



Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques

Francesca Grassia

► To cite this version:

Francesca Grassia. Fluctuations quantiques et thermiques dans les transducteurs électromécaniques. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998. Français. NNT: . tel-00011777

HAL Id: tel-00011777

<https://theses.hal.science/tel-00011777>

Submitted on 7 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Cognac



**LABORATOIRE
KASTLER BROSSEL**



Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Francesca GRASSIA

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la Thèse :

**FLUCTUATIONS QUANTIQUES ET THERMIQUES
DANS LES TRANSDUCTEURS ELECTROMECHANIQUES**

Soutenue le 26 juin 1998 devant le jury composé de :

M. Ph. TOURRENC	Président
M. J-M. COURTY	
M. Ph. GRANGIER	Rapporteur
M. S. REYNAUD	Directeur de thèse
M. F. RICCI	Rapporteur
M. P. TOUBOUL	



**LABORATOIRE
KASTLER BROSSEL**



Thèse de doctorat de l'Université Pierre et Marie Curie

Spécialité : Physique Quantique

présentée par

Francesca GRASSIA

pour obtenir le grade de Docteur de l'Université Pierre et Marie Curie

Sujet de la Thèse :

**FLUCTUATIONS QUANTIQUES ET THERMIQUES
DANS LES TRANSDUCTEURS ELECTROMECHANIQUES**

Soutenue le 26 juin 1998 devant le jury composé de :

M. Ph. TOURRENC Président

M. J-M. COURTY

M. Ph. GRANGIER Rapporteur

M. S. REYNAUD Directeur de thèse

M. F. RICCI Rapporteur

M. P. TOUBOUL

A mon père

Je considère qu'un travail de thèse ne peut jamais être solitaire, sauf dans des cas pathologiques. Cela a été particulièrement vrai et important pour le mien. Pour que les limites d'espace ne m'obligent à taire le rôle de quelqu'un ou les raisons de son importance, j'ai décidé d'en confier la mémoire à une liste. Si j'ai été aussi transparente que je le désirais pendant ces années, je peux me permettre de croire que chacun saura pourquoi son nom apparaît ci-dessous.

LaboratoireKastlerBrossel EcoleNormaleSupérieure UniversitéPierreetMarieCurie
UniversitéDenisDiderot MichèleLeduc SergeHaroche Equiped'OptiqueQuantique ElisabethGiacobino *FrançoisBiraben* UniversitédeMilan GouvernementFrançais CommunautéEuropéenne
SergeReynaud *Jean-MichelCourty* LaurentHilico Universitéd'Evry Marc-ThierryJaekel AgnèsMaître NicolasBilly LUCILEJULIEN Bernard-Cagnac **YassineHadjar** AntoineHeidmann ASTRIDLAMBRECHT Pierre-FrançoisCohadon BenoîtGrémaud *ThomasCoudreau* CatherineSchwob AlbertoBramati FrançoisNez **BéatricedeBeauvoir** MichelPinard DominiqueDelande *ClaudeFabre* PaulIndelicato FerdinandoDeTomasì ArnededeMeijere Aephraim-Steinberg FrancescoMarin StephaneBoucard PascalEl-Khoury HichemEleuch Jean-PierreHermier *ThibaultJonckheere* GaetanMessin LaurentVernac FrancisTrehin Alexis-Poizat BernardRodriguez GuyFlory BlandineMoutiers *KarineGautier* Jean-PierrePlaut PHILIPPEPACE Jean-PierreOkpizs Marie-ClaireRigolet PhilippeTourenco Philippe-Grangier FulvioRicci PierreTouboul **AriannaFiloramo** FerdinandoDeTomasì *YassineHadjar RandaHadjar* ThomasCoudreau SylvieKipfer AGNÈSMAÎTRE *Pierre-FrançoisCohadon ValérieCohadon LucaGuidoni LetiziaGuidoni EftihiaJones-Gorlin EnricoCeleghini GiuseppeVitiello AdalbertoGiazotto DimitriBatani AlbertoZaffaroni MichelaPetrini AlessandraGatti LivioCaputo **ARNEDEMEIJERE** MarinaCaputo **GIULIADEMEIJERE** Mosé Zippi *AlvianaGrassia EmmaGrassia Pier-AndreaGrassia StefaniaDePasquale MarinaMelandri LaureHeidmann AntoineGautier RémiSoucaze ValentineMoutiers AubinGrémaud SixtinedeBeauvoir AlexandreCoudreau MaxenceGautier . . .**

TABLE DES MATIERES

I	Introduction	3
A	Les motivations	3
B	Les contextes expérimentaux et théoriques	8
C	Le contenu de ce travail	11
 II	 Le bruit quantique dans les réseaux passifs	 15
A	Les réseaux linéaires	16
1	Le théorème de Nyquist	16
2	Les multipôles linéaires	26
3	La sensibilité de la mesure	37
B	Les réseaux nonlinéaires	39
1	Un exemple de transducteur nonlinéaire	39
2	Fonctionnement en polarisation constante	42
3	Fonctionnement en polarisation oscillante	45
C	Une application à la détection QND	52
1	Couplage entre quadratures en optique	52
2	Couplage de quadratures électromécaniques	55
3	Les limites quantiques dans une mesure QND	59
 III	 Le bruit quantique dans les réseaux actifs	 61
A	L'amplificateur linéaire quantique	62
B	L'amplificateur opérationnel quantique	66
1	L'amplificateur en boucle ouverte	66
2	L'amplificateur branché sur deux lignes	69
C	L'amplificateur avec contre-réaction	72
1	Les équations de contre-réaction	73
2	La matrice de diffusion	76

3	Discussion de la mesure	82
IV	Application aux accéléromètres électrostatiques	85
A	La friction froide	87
1	L'impédance mécanique après contre-réaction	89
2	La matrice de diffusion	90
3	Mesure avec friction froide	93
B	Le transducteur capacitif différentiel	96
1	Le point de fonctionnement	97
2	La transformation des fluctuations	100
3	La description des pertes électriques	107
C	L'accéléromètre capacitif à friction froide	107
1	Modélisation de l'accéléromètre	108
2	Les résultats des calculs	111
3	Discussion des limites ultimes	115
V	Conclusion et perspectives	117
VI	Appendices	121
A	Réponse linéaire et susceptibilités	121
B	Bruit ajouté et rapport signal sur bruit	122
C	Equations du transducteur capacitif différentiel	124
D	Fonctionnement du transducteur avec une polarisation désaccordée	125
E	Influence des pertes	127
	Références	131

I. INTRODUCTION

A. Les motivations

Les fluctuations sont présentes dans toute mesure et en limitent la sensibilité ultime. Ceci est vrai non seulement pour les fluctuations de nature instrumentale mais aussi pour les fluctuations fondamentales qui correspondent au bruit thermique et au bruit quantique.

Le rôle fondamental des fluctuations a été mis en évidence par Einstein [1] et Langevin [2] dans leur analyse du mouvement Brownien. Les fluctuations observables sur ce système sont liées d'une part à la température, d'autre part à la dissipation. A tout mécanisme de friction, qui aurait pour conséquence le refroidissement du système, sont associées des fluctuations qui conduisent à l'existence d'un état d'équilibre thermodynamique où le système se thermalise à la température du bain avec lequel il est couplé. Cette relation est connue sous le nom de *théorème fluctuations-dissipation*.

Le spectre des fluctuations est constitué non seulement par le *spectre de corps noir* exprimant le nombre de photons thermiques [3], mais aussi par un terme supplémentaire caractérisant les fluctuations du *vide* [4,5]. A la limite de la température nulle, des fluctuations persistent donc: ce sont les fluctuations quantiques proprement dites. Tout système réel est donc soumis non seulement à des fluctuations thermiques mais aussi à des fluctuations quantiques et leurs effets doivent en principe être décrits dans le même formalisme [6,7].

Si on se limite aux fluctuations quantiques, leurs effets sur la mesure quantique a fait l'objet de très nombreuses études depuis les débuts de la théorie quantique. Ces études ont montré que la mécanique quantique impose des contraintes incontournables à la mesure. Ces contraintes sont bien résumées dans les *inégalités* de Heisenberg [8]. Ces inégalités affirment qu'il est impossible de mesurer simultanément avec une précision arbitraire deux observables conjuguées, telles que la position x et l'impulsion p d'une particule libre

$$\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (1)$$

où $\hbar$ est la constante de Planck. Cette relation définit une *limite quantique* pour toute mesure

de position ou d'impulsion d'une particule libre. Elle concerne non seulement les objets typiquement quantiques du domaine microscopique, mais aussi des objets macroscopiques ayant une masse importante tels que les antennes gravitationnelles. Elles peuvent paraître à première vue négligeables dans ce second cas, mais elles jouent néanmoins un rôle dans les mesures dès que la sensibilité est suffisamment grande.

La discussion de la signification profonde de ces relations a engendré de nombreux débats. La conception longtemps dominante, celle dite de Copenhague, est que toute mesure quantique perturbe nécessairement le système observé. C'est vers cette conclusion que pousse la célèbre expérience de pensée du microscope de Heisenberg où la position d'un électron est mesurée par son interaction avec un photon. La perturbation de l'impulsion de l'électron lors de cette mesure affecte nécessairement d'éventuelles mesures ultérieures. Si la précision de la première mesure, à l'instant t , est $\Delta x(t)$, alors la précision de la seconde mesure, à l'instant $t + T$, est telle que

$$x(t + T) = x(t) + \frac{p(t)}{2M}T \quad \Rightarrow \quad \Delta x(t + T) \Delta x(t) \approx \frac{\hbar T}{2M} \quad (2)$$

où M est la masse de l'objet observé. La limite suggérée par ce raisonnement

$$\Delta x \approx \sqrt{\frac{\hbar T}{2M}} \quad (3)$$

est appelée *limite quantique standard*.

En développant une approche plus générale de la théorie de la mesure, von Neumann [9] propose une nouvelle expérience de pensée où il mesure la vitesse de la particule libre plutôt que sa position. Cette mesure est soumise aux relations d'Heisenberg mais la rétro-action de la mesure, ici une perturbation de la position, n'a pas d'effet sur une mesure ultérieure de la vitesse puisque l'impulsion est une constante du mouvement pour une particule libre

$$p(t + T) = p(t) \quad \Rightarrow \quad \Delta p(t + T) = \Delta p(t) \quad (4)$$

Si on voulait définir ici une *limite quantique standard*, elle serait nulle. Hormis son intérêt historique, ce rappel montre qu'il n'y a pas forcément de *perturbation inévitable* introduite

par la mesure. Lorsque l'on mesure au cours du temps une quantité physique donnée, la mécanique quantique n'impose pas forcément de dégradation.

Toutefois, la nature fondamentale, *intrinsèque*, des fluctuations quantiques reste incontournable. Des inégalités de Heisenberg s'appliquent à tous les systèmes physiques puisqu'ils sont toujours décrits par des grandeurs physiques non commutatives. Pour décrire de manière précise les limites ultimes de sensibilité qui peuvent être atteintes dans une mesure, il est donc important de s'assurer que ces contraintes quantiques sont bien prises en compte dans le traitement théorique des fluctuations.

Par ailleurs, si l'on veut décrire le bruit dans des mesures réelles, il faut aussi tenir compte de caractéristiques importantes qui sont habituellement négligées dans les discussions historiques sur la mesure quantique.

Tout d'abord, la plupart de ces discussions ne considèrent que des systèmes affectés par les fluctuations quantiques, et semblent oublier la nature commune de celles-ci avec les fluctuations thermiques. Si dans le domaine optique, les fréquences en jeu sont telles que le bruit thermique est négligeable à la température ambiante, cela n'est plus vrai aux fréquences intervenant dans les mesures mécaniques ou électriques. En fait, très souvent, les fluctuations quantiques ne peuvent pas être observées car elles se situent à un niveau de loin inférieur à celui du bruit thermique.

Ensuite, les raisonnements sur la mesure quantique présupposent souvent la possibilité d'effectuer une mesure quantique *idéale*. Par mesure idéale, nous entendons en particulier une mesure *instantanée* et infiniment *précise*. Mais cette hypothèse ne se rencontre jamais dans les situations expérimentales réelles. Toute mesure réelle se déroule dans le temps. Autrement dit, elle correspond à une bande passante limitée et non infinie. Ceci impose de tenir compte de la dynamique temporelle du système en introduisant une analyse spectrale. De plus, toute mesure résulte du couplage entre le système et un appareil de mesure et cet appareil de mesure ajoute du bruit sur le signal mesuré tout en exerçant une *rétro-action* sur le système. C'est le cas également de tout élément dissipatif intervenant dans la mesure. Ces effets sont rarement décrits par le schéma idéal de mesure quantique décrit par von

Neumann.

Nous pouvons maintenant définir une problématique de la mesure quantique qui réponde aux questions posées ci-dessus. Nous voulons d'abord prendre en compte les fluctuations quantiques *et* thermiques dans un même formalisme. Ce formalisme doit garantir que le traitement des fluctuations soit toujours consistant avec les contraintes imposées par la théorie quantique. Il doit également se baser sur une idée de mesure *non-instantanée* se déroulant avec une certaine bande passante. Enfin, la mesure doit être interprétée comme le résultat du couplage entre le système et un appareil de mesure et rendre compte des sources de bruit associées à tous les mécanismes de dissipation.

Un cadre approprié pour répondre à ces questions est celui de la théorie des réseaux. Ce type d'approche a été développé de manière extensive pour traiter précisément l'effet des fluctuations thermodynamiques dans des systèmes dissipatifs complexes à l'équilibre [10,11]. Il a permis d'approfondir la compréhension du théorème fluctuations-dissipation en particulier par l'établissement des relations de réciprocité [12,13]. Né dans le contexte de l'analyse du bruit Nyquist-Johnson dans les réseaux électriques [14,15], il a en réalité une portée bien plus vaste [6,7].

Une autre limite des discussions sur le problème de la mesure quantique est qu'elle ne traite généralement que des éléments passifs. Or, les composants actifs jouent un rôle essentiel dans de nombreux exemples de mesures ultra-sensibles. En particulier, une façon simple de poser le problème de la mesure quantique est de considérer que la quantité à mesurer dans le système est directement branchée à l'entrée d'un préamplificateur. L'étape de préamplification a pour but d'amener le signal quantique à un niveau classique en y ajoutant le moins de bruit possible. Bien sûr, comme pour la dissipation, il y a nécessairement des fluctuations ajoutées qui sont le prix à payer pour le phénomène d'amplification et ces fluctuations doivent respecter les contraintes imposées par la théorie quantique [16–19].

Les systèmes modernes de mesure ultra-sensible utilisent souvent aussi des asservissements permettant une stabilisation active du système. Ces stabilisations actives permettent de fixer le point de fonctionnement d'un système et donc d'empêcher celui-ci d'explorer des

zones trop grandes de l'espace des paramètres. Mais elles permettent aussi d'en modifier le comportement dynamique et, donc, la réponse aux fluctuations. Un exemple particulièrement intéressant pour nous est celui d'une stabilisation active qui simule un mécanisme de friction par une contre-réaction électrique [20–22]. Les relations thermodynamiques usuelles entre les fluctuations et la dissipation sont alors contournées et il est possible de réduire la température équivalente de bruit correspondant à cette dissipation très en dessous de la température ambiante. Ceci a valu à cette technique le nom de friction froide. Un problème reste toutefois posé vis à vis des fluctuations quantiques. Le mécanisme de friction froide ne peut en effet pas contourner les inégalités de Heisenberg. Il faut donc analyser de façon plus précise comment la réduction des fluctuations thermiques est compatible avec le respect des contraintes quantiques.

Ces réflexions nous amènent donc à poser les questions suivantes qui seront l'objet principal de ce travail de thèse.

Une première question, générale, concerne la mise en place d'une méthode de traitement des fluctuations quantiques et thermiques dans un système de mesure réel: comment les traiter, quel que soit le niveau de complexité du système, quelle que soit la nature passive ou active de ses composantes? Ce traitement doit s'appliquer aux fluctuations thermiques tout en garantissant la consistance du traitement avec la mécanique quantique.

Une deuxième question, plus spécifique, concerne les systèmes électromécaniques. En effet, le bruit de ces systèmes, habituellement dominé par les fluctuations thermiques, a été repoussé de plus en plus près du niveau du bruit quantique, sous la pression des expériences nécessitant de très hautes sensibilités, et grâce aux développements technologiques dans le domaine cryogénique en particulier. Le rôle des fluctuations quantiques dans la détermination des limites de sensibilité de telles expériences est ainsi devenu de plus en plus important. Il devient donc nécessaire d'évaluer les effets des fluctuations quantiques et thermiques sur la sensibilité des mesures électromécaniques. En particulier, il faut analyser précisément la technique de friction froide.

B. Les contextes expérimentaux et théoriques

L'étude des fluctuations quantiques est motivée non seulement par le rôle fondamental qu'elles jouent dans la théorie de la mesure quantique, mais aussi par le rôle qu'elles jouent dans certaines expériences de très grande sensibilité [23]. En particulier, ces études ont souvent été stimulées par les perspectives de détection des ondes gravitationnelles. Les détecteurs utilisent des techniques de mesure extrêmement sensibles qui approchent le niveau du bruit quantique. La maîtrise du traitement des fluctuations quantiques dans ces systèmes est donc nécessaire d'abord pour pouvoir contrôler leur effet sur la sensibilité de la mesure et ensuite pour proposer des techniques nouvelles qui permettent de repousser les limites de sensibilité au dessous de la limite quantique standard.

La recherche expérimentale des ondes gravitationnelles est née au début des années 60. J. Weber a proposé des antennes capables de résonner au passage d'une onde gravitationnelle [24,25]. Ces antennes sont en général des barres d'aluminium, qui ont un poids typique de quelques tonnes, une longueur de quelques mètres, et dont la fréquence du premier mode longitudinal est de l'ordre du kHz. Le rapport signal sur bruit d'une barre de Weber peut être fortement amélioré en couplant l'antenne à un second oscillateur mécanique, de masse plus petite, accordé en fréquence. La lecture du signal est assurée par un transducteur électromécanique, typiquement un transducteur capacitif. Le déplacement de la masse entraîne une variation de capacité qui se traduit en un signal électrique. Pour essayer de réduire le plus possible les effets néfastes du bruit thermique, une nouvelle génération d'antennes gravitationnelles ultra-cryogéniques est en cours de développement en Italie (NAUTILUS à Rome et AURIGA à Legnaro).

Ces mesures utilisent, sous une forme différente, l'argument, introduit pour la première fois par von Neumann et rappelé plus haut, d'une mesure sans contre-réaction de l'appareil de mesure sur l'évolution de l'observable mesurée. Cette idée a été de nouveau discutée au début des années 70 par Braginsky [26], puis Thorne [27] et Caves [28] après la stimulation représentée par les projets de détection des ondes gravitationnelles par des barres de Weber

ou des interféromètres. Elle a depuis fait l'objet de nombreuses études théoriques et de vérifications expérimentales concluantes. Dans une telle mesure, le bruit quantique amené par l'interaction avec l'appareil de mesure n'affecte pas la quantité mesurée lors de son évolution au cours du temps. Plusieurs noms ont été forgés pour décrire cette propriété, celui de mesure *quantique non-démolissante* (QND pour *Quantum Non Demolition*) [30] ou celui de mesures *échappant à la rétro-action* (BAE pour *Back Action Evading*). Nous utiliserons ici l'acronyme QND en choisissant donc de nous conformer à la dénomination utilisée pour ces mesures en optique quantique.

L'idée initiale de Braginsky était de mesurer l'énergie d'un oscillateur harmonique qui est, comme l'impulsion d'une particule libre, une quantité conservée dans l'évolution. Une autre stratégie s'est dessinée ensuite. Elle est basée sur la mesure des variables de quadrature d'un oscillateur harmonique. Un oscillateur oscillant à la fréquence ϖ_m peut être décrit en termes de variables lentes x_1 et x_2 ainsi définies

$$x(t) = x_1(t) \cos \varpi_m t + x_2(t) \sin \varpi_m t \quad (5)$$

Ces variables sont appelées les *quadratures* et ce sont aussi des quantités conservées dans le mouvement libre de l'oscillateur. En fait, le référentiel des quadratures (x_1, x_2) représente une simple rotation de l'espace des phases (x, p) qui est justement conçue pour suivre le mouvement naturel du point représentatif du mouvement. L'inégalité de Heisenberg prend la forme suivante pour les dispersions sur les quadratures

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \frac{\hbar}{2M\varpi_m} \quad (6)$$

A la différence de ce qui se passe pour x et p , les quadratures x_1 et x_2 sont des grandeurs de même dimension. Aucune référence de phase n'existe en principe pour les distinguer, et on s'attend en général à ce que leurs dispersions soient égales

$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \geq \sqrt{\frac{\hbar}{2M\varpi_m}} \quad (7)$$

Cette inégalité peut être considérée comme exprimant ici la limite quantique standard.

Mais on peut fort bien définir une référence de phase par exemple en exploitant des phénomènes nonlinéaires, et faire en sorte que les deux quadratures se comportent de façon non-symétrique. L'une des quadratures peut alors être privilégiée par rapport à l'autre, avec moins de bruit. Ce phénomène peut être considérée comme une *compression du bruit* sur une des quadratures (*squeezing*) [31]. En créant une dissymétrie entre les comportements des deux quadratures, on peut aussi réaliser une mesure QND dans le domaine optique en exploitant le couplage par effet Kerr croisé, c'est-à-dire l'interaction paramétrique entre deux champs dans un milieu nonlinéaire purement dispersif [32,33].

Les nécessités expérimentales ont poussé à définir des critères de performance pour des mesures QND non-idéales [34]. Ces critères adaptent à une description réaliste des expériences les critères originaux définis uniquement pour des mesures idéales [27]. Ils décrivent non seulement la *fidélité* de la mesure mais aussi son caractère effectivement QND.

Le même type d'interaction paramétrique peut être réalisé sur des transducteurs électromécaniques utilisés pour lire le mouvement des barres gravitationnelles [35]. Le principe des mesures BAE sur les transducteurs électromécaniques et leur réalisation sont décrits de façon très complète dans la référence [36].

Les ondes gravitationnelles peuvent aussi être détectées par une mesure interférométrique, l'interféromètre étant formé de miroirs en chute libre vis à vis de la théorie de la gravitation. Pour que la sensibilité de cette mesure soit suffisante, il faut que les bras de l'interféromètre soient kilométriques. Ce type de détecteur présente l'avantage d'analyser le signal sur une bande spectrale relativement large. Parmi les antennes interférométriques, se trouve le projet italo-français VIRGO avec une antenne, ayant deux bras de 3 Km, en construction dans les environs de Pise [37].

Ces projets ont motivé une évaluation précise des limites ultimes dans les mesures de longueurs interférométriques. Les limites imposées par la mécanique quantique en optique ont été analysées de manière très détaillée. Une revue complète sur les méthodes de réduction du bruit en optique quantique se trouve dans les références [31,38]. Grâce à l'utilisation des *états comprimés*, la limite standard peut être dépassée dans les mesures interférométriques.

La véritable *limite quantique ultime* est en fait fixée par les mécanismes fondamentaux de dissipation, en accord avec la relation générale évoquée plus haut entre fluctuations et dissipation [39,40].

D'autres types de détecteurs ultra-sensibles utilisent des techniques analogues. C'est le cas en particulier pour les accéléromètres utilisés pour mesurer et compenser la variation de trajectoire d'un satellite due aux forces de traînée. Nous nous intéresserons en particulier aux accéléromètres développés à l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales [41,42] qui sont basés sur des transducteurs capacitifs de très grande sensibilité. Ces transducteurs fonctionnent en fait en mode BAE. Ils utilisent aussi pleinement les potentialités ouvertes par l'utilisation de systèmes actifs à la fois pour lire le mouvement de la masse et pour asservir sa position. Ces accéléromètres qui jouent un rôle important dans les projets de test du principe d'équivalence dans l'espace (famille des projets STEP) sont donc aussi des systèmes très intéressants pour notre schéma général d'étude des fluctuations. Une étude détaillée en a déjà été faite au niveau classique [41,42] ce qui facilitera grandement notre étude quantique.

Par contre, nous n'étudierons pas dans cette thèse les accéléromètres basés sur des transducteurs inductifs [60].

Enfin, pour terminer ce tour d'horizon des méthodes existant déjà dans ce domaine, il faut signaler les méthodes quantiques développées pour traiter l'effet de la dissipation sur les systèmes macroscopiques [43], l'étude des fluctuations dans les circuits électriques comportant des éléments dissipatifs [44,45] ainsi que la théorie d'entrée-sortie qui décrit la réponse linéaire dans un système dissipatif quantique [46]. Ces études nous ont aidé à poser les bases de notre traitement des fluctuations quantiques dans les réseaux.

C. Le contenu de ce travail

Comme nous l'avons déjà dit, le but premier de ce travail est de mettre en place une méthode générale de traitement des fluctuations dans un système de mesure réel. Ce trai-

tement doit s'appliquer aux fluctuations thermiques et quantiques tout en garantissant la consistance avec les contraintes de la théorie quantique.

Ce traitement sera appliqué en priorité aux systèmes électromécaniques tout en s'appuyant fortement sur les profondes analogies qui existent entre mesures électromécaniques et mesures optiques de position et en réutilisant les méthodes d'étude bien maîtrisées dans le domaine de l'optique [31].

Evidemment, les systèmes électromécaniques travaillent souvent à des températures auxquelles le bruit thermique est dominant. Ils profiteront cependant des outils généraux puisque les propriétés de consistance seront valables aussi à cette limite. Ceci nous permettra par exemple de démontrer que la technique de friction froide est bien compatible avec les contraintes quantiques.

Les fluctuations quantiques seront décrites dans le cadre d'une théorie semi-classique d'entrée-sortie linéaire. Autrement dit, les fluctuations quantiques seront linéarisées autour d'une valeur moyenne et ensuite traitées linéairement. Les fluctuations sortantes seront ensuite calculées en fonction des fluctuations entrantes, comme le résultat d'une interaction avec l'ensemble constitué par l'appareil de mesure et le système mesuré. Ces fluctuations sortantes décrivent à la fois le bruit ajouté sur le signal lors de la mesure et le bruit de rétro-action perturbant l'évolution du système. La transformation linéaire des fluctuations lors de l'interaction est décrite par le formalisme de la matrice S . Cette matrice S contient en fait toutes les informations susceptibles de nous intéresser. De plus, elle permet de définir les règles de consistance du traitement quantique d'une manière simple. Ces règles sont équivalentes à la conservation des commutateurs dans la transformation c'est à dire aussi à l'unitarité de la matrice S . Tous ces arguments seront bien sûr développés de manière plus détaillée dans la suite.

On peut insister sur le fait que cette approche, qui généralise la théorie de la réponse linéaire [6,7] s'applique en fait avec une très grande généralité. En particulier, elle décrit très bien les mécanismes d'interaction nonlinéaire et n'est pas limitée au régime d'approximation semi-classique [47].

Dans le chapitre II nous posons les bases du traitement des fluctuations quantiques en considérant le cas simple des réseaux passifs. Nous réécrivons le théorème de Nyquist pour établir sa relation avec la description des fluctuations quantiques. Nous adaptons ensuite la théorie des réseaux linéaires [11] en séparant la partie réactive du système, décrit par une impédance réactive, et les parties dissipatives, décrites par des lignes dissipatives. Nous dérivons alors la matrice de diffusion, la matrice de répartition en théorie des réseaux, de la matrice impédance. Ceci est en fait un résultat bien connu en théorie des réseaux linéaires. Nous étudions ensuite les systèmes mécaniques puis les systèmes électromécaniques.

Cette approche est généralisable à des systèmes nonlinéaires, pourvu que ceux-ci soient linéarisés au voisinage du point de fonctionnement. Nous effectuons ce travail pour les transducteurs capacitifs passifs en distinguant divers régimes de polarisation de la capacité. Des mécanismes de transfert de fréquences apparaissent pour des polarisations oscillantes. En particulier, pour des polarisations à deux fréquences, nous discutons des mécanismes privilégiant une quadrature et faisant ainsi apparaître un schéma de détection QND. C'est le schéma utilisé dans la lecture des barres de Weber.

Dans le chapitre III, nous abordons l'étude des réseaux actifs en considérant des schémas élémentaires d'amplificateurs. Nous commençons par rappeler le cas bien connu des amplificateurs linéaires en traitant les fluctuations quantiques de la même façon que pour celles provenant de la dissipation. Nous nous concentrons ensuite sur l'amplificateur opérationnel considéré comme l'élément de base de la plupart des systèmes électroniques actifs. Nous étudions avec soin les propriétés d'unitarité de la matrice S pour cet élément ainsi que les problèmes posés par la limite de gain infini. Nous montrons que ces problèmes se résolvent dans l'amplificateur opérationnel en boucle fermée.

Ceci nous permet d'étudier des réseaux actifs, en particulier ceux qui sont impliqués dans les techniques de friction froide, dans le chapitre IV.

Ce quatrième et dernier chapitre est organisé autour d'une modélisation de l'accéléromètre électrostatique asservi de l'ONERA [41,42]. Cette application représente une occasion de montrer que notre méthode est suffisamment souple pour permettre une description

formelle, rigoureuse et consistante avec la mécanique quantique d'un système relativement complexe. En particulier, grâce à la description par la théorie des réseaux, nous bénéficions de la possibilité de traiter le système par modules, chacun étant consistant avec la mécanique quantique, et de les rassembler ensuite sans avoir à considérer à nouveau la question de leur consistance.

Nous étudions d'abord un modèle d'accéléromètre à friction froide fonctionnant sans transfert de fréquence. Nous considérons ensuite un modèle passif mais fonctionnant avec un transducteur différentiel à transfert de fréquence. L'expérience acquise lors de ces deux calculs préliminaires nous permet ensuite de traiter un modèle complet, avec friction froide et transfert de fréquence. Dans les deux premiers cas, nous prenons en compte toutes les sources de bruit et discutons les performances optimales de l'instrument de mesure. Ceci nous permet de définir les approximations amenant au calcul de l'accéléromètre complet et de discuter ses limites ultimes de sensibilité.

Nous montrons ainsi que la *friction froide* permet de créer un amortissement actif d'un oscillateur mécanique sans ajouter les fluctuations qui seraient nécessairement associées à une dissipation passive. Ce résultat déjà connu classiquement est donc tout à fait confirmé dans un formalisme entièrement compatible avec les contraintes de la théorie quantique. Il permet aussi de définir une limite ultime de bruit correspondant au cas, idéal, où tous les paramètres peuvent être parfaitement maîtrisés par l'expérimentateur.

II. LE BRUIT QUANTIQUE DANS LES RÉSEAUX PASSIFS

Dans cette partie nous posons les bases du traitement des fluctuations quantiques dans les systèmes électriques et/ou mécaniques. Notre point de départ est le *théorème fluctuations-dissipation* qui établit une relation tout à fait générale entre le bruit observable dans un système à l'équilibre thermodynamique et la dissipation.

Cette idée est apparue pour la première fois au début du siècle, avec Einstein [1] puis Langevin [2] qui ont mis en évidence la relation entre le mouvement irrégulier des particules Browniennes dans un fluide et le frottement visqueux apparaissant dans les mêmes conditions. Ces deux phénomènes sont des conséquences d'un seul et même couplage de la particule Brownienne avec les molécules du fluide. Pour une particule colloïdale immergée dans un liquide, ou pour un miroir suspendu dans un gaz, on observe un comportement aléatoire qui est dû à l'interaction du système avec un environnement caractérisé par un très grand nombre de degrés de liberté. Les collisions des molécules du fluide avec la molécule colloïdale, ou des molécules du gaz avec la surface du miroir sont à l'origine de deux forces: l'une provoque le mouvement irrégulier et incessant du système (fluctuations) et l'autre amortit le mouvement du système (dissipation). L'effet aléatoire et l'effet systématique sont donc liés par des relations entre fluctuations et dissipation.

De manière plus formelle, les fluctuations de la force aléatoire exercée sur le système sont décrites par un spectre de bruit alors que la force de friction visqueuse est décrite par une susceptibilité ou une impédance dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire. Le théorème fluctuation-dissipation est en fait l'ensemble des relations entre ces différentes quantités. Ces relations, d'abord établies dans le domaine classique, ont été depuis généralisées pour tenir compte des fluctuations quantiques [6,7,48]. Nous les rappelons dans l'appendice VI A.

Dans ce chapitre, nous nous concentrons sur les systèmes électriques ou électromécaniques. Nous rappelons d'abord le théorème de Nyquist [14], c'est-à-dire le théorème fluctuations-dissipation pour les systèmes dissipatifs particuliers que sont les résistances électriques. Nous étendons ensuite ce théorème à des systèmes électriques ou électromécaniques

plus complexes en utilisant la théorie des réseaux, bien connue en électricité [10,44,11].

Nous montrerons qu'il est possible de décrire l'interaction des fluctuations quantiques avec le système d'une façon rigoureuse par une matrice de diffusion s . Le système étant modélisé comme un multipôle couplé à travers un certain nombre d'accès aux sources de dissipation, la matrice s fournit un outil de calcul commode et rapide. Par exemple, elle permet d'évaluer les limites imposées à la sensibilité d'une mesure par toutes les sources de bruit.

Ce traitement s'applique aussi bien au cas plus complexe d'un système nonlinéaire, pourvu que celui-ci soit linéarisé au voisinage de son point de fonctionnement. Dans ce cas aussi, la matrice de diffusion permet d'étudier la sensibilité des mesures et de caractériser les systèmes quantiques non-démolissants (QND).

A. Les réseaux linéaires

1. Le théorème de Nyquist

L'idée que la dissipation soit liée au rayonnement, et par conséquent au bruit était déjà connue en électricité avant Nyquist, depuis que Hertz avait étudié expérimentalement des résultats fondamentaux de la théorie de l'électromagnétisme de Maxwell. L'oscillateur/résonateur de Hertz est constitué par un circuit électrique résonant capable d'émettre et d'absorber du rayonnement. C'est un exemple simple d'antenne qui couple l'émission ou l'absorption de rayonnement au passage d'un courant.

Par conservation de l'énergie, la source qui maintient le courant oscillant doit aussi fournir la puissance dissipée par l'antenne. La puissance du rayonnement et le courant parcourant le circuit permettent de définir une *résistance de rayonnement* qui caractérise l'antenne

$$R = \frac{\mathcal{P}}{I^2} \quad (8)$$

L'antenne est donc vue par le circuit résonnant comme une résistance R , c'est-à-dire comme un élément dissipatif. Dans le même temps, l'antenne introduit des fluctuations de courant

dans le circuit électrique parce qu'elle détecte les fluctuations du champ électromagnétique présentes dans l'espace libre, c'est-à-dire le rayonnement du corps noir. On retrouve donc naturellement ici la relation entre fluctuations et dissipation.

De manière plus générale, lorsque l'on mesure la tension U aux bornes d'une résistance à l'équilibre thermique, on détecte un bruit qui dépend de sa température. Ce bruit a été observé pour la première fois par Johnson [15] qui l'a attribué à l'agitation thermique des porteurs de charge dans le conducteur. Nyquist l'a ensuite évalué théoriquement en se servant d'arguments provenant de la thermodynamique et de la mécanique statistique [14]. Il a ainsi montré que le bruit dans un conducteur dépend uniquement de sa résistance et de sa température. Par conséquent, dans un réseau électrique les résistances sont non seulement responsables de la dissipation d'énergie, mais aussi des sources de bruit.

La façon habituelle de rendre compte de cet effet est de modéliser une résistance R par la mise en série d'une résistance *idéale* sans bruit et d'un générateur de tension U_N jouant le rôle d'une source de bruit (voir figure 1)

$$U = -RI + U_N \quad (9)$$

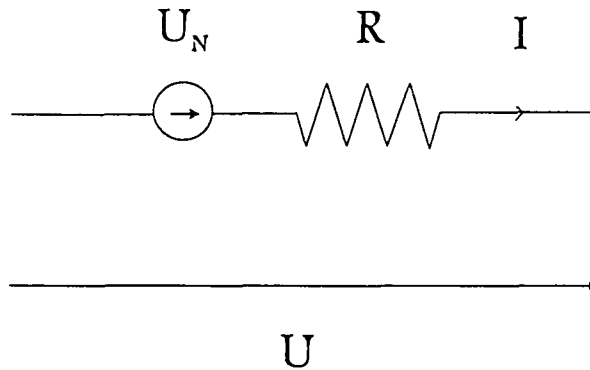


FIG. 1 - Une résistance R est souvent modélisée par une résistance idéale sans bruit et un générateur de tension en série représentant la source de bruit Nyquist.

Le bruit U_N est une variable aléatoire stationnaire de valeur moyenne nulle et caractérisée par la fonction d'autocorrélation

$$C_{U_N U_N}(t) = \overline{U_N(t) U_N(0)} \quad (10)$$

Pour caractériser ce bruit on utilise aussi la transformée de Fourier $C_{U_N U_N}[\omega]$ de $C_{U_N U_N}(t)$, c'est-à-dire le spectre de bruit de la variable aléatoire U_N . Nous utilisons dans toute la thèse la définition suivante pour la transformée de Fourier $f[\omega]$ d'une fonction $f(t)$

$$\begin{aligned} f[\omega] &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt e^{i\omega t} f(t) \\ f(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega t} f[\omega] \end{aligned} \quad (11)$$

Il faut noter que cette convention utilisée en physique quantique n'est pas tout à fait celle des électroniciens. En particulier, les impédances électriques que nous obtiendrons ont une expression différente de celle habituelle en électricité. Elle correspond à un changement de notation $j = -i$.

Le théorème de Nyquist fixe la relation suivante entre le spectre de bruit et la résistance R du conducteur

$$C_{U_N U_N}[\omega] = 2Rk_B T \quad (12)$$

T est la température et k_B la constante de Boltzmann. Les électroniciens utilisent une convention différente où le spectre de bruit ne correspond qu'aux fréquences positives et a pour valeur $4Rk_B T$. Nous préférons utiliser la définition générale du spectre de bruit où apparaissent les fréquences positives et négatives. Cette définition sera de toute façon nécessaire pour étudier le bruit quantique.

Pour présenter notre traitement des fluctuations, nous ne pouvons pas nous contenter de représenter la résistance comme une résistance sans bruit en série avec un générateur de bruit. Nous devons plutôt modéliser une résistance par une *ligne coaxiale d'impédance caractéristique R* . Nous retrouvons ainsi l'image du résonateur de Hertz qui peut à la fois émettre ou absorber du rayonnement. Une ligne coaxiale est caractérisée par une inductance linéique λ et une capacité linéique γ (figure 2). L'évolution de la tension U et du courant I est décrite par

$$\begin{aligned}\frac{\partial I}{\partial x} &= -\gamma \frac{\partial U}{\partial t} \\ \frac{\partial U}{\partial x} &= -\lambda \frac{\partial I}{\partial t}\end{aligned}\quad (13)$$

Ces deux équations nous permettent de déduire une équation de propagation dans la ligne

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} - c^2 \frac{\partial^2 I}{\partial t^2} = 0 \quad (14)$$

où c est la célérité de propagation des ondes

$$c = \frac{1}{\sqrt{\lambda\gamma}} \quad (15)$$

Les solutions de cette équation sont de la forme

$$I(x, t) = I^{in} \left(t - \frac{x}{c} \right) - I^{out} \left(t + \frac{x}{c} \right) \quad (16)$$

En reportant dans l'équation (13), on obtient

$$U(x, t) = R \left(I^{in} \left(t - \frac{x}{c} \right) + I^{out} \left(t + \frac{x}{c} \right) \right) \quad (17)$$

où R est l'impédance caractéristique de la ligne

$$R = \sqrt{\frac{\lambda}{\gamma}} \quad (18)$$

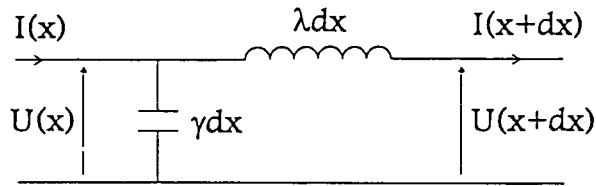


FIG. 2 - Schéma équivalent d'un élément de longueur dx d'une ligne coaxiale idéale sans dissipation. λ et γ désignent l'inductance et la capacité par unité de longueur.

Considérons la ligne semi-infinie représentée sur la figure 3. Les solutions (16-17) donnent les relations qui lient le courant I et la tension U à un bout de la ligne ($x = 0$) aux ondes I^{in} et I^{out} qui se propagent respectivement vers le circuit électrique et dans la direction opposée

$$\begin{aligned}
I(t) &= I^{in}(t) - I^{out}(t) \\
U(t) &= R(I^{in}(t) + I^{out}(t))
\end{aligned}
\tag{19}$$

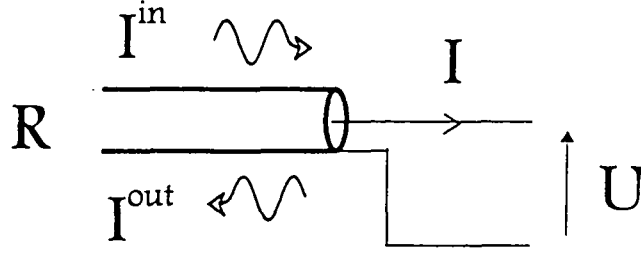


FIG. 3 - Modélisation d'une résistance par une ligne semi-infinie d'impédance R . Tension et courant sont liés aux signaux se propageant dans la ligne. La ligne est un réservoir, avec lequel le système échange de l'énergie. Elle peut dissiper de l'énergie, qui quitte le système à travers l'onde sortante I^{out} , mais en retour elle introduit aussi des fluctuations qui correspondent à l'onde entrante I^{in} .

La puissance absorbée par la ligne est

$$\mathcal{P} = -UI = R(I^{out\,2} - I^{in\,2}) \tag{20}$$

Il s'agit en fait de la différence entre l'énergie qui part dans la ligne ($RI^{out\,2}$) et celle qui arrive ($RI^{in\,2}$). A la différence de la modélisation habituelle des résistances, le modèle de la ligne que nous avons introduit ici est donc un système conservatif. La ligne peut dissiper de l'énergie qui quitte le système à travers l'onde sortante I^{out} mais elle fait aussi entrer des fluctuations qui correspondent à l'onde entrante I^{in} arrivant sur le système. Les équations d'entrée-sortie (19) conduisent à la relation suivante entre tension et courant

$$U = -RI + 2RI^{in} \tag{21}$$

ce qui correspond à la mise en série d'une résistance idéale sans bruit et d'une source de bruit en tension

$$U_N = 2RI^{in} \tag{22}$$

On retrouve donc l'image habituelle des fluctuations de tension mais on a maintenant interprété ces fluctuations à partir des ondes I^{in} arrivant par la ligne.

Dans une ligne coaxiale, nous sommes en présence de deux champs. Le champ entrant I^{in} que nous venons d'interpréter comme la source des fluctuations arrivant sur le système et un champ sortant I^{out} . Ce dernier correspond à un champ qui repart dans la ligne après avoir interagi avec le système. Il peut ainsi servir à faire une mesure sur ce système.

Dans le cas d'une "vraie" résistance, la signification physique de ces fluctuations sortantes peut paraître moins claire que dans le cas d'une ligne coaxiale ou d'une antenne. Nous verrons cependant dans la suite qu'il est indispensable de les considérer pour pouvoir traiter le système de manière cohérente au niveau quantique.

Le résultat de Nyquist correspond à une approche classique des systèmes électriques et n'est valable qu'à haute température ($k_B T \gg \hbar \omega$). Contrairement à ce qu'indique la formule (12), les fluctuations ne s'annulent pas à température nulle. Il reste les *fluctuations quantiques*, fluctuations présentes dans l'état fondamental de tout système quantique.

Pour faire une théorie des fluctuations valable au niveau quantique, nous utiliserons les techniques bien connues en optique quantique [31]. En particulier, nous traiterons les champs se propageant dans la ligne comme des champs libres scalaires que nous décomposerons à l'aide d'opérateurs création et annihilation $a_\omega^\dagger$ et a_ω qui satisfont les relations de commutation

$$\begin{aligned} [a_\omega, a_{\omega'}^\dagger] &= 2\pi\delta(\omega - \omega') & \omega, \omega' > 0 \\ [a_\omega, a_{\omega'}] &= [a_\omega^\dagger, a_{\omega'}^\dagger] = 0 & \omega, \omega' > 0 \end{aligned} \quad (23)$$

où δ est la distribution de Dirac. Nous introduisons un champ *réduit* a^{in} qui décrit le champ libre entrant dans la ligne et qui correspond ainsi à l'opérateur annihilation a_ω , pour l'évolution aux fréquences positives et à l'opérateur création $a_{-\omega}^\dagger$ pour les fréquences ω négatives

$$a^{in}[\omega] = \theta(\omega) a_\omega + \theta(-\omega) a_{-\omega}^\dagger \quad (24)$$

où $\theta(\omega)$ est la fonction de Heaviside. Le champ libre sortant a^{out} peut être décomposé de la même manière, en fonction d'opérateurs création et annihilation différents. Les champs sortants sont liés aux champs entrants par une matrice de diffusion [47].

Ces champs réduits correspondent à une fonction de corrélation ayant une forme universelle

$$\begin{aligned}
\langle a^{in}[\omega] a^{in}[\omega'] \rangle &= 2\pi \delta(\omega + \omega') \mathcal{C}[\omega] \\
\mathcal{C}[\omega] &= \xi[\omega] + \sigma[\omega] \\
\xi[\omega] &= \frac{1}{2} \epsilon(\omega) \\
\sigma[\omega] &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T}
\end{aligned} \tag{25}$$

La fonction ξ est la partie impaire de la fonction $\mathcal{C}$ et représente donc le commutateur des champs. Elle est indépendante de l'état du champ puisque $\epsilon(\omega)$ est le signe de la fréquence ω . La fonction σ est la partie paire de la fonction $\mathcal{C}$ et elle représente l'anticommutateur des champs. C'est en fait cette fonction σ qui caractérise les fluctuations. On peut l'écrire aussi comme la somme de deux termes

$$\begin{aligned}
\sigma[\omega] &= \frac{1}{2} + n_\omega \\
n_\omega &= \frac{1}{e^{\frac{\hbar |\omega|}{k_B T}} - 1}
\end{aligned} \tag{26}$$

Le terme n_ω représente le nombre de photons thermiques par mode selon la loi écrite par Planck en 1900 [3]. Le terme $\frac{1}{2}$ a été ajouté par Planck en 1911 [4] pour pouvoir obtenir la *limite thermodynamique*

$$\sigma[\omega] \simeq \frac{k_B T}{\hbar \omega} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{T}\right) \quad (k_B T \gg \hbar \omega) \tag{27}$$

Le caractère quantique des fluctuations n'apparaît que lorsque l'on traite séparément les fréquences positives et négatives. En effet, la fonction de corrélation $\mathcal{C}$ a des expressions différentes aux fréquences positives et aux fréquences négatives

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}[\omega] &= 1 + n_\omega \\
\mathcal{C}[-\omega] &= n_\omega
\end{aligned} \quad (\omega > 0) \tag{28}$$

et c'est exactement la différence de ces deux valeurs qui correspond au commutateur des champs

$$C[\omega] - C[-\omega] = 2\xi[\omega] = 1 \quad (\omega > 0) \quad (29)$$

Le nombre de photons n_ω tend vers zéro à température nulle et les fluctuations (26) se réduisent alors à la fonction de corrélation du *vide*

$$\begin{aligned} \sigma[\omega] &= \frac{1}{2} \\ C[\omega] &= \theta(\omega) \end{aligned} \quad (30)$$

Dans toute mesure physique du bruit, on fera apparaître la somme des fonctions de corrélation évaluées aux fréquences opposées ω et $-\omega$

$$C[\omega] + C[-\omega] = 1 + 2n_\omega = 2\sigma[\omega] \quad (31)$$

On utilisera donc l'expression (26) de σ qui correspond à l'expression (4.9) de Callen et Welton [6].

Le courant I^{in} circulant dans la ligne est ensuite donné par l'expression suivante

$$I^{in}[\omega] = \sqrt{\frac{\hbar|\omega|}{2R}} a^{in}[\omega] \quad (32)$$

En utilisant l'expression (22), on peut écrire l'expression générale du bruit Nyquist

$$\begin{aligned} C_{U_N U_N}[\omega] &= 2R\hbar|\omega|C[\omega] \\ &= R\hbar\omega \left(1 + \coth \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \end{aligned} \quad (33)$$

Le bruit Nyquist ne s'annule donc pas à température nulle. Il tend vers une limite finie

$$C_{U_N U_N}[\omega] = 2R\hbar\omega\theta(\omega) \quad (34)$$

qui représente le bruit Nyquist quantique.

Le courant I^{out} décrivant le bruit qui repart dans la ligne après l'interaction avec le circuit, peut être exprimé aussi en termes de champ sans dimension

$$I^{out}[\omega] = \sqrt{\frac{\hbar|\omega|}{2R}} a^{out}[\omega] \quad (35)$$

De même que $a^{in}[\omega]$, le champ $a^{out}[\omega]$ est un champ libre. Il doit donc vérifier les mêmes relations de commutation

$$[a^{out}[\omega], a^{out}[\omega']] = [a^{in}[\omega], a^{in}[\omega']] \quad (36)$$

Cette relation de consistance est très importante. Elle nous servira dans la suite pour établir des propriétés générales sur la transformation des champs par un système. Elle est en effet équivalente à la propriété d'unitarité de la matrice s qui décrit cette transformation.

Les grandeurs électriques I et U , combinaisons linéaires de champs libres quantiques, sont des observables conjuguées, qui ne commutent pas. Nous pouvons aussi les réexprimer en termes de nouvelles variables réduites

$$\begin{aligned} I[\omega] &= \sqrt{\frac{\hbar|\omega|}{2R}} i[\omega] \\ U[\omega] &= \sqrt{\frac{\hbar|\omega|R}{2}} u[\omega] \end{aligned} \quad (37)$$

Les relations réduites d'entrée-sortie de la ligne (19) s'écrivent alors, simplement

$$\begin{aligned} i(t) &= a^{in}(t) - a^{out}(t) \\ u(t) &= a^{in}(t) + a^{out}(t) \end{aligned} \quad (38)$$

Nous décrirons dans la suite des systèmes électromécaniques. Pour préparer cette étude, nous présentons d'abord une description des systèmes mécaniques analogue à celle que nous venons de rappeler pour les systèmes électriques.

Le mouvement Brownien d'une grosse particule dans un fluide est le résultat de ses collisions avec les molécules du fluide. Ces collisions sont à l'origine de deux forces. Une première force d'amortissement visqueux est proportionnelle à la vitesse de la particule et une seconde, fluctuante, est due au caractère aléatoire des collisions. Sur la base de ces considérations, la force F agissant sur une particule peut s'écrire

$$F = -HV + 2HV^{in} \quad (39)$$

où V est la vitesse de la particule et H le coefficient d'amortissement visqueux. Le premier terme représente la force de friction et le deuxième décrit la force stochastique habituellement

appelée force de Langevin [2]. Une force de Langevin est de manière générale une force aléatoire extérieure indépendante des variables internes du système, ici la particule. Elle est le résultat de l'interaction du système avec un sous-système ayant un très grand nombre de degrés de liberté, ici le fluide, appelé *réservoir*. Ce dernier peut être décrit par exemple par une collection d'oscillateurs harmoniques capables d'échanger de l'énergie avec le système. Le terme $2HV^{in}$ décrit ainsi les fluctuations provenant du réservoir.

Le modèle de Langevin, né dans le contexte purement classique du mouvement Brownien, est généralisable au domaine quantique [49,43,50]. Le réservoir peut en effet être décrit en prenant en compte la nature quantique des oscillateurs et la force de Langevin décrit alors un bruit quantique. Ce traitement est applicable aux systèmes nonlinéaires et permet non seulement d'évaluer le bruit quantique dû à l'interaction du système avec l'environnement, mais aussi les effets de cette interaction sur le comportement du système [47,46].

Le mouvement Brownien est en fait l'équivalent *mécanique* du bruit Nyquist: l'équation (39) décrivant la force agissant sur une particule en présence de dissipation, est équivalente à l'équation (21) pour la tension aux bornes d'une résistance. Ainsi, le bruit V^{in} décrit les bruits mécanique, quantique et thermique et sa fonction de corrélation vaut

$$C_{VV}^{in}[\omega] = \frac{\hbar\omega}{4H} \left(1 + \coth \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) \quad (40)$$

Comme nous l'avons fait pour une résistance, nous pouvons écrire des équations qui relient les variables du système au champ V^{in} provenant du réservoir et au champ V^{out} partant du système vers le réservoir. Ce champ sortant représente en quelque sorte le moyen à travers lequel l'énergie est dissipée par le système. Nous avons les relations suivantes,

$$\begin{aligned} V &= V^{in} - V^{out} \\ F &= H (V^{in} + V^{out}) \end{aligned} \quad (41)$$

qui sont équivalentes aux relations (19) pour une ligne électrique. Ces relations amènent bien à l'équation (39) en fonction du bruit entrant.

Poursuivant l'analogie avec le système électrique, nous pouvons passer à des variables réduites

$$\begin{aligned}
v(t) &= b^{in}(t) - b^{out}(t) \\
f(t) &= b^{in}(t) + b^{out}(t)
\end{aligned} \tag{42}$$

avec

$$\begin{aligned}
v &= \sqrt{\frac{2H}{\hbar |\omega|}} V \\
f &= \sqrt{\frac{2}{\hbar |\omega| H}} F
\end{aligned} \tag{43}$$

Les champs quantiques libres b^{in} et b^{out} ont les mêmes propriétés que les champs a^{in} et a^{out} .

2. Les multipôles linéaires

La théorie linéaire des réseaux est largement utilisée en électronique [11]. Elle permet de décrire le comportement d'un système en fonction des lois auxquelles obéissent les composantes de ce système. Elle fournit des outils simples de description d'un système, quelque soit son niveau de complexité.

Nous nous servons de la théorie des réseaux pour obtenir une description de la transformation des fluctuations par un système. Pour ce faire, nous réduisons tout système au schéma suivant (cf. figure 4): une partie purement réactive, constituant le coeur du réseau, sur laquelle est branché par l'intermédiaire d'un certain nombre de portes, un nombre équivalent de lignes. Chaque ligne est une source de dissipation avec un champ entrant et un champ sortant. Les champs sortants sont des fonctions linéaires des champs entrants.

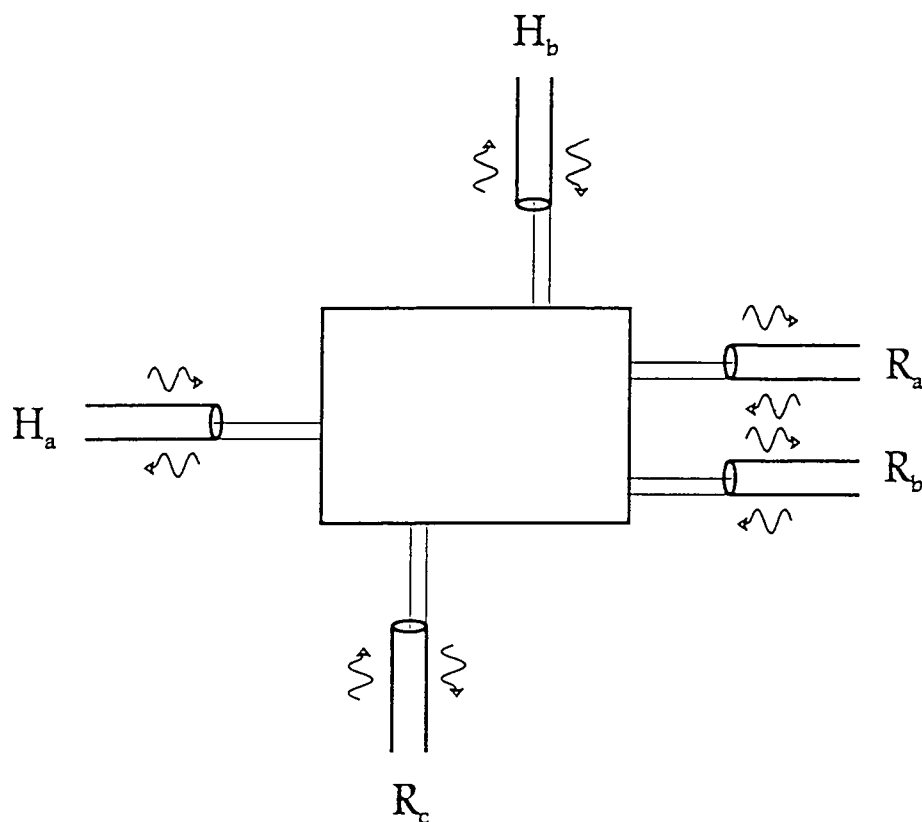


FIG. 4 - Réduction d'un réseau dissipatif à un schéma de principe où les parties réactives sont décrites par un multipôle et les sources de dissipation par des lignes. Les portes permettent la connexion entre le multipôle et les lignes de bruit électrique ou mécanique.

Dans un premier temps, nous présentons notre approche sur un exemple simple de réseau électrique. Cela nous permettra de dégager les outils de notre traitement, tels que la matrice admittance ou bien impédance et la matrice de diffusion qui contient les coefficients décrivant la relation entre les champs sortants et les champs entrants. Par la suite, nous montrons que cette approche se généralise à des systèmes mixtes, en prenant pour exemple un modèle simple de transducteur électromécanique.

Comme premier exemple, nous considérons le système de la figure 5, qui représente une mesure effectuée sur un résonateur électrique RLC . Dans notre approche, la résistance du résonateur R_r est modélisée par une ligne et l'appareil de mesure est représenté par une seconde ligne d'impédance R_d . Le couplage de l'appareil de mesure au système est une

source de dissipation et de fluctuations. D'autre part, la ligne donne accès au champ sortant I_d^{out} , qui contient les informations recherchées sur le système mesuré.

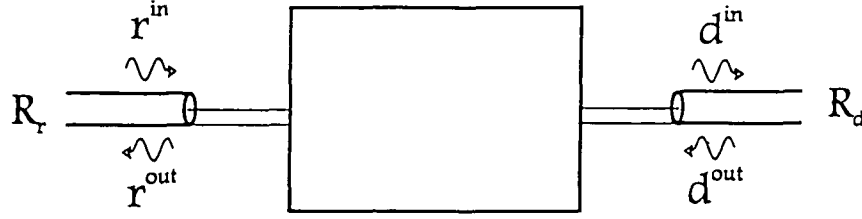


FIG. 5 - Schéma de principe d'une mesure électrique sur un résonateur RLC . L'appareil de mesure est représenté par une seconde ligne d'impédance R_d . La mesure se fait sur le champ sortant d^{out} , qui contient les informations recherchées sur le système mesuré. Le champ r^{out} a un rôle symétrique, mais il décrit ici l'effet de la mesure sur le système.

En notant q la charge du condensateur on obtient une équation de Langevin pour cette variable

$$L\ddot{q} + (R_r + R_d)\dot{q} + \frac{1}{C}q = 2R_r I_r^{in} + 2R_d I_d^{in} \quad (44)$$

où I_r^{in} et I_d^{in} sont les fluctuations de courant associées à la résistance du résonateur et à la ligne de mesure. Ces bruits entrants sont décorrélés. Notre but est de décrire, par l'intermédiaire d'une matrice de diffusion, la transformation de ces bruits due au couplage dans le système réactif.

Dans notre approche, la partie réactive du système est décrite par un multipôle dont le nombre de portes est déterminé par le nombre d'éléments dissipatifs. Pour l'exemple que nous étudions, il y a deux lignes et nous allons donc écrire des relations impliquant deux courants I_r et I_d et deux tensions U_r et U_d . Ces relations caractéristiques s'écrivent ici

$$I_r = I_d = Y(U_r + U_d) \quad (45)$$

où Y est l'admittance du circuit LC

$$Y = \frac{-i\omega C}{1 - LC\omega^2} \quad (46)$$

Toutes les équations sont maintenant écrites dans le domaine des fréquences.

En passant aux variables réduites, que nous avons définies dans la section précédente, on obtient les équations suivantes

$$\begin{aligned} i_r &= R_r Y u_r + \sqrt{R_r R_d} Y u_d \\ i_d &= \sqrt{R_r R_d} Y u_r + R_d Y u_d \end{aligned} \quad (47)$$

que nous pouvons enfin écrire matriciellement

$$[i] = y [u] \quad (48)$$

$[i]$ et $[u]$ sont des matrices colonnes

$$[i] = \begin{bmatrix} i_r \\ i_d \end{bmatrix} \quad [u] = \begin{bmatrix} u_r \\ u_d \end{bmatrix} \quad (49)$$

y est la matrice admittance réduite

$$y = \begin{bmatrix} R_r Y & \sqrt{R_r R_d} Y \\ \sqrt{R_r R_d} Y & R_d Y \end{bmatrix} \quad (50)$$

Le fait que le quadripôle est purement réactif se traduit par la propriété suivante pour la matrice admittance

$$(y[\omega])^\dagger = y[-\omega] = -y[\omega] \quad (51)$$

Nous remarquons ensuite que la matrice admittance est symétrique

$$y^T = y \quad (52)$$

où y^T désigne la matrice transposée de y . C'est l'expression dans ce cas particulier des relations de réciprocité d'Onsager-Casimir [12,13,10]. Quand y est inversible, il est possible de définir, pour le même système, une matrice impédance

$$z = y^{-1} \quad (53)$$

qui est elle aussi symétrique.

Nous sommes maintenant en mesure de déterminer comment le système transforme les fluctuations provenant de la dissipation. Nous disposons d'une part des équations (38) correspondant aux deux lignes que nous pouvons écrire de manière matricielle

$$\begin{aligned} [i] &= \begin{bmatrix} r^{in} \\ d^{in} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r^{out} \\ d^{out} \end{bmatrix} \\ [u] &= \begin{bmatrix} r^{in} \\ d^{in} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} r^{out} \\ d^{out} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (54)$$

et d'autre part des relations (48) caractérisant la partie réactive. On en déduit alors une relation entre les champs entrants et sortants

$$\begin{bmatrix} r^{out} \\ d^{out} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} r^{in} \\ d^{in} \end{bmatrix} \quad (55)$$

s est la matrice de diffusion, souvent appelée également matrice de répartition dans la théorie des réseaux linéaires [11]

$$s = \frac{1 - y}{1 + y} = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (56)$$

Pour le circuit que nous avons choisi comme exemple, la matrice de diffusion s'écrit

$$s = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2R_r Y}{1 + (R_r + R_d)Y} & -\frac{2\sqrt{R_r R_d} Y}{1 + (R_r + R_d)Y} \\ -\frac{2\sqrt{R_r R_d} Y}{1 + (R_r + R_d)Y} & 1 - \frac{2R_d Y}{1 + (R_r + R_d)Y} \end{bmatrix} \quad (57)$$

On peut insister sur la signification de ces équations dans le contexte du présent travail. Le champ d^{out} sortant dans la ligne de détection est en fait la quantité mesurée et son expression décrit comment la mesure va être affectée par les bruits entrants dans le système. L'équation donnant r^{out} joue un rôle tout à fait symétrique du point de vue de la théorie, même si elle est dans ce cas présent beaucoup moins intéressante du point de vue de la mesure.

La mécanique quantique impose que les relations de commutations décrivant les champs libres quantiques arrivant par chaque ligne sont préservés pour les champs qui repartent

$$\begin{aligned} [r^{out}[\omega], r^{out}[\omega']] &= [r^{in}[\omega], r^{in}[\omega']] \\ [d^{out}[\omega], d^{out}[\omega']] &= [d^{in}[\omega], d^{in}[\omega']] \end{aligned} \quad (58)$$

On peut montrer aisément qu'il y a équivalence entre la préservation des commutateurs que nous venons d'écrire et l'unitarité de la matrice s réduite qui décrit la transformation d'entrée-sortie.

La manière dont nous avons déterminé cette matrice assure en fait l'unitarité de l'entrée-sortie dès que la matrice admittance ou impédance décrivant le coeur du réseau est purement réactive. En effet, la matrice admittance d'un système réactif obéit à (cf. (51))

$$y^\dagger = -y \quad (59)$$

et on en déduit immédiatement que la matrice s est unitaire

$$s^\dagger = \left(\frac{1-y}{1+y} \right)^\dagger = \frac{1-y^\dagger}{1+y^\dagger} = \frac{1+y}{1-y} = s^{-1} \quad (60)$$

La façon dont nous avons décrit le système en séparant les éléments réactifs et dissipatifs est donc la garantie que le traitement est cohérent avec la mécanique quantique. Du point de vue pratique, il suffit de s'assurer que la matrice s est unitaire pour vérifier cette cohérence.

Les considérations déjà faites sur la symétrie de la matrice y s'expriment aussi pour la matrice s , qui a alors une forme particulière

$$s = \begin{bmatrix} \rho_r & \tau \\ \tau & \rho_d \end{bmatrix} \quad (61)$$

Le coefficient τ donne l'amplitude de *transmission* du champ d'une ligne vers une autre. Les termes ρ_r et ρ_d , par contre, donnent les amplitudes de *réflexion* du champ d'une ligne sur elle-même. L'unitarité de la matrice s implique les relations suivantes, que l'on connaît en physique quantique comme les relations de conservation des probabilités

$$\begin{aligned} |\rho_r|^2 + |\tau|^2 &= 1 \\ |\rho_d|^2 + |\tau|^2 &= 1 \\ |\rho_r|^2 &= |\rho_d|^2 \end{aligned} \quad (62)$$

En particulier, la matrice de diffusion (57) obéit à ces conditions

$$\begin{aligned} \left| 1 - \frac{2R_r Y}{1+(R_r+R_d)Y} \right|^2 + \left| -\frac{2\sqrt{R_r R_d} Y}{1+(R_r+R_d)Y} \right|^2 &= 1 \\ \left| 1 - \frac{2R_r Y}{1+(R_r+R_d)Y} \right|^2 &= \left| 1 - \frac{2R_d Y}{1+(R_r+R_d)Y} \right|^2 \end{aligned} \quad (63)$$

grâce au fait que Y est purement réactive ($Y^* = -Y$).

Pour montrer comment notre approche se généralise à un système mixte électromécanique, nous avons choisi d'étudier l'exemple d'un transducteur piézoélectrique. Nous nous intéressons ici à la mesure d'une force F^{ext} à l'aide d'un système électro-mécanique composé d'un oscillateur mécanique couplé à un oscillateur électrique à l'aide d'un cristal piézoélectrique.

L'oscillateur mécanique est composé d'une masse M , d'une liaison élastique de raideur K et est amorti par un frottement visqueux de coefficient H . La partie électrique du système est composée d'un circuit oscillant LC et d'une ligne coaxiale d'impédance R servant à extraire le signal de mesure. Le couplage entre ces deux oscillateurs est assuré par un cristal piézoélectrique qui a la propriété de faire apparaître une différence de potentiel à ses bornes lorsqu'il est soumis à une contrainte.

Remarquons qu'en pratique, un tel système peut être réalisé comme représenté sur la figure 6 en fixant une masse d'épreuve M sur un cristal piézoélectrique qui joue alors non seulement le rôle de couplage électromécanique, mais aussi celui de liaison élastique et de capacité. L'effet de piézoélectricité correspond à l'apparition, sous l'action d'une force F , de deux charges égales et opposées $\pm \frac{1}{\kappa} F$, sur les faces du cristal. L'effet est linéaire et la constante de proportionnalité κ ne dépend que des caractéristiques intrinsèques du cristal. La direction de la force détermine le signe de la charge: une compression fait apparaître des charges de signe inverse par rapport à celles provoquées par une elongation.

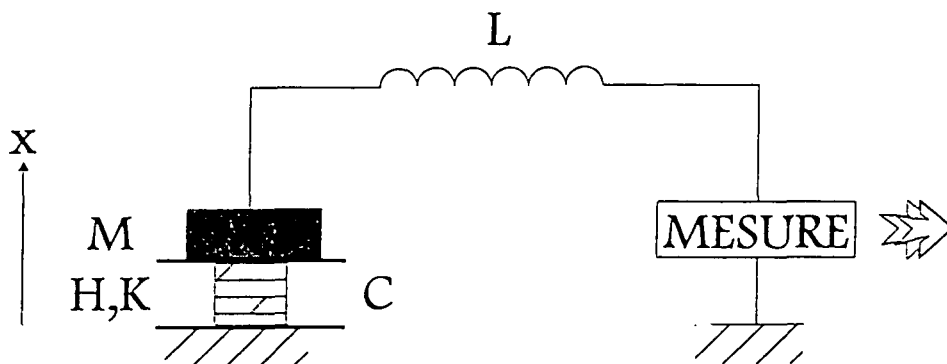


FIG. 6 - Schéma physique d'un transducteur piézoélectrique. La lame de quartz fonctionne comme un ressort de raideur K et ses deux faces, celle solidaire à la masse M et celle solidaire à la paroi rigide, servent aussi d'armatures électriques. On obtient ainsi un oscillateur mécanique couplé linéairement à un oscillateur électrique. Un appareil de mesure est utilisé pour extraire l'information du système.

Les conditions de réciprocité dont nous avons déjà parlé impliquent qu'il existe aussi un effet de piézoélectricité inverse, où l'action d'une tension U produit une elongation ou une contraction de la lame $\pm \frac{1}{\kappa} U$. La constante de proportionnalité est la même que pour l'effet de piézoélectricité.

Les équations du mouvement du système des deux oscillateurs couplés par l'intermédiaire d'un cristal piézoélectrique en l'absence de signal externe s'écrivent finalement

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + H\dot{x} + Kx - \kappa q &= 2HV^{in} \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{q}{C} - \kappa x &= 2RI^{in} \end{aligned} \quad (64)$$

où V^{in} et I^{in} décrivent les bruits dus aux dissipations mécanique et électrique respectivement.

Le transducteur piézoélectrique est ainsi un réseau linéaire qui, dans le modèle considéré, a deux sources de dissipation: une mécanique et une électrique. Dans ces conditions, nous décrivons le transducteur par un quadripôle branché sur deux lignes d'impédance R et H (comme sur la figure 7).

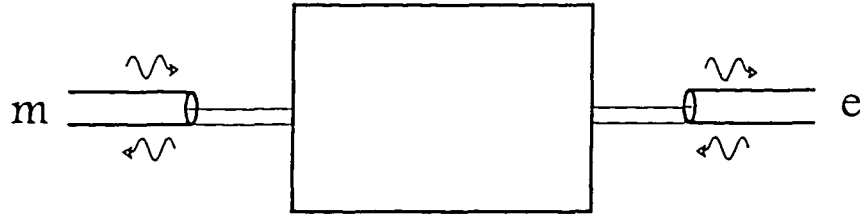


FIG. 7 - Schéma de principe d'un transducteur piézoélectrique. Il y a deux sources de dissipation, dans le modèle considéré: la première (m), mécanique, est associée au système mesuré et la seconde (e), électrique, décrit l'appareil de mesure. Le signal classique, ici l'effet d'une force extérieure, entre par la ligne mécanique.

Nous introduisons maintenant un nouveau jeu de paramètres caractérisant les oscillateurs mécanique et électrique, dont nous nous servirons toujours dans la suite: la fréquence de résonance, le facteur d'amortissement et le facteur de qualité. Pour un oscillateur mécanique et un oscillateur électrique (en série), ces paramètres s'écrivent respectivement

$$\begin{aligned} \varpi_m &= \sqrt{\frac{K}{M}} & \varpi_e &= \sqrt{\frac{1}{LC}} \\ \Gamma_m &= \frac{H}{M} & \Gamma_e &= \frac{R}{L} \\ Q_m &= \frac{\sqrt{KM}}{H} = \frac{\varpi_m}{\Gamma_m} & Q_e &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{\varpi_e}{\Gamma_e} \end{aligned} \quad (65)$$

Nous avons vu que la modélisation du bruit par des champs quantiques amène naturellement à une description du système par l'intermédiaire de quantités réduites. Ce choix permet aussi d'écrire, même pour un système mixte, une matrice impédance généralisée dont tous les coefficients sont sans dimension.

Nous réécrivons finalement les équations d'évolution (64) dans le domaine des fréquences, pour les variables de quadrupôle réduites

$$\begin{aligned} \left\{ 1 + Q_m \left(\frac{-i\omega}{\varpi_m} + \frac{\varpi_m}{-i\omega} \right) \right\} v + \frac{\hbar}{i\omega \sqrt{HR}} i &= 2m^{in} \\ \left\{ 1 + Q_e \left(\frac{-i\omega}{\varpi_e} + \frac{\varpi_e}{-i\omega} \right) \right\} i + \frac{\hbar}{i\omega \sqrt{HR}} v &= 2e^{in} \end{aligned} \quad (66)$$

v et i sont les variables réduites pour la vitesse et le courant (voir équations (37) et (43)); m^{in}

et e^{in} sont les fluctuations entrantes dans les *lignes* mécanique et électrique. Ces équations correspondent à une partie réactive

$$\begin{bmatrix} f \\ u \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} v \\ i \end{bmatrix} \quad (67)$$

avec une matrice impédance généralisée

$$z = \begin{bmatrix} z_m & z_{me} \\ z_{me} & z_e \end{bmatrix} \quad (68)$$

z_m et z_e sont les impédances réduites des oscillateurs mécanique et électrique découplés

$$\begin{aligned} z_m &= Q_m \left(\frac{-i\omega}{\omega_m} + \frac{\omega_m}{-i\omega} \right) \\ z_e &= Q_e \left(\frac{-i\omega}{\omega_e} + \frac{\omega_e}{-i\omega} \right) \end{aligned} \quad (69)$$

z_{me} est le coefficient de couplage réduit électromécanique

$$\begin{aligned} z_{me} &= \frac{\sqrt{\omega_m \omega_e}}{i\omega} \lambda \\ \lambda &= \kappa \sqrt{\frac{C}{K}} \sqrt{Q_m Q_e} \end{aligned} \quad (70)$$

La matrice de diffusion s donne la répartition des bruits du système

$$\begin{bmatrix} m^{out} \\ e^{out} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} m^{in} \\ e^{in} \end{bmatrix} \quad (71)$$

et se calcule comme précédemment à partir de la matrice impédance

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} = \begin{bmatrix} \rho_m & \tau \\ \tau & \rho_e \end{bmatrix} \quad (72)$$

Les amplitudes de réflexion et de transmission valent

$$\begin{aligned} \rho_m &= \frac{(z_m - 1)(z_e + 1) - z_{me}^2}{(z_m + 1)(z_e + 1) - z_{me}^2} \\ \rho_e &= \frac{(z_e - 1)(z_m + 1) - z_{me}^2}{(z_m + 1)(z_e + 1) - z_{me}^2} \\ \tau &= \frac{2z_{me}}{(z_m + 1)(z_e + 1) - z_{me}^2} \end{aligned} \quad (73)$$

On retrouve comme précédemment

$$\begin{aligned} |\rho_m|^2 &= |\rho_e|^2 \\ |\rho_m|^2 + |\tau|^2 &= 1 \end{aligned} \quad (74)$$

Encore une fois, nous pouvons détailler la signification physique de ces équations en développant (72)

$$\begin{aligned} m^{out} &= \rho_m m^{in} + \tau e^{in} \\ e^{out} &= \tau m^{in} + \rho_e e^{in} \end{aligned} \quad (75)$$

m^{out} décrit le bruit ressenti par le système mécanique. Le premier terme est lié au bruit propre m^{in} dû à la dissipation mécanique, tandis que le second terme décrit le bruit provenant de la source de dissipation électrique et représente donc la rétroaction de l'appareil de mesure sur le système mesuré. e^{out} décrit le bruit dans la ligne de mesure.

On peut faire entrer dans le même calcul l'effet d'une force externe F^{ext} agissant sur la partie mécanique du système. En supposant qu'on reste dans un régime linéaire, l'équation du mouvement pour l'oscillateur mécanique s'écrit

$$M\ddot{x} + H\dot{x} + Kx + \varkappa q = 2HV^{in} + F^{ext} \quad (76)$$

On voit qu'il est possible de traiter le signal externe comme le bruit entrant par la ligne mécanique. La mesure électrique de cette force est donc décrite par une équation où sont superposés le signal à mesurer et les bruits provenant des diverses sources de dissipation

$$\begin{aligned} e^{out} &= \tau (f^{ext} + m^{in}) + \rho_e e^{in} \\ f^{ext} &= \sqrt{\frac{1}{2\hbar |\omega| H}} F^{ext} \end{aligned} \quad (77)$$

On a introduit une variable réduite f^{ext} pour mesurer la force extérieure F^{ext} . Cette équation va nous permettre de discuter précisément les performances du système de mesure.

3. La sensibilité de la mesure

Pour analyser la sensibilité de la mesure, il est intéressant de réécrire (77) sous la forme d'un estimateur $\hat{f}^{ext}$ de la force extérieure, tel qu'on peut le déduire de e^{out}

$$\hat{f}^{ext} = \frac{1}{\tau} e^{out} = f^{ext} + m^{in} + \frac{\rho_e}{\tau} e^{in} \quad (78)$$

Dans ces conditions, l'estimateur $\hat{f}^{ext}$ est la somme de la force recherchée et d'un bruit ajouté correspondant aux termes supplémentaires.

On suppose que les bruits entrants dans les voies électrique et mécanique sont décorrélés et décrits par des spectres qu'on notera respectivement σ_e et σ_m et qui correspondent à des températures T_e et T_m . On peut alors définir une puissance de bruit ajouté à la mesure de f^{ext}

$$\begin{aligned} \Sigma_f &= \sigma_m + \frac{|\rho_e|^2}{|\tau|^2} \sigma_e \\ \sigma_m &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_m} \\ \sigma_e &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_e} \end{aligned} \quad (79)$$

Toutes choses égales par ailleurs, on a intérêt à ce que les amplitudes de réflexion soient minimales (c'est-à-dire $|\rho_e| = |\rho_m| = 0$) et donc que l'amplitude de transmission soit maximale (c'est-à-dire $|\tau| = 1$). Cette condition est connue sous le nom d'adaptation d'impédance dans la théorie des réseaux linéaires. En utilisant les équations (73), on voit que cette condition est réalisée lorsque

$$\begin{aligned} z_e &= z_m \\ z_m^2 - 1 &= z_{me}^2 \end{aligned} \quad (80)$$

La première équation fixe en fait la valeur de la fréquence ω . La deuxième condition détermine la valeur du coefficient de couplage κ électromécanique adapté.

L'adaptation est réalisée par exemple quand les deux circuits opèrent à résonance

$$|\omega| = \varpi_m = \varpi_e \quad (81)$$

avec le coefficient de couplage

$$z = \sqrt{\frac{K}{C}} \frac{1}{\sqrt{Q_m Q_e}} \quad (82)$$

On obtient en effet dans ces conditions

$$\begin{aligned} z_m &= z_e = 0 \\ z_{me} &= -i \\ \rho_e &= \rho_m = 0 \\ \tau &= -i \end{aligned} \quad (83)$$

On a ainsi optimisé le rapport signal sur bruit pour une mesure de f^{ext} . Le bruit équivalent à l'entrée est alors celui qui est imposé par la température T_m de l'oscillateur mécanique

$$\Sigma_f = \sigma_m = \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_m} \quad (84)$$

On peut traduire ce bruit en termes de mesure de la force non réduite F^{ext}

$$\Sigma_F = 2\hbar |\omega| H \Sigma_f = \hbar |\omega| H \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_m} \quad (85)$$

ou en termes de mesure de l'accélération A de la masse

$$\Sigma_A = \frac{1}{M^2} \Sigma_F = \frac{\hbar |\omega| H}{M^2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_m} \quad (86)$$

Nous remarquons que les puissances de spectre de bruit sur la force et sur l'accélération Σ_F et Σ_A correspondent à des densités spectrales exprimés respectivement en N^2/Hz et $(m/s^2)^2/Hz$. Dans l'appendice VIB nous montrons comment obtenir le rapport signal sur bruit pour la mesure d'un signal à partir de la densité spectrale de bruit. La densité spectrale dépend en général de la fréquence. Quand elle peut être considérée comme constante dans la bande B d'analyse, la variance pour la mesure de force s'écrit simplement

$$\Delta F^2 = B \Sigma_F [\varpi_0] \quad (87)$$

où ϖ_0 est la fréquence centrale de la bande. B s'exprime en Hz et ΔF^2 en N^2 .

Le fait que la sensibilité de la mesure soit limitée par la température de l'oscillateur mécanique est évidemment très pénalisant pour une mesure électromécanique effectuée à très basse fréquence. De plus, il est évident d'après (75) que le système mesuré, la masse, est perturbé de manière importante par les fluctuations entrant par la voie de mesure, d'autant plus que la transmission $|\tau|^2$ est maximale.

Nous allons voir dans la suite que ces deux inconvénients peuvent être largement supprimés par des techniques appropriées.

B. Les réseaux nonlinéaires

Nous allons maintenant présenter notre approche du traitement des fluctuations quantiques dans les systèmes nonlinéaires. Le principe général de cette méthode est, dans un premier temps, de déterminer le point de fonctionnement du système et, dans un second temps, d'étudier les fluctuations linéarisées autour du point de fonctionnement. Les nonlinéarités du système conduisent à des effets de mélange de fréquences. Nous allons montrer dans cette section que, malgré ces effets, il est possible de conserver une description du système en terme d'impédance et de matrice de diffusion.

Nous illustrons notre approche en étudiant un modèle simple de détecteur des oscillations d'une barre de Weber.

1. Un exemple de transducteur nonlinéaire

Le système que nous étudions est analogue au système électromécanique linéaire de la partie précédente. La différence provient du couplage entre la partie électrique et la partie mécanique qui est maintenant réalisé à l'aide d'un condensateur à armatures mobiles remplaçant le cristal piézoélectrique. C'est donc un schéma utilisant un transducteur électromécanique capacitif.

La capacité C du condensateur dépend de la position x de l'armature mobile. Lorsque le condensateur est chargé, l'attraction électrostatique entre les deux armatures est à l'origine

d'une force F_{el} dont l'expression peut être déterminée à l'aide de considérations énergétiques.

Si nous notons E_{el} l'énergie stockée dans le condensateur

$$E_{el} = \frac{1}{2C(x)}q^2 \quad (88)$$

$$F_{el} = -\left.\frac{dE_{el}}{dx}\right|_q = -\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\frac{1}{C(x)}q^2 \quad (89)$$

Le couplage est nonlinéaire puisque la force est proportionnelle à q^2 et le coefficient de couplage est en principe une fonction dépendant de la position de la masse x . Pour simplifier, on supposera ici que le coefficient dépend linéairement de x , ce qui est toujours vrai dans la limite de petits déplacements autour de la position stationnaire $x_0 = 0$ (fluctuations quantiques ou déplacement induit par une faible force externe). La force de couplage et la tension aux bornes du condensateur s'écrivent alors

$$\begin{aligned} F_{el} &= \frac{1}{2}\frac{1}{Cd}q^2 \\ U_C &= \frac{q}{C} - \frac{qx}{Cd} \end{aligned} \quad (90)$$

où nous avons posé

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{C}\left.\frac{dC(x)}{dx}\right|_{x_0=0} = -C\left.\frac{d}{dx}\frac{1}{C(x)}\right|_{x_0=0} \quad (91)$$

Reportons-nous maintenant à un système précis, par exemple le transducteur électromécanique capacitif passif représenté sur la figure 8. Il s'agit d'un oscillateur électrique RLC en série couplé à un oscillateur harmonique amorti dont la masse accomplit son mouvement le long de l'axe x . La masse M étant solidaire d'une armature du condensateur, la capacité est une fonction de la position de la masse.

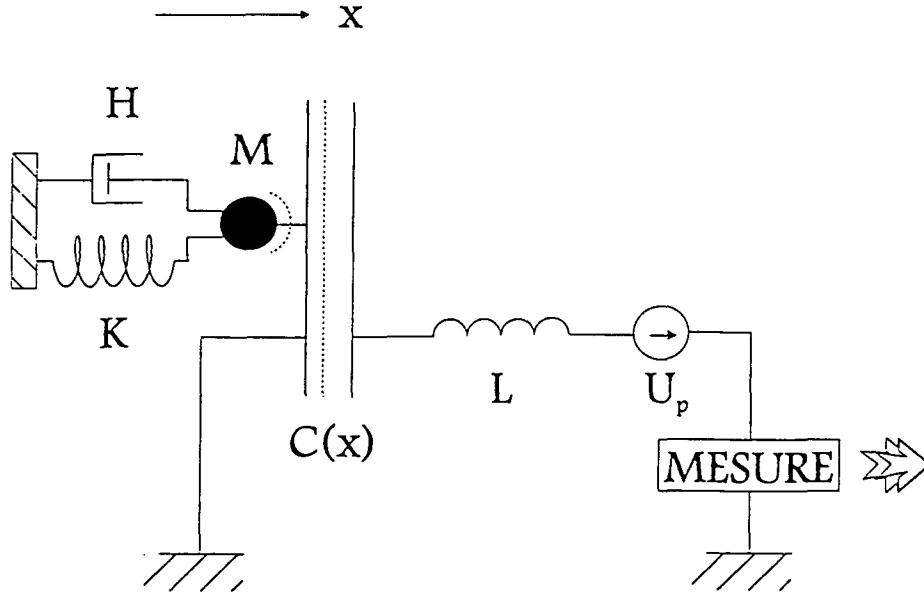


FIG. 8 - Schéma physique d'un transducteur capacitif. Le couplage nonlinéaire entre l'oscillateur mécanique et l'oscillateur électrique est réalisé par un condensateur à armatures mobiles et un générateur de tension qui les polarise. Un déplacement de la masse provoque une variation de la capacité et donc le passage d'un courant dans le circuit.

Les équations d'évolution sont alors

$$\begin{aligned} M\ddot{x} + H\dot{x} + Kx - \frac{1}{2} \frac{1}{C_d} q^2 &= 2HV^{in} + F^{ext} \\ L\ddot{q} + R\dot{q} + \frac{1}{C}q - \frac{1}{C_d}qx &= 2RI^{in} + U_p \end{aligned} \quad (92)$$

K et H sont la raideur et le coefficient de frottement visqueux correspondant à l'oscillateur mécanique. Les sources de dissipation sont ici l'amortissement mécanique, décrit par le coefficient H , et la résistance R qui prend en compte toute contribution dissipative dans le circuit électrique. V^{in} et I^{in} sont les bruits entrant dans chacun des deux oscillateurs. Comme précédemment, la force externe que nous voulons mesurer entre par la même voie que le bruit mécanique. Enfin, pour coupler les systèmes électrique et mécanique, il est nécessaire que la charge moyenne du condensateur ne soit pas nulle. Ceci est obtenu en utilisant un générateur dont la tension $U_p(t)$ sert à polariser le système.

Nous écrivons d'abord les équations en l'absence de signal externe. Nous séparons de

manière systématique les variables x et q en une partie classique décrivant le régime de réponse forcée à la tension de polarisation $U_p(t)$ et des fluctuations décrivant la réponse linéaire du système aux fluctuations entrantes

$$\begin{aligned}x &= x_0 + \delta x \\q &= q_0 + \delta q\end{aligned}\tag{93}$$

Les équations pour le régime forcé s'écrivent

$$\begin{aligned}M\ddot{x}_0 + H\dot{x}_0 + Kx_0 - \frac{1}{2}\frac{1}{C_d}q_0^2 &= 0 \\L\ddot{q}_0 + R\dot{q}_0 + \frac{1}{C}q_0 - \frac{1}{C_d}q_0x_0 &= U_p\end{aligned}\tag{94}$$

Les équations pour les fluctuations sont ensuite linéarisées au voisinage du point de fonctionnement constitué par le régime forcé calculé en (94)

$$\begin{aligned}M\delta\ddot{x} + H\delta\dot{x} + K\delta x - E_C\delta q &= 2HV^{in} \\L\delta\ddot{q} + R\delta\dot{q} + \frac{1}{C}\delta q - E_C\delta x - F_C\delta q &= 2RI^{in}\end{aligned}\tag{95}$$

Nous avons introduit deux nouvelles notations, E_C et F_C , qui représentent l'effet sur les fluctuations des couplages paramétriques liés à la variation temporelle de q_0 et x_0

$$\begin{aligned}E_C &= \frac{q_0}{C_d} \\F_C &= \frac{x_0}{C_d}\end{aligned}\tag{96}$$

Le premier terme a la dimension d'un champ électrique. Tous les deux dépendent du temps et vont donc faire apparaître des produits de convolution lorsqu'on passera dans le domaine des fréquences.

Afin de passer à cette étape, nous spécifions d'abord la dépendance temporelle de la tension de polarisation.

2. Fonctionnement en polarisation constante

Dans un premier temps, nous considérons le cas le plus simple d'une polarisation continue (U_p indépendant du temps).

Les équations pour les valeur moyennes s'écrivent alors

$$\begin{aligned} Kx_0 &= \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{Cd} \\ \frac{q_0}{C} \left(1 - \frac{x_0}{d}\right) &= U_p \end{aligned} \quad (97)$$

Ce qui conduit à une équation du troisième degré pour q_0

$$\frac{q_0}{C} \left(1 - \frac{q_0^2}{2KCd^2}\right) = U_p \quad (98)$$

Sans entrer dans les détails, nous supposons ici que le point de fonctionnement est une solution stable de cette équation. Nous pouvons alors écrire les équations linéarisées

$$\begin{aligned} M\delta\ddot{x} + H\delta\dot{x} + K\delta x - E_C\delta q &= 2HV^{in} \\ L\delta\ddot{q} + R\delta\dot{q} + \frac{1}{C_0}\delta q - E_C\delta x &= 2RI^{in} \end{aligned} \quad (99)$$

où les paramètres E_C et C_0 s'écrivent

$$\begin{aligned} E_C &= \frac{q_0}{Cd} \\ \frac{1}{C_0} &= \frac{1}{C} \left(1 - \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{KCd^2}\right) \end{aligned} \quad (100)$$

Ce sont ces équations que nous utilisons dans la suite.

On retrouve alors les mêmes équations que pour le système piézoélectrique, le paramètre E_C jouant le rôle de la constante piézoélectrique. Cela n'est pas étonnant, car on se retrouve maintenant, une fois opérée la linéarisation, avec un système de deux oscillateurs couplés linéairement. Nous obtenons donc immédiatement les équations caractérisant les fluctuations dans ce système

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta f \\ \delta u \end{bmatrix} &= z \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta i \end{bmatrix} \\ z &= \begin{bmatrix} z_m & z_{me} \\ z_{me} & z_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (101)$$

avec

$$\begin{aligned}
z_m &= Q_m \left(\frac{-i\omega}{\varpi_m} + \frac{\varpi_m}{-i\omega} \right) \\
z_e &= Q_e \left(\frac{-i\omega}{\varpi_e} + \frac{\varpi_e}{-i\omega} \right) \\
z_{me} &= \frac{\sqrt{\varpi_m \varpi_e}}{i\omega} \lambda \\
\lambda &= E_C \sqrt{\frac{C}{K}} \sqrt{Q_m Q_e}
\end{aligned} \tag{102}$$

La matrice de diffusion s décrivant l'entrée-sortie des bruits

$$\begin{bmatrix} m^{out} \\ e^{out} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} m^{in} \\ e^{in} \end{bmatrix} \tag{103}$$

est alors déduite comme précédemment

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} = \begin{bmatrix} \rho_m & \tau \\ \tau & \rho_e \end{bmatrix} \tag{104}$$

avec

$$\begin{aligned}
D \cdot \rho_m &= \left(iQ_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_m^2} \right) - \frac{\omega}{\varpi_m} \right) \left(iQ_e \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_e^2} \right) + \frac{\omega}{\varpi_e} \right) + \lambda^2 \\
D \cdot \rho_e &= \left(iQ_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_m^2} \right) + \frac{\omega}{\varpi_m} \right) \left(iQ_e \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_e^2} \right) - \frac{\omega}{\varpi_e} \right) + \lambda^2 \\
D \cdot \tau &= -2i \frac{\omega}{\sqrt{\varpi_m \varpi_e}} \lambda \\
D &= \left(iQ_m \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_m^2} \right) + \frac{\omega}{\varpi_m} \right) \left(iQ_e \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_e^2} \right) + \frac{\omega}{\varpi_e} \right) + \lambda^2
\end{aligned} \tag{105}$$

Ce résultat est évidemment le même que pour le transducteur piézoélectrique. La discussion qui a été faite pour ce système s'applique donc sans modification. En particulier, le système étudié obéit encore à des conditions de réciprocité (la matrice (101) est symétrique). Si la lecture du signal est bonne (transmission importante), alors l'action en retour du système de mesure sur la quantité mesurée est aussi importante. Nous allons voir qu'on peut sortir de ce dilemme en utilisant des transferts de fréquence.

3. Fonctionnement en polarisation oscillante

Nous considérons maintenant une tension de polarisation oscillante

$$U_p(t) = U_p^0 \cos \omega_p t = \frac{U_p^0}{2} (e^{-i\omega_p t} + e^{i\omega_p t}) \quad (106)$$

Nous nous limitons à la situation où la fréquence ω_p est proche de la différence des fréquences propres des deux oscillateurs

$$\omega_p \simeq \varpi_e - \varpi_m \quad (107)$$

Dans ce cas, on s'attend en effet classiquement à ce que l'information mécanique puisse être lue de façon efficace dans la ligne électrique. A cause de la nonlinéarité des équations (94), l'étude de la réponse forcée à une polarisation oscillante est un problème très compliqué dans le cas général. On se place donc dans un régime de couplage faible et on détermine le régime forcé (94) de manière perturbative.

Au premier ordre, on obtient une charge oscillant à la même fréquence que la polarisation,

$$q_0[\omega] = \frac{U_p[\omega]}{-i\omega(Z_e + R)}$$

$$U_p[\omega] = \pi U_p^0 [\delta(\omega - \omega_p) + \delta(\omega + \omega_p)] \quad (108)$$

On suppose qu'on se place dans une situation où la fréquence d'excitation ω_p est suffisamment loin de la résonance électrique.

$$\frac{\varpi_e - \omega_p}{\varpi_e} \gg \frac{1}{Q_e} \quad (109)$$

On peut alors écrire

$$\frac{q_0[\omega]}{C} \simeq \frac{1}{2} \frac{\varpi_e}{\varpi_e - \omega_p} U_p[\omega]$$

$$\frac{q_0(t)}{C} \simeq \frac{1}{2} \frac{\varpi_e}{\varpi_e - \omega_p} U_p^0 \cos \omega_p t \quad (110)$$

On étudie ensuite l'effet de la perturbation au second ordre dans l'équation (94). Cet effet revient à exciter le mouvement de la masse à fréquence nulle (déplacement du point d'équilibre) et à la fréquence double de la fréquence de polarisation

$$M\ddot{x}_0 + H\dot{x}_0 + Kx_0 = \frac{1}{16} \frac{C}{d} \frac{\varpi_e^2}{(\varpi_e - \omega_p)^2} U_p^{0,2} (1 + \cos 2\omega_p t) \quad (111)$$

A l'ordre suivant, le régime forcé de x_0 viendrait perturber l'équation de la charge q_0 et faire apparaître les fréquences ω_p et $3\omega_p$. Dans la suite, on se contentera en fait de la solution que nous avons obtenue à l'ordre 1. Il y a deux raisons à cela. D'une part, les déplacements d'ordre supérieur sont plus petits dans un développement de perturbations. D'autre part, nous nous plaçons dans des conditions où ils ne sont pas résonnants.

Par souci de simplicité, on se limitera au cas où le désaccord de la fréquence de la pompe par rapport à la différence des fréquences de résonance est nul

$$\omega_p = \varpi_e - \varpi_m \quad (112)$$

Cette hypothèse est cohérente avec notre motivation d'étudier des systèmes ayant un intérêt expérimental. On demandera que les facteurs de qualité des deux oscillateurs soient grands

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{\varpi_m}{\Gamma_m} \gg 1 \\ Q_e &= \frac{\varpi_e}{\Gamma_e} \gg 1 \end{aligned} \quad (113)$$

et que la condition suivante soit aussi remplie

$$\frac{1}{\Gamma_e} \gg \frac{1}{\varpi_m} \quad (114)$$

Nous rappelons que Γ_m et Γ_e sont les coefficients d'amortissement des deux oscillateurs non-couplés. La condition (114), qui coïncide maintenant avec (109), correspond à une largeur du pic de résonance électrique petite devant la fréquence mécanique. Elle correspond à l'esprit d'une mesure résonnante. Elle interdit bien sûr de suivre précisément le mouvement de la masse aux fréquences se trouvant en dehors de la bande d'analyse.

Avec toutes ces hypothèses, le régime forcé s'écrit

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0 \\ \frac{q_0(t)}{C} &= \frac{\varpi_e}{2\varpi_m} U_p(t) \end{aligned} \quad (115)$$

Les équations (95) des fluctuations s'écrivent donc

$$\begin{aligned} M \left(\delta \ddot{x} + \Gamma_m \delta \dot{x} + \varpi_m^2 \delta x \right) - E_0 \cos \omega_p t \delta q &= 2HV^{in} \\ L \left(\delta \ddot{q} + \Gamma_e \delta \dot{q} + \varpi_e^2 \delta q \right) - E_0 \cos \omega_p t \delta x &= 2RI^{in} \end{aligned}$$

$$E_0 = \frac{\varpi_e}{2\varpi_m} \frac{U_p^0}{d} \quad (116)$$

On les réécrit maintenant en termes de vitesse et de courant et en exprimant les fonctions dans le domaine des fréquences

$$\begin{aligned} \frac{M}{-i\omega} \left(\varpi_m^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_m \right) \delta V - \frac{E_0}{2} \left\{ [2\pi\delta(\omega - \omega_p) + 2\pi\delta(\omega + \omega_p)] \otimes \frac{\delta I}{-i\omega} \right\} &= 2HV^{in} \\ \frac{L}{-i\omega} \left(\varpi_e^2 - \omega^2 - i\omega\Gamma_e \right) \delta I - \frac{E_0}{2} \left\{ [2\pi\delta(\omega - \omega_p) + 2\pi\delta(\omega + \omega_p)] \otimes \frac{\delta V}{-i\omega} \right\} &= 2RI^{in} \end{aligned} \quad (117)$$

où le symbole $\otimes$ représente un produit de convolution.

Dans les termes de couplage en (117), on observe ce qu'on appelle un *mélange de fréquences*. Les oscillations des deux oscillateurs sont couplées à travers un changement de fréquence lié à la fréquence de la pompe (comme sur la figure 9). On peut développer les produits de convolution en (117)

$$\begin{aligned} (Z_m + H) \delta V - \frac{E_0}{2} \left(\frac{\delta I[\omega + \omega_p]}{-i(\omega + \omega_p)} + \frac{\delta I[\omega - \omega_p]}{-i(\omega - \omega_p)} \right) &= 2HV^{in} \\ (Z_e + R) \delta I - \frac{E_0}{2} \left(\frac{\delta V[\omega + \omega_p]}{-i(\omega + \omega_p)} + \frac{\delta V[\omega - \omega_p]}{-i(\omega - \omega_p)} \right) &= 2RI^{in} \\ Z_m &= \frac{1}{-i\omega K^{-1}} \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_m^2} \right) \\ Z_e &= \frac{1}{-i\omega C} \left(1 - \frac{\omega^2}{\varpi_e^2} \right) \end{aligned} \quad (118)$$

Cela permet de créer une situation où les deux oscillateurs se retrouvent en interaction résonnante l'un avec l'autre. Cette situation est très bien connue et étudiée en optique quantique [53]. Nous utilisons dans la suite les techniques dérivées de l'optique quantique avec les adaptations nécessaires.

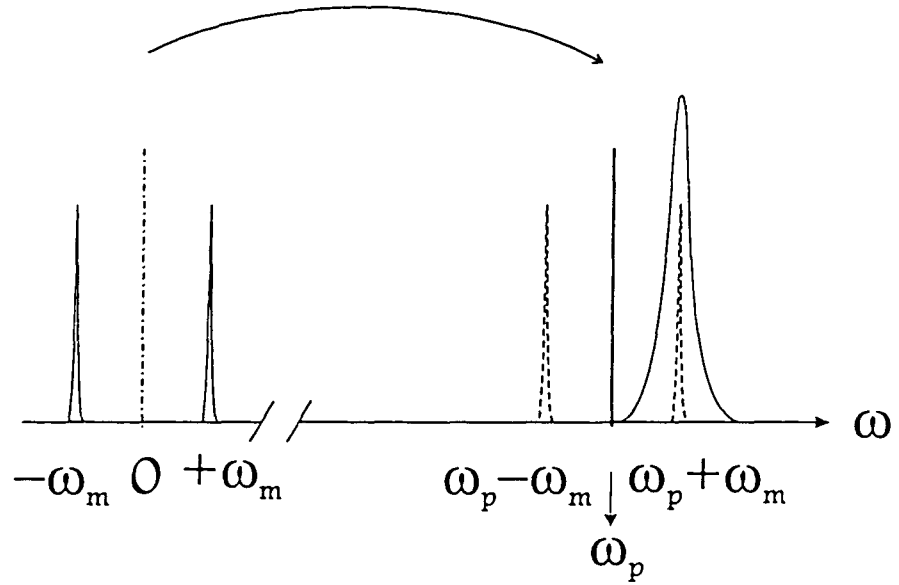


FIG. 9 - Représentation sur une échelle de fréquence du phénomène de transfert de fréquence. On représente les composantes de fréquence importantes pour l'analyse du système. Les oscillations mécaniques autour de $\pm\omega_m$ sont transférées aux fréquences $\omega_p \pm \omega_m$, ω_p étant la fréquence de polarisation. La composante $\omega_p + \omega_m$ interagit de façon résonnante avec le système électrique. On peut par contre négliger la composante à $\omega_p - \omega_m$.

Nous définissons d'abord les *amplitudes complexes* associées au mouvement des oscillateurs. Considérons par exemple l'oscillateur mécanique. Par suite du phénomène de résonance, seules les parties du spectre des grandeurs mécaniques proches de la pulsation de résonance ω_m et de $-\omega_m$ ont une amplitude significative. Autrement dit, il est possible d'écrire l'évolution de la vitesse comme somme de termes évoluant à ω_m et $-\omega_m$ dont les amplitudes varient lentement

$$\delta V(t) = \delta V_+(t) e^{-i\omega_m t} + \delta V_-(t) e^{i\omega_m t} \quad (119)$$

Les termes $\delta V_{\pm}(t) e^{\mp i\omega_m t}$ sont les parties du signal de fréquence positive et négative respectivement. Si nous considérons la décomposition spectrale du signal global, on introduit des modes d'oscillation décrits par les opérateurs d'annihilation a_{ω} et de création $a_{\omega}^{\dagger}$, et on obtient alors les amplitudes complexes $\delta V_+(t)$ et $\delta V_-(t)$

$$\delta V_+(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2H}} a_{\omega} e^{-i(\omega - \omega_m)t}$$

$$\delta V_{-}(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2H}} a_{-\omega}^{\dagger} e^{-i(\omega + \varpi_m)t} \quad (120)$$

Autrement dit, les composantes spectrales des amplitudes complexes sont des opérateurs de création ou d'annihilation

$$\begin{aligned} \delta V_{+}[\Omega] &= \sqrt{\frac{\hbar |\Omega + \varpi_m|}{2H}} a_{\Omega + \varpi_m} \\ \delta V_{-}[\Omega] &= \sqrt{\frac{\hbar |\Omega - \varpi_m|}{2H}} a_{-(\Omega - \varpi_m)}^{\dagger} \end{aligned} \quad (121)$$

On remarque que

$$\delta V_{-}[\Omega] = (\delta V_{+}[-\Omega])^{\dagger} \quad (122)$$

Comme nous nous limitons à une analyse résonnante, les fréquences mécaniques qui nous intéressent sont proches de la pulsation mécanique

$$\begin{aligned} \omega &= \Omega \pm \varpi_m \\ \Omega &\ll \omega_m \end{aligned} \quad (123)$$

Si la condition (114) est remplie ou, autrement dit, si le désaccord (ϖ_m) de la fréquence de pompe par rapport à la résonance électrique est plus grand que la largeur de la résonance électrique, certains termes peuvent être négligés, de sorte que

$$\begin{aligned} (Z_m[\Omega + \varpi_m] + H) \delta V[\Omega + \varpi_m] - \frac{E_0}{2} \frac{\delta I[\Omega + \varpi_e]}{-i(\Omega + \varpi_e)} &= 2HV^{in}[\Omega + \varpi_m] \\ (Z_m[\Omega - \varpi_m] + H) \delta V[\Omega - \varpi_m] - \frac{E_0}{2} \frac{\delta I[\Omega - \varpi_e]}{-i(\Omega - \varpi_e)} &= 2HV^{in}[\Omega - \varpi_m] \end{aligned} \quad (124)$$

De même, les oscillations qui nous intéressent pour les variables électriques correspondent à des fréquences proches de la pulsation électrique

$$\omega = \Omega \pm \varpi_e \quad (125)$$

Compte tenu du fait que les oscillations mécaniques aux fréquences proches de la pulsation électrique sont négligeables, l'équation électrique se simplifie aussi

$$\begin{aligned}
(Z_e [\Omega + \varpi_e] + R) \delta I [\Omega + \varpi_e] - \frac{E_0}{2} \frac{\delta V [\Omega + \varpi_m]}{-\imath (\Omega + \varpi_m)} &= 2RI^{in} [\Omega + \varpi_e] \\
(Z_e [\Omega - \varpi_e] + H) \delta I [\Omega - \varpi_e] - \frac{E_0}{2} \frac{\delta V [\Omega - \varpi_m]}{-\imath (\Omega - \varpi_m)} &= 2RI^{in} [\Omega - \varpi_e]
\end{aligned} \tag{126}$$

De plus, les impédances des oscillateurs découplés valent au voisinage des résonances

$$\begin{aligned}
Z_m [\Omega \pm \varpi_m] &\simeq -\imath H \frac{2\Omega}{\Gamma_m} \\
Z_e [\Omega \pm \varpi_e] &\simeq -\imath R \frac{2\Omega}{\Gamma_e}
\end{aligned} \tag{127}$$

Nous introduisons, par analogie avec (121), la notation suivante pour les amplitudes complexes mécaniques et électriques

$$\begin{aligned}
\delta V_+ [\Omega] &= \delta V [\Omega + \varpi_m] & \delta I_+ [\Omega] &= \delta I [\Omega + \varpi_e] \\
\delta V_- [\Omega] &= \delta V [\Omega - \varpi_m] & \delta I_- [\Omega] &= \delta I [\Omega - \varpi_e]
\end{aligned} \tag{128}$$

Nous pouvons maintenant écrire ces résultats pour écrire les équations caractéristiques d'un réseau linéaire. Pour ce faire, on introduit des variables réduites comme précédemment et on rassemble les relations linéaires sous forme d'une matrice impédance z

$$\begin{bmatrix} \delta f_+ \\ \delta u_+ \\ \delta f_- \\ \delta u_- \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \delta v_+ \\ \delta i_+ \\ \delta v_- \\ \delta i_- \end{bmatrix}$$

où z est une matrice diagonale par blocs

$$z = \begin{bmatrix} z_{++} & 0 \\ 0 & z_{--} \end{bmatrix} \tag{129}$$

avec

$$\begin{aligned}
z_{++} &= \begin{bmatrix} z_m & -\imath \lambda' \\ -\imath \lambda' & z_e \end{bmatrix} \\
z_{--} &= \begin{bmatrix} z_m & \imath \lambda' \\ \imath \lambda' & z_e \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_m &= -2i \frac{\Omega}{\Gamma_m} \\
z_e &= -2i \frac{\Omega}{\Gamma_e} \\
\lambda' &= \frac{E_0}{2} \sqrt{\frac{C}{K}} \sqrt{Q_m Q_e}
\end{aligned} \tag{130}$$

On remarque que les blocs sont liés par la relation suivante

$$z_{--} [\Omega] = (z_{++} [-\Omega])^\dagger \tag{131}$$

qui vient de la propriété (122) des amplitudes complexes.

Nous écrivons finalement la matrice de diffusion s pour les amplitudes complexes du bruit

$$s = \begin{bmatrix} s_{++} & 0 \\ 0 & s_{--} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned}
s_{++} &= \frac{z_{++} - 1}{z_{++} + 1} \\
&= \begin{bmatrix} -\frac{(1-z_m)(1+z_e)+\lambda'^2}{(1+z_m)(1+z_e)-\lambda'^2} & \frac{-2i\lambda'}{(1+z_m)(1+z_e)-\lambda'^2} \\ \frac{-2i\lambda'}{(1+z_m)(1+z_e)-\lambda'^2} & -\frac{(1+z_m)(1-z_e)+\lambda'^2}{(1+z_m)(1+z_e)-\lambda'^2} \end{bmatrix} \\
s_{--} &= \frac{z_{--} - 1}{z_{--} + 1} = (s_{++} [-\Omega])^\dagger
\end{aligned} \tag{132}$$

La matrice de diffusion s ici obtenue a la même forme que la matrice (104) obtenue pour une polarisation constante quand les fréquences des deux oscillateurs coïncident. En effet, si on se place autour de la fréquence de résonance mécanique supposée égale à la fréquence électrique

$$\omega = \Omega + \varpi_m = \Omega + \varpi_e \tag{133}$$

on obtient à partir de (104) la matrice s approchée

$$s = \begin{bmatrix} -\frac{(1-z_m)(1+z_e)-\lambda^2}{(1+z_m)(1+z_e)+\lambda^2} & \frac{-2i\lambda}{(1+z_m)(1+z_e)+\lambda^2} \\ \frac{-2i\lambda}{(1+z_m)(1+z_e)+\lambda^2} & -\frac{(1+z_m)(1-z_e)-\lambda^2}{(1+z_m)(1+z_e)+\lambda^2} \end{bmatrix} \tag{134}$$

La raison de cette ressemblance est encore une fois que le comportement des deux systèmes est celui d'un système de deux oscillateurs identiques couplés.

Le transducteur paramétrique opérant dans le régime oscillant que l'on vient d'analyser est insensible à la phase. Les relations entre les amplitudes complexes des bruits mécanique ou électrique sortant ne présentent aucune dissymétrie de phase significative. Un tel dispositif se comporte de la façon qui a déjà été discutée. Dans la prochaine section, on va s'intéresser à un système sensible à la phase.

C. Une application à la détection QND

Nous allons maintenant montrer comment notre approche permet d'obtenir les techniques de détection QND (*quantum nondemolition*) ou BAE (*back action evading*) [26,28,51,52] proposées ou utilisées dans les barres de Weber.

Avant d'étudier le système électromécanique proprement dit, nous allons rappeler le principe d'une mesure QND en optique [53].

1. Couplage entre quadratures en optique

Pour cet exemple, nous envoyons deux faisceaux lumineux dans un milieu nonlinéaire présentant un effet Kerr croisé. Dans un tel milieu, l'indice optique vu par l'un des faisceaux dépend de l'intensité du second et par conséquent le déphasage subi par chacun des faisceaux lors de la traversée du milieu dépend de l'intensité de l'autre. Si nous appelons *signal* et *mesure* les deux faisceaux, les relations d'entrée-sortie pour les amplitudes électriques correspondantes sont

$$\begin{aligned} E_s^{out} &= e^{i\Delta\varphi_s} E_s^{in} \\ E_m^{out} &= e^{i\Delta\varphi_m} E_m^{in} \end{aligned} \tag{135}$$

où $\Delta\varphi_s$ et $\Delta\varphi_m$ sont des déphasages proportionnels chacun à l'intensité de l'autre champ [32]

$$\begin{aligned}\Delta\varphi_s &\propto |E_m^{in}|^2 \\ \Delta\varphi_m &\propto |E_s^{in}|^2\end{aligned}\tag{136}$$

Le champ électrique d'un faisceau lumineux est décrit quantiquement par un opérateur dépendant du temps $E(t)$, qui est une superposition linéaire d'opérateurs de création et annihilation. Comme dans la situation que nous avons déjà discutée (voir (121)), on peut définir un champ électrique sans dimension $e(t)$ dont les composantes de Fourier sont des opérateurs de création et d'annihilation [31]

$$\begin{aligned}e_+[\Omega] &= a_{\Omega+\omega_0} \\ e_-[\Omega] &= a_{-\Omega+\omega_0}^\dagger\end{aligned}\tag{137}$$

Les *composantes de quadrature* du champ e_1 et e_2 sont ensuite définies à partir des amplitudes complexes comme

$$\begin{aligned}e_1 &= e_+ + e_- \\ e_2 &= \frac{1}{i}(e_+ - e_-)\end{aligned}\tag{138}$$

Elles permettent aussi de décrire le système autour de sa fréquence propre. Les quadratures sont des variables lentes comme les amplitudes complexes.

Notons toutefois que du point de vue quantique, les quadratures sont des observables, tandis que les amplitudes complexes ne le sont pas. De plus, ce sont des observables conjuguées et quelque soit l'état du système, leurs dispersions satisfont une inégalité d'Heisenberg.

Une inégalité d'Heisenberg analogue est vérifiée par les fluctuations en intensité et phase du champ. Dans une approximation linéaire, les fluctuations de l'intensité δI et de la phase $\delta\varphi$ sont liées aux deux quadratures du champ en supposant par exemple que l'amplitude moyenne du champ est réelle, on obtient

$$\begin{aligned}\delta I &= \sqrt{I}\delta e_1 \\ \delta\varphi &= \frac{1}{2\sqrt{I}}\delta e_2\end{aligned}\tag{139}$$

où $\bar{I}$ est l'intensité moyenne du champ. Une mesure de l'intensité ou de la phase du champ est donc équivalente à une mesure de quadrature.

Dans notre cas, grâce à la propriété (136), on choisit d'effectuer une mesure de l'intensité du signal à partir de la phase du champ mesure. Dans ce but, on réécrit la relation (135) pour les phases. Pour le signal, on a

$$\varphi_s^{out} = \varphi_s^{in} + \Delta\varphi_s \quad (140)$$

où φ_s^{out} est la phase du champ sortant et φ_s^{in} celle du champ entrant. Des relations identiques régissent les phases de la ligne de mesure.

Comme nous nous intéressons au bruit dans cette mesure, nous désirons connaître l'expression des fluctuations $\delta\varphi_s$ et $\delta\varphi_m$ des déphasages des deux champs. On trouve qu'elles sont liées aux fluctuations des intensités de l'autre champ [32]

$$\begin{aligned} \delta\varphi_s &= \mu\delta I_m^{in} \\ \delta\varphi_m &= \mu\delta I_s^{in} \end{aligned} \quad (141)$$

où μ représente un coefficient de couplage par effet Kerr. Ce résultat amène aux relations entrée-sortie pour les fluctuations de phase et d'intensité des champs

$$\begin{aligned} \delta\varphi_s^{out} &= \delta\varphi_s^{in} + \mu\delta I_m^{in} \\ \delta I_s^{out} &= \delta I_s^{in} \\ \delta\varphi_m^{out} &= \delta\varphi_m^{in} + \mu\delta I_s^{in} \\ \delta I_m^{out} &= \delta I_m^{in} \end{aligned} \quad (142)$$

Ces relations montrent qu'une mesure de phase $\delta\varphi_m^{out}$ apporte des informations sur l'intensité du signal δI_s^{in} sans introduire aucun bruit sur cette observable. L'intensité du signal δI_s^{out} n'est en effet bruitée que par le bruit δI_s^{in} entrant sur la même observable. Le bruit entrant sur la ligne de mesure est par contre transcrit sur la phase du signal $\delta\varphi_s^{out}$ par l'intermédiaire du terme δI_m^{in} .

La configuration obtenue rend possible ce qu'on appelle une *mesure quantique non-démolissante* (QND). Elle nous permet d'effectuer une mesure *arbitrairement* précise du signal δI_s^{in} sans le perturber. δI_s^{in} est appelé *observable QND*.

Si l'on suppose que le bruit interne de l'appareil de mesure est négligeable, la précision d'une telle mesure n'est limitée que par les inégalités de Heisenberg, qui lient la précision de la mesure d'une observable à celle de sa variable conjuguée. Si on renonce à connaître l'une des deux observables, on peut donc mesurer l'autre avec une précision arbitraire. Dans notre cas, on renonce à la phase du signal au profit de son intensité δI_s^{in} . La précision de cette mesure est liée à la valeur du coefficient de couplage μ : plus il est grand, plus le signal est mesuré de façon efficace. De plus, si le système n'évolue pas, on est capable en principe de reproduire cette même mesure un grand nombre de fois, avec la même précision.

L'existence d'une référence de phase - introduite en optique par l'effet Kerr - est bien sûr une condition nécessaire pour qu'une mesure quantique non-démolissante idéale soit possible [32].

On va maintenant étudier le même processus sur un système électromécanique.

2. Couplage de quadratures électromécaniques

On considère le même système physique que dans la partie II B, toujours dans la situation où les fréquences propres d'oscillation mécanique et électrique sont très différentes. Nous rappelons les équations du mouvement du système

$$\begin{aligned} M \left(\ddot{x} + \Gamma_m \dot{x} + \varpi_m^2 x \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{C_d} q^2 &= 2HV^{in} + F^{ext} \\ L \left(\ddot{q} + \Gamma_e \dot{q} + \varpi_e^2 q \right) - \frac{1}{C_d} qx &= 2RI^{in} + U_p \end{aligned} \quad (143)$$

Pour faire une mesure quantique non-démolissante sur ce système, il faut pouvoir définir des quadratures, ce qui requiert une phase de référence. Dans ce but, on choisit de polariser le système par l'intermédiaire d'une tension dans laquelle apparaissent deux oscillations à la fréquence de résonance électrique ϖ_e et à la fréquence de résonance mécanique ϖ_m

$$U_p(t) = U_p^0 \cos \varpi_e t \cos \varpi_m t \quad (144)$$

L'oscillation à la fréquence de résonance électrique ϖ_e permet de définir les quadratures électriques et celle à la fréquence mécanique ϖ_m les quadratures mécaniques.

Dans un tel régime, la polarisation est une superposition de deux signaux oscillant aux bandes latérales $\varpi_e \pm \varpi_m$ de la fréquence de résonance électrique

$$U_p(t) = \frac{U_p^0}{2} [\cos(\varpi_e + \varpi_m)t + \cos(\varpi_e - \varpi_m)t] \quad (145)$$

Grâce aux similitudes avec le régime de conversion de fréquence que l'on a déjà considéré, on s'attend à ce que les oscillations mécaniques soient aussi transférées à la fréquence électrique. Cette fois il s'agit du résultat de l'action conjointe de deux signaux de polarisation, et non plus d'un seul.

Le calcul du point de fonctionnement dans ce nouveau régime se fait comme précédemment par un traitement perturbatif. La différence, par rapport au cas précédent, est que le régime forcé contient maintenant deux fréquences.

Nous nous plaçons encore dans la condition de résonance électrique étroite par rapport à la fréquence mécanique (cf. relation (114)). Par conséquent, les termes oscillant trop loin de résonance peuvent être négligés, si l'intensité du couplage, déterminée par l'intensité de l'amplitude de la polarisation n'est pas trop forte. Le point de fonctionnement vaut alors

$$\begin{aligned} x_0(t) &= 0 \\ \frac{q_0(t)}{C} &= \frac{\varpi_e}{2\varpi_m} \frac{U_p^0}{2} (\cos(\varpi_e - \varpi_m)t - \cos(\varpi_e + \varpi_m)t) \\ &= E_0 d \sin \varpi_e t \sin \varpi_m t \end{aligned} \quad (146)$$

Ce point de fonctionnement a été obtenu, comme pour le cas précédent (cf. équation (110)), en considérant que

$$\begin{aligned} \frac{q_0(t)}{C} &\simeq \frac{1}{2} \frac{\varpi_e}{\varpi_e - \varpi_p^+} \frac{U_p^0}{2} \cos \varpi_p^+ t + \frac{1}{2} \frac{\varpi_e}{\varpi_e - \varpi_p^-} \frac{U_p^0}{2} \cos \varpi_p^- t \\ \varpi_p^\pm &= \varpi_e \pm \varpi_m \end{aligned} \quad (147)$$

Les équations du mouvement pour les fluctuations linéarisées autour du point de fonctionnement s'écrivent donc

$$\begin{aligned} M \left(\delta \ddot{x} + \Gamma_m \delta \dot{x} + \varpi_m^2 \delta x \right) - E_0 \sin \varpi_e t \sin \varpi_m t \delta q &= 2HV^{in} \\ L \left(\delta \ddot{q} + \Gamma_e \delta \dot{q} + \varpi_e^2 \delta q \right) - E_0 \sin \varpi_e t \sin \varpi_m t \delta x &= 2RI^{in} \end{aligned} \quad (148)$$

Ces équations contiennent encore des phénomènes de mélange de fréquence mais avec des fréquences de polarisation à $\pm(\varpi_e \pm \varpi_m)$. C'est cette situation qui va faire apparaître une référence de phase (voir figure 10) et permettre d'effectuer une mesure QND.

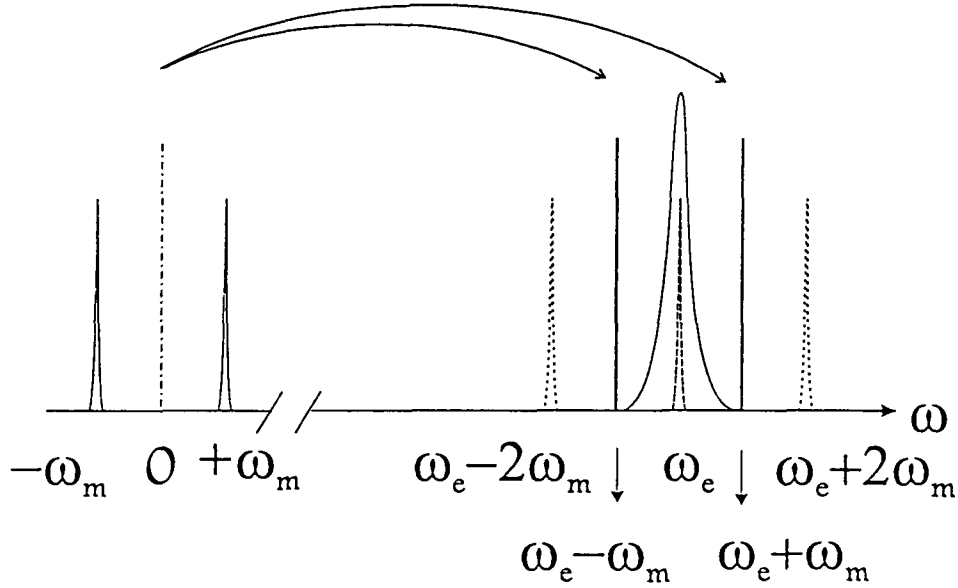


FIG. 10 - Représentation sur une échelle de fréquence du fonctionnement d'un transducteur électromécanique fonctionnant avec deux fréquences de polarisation. Ce système permet de lire une quadrature mécanique sur la ligne électrique.

Pour pouvoir faire des considérations plus précises sur le caractère QND d'un tel système, ou sa sensibilité, il faut passer à la description en termes de matrice de diffusion. Dans ce but, nous allons d'abord évaluer la matrice impédance de notre système pour les quadratures.

Comme précédemment, nous écrivons les équations linéarisées pour les fluctuations dans le domaine des fréquences. Toutefois, nous les écrivons maintenant pour les composantes de quadrature de la vitesse et du courant, définies comme dans (138).

Pour la partie réactive, nous obtenons ainsi une matrice impédance

$$\begin{bmatrix} \delta f_1 \\ \delta u_2 \\ \delta f_2 \\ \delta u_1 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \delta v_1 \\ \delta i_2 \\ \delta v_2 \\ \delta i_1 \end{bmatrix}$$

qui a encore une structure diagonale par blocs

$$z = \begin{bmatrix} z_{12} & 0 \\ 0 & z_{21} \end{bmatrix} \quad (149)$$

Par contre, les sous-matrices mettent clairement en évidence qu'on a maintenant un système de mesure QND

$$\begin{aligned} z_{12} &= \begin{bmatrix} z_m & 0 \\ -\lambda' & z_e \end{bmatrix} \\ z_{21} &= \begin{bmatrix} z_m & -\lambda' \\ 0 & z_e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (150)$$

Leur structure n'étant plus symétrique, on voit que la quadrature mécanique δv_1 n'est plus perturbée par le bruit électrique alors qu'elle peut être lue par la ligne de mesure.

Nous pouvons calculer maintenant la matrice de diffusion reliant les quadratures entrantes et sortantes

$$\begin{bmatrix} m_1^{out} \\ e_2^{out} \\ m_2^{out} \\ e_1^{out} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} m_1^{in} \\ e_2^{in} \\ m_2^{in} \\ e_1^{in} \end{bmatrix}$$

$$s = \frac{z - 1}{z + 1} \quad (151)$$

Nous évaluons cette matrice en supposant que la largeur du pic électrique est grande par rapport à celle du pic mécanique

$$\Gamma_e \gg \Gamma_m \quad (152)$$

Dans ces conditions, nous obtenons le système d'équations suivant

$$\begin{aligned}
m_1^{out} &= \frac{z_m - 1}{z_m + 1} (m_1^{in} + f_1^{ext}) \\
e_2^{out} &= -e_2^{in} - \mu (m_1^{in} + f_1^{ext}) \\
m_2^{out} &= \frac{z_m - 1}{z_m + 1} (m_2^{in} + f_2^{ext}) - \mu e_1^{in} \\
e_1^{out} &= -e_1^{in} \\
\mu &= \frac{2\lambda'}{1 + z_m} \\
z_m &= -2i \frac{\Omega}{\Gamma_m}
\end{aligned} \tag{153}$$

Nous avons réintroduit à ce niveau les signaux, c'est à dire les composantes de quadrature f_1^{ext} et f_2^{ext} de la force extérieure f^{ext} mesurée comme une variable réduite (cf. équation (77)). Ces composantes représentent par exemple l'action d'une onde gravitationnelle sur la masse de l'oscillateur mécanique utilisé pour extraire le signal d'une barre de Weber. La sensibilité de la mesure électrique d'une telle force dépend fortement de la quadrature électrique sur laquelle on effectue la mesure. En effet, seule la quadrature e_2^{out} , donne des informations sur un signal mécanique, en l'occurrence f_1^{ext} . La quadrature m_1^{in} est ici l'observable QND, puisque elle ne ressent pas de bruit introduit par la mesure électrique.

3. Les limites quantiques dans une mesure QND

Nous pouvons maintenant discuter les performances de cet appareil de mesure. L'efficacité de la mesure dépend de l'intensité du coefficient μ , qui est fonction des facteurs de qualité des oscillateurs et de l'intensité de la pompe. Un couplage intense augmente la valeur de ce coefficient mais il peut être nocif, car on risque de trop exciter des modes que nous avons négligés et qui pourraient alors perturber le système. La mesure ne pourrait plus dans ce cas être considérée QND. Nous n'étudions pas ce problème plus en détail ici.

La sensibilité de la mesure se discute comme précédemment (section II A 3). Les équations (153) permettent en effet d'introduire un estimateur $\hat{f}_1^{ext}$ de la mesure de la quadrature f_1^{ext}

$$\hat{f}_1^{ext} = -\frac{1}{\mu} e_2^{out} = f_1^{ext} + m_1^{in} + \frac{1}{\mu} e_2^{in} \quad (154)$$

puis une puissance de bruit équivalent sur la mesure [34]

$$\Sigma_{f_1} = \sigma_{m_1} + \frac{1}{|\mu|^2} \sigma_{e_2} \quad (155)$$

σ_{m_1} et σ_{e_2} décrivent les bruits sur les quadratures m_1^{in} et e_2^{in} et correspondent à des températures T_m et T_e . En utilisant la définition (138) des quadratures, on voit que σ_{m_1} et σ_{e_2} s'écrivent

$$\begin{aligned} \sigma_{m_1} &= \coth \frac{\hbar \varpi_m}{2k_B T_m} \\ \sigma_{e_2} &= \coth \frac{\hbar \varpi_e}{2k_B T_e} \end{aligned} \quad (156)$$

A noter le facteur 2 de différence avec les équations (79) qui décrivent le même bruit pour une amplitude m ou e . Par comparaison avec l'équation (79), on voit aussi que le coefficient $\frac{1}{|\mu|^2}$ a remplacé le rapport $\frac{|\rho_e|^2}{|\tau|^2}$ des coefficients de réflexion et transmission.

La situation optimale correspond donc désormais à un coefficient μ le plus grand possible, en respectant bien sûr la contrainte de linéarité évoquée plus haut. Dans cette situation optimale, le bruit équivalent est imposé par la température T_m de l'oscillateur mécanique (équations (84)-(86)). Cette conclusion est exactement la même que dans la section II A 3.

Par contre, on a supprimé le bruit en retour de la ligne de mesure électrique sur la quadrature mécanique mesurée: dans les équations (153), m_1^{out} n'est absolument pas polluée par les fluctuations entrant par la voie électrique. On se trouve bien dans la situation d'une mesure QND [26,28,35,51,52,54,55].

Dans la suite, nous allons considérer des systèmes actifs qui permettront aussi de résoudre le problème du bruit thermique dans l'oscillateur mécanique.

III. LE BRUIT QUANTIQUE DANS LES RÉSEAUX ACTIFS

Les amplificateurs jouent un rôle essentiel pour la mesure quantique. Considérons un signal défini au sens le plus large, après avoir spécifié le processus de détection. Par exemple, avec une photodiode ou un photomultiplicateur, on mesure en général une énergie, autrement dit l'intensité d'un champ. Mais on peut aussi mesurer une phase avec un dispositif interférométrique ou une composante de quadrature avec un détecteur hétérodyne. Dans tous les cas, le signal est produit par un système quantique et il se trouve superposé à des fluctuations quantiques.

Nous nous concentrons sur un cas particulier particulièrement important pour la mesure des signaux dépendant du temps, à savoir le cas où la première étape du passage du niveau quantique au niveau classique est assurée par un amplificateur. Le signal quantique est porté par l'amplificateur dans le domaine classique ainsi que le bruit quantique. Une question déterminante se pose alors: quelle est la dégradation minimale du signal apportée par le processus d'amplification? Les premières études sur cette question, stimulées par la réalisation d'amplificateurs "silencieux" tels que les masers [16,24,56], ont montré qu'un amplificateur linéaire ajoute un bruit au signal au moins égal au bruit dans la ligne correspondant au signal entrant.

On a ensuite réalisé qu'il était possible de contourner ce problème en utilisant des amplificateurs paramétriques sensibles à la phase du signal, autrement dit en mesurant une seule quadrature d'un signal [17–19]. De nouveaux progrès ont été réalisés grâce aux efforts faits pour rendre de plus en plus performants les résonateurs mécaniques pour la détection des ondes gravitationnelles. Ceci a conduit à étudier de manière plus poussée le bruit quantique en particulier dans les amplificateurs [57,58].

Dans cette partie, nous rappelons d'abord les résultats de base sur le bruit quantique dans les amplificateurs linéaires. Nous définissons ensuite un amplificateur opérationnel quantique que nous utilisons comme composant de base dans la réalisation de réseaux actifs.

A. L'amplificateur linéaire quantique

Nous commençons par étudier le cas plus simple d'un amplificateur linéaire dont le gain est indépendant de la phase du signal

$$a^{out} = \mathcal{G}a^{in} + \mathcal{B} \quad (157)$$

où a^{in} et a^{out} sont les opérateurs associés aux modes de champ entrant et sortant respectivement. Le coefficient d'amplification $\mathcal{G}$ est supposé plus grand que 1

$$|\mathcal{G}| \geq 1 \quad (158)$$

Bien sûr, ce gain peut dépendre de la fréquence ω .

Il est nécessaire d'introduire un terme supplémentaire $\mathcal{B}$ dans l'équation (157) pour que les relations de commutation soient préservées dans l'opération d'amplification. Les commutateurs entre les champs sortants sont en effet les mêmes que les commutateurs entre les champs entrants pourvu que

$$\begin{aligned} [\mathcal{B}_\omega, \mathcal{B}_{\omega'}] &= 0 \\ [\mathcal{B}_\omega, \mathcal{B}_{\omega'}^\dagger] &= 2\pi\delta(\omega - \omega') (1 - |\mathcal{G}_\omega|^2) \end{aligned} \quad (159)$$

Notons que cette approche ne fait pas intervenir de modélisation particulière du fonctionnement de l'amplificateur et est donc générale. Elle décrit le bruit minimal ajouté par l'amplification. Pour avoir plus d'information sur le bruit d'un amplificateur donné, il serait nécessaire de prendre en compte une modélisation précise du processus d'amplification. On pourrait alors déterminer complètement le spectre du bruit ajouté. Nous savons déjà que ce spectre est supérieur à la valeur que nous venons de déterminer. Dans la suite, nous considérons des amplificateurs pour lesquels le bruit est égal au bruit minimal.

Notons l'analogie avec les résultats du théorème fluctuations-dissipation. Le bruit ajouté $\mathcal{B}$ est un bruit intrinsèquement associé au processus d'amplification, de la même façon qu'il existe toujours un bruit associé à tout processus de dissipation. La méthode pour décrire ce

bruit est d'ailleurs la même dans les deux cas: il faut assurer l'unitarité de la transformation des champs quantiques impliqués.

Remarquons enfin qu'on a obtenu ainsi la densité spectrale de bruit correspondant au commutateur des champs. On peut calculer le spectre de bruit correspondant aux anti-commutateurs de la même façon que précédemment si on suppose que le bruit rajouté par l'amplification est caractérisé par un état d'équilibre thermodynamique (voir équation (25) dans la section II A 1).

Nous considérons maintenant le cas d'un amplificateur paramétrique, précisément un amplificateur linéaire dépendant de la phase. Nous écrivons les relations caractéristiques sous une forme simple

$$\begin{aligned} a_1^{out} &= \mathcal{G}_1 a_1^{in} + \mathcal{B}_1 \\ a_2^{out} &= \mathcal{G}_2 a_2^{in} + \mathcal{B}_2 \end{aligned} \quad (160)$$

où a_1 , a_2 , $\mathcal{B}_1$, et $\mathcal{B}_2$ sont les quadratures

$$\begin{aligned} a_1 &= a^\dagger + a \\ a_2 &= \imath(a^\dagger - a) \\ \mathcal{B}_1 &= \mathcal{B}^\dagger + \mathcal{B} \\ \mathcal{B}_2 &= \imath(\mathcal{B}^\dagger - \mathcal{B}) \end{aligned} \quad (161)$$

Un exemple particulièrement simple est l'amplificateur paramétrique dégénéré pour lequel les gains sont inverses l'un de l'autre sur les deux quadratures

$$\mathcal{G}_1 \mathcal{G}_2 = 1 \quad (162)$$

Cet amplificateur particulier peut fonctionner sans bruit ajouté

$$\mathcal{B}_1 = \mathcal{B}_2 = 0 \quad (163)$$

En effet, les commutateurs entre les deux composantes de quadrature sont préservés dans ce cas. Dans le cas général, où les gains ne sont pas l'inverse l'un de l'autre, il faut nécessairement introduire un bruit ajouté.

Après ce rappel des propriétés générales des amplificateurs linéaires, nous nous concentrons sur l'amplificateur linéaire qui préserve la phase, qui sera utilisé dans la suite.

Nous réécrivons alors le bruit ajouté

$$B = \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} (b^{in})^\dagger \quad (164)$$

où b^{in} et $(b^{in})^\dagger$ représentent un champ supplémentaire obéissant aux règles de commutation canoniques. Le bruit du signal de l'amplificateur est donc décrit par les équations linéaires

$$\begin{aligned} a^{out} &= \mathcal{G} a^{in} + \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} (b^{in})^\dagger \\ (b^{out})^\dagger &= \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} a^{in} + \mathcal{G} (b^{in})^\dagger \end{aligned} \quad (165)$$

Nous avons supposé $\mathcal{G}$ réel pour simplifier. Le bruit est indépendant du signal entrant. L'amplificateur linéaire est alors représenté par la figure 11.

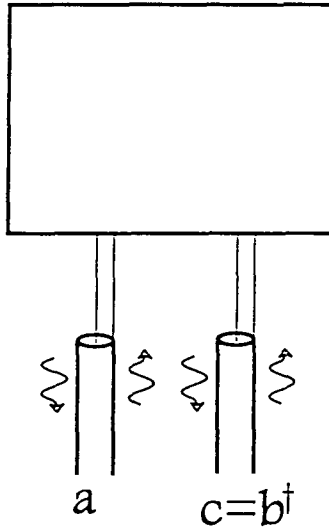


FIG. 11 - Schéma de principe d'un amplificateur linéaire qui préserve la phase. Le bruit entrant a^{in} est amplifié à la sortie de l'amplificateur d'un facteur $\mathcal{G}$. Le processus d'amplification introduit un bruit ajouté c qui peut être interprété comme conjugué en phase du bruit entrant dans un autre mode ($c = b^\dagger$).

La valeur moyenne $\langle a^{out} \rangle$ du signal sortant s'écrit

$$\langle a^{out} \rangle = \mathcal{G} \langle a^{in} \rangle \quad (166)$$

C'est une équation classique de gain. L'équation d'entrée-sortie pour les bruits est par contre non classique. On peut comme on l'a déjà fait introduire un estimateur $\hat{a}^{in}$ du signal d'entrée tel qu'on peut le déduire de la mesure du signal de sortie a^{out}

$$\hat{a}^{in} = \frac{1}{\mathcal{G}} a^{out} = a^{in} + \sqrt{1 - \frac{1}{\mathcal{G}^2}} (b^{in})^\dagger \quad (167)$$

On voit alors que le bruit rajouté par l'amplificateur dans la mesure du signal est

$$\Sigma_a = \left(1 - \frac{1}{\mathcal{G}^2}\right) \sigma_{b^\dagger} \quad (168)$$

A la limite de grand gain ($\mathcal{G} \gg 1$), le bruit ajouté minimal est simplement donné par $\sigma_{b^\dagger}$. Si les lignes a et b sont à la même température, le bruit ajouté est donc égal au bruit entrant. Autrement dit, la perte est de 3 dB. De façon équivalente, on peut dire que le rapport signal sur bruit est dégradé lors d'une amplification d'un signal et au moins divisé par deux puisque la discussion ci-dessus correspondait au bruit minimal. Cette limitation avait été observée dès le début des communications par ondes Hertziennes. Elle fixe aussi le nombre maximal de répéteurs utilisables dans la communication par fibre optique.

Pour simplifier les discussions qui vont suivre, nous faisons encore un changement de notation en introduisant le champ conjugué au champ b

$$\begin{aligned} c &= b^\dagger \\ c^\dagger &= b \end{aligned} \quad (169)$$

Les équations (165) de l'amplificateur linéaire s'écrivent alors

$$\begin{aligned} a^{out} &= s_{aa} a^{in} + s_{ac} c^{in} \\ c^{out} &= s_{ca} a^{in} + s_{cc} c^{in} \end{aligned} \quad (170)$$

où les coefficients apparaissent comme des amplitudes de diffusion.

Ces relations préservent les commutateurs des champs et correspondent donc à une matrice de diffusion unitaire. Il faut toutefois faire attention au fait que c est un champ conjugué pour écrire explicitement les relations d'unitarité. Si on écrit (170) sous forme matricielle on obtient la condition

$$s\epsilon s^\dagger = \epsilon \quad (171)$$

avec

$$\begin{aligned} s &= \begin{bmatrix} s_{aa} & s_{ac} \\ s_{ca} & s_{cc} \end{bmatrix} \\ \epsilon &= \begin{bmatrix} \epsilon_a & 0 \\ 0 & \epsilon_c \end{bmatrix} \\ \epsilon_a &= 1 \\ \epsilon_c &= -1 \end{aligned} \quad (172)$$

Les coefficients ϵ correspondent en fait au signe de la fréquence du mode considéré. Nous continuerons à appeler les relations correspondantes *relations d'unitarité*, en gardant à l'esprit la remarque ci-dessus.

B. L'amplificateur opérationnel quantique

L'amplificateur opérationnel est un composant utilisé dans les systèmes électriques pour amplifier une tension. Comme dans la partie précédente, cette amplification est nécessairement accompagnée d'un bruit ajouté.

Pour obtenir un modèle quantique d'amplificateur opérationnel, nous allons utiliser des éléments que nous avons discutés précédemment. Grâce à cela, nous obtiendrons des équations caractéristiques assurant l'unitarité des relations d'entrée-sortie.

1. L'amplificateur en boucle ouverte

L'amplificateur opérationnel est habituellement décrit par les équations suivantes pour les courants et tensions à l'entrée et à la sortie (figure 12)

$$\begin{aligned} I_{eo} &= -\frac{U_{eo}}{R_a} + I_n \\ U_{so} &= -R'_a I_{so} + G U_{eo} + U_n \end{aligned} \quad (173)$$

où R_a et R'_a sont les impédances caractéristiques de l'amplificateur vu de l'entrée et de la sortie, G le gain en tension de l'amplificateur, I_n et U_n des sources de courant et de tension. Nous avons noté I_{eo} , U_{eo} , I_{so} et U_{so} les courants et les tensions en entrée et en sortie de l'amplificateur fonctionnant en boucle ouverte.

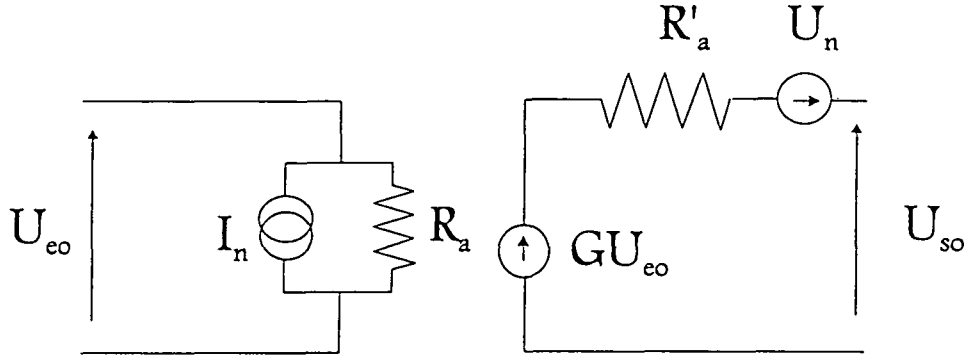


FIG. 12 - Circuit équivalent d'un amplificateur opérationnel de gain G . R_a et R'_a sont les impédances d'entrée et de sortie de l'amplificateur. I_n et U_n sont les deux sources de bruit associées.

Comme nous l'avons déjà fait à plusieurs reprises, nous interprétons ces sources de bruit comme des fluctuations entrant dans le système par des lignes dissipatives. L'amplificateur opérationnel quantique apparaît ainsi comme un composant de réseau avec quatre portes. Deux de ces portes correspondent aux lignes d'entrée et de sortie de l'amplificateur. Les deux autres lignes sont nécessaires pour décrire les bruits ajoutés.

Plus précisément, nous représentons un amplificateur opérationnel par le schéma de principe de la figure 13, construit à partir de lignes coaxiales couplées par un circulateur et d'un amplificateur linéaire tel qu'il a été décrit dans la partie III A. Les équations caractéristiques de ce système s'écrivent

$$\begin{aligned} U_{eo} &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_a}{2}} (a^{in} + e_o^{out}) \\ I_{eo} &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2 R_a}} (a^{in} - e_o^{out}) \\ U_{so} &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R'_a}{2}} (s_o^{in} + a^{out}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_{so} &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R'_a}} (s_o^{in} - a^{out}) \\
s_o^{in} &= \mathcal{G} e_o^{out} + \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} c^{in} \\
c^{out} &= \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} e_o^{out} + \mathcal{G} c^{in}
\end{aligned} \tag{174}$$

où on a noté $\mathcal{G}$ le gain de l'amplificateur linéaire, supposé réel, e_o et s_o les lignes d'entrée et de sortie dans l'amplificateur en boucle ouverte, a et c les deux lignes supplémentaires décrivant le bruit ajouté.

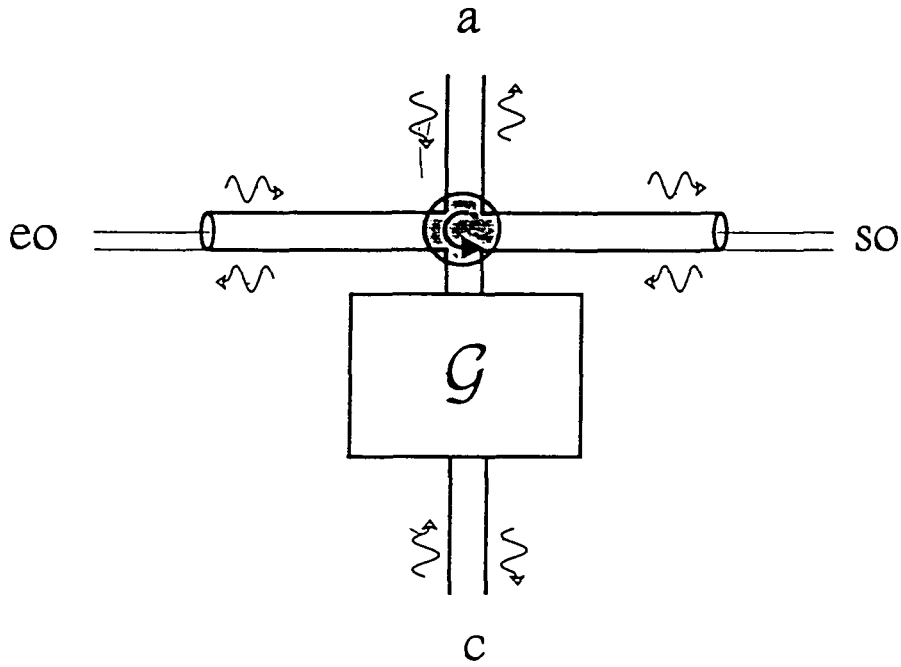


FIG. 13 - Schéma de principe d'un amplificateur opérationnel. C'est un réseau à quatre portes: eo et so représentent l'entrée et la sortie de l'amplificateur; a et c représentent les lignes internes nécessaires pour décrire le bruit d'amplificateur.

Nous pouvons maintenant réécrire ces équations en exprimant le courant d'entrée et la tension de sortie en fonction de la tension d'entrée, du courant de sortie et des bruits entrants:

$$I_{eo} = -\frac{U_{eo}}{R_a} + \sqrt{\frac{2\hbar |\omega|}{R_a}} a^{in}$$

$$U_{so} = -R'_a I_{so} + 2G \sqrt{\frac{R'_a}{R_a}} U_{eo} + 2\sqrt{\frac{\hbar |\omega| R'_a}{2}} (-G a^{in} + \sqrt{G^2 - 1} c^{in}) \quad (175)$$

On retrouve les équations (173) habituelles de l'amplificateur opérationnel grâce aux identifications suivantes

$$\begin{aligned} G &= 2\sqrt{\frac{R'_a}{R_a}} G \\ I_n &= \sqrt{\frac{2\hbar |\omega|}{R_a}} a^{in} \\ U_n &= -\sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_a}{2}} G a^{in} + \sqrt{2\hbar |\omega| R'_a \left(\frac{R_a}{4R'_a} G^2 - 1 \right)} c^{in} \end{aligned} \quad (176)$$

On a donc obtenu l'expression quantique des bruits ajoutés par un amplificateur opérationnel. Celui-ci est décrit comme un réseau couplant quatre lignes et il obéit aux conditions générales d'unitarité de la matrice s . Autrement dit, les équations ci-dessus assurent que les commutateurs des champs sortants sont les mêmes que ceux des champs entrants.

A ce stade, il est important de faire une remarque sur l'approche habituelle. Les équations (173) suggèrent naturellement de considérer que les bruits I_n et U_n sont décorrélés. L'approche de type réseau que nous utilisons montre que ce n'est pas le cas, en général. En fait, il est même impossible de faire cette hypothèse. Il suffit pour s'en convaincre de calculer le commutateur entre I_n et U_n à partir des formules quantiques (176). C'est seulement dans la limite de haute température et si on néglige les fluctuations quantiques devant les fluctuations classiques qu'on retrouve des fluctuations décorrélés.

2. L'amplificateur branché sur deux lignes

On considère maintenant le même amplificateur branché sur une ligne d'entrée d'impédance R_e et une ligne de sortie d'impédance R_d (figure 14).

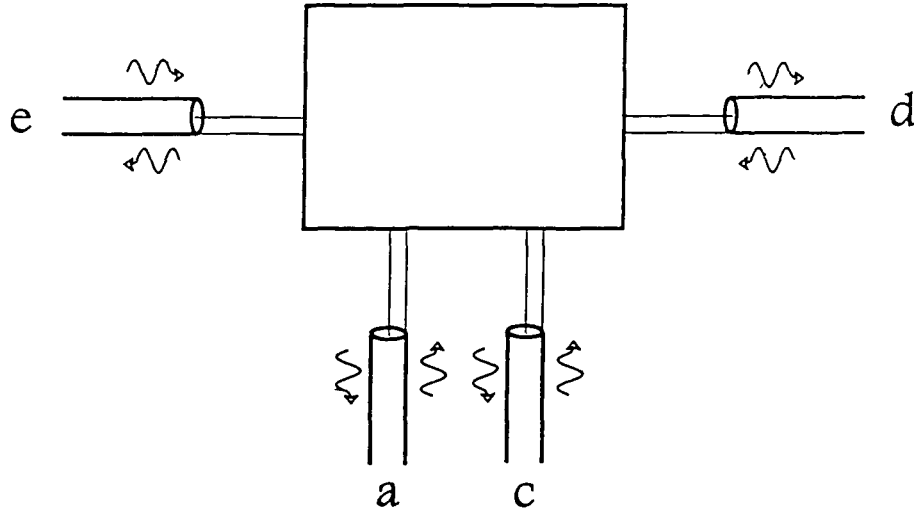


FIG. 14 - Schéma de principe d'une mesure par un amplificateur opérationnel en boucle ouverte. L'amplificateur de la figure 13 est branché sur une ligne d'entrée e et une ligne de sortie d servant à la détection. a et c représentent les lignes de bruit interne.

Les équations caractéristiques sont celles de la section précédente et les suivantes

$$\begin{aligned} I_e &= I_{eo} = \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_e}} (e^{out} - e^{in}) \\ I_d &= I_{so} = \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_d}} (d^{out} - d^{in}) \end{aligned} \quad (177)$$

La solution des ces équations est donnée par la matrice s suivante

$$\begin{bmatrix} e^{out} \\ d^{out} \\ a^{out} \\ c^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ee} & s_{ed} & s_{ea} & s_{ec} \\ s_{de} & s_{dd} & s_{da} & s_{dc} \\ s_{ae} & s_{ad} & s_{aa} & s_{ac} \\ s_{ce} & s_{cd} & s_{ca} & s_{cc} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{in} \\ d^{in} \\ a^{in} \\ c^{in} \end{bmatrix}$$

$$s_{ee} = \frac{R_a - R_e}{R_a + R_e}$$

$$s_{ed} = 0$$

$$s_{ea} = 2 \frac{\sqrt{R_a R_e}}{R_a + R_e}$$

$$s_{ec} = 0$$

$$\begin{aligned}
s_{de} &= 4\mathcal{G} \frac{\sqrt{R_a R_e}}{R_a + R_e} \frac{\sqrt{R'_a R_d}}{R'_a + R_d} \\
s_{dd} &= \frac{R'_a - R_d}{R'_a + R_d} \\
s_{da} &= 2\mathcal{G} \frac{R_e - R_a}{R_a + R_e} \frac{\sqrt{R_d R'_a}}{(R'_a + R_d)} \\
s_{dc} &= 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \frac{\sqrt{R'_a R_d}}{R'_a + R_d} \\
s_{ae} &= 2\mathcal{G} \frac{\sqrt{R_a R_e}}{R_a + R_e} \frac{R_d - R'_a}{R_d + R'_a} \\
s_{ad} &= 2 \frac{\sqrt{R'_a R_d}}{R'_a + R_d} \\
s_{aa} &= \mathcal{G} \frac{R_a - R_e}{R_a + R_e} \frac{R'_a - R_d}{R'_a + R_d} \\
s_{ac} &= \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \frac{R_d - R'_a}{R'_a + R_d} \\
s_{ce} &= 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \frac{\sqrt{R_a R_e}}{R_a + R_e} \\
s_{cd} &= 0 \\
s_{ca} &= \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \frac{R_e - R_a}{R_a + R_e} \\
s_{cc} &= \mathcal{G}
\end{aligned} \tag{178}$$

Nous pouvons discuter alors la limite de l'amplificateur opérationnel idéal qui correspond classiquement à la limite de gain infini, d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle

$$\begin{aligned}
G &= 2\sqrt{\frac{R'_a}{R_a}} \mathcal{G} \rightarrow \infty \\
R_a &\rightarrow \infty \\
R'_a &\rightarrow 0
\end{aligned} \tag{179}$$

Nous examinons maintenant les divers éléments de la matrice s en utilisant le gain G plutôt que $\mathcal{G}$ et en étudiant la limite de l'amplificateur opérationnel idéal

$$s_{ee} \rightarrow 1$$

$$\begin{aligned}
s_{ed} &= 0 \\
s_{de} &\sim 2G\sqrt{\frac{R_e}{R_d}} \\
s_{dd} &\rightarrow 1
\end{aligned} \tag{180}$$

Ces coefficients correspondent parfaitement à la description classique (173) de l'amplificateur. Par contre, les termes de bruit ajouté sur les voies e et d posent un problème

$$\begin{aligned}
s_{da} &= G \frac{R_e - R_a}{R_e + R_e} \frac{\sqrt{R_a R_d}}{R'_a + R_d} \sim -G\sqrt{\frac{R_a}{R_d}} \\
s_{dc} &= 2G\sqrt{\frac{G^2 R_a}{4R'_a} - 1} \frac{\sqrt{R'_a R_d}}{R'_a + R_d} \sim G\sqrt{\frac{R_a}{R_d}}
\end{aligned} \tag{181}$$

Ces termes deviennent infinis avec le gain comme s_{de} , mais ils augmentent aussi comme $\sqrt{R_a}$. Par conséquent, les bruits ajoutés divergent même si ils sont ramenés à l'entrée. Une discussion analogue peut être menée sur les coefficients s_{ae} , s_{aa} , s_{ac} , s_{ce} , s_{ca} et s_{cc} qui décrivent le bruit sortant dans les lignes a et c .

Ces problèmes se trouveront résolus naturellement avec le système de contre-réaction.

C. L'amplificateur avec contre-réaction

Nous discutons maintenant l'amplificateur opérationnel bouclé en contre-réaction et branché sur deux lignes en entrée et sortie. Nous présentons les calculs concernant la matrice de diffusion pour un gain fini. Nous en discutons les termes, en dégagant la signification des divers bruits: en particulier, nous repérons les termes principaux qui peuvent décrire une mesure et le système mesuré mais aussi les sorties des bruits internes. Nous montrons que la limite de gain infini ne pose plus de problème. Pour finir, nous discutons la signification de la matrice s du point de vue des performances du système actif considéré comme un appareil de mesure.

1. Les équations de contre-réaction

L'amplificateur opérationnel bouclé par une impédance de contre-réaction ayant une partie réactive Z_r et une partie dissipative R_r .

Les équations caractéristiques sont d'une part celles qui ont déjà été écrites pour l'amplificateur en boucle ouverte, d'autre part les équations suivantes

$$\begin{aligned}
 I_e &= I_{eo} + I_r \\
 I_s &= I_{so} - I_r \\
 U_e - U_s &= U_r - Z_r I_r \\
 I_r &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_r}} (r^{in} - r^{out}) \\
 U_r &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_r}{2}} (r^{in} + r^{out})
 \end{aligned} \tag{182}$$

Nous pouvons résoudre ces équations en exprimant par exemple les tensions et les champs sortants en fonction des courants et des champs entrants

$$\begin{aligned}
 \mathcal{D} &= -2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a} + R_a + R'_a + \tilde{Z}_r \\
 \eta &= \sqrt{\frac{2}{\hbar |\omega|}} \\
 \mathcal{D} \cdot \eta U_e &= -R_a (R'_a + \tilde{Z}_r) \eta I_e - R_a R'_a \eta I_s \\
 &\quad + 2 \left[-\mathcal{G} R_a \sqrt{R'_a} + \sqrt{R_a} (R'_a + \tilde{Z}_r) \right] a^{in} + 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} R_a \sqrt{R'_a} c^{in} + 2R_a \sqrt{R_r} r^{in} \\
 \mathcal{D} \cdot \eta U_s &= - \left(\sqrt{R_a R'_a} + 2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a} \tilde{Z}_r \right) \eta I_e - R'_a (R_a + \tilde{Z}_r) \eta I_s \\
 &\quad + 2 \left[\sqrt{R_a R'_a} + \mathcal{G}\sqrt{R'_a} (-R_a + \tilde{Z}_r) \right] a^{in} + 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R'_a} (R_a + \tilde{Z}_r) c^{in} \\
 &\quad - 2 \left(-2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a R_r} + R'_a \sqrt{R_r} \right) r^{in} \\
 \mathcal{D} \cdot a^{out} &= -\sqrt{R_a} \left[\sqrt{R_a R'_a} + \mathcal{G} (-R'_a + \tilde{Z}_r) \right] \eta I_e + \sqrt{R'_a} \left(+\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a} - R_a - \tilde{Z}_r \right) \eta I_s \\
 &\quad + \left[2\sqrt{R_a R'_a} + \mathcal{G} (-R_a - R'_a + \tilde{Z}_r) \right] a^{in} + \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} (R_a - R'_a + \tilde{Z}_r) c^{in} \\
 &\quad + 2 \left(\mathcal{G}\sqrt{R_a R_r} - \sqrt{R'_a R_r} \right) r^{in} \\
 \mathcal{D} \cdot c^{out} &= -\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R_a} (R'_a + \tilde{Z}_r) \eta I_e - \sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R_a R'_a} \eta I_s
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\sqrt{\mathcal{G}^2-1}\left(-R_a+R'_a+\tilde{Z}_r\right)a^{in}+\left[-2\sqrt{R_aR'_a}+\mathcal{G}\left(R_a+R'_a+\tilde{Z}_r\right)\right]c^{in} \\
& +2\sqrt{\mathcal{G}^2-1}\sqrt{R_aR_r}r^{in} \\
\mathcal{D}\cdot r^{out} = & -\left(R_a-2\mathcal{G}\sqrt{R'_aR_a}\right)\sqrt{R_r}\eta I_e+R'_a\sqrt{R_r}\eta I_s \\
& +2\left(\sqrt{R_a}-\mathcal{G}\sqrt{R'_a}\right)\sqrt{R_r}a^{in}-2\sqrt{\mathcal{G}^2-1}\sqrt{R'_aR_r}c^{in} \\
& +\left(-2\mathcal{G}\sqrt{R_aR'_a}+R_a+R'_a-2R_r+\tilde{Z}_r\right)r^{in}
\end{aligned} \tag{183}$$

où nous avons introduit une notation pour représenter l'impédance totale de contre-réaction

$$\tilde{Z}_r = Z_r + R_r \tag{184}$$

Ces équations décrivent le système avec contre-réaction pour une valeur quelconque du gain.

Elles se simplifient beaucoup à la limite du gain infini

$$\begin{aligned}
\eta U_e &= \sqrt{R_a}a_-^{in} \\
\eta U_s &= \tilde{Z}_r\eta I_e + \sqrt{R_a}a_-^{in} - \frac{\tilde{Z}_r}{\sqrt{R_a}}a_+^{in} - 2\sqrt{R_r}r^{in} \\
a_-^{out} &= -\sqrt{R'_a}\eta I_e - \sqrt{R'_a}\eta I_s + \sqrt{\frac{R'_a}{R_a}}a_+^{in} \\
a_+^{out} &= \frac{\tilde{Z}_r}{\sqrt{R'_a}}\eta I_e + \sqrt{\frac{R_a}{R'_a}}a_-^{in} - \frac{\tilde{Z}_r}{\sqrt{R_aR'_a}}a_+^{in} - 2\sqrt{\frac{R_r}{R'_a}}r^{in} \\
r^{out} &= r^{in} - \sqrt{R_r}\eta I_e + \sqrt{\frac{R_r}{R_a}}a_+^{in}
\end{aligned} \tag{185}$$

où nous avons introduit les notations condensées

$$\begin{aligned}
a_-^{in} &= a^{in} - c^{in} & a_-^{out} &= a^{out} - c^{out} \\
a_+^{in} &= a^{in} + c^{in} & a_+^{out} &= a^{out} + c^{out}
\end{aligned} \tag{186}$$

En ce qui concerne les valeurs moyennes, nous obtenons

$$\begin{aligned}
U_e &= 0 \\
U_s &= \tilde{Z}_r I_e
\end{aligned} \tag{187}$$

Ces équations correspondent au cas d'un amplificateur opérationnel idéal (179). Elles ne dépendent pas des impédances caractéristiques R_a et R'_a de l'amplificateur fonctionnant

en boucle ouverte. Notons que l'impédance R'_a intervient uniquement dans les expressions concernant les fluctuations sortant dans les voies a et c correspondant au bruit ajouté. Ce paramètre aura donc peu d'importance et pourra être oublié dans la pratique.

Pour discuter le rôle du paramètre R_a , nous pouvons comparer notre résultat au modèle habituellement utilisé pour traiter le bruit classique d'un amplificateur opérationnel idéal. Nous avons déjà présenté ce modèle pour l'amplificateur en boucle ouverte. Pour un amplificateur bouclé sur une contre-réaction $\tilde{Z}_r$, les équations caractéristiques s'écrivent à la limite d'un gain infini

$$\begin{aligned} U_e &= U_n \\ U_s &= \tilde{Z}_r (I_e - I_n) + U_n + U_r \end{aligned} \quad (188)$$

où U_n et I_n représentent des générateurs de bruit équivalents en tension et en courant tandis que U_r est le bruit en tension ajouté par la contre-réaction.

En comparant avec les équations (185) que nous venons d'obtenir, on obtient l'expression quantique des sources de bruit

$$\begin{aligned} U_n &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_a}{2}} a_-^{in} = \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_a}{2}} (a^{in} - c^{in}) \\ I_n &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_a}} a_+^{in} = \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_a}} (a^{in} + c^{in}) \end{aligned} \quad (189)$$

On remarque tout d'abord que ces deux grandeurs ne commutent pas. Ceci implique que les bruits en tension et en courant sont liés par une inégalité de Heisenberg et ne peuvent donc pas s'annuler simultanément.

Il est intéressant d'exprimer les spectres de bruit correspondants en fonction des bruits dans les lignes a et c

$$\begin{aligned} \sigma_{U_n} &= \hbar |\omega| R_a \frac{\sigma_a + \sigma_c}{2} \\ \sigma_{I_n} &= \frac{\hbar |\omega|}{R_a} \frac{\sigma_a + \sigma_c}{2} \\ \sigma_{U_n I_n} &= \hbar |\omega| \frac{\sigma_a - \sigma_c}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_a} \\ \sigma_c &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\omega|}{2k_B T_c}\end{aligned}\tag{190}$$

La troisième ligne représente la corrélation entre les bruits en tension et en courant. Cette corrélation s'annule quand les températures de bruit de a et c sont égales. Par souci de simplicité, nous ferons souvent cette hypothèse dans la suite. Avec cette simplification, les relations précédentes deviennent

$$\begin{aligned}\sigma_{U_n} &= \hbar |\omega| R_a \sigma_a \\ \sigma_{I_n} &= \frac{\hbar |\omega|}{R_a} \sigma_a\end{aligned}\tag{191}$$

ce qui permet de déduire les paramètres R_a et σ_a de notre modèle quand on connaît les bruits en tension et en courant de l'amplificateur.

Notons que les équations (190) permettent de traiter le cas général si nécessaire. Il faut alors mesurer aussi la corrélation entre les bruits en tension et en courant pour en déduire

$$\begin{aligned}R_a &= \sqrt{\frac{\sigma_{U_n}}{\sigma_{I_n}}} \\ \hbar |\omega| \sigma_a &= \sqrt{\sigma_{I_n} \sigma_{U_n}} + \sigma_{U_n I_n} \\ \hbar |\omega| \sigma_c &= \sqrt{\sigma_{I_n} \sigma_{U_n}} - \sigma_{U_n I_n}\end{aligned}\tag{192}$$

2. La matrice de diffusion

Nous évaluons maintenant la matrice de diffusion pour un amplificateur opérationnel avec contre-réaction dans le cas général de contre-réaction mixte (ayant une partie résistive et une partie réactive) et gain fini (voir figure 15). Nous branchons l'entrée et la sortie sur deux lignes d'impédance R_e et R_d . Aux équations d'entrée-sortie (183) il faut donc ajouter les équations d'entrée-sortie des lignes et celles de raccord

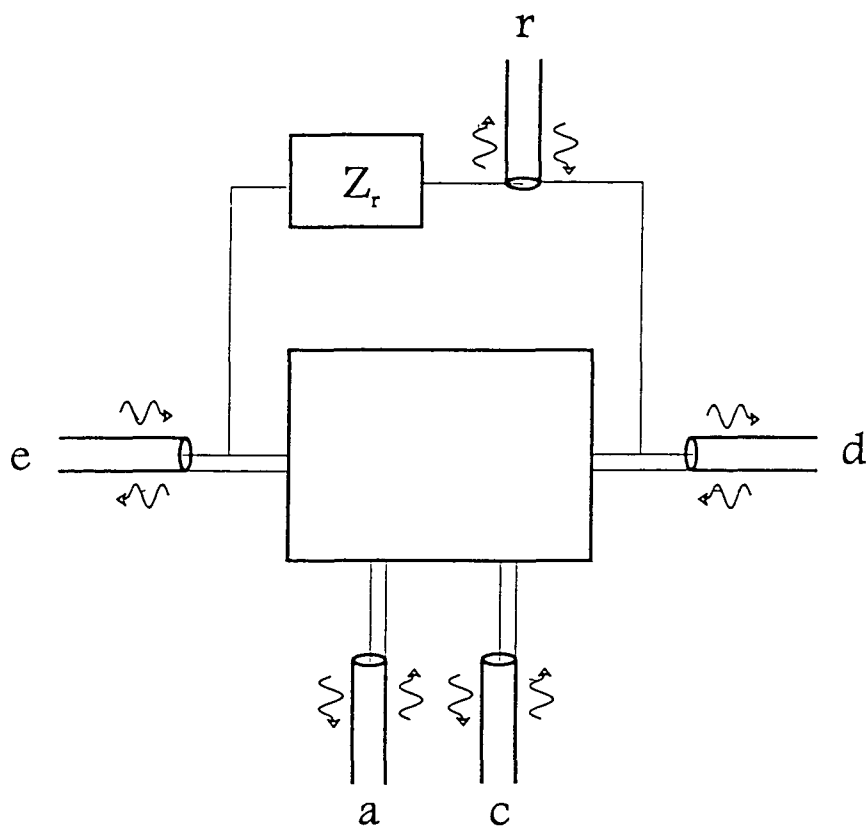


FIG. 15 - Schéma de principe d'une mesure par amplificateur opérationnel bouclé en contre-réaction. L'amplificateur de la figure 13 est branché sur deux lignes e et d . La ligne r représente la partie résistive de l'impédance de contre-réaction.

$$\begin{aligned}
 I_e &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_e}} (e^{out} - e^{in}) \\
 U_e &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_e}{2}} (e^{in} + e^{out}) \\
 I_s &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega|}{2R_d}} (d^{out} - d^{in}) \\
 U_s &= \sqrt{\frac{\hbar |\omega| R_d}{2}} (d^{in} + d^{out})
 \end{aligned} \tag{193}$$

Nous calculons alors la matrice de diffusion s qui est une matrice 5×5 décrivant la diffusion de cinq champs e , d , a , c et r

$$\begin{bmatrix} e^{out} \\ d^{out} \\ a^{out} \\ c^{out} \\ r^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_{ee} & s_{ed} & s_{ea} & s_{ec} & s_{er} \\ s_{de} & s_{dd} & s_{da} & s_{dc} & s_{dr} \\ s_{ae} & s_{ad} & s_{aa} & s_{ac} & s_{ar} \\ s_{ce} & s_{cd} & s_{ca} & s_{cc} & s_{cr} \\ s_{re} & s_{rd} & s_{ra} & s_{rc} & s_{rr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{in} \\ d^{in} \\ a^{in} \\ c^{in} \\ r^{in} \end{bmatrix} \quad (194)$$

Nous écrivons ci-dessous les vingt-cinq coefficients que nous avons obtenus par le programme de calcul formel *Mathematica*

$$\mathcal{D} = -2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a} R_d R_e + (R_a + R_e)(R'_a + R_d) \tilde{Z}_r + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_a} \right)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cdot s_{ee} &= 2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a} R_d R_e + (R_a - R_e)(R'_a + R_d) \tilde{Z}_r \\ &\quad + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_d} - \frac{1}{R'_a} - \frac{1}{R_a} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{ed} = 2R_a R'_a \sqrt{R_e R_d}$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{ea} = -2\mathcal{G} R_a \sqrt{R'_a R_e} R_d + 2\sqrt{R_a R_e} (R'_a R_d + (R'_a + R_d) \tilde{Z}_r)$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{ec} = 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} R_a \sqrt{R'_a R_e} R_d$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{er} = 2R_a \sqrt{R_e R_r} (R'_a + R_d)$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{de} = 4\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a R_e R_d} \tilde{Z}_r + 2R_a R'_a \sqrt{R_d} \sqrt{R_e}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cdot s_{dd} &= 2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a} R_d R_e + (R_a + R_e)(R'_a - R_d) \tilde{Z}_r \\ &\quad + R_a R'_a R_e R_d \left(-\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} - \frac{1}{R'_a} - \frac{1}{R_a} \right) \end{aligned}$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{da} = -2\mathcal{G}\sqrt{R'_a R_d} (R_a R_e + (R_a - R_e) \tilde{Z}_r) + 2R'_a \sqrt{R_a R_d} R_e$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{dc} = 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R'_a R_d} (R_a R_e + (R_a + R_e) \tilde{Z}_r)$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{dr} = 4\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a R_e} \sqrt{R_d R_r} - 2R'_a \sqrt{R_d R_r} (R_a + R_e)$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{ae} = 2R_a \sqrt{R'_a R_e} R_d - 2\mathcal{G}\sqrt{R_a R_e} (R'_a R_d + (R'_a - R_d) \tilde{Z}_r)$$

$$\mathcal{D} \cdot s_{ad} = -2\mathcal{G}\sqrt{R_a R'_a R_e} \sqrt{R_d} + 2\sqrt{R'_a R_d} (R_a R_e + (R_a + R_e) \tilde{Z}_r)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D} \cdot s_{aa} &= 2\sqrt{R_a R'_a} R_d R_e \\ &\quad + \mathcal{G} \left[\tilde{Z}_r (R_a - R_e)(R'_a - R_d) + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} - \frac{1}{R'_a} - \frac{1}{R_a} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{D} \cdot s_{ac} &= -\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \cdot \\
&\quad \cdot \left[(R_a + R_e)(R'_a - R_d) \tilde{Z}_r + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} - \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_a} \right) \right] \\
\mathcal{D} \cdot s_{ar} &= -2\mathcal{G} \sqrt{R_a R_e} (R'_a - R_d) \sqrt{R_r} - 2\sqrt{R'_a R_d} (R_a + R_e) \sqrt{R_r} \\
\mathcal{D} \cdot s_{ce} &= 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R_a R_e} (R'_a R_d + (R'_a + R_d) \tilde{Z}_r) \\
\mathcal{D} \cdot s_{cd} &= 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R_a R'_a} \sqrt{R_d R_e} \\
\mathcal{D} \cdot s_{ca} &= -\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \cdot \\
&\quad \cdot \left[(R_a - R_e)(R'_a + R_d) \tilde{Z}_r + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R'_a} - \frac{1}{R_a} \right) \right] \\
\mathcal{D} \cdot s_{cc} &= -2\sqrt{R_a R'_a} R_d R_e \\
&\quad + \mathcal{G} \left[(R_a + R_e)(R'_a + R_d) \tilde{Z}_r + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_a} \right) \right] \\
\mathcal{D} \cdot s_{cr} &= 2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R_a} (R'_a + R_d) R_e \sqrt{R_r} \\
\mathcal{D} \cdot s_{re} &= -4\mathcal{G} \sqrt{R_a R'_a R_e R_d} \sqrt{R_r} + 2R_a \sqrt{R_e R_r} (R'_a + R_d) \\
\mathcal{D} \cdot s_{rd} &= -2R'_a \sqrt{R_d} (R_a + R_e) \sqrt{R_r} \\
\mathcal{D} \cdot s_{ra} &= 2\mathcal{G} \sqrt{R'_a R_d} (R_a - R_e) \sqrt{R_r} + 2\sqrt{R_a R_e} (R'_a + R_d) \sqrt{R_r} \\
\mathcal{D} \cdot s_{rc} &= -2\sqrt{\mathcal{G}^2 - 1} \sqrt{R'_a R_d} (R_a + R_e) \sqrt{R_r} \\
\mathcal{D} \cdot s_{rr} &= -2\mathcal{G} \sqrt{R_a R'_a R_d R_e} + (R_a + R_e)(R'_a + R_d) (\tilde{Z}_r - 2R_r) \\
&\quad + R_a R'_a R_e R_d \left(\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} \right)
\end{aligned} \tag{195}$$

Avec le même programme, nous avons vérifié que cette matrice s obéit aux conditions d'unitarité telles qu'elles sont exprimées à la fin de la partie III A (équation (172)). Cette vérification est d'ailleurs très utile pour éliminer d'éventuelles erreurs dans l'écriture des équations caractéristiques.

Nous nous intéressons surtout dans la suite à la limite où le gain en boucle ouverte devient infini. Nous avons vu que cette limite est mal définie pour l'amplificateur fonctionnant en boucle ouverte. Elle ne présente par contre plus aucune pathologie dans les calculs de la présente partie.

Pour nous en convaincre, nous étudions la matrice s à cette limite de deux façons diffé-

rentes. Tout d'abord, nous prenons la limite $\mathcal{G} \rightarrow \infty$ dans les équations (195) ci dessus

$$s_{ee} = -1$$

$$s_{ed} = 0$$

$$s_{ea} = \sqrt{\frac{R_a}{R_e}}$$

$$s_{ec} = -\sqrt{\frac{R_a}{R_e}}$$

$$s_{er} = 0$$

$$s_{de} = -2 \frac{\tilde{Z}_r}{\sqrt{R_e R_d}}$$

$$s_{dd} = -1$$

$$s_{da} = \sqrt{\frac{R_a}{R_d}} \left[1 + \left(\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_a} \right) \tilde{Z}_r \right]$$

$$s_{dc} = -\sqrt{\frac{R_a}{R_d}} \left[1 + \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_a} \right) \tilde{Z}_r \right]$$

$$s_{dr} = -2 \sqrt{\frac{R_r}{R_d}}$$

$$s_{ae} = \sqrt{\frac{R'_a}{R_e}} \left[1 + \frac{(R'_a - R_d) \tilde{Z}_r}{R_c R_d} \right]$$

$$s_{ad} = \sqrt{\frac{R'_a}{R_d}}$$

$$s_{aa} = \frac{\sqrt{R_a R'_c}}{2} \left(-\frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_a} \right) - \frac{\tilde{Z}_r (R_a - R_e) (R'_a - R_d)}{2 \sqrt{R_a R'_a} R_e R_d}$$

$$s_{ac} = \frac{\sqrt{R_a R'_a}}{2} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} - \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_a} \right) + \frac{(R_a + R_e) (R'_a - R_d) \tilde{Z}_r}{2 \sqrt{R_a R'_a} R_e R_d}$$

$$s_{ar} = \sqrt{\frac{R_r}{R'_a}} \frac{(R'_a - R_d)}{R_d}$$

$$s_{ce} = -\frac{1}{\sqrt{R'_a R_e}} \left[R'_a + \frac{(R'_a + R_d) \tilde{Z}_r}{R_d} \right]$$

$$s_{cd} = -\sqrt{\frac{R'_a}{R_d}}$$

$$s_{ca} = \frac{\sqrt{R_a R'_a}}{2} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R'_a} - \frac{1}{R_a} \right) + \frac{(R_a - R_e) (R'_a + R_d) \tilde{Z}_r}{2 \sqrt{R_a R'_a} R_e R_d}$$

$$\begin{aligned}
s_{cc} &= -\frac{\sqrt{R_a R'_a}}{2} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R'_a} + \frac{1}{R_a} \right) - \frac{(R_a + R_e)(R'_a + R_d) \tilde{Z}_r}{2 \sqrt{R_a R'_a} R_e R_d} \\
s_{cr} &= -\sqrt{\frac{R_r}{R'_a}} \frac{R'_a + R_d}{R_d} \\
s_{re} &= 2\sqrt{\frac{R_r}{R_e}} \\
s_{rd} &= 0 \\
s_{ra} &= -\sqrt{\frac{R_r}{R_a}} \frac{R_a - R_e}{R_e} \\
s_{rc} &= \sqrt{\frac{R_r}{R_a}} \frac{R_a + R_e}{R_e} \\
s_{rr} &= 1
\end{aligned} \tag{196}$$

Cette matrice s est unitaire comme celle, évaluée à gain quelconque, dont nous l'avons déduite. Par ailleurs, nous pouvons calculer la matrice s à partir des équations de l'amplificateur opérationnel évalué pour un gain infini (185). Nous avons vérifié que la matrice s obtenue avec ces équations est identique à celle calculée en prenant la limite de la matrice s à gain fini.

Cette vérification montre que la limite de gain infini ne pose pas de problème dans notre approche. Cela nous sera utile par la suite puisque nous pourrons donc utiliser la seconde méthode (partir des équations (185)) en étant assuré de parvenir à des résultats cohérents (en particulier, vérifiant les conditions d'unitarité).

La matrice s peut être écrite sous une forme encore plus compacte en remplaçant les bruits d'amplification par leur somme et différence (voir équation (186)). En particulier, les champs sortants dans les lignes e et d s'écrivent

$$\begin{aligned}
e^{out} &= -e^{in} + \sqrt{\frac{R_a}{R_e}} a_-^{in} \\
d^{out} &= -d^{in} - 2 \frac{\tilde{Z}_r}{\sqrt{R_e R_d}} e^{in} - 2 \sqrt{\frac{R_r}{R_d}} r^{in} \\
&\quad - 2 \frac{\tilde{Z}_r}{\sqrt{R_d R_a}} a_+^{in} + 2 \sqrt{\frac{R_a}{R_d}} \left(1 + \frac{\tilde{Z}_r}{R_e} \right) a_-^{in}
\end{aligned} \tag{197}$$

3. Discussion de la mesure

Nous allons maintenant discuter les performances de cet appareil de mesure. Nous nous plaçons dans la limite de facteur d'amplification $\mathcal{G}$ infini. Nous nous concentrons sur les deux lignes e et d . La discussion ne dépendra donc plus du paramètre R'_a qui n'intervient que dans les lignes internes de l'amplificateur bouclé. Par contre, le paramètre R_a qui représente l'impédance d'entrée de l'amplificateur fonctionnant en boucle ouverte va jouer un rôle très important dans la discussion.

Comme précédemment, nous introduisons un estimateur $\hat{e}^{in}$ du signal d'entrée tel que nous pouvons le déduire de la mesure de d^{out}

$$\begin{aligned}\hat{e}^{in} &= -\frac{\sqrt{R_e R_d}}{2 \tilde{Z}_r} d^{out} \\ &= e^{in} + \frac{\sqrt{R_e R_d}}{2 \tilde{Z}_r} d^{in} + \frac{\sqrt{R_e R_r}}{\tilde{Z}_r} r^{in} \\ &\quad + \left[\sqrt{\frac{R_e}{R_a}} - \sqrt{R_a R_e} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} \right) \right] a^{in} + \left[\sqrt{\frac{R_e}{R_a}} + \sqrt{R_a R_e} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} \right) \right] c^{in}\end{aligned}\quad (198)$$

Nous pouvons en déduire l'expression du bruit ajouté sur la mesure de e^{in}

$$\begin{aligned}\Sigma_e &= \frac{R_e}{|\tilde{Z}_r|^2} \left(\frac{R_d}{4} \sigma_d + R_r \sigma_r \right) \\ &\quad + R_e R_a \left| \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{R_e} - \frac{1}{R_a} \right|^2 \sigma_a + R_e R_a \left| \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{R_e} + \frac{1}{R_a} \right|^2 \sigma_c \\ &= \frac{R_e}{|\tilde{Z}_r|^2} \left(\frac{R_d}{4} \sigma_d + R_r \sigma_r \right) \\ &\quad + \left[\frac{R_e}{R_a} + R_a \left(\frac{1}{R_e} + \frac{R_e + 2R_r}{|\tilde{Z}_r|^2} \right) \right] (\sigma_a + \sigma_c) + 2 \left[1 + \frac{R_e R_r}{|\tilde{Z}_r|^2} \right] (\sigma_a - \sigma_c)\end{aligned}\quad (199)$$

Si on se donne des températures de bruit T_d , T_r , T_a et T_c quelconques, on voit que le bruit rajouté présente un minimum pour une certaine valeur $R_a^{\min}$ du paramètre R_a qui ne dépend pas de ces températures

$$\frac{1}{R_a^{\min}} = \left| \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{R_e} \right| \quad (200)$$

soit aussi

$$\left(\frac{1}{R_a^{\min}}\right)^2 = \frac{1}{R_e} \left(\frac{1}{R_e} + \frac{R_e + 2R_r}{|\tilde{Z}_r|^2}\right) \quad (201)$$

La valeur atteinte par le bruit minimum est alors

$$\Sigma_e^{\min} = \frac{R_e}{|\tilde{Z}_r|^2} \left(\frac{R_d}{4}\sigma_d + R_r\sigma_r\right) + 2\frac{R_e}{R_a^{\min}}(\sigma_a + \sigma_c) + 2\left[1 + \frac{R_e R_r}{|\tilde{Z}_r|^2}\right](\sigma_a - \sigma_c) \quad (202)$$

Cette expression se simplifie encore si l'impédance de contre-réaction est purement résistive

$$\Sigma_e^{\min} = \frac{R_e}{|\tilde{Z}_r|^2} \left(\frac{R_d}{4}\sigma_d + R_r\sigma_r\right) + 4\frac{R_e + R_r}{R_r}\sigma_a \quad (203)$$

ou si elle est purement réactive

$$\Sigma_e^{\min} = \frac{R_e R_d}{4|\tilde{Z}_r|^2}\sigma_d + 2\frac{|R_e + \tilde{Z}_r|}{|\tilde{Z}_r|}(\sigma_a + \sigma_c) + 2(\sigma_a - \sigma_c) \quad (204)$$

Dans tous les cas, il est important de contrôler la valeur du paramètre R_a . L'idéal est de fixer $R_a = R_a^{\min}$ de façon à pouvoir minimiser le bruit ajouté (équation (202)). Quand on s'éloigne de cet optimum, c'est l'équation (199) qui détermine le bruit ajouté. Cette discussion peut être facilement traduite dans les termes du modèle classique discuté à la fin de la section III C 1. Le paramètre R_a s'interprète comme le rapport des bruits en tension et en courant de l'amplificateur. Optimiser R_a consiste donc à rendre égaux les effets de ces deux bruits sur le signal en sortie de l'amplificateur. Cette optimisation peut se comprendre comme une sorte d'adaptation d'impédance: le bruit est minimal lorsque l'impédance R_a qui caractérise les fluctuations est égale à l'impédance $R_a^{\min}$ qui dépend des paramètres de branchement de l'amplificateur.

Le caractère néfaste du défaut d'adaptation dépend bien sûr des autres paramètres. En particulier, il est évidemment d'autant moins important que la température effective des bruits d'amplification est limitée (T_a et T_c petits). Le bruit ajouté est aussi diminué quand l'impédance de contre-réaction est élevée ($|\tilde{Z}_r|$ grand) et que cette impédance est plutôt de nature réactive (R_r petit).

Afin de préparer les discussions qui vont suivre dans la partie IV, on peut se placer dans la perspective d'une limite ultime de sensibilité. Dans les équations (201-202), on voit qu'une

situation optimale est atteinte lorsque $|\tilde{Z}_r|$ est choisi plus grand que R_e et R_d . On obtient alors des résultats très simples

$$\Sigma_e = \left(\frac{R_e}{R_a} + \frac{R_a}{R_e} \right) (\sigma_a + \sigma_c) + 2(\sigma_a - \sigma_c) \quad (205)$$

$$R_a^{\min} = R_e$$

$$\Sigma_e^{\min} = 4\sigma_a \quad (206)$$

qui signifient que le bruit est limité de façon ultime par la température de bruit de l'amplificateur T_a .

IV. APPLICATION AUX ACCÉLÉROMÈTRES ÉLECTROSTATIQUES

Nous présentons maintenant l'application du traitement des fluctuations quantiques développé dans les parties précédentes à un système réel. Il s'agit d'un accéléromètre électrostatique asservi conçu par l'Office National d'Etudes et de Recherches Aérospatiales (ONERA) pour des missions spatiales de physique fondamentale [41,42].

Sur la figure 16 est représenté le schéma simplifié de l'appareil. La masse se trouve entre deux électrodes qui servent à mesurer son mouvement par une technique capacitive du type de celles qui ont été discutées dans la partie II.

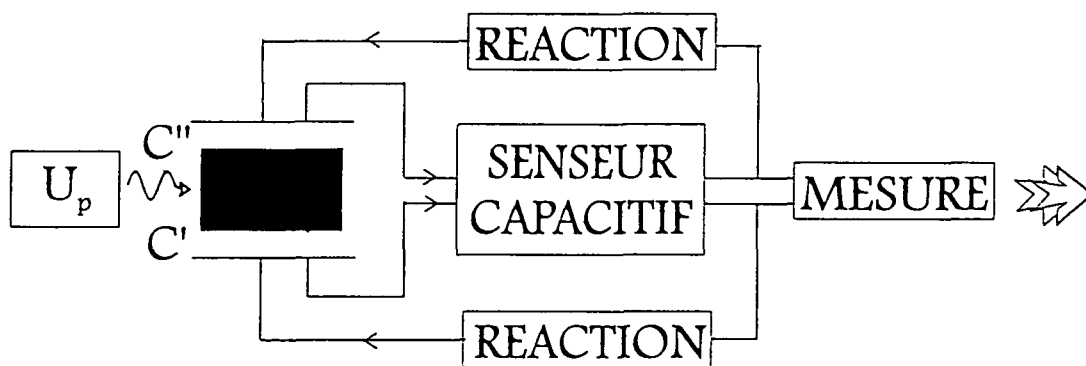


FIG. 16 - Schéma de base d'un accéléromètre électrostatique asservi.

La suspension de la masse entre les électrodes de mesure est assurée par des forces électrostatiques. Comme il n'est pas possible de réaliser un équilibre stable pour une suspension électrostatique passive, il a été choisi de maintenir la masse grâce à un asservissement. La mesure de la position de la masse grâce au senseur capacitif sert ainsi non seulement à la mesure accélérométrique mais aussi à maintenir la position de la masse au centre du dispositif.

Pour éviter des oscillations trop importantes autour de la position d'équilibre et pour assurer une bande passante suffisante au dispositif, il est nécessaire d'amortir le mouvement de la masse d'épreuve. Cet amortissement est aussi réalisé électriquement en ajoutant à la force de contre-réaction un terme proportionnel à la vitesse de la masse.

Cette technique de friction active permet d'obtenir un amortissement efficace en diminuant considérablement les fluctuations qui accompagneraient nécessairement un amortissement mécanique. Cette technique appelée *friction froide* (*cold damping*) va faire l'objet d'une étude détaillée dans ce chapitre.

Notre but est d'évaluer les limites de sensibilité de cet accéléromètre causées par les fluctuations thermiques et quantiques. Un traitement complet de ce système nécessite de prendre en compte les spécificités suivantes:

- la détection du mouvement de la masse se fait à l'aide d'un système actif;
- la suspension de la masse est une suspension électrostatique active;
- les oscillations de la masse sont amorties par une boucle de contre-réaction électrique qui simule une force de friction;
- le circuit électrique travaille à des fréquences différentes des fréquences mécaniques mesurées.

Ces spécificités font de l'accéléromètre un système particulièrement adapté à l'application de la méthode présentée dans les chapitres précédents. Cette méthode présuppose en effet qu'un traitement linéaire des fluctuations est possible, alors que les bruits affectant les systèmes électromécaniques présentent souvent un caractère non linéaire. Grâce à l'asservissement, les fluctuations de la position de la masse d'épreuve sont suffisamment faibles pour que leur comportement soit linéaire ou linéarisable [59]. De plus, le schéma de transposition de fréquence permet de travailler aux hautes fréquences, de sorte que le bruit en $1/f$, très important aux basses fréquences, est aussi négligeable.

L'étude générale de ce système est extrêmement complexe, c'est pourquoi nous allons d'abord étudier séparément différents aspects du problème. Dans un premier temps, nous allons étudier la technique de friction froide en faisant des hypothèses simplificatrices pour la mesure capacitive, mais en traitant complètement le système actif grâce aux résultats

du chapitre III. Puis, nous étudierons en détail la mesure capacitive pour dégager un modèle simplifié contenant néanmoins les éléments essentiels nécessaires au fonctionnement de l'accéléromètre. Enfin, nous rassemblerons ces résultats pour analyser la performance de l'appareil global.

A. La friction froide

Dans un premier temps, nous discutons l'intérêt de l'utilisation d'un système de suspension électrostatique active simulant une dissipation mécanique. Pour cela, nous présentons un premier modèle d'accéléromètre dans lequel la mesure capacitive est simplifiée tandis que le rôle des éléments actifs est parfaitement pris en compte. Cela nous permet surtout de discuter dans le détail les fluctuations minimales rajoutées dans un dispositif à friction froide (*cold damping*). Cela nous permet également de préparer le traitement complet de l'accéléromètre actif qui sera présenté plus loin.

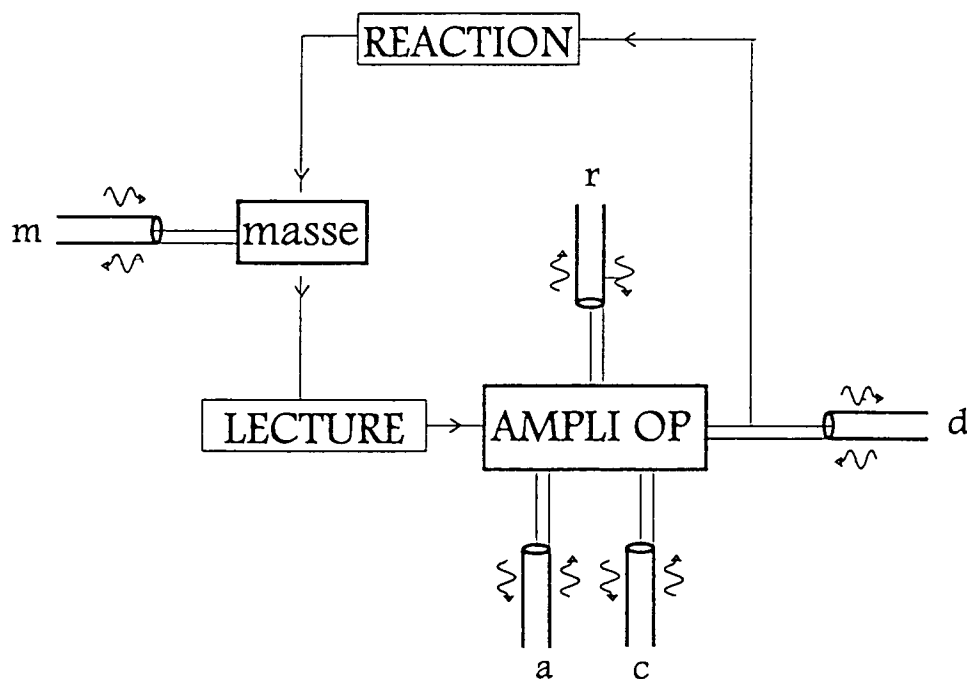


FIG. 17 - Schéma de principe d'un modèle d'accéléromètre actif. La masse d'épreuve correspond à la ligne mécanique m . Elle est couplée à deux transducteurs capacitifs polarisés en continu. Le premier, caractérisé par une impédance Z_e et un coefficient de couplage λ_e , est utilisé pour la lecture du mouvement de la masse et est branché sur l'entrée d'un amplificateur. Le deuxième transducteur, d'impédance Z_s et couplage λ_s , est utilisé pour réagir sur la masse d'épreuve et est branché en sortie de l'amplificateur. Le dessin de l'amplificateur avec contre-réaction correspond à celui de la figure 15. La détection se fait à partir de la ligne d'impédance R_d .

Précisément, nous étudions le schéma de la figure 17. La masse d'épreuve M est liée élastiquement par un ressort de raideur K à la cage l'accéléromètre et couplée à un réservoir mécanique responsable d'une friction visqueuse H_m . Nous définissons comme précédemment son impédance réactive Z_m et son impédance totale $\tilde{Z}_m$

$$\begin{aligned} Z_m &= -i\omega M + \frac{iK}{\omega} \\ \tilde{Z}_m &= H_m + Z_m \end{aligned} \quad (207)$$

Par ailleurs, cette masse est couplée au circuit électrique de détection par l'intermédiaire de deux transducteurs capacitifs polarisés par une tension continue du type de ceux que nous avons présentés dans la partie II. Le premier transducteur d'impédance Z_e et de couplage λ_e est utilisé pour la détection du mouvement de la masse et il fonctionne conformément au schéma de polarisation constante de la partie II A. Ce transducteur est lui-même branché sur l'entrée d'un l'amplificateur. Le second transducteur d'impédance Z_s et de couplage λ_s est utilisé pour réagir sur la masse d'épreuve et il est branché en sortie de l'amplificateur. L'expression de la force totale agissant sur la masse est

$$\begin{aligned} F &= -H_m V + \lambda_e U_e - \lambda_s U_s + F^{ext} \\ F &= Z_m V \end{aligned} \quad (208)$$

où V est la vitesse de la masse d'épreuve et F^{ext} la force extérieure. U_e et U_s sont les tensions à l'entrée et à la sortie de l'amplificateur. Les termes $\lambda_e U_e$ et $\lambda_s U_s$ décrivent les actions du

transducteur capacitif et de la contre-réaction. Des équations analogues peuvent être écrites pour les courants à l'entrée et à la sortie de l'amplificateur

$$\begin{aligned} I_e &= \frac{U_e}{Z_e} + \lambda_e V \\ I_s &= \frac{U_s}{Z_s} - \lambda_s V - I_d \end{aligned} \quad (209)$$

où I_d est le courant à l'entrée de la ligne de détection.

L'amplificateur est décrit comme dans la partie III. Il fonctionne en système d'asservissement avec une boucle de contre-réaction dont l'impédance $\tilde{Z}_r$ se compose d'une partie réactive Z_r et d'une partie résistive R_r

$$\tilde{Z}_r = R_r + Z_r \quad (210)$$

Les résultats que nous présentons dans la suite ont été obtenus en partie par le programme de calcul formel *Mathematica*.

1. L'impédance mécanique après contre-réaction

Pour discuter la modification de l'impédance mécanique en présence de contre-réaction, nous avons calculé la réponse de la vitesse à une force extérieure

$$\begin{aligned} \eta D \cdot V &= \eta F^{ext} + 2\sqrt{H_m} m^{in} + 2\sqrt{R_r} \lambda_s r^{in} \\ &+ \frac{\lambda_s \tilde{Z}_r}{\sqrt{R_a}} a_+^{in} + \sqrt{R_a} \left(\lambda_e - \lambda_s - \lambda_s \frac{\tilde{Z}_r}{Z_e} \right) a_-^{in} \\ \eta &= \sqrt{\frac{2}{\hbar |\omega|}} \\ D &= \tilde{Z}_m + \lambda_e \lambda_s \tilde{Z}_r \\ a_+^{in} &= a^{in} + c^{in} \\ a_-^{in} &= a^{in} - c^{in} \end{aligned} \quad (211)$$

Cette équation montre que l'impédance mécanique en présence de contre-réaction est égale au dénominateur D . Autrement dit, le système actif rajoute à l'impédance $\tilde{Z}_m$ une impédance supplémentaire due à la contre-réaction électrique $\lambda_e \lambda_s \tilde{Z}_r$ que nous noterons $\tilde{Z}_{me}$

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_{me} &= \lambda_e \lambda_s \tilde{Z}_r \\ H_{me} &= \lambda_e \lambda_s R_r\end{aligned}\tag{212}$$

H_{me} est la partie dissipative de cette impédance. Cette dissipation supplémentaire est comme la dissipation mécanique ordinaire à l'origine d'une force fluctuante. Mais les fluctuations correspondantes pourront être beaucoup plus petites que les fluctuations mécaniques ordinaires puisqu'elles sont issues d'un système actif.

Par ailleurs, tous les termes de bruit apparaissant dans (211) constituent une force de Langevin due aux fluctuations mécaniques et électriques dans les diverses voies d'entrée. La partie mécanique vérifie le théorème fluctuations-dissipation. La partie électrique de la dissipation est ainsi à l'origine d'une force fluctuante qui doit être étudiée de manière beaucoup plus précise puisqu'elle provient d'un système actif.

2. La matrice de diffusion

Le réseau correspondant à ce système comprend ainsi 5 voies d'entrée-sortie (voir figure 18): une voie de dissipation mécanique m , une voie de détection d , une voie correspondant à la partie dissipative de la contre-réaction r et les deux voies de bruit de l'amplificateur a et c .

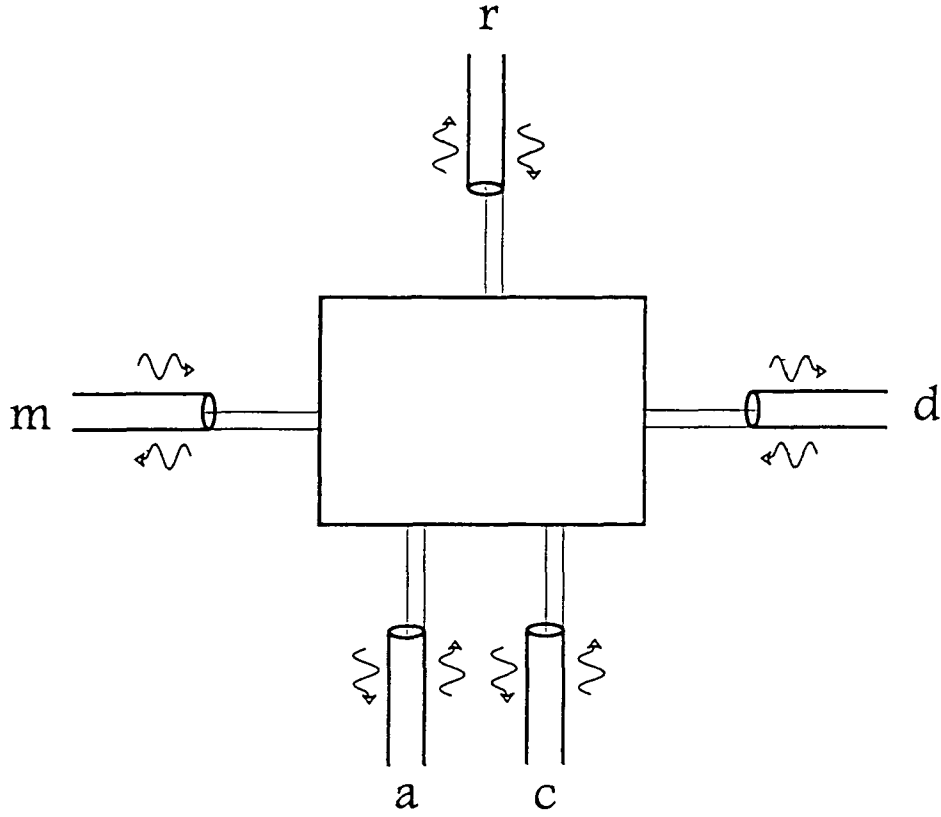


FIG. 18 - Schéma de principe d'un accéléromètre dans lequel le rôle des éléments actifs (amplificateur et asservissement) est pris en compte.

La matrice de diffusion correspondant à ce système est décrite par les équations suivantes

$$\begin{aligned}
 D \cdot m^{out} &= Dm^{in} - 2H_m (m^{in} + f^{ext}) - 2\sqrt{H_m R_r} \lambda_s r^{in} \\
 &\quad - \sqrt{\frac{H_m}{R_a}} \lambda_s \tilde{Z}_r a_+^{in} + \sqrt{H_m R_a} \left(\lambda_s \frac{\tilde{Z}_r}{Z_e} - \lambda_e + \lambda_s \right) a_-^{in} \\
 D \cdot d^{out} &= +2\sqrt{\frac{H_m}{R_d}} \lambda_e \tilde{Z}_r (m^{in} + f^{ext}) - 2\sqrt{\frac{R_r}{R_d}} \tilde{Z}_m r^{in} - D \cdot d^{in} \\
 &\quad - \frac{\tilde{Z}_m \tilde{Z}_r}{\sqrt{R_d R_a}} a_+^{in} + \sqrt{\frac{R_a}{R_d}} \left(\tilde{Z}_m + \lambda_e^2 \tilde{Z}_r + \frac{\tilde{Z}_m \tilde{Z}_r}{Z_e} \right) a_-^{in} \\
 D \cdot r^{out} &= -2\sqrt{R_r H_m} \lambda_e (m^{in} + f^{ext}) + (D - 2\lambda_e \lambda_s R_r) r^{in} \\
 &\quad + \sqrt{\frac{R_r}{R_a}} \tilde{Z}_m a_+^{in} - \sqrt{R_r R_a} \left(\frac{\tilde{Z}_m}{Z_e} + \lambda_e (\lambda_e - \lambda_s) \right) a_-^{in} \\
 D \cdot a_+^{out} &= 2\sqrt{\frac{H_m}{R'_a}} \lambda_e \tilde{Z}_r (m^{in} + f^{ext}) - 2\sqrt{\frac{R_r}{R'_a}} \tilde{Z}_m r^{in}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\tilde{Z}_m \tilde{Z}_r}{\sqrt{R_a R'_a}} a_+^{in} + \sqrt{\frac{R_a}{R'_a}} \left(\tilde{Z}_m + \lambda_e^2 \tilde{Z}_r + \frac{\tilde{Z}_m \tilde{Z}_r}{Z_e} \right) a_-^{in} \\
D \cdot a_-^{out} = & -2\sqrt{R'_a H_m} \left(\lambda_e \tilde{Z}_r \frac{R_d + Z_s}{R_d Z_s} + \lambda_e - \lambda_s \right) (m^{in} + f^{ext}) \\
& + 2\sqrt{R'_a R_r} \left(\frac{(R_d + Z_s)}{R_d Z_s} \tilde{Z}_m + \lambda_s (-\lambda_e + \lambda_s) \right) r^{in} + 2\sqrt{\frac{R'_a}{R_d}} D \cdot d^{in} \\
& + \sqrt{\frac{R'_a}{R_a}} \left(\tilde{Z}_m + \frac{\tilde{Z}_m \tilde{Z}_r (R_d + Z_s)}{R_d Z_s} + \tilde{Z}_r \lambda_s^2 \right) a_+^{in} \\
& - \sqrt{R_a R'_a} \left(\frac{(R_d + Z_s)}{R_d Z_s} \left(\tilde{Z}_m + \lambda_e^2 \tilde{Z}_r + \frac{\tilde{Z}_m \tilde{Z}_r}{Z_e} \right) + (-\lambda_e + \lambda_s)^2 + \lambda_s^2 \frac{\tilde{Z}_m + \tilde{Z}_r}{Z_e} \right) a_-^{in}
\end{aligned} \tag{213}$$

Le dénominateur D est l'impédance mécanique totale en présence de l'asservissement. Comme d'habitude, nous avons introduit la force réduite f^{ext} avec les fluctuations entrant dans la voie mécanique.

Pour discuter les performances de cet appareil de mesure, nous introduisons un estimateur $\hat{F}^{ext}$ de la force F^{ext} telle qu'on peut la déduire d'une mesure du signal d^{out} sortant par la voie de détection

$$\begin{aligned}
\hat{F}^{ext} &= \frac{D\sqrt{R_d}}{\eta\lambda_e\tilde{Z}_r} d^{out} \\
&= F^{ext} + \frac{2}{\eta}\sqrt{H_m}m^{in} - \sqrt{R_d}\frac{\tilde{Z}_m + \lambda_s\lambda_e\tilde{Z}_r}{\eta\lambda_e\tilde{Z}_r} d^{in} \\
&\quad - 2\sqrt{R_r}\frac{\tilde{Z}_m}{\eta\lambda_e\tilde{Z}_r} r^{in} \\
&\quad + \frac{\sqrt{R_a}}{\eta\lambda_e}\tilde{Z}_m \left(\frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} - \frac{1}{R_a} \right) a^{in} \\
&\quad + \frac{\sqrt{R_a}}{\eta\lambda_e}\tilde{Z}_m \left(\frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} + \frac{1}{R_a} \right) c^{in}
\end{aligned} \tag{214}$$

On détermine ensuite le bruit Σ_F ajouté par ce système de mesure de force

$$\begin{aligned}
\Sigma_F &= \frac{4}{\eta^2} H_m \sigma_m + R_d \frac{|\tilde{Z}_m + \tilde{Z}_r \lambda_e \lambda_s|^2}{\eta^2 |\tilde{Z}_r|^2 \lambda_e^2} \sigma_d \\
&\quad + 4R_r \frac{|\tilde{Z}_m|^2}{\eta^2 |\tilde{Z}_r|^2 \lambda_e^2} \sigma_r
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{R_a}{\eta^2 \lambda_e^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left| \frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} - \frac{1}{R_a} \right|^2 \sigma_a \\
& + \frac{R_a}{\eta^2 \lambda_e^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left| \frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} + \frac{1}{R_a} \right|^2 \sigma_c
\end{aligned} \tag{215}$$

Incidentement, nous pouvons nous intéresser au cas simple où le système actif est utilisé uniquement pour amplifier le signal électrique. Ce cas correspond exactement au cas du transducteur étudié précédemment dans la partie II B 2 en tenant en plus compte du bruit rajouté par l'amplificateur pour faire passer le signal du niveau quantique au niveau classique. Ce cas est décrit en faisant $\lambda_s = 0$ et $R_r = 0$ dans l'équation précédente

$$\begin{aligned}
\Sigma_F &= \frac{4}{\eta^2} H_m \sigma_m + R_d \frac{|\tilde{Z}_m|^2}{\eta^2 Z_r^2 \lambda_e^2} \sigma_d \\
&+ \frac{R_a}{\eta^2 \lambda_e^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left| \frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} - \frac{1}{R_a} \right|^2 \sigma_a \\
&+ \frac{R_a}{\eta^2 \lambda_e^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left| \frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} + \frac{1}{R_a} \right|^2 \sigma_c
\end{aligned} \tag{216}$$

Comme dans la partie III C 3, nous pouvons utiliser cette formule pour optimiser la valeur du paramètre R_a qui détermine le bruit rajouté par l'amplification

$$\frac{1}{R_a^{\min}} = \left| \frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{1}{\tilde{Z}_r} + \frac{1}{Z_e} \right| \tag{217}$$

Comme précédemment, cette valeur optimale ne dépend pas des diverses températures.

3. Mesure avec friction froide

Nous en venons maintenant à la discussion du bruit rajouté en présence de la boucle de contre-réaction. La formule (215) montre que la mesure de force se trouve bien sûr toujours confrontée au bruit introduit par la dissipation mécanique. Une solution pourrait être de réduire la dissipation mécanique. Cette solution ne peut cependant pas toujours être utilisée. Dans la problématique initiale de la friction froide [20–22], les mesures étaient effectuées avec un électromètre amorti en régime critique; toute réduction de la friction aurait donc conduit à une augmentation du temps de réponse du système et à une réduction de la bande

passante. En ce qui concerne l'accéléromètre [41,42], la mesure n'est pas résonnante, mais il faut toutefois amortir le mouvement de la masse d'épreuve pour limiter l'amplitude de ses oscillations lorsque la masse est soumise à des perturbations trop importantes. Ce problème est contourné ici par le fait que la dissipation mécanique est assistée par une dissipation simulée électriquement.

La façon dont nous avons mené le calcul assure que la matrice s est unitaire et donc que les commutateurs sont bien les mêmes à l'entrée et à la sortie. Autrement dit, le système de mesure avec friction froide obéit aux contraintes de consistance imposées par la mécanique quantique. Par conséquent, on ne peut pas réduire le bruit au-delà du niveau correspondant aux fluctuations du vide. Ceci peut être vérifié explicitement sur le spectre du bruit ajouté (215). Quels que soient les valeurs des différents paramètres, il reste toujours au dessus de ce niveau.

Pour analyser les propriétés de la force fluctuante supplémentaire, nous réécrivons le spectre du bruit ajouté (215) sur la mesure de la force en utilisant l'impédance effective $\tilde{Z}_{me}$ (voir (212)) et en définissant un bruit effectif correspondant à cette impédance

$$\begin{aligned}\Sigma_F = & \frac{4}{\eta^2} (H_m \sigma_m + H_{me} \sigma_{me}) \\ & + \lambda_s^2 R_d \frac{|\tilde{Z}_m + \tilde{Z}_{me}|^2}{\eta^2 |\tilde{Z}_{me}|^2} \sigma_d \\ & + \frac{R_a}{\eta^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left| \frac{\lambda_e}{\tilde{Z}_m} + \frac{\lambda_s}{\tilde{Z}_{me}} + \frac{1}{\lambda_e Z_e} - \frac{1}{\lambda_e R_a} \right|^2 \sigma_a \\ & + \frac{R_a}{\eta^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left| \frac{\lambda_e}{\tilde{Z}_m} + \frac{\lambda_s}{\tilde{Z}_{me}} + \frac{1}{\lambda_e Z_e} + \frac{1}{\lambda_e R_a} \right|^2 \sigma_c\end{aligned}\quad (218)$$

Le bruit effectif σ_{me} associé à la dissipation supplémentaire s'écrit

$$\sigma_{me} = \frac{\lambda_s |\tilde{Z}_m|^2}{\lambda_e |\tilde{Z}_{me}|^2} \sigma_r \quad (219)$$

En particulier, à la limite des hautes températures, on peut définir une température effective

$$T_{me} = \frac{\lambda_s |\tilde{Z}_m|^2}{\lambda_e |\tilde{Z}_{me}|^2} T_r \quad (220)$$

qui peut être beaucoup plus petite que la température physique T_r pourvu que

$$\lambda_s |\tilde{Z}_m|^2 \ll \lambda_e |\tilde{Z}_{me}|^2 \quad (221)$$

Il est donc possible de réduire la température effective de bruit en jouant sur les couplages à l'entrée et à la sortie ainsi que sur les paramètres de contre-réaction.

La deuxième ligne dans (218) est le bruit rajouté par les fluctuations électriques arrivant dans la ligne de mesure. Il prend une forme simple dans le cas limite où l'impédance mécanique est dominée par la contre-réaction.

Enfin, les troisième et quatrième lignes dans (218) représentent les bruits ajoutés par l'amplification. On peut définir pour ces contributions une valeur optimale pour le paramètre R_a comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois

$$\frac{1}{R_a^{\min}} = \left| \frac{\lambda_e^2}{\tilde{Z}_m} + \frac{\lambda_e \lambda_s}{\tilde{Z}_{me}} + \frac{1}{Z_e} \right| \quad (222)$$

En considérant pour simplifier que les températures de bruit sont égales sur les lignes a et c , le bruit ajouté par l'amplification s'écrit en général

$$\frac{2R_a}{\eta^2} |\tilde{Z}_m|^2 \left(\left| \frac{\lambda_e}{\tilde{Z}_m} + \frac{\lambda_s}{\tilde{Z}_{me}} + \frac{1}{\lambda_e Z_e} \right|^2 + \frac{1}{\lambda_e^2 R_a^2} \right) \sigma_a \quad (223)$$

et a pour valeur minimale

$$\frac{4}{\eta^2} \frac{|\tilde{Z}_m|^2}{\lambda_e^2 R_a^{\min}} \sigma_a \quad (224)$$

Pour des calculs pratiques, nous pouvons simplifier l'expression générale (218) en nous plaçant dans la limite où l'impédance mécanique est dominée par le système de contre-réaction

$$|\tilde{Z}_m| \ll |\tilde{Z}_{me}| \quad (225)$$

On peut aussi choisir Z_e de telle façon à ce qu'il ne contribue pas. On obtient

$$\begin{aligned} \Sigma_F = 2\hbar |\omega| (H_m \sigma_m + H_{me} \sigma_{me}) + \frac{\hbar |\omega|}{2} \lambda_s^2 R_d \sigma_d \\ + \hbar |\omega| \left(\lambda_e^2 R_a + \frac{|\tilde{Z}_m|^2}{\lambda_e^2 R_a} \right) \sigma_a \end{aligned} \quad (226)$$

La résistance optimale $R_a^{\min}$ s'écrit alors

$$R_a^{\min} = \frac{|\tilde{Z}_m|}{\lambda_e^2} \quad (227)$$

et le bruit minimum

$$\Sigma_F = 2\hbar |\omega| (H_m \sigma_m + H_{me} \sigma_{me}) + \frac{\hbar |\omega|}{2} \lambda_s^2 R_d \sigma_d + 2\hbar |\omega| |\tilde{Z}_m| \sigma_a \quad (228)$$

A la limite de haute température, on obtient

$$\Sigma_F = 2k_B \left\{ H_m T_m + H_{me} T_{me} + \frac{\lambda_s^2}{4} R_d T_d + |\tilde{Z}_m| T_a \right\} \quad (229)$$

Dans un régime de friction froide, on peut choisir les paramètres pour que le terme $H_{me} T_{me}$ soit négligeable (voir (212) et (220)). On peut aussi choisir l'impédance R_d de la ligne de détection suffisamment petite pour qu'elle ne contribue pas. On obtient ainsi un bruit ultime déterminé par l'expression simple

$$\Sigma_F = 2k_B H_m \{T_m + |\tilde{z}_m| T_a\} \quad (230)$$

où $|\tilde{z}_m|$ est l'impédance mécanique réduite

$$|\tilde{z}_m| = \frac{|\tilde{Z}_m|}{H_m} \quad (231)$$

Au mieux, $|\tilde{z}_m| = 1$ et le bruit ultime (230) correspond à une température $T_m + T_a$ dans la ligne mécanique. Il faut noter que l'amortissement peut être augmenté dans une proportion beaucoup plus importante, ce qui correspond bien à l'idée de la friction froide.

B. Le transducteur capacitif différentiel

Nous allons maintenant nous approcher du modèle final en considérant le système de mesure capacitive présenté sur la figure 19 . Les caractéristiques importantes de ce modèle sont d'une part une détection à l'aide de deux transducteurs fonctionnant en mode différentiel, d'autre part un fonctionnement du circuit électrique à une fréquence différente du circuit mécanique, la conversion de fréquence étant assurée par le transducteur paramétrique.

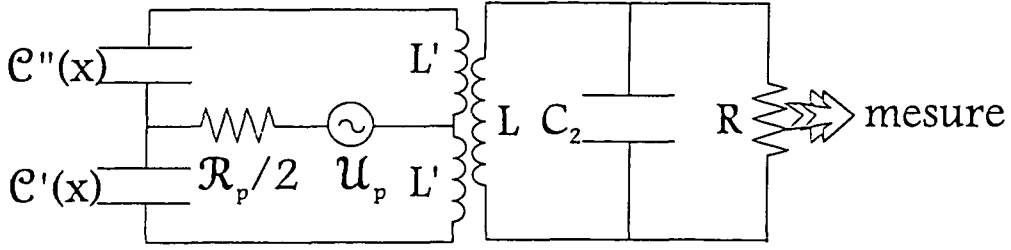


FIG. 19 - Schéma du circuit électrique de détection passive du mouvement de la masse.

Pour simplifier, nous considérons dans cette partie que la détection se fait à l'aide d'une simple ligne et que la suspension et l'amortissement de la masse sont réalisées de manière passive. C'est seulement dans la prochaine partie que nous traiterons de manière globale la mesure capacitive et la technique de friction froide.

1. Le point de fonctionnement

La partie mécanique du système est décrite par un oscillateur harmonique constitué de la masse M dont on veut mesurer l'accélération et d'un ressort de raideur K . La dissipation, due à une force de frottement visqueux, est caractérisée par le coefficient H_m . La fréquence de résonance de cet oscillateur vaut

$$\omega_m = \sqrt{\frac{K}{M}} \quad (232)$$

Le circuit électrique représenté sur la figure 19 est un résonateur présentant deux modes d'oscillation, ce mode symétrique sur lequel agit la tension de polarisation $\mathcal{U}_p$ et un mode antisymétrique sur lequel se fait la mesure. La détection se fait en mode différentiel en couplant la bobine L d'un oscillateur LC_2 aux inductances des deux autres oscillateurs $L'C'$ et $L'C''$. $\mathcal{M} = \sqrt{\frac{L'L}{2}}$ est l'inductance mutuelle lorsque l'on considère ce couplage comme parfait.

Ce circuit de détection peut être représenté de manière équivalente par le schéma électrique ramené au secondaire, dessiné sur la figure 20, dans lequel figurent les variables trans-

formées

$$\begin{aligned}
 C' &= \frac{2L'}{L} C' \\
 C'' &= \frac{2L'}{L} C'' \\
 C &= \frac{2L'}{L} C \\
 \frac{R_g}{2} &= \frac{L}{2L'} \frac{R_g}{2} \\
 U_p &= \sqrt{\frac{L}{2L'}} U_p
 \end{aligned} \tag{233}$$

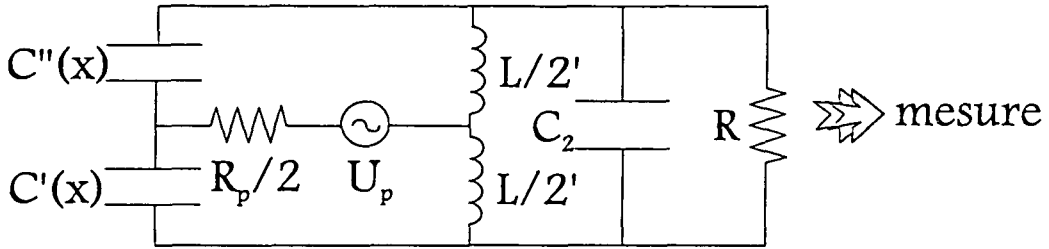


FIG. 20 - Schéma du circuit électrique de détection ramené au secondaire, où figurent les paramètres transformés.

En considérant les symétries du système, la résistance $\frac{R_g}{2}$ est associée à la dissipation affectant le mode symétrique des résonateurs $L'C'$ et $L'C''$. Cette même résistance est responsable aussi de la dissipation dans le générateur de tension U_p . Une seule résistance R_e , pour l'instant, prend en compte à la fois la dissipation du mode antisymétrique et celle de l'appareil de mesure. Les conséquences de ce choix seront discutées à la fin de la section.

La tension de polarisation joue plusieurs rôles très importants. D'une part, elle sert à polariser le système électrique pour qu'il puisse détecter le déplacement de la masse. D'autre part, elle couple les systèmes mécanique et électrique qui évoluent à des fréquences très différentes. Le système mécanique est étudié autour de la fréquence nulle à des fréquences très inférieures à la fréquence d'oscillation de la masse alors que le système électrique fonctionne à des fréquences élevées afin de réduire les bruits supplémentaires de type bruit en $1/f$.

Le choix de la fréquence de polarisation a des conséquences importantes. C'est pour

une polarisation résonnante avec le mode antisymétrique au secondaire que l'on obtient le meilleur rapport signal sur bruit: elle permet d'obtenir une configuration intéressante dans laquelle les quadratures du mode électrique jouent des rôles totalement séparés au niveau de la mesure.

Une ligne d'impédance H_m décrit la dissipation mécanique du système. L'appareil de mesure est modélisé par la ligne d'impédance R_e . Le champ sortant de cette ligne, I^{out} , est le signal sur lequel on effectue la mesure: il est fonction de tous les champs entrants, et donc du bruit ainsi que de la force extérieure agissant sur la masse. Cette ligne nous permet aussi de rendre compte des fluctuations ajoutées au système par la mesure.

L'oscillateur mécanique est couplé paramétriquement au circuit électrique de détection par l'intermédiaire des deux résonateurs LC' et LC'' , dont les capacités dépendent respectivement de la position de la masse et de son opposé (comme dans les équations de la section IIB 1 du chapitre II)

$$\begin{aligned} C'(x) &= C(x) = C + C \frac{x}{d} \\ C''(x) &= C(-x) = C - C \frac{x}{d} \end{aligned} \quad (234)$$

avec

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{C} \frac{dC(x)}{dx} \quad (235)$$

La force électrostatique exercée sur la masse de l'oscillateur mécanique vaut alors

$$F_{el} = \frac{C}{2d} (U'^2 - U''^2) = \frac{C}{2d} U^s U \quad (236)$$

où U' et U'' sont les tensions aux bornes des capacités, U^s et U sont les composantes symétrique et antisymétrique de ces tensions

$$\begin{aligned} U^s &= U' + U'' \\ U &= U' - U'' \end{aligned} \quad (237)$$

Dans l'appendice VI C sont reportés les détails des calculs. Ici, nous donnons simplement les résultats.

La symétrie du problème montre que la réponse forcée correspond à un mode électrique symétrique

$$\begin{aligned} V_0 &= F_0 = I_0 = U_0 = 0 \\ (U^s)_0[\omega] &= \frac{2U_p[\omega]}{1 - i\omega C \left(R_g - i\omega \frac{L_2}{2} \right)} \end{aligned} \quad (238)$$

Le système électrique étant polarisé par une tension oscillant à la fréquence ω_p , voisine de la résonance électrique, nous pouvons écrire comme dans la partie II un champ électrique de couplage

$$\begin{aligned} E(t) &= E_0 \cos \omega_p t \\ E_0 &= \frac{|U_p|}{d} \frac{1}{\left| 1 - \omega^2 \frac{L_2 C}{2} - i\omega C R_g \right|} \end{aligned} \quad (239)$$

2. La transformation des fluctuations

Nous linéarisons les équations du système au voisinage du point de fonctionnement (238) (voir l'appendice VIC). Nous obtenons ainsi des équations décrivant la réponse linéaire des fluctuations dans le système aux fluctuations entrantes

$$\begin{aligned} \delta F &= Z_m \delta V - C (E \otimes \delta U) = -H_m \delta V + 2H_m V^{in} \\ \delta U &= Z_e \delta I + Z_e i\omega C \left(E \otimes \frac{\delta V}{-i\omega} \right) = -R_e \delta I + 2R_e I^{in} \end{aligned} \quad (240)$$

Comme dans la partie II, le symbole $\otimes$ indique un produit de convolution et Z_m est l'impédance réactive de l'oscillateur mécanique

$$Z_m = -i\omega M + \frac{1}{-i\omega K^{-1}} \quad (241)$$

Nous avons défini aussi une impédance électrique Z_e , qui représente l'impédance équivalente pour le mode antisymétrique au secondaire

$$\begin{aligned} Z_e &= \frac{1}{-\frac{1}{i\omega L} - i\omega C_{eq}} \\ C_{eq} &= \frac{C}{2} + C_2 \end{aligned} \quad (242)$$

Le résonateur correspondant présente une résonance en

$$\varpi_e = \sqrt{\frac{1}{LC_{eq}}} \quad (243)$$

Nous remarquons que, dans le cadre du traitement linéaire, les fluctuations du mode symétrique sont découplées des autres degrés de liberté du système.

La nonlinéarité du couplage entre les deux oscillateurs induit un phénomène de mélange de fréquences: les fréquences se trouvent transférées de plus ou moins la fréquence d'oscillation de polarisation par convolution avec le champ de polarisation (239)

$$\begin{aligned} E \otimes \delta U &= E_0 \{ \delta U [\omega + \omega_p] + \delta U [\omega - \omega_p] \} \\ E \otimes \frac{\delta V}{\omega} &= E_0 \left\{ \frac{\delta V [\omega + \omega_p]}{\omega + \omega_p} + \frac{\delta V [\omega - \omega_p]}{\omega - \omega_p} \right\} \end{aligned} \quad (244)$$

Comme nous nous intéressons au comportement de l'oscillateur mécanique à basse fréquence, nous réécrivons l'équation pour l'oscillateur mécanique autour de la fréquence nulle. L'équation pour l'oscillateur électrique est par contre écrite autour de la fréquence de polarisation ω_p , qui est elle même proche de la résonance électrique. L'existence d'une référence de phase permet de définir les quadratures pour les variables électriques. Dans le chapitre II, nous avons montré que la description des fluctuations quantiques se fait très naturellement par l'intermédiaire des champs libres. Ainsi, toute variable peut être écrite de manière équivalente par une grandeur appelée habituellement en théorie des réseaux variable *réduite* et la matrice de diffusion s est sans dimension.

La matrice impédance décrivant la réponse du système autour de la fréquence nulle pour l'oscillateur mécanique et autour de ω_p pour l'oscillateur électrique s'écrit

$$\begin{bmatrix} \delta f \\ \delta u^+ \\ \delta u^- \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta i^+ \\ \delta i^- \end{bmatrix}$$

où δu^+ , δu^- , δi^+ et δi^- sont les amplitudes complexes des variables électriques réduites

$$\begin{aligned} \delta u^+ [\Omega] &= \delta u [\omega_p + \Omega] & \delta i^+ [\Omega] &= \delta i [\omega_p + \Omega] \\ \delta u^- [\Omega] &= \delta u [\Omega - \omega_p] & \delta i^- [\Omega] &= \delta i [\Omega - \omega_p] \end{aligned} \quad (245)$$

δf et δv sont les variables mécaniques réduites et z est la matrice impédance réduite

$$\begin{aligned}
 z &= \begin{bmatrix} z_m + \epsilon \lambda^2 (z_e^+ + z_e^-) & -\lambda z_e^+ & -\lambda z_e^- \\ -\epsilon \lambda z_e^+ & z_e^+ & 0 \\ \epsilon \lambda z_e^- & 0 & z_e^- \end{bmatrix} \\
 \lambda &= \sqrt{\frac{\omega_p}{|\Omega|}} \sqrt{\frac{R_e}{H_m}} C E_0 \\
 z_m &= \frac{Z_m}{H_m} \\
 z_e^+ &= \frac{Z_e [\Omega + \omega_p]}{R_e} \\
 z_e^- &= \frac{Z_e [\Omega - \omega_p]}{R_e} \\
 \epsilon &= \begin{cases} +1 & \Omega > 0 \\ -1 & \Omega < 0 \end{cases}
 \end{aligned} \tag{246}$$

Le comportement du système dépend du choix de la fréquence de la polarisation ω_p , et en particulier de son désaccord Δ par rapport à la fréquence de résonance (243) du système électrique

$$\Delta = \omega_p - \varpi_e \tag{247}$$

Nous discutons dans l'appendice VID la façon dont la lecture du signal dépend de ce désaccord et nous montrons que l'optimum se trouve à $\Delta = 0$. C'est pourquoi nous nous plaçons dans ce cas particulier dans la suite de la présente discussion. Nous allons continuer à simplifier les équations avec l'objectif de parvenir à une matrice s facilement utilisable par la suite.

Tout d'abord, nous considérons que la fréquence d'analyse Ω est beaucoup plus petite devant la fréquence ω_p de la tension de polarisation. Dans ces conditions, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 z_e^+ &= z_e^- = z_e \simeq -\frac{1}{2iQ_e} \frac{\varpi_e}{\Omega} \\
 Q_e &= \varpi_e R_e C_{eq}
 \end{aligned} \tag{248}$$

Il est alors intéressant de profiter de cette symétrie pour réécrire la matrice impédance

$$\begin{bmatrix} \delta f \\ \delta u_1 \\ \delta u_2 \end{bmatrix} = z \begin{bmatrix} \delta v \\ \delta i_1 \\ \delta i_2 \end{bmatrix} \quad (249)$$

où δu_1 , δu_2 , δi_1 et δi_2 sont les quadratures des variables électriques réduites

$$\begin{aligned} \delta u_1 [\Omega] &= \delta u^- [\Omega] + \delta u^+ [\Omega] & \delta i_1 [\Omega] &= \delta i^- [\Omega] + \delta i^+ [\Omega] \\ \delta u_2 [\Omega] &= i (\delta u^- [\Omega] - \delta u^+ [\Omega]) & \delta i_2 [\Omega] &= i (\delta i^- [\Omega] - \delta i^+ [\Omega]) \end{aligned} \quad (250)$$

et z la matrice impédance

$$z = \begin{bmatrix} z_m & -\lambda z_e & 0 \\ 0 & z_e & 0 \\ 2i\epsilon\lambda z_e & 0 & z_e \end{bmatrix} \quad (251)$$

Nous indiquons par m les bruits associés à l'amortissement dans l'oscillateur mécanique, e_1 et e_2 les quadratures du bruit associé à l'appareil de mesure. La diffusion des bruits provenant du système mécanique et de l'appareil de mesure est alors décrite par une matrice de répartition s unitaire liée à la matrice impédance

$$\begin{bmatrix} m^{out} \\ e_1^{out} \\ e_2^{out} \end{bmatrix} = s \begin{bmatrix} m^{in} \\ e_1^{in} \\ e_2^{in} \end{bmatrix} \quad (252)$$

$$s = \frac{z - 1}{z + 1}$$

soit

$$s = \begin{bmatrix} \frac{z_m - 1}{z_m + 1} & -\frac{2\lambda z_e}{(z_e + 1)(z_m + 1)} & 0 \\ 0 & \frac{z_e - 1}{z_e + 1} & 0 \\ \frac{4i\epsilon\lambda z_e}{(z_e + 1)(z_m + 1)} & \frac{4i\epsilon\lambda^2 z_e^2}{(z_e + 1)^2(z_m + 1)} & \frac{z_e - 1}{z_e + 1} \end{bmatrix} \quad (253)$$

Cette matrice est manifestement unitaire, ce qui garantit que les commutateurs sont préservés.

On peut remarquer que cette matrice s est non-réciproque, comme pour les systèmes QND étudiés dans la partie II C. Non seulement les oscillateurs électrique et mécanique sont couplés de manière non-réciproque, mais les deux quadratures électriques jouent des rôles différents. Nous en montrerons les conséquences dans la suite.

Nous pouvons encore simplifier cette expression en considérant que l'oscillateur électrique fonctionne avec

$$|z_e| \gg 1 \quad (254)$$

La matrice s s'écrit alors

$$s = \begin{bmatrix} 1 - \frac{2}{\tilde{z}_m} & -\frac{2\lambda}{\tilde{z}_m} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4\epsilon\lambda}{\tilde{z}_m} & \frac{4\epsilon\lambda^2}{\tilde{z}_m} & 1 \end{bmatrix} \quad (255)$$

où $\tilde{z}_m$ est l'impédance mécanique totale (réactive et dissipative) écrite sous forme réduite

$$\tilde{z}_m = z_m + 1 \quad (256)$$

On note que cette impédance n'est pas modifiée par le couplage électromécanique avec les hypothèses que nous avons faites.

Enfin, on va encore faire une hypothèse simplificatrice qui correspond aux choix de définition de l'accéléromètre réel [41,42]. On supposera que la fréquence d'analyse Ω est suffisamment proche de la fréquence nulle pour que l'impédance mécanique se simplifie

$$\begin{aligned} \tilde{z}_m &\simeq \frac{1}{-iH_m K^{-1}\Omega} \\ |\tilde{z}_m| &\gg 1 \end{aligned} \quad (257)$$

On réécrit le carré du facteur de couplage λ

$$\lambda^2 = \frac{R_e}{R_m} \frac{\varpi_e}{|\Omega|} \quad (258)$$

On a introduit un paramètre R_m dimensionné comme une résistance et proportionnel au coefficient de friction mécanique

$$R_m = \frac{H_m}{C^2 E_0^2} \quad (259)$$

Ce paramètre mesure en quelque sorte la friction mécanique ramenée au système électrique par l'intermédiaire du couplage électromécanique.

On voit alors que $\frac{1}{\tilde{z}_m}$ tend vers zéro avec la fréquence d'analyse Ω alors que $\frac{\lambda^2}{\tilde{z}_m}$ tend vers une constante

$$4\epsilon \frac{\lambda^2}{\tilde{z}_m} \rightarrow 4 \frac{R_e}{R_m} \frac{H_m \varpi_e}{K} \quad (260)$$

Pour leur part, les deux termes proportionnels à $\frac{\lambda}{\tilde{z}_m}$ tendent vers zéro comme $\sqrt{|\Omega|}$. Toutefois, ils doivent être traités de façon différente. En effet, les fluctuations provenant de la ligne mécanique correspondent à une fréquence physique de l'ordre de Ω alors que les fluctuations provenant des lignes électriques correspondent à une fréquence physique de l'ordre de ϖ_e . Les premières sont donc plus grandes que les secondes dans un rapport proportionnel à $\sqrt{\frac{\varpi_e}{|\Omega|}}$ (en supposant $\hbar |\Omega| \ll k_B T_m$, $\hbar \varpi_e \ll k_B T_e$).

En tenant compte de ce comportement, on obtient finalement les équations suivantes

$$\begin{aligned} m^{out} &= m^{in} + \sqrt{\frac{1}{2\hbar |\Omega| H_m}} F^{ext} \\ e_1^{out} &= e_1^{in} \\ e_2^{out} &= e_2^{in} + \frac{4}{K} \frac{R_e H_m \varpi_e}{R_m} e_1^{in} + \frac{4}{K} \sqrt{\frac{R_e H_m \varpi_e}{2\hbar R_m}} \left(F^{ext} + \sqrt{2\hbar |\Omega| H_m} m^{in} \right) \end{aligned} \quad (261)$$

Comme précédemment, on a pris en compte la force extérieure F^{ext} en la superposant à m^{in} . On a négligé le bruit en e_1^{in} dans m^{out} par suite du raisonnement du paragraphe précédent. Ces résultats signifient que le système peut lire la force extérieure sans rajouter de bruit sur l'oscillateur mécanique. On se trouve donc dans une situation de type QND.

La mesure de la force est maintenant décrite par un estimateur

$$\begin{aligned} \hat{F}^{ext} &= \frac{K}{4} \sqrt{\frac{2\hbar R_m}{R_e H_m \varpi_e}} e_2^{out} \\ &= F^{ext} + \sqrt{2\hbar |\Omega| H_m} m^{in} + \frac{K}{4} \sqrt{\frac{2\hbar R_m}{R_e H_m \varpi_e}} e_2^{in} + \sqrt{\frac{2\hbar R_e H_m \varpi_e}{R_m}} e_1^{in} \end{aligned} \quad (262)$$

et donc par un bruit ajouté

$$\begin{aligned}
\Sigma_F &= 2\hbar |\Omega| H_m \sigma_m + \frac{K^2}{8} \frac{\hbar R_m}{R_e H_m \varpi_e} \sigma_{e_2} + \frac{2\hbar R_e H_m \varpi_e}{R_m} \sigma_{e_1} \\
\sigma_m &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\Omega|}{2k_B T_m} \\
\sigma_{e_1} &= \sigma_{e_2} = \coth \frac{\hbar \varpi_e}{2k_B T_e}
\end{aligned} \tag{263}$$

A la limite de haute température, on obtient

$$\Sigma_F = 2H_m k_B T_m + \frac{K^2}{4} \frac{R_m}{R_e H_m \varpi_e^2} k_B T_e + \frac{4R_e H_m}{R_m} k_B T_e \tag{264}$$

Le premier terme est la contribution habituelle du bruit mécanique alors que le second représente l'effet des bruits électriques ajoutés par le transducteur électromécanique. Pour discuter leur effet, il est intéressant de réécrire la formule précédente en fonction de facteurs sans dimension

$$\Sigma_F = H_m k_B \left\{ 2T_m + \frac{R_m}{4R_e} \frac{Q_m^2 \varpi_m^2}{\varpi_e^2} T_e + \frac{4R_e}{R_m} T_e \right\} \tag{265}$$

On a introduit la finesse mécanique

$$Q_m = \frac{K}{H_m \varpi_m} \tag{266}$$

Cette expression montre que le rapport $\frac{R_e}{R_m}$ peut être choisi de manière optimale pour minimiser le bruit ajouté par la lecture électromécanique. Pour cette valeur

$$\frac{R_e}{R_m} = \frac{Q_m \varpi_m}{4\varpi_e} = \frac{K}{4H_m \varpi_e} \tag{267}$$

le bruit est

$$\Sigma_F = 2H_m k_B \left\{ T_m + \frac{Q_m \varpi_m}{\varpi_e} T_e \right\} \tag{268}$$

On a exprimé le bruit mécanique comme une température de bruit proportionnelle à la température T_e . Mais le facteur $\frac{Q_m \varpi_m}{\varpi_e}$ devant T_e peut être beaucoup plus petit que 1 grâce à la technique du transfert de fréquence.

3. La description des pertes électriques

Nous rajoutons maintenant un dernier élément dans notre description des ingrédients nécessaires pour une description réaliste de l'accéléromètre. Il s'agit des pertes de performance liées à la dissipation électrique présente entre le transducteur électromécanique et l'entrée de l'amplificateur.

Jusqu'à présent, nous avons considéré que la ligne de détection dans laquelle est extrait le signal est aussi la seule ligne par laquelle entrent des fluctuations électriques. Il est en fait nécessaire de généraliser cette approche en considérant au moins deux lignes différentes. L'une est une ligne de détection qui sera branchée par la suite sur l'entrée de l'amplificateur. L'autre est une ligne supplémentaire qui ne permet pas d'acquérir de l'information sur le système alors qu'elle ajoute néanmoins des fluctuations dans le système.

On se retrouve dans une situation tout à fait analogue à celle de l'étude d'un système dans une cavité optique où on distingue les "bonnes" pertes qui permettent d'extraire un signal à travers un miroir de sortie des "mauvaises" pertes dues à une absorption dans la cavité et dont le seul effet est d'augmenter le bruit.

En d'autres termes, les pertes électriques sont équivalentes à un *répartiteur* qui fait perdre du signal et rentrer du bruit. Les coefficients de répartition dépendent des impédances des diverses lignes couplées (voir l'appendice VI E).

Cet effet sera décrit dans la prochaine section en plaçant simplement une résistance R_p entre le transducteur et l'amplificateur.

C. L'accéléromètre capacitif à friction froide

Nous en arrivons maintenant à une modélisation complète de l'accéléromètre. Par modélisation complète, nous entendons qu'elle intègre l'ensemble des différents éléments que nous venons de discuter. Nous décrivons la détection de la masse d'épreuve par une technique différentielle avec transfert de fréquence (comme dans IV B) et nous l'associons à une lecture

active et à un asservissement avec friction froide (comme dans IV A).

L'étude complète de tous les éléments et la prise en compte de toutes les sources de bruit conduirait à une complication excessive. Nous préférons tirer parti des études déjà effectuées pour les différents éléments pour simplifier le plus possible notre approche.

Dans un premier temps, nous présentons les équations du modèle en considérant les différents éléments et en décrivant les approximations que nous faisons. Puis nous écrivons les résultats en nous concentrant sur les données les plus importantes. Enfin, nous discutons les performances de l'accéléromètre ainsi constitué.

1. Modélisation de l'accéléromètre

Le système est schématisé sur la figure 21.

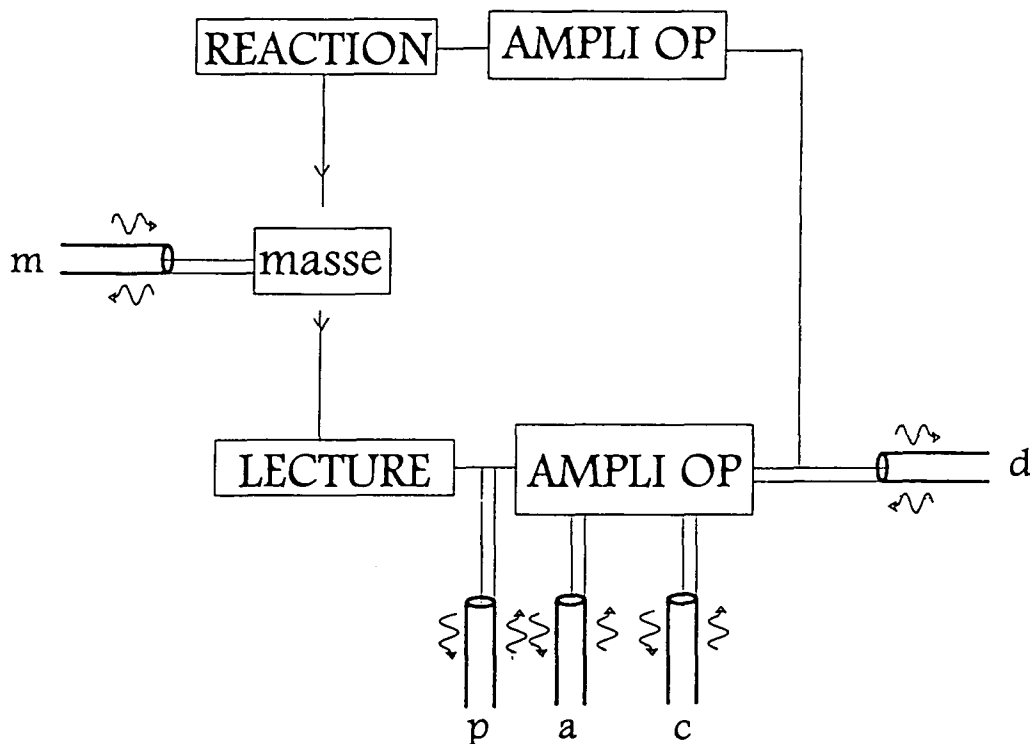


FIG. 21 - Schéma de principe d'un modèle d'accéléromètre actif à couplage capacitif différentiel. La lecture correspond au schéma de la figure 20. La sortie du transducteur est branchée à l'entrée d'un amplificateur opérationnel avec contre-réaction capacitive. Une ligne de perte est intercalée à ce niveau. La sortie de l'amplificateur est utilisée d'une part pour la mesure de la force par la ligne de détection d , d'autre part pour réagir sur le mouvement de la masse par l'intermédiaire d'un deuxième amplificateur.

Nous commençons par décrire le transducteur capacitif de détection utilisé pour lire le mouvement de la masse. Les équations sont les mêmes que dans la partie IV B. Nous nous plaçons dans le cas d'une polarisation résonnante du circuit de détection (fréquence de pompe ω_p égale à la fréquence de résonance électrique ω_e) et nous utilisons donc la matrice impédance réactive de l'équation (251)

$$\begin{pmatrix} F \\ U_1 \\ U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Z_m & -CE_0Z_e & 0 \\ 0 & Z_e & 0 \\ 2iCE_0Z_e\frac{\omega_e}{\Omega} & 0 & Z_e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V \\ I_1 \\ I_2 \end{pmatrix} \quad (269)$$

Les variables F et V sont les variables mécaniques correspondant à la force exercée sur la masse d'épreuve et à sa vitesse. Les variables U_1 , U_2 , I_1 et I_2 sont les quadratures de la tension et du courant de détection. Les impédances Z_m et Z_e correspondent aux systèmes mécanique et électrique non couplés. Ici, toutes les variables sont dimensionnées. C est la capacité du condensateur variable discuté en IV B. E_0 a aussi la même définition qu'en IV B.

Pour lire le mouvement de la masse, nous branchons sur ce transducteur un amplificateur opérationnel qui remplace la ligne utilisée dans la section précédente pour le modèle passif. Cet amplificateur amène le signal mesuré à un niveau classique. Nous devons le distinguer d'un second amplificateur utilisé dans la suite pour réagir sur la masse et produire une friction froide. Pour ce premier amplificateur, nous prenons une impédance de contre-réaction Z_r réactive, en l'occurrence une capacité

$$Z_r = \frac{1}{-iC_r\omega_e} \quad (270)$$

Dans ces conditions, les quadratures des tensions d'entrée U_{e_1} et U_{e_2} et de sortie U_{s_1} et U_{s_2} s'écrivent en fonction des courants et des fluctuations entrant par les deux lignes de bruit

$$\begin{aligned}
\eta_p U_{e_1} &= \sqrt{R_a} a_{-1}^{in} \\
\eta_p U_{e_2} &= \sqrt{R_a} a_{-2}^{in} \\
\eta_p U_{s_1} &= i\eta_p I_{e_2} Z_r + \sqrt{R_a} a_{-1}^{in} - \frac{iZ_r}{\sqrt{R_a}} a_{+2}^{in} \\
\eta_p U_{s_2} &= -i\eta_p I_{e_1} Z_r + \sqrt{R_a} a_{-2}^{in} + \frac{iZ_r}{\sqrt{R_a}} a_{+1}^{in} \\
\eta_p &= \sqrt{\frac{2}{\hbar \varpi_e}}
\end{aligned} \tag{271}$$

Ces équations sont déduites de (185) pour les composantes de quadrature en tenant compte du déphasage de $\frac{\pi}{2}$ introduit par la capacité de contre-réaction. Comme précédemment, nous avons introduit les notations

$$\begin{aligned}
a_{+1}^{in} &= a_1^{in} + c_1^{in} & a_{-1}^{in} &= a_1^{in} - c_1^{in} \\
a_{+2}^{in} &= a_2^{in} + c_2^{in} & a_{-2}^{in} &= a_2^{in} - c_2^{in}
\end{aligned} \tag{272}$$

Pour modéliser les pertes électriques entre le transducteur et l'amplificateur, nous branchons en parallèle de l'entrée de l'amplificateur une ligne de perte p caractérisée par une impédance R_p (voir section IV B 3). Nous ajoutons donc les équations correspondantes qui relient les intensités et tensions liées au transducteur, celles liées à l'entrée de l'amplificateur et les fluctuations entrant par la ligne p

$$\begin{aligned}
\eta_p (I_1 - I_{e_1}) &= \frac{p_1^{in} - p_1^{out}}{\sqrt{R_p}} \\
\eta_p U_{e_1} &= \eta_p U_1 = \sqrt{R_p} (p_1^{in} + p_1^{out}) \\
\eta_p (I_2 - I_{e_2}) &= \frac{p_2^{in} - p_2^{out}}{\sqrt{R_p}} \\
\eta_p U_{e_2} &= \eta_p U_2 = \sqrt{R_p} (p_2^{in} + p_2^{out})
\end{aligned} \tag{273}$$

Pour décrire enfin la contre-réaction sur le mouvement de la masse, nous faisons agir sur celle-ci une force proportionnelle à la quadrature U_{s_1} de la tension de sortie de l'amplificateur.

Pour obtenir l'expression complète de la force agissant sur la masse, il faut ajouter à cela la force due au couplage avec la ligne mécanique m

$$\begin{aligned}\eta_0 F &= \sqrt{H_m} (m^{in} + m^{out}) - \Lambda U_{s_1} \\ \eta_0 V &= \frac{m^{in} - m^{out}}{\sqrt{H_m}} \\ \eta_0 &= \sqrt{\frac{2}{\hbar |\Omega|}}\end{aligned}\tag{274}$$

Le paramètre Λ est proportionnel au gain de l'amplificateur utilisé dans la contre-réaction. En toute rigueur, nous devrions ajouter le bruit introduit par ce second amplificateur. Nous déduisons toutefois des résultats déjà démontrés que, lorsque l'amplification du premier étage est suffisante pour amener les fluctuations du système à un niveau classique, alors le bruit ajouté lors des étapes ultérieures peut être négligé. Cette même hypothèse nous permet de considérer que la force sera lue sur la quadrature U_{s_1} de la tension de sortie de l'amplificateur, en utilisant une ligne de détection avec une impédance suffisamment petite.

Nous disposons maintenant de l'ensemble des équations nécessaires pour décrire notre modèle d'accéléromètre. Nous donnons dans les prochaines sections les résultats des calculs effectués à partir de ces équations.

2. Les résultats des calculs

Nous discutons d'abord le résultat obtenu pour la vitesse de la masse

$$\begin{aligned}D \cdot V &= F^{ext} + \frac{2\sqrt{H_m}m^{in}}{\eta_0} + \frac{\sqrt{R_a}}{\eta_p} (CE_0 - \Lambda) a_{-1}^{in} \\ &+ \frac{i\Lambda\sqrt{R_a}Z_r}{\eta_p} \left(\frac{2}{\sqrt{R_a R_p}} p_2^{in} + \frac{1}{R_a} a_{+2}^{in} - \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{Z_e} \right) a_{-2}^{in} \right)\end{aligned}\tag{275}$$

Le dénominateur D peut comme précédemment s'écrire comme la somme de l'impédance mécanique $\tilde{Z}_m$ et d'une impédance supplémentaire créée par le dispositif de contre-réaction

$$\begin{aligned}D &= \tilde{Z}_m + \tilde{Z}_{me} \\ \tilde{Z}_{me} &= 2CE_0\Lambda Z_r \frac{\varpi_e}{|\Omega|} = 2\frac{iE_0\Lambda}{|\Omega|} \frac{C}{C_r}\end{aligned}\tag{276}$$

A part la force extérieure F^{ext} , tous les termes supplémentaires dans l'équation donnant la vitesse décrivent les forces de Langevin agissant sur la masse. Encore une fois, les fluctuations mécaniques obéissent au théorème fluctuations-dissipation alors que les fluctuations d'origine électrique doivent être analysées de manière beaucoup plus précise (voir une discussion similaire en IV A 3).

Nous écrivons ensuite l'estimateur de la force agissant sur la masse telle que nous le déduisons de la lecture de l'accéléromètre, c'est à dire de la mesure de la quadrature U_{s_1} de la tension de sortie de l'amplificateur

$$\begin{aligned}\hat{F}^{ext} = F^{ext} &+ \frac{2\sqrt{H_m}m^{in}}{\eta_0} - \frac{i\tilde{Z}_m\Omega}{CE_0\sqrt{R_p}\eta_p\varpi_e}p_2^{in} \\ &+ \frac{\sqrt{R_a}}{\eta_p} \left(CE_0 + \frac{\tilde{Z}_m\Omega}{2CE_0\varpi_e Z_r} \right) a_{-1}^{in} \\ &- \frac{i\sqrt{R_a}\tilde{Z}_m\Omega}{2CE_0\eta_p\varpi_e} \left(\frac{1}{R_a}a_{+2}^{in} - \left(\frac{1}{R_p} + \frac{1}{Z_e} \right) a_{-2}^{in} \right)\end{aligned}\quad (277)$$

On remarque que cet estimateur, correspondant à un signal pris entre les deux amplificateurs, ne dépend pas du gain du second: Λ n'apparaît pas dans son expression.

On peut encore simplifier cette expression en considérant que l'impédance de couplage Z_e intervenant dans les équations du transducteur est très grande (on a discuté la même approximation dans IV B)

$$Z_e \gg R_p, R_a \quad (278)$$

On remplace l'impédance de contre-réaction Z_r par son expression (270). En supposant qu'on travaille à fréquence basse (voir IV B 2), on remplace l'impédance mécanique par

$$\begin{aligned}\tilde{Z}_m &= H_m \tilde{z}_m \\ \tilde{z}_m &= 1 + \frac{iK}{H_m\Omega}\end{aligned}\quad (279)$$

où K est la raideur mécanique et $\tilde{z}_m$ l'impédance réduite. On obtient ainsi

$$\hat{F}^{ext} = F^{ext} + \frac{2\sqrt{H_m}m^{in}}{\eta_0} - \frac{iH_m\tilde{z}_m\Omega}{CE_0\sqrt{R_p}\eta_p\varpi_e}p_2^{in}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\sqrt{R_a}}{\eta_p} \left(C E_0 - \frac{i C_r \Omega H_m \tilde{z}_m}{2 C E_0} \right) a_{-1}^{in} \\
& - \frac{i \sqrt{R_a} H_m \tilde{z}_m \Omega}{2 C E_0 \eta_p \varpi_e} \left(\frac{1}{R_a} a_{+2}^{in} - \frac{1}{R_p} a_{-2}^{in} \right)
\end{aligned} \tag{280}$$

Nous n'avons discuté ici que l'estimateur de la force et l'effet du couplage sur la vitesse. On peut néanmoins insister, comme nous l'avons déjà fait dans les parties précédentes, sur le fait que la transformation des fluctuations est unitaire. En conséquence, les commutateurs sont préservés entre l'entrée et la sortie de l'instrument, ce qui assure en particulier que le bruit quantique ne peut être supprimé par la stabilisation active.

Nous discutons maintenant les performances de l'instrument en nous concentrant sur le bruit ajouté dans la mesure de la force

$$\begin{aligned}
\Sigma_F &= \hbar H_m \left\{ 2\Omega \sigma_m + \frac{R_m |\tilde{z}_m|^2 \Omega^2}{2 R_p \varpi_e} \sigma_{p_2} \right. \\
&+ \varpi_e R_a \left(\frac{1}{R_m} + \frac{C_r K}{H_m} + \frac{C_r^2 R_m |\tilde{z}_m|^2 \Omega^2}{4} \right) \sigma_{a_1} \\
&+ \left. \frac{R_m |\tilde{z}_m|^2 \Omega^2}{4 \varpi_e} \left(\frac{1}{R_a} + \frac{R_a}{R_p^2} \right) \sigma_{a_2} \right\} \\
\sigma_m &= \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar |\Omega|}{2 k_B T_m} \\
\sigma_{p_2} &= \coth \frac{\hbar \varpi_e}{2 k_B T_p} \\
\sigma_{a_1} &= \sigma_{a_2} = \coth \frac{\hbar \varpi_e}{2 k_B T_a}
\end{aligned} \tag{281}$$

On a supposé que les lignes a et c correspondaient à la même température T_a . On a introduit le paramètre R_m mesurant la friction mécanique ramenée au système électrique par l'intermédiaire du couplage électromécanique (voir la discussion dans IV B 2)

$$R_m = \frac{H_m}{C^2 E_0^2} \tag{282}$$

Le résultat ainsi trouvé généralise de façon manifeste ceux obtenus en IV A et IV B puisqu'il dépend maintenant des deux paramètres R_a et R_m .

A la limite de haute température

$$k_B T_m \gg \hbar |\Omega|$$

$$k_B T_p \gg \hbar \varpi_e$$

$$k_B T_a \gg \hbar \varpi_e \quad (283)$$

ce résultat se réécrit

$$\begin{aligned} \Sigma_F = H_m k_B & \left\{ 2T_m + \frac{\Omega^2}{\varpi_e^2} \frac{R_m}{R_p} |\tilde{z}_m|^2 T_p \right. \\ & + 2R_a \left(\frac{1}{R_m} + \frac{1}{|Z_r|} \frac{Q_m \varpi_m}{\varpi_e} \right) T_a \\ & + \frac{R_a R_m}{2} |\tilde{z}_m|^2 \frac{\Omega^2}{\varpi_e^2} \left(\frac{1}{|Z_r|^2} + \frac{1}{R_p^2} \right) T_a \\ & \left. + \frac{R_m}{2R_a} |\tilde{z}_m|^2 \frac{\Omega^2}{\varpi_e^2} T_a \right\} \\ \frac{1}{|Z_r|} &= C_r \varpi_e \\ Q_m &= \frac{K}{H_m \varpi_m} \end{aligned} \quad (284)$$

Comme précédemment, on a des termes en R_a et $\frac{1}{R_a}$ ce qui signifie que le bruit présente un minimum lorsque le paramètre R_a varie. La valeur optimale pour R_a ne dépend pas des diverses températures de bruit

$$\frac{1}{(R_a^{\min})^2} = \frac{4}{R_m^2 |\tilde{z}_m|^2} \frac{\varpi_e^2}{\Omega^2} + \frac{4}{R_m |\tilde{z}_m|^2 |Z_r|} \frac{Q_m \varpi_m \varpi_e}{\Omega^2} + \frac{1}{|Z_r|^2} + \frac{1}{R_p^2} \quad (285)$$

Le bruit correspondant à cet optimum s'écrit

$$\Sigma_F^{\min} = H_m k_B \left\{ 2T_m + \frac{\Omega^2}{\varpi_e^2} |\tilde{z}_m|^2 \left(\frac{R_m}{R_p} T_p + \frac{R_m}{R_a^{\min}} T_a \right) \right\} \quad (286)$$

Comme dans les cas déjà discutés, le bruit ajouté dépend essentiellement de la température de bruit de l'amplificateur. Par contre, on bénéficie pleinement ici de l'effet de transposition de fréquence puisque cette température est multipliée par le rapport des carrés des fréquences $\frac{\Omega^2}{\varpi_e^2}$. De plus, la résistance de pertes intervient exactement de la même façon que le bruit d'amplification lorsque R_a est optimisé.

3. Discussion des limites ultimes

Si on se place maintenant dans l'optique d'une discussion des limites ultimes de sensibilité de cet instrument, on voit que le bruit minimum est obtenu lorsque les impédances $|Z_r|$ et R_p sont supérieures à une certaine valeur

$$\begin{aligned} |Z_r| &\gg \frac{R_m}{2} \frac{\Omega}{\varpi_e} |\tilde{z}_m| \\ R_p &\gg \frac{R_m}{2} \frac{\Omega}{\varpi_e} |\tilde{z}_m| \end{aligned} \quad (287)$$

On va en fait discuter ici le cas où les bruits dépendant de $|Z_r|$ et R_p peuvent être oubliés. Le bruit (281) ajouté sur la mesure de force se réécrit alors

$$\begin{aligned} \Sigma_F &= 2\hbar\Omega H_m \left(\sigma_m + \left(\frac{R_a \varpi_e}{R_m \Omega} + \frac{R_m \Omega |\tilde{z}_m|^2}{4R_a \varpi_e} \right) \sigma_a \right) \\ |\tilde{z}_m|^2 &= 1 + \frac{K^2}{H_m^2 \Omega^2} \end{aligned} \quad (288)$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2} \coth \frac{\hbar \varpi_e}{2k_B T_a} \quad (289)$$

soit encore à la limite de haute température

$$\Sigma_F = 2H_m k_B \left(T_m + \left(\frac{R_a}{R_m} + \frac{R_m \Omega^2 + Q_m^2 \varpi_m^2}{R_a \varpi_e^2} \right) T_a \right)$$

Cette équation décrit l'effet sur le bruit de la variation du rapport d'impédance $\frac{R_a}{R_m}$.

Le bruit minimal est atteint lorsque ce rapport est optimisé

$$\begin{aligned} \left(\frac{R_a}{R_m} \right)^{\min} &= \frac{\sqrt{\Omega^2 + Q_m^2 \varpi_m^2}}{2\varpi_e} \\ \Sigma_F^{\min} &= 2H_m k_B \left(T_m + \frac{\sqrt{\Omega^2 + Q_m^2 \varpi_m^2}}{\varpi_e} T_a \right) \end{aligned} \quad (290)$$

La limite ultime de bruit ajouté est donc déterminée simplement par la température de bruit de l'amplificateur multipliée par un facteur essentiellement donné par le rapport des fréquences mécanique et électrique.

Ceci montre encore une fois l'importance de la technique de transposition de fréquence pour obtenir une mesure ultra-sensible. En supposant que la température T_a de l'amplificateur est du même ordre que la température T_m associée à la friction mécanique, on voit que

son effet peut être rendue négligeable par le rapport des fréquences. Grâce au transfert de fréquence, on peut donc lire le mouvement de la masse en rajoutant un bruit négligeable par rapport à celui qui est associé à la friction ordinaire. Dans le même temps, la friction effective de la masse, déterminée par l'équation (276), est beaucoup plus efficace que la friction ordinaire. On a donc bien un système de friction froide.

V. CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Notre premier objectif dans cette thèse a été de développer une méthode générale qui permette d'évaluer l'effet des fluctuations quantiques et thermiques dans les réseaux passifs et actifs. Nous avons ensuite appliqué cette méthode générale aux systèmes électromécaniques en prenant comme exemple l'accéléromètre capacitif asservi conçu par l'ONERA pour des missions de physique fondamentale dans l'espace.

Le premier objectif a été traité sur deux chapitres II et III correspondant respectivement aux systèmes *passifs et actifs*. Les fluctuations associées respectivement à la dissipation et à l'amplification ont été décrites dans un même formalisme, bâti sur la théorie des *réseaux linéaires* mais s'appliquant tout aussi bien aux *systèmes nonlinéaires* après linéarisation autour du point de fonctionnement. Le traitement des fluctuations y est mené selon la méthode tout à fait générale de *diffusion*. Tous les résultats importants sont contenus dans la matrice S associée à cette diffusion. La consistance avec les contraintes de la théorie quantique est ainsi ramenée à un critère simple, à savoir l'unitarité de cette matrice S . Cette unitarité est d'ailleurs assurée lorsque la matrice S est construite à partir d'une impédance purement réactive décrivant les couplages entre un certain nombre de lignes dissipatives.

Cette méthode était un objectif essentiel de ce travail de thèse car une description générale pour les systèmes passifs ou actifs, linéaires ou linéarisables, incluant les fluctuations quantiques et thermiques, n'existait pas encore à notre connaissance. Hormis cet intérêt orienté vers les critères de consistance théorique, ce travail présente aussi à notre avis un intérêt pratique manifeste. La matrice S prend en compte en même temps toutes les sources indépendantes de bruit affectant le système. Ceci est en particulier intéressant pour les bruits d'amplification qui rejoignent ainsi le cadre général des bruits liés à la dissipation. Les éléments importants pour le fonctionnement du système, par exemple le transfert de fréquence, le caractère QND ou BAE, apparaissent de façon manifeste dans la structure de cette matrice. Ces caractéristiques facilitent considérablement l'analyse du système de mesure et le bilan de ces performances.

Ceci a été illustré dans cette thèse par l'application de la méthode générale à un système réel, à savoir l'accéléromètre de l'ONERA. Cet accéléromètre est constitué d'un transducteur capacitif nonlinéaire travaillant en régime QND, et de plusieurs éléments actifs servant non seulement à préamplifier le signal pour le lire le mieux possible, mais aussi à asservir la position de la masse d'épreuve. Cette méthode de stabilisation active simule aussi une force de friction. L'analyse qui avait déjà été faite au niveau classique avait montré que la friction active permettait de réduire la température équivalente de bruit très au dessous de la température ambiante.

Le traitement quantique que nous avons développé en nous inspirant de cette analyse classique confirme totalement les résultats classiques. Le bruit ajouté par la friction active est négligeable par rapport au bruit qui serait nécessairement associé à une dissipation passive de même efficacité. Si les paramètres déterminant le bruit sont optimisés, ce bruit peut même être très petit devant les fluctuations associées à la friction mécanique résiduelle, qui est elle-même très petite devant la friction active. Le résultat final de cette analyse est donné par l'équation (290). Il est d'ailleurs identique au résultat (268) obtenu pour un système passif sous réserve de remplacement de la température de bruit d'amplification par la température de bruit de la ligne électrique de détection. Ce résultat représente ainsi une *limite ultime de sensibilité*, qui ne dépend que du rapport des fréquences impliquées dans le mécanisme de transfert des fréquences, de l'impédance mécanique nue de la masse d'épreuve et des températures.

Naturellement, le terme de dissipation mécanique dont dépend le bruit prend dans la pratique des valeurs très différentes dans les modèles passif et actif. Dans le premier cas, l'amortissement doit être important pour assurer la stabilité de la masse et il induit donc un bruit important. Par contre, dans le second cas, la stabilité est assurée par l'asservissement et la dissipation mécanique peut être réduit de façon arbitraire en principe et à une valeur résiduelle beaucoup plus petite en pratique. Ces résultats confirment donc pleinement l'efficacité du principe de friction froide.

L'application aux accéléromètres capacitifs nous a permis de montrer que la description

par des réseaux se prête bien à la description d'un système relativement complexe. En effet, l'accéléromètre a pu être modélisé en rassemblant les résultats obtenus sur ces principaux éléments. Cette méthode modulaire peut être appliquée à d'autres systèmes. On pense bien sûr à l'étude des transducteurs capacitifs utilisés pour la lecture du signal dans les barres de Weber. Une autre application possible est celle aux transducteurs inductifs basés sur les SQUID's.

Nous avons remarqué que la limite ultime de sensibilité obtenue pour les accéléromètres capacitifs ne dépend que de paramètres très généraux, à savoir l'impédance mécanique nue de la masse d'épreuve et le rapport des fréquences lié au caractère paramétrique du transducteur. On s'attend dans ces conditions à ce que la limite ultime de performance soit la même dans les transducteurs inductifs que dans les transducteurs capacitifs si les transducteurs inductifs sont eux aussi optimisés. Bien sur, cette limite dépend aussi de la température, ce qui favorise naturellement les systèmes cryogéniques ou, a fortiori, ultra-cryogéniques.

Comme nous l'avons déjà souligné, notre approche a une portée très générale, bien au delà des seuls systèmes électromécaniques. Par sa conception, elle est parfaitement adaptée avec les systèmes optiques et optomécaniques. Elle pourrait se révéler utile traiter les systèmes optomécaniques contenant des éléments actifs. Parmi les expériences concernés, nous pouvons citer une expérience du laboratoire dont le but est de mettre en évidence les effets quantiques du couplage optomécanique [61,62], des propositions de transducteurs optomécaniques pour lire le signal à la sortie des barres gravitationnelles [60] et les éléments actifs qui se trouvent dans la stabilisation de position des miroirs dans les grands interféromètres gravitationnels [37].

Enfin, on peut penser à de nouvelles études d'effets quantiques utilisant la richesse et la spécificité des systèmes électriques et électromécaniques. Dans les systèmes optiques, l'échelle de la dissipation et des fluctuations quantiques associées est en fait déterminée par l'impédance du vide et ne peut être changée que par des techniques relativement sophistiquées. Dans les systèmes électriques ou mécaniques au contraire, la dissipation et les fluctuations associées peuvent être modifiées à volonté simplement par le choix des impédances [45]. On

a en fait déjà utilisé cette possibilité dans cette thèse, par exemple à chaque fois qu'on a optimisé des impédances de bruit. Ceci peut également permettre de concevoir des configurations optimales où le bruit quantique ou thermique soit aussi faible que possible [30]. On pourrait aussi concevoir des configurations dans lesquelles l'effet des fluctuations quantiques est au contraire augmenté afin de rendre son étude expérimentale plus accessible, ce qui pourrait ensuite faciliter la compréhension et la maîtrise de ces fluctuations.

VI. APPENDICES

A. Réponse linéaire et susceptibilités

Nous rappelons le concept de susceptibilité généralisée, dans le cadre de la théorie de la réponse linéaire [6,7,48].

Soit $-\beta(t) B(t)$ la perturbation à laquelle est soumis le système, où B est une observable du système et $\beta(t)$ une fonction classique s'annulant pour $t \rightarrow -\infty$. Si une telle action est faible, la théorie de la réponse linéaire donne la variation des valeurs moyennes de l'observable A du système par rapport à l'équilibre comme superposition d'effets retardés, soit

$$\langle \delta A \rangle(t) = \int dt' \chi_{AB}(t-t') \beta(t') \quad (291)$$

La susceptibilité généralisée $\chi_{AB}(t)$ décrit donc la réponse linéaire de la grandeur A à une action extérieure dépendant du temps proportionnelle à la grandeur B . Dans le domaine spectral, la réponse linéaire s'écrit simplement

$$\langle \delta A \rangle[\omega] = \chi_{AB}[\omega] \beta[\omega] \quad (292)$$

La partie dissipative de la susceptibilité est reliée à la densité spectrale $\xi_{AB}[\omega]$, définie à partir du commutateur des opérateurs A et B

$$\begin{aligned} 2\xi_{AB}(t) &= C_{AB}(t) - C_{BA}(-t) = \langle [A(t), B(0)] \rangle \\ 2\xi_{AB}[\omega] &= \frac{\hbar}{i} \{ \chi_{AB}[\omega] - \chi_{AB}[-\omega] \} = 2\hbar \operatorname{Im} \{ \chi_{AB}[\omega] \} \end{aligned} \quad (293)$$

Ces relations très générales dépendent seulement d'hypothèses de linéarité et de stationnarité.

Si on suppose que le système est dans l'état d'équilibre thermodynamique à la température T , on peut écrire de plus

$$C_{AB}[\omega] = \frac{2}{1 - e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}} \xi_{AB}[\omega] \quad (294)$$

Dans l'état de *vide*, c'est à dire à la limite $T \rightarrow 0$, on obtient

$$C_{AB}[\omega] = 2\theta(\omega) \xi_{AB}[\omega] \quad (295)$$

Nous retrouvons alors le théorème de Nyquist comme cas particulier de ces théorèmes fluctuations-dissipation. Considérons un conducteur d'impédance $Z[\omega] + R$, où $Z[\omega]$ est sa partie réactive et R celle dissipative. La réponse de la tension U aux bornes du conducteur à une perturbation $q(t)U(t)$, où q représente la charge, est décrite par la susceptibilité suivante

$$\chi_{UU}[\omega] = i\omega(Z[\omega] + R) \quad (296)$$

Le bruit Nyquist (34) est immédiatement obtenu en observant que la densité spectrale du bruit en tension vaut dans ce cas

$$\xi_{UU}[\omega] = \hbar\omega R \quad (297)$$

B. Bruit ajouté et rapport signal sur bruit

Dans toute la thèse, nous avons caractérisé la sensibilité d'une mesure par le spectre de bruit ajouté sur le signal. Dans cet appendice, nous montrons comment relier ce spectre au rapport signal sur bruit SNR souvent utilisé pour caractériser la sensibilité. Dans ce but, il faut prendre en compte deux éléments supplémentaires qui n'interviennent pas dans le spectre de bruit, d'une part la forme du signal à mesurer et d'autre part la bande passante de détection.

Par souci de simplicité, nous supposons ici que le signal à détecter est une modulation monochromatique de fréquence ω_0 . Nous considérons que nous mesurons une force à travers un filtre représenté par une fonction certaine $g[\omega]$ qui définit la bande passante de détection. Le signal s'écrit donc dans l'espace des fréquences après filtrage

$$S[\omega] = g[\omega] \widehat{F^{ext}}[\omega] \quad (298)$$

où $\widehat{F^{ext}}$ est l'estimateur de la force, c'est à dire la somme de la force extérieure et du bruit ajouté par le système de mesure. Dans ces conditions, nous définissons le *rapport signal sur bruit* de la manière suivante

$$SNR = \frac{\langle S \rangle^2}{\Delta S^2} \quad (299)$$

où $\langle S \rangle$ représente la valeur moyenne du signal

$$\langle S \rangle = g[\varpi_0] \langle F^{ext} \rangle \quad (300)$$

et ΔS^2 la variance du bruit ajouté qui peut être obtenue à partir de la puissance de bruit

$$\Delta S^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} |g[\omega]|^2 \Sigma_F[\omega] \quad (301)$$

Nous pouvons aussi écrire le rapport signal sur bruit

$$SNR = \frac{\langle F^{ext} \rangle^2}{\Delta F^2} \quad (302)$$

où $\langle F^{ext} \rangle$ représente la valeur moyenne de la force extérieure et ΔF^2 la variance du bruit ajouté sur la mesure de force

$$\Delta F^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left| \frac{g[\omega]}{g[\varpi_0]} \right|^2 \Sigma_F[\omega] \quad (303)$$

La fonction $\frac{g[\omega]}{g[\varpi_0]}$ définit un filtre normalisé à la fréquence moyenne ϖ_0 du signal. Nous considérons des filtres tels que cette intégrale ΔF^2 ou l'intégrale ΔS^2 soient convergentes.

Si nous supposons de plus la largeur de la bande d'analyse suffisamment étroite pour que le spectre de bruit Σ_F puisse être considéré comme constant sur cette bande, nous obtenons finalement

$$\begin{aligned} \Delta F^2 &= B \Sigma_F[\varpi_0] \\ B &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \left| \frac{g[\omega]}{g[\varpi_0]} \right|^2 \end{aligned} \quad (304)$$

où B définit la *bande* passante de la mesure. Notons que B se mesure en Hz, Σ_F en N^2/Hz si on mesure une force et $\langle F^{ext} \rangle$ en N , de sorte que le rapport signal sur bruit est bien un nombre sans dimension

$$SNR = \frac{\langle F^{ext} \rangle^2}{B \Sigma_F} \quad (305)$$

Pour un signal monochromatique, ce rapport est optimisé pour une bande passante nulle, c'est à dire aussi un temps de mesure infiniment long. Quand le signal attendu n'est pas monochromatique ou que le temps de mesure est limité, on peut calculer un rapport signal sur bruit maximal correspondant à une fonction de filtrage optimal. C'est l'argument du filtre optimal [63].

C. Equations du transducteur capacitif différentiel

L'équation du mouvement de la masse dans l'espace des fréquences s'écrit

$$\left(-i\omega m + \frac{1}{-i\omega K^{-1}}\right) V - \frac{C}{2d} (U^s \otimes U) = F \quad (306)$$

La force F est la somme de la force d'amortissement et des fluctuations quantiques qui en dérivent

$$F = -H_m V + 2H_m V^{\text{in}} \quad (307)$$

Ecrivons maintenant, en nous servant des lois des mailles, les expressions des tensions U' et U'' . Comme nous l'avons dit au début de la partie IV B, nous utilisons les symétries du problème et le caractère différentiel de la mesure pour écrire les équations caractéristiques

$$\begin{aligned} -i\omega \frac{R_g}{2} (C'U' + C''U'') + U' + i\omega \frac{L}{2} (i\omega C'U' + I + i\omega C_2U) &= U_p \\ -i\omega \frac{R_g}{2} (C'U' + C''U'') + U'' + i\omega \frac{L}{2} (i\omega C''U'' - I - i\omega C_2U) &= U_p \end{aligned} \quad (308)$$

où I est le courant à la sortie de la résistance R_e et U est la tension à ses bornes, qui est égale à la différence entre les tensions aux bornes des capacités de couplage. $\frac{R_g}{2}$ est la résistance du générateur.

Comme la symétrie du système le suggère, ces expressions, ainsi que l'expression de la force électrostatique (236) nous montrent que les rôles de cette tension et de la tension somme se séparent. Nous remarquons d'abord que

$$\begin{aligned} C'U' + C''U'' &= C \left(U^s - \frac{1}{id} \left(U \otimes \frac{V}{\omega} \right) \right) \\ C'U' - C''U'' &= C \left(U - \frac{1}{id} \left(U^s \otimes \frac{V}{\omega} \right) \right) \end{aligned} \quad (309)$$

Donc, d'une part la somme des (308) nous donne l'équation pour le mode symétrique

$$-i\omega \frac{C}{2} \left(\frac{1}{-i\omega \frac{C}{2}} - i\omega L + 2R_g \right) U^s - i\omega \frac{C}{2d} (-i\omega L + 2R_g) \left(U \otimes \frac{V}{-i\omega} \right) = 2U_p \quad (310)$$

D'autre part, de leur différence, on obtient l'équation pour le mode antisymétrique

$$-i\omega L \left(-\frac{1}{i\omega L} - i\omega C_{eq} \right) U + i\omega LI - i\omega L \frac{-i\omega C}{2d} \left(U^s \otimes \frac{V}{-i\omega} \right) = 0 \quad (311)$$

D. Fonctionnement du transducteur avec une polarisation désaccordée

Dans cet appendice, nous calculons la matrice de répartition de l'accéléromètre passif de la section IV B dans le cas où la polarisation n'est pas résonante avec le circuit de détection. Nous montrons que l'optimum de sensibilité est obtenu pour une polarisation résonante.

Il est possible de faire ce calcul simplement lorsque le couplage capacitif est faible ($\lambda \ll 1$). Dans ce cas, on peut écrire la matrice impédance (246) pour les quadratures

$$z \simeq z^0 + \lambda z^1$$

où

$$z^0 = \begin{bmatrix} z_m & 0 & 0 \\ 0 & z_e^+ + z_e^- & i(z_e^+ - z_e^-) \\ 0 & -i(z_e^+ - z_e^-) & z_e^+ + z_e^- \end{bmatrix}$$

$$z^1 = \begin{bmatrix} 0 & -(z_e^+ + z_e^-) & -i(z_e^+ - z_e^-) \\ -2\epsilon(z_e^+ - z_e^-) & 0 & 0 \\ 2i\epsilon(z_e^+ + z_e^-) & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (312)$$

Notons que dans cette approximation la matrice λz^1 ne décrit que des termes de couplage, et les résonances ou plus en général la dynamique du système ne sont donc pas modifiées par le couplage. Dans les conditions de validité du traitement perturbatif ($\Delta \ll \varpi_e$), les impédances électriques valent

$$z_e^\pm \simeq -\frac{1}{4iC_{eq}R_e} \frac{1}{\Omega \pm \Delta} \quad (313)$$

et le coefficient de couplage

$$\lambda \simeq \sqrt{\frac{\varpi_e}{|\Omega|}} \sqrt{\frac{R_e}{H_m}} C E_0 \quad (314)$$

De la même manière que pour la matrice impédance, on peut écrire la matrice de répartition comme

$$\begin{aligned} s &= s^0 (1 + 2\lambda s^1) \\ s^0 &= \frac{z^0 - 1}{z^0 + 1} \\ s^1 &= \frac{1}{z^0 - 1} z^1 \frac{1}{z^0 + 1} \end{aligned} \quad (315)$$

La matrice s^0 correspondant aux systèmes non couplés n'est responsable que d'un déphasage des champs. Pour évaluer la sensibilité de la mesure, il suffit alors d'étudier la matrice s^1

$$s^1 = \begin{bmatrix} s_{mm}^1 & s_{me_1}^1 & s_{me_2}^1 \\ s_{e_1m}^1 & s_{e_1e_1}^1 & s_{e_1e_2}^1 \\ s_{e_2m}^1 & s_{e_2e_1}^1 & s_{e_2e_2}^1 \end{bmatrix} \quad (316)$$

Nous nous sommes placés autour de la fréquence nulle $\Omega \rightarrow 0$. Dans cette limite, nous obtenons

$$s^1 \simeq \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{z_m} \frac{1}{1+(2R_e C_{eq} \Delta)^2} & \frac{1}{z_m} \frac{2R_e C_{eq} \Delta}{1+(2R_e C_{eq} \Delta)^2} \\ \frac{2i\epsilon}{z_m} \frac{2R_e C_{eq} \Delta}{1+(2R_e C_{eq} \Delta)^2} & 0 & 0 \\ -\frac{2i\epsilon}{z_m} \frac{1}{1+(2R_e C_{eq} \Delta)^2} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (317)$$

Nous pouvons maintenant évaluer l'expression de la sensibilité de la mesure d'une force extérieure agissant sur l'oscillateur mécanique et intervenant, comme d'habitude, par la ligne de bruit mécanique. La condition de transfert maximal du signal vers l'appareil de mesure peut être décrite par le taux de transfert en puissance de la matrice $1 + 2\lambda s_1$. Pour une combinaison linéaire convenable des quadratures électriques, le taux de transfert s'écrit

$$\begin{aligned} T(\Delta) &= 4\lambda^2 \left(|s_{e_1m}^1|^2 + |s_{e_2m}^1|^2 \right) \\ &\simeq \frac{T(0)}{1 + \left(2Q_e \frac{\Delta}{\varpi_e} \right)^2} \end{aligned} \quad (318)$$

où $T(0)$ représente le taux de transfert à résonance

$$\begin{aligned} T(0) &= \left| \frac{4\lambda}{z_m} \right|^2 = 16 \frac{R_e}{R_m} \frac{\varpi_e |\Omega|}{\varpi_m^2} \frac{1}{Q_m^2} \\ R_m &= \frac{H_m}{C^2 E_0^2} \\ Q_m &= \frac{K}{H_m \varpi_m} \end{aligned} \quad (319)$$

La fonction $T(\Delta)$ présente un maximum à résonance ($\Delta = 0$).

Ce résultat reste valable pour une mesure qui prenne en compte les pertes électriques (cf. l'appendice (VIE)). Le taux de transfert dans ce cas est obtenu en opérant la transformation (328) sur la matrice $1 + 2\lambda s_1$. A partir de la matrice S transformée, le taux de transfert pour la ligne de détection d'impédance R_d vaut simplement

$$T(\Delta) = \frac{R_e}{R_d} \frac{T(0)}{1 + \left(2Q_e \frac{\Delta}{\varpi_e} \right)^2} \quad (320)$$

qui présente aussi un maximum à résonance.

E. Influence des pertes

Pour étudier l'influence des pertes électriques dans le modèle de détection passive, nous considérons le schéma correspondant à la figure 22. La ligne électrique de détection est branchée à deux lignes: la première correspond à une ligne de détection R_d et la seconde à une ligne de pertes R_p . Vues du transducteur, ces deux lignes sont équivalentes à une ligne d'impédance R_e

$$\frac{1}{R_e} = \frac{1}{R_d} + \frac{1}{R_p} \quad (321)$$

C'est seulement cette ligne équivalente qui apparaissait dans la section IV B 2. Si par contre, la détection est faite dans la voie d il faut tenir compte de l'effet de répartition lié au branchement des 3 lignes R_d , R_p et R_e (voir la discussion dans la section IV B 3). Dans cet appendice, nous traitons d'abord ce problème de répartition avant d'en discuter les conséquences pour le bruit de mesure.

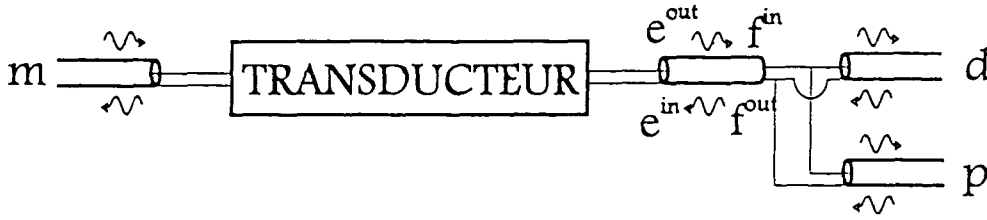


FIG. 22 - Schéma décrivant l'effet de pertes électriques sur la détection. La ligne de détection e est branchée à la sortie d'un transducteur. Elle est aussi branchée sur une ligne de détection d mise en parallèle à une ligne de pertes p . Au niveau du répartiteur, les champs de la ligne e arrivant au répartiteur et en partant sont notés f^{in} et f^{out} . Ils correspondent respectivement aux champs e^{out} et e^{in} .

Nous étudions le répartiteur adapté constitué des trois résistances obéissant à l'équation (321). Nous notons f le champ arrivant dans la ligne R_e sur le répartiteur. Les équations électriques de ce système s'écrivent

$$\begin{aligned} U_f &= U_p = U_d \\ I_f + I_p + I_d &= 0 \end{aligned} \quad (322)$$

soit aussi, en fonction des amplitudes entrantes et sortantes,

$$\begin{aligned} \sqrt{R_e} (f^{in} + f^{out}) &= \sqrt{R_p} (p^{in} + p^{out}) = \sqrt{R_d} (d^{in} + d^{out}) \\ \frac{f^{in} - f^{out}}{\sqrt{R_e}} + \frac{p^{in} - p^{out}}{\sqrt{R_p}} + \frac{d^{in} - d^{out}}{\sqrt{R_d}} &= 0 \end{aligned} \quad (323)$$

Nous en déduisons la matrice de répartition suivante

$$\begin{bmatrix} f^{out} \\ p^{out} \\ d^{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \sqrt{\frac{R_e}{R_p}} & \sqrt{\frac{R_e}{R_d}} \\ \sqrt{\frac{R_e}{R_p}} & -\frac{R_e}{R_d} & \frac{R_e}{\sqrt{R_p R_d}} \\ \sqrt{\frac{R_e}{R_d}} & \frac{R_e}{\sqrt{R_p R_d}} & -\frac{R_e}{R_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f^{in} \\ p^{in} \\ d^{in} \end{bmatrix} \quad (324)$$

Le coefficient nul signifie que le champ f^{in} est intégralement transmis dans les deux autres lignes. C'est un effet direct de la condition d'adaptation d'impédance (321).

Lorsque ce répartiteur est branché à la sortie du transducteur électromécanique, on peut identifier les champs e^{in} et e^{out} intervenant dans l'interaction avec le système mécanique et les champs f^{in} et f^{out} intervenant dans le répartiteur par l'intermédiaire d'un simple déphasage $e^{i\varphi}$ qui correspond à une propagation dans la ligne

$$\begin{aligned} f^{in} &= e^{i\varphi} e^{out} \\ e^{in} &= e^{i\varphi} f^{out} \end{aligned} \quad (325)$$

Nous déterminons ainsi immédiatement le champ arrivant sur le transducteur

$$e^{in} = e^{i\varphi} \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_p}} p^{in} + \sqrt{\frac{R_e}{R_d}} d^{in} \right) \quad (326)$$

Supposons pour simplifier que les deux lignes d et p sont à la même température. Le bruit e^{in} arrivant sur le transducteur est alors exactement le même que celui d'une seule ligne à cette température.

Etudions maintenant les relations d'entrée-sortie du système complet. Supposons la ligne e couplée à une ligne mécanique m par le transducteur. La matrice s correspondante est

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} m^{out} \\ e^{out} \end{pmatrix} &= s \begin{pmatrix} m^{in} \\ e^{in} \end{pmatrix} \\ s &= \begin{pmatrix} s_{mm} & s_{me} \\ s_{em} & s_{ee} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (327)$$

On déduit alors les équations d'entrée-sortie du système transducteur-répartiteur qui peuvent s'écrire matriciellement

$$\begin{pmatrix} m^{out} \\ p^{out} \\ d^{out} \end{pmatrix} = r^{-1} \cdot u \cdot s \cdot u \cdot r \begin{pmatrix} m^{in} \\ p^{in} \\ d^{in} \end{pmatrix} \quad (328)$$

où les matrices r , u et s représentent respectivement les effets de répartition, de déphasage dans la ligne et de diffusion sur le transducteur

$$\begin{aligned}
r &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{R_e}{R_p}} & \sqrt{\frac{R_e}{R_d}} \\ 0 & -\sqrt{\frac{R_e}{R_d}} & \sqrt{\frac{R_e}{R_p}} \end{pmatrix} \\
u &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\varphi} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
s &= \begin{pmatrix} s_{mm} & s_{me} & 0 \\ s_{em} & s_{ee} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{329}$$

Considérons maintenant que le signal d^{out} est utilisé pour mesurer une force f^{ext} superposée à m^{in} . On déduit des relations précédentes un estimateur de la force

$$\hat{f}^{ext} = f^{ext} + m^{in} + \frac{s_{ee}}{s_{em}} e^{i\varphi} \left(\sqrt{\frac{R_e}{R_p}} p^{in} + \sqrt{\frac{R_e}{R_d}} d^{in} \right) - \frac{1}{s_{em}} e^{-i\varphi} \sqrt{\frac{R_d}{R_p}} \left(-\sqrt{\frac{R_e}{R_d}} p^{in} + \sqrt{\frac{R_e}{R_p}} d^{in} \right) \tag{330}$$

Si les deux réservoirs électriques sont à la même température T_e , on en déduit le spectre du bruit ajouté sur la mesure de force

$$\Sigma_f = \sigma_m + \frac{|s_{ee}|^2 + \frac{R_d}{R_p}}{|s_{em}|^2} \sigma_e \tag{331}$$

On voit nettement sur cette formule apparaître la dégradation de performance liée au phénomène de répartition.

RÉFÉRENCES

- [1] A. Einstein, *Annalen der Physik* **17** (1905) 549.
- [2] P. Langevin, *Sur la théorie du mouvement brownien*, *Comptes Rendus* **146** (1908) 530.
- [3] M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **2** (1900) 237.
- [4] M. Planck, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **13** (1911) 138.
- [5] W. Nernst, *Verh. Deutsch. Phys. Ges.* **18** (1916) 83.
- [6] H.B. Callen and T.A. Welton, *Irreversibility and Generalized Noise*, *Phys. Rev.* **83** (1951) 34.
- [7] L. Landau and E.M. Lifshitz, *Cours de Physique Théorique: Physique Statistique, première partie* (Mir, Moscou, 1984) Chap. 12.
- [8] W. Heisenberg, *The Physical Principles of the Quantum Theory* (Dover, 1930).
- [9] J. von Neumann, *Mathematical Foundations of Quantum Mechanics* (Princeton University Press, Princeton 1955).
- [10] J. Meixner, *Thermodynamics of Electrical Networks and the Onsager-Casimir Reciprocal Relations*, *J. Math. Phys.* **4** (1963) 154.
- [11] M. Feldmann, *Théorie des réseaux et systèmes linéaires*, (Eyrolles, 1986).
- [12] L. Onsager, *Reciprocal Relations in Irreversible Processes*, *Phys. Rev.* **37** (1931) 405; **38** (1931) 2265.
- [13] H.B.G. Casimir, *On Onsager's principle of microscopic reversibility*, *Rev. Mod. Phys* **17** (1945) 343.
- [14] H. Nyquist, *Thermal agitation of electric charge in conductors*, *Phys. Rev.* **32** (1928) 110.

- [15] J.B. Johnson, Phys. Rev. **32** (1928) 97.
- [16] H. Heffner, Proc IRE **50** (1962) 1604.
- [17] H.A. Haus and J.A. Mullen, *Quantum Noise in Linear Amplifiers*, Phys. Rev. **128** (1962) 2407.
- [18] J.P. Gordon, L.R. Walker and W.H. Louisell, Phys. Rev. **130** (1963) 806.
- [19] H. Takahasi, *Advances in Communication Systems*, ed. A.V. Balakrishnan (Academic, New York, 1965) 227.
- [20] J.M.W. Milatz and J.J. Van Zolingen, *The Brownian motion of electrometers*, Physica XIX (1953) 181.
- [21] J.M.W. Milatz, J.J. Van Zolingen and B.B. Van Iperen, *The reduction in the Brownian motion of electrometers*, Physica XIX (1953) 195.
- [22] C.W. McCombie, *Fluctuation theory in physical measurements*, Rep. Prog. in Phys. **16** (1953) 266.
- [23] *Quantum Fluctuations - Proceedings of Les Houches Summer School LXIII*, eds S. Reynaud, E. Giacobino and J. Zinn-Justin (Elsevier, 1997).
- [24] J. Weber, Rev. Mod. Phys. **31** (1959) 681.
- [25] J. Weber, Phys. Rev. **117** (1960) 306.
- [26] V.B. Braginsky and Yu.I. Vorontsov, *Quantum mechanical limitations in macroscopic experiments and modern experimental techniques*, Sov. Phys. Usp. **17** (1975) 644.
- [27] K.S. Thorne, R.W.P. Drever, C.N.M. Caves, M. Zimmermann and V.D. Sandberg, Phys. Rev. Lett. **40** (1978) 667.
- [28] C.M. Caves et al., *On the measurement of a weak classical force coupled to a quantum-mechanical oscillator. I. Issues of principle*, Rev. Mod. Phys. **52** (1980) 341.
- [29] V.B. Braginsky, Yu.I. Vorontsov and K.S. Thorne, *Quantum Nondemolition Measurements*,

Science **209** (1980) 547.

- [30] V.B. Braginsky, *Sensitivity in Quantum Measurements*, in [23] p. 287.
- [31] S. Reynaud, A. Heidmann, E. Giacobino and C. Fabre, *Progress in Optics XXX*, ed. E.Wolf (Elsevier, 1992).
- [32] P. Grangier, J-F. Roch and S. Reynaud, *Quantum correlations and non-demolition measurements using two-photons non-linearities in optical cavities*, Opt. Comm. **72** (1989) 387.
- [33] P. Grangier, *Quantum Non Demolition Measurements in Optics*, in [23] p. 337.
- [34] P. Grangier, J.M. Courty and S. Reynaud, *Characterisation of non ideal quantum non demolition measurements*, Opt. Comm. **89** (1992) 99.
- [35] P. Bonifazi, C. Cinquegrana, E. Majorana, N. Pergola, P. Puppo, P. Rapagnani, F. Ricci, S. Vaselli, M. Visco *Test of a back-action-evading scheme on a cryogenic gravitational wave antenna*, Phys. Lett. A **215** (1996) 141.
- [36] M.F. Bocko and R. Onofrio, *On the measurement of a weak classical force coupled to harmonic oscillator: experimental progress*, Rev. Mod. Phys. **68** (1996) 755.
- [37] VIRGO Collaboration, *Final Design V1* (1995).
- [38] C.Fabre, *Quantum Fluctuations in Light Beams*, in [23] p. 181.
- [39] M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Quantum Limits in Interferometric Measurements*, Europhys. Lett. **13** (1990) 301.
- [40] M.T. Jaekel and S. Reynaud, *Quantum Fluctuations and Inertia* in [23] p. 499.
- [41] A. Bernard and P. Touboul, *The GRADIO accelerometer: design and development status*, Proc. ESA-NASA Workoshop on the Solid Earth Mission ARISTOTELES, Anacapri, Italy (1991).
- [42] P. Touboul et al., *Continuation of the GRADIO accelerometer predevelopment*, ONERA Final Report 51/6114PY, 62/6114PY ESTEC Contract (1992, 1993).

- [43] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, *Ann. Phys., N.Y.* **149** (1983) 374.
- [44] B. Yurke and J.S. Denker, *Quantum Network Theory*, *Phys. Rev. A* **29** (1984) 1419.
- [45] M. Devoret, *Quantum Fluctuations in Electrical Circuits*, in [23] p. 351.
- [46] J-M. Courty and S. Reynaud, *Generalized linear input-output theory for quantum fluctuations*, *Phys. Rev. A* **46** (1992) 2766.
- [47] J-M. Courty, *Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non linéaire avec un réservoir harmonique*, Thèse de Doctorat de Paris VI (1990).
- [48] R. Kubo, *The fluctuation-dissipation theorem*, *Rep. Prog. Phys.* **29** (1966) 255.
- [49] H. Mori, *Prog. Theor. Phys, Jap.* **33** (1965) 423.
- [50] C.W. Gardiner, *Quantum noise and quantum Langevin equations*, *IBM J. Res. Dev.* **32** (1988) 127.
- [51] W.G. Unruh, *Quantum nondemolition and gravity-wave detection*, *Phys. Rev. D* **19** (1979) 2888.
- [52] V.B. Braginsky and F.Ya. Khalili, *Quantum Measurement*, K. Thorne, ed. (Cambridge University Press, 1992).
- [53] J-F. Roch, G. Roger, P. Grangier, J-M. Courty and S. Reynaud, *Appl. Phys. B* **55** (1992) 291.
- [54] C. Cinquegrana, E. Majorana, P. Rapagnani and F. Ricci, *Back-action-evading transducing scheme for cryogenic gravitational wave antennas*, *Phys. Rev. D* **48** (1993) 448.
- [55] C. Cinquegrana, N. Pergola, P. Puppo, P. Rapagnani and F. Ricci, *Observation of the Brownian motion of a mechanical oscillator by means of a back action evading scheme*, *Phys. Lett. A* **180** (1993) 43.
- [56] K. Shimoda, H. Takahasi and Ch.H. Townes, *Fluctuations in Amplification of Quanta with Application to Maser Amplifiers*, *J. Phys. Soc. Jpn* **12** (1957) 686.

- [57] C.M. Caves, *Quantum limits on noise in linear amplifiers*, Phys. Rev.D **26** (1982) 1817.
- [58] R. Loudon and T.J. Shepherd, *Properties of the optical quantum amplifier*, Optica Acta **31** (1984) 1243.
- [59] E. Willemenot, *Pendule de torsion à suspension électrostatique, très hautes résolutions des accéléromètres spatiaux pour la physique fondamentale*, Thèse de Doctorat de l'université d'Orsay, Paris XI (1997).
- [60] L. Conti, *Un transduttore ottico per il rivelatore AURIGA: sensibilità prevista e misure preliminari per un prototipo*, Tesi di Laurea de l'Università de Padoue, Italie (1996).
- [61] A. Heidmann, Y. Hadjar and M. Pinard, *Quantum nondemolition measurement by optomechanical coupling*, Appl. Phys. B **64** (1997) 173.
- [62] Y. Hadjar, *Couplage optomécanique et fluctuations quantiques*, Thèse de Doctorat de Université Pierre et Marie Curie, Paris VI (en préparation, 1998).
- [63] A. Papoulis, *Probability, Random Variables and Stochastic Processes* (McGraw-Hill, New York, 1984).

LISTE DES NOTATIONS

Γ , coefficient d'amortissement, 34	τ , amplitude de transmission, 31
δw , fluctuations de la variable w , 42	χ_{AB} , susceptibilité généralisée, 121
Δw , dispersion sur w , 3	ω , pulsation (fréquence angulaire), 18
$\epsilon(w)$, fonction signe de w , 22	ω_p , pulsation de la polarisation, 45
$\delta(\omega)$, distribution de Dirac, 21	ϖ_e , fréquence (pulsation) de résonance électrique, 34
$\theta(\omega)$, fonction de Heaviside, 22	ϖ_m , fréquence propre de l'oscillateur mécanique, 9, 34
$\varkappa$, constante piézoélectrique, 32	Ω , fréquence (pulsation) d'analyse, 49
λ_e , coefficient de couplage du senseur capacitif de l'accéléromètre, 88	$a_\omega^\dagger, a_\omega$, opérateurs création et annihilation, 21
λ_s , coefficient de couplage du transducteur de rétro-action de l'accéléromètre, 88	B , bande passante, 38, 123
Λ , gain de contre-réaction, 111	C , capacité, 28
ξ , densité spectrale (commutateur), 22, 121	C_{ww} , fonction d'autocorrélation, 18, 22, 121
ρ , amplitude de réflexion, 31	D , dénominateur, 44
$\sigma_{m1,2,e1,2}$, spectres des bruits mécanique et électrique sur les quadratures, 60	$\mathcal{D}$, dénominateur, 73
σ , spectre de bruit (anticommutateur), 22	E , champ électrique, 42
σ_a, σ_c , spectres de bruit d'un ampli-op, 76	E_{el} , énergie électrostatique, 40
σ_m, σ_e , spectres de bruit mécanique et électrique, 37	F , force, 25
Σ_F, Σ_A , bruits rajoutés à l'entrée dans la mesure d'une force ou d'une accélération, 38	f , force réduite, 26
Σ_f , puissance de bruit à l'entrée sur la mesure d'une force réduite, 37	F^{ext} , force extérieure, 36
	f^{ext} , force extérieure réduite, 36
	$\hat{f}^{ext}$, estimateur réduit de la mesure d'une force extérieure, 37

F_{el} , force électrostatique, 40
 G , gain en tension d'un ampli-op, 66
 $\mathcal{G}$, coefficient d'amplification du bruit quantique, 62
 H , coefficient d'amortissement visqueux, 25
 $\hbar$, constante de Planck, 3
 I , courant, 16
 i , unité imaginaire, 18
 i , courant réduit, 24
 I^{in} , I^{out} , ondes se propageant dans la ligne coaxiale - bruit électrique entrant et sortant, 20
 I_n , bruit d'ampli-op en courant, 66
 K , raideur, 32
 k_B , constante de Boltzmann, 18
 L , inductance, 28
 M , masse, 4
 n_ω , nombre de photons thermiques, 22
 p , impulsion, 3
 $\mathcal{P}$, puissance, 20
 Q , facteur de qualité, 34
 q , charge, 28
 R , résistance, 16, 17, 19, 23
 R_a , impédance caractéristique d'un amplificateur opérationnel, 66
 R_m , résistance équivalente mécanique, 105
 s , matrice de diffusion, 30
 SNR , rapport signal sur bruit, 123
 T , température, 18
 t , temps, 4
 T_m , T_e , températures de bruit mécanique et électrique, 37
 U , tension, 17
 u , tension réduite, 24
 U_N , bruit Nyquist en tension, 17
 U_n , bruit d'ampli-op en tension, 66
 U_p , U_p^0 , tension de polarisation et son amplitude, 41
 V , vitesse, 25
 v , vitesse réduite, 26
 V^{in} , bruit mécanique, 25
 $w[\omega]$, transformée de Fourier de $w(t)$, 18
 $w^{in}[\omega]$, champ réduit entrant, 21
 $w^{out}[\omega]$, champ réduit sortant, 24
 w_+ , w_- , amplitudes complexes de w , 48
 w_0 , point de fonctionnement, 42
 w_1 , w_2 , quadratures, 9, 53
 w_C , variable de couplage, 42
 x , position, 3

Y , admittance, 28

y , matrice admittance réduite, 29

z , matrice impédance réduite, 29

Z_{me} , H_{me} , impédance et coefficient d'amortissement mécaniques dus à la contre-réaction électrique, 90

z_{me} , impédance de couplage réduite, 35

Z_m, Z_e , impédances mécanique et électrique, 47

z_m, z_e , impédances réduites mécanique et électrique, 35

$\tilde{Z}$, impédance mixte, réactive et dissipative, 74

Résumé

Les fluctuations sont présentes dans toute *mesure* et elles en limitent la *sensibilité ultime*. Ceci est vrai en particulier pour les fluctuations de nature fondamentale qui correspondent au *bruit thermique* et au *bruit quantique*.

Un premier objectif de cette thèse a été le développement d'une méthode générale qui permette le traitement de ces fluctuations dans des systèmes de mesure comportant des éléments passifs et des éléments actifs remplissant des fonctions d'*amplification* ou de *contre-réaction*. Cette méthode, basée d'une part sur la théorie des réseaux, d'autre part sur le formalisme quantique de la matrice S, s'applique aux systèmes *linéaires* et, plus généralement, aux systèmes linéarisables autour du point de fonctionnement. Elle peut prendre en compte toutes les sources de bruit et décrit donc la *non-idéalité* de la mesure. Son caractère *modulaire* se prête bien au traitement des systèmes complexes.

Un deuxième objectif a été l'étude des effets des fluctuations quantiques et thermiques sur la sensibilité des mesures électromécaniques. Le bruit dans ces systèmes, habituellement dominé par les fluctuations thermiques, s'est rapproché du niveau quantique, sous la pression des expériences nécessitant de très hautes sensibilités (*détection des ondes gravitationnelles*, *test du principe d'équivalence dans l'espace*) et grâce aux développements technologiques dans le domaine cryogénique. La méthode développée dans cette thèse fournit un cadre théorique consistant pour traiter fluctuations quantiques et thermiques dans ces systèmes. Des résultats précis ont été obtenus pour un *accéléromètre* conçu par l'ONERA pour des expériences de *physique fondamentale* dans l'espace et qui présente la particularité d'utiliser un mécanisme de *friction froide*. Ces résultats permettent d'estimer les limites ultimes de sensibilité d'un tel instrument.

Mots-clés : Fluctuations quantiques et thermiques, Systèmes actifs, Transducteurs électromécaniques, Accéléromètres, Friction froide, Rétro-action, Théorie des réseaux, Mesure QND et BAE.

Abstract

Fluctuations are present in any measurement and determine the *ultimate sensitivity*. This is particularly true for the fundamental fluctuations, namely *thermal and quantum noise*.

The first objective of this thesis has been to develop a general method allowing us to treat measurement systems consisting of passive elements and active ones, the latter being used for *amplification* and *feedback*. This method, based on network theory and on the quantum scattering matrix formalism, is applicable to *linear systems* and, in a more general case, to systems linearisable around the working point. It can take into account all noise sources and can, therefore, describe accurately a *non ideal*, real, measurement. Its *modular* character is well-adapted for the treatment of complex systems.

The second objective has been to study the influence of quantum and thermal fluctuations on electromechanical measurements. The noise in such systems is usually dominated by thermal fluctuations, but has been pushed towards the quantum limits by ambitious experimental studies requiring very high sensitivity (*detection of gravitational waves*, *test of the equivalence principle in outer space*) and due to the technological development in the field of cryogenics. The method developed in this thesis provides a consistent theoretical framework for the treatment of quantum and thermal fluctuations in these systems. In particular, results have been obtained for an *accelerometer* developed at ONERA for *fundamental physical experiments* in space, which has the specific feature of employing the mechanism of *cold damping*. The results allow for an estimate of the ultimate sensitivity limits of such an instrument.

Key words : Quantum and thermal fluctuations, Active systems, Electromechanical transducers, Accelerometer, Cold Damping, Feedback, Network theory, QND and BAE measurement.