



**HAL**  
open science

# Etude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions neodyme

François Treussart

► **To cite this version:**

François Treussart. Etude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions neodyme. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1997. Français. NNT: . tel-00011781

**HAL Id: tel-00011781**

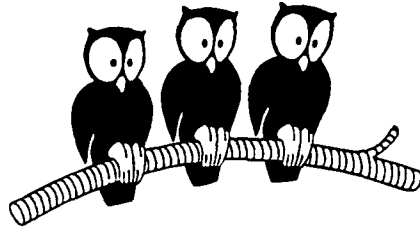
**<https://theses.hal.science/tel-00011781>**

Submitted on 7 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
LABORATOIRE KASTLER BROSSEL



Thèse de Doctorat  
de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Spécialité: **Physique Quantique**

présenté par  
**François TREUSSART**

pour obtenir le titre de  
**Docteur de l'Université Paris VI**

Sujet de la thèse:

**Étude expérimentale de l'effet laser dans des  
microsphères de silice dopées avec des ions néodyme**

Soutenue le 12 décembre 1997 devant le jury composé de:

M. J. Zyss

Rapporteur

M. M. Orrit

Rapporteur

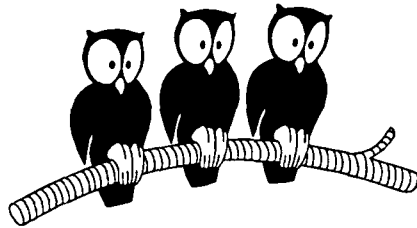
M. A. Aspect

Mme V. Lefèvre-Seguin

M. S. Haroche

Directeur de Thèse

DÉPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE  
LABORATOIRE KASTLER BROSEL



Thèse de Doctorat  
de l'Université Pierre et Marie Curie (Paris 6)

Spécialité: **Physique Quantique**

présenté par

**François TREUSSART**

pour obtenir le titre de  
**Docteur de l'Université Paris VI**

Sujet de la thèse:

**Étude expérimentale de l'effet laser dans des  
microsphères de silice dopées avec des ions néodyme**

Soutenue le 12 décembre 1997 devant le jury composé de:

**M. J. Zyss**

**Rapporteur**

**M. M. Orrit**

**Rapporteur**

**M. A. Aspect**

**Mme V. Lefèvre-Seguin**

**M. S. Haroche**

**Directeur de Thèse**

# Remerciements

Les travaux décrits dans ce document ont été menés au Laboratoire KASTLER BROSSEL du Département de Physique de l'ENS.

Je remercie les directeurs successifs de ce laboratoire, Jacques DUPONT-ROC puis Michèle LEDUC, de m'y avoir accueilli et d'avoir veillé à mon devenir en se montrant toujours disponibles quand j'ai sollicité leur avis et leurs conseils.

J'exprime ma profonde gratitude à Serge HAROCHE, directeur de cette thèse. Il m'a tout d'abord accordé sa confiance, et a fait preuve d'un enthousiasme sans cesse croissant pour nos "petites billes", malgré la relative lenteur de notre progression. Les conseils très éclairés et le soutien quotidien de Jean-Michel RAIMOND à qui aucun des moindres détails de notre expérience n'a jamais échappé furent toujours décisifs. Je lui suis profondément reconnaissant de l'intérêt qu'il a toujours témoigné en s'impliquant directement dans les développements aussi bien théoriques qu'expérimentaux. Aux côtés de Jean-Michel, Michel BRUNE a également fait preuve d'un grand intérêt pour notre expérience. J'ai appris à mieux connaître l'homme timide au fil des ans et à apprécier sa personnalité très chaleureuse.

J'ai eu l'immense honneur d'être encadré au quotidien par Valérie LEFÈVRE et Jean HARE. Ils m'ont tous les deux initié au monde des microsphères de silice, et appris le métier d'expérimentateur. Ils représentèrent et représentent encore pour moi une référence pour la pratique du métier de chercheur. Mais au delà de leurs immenses qualités scientifiques, c'est leur chaleur humaine qui m'a profondément touché et m'a rendu la tâche bien plus aisée alors que j'étais encore assez farouche. Je tiens tout particulièrement à les remercier pour l'aide précieuse qu'ils m'ont apporté dans la rédaction et la relecture du manuscrit. Jean est à l'origine du modèle de *double sphère* présenté dans le Chapitre 2 et c'est avec son généreux concours que ce chapitre a pu être rédigé. Enfin, l'expérience précieuse de



Valérie dans le domaine cryogénique nous a permis d'avancer très rapidement la dernière étape de cette thèse: elle a d'abord fourni la base du montage (son cryostat de thèse!) puis m'a fait profiter de ses conseils très avisés pour le "remettre en forme".

Notre équipe eut la chance d'être renforcée par de nombreux post-docs et visiteurs. Je remercie David WEISS et plus particulièrement Vahid SANDOGHDAR pour avoir guidé mes premiers pas dans mon travail de thèse. Je suis très admiratif devant le travail de Laurent COLLOT, qui venait d'achever sa thèse dans notre équipe et laissait un dispositif expérimental opérationnel et aisé d'utilisation, qu'il n'avait malheureusement pas eu le temps d'exploiter complètement. J'ai eu l'immense bonheur de travailler dans la même pièce que Ed HAGLEY, en stage post-doctoral pour plus de deux ans dans l'équipe de Serge HAROCHE. Il s'agit d'une personne vraiment hors du commun à tout point de vue. À son contact, j'ai appris le sens du travail bien fait. Il n'a jamais ménagé son temps pour m'apporter un coup de main quand tout allait mal alors qu'il travaillait sur une expérience indépendante avec une forte pression qui pesait sur lui. Nous sommes devenus de très bons amis, et je me souviendrais longtemps des moments que nous avons passés ensemble au Laboratoire bien sûr, et aussi souvent que possible, dans d'autres contextes.

Une telle chance n'arrivant jamais seule, j'ai aussi eu l'honneur de travailler aux côtés de Jonathan KNIGHT, également en stage post-doctoral dans notre équipe. Sa rigueur expérimentale fut pour moi un modèle. Nous avons eu de nombreuses discussions sur nos expériences respectives. Au delà de nos recherches nous nous sommes aussi découverts une passion commune, celle de la randonnée en montagne et avons eu l'occasion de partir ensemble satisfaire ce goût des grandes étendues verticales...

La chance a continué à me sourire lors de ma dernière année de thèse, durant laquelle j'ai fait la connaissance de Vladimir ILCHENKO, en visite dans notre équipe. Il est à l'origine des premières expériences sur les microsphères de silice à Moscou. Nous avons travaillé ensemble à deux reprises durant trois mois. Vladimir m'a considérablement aidé dans la conception et la réalisation du montage cryogénique. Il possède une adresse hors du commun dans les micromanipulations qui nous a tous laissés admiratifs. Nous avons tentés de rivaliser avec lui mais en vain! Vladimir est par ailleurs une personne très attachante et nous sommes devenus de très bons amis.

C'est à Jean-François ROCH que je dois plus encore. Alors chargé de recherche, il a rejoint notre équipe à la fin de ma thèse. C'est ensemble, avec Vladimir, que nous avons tiré les meilleurs résultats de l'expérience cryogénique. Aux côtés de Jean-François, par son exigence extrême, j'ai appris à soigner encore plus notre travail, à le rendre plus clair encore. Nous avons au fil du temps pris goût à travailler ensemble, si bien qu'il m'a proposé de le suivre dans une nouvelle aventure à l'ENS Cachan et m'a ainsi fourni une opportunité exceptionnelle d'être recruté peu de temps après avoir soutenu ma thèse.

Enfin, je tiens à signaler le plaisir que j'ai eu de cotoyer Ferdinand SCHMIDT-KALLER et Christophe WUNDERLICH qui faisaient leur stage post-doctoral sur l'expérience micro-onde de notre équipe.

En plus des nombreux chercheurs expérimentés qui m'ont entouré, j'ai eu l'immense bonheur d'avoir des compagnons de fortune ou d'infortune –au gré de l'avancé de nos expériences respective– en les personnes des thésitifs de notre groupe. Nicolas DUBREUIL a débuté sa thèse en même temps que moi. Nous avons travaillé côte à côte pendant ces trois années et sa joie de vivre, sa bonne humeur, et son franc parlé m'ont considérablement aidé dans mon travail et plus encore dans ma vie personnelle. Nous avons lié alors une amitié solide, qui s'est construite pas à pas sur la confiance mutuelle et les confidences.

C'est également aux côtés de Xavier MAITRE et de Gilles NOGUES que j'ai eu la chance de travailler. Xavier m'a ouvert au monde du théâtre. Sa capacité d'écoute m'a profondément touché. Il m'a considérablement aidé lorsque le moral flanchait. Je l'en remercie du fond du cœur. Quant à Gilles, il incarne pour moi la preuve que l'on peut être un chercheur de grand calibre et conserver modestie et simplicité.

J'ai eu aussi beaucoup de plaisir à cotoyer Abdelhamid MAALI et Jochen DREYER. Bien que nous ne nous croisions moins souvent, nous avons également tissé ensemble des liens qui dépassent le cadre réducteur de nos travaux respectifs.

Les expériences que je décris après n'auraient jamais vu le jour sans l'assistance des services technique du Département de Physique de l'ENS. Je remercie tout particulièrement André CLOUQUEUR, Lionel PERENNES et Patrick GIRON, pour la réalisation des boîtiers électroniques sur-mesure dont nous avons eu besoin. Je suis aussi très reconnaissant au personnel du service de cryogénie pour nous avoir aidé à rééquiper notre salle pour



FIG. 1 – Une partie de la bande de jeunes du groupe Électrodynamique en cavité de l'ENS, pendant le pôt de thèse...

recupérer l'hélium.

Le personnel du secrétariat en les personnes d'Irène BRODSCHI, de Catherine ÉMO, de Dominique et de Geneviève PIARD forment des éléments cruciaux dans les rouages d'un laboratoire. Ils ont toujours été très efficaces pour s'occuper des affaires qui mes concernaient. Je les en remercie vivement.

Je souhaiterais enfin remercier ma mère ainsi que mes deux sœurs et mon beau-père, pour le soutien moral qu'il m'ont apporté tout au long de mes études.

• • •

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Généralités sur les modes de galerie</b>	<b>17</b>
1.1	Premières approches . . . . .	18
1.1.1	Modes de galerie en optique géométrique . . . . .	18
1.1.2	Approche ondulatoire approximative par l'eikonale . . . . .	20
1.1.3	Spectre des modes de galerie dans l'approche eikonale . . . . .	25
1.2	Le problème électromagnétique exact . . . . .	29
1.2.1	Position du problème . . . . .	29
1.2.2	Solutions formelles exactes . . . . .	30
1.2.3	L'équation radiale et ses solutions approchées . . . . .	31
1.3	Positions des résonances dans l'approximation semiclassique . . . . .	37
1.3.1	Conditions de raccordement de la fonction radiale . . . . .	37
1.3.2	Positions des résonances . . . . .	37
1.4	Expressions approchées utiles des champs <b>E</b> et <b>B</b> . . . . .	41
1.4.1	Expressions asymptotiques des harmoniques sphériques vectorielles . . . . .	42
1.4.2	Expressions asymptotiques pour les champs <b>E</b> et <b>B</b> . . . . .	43
1.4.3	Champ électrique pour un mode TE confiné ( $n = 1, \ell =  m $ ). . . . .	43
1.5	Facteur de qualité . . . . .	45
1.6	Volume des modes . . . . .	49
1.6.1	Ordre de grandeur du volume des modes ( $n = 1, \ell =  m $ ) . . . . .	49
1.6.2	Calcul analytique du volume de mode . . . . .	50
1.6.3	Champ électrique par photon . . . . .	52
1.6.4	Champ électrique à la surface . . . . .	53

<b>2</b>	<b>Excitation des modes de galerie</b>	<b>57</b>
2.1	Principe du couplage par prisme . . . . .	59
2.2	Modèle élémentaire : Fabry-Pérot en anneau . . . . .	59
2.2.1	Coefficient de réflexion de la cavité en anneau . . . . .	61
2.2.2	Approximation lorentzienne . . . . .	63
2.2.3	Signal détecté en réflexion: le “dip” . . . . .	64
2.2.4	Cas du couplage par réflexion totale interne frustrée . . . . .	65
2.3	Modèle de Schiller et Byer . . . . .	68
2.4	Modèle de “double sphère” . . . . .	70
2.4.1	Équations générales . . . . .	71
2.4.2	Interprétation . . . . .	75
2.4.3	Définition du “dip” dans le modèle “double sphère” . . . . .	76
2.5	Adaptation du modèle à la géométrie prisme- sphère . . . . .	77
2.5.1	Résultats préliminaires sur le champ dans le gap . . . . .	78
2.5.2	Modification de l’amplitude de l’onde diffusée dans le modèle “double sphère” . . . . .	81
2.5.3	Expression du “dip” . . . . .	82
2.5.4	Exemple fondamental : modes $\ell =  m $ . . . . .	83
2.5.5	Influence d’un diaphragme sur le signal détecté . . . . .	85
2.6	Conclusion . . . . .	88
<b>3</b>	<b>Modes de galerie de très grande surtension</b>	<b>89</b>
3.1	Fusion des microbilles de silice . . . . .	89
3.1.1	Préparation de la fibre ébauche . . . . .	90
3.1.2	La fusion par laser CO <sub>2</sub> . . . . .	90
3.1.3	La fusion par microchalumeau . . . . .	92
3.2	Dispositif de couplage aux modes de galerie . . . . .	93
3.2.1	L’enceinte à vide et les micromouvements . . . . .	93
3.2.2	Le laser fin d’excitation . . . . .	95
3.3	Doublets de modes de très grande finesse . . . . .	98
3.3.1	Détection des modes par spectroscopie FM . . . . .	99

3.3.2	Observation de doublets de très bons facteurs de qualité . . . . .	102
3.3.3	Mesure du taux d'amortissement de l'énergie dans le mode . . . . .	103
3.4	Modèle de modes couplés pour les doublets . . . . .	104
3.4.1	Couplage par rétrodiffusion Rayleigh dans une microbille . . . . .	105
3.4.2	Ordre de grandeur de la levée de dégénérescence entre modes couplés	110
3.4.3	Pertes par absorption (effet d'une partie imaginaire de $\bar{\alpha}$ ) . . . . .	111
3.5	Expériences complémentaires sur l'étude de la rétrodiffusion . . . . .	112
3.5.1	Analyse du faisceau rétrodiffusé . . . . .	112
3.5.2	Observations des battements entre modes propres . . . . .	113
3.6	Conclusion . . . . .	116
<b>4</b>	<b>Microbilles laser à ions néodyme</b>	<b>117</b>
4.1	Le milieu amplificateur: les ions néodyme dans la silice . . . . .	119
4.1.1	Système à 4 niveaux . . . . .	121
4.1.2	Fluorescence de la fibre dopée et processus d'élargissement . . . . .	123
4.2	Prédictions du modèle semiclassique pour le seuil laser . . . . .	126
4.2.1	Le modèle scalaire semiclassique . . . . .	127
4.2.2	Ordre de grandeur du seuil attendu pour les microbilles laser . . . . .	132
4.3	Dispositif expérimental . . . . .	133
4.3.1	Fabrication des billes dopées . . . . .	133
4.3.2	Description du montage . . . . .	136
4.4	Mise en évidence de l'effet laser . . . . .	138
4.4.1	Spectres d'émission laser . . . . .	139
4.4.2	Structure "transverse" dans le spectre multimode et ellipticité . . . . .	141
4.4.3	Un exemple de fonctionnement monomode . . . . .	142
4.5	Observations de très faibles seuils laser . . . . .	143
4.5.1	Mesure du seuils à l'émission laser et blocage de la fluorescence . . . . .	143
4.5.2	Comparaison de la mesure de seuil avec la prédiction du modèle semiclassique . . . . .	145
4.6	Etudes complémentaires sur l'influence des pertes . . . . .	146
4.6.1	Dépendance du seuil en fonction des pertes . . . . .	146

4.6.2	Efficacité de couplage par prisme à 810 et 1083 nm. Polarisation de l'émission laser . . . . .	149
4.7	Densité spectrale de puissance d'une raie laser . . . . .	151
4.7.1	Techniques de mesures de largeurs spectrales . . . . .	153
4.7.2	Résultats expérimentaux: mesure de la largeur spectrale du microlaser	155
4.8	Vers le contrôle du fonctionnement multi/mono mode . . . . .	159
4.8.1	Quelques méthodes de contrôle du régime de fonctionnement . . . . .	159
4.8.2	Expérience: changement de régime par ajout sélectif de pertes . . . . .	165
4.9	Conclusion . . . . .	168
<b>5</b>	<b>Expériences à froid: vers le microlaser sans seuil</b>	<b>169</b>
5.1	Montage cryogénique . . . . .	170
5.1.1	Le cryostat et ses performances . . . . .	170
5.1.2	Montage cryogénique d'excitation des modes de galerie . . . . .	172
5.2	Observations de très hauts facteurs de qualité à froid . . . . .	177
5.2.1	Les sources de pollution possibles et leur élimination . . . . .	177
5.2.2	Observations de facteurs de qualité de $10^9$ dans l'He superfluide . . . . .	178
5.2.3	Bistabilité . . . . .	181
5.3	Fluorescence de la fibre dopée à basse température . . . . .	184
5.4	Microlaser à froid: premiers résultats expérimentaux . . . . .	187
5.4.1	Excitation et détection des modes laser à froid . . . . .	188
5.4.2	Spectre du fonctionnement laser . . . . .	188
5.4.3	Mesures de seuils et interprétations . . . . .	190
5.4.4	Améliorations en cours . . . . .	192
5.5	Couplage fort entre une molécule et un mode de galerie . . . . .	193
5.5.1	Généralités sur les molécules uniques dans les matrices solides . . . . .	194
5.5.2	Molécules pour le couplage aux modes de galerie . . . . .	197
5.5.3	Effet dispersif d'une molécule sur un mode de galerie . . . . .	200
5.5.4	Le dispositif de couplage et de collecte de la fluorescence . . . . .	202
<b>A</b>	<b>Propriétés des harmoniques sphériques vectorielles</b>	<b>207</b>

<b>B</b>	<b>Matrice de transfert d'une lame diélectrique</b>	<b>209</b>
B.1	Symétrie par renversement temporel . . . . .	209
B.2	Conservation de l'énergie . . . . .	211
B.3	Matrice de transfert entre deux milieux de même indice $n_1 = n_2$ . . . . .	211
<b>C</b>	<b>Signaux de spectroscopie FM d'un mode de galerie</b>	<b>213</b>
C.1	Schéma de principe de la spectroscopie FM . . . . .	213
C.2	Forme analytique des signaux de spectroscopie FM . . . . .	215





# Introduction

Il est bien établi, depuis que Purcell en 1946 [1] puis Casimir et Polder en 1948 [2], ont réalisé les premières études théoriques sur le sujet, que l'interaction d'un dipôle atomique avec le champ électromagnétique peut être influencée par la présence d'une paroi. En modifiant la densité des modes du champ, celle-ci agit sur les propriétés radiatives du dipôle. Le domaine de l'interaction d'un dipôle atomique avec le champ électromagnétique dans une cavité ne prit cependant son essor expérimental qu'avec l'avènement des techniques de maniement d'un faible nombre d'atomes et la maîtrise des technologies de fabrication des cavités de très grande finesse.

En effet, pour que les effets de cavité sur les propriétés atomiques soient observables, il faut que les états de l'atome et du champ relaxent aussi lentement que possible. Le choix du système atomique pour les premières expériences s'est naturellement porté sur les atomes de Rydberg circulaires, que l'on avait appris à manipuler et à détecter un par un, qui possèdent de très grands dipôles et de grandes durées de vie radiatives ( $\tau_{\text{rad}} \simeq 30$  ms). Dans le domaine microondes des longueurs d'onde correspondantes, la mise au point de cavités supraconductrices possédant de très grands facteurs de qualité jusqu'à  $10^9$ , permit d'explorer d'une part le régime de *couplage faible*, dans lequel les effets de cavité se manifestent essentiellement par une modification de la structure du champ et se répercutent sur les fluctuations du champ du vide et les propriétés radiatives du dipôle; mais également celui, plus riche encore, du *couplage fort* entre un atome et le champ d'un seul mode de la cavité: c'est le contexte d'étude de *l'électrodynamique en cavité des systèmes simples*.

Dans le régime de couplage faible, l'inhibition et l'exaltation de l'émission spontanée et l'étude des déplacements d'énergie induits par la présence des parois, constituent quelques

unes des réalisations expérimentales remarquables [3].

Plus fascinantes encore sont les explorations du régime de couplage fort [3], régime des très “bonnes cavités”, dans lequel l’atome et le champ d’un mode peuvent échanger leur excitation de façon cohérente et réversible, et ce, même si la cavité est initialement vide, donnant alors lieu aux oscillations de Rabi du dipôle atomique dans le vide. Dans le domaine des fréquences, celles-ci se manifestent par un dédoublement spectral du mode de la cavité avec lequel interagit le dipôle (“*Vacuum Rabi splitting*”).

L’électrodynamique en cavité peut aussi servir à tester certaines manifestations de la mécanique quantique qui choquent encore notre sens commun. Ainsi, lorsque deux systèmes quantiques interagissent fortement, leurs états deviennent fortement corrélés l’un à l’autre: toute mesure sur l’un des systèmes influe instantanément sur l’état de l’autre, même s’il est en dehors de son cône de lumière. Des paires d’atomes dites “paires EPR” ont été ainsi récemment générées pour la première fois dans le domaine de l’électrodynamique en cavité [4], dans des expériences ouvrant la voie à la réalisation d’états corrélés à trois particules, qui permettraient des tests encore plus sévères de la théorie quantique. On peut aussi mettre à profit les corrélations fortes qui peuvent exister entre les états de l’atome et celui du champ dans un mode de la cavité, pour réaliser par exemple une *mesure non destructive* (QND, *Quantum Non Demolition*) du nombre de photons stockés dans la cavité [3].

Dans la plupart des expériences que nous venons de décrire, la cavité joue un rôle prépondérant, d’une part grâce au temps de stockage très long des photons dans le mode, et d’autre part grâce au confinement de l’énergie électromagnétique dans un très faible volume, nécessaire pour produire des champs électriques par photon d’une très grande intensité et pouvoir se placer dans un régime de couplage fort.

Certaines des expériences du domaine microondes ont ainsi pu être étendues au domaine optique grâce à l’utilisation de microcavités Fabry–Pérot constituée de miroirs “superpolis” de très grande réflectivité (facteur de qualité de  $10^9$ ). Ainsi, R. Thompson, G. Rempe et J. Kimble [5] ont-ils pu observer le dédoublement spectral d’un mode de la cavité, en présence de quelques atomes résonants. Par ailleurs, K. An *et al.* [6], dans l’équipe de Feld, ont mis en évidence un effet laser monoatomique sur un atome en transit dans une cavité Fabry–Pérot, avec en moyenne une dizaine de photons dans la cavité, réalisant

ainsi l'équivalent optique du micromaser bien connu dans le domaine des microondes[3]. Les dimensions de confinement atteintes dans ces cavités Fabry-Pérot, restent cependant toujours grandes devant la longueur d'onde (distance entre les miroirs de 0.5 à 1 mm). D'autre part, la fabrication des miroirs "superpolis" requiert une technologie de pointe peu répandue, ce qui rend ces cavités Fabry-Pérot peu accessibles.

L'apparition des microcavités dont les miroirs sont constitués de couches de semiconducteurs séparées par une distance de l'ordre de la longueur d'onde, permet d'atteindre des confinements très importants. L'objectif, là aussi, est de coupler le milieu amplificateur à un seul mode du champ [7]. Il s'agit soit de cavités Fabry Perot, soit de "résonateurs en anneaux" ayant la forme d'un disque. Jusqu'à présent, les facteurs de qualités atteints, essentiellement limités par la diffraction sur les bords des miroirs, sont de l'ordre de 500 dans la géométrie cylindrique (diamètre de 1 à 10  $\mu\text{m}$ ), et peuvent atteindre jusqu'à 1000, dans les microdisques (rayon d'environ 1  $\mu\text{m}$ ), mais ils restent encore insuffisants pour que soit accessible le régime de couplage fort avec un dipôle unique.

Dans notre équipe, nous avons opté pour une alternative à ces différents types de résonateurs. Il s'agit de microrésonateurs sphériques de quelques dizaines de microns de diamètre. La lumière peut y être piégée par une succession de réflexions totales internes sous une incidence quasiment rasante, dans des modes résonants du champ, encore qualifiés de "*modes de galerie*" par référence à la propagation guidée du son le long des parois des galeries de certains grands monuments qui suscita les premières études sur le sujet. De cette propagation guidée résulte un excellent confinement de l'énergie au voisinage de la surface. Ainsi dans une sphère de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre le plus petit volume de mode est de l'ordre de seulement 300  $\mu\text{m}^3$ . L'intensité maximale du champ électrique par photon qui en résulte vaut environ 10 kV/m, et donne lieu à des couplages importants du champ avec un dipôle atomique, correspondant à une pulsation de Rabi par photon de l'ordre de 100 MHz. Par ailleurs, les pertes peuvent être seulement limitées par l'absorption résiduelle du matériau et sont généralement très faibles<sup>1</sup>. De telles propriétés font de ces microrésonateurs, des cavités idéales pour les expériences d'électrodynamique en cavité en régime de couplage fort, mais aussi pour observer des effets non linéaires mettant en jeu un *très petit nombre*

---

1. Dans des microbilles de silice, à 810 nm, des facteurs de qualité allant jusqu'à  $10^{10}$  ont même été mesurés.

*de photons.*

Les premières études détaillées, rendues possibles grâce à l'avènement des sources laser accordables, ont porté sur des microgouttelettes maintenues en lévitation laser [8]. A. Ashkin et J.-M. Dziedzic ont pu mettre en évidence l'existence de résonances très fines, dans la pression de radiation servant à léviter les gouttelettes [9]. Par la suite, de nombreuses expériences d'optique non linéaire ont été menées sur des gouttelettes en chute libre [10][11]. L'effet laser sur des gouttelettes dopées à la Rhodamine 6G a été observé puis étudié en détail, dans le groupe de R.K. Chang [12][13] qui s'est aussi intéressé à la diffusion Raman stimulée [14]. Dans le groupe de H. Lin et A. Campillo, des expériences similaires ont été menées, à la fois sur l'effet laser [15], et sur différents effets non linéaires exaltés par la présence des modes de galerie. Ainsi Campillo *et al.* ont-ils pu montrer que l'effet Raman stimulé pouvait être déclenché par seulement trois photons du laser de pompe dans un mode de la microgouttelette [16].

Dans ces expériences, les gouttelettes en chute libre présentent l'inconvénient d'avoir une durée de vie courte et de varier de forme légèrement pendant l'analyse, en raison de l'évaporation et des résonances mécaniques qui prennent facilement naissance. D'autre part, les facteurs de qualité, sont souvent limités à moins de  $10^7$ .

Les résonateurs solides permettent de s'affranchir des ces problèmes. Un travail déjà ancien, mais isolé de C. Garret *et al.* [17], a montré que les modes de galerie de billes de 1 à 2 mm de diamètre, peuvent favoriser l'effet laser dans des billes de  $\text{CaF}_2$  solides, dopées avec des ions  $\text{Sm}^{2+}$ . Mais c'est à V. Braginsky *et al.* [18] que l'on doit l'idée d'exploiter la grande transparence de microbilles de silice pour réaliser des expériences d'électrodynamique en cavité, telle qu'une mesure non destructive du nombre de photons. Quelques propositions d'expériences en régime de couplage fort ont fait suite à ces travaux. Nous avons montré qu'un "jet" d'atomes lents pourrait servir à sonder le champ d'un mode de galerie [19]. H. Mabuchi et H.J. Kimble [20] ont également proposé une configuration de potentiel lumineux qui pourrait permettre de piéger des atomes dans une orbite autour d'un microbille, augmentant ainsi leur temps d'interaction avec la cavité. Toutes ces expériences fascinantes sont cependant très délicates à réaliser.

Ce travail de thèse a essentiellement porté sur l'étude de micobilles de silice dopées aux ions néodyme  $\text{Nd}^{3+}$ , en vue de réaliser un laser fonctionnant dans un régime quantique

avec un très petit nombre d'ions. Ce système laser est déjà connu et a fait l'objet d'études, notamment par T. Baer qui démontra pour la première fois le fonctionnement d'un laser néodyme à microbilles de silice dans des billes de gros diamètre ( $\phi = 5$  mm)[21]. Par la suite, Y. Wang *et. al.* se sont intéressés à des billes de petits diamètres ( $30 \mu\text{m}$ ) mais de faible transparence. Notre travail a consisté à mettre à profit notre bonne maîtrise du couplage par onde évanescente aux modes de galerie, et les excellents facteurs de qualité que nous savons réaliser, pour réaliser un microlaser à très bas seuil. Ces résultats à température ambiante nous ont encouragés à poursuivre leur étude à basse température pour renforcer le couplage des ions aux modes de galerie et obtenir un régime de fonctionnement laser quantique.

Dans le premier chapitre nous précisons l'origine et la nature des résonances propres aux microrésonateurs sphériques, et à l'origine des modes de galerie. Une approche par l'eikonale, nous fournit l'essentiel des ordres de grandeur utiles. Nous abordons ensuite, dans le deuxième chapitre le couplage par onde évanescente, d'abord dans une approche élémentaire de cavité en anneau, puis par une modélisation plus réaliste.

Dans le troisième chapitre, nous présentons les principaux résultats obtenus sur des billes de silice pures, à l'aide d'un montage permettant la fabrication et l'étude des microbilles de silice sous vide ou dans une atmosphère contrôlée, achevé à la fin de la thèse de Laurent Collot [22]. De très grands facteurs de qualité, supérieurs à  $10^9$  ont été mesurés et nous avons observé que les résonances étaient dans ce cas dédoublées. Nous expliquons ce phénomène à l'aide d'un modèle de modes couplés par rétrodiffusion interne.

La suite est consacrée à l'étude de microbilles de silice dopées aux ions néodyme  $\text{Nd}^{3+}$ . Dans le quatrième chapitre nous présentons les principaux résultats obtenus sur le fonctionnement laser de ces microbilles, et insistons tout particulièrement sur les seuils extrêmement bas de seulement 200 nW que nous avons mesurés. Ces résultats sont bien interprétés dans le cadre d'un modèle semiclassique.

Pour réduire les processus de relaxation des ions dans la matrice vitreuse nous avons décidé d'opérer à basse température pour atteindre un nouveau régime de fonctionnement laser où quelques photons et quelques ions seulement interagissent. Des effets de bistabilité intéressants ont été observés, qui pourraient être dûs à la non-linéarité Kerr de la silice.

Dans notre dernier chapitre, nous décrivons le montage cryogénique réalisé pour étu-

dier des microbilles immergées dans un bain d'hélium superfluide et les premiers résultats obtenus. Nous sommes parvenus à reproduire les excellents facteurs de qualité de  $10^9$  obtenus à température ambiante. Par ailleurs nous avons observé l'effet laser à 2 K, lors d'une expérience très préliminaire, et des améliorations portant notamment sur la sensibilité de détection sont en cours. Enfin, à l'issue de ce dernier chapitre, nous présentons quelques perspectives sur le couplage d'une molécule unique à un mode de galerie.

## Chapitre 1

# Généralités sur les modes de galerie

Les modes de galerie (en anglais *Whispering Gallery Modes*, WGM) tiennent leur appellation d'une curiosité acoustique observée initialement dans le dôme de la cathédrale Saint-Paul de Londres. À la base de ce dôme (dont le diamètre est supérieur à 50 m) se trouve une galerie, dans laquelle deux interlocuteurs peuvent s'entendre mutuellement, quel que soit leur éloignement. Comme Lord Rayleigh l'a compris le premier, ce phénomène résulte de la propagation guidée des ondes sonores par réflexions successives le long des parois de la galerie [23, Chap XIV, §287]. Il remarque également que l'énergie acoustique reste confinée dans une couche d'air d'autant plus mince que l'incidence est proche de l'incidence rasante. Par la suite, Rayleigh eut l'intuition que les facteurs de qualité élevés des modes de galerie devraient pouvoir être utilisés [24].

Dans le domaine optique, les modes de galerie correspondent à la propagation guidée par réflexion totale interne de la lumière dans une microbille constituée d'un milieu diélectrique peu absorbant. Ils sont associés aux résonances très fines qui apparaissent dans le spectre de diffusion de la lumière par une telle bille, que G. Mie étudia et dont il publia la solution en 1908 [25]. Dans la littérature, le nom de Mie reste ainsi attaché à ces résonances de diffusion, mais on les trouve aussi sous le nom de *Morphology Dependent Resonances* pour souligner leur grande sensibilité à la forme exacte de la microparticule diffusante, à la taille et à son indice de réfraction.



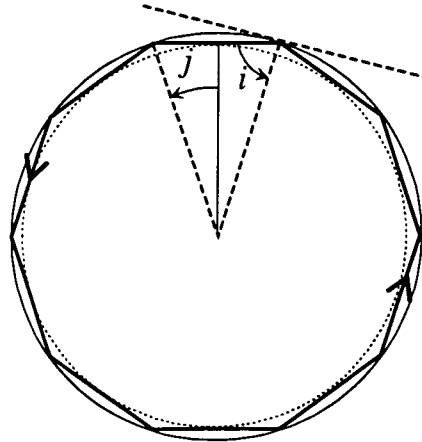


FIG. 1.1 – Propagation d'un rayon lumineux en optique géométrique par réflexion totale interne dans une microbille de silice. Définition des angles complémentaires  $i$  et  $j$ . Cercle intérieur en pointillés: caustique intérieure.

Dans ce chapitre, nous montrons que l'optique géométrique et l'approximation eikonale permettent de dégager les propriétés essentielles de ces modes (§1.1). Nous présentons ensuite les solutions des équations de Maxwell (§1.2). Dans les paragraphes suivants nous précisons les caractéristiques du spectre des modes de galerie (§1.3), et l'expression du champ électromagnétique des modes (§1.4). Nous traitons au §1.5 de leur facteur de qualité  $Q$ , et donnons au §1.6 l'expression du volume des modes, qui permet de déterminer l'amplitude du champ par photon.

## 1.1 Premières approches

Une première approche élémentaire par l'optique géométrique est justifiée par la taille des microbilles auxquelles nous nous intéressons par la suite, de diamètres typiques compris entre 50 et 100  $\mu\text{m}$ , et qu'il est usuel de caractériser par le *paramètre de taille*,  $x = 2\pi a/\lambda$ , où  $a$  représente le rayon de la bille et  $\lambda$  la longueur d'onde.

### 1.1.1 Modes de galerie en optique géométrique

Les réflexions multiples de la lumière dans des microrésonateurs diélectriques donnent lieu à de fascinants phénomènes naturels dont le plus courant est l'arc-en-ciel. Dans le

phénomène d'*arc-en-ciel*, la lumière du soleil arrive sous forme d'onde plane sur la surface d'une microgouttelette d'eau, que nous supposons parfaitement sphérique. Un rayon pénètre par réfraction avec l'angle réfracté  $i$  et se propage ensuite par réflexions multiples avec le même angle d'incidence  $i$  et en restant dans le même plan comme l'imposent les lois de Descartes et la symétrie sphérique. Mais chaque réflexion s'accompagne aussi d'une transmission qui fait rapidement décroître son intensité. Si l'on s'intéresse aux rayons qui émergent après avoir subi  $N$  réflexions internes dans la gouttelette, on peut montrer que la déviation accumulée par rapport à la direction incidente admet un minimum pour une certaine incidence. Ce minimum de déviation donne lieu à un maximum d'intensité, formant ainsi l'une des couleurs de l'arc-en-ciel, les autres composantes étant décalées par la dispersion de l'indice de réfraction de l'eau (voir par exemple [26]).

Les modes qui nous intéressent correspondent en revanche à une propagation guidée de la lumière à l'intérieur de la sphère, donnant lieu à des résonances et à une exaltation de l'intensité du champ dans la bille.

Pour piéger un rayon dans une microbille de silice homogène, il faut qu'il se propage à l'intérieur sous une incidence supérieure à l'incidence critique du dioptré air-silice, définie par  $\sin i_c = 1/N$  où  $N$  représente l'indice de la silice ( $N = 1.453$  pour  $\lambda = 810$  nm). Cela suppose qu'il n'ait pas été créé de l'extérieur par une simple réfraction, ou alors qu'il ait été engendré de l'intérieur par une source active (le milieu amplificateur du microlaser étudié dans le Chapitre 4). Une fois piégé, le rayon se propage par une succession de *réflexions totales* conduisant à un temps de stockage de l'énergie infini dans la cavité, si aucune autre source de pertes n'était présente. Les rayons successivement réfléchis restent contenus dans le même plan d'incidence, et décrivent des trajectoires polygonales (Figure 1.1) dont l'enveloppe forme un cercle de rayon  $r_1$ , appelée *caustique* (intérieure) de ce système de rayons.

Si les rayons qui passent au voisinage d'un même point à chaque tour sont en phase, ils interfèrent constructivement (dans le sens de l'optique ondulatoire) et la lumière se trouve confinée dans ce que nous appellerons un *mode de galerie*. Pour préciser cette condition dans le cadre de l'optique géométrique, considérons la trajectoire cyclique la plus simple, formée du polygone fermé possédant  $\ell$  sommets, de demi-angle au centre  $j \simeq \pi/\ell$  (voir la Figure 1.1). La condition de retour en phase est alors donnée par  $\ell N 2a \sin j = p\lambda$ ,

où  $p$  est un entier qui doit être au moins égal à  $\ell$ , afin que chaque coté du polygone ait une longueur au moins égale à  $\lambda/N$ , et qu'il ne soit pas nécessaire d'avoir recours à une description ondulatoire. En prenant  $p = \ell$ , cette condition de résonance s'exprime en termes du paramètre de taille  $x \equiv 2\pi a/\lambda$  sous la forme :

$$Nx = \pi / \sin(\pi/\ell) \simeq \ell, \quad (1.1)$$

l'approximation étant justifiée par le fait que  $\ell$  est en général grand pour les tailles de billes qui nous intéressent (pour  $a = 25 \mu\text{m}$  et  $\lambda = 810 \text{ nm}$ , par exemple,  $\ell = 281$ ). Cette relation approchée correspond à la limite des incidences rasantes (l'approximation  $\sin \pi/\ell \simeq \pi/\ell$  revient à prendre  $r_1 \simeq a$ ). Pour des incidences plus faibles, on s'attend à trouver d'autres résonances, de fréquences voisines, qui seront caractérisées par le degré de pénétration de la lumière dans la sphère, c'est à dire par le rayon de la caustique  $r_1 = a \cos j$  (dans la limite  $a/N < r_1 < a$ ).

En outre, les modes de galerie sont également caractérisés par la direction de polarisation du champ électrique, qui peut-être soit normale au plan d'incidence (polarisation "s", modes TE) soit dans le plan d'incidence (polarisation "p", modes TM).

Dans le prochain paragraphe, nous allons présenter une approche ondulatoire, fondée sur l'eikonale, qui donne une description plus précise des modes de galerie, notamment en ce qui concerne leur structure radiale et les effets de polarisation.

### 1.1.2 Approche ondulatoire approximative par l'eikonale

Un premier pas vers une description ondulatoire exacte consiste à étudier les propriétés de la phase du champ électromagnétique, à laquelle nous avons déjà fait allusion. Cette phase  $\mathcal{S}$  peut être définie en tout point par :

$$\mathcal{S}(\mathbf{r}) = \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} k_0 N ds ,$$

où l'intégrale est prise le long d'un rayon passant par les point  $\mathbf{r}_0$  et  $\mathbf{r}$ , et où  $k_0$  représente le vecteur d'onde dans le vide. Dans la limite où la longueur d'onde reste courte à l'échelle des variations de l'indice  $N(\mathbf{r})$ , on est conduit à ce que l'on appelle en optique "l'approximation eikonale". A partir de l'équation de Helmholtz pour un champ scalaire de la forme

$\Phi \simeq \exp(iS)$ , on établit l'équation différentielle, dite "équation eikonale", à laquelle  $S$  obéit :

$$(\nabla S)^2 = N^2(r) k_0^2 . \quad (1.2)$$

Ce point de vue est intermédiaire entre l'optique géométrique, qui peut être dérivée du principe de Fermat en ne retenant que le rayon d'eikonale extrémale, et l'optique ondulatoire fondée sur les équations de Maxwell. De la même manière, en mécanique, la méthode de Hamilton-Jacobi conduit à une description intermédiaire entre le traitement "géométrique" de la mécanique classique et le traitement ondulatoire de la mécanique quantique. Elle repose sur la résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi (stationnaire) pour l'action (réduite)  $S = \int \mathbf{p} \cdot d\mathbf{r}$  :

$$(\nabla S)^2 = 2m(E - V(\mathbf{r})) , \quad (1.3)$$

où  $V(\mathbf{r})$  est le potentiel dans lequel la particule de masse  $m$  et d'énergie  $E$  évolue. De même que l'on peut construire une description semiclassique en quantifiant l'action ainsi obtenue, la solution de l'équation eikonale va nous permettre une description semiclassique des modes de galerie.

### Résolution de l'équation de l'eikonale

Poursuivant alors notre analogie mécanique, nous pouvons considérer l'impulsion<sup>1</sup> de l'onde se propageant dans la bille  $\mathbf{p} = \nabla S$ . Pour la propagation d'une onde dans une bille parfaitement sphérique, la symétrie du problème conduit à la conservation du moment cinétique  $\mathbf{L} \equiv \mathbf{r} \times \nabla S$ , au cours du mouvement. En particulier, l'angle azimutal  $\varphi$  étant une variable cyclique du problème, son moment conjugué  $L_z = \partial S / \partial \varphi$ , projection de  $\mathbf{L}$  sur l'axe polaire ( $Oz$ ), se conserve. Nous notons  $M$  cette constante du "mouvement". Le module de  $\mathbf{L}$ , donné par  $L = r_1 k_0 N$ , est lui-même une constante du mouvement.

De ces propriétés, nous tirons finalement les deux relations :

$$\frac{\partial S}{\partial \varphi} = M \quad \text{et} \quad \left( \frac{\partial S}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{M^2}{\sin^2 \theta} = L^2 . \quad (1.4)$$

---

1. L'impulsion que nous utilisons ici est en fait un vecteur d'onde, dont la dimension est inverse de celle de  $\mathbf{r}$ . Pour un photon, on aurait une impulsion (au sens mécanique du terme)  $\mathbf{p} = \hbar \mathbf{k}$ . Par suite nous utilisons un moment cinétique sans dimension.

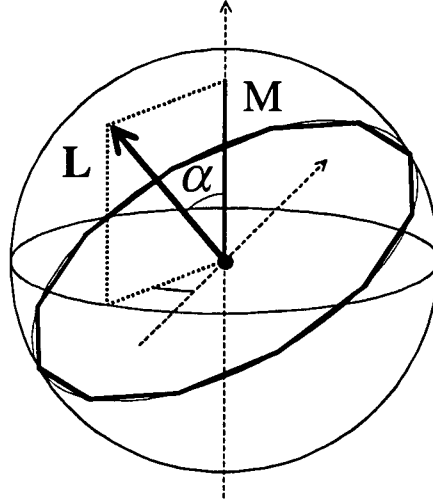


FIG. 1.2 – Moment cinétique  $L$  associé à un mode de galerie et sa projection  $M$  sur l'axe polaire.

L'équation de l'eikonale, s'écrit en coordonnées sphériques :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \theta}\right)^2 + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \left(\frac{\partial \mathcal{S}}{\partial \varphi}\right)^2 = N^2 k_0^2.$$

On montre [27, Appendice D] que l'équation précédente est séparable. En posant  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1(r) + \mathcal{S}_2(\theta) + \mathcal{S}_3(\varphi)$ , on obtient trois équations dont les deux premières (équations angulaires) découlent immédiatement de (1.4). La troisième (équation radiale) s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \mathcal{S}_1}{\partial r}\right)^2 + \frac{L^2}{r^2} = N^2 k_0^2. \quad (1.5)$$

Les mouvements *angulaires* se ramènent donc à une précession uniforme de  $\varphi$  et, pour  $\theta$ , à une oscillation entre deux valeurs extrêmes  $\theta = \pi/2 \pm \alpha$ , où  $\alpha \equiv \arccos(|M|/L)$  est l'angle que fait  $L$  avec  $(Oz)$  (voir la Figure 1.2). Le mouvement *radial* s'interprète également comme une oscillation entre deux valeurs extrêmes (points de rebroussement), c'est à dire entre  $r_1 \equiv L/k_0 N$ , qui n'est autre que le rayon de la caustique intérieure<sup>2</sup>, et  $r = a$ , à la surface de la bille où se produit la réflexion totale.

Une période sur chacun des degrés de liberté correspond à un déphasage  $\Delta \mathcal{S}$ ; donné

<sup>2</sup> L'équation (1.5) conduit aussi à l'existence d'une caustique dans le milieu extérieur ( $N = 1$ ) de rayon  $r_2 = L/k_0 \simeq Na$ .

par :

$$\begin{cases} \varphi : & \Delta\mathcal{S}_3 = 2\pi|M| \\ \theta : & \Delta\mathcal{S}_2 = 2\pi(L - |M|) \\ r : & \Delta\mathcal{S}_1 = 2Lf(Nk_0a/L), \end{cases} \quad (1.6)$$

où la fonction  $f$ , sur laquelle nous reviendrons, est définie par :

$$f(u) = \int_1^u \sqrt{1 - \frac{1}{y^2}} dy = \sqrt{u^2 - 1} - \arccos\left(\frac{1}{u}\right). \quad (1.7)$$

### Prise en compte des déphasages additionnels

Aux chemins optiques précédemment calculés doivent être ajoutés les déphasages liés aux passages de l'onde par les caustiques ainsi que ceux qui accompagnent les réflexions totales et que les relations (1.6) ne prennent pas en compte.

À chaque passage par une *caustique*, l'onde réfléchie acquiert un déphasage de  $-\pi/2$  (voir par exemple [28, p.197]), ce qui se produit deux fois, en  $\theta = \pi/2 \pm \alpha$  pour le mouvement selon  $\theta$ , et une seule fois, en  $r_1$  pour l'oscillation radiale.

À chaque *réflexion totale interne*, s'ajoute un déphasage dépendant de l'état de polarisation linéaire  $P$ . Dans la mesure où nous considérons des sphères de grand rayon, ce déphasage est donné par la phase du coefficient de Fresnel (pour une interface plane)  $r_P$  [29, p.48]:

$$r_P = \frac{P \cos i - j\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}}{P \cos i + j\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}} = e^{-2j\Theta_P}, \text{ avec } \tan \Theta_P = \frac{\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}}{P \cos i}, \quad (1.8)$$

où  $P$  représente ici un rapport d'indices dépendant de la polarisation linéaire de l'onde incidente:

$$P = \begin{cases} N, & \text{si le mode est polarisé TE} \\ 1/N, & \text{si le mode est polarisé TM} \end{cases}. \quad (1.9)$$

À la limite de l'incidence rasante ( $i = \pi/2$ ), ce déphasage est de l'ordre de  $-\pi$  pour les deux polarisations. Pour une incidence finie, l'écart  $\pi - 2\Theta_P$  peut être interprété comme un chemin optique additionnel  $\delta_P$  : tout se passe comme si l'on avait une réflexion totale avec annulation du champ sur une sphère de rayon effectif  $a_{\text{eff.}} \equiv a + \delta_P$ , avec :

$$Nk_0 \cos i \delta_P = \pi/2 - \Theta_P = \arctan\left(\frac{P \cos i}{\sqrt{N^2 \sin^2 i - 1}}\right)$$

Cette correction est un moyen de prendre en compte, tout en restant dans l'approche eikonale, l'existence de l'onde évanescente dans le milieu extérieur, et la pénétration de l'onde qui en résulte. Cet effet dépend de la polarisation. Il est connu sous le nom d'effet Goos-Hänchen [30].

Récapitulons les phases partielles accumulées sur chaque période en tenant compte des déphasages additionnels précédents :

$$\begin{cases} \Delta\mathcal{S}_1 = 2Lf (Nk_0 a_{\text{eff.}}/L) - \frac{3\pi}{2}, \\ \Delta\mathcal{S}_2 = 2\pi(L - |M|) - \pi \\ \Delta\mathcal{S}_3 = 2\pi|M| . \end{cases} \quad (1.10)$$

### Conditions de retour en phase et indices de quantification

Un mode de galerie correspond à un retour en phase de l'onde sur elle-même. La nature multi-périodique du "mouvement" étudié ici conduit à quantifier séparément chacune des phases partielles  $\Delta\mathcal{S}_1$ ,  $\Delta\mathcal{S}_2$ , et  $\Delta\mathcal{S}_3$ , en leur imposant d'être des multiples entiers de  $2\pi$ . Il en résulte tout d'abord la quantification habituelle du moment cinétique avec les deux nombres entiers angulaire  $\ell$  et azimutal  $m$ :

$$\begin{cases} M = m \\ L = \ell + \frac{1}{2} \end{cases} . \quad (1.11)$$

Ensuite, en définissant la "variable d'action" radiale  $J$  par :

$$J \equiv \frac{1}{2\pi} 2 \int_{r_1}^{a_{\text{eff.}}} \sqrt{(Nk_0)^2 - \frac{L^2}{r^2}} dr = \frac{L}{\pi} f \left( \frac{Nk_0 a_{\text{eff.}}}{L} \right) , \quad (1.12)$$

la condition de retour en phase dans la direction radiale nécessite l'introduction de l'ordre radial  $n$ , tel que:

$$J = n - \frac{1}{4} . \quad (1.13)$$

L'indice radial  $n$  ainsi défini prend les valeurs  $n = 1, 2, 3, \dots$ , et correspond donc au nombre d'oscillations entre les points extrêmes  $r_1$  et  $a_{\text{eff.}}$ . À polarisation donnée, les trois entiers  $n, \ell$  et  $m$  servent à caractériser la positions des résonances auxquelles nous les attacherons, comme indices, pour identifier un mode particulier.

Précisons leurs *domaines* de variation respectifs. Le nombre  $m$  est naturellement compris entre  $-\ell$  et  $+\ell$ , puisqu'il correspond à la projection du moment cinétique sur l'axe

( $Oz$ ). En outre, compte tenu de la condition de réflexion totale  $\sin i_c \equiv 1/N$ , le rayon  $r_1$  de la caustique est nécessairement compris entre  $a_{\text{eff}}$  et  $a_{\text{eff}}/N$  (où nous avons pris en compte l'effet Goos-Hänchen en remplaçant  $a$  par  $a_{\text{eff}}$ ). À l'aide de l'équation radiale (1.5), nous retrouvons l'encadrement pour  $\ell$  qui se déduit géométriquement des valeurs possibles pour  $r_1$ :

$$x_{\text{eff}} < \ell + \frac{1}{2} < Nx_{\text{eff}}, \quad (1.14)$$

où le paramètre de taille effectif est défini par  $x_{\text{eff}} \equiv 2\pi a_{\text{eff}}/\lambda$ . Le domaine de variation de l'indice radial  $n$  s'en déduit. En effet, la condition (1.14) s'écrit encore  $1 < Nk_0 a_{\text{eff}}/L < N$ . Comme la fonction  $f$ , définie par (1.7), est croissante et que  $f(1) = 0$ , nous obtenons pour l'indice radial, l'encadrement suivant :

$$0 < n - \frac{1}{4} < \frac{1}{\pi} \left( \ell + \frac{1}{2} \right) \left( \sqrt{N^2 - 1} - \arccos \frac{1}{N} \right).$$

Notons que d'après la définition (1.12) de  $J$ , lorsque  $L$  diminue (pour  $x$  fixé),  $r_1$  diminue et  $J$  ne peut qu'augmenter. Aussi, les modes de plus grand  $n$  sont ceux qui pénètrent le plus profondément dans la sphère.

À ce stade, pour se faire une idée plus précise des plages de variations des nombres  $n$  et  $\ell$ , considérons une bille de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre, et l'un de ses modes TE à la longueur d'onde  $\lambda = 810 \text{ nm}$ , ( $N = 1.45$ ). Le paramètre de taille effectif  $x_{\text{eff}}$  vaut environ 193.9, ce qui impose que  $\ell$  varie entre  $\ell_{\text{min}} = 194$  et  $\ell_{\text{max}} = 281$ , et que par ailleurs,  $n$  soit compris entre 0 et  $n_{\text{max}} = 21$ . Nous constatons que pour les modes qui nous intéressent  $\ell \gg 1$ . Notre intérêt se portant essentiellement vers les modes bien confinés, nous ne considérerons par ailleurs que les petites valeurs de  $n$ .

### 1.1.3 Spectre des modes de galerie dans l'approche eikonale

#### Positions des résonances pour une bille parfaitement sphérique

Lorsque la sphère est parfaite, aucun axe de quantification n'est à privilégier et nous n'attendons donc pas de dépendance en  $m$ , projection de  $\mathbf{L}$  sur l'axe ( $Oz$ ), des fréquences de résonances. Si nous rassemblons alors les conditions de quantification (1.11) et (1.13) portant sur le moment angulaire et la variable d'action  $J$ , nous obtenons une expression



analytique pour la position des résonances, en terme de paramètre de taille effectif  $x_{\text{eff}}$  :

$$Nx_{\text{eff}} = \left(\ell + \frac{1}{2}\right) f^{-1} \left( \frac{\pi(n - \frac{1}{4})}{\ell + \frac{1}{2}} \right) . \quad (1.15)$$

Cette expression, bien qu'implicite, fournit une approximation très utile de la position des résonances pour toutes les valeurs de  $n$  dès que  $\ell$  est de l'ordre de 100.

Pour les modes auxquels nous nous intéressons ( $n$  petit,  $\ell$  grand), le développement de  $f^{-1}$  au voisinage de 0:  $f^{-1}(y) = 1 + \frac{1}{2}(3y)^{2/3} + \mathcal{O}(y)$ , et la valeur limite de  $\delta_P$  nous donnent une première expression explicite de la position des résonances:

$$Nx \simeq \ell + \frac{1}{2} + \left(\frac{\ell + \frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3} \left[\frac{3\pi}{2}(n - \frac{1}{4})\right]^{2/3} - \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} + \dots \quad (1.16)$$

Cette expression fournit une approximation utile pour les résonances de nombres quantiques  $n = 1, 2$ , voire 3, et pour des valeurs de  $\ell$  excédant quelques centaines.

### Effet d'une légère ellipticité sur le spectre des modes

Les billes que nous fabriquons pour nos expériences ne sont jamais parfaitement sphériques, mais conservent néanmoins la symétrie de révolution autour de l'axe de la fibre à l'extrémité de laquelle elles sont fondues. Nous assimilerons donc, en première approximation, l'une de ces billes à un ellipsoïde de révolution. Tout écart à la sphère parfaite pouvant se décomposer sur les harmoniques sphériques, une bonne approximation consiste à ne retenir que le terme quadrupolaire<sup>3</sup> proportionnel à  $Y_2^0(\theta) \propto (3 \cos^2 \theta - 1)$ . Si nous introduisons alors l'*ellipticité* de l'ellipsoïde  $e$  définie par  $e \equiv (r_p - r_e)/a$ , où  $r_p$  et  $r_e$  sont respectivement les rayons polaire et équatorial, nous obtenons la forme paramétrique de la surface de révolution :

$$\bar{r}(\theta) = a \left( 1 + \frac{e}{3}(3 \cos^2 \theta - 1) \right) . \quad (1.17)$$

À cause de cette déformation, la normale à la surface et le rayon vecteur ne sont plus confondus, et le plan d'incidence n'est plus exactement conservé. Il en résulte une lente précession du moment angulaire  $\mathbf{L}$  (cf. [31]), analogue à la précession de Larmor d'un moment magnétique dans un champ magnétique.

<sup>3</sup> Les deux premières harmoniques sphériques  $Y_0^0$  et  $Y_1^0$  conduisent respectivement à une simple dilatation et à un déplacement de la sphère.

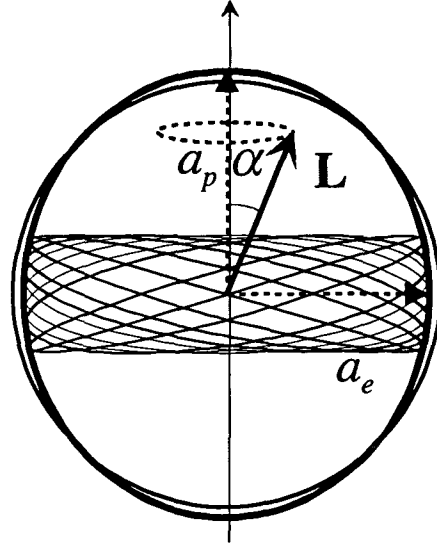


FIG. 1.3 – Déformation ellipsoïdale de la bille et précession de l'orbite

Lorsque la déformation est suffisamment faible, et pour  $|m| \simeq \ell$ , la précession s'effectue très lentement devant la période optique, ce que nous vérifierons *a posteriori*. La trajectoire d'un rayon *sur un tour* peut alors être considérée comme plane, et assimilée à une ellipse inclinée de l'angle  $\alpha$  (cf. Figure 1.3). Cette ellipse a pour demi-axes  $r_e \equiv \bar{r}(\pi/2)$  et  $r_\alpha \equiv \bar{r}(\pi/2 - \alpha)$ , sa circonférence diffère de  $2\pi a$ , et la condition de résonance est donc modifiée. À  $n$  et  $\ell$  fixés, le déplacement relatif de la fréquence pour une valeur de  $m$  donnée est l'opposé de la variation relative de la longueur de la trajectoire  $\frac{\Delta s}{s_0}$ :

$$\frac{\Delta \nu_{n\ell m}}{\nu_{n\ell}^0} = -\frac{\Delta s}{s_0} = -\frac{e}{6} \left( 1 - 3 \left( \frac{|m|}{\ell + \frac{1}{2}} \right)^2 \right) \quad (1.18)$$

En effet, pour une excentricité  $e$  faible, la longueur de l'ellipse d'inclinaison  $\alpha$  vaut approximativement  $2\pi a (1 + e/6 \times (1 - 3 \cos^2 \alpha))$ .

Pour  $\ell \gg \ell - |m|$ , la séparation en fréquence entre deux modes qui ne diffèrent que d'une unité de  $m$ , est donnée par:

$$\frac{\Delta \nu_{n\ell m}}{\Delta |m|} = \frac{e}{\ell} \nu_0. \quad (1.19)$$

La dégénérescence dite de Kramers entre les modes  $\pm m$  (modes tournant en sens contraires) subsiste car nous avons préservé la symétrie de révolution. Nous verrons dans

le Chapitre 3 qu'un mécanisme interne de rétrodiffusion de la lumière, lève en général cette dégénérescence résiduelle.

Nous avons déjà souligné que les modes les mieux confinés radialement sont ceux de  $n = 1$  ; angulairement, les modes les mieux confinés sont ceux pour lesquels  $|m| = \ell$ , dont l'extension hors du plan équatorial (*i.e.* en  $\theta$ ) est minimale.

Considérons à présent la pulsation  $\Omega$  à laquelle précède le moment cinétique  $L$ . Par analogie avec une vitesse de groupe,  $\Omega_{n\ell m} \equiv d\Delta\omega_{n\ell,m}/d|m| = e|m|\omega_n^0/(\ell + \frac{1}{2})^2$ . Nous constatons que, pour les modes qui nous intéressent (*i.e.* modes de grands  $\ell$ , et  $|m| \simeq \ell$ ), la période de précession  $2\pi/\Omega \simeq 1/e \times \ell/\nu_0$  est grande devant le temps  $\ell/\nu_0$  mis pour faire un tour, ce qui justifie notre approche élémentaire.

Signalons enfin qu'un traitement perturbatif plus rigoureux, poussé à l'ordre 2 en  $e$ , a été effectué par l'équipe de K. Young [31]. Dans ce travail, la déformation de la sphère est ramenée à une perturbation de la permittivité diélectrique localisée sur la sphère. Au premier ordre, ce traitement conduit au même résultat pour les fréquences<sup>4</sup> de résonance.

### Allure générale du spectre des modes de galerie

L'expression générale de la position des résonance en termes de paramètre de taille pour nos billes est résumée par:

$$Nx_n^P \simeq \left[ \ell + \frac{1}{2} + \left( \frac{\ell + \frac{1}{2}}{2} \right)^{1/3} \left[ \frac{3\pi}{2} (n - \frac{1}{4}) \right]^{2/3} - \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} \right] \left[ 1 + \frac{e}{3} \left( 1 - 3 \frac{\ell - |m|}{\ell} \right) \right]. \quad (1.20)$$

Cette équation permet de dégager les principaux caractères du spectre des modes de galerie. Le plus important est la pseudo-périodicité de ce spectre vis à vis de  $\ell$ , avec  $\Delta x/\Delta \ell \simeq 1/N$ , ce qui correspond, en fréquence, à un pseudo-intervalle spectral libre (FSR):

$$\text{FSR} \equiv \frac{\Delta\nu}{\Delta\ell} = \frac{c}{2\pi Na}, \quad (1.21)$$

qui n'est autre que l'inverse du temps mis par la lumière pour faire un tour. Cela suggère une analogie avec un résonateur Fabry-Pérot en anneau de longueur  $2\pi a$ , dans lequel  $\ell$  serait l'ordre d'interférence longitudinal (cf § 1.1.1). Dans cette analogie les nombres  $n$  et  $\ell - |m|$  apparaissent comme les ordres transverses des modes considérés.

4. Le calcul montre en outre que les facteurs de qualité ne sont affectés qu'à l'ordre 2 en  $e$ .

L'écart entre deux modes de mêmes nombres quantiques et différant par leur polarisation est donné par :

$$x_{n\ell}^{\text{TM}} - x_{n\ell}^{\text{TE}} = \frac{\sqrt{N^2 - 1}}{N^2} , \quad (1.22)$$

qui est indépendant des nombres quantiques et du même ordre de grandeur que l'intervalle spectral libre. Pour  $N = 1.453$  on a :

$$\Delta\nu^{\text{TE-TM}} = \text{FSR} \times 0.7 . \quad (1.23)$$

Quand l'ordre radial  $n$  change d'une unité, on a :

$$x_{n+1\ell} - x_{n\ell} \simeq \frac{1}{N} \frac{\partial x_{n\ell}}{\partial n} \simeq (l + \frac{1}{2})^{1/3} \times \frac{1}{N} \left( \frac{\pi^2}{3} \right)^{1/3} (n - \frac{1}{4})^{-1/3} . \quad (1.24)$$

L'intervalle en fréquence correspondant est de l'ordre d'une dizaine de FSR pour  $\ell \simeq 250$ , et décroît lorsque  $n$  augmente<sup>5</sup>.

Enfin, pour de petites ellipticités, la levée de dégénérescence analysée ci-dessus donne naissance à une famille de résonances quasi-équidistantes, dont l'écart (*cf.* Eq. (1.19)) est une petite fraction du FSR donné par:

$$\frac{\Delta\nu}{\Delta|m|} = e \times \text{FSR} . \quad (1.25)$$

Le Tableau 1.2 donné plus bas précise pour deux tailles de sphères et deux longueurs d'onde les valeurs des intervalles que nous venons de discuter.

## 1.2 Le problème électromagnétique exact

### 1.2.1 Position du problème

Les modes de galerie, et plus généralement les modes de Mie, peuvent être décrits exactement comme solutions des équations de Maxwell avec les conditions aux limites pour les champs ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ) imposées par l'interface sphère/air et la source excitatrice.

La résolution formelle exacte ne présente pas de difficultés, mais les approximations utiles en pratique, pour déterminer la position des résonances ou le volume d'un mode par

---

<sup>5</sup>. Une expression plus exacte de cet intervalle peut être obtenue à l'aide de la relation (1.42), et fait intervenir les zéros de la fonction d'Airy, récapitulés dans le Tableau 1.1.

exemple, s'avèrent délicates à établir. Nous en citerons quelques unes qui nous serviront par la suite.

Le champ électrique, de pulsation  $\omega$ , satisfait l'équation de Helmholtz vectorielle<sup>6</sup> :

$$\Delta \mathbf{E} + N(\mathbf{r})^2 k_0^2 \mathbf{E} = 0, \text{ avec } \nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (1.26)$$

où  $k_0 \equiv \omega/c$  est le vecteur d'onde dans le vide, et l'indice  $N(\mathbf{r})$  est homogène et vaut  $N$  à l'intérieur de la sphère, et 1 à l'extérieur. À cette équation de propagation, il faut adjoindre les conditions aux limites à l'interface diélectrique et à l'infini, pour caractériser complètement un mode solution de cette équation.

### 1.2.2 Solutions formelles exactes

La méthode d'Hansen, décrite en particulier dans l'ouvrage de Stratton [32], permet de construire les quatre solutions *vectorielles* indépendantes de divergence nulle, de l'équation de Helmholtz, à l'aide des 2 solutions de l'équation de Helmholtz scalaire  $\Delta \psi(\mathbf{r}) + Nk_0^2 \psi(\mathbf{r}) = 0$ , à condition que le milieu soit *homogène*. L'équation scalaire peut être séparée en coordonnées sphériques et sa solution la forme:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{f(r)}{r} Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}}), \quad (1.27)$$

où  $\hat{\mathbf{r}}$  représente le vecteur unitaire dans la direction  $\mathbf{r}$ , et  $Y_\ell^m(\hat{\mathbf{r}})$  est l'harmonique sphérique (scalaire). La fonction  $f(r)$  est alors solution de l'*équation radiale*:

$$f''(r) + \left[ N^2(r)k_0^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right] f(r) = 0, \quad (1.28)$$

qui est une équation de Riccati-Bessel, dont les solutions seront étudiées au §1.2.3.

Dans la méthode d'Hansen, Les solutions de l'équation de Helmholtz vectorielles, sont construites à partir de  $\nabla \times (\psi(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}})$  et  $\nabla \times (\nabla \times (\psi(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}))$ . Elles font intervenir, pour leur dépendance angulaire, les 3 fonctions *harmoniques sphériques vectorielles* définies de la façon suivante :

$$\begin{cases} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(m)} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \nabla Y_\ell^m \times \mathbf{r}, \text{ noté aussi } \mathbf{X}_\ell^m \\ \mathbf{Y}_{\ell m}^{(e)} = \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} r \nabla Y_\ell^m, \text{ noté aussi } \mathbf{Y}_\ell^m. \\ \mathbf{Y}_{\ell m}^{(0)} = Y_\ell^m \hat{\mathbf{r}}, \text{ noté aussi } \mathbf{Z}_\ell^m \end{cases} \quad (1.29)$$

---

6. idem pour  $\mathbf{B}$ .

Dans ces définitions, les indices ( $m$ ) et ( $e$ ) correspondent à la nature du champ rayonné par le multipôle d'ordre  $\ell$ , magnétique ou électrique, et sont respectivement associés aux modes TE et TM. L'indice (0) dénote la nature radiale, du champ correspondant<sup>7</sup>.

Les expressions formelles des champs (amplitudes complexes), pour les deux polarisations, sont alors données par :

$$\begin{cases} \text{Modes TE} \\ \text{Modes TM} \end{cases} \begin{cases} \mathbf{E}_{\ell m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = E_0 \frac{f_\ell(r)}{k_0 r} \mathbf{X}_\ell^m(\theta, \varphi) \\ \mathbf{B}_{\ell m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) = -\frac{iE_0}{c} \left( \frac{f'_\ell(r)}{k_0^2 r} \mathbf{Y}_\ell^m(\theta, \varphi) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f_\ell(r)}{k_0^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\theta, \varphi) \right) \\ \mathbf{E}_{\ell m}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{N^2} \left( \frac{f'_\ell(r)}{k_0^2 r} \mathbf{Y}_\ell^m(\theta, \varphi) + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f_\ell(r)}{k_0^2 r^2} \mathbf{Z}_\ell^m(\theta, \varphi) \right) \\ \mathbf{B}_{\ell m}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) = -\frac{iE_0}{c} \frac{f_\ell(r)}{k_0 r} \mathbf{X}_\ell^m(\theta, \varphi) \end{cases} \quad (1.30)$$

où  $f_\ell(r)$ , qui représente la dépendance radiale du champ, est solution de l'équation (1.28).

Nous allons maintenant préciser la nature de cette dépendance radiale, et présenter quelques approximations pour la fonction  $f_\ell(r)$ , dans les différents domaines, intérieur et extérieur à la bille, où cette fonction est définie.

### 1.2.3 L'équation radiale et ses solutions approchées

#### L'équation de Riccati-Bessel

L'équation radiale (1.28), valable uniquement dans un milieu homogène, doit être résolue dans les deux domaines où  $N(r)$  est constant: à l'extérieur de la bille où  $N = 1$ , et à l'intérieur où  $N(r) = N$ , indice de la silice. Il faut ensuite raccorder les deux solutions en utilisant la continuité des composantes tangentielles des champs ( $\mathbf{E}, \mathbf{B}$ ).

À l'aide du changement de variable  $r \rightarrow \rho \equiv Nk_0 r$ , l'équation radiale prend la forme d'une équation de Riccati Bessel:

$$f''(\rho) + \left( 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{\rho^2} \right) f(\rho) = 0 \quad (1.31)$$

admettant pour solutions réelles, les fonctions de Riccati  $\psi_\ell$  (solution *régulière* telle que  $\psi_\ell(0) = 0$ ) et  $\chi_\ell$  (solution *irrégulière*, telle que  $\chi_\ell(\rho) \rightarrow -\infty$  pour  $\rho \rightarrow 0$ ).

<sup>7</sup> Les principales propriétés satisfaites par ces fonctions, utiles à notre propos, sont récapitulées dans l'Annexe A.

Elles sont reliées aux fonctions de Bessel sphériques ou cylindriques, plus familières, par les relations suivantes :

$$\begin{cases} \psi_\ell(\rho) = \rho j_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} J_{\ell+1/2}(\rho) \\ \chi_\ell(\rho) = \rho n_\ell(\rho) = \sqrt{\frac{\pi\rho}{2}} N_{\ell+1/2}(\rho) \end{cases} \quad (1.32)$$

où  $J_\nu$  et  $j_\ell$ , sont les fonctions de Bessel (de première espèce) cylindrique et sphérique, et  $N_\nu$  et  $n_\ell$ , les fonctions de Neumann (ou de Bessel de seconde espèce), cylindrique et sphérique. On utilise aussi les fonctions de Riccati-Hankel  $\eta_\ell^\pm = \psi_\ell \pm i\chi_\ell$ .

À l'instar des fonction de Bessel, les fonctions de Riccati changent qualitativement de comportement au point d'inflexion  $\lambda = \sqrt{\ell(\ell+1)} \simeq \ell + \frac{1}{2}$  : elles sont exponentiellement (dé)croissantes dans la région  $\rho < \ell + \frac{1}{2}$ , et oscillent en quadrature pour  $\rho > \ell + \frac{1}{2}$ .

Finalement, la fonction  $f_\ell(r)$  de la formule (1.30) est donnée par :

$$\begin{cases} \psi_\ell(Nk_0r) & \text{pour } r < a \\ \alpha\psi_\ell(k_0r) + \beta\chi_\ell(k_0r) & \text{pour } r > a, \end{cases} \quad (1.33)$$

puisque les champs doivent être réguliers en  $r = 0$ . Les constantes  $E_0$ ,  $\alpha$  et  $\beta$  sont déterminées par les conditions au limites pour  $r = a$  (conditions de raccordement) et pour  $r \rightarrow \infty$ . En particulier, en l'absence de sources à l'extérieur, on a une onde purement sortante :  $f_l(r) \propto \eta_\ell^+ \sim \exp(ik_0r)$ , soit  $\beta = i\alpha$ .

Les conditions obtenues sur  $\ell$  et  $x$  au § 1.1.2 montrent qu'à l'extérieur de la sphère l'onde est évanescence jusqu'à  $r = r_2 = (\ell + \frac{1}{2})/k_0$  soit environ  $Na$  pour  $n = 1$ . Au delà de cette caustique extérieure, l'onde redevient propagative, ce qui traduit la diffraction de la lumière par la surface courbe de la bille. Cette "frustration" de la réflexion totale conduit donc à des pertes, mais qui sont totalement négligeables pour les diamètres de billes auxquels nous nous intéressons ( $\phi > 50 \mu\text{m}$ ), comme nous le montrons dans le §1.5.

### Analogie quantique

Pour mieux comprendre le comportement des fonctions radiales, on peut tirer parti d'une analogie entre ce problème d'optique et le problème bien connu d'une particule quantique dans un potentiel central [33]. En effet, l'équation radiale (1.28) est formellement

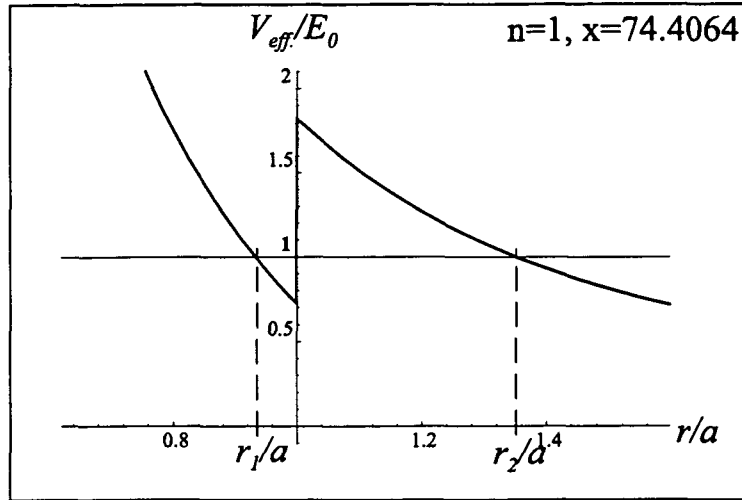


FIG. 1.4 – Allure du potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$  pour la particule quantique équivalente et points de rebroussement correspondant au niveau d'énergie fondamental  $E_0$ .

analogue à l'équation de Schrödinger d'une particule de masse  $m$ , d'énergie  $E = \hbar^2 k_0^2 / 2m$ , plongée dans un potentiel effectif :

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2m} \left[ (1 - N^2(r)) + \frac{\ell(\ell + 1)}{r^2} \right], \quad (1.34)$$

qui est la somme d'un potentiel attractif rectangulaire lié à l'indice élevé de la bille et de la "barrière centrifuge". Nous en avons représenté l'allure sur la Figure 1.4. Il faut noter que – contrairement au problème de mécanique – le potentiel dépend de  $k_0$ , donc de l'énergie. La valeur de l'énergie définit les deux points de rebroussement,  $r_1$  et  $r_2$  (voir la Figure 1.4) pour lesquels l'impulsion de la particule s'annule et qui sont associés, dans l'image semiclassique, aux positions des caustiques respectivement intérieure et extérieure.

Tant que l'énergie  $E_0$  est comprise entre les deux extrema du potentiel, la particule peut être piégée dans la "poche" de potentiel entre  $r_1$  et  $a$ . Lorsque, par ailleurs, les conditions de retour en phase de la particule entre  $r_1$  et  $a$  sont satisfaites, c'est-à-dire à résonance, la particule se trouve dans un "état quasi-lié"<sup>8</sup>. Elle est cependant imparfaitement piégée, en raison de la fuite possible par effet tunnel à travers le domaine classiquement interdit,

8. Pour les valeurs de l'énergie supérieures au maximum du potentiel  $V_{\text{eff}}$ , la particule ne peut pas être piégée et nous devons alors lui associer un état propre de *diffusion*, donnant lieu à des résonances de médiocre facteur de qualité.



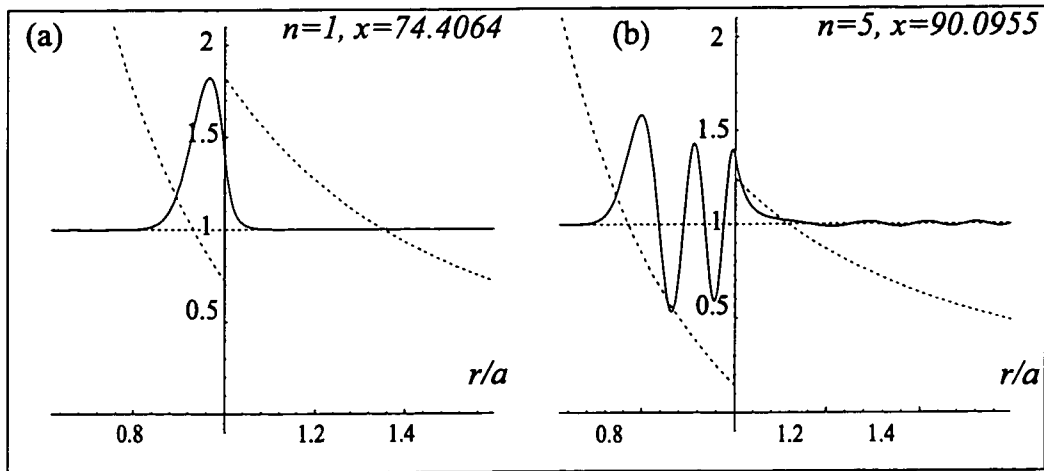


FIG. 1.5 – Fonctions d'onde normées des états quasi-liés dans le potentiel effectif  $V_{\text{eff}}$ , obtenu pour  $N = 1.45$  et pour  $\ell = 100$  (bille de diamètre  $20 \mu\text{m}$ , par soucis de démonstration). L'axe horizontal correspond au paramètre  $r/a$ . Les courbes en pointillés représentent le potentiel et l'énergie, tous les deux normalisés à l'énergie de l'état considéré. (a) mode "fondamental"  $n = 1$ . (b) mode  $n = 5$ , pour lequel on voit nettement que la fonction d'onde redevient oscillante au delà du point de rebroussement extérieur  $r_2$ .

compris entre  $a$  et  $r_2$ .

La fonction d'onde associée à ces états quasi-liés, comporte un nombre croissant de ventres d'oscillations lorsque l'énergie augmente, qui n'est autre que l'indice radial  $n$  que nous avons introduit pour quantifier la partie radiale  $S_1$  de l'eikonale. Dans les domaines interdits classiquement ( $r < r_1$  et  $a < r < r_2$ ), les fonctions d'onde possèdent un comportement évanescent, et redeviennent oscillantes au delà de la caustique extérieure (voir la Figure 1.5).

Aux valeurs de  $n$  petites correspondent les modes les plus profonds et donc les mieux confinés. Pour des valeurs plus grandes de  $n$ , on remarque sur la Fig. 1.5(b), qu'au delà de  $r_2$ , les oscillations de la fonction d'onde, imperceptibles pour  $n = 1$ , deviennent relativement importantes, ce qui traduit l'augmentation exponentielle des pertes par effet tunnel lorsque  $n$  croît. Enfin, puisque le domaine d'énergie associé aux états quasi-liés est borné, il n'existe qu'un nombre fini de valeur de  $n$  accessibles, comme nous l'avons déjà montré au §1.1.2.

### Approximation semiclassique des fonctions de Riccati

Une premier type d'approximation utile pour les fonctions de Riccati est l'approximation semiclassique ou WKB<sup>9</sup>. Elle est en fait très proche de ce que nous avons écrit dans le § 1.1.2 consacré à l'approximation eikonale, et n'en diffère que par la prise en compte d'une amplitude lentement variable (à l'échelle des oscillations). Cette amplitude est singulière au voisinage des points de rebroussement, ce qui correspond à la divergence de l'intensité lumineuse sur les caustiques en optique géométrique, et qui traduit simplement le fait que l'approximation des courtes longueurs d'onde n'est plus justifiée dans ce domaine. La méthode WKB permet aussi une extension de l'approximation eikonale au domaine classiquement interdit, par prolongement analytique de l'intégrale de phase :

$$S(\rho) = \int_{\ell+1/2}^{\rho} \sqrt{1 - \left(\frac{\ell+1/2}{u}\right)^2} du = (\ell + \frac{1}{2}) f\left(\frac{\rho}{\ell+1/2}\right) \quad \text{pour } \rho > \ell + 1/2 ,$$

en :

$$S(\rho) = \pm i \int_{\rho}^{\ell+1/2} \sqrt{\left(\frac{\ell+1/2}{u}\right)^2 - 1} du = \pm i(\ell + \frac{1}{2}) g\left(\frac{\rho}{\ell+1/2}\right) \quad \text{pour } \rho < \ell + 1/2 ,$$

Les intégrales définissant  $f$  et  $g$  sont explicitement données par :

$$f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \arccos(1/x) \quad \text{et} \quad g(x) = -\sqrt{1 - x^2} + \operatorname{argch}(1/x) \quad (1.35)$$

La phase réelle donne lieu à des solutions oscillantes de la fonction  $f_{\ell}$ , en sinus et cosinus dans le domaine accessible classiquement, et la phase imaginaire correspond à des solutions exponentiellement croissantes et décroissantes, dans le domaine interdit. Le raccordement des solutions dans les deux domaines, impliquant la prise en compte des déphasages additionnels aux points de rebroussement, permet alors d'obtenir les expressions complètes des approximations semiclassiques des fonctions de Riccati-Bessel.

Ainsi, dans le domaine classiquement accessible ( $\rho > \ell + \frac{1}{2}$ ):

$$\psi_{\ell}(\rho) \simeq \frac{\cos \left[ (\ell + \frac{1}{2}) f\left(\frac{\rho}{\ell+1/2}\right) - \frac{\pi}{4} \right]}{\left(1 - \left(\frac{\ell+1/2}{\rho}\right)^2\right)^{1/4}} \quad \text{et} \quad \chi_{\ell}(\rho) \simeq \frac{\sin \left[ (\ell + \frac{1}{2}) f\left(\frac{\rho}{\ell+1/2}\right) - \frac{\pi}{4} \right]}{\left(1 - \left(\frac{\ell+1/2}{\rho}\right)^2\right)^{1/4}} . \quad (1.36)$$

---

9. WKB=Wentzel, Kramers et Brillouin, parfois noté aussi BKWJ, avec J pour Jeffrey. Les références aux articles originaux sont données dans la thèse de Jean Hare [34, p. 15].

et dans le domaine classiquement interdit ( $\rho < \ell + \frac{1}{2}$ ):

$$\psi_\ell(\rho) \simeq \frac{1}{2} \frac{\exp \left[ -(\ell + \frac{1}{2}) g \left( \frac{\rho}{\ell + \frac{1}{2}} \right) \right]}{\left( \left( \frac{\ell + \frac{1}{2}}{\rho} \right)^2 - 1 \right)^{1/4}} \quad \text{et} \quad \chi_\ell(\rho) \simeq -\frac{\exp \left[ (\ell + \frac{1}{2}) g \left( \frac{\rho}{\ell + \frac{1}{2}} \right) \right]}{\left( \left( \frac{\ell + \frac{1}{2}}{\rho} \right)^2 - 1 \right)^{1/4}}. \quad (1.37)$$

Notons que ces expressions sont en fait le premier terme d'un développement asymptotique en puissances de  $1/(\ell + \frac{1}{2})$ , connu comme le "développement de Debye" des fonctions de Bessel (cf. [35, (9.3.7) et (9.3.8)].)

### Les approximations uniforme et transitionnelle

Dans la zone de transition (*i.e.*  $\rho \simeq \ell + \frac{1}{2}$ ), les approximations WKB cessent d'être valables. Cependant, Olver a montré [36] que dans la limite des grands  $\ell$ , l'équation de Riccati pouvait être ramenée à une équation d'Airy. On obtient ainsi pour les fonctions de Riccati un développement asymptotique, en puissances de  $\ell^{-2/3}$  en terme des fonctions d'Airy Ai et Bi et de leur dérivées, qui converge uniformément vers les fonctions de Riccati dans le domaine  $]0, +\infty[$ , à la limite  $\ell \rightarrow +\infty$ . Nous renvoyons le lecteur à l'ouvrage d'Abramowitz et Stegun [35, p. 368]. Ce développement (à l'ordre 2) a été utilisé en particulier par H.M. Nussenzweig pour obtenir avec une extrême précision les positions et largeurs des résonances pour des paramètres de taille de l'ordre de 40 à 80, domaine dans lequel le calcul direct des fonctions de Bessel devient quasiment impossible, et où les approximations semiclassiques sont encore très grossières. Pour les domaines de  $\ell$  qui nous intéressent (de 200 à 1000), le premier terme de ce développement, que nous appelons l'*approximation uniforme*, est déjà très précis, et le plus souvent suffisant.

Si l'on se limite au domaine de transition  $\rho \simeq \ell + \frac{1}{2}$ , on peut linéariser les différentes fonctions auxiliaires, pour obtenir ce que l'on appelle "l'approximation transitionnelle". Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} \psi_\ell(\lambda + \lambda^{1/3}u) &\simeq \sqrt{\pi} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{1/6} \text{Ai}(-2^{1/3}u) \\ \chi_\ell(\lambda + \lambda^{1/3}u) &\simeq -\sqrt{\pi} \left( \frac{\lambda}{2} \right)^{1/6} \text{Bi}(-2^{1/3}u), \end{aligned} \quad (1.38)$$

Notons que cette approximation peut aussi être obtenue directement en linéarisant le potentiel effectif au voisinage du fond de la barrière. Tout se passe alors comme si le potentiel

était un potentiel “triangulaire”, dont les états stationnaires peuvent être exprimés à l’aide des fonctions d’Airy, comme dans les expressions (1.38).

### 1.3 Positions des résonances dans l’approximation semiclassique

Nous n’avons pas encore exprimé les conditions de continuité des composantes tangentiels des champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$ , données par les relations (1.30), qui permettent de raccorder les fonctions radiales au passage à la surface de la bille.

#### 1.3.1 Conditions de raccordement de la fonction radiale

Nous savons déjà qu’à l’intérieur de la bille ( $r < a$ ), la fonction radiale  $f_\ell(r)$  est une fonction oscillante donnée par la fonction de Riccati  $\psi_\ell(Nk_0r)$ , tandis qu’à l’extérieur  $r > a$ , elle est représentée par une combinaison linéaire des fonctions évanescence  $\chi_\ell(k_0r)$  et exponentiellement croissante  $\psi_\ell(k_0r)$ , de la forme  $\alpha\psi_\ell(k_0r) + \beta\chi_\ell(k_0r)$ . Les conditions de continuité sur les composantes tangentiels des champs, prennent alors la forme suivante :

$$\begin{aligned} \text{Modes TE} & \begin{cases} \psi_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi_\ell(k_0a) + \beta\chi_\ell(k_0a) \\ N\psi'_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi'_\ell(k_0a) + \beta\chi'_\ell(k_0a) \end{cases} \\ \text{Modes TM} & \begin{cases} N^{-1}\psi'_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi'_\ell(k_0a) + \beta\chi'_\ell(k_0a) \\ \psi_\ell(Nk_0a) = \alpha\psi_\ell(k_0a) + \beta\chi_\ell(k_0a) . \end{cases} \end{aligned} \quad (1.39)$$

À l’aide de ces conditions de raccordement nous allons à présent déterminer la position des résonances.

#### 1.3.2 Positions des résonances

Comme nous le rappelions en introduction, les modes de galerie ont historiquement été présentés comme des résonances très fines dans les sections efficaces de diffusion par des microparticules sphériques.

Dans le cadre de la théorie de la diffusion, en l’absence de sources à l’extérieur, nous écrivons l’amplitude de l’onde totale comme la superposition de l’onde incidente, ici  $\psi_\ell$  et

d'une onde diffusée purement sortante, qui n'est autre que la fonction de Riccati–Hankel  $\eta_\ell^+$ , ayant bien à grande distance la structure d'une onde sphérique en  $e^{ik_0 r}$ :

$$\psi_{\text{tot}} = \psi_\ell - \mathcal{A}\eta_\ell^+,$$

où  $\mathcal{A}$  représente le *coefficient de diffusion*, appelé aussi coefficient de Bohren et Huffman [37].

Nous écrivons la fonction radiale à l'extérieur de la bille sous la forme  $\psi_{\text{tot}} = \alpha\psi_\ell + \beta\chi_\ell$ , ce qui conduit à exprimer le coefficient de diffusion à l'aide des coefficients  $\alpha(x)$  et  $\beta(x)$ , où  $x$  représente toujours le paramètre de taille:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{1 - i\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Les positions des résonances correspondent aux valeurs (réelles) de  $x$  qui rendent maximum le module de  $\mathcal{A}$ , c'est à dire telles que  $\alpha(x) = 0$ .

Les modes (dit “quasi-normaux”) sont traditionnellement associés aux *pôles complexes*  $z = x - iy$  du coefficient de diffusion, c'est à dire aux valeurs de  $x$  et de  $y$ , telles que  $\beta(z) = i\alpha(z)$ , et qui correspondent aux fonctions radiales purement sortantes qui conviennent en l'absence de source extérieure (voir §1.2.3 32). Dans cette approche, la partie réelle du pôle repère la position des résonances et la partie imaginaire  $y$  définit leur largeur, en terme d'unités réduites (paramètre de taille). Considérons en effet une résonance en  $x_0$ : si l'on peut développer les fonctions  $\alpha$  et  $\beta$  à l'ordre le plus bas non trivial, autour de cette résonance, selon  $\alpha(z) \simeq \alpha'_0(z - x_0)$  et  $\beta(z) \simeq \beta_0$ , le pôle est alors défini par la condition  $i\alpha'_0((x - x_0) - iy) = \beta_0$  d'où  $x = x_0$  et  $y = \beta_0/\alpha'_0$ . On peut ainsi écrire le coefficient de diffusion sous la forme lorentzienne suivante:

$$\mathcal{A} \simeq \frac{1}{1 - i\frac{\alpha'_0}{\beta_0}(x - x_0)}, \quad (1.40)$$

où  $\beta_0/\alpha'_0$  représente la largeur de la lorentzienne en paramètre de taille qui, ramenée en unités de pulsation vaut  $\gamma_D/2 = \frac{c}{a}\frac{\beta_0}{\alpha'_0}$ . La dépendance temporelle du champ est donc de la forme  $e^{-i(\omega - \gamma_D/2)t} = e^{-i\omega t}e^{-(\gamma_D/2)t}$ , qui décrit bien la décroissance temporelle de l'énergie avec le taux  $\gamma_D$ .

Notons que la condition de résonance  $\alpha = 0$ , revient à ne considérer que des modes parfaitement liés dans le puits de potentiel, puisqu'ainsi nous annulons dans la fonction radiale totale  $\psi_{\text{tot}}$ , la contribution de la fonction  $\psi_\ell$  exponentiellement croissante dans le domaine classiquement interdit. Compte tenu des très faibles pertes<sup>10</sup>, l'approximation consistant à remplacer la barrière par une barrière infinie, s'avère excellente.

Finalement, en reportant la condition  $\alpha = 0$  dans les équations de continuité (1.39), nous trouvons que le paramètre de taille  $x_0$ , doit satisfaire à *résonance* la condition:

$$P \frac{\psi'_\ell(Nx_0)}{\psi_\ell(Nx_0)} = \frac{\chi'_\ell(x_0)}{\chi_\ell(x_0)} \quad \text{où } P = \begin{cases} N & \text{pour les modes TE} \\ 1/N & \text{pour les modes TM,} \end{cases} \quad (1.41)$$

Dans le cadre des approximations semiclassiques, nous précisons maintenant l'expression de  $x_0$  en fonction des indices du mode, en nous fondant sur les travaux de Schiller et Byer qui donnent dans les références [38][39] une approximation de la positions des résonances, en terme de paramètre de taille, reposant sur les approximations des fonctions de Riccati. Lam *et al.* justifient leur expression dans la référence [40], en montrant qu'elle résulte d'une double approximation: l'*approximation WKB*, loin du point de transition, pour la fonction  $\chi_\ell$  exponentiellement décroissante, et l'*approximation transitionnelle* de la fonction  $\psi_\ell$ , valable au voisinage du point de transition. À l'aide de ces deux approximations, nous pouvons établir simplement l'expression du premier terme du développement de la position des résonances en puissance de  $1/\ell^{1/3}$ . Nous savons déjà que ce terme représente une correction à l'ordre zéro donné par  $Nx \simeq \ell + \frac{1}{2}$ . Aussi, pouvons-nous introduire le paramètre  $u$  tel que:

$$Nx \equiv \ell + \frac{1}{2} + u(\ell + \frac{1}{2})^{1/3}.$$

En utilisant l'approximation transitionnelle (1.38) pour  $\psi_\ell$ , nous trouvons que:

$$N \frac{\psi'_\ell(Nx)}{\psi_\ell(Nx)} \simeq -N \frac{2^{1/3}}{(\ell + \frac{1}{2})^{1/3}} \frac{\text{Ai}'(-2^{1/3}u)}{\text{Ai}(-2^{1/3}u)},$$

et en faisant appel à la solution WKB (1.37) pour la fonction  $\chi_\ell$ , nous trouvons que:

$$\frac{\chi'_\ell(x)}{\chi_\ell(x)} \simeq -g'(x) = \sqrt{\left(\frac{\ell + \frac{1}{2}}{x}\right)^2 - 1}$$

---

10. Pertes par diffraction dues à la courbure: voir §1.5.

$n$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\alpha_n$	- 2.338	- 4.088	- 5.52 1	- 6.78 7	- 7.94 4	- 9.02 3	- 10.04 0	- 11.00 9	- 11.93 6	- 12.82 9
$(\frac{3\pi}{2}(n - \frac{1}{4}))^{2/3}$	- 2.320	- 4.082	- 5.51 7	- 6.78 4	- 7.94 2	- 9.02 1	- 10.03 9	- 11.00 8	- 11.93 5	- 12.82 8

TAB. 1.1 – Zéros de la fonction d’Airy  $\text{Ai}(x)$ , et leur approximation semiclassique, correspondant aussi à l’approche eikonale.

En égalant alors ces deux expressions, et en prenant la limite  $\ell \rightarrow \infty$ , à  $(\ell + \frac{1}{2})/x \simeq N$  constant, nous constatons que les termes en puissance de  $(\ell + \frac{1}{2})$  ne sont compatibles qu’à la condition que  $\text{Ai}(-2^{1/3}t)$  soit nul à l’ordre  $(\ell + \frac{1}{2})^{-1/3}$ , c’est à dire que:

$$-2^{1/3}t = \alpha_n + \mathcal{O}\left[(\ell + \frac{1}{2})^{-1/3}\right],$$

où  $\alpha_n$  représente le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d’Airy. Nous obtenons ainsi l’expression<sup>11</sup> du premier terme du développement du paramètre de taille en puissances de  $(\ell + 1/2)^{1/3}$ :

$$Nx_{n\ell} = \ell + \frac{1}{2} - \left(\frac{\ell + \frac{1}{2}}{2}\right)^{1/3} \alpha_n - \frac{P}{\sqrt{N^2 - 1}} + \dots \quad (1.42)$$

Cette expression possède la même forme que celle obtenue dans l’approche eikonale, le facteur  $[3\pi/2(n - \frac{1}{4})]^{2/3}$  étant ici remplacé par le  $n^{\text{ième}}$  zéro de la fonction d’Airy  $\alpha_n$ . Le Tableau 1.1 permet de comparer ces deux approximations et de constater que l’approximation eikonale est bonne à mieux que 1% pour la position des résonances.

Pour une bille de rayon  $a$ , nous récapitulons dans le Tableau 1.2 les intervalles spectraux, *i.e.* les pseudo-périodes, séparant les modes différant d’une unité de l’un des indices  $n, \ell$  et  $m$  qui caractérisent un mode, que nous avons déduits de l’approximation semiclassique (1.42) pour  $n$  et  $\ell$ , et de la levée de dégénérescence en  $m$  donnée par (1.18). Comme nous l’avons déjà montré dans l’approche eikonale (§1.1.2), tous ces intervalles peuvent être commodément rapportés à l’intervalle spectral libre (FSR), correspondant à l’écart en fréquence entre deux modes différant d’une unité de  $\ell$  (relations (1.21),(1.23), (1.24), et (1.25)).

Les longueurs d’ondes ( $\lambda = 810$  nm et  $\lambda = 1083$  nm) et les tailles de billes, pour lesquelles ces calculs ont été effectués, ont été choisies en fonction des expériences que nous avons réalisées sur des billes de silice dopées en terre rare, que nous décrivons au

<sup>11</sup>. En tenant compte du terme de polarisation introduit empiriquement dans le §1.1.2.

				Intervalles spectraux entre modes $(n, \ell, m)$							
				$\Delta \ell = 1$ (FSR)		$\Delta n = 1$		$\Delta m = 1$		TE-TM	
$a$	$\lambda$	$x$	$\ell = Nx$	GHz	nm	GHz	nm	GHz	nm	GHz	nm
25	810	193.9	281	1314	2.87	11961	26.1	13.1	0.028	953	2.08
25	1083	145.0	210	1318	5.15	10890	42.6	13.2	0.052	954	3.73
50	810	387.9	563	657	1.44	7537	16.5	6.6	0.014	477	1.04
50	1083	290.1	420	659	2.58	6858	26.8	6.6	0.026	477	1.88

TAB. 1.2 – Intervalles spectraux entre modes pour deux tailles de billes (en  $\mu\text{m}$ ) et les deux longueurs d'onde (en nm), pour une même ellipticité  $e = 1\%$ , en rapport avec les expériences décrites au Chapitre 4. Notons que  $N = 1.453$  à  $\lambda = 810$  nm, tandis que  $N = 1.449$  à  $\lambda = 1083$  nm.

Chapitre 4. Nous devons retenir que la densité de modes, tous modes confondus, est de l'ordre de 1 mode tous les 10 GHz.

Enfin, pour une résonance donnée caractérisée par le paramètre de taille  $x_{n\ell}$  nous précisons, dans le paragraphe suivant, les expressions complètes pour les champs **E** et **B**, dans l'approximation semiclassique.

## 1.4 Expressions approchées utiles des champs E et B

Dans les expériences que nous avons réalisées (voir les Chapitres 4 et 5), nous nous sommes surtout intéressés aux modes bien confinés de microbilles d'un diamètre de l'ordre de  $50 \mu\text{m}$ , et ce, dans le proche infrarouge  $\lambda \simeq 810 - 1080$  nm. Dans ce cas, l'indice angulaire  $\ell \gg 1$  (à  $\lambda = 810$  nm,  $\ell = 280$ ) et  $\ell - |m| \ll \ell$ .

Dans ces limites, nous pouvons utiliser les développements asymptotiques des harmoniques sphériques, et simplifier considérablement les expressions générales (1.30) que nous avons données pour les champs, au §1.2.2.



### 1.4.1 Expressions asymptotiques des harmoniques sphériques vectorielles

La dépendance angulaire des champs est fonction des harmoniques sphériques *vectorielles* définies par la relation 1.29, à partir des harmoniques sphériques scalaires:

$$Y_\ell^m(\theta, \phi) \equiv \sqrt{\frac{2\ell+1}{4\pi}} \sqrt{\frac{(\ell-m)!}{(\ell+m)!}} e^{im\phi} P_\ell^m(\cos\theta),$$

où  $P_\ell^m$  représente la fonction de Legendre associée. Les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  ont donc une dépendance selon l'angle  $\phi$  qui a la forme d'une onde progressive en  $e^{\pm i|m|\phi}$ , se propageant dans l'un des deux sens  $\pm$ . À cette onde progressive, il peut alors être associé un vecteur d'onde tangentiel  $k_t \equiv \frac{|m|}{a} \simeq \frac{\ell}{a} \simeq Nk_0$ .

La dépendance angulaire en  $\theta$  peut être précisée dans le cadre d'une approximation semiclassique. Nous donnons, dans l'Annexe A, les principaux résultats de cette approche, établis dans [41, p. 48 et suiv.].

#### Développement asymptotique des harmoniques sphériques $Y_\ell^m$

Dans la limite  $\ell \gg 1$  et  $q = \ell - |m| \ll \ell$ , les relations de récurrence donnant l'harmonique sphérique  $Y_\ell^{\ell-q}$  à partir de  $Y_\ell^\ell$  donnent:

$$Y_\ell^{\ell-q}(\theta, \varphi) \simeq (-1)^q \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{1/4} \frac{H_q(\ell^{1/2} \cos\theta)}{(2^q q!)^{1/2}} \sin^{\ell-q} \theta \frac{e^{\pm i(\ell-q)\varphi}}{\sqrt{2\pi}}. \quad (1.43)$$

où  $H_q$  représente le polynôme de Hermite d'ordre  $q$ .

#### Harmoniques sphériques vectorielles

Des développements asymptotiques des harmoniques sphériques, nous pouvons déduire que  $m/\sin\theta Y_\ell^m$  est approximativement plus grand que  $\partial Y_\ell^m/\partial\theta$ , par un facteur  $\sqrt{\ell}$ . Nous en déduisons les approximations suivantes, pour les harmoniques sphériques vectorielles  $\mathbf{X}_\ell^m, \mathbf{Y}_\ell^m$  et  $\mathbf{Z}_\ell^m$ :

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\ell^m \simeq i \frac{m}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\sin\theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \mathbf{Y}_\ell^m \simeq i \frac{m}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\sin\theta} \hat{\mathbf{u}}_\varphi \\ \mathbf{Z}_\ell^m = Y_\ell^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{u}}_r, \end{cases} \quad (1.44)$$

### 1.4.2 Expressions asymptotiques pour les champs E et B

Dans le domaine du *champ proche*, à l'intérieur de la bille et au voisinage immédiat de la surface, c'est-à-dire pour  $kr \simeq \ell$ , le poids de l'harmonique sphérique vectorielle  $\mathbf{Y}_\ell^m$  est plus faible que celui de  $\mathbf{Z}_\ell^m$  par un facteur de l'ordre de  $\ell^{-1/3}$  (voir [41, p. 62]). Nous en déduisons alors la forme asymptotique pour les champs  $\mathbf{E}$  et  $\mathbf{B}$  dans le cas d'un mode TE ou TM, de nombres quantiques  $n$ ,  $\ell$ , et  $m$ , dont la résonance est repérée par le paramètre de taille  $x_0$ .

$$\begin{aligned}
 \text{Modes TE} & \begin{cases} \mathbf{E}_{n\ell m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) \simeq E_0 \frac{f_{n\ell}(r)}{x_0 r/a} \frac{im}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta \\ \mathbf{B}_{n\ell m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) \simeq -\frac{iE_0}{c} (\ell + \frac{1}{2}) \frac{f_{n\ell}(r)}{(x_0 r/a)^2} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{u}}_r \end{cases} \\
 \text{Modes TM} & \begin{cases} \mathbf{E}_{n\ell m}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) \simeq \frac{E_0}{N^2} (\ell + \frac{1}{2}) \frac{f_{n\ell}(r)}{(x_0 r/a)^2} Y_\ell^m(\theta, \varphi) \hat{\mathbf{u}}_r \\ \mathbf{B}_{n\ell m}^{\text{TM}}(\mathbf{r}) \simeq -\frac{iE_0}{c} \frac{f_{n\ell}(r)}{x_0 r/a} \frac{im}{\ell + \frac{1}{2}} \frac{Y_\ell^m(\theta, \varphi)}{\sin \theta} \hat{\mathbf{u}}_\theta, \end{cases}
 \end{aligned} \tag{1.45}$$

où la fonction radiale  $f_{n\ell}(r)$  est donnée, dans les différents domaines, par :

$$\begin{cases} \psi_\ell(Nx_0 r/a) & \text{pour } r < a \\ \alpha\psi_\ell(x_0 r/a) + \beta\chi_\ell(x_0 r/a) & \text{pour } r > a, \end{cases} \tag{1.46}$$

### 1.4.3 Champ électrique pour un mode TE confiné ( $n = 1, \ell = |m|$ ).

Les modes ( $n = 1, \ell = |m|$ ), qui sont les plus confinés, sont des modes de prédilection dans la perspective des expériences d'électrodynamiques en cavité auxquelles nous nous sommes intéressées. Par ailleurs, les dépendances radiale et orthoradiale du champ peuvent être approchées, avec une très bonne approximation par des gaussiennes, ce qui permet de s'en donner une représentation simple.

Considérons en effet, l'harmonique sphérique  $Y_\ell^\ell(\theta, \phi)$ :

$$Y_\ell^\ell(\theta, 0) = (-1)^\ell \sqrt{\frac{2\ell + 1}{4\pi}} \frac{\sqrt{(2\ell)!}}{2^\ell \ell!} \sin^\ell \theta.$$

Elle présente un maximum au voisinage de  $\theta = \pi/2$ , d'autant plus marqué que  $\ell$  est grand. Nous pouvons simplifier cette expression en constatant que  $\sin^\ell \theta$  tend vers une fonction gaussienne, et que le coefficient de normalisation peut être simplifié à l'aide de la formule

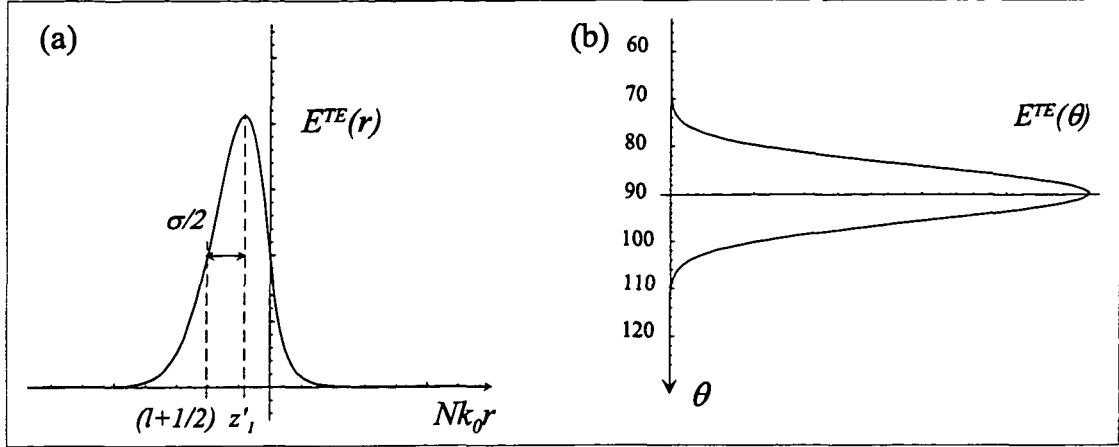


FIG. 1.6 – Amplitudes des dépendances radiale et angulaire du mode le mieux confiné ( $n = 1, \ell = |m|$ ). (a) Dépendance radiale: quasi-gaussienne avec une demi-largeur à mi hauteur de l'ordre de  $0.809 (\ell + \frac{1}{2})^{1/3} \lambda / 2\pi N$ . (b) Dépendance orthoradiale: très bien approchée par une gaussienne, de largeur (à  $1/e$ )  $1/\sqrt{\ell}$ .

de Stirling. En reportant cette expression dans la forme asymptotique (1.45) pour le champ électrique d'un mode TE, nous obtenons :

$$\mathbf{E}_{n\ell m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) \simeq E_0 \frac{f_{n\ell}(r)}{k_0 r} \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{1/4} e^{-\ell\theta'^2/2} \frac{e^{i\ell\phi}}{\sqrt{2\pi}} \hat{\mathbf{u}}_{\theta}, \quad (1.47)$$

où nous avons défini  $\theta' \equiv \theta - \pi/2$ . La dépendance en  $\theta$  est donc de forme gaussienne, dont la demi-largeur  $\delta\theta$  à  $1/e$  (pour l'intensité) vaut :

$$\delta\theta = \frac{1}{\sqrt{\ell}} \quad (1.48)$$

La fonction radiale  $f_{n\ell}$  est donnée par la fonction de Riccati  $\psi_{\ell}$  à l'intérieur de la bille, qui se raccorde à  $\chi_{\ell}$  à l'extérieur. Ainsi, à l'intérieur, la dépendance radiale est donnée par  $\psi_{\ell}(Nk_0 r)/k_0 r$ , qui n'est autre que  $N j_{\ell}(Nk_0 r)$ , où  $j_{\ell}$  est la fonction de Bessel sphérique d'ordre  $\ell$ .

Nous constatons sur la Figure 1.6(a), que cette fonction, pour  $n = 1$ , prolongée par l'onde évanescente à l'extérieur de la sphère, est approximativement gaussienne. Une estimation de la demi-largeur (à  $1/e$  pour l'intensité) de la gaussienne correspondante est fournie par la distance qui sépare le point de transition du maximum de  $j_{\ell}$ , sur lequel la gaussienne est centrée. Les ordres de grandeur correspondants sont fournis par l'expression

transitionnelle (1.38) :

$$\delta r = \frac{\lambda}{2\pi N} 0.809 (\ell + \frac{1}{2})^{1/3} \quad \text{et} \quad r_{\text{Max.}} = r_1 + \delta r = \frac{\lambda}{2\pi N} \left( \ell + \frac{1}{2} + 0.809(\ell + \frac{1}{2})^{1/3} \right) \quad (1.49)$$

En définitive, le champ électrique pour le mode ( $n = 1, \ell = |m|$ ) est grossièrement donné par le produit des deux gaussiennes :

$$\mathbf{E}_{n\ell m}^{\text{TE}}(\mathbf{r}) \simeq E_0 \mathcal{A}_\ell e^{-r'^2/2\delta r^2} e^{\ell\theta'^2/2} e^{i\ell\phi} \hat{\mathbf{u}}_\theta, \quad (1.50)$$

où  $\mathcal{A}_\ell$  est une constante de normalisation.

## 1.5 Facteur de qualité

La réflexion totale interne s'avère être un excellent mécanisme de confinement des photons, qui n'est limité que par la diffraction de l'onde réfléchie sur la surface courbe, tant que l'on se trouve dans le cas idéal d'une bille parfaitement transparente et exempte de "défauts" susceptibles de diffuser ou d'absorber le champ.

Pour caractériser la faculté qu'une microbille possède de conserver longtemps le champ injecté, il est usuel d'introduire le *facteur de qualité* des résonances,  $Q \equiv \omega/\Delta\omega$ , où  $\Delta\omega$  représente la largeur de la résonance de galerie considérée, supposée d'allure lorentzienne. Ce facteur représente, de même que pour un circuit résonnant en électricité, le rapport entre l'énergie moyenne dans le mode résonnant  $E$  et l'énergie perdue sur une période d'oscillation  $\Delta E$  à un facteur  $2\pi$  près:  $Q = 2\pi E/\Delta E$ . Corrélativement,  $\tau_{\text{cav}} \equiv 1/\Delta\omega = \omega/Q$ , représente la durée caractéristique d'amortissement exponentiel de l'énergie dans la cavité.

Dans le cas d'une vraie bille de silice isolée<sup>12</sup>, nous pouvons identifier trois sources de pertes indépendantes, et qui vont donc s'ajouter.

- pertes par *diffraction*: elles sont liées à la courbure de la surface et inhérentes à la taille de la bille quel que soit le matériau. Nous notons  $Q_{\text{diff}}$  le facteur de qualité associé à la diffraction.
- pertes par *absorption et diffusion en volume*: la silice pure (celle utilisée pour la fabrication des fibres optiques), bien que très transparente, possède une absorption

---

12. Nous examinerons le cas d'un élargissement par couplage, dans le Chapitre 2.

résiduelle de l'ordre de 2 dB/km à 810 nm. Comme dans les fibres optiques, il existe un mécanisme de diffusion Rayleigh, qui est inclus dans le coefficient d'atténuation global donné par les fabricants. Nous notons  $Q_{\text{vol}}$  le facteur de qualité associé à ces pertes en volume.

- pertes par *diffusion et absorption en surface*: l'état de surface des billes que nous fabriquons par fusion est excellent, mais il subsiste une rugosité de l'ordre du nm. Par ailleurs un mince film d'eau déposé en surface de la bille peut aussi absorber la lumière dans le proche infrarouge. Nous noterons finalement  $Q_{\text{surf}}$  le facteur de qualité lié aux pertes en surface.

### Pertes par diffraction

Comme nous l'avions mentionné au paragraphe 1.2.3 où nous avons développé l'analogie quantique, le champ associé au mode de galerie redevient propageant au delà de la caustique extérieure, et cela se traduit par des pertes d'énergie pour le mode par "effet tunnel optique" sous la barrière.

Ces pertes, et les facteurs de qualité qui en résultent, peuvent être estimés, en comparant les ordres de grandeur des champs oscillants dans la sphère et à l'extérieur. En utilisant l'approche semiclassique, ce rapport est donné directement par l'amortissement de l'onde évanescente à travers la barrière (*cf.* Eq. (1.37)), ce qui donne pour le facteur de qualité ( $g(1) = 0$ ):

$$Q_{\text{diff}} \equiv \frac{\omega}{\delta\omega} \simeq x \exp \left[ 2\left(\ell + \frac{1}{2}\right)g \left( \frac{x}{\ell + \frac{1}{2}} \right) \right]. \quad (1.51)$$

Pour obtenir une forme plus explicite, on peut utiliser le fait que pour les modes de  $n$  faible qui nous intéressent,  $x/l$  est de l'ordre de  $1/N$ , et remplacer la fonction  $g$  par sa tangente. On en déduit :

$$Q_{\text{diff}} \simeq \ell/N \exp \left[ +2\ell g \left( \frac{1}{N} \right) \right] \exp \left[ -2\sqrt{N^2 - 1} \frac{Nx - \ell}{N} \right].$$

Pour faire apparaître explicitement la dépendance en  $n$  et en polarisation, nous pouvons développer l'expression  $Nx - \ell$  selon la relation (1.42) qui donne la position des résonances à l'approximation semiclassique. Nous retrouvons que  $Q_{\text{diff}}$  décroît lorsque  $n$  augmente

(modes profonds) et que pour un mode donné le facteur de qualité de la polarisation TE est légèrement plus grand que celui de la polarisation TM.

Dans le cas qui nous intéresse, considérons par exemple une bille de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre. Le facteur de qualité limité par diffraction du mode le mieux confiné,  $\ell = 270, n = 1$  à la longueur d'onde  $\lambda = 810 \text{ nm}$ , est énorme et vaut  $Q_{\text{diff}} \simeq 10^{40}$  ! Mais dès que l'on considère des modes plus excités cette valeur chute. Pour  $n = 10 \simeq n_{\text{max}}/2$ , (et  $\ell = 215$  pour garder le même domaine de  $x$ ) le facteur de qualité ne vaut plus que  $Q_{\text{diff}} \simeq 10^8$ .

Comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant, les valeurs obtenues pour  $n = 1$  ou 2 sont supérieures de plusieurs ordres de grandeurs au facteur de qualité limité par l'absorption à  $810 \text{ nm}$ , et qui vaut environ  $10^{10}$ . La diffraction ne devient le facteur de perte dominant, que pour de très petites billes. Pour une bille de diamètre  $\phi = 15 \mu\text{m}$ , le facteur de qualité du mode  $\ell = 75, n = 1$  ne vaut que  $10^{10}$ , ce qui fixe la limite inférieure des tailles pour lesquelles la surtension est limitée par l'absorption.

### Pertes par absorption de la silice et par diffusion due à la rugosité surfacique

Les microbilles que nous avons utilisées ont toutes été fabriquées par nos soins, au laboratoire, selon une technique simple de fusion de fibre de silice étirée (*cf.* §3.1). La silice fondue prend naturellement la forme sphérique, sous l'effet des contraintes de tension superficielle dominantes à ces échelles.

Le choix d'un matériau très transparent et le soin apporté à la fabrication de la microbille sont déterminants pour minimiser les pertes par absorption. La silice fondue s'avère être le milieu de prédilection pour nos expériences, tant les efforts des fabricants de fibres optiques ont été efficaces pour faire de la silice synthétique le milieu le plus transparent connu à ce jour, dans le proche infrarouge. Ainsi, autour de la "fenêtre télécom"  $\lambda = 1.55 \mu\text{m}$ , la silice admet un minimum d'absorption correspondant à un coefficient d'absorption  $\alpha = 0.17 \text{ dB/km}$ , et à la longueur d'onde  $\lambda = 810 \text{ nm}$  à laquelle nous avons choisi de travailler, ce coefficient vaut environ  $\alpha = 2 \text{ dB/km}$ <sup>13</sup>. Enfin, lors de la fabrication des billes, par fusion laser ou fusion à l'aide d'un microchalumeau, nous prenons garde à ce qu'il n'y ait aucun dépôt surfacique, produit de la fusion du matériau mal nettoyé et mal

<sup>13</sup>. Ces coefficients tiennent compte également des pertes par diffusion Rayleigh occasionnées par des impuretés parasites résiduelles et des inhomogénéités d'indice.

séché. En effet, l'absorption par les ions  $\text{OH}^-$ , très absorbants dans le proche infrarouge pourrait alors dominer celle de la silice.

La longueur typique d'atténuation  $\mathcal{L}_{\text{vol.}}$ , en mètres, est reliée au coefficient d'atténuation  $\alpha$ , exprimé en dB/km, selon  $\mathcal{L}_{\text{vol.}} = 10 \log e \times 1000/\alpha \simeq 4.3 \times 10^3/\alpha$ . Le temps caractéristique  $\tau_{\text{vol.}}$  d'atténuation de l'énergie dans le matériau d'indice  $N$ , s'en déduit:  $\tau_{\text{vol.}} = \mathcal{L}_{\text{vol.}}/(c/N)$ , et le facteur de qualité limité par l'absorption a pour expression:

$$Q_{\text{vol.}} \equiv \tau_{\text{vol.}} \omega = \frac{2\pi N}{\lambda} \frac{4.3 \times 10^3}{\alpha}, \quad (1.52)$$

où  $\alpha$  est exprimé en dB/km. En particulier, à 810 nm,  $Q_{\text{vol.}} \simeq 1.7 \times 10^{10}$ . Comme nous l'avions déjà annoncé, l'absorption est donc un facteur nettement plus limitant que la diffraction pour les tailles de billes que nous considérons.

Dans le calcul précédent, nous avons traité la silice comme un milieu parfaitement homogène. Cependant, en surface, les microbilles présentent une "granulosité" de taille caractéristique  $\sigma$ , qui perturbe la réflexion totale. L'image de la Fig. 3.2 que nous avons prise au microscope électronique ne révèle aucun défaut à l'échelle de la résolution ultime de 30 nm du microscope. En utilisant alors le modèle de pertes par diffusion due à la rugosité développé par Tien [42] pour les guides planaires, adapté pour les microbilles, nous estimons le facteur de qualité limité par diffusion due à la rugosité de surface à  $Q_{\text{surf.}} \simeq 3 \times 10^7$ , pour le mode de plus petit volume ( $n = 1, \ell = |m|$ ), dans le cas d'une bille de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre, à  $\lambda = 810$  nm, et en prenant comme taille de défauts d'au plus  $\sigma = 30$  nm (qui est la résolution de l'image de la Fig. 3.2). Dans ce modèle, le facteur de qualité  $Q_{\text{surf.}}$  dépend du rayon de la bille en  $a^{10/3}$ , et pour une bille de 100  $\mu\text{m}$  de diamètre, les pertes sont plus faibles d'un ordre de grandeur et  $Q_{\text{surf.}} \simeq 3 \times 10^8$ . Précisons cependant que le modèle utilisé ne fournit que des ordres de grandeur indicatifs, et que nous pouvons difficilement conclure des valeurs calculées, que la cause principale de pertes est la rugosité de surface. Nous pensons que les valeurs ultimes de facteurs de qualité que nous avons mesuré [43], dans des billes de moins de 100  $\mu\text{m}$  de diamètre, résultent d'une combinaison des pertes par absorption et par diffusion par la rugosité de surface, avec des poids comparables.

Terminons enfin en signalant que, dans l'heure suivant la fabrication de grosses billes de 500 à 1000  $\mu\text{m}$  de diamètre, le groupe de V. Braginsky et V. Ilchenko [44] a pu observer

le facteur de qualité limité par l'absorption en volume, qui vaut  $0.9 \times 10^{10}$ , à  $\lambda = 633$  nm. Pour de tels diamètres, le modèle de pertes par diffusion en surface, prédit effectivement des facteurs de qualité supérieur à  $4.10^{10}$ , supérieur au facteur de qualité limité par l'absorption.

## 1.6 Volume des modes

Le volume  $\mathcal{V}$ , d'un mode de galerie est défini de façon générale à l'aide de la densité d'énergie  $w(\mathbf{r}) \equiv \frac{1}{2} \left( \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{2} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{E}^*(\mathbf{r}) + \frac{\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{B}^*(\mathbf{r})}{2\mu_0} \right)$ , intégrée sur tout l'espace et normalisée à son maximum  $w_{\max}$  dans la bille, selon:

$$\mathcal{V} \equiv \frac{\int w(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}}{w_{\max}} \quad (1.53)$$

Nous présentons tout d'abord un calcul très approché de ce volume, qui donne un assez bon ordre de grandeur. Nous poursuivons par une approche analytique plus rigoureuse et donnons pour clore cette discussion des pistes pour un calcul plus précis.

### 1.6.1 Ordre de grandeur du volume des modes ( $n = 1, \ell = |m|$ )

Nous savons que le champ des modes de plus petit volume ( $n = 1, \ell = |m|$ ) possède une structure quasiment gaussienne dans le plan  $(r, \theta)$ . Nous pouvons donc confondre le volume occupé par l'énergie avec un tore de rayon  $r_{\max} \simeq a$  et de section elliptique ayant pour demi-axes les demi-largeurs (à  $1/e$ ) des gaussiennes.

À partir des expressions (1.48) et (1.49), nous obtenons la largeur géométrique dans la direction  $Oz$ ,  $\delta z = a\delta\theta$ . Il vient donc :

$$\mathcal{V} \simeq 2\pi a \times \pi \delta r \delta z = 2\pi^2 a^2 \ell^{-1/2} (\lambda/2\pi N) 0.809 \ell^{1/3}. \quad (1.54)$$

Si enfin nous faisons l'approximation  $\ell \simeq Nx$ , qui permet d'approcher  $a$  par  $a \simeq \ell(\lambda/2\pi N)$ , l'ordre de grandeur pour le volume que nous obtenons prend la forme:

$$\mathcal{V} \simeq \left( \frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 2\pi^2 0.809 \times \ell^{11/6}, \quad (1.55)$$

et la section  $S$  du mode transverse vaut:

$$S = \pi \left( \frac{\lambda}{2\pi N} \right)^2 0.809 \times \ell^{5/6}. \quad (1.56)$$



Anticipant sur le paragraphe suivant, nous pouvons noter que  $\sqrt{\pi} \times 0.809 \simeq 1.43$ , ce qui montre que l'approximation gaussienne fournit une estimation du volume à 5 % près.

### 1.6.2 Calcul analytique du volume de mode

Dans le calcul analytique approché suivant, nous faisons les hypothèses suivantes :

- Nous négligeons complètement les fuites d'énergie de la bille, les pertes par diffraction étant extrêmement faibles ( $Q_{\text{diff}} \gg 10^{40}$ ), ce qui revient à se placer en régime permanent, dans lequel la conservation de l'énergie se traduit par la conservation du flux du vecteur de Poynting  $\mathcal{P}$ , *i.e.*  $\nabla \cdot \mathcal{P} = 0$ . En outre, les pertes ohmiques ou par diffusion sont elles-mêmes très faibles et seront aussi négligées ( $N$  est supposé réel). Ceci assure que  $\int w_{\text{E}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \int w_{\text{B}}(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$ , où  $w_{\text{E}}(\mathbf{r})$  et  $w_{\text{B}}(\mathbf{r})$  sont respectivement les densités d'énergie électrique et magnétique au point  $(\mathbf{r})$ .
- Nous choisissons de continuer l'intégration de  $w(\mathbf{r})$  jusqu'au zéro  $z_n$  de la fonction de Bessel sphérique. Celui-ci est toujours situé à l'extérieur de la bille, à une distance de la surface donnée par le terme de polarisation dans la relation (1.16):  $\delta_P \simeq (\lambda/2\pi N) P/\sqrt{N^2 - 1}$  (où  $P = N$  pour un mode TE et  $P = 1/N$  pour un mode TM), qui est de l'ordre de la portée de l'onde évanescente. Cette hypothèse consiste en quelque sorte à "réintégrer" l'onde évanescente à l'intérieur du diélectrique, et est parfaitement consistante, d'une part avec l'image que nous avons développée au §1.1.2 pour rendre compte de l'effet Goos-Hanschen et d'autre part avec l'hypothèse précédente.

En outre, pour simplifier, nous donnons ici en exemple le calcul pour un mode ( $n = 1, \ell = |m|$ ) de polarisation TE. L'adaptation aux valeurs quelconques de  $\ell - |m|$  ou de  $n$  ne pose pas de difficultés.

Dans la mesure où nous négligeons les pertes par rayonnement et par conduction, nous savons que les contributions de l'énergie électrique et de l'énergie magnétique moyennes sont égales (on pourra consulter à ce propos l'expression (6.134) du théorème de Poynting pour les champs harmoniques, dans l'ouvrage de J. Jackson [45, p. 242]). Nous pouvons alors réécrire l'expression du volume du mode, pour un mode TE, sous une forme ne faisant

intervenir que le champ électrique :

$$\mathcal{V} \equiv \frac{1}{N^2 \varepsilon_0} \int \frac{\varepsilon(\mathbf{r})}{2} \left| \frac{\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\mathbf{E}_{\max}} \right|^2 d^3 \mathbf{r}, \quad (1.57)$$

de telle sorte que l'énergie totale  $U_{\text{cav}}$  se réécrit  $U_{\text{cav}} = \frac{N^2 \varepsilon_0}{2} E_{\max}^2 \mathcal{V}$ .

Rappelons que, pour un mode TE, le champ électrique dans la bille est donné par l'expression (1.30), où la fonction radiale  $f_\ell(Nkr)$  correspond à la fonction de Riccati  $\psi_\ell(Nkr)$ . L'intégrale dont nous avons besoin, en termes de fonctions de Bessel, se trouve dans les tables, et s'écrit pour les fonctions de Riccati :

$$\int_0^{z_1} \psi_\ell^2(u) du = \frac{z_1}{2} \psi_\ell'^2(z_1).$$

Compte tenu de la normalisation à l'unité de l'harmonique sphérique  $\mathbf{X}_\ell^m$  (cf. Annexe A) l'énergie totale dans la bille a pour expression:

$$\begin{aligned} U_{\text{cav}} &= \frac{N^2 \varepsilon_0}{2} E_{\max}^2 \times \mathcal{V} = \frac{N^2 \varepsilon_0}{2} (NE_0)^2 \int_0^a \frac{\psi_\ell^2(Nkr)}{(Nkr)^2} r^2 dr \\ &= \left( \frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 \frac{N^2 \varepsilon_0}{2} (NE_0)^2 \int_0^{z_1} \psi_\ell^2(u) du. \end{aligned}$$

Il nous reste alors à préciser la valeur maximale du champ  $E_{\max}^2$ . D'après l'expression (1.30), le module du champ électrique atteint son maximum lorsque les modules des parties radiales et angulaires sont simultanément maximaux, c'est à dire, en nous limitant pour l'instant à la dépendance radiale, au premier zéro noté  $z'_1$  de la dérivée de la fonction  $\psi_\ell(u)/u$  qui n'est autre que la dérivée  $j'_\ell$  de la fonction de Bessel sphérique. Notons  $z'_1$  la position de ce maximum.

Le maximum de la fonction angulaire, pour les modes TE *de plus petit volume* ( $n = 1, \ell = |m|$ ), s'obtient de façon élémentaire à partir des expressions asymptotiques (1.44) et (1.43) :  $|\mathbf{X}_\ell^\ell|_{\max}^2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\ell}{\pi}}$ .

Nous obtenons finalement, pour le volume  $\mathcal{V}$  des modes  $\ell = |m|$ , l'expression analytique "exacte", faisant intervenir les fonctions de Bessel et leurs zéros:

$$\mathcal{V} = \left( \frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 2\pi^{3/2} \frac{z_1^3}{2\sqrt{\ell}} \frac{j_\ell'^2(z_1)}{j_\ell^2(z_1)}. \quad (1.58)$$

Si pour le premier zéro  $z_1$  de la fonction de Bessel  $j_\ell$ , et pour les valeurs de  $j_\ell$  et  $j'_\ell$  en  $z_1$  et  $z'_1$  respectivement, nous ne retenons que le premier terme de leur développement

asymptotique<sup>14</sup> en puissance de  $(\ell + \frac{1}{2}) \simeq \ell$ , alors l'expression "exacte" (1.58) prend la forme asymptotique simple :

$$\mathcal{V} = \left( \frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 2\pi^{3/2} 1.36 \times \ell^{11/6} . \quad (1.59)$$

Considérons par exemple une bille de rayon  $a = 25 \mu\text{m}$ . En première approximation  $\ell \simeq Nx \simeq 270$ , à la longueur d'onde  $\lambda = 810 \text{ nm}$ , et le volume du mode ( $n = 1, \ell = |m|$ ) vaut environ  $300 \mu\text{m}^3$ .

Nous soulignons à nouveau que l'expression (1.55) que nous avons obtenue à partir de simples considérations géométriques, possède la même forme analytique, et est quantitativement très bonne.

Signalons enfin qu'il est possible d'aller plus loin en prenant en compte la structure complète (sans approximations asymptotiques) du champ électromagnétique, dans la bille comme à l'extérieur. On obtient ainsi un résultat analytique à la seule approximation à faire consiste à arrêter l'intégration dans le domaine évanescent, assez loin de la sphère, ou à réintroduire un terme de surface (extrêmement petit) à la manière de Young [46], ce qui revient à nouveau à négliger les fuites d'énergie par diffraction. Il est aussi nécessaire de normaliser convenablement les fonctions radiales dans le cas des modes TM.

Néanmoins, il est toujours utile, après ce calcul, de recourir à des développements asymptotiques des différentes fonctions qui figurent dans le résultat, qui redonnent, à l'ordre le plus bas, le résultat que nous avons obtenu de façon élémentaire ci-dessus.

### 1.6.3 Champ électrique par photon

En électrodynamique quantique en cavité, on a coutume d'utiliser le champ électrique par photon, qui au maximum de son amplitude est relié au volume du mode considéré selon:

$$E_{\text{max}}^{1 \text{ phot.}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2N^2\varepsilon_0\mathcal{V}}} . \quad (1.60)$$

Pour se faire une idée de la valeur élevée de ce champ, considérons une bille de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre, et un mode  $n = 1, \ell = |m|$ , à la longueur d'onde  $\lambda = 1.083 \mu\text{m}$ . Le volume de ce

---

14. ces développements sont donnés dans l'ouvrage de Abramowitz & Stegun [35, (9.5.14),(9.5.16) et (9.5.20)].

mode peut être estimé à l'aide de l'expression analytique (1.59), et vaut environ  $460 \mu\text{m}^3$ . Le champ électrique associé est donc de l'ordre de 3 kV/m!

L'amplitude  $E_0$  du champ que nous avons utilisée jusqu'à présent est aussi reliée au champ électrique maximum par photon que nous venons d'évaluer. En particulier, pour les modes de galerie les mieux confinés ( $n = 1, \ell = |m|$ ), nous pouvons reprendre l'expression (1.47) du champ électrique pour un mode TE, en remplaçant  $f_{n\ell}/k_0r$  par la fonction de Bessel sphérique  $j_\ell$ , puisque le maximum du module du champ  $E_{\max}$  est situé dans la sphère:

$$|E|(\theta = 0, r) = E_0 N j_\ell(N k_0 r) \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{1/4} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

La relation (9.5.20) extraite de [35], nous donne alors la valeur de la fonction de Bessel à son maximum dans l'approximation asymptotique,  $j_\ell^{\max} \simeq 0.8458 \ell^{-5/6}$ , ce qui nous permet de réécrire l'amplitude  $E_0^{1 \text{ phot.}}$  du champ par photon, en fonction uniquement de l'amplitude  $E_{\max}^{1 \text{ phot.}}$  (pour  $N = 1.453$ ):

$$E_0^{1 \text{ phot.}} = 2.72 \ell^{-7/12} E_{\max}^{1 \text{ phot.}}.$$

Cette expression permet ainsi de relier l'amplitude  $E_0$  utilisée jusqu'à présent dans les différentes expressions des champs, mais sans signification physique, à l'amplitude  $E_{\max}$  du champ par photon.

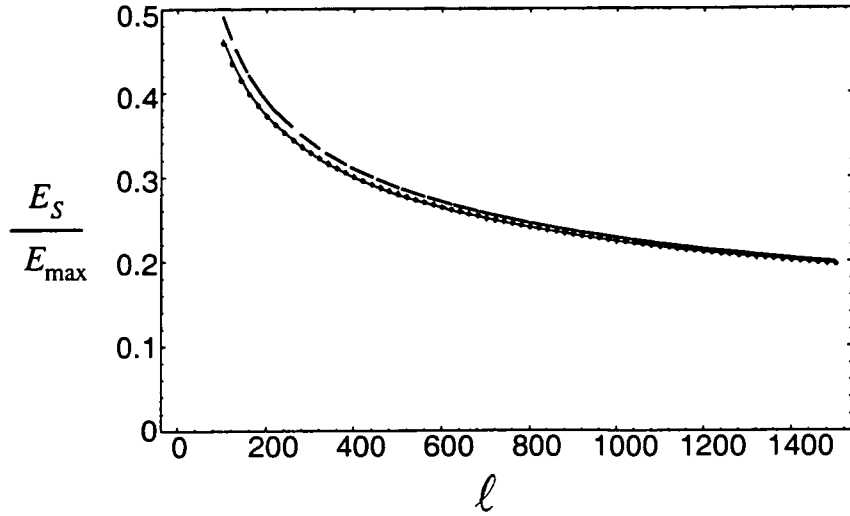
#### 1.6.4 Champ électrique à la surface

Un paramètre plus directement utile, du moins pour des expériences mettant en jeu des atomes ou molécules situés *hors* de la sphère, est l'expression du champ sur la surface de la sphère. De nouveau, nous ne ferons le calcul que pour le seul mode TE de nombres quantiques  $n = 1, \ell = |m|$ .

Le champ maximum sur la surface de la sphère s'écrit simplement en fonction du champ maximum:

$$E_S = E_{\max} \frac{j_\ell(Nx)}{j_\ell(z'_1)}$$

où  $Nx \simeq \ell$  comme  $z'_1$ , mais où c'est précisément l'écart entre ces deux valeurs qui détermine la décroissance du champ entre ces deux positions.

FIG. 1.7 – Dépendance avec  $\ell$  du rapport  $E_S/E_{\max}$ 

Si l'on revient à l'expression approchée 1.42 de la position des résonances, on constate que les deux premiers termes de l'expression de  $Nx$  sont précisément une expression asymptotique de  $z_1$ , comme on le vérifie à l'aide de la formule (9.5.14) de [35], où encore en se reportant à l'expression asymptotique des fonctions de Riccati-Bessel (1.38). On en déduit alors  $Nx - z_1 \simeq -N/\sqrt{N^2 - 1}$ , et en faisant un développement limité autour de  $z_1$ :  $j_\ell(Nx) \simeq -j'_\ell(z_1)N/\sqrt{N^2 - 1}$ , il vient:

$$E_S \simeq -E_{\max} \frac{j'_\ell(z_1)}{j_\ell(z'_1)} \frac{N}{\sqrt{N^2 - 1}}$$

qui fait apparaître exactement l'inverse du rapport de fonctions de Bessel figurant dans l'expression (1.58). On peut de nouveau utiliser les formes asymptotiques (9.5.18) et (9.5.20) de [35], pour en déduire la loi de variation du rapport:

$$\frac{E_S}{E_{\max}} \simeq 2.28 \ell^{-1/3}. \quad (1.61)$$

Toutefois, comme le nombre d'approximations effectuées est important, il n'est pas inutile de vérifier par une évaluation numérique cette loi asymptotique. On trouve que, dans le domaine utile où  $100 < \ell < 1500$ , ce rapport est très bien représenté par la loi:

$$\frac{E_S}{E_{\max}} \simeq 1.99 \ell^{-0.317}. \quad (1.62)$$

On pourra comparer sur la figure 1.6.4 les valeurs calculées, et les deux lois énoncées ci-dessus, la loi asymptotique en tirets, et la loi ajustée en traits pleins. Nous retiendrons que dans le domaine des diamètres de sphères que nous utilisons, ce rapport varie peu, et est de l'ordre de 0.3.

Si l'on veut obtenir une expression du champ par photon à la surface, il faut combiner les résultats (1.62) et (1.60), ce qui conduit à définir un volume "effectif" pour le champ à la surface par l'équation:

$$E_S^{1 \text{ phot.}} \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2N^2\varepsilon_0\mathcal{V}_{\text{eff}}}}. \quad (1.63)$$

L'intérêt d'une telle définition tient en grande partie au fait que le même rapport de fonctions de Bessel figure dans (1.62) et dans (1.58), ce qui conduit à l'expression spécialement simple :

$$\mathcal{V}_{\text{eff}} \equiv \mathcal{V} \left( \frac{E_{\text{max}}}{E_S} \right)^2 = \left( \frac{\lambda}{2\pi N} \right)^3 \pi^{3/2} \frac{z_1^3}{\sqrt{\ell}} \sqrt{N^2 - 1}. \quad (1.64)$$

Ceci signifie que le champ à la surface par photon varie grossièrement comme la puissance 5/2 du nombre  $\ell$ , ce qui montre qu'en réduisant autant que possible le diamètre des sphères, on bénéficie simultanément de la réduction du volume géométrique du mode, et de l'effet dit de "déconfinement", c'est à dire qu'une fraction croissante de l'énergie électromagnétique est dans le milieu d'indice faible.



## Chapitre 2

# Excitation des modes de galerie

Nous avons vu dans le Chapitre 1, que la lumière confinée dans la bille par une succession de réflexions totales internes pouvait aussi s'en échapper par diffraction. Nous pourrions donc envisager le mécanisme inverse pour alimenter le résonateur en l'éclairant par une onde plane. Cependant, comme nous l'avons également montré, l'amplitude de l'onde diffractée est extrêmement faible, puisqu'elle conduit à des facteurs de qualité de l'ordre de  $10^{40}$  (bille de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre, mode  $n = 1$ ): ce procédé de couplage serait donc très inefficace<sup>1</sup>.

Il existe un mécanisme d'excitation des modes beaucoup plus puissant. En effet, la présence d'un objet diélectrique dans le voisinage proche de la bille peut frustrer la réflexion totale interne et favoriser la fuite du champ par effet tunnel en diminuant localement la largeur de la barrière de potentiel effectif discuté au Chapitre 1. Cette frustration peut alors aussi servir à faire pénétrer la lumière dans les modes de galerie. C'est précisément la technique de couplage que nous avons retenue pour nos différentes expériences, en utilisant un prisme d'indice fort.

La principale difficulté que l'on rencontre pour calculer l'efficacité d'excitation d'un mode de galerie à travers un prisme tient au fait que la symétrie sphérique propre à la sphère isolée est perdue. Une première approche consiste à négliger la courbure de la sphère dans la zone de couplage et à utiliser les coefficients de Fresnel habituels pour des interfaces planes. Ce traitement a été développé en particulier par Schiller et Byer [47] pour leurs

---

1. Pour exciter les modes de galerie de gouttelettes, la pratique usuelle est d'envoyer un faisceau laser focalisé sur la gouttelette, éventuellement centré plutôt sur un bord. Ce sont alors surtout les modes d'ordre radial  $n$  élevés que l'on excite.



résonateurs monolithiques. Une autre possibilité consiste à restaurer la symétrie sphérique de la bille en remplaçant le prisme par une sphère creuse, de même indice, et concentrique avec la bille de silice, ce qui ramène le problème à l'unique dimension radiale.

Après une brève description de notre dispositif de couplage aux modes de galerie pour les différentes séries d'expériences décrites aux Chapitres 3, 4 et 5, nous présentons dans ce chapitre différents modèles de couplage d'une source extérieure aux modes de galerie par une onde évanescente, qui permettent de rendre compte, à des degrés divers, de nos observations expérimentales.

- Dans un premier temps, nous présentons le modèle le plus simple, où l'on considère une cavité Fabry-Pérot en anneau possédant un seul port d'entrée/sortie, de transmission variable. Cela permettra de rappeler la forme générale de la réponse *en réflexion* d'une cavité, et la forme plus spécifique qu'elle prend dans le cas d'une excitation en onde évanescente.
- Après cela, nous montrerons ce que deviennent ces résultats dans le cas du résonateur monolithique de Schiller et Byer. Dans cette approche élémentaire, nous négligeons les effets liés au défaut de géométrie de notre situation expérimentale, en particulier les effets du recouvrement imparfait entre le faisceau incident réfléchi et le faisceau diffusé par la bille.
- En troisième lieu, nous présentons le modèle des sphères concentriques, qui permet de traiter la bille centrale dans son ensemble et sans approximation, et d'analyser ainsi les perturbations dues au dispositif de couplage. Cela permet en particulier d'identifier en termes physiques les phénomènes qui se produisent dans le "gap" d'air, alors que ceux-ci sont complètement occultés dans les approches précédentes, dans lesquelles le gap et les deux interfaces qui le délimitent sont traités comme un tout.
- Enfin, nous tirerons parti des idées dégagées précédemment pour établir un modèle réaliste, dans lequel les défauts de géométrie, qui se manifestent dans le gap, sont pris en compte comme des corrections aux résultats formels du modèle double-sphère. Cela nous permettra d'analyser en particulier les effets de "mode-matching", et nous conduira à des résultats quantitatifs.

## 2.1 Principe du couplage par prisme

Une technique de couplage par onde évanescente particulièrement efficace a été proposée et mise en œuvre par Braginsky *et al.* [18] et nous nous en sommes inspirés. Elle consiste à utiliser un prisme d'indice fort pour frustrer la réflexion totale dans la bille, et à alimenter un mode de galerie en générant une onde évanescente à la surface du prisme<sup>2</sup> par réflexion totale d'un faisceau laser source (voir le Schéma 2.1).

Les photons de la source dans la région du champ évanescent, à la surface du prisme vont alors pouvoir se coupler au mode de galerie, par effet tunnel, sous certaines conditions d'accord de phase. Il faut en effet adapter les composantes tangentielles (*i.e.* parallèles à la surface du prisme de couplage) des vecteurs d'onde de l'onde incidente, et du mode, d'incidence quasiment rasante. La composante tangentielle du vecteur d'onde de l'onde incidente  $k_{inc}$ , vaut  $\frac{2\pi}{\lambda} N_p \sin i_p$ . Nous avons vu par ailleurs au §1.4, que le champ se propage dans les modes, selon l'angle azimutal  $\phi$ , avec un vecteur d'onde tangentiel de module  $k_y = \frac{|m|}{a} = \frac{\ell}{a} \simeq \frac{2\pi N}{\lambda}$ , pour les modes  $n = 1$  et  $\ell = |m|$ . L'accord de phase est ainsi réalisé si  $\sin i_p \simeq N/N_p$ , c'est à dire si  $i_p$  voisin de l'angle critique du dioptre bille–prisme.

Une fois ajusté l'angle d'incidence du laser source pour réaliser l'accord de phase, la longueur d'onde du laser est accordée sur la longueur d'onde de résonance d'un mode de galerie. Une résonance est détectée en absorption et se manifeste par une baisse de transmission (un “*dip*”), résultant des pertes dans la sphère, signal que l'on peut aussi interpréter comme une interférence destructive entre le champ incident réfléchi sur la face de couplage du prisme et le champ émergeant de la sphère qui se recouple au prisme.

## 2.2 Modèle élémentaire : Fabry–Pérot en anneau

Pour une première approche de la description théorique de l'excitation résonante des modes de galerie, il est utile de rappeler les notions essentielles relatives à l'excitation d'une cavité et à la détection *en réflexion* des résonances. C'est l'objet de ce paragraphe 2.2, où

---

2. Nicolas Dubreuil [48] a par ailleurs développé durant sa thèse une nouvelle technique de couplage par coupleur à fibre érodé, qui utilise le champ évanescent dans la région où le cœur de la fibre est presque mis à nu.

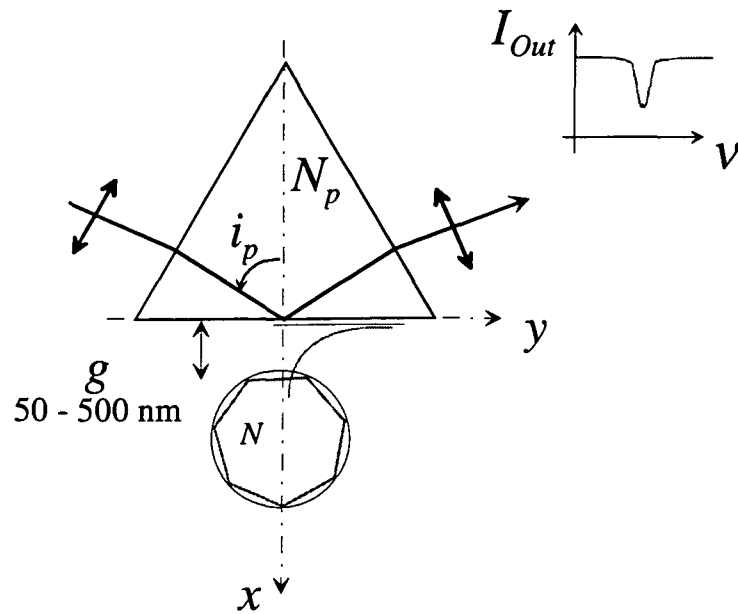


FIG. 2.1 – Schéma du dispositif de couplage par onde évanescente. Un faisceau laser est focalisé sur la face interne d'un prisme d'indice "fort"  $N_p > N$ , et arrive sous l'angle d'incidence  $i_p$ , légèrement inférieur à l'angle critique du dioptre prisme-bille, de telle sorte qu'il se réfléchit totalement à la surface du prisme et donne lieu à une onde évanescente dans la direction  $x$ .

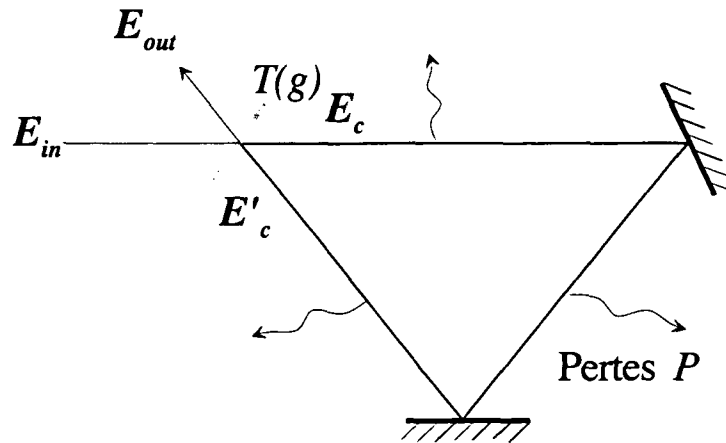


FIG. 2.2 – Schéma de la cavité Fabry Péro en anneau utilisée comme modèle pour le couplage à la sphère. Le miroir de couplage d'entrée sortie possède une transmission  $T$  susceptible de varier pour décrire un couplage par onde évanescente. La réflexion est supposée parfaite sur les deux autres miroirs, mais nous introduisons des pertes intracavité par absorption ou diffusion du faisceau sur son trajet optique. La propagation de la lumière a lieu dans un milieu homogène d'indice  $N$

nous considérons la cavité Fabry Péro en anneau représentée sur la Figure (2.2), possédant un seul port d'entrée sortie, et des pertes internes (absorption ou diffusion, par exemple)<sup>3</sup>. Nous ne spécifierons pas ici la structure de la "lame" de couplage, mais utiliserons les propriétés générales de sa matrice de transfert, qui sont rappelées dans l'Annexe B, y compris lorsque les deux milieux de part et d'autre de la lame ont des indices différents. Nous supposerons par ailleurs les coefficients de réflexion et de transmission *complexes*, afin de pouvoir rendre compte de l'effet de déplacement de la fréquence de résonance du mode, induit par la présence du prisme de couplage.

### 2.2.1 Coefficient de réflexion de la cavité en anneau

Pour la cavité en anneau, par analogie avec le problème prisme-sphère qui nous intéresse, nous notons  $r_{PS}$  le coefficient de réflexion en amplitude de la lumière venant du

3. En l'absence de perte internes, le coefficient de réflexion est toujours de module 1, et le passage à résonance se lit uniquement sur la phase (on peut faire  $P = 0$  dans les équations ci-après).

prisme et se réfléchissant sur la sphère. Les notations pour les autres coefficients sont construites de façon similaire. Le “gap” d’air ne joue pas de rôle explicite dans ce modèle, puisque la nature de la lame n’est pas précisée. Nous pouvons alors écrire le champ sortant  $E_{\text{out}}$  et le champ intracavité  $E_{\text{cav}}$  sous la forme:

$$\begin{cases} E_{\text{out}} = r_{\text{PS}} E_{\text{in}} + t_{\text{SP}} E'_{\text{cav}} \\ E_{\text{cav}} = t_{\text{PS}} E_{\text{in}} + r_{\text{SP}} E'_{\text{cav}} \end{cases}, \quad (2.1)$$

où  $E_{\text{in}}$  désigne le champ incident et  $E'_{\text{cav}}$  le champ intracavité après un tour (cf. Fig.(2.2)). Il faut adjoindre à ces expressions la condition de bouclage de la phase sur un tour. Notons  $\phi$  la rotation de phase provenant de la propagation seule. Soit par ailleurs  $e^{-P/2}$  l’atténuation subie, sur un tour, par le champ dans la cavité. Le champ  $E'_{\text{cav}}$  après un tour vaut donc  $E'_{\text{cav}} = e^{i\phi} e^{-P/2} E_{\text{cav}}$ , et le champ intracavité s’en déduit:

$$\frac{E_{\text{cav}}}{E_{\text{in}}} = \frac{t_{\text{PS}}}{1 - r_{\text{SP}} e^{i\phi} e^{-P/2}}. \quad (2.2)$$

Nous introduisons alors le *coefficient de réflexion* de la cavité par:

$$r(\phi) \equiv \frac{E_{\text{out}}}{E_{\text{in}}} = r_{\text{PS}} + \frac{t_{\text{SP}} t_{\text{PS}} e^{i\phi} e^{-P/2}}{1 - r_{\text{SP}} e^{i\phi} e^{-P/2}}. \quad (2.3)$$

Nous remarquons que le dénominateur  $1/(1 - r_{\text{SP}} e^{i\phi} e^{-P/2})$  est exactement la somme de la série géométrique que l’on aurait en considérant la succession des aller-retours dans la cavité.

Ce coefficient se compose donc de deux termes qui rendent compte de l’interférence entre le faisceau réfléchi et le faisceau transmis émergeant de la cavité. Pour simplifier, nous nous restreignons ici au cas où les milieux intérieur et extérieur ont le *même indice*  $N$  (cf. Annexe B):

$$\begin{cases} t_{\text{SP}} t_{\text{PS}} = -T e^{i(\phi_{\text{SP}} + \phi_{\text{PS}})} \\ r_{\text{PS}} = \sqrt{1 - T} e^{i\phi_{\text{PS}}} \\ r_{\text{SP}} = \sqrt{1 - T} e^{i\phi_{\text{SP}}} \end{cases}$$

Dans ces expressions  $T \equiv |t_{\text{PS}} t_{\text{SP}}|$ , représente le coefficient de transmission en énergie de la lame<sup>4</sup>.

4. Notons que, dans le cas général où les indices de dispersion sont différents, leur rapport, qui apparaît dans les expressions des coefficients de transmission données dans l’Annexe B), disparaît quand on forme leur produit.

L'évolution globale de la phase *sur un tour complet* est donc finalement donnée par:

$$\Phi \equiv \phi + \phi_{SP} = 2p\pi + \delta\phi, \text{ où } p \text{ est l'ordre d'interférence.}$$

où nous avons introduit le décalage  $\delta\phi$  par rapport à la position de la résonance, dont la définition inclut évidemment le déphasage  $\phi_{SP}$  acquis à la réflexion sur la lame diélectrique. Si, dans (2.3), nous remplaçons les coefficients par leur expression ci-dessus, nous obtenons :

$$r(\phi) = \sqrt{1-T} e^{i\phi_{PS}} - \frac{T e^{i\delta\phi} e^{-P/2}}{1 - \sqrt{1-T} e^{i\delta\phi} e^{-P/2}} e^{i\phi_{PS}}, \quad (2.4)$$

où nous voyons qu'à résonance ( $\delta\phi = 0$ ), les deux termes du membre de droite sont en opposition de phase.

### 2.2.2 Approximation lorentzienne

Lorsque les pertes dans la cavité sont suffisamment faibles ( $P \ll 1$ ), et que la transmission de la lame de couplage est petite ( $T \ll 1$ ), il est possible de faire l'approximations suivante, dite *approximation de grande finesse* :

$$\begin{cases} e^{-P/2} \simeq 1 - \frac{P}{2} \\ \sqrt{1-T} \simeq 1 - T/2 \end{cases}$$

De plus, au voisinage d'une résonance de la cavité, nous pouvons aussi faire l'*approximation lorentzienne*  $e^{i\delta\phi} \simeq 1 + i \delta\phi$ . L'expression du coefficient de réflexion, prend alors la forme simplifiée suivante :

$$r(\delta\phi) \simeq e^{i\phi_{PS}} \left( 1 - \frac{T}{(P+T)/2 - i\delta\phi} \right). \quad (2.5)$$

Lorsqu'on mesure l'intensité, la phase globale  $e^{i\phi_{PS}}$  disparaît; cependant,  $\phi_{SP}$ , qui est susceptible de varier, intervient dans le déphasage total  $\Phi$ , et sa variation se traduit par un déplacement des résonances.

Enfin, dans l'approximation lorentzienne, le champ intracavité a pour expression :

$$\frac{E_{\text{cav}}}{E_{\text{in}}} = \frac{i\sqrt{T} e^{i\phi_{PS}}}{(P+T)/2 - i\delta\phi}. \quad (2.6)$$

À ce stade, il est plus parlant de revenir à des expressions en fréquence (ou plutôt en pulsation), en notant que le déphasage  $\Phi$  varie de  $2\pi$  sur un intervalle spectral libre (FSR), ce qui signifie que  $2\pi/P$  n'est autre que la finesse intrinsèque  $\mathcal{F}_A$  de la cavité, et  $2\pi/T$  la

finesse “limitée par couplage”. En introduisant les largeurs spectrales correspondantes (en pulsation) :

$$\gamma_A = \frac{c}{2\pi N a} P \quad \text{et} \quad \gamma_C = \frac{c}{2\pi N a} T \quad (2.7)$$

où le  $A$  signifie “absorption”, à laquelle nous assimilons les pertes internes, et  $C$  signifie “couplage”, il vient :

$$r(\delta\omega) \simeq \left( 1 - \frac{\gamma_C}{(\gamma_A + \gamma_C)/2 - i\delta\omega} \right) e^{i\phi_{PS}} = \frac{(\gamma_A - \gamma_C)/2 - i\delta\omega}{(\gamma_A + \gamma_C)/2 - i\delta\omega} e^{i\phi_{PS}} . \quad (2.8)$$

De la même façon, la puissance intracavité (puissance “circulante”) prend la forme :

$$\frac{P_{\text{cav}}}{P_{\text{in}}} = \frac{c}{2\pi N a} \frac{\gamma_C}{\left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right)^2 + \delta\omega^2} . \quad (2.9)$$

### 2.2.3 Signal détecté en réflexion: le “dip”

Pour détecter une résonance de la cavité, nous pouvons placer une photodiode sur le chemin du faisceau sortant, et balayer en fréquence le laser d’analyse pour “sonder” la résonance. La puissance détectée sur la photodiode vaut donc :  $P_{\text{PD}}(\delta\phi) = P_{\text{out}}(\delta\phi) = |r(\delta\phi)|^2 P_{\text{in}}$ . Hors résonance, il n’y a pas de lumière qui pénètre dans la cavité :  $P_{\text{PD}} = P_{\text{in}}$ . Pour mesurer l’effet relatif du passage à résonance, il est alors naturel d’introduire le *signal de “dip”*, défini par :

$$D(\delta\omega) \equiv 1 - \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = 1 - |r(\delta\omega)|^2,$$

que nous pouvons simplifier, à l’aide de (2.5) :

$$D(\delta\omega) \simeq \frac{\gamma_A \gamma_C}{\left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right)^2 + \delta\omega^2} \quad (2.10)$$

Il s’agit bien d’une résonance de forme lorentzienne, dont la largeur vaut  $\gamma_A + \gamma_C$  : elle est fixée par les pertes totales de la cavité.

On peut noter la relation entre le dip et la puissance intracavité :

$$\frac{P_{\text{cav}}}{P_{\text{in}}} = \frac{c}{2\pi N a} \frac{1}{\gamma_A} D(\delta\omega) = \frac{\mathcal{F}_A}{2\pi} D(\delta\omega) , \quad (2.11)$$

car  $\gamma_A = 2\pi\Delta\nu_A = c/(Na\mathcal{F}_A)$ . Comme en outre l’énergie stockée dans la cavité  $U_{\text{cav}}$  est telle que  $U_{\text{cav}} = P_{\text{cav}} \tau_R$ , où  $\tau_R \equiv 2\pi Na/c$  est le temps de récurrence de la cavité, on en déduit la relation générale :

$$U_{\text{cav}} = P_{\text{cav}} \frac{2\pi N a}{c} = D P_{\text{in}} \frac{1}{\gamma_A} . \quad (2.12)$$

Ceci confirme en particulier que le signal de dip représente bien la fraction de la puissance incidente dissipée dans la cavité (en régime stationnaire).

#### 2.2.4 Cas du couplage par réflexion totale interne frustrée

Si nous spécifions maintenant que la “lame” correspond à un couplage en onde évanescente avec un “gap” d’indice 1 et d’épaisseur  $g$ , comme c’est le cas pour le couplage par prisme aux modes de galerie, nous avons un coefficient de transmission en énergie  $T$ , de la forme:

$$T = T_0 e^{-2\kappa g}, \text{ soit } \gamma_C = \gamma_C^0 e^{-2\kappa g}, \quad (2.13)$$

où  $\kappa^{-1}$  représente la longueur caractéristique d’atténuation du champ, de l’ordre de  $\lambda/2\pi$ . Pour être en accord avec l’hypothèse simplificatrice où l’indice du prisme et celui de la cavité sont égaux, on doit en outre prendre  $T_0 = 1$ , c’est à dire  $\gamma_C^0 = c/(2\pi Na)$ . Avec cette hypothèse, on peut aussi montrer que:

$$E_{\text{cav}} \left( \frac{\gamma_A + \gamma_C}{2} \right) \exp -\kappa g = E_{\text{in}} \gamma_C e^{i\phi_{PS}},$$

dont l’interprétation physique est particulièrement simple. Le champ  $E_{\text{cav}}$  satisfait alors l’équation de taux suivante:

$$\frac{dE_{\text{cav}}}{dt} = \left( -\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2} + i\delta\omega \right) E_{\text{cav}} + i E_{\text{in}} \gamma_C e^{i\phi_{PS}} \exp \kappa g.$$

À partir de l’expression (2.10) du signal de “dip”, différents régimes de couplage peuvent être ensuite étudiés, suivant la distance bille–prisme. Dans tous les cas, l’interprétation énergétique évidente du dip va de pair avec une analyse en termes “d’interférences” entre les deux champs “réfléchi” et “diffusé” correspondant aux deux termes de l’équation (2.8) ou (2.5). Si le champ diffusé ne fait que croître en amplitude lorsque l’on diminue le gap, et si sa phase (à résonance) reste toujours opposée à celle du champ réfléchi, la variation du poids relatif des deux composantes fait passer le coefficient de réflexion de 1 à -1.

#### Le régime de couplage critique: $\gamma_C = \gamma_A$

Lorsque les pertes par couplage sont égales aux les pertes intracavité, le coefficient de réflexion s’annule exactement à résonance. Le dip est alors de 1, l’énergie intracavité est



maximale, et toute la puissance incidente est dissipée dans la sphère. En d'autres termes, les faisceaux réfléchis et émergents ont même amplitude et des phases opposées, donnant lieu à une interférence totalement destructive. Il s'agit du régime de "couplage critique", dans lequel est assurée la meilleure "adaptation d'impédance" avec le résonateur. Notons que l'effet d'exaltation du champ dans la cavité devient évident dans ce régime, puisqu'alors  $P_{\text{cav}} = \mathcal{F}_A/2\pi P_{\text{in}}$ , la finesse intrinsèque de la cavité atteignant  $10^6$  dans nos expériences. Il correspond bien sûr au fait que le temps de stockage  $1/\gamma_A$  est beaucoup plus grand que le temps de récurrence  $\tau_R = 2\pi a/(c/N)$ .

Le couplage critique est obtenu pour une valeur du gap, notée  $g_c$ , telle que :

$$g_c = \frac{1}{2\kappa} \ln \left( \frac{\gamma_C^0}{\gamma_A} \right) ,$$

qui est donc proportionnelle à la profondeur de pénétration de l'onde évanescente, et augmente (logarithmiquement) lorsque  $\gamma_A$  diminue. Une fois introduite cette quantité, la valeur du dip à résonance peut se mettre sous la forme remarquable :

$$D_{(\delta\omega=0)} = \frac{1}{\text{ch}^2(\kappa(g - g_c))} , \quad (2.14)$$

qui met en évidence une certaine symétrie entre les deux régimes dits de "sous-couplage" ( $g > g_c$ ) et de "sur-couplage" ( $g < g_c$ ), que nous allons préciser ci-dessous.

Sur la Figure 2.3, nous avons représenté la variation du signal de "dip" à résonance en fonction de la distance  $g$ , le "gap" séparant le prisme de la bille. Le coefficient  $T_0$  est pris égal à 1 comme indiqué ci-dessus, bien que dans nos expériences il soit typiquement 100 à 1000 fois plus faible, et les pertes intrinsèques correspondent aux largeurs typiques  $\Delta\nu_{\text{cav}} = 1$  MHz.

### Le régime de "sous-couplage" (grands gaps) : $\gamma_C \ll \gamma_A$

Il s'agit du cas où la bille est suffisamment loin du prisme pour que les caractéristiques du mode excité ne soient pas influencées par la présence du prisme. Le coefficient de réflexion global à résonance est simplement donné par  $r \simeq e^{i\phi_{PS}}$ . Vu de la face interne du prisme, tout se passe donc (presque) comme s'il n'y avait pas de cavité, puisque nous retrouvons le coefficient de réflexion totale sur la face du prisme, de module unité.

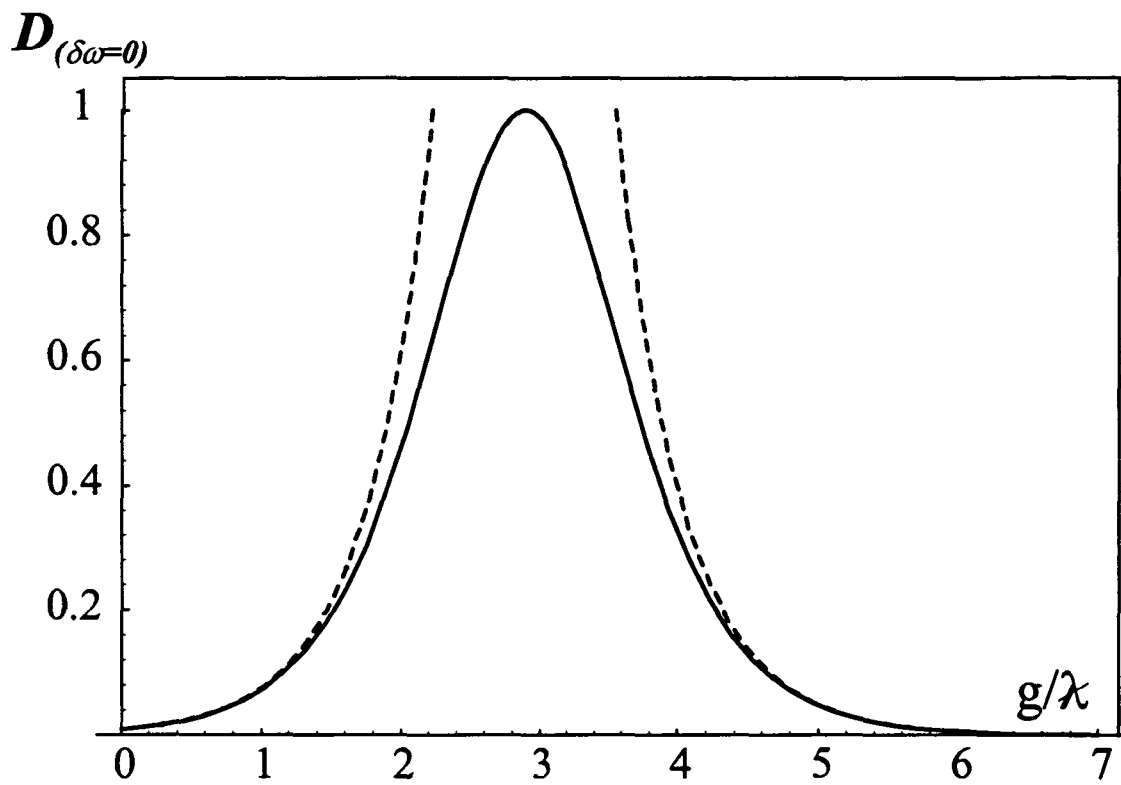


FIG. 2.3 – Signal de “dip” pour la cavité en anneau, en fonction du gap  $g$  en unité de  $\lambda/2\pi$ . En tirets, nous avons fait figurer le comportement asymptotique exponentiel du régime sous-couplé et sur-couplé.

Dans ce régime, la largeur de la résonance est limitée par les seules pertes intrinsèques ( $\Delta\nu = \gamma_A/2\pi$ ), le dip est exponentiellement petit, et la puissance intracavité vaut à résonance :

$$P_{\text{cav}} = \frac{\mathcal{F}_A}{2\pi} \frac{4\gamma_C}{\gamma_A} P_{\text{in}} ,$$

de telle sorte qu'une très faible quantité de lumière est effectivement couplée dans la cavité.

**Le régime de “sur-couplage” (petits gaps) :**  $\gamma_C \gg \gamma_A$

À l'opposé, lorsque la bille est à proximité du prisme, ce qui correspond à un couplage “efficace”, le coefficient de réflexion  $r \simeq -e^{i\phi_{PS}}$  est à nouveau de module proche de 1, tandis que la largeur de la résonance est limitée par le couplage ( $\Delta\nu = \gamma_C/2\pi$ ), l'intensité intracavité vaut à résonance :

$$P_{\text{cav}} = \frac{\mathcal{F}_A}{2\pi} \frac{4\gamma_A}{\gamma_C} P_{\text{in}} = 4 \frac{\mathcal{F}_C}{2\pi} P_{\text{in}} ,$$

Elle est alors limitée par le couplage, qui favorise certes la pénétration de la lumière dans la cavité, mais aussi sa sortie, dans un temps tel que la dissipation interne n'a plus le temps d'agir: le dip est à nouveau exponentiellement petit.

## 2.3 Modèle de Schiller et Byer

Comme nous l'avons indiqué au début de ce chapitre, le modèle développé par Schiller et Byer pour rendre compte des propriétés de leur cavité monolithique à réflexion totale interne (MOTIRR) et à excitation en onde évanescente, est très analogue à celui présenté ci-dessus. En négligeant la courbure très faible de leur face de couplage, ainsi que les problèmes de recouvrement des faisceaux (mode-matching), ils se ramènent à une géométrie plane, où il est possible d'utiliser les formules “standard” de la réflexion totale interne frustrée [29, p.48].

À partir d'une expression strictement équivalente à (2.3), ils donnent une expression explicite du dip, ayant la structure d'une courbe d'Airy, et dépendant (par l'intermédiaire de leur phase) des coefficients de Fresnel pour la réflexion interne ( $r_{32}$ ) et externe ( $r_{23}$ ) sur le prisme, et ce pour les deux polarisations. Dans la limite des grandes finesesses (et des gaps assez grands pour que la finesse par couplage reste grande), ils obtiennent un déplacement

de la résonance qui varie avec le gap comme  $\exp(-2\kappa g)$ , correspondant au fait que la phase  $\phi_{SP}$ , dont on a vu qu'elle déterminait la position des résonances, subit elle-même une telle variation. Dans cette même limite, la largeur des résonances apparaît comme la somme de deux termes, dont le premier n'est autre que  $\gamma_A$ , et dont le second, variant comme  $\exp(-2\kappa g)$ , s'identifie naturellement à  $\gamma_C$ . Ces résultats permettent évidemment de retrouver exactement les différents régimes de sous-couplage, sur-couplage et couplage critique analysés ci-dessus.

On obtient en outre le rapport entre le déplacement et l'élargissement par couplage, qui est donné par

$$\frac{\Delta\omega_C}{\gamma_C} = -\frac{\cotg(\phi_{23})}{2},$$

où la phase  $\phi_{23}$  (réflexion de l'onde évanescente sur le prisme) s'écrit :

$$\phi_{23} = -2 \arctan \left( \frac{\sqrt{N^2 \sin^2 i_S - 1}}{\sqrt{N_P^2 - N^2 \sin i_S}} \right),$$

en fonction des indices  $N$  de la cavité,  $N_P$  du prisme, et de l'angle d'incidence  $i_S$  dans la cavité. On en déduit :

$$\frac{\Delta\omega_c}{\gamma_C} = \frac{1}{4} \frac{(N_P^2 - N^2 \sin i_S) - (N^2 \sin^2 i_S - 1)}{\sqrt{N_P^2 - N^2 \sin i_S} \sqrt{N^2 \sin^2 i_S - 1}}. \quad (2.15)$$

On peut noter qu'à incidence rasante,  $i_S \approx \pi/2$ ,  $\Delta\omega_c$  peut être positif ou négatif, suivant les expériences considérées.

Dans les expériences de Schiller et Byer,  $i_S = 44.7^\circ$  et  $N_P = 1.507$ , ce qui conduit à un rapport  $\frac{\Delta\omega_c}{\gamma_C} \approx 1.3$ . En revanche, dans le cas de l'excitation des modes de galerie d'une sphère par un prisme d'indice  $N_P \simeq 1.76$ , et en supposant toujours que l'angle d'incidence dans la sphère est de l'ordre de  $\pi/2$ , on constate que les indices sont par accident, tels que le numérateur de (2.15) s'annule presque exactement, conduisant à un rapport de -0.025, ce qui explique que le déplacement ne soit pas observé. Cet effet a pu cependant être observé par V. Ilchenko dans le groupe de V. Braginsky à Moscou, qui utilise un prisme en verre BK7, dont l'indice plus faible ( $N_P = 1.51$ ) que celui du SF11, conduit à un rapport de -0.52. D'autre part, avec la technique de couplage par fibre développée par Nicolas Dubreuil [48], dans notre équipe, la différence d'indice entre la bille et le cœur de

la fibre est faible, et le rapport du déplacement à l'élargissement, de l'ordre de -2, rend l'effet facilement observable [49].

Ce modèle, bien qu'apportant un certain nombre de résultats intéressants, ne s'applique pas complètement à la situation qui nous intéresse pour les deux raisons essentielles ci-après.

- Il ne prend pas en compte les effets de géométrie spécifiques à notre situation, où la moitié du dispositif est plan, et l'autre moitié sphérique, et ne permet d'incorporer des informations sur le "mode-matching", qui joue cependant un rôle crucial.
- Il choisit, de même que le modèle générique de Fabry- Pérot présenté au paragraphe précédent, de traiter la lame de couplage comme un ensemble. Dans cette approche, le résonateur apparaît comme un système composite qui n'existe pas en tant que tel en l'absence du coupleur d'entrée-sortie à onde évanescente, alors que nous voulons étudier la réponse d'une cavité sphérique, dont les modes sont définis de façon intrinsèque, à une excitation en onde évanescente.

## 2.4 Modèle de "double sphère"

Nous abordons maintenant une approche différente du couplage d'une bille de silice à un milieu extérieur. La cavité sera dorénavant une vraie microsphère, dont les modes, à symétrie sphérique, ont été décrits au Chapitre 1, et pour lesquels nous pourrions utiliser la théorie de Mie. Dans ce paragraphe, conçu comme une première étape, nous modélisons le prisme par une sphère creuse d'indice fort  $N_P$  de même centre que la bille (*cf.* Fig. 2.4), et l'onde incidente est supposée avoir la distribution angulaire identique à celle du mode  $(\ell, m)$  considéré. Cela nous permettra de mettre en évidence la façon dont les modes de la bille sont perturbés par le milieu environnant (déplacement, élargissement), et la façon dont les notions générales dégagées au § 2.2 (dip, régimes de couplage, etc...) se transposent dans cette géométrie. Tous les effets de couplage seront évidemment surestimés dans une telle géométrie, dite "double-sphère", mais il sera possible ultérieurement de prendre en compte des effets liés à la limitation de la surface de couplage et au recouvrement imparfait des faisceaux dans le cas "prisme-sphère". Nous nous intéresserons particulièrement à la structure du champ dans le gap, de façon à pouvoir prendre en compte les effets de

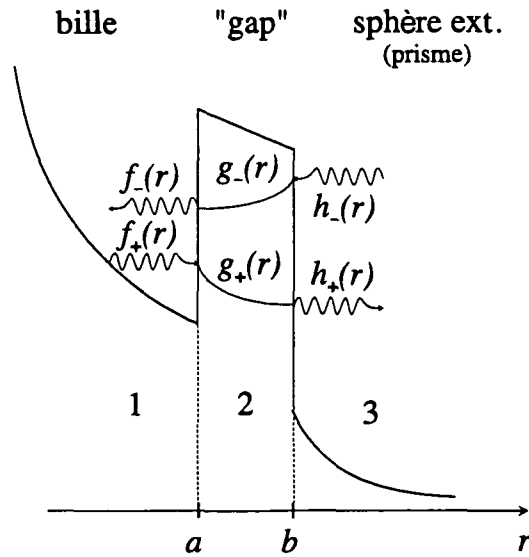


FIG. 2.4 – Configuration de couplage à double sphère: le prisme de couplage est, dans une approche préliminaire, remplacé par une sphère creuse extérieure d'indice  $N_P$ , afin de rétablir la géométrie à symétrie sphérique.

géométrie dans le modèle plus réaliste faisant l'objet du paragraphe §2.5.

### 2.4.1 Équations générales

Les hypothèses faites pour ce modèle "double-sphère" ramènent le problème à l'unique dimension radiale, avec un *recouvrement parfait* des ondes réfléchies et sortantes, sur toute la surface  $4\pi a^2$  de la bille. Nous limitons notre étude aux cas des modes de polarisation TE, ce qui revient à traiter le problème d'une onde scalaire. Dans toute la suite, nous indiquerons par 1, 2 et 3 toutes les quantités relatives, respectivement, à l'intérieur de la bille, au "gap" d'air, et au milieu extérieur (prisme). Nous notons  $b$  le rayon de la sphère extérieure, de telle sorte que le "gap" vaut  $g \equiv b - a$ .

L'essentiel des idées et calculs développés ci-dessous sont en fait applicables à n'importe quel système unidimensionnel où une "cavité" est séparé d'un "domaine extérieur" par une "barrière-tunnel", et nous conserverons ce caractère générique autant que possible, en utilisant en particulier une notation symbolique  $f_{\pm}, g_{\pm}$  et  $h_{\pm}$  pour les fonctions décrivant la dépendance radiale des champs dans les trois domaines de l'espace. Dans la géométrie

Domaine	1:bille	2:"gap"	3:milieu extérieur
Indice	$N$	1	$N_P$
Fonctions	$f_+$	$g_+$	$h_+$
(notations génériques)	$f_-$	$g_-$	$h_-$
Fonctions "physiques"	$\eta_+(Nk_0r)$	$\chi(k_0r)$	$\eta_+(N_Pk_0r)$
	$\eta_-(Nk_0r)$	$\psi(k_0r)$	$\eta_-(N_Pk_0r)$

TAB. 2.1 – Tableau récapitulatif des fonctions de base du modèle double sphère, et des fonctions ayant le comportement physique correct dans chaque domaine.

sphérique qui nous concerne directement, ces fonctions sont des fonctions de Riccati-Bessel, selon une correspondance qui est donnée dans le Tableau 2.1. Il faut souligner à cet égard que, du point de vue mathématique, on peut choisir arbitrairement n'importe quelle base de l'espace des solutions dans chaque domaine, mais que pour obtenir des résultats que l'on puisse interpréter en termes physiques, on est amené à prendre des fonctions oscillantes progressives (entrantes et sortantes) dans les domaines 1 et 3, et purement évanescentes ou anti-évanescentes dans le domaine 2.

Nous considérons donc la diffusion d'une onde incidente dans le milieu extérieur d'amplitude  $h_-$ , et nous proposons de déterminer le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}$  du "système multicouches". La dépendance radiale du champ, superposition des ondes entrante et sortante, s'écrit :

$$\begin{cases} E_1(r) = \gamma(f_- + f_+) \\ E_2(r) = \alpha g_- + \beta g_+ \\ E_3(r) = h_- + \mathcal{R}h_+ \end{cases}$$

Dans ces équations,  $\alpha$  et  $\beta$  sont les coefficients introduits dès le Chapitre 1, et le coefficient  $\gamma$  est commun à  $f_+$  et  $f_-$  car dans le cas de la sphère, la régularité en  $r = 0$  impose que les coefficients de  $\eta_\ell^\pm$  soient égaux<sup>5</sup>.

Le principe général du calcul consiste à écrire les conditions de continuité du champ et de sa dérivée aux deux interfaces  $r = a$  et  $r = b$ , et d'en déduire les rapports entre les coefficients des différentes fonctions de base dans chaque domaine. Cela peut être fait en

5. Dans le cas le plus général, on a une relation entre coefficients induite par la condition aux limites en  $r=0$ .

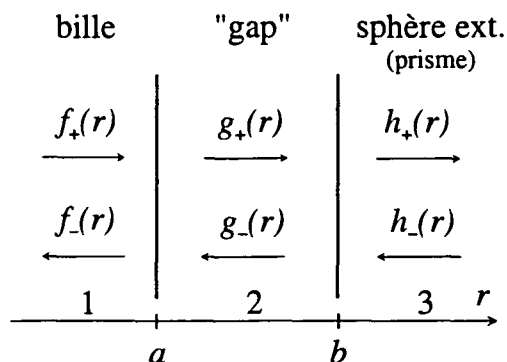


FIG. 2.5 – Amplitude et sens de propagation du champ dans chaque domaine, délimité par les deux interfaces en  $r = a$  (surface de la bille) et  $r = b$  (surface de la sphère extérieure).

toute généralité en écrivant le système linéaire à quatre dimensions correspondant, dont les inconnues sont les coefficients. C'est l'approche qu'ont utilisée un certain nombre d'auteurs qui se sont penchés sur ce problème. On est alors conduit à examiner l'annulation d'un déterminant  $4 \times 4$  rempli de fonctions de Bessel, dont le sens physique est assez obscur.

Pour éviter cet écueil, nous allons réécrire ces équations de raccordement en introduisant des coefficients de réflexion et de transmission généralisant les coefficients de Fresnel. Ces coefficients de réflexion et de transmission sont définis et déterminés en considérant séparément les situations où une onde "incidente" unique arrive sur une interface donnée (en oubliant l'existence de l'autre). À titre d'exemple,  $r_{12}$  et  $t_{12}$  sont obtenus en résolvant le système :

$$\begin{cases} 1 + r_{12} = t_{12} \\ \frac{f'_+(a)}{f_+(a)} + r_{12} \frac{f'_-(a)}{f_-(a)} = t_{12} \frac{g'_+(a)}{g_+(a)} \end{cases} \quad (2.16)$$

et ils s'écrivent donc :

$$\begin{cases} r_{12} = \frac{f'_+(a)/f_+(a) - g'_+(a)/g_+(a)}{g'_+(a)/g_+(a) - f'_-(a)/f_-(a)} \\ t_{12} = \frac{f'_+(a)/f_+(a) - f'_-(a)/f_-(a)}{g'_+(a)/g_+(a) - f'_-(a)/f_-(a)} \end{cases} \quad (2.17)$$

Ces coefficients de réflexion et de transmission avec le plan de référence sur l'interface considéré, s'écrivent donc à l'aide des dérivées logarithmiques des fonctions considérées. Comme il se doit, ces expressions, appliquées à des ondes planes, redonnent exactement les coefficients de Fresnel usuels (en polarisation s). En outre, pour les fonctions sphériques



qui nous intéressent, et parce que nous avons choisi les fonctions  $\psi$  et  $\chi$  dans le gap, l'approximation semi-classique redonne exactement les coefficients de Fresnel usuels. Cette dernière est totalement justifiée en  $r = b$  tant que  $g \ll a$ , (car alors  $N_P k_0 b \gg \ell$ ) et en  $a$  elle est au moins qualitativement satisfaisante.

En utilisant le principe de superposition, nous sommes ainsi amenés à écrire le raccordement en  $a$  et en  $b$  sous la forme :

$$\begin{cases} \beta g_+(a) = r_{21} \alpha g_-(a) + t_{12} \gamma f_+(a) \\ \gamma f_-(a) = t_{21} \alpha g_-(a) + r_{12} \gamma f_+(a) \end{cases}, \quad (2.18)$$

et :

$$\begin{cases} \alpha g_-(k_0 b) = r_{23} \beta g_+(b) + t_{32} h_-(b) \\ \mathcal{R} h_+(b) = t_{23} \beta g_+(b) + r_{32} h_-(b) \end{cases}, \quad (2.19)$$

où la première équation de (2.18) exprime simplement que le poids de l'onde sortante  $g_+$  est la somme des fractions réfléchie de l'onde entrante  $g_-$  et transmise de l'onde sortante  $f_+$ ; et de même pour les trois autres équations.

Le système (2.18) ne nous est cependant pas utile, car il exprime simplement le "rebouclage" dans la cavité. Il conduit en effet à exprimer le coefficient  $\mathcal{R}_s$  de réflexion des ondes évanescentes sur la sphère :

$$\mathcal{R}_s \equiv \frac{\beta g_+(a)}{\alpha g_-(a)} = r_{21} + \frac{t_{12} t_{21} f_+(a)/f_-(a)}{1 - r_{12} f_+(a)/f_-(a)}, \quad (2.20)$$

qui présente une analogie étroite avec l'expression (2.3) du début de ce chapitre, le rapport  $f_+(a)/f_-(a)$  exprimant visiblement l'évolution de la phase et de l'amplitude entre deux réflexions (internes) sur l'interface, comme plus haut  $e^{i\phi - P/2}$ .

Ce coefficient est donc une caractéristique de la bille "nue", et peut donc être directement tiré de la théorie de Mie. En se reportant à l'Éq.(1.40) du Chapitre 1, on constate qu'au voisinage d'une résonance de fréquence  $\omega_0$ , le rapport  $\alpha/\beta$  vaut  $(\omega - \omega_0)/(\gamma_D/2)$ , où  $\gamma_D$  est la largeur par diffraction de la résonance. Dans le cas où il y a des pertes internes, qui peuvent être modélisées par un indice complexe avec une (faible) partie imaginaire positive  $\Im m m(N)$ , on montre (cf. [50][40]) que les pôles sont légèrement déplacés dans le plan complexe d'une quantité  $-i\gamma_A$ , avec  $\gamma_A \simeq \Im m m(N)/\Re e e(N) x_{n\ell m}$  ( $x_{n\ell m}$  étant

le paramètre de taille du mode considéré), et que :

$$\frac{\alpha}{\beta}(\omega) \simeq \frac{(\omega - \omega_0) + i\gamma_A/2}{\gamma_D/2}. \quad (2.21)$$

L'expression du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_s = (\beta/\alpha) [\chi_\ell(x)/\psi_\ell(x)]$  peut alors être simplifiée et il vient :

$$\mathcal{R}_s = \frac{-\Gamma_C/2}{\delta\omega + i\gamma_A/2} \quad (2.22)$$

En faisant la même élimination que précédemment dans le système d'équations (2.19), on obtient pour le coefficient de réflexion total :

$$\mathcal{R} = \frac{h_-(b)}{h_+(b)} \left( r_{32} + \frac{t_{23}t_{32} \varepsilon \mathcal{R}_s}{1 - r_{23} \varepsilon \mathcal{R}_s} \right), \quad (2.23)$$

où la quantité :

$$\varepsilon \equiv \frac{\psi/\chi(a)}{\psi/\chi(b)} \simeq e^{-2\kappa g} \quad \text{avec} \quad \kappa \simeq k_0 \sqrt{\frac{\ell^2}{x^2} - 1} \sim k_0 \sqrt{N^2 - 1},$$

représente l'atténuation des ondes évanescentes lors d'un aller retour dans le gap. Notons que le rapport des fonctions  $h_\pm$  est un simple coefficient de phase global qui vient de ce que l'origine des phases est au centre de la sphère: il disparaît si l'on choisit cette origine en  $r = b$ , ce que nous supposons par la suite.

### 2.4.2 Interprétation

On comprend alors l'expression du coefficient  $\mathcal{R}$ , qui a une structure analogue à celle que l'on aurait pour une cavité, avec un dénominateur correspondant à la resommation de tous les aller-retours dans le gap, si ce n'est que la phase sur un tour résulte uniquement des coefficients de réflexion  $r_{23}$  et  $\mathcal{R}_s$ , tandis que l'atténuation n'est plus due aux pertes mais au caractère évanescent des ondes dans le gap.

En remplaçant alors  $\mathcal{R}_s$  par sa forme lorentzienne déduite de (2.21), nous trouvons :

$$\mathcal{R}(\omega) = r_{32} - \frac{t_{23}t_{32} e^{-2\kappa g} \Gamma_C/2}{[\omega - (\omega_0 + \Delta\omega_C)] + i[\gamma_A + \gamma_C]/2}, \quad (2.24)$$

où<sup>6</sup>:

$$\Gamma_C \equiv -\gamma_D \frac{\chi_\ell(x)}{\psi_\ell(x)} \simeq 2\frac{c}{a} \frac{1}{\sqrt{N^2 - 1}}, \quad (2.25)$$

---

6. L'ordre de grandeur de  $\Gamma_C$  est obtenu en utilisant le fait que  $\gamma_D$  est, pour un mode TE, donné avec une très bonne approximation par  $\gamma_D/2 \simeq c/a (N^2 - 1)^{-1} \chi_\ell^{-2}(x)$ , ainsi que l'approximation semi-classique (1.37) pour le produit  $-1/\chi \psi(x) \simeq 2\sqrt{(\ell + \frac{1}{2})^2/x^2 - 1}$ , qui est de l'ordre de  $2\sqrt{N^2 - 1}$  pour les résonances de  $n$  faible qui nous intéressent.

et  $\omega_0 + \Delta\omega_C$  et  $\gamma_A + \gamma_C$  sont les nouvelles fréquence et largeur de résonance, données par :

$$\begin{cases} \Delta\omega_C(g) = -\frac{\Gamma_C}{2} \Re e(r_{23}) e^{-2\kappa g} \\ \gamma_C(g) = \Gamma_C \Im m(r_{23}) e^{-2\kappa g} \end{cases} \quad (2.26)$$

Il faut souligner que, pour le rapport  $\Delta\omega_C/\gamma_C$ , nous retrouvons exactement la même expression que dans le modèle de Schiller et Byer, au remplacement près des coefficients de Fresnel par leurs équivalents sphériques, ce qui conduit en fait aux mêmes valeurs numériques, comme indiqué ci-dessus.

La valeur de  $\Gamma_C$ , qui fixe l'ordre de grandeur de l'élargissement par couplage  $\gamma_C$  lorsque le gap  $g$  tend vers zéro, est cohérente avec notre modèle, puisque dans la géométrie concentrique, il n'y a plus de réflexion totale interne et donc, à proprement parler, plus de cavité, lors du contact. Il est donc légitime de trouver pour la lumière un temps de séjour dans la bille qui soit de l'ordre de  $a/c$ .

### 2.4.3 Définition du “dip” dans le modèle “double sphère”

À partir de l'expression (2.23) du coefficient de réflexion, nous pouvons définir le “dip”  $D \equiv 1 - |\mathcal{R}|^2$ , de la même façon que dans le modèle élémentaire de la cavité Fabry-Pérot en anneau du §2.2. En utilisant la propriété  $t_{23}t_{32} - r_{23}r_{32} = 1$ , qu'il est aisé d'établir à partir des expressions des coefficients de réflexion et de transmission dans l'approximation semi-classique, et le fait que le coefficient de réflexion  $r_{23}$  est de module unité, un calcul simple conduit à :

$$D = \frac{4 \Im m(\mathcal{R}_s) \Im m(r_{23}) \varepsilon}{1 + |\mathcal{R}_s|^2 \varepsilon^2 - 2 \Re e(r_{23} \mathcal{R}_s) \varepsilon}.$$

En utilisant l'expression (2.22) du coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_s$ ,  $D$  prend finalement une forme analogue à celle de l'expression (2.10) du modèle Fabry-Pérot:

$$D = \frac{\gamma_A \gamma_C}{(\delta\omega - \Delta\omega_C)^2 + \left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right)^2}, \quad (2.27)$$

où  $\Delta\omega_C$  et  $\gamma_C$  représentent respectivement les déplacements et élargissement par couplage de la résonance, définis par les relations (2.26). En fonction du gap et des valeurs comparées de  $\gamma_C$  et de  $\gamma_A$ , il apparaît différents régimes de couplage déjà étudiés dans le cadre du modèle élémentaire de la cavité en anneau.

Comme indiqué en commençant, ce modèle n'est qu'une première étape. Nous allons monter au paragraphe ci-dessous comment passer de la géométrie concentrique à la situation expérimentale, en incorporant de façon assez naturelle les effets géométriques venant réduire la surface de couplage et modifier le recouvrement des faisceaux.

## 2.5 Adaptation du modèle à la géométrie prisme– sphère

Pour se rapprocher de la géométrie expérimentale réelle prisme–sphère, nous devons considérer une distribution spatiale d'indice qui n'a plus la symétrie sphérique du modèle “double sphère”. En outre, le champ incident considéré, issu du faisceau laser d'excitation, a une ouverture angulaire limitée. Nous serons amené à “propager” ce champ évanescent à travers le gap et à considérer ses aller retours entre la surface du prisme et celle de la sphère, en tenant compte de la courbure du gap dans la zone de couplage. À chaque transmission ou réflexion sur l'un des deux interfaces, il nous faut réécrire le champ en termes appropriés, à savoir les harmoniques sphériques à la surface de la sphère, et les ondes planes à la surface du prisme. Il est possible de faire cela de façon analytique, exacte, et très compliquée! Nous utiliserons cependant une méthode approchée qui est techniquement élémentaire, et physiquement parlante.

De même que précédemment, nous ferons pour la sphère l'hypothèse des grandes finesses; toutefois, comme nous prenons maintenant en compte les autres familles de résonances associées à la structure “transverse” (*i.e.* les différentes valeurs possibles de  $n$  et  $l - |m|$ ) des modes, l'utilisation de l'approximation lorentzienne pour le coefficient de réflexion  $\mathcal{R}_s$  de la sphère “nue” implique l'hypothèse supplémentaire que la résonance du mode étudiée est *bien isolée* des autres résonances. On pourra alors négliger les composantes du champ (dans le gap) sur d'autres modes que le mode considéré, supposé proche de résonance.

Dans toute la suite, nous ne considérons qu'un mode TE (polarisation alignée avec  $\mathbf{e}_z$ ), et tel que  $l - |m| \ll \ell$ , si bien que nous traitons les champs comme des champs scalaires. L'origine des coordonnées cartésiennes  $(x, y, z)$  est prise au centre  $C$  de la sphère, et l'axe  $Cx$  est dirigé dans le sens prisme–sphère. Le point  $O$ , situé à l'intersection de cet axe et de la face du prisme, a pour abscisse  $-d$  où  $d = a + g$ .

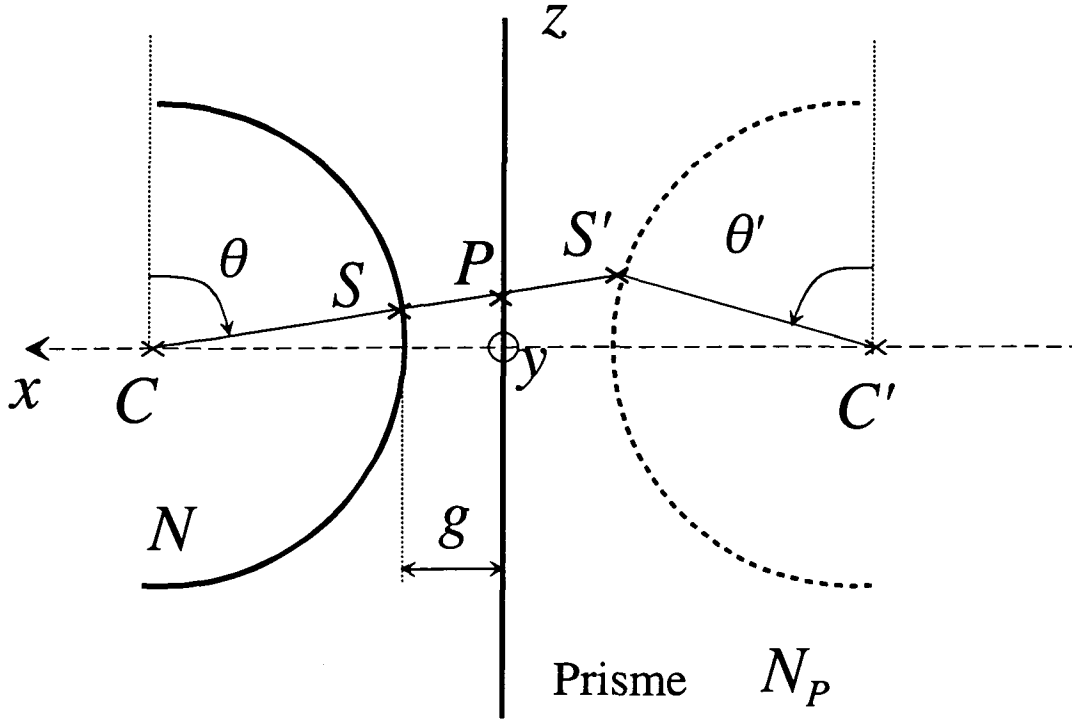


FIG. 2.6 – Géométrie de couplage sphère-prisme. Schéma utilisé pour le calcul, détaillé dans le texte, du champ se “propageant” dans le gap. Les points  $S, S'$  et  $P$  ont même coordonnées  $y$  et  $z$  à l'ordre le plus bas (i.e. au second ordre) en  $y/a, z/a$  et  $g/a$ , où  $a$  représente le rayon de la sphère: c'est le même facteur de “transparence” gaussien  $G(y, z)$  qui relie les amplitudes des champs en ces trois points.

### 2.5.1 Résultats préliminaires sur le champ dans le gap

#### Propagation du champ dans le gap

Supposons connue la distribution du champ  $E_P(y, z)$  sur la surface externe du prisme – il peut s'agir du champ transmis à partir du faisceau incident, ou du champ issu de la sphère et réfléchi par le prisme. Nous pouvons en déduire le champ évanescent dans le “gap” sous la forme :

$$E(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \int \tilde{E}(k_y, k_z) e^{i(k_y y + k_z z)} e^{-\kappa(k_y, k_z)(x+d)} dk_y dk_z,$$

où  $\tilde{E}(k_y, k_z)$  est la transformée de Fourier bi-dimensionnelle du champ  $E_P(y, z)$ .

En supposant que les champs mis en jeu ont une faible ouverture en  $k_y$ ,  $k_z$ , avec des valeurs centrales  $k_y \sim \ell/a \sim Nk_0$  et  $k_z \sim 0$ , il est possible de remplacer la fonction  $\kappa(k_y, k_z)$  par sa valeur centrale  $\kappa \simeq k_0 \sqrt{N^2 - 1}$ . En outre, les coefficients de transmission ou de réflexion de Fresnel  $t_{ij}, r_{ij}$ , (avec  $i, j = 2, 3$ ) sont définis pour des ondes planes, et sont donc des fonctions de  $k_y$  et  $k_z$ , par l'intermédiaire de  $\kappa(k_y, k_z)$  et de  $k_x(k_y, k_z) = \sqrt{N_P^2 k_0^2 - (k_x^2 + k_y^2)}$  (relation de dispersion dans le prisme). De la même façon<sup>7</sup>, nous supposons qu'il peuvent être remplacés par leur valeur centrale.

D'autre part, nous savons, que la zone de couplage est de faible extension spatiale, de l'ordre de 5 à 15  $\mu\text{m}$  selon la taille de la sphère. Cela permet d'approcher les angles des coordonnées sphériques par  $\theta \simeq \pi/2 - z/a$  et  $\varphi \simeq \pi - y/a$  et de développer  $x + d \simeq g + (y^2 + z^2)/2a$ , d'où l'amplitude du champ au point  $S(\theta, \varphi)$  de la surface de la sphère:

$$E_S(\theta, \varphi) \simeq E_P(y, z) \exp\left(-\frac{\kappa}{2a}(y^2 + z^2)\right) \exp(-\kappa g), \quad (2.28)$$

où l'effet de la courbure du gap se traduit simplement par l'introduction d'un facteur gaussien, qui a pour effet de limiter la "pupille" d'entrée à une région de taille caractéristique de l'ordre de  $\sqrt{\lambda a}$  dans chaque direction. Nous noterons dans la suite  $G(x, y)$  ce facteur gaussien.

De même, considérons le champ évanescent de l'onde sphérique "sortant" de la sphère, qui s'écrit, en tout point du gap :

$$E(r, \theta, \varphi) = E_S(\theta, \varphi) \exp(-\kappa(r - a)), \quad (2.29)$$

où  $\kappa$  est la dérivée logarithmique de la fonction de Riccati-Neumann  $\chi_\ell$  à la surface de la sphère,  $\kappa = \sqrt{\ell^2/a^2 - 1} \simeq \sqrt{N^2 - 1}$ , qui donne la portée de l'onde plane évanescence (pour l'angle d'incidence  $i_P = \arcsin(N/N_P)$ ). On peut alors écrire avec les mêmes approximations que précédemment:

$$E_P(y, z) \simeq E_S(y, z) \exp\left(-\frac{\kappa}{2a}(y^2 + z^2)\right) \exp(-\kappa g). \quad (2.30)$$

---

7. Ces hypothèses, que nous n'étudierons pas en détail, ne sont pas essentielles au raisonnement que nous faisons plus bas, mais simplifient nettement le calcul. Elles reposent essentiellement sur le fait que, dans notre situation expérimentale, les trois indices mis en jeu, 1,  $N \simeq 1.45$ , et  $N_P \simeq 1.76$ , sont assez nettement séparés.

Si nous considérons enfin, la “propagation” du champ évanescent issu de la sphère, réfléchi sur le prisme, et revenant sur la sphère, et à condition de remplacer, comme précédemment, le coefficient de Fresnel intervenant à la réflexion (pour une onde évanescente sur une interface plane) par une constante, le champ revenant sur la sphère peut être évalué en introduisant la sphère “image” dans le miroir, représentée en tirets sur la Figure 2.6. En se limitant, à nouveau, au premier ordre en  $y/a$ ,  $z/a$ , et  $g/a$ , on peut identifier les coordonnées  $y'$  et  $z'$  aux coordonnées initiales  $y$  et  $z$ . On obtient ainsi:

$$E'_S(y,z) \simeq r_{23} E_S(y,z) \exp\left(-\frac{\kappa}{a}(y^2 + z^2)\right) \exp(-2\kappa g) , \quad (2.31)$$

où  $E_S \propto Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ .

Il apparaît finalement que, pour les ondes évanescentes, l'effet de la courbure du gap se traduit de façon systématique par l'introduction d'un facteur de “transparence” gaussien  $G(y,z) \equiv \exp(-\kappa/2a(y^2 + z^2))$ , qui s'ajoute à l'atténuation en  $e^{-\kappa g}$  déjà obtenue dans les modèles unidimensionnels précédents. La présence de ce facteur va évidemment venir modifier les conditions d'adaptation géométrique du faisceau incident (mode-matching), l'optimum de couplage n'étant plus obtenu pour une onde incidente sphérique (*i.e.* proportionnelle à  $Y_\ell^m$ ), mais pour un champ incident de la forme  $E_{in} = E_0 e_m$ , où  $e_m$  est la distribution spatiale (sans dimension) définie par sa forme sur la face du prisme :

$$e_m(y,z) = Y_\ell^m(\pi/2 - z/a, \pi - y/a) \exp\left(-\frac{\kappa}{2a}(y^2 + z^2)\right) , \quad (2.32)$$

qui décrit aussi la forme du champ “émergent”, c'est à dire le champ diffusé par la sphère et réfracté dans le prisme. Notons que la structure angulaire du faisceau correspondant (champ lointain) peut être obtenu par simple transformation de Fourier. On peut montrer en particulier que pour les modes  $\ell = |m|$ , le champ lointain est constitué d'un seul faisceau, tandis que pour les modes  $\ell - |m| > 0$ , il est formé de deux faisceaux dont la séparation angulaire croît avec le nombre  $\ell - |m|$  [51].

### Flux des champs incident et diffusé à travers le prisme

Soit  $P_{in}$  le flux du vecteur de Poynting du champ incident dans le prisme à travers sa surface, de normale  $\mathbf{e}_x$ .

$$P_{in} \equiv \int \left( \mathbf{E}_{in} \times \frac{\mathbf{B}_{in}^*}{2\mu_0} \right) \cdot \mathbf{e}_x \, dydz ,$$

où  $\mathbf{E}_{\text{in}}$  et  $\mathbf{B}_{\text{in}}$  sont les champs incidents sur la face de couplage du prisme. On peut encore réécrire cette intégrale à l'aide de la transformée de Fourier bi-dimensionnelle du champ à la surface du prisme :

$$P_{\text{in}} = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \frac{1}{k_0} \int |\widetilde{\mathbf{E}}_{\text{in}}|^2 k_x(k_y, k_z) dk_y dk_z.$$

Mais en faisant la même approximation que précédemment, on peut sortir  $k_x \simeq k_0 \sqrt{N_P^2 - N^2}$  de l'intégrale, et en utilisant l'identité de Parseval, il vient :

$$P_{\text{in}} \simeq K a^2 \langle \mathbf{E}_{\text{in}} | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle, \quad (2.33)$$

où nous avons posé  $K \equiv \frac{\varepsilon_0 c}{2} \sqrt{N_P^2 - N^2}$ , et introduit le produit hermitien :

$$\langle E_1 | E_2 \rangle = \int E_1^*(y, z) E_2(y, z) \frac{dy dz}{a^2}.$$

De la même façon, nous pouvons écrire la puissance du champ diffusé à travers le prisme:

$$P_{\text{diff}} \simeq K a^2 |t_{23}|^2 \langle \mathbf{E}_{\text{diff}} | \mathbf{E}_{\text{diff}} \rangle, \quad (2.34)$$

où nous avons extrait le coefficient de transmission  $t_{23}$  en faisant l'approximation désormais habituelle.

### 2.5.2 Modification de l'amplitude de l'onde diffusée dans le modèle "double sphère"

Dans la situation expérimentale réelle, il arrive sur la face du prisme un champ incident d'amplitude  $\mathbf{E}_{\text{in}}$ , de flux  $P_{\text{in}}$  à travers le prisme, qui n'est pas en général adapté à la structure du mode excité. Pour caractériser le degré d'adaptation, nous sommes amenés à évaluer le recouvrement du champ évanescent décrit par (2.28) avec l'harmonique sphérique correspondant au mode étudié, soit à évaluer l'intégrale :

$$\int Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) E_P(y, z) G(x, y) d\Omega,$$

qui, dans le cadre des approximations détaillées ci-dessus, se met précisément sous la forme  $\langle \mathbf{e}_m | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle$ . Pour nous ramener à une quantité plus commode, nous définissons le coefficient de mode-matching  $\alpha_{\text{in}}^{\ell, m}$ , noté simplement  $\alpha$  par la suite :

$$\alpha_{\text{in}}^{\ell, m} \equiv \frac{\langle \mathbf{e}_m | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle}{\langle \mathbf{E}_{\text{in}} | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle^{1/2} \langle \mathbf{e}_m | \mathbf{e}_m \rangle^{1/2}}, \quad (2.35)$$



qui par construction est de module inférieur ou égal à 1 (inégalité de Schwartz), et prend la valeur 1 (à une phase près) lorsque le champ incident est exactement adapté.

Le champ diffusé par la sphère et sortant du prisme a la structure du champ  $e_m$  avec une amplitude qui dépend du recouvrement avec le champ incident, et qui est donc proportionnelle à  $\langle e_m | E_{in} \rangle$ .

D'autre part, nous avons montré que le champ diffusé par la sphère, avec une distribution angulaire donnée par l'harmonique sphérique appropriée, ne revenait pas identique à lui-même après un aller-retour dans le gap. Plus précisément, pour connaître la contribution de cette onde à l'excitation du mode, il nous faut évaluer le recouvrement de l'onde réfléchie  $E'_S$ , donnée par la formule (2.31), avec l'harmonique sphérique  $Y_\ell^m$ . Ce recouvrement s'écrit :

$$\int Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) E'_S(y, z) d\Omega = r_{23} \int Y_\ell^{m*}(\theta, \varphi) Y_\ell^m(\theta, \varphi) G^2(y, z) d\Omega e^{-\kappa g} ,$$

où l'on reconnaît dans l'intégrale l'expression de  $e_m$ , de telle sorte que le coefficient exprimant l'amplitude de l'onde réfléchie, qui était  $r_{23} e^{-\kappa g}$  dans le modèle concentrique, se trouve multiplié par le coefficient :

$$C_\ell^m = \langle e_m | e_m \rangle . \quad (2.36)$$

Le dénominateur de l'expression du champ diffusé par la sphère, provenant de la resommation des amplitudes après une succession d'aller-retours de l'onde dans le gap, prend donc la forme de celui de l'expression (2.23), où  $r_{23}$  est simplement remplacé par  $r_{23} C_\ell^m$ .

Finalement le champ total émergent dans le prisme résulte de la superposition de la fraction du champ incident réfléchi sur la face interne du prisme et du champ diffusé, soit :

$$E_{out} = r_{32} E_{in} + \frac{t_{32} t_{23} \mathcal{R}_S \varepsilon}{1 - r_{23} \mathcal{R}_S C_\ell^m \varepsilon} \langle e_m | E_{in} \rangle e_m , \quad (2.37)$$

ce qui constitue le résultat essentiel, que nous allons maintenant analyser en termes de signal détecté.

### 2.5.3 Expression du “dip”

Il nous faut évaluer la puissance transportée par le champ décrit par l'expression (2.37) ci-dessus. En utilisant les résultats du § 2.5.1, nous pouvons, malgré la différence de struc-

ture spatiale des deux termes de (2.37), définir un coefficient de réflexion effectif  $\mathcal{R}(\alpha)$  tel que :

$$|\mathcal{R}(\alpha)|^2 = \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}} = \frac{\langle E_{\text{out}} | E_{\text{out}} \rangle}{\langle E_{\text{in}} | E_{\text{in}} \rangle} ,$$

En utilisant le fait que le terme d'interférence dans  $\langle E_{\text{out}} | E_{\text{out}} \rangle$  fait apparaître un  $\alpha(C_\ell^m \langle E_{\text{in}} | E_{\text{in}} \rangle)^{1/2}$ , il peut être mis sous la forme :

$$|\mathcal{R}(\alpha)|^2 = \left| r_{32} + \frac{t_{32}t_{23} \mathcal{R}_s C_\ell^m \varepsilon}{1 - r_{23} \mathcal{R}_s C_\ell^m \varepsilon} \right|^2 |\alpha|^2 + (1 - |\alpha|^2) |r_{32}|^2 ,$$

Le signal de “dip”  $D(\alpha)$  s'écrit alors :

$$D(\alpha) \equiv 1 - |\mathcal{R}(\alpha)|^2 = |\alpha|^2 D(\alpha = 1) , \quad (2.38)$$

où les modifications par rapport au modèle concentrique sont de deux types :

- un facteur global  $|\alpha|^2$ , apparaît lié au défaut de recouvrement entre le champ incident et le champ du mode de galerie résonnant modifié par la traversée du gap. Ce terme contribue à diminuer le contraste du dip, l'énergie contenue dans la partie “inutile” du faisceau étant entièrement réfléchi. Facile à minimiser pour un mode  $|m| = \ell$ , ce défaut devient inévitable pour  $|m| \neq \ell$ .
- un facteur intrinsèque à la géométrie sphère—prisme intervient aussi : l'atténuation  $\varepsilon$  dans le gap est remplacée par le coefficient  $C_\ell^m$ , ce qui revient à introduire un gap effectif plus grand que le gap géométrique  $g$  d'une quantité :

$$\Delta g_0 = \frac{\ln(1/C_\ell^m)}{2\kappa} ,$$

qui est bien positive puisque  $C_\ell^m < 1$ .

Le dip garde alors la même forme fonctionnelle que précédemment (cf. éq. (2.27)), à la re-définition près des déplacement  $\Delta\omega_C$  et élargissement  $\gamma_C$  qui sont tous deux multipliés par  $C_\ell^m$ . Cela se traduit en particulier par le fait que le gap critique est alors plus près de la sphère, d'une quantité donnée par  $\Delta g_0$ .

#### 2.5.4 Exemple fondamental : modes $\ell = |m|$

Considérons, à titre d'application numérique, le cas des modes  $\ell = |m|$  possédant un seul lobe dans la direction ortho-radiale.

### Largeur de la résonance dans le modèle double sphère adapté

Pour un mode  $\ell = |m|$ , le coefficient se déduit de l'harmonique sphérique  $Y_\ell^\ell(\theta, \varphi) = \left(\frac{\ell}{\pi}\right)^{1/4} \frac{e^{i\ell\varphi}}{\sqrt{2\pi}} e^{-\ell(\pi/2-\theta)^2/2}$ , où  $\pi/2 - \theta \simeq z/a$ . Un calcul élémentaire donne :

$$C_\ell^\ell = \frac{1}{\sqrt{4\pi x}} \sqrt{\frac{N}{M(N+M)}},$$

où nous avons posé  $M \equiv \sqrt{N^2 - 1}$ . D'autre part,  $\Im m(r_{23}) = \frac{2\kappa k_x}{\kappa^2 + k_x^2} \simeq 2M \frac{\sqrt{N_P^2 - N^2}}{N_P^2 - 1}$ , en faisant l'approximation  $Nx \simeq \ell$ . Nous en déduisons finalement l'expression de la largeur limitée par couplage, dans le modèle "double sphère" adapté:

$$\gamma_C(g) = \frac{c}{a} \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{N}{\sqrt{M(N+M)}} \frac{\sqrt{N_P^2 - N^2}}{N_P^2 - 1} \frac{1}{\sqrt{\ell}} e^{-2\kappa g}. \quad (2.39)$$

Considérons une bille de rayon  $a = 25 \mu\text{m}$  à la longueur d'onde  $\lambda = 810 \text{ nm}$ ,  $\ell \simeq 270$  et  $\kappa \simeq k_0 \sqrt{N^2 - 1} \simeq 8.1 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$ . D'autre part, le prisme utilisé dans la plupart des expériences décrite dans ce mémoire est en verre SF11, d'indice  $N_P = 1.76$ . Le coefficient de recouvrement vaut alors  $C_\ell^\ell \simeq 0.015$ , et la largeur limitée par couplage au contact  $\gamma_C(0)/2\pi \simeq 100 \text{ GHz}$ . La position  $g_c$  de la sphère au couplage critique, correspond à la situation dans laquelle l'élargissement par couplage  $\gamma_C(g_c)$  est identique à la largeur intrinsèque  $\gamma_A$ , situation qui rend par ailleurs  $D$  maximal, d'après son expression (2.27). Pour un mode de la sphère dont la largeur intrinsèque est de l'ordre de 1 MHz, le gap critique vaut environ  $g_c \simeq 700 \text{ nm}$ . Expérimentalement, les valeurs de  $g_c$  observées sont plutôt de l'ordre 200 à 400 nm, et peuvent correspondre à des modes plus étendus dans la direction ortho-radiale, possédant une intégrale de recouvrement plus petite. Ainsi, pour  $\ell - |m| = 4$ ,  $C_\ell^{\ell-4} \simeq 4 \times 10^{-3}$ , ce qui donne  $g_c(\ell - |m| = 4) \simeq 600 \text{ nm}$ , qui s'approche plus de nos observations. Une légère inclinaison de l'axe de la sphère par rapport à la verticale du prisme pourrait expliquer le désaccord restant.

### Pertes par couplage

Le couplage au prisme augmente l'amplitude du champ rayonné hors de la bille. Nous attendons donc un élargissement de la résonance qui n'est autre que le taux d'amortissement par rayonnement  $\gamma_{\text{ray}}$ , de l'énergie stockée  $U_{\text{cav}}$  dans le mode, soit  $\gamma_{\text{ray}} = \frac{P_{\text{diff}}}{U_{\text{cav}}}$ .

D'après la relation (2.30), on peut écrire, pour un mode  $\ell = |m|$ , le champ émergeant à la surface du prisme, sous la forme:

$$E_{\text{diff}} = E_s e^{i\ell y/a} e^{-\ell(z/a)^2/2} G(y,z) e^{-\kappa g},$$

où  $E_s$  représente l'amplitude maximale du module du champ du mode à la surface de la sphère.

La puissance de ce champ diffusé par la bille, sortant du prisme, défini par la relation (2.34), vaut, après substitution de l'expression du coefficient de transmission pour les ondes planes dans l'approximation semi-classique :

$$P_{\text{diff}} = K a^2 \frac{4M^2}{N_P^2 - 1} \langle E_{\text{diff}} | E_{\text{diff}} \rangle = \frac{\varepsilon_0 c}{2} \sqrt{N_P^2 - N^2} \frac{4M^2}{N_P^2 - 1} \frac{N}{\ell} \frac{\pi a^2}{\sqrt{M(M+N)}} E_s^2 e^{-2\kappa g}.$$

L'expression de l'énergie totale  $U_{\text{cav}}$  stockée dans le mode en fonction de l'amplitude du champ  $E_{\text{max}}$  a été donnée au Chapitre 1. Il nous faut donc relier le champ surfacique maximal au champ maximal, et pour un mode TE, on peut écrire :

$$\frac{E_s}{E_{\text{max}}} = \frac{j_\ell(Nx)}{j_\ell(z'_1)} \simeq \frac{(Nx - z_1)j'_\ell(z_1)}{j_\ell(z'_1)} \simeq \frac{N j'_\ell(z_1)}{M j_\ell(z'_1)},$$

où  $z_1$  et  $z'_1$  sont respectivement les premiers zéros de  $j_\ell$  et  $j'_\ell$ . Comme le rapport de fonctions de Bessel qui apparaît ci-dessus figure aussi dans le volume du mode, celui-ci s'élimine, et on obtient une expression simple de la largeur due aux pertes par rayonnement *identique* à celle de la largeur (2.39) limitée par couplage que donne le modèle "double sphère" adapté, comme attendu :

$$\gamma_{\text{ray}} = \frac{P_{\text{diff}}}{U_{\text{cav}}} = \gamma_C(g).$$

Ce résultat, obtenu par une approche complémentaire, confirme en quelque sorte la cohérence de l'approche suivie dans ce paragraphe 2.5.

### 2.5.5 Influence d'un diaphragme sur le signal détecté

Dans le premier montage que nous avons utilisé<sup>8</sup>, l'ouverture numérique de la lentille utilisée pour recollimater le faisceau émergeant à la sortie du prisme (voir Fig.2.1) était trop petite pour permettre de collecter toute l'intensité. Nous pouvons rendre compte

<sup>8</sup> cf. les expériences décrites aux Chapitre 3 et 4

de cet effet de diaphragme en introduisant la fonction de transfert  $T$  du filtre spatial agissant sur le champ  $E_{\text{out}}$ . Le flux sortant s'écrit  $\langle E_{\text{out}} | T^\dagger T | E_{\text{out}} \rangle$ , et son développement comprend comme précédemment trois termes  $\langle e_m | T^\dagger T | e_m \rangle$ ,  $\langle \mathbf{E}_{\text{in}} | T^\dagger T | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle$  et le terme croisé  $\langle \mathbf{E}_{\text{in}} | T^\dagger T | e_m \rangle$ .

Si nous faisons par ailleurs l'hypothèse raisonnable que le *faisceau incident réfléchi n'est pas diaphragmé*, c'est à dire  $P_{\text{out}} = P_{\text{in}}$  à gap infini, soit encore :

$$\langle \mathbf{E}_{\text{in}} | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle = \langle \mathbf{E}_{\text{in}} | T^\dagger T | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle ,$$

alors on peut montrer que l'opérateur de filtrage  $T$  est tel que :

$$\langle \mathbf{E}_{\text{in}} | T^\dagger T | e_m \rangle = \langle \mathbf{E}_{\text{in}} | e_m \rangle = \alpha^* \langle \mathbf{E}_{\text{in}} | \mathbf{E}_{\text{in}} \rangle^{1/2} \langle e_m | e_m \rangle^{1/2} .$$

D'autre part, le coefficient de recouvrement  $C_\ell^m$  est remplacé par

$$\langle e_m | T^\dagger T | e_m \rangle = \beta_\ell^m C_\ell^m \quad \text{où } 0 < \beta_\ell^m < 1 ,$$

et  $\beta_\ell^m$  est d'autant plus proche de 1 que le faisceau sortant de la sphère est moins diaphragmé. On peut alors réécrire le "dip"  $D \equiv 1 - \frac{P_{\text{out}}}{P_{\text{in}}}$  sous la forme :

$$D = |\alpha|^2 \left[ D(1) + (1 - \beta_\ell^m) \left| \frac{t_{23} t_{32} \mathcal{R}_s \varepsilon C_\ell^m}{1 - r_{23} \mathcal{R}_s \varepsilon C_\ell^m} \right|^2 \right] .$$

Un calcul élémentaire montre par ailleurs, que le second terme de l'expression ci-dessus s'écrit  $\gamma_C^2 / [(\delta\omega - \Delta\omega_C)^2 + (\gamma_A + \gamma_C)^2 / 4]$ , où  $\gamma_C$  et  $\Delta\omega_C$  sont respectivement la largeur et le déplacement de la résonance dans le modèle "double sphère" adapté à la géométrie, si bien que  $D$  s'écrit finalement :

$$D = |\alpha|^2 \frac{\gamma_C (\gamma_A + (1 - \beta_\ell^m) \gamma_C)}{(\delta\omega - \Delta\omega_C)^2 + \left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right)^2} . \quad (2.40)$$

Cette expression du dip rend bien compte de nos observations expérimentales, dans lesquelles, lorsque la bille est en contact avec le prisme, le dip de couplage reste important alors qu'il devrait être de l'ordre de  $\frac{4|\alpha|^2 \gamma_A}{\gamma_C} \ll 1$  en l'absence de diaphragme (modèle "double sphère" adapté). Même un effet de filtrage modéré peut donner, à gap nul, un signal de "dip" important  $D(0) = 4|\alpha|^2 (1 - \beta_\ell^m)$ , car on peut réaliser facilement la condition  $\gamma_A \ll (1 - \beta_\ell^m) \gamma_C$ .

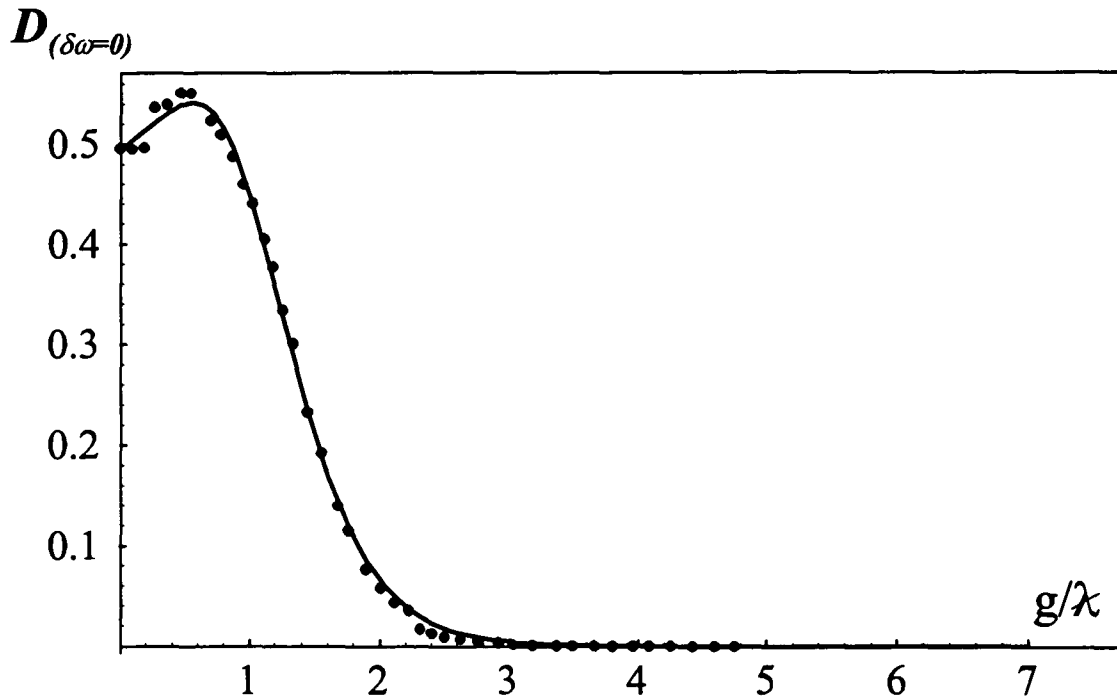


FIG. 2.7 – Fit du dip de couplage de la sphère dopée aux ions  $Nd^{3+}$  de  $56 \mu m$  de diamètre étudiée au §4.6.2, avec l'expression analytique du dip (2.40). La largeur de la résonance en régime de sous-couplage est limitée par l'absorption des ions et vaut  $430 \text{ MHz}$  et nous avons réajusté la profondeur de pénétration à  $\kappa \simeq 1.37$ , en laissant libre les trois paramètres du modèle double sphère adapté. L'algorithme de fit nonlinéaire donne:  $C_{\ell}^m = 1.5 \times 10^{-3}$ ,  $|\alpha = 0.62|$  et la fraction transmise de l'intensité du faisceau diffusé  $\beta_{\ell}^m = 0.71$ .

Considérons, à titre d'exemple, la courbe de couplage réalisée à  $\lambda = 810$  nm sur la sphère dopée aux ions  $Nd^{3+}$  étudiée au §4.6.2 (cf. Fig.4.14). Sur la Figure 2.7, nous avons reporté les données de couplage et le fit de ces points effectué à l'aide de l'expression (2.40). En effectuant ce fit, nous avons constaté que la valeur estimée de la profondeur de pénétration  $\kappa \simeq 1.05$  (en unité de  $\lambda/2\pi$ ), était sous estimée, ce que nous pouvons interpréter comme une mauvaise calibration du déplacement relatif de la sphère et du prisme qui est assuré par un empilement de cales piézoélectriques. En prenant alors plutôt  $\kappa \simeq 1.37$ , l'algorithme de fit nonlinéaire donne pour valeurs des paramètres:  $C_\ell^m = 1.5 \times 10^{-3}$ ,  $|\alpha| = 0.62$  et la fraction d'intensité diffusée détectée  $\beta_\ell^m = 0.71$ . Le coefficient de recouvrement obtenu est 10 fois plus petit que celui d'un mode  $\ell = |m|$   $C_\ell^\ell \simeq 0.015$ , mais parfaitement compatible avec un mode  $\ell - |m| \simeq$  qq unités.

## 2.6 Conclusion

Les différentes approches présentées dans ce chapitre pour traiter le problème du couplage bille—prisme nous ont permis de progresser par étapes successives. Le modèle élémentaire d'un FABRY PÉROT en anneau nous a permis d'introduire la réponse en réflexion de la cavité et le signal de "dip". Cependant, en traitant globalement la région du gap comme une lame de transmission variable, on ne peut rendre compte de l'élargissement et du déplacement de la résonance que de façon phénoménologique.

Dans leur modèle appliqué aux résonateurs monolithiques, Schiller et Byer précisent le comportement en  $\exp(-2\kappa g)$  de ces grandeurs, mais ne tiennent pas compte des défauts de recouvrement liés à notre géométrie.

Le modèle "double sphère" que nous avons ensuite développé permet, en traitant séparément le résonateur et le coupleur, de prendre en compte des réalités expérimentales du dispositif de couplage, tenant compte notamment de la courbure du gap et de la faible l'ouverture numérique du faisceau couplé. Ce modèle fournit une expression du "dip" de couplage qui rend bien compte de nos observations expérimentales.

## Chapitre 3

# Modes de galerie de très grande surtension

Dans ce chapitre, après une brève description des techniques de fabrication de nos microbilles de silice, nous présentons le montage qui nous a permis l'observation de modes de très grande surtension ( $Q \simeq 2 \cdot 10^9$ ). Ces expériences ont révélé la présence systématique de doublets de modes, dont les deux composantes sont séparées de quelques MHz. Ce dédoublement résulte de la levée de dégénérescence des deux modes contrapropageants  $\pm|m|$ , sous l'effet de leur couplage par rétrodiffusion. Ce phénomène existe aussi dans les fibres où il est associé à l'atténuation par diffusion Rayleigh [52]. Le modèle de modes couplés que nous développons permet de rendre compte quantitativement de nos observations. Des expériences complémentaires ont ensuite confirmé notre interprétation en terme de modes couplés. Nous décrivons, en conclusion de ce chapitre, une expérience de spectroscopie d'un doublet en décroissance temporelle.

### 3.1 Fusion des microbilles de silice

Les billes de silice pure que nous avons utilisées pour les expériences décrites dans ce chapitre, ont été fondues à partir de silice de grande pureté de la qualité *Suprasil* de la société allemande *Heraeus*. Celle-ci présente l'avantage d'une très faible teneur en ions hydroxyle  $\text{OH}^-$ , lesquels possèdent une résonance de valence en absorption autour de 960 nm.



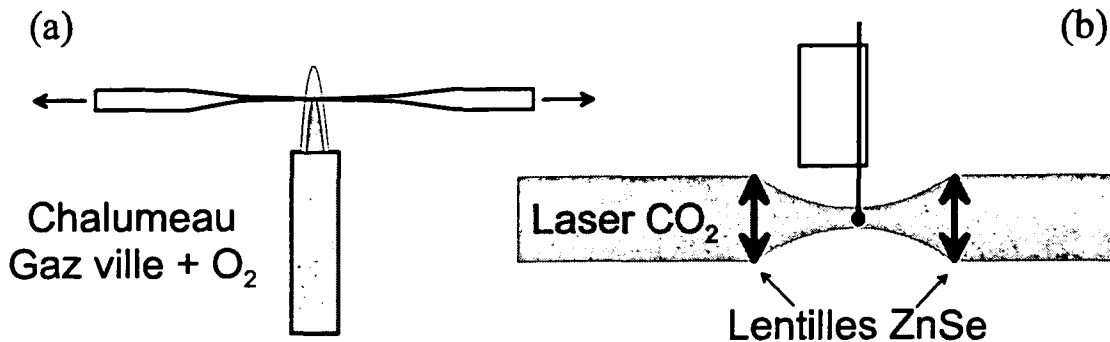


FIG. 3.1 – Procédure de fusion des microbilles de silice pure. (a) étirage de la baguette de silice Suprasil, pour filer une portion de  $20\ \mu\text{m}$  de diamètre. (b) fusion de l'extrémité de la fibre étirée, fixée sur un support, aux foyers des deux lentilles en ZnSe qui focalisent les deux faisceaux laser  $\text{CO}_2$  contrapropageants.

### 3.1.1 Préparation de la fibre ébauche

Les baguettes de silice *Suprasil* de diamètre  $\phi = 2\ \text{mm}$ , qui nous servent de "préformes", sont préalablement nettoyées à l'aide d'un mélange méthanol-acétone, destiné à ôter les dépôts d'alcalins et de contaminants organiques, qui ont pu se déposer en surface. Cette baguette est ensuite étirée rapidement dans flamme d'un chalumeau oxygène-gaz de ville), jusqu'à l'obtention d'une longue portion de diamètre assez homogène, de l'ordre de 15 à  $20\ \mu\text{m}$ , comme nous l'avons schématisé sur la Figure 3.1(a).

Cette étape préliminaire nécessite soin et rapidité, sous peine d'altérations de la pureté de la silice, telles que la formation d'un dépôt surfacique de carbure de silicium ou de microbulles d'hydrogène dégazé, dans le volume [22, p. 73].

### 3.1.2 La fusion par laser $\text{CO}_2$

Les microbilles sont fondues à l'aide d'un faisceau laser  $\text{CO}_2$  à excitation radiofréquence (RF), d'une puissance maximale de 10 W, mais dont la puissance moyenne peut être ajustée en variant le rapport cyclique de la modulation RF appliquée.

La fibre ébauche d'environ 15 à  $20\ \mu\text{m}$  de diamètre est placée au foyer de deux lentilles qui font converger les deux faisceaux contrapropageants du laser  $\text{CO}_2$  de fusion (voir la Fig.3.1) et on fait avancer son extrémité vers le foyer. La gouttelette de silice fondue prend,

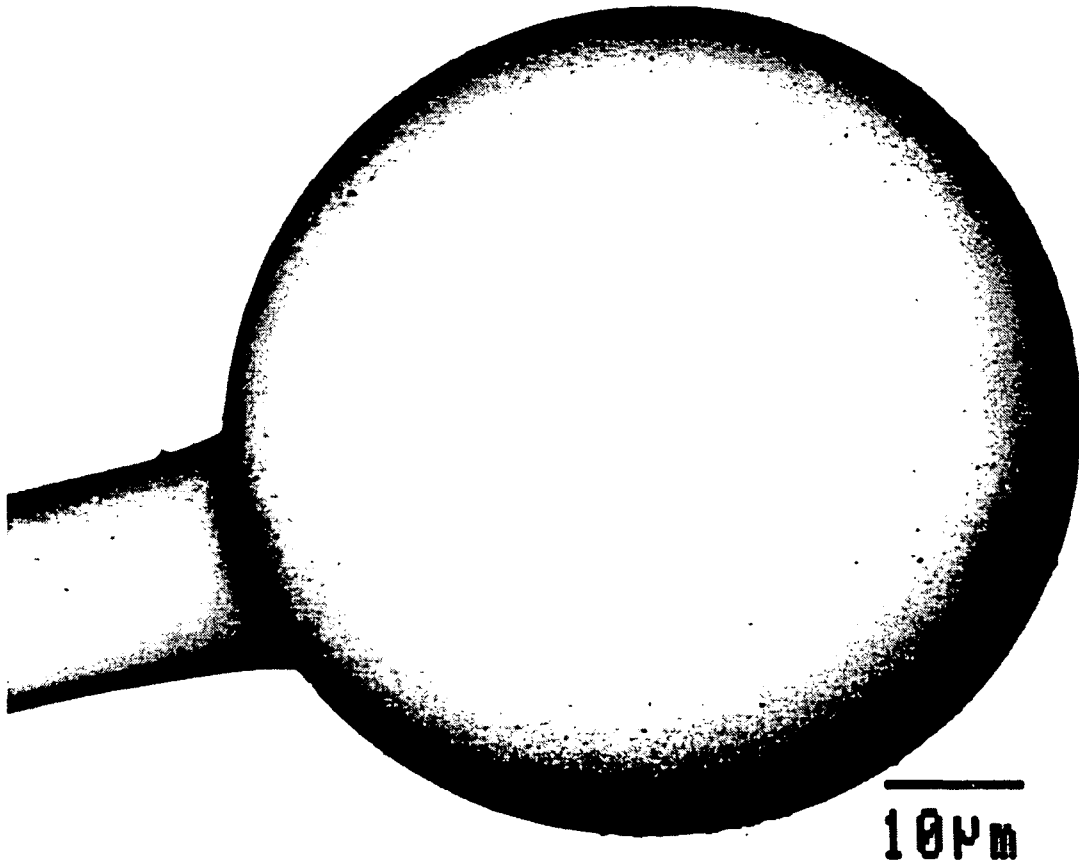


FIG. 3.2 – Photo d'une microbille de  $60 \mu\text{m}$  de diamètre, métallisée par un film d'Au-Pd. L'énergie du faisceau d'électrons a été soigneusement limitée afin de ne pas endommager la surface, et avec la résolution ultime ( $30 \text{ nm}$ ) de l'appareil utilisé, aucune rugosité n'a pu être détectée.

sous l'effet des contraintes de tension superficielle air–(silice fondue), une forme sphérique, qui minimise la surface à volume de matière donné.

Durant la fusion, deux processus entrent en compétition: l'accumulation de la silice alimentée par la fibre fondue à son extrémité, et la sublimation (décomposition de la silice en monoxyde de silicium). Expérimentalement, ces deux mécanismes conduisent à un équilibre, pour lequel le diamètre de la bille formée représente, au plus, environ 4 fois celui de la fibre ébauche et, ceci quel que soit le mode opératoire.

Les gradients de température n'induisent qu'une légère déformation elliptique, en général dans la direction de la fibre support. La symétrie axiale autour de cette fibre est ainsi conservée et les modes de galerie les mieux confinés ( $\ell = |m|$ ), situés au voisinage de l'équateur, ne sont pas perturbés par la présence de la fibre de maintien: seules importent les deux courbures principales à l'équateur.

Cette technique de fusion, développée durant la thèse de L. Collot [22, p. 74], permet l'obtention d'une structure sphérique de faible ellipticité résiduelle (typiquement 0.1%, pour une bille fondue sous pression atmosphérique) et possédant un très bon état de surface. Nous avons effectué une image d'une bille de 150  $\mu\text{m}$  de diamètre, au microscope électronique (photo de la Figure 3.2). À la résolution du microscope, d'environ 30 nm, nous n'avons pas pu détecter de rugosité de surface. On peut d'ailleurs s'attendre à une rugosité nettement inférieure à 30 nm, car la silice fondue est connue pour avoir une surface très lisse avec des défauts de taille moyenne inférieure à 1 nm [18].

### 3.1.3 La fusion par microchalumeau

Par la suite, et par souci de gain de temps sur la procédure d'alignement des faisceaux du laser  $\text{CO}_2$ , nous avons progressivement remplacé la fusion par laser, par une fusion utilisant la flamme d'un microchalumeau oxygène–(butane 82%+propane 18%). La fibre ébauche, fixée sur son support, est approchée manuellement d'une flamme d'environ 1 mm de hauteur, avec une très légère inclinaison. La bille se forme à son extrémité en prenant l'orientation du courant de gaz. Il ne reste plus qu'à la retourner dans la flamme pour la redresser. Cette technique de façonnage par approximations successives, bien qu'artisanale, conduit à d'excellents résultats et ne nécessite aucune préparation fastidieuse. Néanmoins

elle s'est avérée inadaptée à la fabrication de billes de diamètre inférieur à  $50 \mu\text{m}$ , l'alignement avec la fibre support devenant alors extrêmement critique. Par ailleurs, les ellipticités résiduelles sont plus grande qu'avec le procédé de fusion par laser  $\text{CO}_2$ , et peuvent atteindre près de 2%.

## 3.2 Dispositif de couplage aux modes de galerie

Le cœur du montage, constitué d'une enceinte à vide contenant les optiques de focalisation et les éléments nécessaires au positionnement relatif de la bille et du prisme de couplage, a été conçu et réalisé à la fin de la thèse de L. Collot [22]. Il présente quelques petits défauts, dont celui de limiter l'ajustement de l'angle d'incidence des sources lasers sur la face de couplage du prisme. De plus, pour une meilleure stabilité, il n'y pas de réglage possible de l'axe du résonateur accessible de l'extérieur, mais nous avons pu nous en accommoder dans nos expériences.

### 3.2.1 L'enceinte à vide et les micromouvements

Afin de limiter la pollution de la surface des billes par les micropoussières et le dépôt d'eau responsable de la détérioration rapide du facteur de qualité [44], les microbilles sont fondues et maintenues sous un vide de l'ordre de  $10^{-5}$  Torr, dans l'enceinte représentée sur la Figure 3.3. Cette procédure, nous a permis d'atteindre des facteurs de qualité de  $2 \cdot 10^9$  [53], et de les conserver durant plusieurs semaines. L'enceinte utilisée permet au choix, de fondre et d'étudier les billes sous vide ( $P \simeq 10^{-5}$  torr), ou sous atmosphère de gaz sec et propre. Sous vide, l'évacuation de la chaleur, qui ne peut se faire que par la fibre de maintien, s'avère peu efficace. Il en résulte de forts gradients thermiques produisant une ellipticité résiduelle importante, en général supérieure à 1%. Cependant, cette ellipticité résiduelle ne limite en rien les facteurs de qualité observés. En revanche, si nous fondons les microbilles dans l'enceinte hermétiquement close, sous une pression d'un gaz sec, tel que le diazote, légèrement supérieure à la pression atmosphérique, l'évacuation de la chaleur est beaucoup plus efficace, et l'ellipticité résiduelle nettement plus faible. C'est vers cette nouvelle technique que nous nous sommes tourné progressivement. Le mécanisme de refroidissement par convection est également très efficace pour réduire l'échauffement

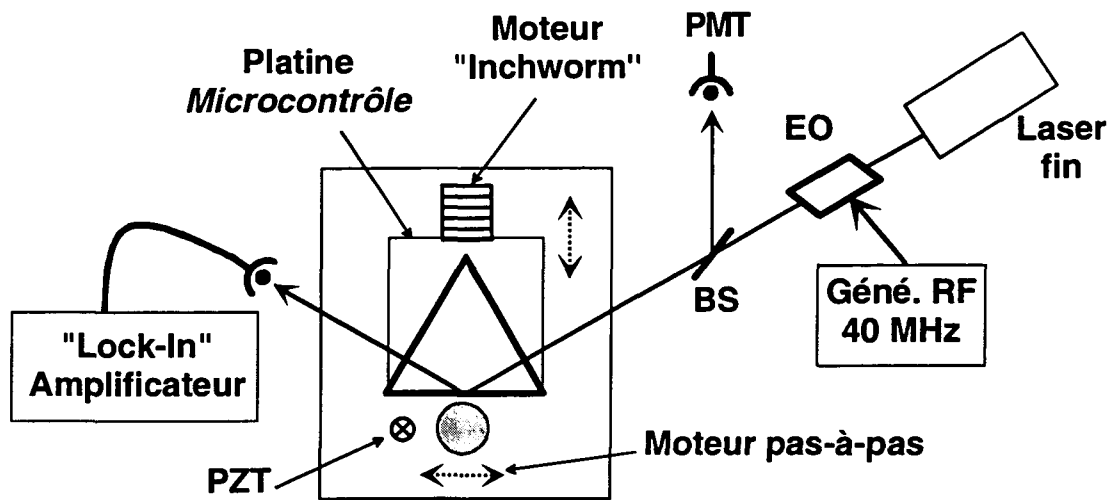


FIG. 3.3 – Montage utilisé pour l'excitation des modes de galerie de très grands facteurs de qualité. Il comporte l'enceinte à vide dans laquelle les billes sont fabriquées et conservées. L'ajustement nanométrique de la distance de la bille au prisme est réalisé à l'aide d'un moteur piézo-électrique "inchworm", contrôlé de l'extérieur par ordinateur. Nous avons juste schématisé le dispositif de spectroscopie par modulation de fréquence utilisé, et nous détaillons dans la Figure 3.4 le laser fin d'excitation.

engendré, dans le petit volume de mode, par la faible fraction absorbée de la lumière laser d'excitation d'un mode de galerie. Cet échauffement produit une dilatation ainsi qu'une variation de l'indice de réfraction, et s'accompagne d'un déplacement de la fréquence de résonance, dans le sens des longueurs d'onde croissantes. Nous verrons dans le §3.3, que ce déplacement peut perturber les mesures de largeur des résonances de galerie, si on ne prend garde à limiter la puissance couplée dans le mode.

Comme les risques de pollution sont moins importants en opérant sous vide à la fois pour fabriquer et étudier les billes, les résultats présentés dans ce chapitre ne concernent que des billes fondues et étudiées dans ces conditions.

Le couplage aux modes de galerie est assuré par un prisme, de 2.5 mm d'arête, taillé dans un verre SF11 d'indice 1.73, à 810 nm. Il repose sur une platine *Microcontrôle* (en grisé, sur la Fig.3.3) et sa distance à la bille peut être ajustée sur une plage de l'ordre de quelques millimètres avec une précision nanométrique grâce à l'utilisation d'un moteur "inchworm" piézo-électrique. Le support de la bille est monté sur le bras de levier d'un actionneur piézo-électrique (PZT) commercial permettant un réglage de la hauteur relative de la bille et du prisme sur une plage d'environ 800  $\mu\text{m}$ . Enfin, le déplacement horizontal de ce support monté sur platine *Microcontrôle* est assuré par un moteur pas-à-pas. Un ordinateur PC 386 DX40 est dédié au contrôle des différents micromouvements. Un logiciel, *Mami*, a été développé pour assurer l'interface utilisateurs. Une description plus détaillée de ce montage se trouve dans le mémoire de thèse de L. Collot [22, p. 100 et suiv.].

### 3.2.2 Le laser fin d'excitation

Afin de pouvoir sonder des modes de galerie de surtension limite jusqu'à  $Q = 10^{10}$ , la mise au point d'une source laser plus fine que 40 kHz et balayable sur 1 GHz, était nécessaire. Nous y sommes parvenus en utilisant une configuration d'injection optique inhabituelle, suggérée par André Clairon au LPTF, et étudiée durant la thèse de P. Laurent [54].

Il s'agit d'une diode laser Sharp LT024 ( $\lambda = 785 \text{ nm}$ ) montée sur réseau en configuration Littrow et stabilisée sur une cavité Fabry-Pérot confocale externe (d'une finesse de l'ordre de 100) , telle que nous l'avons schématisé sur la Figure 3.4. Le miroir placé à l'entrée du

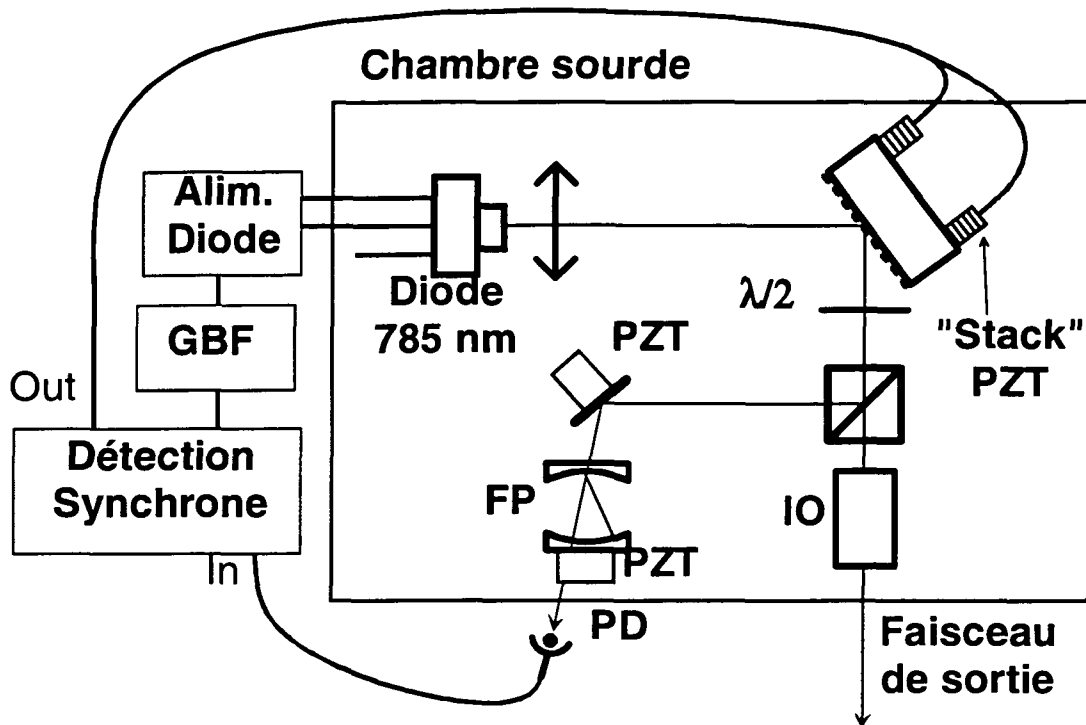


FIG. 3.4 – Détails du laser *fn* utilisé pour la spectroscopie de haute résolution des modes de galerie. Un asservissement électronique sur le maximum d'une résonance de la cavité Fabry-Pérot (FP), permet d'obtenir un affinement spectral ( $\Delta\nu_{\text{laser}} = 30 \text{ kHz}$ ), ainsi qu'une meilleure stabilité à moyen terme, par rapport à une simple diode montée sur réseau. Ce dispositif est accordable en fréquence sur environ 0.5 GHz, en modifiant la longueur de la cavité Fabry-Pérot à l'aide du tube piézo-électrique (PZT) monté sur l'un de ses miroirs.

Fabry-Pérot est monté sur une cale piézoélectrique, qui permet de contrôler la phase du champ émergeant de la cavité Fabry-Pérot, avant de le réinjecter dans la diode laser et d'optimiser la stabilité de l'asservissement. Mais la stabilisation optique passive de la diode sur le Fabry-Pérot, n'est pas suffisante pour contrarier l'effet du réseau lorsque celui-ci est déplacé pour assurer le balayage en fréquence. Une stabilisation électronique active s'avère nécessaire. Pour ce faire, nous modulons faiblement le courant de la diode laser (à une fréquence de l'ordre de 10 kHz), ce qui produit essentiellement une modulation de fréquence. Une photodiode (PD) permet de suivre la transmission du Fabry-Pérot. À l'aide d'une détection synchrone, nous pouvons extraire un signal d'erreur proportionnel à l'écart entre la fréquence de la diode et le maximum d'une résonance de la cavité Fabry-Pérot. Ce signal sert alors à rétroagir sur les empilements de cales piézo-électriques sur lesquels est monté le réseau, assurant ainsi l'asservissement de la diode laser sur la résonance du Fabry-Pérot. La fréquence du laser peut alors être balayée en changeant la longueur de la cavité Fabry-Pérot "maître" à l'aide d'un tube piézo-électrique sur lequel est collé l'un de ses miroirs.

Nous obtenons ainsi une plage de balayage sans saut de mode du laser, d'environ 1 GHz. De plus, la largeur spectrale, mesurée à l'aide de la technique d'autohétérodynage décrite dans le §4.7, est de l'ordre de 30 kHz, ce qui correspond à un affinement d'un facteur 2 à 3 par rapport à la diode simplement montée sur réseau.

Nous disposons ainsi d'une source laser fine suffisamment accordable pour étudier des résonances de grandes surtensions, mais la recherche préliminaire de la fréquence d'une résonance nécessite une plus grande plage de balayage (de l'ordre de l'écart moyen entre modes quelconques soit 30 GHz). C'est pourquoi nous avons également eu recours à une deuxième diode laser d'analyse (modèle Sharp-LT021,  $\lambda = 785$  nm, puis SDL-5411G1,  $\lambda = 811$  nm,  $P = 100$  mW), montée sur réseau dans la configuration Littrow. L'accord de cette diode est réalisé en changeant la longueur de la cavité externe, qui impose la longueur d'onde d'émission. L'angle d'incidence sur le réseau, initialement optimisé pour réinjecter dans la diode l'ordre 1 de diffraction, à une certaine longueur d'onde de travail, n'est plus optimum dès que le réseau commence à être translaté parallèlement à sa normale, ce qui réduit la plage d'accrochage, et provoque un saut de mode. Pour étendre la plage de balayage, il faut simultanément compenser la variation d'angle d'incidence optimum par



une rotation du réseau. Deux empilements de cales piézo-électriques, alimentés en polarités opposées, ont été intégrés dans deux des vis micrométriques d'une monture de miroir très stable point-trait-plan *Lees*, afin d'assurer une rotation autour d'un axe vertical. Le réseau a été ensuite collé sur cette monture.

Cette configuration des cales piézoélectriques permet de balayer la fréquence du laser, sans saut de mode, sur environ 25 GHz. Enfin, nous pouvons également compenser le déplacement de la longueur d'onde relativement au maximum de la courbe de gain du milieu amplificateur, en ajustant simultanément le courant d'injection de la diode. La plage de balayage sans saut de mode est alors étendue à environ 30 GHz.

### 3.3 Doublets de modes de très grande finesse

Lorsque le laser sonde est balayé autour d'une résonance de galerie, nous avons montré dans le Chapitre 2, que le faisceau émergent du prisme résulte de la superposition cohérente du faisceau incident réfléchi et de celui qui sort de la bille, et présente une résonance lorentzienne en absorption, se manifestant dans le spectre par un "dip" dont l'amplitude est proportionnelle aux pertes subies par le champ dans le résonateur.

En principe, la profondeur du "dip" devrait pouvoir suffire à caractériser l'efficacité du couplage au mode de galerie étudié et sa largeur spectrale permettre une mesure des pertes intrinsèques lorsque la bille est suffisamment éloignée du prisme. Néanmoins, nous observons couramment une déformation du profil lorentzien de résonance dû à un phénomène de bistabilité lié au chauffage de la cavité par le laser sonde [*infra* §3.2.1][43][22, p.121 et suiv.]. Cet effet parasite, d'autant plus marqué que le facteur de qualité est élevé, peut-être nettement réduit en diminuant l'intensité du laser sonde, mais aus dépens du rapport signal/bruit de détection de la résonance. En effet, dans le régime linéaire des faibles puissances intracavité (régime dit de "sous-couplage"; voir le Chapitre 2) la résonance en absorption se manifeste par un signal de très faible amplitude, d'environ  $10 \mu\text{W}$ , sur un "fond blanc" de l'ordre de quelques mW. C'est alors le "bruit technique" basse fréquence en  $1/f$  qui limite la sensibilité de détection. Pour s'en affranchir, on peut appliquer une petite modulation d'amplitude de basse fréquence (par ex. 10 kHz) sur le courant d'injection de la diode sonde, puis extraire le signal de résonance, à la fréquence de modulation

avec une détection synchrone. Mais nous avons préféré une *spectroscopie par modulation de fréquence (FM)*, plus sensible encore, dans laquelle la phase du champ laser incident est modulée à une fréquence RF (environ 40 MHz). Le nouveau banc de mesure, reposant sur cette technique, et mis au point par L. Collot, a permis la mesure de facteurs de qualité supérieurs à  $10^9$  [43].

Nous nous limitons, dans le paragraphe suivant, à une présentation succincte du principe de la spectroscopie FM, et des signaux de résonances obtenus pour les modes de galerie, dont nous justifions l'allure dans l'Annexe C.

### 3.3.1 Détection des modes par spectroscopie FM

Le montage de spectroscopie par modulation de fréquence, schématisé dans l'Annexe C, et reproduit également sur la Fig.3.3, comporte un modulateur électro-optique (EO), alimenté par un générateur RF, modulant la phase du faisceau laser sonde à la pulsation  $\Omega_{\text{RF}} = 2\pi \times 40 \text{ MHz}$ .

À la fréquence centrale du laser s'ajoutent deux bandes latérales à  $\pm\Omega_{\text{RF}}$ , d'amplitudes  $\pm J_1(M) \simeq \pm M/2$ , où  $M \ll 1$  représente l'indice de modulation (suffisamment petit pour que les modulations aux fréquences harmoniques soient négligeables), et  $J_1$  la fonction de Bessel cylindrique du premier ordre. En l'absence de modulation d'amplitude parasite, leurs contributions se compensent parfaitement, de telle sorte qu'aucune modulation d'intensité n'apparaît à la fréquence de modulation  $\Omega_{\text{RF}}$ , si aucun élément "parasite" sélectif en fréquence n'est interposé entre la sortie du modulateur et le photodétecteur rapide (PD) (ampli *Analog Modules* modèle 712A-1, équipé d'une photodiode Si rapide, fréquence de coupure à 70 MHz). Cette compensation disparaît, lorsque l'une des bandes latérales du faisceau sonde modulé est couplée à une résonance de galerie. Le photodétecteur mesure alors les battements entre la porteuse du faisceau réfléchi sur le prisme et la bande latérale du faisceau sortant de la bille, atténuée et déphasée par la résonance, comme nous l'avons schématisé sur la Figure 3.5. De même, si la porteuse est couplée à la résonance: le faisceau sortant de la bille à cette fréquence, qui a subi un déphasage et une atténuation, produit, avec les bandes latérales du faisceau réfléchi sur le prisme, des signaux de battements qui ne se compensent pas sauf au maximum de la résonance, seul cas de figure symétrique.

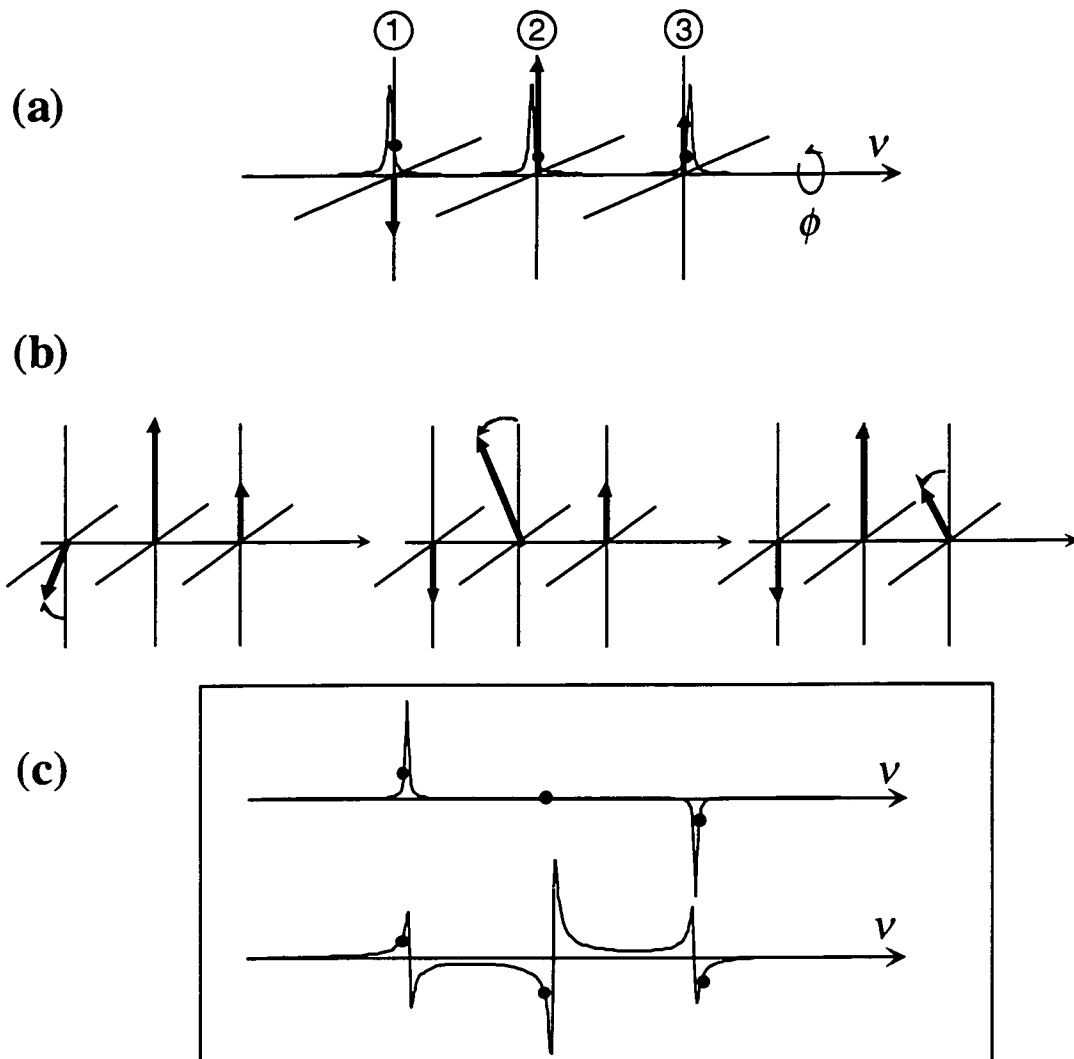


FIG. 3.5 – Schéma de principe de la spectroscopie par modulation de fréquence. (a) spectre du laser sonde modulé, présentant autour de la porteuse deux bandes latérales de même intensité, en opposition de phase, dont les battements avec la porteuse se compensent sur le détecteur, en l'absence de la cavité. (b) effets de la résonance de galerie sur le spectre du champ sortant de la bille, lorsque la fréquence du laser est balayée autour de la fréquence de résonance, déphasant et atténuant successivement l'une et l'autre des deux bandes latérales. (c) deux quadratures du signal de spectro-FM résultant du balayage du laser sonde autour d'une résonance de galerie. Les points correspondent aux positions de la résonance de galerie reportées sur (a).

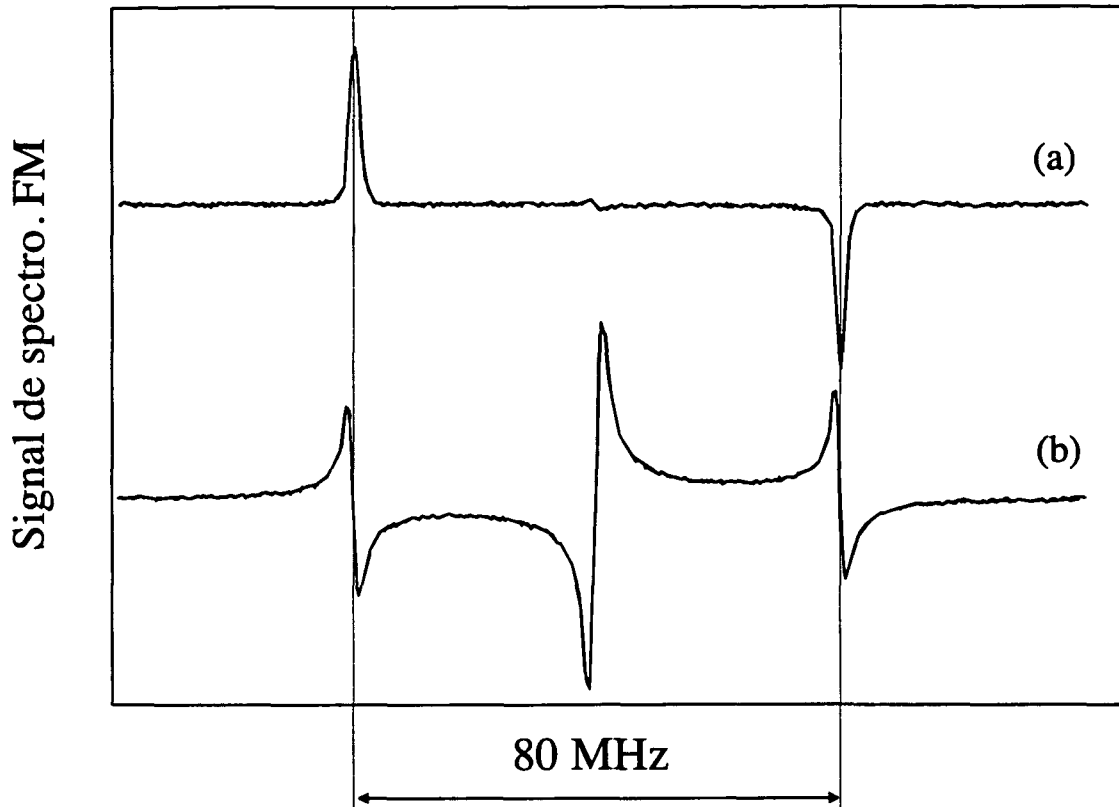


FIG. 3.6 – Signaux typiques d'une résonance de galerie en spectroscopie FM. La forme de ces signaux est justifiée dans l'Annexe C. La quadrature d'allure dispersive présente un "triplet" de résonances, formé d'une raie centrée sur la fréquence de résonance du mode et de deux bandes latérales d'intensité moitié séparées de  $2\Omega_{RF} = 2\pi \times 80 \text{ MHz}$ . Le facteur de qualité de ce mode vaut environ  $2 \times 10^8$

Dans les deux cas cités, la démodulation des battements par la détection synchrone produit deux types de signaux de résonance: un doublet de forme lorentzienne en absorption séparé de  $2\Omega_{RF}$ , et un triplet de forme dispersive (Fig.3.5(c)), suivant le choix de phase relative entre le modulateur RF et le signal quadratique détecté. La forme analytique de ces signaux est donnée dans l'Annexe C. L'enregistrement de la Figure 3.6 illustre ce résultat lorsque la profondeur de modulation est de l'ordre de 10%. La déformation résiduelle du triplet dispersif par rapport aux courbes théoriques de la Figure C.2 provient d'une modulation d'amplitude parasite, de même que le "résidu" dispersif à la fréquence nulle, sur le spectre en absorption.

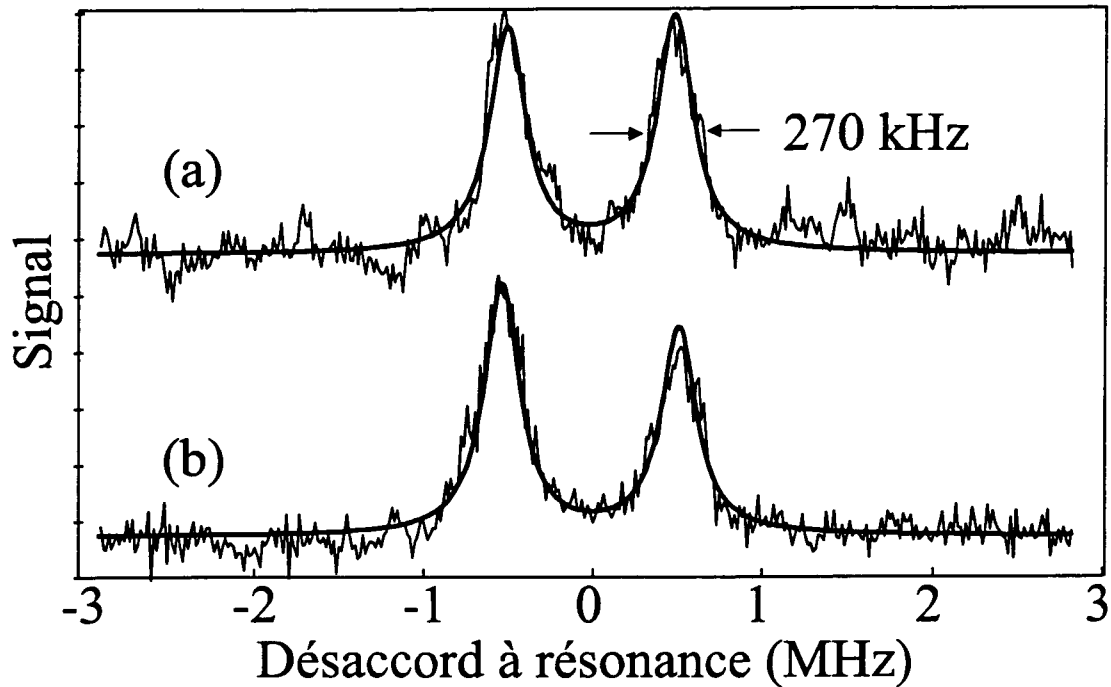


FIG. 3.7 – Doublet de modes séparés de 1 MHz. La largeur de chaque mode est de l'ordre de 270 kHz correspondant à un facteur de qualité  $Q = 1.4 \times 10^9$

### 3.3.2 Observation de doublets de très bons facteurs de qualité

La Figure 3.7 est enregistrée pour une distance bille–prisme conduisant à un élargissement important du mode observé. Les facteurs de qualité intrinsèques sont mesurés en reculant la bille suffisamment. En isolant l'une des composantes des signaux de spectroscopie FM, on observe alors que les résonances possédant des facteurs de qualité  $Q > 10^8$ , présentent une structure en doublet [53]: chacune des composantes du triplet d'un spectre de spectroscopie FM tel que celui de la Fig.3.6, se dédouble en deux raies identiques séparées d'environ 1 MHz. L'enregistrement de la Figure 3.7(a) représente, pour l'une des deux bandes latérales, la quadrature en absorption du signal de spectro-FM. Chaque composante du doublet est bien décrite par une lorentzienne, dont la largeur est de l'ordre de 270 kHz, ce qui correspond à un facteur de qualité  $Q = 1.4 \times 10^9$ , parmi les plus élevés atteints dans le domaine optique. Nous avons reproduit, à de multiples reprises, des facteurs de qualité de l'ordre de  $2 \times 10^9$ . Cette valeur "butoir" dans notre mode opératoire, peut être due soit à l'absorption par un mince film d'eau, invoquée comme facteur limitant à

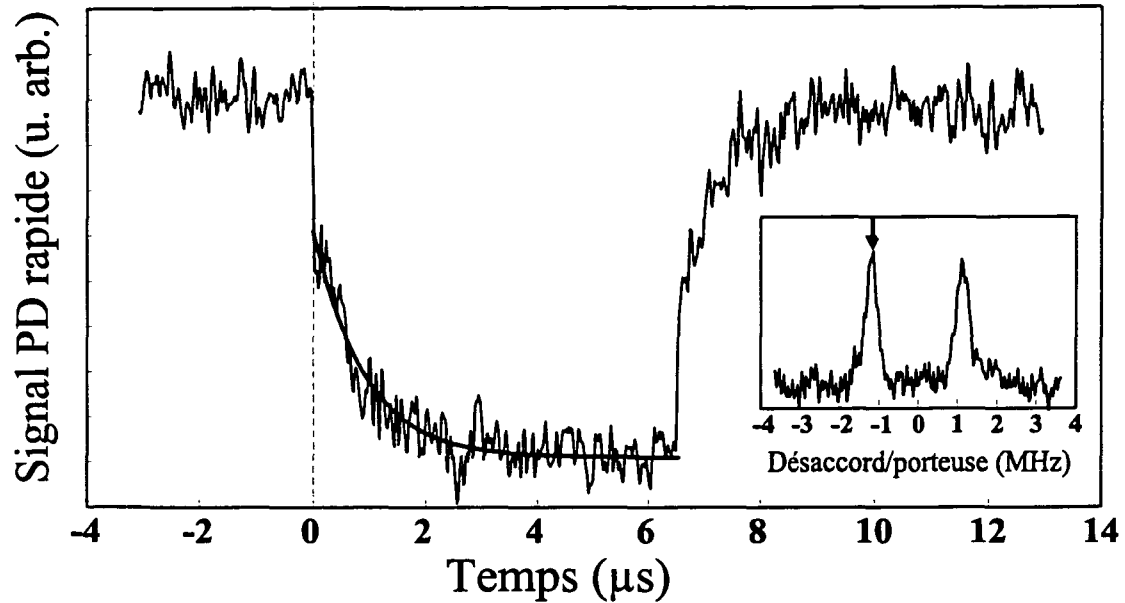


FIG. 3.8 – *Signal de décroissance temporelle de l'énergie stockée dans un mode de galerie. L'une des bandes latérales du laser sonde est asservi sur l'une des composantes (marquée d'une flèche) d'un doublet de largeur  $\Delta\nu_{mode}=350$  kHz, puis la modulation RF est brutalement éteinte. L'énergie emmagasinée dans le mode disparaît avec une constante de temps  $\tau_{cav}=0.900$   $\mu$ s, qui est en parfait accord avec la durée prédite par la relation:  $\Delta\nu_{mode} = 1/2\pi\tau_{cav}$ .*

court terme par Gorodetsky *et al.* [44] dans des billes de 500  $\mu$ m de diamètre, soit à la rugosité de surface résiduelle (*cf.* §1.5).

### 3.3.3 Mesure du taux d'amortissement de l'énergie dans le mode

Pour confirmer indépendamment les valeurs très élevées des facteurs de qualité mesurés par la technique de spectroscopie FM, et exclure tout élargissement instrumental, tel que celui dû à la largeur de la diode sonde, nous avons mis au point une technique de mesure du taux de décroissance de l'énergie dans un mode de galerie. Étant donné que la contribution du champ issu de la bille à l'intensité du faisceau sortant est inférieure à  $10^{-4}$ , lorsque l'on veut mesurer des facteurs de qualité supérieurs à  $10^9$ , on ne peut se contenter de simplement moduler l'intensité du faisceau exciteur. Le temps de récupération de la

photodiode est alors trop long pour observer la décroissance du champ de la bille.

La technique de mesure par décroissance temporelle retenue, dérive de la spectroscopie FM. L'une des bandes latérales du faisceau sonde est asservie sur l'une des composantes du doublet d'une résonance de galerie (celle marquée d'une flèche dans l'encart de la Figure 3.8, à l'aide du signal dispersif de la détection synchrone. Dès que la modulation RF est éteinte, grâce à un signal en créneaux (flanc montant en moins d'une ns), contrôlé par une modulation TTL, le champ intracavité s'amortit avec la constante de temps d'amortissement  $2\tau_{\text{cav}}$ . Une fraction de ce champ se recouple au prisme en sortie. Le photodétecteur rapide mesure la superposition entre le champ du mode recouplé oscillant à sa fréquence propre, en train de s'amortir, et la porteuse réfléchiée d'amplitude quasiment constante. De cette façon l'intensité moyenne reçue par le photodétecteur reste pratiquement constante. La démodulation à  $\Omega_{\text{RF}}$ , permet alors d'extraire l'enveloppe exponentielle des battements entre le champ du mode et le champ incident, et de mesurer le temps de décroissance  $2\tau_{\text{cav}}$ . La fréquence de modulation RF de 40 MHz, que nous utilisons permet ainsi la mesure des facteurs de qualité des résonances de largeurs  $\Delta\nu_{\text{mode}} \ll 40$  MHz, soit typiquement de moins d'un MHz, correspondant à  $Q > 10^8$ .

L'enregistrement de la Figure 3.8 correspondant à la moyenne de 20000 coups, donne un temps de décroissance  $2\tau_{\text{cav}} = 0.900 \mu\text{s}$ , en parfait accord avec la largeur  $\Delta\nu_{\text{mode}} = 350$  kHz mesurée indépendamment par la spectro-FM de balayage (voir encart de la Fig.3.8), puisqu'il satisfait la relation  $\Delta\nu_{\text{mode}} = 1/2\pi \tau_{\text{cav}}$  (largeur à mihauteur). Le facteur de qualité vaut dans ce cas  $Q = 1.1 \times 10^9$ .

Revenons à présent à l'observation systématique des doublets de modes, que nous n'avons pas encore expliquée. Dans le paragraphe suivant, nous proposons un modèle, invoquant le couplage des champs associés aux deux modes qui tournent en sens contraires dans la cavité, et qui sont initialement dégénérés.

### 3.4 Modèle de modes couplés pour les doublets

Dans ce qui précède, nous avons vu que la légère ellipticité des microbilles que nous fabriquons levait la dégénérescence en  $m$  à l'intérieur d'une multiplicité  $n, \ell$  donnée (*cf.* §1.1.2). À ce stade, il subsiste encore une dégénérescence ultime entre les modes contra-

propageants associés à des valeurs opposées de  $m$ . Cette dégénérescence, dite de Kramers, est souvent considérée dans la littérature comme une caractéristique "incontournable" des modes de galerie, tels qu'ils sont observés dans les gouttelettes (voir par exemple [55]).

Au cours de nos expériences, nous avons vérifié que la séparation des doublets était indépendante de l'énergie couplée dans la bille, ce qui exclut tout effet non linéaire tel que l'effet Kerr par exemple.

Pour interpréter ce dédoublement, nous avons fait appel à un processus de rétrodiffusion interne, analogue à celui qui se produit dans une fibre sous l'effet de diffuseurs microscopiques indépendants (impuretés résiduelles ou inhomogénéités de densité), répartis aléatoirement dans la silice et de taille caractéristique très inférieure à la longueur d'onde  $\lambda$ . Le champ incident sur de tels dipôles subit alors une diffusion de Rayleigh dans toutes les directions et en particulier vers l'arrière. Dans une microbille, ce processus provoque un couplage entre les modes  $+m$  et  $-m$ , et lève alors leur dégénérescence.

Le champ contrapropageant se construit néanmoins sur une échelle de temps de l'ordre de  $\tau_{\text{cav}}$ , temps d'amortissement de l'énergie dans la cavité. Il ne peut donc s'établir que si la période d'échange de l'énergie entre les deux modes initialement dégénérés du champ est courte devant ce temps d'amortissement, ce qui explique pourquoi nous n'avons observé le dédoublement des modes que lorsque le facteur de qualité est supérieur à  $10^8$ .

Dans les laser à fibres en anneau (voir par exemple [56]), ce phénomène de rétrodiffusion a notamment permis d'observer un dédoublement de raie laser. Par ailleurs, dans les fibres optiques de silice, l'atténuation par diffusion Rayleigh a pu être mesurée ( $\simeq 2\text{dB/km}$ ) [52], et s'avère être compatible avec nos observations expérimentales. Nous concluons en comparant nos observations aux mesures effectués dans les fibres.

### 3.4.1 Couplage par rétrodiffusion Rayleigh dans une microbille

Notons  $\mathbf{E}^+$  et  $\mathbf{E}^-$  les champs se propageant en sens contraires dans la microsphère et qui, initialement sont associés à un seul mode de galerie dégénéré caractérisé par les nombres  $n, l, \pm m$ . Le champ total dans la sphère résulte de la superposition de ces deux champs. On s'intéresse à des solutions des équations de Maxwell donnant un champ oscillant à la pulsation  $\omega$ . Cette pulsation apparaîtra plus tard comme la pulsation du champ



extérieur utilisé pour exciter un mode en régime forcé.

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \mathbf{E}^+(\mathbf{r},t) + \mathbf{E}^-(\mathbf{r},t) = E_0^+(t)\mathbf{f}^+(\mathbf{r})e^{-i\omega t} + E_0^-(t)\mathbf{f}^-(\mathbf{r})e^{-i\omega t}.$$

Les fonctions  $E_0^+(t)$  et  $E_0^-(t)$ , représentent les enveloppes lentement variables du champ à l'échelle de temps de la période d'excitation  $2\pi/\omega$ .

Les fonctions  $\mathbf{f}^+(\mathbf{r})$  et  $\mathbf{f}^-(\mathbf{r})$  prennent en compte la structure spatiale des modes  $n,l,\pm m$ , à savoir leur dépendance spatiale et leur polarisation. Elles ne diffèrent que par le facteur  $e^{\pm im\phi}$ , de sorte que  $\mathbf{f}^+(\mathbf{r})^* = \mathbf{f}^-(\mathbf{r})$ , et satisfont les conditions d'orthonormalisation suivantes :

$$\begin{aligned} \int \mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}^{\pm*}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= \mathcal{V} \\ \int \mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{f}^{\mp*}(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} &= 0, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{V}$  représente le volume du mode considéré  $n,l,\pm m$ . Par ailleurs, ces fonctions satisfont l'équation de Helmholtz :

$$\Delta \mathbf{f}^\pm + N^2 \frac{\omega_{n,l,m}^2}{c^2} \mathbf{f}^\pm = 0,$$

où  $\omega_{n,l,m}$  est la pulsation de résonance des deux modes initialement dégénérés repérés par  $n,l,\pm m$ . Nous supposons que le couplage entre modes reste suffisamment faible pour n'entraîner aucune modification de la structure des modes.

Le champ total  $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$  dans la sphère satisfait l'équation de propagation dans la silice, milieu diélectrique d'indice  $N$ :

$$\left( \Delta - \frac{1}{(c/N)^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \right) \mathbf{E}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{\varepsilon_0 c^2} \frac{d^2 \mathbf{P}(\mathbf{r},t)}{dt^2}, \quad (3.1)$$

Le second membre représente un terme source produit par les diffuseurs considérés, que le champ modifie aussi en retour. Nous supposons ici que la densité de polarisation  $\mathbf{P}(\mathbf{r},t)$  induite par le champ agissant sur les dipôles élémentaires placés en  $\mathbf{r}_k$ , vaut:

$$\mathbf{P}(\mathbf{r},t) = \sum_k \varepsilon_0 \underline{\underline{\alpha}}_k \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r},t) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k). \quad (3.2)$$

où  $\underline{\underline{\alpha}}_k$  représente le tenseur de polarisabilité du centre diffuseur  $k$  responsable du couplage entre modes. Cette densité de polarisation ne représente que la contribution des dipôles perturbant la structure de la silice, considérée comme un milieu homogène isotrope: les dipôles responsables de son indice sont déjà pris en compte. Notons par ailleurs, que l'équation suppose que la polarisation induite possède à chaque instant sa valeur stationnaire,

et évolue donc rapidement à l'échelle de temps d'évolution du champ dans la cavité. Cette approximation est justifiée tant que l'on excite le dipôle à une fréquence éloignée de toute résonance.

Les modes TE et TM associés aux mêmes valeurs des indices  $n, \ell$  et  $m$ , étant bien séparés en fréquence, nous ne retiendrons que la composante du tenseur *parallèle au champ électrique* de polarisabilité, notée simplement<sup>1</sup>  $\alpha_k$ , pour le centre diffuseur  $k$ . Ceci ne préjuge en rien du fait que la polarisabilité des centres diffuseurs individuels ne soit pas forcément isotrope.

Faisons maintenant le produit scalaire de l'équation d'onde (3.1) par le complexe conjugué de la fonction du mode  $\mathbf{f}^{\pm*}(\mathbf{r})$ , et intégrons sur tout l'espace. Nous obtenons, en utilisant la normalisation des fonctions  $\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{r})$  et après simplification du membre de gauche :

$$\begin{aligned} & \left[ -\omega_{n,\ell}^2 E_0^{\pm} - \left( -\omega^2 E_0^{\pm} - 2i\omega \frac{dE_0^{\pm}}{dt} + \frac{d^2 E_0^{\pm}}{dt^2} \right) \right] e^{-i\omega t} \\ & = \frac{1}{\mathcal{V}\varepsilon_0} \frac{d^2 P^{\pm}(t)}{dt^2}, \end{aligned} \quad (3.3)$$

où nous avons posé  $P^{\pm}(t) \equiv \int \mathbf{P}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{r})^* d^3 \mathbf{r}$  que l'on peut développer :

$$P^{\pm}(t) = e^{-i\omega t} \sum_k \varepsilon_0 \alpha_k \left( E_0^{\pm}(t) |\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{r}_k)|^2 + E_0^{\mp}(t) \mathbf{f}^{\mp}(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{f}^{\pm*}(\mathbf{r}_k) \right).$$

Le premier terme dans  $P^{\pm}(t)$  conduit à un déplacement de la fréquence de résonance identique pour les deux modes dégénérés  $\pm m$ , et correspond à l'effet d'indice des centres diffuseurs, tandis que le deuxième terme donne le couplage entre ces deux modes par leur recouvrement spatial, et va produire la levée de dégénérescence entre les modes.

Nous faisons ensuite l'approximation de *l'enveloppe lentement variable* qui consiste à négliger  $d^2 E_0^{\pm}/dt^2$  devant les autres termes  $\omega^2 E_0^{\pm}$  et  $-2i\omega dE_0^{\pm}/dt$ , dans l'expression (3.3), qui devient alors, pour le membre de gauche :

$$\left[ (\omega^2 - \omega_{n,\ell}^2) E_0^{\pm} + 2i\omega \frac{dE_0^{\pm}}{dt} \right] e^{-i\omega t} = \frac{1}{\varepsilon_0 \mathcal{V}} \frac{d^2 P^{\pm}}{dt^2}. \quad (3.4)$$

La même approximation permet également de simplifier le membre de droite:

$$\frac{d^2 P^{\pm}}{dt^2} \simeq -\omega^2 e^{-i\omega t} \sum_k \varepsilon_0 \alpha_k \left( E_0^{\pm} |\mathbf{f}^{\pm}(\mathbf{r}_k)|^2 + E_0^{\mp} \mathbf{f}^{\mp}(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{f}^{\pm*}(\mathbf{r}_k) \right).$$

---

1.  $\alpha_k$  est donc un scalaire.

Nous obtenons finalement en reportant cette expression dans (3.4):

$$(\omega^2 - \omega_{n,l}^2)E_0^\pm + 2i\omega \frac{dE_0^\pm}{dt} = -\omega^2 \sum_k \frac{\alpha_k}{\mathcal{V}} |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)|^2 E_0^\pm - \omega^2 \sum_k \frac{\alpha_k}{\mathcal{V}} \mathbf{f}^\mp(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{f}^{\pm*}(\mathbf{r}_k) E_0^\mp.$$

Si nous supposons que la pulsation du champ excitateur  $\omega$  est voisine de la pulsation de résonance  $\omega_{n,l}$ , alors  $\omega^2 - \omega_{n,l}^2 \simeq 2\omega(\omega - \omega_{n,l})$  et il s'ensuit :

$$(\omega - \omega_{n,l})E_0^\pm + i \frac{dE_0^\pm}{dt} = \delta\omega E_0^\pm + \Delta\omega^\pm E_0^\mp, \quad (3.5)$$

où  $\delta\omega \equiv -\frac{\omega}{2} \sum_k \frac{\alpha_k}{\mathcal{V}} |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)|^2$ , correspond au déplacement en fréquence dû à l'effet d'indice des dipôles, et  $\Delta\omega^\pm \equiv -\frac{\omega}{2} \sum_k \frac{\alpha_k}{\mathcal{V}} \mathbf{f}^\mp(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{f}^{\pm*}(\mathbf{r}_k)$  représente la *levée de dégénérescence* due au couplage entre les modes. Les écarts  $\Delta\omega^+$  et  $\Delta\omega^-$  sont des quantités complexes et sont conjuguées entre elles. Écrivons alors  $\Delta\omega^\pm = e^{\pm i\phi} |\Delta\omega|$ , où  $\phi$  est une phase liée à la répartition des diffuseurs dans le champ du mode. Cette phase n'est pas mesurable<sup>2</sup>, nous l'éliminons donc dans notre calcul, en redéfinissant les enveloppes lentement variables selon  $E_0^\pm \rightarrow E_0^\pm e^{\pm i\phi/2}$ . L'expression du module  $|\Delta\omega|$ , peut en outre être précisée:

$$|\Delta\omega| = \frac{\omega}{2} \frac{1}{\mathcal{V}} \left[ \sum_{j,k} \alpha_j \alpha_k \mathbf{f}^-(\mathbf{r}_j) \cdot \mathbf{f}^{+*}(\mathbf{r}_j) \mathbf{f}^+(\mathbf{r}_k) \cdot \mathbf{f}^{-*}(\mathbf{r}_k) \right]^{1/2}.$$

Pour un grand nombre de dipôles répartis aléatoirement, la somme sur les contributions croisées associées à des dipôles localisés dans des sites  $\mathbf{r}_j$  et  $\mathbf{r}_k$  avec  $j \neq k$ , s'annule et il reste:

$$|\Delta\omega| = \frac{\omega}{2} \frac{1}{\mathcal{V}} \left[ \sum_k \alpha_k^2 |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)|^4 \right]^{1/2}, \quad (3.6)$$

qui devient, après en avoir simplifié l'écriture, en introduisant une polarisabilité moyenne  $\bar{\alpha} = \left( \frac{1}{N} \sum_k \alpha_k^2 |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)|^4 \right)^{1/2}$ :

$$|\Delta\omega| = \frac{1}{2} \omega \left( \frac{\rho_{ac} \bar{\alpha}^2}{\mathcal{V}} \right)^{1/2},$$

relation dans laquelle  $\rho_{ac}$  représente la densité moyenne de centres diffuseurs dans le mode considéré.

---

2. On pourrait cependant peut-être la mesurer par les techniques de cartographie, en champ proche, du champ d'un mode que Nicolas Dubreuil a développé durant sa thèse [48].

Les équations des modes couplées pour les enveloppes  $E_0^+(t)$  et  $E_0^-(t)$  sont alors de la forme:

$$\begin{cases} \frac{dE_0^+}{dt} = i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l})E_0^+ - i|\Delta\omega|E_0^- \\ \frac{dE_0^-}{dt} = i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l})E_0^- - i|\Delta\omega|E_0^+ \end{cases} \quad (3.7)$$

où nous avons posé  $\tilde{\omega}_{n,l} \equiv \omega_{n,l} + \delta\omega$ , qui est la pulsation du mode renormalisée par l'effet d'indice des impuretés ou des défauts. Il s'agit des équations d'évolution de deux oscillateurs harmoniques, initialement dégénérés couplés, dont les *modes propres* d'oscillation libre ( $E_{in} = 0$ ), sont donnés par la superposition linéaire des champs propageant et contre-propageant  $\mathcal{E}_\pm(t) \equiv E_0^\pm(t) \pm E_0^\mp(t)$ . Ces modes propres obéissent aux équations d'évolution temporelles découplées:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}_+}{dt} = i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l}) - i|\Delta\omega|\mathcal{E}_+ \\ \frac{d\mathcal{E}_-}{dt} = i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l}) + i|\Delta\omega|\mathcal{E}_- \end{cases} \quad (3.8)$$

Jusqu'à présent nous avons délibérément omis l'atténuation du champ due aux pertes intrinsèques de la cavité ou par couplage à l'extérieur. Pour en tenir compte de façon phénoménologique, il nous suffit d'ajouter un taux de pertes en  $-\left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right)E_0^\pm$ , dans le membre de droite des équations précédentes, dans lequel, comme dans le Chapitre II,  $\gamma_A/2$  représente le taux de pertes intrinsèque de l'amplitude du champ (par 'A'bsorption majoritairement) et  $\gamma_C/2$  le taux de perte dû à la présence d'un coupleur externe. Nous introduisons également un taux de couplage en entrée noté  $\gamma_{in}/2$ .

Nous supposons que le champ source excite le mode se propageant dans la cavité dans le sens +. Notons  $E_{in}$  le champ incident à la pulsation  $\omega$ , sur la face interne du prisme. Si nous traitons symétriquement le couplage à l'entrée et à la sortie, les *équations couplées de taux* pour les enveloppes lentement variables sont finalement données par :

$$\begin{cases} \frac{dE_0^+}{dt} = \left[ i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l}) - \left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right) \right] E_0^+ - i|\Delta\omega|E_0^- + \gamma_{in}E_{in} \\ \frac{dE_0^-}{dt} = \left[ i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l}) - \left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right) \right] E_0^- - i|\Delta\omega|E_0^+ \end{cases} \quad (3.9)$$

et pour les modes propres  $\mathcal{E}_+$  et  $\mathcal{E}_-$ , ce système se découple en:

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{E}_+}{dt} = \left[ i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l} - |\Delta\omega|) - \left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right) \right] \mathcal{E}_+ + \gamma_{in}E_{in} \\ \frac{d\mathcal{E}_-}{dt} = \left[ i(\omega - \tilde{\omega}_{n,l} + |\Delta\omega|) - \left(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}\right) \right] \mathcal{E}_- + \gamma_{in}E_{in} \end{cases} \quad (3.10)$$

Ainsi, le couplage lève la dégénérescence entre les deux modes  $\pm m$  et les modes propres oscillent librement aux pulsations  $\omega_{\pm} = \tilde{\omega}_{n,l} \pm |\Delta\omega|$ , en l'absence de pertes. La pulsation  $\Omega$  associée à la levée de dégénérescence vaut donc:

$$\Omega \equiv 2|\Delta\omega| = \omega \left( \frac{\rho_{sc} \bar{\alpha}^2}{\mathcal{V}} \right)^{1/2}. \quad (3.11)$$

### 3.4.2 Ordre de grandeur de la levée de dégénérescence entre modes couplés

Dans les fibres optiques, la diffusion de Rayleigh se manifeste par une atténuation du signal le long de la fibre car le champ est aussi diffusé dans un continuum en dehors des modes propagatifs confinés. Ces mesures d'atténuation nous permettent alors d'accéder à la densité  $\rho_{sc}$  de centres diffuseurs que l'on supposera être identique dans nos microsphères de silice.

Le coefficient d'atténuation  $\alpha_s$  par diffusion de Rayleigh [57] est donné par:

$$\alpha_s = \frac{8\pi^3}{3} \frac{\rho_{sc} \bar{\alpha}^2}{\lambda^4}. \quad (3.12)$$

Les mesures effectuées dans les fibres conduisent, dans l'infrarouge proche à  $\alpha_s \simeq 2$  dB/km . Supposons que les dipôles responsables de cette atténuation soient aussi à l'origine de la rétrodiffusion que nous observons, nous pouvons alors en déduire un ordre de grandeur de la levée de dégénérescence  $\Omega$  entre les modes  $\pm m$  dans une microbille. En effet, en reportant dans la relation (3.12) le facteur d'atténuation mesuré, et pour  $\lambda = 780$  nm , nous obtenons:  $\rho_{sc} \bar{\alpha}^2 \simeq 2 \cdot 10^{-12} \mu\text{m}^3$ . Considérons alors un mode de  $\mathcal{V} \simeq 1000 \mu\text{m}^3$ , la levée de dégénérescence obtenue est donnée par :

$$\Omega = 2.4 \times 10^{15} \left( \frac{2 \cdot 10^{-12}}{1000} \right)^{1/2} = 2\pi \times 17 \text{ MHz} .$$

Ce résultat est en bon accord avec les observations expérimentales que nous avons décrites dans le §3.7.

Nous avons jusqu'à présent négligé l'influence sur le facteur de qualité des pertes occasionnées par la diffusion de Rayleigh hors des modes, approximation que nous justifions maintenant. Pour cela, déterminons l'élargissement  $\gamma_{rad}$  du champ par rayonnement des  $\mathcal{N}$  centres diffuseurs dipolaires *incohérents* contenus dans le volume de mode  $\mathcal{V}$ . Soit  $\bar{\mathcal{P}}^+$

la puissance moyenne rayonnée par les dipôles excités par la composante propageante  $\mathbf{E}^+$  du champ :

$$\overline{\mathcal{P}}^+ = \mathcal{N} \frac{\overline{\alpha}^2 |\overline{E}_0^+|^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_0 N^2 (c/N)^3}.$$

L'énergie moyenne  $\overline{U}^+$  dans le mode propageant est donnée par :

$$\overline{U}^+ = \frac{1}{2} \epsilon_0 N^2 |\overline{E}_0^+|^2 \mathcal{V}.$$

Le taux d'amortissement radiatif  $\gamma_{\text{rad}} \equiv \overline{\mathcal{P}}^+(t)/\overline{U}^+(t)$ , vaut donc :

$$\gamma_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{1}{N} \frac{\mathcal{N} \overline{\alpha}^2}{\mathcal{V} \lambda^3} \omega = \frac{4\pi^2}{3} \frac{1}{N} \frac{\rho_{\text{sc}} \overline{\alpha}^2}{\lambda^3} \omega. \quad (3.13)$$

Si nous reportons dans cette expression la valeur  $\rho_{\text{sc}} \overline{\alpha}^2 \simeq 2.10^{-12} \mu\text{m}^3$ , pour  $\lambda = 0.780 \mu\text{m}$ , nous obtenons:

$$\gamma_{\text{rad}} = \frac{4\pi^2}{3 \times 1.45} \times \frac{2.10^{-12}}{(0.780)^3} \times 2.4 \times 10^{15} = 2\pi \times 15 \text{ kHz}.$$

Cet élargissement est plus de 10 fois plus petit que la largeur des modes observée (de l'ordre de 200 kHz), et contribue donc au facteur de qualité pour moins de 10%, ce qui justifie que nous l'ayons négligé jusqu'à présent.

### 3.4.3 Pertes par absorption (effet d'une partie imaginaire de $\overline{\alpha}$ )

Nous pouvons également nous demander si les facteurs de qualité que nous avons observés, ne sont pas dus à l'absorption par les centres diffuseurs responsables de la rétro-diffusion. Pour tenir compte de cet effet d'absorption, nous ajoutons à la polarisabilité  $\overline{\alpha}$  une partie imaginaire  $\overline{\alpha}''$ :  $\overline{\alpha} = \overline{\alpha}' + \overline{\alpha}'' i$ . Le déplacement des modes de galerie que produit cette polarisabilité devient:

$$\delta\omega \equiv -\frac{\omega}{2} \sum_k \frac{\overline{\alpha}'_k}{\mathcal{V}} |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)|^2 - i \frac{\omega}{2} \sum_k \frac{\overline{\alpha}''_k}{\mathcal{V}} |\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)|^2,$$

Le terme lié à la partie imaginaire correspond à l'élargissement  $\gamma_A/2$  du mode de galerie par l'absorption des diffuseurs. La somme sur les fonctions radiales  $\mathbf{f}^\pm(\mathbf{r}_k)$  correspond au nombre de centres diffuseurs  $\mathcal{N}$  dans le mode considéré. L'élargissement prend la forme  $\Gamma = \frac{\omega \mathcal{N}}{2 \mathcal{V}} \overline{\alpha}''$ . Cette valeur doit être comparée à la levée de dégénérescence (3.11), que nous pouvons aussi écrire:  $\Omega = \frac{\omega \sqrt{\mathcal{N}}}{\mathcal{V}} \overline{\alpha}'$ . Ces deux grandeurs sont donc dans le rapport:

$$\frac{\Gamma}{\Omega} = \frac{1}{2} \frac{\overline{\alpha}''}{\overline{\alpha}'} \sqrt{\mathcal{N}} \gg 1,$$

rapport très grand devant 1, compte tenu du fait que  $\bar{\alpha}'$  et  $\bar{\alpha}''$  ne diffèrent au plus que de quelques ordres de grandeur, et que le nombre de centres diffuseurs dans le mode est très élevé. La levée de dégénérescence étant de l'ordre de  $\Omega_{\text{RF}} \simeq 1$  MHz, l'absorption par les diffuseurs qui sont responsables de la rétrodiffusion, conduirait à une largeur de mode très supérieure à celle observée et ne peut donc constituer le mécanisme qui est à l'origine de la largeur des résonances de galerie. Nous renvoyons le lecteur au §1.5 dans lequel sont répertoriés les mécanismes plausibles d'élargissement des résonances.

### 3.5 Expériences complémentaires sur l'étude de la rétrodiffusion

Pour vérifier la validité du modèle à deux modes couplés précédemment exposé, nous avons réalisé deux expériences complémentaires.

#### 3.5.1 Analyse du faisceau rétrodiffusé

Nous avons tout d'abord vérifié l'existence d'un signal rétrodiffusé dans la direction du laser d'excitation, en plaçant une lame séparatrice sur le trajet du faisceau incident déviant la lumière rétrodiffusée vers un tube photomultiplicateur noté (PMT) sur le schéma 3.3. L'enregistrement de la Fig.3.7(b), correspond au signal détecté par le photomultiplicateur, simultanément avec le signal détecté sur la photodiode (PD) reporté sur la Fig.3.7(a). Nous retrouvons exactement les mêmes résonances sur les deux voies, chacune correspondant à un sens de propagation du champ dans la cavité. Notre analyse théorique a effectivement montré que le champ sur l'une ou l'autre des deux voies ( $E_+$  ou  $E_-$ ) se décomposait sur deux modes propres. Ce sont ces modes propres qui apparaissent ici. Notons que le faible déséquilibre entre les deux modes dans l'enregistrement (b), peut être expliqué par le fait qu'une faible fraction du faisceau sortant de la bille dans le sens direct (direction du faisceau réfléchi) se réfléchit sur la face interne du prisme et vient se recoupler dans le mode contrapropageant, ce qui favorise légèrement un mode au dépend de l'autre.

Lorsque nous augmentons le couplage en rapprochant la bille du prisme, nous constatons la disparition du signal de rétrodiffusion. Les résonances de galerie, élargies par le

couplage au prisme, finissent par devenir plus larges que la séparation du doublet, empêchant alors que le champ contrapropageant se bâtisse.

### 3.5.2 Observations des battements entre modes propres

Dans le §3.3.3, nous avons étudié l'amortissement du champ d'une composante d'un doublet excitée par une bande latérale du laser sonde. La détection synchrone extrait l'enveloppe exponentielle des battements à la pulsation  $\Omega_{\text{RF}}$ , entre le champ sortant du mode et la porteuse réfléchiée sur la face interne du prisme.

La contrepartie temporelle à l'étude des doublets par spectroscopie de balayage (§3.3.2), consiste à analyser les battements entre les deux composantes d'un doublet de "backscattering". Une bande latérale du laser sonde est tout d'abord asservie sur la fréquence médiane, entre les deux composantes d'un doublet, afin de les exciter symétriquement de façon cohérente, puis nous éteignons la modulation RF et suivons l'évolution ultérieure de l'amplitude des battements entre les champs sortant de la bille et la porteuse réfléchiée. Le champ qui parvient au photodétecteur résulte de la superposition de deux signaux de battements: ceux que produit l'interaction entre le champ d'une composante du doublet sortant de la bille et la porteuse, puis ceux que produit l'autre composante interagissant avec la même porteuse. Le détecteur quadratique enregistre l'intensité résultant de leur superposition, et la détection synchrone extrait les termes oscillant à une pulsation proche de  $\Omega_{\text{RF}}$ : le signal de sortie donne des oscillations amorties, à la pulsation  $\omega_b \equiv \Omega/2$ , où  $\Omega$  correspond à la levée de dégénérescence (3.11). Il s'agit du signal que nous présentons sur la Figure 3.9(a).

Nous justifions à présent l'allure du signal de battement. Dans le régime permanent, lorsque la modulation RF fonctionne, les modes propres d'amplitudes  $\mathcal{E}_+$  et  $\mathcal{E}_-$ , sont alimentés par le champ incident à la pulsation  $\omega + \Omega_{\text{RF}}$  d'une bande latérale, et leur amplitude est donnée par la solution permanente des équations (3.10):

$$\mathcal{E}_{\pm} = \frac{\gamma_{\text{in}} E_{\text{in}}}{i[(\omega + \Omega_{\text{RF}} - \tilde{\omega}_{n,l}) \pm |\Delta\omega|] + \frac{\gamma_A + \gamma_C}{2}} \quad (3.14)$$

Dès que la modulation est coupée, ces champs évoluent librement à leur pulsation propre respective  $\tilde{\omega}_{n,l} \pm |\Delta\omega|$  en s'atténuant (*cf.* relations (3.10) sans le terme source). À l'instant



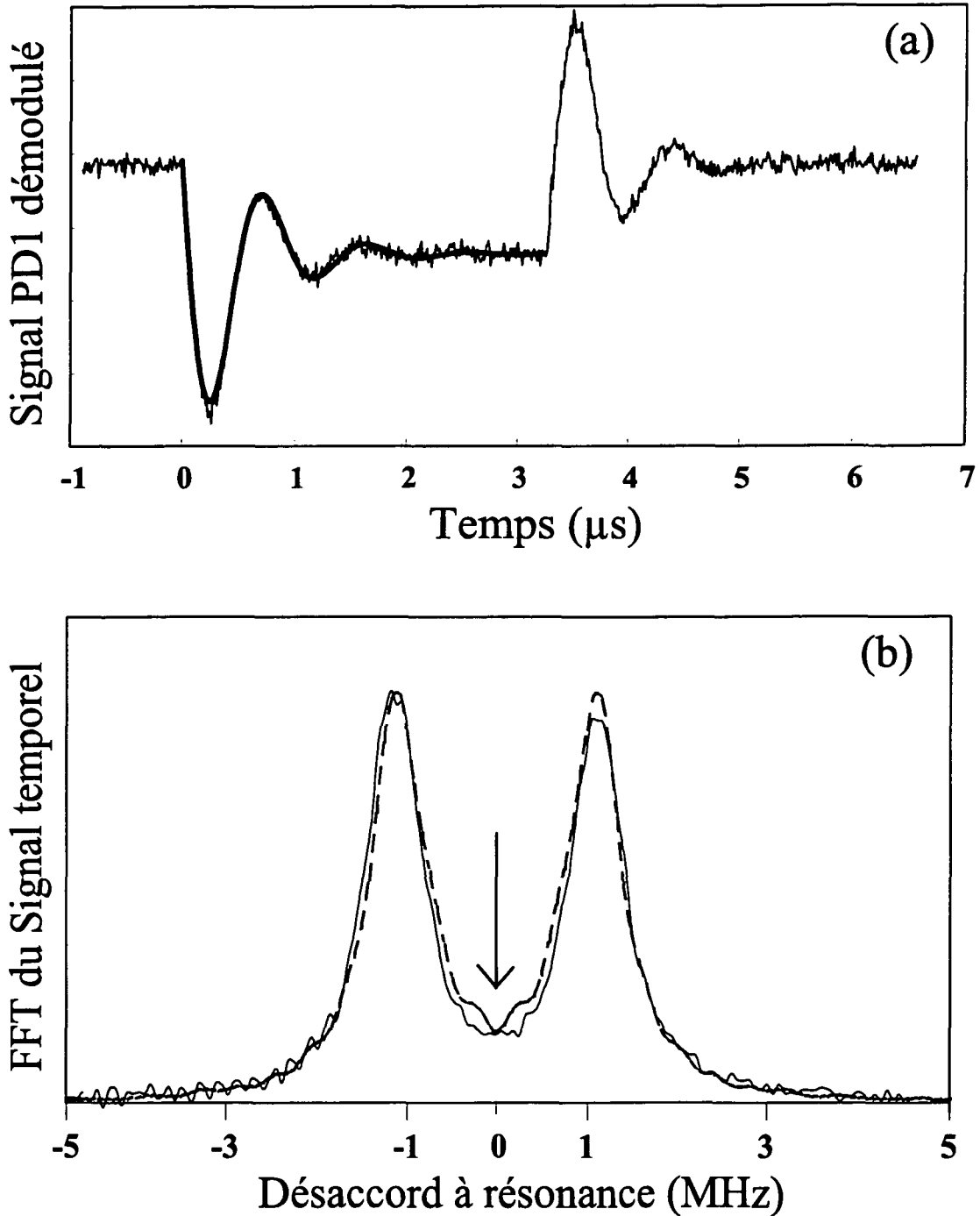


FIG. 3.9 – (a) Signal PD1 de décroissance temporelle démodulé à 40 MHz. L'une des bandes latérales du laser source modulé à 40 MHz excite symétriquement les deux composantes du doublet. Une fois la source éteinte, les deux modes se mettent à battre. (b) En pointillés, la transformée de Fourier rapide (FFT) du signal de battement (a). En traits pleins sur (b), le doublet de mode observé en spectroscopie continue, auquel la FFT se superpose parfaitement.

t, après que la modulation a été coupé, les modes propres  $\mathcal{E}_{\pm}$  ont alors pour expressions:

$$\mathcal{E}_{\pm}(t) = \frac{\gamma_{in} E_{in}}{i(\omega + \Omega_{RF} - \tilde{\omega}_{n,l} \pm |\Delta\omega|) + \frac{(\gamma_A + \gamma_C)}{2}} e^{-i(\tilde{\omega}_{n,l} \pm |\Delta\omega|)t} e^{-(\gamma_A + \gamma_C)/2t}. \quad (3.15)$$

Nous ne nous intéressons à présent qu'au seul cas où, à l'aide de la modulation RF, nous excitons symétriquement les deux composantes, de telle sorte que  $\omega + \Omega_{RF} = \tilde{\omega}_{n,l}$ . Le champ  $E^+(t) = 1/2(\mathcal{E}_+(t) + \mathcal{E}_-(t))$ , qui se propage dans la bille dans le sens du champ incident, peut alors être écrit simplement:

$$E^+(t) = \frac{\gamma_{in} E_{in}}{2} e^{-(\gamma_A + \gamma_C)/2t} \left[ \frac{e^{-i(\tilde{\omega}_{n,l} + |\Delta\omega|)t}}{i|\Delta\omega| + (\gamma_A + \gamma_C)/2} + \frac{e^{-i(\tilde{\omega}_{n,l} - |\Delta\omega|)t}}{-i|\Delta\omega| + (\gamma_A + \gamma_C)/2} \right] \quad (3.16)$$

L'intensité détectée par le photodétecteur, résultat de la superposition du champ de la porteuse  $E_{in} e^{-i\omega t}$  réfléchi sur la face du prisme, et du champ sortant de la bille, contient une composante continue et une composante modulée à une pulsation voisine de  $\Omega_{RF}$ , qui est celle que filtre la détection synchrone et qui a pour expression  $I^+ \propto E_{in}^* e^{i\omega t} E^+(t) + \text{c.c.}$ , soit encore, compte tenu de la relation  $\omega + \Omega_{RF} = \tilde{\omega}_{n,l}$ , correspondant à l'excitation symétrique des deux composantes du doublet:

$$I^+ \propto \frac{\gamma_{in} E_{in}^2}{2} e^{-(\gamma_A + \gamma_C)/2t} \left[ \frac{e^{-i(\Omega_{RF} + |\Delta\omega|)t}}{i|\Delta\omega| + (\gamma_A + \gamma_C)/2} + \frac{e^{-i(\Omega_{RF} - |\Delta\omega|)t}}{-i|\Delta\omega| + (\gamma_A + \gamma_C)/2} + \text{c.c.} \right]. \quad (3.17)$$

Le passage de ce signal dans la détection synchrone revient à le multiplier par  $\cos(\Omega_{RF}t + \varphi)$ , où  $\varphi$  est une phase ajustable<sup>3</sup>. Avec un choix convenable pour cette phase, nous obtenons, en sortie de la détection synchrone, le signal  $S^+$ :

$$S^+ \propto \frac{\gamma_{in}}{\sqrt{(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2})^2 + |\Delta\omega|^2}} e^{-(\gamma_A + \gamma_C)/2t} \cos(|\Delta\omega|t + \bar{\alpha}), \quad (3.18)$$

où nous avons introduit l'angle  $\bar{\alpha}$  défini par  $\frac{(\gamma_A + \gamma_C)/2 + i|\Delta\omega|}{\sqrt{(\frac{\gamma_A + \gamma_C}{2})^2 + |\Delta\omega|^2}}$ .

Il s'agit donc bien d'un signal de battements à la pulsation  $|\Delta\omega| = \Omega/2$ , qui est égale à la moitié de la différence des deux pulsation propres. En outre, ces battements sont amortis exponentiellement avec une constante de temps  $2/(\gamma_A + \gamma_C) = 2\tau_{cav}$ , où  $\tau_{cav}$  représente toujours la durée d'amortissement de l'énergie dans le mode de la cavité, telle que nous l'avons déjà introduite dans le §1.5.

3. Dans l'Annexe C, nous revenons un peu plus en détails la technique de démodulation.

La période des battements enregistrée sur la Fig.3.9 vaut  $T = 0.920 \mu\text{s}$ , qui est reliée à la séparation du doublet par  $T = 2\pi/(\Omega/2)$ . Pour augmenter l'intensité du signal, nous avons réduit la distance bille-prisme aux dépens du facteur de qualité. Le temps d'amortissement de l'intensité du mode dans la cavité, ne vaut plus alors que  $2\tau_{\text{cav}} = 0.51 \mu\text{s}$ . Ces résultats sont par ailleurs en parfait accord avec l'analyse de la spectroscopie de balayage. En effet, si nous comparons la transformée de Fourier de la réponse temporelle au spectre de balayage des modes, comme nous l'avons fait sur la Fig.3.9(b), nous constatons qu'ils se superposent parfaitement, prouvant l'équivalence de ces deux techniques d'analyse, lorsque la source excitatrice a une largeur faible devant la largeur de la résonance et que la cohérence du champ dans la cavité est uniquement limitée par le temps de stockage de celle-ci.

### 3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons décrit le dispositif expérimental qui nous a permis d'observer de très bon facteurs de qualité ( $Q > 10^9$ ). Nous avons ensuite montré que dans de telles billes, il se produit une levée de dégénérescence des modes de galerie  $\pm m$  circulant dans la bille en sens contraires. Nous avons expliqué ce phénomène par un couplage entre ces modes via une rétrodiffusion Rayleigh sur des centres diffuseurs. Ce modèle a été confirmé par l'observation de battements entre ces deux modes, dans le domaine temporel.

Citons enfin une application originale de cet effet à la stabilisation d'une diode laser par rétroaction sur un mode de galerie de grande surtension [58], ayant permis de réduire sa largeur spectrale à seulement 100 kHz. Cette méthode de stabilisation pourrait être améliorée, en remplaçant le prisme de couplage par un coupleur à fibre tel que ceux développés par Nicolas Dubreuil durant sa thèse [48]. Ce montage, plus compact permet aussi de gagner en stabilité.

La maîtrise du couplage par prisme et de la réalisation de très bonnes cavités nous conduit alors aux premières expériences d'électrodynamique en cavité, mettant à profit le confinement du champ dans les modes de galerie. Dans le Chapitre 4, nous montrons qu'une microbille dopée avec des ions néodyme présente un effet laser avec un très faible seuil.

## Chapitre 4

# Microbilles laser à ions néodyme

Dans les chapitres précédents, nous avons mis en évidence les nombreux avantages que présentent les résonateurs microsphériques pour des applications dans le domaine de l'optique non linéaire et de l'électrodynamique en cavité: de faibles volumes de modes (*cf.* Chapitre 1) conduisant à des champs électriques intenses (de quelques kV/m, à la surface) et d'excellents facteurs de qualité dans le proche infrarouge (*cf.* Chapitre 3). Nous nous sommes tournés, comme première voie d'approche à ces applications, vers la réalisation d'un laser à partir d'une microbille dopée aux ions néodyme. Un régime de fonctionnement laser inhabituel, dans lequel les fluctuations quantiques jouent un rôle prépondérant, devrait apparaître lorsque seuls quelques ions de la microbille sont excités. L'absence de seuil serait l'une des caractéristiques de ce régime purement quantique. Pour atteindre un tel régime de fonctionnement, il faut néanmoins opérer à très basse température. Nous décrivons nos premières tentatives dans le Chapitre 5, mais nous nous attachons, dans le présent chapitre, aux expériences d'abord réalisées à température ambiante, dans lesquelles nous avons pu mettre en évidence un fonctionnement laser à très bas seuil, conforme à notre attente et déjà prometteur pour les futures expériences à basse température.

L'effet laser reposant sur les ions néodyme comme milieu amplificateur est à l'origine des premiers lasers à solides utilisant des matrices cristallines YAG (Yttrium Aluminium Grenat). Nous verrons dans le §4.1.1, que la configuration de niveaux de l'ion  $\text{Nd}^{3+}$  est particulièrement favorable à l'effet laser. L'émission a lieu dans le proche infrarouge à 1064 nm et les ions peuvent être pompés optiquement sur plusieurs transitions différentes.

L'existence de sources laser à semi-conducteur "puissantes" (100-150 mW monomode et plusieurs Watts multimode) autour de la longueur d'onde de pompe (808 nm) a aussi fait du système "ions néodyme" un élément amplificateur de choix pour l'étude en laboratoire. Plusieurs voies de miniaturisation ont été explorées (par ex. [59]), mais signalons notamment une réalisation récente de microlaser Nd-YAG par le CEA/LETI et commercialisée sous le nom de *NanoPulse* [60] par la société *Nanolase*. L'élément amplificateur est constitué d'une pastille de  $1\text{ mm} \times 1\text{ mm} \times 0.75\text{ mm}$ , de part et d'autre de laquelle deux miroirs diélectriques ont été préalablement déposés. Un absorbant saturable formé d'une couche d'ions  $\text{Cr}^{4+}$  permet un fonctionnement en mode déclenché passif. Ce microlaser présente notamment une excellente qualité de faisceau (émission monomode  $\text{TEM}_{00}$ ), mais une forte puissance de pompage reste nécessaire.

Les ions  $\text{Nd}^{3+}$  peuvent aussi s'insérer dans d'autres matrices que le YAG, comme la silice, pour laquelle l'absorption, autour de 1060-1080 nm est nettement plus faible (pertes d'environ 0.1 dB/km). Une fibre de silice dopée aux ions néodyme peut ainsi servir de milieu amplificateur. Dans la version la plus simple, l'ajout de miroirs convenablement traités à chaque extrémité de la fibre constitue la cavité résonnante, et permet de réaliser ainsi un laser à fibre.

L'utilisation des microbilles de silice comme résonateur revient alors, d'une certaine façon, à boucler sur elle-même la fibre précédente. Une telle opération sur une fibre est réalisable mais conduit à des longueurs de cavité de quelques centimètres au minimum. Avec des billes de silice, on peut avoir une cavité beaucoup plus compacte. Le faible volume des modes d'une cavité sphérique assure une plus forte intensité du champ et ainsi un démarrage de l'effet laser à bas seuil. L'idée d'utiliser des billes comme résonateur est apparue pour la première fois dans les travaux de Garrett *et al.* [17], qui présentent l'observation d'un fonctionnement laser pulsé dans le système  $\text{Sm}^{3+}:\text{CaF}_2$ , à basse température. Par la suite, T. Baer [21] fait la première observation d'effet laser sur de "grosses" billes de YAG dopées aux ions  $\text{Nd}^{3+}$ , de diamètre 5 mm, et Y. Wang *et al.* [61] s'intéressent à des microbilles de 40  $\mu\text{m}$  de diamètre en verre dopé Nd, mais de transparence médiocre, et faiblement couplées au laser de pompe.

Les résultats que nous présentons dans ce chapitre, se distinguent de ces différents travaux antérieurs par une meilleure maîtrise du couplage aux modes de galerie dans

des microbilles de silice de très bon facteur de qualité ( $Q > 10^8$ ). Ces progrès nous ont notamment permis d'atteindre des seuils très faibles (200 nW), sur des billes de 50 à 100  $\mu\text{m}$  de diamètre dopées à environ 0.2 % (en masse). Nous verrons plus loin, que ces seuils correspondent à environ un million d'ions excités seulement, et que ces résultats ouvrent la voie à la réalisation expérimentale d'un laser sans seuil à basse température.

Après une description des propriétés du milieu amplificateur (§4.1), nous introduisons les paramètres caractéristiques du système laser auquel nous nous intéressons (taux de relaxation des niveaux, volume des modes de la cavité, pertes, ...) et donnons une estimation du seuil attendu, dans le cadre d'un modèle semiclassique scalaire du laser, reposant sur les équation de Maxwell-Bloch, et dont nous rappelons les principales lignes (§4.2). Nous présentons ensuite le dispositif expérimental (§4.3), puis les observations de fonctionnement laser (§4.4), résultats des mesures de très faibles seuils (§4.5), en bon accord avec les prédictions du modèle semiclassique. Nous avons également étudié l'effet de la distance bille-prisme sur le fonctionnement laser, c'est à dire le rôle des pertes par couplage, qui se comportent différemment à la longueur d'onde de pompe et à la longueur d'onde laser (§4.6). Enfin, nous avons aussi mesuré la largeur spectrale de l'émission laser par une technique d'autohétérodynage (§4.7). Nous terminons par la présentation de quelques méthodes de contrôle du régime de fonctionnement (mono ou multimode) (§4.8).

## 4.1 Le milieu amplificateur: les ions néodyme dans la silice

Les niveaux d'énergie des ions  $\text{Nd}^{3+}$  forment un système à 4 niveaux très favorable à l'inversion de population. Insérés dans une matrice vitreuse de silice, ils constituent le milieu amplificateur solide de notre microlaser.

Nous avons schématisé sur la Figure 4.1 la structure atomique locale de la matrice de silice  $\text{SiO}_2$ . L'unité de base est constituée d'un tétraèdre  $\text{SiO}_4$  relié à 4 de ses voisins par des liaisons oxygène. À plus grande échelle, on peut observer des réseaux interconnectés de cycles, chacun d'eux étant formé de 5 à 7 tétraèdres, dont la taille caractéristique est de l'ordre de 0.4 à 0.5 nm. Les ions  $\text{Nd}^{3+}$  occupent des sites interstitiels correspondant aux zones laissées vacantes entre les tétraèdres de silicate.

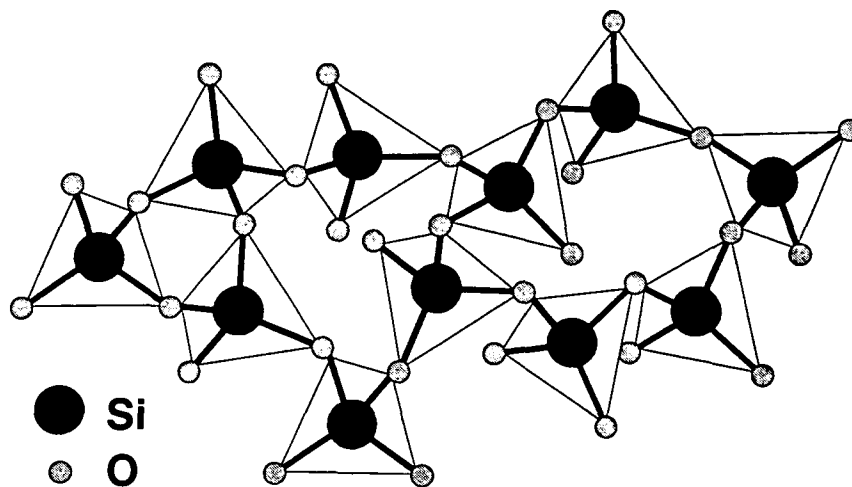


FIG. 4.1 – *Structure atomique locale dans la silice. Les unités constitutives du verre sont des tétraèdres compacts constitués d'un atome central de silicium entouré de quatre atomes d'oxygène. Chaque atome d'oxygène appartient à la fois à deux tétraèdres adjacents, et chaque tétraèdre est donc lié à quatre tétraèdres voisins. Les tétraèdres forment un réseau d'anneaux comportant chacun cinq à sept tétraèdres.*

### 4.1.1 Système à 4 niveaux

La structure des niveaux des ions  $\text{Nd}^{3+}$  dans la silice est représentée sur la Figure 4.2. Les notations  $^{2S+1}L_J$  du couplage de L-S de Russel-Saunders sont généralement utilisés pour les terres rares, bien que les différentes configurations soient en partie mélangées. Nous avons reporté (en gras) les 4 niveaux intervenant dans l'effet laser à  $1.08 \mu\text{m}$  lorsqu'on utilise la transition de pompage à  $810 \text{ nm}$ . Nous avons aussi indiqué le niveau  $^4G_{7/2}$ , souvent utilisé dans le passé lorsque le laser à argon servait de pompe.

Les atomes de la matrice voisins d'un ion de terre rare créent un champ électrique local intense qui a pour effet de lever la dégénérescence des niveaux d'énergie, comme nous l'avons représenté sur la Fig.4.2 (effet Stark).

Le niveau supérieur de la transition laser  $^4F_{3/2}$  est un niveau quasiment métastable dont la durée de vie radiative est d'environ  $1 \text{ ms}$  et la durée de vie totale de l'ordre de  $430 \mu\text{s}$  dans le matériau massif. Dans la matrice vitreuse de silice, les phonons possèdent une énergie maximale très élevée, de l'ordre de  $1100 \text{ cm}^{-1}$  (soit  $33 \text{ THz}$ ) [62, p. 10], c'est à dire plus de  $10 \%$  de l'énergie d'une transition optique. Les deux niveaux  $^4F_{5/2}$  et  $^4I_{11/2}$ , très proches en énergie de leurs voisins respectifs  $^4F_{3/2}$  et  $^4I_{9/2}$ , se vident donc très rapidement par des processus de désexcitation non radiatifs induits par les phonons, sur lesquels nous reviendrons dans le §4.1.2. En revanche, le niveau supérieur de la transition laser mieux isolé des niveaux inférieurs (le niveau le plus proche est situé à  $5450 \text{ cm}^{-1}$ ), possède des probabilités de se vider par des processus radiatifs et non radiatifs comparables. C'est la raison pour laquelle il est facile de créer une inversion de population entre les niveaux  $F_{3/2}$  et  $I_{11/2}$ .

Enfin, notons que le système à 3 niveaux  $^4F_{5/2}$ ,  $^4F_{3/2}$  et  $^4I_{9/2}$ , a priori défavorable pour l'émission laser (à cause de la réabsorption à  $930 \text{ nm}$ ) s'avère, en raison de la sous-structure Stark du niveau fondamental  $^4I_{9/2}$ , quasiment assimilable à un système à 4 niveaux: l'un des sous-niveaux Stark du niveau fondamental joue alors le rôle du niveau inférieur de la transition laser. Nos observations, décrites dans le § 4.4, d'une émission laser autour de  $930 \text{ nm}$ , confirment que des seuils relativement bas peuvent être obtenus sur cette transition. L'émission laser autour de  $946 \text{ nm}$  a d'ailleurs été également déjà observée dans une cavité Nd:YAG monolithique [63].



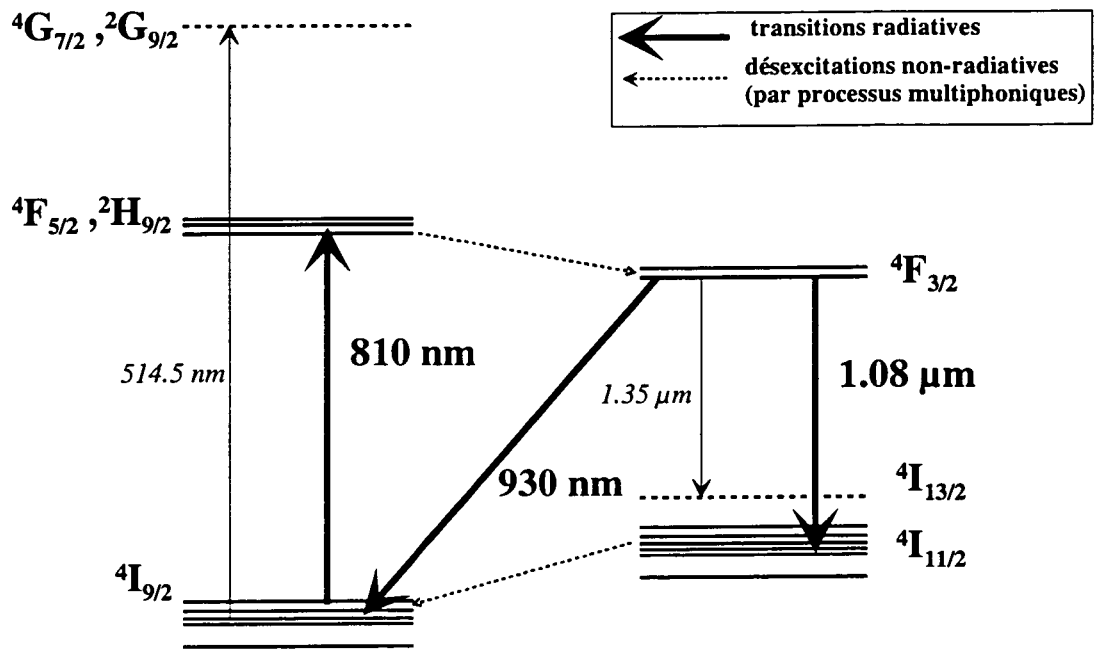


FIG. 4.2 – Structure des niveaux des ions  $\text{Nd}^{3+}$  dans une matrice de silice. Pour les niveaux mis en jeu dans notre expérience, nous avons représenté les sous-niveaux Stark dont la dégénérescence est levée par le champ local.

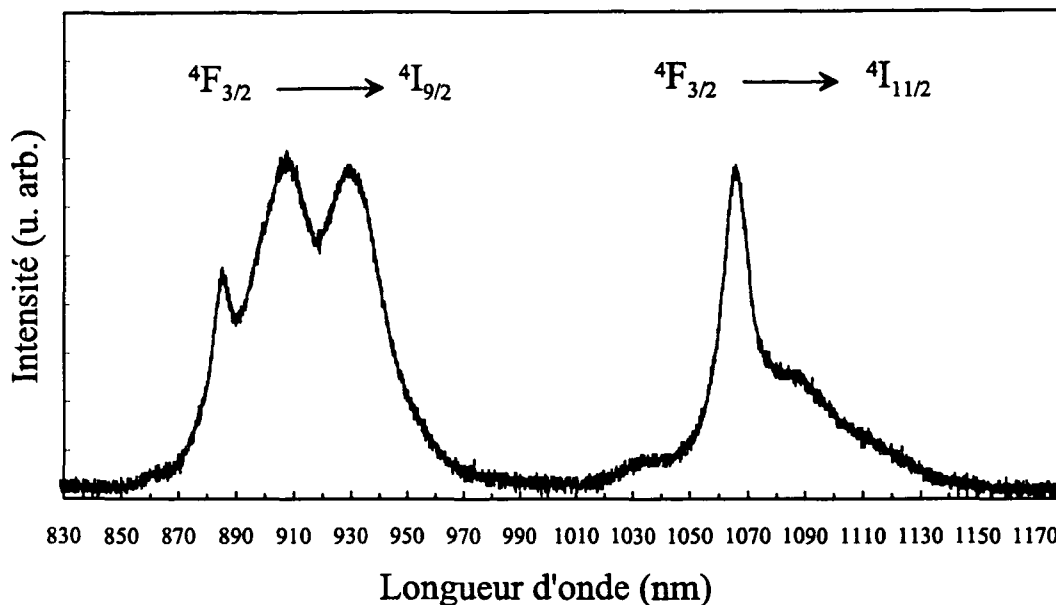


FIG. 4.3 – Spectre de fluorescence (non corrigé de la réponse spectrale de la photodiode) d'un morceau de la fibre CNET GA 547 Nd (extrémité A2), dopée à 1500 ppm, utilisée pour la fabrication des billes.

#### 4.1.2 Fluorescence de la fibre dopée et processus d'élargissement

##### Spectre de fluorescence de la fibre dopée CNET GA 547 Nd

Les billes dopées que nous avons étudiées ont été fondues à partir d'une fibre ébauche fabriquée spécialement pour nous par J.-F. Bayon du CNET/Lannion. Le spectre de fluorescence de l'une de ces fibres (GA 547 Nd, dopée 1500 ppm, *i.e.* 0.2 % en masse), pompée avec une diode autour de 810 nm, est présenté sur la Figure 4.3. L'émission se compose de deux bandes larges de plusieurs dizaines de nanomètres chacune correspondant aux transitions  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ , autour de 930 nm, et aux transitions  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ , autour de 1060-1080 nm.<sup>1</sup> À cause du mélange de configurations, les règles de sélection habituelles

1. Dans la silice pure, le maximum de l'émission sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$  se trouve autour de 1080 nm. Nous l'observons plutôt autour de 1065 nm dans notre échantillon. Nous expliquons ce décalage par la présence d'aluminium, sous forme d'oxyde  $Al_2O_3$ , ajouté à la silice pour faciliter l'insertion des ions de terre rare et éviter la formation d'agrégats [64]. Même à de très faibles concentrations (0.5 % en atomes), ce codopant suffit à modifier la structure de la matrice au point de déplacer les raies du néodyme

pour les transitions dipolaires électriques ne s'appliquent pas. Ainsi, la bande autour de 1060-1080 nm est formée de la superposition de 10 raies selon la littérature [65, p. 87], mais il nous est impossible de résoudre cette structure de niveaux à partir du spectre, chacune des transitions subissant un fort élargissement spectral par deux mécanismes que nous allons préciser.

### Processus d'élargissement des transitions

Abstraction faite de l'élargissement radiatif dû à une forte intensité de pompage, deux mécanismes intrinsèques sont responsables des largeurs de transitions observées. Tout d'abord, une source d'élargissement *inhomogène*. Les sites d'implantation des ions  $\text{Nd}^{3+}$  dans la matrice vitreuse de silice, présentent en effet des environnements très différents, comme on peut le deviner en se reportant à la Fig.4.1. Les champs électriques locaux dépendent de l'orientation aléatoire des tétraèdres de silicate et ont pour effet de modifier la position des niveaux d'énergie. Ainsi, chaque ion possède une structure de niveaux propre qui dépend de son site d'implantation. Pour une transition considérée, cette distribution des longueurs d'onde est responsable d'un élargissement spectral de la transition, dit *inhomogène*. Dans un verre silicate (66%  $\text{SiO}_2$ ) dopé aux ions  $\text{Nd}^{3+}$ , Mann et DeShazer [66] ont mesuré une largeur inhomogène de l'ordre de  $\Delta\sigma_{\text{inhom}} \simeq 100 \text{ cm}^{-1}$ , soit environ 6 nm, sur les différentes transitions.

En revanche, pour un même site, les ions soumis au même environnement possèdent les mêmes longueurs d'onde de transition, ainsi que les mêmes largeurs de raies. L'élargissement résiduel, dit *homogène*, résulte alors d'une part de la durée de vie finie  $T'_2$ , de la cohérence optique entre les deux niveaux de la transition considérée, et d'autre part de la durée de vie naturelle  $T_1$ , du niveau considéré, de telle sorte que la largeur spectrale est donnée par:

$$2\pi\Delta\nu_h \equiv \Delta\omega \equiv \frac{2}{T_2} \text{equiv} \frac{1}{T_1} + \frac{2}{T'_2} \quad (4.1)$$

À température ambiante, M. Le Flohic donne dans sa thèse [65, p. 87], une estimation de la largeur homogène pour les transitions des ions néodyme dans la silice:  $\Delta\sigma_{\text{hom}} \simeq 50 \text{ cm}^{-1}$ , soit  $\Delta\nu_{\text{hom}} \simeq 1500 \text{ GHz}$ , ou bien encore 3 nm.

---

de près de 20 nm.

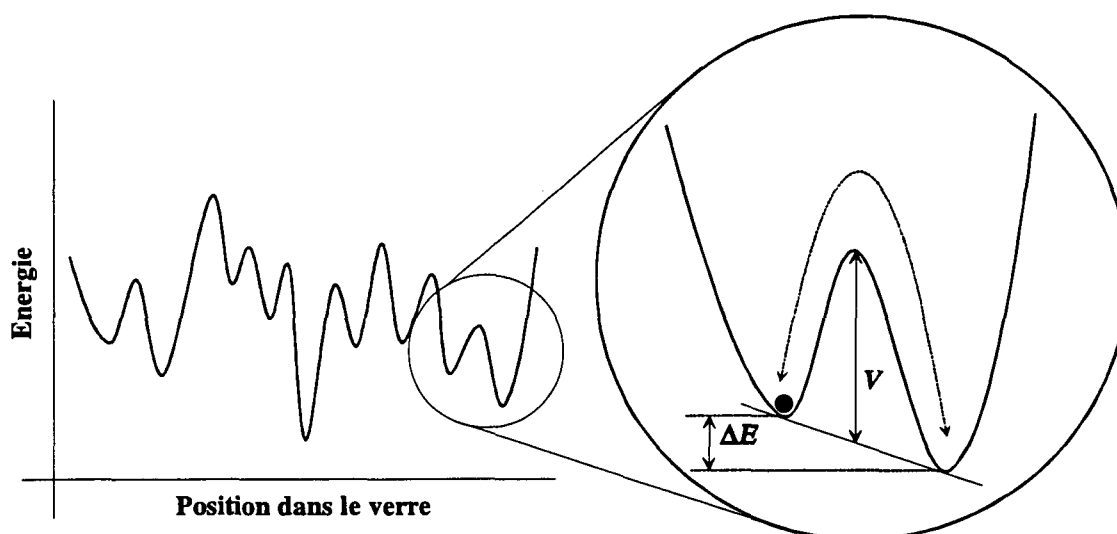


FIG. 4.4 – “Paysage” énergétique dans les matrices vitreuses. Vue rapprochée sur un système à deux niveaux, caractérisé par une hauteur de barrière tunnel  $V$ , et une différence d'énergie  $\Delta E$ .

### Mécanismes supposés d'élargissement homogène

À température ambiante, les largeurs homogènes des transitions ioniques, dans les structures cristallines comme dans les matériaux désordonnés, sont comparables, et suivent des lois de variation en fonction de la température, en  $T^2$ , qu'un couplage élastique des ions aux phonons de la matrice peut expliquer.

En revanche, à basse température ( $T < 1$  K), les mécanismes responsables de la disparition de la cohérence optique, dans les matrices désordonnées que sont les verres, sont assez mal connus. On suspecte des structures non identifiées précisément mais assimilables à des systèmes à deux niveaux (*Two Level Systems*, TLS) [67] [68] (voir Figure 4.4), d'être impliqués dans ces mécanismes. À des échelles de temps “courtes”, le couplage direct fluctuant de l'ion aux TLS serait responsable de la perte de cohérence optique, tandis qu'à des échelles de temps plus “longues”, les transitions au sein des TLS auxquels l'ion est couplé modifieraient son environnement local et feraient fluctuer les positions de ses niveaux d'énergie, à l'origine du processus de *diffusion spectrale*. Expérimentalement, seule la technique d'écho de photon permet d'isoler les interactions sur des échelles de temps courtes et d'accéder ainsi à une mesure non ambiguë de la largeur homogène  $\Delta\nu_h$ , contrairement

aux autres techniques telles que le “spectral hole burning”, qui mettent en jeu des échelles de temps suffisamment longues pour qu’il ne soit plus possible de négliger la diffusion spectrale. Dans l’expérience de Hegarty, Broer, Golding *et al.* [69], citée dans l’article de revue de MacFarlane et Shelby [70] à propos des mesures de largeurs homogènes, la largeur homogène de la transition vers le niveau fondamental dans le système  $\text{Nd}^{3+}:\text{SiO}_2$ , mesurée par écho de photons, manifeste une dépendance en  $T^{1.3}$ , en fonction de la température  $T$ , pour  $T < 1$  K. Huber *et al.* [71] ont pu expliquer cette loi de puissance en invoquant un mécanisme de relaxation de la cohérence optique par couplage élastique dipôle-dipôle, entre les ions et les TLS.

Pour expliquer la limitation du rendement des lasers dopés aux terres-rares, d’autres auteurs font référence à l’existence d’agrégats d’ions (souvent des paires, jusqu’à 23 % dans certaines fibres dopées au néodyme [62, p. 12 et suiv.]), qui peuvent se former localement pour compenser un déficit local de charges positives dans les sites d’implantation de la matrice vitreuse. Deux ions appariés peuvent alors échanger des excitations, ce qui facilite le processus “d’up-conversion” dans l’erbium en matrice vitreuse [62]: l’un des deux ions excités sur le premier niveau excité ( $^4I_{13/2}$ ), se désexcite sur le niveau fondamental ( $^4I_{15/2}$ ) en cédant l’énergie à l’ion voisin, qui gagne le deuxième niveau excité ( $^4I_{9/2}$ ), avant de revenir sur le premier niveau excité par une cascade de désexcitations non radiatives. Récemment les expériences de Boye *et al.* [72] ont montré sur le système  $\text{Eu}^{2+}:\text{CaF}_2$ , qu’une modification aléatoire de l’environnement local d’un ion  $\text{Eu}^{2+}$  par retournement des spins nucléaires des ions voisins auxquels il peut être apparié, et auxquels son spin électronique est couplé, peut expliquer la décohérence optique à basse température ( $T < 10$  K).

Néanmoins, aucun mécanisme de disparition de la cohérence optique, ne permet à ce jour de rendre compte de toutes les observations expérimentales, en couvrant notamment un large domaine de température. Nous devons donc rester très prudents vis-à-vis de la portée des modèles existants.

## 4.2 Prédications du modèle semiclassique pour le seuil laser

Les oscillations laser que nous avons observées à température ambiante dans nos microbilles de silice dopées, se prêtent bien à une modélisation, dans le cadre du modèle

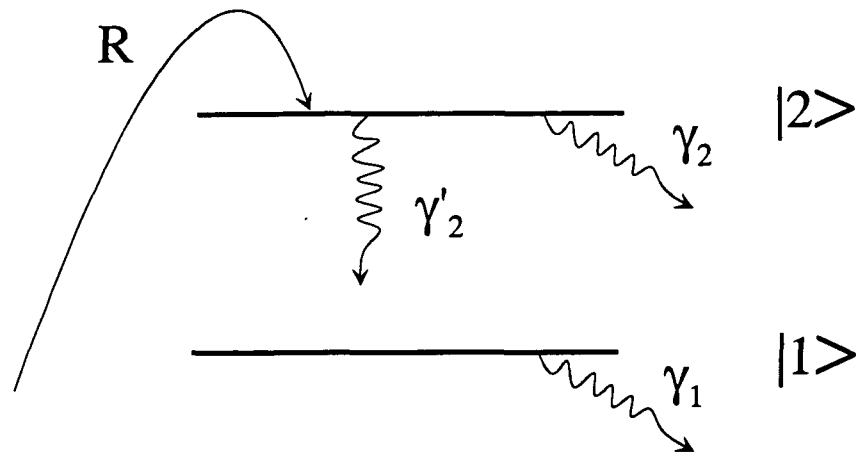


FIG. 4.5 – Système à deux niveaux associé au milieu amplificateur du modèle semiclassique de Sargent *et al.* [73, Chap.8], et taux de relaxations attachés à chaque niveau.  $R$  représente le taux de pompage effectif du niveau supérieur.

semiclassique de Sargent *et al.* [73, Chap.8], car les processus de relaxation atomique largement dominants devant ceux du champ dans la cavité, masquent complètement les effets purement quantiques.

Nous rappelons, dans ce paragraphe, les principales lignes de ce modèle semiclassique simplifié, et déterminons les ordres de grandeurs attendus pour notre système  $\text{Nd}^{3+}:\text{SiO}_2$ .

#### 4.2.1 Le modèle scalaire semiclassique

Dans le modèle, le champ électrique est traité comme une variable scalaire classique et obéit aux équations de Maxwell, tandis que le milieu amplificateur, considéré comme un système quantique à deux niveaux, notés  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$ , est décrit par une matrice densité  $\rho$ , dont les populations et cohérences obéissent alors aux équations de Bloch optiques. Il s'agit d'une bonne approximation du système à 4 niveaux formé par les ions  $\text{Nd}^{3+}$ , dans lequel le niveau supérieur de la transition laser est alimenté par un taux de pompage effectif  $R$ , en passant éventuellement par des niveaux plus hauts en énergie, et où le niveau inférieur se désexcite très rapidement vers le niveau fondamental.

Sous l'effet du champ, chaque atome<sup>2</sup> du milieu amplificateur se polarise. L'utilisation de la matrice densité revient à effectuer une moyenne statistique qui conduit à la polarisation  $\mathcal{P}$ . Cette polarisation se comporte à son tour comme un terme source dans les équations de Maxwell. Les conditions d'oscillation (seuil et fréquence d'émission) laser découlent alors de l'auto-cohérence du système des équations de Maxwell et de Bloch, ce pourquoi ce modèle est qualifié de *Maxwell-Bloch*.

Sur le Schéma 4.5, nous avons reporté les différents taux de relaxation.  $\gamma_1$  représente le taux de relaxation du niveau du bas,  $\gamma_2$ , le taux de relaxation du niveau supérieur vers tous les chemins autres que le niveau du bas, vers lequel il se désexcite avec le taux  $\gamma'_2$ , en dehors du mode laser de la cavité auquel nous nous intéressons. Nous introduisons alors le taux:

$$\gamma_{12} \equiv \frac{1}{2}(\gamma_1 + \gamma_2 + \gamma'_2) + \gamma_{12}^{\text{hom}},$$

dans lequel le premier terme représente le taux de relaxation de tous les processus de "type  $T_1$ ", et le deuxième terme correspond au taux de relaxation dû à l'élargissement homogène de la transition (par couplage aux phonons, dans le cas des ions néodyme), processus de "type  $T_2$ " (voir le §4.1.2).

### Seuil et inversion de population au seuil

L'opérateur hamiltonien du modèle semiclassique est donné par  $\hat{\mathbf{H}} = \hat{\mathbf{H}}_0 + |e|\hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ , où  $\hat{\mathbf{H}}_0 \equiv E_1|1\rangle\langle 1| + E_2|2\rangle\langle 2|$ , représente l'hamiltonien du système atomique;  $E_1$  et  $E_2$  sont les énergies des niveaux 1 et 2, et sont telles que  $E_2 - E_1 = \hbar\omega_0$ ,  $\omega_0$  étant la pulsation de la transition considérée.

Pour simplifier, considérons un champ électrique *spatialement uniforme*. On note  $\mathcal{A}(t)$ , l'enveloppe lentement variable du champ, et  $E_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega_\lambda}{2\varepsilon_0 N^2 \mathcal{V}}}$ , l'amplitude maximale du champ laser par photon dans le mode de la cavité de pulsation  $\omega_\lambda$  et de volume  $\mathcal{V}$ . L'amplitude du champ électrique est alors notée:

$$\mathbf{E}(t) = \mathcal{A}(t)E_0 e^{-i\omega t} \mathbf{u},$$

où  $\mathbf{u}$  représente le vecteur unitaire portant le champ électrique. L'élément de matrice du

---

2. Dénomination générique pour le système à deux niveaux considéré.

dipôle atomique est donné par  $\mathbf{d}_{12} \equiv -|e| \langle 1|\hat{\mathbf{r}}|2\rangle$ . Le couplage de ce dipôle au champ est alors caractérisé par la pulsation de Rabi  $\Omega_R \equiv 2 \frac{\mathbf{d}_{12} \cdot \mathbf{E}}{\hbar}$ .

Le champ crée sur le milieu amplificateur une polarisation moyenne  $\mathcal{P}$ , et on définit la susceptibilité complexe  $\chi \equiv \chi' + i\chi''$  par:

$$\mathcal{P} = \varepsilon_0(\chi' + i\chi'')\mathcal{A}(t)E_0.$$

La partie imaginaire  $\chi'' < 0$  va être associée au *gain*, et la partie réelle à la dispersion. La polarisation  $\mathcal{P}$  est en outre reliée à la cohérence  $\rho_{12}$  selon  $\mathcal{P} = n d_{12} \rho_{21}$ , où  $n$  représente la densité d'atomes dans le milieu amplificateur.

Les éléments de matrice de la matrice densité (populations et cohérences), satisfont les équations de Bloch [74, Chap.5] dans l'approximation de l'onde tournante:

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{11} = i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{21} - \rho_{12}) - \gamma_1\rho_{11} + \gamma'_2\rho_{22} \\ \dot{\rho}_{22} = -i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{21} - \rho_{12}) - (\gamma_2 + \gamma'_2)\rho_{22} + R \\ \dot{\rho}_{12} = -i\delta\rho_{12} + i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) - \gamma_{12}\rho_{12} \\ \dot{\rho}_{21} = i\delta\rho_{21} - i\frac{\Omega_R}{2}(\rho_{22} - \rho_{11}) - \gamma_{12}\rho_{21}, \end{cases} \quad (4.2)$$

où nous avons posé  $\delta \equiv \omega - \omega_0$ , pour le désaccord à la résonance atomique, et  $R$  représente le taux de pompage du niveau  $|2\rangle$ , proportionnel à l'intensité du laser de pompe.

L'amplitude  $\mathcal{A}$  du champ électrique est déduite de l'équation d'onde dans un milieu diélectrique d'indice  $N$ :

$$\nabla \times \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{(c/N)^2} \gamma_{\text{cav}} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \mathcal{P}}{\partial t^2},$$

où  $\gamma_{\text{cav}}$  correspond au taux de pertes de l'énergie électromagnétique dans le résonateur. Dans l'approximation de l'enveloppe lentement variable, l'équation d'évolution de  $\mathcal{A}$ , devient:

$$\dot{\mathcal{A}} = -i(\omega - \omega_\lambda)\mathcal{A} - \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}\mathcal{A} + i\frac{\omega}{2\varepsilon_0} \frac{\mathcal{P}}{E_0}. \quad (4.3)$$

Pour trouver le seuil d'oscillation laser, nous nous intéressons au taux de relaxation de l'amplitude  $\mathcal{A}$  du champ et en ne gardant que la partie imaginaire, nous trouvons qu'à *résonance* ( $\omega = \omega_0 = \omega_\lambda$ ) cette amplitude satisfait:

$$\dot{\mathcal{A}} = \left[ -\frac{\gamma_{\text{cav}}}{2} - \frac{\omega\chi''}{2} \right] \mathcal{A}.$$



Le deuxième terme dans le membre de droite fait intervenir la partie imaginaire  $\chi'' < 0$  de la susceptibilité et correspond à un terme de gain. L'oscillation laser ne démarre que lorsque ce taux de gain en amplitude du champ électrique laser, dépasse le taux de perte, c'est à dire lorsque:

$$-\frac{\omega\chi''}{2} \geq \frac{\gamma_{\text{cav}}}{2}, \quad (4.4)$$

Dans les systèmes laser à 4 niveaux, le niveau du bas est très rapidement dépeuplé (sa population est donc vide,  $\rho_{11} \simeq 0$ ) tandis que la durée de vie du niveau du haut est très longue. Nous pouvons donc faire les approximations  $\gamma_1 \gg \gamma_2$  et  $\gamma_2 \gg \gamma'_2$ . Par ailleurs, dans le cas qui nous importe,  $\gamma_{12} \gg \gamma_{\text{cav}}, \gamma_2, \gamma'_2$ . Le champ et les populations évoluent donc très lentement à l'échelle d'évolution de la cohérence  $\rho_{12}$ . Nous nous plaçons de plus dans le régime de *couplage faible* e supposant que  $\Omega_R \ll \gamma_{12}$ . Nous pouvons alors résoudre les équations de Bloch en procédant *l'élimination adiabatique des cohérences*. On peut ainsi, dans le régime stationnaire, exprimer les cohérences en fonction de l'inversion de population.

Le seuil laser, à résonance, peut alors être caractérisé par l'inversion de population: par<sup>3</sup>:

$$\Delta N_{\text{seuil}} = \frac{\gamma_{\text{cav}}\gamma_{12}}{\Omega_R^2/2} = \frac{\gamma_{\text{cav}}}{W},$$

où  $W \equiv \frac{\Omega_R^2/2}{\gamma_{12}}$  représente le taux d'émission spontané dans le mode, à résonance.

Par ailleurs, le dipôle  $d_{12}$  est lié au taux d'émission radiative  $\gamma'_2$  de l'atome dans le milieu diélectrique, par la relation<sup>4</sup>  $\gamma'_2 = \frac{d_{12}^2}{3\pi\epsilon_0 N^2} \frac{\omega^3}{(c/N)^3} \frac{1}{\hbar}$ . Nous en déduisons finalement l'expression de l'inversion de population au seuil, pour le système qui nous intéresse:

$$\Delta N_{\text{seuil}} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\mathcal{V}}{(\lambda/N)^3} \frac{\Delta\nu_{\text{hom}}}{\nu} \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\gamma'_2}. \quad (4.5)$$

Nous avons introduit  $\Delta\nu_{\text{hom}} \equiv \gamma_{12}^{\text{hom}}/\pi$ , largeur homogène de la transition laser, et tenu compte du fait que les processus de relaxation atomique sont dominés par l'élargissement homogène dans la situation qui nous intéresse.

---

3. On introduit aussi parfois la *coopérativité*  $C = \frac{\mathcal{N}\Omega_R^2/2}{\gamma_{\text{cav}}\gamma_{12}}$ , où  $\mathcal{N}$  représente le nombre total d'ions excités. La condition de seuil prend ainsi la forme  $\rho_{22} - \rho_{11} \geq 1/C$ .

4. Cette expression est obtenue en supposant que le champ local est égal au champ macroscopique dans le diélectrique. Tenir compte d'un facteur de correction de champ local est un problème délicat (voir par exemple la discussion de la référence [75])

### Facteur $\eta$ d'exaltation de l'émission spontanée

L'une des manifestations spectaculaires de l'électrodynamique en cavité est l'exaltation du taux d'émission spontanée en milieu confiné. Pour quantifier cette effet, Purcell a introduit un facteur  $\eta$  défini comme le taux d'émission spontané dans un mode de la cavité rapporté au taux d'émission total *dans un milieu infini*<sup>5</sup>. Dans notre cas, ce facteur vaut:

$$\eta \equiv \frac{3}{4\pi^2} \frac{\nu}{\Delta\nu_{\text{hom}}} \frac{(\lambda/N)^3}{\mathcal{V}}. \quad (4.6)$$

Précisons que cette expression n'est valable que dans le régime où la relaxation atomique domine (cas qui nous concerne des "bonnes cavités"), mais qu'elle peut être généralisée [76] en  $\eta = \frac{3}{4\pi^2} \frac{\nu}{\Delta\nu_{\text{hom}} + \gamma_{\text{cav}}} \frac{\lambda^3}{\mathcal{V}}$ . Cette dernière expression contient la définition originale du facteur de Purcell donnée dans le cas des "mauvaises cavités", pour lesquelles la relaxation du mode de la cavité est plus rapide que celle de l'atome.

Plus  $\eta$  est grand et plus l'émission laser est concentrée dans un seul mode de la cavité, conduisant alors à un régime de fonctionnement laser inhabituel, dans lequel les fluctuations quantiques jouent un rôle prépondérant. À température ambiante, le facteur de Purcell vaut environ  $6 \times 10^{-3}$ , valeur essentiellement limitée par le grand élargissement homogène de la transition laser. Nous verrons dans le Chapitre 5, comment, en abaissant la température à celle de l'hélium superfluide, on peut augmenter ce facteur jusqu'à des valeurs nettement supérieures à 1 ( $\eta = 600$  si  $\Delta\nu_{\text{hom}} \simeq 20$  MHz, par exemple), nous plaçant ainsi dans le régime de fonctionnement quantique souhaité. Dans un tel régime, le modèle semiclassical que nous avons sommairement décrit dans ce paragraphe, cesse d'être valable. Il faut alors résoudre le système d'équations dit de *Heisenberg-Langevin*, dans lequel le champ est traité comme une variable quantique soumise à des fluctuations données par des forces de Langevin. Les simulations de Peter Domokos [77] ont montré que même les valeurs moyennes (population du niveau supérieur, et nombre de photons dans le mode) sont affectées par les fluctuations.

---

5. Certains auteurs [7] introduisent plutôt le facteur  $\beta$  correspondant à la fraction du taux d'émission spontanée dans le mode considéré rapporté au taux d'émission spontanée dans tous les modes "accessibles". Le régime de fonctionnement laser sans seuil, et les caractéristiques de bruit inhabituelles associées, apparaissent alors lorsque  $\beta$  tend vers 1, c'est à dire lorsque l'exaltation est maximale

### 4.2.2 Ordre de grandeur du seuil attendu pour les microbilles laser

Évaluons l'inversion de population au seuil pour notre système des ions  $\text{Nd}^{3+}$  dans une microbille de silice. Dans l'expérience que nous décrivons au §4.4, nous excitons le milieu amplificateur de façon résonnante: le laser de pompage est mis à résonance avec un mode de galerie de volume  $\mathcal{V}_p$ , que nous estimons valoir  $\mathcal{V}_p \simeq 3000 \mu\text{m}^3$

L'amplitude du *champ électrique laser* par photon, pour un volume  $\mathcal{V} \simeq 300 \mu\text{m}^3$  correspondant au mode le mieux confiné, vaut  $E_0 \equiv \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2N^2\epsilon_0\mathcal{V}}} = 3.3 \text{ kV/m}$ . Pour estimer l'élément de matrice du dipôle  $d_{12}$ , nous considérons le taux d'émission radiative total  $\gamma'_2 \simeq 10^3 \text{ s}^{-1}$  [78], du niveau supérieur  ${}^4F_{3/2}$  de la transition laser<sup>6</sup>. Nous en déduisons le dipôle de la transition  $d_{12} \simeq 4 \times 10^{-32} \text{ C.m}$ . La pulsation de Rabi qui résulte du couplage de ce dipôle au champ d'un seul photon laser vaut donc  $\Omega_R = 2 \frac{d_{12}E_0}{\hbar} = 2\pi \times 450 \text{ kHz}$ .

Par ailleurs, les processus de relaxation sont dominés par la relaxation des ions couplés aux phonons de la matrice vitreuse et conduisent à un élargissement homogène  $\Delta\nu_{\text{hom}} \simeq 1500 \text{ GHz}$  [65]. Le facteur d'exaltation de l'émission spontanée dans le mode laser, peut alors être déterminé dans cette limite, et vaut  $\eta \equiv \frac{3}{4\pi^2} \frac{\nu}{\Delta\nu_{\text{hom}}} \frac{(\lambda/N)^3}{\mathcal{V}} \simeq 2\%$ . Le taux d'émission stimulée au seuil s'en déduit  $W = \eta\gamma'_2 \simeq 20 \text{ s}^{-1}$ .

En considérant en outre le taux d'amortissement du champ laser dans le mode  $\gamma_{\text{cav}} = 2\pi\Delta\nu_{\text{cav}} = 2\pi \times 1.5 \times 10^6 = 9.4 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$ , nous en déduisons *l'inversion de population au seuil*  $\Delta N = \gamma_{\text{cav}}/W = 9.4 \times 10^6/20 \simeq 5 \times 10^5$  ions excités au seuil d'émission laser, pour le mode laser de volume  $\mathcal{V}$  considéré.

Étant donné que le volume  $\mathcal{V}_p$  du mode de pompe est, dans nos expériences, généralement plus grand que celui du mode laser de plus petit volume  $\mathcal{V}$ , la puissance de pompe absorbée est en fait plus grande d'un facteur  $\mathcal{V}_p/\mathcal{V}$  que si le recouvrement était parfait. La puissance laser de pompe au seuil a donc pour expression:  $P_{\text{pompe}}^{\text{seuil}} = \Delta N \times h\nu_p \times (\gamma_2 + \gamma'_2) \times \mathcal{V}_p/\mathcal{V}$ , soit encore, après simplification:

$$P_{\text{pompe}}^{\text{seuil}} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\mathcal{V}_p}{(\lambda/N)^3} \frac{\Delta\nu_{\text{hom}}}{\nu} \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\gamma'_2} \times h\nu_p \times (\gamma_2 + \gamma'_2), \quad (4.7)$$

où  $(\gamma_2 + \gamma'_2) \simeq 2 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$  correspond au taux de relaxation total du niveau supérieur,

6. En prenant le taux d'émission total, nous surestimons un peu le dipôle associé à une seule des transitions entre deux sous-niveaux Stark de la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ . Cependant, compte tenu du grand élargissement homogène, un ion donné peut émettre sur plusieurs de ces transitions à la fois.

tenant compte de tous les processus de désexcitation. Nous remarquons que le volume du mode laser disparaît du seuil en puissance de pompe, ce qui peut expliquer pourquoi nous n'avons pu distinguer différents seuils pour les différents modes lasant en régime multimode, comme nous le verrons par la suite.

Numériquement, il s'ensuit une puissance de pompe absorbée pour déclencher l'émission laser dans *un seul* mode:

$$P_{\text{pompe}}^{\text{seuil}} \simeq 2 \text{ nW pour un seul mode .}$$

Nous verrons que cette valeur de seuil est en très bon accord avec les mesures que nous présenterons après une brève description du montage expérimental, assez similaire à celui des expériences du Chapitre 3.

## 4.3 Dispositif expérimental

### 4.3.1 Fabrication des billes dopées

Les billes dopées que nous avons étudiées dans le §4.4, ont été fabriquées selon la technique de fusion par laser CO<sub>2</sub> (Chapitre 3) d'une fibre ébauche dopée, préparée à partir du cœur dopé de la fibre CNET GA 547 Nd, dont nous avons préalablement étudié la fluorescence. Pour préparer la fibre, il faut donc d'abord éliminer la gaine de silice.

Nous commençons par prélever un échantillon de fibre d'environ 50 cm de long, sur la bobine. Après avoir ôté la gaine polymère sur une longueur d'environ 10 cm en trempant la fibre dans un bain d'acide sulfurique à 95 % environ, durant environ 15 minutes, nous nettoyons la silice mise à nue à l'éthanol (ou au méthanol) et la séchons à l'acétone pour éliminer les impuretés résiduelles. La gaine de silice de 140 μm de diamètre restante subit ensuite une érosion chimique dans un bain d'acide fluorhydrique RP *Normapur* à 40 %, jusqu'au cœur dopé dont le diamètre est d'environ 20 μm. La durée précise de l'érosion est de 55 minutes, à quelques minutes près et semble dépendre notamment de la température et des codopants utilisés pour incorporer les ions Nd<sup>3+</sup>. En effet, la solution d'acide fluorhydrique diluée attaque 2 à 3 fois plus vite le dioxyde de germanium GeO<sub>2</sub>, utilisé comme codopant pour accroître l'indice du cœur, que la gaine de silice pure. Un suivi très attentif de l'érosion est donc nécessaire. Pour arrêter l'érosion juste au cœur, nous

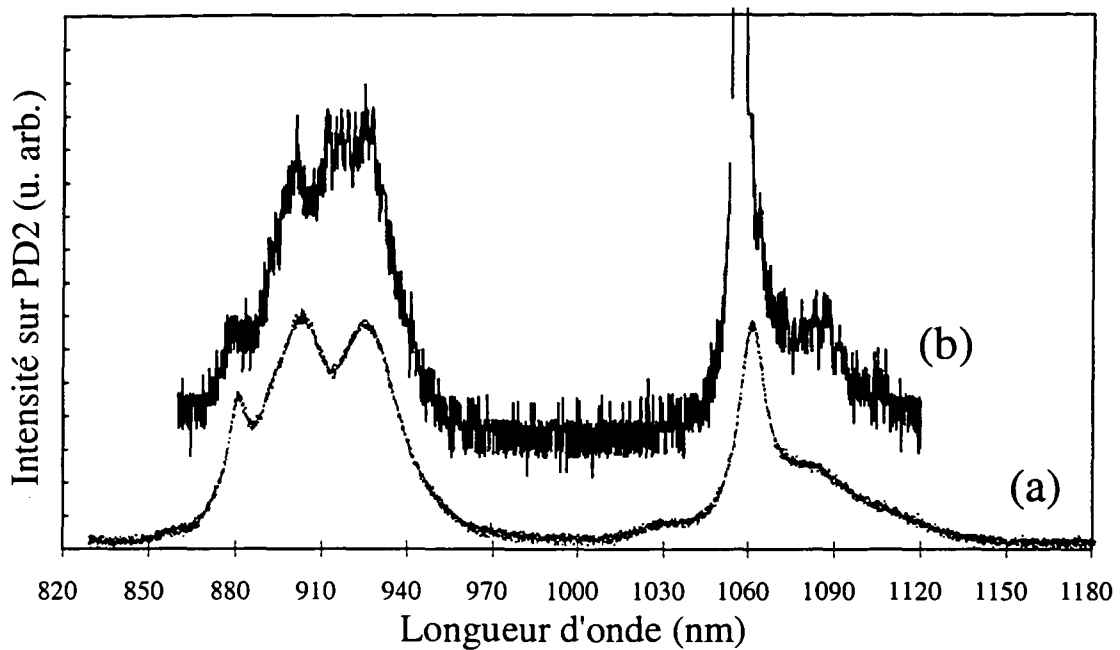


FIG. 4.6 – Comparaison des spectres de fluorescence d'une microbille et de la fibre ébauche CNET GA 547 Nd. En (a), spectre de la lumière de fluorescence recueillie à la sortie de la fibre. En (b), spectre de fluorescence de la lumière issue de la bille de 85  $\mu\text{m}$  de diamètre, fabriquée le 10/02/95, à partir de la même fibre, dans la région 850-1000 nm. La résolution du monochromateur d'analyse ne vaut ici qu'environ 1.6 nm, et ne permet pas de résoudre la structure longitudinale des modes de galerie.

enregistrons la transmission d'une diode laser rouge couplée dans l'échantillon en cours d'érosion. Lorsque la gaine a été intégralement érodée, la fibre cesse d'être guidante et sa transmission chute à zéro en une dizaine de secondes. Nous stoppons l'attaque chimique à ce stade en trempant le cœur de fibre restant dans de l'eau purifiée par un système *Millipore*. Trente secondes d'attaque supplémentaires permettent d'atteindre un diamètre de fibre de 15  $\mu\text{m}$ , et de fondre de plus petites billes (50 à 60  $\mu\text{m}$  de diamètre). Mais en deçà de ce diamètre, la manipulation de la fibre devient extrêmement délicate.

L'état de surface du cœur restant présente une forte rugosité et une teinte irisée apparaît sous le stéréomicroscope en éclairage de lumière blanche. Ces observations, qui reflètent aussi l'inhomogénéité d'attaque du cœur, dont les régions les plus dopées en dioxyde de germanium sont plus rapidement attaquées, constituent en outre un excellent critère d'identification du cœur et de l'homogénéité de l'attaque de la fibre sur des longueurs de l'ordre de quelques centimètres (ce que ne garantit pas strictement le critère de chute de transmission, un seul point faible suffisant à expliquer la perte de guidage).

Un morceau de cœur de fibre dopée d'environ 2 cm est ensuite prélevé et collé dans la rainure d'un support, laissant dépasser environ 1.5 mm de fibre. Lors de la fusion de cette extrémité, une partie de la fibre se sublime, pour ne laisser qu'une tige d'environ 200  $\mu\text{m}$  de longueur à l'extrémité de laquelle s'est formée une bille de diamètre typique de l'ordre de 80  $\mu\text{m}$ , comme nous l'avons déjà décrit au §3.1. Un préchauffage de la fibre à faible intensité permet en outre de relâcher les contraintes qui peuvent s'être accumulées lors de l'attaque chimique, à cause notamment de la courbure imposée à l'échantillon.

Afin de nous assurer que le procédé de fabrication des billes par fusion n'affecte pas la répartition des ions de terre rare en volume, nous avons comparé le spectre de fluorescence d'un morceau de fibre dopée (en (b)) et celui d'une bille dopée fabriquée le 10/02/95 à partir de la même fibre, et installée dans le montage décrit au §4.3.2. Nous constatons sur la Figure 4.6 une très grande similitude dans la forme des deux spectres dans la région 850-1000 nm: aucun déplacement des raies n'est décelable à l'échelle de notre résolution. La formation d'agrégats d'ions, par exemple, durant le processus de fusion, ne peut cependant pas être exclue. Seule une étude de la répartition à l'échelle nanométrique pourrait nous renseigner. De telles mesures ont été récemment effectuées pour le compte d'Alcatel, par le CEA/CENG pour étudier la répartition des ions dans une fibre dopée aux ions erbium

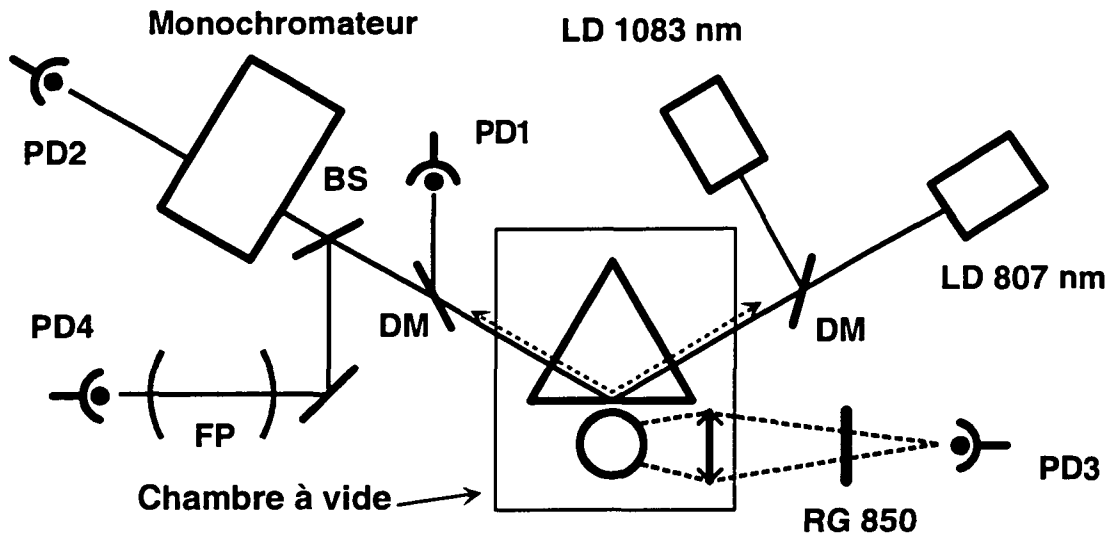


FIG. 4.7 – Montage expérimental utilisé dans l'expérience microlaser à température ambiante. L'enceinte à vide a permis de réduire la pollution de la bille par dépôt de poussières. Des miroirs dichroïques (DM) permettent soit de superposer (à l'entrée de l'enceinte) soit de séparer (à la sortie) la pompe du laser sonde. Une lame séparatrice (BS) à l'entrée du monochromateur, permet d'envoyer une fraction du faisceau sortant dans un interféromètre Fabry Péro (FP) balayé en permanence.

[79]. Remarquons enfin, que le spectre de la bille (Fig.4.6(a)) présente de petites structures mal résolues que nous attribuons aux modes de galerie de nombre longitudinal  $\ell$  différant d'une unité, et que la résolution du monochromateur utilisé à cette occasion ne permet pas de résoudre. Une telle structure, mais cette fois-ci parfaitement résolue, a pu être observée sur des billes dopées en ions erbium, dans notre équipe.

#### 4.3.2 Description du montage

Nous avons déjà décrit, dans le Chapitre 3, la mécanique et les systèmes de contrôle des micromouvements du montage de la Figure 4.7, utilisés dans les expériences antérieures menées sur les billes de silice pure de hauts facteurs de qualité. Les mêmes dispositifs sont réutilisés dans les expériences sur le microlaser à ions néodyme que nous décrivons ici, en adaptant les sources laser et les détecteurs.

### Les sources lasers d'excitation et d'analyse

Nous avons utilisé une technique de pompage résonnant: le laser de pompe est mis en résonance avec un mode de la microbille. Compte tenu de la largeur du profil d'absorption des ions  $\text{Nd}^{3+}$  d'environ 30 nm à 810 nm, il est aisé de trouver des modes de galerie, dont la densité est de l'ordre d'un mode tous les 10 GHz, autour du maximum d'absorption. L'élargissement du mode de pompe excité est alors limité par l'absorption du milieu actif. Pour les concentrations utilisées, une largeur de mode de 430 MHz (facteur de qualité de l'ordre de  $10^6$ ) a été mesurée: une diode laser libre (largeur spectrale typique de l'ordre de 30 MHz) peut donc suffire à l'excitation résonnante sélective. Nous avons retenu le modèle LT017MDO de *Sharp* disposant d'une puissance de 40 mW à 807 nm, et accordable, par courant, sur une plage de l'ordre de quelques GHz. Afin d'obtenir une plus large plage de balayage sans saut de mode sur un grand domaine de longueur d'onde, une stabilisation de la diode laser sur réseau selon une configuration de type Littrow s'avère nécessaire. Nous y avons eu recours ultérieurement dans les expériences microlaser à basse température décrites dans le Chapitre 5.

Une deuxième diode laser, de structure DBR à 1083 nm, SDL 6702-H1, a été utilisée pour sonder le facteur de qualité à la longueur d'onde d'émission laser, lorsque celui-ci est limité par le couplage au prisme. Sa faible largeur spectrale (1.5 MHz) nous permet d'explorer des facteurs de qualité jusqu'à  $2.10^8$ . Ce laser est facilement accordable par variation du courant d'alimentation de 80 à 140 mA, sans saut de mode sur une plage de 50 GHz.

### Les éléments d'analyse et de détection

Différents signaux peuvent être analysés:

- L'absorption du faisceau de pompe est mesurée à l'aide de la photodiode PD1, suivie d'un ampli. Cependant, pour détecter convenablement le signal d'absorption résonnant assez faible (quelques centaines de nW), nous avons dû compenser les variations d'intensités moyennes, qui se produisent lors du balayage du laser de pompe, en effectuant une amplification différentielle. Pour cela, une très faible fraction ajustable de l'intensité incidente est prélevée à l'entrée de l'enceinte, par une lame séparatrice



et détectée par une copie de PD1 (éléments non représentés sur la Fig.4.7). Cette fraction est ensuite soustraite, de façon analogique, du signal détecté par PD1, afin d'obtenir un fond plat, avant d'être finalement amplifiée.

- La fluorescence rayonnée ou diffusée en dehors des modes de galerie est focalisée sur l'ampli-photodiode PD3, grâce aux lentilles prévues à l'origine pour focaliser le laser CO<sub>2</sub>, lorsque la fusion est réalisée dans l'enceinte.
- Le signal laser est séparé du faisceau de pompe à la sortie de l'enceinte avec une lame dichroïque. Une partie de la lumière autour de 1083 nm est envoyée dans un interféromètre Fabry Pérot de finesse inférieure à 100, balayé en fréquence, pour analyser sa cohérence, caractéristique du fonctionnement laser. L'autre fraction du signal laser est analysée spectralement à l'aide d'un monochromateur Jobin Yvon HR320, dont la résolution ultime est de 0.045 nm, lorsque les fentes d'entrée et de sortie sont ouvertes à 5  $\mu\text{m}$ . Le faisceau sortant du monochromateur est détecté par l'ampli-photodiode PD2, constitué d'une photodiode silicium de "grande" surface, montée dans un ampli à deux étages, alimenté par des piles de 9 V, pour limiter le bruit. L'essentiel du gain est assuré par le premier étage de transimpédance avec une résistance de charge de 4.7 M $\Omega$ , sacrifiant la bande passante à environ 100 Hz. Cet étage est suivi d'un amplificateur inverseur de gain ajustable.

#### 4.4 Mise en évidence de l'effet laser

Dans cette section, sauf mention contraire, les résultats expérimentaux concernent une bille de silice dopée à environ 1500 ppm soit 0.2 % en masse en ions Nd<sup>3+</sup>, de diamètre de  $57 \pm 1 \mu\text{m}$ , fondue à l'air à partir de la fibre CNET GA 547 Nd, avant de la placer sous vide. Cette bille a pu conserver pendant 5 mois un facteur de qualité de  $2 \cdot 10^8$ . Même si les autres billes dopées sur lesquelles nous avons travaillé montraient des effets semblables à ceux présentés ici, nous n'avons pas toujours pu effectuer une étude aussi détaillée de leur fonctionnement laser.

#### 4.4.1 Spectres d'émission laser

Parmi les différentes résonances de galerie à la longueur d'onde de pompe que nous repérons, nous choisissons celle qui fait apparaître, sur l'image de la caméra CCD montée sur le stéréomicroscope, une bande équatoriale en fluorescence de faible extension. Nous sélectionnons ainsi le mode de pompe de plus faible volume accessible qui doit nous permettre d'observer les seuils d'émission laser les plus bas. Nous estimons le volume de mode excité dans le cas de la bille de  $57 \mu\text{m}$  de diamètre étudiée, à environ  $3000 \mu\text{m}^3$ , soit 10 fois plus important que celui des modes les mieux confinés ( $\ell = |m|$ ). Compte tenu du dopage de 0.2%, il y a environ  $10^{11}$  ions susceptibles d'être excités dans le volume de pompe. Nous positionnons par ailleurs la bille à une distance du prisme de couplage telle que le facteur de qualité à 1083 nm ne soit pas trop dégradé par le couplage au prisme, mais que suffisamment d'intensité de pompe soit également couplée.

Sur la Figure 4.8(a) nous présentons l'enregistrement de l'émission laser détectée à la sortie du monochromateur, par la photodiode PD2, lorsque nous balayons le monochromateur autour de 1083 nm, et que la longueur d'onde du laser de pompe est ajustée au maximum de la résonance de la bille sélectionnée. Le spectre d'émission est multimode et présente une quasipériodicité d'intervalle spectral  $\Delta\lambda$  4.5 nm. Cette quasipériodicité reproduit la structure "longitudinale" du spectre des modes de galerie ( $\ell$  différent de une unité entre deux raies). De l'intervalle  $\Delta\lambda$ , nous déduisons ainsi le diamètre de la bille auquel il est relié:  $2a = \lambda^2/\pi N\Delta\lambda = 57 \mu\text{m}$ , qui corrobore l'observation directe, mais moins précise, effectuée au stéréomicroscope. Sur la Figure 4.8(b), nous montrons, pour une *autre longueur d'onde de pompe*, et une autre intensité de pompage, un spectre d'émission, présentant une émission laser simultanée autour de 930 nm (système quasi 4 niveaux, discuté dans le §4.1.1) et autour de 1060 nm.

La structure périodique de la Fig.4.9 ne comportant qu'une seule série de modes longitudinaux, suggère en outre que l'émission laser ne se produit que sur une seule catégorie de modes radiaux, celle de nombre radial  $n = 1$ , qui correspond bien à la famille de modes radiaux de plus faible volume.

Nous remarquons, par ailleurs, que l'intervalle spectral libre de 4.5 nm que nous avons mesuré, s'avère plus petit que la largeur homogène de 6 nm (1500 GHz) communément ad-

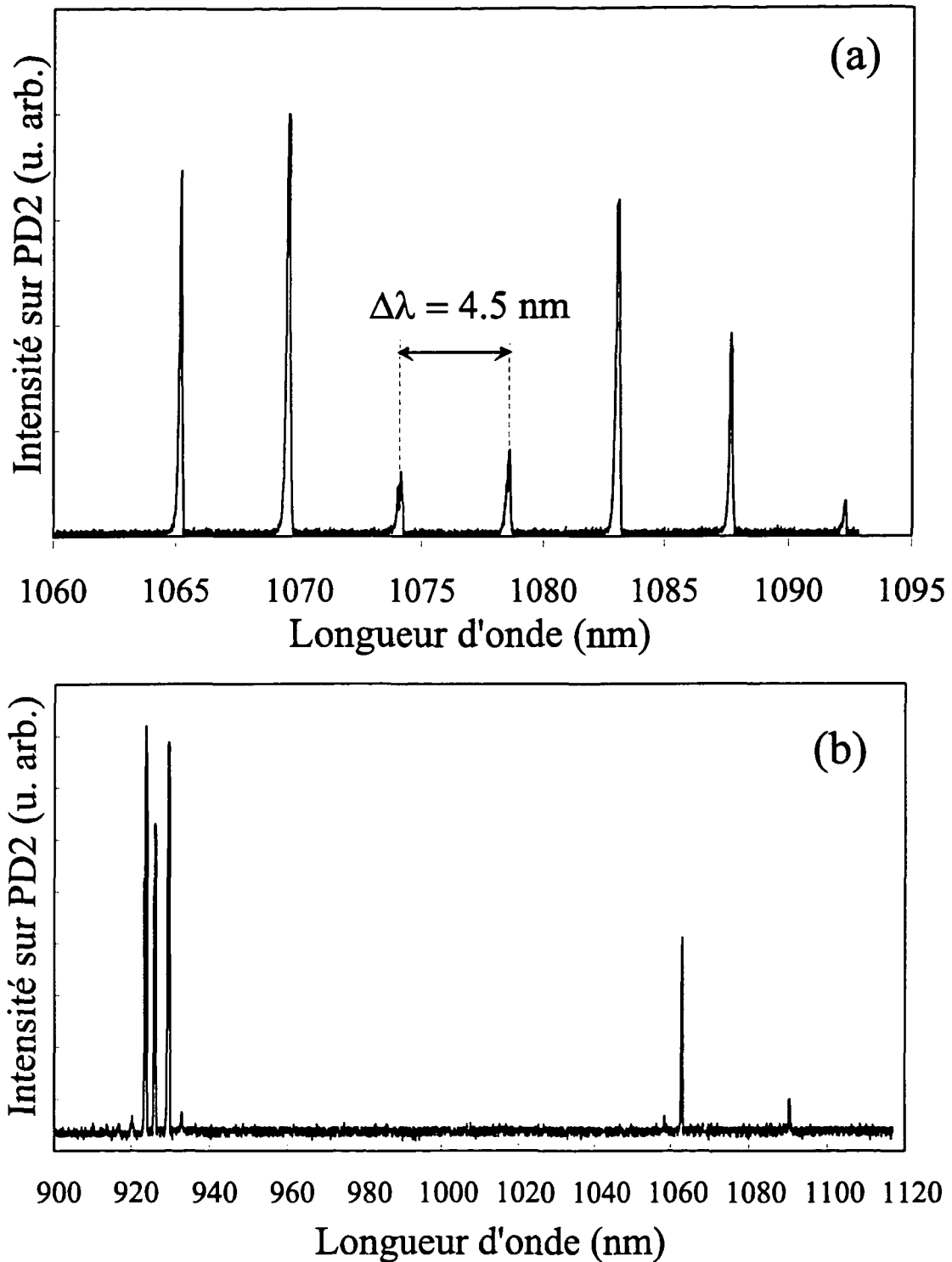


FIG. 4.8 – Spectres d'émission laser de la bille de  $57 \mu\text{m}$  de diamètre dopée à 0.2 % (poids) en ions  $\text{Nd}^{3+}$ , enregistré sur la photodiode PD2 à la sortie du monochromateur. Nous avons représenté en (a) le spectre dans la région 1055 à 1095 nm. En (b), spectre pris dans des conditions différentes, de longueur d'onde de pompage, de "gap" et de puissance de pompe. Nous montrons le spectre complet, faisant apparaître une émission laser simultanée autour de 930 et 1060 nm.

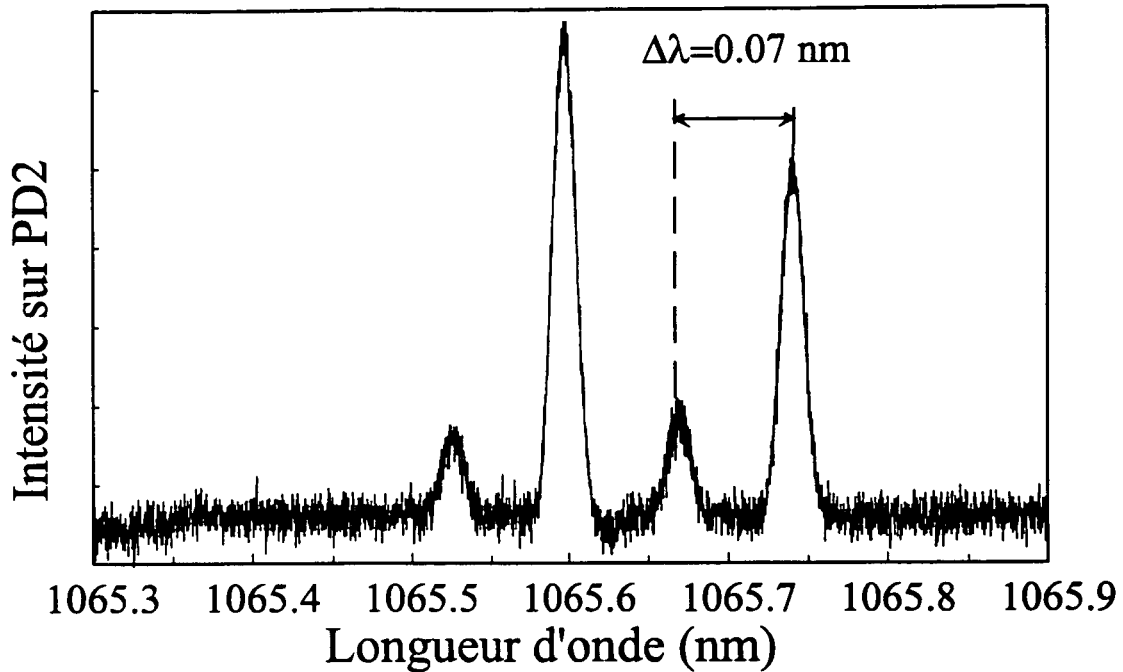


FIG. 4.9 – Détail de la structure de raie laser à 1065 nm (cf. Fig.4.8(a)) réalisé avec le monochromateur Jobin Yvon THR 1500, de résolution 0.016 nm (fentes d'entrée/sortie de largeur 50  $\mu\text{m}$ ). Le spectre fait apparaître 4 raies correspondant à la structure transverse orthoradiale  $\ell - |m|$ , dont la dégénérescence est levée par l'ellipticité. L'écart de 0.07 nm entre 2 raies voisines correspond à une ellipticité de 1.7 %.

mise [62]. Ainsi, deux modes différant d'une unité de  $\ell$ , sont en compétition pour l'émission laser. Nous reviendrons sur ce point dans le §4.8.

#### 4.4.2 Structure "transverse" dans le spectre multimode et ellipticité

Nous avons réenregistré le spectre multimode de la Fig.4.8(a), avec une meilleure résolution, en utilisant un monochromateur Jobin Yvon THR 1500, possédant une résolution de 0.016 nm lorsque ses fentes sont ouvertes à 50  $\mu\text{m}$ . Le spectre ainsi réalisé, autour de la raie à 1065 nm, est présenté sur la Figure 4.9 et présente une structure formée de 4 raies. Ces raies correspondent aux modes de la bille ayant différentes valeurs du nombre azimutal  $|m| = \ell, \ell - 1, \ell - 2, \dots$ , dont l'extension spatiale hors du plan de l'équateur augmente avec  $\ell - |m|$ . Dans une bille parfaitement sphérique, ces modes seraient dégénérés, comme nous

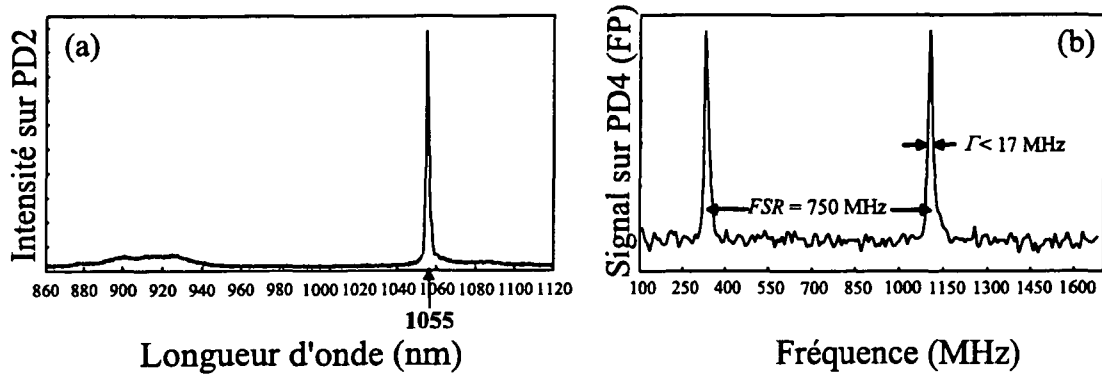


FIG. 4.10 – Fonctionnement laser monomode de la bille de  $85 \mu\text{m}$  de diamètre réalisée le 10/02/95 de facteur de qualité  $2.10^7$  à  $1083 \text{ nm}$  (largeur de résonance de  $17 \text{ MHz}$ ). En (a), le spectre d'émission laser. La résolution du monochromateur utilisé n'est que de  $1.6 \text{ nm}$ , et ne permet pas de résoudre la structure longitudinale (FSR de la bille =  $2.1 \text{ nm}$ ). En (b), le signal de PD4 à la sortie de la cavité Fabry Pérot (FP) (cf. Fig.4.7).

l'avons indiqué dans le §1.1.3, ceci par analogie avec les modes transverses d'une cavité Fabry Pérot pratiquement confocale. De l'écart  $\Delta\lambda = 0.07 \text{ nm}$  entre modes voisins, nous déduisons l'ellipticité de la bille  $e \simeq \ell \Delta\lambda/\lambda \simeq 1.7 \%$  (cf. éq. 1.18). L'apparition de ces modes dans le spectre d'émission laser signifie que la zone de gain excitée couvre un volume de mode supérieur au volume minimal ( $\simeq 300 \mu\text{m}^3$ ) qui correspondrait à l'excitation d'un mode de galerie ( $\ell = |m|$ ), à la longueur d'onde de pompe.

#### 4.4.3 Un exemple de fonctionnement monomode

La Figure 4.10(a), représente le spectre, à faible résolution ( $1.6 \text{ nm}$ ) au dessus du seuil laser, de la bille dopée à  $1500 \text{ ppm}$ , fabriquée le 10/02/95, de diamètre  $85 \mu\text{m}$ . Il fait apparaître une unique raie à  $1055 \text{ nm}$ , sur un fond de fluorescence. Aucune émission laser n'est observée sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ , qui ne se manifeste que par la présence d'une bande de fluorescence. Le fonctionnement monomode est confirmé par l'enregistrement de la Fig.4.10(b), correspondant au signal détecté par PD4, à la sortie d'un interféromètre de Fabry Pérot balayé en fréquence sur un intervalle spectral libre, lorsque le laser de pompe est positionné au maximum d'absorption de la résonance de galerie. Par ailleurs, on peut

observer que dans ces conditions d'émission laser, la résonance du Fabry Péroth présente une largeur limitée par sa finesse, de 17 MHz, inférieure à la largeur de la résonance de galerie de la cavité froide à 1083 nm (un peu plus de 20 MHz).

Ce fonctionnement monomode plutôt rare dans l'ensemble des expériences que nous avons réalisées, trouve peut-être une explication dans le fait que, lors de cette expérience, faute de diodes laser disponibles à la longueur d'onde correspondant au maximum d'absorption du néodyme ( $\lambda = 810$  nm), nous avons pompé les ions à une longueur d'onde voisine de 788 nm, c'est à dire au bord de la bande d'absorption. Ce faisant, nous sélectionnons spectralement une classe plus restreinte de sites et n'observons l'effet laser que pour cette catégorie. Ce mécanisme devrait être étudié également à basse température, car nous comptons sur cette sélection spectrale pour observer le régime laser sans seuil.

## 4.5 Observations de très faibles seuils laser

Nous venons de montrer que, conformément à notre attente, l'effet laser apparaissait aisément dans la géométrie très confinée de nos microrésonateurs sphériques, même dans un régime multimode pour un pompage modéré, et ce d'autant plus facilement que les pertes  $y$  sont très faibles.

Plus frappante encore, est la valeur extrêmement faible, du seuil en puissance de pompe absorbée, que nous avons mesurée et que nous présentons maintenant. Ramenée à un seul mode laser, elle correspond à une puissance absorbée au seuil, de l'ordre de seulement 2 nW!

### 4.5.1 Mesure du seuils à l'émission laser et blocage de la fluorescence

Pour mesurer le seuil en absorption, nous avons fait varier l'intensité du laser de pompage à l'aide d'un atténuateur variable placé à l'entrée de l'enceinte et mesuré l'intensité du signal laser à la sortie du monochromateur<sup>7</sup>. Sur la Figure 4.11(a) nous présentons l'en-

---

7. L'ouverture des fentes ne permet pas de résoudre la structure transverse, ni bien entendu la séparation des modes se propageant en sens contraire. Le monochromateur n'isole donc *pas* un seul mode laser à strictement parler, mais une seule "famille" de modes attachés à un mode longitudinal: la puissance détectée en sortie résulte de la somme des intensités de tous ces modes.

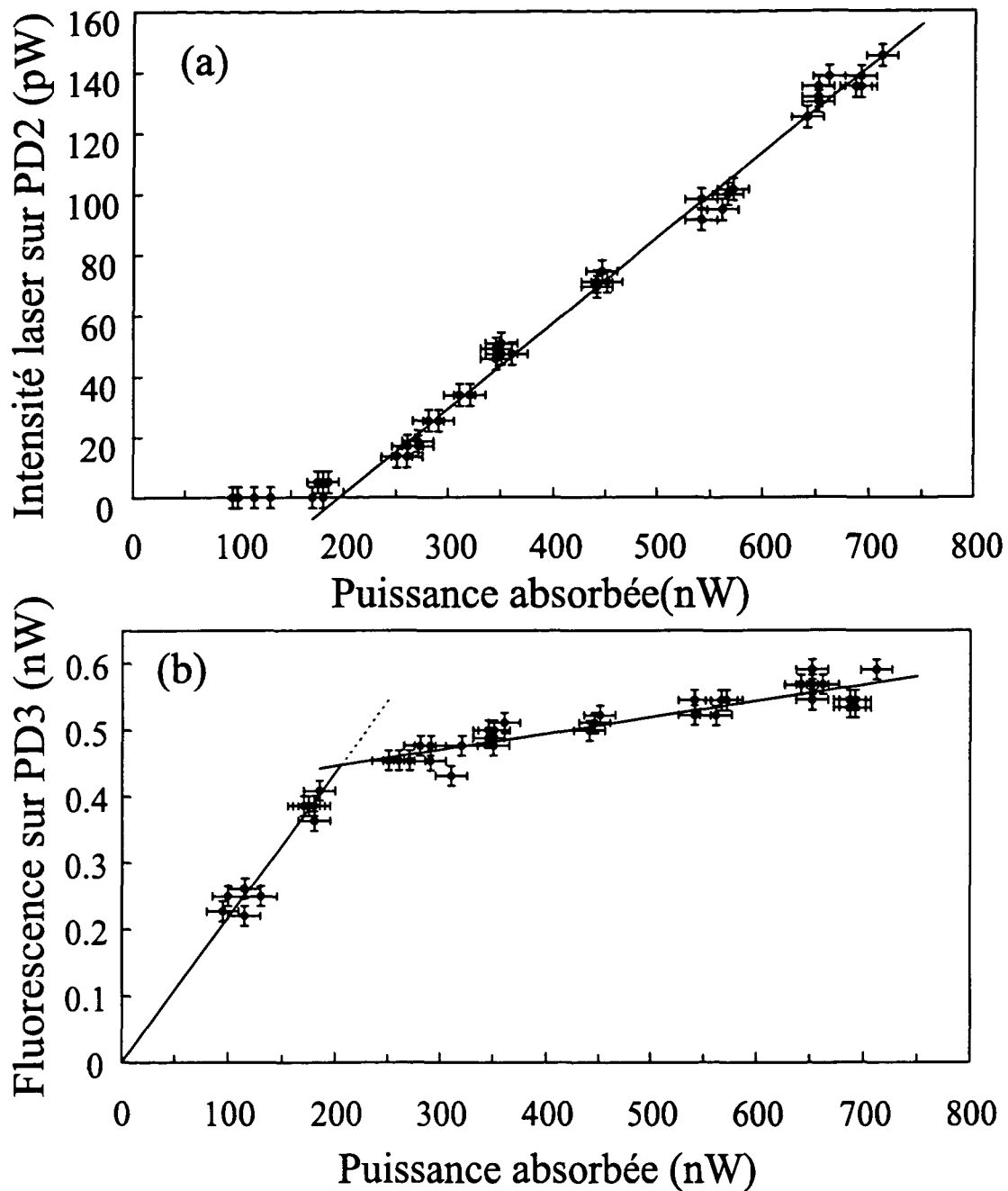


FIG. 4.11 – Courbes de seuil en puissance de pompe absorbée de la bille de  $57 \mu\text{m}$  de diamètre dopée à 0.2 % (poids) en ions  $\text{Nd}^{3+}$ . En (a) est représentée, en fonction de la puissance de pompe totale absorbée, l'intensité du signal laser filtré par le monochromateur calé sur le mode laser de longueur d'onde 1083 nm. En (b) l'ordonnée représente l'intensité de fluorescence détecté sur le côté par la photodiode PD3. Sur les deux enregistrements, il apparaît un seuil en puissance de pompe absorbée, de 200 nW.

registrement du signal de sortie du monochromateur (photodiode PD2) lorsque ce dernier est réglé sur la longueur d'onde d'émission de la raie à 1083 nm (*cf.* spectre d'émission de la Fig.4.8(a)). Il fait apparaître un comportement de seuil à très faible intensité, de l'ordre de seulement 200 nW!

Ce même seuil est aussi perceptible sur le signal de fluorescence détecté après filtrage, par la photodiode PD3, et représenté sur la Fig.4.11(b). Dès que le seuil laser est dépassé, la population du niveau supérieur de la transition laser reste constante, car tout nouveau photon de pompe est aussitôt converti en photon laser par le processus d'émission stimulée. Nous observons alors un blocage de la fluorescence, phénomène bien connu et caractéristique des lasers [78]. La faible pente résiduelle que nous observons signifie que le recouvrement entre la zone de gain (le volume du mode de pompe) et le volume du mode laser est excellent, de telle sorte que seulement 10% des ions excités ne participent pas à l'émission laser.

#### 4.5.2 Comparaison de la mesure de seuil avec la prédiction du modèle semiclassique

Le seuil de 200 nW en puissance absorbée doit être compris comme un seuil global, à partager entre tous les modes lasant simultanément, puisqu'il ne nous a pas été possible de les distinguer. La rupture de pente nette aussi bien dans le signal de fluorescence que dans le signal d'émission laser, indique en effet que tous les modes démarrent avec environ le même seuil.

Nous pouvons ainsi estimer la valeur du seuil en absorption attaché à un seul mode, en recensant le nombre total de modes lasant simultanément, à l'aide du spectre de la Fig.4.8. Il nous faut d'abord tenir compte de tous les modes de valeurs de  $\ell$  différentes, au nombre de 10 environ (nous prenons aussi en compte les modes laser autour de 930 nm, qui n'apparaissent pas sur ce spectre); puis des modes de valeurs de  $\ell - |m|$  différentes, faisant partie de la structure transverse et au nombre de 3 à 4 en moyenne, par mode longitudinal. Enfin, l'émission laser peut alors aussi bien se produire dans un sens que dans l'autre. Nous avons déjà montré dans le Chapitre 3, que pour d'assez bons facteurs de qualité  $Q \simeq 10^8$ , la dégénérescence résiduelle de ces modes  $\pm|m|$  était levée par un



mécanisme de rétrodiffusion Rayleigh interne. Ce mécanisme existe également dans la bille laser que nous étudions. Nous en présenterons deux manifestations expérimentales dans le §4.6. Il nous faut donc, pour notre décompte, considérer aussi l'existence de ces deux modes laser.

Muni de cet inventaire, nous déduisons un nombre de modes laser simultanés de l'ordre de  $10(\neq \ell) \times 4(\neq \ell - |m|) \times 2(\pm|m|) = 80$ , qui conduit au seuil par mode de seulement 2 nW, que nous annonçons en introduction, et qui correspond aux estimations du modèle semiclassique présenté au §4.2.

Ces mesures prometteuses confirment qu'un "faible" nombre d'ions, de l'ordre de seulement  $10^6$ , par mode laser, est excité au seuil. En réduisant l'élargissement homogène à une valeur de l'ordre de 20 MHz par exemple, en baissant la température, ce nombre d'ions chute à seulement une dizaine, et le régime de fonctionnement quantique devient accessible. Ces résultats nous ont donc incité à construire un nouveau dispositif de couplage fonctionnant dans l'hélium superfluide, que nous décrivons dans le Chapitre 5.

## 4.6 Etudes complémentaires sur l'influence des pertes

Dans le modèle semiclassique du fonctionnement laser, le seuil en puissance de pompe absorbée croît linéairement avec les pertes. Nous avons pu vérifier ce comportement en contrôlant le niveau de pertes grâce au prisme de couplage.

Une autre étude complémentaire, essentiellement qualitative, a porté sur la mesure du couplage aux deux longueurs d'onde, pompe et laser. Nos observations confirment les propriétés attendues et permettent d'expliquer pourquoi l'émission laser a priori moins favorable à 930 nm qu'à 1083 nm, peut disparaître dans cette dernière bande, tout en persistant à 930 nm. Enfin, nous proposons une interprétation, dans le même ordre idée, pour justifier que seuls des modes lasers de polarisations TM ne soient observées.

### 4.6.1 Dépendance du seuil en fonction des pertes

Nous avons étudié la dépendance du seuil en fonction des pertes de la cavité "froide". Un moyen commode pour élargir la résonance consiste à varier la distance de la bille au prisme pour créer des pertes par couplage.

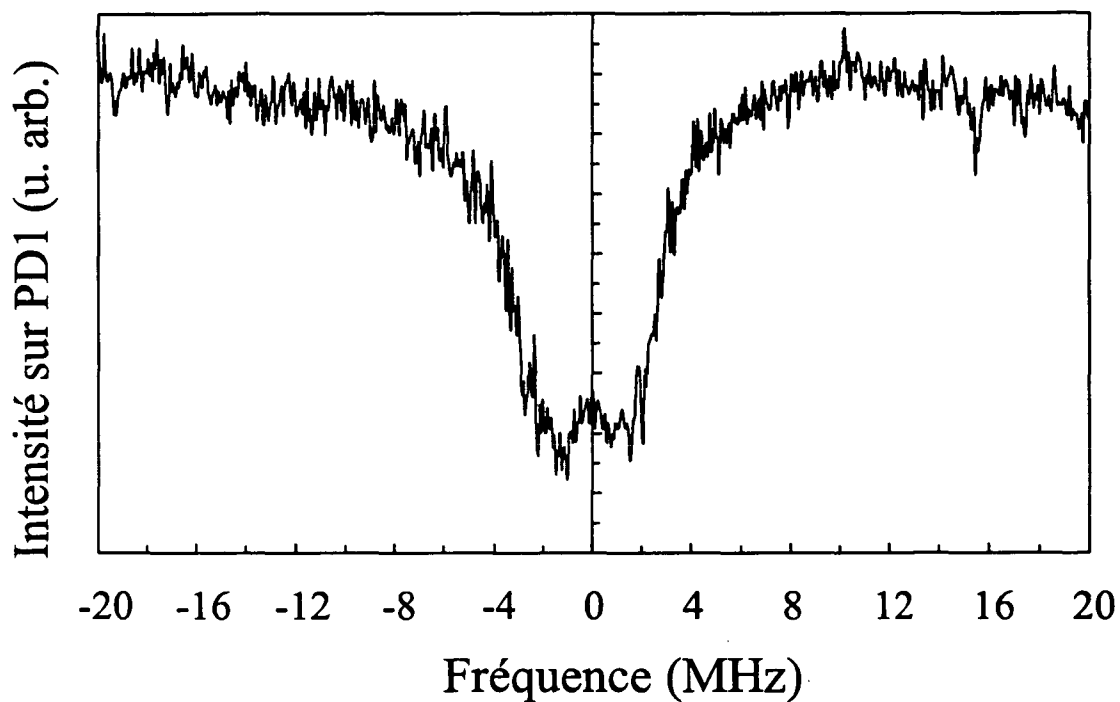


FIG. 4.12 – Doublet de modes, à peine résolu, à 1083 nm. La séparation, par rétrodiffusion, (cf. Chapitre 3), entre les 2 composantes est d'environ 3 MHz. La largeur spectrale du laser DBR sonde, de l'ordre de 1.5 MHz, nous permet de conclure à une largeur de mode inférieure à 1.5 MHz, correspondant à un facteur de qualité supérieur à  $2 \cdot 10^8$ .

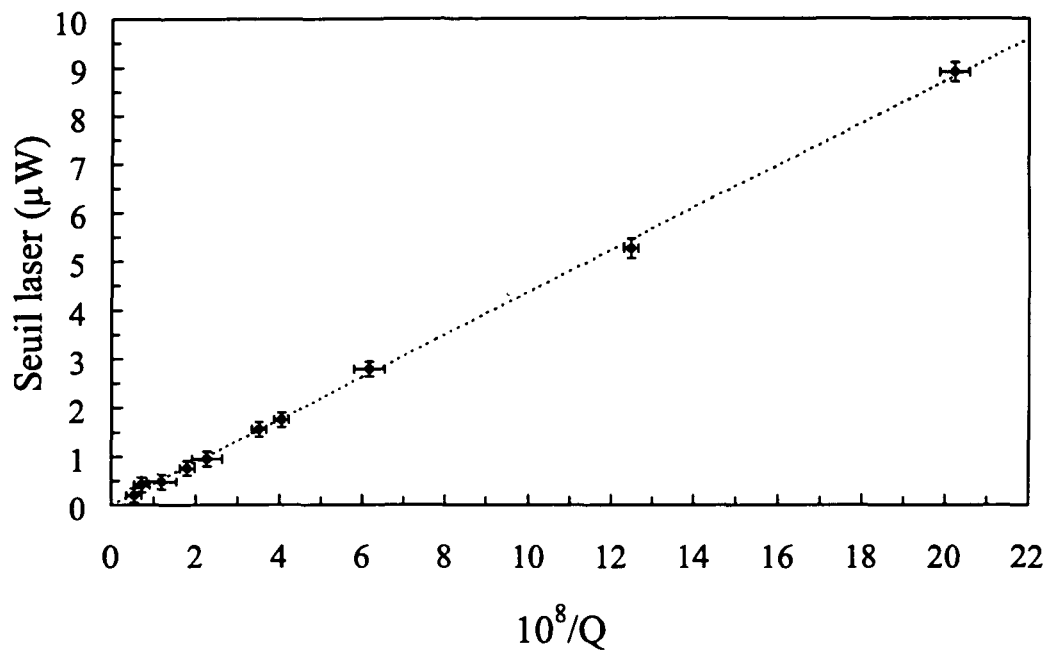


FIG. 4.13 – Dépendance du seuil observé dans la Fig.4.11 en fonction des pertes induites par couplage par prisme à l'extérieur. Ces pertes sont inversement proportionnelles au facteur de qualité  $Q$ .

Nous avons ainsi mesuré, pour différentes distances bille–prisme, les valeurs de seuils en absorption, et le facteur de qualité limité par couplage correspondant, aussitôt après l’extinction du faisceau pompe. Pour cette dernière mesure nous utilisons le laser “sonde” DBR à 1083 nm, que nous balayons en fréquence autour d’une résonance de la bille, préalablement repérée dans le spectre d’émission laser, si besoin est. Sur la Figure 4.12, nous avons représenté l’enregistrement d’un signal de “dip” d’une telle résonance, qui fait apparaître une structure de doublet à peine résolue, caractéristique du phénomène de rétrodiffusion étudié dans le Chapitre 3. La largeur de l’une des composantes est extraite après déconvolution par la largeur du laser sonde (de l’ordre de 1.5 MHz). Nous l’estimons ici à 1.5 MHz (il s’agit de la largeur intrinsèque), avec une séparation des deux composantes du doublet de l’ordre de 3 MHz.

Nos mesures sont récapitulées sur la Figure 4.13, qui montre un comportement linéaire du seuil laser en fonction des pertes, ceci sur plus d’un ordre de grandeur.

#### 4.6.2 Efficacité de couplage par prisme à 810 et 1083 nm. Polarisation de l’émission laser

Sur la Figure 4.14, ont été reportés les taux de couplage (profondeur du “dip” à résonance par rapport au fond) pour différentes valeur de la distance bille–prisme, et pour les deux longueurs d’onde, de pompe (810 nm) et de “sonde” (1083 nm). Ces données concernent toujours la même bille dopée à 0.2 % en ions  $\text{Nd}^{3+}$ , dont nous venons de décrire l’effet laser.

Ces courbes de “dip” de couplage doivent être mises en regard des courbes théoriques du §2.4 du Chapitre 2. Notons dès à présent que l’imprécision relative aux indices du mode excité, nous oblige à nous limiter à une analyse qualitative<sup>8</sup>. Néanmoins, nous retrouvons bien que l’extension de la partie évanescente à l’extérieur de la bille est d’autant plus importante que la longueur d’onde est grande: avec une variation asymptotique en fonction du “gap”  $g$  suivant une loi exponentielle  $\exp(-2\kappa g)$ . Ainsi, afin de détecter le signal laser

---

8. Cette démarche est d’autant mieux justifiée que la linéarité de la calibration du déplacement de *l’inchworm* n’a pas été vérifiée et que lorsque la bille se colle au prisme sous l’effet de force de Van der Waals, le “gap” saute brusquement de plusieurs dizaines de nm, non contrôlés et non répercutés sur la mesure, conduisant à une incertitude importante sur la position du zéro de contact.

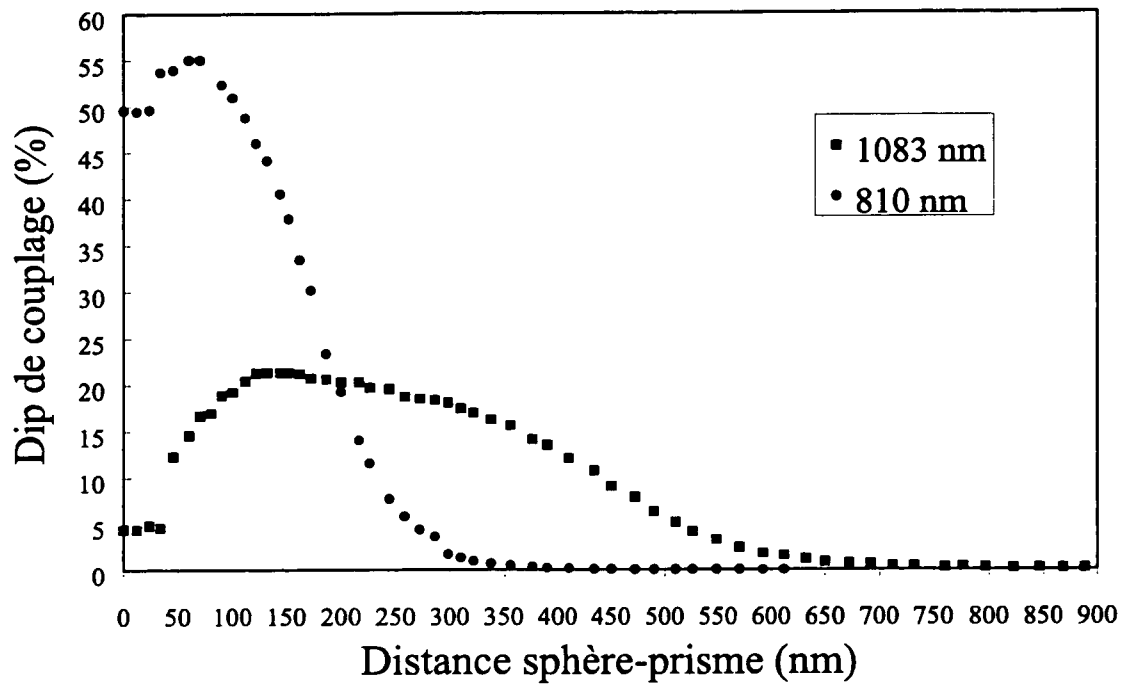


FIG. 4.14 – Couplage du laser de pompe autour de 810 nm (disques pleins) et du laser "sonde" à 1083 nm, dans la bille de 57  $\mu\text{m}$  de diamètre étudiée.

de plus forte intensité, il nous faut trouver une position relative du prisme et de la bille qui corresponde au meilleur compromis entre un couplage suffisant (quelques %) du laser de pompe et un bon facteur de qualité (limité par le couplage) à la longueur d'onde laser.

La dispersion du facteur de qualité limité par couplage, en fonction de la longueur d'onde permet également d'expliquer pourquoi il nous a été possible d'observer la disparition de l'émission dans les modes autour de 1064 nm, dans le spectre de la Fig.4.8(b), alors que nous réduisons la distance bille-prisme, tandis que l'émission dans les modes autour de 930 nm persistait. La portée de l'onde évanescente étant plus faible à 930 nm qu'à 1064 nm, la présence du prisme affecte, en effet, davantage les modes de plus grandes longueurs d'onde.

Durant nos expériences sur le fonctionnement du microlaser, nous avons aussi constaté que l'émission avait lieu systématiquement avec une polarisation TM et qu'il était plus facile d'observer l'effet laser lorsque nous excitions un mode de pompe de polarisation TE. Cette constatation trouve une explication dans le fait que les modes TE possèdent une longueur de pénétration à l'extérieur de la bille un peu plus grande que les modes TM [38]. Il est ainsi possible d'obtenir de bons couplages du laser de pompe à des modes polarisés TE, tout en conservant un bon facteur de qualité pour les modes TM à la longueur d'onde laser.

## 4.7 Densité spectrale de puissance d'une raie laser

La limite fondamentale de largeur spectrale, qui résulte des processus de fluctuation de la phase du champ laser, est donnée dans l'article fondateur de Schawlow et Townes sur la théorie des lasers [80]:

$$\Delta\nu_{\text{laser}} = \frac{\hbar\omega}{\tau_{\text{cav}}^2} \frac{1}{P_0} \equiv \frac{1}{\bar{n} \tau_{\text{cav}}}, \quad (4.8)$$

où  $\tau_{\text{cav}}$  représente la durée de vie du champ dans la cavité "froide",  $P_0$  la puissance de sortie du laser, et  $\bar{n}$  le nombre moyen de photons laser dans la mode. Cette largeur limite, de l'ordre de quelques dizaines de hertz (pour les paramètres relatifs à la microbille laser:  $\tau_{\text{cav}} \simeq 100$  ns), n'est jamais atteinte, en raison de limitations expérimentales.

Les lasers à solide monolithiques, tels que les lasers à barreaux Nd<sup>3+</sup>:YAG, présentent

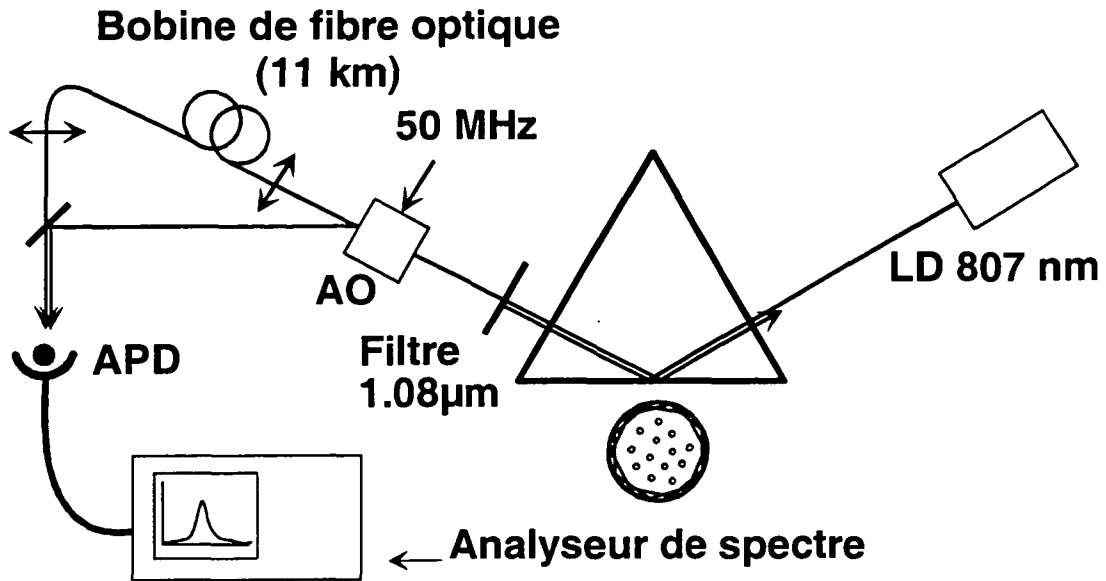


FIG. 4.15 – Montage “auto-hétérodynage” de mesure de largeur spectrale, utilisant un modulateur acousto-optique (AO), modulé à 50 MHz, pour séparer spatialement les deux voies et décaler le battement du bruit technique autour de la fréquence nulle. APD représente une photodiode silicium à avalanche EG&G C30950E (“chip” CD2404, avec une courbe de réponse améliorée dans l’infrarouge) possédant un préampli intégré.

en général de faibles largeurs spectrales. Zayhowski et Mooradian [59] ont notamment mesuré une largeur de 5 kHz dans un “microchip” laser  $\text{Nd}^{3+}:\text{YAG}$  monomode assez similaire au laser *Nanopulse* du CEA/LETI [60]. Les largeurs mesurées sont quasiment toujours limitées par le bruit technique, essentiellement d’origine acoustique, mais aussi par les fluctuations d’intensité de la diode laser de pompe provoquant des fluctuations de température (consulter à ce sujet l’article [81] du groupe de Byer à Stanford).

Nous avons été confrontés à des difficultés similaires lors des mesures de largeur spectrale effectuées sur des billes dopées aux ions néodyme.

### 4.7.1 Techniques de mesures de largeurs spectrales

#### Premières mesures de largeurs par hétérodynage

La technique de mesure de largeur la plus couramment employée utilise un montage d'hétérodynage réalisant le battement sur une photodiode entre un laser fin de référence (l'oscillateur local) et le laser étudié (voir par exemple [82]). La mesure de largeur est alors limitée expérimentalement par la largeur spectrale de l'oscillateur local, et par sa stabilité en fréquence (*i.e.* l'absence de "jitter" significatif), mais présente l'avantage de permettre d'accéder à de très faibles signaux, le carré du photocourant à la fréquence des battements étant proportionnel à la puissance de l'oscillateur local. Le rapport signal/bruit ultime est ainsi obtenu lorsque l'oscillateur local est suffisamment intense pour que son bruit quantique associé soit prépondérant devant le bruit thermique du détecteur.

Disposant de la diode "sonde" DBR à 1083 nm comme oscillateur local, nous avons donc, dans un premier temps, réalisé son hétérodynage avec l'un des modes laser, par chance suffisamment voisin de la fréquence centrale de la diode pour que cette dernière puisse être accordée à la longueur d'onde du mode, ramenant ainsi la fréquence des battements dans le domaine radiofréquence accessible au photodétecteur. Nos mesures ont cependant été limitées par le "jitter" relatif entre les deux lasers, conduisant à un spectre d'allure "rectangulaire", et de largeur variant entre 5 MHz et 15 MHz.

#### La technique "d'auto-hétérodynage"

Afin d'accéder à la largeur spectrale intrinsèque de l'émission laser, nous nous sommes finalement tournés vers une autre configuration, dite "d'auto-hétérodynage" [83]. Dans cette configuration, le laser étudié joue lui-même le rôle d'oscillateur local. Le signal issu de la bille dopée est tout d'abord séparé en deux voies (voir la figure 4.15) à l'aide d'un modulateur acousto-optique (AO). L'une des voies (l'ordre 0, de puissance  $P_0$ ) est envoyée dans une bobine de fibre monomode de longueur totale  $L$ , et acquiert un retard<sup>9</sup>  $\tau_d \equiv NL/c$  par rapport à l'autre voie (l'ordre +1, décalé de la fréquence de modulation  $\nu_{\text{mod}}$ , et de puissance  $P_1$ ) qui se propage librement. À la sortie de la fibre, une lame  $\lambda/2$  permet également de réajuster la direction de polarisation susceptible d'avoir tourné durant la

---

9.  $N$  est l'indice de la silice constituant le cœur de la fibre.



propagation dans la fibre contrainte, et de l'aligner avec la polarisation de l'autre voie, pour optimiser le contraste d'interférence. Les deux voies sont superposées et focalisées sur une photodiode à avalanche rapide de grande sensibilité, qui est directement connectée à un analyseur de spectre.

Lorsque le retard  $\tau_d$  excède suffisamment le temps de cohérence du laser étudié, les signaux sur les deux voies empruntées sont décorrélés, et le spectre de bruit du signal de battement détecté par le photodétecteur a une allure lorentzienne (propre au mécanisme d'élargissement par diffusion de la phase), dont la largeur correspond au double de celle de la raie d'émission laser.

La résolution ultime d'une telle technique est atteinte lorsque le délai imposé par la fibre est de l'ordre de grandeur du temps de cohérence du laser, ce qui correspond à des largeurs spectrales limites de l'ordre de  $\Delta\nu_{\text{lim}} \equiv 1/2\pi\tau_d$ . Dans notre expérience, cette largeur ultime accessible vaut  $\Delta\nu_{\text{lim}} \simeq 4$  kHz, pour la bobine de fibre de longueur  $L = 11$  km utilisée, qui s'est avérée être d'une longueur suffisante.

#### Limite en sensibilité de détection

Par rapport à la configuration d'hétérodynage, le montage de "auto-hétérodynage" retenu pour nos mesures, comporte néanmoins une limite plus contraignante en sensibilité de détection. Nous pouvons établir que le signal de l'analyseur de spectre, qui n'est autre que le spectre de puissance du photocourant, a pour expression:

$$S(\nu) = \alpha^2 \frac{G^2}{R_L} P_0 P_1 \frac{2\Delta\nu_{\text{laser}}/\pi}{4\Delta\nu_{\text{laser}}^2 + (\nu - \nu_{\text{mod}})^2}, \quad (4.9)$$

où  $P_0$  et  $P_1$  représentent les puissances lumineuses à la sortie de chaque voie,  $G$  le gain du photodétecteur en  $V/W$  (lumineux),  $R_L$  la résistance de charge ( $R_L = 50 \Omega$ ),  $(\nu - \nu_{\text{mod}})$  l'écart à la fréquence de modulation du modulateur acousto-optique,  $\Delta\nu_{\text{laser}}$  la largeur spectrale du signal laser étudié, et enfin  $\alpha$  un coefficient d'efficacité permettant de prendre en compte en recouvrement imparfait des faisceaux issus des deux voies, et des défauts d'alignement de leur polarisation. En outre, le bruit  $N$  du détecteur est donné, d'après le fabricant, par la densité spectrale de bruit en tension  $v_N$ , qui en puissance sur la résistance de charge, devient:  $N = v_N^2/R_L$ . Finalement, le rapport signal/bruit, à résonance ( $\nu = \nu_{\text{mod}}$ )

vaut:

$$\frac{S}{N} = \alpha^2 \frac{G^2}{v_N^2} P_0 P_1 \frac{1}{2\pi \Delta\nu_{\text{laser}}}. \quad (4.10)$$

Remarquons que, tant que la largeur spectrale du signal étudié est plus grande que la bande d'analyse de résolution, le rapport signal/bruit est indépendant de la largeur de la bande d'analyse.

Le photodétecteur que nous avons utilisé, un ampli-photodiode EG&G C30950E, équipé d'une photodiode silicium à avalanche CD2404 améliorée dans l'infrarouge, présente les caractéristiques techniques suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} G = 2.8 \times 10^5 \text{ V/W} \\ v_N = 20 \text{ nW} / \sqrt{\text{Hz}} \end{array} \right. \quad (4.11)$$

Si nous supposons qu'il n'y a pas de défaut de recouvrement des faisceaux, c'est à dire  $\alpha = 1$ , le rapport signal/bruit optimum que nous prévoyons pour des puissances équilibrées  $P_0 = P_1 = 0.1 \text{ nW}$  et une largeur spectrale de l'ordre de  $\Delta\nu_{\text{laser}} = 100 \text{ kHz}$ , est de l'ordre de 5 dB.

Afin de vérifier les performances du photodétecteur, et d'estimer la puissance minimale du signal microlaser nécessaire, nous avons simulé l'expérience de mesure de largeur à faible puissance en utilisant la diode DBR à 1083 nm fortement atténuée, jusqu'à 1 nW en sortie de la fibre de décorrélation. Un signal/bruit de 6 dB a été alors mesuré, correspondant à une largeur de raie de 1.5 MHz. Mais la largeur du signal de microlaser attendue est au plus de l'ordre de 100 kHz, ce qui permet d'obtenir ce même rapport  $S/N$  de 6 dB, avec une puissance de seulement 0.1 nW. Nous en concluons que le détecteur se comporte conformément aux spécifications du fabricant, et que la puissance minimale nécessaire à l'observation d'un  $S/N$  raisonnable, est de l'ordre de 0.1 nW.

#### 4.7.2 Résultats expérimentaux: mesure de la largeur spectrale du microlaser

Nos résultats portent sur la bille de 57  $\mu\text{m}$  de diamètre, étudiée dans les sections précédentes.

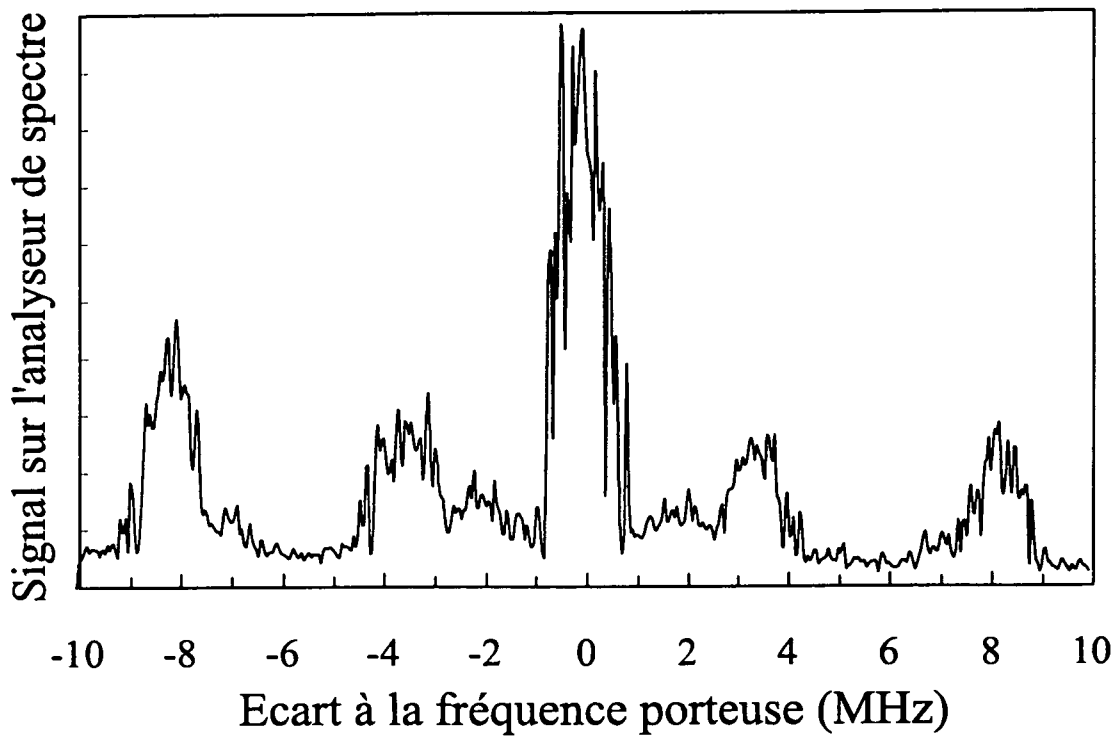


FIG. 4.16 – Spectre “d’autohétérodynage” de l’émission laser multimode issue de la bille de  $57\ \mu\text{m}$  de diamètre dopée aux ions  $\text{Nd}^{3+}$ . Il apparaît, en plus de la raie centrale, des bandes latérales, provenant du battement entre deux composantes des doublets de “backscattering”. Bande de résolution de l’analyseur de spectre: 30 kHz, “sweeptime”: 600 ms.

### Spectre d'autohétérodynage sur un large domaine de fréquence

Le spectre "d'autohétérodynage" de la Figure 4.16, fait apparaître, en plus de la raie que nous attendons, centrée sur la fréquence de modulation, différentes bandes latérales symétriques de 2 à 8 MHz. Si l'on considère l'une d'entre elle, nous pouvons l'interpréter comme résultant du battement entre l'une des composantes du doublet de "backscattering" associé à un mode qui a suivi la voie 0 à travers le modulateur, et l'autre composante, décalée de  $\nu_{\text{mod}}$  après son passage par la voie 1. L'écart de cette bande à la fréquence centrale  $\nu_{\text{mod}}$  correspond donc à la séparation du doublet, et l'existence de plusieurs bandes reflète le fonctionnement laser multimode.

Dans le cas des billes dopées, les ions  $\text{Nd}^{3+}$  constituent la principale source de rétro-diffusion. En raison des dopages relativement élevés que nous avons utilisés, il n'est donc pas surprenant d'observer des séparations de composantes des doublets plus importantes que celles observées dans des billes de silice pure (*cf.* Chapitre 3).

L'interprétation que nous donnons des bandes latérales observées dans le spectre "d'autohétérodynage" est par ailleurs confirmée par l'observation de doublets de modes de la cavités froide à 1083 nm, ayant des séparations pouvant aller jusqu'à plus de 5 MHz.

### Plus faible largeur spectrale observée et limitations expérimentales

Nous avons constaté, contrairement au comportement théorique attendu (*cf.* éq.(4.8) et [82]), une augmentation de la largeur spectrale avec la puissance de pompe, suggérant un mécanisme d'élargissement dû aux fluctuations thermiques induites par les variations d'intensité du laser de pompe.

L'enregistrement de la Figure 4.17 correspond à la plus petite largeur mesurable, de l'ordre de 65 kHz, obtenue en réduisant au maximum l'intensité du laser de pompage, et à un rapport  $S/N = 6$  dB. La puissance absorbée par la bille est alors de l'ordre de 800 nW, c'est à dire 4 fois la puissance absorbée au seuil, et la puissance du signal de microlaser à la sortie de la fibre de décorrélation vaut 0.45 nW. Le rapport  $S/N$  attendu pour une telle puissance, d'après l'éq. (4.10), est estimé à 10 dB, lorsque le paramètre d'efficacité  $\alpha$  vaut 1. Nous interprétons l'écart de nos observations (6 dB) à cette valeur, par un mauvais recouvrement des deux faisceaux qui interfèrent sur la photodiode, l'un des deux faisceaux

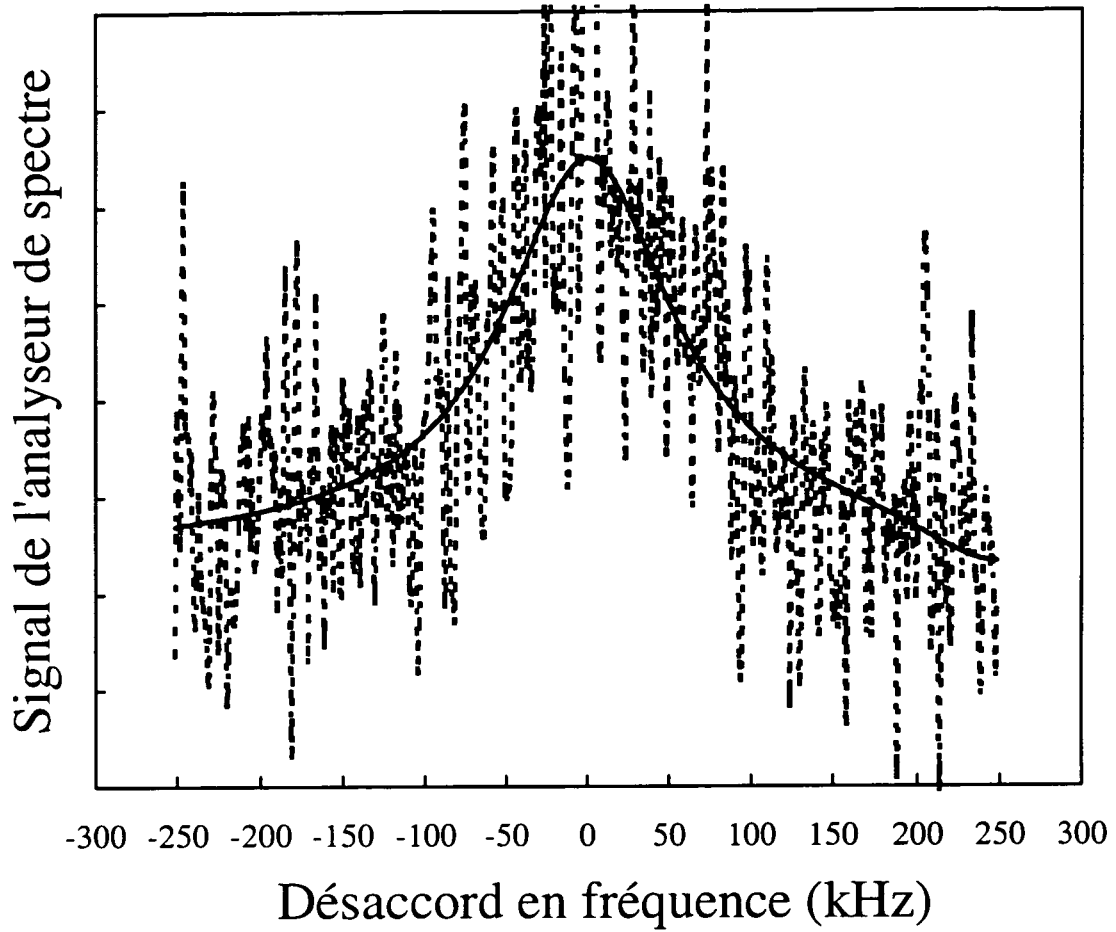


FIG. 4.17 – Spectre “d’auto-hétérodynage” de l’émission laser multimode issue de la bille de  $57\ \mu\text{m}$  de diamètre dopée aux ions  $\text{Nd}^{3+}$  (en pointillés): largeur spectrale minimale observée. En trait plein: un “fit” lorentzien du spectre dont la moitié de la largeur vaut environ  $65\ \text{kHz}$ . Bande de résolution de l’analyseur de spectre:  $10\ \text{kHz}$ .

étant issu de la fibre et l'autre se propageant librement depuis la sortie de la bille.

Notons que pour cette expérience, nous avons utilisé, en guise de pompe, une diode laser libre qui pouvait présenter d'assez fortes fluctuations d'intensité. Par la suite, une diode de même modèle, mais montée sur réseau, n'a cependant pas permis d'observer une nouvelle réduction de largeur spectrale. Cette nouvelle diode présentait néanmoins, dans son spectre, des fréquences de l'ordre de quelques MHz, que nous avons attribuées à des oscillations de relaxation. Nous n'avons pas poursuivi nos efforts pour améliorer sa stabilité en intensité, car il nous semblait préférable de reprendre ces mesures dans le régime monomode.

Enfin, il est probable que l'échange intermittent de photons entre deux modes laser de fréquences voisines, dans le profil de largeur homogène, et connu sous l'appellation de *bruit de partition*, soit responsable d'une bonne partie de l'élargissement du spectre.

## 4.8 Vers le contrôle du fonctionnement multi/mono mode

L'obtention, à température ambiante, de seuils lasers plus faibles, dans le domaine du nW, nécessite que nous puissions forcer l'émission laser sur un petit nombre de modes seulement. Plusieurs solutions ont été envisagées, que nous allons détailler. Les trois dernières présentées, exploitent la compétition entre modes voisins ayant un bon recouvrement spatial. Nous avons en effet déjà remarqué que la séparation de 4.5 nm entre modes "longitudinaux" voisins, dans le spectre d'émission laser, était probablement plus petite que la largeur homogène de la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$  communément admise, de l'ordre de 6 nm (1500 GHz). Deux modes laser voisins, qui par ailleurs ont un bon recouvrement spatial, doivent donc pouvoir entrer en compétition.

### 4.8.1 Quelques méthodes de contrôle du régime de fonctionnement

#### Sélection des mode de pompe les mieux confinés ( $\ell \simeq |m|$ )

La méthode de sélection de modes d'émission laser la plus naturelle, consiste à minimiser le volume de la zone de gain excitée, en réalisant le pompage résonant à travers un mode de pompe de faible volume ( $\ell \simeq |m|$ ). Nous devrions ainsi pouvoir éliminer tous les

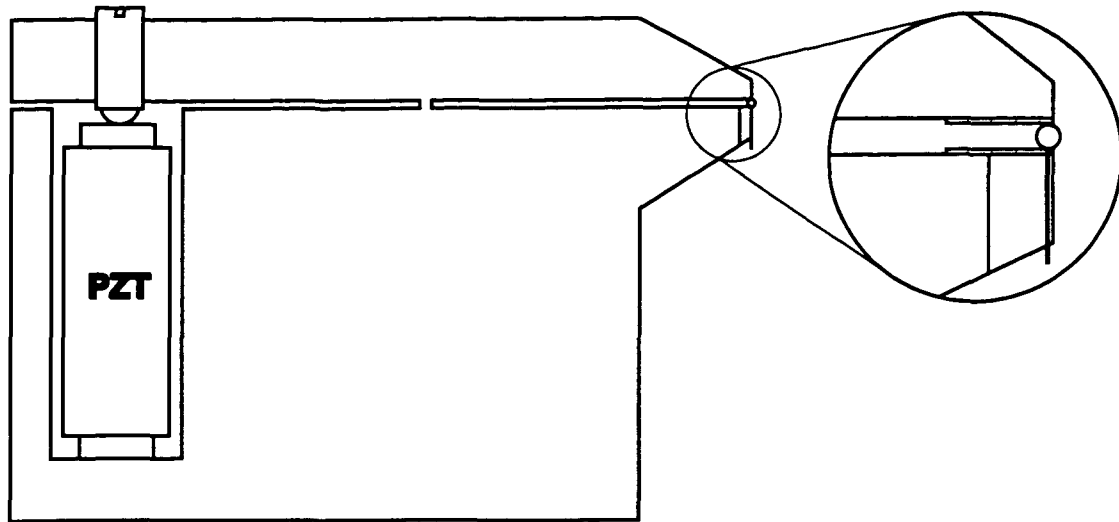


FIG. 4.18 – “Pince” pour l’accord mécanique du spectre des modes de galerie d’une microbille, à la longueur d’onde d’émission laser.

modes “transverses” que nous observions sur la Fig.4.9. Pour identifier la nature du mode excité, et en particulier repérer les modes  $\ell = |m|$ , nous disposons, dans le laboratoire, de la technique de cartographie par pointes de fibres étirées mise au point pendant la thèse de Nicolas Dubreuil [48]. Nous avons néanmoins préféré retarder l’installation de ce dispositif dans notre montage, et continuer à nous fier à la taille de la bande équatoriale de fluorescence, visible sur l’image CCD, pour sélectionner les modes de pompe de plus faibles volumes.

#### Accord mécanique du spectre des modes laser

Si nous parvenons à accorder le spectre des modes de galerie par rapport aux maxima d’émission des transitions ioniques, nous pouvons alors favoriser, par le biais de la compétition entre modes, l’émission dans certains modes aux dépens d’autres modes voisins.

La technique d’accord que nous avons développée en collaboration avec Vladimir Ilchenko (Moscou), a permis d’accorder par contrainte de pression aux pôles, le spectre des modes de galerie sur 155 GHz, ce qui correspond, à 807 nm, à 40% de l’intervalle spectral libre de la bille de diamètre  $2a = 160 \mu\text{m}$  utilisée dans l’expérience de démonstration [84]. Notre technique s’apparente à celle mise en œuvre par Huston et Eversole [85], qui par

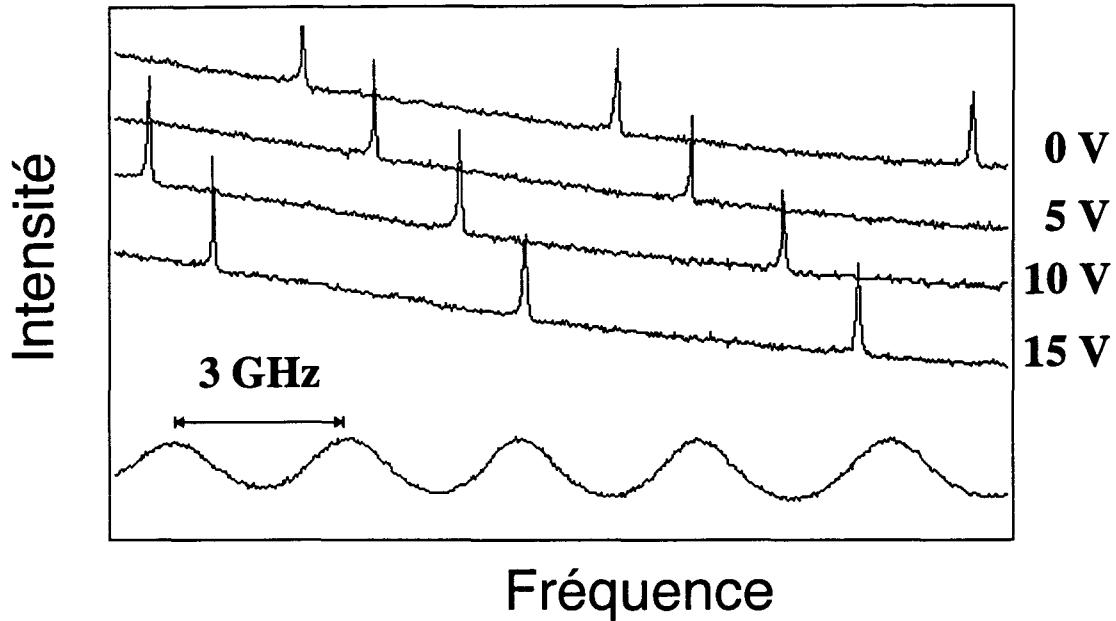


FIG. 4.19 – Déplacement du spectre d'une microbille de  $160 \mu\text{m}$  de diamètre comprimée par la pince de la Fig.4.18. En haut, 4 enregistrements correspondant à des tensions appliquées sur le "stack" piézoélectrique (PZT) de 0 V à 15 V. La pente en intensité provient de la variation d'intensité en sortie du laser monté sur réseau ( $\lambda = 807 \text{ nm}$ ) lorsque nous balayons le spectre. Au bas de la Figure, l'enregistrement de la transmission d'un Fabry Pérot de très faible finesse permet une calibration en fréquence: son intervalle spectral libre vaut 3 GHz. Les résonance observées correspondent à des modes  $n = 1, \ell \simeq 900$  et des valeurs consécutives de  $\ell - |m| \simeq 20$ . Elles sont séparées d'environ 5.3 GHz.



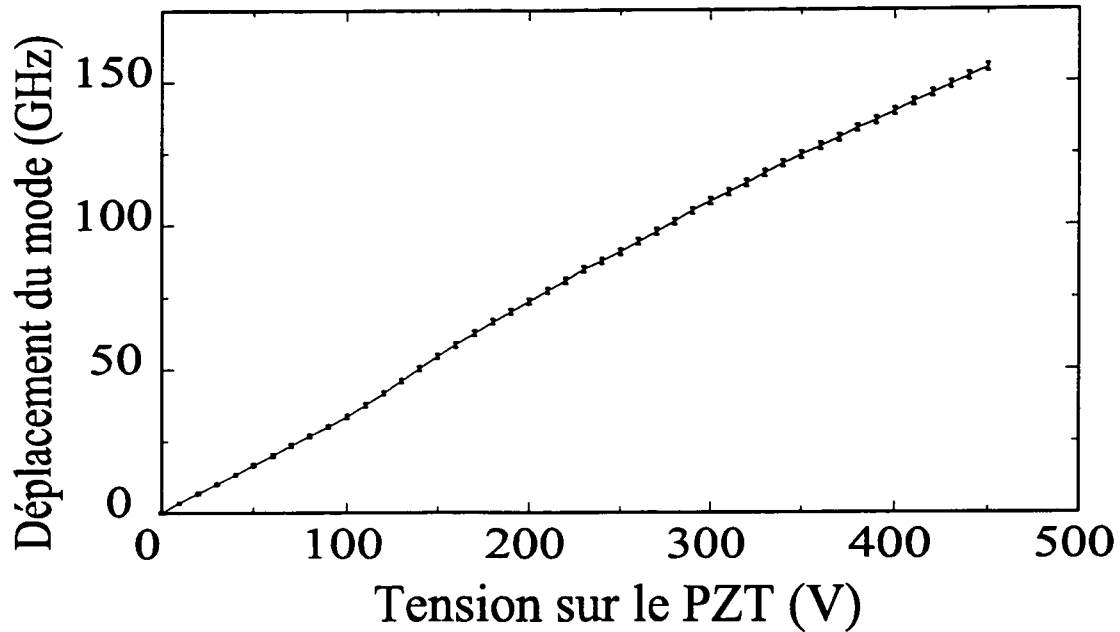


FIG. 4.20 – Déplacement absolu en fréquence, de l'un des modes de la Fig.4.19, lorsque la tension appliquée aux bornes du “stack” piézoélectrique varie de 0 à 450 V.

traction aux deux extrémités d'un échantillon de fibre optique, ont pu accorder son spectre de modes de galerie.

Le Schéma 4.18, représente la “pince” utilisée pour appliquer la contrainte polaire. Les deux calottes polaires reposent sur de fines lamelles de cuivre, qui assurent une répartition à peu près homogène de la pression exercée. L'extension du “stack” piézoélectrique (PZT) provoque, par rotation autour du pivot central, la fermeture des deux mâchoires de la pince, entre lesquelles la bille est préalablement placée (en glissant sa tige de  $15 \mu\text{m}$  dans une fente de  $30 \mu\text{m}$  de largeur, taillée dans la mâchoire inférieure). Les modes de galerie excités étant relativement bien confinés autour de l'équateur ( $\ell - |m| < 20$ , comme l'indique l'allure du champ lointain), la présence de la pince et l'application d'une contrainte sur les zones polaire n'affectent pas leur facteur de qualité ( $Q \simeq 10^8$ ).

Nous avons suivi sur la Figure 4.19 le déplacement d'une portion du spectre (3 modes  $\ell - |m|$  consécutifs, séparés par 5.3 GHz) de la bille de silice de  $160 \mu\text{m}$  de diamètre, lorsque la tension aux bornes de l'empilement de cales PZT varie de 0 à 15 V. Nous nous sommes ensuite attachés à suivre un seul de ces modes sur la gamme de tension complète, de 0

à 450 V, et avons reporté, sur la Figure 4.20, le déplacement en fréquence de ce mode, par pas de 10 V. Une tension appliquée de 450 V sur l'empilement de cales PZT provoque un déplacement absolu du mode suivi de 155 GHz. Nous avons par ailleurs constaté une augmentation, de l'ordre de 20%, de l'écart entre modes de différents  $\ell - |m|$ , correspondant à une augmentation de l'ellipticité de la bille sous l'effet des contraintes.

Afin d'interpréter ces observations, précisons les trois causes de déplacement des résonances de la bille comprimée, pour un mode purement équatorial ( $n = 1, \ell \simeq |m|$ ). Tout d'abord, la compression du rayon polaire  $r_p$  provoque une augmentation du rayon équatorial  $r_e$  et donc une variation des conditions de retour en phase à résonance. La déformation de la silice s'accompagne par ailleurs d'une variation de l'indice  $N$ . Les taux de déformation n'étant pas isotropes, la compression va engendrer une biréfringence, et la contribution d'indice au déplacement des résonances va dépendre de la polarisation TE ou TM du champ. Enfin, l'ellipticité  $e \equiv (r_p - r_e)/a$  augmente, modifiant ainsi l'écart de fréquence entre les modes de valeurs  $\ell - |m|$  consécutives. Nous en déduisons, pour les deux polarisations TE ou TM, le déplacement relatif de fréquence d'un mode prenant en compte ces trois contributions:

$$\frac{\Delta\nu_{\text{TE, TM}}}{\nu} = -\frac{\Delta r_e}{a} - \frac{\Delta N_{\text{TE, TM}}}{N} + \frac{\ell - |m|}{\ell} \Delta e. \quad (4.12)$$

Nous renvoyons le lecteur au §1.1.3 pour retrouver l'expression de la dernière contribution, qui prend en compte l'effet de la variation d'ellipticité, dans le cas le plus courant où  $\ell \gg 1, |m| \simeq \ell$ .

Pour simplifier notre analyse, nous assimilons maintenant la déformation de la bille à celle d'un cylindre dont le rayon de base couvre les 2/3 du rayon  $a$  (estimation de l'extension de la zone de contact). La déformation relative dans la direction radiale  $u_r \equiv \Delta r_e/(2/3a)$  est liée à la déformation axiale  $u_z \equiv \Delta z/2a = \Delta r_p/2a$ , par le coefficient de Poisson  $\sigma$  [86]:

$$u_r = -\sigma u_z, \quad (4.13)$$

Nous trouvons, pour la silice fondue, dans [87],  $\sigma = 0.17$ .

Sous l'effet d'une compression  $\Delta z$  du rayon polaire, l'ordre de grandeur de la variation d'ellipticité est  $\Delta r_p/a$ . Les contributions, dans l'éq.(4.12) du terme d'ellipticité et du terme de déformation équatoriale sont alors dans le rapport  $\ell - m/\ell \times |\Delta r_p/\Delta r_e| \simeq \ell - |m|/\sigma\ell$ .

Pour la bille étudiée ( $\ell \simeq 900$  et  $\ell - |m| \simeq 20$ ), ce rapport est de l'ordre de 0.13. Dans ce qui suit, nous allons donc pouvoir négliger l'effet de la variation d'ellipticité devant les deux autres contributions.

La contribution de l'augmentation du rayon équatorial au déplacement de fréquence, par unité de longueur de compression vaut:

$$-\frac{\Delta r_e}{2/3a} \frac{1}{\Delta z} = \frac{\sigma}{2a} = \frac{0.17}{160} = 1.06 \times 10^{-3} \mu\text{m}^{-1}. \quad (4.14)$$

Pour évaluer la contribution d'indice au déplacement en fréquence, nous faisons appel aux coefficients élasto-optiques [87], qui relient la variation d'indice aux taux de déformation, pour les deux polarisations, selon:

$$\begin{cases} \Delta \left( \frac{1}{N^2} \right)_{\text{TE}} = 2p_{12}u_r + p_{11}u_z = [p_{11} - 2\sigma p_{12}] u_z \\ \Delta \left( \frac{1}{N^2} \right)_{\text{TM}} = (p_{11} + p_{12})u_r + p_{12}u_z = [p_{12} - \sigma(p_{11} + p_{12})] u_z, \end{cases} \quad (4.15)$$

où, pour la silice, les deux coefficients elasto-optique  $p_{11}$  et  $p_{12}$  sont donnés [87] par:  $p_{11} = 0.126$  et  $p_{12} = 0.26$ . Nous en déduisons la contribution d'indice au déplacement en fréquence, par unité de longueur de compression:

$$\begin{cases} - \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_{\text{TE}} \frac{1}{\Delta z} = 2.5 \times 10^{-4} \mu\text{m}^{-1} \\ - \left( \frac{\Delta N}{N} \right)_{\text{TM}} \frac{1}{\Delta z} = 1.28 \times 10^{-3} \mu\text{m}^{-1}. \end{cases} \quad (4.16)$$

Finalement, si nous réunissons les deux contributions (4.14) et (4.16):

$$\begin{cases} \frac{\Delta \nu_{\text{TE}}}{\Delta z} = 490 \text{ GHz}/\mu\text{m} \\ \frac{\Delta \nu_{\text{TM}}}{\Delta z} = 870 \text{ GHz}/\mu\text{m}. \end{cases} \quad (4.17)$$

Le déplacement de 155 GHz que nous avons observé pour un mode TE, correspond à une compression de l'ordre de  $0.32 \mu\text{m}$ . Nous en concluons qu'une faible fraction seulement du déplacement total de  $5 \mu\text{m}$  du "stack" piézoélectrique est effectivement répercutée sur le rayon polaire de la bille. Nous pensons qu'une grande partie de la déformation est encaissée par les lames de cuivre sur lesquelles repose la bille, et envisageons par la suite de les remplacer par un matériau plus dur, néanmoins capable d'épouser la forme de la bille.

Précisons, pour conclure, que nous avons également effectué une simulation numérique de la dépendance radiale des taux de déformation, et que les résultats, que nous présentons dans [84], confirment bien les ordres de grandeur simples que nous venons d'établir.

### **Injection d'un mode laser**

Cette technique exploite également la compétition entre deux modes laser qui possèdent un bon recouvrement spatial. Elle consiste à favoriser l'effet laser dans l'un des modes, en lui injectant, avant le début du pompage, un faible champ qui enseme la croissance du champ laser aux dépens des modes voisins, dès que le pompage débute.

Des expériences récemment menées dans l'équipe de Richard Chang [88], ont démontré l'existence d'un tel effet dans des microgouttelettes d'éthanol dopées en colorant (Rhodamine B). Ces expériences ont confirmé qu'un bon recouvrement spatial des modes était nécessaire pour que l'injection soit efficace: l'ensemencement d'un mode  $(n, \ell, |m| = \ell)$  permet d'éliminer l'émission sur les deux modes voisins  $(n, \ell \pm 1, |m| = \ell \pm 1)$  avec lesquels il se recouvre presque intégralement; tandis que l'ensemencement d'un mode  $(n, \ell, |m| = \ell)$  n'a quasiment aucune influence sur les modes  $(n \pm 1, \ell', |m'| = \ell)$  avec lesquels le recouvrement n'est qu'au plus de 65%. Les auteurs précisent par ailleurs qu'ils n'observent un effet d'injection qu'à la seule condition de faire *précéder* le pompage par l'ensemencement. Cette constatation, lié à un effet d'hysteresis, pourrait expliquer nos différents échecs pour injecter un mode laser à l'aide de notre diode laser DBR à 1083 nm, alors que nous pompions en continu.

L'existence de deux ports de sortie à notre microbille laser, nous permet d'envisager également une sorte d'auto-injection. En effet, en plaçant sur la voie de sortie non utilisée un élément dispersif suivi d'un miroir, nous pouvons réinjecter dans la bille l'un des modes laser, et privilégier l'émission sur ce mode. Nous n'avons pas encore réalisé cette expérience.

#### **4.8.2 Expérience: changement de régime par ajout sélectif de pertes**

Dans le cas des lasers à colorant, l'ajout d'éléments sélectifs en fréquence, tels un filtre de Lyot, permet de sélectionner l'émission laser sur le mode souhaité. Une autre voie de sélection des modes dans notre expérience, consiste à ajouter des pertes, de l'extérieur de

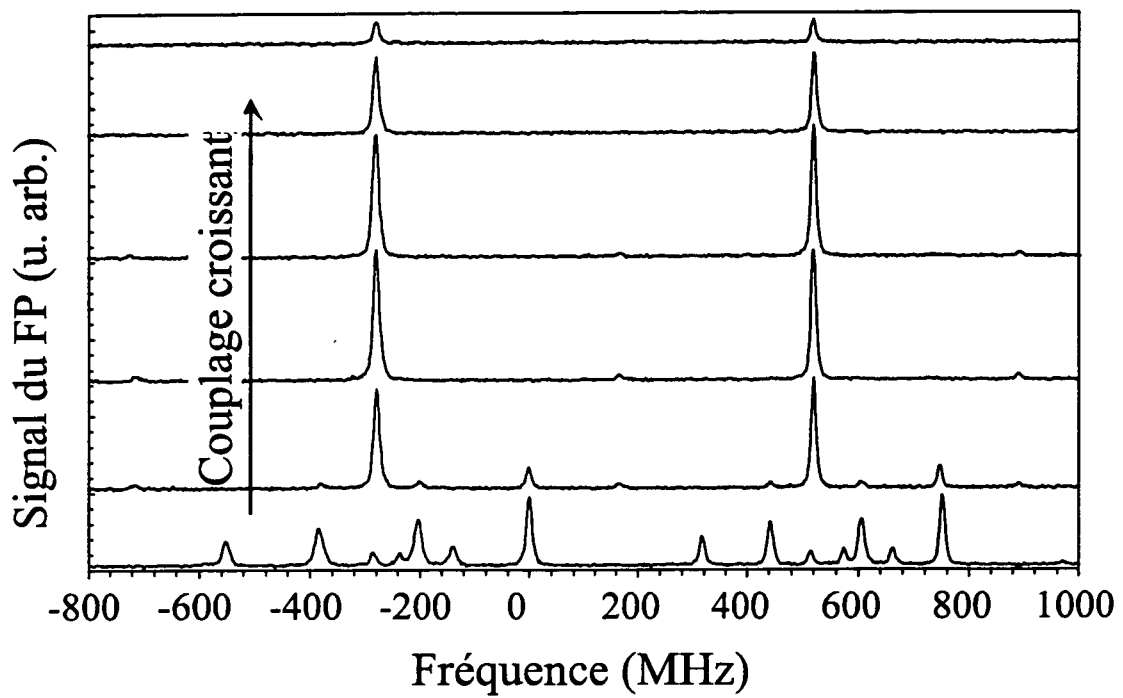


FIG. 4.21 – Signal laser d'une bille dopée 1500 ppm de 80  $\mu\text{m}$  de diamètre, filtré par un Fabry Pérot à 1083 nm balayé sur un intervalle spectral libre. Passage d'un fonctionnement multimode à un fonctionnement monomode lorsque les pertes par couplage au prisme sont augmentées (dans le sens du "gap" décroissant.)

la bille, sur certains modes uniquement. Nous avons déjà invoqué un tel mécanisme, dans le §4.6.2 pour expliquer l'absence de modes laser de polarisation TE. Pour ces modes, le domaine évanescent s'étend plus loin à l'extérieur de la bille que pour les modes TM ce qui a pour effet d'augmenter leur couplage en sortie au prisme, donc les pertes qu'ils subissent.

Nous avons vérifié le principe de cette méthode en suivant, sur la Figure 4.21, l'évolution du spectre multimode d'une bille dopée de  $80 \mu\text{m}$  de diamètre, lorsque le couplage en sortie au prisme est augmenté en rapprochant la bille du prisme. Un autre mécanisme de sélection des modes par leur polarisation est cité par Hill *et al.* [89], qui ont observé la disparition des modes TM, dans le spectre de fluorescence de la lumière diffusée par des microbilles d'environ  $9 \mu\text{m}$  de diamètre, lorsque ces billes reposent sur un substrat argenté. Les auteurs ont attribué cet effet à l'absorption de la composante du champ électrique normale à la surface métallique, susceptible d'exciter des modes de plasmons se propageant en surface [90].

Dans notre expérience, nous pourrions utiliser une pointe de fibre étirée (éventuellement recouverte d'une couche métallique), et placer son extrémité aux maximums du champ des modes que l'on cherche à supprimer en créant sélectivement des pertes. En guise de démonstration, nous nous sommes pour l'instant limités à suivre l'évolution du spectre multimode d'une bille dopée de  $80 \mu\text{m}$  de diamètre, lorsque le couplage en sortie au prisme est augmenté en rapprochant la bille du prisme. Au fur et à mesure que la bille est approchée du prisme, nous constatons, dans le spectre, la disparition progressive de certains modes au profit d'un seul mode. Ce dernier finit à son tour, par s'atténuer et disparaître, quand les pertes qu'il subit sont trop importantes. Nous n'avons pas identifié la structure du mode qui subsiste, mais pensons qu'il s'agit probablement d'un mode  $\ell = |m| \pm$  quelques unités, bon compromis entre un mode de faible volume et d'extension polaire suffisamment importante pour ne pas être trop influencé par la présence du prisme. Le fait que ce mode, d'intensité initiale plus faible que les modes voisins (voir le spectre du bas de la Fig. 4.21), croît d'abord aux dépens des autres modes, confirme aussi l'existence d'une compétition entre ces modes.

## 4.9 Conclusion

Dans les expériences microlaser que nous avons menées à température ambiante, sur des billes de silice dopées, nous avons observé un fonctionnement laser avec un seuil très faible de 200 nW, correspondant à un seuil par mode de 2 nW par mode et à l'excitation de seulement  $10^6$  ions au seuil d'émission laser.

À température ambiante, la perte de cohérence optique, responsable de l'élargissement homogène (*cf.* section 4.1.2) est le mécanisme de relaxation des transitions ioniques dominant, qui limite les seuils que nous avons observés. Pour pouvoir atteindre le régime quantique de couplage fort que nous convoitons, entre quelques ions et quelques centaines de photons dans un mode de la cavité, il faut réduire l'élargissement homogène au niveau de la fréquence de Rabi correspondante. Nous devrions alors pouvoir atteindre un régime de fonctionnement laser inhabituel encore mal étudié expérimentalement [7], dans lequel les fluctuations quantiques jouent un rôle prépondérant, et se manifestant notamment par l'absence de seuil laser marqué, comme les simulations de Peter Domokos l'ont prouvé [77].

Afin de réduire l'élargissement homogène des transitions lasers, nous avons donc été amenés à réaliser un dispositif expérimental de couplage aux modes fonctionnant dans l'hélium superfluide. Dans le prochain chapitre, nous décrivons ce nouveau montage, ainsi que les résultats préliminaires que nous avons obtenus: facteurs de qualité  $Q \simeq 10^9$ , bistabilité Kerr, et premier spectre laser à froid.

## Chapitre 5

# Expériences à froid: vers le microlaser sans seuil

Nous avons montré dans le Chapitre 4 que les microbilles de silice s'avèrent être d'excellents résonateurs pour réaliser des lasers caractérisés par de très faibles seuils, et avons remarqué que ces valeurs de seuil étaient limitées par les processus de relaxation ionique liés au couplage des ions avec les phonons de la matrice vitreuse.

Cependant, en réduisant la température, nous réduisons l'énergie des phonons et limitons de ce fait la relaxation des ions. Il devient alors possible d'augmenter considérablement le facteur de Purcell, en jouant uniquement sur le facteur d'élargissement homogène. En effet, Hegarty *et al.* [69], ont mesuré, sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ , des largeurs homogènes de l'ordre de 1 MHz à 1 K, nous donnant bon espoir de pouvoir atteindre des valeurs très élevées de  $\eta$  (correspondant à des valeurs de  $\beta$  proches de 1). On peut alors montrer que pour de telles valeurs du facteur de Purcell, l'oscillation laser débute dès le premier photon de pompe injecté dans la cavité, ce que les auteurs qualifient de *régime laser sans seuil* [91] [7]. Il s'agit d'un régime de fonctionnement quantique, que nous souhaiterions mettre en évidence, dans lequel les fluctuations jouent un rôle prépondérant. Ces considérations ont ainsi justifié la mise au point d'un dispositif fonctionnant à basse température.

Dans ce qui suit, nous décrivons tout d'abord le nouveau montage élaboré durant cette thèse en collaboration avec V. Ilchenko, comprenant un cryostat à hélium 4 et une platine de couplage aux modes de galerie immergée dans l'hélium superfluide (§5.1). Nous



poursuivons par la mise en évidence expérimentale de très grands facteurs de qualité ( $Q \simeq 10^9$ ), dans des billes de silice pure, étape requise avant l'étude des billes dopées, et qui a permis d'observer un phénomène intéressant de bistabilité optique qui pourrait être dû à la nonlinéarité Kerr de la silice (§5.2). Enfin, après une étude préliminaire de l'évolution des spectres de fluorescence de la silice dopée (§5.3), nous présentons les toutes premières observations d'une émission laser dans l'hélium superfluide, et justifions pourquoi nous n'avons pas encore pu observer de réduction notable du seuil (§5.4). Nous concluons sur les perspectives des expériences d'électrodynamique en cavité à basse température, qui devraient conduire à l'étude du couplage fort d'un mode de galerie à une molécule unique (§5.5).

## 5.1 Montage cryogénique

### 5.1.1 Le cryostat et ses performances

Pour toutes les expériences à basse température, nous avons pu bénéficier du cryostat conçu par J.-C. Maréchal et réalisé au Laboratoire, et que Valérie Lefèvre a utilisé pour les expériences décrites dans sa thèse de Doctorat d'État. Le principal avantage que nous avons trouvé à ce cryostat, pour nos propres expériences, est de fournir un accès optique, indispensable à la procédure d'alignement de la microbille et du prisme. D'autre part, ce cryostat permet de descendre en température, en dessous du "point  $\lambda$ " de la transition superfluide ( $T_{\min} \simeq 1.8$  K, avec un débit de pompe de  $28 \text{ m}^3/\text{h}$ ), et de faire baigner tout le dispositif de couplage, en particulier l'optique (bille, prisme et lentille) dans un bain homogène d'hélium superfluide.

Nous bénéficions, en outre, de la très bonne conductivité thermique de l'hélium superfluide pour évacuer efficacement la chaleur dissipée dans le mode et limiter la bistabilité thermique.

Enfin, compte tenu de l'importante réserve (22 l) en hélium liquide contenu dans le vase extérieur, et des faibles pertes (pertes à 4.2 K de l'ordre de  $0.2 \text{ l/h}$ , et de  $0.8 \text{ l/h}$  à 2.17 K), ce cryostat possède une autonomie suffisante pour fonctionner en continu à 1.8 K avec un transfert d'hélium toutes les 36 h environ. La stabilité nécessaire au protocole de réglages et d'enregistrement des données (spectres laser, courbes de seuils, ...) est ainsi assurée.

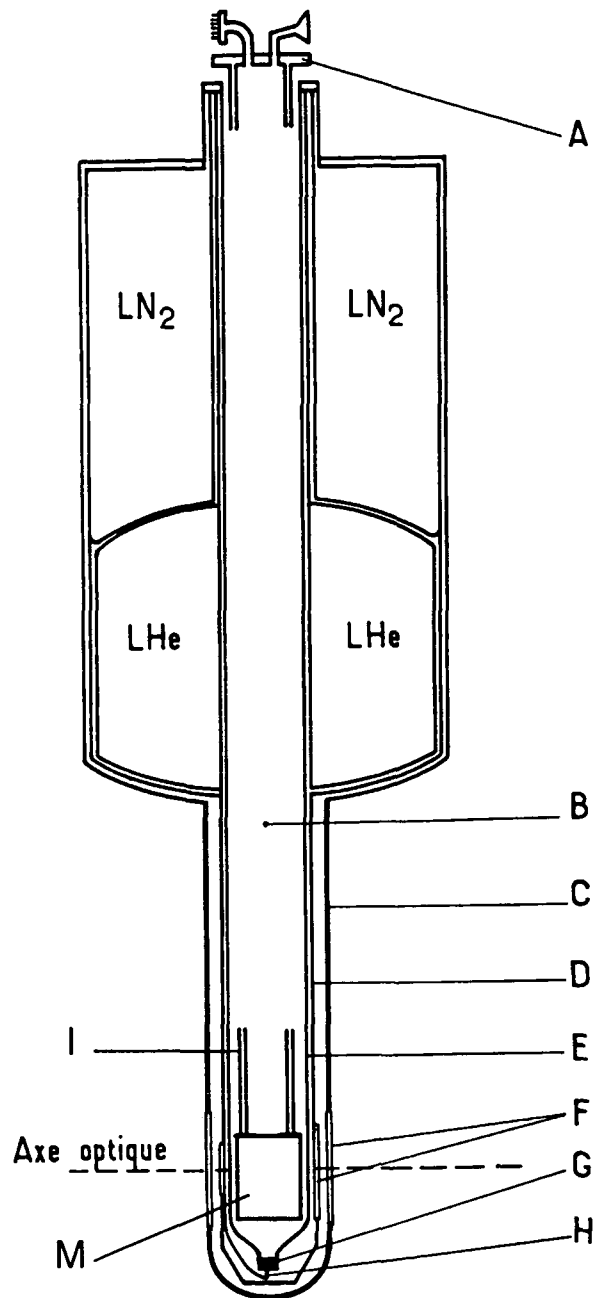


FIG. 5.1 - Schéma général du cryostat. (A) couvercle flasque auquel est suspendu l'expérience. (B) vase central (inox+manchon en verre). (C) vase extérieur (verre doré pour réduire les pertes par rayonnement). (D) écran en cuivre thermalisé sur le réservoir d'azote liquide ( $LN_2$ ). (E) manchon de verre du vase central. (F) fenêtre en verre au plomb permettant l'accès optique pour les alignements. (G) échangeur en cuivre. (H) capillaire de cuivre relié au réservoir extérieur d'hélium liquide (LHe). (M) platine de l'expérience, suspendue aux colonnettes (I).

Le schéma d'ensemble 5.1, adapté de la thèse d'État de V. Lefèvre, montre le réservoir d'azote liquide ( $LN_2$ ) d'une capacité de 22 l. Il permet de réduire les pertes par rayonnement, en thermalisant un écran thermique en cuivre, ainsi que les fenêtres en verre au plomb (F), pour écranter le rayonnement thermique à 300 K. Le dispositif de couplage aux microbilles, schématisé plus en détail sur la Figure 5.2, est fixé sur une platine suspendue par 4 colonnettes (I) en tube inox percé, soudées au couvercle (A) du cryostat et à deux disques de 4 mm d'épaisseur, en cuivre, que nous avons ajoutés aux trois autres disques de 2 mm d'épaisseur faisant office d'écrans thermiques, afin de rigidifier la structure soumise à de plus grandes contraintes que dans le montage originel (platine plus lourde). L'écran le plus haut avant le couvercle est ajusté pour être en contact avec la paroi interne du vase central qui à cet endroit est thermalisée avec le réservoir d'azote liquide, améliorant ainsi l'isolation vis-à-vis du rayonnement à 300 K.

Le vase central est relié au réservoir d'hélium, à travers une pastille de bronze fritté (partie de G), par un tube capillaire (H) de cuivre dont le débit est commandé de l'extérieur par un robinet à pointeau. Lorsque le cryostat a atteint une température voisine de celle de l'azote liquide, nous faisons arriver l'hélium par le capillaire à travers un échangeur en cuivre (G), en pompant sur le vase intérieur à l'aide de la pompe basse pression, ce qui a pour effet de faire monter le niveau de liquide dans le vase central<sup>1</sup>.

Sur le Schéma 5.2, nous avons reporté l'emplacement des résistances utilisées pour mesurer la température en différents points de la canne. Une résistance de platine ( $R_{Pt}$ ) fixée au fond du montage permet de suivre la descente et la remontée en température jusqu'à la température de l'azote liquide. Les résistances Allen-Bradley  $R_1$  à  $R_6$  prennent ensuite le relais dès que nous commençons à faire pénétrer l'hélium liquide dans le vase intérieur.

### 5.1.2 Montage cryogénique d'excitation des modes de galerie

Le dispositif de couplage à froid que nous avons construit (voir la Photo 5.3) est fixé à l'extrémité de la canne d'une longueur d'environ 1.50 m, plongeant dans le vase intérieur

---

1. Il est également techniquement possible de remplir le vase intérieur directement par le couvercle, mais dans ce transfert direct on génère des flux de gaz puis des turbulences dans le liquide suffisamment importants pour déplacer des poussières venant polluer la bille et détériorer son facteur de qualité.

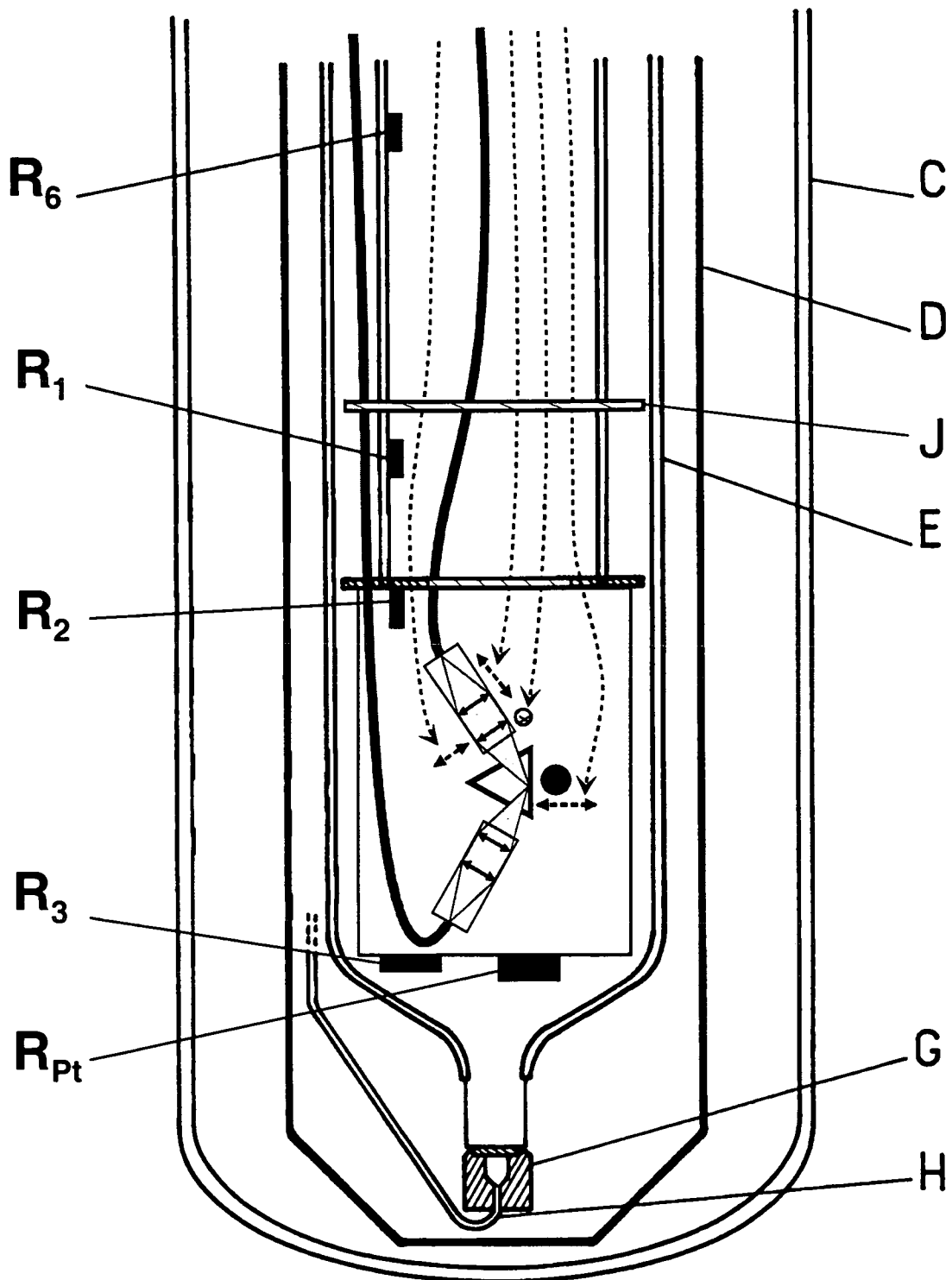


FIG. 5.2 – Détail du fond du vase intérieur du cryostat, avec la platine de couplage aux modes de galerie. (J) écran thermique en cuivre.  $R_{Pt}$  résistance de platine utilisée pour le suivi en température jusqu'à la température de l'azote liquide.  $R_1$  à  $R_6$ , résistances Allen-Bradley. Les flèches en pointillés représentent des flexibles (câble de transmission de compteur de vitesse) relayés par des tubes inox creux au niveau de l'écran (J) et qui transmettent les mouvements de rotation qui servent à tourner les vis déformant les pièces

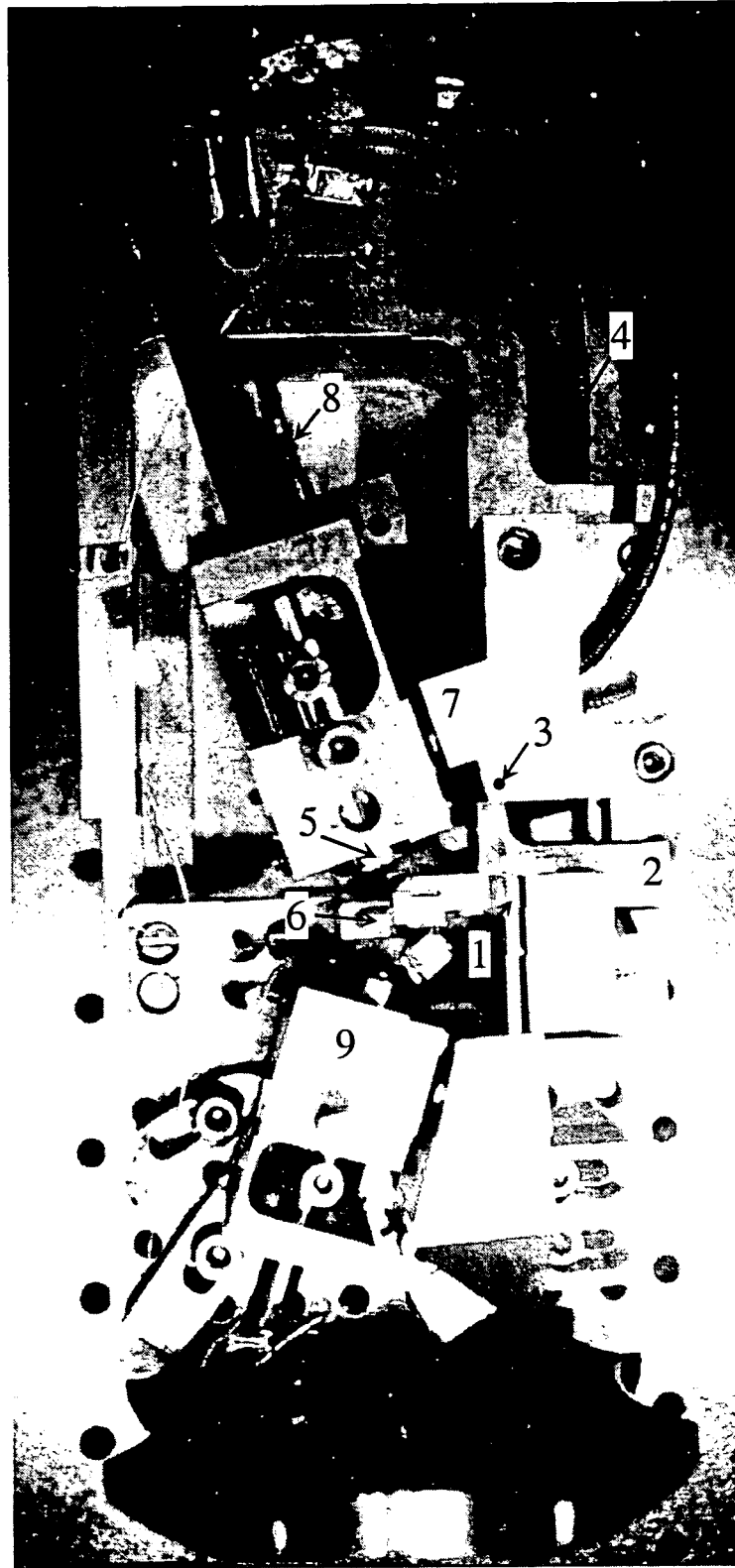


FIG. 5.3 – Photo du montage cryogénique.

du cryostat, comme nous l'avons indiqué sur le schéma 5.2 de détail du cryostat. Quatre degrés de liberté sont nécessaires pour positionner la bille relativement à la tache de focalisation des lasers sur la face du prisme. La bille est montée à l'extrémité d'une lame flexible (1), sur la Photo 5.3, en bronze crysocale sur laquelle une vis vient pousser. Cela permet un préajustement grossier de la distance bille—prisme dans l'air, avant la mise à froid. Pour rattraper les contractions thermiques différentielles et ajuster finement cette distance lorsque l'expérience baigne dans le bain de superfluide, cette lame repose sur un bras en dural (2), taillé dans la platine. Ce bras peut tourner autour de l'axe (3) lorsque la vis fixée à l'extrémité du flexible (4) vient pousser sur le bras. En intercalant un ressort de raideur convenablement choisie entre la vis et le piston, le déplacement est alors divisé dans le rapport des raideurs, conduisant à une sensibilité estimée à 50 nm.

Le laser, diode DBR à 1083 nm (modèle SDL 6702-H1) ou diode de pompe à 811 nm (SDL 5411-G1) monté sur réseau, est couplé à environ 50% dans une fibre monomode 3M FS-SN 4224 (longueur d'onde de coupure du mode à deux lobes vers  $\lambda_c = 780$  nm), à l'aide d'un coupleur 3 axes *Melles Griot*. Le faisceau d'une diode laser rouge d'alignement, superposé sur ces lasers, se couple par contre moins efficacement (15%) dans la même fibre et présente l'inconvénient mineur (pour la procédure d'alignement) d'être multimode instable en sortie.

Le faisceau des lasers d'analyse sortant de la fibre est ensuite focalisé à l'aide d'un coupleur fibre-à-fibre *Thorlabs C220-MP* (5), sur la face du prisme de couplage (6). Les deux lentilles asphériques composant ce coupleur sont chacune fixées dans des cylindres creux filetés, à l'aide d'une colle qui s'avèrent parfaitement résistante aux changements de températures extrêmes imposés par l'expérience. Ce coupleur est solidaire d'une monture déformable en bronze crysocal. Deux vis, l'une tournant dans l'insert (7) et l'autre sous la monture, provoquent les flexions dans deux directions orthogonales qualifiées respectivement "d'horizontale" et de "verticale", et assure ainsi le déplacement de la tache focale sur la face du prisme. Enfin, la monture (5) repose sur une petite platine *Microcontrôle* préalablement dégraissée avec du trichloéthylène et privée d'une bille dans chacune des cages (pour éviter tout blocage à froid). Le flexible (8) est directement soudé sur la vis de la platine et sa rotation permet d'ajuster finement, par translation de l'ensemble du coupleur, la taille de la tache de focalisation. Cet ajustement s'avère indispensable dès

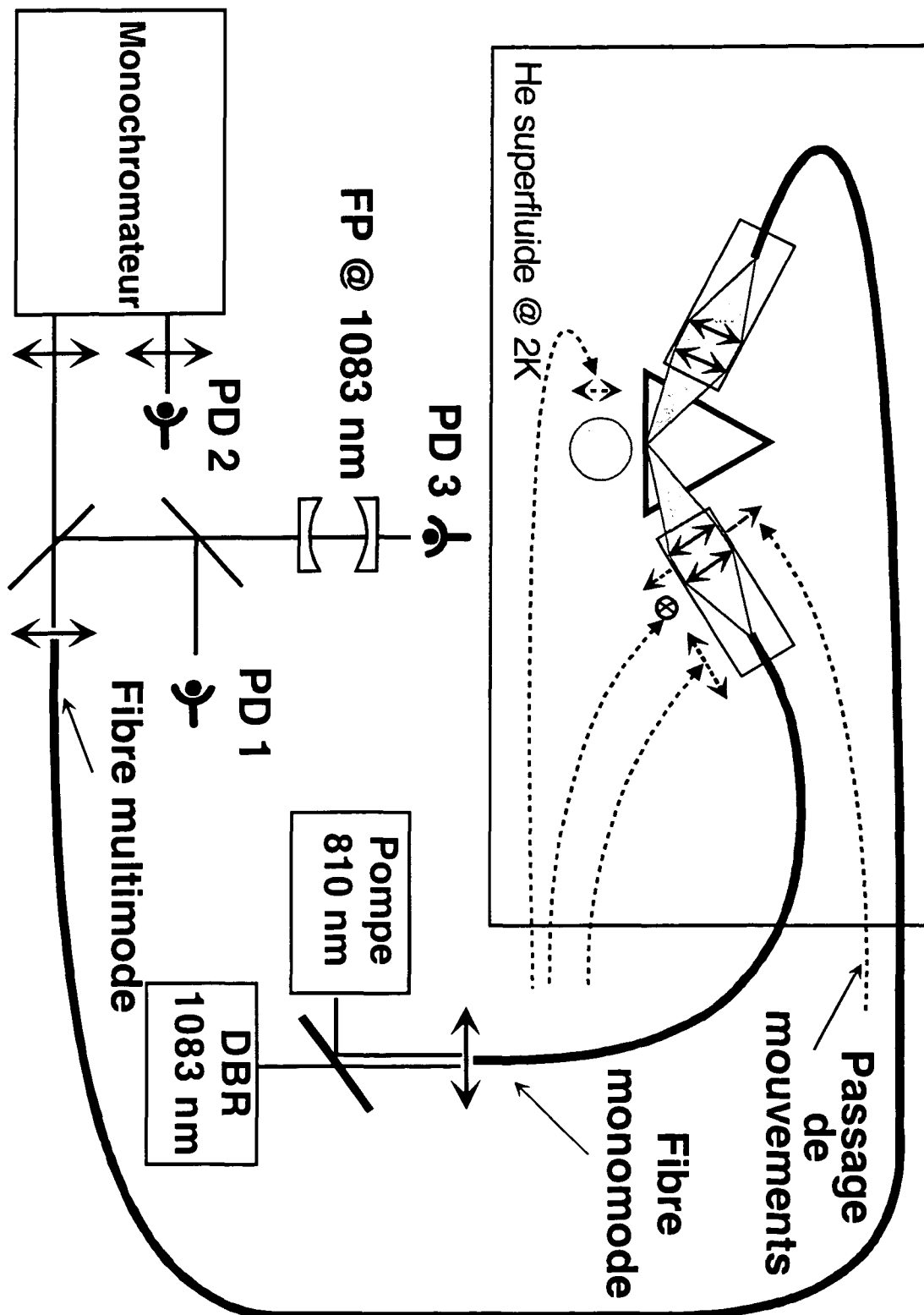


FIG. 5.4 – Schéma du dispositif de couplage présenté sur la photo 5.3, des lasers d'excitation (pompe à 810 nm, et laser DBR sonde du facteur de qualité à 1083 nm), et des éléments d'analyse du signal recouplé dans la fibre multimode.

que l'expérience baigne dans l'hélium superfluide, compte tenu de la variation d'indice, de l'ordre de 2%, qui produit une différence de distance focale d'environ 300  $\mu\text{m}$ , sur la distance de 30 nm environ, séparant la sortie de la fibre et la face du prisme.

Signalons que le cylindre d'inox, dans lequel est vissé le coupleur, peut pivoter autour d'un axe "horizontal", à l'extrémité de la monture déformable (5), permettant un ajustement de l'angle d'injection (à chaud seulement). En sortie du prisme de couplage, un coupleur fibre-à-fibre (9) équivalent au coupleur d'entrée permet de focaliser le faisceau émergent, dans le cœur de 100  $\mu\text{m}$  de diamètre de la fibre multimode.

## 5.2 Observations de très hauts facteurs de qualité à froid

Nous savions qu'il ne serait pas évident de conserver de très bons facteurs de qualité pendant le refroidissement. Emprisonner la bille, son support, le prisme de couplage et les lentilles d'entrée et de sortie dans une boîte ne laissant passer que le superfluide aurait été un gage de succès. Cependant, une telle solution était extrêmement délicate à mettre en œuvre et nous avons préféré ne pas isoler la bille du reste du bain d'hélium au risque de la contaminer par des polluants en suspension. Après quelques essais, nous sommes finalement parvenus à établir un protocole assurant des facteurs de qualité systématiquement supérieurs à  $10^8$ .

### 5.2.1 Les sources de pollution possibles et leur élimination

Lors des premiers essais de couplage aux mode de galerie dans l'hélium, nous avons constaté la présence de nombreuses poussières métalliques sur les optiques de couplage. Celles-ci proviennent du frottement des vis de réglage des micromouvements dans les inserts en laiton, qui crée des débris ayant une distribution de taille centrée autour de 1  $\mu\text{m}$ . Leur dépôt sur les billes, facilité par l'agitation de l'hélium, dégrade rapidement leur facteur de qualité.

Pour remédier à cette contamination, nous avons entouré d'un film d'aluminium les zones où sont produites ces microparticules, pour les empêcher de diffuser. En outre, pour limiter l'agitation du liquide qui pourrait encore faciliter leur éparpillement, nous remplissons le vase intérieur d'hélium dans l'état superfluide, ce que permet de faire le cryostat



que nous avons utilisé lorsque le débit de pompage sur le vase intérieur est maximal. Le niveau de liquide monte ainsi calmement dans le vase. Enfin, aucun des pré réglages effectués à chaud n'est retouché, tant que le dispositif de couplage ne baigne pas entièrement dans l'hélium. Nous avons en effet constaté que les mouvements des vis dans leur insert étaient plus "doux" dans le bain d'hélium que dans le gaz. Nous évitons ainsi toute production inutile de poussières métalliques.

Nous avons par ailleurs limité les risques de pollution extérieure par l'hélium sale (notamment contenant des aérosols d'huile des pompe) provenant du système de récupération, en isolant le vase intérieur de la tuyauterie, jusqu'à la phase de pompage. La mise sous atmosphère d'hélium du vase central et le complément d'hélium ajouté pendant la descente en froid de 300 K à 100 K sont assurés en connectant le vase central sur une bouteille d'hélium 4-1 à travers un manodétendeur de bonne qualité, avec une légère surpression.

### 5.2.2 Observations de facteurs de qualité de $10^9$ dans l'He superfluide

Les résonances de grande surtension se présentent sous forme de doublets, dont la séparation est de l'ordre de quelques MHz, comme sur l'enregistrement de la Figure 5.5, concernant une bille de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre étudiée à 1083 nm. Nous attribuons ces observations au même phénomène de rétrodiffusion Rayleigh interne, que celui qui nous a permis, dans le Chapitre 3 de justifier l'observation systématique de doublets.

Bien qu'apparemment très grande, la séparation du doublet de la Fig.5.5, est cependant compatible avec les données recueillies dans le cadre des expériences décrites au Chapitre 3. En effet, parmi les nombreux doublets de grande surtension étudiés à température ambiante, une séparation de 3 MHz a déjà pu être observée, sur une bille de 190  $\mu\text{m}$  de diamètre pour  $\lambda = 790$  nm. Rappelons par ailleurs, que la levée de dégénérescence  $\Omega \propto 1/\lambda\sqrt{\mathcal{V}} \simeq 1/\lambda^{3/2}$ , où  $\mathcal{V}$  représente le volume du mode. Une telle séparation donnerait sur une bille de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre à 1083 nm, un écart de  $(790/1083)^{3/2} \times 190/50 \times 3$  MHz  $\simeq 7$  MHz, compatible avec nos observations. La largeur spectrale de 1.5 MHz de la diode DBR à 1083 nm, limite par ailleurs nos mesures à des facteurs de qualité inférieurs à environ  $10^8$ . Pour pouvoir sonder de plus grandes surtensions, nous avons utilisé la diode à 810 nm montée sur réseau (largeur spectrale de 70 kHz), permettant de gagner un ordre

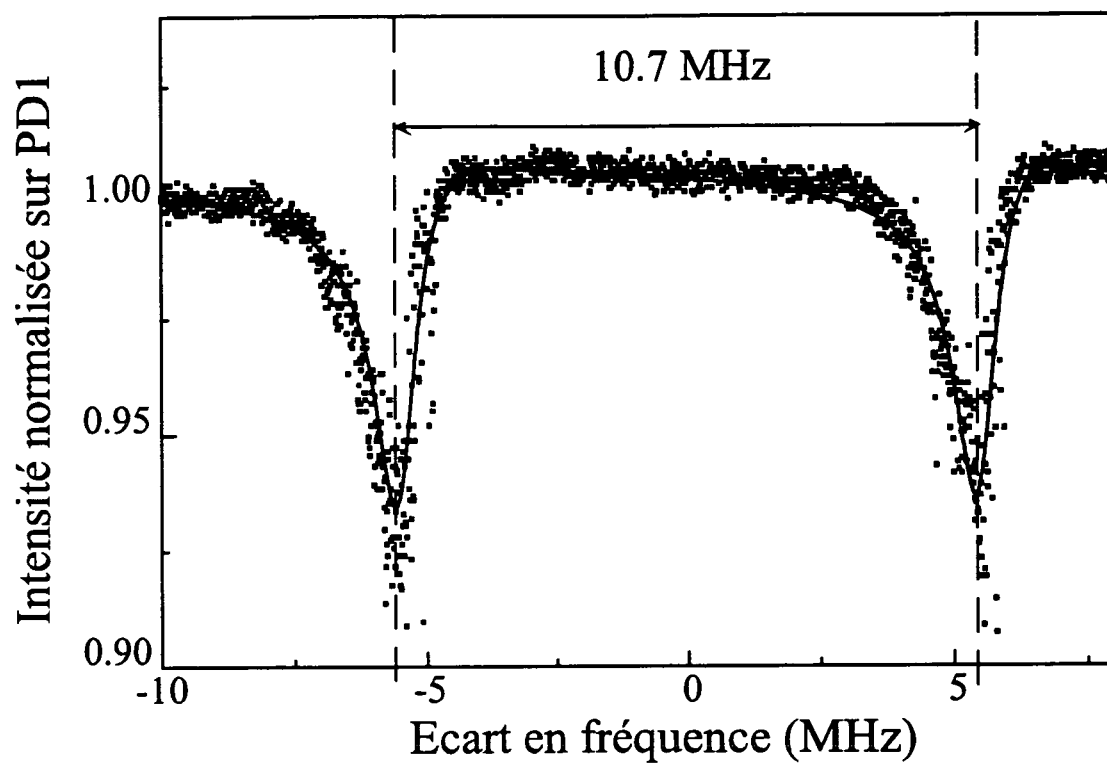


FIG. 5.5 - Doublet de résonances de galerie, d'une largeur  $\Delta\nu_{\text{mode}} = 1.0 \pm 0.1$  MHz ( $Q = 3 \times 10^8$ ), séparé de 10.7 MHz, observé dans l'hélium superfluide.

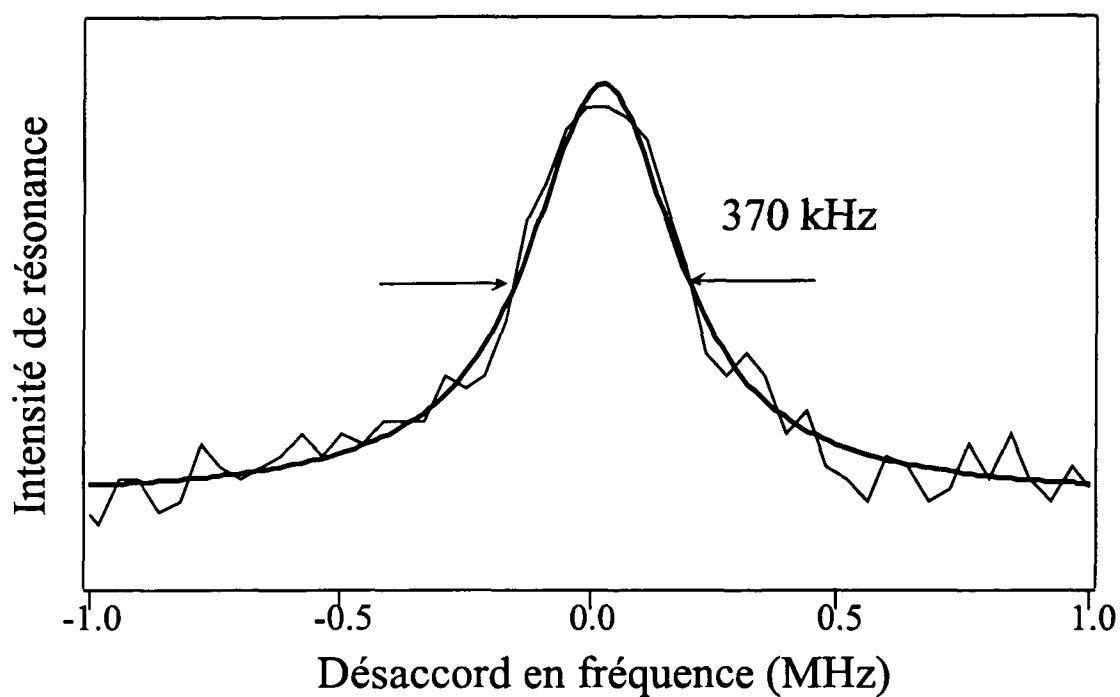


FIG. 5.6 - Résonance de grande surtension  $Q = 10^9$  (largeur de mode 370 kHz), d'une bille de silice pure de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre, à 810 nm dans l'hélium superfluide.

de grandeur. La résonance de la Figure 5.6, observée à 810 nm sur une bille de 120  $\mu\text{m}$  de diamètre, possède une largeur d'environ 370 kHz, correspondant à un facteur de qualité de  $10^9$ .

### 5.2.3 Bistabilité

Les résonances de très grands facteurs de qualités présentent un comportement bistable (voir la Figure 5.7, colonne de gauche) pour des intensités incidentes sur le prisme de couplage de l'ordre de la centaine de  $\mu\text{W}$ . Ce type de comportement non linéaire est couramment observé à température ambiante, température à laquelle il est attribué à un effet thermique bien compris: la faible fraction du champ incident absorbée provoque un déplacement de la fréquence de résonance sous l'effet de la variation d'indice due à l'échauffement de la bille. À température ambiante, dans une bille de 50  $\mu\text{m}$  de diamètre placée dans l'air, le seuil de bistabilité thermique est d'environ 100 nW, pour un facteur de qualité  $Q = 10^9$ , ce qui correspond à un échauffement de l'ordre de 100 nK dans le volume du mode de galerie considéré [43].

À basse température, la sensibilité des résonances à l'échauffement de la bille est environ dix fois plus faible et surtout de signe contraire. On observe par contre un déplacement de la fréquence de l'ordre de -0.7 MHz/mK, lié aux variations de l'indice de l'hélium superfluide entourant la sphère. Cet effet est dû à l'augmentation de la densité de l'hélium quand on approche le "point lambda" de la transition superfluide.

Dans l'hélium superfluide, la persistance d'une bistabilité pourrait être la signature de la susceptibilité non linéaire Kerr de la silice. L'effet Kerr est un effet purement dispersif ne faisant pas intervenir de processus d'absorption ou d'émission, et dont on rend compte à l'échelle macroscopique par une susceptibilité non linéaire<sup>2</sup>  $\chi^{(3)}$ , ou un indice de réfraction non linéaire  $n_2$ . La lumière traversant un milieu Kerr, subit ainsi un déphasage qui dépend de l'intensité du champ incident. Comme l'a suggéré V. Braginsky *et al.* [18], nous pourrions alors profiter de l'interaction non linéaire Kerr croisée entre deux modes de galerie, pour réaliser une mesure non destructive (QND) du nombre de photons dans l'un des modes, en suivant le déplacement en fréquence de l'autre mode.

---

2. Pour un milieu centrosymétrique, comme la silice, la susceptibilité d'ordre 2 est nulle.

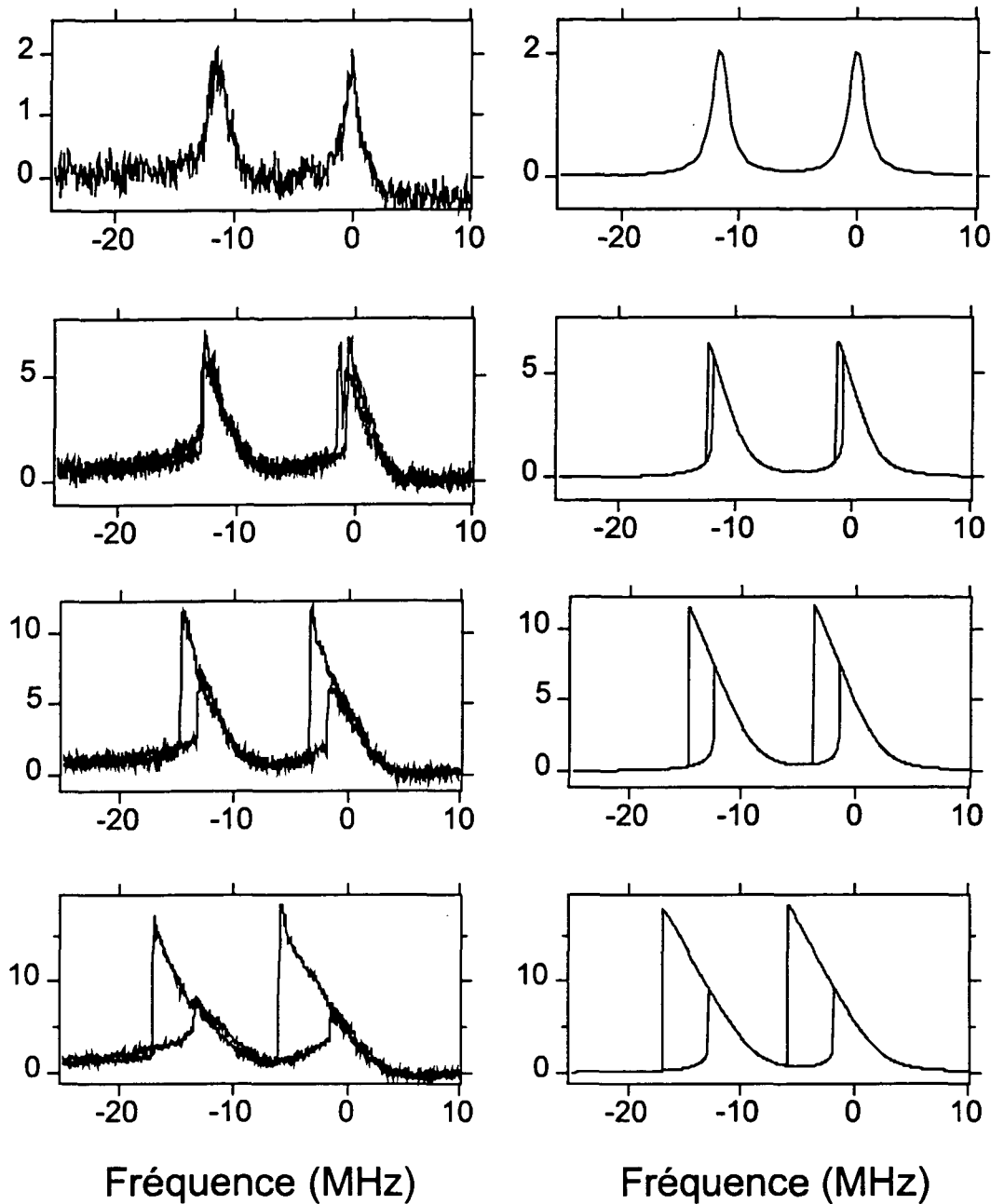


FIG. 5.7 – Colonne de gauche: courbes de bistabilité pour un doublet de résonances dans l'hélium superfluide. Sphère de  $50\ \mu\text{m}$  de diamètre, à  $\lambda = 1.083\ \mu\text{m}$ . Les résonances sont présentées sur un balayage aller-retour du laser. La puissance injectée augmente de haut en bas. Colonne de droite: "fits" réalisés en prenant une forme de résonance lorentzienne et un déplacement de fréquence non linéaire proportionnel à la puissance intracavité. Le seul paramètre ajustable est l'amplitude maximale de la résonance.

Dans les expériences que nous avons réalisées sur une sphère de  $50 \mu\text{m}$  de diamètre à  $\lambda = 1.083 \mu\text{m}$ , nous avons mesuré un seuil de bistabilité correspondant à une *puissance incidente sur le prisme*  $P_{\text{in}}^{\text{seuil}}$  (exp.) =  $250 \mu\text{W}$ . Cette mesure est parfaitement compatible avec une modélisation simple de l'effet nonlinéaire. En effet, pour décrire la bistabilité Kerr, nous pouvons introduire un indice de réfraction nonlinéaire  $n = n_0 + \frac{P_{\text{cav}}}{S} n_2$ , où  $P_{\text{cav}}$  représente la puissance du champ intracavité,  $S$  la section du mode (donnée par la relation (1.56)), et  $n_2$  l'indice nonlinéaire, bien connu pour la silice pure:  $n_2 = 2.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$ . D'autre part, la puissance intracavité  $P_{\text{cav}}$  est liée à la puissance incidente  $P_{\text{in}}$  sur le prisme par la relation (2.12), qui la relie au "dip" de couplage  $D$ . En régime de sous-couplage, et compte tenu d'un "mode matching" imparfait  $\frac{P_{\text{cav}}}{P_{\text{in}}} = 4 \frac{\gamma_C}{\gamma_A} D_{\text{max}}$ , où  $D_{\text{max}} = |\alpha|^2$  (voir le §2.5, relatif au modèle "double sphere" modifié).

La nonlinéarité Kerr se manifeste dès que le déphasage nonlinéaire sur un tour du résonateur  $\phi = \frac{2\pi N}{\lambda} 2\pi a n_2 I_{\text{cav}}$ , excède la largeur de la résonance en terme de déphasage, qui vaut  $\frac{\Delta\omega}{c/2\pi Na} = \frac{\omega}{Q} \frac{2\pi Na}{c}$ , où  $Q$  est le facteur de qualité du mode considéré. Cette condition peut être réécrite:

$$n_2 P_{\text{in}}^{\text{seuil}} = \left( \frac{2\pi}{Q} \right)^2 \frac{N\mathcal{V}}{\lambda} \frac{\gamma_A}{4\gamma_C} \frac{1}{D_{\text{max}}}, \quad (5.1)$$

où nous avons introduit le volume du mode  $\mathcal{V}$ . Dans l'expérience que nous avons réalisée, le couplage maximum observé vaut  $D_{\text{max}} = 30\%$ , et le seuil de  $250 \mu\text{W}$  mesuré, correspond à une position de la bille dans le régime de sous couplage, avec un "dip" de 5% et un facteur de  $Q = 2 \times 10^8$  qualité limité par les pertes intrinsèques. Dans ce régime,  $D = D_{\text{max}} / \text{ch}^2(2\kappa(g-g_c))$  (cf. (2.14)), ce qui permet d'en déduire le rapport  $\gamma_C/\gamma_A = 4.6 \times 10^{-2}$ . Le volume de mode peut, en outre, être estimé à l'aide de la relation (1.59), et vaut, pour le mode le mieux confiné, environ  $\mathcal{V} = 500 \mu\text{m}^3$ . Enfin,  $N = 1.449$  à  $\lambda = 1.083 \mu\text{m}$ , et en réunissant toutes nos mesures, nous en tirons  $P_{\text{in}}^{\text{seuil}}$  (théo.) pour  $n_2 = 2.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$ :

$$P_{\text{in}}^{\text{seuil}} \text{ (théo.)} = 480 \mu\text{W},$$

estimation parfaitement compatible avec notre mesure de  $250 \mu\text{W}$ , d'autant plus que cette mesure est sujette à d'importantes incertitudes expérimentales: pertes par insertions dans le connecteur de la fibre mal connues, et pertes par couplage dans la fibre estimées à 50%.

Nous avons aussi réalisé une modélisation plus précise, en prenant une forme de résonance lorentzienne et un déplacement de fréquence non linéaire proportionnel à  $P_{\text{cav}}$ . Sur la Figure 5.7, nous présentons les courbes expérimentales ainsi que les “fits” réalisés avec ce modèle élémentaire, et pour des puissances incidentes croissantes, toutes choses égales par ailleurs (couplage constant notamment). Le doublet observé résulte d’un doublement par “backscattering” (voir le Chapitre 3), mais les deux composantes, bien séparées pour les puissances considérées, sont indépendantes. Les fits sont réalisés avec la valeur  $n_2 = 2.5 \times 10^{-16} \text{ cm}^2/\text{W}$ , et ne comportent comme unique paramètre ajustable que l’amplitude maximale du signal, la forme de la résonance étant alors automatiquement définie. Nous constatons un très bon accord entre nos mesures et la modélisation.

Cependant, pour affirmer que nos observations sont la manifestation de la nonlinéarité Kerr, il nous faut pouvoir éliminer tous les autres mécanismes propres à notre dispositif cryogénique, pouvant donner lieu à une bistabilité du même type, notamment de même signe, c’est à dire provoquant un déplacement de fréquence négatif. En effet, la couche d’hélium superfluide qui se trouve dans la zone évanescente à la surface de la bille, est soumise d’une part à des champs électriques intenses pouvant modifier localement la densité du liquide par un mécanisme d’électrostriction, et d’autre part à un chauffage, puisque la bille évacue sa chaleur à travers le bain, deux effets qui conduisent également à un déplacement de fréquence négatif. Nos estimations préliminaires, pour ces deux effets montrent cependant qu’ils ne contribuent qu’au maximum pour environ 10% à la bistabilité observée. D’autre part, aucune variation notable du seuil de bistabilité n’a pu être notée entre 1.8 et 2.2 K, alors que les propriétés de l’hélium liquide changent notablement autour du *point lambda*  $T_\lambda = 2.17 \text{ K}$ . Nous en concluons que la bistabilité observée résulte, de façon à peu près certaine, de la nonlinéarité d’indice Kerr de la silice pure.

### 5.3 Fluorescence de la fibre dopée à basse température

Nous avons étudié la dépendance en température et en longueur d’onde de pompage du spectre de fluorescence d’un morceau de la fibre CNET GA 547 Nd utilisée comme “préforme” dans la fabrication des billes dopées. L’échantillon de fibre dopée est connecté à l’aide de connecteurs 3M “Fibre Lock”, en entrée à la fibre monomode FS-SN 4224 et

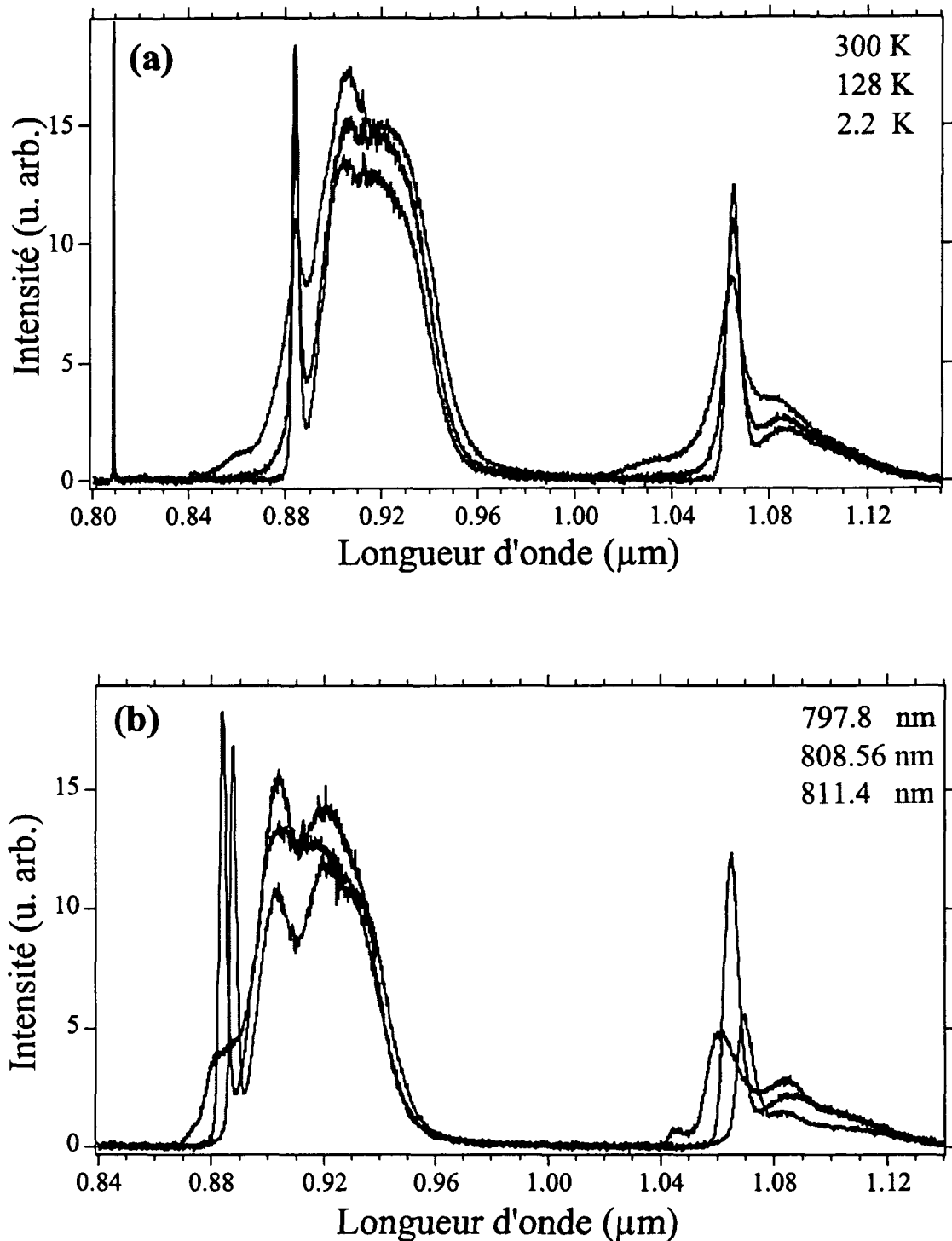


FIG. 5.8 - (a) Comparaison des spectres de fluorescence d'un morceau de fibre CNET GA 547 Nd (extrémité A2), dopée à 1500 ppm, et pompé à  $\lambda = 808.56 \text{ nm}$ , pour différentes températures: 300 K (vert), 128 K (bleu) et 2.2 K (rouge). (b) Comparaison des spectres de fluorescence du même morceau de fibre pour différentes longueurs d'onde de pompage: 797.8 nm (bleu), 808.56 nm (rouge) et 811.4 nm (vert).



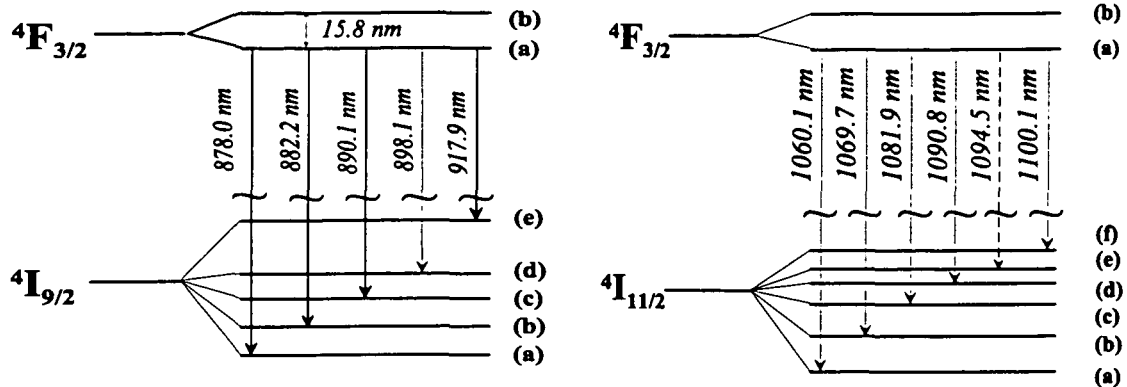


FIG. 5.9 – Structure des sous-niveaux Stark des niveaux  ${}^4F_{3/2}$ ,  ${}^4I_{9/2}$ , et  ${}^4I_{11/2}$ , telle qu'elle a été établie par Mann et DeShazer [66], dans un verre dopé ne comportant que 66% de  $\text{SiO}_2$ .

en sortie à une fibre multimode  $100 \times 140 \mu\text{m}$ , ce qui assure une meilleure efficacité de collection, le diamètre du cœur de la fibre dopée valant environ  $20 \mu\text{m}$ . L'ensemble est lié à une planche en dural qui remplace le dispositif de couplage décrit dans le §5.1 et fixé à l'extrémité des colonnettes. Pour nous aider dans notre analyse des transitions, nous nous sommes référés aux données publiées par Mann et DeShazer [66], qui ont identifié et caractérisé les différentes raies (position, largeurs et force d'oscillateur), dans un verre dopé néodyme assez différent de celui qui compose le cœur de nos fibres dopées, puisqu'il ne comporte que 66% de silice. Sur la Figure 5.9, nous avons reporté la nomenclature des sous-niveaux Stark ainsi que les positions des transitions observées par Mann et DeShazer. Parmi les 12 transitions possibles entre les niveaux  ${}^4F_{3/2}$  et  ${}^4I_{11/2}$ , seules 10 ont pu être observées par Mann et DeShazer, ce qui semble aussi être couramment admis dans la communauté de recherche sur les lasers à fibre [65, p. 87].

Pour la longueur d'onde de pompage  $\lambda = 808.56 \text{ nm}$ , nous avons suivi sur la Figure 5.8(a) l'évolution du spectre de fluorescence entre 300 K et 2 K. Nous constatons notamment que les pics qui se détachent aux courtes longueurs d'onde vers 875 nm et 1065 nm, dans les deux bandes de fluorescence, ressortent nettement plus à 2.2 K. Deux effets peuvent *a priori* justifier ces observations. Tout d'abord, la redistribution thermique des populations des niveaux sur le sous-niveau inférieur de  ${}^4F_{3/2}$ . Puisqu'à basse température, le sous-niveau  ${}^4F_{3/2}$ (b) est dépeuplé, cette redistribution thermique a pour effet de

supprimer la moitié des transitions observées à température ambiante, et de faire alors ressortir une transition plus “fine” dans chaque bande, attribuée à la composante  $(a) \rightarrow (a)$ . Cependant, le dépeuplement des sous-niveaux n’explique pas totalement cet effet.

D’autre part, la largeur homogène de la transition doit diminuer comme  $T^2$  jusqu’à 10 K et être fortement réduite à 2 K, tandis que l’élargissement inhomogène ne varie pas.

Nous remarquons par ailleurs, que les spectres de fluorescence varient en fonction de la longueur d’onde de pompage. En comparant ainsi sur la Figure 5.8(b), les spectres de fluorescence obtenus pour 3 longueurs d’onde: 797, 808, et 811 nm, nous remarquons que les pics principaux se déplacent d’environ 10 nm. Cela prouve que le pompage sélectionne des catégories de sites dans le profil inhomogène d’absorption. Les ions sélectionnés ne fluorescent ensuite que sur une fraction de la largeur inhomogène totale de chaque transition. En explorant le spectre en absorption nous explorons également le profil inhomogène d’émission. La largeur des pics isolés, de l’ordre de 7 nm pour la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$  et de 2 nm pour  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ , ne représente ainsi qu’une fraction que nous estimons à 1/3 de la largeur totale. Cet effet de sélection montre aussi que la largeur homogène a également été réduite, sans quoi les variations de la forme du spectre en fonction de la longueur d’onde auraient été imperceptibles.

Nous remarquons enfin, que le spectre enregistré, pour un pompage à 811 nm (en vert sur la Figure 5.8), est plus resserré et comporte également plus de structures que les deux autres spectres. À cette longueur d’onde, nous explorons les “pieds” du spectre d’absorption (voir également l’effet à l’autre extrémité, à 797 nm), et sélectionnons aussi une fraction plus faible de sites. Les largeurs des transitions qui en découlent sont nettement inférieures à la largeur inhomogène totale, et semblent d’autant plus petites que la longueur d’onde de pompage est grande. Nous n’avons malheureusement pas pu encore explorer le spectre à des longueurs d’onde supérieures à 811 nm faute de sources monomodes disponibles à ces longueurs d’onde.

## 5.4 Microlaser à froid: premiers résultats expérimentaux

L’étude des billes dopées, et la recherche d’effet laser a débuté avant la mise au point du protocole qui nous permet à présent de conserver des facteurs de qualité élevés dans

l'hélium superfluide.

Les résultats que nous présentons portent sur une bille dopées à 1500 ppm en ions  $\text{Nd}^{3+}$  de  $93 \mu\text{m}$  de diamètre, dont le facteur de qualité à 1083 nm, qui n'a pu être mesuré précisément, est estimé à  $10^6$ .

#### 5.4.1 Excitation et détection des modes laser à froid

La Figure 5.4 schématise le dispositif expérimental complet. Le faisceau issu de la diode de pompe à 810 nm et celui de la diode sonde DBR 1083 nm sont superposés et couplés dans la fibre monomode. La fibre multimode dans laquelle le coupleur de sortie couple le faisceau pompe réfléchi et les faisceaux sortant des modes laser, ramène le signal utile à température ambiante. L'information sur la polarisation est cependant perdue. Nous avons vérifié, sur le montage à température ambiante, que les faisceaux émergeant des modes laser, correspondant aux modes de faible extension angulaire ( $\ell - |m|$  valant quelques unités) se superposent parfaitement au faisceau réfléchi. L'ouverture numérique  $ON = 0.25$  du coupleur de sortie, et le diamètre  $\phi = 100 \mu\text{m}$  du cœur de la fibre multimode, nous garantissent alors une parfaite efficacité de collection.

Les faisceaux pompe et microlaser sont séparés à la sortie de la fibre multimode par une lame dichroïque. La photodiode PD1 permet de mesurer l'intensité absorbée par les ions à résonance avec le mode de pompe. Le faisceau microlaser peut être envoyé dans un étalon Fabry-Pérot d'analyse à 1083 nm. Le signal détecté par l'ampli-photodiode PD3 permet alors de caractériser la cohérence du faisceau entrant, et l'intensité des pics de résonance du Fabry-Pérot avec un mode laser de la région 1083 nm, est proportionnelle à l'intensité de l'émission laser. Le faisceau émergeant de la fibre peut également être analysé spectralement à l'aide du monochromateur Jobin Yvon THR 1500.

#### 5.4.2 Spectre du fonctionnement laser

Le spectre de la Figure 5.10(a), présente des raies d'émission sur les deux transitions  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$  et  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ . La résolution du monochromateur est de 0.08 nm (largeur de fentes de  $200 \mu\text{m}$ ). Le fonctionnement laser sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$  est facilité à basse température par l'absence de population ionique dans les sous-niveaux Stark excités

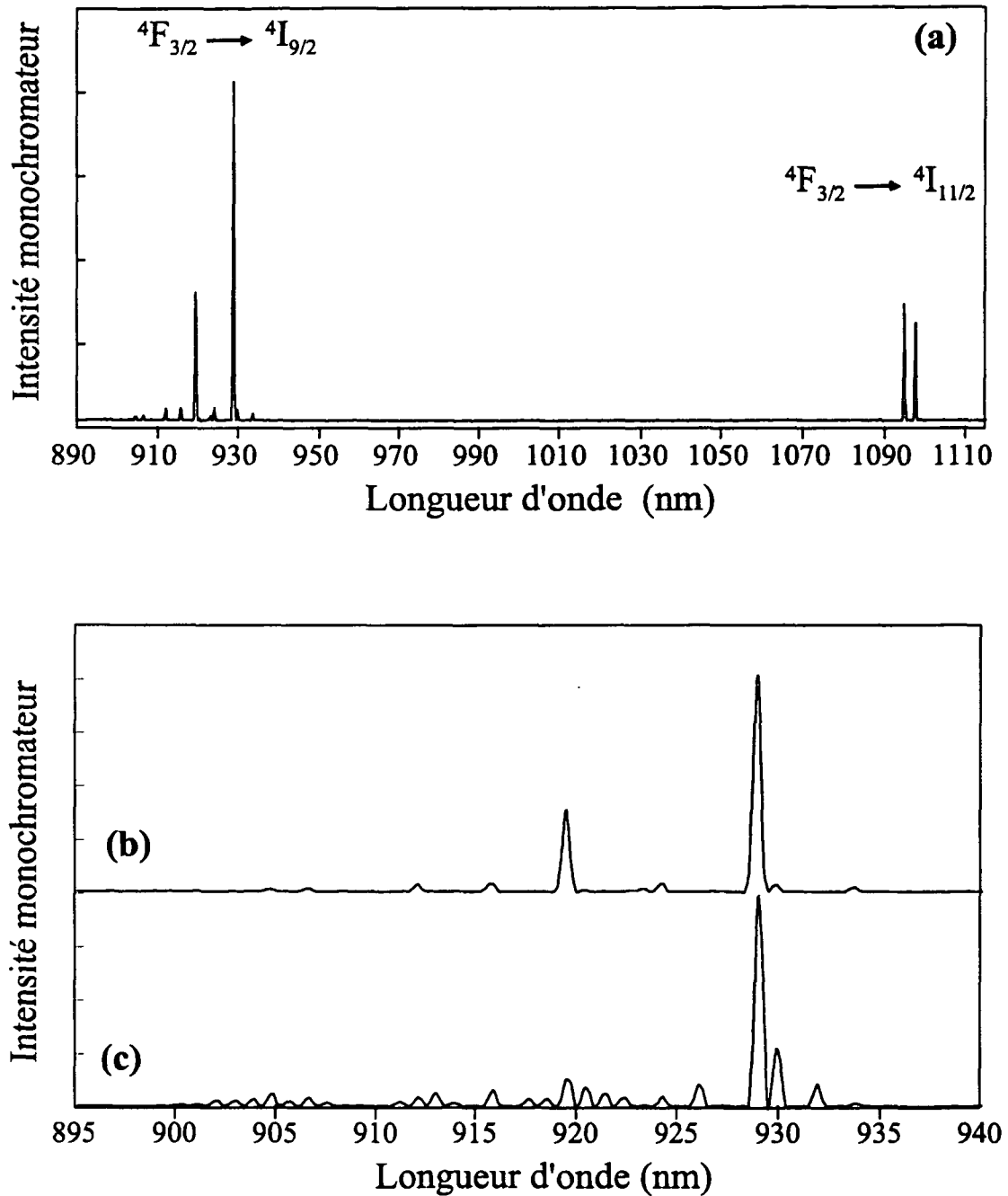


FIG. 5.10 – Spectre du fonctionnement laser dans l'hélium superfluide. En (a), fonctionnement régulier. En (b), zoom sur la région du spectre correspondant à la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ ; (c) apparition de modes dans la même région, en fonctionnement intermittent.

de l'état fondamental, ce qui peut expliquer la présence de raies plus nombreuses autour de 930 nm, qu'à 1065 nm. L'intervalle spectral libre à 1085 nm, vaut 2.7 nm, ce qui correspond à un diamètre de bille de 98  $\mu\text{m}$ .

Nous avons constaté par ailleurs que ce spectre laser était très sensible à une faible variation de la distance bille-prisme, *i.e.* aux pertes par couplage, et avons observé un *fonctionnement intermittent*, se manifestant par la présence d'une "forêt" de modes à la sortie du Fabry-Pérot, dont l'amplitude varie à l'échelle de la fraction de seconde, l'émission laser multimode semblant sauter d'un mode à l'autre. Le spectre de la Fig.5.10(c) a été enregistré dans un tel régime<sup>3</sup>, et confirme l'existence d'un grand nombre de raies laser, en plus de celles déjà présentes sur la Fig.5.10(b), correspondant à la même région du spectre, en régime de fonctionnement normal.

### 5.4.3 Mesures de seuils et interprétations

Pour mesurer les seuils d'émission laser, nous nous sommes au préalable placés dans un régime de fonctionnement régulier du microlaser (Fig.5.10(b)). Nous utilisons le niveau de signal de sortie du Fabry-Pérot d'analyse à 1083 nm, enregistré sur PD3, comme mesure de l'intensité d'émission laser, et varions ensuite l'intensité du laser de pompe placé à résonance avec un mode de galerie. Pour suivre simultanément la dépendance de l'intensité d'émission laser avec l'intensité de pompage, nous enregistrons sur un même "scan" de la rampe de balayage du Fabry-Pérot, l'intensité des pics de résonance du Fabry-Pérot et le niveau de signal du laser de pompe, mesuré en prélevant une faible fraction de l'intensité du faisceau avant de le coupler dans la fibre. Enfin, pour calibrer la puissance de pompe absorbée par la bille, nous effectuons un balayage lent<sup>4</sup> du laser de pompe autour de la résonance de pompe et mesurons la proportion de signal absorbé (profondeur relative du "dip"). Une mesure de la puissance à l'entrée du coupleur et une estimation des pertes par couplage dans la fibre nous permet alors de remonter à une valeur absolue de la puissance absorbée.

---

3. Contrairement au signal détecté sur PD3, à la sortie du Fabry-Pérot et visualisé sur un écran d'oscilloscope, l'enregistrement de la Fig.5.10(c) ne correspond pas au spectre instantané, le balayage du réseau du monochromateur nécessitant environ 30 s d'acquisition.

4. Lent devant la fréquence de balayage du miroir du Fabry-Pérot d'analyse

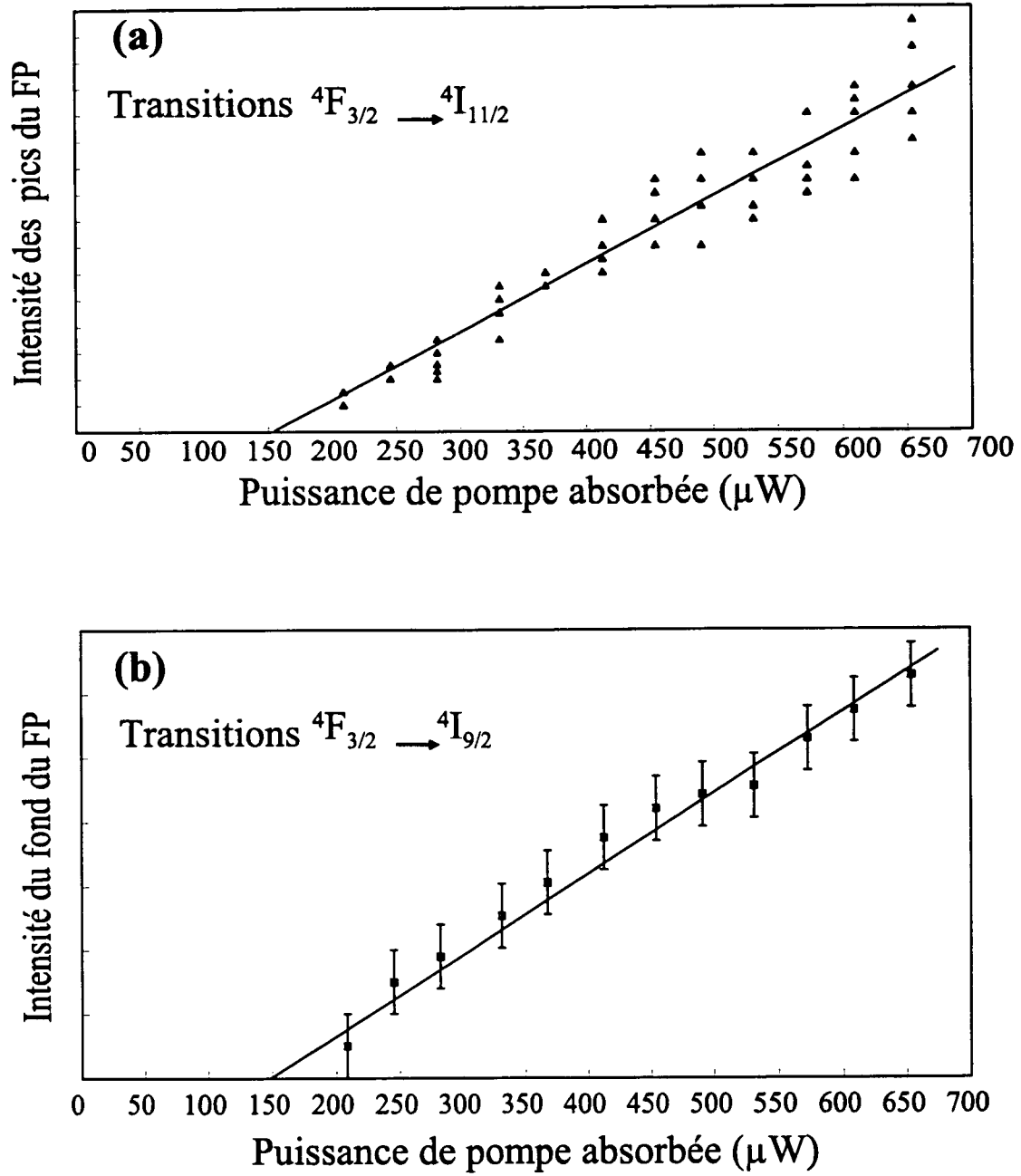


FIG. 5.11 - Mesure de seuil dans l'expérience microlaser à froid. En (a), seuil sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{11/2}$ . En (b), seuil sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ .

Nous avons constaté par ailleurs une variation de l'intensité du fond du signal sortant du Fabry-Pérot d'analyse. Nous l'attribuons à l'émission laser dans la bande autour de 920 nm, sur la transition  ${}^4F_{3/2} \rightarrow {}^4I_{9/2}$ . Aussi avons nous reporté sur la Figure 5.11, à la fois l'intensité des pics du Fabry-Pérot (a), et l'intensité du fond (b), en fonction de la puissance de pompe absorbée. Nous constatons que, dans les deux cas, les courbes présentent le même seuil d'environ  $150 \mu\text{W}$ .

En tenant compte du facteur de qualité à 1083 nm estimé à  $Q \simeq 10^6$ , et du volume de mode d'environ  $10000 \mu\text{m}^3$  (estimation correspondant au même type de mode que celui excité dans la bille dopée de  $56 \mu\text{m}$  de diamètre étudiée dans le §4.4, et corrigé du changement de taille), ce seuil est comparable au seuil à température ambiante, puisque les rapports des puissances de pompe absorbées est donné par (4.7):

$$\frac{P_s^{\text{corr}}(2\text{ K})}{P_s(300\text{ K})} = \sqrt{\frac{\mathcal{V}(98 \mu\text{ m})}{\mathcal{V}(56 \mu\text{ m})}} \times \frac{\tau_{\text{cav}}(98 \mu\text{ m})}{\tau_{\text{cav}}(56 \mu\text{ m})} \simeq 4.$$

La réduction de la largeur homogène ne produit aucun effet, pour la raison suivante. En pompant à travers un mode de galerie, de nombreux sites d'ions sont simultanément excités dans le profil de largeur inhomogène, mais seule une fraction  $\Delta\nu_{\text{hom}}/\Delta\nu_{\text{inhom}}$  est susceptible de participer à l'émission laser dans un mode de galerie de telle sorte que l'inversion de population au seuil donnée par la relation (4.5) doit finalement être réécrite sous la forme:

$$\Delta N_{\text{seuil}} = \frac{4\pi^2}{3} \frac{\mathcal{V}}{(\lambda/N)^3} \frac{\Delta\nu_{\text{hom}}}{\nu} \frac{\gamma_{\text{cav}}}{\gamma'_2} \times \frac{\Delta\nu_{\text{inhom}}}{\Delta\nu_{\text{hom}}}. \quad (5.2)$$

Ainsi, le seuil véritablement mesuré à basse température et calculé à l'aide de la relation (4.5), qui ne prend pas en compte les effets de sélection de sites, est largement surestimé d'un facteur  $\Delta\nu_{\text{inhom}}/\Delta\nu_{\text{hom}}$ , effet qui s'avère imperceptible à température ambiante, puisque la largeur homogène est du même ordre de grandeur que la largeur inhomogène.

#### 5.4.4 Améliorations en cours

Afin d'atteindre le régime de fonctionnement laser dans lequel la largeur inhomogène ne masque plus la réduction de largeur homogène, trois améliorations sont nécessaires.

Tout d'abord, il nous faut être plus efficace dans la sélection d'un petit nombre de sites excités par le laser de pompe. Pour cela, un pompage dans les "pieds" de la bande d'absorption s'impose, comme semble l'indiquer l'évolution des spectres de fluorescence de

morceaux de fibre entre 300 K et 2 K (cf. §5.3). Une nouvelle diode laser de pompage sur réseau, aux environs de 820 nm, doit donc être montée. Nous pouvons d'autre part réduire l'élargissement inhomogène en abaissant le dopage.

Enfin, une grande sensibilité de détection est requise, pour être capable de discerner l'émission laser d'un seul site. Si nous estimons l'intensité moyenne du champ laser dans un mode de la cavité à 1 photon par durée de vie  $\tau_{\text{cav}} \simeq 100$  ns, et compte tenu du couplage en sortie de 10%, un flux de l'ordre de  $10^6$  photons/s est attendu, et en prenant en compte les pertes par couplage dans la fibre multimode et dans la chaîne ultérieure de détection, seule une fraction de l'ordre de 10% de ce flux parvient finalement au détecteur, soit:  $10^5$  photons/s. Un tel flux est détectable à l'aide de *modules de comptage de photons* commerciaux (photodiode Ge à avalanche) de performance moyenne, tel que le module SPCM- AQ-121 de la société *EG&G*, possédant un bruit d'obscurité de 500 coups/s. L'acquisition d'un tel module est en cours.

## 5.5 Couplage fort entre une molécule et un mode de galerie

Parmi les expériences d'optique quantique mettant en jeu l'interaction forte d'un dipôle avec une résonance d'une microbille de silice, nous avons envisagé le couplage d'une molécule unique à un mode de galerie.

Les molécules cycliques aromatiques dispersées en faible concentration, dans une matrice cristalline ou en polymère transparent, présentent à *très basse température*, de très faibles largeurs de raie, de l'ordre de quelques MHz. Les premières détections, très bruitées, de molécules uniques dans des matrices solides à basse température, par W. Moerner et L. Kador [92] en 1989, ont été rapidement suivies par les expériences de M. Orrit et J. Bernard [93] qui, grâce à une technique d'excitation de la fluorescence, obtinrent un bien meilleur rapport signal sur bruit.

Cette nouvelle technique a ensuite produit de nombreux résultats importants: étude de la dynamique d'une molécule individuelle, mise en évidence des systèmes à deux niveaux (TLS) par l'étude de la diffusion spectrale d'une molécule unique (phénomène décrit au §4.1.2) ou bien encore, comportement quantique de l'émission d'une seule molécule (groupement et dégroupement de photons).



Très récemment, D. Norris *et al.* [94] dans le groupe de W. Moerner ont observé la fluorescence d'une molécule unique d'un mélange de Pentacène (Pc) et de Terrylène (Tr) dans un crystal de para-terphényl (p-terphényl) en contact optique à la surface d'une bille de verre de 1 mm de diamètre. Les molécules de Pc et de Tr sont sensibles à des polarisations orthogonales du champ électrique, respectivement TE et TM: en les mélangeant on rend plus aisée l'excitation de l'une ou de l'autre, par les deux familles de modes de galerie. En dépit des espoirs des auteurs, aucune exaltation de l'émission spontanée par la présence des modes de la cavité n'a cependant pu être observée, lors de cette expérience préliminaire. La grande taille de la bille utilisée ainsi que la faible efficacité de couplage aux modes de galerie de faibles volumes<sup>5</sup> expliquent aisément qu'aucune influence de la cavité sur la durée de vie radiative de la molécule n'ait pu être observée.

Cependant, notre savoir faire avec des billes de silice de petit diamètre, et possédant de très grands facteurs de qualité devrait nous permettre d'accéder au régime de couplage fort entre une molécule et le champ d'un mode de galerie. Nous étudions ici, la faisabilité d'un tel projet.

### 5.5.1 Généralités sur les molécules uniques dans les matrices solides

Les molécules auxquelles nous nous intéressons, présentent une structure électronique à 3 niveaux: 2 niveaux singulets  $S_0$ ,  $S_1$  et un niveau triplet  $T_1$  (voir le Schéma 5.12). Elles absorbent sur la transition  $S_0 \rightarrow S_1$  dans le domaine visible (typiquement entre 757 et 444 nm). La force d'oscillateur totale sur la transition  $S_0 \rightarrow S_1$ , est de l'ordre de 1, tandis qu'elle n'est que d'environ  $10^{-6}$  à  $10^{-10}$  sur la transition du triplet vers le niveau fondamental. L'état triplet est donc un état piège: les "meilleures" molécules sont donc celles pour lesquelles le rapport de branchement de  $S_1$  vers  $T_1$  est le plus faible ( $10^{-3}$  à  $10^{-6}$ ) et possédant une faible durée de vie de l'état triplet (typiquement 10  $\mu$ s).

#### Spectre de fluorescence d'une molécule unique en matrice solide

Le spectre de fluorescence représenté sur la Figure 5.13, d'une molécule unique dans une matrice cristalline, présente deux bandes séparées en énergie par environ  $200 \text{ cm}^{-1}$ : la

---

5. L'indice du prisme de couplage utilisé ( $N_p = 1.72$ ) est inférieur à celui de la bille ( $N = 1.85$ )!

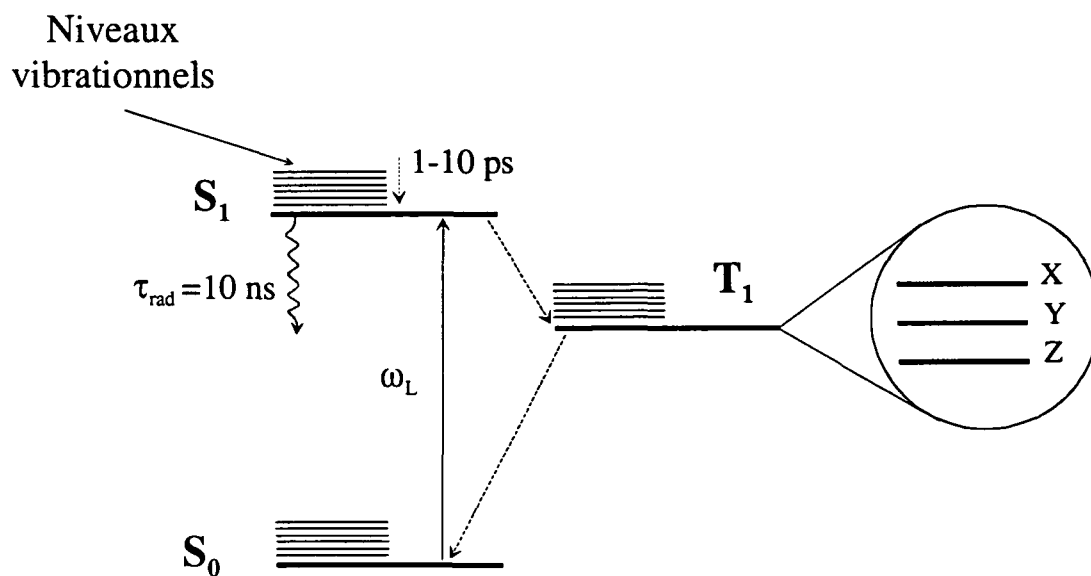


FIG. 5.12 – Configuration des niveaux d'un cycle aromatique en matrice solide, utilisé dans les expériences de spectroscopie de molécule unique. La structure des niveaux se compose de deux singulets  $S_0$  et  $S_1$ , et d'un triplet  $T_1$  (X, Y, Z). Nous avons également représenté les sous-niveaux vibrationnels excités (en traits fin). Leur durée de vie est très courte, entre 1 et 10 ps, devant la durée de vie radiative de l'état  $S_1$ , qui est de l'ordre de 10 ns.

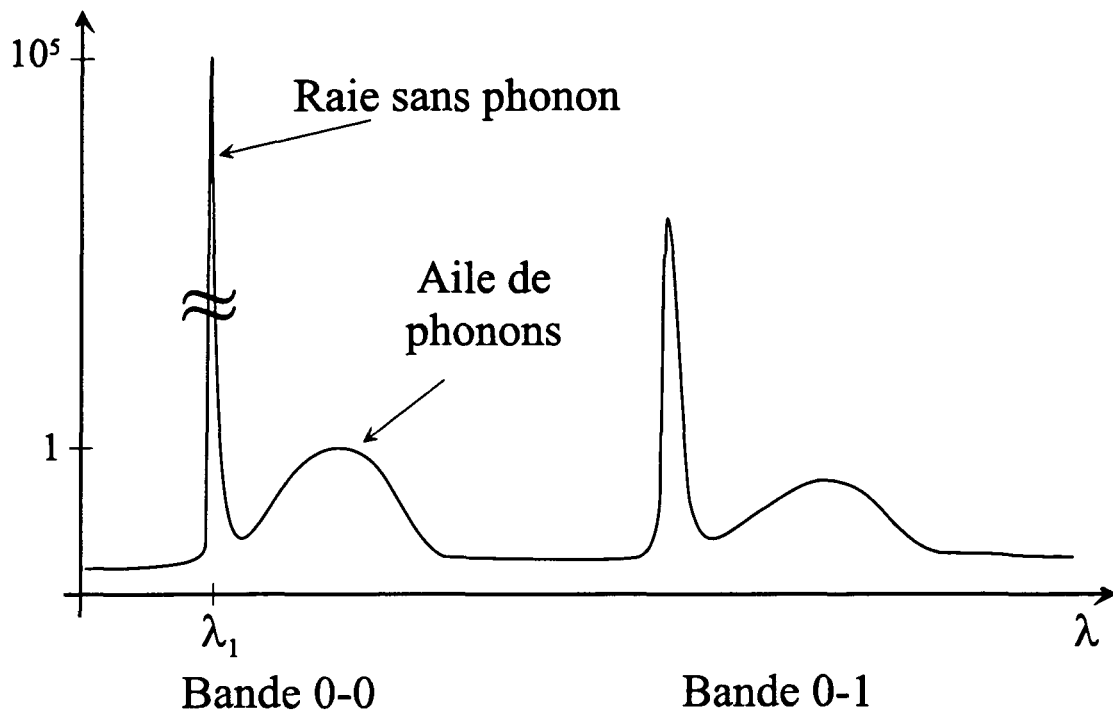


FIG. 5.13 – Spectre de fluorescence d'une molécule unique dans un cristal. La bande 0-0 est associée aux transitions ne mettant en jeu aucune excitation intramoléculaire (déformation de la molécule, par exemple), tandis que la bande 0-1, dont elle est séparée d'environ  $200 \text{ cm}^{-1}$ , correspond aux transitions pour lesquelles il intervient un quantum d'excitation intramoléculaire. Dans la bande 0-0, il apparaît une raie intense très étroite, de largeur  $\Delta\nu_{\text{hom}} \simeq 10 \text{ MHz}$ , qualifiée de raie sans phonon (ZPL), car elle correspond à une transition qui n'excite aucune vibration de la matrice. L'aile de phonons se rapporte à toutes les transitions faisant intervenir au moins un quantum d'excitation vibrationnel du réseau.

bande 0-0 correspond aux transitions se produisant sans changement d'état vibrationnel intramoléculaire relié à des déformations par exemple, tandis que la bande 0-1 est associée aux transitions mettant en jeu un quantum de vibration intramoléculaire de basse énergie (par exemple, les modes de déformation de la molécule en "accordéon").

Dans la bande 0-0, il apparaît une raie intense très fine, qualifiée de *raie sans phonons* (ZPL, *Zero Phonon Line*), car elle ne met pas en jeu de quantum de vibration de la matrice. Les transitions qui s'accompagnent d'une excitation des modes de vibration de la matrice sont de plus faible énergie et forment une bande étendue qualifiée d'aile de phonons, qui s'étend sur environ  $100 \text{ cm}^{-1}$ . La raie sans phonon, et le maximum de l'aile de phonon sont séparés de  $50 \text{ cm}^{-1}$ .

La raie sans phonon n'est élargie que par des processus d'élargissement radiatif et le déphasage optique induit par le couplage de la molécule au bain de phonons de basse énergie: il en résulte une largeur homogène extrêmement faible  $\Delta\nu_{\text{hom}}$ , de l'ordre d'une dizaine de MHz, qui justifie notre intérêt pour un tel système dans le cadre des expériences d'électrodynamique en cavité.

### Sélection d'une seule molécule

La sélection d'une seule molécule résulte d'un double mécanisme. D'abord d'une sélection spatiale, par grâce à l'excitation par le laser focalisé, d'un faible volume, de l'ordre de  $10 \mu\text{m}^3$ . Ensuite, d'une sélection spectrale: chaque molécule possède un environnement local particulier, qui a pour effet de distribuer la fréquence de leur transition dans le profil de largeur inhomogène  $\Delta\nu_{\text{inhom}}$ . En abaissant le taux de dopage du cristal en molécules à une valeur inférieure au rapport  $\Delta\nu_{\text{hom}}/\Delta\nu_{\text{inhom}}$ , il devient possible d'assurer une séparation moyenne spectrale entre molécules plus grande que l'élargissement homogène.

### 5.5.2 Molécules pour le couplage aux modes de galerie

#### Molécule de DBT dans naphthalène

Le système que nous pensons retenir pour les expériences de couplage aux modes de galerie est la molécule de DiBenzoTerryllène (DBT) dans un cristal de naphthalène, schématisée sur la Figure 5.14. Ce nouveau système a été caractérisé très en détail par P.

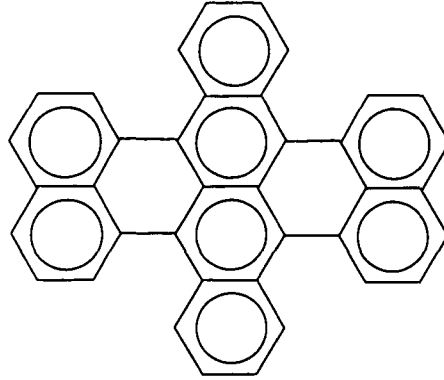


FIG. 5.14 – Structure chimique de la molécule de DiBenzoTerryllène (DBT).

Tamarat durant sa thèse [95][96], et s'avère très avantageux pour les raisons suivantes.

La molécule de DBT présente d'une part une très faible largeur de raie homogène à basse température ( $\Delta\nu_{\text{hom}} = 27$  MHz, à 2 K) comme dans le système Pc dans p-terphényl, et d'autre part, un taux de fluorescence plus élevé que dans les autres systèmes. Elle possède en outre un état triplet de très courte durée de vie (probablement inférieure à 10  $\mu\text{s}$ ), grâce à un couplage efficace aux sous-niveaux vibrationnels du niveau fondamental. La diffusion spectrale est aussi beaucoup plus faible que dans les autres systèmes étudiés, et aucun saut photoinduit n'a pu être observé [96]. Enfin, la longueur d'onde d'absorption  $\lambda_{\text{abs}} = 757.7$  nm au maximum d'absorption de la raie sans phonon 0 – 0, est accessible à l'excitation par diode laser montée sur réseau (par exemple une diode de marque *Sigma* +,  $\lambda = 760$  nm,  $P_0 = 50$  mW), ce qui simplifie grandement le dispositif expérimental.

### Ordre de grandeur de la pulsation de Rabi

Le couplage d'une molécule à un mode de galerie est caractérisé par la pulsation de Rabi  $\Omega_0$ , définie à l'aide du champ par photon  $E_0$  à la surface de la microbille et du dipôle  $d_0$  de la molécule dans la matrice, selon  $\Omega \equiv \frac{2d_0E_0}{\hbar}$ . Pour un mode de galerie de volume  $\mathcal{V}$ , nous rappelons que le champ électrique maximal par photon à la pulsation  $\omega$ , est donné par:  $E_{\text{max}} = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 N^2 \mathcal{V}}}$ , où  $N = 1.45$  représente l'indice de la silice. La molécule n'étant pas située au maximum du champ (qui se trouve dans la bille), mais dans sa "queue" évanescente à la surface, l'amplitude du champ  $E_0$  avec lequel elle interagit est environ 5 fois plus faible que  $E_{\text{max}}$ .

Par ailleurs, nous pouvons déduire que l'élément de matrice dipolaire  $d_0$ , de la durée de vie radiative totale  $\tau_{\text{rad}}$  du niveau  $S_0$  du DBT dans le cristal de naphthalène qui vaut<sup>6</sup> environ  $\tau_{\text{rad}} = 5$  ns. Cependant, pour le calcul de la pulsation de Rabi, nous ne devons retenir que la contribution à la durée de vie totale de la raie sans phonon de la bande  $0-0$ , dont la force d'oscillateur ne représente que seulement 5 à 15% de la force d'oscillateur totale. Nous en déduisons un ordre de grandeur de la durée de vie utile  $\tau_{\text{rad}}^{0-0} \simeq 10$  ns. L'élément de matrice  $d_0$  du dipôle de la transition  $0-0$ , dans la matrice de naphthalène, est relié à cette durée de vie radiative par:

$$d^2 = \frac{3\varepsilon_0 N_{\text{mat}}^2 \hbar (\lambda/N_{\text{mat}})^3}{8\pi^2 \tau_{\text{rad}}^{0-0}},$$

où nous avons introduit, pour la matrice de naphthalène, un indice moyen  $N_{\text{mat}}$  (indice "moyen", car le cristal de naphthalène est un milieu biréfringent biaxe).

La pulsation de Rabi par photon du champ  $\Omega_0$ , a alors pour expression:

$$\Omega_0^2 = \left(\frac{1}{5}\right)^2 \frac{3 \lambda^3 \omega}{4\pi^2 \mathcal{V} \tau_{\text{rad}}^{0-0}} \frac{1}{N_{\text{mat}}} \frac{1}{N^2}. \quad (5.3)$$

Pour estimer  $\Omega_0$  quantitativement, considérons le cas idéal où la molécule est couplée au mode de plus petit volume d'une bille de rayon  $a = 25 \mu\text{m}$ . Le volume de ce mode peut être calculé à l'aide de la formule approchée 1.59, et vaut environ  $\mathcal{V} = 300 \mu\text{m}^3$ . Prenons par ailleurs un indice moyen pour le naphthalène  $N_{\text{mat}} \simeq N$ , de telle sorte que tout se passe comme si la molécule émettait dans un milieu homogène d'indice  $N$ . Il s'ensuit une valeur caractéristique typique pour la pulsation de Rabi par photon, à la surface de la bille:

$$\Omega_0 = 2\pi \times 40 \text{ MHz}. \quad (5.4)$$

Enfin, si le mode de la cavité contient  $\mathcal{N}$  photons, la pulsation de couplage que nous devons considérer est  $\Omega_0 \sqrt{\mathcal{N}}$ .

### Le régime de couplage fort avec un mode de galerie

Aux facteurs de qualité très élevés ( $10^9$ ) que nous avons pu reproduire dans l'hélium superfluide (voir le §5.2), correspondent des temps de stockage des photons dans le mode

---

6. Cette durée de vie est déduite de la largeur de la transition, soit 27 MHz, *supposée naturelle*.

de l'ordre de 500 ns ( $\Delta\nu_{\text{mode}} \simeq 300$  kHz), environ 20 fois plus grand que la période de Rabi déduite de (5.4), valant environ 25 ns.

Le dipôle de la transition de la bande 0-0 qui nous intéresse relaxe par ailleurs avec une constante de temps de l'ordre de 10 ns. Ces caractéristiques nous placent à la limite inférieure du régime de *couplage fort* de l'électrodynamique en cavité, régime dans lequel la molécule et le mode échangent un assez grand nombre de fois leur excitation de façon cohérente, pendant la durée d'amortissement du champ et du dipôle. En réduisant la taille des billes, on peut cependant encore accroître la pulsation de Rabi.

Compte tenu de la durée de vie courte,  $\tau_{\text{rad}}^{0-0} = 50$  ns, du niveau  $S_1$ , des expériences résonnantes, dans lesquelles la molécule de DBT serait à résonance avec un mode de la cavité, sont donc délicates, puisque la molécule et le champ n'auraient pas le temps d'échanger plusieurs fois leur excitation avant que celle-ci ne soit perdue par émission spontanée.

En revanche, si la résonance de galerie et la transition moléculaire sont légèrement désaccordées, le champ intracavité par photon reste suffisamment intense pour exercer un effet dispersif sur la résonance de la molécule, et créer un déplacement lumineux de sa fréquence de transition.

### 5.5.3 Effet dispersif d'une molécule sur un mode de galerie

Considérons une transition moléculaire voisine d'une résonance de galerie et choisissons un désaccord  $\delta$  de telle sorte que le taux de transfert vers le niveau sigulet  $S_1$  soit suffisamment faible.

Grâce à son effet dispersif sur la fréquence de résonance d'un mode de galerie, on peut utiliser la molécule, soit pour déplacer la fréquence de résonance d'un mode de la cavité "froide", ou bien comme sonde du champ dans un mode. Nous allons donc évaluer le déplacement lumineux correspondant à l'interaction d'une molécule avec *un seul* photon.

Pour avoir un effet purement dispersif, il faut aussi que le taux de transfert correspondant à la probabilité d'absorption d'un photon du mode par la molécule, soit très faible. Dans le cas de la molécule de DBT, le rapport de branchement de l'état singulet excité vers l'état triplet est négligeable [96]; la population de l'état triplet est donc quasiment

nulle. Le taux de transfert, pour un désaccord suffisamment grand devant la largeur de la transition, suit la loi bien connue  $\frac{1}{2} \frac{(\Omega_0/2\pi)^2}{\delta^2}$ . En particulier, pour  $\delta = 10 \Delta\nu_{\text{hom}}$  (soit un désaccord de l'ordre de 300 MHz), ce taux vaut environ 1%.

Pour ce même désaccord, le déplacement lumineux  $\delta\nu_{\text{lum}}$ , est donné pour le champ d'un seul photon, par la relation  $\delta\nu_{\text{lum}} = \frac{1}{2} \frac{(\Omega_0/2\pi)^2}{\delta}$ , et vaut environ 3 MHz, environ dix fois plus grand que la largeur du mode de galerie.

Considérons alors la situation dans laquelle la cavité est initialement vide. En déplaçant la fréquence du mode voisin de la transition moléculaire, la molécule peut alors servir "d'interrupteur", pour faire pénétrer le champ d'un laser fin qui serait désaccordé au mode de galerie à moins que  $\delta\nu_{\text{lum}}$ .

P. Tamarat décrit dans sa thèse [95, p.60], l'expérience "inverse", qui consiste cette fois à utiliser le déplacement de la transition moléculaire comme sonde du champ intracavité, avec la résolution du photon unique.

Mais pour ces expériences, il nous faut être capable d'accorder relativement l'une à l'autre la résonance de galerie et la fréquence de transition moléculaire. Nous avons déjà testé à température ambiante un dispositif d'accord mécanique par contrainte de pression, décrit au §4.8, et réalisé un accord sur une plage de 150 GHz, dans une bille de 170  $\mu\text{m}$  de diamètre<sup>7</sup>. En variant un peu la température du bain d'hélium, nous pouvons ensuite effectuer un ajustement fin du désaccord entre le mode et la transition moléculaire.

L'expérience proposée pourrait être cependant limitée par les pertes occasionnées par le cristal dans le champ d'un mode. En effet, le cristal de naphthalène est un milieu biréfringent biaxe, dont deux des indices de réfraction selon les trois directions principales<sup>8</sup>, sont plus grands que  $N$ . Pour certaines orientations des axes cristallins de l'échantillon, relativement à la direction de polarisation du champ électrique (axe  $x$  ou  $y$  parallèle au champ), le cristal au voisinage de la bille, peut frustrer la réflexion totale de la lumière et provoquer une fuite de l'énergie du mode, se traduisant par un élargissement des résonances. Cet effet à été observé dans l'expérience récente de D. Norris, Kuwata Gonokami et W. Moerner [94],

---

7. Dans l'hélium liquide, l'extension des cales piézoélectriques utilisées est cependant réduite par un facteur 3, comme nous avons pu le mesurer à l'aide d'un montage interférométrique. Nous pouvons néanmoins compenser cette perte en utilisant des empilements de cales plus longs.

8.  $N_x = 1.442$ ,  $N_y = 1.775$  et  $N_z = 1.932$ .



citée en introduction de ce paragraphe.

#### 5.5.4 Le dispositif de couplage et de collecte de la fluorescence

Jusqu'à présent nous avons ignoré la sublimation très rapide du naphthalène (taux de variation d'épaisseur  $1 \mu\text{m/s}$ ), mais ce phénomène nous empêche d'utiliser des microcritaux déposés en surface ou approchés à l'aide d'une pointe de fibre. Nous avons alors pensé introduire le naphthalène à l'extrémité d'une micropipette que l'on referme en fondant son extrémité. Les premiers essais ont montré que le remplissage de la micropipette est délicat. Cependant, le chauffage de l'extrémité de la pipette liquéfie le naphthalène, qui migre alors au bout de la pipette grâce aux forces de tension superficielle verre-liquide.

Une fois parvenus à piéger le naphthalène à l'extrémité de la micropipette, nous pouvons contrôler le couplage du cristal au mode de galerie, en l'approchant de la bille avec une précision de l'ordre de la dizaine de nanomètres.

Cependant, un tel dispositif devra être testé au préalable pour déterminer entre autres la concentration initiale de molécules dans la préparation du cristal (afin de pouvoir sélectionner ensuite une molécule unique), mais également l'influence des parois de verre sur les résonances moléculaires, et l'estimation des fuites de champ que le verre de la micropipette peut entraîner.

## Conclusion

Lors de nos différentes études expérimentales préliminaires, les microbilles de silice se sont révélées être d'excellentes candidates pour les expériences d'électrodynamique en cavité. Nous avons montré que nous pouvions coupler très efficacement une diode laser à des modes de surtension supérieure à  $10^9$ . Un mécanisme de dédoublement de ces modes a été mis en évidence et nous l'avons expliqué en invoquant une rétrodiffusion responsable du couplage entre les deux modes dégénérés circulant en sens opposés dans la bille.

Dans la plupart des expériences que nous envisageons, une bonne maîtrise du mode excité est nécessaire: il faut l'avoir identifié pour en connaître le volume, et être capable d'accorder sa fréquence de résonance à celle du dipôle avec lequel on souhaite le faire interagir. Durant son travail de thèse, mené parallèlement aux expériences décrites dans ce manuscrit, Nicolas Dubreuil a ainsi développé une technique de cartographie des modes de galerie, adaptée des techniques de microscopie en champ proche. Grâce à une pointe de fibre venant sonder en surface l'intensité du champ, il nous est désormais possible d'identifier presque sans ambiguïté le mode excité par ses trois indices  $n, \ell$  et  $m$ . Par ailleurs, nous avons mis au point une technique d'accord mécanique par pression sur les pôles de la bille, qui offre une plage d'accord de l'ordre d'un intervalle spectral libre<sup>9</sup>. Nous pouvons ensuite effectuer un accord thermique plus fin avec un déplacement typique de 3 GHz.

Différentes idées d'expériences de couplage d'un mode de galerie à un dipôle avait été étudiées avant ce travail, parmi lesquelles la déflexion d'un "jet" d'atomes lents utilisée comme sonde du nombre de photons stockés dans le mode. Mais le temps d'interaction

---

9. Cette technique est maintenant étendue à la *traction*. La bille doit être fondue au foyer d'un seul faisceau laser CO<sub>2</sub> convergeant, au milieu d'un brin de fibre fixé initialement à l'une de ses extrémités.

très court nous aurait imposé d'une part, d'avoir recours à des "jets" à la fois lents et denses, qui étaient à la limite de ce que nous savions produire, et d'autre part d'utiliser de très petites billes dont nous ne maîtrisons pas bien la fabrication.

Notre intérêt s'est alors porté vers l'étude de bille de silice dopées avec des ions  $\text{Nd}^{3+}$ , assurant un couplage entre le champ des modes de galerie et leur dipôle. Bien que le moment dipolaire de ce dipôle ne vale qu'environ  $10^{-2}$  u.a., on dispose ainsi d'un système qui a le mérite d'être permanent. Nous avons observé un effet laser avec un seuil très bas de 200 nW, qu'un modèle semiclassical de laser à 4 niveaux explique bien. Notre intérêt se portant principalement sur les expériences en régime de couplage fort, nous n'avons pas pu explorer la richesse de ce système laser à température ambiante, et les nombreuses applications potentielles dans le domaines des télécom. Parmi celles-ci nous pensons au développement de microlasers dopés avec d'autres terres rares, telle que l'erbium, mieux adapté aux domaine de longueur d'onde des télécom (1550 nm). Dans des expériences préliminaires, menées au CNET en collaboration avec Joseph Zyss, nous avons également ouvert la voie à "l'intégration optique" des microbilles en montrant qu'on pouvait utiliser des guides planaires polymères pour coupler efficacement une source laser aux modes de galerie.

Afin de limiter les processus de relaxation des ions couplés aux phonons de la matrice, et nous diriger vers un régime de couplage fort, nous avons construit un montage cryogénique. Les premières expériences réalisées à basse température, ont montré qu'il était possible de conserver d'excellent facteurs de qualité, jusqu'à  $10^9$ , en dépit de l'environnement sévère que constitue l'hélium superfluide dans lequel baigne les microbilles. Nous sommes parvenus à nous affranchir de la bistabilité thermique de la silice, et avons des preuves nettes que la bistabilité optique résiduelle que nous avons observée est due à la susceptibilité Kerr de la silice. L'interaction non linéaire croisée entre deux modes pourrait alors servir à faire une mesure non destructive de l'intensité dans l'un des modes.

Avec des billes dopées en ions  $\text{Nd}^{3+}$ , nous avons obtenu des résultats très préliminaires montrant un fonctionnement laser, mais avec un seuil encore élevé. Nous prévoyons d'effectuer un pompage plus sélectif en bord de bande d'absorption ainsi qu'une détection en mode de comptage de photons pour être capable de résoudre l'émission laser de seulement quelques ions appartenant à une seule catégorie de sites, et atteindre ainsi le régime de

fonctionnement quantique. Un tel fonctionnement se manifeste également par une grande amplitude d'oscillations de relaxation, comme l'ont montré les simulations de Peter Domokos. La largeur spectrale intrinsèque de l'émission laser, inaccessible à la mesure dans le fonctionnement laser à température ambiante que nous avons étudiée, devrait, dans la limite Schawlow-Townes, être de l'ordre d'une centaine de kHz, devenant de nouveau mesurable par la technique d'autohétérodynage que nous avons décrite.

Enfin, de plus grands couplages dipolaires pourraient être obtenus avec des molécules. Des ordres de grandeurs prouvent qu'une molécule en matrice solide, exposée au champ d'un mode à la surface de la bille peut permettre de sonder ce champ et résoudre le photon unique. On pourrait aussi se servir de la molécule comme d'un interrupteur à photons: en déplaçant le mode de la cavité, elle met le laser excitateur à résonance avec ce mode, ce qui permet aux photons de pénétrer dans le mode.



## Annexe A

# Propriétés des harmoniques sphériques vectorielles

Les harmoniques sphériques vectorielles qui interviennent dans le problème de Mie de diffusion de la lumière par une microparticule sphérique, et à partir desquelles nous construisons les expressions du champ d'un mode de galerie, sont définies à l'aide des harmoniques sphériques:

$$\begin{cases} \mathbf{X}_\ell^m \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \nabla Y_\ell^m \times \mathbf{r} \\ \mathbf{Y}_\ell^m \equiv \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} r \nabla Y_\ell^m \\ \mathbf{Z}_\ell^m \equiv Y_\ell^m \hat{\mathbf{r}}. \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Ces fonctions vectorielles satisfont des conditions d'orthogonalité au sens élémentaire du terme, d'où vient la notation  $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ :

$$\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\lambda)}(\hat{\mathbf{r}}) \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\lambda')}(\hat{\mathbf{r}}) = 0 \text{ si } \lambda \neq \lambda'. \quad (\text{A.2})$$

Les  $\mathbf{Y}_{\ell m}^{(\lambda)}$  forment en outre un système orthonormé complet de fonctions vectorielles angulaires:

$$\begin{aligned} \int d\Omega \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\lambda)*}(\Omega) \cdot \mathbf{Y}_{\ell' m'}^{(\lambda')}(\Omega) &= \delta_{\ell \ell'} \delta_{m m'} \delta_{\lambda \lambda'} \\ \sum_{\ell, m, \lambda} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\lambda)}(\Omega) \otimes \mathbf{Y}_{\ell m}^{(\lambda)*}(\Omega') &= \mathbb{1} \delta(\Omega - \Omega'), \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

où l'on a utilisé la notation *dyadique*, c'est à dire que  $\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}$  est l'opérateur linéaire tel que  $(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v})\mathbf{w} = \mathbf{u}(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ , et  $\mathbf{w}(\mathbf{u} \otimes \mathbf{v}) = (\mathbf{w} \cdot \mathbf{u})\mathbf{v}$ . Nous avons aussi adopté la notation

habituelle  $\Omega \equiv (\theta, \varphi)$ .

Les propriétés vis à vis de la différentiation sont évidemment essentielles; on évalue aisément les divergences et les rotationnels :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nabla \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{(m)} = 0 & \nabla \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(m)} = \frac{1}{r} \left( \mathbf{Y}_{\ell m}^{(e)} + \sqrt{\ell(\ell+1)} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(0)} \right) \\ \nabla \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{(e)} = -\frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r} Y_{\ell}^m & \nabla \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(e)} = \frac{-1}{r} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(m)} \\ \nabla \cdot \mathbf{Y}_{\ell m}^{(0)} = \frac{2}{r} Y_{\ell}^m & \nabla \times \mathbf{Y}_{\ell m}^{(0)} = \frac{\sqrt{\ell(\ell+1)}}{r} \mathbf{Y}_{\ell m}^{(m)}. \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

Toutefois, les relations les plus utiles par la suite sont surtout celles qui donnent les rotationnels de  $\mathbf{X}_{\ell}^m, \mathbf{Y}_{\ell}^m$  et  $\mathbf{Z}_{\ell}^m$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times \left( \frac{f(r)}{r} \mathbf{X}_{\ell}^m \right) &= \frac{f'(r)}{r} \mathbf{Y}_{\ell}^m + \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f(r)}{r^2} \mathbf{Z}_{\ell}^m \\ \nabla \times \left( \frac{f(r)}{r} \mathbf{Y}_{\ell}^m \right) &= -\frac{f'(r)}{r} \mathbf{X}_{\ell}^m \\ \nabla \times \left( \frac{f(r)}{r} \mathbf{Z}_{\ell}^m \right) &= \sqrt{\ell(\ell+1)} \frac{f(r)}{r^2} \mathbf{X}_{\ell}^m. \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

## Annexe B

# Matrice de transfert d'une lame diélectrique

Dans cette annexe, nous considérons la réflexion/transmission de champs scalaires à l'interface équivalente à une lame entre deux milieux diélectriques 1 et 2 d'indices  $n_1$  et  $n_2$  (voir zone grisée sombre au centre de la Figure B.1). Nous établissons, pour une telle lame, la forme générale de la matrice de transformation d'entrée/sortie, dite matrice de transfert  $S$ . Dans ce qui suit, tous les champs considérés ont une dépendance temporelle harmonique  $e^{i\omega t}$ , à la fréquence  $\omega$ .

### B.1 Symétrie par renversement temporel

Les éléments de matrice de  $S$ , qui relient les champs émergents  $E_3$  et  $E_4$  aux champs incidents  $E_1$  et  $E_2$ , ne sont autres que les coefficients de transmission et de réflexion du milieu 1 vers le milieu 2 et réciproquement:

$$\begin{pmatrix} E_4 \\ E_3 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} r_{12} & t_{21} \\ t_{12} & r_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 \\ E_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{B.1})$$

Si nous inversons le sens de propagation de la lumière par la symétrie de renversement temporel  $t \rightarrow -t$ , tout se passe comme si nous échangeons le rôle des champs  $(E_1, E_2)$  et



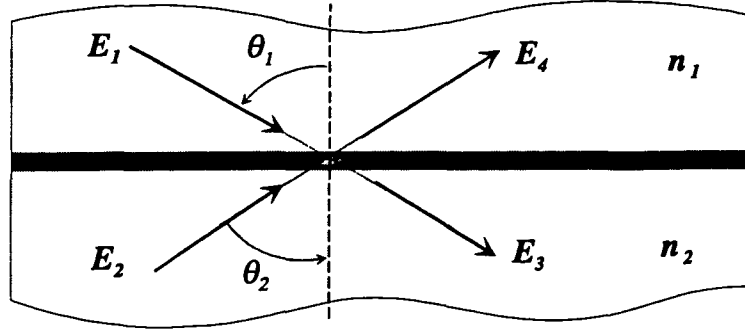


FIG. B.1 – Réflexion/Transmission sur une lame diélectrique, séparant deux milieux d'indice  $n_1$  et  $n_2$ . La région gris sombre représente la lame qui peut être constituée de plusieurs couches diélectriques dont seul l'effet global nous intéresse, et peut être décrit par une matrice de transfert  $S$ .

$(E_3, E_4)$ , et que nous remplaçons ces champs harmoniques par leur complexes conjugués:

$$\begin{pmatrix} E_1^* \\ E_2^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_{12} & t_{21} \\ t_{12} & r_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_4^* \\ E_3^* \end{pmatrix}. \quad (\text{B.2})$$

D'après les relation (B.1) et (B.2) la matrice de transfert doit donc satisfaire  $SS^* = 1$ , d'où il s'ensuit les couples de relations suivants, entre les coefficients:

$$\begin{cases} |r_{12}|^2 + t_{21}t_{12}^* = 1 \\ t_{12}t_{21}^* + |r_{21}|^2 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} r_{12}t_{21}^* + t_{21}r_{21}^* = 0 \\ t_{12}r_{12}^* + t_{12}^*r_{21} = 0 \end{cases}$$

Du premier couple de relations, nous déduisons alors que:

$$\begin{cases} t_{21}t_{12}^* \text{ est réel} \\ |r_{12}|^2 = |r_{21}|^2 \end{cases}, \quad (\text{B.3})$$

soit, en d'autres termes:

- $t_{12}$  et  $t_{21}$  ont la même phase  $\phi$  (mais peuvent différer en module si les indices de réfraction des deux milieux ne sont pas identiques),
- $r_{12}$  et  $r_{21}$  ont le même module  $|r|$ .

Du deuxième couple de relations nous tirons:  $r_{21}t_{12}^* = -t_{12}r_{12}^*$ , ce qui conduit à la relation de phase:

$$2\phi = \pi + \phi_{12} + \phi_{21}, \quad (\text{B.4})$$

où  $\phi_{12}$  et  $\phi_{21}$  représentent les phases respectives des coefficients de réflexion  $r_{12}$  et  $r_{21}$ :  
 $r_{12} = |r|e^{i\phi_{12}}$  et  $r_{21} = |r|e^{i\phi_{21}}$

## B.2 Conservation de l'énergie

Compte tenu de l'égalité des modules de  $r_{12}$  et  $r_{21}$ , les coefficients de réflexion en énergie sont identiques  $R \equiv R_{12} = R_{21} = |r|^2$ . La conservation de l'énergie, au passage par l'interface, impose alors que les coefficients de transmission en énergie  $T_{12}$  et  $T_{21}$  satisfassent  $R + T_{12} = R + T_{21} = 1$ , ce qui implique qu'ils soient égaux. D'après les relations de Fresnel, ils s'écrivent, en fonction des indices et angles d'incidence  $\theta_1$  et  $\theta_2$  des champs entrants:

$$T_{12} = \frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1} |t_{12}|^2 = T_{21} = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2} |t_{21}|^2 \equiv T$$

Nous en déduisons que  $|t_{12}| = \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2} |t_{21}|$  et les expressions des coefficients de transmission en amplitude fonction de  $T$ , des indices et de la phase  $\phi$ , définie *modulo*  $\pi$ :

$$\begin{cases} t_{12} = \sqrt{\frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2}} \sqrt{T} e^{i\phi} \\ t_{21} = \sqrt{\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1}} \sqrt{T} e^{i\phi} \end{cases}, \quad \text{avec:} \quad 2\phi = \pi + \phi_{12} + \phi_{21} \quad (\text{B.5})$$

Pour conclure, donnons la forme générale de la matrice de transfert  $S$ , après avoir pris en compte la relation de phase (B.4):

$$S = \begin{pmatrix} \sqrt{R} e^{i\phi_{12}} & i\sqrt{\frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2}} \sqrt{T} e^{i(\phi_{12} + \phi_{21})/2} \\ i\sqrt{\frac{n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1}} \sqrt{T} e^{i(\phi_{12} + \phi_{21})/2} & \sqrt{R} e^{i\phi_{21}} \end{pmatrix}, \quad \text{avec:} \quad R + T = 1. \quad (\text{B.6})$$

## B.3 Matrice de transfert entre deux milieux de même indice

$$n_1 = n_2$$

Dans le cas où les deux milieux ont le même indice et sous incidence normale ( $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$ ), la matrice de transfert (B.6) devient:

$$S_{(n_1=n_2)} = \begin{pmatrix} \sqrt{R} e^{i\phi_{12}} & i\sqrt{T} e^{i(\phi_{12} + \phi_{21})/2} \\ i\sqrt{T} e^{i(\phi_{12} + \phi_{21})/2} & \sqrt{R} e^{i\phi_{21}} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.7})$$

Si nous supposons en outre, sans grande perte de généralité, que  $r_{12}$  et  $r_{21}$  sont réels, alors, puisque ces deux coefficients ont le même module, deux cas de figure se présentent:

- $r_{12} = -r_{21}$ , c'est à dire  $\phi_{12} = 0$  et  $\phi_{21} = \pi$ , et alors  $S$  peut être simplifiée en:

$$S_-^{\text{réel}} = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & \sqrt{T} \\ \sqrt{T} & -\sqrt{R} \end{pmatrix}, \text{ avec: } R + T = 1.$$

- $r_{12} = r_{21}$ , c'est à dire  $\phi_{12} = \phi_{21} = 0$ , et  $S$  prend la forme:

$$S_+^{\text{réel}} = \begin{pmatrix} \sqrt{R} & i\sqrt{T} \\ i\sqrt{T} & \sqrt{R} \end{pmatrix}, \text{ avec: } R + T = 1.$$

Nous retrouvons bien les deux formes de matrices de transfert usuellement présentées dans les ouvrages de référence, tel que l'ouvrage de Siegman [78, p.405-406].

## Annexe C

# Signaux de spectroscopie FM d'un mode de galerie

### C.1 Schéma de principe de la spectroscopie FM

La technique de spectroscopie par modulation de fréquence (FM) que nous avons utilisée pour étudier les modes de galerie de grande surtension, est dérivée de la méthode originale proposée par Bjorklund [97], que nous avons adaptée à la spectroscopie en réflexion.

Nous établissons ici la forme analytique des deux quadratures des signaux de spectroscopie FM en réflexion: une résonance en absorption et une réponse dispersive. Nous nous reporterons au schéma C.1, pour la description des différents éléments du dispositif expérimental. Notons  $E_1 = E_0 e^{i\omega t}$ , le champ électrique sortant du laser fin d'excitation que nous supposons parfaitement monochromatique, à la pulsation  $\omega$ . Ce champ est ensuite modulé en phase à l'aide d'un modulateur électro-optique (EO). Lorsque la polarisation du faisceau incident est bien ajustée, le champ à la sortie du modulateur et arrivant sur la microbille, a pour expression:

$$E_{\text{in}} \equiv E_0 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(M) e^{i(\omega + n\Omega_{\text{RF}})t}, \quad (\text{C.1})$$

où les  $J_n$  sont les fonctions de Bessel d'ordre  $n$ ,  $M$  l'indice de modulation et  $\Omega_{\text{RF}}$  la pulsation de modulation radiofréquence. Nous faisons, pour la suite, les hypothèses suivantes,

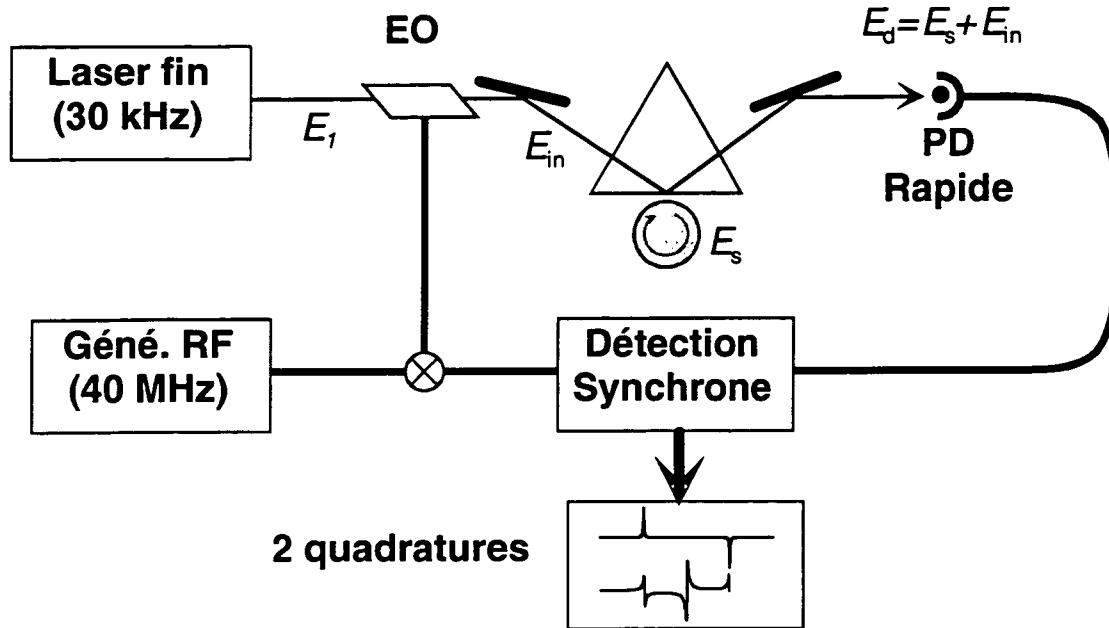


FIG. C.1 – Schéma de principe de la spectroscopie des modes de galerie par modulation de fréquence

justifiées par le fait que la profondeur de modulation est faible (*i.e.*  $M \ll 1$ ):

$$\begin{cases} J_0(M) \simeq 1 \\ J_{\pm 1}(M) = \pm M/2 \end{cases} \quad \text{et } J_p(M) \equiv 0, \text{ pour } p > 1. \quad (\text{C.2})$$

Le champ modulé  $E_{in}$ , incident sur la bille, est donc formé d'une composante intense à la pulsation optique porteuse  $\omega$ , et de deux bandes latérales de faible intensité, décalées de  $\Omega_{RF}$ , en  $\omega \pm \Omega_{RF}$ , et en opposition de phase, comme nous l'avons schématisé sur la Figure 3.5.

Lorsque le laser modulé est balayé en fréquence autour d'une résonance de galerie (WGM), chaque composante entre successivement en résonance avec le mode, à condition que la fréquence de modulation soit très grande devant la largeur  $2\Gamma$  de la résonance de galerie:  $\Omega_{RF} \gg \Gamma$ , condition requise pour réaliser une spectroscopie FM de haute résolution.

À l'aide d'un ampli-photodiode silicium rapide (fréquence de coupure à 150 MHz), nous enregistrons les battements, à la pulsation de modulation  $\Omega_{RF}$ , entre l'une des composantes du champ sortant de la bille affectée par la WGM, et les composantes du champ réfléchi

sur la face du prisme. Le signal détecté est ensuite démodulé à la pulsation  $\Omega_{\text{RF}}$ , à l'aide d'une détection synchrone, qui en extrait les deux quadratures.

Si aucun élément sélectif n'est interposé entre le modulateur et la détecteur, ou, en l'absence de couplage dans le résonateur, il se produit des battements à la pulsation  $\Omega_{\text{RF}}$ , entre l'une et l'autre des bandes latérales et la porteuse. Ces battements sont en opposition de phase, de telle sorte qu'ils se compensent et ne donnent pas de modulation d'amplitude, si les deux bandes sont parfaitement équilibrées.

## C.2 Forme analytique des signaux de spectroscopie FM

Plaçons-nous au voisinage d'une résonance de galerie, de forme lorentzienne de largeur  $2\Gamma$ , à la pulsation  $\omega_0$ . Le champ électrique sortant de la bille est alors donné, à la pulsation porteuse  $\omega$ , par:

$$E_s \equiv E_{\text{in}} k e^{i\psi} \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega - \omega_0)}, \quad (\text{C.3})$$

où  $ke^{i\psi}$  ( $k$  réel) tient compte de l'ensemble de la physique du couplage du champ incident au mode de galerie (taux de couplage, recouvrement et déphasage).

Les deux bandes latérales voisines du laser sonde modulé se couplent également en partie au WGM et contribuent au champ sortant total  $E_s$ :

$$E_s = E_0 k e^{i\psi} \left[ \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega - \omega_0)} e^{i\omega t} J_0(M) + \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega + \Omega_{\text{RF}} - \omega_0)} e^{i(\omega + \Omega_{\text{RF}})t} J_{+1}(M) + \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega - \Omega_{\text{RF}} - \omega_0)} e^{i(\omega - \Omega_{\text{RF}})t} J_{-1}(M) \right] \quad (\text{C.4})$$

Le champ qui parvient au détecteur  $E_d$ , résulte de la superposition du champ réfléchi  $rE_{\text{in}}$  ( $r \equiv e^{i\phi}$ , coefficient de réflexion) sur la face du prisme, et du champ sortant de la bille, aux fréquences porteuse et harmoniques:

$$E_d \equiv rE_{\text{in}} + E_s,$$

c'est à dire encore:

$$\begin{aligned}
E_d = E_0 \left[ r(e^{i\omega t} + M/2 e^{i(\omega+\Omega_{\text{RF}})t} - M/2 e^{i(\omega-\Omega_{\text{RF}})t}) \right. \\
+ k e^{i\psi} \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega - \omega_0)} e^{i\omega t} \\
+ k e^{i\psi} \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega + \Omega_{\text{RF}} - \omega_0)} e^{i(\omega+\Omega_{\text{RF}})t} M/2 \\
\left. - k e^{i\psi} \frac{\Gamma}{\Gamma - i(\omega - \Omega_{\text{RF}} - \omega_0)} e^{i(\omega-\Omega_{\text{RF}})t} M/2 \right] \quad (\text{C.5})
\end{aligned}$$

Le signal détecté, donné par  $E_d E_d^*/2$ , est ensuite démodulé à la pulsation  $\Omega_{\text{RF}}$ , pour conduire au signal utile  $S$ . Pour préciser la forme de  $S$ , nous allons placer successivement l'une des bandes latérales du laser sonde au voisinage de la résonance étudiée. L'autre bande latérale, ainsi que la porteuse sont alors suffisamment éloignées de la résonance ( $\Omega_{\text{RF}} \gg \Gamma$ ) pour n'avoir de contributions qu'au second ordre.

Supposons que la bande latérale à  $\omega + \Omega_{\text{RF}}$  soit au voisinage de la résonance:  $\omega = \omega_0 - \Omega_{\text{RF}} + \delta\omega$ . Le signal démodulé  $S_-$ , a alors pour expression:

$$S_- = \frac{1}{2} E_0^2 \left[ \frac{M}{2} r k e^{i\psi} \frac{\Gamma}{\Gamma - i\delta\omega} e^{i\Omega_{\text{RF}}t} + \text{c.c.} \right] \otimes \cos(\Omega_{\text{RF}}t + \varphi), \quad (\text{C.6})$$

où le symbole  $\otimes$  désigne l'opération de multiplication, puis de filtrage passe-bas que réalise la détection synchrone, pour ne retenir que les composantes à la pulsation  $\Omega_{\text{RF}}$  du signal d'entrée.

Afin de séparer l'effet sur l'amplitude du champ sortant et le déphasage qu'il subit au passage sur la résonance, nous décomposons la réponse de la bille en:  $\Gamma/(\Gamma - i\delta\omega) \equiv \cos \alpha e^{i\alpha}$ , où nous avons posé:  $\cos \alpha \equiv \Gamma/\sqrt{\Gamma^2 + \delta\omega^2}$  et  $\sin \alpha \equiv \delta\omega/\sqrt{\Gamma^2 + \delta\omega^2}$ . Le signal démodulé devient:

$$S_- = \frac{1}{2} E_0^2 M \left[ r k \cos \alpha e^{i(\Omega_{\text{RF}}t + \psi + \alpha)} + \text{c.c.} \right] \otimes \frac{1}{2} \left[ e^{i(\Omega_{\text{RF}}t + \varphi)} + \text{c.c.} \right],$$

que nous simplifions finalement en  $S_- = \frac{1}{2} E_0^2 r k \frac{M}{2} \cos \alpha \cos(\psi - \alpha - \varphi)$ , soit encore:

$$S_- = \frac{1}{2} E_0^2 r k \frac{M}{2} \left[ \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} \cos(\psi - \varphi) - \frac{\Gamma\delta\omega}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} \sin(\psi - \varphi) \right] \quad (\text{C.7})$$

Ce signal présente deux termes en quadrature de phase, précédés pour la quadrature en  $\cos(\psi - \varphi)$  d'un terme de résonance en absorption, tandis que pour l'autre quadrature

en  $\sin(\psi - \varphi)$ , le préfacteur a la forme d'une réponse dispersive. Un choix judicieux de la phase  $\varphi$  de l'oscillateur local (paramètre également ajustable sur la modulation synchrone), permet d'isoler une seule quadrature. En effet:

$$\begin{cases} \text{si } \varphi = \psi, & S_- \propto \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2}, \text{ résonance en absorption} \\ \text{si } \varphi = \psi \pm \pi/2, & S_- \propto \frac{\Gamma\delta\omega}{\Gamma^2 + \delta\omega^2}, \text{ résonance en dispersion} \end{cases} \quad (\text{C.8})$$

Nous retrouvons bien les deux formes de raies observées dans nos expériences, dont nous donnons l'allure sur la Figure 3.6. La grandeur  $2\Gamma$  correspond à la largeur de la raie lorentzienne en absorption, et la distance entre les deux pics dans le signal de dispersion.

Le signal  $S_+$ , que produit le passage de la bande latérale à  $\omega - \Omega_{\text{RF}}$  sur la résonance ( $\omega = \omega_0 - \Omega_{\text{RF}} + \delta\omega$ ), est obtenu de même (il suffit de changer  $M/2$  et  $\Omega_{\text{RF}}$  respectivement en  $-M/2$  et  $-\Omega_{\text{RF}}$ ):

$$S_+ = -\frac{1}{2}E_0^2rk\frac{M}{2} \left[ \frac{\Gamma^2}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} \cos(\psi - \varphi) + \frac{\Gamma\delta\omega}{\Gamma^2 + \delta\omega^2} \sin(\psi - \varphi) \right] \quad (\text{C.9})$$

Enfin, lorsque la pulsation porteuse  $\omega$  est voisine de la résonance (*i.e.*  $\omega = \omega_0 + \delta\omega$ ), le signal détecté à  $\Omega_{\text{RF}}$ , résulte de l'hétérodynage de la réponse de la bille à  $\omega$  avec les deux bandes latérales du champ réfléchi:

$$S_0 = \frac{1}{2}E_0^2 \left[ rk \cos \alpha \frac{M}{2} e^{-i(\Omega_{\text{RF}}t - \psi - \alpha)} - rk \cos \alpha \frac{M}{2} e^{i(\Omega_{\text{RF}}t + \psi + \alpha)} + \text{c.c.} \right] \otimes \cos(\Omega_{\text{RF}}t + \varphi),$$

soit après démodulation  $S_0 = \frac{1}{2}E_0^2rk \cos \alpha \cos(\psi - \varphi + \alpha) - \frac{1}{2}E_0^2rk \cos \alpha \cos(\psi - \varphi - \alpha)$ , et nous reconnaissons la forme analytique  $S_0 = S_- - S_+$ , quelle que soit la phase  $\varphi$  de l'oscillateur local. De ce signal  $S_0$ , nous pouvons également extraire deux quadratures. La première, dispersive, lorsque nous faisons le choix de phase  $\varphi = \pi/2$ : l'amplitude de  $S_0$  est alors double de celle du signal dispersif de l'une des bandes latérales, lorsque cette dernière est à résonance avec le mode. La seconde quadrature, obtenue pour  $\varphi = 0$ , est nulle. L'absence de composante en absorption dans le signal démodulé correspondant au passage de la porteuse sur la résonance de galerie, est liée à la compensation exacte des deux bandes latérales lorsqu'elles sont parfaitement équilibrées.

La forme des résonances de galerie analysées sur les deux quadratures de la détection par spectroscopie FM, est finalement reportée sur la Figure C.2, et correspond bien qualitativement à nos observations expérimentales (§3.3.1).



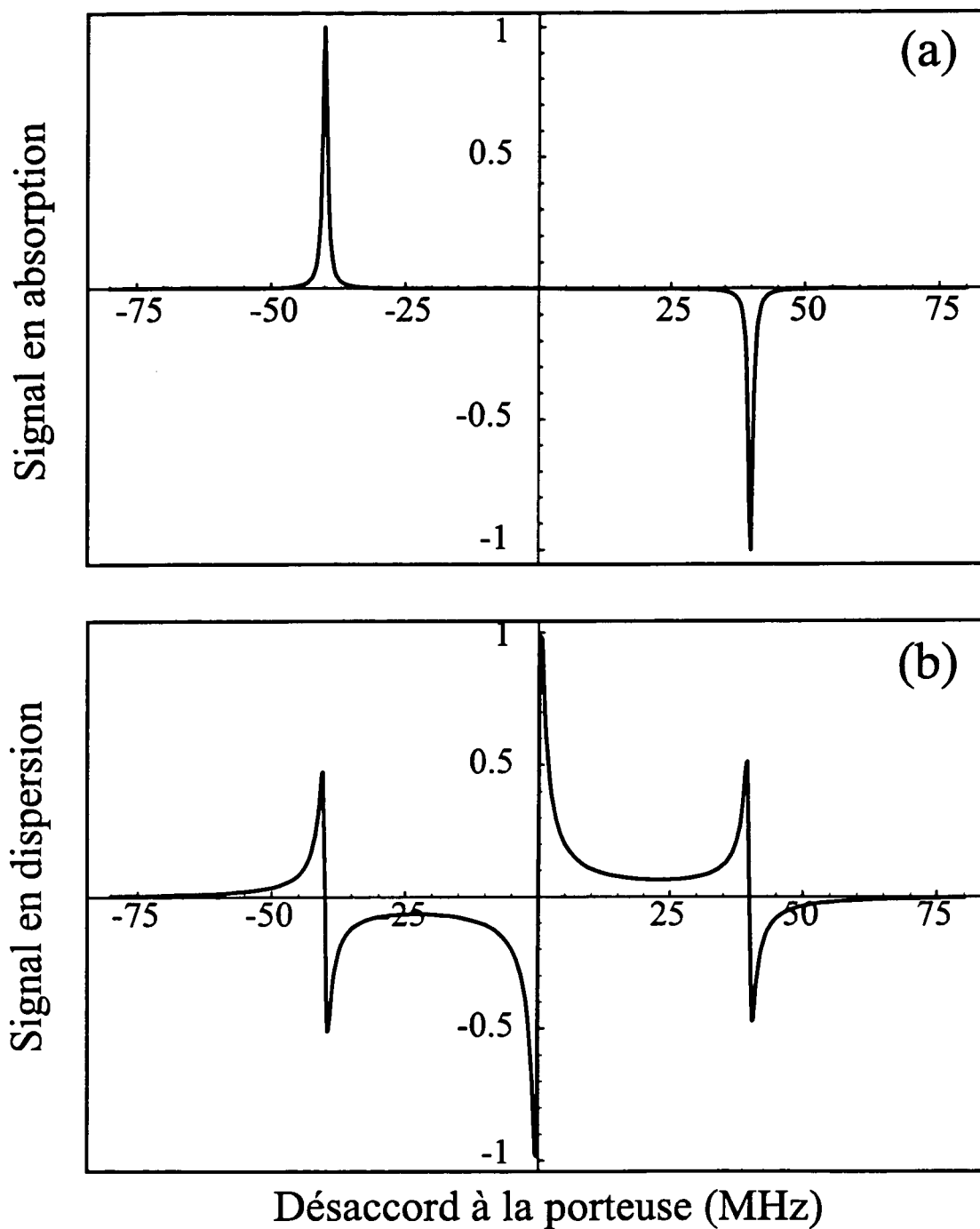


FIG. C.2 – Formes théoriques, déduite de l'Éq. C.7, lorentziennes en absorption (a) et triplet dispersif (b) des signaux de résonances de galerie en spectroscopie de modulation de fréquence par balayage, pour une largeur de mode de 500 kHz, et une fréquence de modulation de 40 MHz

Notons cependant que, dans les signaux expérimentaux, la résonance en dispersion présente le plus souvent un fond non nul entre deux composantes du signal de dispersion, et une dissymétrie dans la forme des pics. Nous attribuons cet effet à une modulation d'amplitude résiduelle parasite, qui vient s'ajouter à la modulation de phase pure, et que l'on nomme souvent "fuite vectorielle". Nous renvoyons le lecteur à l'annexe D de la thèse de L. Collot [22, p. 206], pour une analyse quantitative de cet effet.

Jusqu'à présent nous avons considéré que le laser sonde était infiniment fin. Dans le cas réel où sa largeur est finie, le signal enregistré résulte du produit de convolution de la fonction d'analyse (*i.e.* le spectre lorentzien du laser sonde), par la réponse intrinsèque du résonateur, également d'allure lorentzienne. Si nous connaissions parfaitement le spectre du laser sonde à chaque instant, il suffirait de l'utiliser pour déconvoluer nos enregistrements, et extraire la largeur des résonances de galerie étudiées. Mais, en général, la largeur spectrale du laser sonde fluctue au gré du bruit acoustique et des augmentations transitoires du bruit HF environnant. Néanmoins, tant que celle-ci reste petite devant la largeur du mode, ce qui est le plus souvent le cas dans nos expériences, nous pouvons finalement extraire une valeur approchée de la largeur du mode par soustraction de la largeur du laser sur le signal démodulé enregistré, puisque la convolution de deux lorentziennes redonne une lorentzienne de largeur égale à la somme des largeurs de chacune d'entre elles.



# Bibliographie

- [1] E. M. Purcell. *Phys. Rev.*, **69**, 681, (1946).
- [2] H. B. G. Casimir and D. Polder. *Phys. Rev.*, **73**, 360, (1948).
- [3] S. Haroche. Cavity Quantum Electrodynamics. Dans *Fundamental Systems in Quantum Optics*, Les Houches Summer School, Session LIII. North Holland, (1992).
- [4] E. Hagley, X. Maitre, G. Nogues, C. Wunderlich, J.-M. Raimond, and S. Haroche. *Generation of Einstein-Podolsky-Rosen Pairs of atoms*. *Phys. Rev. Lett.*, **79**, 1, (1997).
- [5] R. J. Thompson, G. Rempe, and H. J. Kimble. *Phys. Rev. Lett.*, **68**, 1132, (1992).
- [6] K. An, J. J. Childs, R. R. Dasari, and M. S. Feld. *Microlaser: a laser with one atom in an optical resonator*. *Phys. Rev. Lett.*, **73**, 3375, (1994).
- [7] Y. Yamamoto and R. E. Slusher. *Optical processes in microcavities*. *Physics Today*, **June 1993**, 66, (1993).
- [8] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. *Optical levitation by radiation pressure*. *Applied Physics Lett.*, **19**, 283–285, (1971).
- [9] A. Ashkin and J. M. Dziedzic. *Observation of resonances in the radiation pressure on dielectric spheres*. *Phys. Rev. Lett.*, **38**, 1351–1354, (1977).
- [10] S. C. Hill and R. E. Benner. Morphology-dependent resonances. Dans *Optical Effects Associated With Small Particles*, volume 1 de *Advanced series in applied physics*. World Scientific, (1988).
- [11] R. K. Chang and A. J. Campillo, éditeurs. *Optical processes in microcavities*, volume 3 de *Advanced Series in Applied Physics*. World Scientific, (1996).

- [12] H.-M. Tzeng, K. F. Wall, M. B. Long, and R. K. Chang. *Laser emission from individual droplets at wavelength corresponding to morphology dependent resonances*. Optics Lett., **9**, 499–501, (1984).
- [13] S. X. Qian, J. B. Snow, H. M. Tzeng, and R. K. Chang. *Lasing droplets: highlighting the liquid–air interface by laser emission*. Science, **231**, 486–488, (1986).
- [14] J. B. Snow, S. X. Qian, and R. K. Chang. *Stimulated Raman scattering from individual water and ethanol droplets at morphology–dependent resonances*. Optics Lett., **10**, 37, (1985).
- [15] H. B. Lin, A. L. Huston, B. L. Justus, and A. J. Campillo. *Some characteristics of a droplet whispering–gallery–mode laser*. Optics Lett., **11**, 614–616, (1986).
- [16] A. J. Campillo, J. D. Eversole, and H. B. Lin. *Cavity quantum electrodynamics enhancement of stimulated emission in microdroplets*. Phys. Rev. Lett., **67**, 437–440, (1991).
- [17] C. G. B. Garrett, W. Kaiser, and W. L. Bond. Phys. Rev., **124**, 1807, (1961).
- [18] V. B. Braginsky, M. L. Gorodetsky, and V. S. Ilchenko. *Quality-factor and non-linear properties of optical whispering-gallery modes*. Phys. Lett. A, **137**, 393–397, (1989).
- [19] F. Treussart, J. Hare, L. Collot, V. Lefèvre, D. S. Weiss, V. Sandoghdar, J.-M. Raimond, and S. Haroche. *Quantized atom-field force at the surface of a microsphere*. Optics Lett., **19**, 1651–1653, (1994).
- [20] H. Mabuchi and H. J. Kimble. Optics Lett., **19**, 749, (1994).
- [21] T. Baer. *Continuous-wave laser oscillation in a Nd:YAG sphere*. Optics Lett., **12**, 392–394, (1987).
- [22] L. Collot. *Etude théorique et expérimentale des résonances de galerie de microsphères de silice: pièges à photons pour des expériences d'électrodynamique en cavité*. Thèse, Université Paris VI, (1994).
- [23] Lord Rayleigh. *Theory of Sound*, volume 2. MacMillan and Co., (1877).
- [24] Lord Rayleigh. Phil. Mag., **12**, (1881).
- [25] G. Mie. *Beitrag zur Optik trüber Medien, speziell kolloidaler Metallosungen*. Ann. Phys. (Leipzig), **25**, 337–445, (1908).
- [26] H. M. Nussenzveig. Scientific American, **236**, 116, (1977).

- [27] H. Goldstein. *Classical Mechanics*. Addison Wesley, seconde édition, (1980).
- [28] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie des Champs*, volume 2 de *Cours de physique théorique*. Mir, Moscou, 4<sup>ième</sup> édition, (1969).
- [29] M. Born and E. Wolf. *Principles of Optics*. Pergamon, (1980).
- [30] Goos and Hänchen. **00**, (1900).
- [31] P. T. Leung, S. Y. Liu, S. S. Tong, and K. Young. *Time-independent perturbation theory for quasinormal modes in leaky optical cavities*. *Phys. Rev. A*, **49**, 3068–3073, (1994).
- [32] Stratton. *Electromagnetic Theory*. Mc Graw-Hill, (1941).
- [33] H. M. Nussenzveig. *Diffraction Effects in Semiclassical Scattering*. Montroll Memorial Lecture Series in Mathematical Physics. Cambridge University Press, (1992).
- [34] J. Hare. *Etude théorique et expérimentale des atomes de Rydberg circulaires: vers une mesure directe de la constante de Rydberg en unité de fréquence*. Thèse, Université Paris VI, (1991).
- [35] M. Abramowitz and I. A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Numéro 55 dans Applied Mathematics Series. N.B.S., (1964).
- [36] F. W. J. Olver. *The asymptotic solution of linear differential equations of the second order for large values of a parameter — The asymptotic expansion of Bessel functions of large order — XXX*. *Phil. Trans. Roy. Soc. London*, , (1954). **247**, 307–327, 328–369, (1954) et **249**, 65–97, (1956).
- [37] C. F. Bohren and D. R. Huffman. *Absorption and Scattering of Light by small particles*. Wiley, (1983).
- [38] S. Schiller and R. L. Byer. *High-resolution spectroscopy of whispering gallery modes in large dielectric spheres*. *Optics Lett.*, **16**, 1138–1140, (1991).
- [39] S. Schiller. *Asymptotic expansion of morphological resonance frequencies in Mie scattering*. *Applied Optics*, **32**, 2181–2185, (1993).
- [40] C. C. Lam, P. T. Leung, and K. Young. *Explicit asymptotic formulas for the positions, widths, and strengths of resonances in Mie scattering*. *J. Opt. Soc. Am. B*, **9**, 1585–1592, (1992).

- [41] J. Hare et V. Lefèvre. Modes de galerie des microsphères diélectriques. Technical report, Laboratoire Kastler Brossel, Département de Physique de l'École normale supérieure, (1995).
- [42] P. K. Tien. *Appl. Opt.*, **10**, 2395, (1970).
- [43] L. Collot, V. Lefèvre-Seguin, M. Brune, J. M. Raimond, and S. Haroche. *Very high-Q whispering-gallery mode resonances observed on fused silica microspheres*. *Europhys. Lett.*, **23**, 327–334, (1993).
- [44] M. L. Gorodetsky, A. A. Savchenkov, and V. S. Ilchenko. *Ultimate Q of optical microsphere resonators*. *Optics Lett.*, **21**, 453–455, (1996).
- [45] J. D. Jackson. *Classical Electrodynamics*. Wiley, seconde édition, (1975).
- [46] P. T. Leung, S. Y. Liu, and K. Young. *Completeness and orthogonality of quasinormal modes in leaky optical cavities*. *Phys. Rev. A*, **49**, (1994).
- [47] S. Schiller, I. I. Yu, M. M. Fejer, and R. L. Byer. *Fused-silica monolithic total-internal-reflection resonator*. *Optics Lett.*, **17**, 140–142, (1992).
- [48] N. Dubreuil. *Excitation par fibre optique et cartographie en champ proche des modes de galerie de microsphères de silice*. Thèse, Université de Rennes 1, (1997).
- [49] N. Dubreuil, J. C. Knight, D. K. Leventhal, V. Sandoghdar, J. Hare, and V. Lefèvre. *Eroded monomode optical fiber for excitation in fused-silica microspheres*. *Optics Lett.*, **20**, 813–815, (1995).
- [50] B. R. Johnson. *Theory of morphology-dependant resonances: shape resonances and width formulas*. *J. Opt. Soc. Am. A*, **10**, 343–352, (1993).
- [51] M. L. Gorodetsky and V. S. Ilchenko. *High-Q optical whispering-gallery microresonators: precession approach for spherical mode analysis and emission patterns with prisms couplers*. *Optics Comm.*, **113**, 133–143, (1994).
- [52] S.-C. Lin and T. G. Giallorenzi. *Appl. Opt.*, **18**, 915, (1979).
- [53] D. S. Weiss, V. Sandoghdar, J. Hare, V. Lefèvre-Seguin, J.-M. Raimond, and S. Haroche. *Splitting of high Q Mie modes induced by light backscattering in silica microspheres*. *Optics Lett.*, **20**, 1835–1837, (1995).
- [54] P. Laurent. Thèse, Université Paris 6, (1992).

- [55] J. C. Swindal, D. H. Leach, R. K. Chang, and K. Young. *Precession of morphology-dependent resonances in nonspherical droplets*. Optics Lett., **18**, 191–193, (1993).
- [56] R. J. C. Spreeuw, J. P. Woerman, and D. Lenstra. Phys. Rev. Lett., **61**, 318, (1988).
- [57] Lord Rayleigh. *On the light from the sky, its polarisation and colour*. Phil. Mag, , 107–120, (1871).
- [58] V. V. Vasilev, V. L. Velichanski, M. L. Gorodetsky, V.S. Ilchenko, L. Hollberg, and A. V. Yarovitski. *High coherence diode laser with optical feedback via a microcavity with whispering gallery modes*. Quantum Electronics, **26**, 657–658, (1996).
- [59] J. J. Zayhowski and A. Mooradian. *Single-frequency microchip Nd lasers*. Optics Lett., **14**, 24, (1989).
- [60] Fiches techniques: *technologie de fabrication collective des lasers puces, laser puce vert*. Technical report, CEA/LETI et Société Nanolase, (1997).
- [61] Y. Z. Wang, B. L. Lu, Y. Q. Li, and Y. S. Liu. *Observation of cavity quantum-electrodynamic effects in Nd:glass microsphere*. Optics Lett., **20**, 770–772, (1995).
- [62] P. Le Boudec. *Thèse de Doctorat: Propriétés statiques et dynamiques des lasers à fibre dopée erbium et néodyme*. Thèse, Université de Rennes I, (1993).
- [63] I. Freitag, R. Henking, A. Tünnermann, and H. Welling. *Quasi-three-level room-temperature Nd-YAG ring laser with high single-frequency output power at 946 nm*. Optics Lett., **20**, 2499, (1995).
- [64] T. Miyazaki, Y. Karasawa, and M. Yoshida. *Neodymium-doped fibre amplifier at 1.064  $\mu\text{m}$* . Electronics Lett., **30**, 2142, (1994).
- [65] M. Le Flohic. *Thèse de Doctorat: Contribution à l'étude et à la réalisation de lasers à fibre dopée aux ions de Terres Rares*. Thèse, Université de Rennes I, (1991).
- [66] M. M. Mann and L. G. DeShazer. *Energy Levels and Spectral Broadening of Neodymium Ions in Laser Glass*. J. Appl. Phys, **41**, 2951, (1970).
- [67] W. A. Phillips. *Tunneling States in Amorphous Solids*. J. Low Temp. Phys., **7**, 351, (1972).
- [68] P. W. Anderson, B. I. Halperin, and C. M. Varma. *Anomalous Low-Temperature Thermal Properties of Glasses and Spin Glasses*. Phil. Mag., **25**, 1, (1972).



- [69] J. Hegarty, M. M. Broer, B. Golding, J. R. Simpson, and J. B. MacChesney. *Photon Echoes below 1 K in a Nd<sup>3+</sup>-doped Glass Fiber*. Phys. Rev. Lett., **51**, 2033, (1983).
- [70] R. M. Macfarlane and R. M. Shelby. *Homogeneous Line Broadening of Optical Transition of Ions and Molecules in Glasses*. J. of Lum., **36**, 179, (1987).
- [71] D. L. Huber, M. M. Broer, and B. Golding. *Low-Temperature Optical Dephasing of Rare-Earth Ions in Glass*. Phys. Rev. Lett., **52**, 2281, (1984).
- [72] D. M. Boye, S. P. Feofilov, and R. S. Meltzer. *Two-Pulse Photon Echo Studies of Optical Dephasing in CaF<sub>2</sub>:Eu<sup>2+</sup>*. to be published, , (1997).
- [73] M. Sargent III, M. Scully, and Jr. W. Lamb. *Laser Physics*. Addison -Wesley, (1974).
- [74] C. Cohen-Tannoudji, Jacques Dupont-Roc, and Gilbert Grynberg. *Processus d'interaction entre photons et atomes*. InterEditions, (1988).
- [75] P.W. Miloni. J. Mod Optics, **42**, 1991–2004, (1995).
- [76] M. P. van Exter, G. Nienhuis, and J. P. Woerdman. *Two simple expression for the spontaneous emission factor  $\beta$* . Phys. Rev. A, **54**, 3553, (1996).
- [77] P. Domokos, J.-M. Raimond, S. Haroche, I. Protsenko, and L. Davidovich. *Quantum noise in microlaser*. Acta Physica Slovaca, **47**, 273, (1997).
- [78] A. E. Siegman. *Lasers*. University Science Books, Mill Valley, California, (1986).
- [79] numéro de Juin 97 Article paru dans *La Recherche*. Analyse de la distribution des ions erbium dans les fibres dopées des amplificateurs. Technical report, CEA/CENG, (1997).
- [80] A. L. Schawlow and C. H. Townes. *Infrared and Optical Masers*. Phys. Rev., **112**, 1940, (1958).
- [81] B. Zhou, T.J. Kane, G.J. Dixon, and R.L. Byer. *Efficient, frequency-stable laser-diode-pumped Nd:YAG laser*. Optics Lett., **10**, 62, (1985).
- [82] E. D. Hinkley and C. Freed. *Direct observation of the lorentzian shape as limited by quantum phase noise in a laser above threshold*. Phys. Rev. Lett., **23**, 277, (1969).
- [83] T. Okoshi, K. Kikushi, and A. Nakayama. *Novel method for high resolution measurement of laser output spectrum*. Electronics Lett., **16**, 630, (1980).

- [84] V. S. Ilchenko, P. S. Volikov, V. L. Velichansky, F. Treussart, V. Lefevre, J.-M. Raimond, and S. Haroche. *Strain-tunable high Q optical microsphere resonator*. To be published in *Optics Comm.*, , (1997).
- [85] A. L. Huston and J. D. Eversole. *Strain-sensitive elastic scattering from cylinders*. *Optics Lett.*, **18**, 1104, (1993).
- [86] L. Landau and E. Lifchitz. *Théorie de l'élasticité*, volume 7 de *Cours de physique théorique*. Mir, Moscou, 4<sup>ième</sup> édition, (1969).
- [87] N. F. Borrelli and R. A. Miller. *Determination of individual strain-optic coefficients of glass by ultrasonic technique*. *Appl. Opt.*, **7**, 745, (1968).
- [88] J. Popp, M. H. Fields, and R. K. Chang. *Injection seeding of lasing in microdroplets*. *Optics Lett.*, **22**, 139, (1997).
- [89] S. C. Hill, R. E. Benner, C. K. Rushforth, and P. R. Conwell. *Structural resonances observed in the fluorescence emission from small spheres on substrates*. *Appl. Opt.*, **23**, 1680, (1984).
- [90] A. Otto. *Excitation of nonradiative surface plasma waves in silver by the method of frustrated total reflection*. *Z. Phys.*, **216**, 398, (1968).
- [91] F. De Martini, F. Cairo, P. Mataloni, and F. Verzegnassi. *Thresholdless microlaser*. *Phys. Rev. A*, **46**, 4220, (1992).
- [92] W. E. Moerner and L. Kador. *Optical Detection and Spectroscopy of Single Molecules in a Solid*. *Phys. Rev. Lett.*, **62**, 2535–2538, (1989).
- [93] M. Orrit and J. Bernard. *Single Pentacene Molecules Detected by Fluorescence Excitation in a p-Terphenyl Crystal*. *Phys. Rev. Lett.*, **65**, 2716–2719, (1990).
- [94] D. J. Norris, M. Kuwata-Gonokami, and W. E. Moerner. *Excitation of a single molecule on the surface of a spherical microcavity*. *Applied Physics Lett.*, **71**, 297–299, (1997).
- [95] P. Tamarat. *Spectroscopie à une molécule en phase solide: dispersion de la fluorescence, recherche de nouveaux systèmes et optique non linéaire*. Thèse, Université Bordeaux I, (1996).
- [96] F. Jelezko, Ph. Tamarat, B. Lounis, and M. Orrit. *Dibenzoterrylene in Naphtalene: a New Crystalline System for Single Molecule Spectroscopy in the Near Infrared*. J.

Phys. Chem., **100**, 13892–13894, (1996).

- [97] G. C. Bjorklund. *Frequency modulation spectroscopy: a new method for measuring weak absorption and dispersion*. Optics Lett., **5**, 15, (1980).

**François TREUSSART**

**Étude expérimentale de l'effet laser dans des microsphères de silice dopées avec des ions néodyme.**

**RÉSUMÉ**

Ce travail de thèse porte sur la mise en évidence de l'effet laser dans des microrésonateurs optiques de très haute surtension, basés sur les modes de galerie de microsphères de silice d'un diamètre de 50 à 100  $\mu\text{m}$ . Ces modes résonnants correspondent à une propagation guidée par réflexion totale interne. La lumière est ainsi confinée dans un anneau équatorial dont les dimensions transversales sont de l'ordre de la longueur d'onde, ce qui donne lieu à une forte exaltation du champ lumineux. Les pertes de ces modes guidés sont extrêmement faibles. Ils offrent donc la combinaison remarquable d'une très forte localisation du champ dans un tout petit volume et de très longs temps de vie pour les photons. Ces propriétés en font des résonateurs de choix tant pour obtenir des effets d'Optique non-linéaire à très bas seuil que pour des expériences d'Électrodynamique Quantique en cavité.

Ce mémoire présente d'abord les propriétés de ces résonances et leur observation expérimentale par spectroscopie laser. Le dédoublement de ces résonances par rétrodiffusion interne est ensuite décrit et interprété par un modèle d'oscillateurs couplés, en bon accord avec les expériences. La réalisation d'un microlaser avec des microbilles dopées au néodyme est ensuite présentée. Les très bas seuils observés (200 nW) correspondent bien aux prédictions théoriques obtenues par un modèle semi-classique approprié. Pour renforcer les effets de cavité, ces expériences ont été poursuivies en immergeant les microsphères dans l'hélium superfluide. Le montage cryogénique mis au point nous permet de conserver des surtensions à 2 K de  $10^9$  et l'émission laser a pu être observée, ouvrant la voie à la recherche d'un fonctionnement laser avec seulement quelques ions couplés à quelques photons.

**MOTS CLÉS** Microcavités, Résonances de Mie, Électrodynamique Quantique en Cavité, Microlaser, Néodyme.

**ABSTRACT**

This thesis is devoted to microcavities based on the very high Q whispering gallery modes of silica microspheres, about 100 $\mu\text{m}$  in diameter. The electromagnetic field of these modes is guided along the sphere's surface by total internal reflection and confined in an equatorial ring with transverse dimensions of the order of the wavelength. These guided modes have very low losses. They exhibit a remarkable combination of strong localization of the field in a small volume and very long storage times for the photons. These two properties render these microspheres ideal as optical resonators for non-linear optics as well as for cavity QED experiments.

After a general presentation of these resonances, the experimental techniques used to observe the resonances by laser spectroscopy are then described. The splitting of high-Q modes is also discussed and interpreted in terms of a coupled oscillator model. The practical realization of a microlaser with neodymium doped spheres is presented. The very low measured thresholds are found in agreement with an appropriate semi-classical model. A new set-up has been realized to operate with microspheres immersed in a superfluid helium bath. Very high Q's are preserved and laser emission has been observed at 2K. These results open the way to the search of a new lasing regime with a few ions coupled to a few photons.

**KEY WORDS** Microcavity, Whispering-Gallery-modes, Quantum Electrodynamics, Microlaser, Neodymium.