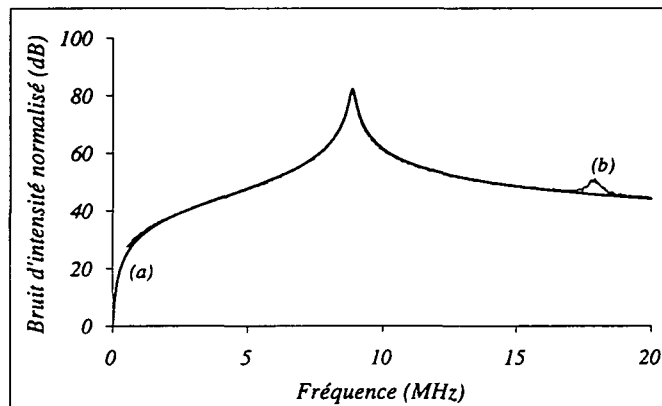


Fig. 4.4 – Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB) entre 0 et 20 MHz. La courbe (a) représente les prévisions théoriques et la courbe (b) les résultats expérimentaux.

Nous présentons dans cette section les résultats obtenus sur les microlasers à solide. Ces résultats ont été obtenus avec un cristal de Nd:YVO₄. Ce cristal a un taux de conversion photon-photon important, environ 40 % [Washio 76, Kintz 90, Taira 91, Bernard 93], ce qui rend prometteuse l'application du principe de la pompe régulière.

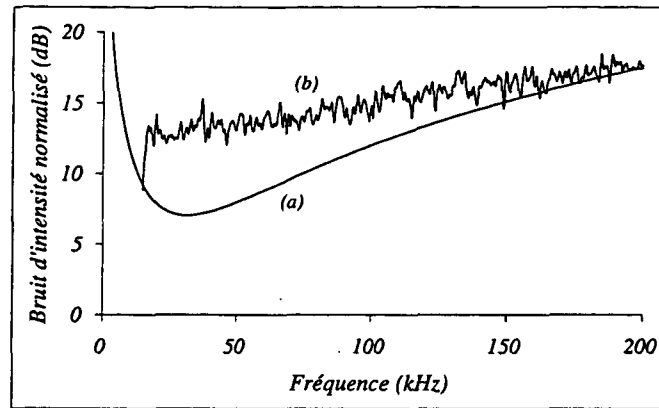


Fig. 4.5 – Spectres de bruit d'intensité normalisé entre 0 et 300 kHz. La courbe (a) représente les prévisions théoriques et la courbe (b) les résultats expérimentaux.

Le pompage du cristal s'effectue avec une diode laser au bruit d'intensité comprimé (la diode est montée sur réseau ou injectée par une autre diode) ou au contraire très bruyante. La figure (4.3) illustre la différence sur le bruit de l'YVO entre les deux cas. Si la diode laser qui pompe le laser a un bruit d'intensité réduit, le bruit d'intensité de l'YVO est beaucoup plus faible que si la diode laser présente un bruit d'intensité important : l'écart de bruit entre les courbes (a) et (b) est supérieur à 30 dB à très basse fréquence. Cela montre bien les possibilités ouvertes à l'application du principe de la pompe régulière. Toutefois, la dynamique de ces lasers présente un inconvénient majeur. La théorie prévoit une réduction du bruit d'intensité pour des fréquences faibles devant l'oscillation de relaxation. Celle-ci se situe malheureusement entre 5 et 10 MHz suivant les taux de pompage. Les niveaux de bruit mesurés sont en accord avec la théorie à haute fréquence (voir figure 4.4). Le pic d'oscillation de relaxation est en particulier très bien reproduit sans aucun paramètre ajustable. Toutefois, on relève un second pic de bruit à plus haute fréquence qui n'est pas prévu par le modèle standard. La fréquence de ce pic est égale à deux fois la fréquence du pic de l'oscillation de relaxation ce qui suggère qu'il s'agit de la seconde harmonique de ce pic. À basse fréquence (voir figure 4.5), le bruit mesuré est nettement supérieur au bruit prévu théoriquement (à 30 kHz, l'écart entre les courbes (a) et (b) atteint 11 fois la limite quantique standard, voir figure 4.5). Ces deux effets, l'écart à basse fréquence et la présence de la seconde harmonique du pic d'oscillation de relaxation, ont été attribués à des effets non linéaires dus à l'importance du pic de relaxation.

4.2 Ordre de grandeur des termes non linéaires

Le traitement des effets de bruit non linéaires soulève de nombreuses difficultés. Si ces effets proviennent de la taille réduite du système, leur traitement requiert la prise en compte de termes d'ordre supérieur dans l'équation de Fokker-Planck dont on déduit les équations de Langevin. Les équations de Langevin ne sont alors plus valables. En revanche, dans notre cas, ces effets non linéaires sont dus à des bruits très importants à certaines fréquences. Si on suppose ces fluctuations encore faibles devant les valeurs moyennes, on peut encore utiliser la méthode des forces de Langevin. Nous avons proposé (voir article paru dans Phys. Rev. A reproduit ci-dessous) un traitement des effets non linéaires basé sur cette approche : aux équations de Langevin du système (4-2), nous rajoutons des termes correctifs. Pour simplifier les calculs, nous réécrivons ce système d'équations en utilisant le fait que :

$$\gamma_{ab} \gg \kappa \gg \gamma_b \gg \gamma_a, \Omega \text{ et } \gamma_a \gg \gamma'_a \quad (4-6)$$

On peut donc éliminer adiabatiquement la polarisation atomique $P(t)$ et supposer la population $N_b(t)$ très faible. Ces approximations sont trop importantes pour rendre compte exactement des effets non linéaires mais nous verrons qu'elles permettent cependant de comprendre les effets physiques en jeu. En particulier, ce traitement permet de comprendre l'origine de l'excès de bruit observé à basse fréquence. Le détail de ce calcul est présenté dans l'article joint section (4.5).

Si on note Ω_R la fréquence du pic d'oscillation de relaxation, ce calcul permet de comparer l'excès de bruit à la fréquence $2\Omega_R$, noté $V_n^{(2)}(2\Omega_R)$, avec l'excès de bruit observé à fréquence nulle, noté $V_n^{(2)}(\Omega \sim 0)$. On montre que :

$$\frac{V_n^{(2)}(\Omega \sim 0)}{V_n^{(2)}(2\Omega_R)} = \frac{9\gamma_a^2 + \Omega^2}{2\Omega_R^2} \quad (4-7)$$

Ainsi, expérimentalement, on observe un excès de bruit de 55 dB à $2\Omega_R$. L'équation (4-7) prévoit un excès de bruit par rapport au modèle sans effets non linéaires égal à 12 fois la limite quantique standard à 30 kHz. Cette valeur est en très bon accord avec la valeur mesurée sur la figure (4.5), qui est de 11 fois la limite quantique standard.

4.3 Amélioration des caractéristiques du bruit à basse fréquence du laser Nd:YVO₄

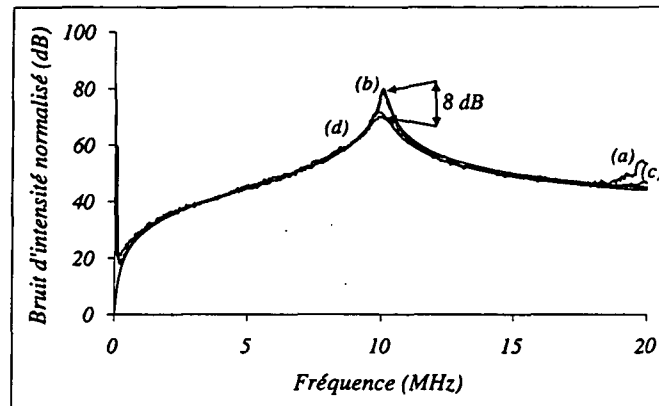


Fig. 4.6 – Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB) entre 0 et 20 MHz. La courbe (a) (respectivement c) représente les résultats expérimentaux (respectivement théoriques) sans rétroaction et la courbe (b) (respectivement d) les résultats expérimentaux (respectivement théoriques) avec rétroaction.

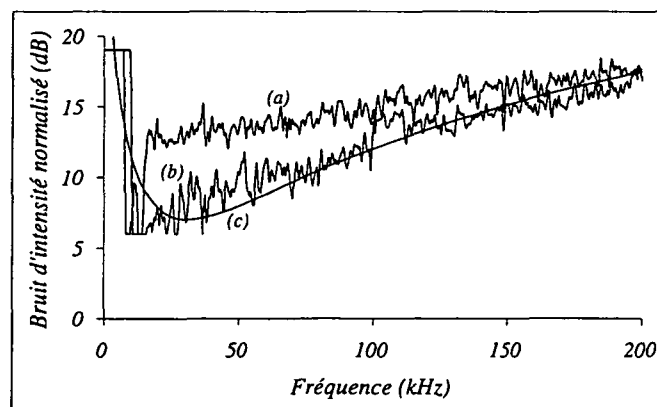


Fig. 4.7 – Spectres de bruit d'intensité normalisé (dB) entre 0 et 200 kHz pour le laser Nd:YVO₄. La courbe (a) représente les résultats expérimentaux sans rétroaction, la courbe (b) les résultats expérimentaux avec rétroaction et la courbe (c) les résultats théoriques avec rétroaction.

Les procédés d'élimination du pic d'oscillation de relaxation sont donc susceptibles d'améliorer le bruit à basse fréquence. Une technique originale de rétroaction électro-optique a été mise au point dans notre équipe : il s'agit de rétroagir principalement dans la zone du pic d'oscillation contrairement aux rétroactions habituelles qui agissent aussi à basse fréquence [Buchler 98, Huntington 98, Harb 94]. On évite surtout de rétroagir dans la zone de fréquence où l'on souhaite observer les effets de la pompe régulière. Sans cette précaution, les effets de la pompe seraient détruits (la rétroaction utilisant un séparateur optique, elle introduit nécessairement dans la boucle le bruit du vide, non corrélé avec le laser). La figure (4.6) illustre les effets de la rétroaction au niveau du pic d'oscillation : le bruit est réduit de 8 dB. À basse fréquence (figure 4.7), les effets indirects de la rétroaction sont aussi visibles : le bruit est sensiblement réduit, ce qui prouve l'importance des effets non linéaires. De plus, les résultats expérimentaux sont alors en accord avec un modèle théorique, adaptation du modèle de Kolobov *et al.* qui prend en compte l'effet de la rétroaction de façon semi-classique.

Une autre méthode pour réduire le pic de relaxation est d'injecter le laser YVO₄ (voir section 4.1.2).

4.4 Injection de l'YVO₄

4.4.1 Extension du modèle Kolobov *et al.* au cas des lasers injectés

4.4.1.1 Présentation du modèle

Plusieurs modèles théoriques ont été développés pour décrire le bruit des faisceaux émis dans de telles configurations [Ralph 96, Inoue 93, Gilner 90]. Yamamoto a plus spécialement développé des modèles adaptés aux semi-conducteurs [Haus 84]. Nous présentons ici une extension du modèle de Kolobov *et al.*, bien adaptée aux lasers à solide et analogue à celle développée par M. Fontenelle [Fontenelle 95]. Ce modèle sera utilisé dans ce chapitre pour comparer prévisions théoriques et résultats expérimentaux dans le cas d'un laser Nd:YVO₄ injecté. L'influence du bruit de pompe est toujours prise en compte dans toute sa généralité au travers du paramètre p . Le signal injecté est supposé cohérent, ce qui correspond à la plupart des situations expérimentales : on

injecte des faisceaux fortement filtrés dont la statistique est donc quasiment poissonnienne. Ce signal est en résonance avec la cavité et décrit par un scalaire $\lambda e^{-i\omega t}$. Les équations sont inchangées par rapport au modèle de [Kolobov 93], sauf l'équation du champ qui devient :

$$\partial_t a(t) = -\kappa/2a(t) + gP(t) + F_\gamma(t) + \kappa/2\lambda(t) \quad (4-8)$$

Par ailleurs, on prend en compte le bruit d'intensité du faisceau pompe de la diode en définissant :

$$p(\Omega) = 1 - s(\Omega) \quad (4-9)$$

où $s(\Omega)$ est le bruit normalisé de la diode à la fréquence Ω .

4.4.1.2 Prévisions de l'injection

Le spectre de bruit normalisé est donné par la formule :

$$\begin{aligned} V_{out}(\tilde{\Omega}) = & 1 + \eta \frac{2b(a+a')}{b-a'} \frac{1}{D(\tilde{\Omega})} \left((b^2 + \tilde{\Omega}^2) \left[(a+a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \frac{n}{a+a'} \right. \\ & + 2w^2 \left\{ \left[(b-a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \left[n + (s(\tilde{\Omega}) - 1) r/2 \right] \right. \\ & - \left. \left[(b-a')(a+a') + \tilde{\Omega}^2 \right] \left(r - \frac{a+2a'}{a+a'} n \right) \right. \\ & \left. \left. + \left[(a+a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \frac{a'}{a+a'} n \right\} \right) \quad (4-10) \end{aligned}$$

Dans cette formule, on a posé :

- $a \equiv \gamma_a/\kappa$ (respectivement $b \equiv \gamma_b/\kappa$),
- $a' \equiv \gamma_{a'}/\kappa$,
- $c \equiv \gamma_{ab}/\kappa$,
- x est le rapport entre l'amplitude du champ injecté et l'amplitude du champ émis par le laser esclave,
- $\tilde{\Omega} \equiv \Omega/\kappa$,
- r est le taux de pompe,
- $\eta = \kappa_{out}/\kappa$ (voir section 4.1),

et :

$$\begin{aligned} D(\tilde{\Omega}) = & \left| \left(\frac{1}{2}x - i\tilde{\Omega} \right) (b - i\tilde{\Omega})(a + a' - i\tilde{\Omega}) \right. \\ & \left. + 2w^2(a + b - 2i\tilde{\Omega}) (1 - x/2 - i\tilde{\Omega}) \right|^2 \quad (4-11-a) \end{aligned}$$

$$n = \frac{r(a + a') + (b - a')(1 - x)}{a + b} \quad (4-11-b)$$

$$w^2 = \frac{(a + a')b(r - 1 + x)}{2(a + b)(1 - x)} \quad (4-11-c)$$

L'utilisation de ces expressions montre que le pic d'oscillation de relaxation du laser est fortement réduit par l'injection et ce d'autant plus que la puissance injectée est forte. On peut montrer aussi que la statistique à basse fréquence, c'est-à-dire à des fréquences basses devant celle de l'oscillation de relaxation, est toujours régie par le principe de la pompe régulière [Fontenelle 95, Ralph 96, Harb 96]. La statistique à basse fréquence n'est quasiment pas modifiée par l'injection.

4.4.2 Réalisation expérimentale de l'injection du laser Nd:YVO₄

Pour injecter le cristal d'YVO₄, nous ne disposons pas d'un autre laser de ce type. Nous avons dû utiliser un laser Nd:YAG. Ce laser commercial (Lightwave 126-1064-700) peut émettre un faisceau de 700 mW que nous filtrons jusqu'à obtenir une puissance pour l'injection comprise entre 100 μW et 500 μW. Ce laser possède une rétroaction électronique qui supprime le pic d'oscillation de relaxation. A priori, son bruit n'excède pas de plus de 20 dB la limite quantique standard. On peut donc considérer qu'après filtrage, le faisceau est dans un état cohérent.

Sa fréquence d'oscillation est d'environ 120 GHz inférieure à la fréquence de l'YVO₄ (cette mesure est réalisée à l'aide d'un monochromateur). La fréquence du YAG ne pouvant être réglée que sur une plage de 30 GHz, nous avons dû chauffer le cristal d'YVO₄ pour ajuster les fréquences des deux lasers. Nous avons mesuré la variation de la fréquence d'oscillation de l'YVO₄ et obtenu une valeur de -1,6 GHz/°C en accord avec la littérature. Cette valeur implique que nous avons dû chauffer le cristal aux alentours de 100 °C. Les fréquences des deux lasers sont ensuite ajustées grâce à un réglage fin de la fréquence du YAG présent sur notre modèle commercial. Pour assurer la stabilité de la température, on utilise un Peltier. Le cristal est aussi entouré d'une boîte munie d'un revêtement molletonné avec une mousse isolante. Expérimentalement, la dérive de la fréquence de l'YVO₄ est inférieure à 10⁻³ °C/h.

Le laser maître est injecté dans le laser esclave via le port secondaire d'un isolateur optique. Pour ajuster la polarisation du faisceau maître, on utilise une lame λ/2. Enfin, un système télescopique permet d'ajuster les paramètres gaussiens du faisceau maître.

La visualisation de l'injection s'effectue, comme pour les VCSELs, à l'aide d'un Fabry-Perot.

4.4.3 Résultats

4.4.3.1 Caractéristiques du cristal

Le chauffage du cristal d'YVO₄ modifie de façon très importante ses caractéristiques. Si on suppose que les taux de relaxation des populations atomiques et de la polarisation ne sont pas modifiés (on garde les valeurs données par [Bramati 99]), on peut calculer le taux de décroissance des photons dans la cavité à partir de la position du pic d'oscillation qui est donnée par :

$$\Omega_{osc} \sim \sqrt{\kappa(\gamma_a + \gamma'_a)(r - 1)} \quad (4-12)$$

On ajuste le spectre de bruit d'intensité en l'absence d'injection à l'aide des équations du modèle de Kolobov *et al.* (section 4.1.2). On trouve que κ passe de la valeur $1,56 \cdot 10^{10} \text{ s}^{-1}$ à $9 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$ et que les pertes optiques κ_p valent $6,4 \cdot 10^8 \text{ s}^{-1}$. Nous avons aussi constaté que le seuil passait de $4,2 \text{ mW}$ à 13 mW pour la puissance de pompe. Nous ne pouvons donc pomper le cristal qu'à des taux de 3 ou 4 fois le seuil, des taux insuffisants pour observer au mieux les effets de la pompe régulière. L'efficacité quantique chute quant à elle de 40 % à 12,5 %. Ces deux dernières modifications sont dues au fait que le maximum de la courbe de gain n'a pas la même dépendance en température que la fréquence d'oscillation. Le premier varie de $-0,53 \text{ GHz}/^\circ\text{C}$, le second de $-1,6 \text{ GHz}/^\circ\text{C}$. À haute température, la fréquence d'oscillation et le maximum de la courbe de gain sont donc décalés. Finalement, les paramètres que nous avons retenus sont les suivants :

- $\gamma_a = 3,3 \cdot 10^4 \text{ s}^{-1}$,
- $\gamma'_a = 3,3 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$
- $\gamma_b = 3,3 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$
- $\gamma_{ab} = 7,10^{11} \text{ s}^{-1}$
- $\kappa = 9,10^9 \text{ s}^{-1}$
- $\kappa_{out} = 8,36 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$
- $\kappa_p = 6,4 \cdot 10^9 \text{ s}^{-1}$

4.4.3.2 Bruit d'intensité

a À haute fréquence

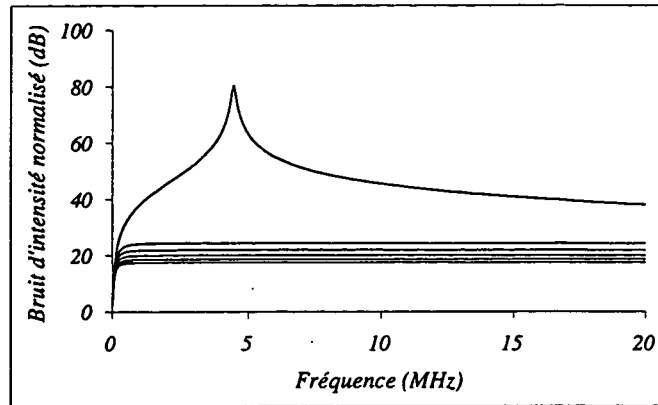


Fig. 4.8 – Spectres de bruit d'intensité théoriques entre 0 et 20 MHz pour diverses puissances d'injection ($x=0,16$, $x=0,23$, $x=0,28$, $x=0,32$ et $x=0,36$).

Nous utilisons le modèle du laser injecté détaillé dans la section (4.4.1). La figure (4.8) donne pour différentes puissances d'injection le spectre de bruit attendu : le pic d'oscillation est totalement atténué.

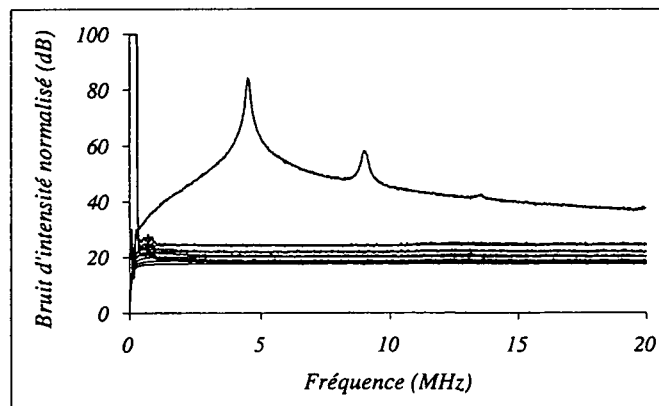


Fig. 4.9 – Spectres de bruit d'intensité théoriques et expérimentaux entre 0 et 20 MHz pour diverses puissances d'injection ($x=0,16$, $x=0,23$, $x=0,28$, $x=0,32$ et $x=0,36$).

Sur la figure (4.9), nous avons comparé les résultats expérimentaux, corrigés des pertes, et ces prévisions théoriques. Nous tenons compte du bruit de la pompe dans ces prévisions en mesurant le bruit de la diode laser et en ajustant le paramètre p à ce

bruit. On constate que l'accord est excellent. En particulier, le pic d'oscillation peut être réduit de plus de 60 dB.

b À basse fréquence

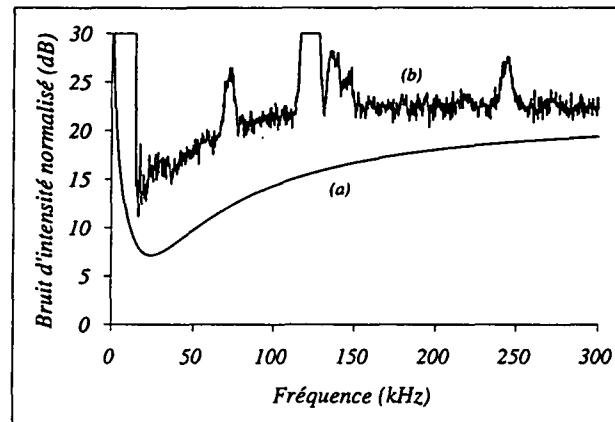


Fig. 4.10 – Spectres de bruit d'intensité théorique (courbe a) et expérimental (courbe b) entre 0 et 300 kHz.

Du fait des caractéristiques très dégradées du cristal à haute température, le bruit d'intensité est très élevé sans injection. Avec l'injection, on constate (voir figure 4.10) un excès de bruit par rapport aux prévisions. La dégradation des caractéristiques du cristal empêche sans doute d'observer les effets de la pompe régulière. L'élimination des effets non linéaires à basse fréquence due à l'élimination du pic de relaxation ne donne pas d'effets mesurables dans cette configuration par rapport aux valeurs attendues. On observe aussi que des pics apparaissent dans la plage 0-300 kHz. Une mesure précise du bruit du laser maître dans cette plage de fréquence montre que ces pics sont dus au laser YAG.

4.4.3.3 Conclusion

Dans le cas de l'YVO₄, l'injection donne des résultats satisfaisants à haute fréquence mais nous n'avons pas pu vérifier les effets de l'injection à basse fréquence. Le chauffage du cristal ainsi que les caractéristiques de bruit du laser maître en sont la cause. L'injection du cristal d'YVO₄ par un laser adapté (YVO₄) permettrait sans aucun doute d'obtenir des résultats plus conformes aux prévisions théoriques.

4.5 Articles sur le bruit quantique dans le laser Nd:YVO₄

L'ensemble des travaux sur le laser Nd:YVO₄ a donné lieu à la publication ou la soumission de plusieurs articles.

**Article paru dans
European Physical Journal D**

Eur. Phys. J. D 6, 513–521 (1999)

**THE EUROPEAN
PHYSICAL JOURNAL D**EDP Sciences
© Società Italiana di Fisica
Springer-Verlag 1999

Effects of pump fluctuations on intensity noise of Nd:YVO₄ microchip lasers

A. Bramati¹, J.P. Hermier^{1,*}, V. Jost¹, E. Giacobino¹, L. Fulbert², E. Molva², and J.J. Aubert²¹ Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Ecole Normale Supérieure, CNRS, 4, Place Jussieu, 75252, Paris Cedex 05, France² LETI/CEA.G -DOPT, 17, rue des Martyrs, 38054, Grenoble Cedex 9, France

Received: 21 December 1998

Abstract. The principle of pump noise suppression is applied to a Nd:YVO₄ microchip laser, optically pumped by laser diodes. The noise of the microchip laser at low frequency (below the relaxation oscillation frequency) is compared for noisy and amplitude squeezed laser diodes. The minimum intensity noise of the microchip laser is 7 dB above SNL at a frequency of 40 kHz. Very good agreement between experimental results and theoretical predictions of a model based on quantum Langevin equations is found.

PACS. 42.50.Dv Nonclassical field states; squeezed, antibunched, and sub-Poissonian states; operational definitions of the phase of the field; phase measurements – 42.55.Xi Diode-pumped lasers – 42.50.Lc Quantum fluctuations, quantum noise, and quantum jumps

1 Introduction

In recent years, diode-pumped solid-state lasers such as Nd:YAG or Nd:YVO₄ lasers have been overcoming gas lasers for many applications, because of their robustness and reliability [1,2]. However, their noise properties are quite different from those of the gas lasers [3–5]. Their intensity noise is somewhat similar to the one of the semiconductor lasers. Like the semiconductor lasers, they exhibit a large noise peak at high frequency due to the so-called relaxation oscillation. The noise peak is in the gigahertz range for the semiconductor lasers whereas it is in the kilohertz-to-megahertz range for the solid-state lasers, depending on the parameters of the laser cavity. Well above the relaxation oscillation frequency, the intensity noise goes to the standard quantum limit, since it is mainly due to the vacuum fluctuations outside the laser cavity that are reflected off the coupling mirror. For frequencies well below the relaxation oscillation frequency, the intensity noise of the laser is related to the noise of the pump laser [6,7].

For semiconductor lasers, it was demonstrated that intensity squeezed light can be generated when high impedance pump noise suppression is used together with appropriate line narrowing techniques [8–10]. The case of solid-state lasers differs from that of the semiconductor lasers by the pump mechanism, which is optical pumping for solid-state lasers as opposed to electrical pumping for semiconductor lasers. In the present work, our aim is to precisely study the effect of the reduction of the optical

pump noise on the intensity noise of solid-state laser and to investigate the possibility to achieve sub-shot noise operation under pump noise suppression. We present an experimental investigation of the intensity noise properties of a Nd:YVO₄ microchip laser pumped by laser diodes having various noise characteristics. More specifically we have compared the effect of pumping with laser diodes exhibiting excess intensity noise, standard intensity quantum noise and sub-shot intensity noise. The sub-shot noise operation of the pump laser is achieved with two different configurations: grating extended cavity and injection locking, respectively. Accurate comparison between theoretical predictions of a full quantum model based on quantum Langevin approach is presented. Our model is based on a microscopic theory of the laser and does not assume any approximation on the evolution time scales of the various quantities involved in the problem. We show that low-frequency noise decreases with pump noise, but we observe a discrepancy at low frequency that cannot be interpreted as due to excess pump noise (contrary to the case of [11]). Agreement between theory and experiment is retrieved when the amplitude of the relaxation oscillation is decreased.

2 Theoretical model

For a theoretical description of the solid-state laser noise properties we have used a full quantum model based on the Langevin equations approach [12]. The model deals with a system of homogeneously broadened two-level atoms with

* e-mail: hermier@spectro.jussieu.fr

transition frequency ω_{ab} , assuming that the lower level is not the ground state. The atoms fill a resonant cavity of length L and volume V with intensity transmission coefficient of the coupling mirrors T . The atoms interact with the radiation field of a single excited mode of the cavity, which is considered as a plane wave with frequency ω_c . The model is well adapted to describe the behavior of Nd:YVO₄ laser. The laser dynamics is described by the following stochastic c -number Langevin equations:

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = -\kappa/2 \mathcal{A}(t) + g\mathcal{M}(t) + \mathcal{F}_\gamma(t), \quad (1)$$

$$\dot{\mathcal{M}}(t) = -\gamma_{ab}\mathcal{M}(t) + g[\mathcal{N}_a(t) - \mathcal{N}_b(t)]\mathcal{A}(t) + \mathcal{F}_\mathcal{M}(t), \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{N}}_a(t) = & R - (\gamma_a + \gamma'_a)\mathcal{N}_a(t) \\ & - g[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t)] + \mathcal{F}_a(t), \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{N}}_b(t) = & -\gamma_b\mathcal{N}_b(t) + \gamma'_a\mathcal{N}_a(t) \\ & + g[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t)] + \mathcal{F}_b(t). \end{aligned} \quad (4)$$

The stochastic c -number variable $\mathcal{A}(t)$ represents the electromagnetic field. \mathcal{N}_a and \mathcal{N}_b represent the macroscopic atomic population of the upper and lower level, respectively. $\mathcal{M}(t)$ represents the macroscopic atomic polarisation. κ is the total cavity damping constant. In the original model, the cavity damping constant was assumed to be equal to the output coupling rate κ_{out} . Here we have included internal optical losses represented by the rate κ_{losses} . Subsequently, we have $\kappa = \kappa_{\text{out}} + \kappa_{\text{losses}}$. γ_a and γ_b are the decay rates of the populations of the upper and lower levels to the other atomic levels; γ'_a is the spontaneous decay rate between the lasing levels and γ_{ab} is the decay rate of the atomic polarisation. R is the mean pumping rate. The coupling constant g is given by

$$g = \sqrt{\frac{1}{2\varepsilon_0\omega_c V}} \omega_{ab}\mu, \quad (5)$$

where μ is the magnitude of the atomic dipole moment. The functions $\mathcal{F}_k(t)$ with $k = \gamma, \mathcal{M}, a, b$ are the stochastic c -number Langevin forces with the properties:

$$\langle \mathcal{F}_k(t) \rangle = 0, \quad (6)$$

$$\langle \mathcal{F}_k(t)\mathcal{F}_l(t') \rangle = 2\mathcal{D}_{kl}\delta(t-t'), \quad (7)$$

where \mathcal{D}_{kl} represents the diffusion coefficient for the c -number Langevin force. The nonvanishing diffusion coefficients are given in appendix.

Solving the c -number Langevin equations allows us to calculate the steady-state solutions for the field and atomic variables and to derive the spectra of the fluctuations of the field quadrature components. The steady-state solutions for laser operation above threshold are obtained by dropping the noise terms in equations (1–4) and setting the time derivatives equal to zero. For the mean intensity of the laser field inside the cavity $I_0 = \mathcal{A}_0^2$, we obtain

$$I_0 = I_s (R/R_{\text{th}} - 1), \quad (8)$$

where the saturation intensity I_s is given by

$$I_s = \frac{\gamma_{ab}\gamma_b}{2g^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_a + \gamma_b}, \quad (9)$$

R_{th} is the threshold pumping rate

$$R_{\text{th}} = \frac{\kappa\gamma_{ab}\gamma_b}{2g^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_b - \gamma'_a}. \quad (10)$$

The steady-state populations of the upper and lower levels are given by

$$\mathcal{N}_{a0} = \frac{R - \kappa I_0}{\gamma_a + \gamma'_a}, \quad (11)$$

$$\mathcal{N}_{b0} = \frac{\gamma'_a R - \kappa\gamma_a I_0}{\gamma_b(\gamma_a + \gamma'_a)}. \quad (12)$$

The steady-state value of the atomic polarisation can be expressed in terms of the mean value of the field

$$\mathcal{M}_0 = \frac{\kappa}{2g} \mathcal{A}_0. \quad (13)$$

The evolution of the quantum fluctuations is obtained by linearizing equations (1–4) around the steady-state solution. A Fourier transform of the equations for fluctuations converts the differential equations into algebraic ones. The solutions of the linear system allow to analytically calculate the intensity noise spectrum at the output of the laser as a function of the relaxation constants of the upper and lower levels of the laser transition and of the pump noise.

In the original formulation of [12] the pump noise is described by the parameter p ranging from 0 to 1 ($p = 0$ for Poissonian pump; $p = 1$ for regular pump). In order to reproduce the experimental conditions more precisely, we generalize the model by introducing the spectral density of the pump noise $s(\tilde{\Omega})$ normalised to the shot noise.

According to [12] and setting $p(\tilde{\Omega}) = 1 - s(\tilde{\Omega})$, the normalised intensity noise spectrum at the laser output is given by

$$V_{\text{out}}(\tilde{\Omega}) = 1 + \eta(V_A(\tilde{\Omega}) - 1), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} V_A(\tilde{\Omega}) = & 1 + \frac{2bc(a+a')}{b-a'} \frac{1}{D(\tilde{\Omega})} \left((b^2 + \tilde{\Omega}^2) \right. \\ & \times \left[(a+a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \left[r + n \left(\frac{c}{a+a'} - 1 \right) \right] \\ & + 2\omega^2 \left\{ \left[(b-a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \left[n + (s(\tilde{\Omega}) - 1) r/2 \right] \right. \\ & - \left[(b-a')(a+a') + \tilde{\Omega}^2 \right] \left(r - \frac{a+2a'}{a+a'} n \right) \\ & \left. + \left[(a+a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \left(\frac{a'}{a+a'} - \frac{b-b-a'}{ca+a'} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (15)$$

where $\eta = \kappa_{\text{out}}/\kappa$ represents the correction for internal optical losses. The dimensionless parameters a, b, c and the dimensionless noise frequency $\tilde{\Omega}$ are defined as follows:

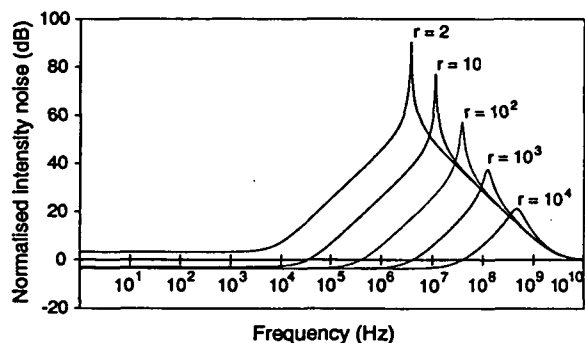


Fig. 1. Calculated normalised intensity noise spectra of the Nd:YVO₄ microchip laser pumped with a noiseless pump ($s(\tilde{\Omega}) = 0$) with the parameters given in the text for $r = 2, 10, 100, 1000, 10000$.

$a \equiv \gamma_a/\kappa$ (respectively, $b \equiv \gamma_b/\kappa$) is the normalised decay rate of the upper level (respectively, lower level);

$a' \equiv \gamma'_a/\kappa$ is the normalised spontaneous decay rate between the lasing levels;

$c \equiv \gamma_{ab}/\kappa$ is the normalised decay rate of the polarisation;

$\tilde{\Omega} \equiv \Omega/\kappa$.

Also the following shorthands have been introduced:

$$D(\tilde{\Omega}) = \left| -i\tilde{\Omega} \left(\frac{1}{2} + c - i\tilde{\Omega} \right) (b - i\tilde{\Omega}) (a + a' - i\tilde{\Omega}) + 2w^2 (a + b - i2\tilde{\Omega}) (1 - i\tilde{\Omega}) \right|^2, \quad (16)$$

$$n = \frac{ra + b + a'(r-1)}{a+b}, \quad (17)$$

$$w^2 = \frac{(a+a')bc}{2(a+b)}(r-1). \quad (18)$$

The normalised pump parameter r is defined as the ratio between the pump power p_{pump} and the threshold pump power p_{th} : $r = p_{\text{pump}}/p_{\text{th}}$.

Equation (14) is quite general and does not rely on any adiabatic elimination of variables. It may be used to deal with all types of lasers. In order to gain some physical insight from this formula, we can, however, make some approximations which lead to a simplified expression. The laser under study is a Nd:YVO₄ laser, belonging to a third-class lasers [13], characterized by a decay rate of the atomic polarisation much faster than the other relaxation rates. With respect to the dimensionless variables previously introduced, this condition is written $c \gg 1 \gg a, b, a'$. Applying this approximation to equation (14) is equivalent to perform the adiabatic elimination of the atomic polarization. Moreover, the noise spectrum of these lasers is dominated by the relaxation oscillation (Fig. 1): for low frequencies the noise increases from its minimum value corresponding to zero frequency; for high frequencies, the intensity noise spectrum decreases toward the quantum standard limit.

The minimum intensity noise for the third-class lasers is hence obtained from equation (14) setting $\tilde{\Omega} = 0$ and $c \rightarrow \infty$. For the specific case of the Nd:YVO₄ laser, the condition $b \gg a, a'$ is also verified. This leads to the very simple following formula:

$$V_m(0) \cong 1 - \eta + \eta \left[s + \frac{s+1}{r-1} + \frac{2}{(r-1)^2} \right]. \quad (19)$$

From equation (19) we derive the condition for observing intensity noise below the shot noise level in the laser output:

$$r > \frac{3-s}{1-s} \equiv r_{\text{th}}. \quad (20)$$

Equation (20) implies that intensity squeezing can only be observed with a squeezed pump ($s < 1$) and that the laser must operate very far above threshold.

To get the detailed noise properties of the Nd:YVO₄ laser at all frequencies, we use equations (14) and (15). Figure 1 shows the normalised theoretical noise spectra for different values of the normalized pump parameter r , and for a perfectly noiseless pump. The other parameters correspond to the values of our microchip laser and are given in the experimental results section. As can be seen in Figure 1, suppression of the pump noise allows to generate squeezed states.

According to equation (19), the amount of squeezing increases with the pump rate r and it is limited by the quantum efficiency of the laser. The frequency range suitable to observe squeezed light is limited to a low-frequency region well below the relaxation oscillation peak, and it also increases with the pump parameter r , because the relaxation oscillation frequency ($\tilde{\Omega}_{\text{RO}}$) shifts to higher frequencies, according to the equation:

$$\tilde{\Omega}_{\text{RO}} \cong \sqrt{(a+a')(r-1)}. \quad (21)$$

The theoretical analysis indicates very clearly the features that the laser has to present in order to generate intensity squeezed light via pump noise suppression. First of all, the laser has to display a very low threshold to achieve far above threshold operation. The laser should also have a high quantum efficiency. Quantum efficiency of the laser may be limited by internal optical losses η and the conversion ratio η_p of the photons of the pump beam into lasing photons. These two mechanisms, however, have different effects on the noise properties of the laser. The first one reduces the maximum achievable squeezing, but it does not change the value of r_{th} given by equation (20). In contrast, the second one influences directly the noise of the pump beam (which approaches the shot noise level: $s \rightarrow 1$ in equation (20)), increasing the value of r_{th} necessary to generate squeezed light ($r_{\text{th}} \rightarrow \infty$ for $\eta_p \rightarrow 0$).

Finally, to avoid the competition between oscillating modes, the laser should have single-mode operation. The requirements concerning low threshold and high quantum efficiency imply the use of a laser material with high stimulated emission gain and high pump absorption; the

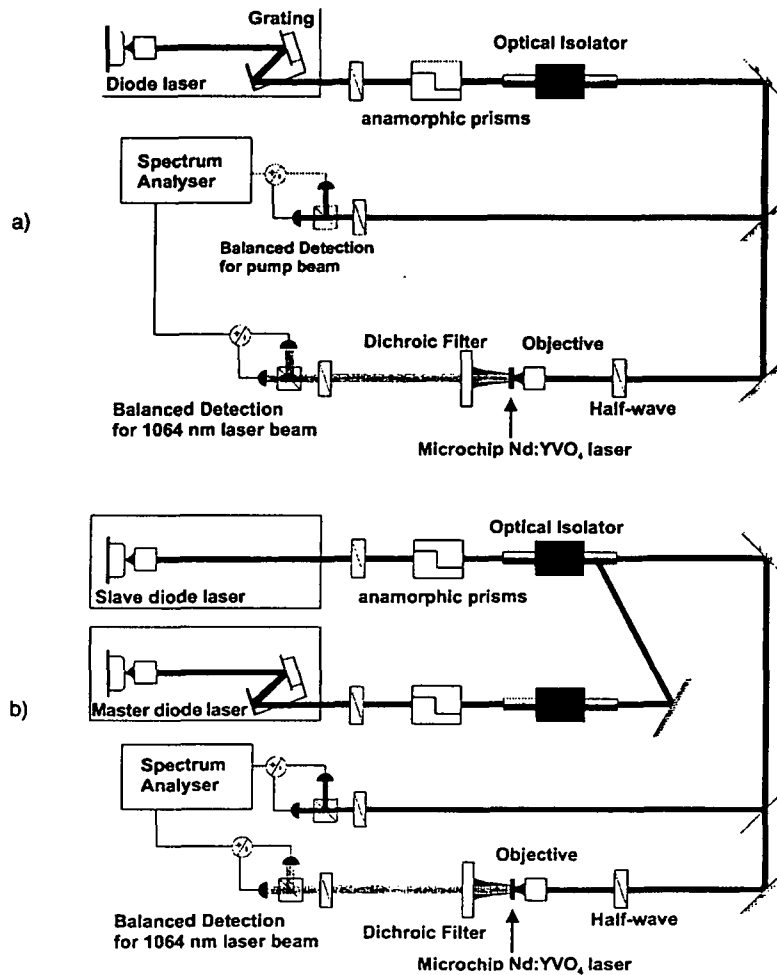


Fig. 2. a) Experimental set-up for noise measurements in a Nd:YVO₄ microchip laser pumped by a grating extended cavity laser diode. b) Experimental set-up for noise measurements in a Nd:YVO₄ microchip laser pumped by an injection locked laser diode.

single-mode operation can be achieved by a laser with a short Fabry-Perot cavity, and a narrow gain curve. The Nd:YVO₄ microchip laser used in our experiment is a good candidate: the high absorption coefficient of 70 cm⁻¹ at 808 nm (2% Nd doping) ensures the low threshold (4.2 mW) and good quantum efficiency (~ 40%); the cavity length of 300 μm together with a narrow gain bandwidth (0.95 nm [14]) ensure the single-frequency oscillation.

3 Experimental set-up

The experimental set-up for noise measurements in Nd:YVO₄ microchip laser is shown in Figures 2a and 2b. The amplitude squeezed laser diode used for optical pumping of solid-state laser is an index guided quantum well

GaAlAs laser diode (SDL 5422H1) operating at 810 nm. Noise reduction in the pump beam is achieved by driving the laser diode with a high-impedance constant current source and suppressing the side modes using two different configurations as described in [15], namely feedback from an external grating in an extended cavity laser (Fig. 2a) and injection locking with a master laser (Fig. 2b).

In the external grating configuration a reflection holographic grating is set at a distance of 10 cm from the laser, in Littrow configuration. By tilting the grating, the laser wavelength can be tuned to match the maximum of the Nd:YVO₄ line absorption at 808.5 nm.

In the injection locking set-up, the laser is injected by a master laser which is a grating extended cavity semiconductor laser. The injection locking set-up, with an extended cavity master laser is a device completely tunable over several nanometers, and allows us to match the

frequency of the pump beam with the maximum of the absorption curve of the Nd:YVO₄. In both configurations, astigmatism in the beam is corrected by means of anamorphic prisms. Two optical isolators (for a total isolation of 70 dB) are employed to prevent back reflection into the pump laser. The optical power available for pumping process is 70 mW for the injection locking set-up and 45 mW (due to the losses of the grating) in the grating extended cavity configuration. The intensity noise of the pump laser diode is measured by a standard balanced detection (two high-efficiency EG&G FND100 PIN photodiodes), which allows to measure, under the same conditions, the shot noise and the intensity noise of the laser beam. We performed several tests in order to check the reliability of the shot noise measured in this way, as described in [15]. The common mode rejection of the balanced detection is better than 30 dB in the range of 0–30 MHz; electronic and dark noise are typically more than 10 dB below the shot noise level. The pump beam is sent to the microchip laser by mean of two mirrors and focused into the laser with a $f = 8$ mm objective. The polarisation of the pump beam is fixed by a half-wave plate in order to achieve maximum absorption in the Nd:YVO₄ crystal. The microchip laser is mounted on a xyz -translation stage which allows an optimum alignment.

The Nd:YVO₄ microchip laser is 300 μm long, with a plane-plane monolithic cavity (the stability is ensured by thermal lens effects) in which the mirrors were deposited directly onto the crystal. The output mirror and back reflector have reflectivities of 97% and 99.5%, respectively, at 1.064 μm . The mirrors do not have special coatings for wavelength of pump radiation at 810 nm. Accurate measurements show a reflectivity of 24% and a transmissivity of 7% for pump radiation.

For the intensity noise measurements on the beam emitted by the microchip we used a two-fold experimental set-up. For measurements in low-frequency region (0–300 kHz) we use a balanced detection designed for 1.064 μm . The 1.064 μm light is detected by two high quantum efficiency (90%) InGaAs photodiodes. The electronic devices that complete the balanced detection are analogous to those previously described in [15]. The common mode rejection is better than 30 dB. For measurements at higher frequencies (up to 30 MHz), balanced detection is no longer reliable due to the very high excess noise of the relaxation peak (more than 80 dB) which exceeds the common mode rejection ratio. Therefore in this range of frequencies we performed the noise measurements with one photodiode, and we chose to calibrate the shot noise level with an independent source. For the calibration we use the noise obtained by direct detection on one photodiode of attenuated radiation emitted by a shot noise limited laser diode. It is worth saying that no correction has to be calculated, due to the difference in the wavelength of the two beams. In fact we detect the noise of the photocurrent which is independent of the wavelength. We check carefully linear dependance of the calibrated shot noise signal with the optical power incident on the photodiode. The shot noise obtained in this way was in agree-

ment within 0.1 dB with the noise obtained by a thermal light generating the same DC current on the photodiode.

4 Experimental results

In this section we present the experimental results obtained with the microchip Nd:YVO₄ laser previously described. The pump power at threshold is 4.2 mW, the maximum single TEM₀₀ mode power output is 10 mW obtained by pumping with an injection locked laser diode (pump power about 70 mW); in this conditions the normalised pump parameter assumes the value $r \cong 9.5$. If the pump laser is an extended cavity laser the maximum value achievable for r is about 6. In order to make a comparison between the experimental noise spectra and the theoretical predictions, the values of the parameters of the model are set as follows: the decay rate of the upper level γ_a and the spontaneous decay rate between the lasing levels γ'_a for a Nd:YVO₄ crystal doped at 2% are taken from [16, 17]; we set $\gamma_a = 3.3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$ and $\gamma'_a = 3.3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$. The values of γ_b , decay rate of the lower level, found in the literature [18,16] for Nd:YVO₄ crystal are affected by a huge uncertainty (more than two orders of magnitude); within this range, we choose a value of $\gamma_b = 3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$ that ensures an optimal fit of the experimental curve. The decay rate of the polarisation γ_{ab} is set equal to $7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$ according to [16,17]. The experimental determination of the optical pump power threshold and the measurement of the optical pump power allow us to easily calculate the normalised pump parameter r . The total cavity damping constant κ can be determined by the dependence of the relaxation oscillation frequency on the pump parameter r , according to the equation

$$\Omega_{\text{RO}} = \sqrt{k(\gamma_a + \gamma'_a)(r - 1)}, \quad (22)$$

we find $\kappa = 1.56 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$. The output coupling κ_{out} , calculated from the reflectivities of the cavity mirrors, is found to be $8.36 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$.

We first consider the intensity noise characteristics of the two different pump laser diodes, the grating extended cavity laser diode and the injection locked laser diode. As described in [15] the feedback from grating and injection locking are useful techniques to generate amplitude squeezed light from laser diodes. Figures 3a and 3b show the normalized intensity noise spectra of the grating extended cavity laser diode for low-frequency region (0–300 kHz) and for higher frequencies (0–30 MHz), respectively. After correction for detection efficiency the amount of amplitude squeezing at the laser output is 0.7 dB, flat over the whole frequency range between 1 to 30 MHz. For frequencies lower than 300 kHz the pump laser diode exhibits a slight excess noise (< 3 dB). For frequencies below 50 kHz technical $1/f$ noise increases the excess noise up to 10 dB. Amplitude squeezing of 1.1 dB at the laser output in the range 0–30 MHz is achieved for the injection locked laser; this represents a slight improvement with respect

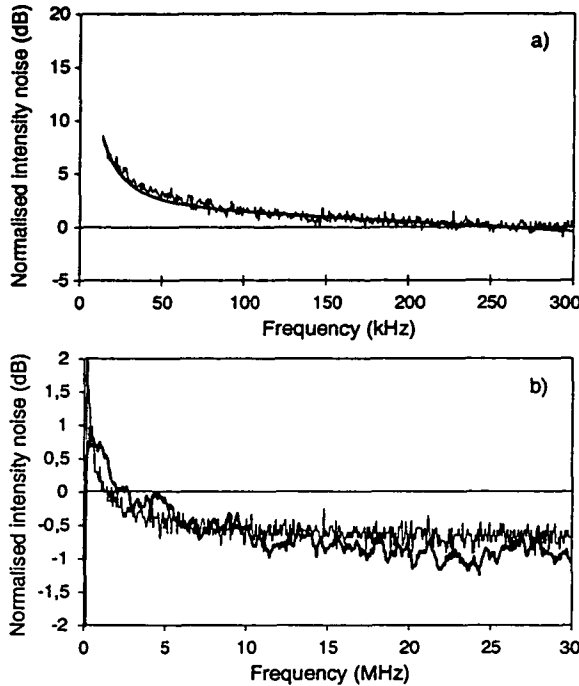


Fig. 3. a) Normalised intensity noise spectrum at the laser output (after correction for detection efficiency) for the grating extended cavity laser diode in the low-frequency region (0–300 kHz). The fit (thick line) is obtained with an empirical expression which is then used to compute the noise shown in Figure 4b. b) Normalised intensity noise spectrum at the laser output (after correction for detection efficiency) for the grating extended cavity laser diode and for the injection locked laser diode (thick line) in the high-frequency region (0–30 MHz).

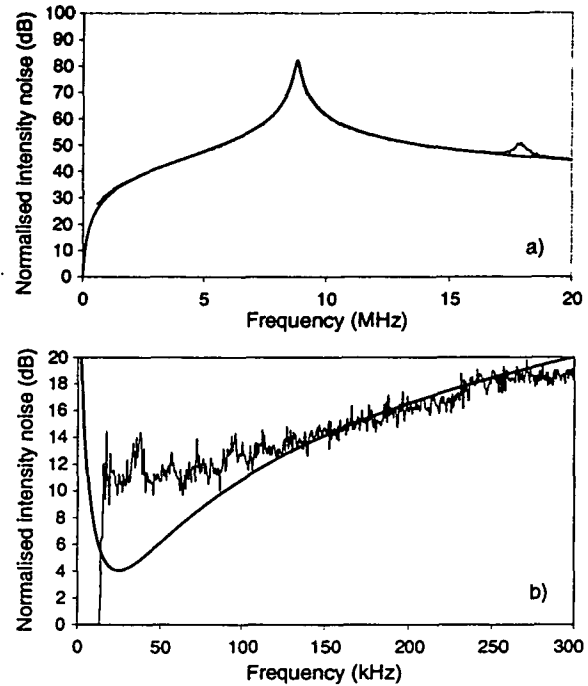


Fig. 4. a) Normalised experimental and theoretical (thick line) intensity noise spectra of the Nd:YVO₄ microchip laser pumped by a grating extended cavity laser diode in the 0–20 MHz frequency range. The corresponding pump noise is shown in Figure 3b. b) Normalised experimental and theoretical (thick line) intensity noise spectra of the Nd:YVO₄ microchip laser pumped by a grating extended cavity laser diode in the 0–300 kHz frequency range. The corresponding pump noise is shown in Figure 3a.

to grating extended cavity laser. The intensity noise spectrum for the low-frequencies region exhibits a behavior similar to that of the grating extended cavity laser.

We will now consider the noise properties of the Nd:YVO₄ microchip laser. All the noise spectra presented in the following are corrected by taking into account the detection efficiency, therefore they display the noise at the output of the laser. Figure 4 shows the normalized intensity noise spectrum of the Nd:YVO₄ microchip laser pumped with the extended cavity laser, with pump noise corresponding to Figure 3. For this measurement the power was about 6 mW and $\tau = 6$. The theoretical curve (thick line) is obtained from equation (14) with the parameters given in the text; $s(\bar{\nu})$ is given by an empirical expression fitting the measured pump noise (thick line in Fig. 3) and it is corrected for losses experienced by the pump beam (about 40%). The theoretical curve is in good agreement with the experimental one for a very large range of frequencies, particularly around the relaxation oscillation peak, well reproduced by theory (Fig. 4a). However, a significant discrepancy is evident at very low frequencies (below 100 kHz) (Fig. 4b). A minimum noise of 11

dB above shot noise level (SNL) is achieved at frequencies of 30 kHz, whereas the model predicts 5 dB above SNL. In a recent experiment [11] performed on Nd:YVO₄ microchip laser pumped by an amplitude squeezed injection locked laser diode, an analogous discrepancy between theoretical predictions and experimental results is observed in low-frequency range. The authors assumed that the low-frequency extra noise could originate from the spectral distribution of the intensity squeezed light of the injection locked pump laser diode that they use in the experimental set-up. In fact, in the case of the injection locked laser, the main mode can exhibit excess noise even if the total intensity noise is squeezed [19]. This excess noise typically ranges from 1 to 10 dB, depending on the optimisation of the injection parameters such as alignment, injected power, master frequency. As the microchip laser, due to its absorption linewidth of 1 nm, is pumped only by the main mode and few longitudinal side modes, it could experience excess pump noise.

However, this explanation does not hold in our case. We have checked that in the grating extended cavity configuration, as explained in [19], no difference is observed

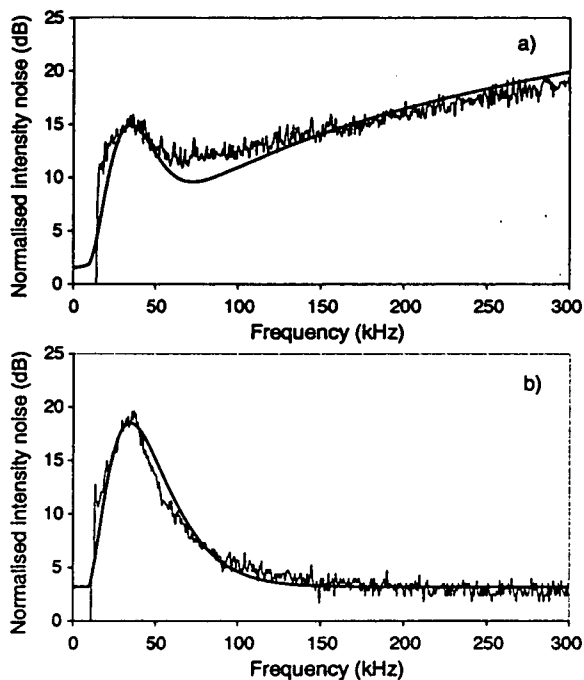


Fig. 5. a) Normalised experimental and theoretical (thick line) intensity noise spectra of the Nd:YVO₄ microchip laser pumped by a noisy grating extended cavity laser diode in the 0–300 kHz frequency range. The corresponding pump noise is shown in b. b) Normalized intensity noise spectrum of the noisy grating extended cavity laser diode in the low-frequency region (0–300 kHz). The fit (thick line) is obtained with an empirical expression.

between the total intensity noise and the noise of the main mode alone: side modes are actually negligible and single-mode squeezing is generated. Thus, when pumped with a grating extended cavity laser, Nd:YVO₄ microchip laser does not experience any excess pump noise; nevertheless, extra noise in the low-frequency region is observed.

To further check the origin of the excess noise, we performed a noise measurement on the Nd:YVO₄ microchip laser in the same conditions as Figure 4, except for the pump noise, that exhibit a large excess noise peak up to 20 dB centered at 40 kHz, as shown in Figure 5b. The corresponding theoretical and experimental intensity noise spectrum of the microchip laser can be seen in Figure 5a. The peak of the pump noise is very well reproduced in the noise of the microchip laser. In this case the agreement between theory and experiment is good also at low frequencies. Other measurements performed with a very noisy pump (more than 40 dB) clearly confirms the significant influence of the pump fluctuations on the low-frequency noise of the Nd:YVO₄ microchip laser, as shown in Figure 6. This case is very illustrative of the high noise at low frequency that is obtained when microchip lasers are pumped with laser diodes arrays.

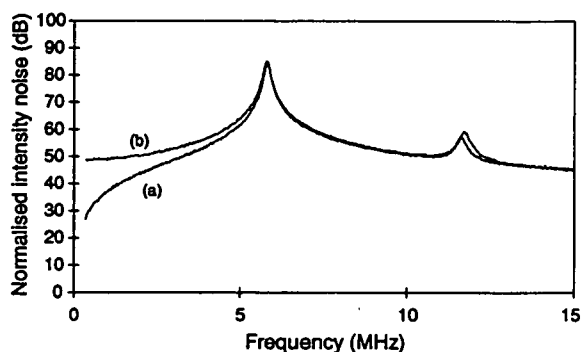


Fig. 6. Normalised intensity noise spectra of the Nd:YVO₄ microchip laser for a squeezed pump (curve (a)) and for a noisy pump with an excess noise of more than 40 dB (curve (b)).

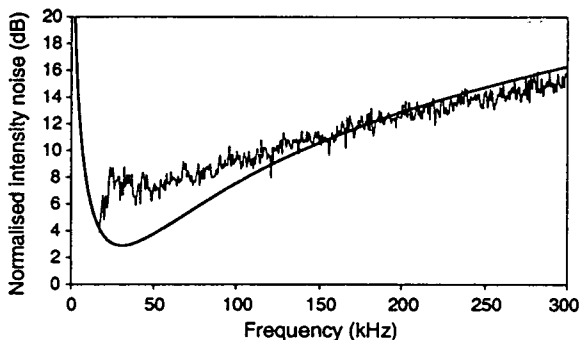


Fig. 7. Normalised experimental and theoretical (thick line) intensity noise spectra of the Nd:YVO₄ microchip laser pumped by an injection locked laser diode in the 0–300 kHz frequency range.

To improve these results and to obtain a reduction of the intensity noise of the Nd:YVO₄ with respect to the minimum noise of 11 dB above SNL achieved in the experimental conditions of Figure 4, we substitute the grating extended cavity pump laser with the injection locked one. In fact, as previously explained, with this new configuration we are able to operate the laser 10 times above threshold ($r = 10$) and according with theory, we expect an improvement on the noise performances of the laser. The result is shown in Figure 7 for a quiet pump like that reported in Figure 3a. The minimum noise at 40 kHz is 7 dB above the SNL which is a significant improvement as compared to the previous case. However, the theoretical fit does not agree with experimental curve below 100 kHz.

The fact that the theoretical noise spectrum is in good agreement with the measured noise spectrum over a very large range of frequencies seems to ensure that the Langevin approach is well adapted for description of the noise features of our Nd:YVO₄ microchip laser. The problem of modeling the noise behavior of this laser arises at low frequencies as can be seen in Figures 4b and 7. A noticeable discrepancy between theory and experiment

occurs for frequencies below 100 kHz. One possible source of this low-frequency extra noise could be the presence of non-linear effects generated by the very large noise peak of the relaxation oscillation. In fact, the intensity noise fluctuations at the level of the peak are typically 80 dB above SNL, corresponding to 1–3% of the steady-state intensity. Moreover, the occurrence of non-linear effects is clearly demonstrated by the presence of the harmonic of the relaxation oscillation peak (Fig. 4b). We have carefully checked the linearity of our detection system in the overall range of detected powers, in order to exclude other possible causes of the observed harmonic as non-linearities or saturation effects in any photodetection stage.

The theoretical noise spectrum obtained by linearisation of the stochastic *c*-number Langevin equation around the steady-state solutions does not take into account the non-linear phenomena and its derivation is valid in the case of very small fluctuations with respect to the steady-state values.

In order to investigate the possible non-linear effects at low frequency we have reduced the noise around the relaxation oscillations by an appropriate feedback loop reacting on the laser diode driving current. The feedback loop has a tailored frequency response in order to be active only in a narrow frequency region around the peak, while keeping unchanged the noise features of the laser at low frequencies. Nevertheless, we observed a sharp reduction (typically 5–7 dB) of the intensity noise at low frequencies. Although the feedback loop does not affect the low-frequency part of the spectrum, the low-frequency noise is now in agreement with the theoretical predictions. This behaviour that gives a strong indication for non-linear effects will be studied in detail in a forthcoming paper.

5 Conclusion

In this work, we have presented a detailed investigation of the intensity noise of a Nd:YVO₄ microchip laser pumped by an amplitude squeezed laser diode. The squeezed light pump is obtained with two different configurations: grating extended cavity laser and injection locked laser. We have clearly demonstrated the effect of the reduced pump noise on the low-frequency region of the intensity noise spectrum of the microchip laser. The sub-shot noise operation of the pump laser diode allows to achieve an intensity noise of 7 dB above SNL at 40 kHz, considerably reduced with respect to the performances achievable with pumping by standard laser diodes which present excess pump noise of typically 20 dB at low frequencies. The theoretical intensity noise spectra calculated from a full quantum model based on quantum Langevin approach are in very good agreement with experimental observations, except for very low frequencies (< 100 kHz). This extra low-frequency noise may be a consequence of a non-linear effect due to the strong relaxation oscillation peak.

In conclusion, our analysis shows that the Nd:YVO₄ microchip laser could potentially exhibit sub-shot noise operation in the low-frequencies region. At present, two

dominant factors prevent to achieve noise reduction below SNL in this laser. On the one hand, the pump laser diode exhibits a slight excess noise in the low-frequency range (< 300 kHz), where the microchip laser should take more relevant advantages from pump noise reduction, as shown by theoretical analysis. On the other hand, the previously described non-linear effects increase the noise in the same low-frequency range. Therefore improvement on low-frequency noise of the pump laser diode, together with specially designed feedback loop to eliminate extra low-frequency noise, are necessary to a further reduction of the intensity noise of the Nd:YVO₄ microchip laser.

Thanks are due to A.Z. Khoury and F. Marin for useful discussions. This research was carried out in the framework of the EC ESPRIT Contract ACQUIRE no. 20029 and of the EC TMR microlasers and cavity QED program (Contract no. ERBFMRXCT 96-00066). One of us (A.B.) had the support of a TMR fellowship no. ERBFMBI CT950204.

Appendix

We report the non-vanishing diffusions coefficients for the *c*-number Langevin forces:

$$2D_{aa} = (\gamma_a + \gamma'_a) \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + R(1-p) - g [\langle \mathcal{M}^*(t) \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t) \mathcal{M}(t) \rangle], \quad (\text{A.1})$$

$$2D_{bb} = \gamma_b \langle \mathcal{N}_b(t) \rangle + \gamma'_a \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle - g [\langle \mathcal{M}^*(t) \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t) \mathcal{M}(t) \rangle], \quad (\text{A.2})$$

$$2D_{ab} = -\gamma'_a \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + g [\langle \mathcal{M}^*(t) \mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t) \mathcal{M}(t) \rangle], \quad (\text{A.3})$$

$$2D_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 2g \langle \mathcal{M}(t) \mathcal{A}(t) \rangle, \quad (\text{A.4})$$

$$2D_{\mathcal{M}^*\mathcal{M}} = (2\gamma_{ab} - \gamma_a - \gamma'_a) \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + R, \quad (\text{A.5})$$

$$2D_{b\mathcal{M}} = \gamma_b \langle \mathcal{M}(t) \rangle. \quad (\text{A.6})$$

References

1. A.C. Nilsson, IEEE J. Quantum Electron. **25**, 767 (1989).
2. A. Arie, S. Schiller, E.K. Gustafson, R.L. Byer, Opt. Lett. **17**, 1204 (1992).
3. C.C. Harb, T.C. Ralph, E.H. Huntington, I. Freitag, D.E. McClelland, H.-A. Bachor, Phys. Rev. A **54**, 4370 (1996).
4. T.C. Ralph, C.C. Harb, H.-A. Bachor, Phys. Rev. A **54**, 4359 (1996).

5. E.H. Huntington, B.C. Buchler, C.C. Harb, T.C. Ralph, D.E. McClelland, H.-A. Bachor, *Opt. Commun.* **145**, 359 (1998).
6. Yu. M. Golubev, I.V. Sokolov, *Zh. Eksp. Teor. Phys.* **87**, 804 (1984) (*Sov. Phys. JETP* **60**, 234 (1984)).
7. Y. Yamamoto, S. Machida, O. Nilsson, *Phys. Rev. A* **34**, 4025 (1986).
8. M.J. Freeman, H. Wang, D.G. Steel, R. Craig, D.R. Scifres, *Opt. Lett.* **18**, 2141 (1993).
9. H. Wang, M.J. Freeman, D.G. Steel, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3951 (1993).
10. M.J. Freeman, H. Wang, D.G. Steel, R. Craig, D.R. Scifres, *Opt. Lett.* **18**, 379 (1993).
11. C. Becher, K.-J. Boller, *Opt. Commun.* **147**, 366 (1998).
12. M.I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino, C. Fabre, *Phys. Rev. A* **47**, 1431 (1993).
13. N.B. Abraham, P. Mandel, L. Narducci, *Dynamic Instability and Pulsations in Lasers*, in *Progress in Optics*, edited by E. Wolf (Elsevier, Amsterdam, 1988).
14. T. Taira, A. Mukai, Y. Nozawa, T. Kobayshi, *Opt. Lett.* **16**, 1955 (1991).
15. T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, P. Grelu, J.-F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M.D. Levenson, E. Giacobino, *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 601 (1995).
16. W. Koechner, *Solid State Laser Engineering*, second edition (Springer Verlag, Berlin, 1988).
17. A. Kaminskii, *Laser Crystals*, second edition (Springer Verlag, Berlin, 1981).
18. F.E. Hovis, M. Stuff, C.J. Kennedy, B. Vivian, *IEEE J. Quantum Electron.* **28**, 39 (1992).
19. F. Marin, A. Bramati, E. Giacobino, T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, J.-F. Roch, P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4606 (1995).

Article paru dans Phys. Rev. A

Feedback control and nonlinear intensity noise of Nd:YVO₄ microchip lasersA. Bramati,¹ J.-P. Hermier,² V. Jost,² and E. Giacobino²¹*INFM, Dipartimento di Scienze Chimiche, Fisiche e Matematiche, Università degli Studi dell'Insubria, via Lucini 3, 22100 Como, Italy*²*Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie, Ecole Normale Supérieure, CNRS, 4, Place Jussieu, F-75252 Paris Cedex 05, France*

(Received 30 November 1999; revised manuscript received 30 March 2000; published 13 September 2000)

A fully quantum model is used to derive both the intensity noise of a laser operating with an electronic feedback loop and the nonlinear corrections to the noise of the free-running laser. The implementation of a nonstandard feedback loop on a Nd:YVO₄ microchip laser pumped with an amplitude squeezed diode laser permits us to decrease the intensity of the relaxation oscillation noise peak while leaving the low-frequency part of the spectrum unaffected. This procedure also results in a decrease of the noise in the low-frequency region, showing evidence for nonlinear effects in the noise spectrum. The latter are found to be in good agreement with the theoretical predictions. Good agreement between the experimental results and theoretical predictions is also found over the complete frequency range.

PACS number(s): 42.50.Dv, 42.55.Xi, 42.50.Lc

I. INTRODUCTION

The necessity to use laser sources with high frequency stability and low intensity noise in numerous applications, such as gravitational wave detection and high sensitivity spectroscopy, points to the need of a thorough investigation of the noise characteristics of various types of lasers [1,2]. Solid state lasers are good candidates to meet these requirements. Single-mode output can be achieved using various cavity designs (nonplanar ring oscillator or monolithic planar microchip laser). The intensity noise spectrum of these lasers is determined by two dominant factors: the noise of the pump mechanism (for frequencies below the relaxation oscillation) and the resonant relaxation oscillation. The first factor can be partially eliminated using solid state lasers pumped with amplitude squeezed diode lasers [3–5]. The second factor is usually controlled through the use of an electronic feedback loop [6–9]. This type of stabilization scheme is well-known and efficient and it is present in many commercially available diode pumped solid state lasers. However, the combination of these techniques requires some care. The use of a standard feedback loop (which usually has a maximum gain at zero frequency) can be shown to completely destroy the quantum intensity noise features of the laser and cancel the advantages coming from the squeezed pump.

In a previous work [5] we have investigated the effects of pump noise reduction in a free running Nd:YVO₄ microchip laser. The theoretical intensity noise spectra calculated from a full quantum model based on quantum Langevin approach were in very good agreement with experimental observations, except for very low frequencies (<100 kHz) and at twice the relaxation oscillation frequency. It was checked that this extra low-frequency noise cannot be due to the pumping noise. We conjectured that this extra noise may be a consequence of indirect or nonlinear effects coming from the strong relaxation oscillation peak. In order to investigate the possible nonlinear effects at low frequency we have reduced the noise around the relaxation oscillation by an appropriate non standard feedback loop reacting on the diode

laser driving current. The feedback loop has a tailored frequency response in order to be active only in a narrow frequency region around the peak, while keeping unchanged the noise features of the laser at low frequencies. We have observed a sharp reduction (typically 5–7 dB) of the intensity noise at low frequencies. Although the feedback loop does not affect the low frequency part of the spectrum, the low frequency noise is now in agreement with the theoretical predictions of the linearized model. The decrease of the noise at low frequency is also in good agreement with a model for the nonlinear noise effects. This behavior gives an experimental evidence for the occurrence of nonlinear effects.

The outline of the paper is as follows. In Sec. II we use a quantum model for a laser to derive the nonlinear noise effects and the noise of the laser operating in the presence of a feedback loop. An analytical expression is obtained for the intensity noise spectrum by combining the results of a quantum Langevin approach for the free-running laser with a model of the feedback loop. In Sec. III the experimental set-up and the designed non-standard feedback loop are described. Finally, in Sec. IV we present the experimental results.

II. THEORETICAL MODEL**A. The free running laser**

The theoretical description of the free running solid state laser is accomplished by using a full quantum model based on Langevin equations approach. The details of the derivation of the intensity noise spectrum for the free running laser can be found in [10].

In this section we briefly recall the method of Ref. [10] in order to be able to extend it to the laser with a feedback loop and to the analysis of the nonlinear terms. The model is a full quantum one based on the Langevin equations approach. Atoms with a homogeneously broadened transition of frequency ω_{ab} fill a resonant cavity of length L and volume V with intensity transmission coefficient of the coupling mirrors T . The atoms interact with the radiation field of a single excited mode of the cavity, which is considered as a plane

A. BRAMATI, J.-P. HERMIER, V. JOST, AND E. GIACOBINO

PHYSICAL REVIEW A 62 043806

wave with frequency ω_c . If one assumes that the lower level is not the ground state, the model is well adapted to describe the behavior of Nd:YVO₄ laser. The laser dynamics is described by the following stochastic c -number Langevin equations deduced from the normally ordered operator Langevin equations for the same system, using the standard procedure [11]:

$$\dot{A}(t) = -\kappa/2A(t) + gM(t) + \mathcal{F}_\gamma(t), \quad (1)$$

$$\dot{M}(t) = -\gamma_{ab}M(t) + g[\mathcal{N}_a(t) - \mathcal{N}_b(t)]A(t) + \mathcal{F}_M(t), \quad (2)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_a(t) = R - (\gamma_a + \gamma'_a)\mathcal{N}_a(t) - g[A^*(t)M(t) + M^*(t)A(t)] + \mathcal{F}_a(t), \quad (3)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_b(t) = -\gamma_b\mathcal{N}_b(t) + \gamma'_a\mathcal{N}_a(t) + g[A^*(t)M(t) + M^*(t)A(t)] + \mathcal{F}_b(t). \quad (4)$$

The stochastic c -number variable $A(t)$ represents the electromagnetic field. \mathcal{N}_a and \mathcal{N}_b represent the macroscopic atomic population of the upper and lower level respectively. $M(t)$ represents the macroscopic atomic polarization. κ is the total cavity damping constant $\kappa = \kappa_{\text{out}} + \kappa_{\text{losses}}$, where κ_{out} is the output coupling rate and κ_{losses} is the damping rate due to internal optical losses. γ_a and γ_b are the decay rates of the populations of the upper and lower levels to the other atomic levels; γ'_a is the spontaneous decay rate between the lasing levels and γ_{ab} is the decay rate of the atomic polarization. R is the mean pumping rate. The coupling constant g is given by

$$g = \sqrt{\frac{\omega_{ab}}{2\hbar\epsilon_0 V}}\mu, \quad (5)$$

where μ is the magnitude of the atomic dipole moment. The functions $\mathcal{F}_k(t)$ with $k = \gamma, M, a, b$ are the stochastic c -number Langevin forces with the properties

$$\langle \mathcal{F}_k(t) \rangle = 0, \quad (6)$$

$$\langle \mathcal{F}_k(t)\mathcal{F}_l(t') \rangle = 2D_{kl}\delta(t-t'), \quad (7)$$

where D_{kl} represents the diffusion coefficient for the c -number Langevin force. The nonvanishing diffusion coefficients are given in the Appendix.

Solving the c -number Langevin equations allows us to calculate the steady state solutions for the field and atomic variables and to derive the spectra of the fluctuations of the field quadrature components. The steady state solutions for laser operation above threshold are obtained by dropping the noise terms in Eqs. (1)–(4) and setting the time derivatives equal to zero.

One obtains

$$|A_0|^2 = \frac{\gamma_{ab}\gamma_a}{2g^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_a + \gamma_b} (r-1), \quad (8)$$

where the normalized pumping rate r is

$$r = \frac{R}{R_{\text{th}}} \quad (9)$$

and the threshold pumping rate R_{th} is

$$R_{\text{th}} = \kappa \frac{\gamma_{ab}\gamma_a}{2g^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_a + \gamma_b}. \quad (10)$$

The full steady state solutions may be found in [10].

To investigate the small fluctuations of the field and atomic variables around the steady state, the equations of motion are linearized around the steady state. Then we take their Fourier transforms, which converts the differential equations into algebraic equations. One obtains

$$-i\Omega \delta A(\Omega) = -\kappa/2\delta A(\Omega) + g\delta M(\Omega) + \mathcal{F}_\gamma(\Omega), \quad (11)$$

$$\begin{aligned} -i\Omega \delta M(\Omega) = & -\gamma_{ab}\delta M(\Omega) + g[\mathcal{N}_{a0} - \mathcal{N}_{b0}]\delta A(\Omega) \\ & + g[\delta \mathcal{N}_a(\Omega) - \delta \mathcal{N}_b(\Omega)]A_0 + \mathcal{F}_M(\Omega), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} -i\Omega \delta \mathcal{N}_a(\Omega) = & -(\gamma_a + \gamma'_a)\delta \mathcal{N}_a(\Omega) \\ & -gA_0[\delta M(\Omega) + \delta M^*(-\Omega)] \\ & -gM_0[\delta A(\Omega) + \delta A^*(-\Omega)] + \mathcal{F}_a(\Omega), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} -i\Omega \delta \mathcal{N}_b(\Omega) = & -\gamma_b\delta \mathcal{N}_b(\Omega) + \gamma'_a\mathcal{N}_a(\Omega) \\ & +gA_0[\delta M(\Omega) + \delta M^*(-\Omega)] \\ & +gM_0[\delta A(\Omega) + \delta A^*(-\Omega)] + \mathcal{F}_b(\Omega). \end{aligned} \quad (14)$$

Since we are interested in the intensity noise, we calculate the amplitude quadrature component of the field fluctuations $\delta X(\Omega)$

$$\delta X(\Omega) = \frac{1}{2}[\delta A(\Omega) + \delta A^*(-\Omega)]. \quad (15)$$

The solution for $\delta X(\Omega)$ can be expressed as a function of the noise sources

$$\begin{aligned} \delta X(\Omega) = & \frac{\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega}{g(\gamma_a + \gamma_b - 2i\Omega)(\kappa - i\Omega)(C(\Omega) + 2A_0^2)} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2}[\mathcal{F}_M(\Omega) + \mathcal{F}_M^*(-\Omega)](\gamma_b - i\Omega) \right. \\ & \left. + gA_0 \frac{\gamma_b - \gamma'_a - i\Omega}{\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega} \mathcal{F}_a(\Omega) - gA_0\mathcal{F}_b(\Omega) \right\}, \end{aligned} \quad (16)$$

where $C(\Omega)$ is given by

$$C(\Omega) = \frac{-i\Omega(\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega)(\gamma_b - i\Omega)(\kappa/2 + \gamma_{ab} - i\Omega)}{g^2(\gamma_a + \gamma_b - 2i\Omega)(\kappa - i\Omega)}. \quad (17)$$

The corresponding noise spectrum $V_X(\Omega)$ is given by

$$\langle \delta X(\Omega) \delta X(\Omega') \rangle = V_X(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') \quad (18)$$

and the normalized intensity noise spectrum at the output of the laser is

$$V_{\text{out}}(\Omega) = 1 + 4\eta\kappa V_X(\Omega), \quad (19)$$

where η is the ratio of the output coupling constant of the laser mirror to the total cavity coupling constant

$$\eta = \frac{\kappa_{\text{out}}}{\kappa}. \quad (20)$$

$V_{\text{out}}(\Omega)$ is found to be

$$\begin{aligned} V_{\text{out}}(\Omega) = & 1 + \eta \frac{2\gamma_b\gamma_{ab}}{\kappa^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_b - \gamma'_a} \frac{1}{D(\Omega)} \left((\gamma_b^2 + \Omega^2)[(\gamma_a + \gamma'_a)^2 + \Omega^2] \left[r + n \left(\frac{\gamma_{ab}}{\gamma_a + \gamma'_a} - 1 \right) \right] \right. \\ & + 2w^2 \left\{ [(\gamma_b - \gamma'_a)^2 + \Omega^2][n + (s(\Omega) - 1)r/2] - [(\gamma_b - \gamma'_a)(\gamma_a + \gamma'_a) + \Omega^2] \left(r - \frac{\gamma_a + 2\gamma'_a}{\gamma_a + \gamma'_a} n \right) \right. \\ & \left. \left. + [(\gamma_a + \gamma'_a)^2 + \Omega^2] \left(\frac{\gamma'_a}{\gamma_a + \gamma'_a} - \frac{\gamma_b}{\gamma_{ab}} \frac{\gamma_b - \gamma'_a}{\gamma_a + \gamma'_a} \right) \right\} \right), \quad (21) \end{aligned}$$

where $s(\Omega)$ represents the normalized spectral density of the pump noise. The following shorthands have been introduced:

$$D(\Omega) = |-i\Omega(\kappa/2 + \gamma_{ab} - i\Omega)(\gamma_b - i\Omega)(\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega) + 2w^2(\gamma_a + \gamma_b - i2\Omega)(1 - i\Omega)|^2, \quad (22)$$

$$n = \frac{r\gamma_a + \gamma_b + \gamma'_a(r-1)}{\gamma_a + \gamma_b}, \quad w^2 = \frac{(\gamma_a + \gamma'_a)\gamma_b\gamma_{ab}}{2(\gamma_a + \gamma_b)}(r-1). \quad (23)$$

As can be seen in Fig. 5, good agreement is observed between experimental results and theoretical predictions for the free running Nd:YVO₄ laser except at very low noise frequencies and at twice the relaxation oscillation frequency [5]. Let us point out that this result is obtained with a full quantum model of the microlaser taking into account the finite lifetime of the lower laser level. The inclusion of nonlinear gain effect [4] is then unnecessary. The pump noise included in this calculation is the one measured as described in Sec. III without any adjustment.

To explain the discrepancy between theory and experiment in the low frequency part of the spectrum, additional effects coming from partition noise of the pumping beam have been envisaged. Excess noise could come from the fact that the pump beam is not completely absorbed [4]. Only the central modes of the pump laser are absorbed, and in some cases, these modes may be much noisier than the total intensity of the laser. Actually we have demonstrated in previous studies on laser diodes that a grating-extended laser diode as the one we use for pumping behaves as a true single mode laser [21] and does not exhibit partition noise. So, no extra noise can originate from the pumping process in our experiment. In the following, we evaluate the magnitude of the nonlinear noise term that can be at the origin of the extra noise.

B. Nonlinear noise

The problem of nonlinear noise is a very controversial one. If it originates from the small size of the system, higher derivatives than the first one have to be taken into account in the master equation of the microscopic system. The Fokker-Planck equation and the Langevin equations derived from it may not be valid any more. By contrast, the case of nonlinear noise linked to the relaxation oscillation is due to a large increase of the fluctuations at some frequencies, because of the dynamics of the system. Considering that these fluctuations are still small compared to the mean values, we can assume that the quasi-linear approximation of the Langevin equations (1)–(4) holds [12]. We then treat the nonlinear effects in the fluctuations by adding corrective terms in the drift terms of the Langevin equations, while the Langevin noise sources are unchanged.

To get a physical insight into this effect, we are going to rewrite the Langevin equations (1)–(4) under a simplified form, making use of the fact that

$$\gamma_{ab} \gg \kappa \gg \gamma_b \gg \gamma_a, \Omega \quad \text{and} \quad \gamma_a \gg \gamma'_a.$$

We will perform an adiabatic elimination of the atomic polarization $\mathcal{M}(t)$ and we will assume that the population of

A. BRAMATI, J.-P. HERMIER, V. JOST, AND E. GIACOBINO

PHYSICAL REVIEW A 62 043806

the lower laser level b is very small. These approximations are too strong to give a correct account of the steady state solution and of the linear noise. However, for the nonlinear noise, we will see that this treatment allows to obtain a satisfactory representation of the physical phenomena. Under these conditions, the Langevin equations for the system are reduced to

$$\dot{n}(t) = -\kappa n(t) + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} n(t) \mathcal{N}_a(t) + \mathcal{F}_n(t), \quad (24)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_a(t) = R - \gamma_a \mathcal{N}_a(t) - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} n(t) \mathcal{N}_a(t) + \mathcal{F}_{\mathcal{N}_a}(t), \quad (25)$$

where n is the photon number in the cavity

$$n(t) = |\mathcal{A}(t)|^2 \quad (26)$$

and the Langevin noise terms $\mathcal{F}_n(t)$ and $\mathcal{F}_{\mathcal{N}_a}(t)$ are derived from the ones appearing in Eqs. (1)–(4).

We write as before

$$n(t) = n_0 + \delta n(t), \quad (27)$$

$$\mathcal{N}_a(t) = \mathcal{N}_{a0} + \delta \mathcal{N}_a(t), \quad (28)$$

and using the fact that n_0 and \mathcal{N}_{a0} are solutions of Eqs. (24) and (25) without the noise terms, we have

$$\begin{aligned} \delta \dot{n}(t) = & -\kappa \delta n(t) + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} n_0 \delta \mathcal{N}_a(t) + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n(t) \mathcal{N}_{a0} \\ & + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n(t) \delta \mathcal{N}_a(t) + \mathcal{F}_n(t), \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathcal{N}}_a(t) = & -\gamma_a \delta \mathcal{N}_a(t) - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} n_0 \delta \mathcal{N}_a(t) - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n(t) \mathcal{N}_{a0} \\ & - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n(t) \delta \mathcal{N}_a(t) + \mathcal{F}_{\mathcal{N}_a}(t). \end{aligned} \quad (30)$$

The solution of the system without the nonlinear term of the last lines (29) and (30) yields the linear noise spectrum. We can compute the lowest order correction to this result by solving equations of the form

$$\begin{aligned} \delta \ddot{n}^{(2)}(t) = & -\kappa \delta n^{(2)}(t) + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} n_0 \delta \mathcal{N}_a^{(2)}(t) + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n^{(2)}(t) \mathcal{N}_{a0} \\ & + \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n^{(1)}(t) \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (31)$$

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathcal{N}}_a^{(2)}(t) = & -\gamma_a \delta \mathcal{N}_a^{(2)}(t) - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} n_0 \delta \mathcal{N}_a^{(2)}(t) \\ & - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n^{(2)}(t) \mathcal{N}_{a0} - \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \delta n^{(1)}(t) \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(t), \end{aligned} \quad (32)$$

where the linear fluctuations $\delta \mathcal{N}_a^{(1)}(t)$ and $\delta n^{(1)}(t)$ play the role of source terms for the second order corrections. One then takes the Fourier transform of Eqs. (31) and (32). The source term $\mathcal{J}(\Omega)$ writes

$$\mathcal{J}(\Omega) = \frac{2g^2}{\gamma_{ab}} \int \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega') \delta n^{(1)}(\Omega - \Omega') d\Omega'. \quad (33)$$

The resolution of the system is straightforward. The solution for the fluctuations of the photon number of the field is

$$\delta n^{(2)}(\Omega) = \frac{\gamma_a - i\Omega}{[r\gamma_a/2 - i(\Omega - \Omega_R)][r\gamma_a/2 - i(\Omega + \Omega_R)]} \mathcal{J}(\Omega), \quad (34)$$

where Ω_R is the relaxation oscillation frequency

$$\Omega_R = \sqrt{\gamma_a \kappa (r - 1)}. \quad (35)$$

The correction to the noise power will be expressed as a function of

$$\langle \mathcal{J}(\Omega) \mathcal{J}(\Omega_1) \rangle = \frac{4g^4}{\gamma_{ab}^2} \int \int \langle \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega') \delta n^{(1)}(\Omega - \Omega') \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega'_1) \delta n^{(1)}(\Omega_1 - \Omega'_1) \rangle d\Omega' d\Omega'_1. \quad (36)$$

Since the noise is Gaussian the mean values of the product of four factors can be expanded in products of lower number of factors. In addition, the terms $\delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega)$ and $\delta n^{(1)}(\Omega)$ can be expressed, as in Eq. (16), as linear functions of the Langevin noise sources $\mathcal{F}_n(\Omega)$ and $\mathcal{F}_{\mathcal{N}_a}(\Omega)$, which have zero mean value and are δ -correlated. Subsequently, apart from a term giving a contribution at exactly zero frequency, Eq. (36) can be rewritten as

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{J}(\Omega) \mathcal{J}(\Omega_1) \rangle = & \frac{4g^4}{\gamma_{ab}^2} \delta(\Omega + \Omega_1) \left[\int \langle |\delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega')|^2 \rangle \langle |\delta n^{(1)}(\Omega - \Omega')|^2 \rangle d\Omega' \right. \\ & \left. + \int \langle \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega') \delta n^{(1)}(-\Omega') \rangle \langle \delta \mathcal{N}_a^{(1)}(\Omega - \Omega') \delta n^{(1)}(\Omega' - \Omega) \rangle d\Omega' \right]. \end{aligned} \quad (37)$$

The correction to the intensity noise power $V_n^{(2)} = \langle |\delta n^{(2)}(\Omega)|^2 \rangle$ is then

$$V_n^{(2)}(\Omega) = \frac{\gamma_a^2 + \Omega^2}{[(r\gamma_a/2)^2 + (\Omega - \Omega_R)^2][(r\gamma_a/2)^2 + (\Omega + \Omega_R)^2]} \langle |\mathcal{J}(\Omega)|^2 \rangle. \quad (38)$$

The noise terms $\delta N_a^{(1)}(\Omega)$ and $\delta n^{(1)}(\Omega)$ have strong resonances for $\Omega = \pm \Omega_R$. As a result, the largest contribution to the expression of $\langle |\mathcal{J}(\Omega)|^2 \rangle$ is found for $\Omega' = \pm \Omega_R$ and $\Omega - \Omega' = \pm \Omega_R$. The nonlinear source term is then maximum for $\Omega = 0$ and for $\Omega = \pm 2\Omega_R$, which corresponds to the expected resonances in the nonlinear frequency mixing of the relaxation oscillation with itself.

Inspection of the expression of $\langle |\mathcal{J}(\Omega)|^2 \rangle$ shows that

$$\langle |\mathcal{J}(\Omega \sim 0)|^2 \rangle = 2 \langle |\mathcal{J}(2\Omega_R)|^2 \rangle. \quad (39)$$

Using Eq. (38) together with Eq. (39), we obtain for $\Omega \sim 0$

$$\frac{V_n^{(2)}(\Omega \sim 0)}{V_n^{(2)}(2\Omega_R)} = \frac{9}{2} \frac{\gamma_a^2 + \Omega^2}{\Omega_R^2}. \quad (40)$$

This result will allow us to compare the magnitude of the resonance at $2\Omega_R$, which is well identified in the noise spectrum, with the extra noise at zero frequency.

C. Model for quantum fluctuations in a feedback loop

In order to show evidence for the nonlinear effects in the noise, a tailored feedback loop has been designed. The purpose is to decrease the amplitude of the resonance at the relaxation oscillation frequency without modifying the spectrum in the low and high frequency ranges. In this section we analyze the behavior of the noise in the presence of a feedback loop with adjustable characteristics. We use a semiclassical approach in order to describe the properties of the feedback loop [13,14]. The experimental setup modeled by the theory is schematically shown in Fig. 1. A part I_0 of the beam I_0 emitted by the laser is split off by a beam splitter and is detected with a photodiode. The ac part of the signal δI_2 is filtered, amplified and mixed with the driving current of the diode pump laser. I_2 is the so-called in-loop beam. The other part of the beam I_1 is the new outgoing beam (the out-of-loop beam) on which noise measurements are performed. The electric fields corresponding to I_0, I_1, I_2, I_p (intensity of the pump beam) are denoted by a_0, a_1, a_2, a_p (as-

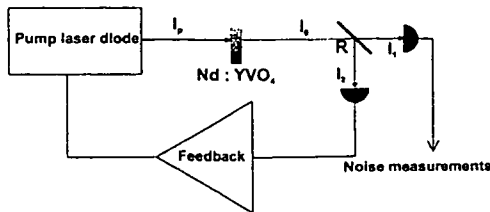


FIG. 1. Schematic experimental setup modeled by theory.

sumed to be real) and the real part of their fluctuations (amplitude fluctuations) by $\delta p_0, \delta p_1, \delta p_2, \delta p_p$. Assuming that the fields have a large mean value, their fluctuations can be related to the intensity fluctuations as

$$\delta I_i = 2a \delta p_i \quad (i=0,1,2,p). \quad (41)$$

After the beam splitter the fluctuations of beams 1 and 2 are given by

$$\delta p_1 = t \delta p_0 + r \delta p_v, \quad (42)$$

$$\delta p_2 = -r \delta p_0 + t \delta p_v, \quad (43)$$

where r and t are the amplitude reflection and transmission coefficients of the beam splitter and δp_v is the vacuum field that enters the (unused) second input port of the beam splitter.

The amplitude noise of the Nd:YVO₄ microchip laser can be separated in two parts, $\delta p_0^{(p)}$ coming from the pump fluctuations and $\delta p_0^{(i)}$ coming from other sources such as vacuum fluctuations or fluctuations of the atomic polarization:

$$\delta p_0 = \delta p_0^{(p)} + \delta p_0^{(i)}. \quad (44)$$

It is easy to express $\delta p_0^{(p)}$ as a function of δp_p via the transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$ of the Nd:YVO₄ laser for the intensity modulation of the pump beam. $\mathcal{G}(\Omega)$ is defined as follows:

$$\delta I_0 = \mathcal{G}(\Omega) \delta I_p. \quad (45)$$

With this definition and using Eq. (41) the amplitude fluctuations of the Nd:YVO₄ laser due to the pump fluctuations are written:

$$\delta p_0^{(p)} = (a_p/a_0) \mathcal{G}(\Omega) \delta p_p. \quad (46)$$

In presence of the feedback loop, the pump noise contains two terms:

$$\delta p_p = \delta p_p^{(r)} + \delta p_p^{(i)}. \quad (47)$$

$\delta p_p^{(r)}$ is the term added by the feedback loop, and $\delta p_p^{(i)}$ represents the original noise of the pump beam. The quantity $\delta p_p^{(r)}$, proportional to δp_2 , is superimposed to the pump amplitude in order to decrease the fluctuations on the outgoing field. It can be expressed as follows:

$$\delta p_p^{(r)} = -(a_2/a_p) g(\Omega) \delta p_2, \quad (48)$$

A. BRAMATI, J.-P. HERMIER, V. JOST, AND E. GIACOBINO

PHYSICAL REVIEW A 62 043806

where $g(\Omega)$ is the complex transfer function of the feedback loop that produces a modulation of the pump beam proportional to the modulation of beam 2. We define $g(\Omega)$ from

$$\delta I_p^{(r)} = -g(\Omega) \delta I_2. \quad (49)$$

$g(\Omega)$ represents the total transfer function of the electronic devices which constitute the feedback loop. The $-$ sign is taken to be in agreement with the usual convention for negative feedback.

By combining the previous equations we obtain the fluctuations in beams 1 and 2 in the presence of feedback:

$$\delta p_1 = \delta p_1^0 + \frac{tr \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)}{1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)} \delta p_2^0, \quad (50)$$

$$\delta p_2 = \frac{\delta p_2^0}{1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)}, \quad (51)$$

where δp_1^0 and δp_2^0 are the fluctuations in the absence of feedback.

Finally, replacing δp_1^0 and δp_2^0 by their expressions as functions of δp_0^0 and δp_v we obtain

$$\delta p_1(\Omega) = \frac{t}{1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)} \delta p_0^0(\Omega) + \frac{r(1 + \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega))}{1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)} \delta p_v(\Omega), \quad (52)$$

$$\delta p_2(\Omega) = \frac{-r}{1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)} \delta p_0^0(\Omega) + \frac{t}{1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)} \delta p_v(\Omega). \quad (53)$$

The intensity noise spectra $S_1(\Omega)$, $S_2(\Omega)$ for beams 1 and 2 in presence of feedback can be easily calculated using the usual definition of the noise spectral density function:

$$2\pi S_i(\Omega) \delta(\Omega + \Omega') = \langle \delta p_i(\Omega) \delta p_i(-\Omega') \rangle \quad \{i=1,2\}. \quad (54)$$

Straightforward calculations give

$$S_1(\Omega) = \frac{t^2}{|1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)|^2} S_0^0(\Omega) + \frac{r^2 |1 + \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)|^2}{|1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)|^2} C_{\omega_0}, \quad (55)$$

$$S_2(\Omega) = \frac{r^2}{|1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)|^2} S_0^0(\Omega) + \frac{t^2}{|1 + r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega)|^2} C_{\omega_0}, \quad (56)$$

where $S_0^0(\Omega)$ is the intensity noise spectrum of the free running laser and C_{ω_0} is the intensity noise spectrum associated with the vacuum fluctuations. In deriving Eq. (56) we have used the following relations, directly derived from Eq. (54):

$$2\pi S_0^0(\Omega) = \langle \delta p_0^0(\Omega) \delta p_0^0(-\Omega) \rangle, \quad (57)$$

$$2\pi C_{\omega_0} = \langle \delta p_v(\Omega) \delta p_v(-\Omega) \rangle, \quad (58)$$

$$0 = \langle \delta p_v(\Omega) \delta p_0^0(-\Omega) \rangle. \quad (59)$$

Equation (59) expresses the fact that the fluctuations of the laser beam are not correlated with the vacuum fluctuations entering through the unused port of the beam splitter.

The term

$$r^2 \mathcal{G}(\Omega)g(\Omega) \equiv G_{\text{olig}}(\Omega), \quad (60)$$

which appears in the denominator of both Eqs. (55) and (56) represents the open loop gain of the feedback loop. It can be seen from Eqs. (55) and (56) that, for very high values of $G_{\text{olig}}(\Omega)$, the noise of the in-loop beam is decreased and goes to zero, as expected, but this noise reduction is confined inside the loop. On the other hand, the noise spectrum of the outgoing beam $S_1(\Omega)$ can be decreased if $S_0^0(\Omega)$ is large (classical noise) but has a lower limit equal to $(1/r^2)C_{\omega_0}$, given by the second term in Eq. (56). This means that the intensity noise of the out-of-loop beam cannot be reduced below the shot noise level, due to the contribution of the vacuum fluctuations which deteriorate the degree of correlations between the in-loop and the out-of-loop beams. Typically the best noise reduction achievable with a 50-50 beam splitter is of 3 dB above the shot noise level. By tailoring the open loop gain one can see that it is possible to reduce the large excess noise at the relaxation oscillation frequency while having basically no feedback at low frequency. The low frequency noise is however affected by the presence of the beam splitter, but this effect can be made small if $r^2 \gg r^2$.

D. Laser noise in the presence of feedback loop

By combining the intensity noise spectrum for the free running laser obtained with the quantum Langevin approach [Eq. (21)] and Eq. (55) derived from the semiclassical model, we are able to calculate the intensity noise spectrum for the laser operating in presence of feedback. In order to do this, we have to evaluate the open loop gain $G_{\text{olig}}(\Omega)$ which appears in the denominator of Eq. (55). As explained previously, $G_{\text{olig}}(\Omega)$ is the product of two different transfer functions, $\mathcal{G}(\Omega)$, transfer function of an intensity modulation of the pump beam as defined in Eq. (45) and $g(\Omega)$, transfer function of the electronic part of the feedback loop; $g(\Omega)$ takes also into account all the optical losses which occur in the loop via a simple coefficient. $g(\Omega)$ is easily modeled by calculating the transfer function of each electronic device in the loop and making the product of all of them.

For the determination of $\mathcal{G}(\Omega)$ we use the results of the model for the free running laser. We are looking for the

transfer function of an intensity modulation of the pump beam. In Eqs. (1)–(4) the intensity of the pump beam is represented by the mean pumping rate R . A modulation of the pump beam intensity is proportional to a modulation of the pumping rate R :

$$\delta R = \alpha \delta I_p. \quad (61)$$

We replace R with $R + \delta R$ in Eq. (3) which gives the population $\mathcal{N}_a(t)$ of the upper level of the laser transition

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{N}}_a(t) = & R + \delta R(t) - (\gamma_a + \gamma'_a)\mathcal{N}_a(t) \\ & + ig[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t)] + \mathcal{F}_a(t). \end{aligned} \quad (62)$$

After linearization around the steady state, this equation reads

$$\begin{aligned} \delta \dot{\mathcal{N}}_a(t) = & -(\gamma_a + \gamma'_a)\delta \mathcal{N}_a(t) - g\mathcal{A}_0[\delta \mathcal{M}(t) + \delta \mathcal{M}^*(t)] \\ & - g\mathcal{M}_0[\delta \mathcal{A}(t) + \delta \mathcal{A}^*(t)] + \mathcal{F}_a(t) + \delta R(t). \end{aligned} \quad (63)$$

We see that we have two source terms for the fluctuations: the Langevin force $\mathcal{F}_a(t)$ and the pump modulation $\delta R(t)$. This source term can be written as

$$\mathcal{F}'_a(t) = \mathcal{F}_a(t) + \delta R(t). \quad (64)$$

The amplitude fluctuations of the laser field inside the cavity are obtained directly by Eq. (16), replacing $\mathcal{F}_a(t)$ with $\mathcal{F}'_a(t)$. We have

$$\begin{aligned} \delta X(\Omega) = & \frac{\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega}{g(\gamma_a + \gamma_b - 2i\Omega)(\kappa - i\Omega)[C(\Omega) + 2\mathcal{A}_0^2]} \\ & \times \left\{ \frac{1}{2}[\mathcal{F}_{\mathcal{M}}(\Omega) + \mathcal{F}_{\mathcal{M}}^*(-\Omega)](\gamma_b - i\Omega) + g\mathcal{A}_0 \frac{\gamma_b - \gamma'_a - i\Omega}{\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega} [\mathcal{F}'_a(\Omega) + \delta R(\Omega)] - g\mathcal{A}_0\mathcal{F}_b(\Omega) \right\}. \end{aligned} \quad (65)$$

Extracting the term proportional to $\delta R(\Omega)$ we obtain the amplitude fluctuations originating from the pump modulation:

$$\delta X^R(\Omega) = \frac{\gamma_b - \gamma'_a - i\Omega}{(\gamma_a + \gamma_b - 2i\Omega)(\kappa - i\Omega)[C(\Omega) + 2\mathcal{A}_0^2]} \mathcal{A}_0 \delta R(\Omega). \quad (66)$$

The intensity fluctuations of the intracavity field are obtained from

$$\delta I_i(\Omega) = 2\mathcal{A}_0 \delta X^R(\Omega). \quad (67)$$

With the chosen normalization $I_i = \mathcal{A}_0^2$ represents the number of photons inside the cavity. Hence, the intensity modulation δI_0 of the field going out of the cavity is given by

$$\delta I_0 = \kappa \delta I_i \hbar \omega_c. \quad (68)$$

where ω_c is the frequency of the Nd:YVO₄ laser beam. From Eqs. (61), (66), (67), and (68) we obtain

$$\mathcal{G}(\Omega) = \frac{\delta I_0(\Omega)}{\delta I_p(\Omega)} = 2 \frac{\gamma_b - \gamma'_a - i\Omega}{(\gamma_a + \gamma_b - 2i\Omega)(\kappa - i\Omega)[C(\Omega) + 2\mathcal{A}_0^2]} \kappa I_i \alpha \hbar \omega_c. \quad (69)$$

At zero frequency the ratio $\delta I_0(0)/\delta I_p(0)$ gives the conversion efficiency of the pump mechanism:

$$\frac{\delta I_0(0)}{\delta I_p(0)} = \eta \frac{\omega_c}{\omega_p}, \quad (70)$$

where η is the quantum differential efficiency of the laser and ω_p the frequency of the pump beam. Equation (70) allows to calculate the value of the proportionality constant α and then to obtain the normalized transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$. The final expression of $\mathcal{G}(\Omega)$ is written

$$\mathcal{G}(\Omega) = \eta \frac{\omega_c}{\omega_p} \frac{2(\gamma_b - \gamma'_a - i\Omega)w^2}{2w^2(\gamma_a + \gamma_b - 2i\Omega)(\kappa - i\Omega) - i\Omega(\kappa/2 + \gamma_{ab} - i\Omega)(\gamma_b - i\Omega)(\gamma_a + \gamma'_a - i\Omega)} \frac{\gamma_a + \gamma_b}{\gamma_b - \gamma'_a}. \quad (71)$$

A. BRAMATI, J.-P. HERMIER, V. JOST, AND E. GIACOBINO

PHYSICAL REVIEW A 62 043806

Using Eq. (71) and the normalized Eq. (55), the expression for the intensity noise of the out-of-loop beam in presence of feedback is written

$$V_{fb}(\Omega) = V_{out}(\Omega) \frac{r^2}{|1 + G_{olg}(\Omega)|^2} + \frac{r^2 \left| 1 + \frac{G_{olg}(\Omega)}{r^2} \right|^2}{|1 + G_{olg}(\Omega)|^2}, \quad (72)$$

where $G_{olg}(\Omega)$ is expressed using Eqs. (71) and (60).

Let us make some comments on this result: our purpose is to reduce the huge relaxation oscillation peak which dominates the intensity noise spectrum of the free running Nd:YVO₄ microchip laser. This strong excess noise (more than 80 dB above the shot noise level) can generate an excess noise in the low frequency range via nonlinear frequency mixing and hence explain the discrepancy observed in different experiments [3,5] between theoretical predictions and experimental results at low frequencies. It is clear from Eq. (72) that for very high values of $G_{olg}(\Omega)$ at all frequencies the intensity noise of the out-of-loop beam can be efficiently decreased and tends towards a constant value which depends on the reflectivity of the beam splitter. However, in this case, the intensity noise spectrum is flat and the noise features of the laser contained in the term $V_{out}(\Omega)$ are completely lost (in particular the effects of pump noise reduction) as shown also in [7,9]. On the other hand, is also evident that, for $G_{olg}(\Omega) = 0$, the intensity noise spectrum of the out-of-loop beam is substantially the same as the one of the free running laser except for some contaminations due to the beam splitter. In order to confirm the hypothesis of the occurrence of nonlinear effect at low frequency, we need a nonstandard feedback loop with a tailored frequency response reacting in the region of the relaxation oscillation to decrease its excess noise, and having no action at low frequency. In these conditions the observation of noise reduction at low frequency should constitute an experimental demonstration of the nonlinear phenomena. To be able to observe such kind of effects it is essential to eliminate the other sources of noise in the low-frequency region that could screen them: namely the noise coming from the pump mechanism, strongly reduced in our set-up by using an amplitude squeezed diode laser as a pump laser.

III. EXPERIMENTAL SETUP

The experimental setup for the noise measurements on the Nd:YVO₄ microchip laser operating with feedback loop is shown in Fig. 2. The amplitude squeezed laser diode used for optical pumping of solid state laser is an index guided quantum well GaAlAs laser diode (SDL 5422H1) operating at 810 nm. Noise reduction in the pump beam is achieved by driving the diode laser with a high impedance constant current source and suppressing the side modes using feedback from an external grating in an extended cavity laser [15–21]. By tilting the grating, the laser wavelength can be tuned to match the maximum of the Nd:YVO₄ line absorption at 808.5 nm. Astigmatism in the beam is corrected by means of anamorphic prisms. Two optical isolators (for a total isola-

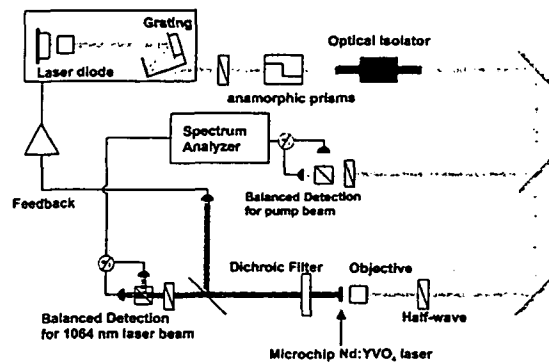


FIG. 2. Experimental setup for feedback control of the diode pumped Nd:YVO₄ microchip laser.

tion of 70 dB) are employed to prevent back reflection into the pump laser. The optical power available for pumping is 45 mW (due to the losses of the grating). The intensity noise of the pump laser diode is measured by a standard balanced detection (two high efficiency EG&G FND100 PIN photodiodes), which allows us to measure, under the same conditions, the shot noise and the intensity noise. We performed several tests in order to check the reliability of the shot noise measured in this way, as described in [20]. The common mode rejection of the balanced detection is better than 30 dB in the range of 0–30 MHz; electronic and dark noise are typically more than 10 dB below the shot noise level. The pump beam is sent to the microchip laser by means of two mirrors and focused into the laser with a $f = 8$ mm objective. The polarization of the pump beam is fixed by a half-wave plate in order to achieve the maximum absorption in the Nd:YVO₄ crystal. The microchip laser is mounted on a xyz-translation stage which allows an optimum alignment.

The Nd:YVO₄ microchip laser is 300 μm long, with a plane-plane monolithic cavity (the stability is ensured by thermal lens effects) in which the mirrors were deposited directly onto the crystal. The output mirror and back reflector have reflectivities of 97% and 99.5% respectively at 1.064 μm . The mirrors do not have special coatings for the wavelength of the pump radiation at 810 nm. Accurate measurements show a reflectivity of 24% and a transmissivity of 7% for pump radiation. The beam emitted by the microchip laser is sent to a beam splitter formed by a half-wave plate followed by a polarizing cube: this system is equivalent to a beam splitter with variable transmissivity and reflectivity coefficients and allows to continuously change the fraction of emitted optical power which constitute the in-loop beam. This beam is detected by a high quantum efficiency (90%) $\text{In}_x\text{Ga}_{1-x}\text{As}$ photodiode which generates the error signal for the feedback control. The ac part of the error signal is sent to a combination of filters and amplifiers especially designed to have the appropriate frequency response in the feedback loop, as explained in the previous section. The error signal is finally mixed with the driving current of the pump diode laser via ac coupling to avoid any perturbation to the dc working point of the diode laser. The characteristics of the total transfer function for the feedback loop are shown in the

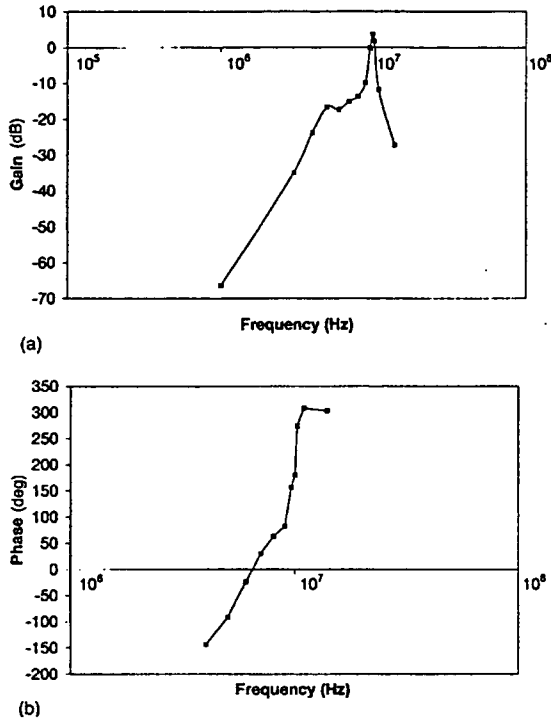


FIG. 3. (a) Bode diagram for the gain of the total transfer function of the loop. (b) Bode diagram for the phase of the total transfer function of the loop.

experimental Bode diagrams (gain and phase versus frequency) in Figs. 3(a) and 3(b). We note that the open loop gain is lower than -40 dB below 1 MHz and lower than -30 dB above 15 MHz: this ensures that the noise features of the laser are unaffected in the low and high frequency ranges. The sharp slope (80 dB/dec) of the gain curve below the cutoff frequency of 6 MHz is obtained by inserting a double Butterworth filter in the feedback loop. Of course, this implies a very large phase shift; as is well known in the standard theory of electronic control, in order to have a stable feedback loop, the maximum phase lag at the two unity gain points has to be less than 360° . The task, naturally difficult due to the presence of the relaxation oscillation that introduces a 180° phase shift, is further complicated in our case due to the relatively high frequency at which the relaxation peak is located. Because of the short cavity of the microchip laser (300 μm) the relaxation oscillation is in the megahertz range (in contrast to the usual kilohertz range for the standard cavities). In this frequency range the phase lags due to the delay time of the active electronics devices become relevant: for example the delay time of the CLC-425 operational amplifier is of the order of 10 ns corresponding to a 36° phase shift at a frequency of 10 MHz. For this reason, the stability of the loop is rather critical and this prevents one from achieving a larger open loop gain.

For the intensity noise measurements on the out-of-loop beam we used a twofold experimental setup. For measure-

TABLE I. Values of the Nd:YVO₄ laser parameters used for the theoretical calculations.

Parameter	Value
γ_a	$3.3 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$
γ_a	$3.3 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$
γ_b	$3 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$
γ_{ab}	$7 \times 10^{11} \text{ s}^{-1}$
κ	$1.56 \times 10^{10} \text{ s}^{-1}$
κ_{out}	$8.36 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$

ments in low frequency region (0–300 kHz) we use a balanced detection designed for 1.064 μm . The 1.064 μm light is detected by two high quantum efficiency (90%) In_xGa_{1-x}As photodiodes. The electronic devices that complete the balanced detection are analogous to those previously described in [20]. The common mode rejection is better than 30 dB. For measurements at higher frequencies (up to 30 MHz), balanced detection is no longer reliable due to the very high excess noise of the relaxation peak (more than 80 dB) which exceeds the common mode rejection ratio. Therefore in this range of frequencies we choose to calibrate the shot noise level with an independent source. For the calibration we use the noise obtained by direct detection on one photodiode of attenuated radiation emitted by a shot noise limited diode laser. It is worth saying that no correction has to be calculated due to the difference in the wavelengths of the two beams. In fact we detect the noise of the photocurrent which is independent of the wavelength. We carefully check the linear dependence of the calibrated shot noise signal with respect to the optical power incident on the photodiode. The shot noise obtained in this way was in agreement within 0.1 dB with the noise obtained by a thermal light generating the same dc current on the photodiode.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

In this section we present the experimental results obtained with the Nd:YVO₄ microchip laser operating with the feedback loop described previously. In order to make a comparison between theory and experiment we need to know all the parameters of the model we have developed. The set of values for the parameters describing the microchip laser (relaxation rates and cavity damping) is taken from the literature. The normalized pumping rate is calculated by measuring the pump power at threshold. We have reported the values of these parameters in Table I.

First we have to check the validity of the theoretical expression derived for the transfer function of the feedback loop $G_{\text{ol}}(\Omega)$. As explained previously, this function is the product of the transfer function of the electronic part of the feedback $r^2 g(\Omega)$ with the transfer function of a modulation of the pump intensity $\mathcal{G}(\Omega)$. The first one is easily obtained by measuring the transfer function of each device in the loop. Good agreement is found between the experimental transfer function and the theoretical one. The second transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$ is determined experimentally as follows: we modulate the driving current of the pump diode laser and the

A. BRAMATI, J.-P. HERMIER, V. JOST, AND E. GIACOBINO

PHYSICAL REVIEW A 62 043806

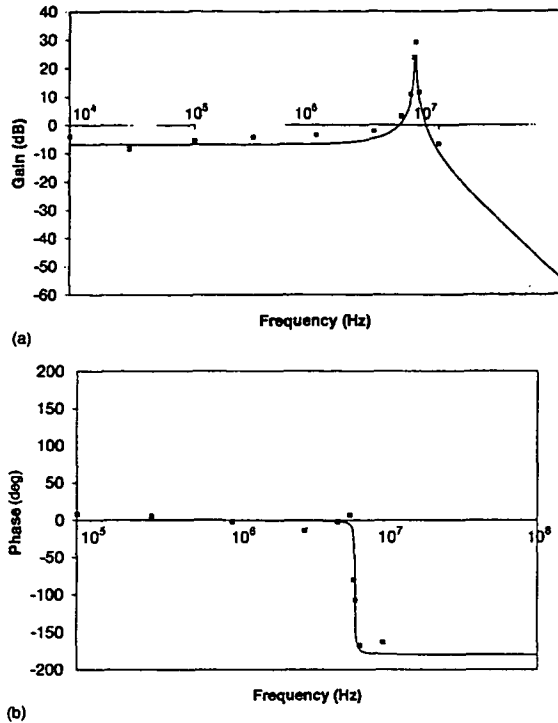


FIG. 4. (a) Calculated gain of the transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$ of the Nd:YVO₄ microchip laser. Dots represent experimental data. (b) Calculated phase of the transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$ of the Nd:YVO₄ microchip laser. Dots represent experimental data.

induced modulation on the pump beam is detected by a photodiode. Gain and phase are observed on a spectrum analyzer and on a digital oscilloscope respectively. Then the pump beam with the same modulation as previously is sent onto the microchip laser and the induced modulation on the emitted beam is detected by the same detection apparatus. With this experimental procedure the gain of the transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$ is simply given by the ratio of the gains of the two measured modulations with an appropriate correction coefficient, in order to take into account the different losses experienced by the two beams. The phase of $\mathcal{G}(\Omega)$ is given by the difference of the phases of the two modulations also with an appropriate correction for the different phase shift introduced by different free space propagation of the two beams. We find a good agreement between the experimental and theoretical transfer function $\mathcal{G}(\Omega)$ as shown in Figs. 4(a) and 4(b).

In the theoretical model the intensity noise of the Nd:YVO₄ microchip laser depends on the intensity noise of the pump beam. Of course, if the feedback loop is operating, we are not able to measure the pump noise. However the characteristics of the frequency response of the open loop gain (gain lower than -40 dB below 1 MHz) ensure that in the low frequency range the intensity noise spectrum of the pump laser diode is not affected by the feedback. Hence, in the model we use the value of pump noise of the grating

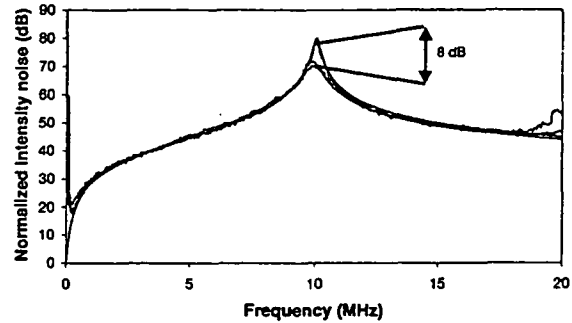


FIG. 5. Normalized theoretical and experimental intensity noise spectra for the free running laser and for the laser with feedback control.

extended-cavity laser diode in absence of feedback loop, measured with high accuracy in [5]: after correction for detection efficiency the amount of amplitude squeezing at the laser output is 0.7 dB, flat over the whole frequency range between 1 to 20 MHz. For frequencies lower than 300 kHz the pump laser diode exhibits slight excess noise (< 3 dB). For frequencies below 50 kHz technical $1/f$ noise increases the excess noise up to 10 dB.

We now consider the experimental results obtained for the Nd:YVO₄ laser with feedback control. The pumping rate is adjusted in order to place the phase rotation due to the relaxation oscillation at a suitable frequency, ensuring the best performances of the feedback loop. A comparison between the intensity noise spectra of the free-running laser and the laser with feedback control is shown in Fig. 5. We obtain a reduction of 8 dB of the relaxation oscillation peak due to the action of the feedback. As previously pointed out, the rather critical stability of the feedback loop prevents from achieving larger reduction. The good agreement between experiment and theory over a large range of frequencies shows that the model we have developed is suitable to describe the noise features of the microchip laser in presence of feedback. At high frequency, it is important to note the disappearance of the second harmonic peak at $2\Omega_R$, although the gain of the feedback loop at this frequency is -35 dB. This is clearly due to the reduction of the relaxation oscillation peak.

Accurate measurements in the low frequency part of the spectrum are shown in Fig. 6. A minimum noise of 7 dB above the shot noise level is achieved at 40 kHz. There is a clear reduction of the noise (about 5 dB) in the case of the laser with feedback control with respect to the free running laser, in spite of the fact that the feedback has no action at low frequency. Moreover, at low frequency, there is a good agreement between the experimental intensity noise for the laser with feedback control and the theoretical predictions of the linear model, while the experimental results for the free-running laser disagree with the same model. The model, which is derived from the linearization of the dynamical equations cannot take into account any nonlinear effect.

Using the results of Sec. II B we can calculate the magnitude of the nonlinear noise at zero frequency from the magnitude of the noise resonance at twice the oscillation fre-

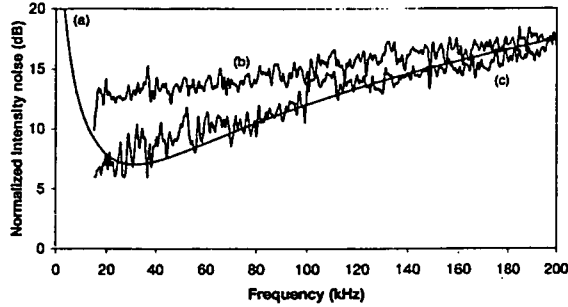


FIG. 6. Normalized intensity noise spectra for the free running laser and for the laser with feedback control in the low frequency region (0–200 kHz). Curve (a) is a theoretical prediction; curves (b) and (c) are experimental results for the free running laser and for the laser with feedback loop, respectively.

quency Ω_R for the free-running laser. It can be seen in Fig. 5 that the peak of the resonance at $2\Omega_R$ is at 55 dB above the shot noise level S_0 . Equation (40) then predicts an extra nonlinear noise of $12 S_0$ for $\Omega = 30$ kHz. This value is in good agreement with the experimental value of $11 S_0$ obtained from Fig. 6. This result constitutes an experimental evidence of the occurrence of nonlinear effects at low frequency.

V. CONCLUSION

The intensity noise properties of a Nd:YVO₄ microchip laser with electronic feedback applied to the pump source have been investigated theoretically and experimentally. A fully quantum model is derived by combining the results of the quantum Langevin approach for the free-running laser with the semiclassical treatment of the feedback loop. The theoretical analysis shows that a feedback loop with a tailored frequency response is suitable to investigate the influence of nonlinear effects due to the large excess noise of the relaxation oscillation peak on the intensity noise of the microchip laser in the low frequency region. These nonlinear effects are expected to be maximum at twice the relaxation oscillation frequency and at zero frequency.

We have implemented a nonstandard feedback loop reacting only in a narrow frequency region around the relaxation oscillation peak, while keeping unchanged the noise features of the laser at low frequencies. A significant noise reduction

is observed at low frequency although the feedback loop does not affect this part of the spectrum. In the case of the laser with a feedback loop, good agreement between the measured intensity noise and the predictions of the linearized model is found over the complete frequency range whereas a discrepancy between the model and the experiment was found at $\Omega = 0$ and at $\Omega = 2\Omega_R$ without feedback. Moreover, the magnitude of the extra noise at low frequency is in good agreement with a second order calculation of the nonlinear laser noise. We have thus demonstrated the presence of nonlinear effects in the low frequency region. The cancellation of the nonlinear effects together with the pump noise suppression leads to a minimum intensity noise of 7 dB above the SNL at 40 kHz.

ACKNOWLEDGMENTS

Thanks are due to A. Z. Khoury and F. Marin for useful discussions and to Dr. Aubert, Dr. Molva, and Dr. Fulbert from LETI/CEA for the loan of microlasers. This research was carried out in the framework of the EC ESPRIT Contract ACQUIRE, No. 20029 and the EC TMR microlasers and cavity QED program (Contract No. ERBFMRXCT 96-00066). One of us (A.B.) had the support of TMR Grant No. ERBFMBI CT950204.

APPENDIX

We report the nonvanishing diffusion coefficients for the c -number Langevin forces:

$$2\mathcal{D}_{aa} = (\gamma_a + \gamma'_a)\langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + R(1-p) - g[\langle \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) \rangle], \quad (\text{A1})$$

$$2\mathcal{D}_{bb} = \gamma_b\langle \mathcal{N}_b(t) \rangle + \gamma'_a\langle \mathcal{N}_a(t) \rangle - g[\langle \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) \rangle], \quad (\text{A2})$$

$$2\mathcal{D}_{ab} = -\gamma'_a\langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + g[\langle \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) \rangle], \quad (\text{A3})$$

$$2\mathcal{D}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 2g\langle \mathcal{M}(t)\mathcal{A}(t) \rangle, \quad (\text{A4})$$

$$2\mathcal{D}_{\mathcal{M}^*\mathcal{M}} = (2\gamma_{ab} - \gamma_a - \gamma'_a)\langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + R, \quad (\text{A5})$$

$$2\mathcal{D}_{b\mathcal{M}} = \gamma_b\langle \mathcal{M}(t) \rangle.$$

- [1] A.C. Nilsson, IEEE J. Quantum Electron. 25, 767 (1989).
- [2] A. Arie, S. Schiller, E.K. Gustafson, and R.L. Byer, Opt. Lett. 17, 1204 (1992).
- [3] C. Becher and K.-J. Boller, Opt. Commun. 147, 366 (1998).
- [4] C. Becher and K.-J. Boller, J. Opt. Soc. Am. B 16, 286 (1999).
- [5] A. Bramati, J.P. Hermier, V. Jost, E. Giacobino, E. Molva, L. Fulbert, and J.J. Aubert, Eur. Phys. J. D 6, 513 (1999).
- [6] C.C. Harb, M.B. Gray, H.A. Bachor, R. Schilling, P. Rottengatter, I. Freitag, and H. Welling, IEEE J. Quantum Electron. 30, 2907 (1994).
- [7] M.S. Taubman, H.- Wiseman, D.E. McClelland, and H.A.

- Bachor, J. Opt. Soc. Am. B 12, 1792 (1995).
- [8] E.H. Huntington, B.C. Buchler, C.C. Harb, T.C. Ralph, D.E. McClelland, and H.-A. Bachor, Opt. Commun. 145, 359 (1998).
- [9] B.C. Buchler, E.H. Huntington, C.C. Harb, and T.C. Ralph, Phys. Rev. A 57, 1286 (1998).
- [10] M.I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino, and C. Fabre, Phys. Rev. A 47, 1431 (1993).
- [11] C. Benkert, M.O. Scully, J. Bergou, L. Davidovich, M. Hillery, and M. Orszag, Phys. Rev. A 41, 2756 (1990).
- [12] N.G. Van Kampen, *Stochastic Processes in Physics and*

A. BRAMATI, J.-P. HERMIER, V. JOST, AND E. GIACOBINO

PHYSICAL REVIEW A 62 043806

- Chemistry* (North-Holland, Amsterdam, 1992).
- [13] J. Mertz and A. Heidmann, *J. Opt. Soc. Am. B* **10**, 745 (1993).
- [14] J. Mertz, A. Heidmann, and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **44**, 3229 (1991).
- [15] Yu.M. Golubev and I.V. Sokolov, *Zh. Éksp. Teor. Phys.* **87**, 804 (1984) [*Sov. Phys. JETP* **60**, 234 (1984)].
- [16] Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson, *Phys. Rev. A* **34**, 4025 (1986).
- [17] M.J. Freeman, H. Wang, D.G. Steel, R. Craig, and D.R. Scifres, *Opt. Lett.* **18**, 2141 (1993).
- [18] H. Wang, M.J. Freeman, and D.G. Steel, *Phys. Rev. Lett.* **71**, 3951 (1993).
- [19] M.J. Freeman, H. Wang, D.G. Steel, R. Craig, and D.R. Scifres, *Opt. Lett.* **18**, 379 (1993).
- [20] T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, P. Grelu, J.-F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M.D. Levenson, and E. Giacobino, *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 601 (1995).
- [21] F. Marin, A. Bramati, E. Giacobino, T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, J.-F. Roch, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4606 (1995).

Preprint

Intensity noise of injected Nd:YVO₄ microchip lasers

A. Bramati, J.-P. Hermier, V. Jost and E. Giacobino

Laboratoire Kastler Brossel, Université Pierre et Marie Curie,

Ecole Normale Supérieure, CNRS

4, Place Jussieu, F-75252, Paris Cedex 05, France

(October 26, 2000)

The combined effects of the pump noise suppression and injection locking technique on the intensity noise of a diode pumped Nd:YVO₄ microchip laser are theoretically and experimentally investigated. Complete cancellation of the relaxation oscillation peak is experimentally achieved. Very good agreement between experimental results and theoretical predictions of a fully quantum model describing lasers with injected signal is found.

I. INTRODUCTION

In recent years, intensity noise properties of various kind of lasers have been thoroughly investigated to the search of quiet light sources for applications in metrology, information technology and high precision interferometry [1–3]. Great interest has been focused on diode pumped solid state lasers such as Nd:YAG or Nd:YVO₄ lasers [4–11]. The intensity noise spectrum of these lasers is determined by two dominant factors: the noise of the pump mechanism (for frequencies below the relaxation oscillation) and the resonant relaxation oscillation. The first factor can be partially eliminated using solid state lasers pumped with amplitude squeezed diode lasers [9–11]. The second factor is usually eliminated by using a standard feedback control on the driving current of the pump laser diode. In this case, however, it is well known that the quantum features of the laser intensity noise are completely lost, due to the coupling with the vacuum fluctuations [12–16]. The injection locking of the laser constitutes a very efficient alternative technique: in fact it has been theoretically predicted and experimentally observed that the relaxation oscillation of the slave laser is overdamped when injection locking with an intensity-stabilised master laser is applied [7,8,17]. The cancellation of the relaxation oscillation peak is achieved without affecting the intensity noise features of the injected laser in the low frequency range. In this region, in fact, the intensity fluctuations of the laser are strongly coupled with the pump fluctuations [18] and the intensity noise performances are mainly determined by the noise of the pump mechanism. The combination of pump noise suppression and injection locking is hence a very promising technique which should allow to improve the noise performances of diode pumped solid state lasers: the elimination of the relaxation oscillation peak results in an efficient stabilisation of the intensity noise in the middle frequency region (megahertz range), while the suppression of pump noise should allow to achieve intensity noise reduction below the shot noise level as predicted by theoretical models.

To date some accurate theoretical and experimental investigation have been performed on the effects of pump noise [9–11,18] and injection locking [8] on intensity noise of solid state lasers. However, mainly due to technical limitations no works addressed the experimental

investigation of the combined effects of these techniques. In particular, no experimental studies combining pump noise suppression based on amplitude squeezed pump laser diode and injection locking by an intensity-stabilised master laser can be found in literature. Our work is the first attempt to experimentally access for solid state laser an operating regime in which non-classical effects could be relevant. The outline of the paper is as follows. In section II we use a quantum model describing lasers with injected signal for theoretical investigation of the intensity noise properties of an injected Nd:YVO₄ microchip laser pumped by an amplitude squeezed diode laser; an analytical expression is derived for our specific laser which clearly shows the effects of injection locking. In section III the experimental set-up is described. Finally, in section IV, agreement between the experimental realisation and the assumptions of the model is discussed and the experimental results are presented. Complete cancellation of the resonant relaxation oscillation is experimentally achieved and good agreement is found between experimental results and theoretical predictions.

II. THEORY

For a theoretical description of the intensity noise properties of the injected solid state lasers, we have used a full quantum model based on the Langevin equations approach developed in [17]. The model considers a system of homogeneously broadened two-level atoms (assuming that the lower level is not the ground state) in resonant interaction with a mode of the electromagnetic field in a cavity of length L and volume V . The field in the cavity is driven by an external coherent optical signal, also resonant with the cavity mode. The laser dynamics is described by the following stochastic c -number Langevin equations:

$$\dot{\mathcal{A}}(t) = -\kappa/2 \mathcal{A}(t) + g\mathcal{M}(t) + \kappa/2 \lambda(t) + \mathcal{F}_\gamma(t) \quad (1)$$

$$\dot{\mathcal{M}}(t) = -\gamma_{ab}\mathcal{M}(t) + g[\mathcal{N}_a(t) - \mathcal{N}_b(t)]\mathcal{A}(t) + \mathcal{F}_\mathcal{M}(t) \quad (2)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_a(t) = R - (\gamma_a + \gamma'_a)\mathcal{N}_a(t) - g[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t)] + \mathcal{F}_a(t) \quad (3)$$

$$\dot{\mathcal{N}}_b(t) = -\gamma_b\mathcal{N}_b(t) + \gamma'_a\mathcal{N}_a(t) + g[\mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) + \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t)] + \mathcal{F}_b(t) \quad (4)$$

The stochastic c -number variable $\mathcal{A}(t)$ represents the electromagnetic field. $\lambda(t)$ represents the injected coherent optical signal. The injected field is assumed to be in a coherent state, this means that its fluctuations are equivalent to the vacuum fluctuations. In some case, this could limit the possibility to apply the model to describe a realistic experiment, since the master laser used for the injection locking may exhibit some excess noise. More general models dealing with arbitrary noise of the injected field have been developed [7]. However, we will show in next section that our experimental conditions meets very well the assumptions of the model. \mathcal{N}_a and \mathcal{N}_b represent the macroscopic atomic population of the upper and lower level respectively. $\mathcal{M}(t)$ represents the macroscopic atomic polarisation. κ is the total cavity damping constant: we assume a definition of κ that accounts for internal optical losses: $\kappa = \kappa_{out} + \kappa_{losses}$, where κ_{out} represents the output coupling, and κ_{losses} the internal optical losses. γ_a and γ_b are the decay rates of the populations of the upper and lower levels to other atomic levels; γ'_a is the spontaneous decay rate between the lasing levels and γ_{ab} is the decay rate of the atomic polarisation. R is the mean pumping rate. The constant g corresponds to the electric dipole coupling between the two-level atoms and the

field. The functions $\mathcal{F}_k(t)$ with $k = \gamma, \mathcal{M}, a, b$ are the stochastic c -number Langevin forces with the properties:

$$\langle \mathcal{F}_k(t) \rangle = 0 \quad (5)$$

$$\langle \mathcal{F}_k(t) \mathcal{F}_l(t') \rangle = 2\mathcal{D}_{kl} \delta(t - t') \quad (6)$$

where \mathcal{D}_{kl} represents the diffusion coefficient for the c -number Langevin force. The nonvanishing diffusion coefficients are given in the appendix.

The steady state is obtained from Eqs.(1)-(4) by neglecting the fluctuation terms and setting the time derivatives equal to zero. Expressing the atomic variables in terms of the steady state field \mathcal{A}_s one gets:

$$\mathcal{N}_{as} = \frac{R}{\gamma_a + \gamma'_a} + \frac{\kappa\gamma_{ab}\gamma_b}{2g^2(\gamma_a + \gamma'_a)} \left(1 - \frac{\lambda}{\mathcal{A}_s}\right) \quad (7)$$

$$\mathcal{N}_{as} - \mathcal{N}_{bs} = \frac{\kappa\gamma_{ab}}{2g^2} \left(1 - \frac{\lambda}{\mathcal{A}_s}\right) \quad (8)$$

$$\mathcal{M}_s = \frac{\kappa}{2g} \left(1 - \frac{\lambda}{\mathcal{A}_s}\right) \mathcal{A}_s \quad (9)$$

where the steady state field \mathcal{A}_s is a solution of the equation

$$\lambda = \frac{I - I_0}{I + 1} \mathcal{A}_s \quad (10)$$

I and I_0 represent the normalised intensity for the laser with and without an injected signal respectively. Their definitions are as follows:

$$I = \frac{|\mathcal{A}_s|^2}{|\mathcal{A}_{sat}|^2}, \quad I_0 = \frac{|\mathcal{A}_0|^2}{|\mathcal{A}_{sat}|^2} \quad (11)$$

where

$$|\mathcal{A}_{sat}|^2 = \frac{\gamma_{ab}\gamma_b}{2g^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_a + \gamma_b} \quad (12)$$

is the saturation intensity for the free-running laser ($\lambda = 0$) and

$$|\mathcal{A}_0|^2 = |\mathcal{A}_{sat}|^2 (R/R_{th} - 1) \quad (13)$$

is the steady state intensity for the free-running laser. R_{th} represents the threshold pumping rate for the free running laser given by

$$R_{th} = k \frac{\gamma_{ab}\gamma_b}{2g^2} \frac{\gamma_a + \gamma'_a}{\gamma_b - \gamma'_a} \quad (14)$$

By linearizing the Eqs. (1)-(4) around the steady state solutions and by applying the Fourier transform to the field and atomic variables, one gets a linear system of algebraic

equations. Its solution allows to calculate analytically the intensity noise spectrum at the laser output as a function of the relaxation rates and the pump noise. The derived expression is quite general and does not rely on any adiabatic elimination of variables, hence it is suitable to describe any type of lasers. However, the laser under investigation in our experiment is a Nd:YVO₄ laser belonging to the third class lasers: for these lasers the decay rate of the atomic polarisation γ_{ab} is much faster than the other relaxation rates. In this condition, it is possible to perform an adiabatic elimination of the atomic polarisation and derive an approximate expression for the intensity noise spectrum at the laser output.

In the original formulation of the model [17] the pump noise is described by the parameter p ranging from 0 to 1 ($p = 0$ for poissonian pump; $p = 1$ for regular pump). In order to reproduce the experimental conditions more precisely, we generalize the model by introducing the spectral density of the pump noise $s(\tilde{\Omega})$ normalised to the shot noise.

According with [17], the normalised intensity noise spectrum at the laser output for a third class laser is given by:

$$V_{out}(\tilde{\Omega}) = 1 + \eta \frac{2b(a+a')}{b-a'} \frac{1}{D(\tilde{\Omega})} \left((b^2 + \tilde{\Omega}^2) \left[(a+a')^2 + \tilde{\Omega}^2 \right] \frac{n}{a+a'} \right. \quad (15)$$

$$+ 2w^2 \{ [(b-a')^2 + \tilde{\Omega}^2] [n + (s(\tilde{\Omega}) - 1) r/2]$$

$$- [(b-a')(a+a') + \tilde{\Omega}^2] \left(r - \frac{a+2a'}{a+a'} n \right)$$

$$\left. + [(a+a')^2 + \tilde{\Omega}^2] \frac{a'}{a+a'} n \right)$$

where we set $p(\tilde{\Omega}) = 1 - s(\tilde{\Omega})$, and $\eta = \kappa_{out}/\kappa$ represents the correction for internal optical losses. The dimensionless parameters a , b and the dimensionless noise frequency $\tilde{\Omega}$ are defined as follows:

$a \equiv \gamma_a/\kappa$ (respectively $b \equiv \gamma_b/\kappa$) is the normalised decay rate of the upper level (respectively lower level);

$a' \equiv \gamma_{a'}/\kappa$ is the normalised spontaneous decay rate between the lasing levels;

$x \equiv \lambda/\mathcal{A}_s$; then x^2 corresponds to the ratio between the injected power and the power emitted by the laser;

$\tilde{\Omega} \equiv \Omega/\kappa$

We also used the following definitions:

$$D(\tilde{\Omega}) = \left| \left(\frac{1}{2}x - i\tilde{\Omega} \right) (b - i\tilde{\Omega})(a + a' - i\tilde{\Omega}) + 2w^2(a + b - 2i\tilde{\Omega}) \left(1 - x/2 - i\tilde{\Omega} \right) \right|^2 \quad (16)$$

$$n = \frac{\tau(a+a') + (b-a')(1-x)}{a+b} \quad \text{and} \quad w^2 = \frac{(a+a')b(r-1+x)}{2(a+b)(1-x)} \quad (17)$$

The normalised pump parameter r is defined as the ratio between the pump power p_{pump} and the threshold pump power p_{th} : $r = p_{pump}/p_{th}$. In order to gain some physical insight on effects of the injection on the intensity noise features of the laser from eq. (15), we can make some approximations which lead to a more simplified formula. For the lasers under investigation the conditions $1 \gg b \gg a \gg a'$ are verified. Moreover, from the intensity

noise spectrum of these lasers, shown in fig. 1, it is evident that the minimum intensity noise is found at zero frequency: setting $\tilde{\Omega} = 0$ in eq. (15) and with the additional conditions $x, rx \ll 1$ usually verified in the experiment we derive the very simple following formula:

$$V_m(0) = 1 - \eta + \eta \left[s + \frac{s+1-2x}{r-1} + \frac{2(1-x)}{(r-1)^2} \right] \quad (18)$$

From eq. (18) we can derive the condition for observing squeezing of the intensity noise at the laser output:

$$r > \frac{3-s-2x}{1-s} \equiv r_{sq} \quad (19)$$

Eq. (19) indicates that intensity squeezing can only be observed with a squeezed pump ($s < 1$). The effect of the injection is also clearly indicated by eq. (19): the normalised pump parameter r_{sq} which allows to generate squeezing in the injection locked laser is lower with respect to the corresponding value for the free running laser, obtained setting $x = 0$ in eq. (19). Inspection of eq. (18) clearly shows that the intensity noise of the laser decreases with the pump rate r and is limited by the overall quantum efficiency of the laser which accounts for internal optical losses and for efficiency of the pump mechanism. This behaviour is analogous to that exhibited by the free running laser, as we have pointed out in a previous work [11]. The role of the injection locking is also evident from eq. (18): the intensity noise at zero frequency is less for the injected laser than for the free running one. This behaviour is confirmed by the predictions obtained from the general formula (15) as shown in fig. 2. In this figure we report the comparison, in the low frequency range, between the intensity noise spectra for the injected laser and for the free running laser. It is worth stressing that eqs. (18)-(19) were derived in the limit $x, rx \ll 1$: taking into account typical experimental values of x (of the order of 0.1 or less), the previous condition implies that eqs. (18)-(19) are good approximations (within 5%) of the general formula reported in eq. (15) only for $r < 10$. Despite to the small range of validity, these equations cover all the experimentally accessible values for the normalised pump parameter r , as we will show in next section. The intensity noise properties of the injected Nd:YVO₄ laser in the overall frequency range are investigated using eq. (15). In fig. 1 we have reported a comparison between the intensity noise spectra of the free-running laser and the injected laser for different values of the injected power. The spectra are calculated with the parameters corresponding to our experimental conditions listed in Table I and assuming a noiseless pump. Another significant effect of the injection is evident in fig. 1: the injection causes a very large reduction (depending on the injected power) of the excess noise in the frequency region around the relaxation oscillation peak. The strength of the relaxation oscillation peak is determined by the term $D(\tilde{\Omega})$ (eq. (16)) which has the typical structure of a damped oscillator and appears in the denominator of eq. (15). To understand the reason of the drastic reduction of the relaxation oscillation peak we have to compare $D(\tilde{\Omega})$ with the corresponding term for the free running laser, obtained by setting $x = 0$ in eq. (16). Taking into account the relation verified between the different laser parameters, i.e. $a' \ll a \ll \tilde{\Omega}_{rel} \ll x, b, \ll 1$, where $\tilde{\Omega}_{rel}$ is the dimensionless oscillation relaxation frequency, $D(\tilde{\Omega})$ can be written, for the injected laser, in a range of frequencies around $\tilde{\Omega}_{rel}$, in the very simple following form:

$$D_{inj}(\tilde{\Omega}) = b^2 \left| \tilde{\Omega}^2 - i\frac{x}{2}\tilde{\Omega} - a(r-1) \right|^2 \quad (20)$$

Starting from the same eq. (16), setting $x = 0$ and making the same approximations, we can write for the free running laser:

$$D_{fr}(\tilde{\Omega}) = b^2 \left| \tilde{\Omega}^2 + a \left[1 + (r-1) \frac{2}{b} \right] i \tilde{\Omega} - a(r-1) \right|^2 \quad (21)$$

The strong reduction of the relaxation oscillation peak in the injection locked laser is due to the very large damping term $i \frac{x}{2} \tilde{\Omega}$ with respect to the free running laser, where the damping term is given by $a \left[1 + (r-1) \frac{2}{b} \right] i \tilde{\Omega}$. Assuming a very weak injected power, for example 10^{-4} times smaller than the free running emitted power, we have $x = 0.01$. A calculation with the parameters of our laser and with the normalised pump parameter $r = 4$ (a typical value used in the experiments) gives 2.1×10^{-4} for the damping term of the free running laser. The attenuation of the relaxation oscillation peak in the injected laser scales roughly as the square of the ratio between the corresponding damping terms. In this specific case the peak is decreased by about 30 dB. From the theoretical analysis it is clear that the combination of the principle of pump noise suppression with the injection locking is a very promising technique to obtain low intensity noise at the laser output. In fact we have shown that by injection locking it is possible to generate squeezed states for lower values of pump parameter r and to achieve better noise reduction in the low frequency region. The cancellation of the relaxation oscillation peak is also very important in order to improve the noise performances of these lasers in the low frequency region. In fact in a previous work [16] we have demonstrated the occurrence of non linear effects in the low frequency region of the noise spectra of these lasers in free running regime, due to the very large excess noise of the relaxation oscillation peak. The non linear effects result in an increase of the intensity noise at low frequency with respect to the theoretical predictions of the standard linear model based on quantum Langevin approach. The strong reduction of the relaxation oscillation peak should eliminate the extra noise in the low frequency region and allow to take advantage from the pump noise suppression. It is worth stressing that the investigation of these effects was not accesible in previous experiments which were dealing with Non Planar Ring Oscillator Nd:YAG lasers that are usually pumped by laser diode array, due to their relatively high oscillation threshold. The large intensity noise (typically more than 50 dB) exhibited by pump beam prevents to investigate these effects which result completely masked. In our case the choice of a microchip Nd:YVO₄ laser is determined by the necessity of having a low oscillation threshold which allows us to use a single element laser diode as a pump laser. The intensity noise of this kind of lasers can be reduced below the shot noise level applying well established techniques [1,3,19–23]. Our experimental set-up based on amplitude squeezed pump diode laser has been developed on the precise purpose of achieving operating regimes of the Nd:YVO₄ microchip laser suitable for the investigation of possible non-classical effects.

III. EXPERIMENTAL SET-UP

The experimental set-up for the noise measurements on the injected Nd:YVO₄ microchip laser is shown in fig. 3. The amplitude squeezed diode laser used for optical pumping of solid state laser is an index guided quantum well GaAlAs laser diode (SDL 5422H1) operating at 810 nm. Noise reduction in the pump beam is achieved by driving the diode laser with a

high impedance constant current source and suppressing the side modes using feedback from an external grating in an extended cavity laser [1,3,19–23]: by tilting the grating, the laser wavelength can be tuned to match the maximum of the Nd:YVO₄ line absorption at 808.5. Astigmatism in the beam is corrected by means of anamorphic prisms. Two optical isolators (for a total isolation of 70 dB) are employed to prevent back reflection in the pump laser. The optical power available for pumping process is 45 mW (due to the losses of the grating): this allows us to operate the laser about 4 times above threshold. The intensity noise of the pump diode laser is measured by a standard balanced detection (two high efficiency EG&G FND100 PIN photodiodes), which allows to measure, under the same conditions, the shot noise and the intensity noise of the laser beam. We performed several tests in order to check the reliability of the shot noise measured in this way, as described in [23]. The common mode rejection of the balanced detection is better than 30 dB in the range of 0 - 30 MHz; electronic and dark noise are typically more than 10 dB below the shot noise level. The pump beam is sent to the microchip laser by mean of two mirrors and focused into the laser with a $f = 8$ mm objective. The polarisation of the pump beam is fixed by a half-wave plate in order to achieve the maximum absorption in the Nd:YVO₄ crystal. The microchip laser is mounted on a xyz-translation stage which allows an optimum alignment.

The Nd:YVO₄ microchip laser is 300 μm long, with a plane-plane monolithic cavity (the stability is ensured by thermal lens effects) in which the mirrors were deposited directly onto the crystal. The output mirror and back reflector have reflectivities of 97% and 99.5% respectively at 1.064 μm . The mirrors do not have special coatings for wavelength of pump radiation at 810 nm. Accurate measurements show a reflectivity of 24% and a transmissivity of 7% for pump radiation.

The injection locking was implemented by using a commercial Nd:YAG laser as the master laser. The frequency of the master laser is about 120 GHz below the Nd:YVO₄ laser frequency at room temperature. The frequency of the slave laser is tuned inside the injection locking bandwidth by heating the laser crystal. The temperature operation is around 100°C; the temperature stabilisation by a PID control ensures variations less than 0.01°C. The frequency shift versus the temperature for Nd:YVO₄ lasers was found to be -1.6 GHz /°C (see also [24]): this implies that the jitter of the laser due to temperature variations is of the order of ten megahertz, and then negligible with respect to the observed injection bandwidth of about 200 MHz (the bandwidth calculated from the usual formula involving the cavity parameters, injected and emitted powers is expected to be 1 GHz). The master laser beam enters the output coupler of the slave laser through the escape port of an optical isolator which automatically match the polarisation of the master beam to the slave one; the gaussian parameters of the master beam are reshaped with a telescopic lens system in order to have an efficient mode matching with the slave laser. The power effectively coupled into the slave laser is evaluated (from the observed injection bandwidth) to be 10% of the incident power, typically ranging between 100 to 500 μW . The emission wavelength of both the master and slave laser are measured by a high resolution monochromator. The injection locking is monitored with a Fabry-Perot analyser. With this experimental configuration we achieved a very stable injection locking operation over several hours.

For the intensity noise measurements on the emitted beam we used the following experimental set-up. For noise measurements up to 30 MHz, balanced detection is no longer reliable due to the very high excess noise of the relaxation peak (more than 80 dB) which

exceeds the common mode rejection ratio (typically 30 dB). Therefore in this range of frequencies we choose to calibrate the shot noise level with an independent source. For the calibration we use the noise obtained by direct detection on one photodiode of attenuated radiation emitted by a shot noise limited diode laser. It is worth saying that no correction has to be calculated, due to the difference in the wavelength of the two beam. In fact we detect the noise of the photocurrent which is independent on the wavelength. We check carefully linear dependence of the calibrated shot noise signal with the optical power incident on the photodiode. The shot noise obtained in this way was in agreement within 0.1 dB with the noise obtained by a thermal light generating the same DC current on the photodiode.

IV. EXPERIMENTAL RESULTS

In this section we present the experimental results obtained with the injected Nd:YVO₄ microchip laser previously described. In order to make a comparison between theory and experiment we have to determine all the parameters of the model. A set of values for the parameters describing the microchip laser (relaxations rates and cavity damping) has been determined in a previous work [11] in which an accurate investigation of the noise properties of the free-running laser is carried out. The experimental determination of the optical pump power threshold and the measurement of the optical pump power allows us to easily calculate the normalised pump parameter. With the laser operating at a temperature of 100°C we have observed significant variations in the laser parameters with respect to the laser at room temperature. Assuming that the relaxation rates for the atomic populations and the atomic polarisation are virtually insensitive to temperature variations, the total cavity dumping constant κ can be determined by the dependence of the relaxation oscillation frequency on the pump parameter r [11]. We have found for the total cavity damping $\kappa = 9 \times 10^9 \text{ s}^{-1}$; the output coupling κ_{out} , calculated from the reflectivities of the cavity mirrors, is found to be 8.36×10^{-9} ; the pump power threshold for oscillation is about 13 mW (4.2 mW at room temperature), the quantum efficiency of the pump mechanism 12.5% (40% at room temperature) and the maximum emitted power about 3.5 mW (10 mW at room temperature). We report in Table 1 the values of the parameters used in the numerical simulations. The sharp worsening of the performances of the Nd:YVO₄ microchip laser is strictly related to the heating of the crystal: in fact, as previously explained, this allows to tune the slave frequency at a rate of $-1.6 \text{ GHz} / ^\circ\text{C}$; on the other hand the shift in the gain center frequency induced by heating is $-0.53 \text{ GHz} / ^\circ\text{C}$ [24], The oscillating mode, at resonance with the center of the gain bandwidth at room temperature, is more and more detuned off resonance, as the temperature is increased. In our case, the total detuning from the gain center frequency (estimated to be 80 GHz) together with the FWHM gain bandwidth of the Nd:YVO₄ (257 GHz [24,25]) prevents us to obtain better performances from our laser.

We consider now the noise features of the master laser: our commercial laser is equipped with a standard feedback loop on the pump in order to eliminate the relaxation oscillation peak. Thus, the intensity noise spectrum at the output of the laser, for an emitted power of 700 mW, is rather flat over the whole range of observation (0-30 MHz) and exhibit an excess noise of 30 dB above the shot noise level (SNL). The theoretical model assumes that the injected field is in a coherent state i.e. with intensity noise limited to the SNL. However, due

to optical losses, the intensity noise of the master beam scales according the usual formula:

$$V_{inj}(\tilde{\Omega}) = 1 + \eta(V_{out}(\tilde{\Omega}) - 1) \quad (22)$$

where V_{inj} represents the actual normalised intensity noise of the injected beam and V_{out} is the normalised intensity noise at the output of the master laser; η is the optical attenuation ($\eta = 0.1 \text{ mW} / 700 \text{ mW} = 1.4 \times 10^{-4}$ in this case). It is evident from eq. (22) that the intensity noise of the injected beam can be identified with the SNL with a very good approximation, according with the assumption of the model.

In the theoretical model the intensity noise of the Nd:YVO₄ microchip laser depends on the intensity noise of the pump beam. We use in the model the pump noise of the grating extended cavity diode laser, measured with high accuracy in [11] (see fig. 4): after correction for detection efficiency the amount of amplitude squeezing at the laser output is 0.7 dB, flat over the whole frequency range between 1 to 20 MHz. For frequencies lower than 300 kHz the pump laser diode exhibit slight excess noise (<3 dB). For frequencies below 50 kHz technical 1/f noise increases the excess noise up to 10 dB.

The experimental results obtained with the injected Nd:YVO₄ microchip laser are shown in fig. 5. The graphic reports the normalised intensity noise spectra for different values of the injected master field amplitudes: good agreement is found between the predictions of the theoretical model (thick line) over a large range of frequencies. The parameters used in the calculations are reported in Table 1. As expected, the relaxation oscillation peak is completely damped (more than 60 dB of reduction with respect to the free-running laser) and the microchip laser exhibit a flat intensity noise spectrum with a noise level varying between 25 to 17 dB above the shot noise level, decreasing with the injected power.

The quite high excess noise is due to the poor laser features (namely high oscillation threshold and low quantum efficiency observed at high temperature); significant improvement is expected for injection locked laser operating at room temperature.

V. CONCLUSION

We have theoretically and experimentally investigated the noise properties of an injection locked diode pumped Nd:YVO₄ microchip laser. The theoretical analysis clearly shows the effects of the injection: intensity squeezed light is achievable with lower pump parameters and the obtained noise reduction below the shot noise level are improved with respect to the free running regime. Moreover the relaxation oscillation peak is expected to be completely eliminated. The experimental intensity noise spectra confirm the theoretical predictions, showing that the injection technique allows to eliminate the relaxation oscillation peak, responsible for the huge excess noise that affect the spectrum of the free-running laser in the megahertz range. We found a good agreement between experimental results and theoretical calculations based on a fully quantum model describing the noise features of an injected laser. The minimum intensity noise obtained with this experimental configurations is 17 dB above the SNL. Further improvements could be achieved by implementing the injection locking at room temperature and increasing the pump rate in order to operate the microchip laser far above threshold.

ACKNOWLEDGMENTS

Thanks are due to A. Z. Khoury and F. Marin for useful discussions and to Mr. Aubert, Molva and Fulbert from LETI/CEA for the loan of microlasers. This research was carried out in the framework of the EC ESPRIT Contract ACQUIRE no. One of us (A. B.) had the support of a TMR fellowship no. ERBFMBI CT950204.

APPENDIX

We report the non-vanishing diffusions coefficients for the c -number Langevin forces

$$2\mathcal{D}_{aa} = (\gamma_a + \gamma'_a) \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + R(1 - p) - g[\langle \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) \rangle] \quad (\text{A1})$$

$$2\mathcal{D}_{bb} = \gamma_b \langle \mathcal{N}_b(t) \rangle + \gamma'_a \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle - g[\langle \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) \rangle] \quad (\text{A2})$$

$$2\mathcal{D}_{ab} = -\gamma'_a \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + g[\langle \mathcal{M}^*(t)\mathcal{A}(t) + \mathcal{A}^*(t)\mathcal{M}(t) \rangle] \quad (\text{A3})$$

$$2\mathcal{D}_{\mathcal{M}\mathcal{M}} = 2g \langle \mathcal{M}(t)\mathcal{A}(t) \rangle \quad (\text{A4})$$

$$2\mathcal{D}_{\mathcal{M}^*\mathcal{M}} = (2\gamma_{ab} - \gamma_a - \gamma'_a) \langle \mathcal{N}_a(t) \rangle + R \quad (\text{A5})$$

$$2\mathcal{D}_{b\mathcal{M}} = \gamma_b \langle \mathcal{M}(t) \rangle \quad (\text{A6})$$

-
- [1] H. Wang, M. J. Freeman, and D. G. Steel, Phys. Rev. Lett. **71**, 3951 (1993)
 - [2] S. Inoue, S. Machida, Y. Yamamoto, and H. Ozhu, Phys. Rev. A **48**, 2230 (1993)
 - [3] F. Marin, A. Bramati, E. Giacobino, T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, J.-F. Roch, and P. Grangier, Phys. Rev. Lett. **75**, 4606 (1995)
 - [4] A. C. Nilsson, IEEE J. Quantum Electron. **25**, 767 (1989)
 - [5] A. Arie, S. Schiller, E. K. Gustafson, and R. L. Byer, Opt. Lett. **17**, 1204 (1992)
 - [6] I. Freitag and H. Welling, Appl. Phys. B **58**, 537 (1994)
 - [7] T. C. Ralph, C. C. Harb, and H.-A. Bachor, Phys. Rev. A **54**, 4359 (1996)
 - [8] C. C. Harb, T. C. Ralph, E. H. Huntington, I. Freitag, D. E. McClelland, and H.-A. Bachor, Phys. Rev. A **54**, 4370 (1996)
 - [9] C. Becher, K.-J. Boller, Optics Comm. **147**, 366 (1998)
 - [10] C. Becher, K.-J. Boller, J. Opt.Soc.Am.B **16**, 286,(1999)
 - [11] A. Bramati, J. P. Hermier, V. Jost, E. Giacobino, E. Molva, L. Fulbert and J.J. Aubert, Eur. Phys. J. D, **6**, 513 (1999)
 - [12] C. C. Harb, M. B. Gray, H. A. Bachor, R. Schilling, P. Rottengatter, I. Freitag and H. Welling, IEEE J. Quantum Electron. **30**, 2907, (1994)
 - [13] M. S. Taubman, H. Wiseman, D.E. McClelland and H.A. Bachor, J. Opt. Soc. Am. B **12**, 1792 (1995)

- [14] E. H. Huntington, B. C. Buchler, C. C. Harb, T. C. Ralph, D. E. McClelland, H.-A. Bachor Optics Comm. **145**, 359 (1998)
- [15] B. C. Buchler, E. H. Huntington, C. C. Harb, and T. C. Ralph, Phys. Rev. A, **57**, 1286 (1998)
- [16] A. Bramati, J. P. Hermier, V. Jost, and E. Giacobino, to be published in Phys Rev.A
- [17] M. Fontenelle and L. Davidovich, Phys. Rev. A **51**,2560 (1995)
- [18] C. C. Harb, T. C. Ralph, E. H. Huntington, D. E. McClelland, H.-A. Bachor, I. Freitag J. Opt. Soc. Am. B **14**, 2936 (1997)
- [19] Yu. M. Golubev, I. V. Sokolov, Zh. Eksp. Teor. Phys. **87**, 804 (1984) [Sov. Phys. JETP **60**, 234 (1984)]
- [20] Y. Yamamoto, S. Machida, O. Nilsson, Phys. Rev. A **34**, 4025 (1986)
- [21] M. J. Freeman, H. Wang, D. G. Steel, R. Craig and D. R. Scifres, Opt. Lett. **18**, 2141 (1993)
- [22] M. J. Freeman, H. Wang, D. G. Steel, R. Craig and D. R. Scifres, Opt. Lett. **18**, 379, (1993)
- [23] T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, P. Grelu, J.-F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M.D. Levenson, and E. Giacobino, Quantum Semiclass. Opt. **7**, 601 (1995)
- [24] T. Taira, A. Mukai, Y. Nozawa, and T. Kobayshi, Opt. Lett. **16**, 1955 (1991)
- [25] G. J. Kintz and T. Baer, IEEE J. Quantum Electron. **26**, 1457 (1990)

FIGURE CAPTIONS

FIG. 1. Calculated normalised intensity noise spectra of the injected Nd:YVO₄ microchip laser with the parameters given in the Table 1 for different injected powers ($x = 0, 0.1, 0.01, 0.001$). The pump is assumed to be noiseless ($s = 0$). The normalised pump parameter is $r = 3$

FIG. 2. Calculated normalised intensity noise spectra in the low frequency region for the injected ($x = 0.1$) and free running ($x = 0$) Nd:YVO₄ microchip laser. The parameters are given in the Table 1. The pump is assumed to be noiseless ($s = 0$). The normalised pump parameter is $r = 3$

FIG. 3. Experimental set-up for noise measurements in the injected Nd:YVO₄ microchip laser.

FIG. 4. Normalised intensity noise spectrum at the laser output (after correction for detection efficiency) for the grating extended cavity laser diode used as pump laser.

FIG. 5. Normalised experimental and theoretical (thick line) intensity noise spectra of the injected Nd:YVO₄ microchip laser for different injected powers ($x = 0, 0.16, 0.22, 0.28, 0.32, 0.36$). The parameters used in the calculations are given in the text; normalised pump parameter is $r = 3.5$. The pump noise corresponds to the experimentally measured spectrum of the pump diode laser, shown in fig 4.

Table 1. Values of the laser parameters used for theoretical calculations.

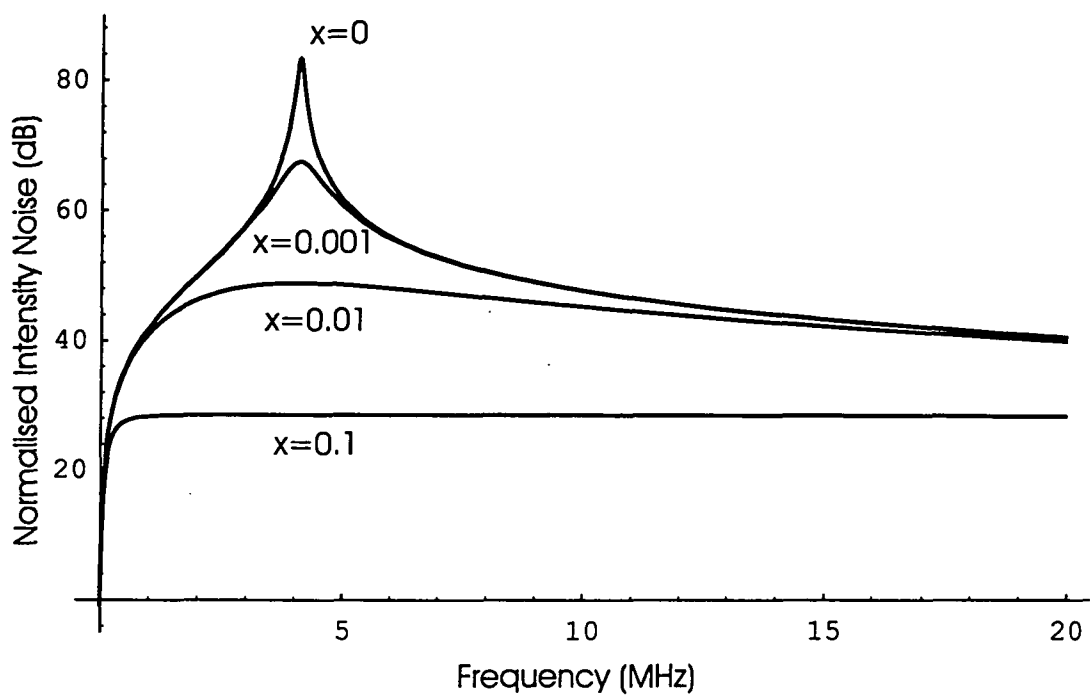


Fig. 1

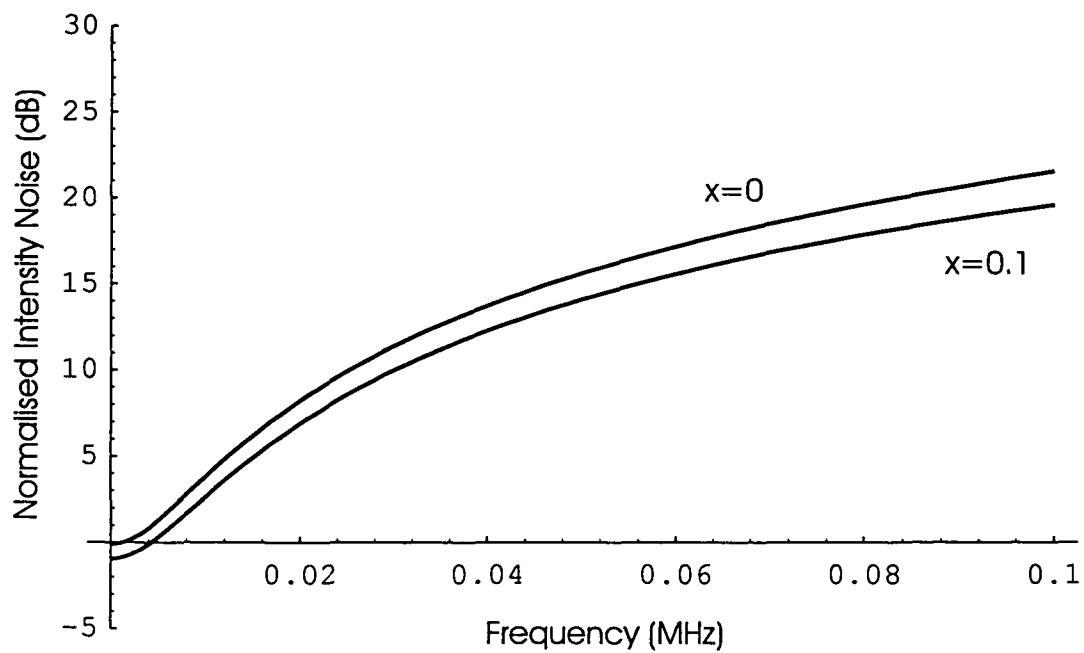


Fig. 2

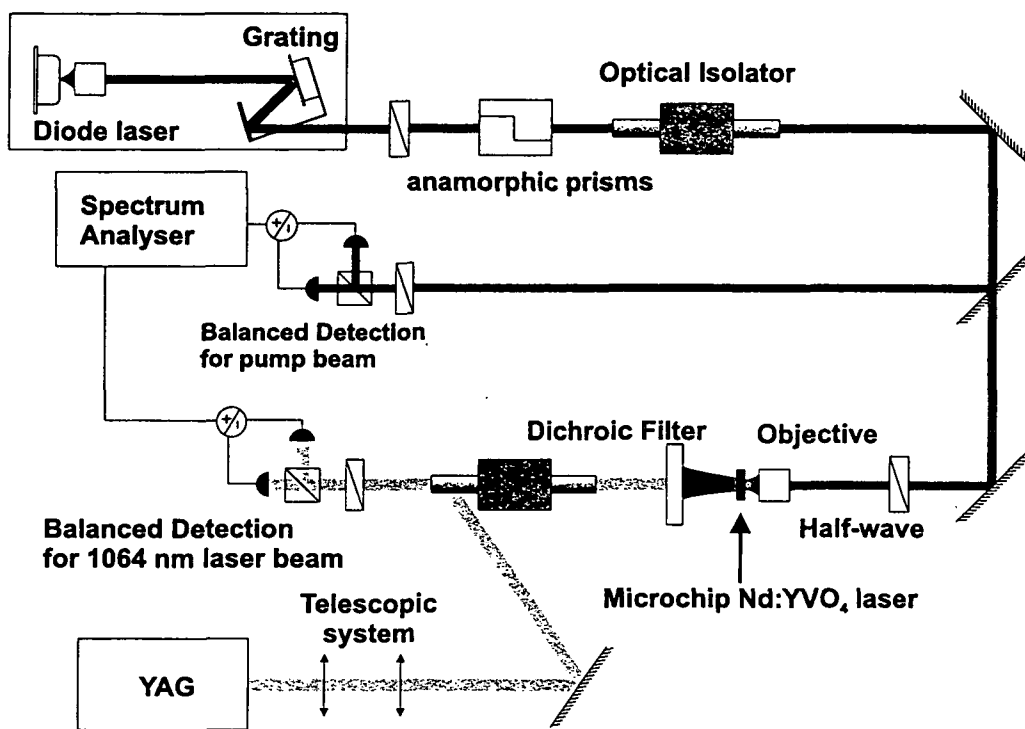


Fig. 3

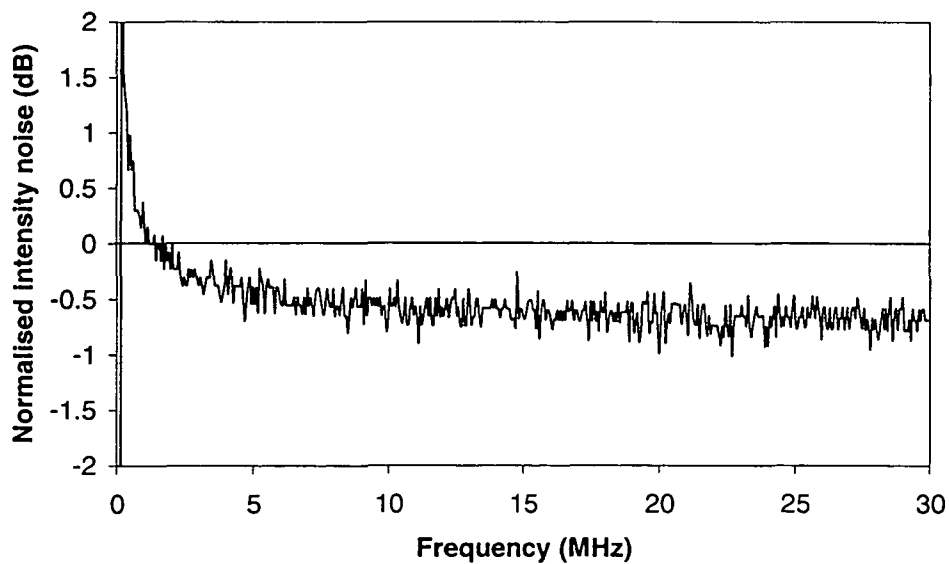


Fig. 4

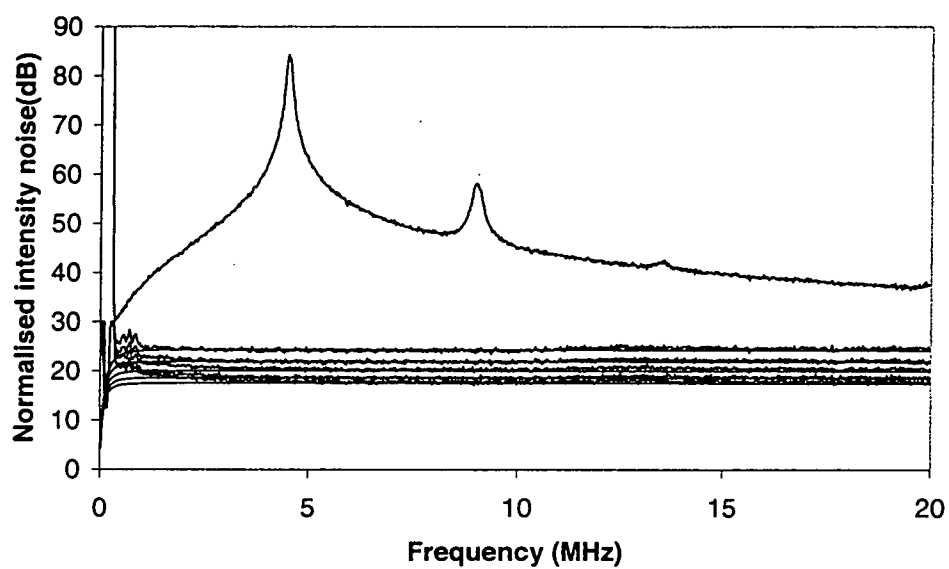


Fig. 5

Parameter	Value
γ_a	$3.3 \times 10^4 \cdot s^{-1}$
γ'_a	$3.3 \times 10^3 \cdot s^{-1}$
γ_b	$3 \times 10^9 \cdot s^{-1}$
γ_{ab}	$7 \times 10^{11} \cdot s^{-1}$
κ	$1.56 \times 10^9 \cdot s^{-1}$
κ_{out}	$8.36 \times 10^9 \cdot s^{-1}$

Tab. 1

Conclusion

Dans ce manuscrit, nous avons détaillé l'étude du bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale, les VCSELs, pompés en suivant le principe de la pompe régulière. Ces microlasers monomodes longitudinaux montrent la possibilité d'émettre des faisceaux comportant plusieurs modes transverses au-dessus du seuil. C'est ce comportement multimode qui donne au bruit des VCSELs des caractéristiques particulières.

Tout d'abord, nous avons étudié le cas où un seul mode transverse polarisé linéairement oscille. Nous avons développé un modèle quantique complet basé sur l'approche d'Heisenberg Langevin appliquée aux équations semi-classiques de San Miguel. Par rapport au modèle quantique standard à deux niveaux, le résultat marquant de notre calcul est l'importance du bruit d'intensité de la polarisation orthogonale au-dessous du seuil. Il donne des caractéristiques particulières au bruit du faisceau, qui, bien qu'un seul mode transverse oscille, ne peut être considéré comme monomode du point de vue du bruit d'intensité. Nos calculs prévoient, par exemple, que le bruit d'une composante de polarisation du faisceau peut dépasser le bruit d'intensité du faisceau dans son ensemble et que deux composantes de polarisation orthogonale peuvent être fortement anticorrélées.

Ces prévisions théoriques ont montré un très bon accord avec les mesures que nous avons effectuées sur le bruit des composantes de polarisation et sur les corrélations entre ces composantes, et ce, sans aucun paramètre ajustable. Notre calcul, qui s'appuie sur un traitement linéarisé du bruit, ne peut toutefois traiter que le cas où le bruit d'intensité de la polarisation orthogonale au mode au-dessus du seuil est faible. Lorsque ce bruit est important, nous avons adopté une approche phénoménologique qui nous a permis de distinguer très nettement deux cas, selon que l'émission sous le seuil a une largeur de raie importante ou non.

Après cette analyse détaillée du bruit en régime monomode transverse, nous nous sommes intéressés au régime multimode. En effet, pour des courants modérés, ces lasers deviennent systématiquement multimodes transverses. Nous avons tout d'abord

montré que, dans ce régime, il est possible d'obtenir des faisceaux au bruit d'intensité comprimé (jusqu'à 15 % sous la limite quantique standard). Si chaque mode qui compose le faisceau est très bruyant, ces modes sont très fortement anticorrélés ce qui donne un bruit d'intensité inférieur au bruit quantique standard pour le faisceau dans son ensemble. L'étude systématique de nombreux échantillons a aussi permis de comprendre l'influence du diamètre transverse des VCSELs sur leurs caractéristiques de bruit. Ainsi, plus les VCSELs ont un faible diamètre, plus leur efficacité quantique est importante, leur seuil bas et le nombre de modes transverses susceptibles d'osciller est faible. Tout ces facteurs concourent à ce que les VCSELs de plus faible diamètre montrent les meilleures caractéristiques de bruit, comme cela a été observé expérimentalement.

Pour les VCSELs qui présentent de l'excès de bruit en régime libre, nous avons démontré que la technique de l'injection optique à l'aide d'une diode laser montée sur réseau permettait de réduire ce bruit et même d'obtenir des faisceaux au bruit d'intensité comprimé (jusqu'à 17 % sous la limite quantique standard).

Enfin, nous nous sommes intéressés à la structure du bruit d'intensité de ces VCSELs dans le plan transverse. Un modèle quantique phénoménologique nous a permis de comprendre la structure de ce bruit dans le cas simple où seuls deux modes transverses oscillent. Nous avons montré que la simple prise en compte du bruit des deux modes, de leur répartition d'intensité dans le plan transverse et de leur corrélation permet de reproduire le profil de bruit obtenu expérimentalement en coupant progressivement le faisceau.

Nous rapportons aussi dans ce manuscrit l'étude du bruit quantique des lasers à solide Nd:YVO₄ pompés par une diode laser au bruit d'intensité comprimé (on applique ici le principe de la pompe régulière en cascade). Nous avons en particulier étudié l'origine de l'excès de bruit observé à basse fréquence par rapport aux prévisions théoriques des modèles standards existant pour ces lasers. Nous avons démontré que ce bruit provenait d'effets non linéaires dus à l'importance du pic d'oscillation de relaxation. Nous avons inclus ces effets non linéaires dans la théorie standard. L'excès de bruit calculé à basse fréquence est alors en accord avec les résultats expérimentaux. De plus, une boucle de rétroaction électro-optique, qui n'agit qu'aux fréquences proches de la fréquence de l'oscillation de relaxation, a permis d'obtenir une réduction significative du bruit à basse fréquence, confirmant ainsi expérimentalement l'importance des effets non linéaires. Enfin, la technique de l'injection optique appliquée à ces lasers à solide a permis de supprimer le pic d'oscillation de relaxation et de réduire ainsi fortement le

bruit d'intensité du faisceau.

Annexe

A Introduction

La méthode des forces de Langevin permet de décrire le couplage entre un système A et un système R constitué d'un grand nombre de degrés de liberté et appelé réservoir. Appliquée à l'optique quantique, elle permet d'étudier de façon générale l'interaction entre un faisceau laser et un milieu matériel et de calculer la densité spectrale de bruit du faisceau.

On considère un système A d'atomes en interaction avec différents champs électromagnétiques. Le réservoir R est quant à lui constitué des modes du champ électromagnétiques [Cohen-Tannoudji 91]. On suppose que les fluctuations des différents opérateurs sont faibles devant leur valeur moyenne. On peut donc linéariser les opérateurs quantiques au premier ordre. Si \hat{A}_i est un opérateur, on a :

$$\hat{A}_i = \langle \hat{A}_i \rangle + \delta \hat{A}_i \quad (\text{A-1})$$

On peut montrer que les équations de Heisenberg-Langevin qui régissent les équations des opérateurs \hat{A}_i sont de la forme :

$$\partial_t \hat{A}_i = \hat{D}_i[\hat{A}_{j \in \{1..n\}}] + \hat{F}_i(t) \quad (\text{A-2})$$

où \hat{D}_i est un opérateur. Les forces de Langevin $\hat{F}_i(t)$ vérifient :

$$\langle \hat{F}_i(t) \rangle = 0 \quad (\text{A-3})$$

et :

$$\langle \hat{F}_i^\dagger(t) \hat{F}_j(t') \rangle = 2\mathcal{D}_{i,j} \delta(t - t') \quad (\text{A-4})$$

La relation d'Einstein généralisée permet de calculer les coefficients $\mathcal{D}_{i,j}$:

$$2\mathcal{D}_{i,j} = - \langle \hat{D}_i \hat{A}_j \rangle - \langle \hat{D}_j \hat{A}_i \rangle + \partial_t \langle \hat{A}_i \hat{A}_j \rangle \quad (\text{A-5})$$

Ces coefficients connus, nous pouvons calculer les fluctuations pour les différents opérateurs.

B Coefficients de diffusion microscopiques

Nous reportons ci-dessous le calcul des coefficients microscopiques à partir de l'équation d'Einstein. Pour alléger les notations, nous avons omis les dépendances en temps des différentes variables (par exemple, la variable $n_{a-}^j(t)$ devient n_{a-}^j).

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{a-}^j \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{a-}^j \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a-}^j \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= \left\langle \gamma_a \hat{n}_{a-}^j + \gamma_j \hat{n}_{a-}^j - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + \gamma_a \hat{n}_{a-}^j + \gamma_j \hat{n}_{a-}^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle -\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right\rangle \\
&= \gamma_a \langle \hat{n}_{a-}^j \rangle + \gamma_j (\langle \hat{n}_{a-}^j \rangle + \langle \hat{n}_{a+}^j \rangle) \tag{B-1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{a+}^j \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{a-}^j) + ig_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\sigma}_+^j - ig_0 \hat{a}_+ \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{a+}^j \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a+}^j \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= -\gamma_j (\langle \hat{n}_{a+}^j \rangle + \langle \hat{n}_{a-}^j \rangle) \tag{B-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{b-}^j \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{b-}^j \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{b-}^j \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= \left\langle ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right\rangle \\
&= 0 \tag{B-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{b+}^j \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_b \hat{n}_{b+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b+}^j - \hat{n}_{b-}^j) - ig_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\sigma}_+^j + ig_0 \hat{a}_+ \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{b+}^j \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{b+}^j \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= 0 \tag{B-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_+^j \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_+^j + ig_0 (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{b+}^j) \hat{a}_+ \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_+^j \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_+^j \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= -\gamma_j \langle \hat{\sigma}_+^j \rangle
\end{aligned} \tag{B-5}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{b+}^j) \hat{a}_+^\dagger \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-6}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^j \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_-^j + ig_0 (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{b-}^j) \hat{a}_- \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^j \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_-^j \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= \langle \gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{n}_{a-}^j \hat{a}_- \\
&\quad + \gamma_a \hat{\sigma}_-^j + \gamma_j \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{n}_{b-}^j \hat{a}_- \\
&\quad - \gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_-^j + ig_0 (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{b-}^j) \hat{a}_- \rangle \\
&= (\gamma_j + \gamma_a) \langle \hat{\sigma}_-^j \rangle
\end{aligned} \tag{B-7}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{n}_{a-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_-^{j\dagger} - ig_0 (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{b-}^j) \hat{a}_-^\dagger \right] \hat{n}_{a-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{n}_{a-}^j \rangle}{dt} \\
&= ig_0 \hat{n}_{a-}^j \hat{a}_-^\dagger - ig_0 \hat{n}_{a-}^j \hat{a}_-^\dagger \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-8}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{a-}^j \hat{n}_{b-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \hat{n}_{b-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{a-}^j \left[-\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a-}^j \hat{n}_{b-}^j \rangle}{dt} \\
&= ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-9}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{a+}^j \hat{n}_{b-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{a-}^j) + ig_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\sigma}_+^j - ig_0 \hat{a}_+ \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \hat{n}_{b-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{a+}^j \left[-\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a+}^j \hat{n}_{b-}^j \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-10}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{b-}^j \hat{n}_{b-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \hat{n}_{b-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{b-}^j \left[-\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{b-}^j \hat{n}_{b-}^j \rangle}{dt} \\
&= \left\langle \gamma_b \hat{n}_{b-}^j + \gamma_j \hat{n}_{b-}^j + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + \gamma_b \hat{n}_{b-}^j + \gamma_j \hat{n}_{b-}^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right\rangle \\
&\quad + \left\langle -\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right\rangle \\
&= \gamma_b \langle \hat{n}_{b-}^j \rangle + \gamma_j (\langle \hat{n}_{b-}^j \rangle + \langle \hat{n}_{b+}^j \rangle)
\end{aligned} \tag{B-11}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{b+}^j \hat{n}_{b-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_b \hat{n}_{b+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b+}^j - \hat{n}_{b-}^j) - ig_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\sigma}_+^j + ig_0 \hat{a}_+ \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \hat{n}_{b-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{b+}^j \left[-\gamma_b \hat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b-}^j - \hat{n}_{b+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{b+}^j \hat{n}_{b-}^j \rangle}{dt} \\
&= -\gamma_j (\langle \hat{n}_{b+}^j \rangle + \langle \hat{n}_{b-}^j \rangle)
\end{aligned} \tag{B-12}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_+^j \hat{n}_{b_-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_+^j + ig_0 (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j) \hat{a}_+ \right] \hat{n}_{b_-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_+^j \left[-\gamma_b \hat{n}_{b_-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b_-}^j - \hat{n}_{b_+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_+^j \hat{n}_{b_-}^j \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-13}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{n}_{b_-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j) \hat{a}_+^\dagger \right] \hat{n}_{b_-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \left[-\gamma_b \hat{n}_{b_-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b_-}^j - \hat{n}_{b_+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{n}_{b_-}^j \rangle}{dt} \\
&= -\gamma_j \langle \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle
\end{aligned} \tag{B-14}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^j \hat{n}_{b_-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_-^j + ig_0 (\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j) \hat{a}_- \right] \hat{n}_{b_-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^j \left[-\gamma_b \hat{n}_{b_-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b_-}^j - \hat{n}_{b_+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_-^j \hat{n}_{b_-}^j \rangle}{dt} \\
&= ig_0 \hat{a}_- \hat{n}_{b_-}^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{n}_{b_-}^j \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-15}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{n}_{b_-}^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_-^{j\dagger} - ig_0 (\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j) \hat{a}_-^\dagger \right] \hat{n}_{b_-}^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \left[-\gamma_b \hat{n}_{b_-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{b_-}^j - \hat{n}_{b_+}^j) - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j + ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{n}_{b_-}^j \rangle}{dt} \\
&= \left\langle \gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_-^{j\dagger} - ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{n}_{b_-}^j + \gamma_b \hat{\sigma}_-^{j\dagger} + \gamma_j \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right. \\
&\quad \left. + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{n}_{a_-}^j - \gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_-^{j\dagger} - ig_0 \hat{a}_-^\dagger (\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j) \right\rangle \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \rangle
\end{aligned} \tag{B-16}$$

On calcule de même :

$$2D_{\hat{n}_{a-}^j \hat{n}_{a+}^j} = -\gamma_j (\langle \hat{n}_{a-}^j \rangle + \langle \hat{n}_{a+}^j \rangle) \quad (\text{B-17})$$

$$2D_{\hat{n}_{b-}^j \hat{n}_{a+}^j} = 0 \quad (\text{B-18})$$

$$2D_{\hat{n}_{a+}^j \hat{n}_{a+}^j} = \gamma_a \langle \hat{n}_{a+}^j \rangle + \gamma_j (\langle \hat{n}_{a+}^j \rangle + \langle \hat{n}_{a-}^j \rangle) \quad (\text{B-19})$$

$$2D_{\hat{n}_{b+}^j \hat{n}_{a+}^j} = 0 \quad (\text{B-20})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_+^j \hat{n}_{a+}^j} = (\gamma_a + \gamma_j) \langle \hat{\sigma}_+^j \rangle \quad (\text{B-21})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{n}_{a+}^j} = 0 \quad (\text{B-22})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_-^j \hat{n}_{a+}^j} = -\gamma_j \langle \hat{\sigma}_-^j \rangle \quad (\text{B-23})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{n}_{a+}^j} = 0 \quad (\text{B-24})$$

$$2D_{\hat{n}_{a-}^j \hat{n}_{b+}^j} = 0 \quad (\text{B-25})$$

$$2D_{\hat{n}_{b-}^j \hat{n}_{b+}^j} = -\gamma_j (\langle \hat{n}_{b-}^j \rangle + \langle \hat{n}_{b+}^j \rangle) \quad (\text{B-26})$$

$$2D_{\hat{n}_{a+}^j \hat{n}_{b+}^j} = 0 \quad (\text{B-27})$$

$$2D_{\hat{n}_{b+}^j \hat{n}_{b+}^j} = \gamma_b \langle \hat{n}_{b+}^j \rangle + \gamma_j (\langle \hat{n}_{b+}^j \rangle + \langle \hat{n}_{b-}^j \rangle) \quad (\text{B-28})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_+^j \hat{n}_{b+}^j} = 0 \quad (\text{B-29})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{n}_{b+}^j} = (\gamma_b + \gamma_j) \langle \hat{\sigma}_+^j \rangle \quad (\text{B-30})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_-^j \hat{n}_{b+}^j} = 0 \quad (\text{B-31})$$

$$2D_{\hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{n}_{b+}^j} = -\gamma_j \langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \rangle \quad (\text{B-32})$$

$$\begin{aligned} 2D_{\hat{n}_{a-}^j \hat{\sigma}_+^j} &= -\left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a-}^j - \hat{n}_{a+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \hat{\sigma}_+^j \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \hat{n}_{a-}^j \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_+^j + ig_0 (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{b+}^j) \hat{a}_+ \right] \right\rangle \\ &\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a-}^j \hat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B-33})$$

$$\begin{aligned} 2D_{\hat{n}_{a+}^j \hat{\sigma}_+^j} &= -\left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{a-}^j) + ig_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\sigma}_+^j - ig_0 \hat{a}_+ \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \hat{\sigma}_+^j \right\rangle \\ &\quad - \left\langle \hat{n}_{a+}^j \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_+^j + ig_0 (\hat{n}_{a+}^j - \hat{n}_{b+}^j) \hat{a}_+ \right] \right\rangle \\ &\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a+}^j \hat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= ig_0 \widehat{n}_{a+}^j \widehat{a}_+ - ig_0 \widehat{n}_{a+}^j \widehat{a}_+ \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-34}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{n}_{b-}^j \widehat{\sigma}_+^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_b \widehat{n}_{b-}^j - \gamma_j \left(\widehat{n}_{b-}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) - ig_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{\sigma}_-^j + ig_0 \widehat{a}_- \widehat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \widehat{\sigma}_+^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \widehat{n}_{b-}^j \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+ \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \widehat{n}_{b-}^j \widehat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \\
&= -\gamma_j \langle \widehat{\sigma}_+^j \rangle
\end{aligned} \tag{B-35}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{n}_{b+}^j \widehat{\sigma}_+^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_b \widehat{n}_{b+}^j - \gamma_j \left(\widehat{n}_{b+}^j - \widehat{n}_{b-}^j \right) - ig_0 \widehat{a}_+^\dagger \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \widehat{a}_+ \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \widehat{\sigma}_+^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \widehat{n}_{b+}^j \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+ \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \widehat{n}_{b+}^j \widehat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \\
&= \langle \gamma_b \widehat{\sigma}_+^j + \gamma_j \widehat{\sigma}_+^j - ig_0 \widehat{n}_{a+}^j \widehat{a}_+ \\
&\quad + \gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \widehat{n}_{b+}^j \widehat{a}_+ \\
&\quad - \gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+ \rangle \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle \widehat{\sigma}_+^j \rangle
\end{aligned} \tag{B-36}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{\sigma}_+^j \widehat{\sigma}_+^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+ \right] \widehat{\sigma}_+^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \widehat{\sigma}_+^j \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+ \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \widehat{\sigma}_+^j \widehat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \\
&= - \left\langle i \frac{g_0}{2} \left(-\widehat{\sigma}_+^j - \widehat{\sigma}_+^j \right) \widehat{a}_+ \right\rangle - \left\langle i \frac{g_0}{2} \left(\widehat{\sigma}_+^j + \widehat{\sigma}_+^j \right) \widehat{a}_+ \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-37}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \widehat{\sigma}_+^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+^\dagger \right] \widehat{\sigma}_+^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \left(\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j \right) \widehat{a}_+ \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \widehat{\sigma}_+^j \rangle}{dt}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= - \left\langle -\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{n}_{a_+}^j - ig_0 \left(-\frac{\hat{\sigma}_+^j}{2} - \frac{\hat{\sigma}_+^j}{2} \right) \hat{a}_+^\dagger \right\rangle \\
&\quad - \left\langle -\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{n}_{a_+}^j + ig_0 \left(-\frac{\hat{\sigma}_+^{j\dagger}}{2} - \frac{\hat{\sigma}_+^{j\dagger}}{2} \right) \hat{a}_+ \right\rangle \\
&\quad + \left\langle ig_0 \hat{\sigma}_+^j \hat{a}_+^\dagger - ig_0 \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{a}_+ - \gamma_a \hat{n}_{a_+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{a_-}^j) \right\rangle \\
&= - \left\langle -2\gamma_{\perp} \hat{n}_{a_+}^j - ig_0 \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{a}_+ + ig_0 \hat{\sigma}_+^j \hat{a}_+^\dagger \right\rangle \\
&\quad + \left\langle ig_0 \hat{\sigma}_+^j \hat{a}_+^\dagger - ig_0 \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \hat{a}_+ - \gamma_a \hat{n}_{a_+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{a_-}^j) \right\rangle \\
&= (2\gamma_{\perp} - \gamma_a - \gamma_j) \langle \hat{n}_{a_+}^j \rangle + \gamma_j \langle \hat{n}_{a_-}^j \rangle
\end{aligned} \tag{B-38}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^j \hat{\sigma}_+^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_-^j + ig_0 (\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j) \hat{a}_-^j \right] \hat{\sigma}_+^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^j \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_+^j + ig_0 (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j) \hat{a}_+ \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_-^j \hat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-39}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{\sigma}_+^j} &= - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_-^{j\dagger} - ig_0 (\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j) \hat{a}_-^\dagger \right] \hat{\sigma}_+^j \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \hat{\sigma}_+^j + ig_0 (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j) \hat{a}_+ \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \hat{\sigma}_+^j \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-40}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{n}_{a_-}^j \hat{\sigma}_+^{j\dagger}} &= - \left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a_-}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{a_+}^j) + ig_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{\sigma}_-^j - ig_0 \hat{a}_- \hat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{n}_{a_-}^j \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \hat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j) \hat{a}_+^\dagger \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d \langle \hat{n}_{a_-}^j \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle}{dt} \\
&= -\gamma_j \langle \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle
\end{aligned} \tag{B-41}$$

$$2D_{\hat{n}_{a_+}^j \hat{\sigma}_+^{j\dagger}} = - \left\langle \left[-\gamma_a \hat{n}_{a_+}^j - \gamma_j (\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{a_-}^j) + ig_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\sigma}_+^j - ig_0 \hat{a}_+ \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \hat{\sigma}_+^{j\dagger} \right\rangle$$

$$\begin{aligned}
& - \left\langle \widehat{n}_{a+}^j \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j) \widehat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
& + \frac{d \langle \widehat{n}_{a+}^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle}{dt} \\
= & \left\langle \gamma_a \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} + \gamma_j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 \widehat{n}_{b+}^j \widehat{a}_+^{\dagger} \right. \\
& + \gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} + ig_0 \widehat{n}_{a+}^j \widehat{a}_+^{\dagger} \\
& \left. - \gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j) \widehat{a}_+^{\dagger} \right\rangle \\
= & (\gamma_a + \gamma_j) \langle \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle \tag{B-42}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{n}_{b-}^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger}} = & - \left\langle \left[-\gamma_b \widehat{n}_{b-}^j - \gamma_j (\widehat{n}_{b-}^j - \widehat{n}_{b+}^j) - ig_0 \widehat{a}_-^{\dagger} \widehat{\sigma}_-^j + ig_0 \widehat{a}_- \widehat{\sigma}_-^{j\dagger} \right] \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \right\rangle \\
& - \left\langle \widehat{n}_{b-}^j \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j) \widehat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
& + \frac{d \langle \widehat{n}_{b-}^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle}{dt} \\
= & 0 \tag{B-43}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{n}_{b+}^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger}} = & - \left\langle \left[-\gamma_b \widehat{n}_{b+}^j - \gamma_j (\widehat{n}_{b+}^j - \widehat{n}_{b-}^j) - ig_0 \widehat{a}_+^{\dagger} \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 \widehat{a}_+ \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \right] \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \right\rangle \\
& - \left\langle \widehat{n}_{b+}^j \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j) \widehat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
& + \frac{d \langle \widehat{n}_{b+}^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle}{dt} \\
= & 0 \tag{B-44}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\widehat{\sigma}_+^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger}} = & - \left\langle \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \widehat{\sigma}_+^j + ig_0 (\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j) \widehat{a}_+^{\dagger} \right] \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \right\rangle \\
& - \left\langle \widehat{\sigma}_+^j \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} - ig_0 (\widehat{n}_{a+}^j - \widehat{n}_{b+}^j) \widehat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
& + \frac{d \langle \widehat{\sigma}_+^j \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \rangle}{dt} \\
= & - \left\langle -\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \widehat{n}_{b+}^j + ig_0 \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \widehat{a}_+ - \gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{n}_{b+}^j - ig_0 \widehat{\sigma}_+^j \widehat{a}_+^{\dagger} \right\rangle \\
& + \left\langle -ig_0 \widehat{\sigma}_+^j \widehat{a}_+^{\dagger} + ig_0 \widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \widehat{a}_+ - \gamma_b \widehat{n}_{b+}^j - \gamma_j (\widehat{n}_{b+}^j - \widehat{n}_{b-}^j) \right\rangle \\
= & (2\gamma_{\perp} - \gamma_b - \gamma_j) \langle \widehat{n}_{b+}^j \rangle + \gamma_j \langle \widehat{n}_{b-}^j \rangle \tag{B-45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_+^{\dagger}\hat{\sigma}_+^{\dagger}} &= -\left\langle \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{\sigma}_+^{\dagger} - ig_0(\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j)\hat{a}_+^{\dagger} \right] \hat{\sigma}_+^{\dagger} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_+^{\dagger} \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{\sigma}_+^{\dagger} - ig_0(\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j)\hat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d\langle \hat{\sigma}_+^{\dagger}\hat{\sigma}_+^{\dagger} \rangle}{dt} \\
&= -\left\langle -i\frac{g_0}{2}(\hat{\sigma}_+^{\dagger} + \hat{\sigma}_+^{\dagger})\hat{a}_+^{\dagger} \right\rangle + \left\langle i\frac{g_0}{2}(-\hat{\sigma}_+^{\dagger} - \hat{\sigma}_+^{\dagger})\hat{a}_+^{\dagger} \right\rangle \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-46}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^j\hat{\sigma}_+^{\dagger}} &= -\left\langle \left[-(\gamma_{\perp} + i\alpha)\hat{\sigma}_-^j + ig_0(\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j)\hat{a}_- \right] \hat{\sigma}_+^{\dagger} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^j \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{\sigma}_+^{\dagger} - ig_0(\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j)\hat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d\langle \hat{\sigma}_-^j\hat{\sigma}_+^{\dagger} \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-47}$$

$$\begin{aligned}
2D_{\hat{\sigma}_-^{\dagger}\hat{\sigma}_+^{\dagger}} &= -\left\langle \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{\sigma}_-^{\dagger} - ig_0(\hat{n}_{a_-}^j - \hat{n}_{b_-}^j)\hat{a}_-^{\dagger} \right] \hat{\sigma}_+^{\dagger} \right\rangle \\
&\quad - \left\langle \hat{\sigma}_-^{\dagger} \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{\sigma}_+^{\dagger} - ig_0(\hat{n}_{a_+}^j - \hat{n}_{b_+}^j)\hat{a}_+^{\dagger} \right] \right\rangle \\
&\quad + \frac{d\langle \hat{\sigma}_-^{\dagger}\hat{\sigma}_+^{\dagger} \rangle}{dt} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{B-48}$$

On calcule de même :

$$2D_{\hat{n}_{a_-}^j\hat{\sigma}_-^j} = 0 \tag{B-49}$$

$$2D_{\hat{n}_{b_-}^j\hat{\sigma}_-^j} = (\gamma_b + \gamma_j)\langle \hat{\sigma}_-^j \rangle \tag{B-50}$$

$$2D_{\hat{n}_{a_+}^j\hat{\sigma}_-^j} = 0 \tag{B-51}$$

$$2D_{\hat{n}_{b_+}^j\hat{\sigma}_-^j} = -\gamma_j\langle \hat{\sigma}_-^j \rangle \tag{B-52}$$

$$2D_{\hat{\sigma}_+^j\hat{\sigma}_-^j} = 0 \tag{B-53}$$

$$2D_{\hat{\sigma}_+^{\dagger}\hat{\sigma}_-^j} = 0 \tag{B-54}$$

$$2D_{\hat{\sigma}_-^{\dagger}\hat{\sigma}_-^j} = 0 \tag{B-55}$$

$$2D_{\hat{\sigma}_-^{\dagger}\hat{\sigma}_+^j} = (2\gamma_{\perp} - \gamma_a - \gamma_j)\langle \hat{n}_{a_-}^j \rangle + \gamma_j\langle \hat{n}_{a_+}^j \rangle \tag{B-56}$$

$$2D_{\hat{n}_{a_-}^j\hat{\sigma}_+^{\dagger}} = (\gamma_b + \gamma_j)\langle \hat{\sigma}_+^{\dagger} \rangle \tag{B-57}$$

$$2D_{\widehat{n}_{b-}^j \widehat{\sigma}_-^{j\dagger}} = 0 \quad (\text{B-58})$$

$$2D_{\widehat{n}_{a+}^j \widehat{\sigma}_-^{j\dagger}} = -\gamma_j \langle \widehat{\sigma}_-^{j\dagger} \rangle \quad (\text{B-59})$$

$$2D_{\widehat{n}_{b+}^j \widehat{\sigma}_-^{j\dagger}} = 0 \quad (\text{B-60})$$

$$2D_{\widehat{\sigma}_+^j \widehat{\sigma}_-^{j\dagger}} = 0 \quad (\text{B-61})$$

$$2D_{\widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \widehat{\sigma}_-^{j\dagger}} = 0 \quad (\text{B-62})$$

$$2D_{\widehat{\sigma}_-^j \widehat{\sigma}_-^{j\dagger}} = (2\gamma_{\perp} - \gamma_b - \gamma_j) \langle \widehat{n}_{b-}^j \rangle + \gamma_j \langle \widehat{n}_{b+}^j \rangle \quad (\text{B-63})$$

$$2D_{\widehat{\sigma}_+^{j\dagger} \widehat{\sigma}_+^{j\dagger}} = 0 \quad (\text{B-64})$$

C Coefficients de diffusion macroscopiques

Nous donnons ci-dessous le détail du calcul des coefficients macroscopiques lorsque l'on prend en compte les effets de la statistique de pompe. On suppose que la paire électron/trou pénètre à l'instant t_j dans un état tel que :

$$\langle \widehat{n}_{a+}^j(t_j) \rangle = \langle \widehat{n}_{a-}^j(t_j) \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{C-1-a})$$

$$\langle \widehat{n}_{b+}^j(t_j) \rangle = \langle \widehat{n}_{b-}^j(t_j) \rangle = 0 \quad (\text{C-1-b})$$

$$\langle \widehat{\sigma}_+^j(t_j) \rangle = \langle \widehat{\sigma}_-^j(t_j) \rangle = 0 \quad (\text{C-1-c})$$

Nous avons par ailleurs défini les variables suivantes :

$$\widehat{D}^j(t) = \frac{1}{2} [\widehat{n}_{a+}^j(t) + \widehat{n}_{a-}^j(t)] \quad (\text{C-2-a})$$

$$\widehat{D}^{'j}(t) = \widehat{n}_{a+}^j(t) + \widehat{n}_{a-}^j(t) \quad (\text{C-2-b})$$

$$\widehat{d}^{\overline{p}}(t) = \frac{1}{2} [\widehat{n}_{a+}^j(t) - \widehat{n}_{a-}^j(t)] \quad (\text{C-2-c})$$

$$\widehat{d}^{'j}(t) = \widehat{n}_{a+}^j(t) - \widehat{n}_{a-}^j(t) \quad (\text{C-2-d})$$

Avec ce choix, on a :

$$\langle \widehat{D}^j(t_j) \rangle = \frac{1}{2} \quad (\text{C-3-a})$$

$$\langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle = 1 \quad (\text{C-3-b})$$

$$\langle \widehat{d}^{\overline{p}}(t_j) \rangle = 0 \quad (\text{C-3-c})$$

$$\langle \widehat{d}^{'j}(t_j) \rangle = 0 \quad (\text{C-3-d})$$

On en déduit que :

$$\left\langle \sum_j \delta(t - t_j) \widehat{D}^j(t_j) \right\rangle_s = \frac{1}{2} \left\langle \sum_j \delta(t - t_j) \right\rangle_s \quad (\text{C-4})$$

Le taux de pompage de la variable D vaut μ dans les équations de San Miguel (2-7). Pour rester cohérent avec cette notation, on doit donc prendre :

$$\left\langle \sum_j \delta(t - t_j) \right\rangle = 2\mu \quad (\text{C-5})$$

Ainsi, l'équation d'évolution de la variable macroscopique D s'écrit :

$$\partial_t \widehat{D} = -\gamma_a \widehat{D} + \mu + ig_0 (\widehat{a}_+^\dagger \widehat{P}_+ + a_-^\dagger \widehat{P}_-) - ig_0 (\widehat{a}_+ \widehat{P}_+^\dagger + \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger) + \widehat{F}_{\widehat{D}}(t) \quad (\text{C-6})$$

avec :

$$\widehat{F}_{\widehat{D}}(t) = \sum_j \delta(t - t_j) \widehat{D}^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{D}}^j(t) - \mu \quad (\text{C-7})$$

Quant à l'équation d'évolution de la variable macroscopique \widehat{D}' , elle s'écrit :

$$\partial_t \widehat{D}' = -\gamma_a \widehat{D}' + 2\mu + 2ig_0 (\widehat{a}_+^\dagger \widehat{P}_+ + a_-^\dagger \widehat{P}_-) - 2ig_0 (\widehat{a}_+ \widehat{P}_+^\dagger + \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger) + \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t) \quad (\text{C-8})$$

avec :

$$\widehat{F}_{\widehat{D}'}(t) = \sum_j \delta(t - t_j) \widehat{D}'^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) - 2\mu \quad (\text{C-9})$$

Nous présentons maintenant les coefficients de diffusion macroscopiques qui contiennent des corrections par rapport aux coefficients de diffusion microscopiques. Les autres coefficients de diffusion sont obtenus directement en changeant dans les expressions des coefficients microscopiques les variables microscopiques en leur analogue macroscopique.

C.1 Calcul de $2D_{\widehat{D}\widehat{D}}$

$$\left\langle \widehat{F}_{\widehat{D}}(t) \widehat{F}_{\widehat{D}}(t') \right\rangle = \left\langle \left(\sum_j \delta(t - t_j) \widehat{D}^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{D}}^j(t) - \mu \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& \left\langle \left(\sum_k \delta(t' - t_k) \widehat{D}^k(t_k) + \sum_k \theta(t' - t_k) \widehat{f}_D^k(t') - \mu \right) \right\rangle_S \\
&= \left\langle \sum_{j,k} \theta(t - t_j) \theta(t' - t_k) \langle \widehat{f}_D^j(t) \widehat{f}_D^k(t') \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle \sum_{j,k} \theta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{f}_D^j(t) \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle (-\mu) \sum_j \theta(t - t_j) \langle \widehat{f}_D^j(t) \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle \sum_{j,k} \delta(t - t_j) \theta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{f}_D^k(t') \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle \sum_{j,k} \delta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle (-\mu) \sum_j \delta(t - t_j) \langle \widehat{D}^j(t_j) \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle (-\mu) \sum_j \theta(t' - t_k) \langle \widehat{f}_D^k(t') \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle (-\mu) \sum_j \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S + \mu^2 \\
&= \left\langle \sum_j \theta(t - t_j) \langle \widehat{f}_D^j(t) \widehat{f}_D^j(t') \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle \sum_{j,k} \delta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
&- \mu^2 - \mu^2 + \mu^2 \tag{C-10}
\end{aligned}$$

Le terme $\left\langle \sum_{j,k} \delta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S$ est calculé de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
& \left\langle \sum_{j,k} \delta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
&= \left\langle \sum_j \delta(t - t_j) \delta(t' - t_j) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^j(t_j) \rangle \right\rangle_S
\end{aligned}$$

$$+ \left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \rangle \langle \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \quad (\text{C-11})$$

Sachant que $\langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^j(t_j) \rangle = 1/4$ et que $\langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^k(t_k) \rangle = \langle \widehat{D}^j(t_j) \rangle \langle \widehat{D}^k(t_k) \rangle = 1/4$, on trouve que :

$$\left\langle \sum_j \delta(t - t_j) \delta(t' - t_j) \langle \widehat{D}^j(t_j) \widehat{D}^j(t_j) \rangle \right\rangle_S = 2\mu \delta(t - t') \frac{1}{4} \quad (\text{C-12-a})$$

$$\left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{D}^j(t_j) \rangle \langle \widehat{D}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S = \frac{1}{4} (-2p\mu + 4\mu^2) \quad (\text{C-12-b})$$

pour cette dernière équation, on utilise la formule (25) de [Benkert 90] avec 2μ à la place de μ . On conclut finalement que :

$$\langle \widehat{F}_{\widehat{D}}(t) \widehat{F}_{\widehat{D}}(t') \rangle = \left\langle \sum_j \theta(t - t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{D}}^j(t') \rangle \right\rangle_S + \frac{\mu}{2} (1 - p) \delta(t - t') \quad (\text{C-13})$$

C.2 Calcul de $2D_{\widehat{D}'\widehat{D}'}$

Le calcul précédent ne permet pas de déduire directement la correction due à la statistique de pompe pour ce coefficient $2D_{\widehat{D}'\widehat{D}'}$ (la correction due au coefficient $1/2$ qui différencie les définitions de \widehat{D} et \widehat{D}' ne peut être intuité facilement). C'est pourquoi, nous détaillons ci-dessous le calcul de cette correction :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t) \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t') \rangle &= \left\langle \left(\sum_j \delta(t - t_j) \widehat{D}'^j(t_j) + \sum_j \theta(t - t_j) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) - 2\mu \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\sum_k \delta(t' - t_k) \widehat{D}'^k(t_k) + \sum_k \theta(t' - t_k) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^k(t') - 2\mu \right) \right\rangle_S \\ &= \left\langle \sum_{j,k} \theta(t - t_j) \theta(t' - t_k) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^k(t') \rangle \right\rangle_S \\ &+ \left\langle \sum_{j,k} \theta(t - t_j) \delta(t' - t_k) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) \widehat{D}'^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\ &+ \left\langle (-2\mu) \sum_j \theta(t - t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) \rangle \right\rangle_S \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\langle \sum_{j,k} \delta(t-t_j) \theta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^k(t') \rangle \right\rangle_S \\
& + \left\langle \sum_{j,k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
& + \left\langle (-2\mu) \sum_j \delta(t-t_j) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle \right\rangle_S \\
& + \left\langle (-2\mu) \sum_j \theta(t'-t_k) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^k(t') \rangle \right\rangle_S \\
& + \left\langle (-2\mu) \sum_j \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S + 4\mu^2 \\
& = \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t') \rangle \right\rangle_S \\
& + \left\langle \sum_{j,k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
& - 4\mu^2 - 4\mu^2 + 4\mu^2 \tag{C-14}
\end{aligned}$$

Le terme $\left\langle \sum_{j,k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S$ se calcule comme précédemment :

$$\begin{aligned}
& \left\langle \sum_{j,k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
& = \left\langle \sum_j \delta(t-t_j) \delta(t'-t_j) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle \right\rangle_S \\
& + \left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle \langle \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S \tag{C-15}
\end{aligned}$$

Sachant que $\langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle = 1$ et que $\langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle = \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle \langle \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle = 1$, on trouve que :

$$\left\langle \sum_j \delta(t-t_j) \delta(t'-t_j) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle \right\rangle_S = 2\mu\delta(t-t') \tag{C-16-a}$$

$$\left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{D}^{'j}(t_j) \rangle \langle \widehat{D}^{'k}(t_k) \rangle \right\rangle_S = (-2p\mu + 4\mu^2) \tag{C-16-b}$$

On conclut finalement que :

$$\langle \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t) \widehat{F}_{\widehat{D}'}(t') \rangle = \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{D}'}^j(t') \rangle \right\rangle_S + 2\mu(1-p)\delta(t-t') \quad (\text{C-17})$$

C.3 Calcul de $2D_{\widehat{d}\widehat{d}}$

En raisonnant de même que précédemment, on trouve que :

$$\begin{aligned} \langle \widehat{F}_{\widehat{d}}(t) \widehat{F}_{\widehat{d}}(t') \rangle &= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t') \rangle \right\rangle_S \\ &+ \left\langle \sum_j \delta(t-t_j) \delta(t'-t_j) \langle \widehat{d}^j(t_j) \widehat{d}^j(t_j) \rangle \right\rangle_S \\ &+ \left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{d}^j(t_j) \rangle \langle \widehat{d}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\ &= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t') \rangle \right\rangle_S + \frac{1}{4} 2\mu\delta(t-t') + 0 \\ &= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t') \rangle \right\rangle_S + \frac{1}{2} \mu\delta(t-t') \quad (\text{C-18}) \end{aligned}$$

C.4 Calcul de $2D_{\widehat{d}\widehat{d}}$

De même que pour $2D_{\widehat{D}'\widehat{D}'}$, nous donnons le détail du calcul de $2D_{\widehat{d}\widehat{d}}$:

$$\begin{aligned} \langle \widehat{F}_{\widehat{d}}(t) \widehat{F}_{\widehat{d}}(t') \rangle &= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t') \rangle \right\rangle_S \\ &+ \left\langle \sum_j \delta(t-t_j) \delta(t'-t_j) \langle \widehat{d}^j(t_j) \widehat{d}^j(t_j) \rangle \right\rangle_S \\ &+ \left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{d}^j(t_j) \rangle \langle \widehat{d}^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\ &= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{d}}^j(t') \rangle \right\rangle_S + 2\mu\delta(t-t') \quad (\text{C-19}) \end{aligned}$$

C.5 Calcul de $2D_{\widehat{P}_+^\dagger \widehat{P}_+}$ et de $2D_{\widehat{P}_-^\dagger \widehat{P}_-}$

On a :

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{F}_{\widehat{P}_+^\dagger}(t) \widehat{F}_{\widehat{P}_+}(t') \rangle &= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+^\dagger}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t') \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle \sum_j \delta(t-t_j) \delta(t'-t_j) \langle \widehat{\sigma}_+^{\dagger j}(t_j) \widehat{\sigma}_+^j(t_j) \rangle \right\rangle_S \\
&+ \left\langle \sum_{j \neq k} \delta(t-t_j) \delta(t'-t_k) \langle \widehat{\sigma}_+^{\dagger j}(t_j) \rangle \langle \widehat{\sigma}_+^k(t_k) \rangle \right\rangle_S \\
&= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t') \rangle \right\rangle_S \\
&+ \sum_j \delta(t-t_j) \delta(t'-t_j) \langle n_{a_+}^j \rangle + 0 \\
&= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t') \rangle \right\rangle_S + \frac{1}{2} 2\mu\delta(t-t') \\
&= \left\langle \sum_j \theta(t-t_j) \langle \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t) \widehat{f}_{\widehat{\sigma}_+}^j(t') \rangle \right\rangle_S + \mu\delta(t-t') \quad (\text{C-20})
\end{aligned}$$

Le calcul pour $2D_{\widehat{P}_-^\dagger \widehat{P}_-}$ est identique et on trouve la même correction.

D Coefficients de diffusion dans l'ordre normal

On choisit comme ordre :

$$\widehat{a}_+^\dagger, \widehat{a}_-^\dagger, \widehat{P}_+^\dagger, \widehat{P}_-^\dagger, \widehat{D}, \widehat{d}, \widehat{P}_+, \widehat{P}_-, \widehat{a}_+, \widehat{a}_- \quad (\text{D-1})$$

Puis on calcule les coefficients de diffusion dans l'ordre normal selon la méthode habituelle (la notation [ON] correspond à l'expression de la ligne qui précède rangée dans l'ordre normal). Pour alléger les notations, comme dans l'appendice (B), nous avons omis les dépendances en temps des différentes variables. Les valeurs des coefficients de diffusion données ci-dessous ne contiennent pas les corrections dues à la pompe calculées dans la section C.

$$\frac{d[\widehat{N}_{a_-} \widehat{N}_{a_-}]}{dt} = \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a_-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a_-} - \widehat{N}_{a_+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a_-}} \right] \widehat{N}_{a_-}$$

$$\begin{aligned}
& +\widehat{N}_{a-} \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{a+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a-}} \right] \\
= & [ON] - g_0 (\widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_-) \quad (D-2)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{a-} N_{a-}} &= 2\mathcal{D}_{\widehat{N}_{a-} \widehat{N}_{a-}} - g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) \\
&= \gamma_a \langle N_{a-} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a-} \rangle + \langle N_{a+} \rangle) - g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) \quad (D-3)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{a+} \widehat{N}_{a-}]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a+} - \gamma_j (\widehat{N}_{a+} - \widehat{N}_{a-}) - g_0 \widehat{a}_+^\dagger \widehat{P}_+ - g_0 \widehat{a}_+ \widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a+}} \right] \widehat{N}_{a-} \\
&+ \widehat{N}_{a+} \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{a+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a-}} \right] \\
&= [ON] \quad (D-4)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{a+} N_{a-}} &= 2\mathcal{D}_{\widehat{N}_{a+} \widehat{N}_{a-}} \\
&= -\gamma_j (\langle N_{a-} \rangle + \langle N_{a+} \rangle) \quad (D-5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{b-} \widehat{N}_{a-}]}{dt} &= \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \widehat{N}_{a-} \\
&+ \widehat{N}_{b-} \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{a+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a-}} \right] \\
&= [ON] + g_0 (\widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_-) \quad (D-6)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{b-} N_{a-}} &= 2\mathcal{D}_{\widehat{N}_{b-} \widehat{N}_{a-}} + g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) \\
&= g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) \quad (D-7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{b+} \widehat{N}_{a-}]}{dt} &= \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b+} - \gamma_j (\widehat{N}_{b+} - \widehat{N}_{b-}) + g_0 \widehat{a}_+^\dagger \widehat{P}_+ + g_0 \widehat{a}_+ \widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b+}} \right] \widehat{N}_{a-} \\
&+ \widehat{N}_{b+} \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{a+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a-}} \right] \\
&= [ON] \quad (D-8)
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{b_+}N_{a_-}} &= 2D_{\hat{N}_{b_+}\hat{N}_{a_-}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-9})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{P}_+\hat{N}_{a_-}]}{dt} &= \left[-\gamma_{\perp}(1+i\alpha)\hat{P}_+ + g_0(\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+})\hat{a}_+ + \hat{F}_{\hat{P}_+} \right] \hat{N}_{a_-} \\ &\quad + \hat{P}_+ \left[\mu - \gamma_a\hat{N}_{a_-} - \gamma_j(\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{a_+}) - g_0\hat{a}_-^{\dagger}\hat{P}_- - g_0\hat{a}_-\hat{P}_-^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{N}_{a_-}} \right] \\ &= [ON] + \gamma_j\hat{P}_+ \end{aligned} \quad (\text{D-10})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_+N_{a_-}} &= 2D_{\hat{P}_+\hat{N}_{a_-}} + \gamma_j\langle P_+ \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-11})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{P}_+^{\dagger}\hat{N}_{a_-}]}{dt} &= \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{P}_+^{\dagger} + g_0(\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+})\hat{a}_+^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{P}_+^{\dagger}} \right] \hat{N}_{a_-} \\ &\quad + \hat{P}_+^{\dagger} \left[\mu - \gamma_a\hat{N}_{a_-} - \gamma_j(\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{a_+}) - g_0\hat{a}_-^{\dagger}\hat{P}_- - g_0\hat{a}_-\hat{P}_-^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{N}_{a_-}} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-12})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_+^{\dagger}N_{a_-}} &= 2D_{\hat{P}_+^{\dagger}\hat{N}_{a_-}} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-13})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{P}_-\hat{N}_{a_-}]}{dt} &= \left[-\gamma_{\perp}(1+i\alpha)\hat{P}_- + g_0(\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{b_-})\hat{a}_- + \hat{F}_{\hat{P}_-} \right] \hat{N}_{a_-} \\ &\quad + \hat{P}_- \left[\mu - \gamma_a\hat{N}_{a_-} - \gamma_j(\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{a_+}) - g_0\hat{a}_-^{\dagger}\hat{P}_- - g_0\hat{a}_-\hat{P}_-^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{N}_{a_-}} \right] \\ &= [ON] - \gamma_{\perp}(1+i\alpha)\hat{P}_- - g_0(\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{b_-}) - \gamma_j\hat{P}_- - \gamma_a\hat{P}_- \\ &= [ON] - \gamma_j\hat{P}_- - \gamma_a\hat{P}_- \end{aligned} \quad (\text{D-14})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_-N_{a_-}} &= 2D_{\hat{P}_-\hat{N}_{a_-}} - (\gamma_j + \gamma_a)\langle P_- \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-15})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_-^\dagger \widehat{N}_{a-}]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \widehat{P}_-^\dagger + g_0 (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{b-}) \widehat{a}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{P}_-}^\dagger \right] \widehat{N}_{a-} \\
&\quad + \widehat{P}_-^\dagger \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{a+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a-}} \right] \\
&= [ON] \tag{D-16}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_-^* N_{a-}} &= 2D_{\widehat{P}_-^\dagger \widehat{N}_{a-}} \\
&= 0 \tag{D-17}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{a-} \widehat{N}_{b-}]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{a+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a-}} \right] \widehat{N}_{b-} \\
&\quad + \widehat{N}_{a-} \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \\
&= [ON] + g_0 (\widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_-) \tag{D-18}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{a-} N_{b-}} &= 2D_{\widehat{N}_{a-} \widehat{N}_{b-}} + g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) \\
&= g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) \tag{D-19}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{a+} \widehat{N}_{b-}]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a+} - \gamma_j (\widehat{N}_{a+} - \widehat{N}_{a-}) - g_0 \widehat{a}_+^\dagger \widehat{P}_+ - g_0 \widehat{a}_+ \widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a+}} \right] \widehat{N}_{b-} \\
&\quad + \widehat{N}_{a+} \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \\
&= [ON] \tag{D-20}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{a+} N_{b-}} &= 2D_{\widehat{N}_{a+} \widehat{N}_{b-}} \\
&= 0 \tag{D-21}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{b-} \widehat{N}_{b-}]}{dt} &= \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \widehat{N}_{b-} \\
&\quad + \widehat{N}_{b-} \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \\
&= [ON] - g_0 (\widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_-) \tag{D-22}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{b_-} N_{b_-}} &= 2D_{\hat{N}_{b_-} \hat{N}_{b_-}} - g_0 \langle (a_- P_-^*) + \langle a_-^* P_- \rangle \rangle \\ &= \gamma_b \langle N_{b_-} \rangle + \gamma_j (\langle N_{b_-} \rangle + \langle N_{b_+} \rangle) - g_0 \langle (a_- P_-^*) + \langle a_-^* P_- \rangle \rangle \end{aligned} \quad (\text{D-23})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{N}_{b_+} \hat{N}_{b_-}]}{dt} &= \left[-\gamma_b \hat{N}_{b_+} - \gamma_j (\hat{N}_{b_+} - \hat{N}_{b_-}) + g_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{P}_+ + g_0 \hat{a}_+ \hat{P}_+^\dagger + \hat{F}_{\hat{N}_{b_+}} \right] \hat{N}_{b_-} \\ &\quad + \hat{N}_{b_+} \left[-\gamma_b \hat{N}_{b_-} - \gamma_j (\hat{N}_{b_-} - \hat{N}_{b_+}) + g_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{P}_- + g_0 \hat{a}_- \hat{P}_-^\dagger + \hat{F}_{\hat{N}_{b_-}} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-24})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{b_+} N_{b_-}} &= 2D_{\hat{N}_{b_+} \hat{N}_{b_-}} \\ &= -\gamma_j (\langle N_{b_-} \rangle + \langle N_{b_+} \rangle) \end{aligned} \quad (\text{D-25})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{P}_+ \hat{N}_{b_-}]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \hat{P}_+ + g_0 (\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+}) \hat{a}_+ + \hat{F}_{\hat{P}_+} \right] \hat{N}_{b_-} \\ &\quad + \hat{P}_+ \left[-\gamma_b \hat{N}_{b_-} - \gamma_j (\hat{N}_{b_-} - \hat{N}_{b_+}) + g_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{P}_- + g_0 \hat{a}_- \hat{P}_-^\dagger + \hat{F}_{\hat{N}_{b_-}} \right] \\ &= [ON] - \gamma_j \hat{P}_+ \end{aligned} \quad (\text{D-26})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_+ N_{b_-}} &= 2D_{\hat{P}_+ \hat{N}_{b_-}} - \gamma_j \langle P_+ \rangle \\ &= -\gamma_j \langle P_+ \rangle \end{aligned} \quad (\text{D-27})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{P}_+^\dagger \hat{N}_{b_-}]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \hat{P}_+^\dagger + g_0 (\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+}) \hat{a}_+^\dagger + \hat{F}_{\hat{P}_+^\dagger} \right] \hat{N}_{b_-} \\ &\quad + \hat{P}_+^\dagger \left[-\gamma_b \hat{N}_{b_-} - \gamma_j (\hat{N}_{b_-} - \hat{N}_{b_+}) + g_0 \hat{a}_-^\dagger \hat{P}_- + g_0 \hat{a}_- \hat{P}_-^\dagger + \hat{F}_{\hat{N}_{b_-}} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-28})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_+^* N_{b_-}} &= 2D_{\hat{P}_+^\dagger \hat{N}_{b_-}} \\ &= -\gamma_j \langle P_+^* \rangle \end{aligned} \quad (\text{D-29})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_- \widehat{N}_{b-}]}{dt} &= \left[-\gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \widehat{P}_- + g_0 (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{b-}) \widehat{a}_- + \widehat{F}_{\widehat{P}_-} \right] \widehat{N}_{b-} \\
&\quad + \widehat{P}_- \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^{\dagger} \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^{\dagger} + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \\
&= [ON] + (\gamma_b + \gamma_j) \widehat{P}_- + \gamma_{\perp} (1 + i\alpha) \widehat{P}_- + g_0 (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{b-}) \widehat{a}_- \\
&= [ON] + (\gamma_b + \gamma_j) \widehat{P}_- \tag{D-30}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_- N_{b-}} &= 2D_{\widehat{P}_- \widehat{N}_{b-}} + (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_- \rangle \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_- \rangle \tag{D-31}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_-^{\dagger} \widehat{N}_{b-}]}{dt} &= \left[-\gamma_{\perp} (1 - i\alpha) \widehat{P}_-^{\dagger} + g_0 (\widehat{N}_{a-} - \widehat{N}_{b-}) \widehat{a}_-^{\dagger} + \widehat{F}_{\widehat{P}_-^{\dagger}} \right] \widehat{N}_{b-} \\
&\quad + \widehat{P}_-^{\dagger} \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0 \widehat{a}_-^{\dagger} \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^{\dagger} + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \\
&= [ON] \tag{D-32}
\end{aligned}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_-^* N_{b-}} &= 2D_{\widehat{P}_-^{\dagger} \widehat{N}_{b-}} \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_-^* \rangle \tag{D-33}
\end{aligned}$$

De même, on obtient :

$$2\mathcal{D}_{N_{a-} N_{a+}} = -\gamma_j (\langle N_{a+} \rangle + \langle N_{a-} \rangle) \tag{D-34}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{a+} N_{a+}} = \gamma_a \langle N_{a+} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a+} \rangle + \langle N_{a-} \rangle) - g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) \tag{D-35}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b-} N_{a+}} = 0 \tag{D-36}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b+} N_{a+}} = g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) \tag{D-37}$$

$$2\mathcal{D}_{P_+ N_{a+}} = 0 \tag{D-38}$$

$$2\mathcal{D}_{P_+^* N_{a+}} = 0 \tag{D-39}$$

$$2\mathcal{D}_{P_- N_{a+}} = 0 \tag{D-40}$$

$$2\mathcal{D}_{P_-^* N_{a+}} = 0 \tag{D-41}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{a-} N_{b+}} = 0 \tag{D-42}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{a+} N_{b+}} = g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) \tag{D-43}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b_-}N_{b_+}} = -\gamma_j (\langle N_{b_+} \rangle + \langle N_{b_-} \rangle) \quad (\text{D-44})$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b_+}N_{b_+}} = \gamma_b \langle N_{b_+} \rangle + \gamma_j (\langle N_{b_-} \rangle + \langle N_{b_+} \rangle) - g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) \quad (\text{D-45})$$

$$2\mathcal{D}_{P_+N_{b_+}} = (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_+ \rangle \quad (\text{D-46})$$

$$2\mathcal{D}_{P_+^*N_{b_+}} = (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_+^* \rangle \quad (\text{D-47})$$

$$2\mathcal{D}_{P_-N_{b_+}} = -\gamma_j \langle P_- \rangle \quad (\text{D-48})$$

$$2\mathcal{D}_{P_-^*N_{b_+}} = -\gamma_j \langle P_-^* \rangle \quad (\text{D-49})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\widehat{N}_{a_-}\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a_-} - \gamma_j (\widehat{N}_{a_-} - \widehat{N}_{a_+}) - g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- - g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a_-}} \right] \widehat{P}_+ \\ &\quad + \widehat{N}_{a_-} \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{P}_+ + g_0 (\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+}) \widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-50})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{a_-}P_+} &= 2D_{\widehat{N}_{a_-}\widehat{P}_+} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-51})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\widehat{N}_{a_+}\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a \widehat{N}_{a_+} - \gamma_j (\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{a_-}) - g_0 \widehat{a}_+^\dagger \widehat{P}_+ - g_0 \widehat{a}_+ \widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{a_+}} \right] \widehat{P}_+ \\ &\quad + \widehat{N}_{a_+} \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{P}_+ + g_0 (\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+}) \widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-52})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{a_+}P_+} &= 2D_{\widehat{N}_{a_+}\widehat{P}_+} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-53})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\widehat{N}_{b_-}\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[-\gamma_b \widehat{N}_{b_-} - \gamma_j (\widehat{N}_{b_-} - \widehat{N}_{b_+}) + g_0 \widehat{a}_-^\dagger \widehat{P}_- + g_0 \widehat{a}_- \widehat{P}_-^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b_-}} \right] \widehat{P}_+ \\ &\quad + \widehat{N}_{b_-} \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \widehat{P}_+ + g_0 (\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+}) \widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-54})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{b_-}P_+} &= 2D_{\widehat{N}_{b_-}\widehat{P}_+} \\ &= -\gamma_j \langle P_+ \rangle \end{aligned} \quad (\text{D-55})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{b_+}\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[-\gamma_b\widehat{N}_{b_+} - \gamma_j(\widehat{N}_{b_+} - \widehat{N}_{b_-}) + g_0\widehat{a}_+^\dagger\widehat{P}_+ + g_0\widehat{a}_+\widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b_+}} \right] \widehat{P}_+ \\
&\quad + \widehat{N}_{b_+} \left[-\gamma_\perp(1+i\alpha)\widehat{P}_+ + g_0(\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+})\widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\
&= [ON]
\end{aligned} \tag{D-56}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{b_+}P_+} &= 2D_{\widehat{N}_{b_+}\widehat{P}_+} \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_+ \rangle
\end{aligned} \tag{D-57}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_+\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp(1+i\alpha)\widehat{P}_+ + g_0(\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+})\widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \widehat{P}_+ \\
&\quad + \widehat{P}_+ \left[-\gamma_\perp(1+i\alpha)\widehat{P}_+ + g_0(\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+})\widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\
&= [ON] + 2g_0\widehat{P}_+\widehat{a}_+
\end{aligned} \tag{D-58}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_+P_+} &= 2D_{\widehat{P}_+\widehat{P}_+} + 2g_0 \langle P_+a_+ \rangle \\
&= 2g_0 \langle P_+a_+ \rangle
\end{aligned} \tag{D-59}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_+^\dagger\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp(1-i\alpha)\widehat{P}_+^\dagger + g_0(\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+})\widehat{a}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{P}_+^\dagger} \right] \widehat{P}_+ \\
&\quad + \widehat{P}_+^\dagger \left[-\gamma_\perp(1+i\alpha)\widehat{P}_+ + g_0(\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+})\widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\
&= [ON]
\end{aligned} \tag{D-60}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_+^*P_+} &= 2D_{\widehat{P}_+^\dagger\widehat{P}_+} \\
&= (2\gamma_\perp - \gamma_b - \gamma_j) \langle \widehat{N}_{a_+} \rangle + \gamma_j \langle \widehat{N}_{a_-} \rangle
\end{aligned} \tag{D-61}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_-\widehat{P}_+]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp(1+i\alpha)\widehat{P}_- + g_0(\widehat{N}_{a_-} - \widehat{N}_{b_-})\widehat{a}_- + \widehat{F}_{\widehat{P}_-} \right] \widehat{P}_+ \\
&\quad + \widehat{P}_- \left[-\gamma_\perp(1+i\alpha)\widehat{P}_+ + g_0(\widehat{N}_{a_+} - \widehat{N}_{b_+})\widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \\
&= [ON]
\end{aligned} \tag{D-62}$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_-P_+} &= 2D_{\hat{P}_-\hat{P}_+} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-63})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{P}_-\hat{P}_+]}{dt} &= \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{P}_-^{\dagger} + g_0(\hat{N}_{a-} - \hat{N}_{b-})\hat{a}_-^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{P}_-}^{\dagger} \right] \hat{P}_+ \\ &\quad + \hat{P}_-^{\dagger} \left[-\gamma_{\perp}(1+i\alpha)\hat{P}_+ + g_0(\hat{N}_{a+} - \hat{N}_{b+})\hat{a}_+^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{P}_+}^{\dagger} \right] \\ &= [ON] \end{aligned} \quad (\text{D-64})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{P_-^*P_+} &= 2D_{\hat{P}_-^{\dagger}\hat{P}_+} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-65})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{N}_{a-}\hat{P}_+^{\dagger}]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a\hat{N}_{a-} - \gamma_j(\hat{N}_{a-} - \hat{N}_{a+}) - g_0\hat{a}_-^{\dagger}\hat{P}_- - g_0\hat{a}_-^{\dagger}\hat{P}_-^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{N}_{a-}} \right] \hat{P}_+^{\dagger} \\ &\quad + \hat{N}_{a-} \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{P}_+^{\dagger} + g_0(\hat{N}_{a+} - \hat{N}_{b+})\hat{a}_+^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{P}_+}^{\dagger} \right] \\ &= [ON] + \gamma_j P_+^{\dagger} \end{aligned} \quad (\text{D-66})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{a-}P_+^{\dagger}} &= 2D_{\hat{N}_{a-}\hat{P}_+^{\dagger}} + \gamma_j \langle P_+^{\dagger} \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-67})$$

$$\begin{aligned} \frac{d[\hat{N}_{a+}\hat{P}_+^{\dagger}]}{dt} &= \left[\mu - \gamma_a\hat{N}_{a+} - \gamma_j(\hat{N}_{a+} - \hat{N}_{a-}) - g_0\hat{a}_+^{\dagger}\hat{P}_+ - g_0\hat{a}_+^{\dagger}\hat{P}_+^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{N}_{a+}} \right] \hat{P}_+^{\dagger} \\ &\quad + \hat{N}_{a+} \left[-\gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{P}_+^{\dagger} + g_0(\hat{N}_{a+} - \hat{N}_{b+})\hat{a}_+^{\dagger} + \hat{F}_{\hat{P}_+}^{\dagger} \right] \\ &= [ON] - (\gamma_a + \gamma_j)\hat{P}_+^{\dagger} - \gamma_{\perp}(1-i\alpha)\hat{P}_+^{\dagger} - g_0(\hat{N}_{a+} - \hat{N}_{b+})\hat{a}_+^{\dagger} \end{aligned} \quad (\text{D-68})$$

donc :

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{N_{a+}P_+^{\dagger}} &= 2D_{\hat{N}_{a+}\hat{P}_+^{\dagger}} - (\gamma_a + \gamma_j) \langle P_+^{\dagger} \rangle \\ &= 0 \end{aligned} \quad (\text{D-69})$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{b-}\widehat{P}_+^\dagger]}{dt} &= \left[-\gamma_b\widehat{N}_{b-} - \gamma_j(\widehat{N}_{b-} - \widehat{N}_{b+}) + g_0\widehat{a}_-^\dagger\widehat{P}_- + g_0\widehat{a}_-\widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b-}} \right] \widehat{P}_+^\dagger \\
&\quad + \widehat{N}_{b-} \left[-\gamma_\perp(1 - i\alpha)\widehat{P}_+^\dagger + g_0(\widehat{N}_{a+} - \widehat{N}_{b+})\widehat{a}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{P}_+}^\dagger \right] \\
&= [ON] - \gamma_j\widehat{P}_+^\dagger
\end{aligned} \tag{D-70}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{b-}P_+^*} &= 2D_{\widehat{N}_{b-}\widehat{P}_+^\dagger} - \gamma_j \langle P_+^\dagger \rangle \\
&= -\gamma_j \langle P_+^* \rangle
\end{aligned} \tag{D-71}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{N}_{b+}\widehat{P}_+^\dagger]}{dt} &= \left[-\gamma_b\widehat{N}_{b+} - \gamma_j(\widehat{N}_{b+} - \widehat{N}_{b-}) + g_0\widehat{a}_+^\dagger\widehat{P}_+ + g_0\widehat{a}_+\widehat{P}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{N}_{b+}} \right] \widehat{P}_+^\dagger \\
&\quad + \widehat{N}_{b+} \left[-\gamma_\perp(1 - i\alpha)\widehat{P}_+^\dagger + g_0(\widehat{N}_{a+} - \widehat{N}_{b+})\widehat{a}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{P}_+}^\dagger \right] \\
&= [ON] + g_0\widehat{a}_+^\dagger(\widehat{N}_{b+} - \widehat{N}_{a+}) + (\gamma_b + \gamma_j)\widehat{P}_+^\dagger - \gamma_\perp(1 - i\alpha)\widehat{P}_+^\dagger \\
&= [ON] + (\gamma_b + \gamma_j)\widehat{P}_+^\dagger
\end{aligned} \tag{D-72}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{N_{b+}P_+^*} &= 2D_{\widehat{N}_{b+}\widehat{P}_+^\dagger} + (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_+^* \rangle \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_+^* \rangle
\end{aligned} \tag{D-73}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\widehat{P}_+\widehat{P}_+^\dagger]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp(1 + i\alpha)\widehat{P}_+ + g_0(\widehat{N}_{a+} - \widehat{N}_{b+})\widehat{a}_+ + \widehat{F}_{\widehat{P}_+} \right] \widehat{P}_+^\dagger \\
&\quad + \widehat{P}_+ \left[-\gamma_\perp(1 - i\alpha)\widehat{P}_+^\dagger + g_0(\widehat{N}_{a+} - \widehat{N}_{b+})\widehat{a}_+^\dagger + \widehat{F}_{\widehat{P}_+}^\dagger \right] \\
&= [ON] - \gamma_\perp(1 + i\alpha)(\widehat{N}_{b+} - \widehat{N}_{a+}) + 2g_0(\widehat{P}_+^\dagger\widehat{a}_+) \\
&\quad + 2g_0(\widehat{P}_+\widehat{a}_+^\dagger) - \gamma_\perp(1 - i\alpha)(\widehat{N}_{b+} - \widehat{N}_{a+}) \\
&= [ON] + 2\gamma_\perp\widehat{N}_{a+}
\end{aligned} \tag{D-74}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_+P_+^*} &= 2D_{\widehat{P}_+\widehat{P}_+^\dagger} + 2\gamma_\perp \langle N_{a+} \rangle \\
&= (\gamma_b + \gamma_j) \langle N_{b+} \rangle - \gamma_j \langle N_{b-} \rangle + 2\gamma_\perp \langle N_{a+} \rangle
\end{aligned} \tag{D-75}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\hat{P}_+^\dagger \hat{P}_+^\dagger]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \hat{P}_+^\dagger + g_0 (\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+}) \hat{a}_+^\dagger + \hat{F}_{\hat{P}_+}^\dagger \right] \hat{P}_+^\dagger \\
&\quad + \hat{P}_+^\dagger \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \hat{P}_+^\dagger + g_0 (\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+}) \hat{a}_+^\dagger + \hat{F}_{\hat{P}_+}^\dagger \right] \\
&= [ON] + 2g_0 \hat{P}_+^\dagger \hat{a}_+^\dagger
\end{aligned} \tag{D-76}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_+^* P_+^*} &= 2D_{\hat{P}_+^\dagger \hat{P}_+^\dagger} + 2g_0 \langle P_+^* a_+^* \rangle \\
&= 2g_0 \langle P_+^* a_+^* \rangle
\end{aligned} \tag{D-77}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\hat{P}_- \hat{P}_+^\dagger]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp (1 + i\alpha) \hat{P}_- + g_0 (\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{b_-}) \hat{a}_- + \hat{F}_{\hat{P}_-} \right] \hat{P}_+^\dagger \\
&\quad + \hat{P}_- \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \hat{P}_+^\dagger + g_0 (\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+}) \hat{a}_+^\dagger + \hat{F}_{\hat{P}_+}^\dagger \right] \\
&= [ON]
\end{aligned} \tag{D-78}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_- P_+^*} &= 2D_{\hat{P}_- \hat{P}_+^\dagger} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{D-79}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d[\hat{P}_-^\dagger \hat{P}_+^\dagger]}{dt} &= \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \hat{P}_-^\dagger + g_0 (\hat{N}_{a_-} - \hat{N}_{b_-}) \hat{a}_-^\dagger + \hat{F}_{\hat{P}_-^\dagger} \right] \hat{P}_+^\dagger \\
&\quad + \hat{P}_-^\dagger \left[-\gamma_\perp (1 - i\alpha) \hat{P}_+^\dagger + g_0 (\hat{N}_{a_+} - \hat{N}_{b_+}) \hat{a}_+^\dagger + \hat{F}_{\hat{P}_+}^\dagger \right] \\
&= [ON]
\end{aligned} \tag{D-80}$$

donc :

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{P_-^* P_+^*} &= 2D_{\hat{P}_-^\dagger \hat{P}_+^\dagger} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{D-81}$$

De même, on obtient :

$$2\mathcal{D}_{N_{a_-} P_-} = 0 \tag{D-82}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{a_+} P_-} = 0 \tag{D-83}$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b-}P_-} = (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_- \rangle \quad (\text{D-84})$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b+}P_-} = -\gamma_j \langle P_- \rangle \quad (\text{D-85})$$

$$2\mathcal{D}_{P_+P_-} = 0 \quad (\text{D-86})$$

$$2\mathcal{D}_{P_+^*P_-} = 0 \quad (\text{D-87})$$

$$2\mathcal{D}_{P_-P_-} = 2g_0 \langle P_- a_- \rangle \quad (\text{D-88})$$

$$2\mathcal{D}_{P_-^*P_-} = (2\gamma_\perp - \gamma_a - \gamma_j) \langle N_{a-} \rangle + \gamma_j \langle N_{a+} \rangle \quad (\text{D-89})$$

$$2\mathcal{D}_{N_{a-}P_-^*} = 0 \quad (\text{D-90})$$

$$2\mathcal{D}_{N_{a+}P_-^*} = 0 \quad (\text{D-91})$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b-}P_-^*} = (\gamma_b + \gamma_j) \langle P_-^* \rangle \quad (\text{D-92})$$

$$2\mathcal{D}_{N_{b+}P_-^*} = -\gamma_j \langle P_-^* \rangle \quad (\text{D-93})$$

$$2\mathcal{D}_{P_+P_-^*} = 0 \quad (\text{D-94})$$

$$2\mathcal{D}_{P_+^*P_-^*} = 0 \quad (\text{D-95})$$

$$2\mathcal{D}_{P_-P_-^*} = (\gamma_b + \gamma_j) \langle N_{b-} \rangle - \gamma_j \langle N_{b+} \rangle + 2\gamma_\perp \langle N_{a-} \rangle \quad (\text{D-96})$$

$$2\mathcal{D}_{P_-^*P_-^*} = 2g_0 \langle P_-^* a_-^* \rangle \quad (\text{D-97})$$

E Coefficients de diffusion après élimination adiabatique des polarisations

Nous reportons ci-dessous le calcul des coefficients de diffusion non nuls après élimination adiabatique des polarisations. Ces coefficients sont obtenus à partir des coefficients calculés dans l'ordre normal (section D) et des corrections dues à la statistique de pompe (section C).

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{G_{a+}G_{\dot{a}_+}} &= g_0^2 \frac{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)}{(\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2))^2} \left\langle \left(F_{P_+} - g_0 \langle a_+ \rangle \tilde{F}_{N_{b_+}} \right) \left(F_{P_+}^* - g_0 \langle a_+ \rangle^* \tilde{F}_{N_{b_+}} \right) \right\rangle \\ &= g_0^2 \frac{1}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \left[(2\gamma_\perp - \gamma_a - \gamma_j) \langle N_{a_+} \rangle - \gamma_j \langle N_{a_-} \rangle \right] + R \\ &\quad - g_0 \langle a_+ P_+ \rangle - g_0 \langle a_+^* P_+^* \rangle \\ &= g_0^2 \frac{1}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \left((2\gamma_\perp - \gamma_a) \frac{\kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{E-1})$$

$$\begin{aligned} 2\mathcal{D}_{G_{a+}G_D} &= g_0 \frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \left\langle \left(F_{P_+} - g_0 \langle a_+ \rangle \tilde{F}_{N_{b_+}} \right) \right. \\ &\quad \left. \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} + F_{N_{a_-}}) + g_0^2 |\langle a_+ \rangle|^2 \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}} + g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_-}} \right) \right\rangle \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_{+} \rangle^* F_{P_{+}} + \langle a_{-} \rangle^* F_{P_{-}}) \\
& -\frac{1}{2}g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_{+} \rangle F_{P_{+}}^* + \langle a_{-} \rangle F_{P_{-}}^*) \Bigg\rangle \\
= & g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0^2 |\langle a_{+} \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+} \rangle - g_0^2 |\langle a_{+} \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+} \rangle \right. \\
& - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle a_{+} \rangle [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) \langle N_{a_{+}} \rangle + \gamma_j \langle N_{a_{-}} \rangle + R] \\
& \left. + g_0^2 \frac{|\langle a_{+} \rangle|^2}{2} \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+} \rangle + g_0^2 \frac{|\langle a_{+} \rangle|^2}{2} \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+}^* \rangle \right] \\
= & \frac{g_0^2}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[\kappa Q^3 - \frac{Q}{2} \left((2\gamma_{\perp} - \gamma_a) \frac{\kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 \right) \right] \tag{E-2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{G_{a_{+}}G_d} & = g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left\langle \left(F_{P_{+}} - g_0 \langle a_{+} \rangle \tilde{F}_{N_{b_{+}}} \right) \right. \\
& \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_{+}}} - F_{N_{a_{-}}}) + g_0^2 |\langle a_{+} \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_{+}}} - g_0^2 |\langle a_{-} \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_{-}}} \right. \\
& - \frac{1}{2} g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_{+} \rangle^* F_{P_{+}} - \langle a_{-} \rangle^* F_{P_{-}}) \\
& \left. \left. - \frac{1}{2} g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_{+} \rangle F_{P_{+}}^* - \langle a_{-} \rangle F_{P_{-}}^*) \right) \right\rangle \\
= & g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0^2 |\langle a_{+} \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+} \rangle - g_0^2 |\langle a_{+} \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+} \rangle \right. \\
& - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle a_{+} \rangle [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) \langle N_{a_{+}} \rangle + \gamma_j \langle N_{a_{-}} \rangle + R] \\
& \left. + g_0^2 \frac{|\langle a_{+} \rangle|^2}{2} \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+} \rangle + g_0^2 \frac{|\langle a_{+} \rangle|^2}{2} \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_{+}^* \rangle \right] \\
= & \frac{g_0^2}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[\kappa Q^3 - \frac{Q}{2} \left((2\gamma_{\perp} - \gamma_a) \frac{\kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 \right) \right] \tag{E-3}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{G_{a_{-}}G_{i_{-}}} & = g_0^2 \frac{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)}{(\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2))^2} \left\langle \left(F_{P_{-}} - g_0 \langle a_{-} \rangle \tilde{F}_{N_{b_{-}}} \right) \left(F_{P_{-}}^* - g_0 \langle a_{-} \rangle^* \tilde{F}_{N_{b_{-}}} \right) \right\rangle \\
= & g_0^2 \frac{1}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} [(2\gamma_{\perp} - \gamma_a - \gamma_j) \langle N_{a_{-}} \rangle - \gamma_j \langle N_{a_{+}} \rangle + R \\
& - g_0 \langle a_{-} P_{-} \rangle - g_0 \langle a_{-}^* P_{-}^* \rangle] \\
= & g_0^2 \frac{1}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left((2\gamma_{\perp} - \gamma_a) \frac{\kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 \right) \tag{E-4}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{G_a-G_D} &= g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left\langle \left(F_{P_-} - g_0 \langle a_- \rangle \tilde{F}_{N_{b_-}} \right) \right. \\
&\quad \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} + F_{N_{a_-}}) + g_0^2 |\langle a_+ \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}} + g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_-}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} + \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_- \rangle F_{P_+}^* + \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \rangle \\
&= g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_- \rangle - g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_- \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle a_- \rangle [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) \langle N_{a_-} \rangle + \gamma_j \langle N_{a_+} \rangle + R] \right. \\
&\quad \left. + g_0^2 \frac{|\langle a_- \rangle|^2 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_- \rangle + g_0^2 \frac{|\langle a_- \rangle|^2 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_-^* \rangle \right] \\
&= \frac{g_0^2}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[\kappa Q^3 - \frac{Q}{2} \left((2\gamma_{\perp} - \gamma_a) \frac{\kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 \right) \right] \tag{E-5}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{G_a-G_d} &= g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left\langle \left(F_{P_-} - g_0 \langle a_- \rangle \tilde{F}_{N_{b_-}} \right) \right. \\
&\quad \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} - F_{N_{a_-}}) + g_0^2 |\langle a_+ \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}} - g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_-}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} - \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) \right. \\
&\quad \left. - \frac{1}{2} g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_- \rangle F_{P_+}^* - \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \rangle \\
&= -g_0 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_- \rangle - g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_- \rangle \right. \\
&\quad \left. - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle a_- \rangle [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) \langle N_{a_-} \rangle + \gamma_j \langle N_{a_+} \rangle - R] \right. \\
&\quad \left. + g_0^2 \frac{|\langle a_- \rangle|^2 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_- \rangle + g_0^2 \frac{|\langle a_- \rangle|^2 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle P_-^* \rangle \right] \\
&= -\frac{g_0}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \left[\kappa Q^3 - \frac{Q}{2} \left((2\gamma_{\perp} - \gamma_a) \frac{\kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 \right) \right] \tag{E-6}
\end{aligned}$$

$$2\mathcal{D}_{G_D G_D} = \left\langle \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} + F_{N_{a_-}}) + g_0^2 |\langle a_+ \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}} + g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_-}} \right) \right.$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{g_0 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} + \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle F_{P_+}^* + \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \\
& \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} + F_{N_{a_-}}) + g_0^2 |\langle a_+ \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_+}} + g_0^2 |\langle a_- \rangle|^2 \frac{\gamma_{\perp}}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \tilde{F}_{N_{b_-}} \right. \\
& \left. - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} + \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) - \frac{g_0 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle F_{P_+}^* + \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \rangle \\
= & \frac{1}{4} [\gamma_a \langle N_{a_+} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) \\
& - g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) - \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) + 2R(1-p)] \\
+ & \frac{1}{4} [\gamma_a \langle N_{a_-} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) \\
& - g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) - \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle)] \\
- & \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle - \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle \\
- & \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle - \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
- & \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle \\
+ & \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle |a_+|^2 [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-} + R] \rangle \\
- & \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
+ & \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle |a_-|^2 [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+} + R] \rangle \\
- & \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle \\
+ & \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle |a_+|^2 [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-} + R] \rangle \\
- & \frac{g_0^3 \gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{2 \gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_{\perp}(1+i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
+ & \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \langle |a_-|^2 [(2\gamma_{\perp} - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+} + R] \rangle \\
= & \frac{1}{4} [\gamma_a (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) - g_0 \langle a_+^* P_+ + a_-^* P_- + a_+ P_+^* + a_- P_-^* \rangle \\
+ & 2R(1-p)] \\
- & g_0^3 \frac{\gamma_{\perp}(1-i\alpha)}{\gamma_{\perp}^2(1+\alpha^2)} \gamma_{\perp} \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ + |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - g_0^3 \frac{\gamma_\perp(1+i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* + |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ + |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp(1+i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* + |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} [2 \langle |a_+|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-}] \rangle \\
& + 2 \langle |a_-|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+}] \rangle] \\
& = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma\kappa}{c} + R(1-p) - 2\kappa Q^2 \right) - 2g_0^2 \frac{\kappa Q^4}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \\
& + \frac{g_0^2}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \left[(2\gamma_\perp - \gamma_a) \frac{\kappa Q^2}{c} + R \right] \tag{E-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{G_d G_D} & = \left\langle \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} - F_{N_{a_-}}) + g^2 |a_+|^2 \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_+}} - g_0^2 |a_-|^2 \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_-}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} - \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp(1+i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle F_{P_+}^* - \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \right. \\
& \quad \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} + F_{N_{a_-}}) + g_0^2 |a_+|^2 \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_+}} + g_0^2 |a_-|^2 \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_-}} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{1}{g_0} \frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} + \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp(1+i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} (\langle a_+ \rangle F_{P_+}^* + \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \right\rangle \\
& = \frac{1}{4} [\gamma_a \langle N_{a_+} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) \\
& \quad - g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle)] \\
& - \frac{1}{4} [\gamma_a \langle N_{a_-} \rangle - \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) \\
& \quad - g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle)] \\
& - \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle - \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp(1+i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle + \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp(1+i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& - \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \langle |a_+|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-} + R] \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle - \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp(1-i\alpha)}{\gamma_\perp^2(1+\alpha^2)} \right]^2 \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_-|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+} + R] \rangle \\
& - \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_+|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-} + R] \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle - \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& - \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_-|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+} + R] \rangle \\
& = \frac{1}{4} [\gamma_a (\langle N_{a_-} \rangle - \langle N_{a_+} \rangle) - g_0 \langle a_+^* P_+ - a_-^* P_- + a_+ P_+^* - a_- P_-^* \rangle] \\
& - g_0^3 \frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ - |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
& - g_0^3 \frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* - |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ - |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* - |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4} \frac{1}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} [2 \langle |a_+|^2 \rangle [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-}] \\
& - 2 \langle |a_-|^2 \rangle [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+}]] \\
& = 0
\end{aligned} \tag{E-8}$$

$$\begin{aligned}
2\mathcal{D}_{G_d G_d} & = \left\langle \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} - F_{N_{a_-}}) + g_0^2 \langle |a_+|^2 \rangle \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_+}} - g_0^2 \langle |a_-|^2 \rangle \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_-}} \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} - \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} (\langle a_+ \rangle F_{P_+}^* - \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \right. \\
& \quad \left(\frac{1}{2} (F_{N_{a_+}} - F_{N_{a_-}}) + g_0^2 \langle |a_+|^2 \rangle \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_+}} - g_0^2 \langle |a_-|^2 \rangle \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \bar{F}_{N_{b_-}} \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} (\langle a_+ \rangle^* F_{P_+} - \langle a_- \rangle^* F_{P_-}) - \frac{g_0}{2} \frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} (\langle a_+ \rangle F_{P_+}^* - \langle a_- \rangle F_{P_-}^*) \right) \right\rangle \\
& = \frac{1}{4} [\gamma_a \langle N_{a_+} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) + 2R \\
& \quad - g_0 (\langle a_+ P_+^* \rangle + \langle a_+^* P_+ \rangle) + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle)] \\
& + \frac{1}{4} [\gamma_a \langle N_{a_-} \rangle + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle)]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -g_0 (\langle a_- P_-^* \rangle + \langle a_-^* P_- \rangle) + \gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) \\
& - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 - i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 + i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle \\
& - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 - i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 + i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_- P_- \rangle \\
& - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 - i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_+|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-} + R] \rangle \\
& - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 - i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_-|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+} + R] \rangle \\
& - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 + i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_+|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-} + R] \rangle \\
& - \frac{g_0^3 \gamma_\perp (1 + i\alpha)}{2 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_-|^2 a_- P_- \rangle + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_-|^2 a_- P_- \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \langle |a_-|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+} + R] \rangle \\
& = \frac{1}{4} [\gamma_a (\langle N_{a_-} \rangle + \langle N_{a_+} \rangle) + 4\gamma_j (\langle N_{a_+} \rangle + \langle N_{a_-} \rangle) \\
& - g_0 \langle a_+^* P_+ + a_-^* P_- + a_+ P_+^* + a_- P_-^* \rangle + 2R] \\
& - g_0^3 \frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ + |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
& - g_0^3 \frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \gamma_\perp \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* + |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 - i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+^* P_+ + |a_-|^2 a_-^* P_- \rangle \\
& + \frac{g_0^3}{2} \left[\frac{\gamma_\perp (1 + i\alpha)}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} \right]^2 \langle |a_+|^2 a_+ P_+^* + |a_-|^2 a_- P_-^* \rangle \\
& + \frac{g_0^2}{4 \gamma_\perp^2 (1 + \alpha^2)} [2 \langle |a_+|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_+} + \gamma_j N_{a_-}] \rangle \\
& + 2 \langle |a_-|^2 [(2\gamma_\perp - \gamma_j - \gamma_a) N_{a_-} + \gamma_j N_{a_+}] \rangle] \\
& = \frac{1}{2} \left(\frac{\gamma \kappa}{c} + R - 2\kappa Q^2 + 4 \frac{\kappa \gamma_j}{c} \right) - 2g_0^2 \frac{\kappa Q^4}{\gamma_\perp^2 (1 + \alpha)^2}
\end{aligned}$$

$$+ \frac{g_0^2}{\gamma_1^2 (1 + \alpha)^2} \left[(2\gamma_\perp - \gamma_a) \frac{\kappa Q^2}{c} + R \right] \quad (\text{E-9})$$

Bibliographie

- [Becher 98] *Intensity noise properties of Nd:YVO₄ microchip lasers pumped with an amplitude squeezed diode laser*, C. Becher and K.-J. Boller, *Opt. Comm.* **147** (4-6), 366 (1998)
- [Benkert 90] *Role of pumping statistics in laser dynamics: Quantum Langevin approach*, C. Benkert and M. O. Scully, *Phys. Rev. A* **41** (5), 2756 (1990)
- [Bernard 93] *High efficiency diode pumped Nd:YVO₄ slab laser*, J. E. Bernard and A. J. Alcock, *Opt. Lett.* **18** (12), 968 (1993)
- [Besnard 97] *Theoretical modeling of vertical-cavity surface-emitting lasers with polarized optical feedback*, P. Besnard, F. Robert, M. L. Chares, and G. M. Stephan, *Phys. Rev. A* **56** (4), 3191 (1997)
- [Bramati 97] *Quantum noise models for semiconductor lasers: is there a missing noise source?*, A. Bramati, V. Jost, F. Marin, and E. Giacobino, *J. Mod. Opt.* **44** (10), 1929 (1997)
- [Bramati 99] *Effects of pump fluctuations on intensity noise of Nd:YVO₄ microchip lasers*, A. Bramati, J.-P. Hermier, V. Jost, E. Giacobino, J. J. Aubert, E. Molva, and L. Fulbert, *Eur. Phys. J. D* **6** (4), 513 (1999)
- [Buchler 98] *Feedback control of laser intensity noise*, B. C. Buchler, E. H. Huntington, C. C. Harb, and T. C. Ralph, *Phys. Rev. A* **57** (2), 1286 (1998)
- [Casey 78] *Heterostructure lasers. Part A: fundamental principles*, H. C. Casey and M. B. Panish (Academic, London, 1978)
- [Chang 90] *Polarization characteristics of quantum well vertical-cavity surface-emitting lasers*, C. J. Chang-Hasnain, M. Oreinstein, A. C. Von Lehmen, L. T. Florez, J. P. Harbison, and N. G. Stoffel, *Appl. Phys. Lett.* **57** (3), 218 (1990)

- [Chang 93] *Low threshold buried heterostructure vertical-cavity surface-emitting laser*, C. J. Chang-Hasnain, Y. A. Wu, G. S. Li, G. Hasnain, K. D. Choquette, C. Caneau, and L T. Florez, *Appl. Phys. Lett.* **63** (10), 1307 (1993)
- [Chavez 93] *Polarization properties of a vertical-cavity surface-emitting laser using a fractional layer superlattice gain medium*, A. Chavez-Pirson, H. Ando, H. Saito, and H. Kanbe, *Appl. Phys. Lett.* **62** (24), 3082 (1993)
- [Choquette 91] *GaAs vertical-cavity surface-emitting lasers fabricated by reactive ion etching*, K. D. Choquette, G. Hasnain, Y. H. Wang, J. D. Wynn, R. S. Freund, A. Y. Cho, and R. E. Leibenguth, *IEEE Phot. Tech. Lett.* **3** (10), 859 (1991)
- [Choquette 94a] *Control of vertical-cavity laser polarization with anisotropic transverse cavity geometries*, K. D. Choquette, and R. E. Leibenguth, *IEEE Phot. Tech. Lett.* **6** (1), 40 (1994)
- [Choquette 94b] *Temperature dependence of gain-guided vertical-cavity surface-emitting laser polarization*, K. D. Choquette, D. A. Richie, and R. E. Leibenguth, *Appl. Phys. Lett.* **64** (16), 2062 (1994)
- [Choquette 95] *Gain-dependent polarization properties of vertical-cavity lasers*, K. D. Choquette, R. P. Schneider, K. L. Lear, and R. E. Leibenguth, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **1** (2), 661 (1995)
- [Chung 91] *Spectral characteristics of vertical-cavity surface-emitting lasers with external optical feedback*, Y. C. Chung and Y. H. Lee, *IEEE Photon. Tech. Lett.* **3** (7), 597 (1991)
- [Cohen-Tannoudji 91] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg (1988), *Processus d'interaction entre photons et atomes*, Interéditions / Editions du CNRS, Paris (Atom-photon interactions (1991) Wiley, New-York)
- [Corzine 89] *Design of Fabry-Perot surface-emitting lasers with a periodic gain structure*, S. W. Corzine, R. S. Geels, J. W. Scott, R. H. Yan, and L. A. Coldren, *IEEE J. Quantum Electron.* **25** (6), 1513 (1989)
- [Davidovich 96] *Sub-Poissonian processe in quantum optics*, L. Davidovich, *Rev. Mod. Physics* **68** (1), 127 (1996)

- [Degen 98] *Amplitude noise squeezed light from polarization singlemode VCSEL*, C. Degen, J. L. Vey, W. Elsässer, P. Schnitzer, and K. J. Ebeling, *Elec. Lett.* **34** (16), 1585 (1998)
- [Ebeling 96] *Efficient vertical-cavity surface-emitting laser diodes for high bit rate optical data transmission*, K. J. Ebeling, U. Fiedler, R. Michalzik, G. Reiner, and B. Weigl, *Int. J. Electron. Commun.* **50** (5), 396 (1996)
- [Fabre 95] *Quantum Fluctuations in light beams*, C. Fabre, Les Houches, Session LXIII, (North-Holland, Amsterdam, 1995)
- [Fontenelle 95] *Sub-Poissonian light from a laser with an injected signal*, M. Fontenelle and L. Davidovich, *Phys. Rev. A* **51** (3), 2560 (1995)
- [Freeman 93a] *Wavelength-tunable amplitude-squeezed light from a room-temperature quantum-well laser*, M. J. Freeman, H. Wang, D. G. Steel, R. Craig, and D. R. Scifres, *Opt. Lett.* **18** (24), 2141 (1993)
- [Freeman 93b] *Amplitude-squeezed light from quantum-well lasers*, M. J. Freeman, H. Wang, D. G. Steel, R. Craig and D. R. Scifres, *Opt. Lett.* **18** (5), 379 (1993)
- [Freeman 95] *Room temperature amplitude squeezed light from an injection-locked quantum-well laser with a time varying drive-current*, M. J. Freeman, D. G. Steel, D. C. Kilper, R. Craig, and D. R. Scifres, *Opt. Lett.* **20** (2), 183 (1995)
- [Gardiner 91] *Quantum noise*, C. W. Gardiner (Springer, Berlin, 1991)
- [Gilner 90] *Quantum noise properties on an injection-locked laser oscillator with pump-noise suppression and squeezed injection*, L. Gilner, G. Björk, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **41** (9), 5053 (1990)
- [Giudici 98] *Spatio-temporal dynamics in vertical-cavity surface-emitting lasers excited by fast electrical pulses*, M. Giudici, J. R. Tredicce, G. Vaschenko, J. J. Rocca, and C. S. Menoni, *Opt. Comm.* **158** (1-6), 313 (1998)
- [Golubev 84] *Photon antibunching in a coherent light source and suppression of the photorecording noise*, Y. M. Golubev and I. V. Sokolov, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **87** (2), 408 (1984) [*Sov. Phys. - JETP* **60** (2), 234 (1984)]
- [Goobar 95] *Calibrated intensity noise measurements in microcavity laser*

- diodes*, E. Goobar, J. W. Scott, B. Thibeault, G. Robinson, Y. Akulova, and L. A. Coldren, *Appl. Phys. Lett.* **67** (25), 3697 (1995)
- [Grangier 98] *A simple quantum picture for the Petermann excess noise factor*, Ph. Grangier and J.-Ph. Poizat, *Eur. Phys. J. D* **1** (1), 97 (1998)
- [Grangier 99] *Quantum derivation of the excess noise factor in lasers with non-orthogonal eigenmodes*, Ph. Grangier and J.-Ph. Poizat, *Eur. Phys. J. D* **7** (1), 99 (1999)
- [Harb 94] *Suppression of the intensity noise in a diode-pumped neodymium:YAG nonplanar ring laser*, C. C. Harb, M. B. Gray, H. A. Bachor, R. Schilling, P. Rottengatter, I. Freitag, and H. Welling, *IEEE J. Quant. Electron.* **30** (12), 2907 (1994)
- [Harb 96] *Intensity-noise properties of injection-locked lasers*, C. C. Harb, T. C. Ralph, E. H. Huntington, I. Freitag, D. E. McClelland, and H. A. Bachor, *Phys. Rev. A* **54** (5), 4370 (1996)
- [Harvey 91] *External-cavity diode laser using a grazing-incidence diffraction grating*, K. C. Harvey, and C. J. Myatt, *Opt. Lett.* **16** (12), 910 (1991)
- [Hasnain 91] *Performance of gain-guided surface emitting lasers with semiconductor distributed Bragg reflectors*, G. Hasnain, K. Tai, L. Yang, Y. H. Wang, R. J. Fischer, J. D. Wynn, B. Weir, N. K. Dutta, and A. Y. Cho, *IEEE J. Quantum Electron.* **27** (6), 1377 (1991)
- [Haus 84] *Quantum noise of an injection locked laser oscillator*, H. A. Haus and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **29** (3), 1261 (1984)
- [Hermier 99] *Spatial quantum noise of semiconductor lasers*, J.-P. Hermier, A. Bramati, A. Z. Khoury, E. Giacobino, J.-Ph. Poizat, T.-J. Chang, and Ph. Grangier, *J. Opt. Soc. Am. B* **16** (11), 2140 (1999)
- [Hofmann 97] *Quantum noise and polarization fluctuations in vertical-cavity surface-emitting lasers*, H. F. Hofmann and O. Hess, *Phys. Rev. A* **56** (1), 868 (1997)
- [Hua 94] *Transverse modes and patterns of electrically pumped vertical-cavity surface-emitting semiconductor lasers*, L. Hua, T. L. Lu-

- cas, J. G. McInerney, and R. A. Morgan, *Chaos, Solitons and Fractals* **4** (8-9), 1619 (1994)
- [Huffaker 94] *Transverse mode behavior in native-oxide-defined low threshold vertical-cavity lasers*, D. L. Huffaker, D. G. Deppe, and T. J. Rogers, *Appl. Phys. Lett.* **65** (13), 1611 (1994)
- [Huntington 98] *Feedback control of the intensity noise of injection locked lasers*, E. H. Huntington, B. C. Buchler, C. C. Harb, T. C. Ralph, D. E. McClelland, and H. A. Bachor, *Opt. Comm.* **145** (1-6), 359 (1998)
- [Iga 88] *Surface emitting semiconductor lasers*, K. Iga, F. Koyama, and S. Kinoshita, *IEEE J. Quantum. Electron.* **24** (9), 1845 (1988)
- [Inoue 92] *Quantum correlation between longitudinal-mode intensities in a multimode squeezed semiconductor laser*, S. Inoue, S. Machida, Y. Yamamoto, and H. Ohzu, *Phys. Rev. A* **46** (5), 2757 (1992)
- [Inoue 93] *Squeezing in an injection-locked semiconductor laser*, S. Inoue, S. Machida, Y. Yamamoto, and H. Ohzu, *Phys. Rev. A* **48** (3), 2230 (1993)
- [Jansen 96a] *Elasto-optic anisotropy and polarization orientation of vertical-cavity surface-emitting semiconductor lasers*, A. K. Jansen van-Doorn, M. P. van-Exter, and J. P. Woerdman, *Appl. Phys. Lett.* **69** (8), 1041 (1996)
- [Jansen 96b] *Tailoring the birefringence in a vertical-cavity semiconductor laser*, A. K. Jansen van-Doorn, M. P. van-Exter, and J. P. Woerdman, *Appl. Phys. Lett.* **69** (24), 3635 (1996)
- [Jansen 97a] *Coupled-mode description for the polarization state of a vertical-cavity semiconductor laser*, A. K. Jansen van-Doorn, M. P. van-Exter, A. M. van der Lee, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **55** (2), 1473 (1997)
- [Jansen 97b] *Effects of transverse anisotropy on VCSEL spectra*, A. K. Jansen van-Doorn, M. P. van-Exter, and J. P. Woerdman, *Electron. Lett.* **30** (23), 1941 (1997)
- [Jewell 91] *Vertical-cavity surface-emitting lasers: Design, growth, fabrication, characterization*, J. L. Jewell, J. P. Harbison, A. Scherer, Y. H. Lee, and L. T. Florez, *IEEE J. Quantum Electron.* **27** (6), 1332 (1991)

- [Jiang 93] *High-frequency polarization self-modulation in vertical-cavity surface-emitting lasers*, S. Jiang, Z. Pan, M. Dagenais, R. A. Morgan, and K. Kojima, *Appl. Phys. Lett.* **63** (26), 3545 (1993)
- [Jiang 94] *Influence of external optical feedback on threshold and spectral characteristics of vertical-cavity surface-emitting lasers*, S. Jiang, Z. Pan, M. Dagenais, R. A. Morgan, and K. Kojima, *IEEE Photon. Tech. Lett.* **6** (1), 34 (1994)
- [Karlsson 91] *Use of quantum-noise correlation for noise reduction in semiconductor lasers*, A. Karlsson, and G. Björk, *Phys. Rev. A* **44** (11), 7669 (1991)
- [Kawaguchi 95] *Pitchfork bifurcation polarisation bistability in vertical-cavity surface-emitting lasers*, H. Kawaguchi, I. S. Hidayat, Y. Takahashi, and Y. Yamayoshi, *Electron. Lett.* **31** (2), 109 (1995)
- [Khandokhin 96] *Low frequency relaxation oscillations in class B lasers with feedback*, P. Khandokhin, Y. Khanin, J.-C. Celet, D. Dangoisse, P. Glorieux, *Opt. Comm.* **123** (1-3), 372 (1996)
- [Kilper 96] *Polarization-dependent noise in photon-number squeezed light generated by quantum-well lasers*, D. C. Kilper, D. G. Steel, R. Craig, and D. R. Scifres, *Opt. Lett.* **21** (16), 1283 (1996)
- [Kilper 97] *Squeezed light generated by a microcavity laser*, D. C. Kilper, P. A. Roos, and J. L. Carlsten, *Phys. Rev. A* **55** (5), R3323 (1997)
- [Kintz 90] *Single-frequency operation in solid-state laser materials with short absorption depths*, G. J. Kintz, and T. Baer, *IEEE J. Quantum. Electron.* **26** (9), 1457 (1990)
- [Kleppner 81] *Inhibited spontaneous emission*, D. Kleppner, *Phys. Rev. Lett.* **47** (4), 233 (1981)
- [Kolobov 93] *Role of pumping statistics and dynamics of atomic polarization in quantum fluctuations of laser sources*, M. I. Kolobov, L. Davidovich, E. Giacobino, and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **47** (2), 1431 (1993)
- [Koyama 91] *Intensity noise and polarization stability of GaAlAs-GaAs surface emitting lasers*, F. Koyama, K. Morito, K. Iga, *IEEE J. Quantum Electron.* **27** (6), 1410 (1991)
- [Labachelerie 92] *The frequency of laser diodes*, M. de Labachelerie, C. Latrasse, P. Kemssu, and P. Cerez, *J. Phys. III France* **2** (9), 1557 (1992)

- [Lathi 99a] *Transverse-junction-stripe GaAs-AlGaAs lasers for squeezed light generation*, S. Lathi, K. Tanaka, T. Morita, H. Kan, and Y. Yamamoto, *J. Quant. Electron.* **35** (3), 387 (1999)
- [Lathi 99b] *Influence of nonlinear gain and loss on the intensity noise of a multimode semiconductor laser*, S. Lathi and Y. Yamamoto, *Phys. Rev A* **59** (1), 819 (1999)
- [Lax 66] *Physics of Quantum Electronics*, M. Lax (McGraw-Hill, New York, 1966)
- [Louisell 73] *Quantum Statistical Properties of Radiation*, W. H. Louisell, Wiley, New York (1973)
- [MacAdam 92] *A narrow-band tunable diode laser with grating feedback and a saturated absorption spectrometer for Cs and Rb*, K. B. MacAdam, A. Steinbach, and C. Wieman, *Am. J. Phys.* **60** (12), 1098 (1992)
- [Machida 88a] *Observation of sub-poissonian photoelectron statistics in a negative feedback semiconductor laser*, S. Machida and Y. Yamamoto, *Opt. Comm.* **57** (4), 290 (1988)
- [Machida 88b] *Ultrabroadband amplitude squeezing in a semiconductor laser*, S. Machida and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **60** (9), 792 (1988)
- [Maki 93] *Stabilized diode-laser system with grating feedback and frequency-offset locking*, J. J. Maki, N. S. Campbell, C. M. Grande, R. P. Knorpp, and D. H. Mac Intyre, *Opt. Comm.* **102** (3-4), 251 (1993)
- [Marin 95] *Squeezing and intermode correlations in laser diodes*, F. Marin, A. Bramati, E. Giacobino, T.-C. Zhang, J.-Ph. Poizat, J.-F. Roch, and P. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **75** (25), 4606 (1995)
- [Marin 99] *Polarization and transverse dynamics of VCSELs*, F. Marin and G. Giacomelli, *Quant. Semiclass. Opt.* **1** (25), 128 (1999)
- [McMahon 95] *Detuning of the gain and reflectivity spectra and its effect on the output characteristics of vertical-cavity surface-emitting lasers*, C. H. McMahon, J. W. Bae, C. S. Menoni, D. Patel, H. Temkin, P. Brusenbach, and R. Leibenguth, *Appl. Phys. Lett.* **66** (17), 2171 (1995)
- [Mertz 91a] *Improvements in the observed intensity correlation of optical parametric oscillator twin beams*, J. Mertz, T. Debuisschert, A.

- Heidmann, C. Fabre, and E. Giacobino, *Opt. Lett.* **16** (16), 1234 (1991)
- [Mertz 91b] *Generation of sub-Poissonian light using active control with twin beams*, J. Mertz, A. Heidmann, and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **44** (5), 3229 (1991)
- [Mertz 93] *Photon noise reduction by controlled deletion techniques*, J. Mertz and A. Heidmann, *J. Opt. Soc. Am. B* **10** (9), 745 (1993)
- [Mukaihara 93] *Engineered polarization control of GaAs/AlGaAs surface-emitting lasers by anisotropic stress from elliptical etched substrate hole*, T. Mukaihara, F. Koyama, and K. Iga, *IEEE Phot. Tech. Lett.* **5** (2), 133 (1993)
- [Mukaihara 95] *Polarization control of vertical-cavity surface-emitting lasers using a birefringent metal/dielectric polarizer loaded on top distributed Bragg reflector*, T. Mukaihara, N. Ohnoki, Y. Hayashi, N. Hatori, F. Koyama, and K. Iga, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **1** (2), 667 (1995)
- [O'Connor 66] *Unusual crystal-field energy levels and efficient laser properties Nd:YVO₄*, J. R. O'Connor, *Appl. Phys. Lett.* **9** (11), 407 (1966)
- [Pan 93] *Optical injection induced polarization bistability in vertical-cavity surface-emitting lasers*, Z. G. Pan, S. Jiang, M. Dagenais, R. A. Morgan, K. Kojima, M. T. Asom, R. E. Leibenguth, G. D. Guth, and M. W. Focht, *Appl. Phys. Lett.* **63** (22), 2999 (1993)
- [Petermann 79] *Calculated spontaneous emission factor for double-heterostructure injection lasers with gain-induced waveguiding*, K. Petermann, *IEEE J. Quant. Electron.* **15** (7), 566 (1979)
- [Poizat 93] *Experimental Realization of a Quantum Optical Tap*, J.-Ph. Poizat and Ph. Grangier, *Phys. Rev. Lett.* **70** (3), 271 (1993)
- [Poizat 98] *Spatial quantum noise of laser diodes*, J.-Ph. Poizat, T.-J. Chang, O. Ripoll, and Ph. Grangier, *J. Opt. Soc. Am. B* **15** (6), 1757 (1998)
- [Poizat 00] *Quantum intensity noise of laser diodes and nonorthogonal spatial eigenmodes*, J.-Ph. Poizat, T.-J. Chang, and Ph. Grangier, *Phys. Rev. A* **61** (4), 043807/1-11 (2000)
- [Polzik 92] *Atomic spectroscopy with squeezed light for sensitivity beyond*

- the vacuum-state limit*, E. S. Polzik, J. Carri, and H. J. Kimble, *Appl. Phys. B* **55** (33), 279 (1992)
- [Ralph 96] *Intensity noise of injection-locked lasers: quantum theory using a linearized input-output method*, T. C. Ralph, C. C. Harb, and H.-A. Bachor, *Phys. Rev. A* **54** (5), 4359 (1996)
- [Regalado 96] *Polarization switching in quantum-well vertical-cavity surface-emitting lasers*, J. Martin Regalado, M. S. Miguel, N. B. Abraham, F. Prati, *Opt. Lett.* **21** (5), 351 (1996)
- [Regalado 97] *Polarization properties of Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers*, J. Martin-Regalado, F. Prati, M. San Miguel, and N. B. Abraham, *IEEE J. Quantum. Electron.* **33** (5), 765 (1997)
- [Richardson 90] *Non classical light from a semiconductor laser operating at 4 K*, W. H. Richardson, S. Machida, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **64** (22), 400 (1990)
- [Richardson 91 a] *Squeezed photon number noise and subpoissonian electrical partition noise in a semiconductor laser*, W. H. Richardson, S. Machida, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **66** (22), 2867 (1991)
- [Richardson 91 b] *Quantum Correlation between the Junction-Voltage Fluctuation and the Photon-Number Fluctuation in Semiconductor Laser*, W. H. Richardson, and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. Lett.* **66** (15), 1963 (1991)
- [Richardson 91 c] *Quantum measurement of the photon number via the junction voltage in a semiconductor laser*, W. H. Richardson and Y. Yamamoto, *Phys. Rev. A* **44** (11), 7702 (1991)
- [San Miguel 95] *Light-Polarization dynamics in surface-emitting semiconductor lasers*, M. San Miguel, Q. Feng, and J. V. Moloney, *Phys. Rev. A* **52** (2), 1728 (1995)
- [Schneider 96] *Bright squeezed-light generation by a continuous-wave semimonolithic parametric amplifier*, K. Schneider, R. Bruckmeier, H. Hansen, S. Schiller, and J. Mlynek, *Opt. Lett.* **21** (17), 1396 (1996)
- [Schnitzer 99] *GaAs VCSEL's at $\lambda = 780$ and 835 nm for short-distance 2.5-Gb/s plastic optical fiber data links*, P. Schnitzer, M. Grabherr, R. Jager, F. Mederer, R. Michalzik, D. Wiedenmann, and K. J. Ebeling, *IEEE Phot. Tech. Lett.* **11** (7), 769 (1999)

- [Scott 95] *Design of index-guided vertical-cavity lasers for low temperature-sensitivity, sub-milliamp thresholds, and single-mode operation*, J. W. Scott, D. B. Young, B. J. Thibeault, M. G. Peters, and L. A. Coldren, *IEEE J. Sel. Top. Quantum Electron.* **1** (2), 638 (1995)
- [Scully 97] *Quantum Optics*, M. O. Scully and M. S. Zubairy (Cambridge University Press, Cambridge, 1997)
- [Ser 95] *Polarization stabilization of vertical-cavity top-surface-emitting lasers by inscription of fine metal-interlaced gratings*, J. H. Ser, Y. G. Ju, J. H. Shin, and Y. H. Lee, *Appl. Phys. Lett.* **66** (21), 2769 (1995)
- [Shelby 86] *Quantum nondemolition detection of optical quadrature amplitudes*, R. M. Shelby, M. D. Levenson, S. H. Perlmutter, R. G. De Voe, and D. F. Walls, *Phys. Rev. Lett.* **57** (20), 691 (1986)
- [Shirasaki 90] *Squeezing of pulses in a nonlinear interferometer*, M. Shirasaki and H. A. Haus, *J. Opt. Soc. Am. B* **7** (1), 30 (1990)
- [Siegman 81] *Lasers*, A. Siegman (University Science Books, Mill Valley, 1981)
- [Siegman 89a] *Excess spontaneous emission in non-Hermitian optical system. I. Laser amplifier*, A. E. Siegman, *Phys. Rev. A* **39** (3), 1253 (1989)
- [Siegman 89b] *Excess spontaneous emission in non-Hermitian optical system. II. Laser oscillator*, A. E. Siegman, *Phys. Rev. A* **39** (3), 1264 (1989)
- [Slusher 85] *Observation of squeezed states generated by four-wave mixing in optical cavity*, R. E. Slusher, L. W. Hollberg, B. Yurke, J. C. Mertz, and J. F. Valley, *Phys. Rev. Lett.* **55** (22), 2409 (1985)
- [Taira 91] *Single-mode oscillation of laser-diode-pumped Nd:YVO₄ microchip lasers*, T. Taira, A. Mukai, Y. Nozawa, and T. Kobayshi, *Opt. Lett.* **16** (24), 1955 (1991)
- [Tapster 87] *Generation of sub-Poissonian light by high-efficiency light-emitting diodes*, P. R. Tapster, J. G. Rarity, and J. S. Satchell, *Europhys. Lett.* **4** (3) (1987)
- [Teich 85] *Observation of sub-poisson Franck-Hertz light at 253.7 nm*, M. C. Teich, B. E. A. Saleh, *J. Opt. Soc. Am. B* **2** (2), 275 (1985)

- [Travagnin 96] *Role of optical anisotropies in the polarization properties of surface-emitting semiconductor lasers*, M. Travagnin, M. P. van-Exter, A. K. van-Doorn, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **54** (2), 1647 (1996)
- [Travagnin 97] *Influence of carrier dynamics on the polarization stability and noise-induced polarization hopping in surface-emitting semiconductor lasers*, M. Travagnin, M. P. van-Exter, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **56** (2), 1497 (1997)
- [Treps 00] *Transverse distribution of quantum fluctuations and correlations in spatial solitons*, N. Treps and C. Fabre, *Phys. Rev. A* **62** (3), 033816 (2000)
- [Tucker 77] *Stimulated emission cross-section at 1064 and 1342 nm in Nd:YVO₄*, A. W. Tucker, M. Birnbaum, C. L. Fincher, and J. W. Erler, *J. Appl. Phys.* **48** (12), 4907 (1977)
- [Valle 97] *Polarization behavior of birefringent multitransverse mode vertical-cavity surface-emitting lasers*, A. Valle, L. Pesquera, and K. A. Shore, *IEEE Phot. Tech. Lett.* **9** (5), 557 (1997)
- [Van-Exter 97] *Electro-optic effect and birefringence in semiconductor vertical-cavity lasers*, M. P. van-Exter, A. K. Jansen-van-Doorn, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **56** (1), 845 (1997)
- [Vey 98] *Noise and amplitude-squeezing performance of two-polarization-mode semiconductor lasers*, J. L. Vey and W. Elsässer, *Opt. Lett.* **23** (9), 721 (1998)
- [Vey 99] *Quantum noise and polarization properties of vertical-cavity surface-emitting lasers*, J. L. Vey, C. Degen, K. Auen, and W. Elsässer, *Phys. Rev. A* **60** (4), 3284 (1999)
- [Walls 95] *Quantum Optics*, D. F. Walls and G. J. Milburn (Springer, Berlin, 1995)
- [Wang 93] *Squeezed light from injection-locked quantum-well lasers*, H. Wang, M. J. Freeman, and D. G. Steel, *Phys. Rev. Lett.* **71** (24), 3951 (1993)
- [Washio 76] *Room-temperature cw operation of an efficient miniaturized Nd:Yag laser end-pumped by a super luminescent diode*, K. Washio, K. Iwamoto, K. Inoue, I. Hino, S. Matsumoto, and F. Saito, *Appl. Phys. Lett.* **29** (11), 720 (1976)

- [Wiedenmann 99] *Design and analysis of single-mode oxidized VCSELs for high-speed optical interconnects*, D. Wiedenmann, R. King, C. Jung, R. Jager, R. Michalzik, P. Schnitzer, M. Kicherer, and K. J. Ebeling, *IEEE J. Sel. Top. Quant. Electron.* **5** (3), 503 (1999)
- [Wigner 32] *On the Quantum Correction for Thermodynamic Equilibrium*, Wigner E. P., *Phys. Rev.* **40**, 749 (1932)
- [Willemsen 99] *Correlated fluctuations in the polarization of a vertical-cavity semiconductor laser*, M. B. Willemsen, M. P. van-Exter, and J. P. Woerdman, *Phys. Rev. A* **60** (5), 4105 (1999)
- [Yamamoto 86] *Amplitude squeezing in a pump-noise-suppressed laser oscillator*, Y. Yamamoto, S. Machida, and O. Nilsson, *Phys. Rev. A* **34** (5), 4025 (1986)
- [Yamamoto 87a] *Generation of number-phase minimum-uncertainty states and number states*, Y. Yamamoto, S. Machida, N. Imoto, M. Kitagawa, and G. Bjork, *J. Opt. Soc. Am. B* **4** (10), 1645 (1987)
- [Yamamoto 87b] *High-impedance suppression of pump fluctuations and amplitude squeezing in semiconductor lasers*, Y. Yamamoto and S. Machida, *Phys. Rev. A* **35** (12), 5114 (1987)
- [Yamamoto 91] *Microcavity semiconductor laser with enhanced spontaneous emission*, Y. Yamamoto, S. Machida, and G. Bjork, *Phys. Rev. A* **44** (1), 657 (1991)
- [Young 93] *Enhanced performance of offset-gain high-barrier vertical-cavity surface-emitting lasers*, D. B. Young, J. W. Scott, F. H. Peters, M. G. Peters, M. L. Majewski, B. J. Thibault, S. W. Corzine, and L. A. Coldren, *IEEE J. Quantum Electron.* **29** (6), 2013 (1993)
- [Zhang 95] *Quantum noise of free running and externally stabilized diode lasers*, T. C. Zhang, J.-Ph. Poizat, P. Grelu, J.-F. Roch, P. Grangier, F. Marin, A. Bramati, V. Jost, M. D. Levenson, and E. Giacobino, *Quantum Semiclass. Opt.* **7**, 601 (1995)

Résumé

Nous étudions en détail le bruit quantique dans les microlasers semi-conducteurs à cavité verticale : les VCSELs, dont l'acronyme anglais signifie Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers. Ces lasers ont la particularité d'émettre des faisceaux avec plusieurs modes transverses de polarisations variées au-dessus du seuil. Lorsqu'un seul mode transverse, polarisé linéairement oscille, nous démontrons théoriquement aussi bien qu'expérimentalement l'importance de l'émission dans la direction de polarisation orthogonale pour la caractérisation du bruit d'intensité. En régime multimode transverse, les anticorrélations très importantes entre les modes permet d'obtenir, pour les meilleurs échantillons, des faisceaux au bruit d'intensité comprimé (jusqu'à 15 % sous la limite quantique standard). Pour les échantillons qui présentent de l'excès de bruit en régime libre, la technique de l'injection optique permet d'obtenir, dans certains cas, de la compression du bruit d'intensité. Enfin, nous présentons nos résultats sur la structure spatiale du bruit d'intensité dans le plan transverse.

Nous rapportons aussi dans ce manuscrit l'étude du bruit d'intensité des minilasers Nd :YVO₄. Par rapport au modèle standard des lasers à deux niveaux, ces lasers présentent un excès de bruit à basse fréquence. Nous montrons que cet excès de bruit provient d'effets non linéaires dus à l'importance du pic de bruit à la fréquence d'oscillation de relaxation. Expérimentalement, nous mettons en oeuvre deux techniques distinctes pour réduire ces effets : une boucle de rétroaction électrooptique et l'injection optique.

Mots-clefs : lasers à semi-conducteurs, lasers à solide, bruit quantique, réduction du bruit d'intensité, corrélations quantiques, effets transverses.

Abstract

We study in detail the quantum noise in a new type of semiconductor lasers, the VCSELs (for Vertical-Cavity Surface-Emitting Lasers). These lasers can operate with various transverse modes with different polarisations above threshold. When only one transverse mode linearly polarised oscillate, we demonstrate experimentally as well as theoretically that one has to take into account the noise of the modes orthogonally polarised under threshold to characterise the intensity noise. When various transverse modes oscillate, they are strongly anticorrelated which gives rise to squeezing for the best samples. If a sample always shows excess noise in free-running operation, the injection locking technique is a way to obtain intensity squeezed beams. Finally, we report our results concerning the transverse spatial structure of the intensity noise.

We also study the intensity noise of Nd:YVO₄ microlasers. Compared to the theoretical predictions of the standard 2 level laser theory, the experimental results exhibit an excess noise at low frequencies. We demonstrate that this excess noise is due to non linear effects at the relaxation oscillation frequency. These effects are reduced experimentally by two different techniques: an electrooptic feedback loop or the injection locking.

Keywords: semiconductor lasers, solid state lasers, quantum noise, squeezing, quantum correlations, transverse effects.