



**HAL**  
open science

# Refroidissement laser subrecul au nanokelvin : mesure directe de la longueur de cohérence spatiale. Nouveaux tests des statistiques de Lévy.

Bruno Saubamea

## ► To cite this version:

Bruno Saubamea. Refroidissement laser subrecul au nanokelvin : mesure directe de la longueur de cohérence spatiale. Nouveaux tests des statistiques de Lévy.. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1998. Français. NNT: . tel-00011778

**HAL Id: tel-00011778**

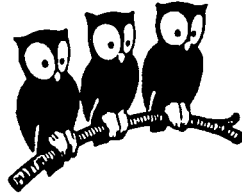
**<https://theses.hal.science/tel-00011778>**

Submitted on 7 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
LABORATOIRE KASTLER BROSEL



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
spécialité: Physique Quantique

présentée par  
Bruno SAUBAMEA

pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université Paris VI

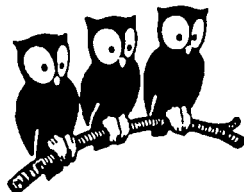
Sujet de la thèse :

**REFROIDISSEMENT LASER SUBRECU AU NANOKELVIN**  
Mesure directe de la longueur de cohérence spatiale. Nouveaux tests  
des statistiques de Lévy.

Soutenue le 07 Décembre 1998 devant le jury composé de :

Mme.	C. LHUILLIER	Président
M.	A. ASPECT	Rapporteur
M.	C. CHARDONNET	Rapporteur
M.	B. GIRARD	Examineur
M.	M. LEDUC	Examineur
M.	C. COHEN-TANNOUJJI	Directeur de thèse

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



THÈSE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITÉ PARIS VI  
spécialité : Physique Quantique

présentée par  
Bruno SAUBAMEA

pour obtenir le titre de  
Docteur de l'Université Paris VI

Sujet de la thèse :

**REFROIDISSEMENT LASER SUBRECU AU NANOKELVIN**  
Mesure directe de la longueur de cohérence spatiale. Nouveaux tests  
des statistiques de Lévy.

Soutenue le 07 Décembre 1998 devant le jury composé de :

Mme.	C. LHUILLIER	Président
M.	A. ASPECT	Rapporteur
M.	C. CHARDONNET	Rapporteur
M.	B. GIRARD	Examineur
M.	M. LEDUC	Examineur
M.	C. COHEN-TANNOUJJI	Directeur de thèse

**Bismi-l-lâhi-r-raḥmâni-r-raḥîm**

Au nom d'Allah, le Tout Miséricordieux, le Très Miséricordieux



# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>9</b>
<b>I Traitement quantique des degrés de liberté externes d'un atome</b>	<b>17</b>
I.1 Description de l'état des variables externes d'un atome par l'opérateur-densité . . . . .	17
I.1.1 L'opérateur densité . . . . .	19
I.1.2 Quelques états possibles . . . . .	22
I.1.3 Etude dynamique : atome en évolution libre . . . . .	33
I.1.4 Longueurs caractéristiques . . . . .	36
I.2 Applications à une source d'atomes froids et piégés . . . . .	39
I.2.1 Populations et cohérences dans un nuage d'atomes froids .	39
I.2.2 Ordres de grandeur et approximations . . . . .	41
I.3 Analogie avec l'optique classique . . . . .	44
I.3.1 Spectre et cohérence d'une source lumineuse classique . . .	44
I.3.2 Spectroscopie de Fourier . . . . .	45
I.3.3 De l'optique classique à la physique atomique . . . . .	46
<b>II Le refroidissement subrecul par résonances noires</b>	<b>49</b>
II.1 Principe général du refroidissement subrecul . . . . .	49
II.2 Théorie simple du refroidissement VSCPT . . . . .	53
II.2.1 Description du système étudié . . . . .	53
II.2.2 Description qualitative de la dynamique du refroidissement	62
II.3 Dynamique des paquets d'ondes . . . . .	67
II.3.1 Effet de la lumière . . . . .	68
II.3.2 Interprétation du gel des paquets d'ondes par la lumière .	73
II.3.3 Calcul exact dans le cas de paquets d'ondes gaussiens . . .	78
<b>III Spectroscopie de Fourier des paquets d'ondes atomiques</b>	<b>85</b>
III.1 Spectroscopie de Fourier de paquets d'ondes obtenus par VSCPT	87

---

III.1.1	Principe . . . . .	87
III.1.2	Calcul théorique . . . . .	92
III.1.3	Principe de la mesure expérimentale de $\mathcal{F}_{NC}$ . . . . .	100
III.2	Contraintes expérimentales . . . . .	101
III.2.1	Impulsion d'analyse . . . . .	101
III.2.2	Rôle et influence du champ magnétique . . . . .	101
III.2.3	Effet d'une variation de la phase du champ lumineux . . . . .	118
<b>IV</b>	<b>Présentation du montage expérimental</b> . . . . .	<b>131</b>
IV.1	Montage expérimental . . . . .	131
IV.1.1	Le jet d'atomes d'hélium métastable . . . . .	134
IV.1.2	Ralentissement et piégeage des atomes . . . . .	137
IV.1.3	Les sources lasers . . . . .	141
IV.1.4	Séquence temporelle . . . . .	143
IV.1.5	Détection des atomes . . . . .	146
IV.2	Compensation du champ magnétique . . . . .	154
IV.2.1	L'effet Hanle mécanique . . . . .	156
IV.2.2	Procédure expérimentale de compensation . . . . .	162
IV.3	Mesure <i>in situ</i> de la pulsation de Rabi . . . . .	166
IV.3.1	Principe et calcul théorique . . . . .	166
IV.3.2	Mise en œuvre expérimentale . . . . .	171
IV.4	Mesure de la taille du piège . . . . .	174
IV.4.1	Principe et calcul . . . . .	174
IV.4.2	Réalisation expérimentale . . . . .	176
<b>V</b>	<b>Nouvelle mesure de la température</b> . . . . .	<b>179</b>
V.1	Mesure de la température par temps de vol . . . . .	179
V.2	Mise en œuvre expérimentale de la nouvelle méthode . . . . .	186
V.2.1	Dépouillement et extraction de $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$ . . . . .	187
V.2.2	Résultats . . . . .	190
V.3	Effet de la taille du piège . . . . .	192
V.4	Etude de l'influence des paramètres . . . . .	199
V.4.1	Résultats et discussion qualitative . . . . .	199
V.4.2	Comparaison quantitative avec les résultats de la simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai. . . . .	203
<b>VI</b>	<b>Etude fine de la forme de raie</b> . . . . .	<b>209</b>
VI.1	Motivation et but de ce chapitre . . . . .	209
VI.2	Présentation du modèle . . . . .	211
VI.2.1	Cadre général du modèle . . . . .	211
VI.2.2	Taux de fluorescence et marche au hasard . . . . .	212

---

VI.3 Marche au hasard dans l'espace des impulsions. . . . .	217
VI.3.1 Analyse statistique de la marche au hasard . . . . .	218
VI.3.2 Loi d'arrosage . . . . .	222
VI.4 Calcul de la distribution d'impulsion . . . . .	224
VI.4.1 Cas général . . . . .	224
VI.4.2 Modèle déterministe . . . . .	225
VI.4.3 Modèle probabiliste . . . . .	229
VI.4.4 Analyse de la forme de raie . . . . .	232
VI.4.5 Comparaison avec les simulations Monte-Carlo quantiques	236
VI.4.6 Discussion . . . . .	239
VI.5 Fonction d'autocorrélation spatiale . . . . .	240
VI.6 Résultats expérimentaux . . . . .	243
VI.6.1 Première analyse . . . . .	243
VI.6.2 Retour sur certaines approximations . . . . .	245
VI.6.3 Analyse complète du signal . . . . .	249
VI.6.4 Comparaison avec une décroissance exponentielle . . . . .	251
<b>VII Interférométrie temporelle de paquets d'ondes atomiques</b>	<b>257</b>
VII.1 Principe . . . . .	257
VII.2 Calcul théorique . . . . .	261
VII.3 Résultats expérimentaux . . . . .	263
<b>Conclusion</b>	<b>269</b>
<b>A Modes propres d'un système en <math>\Lambda</math> en présence de lumière</b>	<b>275</b>
A.1 Hamiltonien du système dans la base de l'atome habillé . . . . .	276
A.2 Modes propres du système . . . . .	278
A.2.1 Perturbation par le couplage laser . . . . .	279
A.2.2 Perturbation par le couplage motionnel . . . . .	280
<b>B Théorème de la limite centrale généralisé et lois de Lévy</b>	<b>283</b>
<b>C "Direct Measurement of the Spatial Correlation Function of Ultracold Atoms"</b>	
B. Saubaméa <i>et al</i> , Phys. Rev. Lett., <b>79</b> , 3146 (1997).	287



# Remerciements

Ce travail de thèse a commencé au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole normale supérieure à une époque où Jacques Dupont-Roc en était directeur. Je tiens à lui exprimer mes remerciements, non seulement pour m'avoir accueilli dans son laboratoire mais aussi pour la gentillesse et la disponibilité qu'il ne manque jamais de manifester quand on s'adresse à lui. Le laboratoire ayant été rebaptisé, ma thèse s'est achevée au Laboratoire Kastler Brossel, dirigé par Michèle Leduc, que j'ai pu apprécier non seulement comme directeur de laboratoire mais également comme codirecteur de thèse.

C'est Claude Cohen-Tannoudji qui m'a proposé de commencer une thèse sous sa direction. Par la suite, Michèle Leduc a rejoint son groupe et a assuré la codirection de ma thèse avec Claude. Les personnalités très complémentaires de Claude et Michèle ont fait de cette direction bicéphale un avantage indéniable.

Comme tous les gens qui ont eu le privilège de travailler avec Claude, je ne peux que me déclarer impressionné par sa connaissance extrêmement profonde de la physique atomique et de la mécanique quantique. Les discussions scientifiques avec lui ont toujours été un vrai bonheur tant les images physiques, les explications originales et les idées nouvelles foisonnent. Grâce à lui, la physique s'anime, devient vivante, lumineuse et somme toute familière. Les gens qui travaillent avec lui savent sa simplicité et sa disponibilité constantes malgré un emploi du temps de plus en plus chargé depuis un certain jour de Décembre 1997. Je ne saurai le remercier assez de m'avoir donné la chance de travailler avec lui et d'avoir consacré autant de temps à discuter avec moi en particulier au cours de la rédaction de ma thèse.

Dès son arrivée dans le groupe, Michèle a toujours été très impliquée dans mon travail de thèse. Ses idées originales, puisées dans une vaste culture scientifique au-delà même du refroidissement laser, et son optimisme imperturbable ont très souvent été d'un grand secours, en particulier dans les périodes, malheureusement assez fréquentes, où les expériences semblaient faire du sur place. J'ai beaucoup apprécié le soutien permanent dont elle a fait preuve, y-compris au cours des nombreuses nuits de manip où elle n'hésitait pas à mettre les mains dans le cambouis de la physique expérimentale. Enfin, son souci de clarté et son sens

critique très aigu ont beaucoup contribué à la rédaction de ma thèse.

Je ne peux repenser à ma première année de recherche dans ce groupe sans remercier François Bardou et Alain Aspect qui ont joué un rôle considérable dans mon initiation à la recherche expérimentale en physique atomique. A travailler jour et nuit avec François, j'ai appris la précision et la patience, l'acharnement et l'importance des détails apparemment anodins, toutes choses sans lesquelles la recherche reste stérile. Alain m'a toujours impressionné par son inventivité expérimentale et sa grande culture scientifique. Sa connaissance très approfondie de l'optique lui permet toujours de donner des images physiques simples de processus complexes en utilisant cet outil merveilleux dont j'ai appris le maniement dans le groupe de Claude, l'analogie. Au-delà de mon admiration, je tiens à exprimer ici mon amitié profonde et ma gratitude envers François et Alain, qui ont toujours été très disponible à mon égard et dont j'ai pu apprécier à plusieurs reprises les qualités humaines.

Malgré leurs agendas surchargés, Alain Aspect et Christian Chardonnet ont très gentiment accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Je leur suis très reconnaissant du travail méticuleux qu'ils ont fait en relisant le manuscrit dans ses moindres détails. Cette thèse leur doit beaucoup.

Une partie du travail présenté ici a été fait en collaboration avec d'autres chercheurs et je tiens à les associer étroitement à ces résultats. Que ce soit avec Simone Kulin et John Lawall, qui ont travaillé plusieurs années au laboratoire ou avec Tom Hijmans, Ekkehard Peik ou Ernst Rasel, qui ont participé avec entrain aux expériences les plus récentes, je crois pouvoir dire que la "manip hélium" a toujours eu à son chevet une équipe soudée et enthousiaste. Je remercie sincèrement tous ces compagnons dont la solidarité ne s'est jamais démentie, tant dans les moments de déprime où la physique s'entête à nous donner tort, que dans les instants magiques où elle livre enfin les signaux attendus sur l'écran des ordinateurs.

Au-delà des expériences, l'ambiance quotidienne du groupe de refroidissement laser doit tout aux gens qui y travaillent. Les membres permanents, Christophe Salomon, Jean Dalibard et Yvan Castin, sont toujours disponibles pour répondre aux questions et faire profiter les thésards de leur longue expérience de la recherche. Je les remercie vivement de m'avoir souvent évité de longues heures de tâtonnement par un conseil judicieux ou une discussion devant la machine à café. C'est également auprès des "jeunes" du groupe (formule consacrée que je n'utilise que parce que j'en fait encore partie), que j'ai souvent trouvé des réponses, des idées ou des encouragements. Les discussions permanentes entre nous, favorisées par une promiscuité qui n'a finalement pas que des inconvénients, sont une des richesses de ce groupe. Merci donc à Markus Arndt, Maxime Dahan, Denis Boiron, Isabelle Bouchoule, Philippe Bouyer, Frédéric Chevy, Pierre Desbiolles, Gabriele Ferrari, David Guéry-Odelin, Axel Kuhn, Pierre Lemonde, Marc Oliver Mewes, Francesco

---

Pavone, Hélène Perrin, Jakob Reichel, Florian Schreck, Johannes S  ding, Pippa Storey, Pascal Szriftgiser.

Le laboratoire Kastler-Brossel ne serait rien sans ses ateliers, sa bibliothèque ou son secrétariat. Je remercie tous ceux qui assurent cette logistique indispensable à l'avancée de la recherche, en particulier Lionel Perennes, Patrick Giron et André Clouqueur de l'atelier d'électronique, Jean Outrequin, Jean Lagadec et Jean-Claude Guillaume de l'atelier de mécanique, Didier Courtiade et Jean-François Point du service plomberie, Monique Brouat, Jean Auquier et Dominique Giafferi de la bibliothèque, Zaïre Dissi et Thierry Besançon du service informatique ainsi que Michèle Sanchez, Zohra Ouassyoun et Geneviève Piard qui, malgré tout, adorent l'équipe 6....

Le mot de la fin va à tous ceux qui n'ont cessé de me soutenir, non seulement au cours de ma thèse, mais aussi tout au long de mes études et de mon parcours depuis Case-Pilote jusqu'à la rue d'Ulm. Je pense bien sûr à mes parents, mon frère et ma grand-mère dont l'amour et le soutien n'ont pas une seule fois été mis en défaut, dans les moments de joie comme dans les heures les plus tristes. C'est avant tout à eux que je dédie cette thèse. Je suis très heureux qu'une grande partie de ma famille soit venue assister à la soutenance, parfois de très loin, et je les remercie sincèrement d'avoir fait de cet exercice un peu formel une occasion de réunir parents, oncles, tantes et cousins. La famille s'étendant parfois au delà des liens du sang, je tiens à remercier Brigitte et Pierre, dont le soutien et l'affection inconditionnels ont toujours été d'un grand secours. Ceux qui ont suivi mon parcours savent que cette thèse n'existerait probablement pas si je n'avais pas rencontré Brigitte il y a bientôt 10 ans jour pour jour. Fatima, Haddouche, Aziz, Da-Omar, Hichem, Karim, Amel, Sa  da et Si-Mohammed m'ont toujours soutenu au cours des dernières années, je les remercie tous du fond du cœur. Je termine en adressant une pensée à Monique, Jean-Claude, Gilles et Na-Aghnima, qui se réjouissent certainement de l'aboutissement de ce travail et qui, à leur façon, y ont aussi contribué. Qu'Allah leur accorde la miséricorde.





# Introduction

Le refroidissement d'atomes par laser est un domaine extrêmement actif de la physique moderne. En utilisant astucieusement les aspects les plus variés de ce qu'il est convenu d'appeler l'interaction matière-rayonnement, il permet de piéger et de refroidir des échantillons de quelques milliers à plusieurs millions d'atomes jusqu'à des températures qui ne sont qu'à un milliardième de Kelvin au-dessus du zéro absolu.

On pourrait penser qu'à des températures aussi basses, tous les phénomènes physiques soient progressivement "gelés" et qu'il y ait bien peu d'intérêt à étudier de tels systèmes. C'est pourtant tout le contraire. Lorsqu'on descend l'échelle des ordres de grandeur, une physique à la fois passionnante et foisonnante se révèle. De nouveaux états de la matière apparaissent. Les atomes, englués dans des mélasses optiques [11], se déplacent plus lentement que des fourmis. Placés dans des conditions adéquates, ils se cristallisent au sein de réseaux de lumière réalisant ainsi un nouvel état intermédiaire entre un solide cristallin et un gaz sans interaction [12, 13]. Soumis à l'action de plusieurs ondes lasers correctement choisies, un atome unique se démultiplie en plusieurs paquets d'ondes qui peuvent être séparés par des distances macroscopiques, mettant ainsi en évidence, de manière spectaculaire, un aspect éminemment quantique de la matière [22]. Lorsque l'utilisation habile d'un champ magnétique inhomogène et d'un nouveau mécanisme de refroidissement, le refroidissement évaporatif, viennent compléter le refroidissement par laser, les atomes atteignent des températures tellement basses qu'une transition de phase vers un nouvel état de la matière peut avoir lieu. Les atomes se condensent alors tous dans un seul état quantique dont la population devient macroscopique, réalisant ainsi un condensat de Bose-Einstein [14]. Nous n'avons cité là que quelques exemples parmi les plus marquants mais l'étude, et de plus en plus les applications, des atomes refroidis par laser sont à l'heure actuelle un domaine en expansion constante.

L'idée générale à la base du refroidissement par laser est la possibilité que présente la lumière d'exercer des effets mécaniques sur des atomes. Ceci a été mis pour la première fois en évidence en 1933 lorsque R. Frisch découvrit qu'il

pouvait défléchir un jet d'atomes de sodium à l'aide de la lumière émise par une lampe à sodium [4]. Il apportait ainsi la preuve expérimentale de l'idée, émise une quinzaine d'années auparavant en 1917 par A. Einstein, que le photon transporte non seulement de l'énergie mais aussi de l'impulsion. Lorsqu'un atome absorbe ou émet un photon, son impulsion est modifiée et l'atome subit donc une force de la part de la lumière. Cependant, du fait de la quantification des niveaux d'énergie d'un atome, ces phénomènes ne peuvent se produire que lorsque la fréquence de la lumière est proche d'une fréquence propre de l'atome. L'apparition du laser au début des années 60, a donc été un moteur très puissant de développement de ce secteur de recherche, puisqu'il permettait d'obtenir des faisceaux lumineux cohérents, très intenses et pratiquement monochromatiques. En adaptant la longueur d'onde de ces lasers aux transitions atomiques, il devenait possible de contrôler précisément l'interaction entre la lumière et les atomes. Depuis, le refroidissement laser s'est développé sans discontinuer.

Le premier mécanisme de refroidissement, basé sur l'effet Doppler, est proposé en 1975 par Hänsch et Schawlow pour les atomes neutres [6] et par Wineland et Dehmelt pour les ions piégés [7]. Au début des années 80, la possibilité de ralentir et d'arrêter pratiquement un jet atomique est démontrée [8, 9, 10]. En 1985 est réalisée la première mélasse optique [11] dans laquelle les atomes sont soumis à une force de friction importante qui amortit rapidement leur mouvement et abaisse leur température jusqu'à une valeur proche de la limite prévue par la théorie du refroidissement Doppler. Commence alors à apparaître le problème de la détermination de la température pour ces échantillons très froids. La première méthode de mesure de la température, dite de "release and recapture" [11], est rapidement remplacée par une technique qui va s'imposer comme la méthode de référence et qui est encore la plus largement utilisée à l'heure actuelle, la méthode du "temps de vol" [19]. Cette méthode va en particulier permettre de démontrer que les températures atteintes dans les mélasses optiques sont en réalité beaucoup plus basses que celles initialement mesurées et donc très en deçà de la limite Doppler. Ceci trouvera son explication dans la découverte des mécanismes de refroidissement sub-Doppler [17, 18], communément appelés nouveaux mécanismes. Enfin, apparaît dans le même temps ce qui deviendra rapidement un élément clé des expériences de refroidissement laser : le piège magnéto-optique. Proposé par J. Dalibard en 1986, il fut expérimentalement démontré un an plus tard aux laboratoires Bell [20] et représente depuis la source d'atomes froids la plus répandue dans le monde.

Une fois franchie la limite Doppler, une autre limite, beaucoup plus fondamentale, est rapidement apparue : la limite du recul. Dans tous les mécanismes de refroidissement que nous venons d'évoquer, la friction qui amortit le mouve-

ment des atomes résulte d'une interaction incessante entre ceux-ci et la lumière. L'émission spontanée a un rôle central dans ces processus car c'est elle qui introduit la dissipation et qui permet d'évacuer vers les modes vides du champ, l'énergie cinétique prélevée sur l'atome. Mais l'effet de l'émission spontanée est double car, de par son caractère aléatoire, elle introduit également une marche au hasard dans l'espace des impulsions avec un pas élémentaire de l'ordre de l'impulsion de recul :

$$p_R = \hbar k \quad (.1)$$

Cette valeur est simplement l'impulsion d'un photon de vecteur d'onde  $k$  et représente donc l'impulsion acquise par un atome initialement au repos, lorsqu'il absorbe ou émet un seul photon. On conçoit facilement que l'impulsion d'un atome qui interagit continuellement avec la lumière ne puisse être définie à mieux que  $\hbar k$ . La température cinétique associée à cette impulsion est appelée **température de recul** et se définit par :

$$\frac{1}{2} k_B T_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (.2)$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $M$  la masse de l'atome considéré. La valeur  $T_R$  apparaît donc comme une limite ultime des processus de refroidissement reposant sur une interaction continue des atomes avec la lumière.

Puisque cette limite résulte de l'émission spontanée, le seul moyen de la contourner est de supprimer celle-ci, c'est-à-dire de placer les atomes dans des états quantiques où ils sont découplés de la lumière. De tels **états noirs** étaient déjà connus depuis longtemps. Le pompage optique sur des transitions  $J \leftrightarrow J$  et  $J \leftrightarrow J - 1$  avec une onde lumineuse polarisée circulairement avait déjà montré la possibilité d'accumuler les atomes dans des états découplés de la lumière à la fin des années 60 [15]. La notion d'états noirs proprement dite est introduite pour la première fois en 1976 par G. Alzetta et A. Gozzini [16]. Ces auteurs montrent qu'en éclairant des atomes avec deux lasers de fréquence  $\nu$  et  $\nu + \Delta\nu$ , en présence d'un champ magnétique, il existe une valeur de  $\Delta\nu$  pour laquelle les amplitudes des deux transitions correspondantes peuvent interférer destructivement si bien que l'atome n'est plus couplé à la lumière.

Mais le seul fait qu'il existe des états découplés de la lumière n'est pas suffisant. Il s'agit en effet ici de refroidir les atomes en dessous de la température de recul, c'est-à-dire d'augmenter la fraction d'atomes dont la vitesse est inférieure à la vitesse de recul. Pour cela, seuls les atomes très froids (statistiquement il y en a toujours une petite fraction) doivent pouvoir être pompés dans des états noirs et y restés piégés tandis que les autres doivent continuer à diffuser jusqu'à éventuellement atteindre une vitesse assez faible pour être à leur tour découplés

de la lumière et piégés dans les états noirs. Pour pouvoir servir au refroidissement laser, les états noirs doivent donc présenter cette caractéristique très importante d'être **sélectifs en vitesse**, c'est-à-dire d'être découplés de la lumière uniquement lorsque la vitesse de l'atome est quasiment nulle. On voit ainsi apparaître les deux notions essentielles du refroidissement subrecul : le piégeage ou **filtrage** des atomes de vitesse très faible dans des états découplés de la lumière et le **recyclage** des atomes dont la vitesse est élevée par une marche au hasard diffusive qui leur donne une chance de tomber au voisinage de la vitesse nulle.

Bien qu'il ne soit pas le premier schéma de refroidissement subrecul à avoir été proposé [21], le Piégeage Cohérent de Population Sélectif en Vitesse ou PCPSV, plus connu sous son abréviation anglaise de VSCPT, est le premier à avoir connu un réel développement. Mis en évidence sur des atomes d'hélium métastables en 1988 par A. Aspect *et al.* dans notre groupe à Paris [22], il a permis la première observation d'une température inférieure à la température de recul. Le principe fondamental de ce mécanisme est l'existence pour certaines transitions du type  $J \leftrightarrow J$  d'une interférence quantique destructive entre deux amplitudes de transition menant de l'état fondamental à l'état excité. Cette interférence ne peut se maintenir au cours du temps que pour les atomes dont la vitesse est pratiquement nulle, ce qui introduit la sélectivité en vitesse dans le processus. Les autres ( $v \neq 0$ ) diffusent librement dans l'espace des vitesses jusqu'à tomber par hasard au voisinage de  $v = 0$  où ils peuvent rester piégés. Le point clé est donc l'inhomogénéité du taux de fluorescence des atomes qui s'annule en  $v = 0$  en présentant une résonance étroite, d'où le nom de "refroidissement par résonances noires" également donné au refroidissement VSCPT. Une des caractéristiques de ce mécanisme est que la température des atomes peut décroître indéfiniment sans limite autre que celle introduite par d'éventuels processus de pertes parasites. Seul compte le temps d'interaction  $\theta$  des atomes avec la lumière et **la température peut théoriquement tendre vers 0 si  $\theta$  tend vers l'infini.**

La version initiale de l'expérience était réalisée à une dimension sur un jet atomique et ne permettait d'obtenir qu'un temps d'interaction très réduit. Cela fut néanmoins suffisant pour mettre clairement en évidence le refroidissement subrecul et une température de  $\simeq T_R/2$  soit  $2 \mu\text{K}$  fut obtenue. La mise au point d'un piège magnéto-optique d'hélium métastable a ensuite permis d'augmenter considérablement le temps d'interaction et donc de pousser beaucoup plus loin le refroidissement. Dans le même temps des schémas théoriques d'extension de cette méthode à deux et à trois dimensions ont été proposés [23, 24, 25] puis démontrés expérimentalement [28, 66, 41, 77].

L'autre mécanisme subrecul qui a été expérimentalement démontré est le refroidissement Raman, mis en évidence pour la première fois par M. Kasevich *et*

*al.* à Stanford [29] sur des atomes de Césium. Bien que le principe de base soit le même, la combinaison entre un filtrage des atomes de vitesse  $v = 0$  et un recyclage des atomes de vitesse non nulle, le mécanisme utilisé est assez différent de celui du VSCPT. Tirant parti de la grande sélectivité des transitions Raman entre deux sous-niveaux hyperfins de l'état fondamental, ce processus utilise une succession d'impulsions dont le désaccord et l'intensité sont ajustés de manière à reconstituer un taux de fluorescence inhomogène s'annulant en  $v = 0$ . Des températures de l'ordre de  $T_R/100$  ont été atteintes à une dimension [31]. A deux et trois dimensions en revanche, le refroidissement Raman permet d'abaisser significativement la température d'un nuage d'atomes libres sans pourtant atteindre tout-à-fait le régime subrecul [32]. Notons cependant qu'à 3D, il est possible de généraliser le mécanisme à des atomes non plus libres mais confinés dans un piège dipolaire très désaccordé et d'atteindre ainsi un régime légèrement subrecul [33].

Avec le développement important du refroidissement subrecul et la possibilité d'atteindre ainsi des températures très inférieures au  $\mu\text{K}$  est apparue une nouvelle exigence. Comment mesurer précisément la dispersion de vitesse et donc la température de ces atomes ultrafroids? De même que la méthode de "release and recapture" s'était révélée trop imprécise pour mesurer correctement la température dans les mélasses optiques et avait dû être remplacée par la technique du temps de vol, cette dernière présente une résolution insuffisante pour mesurer précisément des températures nettement subrecul.

Le principe du temps de vol est simple. Une fois que les lasers de refroidissement ont été coupés, le nuage d'atomes tombe en chute libre dans le champ de gravité. Du fait de la dispersion initiale des vitesses des atomes  $\delta v$ , il subit dans le même temps, une expansion ballistique. La distribution de vitesse initiale se transforme ainsi en un profil de positions de largeur  $\delta x$ . Connaissant le temps de vol libre des atomes, on peut, de la mesure de  $\delta x$ , déduire la valeur de  $\delta v$  et donc de la température. Cette méthode, très largement utilisée, a pourtant une limite évidente liée à la taille initiale  $\delta x_0$  du nuage atomique. Celle-ci donne une contribution fixe au profil détecté et limite la résolution de la méthode. En particulier, lorsque la température des atomes devient tellement basse que la contribution cinétique est beaucoup plus petite que la taille du piège, la méthode de temps de vol s'avère complètement inutilisable car beaucoup trop imprécise. Bien que dans la plupart des expériences de refroidissement laser, les températures atteintes soient suffisamment élevées pour pouvoir être mesurées correctement par temps de vol, ceci n'est plus le cas pour les expériences de refroidissement subrecul qui requièrent le développement de nouvelles méthodes.

Dans le cadre du refroidissement Raman, M. Kasevich *et al.* ont proposé en 1991 une méthode originale pour mesurer la température [30]. L'idée est de

réaliser la spectroscopie d'une transition Raman à l'aide de deux faisceaux contrapropageants et de déduire la largeur de la distribution de vitesse de la largeur de raie mesurée. Cette méthode a ainsi permis de mesurer des températures de l'ordre de  $T_R/80$  pour des atomes de césium soit environ 2.5 nK. Elle présente cependant un double désavantage. D'une part le profil des impulsions Raman utilisées limite sa résolution à environ  $v_R/20$ . Par ailleurs cette méthode est très bien adaptée pour le refroidissement Raman mais ne peut se généraliser à des atomes ne présentant pas, comme le césium, deux niveaux stables connectés par une transition Raman. Elle est en particulier inutilisable pour l'hélium.

Cette thèse présente une méthode entièrement nouvelle de détermination de la température et, au-delà, de la forme détaillée de la distribution d'impulsion. Cette méthode est basée sur un principe très général en physique qui veut que, lorsque la distribution d'une grandeur est trop étroite pour pouvoir être mesurée avec précision, il est souvent avantageux d'en mesurer la transformée de Fourier. Ceci est par exemple largement utilisé en optique photonique où la détermination de la densité spectrale  $I(\omega)$  d'une source lumineuse hautement monochromatique se fait souvent via la mesure de la fonction d'autocorrélation temporelle  $G(t)$ , qui n'est autre que la transformée de Fourier de  $I(\omega)$ . C'est une méthode très analogue que nous avons mise au point pour mesurer la distribution d'impulsion d'atomes d'hélium refroidis par VSCPT à 1D. Nous avons pour cela tiré parti du fait que ces atomes se trouvent dans des états particuliers, qui sont des superpositions linéaires de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées. Dès la fin de la phase de refroidissement, ces deux paquets d'ondes se séparent donc l'un de l'autre. En mesurant comment leur recouvrement décroît au cours du temps, nous accédons directement à la fonction d'autocorrélation spatiale atomique  $\mathcal{F}(\xi)$  dont la transformée de Fourier est la distribution d'impulsion  $G(p)$ . Le signal ainsi obtenu ne dépend pas de la position initiale de l'atome et n'est donc pas brouillé par l'extension spatiale du nuage atomique.

Nous avons pu ainsi mesurer, avec une précision jamais atteinte auparavant, la température des atomes refroidis par VSCPT. Les valeurs trouvées sont considérablement plus basses que celles déduites par la méthode habituelle de temps de vol. Des températures aussi basses que  $T_R/800$  soit quelques nK seulement ont pu être mesurées alors même que la résolution de la mesure par temps de vol ne dépasse guère  $T_R/80$ .

Au delà de la mesure de température, cette méthode, en donnant accès à la forme de la distribution d'impulsion, ouvre la voie à une analyse très fine du refroidissement VSCPT. Deux approches théoriques différentes basées, respectivement sur des simulations Monte Carlo quantiques utilisant la fonction délai et sur une description statistique de la marche au hasard, ont en effet récemment permis de faire un grand nombre de prédictions sur le refroidissement VSCPT.

---

Le modèle statistique, qui utilise les lois de Lévy pour analyser la marche au hasard des atomes dans l'espace des impulsions, permet en particulier de calculer exactement la distribution d'impulsion  $G(p)$  des atomes refroidis. Il fait alors apparaître le caractère non gaussien et non lorentzien de  $G(p)$ , montrant en particulier "l'aplatissement" de celle-ci au voisinage de  $p = 0$ . Il permet également de relier cette forme particulière de  $G(p)$  à une caractéristique essentielle: **la non-ergodicité du refroidissement VSCPT**. Des comparaisons quantitatives extrêmement précises ont pu ainsi être faites entre les résultats expérimentaux, les résultats de simulations Monte Carlo quantiques et les prédictions théoriques du modèle analytique basé sur les statistiques de Lévy.

Le présent mémoire de thèse s'organise en 7 chapitres.

Nous commençons par présenter rapidement dans le **chapitre I** des notions élémentaires sur la description des degrés de libertés externes d'un atome dans un nuage atomique refroidi. Ce chapitre nous permet d'introduire la description des atomes par des mélanges statistiques de paquets d'ondes et d'insister sur la distinction entre des paramètres importants tels que la longueur de cohérence atomique, l'extension spatiale d'un paquet d'ondes et la taille initiale du piège. Nous introduisons également à la fin de ce chapitre l'idée générale de la mesure de la température des atomes par une méthode analogue à la spectroscopie de Fourier en optique photonique.

Le **chapitre II** est consacré à la description du refroidissement VSCPT. Nous nous limitons ici à la configuration à une dimension avec deux ondes lasers contrapropageantes de polarisations circulaires orthogonales, configuration dans laquelle chaque atome est laissé dans une superposition cohérente de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées. Ce chapitre se termine par une analyse dynamique du mouvement relatif de ces deux paquets d'ondes. Cette étude originale montre avec des arguments simples, que les deux paquets d'ondes, qui ont tendance à se séparer l'un de l'autre en l'absence de lumière, sont "gelés" par l'interaction avec celle-ci pendant le refroidissement.

La séparation progressive des paquets d'ondes dès la coupure des lasers VSCPT est par contre la clé de la méthode de mesure de la fonction d'autocorrélation spatiale des atomes, présentée dans le **chapitre III**. Après avoir expliqué le principe de cette méthode, nous envisageons d'un point de vue théorique les différentes limitations auxquelles elle peut être sensible et en déduisons les contraintes à respecter pour sa mise en œuvre expérimentale.

Le montage expérimental est présenté dans le **chapitre IV** où nous avons en particulier insisté sur trois points: la compensation des champs magnétiques par effet Hanle mécanique dont la résolution a été considérablement améliorée, la mesure directe et in situ de la pulsation de Rabi sur un signal atomique par une

méthode originale utilisant également l'effet Hanle, et enfin, la mesure de la taille du piège par une méthode nouvelle et très précise. Ces trois éléments se sont révélés absolument indispensables dans la réalisation et l'analyse des expériences présentées dans cette thèse.

Les expériences proprement dites de mesure de la fonction de corrélation spatiale sont décrites dans le **chapitre V**. Nous verrons que les valeurs de température ainsi déterminées sont très inférieures à celles déduites de la méthode de temps de vol et nous montrerons qu'on peut parfaitement rendre compte de cette différence en tenant compte de l'effet de la taille du piège. Nous utilisons alors cette nouvelle méthode pour analyser l'effet des paramètres du refroidissement (temps d'interaction, pulsation de Rabi) sur la température et mettons en évidence une vérification quantitative des prédictions des simulations Monte Carlo.

Le **chapitre VI** examine un des points les plus importants de la thèse, la forme exacte de la distribution d'impulsion  $G(p)$  des atomes refroidis. Le principe et les grandes lignes du modèle statistique du refroidissement VSCPT basé sur les vols de Lévy sont expliqués sans rentrer dans le détail des calculs et en renvoyant aux références existantes sur ce sujet. Le calcul de la distribution d'impulsion est par contre présenté en détail et nous permet de mettre en évidence des caractéristiques très importantes comme le profil non lorentzien et autosimilaire de la forme de raie ou l'aspect non ergodique du refroidissement. La forme de raie calculée et les caractéristiques mentionnées ci-dessus sont ensuite confrontées aux résultats des simulations Monte Carlo puis aux données expérimentales. Dans les deux cas, l'accord est très satisfaisant et valide complètement le modèle statistique.

Le **chapitre VII** présente enfin le résultat d'une expérience d'interférométrie atomique dans le domaine temporel utilisant des paquets d'ondes ultrafroids. Bien que cette expérience soit un peu en marge du sujet principal de cette thèse, c'est-à-dire l'étude fondamentale du refroidissement VSCPT, elle constitue un prolongement naturel des expériences du chapitre V et permet de mettre directement en évidence la cohérence entre les paquets d'ondes atomiques issus du refroidissement VSCPT.



# Chapitre I

## Traitement quantique des degrés de liberté externes d'un atome

### I.1 Description de l'état des variables externes d'un atome par l'opérateur-densité

Le principe d'incertitude de Heisenberg stipule qu'il n'est pas possible de connaître simultanément la position  $x$  et l'impulsion  $p$  d'une particule avec une précision arbitrairement grande. Si on appelle  $\Delta x$  et  $\Delta p$  les incertitudes respectives sur ces deux grandeurs, ce principe se traduit mathématiquement par l'inégalité :

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \quad (\text{I.1})$$

Ainsi, si on suppose qu'un atome possède une impulsion  $p$  parfaitement déterminée, on doit considérer qu'il est délocalisé spatialement sur une distance sinon infinie du moins très grande devant toutes les dimensions du problème étudié. On doit alors le décrire par une **onde plane** de la forme :

$$\varphi(x) = e^{ipx/\hbar} \quad (\text{I.2})$$

et sa densité de probabilité de présence en  $x$ , donnée par  $\varphi(x)\varphi^*(x)$  est uniforme. Dans le formalisme de Dirac habituellement utilisé en mécanique quantique on décrira l'atome par un état propre de l'opérateur impulsion  $|\Psi\rangle = |p\rangle$ . On sait en effet qu'un tel ket correspond, en représentation position à une onde plane :

$$\langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar} \quad (\text{I.3})$$

La densité de probabilité de présence en  $x$  sera alors donnée par  $|\langle x|\Psi\rangle|^2$ , également uniforme.

Dans la plupart des problèmes cette description n'est pas physiquement réaliste car l'atome reste localisé dans une région de l'espace dont les dimensions caractéristiques n'excèdent que rarement quelques  $\mu\text{m}$ . La solution la plus simple consiste alors à le décrire, non pas par une onde plane d'impulsion  $p$  bien définie, mais par une superposition continue d'ondes planes d'impulsions  $p$  avec des coefficients donnés par une fonction  $g(p)$  de largeur finie. Bien que chaque onde plane ait une extension spatiale infinie, l'interférence entre toutes les ondes constituant cette superposition continue résulte en une amplitude spatiale dont l'enveloppe a une largeur finie. On obtient alors ce qu'on appelle couramment un **paquet d'ondes** localisé, dont le centre et la largeur sont respectivement la position moyenne  $\bar{x}$  et l'extension spatiale  $\Delta x$  de l'atome. Bien sûr, il existe alors une incertitude  $\Delta p$  sur l'impulsion atomique qui est de l'ordre de la largeur de  $|g(p)|^2$ . Le gain de précision sur la position de l'atome s'est fait au détriment de la précision sur son impulsion.

Dans le formalisme de Dirac, que nous utiliserons systématiquement à partir de maintenant, on décrira un tel paquet d'ondes par un état de la forme :

$$|\Phi\rangle = \int dp g(p)|p\rangle \quad (\text{I.4})$$

Dans cette expression,  $|\Phi\rangle$  est un vecteur de l'espace hilbertien des états d'une particule à une dimension et l'ensemble  $\{|p\rangle\}$  des états propres de l'opérateur impulsion  $\hat{P}$ , une base (continue et infinie) de cet espace. Dans le cas général la fonction  $g(p)$  peut être complexe et nous imposerons simplement qu'elle soit normée :

$$\int dp g(p)g^*(p) = 1 \quad (\text{I.5})$$

Dans (I.4), la base choisie pour développer le vecteur d'état atomique est celle des états propres de  $\hat{P}$ . On peut de manière équivalente utiliser la base  $\{|x\rangle\}$  des états propres de l'opérateur position  $\hat{X}$  et écrire  $|\Phi\rangle$  sous la forme :

$$|\Phi\rangle = \int dx f(x)|x\rangle \quad (\text{I.6})$$

Les fonctions  $f(x)$  et  $g(p)$  sont simplement les fonctions d'onde associées au vecteur  $|\Phi\rangle$  en représentations position et impulsion respectivement. Le lien entre les deux représentations s'obtient par exemple en projetant (I.4) et (I.6) sur le ket  $|p\rangle$  :

$$\langle p|\Phi\rangle = \int dp' g(p')\langle p|p'\rangle = g(p) \quad (\text{I.7})$$

$$\langle p|\Phi\rangle = \int dx f(x)\langle p|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dx f(x)e^{-ipx/\hbar} \quad (\text{I.8})$$

On constate que le passage de l'une des représentations à l'autre se fait par une transformation de Fourier (la définition de la TF utilisée habituellement en mécanique quantique est rappelée dans l'appendice A) :

$$g(p) = \text{TF}[f(x)] \longleftrightarrow f(x) = \text{TF}^{-1}[g(p)] \quad (\text{I.9})$$

Rappelons que deux fonctions transformées de Fourier l'une de l'autre ont la même norme (inégalité de Parseval-Plancherel) si bien que :

$$\int dp g(p)g^*(p) = 1 \Leftrightarrow \int dx f(x)f^*(x) = 1 \quad (\text{I.10})$$

On supposera par ailleurs, sans perdre le caractère général de la description, que  $|f(x)|^2$  est maximale et centrée en  $x = 0$ , c'est-à-dire que la position moyenne de l'atome est confondue avec l'origine du repère.

Bien que cette description de l'état d'un atome par un vecteur  $|\Phi\rangle$  soit simple et adaptée à de nombreux problèmes, ce n'est pas la plus générale qui soit. Considérons en effet un atome dans l'état (I.6). La mesure de sa position donnera  $x$  avec une probabilité  $|f(x)|^2$ . En répétant cette mesure un grand nombre de fois, on reconstituera la distribution de position du paquet d'ondes dont la position moyenne est en  $x = 0$  et dont l'extension spatiale reflète la délocalisation intrinsèquement quantique de l'atome. En réalité même la position moyenne d'un atome est rarement connue avec exactitude. Dans le cadre du piégeage et du refroidissement laser par exemple, les atomes sont piégés dans des échantillons dont les longueurs caractéristiques varient de quelques dizaines de microns à quelques millimètres. Les atomes sont donc répartis spatialement selon une distribution statistique dont la largeur est typiquement la taille du nuage atomique. En plus de l'incertitude purement quantique sur la position exacte de l'atome existe donc une incertitude statistique sur sa position moyenne et la description de l'atome doit, dans le cas général, prendre en compte ces deux incertitudes. Ce type de situation est très courant en mécanique quantique et nécessite le recours au formalisme de l'opérateur densité.

## I.1.1 L'opérateur densité

### I.1.1.1 Généralités

On considère souvent, dans les cours de physique quantique, qu'un système donné est caractérisé par un vecteur d'un espace de Hilbert, appelé vecteur d'état et décrivant l'ensemble des propriétés du système. Dans tous les domaines de la physique classique, la connaissance d'une telle fonction d'état suffirait à prédire avec certitude le résultat d'une mesure effectuée sur ce système. En physique

quantique au contraire, une mesure est associée à un ensemble de résultats possibles et on peut seulement calculer, connaissant le vecteur d'état, la probabilité de trouver chacun de ces résultats, sans qu'on puisse prévoir lequel sera effectivement réalisé. Il existe donc une incertitude intrinsèquement quantique sur les résultats pouvant être obtenus lors d'une mesure des propriétés d'un système.

En réalité, dans la plupart des situations physiques, il n'est même pas possible de décrire le système par un vecteur d'état unique. L'état du système n'est connu que partiellement et il est seulement possible de prédire qu'à un instant donné, il se trouve dans un certain état  $|\phi_i\rangle$  avec une certaine probabilité  $p_i$ . A l'incertitude essentiellement quantique liée au processus de mesure et qui existe même lorsque l'état du système est parfaitement déterminé, vient alors s'ajouter une incertitude de nature statistique liée à l'indétermination sur l'état exact du système. On montre alors qu'on ne doit plus décrire celui-ci par un vecteur d'état mais par un **opérateur densité** défini par :

$$\rho = \sum p_i |\phi_i\rangle\langle\phi_i| \quad (\text{I.11})$$

Cet opérateur a de nombreuses propriétés que nous ne détaillerons pas ici. Précisons seulement que, sur une base orthonormée donnée  $\{|\chi_j\rangle\}$ , il est décrit par une matrice dont les éléments diagonaux, ou **populations**, sont les probabilités de trouver le système dans les états  $|\chi_j\rangle$ , et les éléments non-diagonaux ou **cohérences** caractérisent les corrélations entre les différents états  $|\chi_j\rangle$ .

La description par l'opérateur densité est la plus générale puisqu'elle englobe celle par un vecteur d'état. En effet, dans le cas particulier où le système est dans un état  $|\Phi\rangle$  parfaitement déterminé l'opérateur densité se réduit à :

$$\rho = |\Phi\rangle\langle\Phi| \quad (\text{I.12})$$

et on montre facilement que les prédictions physiques obtenues à-partir du vecteur  $|\Phi\rangle$  ou de l'opérateur  $\rho$  sont identiques. L'opérateur densité est donc la description la plus générale possible pour un système quantique puisqu'il permet tout aussi bien de décrire un cas pur, dans lequel le système est caractérisé par un vecteur d'état unique, qu'un **mélange statistique** d'états qui représente la situation la plus générale.

### I.1.1.2 Opérateur densité en représentation position et impulsion

Nous voulons à présent appliquer le formalisme de l'opérateur densité à la description des degrés de liberté externes d'un atome, c'est-à-dire la position et l'impulsion de son centre de masse. Nous devons pour cela expliciter en détail

l'opérateur  $\rho$  dans les représentations position et impulsion. Nous donnons ici les principales définitions et les propriétés dont nous aurons besoin par la suite.

### Populations

Elles sont données par les éléments diagonaux de la matrice-densité et sont faciles à interpréter physiquement puisqu'elles correspondent simplement aux distributions en position et en impulsion :

$$F(x) = \langle x|\rho|x\rangle \quad (\text{I.13})$$

$$G(p) = \langle p|\rho|p\rangle \quad (\text{I.14})$$

### Cohérences

Elles correspondent aux éléments non-diagonaux de  $\rho$  et décrivent les corrélations qui existent dans le système entre deux points  $x$  et  $x'$  de l'espace réel, ou  $p$  et  $p'$  de l'espace des impulsions. Pour donner une idée plus précise du sens physique de ces cohérences, on peut prendre l'exemple d'un atome représenté par un paquet d'ondes. L'élément de matrice  $\langle x|\rho|x'\rangle$  est alors une mesure de la corrélation qui existe entre la fonction d'onde atomique en  $x$  et celle en  $x'$ . En fait on s'intéressera le plus souvent à une cohérence moyenne entre deux points séparés par une certaine distance indépendamment de la position absolue de ces deux points. On définit pour cela une *cohérence globale* en intégrant tous les éléments non-diagonaux de l'opérateur densité pris entre deux points séparés par une distance fixe :

$$\mathcal{F}(\xi) = \int dx \langle x|\rho|x + \xi\rangle \quad (\text{I.15})$$

$$\mathcal{G}(\kappa) = \int dp \langle p|\rho|p + \kappa\rangle \quad (\text{I.16})$$

Les distributions  $\mathcal{F}(\xi)$  et  $\mathcal{G}(\kappa)$  sont respectivement les cohérences globales en position et en impulsion.

### Relations entre populations et cohérences

Insérons la relation de fermeture sur les kets  $|p\rangle$  de part et d'autre de  $\rho$  dans l'expression (I.15) ci-dessus :

$$\mathcal{F}(\xi) = \int \int \int dx dp dp' \langle x|p\rangle \langle p|\rho|p'\rangle \langle p'|x + \xi\rangle$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \iiint dx dp dp' \langle p|\rho|p'\rangle e^{i(p-p')x/\hbar} e^{-ip'\xi/\hbar} \quad (\text{I.17})$$

L'intégrale sur  $x$  est séparable et fait apparaître une fonction delta :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(\xi) &= \iint dp dp' \langle p|\rho|p'\rangle e^{-ip'\xi/\hbar} \delta(p-p') \\ &= \int dp \langle p|\rho|p\rangle e^{-ip\xi/\hbar} \end{aligned} \quad (\text{I.18})$$

La cohérence globale en position est donc simplement reliée à la transformée de Fourier de la distribution d'impulsions. En insérant la relation de fermeture sur les kets  $|x\rangle$  de part et d'autre de  $\rho$  dans (I.16), on montre de la même façon que la cohérence globale en impulsion est, à un facteur numérique près, la transformée de Fourier inverse de la distribution en position. On peut résumer ces deux relations importantes par les égalités suivantes :

$$\mathcal{F}(\xi) = \int dp G(p) e^{-ip\xi/\hbar} \quad (\text{I.19})$$

$$\mathcal{G}(\kappa) = \int dx F(x) e^{i\kappa x/\hbar} \quad (\text{I.20})$$

Avec la définition conventionnelle de la transformée de Fourier (TF) en mécanique quantique, on peut également écrire ces relations sous la forme :

$$\mathcal{F}(\xi) = \sqrt{2\pi\hbar} \cdot \text{TF}[G(p)] \longleftrightarrow G(p) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \text{TF}^{-1}[\mathcal{F}(\xi)] \quad (\text{I.21})$$

$$\mathcal{G}(\kappa) = \sqrt{2\pi\hbar} \cdot \text{TF}^{-1}[F(x)] \longleftrightarrow F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \cdot \text{TF}[\mathcal{G}(\kappa)] \quad (\text{I.22})$$

### I.1.2 Quelques états possibles

Nous utilisons maintenant le formalisme de l'opérateur densité pour décrire l'état externe d'un atome. Comme nous l'avons précisé au début de ce chapitre, la description la plus simple tenant compte de l'incertitude quantique sur la position et l'impulsion de l'atome, est celle d'un paquet d'ondes. Nous commençons donc par traiter le cas pur d'un paquet d'ondes unique centré en l'origine puis nous prenons en compte l'incertitude sur la position moyenne de l'atome en introduisant un mélange statistique de paquets d'ondes dont les centres sont répartis dans une certaine région de l'espace. Enfin nous montrons que dans certaines conditions, ce mélange statistique peut se réécrire de manière plus simple sous la forme d'un mélange statistique d'ondes planes.

### I.1.2.1 Paquet d'ondes centré à l'origine

Dans la base des états propres de l'opérateur position, un paquet d'ondes tel que celui représenté sur la figure I.1 est décrit par un vecteur d'état de la forme :

$$|\Phi_0\rangle = \int dx f(x)|x\rangle \quad (\text{I.23})$$

où l'on suppose  $|f(x)|^2$  normée, centrée et maximale en  $x = 0$ .

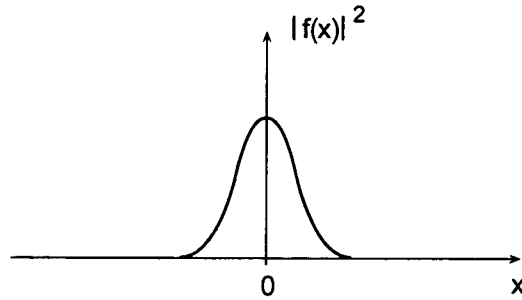


Figure I.1: Distribution de position pour un atome décrit par un paquet d'ondes à une dimension, centré en 0

---

On a bien à faire à un cas pur (système décrit par un vecteur d'état unique) et l'égalité (I.12) donne alors l'expression de l'opérateur densité correspondant :

$$\rho_0 = |\Phi_0\rangle\langle\Phi_0| = \iint dx dx' f(x)f^*(x')|x\rangle\langle x'| \quad (\text{I.24})$$

En représentation position, les éléments de matrice de  $\rho_0$  s'écrivent :

$$\langle x|\rho_0|x'\rangle = \langle x|\Phi_0\rangle\langle\Phi_0|x'\rangle = f(x)f^*(x') \quad (\text{I.25})$$

On en déduit alors facilement les expressions de la distribution et de la cohérence globale en position :

$$F_0(x) = |f(x)|^2 \quad (\text{I.26})$$

$$\mathcal{F}_0(\xi) = \int dx f(x)f^*(x + \xi) \quad (\text{I.27})$$

La cohérence spatiale apparaît donc comme le produit d'autoconvolution de la fonction d'onde en représentation position ou encore comme la fonction d'autocorrélation spatiale du paquet d'ondes. Il est clair d'après l'expression (I.27) que la cohérence spatiale à la distance  $\xi$  est également le produit scalaire du paquet d'ondes initial  $|\Phi_0\rangle$ , centré en  $x = 0$ , par le paquet d'ondes  $|\Phi_{-\xi}\rangle$ , identique à  $|\Phi_0\rangle$  mais translaté de  $-\xi$ .

Rappelons en effet l'expression de l'opérateur translation en position <sup>1</sup> :

$$\hat{S}(\lambda) = e^{-i\hat{P}\lambda/\hbar} \quad (\text{I.28})$$

ainsi que l'action de cet opérateur sur les kets  $|x\rangle$  et  $|p\rangle$  :

$$\hat{S}(\lambda)|p\rangle = e^{-ip\lambda/\hbar}|p\rangle \quad (\text{I.29})$$

$$\hat{S}(\lambda)|x\rangle = |x + \lambda\rangle \quad (\text{I.30})$$

Le paquet d'onde  $|\Phi_{-\xi}\rangle$  s'écrit donc :

$$\begin{aligned} |\Phi_{-\xi}\rangle &= e^{i\hat{P}\xi/\hbar} |\Phi_0\rangle \\ &= \int dx f(x)|x - \xi\rangle \end{aligned} \quad (\text{I.31})$$

d'où on déduit le produit scalaire entre  $|\Phi_0\rangle$  et  $|\Phi_{-\xi}\rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle \Phi_{-\xi} | \Phi_0 \rangle &= \iint dx dx' f(x) f^*(x') \langle x' - \xi | x \rangle \\ &= \iint dx dx' f(x) f^*(x') \delta(x - x' + \xi) \\ &= \int dx f(x) f^*(x + \xi) \end{aligned} \quad (\text{I.32})$$

On retrouve l'expression (I.27) de la cohérence spatiale globale et on peut donc écrire :

$$\mathcal{F}_0(\xi) = \langle \Phi_{-\xi} | \Phi_0 \rangle \quad (\text{I.33})$$

Les figures I.2.a et I.2.b (où on a supposé que  $f(x)$  était réelle) schématisent le calcul de  $\mathcal{F}_0(\xi)$  en mettant en évidence la propriété ci-dessus.

Enfin, la distribution en impulsions ainsi que la cohérence globale en impulsion

---

<sup>1</sup>Il découle de cette définition que l'opérateur  $\hat{S}(\lambda)$  est unitaire:  $\hat{S}^\dagger = \hat{S}^{-1} = e^{i\hat{P}\lambda/\hbar}$



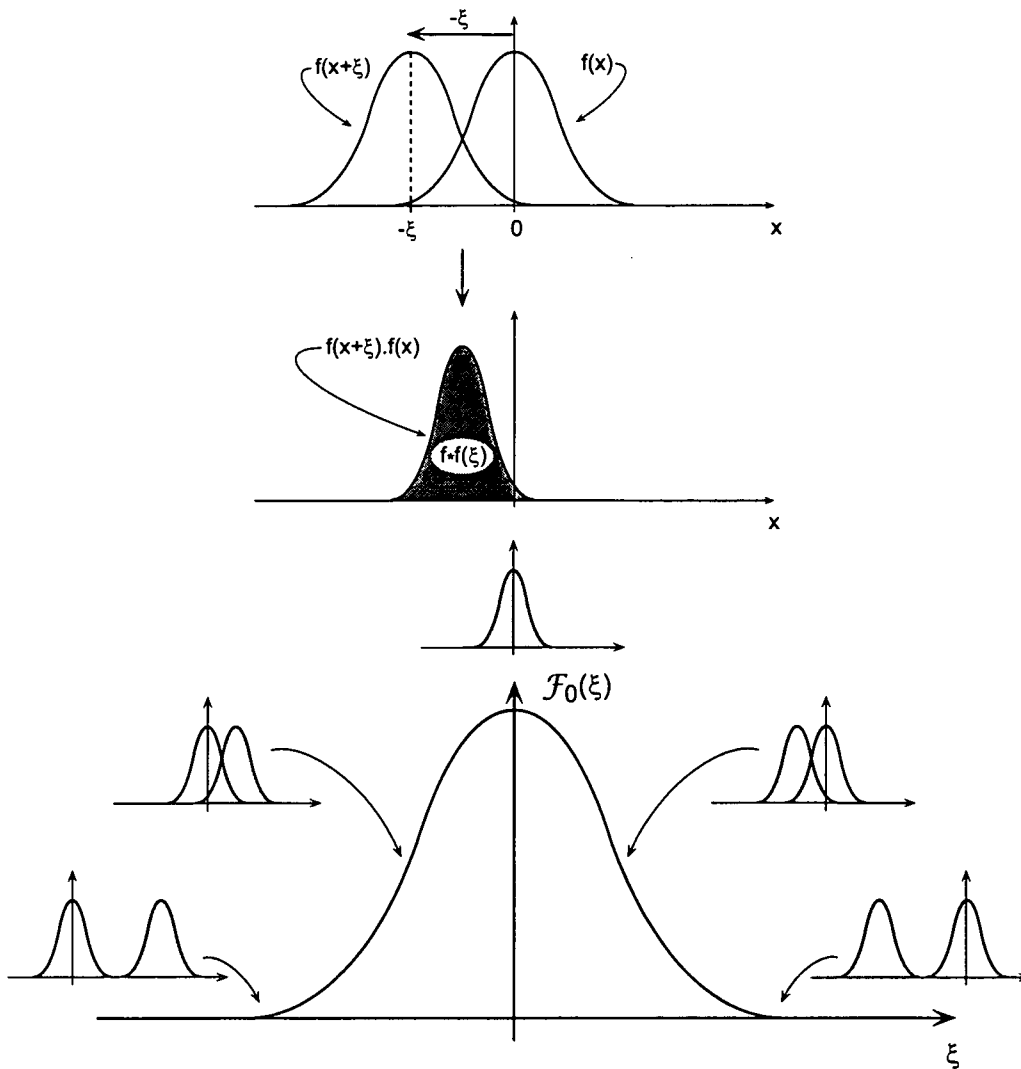


Figure I.2: (a) Principe du calcul du recouvrement de deux paquets d'ondes identiques séparés par la distance  $\xi$ . Le paquet d'onde décrit par  $f(x + \xi)$  est déduit du paquet d'ondes décrit par  $f(x)$  par une translation de  $-\xi$  selon  $x$ . La valeur de la fonction d'autocorrélation spatiale  $f * f(\xi)$  en  $\xi$  est obtenue en faisant le produit des deux distributions puis en calculant l'aire sous la fonction obtenue. (b) Principe du calcul de la fonction d'autocorrélation spatiale. On "dédouble" un paquet d'ondes, on translate un des deux de la quantité  $\xi$  et on mesure le recouvrement. Celui-ci est maximal lorsque  $\xi = 0$  puis diminue lorsque  $|\xi|$  augmente.

---

sont à un facteur près les transformées de Fourier inverses des expressions (I.27) et (I.26) respectivement :

$$G_0(p) = \langle p | \rho_0 | p \rangle = \int d\xi \mathcal{F}_0(\xi) e^{ip\xi/\hbar} \quad (\text{I.34})$$

$$\mathcal{G}_0(\kappa) = \int dp \langle p | \rho_0 | p + \kappa \rangle = \int dx F_0(x) e^{i\kappa x/\hbar} \quad (\text{I.35})$$

### I.1.2.2 Mélange statistique de paquets d'ondes

Considérons à présent le cas plus général d'un mélange statistique de paquets d'ondes dont les positions moyennes sont distribuées dans une région localisée de l'espace. Nous restreignons un peu le problème en considérant que ces paquets d'ondes ont tous la même forme, la même distribution d'impulsion et une impulsion moyenne nulle. Ils ne diffèrent donc que par leur position moyenne et se déduisent les uns des autres par de simples translations<sup>2</sup>. Cette description est par exemple celle d'un nuage d'atomes piégés c'est-à-dire confinés dans un volume de l'ordre du  $mm^3$  par des moyens optiques et/ou magnétiques. Dans la suite l'indice 0 réfère aux grandeurs que nous venons de calculer pour un paquet d'ondes unique (cas pur). Nous noterons par ailleurs  $|\Phi_\chi\rangle$  un paquet d'ondes centré en  $x = \chi$  et  $H(\chi)$  la distribution des centres des paquets d'ondes. Enfin nous supposons  $H(\chi)$  centrée en  $\chi = 0$  et normée :

$$\int d\chi H(\chi) = 1 \quad (\text{I.36})$$

Utilisant de nouveau l'expression (I.28) de l'opérateur translation nous écrivons :

$$|\Phi_0\rangle = \int dx f(x) |x\rangle \quad (\text{I.37})$$

$$|\Phi_\chi\rangle = e^{-i\hat{P}\chi/\hbar} |\Phi_0\rangle = \int dx f(x) |x + \chi\rangle \quad (\text{I.38})$$

où nous avons rappelé l'expression du vecteur  $|\Phi_0\rangle$  décrivant un paquet d'ondes centré en  $x = 0$ .

L'opérateur densité décrivant un mélange statistique de tels paquets d'ondes s'écrit alors :

$$\rho = \int d\chi H(\chi) |\Phi_\chi\rangle \langle \Phi_\chi| \quad (\text{I.39})$$

---

<sup>2</sup>Le cas le plus général serait un mélange statistique de paquets d'ondes dont les distributions en position et en impulsion dépendraient de la position moyenne. Ceci équivaldrait à introduire des corrélations entre la position et l'impulsion d'un atome. Dans les sources d'atomes froids usuelles (mélasse optique, piège magnéto-optique), de telles corrélations n'existent pas et nous pouvons donc restreindre le problème au mélange statistique considéré dans ce paragraphe.

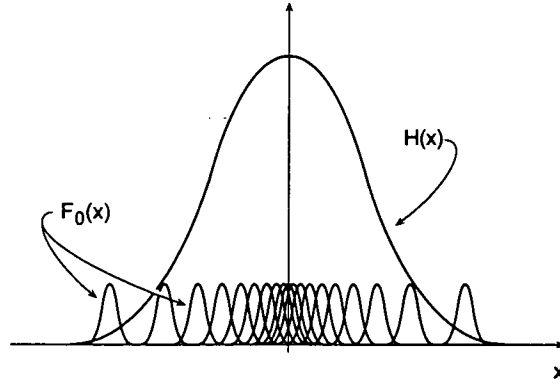


Figure I.3: Mélange statistique de paquets d'ondes répartis dans une région localisée de l'espace. Les paquets d'ondes se déduisent les uns des autres par de simples translations selon  $x$  et ne diffèrent donc que par leur centre. L'enveloppe  $H(x)$  représente la distribution spatiale des centres des paquets d'ondes.

---

soit :

$$\rho = \int d\chi H(\chi) e^{-i\hat{P}\chi/\hbar} |\Phi_0\rangle \langle \Phi_0| e^{i\hat{P}\chi/\hbar} \quad (\text{I.40})$$

Commençons par calculer la distribution d'impulsions :

$$\begin{aligned} G(p) &= \langle p | \rho | p \rangle \\ &= \int d\chi H(\chi) \langle p | e^{-i\hat{P}\chi/\hbar} |\Phi_0\rangle \langle \Phi_0| e^{i\hat{P}\chi/\hbar} | p \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.41})$$

En utilisant l'unitarité de l'opérateur translation ainsi que la formule (I.29) qui donne l'action de cet opérateur sur le ket  $|p\rangle$ , on en déduit :

$$\begin{aligned} G(p) &= \int d\chi H(\chi) e^{-ip\chi/\hbar} \langle p | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | p \rangle e^{ip\chi/\hbar} \\ &= \int d\chi H(\chi) \langle p | \Phi_0 \rangle \langle \Phi_0 | p \rangle \\ &= \langle p | \rho_0 | p \rangle \int d\chi H(\chi) \end{aligned} \quad (\text{I.42})$$

On voit apparaître  $\langle p|\rho_0|p \rangle$  qui n'est autre que la distribution d'impulsion  $G_0(p)$  d'un seul paquet d'ondes centré en  $x = 0$  (cas pur). D'après la condition de normalisation (I.36), on a donc finalement :

$$G(p) = G_0(p) \quad (\text{I.43})$$

d'où on déduit immédiatement (par transformée de Fourier des deux membres) :

$$\mathcal{F}(\xi) = \mathcal{F}_0(\xi) \quad (\text{I.44})$$

Pour un mélange statistique de paquets d'ondes identiques ne différant que par leurs positions moyennes, la distribution d'impulsions (et par conséquent la cohérence spatiale globale) est la même que pour un seul paquet d'ondes.

Calculons à-présent la cohérence globale en impulsions :

$$\mathcal{G}(\kappa) = \int dp \langle p|\rho|p + \kappa \rangle \quad (\text{I.45})$$

De la même façon que précédemment, nous pouvons déduire de l'expression (I.40) et des propriétés de l'opérateur translation, l'expression des éléments non-diagonaux de  $\rho$  :

$$\begin{aligned} \langle p|\rho|p + \kappa \rangle &= \int d\chi H(\chi) e^{-ip\chi/\hbar} \langle p|\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0|p + \kappa \rangle e^{i(p+\kappa)\chi/\hbar} \\ &= \int d\chi H(\chi) e^{i\kappa\chi/\hbar} \langle p|\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0|p + \kappa \rangle \end{aligned} \quad (\text{I.46})$$

Portant (I.46) dans (I.45), nous déduisons la cohérence en impulsions :

$$\mathcal{G}(\kappa) = \int d\chi H(\chi) e^{i\kappa\chi/\hbar} \int dp \langle p|\Phi_0 \rangle \langle \Phi_0|p + \kappa \rangle \quad (\text{I.47})$$

L'intégrale sur  $\chi$ , que nous noterons  $\tilde{H}(\kappa)$ , est (à un facteur  $\sqrt{2\pi\hbar}$  près) la transformée de Fourier inverse de la distribution des positions moyennes des atomes à la valeur  $\kappa$  :

$$\tilde{H}(\kappa) = \sqrt{2\pi\hbar} \text{TF}^{-1}[H(x)] \quad (\text{I.48})$$

Elle décrit les cohérences en impulsion associées à la distribution des atomes dans une région localisée de l'espace. La deuxième intégrale, où l'on reconnaît  $\langle p|\rho_0|p + \kappa \rangle$ , n'est autre que la cohérence globale en impulsion  $\mathcal{G}_0(\kappa)$  d'un seul paquet d'ondes donnée par la formule (I.35). On obtient donc :

$$\mathcal{G}(\kappa) = \sqrt{2\pi\hbar} \tilde{H}(\kappa) \times \mathcal{G}_0(\kappa) \quad (\text{I.49})$$

La cohérence globale en impulsions du mélange statistique est le produit simple des cohérences en impulsions dûes respectivement à un paquet d'ondes et à la distribution des centres des paquets d'ondes dans le nuage.

Enfin, la distribution en position des atomes décrits par le mélange statistique est la transformée de Fourier de (I.49). En tenant compte du fait que la transformée de Fourier d'un produit simple (noté  $\times$ ) est le produit de convolution (noté  $*$ ) des transformées de Fourier, on peut écrire :

$$F(x) = \sqrt{2\pi\hbar} H(x) * F_0(x) \quad (\text{I.50})$$

La distribution spatiale des atomes est maintenant le produit de convolution de la distribution du centre des paquets d'ondes (distribution large sur la figure I.3) par la distribution en position d'un seul d'entre eux (distribution étroite sur la figure I.3).

**Remarque**

Notons que l'on peut facilement, à partir de ce résultat général, retrouver le résultat précédemment démontré pour un paquet d'ondes unique centré en 0. En effet dans ce cas, la distribution des centres de masse  $H(x)$  est simplement une distribution de Dirac :

$$H(x) = \delta(x) \quad (\text{I.51})$$

et le produit de convolution se simplifie pour redonner :

$$F(x) = F_0(x) * \delta(x) = F_0(x) \quad (\text{I.52})$$

qui est simplement la distribution spatiale d'un paquet d'ondes.

En résumé, lorsqu'on passe d'un seul paquet d'ondes centré en  $x = 0$  à un mélange statistique de paquets d'ondes identiques dont les centres sont répartis selon la distribution  $H(x)$ , la distribution d'impulsions et la cohérence globale en positions restent inchangées :

$$G(p) = G_0(p) \quad (\text{I.53})$$

$$\mathcal{F}(\xi) = \mathcal{F}_0(\xi) \quad (\text{I.54})$$

tandis que la cohérence globale en impulsion et la distribution en position deviennent :

$$\mathcal{G}(\kappa) = \tilde{H}(\kappa) \times \mathcal{G}_0(\kappa) \quad (\text{I.55})$$

$$F(x) = H(x) * F_0(x) \quad (\text{I.56})$$

où  $\tilde{H}(\kappa)$  est, au facteur  $\sqrt{2\pi\hbar}$  près, la transformée de Fourier inverse de  $H(x)$ .

Jusqu'à présent, nous n'avons pas donné beaucoup de précisions quant aux distributions  $H(x)$ ,  $F_0(x)$  et  $G(p)$ . Nous avons seulement supposé qu'elles étaient normalisées à l'unité et éventuellement centrées en 0. En fait, puisqu'elles décrivent la répartition des atomes dans l'espace réel ou dans l'espace des impulsions, nous choisirons généralement des distributions "en cloche", tendant vers 0 à l'infini et caractérisées par une certaine largeur dont l'expression exacte dépendra de la forme mathématique de la distribution (gaussienne, lorentzienne, etc...).

Nous adoptons à partir de maintenant les notations suivantes<sup>3</sup> :

- $\Delta x$  : Largeur *rms* de la distribution en position  $F(x)$
- $\delta x$  : Largeur *rms* de la distribution en position d'un paquet d'ondes  $F_0(x)$
- $\sigma$  : Largeur *rms* de la distribution des positions moyennes  $H(x)$
- $\Delta p$  : Largeur *rms* de la distribution en impulsion  $G(p)$
- $\xi_C$  : Largeur *rms* de la cohérence globale en position  $\mathcal{F}(\xi)$  encore appelée longueur de cohérence
- $\kappa_C$  : Largeur *rms* de la cohérence globale en impulsion  $\mathcal{G}(\kappa)$ .

Les égalités (I.21) et (I.22) relient ces différentes distributions par des transformations de Fourier et permettent de déduire immédiatement les relations suivantes entre les largeurs précédentes :

$$\xi_C \simeq \hbar/\Delta p \tag{I.58}$$

$$\kappa_C \simeq \hbar/\Delta x \tag{I.59}$$

---

<sup>3</sup>Rappelons que la largeur *rms* d'une distribution de probabilité de la variable  $z$  est la grandeur  $\Delta z$  définie par :

$$(\Delta z)^2 = \int dz z^2 f(z) - \left( \int dz z f(z) \right)^2 \tag{I.57}$$

dans le cas où ces deux intégrales sont définies (lorsque la distribution est lorentzienne par exemple, ces deux intégrales divergent et on ne peut alors définir de largeur *rms*).

### I.1.2.3 Limite du mélange statistique pour une distribution spatiale très large

Nous voulons savoir si la description précédente, valable très généralement, peut se simplifier dans certaines conditions. En particulier est-il possible de négliger les cohérences en impulsion de l'opérateur densité?

On conçoit facilement que la condition pour qu'une telle approximation soit justifiée est que la portée de ces cohérences soit faible devant la largeur de la distribution en impulsion, soit :

$$\kappa_C \ll \Delta p \quad (\text{I.60})$$

On peut inverser membre à membre cette inégalité pour obtenir :

$$\frac{1}{\Delta p} \ll \frac{1}{\kappa_C} \quad (\text{I.61})$$

Les relations (I.58) et (I.59) entraînent alors :

$$\xi_C \ll \Delta x \quad (\text{I.62})$$

Il est donc légitime de négliger les cohérences en  $p$  de la matrice-densité atomique dès que la largeur de la distribution spatiale des atomes est très grande devant la longueur de cohérence atomique :

$$\xi_C \ll \Delta x \implies \langle p|\rho|p' \rangle \simeq 0 \quad \text{si } p \neq p' \quad (\text{I.63})$$

La matrice-densité étant alors diagonale en  $p$ , on peut également l'écrire sous la forme<sup>4</sup>d'un mélange statistique d'ondes planes d'impulsions  $p$  bien définies :

$$\rho \xrightarrow{\xi_C \ll \Delta x} \int dp G(p) |p\rangle \langle p| \quad (\text{I.64})$$

Cette expression s'avère généralement plus facile à utiliser que l'expression initiale (I.40) de l'opérateur densité.

---

<sup>4</sup>On a ici une illustration d'une propriété bien connue en mécanique quantique selon laquelle plusieurs mélanges statistiques peuvent très bien donner le même opérateur densité. Dans ce cas ces divers mélanges seront physiquement et expérimentalement indiscernables et représenteront simplement des manières différentes de décrire la connaissance partielle que l'on a du système.

#### I.1.2.4 Valeur moyenne d'une observable commutant avec l'opérateur impulsion

Pour décrire l'état des atomes, nous avons introduit un mélange statistique de paquets d'ondes identiques  $|\Phi_\chi\rangle$  dont les positions moyennes  $\chi$  sont réparties statistiquement dans une région finie de l'espace. Pour effectuer des prévisions physiques sur le système, il est donc équivalent d'utiliser directement l'opérateur densité  $\rho$  ou de partir d'un seul paquet d'ondes constituant le mélange puis de moyenner les résultats, correctement pondérés selon la distribution de probabilité de  $\chi$ , sur toutes les valeurs possibles de  $\chi$ . Ainsi, pour calculer la valeur moyenne d'un opérateur  $\hat{A}$ , on peut indifféremment utiliser :

$$\langle \hat{A} \rangle = \text{Tr}\{\rho \hat{A}\} \quad (\text{I.65})$$

ou :

$$\langle \hat{A} \rangle = \int d\chi H(\chi) \langle \Phi_\chi | \hat{A} | \Phi_\chi \rangle \quad (\text{I.66})$$

On peut montrer facilement que, dans le cas où  $\hat{A}$  commute avec l'opérateur impulsion  $\hat{P}$ , sa valeur moyenne dans l'état  $|\Phi_\chi\rangle$  est indépendant de  $\chi$ . Pour cela il suffit de réexprimer le paquet d'ondes (I.38) en introduisant la relation de fermeture sur les kets  $|p\rangle$  :

$$|\Phi_\chi\rangle = \int dx f(x) |x + \chi\rangle \quad (\text{I.67})$$

$$= \iint dx dp f(x) |p\rangle \langle p | x + \chi \rangle \quad (\text{I.68})$$

$$= \frac{1}{2\pi\hbar} \iint dx dp f(x) e^{-ip(x+\chi)/\hbar} |p\rangle \quad (\text{I.69})$$

$$= \int dp g(p) e^{-ip\chi/\hbar} |p\rangle \quad (\text{I.70})$$

On en déduit immédiatement :

$$\langle \Phi_\chi | \hat{A} | \Phi_\chi \rangle = \iint dp dp' g(p) g^*(p') e^{-ip\chi/\hbar} e^{ip'\chi/\hbar} \langle p' | \hat{A} | p \rangle \quad (\text{I.71})$$

et par suite, puisque  $[\hat{A}, \hat{P}] = 0$  :

$$\langle \Phi_\chi | \hat{A} | \Phi_\chi \rangle = \int dp G(p) \langle p | \hat{A} | p \rangle \quad (\text{I.72})$$

Le résultat est indépendant de  $\chi$  et comme  $H(\chi)$  est normalisée, on a simplement  $\langle \hat{A} \rangle = \langle \Phi_\chi | \hat{A} | \Phi_\chi \rangle$ . Ainsi lorsqu'un atome est décrit par un mélange statistique



de paquets d'ondes identiques dont les centres sont répartis statistiquement dans l'espace, la valeur moyenne d'une observable qui commute avec  $\hat{P}$  peut être calculée avec un seul de ces paquets d'ondes. Le plus simple est de choisir le paquet d'ondes centré à l'origine ( $\chi = 0$ ) et on décrira alors l'état de l'atome par le vecteur :

$$|\Phi\rangle = \int dp g(p)|p\rangle \quad (\text{I.73})$$

Si le système n'est pas dans un état stationnaire, ce résultat reste vrai pourvu que le hamiltonien commute lui aussi avec l'opérateur impulsion.

### I.1.3 Etude dynamique : atome en évolution libre

Jusqu'à présent nous avons considéré un problème essentiellement statique. Les équations que nous avons écrites ne faisaient pas apparaître le temps et on peut considérer par exemple qu'elles décrivaient les degrés de liberté externes d'un atome à l'instant  $t = 0$ . Nous étudions maintenant comment évoluent les populations et les cohérences de l'opérateur densité au cours du temps en nous limitant à un système isolé, c'est-à-dire à un atome en évolution libre.

Nous allons pour cela calculer les expressions de la valeur moyenne et de l'écart quadratique moyen de la position et de l'impulsion. Nous commençons donc par rappeler quelques résultats de mécanique quantique élémentaire dont nous aurons besoin.

#### I.1.3.1 Rappels

- De manière générale, l'évolution temporelle de la valeur moyenne d'une observable  $\hat{A}$  est donnée par :

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{A}\rangle = \frac{1}{i\hbar}\langle[\hat{A}, \hat{H}]\rangle + \left\langle\frac{\partial\hat{A}}{\partial t}\right\rangle \quad (\text{I.74})$$

où  $\hat{H}$  est le hamiltonien du système.

- La variance  $(\Delta A)^2$  caractérisant la dispersion des résultats de la mesure de la grandeur physique associée à  $\hat{A}$  autour de  $\langle\hat{A}\rangle$  est définie par :

$$(\Delta A)^2 = \langle\hat{A}^2\rangle - \langle\hat{A}\rangle^2 \quad (\text{I.75})$$

$\Delta A$  est l'écart quadratique moyen de la grandeur physique associée à  $\hat{A}$ .

- Les opérateurs  $\hat{X}$  et  $\hat{P}$  sont des observables conjuguées :

$$[\hat{X}, \hat{P}] = i\hbar \quad (\text{I.76})$$

- L'évolution des degrés de liberté externes d'une particule plongée dans un potentiel scalaire et stationnaire  $V(\hat{X})$  ne dépendant que de la position est donnée par le théorème d'Ehrenfest :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle = \frac{\langle\hat{P}\rangle}{M} \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle = -\langle\nabla V(\hat{X})\rangle \end{cases} \quad (\text{I.77})$$

### I.1.3.2 Evolution libre de $\langle\hat{X}\rangle$ , $\langle\hat{P}\rangle$ , $(\Delta X)^2$ et $(\Delta P)^2$

En l'absence de tout potentiel extérieur l'atome suit une évolution libre et son hamiltonien se réduit à l'opérateur d'énergie cinétique :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad (\text{I.78})$$

Dans ce cas le théorème d'Ehrenfest s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle\hat{X}\rangle = \frac{\langle\hat{P}\rangle}{M} \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{P}\rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{I.79})$$

Une simple intégration mène alors à :

$$\begin{cases} \langle\hat{X}\rangle = \frac{1}{M}\langle\hat{P}\rangle_0 t + \langle\hat{X}\rangle_0 \\ \langle\hat{P}\rangle = \langle\hat{P}\rangle_0 \end{cases} \quad (\text{I.80})$$

où  $\langle\hat{P}\rangle_0$  et  $\langle\hat{X}\rangle_0$  sont deux constantes désignant respectivement l'impulsion et la position moyennes de l'atome à l'instant initial.

Nous calculons également les valeurs moyennes des opérateurs  $\hat{P}^2$  et  $\hat{X}^2$  en reportant ceux-ci dans l'équation (I.74). En remarquant qu'ils ne dépendent pas explicitement du temps et en remplaçant  $\hat{H}$  par son expression, on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2M} \langle[\hat{X}^2, \hat{P}^2]\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{P}^2\rangle = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2M} \langle[\hat{P}^2, \hat{P}^2]\rangle \end{cases} \quad (\text{I.81})$$

Un calcul élémentaire utilisant (I.76) permet de simplifier le commutateur de la première équation et d'obtenir :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{1}{M}\langle\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{P}^2\rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{I.82})$$

Appliquons alors l'équation (I.74) à l'observable  $\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}$  :

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}\rangle = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{2M} \langle[\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}, \hat{P}^2]\rangle \quad (\text{I.83})$$

On peut de nouveau simplifier cette expression qui devient :

$$\frac{d}{dt}\langle\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}\rangle = \frac{2}{M}\langle\hat{P}^2\rangle \quad (\text{I.84})$$

En dérivant la première égalité de (I.82) membre à membre et en utilisant (I.84), on obtient :

$$\begin{cases} \frac{d^2}{dt^2}\langle\hat{X}^2\rangle = \frac{2}{M^2}\langle\hat{P}^2\rangle \\ \frac{d}{dt}\langle\hat{P}^2\rangle = 0 \end{cases} \quad (\text{I.85})$$

On peut alors intégrer ces deux équations qui mènent à :

$$\begin{cases} \langle\hat{X}^2\rangle = \frac{1}{M^2}\langle\hat{P}^2\rangle_0 t^2 + \frac{1}{M}\langle\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}\rangle_0 t + \langle\hat{X}^2\rangle_0 \\ \langle\hat{P}^2\rangle = \langle\hat{P}^2\rangle_0 \end{cases} \quad (\text{I.86})$$

où les constantes  $\langle\hat{X}^2\rangle_0, \langle\hat{P}^2\rangle_0$  et  $\langle\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}\rangle_0$  sont les valeurs moyennes à l'instant  $t = 0$ .

En utilisant (I.75), nous pouvons maintenant calculer les variances de l'impulsion et de la position :

$$\begin{cases} (\Delta P)^2 = \langle\hat{P}^2\rangle_0 - \langle\hat{P}\rangle_0^2 = (\Delta P)_0^2 \\ (\Delta X)^2 = \frac{1}{M^2}(\Delta P)_0^2 t^2 + \frac{1}{M}[\langle\hat{P}\hat{X} + \hat{X}\hat{P}\rangle_0 - 2\langle\hat{P}\rangle_0\langle\hat{X}\rangle_0] t + (\Delta X)_0^2 \end{cases} \quad (\text{I.87})$$

L'évolution libre des degrés de liberté externes du système est résumée dans les égalités (I.80) et (I.87). La valeur moyenne  $\langle\hat{P}\rangle$  et la variance  $(\Delta P)^2$  de

l'impulsion sont des constantes du mouvement (ceci peut d'ailleurs se déduire directement du fait que  $\hat{P}$  commute avec  $\hat{P}^2/2M$ ) tandis que la valeur moyenne  $\langle \hat{X} \rangle$  et la variance  $(\Delta X)^2$  de la position sont des fonctions respectivement linéaire et quadratique du temps. Dans l'espace réel, le paquet d'ondes a donc un mouvement d'ensemble caractérisé par la vitesse de groupe  $\langle \hat{P} \rangle_0/M$  et associé à un étalement décrit par la deuxième égalité de (I.87).

### I.1.3.3 Lien avec l'opérateur densité

La définition (I.75) montre que les grandeurs  $\Delta X$  et  $\Delta P$  dont nous venons de calculer l'évolution libre correspondent simplement aux largeurs *rms*,  $\Delta x$  et  $\Delta p$  des distributions de position et d'impulsion introduites dans le paragraphe I.1.2.2 :

$$\Delta X = \sigma_{rms}[F(x)] = \Delta x \quad (\text{I.88})$$

$$\Delta P = \sigma_{rms}[G(p)] = \Delta p \quad (\text{I.89})$$

Nous avons démontré dans le paragraphe précédent que  $\Delta P$  était une constante du mouvement au cours d'une évolution libre, tandis que  $\Delta X$  augmentait au cours du temps. D'après les formules (I.58) et (I.59), on peut en déduire comment évoluent  $\xi_C$  et  $\kappa_C$  et finalement on peut écrire :

$$t \nearrow \implies \begin{cases} \Delta p = cte \\ \xi_C = cte \\ \Delta x \nearrow \\ \kappa_C \searrow \end{cases} \quad (\text{I.90})$$

La distribution d'impulsion  $G(p)$  et la cohérence spatiale globale  $\mathcal{F}(\xi)$  sont des constantes du mouvement au cours d'une évolution libre. Dans le même temps, la distribution de position  $F(x)$  s'élargit tandis que la cohérence globale en impulsion  $\mathcal{G}(\kappa)$  est de plus en plus étroite.

### I.1.4 Longueurs caractéristiques

Dans les trois paragraphes précédents, nous avons vu apparaître plusieurs longueurs caractéristiques que nous rappelons ici (en rajoutant la longueur d'onde de de Broglie) :

- $\xi_C$  : longueur de cohérence atomique
- $\delta x$  : largeur *rms* de la distribution spatiale d'un paquet d'ondes  $F_0(x)$
- $\sigma$  : largeur *rms* de la distribution des positions moyennes des atomes  $H(x)$

- $\Delta x$  : largeur *rms* de la distribution en position des atomes  $F(x)$
- $\Lambda_{dB}$  : longueur d'onde de de Broglie atomique

Il importe de ne pas faire de confusion entre toutes ces longueurs et avant tout de distinguer celles qui sont des constantes du mouvement dans une évolution libre :

$$\xi_c, \Lambda_{dB} \quad (\text{I.91})$$

de celles qui ne le sont pas :

$$\delta x, \sigma, \Delta x \quad (\text{I.92})$$

- La distinction entre  $\sigma$  et  $\delta x$  ne pose pas de problèmes et il suffit de regarder par exemple la figure I.3 au début du paragraphe 1.2.2 pour en avoir une idée claire. Comme nous le verrons dans le paragraphe suivant,  $\sigma$  est en général très grand devant  $\delta x$ .
- De même, comme  $F(x) = H(x) * F_0(x)$ , il est clair que  $\Delta x$  est une fonction de  $\sigma$  et de  $\delta x$ . Par exemple si  $H(x)$  et  $F_0(x)$  sont des distributions gaussiennes, leur produit de convolution est aussi une gaussienne et on trouve  $\Delta x^2 = \sigma^2 + \delta x^2$ . Dans le cas (très fréquent) où  $\delta x \ll \sigma$  on a simplement  $\Delta x \simeq \sigma$ .
- La distinction entre la largeur du paquet d'ondes et la longueur de cohérence est plus subtile. Remarquons d'abord que, dans une évolution libre, la première augmente au cours du temps tandis que la seconde est une constante du mouvement. D'après la deuxième égalité de (I.87), la largeur du paquet d'ondes varie au cours du temps selon :

$$\delta x = \sqrt{At^2 + Bt + (\delta x)_0^2} \quad (\text{I.93})$$

où  $A$  et  $B$  sont deux constantes, en passant par un minimum qui vaut :

$$\delta x_{min} = \sqrt{(\delta x)_0^2 - B^2/4A} \quad (\text{I.94})$$

Or les inégalités de Heisenberg imposent :

$$\delta x_{min} \cdot \Delta p \geq \hbar \quad (\text{I.95})$$

ce qui entraîne :

$$\delta x_{min} \geq \frac{\hbar}{\Delta p} = \xi_c \quad (\text{I.96})$$

La longueur de cohérence apparaît ainsi comme la largeur minimale d'un paquet d'ondes atomique autorisée par le principe d'incertitude de Heisenberg. Par ailleurs c'est seulement  $\xi_C$  qui est reliée à la température. Il n'y a aucune corrélation entre l'extension spatiale d'un paquet d'ondes et la température contrairement à ce qu'on pourrait penser en disant qu'"un atome est d'autant plus délocalisé spatialement qu'il est froid". Un paquet d'ondes très large n'a pas forcément une distribution d'impulsion très étroite. Si c'était le cas il suffirait de laisser évoluer librement les atomes pour les refroidir. Ce qui importe pour la température ce sont les corrélations spatiales d'un point à l'autre du paquet d'ondes, corrélations qui ne sont correctement décrites que par la longueur de cohérence.

- La longueur d'onde de De Broglie est définie par :

$$\Lambda_{dB} = \frac{h}{\langle \hat{P} \rangle} \quad (I.97)$$

Elle n'a donc pas un grand intérêt dans notre cas puisque nous avons choisi des paquets d'ondes dont l'impulsion moyenne est nulle. La seule grandeur décrivant rigoureusement les corrélations spatiales à l'intérieur d'un paquet d'ondes reste la longueur de cohérence.

## I.2 Applications à une source d'atomes froids et piégés

### I.2.1 Populations et cohérences dans un nuage d'atomes froids

Du point de vue des degrés de libertés externes un nuage d'atomes froids est caractérisé complètement par la donnée de sa distribution en position  $F(x)$  (ou de sa transformée de Fourier, la cohérence globale en impulsion  $\mathcal{G}(\kappa)$ ) et de distribution en impulsion  $G(p)$  (ou de sa transformée de Fourier, la cohérence spatiale globale  $\mathcal{F}(\xi)$ ). Comme nous l'avons vu ci-dessus toutes ces informations sont contenues dans les éléments diagonaux et non-diagonaux de l'opérateur-densité  $\rho$  pris en représentation position ou impulsion.

#### I.2.1.1 Distributions en position et en impulsion

Les distributions  $F(x)$  et  $G(p)$  s'interprètent facilement en termes de densité spatiale  $n$  et de température  $T$  respectivement. En effet si  $N$  est le nombre total d'atomes dans le nuage et si  $\delta p$  est la largeur à  $1/\sqrt{e}$  du maximum de la distribution d'impulsions, on a simplement :

$$n(x) = NF(x) \tag{I.98}$$

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{(\delta p)^2}{2M} \tag{I.99}$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann et  $M$  la masse d'un atome. Signalons dès à-présent que, dans le domaine du refroidissement d'atomes, la notion de température ne correspond pas strictement à celle qui est d'usage en thermodynamique. En effet la définition habituelle de la température d'un système suppose que celui-ci soit à l'équilibre thermodynamique ce qui n'est jamais le cas lorsque des atomes sont refroidis par laser. Dans le meilleur des cas, l'échantillon atomique atteint, après un temps d'interaction avec la lumière variant typiquement de quelques centaines de  $\mu s$  à quelques  $ms$ , un état quasi-stationnaire dans lequel sa température ne varie plus et qu'on peut considérer comme un quasi-équilibre. Dans les processus de refroidissement ultime, tel celui que nous étudions dans ce rapport, et qui permettent à l'heure actuelle d'atteindre les températures les plus basses, cet état de quasi-équilibre n'existe même plus puisque, comme nous le verrons dans le chapitre suivant, la température ne cesse de descendre lorsque le temps d'interaction augmente. Néanmoins, il est d'usage dans le domaine du refroidissement laser de définir une température "comme si" l'équilibre était atteint. Nous nous tiendrons dans tout ce rapport à l'expression (I.99) qui relie la

température à la largeur  $\delta p$  à  $1/\sqrt{e}$  du maximum de la distribution d'impulsions et qui est celle communément utilisée dans la littérature.

### Remarque

Dans le paragraphe 1.2.2, nous avons caractérisé la distribution d'impulsion par sa largeur *rms*,  $\Delta p$ . C'est seulement dans le cas d'une gaussienne que  $\Delta p = \delta p$ . Signalons par ailleurs que, dans le cas d'une lorentzienne,  $\Delta p$  n'est pas définie et la largeur caractéristique dans ce cas est plutôt la demi-largeur à mi-hauteur  $\delta p_{1/2}$  reliée à  $\delta p$  par :

$$\delta p = 0.805 \times \delta p_{1/2} \quad (\text{I.100})$$

L'unité de température que nous utiliserons le plus souvent dans ce rapport est la température de recul, notée  $T_R$  et définie par :

$$\frac{1}{2}k_B T_R = \frac{(p_R)^2}{2M} \quad (\text{I.101})$$

où  $p_R$  est l'impulsion de recul, c'est-à-dire l'impulsion communiquée à un atome initialement au repos lorsqu'il absorbe ou émet un seul photon. En notant  $k$  le nombre d'onde du photon considéré, on a donc :

$$p_R = \hbar k \quad (\text{I.102})$$

Voici, à titre d'exemple, les températures de recul de quelques atomes couramment utilisés en refroidissement laser ainsi que les longueurs d'ondes des transitions correspondantes :

	$\lambda$	$T_R$
$^{133}\text{Cs}$	852 nm	200 nK
$^4\text{He}$	1083 nm	4 $\mu\text{K}$
$^{87}\text{Rb}$	780 nm	360 nK
$^{23}\text{Na}$	590 nm	2.4 $\mu\text{K}$
$^7\text{Li}$	671 nm	6 $\mu\text{K}$

#### I.2.1.2 Cohérences

Des deux fonctions de cohérence globale,  $\mathcal{F}(\xi)$  et  $\mathcal{G}(\kappa)$ , c'est la première, c'est-à-dire la cohérence spatiale, qui est le plus souvent utilisée et étudiée. En effet, c'est elle qui intervient par exemple dans toutes les expériences d'interférométrie atomique qui depuis quelques années démontrent et exploitent le caractère ondulatoire des atomes. Rappelons que  $\mathcal{F}(\xi)$  caractérise la corrélation moyenne



entre deux points du nuage atomique distants de  $\xi$ , le mot moyenne signifiant que l'on a intégré sur tous les éléments non-diagonaux de la matrice-densité en représentation position, pris entre deux points distants de  $\xi$ . Nous avons appelé longueur de cohérence  $\xi_c$  du nuage la largeur caractéristique de  $\mathcal{F}(\xi)$ . En pratique on pourra donc considérer que deux points du nuage atomique séparés par une distance petite devant  $\xi_c$  ont une phase relative fixe (corrélation parfaite), alors que deux points séparés par une distance grande devant  $\xi_c$  ont des phases pratiquement indépendantes (corrélation nulle). Rappelons que  $\xi_c$  est reliée à la largeur de la distribution en impulsion par :

$$\xi_c \simeq \hbar/\delta p \quad (\text{I.103})$$

## I.2.2 Ordres de grandeur et approximations

### Longueur de cohérence

Les expériences de refroidissement laser permettent de parcourir l'échelle de température sur de nombreux ordres de grandeur. Dans les expériences décrites dans ce rapport par exemple, nous partons d'un gaz d'hélium contenu dans une bouteille à température ambiante ( $T \simeq 298K$ ) pour aboutir à un échantillon d'environ  $10^5$  atomes refroidis à quelques  $nK$  soit une différence de 11 ordres de grandeur. Conséquemment la longueur de cohérence des atomes varient aussi sur une gamme très large. Voici les valeurs de  $\xi_c$  pour quelques températures typiques dans le cas de l'hélium 4 ( $\lambda = 1.083 \mu\text{m}$ ,  $T_R = 4 \mu\text{K}$ ) :

$$\begin{aligned} T = 10^6 T_R \text{ (jet atomique non-ralenti)} & : \xi_c = 1.7 \text{ \AA} \\ T = 20 T_R \text{ (piège magnéto-optique standard)} & : \xi_c = 38.5 \text{ nm} \\ T = T_R/1000 \text{ (refroidissement VSCPT)} & : \xi_c = 5.5 \mu\text{m} \end{aligned} \quad (\text{I.104})$$

En prêtant attention aux unités de longueur employées dans chaque cas, on constate que la longueur de cohérence ne devient significative que pour des températures plus basses que quelques température de recul. En particulier au-dessus de ces températures, elle est plus petite que le nuage électronique de l'atome lui-même et ne présente donc pas d'intérêt véritable. Pour les expériences décrites dans ce rapport les températures les plus basses sont de l'ordre de  $T_R/1000$  et on a donc pour toutes les situations envisageables ici :

$$\xi_c \leq 5 \mu\text{m} \quad (\text{I.105})$$

### Largeur des paquets d'ondes

La largeur minimale des paquets d'ondes vaut :

$$\delta x_{\min} = \xi_c \quad (\text{I.106})$$

Dès qu'on laisse évoluer librement le nuage d'atomes froids, la largeur évolue conformément à (I.87) et au bout d'un temps assez long, l'évolution est approximativement linéaire (limite classique) :

$$\delta x \simeq \frac{\Delta p}{M} t \quad (\text{I.107})$$

Pour une dispersion en impulsions  $\Delta p \simeq \hbar k/20$  ( $T \simeq T_R/400$ ) et une durée d'évolution libre typique de l'ordre de  $100 \mu\text{s}$ , on trouve par exemple :

$$\frac{\Delta p}{M} t \simeq 0.5 \mu\text{m} \quad (\text{I.108})$$

Ainsi l'étalement des paquets d'ondes est petit devant  $\xi_c$  et la largeur  $\delta x$  des paquets d'ondes reste de l'ordre de grandeur de  $\xi_c$ .

### Largeur du nuage atomique

La largeur *rms* de la distribution des centres des paquets d'ondes dans le nuage atomique,  $\sigma$ , caractérise l'extension spatiale du nuage atomique. Celle-ci varie selon les conditions expérimentales. On peut par exemple obtenir des échantillons atomiques extrêmement comprimés spatialement (jusqu'à quelques dizaines de  $\mu\text{m}$  dans un piège dipolaire croisé par exemple []) et inversement créer des conditions expérimentales permettant d'obtenir des nuages atomiques de plusieurs mm. Néanmoins dans la plupart des cas, et en particulier pour les expériences sur l'hélium qui nous intéressent ici, le rayon du nuage atomique est de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{m}$  à 1 mm.

$$\sigma \sim 10^2 - 10^3 \mu\text{m} \quad (\text{I.109})$$

Finalement nous constatons que, sauf cas particulier (échantillon très froid et extrêmement comprimé), la taille du nuage atomique est toujours assez largement supérieure à la longueur de cohérence atomique (de deux à trois ordres de grandeur au moins) et à la largeur des paquets d'ondes :

$$\xi_c, \delta x \ll \sigma \quad (\text{I.110})$$

Dans ce cas,  $\Delta x$ , qui est de façon générale une fonction de  $\delta x$  et  $\sigma$ , est pratiquement égal à  $\sigma$ , si bien que la portée des cohérences en impulsion vaut, d'après (I.59) :

$$\kappa_c \simeq \hbar/\sigma \quad (\text{I.111})$$

Rappelons qu'il est légitime de négliger les cohérences en impulsion si leur portée est négligeable devant la largeur  $\Delta p$  de la distribution en impulsion, c'est-à-dire si :

$$\frac{\kappa_c}{\Delta p} \ll 1 \quad (\text{I.112})$$

En appelant  $\Delta\tilde{p}$ , la largeur  $\Delta p$  exprimée en unité d'impulsion de recul et en utilisant (I.111) cette condition s'écrit :

$$\frac{\kappa_C}{\Delta p} = \frac{\hbar}{\sigma} \frac{1}{\hbar k \Delta\tilde{p}} = \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{\sigma} \frac{1}{\Delta\tilde{p}} \ll 1 \quad (\text{I.113})$$

d'où on déduit :

$$\Delta\tilde{p} \gg \frac{1}{2\pi} \frac{\lambda}{\sigma} \quad (\text{I.114})$$

Pour des valeurs typiques  $\lambda \simeq 1 \mu\text{m}$  et  $\sigma \simeq 1 \text{mm}$ , on obtient :

$$\Delta\tilde{p} \gg 10^{-4} \quad (\text{I.115})$$

On peut donc négliger les cohérences en impulsion dues à la taille finie du nuage atomique tant que :

$$T \gg \frac{T_R}{10^8} \quad (\text{I.116})$$

Cette condition est largement vérifiée puisque dans les meilleurs cas la température ne descend pas en-dessous de  $T_R/1000$ .

Dans ce chapitre, nous sommes revenus sur des notions élémentaires mais qu'il importe de bien comprendre pour aborder le sujet proprement dit de cette thèse. Dès le chapitre III, nous aurons en effet besoin de décrire l'évolution des atomes du point de vue de leur état interne et externe. Comme nous venons de le voir la description la plus générale dans un nuage atomique où il n'y a pas de corrélations entre la vitesse et la position est un mélange statistique de paquets d'ondes dont les centres sont répartis statistiquement dans une région limitée de l'espace. Cependant nous avons montré que lorsque l'hamiltonien et les observables dont on veut mesurer la grandeur moyenne commutent avec l'opérateur impulsion, on peut tout aussi bien raisonner sur un seul de ces paquets d'ondes (celui centré à l'origine par exemple) et c'est donc cette description que nous adopterons dans la suite du rapport.

### I.3 Analogie avec l'optique classique

C'est à Louis de Broglie qu'on doit d'avoir introduit pour la première fois en 1923 la description ondulatoire de la matière. Confirmée ensuite par de nombreuses expériences telles que la diffraction des électrons (Davisson et Germer - 1927), cette notion révolutionnaire sous-tend l'ensemble de la physique quantique. Louis de Broglie proposa d'associer à un corpuscule matériel d'impulsion  $\mathbf{p}$  un vecteur d'onde  $\mathbf{k}$  défini par la relation :

$$\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \quad (\text{I.117})$$

Dans cette relation  $\hbar$  vaut  $h/2\pi$  et  $h$  est la constante de Planck. Il existe donc une analogie étroite entre la description d'un atome et celle d'une source lumineuse et en particulier la variable atomique  $\mathbf{p}$  correspond directement à la variable lumineuse  $\mathbf{k}$ . A une dimension on peut associer  $p \leftrightarrow k$  ou encore de manière équivalente  $p \leftrightarrow \lambda$  ou  $p \leftrightarrow \omega$ . C'est cette dernière correspondance que nous utiliserons dans la suite car elle est particulièrement bien adaptée à notre propos. Dans les deux sections précédentes, nous avons décrit un atome alternativement dans l'espace des impulsions ou dans l'espace des positions, sachant que la variable  $x$  est simplement la variable conjuguée de Fourier de  $p$ . De la même façon, la théorie des phénomènes ondulatoires fait apparaître le temps  $t$  comme la variable conjuguée de la pulsation  $\omega$ . On peut donc résumer l'analogie entre les domaines atomiques et optiques par la correspondance :

$$\{p, x\} \longleftrightarrow \{\omega, t\} \quad (\text{I.118})$$

#### I.3.1 Spectre et cohérence d'une source lumineuse classique

Nous considérons ici une source lumineuse émettant un champ électrique polarisé selon une direction donnée et fixe. Ceci n'est pas restrictif pour le sujet que nous traitons ici et permet d'alléger la rédaction en évitant le recours aux notations vectorielles. D'autre part nous ne considérons ici que la composante électrique du champ lumineux que nous notons de manière générale  $E(t)$ .

On appelle communément source monochromatique, une source idéale dont le champ électrique est une fonction sinusoidale du temps de la forme :

$$E(t) = E_0 e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (\text{I.119})$$

où  $\varphi$  est une phase arbitraire fixe. En pratique, une source lumineuse n'est jamais strictement monochromatique et le champ qu'elle produit doit plutôt s'écrire comme une superposition de termes tels que (I.119). Mathématiquement cela se

décrit par une distribution continue de pulsations de la forme :

$$E(t) = \int_0^{\infty} g(\omega) e^{i(\omega t + \varphi)} d\omega \quad (\text{I.120})$$

où la fonction  $g(\omega)$  est connue sous le nom de distribution spectrale d'amplitude. On définit également la distribution spectrale d'intensité ou spectre d'intensité de la source lumineuse par l'égalité :

$$I(\omega) = |g(\omega)|^2 \quad (\text{I.121})$$

Pour une source monochromatique à la pulsation  $\omega_0$  par exemple, le spectre  $I(\omega)$  se réduit à une distribution de Dirac centrée en  $\omega = \omega_0$ . Pour une source dont le champ est donné par (I.120),  $I(\omega)$  est une fonction en cloche, souvent symétrique et caractérisée par une certaine largeur  $\delta\omega$  qui rend compte de sa finesse. Si  $\delta\omega/2\pi$  est très petite devant toutes les autres fréquences du système physique étudié, cette source pourra être considérée comme monochromatique.

### I.3.2 Spectroscopie de Fourier

La détermination du spectre  $I(\omega)$  d'une source lumineuse est évidemment un problème expérimental qui se pose très souvent puisque la qualité d'une telle source dépend généralement de sa finesse spectrale. La méthode la plus simple est d'utiliser un spectromètre. Celui-ci contient un élément dispersif (prisme ou réseau) sur lequel est envoyé un faisceau lumineux issu de la source et qui sera d'autant plus dispersé que la largeur spectrale de la source est grande. La résolution de ce dispositif est cependant limitée, en particulier par la taille des fentes d'entrée et de sortie, si bien que le spectre d'une source dont la largeur spectrale est inférieure à cette résolution ne peut être déterminé ainsi. On a alors recours à la technique dite de spectroscopie de Fourier.

Celle-ci est basée sur le principe très général en physique selon lequel, lorsqu'une distribution  $P(x)$  est trop étroite pour pouvoir être mesurée directement, il est beaucoup plus facile de déterminer sa transformée de Fourier  $\tilde{P}(y)$ , d'autant plus large que  $P(x)$  est étroite. Dans notre cas, ceci revient à déterminer la transformée de Fourier du spectre d'intensité  $I(\omega)$ , ce qui est simplement réalisé grâce à un interféromètre de type Michelson ou Mach-Zender par exemple. On envoie les trains d'ondes lumineux issus de la source sur la lame séparatrice à l'entrée de l'interféromètre et les deux trains d'ondes cohérents obtenus suivent chacun un chemin optique distinct avant de se recombiner sur un détecteur. Sur un des deux chemins optiques est intercalée une lame épaisse qu'on peut faire tourner de manière à introduire un déphasage variable sur le train d'ondes qui la traverse. Celui-ci arrive donc sur le détecteur avec un certain retard  $\tau$  par rapport à l'autre

train d'ondes. Le détecteur étant sensible à l'intensité lumineuse uniquement, il détecte un signal proportionnel à :

$$I(\tau) = \langle E^*(t)E(t + \tau) \rangle \quad (\text{I.122})$$

où les crochets  $\langle \rangle$  désignent la moyenne temporelle. Reportons (I.120) dans l'expression ci-dessus, il vient :

$$I(\tau) = \left\langle \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' g^*(\omega)g(\omega') e^{-i(\omega t + \varphi)} e^{i(\omega' t + \omega' \tau + \varphi)} \right\rangle \quad (\text{I.123})$$

$$= \frac{1}{T} \int_0^T dt \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' g^*(\omega)g(\omega') e^{-i(\omega - \omega')t} e^{i\omega' \tau} \quad (\text{I.124})$$

L'intégrale en  $t$  est séparable et fait apparaître une fonction delta :

$$I(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^\infty \int_0^\infty d\omega d\omega' g^*(\omega)g(\omega') T \delta(\omega - \omega') e^{i\omega' \tau} \quad (\text{I.125})$$

$$= \int_0^\infty d\omega |g(\omega)|^2 e^{i\omega \tau} \quad (\text{I.126})$$

En utilisant (I.121) et en normalisant correctement le signal sur l'intensité totale on obtient la fonction d'autocorrélation temporelle du champ lumineux :

$$G(\tau) = \frac{I(\tau)}{I(0)} = \frac{\int_0^\infty I(\omega) e^{i\omega \tau} d\omega}{\int_0^\infty I(\omega) d\omega} \quad (\text{I.127})$$

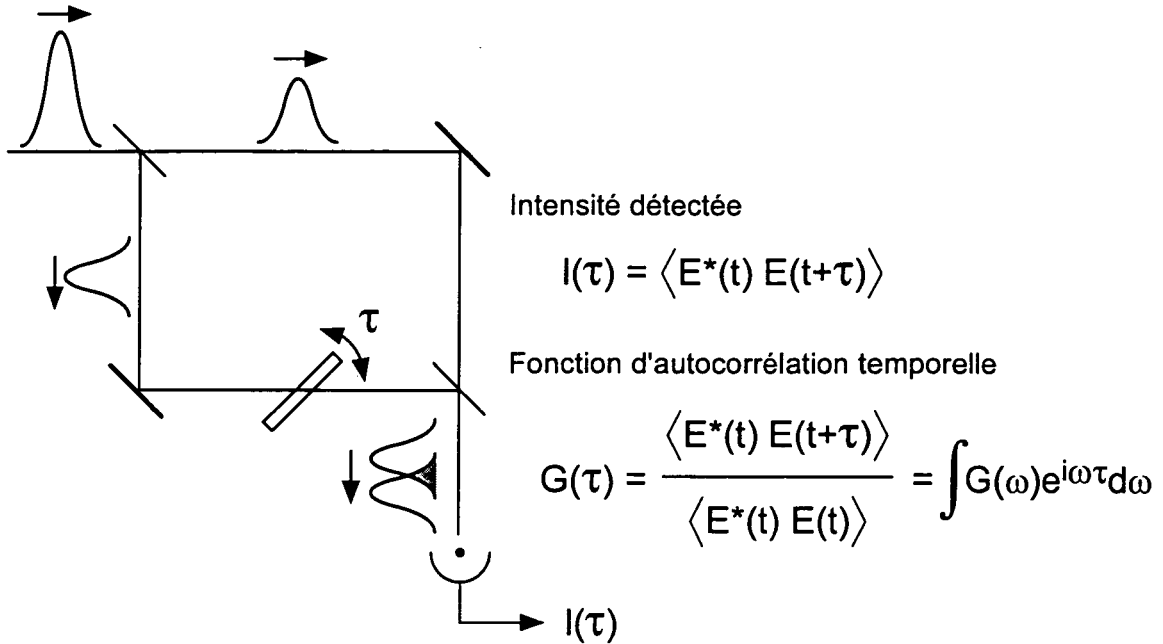
qui est simplement proportionnelle à la transformée de Fourier du spectre d'intensité  $I(\omega)$ .

### I.3.3 De l'optique classique à la physique atomique

Nous allons voir que nous pouvons tirer profit de la correspondance entre les variables atomiques  $\{p, x\}$  et les variables lumineuses  $\{\omega, t\}$  pour appliquer le principe de la spectroscopie de Fourier à la détermination de la distribution d'impulsion d'une source d'atomes froids. Considérons pour cela non plus un train d'ondes lumineux mais un paquet d'ondes atomique centré en  $x = 0$ . Comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, celui-ci s'écrit en représentation impulsion :

$$|\Phi(0)\rangle = \int g(p)|p\rangle dp \quad (\text{I.128})$$

INTERFEROMETRE OPTIQUE



INTERFEROMETRE ATOMIQUE

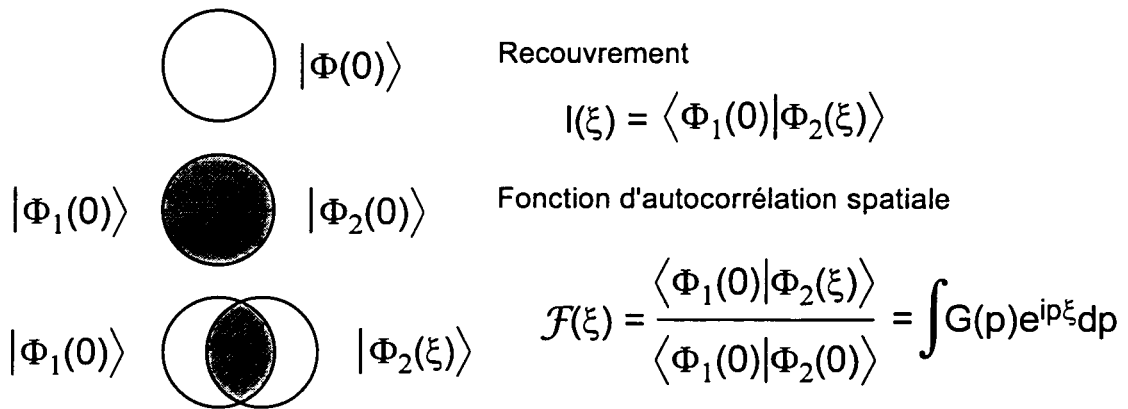


Figure I.4: Principe de la détermination interférométrique de la fonction d'autocorrélation temporelle  $G(\tau)$  du champ lumineux en optique et de la fonction d'autocorrélation spatiale  $\mathcal{F}(\xi)$  des paquets d'ondes en physique atomique.

Imaginons alors que l'on puisse dupliquer ce paquet d'ondes en deux paquets d'ondes identiques de la même manière que la lame séparatrice de l'interféromètre divise le train d'onde initial en deux trains d'ondes identiques. On obtient alors :

$$|\Phi_1(0)\rangle = |\Phi_2(0)\rangle = \int g(p)|p\rangle dp \quad (\text{I.129})$$

L'équivalent du déphasage temporel  $\tau$  d'un des trains d'ondes dans un bras de l'interféromètre est maintenant une translation spatiale de  $\xi$  sur un des deux paquets d'ondes. On a par exemple :

$$|\Phi_1(0)\rangle = \int g(p)|p\rangle dp \quad (\text{I.130})$$

$$|\Phi_2(\xi)\rangle = e^{i\hat{p}\xi/\hbar} \int g(p)|p\rangle dp = \int g(p)e^{ip\xi/\hbar}|p\rangle dp \quad (\text{I.131})$$

Supposons alors qu'on dispose de l'analogue, pour les ondes de matière, du photodétecteur. On peut alors mesurer un signal proportionnel au recouvrement des deux paquets d'ondes :

$$\langle\Phi_1(0)|\Phi_2(\xi)\rangle = \iint dp dp' g^*(p)g(p')e^{ip'\xi/\hbar}\langle p|p'\rangle \quad (\text{I.132})$$

$$= \int dp |g(p)|^2 e^{ip\xi/\hbar} \quad (\text{I.133})$$

En se rappelant que la distribution d'impulsion vaut  $G(p) = |g(p)|^2$  et en normalisant correctement le signal, on obtient la fonction d'autocorrélation spatiale :

$$\mathcal{F}(\xi) = \frac{\langle\Phi_1(0)|\Phi_2(\xi)\rangle}{\langle\Phi_1(0)|\Phi_2(0)\rangle} = \frac{\int G(p)^2 e^{ip\xi/\hbar} dp}{\int G(p) dp} \quad (\text{I.134})$$

Lorsque la distribution d'impulsion d'une assemblée d'atomes est trop étroite pour être mesurée directement, il est donc en principe possible, exactement comme en optique, de mesurer sa transformée de Fourier, la fonction d'autocorrélation spatiale, par une méthode interférométrique. Comme nous allons le voir dans le chapitre suivant, cette approche, courante en optique mais nouvelle dans le domaine de la physique atomique, est particulièrement facile à mettre en œuvre pour des atomes refroidis par VSCPT.



# Chapitre II

## Le refroidissement subrecul par résonances noires

### II.1 Principe général du refroidissement subrecul

Le Piégeage Cohérent de Population Sélectif en Vitesse (PCPSV), plus connu par son abréviation anglaise VSCPT, est l'une des deux méthodes que l'on connaît aujourd'hui pour refroidir des atomes neutres en-dessous de la température de recul  $T_R$  par des moyens purement optiques. Rappelons que  $T_R$  est la température correspondant à l'énergie cinétique acquise par un atome, initialement au repos, lorsqu'il absorbe ou émet un seul photon.

La plupart des mécanismes de refroidissement laser fonctionne grâce à l'interaction continue des atomes avec la lumière c'est-à-dire l'échange ininterrompu d'énergie et surtout d'impulsion entre le champ laser et l'atome. Cet échange a lieu lors de cycles de fluorescence au cours desquels l'atome absorbe puis réémet spontanément un photon dans les modes vides du champ de rayonnement. Un tel cycle se fait dans un laps de temps très court de l'ordre de la durée de vie de l'état excité de la transition (100 ns pour l'état  $2^3S_1$  de  $^4\text{He}$  par exemple). Ceci permet une répétition du processus à un taux élevé et donc, dans des conditions adéquates, un transfert d'impulsion et d'énergie très efficace de l'atome vers le champ lumineux.

Le refroidissement résulte alors d'une force de friction qui amortit le mouvement de l'atome associée à un processus de dissipation qui évacue son énergie cinétique. L'émission spontanée a un rôle très important dans tous ces mécanismes car c'est elle qui introduit la dissipation. Néanmoins, de par son caractère aléatoire, elle représente également une source de chauffage mettant une borne inférieure à la température limite des atomes.

Pour comprendre ce chauffage, l'effet de l'émission spontanée sur l'impulsion de l'atome doit être examiné à deux niveaux : instantané et moyen. L'émission spontanée d'un photon d'impulsion  $\hbar k$  peut avoir lieu dans une direction quelconque. Si l'on mesure l'impulsion de l'atome selon une direction déterminée, le recul qu'il subit lors de cette émission vaut donc  $a(\hbar k)$  où  $a$  est un nombre aléatoire compris, entre  $-1$  et  $+1$ . A chaque cycle, l'émission spontanée fait donc varier l'impulsion atomique d'une quantité aléatoire comprise entre  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$ . Si maintenant on veut estimer le changement d'impulsion atomique moyen sur plusieurs cycles, on doit connaître le diagramme d'émission, c'est-à-dire la loi de probabilité de la direction d'émission. Bien que la forme exacte de ce diagramme dépende du type de transition considéré, tous les diagrammes d'émission spontanée ont la caractéristique d'être symétriques par rapport à l'origine. En d'autres termes, l'émission spontanée a lieu avec la même probabilité dans une direction et dans la direction opposée. Lorsqu'on moyenne sur plusieurs cycles, le changement d'impulsion de l'atome dû à l'émission spontanée est donc nul. Globalement, l'émission spontanée ne change pas la valeur moyenne de l'impulsion atomique. En revanche, la variance ( $\delta p^2$ ) augmente, traduisant une diffusion dans l'espace des impulsions et donc un chauffage. La température finale des atomes dépend donc d'un équilibre entre le refroidissement dû à la friction et le chauffage dû à l'émission spontanée. Cependant tous les mécanismes dans lesquels l'émission spontanée ne cesse jamais ont une limite intrinsèque. A chaque cycle de fluorescence, l'impulsion de l'atome change aléatoirement d'une quantité de l'ordre de l'impulsion de recul :

$$p_R = \hbar k \quad (\text{II.1})$$

et il est donc impossible, tant que l'atome interagit avec la lumière, de réduire la dispersion d'impulsion  $\delta p$  en-dessous de  $p_R$ . Tous ces processus de refroidissement ont donc comme limite ultime la température de recul définie par :

$$k_B T_R / 2 = \hbar^2 k^2 / 2M \quad (\text{II.2})$$

L'idée générale à la base du refroidissement subrecoil est de faire en sorte que les atomes ayant une impulsion suffisamment faible soient découplés du champ laser de manière à les isoler de ce chauffage inévitable dû à l'émission spontanée. Bien sûr, seuls les atomes ayant une impulsion très proche de 0 et donc très froids devront cesser d'absorber des photons, tandis que les atomes plus chauds continueront à être couplés à la lumière.

Pratiquement il s'agit donc de créer un profil d'excitation par la lumière qui dépende de l'impulsion atomique et qui s'annule en  $p = 0$  en présentant une résonance très fine (figure II.1.a). Avec un tel profil, l'évolution de l'atome est la suivante : tant que son impulsion est suffisamment grande, le taux d'excitation

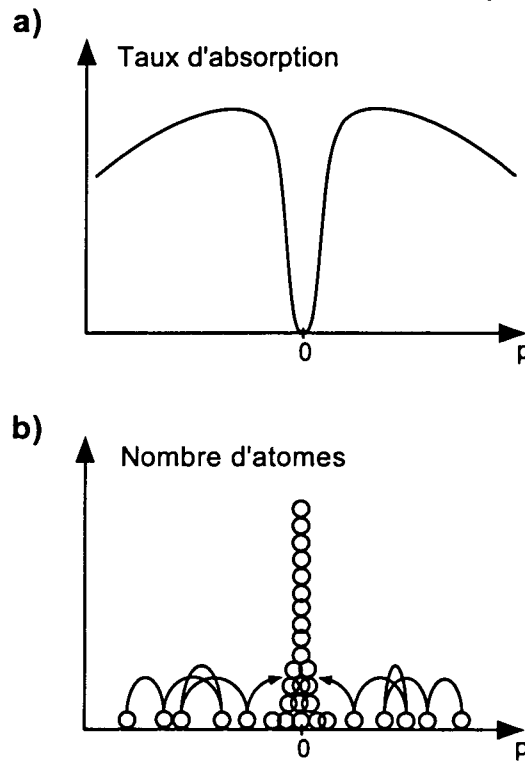


Figure II.1: Principe général du refroidissement subrecul. (a) Les atomes interagissent avec la lumière de telle sorte que le taux de fluorescence s'annule en présentant une résonance étroite en  $p = 0$ . Au voisinage immédiat de  $p = 0$ , les atomes cessent donc d'interagir avec la lumière (résonance noire). La sortie de résonance par effet Doppler explique la décroissance lente à grand  $|p|$ . (b) Lorsque  $|p| \gg 0$ , les atomes sont fortement couplés à la lumière et diffusent selon une marche aléatoire dont le pas est de l'ordre de  $\hbar k$ . Lorsqu'un atome tombe au voisinage de  $p = 0$ , il s'arrête de diffuser pendant un temps qui est d'autant plus long que son impulsion est proche de 0. Les atomes s'accumulent donc progressivement autour de  $p = 0$ .

par la lumière est élevé, l'atome est fortement couplé à la lumière et il effectue donc des cycles de fluorescence. A chaque cycle, son impulsion change alors d'une quantité aléatoire, comprise entre  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$ . On dit qu'il effectue une **marche au hasard** dans l'espace des impulsions. C'est ce qui est représenté par les petites flèches sur la figure II.1.b. Au cours d'un de ces sauts, il peut tomber au voisinage immédiat de l'impulsion  $p = 0$  où le taux de fluorescence est pratiquement nul. Dans ce cas, il va cesser d'interagir avec la lumière et rester "piégé" au voisinage de  $p = 0$  pendant une durée très longue. Bien sûr, seuls les atomes tombés exactement en  $p = 0$ , pour lesquels le taux d'excitation est rigoureusement nul, y resteront un temps infini. Les autres, avec une impulsion proche de 0, finiront par ressortir de ce piège. Ce faisant, ils seront de nouveau couplés à la lumière et reprendront leur marche au hasard dans l'espace des impulsions, ayant ainsi une nouvelle occasion de tomber en  $p \simeq 0$ .

C'est la combinaison entre le **filtrage** des atomes d'impulsion  $p \simeq 0$  et le **recyclage** des atomes d'impulsion  $p \neq 0$  qui résulte en l'accumulation progressive des atomes au voisinage de  $p = 0$  et conduit au refroidissement. La température limite ne dépend donc plus de l'émission spontanée mais uniquement du temps d'interaction et de la largeur de la résonance noire autour de  $p = 0$  qui peut être beaucoup plus petite que  $\hbar k$ .

Les deux méthodes actuellement démontrées pour le refroidissement subrecul (VSCPT [22, 23] et refroidissement Raman [29, 31, 32]) sont basées sur le même principe général mais différent par leurs moyens. Pour le VSCPT, le filtrage est obtenu par un effet d'interférence quantique destructive entre deux amplitudes de probabilités d'absorption (résonance noire), tandis que le recyclage est réalisé par une marche au hasard purement diffusive (au moins dans la configuration la plus simple) des atomes d'impulsion  $p \neq 0$ . Pour le refroidissement Raman, c'est l'utilisation d'impulsions Raman bien choisies qui assure en même temps le recyclage, en poussant les atomes vers  $p = 0$  et le filtrage, en reconstruisant un profil d'excitation tel que celui de la figure II.1.a.

## II.2 Théorie simple du refroidissement VSCPT

Tout le travail présenté dans ce mémoire concerne le refroidissement VSCPT à 1 dimension sur une transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$ , c'est donc uniquement ce cas particulier que nous décrivons maintenant. Signalons cependant que ce processus de refroidissement se généralise (du moins en théorie) non seulement à toutes les transitions de type  $J \leftrightarrow J$  et  $J \leftrightarrow J - 1$  mais aussi à 2 et 3 dimensions. Sur ces sujets, on consultera par exemple [28, 66] pour le VSCPT en 2D et 3D sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$ , [26, 46, 50, 77] pour le VSCPT sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 0$ .

### II.2.1 Description du système étudié

#### II.2.1.1 Configuration $\Lambda$ en lumière $\sigma_+/\sigma_-$

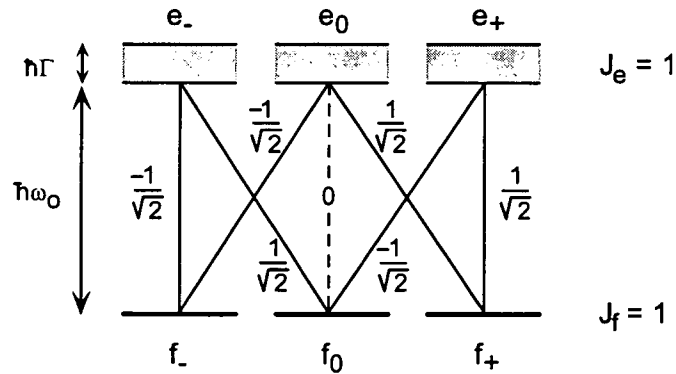


Figure II.2: Transition  $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ . Chaque niveau présente une dégénérescence Zeeman en trois sous-niveaux. On a indiqué, pour chaque transition, la valeur du coefficient de Clebsch-Gordan. Notez en particulier que celui de la transition  $|f_0\rangle \leftrightarrow |e_0\rangle$  est nul.

#### Atome

Considérons donc une transition atomique entre un niveau fondamental  $|f\rangle$  stable, de moment cinétique total  $J_f = 1$  et un niveau excité  $|e\rangle$ , de durée de vie  $\Gamma^{-1}$

et de même moment cinétique total  $J_e = 1$ . On note  $\hbar\omega_0$  l'écart d'énergie entre ces niveaux. Chacun de ces niveaux présente une dégénérescence en trois sous-niveaux Zeeman, notés respectivement  $|f_0\rangle, |f_{\pm}\rangle$  et  $|e_0\rangle, |e_{\pm}\rangle$ .

L'atome sera traité de manière entièrement quantique, c'est-à-dire tant du point de vue de son état interne que de ses degrés de liberté externes, en l'occurrence son impulsion. Nous noterons de manière générale :

$$|i, p\rangle \quad (\text{II.3})$$

le vecteur d'état décrivant un atome dans l'état interne  $i$  et dont le centre de masse a l'impulsion moyenne  $p$ .

### Champ lumineux

On éclaire l'atome par deux ondes lasers monochromatiques de même pulsation  $\omega_L$  proche de la résonance, de polarisations circulaires orthogonales et se propageant dans la même direction  $e_z$  mais en sens opposés. On notera  $\mathbf{E}_+$  le champ électrique de l'onde laser polarisée  $\sigma_+$  et se propageant dans le sens  $z > 0$  et  $\mathbf{E}_-$  le champ électrique de l'onde laser polarisée  $\sigma_-$  et se propageant dans le sens  $z < 0$ .

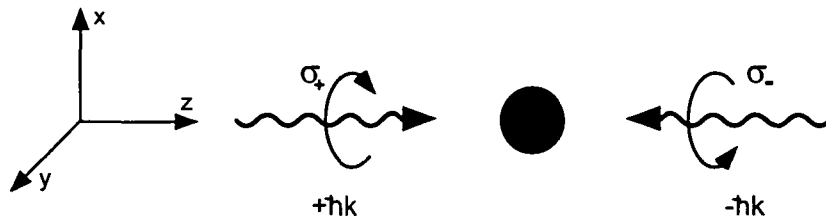


Figure II.3: Les atomes sont soumis à deux ondes lasers de même pulsation  $\omega_L$ , de même amplitude  $\mathcal{E}_0$ , se propageant en sens opposés selon  $(Oz)$  et de polarisations circulaires orthogonales.

On supposera de plus que ces deux ondes ont la même amplitude  $\mathcal{E}_0$  et une phase relative fixée. Nous reviendrons sur l'importance de ce dernier point mais indiquons dès à présent que ces deux ondes sont généralement obtenues par

rétro réflexion d'un faisceau laser polarisé circulairement à travers une lame quart d'onde. Leur phase relative est alors fixée par la distance entre la lame et le miroir (voir paragraphe III.2). Si ces deux éléments sont strictement immobiles, l'onde retour ( $\sigma_-$ ) aura un déphasage constant par rapport à l'onde aller ( $\sigma_+$ ). On peut toujours prendre cette phase nulle, auquel cas le champ électrique total dû aux lasers s'écrit :

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \epsilon_+ \mathcal{E}_0 e^{i(kz - \omega_L t)} + c.c. \right] + \frac{1}{2} \left[ \epsilon_- \mathcal{E}_0 e^{i(-kz - \omega_L t)} + c.c. \right] \quad (\text{II.4})$$

où  $\epsilon_{\pm}$  sont les vecteurs de polarisations circulaires définis par :

$$\epsilon_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}} (\mathbf{e}_x \pm i\mathbf{e}_y) \quad (\text{II.5})$$

### Couplages atome-laser

Dans l'approximation dipolaire électrique, les seuls couplages autorisés par les lois de conservation du moment cinétique total sont  $|f_- \rangle \leftrightarrow |e_0 \rangle$ ,  $|f_0 \rangle \leftrightarrow |e_+ \rangle$  par le champ  $\mathbf{E}_+$  d'une part et  $|f_+ \rangle \leftrightarrow |e_0 \rangle$ ,  $|f_0 \rangle \leftrightarrow |e_- \rangle$  par le champ  $\mathbf{E}_-$  d'autre part. Par ailleurs dans une transition  $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$ , le coefficient de Clebsch-Gordan de la transition  $|f_0 \rangle \leftrightarrow |e_0 \rangle$  est nul (voir figure II.2) si bien qu'il ne peut y avoir d'émission spontanée de  $|e_0 \rangle$  vers  $|f_0 \rangle$ . On peut alors séparer le système complet des 6 sous-niveaux en deux sous-systèmes :  $\{|f_- \rangle, |e_0 \rangle, |f_+ \rangle\}$  formant une configuration en  $\Lambda$  et  $\{|e_- \rangle, |f_0 \rangle, |e_+ \rangle\}$  formant une configuration en  $V$ . Il suffit d'appliquer les règles de sélection rappelées ci-dessus pour voir qu'un atome initialement dans le sous-système en  $\Lambda$  ne peut en sortir, alors que s'il se trouve initialement dans le sous-système en  $V$ , il a une chance sur deux de tomber dans le sous-système en  $\Lambda$  à chaque cycle de fluorescence. Ainsi après quelques cycles absorption-émission spontanée toute la population se trouve optiquement pompée dans le sous-système en  $\Lambda$ . C'est donc ce système restreint, représenté sur la figure II.4, que nous étudions ici.

Lors de l'absorption d'un photon laser par l'atome, l'impulsion totale du système {atome+champ} est conservée. Par conséquent, un atome dans l'état  $|e_0 \rangle$  avec l'impulsion  $p$  est soit un atome initialement dans l'état  $|f_- \rangle$  avec l'impulsion  $p - \hbar k$  ayant absorbé un photon (d'impulsion  $+\hbar k$ ) dans l'onde  $\mathbf{E}_+$ , soit un atome initialement dans l'état  $|f_+ \rangle$  avec l'impulsion  $p + \hbar k$  ayant absorbé un photon (d'impulsion  $-\hbar k$ ) dans l'onde  $\mathbf{E}_-$ . Le système doit donc être étudié dans la base :

$$\mathcal{F}(p) = \{|e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\}, \quad p \in Z \quad (\text{II.6})$$

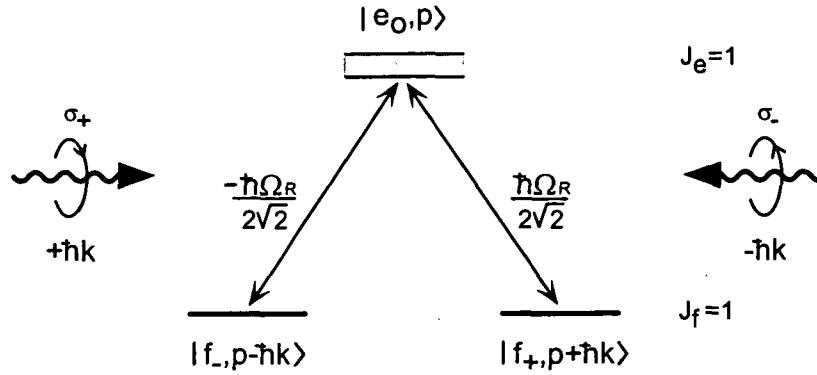


Figure II.4: Système en Lambda auquel se réduit la transition  $J_f = 1 \leftrightarrow J_e = 1$  en présence des ondes lasers  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . La notation des sous-niveaux rend compte non seulement de l'état interne ( $f_{\pm,0}, e_0$ ), mais aussi de l'impulsion moyenne ( $p \pm \hbar k, p$ ). Les couplages laser entre les sous-niveaux fondamentaux et l'état excité sont proportionnels à la pulsation de Rabi, définie dans le texte.

et les couplages laser entre ces états sont résumés sur la figure II.4.

Du fait de la prise en compte de l'impulsion atomique, il y a maintenant non plus trois mais une infinité d'états dans le système puisque le paramètre  $p$  varie continuellement entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Néanmoins, comme le fait apparaître (II.6), cet ensemble infini est structuré en familles de 3 états caractérisées par le paramètre  $p$  et dont la propriété est d'être stables vis-à-vis du couplage avec le champ laser.

#### Remarque

Il importe de ne pas confondre le paramètre  $p$  caractérisant la famille d'états  $\mathcal{F}(p)$  avec l'impulsion atomique. Celle-ci est bien égale à  $p$  dans l'état excité  $|e_0\rangle$  mais vaut  $p \pm \hbar k$  lorsque l'atome se trouve dans  $|f_{\pm}\rangle$ . Dans la suite nous appellerons *quasi-impulsion*, le paramètre  $p$  repérant les différentes familles d'états.

#### Couplage atome-vide quantique

L'atome est non seulement couplé au champ laser mais aussi aux modes initialement vides du champ (champ du vide quantique) vers lesquels se fait l'émission



spontanée. Ici nous ne traitons pas quantiquement le champ du vide et son interaction avec l'atome. Nous décrivons simplement l'émission spontanée par la durée de vie finie  $\Gamma^{-1}$  du niveau excité. Cette instabilité correspond à la largeur  $\hbar\Gamma$  du niveau excité, représentée sur la figure II.4.

L'émission spontanée a pour conséquence de détruire la stabilité des familles  $\mathcal{F}(p)$ . En effet, elle entraîne des changements aléatoires de l'impulsion atomique et introduit donc des couplages entre familles de  $p$  différents. Il faudra donc, dans l'évolution générale de l'atome, considérer des périodes d'évolution hamiltonienne à l'intérieur d'une famille  $\mathcal{F}(p)$ , suivie d'une émission spontanée vers une autre famille  $\mathcal{F}(p')$ , puis d'une évolution hamiltonienne dans  $\mathcal{F}(p')$  suivie d'une nouvelle émission spontanée vers  $\mathcal{F}(p'')$ , etc...

### II.2.1.2 Hamiltonien du système

#### Hamiltonien et couplage

En l'absence d'émission spontanée, c'est-à-dire à l'intérieur d'une famille  $\mathcal{F}(p)$ , le hamiltonien total du système {atome+champ} s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{V}_{AL} \quad (\text{II.7})$$

Le terme  $\hat{H}_A$  désigne le hamiltonien atomique qui est la somme de l'énergie interne et de l'énergie cinétique de l'atome :

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_0|e_0, p\rangle\langle e_0, p| + \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad (\text{II.8})$$

L'interaction entre l'atome et le champ laser est décrite par  $\hat{V}_{AL}$ . Dans l'approximation dipolaire électrique ce terme s'écrit :

$$\hat{V}_{AL} = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(\hat{z}, t) \quad (\text{II.9})$$

où  $\mathbf{d}$  est l'opérateur moment dipolaire électrique de l'atome et  $\mathbf{E}(\hat{z}, t)$ , le champ laser<sup>1</sup> donné en (II.4) et pris à la position  $\hat{z}$  du centre de masse atomique (la notation  $\hat{z}$  rappelle que la position est ici un opérateur).

---

<sup>1</sup>On suppose ici que le champ laser est initialement dans un état cohérent si bien qu'on peut le traiter comme un champ extérieur classique [55]. Pour cette raison, il ne donne pas de contribution directe  $\hat{H}_L$  au hamiltonien. Par ailleurs on ne prend pas en compte l'émission spontanée, c'est pourquoi  $\hat{H}$  ne contient ni l'énergie du champ quantique de rayonnement, ni le couplage de celui-ci avec l'atome.

Les couplages atome-laser que nous avons explicités dans le paragraphe précédent se retrouvent dans les seuls éléments de matrice non nuls de  $\hat{V}_{AL}$  :

$$\langle e_0, p | \hat{V}_{AL} | f_+, p + \hbar k \rangle = \langle f_+, p + \hbar k | \hat{V}_{AL} | e_0, p \rangle^* = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar \Omega_R}{2} e^{-i\omega_L t} \quad (\text{II.10})$$

$$\langle e_0, p | \hat{V}_{AL} | f_-, p - \hbar k \rangle = \langle f_-, p - \hbar k | \hat{V}_{AL} | e_0, p \rangle^* = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar \Omega_R}{2} e^{-i\omega_L t} \quad (\text{II.11})$$

Les facteurs  $\pm 1/\sqrt{2}$  sont les facteurs de Clebsch-Gordan des deux transitions (voir figure II.4) et la pulsation de Rabi  $\Omega_R$  est définie par :

$$\Omega_R = -\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_0}{\hbar} \quad (\text{II.12})$$

On a noté  $\mathcal{D}$ , l'élément de matrice réduit de l'opérateur dipôle atomique. Ainsi définie,  $\Omega_R$  est la pulsation de Rabi associée à l'amplitude  $\mathcal{E}_0$  du champ laser pour une transition dont le coefficient de Clebsch-Gordan vaut 1.

Dans la base  $\{|e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\}$ , le hamiltonien interne est donc diagonal tandis que  $\hat{V}_{AL}$  couple les deux sous-niveaux fondamentaux  $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  au niveau excité  $|e_0, p\rangle$ .

### Changement de base

La valeur opposée des éléments de matrice (II.10) et (II.11) suggère alors d'effectuer un changement de base dans le sous-espace sous-tendu par  $\{|f_-, p - \hbar k\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle\}$ . Introduisons ainsi les deux états suivants :

$$|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle] \quad (\text{II.13})$$

$$|\psi_C(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|f_+, p + \hbar k\rangle - |f_-, p - \hbar k\rangle] \quad (\text{II.14})$$

où la signification des indices  $C$  et  $NC$  va apparaître dans quelques lignes.

### Remarques

- La fonction d'onde correspondant aux deux états ci-dessus dans l'espace des positions est une superposition de deux ondes planes s'éloignant l'une de l'autre avec une vitesse relative  $2\hbar k/M$ . Le déphasage entre ces deux ondes planes vaut 0 pour l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et  $\pi$  pour l'état  $|\psi_C(p)\rangle$ .

- Il suffit de calculer la valeur moyenne de l'opérateur impulsion  $\hat{P}$  dans les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  ou  $|\psi_C(p)\rangle$  pour constater que la quasi-impulsion  $p$  est simplement l'impulsion du centre de masse de l'atome.

Il suffit d'appliquer les relations (II.10) et (II.11) pour trouver immédiatement :

$$\begin{aligned} \langle e_0, p | \hat{V}_{AL} | \psi_{NC}(p) \rangle &= 0 \\ \langle e_0, p | \hat{V}_{AL} | \psi_C(p) \rangle &= \frac{\hbar\Omega_R}{2} e^{-i\omega_L t} \end{aligned} \quad (\text{II.15})$$

L'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  est donc non couplé à l'état excité par le laser alors que l'état  $|\psi_C(p)\rangle$  est, lui, fortement couplé (l'intensité du couplage laser est effectivement deux fois plus forte pour  $|\psi_C(p)\rangle$  que pour chacun des sous-niveaux  $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$ ). La figure II.4 permet d'interpréter physiquement l'existence de ces deux états. Les deux transitions  $|f_+, p + \hbar k\rangle \rightarrow |e_0, p\rangle$  et  $|f_-, p - \hbar k\rangle \rightarrow |e_0, p\rangle$  conduisent en effet au même état final. Pour un atome qui se trouve dans une superposition linéaire des deux sous-niveaux fondamentaux, les amplitudes de probabilité de ces deux transitions peuvent donc interférer. Une interférence constructive résulte en un couplage plus fort tandis qu'une interférence destructive inhibe la transition.

L'avantage de cette nouvelle base est de faire apparaître un état propre de  $\hat{V}_{AL}$  avec la valeur propre 0, c'est-à-dire découplé du laser. Mais elle introduit également de nouveaux couplages par l'intermédiaire de l'opérateur d'énergie cinétique. En introduisant l'énergie de recul définie par :

$$E_R = \frac{\hbar^2 k^2}{2M} \quad (\text{II.16})$$

nous déduisons facilement :

$$\begin{aligned} \frac{\hat{P}^2}{2M} |\psi_{NC}(p)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} |f_+, p + \hbar k\rangle + \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \\ &= \left( \frac{p^2}{2M} + E_R \right) |\psi_{NC}(p)\rangle + \frac{\hbar k p}{M} |\psi_C(p)\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.17})$$

$$\begin{aligned} \frac{\hat{P}^2}{2M} |\psi_C(p)\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} |f_+, p + \hbar k\rangle - \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \\ &= \frac{\hbar k p}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle + \left( \frac{p^2}{2M} + E_R \right) |\psi_C(p)\rangle \end{aligned} \quad (\text{II.18})$$

Alors que les états initiaux  $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  étaient des états propres de  $\hat{P}^2/2M$ , les deux nouveaux états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  sont couplés par cet opérateur. Ce

couplage est décrit par l'élément de matrice :

$$\langle \psi_{NC}(p) | \frac{\hat{P}^2}{2M} | \psi_C(p) \rangle = \frac{\hbar k p}{M} \quad (\text{II.19})$$

directement proportionnel à l'impulsion atomique et pour cette raison dénommé couplage motionnel.

### Etat noir

Les couplages dans la famille  $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$  se résument donc :

- au couplage laser entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|e_0, p\rangle$ , indépendant de  $p$
- au couplage motionnel entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  qui s'annule pour  $p = 0$ .

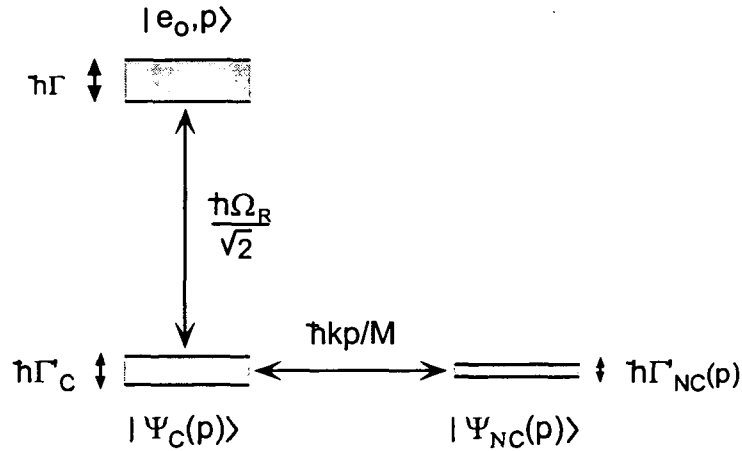


Figure II.5: Système en Lambda représentant la famille  $\mathcal{F}(p)$  après changement de base pour faire apparaître les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ , non-couplés à l'état excité. Les états  $|e_0, p\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  sont couplés par le couplage laser proportionnel à la pulsation de Rabi  $\Omega_R$ , tandis que les états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  sont couplés par le couplage motionnel proportionnel à la quasi-impulsion  $p$ . Une partie de l'instabilité naturelle de l'état excité de largeur  $\Gamma$  est transmise à  $|\psi_C(p)\rangle$  par le couplage laser ( $\Gamma'_C$ ), puis à  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  par le couplage motionnel ( $\Gamma'_{NC}(p)$ ).

Du fait de ces couplages, les états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ , stables pour l'hamiltonien atomique interne, acquièrent une durée de vie finie. En effet le couplage laser transfère une partie de l'instabilité naturelle du niveau  $|e_0, p\rangle$  vers le niveau  $|\psi_C(p)\rangle$  qui acquiert ainsi une largeur en énergie  $\hbar\Gamma'_C$  (un atome dans  $|\psi_C(p)\rangle$  y restera en moyenne pendant une durée  $\Gamma'^{-1}_C$  avant d'être excité vers  $|e_0, p\rangle$  par les lasers). Le couplage motionnel transfère à son tour une partie de l'instabilité vers  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et la largeur  $\hbar\Gamma'_{NC}$  acquise par ce niveau dépend cette fois de  $p$  comme le couplage dont elle résulte (voir calcul complet dans l'appendice 2). En particulier, pour  $p = 0$ , la largeur  $\Gamma'_{NC}$  est nulle et l'état  $|\psi_{NC}(p = 0)\rangle$  correspondant est donc parfaitement stable. Il n'existe donc, parmi l'infinité d'états possibles du système, qu'un seul état stationnaire :

$$|\psi_{NC}(p = 0)\rangle \quad (\text{II.20})$$

Cet état est non seulement non-couplé à l'état excité par la lumière mais aussi non-couplé à l'état  $|\psi_C(p = 0)\rangle$  par le couplage motionnel. C'est donc un vrai état propre de l'hamiltonien total avec la valeur propre  $E_R$  donnée par (II.17) :

$$\hat{H}|\psi_{NC}(p = 0)\rangle = E_R|\psi_{NC}(p = 0)\rangle \quad (\text{II.21})$$

Nous appellerons état noir, l'état  $|\psi_{NC}(p = 0)\rangle$  puisqu'un atome qui s'y trouve à un instant donné, y reste ensuite indéfiniment, protégé de l'excitation par le laser.

### Etats quasi-noirs

Bien que  $|\psi_{NC}(p = 0)\rangle$  soit le seul état parfaitement stable, les états  $|\psi_{NC}(p \neq 0)\rangle$  sont d'autant plus stables que  $p \rightarrow 0$ , puisque le couplage motionnel, donné par (II.19), est linéaire en  $p$ . On appellera état quasi-noir, un état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  dont la durée de vie  $\Gamma'^{-1}_{NC}(p)$  est suffisamment longue pour qu'un atome qui y tombe à l'instant  $t$  pendant la phase de refroidissement VSCPT, ait une grande probabilité d'y rester jusqu'à la fin. Si nous notons  $\theta$  la durée totale d'interaction entre les atomes et les lasers VSCPT, la quasi-impulsion  $p$  caractérisant un état quasi-noir doit donc être telle que :

$$(\theta - t) \times \Gamma'_{NC}(p) \leq 1 \quad (\text{II.22})$$

La détermination des valeurs de  $p$  qui satisfont cette condition n'est pas un problème facile, puisque  $(\theta - t)$  peut prendre toutes les valeurs entre 0 et  $\theta$ . Seul un traitement complet du processus de marche aléatoire dans l'espace des impulsions permet de résoudre rigoureusement ce problème (cf. chapitre VI). On peut néanmoins obtenir une condition suffisante (mais non nécessaire), en remarquant que (II.22) est satisfaite si tous ces états ont une durée de vie au moins égale à  $\theta$ , ce qui entraîne :

$$\theta \times \Gamma'_{NC}(p) \leq 1 \quad (\text{II.23})$$

En d'autres termes, une expérience de durée  $\theta$  ne peut différencier un état piège parfait (état noir) d'un état piège de durée de vie supérieure ou égale à  $\theta$  (état quasi-noir). Le calcul de  $\Gamma'_{NC}(p)$ , présenté en détail dans l'appendice 2 à la fin de ce mémoire, mène à l'expression suivante :

$$\Gamma'_{NC}(p) = \left( \frac{2kp}{M\Omega_R} \right)^2 \Gamma \quad (\text{II.24})$$

En reportant cette expression dans la condition (II.23), on trouve facilement que les états quasi-noirs sont les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  dont la quasi-impulsion appartient à l'intervalle, centré en  $p = 0$  et de largeur  $\delta p$  définie par :

$$\frac{k\delta p}{M} \simeq \frac{\Omega_R}{2} \frac{1}{\sqrt{\theta\Gamma}} \quad (\text{II.25})$$

Bien qu'assez approximatif et incomplet, le raisonnement qualitatif que nous venons de faire permet déjà d'introduire une propriété essentielle du refroidissement VSCPT. La largeur de la distribution finale d'impulsion décroît avec le temps d'interaction comme  $\theta^{-1/2}$  et par conséquent la température diminue comme  $\theta^{-1}$ . Comme nous le verrons plus loin, ceci est confirmé par les simulations et par le traitement analytique et la vérification expérimentale de cette propriété constitue un point important du présent travail.

## II.2.2 Description qualitative de la dynamique du refroidissement

Le principe général du refroidissement subrecul est de combiner un filtrage des atomes d'impulsions  $p \simeq 0$  et un recyclage des atomes d'impulsions  $p \neq 0$ . L'introduction d'états non-couplés nous a permis de comprendre l'origine de ces deux processus dans le cas du refroidissement VSCPT. Nous pouvons maintenant analyser la dynamique du refroidissement et la distribution d'impulsions à laquelle il conduit.

### II.2.2.1 Filtrage et recyclage

Dès que les deux lasers  $\sigma_+/\sigma_-$  sont branchés, l'atome, éclairé à résonance, subit des cycles de fluorescence et effectue donc une marche au hasard dans l'espace des impulsions. La base  $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$  permet de donner une vision claire de cette marche au hasard. Après chaque émission spontanée, l'atome est laissé dans une superposition d'états :

$$\alpha_C |\psi_C(p)\rangle + \alpha_{NC} |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{II.26})$$

Il évolue ensuite à l'intérieur de la famille  $\mathcal{F}(p)$  jusqu'à l'émission spontanée suivante. Cette évolution se fait de deux manières différentes selon que la quasi-impulsion atomique est très proche de 0 ou non :

- Si  $p \gg 0$ , le couplage motionnel est très fort et les deux états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  sont complètement mélangés. Dans ce cas il n'existe pas d'état piège dans lequel l'atome peut rester pendant un temps très long. Il subit rapidement une nouvelle émission spontanée et continue donc à fluorescer normalement. Pour les grandes impulsions l'atome suit donc une marche au hasard "normale", c'est-à-dire non perturbée par les effets d'interférence quantique.
- Si  $p \simeq 0$  au contraire, la partie couplée de (II.26) évolue avec une constante de temps  $\Gamma'_C^{-1}$  beaucoup plus courte que la constante de temps  $\Gamma'_{NC}^{-1}$  d'évolution de la partie non-couplée. L'atome est ainsi progressivement filtré dans l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . Si celui-ci a une durée de vie suffisamment longue, c'est-à-dire si  $|p|$  est inférieur à la limite  $\delta p$  définie en (II.25), l'atome y restera piégé pendant toute la durée d'interaction avec les lasers (états quasi-noirs). Au contraire si  $|p| \geq \delta p$ , une émission spontanée aura une grande probabilité de se produire avant la fin de la période d'interaction et l'atome recommencera sa marche au hasard.

On reconnaît ici les deux processus qui caractérisent le refroidissement subrecul, à-savoir le filtrage des atomes de quasi-impulsion faible dans des états découplés de la lumière et le recyclage des atomes de quasi-impulsion élevée par une marche au hasard. Les atomes s'accumulent donc progressivement dans les états quasi-noirs de quasi-impulsion  $|p| \leq \delta p$ . La figure II.1.b représente cette description simplifiée du refroidissement en montrant des atomes qui effectuent une marche au hasard dans l'espace des impulsions jusqu'à tomber éventuellement dans le piège formé par l'ensemble des états quasi-noirs autour de  $p = 0$ .

### Remarque

Revenons un instant sur la validité de cette description. Nous avons supposé pour simplifier que tous les états quasi-noirs avaient une durée de vie  $1/\Gamma'_{NC}(p) \geq \theta$ , ce qui nous a permis d'établir l'expression (II.25) de la largeur du piège en impulsions. Il convient cependant de remarquer que l'évolution réelle des atomes est beaucoup plus compliquée. Au cours de la période VSCPT de durée  $\theta$ , un atome peut en effet entrer et sortir à plusieurs reprises du piège si bien qu'en fait c'est seulement la dernière entrée dans ce piège qui va déterminer la distribution finale d'impulsions. Si l'atome entre pour la dernière fois dans le piège à l'instant  $t$ , il suffira

qu'il soit dans un état dont la durée de vie est plus grande que la durée d'interaction restante, c'est-à-dire  $\theta - t$ . La dynamique du refroidissement apparaît donc beaucoup plus riche que la description extrêmement simplifiée que nous en avons donnée ci-dessus. Son étude rigoureuse nécessite l'utilisation de lois statistiques particulières dites lois de Lévy et a fait l'objet de la thèse de F.Bardou [78]. Nous reviendrons plus en détail sur cette description dans le chapitre VI de ce mémoire où nous utilisons les lois de Lévy pour établir l'expression de la distribution finale d'impulsions des atomes refroidis.

### II.2.2.2 Distribution d'impulsions des atomes refroidis

Nous avons vu qu'à la fin du refroidissement, les atomes se sont accumulés dans des états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  où  $p$ , la quasi-impulsion, est répartie dans un intervalle centré en  $p = 0$ , de largeur  $\delta p$  telle que :

$$\frac{k\delta p}{M} \simeq \frac{\Omega_R}{2} \frac{1}{\sqrt{\theta\Gamma}} \quad (\text{II.27})$$

On voit que  $\delta p$  peut être arbitrairement petit pour peu que le temps d'interaction soit suffisamment long. En particulier il est facile d'ajuster les paramètres  $\Omega_R$  et  $\theta$  pour avoir :

$$\delta p < \hbar k \quad (\text{II.28})$$

qui définit le régime subrecul.

Quelle est alors la distribution d'impulsion des atomes? Il est clair, d'après l'expression (II.13) que l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  n'est pas un état propre de l'opérateur impulsion. Si l'on effectue une mesure de l'impulsion d'un atome dans cet état, on trouvera soit  $p + \hbar k$ , soit  $p - \hbar k$  avec la même probabilité  $1/2$ . A la fin du refroidissement VSCPT, la quasi-impulsion  $p$  est distribuée dans un intervalle de largeur  $\delta p < \hbar k$  autour de 0, si bien que la distribution d'impulsions des atomes consiste en deux pics, de hauteurs identiques, centrés en  $\pm \hbar k$  et de largeur inférieure à  $\hbar k$ .

Nous avons implicitement supposé jusqu'à présent que tous les atomes, après une marche au hasard plus ou moins longue, pouvaient finalement atteindre la région de quasi-impulsion  $p \simeq 0$ . Ceci n'est pas tout-à-fait exact car on doit tenir compte également de la possibilité des atomes de diffuser vers  $p \rightarrow +\infty$  et donc d'échapper au refroidissement. Pour comprendre au moins qualitativement ce phénomène dans le cas du VSCPT 1D en configuration  $\sigma_+/\sigma_-$ , on peut décrire la diffusion des atomes à grand  $p$  par deux modèles :



- Un premier modèle consiste à supposer que la marche au hasard soit vraiment libre, c'est-à-dire qu'elle ait lieu, en dehors de la résonance centrale, avec un taux de fluorescence constant (équivalent du mouvement brownien). Si un atome se trouve hors du piège, on peut alors supposer qu'il a la même probabilité de diffuser vers  $p \rightarrow 0$  que vers  $p \rightarrow +\infty$ . En l'absence d'un processus de friction capable de ramener les atomes de grande impulsion vers  $p = 0$ , les atomes peuvent ainsi échapper au refroidissement. On peut calculer la population d'atomes refroidis [78] et on montre qu'effectivement elle tend vers 0 lorsque le temps d'interaction  $\theta$  tend vers l'infini. Néanmoins on peut calculer que la population refroidie décroît en  $\theta^{-1/4}$ , c'est-à-dire très lentement en comparaison de la température qui diminue en  $\theta^{-1}$ . Ainsi pour des temps d'interaction de l'ordre de la *ms*, on peut déjà atteindre des températures très basses tout en gardant une fraction refroidie importante<sup>2</sup>. Le refroidissement VSCPT à 1 dimension en configuration  $\sigma_+/\sigma_-$  est en effet très efficace alors même qu'il n'existe pas de force de friction dans ce système (Les Houches).
- Le deuxième modèle, plus élaboré et plus proche de la réalité, prend en compte la sortie de résonance de l'atome à grand  $p$ , due à l'effet Doppler. Ceci se traduit par une diminution du taux de fluorescence lorsque le décalage Doppler dû à l'impulsion de l'atome devient plus grand que la largeur naturelle de l'état excité :

$$kp/M \geq \Gamma \quad (\text{II.29})$$

Lorsque l'atome atteint cette région de l'espace des impulsions, il y subit moins de cycles de fluorescence et a donc tendance à y passer beaucoup de temps. Ceci empêche la diffusion vers l'infini et la perte des atomes mais a aussi pour conséquence l'accumulation d'une fraction des atomes au voisinage de l'impulsion Doppler définie par :

$$kp_D/M = \Gamma/2 \quad \Rightarrow \quad p_D = \frac{1}{4} \frac{\hbar\Gamma}{E_R} \hbar k \sim 10\hbar k \quad (\text{II.30})$$

La fraction d'atomes refroidis au voisinage de  $p = 0$  tend donc ici vers une constante inférieure à 1. La décroissance du taux de fluorescence due à l'effet Doppler est bien sûr extrêmement douce, comparée à la variation brutale au niveau de la résonance en  $p = 0$ . Les atomes s'accumulent donc autour de  $p_D$  avec une distribution beaucoup plus large (de l'ordre de  $p_D$ ) que les deux pics centraux.

---

<sup>2</sup>Ceci n'est plus vrai à 2D et 3D, où, en absence de friction, la fraction piégée tend rapidement vers 0. Dans ce cas les processus additionnels de friction qui confinent les atomes en évitant leur diffusion à grand  $p$  deviennent absolument indispensables.

En définitive, la discussion qualitative de ce paragraphe permet de prévoir qu'à la fin d'une phase de refroidissement VSCPT, l'ensemble de la population atomique s'est répartie en :

- une fraction d'atomes refroidis, située dans deux pics très étroits centrés en  $\pm\hbar k$
- une fraction d'atomes non-refroidis, accumulée dans deux structures larges aux alentours de  $p_D$

Ceci est directement confirmée par les simulations Monte-Carlo du refroidissement VSCPT [78] dont on donne le principe et quelques résultats essentiels dans le chapitre V. La figure V.12.a montre en particulier l'existence des structures très larges au voisinage de  $30\hbar k$  en plus des deux pics étroits en  $\pm\hbar k$ .

### II.3 Dynamique des paquets d'ondes

Nous avons expliqué précédemment que l'évolution globale de l'atome en présence des lasers VSCPT consistait en une suite de processus hamiltoniens séparés par des sauts quantiques dus aux émissions spontanées se produisant à des instants aléatoires. Entre deux émissions consécutives, l'atome évolue à l'intérieur d'une famille fermée de trois états  $\mathcal{F}(p)$ , sous l'action du hamiltonien donné en (II.7). C'est cette partie hamiltonienne de l'évolution à l'intérieur de  $\mathcal{F}(p)$  que nous examinons plus en détail dans ce paragraphe. En oubliant ainsi l'émission spontanée, on ne peut pas rendre compte du processus de recyclage qui est, bien sûr, indispensable au refroidissement. Par contre ce traitement simplifié fournit des images physiques simples et instructives, non seulement sur le processus de filtrage, responsable de l'affinement de la distribution d'impulsion, mais également sur la dynamique des paquets d'ondes issus du refroidissement VSCPT.

Le résultat du refroidissement VSCPT est de pomper les atomes dans des états noir et quasi-noirs  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  qui, comme nous l'avons vu précédemment, sont des superpositions linéaires de deux états propres de l'opérateur impulsion avec des valeurs propres différentes :

$$|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{II.31})$$

Plus exactement, les atomes sont pompés dans les états  $\overline{\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle}}$  qui sont les états propres approchés du hamiltonien total en présence de lumière. Ces états proviennent des états non-perturbés  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  lorsqu'on introduit perturbativement (et dans cet ordre) le couplage laser entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et l'état excité  $|e_0, p\rangle$  puis le couplage motionnel entre  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  (cf. figure A.2 et calcul dans l'appendice 2).

Du fait des très nombreux cycles de fluorescence que l'atome subit pendant le refroidissement, son état final devrait être décrit, en toute rigueur par un opérateur densité. Un raisonnement analogue à celui du paragraphe I.2.3 permet cependant de montrer que, lorsque la longueur de cohérence est très inférieure à l'extension spatiale du nuage atomique et que l'évolution est gouvernée par un hamiltonien commutant avec  $\hat{P}$ , il est légitime de décrire le système de manière approchée par un vecteur d'état de la forme :

$$|\Psi\rangle = \int dp g_0(p) \overline{\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle}} \quad (\text{II.32})$$

où le poids de chaque composante est donné par la fonction  $g_0(p)$ , centrée et maximale en  $p = 0$  et simplement reliée à la distribution de quasi-impulsion

$G_0(p)$  par :

$$G_0(p) = |g_0(p)|^2 \quad (\text{II.33})$$

### II.3.1 Effet de la lumière

Le but de ce paragraphe est de déterminer simplement le mouvement des paquets d'ondes en absence puis en présence de lumière. Pour ce faire nous partons de l'état initial (II.32) et nous calculons la fonction d'onde en représentation position à un instant  $t$  ultérieur. Nous appliquons alors la condition de phase stationnaire pour déterminer le mouvement du centre de chacun des paquets d'ondes. Rappelons qu'un paquet d'ondes est obtenu en superposant linéairement des ondes planes dont l'impulsion  $p$  est distribuée autour d'une certaine valeur  $p_0$ . On peut donc l'écrire de manière générale :

$$\psi(x, t) = \int dp a(p) e^{i\phi(p, x, t)} \quad (\text{II.34})$$

où  $a(p)$  est une amplitude réelle, centrée et maximale en  $p_0$  et  $\phi(p, x, t)$  une phase réelle. L'intégrale ci-dessus doit être maximale au centre du paquet d'ondes. Pour cela il faut que les ondes planes ayant la plus grande amplitude, c'est-à-dire celles d'impulsion  $p \simeq p_0$ , interfèrent constructivement au centre  $x_0$  du paquet d'ondes. Cette condition, dite de phase stationnaire, se traduit par l'équation :

$$\frac{\partial}{\partial p} \phi(p, x, t) \Big|_{p=p_0} = 0 \quad \text{pour } x = x_0 \quad (\text{II.35})$$

dont la résolution permet de calculer  $x_0$ .

#### II.3.1.1 Evolution en absence de lumière

Nous commençons par étudier l'évolution de l'état atomique en l'absence de lumière, c'est-à-dire après la coupure des faisceaux laser VSCPT. Comme l'indique la figure II.6, nous prenons l'instant où sont coupés les lasers comme origine temporelle ( $t = 0$ ).

En l'absence de lumière  $\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle}$  se confond avec  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et l'état (II.32) s'écrit donc :

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \int dp g_0(p) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{II.36})$$

Le hamiltonien se réduit quant à lui à l'opérateur d'énergie cinétique :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad (\text{II.37})$$

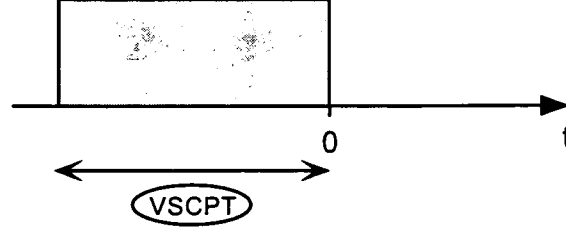


Figure II.6: Pour étudier la dynamique des paquets d'ondes en absence de lumière, on s'intéresse à l'évolution des atomes après la coupure des lasers VSCPT à l'instant  $t = 0$ .

A l'instant  $t > 0$ , l'état atomique devient :

$$|\Psi(t)\rangle = e^{-i\hat{H}t/\hbar}|\Psi(t=0)\rangle \quad (\text{II.38})$$

soit en utilisant (II.31) et (II.36) :

$$|\Psi(t)\rangle = \int dp g_0(p) \exp\left(-i\frac{p^2 + \hbar^2 k^2 t}{2M \hbar}\right) \times \\ \times \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-ikpt/M} |f_+, p + \hbar k\rangle + e^{+ikpt/M} |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{II.39})$$

La fonction d'onde en représentation position étant donnée par :

$$\psi(x, t) = \langle f_+, x | \Psi(t) \rangle + \langle f_-, x | \Psi(t) \rangle \quad (\text{II.40})$$

on trouve sans difficulté :

$$\psi(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp g_0(p) e^{i\phi_+(p, x, t)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp g_0(p) e^{i\phi_-(p, x, t)} \quad (\text{II.41})$$

où la première intégrale correspond au paquet d'ondes dans l'état interne  $|f_+\rangle$  avec la phase  $\phi_+(p, x, t)$ , tandis que la deuxième correspond au paquet d'ondes dans l'état interne  $|f_-\rangle$  avec la phase  $\phi_-(p, x, t)$ . Les phases sont données par les expressions suivantes :

$$\phi_+(p, x, t) = -\frac{p^2 t}{2M \hbar} + \left(\frac{x}{\hbar} - \frac{kt}{M}\right)p - \frac{\hbar^2 k^2 t}{2M \hbar} + kx \quad (\text{II.42})$$

$$\phi_-(p, x, t) = -\frac{p^2 t}{2M \hbar} + \left(\frac{x}{\hbar} + \frac{kt}{M}\right)p - \frac{\hbar^2 k^2 t}{2M \hbar} - kx \quad (\text{II.43})$$

Pour trouver la position moyenne de chacun des paquets d'ondes, nous appliquons alors la condition (II.35) de phase stationnaire en notant que l'amplitude  $g_0(p)$  est centrée en  $p = 0$ . On obtient pour le paquet d'onde dans l'état  $|f_+\rangle$  :

$$\frac{\partial}{\partial p} \phi_+(p, x, t)|_{p=0} = \frac{x_0}{\hbar} - \frac{kt}{M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = +\frac{\hbar k}{M} t \quad (\text{II.44})$$

et pour le paquet d'ondes dans l'état  $|f_-\rangle$  :

$$\frac{\partial}{\partial p} \phi_-(p, x, t)|_{p=0} = \frac{x_0}{\hbar} + \frac{kt}{M} = 0 \quad \Longrightarrow \quad x_0 = -\frac{\hbar k}{M} t \quad (\text{II.45})$$

En l'absence de lumière, les deux paquets d'ondes se déplacent donc avec des vitesses opposées  $\pm \hbar k/M = \pm v_R$ . Si ils sont initialement superposés (nous verrons que c'est le cas à la fin du refroidissement), ils se séparent donc à la vitesse relative  $2v_R$ .

### Remarque

La méthode de la phase stationnaire que nous utilisons ici permet d'obtenir facilement la position moyenne du paquet d'ondes mais ne donne pas d'information sur sa largeur spatiale. Si il s'agissait d'un train d'ondes lumineux (équivalent optique d'un paquet d'ondes atomique) se propageant dans le vide, sa forme resterait évidemment inchangée puisque le vide est non-dispersif pour les ondes électromagnétiques. Ceci n'est plus le cas pour un paquet d'ondes atomique car chacune des ondes planes qui le composent a une vitesse de phase qui dépend de son impulsion propre. En réécrivant (II.42) et (II.43) sous la forme suivante :

$$\phi_{\pm}(p, x, t) = \left(\frac{p}{\hbar} \pm k\right)x - \left(\frac{p^2 + \hbar^2 k^2}{2M} \frac{1}{\hbar} \pm \frac{kp}{M}\right)t \quad (\text{II.46})$$

on trouve que l'onde plane de quasi-impulsion  $p$  se propage à la vitesse :

$$v_{\phi} = \frac{\frac{p^2 + \hbar^2 k^2}{2M} \frac{1}{\hbar} \pm \frac{kp}{M}}{\frac{p}{\hbar} \pm k} = \frac{p \pm \hbar k}{2M} \quad (\text{II.47})$$

Les composantes d'impulsion plus élevée progressent plus vite que celles d'impulsion plus faible, si bien que la forme du paquet d'ondes change au cours du temps. Au bout d'un certain temps sa largeur augmente avec le temps (cf paragraphe 1.3 ci-dessous) et le paquet d'ondes s'étale indéfiniment. Ceci est une manifestation du fait que le vide est dispersif pour les ondes de matière alors que, rappelons-le, il ne l'est pas pour les ondes électromagnétiques. Chaque paquet d'onde est donc caractérisé par

sa vitesse d'ensemble  $\pm v_R$  (vitesse de groupe) et par son étalement dû aux vitesses propres des différentes ondes planes qui le constituent (vitesses de phase). Cet étalement n'est pas directement mis en évidence par la méthode de la phase stationnaire mais apparaîtra dans le traitement analytique exact de la propagation d'un paquet d'ondes gaussien dans le paragraphe 1.3 ci-dessous.

### II.3.1.2 Evolution en présence de lumière

Considérons maintenant un atome à un instant pris comme origine  $t = 0$  au cours du refroidissement.

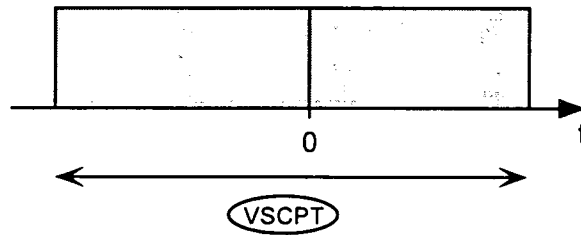


Figure II.7: Pour étudier la dynamique des paquets d'ondes en présence de lumière, on examine l'évolution (hamiltonienne) d'un atome au cours de la phase VSCPT à partir d'un instant origine  $t = 0$ . On suppose que la durée préalable de refroidissement a été assez longue pour que tous les atomes soient dans des états non-couplés à  $t = 0$ .

Nous supposons que la durée de refroidissement préalable a été suffisamment longue pour qu'on puisse considérer que tous les atomes sont dans des états non-couplés à l'instant  $t = 0$ . On peut alors décrire l'état atomique initial par la superposition (II.32). Nous simplifions un peu le problème en supposant que les composantes de  $\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle}$  sur  $|e_0, p\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  sont assez faibles pour être négligées ce qui entraîne  $\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle} \simeq |\psi_{NC}(p)\rangle$ . On prendra donc comme état initial :

$$|\Psi(t = 0)\rangle \simeq \int dp g_0(p) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{II.48})$$

Rappelons que  $\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle}$  est un état propre approché de l'hamiltonien total associé à la valeur propre  $\overline{E_{NC}}$  qui vaut, d'après la formule (A.28) de l'appendice 2 :

$$\overline{E_{NC}} = E_R + \frac{p^2}{2M} + \hbar\delta'_{NC} - i\hbar\frac{\Gamma'_{NC}}{2} \quad (\text{II.49})$$

L'état atomique à l'instant  $t > 0$  s'écrit donc<sup>3</sup> :

$$|\Psi(t)\rangle = \int dp g_0(p) e^{-i\overline{E_{NC}}t/\hbar} |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{II.50})$$

La fonction d'onde est de nouveau donnée par (II.41) avec cette fois :

$$\phi_+(p, x, t) = -\frac{\overline{E_{NC}}t}{\hbar} + \left(p + \hbar k\right) \frac{x}{\hbar} \quad (\text{II.51})$$

$$\phi_-(p, x, t) = -\frac{\overline{E_{NC}}t}{\hbar} + \left(p - \hbar k\right) \frac{x}{\hbar} \quad (\text{II.52})$$

Les formules (A.31) et (A.32) de l'appendice 2 montrent que  $\delta'_{NC}$  et  $\Gamma'_{NC}$  sont quadratiques en  $p$ . Les phases s'écrivent alors :

$$\phi_{\pm}(p, x, t) = -\left(\frac{p^2}{2M} + \hbar\delta'_{NC} - i\hbar\frac{\Gamma'_{NC}}{2}\right) \frac{t}{\hbar} + \left(\frac{x}{\hbar}\right)p + \left(-\frac{\hbar k^2 t}{2M} \pm kx\right) \quad (\text{II.53})$$

où le premier terme entre parenthèses est quadratique en  $p$  et donne donc une contribution nulle à la valeur de la dérivée en  $p = 0$ . Le centre de chacun des paquets d'ondes est alors donné par la condition :

$$\frac{\partial}{\partial p} \phi_{\pm}(p, x, t)|_{p=0} = \frac{x_0}{\hbar} = 0 \quad \implies \quad x_0 = 0 \quad (\text{II.54})$$

On constate que les deux paquets d'ondes restent centrés en  $x = 0$ , c'est-à-dire qu'ils ne se déplacent pas. Leur vitesse de groupe est nulle. Comparé au résultat obtenu en absence de lumière, ce résultat peut paraître paradoxal puisque l'état initial (II.50) est bien la superposition de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées. Il suffit néanmoins de raisonner dans la bonne base, pour lever le paradoxe :

- En l'absence de lumière, ce ne sont pas les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  qui sont états propres du hamiltonien  $\hat{P}^2/2M$  mais les états de la base standard  $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$ . Les valeurs propres associées à ces deux états sont respectivement  $(p \pm \hbar k)^2/2M$  et diffèrent par le signe du terme  $\hbar kp/M$ , linéaire en  $p$ . Ces

<sup>3</sup>On a négligé les corrections aux vecteurs propres  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  mais pas celles aux valeurs propres  $\overline{E_{NC}}$ .



énergies contribuent donc aux phases  $\phi_{\pm}$  accumulées par les deux états au cours du temps, par des termes linéaires en  $p$  et de signes opposés  $\pm kpt/M$ . Lorsqu'on applique la condition de phase stationnaire, ces termes linéaires contribuent aux formules (II.44) et (II.45) par les termes  $\pm kt/M$  qui donnent finalement les vitesses de groupes respectives  $\pm v_R$  des deux paquets d'ondes.

- Au contraire, en présence de lumière, les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  sont les états propres (approchés) de l'hamiltonien total avec les énergies  $\overline{E_{NC}}$ . Comme le montre l'expression (II.50), les deux états  $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  du développement de  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  accumulent donc la même phase  $-\overline{E_{NC}}t/\hbar$  au cours du temps. Or les seuls termes dépendant de l'impulsion dans  $\overline{E_{NC}}$  sont quadratiques en  $p$  et ne donnent donc aucune contribution à la dérivée de la phase en  $p = 0$ . Comme le montre (II.54), les deux paquets d'ondes restent tous deux centrés en  $x = 0$ .

Dans le paragraphe suivant nous étudions l'évolution du système d'une manière différente qui permet de se représenter de façon plus imagée le fait que la présence de la lumière "gèle" le mouvement des paquets d'ondes.

### II.3.2 Interprétation du gel des paquets d'ondes par la lumière

Dans le paragraphe précédent nous avons étudié le mouvement des paquets d'ondes. Ceux-ci se séparent librement en absence de lumière mais sont "gelés" lorsque la lumière est présente. Pour faire apparaître la raison physique de ce "gel" des paquets d'ondes par la lumière, nous étudions maintenant la dynamique du système à l'intérieur de la multiplicité  $\{|\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$ . Cette évolution apparaîtra très différente selon que  $\Omega_R = 0$  ou  $\Omega_R \neq 0$ . Pour cela nous reprenons partiellement le calcul de l'Appendice 2. Considérons la base non-perturbée :

$$\{|\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\} \quad (\text{II.55})$$

Si nous introduisons perturbativement le couplage laser entre l'état couplé et l'état excité nous obtenons la nouvelle base :

$$\{\overline{|\psi_C(p)\rangle}, |\psi_{NC}(p)\rangle\} \quad (\text{II.56})$$

où l'état  $\overline{|\psi_C(p)\rangle}$  est le vecteur propre approché issu de  $|\psi_C(p)\rangle$  et associé à la valeur propre  $\overline{E_C}$  donnée dans l'appendice 2. A présent, au lieu de traiter perturbativement le couplage motionnel entre ces deux états, nous étudions la dynamique du système en sa présence. On a donc un système simple à deux niveaux couplés, schématisé sur la figure (II.8).

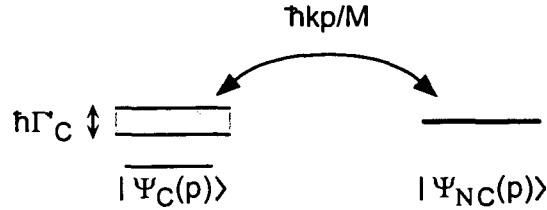


Figure II.8: Système simplifié permettant d'étudier l'évolution hamiltonienne dans l'état fondamental. Dans la multiplicité des états fondamentaux, seul existe le couplage motionnel entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . La largeur  $\Gamma'_C$  provient de l'interaction entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et l'état excité  $|e_0, p\rangle$ .

En négligeant le déplacement de l'état  $|\overline{\psi_C(p)}\rangle$ , ce qui est légitime si le désaccord est nul ou très faible, le hamiltonien effectif décrivant l'évolution dans ce sous-espace vaut simplement :

$$\hat{H}_{eff} = \hbar \begin{pmatrix} -i\Gamma'_C/2 & kp/M \\ kp/M & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{II.57})$$

A un instant  $t$  quelconque le vecteur d'état atomique s'écrit<sup>4</sup> :

$$|\Psi(t)\rangle = a(t)|\psi_{NC}(p)\rangle + b(t)|\psi_C(p)\rangle \quad (\text{II.58})$$

avec les conditions initiales suivantes :

$$a(0) = 1 \quad \text{et} \quad b(0) = 0 \quad (\text{II.59})$$

L'équation de Schrödinger gouvernant l'évolution du système est équivalente au système d'équations différentielles couplées suivant :

$$\begin{cases} i\dot{a}(t) = \frac{kp}{M}b(t) \\ i\dot{b}(t) = \frac{kp}{M}a(t) - i\frac{\Gamma'_C}{2}b(t) \end{cases} \quad (\text{II.60})$$

<sup>4</sup>De nouveau, nous négligeons les corrections au vecteur propre et remplaçons donc  $|\overline{\psi_C(p)}\rangle$  par  $|\psi_C(p)\rangle$

### II.3.2.1 Evolution en absence de lumière

Dans ce cas le couplage laser disparaît et la largeur radiative de l'état couplé est nulle :

$$\Gamma'_c = 0 \quad (\text{II.61})$$

Le système se simplifie alors en :

$$\begin{cases} i\dot{a}(t) = \frac{kp}{M}b(t) \\ i\dot{b}(t) = \frac{kp}{M}a(t) \end{cases} \quad (\text{II.62})$$

dont la solution satisfaisant (II.59) s'écrit :

$$\begin{cases} a(t) = \cos \frac{kp}{M}t \\ b(t) = -i \sin \frac{kp}{M}t \end{cases} \quad (\text{II.63})$$

On obtient donc une simple oscillation de Rabi entre les deux états stables  $|\psi_c(p)\rangle$  et  $|\psi_{nc}(p)\rangle$  avec une pulsation correspondant au couplage motionnel :

$$\omega = 2kp/M \quad (\text{II.64})$$

L'évolution temporelle de l'extrémité du vecteur  $\vec{u}(t) = (a(t), ib(t))$  dans le plan est tracée sur la figure (II.9). On obtient un cercle, parcouru dans le sens direct, représentant l'oscillation de Rabi entre les deux états.

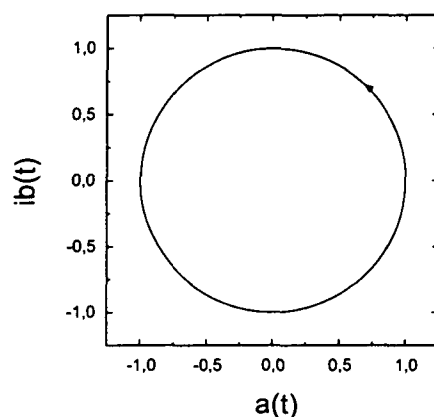


Figure II.9: Evolution de l'extrémité du vecteur  $u(t)$  défini dans le texte en absence de lumière. Le cercle, décrit dans le sens direct, traduit l'oscillation de Rabi entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ .

### II.3.2.2 Evolution en présence de lumière

Comme d'habitude, nous considérons que la quasi-impulsion atomique est très faible, de sorte que le couplage motionnel est négligeable devant la largeur radiative de l'état couplé :

$$\frac{kp}{M} \ll \Gamma'_C \quad (\text{II.65})$$

Il y a donc deux constantes de temps très différentes dans le problème, une constante lente :

$$M/kp \quad (\text{II.66})$$

liée au couplage motionnel entre les deux états et une constante rapide :

$$\Gamma'_C{}^{-1} \quad (\text{II.67})$$

liée à l'instabilité radiative de l'état couplé. Ceci implique que  $b(t)$  évolue très rapidement pendant un régime transitoire de durée  $\sim \Gamma'_C{}^{-1}$  puis s'ajuste à la variable lente  $a(t)$ . On peut alors faire une approximation adiabatique en négligeant

le terme en  $\dot{b}(t)$  dans le système (II.60) qui devient :

$$\begin{cases} i\dot{a}(t) &= \frac{kp}{M}b(t) \\ \frac{kp}{M}a(t) &\simeq i\frac{\Gamma'_c}{2}b(t) \end{cases} \quad (\text{II.68})$$

La deuxième égalité entraîne :

$$b(t) = -i\frac{kp}{M}\frac{2}{\Gamma'_c}a(t) \quad (\text{II.69})$$

ce qui, d'après (II.65), signifie que la composante  $b(t)$  du vecteur d'état sur  $|\psi_c(p)\rangle$  reste en permanence très petite devant 1. L'interprétation de ce résultat est simple. Le couplage motionnel  $kp/M$  tend à faire apparaître des composantes du vecteur d'état sur  $|\psi_c(p)\rangle$  mais l'instabilité radiative de cet état est telle que ces composantes sont détruites presque instantanément. L'état  $|\psi_c(p)\rangle$  ne peut donc jamais être peuplé de manière significative.

Reportons alors l'expression de  $b(t)$  dans la première équation de (II.68). En utilisant l'expression, donnée en appendice 2, de  $\Gamma'_{NC}$  (pour  $\delta = 0$ ), il vient :

$$\dot{a}(t) = -\left(\frac{kp}{M}\right)^2 \frac{2}{\Gamma'_c} a(t) = -\frac{\Gamma'_{NC}}{2} a(t) \quad (\text{II.70})$$

La composante du vecteur d'état sur  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  diminue lentement avec la constante de temps  $\Gamma'^{-1}_{NC}$ .

Nous représentons de nouveau l'évolution temporelle du vecteur  $\vec{u}(t) = (a(t), ib(t))$  sur la figure II.10. On constate que  $\vec{u}(t)$  commence à tourner, pendant un temps de l'ordre de  $\Gamma'^{-1}_c$ , puis que la composante  $ib(t)$  s'ajuste sur la composante lente  $a(t)$ .

Dans le cas précédent, c'est-à-dire en absence de lumière, la norme du vecteur  $\vec{u}(t)$  était constante et égale à 1 puisque l'évolution du système était décrite par un hamiltonien hermitique. La rotation associée à l'énergie cinétique était complète, traduisant le mouvement relatif des paquets d'ondes qui s'écartaient l'un de l'autre à vitesse constante. En présence de lumière le hamiltonien effectif n'est plus hermitique puisqu'il contient une énergie complexe  $-i\Gamma'_c/2$  et la norme de  $\vec{u}(t)$  décroît au cours du temps jusqu'à 0. La rotation est empêchée et les paquets d'ondes sont donc "gelés" tandis que l'instabilité radiative introduite dans les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  via le couplage motionnel entraîne la diminution progressive de la norme du vecteur d'état. On a ici une situation analogue à celles décrites par le paradoxe de Zénon et dans lesquelles une mesure effectuée de manière répétitive sur un système empêche celui-ci d'évoluer et le "gèle" dans son état initial.

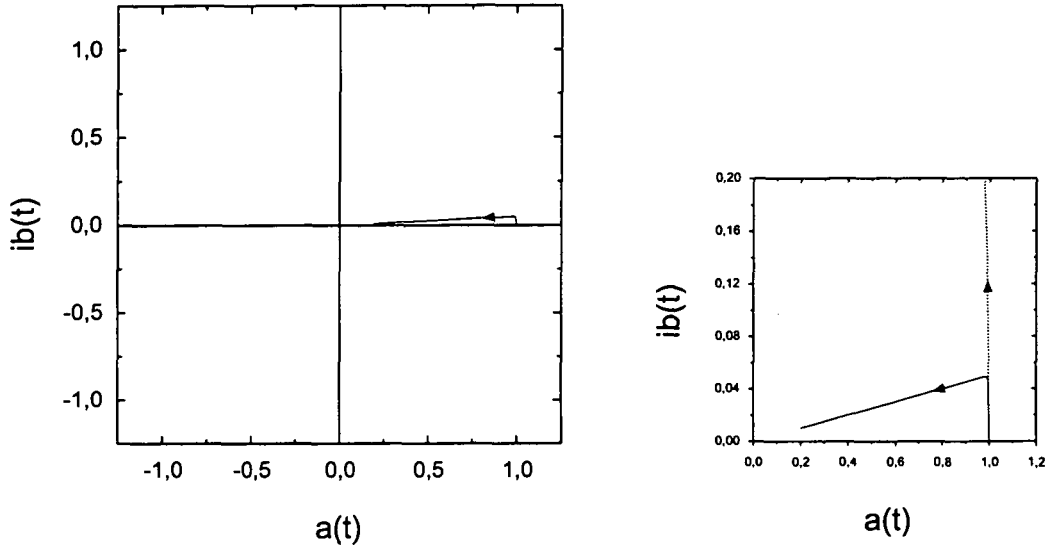


Figure II.10: Evolution de l'extrémité de  $u(t)$  en présence de lumière. La rotation s'amorce pendant un temps très court de l'ordre de la durée de vie de l'état couplé. Du fait du couplage laser qui détruit très rapidement les composantes apparaissant sur  $|\psi_C(p)\rangle$ , la rotation, traduisant l'évolution libre du système en absence de lumière, est ici "gelée". Le cadre de gauche est un agrandissement du quadrant supérieur droit sur lequel nous avons également représenté l'arc de cercle décrivant l'évolution en absence de lumière (trait pointillé).

### II.3.3 Calcul exact dans le cas de paquets d'ondes gaussiens

Pour illustrer les considérations précédentes et pour rendre compte à la fois du déplacement et de l'étalement des paquets d'ondes créés par le refroidissement VSCPT, nous présentons finalement un calcul analytique de l'évolution du système. Un tel calcul est possible si l'on se place dans le cadre du traitement perturbatif de l'Appendice 2 et si l'on suppose les paquets d'ondes gaussiens.

Comme en 1.1, on décrit l'état atomique initial par une superposition linéaire de la forme :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \int dp g_0(p) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{II.71})$$

Les calculs ont déjà été faits partiellement dans le paragraphe 1.1, où on ne s'était intéressé qu'à la phase des paquets d'ondes. Ici nous faisons le calcul complet en supposant que la distribution initiale de quasi-impulsion est une gaussienne normalisée de largeur  $\delta p_0$  :

$$G_0(p) = |g_0(p)|^2 = \frac{1}{\delta p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2\delta p_0^2} \quad (\text{II.72})$$

D'après (II.31), la distribution d'impulsion des atomes<sup>5</sup> à l'instant  $t$  s'écrit :

$$G_a(p, t) = |\langle f_+, p | \Psi(t) \rangle|^2 + |\langle f_-, p | \Psi(t) \rangle|^2 \quad (\text{II.73})$$

d'où on déduit facilement :

$$G_a(p, t) = \frac{1}{2} [G(p - \hbar k, t) + G(p + \hbar k, t)] \quad (\text{II.74})$$

De même, la distribution en position est donnée par :

$$F(x) = |\langle f_+, x | \Psi(t) \rangle|^2 + |\langle f_-, x | \Psi(t) \rangle|^2 \quad (\text{II.75})$$

### II.3.3.1 Evolution en absence de lumière

On a alors une évolution libre. Dans le cas de paquets d'ondes gaussiens, le calcul est bien connu (voir par exemple [47]) et nous n'en donnons que le résultat.

La distribution d'impulsion est bien sûr invariante :

$$G_a(p, t) = G_a(p, t = 0) = \frac{1}{2} [G_0(p - \hbar k) + G_0(p + \hbar k)] \quad (\text{II.76})$$

tandis que la distribution en position s'écrit :

$$F(x, t) = \frac{1}{2} \frac{1}{\delta x(t) \sqrt{2\pi}} \left[ e^{-(x - \hbar k t / M)^2 / 2\delta x(t)^2} + e^{-(x + \hbar k t / M)^2 / 2\delta x(t)^2} \right] \quad (\text{II.77})$$

On retrouve une distribution constituée de deux pics gaussiens dont la norme est constante (l'évolution est hermitique), dont les centres se déplacent à la vitesse  $\pm \hbar k / M = \pm v_R$  et dont la largeur augmente au cours du temps selon :

$$\delta x(t) = \delta x_0 \sqrt{1 + (4\delta p_0^2 t / 2M\hbar)^2} \quad (\text{II.78})$$

où  $\delta x_0$  est la largeur initiale du paquet d'ondes donnée par :

$$\delta x_0 = \frac{\hbar}{2\delta p_0} \quad (\text{II.79})$$

---

<sup>5</sup>Attention à ne pas confondre la distribution de quasi-impulsion  $G(p)$  et la distribution d'impulsion des atomes  $G_a(p)$ .

Cette évolution est représentée sur la figure II.11. a. Remarquons que l'élargissement progressif des paquets d'ondes dans l'espace réel n'est pas lié à un processus de refroidissement. C'est seulement l'étalement classique d'un paquet d'ondes se déplaçant dans un milieu dispersif. Autrement dit la longueur de cohérence est constante dans cette évolution.

### II.3.3.2 Evolution en présence de lumière

L'état atomique à un instant  $t > 0$  est donné par (II.50)

#### Distribution d'impulsion

La distribution de quasi-impulsion de l'atome à l'instant  $t$  vaut alors :

$$G(p, t) = |\langle \psi_{NC}(p) | \Psi(t) \rangle| = |g(p, t)|^2 \quad (\text{II.80})$$

avec d'après (II.49) :

$$g(p, t) = g_0(p) e^{-i\overline{E_{NC}t}/\hbar} \quad (\text{II.81})$$

$$= g_0(p) e^{-i(E_R + p^2/2M + \hbar\delta'_{NC})t/\hbar} e^{-\Gamma'_{NC}t/2} \quad (\text{II.82})$$

On en déduit donc :

$$G(p, t) = G_0(p) e^{-\Gamma'_{NC}t} \quad (\text{II.83})$$

En utilisant (A.32) et (II.72), on trouve que la distribution reste gaussienne :

$$G(p, t) = \frac{1}{\delta p_0 \sqrt{2\pi}} e^{-p^2/2\delta p(t)^2} \quad (\text{II.84})$$

mais avec une largeur qui diminue au cours du temps :

$$\delta p(t) = \delta p_0 \left[ 1 + \frac{8\delta p_0^2 k^2 \Gamma}{M^2 \Omega_R^2} t \right]^{-1/2} \quad (\text{II.85})$$

La distribution d'impulsion des atomes  $G_a(p, t)$  est donc constituée de deux gaussiennes identiques centrées en  $\pm \hbar k$  et dont la largeur décroît au cours du temps. La hauteur de  $G(p, t)$  à l'origine est constante ( $1/\delta p_0 \sqrt{2\pi}$ ), si bien que la norme de la distribution diminue également au cours du temps. Physiquement, cet affinement de la distribution à hauteur constante correspond à une sélection des atomes les plus froids et non à un véritable refroidissement qui suppose une augmentation de la densité atomique en  $p = 0$ . Ceci provient simplement du fait que nous n'avons décrit ici que la partie hamiltonienne de l'évolution pendant la phase VSCPT, c'est-à-dire le processus de filtrage. C'est seulement en introduisant le recyclage, c'est-à-dire la possibilité pour un atome qui a quitté les états non-couplés de revenir au voisinage de  $p = 0$ , qu'on peut rendre compte du refroidissement.



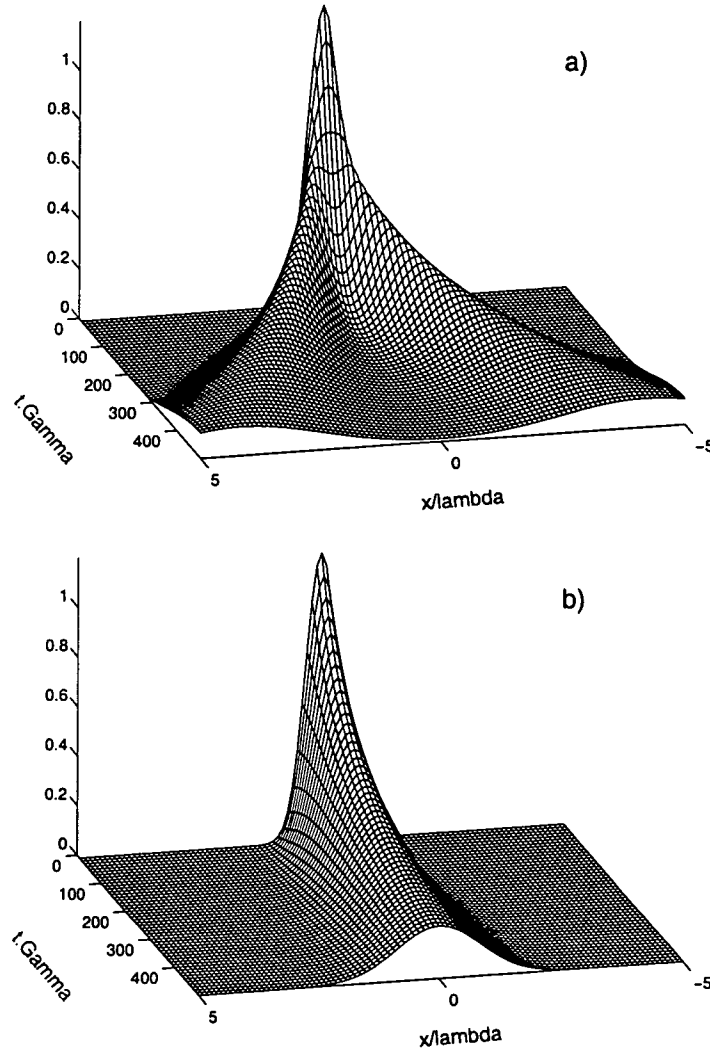


Figure II.11: Partie hamiltonienne de l'évolution spatiale des paquets d'ondes au cours du temps en l'absence (a) et en présence (b) de lumière. La position  $x$  est en unité de longueur d'onde optique ( $\lambda = 1.083 \mu\text{m}$ ) et le temps en unité de ( $\Gamma^{-1} = 0.1 \mu\text{s}$ ). L'état initial est une superposition linéaire de deux paquets d'ondes identiques centrés en  $x = 0$  et de vitesses moyennes opposées  $\pm v_R$ . En l'absence de lumière les deux paquets d'ondes évoluent librement et se séparent l'un de l'autre à la vitesse relative  $2v_R$ . Leur largeur augmente au cours du temps du fait de la dispersion mais leur longueur de cohérence est constante. La norme totale est conservée. En présence des lasers VSCPT, le mouvement relatif des paquets d'ondes est gelé par l'interaction avec la lumière. Les deux paquets d'ondes restent superposés en  $x = 0$ . La perte progressive des composantes d'impulsion les plus grandes entraîne une diminution de la norme (aire sous la courbe) et un élargissement des paquets d'ondes.

### Distribution en position

De (II.50) on déduit :

$$\langle f_{\pm}, x | \Psi(t) \rangle = \int dp g_0(p) e^{-i\overline{E_{Nc}t}/\hbar} \frac{1}{\sqrt{2}} \langle x | p \pm \hbar k \rangle \quad (\text{II.86})$$

$$= e^{\pm ikx} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp g_0(p) e^{-i\overline{E_{Nc}t}/\hbar} e^{ipx/\hbar} \quad (\text{II.87})$$

En utilisant (II.72) et (II.49) ainsi que les formules (A.31) et (A.32) de l'Appendice 2, on trouve :

$$\langle f_{\pm}, x | \Psi(t) \rangle = e^{\pm ikx} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar\delta p_0} \sqrt{2\pi}} \int dp e^{-ap^2 - bp} \quad (\text{II.88})$$

où  $a$  et  $b$  valent :

$$a = \frac{1}{4\delta p_0^2} + (a_1 + ia_2)t \quad (\text{II.89})$$

$$b = -\frac{ix}{\hbar} \quad (\text{II.90})$$

avec :

$$a_1 = \frac{2k^2\Gamma}{M^2\Omega_R^2} \quad (\text{II.91})$$

$$a_2 = \frac{1}{2M\hbar} - \frac{4k^2}{M^2\Omega_R^2} \delta_R \quad (\text{II.92})$$

L'intégrale ci-dessus peut être facilement calculée et vaut :

$$\int dp e^{-ap^2 - bp} = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}} e^{b^2/4a} \quad (\text{II.93})$$

On en déduit finalement :

$$F_{\pm}(x, t) = |\langle f_{\pm}, x | \Psi(t) \rangle|^2 = \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + 4a_1\delta p_0^2 t}} \times \frac{1}{\delta x(t) \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\delta x(t)^2} \quad (\text{II.94})$$

Nous reconnaissons une gaussienne de hauteur décroissante dont la largeur  $\delta x(t)$  augmente au cours du temps selon :

$$\delta x(t) = \delta x_0 \sqrt{\frac{(1 + 4\delta p_0^2 a_1 t)^2 + (4\delta p_0^2 a_2 t)^2}{1 + 4\delta p_0^2 a_1 t}} \quad (\text{II.95})$$

---

où  $\delta x_0$  est la largeur initiale du paquet d'ondes. On constate que les deux paquets d'ondes ont exactement la même forme puisque  $F_+(x, t) = F_-(x, t)$ . D'après (II.94) et (II.95), il apparaît donc qu'ils s'élargissent au cours du temps tout en restant tous deux centrés en  $x = 0$ . Dans le radicande de (II.95), le premier terme décrit l'étalement dû à l'évolution libre (identique à celui obtenu en absence de lumière) tandis que le deuxième terme reflète l'élargissement dû au filtrage des composantes d'impulsions les plus faibles, c'est-à-dire l'augmentation de la longueur de cohérence.

En conclusion, le refroidissement VSCPT pompe chaque atome dans une superposition linéaire de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées. Pendant la phase de refroidissement, le mouvement relatif de ces deux paquets d'ondes est "gelé" par la lumière et ils restent donc complètement superposés. Dès que les lasers sont coupés, en revanche, les deux paquets d'ondes évoluent librement et se séparent à la vitesse relative  $2v_R$ . Nous verrons au chapitre suivant qu'en mesurant comment décroît leur recouvrement au cours du temps, nous obtenons un signal proportionnel à la fonction d'autocorrélation spatiale.



## Chapitre III

# Spectroscopie de Fourier des paquets d'ondes atomiques

Nous avons conclu la partie I en montrant comment le principe de la spectroscopie de Fourier utilisée en optique photonique pour mesurer la largeur spectrale d'une source très monochromatique peut être appliqué à des paquets d'ondes atomiques dont on veut déterminer l'impulsion *rms* c'est-à-dire la température.

La méthode consiste à dupliquer un paquet d'ondes atomique, à translater un des deux paquets d'ondes d'une distance  $\xi$  puis à mesurer le recouvrement entre les deux paquets d'ondes en fonction de  $\xi$ . On reconstruit ainsi la fonction d'autocorrélation spatiale atomique dont on peut extraire la longueur de cohérence  $\xi_c$ , la largeur de la distribution en impulsion et la température. Si on veut utiliser le maximum d'informations contenu dans la fonction d'autocorrélation spatiale et à condition que le signal expérimental ne soit pas trop bruité, on peut également en prendre la transformée de Fourier qui fournira directement la distribution d'impulsion totale.

En optique photonique, ces différentes opérations sont réalisées de manière très simple dans un interféromètre de Mach-Zender par exemple. Une lame séparatrice duplique le train d'onde lumineux, une simple lame de verre introduit un retard variable dans un des deux bras et une photodiode mesure directement le recouvrement des deux trains d'ondes. Le passage à l'optique atomique n'apparaît pas aussi simple. La première étape peut être réalisée par exemple en éclairant l'atome avec une impulsion laser bien choisie qui va séparer le mouvement du centre de masse en deux trajectoires distinctes (lame séparatrice atomique à impulsion  $\pi/2$ ). La deuxième peut simplement résulter d'une évolution libre de l'atome puisque les deux paquets d'ondes créés précédemment ont tendance à se séparer. La mesure du recouvrement est probablement l'étape la plus délicate à réaliser car il faut placer un détecteur (par exemple une lame lumineuse) à l'endroit exact où

les deux paquets d'ondes interfèrent. Cette méthode interférométrique, si facile à mettre en œuvre en optique photonique pour des ondes lumineuses, semble donc difficile à généraliser à l'optique atomique pour des ondes de matière.

Heureusement la plupart des mécanismes de refroidissement conduit à des températures assez élevées pour que la mesure directe de la température par des techniques de temps de vol (cf. § IV.1.5) soit suffisante et il n'est pas nécessaire de recourir à cette technique sophistiquée. Ceci n'est plus le cas pour le refroidissement VSCPT étudié dans ce mémoire. Comme nous le verrons dans le chapitre V, les distributions d'impulsions atteintes sont si étroites que les techniques classiques de mesure de la température sont inefficaces et le recours à la méthode interférométrique semble alors inévitable. Par ailleurs, alors que cette méthode semble assez délicate à mettre en œuvre en général, son application dans le cas du refroidissement VSCPT est très simple. Nous avons montré en effet dans le chapitre II que les atomes refroidis par VSCPT étaient pompés dans des superpositions linéaires de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées. En analysant la dynamique de ces paquets d'ondes nous avons alors montré qu'ils restaient complètement superposés tant que les faisceaux lasers VSCPT étaient branchés mais qu'ils se séparaient l'un de l'autre à une vitesse relative de deux fois la vitesse de recul, dès la coupure des lasers de refroidissement. Cette évolution est très semblable à celle d'un paquet d'ondes traversant une lame séparatrice. De plus nous verrons qu'une simple impulsion de lumière VSCPT, obtenue en rebranchant les faisceaux de refroidissement pendant un temps très court, permet de mesurer très facilement le recouvrement des deux paquets d'ondes atomiques.

## III.1 Spectroscopie de Fourier de paquets d'ondes obtenus par VSCPT

### III.1.1 Principe

Considérons la séquence temporelle représentée sur le figure III.1. Les atomes subissent d'abord une phase de refroidissement VSCPT de durée  $\theta$  pendant laquelle ils sont éclairés par deux ondes laser  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  se propageant en sens opposés selon la direction  $\vec{e}_z$  dans le plan horizontal. A l'instant  $t = 0$ , les faisceaux VSCPT sont coupés brusquement puis, après une "période noire" (PN) de durée  $\tau_N$ , rebranchés pendant une impulsion (I) de durée  $\tau_P \ll \tau_N$ .

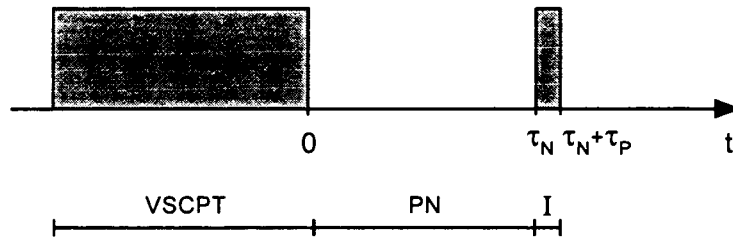


Figure III.1: Séquence temporelle utilisée pour mesurer la fonction d'autocorrélation spatiale des paquets d'ondes atomiques après une phase de refroidissement sub-recul par VSCPT. Les atomes évoluent librement pendant une "période noire" (PN) de durée  $\tau_N$  au cours de laquelle les deux paquets d'ondes se séparent. Ils sont ensuite soumis à une impulsion lumineuse (I) de durée  $\tau_P$  qui permet de mesurer leur recouvrement.

Essayons de comprendre qualitativement l'évolution des paquets d'ondes atomiques au cours de cette séquence. Pour cela il est utile d'introduire une notation des paquets d'ondes qui rende compte, non seulement de l'état interne mais aussi de l'impulsion moyenne et de la position moyenne du centre de masse. Nous noterons donc :

$$\varphi(i, \bar{p}, \bar{z}) \quad (\text{III.1})$$

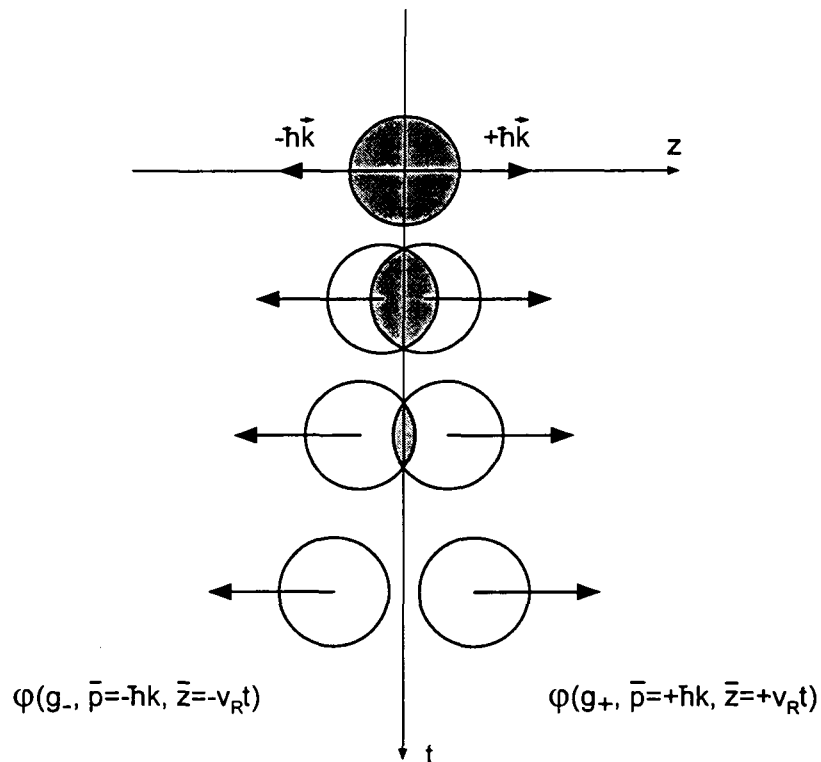


Figure III.2: Evolution des paquets d'ondes pendant la période noire. L'axe horizontal est la direction de refroidissement ( $Oz$ ) et le temps est porté sur l'axe vertical. A la fin de la phase VSCPT, les atomes sont laissés dans une superposition de deux paquets d'ondes d'impulsions opposées  $\pm \hbar k$ . Au cours de la "période noire", ceux-ci se séparent à la vitesse relative constante  $2v_R$ .



un paquet d'ondes dans l'état interne  $i$ , avec l'impulsion moyenne  $\bar{p}$  et la position moyenne  $\bar{z}$ .

A la fin de la phase de refroidissement l'atome est laissé dans une superposition de deux paquets d'ondes d'états internes  $|g_{\pm}\rangle$  et d'impulsions moyennes  $\pm\hbar k$  respectivement. On suppose que tous les atomes ont été pompés dans des états non-couplés de sorte que la phase relative entre ces deux paquets d'ondes est nulle (voir (??)). A l'instant  $t = 0$  où les lasers VSCPT sont coupés, ces deux paquets d'ondes sont complètement superposés en  $\bar{z} = 0$  et on peut donc décrire l'atome par une superposition de :

$$\varphi(g_-, -\hbar k, 0) \quad \text{et} \quad \varphi(g_+, +\hbar k, 0) \quad (\text{III.2})$$

Comme le montre la figure III.2, ils se séparent ensuite avec les vitesses  $\pm v_R$  le long de la direction de refroidissement, où  $v_R = \hbar k/M$  est la vitesse de recul <sup>1</sup>. A la fin de la période noire leurs centres de masse sont donc distants de  $2v_R\tau_N$  et l'état atomique s'est transformé en une superposition de :

$$\varphi(g_-, -\hbar k, -v_R\tau_N) \quad \text{et} \quad \varphi(g_+, +\hbar k, +v_R\tau_N) \quad (\text{III.3})$$

Quel est alors l'effet de l'impulsion (I)? Lorsqu'elle est appliquée, chacun des deux paquets d'ondes est couplé à un paquet d'ondes dans l'état excité par le faisceau laser correspondant :

$$\begin{aligned} \varphi(g_-, -\hbar k, -v_R\tau_N) &\xleftrightarrow{\sigma_+} \varphi(e_0, 0, -v_R\tau_N) \\ \varphi(g_+, +\hbar k, +v_R\tau_N) &\xleftrightarrow{\sigma_-} \varphi(e_0, 0, +v_R\tau_N) \end{aligned} \quad (\text{III.4})$$

Les règles de conservation de l'impulsion du système {atome+champ} expliquent pourquoi les deux paquets d'ondes dans l'état excité sont au repos ( $\bar{p} = 0$ ). De plus ils ont la même position moyenne que les paquets d'ondes dans l'état fondamental puisque l'opérateur  $\hat{V}_{AL}$  qui décrit le couplage atome-laser n'agit pas sur la variable position. Les deux paquets d'ondes dans l'état excité ne diffèrent donc que par leurs positions moyennes. Considérons alors les deux cas limites suivants :

- $\tau_N \simeq 0$

Les deux paquets d'ondes  $\varphi(g_-, -\hbar k, 0^-)$  et  $\varphi(g_+, +\hbar k, 0^+)$  sont encore presque complètement superposés (figure III.3.a). L'impulsion (I) les couple alors aux paquets d'ondes :

$$\varphi(e_0, 0, 0^-) \quad \text{et} \quad \varphi(e_0, 0, 0^+), \quad (\text{III.5})$$

<sup>1</sup>Les atomes subissent également l'action de la gravité mais le mouvement de chute libre est découplé du mouvement propre des paquets d'ondes selon  $\vec{e}_z$  qu'on peut donc traiter indépendamment.

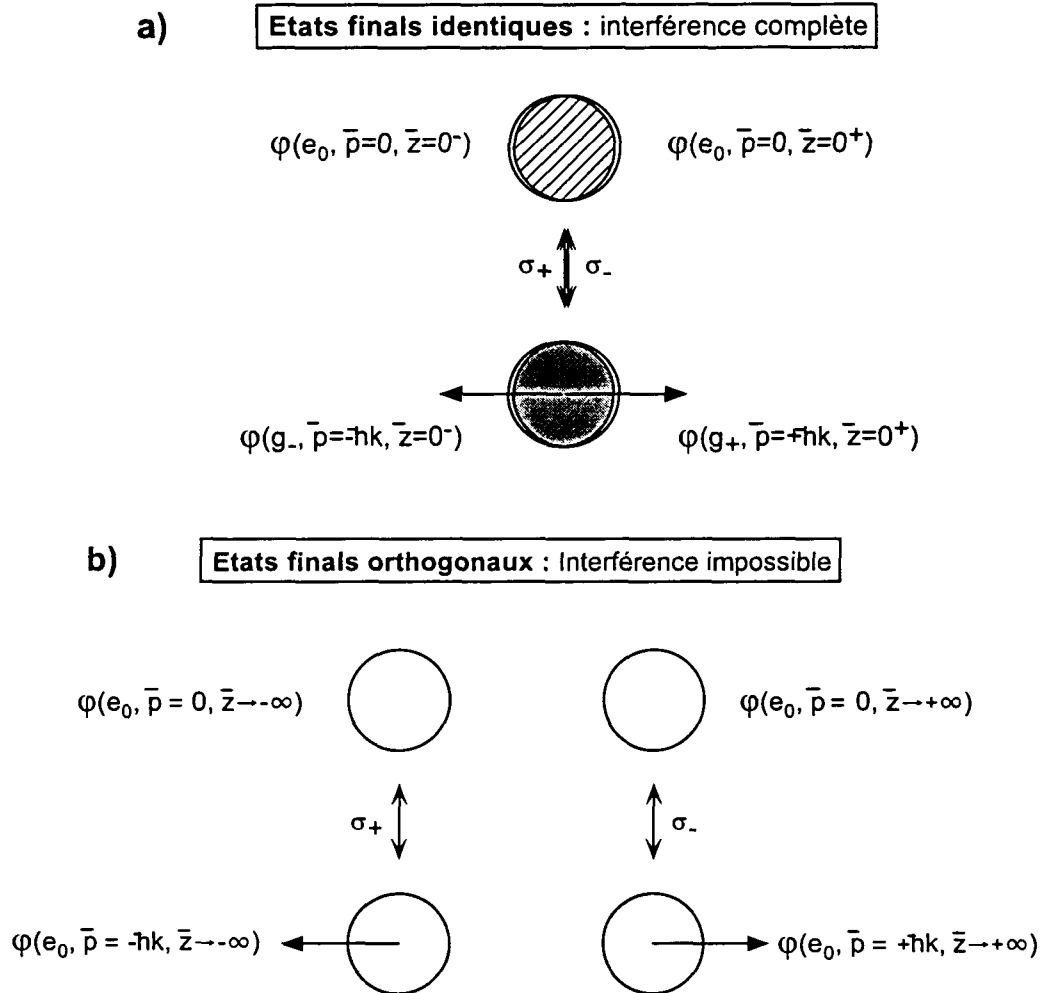


Figure III.3: Lorsque l'impulsion ( $I$ ) est appliquée à la fin de la période noire, les deux paquets d'ondes qui se sont séparés l'un de l'autre se trouvent couplés à deux paquets d'ondes dans l'état excité, représentant les deux états finals possibles lors du processus d'absorption d'un photon. (a) Après une période noire de durée  $\tau_N \simeq 0$ , les deux paquets d'ondes sont encore pratiquement superposés si bien que les deux états finals sont presque identiques et les deux amplitudes d'absorption peuvent interférer destructivement. (b) Au contraire, si  $\tau_N \rightarrow +\infty$ , les deux paquets d'ondes sont complètement séparés, les deux états finals sont orthogonaux et toute interférence est impossible.

associés aux deux états finals possibles du processus d'absorption. Ceux-ci sont pratiquement identiques si bien que les amplitudes de probabilités des transitions (III.4) peuvent interférer complètement. La phase relative des deux paquets d'ondes est pratiquement la même qu'à l'instant initial c'est-à-dire nulle, ce qui correspond à une interférence entièrement destructive. L'atome est donc resté dans un état non-couplé et n'absorbe pas de photons. L'impulsion (I) n'a aucun effet.

- $\tau_N \rightarrow \infty$

Les deux paquets d'ondes sont maintenant complètement<sup>2</sup> séparés (figure III.3.b). Lorsque l'impulsion (I) est appliquée, ils sont donc couplés à :

$$\varphi(e_0, 0, \bar{z} \rightarrow -\infty) \quad \text{et} \quad \varphi(e_0, 0, \bar{z} \rightarrow +\infty) \quad (\text{III.6})$$

Ces deux paquets d'ondes ont même état interne et même impulsion moyenne mais sont si éloignés l'un de l'autre qu'ils sont orthogonaux. Dans ce cas les amplitudes de transition ne peuvent plus interférer puisque les deux états finals du processus d'absorption sont orthogonaux. L'atome absorbe de la lumière et subit des cycles de fluorescence.

Entre ces deux cas extrêmes, le recouvrement partiel des deux paquets d'ondes se traduit par une efficacité partielle du processus d'interférence destructive pendant l'impulsion (I). L'absorption qui en résulte traduit le fait que l'atome n'est plus strictement dans un état non-couplé. C'est cette corrélation entre le recouvrement des paquets d'ondes et la probabilité de trouver l'atome dans un état non couplé qui est à la base de la méthode présentée ici pour mesurer la fonction d'autocorrélation spatiale des atomes.

Plus précisément, si on suppose que tous les atomes sont initialement (au début de la période noire) dans des états non-couplés, la fraction d'atome qui reste dans ces états à la fin de la période noire est d'autant plus faible que la distance  $\xi$  entre les deux paquets d'ondes est grande. Or cette distance est simplement reliée à  $\tau_N$  par  $\xi = 2v_R\tau_N$ . En mesurant la fraction d'atomes restés dans les états non-couplés en fonction de  $\tau_N$ , on mesure donc le recouvrement des deux paquets d'ondes en fonction de la distance qui les sépare, c'est-à-dire la fonction d'autocorrélation spatiale de l'atome  $\mathcal{G}(\xi)$ .

### Remarque

---

<sup>2</sup>Nous verrons plus loin qu'il suffit que la distance qui les sépare soit très grande devant leur longueur de cohérence.

Notons qu'une autre méthode consisterait à mesurer directement la fluorescence induite par l'impulsion d'analyse. Cette méthode est strictement équivalente puisque le taux de fluorescence est directement relié à la population des niveaux non-couplés. Cependant, le système de détection directe des atomes que nous avons développé sur notre expérience rend très aisée la mesure de la fraction d'atomes dans les états non-couplés alors que la mesure de la fluorescence nécessiterait de nouveaux aménagements.

### III.1.2 Calcul théorique

Nous présentons maintenant un modèle simple de l'évolution d'un atome au cours de la séquence temporelle décrite précédemment. Le but de ce calcul est de déterminer, sachant que tous les atomes sont initialement dans des états non-couplés, la fraction  $\mathcal{F}_{NC}$  qui y est encore à l'issue de cette séquence, c'est-à-dire après l'impulsion d'analyse. Nous montrerons que cette fraction est directement reliée à la fonction d'autocorrélation spatiale des atomes.

Nous ne décrivons pas ici ce qui se passe pendant la phase de refroidissement VSCPT et supposons seulement qu'à l'issue de cette phase tous les atomes ont été pompés dans les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . La période noire sera traitée comme une évolution libre en négligeant toutes les perturbations extérieures. Enfin nous verrons que les atomes restés dans des états non-couplés après l'impulsion (I) sont ceux qui n'ont pas absorbé de lumière, si bien que, du point de vue de la partie cohérente de l'évolution des atomes, on pourra décrire l'impulsion d'analyse comme un simple projecteur sur un sous-espace approprié.

#### III.1.2.1 Etat de l'atome à la fin du refroidissement VSCPT

A  $t = 0$ , nous supposons que tous les atomes ont été pompés dans des états non-couplés. De la même façon qu'en II.3, nous décrivons alors un atome par une superposition linéaire d'états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  de la forme :

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \int dp g(p) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{III.7})$$

Rappelons que les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  sont donnés par :

$$|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.8})$$

$$|\psi_C(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k\rangle - |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.9})$$

Nous supposerons l'état (III.7) normalisé à l'unité ce qui entraîne :

$$\int dp g(p) g^*(p) = \int dp G(p) = 1 \quad (\text{III.10})$$

où  $G(p)$  est simplement la distribution de quasi-impulsion des atomes à la fin de la période VSCPT.

### III.1.2.2 Evolution libre pendant la période noire

Dès que les faisceaux laser de refroidissement sont coupés, et en l'absence de perturbations extérieures (champ magnétique, lumière parasite, collisions, etc...), l'atome suit une évolution libre. Son hamiltonien se réduit donc à :

$$H = \frac{\hat{P}^2}{2M} \quad (\text{III.11})$$

L'état atomique à un instant  $t$  ultérieur pendant la période noire s'écrit alors :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= e^{-i\frac{\hat{P}^2}{2M}\frac{t}{\hbar}}|\Psi(t=0)\rangle \\ &= \int dp g(p) e^{-i\frac{\hat{P}^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} |\psi_{NC}(p)\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.12})$$

Il suffit de remplacer  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  par (III.8) et de faire agir l'opérateur impulsion sur les kets propres  $|g_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  pour obtenir :

$$|\Psi(t)\rangle = \int dp g(p) \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\frac{(p+\hbar k)^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} |g_+, p + \hbar k\rangle + e^{-i\frac{(p-\hbar k)^2}{2M}\frac{t}{\hbar}} |g_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.13})$$

soit, en développant l'argument des exponentielles :

$$|\Psi(t)\rangle = \int dp g(p) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega(p)t} \left[ e^{-i\frac{kpt}{M}} |g_+, p + \hbar k\rangle + e^{+i\frac{kpt}{M}} |g_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.14})$$

où la pulsation  $\omega(p)$  est définie par :

$$\hbar\omega(p) = \frac{p^2 + \hbar^2 k^2}{2M} \quad (\text{III.15})$$

On peut alors réécrire les exponentielles et regrouper les termes de manière à faire apparaître les combinaisons symétriques et antisymétriques des états  $|g_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  :

$$\begin{aligned} |\Psi(t)\rangle &= \int dp g(p) \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-i\omega(p)t} \left[ \cos \frac{kpt}{M} \left( |g_+, p + \hbar k\rangle + |g_-, p - \hbar k\rangle \right) \right. \\ &\quad \left. - i \sin \frac{kpt}{M} \left( |g_+, p + \hbar k\rangle - |g_-, p - \hbar k\rangle \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{III.16})$$

On reconnaît l'expression des états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  donnée par les formules (III.9) et (III.8) et l'état atomique à la fin de la période noire ( $t = \tau_N$ ) s'écrit donc :

$$\boxed{|\Psi(\tau_N)\rangle = \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_N} \left[ \cos \frac{kp\tau_N}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle - i \sin \frac{kp\tau_N}{M} |\psi_C(p)\rangle \right]} \quad (\text{III.17})$$

Ce résultat s'interprète facilement. A  $t = 0$  l'atome est dans une superposition d'états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . Ces états ne sont pas des états propres de l'opérateur d'énergie cinétique qui les couple aux états  $|\psi_C(p)\rangle$ . C'est le couplage motionnel, proportionnel à  $kp/M$ , décrit en II.2.1.2. Contrairement à ce qui se passe dans la phase de refroidissement où la présence des lasers déstabilise les niveaux  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ , ceux-ci sont stables pendant la période noire (les largeurs  $\Gamma'_C$  et  $\Gamma'_{NC}$  données par les formules (A.24) et (A.32) s'annulent quand  $\Omega_R = 0$ ). Ce couplage se manifeste donc simplement par l'oscillation en quadrature de phase entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  à la pulsation  $kp/M$  qui apparaît dans l'expression entre crochets de (III.17). L'évolution de l'état  $|\Psi(\tau_N)\rangle$  est donc donnée par la superposition continue d'oscillations à des fréquences variant continuellement entre  $-\infty$  et  $+\infty$ . Lorsque  $\tau_N \rightarrow +\infty$ , l'interférence qui en résulte se moyenne à  $1/2$ , si bien qu'un atome dans l'état  $|\Psi(t \rightarrow +\infty)\rangle$  a alors la même probabilité  $1/2$  d'être dans un état couplé ou non-couplé.

### III.1.2.3 Effet de l'impulsion d'analyse

#### Description qualitative et approximations

Dans la discussion du paragraphe III.1.1, nous avons expliqué que la fluorescence de l'atome pendant l'impulsion d'analyse est la conséquence du recouvrement partiel des deux paquets d'ondes qui se sont éloignés l'un de l'autre pendant la période noire. Nous pouvons maintenant donner une nouvelle interprétation (au moins en première approximation) de cette fluorescence induite par (I). A la fin de la période noire, l'état atomique est donné par (III.17) où l'on voit que l'évolution libre a fait apparaître des composantes de l'état atomique sur des états couplés. Lorsque l'impulsion d'analyse est branchée, seule la partie de (III.17) comprise dans les états non-couplés est protégée de l'absorption et de la fluorescence alors que la partie située dans les états couplés absorbe la lumière et diffuse.

Ces deux interprétations sont équivalentes par suite de la corrélation qui existe entre le recouvrement partiel des paquets d'ondes et la présence de composantes couplées dans l'état atomique. Pour bien comprendre ce lien, il suffit par exemple de considérer une composante  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  de l'état initial  $|\Psi(t = 0)\rangle$  écrit en (III.7). Comme le montre (III.8), cette composante est la superposition de deux ondes planes d'impulsions  $p - \hbar k$  et  $p + \hbar k$  avec une phase relative nulle, la superposition avec une phase relative égale à  $\pi$  correspondant à l'état orthogonal  $|\psi_C(p)\rangle$  donné par (III.9). Au cours de la période noire, ces deux ondes planes se séparent à la

vitesse relative  $2(\hbar k/M)$ . Dans le même temps, n'ayant pas la même impulsion, elles accumulent des déphasages différents si bien qu'au bout d'un temps  $t$ , leur phase relative vaut  $2kpt/M[2\pi]$ . L'état initial  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  s'est donc transformé en une superposition de  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . De la même façon, la séparation entre les paquets d'ondes initialement superposés correspond à l'apparition dans l'état atomique de composantes sur les états  $|\psi_C(p)\rangle$ .

En réalité l'effet de l'impulsion d'analyse est un peu plus subtil. S'il est vrai que la partie couplée de l'état (III.17) absorbe la lumière et diffuse, il est en revanche inexact de considérer que la partie non-couplée est complètement épargnée par les lasers. En effet rappelons que seul l'état noir  $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$  est un vrai état piège alors que les états  $|\psi_{NC}(p \neq 0)\rangle$  ont une instabilité radiative donnée par leur largeur :

$$\Gamma'_{NC}(p) = \Gamma \left( \frac{2kp}{M\Omega_R} \right)^2 \quad (\text{III.18})$$

En présence de lumière, l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  se désintègre donc radiativement avec une constante de temps  $\Gamma'^{-1}_{NC}(p)$ . Les états non-couplés dont la quasi-impulsion  $p$  est suffisamment grande pour que cette constante de temps soit plus courte que la durée de l'impulsion  $\tau_P$  auront ainsi une grande probabilité de se désintégrer pendant l'impulsion (I).

Nous notons  $\mathcal{F}_{NC}$ , la fraction d'atomes qui reste dans les états non-couplés après l'impulsion d'analyse<sup>3</sup> et  $W(p)$ , la probabilité qu'un atome se trouvant dans un état non-couplé à l'instant  $\tau_N$  (à la fin de la période noire), s'y trouve encore à l'instant  $\tau_N + \tau_P$  (à la fin de l'impulsion d'analyse). La dépendance en  $p$  ne doit pas surprendre puisque cette probabilité dépend de  $\Gamma'^{-1}_{NC}(p)$  qui dépend lui même de  $p$  par (III.18).

L'effet de l'impulsion d'analyse est donc de projeter l'état atomique sur les différents états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  avec des probabilités  $W(p)$ . La partie cohérente du vecteur d'état atomique, décrivant les atomes qui ne sont pas excités par l'impulsion, s'obtient donc par l'action sur  $|\Psi(\tau_N)\rangle$  d'une somme continue de projecteurs  $|\psi_{NC}(p)\rangle\langle\psi_{NC}(p)|$  avec des coefficients  $w(p)$  :

$$\hat{\Pi} = \int dp w(p) |\psi_{NC}(p)\rangle\langle\psi_{NC}(p)| \quad (\text{III.19})$$

<sup>3</sup>Nous faisons ici une approximation en négligeant le "réarrosage", c'est-à-dire la probabilité qu'un atome ayant absorbé de la lumière pendant l'impulsion d'analyse retombe dans un état non-couplé au cours de sa marche au hasard. Ceci revient à négliger le refroidissement dû à l'impulsion et se justifie amplement par la brièveté de l'impulsion qui est en moyenne 100 fois plus courte que la période de refroidissement VSCPT. Nous reviendrons néanmoins sur cette approximation lorsque nous étudierons en détail les signaux expérimentaux (chapitre VI) car l'effet du réarrosage, bien que très faible est perceptible expérimentalement.

tels que :

$$|w(p)|^2 = W(p) \quad (\text{III.20})$$

### Calcul de $W(p)$

Considérons un atome dans l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  à la fin de la période noire ( $t = \tau_N$ ). A un instant ultérieur quelconque, la probabilité qu'il y soit encore dépend de  $t$  et de  $p$  et vaut :

$$R(p, t \geq \tau_N) = e^{-\Gamma'_{NC}(p)(t-\tau_N)} = e^{-\Gamma \frac{4k^2 p^2}{\Omega_R^2 M^2} (t-\tau_N)} \quad (\text{III.21})$$

La probabilité qu'il soit resté dans cet état à la fin de l'impulsion d'analyse ( $t = \tau_N + \tau_P$ ) est donc :

$$W(p) = e^{-\Gamma \frac{4k^2 \tau_P}{\Omega_R^2 M^2} p^2} \quad (\text{III.22})$$

que nous écrivons, pour faire apparaître plus clairement qu'il s'agit d'une distribution gaussienne, sous la forme :

$$\boxed{W(p) = e^{-\frac{p^2}{2\beta^2}} \quad \text{avec} \quad 2\beta^2 = \Gamma^{-1} \frac{\Omega_R^2 M^2}{4k^2 \tau_P}} \quad (\text{III.23})$$

### Calcul de $\mathcal{F}_{NC}$

L'état des atomes non excités par l'impulsion d'analyse est obtenu par action du projecteur  $\hat{\Pi}$  défini en (III.19) à l'état (III.17) :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}|\Psi(\tau_N)\rangle &= \iint dp dp' g(p)w(p')e^{-i\omega(p)\tau_N} \left[ \cos \frac{kp\tau_N}{M} \langle \psi_{NC}(p') | \psi_{NC}(p) \rangle \right. \\ &\quad \left. - i \sin \frac{kp\tau_N}{M} \langle \psi_{NC}(p') | \psi_C(p) \rangle \right] |\psi_{NC}(p')\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

Il est facile de vérifier, à-partir de la définition des états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ , les relations d'orthonormalisations suivantes :

$$\langle \psi_{NC}(p) | \psi_{NC}(p') \rangle = \delta(p - p') \quad (\text{III.25})$$

$$\langle \psi_{NC}(p) | \psi_C(p') \rangle = 0 \quad (\text{III.26})$$

On a donc :

$$\hat{\Pi}|\Psi(\tau_N)\rangle = \iint dp dp' g(p)w(p')e^{-i\omega(p)\tau_N} \cos \frac{kp\tau_N}{M} \delta(p - p') |\psi_{NC}(p')\rangle \quad (\text{III.27})$$



et finalement :

$$\hat{\Pi}|\Psi(\tau_N)\rangle = \int dp g(p)w(p)e^{-i\omega(p)\tau_N} \cos \frac{kp\tau_N}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{III.28})$$

La fraction d'atomes restée dans des états non-couplés à la fin de l'impulsion d'analyse est simplement le carré du module de l'état (III.28), ce qui donne, compte-tenu de (III.25) :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \int dp |g(p)|^2 |w(p)|^2 \cos^2 \left( \frac{kp\tau_N}{M} \right) \quad (\text{III.29})$$

On obtient finalement :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} \int dp G(p)W(p) + \frac{1}{2} \int dp G(p)W(p) \cos \left( \frac{2kp\tau_N}{M} \right)} \quad (\text{III.30})$$

### Interprétation physique

L'interprétation physique de ce résultat apparaît plus clairement si on simplifie cette expression en négligeant l'effet de l'impulsion d'analyse sur les états non-couplés. Cette approximation est légitime si le taux d'excitation  $\Gamma'_{NC}$  associé à l'impulsion *rms* des atomes refroidis est beaucoup plus petit que l'inverse de la durée de l'impulsion d'analyse :

$$\Gamma'_{NC}(p_{rms}) = \Gamma \left( \frac{2kp_{rms}}{M\Omega_R} \right)^2 \ll 1/\tau_P \quad (\text{III.31})$$

Nous verrons d'ailleurs, lorsque nous décrirons l'expérience, que cette condition est assez souvent vérifiée. Dans ce cas un atome qui est dans un état non-couplé à la fin de la période noire y est encore après l'impulsion d'analyse ce qui revient à prendre :

$$W(p) = 1 \quad (\text{III.32})$$

L'expression (III.30) se simplifie alors pour donner :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} \int dp G(p) + \frac{1}{2} \int dp G(p) \cos \left( \frac{2kp\tau_N}{M} \right) \quad (\text{III.33})$$

Compte-tenu de la condition de normalisation (III.10), on obtient :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int dp G(p) \cos \left( \frac{2kp\tau_N}{M} \right)} \quad (\text{III.34})$$

où l'on reconnaît la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion  $G(p)$  à l'instant  $\tau_N$ , c'est-à-dire à la fin de la période noire. On peut également exprimer  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  en fonction de la distance  $\xi = 2v_R\tau_N = 2(\hbar k/M)\tau_N$  entre les paquets d'ondes :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int dp G(p) \cos\left(\frac{p\xi}{\hbar}\right)} \quad (\text{III.35})$$

Conformément à ce que laissait prévoir la discussion qualitative précédente, on fait ainsi apparaître clairement que la fraction d'atomes dans des états non-couplés à la fin de la séquence temporelle est directement reliée à la fonction d'autocorrélation spatiale des paquets d'ondes.

#### Comportement asymptotique de $\mathcal{F}_{NC}$

Lorsque  $\tau_N \rightarrow +\infty$ , le cosinus de (III.35) oscille très rapidement et l'intégrale tend vers 0. On a donc :

$$\lim_{\tau_N \rightarrow +\infty} \mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} \quad (\text{III.36})$$

Ce résultat peut sembler étonnant à-priori. En effet lorsque les deux paquets d'ondes s'éloignent à l'infini l'un de l'autre, la possibilité d'interférence destructive disparaît complètement et on pourrait penser que la fraction d'atomes dans les états non-couplés est alors nulle. En d'autres termes, les deux paquets d'ondes étant complètement indépendants, on s'attend à ce que, lorsque les lasers sont rebranchés, le paquet d'ondes  $\varphi(g_+, +\hbar k)$  absorbe un photon dans l'onde laser  $\sigma_-$  et le paquet d'ondes  $\varphi(g_-, -\hbar k)$  absorbe un photon dans l'onde laser  $\sigma_+$ . Tous les atomes seraient ainsi couplés à la lumière et  $\mathcal{F}_{NC}$  devrait tendre vers 0. Ce raisonnement n'est pas exact car il oublie les phénomènes d'émission stimulée qui peuvent avoir lieu dans le système. Lorsque la lumière est rebranchée, chaque paquet d'ondes peut en effet évoluer vers une superposition linéaire d'états  $|g_-, -\hbar k\rangle$  et  $|g_+, +\hbar k\rangle$ . Plus précisément, chacun des deux paquets d'ondes  $\varphi(g_+, +\hbar k, \bar{z} \rightarrow +\infty)$  et  $\varphi(g_-, -\hbar k, \bar{z} \rightarrow -\infty)$  contient une partie couplée et une partie non-couplée. Il suffit pour s'en convaincre d'inverser les formules (III.9) et (III.8) ce qui mène à :

$$|g_+, p + \hbar k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_{NC}(p)\rangle + |\psi_C(p)\rangle] \quad (\text{III.37})$$

$$|g_-, p - \hbar k\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} [|\psi_{NC}(p)\rangle - |\psi_C(p)\rangle] \quad (\text{III.38})$$

Lorsque l'impulsion d'analyse est appliquée, chaque paquet d'onde a donc une probabilité 1/2 d'être projeté dans une superposition d'états non-couplés dans

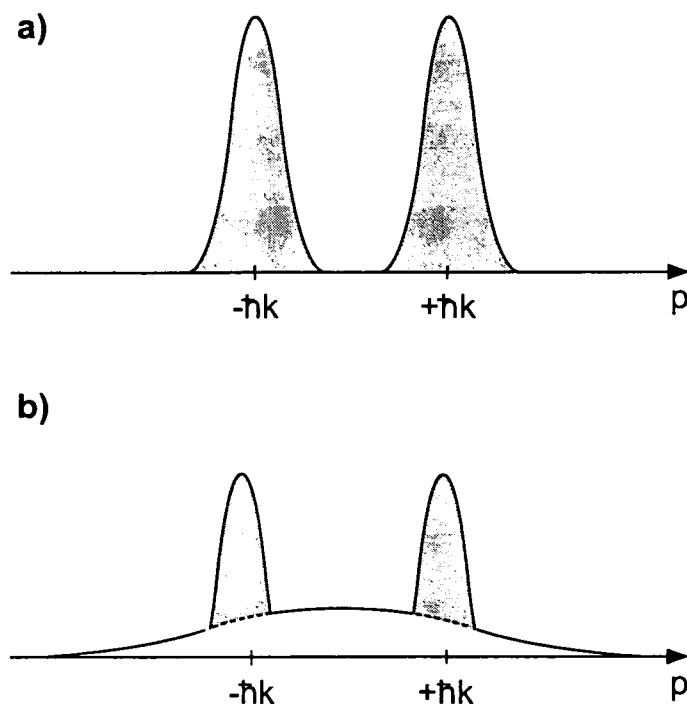


Figure III.4: La distribution d'impulsion d'atomes refroidis par VSCPT présente deux pics étroits centrés en  $\pm\hbar k$ . La figure (a) représente schématiquement cette distribution juste à la fin de la phase VSCPT. On suppose que tous les atomes ont été refroidis si bien qu'il n'en reste pas dans le fond. La fraction initiale d'atomes dans les états non-couplés ( $\mathcal{F}_{NC}(0)$ ) vaut donc 1 et est représentée par l'aire en grisé. La figure (b) montre, également de manière schématique, l'allure de la distribution d'impulsion après une séquence "période noire". La partie des atomes qui a absorbé et diffusé dans un fond large et seuls les atomes restés dans les deux pics, au-dessus du fond sont encore dans des états non-couplés. La fraction  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  est donc donnée par l'aire en grisé.

lequel il est protégé de l'interaction avec le champ laser.

### III.1.3 Principe de la mesure expérimentale de $\mathcal{F}_{NC}$

Comme nous l'avons montré dans la section III de ce mémoire, la distribution d'impulsion des atomes après refroidissement VSCPT est constituée de deux pics de largeur très inférieure à  $\hbar k$ , séparés par  $2\hbar k$ . Cette distribution provient de l'accumulation progressive des atomes dans les états quasi-noirs, qui constituent un piège dans l'espace des impulsions. Cependant, tous les atomes ne sont pas, à l'instant où les lasers VSCPT sont coupés, dans ces états quasi-noirs. Du fait de la marche au hasard, il y a toujours un fond d'atomes non-refroidis dont la distribution présente une largeur de plusieurs impulsions de recul, beaucoup plus large que les deux pics centraux. On devra donc choisir les conditions expérimentales (durée d'interaction, fréquence de Rabi et désaccord des lasers) pour que ce fond soit le plus petit possible. Pour la configuration que nous étudions ici, à-savoir le refroidissement  $\sigma_+/\sigma_-$  sur une transition  $J_g = 1 \rightarrow J_e = 1$  à une dimension, ce problème est facilement résolu. Il suffit en effet de choisir un temps d'interaction supérieur à quelques dizaines de  $\mu s$  et une fréquence de Rabi supérieure à quelques  $0.1 \Gamma$  pour que ce fond soit indétectable. Nous supposerons donc par la suite que tous les atomes sont dans des états non-couplés quasi-noirs à la fin de la période de refroidissement VSCPT (figure III.4.a).

Lorsque la séquence temporelle de la figure III.1 est appliquée aux atomes, nous avons montré que des composantes de l'état atomique sur des états couplés apparaissent pendant l'évolution libre. Lors de l'impulsion d'analyse, les atomes qui sont alors dans ces états couplés (ainsi que dans les états non-couplés instables), absorbent de la lumière et diffusent dans l'espace des impulsions. Cette diffusion les disperse sur une zone beaucoup plus large que les deux pics. La distribution d'impulsions apparaît ainsi comme la superposition d'un fond très large, correspondant aux atomes qui ont diffusé et de deux pics (plus petits que les deux pics initiaux) contenant les atomes qui sont restés en permanence dans des états non-couplés (figure III.4.b). La fraction  $\mathcal{F}_{NC}$  définie plus haut est donc simplement l'aire sous ces deux pics, corrigée du fond.

## III.2 Contraintes expérimentales

### III.2.1 Impulsion d'analyse

Le montage expérimental est celui décrit dans la partie IV du mémoire. La séquence temporelle utilisée pour cette expérience est représentée sur la figure (III.1). La période de refroidissement VSCPT de durée fixée  $\theta$  est suivie par une période noire de durée variable  $\tau_N$  se terminant par une impulsion d'analyse de durée constante  $\tau_P$ .

La durée de l'impulsion d'analyse est un paramètre important. Elle doit être la plus courte possible pour ne pas provoquer de refroidissement VSCPT, mais également assez longue pour que les composantes sur les états couplés apparues dans l'état atomique pendant la période noire puissent diffuser sur un intervalle d'impulsion beaucoup plus grand que la largeur des pics. Le taux de fluorescence d'un atome dans un état couplé en présence de lumière vaut, pour un désaccord nul :

$$\Gamma'_C = \tilde{\Omega}_R^2 \Gamma \quad (\text{III.39})$$

Pour la plupart des expériences, on a :

$$\tilde{\Omega}_R \simeq 0.72 \quad (\text{III.40})$$

et le taux d'émission spontanée vaut donc :

$$\left\langle \frac{dN}{dt} \right\rangle \simeq 5 \cdot 10^6 \text{ photons/s} \quad (\text{III.41})$$

Nous avons choisi pour l'ensemble des expériences une impulsion d'analyse de durée :

$$\tau_P = 8 \mu\text{s} \quad (\text{III.42})$$

ce qui, compte tenu du taux de fluorescence calculé ci-dessus, correspond environ à une quarantaine de photons spontanés. Ceci est suffisant pour assurer une diffusion des atomes sur une largeur de plusieurs impulsions de recul. Remarquons néanmoins que le calcul précédent surestime probablement le nombre réel de photons spontanés. En effet il suppose que les atomes initialement dans un état couplé diffusent avec le taux  $\Gamma'_C$  pendant toute la durée de l'impulsion d'analyse. Il néglige donc la possibilité qu'un atome puisse retomber dans des états non-couplés dont le taux de fluorescence peut être beaucoup plus faible.

### III.2.2 Rôle et influence du champ magnétique

Le calcul que nous avons présenté dans la section III.1 suppose que l'atome suit une évolution libre pendant la période noire. Evidemment ceci n'est le cas que

si l'atome n'est alors soumis à aucune perturbation extérieure. La présence d'un champ magnétique en particulier introduit des couplages qui gênent considérablement l'expérience. Mais l'effet d'un champ magnétique est double. Non seulement il perturbe l'évolution libre des atomes pendant la période noire mais il limite également le refroidissement VSCPT lui-même en introduisant un taux de perte supplémentaire qui augmente l'instabilité des états non-couplés. Nous examinerons donc l'effet d'un champ  $\mathbf{B}$  statique au cours de la phase de refroidissement VSCPT puis pendant la période noire. Dans ce dernier cas, le calcul est essentiel car il fera apparaître le caractère extrêmement néfaste d'un champ transverse, même très faible, pendant la période noire, tout en fournissant le moyen de contourner ce problème. C'est donc une étude indispensable à la réalisation des expériences dans les meilleures conditions possibles.

### III.2.2.1 Traitement quantique des couplages magnétiques

Lorsqu'un atome de moment dipolaire magnétique  $\mathbf{M}$  est plongé dans un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , l'opérateur correspondant à l'énergie d'interaction entre l'atome et le champ s'écrit :

$$\hat{V}_B = -\mathbf{M} \cdot \mathbf{B} \quad (\text{III.43})$$

Le moment dipolaire est simplement relié au moment cinétique total par :

$$\mathbf{M} = \gamma \mathbf{J} \quad (\text{III.44})$$

où  $\gamma$  est le rapport gyromagnétique<sup>4</sup> de l'électron qui vaut, dans le cas de l'hélium dans l'état  $2^3S_1$  (facteur de Landé  $g = 2$ ) :

$$\gamma = -2\pi \times 2.8 \text{ MHz} \cdot \text{G}^{-1} \quad (\text{III.45})$$

Dans le repère orthonormé  $(O, \mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z)$ ,  $\hat{V}_B$  se décompose sous la forme :

$$\hat{V}_B = -\gamma J_x \cdot B_x - \gamma J_y \cdot B_y - \gamma J_z \cdot B_z \quad (\text{III.46})$$

<sup>4</sup>Le rapport gyromagnétique est donné par  $\gamma = g_J \mu_B / \hbar$ , où le magnéton de Bohr vaut :

$$\mu_B = -9.2741 \cdot 10^{-24} \text{ joule/tesla}$$

et  $g_J$ , le facteur de Landé du multiplet  $(\mathbf{L}, \mathbf{S}, \mathbf{J})$  est donné par :

$$g_J = \frac{3}{2} + \frac{S(S+1) - L(L+1)}{2J(J+1)}$$

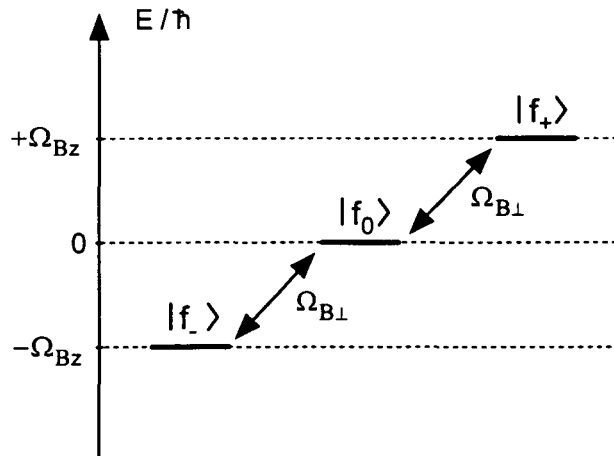


Figure III.5: Couplages magnétiques dans l'état fondamental de la transition  $J=1 \leftrightarrow J=1$ . La composante longitudinale (selon  $z$ ) du champ magnétique déplace symétriquement les deux niveaux extrêmes  $|f_{\pm}\rangle$  de la quantité  $\hbar\Omega_{Bz}$ . Les composantes transverses entraînent un couplage entre chacun des deux sous-niveaux  $|f_{\pm}\rangle$  et  $|f_0\rangle$  d'amplitude  $\Omega_{B\perp}$  avec  $\Omega_{B\perp}^2 = (\Omega_{Bx}^2 + \Omega_{By}^2)/2$ .

Dans le cas général on doit considérer les couplages magnétiques dans l'état excité et dans l'état fondamental. Cependant les champs traités ici sont suffisamment faibles pour que la pulsation de Larmor associée au champ  $\mathbf{B}$  puisse être négligée devant la largeur  $\Gamma$  du niveau excité. Autrement dit, un atome dans l'état excité se désexcite trop vite par émission spontanée pour que la précession de Larmor ait le temps de se manifester. On peut donc négliger les couplages magnétiques entre les sous-niveaux de l'état excité. En prenant l'axe  $(O, \mathbf{e}_z)$  comme axe de quantification, les trois composantes de  $\mathbf{J}$  s'écrivent dans la base standard  $\{|f_+\rangle, |f_0\rangle, |f_-\rangle\}$  :

$$J_x = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad J_y = \frac{\hbar}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{pmatrix} \quad J_z = \hbar \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{III.47})$$

Il est d'usage d'introduire les pulsations de Larmor définies par :

$$\Omega_{Bi} = -\gamma B_i \quad \text{avec } i = x, y, z \quad (\text{III.48})$$

Dans ce cas l'opérateur  $\hat{V}_B$  est représenté par la matrice suivante :

$$\hat{V}_B = \hbar \begin{pmatrix} \Omega_{Bz} & \frac{\Omega_{Bx}}{\sqrt{2}} - i\frac{\Omega_{By}}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\Omega_{Bx}}{\sqrt{2}} + i\frac{\Omega_{By}}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\Omega_{Bx}}{\sqrt{2}} - i\frac{\Omega_{By}}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\Omega_{Bx}}{\sqrt{2}} + i\frac{\Omega_{By}}{\sqrt{2}} & -\Omega_{Bz} \end{pmatrix} \quad (\text{III.49})$$

La composante longitudinale de  $\mathbf{B}$  ne fait que déplacer les sous-niveaux Zeeman  $|f_{\pm}\rangle$  sans introduire de couplages entre eux ( $J_z$  est diagonal sur la base standard). Au contraire les composantes transverses couplent les niveaux  $|f_{\pm}\rangle$  à  $|f_0\rangle$  qui ne sont donc plus des états propres de l'hamiltonien total. Ces différents effets du champ  $\mathbf{B}$  sont représentés sur la figure (III.5).

### III.2.2.2 Effet du champ magnétique sur le refroidissement VSCPT

Dans la description du refroidissement VSCPT que nous avons donnée dans le chapitre II, nous avons montré qu'il existait une infinité d'états non-couplés à la lumière de la forme :

$$|\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle \right], \quad p \in \mathbb{Z} \quad (\text{III.50})$$

Parmi tous ces états, il n'existe qu'un seul état stationnaire (état noir), celui pour lequel la condition de résonance Raman dans le système à trois niveaux est parfaitement remplie. Il faut pour cela que les deux sous-niveaux  $|f_+, p + \hbar k\rangle$  et  $|f_-, p - \hbar k\rangle$  soient parfaitement dégénérés, c'est-à-dire qu'ils aient la même énergie, ce qui se traduit par :

$$\frac{(p + \hbar k)^2}{2M} = \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} \quad (\text{III.51})$$

Cette égalité entraîne immédiatement  $p = 0$  et nous retrouvons ainsi que le seul état noir est :

$$|\psi_{NC}(p = 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, +\hbar k\rangle + |f_-, -\hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.52})$$

L'accumulation des atomes dans cet état et dans les états quasi-noirs  $|\psi_{NC}(p \simeq 0)\rangle$  donne alors une distribution d'impulsion finale constituée de deux pics centrés en  $\pm \hbar k$  (courbe en trait pointillé de la figure III.6).



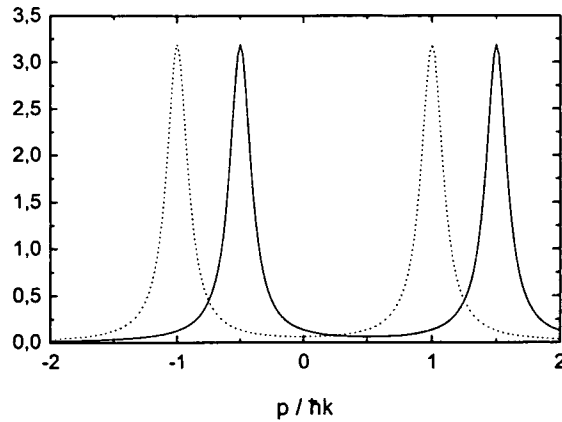


Figure III.6: Distribution d'impulsion des atomes refroidis par VSCPT en absence (trait pointillé) ou en présence (trait plein) d'un champ magnétique longitudinal de l'ordre de 15 mG. La distribution est translatée de  $+\hbar k/2$  sans modification de sa forme.

Evidemment toute perturbation extérieure, telle qu'un champ magnétique, qui entraîne un déplacement des sous-niveaux Zeeman ou un couplage entre eux va modifier cette situation. Pour étudier la perturbation introduite par un champ magnétique, nous considérons un champ  $\mathbf{B}$  qui possède une composante longitudinale selon  $\mathbf{e}_z$  et une composante transverse<sup>5</sup> selon  $\mathbf{e}_x$  :

$$\mathbf{B} = B_{\parallel}\mathbf{e}_z + B_{\perp}\mathbf{e}_x \quad (\text{III.53})$$

Comme nous l'avons montré ci-dessus, les composantes longitudinale et transverse ont des effets différents et nous les considérons donc séparément.

### Effet du champ longitudinal

L'expression (III.50) des états non-couplés ne dépend que de l'opérateur d'interaction atome-laser  $\hat{V}_{AL}$  et n'est donc pas modifiée par le champ  $B_{\parallel}$ . Par contre, celui-ci déplace les sous-niveaux de l'état fondamental et la condition de résonance

<sup>5</sup>Dans le cas général le champ a deux composantes transverses et s'écrit  $\mathbf{B} = B_x\mathbf{e}_x + B_y\mathbf{e}_y + B_z\mathbf{e}_z$ . Cependant pour les effets que nous considérons ici, on peut montrer que les deux composantes  $B_x$  et  $B_y$  se comportent de manière analogue.

Raman, qui permet de trouver l'état noir s'écrit maintenant :

$$\frac{(p + \hbar k)^2}{2M} + \hbar\Omega_B^{\parallel} = \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} - \hbar\Omega_B^{\parallel} \quad (\text{III.54})$$

ce qui entraîne :

$$\frac{kp}{M} + \Omega_B^{\parallel} = 0 \quad (\text{III.55})$$

La condition de résonance est donc satisfaite pour des atomes ayant une quasi-impulsion telle que l'effet Doppler compense exactement le déplacement Zeeman. Le nouvel état noir s'écrit alors :

$$|\psi_{NC}(p_B)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p_B + \hbar k\rangle + |f_-, p_B - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.56})$$

avec

$$\boxed{p_B = -\frac{M\Omega_B^{\parallel}}{k}} \quad (\text{III.57})$$

La distribution d'impulsions des atomes refroidis est donc à présent constituée de deux pics étroits centrés en  $p_B \pm \hbar k$ . Le seul effet d'un champ longitudinal est donc de translater globalement la distribution d'impulsions (courbe en trait plein de la figure III.6). Ceci revient simplement à refroidir les atomes dans un référentiel en mouvement uniforme à la vitesse  $v_B = -\Omega_B^{\parallel}/k$ . L'efficacité du refroidissement, et en particulier la température ne sont donc pas modifiées. Cette propriété du système est particulièrement utile car elle permet de choisir la position absolue de la distribution d'impulsions des atomes refroidis. Il suffit pour cela de créer un champ longitudinal au niveau de la zone d'interaction atome-lasers grâce à une paire de bobines de Helmholtz coaxiales avec les faisceaux laser. Si on désire par exemple refroidir les atomes autour de  $0/ + 2\hbar k$  au lieu de  $-\hbar k/ + \hbar k$ , il suffit de créer un champ longitudinal de :

$$B_{\parallel} = \frac{kv_R}{\gamma} \simeq 30 \text{ mG} \quad (\text{III.58})$$

### Effet du champ transverse

Contrairement au champ longitudinal, le champ transverse a un effet néfaste sur le refroidissement. En effet l'état noir (III.52) n'est pas un état propre de l'hamiltonien Zeeman associé au champ transverse. Considérons par exemple le champ  $\mathbf{B} = B\epsilon_x$  aligné selon (Ox). D'après (III.49), l'action du couplage magnétique sur l'état noir s'écrit :

$$\hat{V}_B |\psi_{NC}(p=0)\rangle = \frac{\hbar\Omega_B}{2} \left[ |f_0, +\hbar k\rangle + |f_0, -\hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.59})$$

Notons que l'impulsion n'est pas modifiée puisque  $\hat{V}_B$  n'agit pas sur les degrés de liberté externes de l'atome. Ces deux états  $|f_0, \pm \hbar k\rangle$  sont eux-mêmes couplés à plusieurs états excités par le laser. En effet il suffit de se reporter à la figure II.2 du chapitre II pour voir que les lasers introduisent les couplages suivants :

$$\begin{aligned} |e_-, 0\rangle &\leftrightarrow |f_0, +\hbar k\rangle \leftrightarrow |e_+, +2\hbar k\rangle \\ |e_-, -2\hbar k\rangle &\leftrightarrow |f_0, -\hbar k\rangle \leftrightarrow |e_+, 0\rangle \end{aligned} \quad (\text{III.60})$$

Chacun des deux sous-niveaux  $|f_0, \pm \hbar k\rangle$  acquiert donc une largeur donnée dans le régime perturbatif ( $\Omega_R \ll \Gamma$ ), par :

$$\Gamma'_0 = 2 \times \frac{(\Omega_R/2\sqrt{2})^2}{\Gamma} = \frac{\Omega_R^2}{4\Gamma} \quad (\text{III.61})$$

Cette instabilité radiative est alors transmise à l'état  $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$  par le couplage magnétique. Dans la limite perturbative ( $\Omega_B \ll \Omega_R$ ), l'état noir acquiert donc une largeur :

$$\Gamma'_{NC}(B) = 2 \times \frac{(\Omega_B/2)^2}{\Gamma'_0} \quad (\text{III.62})$$

où le facteur 2 est dû au fait qu'on a ajouté les deux taux de départ de  $|\psi_{NC}(p=0)\rangle$  vers  $|f_0, \pm \hbar k\rangle$ . On obtient finalement :

$$\boxed{\Gamma'_{NC}(B) = 2 \frac{\Omega_B^2}{\Omega_R^2} \Gamma} \quad (\text{III.63})$$

Le résultat est identique avec un champ orienté selon (Oy). Pour que l'instabilité de l'état noir due au champ transverse  $\mathbf{B}_\perp = B_x \mathbf{e}_x + B_y \mathbf{e}_y$  soit négligeable il faut donc que le taux de départ  $\Gamma'^{-1}_{NC}(B_\perp)$  dû au champ magnétique soit beaucoup plus petit que l'inverse du temps d'interaction  $\theta$  avec les lasers VSCPT :

$$\Gamma'^{-1}_{NC}(B_\perp) \ll 1/\theta \quad (\text{III.64})$$

En utilisant (III.48), il vient finalement :

$$\boxed{B_\perp \ll \frac{\Omega_R}{\gamma \sqrt{2} \sqrt{\theta \Gamma}}} \quad (\text{III.65})$$

La plupart de nos expériences sont réalisées avec une pulsation de Rabi  $\Omega_R \simeq 0.7 \Gamma$  et un temps d'interaction qui ne dépasse jamais 2 ms. L'application numérique de la formule précédente donne alors :

$$B_\perp \ll 2 \text{ mG} \quad (\text{III.66})$$

Les contraintes sur le champ magnétique sont donc sévères mais nous verrons dans le chapitre IV que notre méthode de compensation du champ magnétique permet tout-à-fait d'atteindre cette précision. Cependant le paragraphe suivant va montrer que, pour ce qui est de l'expérience "période noire", les contraintes sont encore plus drastiques et s'approchent de la résolution limite de la procédure de compensation.

### III.2.2.3 Effet du champ magnétique pendant la période noire

Pendant la période noire, la situation est complètement différente de ce que nous venons de décrire pour la phase de refroidissement. Chaque atome est laissé, à la fin de celle-ci, dans une superposition de deux paquets d'ondes  $\varphi_{\pm}$  d'impulsions moyennes  $\pm \hbar k$ , associés aux états internes  $|f_{\pm}\rangle$  respectivement. Du point de vue de leur spin ces deux paquets d'ondes peuvent être représentés par des petites flèches pointant vers  $z > 0$  pour  $\varphi_+$  et vers  $z < 0$  pour  $\varphi_-$  (rappelons que l'axe  $(O, \mathbf{e}_z)$  a été choisi comme axe de quantification). En l'absence de tout champ magnétique, ces deux spins sont invariants pendant la période noire si bien que l'état atomique final est encore une combinaison des états  $|f_+, p + \hbar k\rangle$  et  $|f_-, p - \hbar k\rangle$ , c'est-à-dire également de  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . Au contraire en présence d'un champ magnétique  $\mathbf{B}$ , les spins précessent autour de la direction de  $\mathbf{B}$  à la fréquence de Larmor correspondante. Si le champ est uniquement longitudinal, c'est-à-dire aligné selon  $\mathbf{e}_z$ , ceci ne désaligne pas les spins et n'a donc aucun effet. Par contre, si  $\mathbf{B}$  présente des composantes transverses, le spin atomique va acquérir des composantes sur  $\mathbf{e}_x$  et  $\mathbf{e}_y$ . L'état final aura alors des composantes sur les états  $|f_0, p \pm \hbar k\rangle$  de la base standard. On a vu dans le paragraphe III.1.2.3 que l'effet de l'impulsion d'analyse pouvait être décrit par le projecteur sur tous les sous-espaces à deux dimensions sous-tendus par les vecteurs  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . Or ces deux vecteurs sont orthogonaux aux états  $|f_0, p \pm \hbar k\rangle$ . La précession des spins hors de l'axe des lasers, induite par un champ magnétique transverse pendant la période noire, entraîne donc des pertes supplémentaires lors de l'application de l'impulsion d'analyse.

### Système et hamiltonien

Le système atomique est décrit comme dans la section II.2.1.1. Puisque l'évolution se fait en l'absence de lumière, on peut cependant restreindre le système à l'état fondamental. L'hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H} = \frac{\hat{P}^2}{2M} + \hat{V}_B \quad (\text{III.67})$$

L'opérateur d'énergie cinétique  $\hat{P}^2/2M$  n'agit que sur les degrés de liberté externes de l'atome. Au contraire  $\hat{V}_B$  agit uniquement sur les variables de spin en

laissant les variables externes invariantes. En l'absence de champ magnétique (calcul du paragraphe III.1.2), l'évolution pour chaque valeur de  $p$  se fait uniquement dans le sous-espace sous-tendu par les deux vecteurs  $\{|f_+, p + \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\}$ . Ici, le champ magnétique introduit des couplages entre  $|f_\pm\rangle$  et  $|f_0\rangle$ , indépendamment de l'impulsion ce qui implique de travailler dans le sous-espace sous-tendu par les six vecteurs :

$$\{|f_+, p + \hbar k\rangle, |f_0, p + \hbar k\rangle, |f_-, p + \hbar k\rangle, |f_+, p - \hbar k\rangle, |f_0, p - \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\} \quad (\text{III.68})$$

Nous supposons que le champ magnétique a une composante longitudinale parallèle à  $\mathbf{e}_z$ , et une composante transverse alignée sur  $\mathbf{e}_x$ . Dans la base ci-dessus, le hamiltonien total s'écrit alors, conformément aux notations introduite en 2.2.1 :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hat{H}^+ & 0 \\ 0 & \hat{H}^- \end{pmatrix} \quad (\text{III.69})$$

avec

$$\hat{H}^\pm = \begin{pmatrix} \frac{(p \pm \hbar k)^2}{2M} + \hbar\Omega_B^\parallel & \frac{\hbar\Omega_B^\perp}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\hbar\Omega_B^\perp}{\sqrt{2}} & \frac{(p \pm \hbar k)^2}{2M} & \frac{\hbar\Omega_B^\perp}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\hbar\Omega_B^\perp}{\sqrt{2}} & \frac{(p \pm \hbar k)^2}{2M} - \hbar\Omega_B^\parallel \end{pmatrix} \quad (\text{III.70})$$

Comme le montre l'expression (III.69), l'évolution se fait indépendamment dans les sous-espaces  $\mathcal{E}^+$  et  $\mathcal{E}^-$  sous-tendus respectivement par  $\{|f_+, p + \hbar k\rangle, |f_0, p + \hbar k\rangle, |f_-, p + \hbar k\rangle\}$  et  $\{|f_+, p - \hbar k\rangle, |f_0, p - \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\}$ .

### Evolution du système

En l'absence de champ magnétique, nous avons décrit l'état atomique initial par un vecteur de la forme :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \int dp g(p) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{III.71})$$

Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe III.2.2.2, la présence du champ  $\mathbf{B}$  pendant la phase de refroidissement VSCPT modifie la distribution d'impulsion finale des atomes. Celle-ci est à la fois élargie par la composante transverse et translatée d'une quantité  $p_B$  par la composante longitudinale. L'effet de  $B_{\text{perp}}$  est donc entièrement contenu dans la largeur  $\delta p$  de  $G(p)$  et celui de  $B_{\text{parallel}}$  est pris en compte en remplaçant  $g(p)$  par  $g(p - p_B)$  dans l'expression ci-dessus :

$$|\Psi(t=0)\rangle = \int dp g(p - p_B) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{III.72})$$

La distribution d'impulsions étant une constante du mouvement, l'état atomique à l'instant  $t$  s'écrit :

$$|\Psi(t)\rangle = \int dp g(p - p_B) |\psi(t)\rangle \quad (\text{III.73})$$

avec :

$$|\psi(0)\rangle = |\psi_{NC}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k\rangle + |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.74})$$

Puisque  $|f_+, p + \hbar k\rangle$  et  $|f_-, p - \hbar k\rangle$  évoluent dans deux sous-espaces orthogonaux, respectivement  $\mathcal{E}^+$  et  $\mathcal{E}^-$ , ce vecteur devient à l'instant  $t$  :

$$|\psi(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ \sum_{i=0,\pm} C_i^+(t) |f_i, p + \hbar k\rangle + \sum_{i=0,\pm} C_i^-(t) |f_i, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.75})$$

Le calcul des coefficients  $C_i^+(t)$  et  $C_i^-(t)$  nécessite de résoudre l'équation de Schrödinger :

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi(t)\rangle = \hat{H} |\psi(t)\rangle \quad (\text{III.76})$$

dans chacun des sous-espaces  $\mathcal{E}^+$  et  $\mathcal{E}^-$ . L'équation (III.76) est alors équivalente aux deux systèmes d'équations différentielles couplées suivants :

$$\begin{cases} i\hbar \frac{d}{dt} C_+^\pm = (\alpha^\pm + \beta_\parallel) C_+^\pm + \beta_\perp C_0^\pm \\ i\hbar \frac{d}{dt} C_0^\pm = \beta_\perp C_+^\pm + \alpha C_0^\pm + \beta_\perp C_-^\pm \\ i\hbar \frac{d}{dt} C_-^\pm = \beta_\perp C_0^\pm + (\alpha^\pm - \beta_\parallel) C_-^\pm \end{cases} \quad (\text{III.77})$$

avec :

$$\alpha^\pm = (p \pm \hbar k)^2 / 2M \quad (\text{III.78})$$

$$\beta_\perp = \hbar \Omega_B^\perp / \sqrt{2} \quad (\text{III.79})$$

$$\beta_\parallel = \hbar \Omega_B^\parallel. \quad (\text{III.80})$$

On définit enfin  $\delta$  par :

$$\delta^2 = \beta_\parallel^2 + 2\beta_\perp^2 = \hbar^2 (\Omega_B^\parallel)^2 + \Omega_B^{\perp 2} = \hbar^2 \Omega_B^2 \quad (\text{III.81})$$

où  $\Omega_B$  est la pulsation de Larmor correspondant au champ magnétique total  $\mathbf{B} = B_\perp \mathbf{e}_x + B_\parallel \mathbf{e}_z$ .

La résolution de ce système d'équations différentielles couplées du premier ordre à coefficients constants est un calcul fastidieux mais sans difficulté particulière. La solution dépend bien sûr des conditions initiales qui sont différentes dans les deux sous-espaces :

$$\text{dans } \mathcal{E}^+ : \quad C_+^+(0) = 1, \quad C_0^+(0) = 0, \quad C_-^+(0) = 0 \quad (\text{III.82})$$

$$\text{dans } \mathcal{E}^- : \quad C_+^-(0) = 0, \quad C_0^-(0) = 0, \quad C_-^-(0) = 1 \quad (\text{III.83})$$

On trouve alors les solutions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} C_+^+(t) = \frac{1}{\delta^2} e^{-i\alpha^+ t/\hbar} \left[ \beta_\perp^2 + \frac{1}{2}(\beta_\parallel^2 + \beta_\perp^2 - \beta_\parallel \delta) e^{i\delta t/\hbar} + \frac{1}{2}(\beta_\parallel^2 + \beta_\perp^2 + \beta_\parallel \delta) e^{-i\delta t/\hbar} \right] \\ C_0^+(t) = \frac{\beta_\perp}{\delta^2} e^{-i\alpha^+ t/\hbar} \left[ -\beta_\parallel + \frac{1}{2}(\beta_\parallel - \delta) e^{i\delta t/\hbar} + \frac{1}{2}(\beta_\parallel + \delta) e^{-i\delta t/\hbar} \right] \\ C_-^+(t) = \frac{\beta_\perp^2}{\delta^2} e^{-i\alpha^+ t/\hbar} \left[ -1 + \frac{1}{2} e^{i\delta t/\hbar} + \frac{1}{2} e^{-i\delta t/\hbar} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III.84})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} C_+^-(t) = \frac{\beta_\perp^2}{\delta^2} e^{-i\alpha^- t/\hbar} \left[ -1 + \frac{1}{2} e^{i\delta t/\hbar} + \frac{1}{2} e^{-i\delta t/\hbar} \right] \\ C_0^-(t) = \frac{\beta_\perp}{\delta^2} e^{-i\alpha^- t/\hbar} \left[ \beta_\parallel - \frac{1}{2}(\beta_\parallel + \delta) e^{i\delta t/\hbar} - \frac{1}{2}(\beta_\parallel - \delta) e^{-i\delta t/\hbar} \right] \\ C_-^-(t) = \frac{1}{\delta^2} e^{-i\alpha^- t/\hbar} \left[ \beta_\perp^2 + \frac{1}{2}(\beta_\parallel^2 + \beta_\perp^2 + \beta_\parallel \delta) e^{i\delta t/\hbar} + \frac{1}{2}(\beta_\parallel^2 + \beta_\perp^2 - \beta_\parallel \delta) e^{-i\delta t/\hbar} \right] \end{array} \right. \quad (\text{III.85})$$

On reconnaît dans ce résultat les termes oscillants à la pulsation de Larmor  $\delta/\hbar$  du champ magnétique total ainsi que les exponentielles d'évolution libre aux fréquences  $\alpha \pm /\hbar$ .

### Calcul de $\mathcal{F}_{NC}$

Comme dans le paragraphe 1.2.3, nous calculons maintenant la fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés après l'impulsion d'analyse en appliquant le projecteur  $\hat{\Pi}$  de la formule (III.19). Cependant pour simplifier un peu le calcul, nous négligerons l'instabilité des états non-couplés pendant l'impulsion, ce qui revient d'après (III.32), à prendre :

$$\hat{\Pi} = \int dp |\psi_{NC}(p)\rangle \langle \psi_{NC}(p)| \quad (\text{III.86})$$

Appliquons alors  $\hat{\Pi}$  à l'état (III.73) en utilisant (III.75) :

$$\hat{\Pi}|\Psi(t)\rangle = \int dp \frac{1}{\sqrt{2}} g(p - p_B) \left[ \sum_{i=0,\pm} C_i^+(t) \langle \psi_{NC}(p) | f_i, p + \hbar k \rangle + \sum_{i=0,\pm} C_i^-(t) \langle \psi_{NC}(p) | f_i, p - \hbar k \rangle \right] |\psi_{NC}(p)\rangle$$

ce qui, d'après l'expression (III.8), se simplifie en :

$$\hat{\Pi}|\Psi(t)\rangle = \int dp g(p - p_B) \frac{1}{2} (C_+^+(t) + C_-^-(t)) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{III.87})$$

On en déduit enfin puisque les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  sont orthonormés :

$$\mathcal{F}_{NC}(t) = |\hat{\Pi}|\Psi(t)\rangle|^2 = \int dp G(p - p_B) \frac{1}{4} |C_+^+(t) + C_-^-(t)|^2 \quad (\text{III.88})$$

En reportant les expressions de  $C_+^+(t)$  et  $C_-^-(t)$  données en (III.84) et (III.85) dans cette intégrale et au prix de quelques lignes de calcul, on aboutit à :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{NC}(t) = A(t) \int dp G(p - p_B) \cos^2 \frac{kpt}{M} \\ + B(t) \int dp G(p - p_B) \sin^2 \frac{kpt}{M} \\ + C(t) \int dp G(p - p_B) \sin \frac{2kpt}{M} \end{aligned}$$

avec :

$$A(t) = \frac{1}{\delta^4} [\beta_{\perp}^2 + (\beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2) \cos \frac{\delta t}{\hbar}]^2 \quad (\text{III.89})$$

$$B(t) = \frac{\beta_{\parallel}^2}{\delta^2} \sin^2 \frac{\delta t}{\hbar} \quad (\text{III.90})$$

$$C(t) = -\frac{\beta_{\parallel}}{\delta^3} [\beta_{\perp}^2 + (\beta_{\parallel}^2 + \beta_{\perp}^2) \cos \frac{\delta t}{\hbar}] \sin \frac{\delta t}{\hbar} \quad (\text{III.91})$$

Les trois intégrales ci-dessus peuvent s'écrire en fonction d'une seule et on obtient finalement :

$$\mathcal{F}_{NC}(t) = \frac{1}{2} [A(t) + B(t)] + \frac{1}{2} [A(t) - B(t)] \text{Re}(I) + C(t) \text{Im}(I) \quad (\text{III.92})$$

avec :

$$I = \int dp G(p - p_B) e^{2ikpt/M} \quad (\text{III.93})$$



Effectuons le changement de variable  $p' = p - p_B$ . En utilisant (III.57) il vient :

$$I = e^{-2i\Omega_B^\parallel t} \int dp' G(p') e^{2ikp't/M} \quad (\text{III.94})$$

Puisque la distribution  $G(p)$  est réelle et paire, l'intégrale ci-dessus, qui n'est autre que sa transformée de Fourier, est réelle. On peut alors réexprimer (III.92) sous la forme :

$$\mathcal{F}_{NC} = \frac{1}{2}[A(t) + B(t)] + \left[ \frac{1}{2}[A(t) - B(t)] \cos(2\Omega_B^\parallel t) - C(t) \sin(2\Omega_B^\parallel t) \right] J(t) \quad (\text{III.95})$$

où  $J(t)$  est simplement la transformée de Fourier de  $G(p)$  :

$$J(t) = \int dp G(p) e^{2ikpt/M} = \int dp G(p) \cos \frac{2kpt}{M} \quad (\text{III.96})$$

#### III.2.2.4 Cas particuliers

Examinons ce que devient l'expression générale (III.95) dans les cas particuliers suivants :

- Champ nul ( $B^\parallel = B^\perp = 0$ )

On retrouve l'expression (III.34) démontrée en 1.2.3 :

$$\mathcal{F}_{NC}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int dp G(p) \cos \frac{2kpt}{M} \quad (\text{III.97})$$

- Champ purement longitudinal ( $B^\perp = 0$ )

On trouve de nouveau :

$$\mathcal{F}_{NC}(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int dp G(p) \cos \frac{2kpt}{M} \quad (\text{III.98})$$

Comme nous l'avons expliqué précédemment le seul effet d'un champ purement longitudinal est de refroidir les atomes dans un référentiel en mouvement uniforme ce qui n'a aucun effet sur  $\mathcal{F}_{NC}$ .

- Champ purement transverse ( $B^\parallel = 0$ )

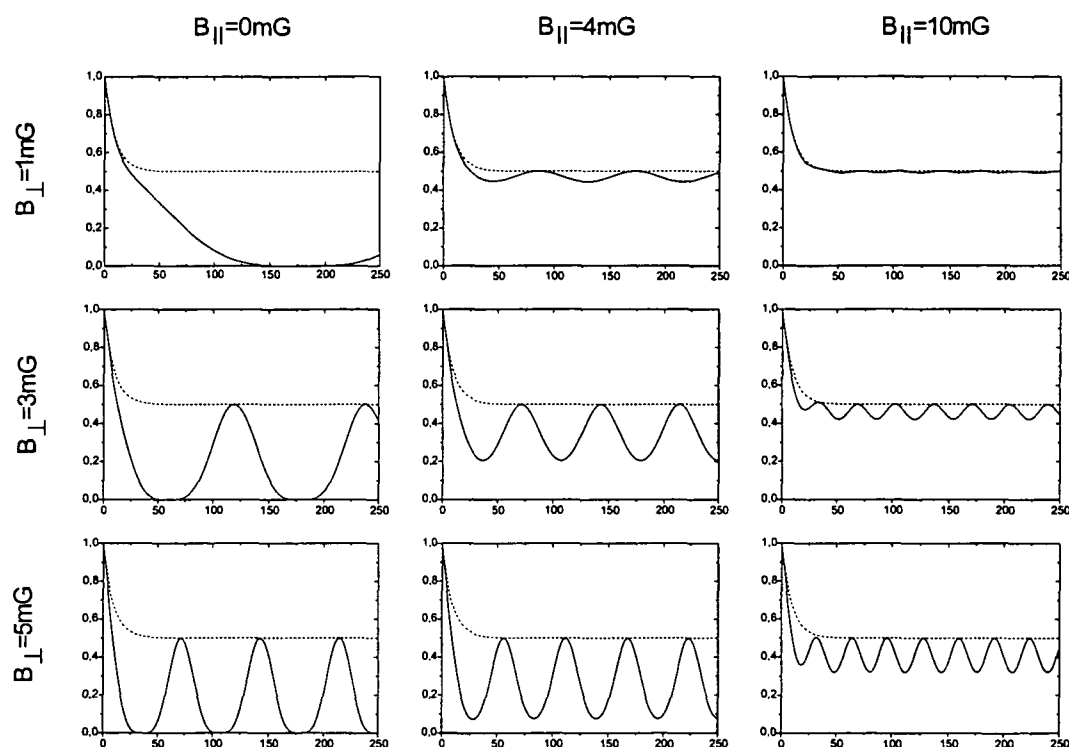


Figure III.7: Allure de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  en fonction de  $\tau_N$  exprimé en  $\mu\text{s}$ , en présence d'un champ magnétique ayant les composantes  $B^{\parallel}$  selon (Oz), et  $B^{\perp}$  selon (Ox). La période des oscillations dépend du champ total. Pour un champ purement transverse ( $B^{\parallel} = 0$ ), l'oscillation est complète entre 0 et 0.5. Lorsqu'on augmente  $B^{\parallel}$  (le long d'une rangée dans la figure ci-dessus) la fréquence de l'oscillation augmente et l'amplitude diminue.

Dans ce cas l'expression de  $\mathcal{F}_{NC}(t)$  est modifiée :

$$\mathcal{F}_{NC}(t) = \frac{1}{8} \left[ 1 + \cos \Omega_B^{\perp} t \right]^2 \left[ 1 + \int dp G(p) \cos \frac{2kpt}{M} \right] \quad (\text{III.99})$$

Le signal est globalement multiplié par le facteur  $[1 + \cos \Omega_B^{\perp} t]^2/4$  et présente donc une oscillation à la fréquence de Larmor du champ transverse en s'annulant périodiquement.

La figure III.7 représente  $\mathcal{F}_{NC}(t)$  pour différentes valeurs des champs transverse et longitudinal. Nous avons supposé pour tracer ces courbes que la distribution de quasi-impulsion  $G(p)$  était une lorentzienne normalisée de largeur  $\delta p_L$  :

$$G(p) = \frac{\delta p_L}{\pi} \frac{1}{p^2 + \delta p_L^2} \quad (\text{III.100})$$

si bien que l'intégrale  $J(t)$  est simplement une exponentielle décroissante :

$$J(t) = e^{-2k\delta p_L t/M} \quad (\text{III.101})$$

Le champ magnétique induit une oscillation du signal. Pour un champ purement transverse (première colonne de la figure III.7) l'oscillation est complète et  $\mathcal{F}_{NC}(t)$  s'annule périodiquement. Lorsque le champ possède également une composante longitudinale, l'oscillation se fait à la fréquence de Larmor du champ total. Par ailleurs, pour une valeur donnée de  $B_{\perp}$ , l'amplitude de l'oscillation est d'autant plus faible que  $B_{\parallel}$  est fort car ce dernier maintient les spins alignés le long de (Oz).

### III.2.2.5 Contraintes expérimentales

Les courbes de la figure III.7 montrent qu'un champ magnétique transverse pendant la période noire entraîne des oscillations importantes dans le signal que nous voulons mesurer. Un champ purement transverse de l'ordre de quelques centaines de  $\mu\text{G}$  est suffisant pour modifier considérablement le signal ce qui pose un problème pour la réalisation expérimentale. Ces courbes nous montrent cependant comment remédier à ce problème.

- Il faut d'une part réaliser une compensation très soignée des champs magnétiques transverses avec une précision de l'ordre de 0.5 à 1.0 mG. Nous verrons dans le chapitre IV consacré à la description du montage expérimental que ceci est possible grâce à l'utilisation de l'effet Hanle mécanique.
- D'autre part, puisque ceci est encore insuffisant, nous faisons l'expérience en présence d'un champ magnétique longitudinal beaucoup plus fort que

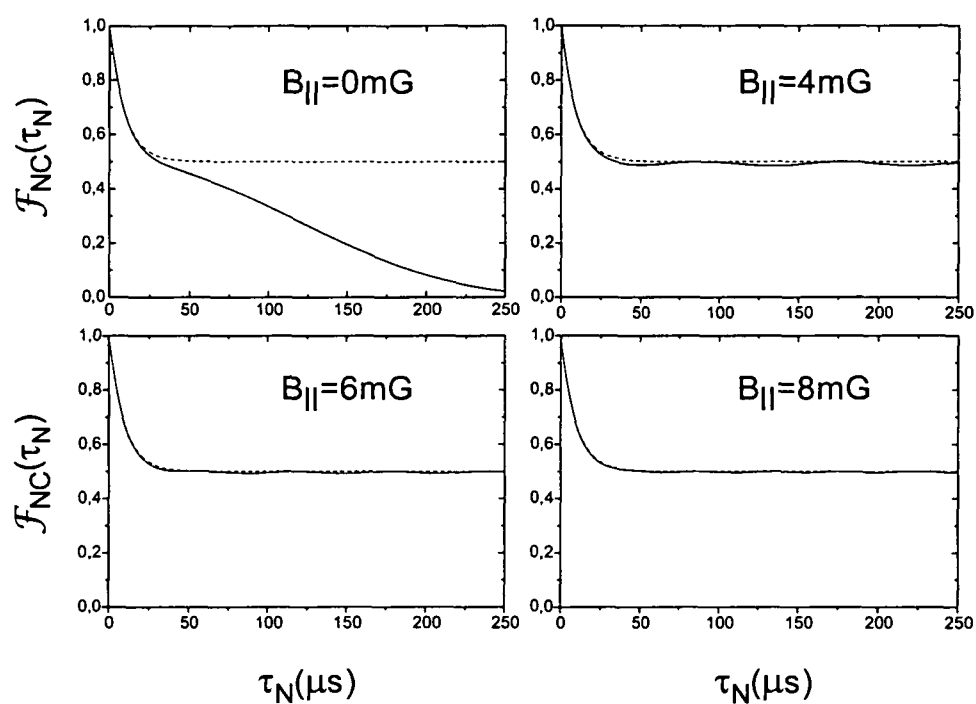


Figure III.8: Allure de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  en fonction de  $\tau_N$  exprimé en  $\mu s$ , en présence d'un champ magnétique transverse de 0.5 mG et pour différentes valeurs du champ longitudinal  $B^{\parallel}$ . Lorsque  $B^{\parallel} = 0\text{mG}$ , l'effet du champ transverse est considérable car il entraîne une précession complète du spin des paquets d'ondes. Un champ longitudinal va maintenir les spins sur l'axe (Oz) et ainsi s'opposer à la précession magnétique. Avec un champ  $B^{\parallel} = 8\text{mG}$ , l'effet du champ transverse est pratiquement annulé.

le champ transverse résiduel. Comme le montre la figure III.8 l'effet d'un champ transverse de 0.5mG est pratiquement réduit à néant par un champ longitudinal de 8.0mG. Celui-ci maintient en effet les spins des deux paquets d'ondes alignés selon  $\mathbf{e}_z$ , en empêchant pratiquement toute précession. Un tel champ directeur s'est révélé absolument crucial et indispensable pour les expériences de mesure de la fonction d'autocorrélation spatiale.

### III.2.3 Effet d'une variation de la phase du champ lumineux

Le champ laser utilisé dans le refroidissement VSCPT à une dimension est la superposition de deux ondes progressives de polarisations circulaires orthogonales se propageant en sens opposés. Pratiquement nous obtenons cette configuration lumineuse par rétro-réflexion d'une onde laser  $\sigma_+$  à travers une lame quart d'onde. Nous examinons dans ce paragraphe l'effet d'une fluctuation de la phase du champ lumineux due à une vibration du miroir de rétro-réflexion. Pour cela nous commençons par rappeler la propriété d'isomorphisme qui existe entre le champ laser et l'état noir atomique. Cette propriété, fondamentale pour la compréhension du refroidissement VSCPT en 2D et 3D, n'est pas indispensable dans l'analyse de la configuration en 1D. Néanmoins elle donne des images physiques intéressantes en particulier pour le problème de la phase qui nous intéresse ici. Nous utilisons ensuite cette propriété pour déduire de l'expression du champ, la variation spatiale du spineur atomique. Cette variation nous fournira alors une image physique simple de l'effet de la phase et de ses fluctuations sur le refroidissement VSCPT.

#### III.2.3.1 Expression générale de l'état noir

Dans sa thèse [77], S. Kulin a établi une propriété très importante du refroidissement VSCPT sur une transition  $J=1 \leftrightarrow J=1$  qu'on peut résumer ainsi :

**L'état noir est en tout point isomorphe au champ laser**

Cette formule un peu lapidaire mérite quelques mots d'explication. Le niveau fondamental de la transition que nous utilisons a un moment cinétique  $J = 1$ . Un atome dans l'état fondamental est donc décrit par un ket dont le développement sur la base standard est de la forme :

$$|\Psi^g(\mathbf{r})\rangle = \psi_-^g(\mathbf{r})|f_-\rangle + \psi_0^g(\mathbf{r})|f_0\rangle + \psi_+^g(\mathbf{r})|f_+\rangle \quad (\text{III.102})$$

On peut alors lui associer un champ vectoriel  $\Psi^g(\mathbf{r})$  qui s'écrit, sur la base sphérique  $\{\epsilon_-, \epsilon_0, \epsilon_+\}$  :

$$\Psi^g(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} \psi_-^g(\mathbf{r}) \\ \psi_0^g(\mathbf{r}) \\ \psi_+^g(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \epsilon_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x - i\epsilon_y) \\ \epsilon_0 = \epsilon_z \\ \epsilon_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\epsilon_x + i\epsilon_y) \end{cases} \quad (\text{III.103})$$

Par définition (voir § II.2.1.2) un état noir est à la fois non-couplé à l'état excité par le champ laser  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  et état stationnaire du hamiltonien total. Examinons d'abord la première de ces deux conditions. Il est habituel de décomposer le champ total  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$  en deux parties  $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r})$  selon :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})e^{-i\omega_L t} + \mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r})e^{+i\omega_L t} \quad (\text{III.104})$$

Dans l'approximation du champ tournant, la partie de fréquence positive  $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$  du champ laser est responsable des processus de transition de l'état fondamental vers l'état excité par absorption d'un photon, tandis que la partie de fréquence négative  $\mathbf{E}^{(-)}(\mathbf{r})$  correspond aux transitions de l'état excité vers l'état fondamental par émission stimulée d'un photon. Pour qu'un état soit non-couplé à l'état excité, il doit être une superposition de sous-niveaux de l'état fondamental telle que l'amplitude de probabilité d'arriver dans un quelconque des sous-niveaux de l'état excité soit nulle. Ceci correspond donc à une inhibition des processus d'absorption gouvernés par  $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$ .

Comme le champ atomique,  $\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})$  est un champ vectoriel qui peut s'écrire sur la base sphérique :

$$\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) = \begin{pmatrix} E_{-}^{(+)}(\mathbf{r}) \\ E_{0}^{(+)}(\mathbf{r}) \\ E_{+}^{(+)}(\mathbf{r}) \end{pmatrix} \quad (\text{III.105})$$

On montre alors [77] que la condition de non-couplage entre l'état atomique et l'état excité est satisfaite lorsque :

$$\Psi_{NC}^g(\mathbf{r}) = \alpha(\mathbf{r})\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r}) \quad (\text{III.106})$$

où  $\alpha(\mathbf{r})$  est un champ scalaire. On peut également montrer que la deuxième condition (stationnarité) n'est satisfaite que lorsque  $\alpha(\mathbf{r})$  est une constante. Le champ vectoriel associé à l'état noir, dont on peut par ailleurs démontrer l'unicité, s'écrit alors :

$$\boxed{\Psi^T(\mathbf{r}) = \alpha\mathbf{E}^{(+)}(\mathbf{r})} \quad (\text{III.107})$$

On traduit cette relation en disant que l'état noir est en tout point isomorphe au champ laser.

### III.2.3.2 Forme de l'état noir pour le VSCPT 1D $\sigma_{+}/\sigma_{-}$

**Configuration laser en rétro réflexion** Dans la configuration de refroidissement que nous étudions dans ce rapport, le champ laser est la superposition,

selon la direction  $Oz$ , d'une onde laser  $\sigma_+$  se propageant dans le sens positif et d'une onde laser  $\sigma_-$  se propageant dans le sens négatif. Pratiquement l'onde  $\sigma_-$  est produite par réflexion de l'onde  $\sigma_+$ , à travers une lame quart d'onde, sur un miroir à incidence normale. La lame est à la cote  $z = l$ , le miroir à la cote  $z = m$  ce qui délimite deux régions distinctes  $0 < z < l$  et  $l < z < m$ . Dans chacune de ces deux régions il existe deux ondes se propageant en sens opposés soit en tout quatre ondes progressives.

- L'onde incidente a une phase arbitraire  $\varphi_i$  et le champ lumineux s'écrit donc :

$$\mathbf{E}_1(0 < z < l, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0\boldsymbol{\epsilon}_+e^{i(kz-\omega_L t+\varphi_i)} + c.c. \quad (\text{III.108})$$

- Rappelons qu'une lame  $\lambda/4$  est taillée dans un cristal anisotrope et possède deux axes propres orthogonaux selon lesquels l'indice de réfraction est différent. Comme la vitesse de propagation de la lumière vaut  $v = c/n$ , l'axe qui a l'indice le plus faible est nommé l'axe rapide (L) et l'autre l'axe lent (S). On suppose l'axe rapide aligné sur (Ox) et l'axe lent aligné sur (Oy). Lorsque l'onde incidente  $\sigma_+$  traverse la lame, les deux composantes du champ selon  $\boldsymbol{\epsilon}_x$  et  $\boldsymbol{\epsilon}_y$  n'accumulent donc pas le même déphasage. L'épaisseur de la lame est calculée pour qu'à la sortie, la composante selon (Oy) soit déphasée de  $-\pi/2$  par rapport à la composante selon (Ox). Dans la base  $\{\boldsymbol{\epsilon}_x, \boldsymbol{\epsilon}_y\}$ , l'action de la lame quart d'onde peut donc être décrit par la matrice :

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix} \quad (\text{III.109})$$

Il est alors facile de vérifier que :

$$\hat{M}\boldsymbol{\epsilon}_+ = -\frac{1}{\sqrt{2}}\boldsymbol{\epsilon}_{xy} \quad (\text{III.110})$$

où  $\boldsymbol{\epsilon}_{xy} = \boldsymbol{\epsilon}_x + \boldsymbol{\epsilon}_y$  désigne le vecteur unitaire de la première bissectrice de xOy. Après la lame, le champ s'écrit donc :

$$\mathbf{E}_2(l < z < m, t) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{E}_0\boldsymbol{\epsilon}_{xy}e^{i(kz-\omega_L t+\varphi_i)} + c.c. \quad (\text{III.111})$$

- L'onde précédente est ensuite réfléchi à incidence normale sur le miroir placé en  $z = m$ . Comme le champ total doit être nul sur le miroir, celui-ci transforme  $\boldsymbol{\epsilon}_{xy}$  en  $-\boldsymbol{\epsilon}_{xy}$ . De même le vecteur d'onde  $k$  est changé en son opposé  $-k$ . En notant  $\varphi_r$  le déphasage de l'onde réfléchi, on a :

$$\mathbf{E}_3(l < z < m, t) = \frac{1}{2\sqrt{2}}\mathcal{E}_0\boldsymbol{\epsilon}_{xy}e^{i(-kz-\omega_L t+\varphi_i+\varphi_r)} + c.c. \quad (\text{III.112})$$



- Enfin l'onde réfléchiée traverse une seconde fois la lame  $\lambda/4$  si bien que sa polarisation devient :

$$\hat{M}\epsilon_{xy} = \sqrt{2}\epsilon_- \quad (\text{III.113})$$

Le champ s'écrit alors :

$$\mathbf{E}_4(0 < z < l, t) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0\epsilon_- e^{i(-kz - \omega_L t + \varphi_i + \varphi_r)} + c.c. \quad (\text{III.114})$$

Le champ total entre la lame et le miroir s'écrit :

$$\mathbf{E}_{23}(z, t) = \mathbf{E}_2(z, t) + \mathbf{E}_3(z, t) \quad (\text{III.115})$$

et sa partie de fréquence positive :

$$\mathbf{E}_{23}^{(+)}(z) = -\frac{1}{\sqrt{2}}ie^{i\varphi_i}e^{i\varphi_r/2}\sin(kz - \varphi_r/2)\mathcal{E}_0\epsilon_{xy} \quad (\text{III.116})$$

On obtient l'expression d'une onde stationnaire dont la polarisation  $\epsilon_{xy}$  est uniforme et dont l'amplitude est modulée avec une période spatiale  $\lambda$ . L'annulation du champ au niveau du miroir ( $z = m$ ) entraîne :

$$\varphi_r = 2km \quad (\text{III.117})$$

A gauche de la lame quart d'onde, le champ total vaut :

$$\mathbf{E}_{14}(z, t) = \mathbf{E}_1(z, t) + \mathbf{E}_4(z, t) \quad (\text{III.118})$$

et sa partie de fréquence positive :

$$\mathbf{E}_{14}^{(+)}(z) = \frac{1}{2}\mathcal{E}_0\left[\epsilon_+ e^{i(kz + \varphi_i)} + \epsilon_- e^{i(-kz + \varphi_i + \varphi_r)}\right] \quad (\text{III.119})$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{2}}ie^{i\varphi_i}e^{i\varphi_r/2}\mathcal{E}_0\epsilon(z - \varphi_r/2k) \quad (\text{III.120})$$

où le vecteur polarisation est défini par :

$$\epsilon(z) = \epsilon_x \sin(kz) + \epsilon_y \cos(kz) \quad (\text{III.121})$$

L'expression (??) montre qu'à gauche de la lame (zone d'interaction avec les atomes) le champ total est une onde stationnaire qui a, en tout point  $z$ , une polarisation linéaire fixe  $\epsilon(z - \varphi_r/2k)$ . L'extrémité du vecteur  $\mathbf{E}^{(+)}(z)$  décrit une hélice de pas  $\lambda$  dont la position absolue est fixée par  $\varphi_r/2k = m$ . C'est donc la position  $m$  du miroir qui fixe la position absolue de l'hélice que décrit le champ laser dans la zone d'interaction avec les atomes. Remarquons que ce résultat est

indépendant de la position de la lame  $\lambda/4$ .

**Forme de l'état noir** En utilisant la propriété d'isomorphisme rappelée ci-dessus on déduit de (III.119) :

$$\Psi^T(z) = \alpha \times \frac{1}{2} \mathcal{E}_0 e^{i\varphi_i} \left[ \epsilon_+ e^{ikz} + e^{i\varphi_r} \epsilon_- e^{-ikz} \right] \quad (\text{III.122})$$

et donc par isomorphisme :

$$|\Psi^T\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_i} \left[ |f_+, +\hbar k\rangle + e^{i\varphi_r} |f_-, -\hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.123})$$

où la constante  $\alpha$  a été choisie de telle sorte que  $|\Psi^T\rangle$  soit normalisée. Si on choisit, comme on l'avait fait en (II.4), la phase de l'onde réfléchie nulle ( $\varphi_r = 0$ ), on retrouve bien, au facteur de phase  $e^{i\varphi_i}$  près, l'expression de l'état noir  $|\psi_{NC}(p = 0)\rangle$ . De plus, l'expression (III.120) permet de conclure que le champ vectoriel associé à l'état noir  $|\Psi^T\rangle$  est également une hélice de pas  $\lambda$  et d'axe  $Oz$ .

**Effet d'une fluctuation de la phase incidente** L'expression (III.120) montre que la position de l'hélice que décrit le champ vectoriel  $\Psi^T(z)$  ne dépend pas de la phase de l'onde laser incidente  $\varphi_i$ . Peut-on en conclure que le refroidissement VSCPT est insensible aux variations de celle-ci? Nous avons supposé que la phase incidente  $\varphi_i$  se retrouvait inchangée sur le faisceau réfléchi. Ceci est exact mais à la nuance près qu'au niveau des atomes, une variation de la phase de l'onde incidente  $\sigma_+$  n'est suivie qu'avec un certain retard par la même variation sur l'onde réfléchie  $\sigma_-$ . Ce délai est simplement le temps que met la lumière pour faire un aller-retour entre le piège et le miroir de rétro-réflexion. Dans notre montage expérimental, la distance entre le piège et le miroir est de l'ordre de 15 cm ce qui correspond à un délai de :

$$\Delta t = \frac{0.3}{3.10^8} = 10^{-9} \text{ s} \quad (\text{III.124})$$

Ainsi dans une bande passante de l'ordre de 1 GHz, les variations de la phase incidente n'ont aucune conséquence sur l'état du champ au niveau de l'atome. De plus si les variations de phase ont lieu à des fréquences plus élevées, le champ fluctue mais beaucoup plus rapidement que les temps caractéristiques de l'évolution de l'atome qui n'est donc pas perturbée. On peut donc conclure que les variations de la phase incidente n'ont aucun effet sur le refroidissement VSCPT.

**Effet d'une fluctuation de la phase de l'onde réfléchie** Jusqu'à présent nous avons implicitement supposé que le miroir de rétro-réflexion était fixe. Imaginons

maintenant que sa position fluctue au cours du temps de telle sorte que la phase de l'onde réfléchie  $\varphi(t)$  soit une fonction du temps. L'état noir dépend donc du temps selon :

$$|\Psi^T(t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} e^{i\varphi_r} \left[ |f_+, +\hbar k\rangle + e^{i\varphi_r(t)} |f_-, -\hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.125})$$

Que se passe-t-il physiquement? Imaginons que la phase varie selon :

$$\varphi_r(t) = \varphi Y(t) \quad (\text{III.126})$$

où  $Y(t)$  est la fonction de Heaviside et considérons un atome dans l'état noir à  $t < 0$  :

$$|\Psi\rangle = |\Psi^T(t < 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, +\hbar k\rangle + |f_-, -\hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.127})$$

A  $t = 0$ , l'état noir change brusquement et l'atome n'a donc pas le temps de suivre cette évolution. Juste après le saut de phase, l'état atomique est donc toujours le même alors que le nouvel état noir s'écrit :

$$|\Psi^T(t > 0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, +\hbar k\rangle + e^{i\varphi} |f_-, -\hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.128})$$

L'hélice qui décrit le nouvel état noir s'est donc déplacée de  $\varphi/2k$  selon l'axe (Oz), ce qui correspond à une rotation de  $\varphi/2$ . La projection de l'état atomique sur le nouvel état noir s'écrit :

$$\langle \Psi^T(t > 0) | \Psi \rangle = \frac{1}{2} (1 + e^{i\varphi}) \quad (\text{III.129})$$

L'état atomique est donc partiellement couplé à l'état excité par le nouveau champ laser et l'atome subit des cycles de fluorescence. Contrairement aux apparences, ceci n'est pas très gênant pour l'efficacité du refroidissement. En effet les variations de phase dues au mouvement du miroir de retour ne sont pas instantanées comme on l'a supposé ci-dessus et il suffit donc que l'hélice atomique puisse suivre adiabatiquement l'hélice du champ pour que l'atome reste dans l'état noir. Pour cela il suffit que les composantes couplées qui apparaissent dans l'état noir quand le miroir bouge diffusent avec un temps caractéristique beaucoup plus court que la période des oscillations du miroir soit :

$$T_{osc} \gg \Gamma'_c^{-1} \quad \Rightarrow \quad f_{osc} \ll \frac{\Omega_R^2}{4\Gamma} \quad (\text{III.130})$$

Pour des valeurs habituelles de  $\Omega_R$  de l'ordre de  $\Gamma$ , cette condition devient :

$$f_{osc} \ll 2.5 \text{ MHz} \quad (\text{III.131})$$

ce qui est très largement respecté puisque les vibrations mécaniques ont des fréquences caractéristiques beaucoup plus faibles que le MHz. On peut donc conclure que les vibrations du miroir de retour ne perturbent pas le refroidissement VSCPT car l'état noir suit adiabatiquement les changements du champ laser.

### Remarque

Cette image du couplage atome-laser sous forme de la position relative de deux hélices, celle du champ électrique du laser et celle du spineur atomique, donne un nouvel éclairage au processus de refroidissement VSCPT. On décrit habituellement celui-ci dans l'espace des impulsions. L'état noir est alors l'état non-couplé de quasi-impulsion  $p = 0$  et les autres états de quasi-impulsion  $p \neq 0$  ont une instabilité radiative liée au couplage motionnel  $kp/M$ . On retrouve la même sélectivité en impulsion en raisonnant dans l'espace des positions. L'état noir y est décrit par l'hélice qui est en permanence superposée à l'hélice du champ laser. Celle-ci est fixe dans l'espace (si la phase de l'onde réfléchie est constante) et le centre de masse de l'atome dans l'état noir doit donc être au repos ce qui correspond à  $p = 0$ . Au contraire si l'atome bouge, l'hélice atomique ne reste pas superposée avec celle du champ laser et l'atome est couplé au laser.

### III.2.3.3 Calcul de $\mathcal{F}_{NC}$

Nous venons de voir que lorsque le miroir de retour vibre dans une expérience de VSCPT, l'état noir suit adiabatiquement ce mouvement et l'efficacité du refroidissement n'est pas altérée. Il en est tout autrement dans une expérience "période noire". Dans ce cas en effet, les lasers VSCPT sont coupés pendant une durée  $\tau_N$  et si le miroir bouge pendant cette phase, l'hélice du champ au rebranchement des lasers aura bougé par rapport à sa position initiale, sans que l'atome ait pu suivre. Ceci est analogue à un changement de phase instantané tel que l'exemple que nous avons décrit ci-dessus et se traduit par une diffusion supplémentaire lors de l'impulsion d'analyse. Nous allons voir que cet effet peut modifier considérablement l'allure du signal  $\mathcal{F}_{NC}$ .

Nous considérons donc une séquence "période noire" habituelle et analysons l'effet d'une vibration du miroir de retour entre  $t = 0$  (fin de la phase VSCPT) et  $t = \tau_N$  (fin de la période noire). La position absolue du miroir le long de la direction de refroidissement s'écrit :

$$m(t) = M_0 \sin(2\pi ft + \alpha) \quad (\text{III.132})$$

où  $z_0$  est l'amplitude de l'oscillation,  $f$  sa fréquence et  $\alpha$  la phase initiale. Celle-ci est prise en compte dans le calcul car le signal expérimental résulte de la moyenne de plusieurs expériences successives. La phase initiale de l'oscillation n'ayant aucune raison d'être la même pour chaque réalisation, il conviendra à la fin du calcul, de moyenner le résultat obtenu sur la phase initiale. Comme nous l'avons vu ci-dessus, l'onde lumineuse incidente est rétro-réfléchi sur le miroir et le déphasage associé à la position du miroir s'écrit donc :

$$\varphi(t) = 2km(t) = 2kM_0 \sin(2\pi ft + \alpha) \quad (\text{III.133})$$

Au niveau du nuage atomique, l'onde lumineuse réfléchi  $\sigma_-$  est donc déphasée de la quantité  $\varphi(t)$  par rapport à l'onde lumineuse incidente  $\sigma_+$ . Par suite les états non-couplés dépendent du temps selon :

$$|\psi_{NC}(p, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k\rangle + e^{i\varphi(t)} |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.134})$$

qu'on peut également réécrire, à un facteur de phase près :

$$|\psi_{NC}(p, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\varphi(t)/2} |f_+, p + \hbar k\rangle + e^{i\varphi(t)/2} |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.135})$$

Les états couplés, orthogonaux aux états ci-dessus, sont de même définis par :

$$|\psi_C(p, t)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ e^{-i\varphi(t)/2} |f_+, p + \hbar k\rangle - e^{i\varphi(t)/2} |f_-, p - \hbar k\rangle \right] \quad (\text{III.136})$$

Au moment où l'on coupe les faisceaux lasers VSCPT ( $t = 0$ ), on peut décrire l'état atomique par la superposition suivante :

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \int dp g(p) |\psi_{NC}(p, 0)\rangle \quad (\text{III.137})$$

L'atome évolue ensuite librement pendant la période noire et son état à  $t = \tau_N$  est donné, comme en (III.17) par l'expression :

$$|\Psi(\tau_N)\rangle = \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_N} \left[ \cos \frac{kp\tau_N}{M} |\psi_{NC}(p, 0)\rangle - i \sin \frac{kp\tau_N}{M} |\psi_C(p, 0)\rangle \right] \quad (\text{III.138})$$

Si on néglige l'instabilité radiative des états non-couplés (voir §III.1.2.3), l'effet de l'impulsion d'analyse est décrit par l'opérateur de projection sur le sous-espace engendré par les états non-couplés :

$$\hat{\Pi}(\tau_N) = \int dp |\psi_{NC}(p, \tau_N)\rangle \langle \psi_{NC}(p, \tau_N)| \quad (\text{III.139})$$

Sous l'action de ce projecteur le vecteur d'état est transformé en :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(\tau_N)|\Psi(\tau_N)\rangle &= \int \int dp dp' g(p) e^{-i\omega(p)\tau_N} |\psi_{NC}(p', \tau_N)\rangle \times \\ &\times \left[ \cos \frac{kp\tau_N}{M} \langle \psi_{NC}(p', \tau_N) | \psi_{NC}(p, 0) \rangle - i \sin \frac{kp\tau_N}{M} \langle \psi_{NC}(p', \tau_N) | \psi_C(p, 0) \rangle \right] \end{aligned} \quad \text{III.140}$$

D'après les formules (III.135) et (III.136), on déduit les égalités :

$$\langle \psi_{NC}(p', \tau_N) | \psi_{NC}(p, 0) \rangle = \cos \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} \delta(p - p') \quad \text{III.141}$$

$$\langle \psi_{NC}(p', \tau_N) | \psi_C(p, 0) \rangle = i \sin \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} \delta(p - p') \quad \text{III.142}$$

qui, reportées dans (III.140), donnent :

$$\begin{aligned} \hat{\Pi}(\tau_N)|\Psi(\tau_N)\rangle &= \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_N} |\psi_{NC}(p, \tau_N)\rangle \times \\ &\times \left[ \cos \frac{kp\tau_N}{M} \cos \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} + \sin \frac{kp\tau_N}{M} \sin \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} \right] \end{aligned} \quad \text{III.143}$$

On peut alors calculer la fraction d'atomes restée dans les états non-couplés :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{NC}(\tau_N) &= |\hat{\Pi}(\tau_N)|\Psi(\tau_N)\rangle|^2 \\ &= \cos^2 \left( \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} \right) \int dp |g(p)|^2 \cos^2 \frac{kp\tau_N}{M} \\ &\quad + \sin^2 \left( \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} \right) \int dp |g(p)|^2 \sin^2 \frac{kp\tau_N}{M} \\ &\quad + \frac{1}{2} \sin(\varphi(\tau_N) - \varphi(0)) \int dp |g(p)|^2 \sin \frac{2kp\tau_N}{M} \end{aligned} \quad \text{III.144}$$

La distribution d'impulsion  $|g(p)|^2$  étant paire, la troisième intégrale de l'expression ci-dessus est nulle. D'autre part en utilisant la condition de normalisation :

$$\int dp |g(p)|^2 = 1 \quad \text{III.145}$$

on peut réécrire  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  sous la forme :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \sin^2 \left( \frac{\varphi(\tau_N) - \varphi(0)}{2} \right) + \cos(\varphi(\tau_N) - \varphi(0)) \int dp |g(p)|^2 \cos^2 \frac{kp\tau_N}{M} \quad \text{III.146}$$

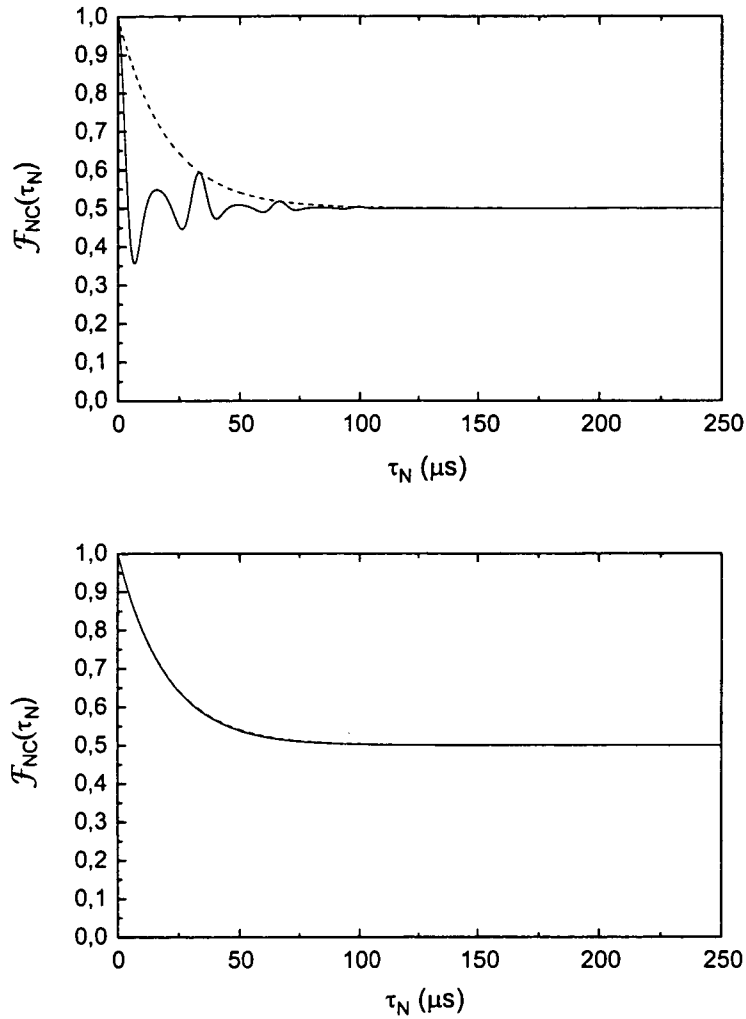


Figure III.9: Effet d'une vibration du miroir sur le signal  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$ . On a pris  $\tau_C = 20 \mu\text{s}$ . L'amplitude de l'oscillation vaut  $M_0 = 1 \mu\text{m}$  et sa fréquence est  $f = 30\text{kHz}$  pour la figure (a) et  $f = 750\text{Hz}$  pour la figure (b). En pointillé est représenté le signal en l'absence de vibration du miroir. Sur la figure (a), l'effet est considérable mais la fréquence choisie n'est pas très plausible pour une vibration mécanique. Dans les conditions de la figure (b), beaucoup plus réaliste, l'effet est négligeable.

En supposant la distribution d'impulsion lorentzienne de largeur  $\delta p$ , l'intégrale restante se calcule facilement :

$$\int dp |g(p)|^2 \cos^2 \frac{kp\tau_N}{M} = \frac{1}{2}(1 + e^{-\tau_N/\tau_C}) \quad (\text{III.147})$$

où le temps de cohérence est défini par :

$$\tau_C = \frac{M}{2k\delta p} \quad (\text{III.148})$$

Si on reporte ce résultat dans  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$ , on trouve :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos(\varphi(\tau_N) - \varphi(0)) e^{-\tau_N/\tau_C} \right] \quad (\text{III.149})$$

D'après l'expression (III.133) du déphasage, on a :

$$\varphi(\tau_N) - \varphi(0) = 2kM_0 \left( \sin(2\pi f\tau_N + \alpha) - \sin(\alpha) \right) \quad (\text{III.150})$$

$$= kM_0 \sin(\pi f\tau_N) \cos(\pi f\tau_N + \alpha) \quad (\text{III.151})$$

Le signal dépend donc de la phase initiale  $\alpha$  :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N, \alpha) = \frac{1}{2} \left[ 1 + \cos \left( kM_0 \sin(\pi f\tau_N) \cos(\pi f\tau_N + \alpha) \right) e^{-\tau_N/\tau_C} \right] \quad (\text{III.152})$$

En réalité, le signal expérimental est obtenu en moyennant plusieurs réalisations de l'expérience "période noire". La phase initiale variant aléatoirement d'une expérience à l'autre, il convient de moyenner  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  sur toutes les valeurs possibles de  $\alpha$  soit :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\alpha \mathcal{F}_{NC}(\tau_N, \alpha) \quad (\text{III.153})$$

En utilisant la définition de la fonction de Bessel d'ordre 0 :

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi dy \cos(x \sin y) \quad (\text{III.154})$$

on obtient finalement :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} \left[ 1 + J_0(kM_0 \sin(\pi f\tau_N)) e^{-\tau_N/\tau_C} \right]} \quad (\text{III.155})$$

Cette fonction est tracée en trait plein sur la figure III.9.a pour  $M_0 = 1 \mu\text{m}$ ,  $f = 30 \text{ kHz}$  et  $\tau_C = 20 \mu\text{s}$ . En comparant le résultat avec le signal en l'absence



---

de mouvement du miroir, on constate que l'effet est considérable. Néanmoins la valeur de  $f$  choisie sur cette figure, si elle permet de mettre l'effet clairement en évidence n'est pas très réaliste. Le miroir de rétro-réflexion est en effet monté sans bras de levier sur un support cylindrique en laiton d'un diamètre d'environ 10 cm dont la masse est proche de 2 kg. Les vibrations mécaniques d'un tel montage ne peuvent donc guère excéder quelques centaines de Hz. Quant à l'amplitude de l'oscillation il est raisonnable de supposer qu'elle est de l'ordre du  $\mu\text{m}$ . La courbe de la figure III.9.b calculée pour  $M_0 = 1 \mu\text{m}$  et  $f = 750 \text{ Hz}$  montre alors que pour des conditions réaliste, l'effet de la vibration du miroir sur le signal est indétectable.



# Chapitre IV

## Présentation du montage expérimental

### IV.1 Montage expérimental

A l'heure actuelle, les atomes neutres qui sont le plus couramment piégés et refroidis appartiennent soit au groupe des atomes alcalins (Li, Na, K, Rb, Cs, Fr) soit à celui des gaz rares (He, Ne, Ar, Kr, Xe). La raison de cette situation réside dans le fait que les sources lasers les plus performantes et qui ont bénéficié du développement le plus important sont celles qui opèrent dans le visible ou le proche infra-rouge. Or seuls les alcalins et les gaz rares ont une structure de niveaux d'énergie assez simple dans le visible et le proche infra-rouge pour constituer des systèmes fermés ou pratiquement fermés, condition indispensable au refroidissement et au piégeage par laser.

Le système étudié dans notre équipe est l'hélium 4. C'est un boson dont le spin nucléaire est nul ( $I = 0$ ). La structure de niveaux de  $^4\text{He}$  est donc d'emblée plus simple que la plupart des autres atomes refroidis par laser puisqu'il n'a pas de structure hyperfine.

La première condition à remplir pour pouvoir refroidir et piéger un atome par laser est de trouver une transition optique intense dans un domaine de longueurs d'onde où existent des sources laser usuelles. A première vue l'hélium n'apparaît donc pas comme un très bon candidat puisque les premiers niveaux excités sont à près de 20 eV au-dessus du niveau fondamental, ce qui correspond à des transitions dans l'ultraviolet ( $\sim 50$  nm). Comme nous allons l'expliquer maintenant, il existe cependant des transitions entre des niveaux métastables et des niveaux excités qui ont lieu dans le domaine visible-IR et qui peuvent être utilisées pour le refroidissement laser.

Rappelons que les atomes héliumoides (hélium et alcalino-terreux) ont deux électrons de valence. Ceux-ci peuvent être excités dans des états de spins parallèles ou anti-parallèles donnant lieu à deux séries d'états excités, différant par leur spin total  $S$  : singulet ( $S = 0$ ) et triplet ( $S = 1$ ). L'hélium ayant un numéro atomique très faible ( $Z = 2$ ), c'est un système qui est bien décrit par le couplage Russel-Saunders (couplage L-S) et qui obéit donc aux règles de sélection des transitions dipolaires électriques, en particulier  $\Delta S = 0$  (l'opérateur dipolaire électrique n'agit pas sur les variables de spin). De fait ne sont autorisées que les transitions optiques singulet  $\leftrightarrow$  singulet et triplet  $\leftrightarrow$  triplet<sup>1</sup>.

Pour l'hélium 4, l'examen du diagramme des niveaux d'énergie montre qu'il existe des transitions optiques permises à partir du premier état singulet  $2^1S$  et du premier état triplet  $2^3S$ . Cependant comme l'état fondamental est aussi un état singulet, les niveaux excités singulets peuvent toujours se désexciter vers le fondamental et il n'existe donc pas de transitions fermées à partir de  $2^1S$ . Ceci est un obstacle important au refroidissement d'atomes d'hélium dans des états singulets.

Les états triplets ne présentent pas cet inconvénient puisque les transitions qui les connectent au niveau fondamental sont fortement inhibées par la règle de sélection  $\Delta S = 0$ . Avec une durée de vie de près de 8000 s (ref), le premier niveau triplet  $2^3S$  est lui-même métastable et sera considéré dans la suite comme un état fondamental. Nous utilisons la transition entre ce niveau métastable  $2^3S$  et le niveau excité suivant  $2^3P$ . Le couplage spin-orbite scinde le terme  $2^3P$  en trois niveaux distincts, différant par la valeur de leur moment cinétique total  $J$ , si bien qu'il existe en fait trois transitions différentes :

$$2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_0 \quad (\text{IV.1})$$

$$2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_1 \quad (\text{IV.2})$$

$$2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_2 \quad (\text{IV.3})$$

Ces transitions sont quasiment fermées puisque les raies d'intercombinaison qui couplent les états triplets  $P$  au niveau fondamental ont des constantes de temps largement supérieures aux durées caractéristiques mises en jeu dans l'expérience (voir figure IV.1). On évite ainsi d'avoir à recourir, comme dans le cas des alcalins par exemple, à des laser supplémentaires pour repomper les atomes qui se désexcitent vers d'autres états.

<sup>1</sup>Ceci n'est pas rigoureusement exact. Du fait du terme de couplage dipolaire magnétique (couplage spin-spin), les transitions triplet $\leftrightarrow$ singulet ont une probabilité non nulle, bien que très faible, de se produire. Ces transitions donnent naissance aux raies dites d'intercombinaison dans le spectre de l'hélium. Nous verrons ci-dessous que ces processus peuvent être complètement négligés dans notre cas.

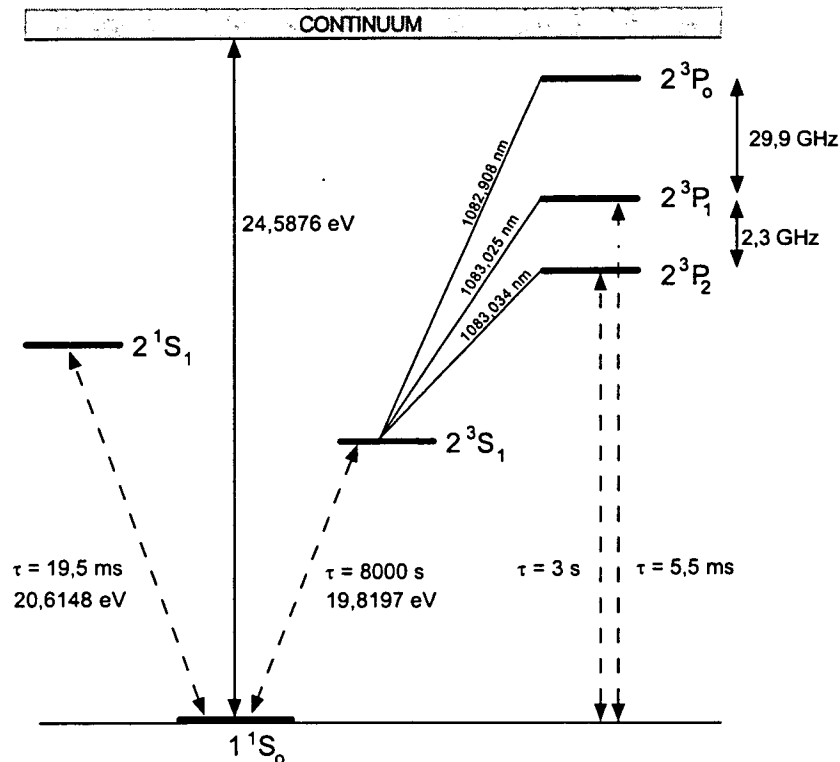


Figure IV.1: Niveaux d'énergie de l'atome  $^4\text{He}$ . Au-dessus de l'état fondamental ( $1^1S_0$ ) existent deux séries d'états excités: les états singulets dont seul le premier ( $2^1S_1$ ) est représenté ici, et les états triplets dont les transitions dipolaires électriques vers le niveau fondamental sont fortement inhibées par la règle de conservation du spin total. Dans les expériences de refroidissement de l'hélium on utilise les trois transitions  $2^3S_1 \leftrightarrow 2^3P_{0,1,2}$ . Le niveau inférieur de ces trois transitions ( $2^3S_1$ ) est un état métastable dont la durée de vie est beaucoup plus longue que la durée des expériences et qui peut par conséquent être considéré comme un état fondamental.

Enfin, comme le montre la figure IV.1, les écarts entre niveaux excités adjacents sont de 2.3 GHz et 29.9 GHz respectivement, c'est-à-dire beaucoup plus grands que la largeur naturelle de ces trois niveaux qui vaut :

$$\Gamma = 2\pi \times 1.6 \text{ MHz} \simeq 98 \text{ ns}^{-1} \quad (\text{IV.4})$$

Il est donc possible d'exciter sélectivement chacune des trois transitions  $J = 1 \leftrightarrow J = 0, 1, 2$  et d'accéder ainsi à des situations physiques très variées. Le tableau suivant indique l'utilisation que nous faisons de chacune de ces trois transitions :

Transition	Utilisation
$J = 1 \leftrightarrow J = 2$	Ralentissement et compression transverse du jet Refroidissement et piégeage des atomes
$J = 1 \leftrightarrow J = 1$	Effet Hanle mécanique Refroidissement VSCPT à 1D, 2D et 3D
$J = 1 \leftrightarrow J = 0$	Refroidissement VSCPT à 2D et 3D

#### IV.1.1 Le jet d'atomes d'hélium métastable

Comme tous les gaz rares, l'hélium n'est pas refroidi dans son état fondamental mais dans son état métastable. Il est donc nécessaire d'exciter au préalable les atomes dans l'état métastable  $2^3S_1$ . L'énergie d'environ 20 eV que requiert cette excitation peut être fournie de deux manières : par bombardement électronique (ref) ou par décharge (ref). Cette dernière technique présente, par rapport à la première, l'avantage d'être plus simple à mettre en œuvre et de donner un jet plus intense. Par contre la chaleur importante dégagée par la décharge rend beaucoup plus difficile le refroidissement du jet à la température de l'hélium liquide. C'est justement cette possibilité qui constitue l'avantage principal du jet à bombardement électronique et c'est ce type de source que nous utilisons dans le travail présenté ici.

L'ensemble du montage expérimental est schématisé sur la figure IV.2. La partie où est préparé le jet d'hélium métastable est divisée en une enceinte "source" et une enceinte "excitation". Le piégeage des atomes ainsi que les expériences de refroidissement proprement dites ont lieu dans l'enceinte principale (enceinte "manip"). Chacune de ces trois enceintes est pompée par une pompe à diffusion

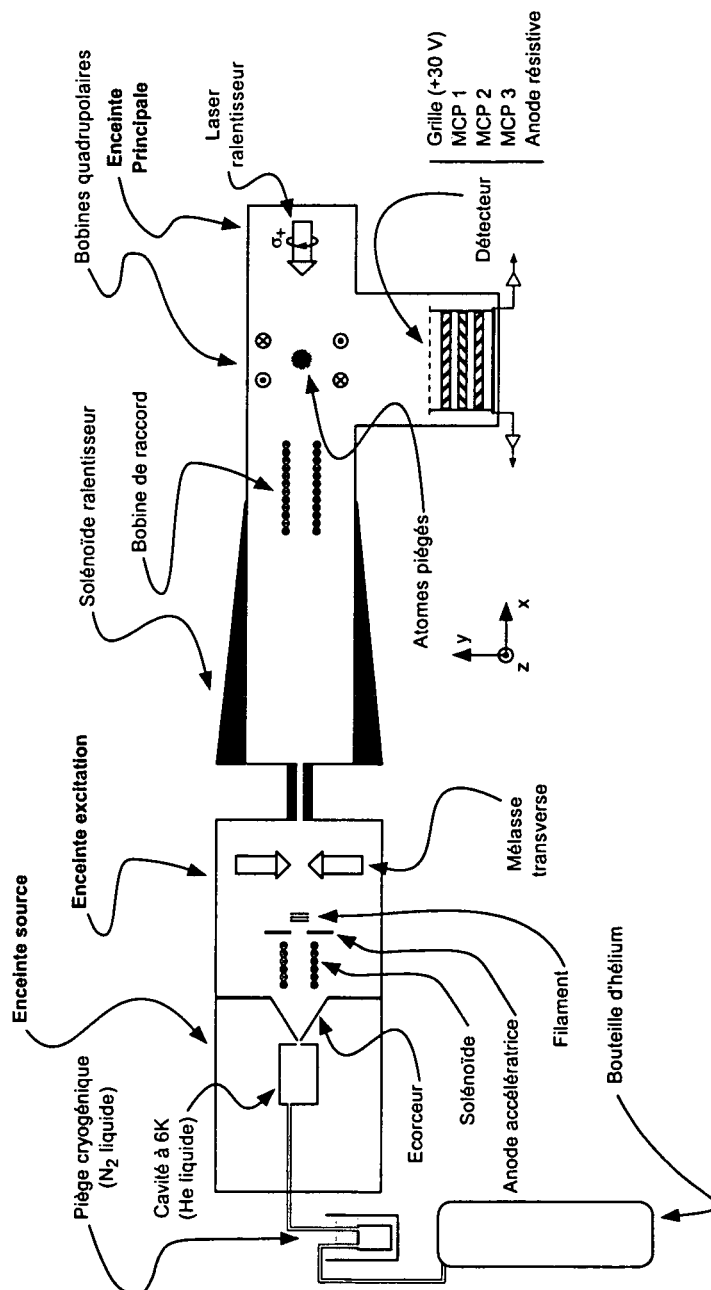


Figure IV.2: Schéma du montage expérimental. L'enceinte à vide est constituée de trois enceintes en série : enceinte source, enceinte excitation et enceinte principale. Le jet est formé par la détente de l'hélium dans l'enceinte source. Les atomes sont ensuite portés dans l'état métastable par bombardement électronique puis le jet est collimaté par une mélasse optique à 2D dans le plan transverse (enceinte excitation). Le jet pénètre alors dans l'enceinte principale où il est décéléré par un ralentisseur Zeeman de manière à charger un piège magnéto-optique. Lorsque le piège est coupé, les atomes tombent en chute libre sur un détecteur situé 6.8 cm plus bas.

d'huile (Alcatel) à laquelle s'ajoute, dans le cas de l'enceinte principale, un cryo-pompage par un écran de cuivre refroidi à la température de l'azote liquide. Les pressions atteintes valent :

$$P_{\text{source}} \simeq 10^{-4} \text{ mbar} \quad (\text{IV.5})$$

$$P_{\text{excitation}} \simeq 5 \cdot 10^{-6} \text{ mbar} \quad (\text{IV.6})$$

$$P_{\text{manip}} \simeq 3 \cdot 10^{-8} \text{ mbar} \quad (\text{IV.7})$$

Une bouteille contenant de l'hélium 4 sous pression est raccordée à une chambre d'environ  $1 \text{ cm}^3$  dans laquelle la pression du gaz vaut 1 bar. Les parois de cette cavité sont en cuivre et sont refroidies par un flux continu d'hélium liquide à une température comprise entre 5 et 6 K. Les atomes d'hélium se thermalisent rapidement sur ces parois, passant de la température ambiante (298 K) à quelques K. Cette cavité est percée d'un trou microscopique de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre<sup>2</sup> par lequel elle communique avec l'intérieur de l'enceinte "source" où règne une pression de l'ordre de  $10^{-4}$  mbar. Le fort gradient de pression qui existe de part et d'autre de ce trou provoque une détente du gaz d'hélium qui sort de la chambre refroidie sous forme d'un jet quasi-supersonique. Par rapport à l'autre grande catégorie de jets atomiques que sont les jets effusifs, les jets supersoniques ont l'avantage de présenter une divergence angulaire plus faible et une meilleure monochromaticité longitudinale. Par ailleurs, l'intérêt de notre jet cryogénique refroidi à l'hélium liquide réside dans sa vitesse longitudinale moyenne, qui est seulement de  $\simeq 400$  m/s, beaucoup plus basse que celle que l'on obtiendrait à température ambiante ( $\simeq 1800$  m/s) ou même avec un refroidissement à l'azote liquide ( $\simeq 900$  m/s). La vitesse longitudinale moyenne est un paramètre important car le chargement du piège nécessite le ralentissement préalable du jet, ce qui est d'autant plus facile à réaliser que cette vitesse est basse.

L'excitation des atomes d'hélium dans l'état métastable est réalisée par bombardement électronique dans l'enceinte "excitation". Celle-ci communique avec l'enceinte "source" par un orifice de  $600 \mu\text{m}$  de diamètre percé à l'extrémité d'une pièce conique appelée écorceur. Celui-ci a un rôle double. D'une part il autorise un pompage différentiel efficace entre les deux enceintes ce qui permet d'abaisser la pression dans l'enceinte excitation jusqu'à  $\sim 5 \cdot 10^{-6}$  mbar. D'autre part sa forme, soigneusement étudiée, fait qu'il sélectionne seulement les atomes dont les vitesses sont très proches de l'axe du jet et collimate donc celui-ci en réduisant la dispersion des vitesses transverses.

<sup>2</sup>Ce trou est facilement bouché si l'hélium contient des impuretés telles que  $\text{H}_2\text{O}$  ou  $\text{N}_2$  qui viennent se condenser à ce niveau. Pour éviter ce problème on utilise d'une part de l'hélium ultra-pur, et d'autre part un piège cryogénique constitué d'un filtre à charbon refroidi à l'azote liquide et à-travers lequel passe l'hélium avant de rentrer dans l'enceinte "source".



Les électrons sont émis par effet thermoélectronique en faisant circuler un courant de 8A dans un filament de Tungstène (voir figure IV.2). Ces électrons sont accélérés à contre-courant du jet atomique grâce à une anode portée à un potentiel d'une centaine de Volts par rapport au filament. Un petit solénoïde, coaxial avec le jet, permet de maintenir les électrons au voisinage de l'axe et d'augmenter ainsi l'efficacité du bombardement des atomes.

Comme nous le verrons ci-dessous, seuls les atomes avec une vitesse transverse très faible (quelques m/s) et une vitesse longitudinale inférieure à 500 m/s à la sortie de l'enceinte excitation pourront être finalement capturés par le piège magnéto-optique. Il importe donc d'avoir le jet le plus collimaté possible et de maximiser la fraction d'atomes dont la vitesse est inférieure à 500 m/s sur l'axe du jet. Pour cela on réduit la dispersion de vitesses transverses grâce à une mélasse optique à deux dimensions formée par deux ondes laser résonnantes sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 2$ . Ces deux faisceaux sont rétro-réfléchis et se croisent perpendiculairement au niveau du jet atomique dans le plan transverse à celui-ci. L'efficacité de ce dispositif dépend de la vitesse longitudinale. Les atomes les plus rapides ont un temps d'interaction avec les lasers beaucoup plus court que les atomes les plus lents et ce sont donc ces derniers qui profitent le plus du refroidissement transverse. On détermine l'effet de cette mélasse en mesurant l'intensité du jet grâce à un multiplicateur d'électrons situé à l'extrémité de l'enceinte principale. On constate ainsi que la mélasse transverse à 2D permet de gagner plus d'un facteur 10 sur l'intensité totale du jet<sup>3</sup>. Des mesures plus précises [78] montrent que ce gain varie d'un facteur 2 pour les atomes dont la vitesse longitudinale vaut 1200 m/s à un facteur 30 pour ceux qui vont seulement à 250 m/s.

### IV.1.2 Ralentissement et piégeage des atomes

Le refroidissement subrecul a été mis en évidence pour la première fois sur le jet refroidi [22]. Il est alors très vite apparu que la principale limitation résidait dans le temps d'interaction des atomes avec les laser VSCPT. Ce temps était limité par la durée de traversée des lasers VSCPT par les atomes qui ne pouvait guère excéder 30  $\mu$ s. Or la description théorique du refroidissement VSCPT prédisait que la température  $T$  des atomes refroidis devait diminuer comme  $1/\theta$  et il était donc très tentant d'augmenter ce temps d'interaction. Ceci fut la motivation pour réaliser un piège magnéto-optique (PMO) où les atomes pourraient être confinés et refroidis pendant un temps beaucoup plus long. Le jet d'hélium

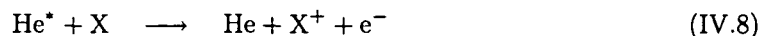
---

<sup>3</sup>Comme nous l'expliquons dans le paragraphe suivant, le jet doit être décéléré pour charger le piège. Les chiffres donnés ici concernent le jet non-ralenti.

métastable, froid et collimaté, est donc utilisé comme une source intense pour alimenter le PMO. Cependant, pour qu'un atome puisse être retenu par ce piège, sa vitesse dans chacune des trois dimensions de l'espace doit être inférieure à une certaine limite, appelée vitesse de capture et qui est inférieure à quelques dizaines de m/s dans notre cas. Il est donc impératif de ralentir le jet atomique dont la vitesse longitudinale moyenne est d'environ 400 m/s. L'ensemble des opérations de ralentissement du jet, de piégeage des atomes dans le PMO ainsi que les expériences ultérieures à-partir du nuage d'atomes froids obtenu sont effectuées dans une troisième enceinte, dite enceinte principale. Celle-ci est séparée de l'enceinte d'excitation par un tube métallique d'environ 30 cm de long et dont le diamètre intérieur vaut 5 mm. Là encore, cette ouverture réduite permet de pomper différentiellement l'enceinte d'excitation ( $P \simeq 5.10^{-6}$  mbar) et l'enceinte principale ( $P \simeq 3.10^{-8}$  mbar). Ceci est particulièrement important car la durée de vie des atomes piégés dépend, en partie du moins, des collisions sur le gaz résiduel<sup>4</sup>. Il convient donc d'obtenir la pression la plus basse possible dans l'enceinte principale.

La manière la plus simple pour ralentir un jet consiste à utiliser la force de pression de radiation en l'éclairant avec un faisceau laser contrapropageant accordé à résonance (la condition de résonance devant tenir compte de la vitesse des atomes). L'atome subit alors de nombreux cycles de fluorescence et son impulsion dans la direction du laser diminue en moyenne de  $\hbar k$ , l'impulsion du photon qu'il absorbe, à chaque cycle. Il est donc ralenti. Cependant, au fur et à mesure que sa vitesse diminue il sort de résonance par effet Doppler. Il cesse donc rapidement d'échanger des photons avec le laser et le processus est finalement très peu efficace. Pour contourner ce problème et maintenir la condition de résonance tout au long du trajet des atomes, on compense, en tout point, le décalage Doppler par un déplacement des niveaux d'énergie de l'atome en utilisant un champ magnétique inhomogène qui décroît progressivement jusqu'au niveau du piège. Le profil spatial de ce champ est calculé de manière à ce que le déplacement Zeeman des niveaux atomiques compense exactement le décalage Doppler. Un solénoïde cône, avec une couche de spires d'épaisseur décroissante, permet de créer un tel profil. Cette technique, connue sous le nom de ralentissement Zeeman[8] est très

<sup>4</sup>Il s'agit de collisions Penning :



où X est, soit un atome ou une molécule du gaz résiduel, soit un autre atome d'hélium métastable piégé. Le taux global d'ionisation Penning provient donc à la fois des collisions sur le gaz résiduel et des collisions entre atomes piégés (ref). La part relative de ces deux processus dépend de la pression résiduelle et de la densité d'atomes dans le piège. A basse pression et/ou densité élevée, les collisions entre atomes piégés deviennent le phénomène prépondérant.

largement utilisée pour charger un piège à-partir d'un jet atomique, en particulier parce qu'elle permet un chargement continu alors que la méthode qui consiste à maintenir la condition de résonance en balayant la fréquence du laser ralentisseur (glissement de fréquence ou "chirping" [10]) ne fonctionne qu'en impulsion.

Nous utilisons deux solénoïdes coaxiaux pour ralentir le jet. Un solénoïde cylindrique produit un champ constant et un solénoïde conique produit le gradient. De plus, pour raccorder "en douceur" le champ de ralentissement au champ quadrupolaire du PMO (cf. ci-dessous), un petit solénoïde coaxial est placé à la sortie du solénoïde de ralentissement. L'ensemble crée un champ magnétique inhomogène qui décroît de 370 G à l'entrée des solénoïdes à 0 G au niveau du piège. Le faisceau ralentisseur, polarisé  $\sigma_+$ , d'une puissance d'environ 2 mW est focalisé sur l'écorceur. Pour qu'un atome soit arrêté au niveau du PMO, c'est-à-dire pour qu'il ait une vitesse à peu près nulle à la sortie du solénoïde, sa vitesse à l'entrée de celui-ci ne doit pas excéder une certaine limite  $v_{max}$ . S'il pénètre dans le solénoïde avec une vitesse supérieure à  $v_{max}$ , sa vitesse résiduelle au niveau du piège sera trop importante et il ne pourra être capturé. Cette vitesse maximale,  $v_{max}$ , à l'entrée du ralentisseur Zeeman est essentiellement limitée par la longueur totale du solénoïde : plus celui-ci est court, plus  $v_{max}$  sera petite. Pour des raisons d'encombrement et de contraintes expérimentales, il est bien sûr avantageux d'utiliser un solénoïde aussi court que possible, d'où l'intérêt de disposer du jet atomique le plus froid possible. Notre jet cryogénique nous permet de limiter la longueur du solénoïde de ralentissement à seulement 75 cm, correspondant à  $v_{max} \sim 500$  m/s. En effet, à une température de 6K, la distribution de vitesse longitudinale des atomes du jet est piquée vers 350 m/s et dispose environ de 90% d'atomes en-dessous de 500 m/s. Les expériences utilisant des jets plus chauds (jets à décharge par exemple) fonctionnent en général avec des ralentisseurs beaucoup plus longs qui peuvent atteindre plus de 2m.

Le piège dans lequel sont chargés les atomes est un piège magnéto-optique. Proposé par Jean Dalibard en 1986 et réalisé expérimentalement pour la première fois aux laboratoires Bell en 1987 [20], il est aujourd'hui devenu un outil indispensable dans le domaine du refroidissement d'atomes [82, 83, 85]. Permettant d'obtenir facilement un échantillon d'atomes froids à quelques dizaines de  $\mu$ K, il représente l'étape préliminaire de l'immense majorité des expériences dans ce domaine. Le développement permanent de nouvelles diodes lasers (monomodes, fibrées, etc...) sur une gamme très large du spectre optique rend de plus la construction d'un PMO de plus en plus aisée et de moins en moins onéreuse.

Le principe du PMO est de combiner astucieusement l'effet d'une force de friction ( $\mathbf{F}_1 \sim -f \cdot \mathbf{v}$ ) qui refroidit les atomes, c'est-à-dire qui réduit leur dispersion de vitesses, avec une force de rappel ( $\mathbf{F}_2 \sim -\kappa \cdot \mathbf{r}$ ) qui les confine dans un volume limité de l'espace. Pour cela on superpose dans une région de l'espace

une mélasse optique à 3D et un gradient linéaire de champ magnétique (champ quadrupolaire) :

- La mélasse optique est formée par trois paires de faisceaux laser alignées selon les trois directions d'un trièdre. Chaque paire comprend deux ondes laser contrapropageantes, polarisées respectivement  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  et désaccordées sur le rouge de la transition ( $\delta < 0$ ). Cette configuration induit une force de friction, caractéristique du refroidissement Doppler, qui amortit le mouvement de l'atome dans toutes les directions.
- Le champ magnétique est créé par deux bobines circulaires, identiques et parallèles, parcourues par des courants en sens opposés. Cette configuration, dite anti-Helmoltz, crée un champ magnétique à symétrie quadrupolaire, c'est-à-dire nul au centre et variant linéairement au voisinage de celui-ci. Comme le déplacement des niveaux atomiques par effet Zeeman est linéaire en B, il s'ensuit une variation linéaire, en fonction de la position, du désaccord entre la fréquence laser et la fréquence effective de la transition atomique. Les forces de pression de radiation qui dépendent du désaccord, varient donc spatialement et on peut choisir le sens du gradient de champ pour que la force totale subie par l'atome soit en permanence dirigée vers le centre. On crée ainsi une force de rappel qui ramène constamment l'atome vers le centre.

<b>Intensité lumineuse par faisceau</b>	0.6 mW/cm <sup>2</sup>
<b>Désaccord laser</b>	-3 $\Gamma$
<b>Diamètre des faisceaux laser</b>	~ 10 mm
<b>Courant dans les bobines</b>	52 A
<b>Diamètre des bobines</b>	8 cm
<b>Nombre de spires par bobine</b>	5
<b>Gradient sur l'axe des bobines</b>	13 G/cm
<b>Gradient dans les directions transverses</b>	6.5 G/cm

Nous piègeons les atomes sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 2$  à partir d'un faisceau laser unique, divisé en trois dans des cubes polariseurs. Chacun des trois faisceaux

est préparé dans le bon état de polarisation ( $\sigma_+$  ou  $\sigma_-$ ) par une lame quart d'onde puis traverse l'enceinte avant d'être rétro-réfléchi sur un miroir situé à l'extérieur de l'enceinte. Pour chaque paire de faisceaux lasers, une deuxième lame quart d'onde, située juste avant le miroir de rétro-réflexion, assure que la polarisation du faisceau retour est bien circulaire et orthogonale à celle du faisceau aller (configuration  $\sigma_+/\sigma_-$ ). Les bobines quadrupolaires sont placées de telle façon que le point où le champ magnétique est nul coïncide avec la zone de recouvrement des 6 faisceaux laser. Elles sont faites de tube de cuivre creux, permettant un refroidissement par eau et sont situées à l'intérieur de l'enceinte à vide. Les paramètres expérimentaux du PMO sont résumés dans le tableau précédent. A la fin du paragraphe IV.1, un tableau donne les performances du piège dans ces conditions.

### IV.1.3 Les sources lasers

Les transitions que nous utilisons pour refroidir l'hélium 4 sont dans le proche infra-rouge aux alentours de  $1.083 \mu\text{m}$ . Jusqu'à récemment aucun laser commercial n'était disponible pour cette longueur d'onde. En particulier il n'existait pas, comme pour la plupart des alcalins par exemple, de diode laser pour l'hélium. Cette situation a changé en 1996 lorsque Spectra Physics a commercialisé les premières diodes lasers à  $1.083 \mu\text{m}$ , répondant ainsi à un besoin important non seulement des laboratoires de recherche fondamentale mais aussi (et, d'un point de vue financier, surtout) de certaines compagnies telles que Texas Instruments dont les magnétomètres à  $^4\text{He}$  constituaient des débouchés très importants. L'hélium est en effet extrêmement étudié, non seulement du point de vue de ses caractéristiques fondamentales en tant que système modèle de la physique atomique, mais également dans la perspective de ses applications. Citons par exemple l'utilisation de jets d'hélium métastable focalisés pour la nano-lithographie ou l'étude des surfaces. Mentionnons également les développements récents et déjà fort prometteurs des techniques d'imagerie médicale utilisant la RMN d'atomes d'hélium polarisés<sup>5</sup>, domaine qui a considérablement bénéficié de ces nouvelles diodes laser. Dans notre équipe, le nouveau montage expérimental actuellement en cours de construction, intègre avec succès ces nouvelles diodes. Néanmoins, toutes les expériences présentées dans ce mémoire ont été réalisées avec les sources laser utilisées depuis une dizaine d'années au laboratoire c'est-à-dire les lasers LNA. Ce sont donc ces lasers que nous décrivons brièvement ici.

---

<sup>5</sup>Dans ce cas il s'agit d'hélium 3 puisque l'hélium 4 ne possède pas de spin nucléaire. Cependant le décalage isotopique des niveaux d'énergie de l'hélium est assez faible pour que les mêmes diodes puissent être utilisées dans les deux cas.

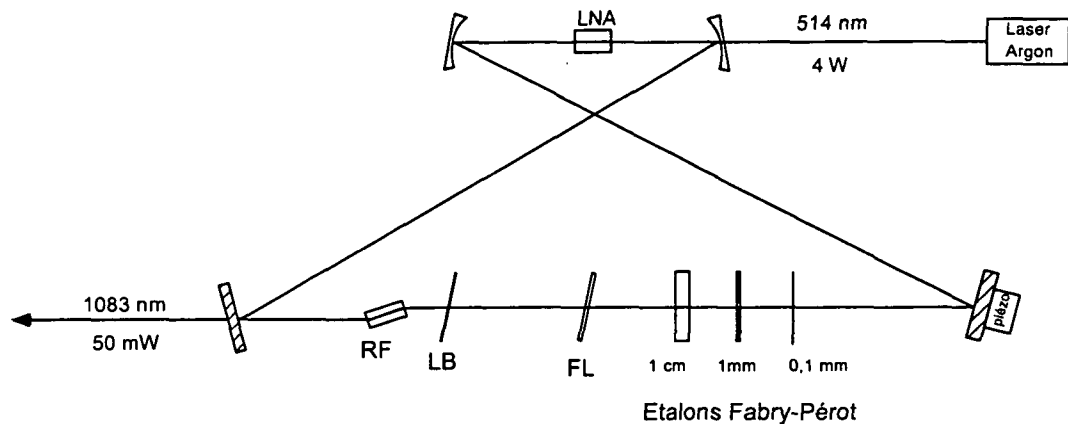


Figure IV.3: Cavité laser LNA. C'est un laser à solide pompé par un laser à Argon ionisé commercial. Le milieu amplificateur est un barreau cylindrique de LNA placé dans une cavité résonnante en X. L'onde laser est rendue unidirectionnelle par l'introduction d'un rotateur de Faraday (RF) et d'une lame à l'incidence de Brewster (LB). Un filtre de Lyot (FL) permet de laser à 1.083  $\mu\text{m}$ . Le fonctionnement monomode du laser est assuré par trois étalons Fabry-Pérot de largeurs respectives 1 cm (FSR=15GHz), 1 mm (FSR=150GHz) et 0.1 mm (FSR=1500GHz). L'intervalle spectral libre de la cavité vaut 250 MHz. Le signal d'erreur de l'asservissement en fréquence est envoyé sur la céramique piézo-électrique montée sur un des miroirs.

Les lasers LNA ( $\text{La}_{1-x}\text{Nd}_x\text{AlMg}_{11}\text{O}_{19}$ ) sont des lasers à solide dont le milieu amplificateur est un petit barreau cristallin dopé avec du Néodyme et du Lanthane. Ils ont été développés pour la première fois par Michèle Leduc [72, 73] sous la forme d'un laser multimode dans lequel un barreau de LNA pompé par lampe est simplement placé dans un résonateur linéaire. Dans son travail de thèse [74], Nathalie Vansteenkiste a ensuite mis au point une version monomode de ce laser, dans laquelle le cristal est placé dans une cavité résonnante en X (figure IV.3) et pompé par la raie verte d'un laser à argon ionisé commercial (Spectra-Physics 2030, 8 W, 514 nm). Pour éviter le "hole-burning" spatial, d  à l'installation d'une onde stationnaire dans la cavité, l'onde laser est rendue progressive et unidirectionnelle par l'introduction d'un rotateur de Faraday qui joue le rôle de diode optique. Par ailleurs la cavité est rendue monomode longitudinale grâce à trois étalons Fabry-Pérot d'intervalles spectraux libres respectifs 1500 GHz, 150 GHz

et 15 GHz, les modes de la cavité étant eux mêmes séparés de 250 MHz. L'étalon le plus épais (FSR=15 GHz) est placé dans un four thermostaté et permet de sélectionner simplement et très précisément le bon mode de cavité en ajustant la température. Enfin, une lame biréfringente placée à l'incidence de Brewster (filtre de Lyot) permet de laser à  $1.083 \mu\text{m}$  au lieu de  $1.050 \mu\text{m}$  qui est le sommet de la courbe de gain du LNA.

L'asservissement de la fréquence du laser est réalisé par une boucle de rétroaction à haute fréquence, décrite en détail dans [74]. Un faisceau de faible intensité, prélevé sur le faisceau principal à la sortie du LNA, traverse d'abord un modulateur électro-optique qui génère des bandes latérales à  $\pm 15$  MHz de la fréquence centrale du laser. Il est ensuite envoyé à travers une cellule d'hélium où les atomes sont portés dans l'état métastable par une excitation radiofréquence continue (5 à 10 MHz). Après rétro réflexion le laser repasse une deuxième fois dans la cellule avant d'être envoyé sur une photodiode rapide (Hamamatsu FND 100 - Bande passante = 125 MHz). On obtient alors un signal d'absorption saturée qui est démodulé sur la première harmonique de la fréquence de référence ("oscillateur local"). En adaptant la phase entre la référence et le signal issu de la photodiode, on obtient un signal soit d'absorption saturée, soit de dispersion saturée. C'est ce dernier qui est utilisé pour l'asservissement car il varie linéairement autour de  $\nu_0$ . Après amplification et intégration, ce signal d'erreur rétroagit sur une cale piézoélectrique montée sur un des miroirs de la cavité.

Finalement nous disposons d'un laser monomode et asservi en fréquence dont les caractéristiques principales sont les suivantes :

<b>Puissance de pompe</b>	4 W
<b>Puissance de sortie</b>	40 à 60 mW
<b>Largeur en fréquence</b>	$\sim 600$ kHz

En réalité, nous utilisons deux cavités LNA accordées en permanence sur les transitions  $J=1 \leftrightarrow J=2$  et  $J=1 \leftrightarrow J=1$  respectivement. Ceci est indispensable puisque les séquences temporelles utilisées dans les expériences font intervenir les deux transitions. Le même laser à argon sert à pomper les deux cavités entre lesquelles on partage la puissance totale de 8W.

#### IV.1.4 Séquence temporelle

La séquence temporelle complète que nous utilisons dépend bien sûr de l'expérience réalisée. Cependant, toutes les expériences se font à-partir d'un échantillon

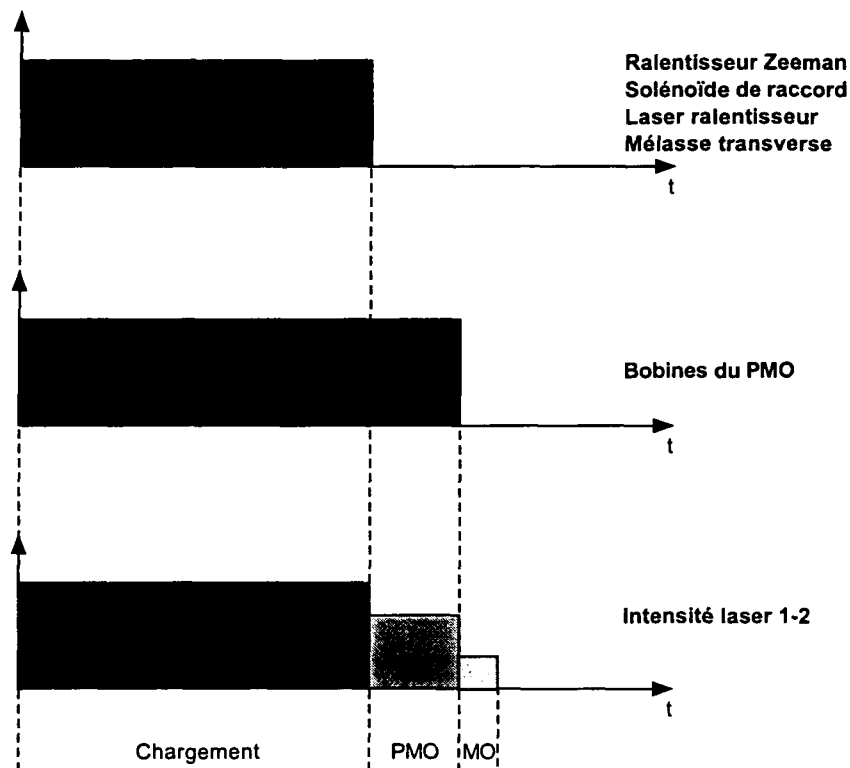


Figure IV.4: Séquence temporelle de préparation d'un nuage d'atomes froids. La séquence comporte trois phases successives : le chargement au cours duquel tous les champs magnétiques et tous les lasers sont allumés, la phase de piégeage où seuls le champ et les lasers du PMO restent allumés et la phase de mélasse optique où ne restent que les lasers de piégeage. Pour chacune des trois phases, l'intensité et le désaccord des lasers ont des valeurs optimales différentes.



---

d'atomes froids et piégés et toutes les séquences comportent donc une partie initiale commune. La figure IV.4 résume les différentes étapes de la préparation du nuage d'atomes froids :

- $t=0$   
Tous les lasers (compression transverse, ralentisseur, lasers du PMO) et tous les champs magnétiques (ralentisseur Zeeman, bobines de raccord, champ quadrupolaire) sont allumés.
- $0 < t < 1500$  ms  
Chargement du PMO par le jet ralenti.
- $t=1500$  ms  
Coupure des champs de ralentissement, du champ de raccord, du laser ralentisseur et des faisceaux de compression transverse du jet.
- $1500 < t < 1750$  ms  
Fonctionnement isolé du PMO pendant 250 ms. Cette phase est uniquement destinée à laisser le temps aux champs Zeeman de décroître. Comme nous l'avons remarqué dans le paragraphe III.2, les expériences de résonances noires ne peuvent être réalisées de manière optimale que si le champ magnétique résiduel dans la zone d'interaction avec les lasers est très faible ( $< 1$  mG). Or les solénoïdes du ralentisseur Zeeman ont des inductances élevées ce qui limite la vitesse de décroissance des champs magnétiques à la coupure. Par ailleurs la zone où sont piégés les atomes est blindée contre les champs magnétiques extérieurs par un double écran en  $\mu$ -métal, qui introduit un retard supplémentaire dans la décroissance des champs. Nous avons inclus les solénoïdes dans des circuits électroniques capacitifs, conçus pour obtenir la décroissance du champ magnétique la plus rapide possible. Ces circuits contiennent également des diodes de puissance afin d'éviter les pics de tension (qui peuvent atteindre plusieurs centaines de Volts) à la coupure des courants. Au total les champs de ralentissement s'amortissent avec une constante de temps de l'ordre de 5 à 10 ms.
- $t=1750$  ms  
Coupure du champ quadrupolaire. Passage des paramètres "piège" aux paramètres "mélasse".
- $1750 < t < 1754$  ms  
Phase de mélasse optique. Cette étape a un double intérêt. Pour les mêmes raisons que ci-dessus, il faut que le champ quadrupolaire ait le temps de décroître suffisamment avant la phase de refroidissement VSCPT. L'inductance des bobines du piège, beaucoup plus faible que celle des bobines

de ralentissement, correspond à une constante de temps de décroissance du champ de l'ordre de  $1 \mu\text{s}$ . Cette valeur serait celle observée pour les bobines isolées mais la viscosité magnétique du  $\mu$ -métal fait que la constante effective, mesurée *in-situ*, est beaucoup plus longue puisqu'elle vaut environ  $730 \mu\text{s}$ . La phase de mélasse a une durée de  $4 \text{ ms}$  ce qui correspond à un facteur d'atténuation du champ magnétique de  $e(-4/0.73) \simeq 240$ . L'autre intérêt de cette phase est le fait que la température d'équilibre dans la mélasse peut être sensiblement plus basse que dans le piège. Cette étape permet donc de partir de l'échantillon atomique le plus froid possible pour les expériences ultérieures de refroidissement VSCPT .

- $t=1754 \text{ ms}$

Fin de la séquence. Coupure des faisceaux du piège. On dispose alors d'un échantillon de quelques  $10^5$  atomes en chute libre, à la température d'environ  $100 \mu\text{K}$ . Après un vol libre dont la durée (de  $30$  à  $160 \text{ ms}$ ) dépend de la composante verticale de leur vitesse initiale, les atomes finissent par heurter le détecteur situé  $68 \text{ mm}$  plus bas.

Cette séquence commune est ensuite complétée en fonction de l'expérience réalisée et nous décrirons donc les séquences utilisées en même temps que les expériences correspondantes.

L'ensemble de la séquence est automatisé. Un programme informatique écrit en C++ et fonctionnant sur un PC commande une carte d'entrées/sorties (Keithley DDA-06), qui comporte 6 sorties analogiques et 18 sorties logiques et offre ainsi de nombreuses possibilités d'utilisation. On génère de cette façon tous les signaux électroniques qui permettent de commander les différents relais. Les paramètres des faisceaux lasers (intensité et désaccord) sont contrôlés, avec une résolution temporelle de l'ordre de  $0.1 \mu\text{s}$ , par des modulateurs acousto-optiques commandés par des électroniques rapides. Les alimentations des bobines de champ magnétique sont commutées ON/OFF par des relais statiques, eux-mêmes commandés par des signaux TTL.

#### IV.1.5 Détection des atomes

La majorité des expériences de refroidissement laser d'atomes neutres concerne des alcalins. Les transitions utilisées sont situées dans le visible ou l'infra-rouge proche (de  $500$  à  $850 \text{ nm}$  environ), c'est-à-dire dans un domaine où les détecteurs photoniques (photodiodes, caméras) sont extrêmement efficaces (très faible bruit et gain très fort). Pour cette raison les méthodes de détection des atomes majoritairement utilisées sont des méthodes optiques qui mesurent la fluorescence émise par les atomes. Ces méthodes deviennent difficiles à mettre en œuvre pour

l'hélium et en général pour les gaz rares. Ceux-ci ont en effet des transitions dans des domaines de longueur d'onde où l'efficacité des détecteurs chute brutalement. Par ailleurs, les échantillons refroidis sont généralement beaucoup moins denses pour les gaz rares que pour les alcalins, ce qui affaiblit encore les signaux de fluorescence.

Les gaz rares ont en revanche un avantage dans leur métastabilité. Par exemple, un atome d'hélium dans son état métastable  $\text{He}^*$  peut être détecté de manière très efficace si l'on sait tirer parti de l'excès d'énergie d'environ 20 eV qu'il possède. Ceci est réalisé grâce à des détecteurs sophistiqués issus de la physique des particules, les galettes de microcanaux. Une galette est un disque de verre de quelques cm de diamètre dans lequel sont inclus  $10^4$  à  $10^7$  canaux régulièrement assemblés. Chaque microcanal est un tube creux d'un diamètre d'environ  $10\ \mu\text{m}$ , analogue à un photomultiplicateur. Lorsqu'un atome  $\text{He}^*$  pénètre dans un canal et frappe sa paroi intérieure, il se désexcite et cède son énergie interne, suffisante pour arracher un électron de la surface. Cet électron, accéléré vers l'intérieur du tube par une tension de l'ordre de 1000 V, frappe à son tour la paroi dont il arrache plusieurs électrons secondaires. Ce processus se répète en cascade et un seul atome incident provoque la formation d'une gerbe de  $10^3$  à  $10^4$  électrons à la sortie du tube. Le processus ne prend que quelques nanosecondes. Généralement deux ou trois galettes sont montées en série pour améliorer l'efficacité de détection. Le détecteur que nous utilisons comporte successivement de haut en bas :

- Une grille portée à un potentiel d'environ +30 V, assurant la répulsion des ions  $\text{He}^+$ . Ceux-ci sont produits en permanence lors des collisions Penning entre atomes piégés ou entre un atome piégé et un atome du gaz résiduel. Comme ces ions sont capables d'arracher un électron à la première galette et de produire ainsi un signal électronique analogue à celui d'un atome, il est très important de les repousser du détecteur.
- Trois galettes de microcanaux montées en série et entre lesquelles existent des différences de potentiel d'environ 1000 V.
- Une anode résistive recueillant les bouffées d'électrons émises par la troisième galette. Cette anode est une simple plaque carrée en céramique recouverte d'un revêtement conducteur. Lorsque la bouffée d'électrons arrive sur l'anode les charges se dirigent vers les quatre électrodes situées aux quatre coins. En mesurant le courant à chaque coin, on peut déduire par un calcul de type barycentrique, la position d'impact du centre de masse de la gerbe d'électrons et donc de l'atome.

Le système de détection comporte, en plus du détecteur proprement dit, une chaîne électronique rapide, une interface digitale/analogique et enfin un ordinateur qui enregistre les données en temps réel.

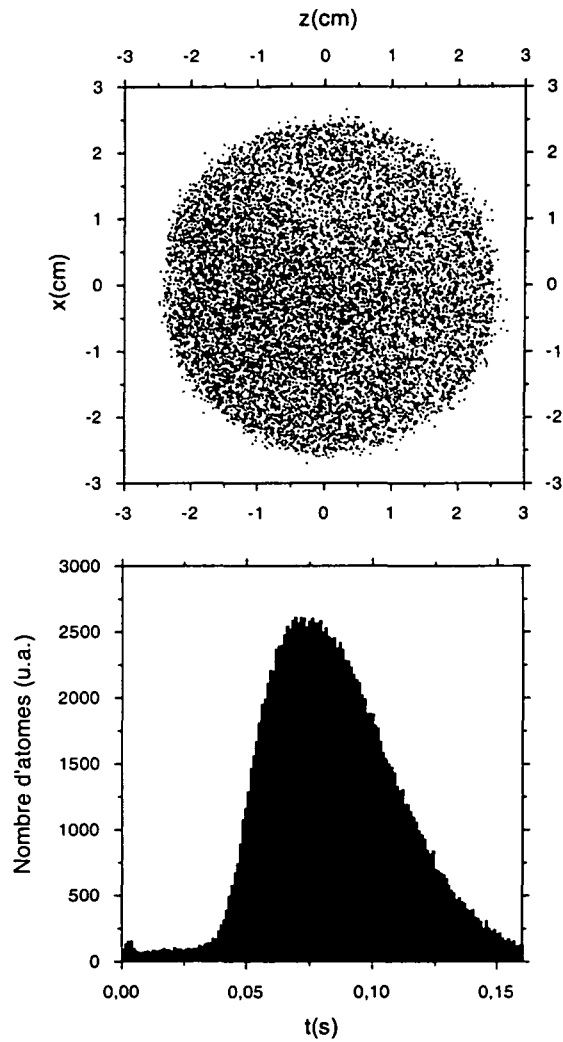


Figure IV.5: Distribution spatiale des impacts sur le détecteur et temps de vol des atomes. Le piège contient initialement environ  $6 \cdot 10^4$  atomes dont seulement 8% sont détectés du fait de la taille finie du détecteur et de l'expansion ballistique du nuage au cours de la chute libre. Les figures ci-dessus représentent la somme de 10 lancers de piège successifs.

La chaîne électronique qui suit a pour but de recueillir et de mettre en forme les 4 signaux issus des coins de l'anode résistive et contenant l'information spatiale ainsi qu'un signal additionnel, issu de la troisième galette, utilisé pour déterminer la date d'arrivée des atomes. Chaque atome qui frappe le détecteur donne ainsi cinq impulsions électroniques à partir desquelles on peut déterminer la position et l'instant de l'impact :

$$\begin{aligned} I_1, I_2, I_3, I_4 &\longrightarrow \{x, z\} \\ I_5 &\longrightarrow t \end{aligned} \quad (\text{IV.9})$$

Comme nous le verrons plus loin, ces trois informations permettent, si l'on connaît par ailleurs précisément la distance entre le piège et le détecteur, de déterminer de manière univoque les trois composantes  $v_x, v_y, v_z$  de la vitesse initiale de l'atome. On peut ainsi reconstituer les distributions de vitesses en trois dimensions du nuage atomique. Cependant, du fait de la taille finie du détecteur (disque de rayon 2 cm), les atomes dont la vitesse transverse est trop grande ( $v_x^2 + v_z^2 \geq R^2/t^2$ ) tombent à côté de la galette. Ceci se traduit par une troncature de la distribution de vitesse mesurée dont il faut éventuellement tenir compte dans l'analyse des données. Néanmoins, on s'intéressera surtout à la dispersion de vitesses dans les directions de refroidissement VSCPT où les températures seront toujours assez basses pour que cette limite n'intervienne pas.

La description détaillée de la chaîne électronique est donnée dans la thèse de Simone Kulin [77]. Chaque signal est traité par une chaîne indépendante<sup>6</sup>. Pour les signaux  $I_1$  à  $I_4$ , cette chaîne comprend un préamplificateur de charge, qui convertit l'impulsion de courant en une impulsion de tension, puis un amplificateur de spectroscopie qui la transforme en une impulsion gaussienne dont la largeur à mi-hauteur vaut 5  $\mu\text{s}$  et dont l'amplitude est comprise entre 0 et 1 V. Pour le signal temporel  $I_5$ , la chaîne de traitement est constituée d'un préamplificateur de charge, d'un amplificateur rapide et d'un discriminateur qui génère des impulsions TTL carrées de durée 5  $\mu\text{s}$ .

Le débit d'informations étant trop élevé pour que celles-ci soient enregistrées en temps réel par l'ordinateur, elles sont d'abord stockées dans une mémoire tampon : le L.D.A.R (Lecteur des Données de l'Anode Résistive). Au début de chaque cycle, la mémoire du L.D.A.R est effacée et les événements, c'est-à-dire les impacts des atomes sur le détecteur, sont stockés au fur et à mesure de leurs arrivées. Chaque impact est enregistré sous forme d'un quintuplet : l'amplitude des 4 signaux spatiaux  $I_1$  à  $I_4$  d'une part, la date d'arrivée donnée par l'horloge

<sup>6</sup>Les quatre voies étant indépendantes, nous en avons calibré soigneusement les différents éléments afin qu'elles aient toutes strictement le même fonction de transfert.

interne du L.D.A.R lorsqu'il reçoit le signal temporel provenant de  $I_5$  d'autre part. Lorsque le cycle est fini, toutes ces données sont transférées vers l'ordinateur où un programme informatique traite toutes les informations et permet en particulier de reconstituer l'image des impacts sur le détecteur et la distribution des temps de vol des atomes (figure IV.5).

Voici quelques caractéristiques importantes de notre système de détection :

<b>Efficacité</b>	$\sim 60\%$
<b>Résolution spatiale</b>	$\sim 120\mu\text{m}$
<b>Résolution temporelle</b>	$5\ \mu\text{s}$
<b>Temps mort d'un canal</b>	$\sim 1\text{ms}$
<b>Flux maximal d'atomes</b>	$\sim 50.000\ \text{at.s}^{-1}.\text{mm}^{-2}$

L'**efficacité** est liée simplement au fait que le pavage de la galette par les microcanaux n'est évidemment pas complet. Les espaces restant entre les canaux occupent environ 40% de la surface totale et le rendement du détecteur et donc de l'ordre de 60%.

La **résolution spatiale** correspond à la distance minimale qui doit séparer les impacts de deux atomes sur la première galette pour qu'ils soient clairement distingués. Elle résulte non seulement de la distance entre deux microcanaux adjacents ( $12\ \mu\text{m}$ ) mais aussi (et surtout) de l'étalement de la douche d'électrons provoquée sur la dernière galette. L'amélioration de la sensibilité de la détection par le montage de trois galettes en série se fait ainsi au détriment de la résolution spatiale puisqu'à chaque étage la gerbe d'électrons s'élargit.

La **résolution temporelle** est le temps minimal qui doit séparer deux impacts pour qu'ils soient distingués. Ce temps est beaucoup plus long que la durée caractéristique des impulsions qui sortent de l'anode résistive ( $\sim 10\ \text{ns}$ ), car il est essentiellement limité par la chaîne électronique chargée d'amplifier et de mettre en forme ces signaux.

Enfin, compte-tenu du **temps mort d'un canal**, c'est-à-dire du temps pendant lequel un canal qui a reçu un atome reste inactif ( $\sim 1\ \text{ms}$ ), et de l'étalement de la gerbe d'électron sur la troisième galette ( $\sim 120\ \mu\text{m}$ ), le flux d'atomes arrivant sur le détecteur présente un seuil au-delà duquel celui-ci sature. Ce **flux maximal** est de l'ordre de  $50.000\ \text{at.s}^{-1}.\text{mm}^{-2}$ . Par comparaison, le flux d'atomes dans une expérience de refroidissement VSCPT à 1D (situation dans laquelle on obtient les flux les plus importants), ne dépasse guère  $1000\ \text{at.s}^{-1}.\text{mm}^{-2}$  et la

saturation du détecteur ne constitue pas une limitation dans nos expériences.

Le détecteur nous permet de mesurer de manière fiable les principales caractéristiques du piège. Celles-ci dépendent sensiblement des conditions expérimentales. En particulier, le choix de l'intensité et du désaccord des lasers permet de faire varier le nombre d'atomes piégés, la température des atomes et la taille du nuage atomique de manière appréciable. Ces trois grandeurs sont importantes pour la suite des expériences. D'une part, pour le refroidissement VSCPT, on a tout intérêt de partir de l'échantillon le plus froid possible. D'autre part, les mesures de température par temps de vol étant d'autant plus précises que la taille initiale du nuage est petite, il faut s'efforcer de réduire celle-ci au maximum. Enfin la statistique des signaux mesurés est évidemment meilleure lorsque le nombre d'atomes piégés est maximal. Malheureusement tous les paramètres du piège ne peuvent pas être optimisés simultanément. Si on maximise le nombre d'atomes, le piège est généralement gros et chaud. Inversement un piège petit et froid ne contiendra que peu d'atomes. Les paramètres mentionnés dans le tableau donné ci-dessus à la fin du paragraphe IV.1.2, réalisent un bon compromis entre ces différentes exigences et sont donc ceux que nous utilisons habituellement. Dans ces conditions les caractéristiques typiques du piège sont les suivantes :

<b>Nombre d'atomes piégés</b>	$\sim 10^5$
<b>Rayon <i>rms</i> du piège (supposé gaussien)</b>	$\sim 1$ mm
<b>Densité moyenne</b>	$\sim 10^8$ at/cm <sup>3</sup>
<b>Vitesse moyenne d'un atome piégé</b>	$\sim 0.5$ m/s
<b>Température</b>	$\sim 100$ $\mu$ K

La vitesse moyenne des atomes dans le piège et la température sont déterminés à-partir du temps de vol<sup>7</sup>. L'instant auquel celui-ci atteint sa valeur maximale dépend en effet directement de la dispersion de vitesse des atomes du piège selon la direction verticale. Supposons que la distribution de vitesse initiale des atomes soit une gaussienne de la forme :

$$\mathcal{P}(v_x, v_y, v_z) = \left( \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right)^3 \exp \left( - \frac{(v_x^2 + v_y^2 + v_z^2)}{2\sigma^2} \right) \quad (\text{IV.10})$$

<sup>7</sup>Du fait de la troncature dans la distribution de vitesse selon  $Ox$  et  $Oz$ , due à la taille finie du détecteur, il n'est pas possible de mesurer la dispersion de vitesses et la température à partir de la distribution spatiale sur le détecteur

Connaissant par ailleurs la hauteur de chute du piège au détecteur ( $D=6.8$  cm) et le rayon de celui-ci ( $R=2$  cm), nous pouvons calculer la distribution des temps d'arrivées des atomes sur le détecteur.

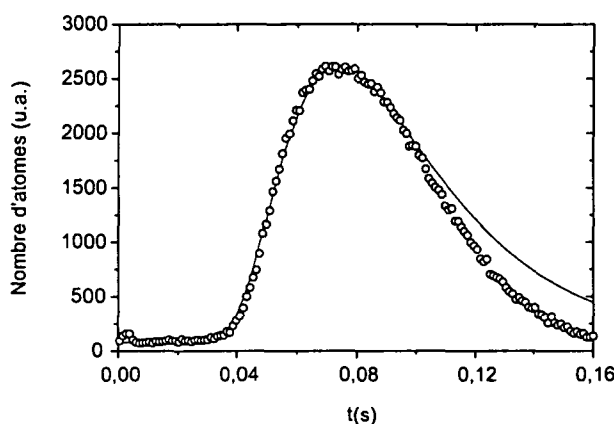


Figure IV.6: Ajustement du signal expérimental du temps de vol pour un nuage d'atomes confinés dans un PMO pendant 250 ms, puis refroidis dans une mélasse optique pendant 4 ms. La courbe en trait plein est le meilleur ajustement par la fonction théorique. On en déduit la dispersion de vitesse initiale des atomes  $\sigma = 0.49$  m/s soit une température  $T \sim 29 T_R \sim 115 \mu\text{K}$ . Seule la partie  $t < 0.1$  s du signal expérimental est utilisée pour l'ajustement.

On trouve :

$$\mathcal{I}(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \left( \frac{D}{t^2} + \frac{g}{2} \right) \exp \left[ -\frac{1}{2\sigma^2} \left( \frac{gt}{2} - \frac{D}{t} \right)^2 \right] \times \left[ 1 - \exp \left( -\frac{R^2}{2\sigma^2 t^2} \right) \right] \quad (\text{IV.11})$$

Cette fonction nous permet d'ajuster le temps de vol expérimental avec trois paramètres : la dispersion  $\sigma$ , l'amplitude du signal et une ligne de base qui, du fait du bruit de fond du détecteur, est décalée au-dessus de 0. La figure IV.6 montre le résultat d'un tel ajustement. Pour une raison que nous n'avons pas élucidée, seule la partie du temps de vol à  $t < 0.1$  s est correctement reproduite. C'est donc



seulement cette partie du signal que nous utilisons pour l'ajustement. On trouve ici  $\sigma = 0.49$  m/s ce qui correspond à une température  $T \sim 29 T_R \sim 115 \mu\text{K}$ .

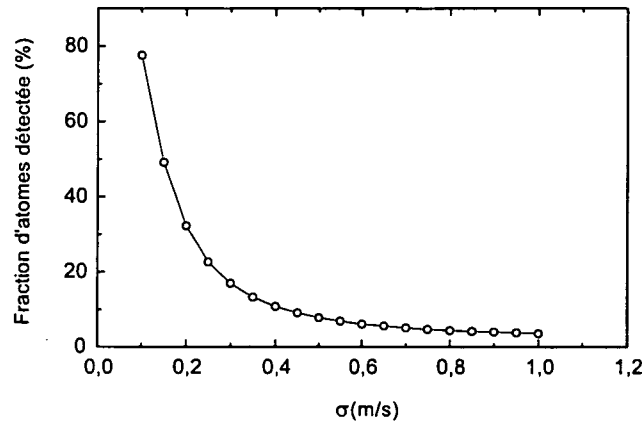


Figure IV.7: Fraction d'atomes recue sur le détecteur (galette circulaire de rayon 2 cm) en fonction de la dispersion initiale de vitesse  $\sigma$  dans le piège. Pour  $\sigma = 0.5$  m/s, seuls 7.8 % des atomes du piège tombent sur la galette. Pour obtenir la fraction détectée, il suffit de multiplier la fraction recue par l'efficacité du détecteur qui est de l'ordre de 60 %.

La taille finie du détecteur est également responsable du fait que le nombre d'atomes piégés n'est pas simplement le nombre d'atomes détectés. En intégrant numériquement la fonction  $\mathcal{I}(t)$  donné ci-dessus entre  $t = 0$  et  $t = \infty$ , on peut déterminer le pourcentage d'atomes détectés en fonction de la dispersion de vitesse initiale. Le résultat de ce calcul est présenté sur la figure IV.7. A partir de la valeur de  $\sigma$  déduite du temps de vol (0.49 m/s), on déduit la fraction d'atomes détectés qui vaut environ 8%. Sachant qu'on détecte en moyenne  $\sim 5000$  atomes après coupure du piège et que le rendement du détecteur est de l'ordre de 60%, le nombre d'atomes piégés est  $\sim 100\,000$  dans les conditions expérimentales habituelles. Connaissant par ailleurs le rayon du piège (déterminé selon la méthode présentée dans le paragraphe IV.4 de ce chapitre), on en déduit immédiatement la densité moyenne.

## IV.2 Compensation du champ magnétique

En l'absence de tout phénomène parasite, la théorie du refroidissement VSCPT prédit que la température finale doit être inversement proportionnelle au temps d'interaction  $\theta$  avec les lasers VSCPT. Contrairement aux autres méthodes de refroidissement laser, il n'y a ici aucune limite inférieure à la température, qui doit tendre vers 0 lorsque  $\theta$  tend vers l'infini. En pratique il existe bien sûr des phénomènes parasites qui introduisent inévitablement des limites dans ce processus. Les champs magnétiques parasites représentent sans doute la perturbation la plus gênante et leur compensation joue un rôle crucial dans nos expériences. Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe 3.2, un champ magnétique transverse introduit des couplages supplémentaires entre états couplés et non-couplés. Ceci se traduit par un taux de perte supplémentaire qui déstabilise les états quasi-noirs  $|\psi_{Nc}(p \simeq 0)\rangle$  et limite le refroidissement.

Les champs magnétiques sont à la fois exogènes (champ terrestre, champs permanents créés dans des laboratoires voisins, champs rayonnés à 50 Hz) et endogènes (champs des bobines du montage, magnétisation éventuelle de certains éléments du montage). Pour s'affranchir des premiers, nous utilisons un blindage en  $\mu$ métal cylindrique, coaxial avec le jet et placé à l'intérieur de l'enceinte. Des fenêtres circulaires aussi petites que possible ont été percées dans cet écran pour les accès optiques. Quant aux champs endogènes, nous éteignons toutes les bobines du montage (solénoïde de ralentissement, bobine raccord et bobines quadrupolaires) suffisamment longtemps à l'avance pour que les champs résiduels au moment de la phase VSCPT soient les plus faibles possibles. Cependant ces précautions ne sont pas suffisantes. La précision avec laquelle nous devons assurer la nullité du champ magnétique est telle qu'il faut avoir recours à une compensation directe des champs résiduels au niveau du piège grâce à trois paires de bobines de Helmholtz, selon les trois directions  $O_x$ ,  $O_y$  et  $O_z$ .

Pour ce qui est du refroidissement lui-même, la précision avec laquelle les champs transverses doivent être compensés dépend de la température que l'on se propose d'atteindre. Nous avons montré dans le paragraphe III.1.2.2 que le champ transverse devait être inférieur à une certaine valeur dépendant des paramètres de refroidissement (équation (III.65)). Dans nos conditions habituelles le champ transverse doit être compensé à mieux que 2 mG.

Au delà du refroidissement proprement dit, les expériences "période noire" qui constituent le sujet du chapitre suivant, sont également très sensibles au champ résiduel. Celui-ci induit des oscillations du signal qui peut être considérablement brouillé. Nous avons montré dans le paragraphe III.2.2.5 qu'en présence d'un

champ longitudinal de 8 mG, le champ transverse devait être inférieur à environ 0.5 mG pour que les oscillations induites soient négligeables.

La précision requise est donc de l'ordre de quelques centaines de  $\mu$ Gauss et implique un certain nombre de contraintes :

- Tout d'abord, la compensation doit être réalisée à l'endroit précis où les atomes interagissent avec les lasers VSCPT. En effet, l'inhomogénéité spatiale du champ magnétique est telle que celui-ci peut facilement varier de quelques centaines de  $\mu$ G à 1 mG sur une distance de l'ordre du mm.
- Ensuite, les champs doivent être compensés au moment précis où les atomes sont soumis à la phase de refroidissement VSCPT. Les champs de ralentissement, de raccord et de piégeage décroissent en effet avec des constantes de temps plus ou moins longues. Bien que les phases de piégeage (250 ms) et de mélasse optique (4 ms) soient justement destinées à laisser à ces champs le temps de s'amortir suffisamment, il est apparu que, pendant la phase de VSCPT, la décroissance est encore perceptible à l'échelle du mG. Il convient donc de compenser le champ moyen que voient les atomes au moment précis de la phase VSCPT. Celle-ci durant typiquement de 0.1 à 3 ms, la méthode de compensation doit donc avoir une résolution temporelle de l'ordre de quelques centaines de  $\mu$ s.
- Enfin, il convient de s'assurer de la stabilité temporelle à long terme de la compensation. Nous entendons par là, non seulement la stabilité d'un jour à l'autre, mais également au cours d'une seule journée, d'un bout à l'autre de l'expérience. Or, à l'échelle du mG, les fluctuations du champ magnétique environnant, dues au rayonnement électromagnétique des appareils électroniques du laboratoire, aux champs issus d'autres équipes travaillant dans le bâtiment ou aux variations du champ terrestre, sont suffisantes pour que la compensation des champs doive être faite chaque jour au début de chaque expérience, et éventuellement vérifiée à la fin.

Nous avons donc besoin d'une méthode de mesure et de compensation des champs magnétiques qui présente à la fois une grande précision ( $< 1$  mG), une très bonne résolution spatiale ( $< 1$  mm) et temporelle ( $< 1$  ms) et une simplicité de mise en œuvre suffisante pour pouvoir être utilisée quotidiennement et en situation d'expérience. Toutes ces conditions sont rédhibitoires pour l'emploi d'une sonde magnétique à effet Hall par exemple, qui ne présente ni la résolution spatio-temporelle, ni les possibilités de détection *in-situ* nécessaires.

Heureusement nous avons à notre disposition une méthode qui allie tous ces avantages. Basée sur l'utilisation de l'effet Hanle mécanique [87], elle a été décrite

en grands détails dans la thèse de doctorat de R. Kaiser [75]. Cette méthode s'est révélée absolument indispensable pour toutes les expériences de refroidissement VSCPT actuelles. Par ailleurs, comme nous le verrons dans le paragraphe IV.3, elle nous a également permis de mesurer directement et précisément la fréquence de Rabi des lasers VSCPT, paramètre expérimental essentiel dans l'analyse quantitative des résultats.

### IV.2.1 L'effet Hanle mécanique

De la même façon que le refroidissement VSCPT utilise des états noirs sélectifs en vitesse, l'effet Hanle utilise des états noirs sélectifs en champ magnétique. Nous considérons de nouveau la transition  $J=1 \leftrightarrow J=1$  éclairée cette fois par un seul faisceau laser résonnant, polarisé circulairement et se propageant dans le sens positif selon la direction  $Oz$  (prise comme axe de quantification).

Comme sur toutes les transitions  $J \leftrightarrow J$  éclairées par une onde laser progressive polarisée circulairement, un des deux sous-niveaux Zeeman extrêmes ( $m = \pm J$ ) de l'état fondamental est un état noir car il n'est couplé à aucun sous-niveau dans l'état excité (figure IV.8). Pour un laser polarisé  $\sigma_+$ , cet état noir est le sous-niveau  $m = +J$ , tandis que pour un laser  $\sigma_-$ , c'est le sous-niveau  $m = -J$ . Lorsqu'un atome dans l'état excité tombe par émission spontanée dans l'état noir, il y reste indéfiniment si bien qu'au bout d'un certain temps tous les atomes s'y accumulent (figure IV.8.b). On atteint donc rapidement (après un régime transitoire de pompage optique dans l'état noir) un état stationnaire dans lequel les atomes n'interagissent plus avec la lumière.

Cette situation est modifiée par la présence d'un champ magnétique transverse (figure IV.8.d). Celui-ci couple en effet les sous-niveaux Zeeman entre eux si bien qu'un atome qui tombe dans l'état non-couplé va retourner vers le sous-niveau adjacent par précession magnétique. Il est alors de nouveau excité par le laser. Il n'existe donc plus d'état piège et il s'établit un régime stationnaire dans lequel les atomes interagissent en permanence avec le laser.

Cet effet du champ magnétique est à la base de l'effet Hanle optique : le taux de fluorescence d'un atome éclairé à résonance sur une transition  $J \leftrightarrow J$  par un laser  $\sigma_{\pm}$  s'annule quand le champ transverse est nul. Ici nous utilisons une autre manifestation de ce phénomène, l'effet Hanle mécanique. L'interaction résonnante avec le laser se traduit par un changement de l'impulsion de l'atome et donc par une force agissant sur celui-ci, la force de pression de radiation. Quand  $B \neq 0$ , il n'y a pas d'état piège, l'atome interagit en permanence avec le laser et subit donc une force continue. Lorsque  $B = 0$  au contraire, les atomes sont rapidement

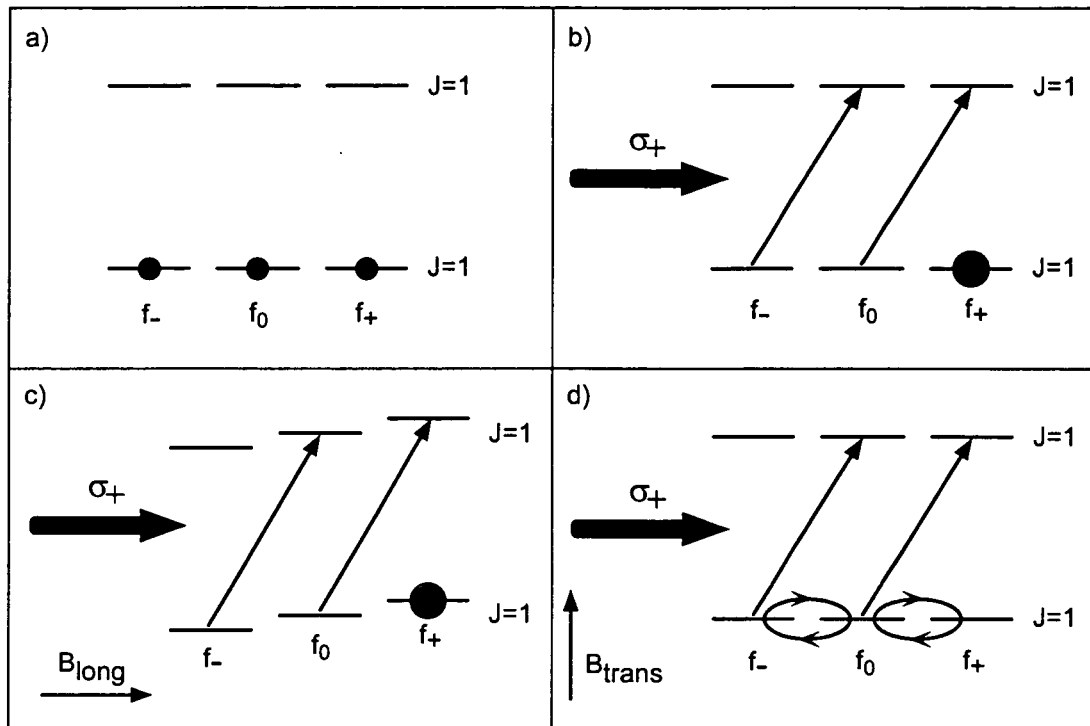


Figure IV.8: Effet Hanle pour une transition  $J=1 \leftrightarrow J=1$  éclairée par une onde laser résonnante  $\sigma_+$ . En l'absence de champ magnétique, les atomes, initialement équirépartis dans les trois sous-niveaux fondamentaux (a), sont tous pompés dans le niveau piège  $|f_+\rangle$  par le laser (b). Un champ magnétique longitudinal (c) déplace les sous-niveaux sans induire de couplages entre eux si bien que le sous-niveau  $|f_+\rangle$  reste un état piège dans lequel les atomes s'accumulent. En présence d'un champ magnétique transverse (d), les couplages magnétiques entre sous-niveaux Zeeman recyclent en permanence les atomes tombés dans  $|f_+\rangle$  vers  $|f_0\rangle$  et  $|f_-\rangle$  et il n'existe donc plus d'état piège.

pompés dans l'état piège où ils cessent d'absorber des photons et ne subissent donc plus de force de la part du laser. C'est la dépendance de cet effet mécanique du laser sur l'atome en fonction du champ magnétique que nous utilisons pour mesurer et compenser celui-ci.

Le calcul exact de la force subie par l'atome a été décrit en détail dans la thèse de R. Kaiser [75]. Le principe est de calculer semi-classiquement, c'est-à-dire en traitant quantiquement les degrés de liberté internes de l'atome mais classiquement ses degrés de liberté externes, la force moyenne agissant sur l'atome dans l'état stationnaire.

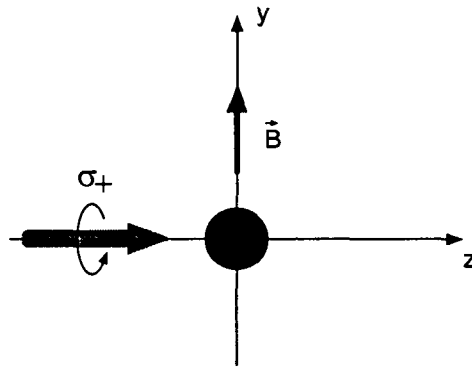


Figure IV.9: Système étudié. L'atome est éclairé à résonance sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$  par une onde laser  $\sigma_+$  alignée selon  $e_z$ , en présence d'un champ magnétique  $B$  aligné selon  $e_y$ .

Le système (figure IV.9) est constitué par l'atome couplé d'une part au laser (supposé polarisé  $\sigma_+$ ), considéré comme un champ extérieur classique :

$$\mathbf{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \boldsymbol{\epsilon}_+ \mathcal{E}_0 e^{i(kz - \omega_L t)} + c.c. \right]. \quad (\text{IV.12})$$

et d'autre part aux modes initialement vides du champ quantique de rayonnement vers lesquels se fait l'émission spontanée. De plus, l'atome est plongé dans un champ magnétique statique aligné sur  $Oy$  :

$$\mathbf{B} = B \mathbf{e}_y \quad (\text{IV.13})$$

On est donc dans le cas de la figure IV.8.d et l'hamiltonien du système s'écrit :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{V}_{AL} + \hat{V}_B \quad (\text{IV.14})$$

Dans cette expression,  $\hat{H}_A$  est l'hamiltonien atomique interne :

$$\hat{H}_A = \hbar\omega_0 \left[ |e_-\rangle\langle e_-| + |e_0\rangle\langle e_0| + |e_+\rangle\langle e_+| \right] \quad (\text{IV.15})$$

Dans l'approximation dipolaire électrique et en ne gardant que les termes résonnants (approximation du champ tournant), le couplage laser est décrit par :

$$\hat{V}_{AL} = -\mathbf{d}\cdot\mathbf{E}(z, t) = -\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hbar\Omega_R}{2} \left[ |e_0\rangle\langle f_-| + |e_+\rangle\langle f_0| \right] e^{i(kz - \omega_L t)} + h.c. \quad (\text{IV.16})$$

où le facteur  $-1/\sqrt{2}$  est le coefficient de Clebsch-Gordan des transitions  $|f_-\rangle \leftrightarrow |e_0\rangle$  et  $|f_0\rangle \leftrightarrow |e_+\rangle$  tandis que la pulsation de Rabi est définie par :

$$\Omega_R = -\frac{\mathcal{D}\mathcal{E}_0}{\hbar} \quad (\text{IV.17})$$

Enfin le terme de couplage magnétique<sup>8</sup> s'écrit (voir paragraphe III.2.2.1) :

$$\hat{V}_B = -\gamma\mathbf{J}\cdot\mathbf{B} = -\frac{i}{\sqrt{2}} \hbar\Omega_B \left[ |f_+\rangle\langle f_0| - |f_-\rangle\langle f_0| \right] + h.c. \quad (\text{IV.18})$$

où la fréquence de Larmor associée au champ  $\mathbf{B}$  s'écrit<sup>9</sup> :

$$\Omega_B = -\gamma B \quad (\text{IV.19})$$

La partie hamiltonienne de l'évolution de la matrice densité décrivant les degrés de liberté internes de l'atome est donnée par :

$$i\hbar \frac{d\hat{\sigma}}{dt} = [\hat{H}, \hat{\sigma}] \quad (\text{IV.20})$$

En ajoutant les termes correspondant à l'émission spontanée, on obtient les équations d'évolution des différents éléments de matrice de  $\hat{\sigma}$  sous forme d'un

<sup>8</sup>Nous négligeons ici les couplages magnétiques dans l'état excité. Cette approximation est légitime tant que la période de précession de Larmor  $\tau_B = 2\pi/\Omega_B$  entre les sous-niveaux est très grande devant la durée de vie radiative de l'état excité  $\Gamma^{-1}$ . Dans ce cas l'atome reste en effet trop peu de temps dans l'état excité pour que les couplages magnétiques puissent se manifester. Pour un champ de 100 mG par exemple, la période de Larmor vaut environ 3.6  $\mu$ s, à comparer avec  $\Gamma^{-1}=0.1 \mu$ s. Les champs rencontrés expérimentalement étant beaucoup plus petits que 100 mG, l'inégalité  $\tau_B \gg \Gamma^{-1}$  sera toujours vérifiée.

<sup>9</sup>Rappelons que, dans l'état  $2^3S_1$ , le facteur gyromagnétique vaut :  $\gamma = -2\pi \times 2.8$  MHz/Gauss.

système d'équations différentielles couplées. Comme on ne s'intéresse ici qu'à l'état stationnaire, les termes en  $d/dt$  s'annulent et le système se réduit à un système linéaire qu'on peut résoudre analytiquement.

La force moyenne à l'état stationnaire est alors obtenue grâce au théorème d'Ehrenfest :

$$\mathbf{f}_{st} = -\langle \nabla \hat{H} \rangle_{st} \quad (\text{IV.21})$$

qu'on peut réécrire sous la forme :

$$\mathbf{f}_{st} = -\text{Tr}\{\hat{\sigma}_{st} \nabla \hat{H}\} \quad (\text{IV.22})$$

Le calcul, présenté en détail dans [75], mène à l'expression suivante :

$$\boxed{\mathbf{f}_{st} = \hbar \mathbf{k} \frac{\Gamma N}{2 D}} \quad (\text{IV.23})$$

avec :

$$N = \frac{1}{2} \tilde{\Omega}_R^4 + \frac{1}{8} \frac{\tilde{\Omega}_R^4}{\tilde{\Omega}_B^2} + \frac{7}{8} \tilde{\Omega}_R^2 + \frac{5}{4} \tilde{\Omega}_R^2 \tilde{\Omega}_B^2 + 10 \tilde{\Omega}_B^2 + \frac{5}{2} \quad (\text{IV.24})$$

et<sup>10</sup> :

$$\begin{aligned} D = & 4 \tilde{\Omega}_B^4 + \frac{11}{4} \tilde{\Omega}_R^2 \tilde{\Omega}_B^2 + \frac{21}{64} \tilde{\Omega}_R^4 + \frac{1}{32} \frac{\tilde{\Omega}_R^6}{\tilde{\Omega}_B^2} + 32 \frac{\tilde{\Omega}_B^4}{\tilde{\Omega}_R^2} + 12 \tilde{\Omega}_B^2 \\ & + \frac{41}{16} \tilde{\Omega}_R^2 + \frac{11}{128} \frac{\tilde{\Omega}_R^4}{\tilde{\Omega}_B^2} + \frac{1}{256} \frac{\tilde{\Omega}_R^6}{\tilde{\Omega}_B^4} + 24 \frac{\tilde{\Omega}_B^2}{\tilde{\Omega}_R^2} + \frac{13}{4} + \frac{5}{16} \frac{\tilde{\Omega}_R^2}{\tilde{\Omega}_B^2} + \frac{4}{\tilde{\Omega}_R^2} \end{aligned} \quad (\text{IV.25})$$

et où nous utilisons les grandeurs réduites :

$$\tilde{\Omega}_R = \frac{\Omega_R}{\Gamma} \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega}_B = \frac{\Omega_B}{\Gamma} \quad (\text{IV.26})$$

La figure IV.10 présente l'allure du module de  $\mathbf{f}_{st}$  en fonction du champ magnétique selon  $Oy$  pour deux valeurs de la pulsation de Rabi ( $\tilde{\Omega}_R = 0.2$  et  $0.5$  respectivement).

On constate que la force présente une résonance très étroite, due à l'existence d'un état noir, autour de  $B = 0$ . La force augmente ensuite en même temps que le champ transverse jusqu'à atteindre sa valeur maximale lorsque le mélange

<sup>10</sup>Signalons au passage qu'une erreur s'est glissée dans la thèse de R. Kaiser[75]. Dans l'expression de la force donnée à la page 166, il faut remplacer  $\Omega_L$  par  $\Omega_L/2$  et  $\Omega_B$  par  $\Omega_B/2$ . Par ailleurs la définition des pulsations de Rabi et de Larmor adoptée ici diffère de celle utilisée dans [75]. On a  $\Omega_R = \sqrt{2} \Omega_L^{RK}$  et  $\Omega_B = \Omega_B^{RK}/\sqrt{2}$ .



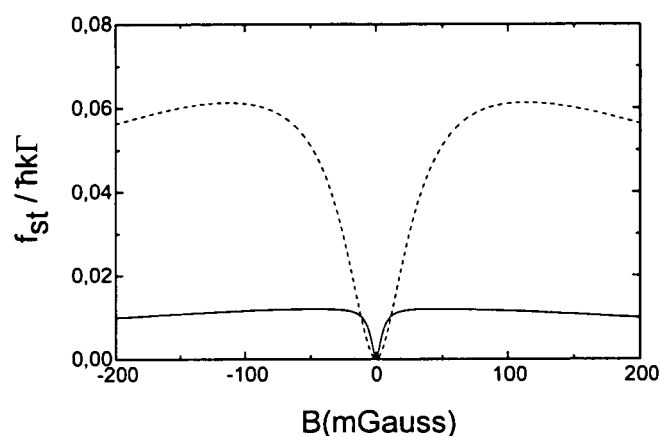


Figure IV.10: Force stationnaire subie par l'atome en fonction du champ magnétique pour deux valeurs de la pulsation de Rabi :  $0.2 \Gamma$  (trait plein) et  $0.5 \Gamma$  (trait pointillé). La force s'annule en  $B=0$  en présentant une résonance étroite. Quand on augmente le champ, la force augmente puis atteint sa valeur maximale avant de décroître lentement du fait de la sortie de résonance due au déplacement des sous-niveaux Zeeman.

entre les sous-niveaux magnétiques est maximal. Si on continue à augmenter le champ magnétique, les sous-niveaux Zeeman sont de plus en plus déplacés et le désaccord entre la transition atomique et le laser est de plus en plus grand. On sort ainsi progressivement de résonance, ce qui se traduit par une diminution lente de la force.

Les deux largeurs, celle de la résonance centrale étroite et celle de la sortie de résonance, dépendent de la pulsation de Rabi. Sans entrer dans le détail, signalons simplement que ces deux largeurs augmentent de manière monotone avec  $\tilde{\Omega}_R$ . L'autre effet de l'intensité du laser est de changer la valeur maximale  $f_{max}$  de la force. Comme on peut s'y attendre, celle-ci est d'autant plus grande que  $\tilde{\Omega}_R$  est grande. La précision de la compensation expérimentale des champs magnétiques dépend alors de deux facteurs : la largeur de la résonance centrale doit être aussi étroite que possible et la valeur maximale de la force, dont dépend le contraste du signal, doit être aussi grande que possible. Le choix de la pulsation

de Rabi, c'est-à-dire de l'intensité du laser, résultera donc d'un compromis entre ces deux exigences.

### IV.2.2 Procédure expérimentale de compensation

La configuration de notre expérience permet de mettre en évidence très facilement l'effet Hanle mécanique. Pour cela nous faisons suivre la séquence temporelle décrite dans le paragraphe précédent (chargement - piège magnéto-optique - mélasse optique) par une impulsion laser très brève (de l'ordre de  $300 \mu\text{s}$ ).

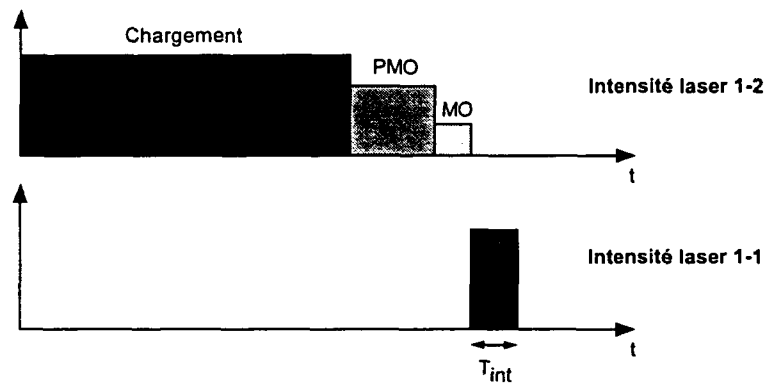


Figure IV.11: Séquence temporelle pour l'expérience d'effet Hanle. Le nuage d'atomes froids est éclairé par une impulsion laser de durée  $T_{int} = 300 \mu\text{s}$  résonnante sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$ .

Cette impulsion lumineuse provient d'une onde laser se propageant horizontalement dans une direction perpendiculaire à celle du jet et accordée sur la transition  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$ . Nous mesurons ensuite le nombre total d'atomes recueillis sur le détecteur situé à l'aplomb du piège 6.8 cm plus bas (figure IV.12). Si le champ magnétique transverse  $B_{\perp}$  est nul, il en est de même de la force stationnaire et les atomes ne subissent aucun effet du laser "pousseur"<sup>11</sup>. Le flux détecté

<sup>11</sup>Ceci n'est pas tout à fait exact. Avant d'atteindre l'état stationnaire où la force est effectivement nulle, les atomes échangent quelques photons correspondant au pompage optique dans

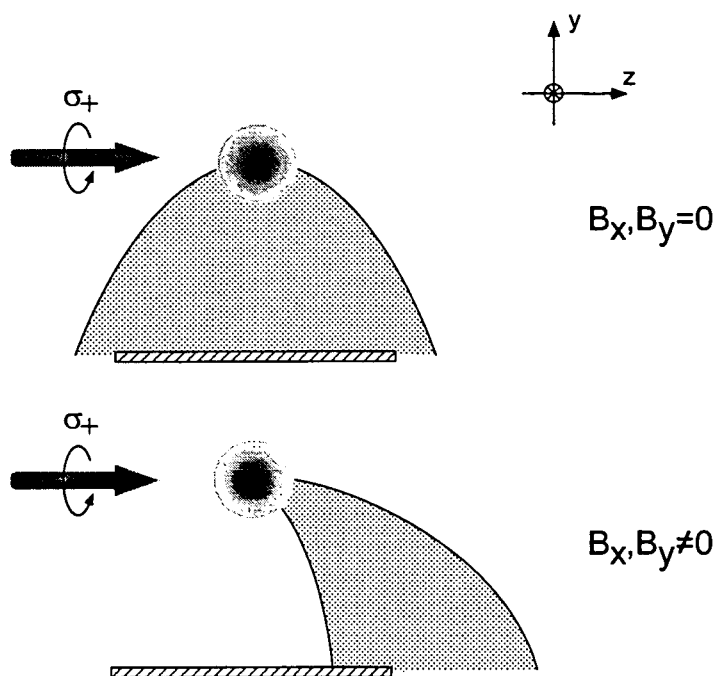


Figure IV.12: Principe de la compensation du champ par effet Hanle. En champ transverse nul (schéma du haut), les atomes sont très rapidement pompés dans l'état piège et la force stationnaire est nulle. La fraction d'atomes détectée est alors maximale. Lorsque le champ transverse est non nul (schéma du bas), il n'y a plus d'état piège et les atomes subissent une force continue qui les poussent hors de l'angle solide du détecteur. Le signal détecté est donc plus faible. Pour compenser le champ magnétique transverse, on applique, avec des bobines de Helmholtz, un champ selon  $O_x$  et  $O_y$  de manière à maximiser le signal atomique détecté.

est alors maximal. Au contraire lorsque  $B_{\perp}$  est non nul, il existe une force stationnaire qui pousse les atomes dans la direction du laser. Ceux-ci tombent alors en-dehors du détecteur et le signal diminue. On utilise donc une paire de bobines en configuration de Helmholtz pour ajuster le champ magnétique de manière à ce que le signal atomique détecté soit maximal.

La figure IV.13 représente une courbe typique obtenue par cette méthode. On ajuste les données expérimentales avec une fonction gaussienne. Celle-ci ne préjuge en aucun cas de la forme attendue pour cette courbe qui résulte non seulement de l'expression (IV.23) de la force mais aussi de la distribution initiale de position et de vitesse dans le nuage atomique, de la distance de chute, de la forme du détecteur...

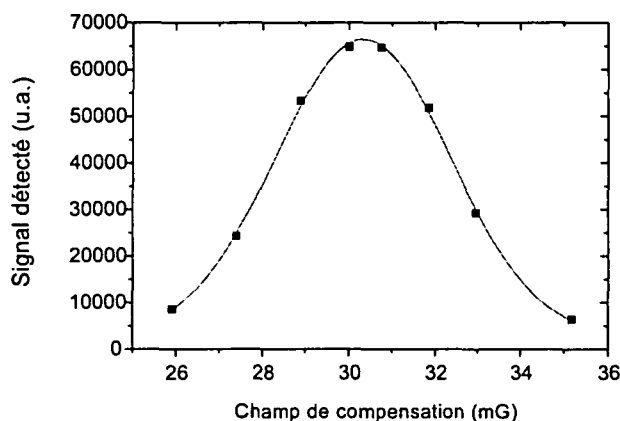


Figure IV.13: Courbe expérimentale typique d'effet Hanle montrant le signal atomique sur le détecteur en fonction du champ de compensation appliqué selon la direction  $Ox$ . Le signal détecté est maximal lorsque le champ transverse au niveau du piège est minimal. La courbe en trait plein est un ajustement gaussien dont le centre vaut  $30.33(3)$  mG.

Néanmoins nous avons constaté que les données expérimentales étaient toujours très bien reproduites par une gaussienne. La précision de cette méthode est très bonne puisqu'elle permet de déterminer le champ de compensation avec une précision meilleure que  $100 \mu\text{G}$ . Dans le cas de la figure IV.13 on trouve par

l'état noir. Ainsi, même en champ nul, les atomes subissent une force transitoire mais pendant un temps tellement court que l'effet sur le signal est très faible.

exemple :

$$B_x^{comp} = 30,33 \pm 0.03 \text{ mG} \quad (\text{IV.27})$$

Sur la figure IV.12, nous avons choisi un laser “pousseur” polarisé  $\sigma_+$  comme dans la paragraphe théorique précédent. L’effet Hanle est alors observé en variant les composantes transverses du champ magnétique, en l’occurrence  $B_x$  (direction du jet) et  $B_y$  (direction verticale). Pour compenser la composante du champ magnétique résiduel selon  $Oz$ , on utilise exactement la même méthode mais avec un laser polarisé linéairement selon  $Ox$  ou  $Oy$ . On excite alors les transitions  $\pi$  ( $\Delta m = 0$ ) du système  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$  à l’exception de  $|f_0\rangle \leftrightarrow |e_0\rangle$  dont le coefficient de Clebsch-Gordan est nul. En champ magnétique nul, le sous-niveau  $|f_0\rangle$  est alors un état piège. Si une composante du champ perpendiculaire à la polarisation du laser (par exemple  $B_z$ ) est non nulle, les couplages avec les sous-niveaux voisins remettent l’atome en interaction avec la lumière et se traduisent par une force de pression de radiation. On retrouve l’effet Hanle mécanique déjà décrit.

Nous pouvons donc, grâce à trois paires de bobines de Helmholtz, compenser précisément les composantes du champ magnétique statique résiduel sur chacune des trois directions  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . Cette méthode est extrêmement performante puisqu’elle permet de réaliser une compensation à l’endroit exact du nuage atomique, au moment précis de la phase de refroidissement VSCPT et avec une précision meilleure que  $100 \mu\text{G}$ . Il convient cependant de noter que la compensation ainsi réalisée ne reste pas forcément valable tout au long de la journée. Nous avons testé ces fluctuations en répétant la procédure de compensation à plusieurs reprises tout au long de la journée. Il apparaît que ces fluctuations n’excèdent pas quelques centaines de  $\mu\text{G}$  si bien qu’on peut majorer la précision de notre compensation des champs magnétiques à environ  $0.5 \text{ mG}$  ce qui est suffisant pour les expériences ultérieures.

### IV.3 Mesure *in situ* de la pulsation de Rabi

Nous avons expliqué dans le paragraphe précédent le principe de l'effet Hanle mécanique et son utilisation pour compenser les champs magnétiques statiques au niveau de la zone d'interaction entre les atomes et les lasers. Nous présentons ici une nouvelle application de cet effet : la mesure *in situ* de la pulsation de Rabi du laser. Cette méthode s'est révélée extrêmement importante dans la perspective d'une analyse quantitative précise des expériences de refroidissement VSCPT, analyse qui nécessite de connaître précisément la valeur de la pulsation de Rabi.

Cette dernière est déduite d'une mesure de l'intensité du laser sur une photodiode dont la surface active est beaucoup plus petite que la section du laser et qui a été préalablement calibrée. Pour étalonner la photodiode, on commence habituellement par préparer un faisceau laser aussi propre que possible, c'est-à-dire bien collimaté et avec un profil transverse d'intensité gaussien (filtrage spatial à travers un trou de quelques dizaines de  $\mu\text{m}$ ). On mesure ensuite le col du faisceau sur une barrette de photodiodes ainsi que sa puissance totale sur un Watt-mètre. On déduit alors de ces deux mesures l'intensité lumineuse sur l'axe du faisceau. On mesure enfin le photocourant  $I_c$  produit par la photodiode placée au centre du faisceau. L'intensité étant proportionnelle au carré de la pulsation de Rabi, on obtient finalement, sur le domaine d'intensité où la réponse de la photodiode est linéaire, une loi de calibration de la forme :

$$\tilde{\Omega}_R \propto \sqrt{I_c} \quad (\text{IV.28})$$

La précision de cette méthode de calibration de la photodiode repose à la fois sur la qualité optique du laser, qui doit être très proche d'un faisceau gaussien, et sur la précision du Watt-mètre.

La méthode que nous présentons ici pour calibrer notre photodiode utilise l'effet Hanle mécanique. Moyennant quelques précautions, cette nouvelle technique est beaucoup plus précise et permet en outre de mesurer la pulsation de Rabi *in situ* grâce à un signal atomique.

#### IV.3.1 Principe et calcul théorique

##### IV.3.1.1 Principe

Lorsque l'atome est éclairé à résonance sur la transition  $J=1 \leftrightarrow J=1$  par une onde laser polarisée  $\sigma_+$ , en présence d'un champ magnétique transverse, il est soumis à une force stationnaire dont l'expression est donnée par les formules (IV.23),

(IV.24) et (IV.25). Cette force dépend explicitement du champ magnétique via la pulsation de Larmor  $\tilde{\Omega}_B$  et de l'intensité du laser via la pulsation de Rabi  $\tilde{\Omega}_R$ .

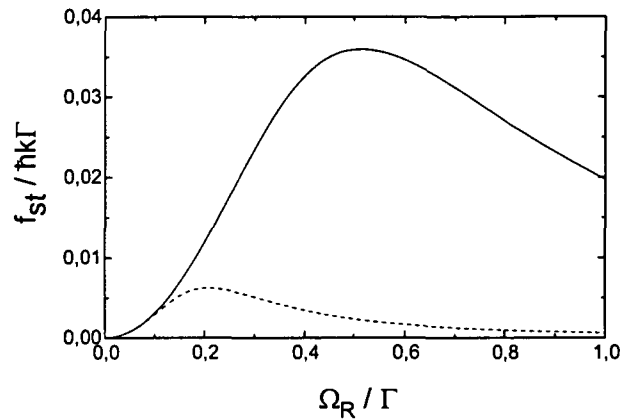


Figure IV.14: Variation de la force stationnaire subie par les atomes en fonction de la pulsation de Rabi du laser pour deux valeurs différentes de la pulsation de Larmor associée au champ magnétique transverse: 5 mG (trait pointillé) et 30 mG (trait plein).

La figure IV.14 représente la force en fonction de  $\tilde{\Omega}_R$ , pour deux valeurs différentes du champ magnétique (5 mG et 30 mG). Lorsque, pour une valeur donnée de  $B$ , on augmente progressivement la pulsation de Rabi, on constate que la force commence par augmenter puis atteint un maximum avant de décroître lentement. La figure IV.15.a montre comment varie la pulsation de Rabi qui donne la force maximale, en fonction du champ magnétique selon  $Oy$ , les autres composantes du champ, selon  $Ox$  et  $Oz$ , étant nulles.

Le principe de la méthode est donc très simple. Nous commençons par compenser les champs magnétiques comme indiqué précédemment puis nous appliquons, grâce aux bobines de compensation, un champ connu selon la direction  $Oy$ . Les atomes sont alors soumis à la même séquence temporelle que

précédemment (figure IV.11). Comme le champ transverse est non nul, l'impulsion lumineuse crée une force qui pousse les atomes. Nous ajustons alors l'intensité du laser pour obtenir l'effet "pousseur" maximal, c'est-à-dire le signal atomique minimal sur le détecteur (voir figure IV.12) et nous mesurons le photocourant  $I_c$  correspondant sur la photodiode. La loi théorique, représentée sur la figure IV.15.a nous donne la valeur de  $\tilde{\Omega}_R$  correspondante. En répétant cette expérience pour différentes valeurs de  $B$ , on obtient finalement une loi de calibration de la forme :

$$\tilde{\Omega}_R = R \cdot \sqrt{I_c} \quad (\text{IV.29})$$

où  $R$  doit être une constante si la réponse de la diode est linéaire.

#### IV.3.1.2 Précautions expérimentales

Certaines précautions doivent être prises pour que la méthode soit valable. En effet l'expression théorique que nous avons obtenue pour la force et que nous utilisons pour calibrer la photodiode suppose, d'une part que le laser est à résonance ( $\delta=0$ ) et d'autre part que le régime stationnaire est atteint. On doit donc vérifier que ces deux conditions sont respectées.

#### Effet du régime transitoire

Jusqu'à présent, nous n'avons étudié l'effet Hanle que dans l'état stationnaire. Or celui-ci ne s'établit qu'après un régime transitoire de pompage optique de durée  $\tau_{tr}$  et on ne peut donc utiliser valablement l'expression stationnaire de la force que si le temps d'interaction est très long devant la durée de ce transitoire :

$$T_{int} \gg \tau_{tr} \quad (\text{IV.30})$$

On peut estimer  $\tau_{tr}$  dans le cas perturbatif où :

$$\Omega_B \ll \Omega_R \ll \Gamma \quad (\text{IV.31})$$

On peut alors négliger les couplages magnétiques entre sous-niveaux excités d'une part (car  $\Omega_B \ll \Gamma$ ) et entre  $|f_- \rangle$  et  $|f_0 \rangle$  d'autre part (car  $\Omega_B \ll \Omega_R$ ). Le système complet de 6 sous-niveaux représentés sur la figure IV.8.a se restreint alors au système à trois niveaux  $\{|f_0 \rangle, |e_+ \rangle, |f_+ \rangle\}$ . Par le biais du couplage laser, une partie de l'instabilité radiative du niveau  $|e_+ \rangle$  est transférée au niveau  $|f_0 \rangle$  qui acquiert ainsi une largeur (à désaccord nul) :

$$\Gamma' = \frac{(\Omega_R/2\sqrt{2})^2}{\Gamma} \quad (\text{IV.32})$$



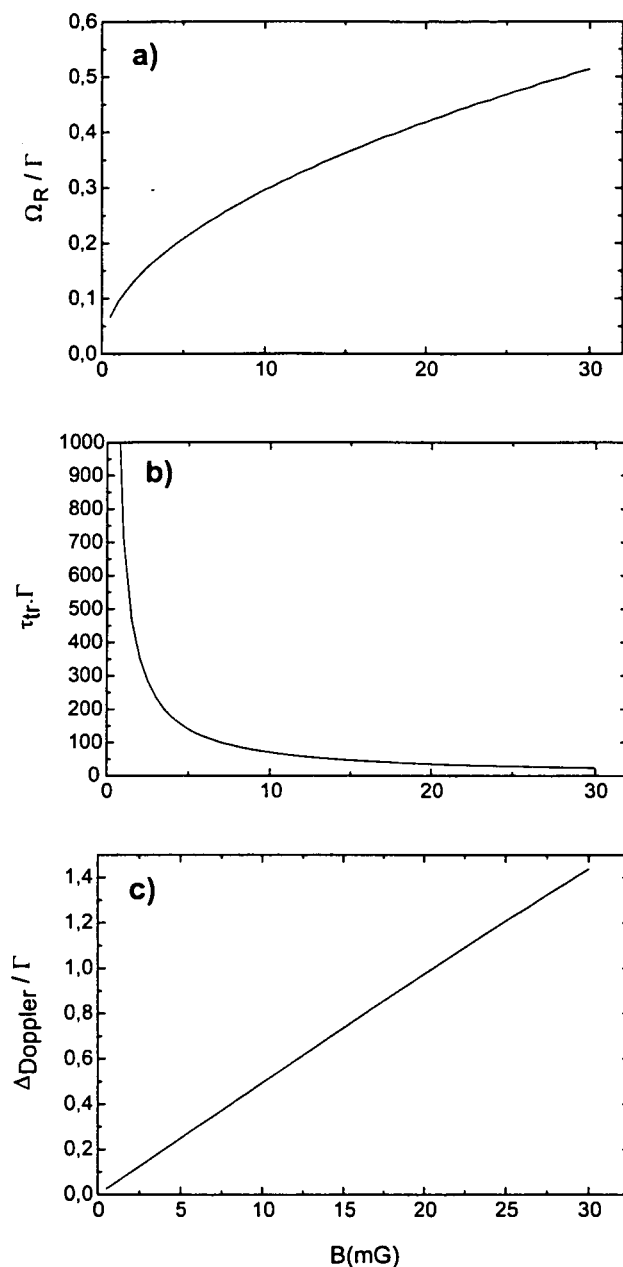


Figure IV.15: Effet Hanle. Sur la figure (a) on a représenté comment varie la pulsation de Rabi qui donne la force maximale en fonction du champ magnétique transverse. Les figures (b) et (c) montrent respectivement comment décroît la durée du régime stationnaire et comment augmente le désaccord dû à la sortie de résonance par effet Doppler en fonction du champ magnétique lorsque la pulsation de Rabi est celle qui donne la force maximale. Dans ces deux dernières courbes, la pulsation de Rabi n'est donc pas constante: pour chaque valeur de  $B$ , elle est donnée par la courbe de la figure (a).

La couplage magnétique transfère alors cette instabilité au niveau  $|f_+\rangle$  dont la largeur s'écrit :

$$\Gamma'' = \frac{(\Omega_B/\sqrt{2})^2}{\Gamma'} \quad (\text{IV.33})$$

$$= 4 \frac{\Omega_B^2}{\Omega_R^2} \Gamma \quad (\text{IV.34})$$

Les largeurs  $\Gamma$ ,  $\Gamma'$  et  $\Gamma''$  correspondent à trois constantes de temps dont la plus longue,  $\Gamma''^{-1}$ , donne la durée caractéristique du régime transitoire :

$$\tau_{tr} = \frac{1}{4} \left( \frac{\tilde{\Omega}_R}{\tilde{\Omega}_B} \right)^2 \Gamma^{-1} \quad (\text{IV.35})$$

La figure IV.15.b représente  $\tau_{tr}$  en fonction du champ magnétique dans les conditions expérimentales (pour chaque valeur du champ,  $\tilde{\Omega}_R$  est ajustée de manière à ce que la force soit maximale).

Toutes les expériences ci-dessous seront faites avec une durée d'interaction de  $75 \mu\text{s}$  soit :

$$T_{int} = 750\Gamma^{-1} \quad (\text{IV.36})$$

et avec un champ transverse compris entre 5 et 20 mG. La figure IV.15.b montre que la condition (IV.30) sera ainsi toujours très bien vérifiée.

### Effet de la sortie de résonance

Au cours de l'interaction avec le laser, les atomes voient leur vitesse changer du fait de la force de pression de radiation qu'ils subissent. Comme ils sont poussés dans le sens du laser, le désaccord qui était nul à l'origine (on a supposé que les atomes étaient initialement au repos) se décale progressivement vers le rouge. Cette sortie de résonance se traduit par une diminution de la force au cours du temps dont on ne tient pas compte dans le calcul semi-classique où l'on suppose  $\delta = 0$  en permanence. Cette hypothèse reste valable tant que le décalage Doppler reste petit devant la largeur naturelle de l'état excité :

$$\frac{\Delta_{Doppler}}{\Gamma} \ll 1 \quad (\text{IV.37})$$

La détermination de la valeur exacte du décalage Doppler pour des valeurs données de  $\tilde{\Omega}_R$ ,  $\tilde{\Omega}_B$  et  $T_{int}$  nécessite de mener un calcul entièrement quantique, c'est-à-dire de résoudre les équations de Bloch généralisées décrivant l'évolution des degrés de libertés internes *et* externes de l'atome. Ce calcul qui est fait en détail dans [75] permet de retrouver la diminution de la force au cours du temps. Nous nous

contentons ici d'évaluer  $\Delta_{Doppler}$  en supposant le régime stationnaire atteint et la force constante et égale à  $f_{st}$ . En faisant ceci, nous négligeons la décroissance de la force et donc surestimons le décalage Doppler qu'elle induit. On a donc simplement :

$$\frac{\Delta_{Doppler}}{\Gamma} = \frac{1}{\Gamma} k \Delta v = \frac{1}{\Gamma} k \frac{f_{st}}{M} T_{int} \quad (IV.38)$$

En passant aux unités réduites :

$$\tilde{f}_{st} = \frac{f_{st}}{\hbar k \Gamma} \quad \text{et} \quad \tilde{T}_{int} = \frac{T_{int}}{\Gamma^{-1}} \quad (IV.39)$$

on peut écrire :

$$\frac{\Delta_{Doppler}}{\Gamma} = 2 \frac{E_R}{\hbar \Gamma} \tilde{f}_{st} \tilde{T}_{int} \quad (IV.40)$$

La figure IV.15.c représente la dépendance du décalage Doppler en fonction du champ magnétique toujours dans les conditions où, pour chaque valeur de  $B$ , la pulsation de Rabi est ajustée pour donner la force maximale. Le temps d'interaction est celui utilisé dans les expériences soit  $T_{int}=75 \mu s$ . Cette figure montre que dans nos conditions expérimentales ( $B \leq 20 \text{ mG}$ ), la condition (IV.37) sera assez bien vérifiée et ce d'autant plus que la valeur que nous calculons ici pour  $\Delta_{Doppler}/\Gamma$  est surestimée.

### IV.3.2 Mise en œuvre expérimentale

La réalisation expérimentale de cette méthode est fort simple. Nous utilisons la même séquence temporelle que pour la compensation des champs magnétiques (figure IV.11). Après avoir soigneusement compensé le champ magnétique selon les trois directions, nous appliquons un champ  $B$  selon  $Oy$ . Nous mesurons alors le nombre total d'atomes détectés en fonction de l'intensité laser, mesurée par le photocourant  $I_c$  produit sur la photodiode et converti en tension  $V_c$  par un petit montage amplificateur. Le temps d'interaction vaut :

$$T_{int} = 75 \mu s \quad (IV.41)$$

La figure IV.16.a montre les résultats obtenus pour quatre valeurs différentes du champ transverse. Pour chaque valeur du champ, on détermine alors la valeur de  $\sqrt{V_c}$  pour laquelle le signal est minimum (maximum de la force). Le tableau suivant résume ces résultats et donne également la valeur théorique de la pulsation de Rabi qui donne la force maximale.

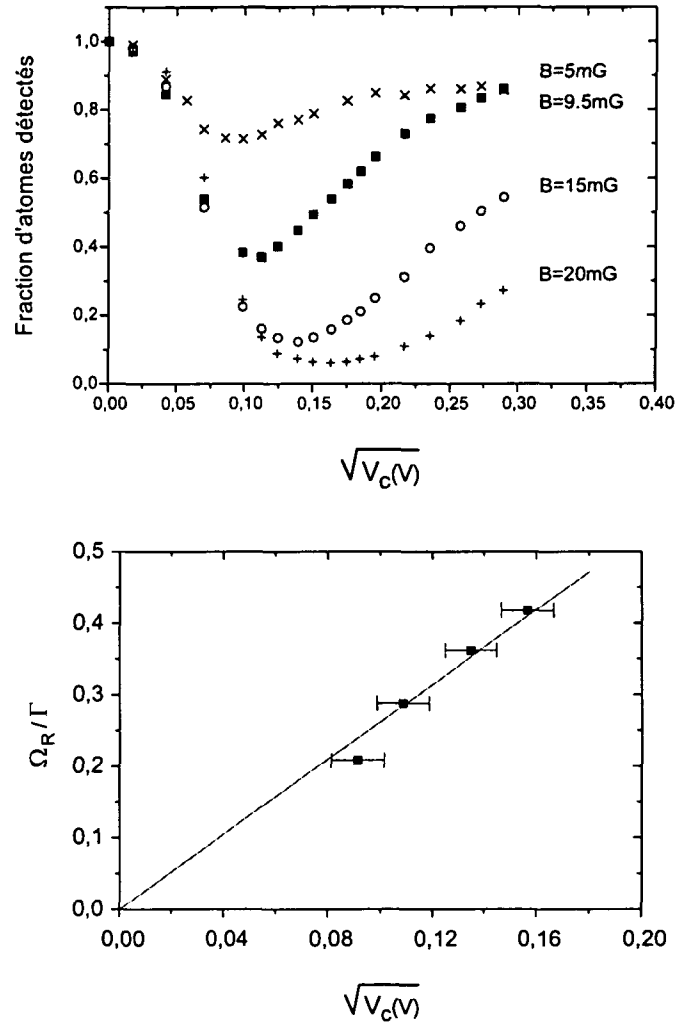


Figure IV.16: Calibration de la photodiode. On applique un champ transverse donné  $B_{\perp}$  puis on mesure comment varie la fraction d'atomes détectée lorsqu'on augmente l'intensité laser, proportionnelle à la tension  $V_c$  (V) mesurée sur la photodiode. On détermine alors à partir des courbes obtenues (figure a) la valeur de  $V_c^{1/2}$  qui donne le signal minimal, c'est-à-dire la force maximale. Pour chaque valeur de  $B_{\perp}$ , on calcule la valeur théorique de  $\Omega_R/\Gamma$  qui donne la force maximale puis on trace  $\Omega_R/\Gamma$  en fonction de  $V_c^{1/2}$  pour obtenir la loi de calibration de la photodiode (figure b). La droite est un ajustement linéaire qui donne une pente de 2.62(8).

<b>B(mG)</b>	$\sqrt{V_c(V)}$ (mesuré)	$\tilde{\Omega}_R$ (théorique)
5	0.09(1)	0.176
9.5	0.11(1)	0.242
15	0.13(1)	0.304
20	0.16(1)	0.352

La figure IV.16.b montre alors la loi de calibration de la photodiode. La courbe en trait plein est un ajustement linéaire des résultats ci-dessus qui donne :

$$\tilde{\Omega}_R = 2.62(8) \times \sqrt{V_c(V)} \quad (\text{IV.42})$$

Notons qu'il existe un accord raisonnable avec la calibration de la même photodiode par la méthode classique utilisant un faisceau laser gaussien dont on a mesuré préalablement le col et la puissance totale. Par cette technique on trouve en effet  $\tilde{\Omega}_R = 3.2(1) \times \sqrt{V_c(V)}$  soit une différence de l'ordre de 18% entre les deux résultats. Ceci n'est pas surprenant puisque la calibration directe suppose d'avoir déterminé le profil d'intensité du faisceau et sa puissance totale, deux paramètres dont la mesure est facilement entachée d'erreurs. Au contraire, la procédure de calibration que nous avons mise au point est basée sur un signal atomique directement enregistré *in situ* et c'est donc la calibration (IV.42) ci-dessus que nous utilisons dans cette thèse. Ainsi, à chaque fois que nous mentionnons une valeur expérimentale de  $\tilde{\Omega}_R$  dans ce rapport, elle est déterminée en mesurant la tension  $V_c$  sur la photodiode calibrée placée au centre du faisceau laser puis en utilisant la loi (IV.42). Notons enfin que la mesure est toujours effectuée à l'endroit où la photodiode a été calibrée (juste avant l'entrée du faisceau dans l'enceinte) et que nous pouvons, grâce à une petite "cible" en carton, pointer précisément le centre du faisceau de manière reproductible (la dispersion de la même mesure répétée plusieurs fois en enlevant puis en remettant la diode dans le faisceau ne dépasse pas 1%).

## IV.4 Mesure de la taille du piège

Comme nous l'expliquons dans le chapitre suivant, la méthode habituelle de mesure de la température par une technique de temps de vol devient impossible à mettre en œuvre lorsque la température des atomes est très basse. Dans ce cas en effet, la contribution de la taille initiale du nuage à la largeur du profil de positions détecté devient beaucoup plus grande que la contribution cinétique due à la dispersion initiale des vitesses atomiques. La mesure de celle-ci est alors extrêmement imprécise. La nouvelle méthode que nous avons mise au point et qui est décrite dans les chapitres III et V prend alors tout son intérêt puisqu'elle est insensible à cet effet de la taille du nuage atomique. La température en-dessous de laquelle la méthode de temps de vol devient inutilisable dépend directement de la taille du piège (ainsi que de la durée du vol libre entre le piège et le détecteur) qu'il est donc important de pouvoir mesurer.

### IV.4.1 Principe et calcul

Le principe de la méthode que nous utilisons est schématisé sur la figure IV.18. Le faisceau laser, aligné sur  $Oz$ , est partiellement coupé par une lame de rasoir perpendiculaire à la direction du laser et que l'on peut déplacer selon  $Ox$  grâce à une translation micrométrique.

Les atomes du nuage qui sont éclairés par le laser sont soumis à une force de pression de radiation, tandis que ceux qui sont dans l'ombre de la lame ne subissent aucun effet. L'intensité et la durée de l'impulsion laser sont choisies de telle manière que les atomes éclairés soient poussés hors de l'angle solide du détecteur. Celui-ci ne reçoit ainsi que les atomes situés dans l'ombre de la lame. Pratiquement la lame de rasoir est à une distance d'environ 10 cm du nuage atomique et nous avons vérifié que la diffraction du faisceau à ce niveau est négligeable.

Notons  $\mathcal{P}(x, y, z)$ , la distribution normalisée des positions des atomes dans le piège. Nous supposons que le piège est gaussien dans les trois directions :

$$\mathcal{P}(x, y, z) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \frac{1}{\sigma_x \sigma_y \sigma_z} \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} - \frac{y^2}{2\sigma_y^2} - \frac{z^2}{2\sigma_z^2} \right] \quad (\text{IV.43})$$

Dans cette expression  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  et  $\sigma_z$  sont les rayons *rms* du piège respectivement selon  $Ox$ ,  $Oy$  et  $Oz$ . La fraction d'atomes situés dans l'ombre de la lame lorsque le bord de celle-ci est à la position  $x_0$  (voir figure IV.18) est simplement donnée par :

$$S(x_0) = \int_{-\infty}^{x_0} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} dx dy dz \mathcal{P}(x, y, z)$$

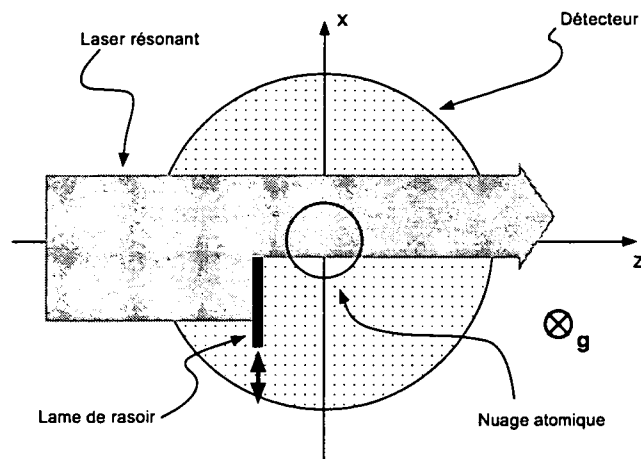


Figure IV.17: Principe de la mesure de la taille du piège. Un faisceau laser dirigé selon Oz est partiellement masqué par une lame de rasoir perpendiculaire se déplaçant selon Ox. La partie des atomes éclairée par le laser est poussée hors de l'angle solide du détecteur et seuls les atomes situés dans l'ombre de la lame sont donc détectés.

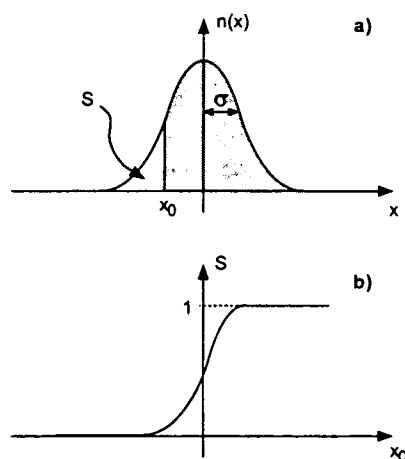


Figure IV.18: Le profil spatial du nuage atomique selon Ox est une gaussienne. Les atomes correspondant à la partie en grisé sont poussés par le laser et le signal détecté est donc proportionnel à l'aire  $S$  représentée sur la figure (a). En enregistrant le nombre d'atomes détectés en fonction de la position  $x_0$  de la lame de rasoir, on doit obtenir un signal proportionnel à la fonction représentée sur la figure (b).

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x_0} dx \exp \left[ -\frac{x^2}{2\sigma_x^2} \right] \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{x_0}{\sigma_x \sqrt{2}} \right)
\end{aligned} \tag{IV.44}$$

où la fonction erreur est définie classiquement par :

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \tag{IV.45}$$

En mesurant la fraction d'atomes détectée en fonction de la position de la lame puis en ajustant le signal expérimental avec la fonction ci-dessus on peut donc déduire  $\sigma_x$ .

Le champ quadrupolaire créé par les bobines anti-Helmholtz du PMO satisfait bien sûr à :

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \tag{IV.46}$$

Du fait de la symétrie de révolution autour de l'axe  $Ox$ , on en déduit :

$$\frac{\partial B_y}{\partial y} = \frac{\partial B_z}{\partial z} = -\frac{1}{2} \frac{\partial B_x}{\partial x} \tag{IV.47}$$

Le rayon *rms* du piège dans chaque direction étant inversement proportionnel à la racine carrée du module du gradient de champ magnétique selon cette direction on a finalement :

$$\sigma_y = \sigma_z = \sqrt{2} \sigma_x \tag{IV.48}$$

De la mesure de  $\sigma_x$ , on peut donc déduire le rayon dans les deux autres directions et en particulier  $\sigma_z$ , la largeur dans la direction de refroidissement VSCPT.

#### IV.4.2 Réalisation expérimentale

Nous utilisons de nouveau la même séquence que pour l'effet Hanle (figure IV.11). Le faisceau laser  $J = 1 \leftrightarrow J = 1$  est polarisé  $\sigma_+$  et nous décompensons un des champs transverses ( $B_y$  par exemple) suffisamment pour que la force subie par les atomes poussent ceux-ci hors de l'angle solide du détecteur. Le temps d'interaction vaut ici :

$$T_{int} = 500 \mu s \tag{IV.49}$$

La figure IV.19 présente le résultat de cette mesure ainsi qu'un ajustement du signal expérimental par la fonction théorique. La taille du piège dépend évidemment fortement de la valeur des paramètres de refroidissement. Les données de la figure IV.19 ont été enregistrées dans les conditions résumées dans le tableau du paragraphe IV.1.2. L'ajustement donne :

$$\sigma_x = 1.03(4) \text{mm} \tag{IV.50}$$



---

Notons que la précision du résultat ci-dessus ne reflète pas tout-à-fait la précision

---

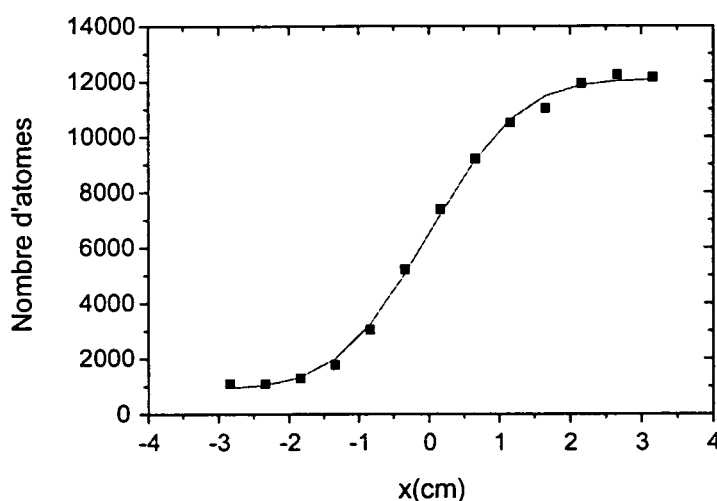


Figure IV.19: Mesure directe de la taille du piège dans les conditions expérimentales habituelles. La courbe en trait plein est un ajustement par la fonction donnée dans le texte. On trouve  $\sigma_x = 1.03(4)$  mm.

---

réelle de la mesure car les fluctuations des paramètres lasers (en particulier le désaccord) se traduisent par des variations de la taille du piège. On peut alors estimer à 0.1 mm la précision sur la mesure du rayon du piège.

Avec la compensation du champ magnétique à 300  $\mu$ G près, la mesure *in situ* de

la pulsation de Rabi avec une précision de  $\Gamma/10$  et la détermination de la taille du nuage atomique au dixième de mm près, nous disposons donc d'outils de caractérisation très puissants. Ceux-ci se révéleront indispensables dans l'analyse des données que nous présentons dans le chapitre suivant.



# Chapitre V

## Nouvelle mesure de la température

La mesure de la température dans le domaine du refroidissement laser est bien sur un point crucial. Bien que la définition rigoureuse de la température d'un système suppose celui-ci à l'équilibre thermodynamique, ce qui n'est jamais le cas en refroidissement laser, il est d'usage d'introduire une température cinétique à-partir de la distribution de vitesses ou d'impulsions des atomes. Nous utilisons dans l'ensemble du travail présenté ici la définition habituelle :

$$\frac{1}{2}k_B T = \frac{1}{2}M(\delta v)^2 = \frac{(\delta p)^2}{2M} \quad (\text{V.1})$$

où  $k_B$  est la constante de Boltzmann,  $M$  la masse de l'atome et  $\delta v$  (ou  $\delta p$ ) la demi-largeur à  $1/\sqrt{e}$  du maximum de la distribution de vitesse (ou d'impulsion) des atomes. Si la distribution est gaussienne, cette largeur correspond donc à la largeur *rms*, c'est-à-dire à l'écart quadratique moyen.

Dans ce chapitre nous commençons par présenter la méthode habituelle de mesure de la température dans notre expérience. Nous montrons ensuite que la nouvelle méthode de détermination de la température via la fonction d'autocorrélation spatiale donne un résultat très différent dans les mêmes conditions de refroidissement. Après avoir expliqué l'origine de cette différence et montré qu'en réalité la méthode habituelle surestime considérablement la température, nous utilisons enfin la nouvelle méthode pour comparer qualitativement puis quantitativement les résultats expérimentaux du refroidissement VSCPT et les prédictions théoriques.

### V.1 Mesure de la température par temps de vol

La première méthode de mesure de la température qui a vu le jour dans le domaine des atomes froids est la méthode dite de "release and recapture" [11].

Partant d'un échantillon atomique refroidi à l'intersection de plusieurs lasers, on coupe ceux-ci pendant une phase de durée variable puis on les rebranche. Pendant la phase d'extinction des lasers, le nuage atomique, qui n'est plus refroidi, subit une expansion ballistique du fait de la dispersion initiale de vitesse des atomes. Lorsqu'on rebranche les lasers, une partie des atomes a donc quitté la zone d'interaction avec la lumière. On mesure alors, via la fluorescence produite, la proportion d'atomes restés dans la zone d'interaction. Lorsqu'on allonge la durée d'extinction des lasers, cette fraction d'atomes diminue d'autant plus vite que le nuage atomique est chaud, ce qui permet de mesurer la température.

Cette méthode s'est vite révélée trop imprécise pour mesurer des températures plus basses qu'une centaine de  $\mu\text{K}$  et une autre technique est apparue. Également basée sur un effet ballistique, la méthode du "temps de vol" s'est vite imposée comme la technique de référence et est encore aujourd'hui la plus largement utilisée. Considérons de nouveau un nuage d'atomes froids et piégés. A un instant donné  $t = 0$ , on coupe la configuration de champs lumineux et/ou magnétiques qui maintient les atomes. Ceux-ci tombent alors sous l'effet de la gravité et traversent, quelques centimètres plus bas, une nappe de lumière horizontale. Cette nappe provient d'un laser résonnant sur une transition atomique et on mesure la fluorescence émise par les atomes au cours du temps. Le temps de vol libre d'un atome entre le piège et la nappe lumineuse dépendant de la composante verticale de sa vitesse initiale, on peut alors déduire de la largeur temporelle du signal de fluorescence, la dispersion initiale de vitesses dans le piège et donc la température.

C'est une variante plus élaborée de cette méthode que nous utilisons habituellement pour mesurer la température dans notre expérience. Tirant avantage de la métastabilité de nos atomes d'hélium, nous remplaçons la mesure de la fluorescence par la détection directe des atomes. C'est le principe du détecteur à galettes de micro-canaux que nous avons décrit dans le chapitre IV (figure V.1). Pour chaque atome détecté, nous enregistrons la date et la position de l'impact sous forme d'un triplet  $(x_i, z_i, t_i)$ . Connaissant par ailleurs la distance entre le piège et le détecteur :

$$D = 6.8 \text{ cm} \quad (\text{V.2})$$

nous pouvons déduire, **en supposant que tous les atomes proviennent du même point O**, les trois composantes de la vitesse initiale :

$$v_x = \frac{x_i}{t_i} \quad (\text{V.3})$$

$$v_y = \frac{1}{2}gt_i - \frac{D}{t_i} \quad (\text{V.4})$$

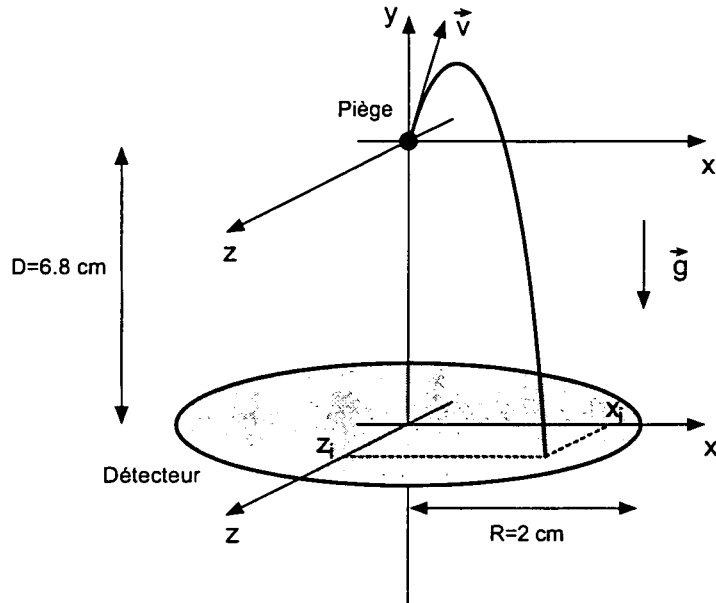


Figure V.1: Principe de la détection par temps de vol. Dès la coupure du piège, le nuage d'atomes froids tombe tout en subissant une expansion balistique du fait de la dispersion initiale de vitesse des atomes. Chaque atome touche le détecteur à un instant  $t_i$  et en un point de coordonnées  $\{x_i, y_i\}$ . A partir de ces trois valeurs, on peut déterminer les trois composantes initiales  $\{v_{x_i}, v_{y_i}, v_{z_i}\}$  de la vitesse.

$$v_z = \frac{z_i}{t_i} \quad (\text{V.5})$$

On peut ainsi reconstituer la distribution de vitesse selon les trois directions de l'espace puis en déduire la température<sup>1</sup>.

Dans une expérience de VSCPT à une dimension selon  $Oz$  (la seule configuration que nous étudions dans ce travail), les atomes sont préalablement refroidis dans toutes les directions (PMO puis mélasse optique à 3D) puis refroidis en dessous de la température de recul selon  $Oz$ . C'est donc surtout la distribution

<sup>1</sup>Notre détecteur fournit donc une information beaucoup plus complète que la détection par fluorescence qui ne donne accès qu'à la température selon la direction verticale.

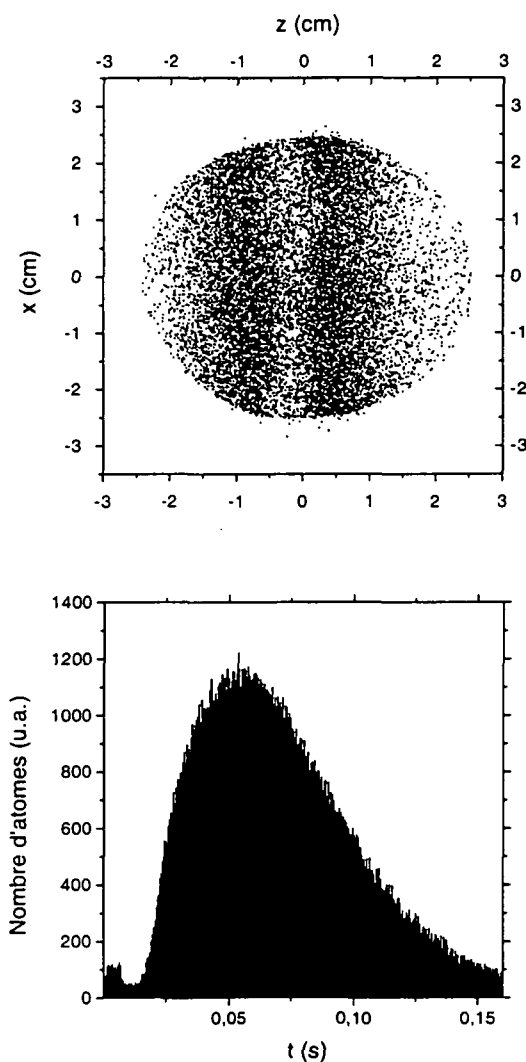


Figure V.2: Distribution des impacts sur le détecteur et temps de vol d'atomes piégés et refroidis dans un PMO pendant 250 ms puis par VSCPT à 1 dimension selon la direction Oz pendant 1 ms. La distribution spatiale montre clairement les deux bandes correspondant aux vitesses  $\pm v_R$  caractéristiques du refroidissement VSCPT. Les bandes sont très larges car aucune sélection temporelle n'a été faite. Les atomes ayant un vol libre très court donnent deux bandes très rapprochés, tandis que les atomes dont la durée de chute est très longue donnent deux bandes très écartées. On observe alors une superposition continue de ces bandes pour un temps de chute variant de 0 à 160 ms. Ce problème disparaît lorsqu'on passe dans l'espace des vitesses.

de vitesse selon cette direction qui nous intéresse.

La figure V.2 présente la distribution de position des atomes détectés telle qu'elle est enregistrée ainsi que le temps de vol correspondant. Si l'on compare celui-ci au temps de vol obtenu sans refroidissement VSCPT (figure IV.5), on constate qu'il atteint son maximum un peu plus tôt ce qui montre que les atomes sont plus chauds selon la direction verticale. En effectuant le même ajustement du temps de vol que sur la figure IV.6, on trouve une dispersion de vitesses de l'ordre de  $6v_R$  au lieu de  $5v_R$  dans le cas du piège tout seul. Ceci est dû au chauffage transverse selon les directions  $Ox$  et  $Oy$  par les faisceaux VSCPT appliqués selon  $Oz$ .

Pendant toute la chute libre, chaque atome reste dans une superposition linéaire de deux paquets d'ondes de vitesses moyennes opposées  $\pm\hbar k/M$ . Lorsqu'il touche le détecteur, son état est projeté avec la même probabilité sur un des deux états propres de l'opérateur impulsion à savoir  $\pm\hbar k$ . Pour un grand nombre d'atomes on obtient ainsi un profil de position sur le détecteur constitué de deux bandes comme le montre la figure V.2. Selon le temps de chute des atomes, les deux bandes détectées sont plus ou moins éloignées et résultent au total en deux bandes assez larges. Pour obtenir la distribution de vitesses selon  $Oz$ , on convertit chaque triplet  $\{x_i, z_i, t_i\}$  en  $\{v_x, v_y, v_z\}$  puis on somme sur  $v_x$  et  $v_y$ . Cette intégrale sur les directions "non-refroidies" augmente le signal mais introduit des distortions de la distribution via des effets de bord. En effet, comme le détecteur est rond, l'intégrale sur la direction  $Ox$  n'est pas équivalente selon qu'elle est réalisée au centre (sur tout le diamètre du détecteur) ou sur un bord. Pour éliminer cet astigmatisme on utilise uniquement les atomes compris dans la tranche quasi-rectangulaire entre  $x=-1\text{cm}$  et  $x=+1\text{cm}$ . De plus on ne garde que les atomes dont le temps de vol est compris entre 100 ms et 140 ms. Ainsi on élimine les atomes très rapides qui peuvent être sortis de la zone d'interaction avec le laser avant que celui-ci ne soit éteint et qui ont donc un temps d'interaction effectif plus court.

La figure V.3 présente une courbe typique obtenue par la méthode ci-dessus. On reconnaît les deux pics caractéristiques centrés respectivement en  $+v_R$  et  $-v_R$ . Le seul fait de résoudre distinctement les deux pics est une preuve du refroidissement subrecoil puisque leur largeur  $\delta v$  est de fait beaucoup plus petite que la distance  $2v_R$  qui les sépare.

On ajuste alors (figure V.3) la distribution avec une somme de deux lorentziennes<sup>2</sup> de manière à déduire la largeur  $\delta v$ :

$$A_- \frac{\delta v_L}{\pi} \frac{1}{(v + v_R)^2 + (\delta v_L)^2} + A_+ \frac{\delta v_L}{\pi} \frac{1}{(v - v_R)^2 + (\delta v_L)^2} \quad (\text{V.6})$$

Les trois paramètres ajustables sont la demi-largeur à mi-hauteur  $\delta v_L$ , l'amplitude

<sup>2</sup>Pour des raisons qui apparaîtront plus loin, la distribution de vitesse des atomes refroidis par VSCPT est beaucoup plus proche d'une lorentzienne que d'une gaussienne.

$A_+$  du pic centré en  $+v_R$  et l'amplitude  $A_-$  du pic centré en  $-v_R$ . Comme cela apparaît sur la figure V.3, les deux pics n'ont pas tout-à-fait la même hauteur. Ceci est dû principalement au fait que la première galette du détecteur présente des défauts de surface et n'a donc pas une réponse strictement uniforme. Rappelons que la température est conventionnellement définie à partir de la demi-largeur  $\delta v$  à  $1/\sqrt{e}$  qui dans le cas d'une distribution lorentzienne est donnée par :

$$\delta v = \sqrt{\sqrt{e} - 1} \times \delta v_L \simeq 0.805 \times \delta v_L \quad (\text{V.7})$$

Pour l'expérience présentée ici les paramètres expérimentaux sont :

$$\theta = 1364 \mu\text{s} \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega}_R = 0.72 \quad (\text{V.8})$$

et l'ajustement donne :

$$\delta v \simeq v_R/8.9 \quad \text{soit} \quad T \simeq T_R/80 \quad (\text{V.9})$$

Nous verrons que la nouvelle méthode que nous avons mise au point donne pour les mêmes conditions expérimentales un résultat complètement différent et qu'en réalité l'analyse ci-dessus est très approximative et surestime beaucoup la température réelle.



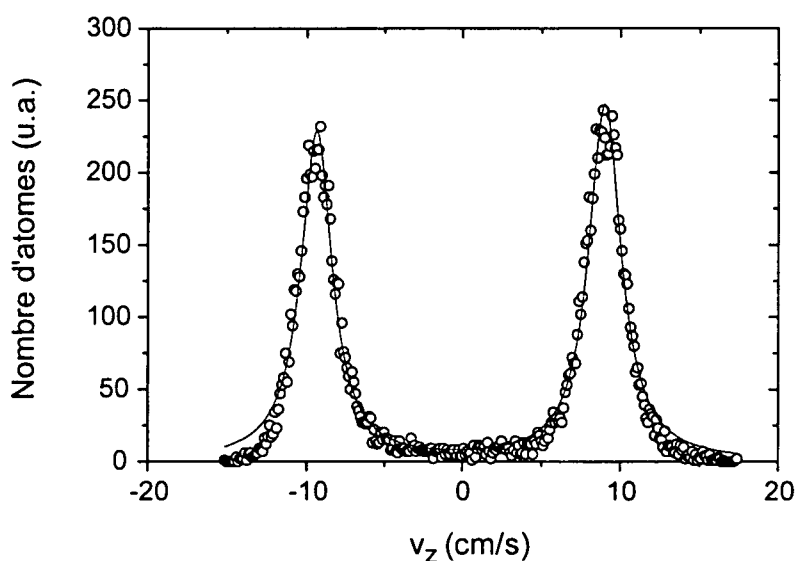


Figure V.3: Distribution de vitesse des atomes refroidis par VSCPT obtenue par la méthode de temps de vol en supposant que tous les atomes viennent du même point. La courbe en trait plein est un ajustement des données par une somme de deux lorentziennes dont on extrait  $\delta v = v_R/8.9$  soit une température de  $T_R/80$ . La contribution de la distribution initiale de positions dans le piège (gaussienne) ainsi que la chute de la détectivité de la galette sur les bords expliquent le défaut de l'ajustement sur les ailes.

## V.2 Mise en œuvre expérimentale de la nouvelle méthode

A la fin de la phase de refroidissement VSCPT, chaque atome est laissé dans une superposition cohérente de deux paquets d'ondes d'impulsions opposées. Lorsque les lasers VSCPT sont coupés les atomes suivent une évolution libre au cours de laquelle les deux paquets d'ondes initialement superposés se séparent progressivement. Après une "période noire" de durée variable  $\tau_N$ , on applique de nouveau les faisceaux VSCPT mais sous forme d'une impulsion très courte. Comme nous l'avons expliqué en détail dans le paragraphe III.1.3, une fraction seulement des atomes absorbe des photons dans l'impulsion d'analyse et subit par conséquent des cycles de fluorescence, donnant lieu à un fond beaucoup plus large que  $v_R$ . Le principe de la méthode est de mesurer la fraction d'atomes qui n'a pas absorbé de lumière au cours de l'impulsion d'analyse et qui, par conséquent, se présente encore sous forme de deux pics très étroits en  $\pm v_R$ .

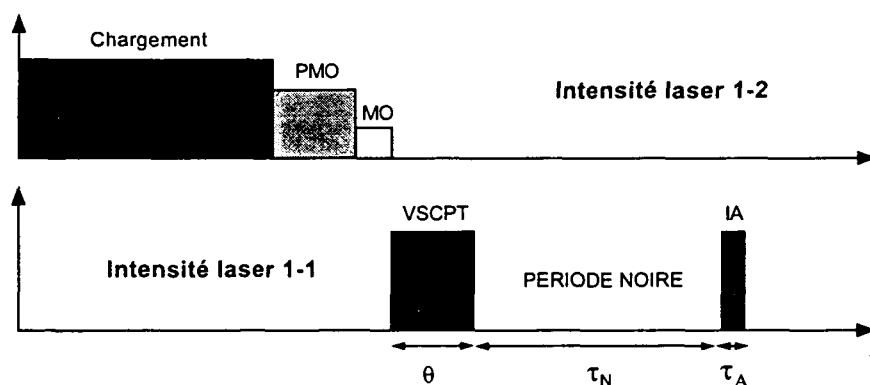


Figure V.4: Séquence temporelle pour l'expérience "période noire". Après une phase de refroidissement VSCPT de durée  $\theta$ , les lasers VSCPT sont coupés pendant une "période noire" de durée  $\tau_N$  puis rebranchés pendant une impulsion très brève de durée  $\tau_A$ .

La séquence temporelle est rappelée sur la figure V.4. La pulsation de Rabi du laser VSCPT est la même pour la phase de refroidissement et pour l'impulsion d'analyse. Conformément à la discussion du paragraphe III.2.1, la durée de celle-

ci est choisie de telle manière qu'une vingtaine de photons soit échangée par les atomes qui absorbent, ce qui équivaut, pour  $\tilde{\Omega}_R = 0.7$ , à :

$$\tau_A = 8 \mu s \quad (\text{V.10})$$

Après détection des atomes, la distribution d'impulsion selon  $Oz$  est reconstituée par la méthode précédemment expliquée comme pour un temps de vol classique. La différence réside dans le fait que nous ne déduisons plus la température de la largeur de cette distribution mais utilisons la fraction d'atomes restée dans les pics étroits pour déduire la fonction d'autocorrélation spatiale.

### V.2.1 Dépouillement et extraction de $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$

La figure V.5 présente les distributions d'impulsion obtenues dans les mêmes conditions pour des valeurs croissantes de la durée  $\tau_N$  de la période noire. On constate que l'amplitude des pics diminue progressivement mais tend vers une valeur non nulle même pour des périodes noires très longues (la figure V.5.c correspond au régime asymptotique). Parallèlement le fond augmente mais plus modestement si bien que l'aire totale sous la courbe expérimentale diminue avec  $\tau_N$ . Ceci est dû au fait que les atomes qui subissent des cycles de fluorescence pendant l'impulsion d'analyse diffusent sur un intervalle beaucoup plus grand que  $[-v_R, +v_R]$ . Une grande partie d'entre eux tombe donc à-côté de la galette et n'est pas détectée. En effet compte tenu du temps de chute moyen qui est de l'ordre de 80 ms et du rayon du détecteur qui vaut 2 cm, on peut estimer qu'en moyenne seuls les atomes ayant une vitesse selon  $Oz$  inférieure à :

$$\frac{2}{0.08} = 25 \text{ cm/s} \simeq 2.7 v_R \quad (\text{V.11})$$

peuvent tomber sur le détecteur.

La fraction  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  des atomes qui n'ont pas absorbé de lumière pendant l'impulsion est donnée par l'aire comprise sous les deux pics étroits et au-dessus du fond. On suppose celui-ci uniforme<sup>3</sup>, ce qui est justifié si les atomes ont émis une vingtaine de photons spontanés et on évalue sa hauteur en  $v \simeq 0$  exactement au milieu des deux pics. De plus on peut vérifier que la largeur des pics sur la figure V.5 ne varie pratiquement pas avec  $\tau_N$ , si bien qu'on peut utiliser non pas l'aire mais la hauteur des pics pour déduire  $\mathcal{F}_{NC}$ . Le principe du dépouillement

<sup>3</sup>Cette hypothèse ne semble pas tout à fait vérifiée sur la figure V.5 où le fond est plus faible dans les ailes qu'au centre. Ceci est simplement un problème de détection qui vient du fait que l'efficacité de la première galette est plus faible sur les bords qu'au centre. En calculant le fond au centre, nous évitons l'erreur due à ces effets de bord.

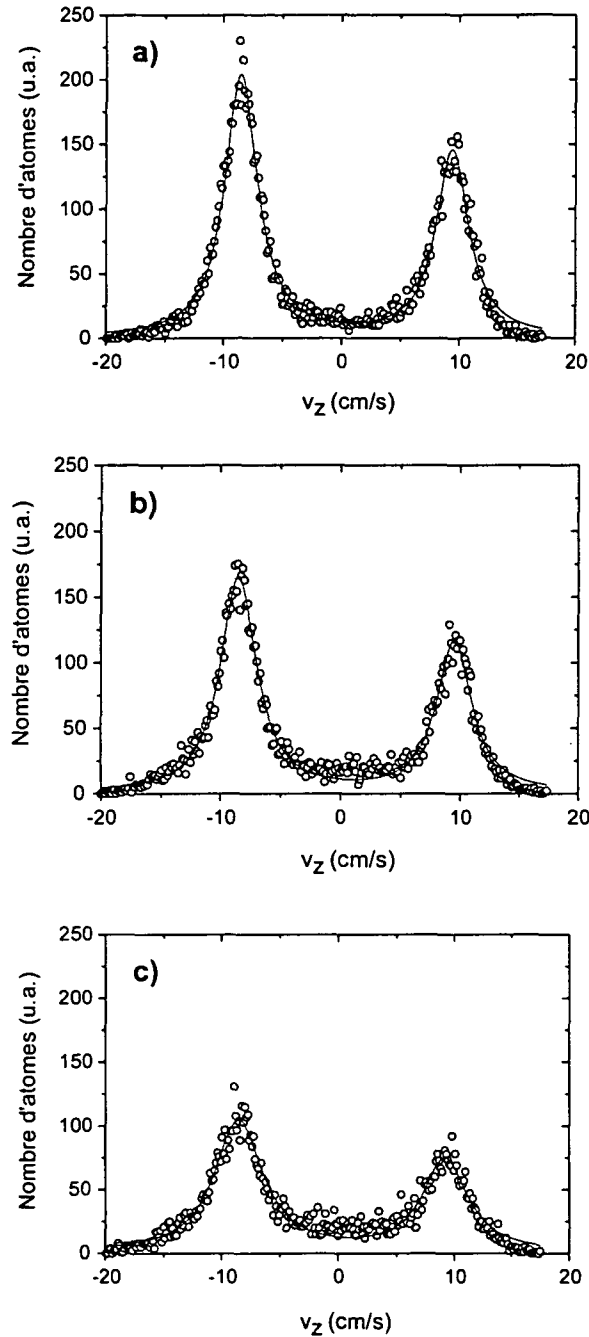


Figure V.5: Distributions de vitesse déduites du temps de vol après une expérience “période noire”. La durée de la période noire vaut respectivement  $\tau_N = 0$  (a),  $\tau_N = 14.4 \mu\text{s}$  (b) et  $\tau_N = 181.7 \mu\text{s}$  (c). L’aire comprise sous les pics et au-dessus du fond diminue progressivement mais ne tend pas vers 0. L’asymétrie entre les deux pics résulte d’une réponse non uniforme de la première galette du détecteur. Le fait que le fond large sous les pics soit plus faible dans les ailes est simplement un effet de bord dû à la chute de l’efficacité du détecteur à la périphérie.

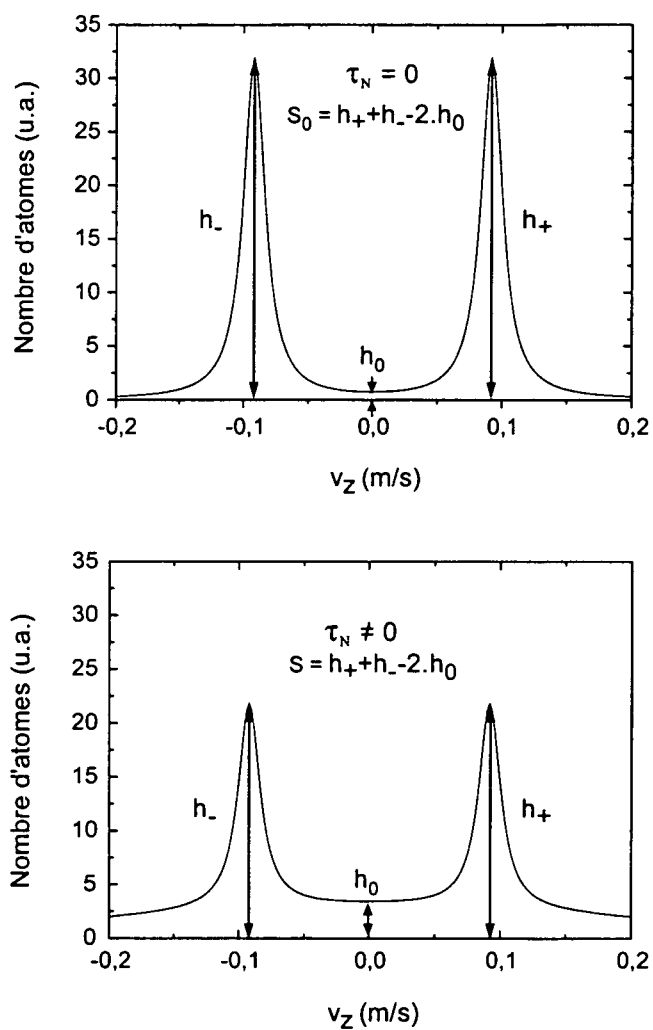


Figure V.6: Calcul de  $\mathcal{F}_{NC}$  à partir de la distribution d'impulsion expérimentale. Comme la largeur des pics ne change pas lorsqu'on augmente la durée de la période noire, l'aire sous les pics est proportionnelle à leur hauteur.

est schématisé sur la figure V.6. La fraction d'atomes restée dans les deux pics s'écrit :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{S(\tau_N)}{S_0} \quad (\text{V.12})$$

où le signal  $S(\tau_N)$  est obtenu par :

$$S(\tau_N) = h_+ + h_- - 2h_0 \quad (\text{V.13})$$

Dans (V.12), ce signal est normalisé sur le signal obtenu de la même façon sans période noire ( $\tau_N = 0$ ).

## V.2.2 Résultats

L'expérience est réalisée avec les mêmes paramètres de refroidissement que dans le paragraphe précédent ( $\theta = 1364 \mu\text{s}$ ,  $\tilde{\Omega}_R = 0.72$ ) et on mesure  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  pour des valeurs croissantes de  $\tau_N$ . Le résultat est représenté sur la figure V.7.

Conformément au résultat théorique, le signal obtenu décroît bien de 1.0 à 0.5. La courbe en trait plein est un ajustement exponentiel des données dont la constante de temps vaut :

$$\tau_C = 19.0(8) \mu\text{s} \quad (\text{V.14})$$

Il est important de remarquer que  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  ne varie pas exponentiellement aux temps très courts mais semble commencer avec une pente horizontale. Nous verrons dans le chapitre suivant, où nous revenons en détail sur la forme de ce signal, que ce comportement au voisinage de  $\tau_N = 0$  est lié à l'effet de l'impulsion d'analyse sur les états non-couplés. Pour ne pas compliquer le dépouillement, nous nous contentons ici de supprimer les deux premiers points de chaque série avant de faire l'ajustement. Au chapitre VI, nous étudierons précisément la forme du signal et de sa transformée de Fourier et nous reviendrons alors sur ce point. D'après la formule (VII.2), la largeur lorentzienne est donnée par :

$$\delta v_L = \frac{1}{2k\tau_C} \quad (\text{V.15})$$

d'où on déduit, en introduisant la vitesse de recul :

$$\frac{\delta v_L}{v_R} = \frac{1}{4} \frac{\hbar\Gamma}{E_R} \frac{1}{\Gamma\tau_C} = \frac{1}{4} \frac{\hbar\Gamma}{E_R} \frac{1}{\tilde{\tau}_C} \quad \text{avec} \quad \frac{\hbar\Gamma}{E_R} = 38.27 \quad (\text{V.16})$$

Ici on obtient :

$$\delta v_L = v_R/20(1) \quad (\text{V.17})$$

La longueur de cohérence correspondante vaut :

$$\xi_C = \frac{\hbar}{M\delta v_L} = 3.5(1) \mu\text{m} \quad (\text{V.18})$$

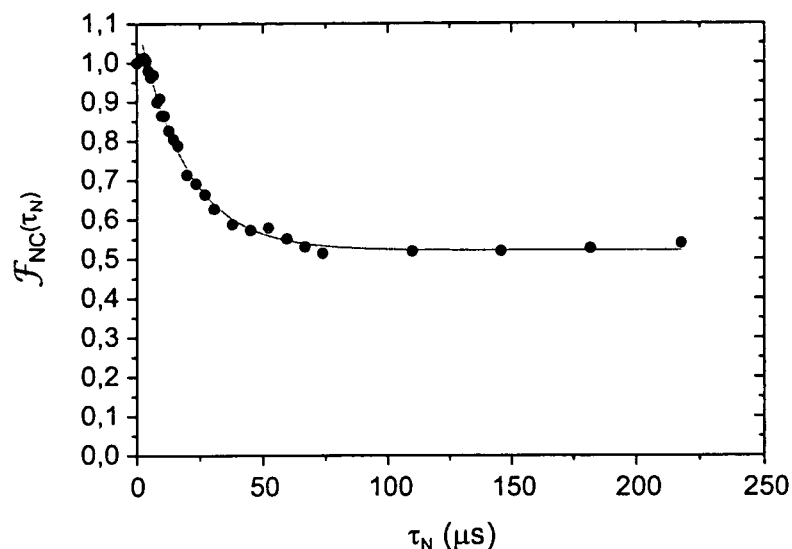


Figure V.7: Signal expérimental typique d'une expérience "période noire". Les atomes ont été refroidis par VSCPT pendant  $\theta = 1364 \mu\text{s}$  avec une pulsation de Rabi  $\Omega_R = 0.72 \Gamma$ . La courbe en trait plein est un ajustement exponentiel des données de constante de temps  $\tau_C = 19.0(8) \mu\text{s}$ . L'ajustement est réalisé sans prendre en compte les deux premiers points expérimentaux.

soit plus de trois fois la longueur d'onde optique ( $\lambda = 1.083 \mu\text{m}$ ). On en déduit également la demi-largeur à  $1/\sqrt{e}$ :

$$\delta v = 0.805 \times \delta v_L \simeq v_R/25(1) \quad (\text{V.19})$$

et finalement la température:

$$T = T_R/625(50) \quad (\text{V.20})$$

Ce résultat est très différent de celui obtenu par la méthode classique de temps de vol ( $T_R/80$ ). Avant d'aller plus loin dans l'étude quantitative du refroidissement VSCPT, il importe de connaître l'origine de cette différence. Dans le paragraphe suivant, nous montrons que celle-ci est due à la taille initiale du nuage atomique qui impose une limite sévère à la résolution de la technique de temps de vol.

### V.3 Effet de la taille du piège

La méthode du temps de vol permet de reconstituer la distribution de vitesse des atomes à partir de la distribution spatio-temporelle de leurs impacts sur le détecteur. Cette transformation, résumée dans les formules (V.3) à V.5, est basée sur l'hypothèse que tous les atomes viennent du même point. Si cela était rigoureusement exact, la seule origine de la largeur des deux pics de la distribution en position sur le détecteur serait d'origine cinétique, représentant l'expansion ballistique des atomes du fait de leur dispersion initiale de vitesse. En fait le nuage atomique a une certaine extension qui contribue aussi à la largeur du profil détecté. En supposant que tous les atomes viennent du même point, on attribue toute la largeur à la distribution de vitesse et on surestime donc la température. Le but de ce paragraphe est d'examiner soigneusement jusqu'à quel point il est raisonnable de supposer le piège ponctuel et les conséquences de cette hypothèse sur la résolution dans la mesure de la température.

Commençons par une estimation approximative de cet effet. Pour cela supposons que les atomes sont répartis selon la distribution  $\mathcal{P}(x, y, z)$  dans le piège et que leur température est nulle. Lors de la chute libre vers le détecteur, le nuage atomique ne subit alors aucune expansion ballistique, si bien que la distribution de positions des impacts dans le plan du détecteur se déduit simplement par une intégration de  $\mathcal{P}(x, y, z)$  selon la direction verticale  $Oy$ . De plus tous les atomes partent avec la même vitesse initiale nulle ( $T=0$ ) et ont donc approximativement le même temps de vol (si on néglige l'extension spatiale du piège selon la direction verticale). Leur temps de chute est donc :

$$t_0 = \sqrt{\frac{2D}{g}} = 118 \text{ ms} \quad (\text{V.21})$$

Nous avons mesuré le rayon du piège dans les conditions expérimentales habituelles (voir paragraphe IV.4). Nous savons qu'il est de l'ordre du mm selon la direction  $Ox$  et qu'il est plus grand d'un facteur  $\sqrt{2}$  selon les deux autres directions  $Oy$  et  $Oz$ . On peut donc prendre ici pour largeur du profil de positions sur le détecteur selon la direction  $Oz$  par exemple :

$$\sigma_z \simeq 1.4 \text{ mm} \quad (\text{V.22})$$

En supposant, comme on le fait habituellement que tous les atomes viennent du même point, on interprète alors la largeur du profil détecté comme provenant d'une dispersion des vitesses initiales qui vaut :

$$\delta v_z = \frac{\sigma_z}{t_0} \simeq 0.012 \text{ m/s} \simeq \frac{v_R}{7.7} \quad (\text{V.23})$$



soit une température de :

$$T \simeq \frac{T_R}{59} \quad (\text{V.24})$$

Cette valeur correspond approximativement à la résolution de la mesure de la température par temps de vol pour un nuage atomique dont le rayon *rms* est de l'ordre du mm. Ceci explique la différence considérable observée entre les valeurs de température mesurée par temps de vol et à partir de la fonction d'autocorrélation spatiale.

Pour aller au-delà de la simple estimation que nous venons de faire et avoir une idée plus précise de l'effet de la taille du piège nous pouvons faire une simulation Monte-Carlo de la méthode de temps de vol. Le principe est très simple et se résume en quatre étapes :

- On tire aléatoirement les six composantes initiales de la position et de la vitesse d'un atome :

$$\{x_0, y_0, z_0, v_{x0}, v_{y0}, v_{z0}\} \quad (\text{V.25})$$

La distribution de position est une gaussienne selon les trois dimensions. La distribution de vitesse est une gaussienne selon les "directions non refroidies" par VSCPT (*Ox* et *Oy*) et une double lorentzienne selon *Oz*. On choisit  $t = 0$  à l'instant où le piège est coupé soit au début de la chute libre.

- Connaissant la distance  $D$  entre le piège et le plan du détecteur, nous en déduisons la date et la position d'impact de l'atome sur celui-ci :

$$t_{det} = \frac{1}{g} \left[ v_{y0} + \sqrt{(v_{y0})^2 + 2(D + y_0)g} \right] \quad (\text{V.26})$$

$$x_{det} = x_0 + v_{x0}.t_{det} \quad (\text{V.27})$$

$$z_{det} = z_0 + v_{z0}.t_{det} \quad (\text{V.28})$$

- Pour être exactement dans les conditions de dépouillement expérimentales nous ne gardons que les atomes satisfaisant à :

$$x_{det}^2 + z_{det}^2 \leq (2 \text{ cm})^2 \quad (\text{V.29})$$

$$-1 \text{ cm} \leq x_{det} \leq 1 \text{ cm} \quad (\text{V.30})$$

$$100 \text{ ms} \leq t_{det} \leq 140 \text{ ms} \quad (\text{V.31})$$

- Nous faisons alors “comme si” tous les atomes venaient du même point et déduisons les trois composantes de la vitesse initiale apparente :

$$(v_x)_{app} = \frac{x_{det}}{t_{det}} \quad (V.32)$$

$$(v_y)_{app} = \frac{1}{2}gt_{det} - \frac{D}{t_{det}} \quad (V.33)$$

$$(v_z)_{app} = \frac{z_{det}}{t_{det}} \quad (V.34)$$

En répétant cette procédure un grand nombre de fois, on reconstitue la distribution de vitesse apparente, telle que nous la mesurons par temps de vol, et nous la comparons à la “vraie” distribution de vitesse.

La distribution de position des atomes dans le nuage est de la forme :

$$\mathcal{P}(x, y, z) = \frac{1}{\sigma_x \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_x^2} \times \frac{1}{\sigma_y \sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2\sigma_y^2} \times \frac{1}{\sigma_z \sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2\sigma_z^2} \quad (V.35)$$

avec :

$$\sqrt{2}\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z \quad (V.36)$$

La distribution initiale de vitesse s’écrit :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(v_x, v_y, v_z) &= \frac{1}{\delta v_x \sqrt{2\pi}} e^{-v_x^2/2\delta v_x^2} \times \frac{1}{\delta v_y \sqrt{2\pi}} e^{-v_y^2/2\delta v_y^2} \\ &\times \frac{1}{2} \left[ \frac{\delta v_L}{\pi} \frac{1}{(v_z - v_R)^2 + (\delta v_L)^2} + \frac{\delta v_L}{\pi} \frac{1}{(v_z + v_R)^2 + (\delta v_L)^2} \right] \quad (V.37) \end{aligned}$$

A partir de la distribution des temps d’arrivées des atomes sur le détecteur (voir figure IV.5), nous pouvons estimer la largeur de la distribution de vitesse selon la direction verticale  $Oy$  à environ  $6v_R$ . En supposant que la température est à peu près identique selon les deux directions non refroidies  $Ox$  et  $Oy$ , nous prenons donc :

$$\delta v_x = \delta v_y = 6v_R \quad (V.38)$$

Les deux paramètres dont nous voulons étudier l’influence sur la distribution apparente de vitesse sont  $\sigma_x$  et  $\delta v_L$ .

La figure V.8 montre les distributions de vitesse obtenues par cette simulation en prenant :

$$\delta v = 0.805 \times \delta v_L = v_R/20 \quad \text{soit} \quad T = T_R/400 \quad (V.39)$$

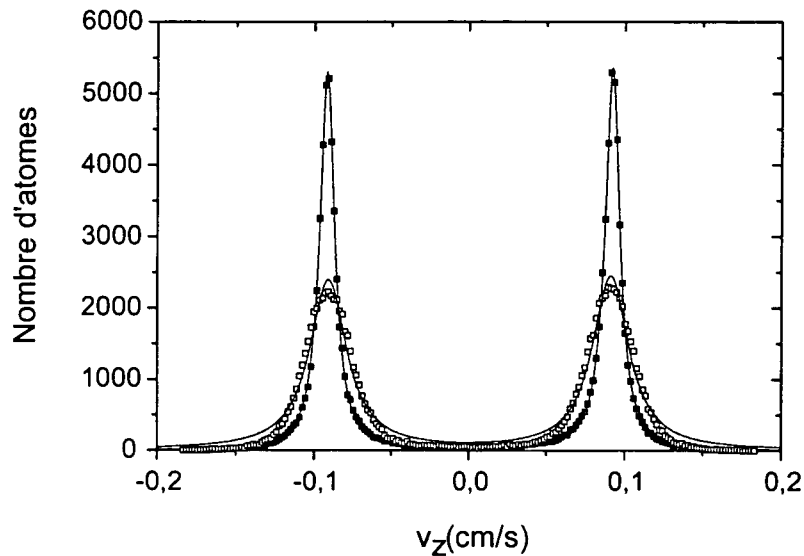


Figure V.8: Résultats de la simulation prenant en compte la taille du piège. Partant d'un nuage d'atomes dont on connaît la distribution de vitesses (lorentzienne de largeur  $\delta v \simeq 0.0057$  cm/s) et de position, on déduit la distribution de positions et de temps d'arrivées des atomes sur le détecteur puis on reconstitue la distribution apparente de vitesses "comme si" tous les atomes venaient du même point (nuage initial ponctuel). Les deux courbes correspondent aux mêmes conditions initiales à l'exception de la taille du piège, qui est nulle pour les carrés pleins et vaut 1 mm ( $\sigma = 1.4$  mm) pour les carrés vides. Les courbes en trait plein sont des ajustements lorentzien. Pour  $\sigma = 0$  mm, l'ajustement est parfait et redonne la lorentzienne initiale. Pour  $\sigma = 1$  mm, la courbe est beaucoup plus large ( $(\delta v)_{app} \simeq 0.0115$  cm/s) du fait de la contribution de la taille initiale du nuage. Par ailleurs cette contribution a une forme gaussienne et le profil de vitesses apparentes est donc moins bien ajusté par une lorentzienne.

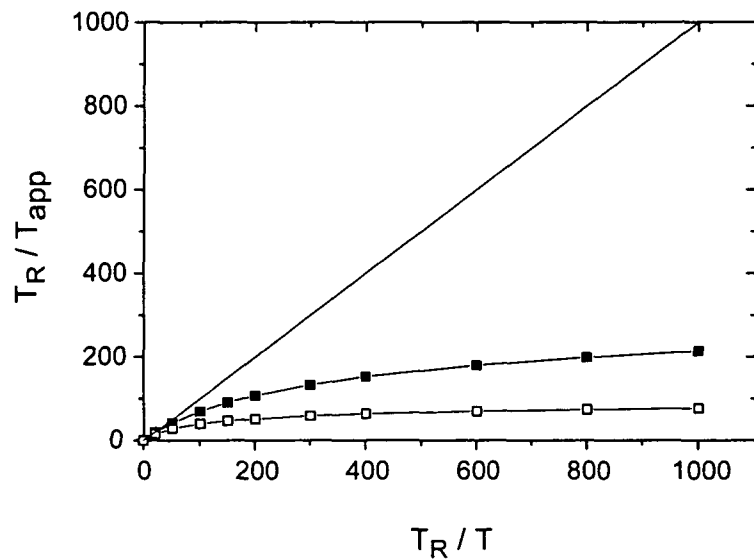


Figure V.9: Résultats de la simulation prenant en compte la taille du piège. On simule la distribution de vitesse apparente des atomes pour deux valeurs différentes de la taille du piège  $\sigma = 0.5\text{mm}$  (carrés pleins) ou  $\sigma = 1\text{mm}$  (carrés vides). On représente ici la température apparente qu'on déduit en faisant l'approximation d'une source ponctuelle en fonction de la température réelle correspondant à la largeur de la distribution de vitesse initiale. La droite en trait plein a une pente 1 ( $T_{app} \approx T$ ) et correspond donc à ce qu'on devrait observer pour une source réellement ponctuelle.

---

Le rayon du nuage atomique vaut  $\sigma_x = 0$  (piège ponctuel) pour les cercles pleins et  $\sigma_x = 1$  mm pour les cercles vides. Comme pour les données expérimentales nous ajustons ces distributions avec un profil lorentzien. Dans le cas  $\sigma_x = 0$ , on retrouve exactement la distribution lorentzienne de vitesse initiale ( $\delta v = v_R/20$ ) ce qui constitue une vérification de la validité de la simulation. En revanche, dans le cas  $\sigma_x = 1$  mm on obtient :

$$(\delta v_z)_{app} \simeq 0.0115 \text{ cm/s} = v_R/8 \quad (\text{V.40})$$

soit :

$$T_{app} = T_R/64 \quad (\text{V.41})$$

Nous constatons que l'ajustement par un profil lorentzien n'est pas parfait lorsque le piège n'est pas ponctuel. En particulier les ailes du signal issu de la simulation décroissent plus vite que celles de l'ajustement lorentzien. Ceci provient de la contribution, dans le profil simulé, de la distribution gaussienne des positions dans le piège (une gaussienne décroît plus rapidement qu'une lorentzienne).

La valeur apparente de la température déduite du temps de vol simulé ( $T_R/64$ ) est très différente de la valeur véritable correspondant à la distribution de vitesse ( $T_R/400$ ). L'extension initiale du nuage atomique entraîne donc une surestimation considérable de la température lorsqu'on analyse le temps de vol en supposant que tous les atomes viennent d'un même point. La figure V.9 montre comment varie la température apparente déduite du temps de vol simulé en fonction de la vraie température pour différentes tailles du nuage atomique. La droite en trait plein ( $T_{app} = T$ ) indique ce que l'on obtiendrait pour un piège ponctuel. Plus la température est basse, c'est-à-dire plus  $T_R/T$  est grand, plus la contribution cinétique à la largeur du profil détecté est faible. Cette largeur tend donc vers une limite correspondant à la seule contribution de la taille initiale du nuage et qui explique le comportement asymptotique des courbes de la figure V.9.

Notre simulation montre ainsi que la méthode habituelle de mesure de la température est extrêmement imprécise dès que la température est plus basse que  $T_R/50$  environ. Du fait de la convolution avec la distribution initiale de positions des atomes dans le piège, la distribution apparente d'impulsions, déduite du temps de vol en supposant que tous les atomes proviennent du même point, est très déformée par rapport à la distribution réelle. Une mesure basée sur la forme du profil, comme le calcul de la température à partir de sa largeur, sera donc forcément très grossière. En revanche, la méthode de mesure de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  n'est pas faussée car elle ne repose pas sur la forme mais sur l'aire du profil. Or celle-ci n'est pas modifiée par la convolution avec la distribution de position, normalisée à

l'unité. La mesure de la température par la méthode "période noire" nous permet donc d'étudier précisément et quantitativement le refroidissement VSCPT.

## V.4 Etude de l'influence des paramètres

Nous avons montré dans les paragraphes 1 et 2 que les mesures de la température des atomes refroidis par VSCPT, à partir du temps de vol ou via la fonction de corrélation spatiale donnaient deux résultats très différents :

Temps de vol classique :  $T_R/80$

Mesure de la fonction de corrélation spatiale :  $T_R/625$  (V.42)

A la lumière des résultats du paragraphe 3 nous pouvons maintenant attribuer l'origine de cette différence importante à la taille du piège. La température est donc mesurée de manière beaucoup plus précise par la méthode "période noire". Les résultats de l'étude systématique du refroidissement VSCPT en fonction des paramètres expérimentaux que nous présentons à présent confirmeront cette conclusion.

### V.4.1 Résultats et discussion qualitative

Une des prédictions les plus importantes de la théorie du refroidissement VSCPT sur laquelle nous reviendrons en détail dans le chapitre VI est que la température doit varier selon :

$$\frac{T_R}{T} = A(4k^2v_R^2\Gamma)\frac{\theta}{\Omega_R^2} \quad (\text{V.43})$$

soit encore, en passant aux unités réduites :

$$\frac{T_R}{T} = A\left(4\frac{E_R}{\hbar\Gamma}\right)^2\frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} = A(1.09\ 10^{-2})\frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad (\text{V.44})$$

où  $A$  est un préfacteur numérique de l'ordre de l'unité. Cette expression se déduit simplement de (II.25) en introduisant un facteur numérique dont seule une analyse théorique précise peut prédire la valeur. Pour vérifier cette relation, nous avons mesuré par la méthode "période noire", la température d'atomes refroidis par VSCPT, pour différentes valeurs du temps d'interaction  $\theta$  et de la pulsation de Rabi  $\Omega_R$ .

La figure V.10.a montre l'effet de  $\theta$  pour une valeur constante de  $\Omega_R (=0.72\ \Gamma)$ . Les cercles pleins sont les résultats de la mesure par "période noire". L'ajustement linéaire donne :

$$\frac{T_R}{T} = 0.039(2).\tilde{\theta} \quad (\text{V.45})$$

et montre que la dépendance linéaire de  $1/T$  en fonction de  $\theta$  est bien vérifiée jusqu'à des températures aussi froides que  $T_R/900$  environ. Ceci indique qu'aucun phénomène parasite ne vient limiter le refroidissement VSCPT, du moins dans

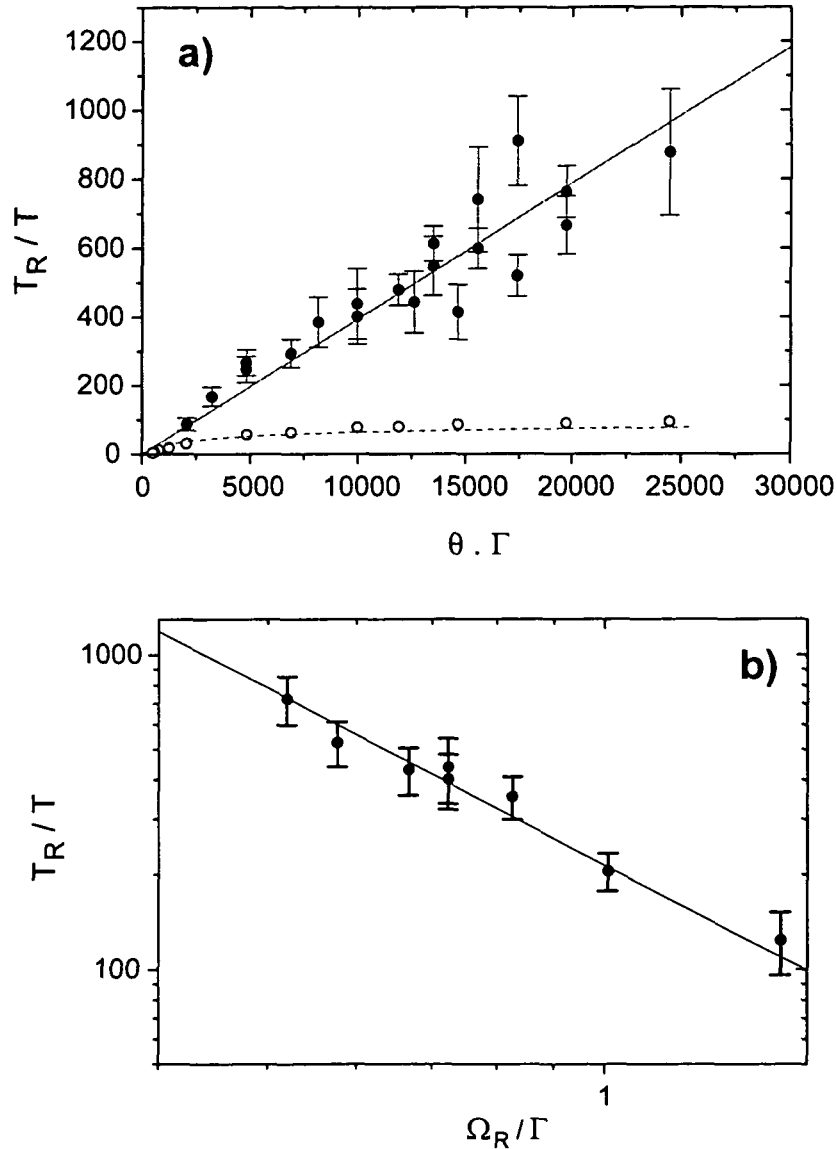


Figure V.10: Variation de la température mesurée via la fonction d'autocorrélation spatiale en fonction des paramètres du refroidissement VSCPT. Sur la figure (a) on étudie l'influence du temps d'interaction  $\theta(\Gamma^{-1})$  pour une valeur fixe de la pulsation de Rabi  $\Omega_R = 0.72(2) \Gamma$ . Les ronds pleins sont les résultats expérimentaux et la courbe en trait plein est un ajustement linéaire dont la pente vaut  $0.039(2)$ . Les ronds vides sont les résultats de la mesure de la température dans les mêmes conditions expérimentales mais avec la méthode habituelle de temps de vol. La courbe en trait pointillé est la variation prédite par la simulation (voir texte) pour un nuage atomique de rayon 1mm. La figure (b) est un graphe en coordonnées logarithmiques représentant l'inverse de la température en fonction de  $\Omega_R/\Gamma$  pour  $\theta = 1$  ms. La droite en trait plein est un ajustement affine dont la pente  $-1.9(2)$  est très proche de la valeur attendue  $(-2)$ .



cette gamme de température. Sur la même figure sont représentées les valeurs de la température déduites par la méthode habituelle de temps de vol dans les mêmes conditions (cercles vides). On constate qu'il existe un écart considérable entre les deux séries. Enfin, grâce au programme de simulation du paragraphe précédent, nous avons représenté la température apparente correspondant à la température représentée sur la droite en trait plein pour un piège de rayon  $\sigma_x=1$  mm. La courbe en trait pointillé ainsi obtenue est très proche des résultats du temps de vol ce qui est en accord avec notre interprétation de l'effet de la taille du piège.

Sur la figure V.10.b est représentée la variation de l'inverse de la température en fonction de  $\tilde{\Omega}_R$  en coordonnées logarithmiques. Le temps d'interaction vaut  $\theta=1$  ms pour tous les points. La droite en trait plein est un ajustement affine des données et a pour équation :

$$\log \frac{T_R}{T} = -1.9(2) \log \tilde{\Omega}_R + 2.3(0) \quad (\text{V.46})$$

Ceci est en très bon accord avec l'expression théorique (V.44) qui prévoit un comportement quadratique c'est-à-dire une pente égale à -2 pour la droite ci-dessus.

Enfin nous avons réuni sur un même graphe toutes les données expérimentales en représentant  $T_R/T$  en fonction de  $\tilde{\theta}/\tilde{\Omega}_R^2$  (figure V.11). Là encore les données sont bien ajustées par une droite passant par l'origine et dont l'équation s'écrit :

$$\frac{T_R}{T} = 2.04(8) 10^{-2} \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad (\text{V.47})$$

Comparée à (V.44), cette relation donne la valeur expérimentale<sup>4</sup> du préfacteur  $A$  :

$$A_{exp} = 1.87(7) \quad (\text{V.48})$$

La mesure de la température grâce à la fonction d'autocorrélation spatiale nous a donc permis d'étudier pour la première fois avec précision la variation de la température en fonction de  $\theta$  et  $\Omega_R$ . L'accord qualitatif avec la théorie

---

<sup>4</sup>Notons que dans [107] (l'article est reproduit *in extenso* en annexe C), nous avons annoncée la valeur  $A \simeq 2.9$ . La différence avec la valeur donnée ici provient simplement de l'imprécision avec laquelle nous déterminions la pulsation de Rabi au moment où l'article cité ci-dessus a été écrit. Comme cela a été établi à la fin du paragraphe III.4.2, la pulsation de Rabi était alors surestimée d'environ 18% ce qui explique l'écart de l'ordre de 36% entre la valeur donnée dans [107] et la valeur trouvée à présent. Nous profitons de cette note pour faire remarquer qu'une erreur d'impression s'est glissée dans cet article : en haut de la deuxième colonne de la troisième page, il ne faut pas lire  $T_R/T = A\theta\Omega^{-2}(M^2/4\hbar^2k^4\Gamma)$  mais  $T_R/T = A\theta\Omega^{-2}(4\hbar^2k^4\Gamma/M^2)$ .

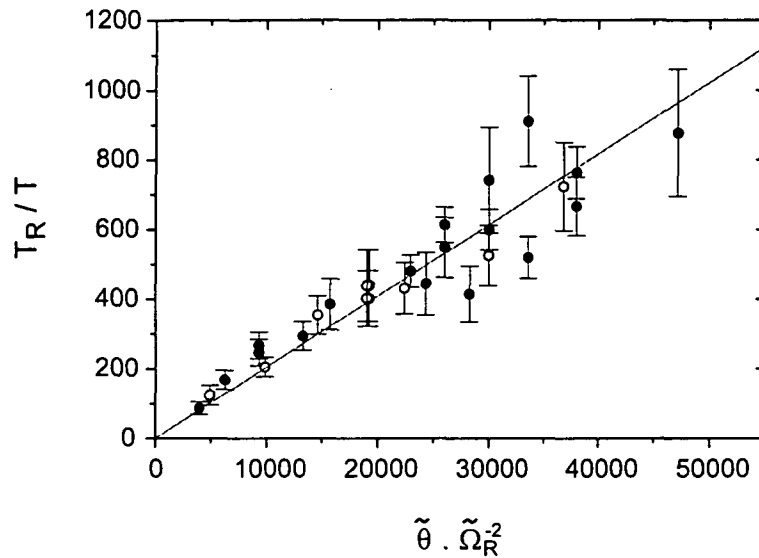


Figure V.11: Variation de la température déduite par un ajustement exponentiel de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  en fonction de  $\tilde{\theta}/\tilde{\Omega}_R^2$ . Les cercles pleins sont issus de la figure V.10.a ( $\tilde{\theta}$  variable et  $\tilde{\Omega}_R$  constant), les cercles vides proviennent de la figure V.10.b ( $\tilde{\Omega}_R$  variable et  $\tilde{\theta}$  constant). La courbe en trait plein est un ajustement linéaire dont la pente vaut 0.0204(8).

est excellent puisque nous trouvons effectivement que  $T_R/T$  varie linéairement en fonction de  $\theta/\Omega_R^2$ . Néanmoins nous voudrions aller plus loin dans l'analyse des données et faire une comparaison quantitative entre la théorie et l'expérience. Il serait intéressant en particulier de savoir si la valeur que nous avons trouvée pour le facteur numérique  $A$  correspond à la valeur théorique. Le problème devient alors beaucoup plus compliqué. Si un raisonnement élémentaire permet d'aboutir simplement à l'expression (V.44), le calcul de la valeur exacte de  $A$  s'avère complexe. Nous verrons dans le chapitre suivant comment établir la loi exacte de variation de la température à partir de la détermination analytique de la distribution d'impulsions. Ici nous utilisons une approche qui a été développée et décrite en grands détails dans la thèse de doctorat de F. Bardou [78], la simulation Monte-Carlo du refroidissement VSCPT.

#### V.4.2 Comparaison quantitative avec les résultats de la simulation Monte-Carlo quantique par la fonction délai.

Les méthodes de simulation Monte-Carlo sont utilisées dans des domaines très divers de la physique qui ont pour point commun de faire intervenir des processus stochastiques c'est-à-dire non déterministes. Elles sont donc bien adaptées à la modélisation du refroidissement VSCPT puisque celui-ci fait se succéder des phases d'évolution hamiltonienne (et donc déterministes) séparées par des émissions spontanées décrites comme des sauts quantiques (processus stochastiques). Comme nous l'avons expliqué dans le chapitre II, la durée des phases d'évolution cohérente varie considérablement selon l'impulsion atomique. A grand  $p$ , le taux de fluorescence est important et le délai entre deux émissions spontanées successives est très court. Au contraire lorsque  $p$  est proche de 0, l'effet d'interférence quantique à l'origine des états noirs découple l'atome de la lumière et le délai entre deux émissions spontanées successives est beaucoup plus long, tendant vers l'infini quand  $p$  tend vers 0. Pour décrire ces processus de "fluorescence intermittente", C. Cohen-Tannoudji et J. Dalibard ont introduit un outil très puissant, la "fonction délai" [43, 44], simplement définie comme la distribution de probabilité du délai entre deux émissions spontanées successives. Cette distribution peut être calculée exactement et se met généralement sous la forme du module au carré d'une somme d'exponentielles complexes. Un simple tirage aléatoire permet alors de déterminer, lorsqu'un photon spontané vient d'être émis, à quelle date sera émis le prochain photon.

L'algorithme de Monte-Carlo quantique [42, 78] peut alors se résumer de manière simplifiée par les étapes suivantes :

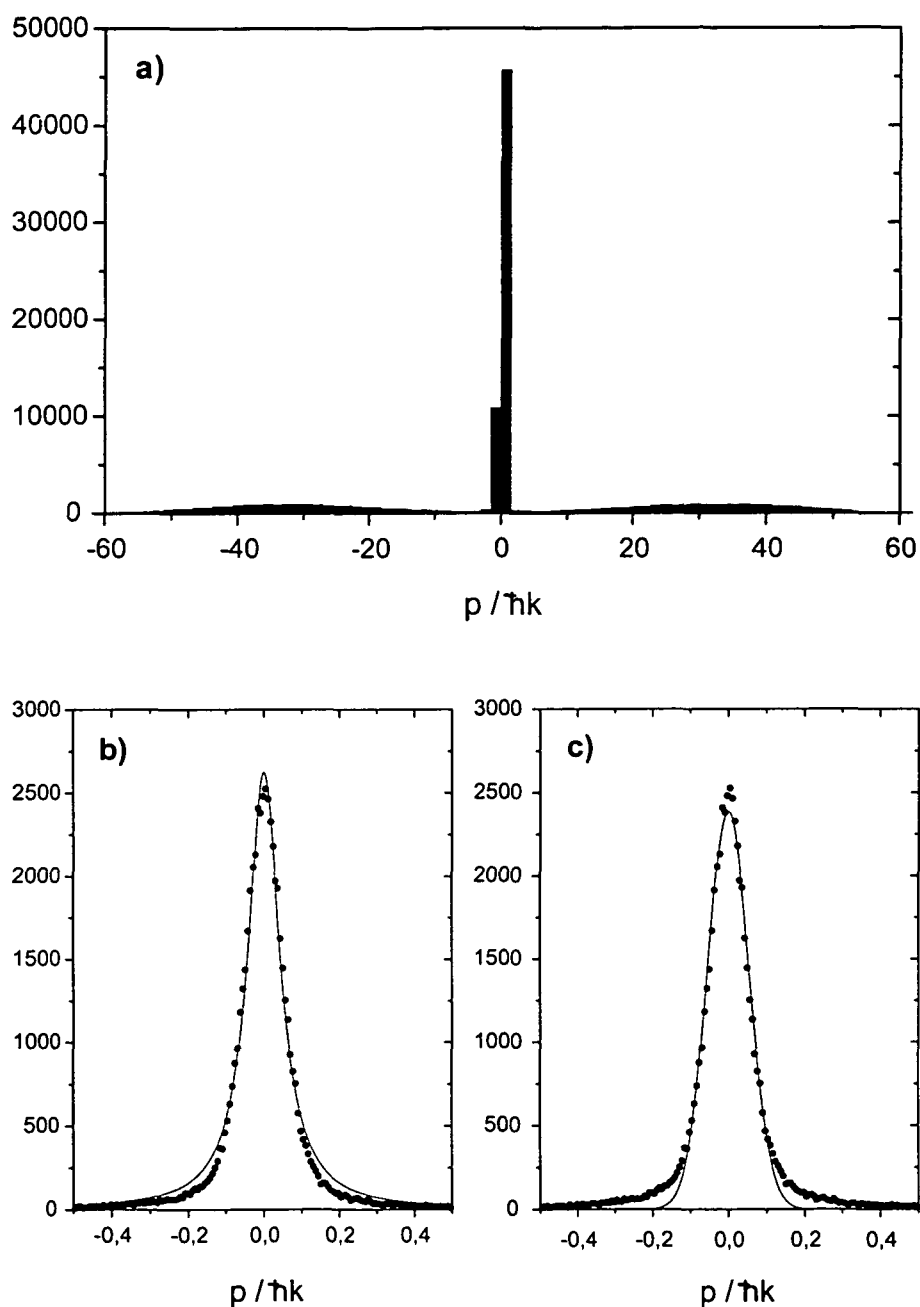


Figure V.12: Résultats d'une simulation QMC. La figure (a) présente la distribution de quasi-impulsion  $p/\hbar k$  après une phase VSCPT de durée 1.5 ms ( $\delta = 0$ ,  $\Omega_R = 0.72 \Gamma$ ). Environ la moitié des atomes s'est accumulée dans un pic central très étroit. L'autre moitié a diffusé et s'est répartie dans deux structures très larges au voisinage de  $30\hbar k$ . Les figures (b) et (c) présentent un agrandissement du pic central et un ajustement par une lorentzienne (b) ou par une gaussienne (c).

1. Tirage aléatoire de l'état initial de l'atome à  $t = 0$  (état interne et impulsion).
2. Calcul de la fonction délai et tirage aléatoire du délai  $\tau_i$  jusqu'à la prochaine émission spontanée.
3. Calcul de l'état atomique à l'instant  $t + \tau_i^-$  issu de l'évolution hamiltonienne à partir de l'état atomique à l'instant  $t$ .
4. Tirage aléatoire de la direction et de la polarisation du photon émis spontanément.
5. Détermination du nouvel état atomique à l'instant  $t + \tau_i^+$  juste après l'émission spontanée (saut quantique).
6. Retour au point 2

Nous ne rentrons pas ici dans le détail de la réalisation de cet algorithme ni dans les multiples vérifications dont il a fait l'objet. Le lecteur intéressé par ces aspects se reportera à [78]. Nous avons simplement utilisé ce programme pour déterminer la distribution d'impulsion finale des atomes après une durée d'interaction  $\theta$ . Après tirage aléatoire de l'état initial, l'algorithme est itéré tant que  $t < \theta$  puis, à la fin de l'évolution, la quasi-impulsion  $p$  de l'atome est stockée dans un fichier. Toutes les simulations de cette thèse sont présentées sous forme d'histogrammes de la quasi-impulsion en unité de recul  $p/\hbar k$  correspondant à 100 000 réalisations. Le nombre de tirages est plus élevé et par suite la statistique du résultat meilleure que dans [78] afin de pouvoir analyser précisément la forme de la distribution d'impulsion.

La figure V.12 représente le résultat d'une telle simulation pour les paramètres suivants :

$$\delta = 0, \quad \tilde{\theta} = 15000 \quad \text{et} \quad \tilde{\Omega}_R = 0.72 \quad (\text{V.49})$$

La figure V.12.a montre qu'une partie des atomes (environ la moitié) s'est accumulée autour de  $p = 0$ , dans un pic central très étroit tandis que le reste a diffusé à grand  $p$  et s'est réparti dans des structures très larges, centrées aux alentours de  $30\hbar k$ , du fait de la sortie de résonance par effet Doppler (cf. paragraphe II.2.2.2).

Pour déterminer la température des atomes nous réalisons un histogramme avec un pas beaucoup plus fin dans la région comprise entre  $-\hbar k/2$  et  $+\hbar k/2$  (figure V.12.b et c). La température est calculée comme d'habitude à partir de la largeur  $\delta p$  à  $1/\sqrt{e}$  du maximum. :

$$\frac{T}{T_R} = \left( \frac{\delta p}{\hbar k} \right)^2 \quad (\text{V.50})$$

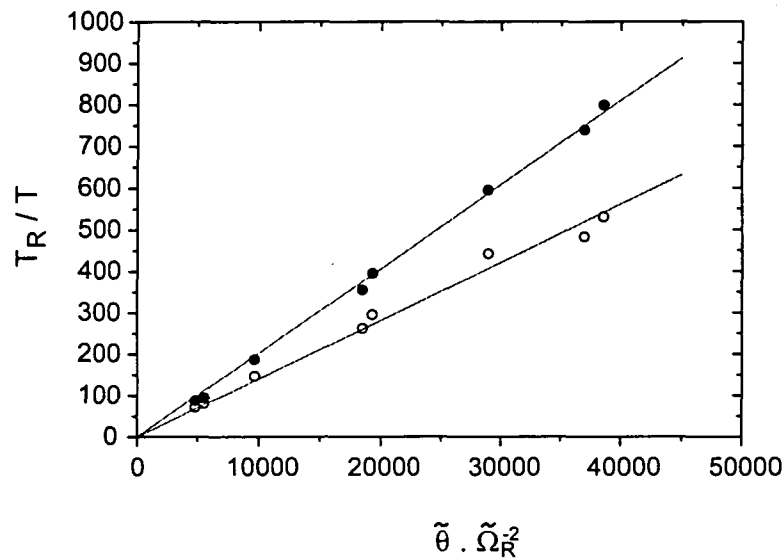


Figure V.13: Résultats des simulations QMC. La température est extraite de la distribution d'impulsion obtenue par simulation Monte-Carlo pour différentes valeurs des paramètres de refroidissement  $\tilde{\theta}$  et  $\tilde{\Omega}_R$ . Le désaccord est nul ( $\delta = 0$ ). On représente l'inverse de la température en unités de recul en fonction du paramètre sans dimension  $\tilde{\theta} \tilde{\Omega}_R^2$ . Les ronds vides sont les valeurs obtenues par mesure directe de la largeur  $\delta p$  à  $e^{-1/2}$  c'est-à-dire sans aucune hypothèse sur la forme analytique de la distribution d'impulsion. Les ronds pleins représentent les valeurs déduites d'un ajustement lorentzien. Dans les deux cas, la courbe en trait plein est une interpolation linéaire des résultats (voir texte). Dans le cas du dépouillement lorentzien la pente de cette droite correspond parfaitement au résultat expérimental.

Comme le montre la figure V.12.c la distribution n'est pas correctement ajustée par un profil gaussien, qui reproduit assez bien le pic central mais dont les ailes décroissent beaucoup trop vite. L'ajustement par un profil lorentzien (figure V.12.c) décrit mieux la lente décroissance des ailes et confirme ce que nous avons évoqué plusieurs fois précédemment à savoir que la distribution d'impulsion est plus proche d'une lorentzienne que d'une gaussienne. Il persiste néanmoins des écarts à la lorentzienne dont nous ne pouvons rendre compte maintenant mais qui seront expliqués plus loin dans la thèse.

Nous disposerons, au chapitre suivant, des outils pour analyser de manière fine la forme de cette raie. Pour l'instant nous sommes surtout intéressés à en extraire une valeur de la température et nous déduisons celle-ci soit de l'ajustement lorentzien<sup>5</sup>, soit par extrapolation directe de  $\delta p$  à  $1/\sqrt{e}$  du maximum sans ajustement. Les valeurs trouvées par ces deux méthodes diffèrent du fait que l'ajustement lorentzien n'est qu'une approximation de la vraie distribution. Plus précisément, l'ajustement lorentzien fournit une valeur de  $\delta p$  systématiquement plus petite que la valeur mesurée directement. Ceci se comprend en regardant la figure V.12.b qui montre que la lorentzienne qui ajuste au mieux les données est un peu plus étroite et un peu plus haute que la distribution simulée. L'écart sur la valeur de  $\delta p$  est d'environ 15% soit une différence de l'ordre de 30 % sur les températures.

La figure V.13 présente la température ainsi déterminée pour différentes valeurs du temps d'interaction et de la pulsation de Rabi. Comme expliqué ci-dessus la température extraite de l'ajustement lorentzien est plus basse que celle déterminée directement. Dans les deux cas, l'inverse de la température  $T_R/T$  varie bien linéairement avec  $\tilde{\theta}/\tilde{\Omega}_R^2$  comme le montrent les ajustements linéaires représentés par les droites en trait plein. Pour les valeurs déterminées directement on trouve :

$$\frac{T_R}{T} = 1.40(3)10^{-2} \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad \text{soit} \quad A = 1.28(3) \quad (\text{V.51})$$

Pour les valeurs issues de l'ajustement lorentzien, on obtient :

$$\frac{T_R}{T} = 2.03(2)10^{-2} \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad \text{soit} \quad A = 1.86(2) \quad (\text{V.52})$$

L'écart entre les deux valeurs du préfacteur  $A$  est de l'ordre de 30% conformément à la discussion précédente. Nous verrons dans le chapitre suivant que les écarts que nous constatons entre la vraie distribution d'impulsion et une lorentzienne s'expliquent parfaitement à partir de la forme analytique de  $G(p)$  telle qu'elle est calculée dans le modèle statistique.

<sup>5</sup>Rappelons que pour une lorentzienne  $\delta p = 0.805 \times \delta p_L$ .

Pour revenir enfin au sujet de ce paragraphe, à savoir la comparaison entre les simulations MCQ et les résultats expérimentaux, il convient de se rappeler que les valeurs expérimentales de température sont déduites d'un ajustement exponentiel de la fonction d'autocorrélation spatiale. Cette analyse des données fait donc l'hypothèse d'une distribution d'impulsion lorentzienne. On doit donc comparer la valeur expérimentale du préfacteur  $A_{exp}$  avec la valeur déduite des courbes simulées par MCQ et dépouillées par une lorentzienne. L'accord est excellent puisque ces deux valeurs sont respectivement 1.87(7) et 1.86(2). Ceci démontre la validité de la méthode qui consiste à mesurer la température à partir de la fonction d'autocorrélation spatiale. En revanche, l'hypothèse que la forme de raie est lorentzienne conduit à une erreur systématique sur la valeur absolue de la température. Pour évaluer celle-ci précisément, il faut multiplier la valeur expérimentale (qui provient d'un ajustement exponentiel) par un facteur correspondant au rapport des pentes des deux droites sur la figure V.13 et qui vaut  $1.40/2.03 = 0.69$ . Ainsi lorsque nous obtenons une valeur de  $T_R/900$  (valeur la plus froide mesurée), ceci correspond à une température cinétique de  $T_R/630$ . Ce problème se résoudra au chapitre suivant quand nous disposerons de la vraie forme de la distribution d'impulsion et qu'il ne sera alors plus nécessaire de recourir à une approximation lorentzienne.

En conclusion nous avons ici réalisé la première des trois comparaisons qui constituent le point central de cette thèse, la confrontation des résultats expérimentaux et des simulations du refroidissement VSCPT par MCQ. L'accord entre les deux est excellent et confirme la validité de notre méthode de mesure de la température. Néanmoins l'analyse des distributions d'impulsion simulées nous a montré que la lorentzienne n'en était qu'une approximation et que par conséquent la température déduite d'un ajustement exponentiel de la fonction d'autocorrélation spatiale était entachée d'une erreur systématique. Dans le chapitre suivant nous allons montrer qu'un modèle théorique du refroidissement VSCPT basé sur les statistiques de Lévy permet de trouver une forme analytique de la distribution d'impulsion et d'expliquer ces écarts. Nous disposerons alors de trois éléments : les résultats expérimentaux, ceux des simulations Monte Carlo et ceux du modèle statistique. Puisque la comparaison simulations/expériences a déjà été menée (avec succès) dans ce chapitre, il nous restera à confronter le modèle statistique d'une part aux simulations MCQ et d'autre part aux données expérimentales.



# Chapitre VI

## Etude fine de la forme de raie

### VI.1 Motivation et but de ce chapitre

Dans le chapitre précédent, nous avons présenté les résultats expérimentaux de la nouvelle méthode que nous avons mise au point pour mesurer la température. Celle-ci est extraite de la fonction d'autocorrélation spatiale des paquets d'ondes atomiques en supposant que la distribution d'impulsion des atomes est une lorentzienne. Nous avons pu ainsi étudier précisément comment varie la température avec les paramètres du refroidissement et trouver un très bon accord avec les simulations du VSCPT par Monte-Carlo quantique (MCQ). Cependant, les résultats des simulations indiquent que l'hypothèse selon laquelle la distribution d'impulsion  $G(p)$  a un profil lorentzien n'est pas tout-à-fait correcte et entraîne une erreur systématique sur la valeur absolue de la température mesurée à partir d'un ajustement exponentiel de la fonction d'autocorrélation spatiale. Ceci pose la question de la véritable forme de raie.

Depuis la découverte du refroidissement par résonances noires en 1988, de nombreuses approches théoriques ont été successivement développées pour décrire ce processus : résolution des équations de Bloch généralisées [23], simulation Monte-Carlo quantique utilisant la fonction délai [42] et plus récemment description par les statistiques de Lévy [48, 78]. Toutes ces méthodes font apparaître, plus ou moins directement, certaines propriétés comme le caractère auto-similaire de la marche au hasard, l'absence d'état stationnaire du processus ou la forme non gaussienne de la distribution finale d'impulsion, qui font du VSCPT une méthode à part dans le domaine du refroidissement laser. Jusqu'à présent, bien que de très nombreux aspects qualitatifs du VSCPT aient été vérifiés expérimentalement, une comparaison quantitative précise entre prédictions théoriques et résultats expérimentaux n'avait jamais été entreprise. Nous sommes ici en mesure de mener

cette confrontation théorie-expérience sur un plan quantitatif, le point clé de cette analyse étant la nouvelle méthode de mesure de la distribution d'impulsions dont la précision n'avait jamais été atteinte auparavant.

Nous avons déjà commencé cette comparaison dans le chapitre précédent en montrant qu'il existe un accord excellent entre les expériences et les simulations MCQ en ce qui concerne la température. Cette comparaison ne teste cependant que la mesure de la largeur de la distribution d'impulsion  $G(p)$  et non la forme complète de celle-ci. Dans ce chapitre nous franchissons une étape supplémentaire en examinant de plus près cette distribution grâce à l'analyse précise de la forme de sa transformée de Fourier, la fonction d'autocorrélation spatiale, que nous mesurons expérimentalement. Pour cela nous avons besoin d'établir une expression analytique de  $G(p)$  ce que seule permet l'approche statistique du VSCPT par les lois de Lévy. Après avoir décrit ce modèle, nous en donnerons rapidement quelques résultats essentiels en évitant la plupart des calculs et en renvoyant pour cela aux références existantes. Nous décrirons par contre en détail à partir de ces résultats de base, la manière dont nous calculons la distribution d'impulsion, les résultats de ce calcul et l'interprétation de la forme de  $G(p)$ . Nous verrons que des aspects du VSCPT tels que l'auto-similarité ou la non ergodicité ont des signatures caractéristiques sur  $G(p)$ . Enfin après avoir validé ce modèle en le confrontant aux résultats des simulations MCQ, nous verrons qu'il est possible de retrouver ces éléments caractéristiques dans les signaux expérimentaux.

## VI.2 Présentation du modèle

Le refroidissement VSCPT repose sur une marche aléatoire sélective en impulsion au cours de laquelle les atomes s'accumulent progressivement dans un intervalle de plus en plus étroit autour de  $p = 0$ . Ce processus est essentiellement quantique puisque l'annulation du taux de fluorescence des atomes au voisinage immédiat de  $p = 0$  repose sur un effet d'interférence quantique entre plusieurs amplitudes de transition. Néanmoins le fait que l'élément essentiel de l'évolution des atomes soit une marche au hasard dans l'espace des impulsions ouvre la voie, moyennant certaines simplifications, à un traitement statistique purement classique.

### VI.2.1 Cadre général du modèle

De manière générale l'atome est décrit à chaque instant par une fonction d'onde qui dépend de son état interne et de son état externe, en l'occurrence l'impulsion. Le modèle que nous présentons ici ne décrit que l'évolution de l'impulsion. Il est donc une restriction du problème général mais permet en revanche de remplacer un problème essentiellement quantique où en particulier les degrés de liberté internes et externes de l'atome sont fortement intriqués, par un problème de diffusion classique.

Comme nous l'avons déjà expliqué précédemment, l'évolution de l'atome est globalement stochastique. Elle est en effet constituée de phases hamiltoniennes au cours desquelles l'atome évolue de manière déterministe à l'intérieur d'une multiplicité  $\mathcal{F}(p)$  donnée, séparées par des sauts quantiques décrivant les processus d'émission spontanée. La quasi-impulsion  $p$ , qui n'est autre que l'impulsion totale du système {atome+champ}, se conserve au cours d'une phase hamiltonienne et change aléatoirement lors de chaque émission spontanée. C'est donc une variable aléatoire pertinente pour décrire l'évolution du système dans l'espace des impulsions. L'évolution complète de l'atome, qui est une marche au hasard de la fonction d'onde dans un espace de Hilbert, se réduit ainsi, si on ne s'intéresse qu'à l'évolution de l'impulsion atomique, à une marche au hasard de la variable  $p$ . Ceci n'est donc pas une approximation mais une restriction du problème.

La grandeur fondamentale dont nous avons besoin pour décrire l'évolution de la variable  $p$  est le taux de fluorescence  $R(p)$  dont l'inverse,  $\tau(p) = 1/R(p)$ , est simplement le temps qui sépare deux émissions spontanées successives. La distribution de probabilité de ce temps est connue sous le nom de **fonction délai** (delay function) ou de **distribution de temps d'attente** (waiting time distribution) [43, 44]. On peut montrer que cette fonction est le taux de départ instantané de la multiplicité dans laquelle évolue l'atome juste après avoir émis un photon spontané, avant d'en émettre un nouveau. Elle peut alors être cal-

culée exactement (au moins en principe) en diagonalisant l'hamiltonien dans ce sous-espace et on trouve qu'elle se met simplement sous la forme du module au carré d'une somme d'exponentielles complexes dont les arguments sont reliés aux modes propres de désintégration du système.

Dans le cas du VSCPT  $\sigma_+/\sigma_-$  à une dimension, la multiplicité à 0 photon est la famille  $\mathcal{F}(p)$  qui est constituée des trois états  $\{|e_0, p\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle\}$  ou  $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$  selon la base choisie. La fonction délai correspondante contient alors six exponentielles différentes et peut être exprimée analytiquement. Cette expression exacte est cependant trop lourde pour pouvoir être utilisée telle quelle et on doit avoir recours à une approximation pour simplifier le problème. La simplification que nous introduisons est liée au comportement particulier des atomes au cours du refroidissement VSCPT. On sait en effet que du fait des processus d'interférence quantique au voisinage de  $p = 0$ , les atomes peuvent rester piégés pendant très longtemps dans des états d'impulsion  $p \simeq 0$ . Ceci se traduit par l'existence dans la fonction délai de constantes de temps très longues, tendant même vers l'infini lorsque  $p$  tend vers 0. Or ce sont justement ces constantes de temps très longues qui nous intéressent puisqu'elles correspondent aux durées de vie des états quasi-noirs dans lesquels les atomes s'accumulent progressivement. On simplifie alors le problème de manière drastique en ne conservant dans la fonction délai que ces constantes de temps très longues, tendant vers l'infini quand  $p$  tend vers zéro. C'est là l'hypothèse la plus forte du modèle et seule la confrontation finale des prédictions de celui-ci avec les simulations Monte Carlo (dans lesquelles la fonction délai est calculée numériquement sans approximation) permettra de savoir si elle est justifiée.

## VI.2.2 Taux de fluorescence et marche au hasard

Nous établissons ici l'expression du taux de fluorescence  $R(p)$  qui décrira dans la suite la diffusion des atomes dans l'espace des impulsions. Pour cela il convient de se placer dans la "bonne base" d'états, c'est-à-dire de choisir entre la base standard  $\{|e_0, p\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle\}$  et la base VSCPT  $\{|e_0, p\rangle, |\psi_C(p)\rangle, |\psi_{NC}(p)\rangle\}$ .

### Comportement à faible $p$

Lorsque  $p \rightarrow 0$ , le couplage motionnel entre les états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  tend vers 0, et il est donc intéressant de raisonner dans la base VSCPT car elle fait apparaître clairement les constantes de temps du problème. Juste après une émission spontanée qui le fait tomber dans la famille  $\mathcal{F}(p)$ , un atome a la même probabilité 1/2 d'être dans  $|\psi_C(p)\rangle$  ou dans  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . Dans le régime perturbatif où l'intensité laser et la quasi-impulsion sont assez faibles ( $\Omega_R \ll \Gamma$ ,  $kp/M \ll \Omega_R^2/\Gamma$ ) ces deux états se contaminent peu et ont des largeurs (et donc des durées

de vie) bien définies qui valent respectivement :

$$\Gamma'_c = \frac{\Omega_R^2/4}{\delta_R^2 + \Gamma^2/4} \Gamma \quad (\text{VI.1})$$

$$\Gamma'_{NC}(p) = \left( \frac{2kp}{M\Omega_R} \right)^2 \Gamma \quad (\text{VI.2})$$

L'évolution ultérieure est alors caractérisée par les trois constantes de temps  $\Gamma^{-1}$ ,  $\Gamma'_c{}^{-1}$  et  $\Gamma'_{NC}{}^{-1}(p)$  associées respectivement aux états  $|e_0, p\rangle$ ,  $|\psi_c(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . Lorsque  $p \rightarrow 0$ , la constante de temps  $\Gamma'_{NC}{}^{-1}(p)$  tend vers l'infini alors que  $\Gamma^{-1}$  et  $\Gamma'_c{}^{-1}$  restent constantes. Conformément à l'hypothèse introduite dans le paragraphe ci-dessus, on décrira donc la diffusion au voisinage de  $p = 0$  uniquement par le taux  $\Gamma'_{NC}$  :

$$\boxed{R(p \rightarrow 0) = \Gamma'_{NC}(p)} \quad (\text{VI.3})$$

### Comportement à grand p

Lorsque  $p \rightarrow \infty$ , le couplage motionnel est très fort entre  $|\psi_c(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et ces deux états sont complètement mélangés. Les expressions perturbatives ci-dessus ne sont plus valables et les "bons" états quantiques sont alors les états de la base standard  $|f_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$ , tous deux couplés à l'état excité  $|e_0, p\rangle$ . Le taux global d'excitation est alors donné par :

$$\Gamma' = \frac{1}{2}\Gamma'_- + \frac{1}{2}\Gamma'_+ \quad (\text{VI.4})$$

où les facteurs 1/2 correspondent à la probabilité de trouver l'atome dans  $|f_-, p - \hbar k\rangle$  ou  $|f_+, p + \hbar k\rangle$ . En traitant le couplage laser perturbativement et en négligeant la sortie de résonance due à l'effet Doppler, on trouve simplement :

$$\Gamma'_- = \Gamma'_+ = \frac{\Gamma'_c}{2} \quad (\text{VI.5})$$

où  $\Gamma'_c$  est toujours donné par (VI.1). On décrira donc la diffusion à grand  $p$  par :

$$\boxed{R(p \rightarrow \infty) = \frac{\Gamma'_c}{2}} \quad (\text{VI.6})$$

Le comportement de  $R(p)$  aux valeurs intermédiaires de  $p$  est plus difficile à établir et nécessiterait de calculer exactement ou numériquement la fonction délai en fonction de  $p$ . Pour conserver un modèle entièrement analytique, nous modélisons

simplement le taux de saut en raccordant directement les deux expressions (VI.3) et (VI.6) par continuité. Nous introduisons pour cela le point de coordonnées  $(p_0, 1/\tau_0)$  où se coupent les prolongements des deux expressions asymptotiques (voir figure VI.1). Le taux de saut est alors donné par :

$$R(p) = \begin{cases} \frac{1}{\tau_0} \left(\frac{p}{p_0}\right)^2 & \text{si } p < p_0 \\ \frac{1}{\tau_0} & \text{si } p \geq p_0 \end{cases} \quad (\text{VI.7})$$

avec :

$$\tau_0 = \frac{2 \delta_R^2 + \Gamma^2/4}{\Gamma \Omega_R^2/4} \quad (\text{VI.8})$$

$$p_0 = \frac{M\Omega_R^2}{2\sqrt{2}k\Gamma} \quad (\text{VI.9})$$

Sur la figure VI.1, nous avons supposé que le taux de saut pour  $p > p_0$  était constant et c'est ce que nous supposerons également par la suite. Ce faisant, nous négligeons la sortie de résonance due à l'effet Doppler à grand  $p$ . Cette hypothèse n'est valable que lorsque le temps d'interaction avec la lumière est assez court pour que les atomes n'aient pas le temps d'explorer les régions  $p > p_D$  où l'impulsion Doppler est définie par :

$$kp_D/M = \Gamma/2 \quad (\text{VI.10})$$

En prenant le désaccord nul (situation expérimentale habituelle pour le VSCPT 1D  $\sigma_+/\sigma_-$ ),  $\tau_0$  est donc une constante qui vaut :

$$\tau_0 = \frac{2\Gamma}{\Omega_R^2} \quad (\text{VI.11})$$

Dans notre modèle, le taux de fluorescence  $R(p)$  est donc quadratique sur  $[0, p_0]$  puis constant sur  $[p_0, +\infty[$ . Nous donnons également, car nous en aurons besoin par la suite, l'expression de  $\tau_0$  et  $p_0$  en unités réduites :

$$\tilde{\tau}_0 = \frac{\tau_0}{\Gamma^{-1}} = \frac{2}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad (\text{VI.12})$$

$$\tilde{p}_0 = \frac{p_0}{\hbar k} = \frac{1}{4\sqrt{2}} \cdot \frac{\hbar\Gamma}{E_R} \cdot \tilde{\Omega}_R^2 \quad (\text{VI.13})$$

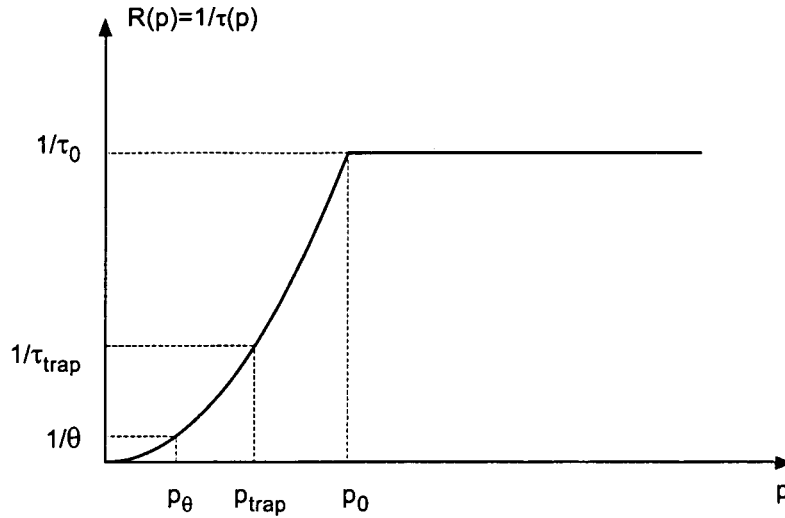


Figure VI.1: Variation du taux de saut  $R(p)$  en fonction de la quasi-impulsion  $p$  pour le modèle décrit dans le texte. Quand  $0 < p < p_0$ ,  $R(p) \sim p^2$  et quand  $p > p_0$ ,  $R(p) = cte$ . Le piège en impulsion (états quasi-noirs où s'accumulent les atomes) est défini par  $p \leq p_{trap}$ .

A partir du taux de saut, on modélise alors la diffusion en introduisant une valeur caractéristique  $p_{trap}$  qui sépare l'espace des impulsions à 1D en deux régions (figure VI.1). Pour  $p < p_{trap}$ , les atomes sont considérés comme piégés, tandis que pour  $p > p_{trap}$ , les atomes sont hors du piège. La valeur de  $p_{trap}$  est en principe arbitraire et vérifie seulement  $p_{trap} < p_0$  si bien que le taux de saut dans le piège est quadratique. Nous verrons d'ailleurs que le résultat final, en particulier la distribution d'impulsions des atomes, est indépendant de  $p_{trap}$ .

Dans le piège, chaque valeur  $p$  de la quasi-impulsion est associée à un temps caractéristique défini par :

$$\tau(p) = \frac{1}{R(p)} \quad (\text{VI.14})$$

Ce temps correspond approximativement (ce point sera précisé plus loin) au temps

que mettra l'atome de quasi-impulsion  $p$  à effectuer son prochain saut. On peut donc écrire les trois relations suivantes :

$$\tau(p) = \tau_0 \left( \frac{p_0}{p} \right)^2 \quad (\text{VI.15})$$

$$\theta = \tau_0 \left( \frac{p_0}{p_\theta} \right)^2 \quad (\text{VI.16})$$

$$\tau_{trap} = \tau_0 \left( \frac{p_0}{p_{trap}} \right)^2 \quad (\text{VI.17})$$

où sont définies l'impulsion  $p_\theta$  et le temps caractéristique  $\tau_{trap}$  et d'où l'on déduit les égalités suivantes :

$$p_{trap} \cdot \sqrt{\tau_{trap}} = p \cdot \sqrt{\tau(p)} = p_\theta \cdot \sqrt{\theta} = p_0 \sqrt{\tau_0} \quad (\text{VI.18})$$

$$\frac{\theta}{\tau(p)} = \frac{p^2}{p_\theta^2} \quad (\text{VI.19})$$

Notons que  $p_\theta$  ainsi défini par  $\Gamma'_{NC}(p_\theta) = 1/\theta$  correspond à la largeur de la distribution finale d'impulsion  $\delta p$  dans l'estimation heuristique faite au chapitre II (cf formule (II.25)). Du point de vue de l'évolution de l'impulsion atomique, toute la physique du problème est maintenant contenue dans le modèle de diffusion décrit par le taux de saut  $R(p)$ . Nous sommes donc en mesure d'étudier la dynamique des atomes dans l'espace des impulsions avec comme objectif principal d'établir la distribution finale d'impulsion des atomes refroidis.



### VI.3 Marche au hasard dans l'espace des impulsions.

Au cours de leur marche au hasard, les atomes effectuent des cycles de fluorescence et donc des sauts d'amplitude aléatoire comprise entre  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$ . Après chaque saut, un atome peut être soit dans le piège ( $p < p_{trap}$ ), soit hors du piège ( $p > p_{trap}$ ). Il alterne donc des périodes de piégeage de durée  $\tau$  et des périodes de diffusion hors du piège de durée  $\hat{\tau}$  (figure VI.2).

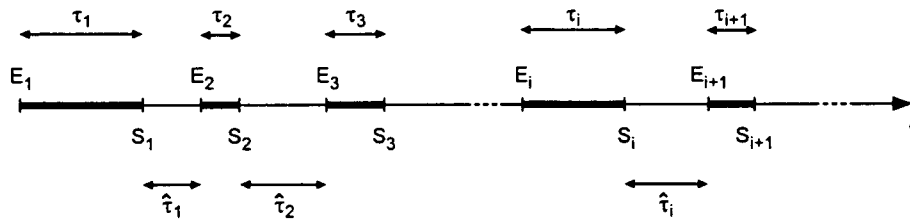


Figure VI.2: Evolution temporelle d'un atome pendant la phase de refroidissement VSCPT. L'atome alterne des phases de piégeage (segments gras) de durée  $\tau$  et des phases de diffusion hors du piège de durée  $\hat{\tau}$ . La durée qui sépare deux entrées consécutives dans le piège est décrite par la variable aléatoire  $\bar{\tau} = \tau + \hat{\tau}$ .

Notons que si l'atome sort du piège à l'instant  $t$ , il y reviendra à l'instant  $t + \hat{\tau}$ . Pour cette raison  $\hat{\tau}$  est appelé temps de premier retour (dans le piège). Du fait du caractère aléatoire de l'émission spontanée, les grandeurs  $\tau$  et  $\hat{\tau}$  sont des variables aléatoires et leurs distributions,  $P(\tau)$  et  $\hat{P}(\hat{\tau})$ , associées à la distribution de l'amplitude des sauts<sup>1</sup>, contiennent l'ensemble des informations permettant de décrire l'évolution de l'impulsion atomique au cours de la marche au hasard. Elles vont en particulier nous permettre de calculer la loi d'arrosage, c'est-à-dire la probabilité d'entrer dans le piège à l'instant  $t$ . Les calculs sont présentés en détail

<sup>1</sup>La forme exacte de cette distribution dépend du diagramme d'émission spontanée de la transition étudiée mais de simples arguments de symétrie montrent qu'elle doit avoir une moyenne nulle et une variance  $\Delta p^2 \propto \hbar^2 k^2$  ( $\Delta p^2 = \hbar^2 k^2/3$  pour un diagramme sphérique).

et de manière très générale et exhaustive dans [78]. Ici nous nous contentons de rappeler les principales étapes du calcul en nous limitant au cas du refroidissement VSCPT à 1D en polarisations  $\sigma_+/\sigma_-$ .

Nous verrons en particulier que les variables  $\tau$  et  $\hat{\tau}$  sont distribuées selon des lois larges dont la moyenne et la variance ne sont pas toujours définies. Lorsqu'on s'intéresse à des grandeurs telles que le temps total passé dans le piège ou hors du piège, on a alors à faire à des sommes de variables aléatoires indépendantes pour lesquelles le théorème de la limite centrale (TLC) habituel ne peut plus être appliqué et doit être remplacé par le théorème de Lévy et Gnedenko ou théorème de la limite centrale généralisée [27].

### VI.3.1 Analyse statistique de la marche au hasard

#### VI.3.1.1 Hypothèse supplémentaire

En plus des hypothèses générales données dans le paragraphe VI.1 de ce chapitre, nous faisons ici l'hypothèse supplémentaire :

$$p_{trap} \ll \hbar k \quad (\text{VI.20})$$

Ceci revient à ne considérer que des situations où la température des atomes est nettement inférieure à la température de recul. Cette hypothèse a deux conséquences importantes : d'une part, on pourra considérer qu'un atome qui entre dans le piège peut atteindre tous les points de celui-ci avec la même probabilité (arrosage uniforme) et d'autre part, un atome piégé qui effectue un saut sort forcément du piège.

#### VI.3.1.2 Entrées et sorties du piège

A l'intérieur du piège ( $p < p_{trap}$ ), le taux de saut, quadratique en  $p$ , est donné par (VI.7). La détermination de  $P(\tau)$  est très simple car, d'après l'hypothèse ci-dessus,  $\tau$  est simplement le temps qui s'écoule entre l'entrée de l'atome dans le piège et la prochaine émission spontanée (qui l'en fait obligatoirement sortir). Si on suppose que ce temps est lié à  $p$  de manière déterministe via  $\tau(p) = 1/R(p)$ , on montre alors que, lorsque  $\tau \rightarrow \infty$ , la distribution des temps de piégeage est donnée par la loi de puissance :

$$P(\tau) \underset{\tau \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{B}{\tau^{1+\mu}} \quad \text{avec} \quad B = \mu \tau_{trap}^\mu \quad (\text{VI.21})$$

où l'exposant caractéristique  $\mu$  dépend simplement de la dimensionnalité  $D$  (ici  $D=1$ ) et de la forme de  $R(p)$  à l'intérieur du piège (quadratique dans notre cas).

De manière générale on trouve  $\mu = D/\alpha$  avec  $R(p \rightarrow 0) \sim p^\alpha$ . Pour le cas présent on a :

$$\boxed{\mu = \frac{1}{2}} \quad (\text{VI.22})$$

A l'extérieur du piège, le taux de saut est constant et égal à  $1/\tau_0$  (on néglige l'effet de la variation de  $R(p)$  dans l'intervalle  $[p_{\text{trap}}, p_0]$ ). Le problème est plus compliqué que pour  $P(\tau)$  car l'atome peut faire un nombre quelconque de sauts hors du piège avant de revenir dans le piège. On doit également tenir compte de la distribution de l'amplitude de chaque saut puisque celle-ci est une variable aléatoire distribuée entre  $-\hbar k$  et  $+\hbar k$  avec une moyenne nulle et une variance  $\Delta p^2 \propto \hbar^2 k^2$ . Le calcul (p. V-6 de [58]) permet de trouver de nouveau une loi de puissance :

$$\boxed{\hat{P}(\hat{\tau}) \underset{\hat{\tau} \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{\hat{B}}{\hat{\tau}^{1+\hat{\mu}}} \quad \text{avec} \quad \hat{B} = \frac{\Delta p}{2p_{\text{trap}}} \sqrt{\frac{\tau_0}{2\pi}}} \quad (\text{VI.23})$$

où l'exposant  $\hat{\mu}$  dépend maintenant de la dimensionnalité et de la forme de  $R(p)$  hors du piège. On montre qu'il vaut<sup>2</sup> :

$$\boxed{\hat{\mu} = \frac{1}{2}} \quad (\text{VI.24})$$

Les distributions des variables  $\tau$  et  $\hat{\tau}$  ont donc des comportements asymptotiques en loi de puissance de la forme :

$$P(x) = x^{-(1+\mu)} \quad (\text{VI.25})$$

C'est cette dépendance asymptotique qui est responsable des caractéristiques particulières du refroidissement VSCPT. En effet l'exposant  $\mu$  prend alors des valeurs telles que les lois en  $x^{-(1+\mu)}$  ne se comportent plus comme des distributions de probabilité normales. Il est facile de vérifier en particulier que les deux premiers moments de ces lois, c'est-à-dire la moyenne  $\langle x \rangle$  et la variance  $\langle x^2 \rangle$  ne sont pas définies quel que soit  $\mu$ . Plus précisément, on doit distinguer trois cas selon la valeur de cet exposant :

<sup>2</sup>Dans le cas où on prend en compte l'effet de la sortie de résonance par effet Doppler, le taux de saut décroît quadratiquement aux grandes valeurs de  $p$ . Le calcul de  $\hat{P}(\hat{\tau})$  dans ce cas est présenté en détail dans [108] et mène à la même loi que (VI.23) avec  $\hat{\mu} = 1/4$  et  $\hat{B} = C \times \Delta p^{3/2} \tau_0^{1/4} / p_{\text{trap}} \sqrt{p_D}$  où  $p_D$  est l'impulsion Doppler définie en (VI.10) et  $C$  un préfacteur numérique de l'ordre de l'unité.

- si  $\mu > 2$ ,  $\langle x \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle$  sont tous deux définis
- si  $1 < \mu \leq 2$ ,  $\langle x \rangle$  est encore défini mais  $\langle x^2 \rangle$  tend maintenant vers  $+\infty$
- si  $0 < \mu \leq 1$ , les deux premiers moments  $\langle x \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle$  tendent vers  $+\infty$

Lorsque  $0 < \mu \leq 2$  (ce qui est notre cas), la loi  $1/x^{1+\mu}$  converge donc trop lentement pour que ses deux premiers moments aient des valeurs finies, d'où le nom de "lois larges" données à ces distributions. Une grande partie de la physique des résonances noires repose sur cette décroissance très lente des distributions des temps de piégeage et des temps de premier retour. Concrètement cette caractéristique signifie que l'atome a une probabilité importante de rester piégé pendant très longtemps, ce qui est la situation que nous recherchons, mais également de diffuser pendant très longtemps à l'extérieur du piège, ce qui est très défavorable au refroidissement. L'efficacité du remplissage du piège et donc du refroidissement dépend alors de la compétition entre ces deux processus et seule une analyse complète de la marche au hasard permet d'accéder aux deux grandeurs qui caractérisent le refroidissement, à savoir la population piégée et la distribution d'impulsion.

Notre but ici n'est pas de présenter la description complète de la marche au hasard. Nous sommes surtout intéressés à calculer la distribution d'impulsion pour la comparer aux résultats expérimentaux et nous nous reporterons donc aussi souvent que nécessaire aux résultats de [58, ?]. Néanmoins, pour illustrer et faire bien comprendre l'aspect anormal de la diffusion, nous présentons rapidement le calcul de deux grandeurs importantes, le temps total passé dans le piège  $T_N$  et le temps total passé hors du piège  $\hat{T}_N$  après  $N$  sauts. Ces deux grandeurs sont simplement définies par :

$$T_N = \sum_{i=1}^N \tau_i \quad (\text{VI.26})$$

et :

$$\hat{T}_N = \sum_{i=1}^N \hat{\tau}_i \quad (\text{VI.27})$$

Les grandeurs  $\tau_i$  et  $\hat{\tau}_i$  étant des variables aléatoires indépendantes toutes distribuées selon la même loi  $P(\tau)$  ou  $\hat{P}(\hat{\tau})$ , on pourrait envisager de calculer les distributions de probabilités des sommes ci-dessus grâce au théorème de la limite centrale (voir annexe B). Ceci n'est cependant pas possible puisque, comme nous venons de le voir, la moyenne et la variance de ces distributions ne sont pas définies dans notre cas. En revanche, le cas  $0 < \mu \leq 2$  correspond au domaine d'application du théorème de Lévy et Gnedenko ou théorème de la limite centrale

généralisé (voir annexe B). Pour le cas  $\mu = 1/2$ , il nous faut introduire la variable normalisée :

$$Z_N = \frac{T_N}{N^{1/\mu}} \quad (\text{VI.28})$$

dont la distribution s'écrit d'après le TLGG :

$$P(Z_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} L_{\mu,B}(Z_N) \quad (\text{VI.29})$$

Dans cette expression,  $L_{\mu,B}(x)$  est une loi de Lévy dont le comportement asymptotique ne dépend que de  $\mu$ . En utilisant la relation :

$$P(T_N) = P(Z_N) \frac{dZ_N}{dT_N} \quad (\text{VI.30})$$

on trouve alors facilement :

$$\boxed{P(T_N) = \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu,B}\left(\frac{T_N}{N^{1/\mu}}\right)} \quad (\text{VI.31})$$

On obtient de la même façon :

$$\boxed{P(\hat{T}_N) = \frac{1}{N^{1/\hat{\mu}}} L_{\hat{\mu},\hat{B}}\left(\frac{\hat{T}_N}{N^{1/\hat{\mu}}}\right)} \quad (\text{VI.32})$$

Dans le cas  $0 < \mu < 1$ , les lois de Lévy  $L_{\mu,B}(x)$  apparaissant ci-dessus ont également un comportement asymptotique de la forme  $\sim 1/x^{1+\mu}$  et décroissent donc très lentement. Ceci a deux conséquences importantes qui distinguent clairement le régime de diffusion étudié ici d'un régime de diffusion normal où s'appliquerait le TLC :

- Premièrement, les "sommés de Lévy" telles que  $T_N$  (ou  $\hat{T}_N$ ) varient, lorsque  $N$  tend vers l'infini, selon :

$$T_N \sim N^{1/\mu} \quad (\text{VI.33})$$

ce qui explique que la variable normalisée (qui doit être indépendante de  $N$  lorsque celui-ci est très grand) soit  $Z_N = T_N/N^{1/\mu}$ . Ce comportement de la somme est très différent de ce qu'on obtiendrait si  $\tau$  avait une valeur moyenne définie, c'est-à-dire  $T_N \sim N\langle\tau\rangle$ . En particulier pour les valeurs de l'exposant  $0 < \mu < 1$  qui nous intéressent, les sommés de Lévy croissent beaucoup plus vite, ( $\sim N^2$  pour  $\mu = 1/2$ ,  $\sim N^4$  pour  $\mu = 1/4$ ), que ce que donnerait une diffusion normale ( $\sim N$ ).

- Deuxièmement, on peut montrer qu'une somme de Lévy est du même ordre de grandeur que son terme le plus grand. Il en résulte cette propriété importante que les phénomènes de diffusion faisant intervenir des distributions larges sont dominés par un très petit nombre de pas. C'est pourquoi ces processus sont généralement regroupés sous le terme de processus de diffusion anormale.

### VI.3.2 Loi d'arrosage

L'alternance des phases au cours desquelles l'atome est successivement à l'intérieur et à l'extérieur du piège est représentée schématiquement sur la figure VI.2. Au cours du temps, l'atome, supposé initialement (à  $t = 0$ ) dans le piège, effectue des cycles constitués d'une phase de piégeage de durée  $\tau_i$  suivie d'une phase hors du piège de durée  $\hat{\tau}_i$ . Le temps qui sépare deux entrées successives dans le piège est donc la variable aléatoire  $\bar{\tau} = \tau + \hat{\tau}$  dont la distribution est donnée par le produit de convolution :

$$\bar{P}(\bar{\tau}) = \bar{P}(\tau + \hat{\tau}) = P(\tau) * \hat{P}(\hat{\tau}) \quad (\text{VI.34})$$

Dans le cas où  $\mu = \hat{\mu}$ , on peut montrer (CCT-CF-p.VII.4) à partir de (VI.21) et (VI.23) que  $\bar{P}(\bar{\tau})$  a également un comportement asymptotique en loi de puissance :

$$\bar{P}(\bar{\tau}) \underset{\bar{\tau} \rightarrow \infty}{\simeq} \frac{B + \hat{B}}{\bar{\tau}^{1+\mu}} \quad (\text{VI.35})$$

Par ailleurs le temps total écoulé jusqu'à la Nième entrée vaut :

$$\bar{T}_N = \sum_{i=1}^N \bar{\tau}_i \quad (\text{VI.36})$$

La variable  $\bar{T}_N$  est donc une somme de variables aléatoires toutes décrites par la même distribution  $\bar{P}(\bar{\tau})$ , donnée en (VI.35). Un calcul analogue à celui présenté dans le paragraphe précédent permet alors de trouver la distribution de probabilité de la somme :

$$P(\bar{T}_N) = \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu, B+\hat{B}}\left(\frac{\bar{T}_N}{N^{1/\mu}}\right) \quad (\text{VI.37})$$

On définit la loi d'arrosage  $S(t)$  comme la probabilité que l'atome entre dans le piège entre les instants  $t$  et  $t + dt$  quel que soit le nombre de cycles entrée/sortie effectué précédemment. Par définition on a donc :

$$S(t) = p(t \leq \bar{T}_N \leq t + dt), \quad \forall N \in \mathbb{N}^* \quad (\text{VI.38})$$

soit encore :

$$S(t) = \sum_{N=1}^{\infty} S_N(t) \quad (\text{VI.39})$$

où  $S_N(t)$  est la probabilité que l'atome entre pour la Nième fois dans le piège entre les instants  $t$  et  $t + dt$  :

$$S_N(t) = P(\bar{T}_N = t) \quad (\text{VI.40})$$

D'après (VI.37), on a :

$$S_N(t) = \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu, B+\hat{B}}\left(\frac{t}{N^{1/\mu}}\right) \quad (\text{VI.41})$$

et par suite, en remplaçant dans (VI.39) la somme discrète par une intégrale :

$$S(t) = \int_1^{\infty} dN \frac{1}{N^{1/\mu}} L_{\mu, B+\hat{B}}\left(\frac{t}{N^{1/\mu}}\right) \quad (\text{VI.42})$$

L'intégrale apparaissant ci-dessus peut se calculer (ref CCT-CF-p.VI.10) et on trouve :

$$S(t) = \frac{\mu \sin(\pi\mu)}{\pi(B + \hat{B})} \cdot \frac{1}{t^{1-\mu}} \quad (\text{VI.43})$$

Enfin, à partir des expressions de  $B$  et  $\hat{B}$  données en (VI.21) et (VI.23), on montre facilement que :

$$\frac{\hat{B}}{B} = \frac{4}{\sqrt{3\pi}} \cdot \frac{E_R}{\hbar\Gamma} \cdot \frac{1}{\tilde{\Omega}_R^2} \simeq \frac{0.034}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad (\text{VI.44})$$

si bien que, pour des pulsations de Rabi de l'ordre de  $\Gamma$ , on a toujours  $\hat{B} \ll B$ . La loi d'arrosage peut donc finalement s'écrire :

$$\boxed{S(t) = \frac{\mu \sin(\pi\mu)}{\pi B} \cdot \frac{1}{t^{1-\mu}}} \quad (\text{VI.45})$$

La loi d'arrosage décroît au cours du temps selon  $t^{-1/2}$ . Il est intéressant de donner une interprétation physique de ce résultat. D'une part le processus menant à l'accumulation des atomes dans le piège n'est pas invariant par translation dans le temps, autrement dit le système vieillit. D'autre part le fait que l'arrosage soit de plus en plus faible signifie qu'il se produit de moins en moins d'événements. Ceci est directement relié au fait que plus le temps s'écoule, plus les atomes font l'expérience de temps de piégeage et de premier retour très longs, contribuant à limiter le réarrosage. Enfin le fait que la loi  $S(t)$  décroisse indéfiniment au cours du temps montre que le système ne peut jamais atteindre un état stationnaire. On voit ainsi commencer à apparaître une des caractéristiques importantes du refroidissement VSCPT, la non ergodicité, sur laquelle nous reviendrons plus loin.

## VI.4 Calcul de la distribution d'impulsion

### VI.4.1 Cas général

La distribution finale d'impulsion des atomes refroidis résulte de l'équilibre entre deux processus, le remplissage du piège et la sortie des atomes hors du piège. Pour qu'un atome soit dans le piège à la fin de la période de refroidissement de durée  $\theta$ , il faut qu'il y soit entré à un instant  $t$  tel que :

$$0 \leq t \leq \theta \quad (\text{VI.46})$$

et qu'il y reste pendant une durée  $t_p$  telle que :

$$t_p \geq \theta - t \quad (\text{VI.47})$$

**Entrée dans le piège.** Le remplissage du piège dépend à la fois de la probabilité  $S(t)$  qu'un atome entre dans le piège à l'instant  $t$  et de la probabilité  $\Pi(p)$  qu'il y entre avec la quasi-impulsion  $p$ . La probabilité qu'un atome rentre dans le piège entre les instants  $t$  et  $t + dt$ , avec une quasi-impulsion comprise entre  $p$  et  $p + dp$  s'écrit donc :

$$S(t)\Pi(p)dpdt \quad (\text{VI.48})$$

Pour le refroidissement VSCPT 1D en configuration  $\sigma_+/\sigma_-$ , on a  $\mu = 1/2$ . Avec l'aide de (VI.21), la formule (VI.45) devient alors :

$$S(t) = \frac{1}{\pi\sqrt{\tau_{trap}}}t^{-1/2} \quad (\text{VI.49})$$

Par ailleurs si on admet l'hypothèse d'arrosage uniforme du piège (de largeur  $2p_{trap}$ ), on peut écrire :

$$\Pi(p) = \frac{1}{2p_{trap}} \quad (\text{VI.50})$$

**Sortie du piège.** La probabilité de sortir du piège dépend de l'impulsion ou plus exactement de la quasi-impulsion  $p$ . En effet, plus  $p$  est proche de 0, plus le taux de saut  $R(p)$  est faible et donc plus le temps au bout duquel l'atome ressortira du piège peut être long. Nous décrivons ce processus de sortie du piège soit par un modèle déterministe, soit par un modèle probabiliste.

- Dans le modèle déterministe on suppose que l'atome entré à l'instant  $t$  dans le piège avec la quasi-impulsion  $p$  en sort à un instant parfaitement déterminé  $t + \tau(p)$  où  $\tau(p)$  est simplement donné par :

$$\tau(p) = \frac{1}{R(p)} \quad (\text{VI.51})$$



ce qui, compte tenu de l'expression (VI.7), s'écrit aussi :

$$\tau(p) = \tau_0 \left( \frac{p_0}{p} \right)^2 \quad (\text{VI.52})$$

La probabilité qu'un atome entré dans le piège à l'instant  $t$  avec la quasi-impulsion  $p$  y soit encore à la fin de la phase de refroidissement vaut donc 1 si  $t + \tau(p) > \theta$  et 0 si  $t + \tau(p) < \theta$ . On peut donc l'écrire :

$$\Psi(p, t) = Y(t + \tau(p) - \theta) \quad (\text{VI.53})$$

où  $Y(x)$  est la fonction de Heaviside définie par :

$$Y(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 & \text{si } x > 0 \end{cases} \quad (\text{VI.54})$$

- Le modèle probabiliste est plus réaliste car il suppose que la probabilité qu'un atome reste dans le piège décroît exponentiellement avec une constante de temps égale à  $\tau(p)$ . Ainsi la probabilité qu'un atome entré à l'instant  $t$  avec l'impulsion  $p$ , soit encore piégé à la fin du refroidissement s'écrit :

$$\Psi(p, t) = e^{-(\theta-t)/\tau(p)} \quad (\text{VI.55})$$

**Distribution d'impulsion.** Finalement, la probabilité qu'un atome entre dans le piège à un instant compris entre  $t$  et  $t + dt$ , avec une impulsion comprise entre  $p$  et  $p + dp$ , et reste piégé jusqu'à la fin de la phase de refroidissement s'écrit :

$$S(t)\Pi(p)\Psi(p, t)dpdt \quad (\text{VI.56})$$

La distribution finale d'impulsion des atomes piégés s'en déduit immédiatement :

$$G(p) = \int_0^\theta S(t)\Pi(p)\Psi(p, t)dt \quad (\text{VI.57})$$

## VI.4.2 Modèle déterministe

### VI.4.2.1 Expression analytique

En reportant (VI.49), (VI.50) et (VI.53) dans (VI.57), on a :

$$G(p) = \frac{1}{2\pi p_{\text{trap}} \sqrt{\tau_{\text{trap}}}} \int_0^\theta t^{-1/2} [Y(t + \tau(p) - \theta)] dt \quad (\text{VI.58})$$

Pour calculer l'intégrale ci-dessus nous distinguons alors deux cas :

- $p < p_\theta$

On a alors d'après les égalités (VI.15) et (VI.16) :

$$\begin{aligned} \tau(p) &> \theta \\ \Rightarrow \tau(p) - \theta + t &> 0, \quad \forall t \in [0, +\infty[ \\ \Rightarrow \Psi(t + \tau(p) - \theta) &= 1, \quad \forall t \in [0, +\infty[ \end{aligned} \quad (\text{VI.59})$$

L'intégrale de (VI.58) se calcule facilement et on obtient :

$$\mathcal{P}(p < p_\theta) = \frac{\sqrt{\theta}}{\pi p_{\text{trap}} \sqrt{\tau_{\text{trap}}}} \quad (\text{VI.60})$$

- $p \geq p_\theta$

On a cette fois :

$$\tau(p) \leq \theta \quad (\text{VI.61})$$

et on doit distinguer deux possibilités :

$$t < \theta - \tau(p) \Rightarrow \tau(p) - \theta + t < 0 \Rightarrow \Psi(\tau(p) - \theta + t) = 0 \quad (\text{VI.62})$$

$$t > \theta - \tau(p) \Rightarrow \tau(p) - \theta + t > 0 \Rightarrow \Psi(\tau(p) - \theta + t) = 1 \quad (\text{VI.63})$$

La distribution d'impulsions s'écrit donc :

$$\mathcal{P}(p > p_\theta) = \frac{1}{2\pi p_{\text{trap}} \sqrt{\tau_{\text{trap}}}} \int_{\theta - \tau(p)}^{\theta} t^{-1/2} dt \quad (\text{VI.64})$$

$$= \frac{\sqrt{\theta}}{\pi p_{\text{trap}} \sqrt{\tau_{\text{trap}}}} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{\tau(p)}{\theta} \right)^{1/2} \right] \quad (\text{VI.65})$$

Finalement en introduisant les égalités (VI.18) et (VI.19) dans (VI.60) et (VI.65) nous obtenons la distribution d'impulsion dans le modèle déterministe :

$$G(p) = \begin{cases} \frac{1}{\pi p_\theta} & \text{si } p < p_\theta \\ \frac{1}{\pi p_\theta} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{p_\theta^2}{p^2} \right)^{1/2} \right] & \text{si } p \geq p_\theta \end{cases} \quad (\text{VI.66})$$

qu'on peut encore écrire sous la forme plus compacte :

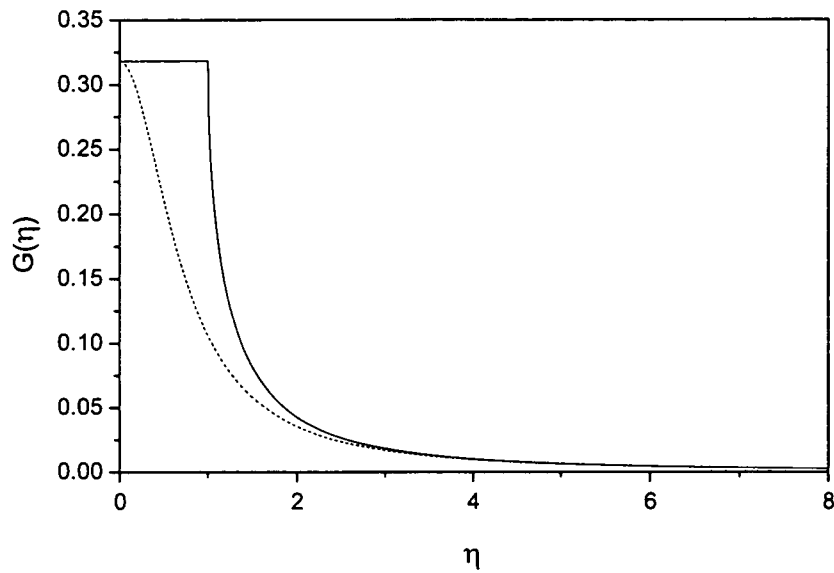


Figure VI.3: Distribution du paramètre sans dimension  $\eta = p/p_\theta$  dans le modèle déterministe. La courbe en trait plein représente  $G(\eta)$ , celle en trait pointillé la lorentzienne  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$  qui a le même comportement asymptotique à l'infini et la même valeur en  $\eta = 0$ . Le plateau de  $G(\eta)$  pour  $\eta \in [0, 1]$ , c'est-à-dire pour  $p \in [0, p_\theta]$  traduit le fait qu'une expérience de durée  $\theta$  ne peut pas distinguer des atomes dont les temps de piégeage sont supérieurs à la durée d'interaction soit  $\tau(p) > \theta$ .

$$G(p) = \frac{1}{\pi p_\theta} Y(p_\theta - p) + \frac{1}{\pi p_\theta} \left[ 1 - \left( 1 - \frac{p_\theta^2}{p^2} \right)^{1/2} \right] Y(p - p_\theta) \quad (\text{VI.67})$$

En remarquant que  $G(p)$  ne dépend que de  $p/p_\theta$ , on peut introduire le paramètre sans dimension  $\eta = p/p_\theta$  dont la distribution est donnée par :

$$G(\eta) d\eta = G(p) dp \quad (\text{VI.68})$$

et qui s'écrit donc :

$$G(\eta) = p_\theta G(p) \quad (\text{VI.69})$$

On trouve :

$$G(\eta) = \frac{1}{\pi} Y(1 - \eta) + \frac{1}{\pi} \left[ 1 - (1 - \eta^{-2})^{1/2} \right] Y(\eta - 1) \quad (\text{VI.70})$$

Cette fonction est tracée en trait plein sur la figure VI.3. Elle présente un plateau pour  $0 \leq \eta \leq 1$ , c'est-à-dire pour  $0 \leq p \leq p_\theta$ . Une expérience de refroidissement VSCPT de durée  $\theta$  ne distingue donc pas les atomes dont la quasi-impulsion est inférieure à la valeur caractéristique  $p_\theta$ . Ceci provient du caractère déterministe du modèle où nous avons supposé qu'un atome entré dans le piège avec la quasi-impulsion  $p$  le quitte au bout d'un temps déterminé  $\tau(p)$ , inversement proportionnel à  $p^2$ . Comme  $p_\theta$  est la valeur de la quasi-impulsion telle que  $\tau(p_\theta) = \theta$ , un atome qui entre dans le piège avec  $p < p_\theta$  en "sortirait" après une durée  $\tau(p) > \theta$ , soit supérieure à la durée de refroidissement. Il reste donc piégé jusqu'à la fin de la période VSCPT. La présence de ce plateau a donc une signification physique claire. Pour autant le résultat obtenu ici n'est pas entièrement satisfaisant puisqu'en particulier la dérivée de  $G(\eta)$  en  $\eta = 1$  n'est pas continue et tend même vers l'infini à droite de ce point. Ce problème est lié au fait que le saut responsable de la sortie du piège survient en réalité à un instant aléatoire et non après une durée parfaitement déterminée, comme on l'a supposé ici. Cette discontinuité de la dérivée de  $G(\eta)$  disparaîtra dans le modèle probabiliste présenté dans le paragraphe suivant.

L'autre point très important qu'il convient de noter est qu'il a été possible d'exprimer la distribution d'impulsion sous la forme d'une loi unique dépendant d'un paramètre sans dimension  $\eta = p/p_\theta$ . Or toute la dépendance vis à vis des paramètres du refroidissement ( $\theta$  et  $\Omega_R$ ) est contenue dans l'impulsion caractéristique  $p_\theta$ . Quelles que soient les conditions de refroidissement, il est donc possible de déduire la distribution finale de quasi-impulsion des atomes  $G(p)$  par un simple changement d'échelle à partir de la loi  $G(\eta)$ . Ce comportement auto-similaire sera retrouvé plus loin et discuté plus en détail car il constitue une des caractéristiques majeures du VSCPT.

### VI.4.2.2 Comportement asymptotique quand $p \gg p_0$

Lorsque  $p \rightarrow \infty$ , c'est-à-dire lorsque  $\eta \rightarrow \infty$ , on peut effectuer un développement limité dans l'expression (VI.70) et on trouve, à l'ordre le plus bas non nul :

$$G(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\eta^2} \quad (\text{VI.71})$$

On montre facilement qu'il existe une distribution lorentzienne qui admet la même valeur en  $\eta = 0$  et le même développement en  $\eta \rightarrow \infty$  que  $G(\eta)$  et on peut donc écrire :

$$\boxed{G(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \mathcal{L}_\infty(\eta) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{\eta^2 + \delta\eta_\infty^2} \quad \text{avec} \quad \delta\eta_\infty = \frac{1}{\sqrt{2}}} \quad (\text{VI.72})$$

La distribution d'impulsion a donc des ailes lorentziennes, c'est-à-dire qui décroissent en  $1/p^2$ , comme cela est représenté sur la figure VI.3.

## VI.4.3 Modèle probabiliste

### VI.4.3.1 Expression analytique

Partant maintenant de l'expression (VI.55) de  $\Psi(p, t)$ , on obtient :

$$G(p) = \frac{1}{2\pi p_{\text{trap}} \sqrt{\tau_{\text{trap}}}} \int_0^\theta t^{-1/2} e^{(t-\theta)/\tau(p)} dt \quad (\text{VI.73})$$

Grâce au changement de variable  $x = t/\tau(p)$ , l'intégrale ci-dessus se réécrit :

$$G(p) = \frac{\sqrt{\tau(p)}}{2\pi p_{\text{trap}} \sqrt{\tau_{\text{trap}}}} e^{-\theta/\tau(p)} \int_0^{\theta/\tau(p)} x^{-1/2} e^x dx \quad (\text{VI.74})$$

En utilisant les égalités (VI.18) et (VI.19), on obtient finalement :

$$\boxed{G(p) = \frac{1}{2\pi p} e^{-p^2/p_0^2} \int_0^{p^2/p_0^2} x^{-1/2} e^x dx} \quad (\text{VI.75})$$

On déduit de la même façon que précédemment la distribution  $G(\eta)$  qui s'écrit :

$$\boxed{G(\eta) = \frac{1}{2\pi\eta} e^{-\eta^2} \int_0^{\eta^2} x^{-1/2} e^x dx} \quad (\text{VI.76})$$

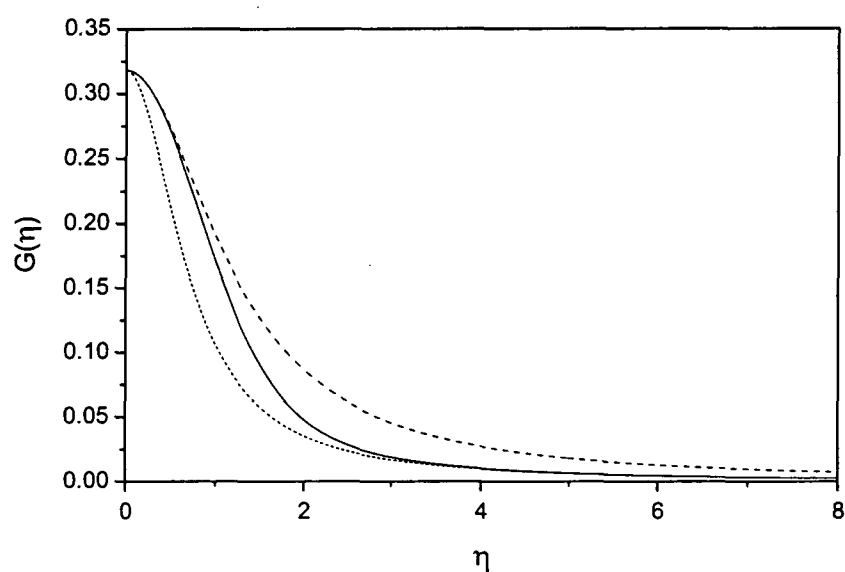


Figure VI.4: Distribution du paramètre sans dimension  $\eta = p/p_\theta$  dans le modèle probabiliste. La courbe en trait plein représente  $G(\eta)$ , celle en trait pointillé étroit la lorentzienne  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$  qui a le même comportement asymptotique à l'infini et celle en trait pointillé large la lorentzienne  $\mathcal{L}_0(\eta)$  qui a le même comportement asymptotique quand  $\eta \rightarrow 0$ . Le plateau du modèle déterministe a disparu mais il en reste une trace dans le fait que la lorentzienne  $\mathcal{L}_0(\eta)$  est beaucoup plus large que la lorentzienne  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$ . La distribution est donc plus aplatie au sommet que ne le laisserait prévoir son comportement asymptotique à l'infini.

Cette distribution est représentée en trait plein sur la figure VI.4. On constate que la distribution  $G(\eta)$  ne présente plus de points anguleux, comme cela était le cas dans le modèle déterministe. Le plateau de la figure (VI.3) a été remplacé par une variation lente ce qui, physiquement, est plus satisfaisant.

#### VI.4.3.2 Comportement asymptotique quand $p \ll p_\theta$

Lorsque  $p \rightarrow 0$ , on a bien sûr  $\eta \rightarrow 0$  et, d'après (VI.15),  $x \rightarrow 0$ . On peut alors remplacer les deux exponentielles de (VI.76) par leurs développements à l'ordre le plus bas :

$$e^{-\eta^2} \simeq 1 - \eta^2 \quad (\text{VI.77})$$

$$e^x \simeq 1 + x \quad (\text{VI.78})$$

et on obtient :

$$G(\eta) \simeq \frac{1}{2\pi\eta} (1 - \eta^2) \int_0^{\eta^2} (1+x)x^{-1/2} dx \quad (\text{VI.79})$$

L'intégrale se calcule facilement. Après développement et en négligeant les termes en  $\eta$  d'ordre supérieur à 2, il vient :

$$G(\eta) \simeq \frac{1}{\pi} \left(1 - \frac{2}{3}\eta^2\right) \quad (\text{VI.80})$$

On reconnaît dans cette expression le développement au voisinage de  $\eta = 0$  d'une distribution lorentzienne et on a :

$$\boxed{G(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow 0} \mathcal{L}_0(\eta) = \frac{3}{2\pi} \frac{1}{\eta^2 + \delta\eta_0^2} \quad \text{avec} \quad \delta\eta_0 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}} \quad (\text{VI.81})$$

#### VI.4.3.3 Comportement asymptotique quand $p \gg p_\theta$

Lorsque  $p \rightarrow \infty$ , on sait d'après (VI.15) que :

$$\tau(p) \xrightarrow{p \rightarrow \infty} 0 \quad (\text{VI.82})$$

et par conséquent que :

$$x = \frac{t}{\tau(p)} \xrightarrow{p \rightarrow \infty} \infty \quad (\text{VI.83})$$

Dans l'intégrale de (VI.76), le facteur  $x^{-1/2}$  est alors une fonction lentement variable devant  $e^x$  et on peut le remplacer par sa valeur quand  $x = \eta^2$  soit  $1/\eta$ . En sortant ce facteur constant de l'intégrale, on obtient :

$$G(\eta) \simeq \frac{1}{2\pi\eta^2} e^{-\eta^2} \int_0^{\eta^2} e^x dx \quad (\text{VI.84})$$

Le calcul de l'intégrale est alors immédiat et donne :

$$G(\eta) \simeq \frac{1}{2\pi\eta^2} (1 - e^{-\eta^2}) \quad (\text{VI.85})$$

Comme  $\eta \rightarrow \infty$ , on peut négliger l'exponentielle et on trouve :

$$G(\eta) \xrightarrow{\eta \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi\eta^2} \quad (\text{VI.86})$$

On retrouve la même dépendance asymptotique que dans le modèle déterministe et la distribution d'impulsion tend donc de nouveau vers la lorentzienne  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$  définie en (VI.72). Il est intéressant de remarquer que la lorentzienne  $\mathcal{L}_0(\eta)$  est plus large que  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$  puisque  $\delta\eta_0/\delta\eta_\infty = \sqrt{3}$  (voir figure VI.4). Ceci signifie que la distribution d'impulsion est plus plate au sommet que ne le laisserait prévoir son comportement asymptotique à l'infini. On a ici une "trace" résiduelle du plateau de  $G(\eta)$  calculée dans le modèle déterministe.

#### VI.4.4 Analyse de la forme de raie

A partir de maintenant nous nous limitons au modèle probabiliste puisqu'il est beaucoup plus proche du problème réel que le modèle déterministe. Il est alors possible, en recourant aux fonctions spéciales de donner une forme analytique de  $G(\eta)$ . Pour cela nous utilisons le résultat général suivant [84] :

$$\left. \int_0^u x^{\alpha-1} (u-x)^{\gamma-1} e^{\beta x} dx = B(\gamma, \alpha) \times u^{\alpha+\gamma-1} \times {}_1F_1(\alpha, \alpha+\gamma, \beta u) \right\} \quad (\text{VI.87})$$

$$\text{Re}(\alpha), \text{Re}(\gamma) > 0$$

où  $B(\gamma, \alpha)$  désigne la fonction Béta et  ${}_1F_1(\alpha, \alpha+\gamma, \beta u)$  la fonction hypergéométrique confluente. Si l'on prend :

$$u = \eta^2 \quad (\text{VI.88})$$

$$\alpha = 1/2 \quad (\text{VI.89})$$

$$\beta = \gamma = 1 \quad (\text{VI.90})$$



l'égalité (VI.87) devient :

$$\int_0^{\eta^2} x^{-1/2} e^{-x} dx = B(1, 1/2) \cdot {}_1F_1(1/2, 3/2, \eta^2) \cdot \eta \quad (\text{VI.91})$$

Ceci nous permet de réécrire la distribution d'impulsion sous la forme :

$$\boxed{G(\eta) = \frac{1}{2\pi} B(1, 1/2) \cdot e^{-\eta^2} \cdot {}_1F_1(1/2, 3/2, \eta^2)} \quad (\text{VI.92})$$

La figure VI.5.a représente  $G(\eta)$  ainsi que les meilleurs ajustements lorentzien et gaussien partant de la même valeur en  $\eta = 0$ . On constate qu'aucune de ces deux distributions mathématiques ne reproduit de manière satisfaisante l'allure de  $G(\eta)$ . Sur la figure VI.5.b, on remarque que les résidus de ces deux ajustements ont des variations opposées. De plus, la partie centrale de  $G(\eta)$  est mieux ajustée par la gaussienne tandis que les ailes sont mieux décrites par la lorentzienne. Ceci suggère que  $G(\eta)$  pourrait être assez bien décrite par la convolution d'une gaussienne et d'une lorentzienne, c'est-à-dire un profil de Voigt. Celui-ci est défini de la manière suivante :

$$\mathcal{V}_{\sigma_G, \sigma_L}(x) = \frac{1}{\sigma_G \sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma_G^2} * \frac{\sigma_L}{\pi} \frac{1}{x^2 + \sigma_L^2} \quad (\text{VI.93})$$

et se réécrit couramment sous la forme :

$$\mathcal{V}_{\sigma_G, \sigma_L}(x) = \frac{a}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-y^2}}{(v-y)^2 + a^2} dy \quad (\text{VI.94})$$

avec :

$$v = \frac{x}{\sigma_G \sqrt{2}} \quad (\text{VI.95})$$

$$a = \frac{\sigma_L}{\sigma_G \sqrt{2}} \quad (\text{VI.96})$$

Les profils de Voigt interviennent dans de nombreux domaines de la physique, en particulier en spectroscopie, où ils permettent de décrire des spectres de raies élargies par des processus collisionnels par exemple. Bien qu'ils n'aient pas de forme analytique simple, ils restent aisés à manipuler car il existe des procédures de calcul approchées mais très précises de ces profils. La figure VI.6 présente le résultat de l'ajustement de  $G(\eta)$  par un profil de Voigt. Les paramètres correspondants valent :

$$\sigma_G = 0.62 \quad (\text{VI.97})$$

$$\sigma_L = 0.54 \quad (\text{VI.98})$$

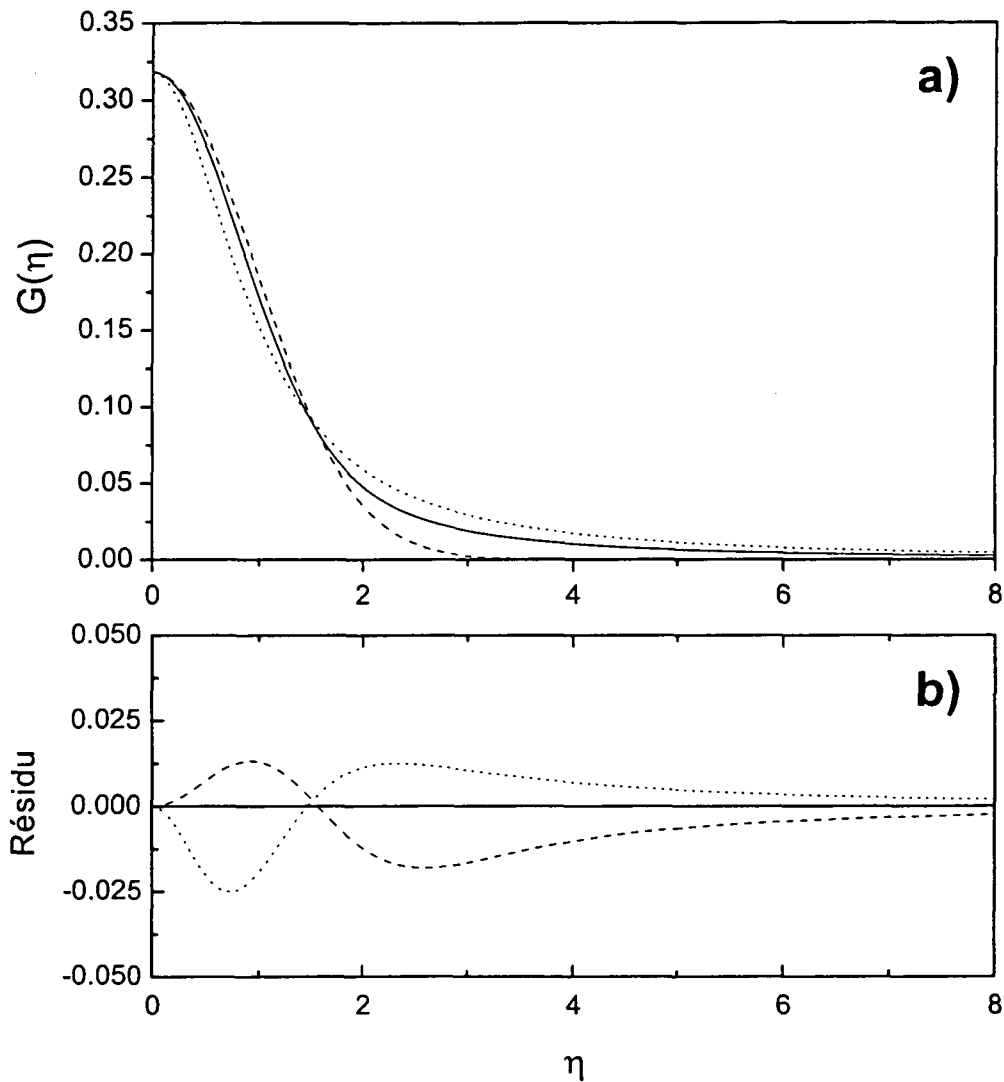


Figure VI.5: La figure (a) présente l'ajustement de  $G(\eta)$  (trait plein) par un profil lorentzien (trait étroit) ou gaussien (trait pointillé large) ayant la même valeur en  $\eta = 0$  que  $G(\eta)$ . La lorentzienne (de largeur  $\delta\eta = 0.9717$ ) reproduit assez bien les ailes en  $\eta^2$  mais pas la partie centrale. Au contraire la gaussienne (de largeur  $\delta\eta = 0.9558$ ) est assez proche de  $G(\eta)$  dans la partie centrale mais chute beaucoup trop vite pour pouvoir reproduire correctement les ailes. Pour cette raison, les résidus des deux ajustements, représentés sur la figure (b), varient en sens inverse.

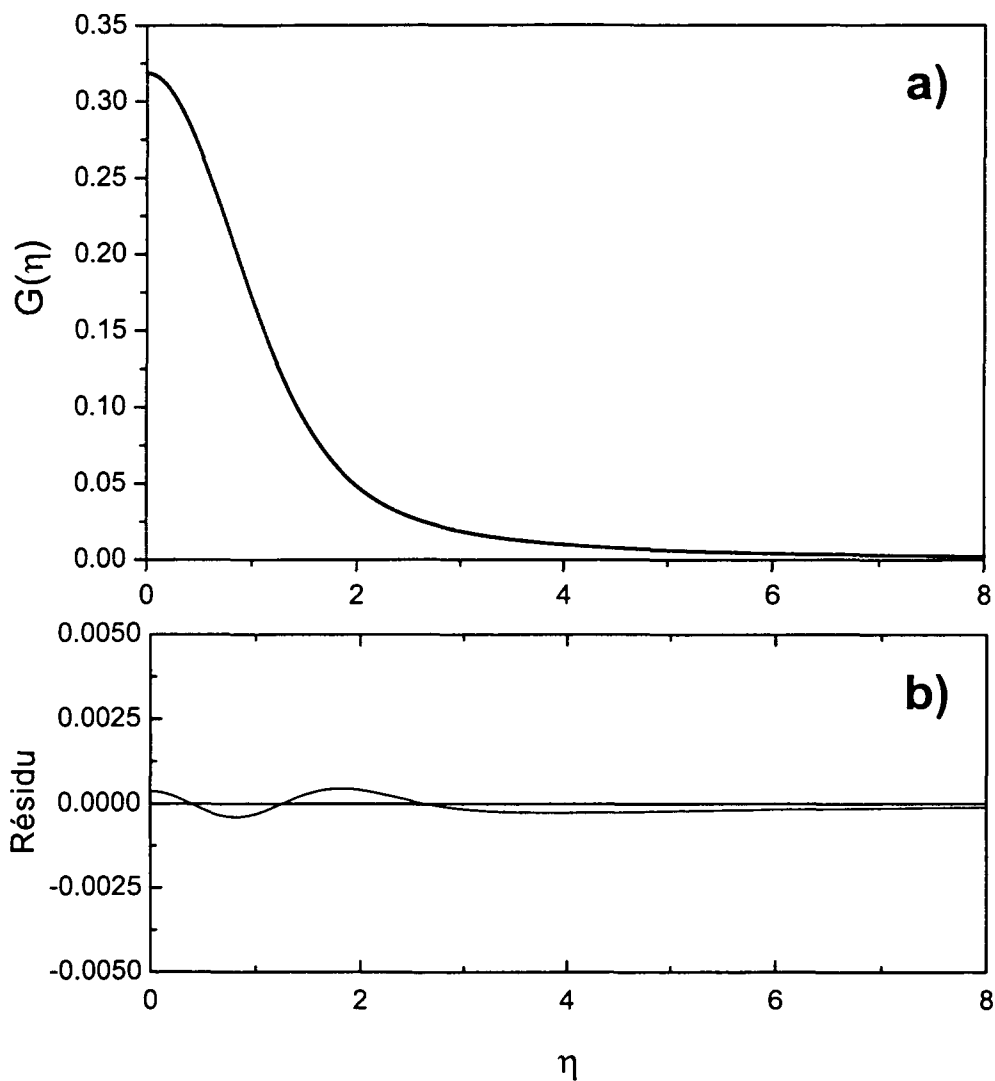


Figure VI.6: (a) Ajustement de  $G(\eta)$  (ronds vides) par un profil de Voigt (trait plein). L'ajustement est tellement proche de la distribution qu'on ne distingue pas la différence entre les deux. (b) Résidu de l'ajustement. Notez le changement d'échelle d'un facteur 10 par rapport aux résidus des ajustements lorentzien et gaussien.

Conformément à ce qu'on pouvait espérer, le résultat est bien meilleur qu'avec un profil gaussien ou lorentzien et dorénavant nous utiliserons donc le profil de Voigt ainsi déterminé pour décrire la distribution d'impulsion :

$$\boxed{G(\eta) \simeq \mathcal{V}_{0.62,0.54}(\eta)} \quad (\text{VI.99})$$

Nous avons donc réussi à calculer exactement la distribution d'impulsions et à en donner une très bonne approximation analytique (formule ci-dessus) qui va nous permettre d'analyser précisément les résultats expérimentaux. Auparavant nous allons confronter cette expression aux résultats des simulations Monte-Carlo du refroidissement VSCPT afin de tester la validité de l'approche statistique.

#### VI.4.5 Comparaison avec les simulations Monte-Carlo quantiques

Le calcul de la distribution d'impulsion que nous avons présenté dans ce chapitre est basé sur l'analyse statistique de la marche au hasard de la quasi-impulsion  $p$  de l'atome. Pour tester la validité de ce modèle il est intéressant de comparer ses prédictions aux résultats d'une approche qui, elle, décrit le système quantiquement. La simulation du refroidissement VSCPT par Monte-Carlo quantique (MCQ) telle que nous l'avons présentée dans le paragraphe V.4.2 est un exemple d'une telle approche. L'atome y est décrit par une fonction d'onde qui évolue sous l'influence d'un hamiltonien effectif entre deux émissions spontanées, celles-ci étant traitées comme des sauts quantiques intervenant à des instants aléatoires. L'approche MCQ, qui fait beaucoup moins d'approximations que le modèle statistique, va nous servir de test de celui-ci et nous permettre en particulier de vérifier deux points importants :

- Le caractère auto-similaire de la distribution  $G(p)$ , prévu par le traitement analytique et traduisant le caractère fractal du refroidissement VSCPT.
- L'accord quantitatif entre l'expression analytique de la distribution  $G(\eta)$  et les résultats de la simulation.

Nous avons donc déterminé grâce à ce programme de simulation la distribution de quasi-impulsion finale des atomes pour différentes valeurs du temps d'interaction  $\theta$  et de la pulsation de Rabi  $\tilde{\Omega}_R$ . Les distributions  $G(p)$  correspondant à quatre valeurs du couple de paramètres  $(\theta, \tilde{\Omega}_R)$  sont représentées sur la figure VI.7.a. Toutes les courbes ont été ajustées verticalement ( $G(0) = 1$ ) de manière à faciliter

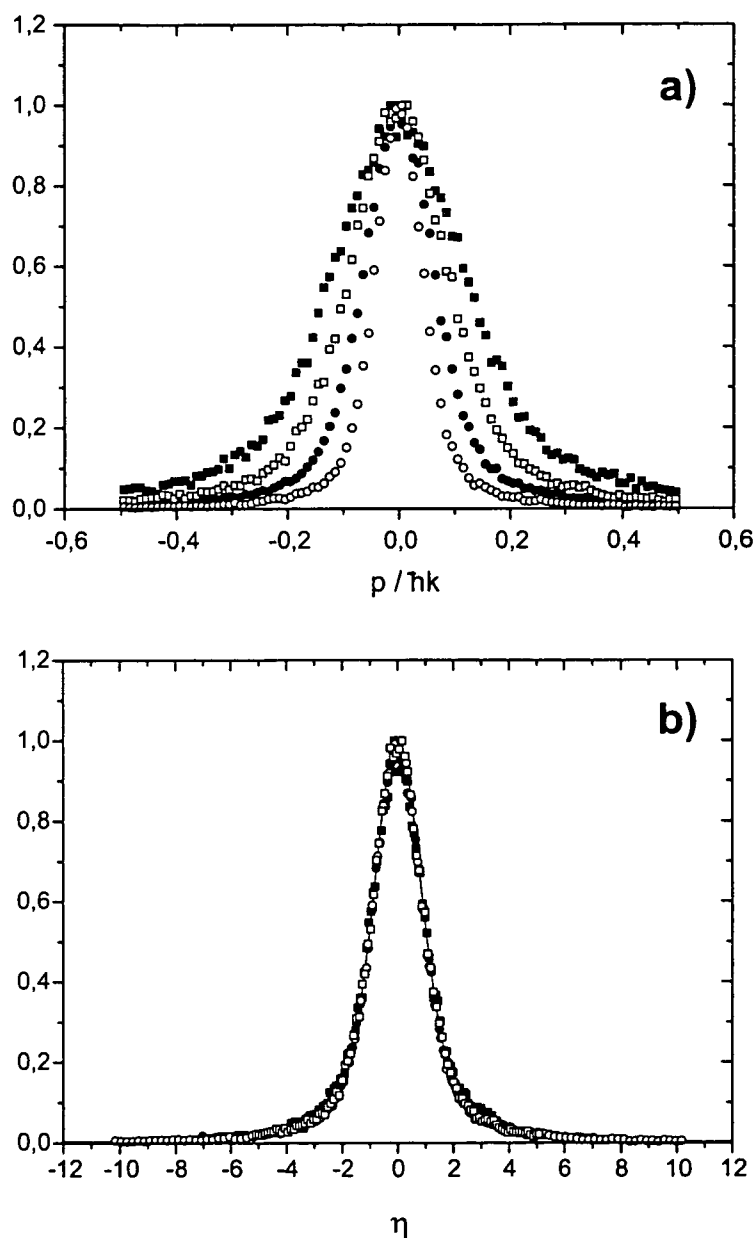


Figure VI.7: La figure (a) présente les distributions d'impulsion obtenues grâce aux simulations Monte-Carlo quantiques pour différentes valeurs des paramètres VSCPT  $(\tilde{\Omega}_R, \tilde{\theta})$ . Ceux-ci valent, de la courbe la plus large à la plus étroite  $(0.52, 1500)$ ,  $(0.72, 5000)$ ,  $(0.52, 5000)$ ,  $(0.72, 20000)$ . Après le changement d'échelle  $p \rightarrow \eta = p/p_\theta$  mentionné dans le texte, toutes ces courbes se superposent parfaitement (figure (b)). Il y a de plus un accord quantitatif excellent avec la distribution  $G(\eta)$  calculée analytiquement et représentée en trait plein sur la figure (b).

leur comparaison. Ces courbes ont bien sûr des largeurs différentes puisqu'elles sont obtenues pour des paramètres VSCPT différents. Un des résultats importants établis grâce au modèle statistique est que les distributions  $G(p)$  correspondant à des paramètres de refroidissement différents peuvent toutes se ramener à la même distribution  $G(\eta)$  moyennant le changement de variable :

$$\eta = \frac{p}{p_\theta} \quad (\text{VI.100})$$

D'après les formules (VI.12), (VI.13) et (VI.16), on calcule facilement :

$$p_\theta = \frac{1}{4} \frac{\hbar\Gamma}{E_R} \frac{\tilde{\Omega}_R}{\sqrt{\tilde{\theta}}} \times \hbar k \quad (\text{VI.101})$$

Pour chacune des courbes de la figure VI.7.a, nous calculons  $p_\theta$  puis nous appliquons le changement de variable (VI.100). Les courbes ainsi obtenues (figure VI.7.b) sont parfaitement superposées ce qui constitue une vérification directe de la propriété d'autosimilarité de  $G(p)$  prédite par le modèle analytique.

Nous avons également représenté en trait plein, sur la figure VI.7.b, la fonction  $G(\eta)$  calculée analytiquement et donnée en (VI.92). L'accord avec les résultats de la simulation est excellent et confirme la validité du modèle statistique. Par ailleurs, on est à présent en mesure de déterminer la valeur du préfacteur numérique  $A$  introduit à la fin du chapitre V (§V.4.1). Il suffit pour cela de calculer numériquement la largeur de  $G(\eta)$  à  $1/\sqrt{e}$  de sa hauteur en 0. On trouve :

$$\delta\eta = 0.891 \quad (\text{VI.102})$$

ce qui implique :

$$\delta p = 0.891 \times p_\theta \quad (\text{VI.103})$$

et donc :

$$\frac{T_R}{T} = A \left( 4 \frac{E_R}{\hbar\Gamma} \right)^2 \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad \text{avec} \quad A = \frac{1}{(0.891)^2} \simeq 1.26 \quad (\text{VI.104})$$

On trouve ainsi une valeur très proche de celle trouvée au chapitre précédent à partir des simulations MCQ (formule (V.51)) ce qui confirme de nouveau le très bon accord quantitatif entre le modèle statistique et les simulations.

Nous sommes également en mesure de rendre compte de la valeur numérique du facteur  $A$  déterminée précédemment par l'ajustement lorentzien des distributions simulées par MCQ. Il suffit pour cela d'ajuster  $G(\eta)$  par une lorentzienne dont la hauteur et la largeur sont variables. On trouve alors  $\delta\eta_L = 0.926$  soit  $A = 1/(0.805 \times 0.926)^2 \simeq 1.80$  ce qui est en bon accord avec (V.52). Ainsi se trouvent résolues les difficultés que nous avons rencontrées dans le chapitre V pour la détermination de la température à partir des distributions d'impulsion issues des simulations.

On a donc vérifié à partir de la forme analytique de la distribution d'impulsion, déduite du modèle statistique du refroidissement VSCPT, toutes les prédictions des simulations Monte Carlo. La principale hypothèse du modèle statistique, qui consiste à ne garder dans la fonction délai que l'exponentielle dont la constante de temps est la plus longue, apparaît ainsi parfaitement validée. Mentionnons enfin que les deux approches ont également été comparées pour leurs prédictions sur l'autre grandeur importante du refroidissement, la fraction d'atomes refroidis[48]. Là encore l'accord est remarquable et valide tout-à-fait le modèle statistique.

#### VI.4.6 Discussion

L'approche analytique montre donc que la distribution présente des ailes qui décroissent en  $1/\eta^2$ . Ce comportement aux grandes valeurs de  $\eta$  correspond à une évolution caractérisée par des constantes de temps très courtes. Les constantes de temps longues, celles qui font la particularité du refroidissement VSCPT, sont, elles, reliées au comportement de  $G(\eta)$  lorsque  $\eta \rightarrow 0$ . Or nous venons de montrer que dans cette région la distribution  $G(\eta)$  s'écarte sensiblement de la lorentzienne  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$  vers laquelle elle tend quand  $\eta \rightarrow \infty$ . En particulier son sommet est plus "écrasé" que celui de  $\mathcal{L}_\infty(\eta)$ . Cet effet est particulièrement marqué dans le cadre du modèle déterministe puisqu'on trouve alors un plateau parfaitement horizontal. Cet "écrasement" du sommet de la courbe s'interprète physiquement en remarquant que les états de quasi-impulsion  $p \ll p_\theta$  ( $\eta \ll 1$ ) ont des temps de piégeage  $\tau(p) \gg \theta$ , c'est-à-dire beaucoup plus grands que la durée de refroidissement VSCPT. Une phase VSCPT de durée  $\theta$  ne peut donc pas distinguer ces états car leur durée caractéristique d'évolution est beaucoup plus grande que  $\theta$ . Comme nous l'avons expliqué dans le paragraphe VI.1 ci-dessus, cette propriété du VSCPT est très importante car elle fait de ce mécanisme de refroidissement un processus dépourvu d'état stationnaire et donc essentiellement non-ergodique. L'étude de la forme de raie fait donc apparaître l'écrasement du sommet de la distribution d'impulsion comme une signature caractéristique de cette brisure d'ergodicité.

Dans le chapitre V, nous avons montré que la température déduite d'un ajustement exponentiel des données expérimentales est en bon accord avec le dépouillement des simulations, en supposant que la distribution d'impulsion est lorentzienne. A présent que nous disposons de l'expression analytique de la forme de raie, nous pouvons pousser l'analyse du signal expérimental plus loin et essayer de comprendre la forme exacte de la fonction d'autocorrélation déterminée expérimentalement. Comme nous l'avons vu précédemment, les écarts de la forme de raie à une lorentzienne sont très faibles. Ceci est d'ailleurs confirmé directement par la figure V.7 qui montre que l'ajustement exponentiel reproduit assez bien les données. La mise en évidence des écarts semble donc à priori difficile. Pourtant le caractère auto-similaire de la distribution d'impulsion, c'est-à-dire le fait que, quel que soit le temps d'interaction  $\theta$ , la distribution d'impulsion peut se déduire de  $G(\eta)$  par un simple changement d'échelle horizontale, va nous permettre de moyennner de nombreuses courbes expérimentales pour reconstituer avec la meilleure précision possible la distribution  $G(\eta)$ .

## VI.5 Fonction d'autocorrélation spatiale

La grandeur à laquelle nous accédons dans les expériences "période noire" est la fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés à la fin de la séquence. Pour une période noire de durée  $\tau_N$  cette fraction est simplement reliée à la transformée de Fourier de  $G(p)$  par :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int dp G(p) \cos\left(\frac{2kp\tau_N}{M}\right) \quad (\text{VI.105})$$

soit, en fonction de  $G(\eta)$  :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int d\eta G(\eta) \cos\left(\frac{2kp\theta\eta\tau_N}{M}\right) \quad (\text{VI.106})$$

On utilise ici l'expression simplifiée de  $\mathcal{F}_{NC}$  dans le cas où l'impulsion d'analyse est assez courte pour qu'on puisse négliger l'instabilité des états non-couplés (voir paragraphe III.1.2.3). Notons  $g(t)$  la transformée de Fourier de  $G(\eta)$  :

$$g(t) = \int G(\eta) \cos(\eta t) d\eta \quad (\text{VI.107})$$

Le signal  $\mathcal{F}_{NC}$  vaut alors :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} g\left(\frac{2kp\theta\tau_N}{M}\right) \quad (\text{VI.108})$$



On sait que  $p_\theta$  est relié à  $p_0$  et  $\tau_0$  par :

$$p_\theta = p_0 \frac{\sqrt{\tau_0}}{\sqrt{\theta}} \quad (\text{VI.109})$$

soit, en passant aux grandeurs réduites :

$$p_\theta = \hbar k \tilde{p}_0 \frac{\sqrt{\tilde{\tau}_0}}{\sqrt{\tilde{\theta}}} \quad (\text{VI.110})$$

En reportant (VI.12) et (VI.13) dans  $p_\theta$  puis dans  $\mathcal{F}_{NC}$ , on trouve finalement :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}g\left(\tilde{\Omega}_R \frac{\tilde{\tau}_N}{\sqrt{\tilde{\theta}}}\right)} \quad (\text{VI.111})$$

Ce résultat montre que, pour une valeur donnée de  $\tilde{\Omega}_R$ , des courbes  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  correspondant à des valeurs différentes du temps d'interaction  $\tilde{\theta}$  se ramènent toutes, moyennant le changement d'échelle :

$$\tilde{\tau}_N \longrightarrow \zeta = \tilde{\tau}_N / \sqrt{\tilde{\theta}} \quad (\text{VI.112})$$

à la même fonction :

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}g(\tilde{\Omega}_R \zeta) \quad (\text{VI.113})$$

Le caractère fractal de  $G(p)$  se retrouve donc dans  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  et cette propriété va nous permettre de moyennner de nombreuses courbes expérimentales. Auparavant, il nous faut connaître l'expression de  $\mathcal{F}(\zeta)$ . La distribution du paramètre sans dimension  $\eta$  est donnée par :

$$G(\eta) = \mathcal{V}_{\sigma_G, \sigma_L}(\eta) \quad (\text{VI.114})$$

et sa transformée de Fourier se déduit facilement de la définition du profil de Voigt. Comme le montre la formule (VI.93), celui-ci est la convolution d'une gaussienne par une lorentzienne. Or la transformation de Fourier change le produit de convolution en produit simple et on déduit donc simplement :

$$g(t) = \exp(-\sigma_L t - \frac{1}{2}\sigma_G^2 t^2) \quad (\text{VI.115})$$

où les valeurs numériques de  $\sigma_G$  et  $\sigma_L$  sont données en (VI.97) et (VI.98). En reportant ce résultat dans (VI.113), on trouve :

$$\boxed{\mathcal{F}(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-\sigma_L \tilde{\Omega}_R \zeta - \frac{1}{2} \sigma_G^2 \tilde{\Omega}_R^2 \zeta^2)} \quad (\text{VI.116})$$

Si on suppose la distribution  $G(\eta)$  approximativement lorentzienne :

$$G(\eta) \simeq \frac{\delta\eta}{\pi} \frac{1}{\eta^2 + \delta\eta^2} \quad (\text{VI.117})$$

sa transformée de Fourier vaut :

$$g(t) = \exp(-\delta\eta t) \quad (\text{VI.118})$$

et on obtient :

$$\boxed{\mathcal{F}(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-\tilde{\Omega}_R \delta\eta \zeta)} \quad (\text{VI.119})$$

Il s'agit donc à présent de vérifier, d'une part si l'expression (VI.116) reproduit correctement les données expérimentales et d'autre part si l'ajustement par l'expression (VI.116) est significativement meilleur que le simple ajustement exponentiel.

## VI.6 Résultats expérimentaux

Pour déterminer  $\mathcal{F}(\zeta)$ , nous réutilisons les résultats expérimentaux du chapitre V. Plus précisément nous utilisons 12 courbes expérimentales  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  correspondant à la même valeur de la pulsation de Rabi  $\tilde{\Omega}_R = 0.72(2)$  (mesurée directement sur la photodiode calibrée) et à des durées d'interaction  $\tilde{\theta}$  comprises entre 2000 et 15000. Ces courbes ont des constantes de temps différentes mais se superposent très bien lorsqu'on effectue le changement d'échelle donné par (VI.112). La figure VI.8.a présente le résultat de la moyenne des 12 courbes (ronds pleins) après changement d'échelle. Le rapport signal sur bruit de cette courbe est très satisfaisant comme le montre la faiblesse des fluctuations dans la partie asymptotique.

### VI.6.1 Première analyse

Les données de la figure VI.8.a sont ajustées avec la fonction théorique calculée précédemment :

$$\mathcal{F}(\zeta) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \exp(-\sigma_L \tilde{\Omega}_R \zeta - \frac{1}{2} \sigma_G^2 \tilde{\Omega}_R^2 \zeta^2) \quad (\text{VI.120})$$

où  $\sigma_G$  et  $\sigma_L$  sont des facteurs numériques qui valent respectivement 0.62 et 0.54. A l'exception d'un facteur multiplicatif global du signal (nos données ne sont pas normalisées), il n'y a qu'un seul paramètre ajustable, la pulsation de Rabi  $\tilde{\Omega}_R$ . Le meilleur ajustement donne :

$$\tilde{\Omega}_R = 0.74(2) \quad (\text{VI.121})$$

ce qui est en excellent accord avec la valeur mesurée expérimentalement  $\tilde{\Omega}_R = 0.72(2)$ . Il est remarquable de constater qu'à quelques détails près sur lesquels nous allons revenir ci-dessous, la distribution d'impulsion que nous avons calculée dans le modèle analytique reproduit assez fidèlement les données. Le modèle statistique du refroidissement VSCPT, déjà en parfait accord avec le résultat des simulations Monte-Carlo quantiques, trouve ici une validation directe par les données expérimentales. Pour un processus de refroidissement aussi complexe que le VSCPT, le modèle analytique nous permet donc de calculer analytiquement la distribution d'impulsion et de trouver un accord quantitatif très satisfaisant avec les données expérimentales.

Il convient néanmoins de remarquer que les données présentent certains écarts par rapport à la forme théorique, en particulier aux temps très courts (voir figure VI.8.a) et aux alentours de  $\zeta = 5$ . Nous allons voir ci-dessous qu'une analyse plus précise de l'expérience période noire va nous permettre d'expliquer ces défauts (du moins en partie), tout en affinant encore notre compréhension de l'évolution des atomes au cours de la séquence temporelle.

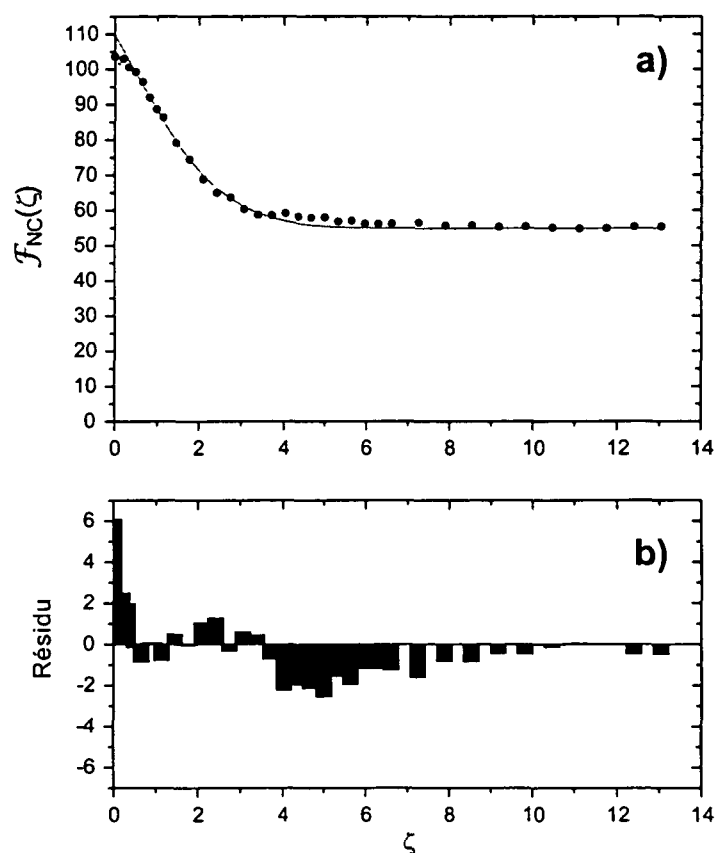


Figure VI.8: La figure (a) présente (ronds pleins) le résultat du moyennage de 12 courbes expérimentales  $\mathcal{F}_{NC}(\zeta = \bar{\tau}_N \bar{\theta}^{1/2})$  pour la même valeur de la pulsation de Rabi  $\bar{\Omega}_R = 0.72(2)$  (mesurée sur la photodiode calibrée) et pour des valeurs de  $\bar{\theta}$  comprises entre 2000 et 15000. On a également représenté l'ajustement de ces données par la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  déduite de la distribution  $G(\eta)$  calculée analytiquement (trait plein). Les seuls paramètres ajustables sont l'amplitude du signal (puisque nos données ne sont pas normalisées) et la pulsation de Rabi. On trouve  $\bar{\Omega}_R = 0.74(2)$  ce qui est en très bon accord avec la valeur mesurée. La figure (b) montre le résidu de l'ajustement. En dehors d'un écart important aux temps courts et d'une déviation modérée aux alentours de  $\zeta = 5$ , le modèle reproduit très bien les données expérimentales.

### VI.6.2 Retour sur certaines approximations

On peut noter deux particularités du signal expérimental qui le distinguent du signal attendu aux temps très courts :

- La théorie prévoit que la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  décroît d'un facteur 2 entre sa valeur initiale et sa valeur asymptotique (voir (VI.113)) et ceci **indépendamment de la forme exacte de la distribution d'impulsion  $G(\eta)$** . Manifestement ceci n'est pas confirmé par l'expérience puisque la figure VI.8.a montre clairement que le rapport  $\mathcal{F}(0)/\mathcal{F}(\infty)$  est un peu inférieur à 2. Ceci se retrouve sur la figure VI.8.b où les résidus des ajustements montrent une forte déviation positive pour  $0 < \zeta < 1$ . Puisque  $\mathcal{F}(0)/\mathcal{F}(\infty)$  ne dépend pas de  $G(\eta)$ , cet écart ne peut être lié qu'à une approximation du modèle de l'expérience "période noire" et non à un défaut du modèle statistique du refroidissement VSCPT.
- Par ailleurs, que  $G(\eta)$  soit donnée par le calcul analytique ou approchée par une lorentzienne, la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  doit avoir un départ exponentiel en  $\zeta = 0$  (cf formules (VI.116) et (VI.119)). Là encore ceci n'est pas vérifié expérimentalement puisque  $\mathcal{F}(\zeta)$  a une pente proche de 0 à l'origine. Le signal que l'on observe ici étant directement relié à la transformée de Fourier de  $G(\eta)$ , ce comportement aux temps très courts pourrait être dû à une troncature dans la distribution d'impulsion.

Nous allons voir à présent qu'il est possible, en revenant sur deux des approximations faites précédemment (chapitre III) pour établir l'expression de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$ , de rendre compte des deux effets mentionnés ci-dessus et de reproduire ainsi le signal complet, y compris aux temps courts. Insistons de nouveau sur le fait que nous ne revenons ici que sur le modèle de l'expérience "période noire" et non sur la description théorique du refroidissement VSCPT.

**Instabilité des états non-couplés** Pour établir l'expression (VI.105) de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$ , nous avons négligé l'instabilité des états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  au cours de l'impulsion d'analyse. Nous avons vu dans le paragraphe III.1.2.3 que cette approximation était globalement légitime (voir formule (III.31)) à la condition que le taux de départ radiatif  $\Gamma'_{NC}(\delta p)$  associé à la largeur *rms* de la distribution d'impulsion soit petit devant l'inverse de la durée de l'impulsion d'analyse :

$$\Gamma\left(\frac{2k\delta p}{M\Omega_R}\right)^2 \tau_P \ll 1 \quad (\text{VI.122})$$

Ceci est une condition globale mais, même si elle est respectée, il existe toujours des valeurs de  $p$  dans la distribution d'impulsions pour lesquelles l'instabilité

radiative des états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  est suffisante pour que ces états se désintègrent au cours de l'impulsion. Ceci va se traduire par une troncature dans la distribution d'impulsion que nous avons précédemment négligée car elle n'intervient qu'à une valeur de  $p$  grande devant la largeur  $p_\theta$  de la distribution d'impulsion des atomes refroidis. Pour prendre cet effet en compte, on doit calculer la fraction d'atomes restée dans les états non-couplés après l'impulsion en projetant le vecteur d'état atomique sur le sous-espace engendré par les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  qui ne se sont pas désintégrés (cf §III.1.2.3). Nous avons démontré que dans ce cas, l'expression approchée (VI.105) devait être remplacée par :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{1}{2} \int dp G(p)W(p) + \frac{1}{2} \int dp G(p)W(p) \cos\left(\frac{2kp\tau_N}{M}\right) \quad (\text{VI.123})$$

où  $G(p)$  est la distribution d'impulsion :

$$G(p) = \frac{1}{p_\theta} \mathcal{V}_{\sigma_G, \sigma_L}\left(\frac{p}{p_\theta}\right) \quad (\text{VI.124})$$

et  $W(p)$  la probabilité qu'un atome se trouvant dans l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  juste avant l'impulsion, y soit encore juste après. Du fait de la variation quadratique de  $\Gamma'_{NC}(p)$  en fonction de  $p$ , la probabilité  $W(p)$  est une gaussienne de la forme :

$$W(p) = e^{-p^2/2\beta^2} \quad (\text{VI.125})$$

où la largeur  $\beta$  est donnée en unités réduites par :

$$\tilde{\beta} = \frac{\beta}{\hbar k} = \frac{1}{4} \frac{\hbar \Gamma}{E_R} \frac{\tilde{\Omega}_R}{\sqrt{2\tilde{\tau}_P}} \quad (\text{VI.126})$$

L'effet de la prise en compte de  $W(p)$  est facile à prévoir à partir de (VI.123). Premièrement, il suffit de prendre  $\tau_N = 0$  d'une part et de faire tendre  $\tau_N$  vers l'infini d'autre part (auquel cas l'intégrale de (VI.123) s'annule), pour constater que :

$$\mathcal{F}_{NC}(0) = 2 \times \mathcal{F}_{NC}(\infty) = 2 \times \int dp G(p)W(p) \quad (\text{VI.127})$$

Le rapport 2 entre la valeur initiale et la valeur asymptotique n'est donc pas modifié. Seule l'amplitude absolue du signal diminue puisque :

$$\int dp G(p)W(p) < \int dp G(p) = 1 \quad (\text{VI.128})$$

ce qui n'a aucune incidence sur l'analyse des signaux expérimentaux.

Deuxièmement, l'intégrale dans (VI.123) décrit l'effet de  $W(p)$  sur la forme du signal. Cette intégrale est la transformée de Fourier du produit  $G(p)W(p)$ .

C'est donc le produit de convolution de la fonction d'autocorrélation spatiale (transformée de Fourier de  $G(p)$ ) et de la transformée de Fourier de  $W(p)$  qui, comme  $W(p)$  elle-même, est une gaussienne. Or, il suffit de comparer l'expression (VI.126) de  $\beta$  avec l'expression (VI.101) de  $p_\theta$  et de noter que  $\tau_P \ll \theta$  pour constater que :

$$p_\theta \ll \beta \quad (\text{VI.129})$$

Par conséquent la convolution avec la transformée de Fourier de  $W(p)$  ne modifie la fonction d'autocorrélation que sur un intervalle de l'ordre de :

$$\Delta\tau_N = \frac{M}{2k\beta} = \frac{\sqrt{2\tilde{\tau}_P}}{\tilde{\Omega}_R} \Gamma^{-1} \simeq 2\mu\text{s} \quad (\text{VI.130})$$

ce qui correspond aux deux ou trois premiers points expérimentaux sur la courbe de la figure VI.8. Il est par ailleurs facile de montrer que, du fait de cette convolution par une gaussienne, la dérivée de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  en  $\tau_N = 0$  est nulle ce qui explique la pente horizontale du signal expérimental en 0.

La distribution  $G(p)$  étant donnée par un profil de Voigt et la fonction  $W(p)$  étant gaussienne, le calcul de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  peut être fait analytiquement. Cependant, comme la fonction  $W(p)$  ne présente pas la même loi d'échelle en  $p/p_\theta$  que  $G(p)$ , l'expression (VI.123) de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  ne peut plus se ramener à une fonction unique  $\mathcal{F}(\zeta)$  par le changement de variable  $\zeta = \tilde{\tau}_N/\sqrt{\tilde{\theta}}$ . En reportant (VI.124) et (VI.125) dans (VI.123) et après un calcul un peu long mais sans difficulté particulière, on trouve :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tilde{\tau}_N) = \frac{1}{2}[I(0) + I(\tilde{\tau}_N)]} \quad (\text{VI.131})$$

où  $I(\tilde{t})$  vaut :

$$\boxed{I(\tilde{t}) = \frac{1}{2} \frac{\tilde{\beta}}{\sqrt{\tilde{\beta}^2 + \sigma_G^2 \tilde{p}_\theta^2}} e^{-\alpha^2 \tilde{\beta}^2 \tilde{t}^2} \left[ e^{A^2} (1 - \text{erf}(A)) + e^{B^2} (1 - \text{erf}(B)) \right]} \quad (\text{VI.132})$$

avec :

$$\alpha = 4 \frac{E_R}{\hbar\Gamma} \quad (\text{VI.133})$$

$$A(\tilde{t}) = \frac{\sigma_L \tilde{p}_\theta - \alpha \tilde{\beta}^2 \tilde{t}}{\sqrt{2(\tilde{\beta}^2 + \sigma_G^2 \tilde{p}_\theta^2)}} \quad (\text{VI.134})$$

$$B(\tilde{t}) = \frac{\sigma_L \tilde{p}_\theta + \alpha \tilde{\beta}^2 \tilde{t}}{\sqrt{2(\tilde{\beta}^2 + \sigma_G^2 \tilde{p}_\theta^2)}} \quad (\text{VI.135})$$

**Influence du réarrosage** L'autre hypothèse que nous avons faite pour établir l'expression (VI.105) de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  est de supposer que les atomes qui diffusent pendant l'impulsion d'analyse ont une probabilité très faible de retomber dans le piège en impulsion. En négligeant ainsi le réarrosage du piège, nous avons trouvé que  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  est simplement donnée par la projection de l'état atomique sur les états qui sont stables pendant l'impulsion. Cette hypothèse est justifiée si la largeur de la distribution d'impulsion des atomes refroidis, qui est de l'ordre de  $p_\theta$  est très petite devant l'impulsion de recul :

$$p_\theta \ll \hbar k \quad (\text{VI.136})$$

Examinons l'effet du réarrosage d'un peu plus près. Puisqu'il redistribue les atomes dans l'espace des impulsions, il augmente la fraction d'atomes dans les états quasi-noirs  $|\psi_{NC}(p \simeq 0)\rangle$ . Cependant cet effet n'est pas le même selon la durée  $\tau_N$  de la période noire. En effet, les atomes qui retombent dans ces états quasi-noirs représentent une partie de la fraction des atomes qui diffuse au cours de l'impulsion d'analyse. Or cette fraction est donnée simplement par  $1 - \mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  et tend donc vers 0 lorsque  $\tau_N \rightarrow 0$  et vers 0.5 lorsque  $\tau_N \rightarrow \infty$ . Le réarrosage est donc d'autant plus important que  $\tau_N$  est grand et on s'attend, s'il joue un rôle, à ce que la valeur asymptotique  $\mathcal{F}(\infty)$  soit légèrement supérieure à 0.5 tandis que la valeur initiale  $\mathcal{F}(0)$  reste inchangée. C'est bien ce qu'on observe puisque  $\mathcal{F}(0)/\mathcal{F}(\infty) < 2$ .

Il est assez facile de prendre en compte l'effet du réarrosage, tout au moins de manière heuristique. Pour cela, nous introduisons la probabilité  $\hat{\pi}$  qu'un atome qui est en train de diffuser aux alentours du piège tombe dans celui-ci. Le calcul exact de  $\hat{\pi}$  est complexe et nécessiterait d'utiliser de nouveau l'analyse statistique de la marche au hasard dans l'espace des impulsions. Ici, nous simplifions beaucoup le problème en considérant qu'un atome qui diffuse au cours de l'impulsion d'analyse explore une région de l'ordre de  $x\hbar k$  ( $x$  est un nombre de l'ordre de l'unité). La probabilité qu'il tombe dans un des états quasi-noirs est alors de la forme :

$$\hat{\pi} = \frac{p_\theta}{x\hbar k} = \frac{\tilde{p}_\theta}{x} \quad (\text{VI.137})$$

Si  $\mathcal{F}_{NC}^{(0)}$  est la fraction qui ne diffuse pas lorsque l'impulsion est appliquée, la fraction qui diffuse est simplement  $1 - \mathcal{F}_{NC}^{(0)}$ . Si on veut prendre en compte le



réarrosage, la fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés après l'impulsion d'analyse vaut donc :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \mathcal{F}_{NC}^{(0)}(\tau_N) + \hat{\pi}(1 - \mathcal{F}_{NC}^{(0)}(\tau_N)) \quad (\text{VI.138})$$

soit :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tau_N) = \frac{\tilde{p}_\theta}{x} + (1 - \frac{\tilde{p}_\theta}{x})\mathcal{F}_{NC}^{(0)}(\tau_N)} \quad (\text{VI.139})$$

En se rappelant que  $\mathcal{F}_{NC}^{(0)}(\tau_N)$  décroît de 1 en  $\tau_N = 0$  à  $1/2$  lorsque  $\tau_N \rightarrow \infty$ , il est facile de déduire les valeurs asymptotiques de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  à partir de l'expression ci-dessus :

$$\mathcal{F}_{NC}(0) = 1 \quad (\text{VI.140})$$

$$\mathcal{F}_{NC}(\infty) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{\tilde{p}_\theta}{x} \quad (\text{VI.141})$$

Comme nous l'avons indiqué au début de ce paragraphe le réarrosage laisse inchangée la valeur initiale de  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  mais augmente sa valeur asymptotique.

### VI.6.3 Analyse complète du signal

Si on tient compte des deux corrections (instabilité des états non-couplés et réarrosage), le signal doit donc s'écrire :

$$\boxed{\mathcal{F}_{NC}(\tilde{\tau}_N) = \frac{\tilde{p}_\theta}{x} + \frac{1}{2}(1 - \frac{\tilde{p}_\theta}{x})[I(0) + I(\tilde{\tau}_N)]} \quad (\text{VI.142})$$

où  $I(\tilde{t})$  est toujours donné par (VI.132). Comme  $I(\tilde{t})$  ne peut plus être rendue indépendante de  $\tilde{\theta}$  par le changement d'échelle ( $\tilde{t} \rightarrow \zeta = \tilde{t}/\sqrt{\tilde{\theta}}$ ), la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  dépend maintenant de  $\tilde{\theta}$  :

$$\mathcal{F}_{\tilde{\theta}}(\zeta) = \frac{\tilde{p}_\theta}{x} + \frac{1}{2}(1 - \frac{\tilde{p}_\theta}{x})[I(0) + I(\zeta\sqrt{\tilde{\theta}})] \quad (\text{VI.143})$$

On doit alors ajuster les données avec la fonction :

$$\langle \mathcal{F}(\zeta) \rangle = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^{12} \mathcal{F}_{\tilde{\theta}_i}(\zeta) \quad (\text{VI.144})$$

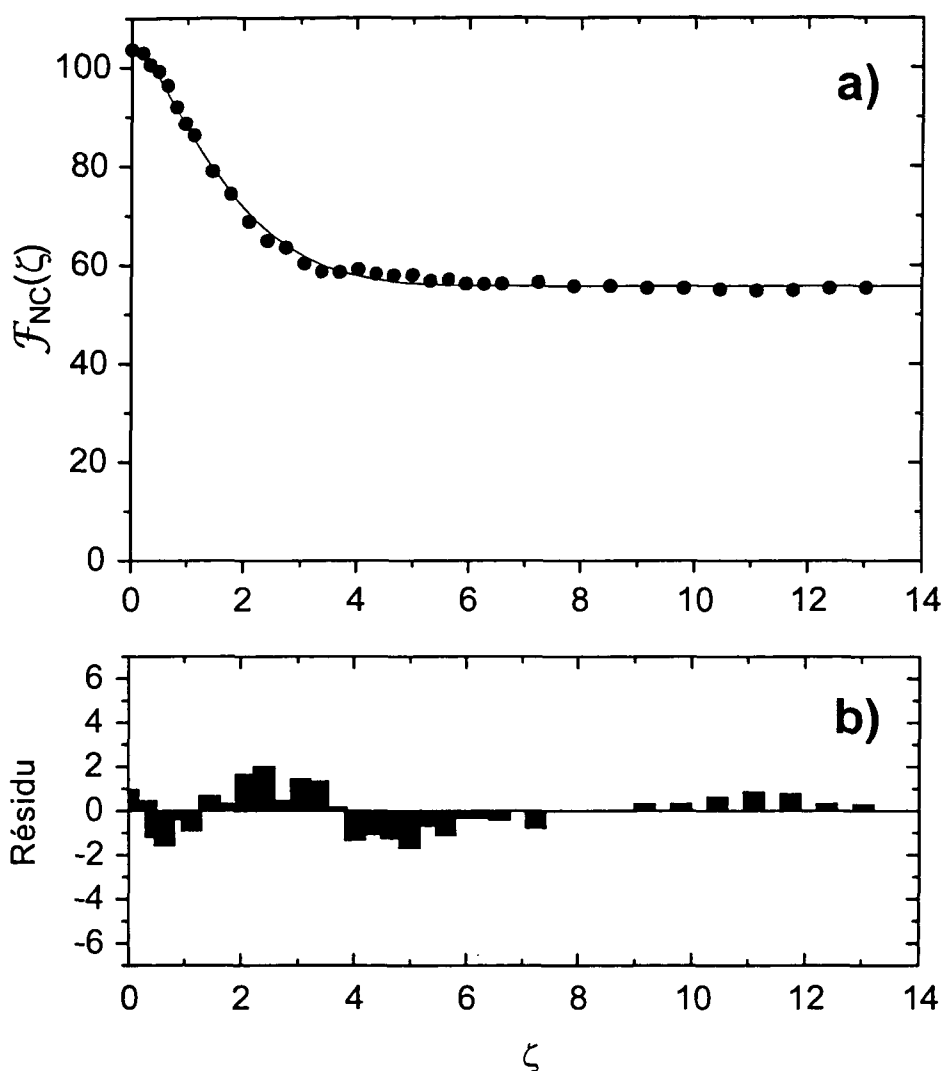


Figure VI.9: Ajustement du signal expérimental avec la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  tenant compte de l'instabilité des états non-couplés et du réarrosage du piège par les atomes qui diffusent au cours de l'impulsion d'analyse. Le seul paramètre ajustable, mise à part l'amplitude, est le paramètre heuristique  $x$  qui correspond approximativement à la largeur de l'intervalle d'impulsion sur lequel diffusent les atomes pendant l'impulsion d'analyse de durée  $8.8 \mu\text{s}$ . On trouve  $x = 1.4$ . Les données sont très bien reproduites y compris aux temps très courts.

où les valeurs  $\tilde{\theta}_i$  sont les 12 valeurs expérimentales du temps d'interaction que nous avons utilisées. La figure VI.9 présente le résultat de cet ajustement. Mise à part l'amplitude du signal, le seul paramètre ajustable est le facteur  $x$  que nous avons introduit ci-dessus et qui représente approximativement la largeur de l'intervalle d'impulsions sur lequel les atomes diffusent pendant l'impulsion d'analyse. La pulsation de Rabi est prise égale à la valeur trouvée précédemment soit 0.74. On trouve<sup>3</sup> :

$$x \simeq 1.4 \quad (\text{VI.145})$$

et le  $\chi^2$  (non normalisé) vaut 0.9. L'accord est très satisfaisant et la valeur obtenue pour  $x$  est raisonnable bien qu'en l'absence de traitement complet de la marche au hasard des atomes au cours de l'impulsion d'analyse, il soit impossible de la comparer à une valeur théorique. Nous rendons ainsi compte correctement du comportement du signal expérimental même aux temps courts. Le  $\chi^2$  vaut 0.9 alors qu'il est de 2.5 pour l'ajustement de la figure VI.8.

#### VI.6.4 Comparaison avec une décroissance exponentielle

Nous venons de montrer que le signal expérimental était très bien reproduit par le modèle analytique basé sur les statistiques de Lévy et ce avec un seul paramètre ajustable sur la forme de raie, la pulsation de Rabi. La valeur trouvée pour celle-ci est très proche de la valeur mesurée expérimentalement. Ce modèle semble donc donner une description correcte du refroidissement VSCPT du moins pour la distribution d'impulsion. L'étude théorique a par ailleurs prédit que  $G(p)$  ne peut pas être correctement décrite par une lorentzienne. Plus exactement sa forme asymptotique quand  $p \rightarrow \infty$  a une forme lorentzienne avec des ailes en  $1/p^2$  mais sa largeur autour de  $p = 0$  est plus grande que ne le laisserait prévoir son comportement asymptotique. La distribution  $G(p)$  apparaît donc plus écrasée au sommet. Ce comportement aux petites valeurs de  $p$  est une signature de la présence de temps d'évolution très longs dans le problème, plus longs que le temps d'interaction, et constitue une manifestation de la non ergodicité du processus de refroidissement subrecoil. Est-il possible de mettre en évidence ces écarts à la lorentzienne sur le signal expérimental? En d'autres termes, l'ajustement du signal par  $\mathcal{F}(\zeta)$  est-il significativement meilleur que l'ajustement par une exponentielle?

Pour réaliser cette comparaison sans complication inutile, c'est-à-dire sans avoir à tenir compte des corrections introduites précédemment pour décrire le signal aux temps très courts, nous avons éliminé les trois premiers points des

<sup>3</sup>Si on laisse les deux paramètres  $x$  et  $\Omega_R$  variables dans l'ajustement, on trouve  $x \simeq 1.1$  et  $\tilde{\Omega}_R \simeq 0.75$  ce qui est encore en bon accord avec les valeurs attendues.

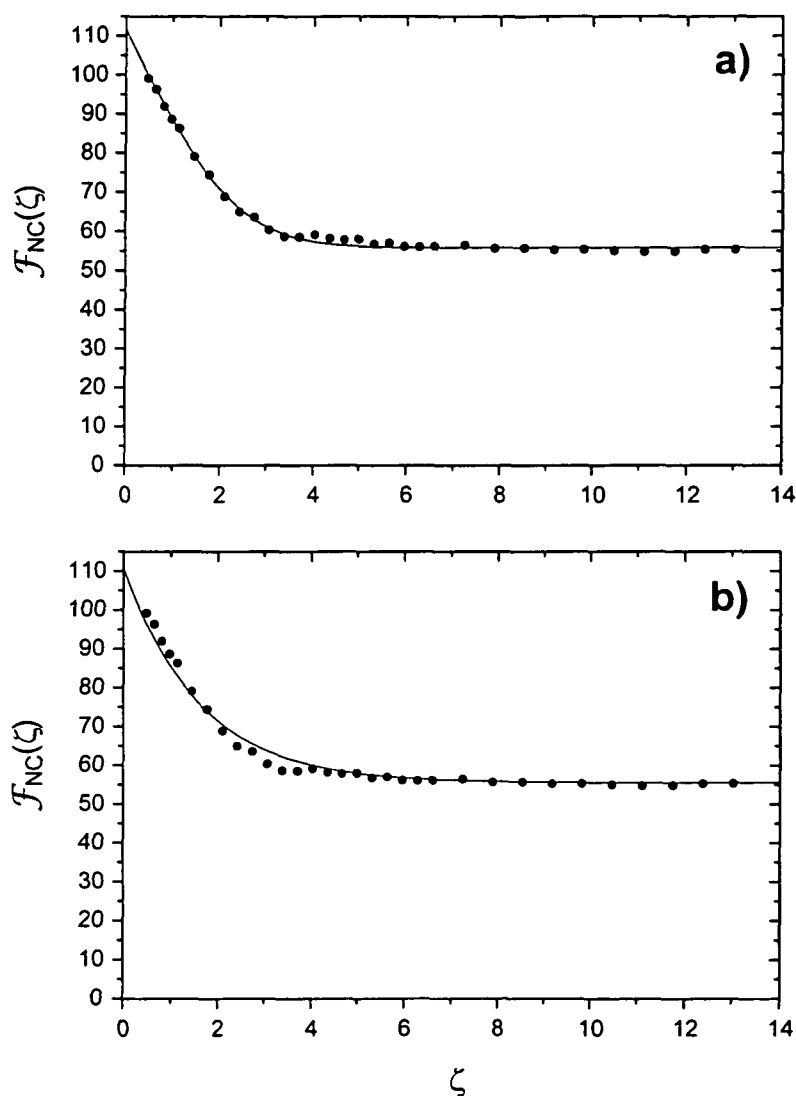


Figure VI.10: Cette figure représente l'ajustement des données expérimentales avec la fonction théorique  $\mathcal{F}(\zeta)$  (a) ou avec une exponentielle  $(1 + \exp(-\zeta/\zeta_0))/2$  (b). Pour faciliter la comparaison des deux fonctions, les trois premiers points ont été enlevés. A part l'amplitude, le seul paramètre ajustable est la pulsation de Rabi  $\tilde{\Omega}_R$  dans le premier cas (a) et la constante de temps  $\zeta_0$  dans le deuxième cas (b). L'ajustement de la figure (a) est beaucoup plus proche des données que celui de la figure (b). C'est là une preuve directe du caractère non-lorentzien de la distribution d'impulsion et de la non-ergodicité du refroidissement VSCPT.

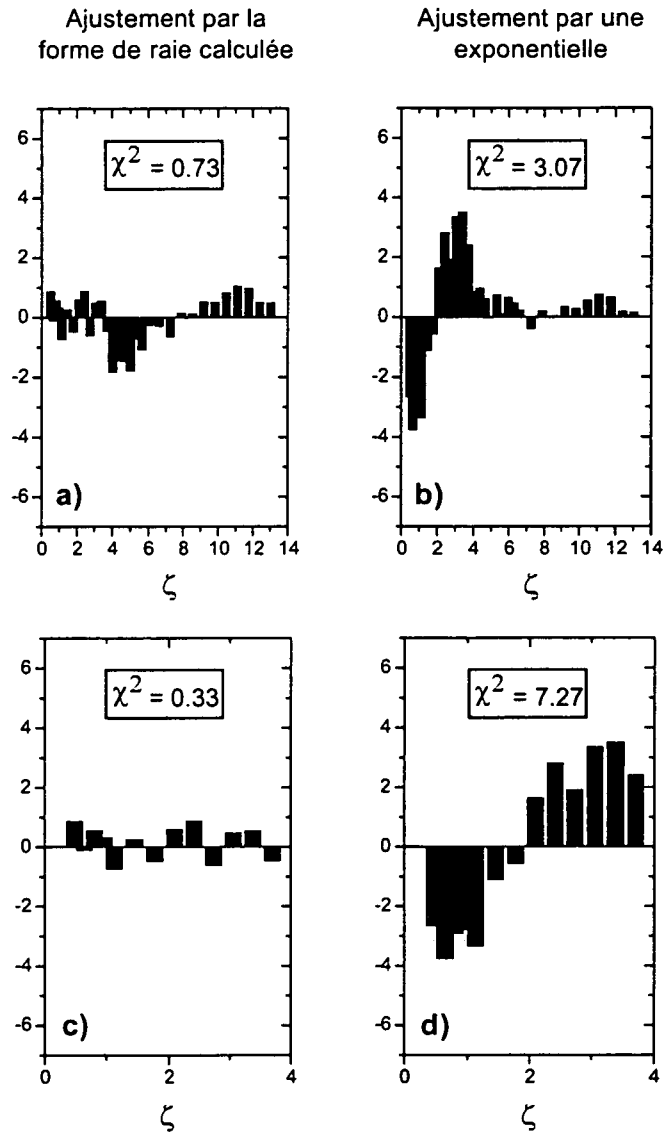


Figure VI.11: Résidus des ajustements de la figure VI.3. Les courbes (a) et (c) correspondant à l'ajustement par la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$ , les courbes (b) et (d) à celui par  $(1 + \exp(-\zeta/\zeta_0))/2$ . La fonction issue du modèle statistique reproduit beaucoup mieux les données que l'exponentielle (il y a un seul paramètre ajustable dans les deux cas). L'écart est encore plus clair entre  $\zeta = 0$  et  $\zeta = 4$ .

données. Nous avons montré en effet que les écarts de l'ajustement aux temps très courts sont dus à des approximations dans le traitement théorique de l'expérience "période noire" elle-même, et non à des défauts du modèle théorique du refroidissement VSCPT. En supprimant ainsi les trois premiers points des données, on ne fausse donc pas l'analyse de la forme du signal.

Nous présentons sur la figure VI.10.a le résultat de l'ajustement des données précédentes avec la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  calculée exactement (formule (VI.120)). L'ajustement avec une exponentielle de la forme  $1/2 + 1/2 \exp(-\zeta/\zeta_0)$  est représenté sur la figure VI.10.b. Dans les deux cas il n'y a, à part l'amplitude, qu'un seul paramètre ajustable qui est la pulsation de Rabi pour l'ajustement par la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  et la constante de temps pour l'exponentielle.

Il apparaît très nettement sur les courbes de la figure VI.10 ainsi que sur les résidus représentés sur la figure VI.11, que l'ajustement par la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  est meilleur que celui par l'exponentielle. Dans le premier cas on trouve  $\tilde{\Omega}_R = 0.79(1)$ , ce qui correspond à mieux que 9% à la valeur mesurée (0.72(2)). La constante de temps de l'ajustement exponentiel vaut  $\zeta_0 = 1.59$ . La fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  reproduit bien la courbe expérimentale alors qu'on trouve une déviation importante par rapport à l'exponentielle. De fait les coefficients  $\chi^2$  de ces ajustements sont significativement différents (respectivement 3.07 et 0.73). La différence entre les  $\chi^2$  est encore plus claire (respectivement 7.27 et 0.33) si on se restreint à l'intervalle  $\zeta < 4$ , c'est-à-dire dans la région où l'on attend les plus grands écarts.

Il persiste cependant un écart que nous ne sommes pas parvenus à expliquer au voisinage de  $\zeta = 5$ . La courbe expérimentale présente à cet endroit une "bosse" peu marquée mais suffisamment nette pour pouvoir être distinguée du bruit. Nous avons envisagé plusieurs hypothèses pour l'origine de cette bosse mais aucune n'a résisté à l'analyse. Nous avons vu dans le chapitre III que des oscillations pouvaient apparaître dans le signal pour deux raisons essentielles : une fluctuation de la phase du champ laser due à une vibration du miroir de rétro réflexion pendant la période noire et la présence d'un champ magnétique transverse au niveau de la zone d'interaction entre les atomes et les lasers. Le calcul présenté dans le paragraphe III.2.3 a montré que pour des valeurs raisonnables de l'amplitude et de la fréquence d'oscillation du miroir de rétro réflexion, l'effet de la fluctuation de la phase était complètement négligeable. Quant au champ magnétique, la précision avec laquelle nous réalisons la compensation des champs transverses est meilleure que 0.5 mG (cf § IV.2.2) et les calculs du paragraphe III.2.2.5 ont montré que dans ces conditions ( $B_{\perp} < 0.5$  mG,  $B_{\parallel} = 8$  mG), les oscillations devenaient indétectables. Nous avons également vérifié que le signal n'est pratiquement pas modifié si l'on rajoute un champ transverse contrôlé de 1 mG. Il existe finalement un dernier argument qui vient étayer le fait que nous excluons l'effet d'une fluctuation de

---

la phase ou celui d'un champ magnétique résiduel. Nous obtenons les données expérimentales analysées ci-dessus en effectuant la moyenne de 12 courbes correspondant à des paramètres de refroidissement différents et après le changement d'échelle  $\tilde{\tau}_N \rightarrow \zeta = \tilde{\tau}_N/\tilde{\theta}$ . Or les deux effets précédents ne présentent pas ce caractère autosimilaire et doivent donc se moyenner à 0 (s'ils ne sont pas trop importants) dans la procédure de moyennage employée.

En conclusion, la description théorique du refroidissement VSCPT par les statistiques de Lévy nous a permis de calculer analytiquement la distribution d'impulsion  $G(p)$  des atomes refroidis. Nous avons ainsi prévu deux caractéristiques essentielles du VSCPT : le caractère auto-similaire de  $G(p)$  et sa forme non-lorentzienne qui est un des aspects de la non-ergodicité du VSCPT. A la lumière des résultats ci-dessus, une triple conclusion s'impose. En premier lieu, nous apportons ici la preuve directe de l'auto-similarité du VSCPT puisque toutes nos courbes expérimentales, peuvent grâce au changement d'échelle prévu par la théorie, se ramener à une fonction unique. Ensuite, nous avons pu, à partir de la forme analytique de la distribution d'impulsion, reproduire de manière quantitative et très satisfaisante cette fonction unique issue des données expérimentales. Enfin, nous avons montré que cette fonction n'était pas correctement reproduite par une lorentzienne, apportant ainsi une preuve expérimentale de l'aspect non-ergodique du refroidissement VSCPT.





# Chapitre VII

## Interférométrie temporelle de paquets d'ondes atomiques

Lorsque des atomes sont refroidis par VSCPT à une dimension, ils sont pompés dans des états qui sont des superpositions linéaires de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées  $\pm\hbar k$ . Dès que les faisceaux lasers VSCPT sont coupés, ces deux paquets d'ondes se séparent spatialement et leur recouvrement diminue progressivement. La méthode spectroscopique présentée dans le chapitre III de ce mémoire consiste à mesurer comment décroît ce recouvrement au cours du temps et d'en déduire la largeur de la distribution initiale d'impulsion et par suite la température. Cette méthode est basée sur le fait que les deux paquets d'ondes constituant l'état atomique sont cohérents, exactement comme le sont deux trains d'ondes lumineux issus de la division d'un train d'onde unique par une lame séparatrice. Dès lors, il est tentant de se demander s'il est possible de recombinaison ces deux paquets d'ondes après leur séparation et d'observer un signal d'interférence. Ceci serait une preuve directe de leur cohérence relative et la première réalisation d'un interféromètre atomique avec des atomes refroidis en-dessous de la température de recul.

### VII.1 Principe

Le principe de la méthode est expliqué sur la figure VII.2. La séquence temporelle comprend maintenant deux périodes noires successives  $PN_1$  et  $PN_2$ , terminées respectivement par les impulsions  $I_1$  et  $I_2$  (figure VII.1).

Nous admettons que tous les atomes sont initialement (au début de la période noire) dans des états non-couplés :

$$\mathcal{F}_{NC}(t = 0) = 1 \quad (\text{VII.1})$$

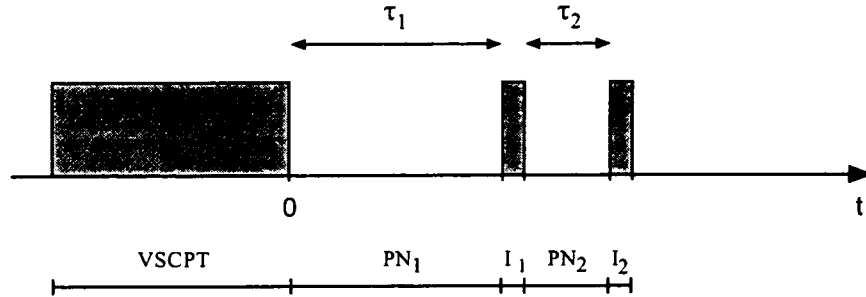


Figure VII.1: Séquence temporelle pour réaliser un interféromètre temporel. La phase de refroidissement VSCPT est suivie d'une première période noire  $PN_1$  de durée  $\tau_1$ , terminée par une impulsion très brève  $I_1$ , puis d'une seconde période noire  $PN_2$  de durée  $\tau_2$  terminée par une impulsion  $I_2$ , identique à  $I_1$ . Au cours de  $PN_1$ , les deux paquets d'ondes créés par la phase VSCPT se séparent, l'impulsion  $I_1$  les scinde alors en quatre paquets d'ondes qui évoluent librement pendant  $PN_2$  et dont on mesure le recouvrement grâce à l'impulsion  $I_2$ .

Chaque atome est dans une superposition de deux paquets d'ondes  $\phi_+$  et  $\phi_-$ , d'états internes et d'impulsions moyennes respectives  $(f_+, +\hbar k)$  et  $(f_-, -\hbar k)$ , associés tous deux à la même probabilité  $1/2$ <sup>1</sup>. La durée de  $PN_1$  est choisie très longue devant le temps de cohérence  $\tau_c$  défini par (voir paragraphe III.1.2.3) :

$$\tau_c = \frac{M}{2k\delta p} = \frac{\xi_c}{2v_R} \quad (\text{VII.2})$$

si bien que, juste avant l'impulsion  $I_1$ , la distance entre les deux paquets d'ondes est très grande devant la longueur de cohérence  $\xi_c$ . Lorsque l'impulsion  $I_1$  est appliquée, il n'y a donc aucune interférence possible entre les deux amplitudes de transition connectant les paquets d'ondes dans l'état fondamental aux paquets d'ondes dans l'état excité. Chaque paquet d'ondes a alors la même probabilité  $1/2$  d'être projeté dans une superposition d'états non-couplés, auquel cas il n'absorbe pas de lumière, ou dans une superposition d'états couplés, auquel cas il subit plusieurs cycles de fluorescence et diffuse sur un intervalle de plusieurs  $\hbar k$  dans

<sup>1</sup>On veut dire par là que si on effectue une mesure de l'état de l'atome, on le trouvera avec la même probabilité  $1/2$  dans l'un ou l'autre des deux paquets d'ondes.

l'espace des impulsions. La fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés après  $I_1$  vaut alors :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1) = 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad (\text{VII.3})$$

Comme on ne s'intéresse qu'à la partie cohérente de l'état atomique, la moitié de chaque paquet d'ondes, celle qui diffuse, est "perdue" lors de l'impulsion et chaque paquet d'ondes est maintenant associé à la probabilité  $1/4$ . De plus il est laissé dans une superposition d'états non-couplés et se sépare donc de nouveau en deux paquets d'ondes d'impulsions opposés. Après l'impulsion  $I_1$ , l'atome est donc dans une superposition de quatre paquets d'ondes, tous associés à la probabilité  $1/8$ :  $\phi_{--}$  et  $\phi_{-+}$  issus de  $\phi_-$ ,  $\phi_{+-}$  et  $\phi_{++}$  issus de  $\phi_+$ . Le mouvement relatif de ces quatre paquets d'ondes est représenté sur la figure VII.2.a qui montre clairement que  $\phi_{-+}$  et  $\phi_{+-}$  se dirigent l'un vers l'autre. Au bout d'un temps égal à la durée de la période noire  $PN_1$ , ils se recouvrent donc complètement (figure VII.2.b) puis se séparent de nouveau l'un de l'autre (figure VII.2.c).

L'effet de l'impulsion  $I_2$  dépend de la durée de la deuxième période noire  $PN_2$  et nous distinguons trois cas particuliers (voir figure VII.2) :

- $\tau_c \ll \tau_2 \ll \tau_1$  (figure VII.2.a)

Dans ce cas les quatre paquets d'ondes sont bien séparés les uns des autres et lorsque  $I_2$  est appliquée aucune interférence ne peut se produire. La moitié de chaque paquet est alors perdue et on obtient :

$$\mathcal{F}_{NC} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (\text{VII.4})$$

- $\tau_2 = \tau_1$  (figure VII.2.b)

Les deux périodes noires ont alors la même durée si bien que les paquets d'ondes  $\phi_{-+}$  et  $\phi_{+-}$  se recouvrent complètement au moment où l'impulsion  $I_2$  est appliquée. Dans ce cas les deux amplitudes de transition connectant ces deux paquets d'ondes à l'état excité peuvent interférer complètement et aucune absorption ne se produit. Ces deux paquets d'ondes sont donc laissés inchangés. Il en est différemment des deux autres ( $\phi_{--}$  et  $\phi_{++}$ ), qui sont complètement séparés et ont de nouveau une chance sur deux d'être perdus quand  $I_2$  est appliquée. Finalement, la fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés vaut donc :

$$\mathcal{F}_{NC} = 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8} = 0.375 \quad (\text{VII.5})$$

- $\tau_2 \gg \tau_1$  (figure VII.2.c)

On est dans un cas similaire au premier, c'est-à-dire que les quatre paquets d'ondes sont complètement séparés les uns des autres et ont tous une

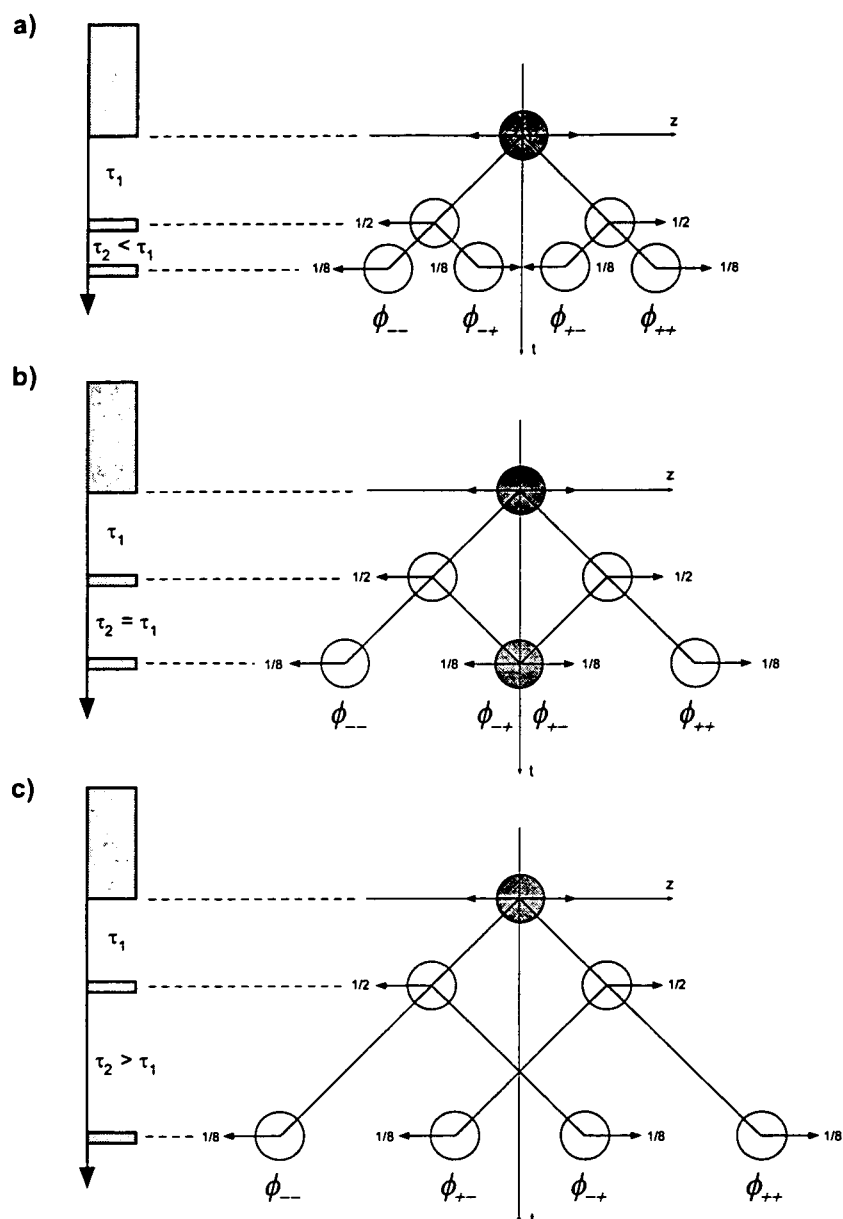


Figure VII.2: Représentation schématique de l'évolution des paquets d'ondes dans une expérience à deux périodes noires. Les flèches horizontales associées aux paquets d'ondes représentent leur impulsion moyenne ( $\pm \hbar k$ ). Les deux paquets d'ondes créés par la phase VSCPT et représentant chacun une probabilité  $1/2$  se séparent l'un de l'autre pendant la première période noire de durée  $\tau_1$ . A la fin de celle-ci, une impulsion lumineuse chasse la moitié de chaque paquet d'ondes et la partie restante se subdivise alors en deux nouveaux paquets. On obtient ainsi quatre paquets d'ondes portant chacun la probabilité  $1/8$ . Pendant la deuxième période noire de durée  $\tau_2$ ,  $\phi_{-+}$  et  $\phi_{+-}$  se dirigent l'un vers l'autre (a), se recouvrent totalement au bout d'un temps égal à la durée de la période noire (b) puis se séparent de nouveau (c). L'impulsion finale permet de mesurer le recouvrement entre ces quatre paquets en fonction de  $\tau_2$ .

probabilité 1/2 de diffuser et donc d'être perdus. Le résultat est donc de nouveau :

$$\mathcal{F}_{NC} = 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{4} = 0.25 \quad (\text{VII.6})$$

Ce raisonnement est évidemment basé sur l'hypothèse que les deux paquets d'ondes, initialement cohérents, le restent pendant toute la durée de l'expérience. C'est seulement à cette condition qu'en augmentant progressivement  $\tau_2$ , on pourra voir le signal  $\mathcal{F}_{NC}$  décroître jusqu'à 0.25, puis augmenter jusqu'à 0.375, avant de diminuer de nouveau jusqu'à 0.25.

Comme cela apparaît clairement sur la figure VII.2, les trajectoires des paquets d'ondes qui se recouvrent complètement lorsque  $\tau_2 = \tau_1$  forment un losange fermé. On réalise ainsi un interféromètre temporel analogue à un interféromètre de Mach-Zender optique dans lequel les miroirs à l'intérieur de la cavité seraient remplacés par des lames séparatrices 50/50.

## VII.2 Calcul théorique

Nous présentons maintenant le calcul exact de la fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés à la fin de la séquence temporelle de la figure VII.1. Nous ne nous intéressons qu'à la partie cohérente de l'état du système, c'est-à-dire la partie de la fonction d'onde qui n'absorbe aucun photon tout au long de la séquence temporelle. Par ailleurs nous supposons qu'aucun phénomène extérieur tel que des champs magnétiques parasites ou des collisions ne vient perturber l'évolution.

L'état atomique à l'instant  $t = 0$  est de nouveau décrit par :

$$|\Psi(t = 0)\rangle = \int dp g(p) |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{VII.7})$$

A la fin de la première période noire et juste avant l'impulsion  $I_1$ , l'état est devenu (voir paragraphe III.1.2.2) :

$$|\Psi(\tau_1^-)\rangle = \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_1} \left[ \cos \frac{kp\tau_1}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle - i \sin \frac{kp\tau_1}{M} |\psi_C(p)\rangle \right] \quad (\text{VII.8})$$

avec :

$$\hbar\omega(p) = \frac{p^2 + \hbar^2 k^2}{2M} \quad (\text{VII.9})$$

En négligeant l'instabilité des états non-couplés lors de l'impulsion lumineuse  $I_1$  (voir discussion du paragraphe III.1.2.3), la partie cohérente de l'état atomique

est obtenue en projetant l'état atomique sur le sous-espace engendré par les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . L'effet de l'impulsion peut donc être décrit par le projecteur :

$$\hat{\Pi} = \int dp |\psi_{NC}(p)\rangle \langle \psi_{NC}(p)| \quad (\text{VII.10})$$

Après l'impulsion  $I_1$  (de durée très petite devant  $\tau_1$ ), l'état atomique est donc devenu :

$$|\Psi(\tau_1^+)\rangle = \hat{\Pi}|\Psi(\tau_1^-)\rangle \quad (\text{VII.11})$$

$$= \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_1} \cos \frac{kp\tau_1}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{VII.12})$$

L'atome évolue alors librement pendant la deuxième période noire à la fin de laquelle sa fonction d'onde est devenue :

$$|\Psi(\tau_2^-)\rangle = \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_1} \cos \frac{kp\tau_1}{M} e^{-i\omega(p)\tau_2} \left[ \cos \frac{kp\tau_2}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle - i \sin \frac{kp\tau_2}{M} |\psi_C(p)\rangle \right] \quad (\text{VII.13})$$

Enfin l'impulsion  $I_2$  transforme cet état en :

$$|\Psi(\tau_2^+)\rangle = \hat{\Pi}|\Psi(\tau_2^-)\rangle \quad (\text{VII.14})$$

$$= \int dp g(p) e^{-i\omega(p)\tau_1} \cos \frac{kp\tau_1}{M} e^{-i\omega(p)\tau_2} \cos \frac{kp\tau_2}{M} |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{VII.15})$$

On peut alors calculer la fraction d'atomes dans les états non-couplés à la fin de la séquence temporelle :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1, \tau_2) = |\langle \Psi(\tau_2^+) | \Psi(\tau_2^+) \rangle|^2 \quad (\text{VII.16})$$

d'où on déduit :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1, \tau_2) = \int dp |g(p)|^2 \cos^2 \frac{kp\tau_1}{M} \cos^2 \frac{kp\tau_2}{M} \quad (\text{VII.17})$$

qu'on peut réécrire :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1, \tau_2) = \int dp |g(p)|^2 \frac{1}{4} \left[ 1 + \cos \frac{2kp\tau_1}{M} + \cos \frac{2kp\tau_2}{M} + \right. \quad (\text{VII.18})$$

$$\left. + \frac{1}{2} \cos \frac{2kp(\tau_1 + \tau_2)}{M} + \frac{1}{2} \cos \frac{2kp(\tau_1 - \tau_2)}{M} \right] \quad (\text{VII.19})$$

Nous supposons pour simplifier que la distribution d'impulsion est lorentzienne :

$$|g(p)|^2 = \frac{\delta p}{\pi} \frac{1}{p^2 + \delta p^2} \quad (\text{VII.20})$$

Nous pouvons alors utiliser le théorème des résidus pour calculer l'intégrale suivante :

$$\int dp |g(p)|^2 \cos \frac{2kp\alpha}{M} = e^{-2k\delta p|\alpha|/M} \quad (\text{VII.21})$$

En appliquant ce résultat à (VII.19), on obtient :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} \left[ 1 + e^{-\tau_1/\tau_C} + e^{-\tau_2/\tau_C} + \frac{1}{2} e^{-(\tau_1 + \tau_2)/\tau_C} + \frac{1}{2} e^{-|\tau_1 - \tau_2|/\tau_C} \right] \quad (\text{VII.22})$$

où le temps de cohérence est toujours défini par (VII.2). On peut réécrire différemment l'expression (VII.22) et on a finalement :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} \left[ 1 + e^{-\tau_1/\tau_C} + e^{-\tau_2/\tau_C} + \cosh \left( \frac{\inf(\tau_1, \tau_2)}{\tau_C} \right) \exp \left( - \frac{\sup(\tau_1, \tau_2)}{\tau_C} \right) \right] \quad (\text{VII.23})$$

L'amplitude de l'écho peut être calculée en prenant  $\tau_2 = \tau_1$  dans cette expression :

$$\mathcal{F}_{NC}(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{4} \left[ 1 + 2e^{-\tau_1/\tau_C} + \frac{1}{2} e^{-2\tau_1/\tau_C} + \frac{1}{2} \right] \xrightarrow{\tau_1 \gg \tau_C} \frac{3}{8} \quad (\text{VII.24})$$

On retrouve la valeur prévue dans la discussion qualitative du paragraphe précédent.

Le résultat de ce calcul est représenté sur la figure VII.3 où nous avons choisi  $\tau_1 = 100 \mu\text{s}$ . Les deux courbes correspondent à deux valeurs différentes de la largeur de la distribution en impulsion,  $\delta p = \hbar k/20$  soit  $\tau_C = 19.14 \mu\text{s}$  (trait pointillé) et  $\delta p = \hbar k/10$  soit  $\tau_C = 9.57 \mu\text{s}$  (trait plein). Le signal décroît de 0.5 à 0.25, augmente jusqu'à 0.375, où il présente un point anguleux, pour  $\tau_2 = \tau_1$  puis diminue pour atteindre de nouveau 0.25. Notons que la courbe en trait pointillé n'atteint pas tout à fait 0.25 pour  $\tau_2 < \tau_1$ . Ceci est simplement dû au fait que dans ce cas la condition  $\tau_1 \gg \tau_C$  n'est pas vraiment satisfaite ( $\tau_1 = 100 \mu\text{s}$  et  $\tau_C = 19.14 \mu\text{s}$ ).

### VII.3 Résultats expérimentaux

Nous avons réalisé l'expérience avec une première période noire de durée  $\tau_1 = 110 \mu\text{s}$  pour deux valeurs différentes de la durée d'interaction VSCPT,  $\theta = 1000 \mu\text{s}$  ou  $\theta = 350 \mu\text{s}$ . Les deux impulsions d'analyse ont la même durée ( $8.8 \mu\text{s}$ ) et la pulsation de Rabi vaut  $0.73 \Gamma$ . La valeur de  $\mathcal{F}_{NC}$  est mesurée à la fin de la séquence temporelle de la même façon que dans le chapitre III, en comptant le nombre d'atomes restant dans les deux pics étroits au-dessus du fond. Les résultats sont

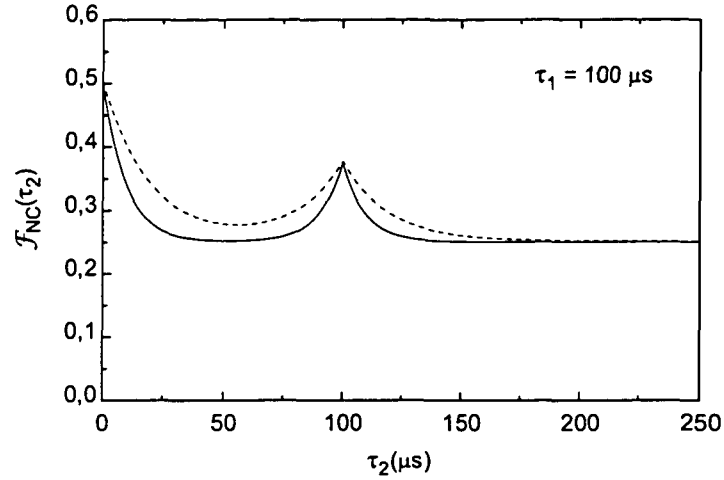


Figure VII.3: Fraction d'atomes dans des états non-couplés à la fin d'une séquence temporelle à deux périodes noires. La courbe en trait plein correspond à  $\tau_C = 9.57 \mu\text{s}$ , celle en trait pointillé à  $\tau_C = 19.14 \mu\text{s}$ . Le signal présente un écho très prononcé lorsque les deux périodes noires ont la même durée ( $\tau_2 = \tau_1$ ).

présentés sur la figure VII.4. Les données expérimentales sont ajustées avec la fonction précédemment calculée :

$$\mathcal{A} \frac{1}{4} \left[ 1 + e^{-\tau_1/\tau_C} + e^{-\tau_2/\tau_C} + \cosh \left( \frac{\inf(\tau_1, \tau_2)}{\tau_C} \right) \exp \left( - \frac{\sup(\tau_1, \tau_2)}{\tau_C} \right) \right] \quad (\text{VII.25})$$

où  $\tau_2$  est la variable et  $\mathcal{A}$ ,  $\tau_1$  et  $\tau_C$  les trois paramètres ajustables. On trouve pour  $\theta = 350 \mu\text{s}$  (figure VII.4.a) :

$$\mathcal{A} = 8317 \quad (\text{VII.26})$$

$$\tau_1 = 110.3 \mu\text{s} \quad (\text{VII.27})$$

$$\tau_C = 11.3 \mu\text{s} \quad (\text{VII.28})$$



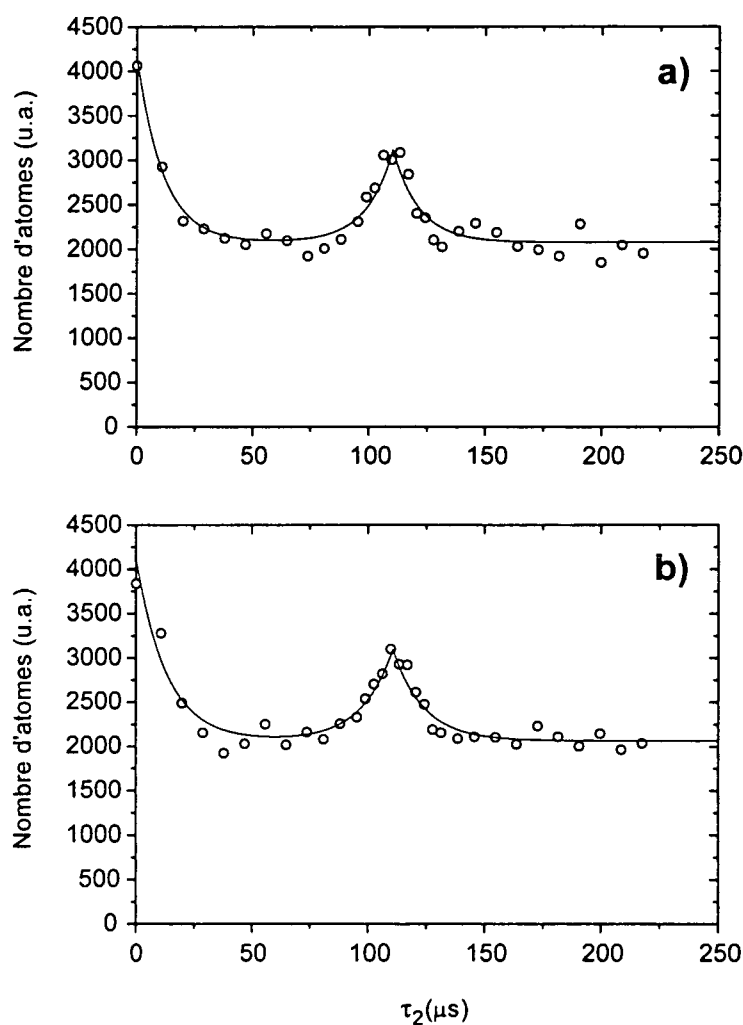


Figure VII.4: Résultats expérimentaux de l'expérience d'interférométrie à deux périodes noires. La première période noire a une durée  $\tau_1 = 110 \mu s$ . On mesure la fraction d'atomes laissée dans les états non-couplés pour des valeurs croissantes de  $\tau_2$ . Les deux courbes sont enregistrées avec les mêmes paramètres expérimentaux à l'exception de la durée d'interaction VSCPT qui vaut respectivement  $\theta = 350 \mu s$  (a) et  $\theta = 1000 \mu s$  (b). Les courbes en trait plein sont des ajustements des données expérimentales avec la fonction??.

et pour  $\theta = 1000 \mu\text{s}$  (figure VII.4.b) :

$$\mathcal{A} = 8260 \quad (\text{VII.29})$$

$$\tau_1 = 110.6 \mu\text{s} \quad (\text{VII.30})$$

$$\tau_C = 13.2 \mu\text{s} \quad (\text{VII.31})$$

La forme théorique calculée précédemment reproduit très bien les données et en particulier l'amplitude de l'écho. Dans les deux cas, la valeur de  $\tau_1$ , c'est-à-dire la valeur de  $\tau_2$  pour laquelle se produit l'écho, coïncide exactement avec la valeur attendue ( $110 \mu\text{s}$ ). Du fait du bruit qui entache les données et de la complexité de la séquence temporelle, il est un peu illusoire de vouloir déterminer des valeurs précises de la température dans cette expérience. On peut seulement constater que la valeur de  $\tau_C$  déterminée ci-dessus est plus grande (et donc la température plus basse) pour  $\theta = 1000 \mu\text{s}$  que pour  $\theta = 350 \mu\text{s}$ , ce qui, d'un point de vue qualitatif, est la variation attendue (même si l'écart quantitatif ne correspond pas à l'écart théorique).

L'expérience ci-dessus met directement en évidence la cohérence qui existe entre les deux paquets d'ondes issus du refroidissement VSCPT à 1 dimension. Le fait que l'écho atteigne sa valeur maximale attendue (0.375) montre que les deux paquets d'ondes restent cohérents pendant toute la durée de la séquence temporelle soit  $220 \mu\text{s}$  ( $2\tau_1$ ). On voudrait savoir au bout de combien de temps les phénomènes, inévitables, de décohérence commencent à se manifester. Pour cela on utilise la même séquence temporelle (figure VII.1) en choisissant  $\tau_1 = \tau_2$ , c'est-à-dire en nous plaçant au maximum de l'écho. On mesure ensuite  $\mathcal{F}_{NC}$  en augmentant la durée  $\tau_1 + \tau_2$  jusqu'à des valeurs aussi grandes que 5 ms environ. Le résultat est représenté sur la figure VII.5. Aux temps courts,  $\mathcal{F}_{NC}$  est très proche de 0.375 ce qui montre que les paquets d'ondes sont encore complètement cohérents. Peu à peu,  $\mathcal{F}_{NC}$  diminue mettant ainsi en évidence la décohérence progressive entre les paquets d'ondes. L'ajustement exponentiel des points expérimentaux (courbe en trait plein) donne :

$$\mathcal{F}_{NC}(t) = 0.25(1) + 0.15(1)e^{-t/\tau_D} \quad (\text{VII.32})$$

avec :

$$\tau_D = 1.9(5)\text{ms} \quad (\text{VII.33})$$

Nous n'avons pas analysé en détail les causes de cette décohérence. Tout phénomène qui modifie la phase relative des paquets d'ondes avant leur recombinaison est susceptible d'entraîner un tel phénomène. On peut penser en particulier à des gradients de champ magnétiques, des photons parasites ou des processus collisionnels. Nous disposons ici d'une méthode de mesure précise pour étudier ces

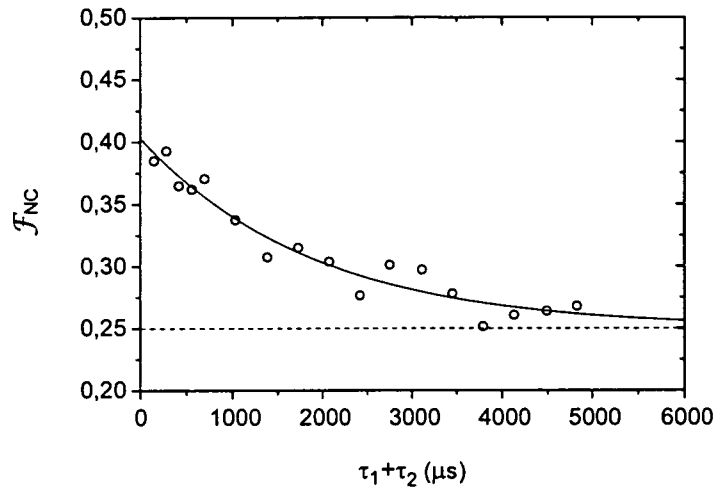


Figure VII.5: Mise en évidence de la décohérence progressive des deux paquets d'ondes. On applique une séquence temporelle dans laquelle les deux périodes noires ont la même durée ( $\tau_1 = \tau_2$ ) et on mesure  $\mathcal{F}_{NC}$  pour des valeurs croissantes de cette durée. La diminution de  $\mathcal{F}_{NC}$  est le signe de la perte progressive de cohérence entre les deux paquets d'ondes. La courbe en trait plein est un ajustement exponentiel dont la constante de temps vaut 1.9(5)ms et l'asymptote 0.25(1).

phénomènes de décohérence ce qui pourrait s'avérer très intéressant dans l'optique d'éventuelles applications interférométriques.



# Conclusion

Le travail présenté dans cette thèse représente l'aboutissement d'une dizaine d'années de recherche menées à l'Ecole Normale Supérieure et consacrées à l'étude du refroidissement subrecul d'atomes d'hélium métastables par Piégeage Cohérent de Population Sélectif en Vitesse (VSCPT). Les résultats expérimentaux qui y sont présentés constituent, au moins à l'heure actuelle, les performances ultimes du VSCPT et, pour la première fois, une comparaison extrêmement détaillée entre ces résultats et les prédictions théoriques a été réalisée, menant à une compréhension approfondie du processus de refroidissement.

La clef de voute de ce travail est la mise au point d'une méthode originale de mesure de la température d'atomes ultrafroids, beaucoup plus performante que la technique habituelle de temps de vol. Basée sur la détermination de la fonction d'autocorrélation spatiale  $\mathcal{F}(\xi)$ , qui n'est rien d'autre que la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion  $G(p)$ , cette méthode interférométrique permet de mesurer la température  $T$  avec une précision jamais atteinte auparavant. Le principe de la méthode est très simple, s'inspirant directement de la méthode bien connue de spectroscopie de Fourier en optique. L'idée est de dupliquer un paquet d'ondes atomique en deux paquets d'ondes identiques, de translater l'un d'eux d'une distance  $\xi$  puis de mesurer leur recouvrement, c'est-à-dire  $\mathcal{F}(\xi)$  en fonction de  $\xi$ . Cette méthode est ainsi particulièrement bien adaptée au refroidissement VSCPT à une dimension puisque celui-ci laisse les atomes dans une superposition de deux paquets d'ondes cohérents d'impulsions moyennes opposées  $\pm\hbar k$ . Dès la fin du refroidissement, ces deux paquets d'ondes se séparent donc l'un de l'autre et après une "période noire" de durée  $\tau_N$  sont distants de  $\xi = 2(\hbar k/M)\tau_N$ . On mesure alors leur recouvrement en rebranchant les lasers VSCPT sous forme d'une impulsion lumineuse très courte.

Le signal expérimental obtenu  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  est très bien reproduit par une fonction exponentielle décroissante ce qui indique clairement que la distribution d'impulsion  $G(p)$  est très proche d'une lorentzienne. De plus la constante de temps déduite de cet ajustement exponentiel permet de mesurer précisément la température des atomes. Des températures aussi basses que  $T_R/650$  soit environ 6 nK ont pu ainsi

être mesurées alors que, dans le même temps, la mesure par temps de vol donne  $T_R/80$ . Cette surestimation importante de la température s'explique très bien par l'effet de la taille du piège qui limite la résolution de la méthode du temps de vol à  $T_R/100$  environ pour un piège de rayon typique  $\sigma \sim 1\text{mm}$ .

Cette méthode performante nous a alors permis de mener deux études quantitatives sur le refroidissement VSCPT : l'influence des paramètres de refroidissement sur la température finale et la forme exacte de la distribution finale d'impulsion des atomes.

Plusieurs approches théoriques différentes indiquent que la température  $T$  d'atomes refroidis par VSCPT doit varier selon :

$$\frac{T_R}{T} = A(4E_R/\hbar\Gamma)^2 \frac{\tilde{\theta}}{\tilde{\Omega}_R^2} \quad (\text{VII.34})$$

où  $\tilde{\theta} = \theta\Gamma$  et  $\tilde{\Omega}_R = \Omega_R/\Gamma$  sont respectivement le temps d'interaction réduit et la pulsation de Rabi réduite des lasers VSCPT et  $A$  un facteur numérique de l'ordre de l'unité dont la valeur peut être obtenue à partir des simulations Monte-Carlo quantiques. Grâce à la méthode interférométrique mise au point, nous avons donc mesuré comment variait la température en fonction de ces deux paramètres. Le résultat expérimental est en très bon accord, non seulement qualitatif mais également quantitatif, avec les prédictions théoriques. Non seulement, l'inverse de la température varie linéairement en fonction du rapport  $\tilde{\theta}/\tilde{\Omega}_R^2$ , et ce jusqu'à des valeurs proches de  $T_R/1000$ , mais la pente de cette droite correspond à 30% près à la valeur théorique du préfacteur  $A$ . Une analyse plus approfondie de la forme de  $G(p)$  a montré que cet écart était en fait une déviation systématique introduite par l'ajustement exponentiel des données. Lorsqu'on corrige cet effet, l'écart entre la pente théorique et la pente expérimentale se réduit à 0.5%, ce qui constitue une validation très satisfaisante du modèle statistique du VSCPT.

Comme l'a fait apparaître l'étude précédente, la forme de  $G(p)$  n'est pas strictement lorentzienne et ceci a des conséquences sur l'analyse des données et la mesure des températures. Par ailleurs la forme exacte de  $G(p)$  donne des indications précises, et difficilement accessibles par d'autres moyens, sur les processus physiques fondamentaux qui gouvernent le refroidissement VSCPT. Dans la première partie de la thèse, nous nous sommes uniquement intéressés à la mesure de la largeur  $\delta p$  de  $G(p)$ . Dans la seconde partie nous avons étudié précisément la forme complète de  $G(p)$ , ou plus précisément, de sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}(\xi)$ . Cette étude a nécessité une analyse théorique très approfondie du refroidissement dans le cadre du modèle statistique du VSCPT basé sur les processus de diffusion anormale et les lois de Lévy. A-partir des résultats déjà établis dans le travail

de thèse de F. Bardou [78], nous avons ainsi pu calculer la forme analytique de la distribution finale d'impulsion et montré que  $G(p)$  s'exprimait simplement en termes de fonctions spéciales. Trois points fondamentaux sont apparues dans cette étude. Premièrement, la distribution  $G(p)$  présente un caractère autosimilaire. Quelle que soit la température finale,  $G(p)$  peut toujours se ramener à une fonction unique  $G(\eta)$  par un simple changement d'échelle  $p \rightarrow \eta = p/p_\theta$  où  $p_\theta \sim \Omega_R/\sqrt{\bar{\theta}}$  contient toute la dépendance vis-à-vis des paramètres de refroidissement. Deuxièmement, les ailes de  $G(p)$  décroissent en  $1/p^2$  et expliquent pourquoi  $G(p)$  est bien approximée par une lorentzienne. Enfin, la distribution est plus large au centre que ne laisserait prévoir son comportement asymptotique lorentzien et on peut montrer que cet écrasement du sommet de  $G(p)$  provient de l'absence d'état stationnaire et donc de la non-ergodicité, caractéristique du refroidissement VSCPT.

Dans un premier temps, nous avons confronté ces résultats analytiques aux résultats des simulations Monte-Carlo quantiques. Nous avons constaté un excellent accord quantitatif entre les deux approches tant du point de vue du caractère autosimilaire que sur la forme exacte de  $G(\eta)$ . Nous avons ensuite comparé les prédictions du modèle analytique avec les données expérimentales. Pour cela nous avons tiré parti du fait que, comme la distribution  $G(p)$  dont elle est la transformée de Fourier, la fonction d'autocorrélation spatiale, présente un aspect autosimilaire. Ainsi le signal expérimental  $\mathcal{F}_{NC}(\tau_N)$  peut toujours se ramener à la fonction unique  $\mathcal{F}(\zeta)$  grâce au changement d'échelle  $\zeta = \bar{\tau}_N \bar{\Omega}_R / \sqrt{\bar{\theta}}$  avec  $\bar{\tau}_N = \tau_N \Gamma$ . On peut ainsi moyenniser plusieurs courbes expérimentales pour reconstituer  $\mathcal{F}(\zeta)$  avec une meilleure statistique. La comparaison entre les courbes expérimentale et théorique nécessite cependant une description détaillée de l'évolution de l'atome au cours de la séquence "période noire" et en particulier pendant l'impulsion d'analyse. Des corrections dues à la durée non nulle de cette impulsion doivent alors être apportées pour rendre compte du signal expérimental. La forme théorique de  $\mathcal{F}(\zeta)$ , tenant compte de ces corrections et de la forme de raie calculée par le modèle statistique, permet alors de reproduire la totalité du signal expérimental en prenant la pulsation de Rabi comme paramètre ajustable. La valeur trouvée pour  $\Omega_R$  correspond à mieux que 5% près à la valeur mesurée expérimentalement. Pour conclure cette étude fine de la forme de raie, nous avons comparé l'ajustement précédent des données avec un simple ajustement exponentiel. L'examen des résidus montre clairement, avec un seul paramètre ajustable dans les deux cas, que la fonction  $\mathcal{F}(\zeta)$  calculée reproduit beaucoup mieux les résultats qu'une exponentielle. En particulier les écarts du signal à celle-ci, bien que relativement faibles, sont tout-à-fait conformes à ce que prévoit le modèle analytique. Ces écarts, dus à l'aplatissement du sommet de  $G(\eta)$ , représentent la première mise en évidence directe de la non-ergodicité du refroidissement VSCPT.

La méthode interférométrique de mesure de la température peut être étendue de manière à réaliser un véritable interféromètre atomique. Pour cela il suffit de prolonger la séquence “période noire” par une seconde période noire suivie d’une seconde impulsion. Les deux paquets d’ondes, se séparent pendant la première période noire puis se recombinent au cours de la deuxième. La deuxième impulsion teste alors leur recouvrement et donne naissance à un signal d’écho lorsque les deux périodes noires ont la même durée. Au-delà de la preuve directe qu’elle apporte sur la cohérence entre les deux paquets d’ondes issus du refroidissement, cette expérience a un grand intérêt pour d’éventuelles applications pratiques de cette méthode. En effet, en mesurant l’amplitude de l’écho en fonction de la durée des deux périodes noires, on obtient directement le temps caractéristique de décohérence dans nos conditions expérimentales. On trouve ainsi une décroissance exponentielle de l’amplitude de l’écho dont la constante de temps est proche de 2 ms. Ce résultat est essentiel si l’on désire utiliser cet interféromètre pour réaliser par exemple des mesures de précision.

Des températures de quelques nanoKelvin, un modèle théorique en très bon accord avec les observations, des images physiques simples, le refroidissement VSCPT a-t-il livré tous ses secrets? En ce qui concerne le refroidissement d’atomes libres, on peut probablement répondre par l’affirmative et même remarquer que le VSCPT est sans doute le mécanisme de refroidissement dont l’analyse expérimentale et théorique a été la plus poussée. Cependant, la possibilité de refroidir par VSCPT des atomes piégés est un problème ouvert qui n’a fait l’objet, jusqu’à ce jour, d’aucune tentative expérimentale. Pourtant ce pourrait être un bon moyen d’améliorer les performances du refroidissement VSCPT. Qu’est ce qui limite aujourd’hui la température des atomes? Nous avons vu au chapitre V que nous ne pouvons pas refroidir les atomes au-delà de  $T_R/1000$  environ et que ceci ne provient pas d’un processus parasite puisqu’aucune saturation n’apparaît dans la variation de  $1/T$  en fonction de  $\theta$ . Cette limite est simplement due au fait que la durée d’interaction  $\theta$  ne peut guère dépasser 2.5 ms sans que tous les atomes soient perdus. Ceci résulte non seulement de l’absence de force de friction dans la configuration étudiée (VSCPT à 1D,  $\sigma_+/\sigma_-$ ) mais également du chauffage induit par les 2 faisceaux laser VSCPT dans les directions transverses. Un bon moyen de remédier à cet inconvénient serait d’appliquer le refroidissement VSCPT, sur des atomes non pas en chute libre mais confinés dans un potentiel extérieur. Bien sûr, la faisabilité du VSCPT dans ces conditions impose deux contraintes fortes. D’une part, le piège ne doit pas faire intervenir de champ magnétique (du moins de champ transverse) et d’autre part, ce doit être un potentiel non dissipatif puisque le refroidissement subrecul suppose l’absence d’émission spontanée. L’exemple le plus connu d’un tel piège est un piège dipolaire croisé [109]



---

qui utilise la force dipolaire créée par deux lasers intenses et très désaccordés pour confiner les atomes dans un volume très réduit. Ceci a déjà été tenté pour le refroidissement Raman sans malheureusement que le régime subrecul puisse être atteint [110]. C'est pourtant dans cette possibilité de refroidir des atomes confinés (par un piège dipolaire ou par un autre type de piège) et d'atteindre ainsi des temps d'interaction beaucoup plus longs, que se trouve probablement l'avenir du refroidissement VSCPT.



## Annexe A

# Modes propres d'un système en $\Lambda$ en présence de lumière

Le but du calcul présenté ici est d'établir l'expression des modes propres de désintégration du système {atome+champ} à l'intérieur du sous-espace engendré par les trois états  $\{|e_0\rangle, |f_+\rangle, |f_-\rangle\}$  en présence de deux ondes lasers contrapropageantes de polarisations circulaires orthogonales. On ne s'intéresse qu'à la partie cohérente de l'évolution et on peut donc décrire le système par un hamiltonien effectif non-hermitique dans lequel l'émission spontanée est décrite par une partie imaginaire dans l'énergie de l'état excité.

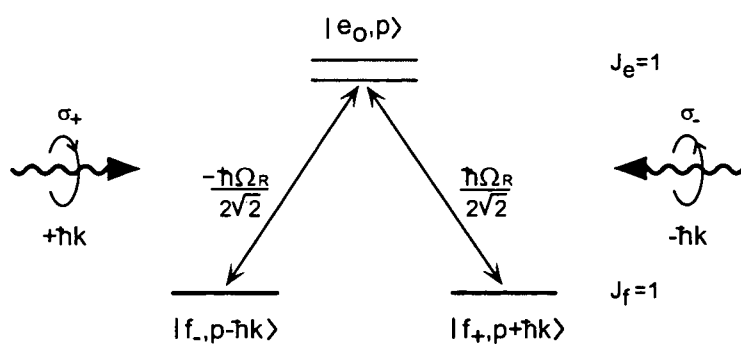


Figure A.1: Configuration en  $\Lambda$  à laquelle se ramène la transition  $J=1 \leftrightarrow J=1$  en présence de deux ondes lasers contrapropageantes polarisées  $\sigma_+/\sigma_-$ .

Le système considéré est rappelé sur la figure (A.1). Nous considérons donc l'évolution dans le sous-espace sous-tendu par la famille fermée :

$$\mathcal{F}(p) = \{|e_0, p\rangle, |f_+, p + \hbar k\rangle, |f_-, p - \hbar k\rangle\} \quad (\text{A.1})$$

sous l'action du hamiltonien :

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{V}_{AL} \quad (\text{A.2})$$

D'après les formules (II.8), (II.10) et (II.11),  $\hat{H}$  est représenté sur la base  $\mathcal{F}(p)$  par la matrice :

$$\hat{H} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_0 + \frac{p^2}{2M} - i\hbar\frac{\Gamma}{2} & \frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}}e^{-i\omega_L t} & -\frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}}e^{-i\omega_L t} \\ \frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}}e^{i\omega_L t} & \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} & 0 \\ -\frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}}e^{i\omega_L t} & 0 & \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

## A.1 Hamiltonien du système dans la base de l'atome habillé

Par l'intermédiaire du terme de couplage atome-laser, le hamiltonien ci-dessus dépend explicitement du temps. Ceci provient du fait que le champ laser est ici traité comme un champ extérieur classique, oscillant à la fréquence  $\omega_L$ . Mais il est également possible de le décrire comme un champ quantique dans un mode donné. Dans ce cas le système est constitué de deux sous-systèmes, l'atome et le mode laser, couplés par un opérateur indépendant du temps. Le nouveau hamiltonien total s'écrit donc :

$$\hat{H}' = \hat{H}'_A + \hat{H}'_L + \hat{V}'_{AL} \quad (\text{A.4})$$

où  $\hat{H}'_A$  représente le hamiltonien atomique,  $\hat{H}'_L$  celui du mode laser et  $\hat{V}'_{AL}$  le couplage atome-laser.

En diagonalisant le hamiltonien total, on obtient alors les modes propres de désintégration du système. Ceux-ci sont de vrais niveaux d'énergie qui facilitent beaucoup l'étude de l'évolution de la fonction d'onde atomique. Ces nouveaux états sont appelés niveaux habillés car ils décrivent l'atome "habillé par les photons laser". Outre le fait qu'elle facilite beaucoup les calculs en ramenant le problème à un problème stationnaire, la méthode de l'atome habillé permet de décrire physiquement l'évolution du système en termes de processus d'absorption

ou d'émission élémentaires et fournit ainsi nombre d'images physiques, particulièrement importantes pour l'interprétation des phénomènes.

Puisque le système comprend maintenant le mode laser, l'état de celui-ci doit apparaître dans la notation des états quantiques. A la notation précédente  $|i, p\rangle$  qui rendait compte de l'état interne de l'atome et de l'impulsion moyenne de son centre de masse, on doit donc rajouter le nombre  $N$  de photons dans le mode laser. Le système que nous étudions ici comporte deux champs laser, correspondant respectivement aux ondes laser  $\sigma_-$  et  $\sigma_+$ . Nous introduisons donc la notation suivante :

$$|i, p, N_-, N_+\rangle \quad (\text{A.5})$$

pour désigner un atome dans l'état interne  $i$ , avec l'impulsion moyenne  $p$ , "habillé" par  $N_-$  photons  $(-\mathbf{k}, \epsilon_-)$  et  $N_+$  photons  $(+\mathbf{k}, \epsilon_+)$ . Notons que ces états sont les états propres de l'hamiltonien non perturbé  $\hat{H}'_A + \hat{H}_L$ . Compte-tenu des règles de conservation du moment cinétique total et de l'impulsion, la base d'états habillés qui correspond à  $\mathcal{F}(p)$  s'écrit :

$$\{|e_0, p, N_-, N_+\rangle, |f_+, p + \hbar k, N_- + 1, N_+\rangle, |f_-, p - \hbar k, N_-, N_+ + 1\rangle\} \quad (\text{A.6})$$

On trouve alors facilement la matrice qui représente  $\hat{H}'$  sur cette base :

$$\hat{H}' = \begin{pmatrix} -\hbar\delta + \frac{p^2}{2M} - i\hbar\frac{\Gamma}{2} & \frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}} & -\frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}} \\ \frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}} & \frac{(p + \hbar k)^2}{2M} & 0 \\ -\frac{\hbar\Omega_R}{2\sqrt{2}} & 0 & \frac{(p - \hbar k)^2}{2M} \end{pmatrix} \quad (\text{A.7})$$

où  $\delta$  est le désaccord donné par :

$$\delta = \omega_L - \omega_0 \quad (\text{A.8})$$

Comme dans le paragraphe II.2.2, nous effectuons à-présent le changement de base permettant de faire apparaître des états non-couplés, c'est-à-dire des états propres de  $\hat{V}'_{AL}$  avec la valeur propre 0 :

$$|\psi_{NC}(p, N_-, N_+)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k, N_- + 1, N_+\rangle + |f_-, p - \hbar k, N_-, N_+ + 1\rangle \right]$$

$$|\psi_C(p, N_-, N_+)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[ |f_+, p + \hbar k, N_- + 1, N_+\rangle - |f_-, p - \hbar k, N_-, N_+ + 1\rangle \right]$$

Dans la nouvelle base :

$$\{|e_0, p, N_-, N_+\rangle, |\psi_C(p, N_-, N_+)\rangle, |\psi_{NC}(p, N_-, N_+)\rangle\} \quad (\text{A.9})$$

le hamiltonien s'écrit :

$$\hat{H}' = \left( \frac{p^2}{2M} + E_R \right) \mathbf{I} + \hbar \begin{pmatrix} -\delta_R - i\Gamma/2 & \Omega_R/2 & 0 \\ \Omega_R/2 & 0 & kp/M \\ 0 & kp/M & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.10})$$

où  $\mathbf{I}$  est la matrice identité  $3 \times 3$  et où nous définissons le désaccord corrigé de l'énergie de recul par :

$$\hbar\delta_R = \hbar\delta + E_R \quad (\text{A.11})$$

Dans la suite du calcul, nous omettons de mentionner l'état du champ laser ( $N_-$  et  $N_+$ ) dans les états habillés pour alléger la rédaction. Il convient donc de garder à l'esprit que  $|e_0, p\rangle$ ,  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  désignent à partir de maintenant les états habillés et contiennent donc implicitement les variables du champ laser conformément à (A.9).

## A.2 Modes propres du système

La diagonalisation exacte du hamiltonien précédent est fastidieuse et nécessite de recourir à une résolution numérique. Nous faisons ici un traitement perturbatif à l'ordre le plus bas qui est valable dans la plupart des situations expérimentales et qui permet d'interpréter physiquement les résultats. La figure ?? montre le

couplage laser entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|e_0, p\rangle$  et le couplage motionnel entre  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ . L'hamiltonien non perturbé s'écrit :

$$\hat{H}_0 = \left( \frac{p^2}{2M} + E_R \right) \mathbf{I} - \hbar \left( \delta_R + i\frac{\Gamma}{2} \right) |e_0, p\rangle \langle e_0, p| \quad (\text{A.12})$$

Les états propres de  $\hat{H}_0$  (états non perturbés) et les valeurs propres associées sont :

$$|e_0, p\rangle \quad \text{associé à} \quad E_0 = \frac{p^2}{2M} + E_R - \hbar \left( \delta_R + i\frac{\Gamma}{2} \right) \quad (\text{A.13})$$

$$|\psi_C(p)\rangle \quad \text{associé à} \quad E_C = \frac{p^2}{2M} + E_R \quad (\text{A.14})$$

$$|\psi_{NC}(p)\rangle \quad \text{associé à} \quad E_{NC} = \frac{p^2}{2M} + E_R \quad (\text{A.15})$$

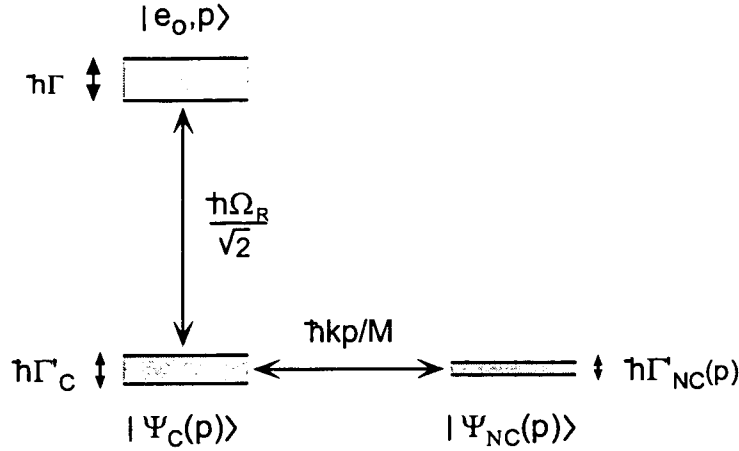


Figure A.2: Système en Lambda représentant la famille  $\mathcal{F}(p)$  après changement de base pour faire apparaître les états  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ , non-couplés à l'état excité. Les états  $|e_0, p\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  sont couplés par le couplage laser proportionnel à la pulsation de Rabi  $\Omega_R$ , tandis que les états  $|\psi_C(p)\rangle$  et  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  sont couplés par le couplage motionnel proportionnel à la quasi-impulsion  $p$ . Une partie de l'instabilité naturelle de l'état excité de largeur  $\Gamma$  est transmise à  $|\psi_C(p)\rangle$  par le couplage laser ( $\Gamma'_C$ ), puis à  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  par le couplage motionnel ( $\Gamma'_{NC}(p)$ ).

Nous introduisons alors successivement la perturbation par le couplage laser :

$$\bar{V} = \frac{\hbar\Omega_R}{2}|e_0, p\rangle\langle\psi_C(p)| + h.c. \quad (\text{A.16})$$

puis la perturbation due au couplage motionnel :

$$\bar{\bar{V}} = \frac{\hbar kp}{M}|\psi_C(p)\rangle\langle\psi_{NC}(p)| + h.c. \quad (\text{A.17})$$

### A.2.1 Perturbation par le couplage laser

Nous appliquons la théorie des perturbations à l'ordre le plus bas (2ème ordre pour les valeurs propres, 1er ordre pour les vecteurs propres). Ce traitement est valable si l'intensité du couplage est très faible devant l'écart énergétique entre niveaux non-perturbés :

$$\frac{\hbar\Omega_R}{2} \ll |E_C - E_0| \quad (\text{A.18})$$

ce qui entraîne :

$$\frac{\Omega_R}{2} \ll \sqrt{\delta_R^2 + \Gamma^2/4} \quad (\text{A.19})$$

Le couplage  $\bar{V}$  n'agit que dans le sous-espace sous-tendu par  $|e_0, p\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  si bien qu'il ne modifie ni l'état  $|\psi_{NC}(p)\rangle$ , ni la valeur propre associée  $E_{NC}$ . Les nouvelles valeurs propres s'écrivent alors :

$$\overline{E_0} = E_0 - \hbar(\delta'_C - i\Gamma'_C/2) \quad (\text{A.20})$$

$$\overline{E_C} = E_C + \hbar(\delta'_C - i\Gamma'_C/2) \quad (\text{A.21})$$

et les nouveaux vecteurs propres sont donnés par :

$$\overline{|e_0, p\rangle} = |e_0, p\rangle - \frac{\Omega_R/2}{\delta_R + i\Gamma/2} |\psi_C(p)\rangle \quad (\text{A.22})$$

$$\overline{|\psi_C(p)\rangle} = |\psi_C(p)\rangle + \frac{\Omega_R/2}{\delta_R + i\Gamma/2} |e_0, p\rangle \quad (\text{A.23})$$

avec :

$$\delta'_C = \frac{\Omega_R^2/4}{\delta_R^2 + \Gamma^2/4} \delta_R \quad \text{et} \quad \Gamma'_C = \frac{\Omega_R^2/4}{\delta_R^2 + \Gamma^2/4} \Gamma \quad (\text{A.24})$$

### A.2.2 Perturbation par le couplage motionnel

Nous introduisons maintenant le couplage motionnel entre  $|\psi_{NC}(p)\rangle$  et  $|\psi_C(p)\rangle$  comme une perturbation par rapport au couplage laser. Ceci est légitime à condition que :

$$\frac{\hbar kp}{M} \ll |E_{NC} - \overline{E_C}| \quad (\text{A.25})$$

ce qui entraîne :

$$\frac{kp}{M} \ll \sqrt{\delta_C'^2 + \Gamma_C'^2/4} \quad (\text{A.26})$$

Cette condition est très facilement réalisée pour peu que les atomes soient déjà assez froids. On obtient alors sans difficulté :

$$\overline{\overline{E_C}} = \overline{E_C} - \hbar(\delta'_{NC} - i\Gamma'_{NC}/2) \quad (\text{A.27})$$

$$\overline{\overline{E_{NC}}} = E_{NC} + \hbar(\delta'_{NC} - i\Gamma'_{NC}/2) \quad (\text{A.28})$$

et les nouveaux vecteurs propres sont donnés par :

$$\overline{\overline{|\psi_C(p)\rangle}} = \overline{|\psi_C(p)\rangle} + \frac{kp/M}{\delta'_C - i\Gamma'_C/2} |\psi_{NC}(p)\rangle \quad (\text{A.29})$$

$$\overline{\overline{|\psi_{NC}(p)\rangle}} = |\psi_{NC}(p)\rangle - \frac{kp/M}{\delta'_C - i\Gamma'_C/2} \overline{|\psi_C(p)\rangle} \quad (\text{A.30})$$



avec :

$$\delta'_{NC} = -\frac{(kp/M)^2}{\delta'_C + \Gamma'^2_C/4} \delta'_C = -\left(\frac{2kp}{M\Omega_R}\right)^2 \delta_R \quad (\text{A.31})$$

$$\Gamma'_{NC} = \frac{(kp/M)^2}{\delta'_C + \Gamma'^2_C/4} \Gamma'_C = \left(\frac{2kp}{M\Omega_R}\right)^2 \Gamma \quad (\text{A.32})$$



# Annexe B

## Théorème de la limite centrale généralisé et lois de Lévy

On est souvent amené en statistique à étudier des sommes de variables aléatoires indépendantes toutes distribuées selon la même loi de probabilité. Le problème se pose alors de déterminer à partir de la distribution des variables aléatoires constituant la somme, la distribution de la somme elle-même. Dans de nombreux cas la réponse à ce problème est donnée par le théorème de la limite centrale (TLC).

---

### Théorème de la limite centrale

La somme  $X_N$  de  $N$  variables aléatoires indépendantes  $x_i$  distribuées selon la même loi  $P(x)$ , de moyenne  $\bar{x}$  et de variance  $\sigma^2$ , tend, lorsque  $N \gg 1$ , vers une variable aléatoire distribuée selon une gaussienne de moyenne  $N\bar{x}$  et de variance  $N\sigma^2$ . En introduisant la variable normalisée :

$$Z_N = \frac{X_N - N\bar{x}}{\sigma\sqrt{2N}} \quad (\text{B.1})$$

ce théorème peut donc s'écrire :

$$P(Z_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(Z_N)^2} \quad (\text{B.2})$$

---

Ce théorème est très puissant mais ne s'applique qu'à des distributions dont les moments d'ordre 1 et 2 (moyenne et variance) sont finis. Or il existe des situations où cette condition n'est pas vérifiée. C'est le cas en particulier des

distributions présentant un comportement asymptotique en loi de puissance de la forme :

$$P(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{B}{x^{1+\mu}} \quad (\text{B.3})$$

Lorsque le paramètre  $\mu$  satisfait :

$$0 < \mu \leq 2 \quad (\text{B.4})$$

ces distributions sont appelées "lois larges" car elles décroissent trop lentement pour que  $\langle x \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle$  aient simultanément des valeurs finies. Leur convergence vers 0 à l'infini reste néanmoins suffisamment rapide pour qu'elles soient encore normalisables. Lévy et Khintchine ont généralisé le TLC à ces lois larges et ont montré qu'une somme de variables aléatoires distribuées selon (B.3) tendait vers une variable distribuée, non pas selon une gaussienne, mais selon une "loi de Lévy".

### Théorème de la limite centrale généralisé

La somme  $X_N$  de  $N$  variables aléatoires indépendantes  $x_i$  distribuées selon la même loi  $P(x)$  ayant un comportement asymptotique en loi de puissance :

$$P(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{B}{x^{1+\mu}} \quad \text{avec } 0 < \mu \leq 2 \quad (\text{B.5})$$

tend, lorsque  $N \gg 1$ , vers une variable aléatoire distribuée selon une loi de Lévy. En introduisant la variable normalisée :

$$Z_N = \begin{cases} \frac{X_N}{N^{1/\mu}} & \text{si } 0 < \mu < 1 \\ \frac{X_N}{N \ln N} & \text{si } \mu = 1 \\ \frac{X_N - N\bar{x}}{N^{1/\mu}} & \text{si } 1 < \mu < 2 \\ \frac{X_N - N\bar{x}}{\sqrt{N \ln N}} & \text{si } \mu = 2 \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

ce théorème s'écrit :

$$P(Z_N) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} L_{\mu,B}(Z_N) \quad (\text{B.7})$$

où  $L_{\mu,B}$  est la loi de Lévy caractérisée par les deux paramètres  $\mu$  et  $B$ .

Sans entrer dans les détails analytiques de ces fonctions, signalons simplement que les lois de Lévy s'expriment comme la transformée de Laplace inverse d'une fonction simple :

$$L_{\mu,B}(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} ds e^{sx-B's^\mu} \quad (\text{B.8})$$

où  $B'$  est une constante dépendant de  $\mu$  et proportionnelle à  $B$  [27]. Il découle de cette expression que les transformées de Laplace et de Fourier des lois de Lévy ont généralement des formes simples et faciles à utiliser.

Il ressort de ces deux théorèmes que la distribution de la somme  $P(X_N)$  ne se comporte pas du tout de la même façon selon que  $P(x)$  est une loi étroite ou une loi large.

- Si  $P(x)$  est étroite (cas du TLC), l'allure de  $P(X_N)$  est essentiellement lié au comportement de  $P(x)$  au voisinage de zéro puisque les intégrales qui définissent  $\langle x \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle$  ne prennent de valeurs appréciables qu'au voisinage de  $x = 0$ .
- Au contraire, si  $P(x)$  est une loi large, la distribution  $P(X_N)$  dépend essentiellement du comportement de  $P(x)$  quand  $x \rightarrow \infty$ .

Les différences qui en découlent sont d'autant plus nettes que l'exposant  $\mu$  est proche de 0 car la décroissance de la loi de Lévy est alors de plus en plus lente. Lorsque  $P(x) = B/x^{1+\mu}$ , on peut distinguer les différentes situations suivantes :

- $\mu > 2$   
Dans ce cas  $\langle x \rangle$  et  $\langle x^2 \rangle$  sont définis et on est dans le cadre du TLC habituel.
- $1 < \mu \leq 2$   
La loi  $P(x)$  est une courbe en cloche dont les ailes décroissent encore assez rapidement vers 0 pour que  $\langle x \rangle$  soit défini. Par contre  $\langle x^2 \rangle$  diverge et on est donc déjà dans le cadre du TLG. La loi de Lévy  $L_{\mu,B}(x)$  est alors une courbe en cloche de largeur caractéristique  $B^{1/\mu}$ .
- $0 < \mu \leq 1$   
Les deux premiers moments de  $P(x)$  divergent et la loi de Lévy décroît alors comme la distribution élémentaire c'est-à-dire  $L_{\mu,B}(x \rightarrow \infty) \sim 1/x^{1+\mu}$ . C'est ce dernier cas qui est le plus différent de la situation habituelle du TLC et qui donne naissance aux effets les plus spectaculaires tels que les vols de Lévy ou les phénomènes de diffusion anormale.



# Annexe C

## Direct Measurement of the Spatial Correlation Function of Ultracold Atoms

B. Saubaméa, T.W. Hijmans, S. Kulin, E. Rasel, E. Peik, M. Leduc, and C.  
Cohen-Tannoudji

Physical Review Letters, **79**, 3146 (1997)

### Direct Measurement of The Spatial Correlation Function of Ultracold Atoms

B. Saubaméa, T. W. Hijmans,\* S. Kulin, E. Rasel, E. Peik,<sup>†</sup> M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji

Collège de France and Laboratoire Kastler Brossel, Ecole Normale Supérieure, 24 rue Lhomond, F-75231 Paris Cedex 05, France  
(Received 28 July 1997)

We demonstrate a new method to directly measure, from the overlap of two atomic wave packets, the spatial correlation function of metastable helium atoms cooled by velocity selective coherent population trapping. This approach allows us to determine precisely the effective temperature of the atoms and to make quantitative comparison with theory. Temperatures as low as 1/800 of the recoil temperature are found. Moreover, we extend this method to realize a temporal interferometer with de Broglie matter waves in the subrecoil regime. [S0031-9007(97)04377-9]

PACS numbers: 32.80.Pj, 42.50.Vk

Laser manipulation of atoms, sometimes combined with evaporative cooling, provides ultracold atomic samples and opens the way to many applications ranging from ultrahigh resolution spectroscopy to atomic interferometry and quantum degenerate gases [1]. Among the purely optical cooling methods, velocity selective coherent population trapping (VSCPT) [2] and Raman cooling [3] allow the atomic momentum spread  $\delta p$  to be reduced below the value  $\hbar k$  of the photon momentum (subrecoil cooling). The implementation of methods to measure such a small momentum width or the associated large coherence length of the atomic wave packets is therefore a main issue. Two methods have been used to measure  $\delta p$  in subrecoil cooling experiments: time-of-flight techniques (TOF) [4] for VSCPT and velocity selective Raman transitions [5] for Raman cooling. We present, in this Letter, a new approach which is based on a direct measurement of the atomic spatial correlation function and fits in the current effort to investigate first and higher order correlation functions in ultracold atomic samples [6]. We apply our method to metastable helium atoms cooled by one-dimensional VSCPT. We deduce from our measurements effective temperatures as low as  $T_R/800$ , where  $T_R$  is the recoil limit [7]. This is well below the lowest temperatures we can measure by TOF. The high resolution of this method allows quantitative tests to be made of theoretical predictions based on Lévy statistics. In addition, we can recombine the atomic wave packets after they have flown apart, achieving in this way a Mach-Zender type interferometer with subrecoil cooled atoms (for a review on atomic interferometry see [8,9]; see also [10]).

The idea followed here is that the dispersion of a variable, which is too narrow to be precisely measured, can be inferred from the correlation function of the conjugate variable. In classical optics, for example, the width  $\delta\omega$  of a very narrow spectral line can be more easily obtained from the time correlation function  $G(\tau) = \int dt E^*(t + \tau)E(t)$  of the light field which is the Fourier transform of the spectral intensity distribution  $I(\omega)$ . Here we measure a signal proportional to the overlap integral  $G(a) = \int dx \varphi^*(x + a)\varphi(x)$  between two identical atomic wave packets separated by a distance

*a*. This integral is the atomic spatial correlation function and can also be written as  $\int dp |\phi(p)|^2 e^{iap/\hbar}$  where  $\phi(p)$  is the Fourier transform of  $\varphi(x)$ .

The principle of subrecoil cooling is to make the atoms perform a random walk in momentum space with a jump rate which vanishes for  $p = 0$ , so that atoms falling in a small zone around  $p = 0$  remain trapped there for a long time and accumulate. Although VSCPT has also been demonstrated in two and three dimensions [2], we will restrict ourselves here to a simple 1D configuration [11]. A  $J_g = 1 \rightarrow J_e = 1$  transition is driven by two counterpropagating laser waves with the same complex amplitude and orthogonal  $\sigma_{\pm}$  polarizations [Fig. 1(a)]. The only nonzero matrix elements of the atom-laser interaction Hamiltonian  $V_{AL}$  are  $\langle e_0, p | V_{AL} | g_{\pm}, p \pm \hbar k \rangle$  where  $|i, q\rangle$  is the state of an atom in internal state  $|i\rangle$  with momentum  $q$  along the  $z$  axis. Since the two transitions starting from  $|g_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  have the same

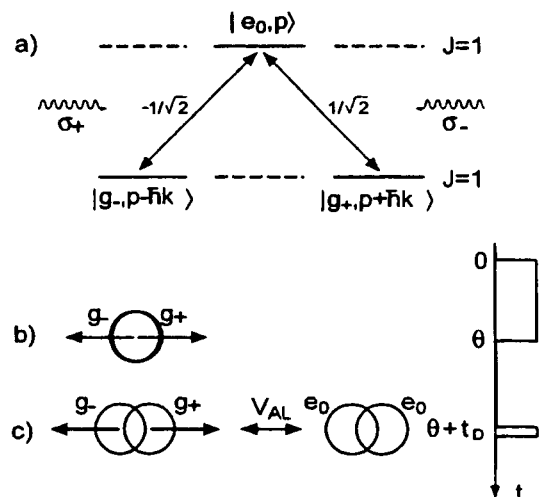


FIG. 1. (a) Three level  $\Lambda$  configuration on the  $2^3S_1-2^3P_1$  transition of  $^4\text{He}$ . The Clebsch-Gordan coefficients are equal to  $\pm 1/\sqrt{2}$ . (b) Sketch of the atomic wave packets at the beginning of the dark period. (c) Moving ground state wave packets coupled to excited state wave packets at rest by the probe pulse ( $V_{AL}$ ) at the end of the dark period. The temporal sequence is shown on the right.



final state  $|e_0, p\rangle$ , the two absorption amplitudes can interfere destructively (or constructively) resulting in a decoupling (or enhanced coupling) between the atoms and the laser field. Taking into account the opposite values of the Clebsch-Gordan coefficients, the corresponding noncoupled (or coupled) states are found to be

$$|\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|g_+, p + \hbar k\rangle \pm |g_-, p - \hbar k\rangle). \quad (1)$$

The only eigenstate of the total Hamiltonian, including the kinetic energy operator  $\mathbf{P}^2/2M$ , is  $|\Psi_{\text{NC}}(0)\rangle$  which is therefore completely stable (perfect trapping state). If  $p \neq 0$ , off-diagonal elements of  $\mathbf{P}^2/2M$ , proportional to  $p$ , contaminate  $|\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle$  by  $|\Psi_{\text{C}}(p)\rangle$ . The departure rate from the noncoupled states therefore varies as  $p^2$ , rendering the random walk velocity selective. After an interaction time  $\theta$ , the atoms end up in a statistical mixture of states  $|\Psi\rangle$ , each state  $|\Psi\rangle$  being of the form

$$|\Psi\rangle = \int dp \phi(p) |\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle, \quad (2)$$

with  $p$  distributed about  $p = 0$ , over a narrow range  $\delta p$  which decreases when  $\theta$  increases. This state corresponds to a superposition of two wave packets with orthogonal internal states  $|g_{\pm}\rangle$  and a momentum spread  $\delta p$  around the mean values  $\pm \hbar k$ . This is at the origin of the two narrow peaks characteristic of the momentum distribution created by 1D-VSCPT cooling.

To measure the spatial correlation function of the atomic wave packets, we use the time sequence shown in the right part of Fig. 1. After the cooling stage of duration  $\theta$ , we switch off the VSCPT beams for a "dark period" of duration  $t_D$  during which the two wave packets fly apart freely. We then switch on a short probe pulse of VSCPT light to measure their overlap as explained now. At the beginning of the dark period ( $t = \theta$ ), the atomic state is given by Eq. (2) which, in position representation, is a linear superposition of two wave packets  $\varphi(x)e^{\pm ikx}|g_{\pm}\rangle$  [Fig. 1(b)]. Just before the probe pulse, at  $t = \theta + t_D$ , the atomic state  $|\Psi(t_D)\rangle$  is described by a superposition of two wave packets  $\varphi(x \mp a/2)e^{\pm ikx}|g_{\pm}\rangle$  whose centers are separated by a distance  $a = 2\hbar kt_D/M$  [Fig. 1(c)]. As soon as the light is turned on again,  $V_{\text{AL}}$  couples  $|\Psi(t_D)\rangle$  to an excited state corresponding to a linear superposition of two wave packets  $\varphi(x \mp a/2)|e_0\rangle$  [Fig. 1(c)]. The two  $\sigma_{\pm}$  absorption amplitudes lead therefore to two different final states, having the same internal state  $|e_0\rangle$  but two different external states described by two wave packets at rest separated by the distance  $a$ . The destructive interference between the two absorption amplitudes can be complete only if the two final states are identical. This only occurs for  $a = 0$ , i.e., for  $t_D = 0$ . As soon as  $a \neq 0$ , the destructive interference can only take place partially so that atoms can absorb light. More precisely, the inhibition of the absorption process, maximum at  $t_D = 0$ , decreases in proportion to the scalar product of the two

final states, i.e., the overlap integral  $G(a) = \int dx \varphi^*(x + a/2)\varphi(x - a/2)$  between two identical atomic wave packets [12].

The previous discussion can be made more quantitative by using the  $\{|\Psi_{\text{C}}(p)\rangle, |\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle\}$  basis. After the free evolution of duration  $t_D$ ,  $|\Psi\rangle$  is transformed into

$$|\Psi(t_D)\rangle = \int dp \phi(p) e^{-i\omega t_D} \left[ \cos \frac{kp t_D}{M} |\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle - i \sin \frac{kp t_D}{M} |\Psi_{\text{C}}(p)\rangle \right], \quad (3)$$

with  $\omega = (p^2 + \hbar^2 k^2)/2M\hbar$ . When the light is turned on again, only the projection of  $|\Psi(t_D)\rangle$  onto the subspace of states  $|\Psi_{\text{C}}(p)\rangle$  absorbs light, a principle also used in [10]. The corresponding atoms have their momenta dispersed over a wide momentum range, and the resulting background is easily distinguishable from the sharp peaks associated with the atoms remaining in the states  $|\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ . This allows us to measure the probability  $\Pi_{\text{NC}}(t_D)$  for an atom to be found in a noncoupled state at the time  $t_D$ . From Eq. (3) a simple calculation gives

$$\Pi_{\text{NC}}(t_D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \int dp |\phi(p)|^2 \cos \frac{2kp t_D}{M}. \quad (4)$$

As expected,  $\Pi_{\text{NC}}(t_D)$  is related to the Fourier transform of the momentum distribution  $\mathcal{P}(p) = |\phi(p)|^2$ . Theoretical treatments of VSCPT [13] predict  $\mathcal{P}(p)$  to have tails varying as  $1/p^2$ . One can therefore approximate  $\mathcal{P}(p)$  by a Lorentzian of HWHM  $\tilde{\delta} p$  [14] which yields

$$\Pi_{\text{NC}}(t_D) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-t_D/\tau_{\text{C}}}, \quad (5)$$

where  $\tau_{\text{C}} = M/2k\tilde{\delta} p$  is the coherence time. The coherence length is thus given by  $\xi = 2(\hbar k/M)\tau_{\text{C}} = \hbar/\tilde{\delta} p$ . Notice that  $\Pi_{\text{NC}}$  does not vanish but tends to 1/2 when  $t_D \gg \tau_{\text{C}}$ , or equivalently when  $a \gg \xi$ . This nonzero asymptotic limit can be easily understood by inverting Eq. (1) which shows that each component  $|g_{\pm}, p \pm \hbar k\rangle$  of the two wave packets has a probability 1/2 to be projected onto a noncoupled state by the probe pulse.

Our experimental apparatus has been described previously [11]. We release about  $10^5$  metastable helium atoms from a magneto-optical trap where they are pre-cooled to  $\sim 100 \mu\text{K}$  by means of laser beams tuned to the  $2^3S_1$ - $2^3P_2$  transition. We then perform the VSCPT cooling by turning on two horizontally counterpropagating laser beams tuned on the  $2^3S_1$ - $2^3P_1$  transition, with the same Rabi frequency  $\Omega$ , orthogonal polarizations  $\sigma_{\pm}$ , and detuning  $\delta \approx 0$ . After a given interaction time  $\theta$ , we shut off the VSCPT laser beams for a dark period of duration  $t_D$  and subsequently apply a very short pulse of VSCPT light as discussed above. After a free flight the atoms hit a detector located 6.8 cm below, which records

the time and position of arrival of each atom. As we do in the usual TOF method, we infer from these coordinates the characteristic double-peak momentum distribution of the atoms. However, we no longer deduce the temperature from the width of these peaks but rather deduce  $\Pi_{\text{NC}}$  from their area after subtracting the background.

In all experiments, the duration of the probe pulse is  $\sim 10 \mu\text{s}$ , short enough to avoid any detectable further cooling and sufficiently long to expel all the atoms in the states  $|\Psi_{\text{C}}(p)\rangle$  out of the two sharp peaks. Special care is taken to control residual magnetic fields. Any magnetic field perpendicular to the laser direction induces Larmor oscillation between the states  $|\Psi_{\text{C}}(p)\rangle$  and  $|\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle$  in the absence of light. To avoid the resulting oscillation of  $\Pi_{\text{NC}}$ , we compensate transverse magnetic fields within 0.5 mG, at the position of the atomic cloud, by means of the mechanical Hanle effect [15]. Moreover, we apply a comparatively strong ( $\sim 8$  mG) magnetic field along the laser axis [16] to keep the spins aligned along their initial orientation during the dark period.

A typical measurement of  $\Pi_{\text{NC}}$  as a function of  $t_D$  is shown in Fig. 2. As expected from Eq. (5),  $\Pi_{\text{NC}}$  decreases from 1.0 to 0.5. Data are in good agreement with an exponential fit (solid line) which directly confirms that the momentum distribution of atoms cooled by VSCPT is close to a Lorentzian. The time constant of this exponential is found to be  $\tau_c = 19.0(8) \mu\text{s}$  which corresponds to  $\delta p = \hbar k/25(1)$  and to an effective temperature  $T = T_R/625(50)$  [7]. The temperature directly inferred from the width of the peaks of the momentum distribution in the reference VSCPT experiment is of the order of  $T_R/70$  in this case. This indicates that the usual TOF method is strongly limited by instrumental effects. From Monte Carlo simulations, we found that the major limitation is due to the initial size of the atomic cloud (radius  $\sim 1$  mm).

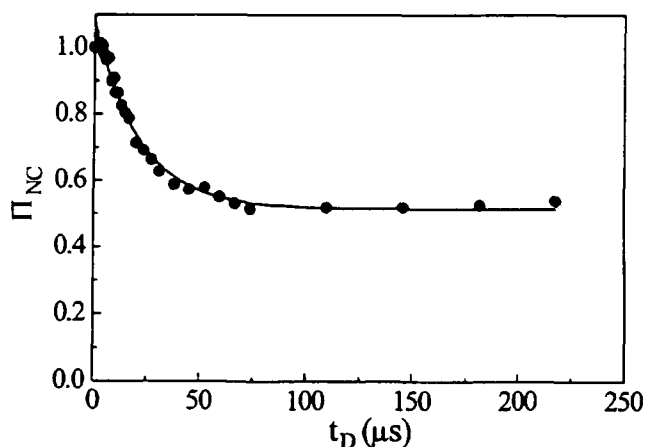


FIG. 2. Fraction of atoms left in noncoupled states after a dark period of duration  $t_D$  for  $\Omega \approx 0.9\Gamma$  ( $\Gamma$  is the natural width of the excited state) and  $\delta = 0$ . The exponential fit (solid line) gives  $\tau_c = 19 \mu\text{s}$ , which corresponds to  $\delta p = \hbar k/25$ ,  $T = T_R/625$ , and  $\xi = 3.5 \mu\text{m}$ .

The possibility to determine the temperature with a very high resolution opens the way to a quantitative comparison with theory based on Levy statistics and quantum Monte Carlo simulations [13], which predicts that  $T_R/T = A\theta\Omega^{-2}(M^2/4\hbar^2k^4\Gamma)$ , where  $A$  is a numerical prefactor of the order of unity. Note that  $T_R/T$  does not depend on  $\delta$  [17]. The experimental dependence of the effective temperature versus  $\theta$  and  $\Omega$  is shown in Fig. 3. The linear fit in Fig. 3(a) gives a prefactor  $A \sim 3$  in good agreement with theory, in view of the uncertainty in the absolute value of  $\Omega$  which can only be determined within a factor of 2. The variation of  $T_R/T$  versus  $\Omega$  is shown in Fig. 3(b) and follows a power law of exponent  $-1.9(2)$ , in very good agreement with the expected value  $-2$ .

The above described measurement of the spatial correlation function is direct evidence of the coherence of the two wave packets involved in a VSCPT state. A perhaps even more convincing demonstration is provided by the following experiment. Starting as before with a dark period of fixed duration  $t_D \gg \tau_c$  we now add a second dark period of variable duration  $t'_D$  ended by a second probe pulse identical to the first one. If, after this last pulse, we measure the total fraction  $\Pi'_{\text{NC}}$  of atoms projected onto noncoupled states in the same way as we did before, we observe an echo signal centered around  $t'_D = t_D$  [Fig. 4]. In fact, we have realized a temporal interferometer (see also [18]) that can be described as follows (inset of Fig. 4). After the first dark period, the two wave packets that we now simply denote  $\varphi_+$  and  $\varphi_-$  are separated by a distance  $a \gg \xi$ . The first pulse therefore projects half of the atoms in coupled states, leaving the remaining half in superpositions of noncoupled states  $|\Psi_{\text{NC}}(p)\rangle$ . Hence, during the second dark period,  $\varphi_+$  splits into  $\varphi_{++}$  and  $\varphi_{+-}$ , while  $\varphi_-$  splits into  $\varphi_{-+}$  and  $\varphi_{--}$ . The overlap between these wave packets is probed by the second pulse. When  $|t'_D - t_D|, t'_D \gg \tau_c$ , this pulse projects out half of each wave packet which results in  $\Pi'_{\text{NC}} = 1/4$ . However, when  $t'_D \approx t_D$ , the two wave packets  $\varphi_{-+}$

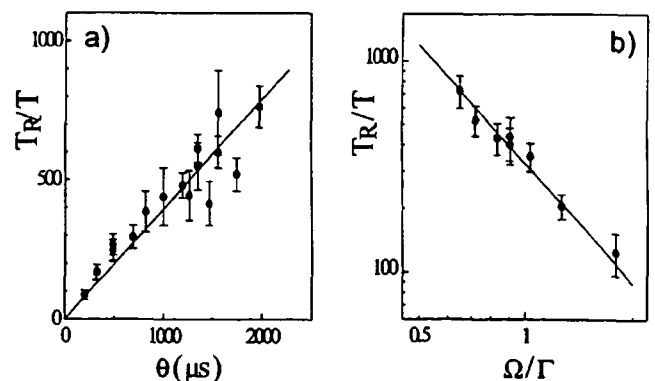


FIG. 3. (a) Dependence of  $T_R/T$  on the VSCPT interaction time  $\theta$  for  $\Omega \approx 0.9\Gamma$  and  $\delta = 0$ . The fit (solid line) confirms the linear dependence on  $\theta$ . (b) Dependence of  $T_R/T$  on the Rabi frequency  $\Omega$  for  $\delta = 0$  and  $\theta = 1000 \mu\text{s}$  in log-log scale. The linear fit (solid line) gives a slope of  $-1.9(2)$ .

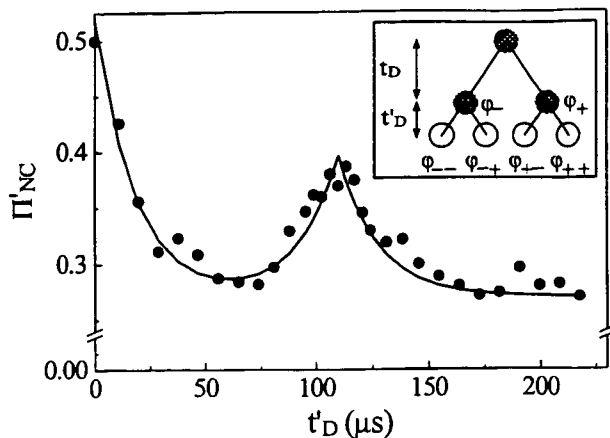


FIG. 4. Experiment with two dark periods for  $t_D = 110 \mu\text{s}$ . The temporal evolution of the wave packets is depicted in the inset.  $\Pi'_{NC}$  is the fraction of atoms left in noncoupled states after the second dark period of duration  $t'_D$  and the second pulse. The solid line represents an analytical expression, generalizing Eq. (5) for two dark periods.

and  $\phi_{+-}$  completely overlap and the destructive interference partially reappears. A simple calculation leads to  $\Pi'_{NC}(t'_D = t_D) = 3/8$ , which is very close to the observed echo signal ( $\approx 0.38$ ).

In conclusion, we have used a method analogous to Fourier spectroscopy in optics to measure the spatial correlation function of ultracold atomic wave packets. This method allowed us to determine the temperature of atoms cooled by VSCPT with unprecedented accuracy. We have thus been able to quantitatively verify the predictions of a VSCPT model based on Levy statistics and found a good agreement. Moreover, we extended this method to realize an atomic interferometer with subrecoil cooled atoms. Our approach opens the way to new quantitative studies of ultracold gases. In VSCPT, this includes a generalization to more than one dimension and a detailed analysis of the shape of the momentum distribution. Finally, although the scheme is particularly well adapted to VSCPT, which intrinsically leads to multiple coherent wave packets, the use of coherent beam splitters [9,19] allows the present method to be generalized to a wider range of problems.

We thank J. Lawall for his contribution. S.K. acknowledges support from the DAAD and E.R. from a European Grant. Laboratoire Kastler-Brossel is a Laboratoire de l'ENS et de l'Université Paris VI, associé au CNRS.

\*Permanent address: Van der Waals-Zeeman Instituut, Universiteit van Amsterdam, Valckenierstraat 65/67,

1018 XE Amsterdam, The Netherlands.

<sup>†</sup>Permanent address: Max Planck Institut für Quantenoptik, Hans Kopferman Strasse 1, D-85748 Garching, Germany.

- [1] For a recent review see C. S. Adams and E. Riis, *Prog. Quantum Electron.* **21**, 1 (1997).
- [2] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988). For extension to 2D and 3D see J. Lawall, S. Kulin, B. Saubaméa, N. Bigelow, M. Leduc, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4194 (1995), and references therein.
- [3] M. Kasevich and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741 (1992).
- [4] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. Phillips, P. L. Gould, and H. J. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).
- [5] M. Kasevich, D. S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2297 (1991).
- [6] E. A. Burt, R. W. Ghrist, C. J. Myatt, M. J. Holland, E. A. Cornell, and C. E. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 337 (1997), and references therein.
- [7] As usual, we define the effective temperature of the atoms by  $k_B T/2 = \delta p^2/2M$ , where  $\delta p$  is the half width at  $1/\sqrt{e}$  of the momentum distribution, and  $T_R$  by  $k_B T_R/2 = \hbar^2 k^2/2M$ , so that  $T/T_R = (\delta p/\hbar k)^2$ .
- [8] Special issue on Optics and Interferometry with Atoms, edited by J. Mlynek, V. Balikyn, and P. Meystre [*Appl. Phys. B* **54**, 319 (1992)].
- [9] *Atom Interferometry*, edited by P. Berman (Academic Press, San Diego, 1997).
- [10] M. Weitz, T. Heupel, and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 2356 (1996).
- [11] F. Bardou, B. Saubaméa, J. Lawall, K. Shimizu, O. Emile, C. Westbrook, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *C. R. Acad. Sci. Ser 2* **318**, 887 (1994).
- [12] Strictly speaking, there is also a spreading of the wave packets during the dark period, but it does not change the scalar product of the two wave packets.
- [13] F. Bardou, J. P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 203 (1994).
- [14] For a Lorentzian momentum distribution,  $\delta p$  (half width at  $1/\sqrt{e}$ ) is related to  $\bar{\delta p}$  (HWHM) by  $\delta p = 0.805 \times \bar{\delta p}$ .
- [15] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, and C. Cohen-Tannoudji, *Z. Phys. D* **18**, 17 (1991).
- [16] In a one dimensional experiment, such a field only shifts the final momentum profile by an amount  $M\gamma B/k$  ( $\gamma$  is the gyromagnetic ratio in the  $2^3S_1$  state).
- [17] This is due to the fact that the jump rate does not depend on  $\delta$  near  $p = 0$  as shown in A. Aspect *et al.*, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2112 (1989).
- [18] P. Szriftgiser, D. Guéry-Odelin, M. Arndt, and J. Dalibard, *Phys. Rev. Lett.* **77**, 4 (1996); S. B. Cahn, A. Kumarakrishnan, U. Shim, T. Sleator, P. R. Berman, and B. Dubetsky, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 784 (1997).
- [19] C. Bordé, *Phys. Lett. A* **140**, 10 (1989).

# Bibliographie

- [1] A. Einstein, Phys. Z. **18**, 121 (1917).
- [2] A. Einstein, Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 261 (1924).
- [3] A. Einstein, Sitzungsber. Kgl. Preuss. Akad. Wiss., 3 (1925).
- [4] R. Frisch, Z. Phys. **86**, 42 (1933).
- [5] A. Kastler, J. Phys. Rad. **11**, 255 (1950).
- [6] T. Hänsch, et A. Schawlow, Opt. Comm. **13**, 68 (1975).
- [7] D. Wineland, et H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. **20**, 637 (1975).
- [8] W. D. Phillips et H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. **48**, 596 (1982).
- [9] V. I. Balykin, V. S. Letokhov, et A. I. Sidorov, Opt. Commun. **49**, 248 (1984).
- [10] W. Ertmer, R. Blatt, J. Hall, et M.Zhu, Phys. Rev. Lett. **54**, 996 (1985).
- [11] S. Chu, M. Hollberg, J. Bjorkholm, A. Cable A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. **55**, 48 (1985).
- [12] G. Grynberg, B. Lounis, P. Verkerk, J.Y. Courtois, and C. Salomon, Phys. Rev. Lett. **70**, 2249 (1993).
- [13] P. Verkerk, D.R. Meacher, A.B. Coates, J.Y. Courtois, S. Guibal, C. Salomon, and G. Grynberg, Europhys. Lett. **26**, 171 (1994).
- [14] M.H. Anderson, J.R. Ensher, M.R. Matthews, C.E. Wieman, and E.A. Cornell, Science, **269**, 198 (1995).
- [15] C. Cohen-Tannoudji, and A. Kastler, Prog. Opt., **V**, 3 (1966).
- [16] G. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi, and G. Orriols, Nuovo Cimento B, **36**, 5 (1976).

- 
- [17] J. Dalibard et C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2023 (1989).
- [18] P. J. Ungar, D. Weiss, E. Riis et S. Chu, *J. Opt. Soc. Am. B*, **6**, 2023 (1989).
- [19] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. D. Gould et H. Metcalf, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).
- [20] E. Raab, M. Prentiss, A. Cable, S. Chu et D. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **59**, 2631 (1987).
- [21] D. E. Pritchard, K. Helmerson, V. S. Bagnato, G. P. Lafyatis et A. G. Martin, dans *Laser Spectroscopy VIII*, édité par W. Persson et S. Svanberg, (Springer, Berlin, 1987), p. 68.
- [22] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **61**, 826 (1988).
- [23] A. Aspect, E. Arimondo, R. Kaiser, N. Vansteenkiste, et C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am. B* **6**, 2112 (1989).
- [24] M. A. Ol'shanii, et V. G. Minogin, in *Light Induced Kinetic Effects on Atoms, Ions etMolecules*, édité par L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo, et F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991), p.99.
- [25] F. Mauri, E. Papoff, et E. Arimondo, in *Laser Manipulation of Atoms etIons* edited by L. Moi, S. Gozzini, C. Gabbanini, E. Arimondo, et F. Strumia (ETS Editrice, Pisa, 1991), p. 89.
- [26] M. A. Ol'shanii, et V. G. Minogin, *Opt. Commun.* **89**, 393 (1992).
- [27] J.P. Bouchaud and A. Georges, *Phys. Rep.* **195**, 125 (1990).
- [28] J. Lawall, F. Bardou, B. Saubamea, K. Shimizu, M. Leduc, A. Aspect, et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 1915 (1994).
- [29] M. Kasevich et S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1741 (1992).
- [30] M. Kasevich, D.S. Weiss, E. Riis, K. Moler, S. Kasapi, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **66**, 2297 (1991).
- [31] J. Reichel, F. Bardou, M. Ben Dahan, E. Peik, S. Rand, C. Salomon, et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4575 (1995).
- [32] N. Davidson, H.-J. Lee, M. Kasevich, et S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 3158 (1994).

- 
- [33] H.-J. Lee, C. Adams, M. Kasevich, et S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2658 (1996).
- [34] M. M. T. Loy, *Phys. Rev. Lett.* **32**, 814 (1974).
- [35] U. Gaubatz, P. Rudecki, M. Becker, S. Schienemann, M. Külz, et K. Bergmann, *Chem. Phys. Lett.* **149**, 463, (1988).
- [36] P. Marte, P. Zoller, et J. L. Hall, *Phys. Rev. A* **44**, R4118 (1991).
- [37] J. Lawall, et M. Prentiss, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 993 (1994).
- [38] L. S. Goldner, C. Gerz, R. J. C. Spreeuw, S. L. Rolston, C. I. Westbrook, W. D. Phillips, P. Marte, et P. Zoller, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 997 (1994).
- [39] J. Lawall, S. Kulin, B. Saubamea, N. Bigelow, M. Leduc, et C. Cohen-Tannoudji, *Proceedings of the 4th International Workshop on Laser Physics, Laser Physics* **6**, 153 (1996).
- [40] J. Lawall, S. Kulin, B. Saubaméa, N. Bigelow, M. Leduc et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4194 (1995).
- [41] S. Kulin, B. Saubaméa, E. Peik, J. Lawall, T. W. Hijmans, M. Leduc et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **78**, 4185 (1997).
- [42] C. Cohen-Tannoudji, F. Bardou, and A. Aspect, in *Laser Spectroscopy X*, edited by M. Ducloy, E. Giacobino, and G. Camy (World Scientific, Singapore, 1992).
- [43] C. Cohen-Tannoudji, and J. Dalibard, *Europhys. Lett.* **1**, 441 (1986).
- [44] P. Zoller, M. Marte, and D.F. Walls, *Phys. Rev. A* **35**, 198 (1987).
- [45] A. Alzetta, A. Gozzini, L. Moi et G. Orriols, *Nuovo Cimento B*, **36**, 5 (1976).
- [46] M. A. Ol'shanii, et V. G. Minogin, *Quant. Opt.* **3**, 317 (1991).
- [47] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Quantum Mechanics* (Hermann and John Wiley & Sons, Paris, 1977), tomes I et II.
- [48] F. Bardou, J. P. Bouchaud, O. Emile, A. Aspect, et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **72**, 203 (1994).
- [49] A. Messiah, *Mécanique Quantique* (Dunod, Paris, 1964), tome II.

- 
- [50] F. Mauri, et E. Arimondo, *Europhys. Lett.* **16**, 717 (1991).
- [51] E. Arimondo, in *Laser Manipulation of Atoms and Ions* edited by E. Arimondo, W. Phillips et F. Strumia (North-Holland, Amsterdam, 1992), p. 191.
- [52] F. Mauri, et E. Arimondo, *Appl. Phys. B* **4** **54**, 420 (1992).
- [53] R. Dum, *Phys. Rev A*, **54**, 1 (1996).
- [54] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *Processus d'interaction entre atomes et photons* (InterEditions et Editions du CNRS, 1988).
- [55] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc, et G. Grynberg, *Introduction à l'électrodynamique quantique* (InterEditions et Editions du CNRS, 1988).
- [56] Y. Castin, Thèse, Paris VI, 1992.
- [57] D. V. Lindley, *Introduction to Probability et Statistics from a Bayesian Viewpoint, Part I* (Cambridge University Press, London, 1969), pp. 203–210.
- [58] C. Cohen-Tannoudji, *Cours de physique atomique et moléculaire* (Collège de France, 1995-1996).
- [59] C. Cohen-Tannoudji, *Cours de physique atomique et moléculaire* (Collège de France, 1991-1992).
- [60] C. Cohen-Tannoudji, Les Houches, Session LIII, *Fundamental Systems in Quantum Optics* edited by J. Dalibard, J. M. Raimond et J. Zinn-Justin (Elsevier Science Publishers B. V., 1990), cours XXX.
- [61] W. D. Phillips, Les Houches, Session LIII, *Fundamental Systems in Quantum Optics* edited by J. Dalibard, J. M. Raimond et J. Zinn-Justin (Elsevier Science Publishers B. V., 1990), cours 2.
- [62] F. Bardou, B. Saubamea, J. Lawall, K. Shimizu, O. Emile, C. Westbrook, A. Aspect, et C. Cohen-Tannoudji, *C. R. Acad. Sci. Paris* **318**, 877 (1994).
- [63] S. M. Freund, M. Röhmheld, et T. Oka, *Phys. Rev. Lett.* **35**, 1497 (1975).
- [64] E. Kyrölä, et S. Stenholm, *Opt. Commun.* **22**, 123 (1977).
- [65] P. Marte, R. Dum, R. Taïeb, et P. Zoller, *Phys. Rev. A* **49**, 4826 (1994).

- 
- [66] J. Lawall, S. Kulin, B. Saubamea, N. Bigelow, M. Leduc et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **75**, 4194 (1995).
- [67] A. A. Radzig et B. M. Smirnov, *Reference Data on Atoms, Molecules and Ions* edited by P. P. Toennies (Springer Verlag, 1985)
- [68] G. W. F. Drake, *Astrophys. J.* **158**, 1199 (1969); et G. W. F. Drake, *Erratum*, *Astrophys. J.* **163**, 439 (1971).
- [69] J. R. Woodworth et H. W. Moss, *Phys. Rev. A* **6**, 2455 (1975).
- [70] *CRC Handbook of Chemistry et Physics* édité par R. C. West (CRC Press, XX, 1986), pp. E-341.
- [71] G. W. F. Drake, et A. Dalgarno, *Astrophys. J.* **157**, 55 (1972).
- [72] D. S. Betts, et M. Leduc, *Ann. Phys. Fr.* **11**, 267 (1986).
- [73] L. D. Schearer, M. Leduc, D. Vivien, A. M. Lejus, et J. Thery, *IEEE J. of Quant. Electr.* **QE22**, 713 (1986).
- [74] N. Vansteenkiste, Thèse de l'Université Paris-Sud (1989).
- [75] R. Kaiser, Thèse de l'Université Paris VI (1990).
- [76] O. Emile, Thèse de l'Université Paris VI (1993).
- [77] S. Kulin, Thèse de l'Université Paris VI (1997).
- [78] F. Bardou, Thèse de l'Université Paris XI Orsay (1995).
- [79] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo, et C. Cohen-Tannoudji *Z. Phys. D* **18**, 17 (1991).
- [80] F. Bardou, O. Emile, J.-M. Courty, C. I. Westbrook, et A. Aspect, *Europhys. Lett.* **20**, 681 (1992).
- [81] P. D. Lett, R. N. Watts, C. I. Westbrook, W. Phillips, P. L. Gould, et H. J. Metcalf *Phys. Rev. Lett.* **61**, 169 (1988).
- [82] C. Monroe, W. Swann, H. Robinson, et C. Wieman, *Phys. Rev. Lett.* **65**, 1571 (1990).
- [83] M. Drewsen, Ph. Laurent, A. Nadir, G. Santarelli, A. Clairon, Y. Castin, D. Grison, et C. Salomon, *Appl. Phys. B* **59**, 283 (1994).
- [84]



- 
- [85] C. G. Townsend, N. H. Edwards, C. J. Cooper, K. P. Zetie, C. J. Foot, A. M. Steane, P. Szriftgiser, H. Perrin et J. Dalibard, *Phys. Rev. A* **52**, 1423 (1995).
- [86] M. J. Druyvesteyn, et F. M. Penning, *Rev. Mod. Phys.* **12**, 87 (1940).
- [87] R. Kaiser, N. Vansteenkiste, A. Aspect, E. Arimondo et C. Cohen-Tannoudji, *Z. Phys. D* **18**, 17 (1991).
- [88] M. S. Sharihar, P. R. Hemmer, M. G. Prentiss, P. Marte, J. Mervis, D. P. Katz, N. P. Bigelow, et T. Cai, *Phys. Rev. A* **48**, R4035 (1993).
- [89] Manuel d'utilisateur du détecteur, Photek Reference: 40075, Serial No: OF940908 (1994).
- [90] M. Lampton, et C. W. Carlson, *Rev. Sci. Instr.* **50**, 1093 (1979).
- [91] C. W. Gear, *Proc. for the Skytop Conf. on Computer Systems in Experimental Nuclear Phys.*, USAEC Conf-670301, 552 (1969).
- [92] B. Saubaméa, Thèse Paris VI, 1998.
- [93] M. W. Müller, A. Merz, M.-W. Ruf, H. Hotop, W. Meyer, et M. Movre, *Z. Phys. D - Atoms, Molecules and Clusters* **21**, 89 (1991).
- [94] A. Abragam, *The principles of nuclear magnetism*, (Oxford University Press, 1961).
- [95] J. R. Kuklinski, U. Gaubatz, F. T. Hioe, et K. Bergmann, *Phys. Rev. A* **40**, 6741 (1989).
- [96] U. Gaubatz, P. Rudecki, S. Schieneman, et K. Bergmann, *J. Chem. Phys.* **92**, 5363 (1990).
- [97] M. Weitz, B. C. Young, et S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **73**, 2563 (1994).
- [98] T. Esslinger, F. Sander, M. Weidemüller, A. Hemmerich, et T. W. Hänsch, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2432 (1996).
- [99] M. Ben Dahan, E. Peik, J. Reichel, Y. Castin, et C. Salomon, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 4508 (1996).
- [100] E. Peik, M. Ben Dahan, I. Bouchoule, Y. Castin, et C. Salomon, *Phys. Rev. A* **55**, 2989 (1997).

- 
- [101] N. W. Ashcroft et N. D. Mermin, *Solid state physics*, (HRW International Editions, 1976).
- [102] M. Ol'shanii, Thèse, Institut de spectroscopie, Académie russe des sciences, Troitzk, Russie (1992).
- [103] R. Dum, non publié
- [104] P. O. Fedichev, M. W. Reynolds, U. M. Rahmanov, et G. V. Shlyapnikov, *Phys. Rev. A* **53**, 1447 (1996).
- [105] W. Rooijackers, W. Hogervorst, W. Vassen, *Opt. Comm.* **123**, 321 (1996).
- [106] W. Rooijackers, Thèse, Université Libre d'Amsterdam, 1997.
- [107] B. Saubaméa, T. W. Hijmans, S. Kulin, E. Rasel, E. Peik, M. Leduc, et C. Cohen-Tannoudji, *Phys. Rev. Lett.* **79**, 3146 (1997).
- [108] F. Bardou, J.P. Bouchaud, A. Aspect, and C. Cohen-Tannoudji, to be published.
- [109] C.S. Adams, H.J. Lee, N. Davidson, M. Kasevich, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **74**, 3577 (1995).
- [110] H.J. Lee, C.S. Adams, M. Kasevich, and S. Chu, *Phys. Rev. Lett.* **76**, 2658 (1996).

## Résumé

Ce mémoire de thèse présente une nouvelle méthode de mesure de la température d'atomes ultra-froids à partir de la fonction d'autocorrélation spatiale des paquets d'ondes atomiques. Nous déterminons ainsi la température d'atomes d'hélium 4 métastables refroidis par résonances noires sélectives en vitesse, une méthode qui refroidit les atomes en dessous de la température de recul liée à l'émission ou l'absorption d'un seul photon par un atome au repos. Un atome ainsi refroidi est préparé dans une superposition cohérente de deux paquets d'ondes d'impulsions moyennes opposées, initialement superposés et qu'on laisse ensuite se séparer. En mesurant la décroissance temporelle de leur recouvrement, nous avons accès à la transformée de Fourier de la distribution d'impulsion des atomes. Nous pouvons ainsi mesurer des températures aussi basses que 5 nK, soit 800 fois plus petites que la température de recul. Par ailleurs nous étudions en détail la forme exacte de la distribution d'impulsions et comparons les résultats expérimentaux avec deux approches théoriques différentes : une simulation Monte Carlo quantique et un modèle analytique du refroidissement basé sur les statistiques de Lévy. Nous comparons la forme de raie calculée avec les résultats des simulations puis confrontons séparément chacune des approches théoriques aux données expérimentales. Un très bon accord est trouvé entre tous ces résultats. Nous démontrons ainsi la validité du modèle statistique du refroidissement subrecoil et, pour la première fois, mettons en évidence expérimentalement certaines de ces caractéristiques, comme l'absence d'état stationnaire, l'autosimilarité et le caractère non lorentzien de la distribution d'impulsion des atomes refroidis, tous ces aspects étant en relation directe avec le caractère non ergodique du refroidissement subrecoil.

## Abstract

This thesis presents a new method to measure the temperature of ultracold atoms from the spatial autocorrelation function of the atomic wavepackets. We thus determine the temperature of metastable helium 4 atoms cooled by velocity selective dark resonance, a method known to cool the atoms below the temperature related to the emission or the absorption of a single photon by an atom at rest, namely the recoil temperature. This cooling mechanism prepares each atom in a coherent superposition of two wavepackets with opposite mean momenta, which are initially superimposed and then drift apart. By measuring the temporal decay of their overlap, we have access to the Fourier transform of the momentum distribution of the atoms. Using this method, we can measure temperatures as low as 5 nK, 800 times smaller than the recoil temperature. Moreover we study in detail the exact shape of the momentum distribution and compare the experimental results with two different theoretical approaches : a quantum Monte Carlo simulation and an analytical model based on Lévy statistics. We compare the calculated line shape with the one deduced from simulations, and each theoretical model with experimental data. A very good agreement is found with each approach. We thus demonstrate the validity of the statistical model of subrecoil cooling and give the first experimental evidence of some of its characteristics : the absence of steady-state, the self-similarity and the non lorentzian shape of the momentum distribution of the cooled atoms. All these aspects are related to the non ergodicity of subrecoil cooling.

## Mots clés

Refroidissement laser subrecoil - Hélium métastable - Fonction d'autocorrélation spatiale - Monte-Carlo quantique - Statistiques de Lévy - Diffusion anormale - Ergodicité - Interférométrie temporelle.