



HAL
open science

Contribution théorique et expérimentale à l'étude du phénomène de superradiance

Michel Gross

► **To cite this version:**

Michel Gross. Contribution théorique et expérimentale à l'étude du phénomène de superradiance. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1980. Français. NNT: . tel-00011834

HAL Id: tel-00011834

<https://theses.hal.science/tel-00011834>

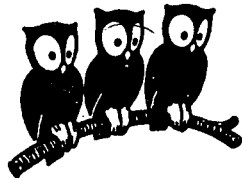
Submitted on 8 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS

LABORATOIRE DE PHYSIQUE
DE L'ÉCOLE NORMALE
SUPÉRIEURE



THESE DE DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à

l'Université Pierre et Marie Curie

(Paris VI)

par

- Michel GROSS -

pour obtenir

le grade de DOCTEUR-ES-SCIENCES

Sujet de la thèse : "CONTRIBUTION THEORIQUE ET EXPERIMENTALE A L'ETUDE
DU PHENOMENE DE SUPERRADIANCE."

Soutenue le 1er Juillet 1980 devant le jury :

MM. J. BROSEL

Président

P. JACQUINOT

E. BREZIN

C. COHEN-TANNOUJJI

S. HAROCHE

)
Examineurs

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure au cours des années 1975-1980. Je remercie vivement les Professeurs A. KASTLER et J. BROSSEL de m'avoir accueilli dans leur Laboratoire, me permettant de bénéficier ainsi d'un environnement scientifique exceptionnel.

Je remercie tout particulièrement S. HAROCHE qui guide et dirige nos travaux de recherche depuis près de sept ans. J'ai, durant ces années, eu l'occasion d'apprécier ses qualités d'homme et de physicien et je tiens à lui dire combien j'ai apprécié sa direction.

Je tiens à remercier également les autres membres de l'équipe qui ont collaboré aux travaux décrits dans ce mémoire : tout d'abord Claude FABRE et P. PILLET, puis J.M. RAIMOND, et enfin P. GOY et L. MOI.

Je remercie P. JACQUINOT, C. COHEN-TANNOUJJI et F. BREZIN de l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail en acceptant de faire partie du jury de cette thèse.

Je suis heureux de remercier l'ensemble des techniciens qui ont participé à la réalisation de ce travail, et en particulier ceux de l'atelier d'électronique.

Je remercie enfin toutes les secrétaires qui ont travaillé à la frappe de ce long manuscrit, Catherine EMO, Patricia BOUNIOL, Christine RAT, ainsi qu'Irène BRODSCHI qui n'a pas ménagé sa peine pour que cette thèse soit prête à temps. Je remercie également Madame AUDOIN ainsi que Dominique GIAFFERI qui ont assuré la pagination et le tirage.

TABLE DES MATIERES

=====

Chapitre I : "Qu'est ce que la superradiance "

- "Qu'est-ce que la superradiance ?	p. 1
- Emission spontanée collective d'un système à deux niveaux	p. 3
- La superradiance : un effet intéressant sur le plan théorique	p. 8
- La superradiance : un effet aux applications pratiques intéressantes	p. 14
- Le domaine de recherche au début de ce travail	p. 15
- Les contributions de ce travail à l'étude de la superradiance	p. 16
- Plan du mémoire	p. 18

Chapitre II : La superradiance d'un système à deux niveaux.

II-I <u>Introduction</u>	p. 20
A) Les deux points de vue de la superradiance	p. 20
B) La méthode de résolution des équations de la superradiance et son interprétation physique.	p. 22
C) La discussion des approximations et leur contenu physique	p. 23
II-II <u>Equation d'évolution du système atomique:</u>	p. 27
A) Position du problème et notations	p. 27
1°) Le système atomique	p. 27
2°) Le champ rayonné	p. 29
3°) Hamiltonien du système atomes + champs	p. 29
B) Equation pilote de la matrice densité (point de vue de Schrödinger).	p. 31
1°) Equation générale pour la matrice densité atomique	p. 31
2°) Approximation de Born Markov	p. 34
a) Approximation de Born	p. 34
b) Approximation de Markov	p. 35
3°) Approximation géométriques	p. 37
a) Forme du milieu atomique émetteur	p. 37
b) Approximation de propagation à une dimension.	p. 39
c) Approximation du champ moyen ou approximation de DICKE.	p. 46
d) Discussion des approximations géométriques en fonction du nombre de Fresnel \mathcal{F} du milieu émetteur.	p. 47

C) Equation d'évolution des opérateurs atomiques et du champ . (Point de vue de Heisenberg).	p. 48
1°) Equation d'évolution des opérateurs	p. 49
a) Définition des opérateurs champ électrique polarisation et populations atomiques dans le cadre de l'approximation à une dimension	p. 49
b) Equation d'évolution de \mathcal{M} , \mathcal{E} , et \mathcal{S} à l'approximation à une dimension.	p. 49
c) Equation d'évolution de \mathcal{N} et \mathcal{S} à l'approximation du champ moyen	p. 53
2°) Lien avec le point de vue de Schrödinger	p. 54
<u>II-III Les solutions du problème à l'approximation du champ moyen</u>	p. 57
A) Solution pour la matrice densité du système collectif (formalisme de Schrödinger)	p. 57
1°) Position du problème et notations	p. 58
a) La base des états de Dicke	p. 58
b) Les équations de Dicke.	p. 60
2°) Solution analytique exacte	p. 60
3°) Solution néo-classique approchée	p. 64
4°) Solution exacte par décomposition en trajectoires classiques	p. 65
a) Etats quasi-classiques du système atomique et trajectoires classiques pour l'énergie.	p. 65
b) Les superpositions d'états quasi-classiques	p. 70
B) Interprétation physique des trajectoires classiques	p. 73
1°) Que mesure une expérience de superradiance	p. 73
2°) Les fluctuations dans le modèle "du champ moyen" , loi de probabilité $P(t_D)$ du délai	p. 76
3°) Conclusion : Différentes expressions équivalentes des valeurs moyennes	p. 77

.../...

C) Solution dans le point de vue d'Heisenberg : problème de la phase du champ émis	p. 78
1°) Les trajectoires classiques pour la polarisation atomique	p. 79
2°) Loi de probabilité des trajectoires classiques	p. 81
3°) Application des trajectoires classiques pour le calcul des fonctions de corrélation d'onde normal $\langle \hat{Q}^+ \rangle^L \langle \hat{Q}^- \rangle^m$	p. 82
4°) La phase de la polarisation atomique et du champ rayonné	p. 83
5°) Le vecteur de Bloch et le "tipping angle"	p. 84
6°) Conclusion	p. 86

II-IV La solution du problème de la superradiance à l'approximation du modèle de propagation à une dimension p. 87

A) Trajectoires classiques à une dimension avec condition initiale homogène.	p. 88
B) "Les conditions initiales" et leur loi de probabilité dans le cas du modèle de propagation à une dimension : propriétés statistiques de l'émission superradiante	p. 94
1°) Décomposition du milieu en "tranches" de même abscisse.	p. 94
2°) La mesure à $t=t_1$; les trajectoires classiques	p. 95
3°) La loi de probabilité associée à la trajectoire α	p. 96
4°) Propriétés statistiques de l'émission superradiante (rappels des résultats de Glauber et al (5))	p. 97
5°) Calcul simplifié de l'émission superradiante. Démarrage sur une polarisation aléatoire homogène dans tout le milieu.	p. 97

II-V Discussion de l'approximation de Born-Markov p. 99

A) Rappel	p. 99
1°) Point de vue de Schrödinger	p. 99
2°) Point de vue d'Heisenberg	p. 100
3°) Conclusion	p. 101
B) Condition suffisante de validité dans le point de vue de Schrodinger : Condition de Born Markov restrictive	p. 102
1°) Condition de Markov	p. 102
2°) Condition de Born	p. 103

C) Que se passe t-il dans le point de vue de Schrödinger si $N^2 \Gamma_{\mu} L/c \gg 1$?	p. 104
1°) Observables à évolution lente : énergie et champ émis.	p. 104
2°) Observables rapides	p. 106
<u>Remarques</u> : Observables "lentes" et "rapides" dans le point de vue de Heisenberg	p. 110
D) Remarque sur la mesure des observables rapides	p. 110
E) Conclusion	

Chapitre III : La superradiance d'un ensemble d'atomes à niveaux dégénérés ou quasi-dégénérés : Battement de superradiance p. 117

A) Equations générales	p. 118
1°) Position du problème et notations	p. 118
2°) Les équations d'évolution des opérateurs	p. 120
3°) Condition à prendre pour simuler le démarrage quantique du système dans les équations de Bloch Maxwell généralisées.	p. 122
a) <i>Système à trois niveaux en "V" dans un mélange statistique d'états à t=0</i>	p. 123
i) Le système à trois niveaux en "V"; notations	p. 123
ii) La condition initiale dans le cas d'un mélange statistique d'états	p. 125
iii) Interprétation physique du résultat	p. 127
b) <i>Système à trois niveaux en "V" dans un cas pur</i>	p. 129
c) <i>Système à trois niveaux en "V" renversé</i>	p. 132
i) Notation	p. 132
ii) Condition initiale	p. 133
d) <i>Remarque</i>	p. 134
4°) Conclusion	p. 135

.../...

B) Les battements de superradiance : quelques effets physiques" étudiés sur des exemples simples	p. 136
1°) Illustration du caractère classique des battements de superradiance : les battements entre atomes physiquement différents pour $\Delta\omega T_{SR} \gg 1$	p. 136
a) Position du problème et équations d'évolution	p. 137
b) Allure des solutions pour $\Delta\omega T_{SR} \gg 1$	p. 139
c) Lien avec les battements cohérents de deux lasers, et avec la détection hétérodyne	p. 140
2°) La fréquence et la phase des battements de superradiance . Etude suivant la valeur de $\Delta\omega T_{SR}$	p. 142
a) Etude analytique du démarrage de l'évolution du système constitué de deux classes d'atomes à l'approximation du champ moyen.	p. 143
b) Allure des solutions en fonction de $\eta = \Delta\omega T_{SR}$	p. 148
3°) Influence des cohérences hertziennes	p. 151
a) L'effet de quantification du délai	p. 154
b) Effet des cohérences hertziennes sur la phase et la profondeur de modulation des battements de superradiance	p. 154
i) en absence de cohérence hertzienne $t=0$	p. 155
ii) en présence de cohérences hertziennes à $t=0$	p. 157
iii) Conclusion	p. 159
c) Création de cohérences hertziennes par l'émission superradiante	p. 160
d) Conclusion	

Chapitre IV : La superradiance limitée p. 163

A) Introduction	p. 163
B) Superradiance limitée de Friedberg et Hartmann Cas d'un petit système	p. 165
C) La superradiance limitée de deux classes d'atomes à deux niveaux de force d'oscillateur différentes	p. 169
1°) Postion du problème	p. 170

2°) Equation d'évolution et énergie du système atomique	p. 171
3°) L'effet de superradiance limitée	p. 173
D) La superradiance limitée d'un système préparé dans un mélange statistique	p. 174
1°) Position du problème	p. 174
2°) Cas $\Delta\omega = 0$ et $\vec{u} = \vec{u}'$	p. 177
3°) Cas $\Delta\omega \neq 0$ ou $\vec{u} \neq \vec{u}'$	p. 183
Interprétation des résultats	p. 185
i) cas $T_{SR,a} \neq T_{SR,b}$	p. 186
ii) Cas $T_{SR,a} = T_{SR,b}$	p. 187
4°) Conclusion	p. 190
E) Conclusion : lien avec les effets de propagation	p. 191

Chapitre V : <u>Un système superradiant très simple, le maser en régime transitoire.</u>	p. 193
A) Introduction	p. 193
B) Cas idéal : La superradiance d'un petit système à l'intérieur d'une cavité	p. 195
1°) Position du problème et ordres de grandeurs	p. 195
2°) Equations d'évolution	p. 198
3°) Etude de l'état final (effet de superradiance totale)	p. 201
4°) Allure des solutions en fonction de $\alpha = T_{CAV}/T_{MASER}$	p. 201
a) <i>Le démarrage de l'évolution</i>	p. 201
b) <i>Evolution aux temps très longs</i>	p. 202
c) <i>Evolution pour $\alpha \ll 1$: Cas du pendule fortement amorti : solution de Dicke</i>	p. 204
d) <i>Evolution dans le cas général</i>	p. 204
C) La superradiance d'un système étendu à l'intérieur d'une cavité (effets des ondes stationnaires)	p. 207
1°) Position du problème	p. 207
2°) Equations d'évolutions	p. 208
3°) Etat final atteint : effet de superradiance limitée	p. 211
4°) Allure des solutions	p. 213

a) <i>Le démarrage de l'évolution</i>	p. 213
b) <i>Evolution aux temps très longs</i>	p. 214
c) <i>Allure des solutions en fonction de α</i>	p. 215
d) <i>Conclusion</i>	p. 218

Chapitre VI : Mise en évidence de la superradiance dans le proche infrarouge p. 220

A) Introduction	p. 220
B) Description du montage expérimental	p. 222
1°) Description schématique de l'expérience	p. 222
2°) L'excitation optique	p. 224
3°) La cellule de résonance	p. 225
a) <i>Forme et dimension de la cellule</i>	p. 225
b) <i>Température et pression de sodium</i>	p. 225
4°) La détection	p. 225
a) <i>Les détecteurs</i>	p. 225
b) <i>La chaîne de détection rapide</i>	p. 226
C) Allure de signaux superradiants et résultats	p. 228
1°) Détection directe de l'émission superradiante	p. 228
2°) Détection indirecte de l'émission superradiante	p. 230
3°) Interprétations des résultats et ordres de grandeurs	p. 234
D) Conclusion	p. 236

Chapitre VII : Expérience de battements entre atomes de classes de vitesses différentes . p. 237

A) Introduction	p. 237
B) Principe de l'expérience de battement entre classes de vitesses	p. 238
i) Excitation en raie large	p.
ii) Excitation en raie étroite	p. 240
C) Le montage expérimental	p. 242
i) La source laser	p. 243
ii) La détection de l'émission superradiante	p. 244

D) Analyse de résultats	p. 245
1°) Résultats en raie étroites	p. 246
2°) Résultats en raie larges	p. 248
3°) Résultats en raie large hors résonance	p. 249
E) Conclusion	p. 250

Chapitre VIII : Etude de la superradiance entre niveaux de Rydberg dans le domaine millimétrique	p. 252
A) Introduction	p. 252
B) La détection indirecte de la superradiance dans les états de Rydberg (l'ionisation par effet de champ)	p. 253
1°) Principe de la détection par ionisation par champ	p. 253
2°) Utilisation de la méthode pour étudier la superradiance entre niveaux de Rydberg	p. 255
3°) Description d'une expérience de superradiance détectée en ionisation par effet de champ	p. 258
a) <i>Les signaux d'horloges</i>	p. 258
b) <i>Le pulse de champs et les lasers</i>	p. 259
c) <i>La région d'interaction proprement dite</i>	p. 261
d) <i>L'analyse des signaux</i>	p. 265
4°) Conclusion : Les avantages et les inconvénients de la méthode pour étudier la superradiance	p. 266
C) Mise en évidence de la superradiance des niveaux de Rydberg du Césium	p. 268
1°) Description du montage	p. 268
2°) Etude expérimentale de la superradiance sur la transition 24S - 23P	p. 269
a) <i>Calcul d'onde de grandeur</i>	p. 269
b) <i>Analyse des signaux expérimentaux</i>	p. 271
3°) Extension des expériences aux autres niveaux de Rydberg du Césium	p. 275
a) <i>Superradiance sur les transitions nD-nP</i>	p. 275
b) <i>Superradiance en cascade</i>	p. 277
c) <i>Transfert vers des niveaux voisins de la limite d'ionisation</i>	p. 278

4°) Conclusion	p. 278
C) La superradiance des niveaux de Rydberg du Sodium en présence d'une cavité microonde	p. 280
1°) Principe des expériences	p. 280
2°) Description du montage expérimental	p. 283
a) <i>Les lasers</i>	p. 283
b) <i>Le jet atomique</i>	p. 283
c) <i>la cavité</i>	p. 284
3°) Mise en évidence de l'effet Maser sur la transition 27S - 26P	p. 286
4°) Extension des expériences aux autres niveaux de Rydberg du Sodium	p. 287
5°) Effets liés à la structure de mode : la superradiance totale	p. 294
6°) Comparaison théorie expérience : évaluation des seuils.	p. 299
7°) Conclusion	p. 302
Chapitre IX : La superradiance déclenchée	p. 303
A) Le principe de l'effet	p. 304
B) Etude théorique simplifiée du démarrage de l'émission superradiante à l'approximation du champ moyen	p. 307
1°) Déclenchement de l'émission par un champ classique	p. 307
i) Effet de raccourcissement du délai	p. 310
ii) Effet de polarisation	p. 310
2°) Déclenchement de l'émission par un champ thermique	p. 311
C) Mise en évidence des effets de déclenchement de superradiance dans le doamine proche infrarouge	p. 313
1°) Description du montage expérimental	p. 314
2°) Les signaux de superradiance déclenchés	p. 315
3°) Conclusion	p. 321

D) Les effets de superradiance déclenchée dans le domaine microonde.	p. 322
1°) Description du montage expérimental	p. 322
i) L'oscillateur local	p. 324
ii) La source servant à déclencher l'émission maser	p. 324
iii) Le système de détection par battements hétérodynes	p. 325
2°) La détection directe de l'émission Maser (rappel des résultats obtenus en (65) et (32))	p. 326
3°) Mise en évidence de la superradiance déclenchée dans le domaine microonde	p. 327
a) Etude qualitative	
b) Effets de déclenchement en polarisation	p. 329
c) Effet de synchronisation de la phase de l'émission maser	p. 332
4°) Etude quantitative de la superradiance déclenchée dans le domaine microonde	p. 333
Conclusion générale	p. 338

Appendice I Calcul au premier ordre des termes négligés à l'approximation de

<u>Born Markov</u>	p. A 1
1°) Calcul du 1er terme non Born	p. A 3
2°) Calcul du 1er terme non Markov	p. A 8
3°) Poids des différents termes	p. A 10
a) Poids relatif du premier terme non Born pour la matrice densité	p. A 10
b) Poids relatif du premier terme non Born pour l'évolution de l'énergie	

Appendice II Etude des effets géométriques

A) Superradiance Avant-Arrière	p. A 16
1°) Calcul simplifié : on néglige les interférences des champs émis avant et arrière	p. A 17
a) Les équations d'évolution	p. A 17
b) Allure de la solution "typique"	p. A 18
c) La statistique des solutions	p. A 19

.../...

2°) Influence de l'onde stationnaire due aux interférences entre les émissions vers l'avant et vers l'arrière	p. A 20
a) <i>Les équations d'évolution</i>	p. A 20
b) <i>Allure de la solution "typique"</i>	p. A 20
3°) Conclusion	p. A 23
B) La superradiance vers l'avant d'un milieu étendu en tenant compte des effets transverses (problème à trois dimensions)	p. A 24
1°) Généralisation des équations de Bloch Maxwell à trois dimensions	p. A 24
2°) Signification physique du terme supplémentaire dans l'équation de Maxwell généralisée	p. A 26
3°) La condition initiale à prendre pour résoudre les équations de Bloch Maxwell généralisées	p. A 28
4°) Difficulté rencontrée lors de l'étude du problème de la superradiance à trois dimensions	p. A 29
a) <i>Difficultés mathématiques d'intégration numérique.</i>	p. A 29
b) <i>Difficultés liées à l'analyse des résultats</i>	p. A 30
5°) Conclusion	p. A 31
Appendice III : Les fluctuations de l'effet de déclenchement par rayonnement thermique : calcul dans le formalisme de Schrödinger	p. A 33

CHAPITRE I

"QU'EST-CE QUE LA SUPERRADIANCE ?"

QU'EST-CE QUE LA SUPERRADIANCE ?

La superradiance est le phénomène d'émission spontanée collective d'un ensemble d'atomes ou de molécules initialement préparés dans un état radiativement instable. Cette émission a lieu avec une constante de temps beaucoup plus courte que la durée de vie naturelle de ces atomes ou molécules, la "compression temporelle" du phénomène étant proportionnelle au nombre N de radiateurs. L'interprétation qualitative de l'effet est simple. Sous l'effet de leur couplage avec le champ électromagnétique (initialement "vide"), les dipôles électriques des différents atomes du milieu acquièrent une forte corrélation et se mettent à émettre en phase. Il en résulte une interférence constructive des champs émis par ces atomes, conduisant à une intensité rayonnée proportionnelle à N^2 . L'énergie totale à émettre étant seulement proportionnelle à N , le système s'amortit nécessairement plus vite qu'en absence de ces corrélations et émet en un temps proportionnel à N^{-1} .

Pour observer expérimentalement la superradiance, il faut préparer l'ensemble des atomes dans l'état supérieur d'une transition optique en un temps très court. Pour réaliser cette préparation, on utilise généralement une configuration de système à trois niveaux (figure I.1). La transition

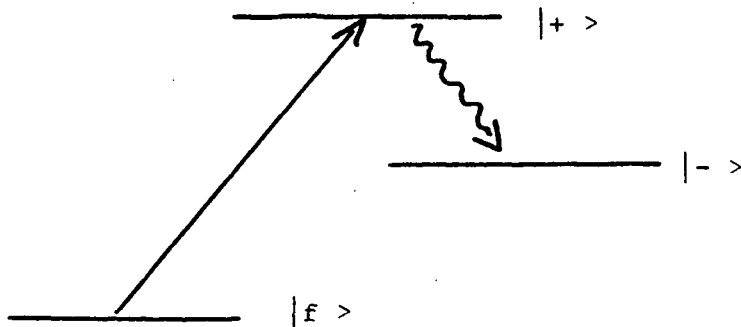


FIGURE I.1

superradiante est la transition de l'état + vers l'état -. Le système est préparé dans l'état + par une impulsion lumineuse, résonnante sur la transition $f \rightarrow +$ à partir du niveau "fondamental" f . La population est ainsi initialement et totalement inversée sur la transition $+ \rightarrow -$. Même ainsi préparé, un système atomique ne manifeste pas toujours le phénomène d'émission collective. Le schéma d'excitation que nous venons de décrire est celui d'un grand nombre d'expériences de fluorescence atomique (battement quantique par exemple ⁽¹⁾), dans lesquelles on sait bien que la lumière réémise est simplement la somme des intensités rayonnées indépendamment par chaque atome ou molécule. La superradiance ne peut en effet se manifester qu'au-dessus d'un certain seuil (correspondant à un nombre minimum d'atomes ou molécules excités), car le couplage radiatif entre les atomes est contrecarré par des effets géométriques (seulement certains modes du champ, dépendant de la forme de l'échantillon, contribuent efficacement à ce couplage) et par des phénomènes de déphasage concurrents qui affectent les dipôles mis en phase par la superradiance (émission spontanée sur d'autres transitions, collisions, effet Doppler, etc...).

La superradiance ainsi décrite apparaît comme étroitement apparentée à l'effet laser ou maser sans cavité optique ("laser sans miroirs") ⁽²⁾. Le schéma des niveaux de la figure I.1 rappelle en effet clairement le principe du pompage d'une transition laser dans un système à trois niveaux. La condition de seuil de superradiance est identique à celle d'un oscillateur laser dont le milieu amplificateur serait l'échantillon superradiant. La différence essentielle entre superradiance et effet laser ou maser "ordinaire" tient aux constantes de temps des deux phénomènes. Un laser fonctionne en général en pompage "continu" ou en pompage impulsionnel avec un temps d'excitation long devant le temps caractéristique d'évolution radiative du milieu amplificateur. En d'autres termes, le couplage de ce milieu avec le champ est en compétition avec les processus de pompage qui régénèrent l'état excité. Un régime stationnaire ou quasi-stationnaire tend à s'établir, dans lequel les mécanismes de relaxation autres que radiatifs jouent un rôle important. Dans un vrai système superradiant au contraire, c'est l'évolution spontanée d'un système libre couplé au seul rayonnement qui est le phénomène essentiel et il faut donc réaliser une excitation percussionnelle, très courte devant le temps d'évolution radiatif du milieu. En d'autres termes, la superradiance peut être considérée comme le régime

transitoire limite de l'amplification laser pour des temps de pompage infiniment courts. Les deux "points de vue" de la superradiance que nous venons d'indiquer (émission spontanée collective et amplification transitoire de rayonnement) sont, bien entendu, équivalents, mais conduisent à des images physiques très différentes dont il est important de dégager la compatibilité.

Le but de ce mémoire est de présenter une analyse détaillée du phénomène de superradiance et de décrire un certain nombre d'expériences que nous avons réalisées sur des systèmes atomiques très simples pour tester quelques aspects de la théorie et démontrer les possibilités d'application pratique de la superradiance. Notre travail s'est effectué parallèlement à celui de plusieurs autres groupes de recherche qui, ces dernières années, ont également étudié ce phénomène, tant sur le plan théorique ⁽³⁾ ⁽⁴⁾ ⁽⁵⁾ ⁽⁶⁾ qu'expérimental ⁽⁷⁾ ⁽⁸⁾ ⁽⁹⁾ ⁽¹⁰⁾. Il nous paraît donc important, dans ce chapitre d'introduction, de faire un point "historique" sur la superradiance, en précisant les problèmes théoriques et expérimentaux qui se posaient au début de ce travail et en résumant brièvement ce qui nous semble être notre contribution originale à la compréhension de ce phénomène.

Pour préparer cette discussion, il peut être utile de commencer par une analyse qualitative simple de la superradiance.

EMISSION SPONTANEE COLLECTIVE D'UN SYSTEME DE N ATOMES A DEUX NIVEAUX

Rappelons tout d'abord les propriétés bien connues de l'émission spontanée d'un atome isolé ($N=1$). Un atome à deux niveaux $+ -$, couplés entre eux par une transition dipolaire électrique permise, préparé à l'instant $t=0$ dans l'état excité $+$, va se désexciter ensuite spontanément sous l'effet de son couplage avec les modes vides du champ électromagnétique. Le système global "atome + champ quantifié" évolue de l'état initial $|+, 0\rangle$ (représentant l'atome dans l'état $+$ en présence du vide) vers un continuum d'états finals $|-, 1 \vec{k} \vec{\epsilon}\rangle$ (représentant l'atome dans l'état $-$ en présence d'un photon de vecteur d'onde \vec{k} et polarisation $\vec{\epsilon}$). La probabilité $P_+(t)$ de trouver à l'instant t le système dans l'état $|+, 0\rangle$ décroît suivant une loi exponentielle, avec la durée de vie caractéristique $T_{sp} = \Gamma_+^{-1}$. Γ_+ est la largeur naturelle du niveau $+$ donnée par la relation :

$$\Gamma_+ = \frac{\omega_0^3}{3\pi\epsilon_0\hbar c} |\langle + | \vec{D} | - \rangle|^2 \quad (\text{I.1})$$

(ω_0 : fréquence de la transition $+ \rightarrow -$; $\langle + | \vec{D} | - \rangle$: élément de matrice entre $+$ et $-$ du dipôle électrique atomique D). Au cours de tout le processus, le dipôle électrique de l'atome garde une valeur moyenne nulle :

$$\langle \vec{D} \rangle = 0 \quad (\text{I.2})$$

En termes classiques, on peut dire que le dipôle, "induit" par les fluctuations du vide, possède une phase aléatoire équirépartie de 0 à 2π . La valeur moyenne $\langle I \rangle$ de l'intensité électromagnétique rayonnée par l'atome est proportionnelle non à $\langle \vec{D} \rangle$, mais à $\langle D^2 \rangle$, qui est non nul et proportionnel à la probabilité de trouver l'atome dans le niveau $+$:

$$\langle I(t) \rangle \propto \langle D^2 \rangle \propto e^{-\Gamma_+ t} \quad (\text{I.3})$$

$\langle I(t) \rangle$ est donc maximale à $t = 0$ et décroît, tout comme $P_+(t)$, suivant la loi exponentielle de temps caractéristique Γ_+^{-1} .

Considérons à présent un ensemble de deux atomes 1 et 2 identiques et immobiles, initialement préparés dans l'état $+$ et séparés par une distance x_{12} petite par rapport à la longueur d'onde de leur rayonnement :

$$|x_{12}| \ll \lambda \quad (\text{I.4})$$

L'intensité moyenne rayonnée par ce système est proportionnelle au carré du dipôle total :

$$\vec{D} = \vec{D}_1 + \vec{D}_2$$

où \vec{D}_1 (\vec{D}_2) est le dipôle de l'atome 1 (2).

A l'instant initial ($t=0$), le système se trouve dans l'état $|+1, +2; 0\rangle$ et la valeur moyenne du carré du dipôle s'écrit simplement :

$$\langle D^2 \rangle = \langle D_1^2 \rangle + \langle D_2^2 \rangle \quad (\text{I.5})$$

car les corrélations entre les deux atomes sont à cet instant nulles :

$$\langle \vec{D}_1 \vec{D}_2 \rangle = 0 \quad (\text{à } t = 0) \quad (\text{I.6})$$

L'émission spontanée commence donc comme celle de deux atomes indépendants, avec une durée caractéristique Γ_+^{-1} .

En raison de la condition (I.4), l'interaction entre les deux atomes et le rayonnement est invariante par permutation des deux atomes. Il en résulte qu'après l'émission d'un photon, le système atomique se trouve dans l'état :

$$|S\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[|+_1 -_2\rangle + |-_1 +_2\rangle \right] \quad (\text{I.7})$$

résultant d'une répartition symétrique de l'excitation entre les atomes 1 et 2. Il est facile de voir que, dans cet état, les corrélations entre les deux atomes sont importantes et l'on a :

$$\langle S | \vec{D}_1 \vec{D}_2 | S \rangle = \langle +_1 | \vec{D} | -_1 \rangle \langle -_2 | \vec{D} | +_2 \rangle \neq 0 \quad (\text{I.8})$$

Le carré du dipôle total

$$\langle D^2 \rangle = \langle D_1^2 \rangle + \langle D_2^2 \rangle + 2 \langle \vec{D}_1 \vec{D}_2 \rangle \quad (\text{I.9})$$

devient alors supérieur à celui de deux atomes non corrélés et l'émission devient ainsi plus forte et plus rapide :

$$\langle I \rangle > \langle I_1 \rangle + \langle I_2 \rangle \quad (\text{I.10})$$

En termes classiques, la relation (I.9) signifie que les deux dipôles, dont les phases sont individuellement aléatoires ($\langle \vec{D}_1 \rangle = \langle \vec{D}_2 \rangle = 0$) ont acquis une différence de phase bien définie sous l'effet de leur couplage symétrique avec le champ. L'amortissement superradiant résulte alors de l'interférence constructive des champs émis par les deux dipôles ainsi corrélés.

Le même phénomène se généralise simplement au cas de N atomes que nous considérerons, pour fixer les idées, répartis dans un volume cylindrique allongé de dimensions grandes devant la longueur d'onde. On montre alors que l'émission des premiers photons met le système atomique dans une superposition symétrique des états $|+ \rangle_i$ et $e^{-ik_0 x_i} |- \rangle_i$ (k_0 est le vecteur d'onde moyen de l'émission dans l'axe du cylindre, x_i la position de l'atome i). Cette superposition symétrique correspond à la création de fortes corrélations entre les dipôles d'atomes différents :

$$\langle \vec{D}_i \vec{D}_j \rangle \propto |\langle + | \vec{D} | - \rangle|^2 e^{-ik_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \quad (I.11)$$

Le rayonnement émis par le système est constitué de deux parties : une partie incohérente et isotrope, proportionnelle à la somme des carrés des dipôles :

$$I_{\text{incoh}} \propto \sum_i \langle D_i \rangle^2 \quad (I.12)$$

et une partie "cohérente" provenant de l'interférence des champs émis par des atomes différents :

$$I_{\text{coh}} \propto \sum_{i \neq j} \langle \vec{D}_i \vec{D}_j \rangle e^{-ik_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \quad (I.13)$$

Le terme d'émission cohérent interfère constructivement dans l'axe du cylindre, plus précisément dans un petit angle solide $\Delta\Omega$ autour de cet axe. L'intensité cohérente dans cette direction est proportionnelle à cet angle solide et au nombre des corrélations, c'est-à-dire à $N^2 \Delta\Omega$:

$$I_{\text{coh}} \propto N^2 \Delta\Omega \quad (I.14)$$

Le terme isotrope d'émission incohérente est, lui, proportionnel à N et à 4π :

$$I_{\text{incoh}} \propto 4\pi N \quad (I.15)$$

L'émission superradiante cohérente l'emporte sur l'émission spontanée ordinaire si la condition de seuil :

$$N > \frac{4\pi}{\Delta\Omega} \quad (\text{I.16})$$

est satisfaite. On met souvent cette condition sous la forme :

$$N\mu > 1 \quad (\text{I.17})$$

où
$$\mu = \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \quad (\text{I.18})$$

ne dépend que de la géométrie du milieu émetteur ⁽¹¹⁾. Ce raisonnement suppose implicitement qu'aucune cause de déphasage "parasite" n'affecte les dipôles. Si ce n'était pas le cas, la condition de seuil devrait prendre une forme plus restrictive que (I.17).

La discussion précédente dégage clairement le double aspect du phénomène superradiant : il est quantique dans la mesure où la mise en phase initiale des dipôles atomiques résulte de la construction spontanée dans le système de corrélations interatomiques impossible à comprendre à partir d'un traitement classique du champ électromagnétique. Il est classique dans la mesure où l'amortissement plus efficace de dipôles en phase est un phénomène d'interférence constructive parfaitement expliqué par la théorie des antennes, à partir des équations de Maxwell.

C'est la nécessité de prendre en compte le double aspect classique et quantique de ce phénomène dans une théorie consistante qui fait toute la difficulté et la richesse de l'étude de la superradiance.

Notons, en conclusion de ce paragraphe, les principales propriétés de la superradiance qui se dégagent de cette description qualitative :

- Un réseau cohérent de dipôles se construit dans le milieu initialement inversé au cours de l'émission des premiers photons.

- Ce réseau rayonne de façon constructive dans certaines directions de l'espace sous l'effet d'interférences interatomiques définissant ainsi l'angle solide d'émission $\Delta\Omega$ et le facteur géométrique μ .

- Il en résulte une émission plus rapide que l'émission spontanée ordinaire, dans le rapport $N\mu$.

Le temps caractéristique d'évolution de l'intensité émise est donc :

$$T_{SR} = \frac{1}{N\Gamma_{+}\mu} \quad (I.19)$$

Cette analyse qualitative ne constitue évidemment pas un calcul de l'effet. Un certain nombre de questions théoriques plus ou moins fondamentales, auxquelles nous n'avons pas trouvé, dans la littérature abondante sur cet effet, de réponse claire au début de ce travail, restent posées. Nous résumons l'essentiel de ces questions au paragraphe suivant.

LA SUPERRADIANCE : UN EFFET INTERESSANT SUR LE PLAN DE LA THEORIE

Parmi les problèmes difficiles que posait le traitement théorique de la superradiance, le premier concerne le double aspect classique et quantique du phénomène et le choix judicieux du formalisme à choisir pour en rendre compte :

(i) Faut-il adopter un formalisme classique ou quantique ?

Si l'on veut comprendre la mise en phase initiale des dipôles atomiques, il est clair que l'approche satisfaisante est celle de l'électrodynamique quantique. Elle seule décrit correctement l'émission spontanée qui est à l'origine du "démarrage" de la superradiance. Cependant, une fois les premiers photons émis, on se trouve confronté à un problème de propagation du champ électromagnétique dans un milieu fortement non linéaire, ce que l'on ne sait pas commodément traiter en termes de processus d'absorption ou d'émission de photons.

L'approche semi-classique (atomes traités quantiquement et champ classiquement) est beaucoup mieux adaptée à l'étude de la propagation du champ, un fois qu'il s'est créé dans le système, comme en témoignent les multiples études de propagation de pulses dans des milieux non linéaires ⁽¹²⁾ ⁽¹³⁾. Cette approche est, par contre, inapte à décrire le début de l'émission. Il n'est pas évident enfin, que les effets quantiques ne continuent pas à se manifester même lorsque le champ émis est devenu important. En d'autres termes, ce champ est-il "classique" avec une phase bien définie, ou bien "incohérent" avec un temps de corrélation beaucoup plus court que T_{SR} ? Les champs émis par différents échantillons superradiants sont-ils susceptibles ou non d'interférer entre eux ? ...

Les différents auteurs qui, avant le début de notre travail, avaient traité de la superradiance s'étaient partagés en deux écoles, suivant qu'ils privilégiaient l'aspect quantique ou classique. Dans le premier cas (¹⁴), ils étaient amenés en général à négliger complètement la propagation (modèle du champ moyen). Dans le second (¹⁵), il leur fallait simuler de façon ad hoc la phase initiale du phénomène.

Il est évident, cependant, que si l'on cherche une compréhension profonde de la superradiance, le seul point de vue réaliste est l'approche quantique qui contient toute la physique du problème -les difficultés de cette approche étant seulement techniques et non de principe-. L'approche classique ne peut être adoptée que si elle est justifiée comme une approximation valide du point de vue quantique, suivant des critères précis de correspondance qui restaient -au début de ce travail- à définir et à préciser.

Nous adopterons donc résolument, dans la suite de ce mémoire, le point de vue de l'électrodynamique quantique.

(ii) Que mesure exactement une expérience de superradiance ? Quelles sont les quantités physiques à calculer ?

Immédiatement après la question du formalisme à adopter, se pose la question des quantités physiques à calculer pour rendre compte des observations. Etant donné la complexité du problème, il est clair en effet qu'il est hors de question de calculer explicitement l'état global du système, mais qu'il faut restreindre la théorie à la détermination des quantités utiles à l'analyse d'expériences physiquement réalisables. Se pose alors naturellement la question suivante : Que peut-on mesurer avec des détecteurs entourant l'échantillon superradiant ?

La plupart des articles théoriques mettent l'accent sur le calcul de l'intensité moyenne $\langle I(t) \rangle$ rayonnée par le système. Celle-ci peut s'écrire sous différentes formes équivalentes : elle est égale à la valeur moyenne du carré du champ électrique $\langle |E(t)|^2 \rangle$, ou encore au carré du dipôle atomique total $\langle |D|^2 \rangle$, ou encore par conservation de l'énergie, à la dérivée changée de signe de l'énergie atomique. Cette quantité évolue avec la constante de temps T_{SR} , suivant une courbe présentant un maximum au bout de quelques T_{SR} et décroissant ensuite rapidement vers zéro (voir figure I.2 donnant l'allure générale de $\langle I(t) \rangle$ telle qu'elle résulte qualitativement de toutes les théories);

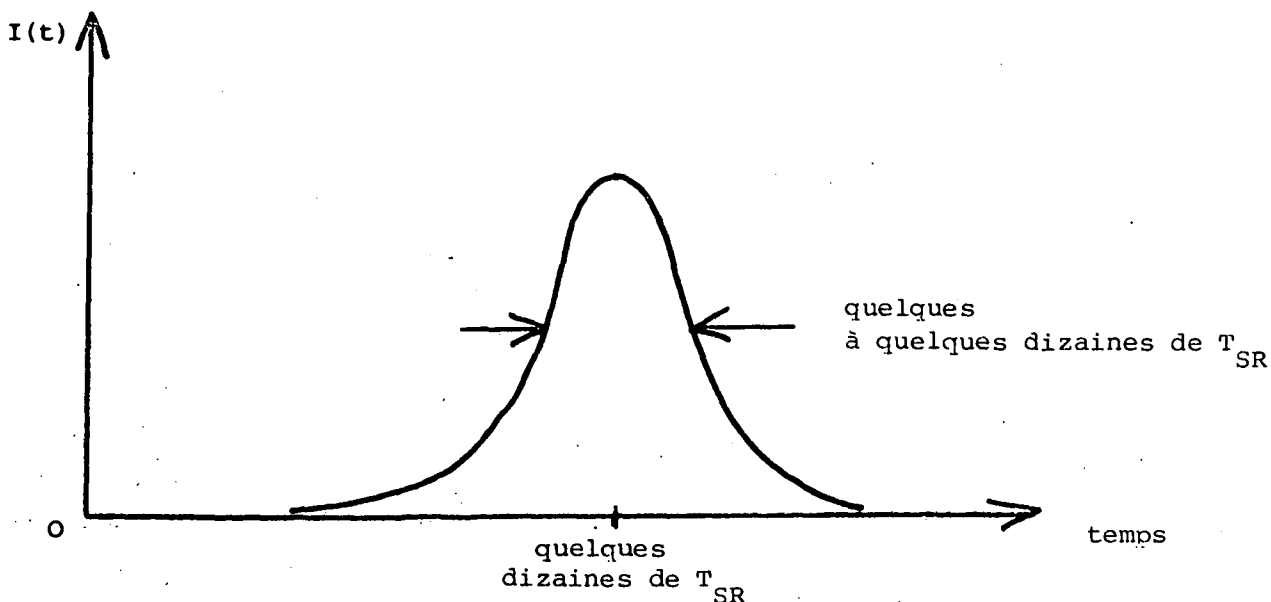


FIGURE I.2

$\langle I(t) \rangle$ représente dans ces calculs une moyenne au sens de la mécanique quantique, c'est-à-dire décrivant la moyenne d'un grand nombre d'expériences effectuées dans les mêmes conditions initiales (même nombre d'atomes excités à $t = 0$, même géométrie, même détecteur). Il est clair cependant qu'une réalisation donnée de l'expérience ne donnera pas le signal $\langle I(t) \rangle$. Dans le cas de l'émission spontanée d'un seul atome, par exemple, on sait que le signal détecté en un coup par un photomultiplicateur est un pic discret représentant l'arrivée d'un photon. $\langle I(t) \rangle \sim e^{-\Gamma t}$ est, dans ce cas, le signal analogique observé par addition d'un grand nombre de tels pics, ou encore représente la probabilité $P(t)$ d'observer un pic à l'instant t . Ainsi $\langle I(t) \rangle$ n'est que la moyenne d'un signal présentant de grandes fluctuations d'une réalisation à l'autre de la même expérience. Il en est de même dans le cas de la superradiance d'un grand système ($N \gg 1$). Si un nombre de photons élevé arrive en moyenne sur le détecteur pendant le temps de réponse fini δt de celui-ci, le signal détecté à chaque réalisation est lui-même analogique, ce qui fait apparaître moins clairement la différence entre signal mesuré en un coup et signal moyen. Il n'en reste pas moins que le signal observé à chaque expérience, $I_{\text{dét}}(t)$, n'a aucune raison d'être identique au signal moyen $\langle I(t) \rangle$. Tout comme dans le cas de l'émission d'un seul atome, $I_{\text{dét}}(t)$ va présenter d'un coup au suivant des fluctuations intrinsèques reflétant le caractère aléatoire

de l'émission spontanée des premiers photons dans le système. La question importante qui se pose alors est de caractériser la forme des impulsions individuelles détectées et de déterminer leur statistique (fluctuations de forme, d'amplitude, de délais, ...). Cette statistique dépend évidemment des fonctions de corrélation d'ordre supérieur de l'intensité.

L'importance de ces fonctions de corrélation apparaît également très clairement si on s'intéresse à l'évolution de petits systèmes superradiants, pour lesquels N est assez faible pour qu'on puisse se poser la question physique de la détection digitale des photons émis. Il faut pour cela que l'intervalle moyen séparant dans le temps l'émission de deux photons successifs soit plus grand que le temps de réponse du détecteur utilisé δt :

$$N < \frac{T_{SR}}{\delta t} \quad (I.20)$$

Dans ce cas, le signal détecté pour chaque réalisation de l'expérience sera une succession de pics discrets dont la forme sera bien sûr très différente de $\langle I(t) \rangle$. Pour caractériser ce signal et sa statistique, il faut connaître -outre $\langle I(t) \rangle$ proportionnel à $P(t)$ - les probabilités à n temps $P(t_1, t_2, \dots, t_n)$ de détecter une succession de photons aux instants t_1, t_2, \dots, t_n . Ces probabilités sont proportionnelles aux fonctions de corrélation de l'intensité du champ électrique \vec{E} :

$$\langle E(t_1) E(t_2) \dots E^*(t_2) E^*(t_1) \rangle \quad (I.21)$$

Si on s'intéresse non pas seulement à l'intensité émise et à sa statistique, mais à la phase du champ émis et à ses propriétés de cohérence, ce sont alors les fonctions de corrélation de l'amplitude, dont la plus simple est $\langle E(t) E^*(t - \tau) \rangle$, qu'il faut pouvoir calculer.

Ainsi, l'interprétation complète d'une expérience de superradiance nécessite la détermination non seulement de $\langle I(t) \rangle$, mais aussi d'un ensemble de fonctions de corrélations de l'amplitude et de l'intensité du champ électrique

dont le calcul est évidemment a priori beaucoup plus compliqué.

(iii) Comment calculer les fonctions de corrélations ? Le caractère Markovien des équations de la superradiance.

La constante de temps caractéristique de l'évolution de l'intensité moyenne du système est $T_{SR} = 1/N\Gamma_+ \mu$. Il en résulte qu'une fonction de corrélation d'ordre n du champ ou de l'intensité évolue en un temps caractéristique :

$$\frac{T_{SR}}{n} \quad (I.22)$$

N photons étant émis, les fonctions de corrélation d'ordre le plus élevé à considérer évoluent donc en un temps :

$$\frac{T_{SR}}{N} = \frac{1}{N^2 \Gamma_+ \mu} \quad (I.23)$$

Ce dernier temps apparaît d'ailleurs naturellement comme la constante des temps d'évolution la plus rapide des éléments de la matrice densité du système superradiant. La question qui se pose alors concerne la description rigoureuse de l'évolution de quantités physiques aussi rapides.

Il est utile, pour analyser simplement ce problème, de revenir une fois encore au cas de l'émission spontanée d'un seul atome.

L'évolution du système atomique est alors décrite dans la théorie de Wigner-Weisskopf⁽³⁹⁾ par une équation intégrodifférentielle ayant un noyau de temps de corrélation fini $\tau_c = \lambda/c$ (période optique). Dans le langage habituel de la relaxation, ceci signifie que le système atomique (ici l'atome à deux niveaux) est couplé à un réservoir (ici les modes vides du champ e.m.) ayant une très grande dispersion en énergie, donc un temps de mémoire très court. Ce temps de mémoire étant très petit devant le temps d'évolution $1/\Gamma_+$ du système :

$$\Gamma_+ \sim \alpha^3 \omega_0 \ll \left(\frac{\lambda}{c} \right)^{-1} \quad (I.24)$$

(α : constante de structure fine), il est légitime de faire l'approximation de Markov qui revient à négliger l'évolution pendant le temps de mémoire fini du réservoir et à remplacer l'équation d'évolution intégrodifférentielle par une équation différentielle à coefficients constants. C'est cette dernière équation qui conduit d'ailleurs à l'évolution exponentielle de la probabilité

de trouver l'atome dans l'état excité. L'approximation de Markov s'accompagne en général, dans la théorie de la relaxation, de celle de Born, qui consiste à limiter le calcul à l'ordre le plus bas en puissances de l'interaction entre l'atome et le champ. Dans le cas de l'émission spontanée d'un atome isolé, cette approximation est bien justifiée par l'équation (I.24) qui traduit en fin de compte le caractère "faible" du couplage électromagnétique ($\alpha \ll 1$) : l'atome peut alors être considéré comme un petit système couplé à un gros réservoir dont il modifie finalement très peu les propriétés (on peut négliger la réaction sur le petit système de la modification du vide produite par l'émission d'un photon).

Lorsqu'on considère maintenant la superradiance d'un système de N atomes, il faut comparer au temps de corrélation non plus Γ_+^{-1} , ni même T_{SR} , mais la constante de temps caractéristique T_{SR} / n de la quantité étudiée (I.22). D'autre part, le temps de corrélation n'est plus λ/c , mais L/c , car le système émetteur est à présent étendu sur une dimension caractéristique $L \gg \lambda$. On ne peut donc établir d'équation différentielle pilote pour le système que si la condition, beaucoup plus restrictive que (I.24) :

$$n T_{SR}^{-1} = \Gamma_+ n N \mu \ll \left(\frac{L}{c} \right)^{-1}, \quad (I.25)$$

est satisfaite, ce qui, pour $n = N$, donne la condition limite :

$$N^2 \Gamma_+ \mu \ll \left(\frac{L}{c} \right)^{-1} \quad (I.26)$$

Γ_+ et L/c étant fixés ainsi que μ , on voit que lorsque N augmente, le système superradiant devient rapidement trop gros pour qu'on puisse négliger son évolution pendant le temps de mémoire du réservoir et la réaction induite sur le système par le remplissage des modes du champ. On ne peut plus alors utiliser d'équation pilote simple pour déterminer l'évolution des fonctions de corrélation d'ordre élevé du champ.

Les quelques questions posées dans ce paragraphe montrent tout l'intérêt théorique du problème de la superradiance.

LA SUPERRADIANCE : UN EFFET AUX APPLICATIONS PRATIQUES INTERESSANTES

La possibilité d'obtenir des impulsions lumineuses intenses et brèves donne également à la superradiance un grand intérêt sur le plan des applications éventuelles. Bien sûr, la caractéristique d'une émission cohérente en N^2 n'est pas restreinte au phénomène de superradiance seul : il existe tout un ensemble d'autres effets transitoires où des dipôles atomiques ou moléculaires mis en phase rayonnent de façon renforcée dans certaines directions (échos de photon ⁽¹⁶⁾, free induction decay ⁽¹⁷⁾, nutation optique ⁽¹⁸⁾, etc...). Cependant, dans ces derniers cas, la mise en phase initiale est assurée par un procédé d'excitation optique cohérente, alors que dans le cas de la superradiance, cette mise en phase s'effectue spontanément, suivant un pompage incohérent du niveau excité. Ce qui fait la difficulté théorique du problème (le caractère spontané de la mise en ordre initiale des dipôles) en fait également l'intérêt pratique : il est beaucoup plus simple expérimentalement d'obtenir l'émission cohérente superradiante que les signaux mentionnés plus haut, qui nécessitent la mise en oeuvre de techniques d'excitation élaborées. Notons à ce sujet que certains auteurs ⁽¹⁷⁾ qualifient de "superradiance" tous les effets d'émission transitoires en N^2 , que la mise en phase initiale soit spontanée ou non et réservent à l'émission spontanée collective le terme de superfluorescence. Nous n'avons pas adopté cette distinction dans ce mémoire et réservons le terme de superradiance pour le seul effet d'émission spontanée à N atomes.

Parmi les applications pratiques possibles de la superradiance, notons la possibilité de réaliser des impulsions lumineuses extrêmement courtes et intenses ⁽¹⁵⁾. Mentionnons aussi l'intérêt qu'il peut y avoir à faire émettre de façon coopérative un grand ensemble d'atomes pour obtenir -dans le cas de transitions peu permises en particulier- des signaux optiques intenses à partir desquels des renseignements spectroscopiques peuvent être obtenus plus facilement que sur de très faibles signaux de fluorescence ⁽¹⁹⁾. Le fait que l'émission provient de l'interférence entre les émissions de différents atomes ouvre également de nouvelles possibilités spectroscopiques : dans le cas de transitions ayant des fréquences légèrement différentes (structures isotopiques en particulier), des battements liés à l'interférence des champs émis par des atomes différents sont attendus ⁽²⁰⁾.

Enfin, la superradiance démarrante sur les fluctuations du champ du vide doit être modifiée si le système est perturbé à l'instant $t = 0$ par un champ extérieur appliqué venant s'ajouter à ces fluctuations ⁽¹⁹⁾ ⁽²¹⁾. On peut songer à exploiter ces modifications pour mettre au point de nouveaux types de détecteurs extrêmement sensibles du rayonnement ⁽²²⁾.

Toutes ces applications -très simples dans leur principe- ont été suggérées par différents auteurs soit avant le début, soit au cours de ce travail, et ont constitué un stimulant important pour le développement des expériences que nous avons réalisées.

LE DOMAINE DE RECHERCHE AU DEBUT DE CE TRAVAIL

L'histoire de l'étude de la superradiance peut être schématiquement divisée en deux périodes : du premier papier de DICKE ⁽²³⁾ (1954), jusqu'à 1972, les études étaient exclusivement théoriques. Un très grand nombre d'articles ⁽²⁴⁾, qu'il est impossible de citer de façon exhaustive, ont été consacrés à l'étude de l'émission spontanée collective en adoptant en général un point de vue entièrement quantique. Une part importante de ces papiers traitait des effets géométriques de la superradiance ⁽²⁵⁾ (comparaison des émissions dans un petit et dans un grand volume, étude de la directivité de l'émission, ...). En général, les effets de propagation du champ étaient négligés et le problème traité dans le cadre de l'approximation du champ moyen. Citons en particulier les nombreux travaux de BONIFACIO et al. ⁽¹⁴⁾.

En 1972, FELD et al. ⁽²⁶⁾ ont réalisé la première expérience de superradiance dans l'infrarouge lointain en utilisant un laser à HF pour inverser les populations sur une série de transitions de rotation de la même molécule autour de 100 μm . L'analyse de cette expérience, dans laquelle les effets de propagation étaient apparemment importants, conduisit ces auteurs à adopter le point de vue semi-classique ⁽²⁶⁾ ⁽¹⁵⁾ pour décrire leurs expériences, ouvrant la voie à une série de papiers ⁽³⁾ ⁽²⁷⁾ ⁽²⁸⁾ ⁽²⁹⁾ traitant la superradiance comme l'amplification transitoire du bruit d'émission spontanée. L'analyse de ces expériences et la comparaison des points de vue quantique et

classique conduisit alors à poser les différentes questions que nous avons rappelées plus haut, et fit en même temps apparaître l'intérêt pratique du développement de telles expériences dans différentes gammes de longueurs d'ondes.

LES CONTRIBUTIONS DE CE TRAVAIL A L'ETUDE DE LA SUPERRADIANCE

Tirant profit du développement des lasers à colorants pulsés accordables qui constituent des sources idéales pour le pompage de transitions superradiantes dans des échantillons atomiques, nous avons montré qu'il était possible d'observer de façon très générale le phénomène d'émission spontanée collective : nous avons réalisé les premières expériences de superradiance dans le proche infrarouge sur des atomes de Na ⁽³⁰⁾, puis de césium. Nous avons également montré qu'il était possible d'étudier simplement la superradiance microonde entre états de Rydberg des atomes alcalins ⁽²²⁾.

Nos premières expériences sur le Na ayant montré la facilité avec laquelle on pouvait ainsi induire et étudier la superradiance, de nombreux autres groupes expérimentaux ont, en utilisant des méthodes analogues, mis en évidence le même phénomène sur un grand nombre de transitions infrarouges ou visibles. Mentionnons en particulier les expériences de VREHEN et al. concernant l'étude de la statistique ⁽³¹⁾ des pulses superradiants et la première mise en évidence des effets de battement entre transitions ayant des fréquences légèrement différentes ⁽⁷⁾ ainsi que les expériences de PILLET et al. sur les effets de polarisation des signaux superradiants ⁽⁹⁾. Pour notre part, nous nous sommes attachés à démontrer et à exploiter le caractère classique (cohérent) du champ superradiant en étudiant le battement entre des classes d'atomes physiquement différents ⁽²⁰⁾ et le battement hétérodyne de l'émission superradiante avec une source cohérente de référence ⁽³²⁾. Nous avons également étudié la superradiance d'un ensemble d'atomes enfermés dans une cavité résonnante, cas qui correspond à un traitement théorique très simple (tous les atomes émetteurs jouent un rôle symétrique) et nous avons vérifié expérimentalement certaines des propriétés prévues de l'émission dans ces conditions.

Sur un plan plus appliqué, nous avons cherché à étudier diverses applications possibles de la superradiance à la spectroscopie ⁽¹⁹⁾ ou au développement de détecteurs très sensibles de rayonnement ⁽³²⁾ ⁽²²⁾.

Parallèlement à ce travail expérimental -qui a fait l'objet de plusieurs publications-, nous avons poursuivi un long effort de réflexion pour comprendre le phénomène et apporter des réponses aux questions énoncées plus haut. Cet effort s'est poursuivi en parallèle avec de nombreux autres groupes. Signalons en particulier les contributions de RESSAYRE et TALLET ⁽⁴⁾ à l'élucidation des effets de propagation dans le formalisme quantique, les papiers théoriques de GLAUBER et al. ⁽⁵⁾ et VREHEN et al. ⁽⁵⁴⁾ sur l'étude des effets de fluctuation et le calcul de la statistique de l'émission superradiante, les études de CRUBELIER et al. sur les effets de polarisation et de dégénérescence des niveaux ⁽³³⁾.

Toutes ces études théoriques peuvent se classer en deux catégories. Dans une première, nous rangerons les études portant sur un système idéal d'atomes à deux niveaux dans des conditions géométriques simples, destinées à comprendre la "physique" fondamentale du phénomène. Nous avons, sur un tel système simple, essayé de développer des modèles analytiquement calculables pour retrouver -au moins qualitativement- tous les résultats statistique résultant chez d'autres auteurs de calculs numériques sur ordinateur. Nous avons également cherché à définir de façon précise la nature des approximations faites pour décrire la superradiance -en particulier les approximations de BORN et MARKOV- et discuté leur validité suivant les différents types d'observables que l'on cherche à calculer.

Une deuxième catégorie d'études théoriques consiste à essayer de comprendre la superradiance dans la complexité de la réalité expérimentale : détermination des effets liés à l'existence d'une multiplicité de sous-niveaux dégénérés ou quasi-dégénérés, effets géométriques dépendant de la forme et de l'extension spatiale de l'échantillon, etc... Nous avons cherché à comprendre ces effets et à montrer comment on pouvait les calculer en détail et à en tenir compte pour décrire une expérience réelle.

Pour donner à ce mémoire un caractère d'ensemble cohérent, nous avons considéré qu'il fallait y inclure une description théorique aussi complète que possible de la superradiance, sans se limiter de façon stricte à la description de notre contribution originale, cette contribution ne pouvant elle-même se comprendre sans référence aux autres travaux. Nous serons donc amenés à inclure dans notre analyse des résultats établis par d'autres auteurs. Nous préciserons évidemment au fur et à mesure ce qui constitue notre apport propre, étant bien entendu que la présentation de l'ensemble -même celle qui se rapporte aux résultats établis par d'autres auteurs- est originale.

PLAN DU MEMOIRE

Nous commencerons, au chapitre II, par une étude détaillée de la superradiance dans le cadre du modèle simple du système d'atomes à deux niveaux. Nous dégageons dans ce chapitre la "physique" générale du phénomène, montrons comment on peut en calculer les différents paramètres (intensités, délais, fluctuations, etc...) et justifions les différentes approximations qui rendent le calcul possible.

Le chapitre III reprend l'étude du problème dans le cas d'un système d'atomes à plusieurs sous-niveaux. L'interférence entre les émissions des différentes transitions quasi-dégénérées conduit à l'apparition de battements dans le signal superradiant dont on étudie la fréquence, la phase et la profondeur de modulation.

Le chapitre IV aborde l'étude d'un phénomène important qui se produit très souvent dans une expérience de superradiance : celui de la superradiance limitée; lorsque différentes classes d'atomes se trouvent couplées de façon non équivalente au champ de rayonnement, il peut se produire un effet d'interférence destructive entre les dipôles associés à ces différentes classes, qui stoppe l'émission superradiante avant que le système ait émis toute son énergie. Nous décrivons plusieurs situations expérimentales où un tel effet se produit et analysons les caractéristiques générales de ce phénomène.

Le chapitre V clôt notre étude théorique en décrivant un exemple très simple de système superradiant, celui du maser en régime transitoire, qui obéit à des équations d'évolution du type de celles introduites par DICKE ⁽²³⁾ et qui permet de mettre en évidence les caractéristiques physiques essentielles du phénomène.

Le chapitre VI est consacré à la description de la première expérience de mise en évidence du phénomène dans le proche infrarouge. Le chapitre VII décrit nos expériences de battement de superradiance, le chapitre VIII analyse les expériences de superradiance entre états de Rydberg en absence ou en présence de cavité résonnante. Enfin, le chapitre IX présente les résultats des expériences de déclenchement de la superradiance que nous avons effectuées dans le domaine infrarouge et microonde.

CHAPITRE II

"LA SUPERRADIANCE D'UN SYSTEME A DEUX NIVEAUX"

I - INTRODUCTION

A- Les deux points de vue de la superradiance :

Le chapitre 1 nous a permis de dégager l'interprétation physique générale du phénomène de superradiance et de poser un certain nombre de questions concernant sa description théorique. Le but du présent chapitre est d'apporter une réponse à ces questions en présentant une analyse détaillée de ce phénomène dans le cas simple d'un ensemble d'atomes à deux niveaux distribués dans un volume de dimensions linéaires grandes devant la longueur d'onde de rayonnement émis.

Historiquement, le problème de la superradiance a été abordé de deux points de vue différents. Un premier groupe d'auteurs, suivant l'analyse du papier original de Dicke (23), a adopté le point de vue qui consiste à considérer l'ensemble des atomes comme un système quantique global décrit par sa fonction d'onde ou mieux par son opérateur densité - couplé au "vide" du champ de rayonnement (14) (23) (25). Un autre groupe d'auteurs a préféré décrire la superradiance comme un effet transitoire d'amplification du bruit de photons (3) (27) (6). Ce point de vue revient à étudier la propagation d'un champ électromagnétique dans le milieu atomique décrit en chaque point par sa polarisation et son inversion de population.

La première approche revient à analyser l'évolution du système "atomes + champ" couplés dans le point de vue de Schrödinger qui met l'accent sur la description complète du système quantique étudié, alors que la deuxième se place dans le point de vue de Heisenberg qui favorise l'étude directe de l'évolution d'un nombre restreint d'observables (champ, polarisation atomique, etc....) et ne se préoccupe pas de la fonction d'onde ou de l'opérateur densité du système. D'autre part, le premier point de vue est essentiellement quantique, dans la mesure où il met clairement en évidence les processus photoniques, alors que la deuxième approche se prête beaucoup mieux à l'analyse semi-classique, les équations d'Heisenberg étant formellement semblables aux équations de Bloch-Maxwell décrivant l'évolution couplée d'un ensemble d'atomes à deux niveaux et d'un champ électromagnétique classique.

Le point de vue de Schrödinger est le mieux adapté à l'étude de la superradiance d'un petit nombre d'atomes (disons, pour fixer les idées, de deux à quelques dizaines), car le caractère quantique du champ émis est alors bien prononcé : on peut, tout au moins théoriquement, compter un à un les photons émis et imaginer des expériences permettant d'accéder à la mesure des différents éléments de la matrice densité du système atomique. Ceci explique la prépondérance générale de ce point de vue tant que les seules études sur la superradiance restaient théoriques. A partir du développement des premières expériences, qui pour des raisons pratiques portaient sur des nombres d'atomes énormes ($N \gtrsim 10^{12}$) (26), le point de vue beaucoup plus économique de Heisenberg a été dominant car il est mieux adapté au calcul des quantités macroscopiques (champ émis, populations atomiques) mesurées dans les expériences.

Les deux approches de la superradiance conduisent à des langages et à des images physiques différentes : la première voit le phénomène comme l'émission spontanée collective d'un ensemble d'atomes. La seconde parle d'amplification, donc d'émission stimulée par certains atomes du champ émis par d'autres. Les approximations faites pour résoudre les équations d'évolution dans les deux points de vue sont d'autre part très différentes, ce qui conduit encore à une dissymétrie apparente des deux descriptions. Ces différences de présentation ont entraîné certains auteurs (34) à associer deux phénomènes distincts à chacun des deux points de vue. La "superradiance de Dicke" est ainsi parfois opposée à la "superradiance laser" observée dans un amplificateur optique pompé en un temps très court. Ces tentatives de distinction se sont manifestées ainsi sur le plan sémantique (on a cherché à opposer les notions de superradiance et de superfluorescence par exemple) (14) et ont beaucoup contribué à teinter ce problème d'un certain mystère.

Il nous a donc paru intéressant pour éclaircir ce problème, de développer dans ce chapitre de façon parallèle les deux points de vue de Schrödinger et de Heisenberg de la superradiance et de montrer leur équivalence en ce qui concerne le calcul de l'évolution du champ rayonné (et des observables atomiques définies dans le point de vue de Heisenberg) Nous commencerons au paragraphe II par établir les équations d'évolution

dans ces deux points de vue. Ces équations ont déjà été obtenues par différents auteurs, ⁽³⁵⁾(¹⁴)(⁴), dont nous rappelons les contributions au fur et à mesure dans le courant du texte. Il nous a semblé important de reprendre en détail l'établissement de ces équations, afin en particulier de dégager clairement les approximations conduisant aux diverses équations et de préparer le terrain pour la discussion physique qui suit.

Une fois les équations obtenues et leur équivalence en ce qui concerne l'étude du champ constatée, il reste bien sûr à résoudre les équations dans l'un ou l'autre de ces points de vue.

B - La méthode de résolution des équations de la superradiance et son interprétation physique.

Le paragraphe III est consacré à la résolution détaillée des équations dans le cadre de l'approximation du champ moyen qui consiste à négliger complètement les effets de propagation. Cette simplification, qui revient à traiter tous les atomes de façon équivalente (le système reste au cours du temps dans un état symétrique par échange de deux atomes quelconques), permet de dégager simplement les caractéristiques essentielles de l'émission et de développer des modèles simples utiles pour la résolution plus complète où l'on tient compte de la propagation du champ.

On montre qu'il est possible en introduisant des opérateurs densités quasi classiques du système atomique et en décrivant celui-ci en terme de superposition de ces opérateurs, de calculer entièrement l'évolution du système en fonction du temps. Cette approche à l'avantage d'une interprétation physique très claire. Les opérateurs densité "quasi-classiques" ainsi introduits sont ceux dans lesquels le système se trouve automatiquement réduit au cours d'une mesure donnée (principe de réduction du paquet d'onde) et la superposition de ces opérateurs permet de définir un état résultant d'une moyenne effectuée sur un grand nombre de réalisations statistiques possibles, ce qui est bien la définition générale d'une matrice densité. Ainsi trouve-t-on la réponse à une des questions posées au chapitre précédent : chaque expérience ne détecte qu'une réalisation d'un ensemble virtuel de possibilités associées à chaque opérateur densité quasi classique. Nous

montrons comment on peut, à partir de la matrice densité du système, calculer les lois de probabilité permettant de prédire la statistique des résultats attendus sur un grand nombre d'expériences réalisées avec des conditions initiales identiques (fluctuations du délai du pulse émis....).

Le paragraphe IV étend alors essentiellement le calcul du § III au cas où l'on tient compte de la propagation du champ émis dans une direction. Le système devient alors trop compliqué pour permettre le calcul de l'évolution de son opérateur densité. Aussi adopte-t-on d'emblée ici le point de vue de Heisenberg et calcule-t-on les différentes "trajectoires" quasi-classique du champ (ou de la polarisation atomique) et leur probabilité d'occurrence dans une expérience. On montre que ces lois de probabilité reflètent les fluctuations de la polarisation initiale du système, c'est-à-dire les fluctuations du champ du vide responsables du démarrage de la superradiance. Le point de vue développé ici suit dans ses grandes lignes la théorie de Haake et Glauber ⁽⁵⁾ de la superradiance à qui nous devons la compréhension claire du lien entre les aspects quantique et classique du phénomène (une autre présentation en a été également donnée indépendamment par Vreken et al ⁽⁵⁴⁾). Ces auteurs ont cependant développé directement la théorie dans le cas non analytiquement calculable du modèle de propagation à une dimension du champ émis et ont effectué tous les calculs numériquement sur ordinateur. Le paragraphe III de ce chapitre, sans introduire d'idée physique fondamentalement nouvelle, constitue à notre avis une des contributions originales de ce mémoire, dans la mesure où nous donnons une analyse du problème dans le cas plus simple du modèle du champ moyen, avec des expressions analytiques simples de la matrice densité et des lois statistiques.

C- La discussion des approximations et leur contenu physique

L'analyse menée aux § III et IV fait clairement apparaître la grande différence de "richesse" contenue dans les points de vue de Schrödinger et de Heisenberg. Nous consacrons le § V à une comparaison approfondie de ces deux points de vue en discutant le sens physique des approximations faites pour aboutir aux équations d'évolution du système. Il est clair que le point de vue de Schrödinger - qui a l'ambition de décrire toute la matrice densité du système atomique global contient infiniment plus

d' "informations" que le second. Quoique beaucoup moins économique que l'autre, le point de vue de Schrodinger mérite d'être étudié si l'on cherche à calculer l'évolution d'observables plus "fines" que celles que l'on étudie généralement dans le point de vue de Heisenberg, comme les corrélations d'ordre élevé du champ, des signaux de coïncidence dans des expériences de comptage de photons etc.... La plus grande richesse d'information de ce point de vue se paye alors par des conditions de validité plus restrictives des équations obtenues. Pour établir les équations de la superradiance, on doit en effet faire les approximations fondamentales de Born et Markov qui consistent à négliger l'évolution des observables étudiées pendant le temps de corrélation des processus de couplage des atomes au champ. Il s'agit là en d'autres termes de l'approximation d'interaction faible entre le système atomique étudié (l'ensemble des N atomes à deux niveaux) et le "réservoir" responsable de leur relaxation (l'ensemble des modes du champ). Le temps de corrélation de ce réservoir est -suivant les cas- la période optique λ/C ou le temps de propagation de la lumière dans le milieu L/C . Dans le point de vue de Schrödinger, les "observables" étudiées correspondent aux différents éléments de la matrice densité eux mêmes qui évoluent avec des constantes de temps très rapides comparées à celle du champ électromagnétique rayonné (en fait avec des constantes de temps de l'ordre de T_{SR}/N , donc N fois plus courtes que le temps caractéristique de superradiance). Il en résulte une condition de validité de l'approximation de Born-Markov beaucoup plus restrictive que celle qui est nécessaire à l'établissement des équations d'Heisenberg qui se bornent à étudier l'évolution d'observables "lentes" à constantes de temps de l'ordre de T_{SR} . En d'autres termes, le point de vue de Schrödinger conduit à des équations d'évolution de l'opérateur densité du système atomique qui ne sont valables que pour de "petits" systèmes (N pas trop grand). Pour des systèmes "importants", ces équations ne sont plus justifiées (en fait le développement des équations en puissance de l'interaction atomes-rayonnement n'est plus convergent), mais les équations d'Heisenberg que l'on peut déduire des équations de Schrödinger en prenant la trace du produit des observables champ ou polarisation avec l'opérateur densité restent quant à elles valables. Ce résultat n'est qu'apparemment paradoxal, puisque ces opérations de trace reviennent en fait à ne considérer que

certaines combinaisons des éléments de matrice de l'opérateur densité (qui évoluent "lentement") et à ne plus s'intéresser à celles qui évoluent trop vite. En d'autres termes, bien que l'opérateur densité du système dans son ensemble n'obéisse plus à l'équation d'évolution simple obtenue, on peut continuer à utiliser cette équation à condition de se limiter au calcul d'observables lentes et à ne pas chercher à donner un sens physique à tous les éléments de matrice de cet opérateur. C'est ce qui justifie que nous puissions résoudre au § III les équations d'évolution du champ indifféremment dans les points de vue de Schrödinger ou d'Heisenberg sans nous restreindre au cas de "petits" systèmes.

La question qui se pose alors concerne le calcul éventuel d' "observables rapides" (corrélations d'ordre élevé du champ par exemple) pour des systèmes superradiants "importants" tel que l'approximation de Born-Markov restrictive n'est plus valable. Nous montrons que cette question ne peut être séparée de celle de la mesure effective de ces observables qui nécessiteraient en fait des "détecteurs idéaux" ayant un temps de réponse plus court que le temps de corrélation du système superradiant lui même, ce qui est non physique. Ainsi, au delà de l'approximation de Born-Markov restrictive, l'étude de l'opérateur densité tout entier du système non seulement n'est pas possible théoriquement à l'aide de l'équation de Schrödinger que nous avons établie, mais n'a pas de sens physique. Cette condition permet ainsi de distinguer le cas d'une superradiance "microscopique", pour laquelle toutes les expériences de corrélation ou de comptage de photons sont non seulement calculables, mais physiquement envisageables, du cas de la superradiance "macroscopique" pour lequel le concept d'opérateur densité global du système atomique perd de plus en plus de sens, aussi bien théoriquement qu'expérimentalement. Le paragraphe V de ce chapitre fait une analyse détaillée de ce problème, précise les conditions de Born-Markov, et la notion de "petit" et "gros" systèmes superradiants.

L'ensemble de ce chapitre 2 apporte ainsi une réponse aux principales questions posées au chapitre d'introduction et donne un cadre général pour le calcul du phénomène de superradiance. Dans une situation expérimentale pratique, d'autres questions se posent, liées à des compli-

cations que nous qualifierons d' "inessentielles" : problème de diffraction et propagation de la lumière à trois dimensions, existence de dégénérescence dans les niveaux bordant la transition superradiante etc...
Nous laissons l'analyse de ces questions pour les chapitres suivants.

II - EQUATION D'EVOLUTION DU SYSTEME ATOMIQUE

L'étude détaillée du phénomène de superradiance est complexe dans la mesure où il s'agit d'un "problème à N corps" consistant à étudier l'évolution d'un grand ensemble d'atomes couplés à un nombre infini de modes du champ électromagnétique. Nous nous proposons dans ce chapitre d'établir les équations d'évolution de la superradiance, dans le cas idéalement simple d'un système à deux niveaux. Après avoir introduit les notations générales décrivant le couplage d'un système de N atomes à deux niveaux avec le champ électromagnétique (§ A), nous commencerons par établir l'équation d'évolution de la matrice densité du système atomique (Point de vue de Schrodinger § B puis nous décrirons les équations d'évolution des opérateurs atomiques (point de vue de Heisenberg § C) et nous discuterons de l'équivalence des deux points de vue pour le calcul de la polarisation atomique et du champ rayonné.

A - Position du problème et notations

1°) Le système atomique

On considère un ensemble de N atomes à deux niveaux $| + \rangle$ et $| - \rangle$ (figure II 1) séparés par l'intervalle d'énergie $\hbar\omega_0$. Les atomes

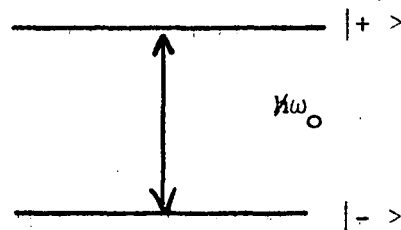


FIGURE II.1

que l'on identifie par l'indices $1, 2, \dots, i, \dots, N$ sont situés aux points de coordonnées $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_N$. Ces points sont répartis au hasard à l'intérieur d'une région de forme cylindrique allongée de longueur L et de surface a^2 (voir figure II-2)

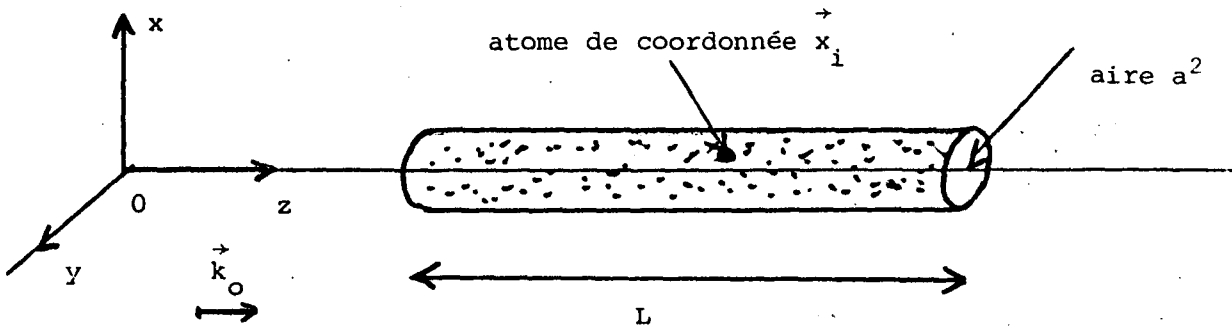


FIGURE II.2

A \$t = 0\$ les atomes sont tous dans l'état \$|+\rangle\$ et l'état initial de la matrice densité atomique \$\rho\$ est de la forme :

$$\rho = |+\rangle_1 \dots |+\rangle_i \dots |+\rangle_N \langle +|_N \dots \langle +|_i \dots \langle +|_1 \quad (\text{II II-1})$$

(\$| \pm \rangle_i\$ représente l'état \$|\pm\rangle\$ pour l'atome \$i\$).

Les niveaux \$|+\rangle\$ et \$|-\rangle\$ sont couplés entre eux par l'opérateur dipolaire électrique. Nous considérerons que le couplage se fait suivant la polarisation \$\vec{\epsilon}\$ et nous poserons :

$$\langle + | \vec{D} \cdot \vec{\epsilon} | - \rangle = D_{+ -} \neq 0 \quad (\text{II II-2})$$

On peut sans nuire à la généralité du problème considérer que \$D_{+ -}\$ est réel.

Il est commode de définir l'opérateur dipolaire associé à chaque atome et d'introduire à la suite de nombreux auteurs (35) (23) (37) les matrices \$r_i^+\$ et \$r_i^-\$ qui respectivement excitent et desexcitent l'atome \$i\$.

$$r_i^+ |-\rangle_i = |+\rangle_i \quad (\text{II II-3a})$$

$$r_i^- |+\rangle_i = |-\rangle_i \quad (\text{II II-3b})$$

On peut également définir \$r_i^3\$:

$$r_i^3 | \pm \rangle_i = \pm 1/2 | \pm \rangle_i \quad (\text{II II-3c})$$

r_i^+ , r_i^- et r_{3i} obéissent aux relations de commutation d'un moment cinétique.

On a alors :

$$\vec{D}_i = (r_i^+ + r_i^-) D_{+-} \cdot \vec{\epsilon} \quad (\text{II II-4})$$

et le dipole de l'ensemble des atomes s'écrit comme une fonction de la position :

$$\vec{D}(x) = \sum_i \vec{D}_i \cdot \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (\text{II II-5})$$

2°) Le champ rayonné :

Il est décrit à l'aide des opérateurs de création ou d'annihilation $a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^+$, $a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^-$ d'un photon de vecteur d'onde \vec{k} et de polarisation $\vec{\epsilon}$ ($\vec{\epsilon}$ orthogonal à \vec{k}). Le champ électrique $\vec{E}(\vec{x}, t)$ est un opérateur qui est une combinaison linéaire d'opérateur $a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^+$ et $a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^-$ qu'il est commode de séparer en deux parties

$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^- \quad (\text{II II-6})$$

dites de fréquence positive et négative, ne contenant respectivement que des opérateurs de création et d'annihilation.

$$\vec{E}^+(\vec{x}, t) = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \vec{\epsilon} \cdot a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^+ e^{i\vec{k}\vec{x}} \quad (\text{II II-7 a})$$

$$\vec{E}^-(\vec{x}, t) = -\sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \vec{\epsilon} \cdot a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^- e^{-i\vec{k}\vec{x}} \quad (\text{II II-7 b})$$

où

$$\vec{\epsilon} \cdot a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^+ = \vec{\epsilon} \cdot \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 V}} \quad \text{est le champ électrique par photon}$$

(V étant le volume de la "cavité" dans lequel le champ est quantifié).

3°) Hamiltonien du système atomes + champ

L'évolution du système est régie par l'hamiltonien suivant :

$$H = H_{\text{at}} + H_{\text{ray}} + V \quad (\text{II II-8 a})$$

où :

$$H_{\text{at}} = \hbar\omega_0 R_3 \quad (\text{II II-8 b})$$

$$H_{\text{ray}} = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \hbar\omega_k a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^+ a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \quad (\text{II II-8c})$$

et où :

$$V = -\vec{D} \cdot \vec{E} = \sum_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} g_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} (a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}^+ R_{\vec{k}}^+ + a_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} R_{\vec{k}}^-) \quad (\text{II II-8d})$$

sont respectivement les hamiltoniens du système atomique, du champ électromagnétique et d'interaction. La définition des quantités apparaissant dans cet hamiltonien est la suivante :

■ $R_{\vec{k}}^{\pm}$ et R_3 sont des pseudo moments cinétiques collectifs

$$R_3 = \sum_i r_i^3 \quad (\text{II II-9a})$$

$$R_{\vec{k}}^{\pm} = \sum_i e^{\pm i\vec{k} \cdot \vec{x}_i} r_i^{\pm} \quad (\text{II II-9b})$$

■ $g_{\vec{k}, \vec{\epsilon}}$ est la constante de couplage entre les atomes et le mode $(\vec{k}, \vec{\epsilon})$.

$$g_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} = g(k) = \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 V}} D_{+-} \quad (\text{II II-10})$$

(on peut noter que comme l'on se limite au cas d'un système à deux niveaux le couplage ne se fait suivant une seule direction de polarisation $\vec{\epsilon}$ et l'on peut donc supprimer les sommations sur $\vec{\epsilon}$ dans le hamiltonien (II II-8) ainsi que les indices $\vec{\epsilon}$).

B - Equation pilote de la matrice densité (point de vue de Schrödinger

1° - Equation générale pour la matrice densité atomique :

Le système "atome + champ" est décrit par sa matrice densité $\phi(t)$ qui obéit à l'équation générale.

$$i\hbar \frac{d\phi}{dt} = [H, \phi] \quad (\text{II-II-11})$$

où H est le Hamiltonien défini à l'équation (II-II-8). L'équation (II-II-11) doit être résolue en tenant compte de la condition initiale :

$$\begin{aligned} \phi(0) = & \left[|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \otimes \dots \otimes |+\rangle_i \otimes \dots \otimes |+\rangle_N \right] \left[\langle +|_1 \otimes \dots \otimes \langle +|_i \otimes \dots \otimes \langle +|_N \right] \\ & \otimes \left[|0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} \right] \end{aligned} \quad (\text{II-II-12})$$

représentant à l'instant $t=0$ le système des N atomes totalement inversés en présence du champ du vide.

Pour résoudre l'équation (II-II-11), il est commode de passer en représentation d'interaction en définissant les quantités

$$\tilde{\phi}(t) = e^{i[H_{\text{at}} + H_{\text{ray}}]t/\hbar} \phi \quad e^{-i[H_{\text{at}} + H_{\text{ray}}]t/\hbar} \quad (\text{II-II-13})$$

$$\tilde{V}(t) = e^{i[H_{\text{at}} + H_{\text{ray}}]t/\hbar} V \quad e^{-i[H_{\text{at}} + H_{\text{ray}}]t/\hbar} \quad (\text{II-II-14})$$

L'équation (II-II-11) devient alors :

$$i\hbar \frac{d\tilde{\phi}}{dt} = [\tilde{V}, \tilde{\phi}] \quad (\text{II-II-15})$$

En résolvant (II-II-15) par itérations successives, on obtient l'équation exacte :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\phi}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\tilde{V}(t), \tilde{\phi}(0)] - \frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau [\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\phi}(t-\tau)]] \quad (\text{II-II-16})$$

Nous nous intéressons ici à l'évolution de la partie atomique du système, complètement définie par la connaissance de la matrice densité atomique qui, en représentation d'interaction, s'écrit :

$$\tilde{\rho}(t) = \text{Tr}_{\text{ray}} \tilde{\rho}(t) \quad (\text{II-II-17})$$

L'équation d'évolution de $\tilde{\rho}$ se déduit de l'équation (II-II-16) en prenant la trace des deux membres par rapport au rayonnement. Le commutateur simple au second membre de cette équation donne une contribution nulle à cette trace car $\tilde{\phi}(0)$ n'a que des éléments de matrice diagonaux en nombre d'occupation de photons alors que \tilde{V} , linéaire en $a_{k\epsilon}$ et $a_{k\epsilon}^+$, est entièrement non diagonal. On obtient ainsi pour $\tilde{\rho}$ l'équation encore exacte :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho} = -\frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_{\text{ray}} \int_0^t d\tau \left[\tilde{V}(t), \left[\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\phi}(t-\tau) \right] \right] \quad (\text{II-II-18})$$

En dépit de sa simple apparence, l'équation (II-II-18) est en fait très compliquée car elle décrit une infinité de processus, à tous les ordres en \tilde{V} impliquant des corrélations à tous les ordres entre les atomes et le rayonnement, qui sont implicitement contenus dans $\tilde{\phi}(t-\tau)$. Il ne faut pas oublier, d'autre part que \tilde{V} contient une somme sur tous les modes du champ électromagnétique. Il est instructif de développer sur l'ensemble des modes chacun des quatre termes dans le double commutateur de l'équation (II-II-18). On obtient alors :

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{\rho}}{dt} = & \sum_{\substack{k\epsilon \\ k'\epsilon'}} \frac{g(k)g(k')}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_{\text{ray}} \left\{ a_{k\epsilon} a_{k'\epsilon'} R_k^+ R_{k'}^+ e^{-ic(k+k'-2k_0)(t-\tau)} \right. \\ & e^{ic(k_0-k)\tau} \\ & + a_{k\epsilon}^+ a_{k'\epsilon'}^+ R_k^- R_{k'}^- e^{ic(k+k'-2k_0)(t-\tau)} e^{-ic(k_0-k)\tau} \\ & - a_{k\epsilon} a_{k'\epsilon'}^+ R_k^+ R_{k'}^- e^{ic(k'-k)(t-\tau)} e^{ic(k_0-k)\tau} \\ & \left. - a_{k\epsilon}^+ a_{k'\epsilon'} R_k^- R_{k'}^+ e^{ic(k-k')(t-\tau)} e^{-ic(k_0-k)\tau} \right\} \tilde{\phi}(t-\tau) \\ & + 3 \text{ autres termes semblables} \quad (\text{II-II-19}) \end{aligned}$$

Afin de résoudre pratiquement cette équation, on fait en général plusieurs approximations que nous passons à présent en revue.

2° - Approximation de Born et Markov.

Il s'agit de l'approximation permettant de transformer l'équation (II-II-18) en équation différentielle linéaire à coefficients constants, dite équation pilote pour la matrice densité atomique. Elle consiste d'une part à considérer comme infiniment petits les corrélations entre le système atomique et le champ de rayonnement (approximation de Born) et d'autre part à considérer comme très court le temps de corrélation des atomes au rayonnement (approximation de Markov). Il s'agit là de deux aspects d'une même approximation, l'une ne pouvant, comme nous le montrons au § V, être faite sans l'autre de façon consistante. D'où le nom condensé de Born-Markov donné à ces approximations. Notons, que les hypothèses de corrélation faible entre l'atome et le champ, et de mémoire courte de l'interaction, sont faites de façon très générale dans tous les problèmes de relaxation, où un "petit système" (ici l'ensemble des N atomes) se trouve couplé à un grand réservoir (ici le champ électromagnétique du vide), responsable de son évolution⁽³⁸⁾. En ce sens, on peut dire que l'approximation de Born-Markov est l'approximation d'"interaction faible" de la théorie de la relaxation. Elle ne sera valable que si le nombre N d'atomes est assez petit. Nous reverrons ce point en établissant les limites de validité de cette approximation au § V.

Indiquons simplement pour l'instant que dans le cas de l'émission spontanée d'un atome isolé- cette même approximation est connue sous le nom d'approximation de "Wigner - Weisskoff"⁽³⁹⁾. Elle est alors justifiée par le fait que le temps caractéristique d'émission spontanée $1/\Gamma$, est très long devant le temps de corrélation $\tau_c = 1/\omega$ du processus de couplage de l'atome au rayonnement :

$$\Gamma \ll \omega \quad \text{(II-II-20)}$$

C'est l'établissement d'une condition équivalente à l'équation (II-II-20), dans le cas de la superradiance de N atomes, qui fera l'objet de la discussion du § V. Laissant pour l'instant ce point de côté, nous allons successivement définir de façon précise les approximations de Born et de Markov :

a) Approximation de Born

Elle consiste simplement à remplacer $\phi(t-\tau)$ par $\tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle \langle 0|$ dans le membre de droite de l'équation (II-II-18). Cela revient bien à, ray ray négliger la construction des corrélations entre l'atome et le champ, et les modifi-

fications induites par ces corrélations sur le "réservoir" électromagnétique. En d'autres termes, on considère que les atomes émettent tout au long de leur évolution dans le "vide", et on néglige la réaction du petit système atomique sur le champ. L'équation (II-II-18) devient alors simplement

$$\frac{d}{dt} [\tilde{\rho}(t)]_{\text{Born}} = -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}}] \right] \quad (\text{II-II-21})$$

On obtient ainsi une équation beaucoup plus simple que (II-II-18) qui ne fait plus apparaître que les éléments de la matrice densité atomique $\tilde{\rho}$. L'équation (II-II-21) n'est en fait que le premier terme (au 2° ordre en \tilde{V}) d'un développement exact en puissances successives de \tilde{V} de l'équation (II-II-18). Ce développement peut s'obtenir simplement par itérations successives de cette équation (II-II-18). Nous le donnons ici car nous en aurons besoin plus loin :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho} = & -\frac{1}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \text{Tr}_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}}] \right] \quad (\text{II-II-22}) \\ & - \frac{1}{i\hbar^3} \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \text{Tr}_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau+\tau'), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}}]] \right] \\ & + \frac{1}{\hbar^4} \int_0^t d\tau \int_0^t d\tau' \int_0^t d\tau'' \left\{ \text{Tr}_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau+\tau'), [\tilde{V}(t-\tau+\tau''), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}}]] \right] \right. \\ & \left. - \text{Tr}_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(t), [\tilde{V}(t-\tau+\tau'), |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}}] \text{Tr}_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(t-\tau+\tau''), [\tilde{V}(t-\tau), \tilde{\rho}(t-\tau) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}}] \right] \right] \right\} \end{aligned}$$

(40) Ce développement n'est valable que parce que les hypothèses suivantes sont satisfaites par la matrice densité globale $\phi(0)$ et par le champ de rayonnement à l'instant $t = 0$:

$$\phi(0) = \rho(0) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} \quad (\text{II-II-25})$$

et

$$\text{Tr}_{\text{ray}} \left[H_{\text{ray}}, |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} \right] = 0 \quad (\text{II-II-24})$$

Revenons à présent à l'approximation Born (Equ. II-II-21), et remplaçons \tilde{V} par son développement suivant les modes du champ, comme nous l'avons fait à l'équation (II-II-19). La trace revient à calculer la valeur moyenne dans le champ du vide de produits d'opérateurs de création et d'annihilation. Les seules contributions non nulles viennent des produits $a_{\vec{k}} a_{\vec{k}'}^+$, avec $\vec{k} \equiv \vec{k}'$, dont la valeur moyenne dans le vide est égale à l'unité. La contribution du terme écrit dans la formule (II-II-19) se réduit alors à :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = - \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} \frac{g^2(k)}{\hbar^2} \int_0^t d\tau e^{i c(k_0 - k) \tau} R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t - \tau) + 3 \text{ autres termes semblables.} \quad (\text{II-II-25})$$

(Les trois autres termes du double commutateur s'évaluent de la même façon). Après avoir resommé ces termes et séparé les parties réelles et imaginaires, on obtient finalement l'équation intégrale différentielle suivante pour $\tilde{\rho}(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = & - \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} \frac{g^2(k)}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \cos c(k_0 - k) \tau [R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t - \tau)]_+ \\ & - 2 R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t - \tau) R_{\vec{k}}^+ - i \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} \frac{g^2(k)}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \sin c(k_0 - k) \tau [R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t - \tau)] \end{aligned} \quad (\text{II-II-26})$$

b) Approximation de Markov

L'équation (II-II-26) décrit un processus à mémoire finie, la dérivée de $\tilde{\rho}$ à l'instant t dépendant des valeurs prises par $\tilde{\rho}$ à des instants $t - \tau$ antérieurs à t . Le temps de mémoire caractéristique (temps de corrélation du processus) peut être évalué en développant l'équation (II-II-26) sur une base d'états atomiques $|\alpha\rangle, |\beta\rangle \dots$ (une base particulière sera précisé plus loin). Un des termes de cette équation sera de la forme :

$$\frac{d}{dt} \rho_{\alpha\alpha} = \sum_{\vec{k} \in \mathcal{E}} \sum_{\beta} \frac{2g^2(k)}{\hbar^2} \int_0^t d\tau \cos c(k_0 - k) \tau |R_{\vec{k}}^+|_{\alpha\beta} |R_{\vec{k}}^-|_{\beta\alpha} \tilde{\rho}_{\beta\beta}(t - \tau) + \dots \quad (\text{II-II-27})$$

Effectuons la somme sur k dans l'équation (II-II-27). Cette somme apparait comme une intégrale sur k du produit de $\cos c(k_0 - k) \tau$ par la fonction $g(k) / \hbar^2 (R_{\vec{k}}^+)_{\alpha\beta} (R_{\vec{k}}^-)_{\beta\alpha}$. Le cosinus a une période $1/c\tau$. L'intégrale ne sera ainsi notablement non nulle que si la condition

$$\frac{1}{c\tau} \gg \Delta k \quad (\text{II-II-28})$$

est remplie, Δk étant la largeur caractéristique dans l'espace des k de la fonction $(R_k^+)_{\alpha\beta} (R_k^-)_{\beta\alpha}$. Une limite inférieure de Δk peut être évaluée très simplement : on tire en effet de (II-II-9)

$$(R_k^+)_{\alpha\beta} (R_k^-)_{\beta\alpha} = \sum_{ij} e^{i\vec{k}\vec{x}_i} e^{-i\vec{k}\vec{x}_j} \langle \alpha | r_i^+ | \beta \rangle \langle \beta | r_j^- | \alpha \rangle \quad (\text{II-II-29})$$

$(R_k^+)_{\alpha\beta} (R_k^-)_{\beta\alpha}$ apparaît ainsi comme le carré de la transformée de Fourier de la distribution $\langle \alpha | r_i^+ | \beta \rangle$. En fait $\langle \alpha | r_i^+ | \beta \rangle$ varie sur des distances caractéristiques de l'ordre de L au plus (L est la dimension linéaire la plus grande de l'échantillon). Sa transformée de Fourier a ainsi une extension en k plus grande ou égale à $1/L$:

$$\Delta k \gtrsim \frac{1}{L} \quad (\text{II-II-30})$$

Combinant (II-II-28) et (II-II-30) on obtient alors la condition

$$\tau \lesssim \frac{L}{c} \quad (\text{II-II-31})$$

qui exprime que le temps de corrélation de la superradiance est de l'ordre du temps de propagation de la lumière le long de l'échantillon. Il s'agit là bien sûr d'un résultat physiquement évident, déjà signalé par différents auteurs (36) (41), qui signifie qu'un photon ne peut être émis collectivement par l'échantillon avec un temps de corrélation plus court que le temps qu'il faut à la lumière pour traverser le milieu. Si ce temps de corrélation L/c est assez petit comparé au temps caractéristique d'évolution du système (tout le problème est évidemment comme nous le verrons au § V de préciser ce que "assez petit" signifie) ; on peut remplacer dans (II-II-26) $\tilde{\rho}(t-\tau)$ par $\tilde{\rho}(t)$ et étendre à l'infini la limite supérieure des intégrales. On réalise ainsi l'approximation de Markov qui revient à considérer que la mémoire du processus d'émission spontané est infiniment court. L'intégration ^{sur} τ de l'équation (II-II-26) est alors immédiate. On obtient :

$$\int_0^{\infty} d\tau \cos c(k_0 - k)\tau = \frac{\pi}{c} \delta(k - k_0) \quad (\text{II-II-32})$$

$$\int_0^{\infty} d\tau \sin c(k_0 - k)\tau = \frac{1}{c} \text{PP} \frac{1}{k - k_0} \quad (\text{II-II-33})$$

et le système (II-II-26) devient un ensemble d'équations différentielles linéaires, appelé équation pilote de la superradiance :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = & -\pi \sum_{\vec{k} \in \vec{E}} \frac{g^2(k)}{\hbar^2 c} \delta(k - k_0) \left([R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^-, \tilde{\rho}(t)]_+ - 2 R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t) R_{\vec{k}}^+ \right) \\ & - i \sum_{\vec{k} \in \vec{E}} \frac{g^2(k)}{\hbar^2 c} \text{PP} \frac{1}{k - k_0} [R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^-, \tilde{\rho}(t)] \end{aligned} \quad (\text{II-II-34})$$

Ces équations ont été obtenus par différents auteurs () (42). La partie réelle décrit un processus irréversible d'amortissement du système atomique. La partie imaginaire est souvent assimilée à un terme de Lamb shift collectif (43) dont elle a la forme analytique. Il s'agit en effet d'une contribution de nature hamiltonienne à l'évolution du système (présence d'un commutateur) avec la forme dispersive caractéristique en $\frac{1}{k - k_0}$. Nous verrons plus loin que, de façon plus fondamentale, ce terme imaginaire représente les effets de la propagation du champ électromagnétique dans le milieu superradiant (4).

3°)- Approximations géométriques :

a) Forme du milieu atomique émetteur

Bien que beaucoup plus simple que l'équation (II-II-18), l'équation Pilote obtenue à l'approximation de Born-Markov est encore très compliquée, le second membre de l'équation (II-II-34) contenant une sommation sur tous les atomes (qui intervient dans la définition de $R_{\vec{k}}^+$, $R_{\vec{k}}^-$) et une sommation sur tous les modes du champ électromagnétique (sommation sur \vec{k}). Il est clair cependant que ces deux sommes ne sont pas ^{indépendantes} les modes du champ auquel le système atomique est effectivement couplé dépendent de la forme géométrique du milieu émetteur, c'est-à-dire la répartition spatiale des N atomes. Le choix de cette forme géométrique est donc important, dans la mesure où il va permettre de simplifier plus ou moins non seulement la sommation sur les atomes, mais aussi celles sur \vec{k} . Celle que nous avons choisi, avec la plupart des auteurs traitant du même problème, est la forme cylindrique ou parallélépipédique allongée schématisée par la Figure (II-2) : le milieu initialement inversé est constitué de N atomes répartis aléatoirement avec une densité moyenne uniforme dans un volume de longueur L (orienté le-long de Oz) et de dimension latérale a^2

(la section latérale dans le plan xOy a pour aire a^2)
et les inégalités suivantes seront supposées vérifiées.

$$L \gg a \gg \lambda$$

(II-II-35)

Une telle forme va comme nous le montrons conduire à une analyse géométrique relativement simple du problème. On peut de plus la considérer comme une idéalisation de la situation expérimentale courante où l'inversion de population initiale est réalisée par une impulsion laser dans une cellule de résonance. Dans ce cas cependant, il est clair que la distribution transversale du milieu excitateur n'est pas uniforme. On aura cependant une bonne description qualitative de cette situation en assimilant a au diamètre de ce faisceau d'excitation.

Il est clair qu'avec la géométrie choisie, l'émission va se produire essentiellement le long de l'axe du cylindre. Il est alors tentant de simplifier le problème en considérant que le champ électromagnétique a la structure géométrique d'une onde plane se propageant le long de l'axe du milieu. Il apparaît immédiatement qu'une telle hypothèse se heurte à plusieurs difficultés :

(i) L'émission a lieu en fait dans les deux directions opposées le long de l'axe du milieu, rien dans les conditions initiales choisies ne permettant de favoriser l'émission vers l'avant ($+\vec{k}_0$) ou vers l'arrière ($-\vec{k}_0$).

(ii) même en ne considérant l'émission que dans une direction, il est clair que l'hypothèse d'une onde plane est incompatible avec la théorie de la diffraction : le milieu étant limité latéralement, le champ émis va présenter une dispersion de direction des vecteurs d'onde \vec{k} .

Il apparaît ainsi que même avec la forme simple choisie, le problème de l'émission superradiante reste essentiellement un problème de propagation à trois dimensions. Ce problème étant très compliqué, nous allons faire à présent deux approximations correspondant à un niveau de simplification croissant, qui - quoique non strictement justifiées - conduisent à des équations solubles, tout en permettant de tenir compte des effets essentiels du phénomène de superradiance. Il s'agit de l'approximation de propagation à une dimension et de l'approximation du champ moyen. Ces approximations sont d'un ordre différent de celles étudiées au paragraphe précédent. Alors que l'approximation de Born - Markov était essentielle

pour obtenir une équation différentielle pour la matrice densité du système atomique, les approximations géométriques permettent de simplifier plus ou moins le problème complexe de propagation à trois dimensions sans altérer la "physique" du phénomène de superradiance. Ce point sera justifié lorsqu'au paragraphe suivant, nous comparerons entre elles les solutions obtenues avec les deux approximations géométriques. Nous verrons que -à quelques caractéristiques secondaires près- les formes de signaux obtenus auront des propriétés très semblables.

Insistons, pour finir, sur le fait qu'il n'est pas question ici de justifier ces approximations. Nous nous contenterons de les définir en détail en précisant les hypothèses géométriques introduites pour simplifier les équations (II.II.34). Nous indiquerons également quelles sont les proportions à donner au milieu émetteur pour minimiser les erreurs introduites par ces simplifications. Nous renvoyons le lecteur à l'appendice I pour une analyse plus détaillée des effets géométriques. Nous montrons dans cet appendice que la prise en compte de ces effets ne modifie pas de façon importante les conclusions obtenues à l'aide des modèles simples introduits ici.

b) Approximation de propagation à une dimension

Une première simplification importante consiste à supposer que l'émission n'a lieu que dans un sens avec des vecteurs d'onde \vec{k} dont la direction est voisine de l'axe du milieu émetteur (hypothèse 1). A ce stade, cette hypothèse n'apparaît que comme une simplification formelle qui semble très arbitraire. Indiquons simplement ici que le fait de tenir compte de l'émission dans les deux sens ne change, comme nous le verrons à l'appendice I-A,

que très peu l'émission observée dans un sens donné. L'interprétation physique en est que les pulses, émis en sens inverse, le sont essentiellement par des atomes distincts dans le milieu émetteur. Ajoutons également que si les conditions initiales de l'équation (II.III.34) ne permettent pas de favoriser l'un des deux sens d'émission, il est possible d'envisager des situations expérimentales légèrement différentes (excitation balayée, milieu à gain anisotrope (⁴⁴)) où l'un des deux sens d'émission peut être effectivement favorisé.

A l'hypothèse (i) d'émission dans un seul sens, on ajoutera l'hypothèse suivante concernant la symétrie du système atomique et de sa matrice densité :

hypothèse (ii) : Le système atomique est symétrique par permutation de deux atomes quelconques dans une tranche perpendiculaire à l'axe du milieu émetteur. Soit $P_{ii'}$, l'opérateur de permutation de deux atomes i et i' quelconques situés dans la même tranche ($z_i = z_{i'}$). On aura par hypothèse :

$$P_{ii'} \tilde{\rho} P_{ii'}^\dagger = \tilde{\rho} \quad (\text{II.II.36})$$

De façon plus précise, on supposera que $\tilde{\rho}$ peut se mettre sous la forme d'une superposition d'opérateurs diadiques $|\alpha\rangle\langle\beta|$:

$$\tilde{\rho} = \sum_{\alpha\beta} \rho_{\alpha\beta} |\alpha\rangle\langle\beta| \quad (\text{II.II.37})$$

ne faisant intervenir que des états $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ du système à N atomes présentant la symétrie de permutation par tranche :

$$P_{ii'} \begin{matrix} |\alpha\rangle \\ \beta \end{matrix} = \begin{matrix} |\alpha\rangle \\ \beta \end{matrix} \quad (\text{si } z_i = z_{i'}) \quad (\text{II.II.38})$$

Physiquement, l'hypothèse (ii) signifie que le milieu reste transversalement homogène tout au long de l'évolution du système. Ceci ne peut être, bien sûr, qu'une approximation : la diffraction impliquant une variation transversale du champ émis doit nécessairement entraîner une variation transversale de la polarisation et des populations atomiques incompatibles avec les conditions (II.II.36) et (II.II.38). Nous montrons cependant plus loin que ces effets transversaux peuvent être minimisés pour un certain rapport entre les dimensions transversales et longitudinales du milieu émetteur.

L'hypothèse (ii), tout en simplifiant considérablement le problème de superradiance en restreignant l'espace dans lequel peut varier la matrice densité du système, a pour mérite de laisser la polarisation atomique varier longitudinalement avec z , ce qui permet de tenir compte des effets essentiels de propagation du pulse superradiant dans le milieu émetteur.

Ces hypothèses étant faites, choisissons (arbitrairement) un vecteur \vec{k}_0 , de module $k_0 = \omega_0/c$, pointant dans la direction d'émission, le long de l'axe du milieu émetteur, ou dans une direction faisant un angle inférieur à l'angle $a/2L$ avec cet axe (voir figure II.2 ; $a/2L = \theta_g$ sera appelé l'angle géométrique d'émission du milieu). La sommation sur \vec{k} dans (II.II.34) va essentiellement porter sur des vecteurs pointant dans une direction voisine de \vec{k}_0 . De façon à particulariser \vec{k}_0 dans cette somme, nous introduisons la nouvelle notation :

$$\mathcal{R}_i^\pm = r_i^\pm e^{\pm i \vec{k}_0 \cdot \vec{r}_i} \quad (\text{II.II.39})$$

Compte tenu de (II.II.9) et (II.II.39), l'équation (II.II.34) peut alors s'écrire :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = - \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3 \chi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z g^2(k) \sum_{i,j} e^{i(\vec{k}-\vec{k}_0) \cdot (\vec{r}_i - \vec{r}_j)}$$

$$\left[\pi \delta(k - k_0) + i \text{PP} \frac{1}{k - k_0} \right] \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \tilde{\rho}(t) \quad (\text{II.II.40})$$

+ 3 autres termes similaires.

Dans (II.II.40), nous avons remplacé la somme discrète sur \vec{k} par une intégrale triple :

$$\sum_{\vec{k}} = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int dk_x \int dk_y \int dk_z \quad (\text{II.II.41})$$

dans laquelle apparaît en facteur le volume \mathcal{V} de quantification du champ (ce volume qui apparaît dans la constante de couplage $g^2(k)$ disparaît évidemment en fin de compte). Quant à la sommation sur la polarisation du champ, nous n'avons pas à en tenir compte dans la mesure où nous considérons ici un modèle atomique à deux niveaux. Le terme représenté dans (II.II.40) est celui où nous avons regroupé les premiers termes du commutateur et de l'anticommutateur de (II.II.34). Le lecteur pourra rétablir les 3 autres termes semblables.

En utilisant à présent l'hypothèse (i) selon laquelle \vec{k} est très voisin de \vec{k}_0 , on peut dans (II.II.40) séparer les intégrations selon k_x , k_y d'une part et k_z . On a en effet :

$$k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2} \approx k_z$$

ce qui permet de remplacer dans les fonctions δ et PP, k par k_z . En effectuant dans (II.II.40) les intégrations sur k_x et k_y et en réservant pour l'instant celle sur k_z , on obtient :

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = - \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} (2\pi)^2 \frac{1}{\hbar^2 c} \sum_{i,j} \int dk_z g^2(k_z) \left[\pi \delta(k_z - k_0) + iPP \frac{1}{k_z - k_0} \right] e^{i(k_z - k_0)(z_i - z_j)} \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \tilde{\rho} \delta_{\lambda_0}(x_i - x_j) \delta_{\lambda_0}(y_i - y_j) + \dots \quad (\text{II.II.42})$$

Dans (II.II.42), les quantités $\delta_{\lambda_0}(x_i - x_j)$ et $\delta_{\lambda_0}(y_i - y_j)$ sont de pseudo distributions de Dirac, de largeur de l'ordre de $\lambda_0 = c/\omega_0$ et de hauteur $\sim 1/\lambda_0$ obtenues en effectuant dans (II.II.40) les intégrations sur k_x et k_y :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y e^{ik_x(x_i - x_j)} e^{ik_y(y_i - y_j)} g^2(k) = (2\pi)^2 g^2(k_0) \delta_{\lambda_0}(x_i - x_j) \delta_{\lambda_0}(y_i - y_j) \quad (\text{II.II.43})$$

$\delta_{\lambda_0}(x_i - x_j) \delta_{\lambda_0}(y_i - y_j)$ apparaît en effet comme la transformée de Fourier à deux dimensions d'une distribution $g^2(k)$ dont la largeur en k_x et k_y est de l'ordre de ω_0/c (cf. équation (II.II.10)) (Si $g^2(k)$ restait constant lorsque k_x et k_y varient, on aurait strictement des distributions de Dirac $\delta(x_i - x_j) \delta(y_i - y_j)$).

L'équation (II.II.42) montre que deux atomes i et j ne coopèrent à l'évolution de $\tilde{\rho}$ que si leur distance transversale $x_i - x_j$ et $y_i - y_j$ sont de l'ordre de λ . Cette condition est difficile à exprimer dans la sommation sur i et j de l'équation (II.II.42) dans laquelle seule une fraction λ^2/a^2 de tous les termes possibles intervient.

On peut cependant remarquer que, du fait de l'hypothèse (ii), tous les termes $\mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \tilde{\rho}$, $\mathcal{R}_i^- \mathcal{R}_j^+ \tilde{\rho}$ tels que i, j d'une part,

j, j' d'autre part, appartiennent à une même tranche z_i (resp. z_j), vont donner la même contribution à $\dot{\rho}^{\sim}$. En effet, pour calculer la dérivée de chaque élément de matrice $\frac{d}{dt} \rho_{\alpha\beta}^{\sim}$, on a à sommer des contributions où apparaissent des éléments de matrice $\langle \alpha | \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \rho | \beta \rangle$ et $\langle \alpha | \mathcal{R}_i^+, \mathcal{R}_j^-, \rho | \beta \rangle$ qui, d'après les équations (II.II.36) et (II.II.38), sont tous égaux. On peut donc, en classant les atomes par tranche, relâcher la contrainte imposée par les distributions δ_{λ_0} dans (II.II.42). En supprimant ces fonctions, on multiplie le couplage effectif par λ_0^2 et on somme un nombre de termes tous égaux en nombre a^2/λ^2 plus grand que ceux qui apparaissent dans (II.II.42). On rétablit le 2e membre de (II.II.42) à la même valeur en le divisant donc par a^2 et on peut écrire (II.II.42) sous la forme plus simple :

$$\frac{d\dot{\rho}^{\sim}}{dt} = - \frac{2\gamma}{(2\pi)^3 \mu^2 c} \int dk_z \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 g^2(k_z) \sum_{i,j} \left[\pi \delta(k_z - k_0) + iPP \frac{1}{k_z - k_0} \right] e^{i(k_z - k_0)(z_i - z_j)} \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \dot{\rho}^{\sim} + \dots \quad (\text{II.II.44})$$

Remarquons que l'on aurait obtenu directement l'équation ci-dessus en remplaçant dans (II.II.40) la sommation triple sur k_x, k_y, k_z par l'intégrale simple

$\int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 dk_z$. Ceci revient à admettre l'identité :

$$\int dk_x \int dk_y \int dk_z = \int k^2 dk \int d\Omega_k = \int \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 dk_z \quad (\text{II.II.45})$$

ce qui signifie que les atomes ne sont couplés qu'aux modes du champ pointant dans un angle solide $\Delta\Omega$ autour de \vec{k}_0 tel que :

$$\Delta\Omega = \frac{1}{k_0^2} \left(\frac{2\pi}{a} \right)^2 = \left(\frac{\lambda}{a} \right)^2 \quad (\text{II.II.46})$$

On retrouve ainsi que l'émission superradiante se produit dans un lobe de diffraction correspondant à un demi-angle de diffraction θ_D :

$$\theta_D = \frac{\lambda}{2a} \quad (\text{II.II.47})$$

Il nous reste à effectuer l'intégration sur k_z dans (II.II.44), qui fait simplement apparaître la fonction de Heaviside :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_z e^{i(k_z - k_0)(z_i - z_j)} \left[\pi \delta(k_z - k_0) + iPP \frac{1}{k_z - k_0} \right] = 2\pi H(z_i - z_j) \quad (\text{II.II.48})$$

avec $H(X) = 1$ si $X > 0$
 $H(X) = 0$ si $X < 0$
 $H(X) = 1/2$ si $X = 0$.

En numérotant les atomes par valeur croissante de z , de sorte que

$$z_i - z_j > 0 \quad \text{si } i > j$$

on obtient finalement, à partir de (II.II.44) et (II.II.48) :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \beta = & -\Gamma\mu \left[\sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \beta + \beta \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_i^- \right] \\ & + \Gamma\mu \left[\sum_{\substack{i,j \\ i>j}} \mathcal{R}_i^- \beta \mathcal{R}_j^+ + \mathcal{R}_j^- \beta \mathcal{R}_i^+ \right] \end{aligned} \quad (\text{II.II.49})$$

Dans cette expression, on a regroupé les quatre termes initialement contenus dans (II.II.44). On a exprimé le couplage dans la quantité $\Gamma\mu$ où Γ est la probabilité d'émission spontanée d'un atome isolé :

$$\Gamma = \frac{|D_{+-}|^2 k_0^3}{3\pi \hbar \epsilon_0} \quad (\text{II.II.50})$$

et μ un facteur géométrique sans dimensions, proportionnel à l'angle solide de diffraction ⁽¹¹⁾ :

$$\mu = \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{a^2} \quad (\text{II.II.51})$$

(On vérifie facilement, en remplaçant g^2 par son expression (II.II.10) et en tenant compte de tous les facteurs numériques de (II.II.44), que l'on trouve bien le facteur $\Gamma\mu$ dans (II.II.49)). On écrira d'ailleurs souvent, pour des raisons qui apparaîtront clairement au paragraphe suivant :

$$\Gamma\mu = \frac{1}{NT_{SR}} \quad (\text{II.II.52})$$

T_{SR} étant le "temps caractéristique de superradiance".

L'équation (II.III.49) constitue l'équation pilote de la superradiance à l'approximation géométrique à une dimension. Cette équation a déjà été obtenue, à l'aide d'une démonstration différente, par RESSAYRE et TALLET (4).

Il est instructif de donner une interprétation diagrammatique de cette équation, en décrivant, suivant une méthode classique (45), un élément de matrice de $\tilde{\rho}$ par un double propagateur représentant simultanément la partie "bra" et la partie "ket" de l'opérateur densité. Pour cela, projetons l'équation (II.II.49) sur une base $|\alpha\rangle$, $|\beta\rangle$ d'états symétriques par tranche et écrivons la variation d'un élément de matrice $\tilde{\rho}_{\alpha\beta}$ pendant un petit intervalle Δt :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(t+\Delta t) - \tilde{\rho}_{\alpha\beta}(t) = & -\Gamma\mu\Delta t \sum_{i>j} \langle \alpha | \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- | \alpha' \rangle \tilde{\rho}_{\alpha'\beta} \\ & -\Gamma\mu\Delta t \sum_{\substack{\beta' \\ i>j}} \tilde{\rho}_{\alpha\beta'} \langle \beta' | \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_i^- | \beta \rangle + \Gamma\mu\Delta t \sum_{\substack{\alpha',\beta' \\ i>j}} \langle \alpha | \mathcal{R}_i^- | \alpha' \rangle \tilde{\rho}_{\alpha'\beta'} \langle \beta' | \mathcal{R}_j^+ | \beta \rangle \\ & + \Gamma\mu\Delta t \sum_{\substack{\alpha',\beta' \\ i>j}} \langle \alpha | \mathcal{R}_j^- | \alpha' \rangle \tilde{\rho}_{\alpha'\beta'} \langle \beta' | \mathcal{R}_i^+ | \alpha' \rangle \end{aligned} \quad (II.II.53)$$

Nous symboliserons cette équation par la suite de diagrammes représentés sur la figure II.3 qui indiquent clairement que la variation de $\rho_{\alpha\beta}$ entre les instants t et $t + \Delta t$ provient de la somme de quatre contributions qui correspondent à l'évolution

- a) d'éléments $\rho_{\alpha'\beta}$ dans lesquels l'état α' s'est transformé en état α par émission d'un photon par un atome j suivie de la réabsorption de ce photon par un atome i tel que $z_i > z_j$ (1er diagramme de la figure II.3);
 - b) d'éléments $\rho_{\alpha\beta'}$ dans lesquels l'état β' s'est transformé en état β par une transformation analogue à la précédente (2e diagramme de la figure II.3).
- Ces deux premiers diagrammes correspondent à des processus où le nombre total de photons n'a pas changé.

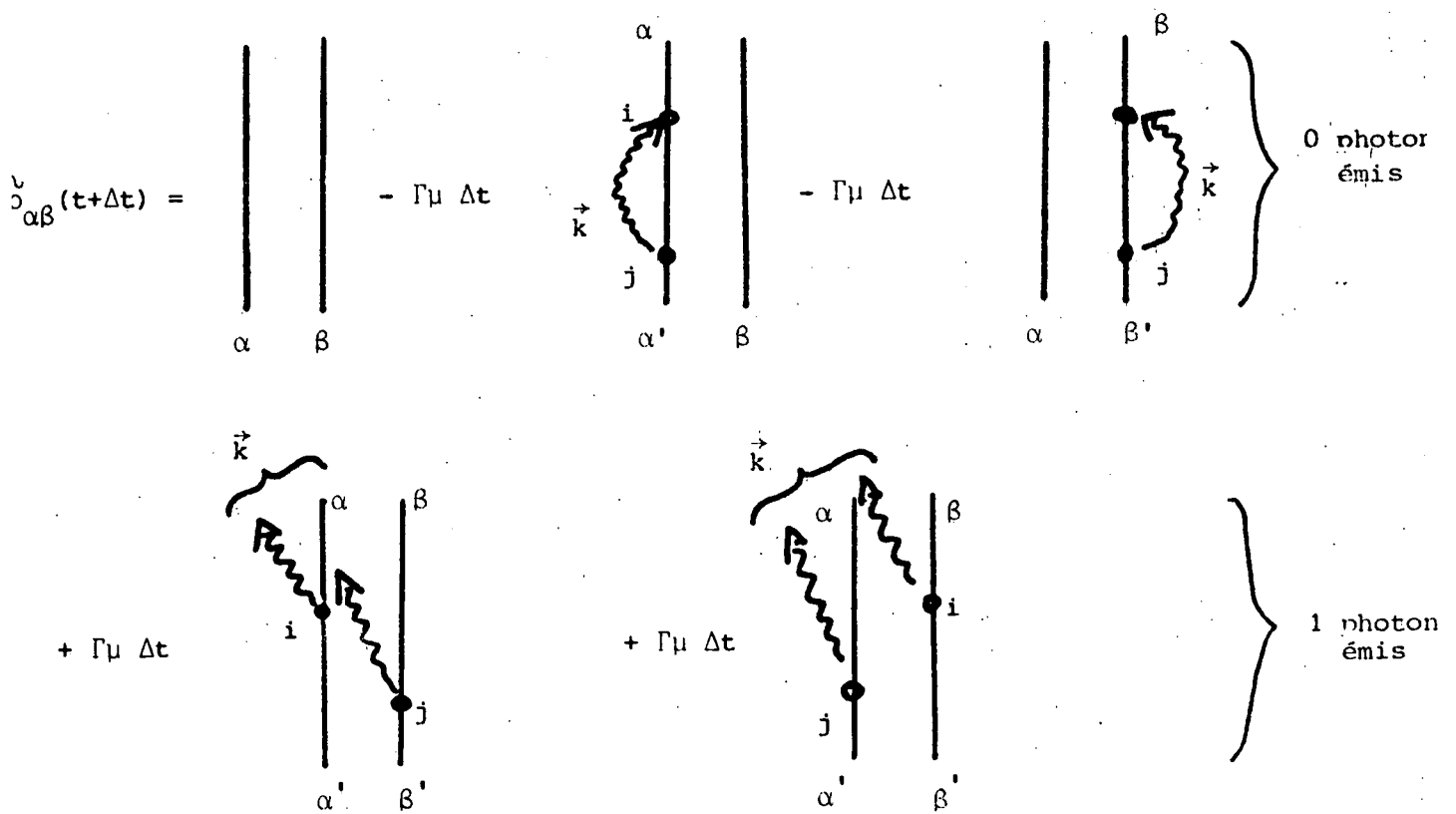


FIGURE II.3

- c) d'éléments $\rho_{\alpha'\beta}$, dans lesquels l'état α' et l'état β' se sont transformés en états α et β par émission d'un photon, l'émission du photon ayant lieu en "amont" dans le milieu superradiant pour l'état β' (3e diagramme de la figure II.3);
- d) d'éléments $\rho_{\alpha'\beta}$, dans lesquels une transformation analogue à la précédente a eu lieu, l'émission ayant cette fois eu lieu "en amont" pour l'état α' (4e diagramme de la figure II.3). Ces deux derniers diagrammes correspondent aux processus couplant $\rho_{\alpha'\beta}$ à $\rho_{\alpha\beta}$, les états $\alpha\beta$ ayant un atome excité de moins que les états α',β' et correspondant donc aux processus où un photon est émis dans le milieu. On notera que dans cette représentation, un photon correspond à 2 flèches (l'une cotée "bra", l'autre cotée "ket") décrivant l'interférence des processus d'émission des atomes i et j . On remarquera que la variable qui évolue de bas en haut dans les diagrammes de la figure II.3 représente aussi bien le temps (les états α',β' se transforment en α et β) que l'abscisse z le long du milieu superradiant (le vortex j doit apparaître toujours au-dessous du vortex i car $z_i > z_j$).

La discussion précédente fait apparaître clairement la signification physique de la condition $i > j$ dans l'équation (II.II.49) : en dessymétrisant l'"amont" de l'"aval" dans le milieu superradiant, elle indique qu'un photon émis par un atome ne pourra être réabsorbé que par un autre atome de z plus grand, c'est-à-dire situé au-delà de l'atome émetteur le long de la direction de propagation de la lumière : cette condition décrit donc les effets de la propagation du champ sur l'évolution de la matrice densité du système. Comme cela a été noté par RESSAYRE et TALLET (⁴), la propagation est donc finalement décrite par la fonction de Heaviside (II.II.48) qui provient de la partie imaginaire dispersive des équations pilotes (II.II.34).

c) Approximation du champ moyen ou approximation de DICKE

On peut encore simplifier l'équation (II.II.49) en renonçant complètement à décrire les effets de propagation. On remplace alors simplement dans (II.II.49) les sommations restrictives $\sum_{i > j}$ par une sommation libre sur les indices i et j . Ceci revient encore à remplacer la fonction de Heaviside dans (II.II.48) par une fonction constante, c'est-à-dire à négliger la partie imaginaire dispersive des équations (II.II.34). On obtient alors les équations

symétriques de DICKE que l'on peut mettre sous la forme :

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\Gamma\mu}{2} \left[\sum_{ij} \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^- \tilde{\rho} + \tilde{\rho} \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_i^- - 2 \sum_{ij} \mathcal{R}_i^- \rho \mathcal{R}_j^+ \right] \quad (\text{II.II.54})$$

ou encore :

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -\frac{\Gamma\mu}{2} \left[R_{k_0}^+ R_{k_0}^- \tilde{\rho} + \tilde{\rho} R_{k_0}^+ R_{k_0}^- - 2 R_{k_0}^- \tilde{\rho} R_{k_0}^+ \right] \quad (\text{II.II.55})$$

en remarquant que $\sum_i \mathcal{R}_i^\pm = R_{k_0}^\pm$.

Comme nous le verrons au § III, cette équation, complètement symétrique par échange de deux atomes quelconques du milieu, admet une solution qui présente non seulement une symétrie de permutation par tranche, mais mieux une symétrie globale par permutation de deux atomes quelconques. L'opérateur densité $\tilde{\rho}$ agit dans l'espace à N+1 dimensions des états complètement symétriques par permutation de deux atomes, ce qui constitue une simplification énorme par rapport à l'espace réel à 2^N dimensions du problème. Ceci explique le succès de cette équation, établie par différents auteurs ⁽²⁵⁾ ⁽³⁵⁾ ⁽¹⁴⁾. Le prix à payer pour cette simplification a été de perdre complètement tous les effets de propagation : tout se passe comme si tous les atomes "voyaient" un même champ moyen constant dans tout l'échantillon, d'où le nom donné à cette approximation. Nous verrons que malgré sa grossièreté apparente, cette approximation conduit à des résultats qualitativement semblables à ceux de l'approximation de propagation à une dimension.

d) Discussion des approximations géométriques en fonction du nombre de Fresnel \mathcal{F} du milieu émetteur

Nous avons vu que les approximations faites aux paragraphes précédents sont, à des degrés divers, incompatibles avec la théorie de la diffraction et de la propagation du champ électromagnétique. Nous allons cependant montrer ici qu'il existe pour le milieu superradiant une relation "idéale" entre L et a qui permet de "minimiser" les erreurs introduites par les hypothèses simplificatrices (i) et (ii) : il faut que le nombre de Fresnel $\mathcal{F} = a^2/L\lambda$ du milieu émetteur soit de l'ordre de l'unité.

Rappelons que le nombre de Fresnel s'interprète comme étant égal au rapport de l'angle d'émission géométrique a/L et de l'angle de diffraction λ/a :

$$\mathcal{F} = \frac{a^2}{L\lambda} = \frac{\theta_G}{\theta_D} \quad (\text{II.II.56})$$

L'hypothèse (i) implique que l'angle géométrique d'émission doit être petit, c'est-à-dire que $\theta_G \lesssim \theta_D$ et $\mathcal{F} \lesssim 1$. Si cette condition n'est pas réalisée, le choix d'une direction arbitraire d'émission \vec{k}_0 n'a en effet plus de sens : le milieu émettra en plusieurs lobes de diffraction et les équations (II.II.49) ne seront plus valables.

L'hypothèse (ii), quant à elle, implique que les effets de la diffraction sur la longueur L du milieu émetteur restent faibles et modifient peu son homogénéité transversale, c'est-à-dire que l'on a :

$$\frac{\lambda}{a} \times L \lesssim a$$

ce qui implique au contraire $\mathcal{F} \gtrsim 1$.

Les erreurs introduites par les hypothèses (i) et (ii) seront donc bien minimisées pour la valeur de compromis :

$$\mathcal{F} \approx 1$$

que nous supposerons toujours réalisée dans la suite.

C - EQUATION D'EVOLUTION DES OPERATEURS ATOMIQUES ET DU CHAMP (Point de vue de HEISENBERG)

Une approche alternative du problème de la superradiance consiste à établir les équations d'évolution pour les opérateurs du système atomique et du champ. C'est le point de vue de HEISENBERG qui, comme nous l'avons remarqué au § A, présente sur le point de vue de SCHRÖDINGER l'avantage de mettre directement l'accent sur les quantités physiques étudiées sans passer par la matrice densité du système qui contient en général trop d'information.

Nous décrivons dans ce paragraphe les équations de HEISENBERG dans le cadre des approximations géométriques déjà introduites au § précédent (approximation à une dimension et approximation du champ moyen). Nous montrons également explicitement l'identité des deux points de vue de HEISENBERG et de SCHRÖDINGER pour le calcul de la polarisation atomique et du champ rayonné.

1°) Equations d'évolution des opérateurs

a) Définition des opérateurs champ électrique, polarisation et populations atomiques dans le cadre de l'approximation à une dimension

En négligeant les variations spatiales en x et y des différentes observables, on définit les opérateurs variant suivant z et t :

$$\mathcal{N}(z, t) = \frac{1}{a^2} \sum_i 2r_{3i} \delta(z - z_i) \quad (\text{II.II.57-a})$$

$$\mathcal{E}(z, t) = -2 \sum_k \sqrt{\frac{\hbar c k}{2 \epsilon_0 \mathcal{V}}} a_k^+ e^{ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (\text{II.II.57-b})$$

$$\mathcal{P}(z, t) = \frac{2}{a^2} \sum_i D_{+-} r_i^+ \delta(z - z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (\text{II.II.57-c})$$

qui représentent respectivement la différence de population des deux niveaux, le champ électrique et la polarisation atomique par unité de volume dans le cadre de l'approximation à une dimension.

b) Equation d'évolution de \mathcal{N} , \mathcal{E} et \mathcal{P} à l'approximation à une dimension

L'évolution de ces opérateurs est donnée par l'équation d'HEISENBERG :

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\partial X}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar} [X, H] \quad (\text{II.II.58})$$

où X est l'opérateur étudié et H l'hamiltonien (II.II.8) du système.

Pour simplifier l'étude, nous ferons l'approximation de propagation à une dimension qui équivaut -comme nous l'avons vu- à restreindre la

sommation sur \vec{k} aux vecteurs d'onde \vec{k}_0 de direction parallèle à Oz (identité (II.II.45)). On peut alors, à l'aide de (II.II.45), remplacer la sommation $\sum_{\vec{k}}$ de l'hamiltonien (II.II.8) par :

$$\sum_{\vec{k}} \equiv \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \int k^2 dk \int d\Omega_k \rightarrow \sum_k = \frac{\mathcal{V}}{(2\pi)^3} \frac{\lambda^2}{a^2} \int k^2 dk \quad (\text{II.II.59})$$

L'évolution de \mathcal{E} est alors donnée par :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(z,t) &= -i\omega_0 \mathcal{E}(z,t) \\ &+ \frac{1}{i\hbar} 2 \sum_k \hbar ck \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} a_k^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \\ &+ \frac{1}{i\hbar} 2 \sum_k \sum_i \frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}} D_{+-} r_i^+ e^{-ik(z-z_i)} \end{aligned} \quad (\text{II.II.60})$$

où k est le module de \vec{k} et où \mathcal{V} est le volume de quantification.

On peut remarquer que l'on a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} 2 \sum_k \hbar ck \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} a_k^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \\ = -c \frac{\partial \mathcal{E}(z,t)}{\partial z} + i\omega_0 \mathcal{E}(z,t) \end{aligned} \quad (\text{II.II.61})$$

et que l'on a également :

$$\begin{aligned} \frac{1}{i\hbar} 2 \sum_k \sum_i \frac{\hbar ck}{2\epsilon_0 \mathcal{V}} D_{+-} r_i^+ e^{-ik(z-z_i)} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \\ = -i \frac{k_0 c}{2\epsilon_0} \mathcal{P}(z,t) \end{aligned} \quad (\text{II.II.62})$$

et au total, il vient :

$$\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \right) \mathcal{E}(z,t) = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \mathcal{P}(z,t) \quad (\text{II.II.63})$$

On peut également écrire pour \mathcal{P}

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(z,t) &= -i\omega_0 \mathcal{P}(z,t) \\ &\quad - \frac{1}{i\hbar} \times 2\hbar\omega_0 \sum_i r_i^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \\ &\quad + \frac{2}{i\hbar} \sum_i \sum_k |D_{+-}|^2 \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}}} \cdot 2r_{3i} a_k^+ e^{-ikz_i} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \delta(z-z_i) \end{aligned} \quad (\text{II.II.64})$$

qui devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(z,t) &= \frac{i|D_{+-}|^2}{\hbar} \times \left(\sum_i 2r_{3i} \delta(z-z_i) \right) \\ &\quad \times \left(-2 \sum_k \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}}} a_k^+ e^{-ik \cdot z} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \right) \end{aligned} \quad (\text{II.II.65})$$

et l'on obtient alors l'équation d'évolution de \mathcal{P} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(z,t) = + \frac{i|D_{+-}|^2}{\hbar} \mathcal{E}(z,t) \mathcal{N}(z,t) \quad (\text{II.II.66})$$

Enfin, pour $\mathcal{N}(z,t)$, on a :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}(z,t) &= \frac{1}{i\hbar} \sum_{ik} 2D_{+-} \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}}} \times \\ &\quad \left[r_i^+ a_k e^{ikz_i} \delta(z-z_i) - r_i^- a_k^+ e^{-ikz_i} \delta(z-z_i) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.II.67})$$

qui devient :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}(z,t) &= \frac{1}{2\hbar} \times \\ &\quad \left[\left(-\sum_k 2 \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}}} a_k e^{ikz} e^{+i(\omega_0 t - k_0 z)} \right) \times \left(\sum_i 2|D_{+-}| r_i^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(-\sum_k 2 \sqrt{\frac{\hbar ck}{2\varepsilon_0 \mathcal{V}}} a_k^+ e^{-ikz} e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \right) \times \left(\sum_i 2|D_{+-}| r_i^- \delta(z-z_i) e^{+i(\omega_0 t - k_0 z)} \right) \right] \end{aligned} \quad (\text{II.II.68})$$

et l'on obtient l'équation d'évolution de \mathcal{N} :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}(z, t) = \frac{i}{2\hbar} \left[\mathcal{E}^+(z, t) \mathcal{P}(z, t) - \mathcal{E}(z, t) \mathcal{P}^+(z, t) \right] \quad (\text{II.II.69})$$

En combinant (II.II.53), (II.II.56) et (II.II.59) et en introduisant le temps retardé $\tau = t - \frac{z}{c}$, on obtient alors les équations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \mathcal{P} \end{array} \right. \quad (\text{II.II.70-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P} = \frac{i|D_{+-}|^2}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N} \end{array} \right. \quad (\text{II.II.70-b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N} = \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{P} - \mathcal{E} \mathcal{P}^+) \end{array} \right. \quad (\text{II.II.70-c})$$

où \mathcal{E} , \mathcal{P} , \mathcal{N} sont des fonctions de z et de τ ($\mathcal{E}(z, \tau)$, $\mathcal{P}(z, \tau)$ et $\mathcal{N}(z, \tau)$).

Ces équations entre opérateurs (II.II.70) sont la version quantique des équations de Bloch-Maxwell de la théorie semi-classique du rayonnement auxquelles elles sont formellement identiques. Elles en diffèrent en toute rigueur par le fait que les opérateurs \mathcal{E} , \mathcal{N} et \mathcal{P} ne commutent pas exactement entre eux. Ce fait est indispensable pour expliquer le démarrage quantique du système. Nous verrons plus loin qu'une fois le démarrage quantique assuré, ces équations peuvent se ramener strictement aux équations semi-classiques.

Il est à noter ici que, pour établir les équations (II.II.70), nous avons dû faire l'approximation du champ tournant. Nous n'avons gardé en effet dans le terme de couplage $-\vec{E} \cdot \vec{D}$ que les termes qui conservent l'énergie comme $a_k^+ r_i^-$ ou $a_k r_i^+$ en négligeant ceux de la forme $a_k^+ r_i^+$ ou $a_k r_i^-$. Ceci se traduit sur l'équation (II.II.70) par le fait que (II.II.70-b) couple \mathcal{P} à \mathcal{E} et non à \mathcal{E}^+ et que (II.II.70-c) ne fait apparaître que des produits en $\mathcal{E}^+ \mathcal{P}$ ou $\mathcal{E} \mathcal{P}^+$ et non des produits en $\mathcal{E} \mathcal{P}$ ou $\mathcal{E}^+ \mathcal{P}^+$. Cette approximation est valide si le temps d'évolution $T_{ev}^{(*)}$ de l'émission superradiante est plus long que la période optique ω_0^{-1} :

$$\omega_0 T_{ev} \gg 1 \quad (\text{II.II.71})$$

On dit alors que \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} évoluent lentement dans le temps. Nous avons également supposé implicitement que \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} évoluent lentement dans

(*) Dans la plupart des cas, T_{ev} est de l'ordre de T_{SR} donné par (II.II.52).

l'espace sur des distances très supérieures à λ . Nous avons en particulier utilisé cette propriété pour établir (II.II.62) et faire apparaître une fonction $\delta(z-z_i)$. Cette hypothèse apparaît également très directement dans le calcul classique lorsque l'on établit l'équation de Maxwell formellement identique à (II.II.70-a). On est amené alors à négliger dans le laplacien du produit $\mathcal{E}(z,t) \times e^{-ik_0 z}$ le terme en $\left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} \right) \times e^{-ik_0 z}$ devant le terme en $-ik_0 \left(\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} \right) \times e^{-ik_0 z}$ (46). Si le gain sur une distance λ est faible, on peut remarquer que \mathcal{E} évolue lentement dans l'espace dès que (II.II.71) est vérifié, car la propagation sur des distances de l'ordre de λ est alors quasiment libre. \mathcal{N} et \mathcal{P} qui se déduisent des équations de Bloch (II.II.70-b), (II.II.70-c) sont alors lentement variables dans l'espace, car les équations de Bloch sont locales.

Au total, les équations (II.II.70) sont valides si \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} varient lentement dans l'espace et dans le temps; cette approximation est appelée généralement approximation d'enveloppe lentement variable. Si le gain sur une distance égale à λ est faible, cette condition est réalisée dès que (II.II.71) est vérifié.

c) Equation d'évolution de \mathcal{N} et \mathcal{P} à l'approximation du champ moyen

Pour obtenir les équations d'évolution à cette approximation, il suffit de définir les opérateurs moyens $\overline{\mathcal{N}}$, $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{P}}$ obtenus comme moyenne sur z des opérateurs \mathcal{N} , \mathcal{E} et \mathcal{P} et de remplacer la première équation de (II.II.70) par :

$$\overline{\mathcal{E}} = - \frac{i k_0 L}{4\epsilon_0} \overline{\mathcal{P}} \quad (\text{II.II.72-a})$$

les deux autres équations restant formellement identiques :

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{P}}}{\partial \tau} = \frac{i \mathcal{D}_{+-}}{\hbar} \overline{\mathcal{E}} \cdot \overline{\mathcal{N}} \quad (\text{II.II.72-b})$$

$$\frac{\partial \overline{\mathcal{N}}}{\partial \tau} = \frac{i}{2\hbar} (\overline{\mathcal{E}}^+ \overline{\mathcal{P}} - \overline{\mathcal{E}} \overline{\mathcal{P}}^+) \quad (\text{II.II.72-c})$$

où $\overline{\mathcal{E}}$, $\overline{\mathcal{P}}$, $\overline{\mathcal{N}}$ sont des fonctions de τ seulement.

2°) Lien avec le point de vue de SCHRODINGER

Il est intéressant de comparer les équations ainsi obtenues ((II.II.70) ou (II.II.72)) aux équations correspondantes du point de vue de SCHRODINGER ((II.II.49) ou (II.II.54)). Comme ce dernier point de vue ne fait intervenir que le système atomique, il convient d'éliminer dans les équations d'HEISENBERG l'opérateur champ en utilisant la relation (II.II.70-a) intégrée :

$$\mathcal{E} = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \int_0^z \mathcal{G}(z', \tau) dz' \quad (\text{II.II.73})$$

(dans le cas de l'approximation à une dimension), ou l'équation (II.II.72-a) (dans le cas de l'approximation du champ moyen).

En remplaçant alors dans les deux autres équations \mathcal{N} et \mathcal{E} par leurs expressions (II.II.57-a et b) en fonction des r_i^\pm , on obtient, après un calcul rapide, dans le cas de l'approximation à une dimension :

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{\mathcal{R}}_i^+ &= \frac{2}{NT_{SR}} \sum_{\substack{j \\ i>j}} \tilde{\mathcal{R}}_j^+ \tilde{\mathcal{R}}_{3i} \end{aligned} \right. \quad (\text{II.II.74-a})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{\mathcal{R}}_i^- &= \frac{2}{NT_{SR}} \sum_{\substack{j \\ i>j}} \tilde{\mathcal{R}}_{3i} \tilde{\mathcal{R}}_j^- \end{aligned} \right. \quad (\text{II.II.74-b})$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \tilde{\mathcal{R}}_{3i} &= -\frac{1}{NT_{SR}} \sum_{\substack{j \\ i>j}} (\tilde{\mathcal{R}}_j^+ \tilde{\mathcal{R}}_i^- + \tilde{\mathcal{R}}_j^- \tilde{\mathcal{R}}_i^+) \end{aligned} \right. \quad (\text{II.II.74-c})$$

$$\text{où } \left\{ \begin{aligned} \tilde{\mathcal{R}}_i^\pm &= \mathcal{R}_i^\pm e^{\mp i\omega_0\tau} = r_i^\pm e^{\mp i(\omega_0\tau - k_0z_i)} \quad (\text{II.II.75-a}) \\ \tilde{\mathcal{R}}_{3i} &= \mathcal{R}_{3i} = r_i^3 \quad (\text{II.II.75-b}) \end{aligned} \right.$$

Le point de vue de SCHRODINGER conduit à des équations très semblables aux précédentes, entre valeurs moyennes. Pour calculer dans ce point de vue l'évolution de la valeur moyenne de l'observable \tilde{X} ($\tilde{X} = \tilde{\mathcal{R}}_i^\pm$ ou $\tilde{\mathcal{R}}_{3i}$), qui correspond à l'observable X ($X = \mathcal{R}_i^\pm$ ou \mathcal{R}_{3i}) en représentation d'interaction, il suffit de remarquer que :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{X} \rangle = \frac{d}{dt} \text{Tr}(\tilde{\rho} \tilde{X}) = \text{Tr} \left[\frac{d}{dt} \tilde{\rho}, \tilde{X} \right] \quad (\text{II.II.76})$$

En utilisant les équations (II.II.49) donnant $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}$ et en utilisant l'algèbre des commutations des \tilde{r}_i , on obtient, après un calcul rapide :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \tilde{R}_i^+ \rangle = \frac{2}{NT_{SR}} \sum_{\substack{j \\ i>j}} \langle \tilde{R}_j^+ \tilde{R}_{3i} \rangle \end{array} \right. \quad (\text{II.II.77-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \tilde{R}_i^- \rangle = \frac{2}{NT_{SR}} \sum_{\substack{j \\ i>j}} \langle \tilde{R}_{3i} \tilde{R}_j^- \rangle \end{array} \right. \quad (\text{II.II.77-b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \tilde{R}_{3i} \rangle = -\frac{1}{NT_{SR}} \sum_{\substack{j \\ i>j}} \langle (\tilde{R}_j^+ \tilde{R}_i^- + \tilde{R}_j^- \tilde{R}_i^+) \rangle \end{array} \right. \quad (\text{II.II.77-c})$$

Ces équations sont identiques à celles que l'on obtient en prenant la valeur moyenne dans (II.II.74) à condition de remplacer le temps retardé τ par t . On retrouve bien entendu la même correspondance entre les deux formalismes dans l'approximation du champ moyen qui conduit, dans le point de vue de HEISENBERG, à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \tilde{R}_i^+ = \frac{1}{NT_{SR}} \sum_j \tilde{R}_j^+ \tilde{R}_{3i} \end{array} \right. \quad (\text{II.II.78-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \tilde{R}_i^- = \frac{1}{NT_{SR}} \sum_j \tilde{R}_{3i} \tilde{R}_j^- \end{array} \right. \quad (\text{II.II.78-b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \tilde{R}_{3i} = \frac{-1}{2NT_{SR}} \sum_j \left\{ \tilde{R}_j^+ \tilde{R}_i^- + \tilde{R}_j^- \tilde{R}_i^+ \right\} \end{array} \right. \quad (\text{II.II.78-c})$$

et pour les valeurs moyennes, dans le point de vue de SCHRODINGER, à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathcal{R}}_i^+ \rangle = \frac{1}{NT_{SR}} \sum_j \langle \tilde{\mathcal{R}}_j^+ \tilde{\mathcal{R}}_{3i} \rangle \quad (\text{II.II.79-a}) \\ \frac{d}{dt} \langle \tilde{\mathcal{R}}_i^- \rangle = \frac{1}{NT_{SR}} \sum_i \langle \mathcal{R}_{3i} \mathcal{R}_j^- \rangle \quad (\text{II.II.79-b}) \\ \frac{d}{dt} \langle \mathcal{R}_{3i} \rangle = -\frac{1}{2NT_{SR}} \sum_j \langle \tilde{\mathcal{R}}_j^+ \tilde{\mathcal{R}}_i^- + \tilde{\mathcal{R}}_j^- \tilde{\mathcal{R}}_i^+ \rangle \quad (\text{II.II.79-c}) \end{array} \right.$$

Le remplacement de $\tau = t - \frac{z}{c}$ par t lorsqu'on passe du point de vue de HEISENBERG au point de vue de SCHRÖDINGER n'est pas surprenant puisque, dans ce cas, on a été amené à faire l'approximation de MARKOV qui revient à négliger le temps de propagation L/c dans le milieu, c'est-à-dire encore à ne pas faire de différence entre τ et t . C'est le prix qu'il a fallu payer au § II.B pour avoir une équation pilote simple décrivant l'évolution d'une matrice densité définie au même instant t pour tous les atomes du milieu.

III. LA SOLUTION DU PROBLEME A L'APPROXIMATION DU CHAMP MOYEN

L'étude du problème de la superradiance à l'approximation du champ moyen présente deux gros avantages.

i) Ce modèle donne lieu à des calculs simples et permet en général d'obtenir des solutions sous forme analytique (c'est le cas en particulier pour la matrice densité atomique ρ).

ii) Ce modèle, qui conduit aux mêmes équations que le modèle original de DICKE, permet de mieux comprendre la "physique" du phénomène d'émission superradiante.

Nous avons pensé qu'il serait intéressant de résoudre ce problème dans les points de vue de SCHRÖDINGER (chapitre II.III.A) et d'HEISENBERG (chapitre II.III.C) qui, rappelons-le, correspondent à des compréhensions physiques différentes du phénomène :

- Dans le point de vue de SCHRÖDINGER, la superradiance est comprise comme une émission spontanée collective. Il y a couplage du système collectif avec le vide du rayonnement.
- Dans le point de vue d'HEISENBERG, on considère par contre que chaque atome est couplé individuellement au rayonnement, le couplage entre atomes se faisant par l'intermédiaire de celui-ci.

Ce point de vue est plus habituel et l'émission superradiante ressemble alors grandement à une émission laser ordinaire.

Au paragraphe A, nous présentons la solution des équations pour l'opérateur densité du système des N atomes. Le paragraphe B donne une interprétation physique de la solution. Le paragraphe C reprend le même calcul dans le formalisme d'HEISENBERG.

A. Solution pour la matrice densité du système collectif

(formalisme de SCHRÖDINGER)

Nous cherchons à obtenir, dans ce paragraphe, une expression analytique explicite de l'opérateur densité $\rho(t)$ solution de l'équation (II.II.55). Nous commençons par introduire, après bien d'autres auteurs, une base commode pour

décrire cet opérateur, la base des états collectifs symétriques de DICKE (§ A.1). Cette base introduit, de façon naturelle, un nombre quantique m représentant le nombre d'atomes restant excités à un instant donné et décrivant donc le "degré d'excitation" du système. Ce problème se ramène alors à l'étude de l'évolution des éléments de matrice $\rho_{mm}(t)$. L'équation d'évolution étant linéaire et du 1er ordre en t , il en existe bien sûr une solution analytique exacte en terme de somme d'exponentielles. Nous présentons cette solution, déjà obtenue par d'autres ⁽³⁵⁾, au § A.2, et indiquons pourquoi elle est d'un emploi très peu pratique pour N supérieur à quelques unités. Cette solution se caractérise en particulier par un étalement très important sur m de la distribution $\rho_{mm}(t)$ à un instant donné, cet étalement reflétant le caractère quantique du système. Si l'on néglige toutefois cet étalement, on peut obtenir une solution dite néo-classique dont l'allure générale est correcte, mais qui ne donne que qualitativement l'évolution du système (§ A.3). Nous présentons ensuite une solution originale, donnant une expression asymptotiquement exacte et bien meilleure que la solution néo-classique (§ A.4). La méthode de résolution consiste à superposer des "opérateurs quasi-classiques", dont l'évolution obéit à la solution néo-classique rappelée au § A.3. Chacun de ces opérateurs quasi-classiques se construit lui-même comme une superposition de projecteurs sur les états de DICKE ("paquets" d'états de DICKE ne s'étalant pas au cours du temps). Cette solution, comme nous le montrerons au § B, se prête à une interprétation physique très simple.

1) Position du problème et notations

a) La base des états de DICKE

Pour résoudre l'équation (II.II.55) il est naturel d'introduire, après de nombreux auteurs ⁽²³⁾ ⁽⁴⁷⁾, les états propres $|r, m, \alpha \rangle_k^{\rightarrow}$ communs à R_3 et $|\vec{R}_{k_0}^{\rightarrow}\rangle^2 = \frac{1}{2} (R_{k_0}^+ R_{k_0}^- + R_{k_0}^- R_{k_0}^+) + (R^3)^2$. Ces états constituent ce que nous appellerons la "base de DICKE" et sont définis par les relations :

$$[R_{k_0}^{\rightarrow}]^2 |r, m, \alpha \rangle_k^{\rightarrow} = r(r+1) |r, m, \alpha \rangle_k^{\rightarrow} \quad (\text{II.III.1-a})$$

$$R^3 |r, m, \alpha \rangle_k^{\rightarrow} = m |r, m, \alpha \rangle_k^{\rightarrow} \quad (\text{II.III.1-b})$$

où $r = \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - 1 \dots 0$ ou $\frac{1}{2}$ (II.III.2-a)

$-r \leq m \leq +r$ (II.III.2-b)

Les $|r, m, \alpha\rangle_{k_0}^{\pm}$ sont obtenus en combinant les états atomiques individuels $|+\rangle_i$ et $|-\rangle_i e^{-ik_0 \cdot x_i}$ de la même façon que l'on combine N spin $\frac{1}{2}$ pour bâtir un moment cinétique de moment angulaire r et de projection m le long de Oz. r est généralement appelé "nombre de coopération" et m "nombre d'excitation". $(\frac{N}{2} + m)$ représente bien sûr le nombre d'atomes excités. Le nombre quantique supplémentaire α représente un facteur de dégénérescence lié au fait qu'il est possible de combiner les N spin 1/2 de plusieurs façon différentes pour obtenir un même r et un même m. $(R_{k_0}^{\pm})^2$ et R_3 ne constituent pas un ensemble complet d'observables). L'ordre de dégénérescence α dépend de la valeur de r. Seuls les états correspondant à un nombre de coopération r maximum ne sont pas dégénérés ($r = N/2$). C'est en particulier le cas de l'état initial $|t = 0\rangle$ et de l'état final $|t = +\infty\rangle$

$|t = 0\rangle = |++++ \dots +\rangle = |r = \frac{N}{2}, m = \frac{N}{2}\rangle_{k_0}^+$ (II.III.3-a)

$|t = +\infty\rangle = |-- -- \dots -\rangle = |r = \frac{N}{2}, m = -\frac{N}{2}\rangle_{k_0}^+$ (II.III.3-b)

On peut noter que l'équation d'évolution (II.II.55) ne fait intervenir que $R_{k_0}^{\pm}$. Elle ne couple donc entre eux que des états de même r. Le système partant de $r = N/2$, l'évolution ultérieure qui obéit à l'équation (II.II.55) se fait dans le sous-espace non dégénéré $r = N/2$. Les états $|\frac{N}{2}, m\rangle$, base de ce sous-espace sont obtenus en faisant agir $R_{k_0}^{\pm}$ ($R_{k_0}^{\pm}$) sur l'état symétrique $|++++ \dots +\rangle$ ($|-- -- \dots -\rangle$) :

$|\frac{N}{2}, m\rangle = (R_{k_0}^-)^{(N/2)-m} |++++ \dots +\rangle$ (II.III.4-a)

$|\frac{N}{2}, m\rangle = (R_{k_0}^+)^{(N/2)+m} |-- -- \dots -\rangle$ (II.III.4-b)

Chacun de ces états combine de façon symétrique les états individuels $|+\rangle_i$ et $|-\rangle_i e^{-ik_0 \cdot x_i}$. L'excitation du milieu est uniformément répartie dans ces

états. Il est facile de voir également que $\langle r_i^+ r_j^- e^{i\vec{k}_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \rangle$ ne dépend pas du couple $i \neq j$ considéré. Les états "symétriques" de Dicke correspondent donc à des états dont les dipôles ont des phases reliées entre elles. La phase relative est la même que pour une onde plane de vecteur d'onde $+\vec{k}_0$. De cette façon, l'émission se fait de façon constructive dans la direction $+\vec{k}_0$ dans le lobe de diffraction associé à la dimension transversale du milieu a^2 .

b) Les équations de Dicke

En projetant l'équation (II.II.55) dans la base des états symétriques, on obtient l'équation pilote d'évolution de la matrice densité. On obtient alors pour les éléments de matrice diagonaux : (★)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{mm} &= \frac{d}{dt} \langle \frac{N}{2}, m | \rho | \frac{N}{2}, m \rangle \\ &= -\Gamma\mu \left(\frac{N}{2} + m \right) \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \rho_{mm} \\ &\quad + \Gamma\mu \left(\frac{N}{2} + m + 1 \right) \left(\frac{N}{2} - m \right) \rho_{m+1, m+1} \end{aligned} \quad \text{(II.III.5)}$$

Ces équations sont appelées équations de DICKE. Elles sont formellement identiques aux équations décrivant l'émission spontanée d'un moment cinétique $N/2$. Le problème est donc analogue au couplage d'un système collectif (moment cinétique $N/2$) avec le vide du rayonnement (émission spontanée).

2) Solution analytique exacte

Les équations de DICKE (II.III.5) peuvent être résolues par la transformée de Fourier (35) ou par la transformée de Laplace : le système d'équations (II.III.5) devient un système linéaire d'équations algébriques permettant de calculer par récurrence la transformée de Fourier (Laplace) $\hat{\rho}_{mm}$ de ρ_{mm} . Par transformée de Fourier (Laplace) inverse, il vient alors de façon exacte :

$$\rho_{mm}(t) = \sum_{m'=N/2}^m A_m^{m'} e^{-\nu_{m'} t} \quad \text{pour } m > 0 \quad \text{(II.III.6-a)}$$

(★) Comme l'équation (II.III.5), qui se déduit de (II.II.55), ne couple entre eux que des éléments de matrice diagonaux, et comme le système est diagonal à $t=0$, nous avons choisi d'écrire ρ en représentation normale et non en représentation d'interaction. C'est la raison pour laquelle, au cours du § III, seuls les ρ apparaissent, alors qu'au § II seuls les ρ apparaissaient.

$$\rho_{mm}(t) = \sum_{m'=-m+2}^{N/2} A_m^{m'} e^{-\nu_{m'} t} + \sum_{m'=0}^{N/2} A_m^{m'} (\Gamma_{\mu} t - B_m^{m'}) e^{-\nu_{m'} t} \quad (\text{II.III.6-b})$$

pour $m \leq 0$

Dans ces expressions, les coefficients $\nu_{m'}$, $A_m^{m'}$ et $B_m^{m'}$ ont pour valeur :

$$\nu_{m'} = \Gamma_{\mu} \left(\frac{N}{2} + m' \right) \left(\frac{N}{2} - m' + 1 \right) \quad (\text{II.III.7-a})$$

$$A_m^{m'} = \frac{N! \left(\frac{N}{2} - m \right)!}{\left(\frac{N}{2} + m \right)!} \prod_{\substack{k=m \\ \nu_k \neq \nu_{m'}}}^{N/2} \frac{\Gamma_{\mu}}{\nu_k - \nu_{m'}} \quad (\text{II.III.7-b})$$

$$B_m^{m'} = \sum_{\substack{K=m \\ \nu_K = \nu_{m'}}}^{N/2} \frac{\Gamma_{\mu}}{\nu_K - \nu_{m'}} \quad (\text{II.III.7-c})$$

Dans le cas où m est voisin de $N/2$, c'est-à-dire au démarrage de l'évolution, il est possible de resommer les différents termes du développement (II.III.6-a) et il vient :

$$\rho_{mm} \approx e^{-\Gamma_{\mu} N t} \left(1 - e^{-\Gamma_{\mu} N t} \right)^{\frac{N}{2} - m} \quad (\text{II.III.7})$$

On peut obtenir directement cette expression de la façon suivante :

Posons :

$$s = \frac{N}{2} - m \quad (\text{II.III.8})$$

s est le nombre de photons émis à un instant donné et

$$\rho_{ss} = \rho_{mm} \quad (\text{II.III.9})$$

est la probabilité d'avoir émis exactement s photons.

L'équation de DICKE (II.III.5) devient pour ρ_{ss} :

$$\frac{d}{dt} \rho_{ss} = -\Gamma\mu(N-s)(s+1) \rho_{ss} + \Gamma\mu(N-s+1) \cdot s \cdot \rho_{s-1,s-1} \quad (\text{II.III.10})$$

ce qui, pour $s \ll N$ (démarrage de l'évolution) est très voisin de :

$$\frac{d}{dt} \rho_{ss} = -\Gamma\mu N(s+1) \rho_{ss} + \Gamma\mu N s \rho_{s-1,s-1} \quad (\text{II.III.11})$$

la solution est, de façon évidente :

$$\rho_{ss} = e^{-\Gamma\mu N t} \left(1 - e^{-\Gamma\mu N t} \right)^s \approx e^{-\Gamma\mu N t} \exp \left(-s e^{-\Gamma\mu N t} \right) \quad (\text{II.III.12})$$

A $t = t_1$ fixé, $\rho_{ss}(t_1)$ varie exponentiellement en fonction de s (voir figure II.4).

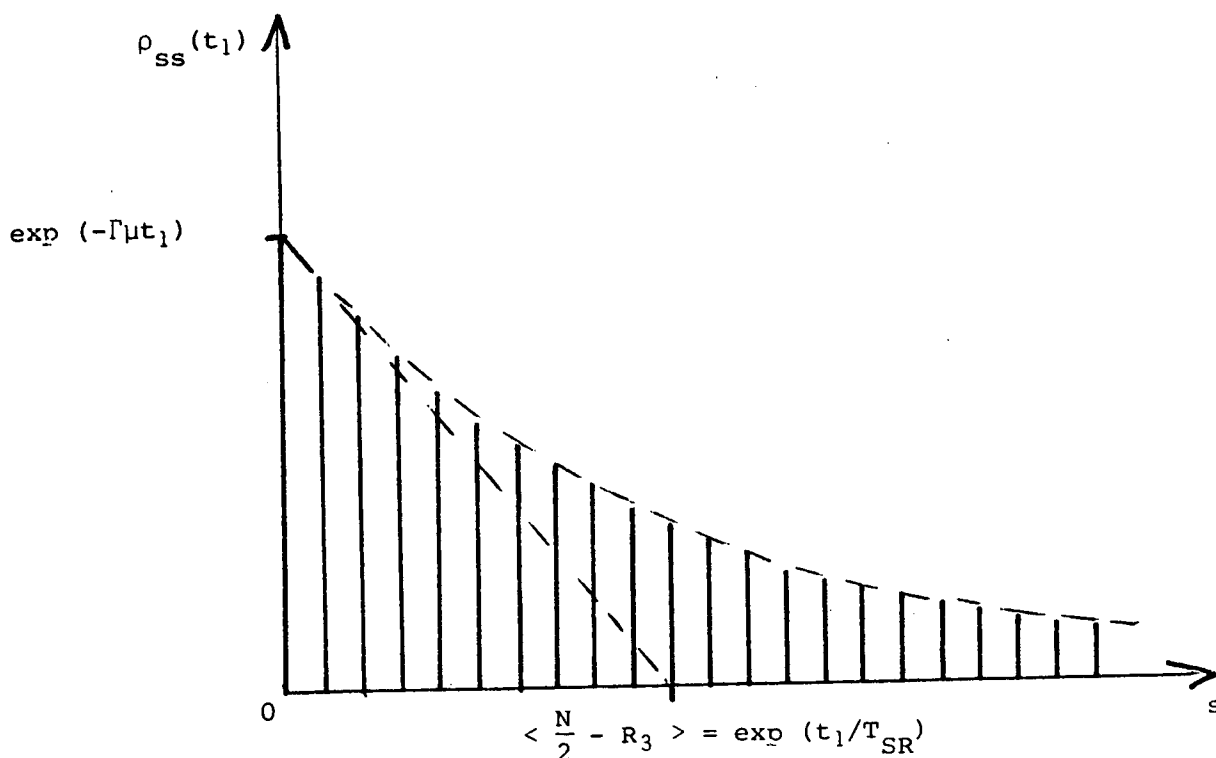


FIGURE II.4 : Allure de $\rho_{ss}(t_1)$ en fonction de s , au démarrage de l'évolution.

En développant l'équation (II.III.12) par la formule du binôme, on retrouve bien sûr le développement exact (II.III.6-a) à la limite où $\frac{N}{2} - m$ tend vers 0. ρ_{ss} atteint son maximum au bout d'un temps t_s donné par :

$$t_s = (N\Gamma\mu)^{-1} \text{Log} (s+1) \quad (\text{II.III.13})$$

Le temps t_D que met le système pour atteindre son maximum d'émission peut être obtenu en évaluant le temps au bout duquel $\rho_{m=0, m=0}$ est maximum, on obtient :

$$t_D \approx T_{SR} \text{Log} N \quad (\text{II.III.14})$$

En général, on ne s'intéresse pas à l'évolution des éléments de matrice ρ_{mm} (ou ρ_{ss}), mais plutôt à l'évolution de grandeurs macroscopiques comme l'intensité lumineuse I émise par le système superradiant. On a pour la valeur moyenne $\langle I \rangle$ de I :

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= \langle E(t) E^*(t) \rangle \\ &= \mathcal{N}\omega_0 \Gamma\mu \langle R_{k_0}^+ R_{k_0}^- \rangle \\ &= \mathcal{N}\omega_0 \Gamma\mu \sum_m \left(\frac{N}{2} + m \right) \left(\frac{N}{2} - m + 1 \right) \rho_{mm} \end{aligned} \quad (\text{II.III.15})$$

(où $R_{k_0}^+$ est défini en (II.II.9)).

Par conservation de l'énergie, il vient également :

$$\begin{aligned} \langle I \rangle &= -\mathcal{N}\omega_0 \frac{d}{dt} \langle R^3 \rangle \\ &= -\mathcal{N}\omega_0 \sum_m m \frac{d}{dt} \rho_{mm} \end{aligned} \quad (\text{II.III.16})$$

En utilisant l'équation (II.III.16), on peut calculer exactement $\langle I \rangle$. Malheureusement, le calcul explicite du développement (II.III.6) est impossible en pratique dès que $s = \frac{N}{2} - m$ est supérieur à quelques dizaines. En effet, pour calculer ρ_{ss} , il faut sommer une série alternée de s termes dont l'ordre de grandeur est $s!$, le résultat de la somme étant une probabilité comprise entre zéro et un. Une méthode alternative consiste à intégrer numériquement l'équation (II.III.10) avec la condition initiale $\rho_{ss}(t=0) = \delta_{s_0}$ en considérant

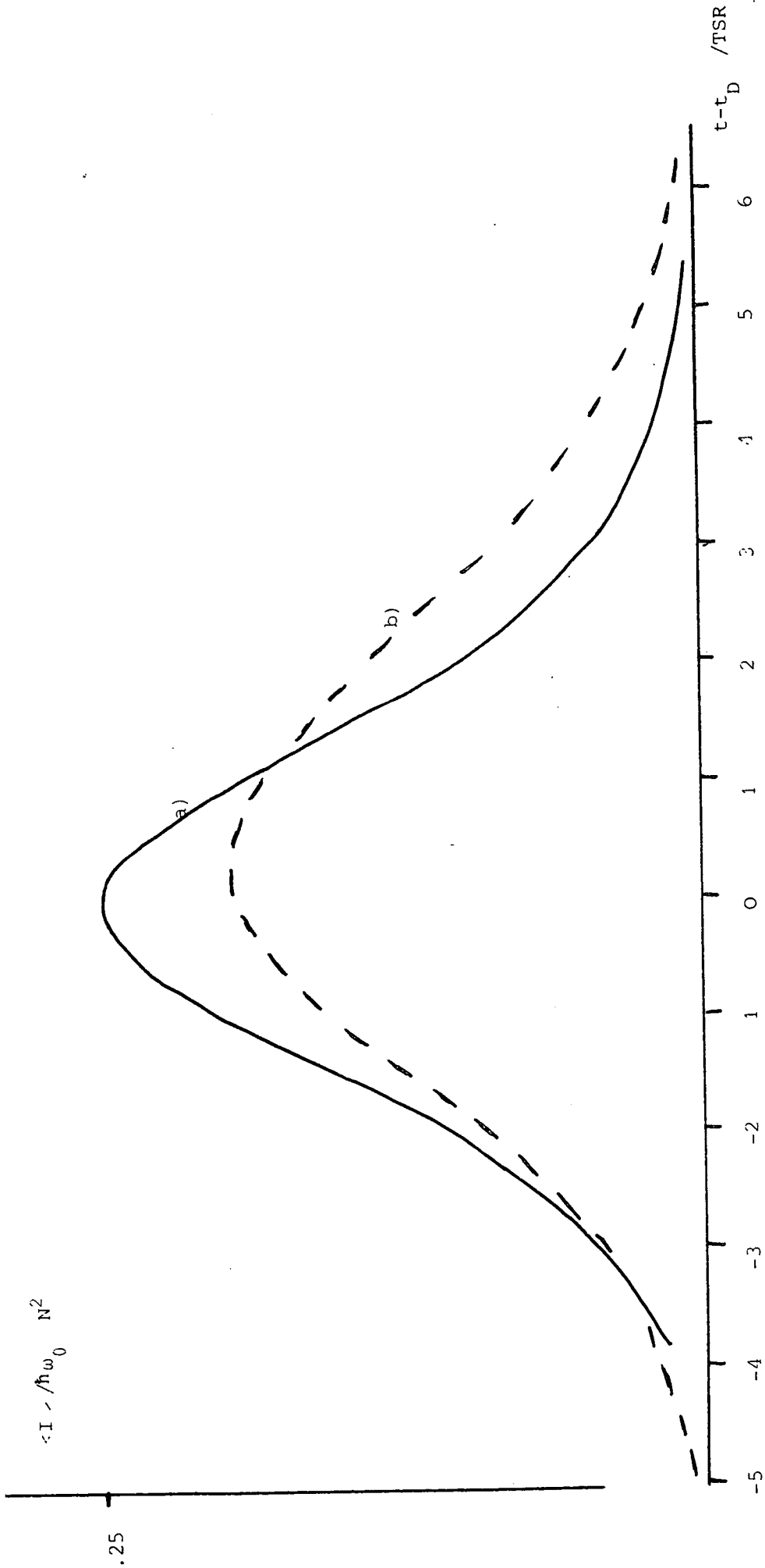


Figure II 5 : Valeur moyenne $\langle I \rangle$ de l'intensité à l'approximation du champ moyen

a) Seconde hyperbolique à l'approximation néo classique (courbe en trait plein)

b) Solution exacte (courbe pointillée).

ρ_{ss} comme un tableau de dimension $N+1$ ($s = 0, 1, \dots, N$). Il est possible ainsi d'effectuer le calcul pour N de l'ordre de quelques centaines à quelques milliers ($N = 200$ pour la référence (⁴⁹)).

3) Solution néo-classique approchée

Les équations de DICKE peuvent être également résolues de façon approchée (suivant en cela la voie inaugurée par DICKE (²³)) en faisant l'hypothèse de décorrélation (approximation néo-classique) sur les opérateurs

$\frac{N}{2} \pm R_3$:

$$\left\langle \frac{N}{2} \pm R_3 \right\rangle^2 = \left\langle \left(\frac{N}{2} \pm R_3 \right)^2 \right\rangle \quad (\text{II.III.17})$$

On peut alors négliger la dispersion sur le nombre d'atomes excités (ou sur le nombre de photons émis). On obtient pour l'évolution $\langle R_3 \rangle$

$$\frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle = -\Gamma \mu \left(\frac{N}{2} + \langle R_3 \rangle \right) \left(\frac{N}{2} - \langle R_3 \rangle + 1 \right) \quad (\text{II.III.18})$$

Cette équation peut être résolue exactement et l'on obtient la solution bien connue en sécante hyperbolique (²³) :

$$\langle I(t) \rangle = -\mu \omega_0 \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle = \mu \omega_0 N^2 \frac{e^{-\frac{(t-t_D)}{T_{SR}}}}{\left(1 + e^{-\frac{(t-t_D)}{T_{SR}}}\right)^2} \quad (\text{II.III.19})$$

où $t_D = T_{SR} \text{Log } N$ (II.III.20)

On obtient également pour $\langle R_3 \rangle$

$$\langle R_3 \rangle = \frac{N}{2} \frac{1 - e^{-\frac{(t-t_D)}{T_{SR}}}}{1 + e^{-\frac{(t-t_D)}{T_{SR}}}} \quad (\text{II.III.21})$$

L'allure de $\langle I \rangle$ donné par l'équation (II.III.19) est représentée sur la figure (II.5-a).

4) Solution exacte par décomposition en trajectoires classiques

La solution exacte des équations de DICKE est caractérisée par le grand étalement de la loi de probabilité ρ_{ss} (fig. II.4), qui n'est pas pris en compte dans la formule néo-classique approchée. On peut cependant obtenir, à partir de cette solution néo-classique, une solution asymptotiquement exacte, beaucoup plus maniable que la série exponentielle (II.III.6). Le principe du calcul est le suivant : on introduit, pour décomposer l'opérateur densité, une nouvelle base dans l'espace de Liouville formée de superposition d'opérateurs $|\frac{N}{2}, m\rangle \langle \frac{N}{2}, m|$, décrivant des "paquets quasi-classiques" qui, eux, ne s'étaient en $s = \frac{N}{2} - m$ que de façon négligeable. Ces "paquets" évoluent simplement suivant la loi néo-classique (II.III.21). Il suffit alors d'appliquer le principe de superposition linéaire pour en déduire la loi d'évolution et l'étalement de la matrice densité du système. Ce calcul conduit simplement à une formule analytique très maniable pour $\rho_{ss}(t)$, qui est, à notre connaissance, originale. L'introduction faite ici des états "quasiclassiques" est à rapprocher de celle qui consiste, dans un autre contexte, à définir des états cohérents du champ électromagnétique comme paquets d'états $|n\rangle$ à étalement négligeable. La différence réside dans le fait que la superposition qui porte ici sur les atomes et non sur le champ est faite sur les éléments diagonaux de la matrice densité et non sur les vecteurs d'états. L'avantage essentiel de l'introduction de ces opérateurs quasi-classiques est, comme nous le montrons plus loin, de permettre une interprétation physique très simple du processus de la mesure dans une expérience de superradiance (disons tout de suite que la détection du signal revient à réduire le "paquet d'onde" à un état quasi-classique).

a) Etats quasiclassiques du système atomique et trajectoires classiques pour l'énergie

La résolution analytique de DICKE est fondée sur l'hypothèse de décorrélation des opérateurs $\frac{N}{2} \pm R_3$ (II.III.17). La validité de cette hypothèse dépend de la condition initiale choisie pour résoudre les équations de DICKE. Dans le cas étudié ici (matrice densité complètement inversée à $t = 0$), la variance σ de l'opérateur :

$$\hat{S} = \frac{N}{2} - R_3 \quad (\star) \quad (\text{II.III.22})$$

(\star) Dans tout ce paragraphe (Chap. II.III.A.4), nous conviendrons de noter \hat{X} avec majuscule et chapeau l'opérateur X pour éviter toute possibilité de confusion avec la valeur propre associée que nous noterons x en minuscule. Nous garderons cependant la notation R_3 pour l'opérateur R_3

est grande et l'hypothèse (II.III.17) n'est pas réalisée. Il vient en effet :

$$\langle \hat{S}^2 \rangle = \langle \left(\frac{N}{2} - R_3 \right)^2 \rangle = \sum_s s^2 \rho_{ss} \quad (\text{II.III.23-a})$$

$$\langle \hat{S} \rangle = \langle \left(\frac{N}{2} - R_3 \right) \rangle = \sum_s s \rho_{ss} \quad (\text{II.III.23-b})$$

En utilisant l'équation (II.III.12) donnant ρ_{ss} au démarrage de l'évolution et en remplaçant les sommations sur s par des intégrales que l'on intègre par partie, on montre sans peine que :

$$\langle \left(\frac{N}{2} - R_3 \right)^2 \rangle = 2 \langle \frac{N}{2} - R_3 \rangle^2 \quad (\text{II.III.24})$$

Supposons maintenant qu'à $t \geq t_1$, la matrice densité atomique ρ soit de la forme :

$$\rho = \hat{\rho}_{cl, s_1} = \sum_{s=0}^N P_{s_1}(s, t) \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right| \quad (\text{II.III.25})$$

où P_{s_1} est une distribution de probabilité représentée sur la figure II.6 qui, à $t=t_1$, est centrée autour de $s = s_1$ et de largeur σ_1 obéissant à la condition :

$$1, \sigma_1 \ll s_1 \ll N \quad (\text{II.III.26})$$

Pour définir de façon précise σ , nous poserons :

$$\sigma^2 = \langle s^2 \rangle - \langle s \rangle^2 \quad (\text{II.III.27})$$

L'hypothèse de décorrélation (II.III.17) est alors vérifiée à $t = t_1$ et $\hat{\rho}_{cl, s_1}(t=t_1)$ constitue un état "paquet" quasiclassique. Nous allons voir, si l'on choisit judicieusement $P_{s_1}(s, t)$ que ce "paquet" $\hat{\rho}_{cl, s_1}(t \neq t_1)$ ne s'"étaie" pas (ne s'élargit pas en s_1). Nous reprenons ici sous une forme très voisine un calcul fait en référence (40) (*).

(*) Une démonstration plus générale de cette propriété (pour des "paquets" faisant intervenir à la fois l'énergie et la phase) est faite en référence (48).

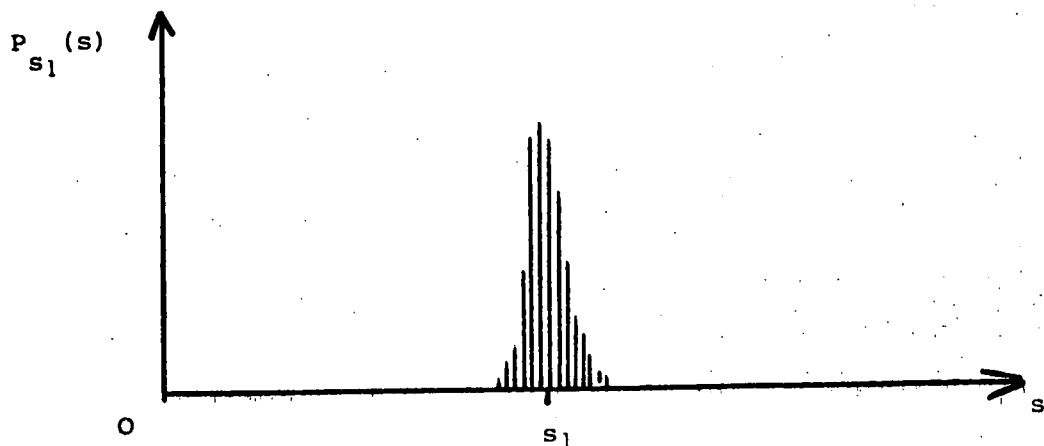


FIGURE II.6 : Allure de $P_{s_1}(s)$

Montrons tout d'abord que $\frac{N}{2} - R_3$ peut être décorrélé, et pour cela, étudions l'évolution de σ^2 , qui se déduit de l'évolution de :

$$\langle \hat{S}^n \rangle = \sum_s s^n P_{s_1}(s, t) \quad (\text{II.III.28})$$

Il vient pour $\langle \hat{S}^n \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{S}^n \rangle = \sum_s s^n \frac{dP_{s_1}(s, t)}{dt} \quad (\text{II.III.29})$$

Comme $P_{s_1}(s)$ est un élément de matrice diagonal de $\hat{\rho}_{cl, s_1}$, il obéit à l'équation d'évolution de DICKE (équation (II.III.11)) et l'on a :

$$\frac{d}{dt} P_{s_1}(s) = -\Gamma\mu (s+1)(N-1)P_{s_1}(s) + \Gamma\mu s(N-s+1)P_{s_1}(s-1) \quad (\text{II.III.30})$$

En reportant dans (II.III.29) et en faisant le changement d'indice muet $s \rightarrow s+1$ pour la partie en $+\Gamma\mu s(N-s+1)P_{s_1}(s-1)$ de l'équation (II.III.30), il vient :

$$\frac{d}{dt} \langle \hat{s} \rangle = \Gamma \mu \langle (\hat{s}+1)(N-\hat{s}) \rangle, \quad \frac{d}{dt} \langle \hat{s}^2 \rangle = \Gamma \mu \langle (2\hat{s}+1)(\hat{s}+1)(N-\hat{s}) \rangle \quad (\text{II.III.31})$$

On en déduit après un calcul simple :

$$\frac{d}{dt} \sigma^2 = \frac{d}{dt} \left[\langle \hat{s}^2 \rangle - \langle \hat{s} \rangle^2 \right] = \Gamma \mu \left[\langle (N-\hat{s})(\hat{s}+1) \rangle + 2(N-1)\sigma^2 - 2(\langle \hat{s}^3 \rangle - \langle \hat{s} \rangle \langle \hat{s}^2 \rangle) \right] \quad (\text{II.III.})$$

Pour étudier l'étalement du paquet de probabilité, on forme le rapport $\sigma^2 / \langle \hat{s}^2 \rangle$ et on en calcule la dérivée logarithmique. Après un calcul simple, on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Gamma \mu} \frac{d}{dt} \text{Log} \frac{\sigma^2}{\langle \hat{s} \rangle^2} &= 2 \frac{\langle \hat{s} \rangle}{\langle \hat{s} \rangle^2} + \frac{N \langle \hat{s} \rangle}{\sigma^2} \\ &+ \frac{2\sigma^2}{\langle \hat{s} \rangle} + \frac{N}{\sigma^2} \\ &- \frac{2N}{\langle \hat{s} \rangle} - 1 - 2 \frac{\langle \hat{s}^3 \rangle - \langle \hat{s} \rangle \langle \hat{s}^2 \rangle}{\sigma^2} - \frac{\langle \hat{s} \rangle (\langle \hat{s} \rangle + 1)}{\sigma^2} \end{aligned} \quad (\text{II.III.33})$$

Faisant l'hypothèse -à vérifier a posteriori- que $\sigma \ll \langle \hat{s} \rangle$, on montre sans peine que les termes de la deuxième ligne au second membre de (II.III.33) sont négligeables devant ceux de la première ligne. Il est d'autre part facile de montrer que les termes positifs l'emportent sur les termes négatifs de la dernière ligne : le rapport $\sigma / \langle \hat{s} \rangle$ est croissant. On majore sa variation en négligeant la dernière ligne négative et en remplaçant $N \langle \hat{s} \rangle / \sigma^2$ par sa valeur maximale, atteinte à l'instant origine; on obtient l'inégalité :

$$\left[\text{Log} \frac{\sigma^2}{\langle \hat{s} \rangle^2} \right]_t \leq \text{Log} \left[\frac{\sigma^2}{\langle \hat{s} \rangle^2} \right]_{t=t_1} + 2\Gamma \mu \int_{t_1}^t \langle \hat{s} \rangle dt + 2\Gamma \mu \left[\frac{N \langle \hat{s} \rangle}{\sigma^2} \right]_{t=t_1}^t \quad (\text{II.III.34})$$

Le maximum de l'émission étant atteint à $t = T_{SR} \text{Log} N$, on remplace t par cette valeur dans (II.III.34) et on évalue l'intégrale $\int_{t_1}^t \langle \hat{s} \rangle dt$ en tirant $\langle \hat{s} \rangle = \frac{N}{2} - \langle R^3 \rangle$ de (II.III.21) :

$$\int_{t_1}^{T_{SR} \text{Log} N} \langle \hat{s} \rangle dt \sim NT_{SR} \quad (\text{II.III.35})$$

On en déduit alors :

$$\text{Log} \frac{\sigma^2}{\langle \hat{s} \rangle^2} \leq \left[\text{Log} \frac{\sigma^2}{\langle \hat{s} \rangle^2} \right]_{t=t_1} + 2 + \frac{s_1}{\sigma_1^2} \text{Log} N \quad (\text{II.III.36})$$

soit encore :

$$\frac{\sigma}{\langle \hat{s} \rangle} \leq \frac{e\sigma_1}{s_1} \times N \frac{s_1}{2\sigma_1^2} \quad (\text{II.III.37})$$

où σ_1 et s_1 sont les variance et position initiales du paquet.

$$\text{Choisissant alors } \sigma_0^2 = (\text{Log } N) s_1, \quad (\text{II.III.38})$$

on obtient que :

$$\frac{\sigma}{\langle \hat{s} \rangle} \leq e^{3/2} \sqrt{\frac{\text{Log } N}{s_1}} \quad (\text{II.III.39})$$

ce qui montre que si s_1 est assez grand (devant $\text{Log } N$), le paquet de position initiale s_1 et de largeur initiale $[(\text{Log } N) s_1]^{1/2}$ doit garder un étalement relatif faible jusqu'au maximum d'émission. On en déduit d'ailleurs par l'absurde que tout paquet plus fin (de largeur initiale inférieure) ne pourra non plus s'étaler. En effet, le paquet que nous avons considéré peut être vu comme une superposition de paquets plus fins à coefficients tous positifs (il s'agit de paquets de probabilité). Si les paquets de cette superposition s'étaient, le paquet de largeur initiale σ_1 devrait nécessairement s'étaler davantage. En conclusion, il suffit que s_1 soit assez grand pour que l'on puisse construire des paquets classiques à étalement négligeable passant par s_1 à l'instant initial. Pour ces paquets $\hat{s} = \frac{N}{2} - R_3$ est un opérateur classique (à corrélation négligeable) et on peut montrer qu'il en est de même pour $\frac{N}{2} + R_3$.

Il est d'ailleurs possible de comprendre physiquement pourquoi un paquet étroit issu d'un état $s_1 \neq 0$ s'étale beaucoup moins que la solution issue de l'état $s_1 = 0$. L'équation (II.III.11) nous montre en effet que le premier photon superradiant émis à partir de l'état s_1 l'est en un temps T_{SR} / s_1 , le suivant en temps $T_{SR} / s_1 + 1$, etc..., les fluctuations de ces temps d'émission étant bien entendu du même ordre. Ajoutant ces fluctuations en valeur quadratique, on en déduit un ordre de grandeur de la dispersion du temps d'émission à partir de l'état s_1 :

$$\Delta T_D (s_1) = T_{SR} \left[\frac{1}{s_1} + \frac{1}{(s_1+1)^2} + \dots + \frac{1}{N} \right]^{1/2} = \frac{T_{SR}}{s_1^{1/2}} \quad (\text{II.III.40})$$

Cette fluctuation devient négligeable dès que s_1 est grand en valeur absolue, ce qui entraîne, bien entendu, qu'à t fixé, la dispersion des valeurs de s atteintes doit également rester très faible (ce résultat n'est bien sûr pas valable pour un système partant de $s_1 = 0$).

En résumé, on peut construire des paquets quasi-classiques pour lesquels il est possible de considérer alors R_3 comme un nombre et la solution

donnée au § précédent se trouve être valide. L'évolution de $\langle I \rangle$ et de $\langle R_3 \rangle$ est alors donnée par l'équations (II.III.19) et (II.III.21). La condition initiale fait bien sûr intervenir t_1 et s_1 et l'on a, dans (II.III.19) et (II.III.21) :

$$t_D - t_1 = T_{SR} (\text{Log } N - \text{Log } s_1) \quad (\text{II.III.41})$$

Cette solution en sécante hyperbolique est une trajectoire classique pour l'opérateur énergie. Elle implique que l'énergie du système atomique : $\frac{N}{2} + R_3$, ainsi que l'énergie du champ : $\frac{N}{2} - R_3$, sont toutes deux des quantités classiques dont la variance est négligeable.

b) Les superpositions d'états quasi-classiques

Nous allons maintenant résoudre l'équation de DICKE dans le cas où le système est complètement inversé à $t = 0$ (condition (II.III.3-a)). Pour cela, nous utiliserons les résultats des derniers paragraphes et nous procéderons en trois étapes.

- A $t = t_1$, pendant le démarrage de l'évolution, nous décomposerons la matrice densité ρ , dont l'expression exacte est connue (II.III.12), en "paquet" quasi-classique $\hat{\rho}_{cl,s}(t_1)$.
- Nous étudierons ensuite l'évolution de chaque paquet entre t_1 et t .
- Nous reconstituerons la matrice densité ρ en reassemblant les "paquets" $\hat{\rho}_{cl,s}(t)$.

Plaçons-nous donc à $t = t_1$ et décomposons la matrice densité ρ dans la base des $\hat{\rho}_{cl,s}(t_1)$. A cet instant, ρ a pour expression :

$$\rho(t_1) = \sum_s \rho_{ss}(t_1) \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right| \quad (\text{II.III.42})$$

où $\rho_{ss}(t_1)$ est donné par (II.III.12).

Il nous faut donc décomposer la distribution de probabilité $\rho_{ss}(t_1)$ (considérée comme fonction de s à t_1 fixé) (voir figure II.4), en une somme de distributions quasi-classiques $P_{s_1}(s)$ (voir figure II.6). Comme la largeur Δ de la distribution $P_{s_1}(s)$ est très petite devant celle de $\rho_{ss}(t)$, on a :

$$\rho(t_1) = \sum_{s_1} \rho_{s_1 s_1}(t) \hat{\rho}_{cl,s_1}(t) \quad (\text{II.III.43})$$

où $\hat{\rho}_{cl,s_1}$ est donné par (II.III.25) et obéit à (II.III.26).

En comparant les équations (II.III.42) et (II.III.43), nous voyons que nous avons représenté l'opérateur densité ρ à l'instant t_1 sur les deux bases $\left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right|$ et $\hat{\rho}_{cl,s}$ par les mêmes coefficients $\rho_{ss}(t)$. Cette approximation revient à négliger la largeur Δ des états quasi-classiques devant la largeur en s de ρ_{ss} qui est de l'ordre de $\langle s \rangle$.

Utilisons maintenant les résultats des paragraphes précédents pour calculer $\hat{\rho}_{cl,s_1}(t)$. $\hat{\rho}_{cl,s_1}(t)$ est l'état quasi-classique centré autour de la valeur moyenne atteinte par $\langle \hat{\rho} \rangle$ à l'instant t sur la trajectoire quasi-classique passant par s_1 à l'instant t_1 . Appelons $s(s_1, t_1, t)$ cette valeur moyenne :

$$s(s_1, t_1, t) = \frac{N}{2} - \langle R_3 \rangle \quad (\text{II.III.44})$$

où $\langle R_3 \rangle$ est donné par (II.III.21) et (II.III.41). On a alors :

$$\hat{\rho}_{cl,s_1}(t) = \sum_s P_{s(s_1, t_1, t)}(s) \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right| \quad (\text{II.III.45})$$

Les deux équations (II.III.44 et II.III.45) définissent complètement $\hat{\rho}_{cl,s_1}(t)$. L'équation d'évolution de la matrice densité ρ étant linéaire, on peut reconstituer la matrice densité ρ en resommant les "paquets" $\hat{\rho}_{cl,s_1}(t)$ et il vient de par (II.III.43) :

$$\rho(t) = \sum_{s_1} \rho_{s_1, s_1}(t_1) \hat{\rho}_{cl,s_1}(t) \quad (\text{II.III.46})$$

ce qui, avec (II.III.12) et (II.III.45), permet de déterminer $\rho(t)$. On obtient d'ailleurs une expression plus simple de $\rho(t)$ en remplaçant dans (II.III.46) la base des états $\hat{\rho}_{cl,s_1}(t)$ par celle des états $\left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s(s_1, t_1, t) \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s(s_1, t_1, t) \right|$,

ce qui revient à faire la transformation inverse de celle qui nous a permis de passer de (II.III.42) à (II.III.43) et qui est justifiée pour la même raison (Δ très petit). On a alors finalement l'expression implicite :

$$\rho(t) = \sum_{s_1} \rho_{s_1, s_1}(t_1) \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s(s_1, t_1, t) \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s(s_1, t_1, t) \right| \quad (\text{II.III.47})$$

où $s(s_1, t_1, t)$ est la fonction quasi-classique (II.III.44), et $\rho_{s_1, s_1}(t_1)$ la distribution exponentielle (II.III.12).

En remplaçant ces quantités par leur valeur, on obtient :

$$\rho(t) = \sum_s \rho_{ss}(t) \left| \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right\rangle \left\langle \frac{N}{2}, \frac{N}{2} - s \right|$$

$$\text{avec } \rho_{ss}(t) = \left(\frac{N}{N-s} \right)^2 e^{-t/T_{SR}} \times \exp \left[- \frac{Ns}{N-s} e^{-t/T_{SR}} \right] \quad (\text{II.III.48})$$

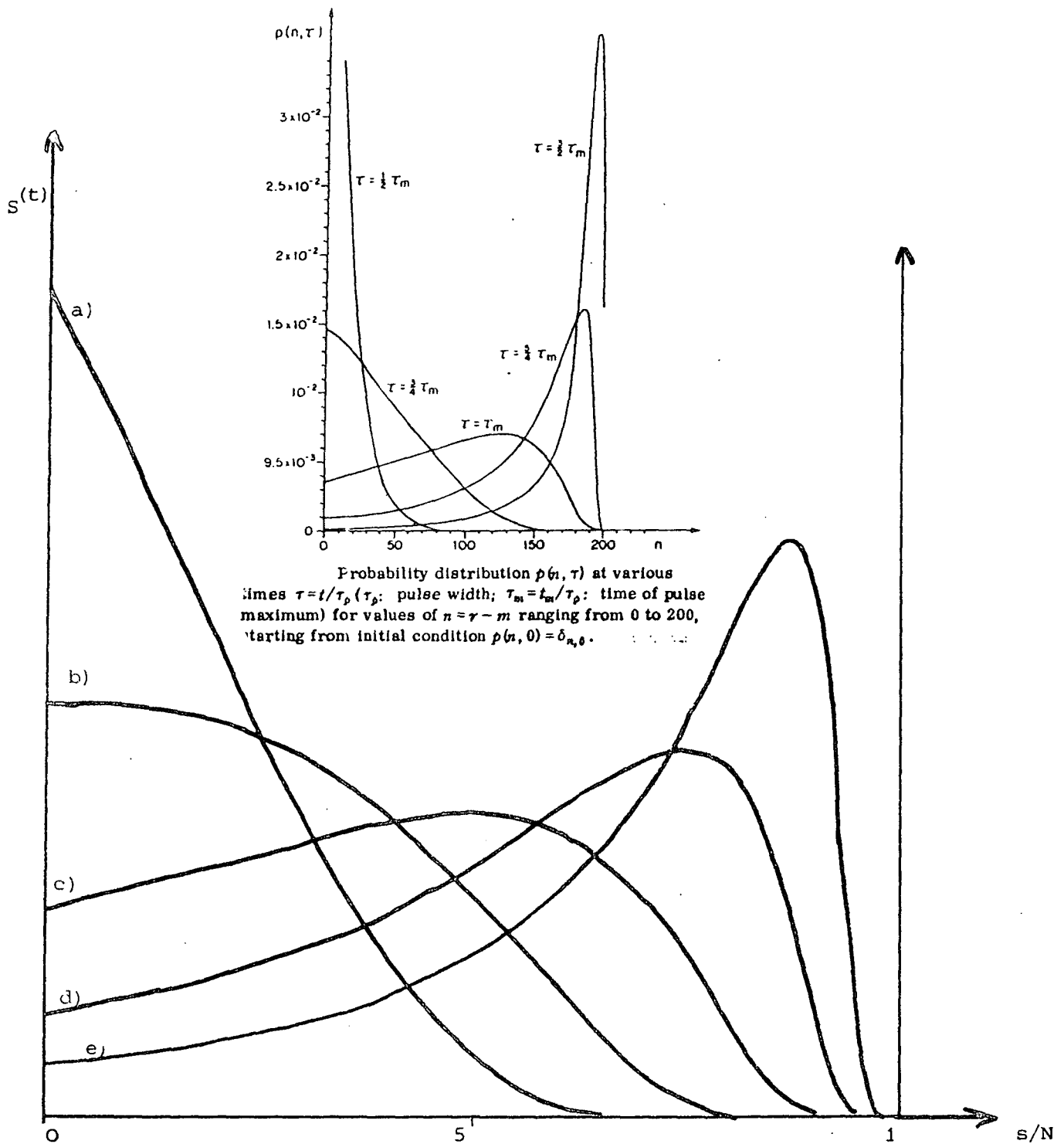


FIGURE II.7 : Allure de $\rho_{ss}(t)$ à t fixé

- a) $t = T_{SR} (\text{Log } N - 1,38)$
- b) $t = T_{SR} (\text{Log } N - 0,69)$
- c) $t = T_{SR} \text{Log } N$
- d) $t = T_{SR} (\text{Log } N + 0,69)$
- e) $t = T_{SR} (\text{Log } N + 1,38)$

En haut, en encart, réseau de courbes similaires, calculé dans un cas particulier : $N = 200$, en référence (49)

Notons que cette expression est valide lorsqu'il est possible de définir des trajectoires quasi-classiques, soit lorsque l'on a $s \gg 1$ et $N-s \gg 1$ simultanément (c'est-à-dire pour la majeure partie de l'évolution). L'équation (II.III.48) est une excellente approximation du développement série exact (II.III.6). Au démarrage de l'évolution (pour $s \ll N$), on peut vérifier que l'on retrouve l'expression approchée (II.III.12) de ρ_{ss} .

Cette expression simple de la matrice densité (II.III.48) est, à notre connaissance, originale. De nombreux auteurs ont étudié les propriétés statistiques de l'émission superradiante dans le cadre de l'approximation du champ moyen ⁽⁴⁸⁾ ⁽⁴⁹⁾ ⁽⁵⁰⁾, mais en général ces auteurs ⁽⁴⁸⁾ ⁽⁵⁰⁾ se sont intéressés aux valeurs moyennes des fonctions de corrélations des opérateurs atomiques ou du champ et non à la matrice densité.

Sur la figure II.7, nous avons représenté l'allure de $\rho_{ss}(t)$ donné par l'expression (II.III.48) considérée en fonction de s à t fixé pour différentes valeurs de t . Nous avons également représenté (en encart) le résultat du calcul de $\rho_{ss}(t)$ obtenu par intégration numérique directe des équations de DICKE (II.III.5) avec la condition initiale $\rho_{ss}(t=0) = \delta_s$. Cette intégration numérique n'est possible que si N n'est pas trop grand. Le calcul a été fait pour $N = 200$ ⁽⁴⁹⁾. On constate un excellent accord entre les deux calculs.

Connaissant la matrice densité $\rho(t)$, à tout instant, il est possible de calculer l'évolution de la valeur moyenne de n'importe quel opérateur ou fonction de corrélation à un temps. Par exemple, pour $\langle R_3 \rangle$ et $\langle I \rangle = \chi\omega_0 \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle$, il vient :

$$\langle R_3(t) \rangle = \sum_s \left(\frac{N}{2} - s \right) \rho_{ss}(t) \quad (\text{II.III.49})$$

$$\langle I(t) \rangle = \chi\omega_0 \sum_s (s+1)(N-s) \rho_{ss}(t) \quad (\text{II.III.50})$$

où $\rho_{ss}(t)$ est donné par l'équation (II.III.48).

Nous avons représenté sur la figure (II.5-b) $\langle I(t) \rangle$ calculé exactement par l'équation (II.III.50). Cette courbe est à comparer avec la sécante hyperbolique $\langle I(t) \rangle$ du calcul néo-classique approché de DICKE (fig. II.5-a) ⁽²³⁾. L'aire des deux courbes proportionnelle à N est la même, la sécante hyperbolique est plus étroite, elle a un maximum plus élevé et le maximum est très légèrement déplacé. Les deux courbes sont cependant d'allure voisine et le calcul néo-classique de DICKE n'est finalement pas si mauvais.

B. Interprétation physique des trajectoires classiques

1) Que mesure une expérience de superradiance ?

Les trajectoires quasi-classiques nous ont donc permis de donner l'expression de la matrice densité atomique $\rho(t)$. Ces trajectoires quasi-classiques sont bien plus que des intermédiaires de calcul, elles apparaissent naturellement pour décrire une expérience réelle et sont, au total, bien plus "physiques" que les valeurs moyennes d'opérateurs comme $\langle I \rangle$.

Pour le voir, imaginons, pour commencer, une expérience de fluorescence. Soit un atome à deux niveaux, et Γ la probabilité de transition de l'état excité vers le fondamental. A $t = 0$, l'atome est porté dans l'état excité et l'on observe le signal de fluorescence I . Le détecteur est supposé parfait. La valeur moyenne $\langle I(t) \rangle$ du signal de fluorescence attendu est (voir figure II.8-a) :

$$\langle I \rangle = N\omega_0 e^{-\Gamma t} \quad (\text{II.III.51})$$

Ce n'est cependant pas $\langle I \rangle$ que l'on observe directement, On observe en fait le photon émis sous la forme d'un pulse apparaissant à un instant t (voir figure II.7-b) avec la probabilité $P(t)$:

$$P(t) = e^{-\Gamma t} \quad (\text{II.III.52})$$

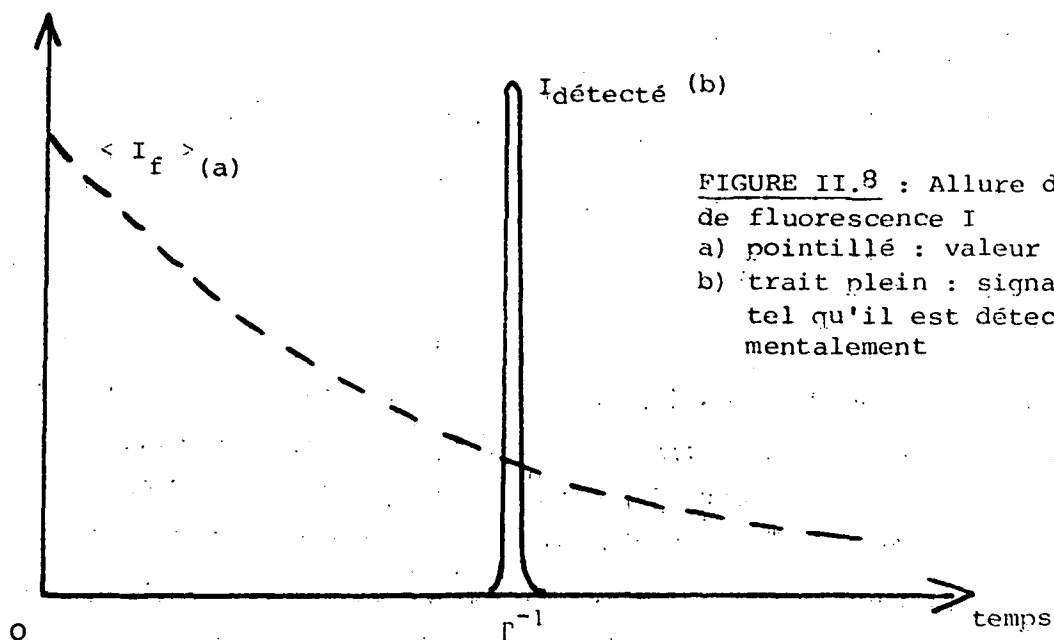


FIGURE II.8 : Allure du signal de fluorescence I
 a) pointillé : valeur moyenne
 b) trait plein : signal typique tel qu'il est détecté expérimentalement

La forme du signal physique détecté n'a donc rien à voir avec $\langle I_f \rangle$. Ce n'est qu'en répétant un grand nombre de fois l'expérience et en sommant les signaux détectés que l'on peut reconstruire statistiquement $\langle I_f \rangle$.

Dans le cas d'une expérience de superradiance, il en est de même et le signal détecté "en un seul coup" n'a a priori rien à voir avec $\langle I \rangle$ qui ne décrit que la moyenne d'un grand nombre d'expériences identiques. Nous allons voir qu'en fait ce signal mesuré en un coup correspond à une trajectoire quasi-classique. A $t = 0$, le système de N atomes est préparé dans un état complètement inversé. Le nombre de photons à détecter étant très grand, le détecteur n'est pas capable de détecter les photons un à un. On observe un signal superradiant analogique, continu, qui a la forme d'une impulsion (figure II.9) dont l'aire est proportionnelle à N .

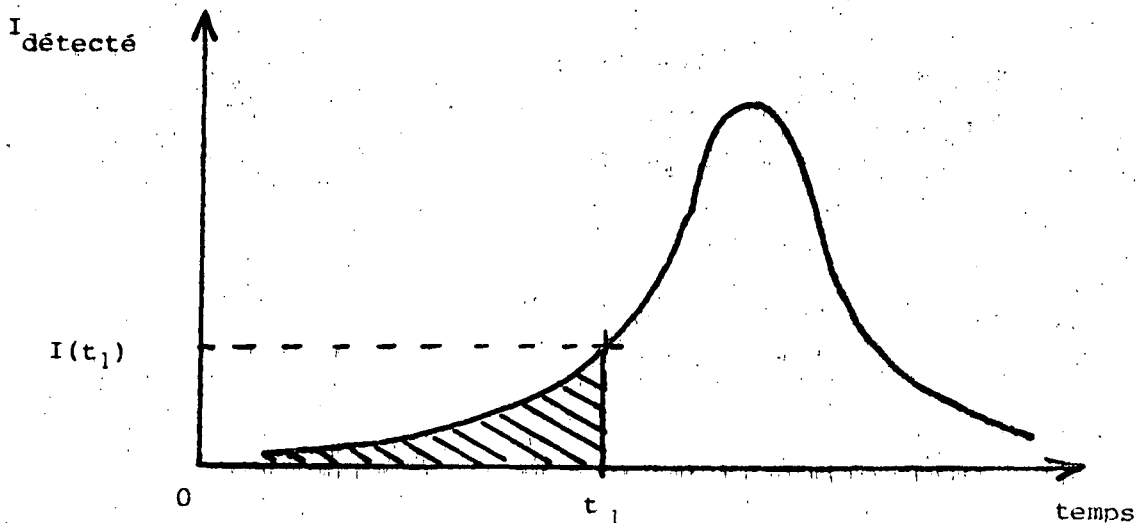


FIGURE II.9

Considérons que l'on fait, à $t = t_1$, une mesure du nombre total s_1 de photons émis. Pour cela, on peut soit remarquer que s_1 est proportionnel à l'aire du signal entre zéro et t_1 (partie hachurée de la figure II.8), soit utiliser le fait que s_1 est relié à l'intensité émise $I(t_1)$ à $t = t_1$ par :

$$I(t_1) = \Gamma \mu (s_1 + 1) (N - s_1) \quad (\text{II.III.52})$$

Après cette mesure, la distribution de probabilité $\rho_{ss}(t_1)$ se trouve être complètement différente, car il ne peut plus y avoir de dispersion autour

de s_1 . En toute rigueur, la mesure n'est pas parfaite et il reste une dispersion de l'ordre de Δ (avec $1 \ll \Delta$). Si le signal sort du bruit à $t = t_1$, on a de plus nécessairement :

$$\Delta \ll s_1 \quad (\text{II.III.53})$$

et les hypothèses (II.III.26) du paragraphe (II.A) se trouvent être vérifiées après la mesure. La matrice densité ρ devient alors quasi-classique et au total, on a :

$$\rho(t_1) \xrightarrow[\text{I} \rightarrow \text{I}_1]{\text{Mesure de l'opérateur I à l'instant } t_1} \hat{\rho}_{cl, s_1}(t_1) \quad (\text{II.III.54})$$

L'évolution ultérieure reste alors quasi-classique et la courbe représentant l'intensité émise par superradiance et que l'on détecte expérimentale : $I_{\text{détecté}}$ est une trajectoire classique de l'opérateur I. C'est une sécante hyperbolique passant par le point I_1 à l'instant t_1 :

$$I_{\text{détecté}}(t) = \gamma \omega_0 N^2 \frac{e^{-\frac{(t-t_D)}{T_{SR}}}}{[1 + e^{-\frac{(t-t_D)}{T_{SR}}}]^2} \quad (\text{II.III.55})$$

avec t_D tel que :

$$I_{\text{détecté}}(t_1) = I_1 \quad (\text{II.III.56})$$

En effectuant un grand nombre d'expériences, on obtient une dispersion des délais t_D dont la loi de probabilité t_D est déterminée simplement au paragraphe suivant. La moyenne des mesures redonne évidemment $\langle I \rangle$ calculé par l'expression (II.III.50). On montre ainsi que la superposition des solutions néo-classiques, présentée au § III.A comme un artifice de calcul, a une base physique.

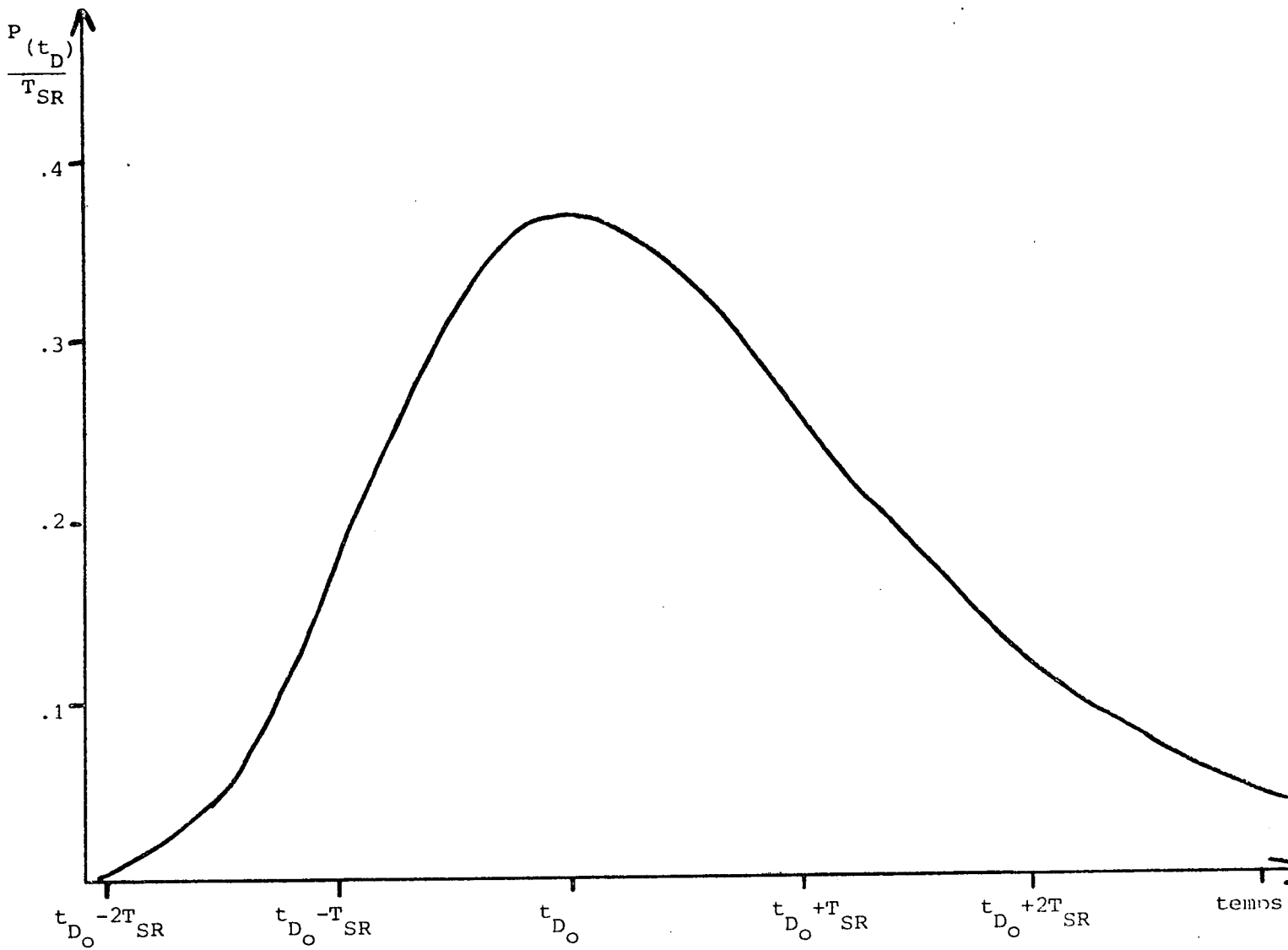


FIGURE II.10 : Allure de la loi de distribution de probabilité $P(t_D)$ du délai T_D à l'approximation du champ moyen (II.II.58) (à une homothétie et translation près, $P(t_D)$ représente également en première approximation la loi de probabilité du délai à l'approximation de propagation à une dimension (II.IV.36)

2) Les fluctuations dans le modèle "du champ moyen" : loi de probabilité $P(t_D)$ du délai

La formule (II.III.55) montre que tous les signaux détectés ont -dans le cadre du modèle du champ moyen- la même forme et se déduisent les uns des autres par une translation dans le temps ayant un caractère aléatoire, puisque dépendant du résultat de la mesure (réduction du paquet d'ondes) à l'instant t_1 . Pour obtenir la loi de probabilité $P(t_D)$, il suffit de considérer qu'au lieu de mesurer I à un instant donné t_1 , on mesure l'instant t'_1 où le signal détecté atteint la valeur $I_1 = \hbar\omega_0 \Gamma_\mu (s_1 + 1)(N - s_1)$. La probabilité $P(t'_1)dt'_1$ d'atteindre I_1 entre t'_1 et $t'_1 + dt'_1$ est alors :

$$P(t'_1) = \Gamma_\mu (s_1 + 1)(N - s_1) \rho_{s_1, s_1}(t'_1) \quad (\text{II.III.57})$$

En effet, $\rho_{s_1, s_1}(t'_1)$ est la probabilité d'avoir exactement s_1 photons émis, et $\Gamma_\mu (s_1 + 1)(N - s_1)$ le taux d'émission du $(s_1 + 1)^{\text{ème}}$ photon (on vérifie d'ailleurs que $\int_0^\infty dt'_1 P(t'_1) = 1$). En choisissant $s_1 = \frac{N}{2}$, on en déduit la probabilité $P(t_D) dt_D$ d'atteindre le maximum d'émission entre t_D et $t_D + dt_D$; il vient (équations (II.III.57) et (II.III.48)) :

$$P(t_D) = \frac{X}{T_{SR}} e^{-X} \quad (\text{II.III.58-a})$$

où $X = N e^{-t_D} / T_{SR} \quad (\text{II.III.58-b})$

Là encore, on vérifie sans peine que $\int_0^\infty dt_D P(t_D) = 1$. L'allure de $P(t_D)$ est donnée par la figure II.10. Le maximum est atteint pour $t_{D_0} = \text{Log } N$ et vaut $(e \cdot T_{SR})^{-1}$, la largeur à mi-hauteur étant $\approx 3,5 T_{SR}$. La variance du délai se déduit de (II.III.58) et vaut :

$$[\langle \hat{T}_D^2 \rangle - \langle \hat{T}_D \rangle^2]^{1/2} = 1,3 T_{SR} \quad (\text{II.III.59})$$

ce qui est en bon accord avec la référence ⁽⁵⁰⁾ ^(*).

(*) La référence ⁽⁵⁰⁾ étudie la statistique du délai de l'émission SR dans le modèle du champ moyen, mais ne donne pas l'expression analytique de $P(t_D)$.

3) Conclusion. Différentes expressions équivalentes des valeurs moyennes

Pour conclure, nous pouvons remarquer que nous sommes capables de calculer de différentes manières toute valeur moyenne ou fonction de corrélation à un temps.

Soit X un opérateur à un temps. On peut utiliser directement l'expression de la matrice densité ;

$$\langle X \rangle = \text{Tr} (\rho.X) \quad (\text{II.III.60-a})$$

où ρ est donné par (II.III.48).

Pour $\langle R_3 \rangle$ et $\langle I \rangle$ on a par exemple

$$\langle R_3 \rangle = \sum_s \left(\frac{N}{2} - s \right) \rho_{ss} \quad (\text{II.III.60-b})$$

$$\text{et } \langle I \rangle = \sum_s \Gamma(s+1)(N-s) \rho_{ss} \quad (\text{II.III.60-c})$$

Il peut être beaucoup plus commode de décomposer ρ sur la base des trajectoires classiques $\hat{\rho}_{cl}$. Ces trajectoires peuvent correspondre à une mesure de \hat{S} à un instant t_1 fixé (équation (II.III.61)) - mesure dont le résultat est s_1 avec la probabilité $\rho_{s_1, s_1}(t_1)$ donnée par l'équation (II.III.48)). Elles peuvent également correspondre à une mesure du délai entre l'instant zéro et l'instant t_D du maximum d'émission (équation (II.III.62)), la probabilité d'avoir un délai t_D étant donnée par l'équation (II.III.58). Pour l'opérateur X, on a alors :

$$\langle X \rangle = \sum_{s_1} \rho_{s_1, s_1}(t_1) \langle X_{cl, s_1, t_1} \rangle \quad (\text{II.III.61})$$

$$\langle X \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_D P(t_D) \langle X_{cl, t_D} \rangle \quad (\text{II.III.62})$$

où $\langle X_{cl, s_1, t_1} \rangle$ et $\langle X_{cl, t_D} \rangle$ représentent l'opérateur X réduit par la mesure correspondante. Notons que par décomposition en trajectoires classiques (équations (II.III.61) et (II.III.62)), il est possible de calculer directement les valeurs moyennes d'opérateurs à deux temps (ou plus) - comme $I(t) \times I(t-\tau)$ - ce que l'on ne peut faire à partir de la matrice densité (équation (II.III.60-a)).

C. Solution dans le point de vue d'HEISENBERG : problème de la phase du champ émis

Au cours du paragraphe III.A, nous avons résolu le problème de la superradiance à l'approximation du champ moyen dans le point de vue de SCHRÖDINGER en calculant l'expression de la matrice densité ρ . Pour ce faire, nous avons décomposé ρ en une somme de "paquets" quasi-classiques $\hat{\rho}_{S_1}$. Au paragraphe III.B, nous avons vu qu'à chaque terme de cette décomposition sont associées une énergie R_3 et une intensité émise I classique. Le calcul de ρ implique donc le calcul des observables associées à I et à R_3 . Comme R_3 est lié à $R_{k_0}^+ R_{k_0}^-$, le calcul de ρ implique donc également le calcul de l'observable associée au produit $R_{k_0}^+ \cdot R_{k_0}^-$. Comme aucun des opérateurs cités : I , R_3 ou $R_{k_0}^+ R_{k_0}^-$ ne fait intervenir la phase du champ émis, le calcul précédent ne permet pas de calculer des fonctions de corrélation à plusieurs temps faisant intervenir la phase comme $\langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle$.

Pour combler cette lacune et présenter un calcul complet et parallèle dans le point de vue d'HEISENBERG, nous allons étudier non plus l'observable correspondant au produit $R_{k_0}^+ R_{k_0}^-$, mais l'observable associée à $R_{k_0}^+$ seul. De façon plus précise, nous étudierons l'opérateur du point de vue d'HEISENBERG défini par :

$$\bar{\mathcal{R}}^+ = \sum_i \tilde{\mathcal{R}}_i^+ \quad (\text{II.III.63-a})$$

Nous introduirons également :

$$\bar{\mathcal{R}}^- = \sum_i \tilde{\mathcal{R}}_i^- \quad (\text{II.III.63-b})$$

et
$$\bar{\mathcal{R}}_3 = \sum_i \tilde{\mathcal{R}}_{3i} \quad (\text{II.III.63-c})$$

où $\tilde{\mathcal{R}}_i^+$ et $\tilde{\mathcal{R}}_{3i}$ sont définis par (II.II.75).

Comme au paragraphe III.A, nous distinguerons dans cette évolution deux étapes. La première étape où t est compris entre 0 et t_1 correspond au démarrage de l'évolution, c'est la période durant laquelle les équation d'évo-

lution des opérateurs sont linéaires, car $\bar{\mathcal{R}}_3$ peut être pris égal à $N/2$. La seconde période où t est supérieur à t_1 correspond à des signaux importants, grands devant le bruit initial qui a déclenché l'évolution. Ces deux périodes sont séparées par un processus de mesure à $t = t_1$. Nous verrons qu'après la mesure, $\bar{\mathcal{R}}^+$ devient une grandeur classique que nous noterons $\bar{\mathcal{R}}_{cl}^+(\alpha)$ et que nous appellerons "trajectoire" classique α (par analogie avec les "paquets" classiques $\hat{\rho}_{cl,s_1}$ définis précédemment au § III.A). Nous décomposerons $\bar{\mathcal{R}}^+$ sur ces "trajectoires" classiques. Nous généraliserons cette notion en décomposant tout opérateur \bar{X} du point de vue d'HEISENBERG en trajectoires classiques $\bar{X}_{cl}(\alpha)$. Nous calculerons ensuite la loi de probabilité associée à cette décomposition en trajectoires classiques. Ces trajectoires qui, cette fois, font intervenir la phase nous permettront de décrire l'évolution du système et de calculer les fonctions de corrélations de la forme $\langle E(t) \cdot E^*(t-\tau) \rangle$. Nous décrirons enfin la superradiance dans le modèle du vecteur de BLOCH et nous ferons le lien avec le modèle de DICKE.

1) Les trajectoires classiques pour la polarisation atomique

Le principe du calcul de la valeur moyenne $\langle \bar{\mathcal{R}}^+ \rangle$ de l'opérateur $\bar{\mathcal{R}}^+$ peut être obtenu par analogie avec le raisonnement que nous avons déjà effectué au § III.A dans le point de vue de SCHRODINGER.

A un instant t_1 suffisamment grand pour que le système ait déjà émis beaucoup de photons, mais assez petit pour que le régime linéaire des équations reste valable ($\langle \bar{\mathcal{R}}_3 \rangle \approx \frac{N}{2}$), on suppose effectuée une mesure de $\bar{\mathcal{R}}^+$. Appelons $P_{t_1}(\beta)$ la probabilité pour que cette mesure donne le résultat β (β est complexe).

Après cette mesure, on peut supposer que l'évolution du système est devenue classique. On a en effet, à partir de l'instant t_1

$$\langle \bar{\mathcal{R}}^+ \bar{\mathcal{R}}^- \rangle \gg N \quad (\text{car beaucoup de photons ont été émis}) \quad \text{et toujours} \\ [\bar{\mathcal{R}}^+, \bar{\mathcal{R}}^-] = N \quad \text{On peut donc négliger le fait que } \bar{\mathcal{R}}^+ \text{ et } \bar{\mathcal{R}}^-$$

ne commutent pas pour $t > t_1$ et écrire les équations d'évolution suivantes entre grandeurs classiques : \mathcal{R}_{cl}^+ et $\mathcal{R}_{3\,cl}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \overline{\mathcal{R}}_{cl}^{\pm} = \frac{1}{NT_{SR}} \overline{\mathcal{R}}_{cl}^{\pm} \overline{\mathcal{R}}_{3cl} \\ \frac{d}{dt} \overline{\mathcal{R}}_{3cl} = -\frac{1}{NT_{SR}} \overline{\mathcal{R}}_{cl}^+ \overline{\mathcal{R}}_{cl}^- \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II.III.64-a)} \\ \text{(II.III.64-b)} \end{array}$$

Nous appellerons $\overline{\mathcal{R}}_{cl}^{\pm}(\beta, t_1)$ et $\overline{\mathcal{R}}_{3cl}(\beta, t_1)$ la solution classique de ces équations correspondant à la condition $\overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(t_1) = \beta$ et nous lui donnerons le nom de "trajectoire classique".

Il est clair que la valeur moyenne (au sens de la mécanique quantique) de $\overline{\mathcal{R}}^+$, $\overline{\mathcal{R}}^-$ ou $\overline{\mathcal{R}}_3$ (et donc de n'importe quel opérateur \overline{X} fonction de ces opérateurs) s'obtiendra en pondérant les trajectoires classiques par leur probabilité de réalisation :

$$\langle \overline{\mathcal{R}}_3^{\pm} \rangle = \int P_{t_1}(\beta) \overline{\mathcal{R}}_{3cl}^{\pm}(\beta, t_1) d\beta \quad \text{(II.III.65)}$$

$$\langle \overline{X} \rangle = \int P_{t_1}(\beta) \overline{X}_{cl}(\beta, t_1) d\beta \quad \text{(II.III.66)}$$

et que l'on peut ainsi calculer a priori n'importe quelle valeur moyenne d'opérateur dans le point de vue d'HEISENBERG.

Il est possible d'ailleurs de donner une forme légèrement plus simple aux équations (II.III.65) et (II.III.66) en ne privilégiant plus un instant t_1 arbitraire. La solution des équations (II.III.64), qui passe par la valeur β à l'instant t_1 , possède en effet à l'instant $t = 0$ une valeur bien définie que nous appellerons α . α et β sont reliés entre eux par une relation très simple qui résulte de la possibilité de linéariser l'équation (II.III.64) entre 0 et t_1 . On a en effet $\overline{\mathcal{R}}_{3cl} = \frac{N}{2}$ et :

$$\frac{d}{dt} \overline{\mathcal{R}}_{cl}^+ = \frac{1}{2T_{SR}} \overline{\mathcal{R}}_{cl}^+ \quad \text{(II.III.67)}$$

$$\text{soit} \quad \overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(t_1) = \overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(0) e^{t_1/2T_{SR}} \quad \text{(II.III.68)}$$

ce qui montre que l'on a simplement :

$$\beta = \alpha e^{t_1/2T_{SR}} \quad \text{(II.III.69)}$$

En appelant $P(\alpha)$ la loi de probabilité de la variable α , qui dépend évidemment de la loi $P_{t_1}(\beta)$, on peut alors réécrire (II.III.65) et (II.III.66) sous la forme :

$$\langle \overline{\mathcal{R}}_{cl}^{\pm} \rangle = \int P(\alpha) \overline{\mathcal{R}}_{cl}^{\pm}(\alpha) d\alpha \quad (\text{II.III.70})$$

$$\langle \overline{X} \rangle = \int P(\alpha) \overline{X}_{cl}(\alpha) d\alpha \quad (\text{II.III.71})$$

Tout le problème consiste alors à déterminer la loi $P(\alpha)$, ce que nous faisons au paragraphe suivant.

2) Loi de probabilité des trajectoires classiques

Si β est le résultat de la mesure de $\overline{\mathcal{R}}^+$ à $t = t_1$, on déduit de (II.III.63) que :

$$\frac{N}{2} - \left(\frac{N^2}{4} - |\beta|^2 \right)^{1/2} = \frac{1}{N} |\beta|^2 \quad (\text{II.III.72})$$

doit être le résultat de la mesure de l'observable $\hat{S} = \frac{N}{2} - \overline{\mathcal{R}}_3$.

Or le point de vue de SCHRÖDINGER (§ III.A) nous a donné la loi de probabilité du résultat de la mesure de \hat{S} . Si on complète la mesure par la détermination de la phase de β , $\overline{\mathcal{R}}^+$ se trouve entièrement mesuré. Toutes les phases étant a priori équiprobables, on déduit alors de (II.III.12) et (II.III.72) la probabilité $P_{t_1}(|\beta|^2)$:

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{t_1}(|\beta|^2) = \frac{1}{\sqrt{\beta_1}} \exp - \left| \frac{\beta}{\beta_1} \right|^2 \end{array} \right. \quad (\text{II.III.73-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{avec } \beta_1 = \sqrt{N} \exp \frac{t_1}{2T_{SR}} \end{array} \right. \quad (\text{II.III.73-b})$$

$P(|\alpha|^2)$ s'en déduit alors en notant les identités :

$$P(|\alpha|^2) d\alpha = P_{t_1}(|\beta|^2) d|\beta|^2$$

$$\text{et } e^{t_1/2T_{SR}} d|\alpha|^2 = d|\beta|^2$$

On obtient simplement :

$$P(|\alpha|^2) = \frac{1}{\sqrt{N}} \exp - \frac{|\alpha|^2}{N} \text{ et } P(\alpha) = 2\alpha P(|\alpha|^2) \quad (\text{II.III.74})$$

et les différentes trajectoires classiques obéissent à une statistique gaussienne (48) (50).

3) Application des trajectoires classiques pour le calcul des fonctions de corrélation d'ordre normal $\langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle$

Les relations (II.III.71) et (II.III.74) permettent à présent de calculer n'importe quel produit des fonctions $\overline{\mathcal{R}}^+$ et $\overline{\mathcal{R}}^-$. On a par exemple :

$$\langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle = \int (\overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(\alpha))^l (\overline{\mathcal{R}}_{cl}^-(\alpha))^m \frac{1}{\pi\sqrt{N}} e^{-|\alpha|^2/N} d\alpha \quad (II.III.75)$$

Si on se limite aux temps courts où l'approximation linéaire est valable,

$\overline{\mathcal{R}}_{cl}^\pm(\alpha)$ est donné par (II.III.68) et on a simplement :

$$\langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle = \int \alpha^l (\alpha^*)^m e^{(\ell+m) \frac{t}{2T_{SR}}} \frac{1}{\pi\sqrt{N}} e^{-|\alpha|^2/N} d\alpha \quad (II.III.76)$$

Il est instructif de comparer ce résultat à celui que donne un calcul quantique direct de la même quantité. A l'approximation linéaire, $\overline{\mathcal{R}}_3$ se réduit à $N/2$ et l'équation d'évolution de $\overline{\mathcal{R}}^\pm$ devient :

$$\frac{d}{dt} \overline{\mathcal{R}}^\pm = \frac{1}{2T_{SR}} \overline{\mathcal{R}}^\pm \quad (II.III.77)$$

On en déduit alors immédiatement :

$$\frac{d}{dt} \langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle = \frac{\ell+m}{2T_{SR}} \langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle \quad (II.III.78)$$

avec la condition initiale à $t = 0$:

$$\begin{aligned} \langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle_{t=0} &= \langle \left(\sum_i \overline{\mathcal{R}}_i^+ \right)^\ell \left(\sum_j \overline{\mathcal{R}}_j^- \right)^m \rangle \\ &= \ell! \delta_{\ell m} \langle \left(\sum_i \overline{\mathcal{R}}_i^+ \overline{\mathcal{R}}_i^- \right)^\ell \rangle \\ &= N^\ell \ell! \delta_{\ell m} \end{aligned} \quad (II.III.79)$$

Il vient alors, en intégrant aux temps t courts :

$$\langle (\overline{\mathcal{R}}^+)^l (\overline{\mathcal{R}}^-)^m \rangle = N^\ell \ell! \delta_{\ell m} e^{(\ell+m) t/2T_{SR}} \quad (II.III.80)$$

L'identité des résultats (II.III.76) et (II.III.80) est alors immédiate en remarquant que l'on a :

$$\int \alpha^\ell (\alpha^*)^m e^{-|\alpha|^2} / N^2 \alpha d\alpha = N^\ell \delta_{\ell m} \quad (II.III.81)$$

Ce résultat, valable quels que soient ℓ et m , peut être considéré comme une autre démonstration de la loi de probabilité (II.III.74) (5).

4) La phase de la polarisation atomique et du champ rayonné

Les relations (II.III.76) et (II.III.80) montrent clairement que toute fonction de corrélation où $\ell \neq m$ (en particulier $\langle \mathcal{R}^+ \rangle$ ou $\langle \mathcal{R}^- \rangle$ qui correspond au cas $\ell = 1, m = 0$ ou $\ell = 0, m = 1$) a une valeur moyenne nulle. Ceci correspond au fait physique que la phase du champ (et donc de la polarisation atomique) est aléatoire. La formule (II.III.75) montre que la nullité de cette polarisation résulte de la sommation de toutes les trajectoires classiques dont les phases sont équiréparties de 0 à 2π . En d'autres termes, la polarisation (ou le champ) mesurée au cours d'une expérience a une phase bien définie, mais celle-ci varie aléatoirement d'une réalisation à l'autre de la même expérience.

Calculons par exemple la fonction de corrélation du champ. En faisant $\bar{X} = E(t) E^*(t-\tau)$ dans (II.III.71) et en rappelant la relation (II.III.15) entre E et $R_{k_0}^+$ (donc $\overline{\mathcal{R}^+}$), on obtient :

$$\langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle = \frac{N\omega_0}{NT_{SR}} \int \overline{\mathcal{R}_{cl}^+}(\alpha, t) \overline{\mathcal{R}_{cl}^-}(\alpha, t-\tau) P(\alpha) d\alpha \quad (II.III.82)$$

On remarque alors que le produit $\overline{\mathcal{R}_{cl}^+}(\alpha, t) \overline{\mathcal{R}_{cl}^-}(\alpha, t-\tau)$ ne dépend pas de la phase de α . Tout se passe donc pour le calcul de $\langle E(t) E^*(t-\tau) \rangle$ comme si la phase de l'émission était a priori arbitrairement fixée. Ceci montre bien que le champ émis est un champ cohérent (de phase aléatoire d'une réalisation à l'autre de la même expérience).

5) Le vecteur de Bloch et le "tipping angle"

Pour résoudre concrètement le problème de la superradiance dans le formalisme introduit ici, il nous reste à calculer l'évolution de $\overline{\mathcal{R}}_{3\text{cl}}^{\pm}(\alpha)$ pour des temps arbitraires et non plus seulement aux temps courts. Remarquons tout d'abord que l'équation (II.III.64) conserve la norme du vecteur de Bloch $\vec{B}^{(51)}$ de composantes :

$$\vec{B} = \begin{cases} B_{\text{transversal}} = \overline{\mathcal{R}}_{\text{cl}}^+(\alpha) = \frac{N}{2} \sin \theta \exp(i\phi) & \text{(II.III.83-a)} \\ B_{\text{longitudinal}} = \overline{\mathcal{R}}_{3\text{cl}}(\alpha) = \frac{N}{2} \cos \theta & \text{(II.III.83-b)} \end{cases}$$

\vec{B} est un vecteur de longueur $N/2$, de coordonnées cylindriques ϕ et θ . La coordonnée longitudinale correspond à l'axe Oz, la coordonnée transversale au plan complexe x, y (voir figure II.11).

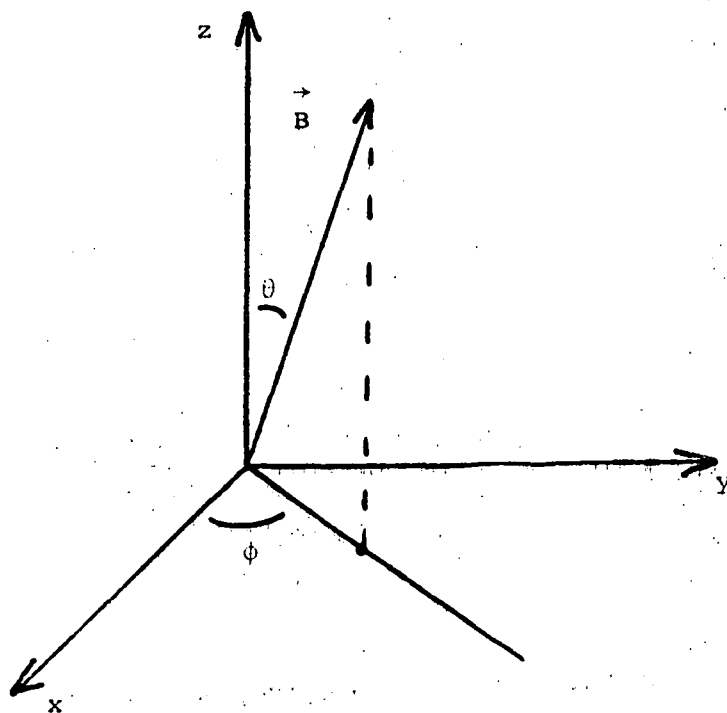


FIGURE II.11

l'équation d'évolution (II.III.64) devient alors :

$$\frac{d}{dt} \phi = 0 \quad (\text{II.III.84-a})$$

$$\frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{2T_{SR}} \sin \theta \quad (\text{II.III.84-b})$$

Cette équation est formellement identique à l'équation d'un pendule à amortissement critique. Il vient en intégrant (II.III.84-b) :

$$\frac{t}{2T_{SR}} = \text{Log} \left(\text{tg} \frac{\theta}{2} \right) - \text{Log} \left(\text{tg} \frac{\theta(t=0)}{2} \right) \quad (\text{II.III.85})$$

On en déduit alors $\overline{\mathcal{R}}_{cl}^{\pm}(\alpha)$ et $\overline{\mathcal{R}}_{3cl}(\alpha)$ par (II.III.83) ainsi que tout autre opérateur qui se décompose sur $\overline{\mathcal{R}}_3^{\pm}$. On peut alors vérifier que l'on retrouve bien l'expression (II.III.19) pour l'intensité $I_{cl}(\alpha) \propto \overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(\alpha) \overline{\mathcal{R}}_{cl}^-(\alpha)$.

Donnons à présent la loi de probabilité $p(\theta(t=0))$ d'avoir $\theta(t=0)$, loi qui se déduit de $P(\alpha)$. A $t = 0$, on a :

$$\overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(\alpha) = \alpha \quad (\text{II.III.86})$$

$$\text{et } \theta(t=0) = \frac{|\overline{\mathcal{R}}_{cl}^+(\alpha)|}{|\vec{B}|} = \frac{2|\alpha|}{N} \quad (\text{II.III.87})$$

La loi de probabilité $P(\theta(t=0))$ se déduit de (II.III.74), il vient :

$$P(|\theta(t=0)|) = \frac{1}{\theta_0^2} \exp\left(-\left(\frac{\theta}{\theta_0}\right)^2\right) \quad (\text{II.III.88-a})$$

$$\text{où } \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}} \quad (\text{II.III.88-b})$$

$\theta(t=0)$ est appelé le "tipping angle" ⁽¹⁵⁾ ⁽²¹⁾ ⁽¹⁴⁾. C'est l'angle que fait le vecteur de Bloch à $t = 0$ avec la direction Oz. Cet angle est une variable aléatoire gaussienne de variance $\theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ⁽⁴⁸⁾ ⁽⁵⁴⁾. C'est en donnant à cet angle une valeur non nulle à $t=0$ que l'on simule le bruit qui fait démarrer l'émission superradiante.

Le vecteur de Bloch \vec{B} n'est en fait rien d'autre que l'analogie classique du moment cinétique $J = N/2$ qui apparaît dans les équations de DICKE. Dans le cadre du modèle de DICKE, l'axe de quantification de J est

l'axe Oz, A t=0, $J_z = N/2$ est maximum et le vecteur \vec{J} est vertical. En fait, \vec{J} est un opérateur quantique et qui n'est vertical qu'en valeur moyenne. (\vec{J} fluctue autour de cette position moyenne verticale. On peut tenir compte de ces fluctuations en considérant que \vec{J} fait un petit angle θ avec la verticale. Pour évaluer l'ordre de grandeur de θ , il suffit alors de considérer que \vec{J} est classique, de composante sur z :

$$J_z = N/2 \quad (\text{II.III.89-a})$$

et de module :

$$|\vec{J}| = \left[\frac{N}{2} \left(\frac{N}{2} + 1 \right) \right]^{1/2} \quad (\text{II.III.89-b})$$

On en déduit la composante sur x et y par le théorème de Pythagore et la valeur de θ associée. On trouve bien alors que θ est de l'ordre de $2/\sqrt{N}$ (²¹) (⁴).

6) Conclusion

En décomposant les différents opérateurs en trajectoires classiques, il est possible de décrire exactement l'évolution du système. On connaît en effet la loi de probabilité associée aux diverses conditions initiales possibles (II.III.74), ainsi que les trajectoires classiques correspondantes (II.III.64). En sommant sur toutes ces trajectoires classiques, on peut calculer toute valeur moyenne d'opérateur (II.III.71). Cette méthode a été utilisée pour calculer les valeurs moyennes de toutes les fonctions de corrélations à un temps de $\overline{\mathcal{R}}^+$, $\overline{\mathcal{R}}^-$ et $\overline{\mathcal{R}}^3$ (⁴⁸). La connaissance de ces quantités peut permettre de déterminer la matrice densité. Un tel calcul est cependant inutile puisqu'il est possible de déterminer celle-ci directement (II.III.48). Le calcul des valeurs moyennes de fonctions de corrélations à plusieurs temps de la forme (I.21) est également possible et l'on peut ainsi entreprendre l'étude théorique de la statistique de l'émission superradiante dans le régime de comptage de photons. Notons enfin l'intérêt des trajectoires classiques en tant que telles, dans la mesure où elles représentent des réalisations possibles de l'évolution du système, réalisations que l'on observe expérimentalement.

IV - LA SOLUTION DU PROBLEME DE LA SUPERRADIANCE A L'APPROXIMATION DU MODELE DE PROPAGATION A UNE DIMENSION

Nous généraliserons ici les résultats du paragraphe précédent en tenant compte des effets de propagation le long d'une direction (Oz). Nous raisonnerons directement sur les opérateurs champ et polarisation atomique dans le point de vue de Heisenberg et non sur l'opérateur de densité, trop compliqué à calculer dans ce cas. Toutes les idées physiques développées dans le cadre de l'approximation du champ moyen sont comme nous allons le montrer directement transposables au cas où la propagation intervient : ici aussi, il est possible d'introduire des trajectoires quasi classiques obéissant à des conditions initiales aléatoires dont les lois de probabilité sont connues. Les grandeurs moyennes résultent alors de la sommation sur ces trajectoires, chacune d'entre elles étant pondérée par sa loi de probabilité. La complication liée à la propagation se manifeste cependant à priori à deux niveaux :

(i) les conditions aléatoires initiales varient évidemment dans l'espace d'un point à l'autre du milieu. Pour en tenir compte, nous serons alors amenés à décomposer le milieu en "tranche" perpendiculaire à l'axe du milieu émetteur (tranches de même abscisse z). La polarisation à l'instant $t = 0$ apparaît alors dans chaque tranche Z_i comme une variable aléatoire indépendante de la polarisation des autres tranches et il faut donc introduire une loi de probabilité à autant de variables qu'il y a de tranches (le résultat est heureusement peu sensible comme nous le rappelons plus loin au nombre de tranches. On prend pratiquement un nombre compatible avec l'intégration numérique des équations sur ordinateur).

(ii) Même si on adopte une condition initiale homogène dans tout le milieu (une seule tranche à $t = 0$), la trajectoire classique qui s'en déduit ne correspond plus à l'évolution d'un milieu homogène : au bout d'un certain temps, la polarisation commence à varier dans le milieu le long de Oz. Le système n'obéit plus à l'équation simple du pendule à amortissement critique établie au § précédent, mais à une équation du type Sine - Gordon décrivant le mouvement d'un pendule oscillant. Ces oscillations représentent physiquement les effets d'absorption et de réémission du champ le long de l'échantillon (effets de "ringings cohérents" liés à la propagation).

Des deux effets "inhomogènes" (i) et (ii) mentionnés ci-dessus, le 2e est le plus important. Glauber et al⁽⁵⁾ ont en effet montré que le comportement

du système superradiant était qualitativement très bien décrit par l'introduction de conditions initiales homogènes dans tout le milieu, la prise en compte de l'existence de plusieurs tranches de polarisation différente à $t=0$ ne modifiant que très légèrement la forme et la statistique des trajectoires classiques. Ce résultat est heureux, car il est possible de donner des expressions analytiques simples des trajectoires quasiclassiques correspondant à des conditions initiales homogènes, ce qui simplifie beaucoup l'analyse du problème,

Nous commencerons donc ce paragraphe par le rappel (§ IV A) du calcul des trajectoires classiques à une dimension dans le cas de conditions initiales homogènes (modèle classique de Feld de la superradiance⁽¹⁵⁾). Nous analyserons les différences essentielles entre ces trajectoires et les solutions en sécantes hyperboliques qui sont les trajectoires classiques correspondant au modèle du champ moyen de Dicke. Nous indiquerons ensuite (§ IV B) comment il faut décrire en toute rigueur les conditions initiales aléatoires de la superradiance et nous résumerons les résultats statistiques obtenus par Glauber et al⁽⁵⁾ sur les fluctuations de délai, d'intensité et de forme des pulsés superradiants. Nous donnerons alors (§ IV C) une analyse simplifiée de ces fluctuations en adoptant une condition initiale aléatoire homogène dans tout le milieu (comme le font par exemple Vrehe et al⁽⁵⁴⁾). Ceci revient à décrire la superradiance comme une superposition de trajectoires semi-classiques de Feld décrites au § IV A, avec des lois de probabilité analytiques dont nous indiquons l'expression. Bien que ce § IV reprenne essentiellement le point de vue des références⁽⁵⁾ et⁽⁵⁴⁾, il contient certain calculs analytiques originaux (en particulier au § IV C).

A - Trajectoires classiques à une dimension avec condition initiale homogène.

Rappelons la forme des équations d'évolution des enveloppes lentement variables \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{A} , formellement identiques aux équations de Bloch Maxwell (cf. (II-II-70))

$$\left(\frac{\delta}{\delta z} + \frac{1}{c} \frac{\delta}{\delta t} \right) \mathcal{E} = - \frac{i k_0}{2 \epsilon_0} \mathcal{P} \quad (\text{II-IV-1-a}), \text{Equation de Maxwell}$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{P} &= i \frac{|D_{+-}|^2}{\hbar} \mathcal{E}, \mathcal{N} & \text{(II-IV-1-b)} \\ \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{N} &= \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{P} - \mathcal{E} \mathcal{P}^+) & \text{(II-IV-1-c)} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{Equations de} \\ \text{Bloch} \end{array}$$

D'un point de vue semi classique, l'équation (II-IV-1a) n'est autre que la traduction pour les enveloppes \mathcal{E} et \mathcal{P} de l'équation de Maxwell⁽⁴⁶⁾

$$\vec{\text{rot}} \cdot \vec{\text{rot}} \cdot \vec{E} + c^{-2} \frac{\delta^2}{\delta t^2} \vec{E} = -\mu_0 \frac{\delta^2 \vec{P}}{\delta t^2} \quad \text{(II-IV-2)}$$

qui lie le champ électrique émis E au dipole émetteur P . Les équations (II-IV-1b) etc) sont les expressions dans le formalisme du vecteur de Bloch de composante "longitudinale" D_{+-} , \mathcal{N} et transversale \mathcal{P} , des équations d'évolution de la matrice densité atomique sous l'effet du champ classique d'enveloppe \mathcal{E} .

Introduisons les opérateurs

$$E^2 = \frac{1}{2} (\mathcal{E}^+ \mathcal{E} + \mathcal{E} \mathcal{E}^+) \quad \text{(II-IV-3a)}$$

$$P^2 = \frac{1}{2} (\mathcal{P}^+ \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{P}^+) \quad \text{(II-IV-3b)}$$

on obtient un système d'équations équivalent aux équations de Bloch - Maxwell (II-IV-1)

$$\left| \begin{aligned} \frac{\delta}{\delta t} (P^2 + |D_{+-}|^2 \mathcal{N}) &= 0 & \text{(II-IV-4a)} \\ \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{N} &= \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{P} - \mathcal{E} \mathcal{P}^+) & \text{(II-IV-4b)} \\ \frac{\delta}{\delta z} E^2 + \frac{1}{c} \frac{\delta}{\delta t} E^2 + \frac{\hbar k_0}{2\epsilon_0} \frac{\delta}{\delta t} \mathcal{N} &= 0 & \text{(II-IV-4c)} \end{aligned} \right.$$

L'interprétation physique de ces équations est également très simple. L'équation (II-IV-4a) traduit simplement la conservation de la norme du vecteur de Bloch (qui est voisine de $\mathcal{N}_0 = \mathcal{N}(t=0)$). En remarquant que \mathcal{E} et \mathcal{P} sont en quadrature, l'équation (II-IV-4b) traduit l'échange local d'énergie entre les atomes et le champ au point z . L'équation (II-IV-4c) traduit enfin la conservation globale de l'énergie du système atomes + champ : la variation dans un petit volume de l'énergie du système atomes + champ (termes en $\frac{\delta}{\delta t}$) se retrouve sous la forme du flux d'énergie électromagnétique qui traverse la surface de cet élément de volume (terme en $\frac{\delta}{\delta z}$).

L'approximation classique consiste à considérer dans les équations (II-IV-1) les différents opérateurs \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} comme des quantités classiques notées \mathcal{E}_{cl} , \mathcal{P}_{cl} et \mathcal{N}_{cl} . Bien entendu \mathcal{E} et \mathcal{P} font intervenir une phase qui est aléatoire. On a donc :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{E} \rangle &= 0 \\ \langle \mathcal{P} \rangle &= 0 \end{aligned} \quad \text{(II-IV-5)}$$

et le système ne peut démarrer. Pour simuler les fluctuations quantiques qui font démarrer le système il convient de fixer cette phase en donnant à \mathcal{P} une valeur initiale non nulle. En reprenant l'analogie du pendule développée au chapitre II, (§ III-C-5°), les fluctuations quantiques sont simulées en considérant que le vecteur de Bloch \vec{B} fait un petit angle θ avec la verticale. Dans le cas du modèle de Dicke, nous avons montré que la valeur typique de θ était $\theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}}$ (N nombre total d'atomes). Dans ces conditions \mathcal{P} a une valeur initiale non nulle (*) :

$$\mathcal{P}(z, t=0) = \mathcal{P}^+(z, t=0) = \frac{2}{\sqrt{N}} D_{+-} \mathcal{N}_0 \quad \text{(II-IV-6)}$$

(*) Il est à noter ici que la valeur θ_0 du "tipping angle" proposé initialement par Feld et al (15) qui est beaucoup plus petite que $\frac{2}{\sqrt{N}}$, est visiblement éronnée. Cette valeur éronnée de θ_0 a conduit à des délais différents pour les théories de Feld (15) et de Dicke généralisées à un milieu étendu (Bonifacio) (14). Avec $\theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}}$ ce désaccord disparaît. La mesure directe de l'ordre de grandeur de θ_0 (21) et (19) confirme par ailleurs la valeur attendue $\frac{2}{\sqrt{N}}$.

et l'évolution du système peut démarrer.

Pour résoudre (II-IV-1) faisons le changement de variables

$$\tau = t - z/c \quad (\text{II-IV-7})$$

on est ramené alors à (II-II-70) avec la condition initiale (II-IV-6) à $t=0$, équations que l'on peut résoudre numériquement.

$$\text{Si } \frac{c T_{SR}}{L} \gg 1 \quad (\text{II-IV-8})$$

(condition d'Arechi Courtens, voir ⁽³⁶⁾), la solution obtenue est la même que si la condition initiale était prise à $\tau=0$ et l'on peut résoudre indifféremment les équations (II-II-70) en t ou τ . Dans ce cas on peut simplifier grandement l'étude en posant

$$\mathcal{N} = + \mathcal{N}_0 \cos \theta \quad (\text{II-IV-8a})$$

$$\mathcal{P} = - i D_{+-} \mathcal{N}_0 \sin \theta \quad (\text{II-IV-8b})$$

(changement de variable analogue à celui fait au (III-C-5°) et illustré par la figure II-12)

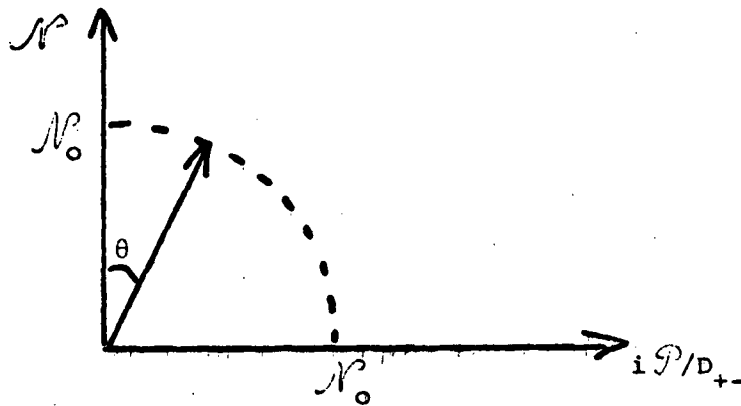


FIGURE II.12

Les équations de Bloch (II-II-70b, etc) conduisent alors à :

$$\frac{\delta \theta}{\delta \tau} = \frac{D_{+-}}{h} \varepsilon \quad (\text{II-IV-9})$$

et l'équation de Maxwell (II-II-70a) à :

$$\frac{\delta^2 \theta}{\delta(z/L) \delta(\tau/T_{SR})} = \sin \theta \quad (\text{II-IV-10})$$

avec la condition initiale à $\tau = 0$ issue de (II-IV-6)

$$\theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}} \quad (\text{II-IV-6})$$

Si l'on pose $q = 2 \left(\frac{z}{L} - \frac{\tau}{T_{SR}} \right)^{1/2}$ (II-IV-11)

et $Y(q) = \theta(z, \tau)$ (II-IV-12)

il vient $Y'' + Y'/q - \sin Y = 0$ (II-IV-13)

avec la condition initiale $Y(0) = \theta_0$ (II-IV-14a)

$$Y'(0) = 0 \quad (\text{II-IV-14b})$$

On voit immédiatement que cette équation a pour solution à $q = +\infty$

$$Y(+\infty) = \Pi \quad (\text{II-IV-15})$$

Cela signifie qu'à $t = +\infty$ pour $z \neq 0$, on a

$$\theta_{(+\infty)} = \Pi \quad (\text{II-IV-16})$$

et le vecteur de Bloch est vertical orienté vers le bas. L'évolution ne cesse donc que quand toute l'énergie a été émise (position d'équilibre stable), et que tous les atomes ont transité vers l'état final. On dit alors que le système a émis un pulse Π .

Pour étudier le démarrage de l'évolution quand $\theta \ll 1$, on peut remplacer $\sin \theta$ par θ dans (II-IV-13) et l'on obtient :

$$Y'' + Y'/q - Y = 0 \quad (\text{II-IV-17})$$

dont la solution est :

$$Y(q) = J_0(iq) \quad (\text{II-IV-18})$$

(où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre 0)

ce qui conduit pour $\theta(\tau, L)$ à :

$$\theta(\tau, L) = \theta_0 \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\tau}{T_{SR}} \right)^n \quad (\text{II-IV-19})$$

Cette série converge très vite et se calcule directement.

On peut évaluer le délai τ_D en considérant que

$$\theta(\tau_D, L) = 1 \quad (\text{II-IV-20})$$

Dans ce cas τ_D est donné plus simplement par la loi approchée ⁽⁵⁴⁾

$$\tau_D \approx \frac{T_{SR}}{4} \left(\text{Log} (\sqrt{2\pi N}) \right)^2 \quad (\text{II-IV-21})$$

Nous avons représenté sur la figure (II-13) en fonction de N les délais obtenus par (II-IV-19 et 20) (figure(II-13-a)), par la loi approchée (II-IV-21) (figure II-13-b) et par intégration numérique directe de (II-IV-17) (figure II-13-c). A titre de comparaison nous avons représenté également le délai $\tau_D = T_{SR} \text{Log} N$ du cas de Dicke (figure II-13-d). Dans un cas expérimental typique ($N \sim 10^8$) les délais du modèle à une dimension et du modèle de Dicke sont du même ordre (30 et 15 T_{SR} respectivement).

La figure II.14 représente, en fonction du temps, l'intensité émise $I(t)$. $I(t)$ est obtenue en intégrant numériquement l'équation (II.IV.17) pour $N = 10^8$ atomes.

Dans le cas du modèle à une direction (figure II.14), l'émission se fait sous forme de lobes successifs appelés généralement "ringings cohérents" ⁽⁵³⁾. L'importance de ces "ringings" cohérents dépend du nombre d'atomes ou plutôt du "tipping angle" θ_0 choisi. Nous avons représenté sur la figure II.15 la hauteur du premier et du deuxième lobe en fonction de $(\theta_0)^{-1}$. On voit, sur la figure, que plus θ_0 est petit, plus les "ringings" sont importants ; la hauteur du premier lobe diminue alors que le rapport des hauteurs des premier et deuxième lobes augmente.

Notons que ces "ringings" qui résultent de l'intégration numérique de l'équation (II-IV-13) ont une signification physique simple. Les vecteurs de Bloch des différentes classes d'atomes d'abscisses z différents, évoluent exactement de la même façon mais à des vitesses différentes proportionnelles à z (à cause du changement de variable $q = 2(z\tau)^{1/2}$),

Etudions ce qui se passe pour les atomes situés à l'extrémité $z=L$. Pour ces atomes l'équation (II-IV-10) devient :

$$\frac{d}{d\tau} \theta(z=L) = \frac{1}{L} \int_0^L dz \sin \theta(z, t) \quad (\text{II-IV-22})$$

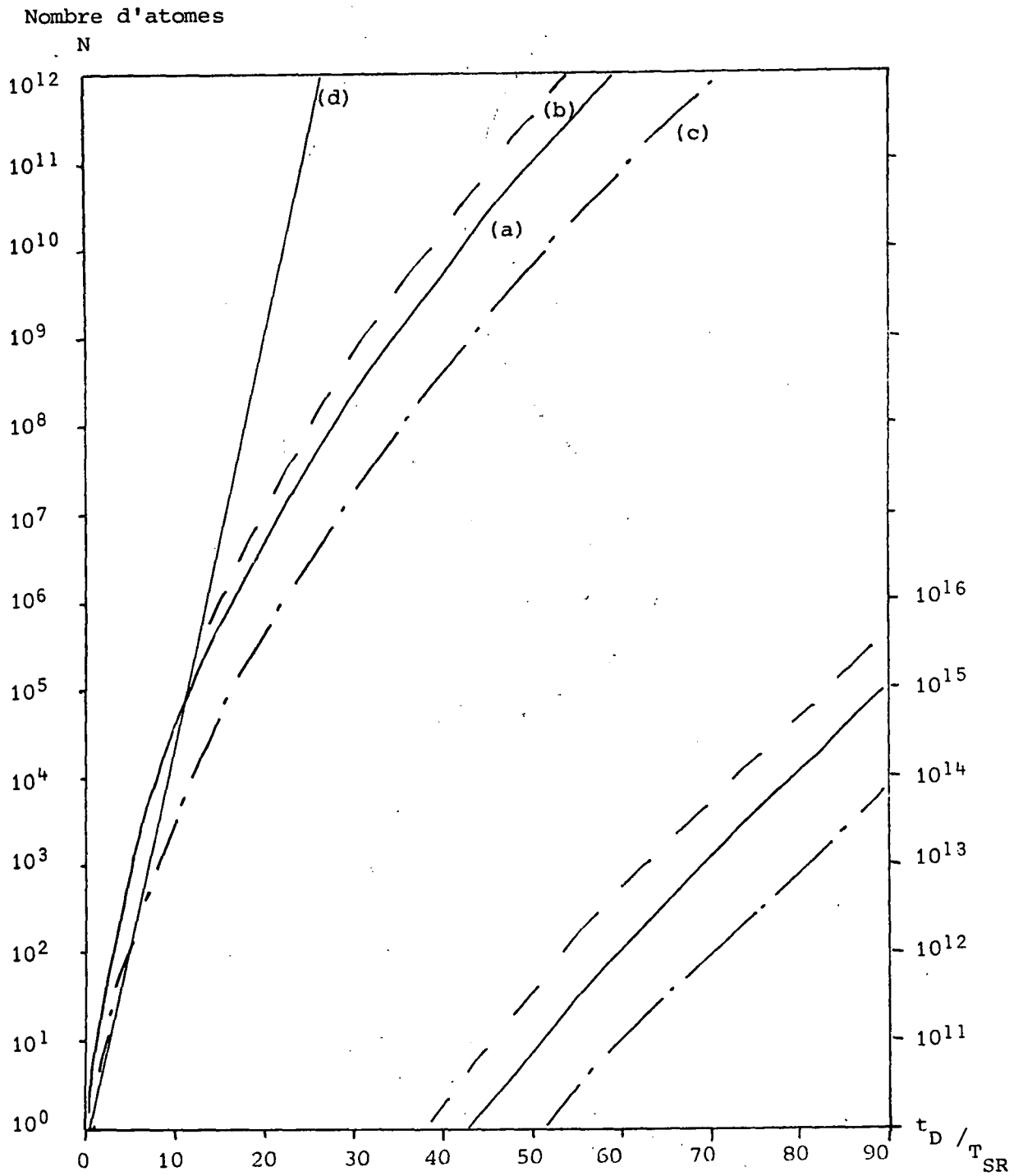


FIGURE II.13 : Délai du pulse superradiant

(a) $\theta_0 = \sum_n \frac{1}{(n!)^2} \left(\frac{\tau_D}{T_{SR}} \right)^n = 1$ (—————)

(b) $\tau_D = \frac{T_{SR}}{4} (\text{Log } \sqrt{2\pi N})^2$ (- - - - -)

(c) Sine-Gordon (- . - . -)

(d) $\tau_D = T_{SR} \text{Log } N$ (—————)

Figure II 14

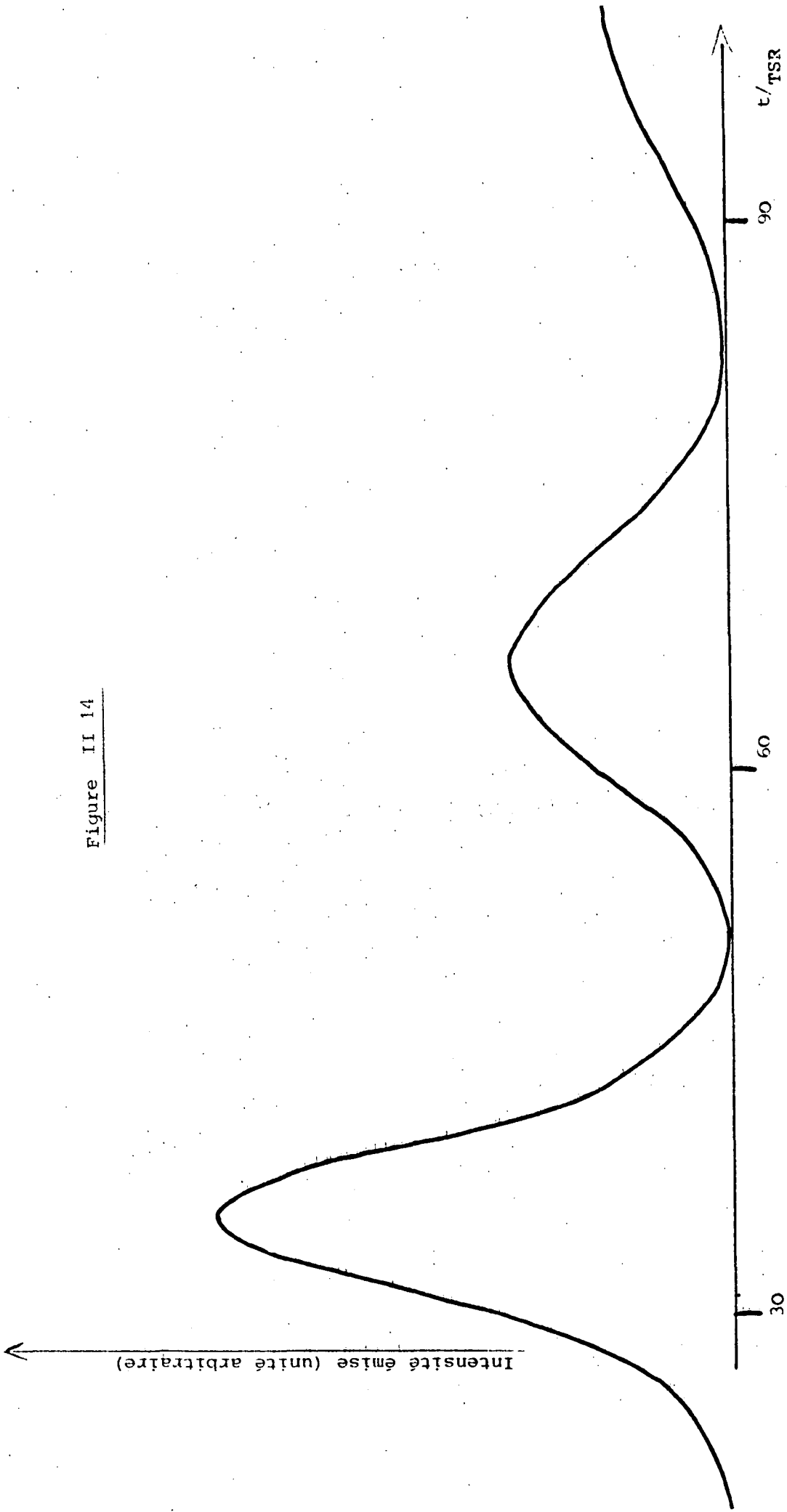


Figure II 14

Au début de l'évolution $\theta(z=L)$ se met à augmenter suivant la loi (II-IV-19). L'évolution se poursuit jusqu'au moment où $\theta(z=L) = \pi$. A cet instant les atomes de l'extrémité $z = L$ ont "basculé" et sont tous dans l'état final. Pour $z < L$ l'évolution a été plus lente et $\theta(z < L)$ reste inférieur à π . Le deuxième membre de l'équation (II-IV-22) est alors positif et l'évolution de $\theta(z=L)$ se poursuit au delà de $\theta = \pi$. Physiquement cela signifie que les atomes situés à l'extrémité ($z = L$) réabsorbent le rayonnement émis par les atomes qui précèdent ($z < L$). Le vecteur de Bloch des atomes de l'extrémité $z = L$ se met alors à osciller autour de la position d'équilibre stable $\theta = \pi$ qu'il finit bien sûr par atteindre puisque $\theta(+\infty) = \pi$ (cf. II-IV-16).

Ces oscillations de $\theta(z=L)$ autour de la position $\theta = \pi$ donnent alors naissance aux "ringings" cohérents. Comme $\theta(z=L)$ oscille autour de π , l'amplitude du champ émis $\mathcal{E}(z=L)$ qui est proportionnelle à $\frac{d\theta}{dt}$ (cf. II-IV-9) oscille en changeant de signe. L'émission se fait sous forme de lobes, deux lobes successifs correspondants à des amplitudes \mathcal{E} de signe opposés.

B - "Les conditions initiales" et leur loi de probabilité dans le cas du modèle de propagation à une dimension : Propriétés statistiques de l'émission superradiante .

1° - Décomposition du milieu en "tranches"

a) Décomposition du milieu en "tranches" de même abscisse :

Considérons que le milieu est découpé en I tranches d'abscisse z

$$(i-1) \frac{L}{I} < z < i \frac{L}{I} \quad \text{(II-IV-24)}$$

où $i = 1, \dots, I$ est l'indice de la tranche.

On peut alors définir les opérateurs somme par tranche $\overline{R}_3^\pm(i)$ où i est l'indice de la tranche :

$$\overline{R}^\pm(i) = \sum_{j \text{ de la "tranche" } i} \tilde{R}_j^\pm \quad \text{(II-IV-25a)}$$

$$\overline{R}_3(i) = \sum_{j \text{ de la "tranche" } i} \tilde{R}_{3,j} \quad \text{(II-IV-25b)}$$

où \tilde{R}_i^\pm et \tilde{R}_{3i} sont définis par (II.II.75).

Les équations d'évolution (II-II-74) de \overline{R}_j^+ et de $\overline{R}_{3,j}$ et qui sont analogues aux équations de Bloch Maxwell, deviennent alors :

$$\frac{d}{d\tau} \overline{R}^+(i) = \frac{2}{N \text{ TSR}} \left(\sum_{i < j} \overline{R}^+(i) \overline{R}_3(j) + \frac{1}{2} \overline{R}^+(i) \overline{R}_3(i) \right) \quad (\text{II-IV-26a})$$

$$\frac{d}{d\tau} \overline{R}^-(i) = \frac{2}{N \text{ TSR}} \left(\sum_{i < j} \overline{R}_3(j) \overline{R}^-(i) + \frac{1}{2} \overline{R}_3(i) \overline{R}^-(i) \right) \quad (\text{II-IV-26b})$$

$$\frac{d}{d\tau} \overline{R}_3(i) = - \frac{1}{N \text{ TSR}} \sum_{i,j} \overline{R}^+(i) \overline{R}^-(j) \quad (\text{II-IV-26c})$$

Notons ici que cette décomposition en tranche n'a rien d'artificiel et que l'on fait ce découpage (même si on ne le dit pas) pour résoudre numériquement les équations de Bloch Maxwell. Pour étudier le démarrage de la superradiance de façon rigoureuse, il faut donc faire appel à ces opérateurs par tranche. On pourra alors déterminer les conditions initiales à utiliser dans une intégration numérique.

2° - La mesure à $t = t_1$; les trajectoires classiques

Considérons qu'à $t = t_1$ on fasse une mesure de tous les $\overline{R}^+(i)$. t_1 est choisi de façon à ce que le nombre d'atomes ayant superradié dans chaque tranche soit grand devant un et petit devant le nombre d'atomes restant dans l'état initial (dans cette même tranche). Si le nombre d'atomes total est grand, le nombre d'atomes par tranches reste grand et il est toujours possible de satisfaire à cette condition.

Après la mesure, $\overline{R}^+(i)$ est classique. Il en est de même pour $\overline{R}_3(j)$. Ceci est vrai comme nous l'avons vu parce que l'on peut négliger à $t = t_1$ les commutateurs de $\overline{R}^+(i)$ et $\overline{R}^-(j)$ devant les produits correspondants. En décomposant un opérateur X en un produit de $\overline{R}^+(i)$, $\overline{R}^-(j)$ et $\overline{R}_3(k)$ on voit que X devient classique. Nous noterons $X_{cl}(\alpha)$ l'opérateur X réduit par la mesure (postulat de réduction du paquet d'ondes). L'indice $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_I\}$ caractérise ici l'état initial à $t = 0$ de $\overline{R}^+(i)$ dans chaque tranche i . On a alors :

$$\overline{R}_{cl}^+(\alpha, i, t=0) = \alpha_i \quad (\text{II-IV-27a})$$

$$\overline{R}_{cl}^-(\alpha, i, t=0) = \alpha_i^* \quad (\text{II-IV-27b})$$

$$\overline{R}_{3,cl}(\alpha, i, t=0) \simeq N/2I \quad (\text{II-IV-27c})$$

qui conduit après intégration des équations d'évolution (II-IV-26) réécrites pour les variables classiques $\overline{R}_{3cl}^{\pm}(\alpha)$ à $t = t_1$

$$\overline{R}_{cl}^{\pm}(\alpha, t=t_1) = \beta_i \quad (\text{II-IV-28})$$

où β_i est le résultat de la mesure de $\overline{R}^{\pm}(i)$ à $t=t_1$. On peut donc décomposer tout opérateur X en trajectoires classiques $X(\alpha)$ correspondant à tous les résultats de

$$\text{mesure, } X = \int d\alpha P(\alpha) X(\alpha) \quad (\text{II-IV-29})$$

$P(\alpha)$ est ici la loi de probabilité associée à la trajectoire α .

3° - La loi de probabilité appliquée à la trajectoire α

La loi de probabilité $P(\alpha)$ se déduit simplement par généralisation des résultats obtenus à l'approximation du champ moyen. En effet, la probabilité $P_i(\alpha_i)$ d'avoir $\overline{R}^{\pm}(i) = \alpha_i$ à $t=0$ est donnée par l'équation (II-II-74) en remplaçant N par $n = N/I$ (car il y a $n = N/I$ atomes dans la tranche).

il vient :

$$P_i(|\alpha_i|^2) = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} \exp \frac{-|\alpha_i|^2}{n} \quad (\text{II-IV-30})$$

$$\text{On a alors } P(\alpha) = \prod_i P_i(\alpha_i) \quad (\text{II-IV-31})$$

Au total dans le cas d'un milieu étendu à une dimension, on simulera les fluctuations quantiques du bruit d'émission spontanée en faisant démarrer les équations de Bloch Maxwell par une polarisation aléatoire suivant la même loi qu'à l'approximation du champ moyen (II-II-74) en remplaçant le nombre total d'atomes N par le nombre d'atomes par tranche. Cela revient en quelque sorte à associer à chaque atome un dipole classique de module égal à D_{+} et de phase aléatoire d'un atome à l'autre. En sommant sur les n atomes de la tranche on se retrouve alors (II-IV-30). En terme de vecteur de Bloch \vec{B}_i de chaque tranche, cela signifie que \vec{B}_i fluctue en direction à $t=0$. Les coordonnées angulaires θ_i et ψ_i de \vec{B}_i sont des variables aléatoires. La phase initiale $\psi_i(t=0)$ est équiprobable, alors que le "tipping angle" dans chaque tranche $\theta_i(t=0)$ suit la loi de probabilité.

$$P(\theta_i(t=0)) = \frac{1}{\pi \theta_0} \exp -\left(\frac{\theta_i}{\theta_0}\right)^2 \quad (\text{II-IV-32a})$$

$$\text{où } \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{n}} \quad (\text{II-IV-32b})$$

Chaque courbe obtenue alors par intégration numérique des équations de Bloch Maxwell est une trajectoire classique qui correspond à une réalisation possible de l'expérience. Une réalisation typique est obtenue néanmoins en considérant :

$$\left| \begin{array}{l} \psi_i = 0 \\ \theta_i = \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(II-IV-33a)} \\ \text{(II-IV-33b)} \end{array}$$

c'est la trajectoire étudiée au (§ IV-A). Pour faire une étude plus complète, il faut tenir compte des fluctuations entre ces diverses réalisations possibles en étudiant les propriétés statistiques de la superradiance.

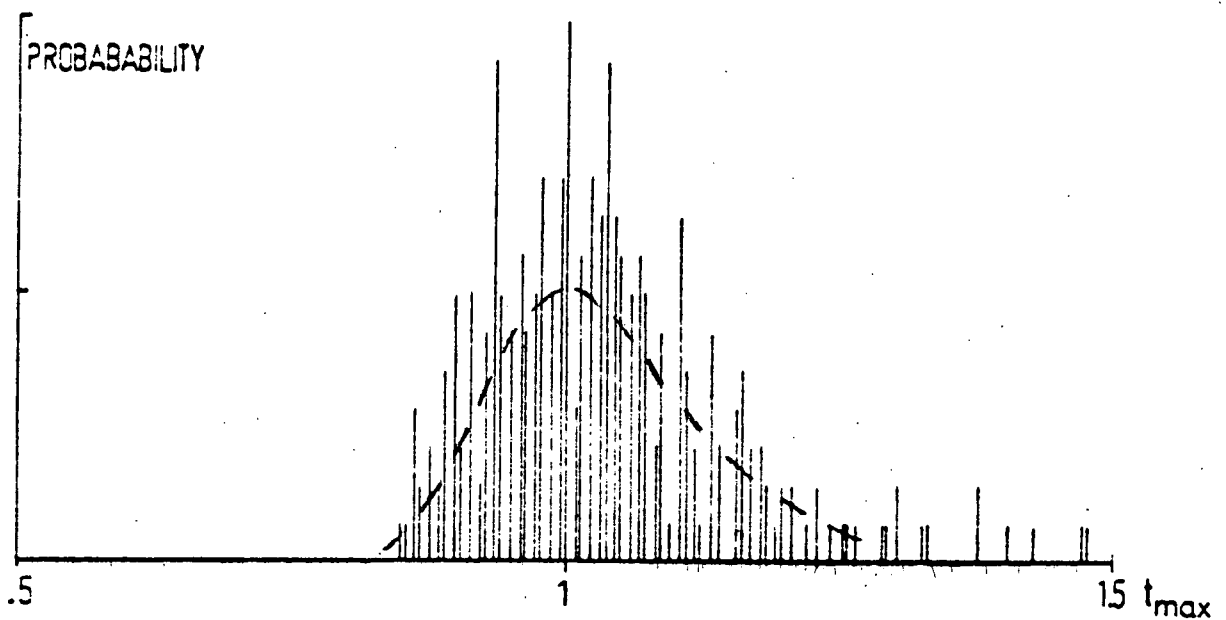
4° - Propriétés statistiques de l'émission superradiante (rappels des résultats de Glauber et al. (5))

Nous avons vu que pour décrire les fluctuations quantiques du démarrage de la superradiance il fallait résoudre les équations de Bloch avec, à $t=0$, une polarisation initiale aléatoire d'un point à l'autre. Nous allons ici rappeler les résultats obtenus par Glauber et al. (5).

La figure (II-16-a) représente l'histogramme des délais t_D (t_{\max} sur la figure extraite de (5)) du premier maximum correspondant à un ensemble de 150 trajectoires classiques. On notera la dissymétrie de cette courbe. La variance relative du délai est ici de 12%. Outre ces fluctuations du délai, on observe également des fluctuations de la forme du pulse et en particulier de sa hauteur (variance relative de l'ordre de 18%) (5).

5° - Calcul simplifié de l'émission superradiante. Démarrage sur une polarisation aléatoire homogène dans tout le milieu.

Nous allons comparer ici aux résultats du paragraphe précédent ceux que l'on peut obtenir à l'aide d'un modèle simple dans lequel on envisagera que la polarisation initiale reste uniforme le long de l'échantillon. On peut alors considérer qu'un seul paramètre varie : l'angle $\theta(t=0)$ du vecteur de Bloch. C'est le point de vue adopté par Vreken et al. (54). Nous allons voir, que dans ce cas, il est possible de calculer analytiquement la forme des histogrammes.



Distribution of delay times of first intensity maxima within an ensemble of 150 trajectories calculated by using the random-number realization of the initial polarization; the time is normalized to the delay time of the mean intensity; again, $\alpha = .3$, $N = 4 \times 10^9$.

FIGURE II.16 : a) histogramme des délais (traits verticaux) obtenu en intégrant numériquement 150 trajectoires classiques ⁽⁵⁾ (voir légende ci-dessus)
 b) loi de probabilité du délai (courbe en pointillé) obtenue à partir de (II.IV.36) (à noter que la courbe ici tracée est homothétique de celle représentée sur la figure II.10).

Etudions par exemple les fluctuations du délai. Si l'on considère qu'à N fixé, $\theta(t=0)$ fluctue suivant (II-III-88), le délai t_D du pulse superradiant est donné par une loi qui se déduit de (II-IV-21) en remplaçant N par $2\theta^{-2}(t=0)$

$$\theta_0 = 2/\sqrt{N} : \quad t_D = \frac{T_{SR}}{4} \left(\text{Log}(\sqrt{8\pi}/\theta(t=0)) \right)^2 \quad (\text{II-IV-34})$$

Comme t_D varie logarithmiquement en fonction de $\theta(t=0)$ et que $\theta(t=0)$ reste du même ordre que θ_0 , il vient :

$$\begin{aligned} t_D &\approx t_D(\theta_0) \text{Log}\left(\frac{\theta(t=0)}{\theta_0}\right) \frac{dt_D(\theta(t=0))}{d(\text{Log } \theta(t=0))} \\ &\approx \frac{T_{SR}}{2} (\text{Log } \sqrt{2\pi N}) (\text{Log}\left(\frac{\theta(t=0)}{\theta_0}\right)) + \text{cte} \quad (\text{II-IV-35}) \end{aligned}$$

La loi de probabilité du délai $P(t_D)$ se déduit de (II-III-88) et de (II-IV-35), il vient :

$$P(t_D - t_D(\theta_0)) = e^{-t/\Delta} \exp(-e^{-t/\Delta}) \quad (\text{II-IV-36})$$

où
$$\Delta = \frac{T_{SR}}{4} \text{Log } \sqrt{2\pi N}$$

On remarque que la loi de probabilité du délai est la même que dans le cas de l'approximation du champ moyen à condition de remplacer T_{SR} par Δ et son allure est présenté sur la figure II-10. On en déduit alors la variance relative du délai σ_{t_D} / t_D à partir de (II-III-59)

$$\sigma_{t_D} / t_D = 2,6 / \text{Log}(2\pi N) \quad (\text{II-IV-37})$$

on retrouve le résultat donné par la référence (54) :

$$\sigma_{t_D} / t_D = (2,3 / \text{Log } N) \pm 10 \% \quad (\text{II-IV-38})$$

Pour $N = 4 \cdot 10^9$ on trouve une variance relative de 11 % et qui est en bon accord avec les résultats de Glauber et al⁽⁵⁾. La figure (II-16-b) représente l'histogramme obtenu correspondant. On peut de même calculer la variance des fluctuations de hauteurs. Cette fois l'accord est moins bon ($\approx 10\%$ au lieu de 18%). On ne tient compte en effet dans ce modèle simplifié que d'une partie des fluctuations de forme du pulse et ce désaccord n'est pas étonnant. L'ordre de grandeur est néanmoins le bon.

V. Discussion de l'approximation de Born Markov

A. Rappel

1°) Point de vue de Schrödinger

Pour établir l'équation pilote d'évolution de la matrice densité atomique dans le formalisme de Schrödinger nous avons été amené à faire l'approximation de Born Markov dont nous allons discuter ici la validité.

Rappelons d'abord brièvement comment nous avons établi l'équation pilote. Dans un premier temps nous avons établi l'équation d'évolution de la matrice densité globale du système atome + champ de rayonnement : équation (II II-15). Nous avons ensuite obtenu l'équation d'évolution de la matrice densité par trace sur les variables du champ. Cette opération ne peut se faire simplement que si le couplage atome-champ de rayonnement est suffisamment faible. C'est le cas si le système atomique est suffisamment petit. Les photons émis par le système sont alors peu nombreux et ne modifient pas notablement le remplissage des modes du champ électromagnétique. Pour étudier l'évolution du système atomique, on peut alors considérer que le champ électromagnétique est stationnaire et qu'il est dans le même état qu'à $t=0$. C'est l'approximation de Born. Cette approximation est valide si le nombre de modes du champ EM couplés au système atomique est grand. Le couplage se fait alors sur un domaine de fréquence très large, ou ce qui revient au même en un temps τ_c très court. L'approximation de Markov consiste alors à négliger l'évolution du système atomique, qui est lente, pendant le temps de corrélation τ_c du couplage. L'équation intégrodifférentielle (II II-26) décrivant l'évolution du système atomique obtenue à l'approximation de Born se réduit alors à une équation pilote différentielle (II II-34). Ces deux approximations sont intimement liées. Elles correspondent à l'approximation de couplage faible en théorie de la relaxation, le système atomique étant considéré comme un petit système couplé au champ électromagnétique qui constitue le grand réservoir. (On néglige alors et la modification du réservoir sous l'effet du couplage avec le petit système (Born) et l'évolution lente du petit système le temps de corrélation τ_c du couplage avec le réservoir (Markov)).

Dans le cas de l'émission spontanée d'un atome unique le temps de corrélation du couplage est $\tau_c = \lambda/c$ alors que le temps d'évolution du système atomique est Γ^{-1} (durée de vie du niveau). La condition de Born-Markov est alors :

$$\Gamma \tau_c = \frac{\Gamma c}{\lambda} \ll 1 \quad (\text{II V-1})$$

(où c est la vitesse de la lumière)

c'est la condition de Wigner - Weisskopf ⁽³⁹⁾ qui est bien sûr toujours remplie car la largeur naturelle d'une transition Γ^{-1} est beaucoup plus petite que sa fréquence $(\lambda/c)^{-1}$. Dans le cas d'une transition dipolaire électrique de force d'oscillateur égale à un, le rapport entre ces deux quantités est égal à α^3 (où α est la constante de structure fine). La validité de l'approximation de Born Markov résulte de la faible valeur de la constante de couplage des interactions électromagnétiques.

Dans le cas de la superradiance, le temps de corrélation du couplage avec le champ électromagnétique est beaucoup plus long que dans le cas de l'émission spontanée et vaut L/c (L est la longueur du milieu superradiant). En effet l'émission superradiante est une émission collective où l'on ne détermine pas quel est l'atome émetteur. Comme le temps de propagation d'un photon varie de L/c suivant que l'atome émetteur se situe à une extrémité ou l'autre du milieu superradiant, on ne peut déterminer l'instant d'émission à mieux que L/c et τ_c est au moins égal à L/c . Comme par ailleurs le temps caractéristique de l'évolution superradiante est T_{SR} , la condition de Born-Markov fait intervenir le rapport cT_{SR}/L .

2°) Point de vue d'Heisenberg

L'approximation de Born-Markov sous la forme indiquée plus haut est propre au point de vue de Schrödinger et n'apparaît pas dans le point de vue d'Heisenberg. Cependant pour obtenir l'équation d'évolution (II II-70) des enveloppes \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} , qui sont équivalentes à l'équation pilote (voir § II II C-2°), nous avons été amené à faire des approximations similaires à l'approximation de Born-Markov.

En plus de l'approximation du champ tournant (valide si $T_{SR} \gg \lambda/c$), nous avons été amené à négliger dans les produits $\mathcal{E} \cdot e^{i\omega t}$ (ou $\mathcal{P} e^{i\omega t}$) voir équation II II-60 et 64) les dérivées des enveloppes \mathcal{E} (\mathcal{P}) devant les dérivées du terme oscillant $e^{i\omega t}$. Cette approximation dite "approximation d'enveloppe lentement variable" est valide si le temps d'évolution de \mathcal{E} et \mathcal{P} est long devant λ/c (on retrouve $T_{SR} \gg \lambda/c$).

La condition $T_{SR} \gg \lambda/c$ correspond à la condition de Wigner-Weisskopf⁽³⁹⁾ avec un temps d'évolution du système atomique T_{SR} et un temps de corrélation λ/c . Ce temps de corrélation λ/c est beaucoup plus court que le temps de corrélation L/c obtenu dans le formalisme de Schrödinger. Ce n'est pas étonnant. Les équations d'évolution des enveloppes \mathcal{E} , \mathcal{P} , \mathcal{N} (équation II II-70) font intervenir le temps retardé $\tau = t - z/c$. L'incertitude τ_c sur l'instant retardé τ d'émission est alors égale au temps de corrélation intrinsèque de l'interaction atome-rayonnement, soit λ/c . Le temps de corrélation τ_c est donc plus court en variable "temps retardé" τ ($\tau_c = \lambda/c$) qu'en variable "temps non retardé" t ($\tau_c = L/c$).

Au total l'approximation faite dans le point de vue d'Heisenberg, que l'on peut appeler indifféremment :

- approximation du champ tournant
- approximation d'enveloppe lentement variable
- ou approximation de Born Markov en temps retardé

est $\frac{L}{\lambda}$ fois moins grossière que celle faite dans le point de vue de Schrödinger.

Ce résultat n'est pas contradictoire avec l'équivalence des deux points de vue qui conduisent à des équations très semblables (II II-74) et (II II-77). En effet dans un cas (Heisenberg : II II-74), les équations font apparaître le temps retardé τ , alors que dans l'autre (Schrödinger : II II-77) seul t le temps non retardé apparaît.

3°) Conclusion :

Dans le point de vue de Schrödinger comme dans celui d'Heisenberg on est amené pour étudier l'évolution du système superradiant, à faire des approximations du type Born-Markov.

Dans le premier cas l'état du système est caractérisé par la matrice densité globale du système atomique et seul le temps non retardé t à un sens physique. Le temps de corrélation du couplage est alors $\tau_c = L/c$ et la condition de validité de l'approximation doit faire intervenir le paramètre cT_{SR}/L .

Dans le second cas au contraire (Heisenberg), on étudie uniquement l'évolution d'opérateurs agissant localement et il est possible de faire apparaître explicitement le temps retardé dans les équations d'évolution. Le temps de corrélation du couplage est alors $\tau_c = \lambda/c$ et la condition de validité de l'approximation doit faire intervenir le paramètre cT_{SR}/λ .

Etudions à présent plus en détail ces conditions de validité en nous plaçant, pour fixer les idées, dans le point de vue de Schrödinger (§ B et C) (Nous généralisons, à la fin du § C, les résultats obtenus au point de vue de Heisenberg.).

B. Condition suffisante de validité dans le point de vue de Schrödinger : Condition de Born-Markov restrictive

1°) Condition de Markov

Pour discuter la validité de l'approximation de Markov nous nous placerons dans le cadre du modèle de Dicke à l'approximation du champ moyen.

L'état du système se décompose sur la base des états symétriques $|N/2, m \rangle$ que nous avons représentés sur la figure (II-17). L'évolution correspond à une descente le long de l'échelle des niveaux $|N/2, m \rangle$, la différence d'énergie entre deux niveaux consécutifs est $\hbar\omega_0$ et m décroît de $m = N/2$ à $m = -N/2$ à $t = +\infty$. A chaque étape de cette descente m diminue d'une unité et il y a émission d'un photon d'énergie $\hbar\omega_0$.

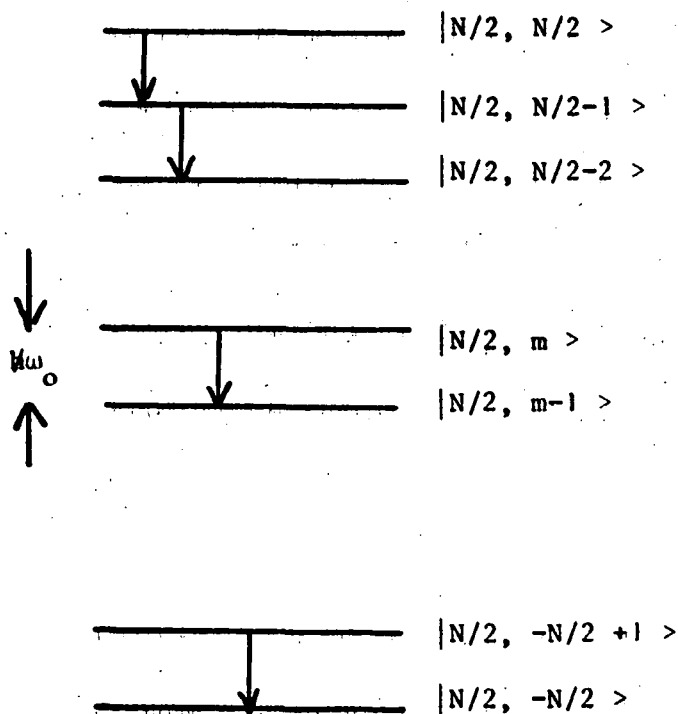


FIGURE II. 17

Le nombre d'étapes à parcourir étant N et le temps de corrélation du processus étant τ_c à chaque étape, l'approximation de Markov est valide si $N\tau_c$ est plus court que T_{SR} . En remarquant que (cf équation II II-52)

$$T_{SR} = \frac{1}{N\Gamma\mu} \quad (\text{II V-2})$$

on obtient la condition de Markov "restrictive"

$$N^2 \Gamma\mu \tau_c \ll 1 \quad (\text{II V-3})$$

soit $\frac{NL}{cT_{SR}} \ll 1$ qui fait bien apparaître le paramètre cT_{SR}/L .

2°) Condition de Born :

Nous avons vu au paragraphe (II II B-2° a) que l'approximation de Born consiste à ne prendre du développement exact (II II-22) (développement de Born) que le 1er terme. Nous avons reporté en appendice (Appendice II) le calcul du terme suivant (1er terme non Born) de ce développement. Ce terme est :

$$\frac{N\tau_c}{T_{SR}} = N^2 \Gamma\mu \tau_c \quad (\text{II V-4})$$

fois plus petit que le terme principal. La paramètre de convergence du développement de Born est donc $N^2 \Gamma\mu \tau_c$.

Nous avons également remplacé l'équation intergrodifférentielle obtenue à l'approximation de Born (équation II II-26) par une équation différentielle faisant intervenir un développement en série de perturbations. Ce développement, dont le premier terme correspond au terme apparaissant dans l'équation pilote, et que nous appellerons développement de Markov, fait également apparaître le paramètre de convergence $N^2 \Gamma\mu \tau_c$. On retrouve bien la condition (II V-3).

C. Que se passe-t-il, dans le point de vue de Schrödinger si

$$\underline{N^2 \Gamma_{\mu} L/c \gg 1 ?}$$

Si la condition (II.V-3) n'est plus remplie, on ne peut plus donner une forme simple à l'équation pilote du point de vue de Schrödinger. On peut cependant se demander si l'on ne peut pas utiliser, malgré tout, l'équation pilote à l'approximation de Born-Markov pour calculer l'évolution de certains opérateurs atomiques.

Dans ce cas la validité de l'opération dépend de l'observable que l'on cherche à étudier. Il faut alors distinguer les observables à variation lente, comme l'énergie du système atomique ou sa dérivée (qui évoluent en un temps de l'ordre de T_{SR}), des observables à variation rapide, dont les temps d'évolution sont de l'ordre de T_{SR}/N . Un élément caractéristique de la matrice densité, par exemple la population $\rho_{m,m}$ d'un niveau m (cf figure II-17) est un bon exemple d'observable à variation rapide. Nous avons vu en effet à l'approximation du champ moyen, que chaque élément de matrice de ρ se décompose en une somme d'exponentielles dont les constantes de temps varient entre T_{SR} et $4T_{SR}/N$. (équation II III-6).

1° Observable à évolution lente : énergie et champ émis

Considérons une observable A qui évolue lentement (en représentation d'interaction, \tilde{A} évolue en un temps de l'ordre de T_{SR}) et étudions la validité de l'approximation de Markov pour cette observable.

A l'approximation de Born l'équation d'évolution de la matrice densité est de la forme (voir équation II II-26)

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = \int_0^t d\tau \text{Ker}(\tau) \mathcal{L} \tilde{\rho}(t-\tau) \quad (\text{II V-5})$$

Cette équation se met à l'approximation de Markov sous la forme :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) = \mathcal{L} \tilde{\rho}(t) \quad (\text{II V-6})$$

Dans les équ. (II V-5) et (II V-6) \mathcal{L} représente l'opérateur de l'espace de Liouville qui caractérise l'équation pilote et $\text{Ker}(\tau)$ un noyau intégral différentiel normé :

$$1 = \int_0^{\infty} \text{Ker}(\tau) d\tau \quad (\text{II V-7})$$

et de largeur τ_c :

$$\tau_c \sim \int_0^{\infty} \tau_c \text{Ker}(\tau) d\tau \quad (\text{II V-8})$$

Etudions l'évolution de $\langle A \rangle$. De (II V-5), en passant en représentation d'interaction, il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle \tilde{A} \rangle &= \frac{d}{dt} \text{Tr} (\tilde{A} \tilde{\rho}) \\ &= \int_0^t d\tau \text{Ker}(\tau) \text{Tr} (\tilde{A} \tilde{\mathcal{L}} \tilde{\rho}(t-\tau)) \end{aligned} \quad (\text{II V-7})$$

qui se réduit à l'approximation de Markov à

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A} \rangle_{\text{Markov}} = \text{Tr} [\tilde{A} \tilde{\mathcal{L}} \tilde{\rho}(t)] \quad (\text{II V-8})$$

Il vient donc :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A} \rangle = \int_0^t d\tau \text{Ker}(\tau) \frac{d}{dt} \langle \tilde{A}(t-\tau) \rangle_{\text{Markov}} \quad (\text{II V-9})$$

Comme \tilde{A} évolue lentement $\frac{d}{dt} \tilde{A}$ et $\frac{d}{dt} \tilde{A}_{\text{Markov}}$ évoluent également lentement . Si $\tau \ll T_{\text{SR}}$ il vient :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A}(t-\tau) \rangle_{\text{Markov}} = \frac{d}{dt} \langle \tilde{A}(t) \rangle_{\text{Markov}}$$

et l'équation II V-9 conduit à :

$$\frac{d}{dt} \langle \tilde{A} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \tilde{A} \rangle_{\text{Markov}} \quad (\text{II V-10})$$

dès que $\tau_c \ll T_{\text{SR}}$ (car τ est de l'ordre de τ_c).

L'approximation de Markov est donc valide pour décrire l'évolution de A dès que

$$\frac{\tau_c}{T_{SR}} = N \Gamma \mu \tau_c \ll 1 \quad (\text{II V-11})$$

Il en est de même pour l'approximation de Born. En appendice II, nous avons calculé explicitement les premiers termes non Born et non Markov dans le point de vue de Schrödinger et nous avons montré directement, pour chacun d'eux, que l'évolution d'une observable lente comme l'énergie n'est modifiée que si $\tau_c = L/c$ est de l'ordre de T_{SR} . L'équation pilote (II V-6) à l'approximation de Born Markov décrit donc l'évolution d'une observable lente comme A dès que la condition (II V-11) est remplie. Cette condition a été introduite pour la première fois par Arechi et Courtens⁽³⁶⁾ et portera par la suite ce nom. Cette condition est également la condition d'équivalence entre les variables t et $\tau = t - \frac{z}{c}$ dans l'équation de Bloch-Maxwell (II II-70). L'équation de Bloch-Maxwell permet en effet de calculer les enveloppes \mathcal{E} , \mathcal{J} et \mathcal{M} qui sont des observables lentes et il est normal dans ce cas de retrouver la condition (II V-11).

2°) Observables rapides

Pour étudier de telles observables nous allons nous intéresser à l'évolution d'un élément de matrice ρ_{ss} de la matrice densité atomique ρ à l'approximation du champ moyen en ne faisant pas l'approximation de Markov. L'équation intégral-différentielle décrivant cette évolution se déduit de l'équation pilote et il vient (nous nous limiterons pour simplifier cette étude au démarrage linéaire de l'évolution).

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_{ss} = & -\Gamma \mu N (s+1) \int_0^t d\tau \text{Ker}(\tau) \rho_{s,s}(t-\tau) \\ & + \Gamma \mu N s \int_0^t d\tau \text{Ker}(\tau) \rho_{s-1,s-1}(t-\tau) \end{aligned} \quad (\text{II V-12})$$

Dans le cas d'un milieu cylindrique allongé il a été montré que⁽⁵⁵⁾ :

$$\text{Ker}(\tau) = \frac{2}{\tau_c} (1 - \tau/\tau_c) \text{ pour } 0 < \tau < \tau_c \quad (\text{où } \tau_c = L/c)$$

et $\text{Ker}(\tau) = 0$ en dehors de cet intervalle. (II V-13)

Le système d'équation différentielle (II V-12) peut être résolu exactement pour la transformée de Fourier (Laplace) $\hat{\rho}_{s,s}$. Malheureusement le noyau intégral-différentiel (II V-13) ne conduit pas à une solution analytique simple pour la transformée de Fourier inverse $\rho_{s,s}$. Aussi nous modifierons légèrement la forme du noyau $\text{Ker}(\tau)$ en posant :

$$\text{Ker}(\tau) = \frac{1}{\tau_c} e^{-\tau/\tau_c} \text{ pour } \tau > 0$$

$$\text{Ker}(\tau) = 0 \text{ pour } \tau < 0 \quad (\text{II V-14})$$

On obtient alors un modèle exactement soluble, qui conduit à une solution analytique pour $\rho_{s,s}$. En définissant de "nouvelles" fréquences propres

$$v_p^\pm = \frac{1}{2\tau_c} \pm \frac{1}{2\tau_c} \sqrt{1 - 4(p+1) \tau_c/T_{SR}} \quad (\text{II V-15})$$

On obtient pour $\rho_{s,s}(t)$ l'expression analytique exacte :

$$\rho_{s,s}(t) = \sum_{p=0}^s \frac{(-1)^p C_s^p}{v_p^+ - v_p^-} (v_p^+ e^{-v_p^- t} - v_p^- e^{-v_p^+ t}) \quad (\text{II V-16})$$

avec :

$$C_s^p = \frac{s!}{p! (s-p)!}$$

Il est facile de voir qu'à la limite $\tau_c \rightarrow 0$, l'équation (II V-16) se réduit à la solution de l'équation de Dicke (II III-12). Il est clair que les "nouvelles" fréquences propres sont très fortement modifiées dès que τ_c devient plus grand, ou de l'ordre de $T_{SR}/4s$. Certaines fréquences propres de l'équation (II V-15) deviennent alors complexes, ce qui se traduit par des oscillations de $\rho_{ss}(t)$ considéré comme fonction du temps.

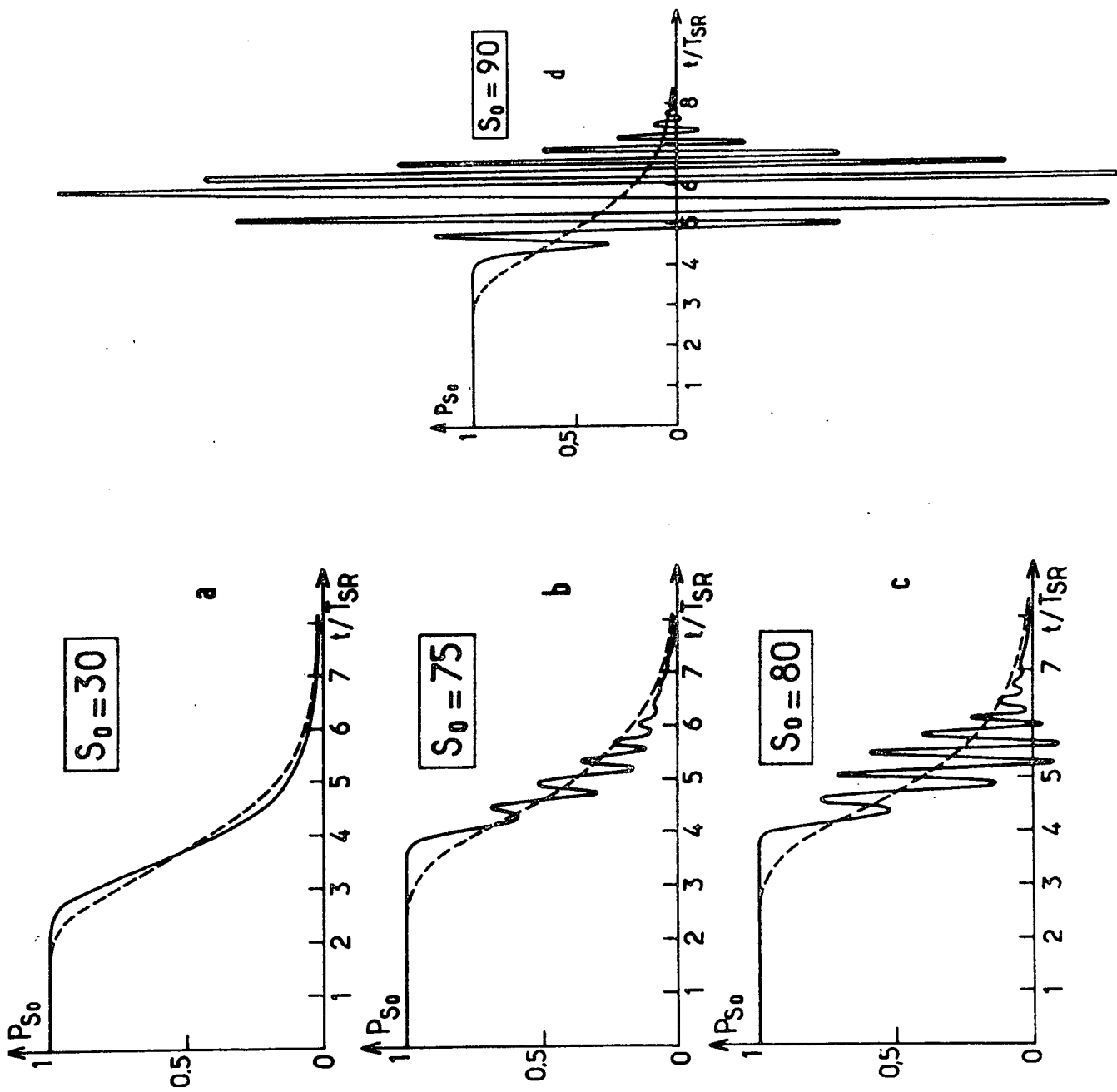


FIGURE II.18

Pour étudier en détail la façon dont $\rho_{ss}(t)$, donné par (II V-16), diffère de $\rho_{ss}(t)$ à l'approximation de Markov, donné par (II III-12), nous avons choisi de donner au rapport T_{SR}/τ_c une valeur grande devant l'unité

$$T_{SR}/\tau_c = 15 \quad \text{(II V-17)}$$

et nous avons étudié l'évolution en fonction du temps de la probabilité $P_{s_0}(t)$ d'avoir émis moins de s_0 photons.

$$P_{s_0}(t) = \sum_{s=0}^{s_0-1} \rho_{s,s}(t) = \sum_{p=1}^{s_0} \frac{C_{s_0}^p (-1)^{p-1}}{v_p^+ - v_p^-} (v_p^+ e^{-v_p^- t} - v_p^- e^{-v_p^+ t}) \quad \text{(II V-18)}$$

$P_{s_0}(t)$ est représenté sur la figure (II-18- a,b,c,d) pour différentes valeurs de s_0 . Dans chaque cas nous avons représenté en pointillé la courbe $P_{s_0, Dicke}(t)$ correspondant à l'approximation de Born Markov (solution de Dicke). Il est clair que $P_{s_0}(t)$ devient très différent de $P_{s_0, Dicke}(t)$ pour

$$s_0 \gtrsim 4 T_{SR}/\tau_c = 60 \quad \text{(II V-19)}$$

Quand s_0 dépasse cette valeur, $P_{s_0}(t)$ commence à osciller. (Figure II-17 b). Si s_0 augmente encore l'amplitude de ces oscillations augmente très brutalement (Figure II 10c) et $P_{s_0}(t)$ peut même devenir négatif.

Il est clair que ces résultats ne sont pas physiques :

- $P_{s_0}(t)$ ne peut augmenter car cela correspond à une absorption de photons inconcevable pour un système couplé au vide de rayonnement. (approximation de Born).
- $P_{s_0}(t)$ est une probabilité qui ne peut être négative.

On en déduit, que pour le calcul des observables rapides, comme $P_{s_0}(t)$, l'approximation de Markov n'est pas valide si la condition de Born Markov restrictive (II V-3) n'est plus satisfaite.

On ne sait donc pas faire le calcul des observables rapides comme $P_{s_0}(t)$ au delà de (II V-3).

Si l'on compare les différentes courbes de la figure (II-18), on s'aperçoit que les oscillations de $P_{s_0}(t)$ (courbes en traits pleins) sont de plus en plus rapides au fur et à mesure que s_0 augmente (ce qui revient à violer de plus en plus fortement la condition II V-3) ; de plus ces oscillations de $P_{s_0}(t)$ se font de part et d'autre de $P_{s_0}^{Dicke}$ (courbes en traits pointillés) obtenu à l'approximation de Born Markov ; enfin la phase des oscillations de $P_{s_0}(t)$ dépend de la valeur exacte de s_0 . Si l'on moyenne alors $P_{s_0}(t)$ sur le temps :

$$P_{s_0}(t) \rightarrow \overline{P_{s_0}}(t) = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} dt' P_{s_0}(t')$$

(II V-20 a)

ou sur le nombre maximum s de photons émis :

$$P_{s_0}(t) \rightarrow \overline{P_{s_0}}(t) = \frac{1}{\Delta s_0} \sum_{s=s_0}^{s_0+\Delta s_0} P_s(t) \quad (\text{II V-20b})$$

les oscillations non physiques de $P_{s_0}(t)$ disparaissent. En effet si on choisit Δt ou Δs_0 tel que :

$$\Delta t \gtrsim \tau_c \quad (\text{II V-21a})$$

$$\Delta s_0 \gtrsim s_0 \frac{\tau_c}{T_{SR}} \quad (\text{II V-21b})$$

On trouve que $\overline{P_{s_0}}(t)$, $\overline{P_{s_0}}(t)$ évoluent lentement (en des temps $\gtrsim \tau_c$) et il est possible de calculer $\overline{P_{s_0}}(t)$ et $\overline{P_{s_0}}(t)$ à l'approximation de Born-Markov. On trouve d'ailleurs, si la condition d'Arecchi Courtens (II V-11) est valide, que :

$$\overline{P_{s_0}}(t) \simeq \overline{P_{s_0}}(t) \simeq P_{s_0}^{Dicke}(t) \quad (\text{II V-22})$$

Les quantités $\overline{P_{s_0}}$ et P_{s_0} sont celles que l'on mesurerait si on disposait de détecteurs "imparfaits" ayant un temps de réponse fini ne permettant que d'intégrer le signal sur un certain temps Δt ou laissant, de ce fait, une incertitude Δs_0 sur le nombre de photons reçus à un instant t_0 . L'étude précédente nous montre que ces dernières quantités sont calculables alors que l'observable "rapide" elle-même $P_{s_0}(t)$ ne l'est pas. On peut alors se demander si on peut, par une mesure physique réelle, donner un sens physique à une telle observable rapide qui évolue plus vite que τ_c . Nous étudions cette question au paragraphe suivant. Avant cela, remarquons que l'on peut généraliser très simplement au formalisme de Heisenberg les résultats que nous venons d'établir dans le formalisme de Schrödinger.

Remarque : Observables "lentes" et "rapides" dans le point de vue de Heisenberg

Les résultats des paragraphes B et C précédents s'étendent sans peine au point de vue de Heisenberg, dans lequel on définit des observables locales prises aux temps retardés $\tau = t - \frac{z}{c}$.

Le champ \mathcal{E} , la polarisation \mathcal{D} et l'inversion de population \mathcal{N} constituent les observables lentes, évoluant en un temps de l'ordre de T_{SR} . Les équations d'évolution de ces observables sont valables (c. § A.2) si la condition

$$T_{SR} \gg \frac{\lambda}{c} \quad \text{soit} \quad N\Gamma\mu \frac{\lambda}{c} \ll 1 \quad (\text{II V-23})$$

est satisfaite. Cette condition correspond à la condition (II V-11) du point de vue de Schrödinger.

Les observables rapides sont des quantités de la forme \mathcal{E}^n ou \mathcal{D}^n fonctions de corrélation d'ordre élevé du champ ou de la polarisation. Pour ces quantités, il est nécessaire d'imposer la condition plus restrictive

$$\frac{T_{SR}}{N} \gg \frac{\lambda}{c} \quad \text{soit} \quad N^2\Gamma\mu \frac{\lambda}{c} \ll 1 \quad (\text{II V-24})$$

correspondant à la condition restrictive (II V-3) du point de vue de Schrödinger.

D. Remarque sur la mesure des observables rapides

Nous venons de voir que \mathcal{E}^N est une observable rapide dont le temps d'évolution est de l'ordre de T_{SR}/N . La matrice densité ρ , ses éléments de matrice ρ_{ss} ou des probabilités d'émission comme $P_{s_0}(t)$ sont également des obser-

vables rapides. De telles quantités peuvent être déterminées à condition de mesurer l'instant d'émission de chaque photon. De telles mesures (fonction de corrélation, instant d'émission) correspondent à des expériences de type comptage de photons, dans lesquelles on est capable de détecter séparément les photons et qui se font en général sur de faibles signaux. Il y a N photons à détecter en un temps T_{SR} et si $\Delta t_{dét.}$ est le temps de réponse du détecteur, ceci n'est possible que si

$$\frac{N\Delta t_{dét.}}{T_{SR}} \lesssim 1 \quad (\text{II V-25})$$

Or, nous montrons plus loin que la condition $\Delta t_{dét.} > \tau_c$ est toujours remplie. (II V-25) entraîne donc la condition de Born-Markov restrictive (II V-3) ou (II V-24). En d'autres termes, si le comptage de photons individuels est possible, l'approximation de Born-Markov est valide pour toutes les observables. Le calcul et la mesure des observables rapides sont alors tous deux possibles. Inversement, si la condition (II V-3) ou (II V-24) n'est pas remplie, il en est de même de (II V-22), et les observables rapides perdent leur sens physique. Les seules quantités mesurables sont les "moyennes" intégrées sur le temps $\Delta t_{dét.} > \tau_c$, du type \bar{P}_{s_0} ou P_{s_0} , qui sont, elles, calculables dans le cadre de Born-Markov. Il nous reste à montrer que $\Delta t_{dét.} > \tau_c$ est toujours remplie.

Deux cas peuvent se présenter suivant que l'on se place dans le point de vue de Schrödinger ou d'Heisenberg :

i) L'observable étudiée est une probabilité de type $P_s(t)$ et se déduit de la connaissance de l'instant réel d'émission de chaque photon. Seul le temps t a un sens physique et l'on a $\tau_c = L/c$. Par ailleurs, la mesure de l'instant de détection ne permet pas de remonter à l'instant d'émission à mieux que L/c à cause de l'incertitude sur le retard de propagation. On a donc $\Delta t_{dét.} > \frac{L}{c}$ et on a bien la condition $\Delta t_{dét.} > \tau_c$.

ii) L'observable rapide étudiée est une fonction de corrélation d'ordre élevé, de \mathcal{E} , \mathcal{P} ou \mathcal{N} ou du moins une quantité qui se déduit de la connaissance de l'instant retardé $\tau = t - \frac{z}{c}$. Le temps de corrélation est $\tau_c = \lambda/c$. Le temps de réponse du détecteur $\Delta t_{dét.}$ est, cette fois, le temps de réponse intrinsèque, égal au moins à la période optique : $\Delta t_{dét.} > \frac{\lambda}{c}$. On a encore ici $\Delta t_{dét.} > \tau_c$.

Ainsi, dans tous les cas envisageables, les observables rapides ne peuvent être mesurées pratiquement que si elles peuvent être calculées à l'approximation de Born-Markov, car le temps de réponse du détecteur est toujours plus long que le temps de corrélation du processus superradiant correspondant.

E. Conclusion

La discussion précédente nous permet en conclusion de distinguer les situations de superradiance suivantes que l'on rencontre successivement lorsque N augmente.

$$i) \quad N < \frac{1}{\sqrt{\Gamma\mu L/c}} \quad (\text{II V-26})$$

La condition de Born - Markov, restrictive du point de vue de Schrödinger, est satisfaite pour toutes les observables atomiques envisageables, qu'elles soient "rapides" ou "lentes". On peut donc calculer et en principe mesurer, toutes les fonctions de corrélation des atomes ou du champ. Il n'y a pas de différence appréciable entre le temps t et le temps retardé $\tau = t - z/c$ et il n'y a donc pas de distinction à faire entre excitation transversale (tous les atomes inversés à $t=0$) et longitudinale (tous les atomes inversés à $\tau = 0$). On peut également en principe calculer entièrement la matrice densité ρ du système à l'approximation du champ moyen. Cette situation correspond à ce que nous appellerons la superradiance "microscopique" (commençant à partir de $N=2$ atomes, cf papier original de Dicke (23)).

$$ii) \quad \frac{1}{\sqrt{\Gamma\mu L/c}} < N < \frac{1}{\sqrt{\Gamma\mu \lambda/c}} \quad (\text{II V-27})$$

La condition de Born-Markov restrictive reste valable pour les observables "rapides" construites à partir de \mathcal{E} , \mathcal{G} , \mathcal{N} exprimés en temps retardé $\tau = t - z/c$. On peut calculer et mesurer toutes ces quantités. Le calcul se mène à l'aide des équations d'Heisenberg exprimées en fonction de τ . Il n'y a plus d'équivalence entre t et τ pour l'évolution des fonctions de corrélation d'ordre élevé du champ (observables rapides). L'équivalence subsiste cependant pour les observables

lentes du type $\&$, \mathcal{P} , \mathcal{N} qui évoluent avec la constante de temps

$$T_{SR} = \frac{1}{N \Gamma \mu}$$

La matrice densité ρ , définie à partir d'un temps unique t , perd sa signification physique.

$$\text{iii) } \frac{1}{\sqrt{\Gamma \mu \lambda / c}} < N < \frac{1}{\Gamma \mu L / c} \quad (\text{II V-28})$$

La condition d'Arecchi Courtens (³⁶) est encore satisfaite. On ne peut plus calculer et mesurer que les observables "lentes" (du type $\&$, \mathcal{P} et \mathcal{N} et fonctions de corrélation d'ordre faible). Pour ces observables, le calcul peut être fait indifféremment avec les variables t ou τ et il n'y a pas de différence appréciable entre excitations longitudinale et transversale. Si on utilise le formalisme d'opérateur densité avec un temps unique t , il faut prendre garde à ne pas chercher à donner un sens physique aux éléments de matrice individuels, mais n'utiliser ρ que pour le calcul des observables lentes.

Comme nous n'avons dans tout ce qui précède (§ III et IV) calculé explicitement que les observables "lentes", nous n'avons pas eu besoin de préciser quel régime, (i), (ii) ou (iii) de superradiance était envisagé.

A partir du moment où la condition d'Arecchi Courtens $N < \frac{1}{\Gamma \mu L / c}$ n'est plus satisfaite, on sort du régime de superradiance proprement dit : si le milieu est excité transversalement (à $t=0$) il est en particulier clair que tous les atomes ne peuvent coopérer à l'émission. On entre alors dans des régimes que nous n'avons pas considéré explicitement dans ce chapitre. Indiquons rapidement ici ce que l'on prévoit alors :

$$\text{(iv) } \text{Si } \frac{1}{\Gamma \mu L / c} < N < \frac{1}{\Gamma \mu \lambda / c} \frac{L}{\lambda} \quad (\text{II V-29})$$

L'identification entre t et τ n'est plus possible, même pour les observables lentes. On peut cependant continuer à calculer l'évolution de ces observables, à condition de les définir en fonction du seul temps retardé τ . Le temps caractéristique de superradiance T_{SR} devenant inférieur

au temps de propagation de la lumière dans le milieu, la notion même de superradiance d'ensemble du système perd sa signification du moins si l'excitation est initialement transversale. Chaque partie du système va superradiant avant d'avoir pu interagir avec le reste. On a affaire à une superradiance "par morceaux" que l'on peut calculer à l'aide du formalisme du §IV. Il faut bien sûr considérer à présent des polarisations atomiques initiales aléatoires différentes dans chaque tranche du milieu. La longueur maximum l de chaque tranche doit contenir un nombre d'atomes N' tel que le temps de superradiance associé $T'_{SR} \sim T_{SR} N'/N'$ satisfasse dans la tranche à la condition d'Arecchi-Courtens $T'_{SR} > l/c$ (on a alors vu au §IV que la subdivision de chaque tranche en tranches plus petites ne modifie que de façon insensible le démarrage de la superradiance dans cette tranche). Il faut donc prendre au moins $(N' \mu L/c)^{1/2}$ tranches ⁽³⁶⁾. La constante d'évolution caractéristique de chaque morceau du milieu - qui est également celle du champ globalement émis - est alors

$$T'_{SR} = T_{SR} (N' \mu L/c)^{1/2} = (T_{SR} \frac{L}{c})^{1/2} \quad (\text{II V-30})$$

Le signal est formé d'une succession aléatoire de pulses de durée caractéristique $T'_{SR} > T_{SR}$ dont on peut calculer sans peine la statistique par intégration numérique des équations d'Heisenberg (II II-70)

Remarque:

Si on avait considéré une excitation balayée (à $\tau = 0$) le long du milieu, la solution obtenue serait évidemment très différente de la précédente. Les équations deviennent alors identiques à celles que l'on obtient - au dessous de la limite d'Arecchi-Courtens - lorsqu'on considère le temps retardé. Le système démarre sur la polarisation aléatoire présente dans les premières tranches rencontrées par le pulse préparateur du système : la forme des impulsions superradiantes et leur statistique est alors identique à celle calculée au §IV. Tout se passe alors comme si le milieu était comprimé dans la direction de propagation : tous les

atomes coopèrent à l'émission car le champ émis suit l'impulsion qui inverse le milieu. On obtient une impulsion comprimée en un temps T_{SR} , beaucoup plus court que dans le cas d'une excitation transversale (3). La limite théorique de compression du pulse est alors $T_{SR} = \lambda/c$. Au-delà de cette limite les équations d'Heisenberg ne sont plus valables : l'hypothèse d'enveloppe lentement variable n'est plus satisfaite. Il est d'ailleurs impossible d'envisager une excitation balayée préparant chaque atome en un temps court devant la période optique. En fait des limitations pratiques : déphasage entre le pulse excitateur et l'émission superradiante, effets non linéaires induits dans le milieu par le champ intense, limitent bien avant le taux de compression du pulse. Nous ne dirons rien de plus de ce problème qui correspond à des conditions initiales différentes de celles du problème de la superradiance (cf équ. II II-1) et nous revenons pour finir au cas de la superradiance pompée transversalement lorsque N dépasse la valeur $\frac{1}{\Gamma_{\mu}\lambda/c} \frac{L}{\lambda}$

$$(v) \quad N > \frac{1}{\Gamma_{\mu} \lambda/c} \times \frac{L}{\lambda} \quad (II V-31)$$

L'approximation d'enveloppe lentement variable n'est alors plus vérifiée pour la superradiance par morceaux car l'on a alors :

$$T'_{SR} = (T_{SR} \frac{L}{c})^{1/2} = (\frac{1}{N \Gamma_{\mu}} \frac{L}{c})^{1/2} < \lambda/c \quad (II V-32)$$

On ne peut plus utiliser les équations d'Heisenberg. Ce régime n'est pas physique pour les mêmes raisons que plus haut : il faudrait inverser instantanément le milieu par une excitation transversale plus rapide que λ/c , ce qui est impossible. De façon plus fondamentale, la condition (II V-32), compte tenu de (I-1) et du fait que $\mu \sim \frac{\lambda^2}{a^2} \sim \lambda/L$, s'écrit :

$$N > \frac{L^2}{\omega \alpha^3 \frac{\lambda^3}{c}} = \frac{L^2}{\alpha^3 \lambda^2} \quad (II V-33)$$

soit encore en introduisant une densité d'inversion par unité de volume.

$$\frac{N}{La^2} > \frac{L}{a^2} \frac{1}{\alpha^3 \lambda^2} \sim \frac{1}{\alpha^3 \lambda^3} \quad (II V-34)$$

(On a utilisé ici la relation $L\lambda \sim a^2$).

On voit alors que la condition critique correspondant à ce régime non physique est atteinte pour un atome inversé dans un volume de dimension linéaire $\alpha\lambda = 2\pi a_{\text{Bohr}}$. Les atomes sont alors à des distances mutuelles de l'ordre de leurs dimensions. Il est clair que le formalisme d'Heisenberg développé dans ce chapitre, qui considère chaque atome comme un système isolé interagissant avec le champ rayonné par les autres n'est pas valable dans ce cas (il faudrait alors tenir compte des interactions à courte distance, du recouvrement des fonctions d'onde etc.....).

CHAPITRE III

"LA SUPERRADIANCE D'UN ENSEMBLE D'ATOMES A NIVEAUX
DEGENERES OU QUASI-DEGENERES : BATTEMENTS DE
SUPERRADIANCE"

LA SUPERRADIANCE D'UN ENSEMBLE D'ATOMES A NIVEAUX DEGENERES OU QUASI-DEGENERES :
BATTEMENTS DE SUPERRADIANCE

Nous avons, au chapitre précédent, développé l'étude théorique de l'émission superradiante pour un système d'atomes à deux niveaux. Dans la plupart des situations expérimentales réelles, les niveaux initial et final de la transition superradiante sont dégénérés ou quasi-dégénérés. Ceci conduit à l'apparition de phénomènes physiques nouveaux, qui viennent modifier les traits caractéristiques simples du phénomène décrit au chapitre II. Parmi ces effets nouveaux, le plus spectaculaire est l'apparition, sur le signal de superradiance, de modulations aux fréquences de Bohr associées aux écarts d'énergie entre les différents sous-niveaux, modulations auxquelles on a donné le nom de "battements de superradiance".

Ces battements présentent des caractéristiques qui les différencient nettement des battements lumineux observés sur la lumière de fluorescence ordinaire (battements quantiques). Alors que ces derniers s'analysent en termes d'interférence intra atomique (entre amplitudes de probabilités associées à des transitions à l'intérieur d'un seul atome), les battements de superradiance impliquent une interférence classique entre champs émis par des atomes différents, oscillant sur des fréquences de transitions voisines. L'objet de ce chapitre est de présenter un cadre général pour l'étude de ces battements. Ce cadre théorique permet d'ailleurs d'aborder l'étude d'autres effets qui peuvent être liés à la dégénérescence des niveaux bordant la transition superradiante. Certains de ces effets sont abordés au chapitre suivant (superradiance limitée).

Nous commençons (§ A.1 et 2) par introduire des équations de Bloch-Maxwell décrivant l'évolution couplée du champ et du système atomique multi-niveaux, qui généralisent de façon évidente les équations établies au chapitre précédent dans le cadre du système d'atomes à deux niveaux. Tout comme dans ce cas, l'évolution du système superradiant s'analyse en termes de trajectoires classiques correspondant à des conditions initiales aléatoires, obéissant à une loi de probabilité déterminée : chaque impulsion détectée correspond à une trajectoire classique et les différentes observables moyennes résultent de la superposition de ces trajectoires avec des poids statistiques correspondant à

cette loi de probabilité. Le paragraphe A.3 précise les conditions initiales et leur loi de probabilité. On y montre en particulier que les valeurs initiales des dipôles électriques, associés aux différentes transitions entre sous-niveaux dégénérés ou quasi-dégénérés, peuvent être considérées comme ayant des phases aléatoires entre elles.

Nous analysons ensuite (§ B) les signaux de battement attendus dans quelques cas particuliers simples : systèmes superradiants constitués de classes d'atomes distincts ayant des fréquences propres légèrement différentes (§ B.1 et 2), systèmes superradiants à trois niveaux présentant une dégénérescence dans le niveau supérieur ou inférieur de la transition (§ B.3). Nous étudions en particulier en détail, sur ces exemples, le problème de la phase et de la profondeur de modulation des battements : nous montrons que suivant la valeur du paramètre $\Delta\omega T_{SR}$ ($\Delta\omega$: levée de dégénérescence des transitions) et suivant l'existence ou non de cohérences hertziennes entre les sous-niveaux initialement excités, les modulations du signal superradiant peuvent avoir, d'une réalisation à l'autre de l'expérience, une phase aléatoire ou certaine.

A. Equations générales

1) Position du problème et notations

Nous considérerons ici le cas général d'un système multiniveaux où le niveau de départ de l'émission superradiante, que nous noterons F et le niveau final, que nous noterons G, se décomposent en sous-niveaux que nous noterons respectivement $|f\rangle$, $|f'\rangle$, etc... et $|g\rangle$, $|g'\rangle$, etc... (voir figure III.1). Nous supposerons que l'énergie $\mathcal{H}\omega_f$ ($\mathcal{H}\omega_g$) du niveau $|f\rangle$ ($|g\rangle$) est voisine de l'énergie $\mathcal{H}\omega_F$ ($\mathcal{H}\omega_G$) qui représente en quelque sorte l'énergie moyenne de F (ou G). On peut poser alors :

$$\omega_0 = \omega_F - \omega_G \quad (\text{III.1})$$

Nous définirons également \vec{D}_i l'opérateur dipolaire électrique de l'atome i. Comme les éléments de matrice de \vec{D}_i ne dépendent pas de l'indice i, on peut poser :

$$\langle f | \vec{D} | g \rangle = \langle f_i | \vec{D}_i | g_i \rangle \quad (\text{III.2-a})$$

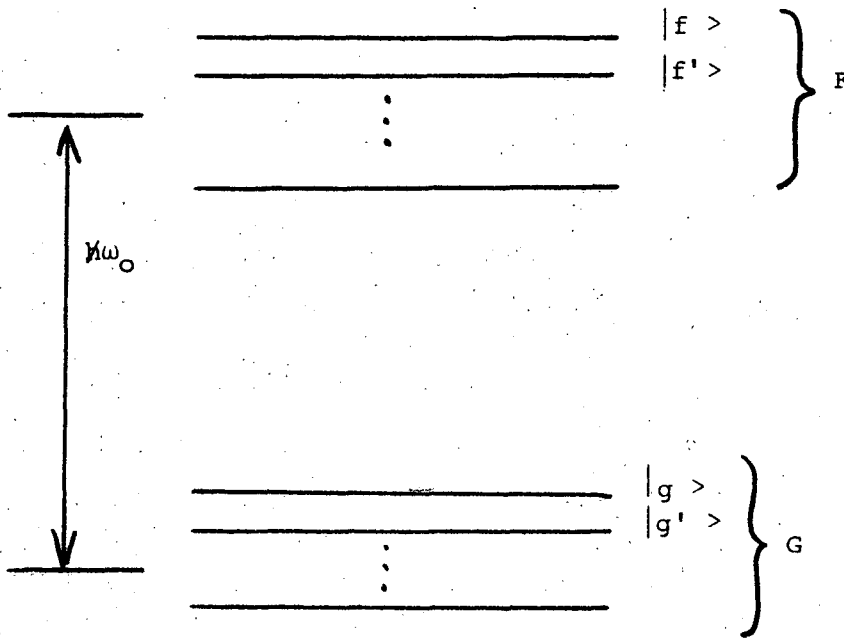


FIGURE III.1

Nous décomposerons \vec{D} suivant les différentes directions de polarisation \vec{u}_p et nous poserons :

$$D_p = \langle f | \vec{D} \cdot \vec{u}_p | g \rangle \quad (\text{III.2-b})$$

Nous définirons également la matrice densité ρ_i associée à chaque atome i (qu'il ne faudra pas confondre avec la matrice densité globale ρ utilisée au chapitre II qui, rappelons-le, est reliée à ρ_i par :

$$\rho_i = \text{Tr}_{j \neq i} (\rho) \quad (\text{III.3})$$

et nous noterons :

$$\rho_{i,x,x'} = \langle x_i | \rho_i | x'_i \rangle \quad (\text{III.4})$$

les éléments de matrice de ρ_i (qui sont des nombres complexes).

On peut associer à chacun de ces éléments de matrice un opérateur atomique qui généralise les opérateurs r_i^+ , r_i^- , r_{3i} définis dans le cas d'un système à deux niveaux. De façon plus précise, on appellera $\rho_{op,i,x,x'}$ l'opérateur qui fait passer l'atome i de $|x_i\rangle$ à $|x'_i\rangle$

$$\rho_{op,i,x,x'} |x_i\rangle = |x'_i\rangle \quad (III.5)$$

On a la relation évidente :

$$\begin{aligned} \langle \rho_{op,i,x,x'} \rangle &= \text{Tr} (\rho_i \rho_{op,i,x,x'}) \\ &= \rho_{i,x,x'} \end{aligned} \quad (III.6)$$

On peut enfin définir les opérateurs $\sigma_{op,x,x'}(z,t)$ locaux :

$$\sigma_{op,x,x'}(z,t) = \sum_i \frac{1}{a^2} \delta(z-z_i) \rho_{op,i,x,x'} \quad (III.7)$$

ainsi que les enveloppes $\tilde{\sigma}_{op,f,g}$ associées :

$$\sigma_{op,f,g} = \tilde{\sigma}_{op,f,g} \exp -i(\omega_0 t - k_0 z) \quad (III.8)$$

Si on adopte le point de vue semi-classique, le système atomique est décrit par les éléments de matrice $\rho_{i,x,x'}$ et le champ par une quantité classique \mathcal{E}_{cl} , les quantités étant couplées par les équations de Bloch-Maxwell. Dans le point de vue complètement quantique, les atomes sont décrits par les opérateurs $\rho_{op,i,x,x'}$ et le champ par l'opérateur \mathcal{E} défini par (II.II.57)

Les équations qui couplent ces opérateurs sont des équations de Bloch-Maxwell quantiques dont nous donnerons la forme au paragraphe suivant.

2) Les équations d'évolution des opérateurs

Connaissant les relations de commutation des $\sigma_{op,x,x'}$ qui généralisent de façon évidente celles des r_i^+ , r_i^- , r_{3i} , et celles du champ électrique, on obtient, pour les opérateurs $\sigma_{op,x,x'}$ et \mathcal{E} , le système d'équations suivant. Les approximations et calculs intermédiaires sont similaires à ce qui est fait au chapitre II, § II.C.1). Il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_p = - \frac{ik_0}{\epsilon_0} \sum_{f,g} \langle f | D_p^* | g \rangle \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+ \quad (\text{III.9.a})$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_{op,f,f'} &= -i\omega_{f,f'} \sigma_{op,f,f'} \\ &+ \frac{i}{2\hbar} \sum_{p,g} \left(\mathcal{E}_p \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+ \langle g | D_p^* | f' \rangle - \langle f | D_p^* | g \rangle \mathcal{E}_p^+ \tilde{\sigma}_{op,f',g}^+ \right) \quad (\text{III.9.b}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \sigma_{op,g,g'} &= -i\omega_{g,g'} \sigma_{op,g,g'} \\ &+ \frac{i}{2\hbar} \sum_{p,f} \left(\mathcal{E}_p^+ \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+ \langle f | D_p^* | g' \rangle - \langle g | D_p^* | f \rangle \mathcal{E}_p \tilde{\sigma}_{op,f,g'}^+ \right) \quad (\text{III.9.c}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+ &= -i(\omega_{f,g} - \omega_\theta) \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+ \\ &+ \frac{i}{2\hbar} \sum_{p,f'} \mathcal{E}_p^+ \sigma_{op,f,f'} \langle f' | D_p^* | g \rangle - \sum_{p,g'} \langle f | D_p^* | g' \rangle \mathcal{E}_p^+ \sigma_{op,g',g} \quad (\text{III.9.d}) \end{aligned}$$

où $\tilde{\sigma}_{op,g,f}^+ = \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+$ et où $\tau = t - \frac{z}{c}$ (*) .

Pour passer aux équations de Bloch-Maxwell semi-classiques, il faut remplacer \mathcal{E} par \mathcal{E}_{cl} et $\sigma_{op,x,x'}$ par sa valeur moyenne $\langle \sigma_{op,x,x'} \rangle$

$$\langle \sigma_{op,x,x'} \rangle = \sum_i \frac{1}{a^2} \delta(z-z_i) \langle x_i | \rho_i | x'_i \rangle$$

$\langle \sigma_{op,x,x'} \rangle$ représente alors l'élément de matrice densité à un atome moyenné dans chaque tranche. Par la suite, on appellera ce nombre $\sigma_{x,x'}(z)$.

Les équations (III.9) s'interprètent facilement :

- les cohérences hertziennes et populations correspondant aux termes en $\sigma_{op,f,f'}$ et $\sigma_{op,g,g'}$ sont couplés aux enveloppes de cohérences optiques $\tilde{\sigma}_{op,f,g}^+$ (III.9.b et c).
- les enveloppes de cohérences optiques $\tilde{\sigma}_{op,f,g}^+$ sont, par contre, couplées aux populations et cohérences hertziennes $\sigma_{op,f,f'}$ et $\sigma_{op,g,g'}$ (III.9.d).
- le couplage se fait par l'intermédiaire de l'enveloppe du champ rayonné par les dipôles, lui-même donné par l'équation de Maxwell (III.9.a).

(*) Dans la suite du chapitre, nous ne ferons plus la distinction entre t et τ .

Il est à noter que dans ces équations, l'ordre des produits d'opérateurs n'est pas quelconque. Dans le cas du système à deux niveaux, les produits de $\&$ avec \mathcal{D}^+ ou \mathcal{N} étaient toujours de la forme $\&\mathcal{D}^+$ ou $\&\mathcal{N}$ (dans cet ordre). Il en est de même ici : les produits de $\&$ avec $\tilde{\sigma}_{op,f,g}$, $\sigma_{op,f,f'}$ ou $\sigma_{op,g,g'}$ se font toujours dans l'ordre $\&\tilde{\sigma}_{op,f,g}$, $\&\sigma_{op,f,f'}$ ou $\&\sigma_{op,g,g'}$ ($\&$ en premier).

On remarquera enfin que, dans le cas du système à deux niveaux, les équations (III.9) sont équivalentes à l'équation (II.II.70) en faisant la transformation :

$$2 \langle f | D_p | g \rangle \tilde{\sigma}_{op,f,g} \rightarrow \mathcal{D}^+ \quad \text{(III.10.a)}$$

$$\sigma_{op,f,f} - \sigma_{op,g,g} \rightarrow \mathcal{N} \quad \text{(III.10.b)}$$

3) Condition initiale à prendre pour simuler le démarrage quantique du système dans les équations de Bloch-Maxwell généralisées :

Les équations de Bloch-Maxwell sont les équations d'évolution des opérateurs quantiques. Dans le cas du système à deux niveaux, nous avons vu qu'en prenant comme condition initiale une polarisation aléatoire le long du milieu et en intégrant les équations de Bloch-Maxwell entre quantités classiques, on obtient une solution que nous avons appelée trajectoire classique. Chaque trajectoire classique décrit alors une réalisation possible de l'évolution du système telle qu'elle est observée lors d'une expérience réelle. D'une expérience à l'autre, la trajectoire observée change de façon aléatoire. En sommant sur toutes les trajectoires classiques possibles, on peut recalculer tout opérateur, sa valeur moyenne et sa fonction de corrélation. On peut également reconstituer les histogrammes associés aux différents paramètres caractérisant le pulse superradiant émis (délai, intensité maximale, etc...).

Dans le cas du système multiniveaux, on peut généraliser ces résultats. On peut définir des trajectoires classiques analogues aux trajectoires classiques précédentes, en intégrant les équations de Bloch-Maxwell généralisées que nous venons d'établir avec une condition initiale appropriée de caractère

aléatoire. La signification physique de ces trajectoires classiques est alors la même que dans le cas de deux niveaux et l'on peut tout calculer par décomposition sur ces trajectoires classiques. Tout le problème consiste alors à déterminer la loi de probabilité associée à ces trajectoires classiques.

Ce problème se résout très simplement. Il suffit de considérer que toutes les transitions $f-g$ de F vers G sont indépendantes. Pour une transition particulière, $f - g$, on peut alors considérer que l'on est dans le cas d'un système à deux niveaux et l'on utilise alors les résultats obtenus au chapitre II, § III et IV. La loi de probabilité associée à la valeur initiale de \mathcal{P}_{f-g} se déduit alors de (II.IV.30), à condition de remplacer + et - par f et g .

- r_i^+ devient $\rho_{op,i,g,f}$
- D_{+-} devient D_{f-g}
- n représente le nombre d'atomes de la tranche dans l'état f à $t = 0$

$$n = a^2 \Delta z \sigma_{f,f}(z, t=0) \quad (\text{III.11})$$

Ce résultat simple se comprend facilement lorsqu'il n'y a pas de cohérences dans l'état F . S'il y a des cohérences $\rho_{f,f'}$ non nulles, on peut s'attendre à avoir un couplage entre les valeurs initiales des polarisations $\mathcal{P}_{f,g}$ et $\mathcal{P}_{f',g}$, liant f et f' au même état final g . Nous verrons que ce couplage existe dès l'instant $t = 0$, mais qu'en le négligeant et en prenant $\mathcal{P}_{f,g}$ et $\mathcal{P}_{f',g}$ incorrélés à $t = 0$, on obtient la même évolution. En effet, au bout de quelques T_{SR} , $\mathcal{P}_{f,g}$ et $\mathcal{P}_{f',g}$ se couplent sous l'effet de la cohérence $\rho_{f,f'}$, et tout se passe comme si le couplage existait dès $t = 0$. Pour justifier de façon rigoureuse ce résultat, nous allons étudier successivement trois exemples simples correspondant à des systèmes à trois niveaux.

a) Système à trois niveaux en "V" dans un mélange statistique d'états à $t = 0$

i) Le système à trois niveaux en "V" : notations

Dans ce chapitre et dans le chapitre suivant, nous serons amenés plusieurs fois à étudier les propriétés du système à trois niveaux en "V". Pour ne pas alourdir l'exposé, nous définirons ici une fois pour toutes les notations que nous utiliserons. Nous considérons ici le cas d'un système à trois niveaux

$|f \rangle$, $|f' \rangle$ et $|g \rangle$ d'énergie $\hbar\omega_f$, $\hbar\omega_{f'}$, $\hbar\omega_g$. Les états f , f' et g sont couplés entre eux par des transitions dipolaires électriques de polarisation :

\vec{u} pour la transition $f - g$
 \vec{u}' pour la transition $f' - g$

Nous noterons $\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega = \omega_f - \omega_{f'} \\ \omega_0 = \frac{\omega_f + \omega_{f'}}{2} - \omega_g \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.12-a)} \\ \text{(III.12-b)} \end{array}$

Comme f et f' sont des sous-niveaux de F , ω_f et $\omega_{f'}$ sont voisins et l'on a :

$$\Delta\omega \ll \omega_0 \quad \text{(III.13)}$$

Ces notations sont résumées sur la figure III.2 .

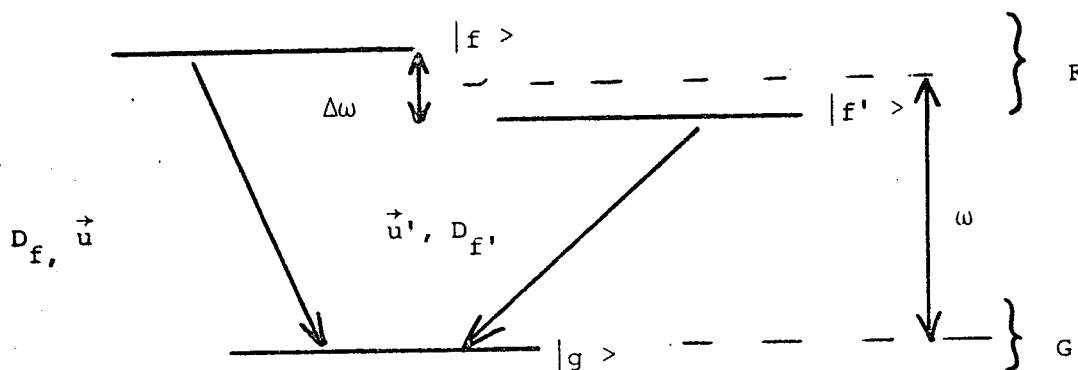


FIGURE III.2

Nous noterons D_f et $D_{f'}$ les éléments de matrice du dipôle sur les transitions $f - g$ et $f' - g$

$$D_f = \langle f | \vec{D} \cdot \vec{u}^* | g \rangle \quad \text{(III.14-a)}$$

$$D_{f'} = \langle f' | \vec{D} \cdot \vec{u}'^* | g \rangle \quad \text{(III.14-b)}$$

et nous poserons :

$$\mathcal{P}_f = 2a^{-2} \sum_i D_f \rho_{op,i,f,g}^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (\text{III.15-a})$$

$$\mathcal{P}_{f'} = 2a^{-2} \sum_i D_{f'} \rho_{op,i,f',g}^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \quad (\text{III.15-b})$$

On notera que l'opérateur \mathcal{P}_f est analogue à l'opérateur \mathcal{P} (II.II.57), car l'opérateur $\rho_{op,i,f,g}^+$, qui fait passer de $|g_i\rangle$ à $|f_i\rangle$ (III.5), correspond à r_i^+ (même remarque pour $\mathcal{P}_{f'}$). \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ sont liés à $\tilde{\sigma}_{op,f,g}^+$ et $\tilde{\sigma}_{op,f',g}^+$ par :

$$\mathcal{P}_f = 2 D_f \tilde{\sigma}_{op,f,g}^+ \quad (\text{III.16-a})$$

$$\mathcal{P}_{f'} = 2 D_{f'} \tilde{\sigma}_{op,f',g}^+ \quad (\text{III.16-b})$$

ii) La condition initiale dans le cas d'un mélange statistique d'états

Nous considérerons qu'à $t = 0$, l'état initial de la matrice densité du système est tel que

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_{f,f} \neq 0 \\ \rho_{f',f'} \neq 0 \\ \rho_{f,f'} = 0 \end{array} \right. \quad \text{à } t = 0 \quad \begin{array}{l} (\text{III.17-a}) \\ (\text{III.17-b}) \\ (\text{III.17-c}) \end{array}$$

La matrice densité ρ ne contient que des populations. Il n'y a pas de cohérences $\rho_{f,f'}$ et le système est dans un mélange statistique d'états.

Remarquons tout de suite qu'à $t = 0$, les opérateurs enveloppe \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ sont incorrélés. En effet, comme $\rho_{f,f'}(t=0) = 0$, on a :

$$\langle \rho_{op,i,f,g} \rho_{op,i,g,f'} \rangle = \text{Tr} \left(\rho(t=0) \rho_{op,i,f,g} \rho_{op,i,g,f'} \right) \quad (\text{III.18}) \\ = 0$$

et, par suite :

$$\langle \mathcal{P}_f(z, t=0) \cdot \mathcal{P}_{f'}^+(z', t=0) \rangle = 0 \quad (\text{III.19})$$

et cela même pour $z = z'$.

On obtient alors que les valeurs initiales $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f} = \alpha_j D_f$ et $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f'} = \alpha'_j D_{f'}$, de \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$, sont incorrélées. La loi de probabilité associée à α_j et α'_j est gaussienne, elle est donnée par (II.IV.30) avec :

$$n = \sigma_{f,f} a^2 \Delta z \text{ pour } \alpha_j \quad (\text{III.20-a})$$

$$n = \sigma_{f',f'} a^2 \Delta z \text{ pour } \alpha'_j \quad (\text{III.20-b})$$

n représente le nombre d'atomes de la tranche j dans l'état f (ou f') à $t = 0$.

Rappelons que la trajectoire α est définie par la donnée des valeurs initiales des polarisations, donc, dans notre cas, par la donnée des valeurs de α_j et α'_j dans chaque tranche. La trajectoire classique $X_{cl,\alpha}$ de l'opérateur X sera la solution pour l'opérateur X des équations classiques formellement identiques à (III.9), avec la condition initiale sur les polarisations :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{cl,\alpha,f}(z,t=0) = \alpha_j D_f \quad (\text{III.21-a}) \\ \mathcal{P}_{cl,\alpha,f'}(z,t=0) = \alpha'_j D_{f'} \quad (\text{III.21-b}) \end{array} \right. \text{ si } z \text{ est dans la tranche } j$$

On peut vérifier que cette loi de probabilité est la bonne en calculant, par décomposition sur les trajectoires α , les valeurs moyennes à $t=0$ d'un grand nombre de fonctions de corrélations de $\vec{\mathcal{D}}_f$ et $\vec{\mathcal{D}}_{f'}$, ou, ce qui est équivalent, de $\hat{\sigma}_{op,f,g}$, $\hat{\sigma}_{op,f',g}$.

On peut par exemple calculer :

$$\langle (\sigma_{op,f,g}^+(z))^\ell (\sigma_{op,f,g}(z'))^m \rangle = \sum_{\alpha} P(\alpha) \alpha_i^\ell \alpha_j^{*m} = \delta_{i,j} \delta_{\ell,m} \quad (\text{III.22-a})$$

$$\langle (\sigma_{op,f',g}^+(z))^\ell (\sigma_{op,f',g}(z'))^m \rangle = \sum_{\alpha} P(\alpha) \alpha'_i{}^\ell \alpha'_j{}^{*m} = \delta_{i,j} \delta_{\ell,m} \quad (\text{III.22-b})$$

$$\langle (\sigma_{op,f,g}^+(z))^\ell (\sigma_{op,f',g}(z'))^m \rangle = \sum_{\alpha} P(\alpha) \alpha_i^\ell \alpha'_j{}^{*m} = 0 \quad (\text{III.22-c})$$

(où z est dans la tranche i et z' dans la tranche j).

On peut vérifier que l'on obtient le même résultat que par le calcul direct :

$$\langle X \rangle = \text{Tr} (\rho X) \quad (\text{III.23})$$

en utilisant (III.7) et (III.5) ^(*).

iii) Interprétation physique du résultat

Ces résultats, et en particulier le fait que \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ sont des variables aléatoires indépendantes, s'interprètent physiquement de façon simple. Décomposons σ en une somme de cas purs. Pour cela, considérons que l'on fait, à $t=0$, une mesure de l'état dans lequel se trouve chaque atome. Cette mesure modifie la matrice densité individuelle ρ_i de chaque atome i , mais non la matrice densité locale, qui est la moyenne dans chaque "tranche" des matrices densités individuelles. La mesure ne modifie donc pas l'émission superradiante dont l'équation d'évolution (III.9) ne fait intervenir que des quantités locales par "tranche". On peut donc appeler atomes "a" les atomes qui, à $t=0$, sont dans l'état $|f\rangle$ et "b" ceux qui sont dans l'état $|f'\rangle$ (voir figure III.3).

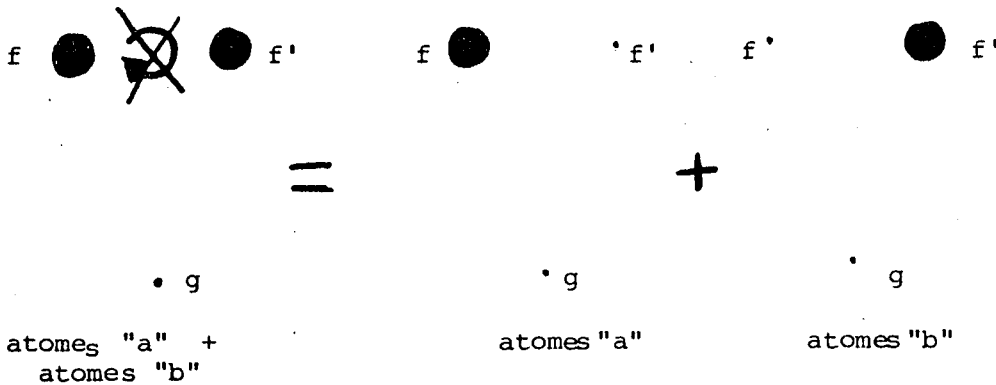


FIGURE III.3

~~•~~ = absence de cohérence

(*) Il faut bien sûr, pour faire le calcul direct, remplacer la fonction $\delta(z-z')$ de l'équation (III.7) par une fonction delta par "tranche" que l'on peut noter $\bar{\delta}(z-z')$:

$$\begin{aligned} \bar{\delta}(z-z') &= \frac{1}{\Delta z} \text{ si } z \text{ et } z' \text{ sont dans la même tranche} \\ &= 0 \text{ si } z \text{ et } z' \text{ ne sont pas dans la même tranche} \end{aligned} \quad (\text{III.24})$$

On a alors :

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{f,f} \neq 0 \\ \rho_{f',f'} = 0 \end{array} \right\} \text{ pour les atomes "a"} \quad (\text{III.25-a})$$

et

$$\left. \begin{array}{l} \rho_{f,f} = 0 \\ \rho_{f',f'} \neq 0 \end{array} \right\} \text{ pour les atomes "b"} \quad (\text{III.25-b})$$

A $t = 0$, il faut associer aux atomes "a" un dipôle \mathcal{P}_f , et aux atomes "b" un dipôle $\mathcal{P}_{f'}$. Comme \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ correspondent à des opérateurs agissant sur des atomes différents, on retrouve bien que \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ doivent être pris incorrélés. La loi de probabilité (II.IV-30), avec n donné par (III.20), peut alors être obtenue en associant à chaque atome "a" un dipôle classique de phase aléatoire et de module D_f sur la transition $f - g$ et en faisant de même pour les atomes "b" (avec des dipôles classiques de module $D_{f'}$).

Notons enfin que cette décomposition en classes d'atomes "a" et "b" peut se faire bien avant l'instant $t = 0$. En effet, dans une expérience de superradiance, on prépare le système dans l'état F à l'aide d'une excitation optique polarisée à partir de l'état fondamental et s'il y a mélange statistique dans l'état F , ce mélange correspond au mélange statistique existant dans l'état fondamental pour $t < 0$. Si, par exemple, l'état fondamental est un spin $1/2$ qui se décompose en deux sous-niveaux, on pourrait appeler atomes "a" les atomes qui, à $t < 0$, sont dans l'état fondamental $+1/2$ et "b" ceux qui, à $t < 0$, sont dans l'état fondamental $-1/2$ (voir figure III.4, avant excitation).

Considérons que F est également un spin $1/2$:

Si l'excitation optique est de polarisation π

les atomes "a" sont portés dans l'état $|F, +1/2\rangle = |f\rangle$

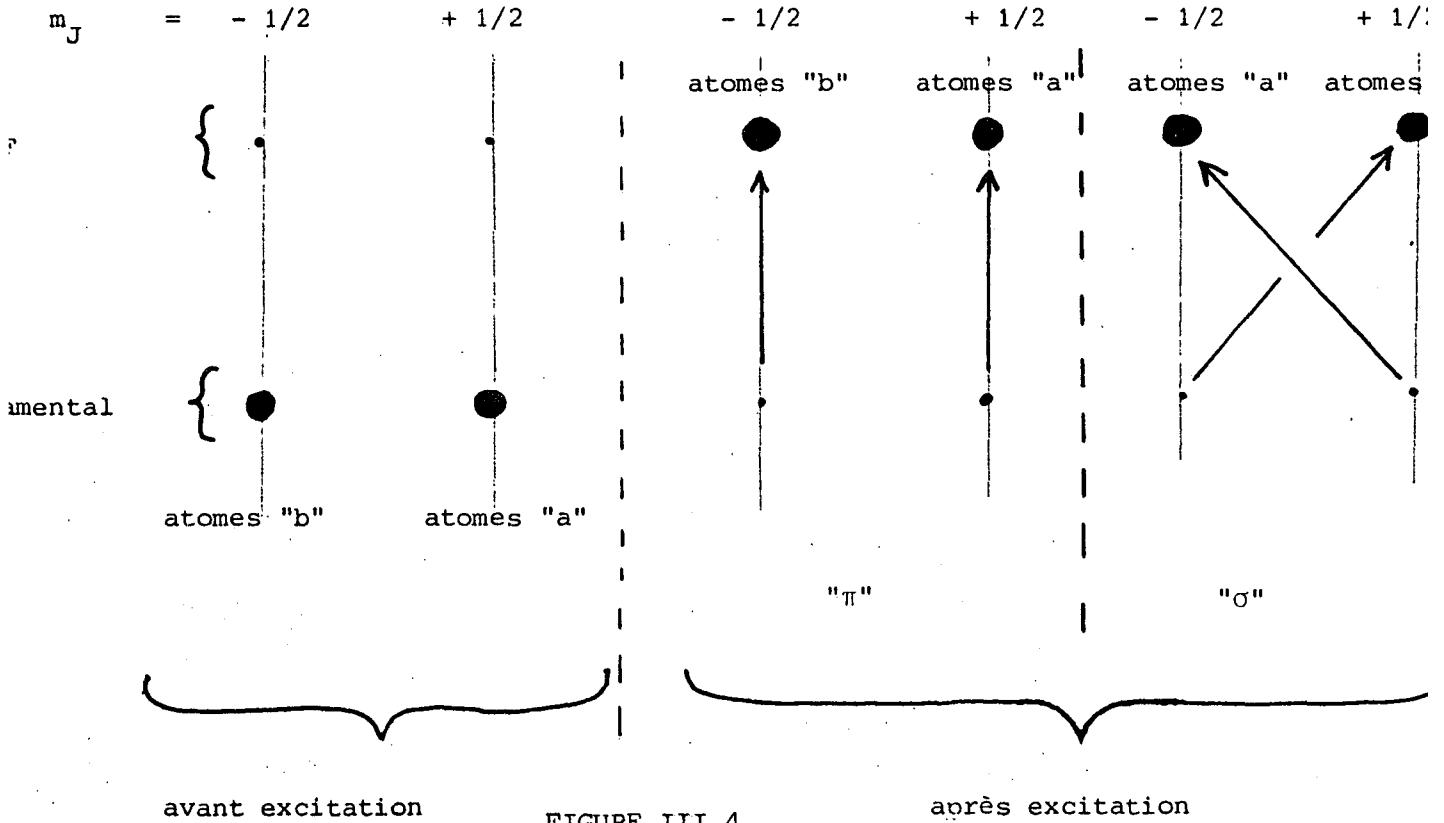
les atomes "b" sont portés dans l'état $|F, -1/2\rangle = |f'\rangle$

Si l'excitation optique est de polarisation σ

les atomes "a" sont portés dans l'état $|F, -1/2\rangle = |f\rangle$

les atomes "b" sont portés dans l'état $|F, +1/2\rangle = |f'\rangle$

(voir figure III.4 après excitation π ou σ).



Au total, les atomes "a" comme les atomes "b" sont dans un cas pur. La position des atomes n'étant pas changée par l'excitation optique, il est toujours possible à tout instant de dire, pour $t > 0$, si un atome i est de type "a" ou "b", et la décomposition en classe d'atomes correspond à une réalité physique.

b) Système à trois niveaux en "V" dans un cas pur

Considérons ici un deuxième exemple. Reprenons le cas du système à trois niveaux décrit au § A.3.a, mais cette fois supposons que l'on est dans un cas pur à $t = 0$: ρ_i se factorise

$$\rho_i(t=0) = |f_i'' \rangle \langle f_i''| \tag{III.26}$$

f'' est l'état propre de $\rho_i(t=0)$. On peut définir également f''' comme étant orthogonal à f'' . f'' et f''' constituent alors une nouvelle base de F , mais ne sont pas états propres de l'énergie. Si l'on écrit $\sigma(t=0)$ dans la base des états propres f et f' de l'énergie, on trouve que la cohérence $\sigma_{f,f'}(t=0)$ est maximale et que l'on a :

$$\sigma_{f,f'} = (\sigma_{f,f} \cdot \sigma_{f',f'})^{1/2} e^{i\phi} \text{ à } t = 0 \tag{III.27}$$

Pour trouver la condition initiale, utilisons la même méthode qu'au paragraphe précédent. Cette fois, cependant, $\rho_{f,f'}$, n'est plus nul à $t=0$ et :

$$\langle \mathcal{P}_f \mathcal{P}_{f'}^+ \rangle \neq 0 \quad \text{à } t = 0 \quad (\text{III.28})$$

On a même :

$$|\langle \mathcal{P}_f \mathcal{P}_{f'}^+ \rangle| = \left(\langle \mathcal{P}_f \mathcal{P}_f^+ \rangle \langle \mathcal{P}_{f'} \mathcal{P}_{f'}^+ \rangle \right)^{1/2} \quad \text{à } t=0 \quad (\text{III.29})$$

Les valeurs initiales $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f} = \alpha_i D_f$ et $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f'} = \alpha'_i D_{f'}$ prises par \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$, à $t = 0$ ne sont plus indépendantes et l'on a :

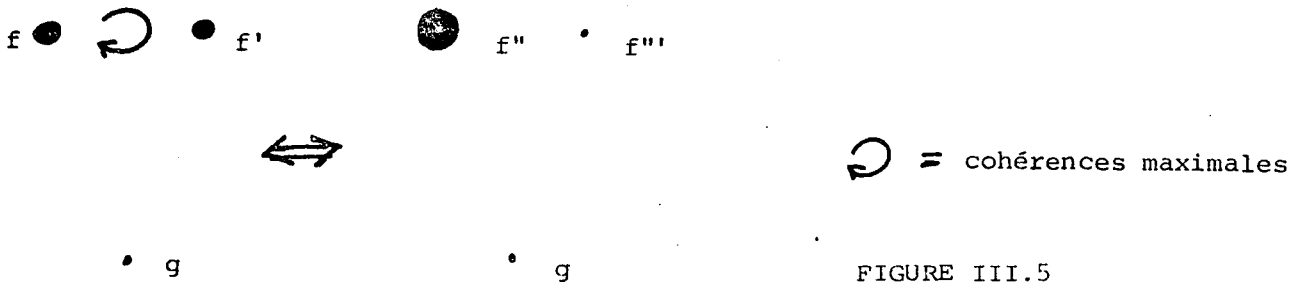
$$\alpha'_i = \alpha_i e^{i\phi} \quad (\text{III.30})$$

où $P_i \left(\sqrt{|\alpha_i|^2 + |\alpha'_i|^2} \right)$

$$n = a^2 \Delta z (\sigma_{f,f} + \sigma_{f',f'})_{t=0} = a^2 \Delta z \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{III.31})$$

n représente cette fois la population totale dans la tranche i .

On aurait pu retrouver ce résultat en décomposant $\rho(t=0)$ sur la base des états f'' et f''' (voir figure III.5).



où l'on a, de façon triviale :

$$\mathcal{P}_{cl,\alpha,f''}(t=0) = D_{f''} \alpha_i \quad (\text{III.32})$$

En écrivant $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f''}$ en fonction de $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f}$ et $\mathcal{P}_{cl,\alpha,f'}$, on retrouve le résultat précédent (III.30).

Notons enfin que bien que \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ soient corrélés à $t=0$, il est possible, sans nuire au résultat, de considérer que l'on a :

$$\langle \mathcal{P}_f \mathcal{P}_{f'}^+ \rangle = 0 \quad \text{à } t = 0 \quad (\text{III.33})$$

On peut alors prendre la condition initiale du paragraphe A.3 (équations (II.IV.30) avec (III.20)). En effet, de par la présence de cohérences non nulles $\rho_{f,f'}(t=0) \neq 0$, \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ se mettent en phase au bout de quelques T_{SR} et tout se passe comme s'ils étaient corrélés dès $t = 0$.

Pour le vérifier, étudions le cas particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f,f}(t=0) = \sigma_{f',f'}(t=0) = \sigma_{f,f'}(t=0) = \text{Tr}(\sigma) = \sigma_F \\ \text{avec } D_f = D_{f'} = D_{+-} \end{array} \right. \quad (\text{III.34})$$

Au démarrage de l'évolution, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f,f}(t) = \sigma_{f',f'}(t) = \sigma_F \\ \sigma_{f,f'}(t) = \sigma_F e^{-i\Delta\omega t} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{III.35-a}) \\ (\text{III.35-b}) \end{array}$$

Il vient de l'équation (III.9) :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} (\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{f'}) \quad (\text{III.36-a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f = +i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_f + \frac{i}{\hbar} |D_{+-}|^2 \sigma_F \mathcal{E} (1+e^{+i\Delta\omega t}) \quad (\text{III.36-b})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'} = -i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_{f'} + \frac{i}{\hbar} |D_{+-}|^2 \sigma_F \mathcal{E} (1+e^{-i\Delta\omega t}) \quad (\text{III.36-c})$$

On peut alors voir que la phase relative de \mathcal{P}_f et de $\mathcal{P}_{f'}$ va se synchroniser sur la phase de $\sigma_{f,f'}(t)$. En effet, en intégrant (III.36-a) et en portant dans (III.36-b et c, il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f(z) = i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_f(z) + \frac{1+e^{i\Delta\omega t}}{LT_{SR}} \int_0^z dz' (\mathcal{P}_f(z') + \mathcal{P}_{f'}(z')) \quad (\text{III.37-a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'}(z) = -i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_{f'}(z) + \frac{1+e^{-i\Delta\omega t}}{LT_{SR}} \int_0^z dz' (\mathcal{P}_f(z') + \mathcal{P}_{f'}(z')) \quad (\text{III.37-b})$$

$$\text{où } (T_{SR})^{-1} = \frac{|D_f|^2 k_0 L \sigma_F}{2\epsilon_0 \hbar}$$

On peut poser :

$$\mathcal{P}_f = \tilde{\mathcal{P}}_f e^{+i \frac{\Delta\omega}{2} t} \quad (\text{III.38-a})$$

$$\mathcal{P}_{f'} = \tilde{\mathcal{P}}_{f'} e^{-i \frac{\Delta\omega}{2} t} \quad (\text{III.38-b})$$

Il vient alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_f(z) = (LT_{SR})^{-1} \int_0^z dz' \mathcal{P}_f(z') + \tilde{\mathcal{P}}_{f'}(z') + \mathcal{P}_{f'}(z') e^{-i \frac{\Delta\omega}{2}} + \mathcal{P}_f(z') e^{+i \frac{\Delta\omega}{2}} \quad (\text{III.39-a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_{f'}(z) = \frac{\partial}{\partial t} \tilde{\mathcal{P}}_f(z) \quad (\text{III.39-b})$$

On voit que $\tilde{\mathcal{P}}_f$ et $\tilde{\mathcal{P}}_{f'}$ croissent très vite, alors que leur différence n'évolue pas. Au total, au bout de quelques T_{SR} , $\tilde{\mathcal{P}}_f$ et $\tilde{\mathcal{P}}_{f'}$ vont se mettre en phase.

Dans le cas général : $\sigma_{f,f} \neq \sigma_{f',f'}$, et $D_f \neq D_{f'}$, le calcul est plus complexe, mais le résultat est similaire. Cela se comprend facilement. Si l'on passe dans la base f'' , f''' , prendre des polarisations aléatoires à $t = 0$ sur f , f' revient à les prendre aléatoires sur f'' , f''' (voir figure III.5). La polarisation $\mathcal{P}_{f''}$ associée à la transition $f'' - g$ est amplifiée ($\sigma_{f'',f''} \neq 0$) alors que $\mathcal{P}_{f'''}$ ne l'est pas ($\sigma_{f''',f'''} = 0$). Que l'on mette ou non une polarisation initiale $\mathcal{P}_{f'''}(t=0)$ sur la transition $f''' - g$, l'évolution est la même puisque cette polarisation initiale n'est pas amplifiée. On peut donc considérer indifféremment \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ comme corrélés ou incorrélés à $t = 0$.

Au total, qu'il y ait des cohérences $\sigma_{f,f'}$ à $t = 0$ ou non, on peut considérer que \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ sont incorrélés à $t=0$ et donnés par (II.IV.30) avec (III.20).

c) Systeme à trois niveaux en "V" renversé

i) Notations

Nous considérerons enfin le cas d'un système à trois niveaux f, g, g' en "V" renversé présenté sur la figure III.6. f est couplé à g et g' par des transitions dipolaires électriques de fréquence $\omega_{f,g}$ et $\omega_{f,g'}$ et de polarisation \vec{u} et \vec{u}' . Nous noterons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega = \omega_{f,g} - \omega_{f,g'} \quad (\text{III.40-a}) \\ \omega_0 = \frac{\omega_{f,g} + \omega_{f,g'}}{2} \quad (\text{III.40-b}) \end{array} \right.$$

Comme g et g' font partie de G , on a :

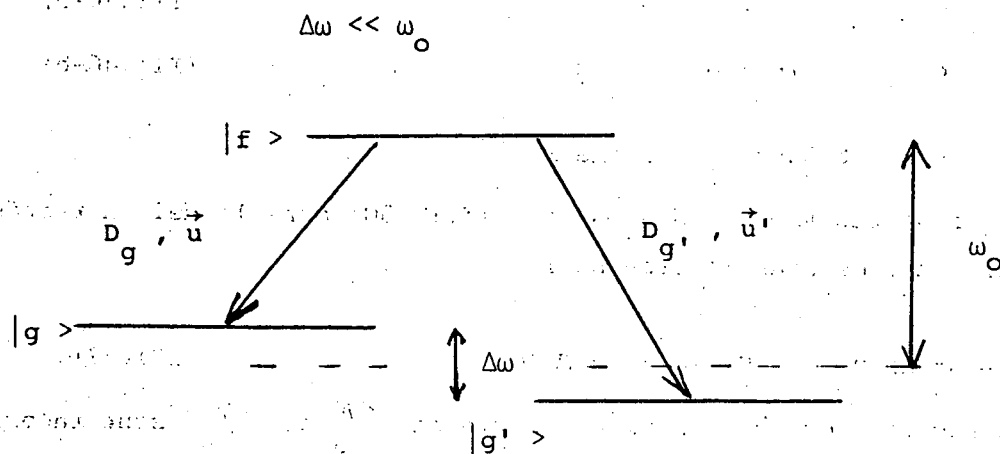


FIGURE III.6

On notera de plus par la suite :

$$\left\{ \begin{array}{l} D_g = \langle f | \vec{D} \cdot \vec{u} | g \rangle \end{array} \right. \quad \text{(III.41-a)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{g'} = \langle f | \vec{D} \cdot \vec{u}' | g' \rangle \end{array} \right. \quad \text{(III.41-b)}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_g = 2a^{-2} \sum_i D_g \rho_{op,i,f,g}^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \\ \mathcal{P}_{g'} = 2a^{-2} \sum_i D_{g'} \rho_{op,i,f,g'}^+ \delta(z-z_i) e^{-i(\omega_0 t - k_0 z)} \end{array} \right. \quad \text{(III.42)}$$

ii) Condition initiale

A $t = 0$, tous les atomes sont dans l'état f et il n'y a pas de cohérence hertzienne :

$$\sigma_{g,g'}(t=0) = 0 \quad \text{(III.43)}$$

(il n'y a pas de population: $\sigma_{g,g}(t=0) = \sigma_{g',g'}(t=0) = 0$). On a donc, quels que soient z et z' :

$$\langle \mathcal{P}_g(z,t=0) \cdot \mathcal{P}_{g'}^+(z',t=0) \rangle = 0 \quad \text{(III.44)}$$

\mathcal{P}_g et $\mathcal{P}_{g'}$ sont donc incorrélés à $t=0$. La condition initiale à prendre est alors celle décrite au § A.3.a en faisant le changement de variables :

$$\left\{ \begin{array}{l} f \rightarrow g \\ f' \rightarrow g' \\ g \rightarrow f \end{array} \right. \quad \text{(III.45)}$$

On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{cl,\alpha,g}(z,t=0) = \alpha_i D_g \quad (\text{III.46-a}) \\ \mathcal{P}_{cl,\alpha,g'}(z,t=0) = \alpha'_j D_{g'} \quad (\text{III.46-b}) \end{array} \right.$$

où z est dans la tranche i

et où α_i et α'_j sont incorrélés, donnés par (II.IV.30) dans lequel n représente le nombre total d'atomes dans la tranche i :

$$n = a^2 \Delta z \sigma_{f,f}(t=0) = a^2 \Delta z \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{III.47})$$

Notons que, là encore, les polarisations initiales \mathcal{P}_g et $\mathcal{P}_{g'}$ sont incorrélées.

d) Remarque

Nous avons vu que l'on peut toujours prendre les différents dipôles incorrélés à $t = 0$. Dans le cas où il existe une cohérence non nulle, ces dipôles peuvent se corrélérer. Dans le cas où il n'y a pas de cohérence, nous allons voir qu'il peut, là aussi, y avoir corrélation si $\Delta\omega$ est suffisamment petit.

Considérons le cas du système à trois niveaux en "V" dans un mélange statistique d'états à $t = 0$ (le cas du système à trois niveaux en "V" renversé est similaire). Au démarrage, les équations d'évolution sont linéaires. Il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} = -i \frac{k_0}{2\epsilon_0} (\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{f'}) \quad (\text{III.48-a}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f = i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_f + \frac{i}{\hbar} |D_f|^2 \sigma_{f,f}(t=0) \mathcal{E} \quad (\text{III.48-b}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'} = -i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_{f'} + \frac{i}{\hbar} |D_{f'}|^2 \sigma_{f',f'}(t=0) \mathcal{E} \quad (\text{III.48-c}) \end{array} \right.$$

Si $\Delta\omega.T_{SR} \gg 1$, l'évolution de \mathcal{P}_f se découple de celle de $\mathcal{P}_{f'}$ (\mathcal{P}_f n'est couplé qu'à la partie \mathcal{E}_f de \mathcal{E} qui précesse en $e^{i(\Delta\omega/2)t}$ et dont le terme source ne contient que $\mathcal{P}_{f'}$). On obtient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f(z) = i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_f + \frac{1}{LT_{SR}} \int_0^z dz' \mathcal{P}_f(z') \quad (\text{III.49-a}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'}(z) = -i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_{f'} + \frac{1}{LT_{SR'}} \int_0^z dz' \mathcal{P}_{f'}(z') \quad (\text{III.49-b}) \end{array} \right.$$

où T_{SR} et $T_{SR'}$ sont donnés par :

$$(T_{SR})^{-1} = |D_f| k_o L \sigma_{f,f} / (2\epsilon_o \hbar)$$

$$(T_{SR'})^{-1} = |D_{f'}| k_o L \sigma_{f',f'} / (2\epsilon_o \hbar)$$

(cf. (II.II.50), (II.II.51), (I.19)), et la phase relative de \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ reste aléatoire à tout instant.

Si par contre $\Delta\omega \cdot T_{SR} \ll 1$, on peut négliger $\Delta\omega$ dans (III.49) et il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f(z) = + \frac{1}{LT_{SR}} \int_0^z dz' (\mathcal{P}_f(z') + \mathcal{P}_{f'}(z)) \end{array} \right. \quad \text{(III.50-a)}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'}(z) = + \frac{1}{LT_{SR'}} \int_0^z dz' (\mathcal{P}_{f'}(z') + \mathcal{P}_f(z)) \end{array} \right. \quad \text{(III.50-b)}$$

En comparant (III.50 -a et b), on voit que $\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_{f'}$ croît beaucoup moins vite que $\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{f'}$, car

$$\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{f'} \text{ croît en } \left[(T_{SR})^{-1} + (T_{SR'})^{-1} \right]^{-1}$$

$$\text{alors que } \mathcal{P}_f - \mathcal{P}_{f'} \text{ croît en } \left[|(T_{SR})^{-1} - (T_{SR'})^{-1}| \right]^{-1}$$

et au total \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ se mettent en phase.

Cet effet est très général, nous l'étudierons de manière plus précise dans le cas de deux transitions à deux niveaux découplés (aucun niveau commun) (voir paragraphe B.2).

4) Conclusion

Au cours de ce paragraphe, nous avons pu établir l'équation d'évolution des opérateurs quantiques dans le cas général de la superradiance du système d'atomes à niveaux dégénérés ou quasi-dégénérés (équation (III.9)). L'équation obtenue permet de calculer, à l'approximation de propagation à une dimension, l'évolution d'une trajectoire possible de l'émission superradiante

dans une configuration quelconque de niveaux. Pour effectuer le tirage parmi ces trajectoires possibles, il faut associer à chaque atome et à chaque transition un dipôle classique de phase aléatoire. On peut alors simuler par le calcul l'évolution de la superradiance dans le cas le plus complexe, et l'on tient compte ainsi des effets de battements (présents si les ω_{gg} , ou ω_{ff} , ne sont pas tous nuls dans (III.9)) et des effets de polarisations (présents si la sommation sur les polarisations \vec{u}_p de (III.9) contient plus d'un terme).

B. Les battements de superradiance : quelques effets "physiques" étudiés sur des exemples simples

Nous avons vu, au précédent paragraphe, qu'il était possible de tenir compte exactement de tous les effets liés à la structure des niveaux. Le cas général est cependant trop complexe pour se prêter à des interprétations physiques simples, aussi examinerons-nous ici quelques cas particuliers (système constitué de deux classes d'atomes à deux niveaux (B.1 et 2), système à trois niveaux (B.3)) afin de discuter plus facilement de la physique de l'effet de battement de superradiance.

Nous montrerons tout d'abord que les battements s'interprètent comme des interférences classiques, et qu'ils sont, somme toute, très analogues aux battements cohérents de deux lasers (B.1). Nous étudierons ensuite les déplacements de fréquence observés lorsque la fréquence de battement $\Delta\omega$ devient de l'ordre de l'inverse du temps de superradiance T_{SR} . Nous verrons qu'à ce déplacement de fréquence est associée une mise en phase partielle des dipôles qui émettent sur chaque transition (B.2). Nous étudierons enfin l'effet des cohérences hertziennes sur le signal de battement (B.3).

1) Illustration du caractère classique des battements de superradiance : les battements entre atomes physiquement différents pour $\Delta\omega T_{SR} > 1$

Pour illustrer le caractère classique des interférences donnant naissance aux battements de superradiance, nous allons étudier ici le cas le plus simple donnant lieu à de tels battements, c'est-à-dire le cas de battements entre atomes physiquement différents (20) (56) (67).

a) Position du problème et équations d'évolution

Considérons que le système est constitué de deux types ⁽⁶⁷⁾ d'atomes à deux niveaux f et g (correspondant par exemple à deux isotopes "a" et "b" d'un même élément (voir figure III.7)). La fréquence de résonance correspondant à chacun des types n'est, a priori, pas la même; nous l'appellerons ω_a (ω_b) pour les atomes de type "a" ("b"). Nous supposons que ω_a est voisin de ω_b :

$$\omega_a - \omega_b = \Delta\omega \ll \omega_a, \omega_b \tag{III.51}$$

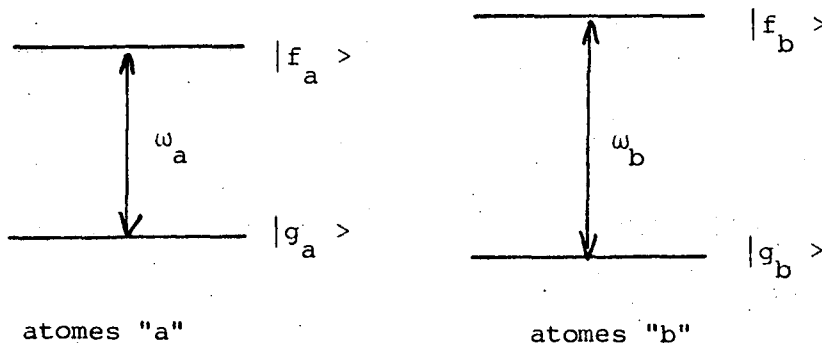


FIGURE III.7

On peut alors introduire les enveloppes \mathcal{P} et \mathcal{N} associées à chaque type d'atome, enveloppes que nous noterons \mathcal{P}_X et \mathcal{N}_X avec $X = a$ ou b . Nous introduirons également l'enveloppe \mathcal{E} du champ E (la définition exacte de \mathcal{P}_X , \mathcal{N}_X et \mathcal{E} se généralise de façon triviale à partir de (II.II.57) en remplaçant + par f_a ou f_b et - par g_a ou g_b).

L'évolution du système est alors décrite par l'équation (III.9) qui, dans ce cas particulier, prend une forme très simple :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dz} \mathcal{E} = - \frac{ik}{2\epsilon_0} \sum_X \mathcal{P}_X \tag{III.52-a} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P}_X = -i\Delta\omega_X \mathcal{P}_X + i \frac{|D_{+-,X}|^2}{\hbar} \mathcal{E} \mathcal{N}_X \tag{III.52-b} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}_X = \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{P}_{X-} - \mathcal{E} \mathcal{P}_{X+}) \tag{III.52-c} \end{array} \right.$$

où $\begin{cases} X = a, b \\ D_{+-,X} = \langle f_X | D | g_X \rangle \end{cases}$ est l'élément de matrice du dipôle pour les atomes de type "X" :

$$\text{et } \begin{cases} \Delta\omega_a = + \frac{\Delta\omega}{2} \\ \Delta\omega_b = - \frac{\Delta\omega}{2} \end{cases}$$

On remarquera que dans cette équation, les observables atomiques correspondant à des types d'atomes différents ne sont couplés que par l'intermédiaire du champ \mathcal{E} . Si le temps d'évolution de l'émission superradiante T_{SR} est long devant $(\Delta\omega)^{-1}$, ce couplage est négligeable. En effet, si l'on pose :

$$\mathcal{E} = \sum_X \mathcal{E}_X e^{-i\Delta\omega_X t} = \mathcal{E}_a e^{-i\frac{\Delta\omega}{2}t} + \mathcal{E}_b e^{+i\frac{\Delta\omega}{2}t} \quad (\text{III.53-a})$$

$$\text{et } \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_X e^{-i\Delta\omega_X t} \quad (\text{III.53-b})$$

il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_X = -i \frac{k_0}{2\epsilon_0} \mathcal{D}_X \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{D}_X = \frac{i |D_{+-,X}|^2}{\hbar} (\mathcal{E}_X + \mathcal{E}_{X'} e^{+2i\Delta\omega_X t}) \mathcal{N}_X \end{array} \right. \quad (\text{III.54-a})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{D}_X = \frac{i |D_{+-,X}|^2}{\hbar} (\mathcal{E}_X + \mathcal{E}_{X'} e^{+2i\Delta\omega_X t}) \mathcal{N}_X \end{array} \right. \quad (\text{III.54-b})$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}_X = \frac{i}{2\hbar} \left[(\mathcal{E}_X^+ \mathcal{D}_X - \mathcal{E}_X \mathcal{D}_X^+) + (\mathcal{E}_{X'}^+ \mathcal{D}_X e^{-2i\Delta\omega_X t} - \mathcal{E}_{X'} \mathcal{D}_X^+ e^{+2i\Delta\omega_X t}) \right] \end{array} \right. \quad (\text{III.54-c})$$

$$\text{où } \begin{cases} X, X' = a, b \\ X \neq X' \end{cases} \quad \begin{cases} \text{si } X = a & X' = b \\ \text{si } X = b & X' = a \end{cases}$$

Dans ces équations, \mathcal{E}_X , \mathcal{D}_X et \mathcal{N}_X évoluent lentement dans le temps (temps d'évolution de l'ordre de T_{SR}). Si

$$\Delta\omega \cdot T_{SR} \gg 1 \quad (\text{III.55})$$

on peut négliger dans (III.54-b et c) les termes en $e^{\pm 2i\Delta\omega_X t}$ et l'on obtient, pour chaque type d'atomes "X" :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_X = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \mathcal{P}_X \quad \text{(III.56-a)} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \tilde{\mathcal{P}}_X = \frac{i|D_{+-,X}|^2}{\hbar} \mathcal{E}_X \mathcal{N}_X \quad \text{(III.56-b)} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}_X = \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}_X^+ \tilde{\mathcal{P}}_X - \mathcal{E}_X \tilde{\mathcal{P}}_X^+) \quad \text{(III.56-c)} \end{array} \right.$$

alors que le champ total émis \mathcal{E} est donné par (III. 53-a).

b) Allure des solutions pour $\Delta\omega T_{SR} \gg 1$

L'évolution des atomes "a" (décrite par les équations III. 54 avec $X = a$) est complètement décorrélée de l'évolution des atomes "b". On est donc ramené à l'étude de la superradiance d'un système à deux niveaux dont nous connaissons les solutions. Nous ne préciserons pas ici les hypothèses faites pour faire ce calcul, mais nous supposerons que ce problème est résolu. Nous connaissons donc les champs émis $\mathcal{E}_a(t)$ et $\mathcal{E}_b(t)$ par les atomes "a" et "b".

Nous avons représenté sur la figure III.8 l'allure des signaux obtenus. La figure III.8-a représente l'intensité $I_a = |\mathcal{E}_a|^2$ émise par les atomes "a" s'ils sont seuls, la figure III.8-b l'intensité I_b , la figure III.8-c l'intensité totale $I = |\mathcal{E}|^2$ qui résulte de la superposition des deux champs \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b . On a :

$$\begin{aligned} I &= \left[\mathcal{E}_a e^{-i\frac{\Delta\omega t}{2}} + \mathcal{E}_b e^{+i\frac{\Delta\omega t}{2}} \right]^2 \\ &= I_a + I_b + (I_a I_b)^{1/2} \cos(\omega t + \phi) \end{aligned} \quad \text{(III.57)}$$

où ϕ représente la phase relative de \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b .

I présente des modulations qui correspondent aux interférences des champs émis par les atomes "a" et par les atomes "b" (équation III. 57). Comme le système "a" et le système "b" évoluent indépendamment l'un de l'autre (équation III. 56), et comme ils sont incorrélés à $t=0$, la phase relative ϕ de \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b est aléatoire. La phase des battements observée sur I est donc aléatoire.

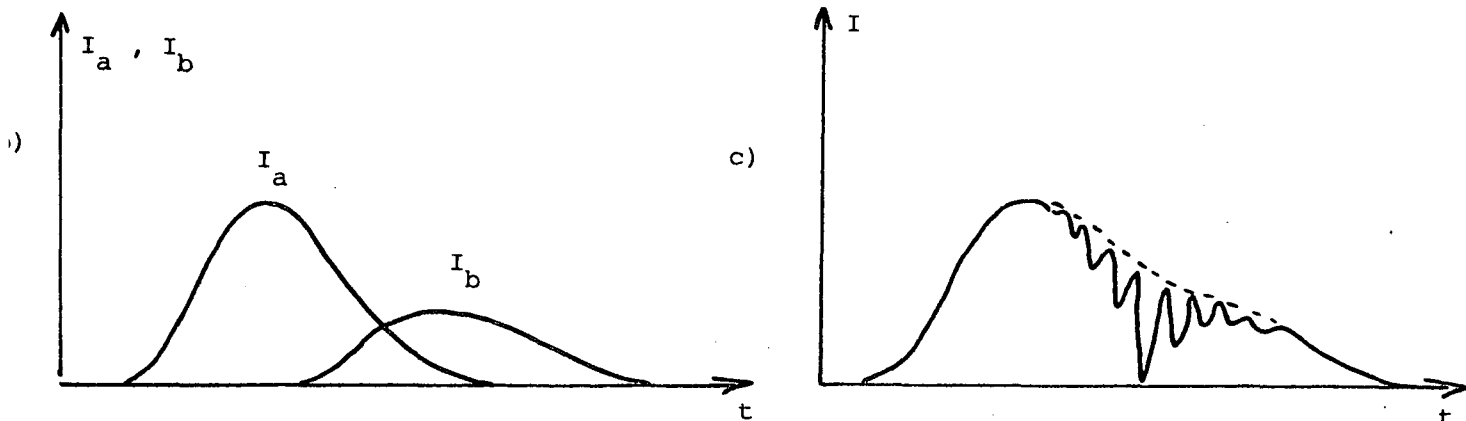


FIGURE III.8

c) Lien avec les battements cohérents de deux lasers, et avec la détection hétérodyn

Les battements de superradiance que nous venons d'étudier correspondent à des interférences entre les émissions d'atomes différents, et ont pour origine le caractère cohérent du champ émis. A ce titre, ils sont très analogues à d'autres types de battements cohérents.

Considérons, par exemple, que les atomes "a" et "b" sont séparés dans l'espace : les atomes "a" se trouvent dans la région A, les atomes "b" dans la région B (voir figure III.9). L'évolution des deux systèmes atomiques "a" et "b" est régie par l'équation (III.9). Supposons enfin qu'à l'aide de miroirs, l'on fasse se superposer les champs émis par les atomes "a" et "b" ⁽⁵⁶⁾. Le champ total \mathcal{E} obtenu ainsi est alors donné par les équations (III. 53) et (III. 56). Le problème ainsi posé est strictement équivalent au problème précédent et les battements observés sur la figure III.8 correspondent aux interférences classiques des deux champs émis \mathcal{E}_a et \mathcal{E}_b sur le détecteur. Ces battements sont analogues aux battements cohérents de deux lasers.

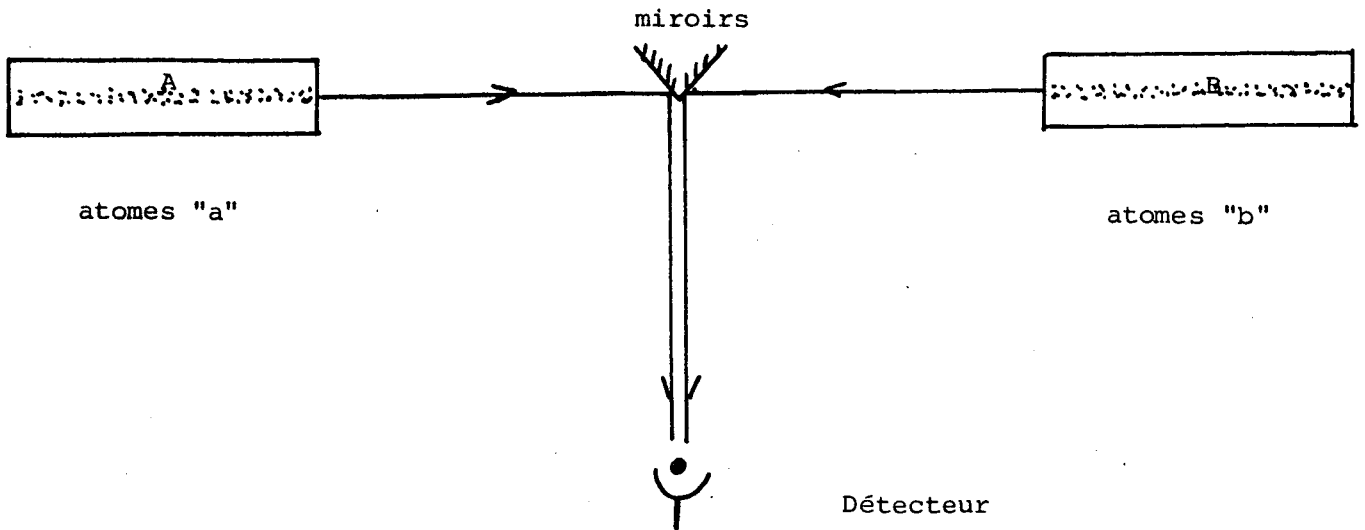


FIGURE III.9

Si l'on remplace l'un des milieux émetteurs (B par exemple) par une source continue et si le champ continu correspondant \mathcal{E}_b est très grand devant le champ superradiant \mathcal{E}_a , le signal I détecté correspond alors au battement hétérodyne de \mathcal{E}_a sur \mathcal{E}_b .⁽³²⁾ I présente alors des modulations dont l'amplitude est proportionnelle à \mathcal{E}_a . Nous avons représenté sur la figure III.10 l'allure du signal de battement hétérodyne (III.10-a) ainsi que l'allure de l'amplitude \mathcal{E}_a (III.10-b) que l'on peut en déduire.

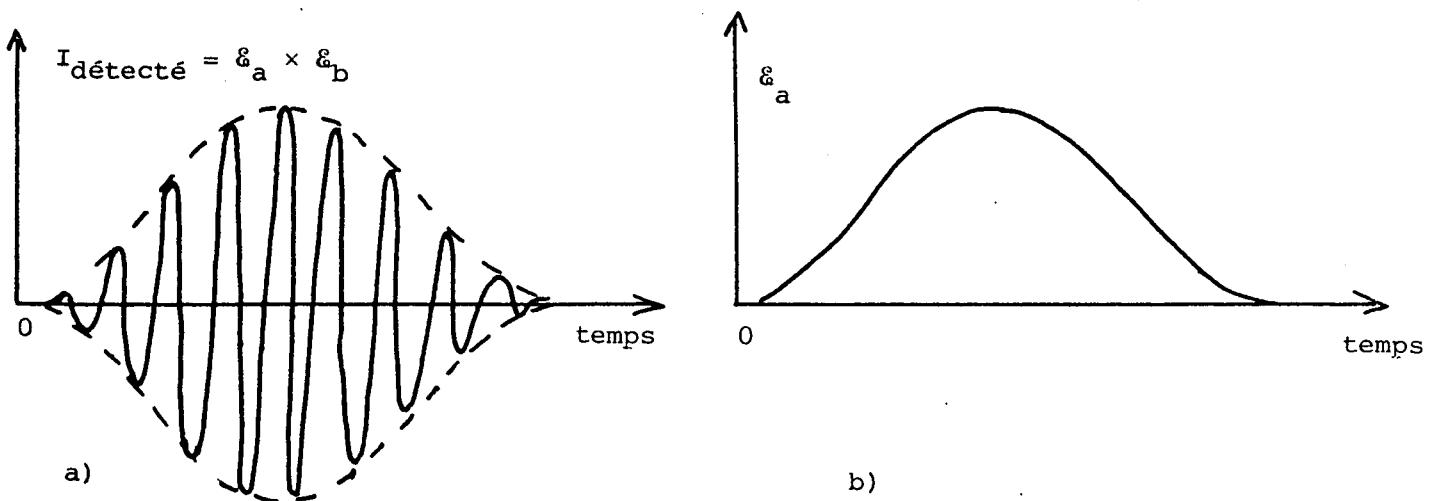


FIGURE III.10

La phase des modulations observée permet alors de déterminer la phase de $\delta_{(a)}$.

Dans les trois cas : battements entre atomes physiquement différents, battements d'atomes séparés dans l'espace et battements hétérodynes, le phénomène physique responsable des battements est le même; il s'agit d'interférences entre champs classiques. D'un point de vue expérimental, ces trois cas ont été étudiés (67) (20) (56) (32) et la présence effective de ces battements prouve bien le caractère classique du champ émis par superradiance.

2) La fréquence et la phase des battements de superradiance.

Etude suivant la valeur de $\Delta\omega \cdot T_{SR}$

Au cours de l'émission du pulse superradiant, le champ électromagnétique vu par les atomes devient très important. Dans le cas d'un système à deux niveaux, cela se traduit par un élargissement de la résonance associée à la transition (dans l'espace des temps, le temps de superradiance T_{SR} est plus court que la durée de vie Γ^{-1}). Dans le cas d'un système composé de sous-niveaux quasi-dégénérés, on peut observer, en plus de cet effet, des déplacements de la fréquence de résonance associée à chaque transition entre sous-niveaux sous l'effet du champ électromagnétique quasi-résonnant émis par le système sur les autres transitions.

D'un point de vue classique, cet effet peut s'interpréter comme un effet de couplage entre oscillateurs. La fréquence d'oscillation libre de chaque oscillateur se trouve alors déplacée sous l'effet du couplage. On observe de plus une mise en phase partielle des oscillateurs à l'instant initial. La phase des battements se trouve alors partiellement fixée et l'on peut observer, en l'absence de cohérences hertziennes à $t=0$, des modulations sur la valeur moyenne $\langle I \rangle$ de l'intensité émise I (nous verrons plus loin que s'il y a, à $t=0$, des cohérences hertziennes évoluant à la fréquence du battement, il y a synchronisation du battement sur la cohérence, et la phase du battement se trouve ainsi fixée).

Tous ces effets sont, bien sûr, contenus dans les équations générales (III.9) et peuvent être calculés numériquement de façon exacte. Au cours de ce paragraphe, nous discuterons de ces effets de manière qualitative en étudiant le

démarrage de l'évolution du système constitué de deux classes d'atomes "a" et "b" (cf. figure III.7). Cette fois cependant, nous ne ferons aucune hypothèse sur la valeur de $\eta = \Delta\omega \cdot T_{SR}$, paramètre qui, nous le verrons, caractérise la force du couplage.

Nous étudierons tout d'abord le démarrage de l'évolution des deux classes d'atomes en faisant l'approximation du champ moyen afin d'obtenir des solutions analytiques (2.a). Nous discuterons ensuite de l'allure de ces solutions en fonction de $\eta = \Delta\omega \cdot T_{SR}$ (§ 2.b).

a) Etude analytique du démarrage de l'évolution du système constitué de deux classes d'atomes à l'approximation du champ moyen

Considérons le cas du système constitué de deux classes d'atomes à deux niveaux (les notations ont été introduites au § B.1 et sont résumées par la figure 11, qui rappelle la figure 7)

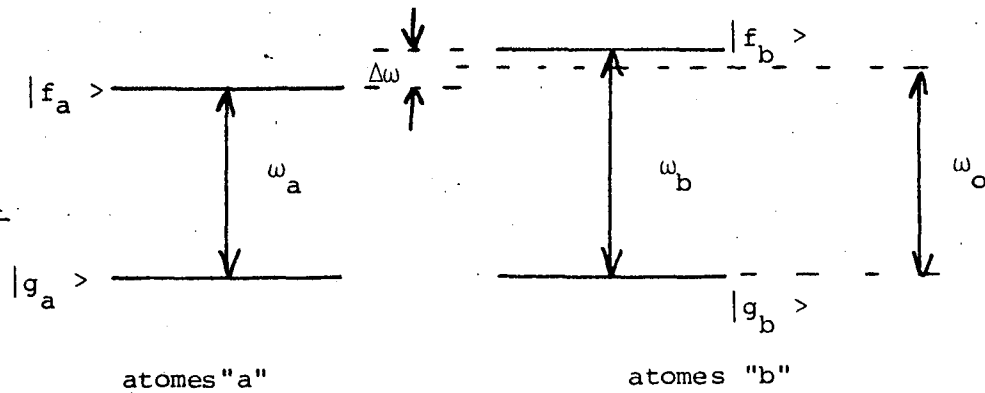


FIGURE III.11

Etudions le démarrage de l'évolution . On a alors :

$$\mathcal{N}_X(t) \approx \mathcal{N}_X(t=0) \text{ avec } X = a \text{ ou } b \quad (\text{III.58})$$

et il vient à l'approximation du champ moyen :

$$\mathcal{E} = - \frac{ik_0 L}{4\epsilon_0} (\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b) \quad (\text{III.59})$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_a = \left(-i \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{1}{2} (T_{SR,a})^{-1} \right) \mathcal{P}_a + \frac{1}{2} (T_{SR,b})^{-1} \mathcal{P}_b \quad (\text{III.60-a})$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{P}_b = \left(+i \frac{\Delta\omega}{2} + \frac{1}{2} (T_{SR,b})^{-1} \right) \mathcal{P}_b + \frac{1}{2} (T_{SR,a})^{-1} \mathcal{P}_a \quad (\text{III.60-b})$$

où $T_{SR, X}$ représente le temps de superradiance associé aux atomes "X" (analogue de T_{SR} ; cf. (I.19), (II.II.50) et (II.II.51)) :

$$\left(T_{SR, X} \right)^{-1} = \frac{|D_{+-, X}|^2 k_o L \mathcal{N}_X^p(t=0)}{2\epsilon_o \hbar} \quad (\text{III.61})$$

et où l'on a bien sûr $\Delta\omega = \omega_a - \omega_b$.

\mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b apparaissent dans ces équations comme deux oscillateurs couplés de fréquences différentes. Ce système (III.60) peut être résolu matriciellement.

Posons :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} \mathcal{P}_a \\ \mathcal{P}_b \end{pmatrix} \quad (\text{III.62})$$

et

$$H = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} (T_{SR, a}^{-1} - \frac{i\Delta\omega}{2}) & T_{SR, b}^{-1} \\ T_{SR, a}^{-1} & T_{SR, b}^{-1} + \frac{i\Delta\omega}{2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.63})$$

Le système d'équations (III. 60) s'écrit alors :

$$\frac{d}{dt} |\psi\rangle = H |\psi\rangle \quad (\text{III.64})$$

L'intégration de cette équation conduit à des solutions de la forme :

$$\mathcal{P}_a(t) = A e^{\omega_+ t} + B e^{\omega_- t} \quad (\text{III.65-a})$$

$$\mathcal{P}_b(t) = A' e^{\omega_+ t} + B' e^{\omega_- t} \quad (\text{III.65-b})$$

où ω_+ et ω_- sont les fréquences propres de H, et où A, B, A', B' dépendent linéairement des valeurs initiales des polarisations $\mathcal{P}_a(t=0)$, $\mathcal{P}_b(t=0)$.

La diagonalisation de H permet de déterminer ω_+ et ω_- ; il vient :

$$\omega_{\pm} = + \frac{1}{4} (T_{SR, a}^{-1} + T_{SR, b}^{-1}) \pm \frac{1}{2} \sqrt{-\Delta\omega^2 + \frac{1}{4} (T_{SR, a}^{-1} + T_{SR, b}^{-1})^2 + i\Delta\omega (T_{SR, a}^{-1} - T_{SR, b}^{-1})} \quad (\text{III.66})$$

L'allure de l'évolution de \mathcal{P}_a et de \mathcal{P}_b va donc dépendre énormément des valeurs respectives de $\Delta\omega$, $T_{SR,a}$ et $T_{SR,b}$.

Pour simplifier cette étude, nous envisagerons le cas :

$$T_{SR,a} = T_{SR,b} = T_{SR} \quad (\text{III.67})$$

L'expression des fréquences propres (III.66) de H se réduit alors à :

$$\omega^\pm = \frac{1}{2} T_{SR}^{-1} \times \left(1 \pm \sqrt{1 - \eta^2} \right) \quad (\text{III.68})$$

où $\eta = \Delta\omega \cdot T_{SR}$ (III.69)

et l'expression des vecteurs propres $|v^\pm\rangle$ correspondant est alors :

$$|v^\pm\rangle = \begin{pmatrix} 1 - i\eta \pm \sqrt{1 - \eta^2} \\ 1 + i\eta \pm \sqrt{1 - \eta^2} \end{pmatrix} \quad (\text{III.70})$$

Notons que si v^+ et v^- sont orthogonaux, v^+ et v^- ne sont pas normés.

Décomposons $|\psi\rangle$ (III.62) sur les états propres v^\pm et appelons \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- les coefficients correspondants :

$$|\psi\rangle = \mathcal{P}^+ |v^+\rangle + \mathcal{P}^- |v^-\rangle \quad (\text{III.71})$$

i) Considérons le cas $\eta > 1$. De (III.68) , il vient :

$$\omega^\pm = \frac{1}{2} T_{SR}^{-1} \pm i \frac{\Delta\omega'}{2} \quad (\text{III.72})$$

où $\Delta\omega' = \Delta\omega \sqrt{\eta^2 - 1}$ (III.73)

Par ailleurs, $|v^+\rangle$ et $|v^-\rangle$ ont alors pour expression :

$$|v^\pm\rangle = \begin{pmatrix} 1 - i\eta \pm i \sqrt{\eta^2 - 1} = v_a^\pm \\ 1 + i\eta \pm i \sqrt{\eta^2 - 1} = v_b^\pm \end{pmatrix} \quad (\text{III.74})$$

On en déduit l'expression de $\mathcal{P}_{(t=0)}^+$ et $\mathcal{P}_{(t=0)}^-$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{(t=0)}^+ = \frac{1}{\eta \sqrt{\eta^2-1}} (-v_b^- \mathcal{P}_a + v_a^- \mathcal{P}_b) \\ \mathcal{P}_{(t=0)}^- = \frac{1}{\eta \sqrt{\eta^2-1}} (v_b^+ \mathcal{P}_a - v_a^+ \mathcal{P}_b) \end{array} \right. \quad (\text{III.75})$$

Comme $|v^+\rangle$ et $|v^-\rangle$ sont les vecteurs propres de H de valeur propre ω_+ et ω_- , il vient de (III. 72) et (III. 64)

$$|\psi(t)\rangle = \mathcal{P}_{(t=0)}^+ e^{\omega_+ t} |v^+\rangle + \mathcal{P}_{(t=0)}^- e^{\omega_- t} |v^-\rangle \quad (\text{III.76})$$

En remplaçant $\mathcal{P}_{(t=0)}^+$ et $\mathcal{P}_{(t=0)}^-$ par leur valeur (III. 75), on en déduit $\mathcal{G}_a(t)$ et $\mathcal{P}_b(t)$. On en déduit également $\mathcal{E}(t)$ par (III.59). Il vient :

$$\mathcal{E} = -\frac{ik_o L}{4\epsilon_o} e^{t/2T_{SR}} \left\{ (1+i\sqrt{\eta^2-1}) \mathcal{P}_{(t=0)}^+ e^{i\frac{\Delta\omega' t}{2}} + (1-i\sqrt{\eta^2-1}) \mathcal{P}_{(t=0)}^- e^{-i\frac{\Delta\omega' t}{2}} \right\} \quad (\text{III.77})$$

où $\Delta\omega'$ est donné par (III.73).

On peut alors en déduire $I = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^+$

$$I = \left(\frac{k_o L}{4\epsilon_o} \right)^2 \eta^2 e^{t/T_{SR}} \left\{ |\mathcal{P}_{(t=0)}^+|^2 + |\mathcal{P}_{(t=0)}^-|^2 + \left(\mathcal{P}_{(t=0)}^+ \mathcal{P}_{(t=0)}^{-*} e^{i\left(\frac{\Delta\omega' t}{2} + \phi\right)} + cc \right) \right\} \quad (\text{III.78})$$

$$\text{où } e^{i\phi} = (2 - \eta^2 + 2i\sqrt{\eta^2-1}) / \eta^2 \quad (\text{III.79})$$

Alors que \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b sont complètement incorrélés à $t=0$, \mathcal{P}^+ et \mathcal{P}^- donnés par (III. 75) ne le sont pas. Cela se traduit par la présence d'un terme modulé dans la valeur moyenne $\langle I \rangle$ de l'intensité émise I que l'on peut déduire de (III.78). Calculons tout d'abord $\langle |\mathcal{P}^+|^2 \rangle$, $\langle |\mathcal{P}^-|^2 \rangle$ et $\langle \mathcal{P}^+ \mathcal{P}^{-*} \rangle$ à $t=0$ en remarquant que de par nos hypothèses $\langle |\mathcal{P}_a|^2 \rangle = \langle |\mathcal{P}_b|^2 \rangle$ à $t=0$. Il vient :

$$\langle |\mathcal{P}_{(t=0)}^\pm|^2 \rangle = \frac{1}{(\eta^2-1)} \langle |\mathcal{P}_a|^2 \rangle \quad (\text{III. 80})$$

$$\langle \mathcal{P}_{(t=0)}^+ \mathcal{P}_{(t=0)}^- \rangle^2 = \frac{1}{(\eta^2-1)} \langle |\mathcal{P}_a|^2 \rangle \left(\frac{1+e^{-i\phi}}{2} \right) \quad (\text{III.81})$$

En remarquant que :

$$\frac{|1+e^{-i\phi}|}{2} = \frac{|1+i\sqrt{\eta^2-1}|}{\eta^2} = \frac{1}{\eta} \quad (\text{III.82})$$

il vient alors pour $\langle I \rangle$:

$$\langle I \rangle = \frac{k_0 L}{4\epsilon_0} \cdot \frac{\eta^2}{\eta^2-1} \langle |\mathcal{P}_a(t=0)|^2 + |\mathcal{P}_b(t=0)|^2 \rangle e^{t/T_{SR}} \left(1 + \frac{1}{\eta} \cos(\Delta\omega t + \dots) \right) \quad (\text{III.83})$$

et l'on trouve bien que $\langle I \rangle$ est modulé.

ii) Considérons le cas $\eta < 1$. Les fréquences propres ω^\pm sont toutes réelles.

Comme par ailleurs :

$$\omega^+ > \omega^-$$

la composante de $|\psi(t=0)\rangle$ sur $|V^+\rangle$ sera amplifiée plus fortement que celle sur $|V^-\rangle$ et, très vite, au bout de quelques T_{SR} , $|\psi(t)\rangle$ sera parallèle à $|V^+\rangle$ (donné par l'équation (III.70)). \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b seront donc corrélées. Il est possible, à l'aide de l'équation (III.64), de calculer $|\psi(t)\rangle$ à tout instant ainsi que $\langle I \rangle$. Comme les ω^\pm sont réels, $\langle I \rangle$ ne présentera de toute façon aucune modulation.

Remarque : Dans le cas général:

$$T_{SR,a} \neq T_{SR,b} \quad (\text{III.84})$$

il est possible d'effectuer le calcul de $|\psi(t)\rangle$ et de $\langle I \rangle$ en utilisant la même méthode que celle utilisée plus haut dans le cas : $T_{SR,a} = T_{SR,b}$, $\eta > 1$. Le calcul est bien sûr plus lourd, mais peut se faire analytiquement.

Au total, dans tous les cas, il est possible de calculer $\mathcal{P}_a(t)$ et $\mathcal{P}_b(t)$ en fonction de $\mathcal{P}_a(t=0)$ et $\mathcal{P}_b(t=0)$ ainsi que $\langle I(t) \rangle$. Nous allons maintenant discuter de l'allure des solutions obtenues en fonction de $\eta = \Delta\omega \cdot T_{SR}$ dans le cas $T_{SR,a} = T_{SR,b}$ ^(*).

(*) Notons que le cas général n'a pas le même intérêt, car si (III.84) est réalisé, l'une des classes d'atomes superradiera avant l'autre et il n'y aura alors pas de battement de superradiance.

b) Allure des solutions en fonction de $\eta = \Delta\omega \cdot T_{SR}$

Nous limiterons cette discussion qualitative au cas (III.67) ($T_{SR,a} = T_{SR,b}$). Tout dépend alors de la valeur de $\eta = \Delta\omega \cdot T_{SR}$.

i) Si $\Delta\omega \cdot T_{SR} \gg 1$ (III.85)

on est ramené strictement à l'étude faite au précédent paragraphe (B.1). Vérifions que l'on retrouve les résultats attendus.

A partir de (III.68) et de (III.85), on trouve que les fréquences propres ω^\pm ont une partie réelle $\frac{1}{2} T_{SR}^{-1}$ et une partie imaginaire $\pm i\Delta\omega'$ très voisine de $\pm i\Delta\omega$ (cf. (III.72) et (III.73)). La partie réelle traduit la croissance exponentielle de \mathcal{P}_a (ou \mathcal{P}_b) en $e^{+t/2T_{SR}}$ au démarrage de l'évolution. La partie imaginaire en $\pm i \frac{\Delta\omega}{2}$ traduit la rotation régulière de la phase de \mathcal{P}_a et de \mathcal{P}_b ($e^{+i \frac{\Delta\omega}{2} t}$ pour \mathcal{P}_a , $e^{-i \frac{\Delta\omega}{2} t}$ pour \mathcal{P}_b). Au total, le champ émis \mathcal{E} , qui fait intervenir la somme de \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b présentera des modulations à la fréquence atomique $\Delta\omega$ de phase aléatoire (car cette phase dépend de la phase relative de \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b à $t=0$). Au total, en sommant sur toutes les trajectoires possibles, ces modulations de phase aléatoire se compensent et $\langle I \rangle$ ne présente aucune modulation (cf. (III.83) avec $\eta \gg 1$).

ii) Si $\Delta\omega \cdot T_{SR} \lesssim 1$ (III.86)

les fréquences propres ω^\pm ont une partie imaginaire $\frac{\Delta\omega'}{2}$ qui n'est plus nécessairement égale à $\Delta\omega/2$. Nous avons représenté sur la figure III.12 le rapport $\Delta\omega'/\Delta\omega$ en fonction de η .

Si η est grand, cet effet de déplacement de fréquence devient très vite négligeable (2% d'écart pour $\eta \approx 5$). Si par contre η devient de l'ordre de l'unité, cet effet peut devenir très important. Il faut tenir compte de cet effet parasite si l'on veut utiliser les battements de superradiance en tant qu'outil spectroscopique et l'on a intérêt à se placer, en pratique, dans le régime $\Delta\omega \cdot T_{SR} \gg 1$ (décrit au § i) (en fait $\Delta\omega \cdot T_{SR} >$ quelques unités est suffisant).

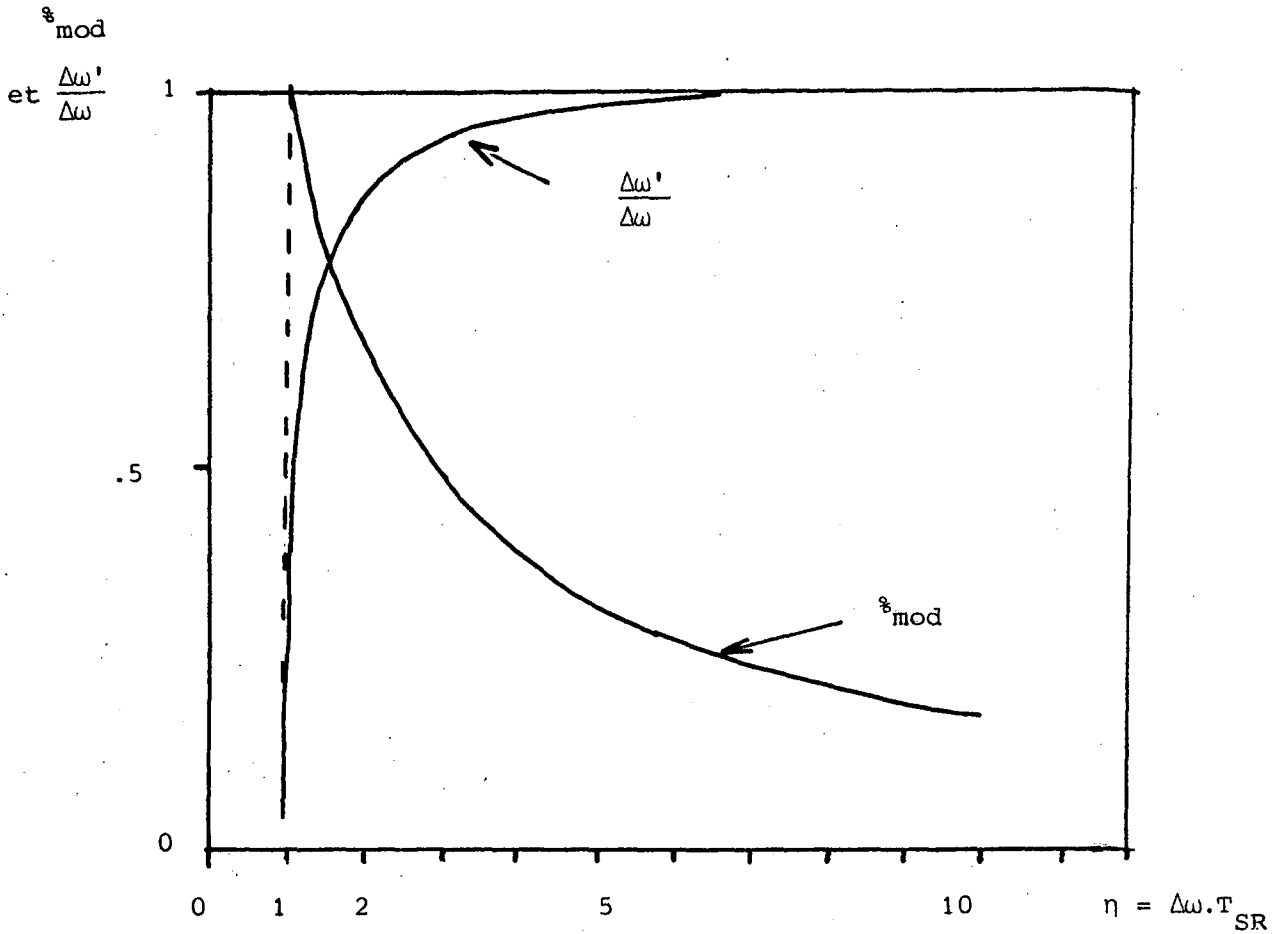


FIGURE III.12

Notons ici que cet effet de déplacement de fréquence peut se comprendre différemment suivant le point de vue dans lequel on se place. Dans le point de vue de SCHRODINGER, la superradiance est comprise comme une émission spontanée collective, et le déplacement de fréquence apparaît comme un Lamb-shift collectif du système total constitué des atomes "a" et "b". Dans le point de vue de HEISENBERG, on décrit l'évolution des opérateurs locaux et l'on s'intéresse séparément aux matrices densités locales des atomes "a" et des atomes "b". Les déplacements de fréquences observés apparaissent alors comme des déplacements lumineux liés à la présence d'un champ quasi résonnant (le champ \mathcal{E}_b émis par les atomes "b" est quasi-résonnant pour les atomes "a").

En plus de l'effet de déplacement de fréquence, on observe une mise en phase partielle des dipôles des atomes "a" et "b". Cette mise en phase se traduit par la présence d'un terme modulé dans la valeur moyenne $\langle I \rangle$ de l'intensité rayonnée et l'on a, à partir de (III.83) :

$$\langle I \rangle = \left[\langle I_{\text{non modulé}} \rangle + \langle I_{\text{modulé}} \rangle \cos (\Delta\omega' t + \dots) \right] \exp t/T_{\text{SR}} \quad (\text{III.87})$$

Nous avons reporté sur la figure III.12 la profondeur de modulation attendue ($\%_{\text{mod}}$) en fonction de η .

$$\begin{aligned} \%_{\text{mod}} &= \frac{2 \langle I_{\text{mod}} \rangle}{\langle I_{\text{mod}} \rangle + \langle I_{\text{non mod}} \rangle} \\ &\approx \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}}} \end{aligned} \quad (\text{III.88})$$

On notera que le déplacement relatif de fréquence $(\Delta\omega - \Delta\omega') / \Delta\omega$ décroît beaucoup plus vite avec η que la profondeur de modulation $\%_{\text{mod}}$. Pour $\eta \sim 5$ à 10 , il est possible de se placer dans un régime dans lequel la profondeur de modulation $\%_{\text{mod}}$ est importante (33 à 18%) alors que le déplacement de fréquence est quasi négligeable (inférieur à 2%).

iii) Si pour finir $\Delta\omega \cdot T_{\text{SR}} < 1$ (III.89)

les fréquences propres ω^+ et ω^- sont des quantités réelles. L'évolution des polarisations atomiques \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b ne fait plus apparaître de constante de temps imaginaire et l'on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_a &= e^{t/2T_{\text{SR}}} \left(A e^{t/T_{\Delta\omega}} + B e^{-t/T_{\Delta\omega}} \right) \\ \mathcal{P}_b &= e^{t/2T_{\text{SR}}} \left(A e^{t/T_{\Delta\omega}} + B e^{-t/T_{\Delta\omega}} \right) \end{aligned} \quad (\text{III.90})$$

où $T_{\Delta\omega}^{-1} = \frac{1}{2} \sqrt{T_{\text{SR}}^{-1} - \Delta\omega^2}$ (III.91)

Au démarrage de l'évolution, les deux dipôles atomiques ne "tournent" pas et il n'apparaît aucune modulation dans le pulse superradiant. Le champ évolue simplement exponentiellement avec une constante de temps de l'ordre de T_{SR} . Si $\Delta\omega$ tend vers zéro, l'évolution en temps long ne fait apparaître que les exponentielles positives et comme $T_{\Delta\omega}$ tend vers $2T_{\text{SR}}$, on trouve une évolution de \mathcal{P}_a et de \mathcal{P}_b en $e^{t/T_{\text{SR}}}$. Tout se passe alors comme si un seul système à deux niveaux émettait le pulse superradiant (on retrouve bien l'évolution en $e^{t/2T_{\text{SR}}}$ pour $\mathcal{P}_{\text{total}}$ à condition de remarquer que le temps de

superradiance T_{SR} associé au système total est deux fois plus court que celui associé à chacun des sous-systèmes "a" et "b"). Durant la partie non linéaire de l'évolution ($\mathcal{N}_a(t) \neq \mathcal{N}_a(t=0)$), le couplage entre \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b peut être moins important et le résultat précédent n'est plus nécessairement valide. Pour étudier cet effet, il suffit de remarquer que l'évolution non linéaire de \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b est décrite par des équations formellement identiques à (III.64) dans lesquelles $T_{SR,X}$ ($X = a, b$) et H sont des fonctions du temps. Ces équations sont obtenues en remplaçant $\mathcal{N}(t=0)$ par $\mathcal{N}(t)$ dans l'expression donnant $T_{SR,X}$ (III.61). Il faut alors faire la même opération dans les équations (III.68) donnant ω^\pm

Dans le cas particulier, $T_{SR,a} = T_{SR,b}$ au voisinage de l'inversion de population pour :

$$|\mathcal{N}(t)| < \Delta\omega T_{SR} \mathcal{N}(t=0) \quad (\text{III.92})$$

$\omega^\pm(t)$ a une partie imaginaire et le couplage des dipôles atomiques est suffisamment faible pour qu'ils puissent tourner. Cependant, comme $\Delta\omega \cdot T_{SR} < 1$, le temps pendant lequel la condition (III.92) est satisfaite est court devant

$\Delta\omega^{-1}$ et la phase relative de \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b n'a pas le temps de tourner. Au total, il n'y a en général pas de terme modulé pour $\Delta\omega T_{SR} < 1$.

3) Influence des cohérences hertziennes

Jusqu'ici, nous avons limité notre étude au cas simple constitué de deux systèmes à deux niveaux indépendants. Nous avons pu voir que les battements observés dans l'émission superradiante correspondaient à des interférences entre des cohérences optiques. La fréquence du battement est alors égale à la différence de deux fréquences optiques. Dans certains cas, il peut exister des cohérences hertziennes qui évoluent à cette fréquence différente et nous allons étudier leur effet. Nous nous intéresserons à ce problème dans différentes configurations simples d'un système à trois niveaux : configuration en "V" avec et sans cohérences à $t = 0$ et configurations en "V" renversé.

L'étude de ces quelques cas particuliers nous permettra de présenter quelques effets physiques simples liés aux cohérences hertziennes. Dans le cas $\Delta\omega \cdot T_{SR} \lesssim 1$ (oscillateurs atomiques couplés), il n'y a pas de battement et la présence des cohérences peut se traduire par une quantification du délai de

l'émission (§ 3.a). Dans le cas $\Delta\omega.T_{SR} \gg 1$ (oscillateurs atomiques libres), il y a battements mais la phase et la profondeur de modulation de ces battements peuvent dépendre de la présence de cohérences hertziennes à $t=0$ (§ 3.b). Enfin, quelle que soit la valeur du produit $\Delta\omega.T_{SR}$, on peut remarquer que l'émission superradiante est capable de créer des cohérences hertziennes que l'on peut détecter ensuite par battement quantique (§ 3.c).

a) L'effet de quantification du délai

Au cours de ce paragraphe, nous étudierons l'évolution de la superradiance dans le cas limite :

$$\Delta\omega.T_{SR} \ll 1 \quad (\text{III.93})$$

Nous verrons que l'allure des solutions est très différente suivant qu'il y a ou non des cohérences hertziennes à $t=0$.

En l'absence de cohérences hertziennes, il y a émission d'un pulse non modulé de délai quelconque. Si, par contre, il existe des cohérences hertziennes importantes, on observe l'émission d'un pulse dont les délais sont "quantifiés". Certaines valeurs du délai sont interdites, alors que d'autres sont favorisées. Pour étudier la physique de ce phénomène, considérons le cas d'un système à trois niveaux en "V" et étudions le démarrage de l'évolution.

La figure III.13 rappelle le schéma des niveaux et indique les notations utilisées (toutes les notations ont été définies de manière précise au § A.3.a.i). Nous considérerons le cas où les polarisations des deux transitions sont les mêmes ($\vec{u} = \vec{u}'$).

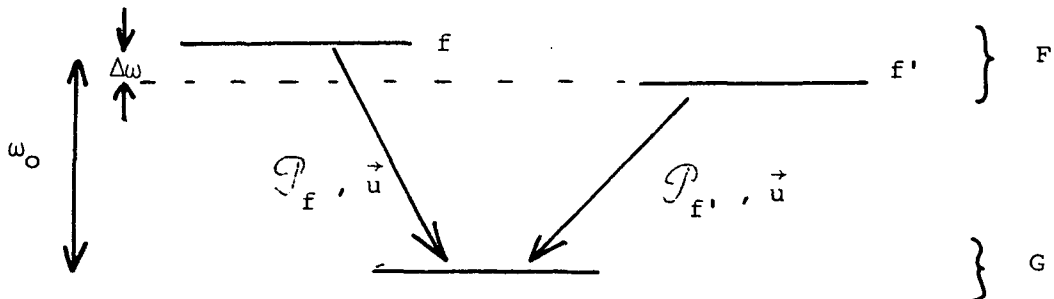


FIGURE III.13

L'équation d'évolution se déduit de (III.9). Il vient, au démarrage de l'évolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f = i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_f + \frac{i\mathcal{E}}{\hbar} (|D_f|^2 \sigma_{f,f}(t=0) + D_f^* D_{f'} \sigma_{f,f'}(t=0) e^{+i\Delta\omega t}) \\ \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'} = -i \frac{\Delta\omega}{2} \mathcal{P}_{f'} + \frac{i\mathcal{E}}{\hbar} (|D_{f'}|^2 \sigma_{f',f'}(t=0) + D_{f'}^* D_f \sigma_{f,f'}(t=0) e^{-i\Delta\omega t}) \\ \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} = - \frac{ik_0}{2\epsilon_0} (\mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{f'}) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(III.94-a)} \\ \text{(III.94-b)} \\ \text{(III.94-c)} \end{array}$$

On remarque que le terme source dans l'équation d'évolution de \mathcal{P}_f et de $\mathcal{P}_{f'}$ est modulé à la fréquence $\pm i\Delta\omega$ (terme en $\sigma_{f,f'}(t=0) \exp(\pm i\Delta\omega t)$).

- S'il n'y a pas de cohérence à $t=0$, $\sigma_{f,f'}(t=0)$ est nul et l'amplitude de cette modulation est nulle. Tous les délais sont également autorisés.
- Si, par contre, la cohérence $\sigma_{f,f'}(t=0)$ est importante, les modulations du terme source ne sont plus négligeables. Par exemple si :

$$\sigma_{f,f}(t=0) = \sigma_{f',f'}(t=0) = \sigma_{f,f'}(t=0) , \quad \text{(III.95)}$$

la modulation du terme source est de 100% et $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_f$ et $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_{f'}$ est négligeable aux instants t tels que :

$$\Delta\omega \approx \pi \quad \text{à } 2\pi \text{ près.} \quad \text{(III.96)}$$

La modulation étant beaucoup plus lente que la durée du pulse superradiant, on observe une quantification du délai qui ne peut prendre les valeurs

$$(2n+1) \pi/\Delta\omega \quad \text{où } n \text{ entier.}$$

Cet effet a été observé expérimentalement (7) et pour l'étudier de façon plus précise, il suffit de résoudre numériquement les équations (III.9). Nous avons présenté sur la figure III.14, extraite de la thèse de J.M. RAIMOND (57), les courbes correspondant à cette intégration numérique. Le calcul est fait dans le cas où les populations dans les deux niveaux excités sont égales. Nous avons

pris par ailleurs :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta\omega = 80 \text{ MHz} \\ D_e = D_{e'} = D_{+-} \text{ correspondant à une durée de vie} \end{array} \right.$$

Γ^{-1} égale à 270 ns, (III.97)

le calcul étant fait en simulant le démarrage de l'évolution par une polarisation uniforme.

Enfin, le démarrage de l'évolution est simulé par une polarisation uniforme égale sur chacune des deux transitions f-g, f'-g (on néglige ici les fluctuations (cf. § A.3)).

La figure III.14 montre que le pulse superradiant est non modulé et qu'il présente des délais quantifiés. Le délai est en effet :

- soit inférieur à 7 ns
- soit voisin de 12,5 ns ou d'un multiple de 12,5 ns (ce qui correspond bien à $\Delta\omega.T_{SR} = 0$ à 2π près)

L'effet est encore plus net sur la figure III.15, extraite également de la thèse de J.M. RAIMOND (57). On y a représenté la variation du délai en fonction de l'inverse de la population initiale $1/N$. Les points représentent le délai du pulse le plus intense, les ronds celui du pulse secondaire, s'il existe. Nous avons également représenté la fonction $\cos(\Delta\omega t)$ et l'on voit que les pulses sont groupés dans les alternances positives de $\cos(\omega t)$. Pour les populations les plus importantes, le délai est assez court pour pouvoir varier linéairement dans la première alternance positive de $\cos \omega t$.

b) Effet des cohérences hertziennes sur la phase et la profondeur de modulation des battements de superradiance

Nous étudierons ici l'effet des cohérences hertziennes sur la profondeur de modulation et la phase des battements de superradiance. Il nous faut, pour cela, nous placer dans le cas où de tels battements sont observables, c'est-à-dire pour $\Delta\omega.T_{SR} \gg 1$ (en fait $\Delta\omega.T_{SR} >$ quelques unités est suffisant pour voir les battements). Il est possible de calculer complètement cet effet : il suffit, là encore, d'intégrer numériquement les équations (III.9) dans chaque cas.

Pour étudier la "physique" de l'effet, nous nous intéresserons au cas simple du système à trois niveaux en "V" avec $\vec{u} = \vec{u}'$ (les notations sont,

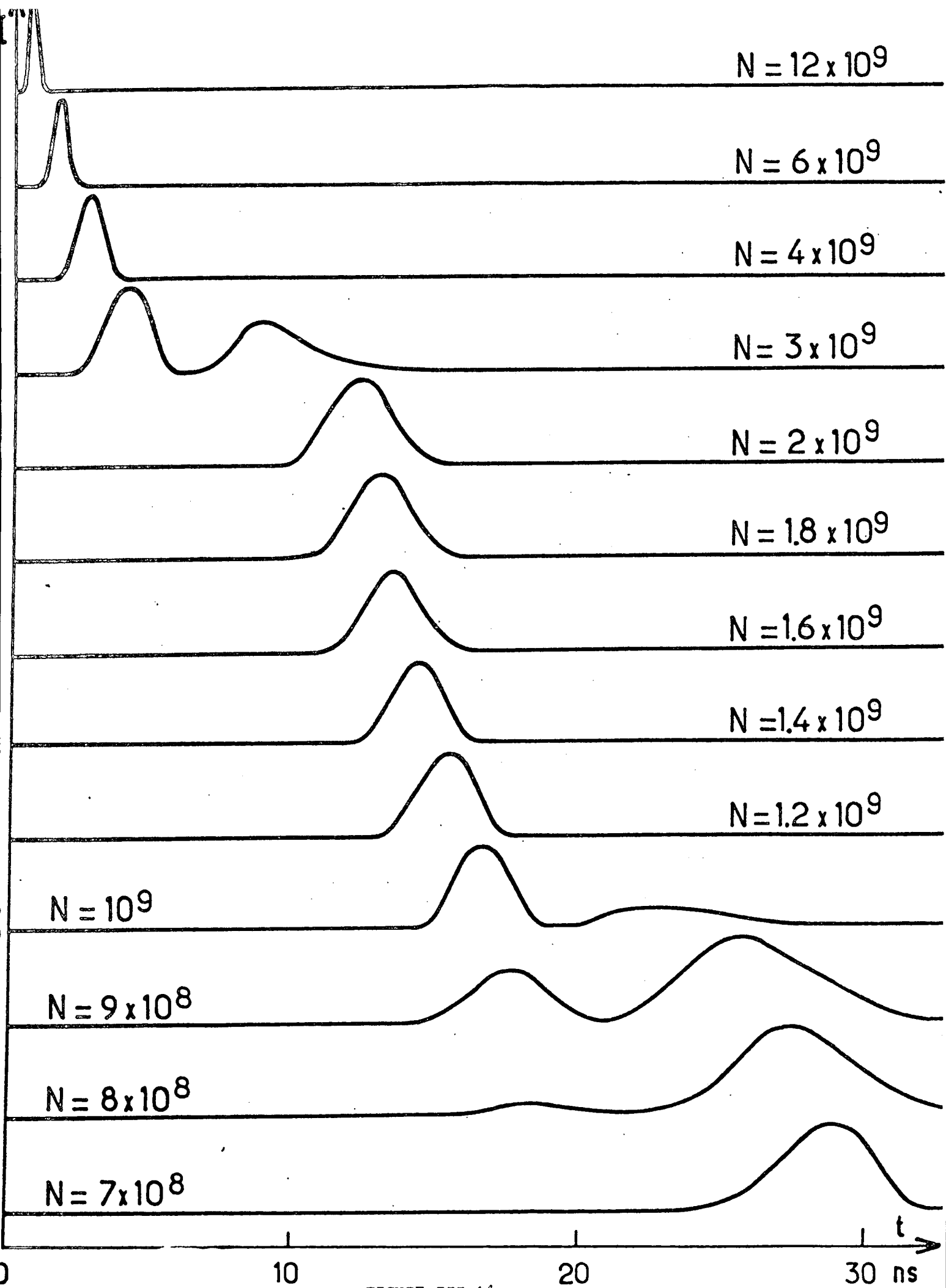


FIGURE III.14

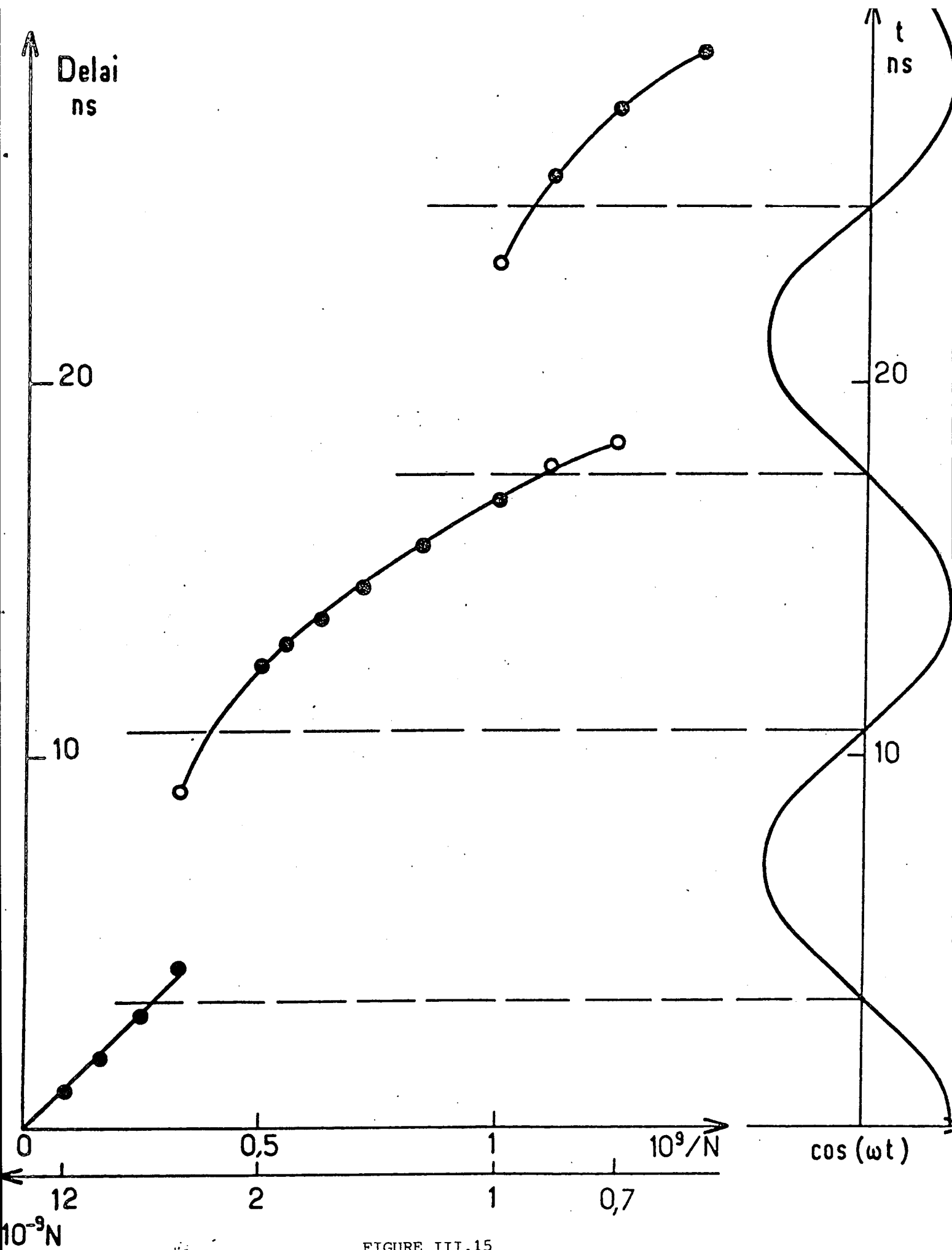


FIGURE III.15

rappelons-le, définies de manière précise au paragraphe A.3.a.i; la figure III.13 les rappelle). Le démarrage de l'évolution est décrit par l'équation (III.94) mais cette fois $\Delta\omega.T_{SR}$ est supérieur à 1.

i) En absence de cohérences hertziennes à $t = 0$

$$\sigma_{f,f'}(t=0) = 0 \quad (III.98)$$

et les équations (III.94) sont, au démarrage, formellement identiques aux équations (III.60) obtenues pour deux classes d'atomes "a" et "b" à deux niveaux, après le changement de notations

$$\left. \begin{array}{l} X_{\text{indice } f} \rightarrow X_a \\ X_{\text{indice } f'} \rightarrow X_b \end{array} \right\} \quad (III.99)$$

Ce résultat n'a rien d'étonnant; nous avons vu en effet au § A.3.a que si (III.98) est satisfait, on peut faire la mesure de l'état dans lequel se trouve chaque atome à $t = 0$. En appelant "a" et "b" les atomes se trouvant à $t=0$ en f et f' (opération déjà pratiquée au § A.3.a) et en négligeant les réabsorptions (approximation du démarrage), on peut considérer que les atomes "a" n'ont pas de niveaux f' et les atomes "b" pas de niveaux f. On retrouve bien alors deux classes d'atomes à deux niveaux indépendants.

Etudions tout d'abord la phase des battements. Comme cette phase est déterminée par la période de démarrage, on peut utiliser les résultats du paragraphe B.2. On trouve que la phase des battements fluctue aléatoirement d'une expérience à l'autre. La valeur moyenne $\langle I \rangle$ de l'intensité émise qui résulte de la sommation sur un grand nombre d'expériences répétées est faiblement modulée. Le taux de modulation est de l'ordre de $n^{-1} = (\Delta\omega.T_{SR})^{-1}$ (cf. figure III.12).

Intéressons-nous maintenant à la profondeur de modulation des battements. Nous ne pouvons plus nous restreindre ici à la période initiale de démarrage linéaire de l'évolution et, pour faire le calcul, il peut être plus simple de fixer la phase de \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$. On peut alors donner à \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$,

des valeurs initiales uniformes, en phase (cf. § A.3.a et b). Après intégration numérique, on observe des modulations à la fréquence $\Delta\omega$ dans l'intensité émise I . Ces modulations ne sont importantes que si les gains associés à chaque transition sont très voisins, c'est-à-dire si $T_{SR,a} = T_{SR,b}$ (définis par l'équation (III.61) avec le changement de notation (III.99)). Pour $T_{SR,a} = T_{SR,b}$, la profondeur de modulation est de 100%. Si $T_{SR,a}$ et $T_{SR,b}$ sont différents, la profondeur de modulation est presque nulle à la limite $\Delta\omega.T_{SR} \gg 1$. Par exemple, pour $D_a = D_b$ et $T_{SR,a} / T_{SR,b} = 0,9$, il n'y a pas de modulation. Par contre, si $\Delta\omega.T_{SR}$ est de l'ordre de quelques unités, l'effet est moins net et l'on a, par exemple, une profondeur de modulation de 35% pour $T_{SR,a} / T_{SR,b} = 0,7$ avec $D_a = D_b$ et $\Delta\omega.T_{SR,a} = 2.0$ (*) (57). Dans tous les cas, $\Delta\omega.T_{SR} \gg 1$ ou $\Delta\omega.T_{SR} \gtrsim 1$, le contraste des battements est beaucoup plus faible que dans le cas de deux systèmes à deux niveaux indépendants. Ceci se comprend aisément car les transitions $f-g$ et $f'-g$ partagent un niveau commun g .

Si $T_{SR,a} < T_{SR,b}$, les atomes "a" superrradient les premiers et sont portés dans l'état g . Ils sont alors capables d'absorber le rayonnement émis par les atomes "b" et l'émission superradiante des atomes "b" sur la transition de f' vers g ne peut se bâtir. Les atomes "b" ne superrradient plus et il ne peut y avoir d'interférence avec l'émission des atomes "a", donc de battements. Cette diminution très brutale du contraste des battements dans le cas d'un système à trois niveaux en "V" sans cohérences hertziennes à $t = 0$ peut donc se décrire comme un "quenching" de la superradiance sur la transition de plus faible gain (atomes "b") par celle sur la transition de plus fort gain (atomes "a"). Notons que cet effet de "quenching" est propre au cas du système à trois niveaux. Il n'apparaît pas pour deux classes d'atomes à deux niveaux (cas étudié au § B.1), car il n'y a pas dans ce cas de niveaux communs. Au total, en absence de cohérence hertzienne pour $\Delta\omega.T_{SR} \gg 1$, on observe des battements dont la phase fluctue aléatoirement et dont la profondeur de modulation décroît très vite si les gains associés aux différentes transitions ne sont pas égaux (effet de "quenching"). Si $\Delta\omega.T_{SR}$ est de l'ordre de quelques unités, la phase n'est pas complètement aléatoire et il reste une certaine modulation sur $\langle I \rangle$. De même, l'effet de "quenching" est moins net et la profondeur de modulation décroît moins brutalement.

(*) Rappelons que $\Delta\omega$ est donné en unité de pulsation et correspond à

$$\Delta\nu = \Delta\omega / 2\pi$$
en unité de fréquence.

On pourrait entreprendre de façon analogue l'étude du cas du système à trois niveaux en "v" renversé; les résultats sont tout à fait similaires car dans les deux cas, il n'y a aucune cohérence à $t = 0$. La phase des battements est de caractère aléatoire et la profondeur de modulation des battements décroît très vite si les gains associés aux deux transitions sont différents. Ce dernier effet s'interprète, pour un système en "v" renversé, comme une compétition entre deux transitions qui vident un niveau commun (le niveau de départ). Là encore, la transition du plus fort gain l'emporte.

ii) En présence de cohérences hertziennes à $t = 0$, on a

$$\sigma_{f,f'}(t=0) \neq 0 \quad (\text{III.100})$$

et les résultats sont tout à fait différents.

Intéressons-nous tout d'abord à la phase des battements de superradiance. Nous avons vu au § A.3.b que les cohérences initiales ont pour effet de fixer la phase relative de \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$. Les battements observés dans l'intensité émise, qui résultent des interférences entre \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$, ont alors une phase commune. Les modulations observées sur l'intensité émise I_α à chaque expérience se retrouvent alors après sommation sur la valeur moyenne $\langle I \rangle$ correspondante.

Le calcul de la profondeur de modulation des battements est un peu plus complexe, aussi considérerons-nous que le système est dans un cas pur à $t = 0$:

$$\rho_i(t=0) = |f_i'' \rangle \langle f_i''| \quad (\text{III.101})$$

Il est alors possible de décrire l'évolution de la superradiance à l'aide d'une équation de SCHRÖDINGER (couplage avec champ classique) sur les amplitudes c_f , $c_{f'}$, et c_g définies par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{x,x'} = c_x^* c_{x'} \\ \text{pour } x, x' = f, f', g \end{array} \right. \quad (\text{III.102})$$

Il vient alors :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} D_f^* (c_f + c_{f'}) c_f^* \quad \text{(III.103-a)} \\ \frac{\partial}{\partial t} c_f = +i \frac{\Delta\omega}{2} c_f - \frac{i}{2\mathcal{H}} D_f \cdot c_g \cdot \mathcal{E} \quad \text{(III.103-b)} \\ \frac{\partial}{\partial t} c_{f'} = -i \frac{\Delta\omega}{2} c_{f'} - \frac{i}{2\mathcal{H}} D_{f'} \cdot c_g \cdot \mathcal{E} \quad \text{(III.103-c)} \\ \frac{\partial}{\partial t} c_g = \quad \quad \quad + \frac{i}{2\mathcal{H}} (D_f^* c_f + D_{f'}^* c_{f'}) \mathcal{E}^* \quad \text{(III.103-d)} \end{array} \right.$$

en remarquant que c_f , $c_{f'}$ évoluent en $\exp(+i\Delta\omega t/2)$ et en $\exp(-i\Delta\omega t/2)$, on obtient pour $\Delta\omega \cdot T_{SR} \gg 1$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}_f = -\frac{|D_f|^2 k_0}{4\epsilon_0 \mathcal{H}} \int_0^z dz \tilde{c}_f |c_g|^2 \quad \text{(III.104-a)} \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}_{f'} = -\frac{|D_{f'}|^2 k_0}{4\epsilon_0 \mathcal{H}} \int_0^z dz \tilde{c}_{f'} |c_g|^2 \quad \text{(III.104-b)} \\ \frac{\partial}{\partial t} \tilde{c}_g = \frac{k_0}{4\epsilon_0 \mathcal{H}} \int_0^z dz (|D_f|^2 |\tilde{c}_f|^2 + |D_{f'}|^2 |\tilde{c}_{f'}|^2) \quad \text{(III.104-c)} \end{array} \right.$$

avec $c_f = \tilde{c}_f \exp(i\Delta\omega t/2)$ (III.105-a)

$c_{f'} = \tilde{c}_{f'} \exp(-i\Delta\omega t/2)$ (III.105-b)

Dans le cas particulier $D_f = D_{f'}$, on remarque que $\tilde{c}_f / \tilde{c}_{f'}$ reste constant au cours de toute l'évolution. Comme \tilde{c}_f et $\tilde{c}_{f'}$ varient lentement, on en déduit, à partir de l'équation (III.103-a), que $I = \mathcal{E} \cdot \mathcal{E}^*$ est modulé :

$$I = \left| \frac{k_0}{2\epsilon_0} D_f \right|^2 \cdot \sigma_{g,g} \cdot (\sigma_{f,f} + \sigma_{f',f'}) [1 + \sin \alpha \cos(\Delta\omega t + \phi)]$$

(III.106)

où $\cos \alpha = \sigma_{f,f}(t=0) / \text{Tr}(\sigma)$ (III.107)

représente le pourcentage d'atomes dans l'état f à $t = 0$. La figure III.16 représente, en fonction de ce pourcentage, le poids relatif du terme modulé (la courbe représentative est bien sûr un cercle). Le taux de modulation obtenu est, notons-le, le même que celui qui serait obtenu sur la lumière de fluorescence de la transition $F \rightarrow G$ polarisée suivant la direction \vec{u} (expérience de battement quantique).

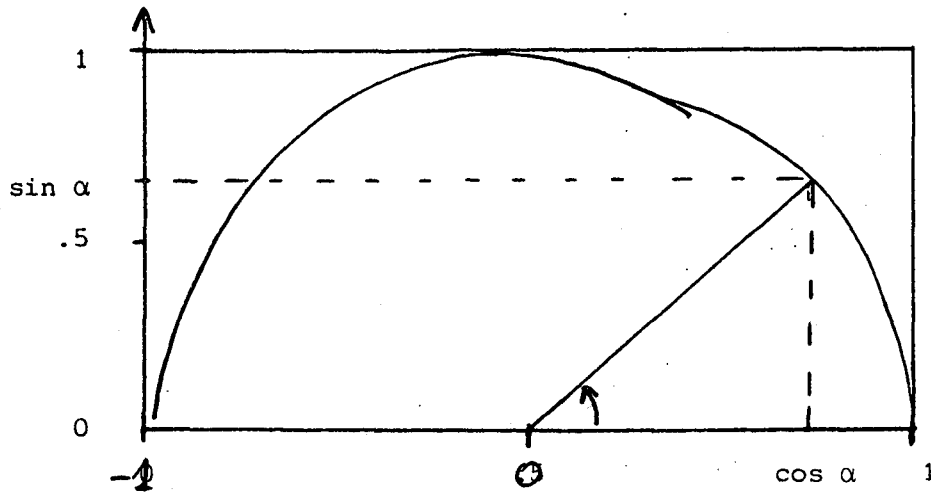


FIGURE III.16

$$\left(\cos \alpha = \sigma_{ff}(t=0) \right)$$

Ce taux de modulation est beaucoup plus important que dans le cas d'absence de cohérences hertziennes initiales. Si par exemple :

$$\sigma_{f,f}(t=0) / \text{Tr}(\sigma) = 1\% , \quad (\text{III.108})$$

le poids du terme modulé est de 14,1% avec cohérence (pourcentage de modulation, $\%_{\text{mod}} = \frac{I_{\text{max}} - I_{\text{min}}}{I_{\text{max}}} = 24,7\%$), alors qu'il serait pratiquement nul en absence de cohérences (rapport des gains sur les deux transitions égal à 10^{-2}).

iii) Conclusion

Au total, bien que les battements de superradiance soient liés à des interférences entre cohérences optiques, les cohérences hertziennes jouent un rôle important. Elles pilotent en quelque sorte les cohérences optiques. Les diverses cohérences optiques se bâtissent alors à la même vitesse avec des phases relatives parfaitement déterminées. La phase des battements est alors liée à la phase de la cohérence initiale et l'on observe les battements sur chaque trajectoire I_{α} comme sur le signal moyen $\langle I \rangle$ obtenu après sommation sur des expériences répétées. La profondeur de modulation des battements est considérablement augmentée et il est possible de voir des battements entre transitions de gains très différents.

c) Création de cohérences hertziennes par l'émission superradiante

Après avoir étudié l'influence des cohérences hertziennes sur l'émission superradiante, nous allons voir que cette émission crée elle-même des cohérences. Il est ainsi possible d'utiliser l'émission superradiante en tant qu'outil spectroscopique pour préparer l'état initial d'une expérience de battement quantique.

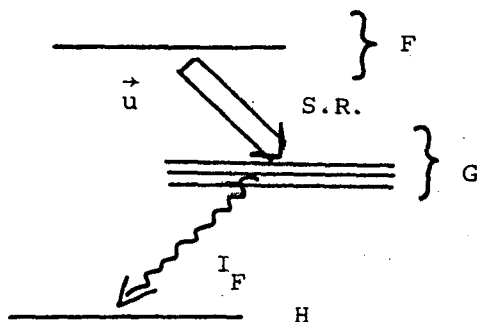


FIGURE III.17

La figure III.17 illustre le principe d'une telle expérience. Le pulse superradiant sur la transition F - G crée des cohérences dans le niveau G. Si le niveau G possède une structure, les cohérences créées précessent et cette précession se traduit par des modulations de la lumière de fluorescence I_f polarisée émise sur toute transition G - H partant du niveau G vers un niveau H couplé à G.

Pour illustrer cet effet, considérons par exemple le cas du système à 3 niveaux en "V" renversé (voir figure III.18; les notations correspondantes sont définies au § A.3.c).

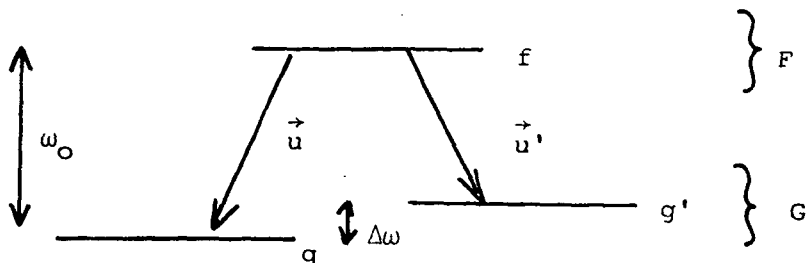


FIGURE III.18

A $t = 0$, le système est dans un cas pur

$$\rho_i = |f_i \rangle \langle f_i| \quad (\text{III.109})$$

Par couplage avec un champ classique, le système reste dans un cas pur et l'on a donc :

$$|\sigma_{g,g'}| = (\sigma_{g,g} \cdot \sigma_{g',g'})^{1/2} \quad (\text{III.110})$$

Il y a donc création de cohérence dans le niveau G. Si $\sigma_{g,g}$ et $\sigma_{g',g'}$ sont du même ordre, le taux de cohérence obtenu peut être très important et cette méthode peut être très attrayante pour préparer des cohérences dans le niveau final G.

Notons que l'un des avantages de la méthode, par rapport à une excitation optique fournie par une source classique, est l'absence de limitation liée à la durée Δt du pulse excitateur. En effet, dans le cas d'une source incohérente, il faut, pour créer des cohérences notables, que :

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \lesssim 1 \quad (\text{III.111})$$

(où $\Delta \omega$ est la fréquence de précession des cohérences que l'on veut créer). Cette limitation n'existe pas ici, car le pulse superradiant est, comme nous l'avons vu (§ B.1 et chap. II, § III.C.4), un pulse de lumière cohérente.

Etudions maintenant la phase des cohérences créées.

- Si $\Delta \omega \cdot T_{SR} \gg 1$, ou si les polarisations \vec{u} et \vec{u}' sont orthogonales, les cohérences créées sont de phases aléatoires. Il suffit pour le voir de remarquer que, dans ce cas, le démarrage de l'évolution est très semblable à celui étudié précédemment pour un système à trois niveaux en "V" en absence de cohérences à $t = 0$.
- Si, par contre, \vec{u} et \vec{u}' sont parallèles et si $\Delta \omega \cdot T_{SR}$ est de l'ordre de un, la phase de la cohérence créée est partiellement conservée. Cet effet de conservation de la phase augmente au fur et à mesure que $\Delta \omega \cdot T_{SR}$ diminue et pour $\Delta \omega \cdot T_{SR} < 1$, la mise en phase est complète (au démarrage de l'évolution, les dipôles associés aux transitions $f - g$ et $f - g'$ sont couplés et ne précessent pas (cf. § B.3)).

Au total, si l'on utilise l'émission superradiante pour créer des cohérences dans le niveau final, il faudra prendre soin au caractère éventuellement aléatoire de la phase de ces cohérences. D'un point de vue pratique, ce point est très important si l'on veut réaliser l'expérience de battement quantique décrite plus haut :

- s'il y a conservation de la phase, il est possible d'observer le signal de battement sur la valeur moyenne $\langle I_F \rangle$ du signal de fluorescence I_F . En pratique, on peut utiliser une technique de moyennage du signal;
- s'il n'y a pas conservation de la phase, $\langle I_F \rangle$ n'est plus modulé et le moyennage direct du signal ne présente pas d'intérêt. Il faut faire appel à des techniques plus élaborées (on peut, par exemple, moyenner non plus le signal, mais sa fonction d'autocorrélation et étudier :

$$\langle \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau I_F(\tau+t) \cdot I_F(t) \rangle \quad (\text{III.112})$$

qui est modulé).

d) Conclusion

Bien que les battements de superradiance correspondent à des interférences entre cohérences optiques, l'effet des cohérences hertziennes peut être important. On notera trois types d'effets :

- Si $\Delta\omega \cdot T_{SR}$ est petit, la cohérence hertzienne peut donner lieu au phénomène de quantification du délai que nous avons pu observer à la suite de VREHEN et al. (7).

- Si $\Delta\omega \cdot T_{SR}$ est grand, la cohérence hertzienne fixe la phase des battements. Si les gains associés aux différentes transitions sont différents, la présence de cohérences hertziennes augmente considérablement la profondeur des battements que l'on observe.

- Enfin, quel que soit $\Delta\omega \cdot T_{SR}$, il peut y avoir création de cohérences dans le niveau d'arrivée de la transition superradiante.

CHAPITRE IV

"LA SUPERRADIANCE LIMITEE"

LA SUPERRADIANCE LIMITEE

A. Introduction

Un des traits caractéristiques essentiels du phénomène de superradiance, tel qu'il a été décrit au chapitre II, réside dans le fait que l'émission extrait toute l'énergie disponible dans le système atomique : celui-ci, étant initialement dans un état totalement inversé, se retrouve après l'émission dans un état entièrement désexcité. En terme de vecteur de BLOCH, on dit que le système a effectué un pulse π . Ce pulse a été émis soit de façon monotone (dans le cas du modèle du champ moyen), soit sous forme de plusieurs lobes correspondant à des oscillations du vecteur de BLOCH (dans le cas du modèle à une dimension). Dans les deux cas, le système atomique s'est complètement désexcité à l'instant $t = +\infty$. Ceci est à opposer au fonctionnement d'un laser ou d'un maser en régime continu, cas où l'émission est associée à une égalisation des populations des niveaux bordant la transition. Cette caractéristique importante du phénomène de superradiance n'est, en général, pas observée dans des situations expérimentales réelles. Après l'émission du pulse superradiant, il reste bien souvent un grand nombre d'atomes dans le niveau supérieur de la transition superradiante, ce qui se manifeste par l'existence d'une fluorescence ordinaire importante de ce niveau. Le maintien d'atomes dans l'état excité après la superradiance ne peut être dû qu'à des causes non prises en compte dans le modèle simple de la superradiance à deux niveaux du chapitre II : effets géométriques, effets liés à l'existence de dégénérescences, etc... Nous donnerons de façon générale le nom de superradiance limitée à cet effet de superradiance partielle, non complète qui laisse une certaine quantité d'énergie dans le système atomique. L'objet de ce chapitre est d'analyser en détails ce phénomène, qui est pratiquement toujours observé dans les expériences réelles de superradiance.

Différents auteurs ont signalé l'existence de ce phénomène : FRIEDBERG et HARTMAN (⁵⁸) ont, les premiers, montré que dans le cas d'un tout petit milieu superradiant (de dimensions inférieures à λ), il apparaissait une superradiance limitée importante. Plus tard, nous avons, avec J.M. RAIMOND (⁵⁷), signalé l'existence d'effets de superradiance limitée dans le cas de l'émission de systèmes dégénérés préparés dans un mélange statistique d'états excités.

PILLET et al. (68) ont étudié indépendamment le même phénomène. Nous montrons, dans ce chapitre, que tous ces effets apparemment divers ont une origine et une interprétation communes. La superradiance totale d'un système d'atomes à deux niveaux dans le modèle du champ moyen provient du fait que tous les atomes sont couplés symétriquement au champ de rayonnement. Ils "voient" tous le même champ et évoluent tous à la même vitesse jusqu'à un état final où ils ont tous perdu leur énergie.

Il n'en est plus de même s'il est possible de distinguer physiquement dans le milieu superradiant des classes d'atomes couplées de façon différente au rayonnement. Ces classes d'atomes vont alors rayonner à des vitesses différentes, leurs vecteurs de BLOCH vont tourner plus ou moins vite, si bien qu'à un instant donné, les vecteurs associés à certaines classes seront systématiquement en avance de phase sur ceux d'autres classes. Il peut alors se faire que le système arrive dans un état où les différentes classes aient des dipôles interférant de façon totalement destructive, sans que ces dipôles ne soient nuls : l'émission s'arrête alors qu'il reste encore une population importante dans l'état excité et la superradiance limitée se manifeste.

Dans le cas d'un tout petit milieu superradiant (dont nous rappelons l'étude faite par FRIEDBERG et HARTMAN au § B), la dissymétrie entre les différents atomes provient de leur position en des endroits différents, dans un milieu où les effets de la diffraction sont très importants : les atomes au centre de l'échantillon et ceux de la périphérie ne "voient" évidemment pas le même champ. Dans le cas d'un milieu dégénéré, où plusieurs transitions peuvent se produire "en parallèle", la dissymétrie provient de ce que les diverses transitions ont en général des forces d'oscillateurs différentes. Les vecteurs de BLOCH associés à ces diverses transitions tournent alors évidemment de façon différente dans le champ superradiant émis. Nous analysons ce cas simple de superradiance limitée au § C. Nous analysons enfin, au § D, le cas où l'état initial de la transition superradiante est préparé dans un mélange statistique d'états. Dans ce cas, nous montrons que la dissymétrie est introduite par le processus de préparation du système lui-même, qui permet de distinguer des "classes d'atomes" différentes dans le milieu. Cette distinction se manifeste analytiquement sur la valeur de la trace du carré de la matrice densité atomique individuelle, qui exprime le caractère de "mélange statistique" de l'état initial du système. La nécessité

pour le système de conserver cette trace conduit encore, dans ce cas, au processus de superradiance limitée.

L'existence d'une dissymétrie entre différentes classes d'atomes -si elle est nécessaire- n'est cependant pas suffisante pour conduire dans tous les cas à la superradiance limitée. Il faut également que le système puisse évoluer vers une configuration stable de dipôles interférant destructivement -ce qui se produit dans tous les cas que nous venons d'énumérer, mais ce qui peut être impossible dans d'autres situations. Nous rappellerons au § D un exemple d'une telle situation, dans laquelle il existe des classes de dipôles qui, bien qu'évoluant à des vitesses différentes, ne peuvent interférer destructivement à $t = +\infty$ (superradiance d'un système à deux niveaux dans un volume étendu). On observe alors un ralentissement de l'émission superradiante par rapport à celle qui est prévue par la théorie simple du champ moyen.

B. Superradiance limitée de FRIEDBERG et HARTMAN. Cas d'un petit système

Jusqu'à présent, nous nous sommes intéressés au cas de la superradiance d'un système occupant un volume étendu de forme cylindrique allongé, cas qui correspond à la plupart des expériences. Il est à noter cependant que d'un point de vue historique, le cas de la superradiance d'un petit volume devant la longueur d'onde a été envisagé en premier (23). C'est d'ailleurs en faisant référence à ce cas simple que l'on a employé tout d'abord le terme de superradiance.

Rappelons brièvement comment retrouver les équations de la superradiance d'un petit volume. L'équation d'évolution de la matrice densité atomique d'un système de N atomes à deux niveaux, à l'approximation de BORN-MARKOV, est (équations (II.II.40) et (II.II.39)) :

$$\frac{d}{dt} \rho \approx - \frac{\nu}{(2\pi)^3 \chi^2 c} \int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z g^2(k) \sum_{i,j} e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \times \left[\pi \delta(k - k_0) + iPP \frac{1}{k - k_0} \right]$$

$(r_i^+ \quad r_j^- \quad \rho + 3 \text{ autres termes similaires})$ (IV.1)

Dans cette équation, on a :

$$| \vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j) | \ll 1 \quad (IV.2)$$

Il peut alors sembler naturel de faire (suivant en cela DICKE (23)) :

$$e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)} \rightarrow 1 \quad (IV.3)$$

Par symétrie, le terme en partie principale de l'équation (IV.1) disparaît. La sommation sur \vec{k} se factorise alors et donne Γ (on peut soit utiliser l'équation (II.II.50) donnant Γ , soit remarquer que l'on doit retrouver l'équation pilote décrivant l'émission spontanée si $N = 1$). Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho} &= -\frac{1}{2} \Gamma \sum_{i,j} (r_i^+ r_j^- \tilde{\rho} + \tilde{\rho} r_i^+ r_j^- - 2r_i^- \tilde{\rho} r_i^+) \\ &= -\frac{1}{2} \Gamma (R^+ R^- \tilde{\rho} + \tilde{\rho} R^+ R^- - 2R^- \tilde{\rho} R^+) \end{aligned} \quad (IV.4)$$

$$\text{où } R^\pm = R_{k=0}^\pm = \sum_i r_i^\pm. \quad (IV.5)$$

Cette équation est formellement identique à l'équation (II.II.55) avec $\mu = 1$ et $\vec{k}_0 = 0$. En projetant sur la base des $|r, m, \alpha\rangle_{k_0=0}$ associés à $\vec{k}_0 = 0$, on obtient l'équation de DICKE (II.III.5).

En étudiant de manière plus détaillée l'équation (IV.1), FRIEDBERG et HARTMAN (58) (29) (69) ont montré que l'approximation faite par DICKE et qui consiste à négliger le facteur de phase en $e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}$ n'est pas valide. Il faut en effet tenir compte des interactions à courtes distances qui, si l'on quantifie le champ, sont représentées par des photons virtuels interagissant à des ordres élevés. Au total, le facteur de phase en $e^{i\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)}$ apparaît à des ordres d'autant plus élevés que $|\vec{x}_i - \vec{x}_j|$ est plus petit. L'approximation (IV.3) n'est donc jamais valide et l'on ne peut jamais négliger la partie imaginaire en $i \sin(\vec{k}(\vec{x}_i - \vec{x}_j))$ du facteur de phase $\exp(i\vec{k}_0(\vec{x}_i - \vec{x}_j))$. L'existence d'une partie imaginaire dans l'équation d'évolution de la matrice densité (IV.1) se traduit par des déplacements de niveaux qui peuvent brouiller les dipôles macroscopiques responsables de l'émission superradiante. Dans le cas d'un volume petit (IV.2), FRIEDBERG et HARTMAN ont même montré que ces termes de déplacements de fréquence devenaient prépondérants.

Pour comprendre plus simplement la signification physique des termes imaginaires que néglige DICKE, souvenons-nous qu'au chapitre II, dans le cas d'un volume allongé, les termes imaginaires de l'équation d'évolution de ρ (équation (II.II.34)) décrivaient la propagation du champ électromagnétique (un atome i ne pouvait être sensible à l'émission d'un atome j que si j précédait l'atome i : $j_{\vec{x}} < i$; cf (II.II.49)). Dans le cas d'un petit volume, le facteur de phase : $e^{ik(x_i - x_j)}$, représente plus généralement les variations spatiales du champ \vec{E} . DICKE suppose que \vec{E} varie spatialement sur des distances de l'ordre de λ , ce qui n'est vrai qu'à l'extérieur du milieu émetteur, dans la région où le champ se propage. A l'intérieur du milieu émetteur, le champ \vec{E} varie beaucoup plus vite, sur des distances de l'ordre de celle du milieu (il y a une singularité due à la présence des sources). Les atomes n'évoluent donc pas tous à la même vitesse, car ils ne voient pas tous le même champ. En particulier, les atomes situés au centre du milieu émetteur évoluent plus vite que ceux situés à la périphérie, et la matrice densité $\tilde{\rho}$ n'est pas invariante par permutation des atomes. On peut remarquer cependant que des atomes situés en des points voisins continuent à voir le même champ et l'invariance de la matrice densité ρ par permutation des atomes reste valide localement. Cette symétrie locale se traduit par l'existence de dipôles macroscopiques locaux. Nous verrons que l'état final atteint par le système, après émission du pulse superradiant, correspond à un état dans lequel il reste des atomes dans le niveau de départ (c'est la raison pour laquelle on peut parler de superradiance limitée), mais qui ne rayonne plus. En effet, les dipôles macroscopiques qui subsistent localement interfèrent destructivement. Comme la dimension du milieu est petite devant la longueur d'onde et comme le dipôle total est nul, ces interférences sont totales et l'énergie émise est strictement nulle.

On peut calculer de façon exacte cet effet ⁽²⁹⁾, en se souvenant que l'évolution de la superradiance peut être décrite à l'aide d'équations semi-classiques de BLOCH-MAXWELL. Les équations de BLOCH sont des équations locales, elles ne sont pas modifiées, et il vient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{D} = \frac{i |D_{+-}|^2}{\hbar} \mathcal{N} \quad (\text{IV.6-a})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N} = \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{D} - \mathcal{E} \mathcal{D}^+) \quad (\text{IV.6-b})$$

\mathcal{E} , \mathcal{J} et \mathcal{N} , qui sont ici des fonctions des trois variables de l'espace x , y et z (ou de \vec{x}), sont définis de façon analogues à (II.II.57), mais avec $\vec{k}_0 = 0$, soit, de façon plus précise :

$$\mathcal{N}(\vec{x}, t) = \frac{1}{a^2} \sum_i 2r_{3i} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) \quad (\text{IV.7-a})$$

$$\mathcal{E}(\vec{x}, t) = -2 \sum_{\vec{k}} \sqrt{\frac{\hbar c k}{2\epsilon_0 \mathcal{V}}} a_{\vec{k}}^{\dagger} e^{i\vec{k} \cdot \vec{x}} e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{IV.7-b})$$

$$\mathcal{J}(\vec{x}, t) = \frac{2}{a^2} \sum_i D_{+-} r_i^{\dagger} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i) e^{-i\omega_0 t} \quad (\text{IV.7-c})$$

(Comme le système ne fait intervenir que deux niveaux + et - couplés par un dipôle de polarisation $\vec{\epsilon}$ fixé, le dipôle \vec{P} est parallèle à $\vec{\epsilon}$. Nous prendrons $\vec{\epsilon}$ le long de Ox. Seule la composante sur x , E_x , du champ \vec{E} agit alors sur les atomes et l'on s'est limité à cette composante dans les définitions (IV.7) des enveloppes de \mathcal{E} et \mathcal{J}). L'équation de MAXWELL fait, par contre, intervenir les autres composantes E_y et E_z de \vec{E} et l'on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial x} E_x + \frac{\partial}{\partial y} E_y + \frac{\partial}{\partial z} E_z = -4\pi \frac{\partial}{\partial z} P_x \quad (\text{IV.8-a}) \\ (\nabla^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}) E_y = 0 \quad (\text{IV.8-b}) \\ (\nabla^2 + \frac{\omega_0^2}{c^2}) E_x = -4\pi \frac{\omega_0^2}{c^2} P_x \quad (\text{IV.8-c}) \end{array} \right.$$

Les équations (IV.6) et (IV.8) constituent les équations de BLOCH-MAXWELL ^(*) décrivant l'évolution de la superradiance. Ces équations décrivent aussi bien l'évolution des opérateurs \mathcal{E} , \mathcal{J} et \mathcal{N} que celle des trajectoires classiques associées : $\mathcal{E}_{cl}(\alpha)$, $\mathcal{J}_{cl}(\alpha)$, $\mathcal{N}_{cl}(\alpha)$ que l'on pourrait définir en généralisant à trois dimensions les trajectoires classiques $X(\alpha)$ (cf. chapitre II, § IV.B.2; voir également appendice II), la condition initiale correspondant à ces trajec-

(*) Notons que dans l'équation de MAXWELL (IV.8), \vec{E} et \vec{P} ne sont pas lentement variables dans le temps. Pour l'intégration numérique, il faut, bien sûr, définir des enveloppes en $e^{\pm i\omega_0 t}$ pour \vec{E} et \vec{P} . Les équations entre ces enveloppes sont formellement identiques à (IV.3) car l'équation (IV.8) ne fait intervenir que l'espace.

toires s'obtient en associant à chaque atome un dipôle classique de module D_{+-} de direction Oz et de phase aléatoire d'un atome à l'autre (cf. chapitre II, § III et IV; voir également appendice II, § B.3°).

L'intégration de ces équations, bien que lourde, ne présente pas de difficultés fondamentales. Dans le cas d'un volume de forme sphérique avec une densité d'atomes constante et une condition initiale homogène correspondant à un vecteur de BLOCH \vec{B} faisant un petit angle θ_0 avec la verticale, FRIEDBERG et HARTMAN ont calculé l'évolution de la superradiance (29). Au démarrage de l'évolution, tant que le vecteur de BLOCH a une composante verticale positive, l'évolution est la même que celle obtenue par DICKE. Par contre, au moment où le vecteur de BLOCH passe par l'horizontale, il y a déphasage des dipôles et la superradiance cesse brutalement. L'état final obtenu correspond alors à une situation dans laquelle il reste des atomes dans l'état initial + (dans ce cas particulier, il en reste d'ailleurs exactement la moitié). On observe également des dipôles macroscopiques locaux, qui ne peuvent rayonner car ils interfèrent destructivement entre eux.

Nous verrons par la suite que le phénomène observé ici -destruction de la superradiance par interférence entre classes de dipôles- peut se rencontrer dans d'autres cas. Il s'agit d'un phénomène très général qui apparaît chaque fois qu'il y a possibilité de définir des classes de dipôles physiquement différents. Suivant en cela FRIEDBERG et HARTMANN (58), nous avons donné à cet effet le nom de superradiance limitée.

C. La superradiance limitée de deux classes d'atomes à deux niveaux de forces d'oscillateurs différentes

L'effet de superradiance limitée, décrit au § B dans le cas d'un système de volume petit devant la longueur d'onde, peut être observé dans d'autres circonstances et, en particulier, lorsque les niveaux couplés par superradiance sont dégénérés. Nous allons présenter ici un exemple extrêmement simple d'un tel effet. Nous considérerons, que le système se décompose en deux classes d'atomes à deux niveaux (les classes d'atomes "a" et "b"), et que les forcés d'oscilla-

teurs correspondant à ces classes ("a" et "b") sont différentes. Nous verrons que, dans ces conditions, les dipôles optiques associés aux atomes "a" et "b" se bâtissent à des vitesses différentes, qu'ils se déphasent et qu'ils interfèrent destructivement à $t \rightarrow +\infty$. On observe alors l'effet de superradiance limitée.

1) Position du problème

La figure IV.1 rappelle les notations utilisées

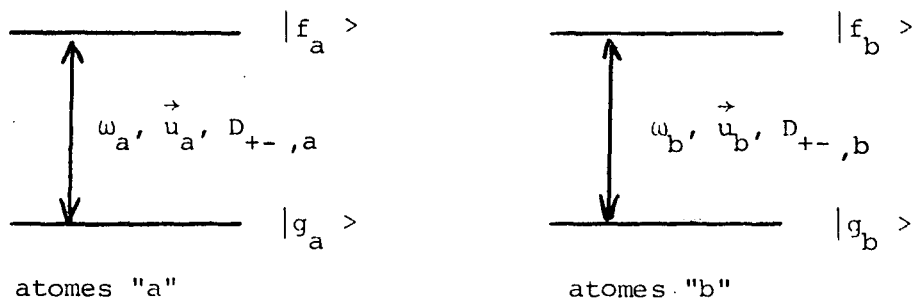


FIGURE IV.1

(ces notations ont été également définies au chapitre III, § B.1.a).

Nous considérons ici que les champs émis par les atomes "a" et "b" ont même fréquence ω et même polarisation \vec{u} :

$$\omega_a = \omega_b = \omega \quad \text{ou} \quad \Delta\omega = \omega_a - \omega_b = 0 \quad (\text{IV.9-a})$$

$$\vec{u}_a = \vec{u}_b = \vec{u} \quad (\text{IV.9-b})$$

et que les éléments de matrice des dipôles des atomes "a" et "b" sont différents

$$D_{+-,a} \neq D_{+-,b} \quad (\text{IV.10})$$

(voir (III.52) pour la définition de $D_{+-,X}$; $X = a, b$).

La figure IV.2 donne un exemple dans lequel cette situation est réalisée.

Les niveaux F et G sont des spins $J = 3/2$ et l'on considère ici la superradiance en π de F vers G. Comme les cohérences existant (ou non) à l'intérieur du niveau F ne jouent aucun rôle dans les équations de BLOCH-MAXWELL généralisée à ce cas (III.9), on peut considérer qu'il n'y a pas de

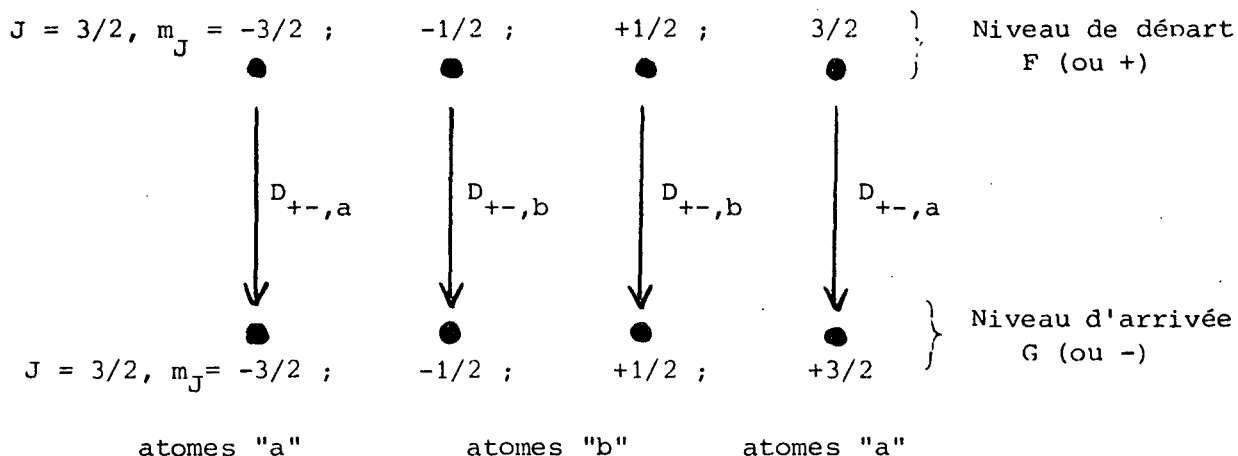


FIGURE IV.2

cohérences à $t = 0$ dans le niveau F. On peut alors appeler atomes "a" les atomes qui à $t = 0$ sont dans les états $|F, J = 3/2, m_J = \pm 3/2 \rangle$ et "b" les atomes qui sont dans les états $|F, J = 3/2, m_J = \pm 1/2 \rangle$ (cf. chapitre III.A.3). Les éléments de matrice $D_{+-,a}$ et $D_{+-,b}$ ont alors pour expression :

$$D_{+-,a} = \langle F, 3/2, \pm 3/2 | \vec{D} \cdot \vec{u}_\pi | G, 3/2, \pm 3/2 \rangle \quad (IV.11-a)$$

$$D_{+-,b} = \langle F, 3/2, \pm 1/2 | \vec{D} \cdot \vec{u}_\pi | G, 3/2, \pm 3/2 \rangle \quad (IV.11-b)$$

et l'inégalité (IV.10) se trouve vérifiée pour des raisons évidentes liées à l'algèbre angulaire.

2) Equations d'évolution et énergie du système atomique

Les équations d'évolution se déduisent de (III.9); il vient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} = -i \frac{k_0}{2\epsilon_0} (\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b) \quad (IV.12-a) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{P}_X = + \frac{i}{\hbar} |D_{+-,X}|^2 \mathcal{E} \mathcal{N}_X \quad (IV.12-b) \\ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathcal{N}_X = \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}^+ \mathcal{P}_X - \mathcal{E} \mathcal{P}_X^+) \quad (IV.12-c) \end{array} \right.$$

avec $X = a, b$.

(nous avons déjà obtenu ces équations au chapitre III, § B.1 (équation (III.52)), mais avec $\Delta\omega \neq 0$). Notons que ces équations sont très similaires aux équations de BLOCH-MAXWELL du système à deux niveaux (II.IV.1).

On peut alors faire, pour chaque classe d'atomes la même transformation que celle faite au chapitre II, § IV.A. Faisons pour les atomes "a" et "b" le changement de variables qui se généralise de (II.IV.8), en posant :

$$\mathcal{N}_X = \mathcal{N}_{0,X} \cos \theta_X(z, \tau) \quad (\text{IV.13-a})$$

$$\mathcal{P}_X = -iD_{+-,X} \mathcal{N}_{0,X}(z) \sin \theta_X(z, \tau) \quad (\text{IV.13-b})$$

(θ est ici une fonction de z et de τ ainsi que de la classe $X = a$ ou b).

Les équations de BLOCH (IV.12-b et c) deviennent :

$$\frac{d}{dz} \theta_a = \frac{1}{\hbar} D_{+-,a} \cdot \mathcal{E} \quad (\text{IV.14})$$

$$\text{En posant } \begin{cases} D_{+-,a} = \alpha D_{+-} & (\text{IV.15-a}) \\ D_{+-,b} = \beta D_{+-} & (\text{IV.15-b}) \end{cases}$$

(notons que $\alpha \neq \beta$)

$$\text{et : } \bar{\theta} = \frac{1}{\hbar} D_{+-} \int_0^\tau d\tau \mathcal{E} \quad (\text{IV.16})$$

on a :

$$\theta_a = \alpha \bar{\theta} \quad (\text{IV.17-a})$$

$$\theta_b = \beta \bar{\theta} \quad (\text{IV.17-b})$$

La densité volumique d'énergie $\mathcal{W}_A(\bar{\theta})$ du système atomique n'est alors fonction que de $\bar{\theta}$; il vient :

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_A(\bar{\theta}) &= \hbar\omega_0 [\mathcal{N}_a(z, \tau) + \mathcal{N}_b(z, \tau)] \\ &= \hbar\omega_0 \left[\mathcal{N}_a(\tau=0) \cos [\alpha \bar{\theta}(z, \tau)] + \mathcal{N}_b(\tau=0) \cos [\beta \bar{\theta}(z, \tau)] \right] \end{aligned} \quad (\text{IV.18})$$

Nous avons représenté sur la figure IV.3 \mathcal{W}_A en fonction de $\bar{\theta}$ pour :

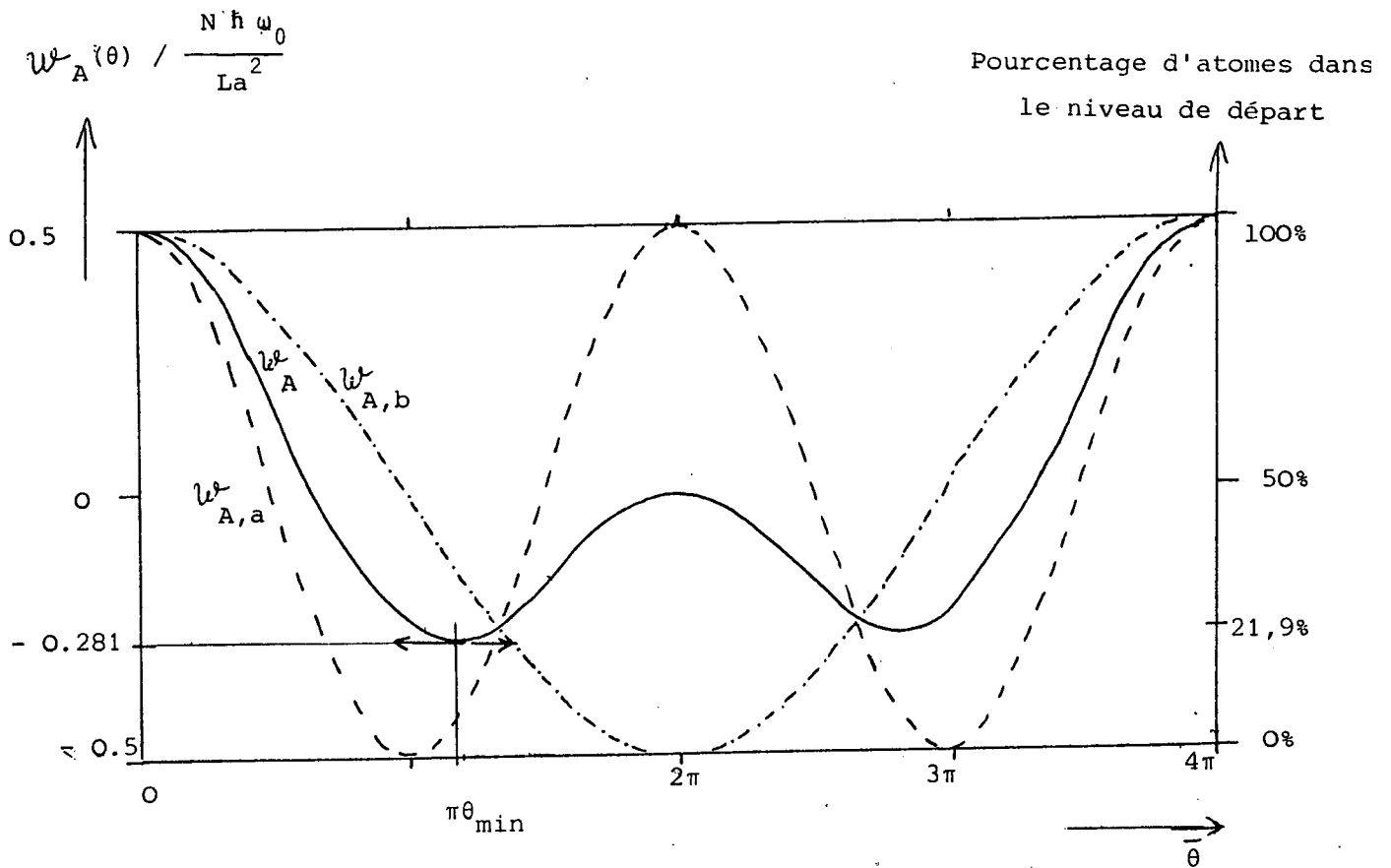


FIGURE IV.3 : Densité volumique de l'énergie du système atomique

- Trait plein : densité d'énergie totale $w_{A, \bar{\theta}}$
- Trait pointillé : densité d'énergie des atomes "a" ($w_{A,a}(\bar{\theta})$) et "b" ($w_{A,b}(\bar{\theta})$)

- . Ces courbes représentent également respectivement les pourcentages d'atomes "a" et d'atomes "b" restés dans le niveau de départ F.
- . Le minimum est atteint pour $\bar{\theta} = \bar{\theta}_{\min} = 4.188$ (et $4\pi - \bar{\theta}_{\min}$) et correspond à

$$w_{A, \bar{\theta}_{\min}} = -0.281 \frac{N h w_0}{L a^2} \text{ , soit } 21,9\% \text{ d'atomes dans le niveau de départ F.}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N}_a(t=0) = \mathcal{N}_b(t=0) \\ \alpha = 1 \\ \beta = 1/2 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(IV.19-a)} \\ \text{(IV.19-b)} \\ \text{(IV.19-c)} \end{array}$$

3) L'effet de superradiance limitée

L'effet de superradiance limitée apparaît très simplement sur la figure IV.3. On remarque en effet que $\mathcal{W}_A(\bar{\theta})$ reste toujours supérieur à

$$\mathcal{W}_A(\bar{\theta}_{\min}) = -0,281 \frac{N\hbar\omega}{La^2} \quad \text{(IV.20)}$$

et il reste au moins 21,9% des atomes dans le niveau de départ F. L'état final atteint correspond alors au minimum d'énergie et l'on a :

$$\bar{\theta}(\tau \rightarrow +\infty) = \bar{\theta}_{\min} = 4,188 \quad \text{(IV.21-a)}$$

et
$$\mathcal{W}_A(\tau \rightarrow +\infty) = \mathcal{W}_A(\bar{\theta}_{\min}) \quad \text{(IV.21-b)}$$

On peut vérifier que dans cet état final les dipôles macroscopiques \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b des atomes "a" et "b" sont non nuls et qu'ils interfèrent destructivement. En effet, en remplaçant $\bar{\theta}(\tau \rightarrow +\infty)$ par sa valeur (IV.21-a) dans (IV.13) et (IV.17), il vient à $\tau = +\infty$:

$$\mathcal{P}_a = -i \cdot D_{+-} \mathcal{N}_a(\tau=0) \frac{1}{\alpha} \sin(\alpha \bar{\theta}(\tau \rightarrow +\infty)) \quad \text{(IV.22-a)}$$

$$\mathcal{P}_b = -i \cdot D_{+-} \mathcal{N}_b(\tau=0) \frac{1}{\beta} \sin(\beta \bar{\theta}(\tau \rightarrow +\infty)) \quad \text{(IV.22-b)}$$

On vérifiera sans peine que $\mathcal{P}_a + \mathcal{P}_b = 0$ (dans le cas considéré ici (IV.19)); il vient de (IV.22) et (IV.21) :

$$\mathcal{P}_a(\tau \rightarrow +\infty) = -\mathcal{P}_b(\tau \rightarrow +\infty) = +i D_{+-} \mathcal{N}_a(\tau=0) \times 0,865 \quad \text{(IV.23)}$$

Au total, comme les atomes "a" et les atomes "b" n'évoluent pas à la même vitesse (car $T_{SR,a} \neq T_{SR,b}$), les dipôles \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b se déphasent et l'état final correspond à une interférence destructive totale de \mathcal{P}_a et \mathcal{P}_b . Il y a superradiance limitée.

Remarque : Il est possible de décrire de manière simple l'évolution du système dans le puit de potentiel $\mathcal{W}(\bar{\theta})$ de la figure IV.3. A partir de (IV.12), (IV.14) et (IV.17), il vient en effet :

$$\frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\partial}{\partial z} \bar{\theta} = \frac{1}{L} \left[\frac{1}{\alpha T_{SR,a}} \sin(\alpha \bar{\theta}) + \frac{1}{\beta T_{SR,b}} \sin(\beta \bar{\theta}) \right] \quad (IV.24)$$

où $T_{SR,X}$ est donné par (III.61).

On reconnaît au deuxième membre la dérivée par rapport à $\bar{\theta}$ de l'énergie potentielle $\mathcal{W}_A(\bar{\theta})$ (à une constante multiplicative près). L'équation (IV.24) décrit donc l'évolution du système dans le puit de potentiel $\mathcal{W}_A(\bar{\theta})$. On remarque que cette équation est très similaire à l'équation de SINE-GORDON (II.IV.10), obtenue pour un système à deux niveaux. Au démarrage de l'évolution, on remarque sans peine que l'on trouve pour $\bar{\theta}$ une loi de variation en J_0 analogue à (II.IV.18).

D. Superradiance limitée d'un système préparé dans un mélange statistique

Si l'on prépare un système atomique dans un état qui ne correspond pas à un cas pur à $t = 0$, cela revient à considérer, comme nous l'avons vu (chapitre III, § A.3.a), que ce système se décompose en classes physiquement différentes d'atomes. L'évolution de chacune de ces classes se fait a priori à une vitesse différente de celle des autres classes et l'on doit observer, dans ce cas, le phénomène de superradiance limitée.

1) Position du problème

Pour discuter simplement de ce problème, nous allons envisager le cas du système à trois niveaux en "V". Nous avons déjà rencontré un tel problème au chapitre III (§ A.3 et § B.3). Les notations utilisées ici sont définies de manière précise au chapitre III, § A.3.a et résumées sur la figure IV.4.

L'effet de superradiance limitée peut se comprendre très simplement par conservation du caractère statistique de la matrice densité individuelle ρ_i de l'atome i . En effet, l'émission superradiante peut être décrite par couplage de chaque atome i avec un champ classique et l'on a à la fois :

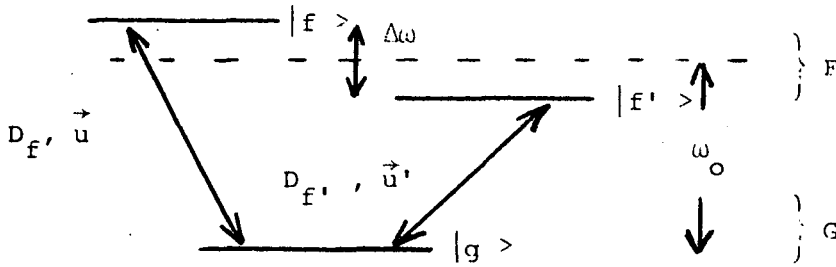


FIGURE IV.4 : Schéma du système à trois niveaux en "V" et rappel des notations
 (se souvenir également que : $D_f = \langle f | \vec{D} \cdot \vec{u}^* | g \rangle$
 $D_{f'} = \langle f' | \vec{D} \cdot \vec{u}'^* | g \rangle$)

$$\text{Tr} (\rho_i) = 1 \tag{IV.25-a}$$

et $\text{Tr} (\rho_i)^2 = \text{constante} \leq 1$ (IV.25-b)

On a de même pour la matrice densité locale, par unité de volume $\sigma(z,t)$:

$$\text{Tr} (\sigma) = \text{constante} \tag{IV.26-a}$$

et $\text{Tr} (\sigma)^2 = \text{constante}$ (IV.26-b)

■ Si l'état du système correspond à un cas pur : $\text{Tr} (\rho_i)^2 = 1$,
 l'état final :

$$\rho_i(t=+\infty) = |g_i \rangle \langle g_i| \tag{IV.27}$$

est autorisé.

■ Si, par contre, le système n'est pas dans un cas pur à $t = 0$,
 $\text{Tr}(\rho_i)^2 < 1$ et l'état final (IV.27) ne peut être atteint. L'atome i a alors une probabilité non nulle d'être dans l'état f ou f' à $t = +\infty$ et il reste des atomes dans le niveau de départ F . Il y a superradiance limitée.

On peut étudier exactement cet effet en intégrant numériquement les équations de BLOCH-MAXWELL généralisées (III.9). Cette méthode ne présente aucune difficulté, mais n'est intéressante que pour l'étude d'un cas précis.

Au cours de ce paragraphe, nous suivrons une démarche différente. Nous essaierons de déterminer, dans le cas du système à trois niveaux, le taux

de superradiance limitée caractérisé par le rapport :

$$X_F = \text{Tr} (\sigma_F(t = +\infty)) / \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{IV.28})$$

où σ_F représente la restriction de σ à l'espace des états de F ($\text{Tr}(\sigma_F)$ représente la population totale de F alors que $\text{Tr}(\sigma)$ représente la population totale de F et G). X_F représente alors le pourcentage d'atomes restés dans le niveau de départ après émission du pulse superradiant. X_F dépend bien entendu du caractère statistique de l'état initial, c'est-à-dire de $\text{Tr}(\sigma^2)$.

Pour calculer $\text{Tr}(\sigma^2)$, nous diagonaliserons la matrice densité initiale $\sigma(t=0)$ (ou plutôt $\sigma_F(t=0)$ puisque $\sigma(t=0)$ n'a pas de composante sur G) et nous appellerons f'' et f''' les états propres de $\sigma(t=0)$ correspondants (voir figure IV.5)

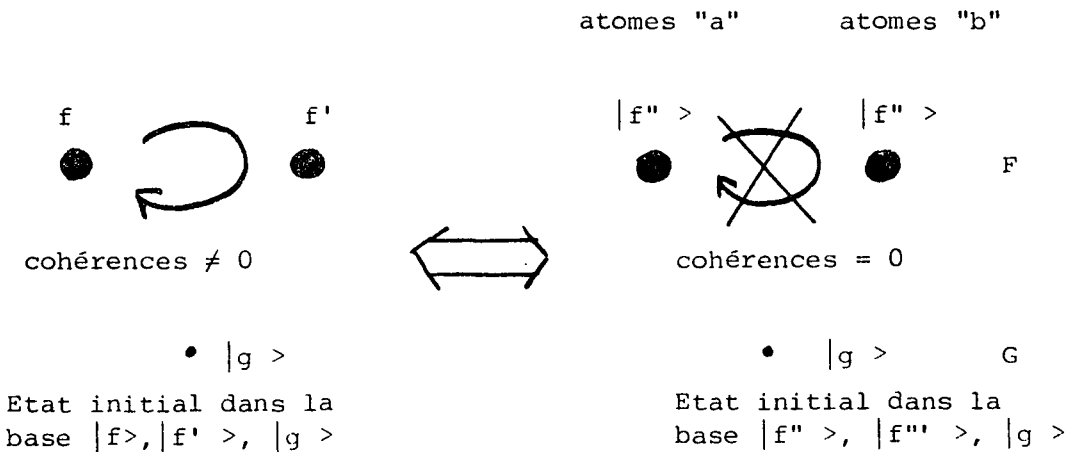


FIGURE IV.5

(notons que f'' et f''' ont déjà été introduits au chapitre III, § A.3.b et B.3.b.ii). $|f''\rangle$ et $|f'''\rangle$ sont des combinaisons linéaires de $|f\rangle$ et $|f'\rangle$, qui ne sont pas états propres de l'énergie mais qui constituent néanmoins une base de F. La matrice densité $\sigma(t=0)$ est alors diagonale sur la base f'' , f''' et l'on a :

$$\sigma_{f'', f'''}(t=0) = 0 \quad (\text{IV.29})$$

On peut alors décomposer le système en classes d'atomes physiquement différents en appelant "a" les atomes initialement dans l'état f'' et "b" ceux initialement dans l'état f''' (voir figure IV.5) (nous avons déjà effectué cette opération au chapitre III, § B.3.b.i, dans le cas où f'' et f''' se réduisaient à f et f' ; voir figure III.3). Nous noterons alors σ_a la matrice densité des atomes "a" et σ_b celle des atomes "b". Le pourcentage X_a d'atomes "a" est alors :

$$X_a = \text{Tr} \left(\sigma_a / \text{Tr}(\sigma) \right) = \sigma_{f'', f''}(t=0) / \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{IV.30})$$

et caractérise alors la statistique de l'état initial : si ce pourcentage X_a est égal à 0 ou 100%, il n'y a qu'une seule classe d'atomes et le système est dans un cas pur; s'il est de 50%, on a affaire à un mélange statistique "maximal". Dans tous les cas, cette quantité permet de déterminer $\text{Tr}(\sigma^2)$.

Le but de ce paragraphe est donc, au total, de déterminer le taux de superradiance limitée X_F (IV.28), en fonction du pourcentage X_a d'atomes "a" (IV.30). Les figures IV.7 et IV.9, qui représentent X_F en fonction de X_a , résumeront les résultats obtenus.

2) Cas $\Delta\omega = 0$ et $\vec{u} = \vec{u}'$

Nous envisagerons tout d'abord le cas particulier :

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0 & (\text{IV.31-a}) \\ \vec{u} = \vec{u}' & (\text{IV.31-b}) \end{cases}$$

Dans ce cas, les atomes "a" et "b" ne sont sensibles qu'au champ électrique \vec{E} , de polarisation \vec{u} et de fréquence ω_0 . Il n'apparaît dans le calcul qu'une seule enveloppe \mathcal{E} du champ \vec{E} (définie par (II.II.57)) et il est possible

de déterminer analytiquement l'état final atteint.

La figure IV.6 donne un exemple dans lequel la condition (IV.31) est remplie.

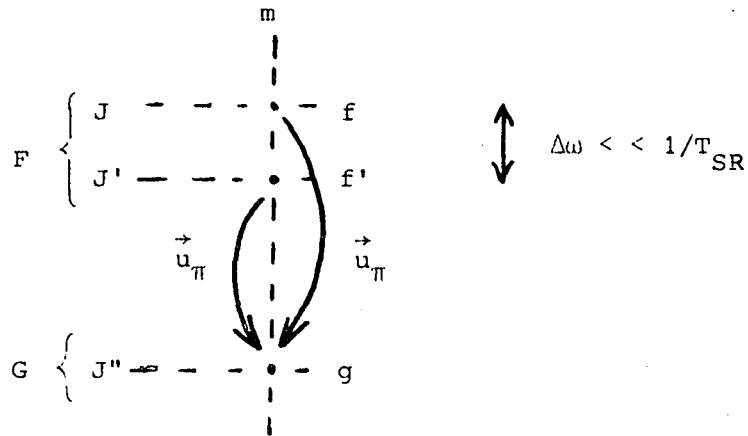


FIGURE IV.6

Le niveau F se décompose ici en deux niveaux de structure fine J et J' quasi-dégénérés (Δω est négligeable) et l'on considère la superradiance en polarisation π (on aurait pu également considérer la superradiance en σ⁺ ou σ⁻) des sous-niveaux |J, m > et |J', m > de F vers les sous-niveaux |J'', m > de G (J'' - J' ou J = 0 ± 1). Sur cet exemple, on voit qu'en général la condition (IV.31) implique :

$$D_f \neq D_{f'} \quad (IV.32)$$

Ecrivons l'équation de MAXWELL-SCHRÖDINGER sur les amplitudes $c_{f'',X}$, $c_{f''',X}$ et $c_{g,X}$ (X = a ou b) définie par :

$$\sigma_{y,y',X} = c_{y,X}^* \cdot c_{y',X} \quad (IV.33)$$

où $y, y' = f'', f''', g$

(Nous généralisons ici, pour les classes "a" et "b", les amplitudes c_f , $c_{f'}$, c_g définies au chapitre III, § 3.b.ii, équation (III.102), dans un cas pur pour la totalité des atomes). On obtient, à partir de l'équation de BLOCH (III.9-b, c et d), l'équation de SCHRÖDINGER :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} c_{f'',X} = -\frac{i}{2\hbar} D_{f''} c_{g,X} \cdot \mathcal{E} \quad (\text{IV.34-a}) \\ \frac{d}{dt} c_{f''',X} = -\frac{i}{2\hbar} D_{f'''} c_{g,X} \cdot \mathcal{E} \quad (\text{IV.34-b}) \\ \frac{d}{dt} c_{g,X} = +\frac{i}{2\hbar} (D_{f''} c_{f,X} + D_{f'''} c_{f',X}) \cdot \mathcal{E} \quad (\text{IV.34-c}) \end{array} \right.$$

où $D_{f''}$ et $D_{f'''}$ se déduisent de D_f et $D_{f'}$ par les mêmes combinaisons linéaires que $|f''\rangle$ et $|f'''\rangle$ de $|f\rangle$ et $|f'\rangle$. Il vient également, à partir de l'équation de MAXWELL (III.9-a) :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dz} = -\frac{ik_0}{2\epsilon_0} \sum_X (c_{f,X} D_f^* + c_{f',X} D_{f'}^*) c_{g,X}^* \quad (\text{IV.35})$$

On peut avoir intérêt à poser :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Tr } \sigma_a = \sigma_{f'',f''}(t=0) = \alpha^2 \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{IV.36-a}) \\ \text{Tr } \sigma_b = \sigma_{f''',f'''}(t=0) = \alpha'^2 \text{Tr}(\sigma) \quad (\text{IV.36-b}) \\ \text{notons que } \alpha^2 + \alpha'^2 = 1 \quad \text{avec } \alpha \text{ réel} \quad (\text{IV.36-c}) \\ \text{et que } x_a = \alpha^2 \quad (\text{IV.36-d}) \end{array} \right.$$

ainsi que

$$\left\{ \begin{array}{l} D_{f''} = \beta'' D \quad (\text{IV.37-a}) \\ D_{f'''} = \beta''' D \quad (\text{IV.37-b}) \\ \text{avec } \beta''^2 + \beta'''^2 = 1 \quad (\text{IV.37-c}) \end{array} \right.$$

(Nous choisirons judicieusement $|f''\rangle$ et $|f'''\rangle$ pour avoir β'' et β''' réels)
On peut remarquer que l'on a :

$$|D|^2 = |D_{f''}|^2 + |D_{f'''}|^2 = |D_f|^2 + |D_{f'}|^2 \quad (\text{IV.38})$$

Posons enfin :

$$\theta = \frac{iD}{\hbar} \int_0^t \mathcal{E} dt \quad (\text{IV.39})$$

L'équation de SCHRODINGER (IV.34) peut alors se mettre sous la forme :

$$\frac{d}{d\theta} \vec{v}_X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\beta'' \\ 0 & 0 & -\beta''' \\ \beta'' & \beta''' & 0 \end{pmatrix} \vec{v}_X \quad (\text{IV.40})$$

où

$$\vec{v}_X = \begin{pmatrix} c_{f'',X} \\ c_{f''',X} \\ c_{g,X} \end{pmatrix} \quad (\text{IV.41})$$

Comme à $t = 0$, θ est pratiquement nul (en toute rigueur, on prend $\theta \neq 0$ pour simuler le démarrage de l'évolution : $\theta \sim \frac{2}{\sqrt{N}}$; cf. chapitre II, § III.C.5),

la condition initiale est :

$$\vec{v}_a(\theta=0) = [\text{Tr}(\sigma)]^{1/2} \begin{vmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{IV.42-a})$$

$$\vec{v}_b(\theta=0) = [\text{Tr}(\sigma)]^{1/2} \begin{vmatrix} 0 \\ \alpha' \\ 0 \end{vmatrix} \quad (\text{IV.42-b})$$

ce qui permet de calculer \bar{v} à tout instant. Il vient :

$$\vec{v}_a(\theta) = \begin{pmatrix} c_{f'',a} = \alpha (\text{Tr}(\sigma))^{1/2} (\beta''^2 \cos \theta + \beta'''^2) \\ c_{f''',a} = \alpha (\text{Tr}(\sigma))^{1/2} (\beta'' \beta''' \cos \theta - \beta'' \beta''') \\ c_{g,a} = \alpha (\text{Tr}(\sigma))^{1/2} \beta'' \sin \theta \end{pmatrix} \quad (\text{IV.43-a})$$

$$\vec{v}_b(\theta) = \begin{pmatrix} c_{f'',b} = \alpha' (\text{Tr}(\sigma))^{1/2} (\beta'' \beta''' \cos \theta - \beta'' \beta''') \\ c_{f''',b} = \alpha' (\text{Tr}(\sigma))^{1/2} (\beta'''^2 \cos \theta + \beta''^2) \\ c_{g,b} = \alpha' (\text{Tr}(\sigma))^{1/2} (\beta''' \sin \theta) \end{pmatrix} \quad (\text{IV.43-b})$$

Cette équation montre que l'évolution des atomes "a" et "b" qui est liée au seul paramètre θ ne se fait pas à la "même vitesse" pour les atomes "a" et pour les atomes "b" car $v_a(\theta)$ et $v_b(\theta)$ sont différents. Il apparaît alors des termes d'interférences dans le champ rayonné et l'état final atteint

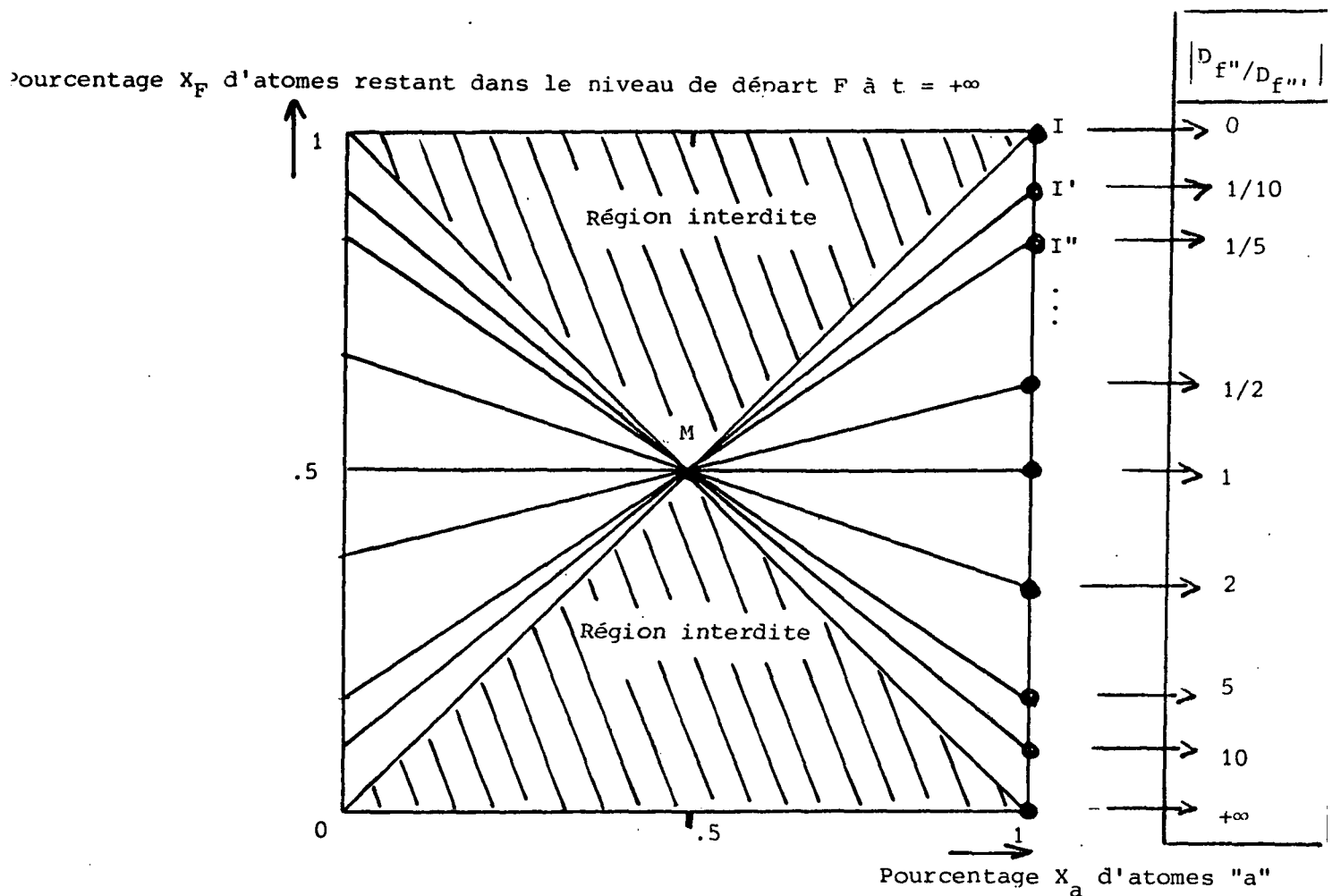


FIGURE IV.7 : Pourcentage X_F d'atomes dans le niveau final en fonction du pourcentage X_a d'atomes dans la classe "a", dans le cas où les atomes sont couplés au même champ (condition (IV.31)).

- . Les parties hachurées représentent la région interdite
 - . Les droites représentent X_F en fonction de X_a pour une base propre de σ ($t=0$) donnée ($|f'' \rangle$, $|f''' \rangle$). La pente de chaque droite est liée au rapport $|D_{f''}|^2 / |D_{f'''}|^2$ par (IV.46)
 - . Les droites limitant la partie autorisée et la partie interdite correspondent au cas où un seul des deux niveaux f'' ou f''' de F est couplé à G (le problème se réduit à un problème à 2 niveaux).
- Au total, on observe en général un effet de superradiance limitée ($X_F \neq 0$). L'effet est également observé lorsque l'on est dans un cas pur ($X_a = 0$ ou 1). Lorsque $X_a = 1/2$, on a dans tous les cas $X_F = 1/2$ (point M).

ne correspond pas à l'état $|g_i \rangle \langle g_i|$ pour chaque atome i . Comme l'état final correspond à un minimum d'énergie (et donc à un maximum d'atomes dans le niveau g), cet état est obtenu dans l'équation (IV.43) en faisant :

$$\theta(t = +\infty) = \pi/2 \quad (\text{IV.44})$$

Il est alors facile de calculer $X_F = \sigma_F(t = +\infty) / \text{Tr}(\sigma)$; en effet, de (IV.44) et (IV.43), il vient :

$$X_F = \sigma_F(t = +\infty) / \text{Tr}(\sigma) = 1 - (\alpha^2 \beta^2 + \alpha'^2 \beta'^2) \quad (\text{IV.45})$$

Comme $X_a = \alpha^2 = 1 - \alpha'^2$ (IV.36-c et d), X_F varie linéairement en fonction de X_a . Nous avons représenté ces droites sur la figure IV.7.

Au vu de la figure IV.7, on voit immédiatement que l'effet de superradiance limitée est très important et qu'il reste au moins autant d'atomes dans le niveau F que dans la classe "a" ou "b" la moins peuplée (toutes les droites sont au-dessus de la partie hachurée de la figure IV.7). Dans le cas où l'état initial est un mélange statistique "maximal" ($X_a^2 = 1/2$), on trouve qu'il reste exactement 50% d'atomes dans l'état F, quelle que soit la valeur de D_f et $D_{f'}$ (Point M de la figure). Dans le cas où l'état initial est un cas pur ($\alpha^2 = 0$ ou 1), l'effet de superradiance limitée subsiste en général et l'on a, par exemple, s'il n'y a que des atomes "a" :

$$X_F = \frac{\sigma_F(t=+\infty)}{\text{Tr}(\sigma)} = \frac{|D_{f''}|^2}{|D|^2} \quad (\text{IV.46})$$

(Points I, I' ... de la figure IV.7).

Vérifions que l'effet de superradiance limitée, qui apparaît ici se traduit bien par des interférences entre classes de dipôles macroscopiques. Il y a quatre types de dipôles macroscopiques susceptibles d'interférer :

$\mathcal{P}_{f'',a}$, $\mathcal{P}_{f''',a}$, $\mathcal{P}_{f'',b}$ et $\mathcal{P}_{f''',b}$. On a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{P}_{f'',x} = D_{f''} \cdot c_{f'',x}^* c_{g,x} \\ \mathcal{P}_{f''',x} = D_{f'''} \cdot c_{f''',x}^* c_{g,x} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{IV.47-a}) \\ (\text{IV.47-b}) \end{array}$$

pour $x = a, b$

A partir de (IV.43) et (IV.44), il vient pour l'état final :

$$\mathcal{P}_{f'',a}(t=+\infty) = - \mathcal{P}_{f''',a}(t=+\infty) = +\alpha^2 \beta''^2 \beta'''^2 \neq 0 \quad (\text{IV.48-a})$$

$$\mathcal{P}_{f'',b}(t=+\infty) = - \mathcal{P}_{f''',b}(t=+\infty) = -\alpha'^2 \beta''^2 \beta'''^2 \neq 0 \quad (\text{IV.48-b})$$

Au total, l'effet de superradiance limitée provient de :

- dipôles "physiquement différents" : les dipôles $\mathcal{P}_{f'',X}$ et $\mathcal{P}_{f''',X}$ sont "physiquement" différents, car ils sont associés à deux transitions $f''-g$ et $f'''-g$ différentes;
- dont les "histoires" sont différentes : pour $X = a$, $\mathcal{P}_{f'',a}$ se bâtit avant $\mathcal{P}_{f''',a}$, car pour θ petit, $\mathcal{P}_{f'',a}$ est du premier ordre alors que $\mathcal{P}_{f''',a}$ est du 3ème ordre (voir figure IV.8);
- et qui se mettent en opposition de phase à $t = +\infty$ (cf. (IV.48)).

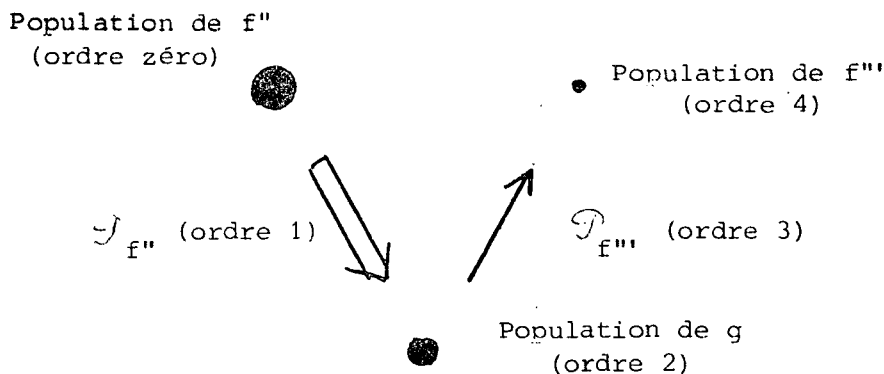


FIGURE IV.8 : Ordre des différents termes pour les atomes "a" (initialement dans l'état $|f'' \rangle$) au début de l'évolution.

Remarque : Dans le cas particulier que nous étudions : $\Delta\omega = 0$, $\vec{u} = \vec{u}'$, il est possible de simplifier considérablement l'intégration numérique des équations en se ramenant à l'équation d'évolution d'un système à deux niveaux.

En effet, à partir des équations (IV.39), (IV.35) et (IV.43), il vient :

$$\frac{d\theta}{dz dt} = \frac{1}{LT_{SR}} (\alpha\beta''^2 + \alpha' \beta'''^2) \sin(2\theta) \quad (IV.49-a)$$

$$\text{où } T_{SR}^{-1} = \frac{|D|^2 k_o L \text{Tr}(\sigma)}{2\epsilon_o \hbar} \quad (IV.49-b)$$

On reconnaît ici une équation de SINE -GORDON similaire à l'équation (II.IV.10) du système à deux niveaux. A l'approximation du champ moyen, on obtient de même l'équation d'un pendule :

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2T_{SR}} (\alpha\beta''^2 + \alpha' \beta'''^2) \sin(2\theta) \quad (IV.50)$$

Notons que, comme $\Delta\omega = 0$, $\mathcal{P}_{f''}$ et $\mathcal{P}_{f'''}$ qui sont incorrélés à $t = 0$ se corréleront au bout de quelques T_{SR} (voir chapitre III, § A.3.d). On peut alors fixer la phase de façon à avoir \mathcal{P}_f et $\mathcal{P}_{f'}$ réels. Le seul paramètre décrivant la condition initiale aléatoire est alors θ (ce qui justifie une résolution du problème basée sur l'équation (IV.40) avec la condition initiale (IV.42)). La loi de probabilité associée à θ est alors donnée par l'équation (II.IV.32) dans laquelle n représente la population totale dans chaque tranche. Le calcul de l'évolution se déduit alors du calcul de l'évolution d'un système à deux niveaux, décrit au chapitre II, § III et IV .

3) Cas $\Delta\omega \neq 0$ ou $\vec{u} \neq \vec{u}'$ (IV.51)

Dans ce cas, il ne peut y avoir d'interférences destructives totales entre les champs émis sur les transitions f-g et f'-g, car ces champs sont

- soit de polarisations différentes ($\vec{u} \neq \vec{u}'$)
- soit de fréquences différentes $\Delta\omega \neq 0$.

Après l'émission du pulse superradiant, il ne reste donc pas de cohérences optiques (s'il restait de telles cohérences, elles rayonneraient nécessairement puisqu'elles n'interfèrent pas) et l'on a donc :

$$\sigma_{f,g}^{(t=+\infty)} = \sigma_{f',g}^{(t=+\infty)} = 0 \quad (\text{IV.52})$$

Montrons tout d'abord qu'il est alors possible d'évaluer le taux de superradiance limitée très simplement, en utilisant les lois de conservation (IV.26). Il vient en effet de (IV.26) :

$$\text{Tr} \left(\sigma^2(t=0) \right) = \text{Tr} \left(\sigma^2(t=+\infty) \right)$$

soit, en remplaçant $\sigma(t=0)$ et $\sigma(t=+\infty)$ par leurs valeurs :

$$\left(\text{Tr} \sigma_a \right)^2 + \left(1 - \text{Tr} \sigma_a \right)^2 = \text{Tr} \left(\sigma_F^2(t=+\infty) \right) + \left[1 - \text{Tr} \sigma_F(t=+\infty) \right]^2 \quad (\text{IV.53})$$

L'équation (IV.53) ne permet pas de déterminer complètement X_F , car on ne peut pas exprimer $\text{Tr} \left(\sigma_F^2(t=+\infty) \right)$ en fonction de $\text{Tr} \left(\sigma_F(t=+\infty) \right)$. On peut cependant remarquer que :

■ si σ_F correspond à un cas pur, on a :

$$\text{Tr} \left(\sigma_F^2 \right) = \left[\text{Tr} \left(\sigma_F \right) \right]^2 \quad (\text{IV.54-a})$$

■ si σ_F correspond à un mélange statistique "maximal", on a :

$$\text{Tr} \left(\sigma_F^2 \right) = \frac{1}{2} \left[\text{Tr} \left(\sigma_F \right) \right]^2 \quad (\text{IV.54-b})$$

Enfin, dans le cas général $\text{Tr} \sigma_F^2$ est compris entre ces deux valeurs limites et l'on a :

$$\frac{1}{2} \leq \frac{\text{Tr} \left(\sigma_F^2 \right)}{\left[\text{Tr} \left(\sigma_F \right) \right]^2} \leq 1 \quad (\text{IV.54-c})$$

On peut alors déterminer X_F en fonction de X_a à l'aide de (IV.53) et (IV.54).

Il vient :

$$X_{F_{\max}} \leq X_F \leq X_{F_{\min}} \quad (\text{IV.55})$$

La limite supérieure $X_F = X_{F_{\max}}$ est obtenue dans le cas où $\sigma_F^{(+\infty)}$ est un cas pur. Il vient alors de (IV.54-a) et (IV.53) :

$$X_{F_{\max}} = X_a \text{ ou } 1 - X_a \quad (\text{IV.56})$$

Pourcentage X_F d'atomes restant dans
le niveau de départ à $t = +\infty$

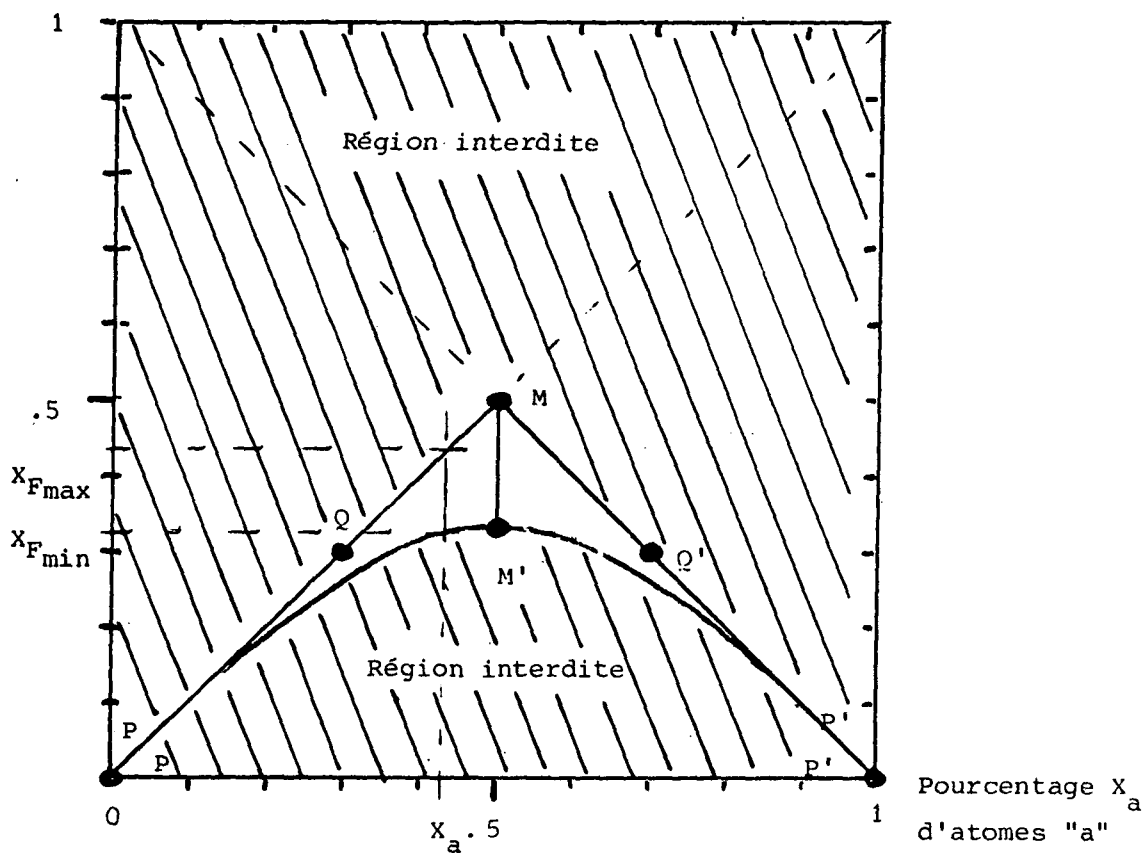


FIGURE IV.9 : Pourcentage X_F d'atomes dans le niveau final à $t = +\infty$ en fonction du pourcentage X_a d'atomes dans la classe "a" dans le cas où les atomes sont couplés à des champs différents (condition (IV.51)).

Comme il n'est pas possible de déterminer complètement X_F en fonction de X_a à partir des lois de conservation de $\text{Tr}(\sigma)$ et $\text{Tr}(\sigma^2)$, nous nous sommes contentés ici de représenter les régions interdites (partie hachurée) et autorisées (partie blanche) de $X_F(X_a)$. On voit néanmoins que $X_F(X_a)$ se trouve en grande partie déterminé surtout si $X_a < .3$, ou $X_a > .7$. L'effet de superradiance limitée apparaît ici très clairement : X_F n'est nul que si $X_a = 0$ ou 1 , c'est-à-dire que si l'on est dans un cas pur à $t = 0$.

la solution effectivement atteinte correspondant à :

$$X_{F_{\max}} = \text{plus petit que } (X_a, 1 - X_a) \quad (\text{IV.57})$$

La limite inférieure $X_F = X_{F_{\min}}$ est obtenue dans le cas où $\sigma_F(+\infty)$ est un mélange statistique "maximal". De (IV.54-b) et (IV.53), il vient :

$$X_a^2 + (1 - X_a)^2 = \frac{1}{2} X_F^2 + (1 - X_F)^2 \quad (\text{IV.58})$$

La figure IV.9 représente, en fonction de X_a , les valeurs autorisées de X_F (partie hachurée) ainsi que les valeurs limites $X_{F_{\max}}$ ($\sigma_F(t=+\infty) = \text{cas pur}$) et $X_{F_{\min}}$ ($\sigma_F(t=+\infty) = \text{mélange statistique "maximal"}$). La figure IV.9 résume bien l'effet de superradiance limité sur les populations dans le cas où les champs émis sur les deux transitions ne peuvent interférer totalement.

- Si le système est dans un cas pur, $X_a = 0$ ou 1 et la superradiance est totale. Il ne reste aucun atome dans l'état F après le pulse superradiant. X_F est alors nul (point P et P' de la figure).
- Si le système est dans un mélange statistique à $t = 0$, l'effet de superradiance limitée est important et il reste de 33 à 50% des atomes dans l'état du haut après le pulse (segment MM' sur la figure).
- Dans les cas intermédiaires et, en particulier, pour $X_a \leq .3$ et $X_a \geq .7$, l'effet de superradiance limitée est notable et l'on a $X_F \simeq$ plus petit de $(X_a, 1 - X_a)$ (segment PQ et PQ' sur la figure).

Interprétation des résultats :

On notera que l'effet sur les populations (paramètre X_F) dépend somme toute assez peu de l'évolution exacte de l'émission superradiante : l'inégalité (III.55) permet en effet de déterminer assez bien la valeur de X_F . Cependant, l'état final atteint peut correspondre à des situations très diverses et l'interprétation physique de l'effet de superradiance limitée peut être très différent suivant les cas.

Pour le voir, considérons deux exemples correspondant à :

$$\sigma_{f,f'}(t=0) = 0 \quad (\text{IV.59})$$

Nous ferons alors l'identification :

$$f'' \equiv f \quad (\text{IV.60-a})$$

$$f''' \equiv f' \quad (\text{IV.60-b})$$

i) Cas $T_{SR,a} \neq T_{SR,b}$

Supposons que le gain associé à la transition $f - g$ (ou associé aux atomes "a", puisque les atomes "a" sont en f à $t = 0$) est nettement plus grand que le gain sur la transition $f' - g$ ($T_{SR,a} < T_{SR,b}$). Au cours de l'évolution, les atomes "a" "basculent" les premiers en émettant un pulse superradiant sur la transition $f - g$.

■ Si $X_a > 1/2$, c'est-à-dire si $\sigma_{f,f}(t=0) = \text{Tr } \sigma_a > \sigma_{f',f'}(t=0) = \text{Tr } \sigma_b$, l'évolution cesse après ce premier pulse, car il n'y a alors plus d'inversion de population sur la transition $f'-g$ (d'un autre point de vue, on peut dire que les atomes "a" portés dans le niveau g sont capables d'absorber le rayonnement émis par les atomes "b"). Dans l'état final, les atomes "a" sont en g alors que les atomes "b" sont restés en f' (figure IV.10-a).

■ Si par contre $X_a < 1/2$, l'évolution se poursuit après le premier pulse car il reste une inversion de population notable sur la transition $f'-g$. Il y a émission d'un deuxième pulse superradiant et les atomes "b" sont portés dans le niveau g alors que les atomes "a" remontent du niveau g au niveau f' (figure IV.10-b).

On remarque, dans les deux cas ($X_a > 1/2$ ou $X_a < 1/2$), que l'état final atteint par $\sigma_F : \sigma_F(t=+\infty)$, est un cas pur, puisque seul f' est peuplé. Les points représentant ces états finaux correspondent donc aux segments PM ou $\dot{P}M$ de la figure IV.9 (on peut noter même, dans le cas $X_a < 1/2$, que l'état atteint entre les deux pulses superradiants correspond au prolongement de PM au-delà de M, tracé en pointillé sur la figure IV.9). On remarque également que, dans tous les cas, l'état final schématisé sur la figure IV.10 correspond à une situation dans laquelle il n'y a aucune cohérence optique macroscopique, ni pour les atomes "a", ni pour les atomes "b". L'effet de superradiance limitée s'interprète alors très simplement comme un effet de compétition entre deux transitions de gains différents.

○ = atomes "a"

● = atomes "b"

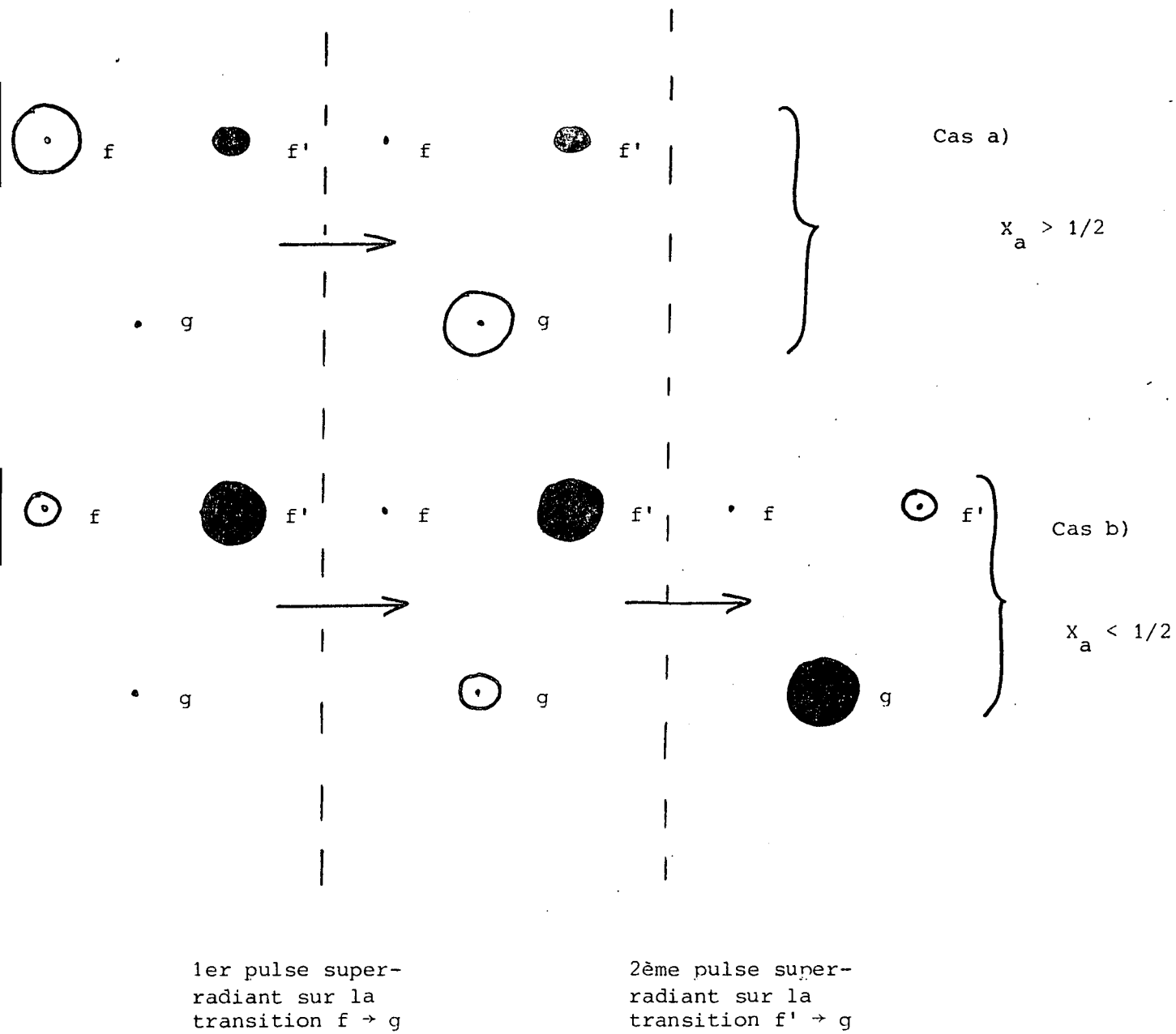


FIGURE IV.10

On peut se demander si cette absence de cohérences macroscopiques à l'intérieur de chaque classe d'atomes ne provient pas du fait que les pulses émis sur les deux transitions $f-g$ et $f'-g$ ont des délais différents. Pour le vérifier, nous envisagerons, comme deuxième exemple, un cas dans lequel les délais des deux pulses sont voisins : cas $T_{SR,a} = T_{SR,b}$.

ii) Cas $T_{SR,a} = T_{SR,b}$ (IV.61)

Supposons que le gain associé à chaque transition : $f-g$, $f'-g$ (ou à chaque classe d'atomes : "a", "b") est le même et supposons de plus que :

$$\sigma_{f,f}(t=0) = \sigma_{f',f'}(t=0) = \frac{1}{2} \text{Tr} (\sigma) \quad \text{(IV.62)}$$

Il y a en quelque sorte symétrie du problème par permutation des indices f et f' . La figure IV.11 donne un exemple d'une telle situation.

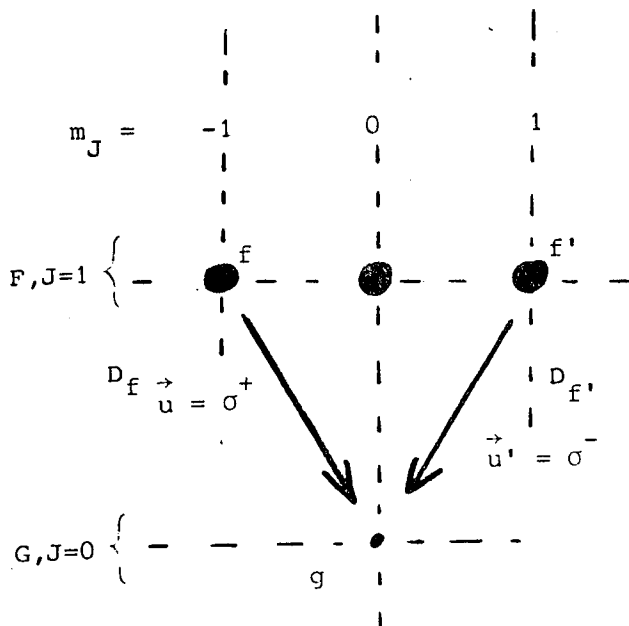


FIGURE IV.11

Sur cet exemple, le niveau de départ F de la transition superradiante est de moment cinétique $J = 1$, alors que le niveau d'arrivée G est de $J = 0$. Les sous-niveaux f , f' et g correspondent respectivement à :

$$|f\rangle = |F, J = 1, m_J = +1\rangle \quad (\text{IV.63-a})$$

$$|f'\rangle = |F, J = 1, m_J = -1\rangle \quad (\text{IV.63-b})$$

$$|g\rangle = |G, J = 0, m_J = 0\rangle \quad (\text{IV.63-c})$$

Les champs émis sur les transitions f - g et f' - g sont de polarisations \vec{u} et \vec{u}' orthogonales (respectivement σ^- et σ^+) et il n'y a aucune interférence entre ces champs. Par symétrie, les éléments de matrice D_f et $D_{f'}$, des dipôles sur chaque transition sont égaux :

$$D_f = D_{f'} \quad (\text{IV.64})$$

Si l'on prépare alors le niveau F dans un mélange statistique d'états, on a bien (IV.62), (IV.61) et (IV.51) (dans ce cas, le niveau $|F, J=1, m_J=0\rangle$ est également préparé, mais comme ce niveau n'est pas couplé à g , les atomes correspondants sont "spectateurs" et ne jouent aucun rôle dans l'évolution). Il est alors possible de calculer exactement l'évolution. Si l'on néglige les fluctuations, et si l'on considère une condition initiale symétrique par permutation de f et f' , l'évolution est symétrique ainsi que l'état final. On a alors, de façon triviale, pour les cohérences hertziennes et les populations à $t = +\infty$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f,f,X}(t=+\infty) = \sigma_{f',f',X}(t=+\infty) = \frac{1}{4} \text{Tr } \sigma_X \quad (\text{IV.65-a}) \\ \sigma_{f,f',X}(t=+\infty) = \frac{1}{4} \text{Tr } \sigma_X \exp(i\Delta\omega t) \quad (\text{IV.65-b}) \\ \sigma_{g,g,X}(t=+\infty) = \frac{1}{2} \text{Tr } \sigma_X \quad (\text{IV.65-c}) \\ \text{avec bien sûr, de par (IV.62) } \text{Tr } \sigma_X = \frac{1}{2} \text{Tr } \sigma \quad (\text{IV.65-d}) \end{array} \right.$$

Rappelons que σ_X représente la matrice densité d'atomes de la classe X (préparés dans le niveau f ou f' à $t = 0$).

LEGENDE



atomes "a"



atomes "b"

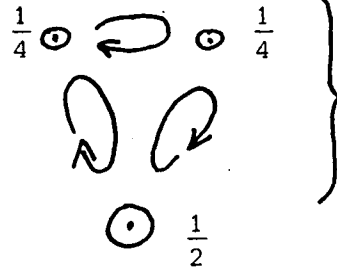
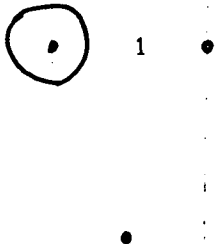


cohérence

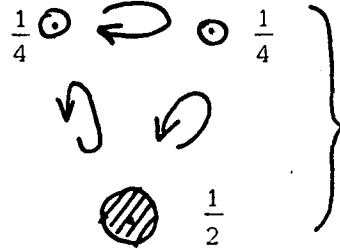
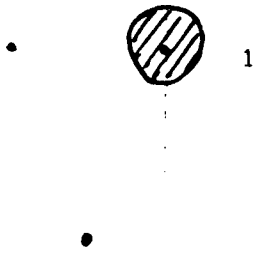
a) Evolution symétrique

f g f'

f g f'



atomes "a"

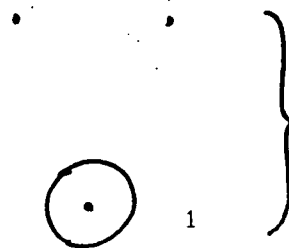
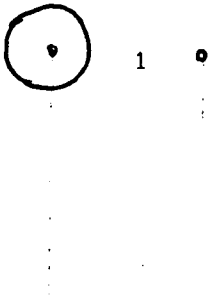


atomes "b"

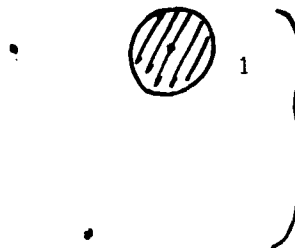
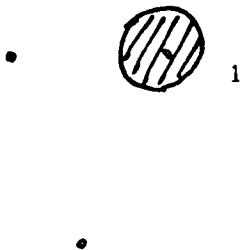
Etat initial

Etat final

b) Evolution des seuls atomes "a" (fluctuation maximale)



atomes "a"



atomes "b"

Etat initial

Etat final

FIGURE IV.12

Sur la figure IV.9, cet état final correspond au point M ^(*)

• pour les cohérences optiques, on a de même :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f,g,a}(t=+\infty) = -\sigma_{f,g,b}(t=+\infty) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \text{Tr } \sigma_a \exp(i \frac{\Delta\omega}{2} t) \quad (\text{IV.66-a}) \\ \sigma_{f',g,a}(t=+\infty) = -\sigma_{f',g,b}(t=+\infty) = \frac{-1}{2\sqrt{2}} \text{Tr } \sigma_a \exp(-i \frac{\Delta\omega}{2} t) \quad (\text{IV.66-b}) \end{array} \right.$$

La figure IV.12 schématise l'état initial et l'état final pour les atomes "a" et "b".

Si l'on tient compte des fluctuations, l'état final atteint n'est plus symétrique mais il reste toujours la moitié des atomes dans l'état F (point représentatif M sur la figure IV.9). Cet état correspond à une situation intermédiaire entre les cas des figures (IV.12-a et b) : la figure IV.12-b présente le cas où la condition initiale ne fait démarrer que les atomes "a", c'est-à-dire le cas correspondant à une fluctuation maximale.

Au total, il existe des cohérences optiques macroscopiques pour chaque classe d'atomes et si l'amplitude de ces cohérences fluctue d'une expérience à l'autre, leur ordre de grandeur reste donné par (IV.66). Ces cohérences ne rayonnent pas, car elles se détruisent par interférences entre les deux classes et l'on a pour chacune des deux transitions :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{f,g}(t=+\infty) = \sigma_{f,g,a}(t=+\infty) + \sigma_{f,g,b}(t=+\infty) = 0 \quad (\text{IV.67-a}) \\ \sigma_{f',g}(t=+\infty) = \sigma_{f',g,a}(t=+\infty) + \sigma_{f',g,b}(t=+\infty) = 0 \quad (\text{IV.67-b}) \end{array} \right.$$

On observe donc ici un effet de superradiance limitée, très différent de l'effet de compétition examiné dans le cas i), car dans le cas présent, il existe sur chaque classe d'atomes des cohérences optiques macroscopiques dans l'état final (IV.66). La comparaison des figures IV.12 et IV.10 illustre bien la différence qui existe entre les états finals, dans les cas i) et ii).

(*) On remarquera ici qu'il existe dans l'état final (IV.65) des cohérences hertziennes $\sigma_{f,f'}(t=+\infty)$ dans le niveau de départ de la transition superradiante. Le pulse superradiant, qui est capable de saturer la transition $F \rightarrow G$, peut créer des cohérences aussi bien dans le niveau d'arrivée G (cf. III.B.3.c) que dans le niveau de départ F.

4) Conclusion

Dans le cas d'un système à trois niveaux, on peut en général observer l'effet de superradiance limitée. Si l'état initial ne correspond pas à un cas pur, il reste toujours des atomes dans le niveau de départ. Cet effet sur les populations résulte de la conservation du caractère statistique de la matrice densité (équations (IV.25 ou 26)) et l'on peut déterminer en grande partie le pourcentage d'atomes restant dans le niveau de départ sans faire aucune hypothèse sur la manière dont se déroule l'émission superradiante (voir figures IV.7 et IV.9).

Cet effet de superradiance limitée pour les populations recouvre en fait des effets très différents pour les cohérences optiques et, suivant les cas, il peut exister ou non des classes de cohérences optiques macroscopiques du type de celles observées précédemment aux paragraphes A et B.

- Si les différentes classes d'atomes n'évoluent pas à la même vitesse, l'effet de superradiance limitée se comprend simplement comme un effet de compétition et de quenching entre les différentes transitions susceptibles de superradiation et il n'y a pas de cohérences optiques dans l'état final (voir figure IV.10).
- Si par contre, les différentes classes d'atomes évoluent à la même vitesse ($T_{SR,a}$, $T_{SR,b}$), ou à des vitesses voisines, il peut y avoir dans l'état final, pour chaque classe d'atomes et pour chaque transition, des cohérences optiques macroscopiques qui interfèrent destructivement entre classes d'atomes. Ce cas est illustré sur la figure IV.12.
- Enfin, si le couplage sur les différentes transitions se fait par l'intermédiaire du même champ, on observe des évolutions parallèles de toutes les classes d'atomes, qui sont pilotés par le même champ. Il subsiste alors dans l'état final des cohérences macroscopiques pour chaque classe et chaque transition. Ces cohérences interfèrent destructivement en sommant de façon globale sur toutes les classes et toutes les transitions couplées. Ce cas est illustré sur la figure IV.7. On notera que s'il n'y a qu'une seule classe d'atomes (cas pur), l'effet de superradiance limitée subsiste, car il reste une possibilité d'interférence (à l'intérieur de l'unique classe) entre les dipôles associés aux différentes transitions.

E. Conclusion : lien avec les effets de propagation

L'effet de superradiance limitée, dont nous venons de donner quelques exemples, est un effet très général qui apparaît chaque fois qu'il existe, dans un système atomique, des classes de dipôles qui évoluent à des vitesses différentes. Dans ce cas, en effet, les différentes classes peuvent se déphaser et interférer destructivement. L'émission peut alors cesser avant que toute l'énergie ait été dissipée et il peut rester des atomes dans le niveau de départ de la transition superradiante à $t = +\infty$ (si l'on néglige l'émission spontanée).

Dans les exemples que nous avons décrits précédemment (§§ B, C, D), les interférences destructives entre dipôles sont totales :

■ dans le cas de l'émission d'un système de volume petit devant la longueur d'onde λ (§ B), les atomes, qui ne sont pas indiscernables vis-à-vis du champ à courte distance (c'est-à-dire vis-à-vis du champ qu'ils voient), le sont vis-à-vis du champ à grande distance (c'est-à-dire vis-à-vis de l'énergie rayonnée) et l'on peut observer des interférences destructives totales entre les champs émis par les différentes classes de dipôles;

■ dans le cas de l'émission superradiante d'un système étendu constitué d'un mélange d'atomes (mélange d'atomes à deux niveaux (§ C), ou mélange statistique d'atomes à trois niveaux (§ D)), les différentes classes de dipôles occupent exactement le même volume; les conditions géométriques, nécessaires à l'observation d'interférences destructives totales entre les champs émis par les différentes classes, sont automatiquement remplies et l'on observe l'effet de superradiance limitée.

Que se passe-t-il si, pour des raisons physiques, ces interférences destructives totales ne peuvent se produire ?

Considérons le cas de l'émission vers l'avant d'un système à deux niveaux dans un volume étendu. Suivant l'abscisse z , les atomes ne voient pas le même champ et ils n'évoluent donc pas à la même vitesse. Il existe donc des "classes" physiquement distinctes de dipôles dont l'histoire est différente. On peut remarquer cependant qu'il n'est pas possible, pour ces dipôles, d'interférer destructivement de façon complète. En effet, même si le champ émis à l'extérieur est nul : $\mathcal{E}(z=t) = 0$, le champ présent à l'intérieur du milieu est non nul s'il existe des dipôles locaux non nuls. On a donc $\mathcal{E}(z) \neq 0$ et l'évolution des dipôles se poursuit donc à l'abscisse z .

Ces interférences ne sont cependant pas négligeables, car ce sont elles qui donnent naissance aux "ringings cohérents" observés dans le modèle de propagation à une dimension. On peut d'ailleurs remarquer que, dans le cas de ce modèle, l'amortissement moyen aux temps longs est beaucoup plus lent que dans le cas du modèle du champ moyen. Il suffit pour cela de comparer l'allure des signaux obtenus à l'approximation du champ moyen et à l'approximation de propagation à une dimension (voir figures II.5 et II.14). L'existence de classes distinctes de dipôles se traduit donc essentiellement par un effet de ralentissement global de l'émission. Cependant, l'évolution ne cesse que lorsque toute l'énergie a été émise (il n'y a pas de superradiance limitée au sens strict).

Au total, on peut distinguer, suivant les cas, trois types de superradiance :

■ Superradiance de DICKE

Il n'est pas possible de discerner, à l'intérieur du système, des classes physiquement distinctes de dipôles. L'approximation de DICKE est alors valide (indiscernabilité des atomes) et elle conduit à la solution bien connue en sécante hyperbolique. Nous verrons, au prochain paragraphe, que ce cas idéal correspond à la superradiance en cavité d'un système de volume petit, que nous étudierons au chapitre V, § A.

■ Superradiance ralentie

Il est possible de discerner des classes de dipôles mais, pour des raisons physiques, ces dipôles ne peuvent interférer destructivement. L'amortissement du système se fait en un temps plus long que dans le cas idéal de DICKE. L'état final correspond à un état dans lequel toute l'énergie a été émise. C'est le cas de la superradiance d'un système à deux niveaux de volume étendu.

■ Superradiance limitée

Il existe des classes de dipôles physiquement distinctes, qui évoluent à des vitesses différentes et qui peuvent interférer destructivement de façon complète. L'évolution cesse alors avant que toute l'énergie ait été rayonnée (il reste des atomes dans le niveau de départ de la transition superradiante). Il peut également rester des dipôles macroscopiques dans l'état final atteint à $t = +\infty$. Ce cas correspond aux exemples décrits aux § B, C et D. Il correspond également à la superradiance d'un système de volume étendu en présence d'une cavité que nous étudierons au chapitre V, § B.

CHAPITRE V

"UN SYSTEME SUPERRADIANT TRES SIMPLE : LE MASER
EN REGIME TRANSITOIRE"

UN SYSTEME SUPERRADIANT TRES SIMPLE : LE MASER EN REGIME TRANSITOIRE

A. Introduction

Nous avons dans les chapitres précédents envisagé deux cas de superradiance. Il résulte clairement de ces études que la situation superradiante idéale est celle d'un système d'atomes à deux niveaux couplés de façon entièrement symétrique au champ de rayonnement (superradiance dans le modèle du champ moyen ou superradiance de Dicke). Dans ce cas, la corrélation entre les dipôles optiques se bâtit de façon optimale, l'effet d'interférence constructive des champs émis par les différents atomes est le plus efficace possible et l'émission se produit avec une vitesse maximale, en conduisant à un état final où tous les atomes sont désexcités. Cette situation "idéale" est en générale compliquée par différents effets que nous avons analysés : effets de propagation, de géométrie, de dégénérescence des niveaux... Dans les chapitres 3 et 4, notre but était de rendre compte de tous ces phénomènes compliquant et enrichissant la superradiance, qui apparaissent dans la plupart des expériences réelles effectuées sur un milieu atomique étendu présentant une structure de transition plus ou moins complexe. Le point de vue que nous adoptons dans ce dernier chapitre théorique est inverse : nous voulons montrer qu'il est possible de réduire la complexité de la situation expérimentale et de construire un système physique réaliste manifestant l'effet de superradiance idéal de Dicke.

La première idée qui vient à l'esprit pour construire un système superradiant où les effets de propagation sont négligeables est d'envisager un système "microscopique" d'atomes à deux niveaux, étendu sur des dimensions petites devant la longueur d'onde λ du rayonnement. Nous avons cependant rappelé au chapitre précédent que dans ce cas, des effets très importants de diffraction dans le petit volume de grande épaisseur optique ont pour résultat de faire jouer des rôles dissymétriques aux différents atomes et de conduire à une superradiance limitée importante.

Pour pallier cette difficulté, il suffit de placer le milieu superradiant quasi ponctuel dans une cavité résonnante pour la fréquence de superradiance. On peut alors voir le problème comme celui de la superradiance d'un ensemble ponctuel d'atomes en présence de ses images ou répliques obtenues par réflexions successives dans les miroirs constitués par les parois de la cavité. Le nombre effectif d'atomes superradiant est alors Nf (où f est la finesse de la cavité), ce qui signifie que le nombre réel d'atomes nécessaires pour obtenir un temps

de superradiance donné se trouve réduit par le facteur f . Ceci n'est pas étonnant si on remarque que le champ "vu" par les atomes se trouve en quelque sorte amplifié par interférence constructive dans la cavité, ce qui accélère la vitesse d'évolution pour un nombre N donné d'atomes par rapport à ce qu'elle serait en absence de cavité. Le point important à noter est que la modification induite sur le champ par chaque passage sur les atomes devient beaucoup plus faible qu'en absence de cavité, car l'épaisseur optique du milieu est beaucoup plus petite. Le champ ne varie alors plus appréciablement sur des distances de l'ordre de dimensions du milieu émetteur et tous les atomes, s'ils sont situés dans un ventre du champ électromagnétique "voient" la même perturbation. En d'autres termes, la présence de la cavité a pour effet d'"homogénéiser" le champ vu par les atomes qui sont alors couplés symétriquement au mode du champ. L'autre effet simplificateur de la cavité est de privilégier un mode unique auquel les atomes sont couplés, ce qui allège considérablement l'analyse géométrique du problème. Les équations d'évolution du système deviennent alors très simples et se ramènent - si la cavité n'a pas une finesse trop grande - à celles du modèle de Dicke. En principe, une telle situation peut être obtenue à n'importe quelle longueur d'onde. En pratique cependant, on ne peut espérer préparer un nombre important d'atomes excités dans un volume petit devant λ , que si cette quantité n'est elle-même pas trop petite. Nous traiterons donc explicitement le cas d'un système superradiant fonctionnant dans le domaine des ondes millimétriques ou submillimétriques (maser ou laser infrarouge en régime transitoire).

Nous commencerons (au § B) par établir les équations de Bloch-Maxwell décrivant les évolutions couplées des atomes et du champ. Nous montrons que ces équations sont, pour l'angle du vecteur de Bloch, formellement identiques à celles d'un pendule amorti. Deux constantes de temps jouent un rôle important pour l'analyse de ces équations : le temps d'amortissement du champ dans la cavité T_{cav} , et le temps d'amortissement superradiant T_{maser} des atomes correspondant au temps caractéristique de superradiance de Nf atomes dans l'espace libre. Si la cavité n'est pas trop bonne (T_{cav} court devant T_{maser}) les équations obtenues se ramènent à celles de Dicke et l'évolution du système est monotone, correspondant à l'émission d'un pulse en forme de sécantes hyperboliques (pendule à amortissement surcritique). Si au contraire la cavité a une très grande finesse (T_{cav} grand devant T_{maser}), les atomes peuvent réabsorber et réémettre plusieurs fois le champ émis et un régime d'oscillations correspondant

à l'émission de plusieurs pulses successifs est prévu. Nous analysons en détail au § B ces deux régimes et montrons que le passage de l'un à l'autre ($T_{\text{cav}} = T_{\text{Maser}}$) correspond à une condition analogue à la condition d'Arecchi-Courtens pour la superradiance d'un système dans l'espace libre (Dire que T_{cav} est grand devant T_{Maser} revient en effet à exprimer que le réseau d'antennes images se réfléchissant dans les parois de la cavité s'étend sur une distance L telle que L/c est grand devant le temps de superradiance du système).

Nous montrons enfin (§ C) qu'il est possible de généraliser simplement les équations d'évolution du système au cas où le volume émetteur est grand devant la longueur d'onde. Suivant qu'ils sont placés dans des ventres ou des noeuds de l'onde stationnaire dans la cavité, les atomes voient alors des champs différents et évoluent à des vitesses différentes. Le phénomène de superradiance limité se manifeste alors simplement, dans une situation où on peut le calculer analytiquement complètement.

Le problème traité dans ce chapitre - amortissement d'un ensemble d'oscillateurs couplés à un circuit résonnant accordé ou à une cavité résonnante - a bien entendu déjà été envisagé par de nombreux auteurs dans des contextes variés (71). Il nous a semblé intéressant de le reprendre ici, dans le contexte de la superradiance, d'autant plus qu'il correspond à une situation expérimentale que nous avons réalisée et que nous discutons au chapitre VIII et IX (Maser superradiant à états de Rydberg).

B. Cas idéal : La superradiance d'un petit système à l'intérieur d'une cavité

1) Position du problème et ordres de grandeurs

Considérons le cas de N atomes à deux niveaux, préparés dans l'état $|+\rangle$ à $t=0$, placé dans une cavité. Nous faisons ici implicitement référence à une cavité microonde de type plan focal ou cofocal de longueur L très grande devant la longueur d'onde λ (Voir figure V-1).

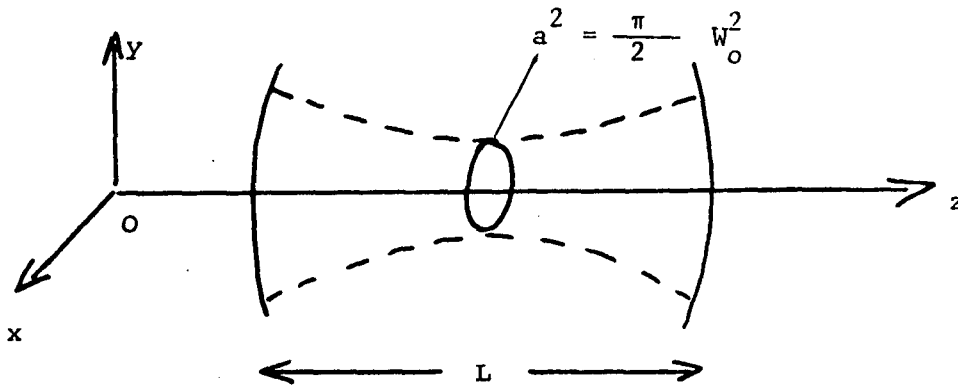


Figure V-1

Pour simplifier l'étude, nous supposons que tous les atomes voient le même champ \vec{E} . Pour cela nous considérerons par exemple que tous les atomes sont situés au "waist" de la cavité dans un "ventre" de l'onde stationnaire, à une distance de Oz petite devant la dimension w_0 de ce "waist". Nous supposons également que le gain en un passage est suffisamment faible pour négliger les variations de \vec{E} liées à l'amplification le long de Oz . Nous nous limiterons enfin au cas où la cavité est à résonance sur la transition atomique avec un coefficient de surtension tel que le couplage des atomes avec le mode résonnant soit prépondérant devant le couplage avec les autres modes. Toutes ces conditions sont facilement réalisables dans le cas d'une cavité micro-onde.

On peut alors considérer que tous les atomes ont la même évolution semi-classique (A $t=0$ ils sont dans le même état, l'état $|+\rangle$, et par la suite ils sont couplés au même champ \vec{E}). Au total, l'état du système est invariant par permutation des atomes, ce qui simplifie grandement l'étude, car l'approximation de Dicke est valide. Il ne faut donc pas s'étonner si l'on retrouve, en résolvant alors le problème, la solution en sécante hyperbolique de Dicke.

Pour décrire le démarrage de l'évolution, il suffit de considérer que la polarisation initiale $\vec{P}(z, t=0)$ aléatoire est uniforme sur tout le milieu. L'angle $\theta(t=0)$ que fait par rapport à la verticale, le vecteur de Bloch est uniforme. Il fluctue donc aléatoirement suivant la loi de probabilité (II-III-88).

Nous allons maintenant introduire les différents temps associés à ce problème :

Nous appelons T_{cav} le temps d'amortissement de la cavité. Si R est le coefficient de réflexion des miroirs pour l'énergie ($R \approx 1$) on a :

$$T_{CAV} = \frac{1}{1 - R} \cdot \frac{L}{c} \quad (V-1)$$

Nous appellerons T_{SR} le temps de superradiance associé à la géométrie du mode de la cavité en absence de miroirs (absence de cavité). C'est le temps de superradiance "habituel" T_{SR} défini précédemment, et l'on a alors

$$T_{SR} = \frac{1}{N \Gamma \mu} \quad (V-2a)$$

où Γ est la probabilité de transition

et où
$$\mu = \frac{3}{8\pi} \frac{\lambda^2}{a^2} \quad (V-2b)$$

Dans l'expression de μ , a représente la surface latérale occupée par des antennes émettrices. Dans le cas du couplage avec un mode gaussien nous prendrons a égal à la surface associée au flux d'énergie au "waist" :

$$a^2 = \frac{\int dx dy |E(x,y)|^2}{|E(x=0, y=0)|^2} \quad (V-3)$$

comme au "waist" $E(x, y)$ est proportionnel à $\exp \frac{-(x^2 + y^2)}{w_0}$ où w_0 est la dimension du "waist", il vient :

$$a^2 = \frac{\pi w_0^2}{2} \quad (V-4)$$

Nous appellerons enfin T_{MASER} , le temps de superradiance en présence de la cavité. L'évolution des atomes en présence de la cavité est plus rapide, car ils voient un champ plus grand et le rapport T_{SR}/T_{MASER} représente le rapport entre les densités d'énergie E^2/ϵ_0 vu par les atomes en présence et en absence de cavité.

Si la cavité est accordée, le facteur d'amplification moyen :

\bar{I}_{int}/I_{ext} est relié à R par (70) :

$$\bar{I}_{int} / I_{ext} = \frac{2\sqrt{R}}{1 - R} \quad (V - 5)$$

(\bar{I}_{int} est l'intensité moyenne régnant à l'intérieur de la cavité, alors que I_{ext} est l'intensité incidente). Comme les atomes situés dans des ventres voient une intensité égale à $2 \bar{I}_{int}$, il vient pour le rapport

T_{SR}/T_{MASER} :

$$T_{SR}/T_{MASER} = 2 \bar{I}_{int} / I_{ext} = \frac{4 \sqrt{R}}{1-R} \approx \frac{4}{1-R} \quad (V-6)$$

Ce rapport est relié directement à la finesse f :

$$f = \frac{\pi \sqrt{R}}{1-R} \quad (V-7)$$

de la cavité :

$$T_{SR} / T_{MASER} = \frac{4}{\pi} f \quad (V-8)$$

2) Equations d'évolution

Dans une cavité, le champ émis se propage à la fois vers l'avant ($+\vec{k}_0$) et vers l'arrière ($-\vec{k}_0$), (ce qui se traduit d'ailleurs par la présence d'une onde stationnaire). Il n'y a donc aucune raison de privilégier une direction de propagation et l'on doit introduire des enveloppes en $e^{\pm i \omega_0 t}$ (au lieu des enveloppes en $e^{\pm i(\omega_0 t - kz)}$).

Posons donc similairement à (II-II-57)

$$e = -2 \sum_k \frac{\hbar c k}{2 \epsilon_0} a_k^+ e^{-i \omega_0 t} \quad (V-9a)$$

$$p = \frac{2}{a^2} \sum_i D_{+-} r_i^+ \delta(z=z_1) e^{-i \omega_0 t} \quad (V-9b)$$

Comme les équations de Bloch (II-II-70,b et c) sont des équations locales, elles ont la même forme pour les enveloppes e, p (avec un champ qui ne se "propage" pas) que pour les enveloppes \mathcal{E} et \mathcal{P} (avec un champ qui se propage). Il vient donc :

$$\frac{d}{dt} p = i \frac{|D_{+-}|^2}{\hbar} e \mathcal{N} \quad (V-10a)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N} = \frac{i}{2\hbar} (e^+ p - e p^+) \quad (V-10b)$$

On remarquera qu'ici tous les atomes voient le même champ $e(\vec{x}_0)$ (\vec{x}_0 correspond à la position des atomes). On peut alors intégrer les équations (V-10) sur tout l'espace. En posant :

$$\bar{P} = \int p \, d_{vol} \quad (V-11a)$$

$$\bar{N} = \int \mathcal{N} \, d_{vol} \quad (V-11b)$$

Il vient de (V-10) :

$$\frac{d}{dt} \bar{P} = \frac{i}{\hbar} |D_{+-}|^2 e(\vec{x}_0) \bar{N} \quad (V-12a)$$

$$\frac{d}{dt} \bar{N} = \frac{i}{2\hbar} (e(\vec{x}_0)^+ P - e(\vec{x}_0) \bar{P}^+) \quad (V-12b)$$

Calculons l'énergie électromagnétique W_E présente à l'intérieur de la cavité.

$$\begin{aligned} W_E &= \int d_{vol} \epsilon_0 |E|^2 \\ &= \int d_{vol} 2 \epsilon_0 |e(x,y,z)|^2 \end{aligned} \quad (V-13)$$

Comme le faisceau à l'intérieur de la cavité est gaussien, et comme les atomes sont situés sur l'axe de ce faisceau au "waist" et dans un ventre, il vient :

$$W_E = 2 \epsilon_0 |e(\vec{x}_0)|^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \left[\exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \right]^2}_{a^2 \text{ (par définition)}} \underbrace{\int_0^L dz \cos^2(k_0 z)}_{\frac{1}{2} L}$$

$$W_E = \epsilon_0 a^2 L |e(\vec{x}_0)|^2 \quad (V-14)$$

Pour conservation de l'énergie, il vient :

$$\frac{d}{dt} W_E = -\frac{W_E}{T_{cav}} - N \omega_0 \frac{d}{dt} \bar{N} \quad (V-15)$$

en remplaçant W_E par sa valeur, il vient :

$$\left(e(\vec{x}_0)^+ \frac{d}{dt} e(\vec{x}_0) + e(\vec{x}_0) \frac{d}{dt} e(\vec{x}_0)^+ \right) \epsilon_0 a^2 L = -\frac{W_E}{T_{cav}} - i \frac{\omega_0}{2} (e(\vec{x}_0)^+ \bar{P} - e(\vec{x}_0) \bar{P}^+) \quad (V-16)$$

en séparant les parties réelles et imaginaires, il vient :

$$\frac{d}{dt} e(\vec{x}_0) = -\frac{e(\vec{x}_0)}{2 T_{cav}} - i \frac{\omega_0}{2 \epsilon_0} \frac{\bar{P}}{a^2 L} \quad (V-17)$$

qui est l'équation de Maxwell.

Pour résoudre le système d'équations constitué de (V.10) (V.17), posons (cf. (II.IV.8)) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{N} = N \cos \theta \quad (V.18-a) \\ \bar{P} = i D_{+-} \times N \sin \theta \quad (V.18-b) \end{array} \right.$$

L'énergie du système atomique W_A n'est alors fonction que de θ et il vient :

$$W_A = \frac{N\hbar\omega_0}{2} \cos \theta \quad (V.19)$$

La figure V.2 représente W_A en fonction de θ

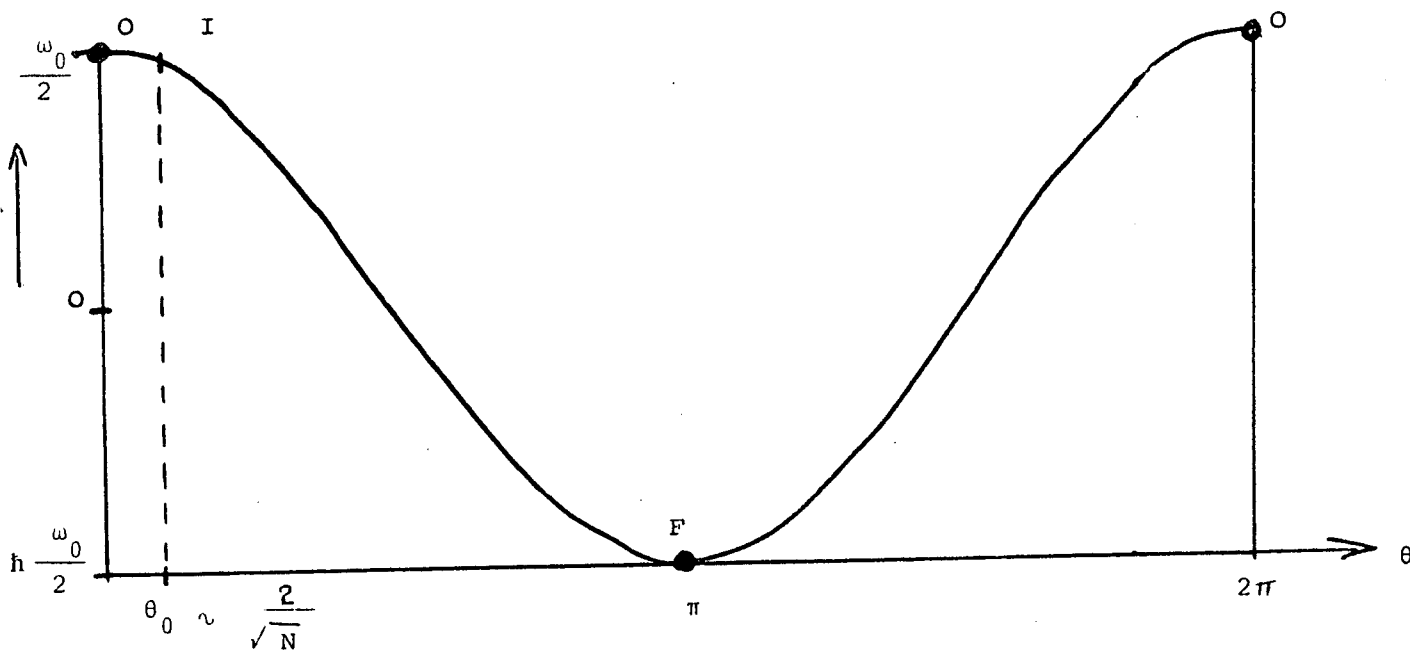


Figure V-2

L'équation d'évolution s'obtient très simplement de (V.18) et (V.10); il vient :

$$\frac{d}{dt} \theta = \frac{D_{+-}}{\hbar} e(\vec{x}_0) \quad (V.20)$$

en dérivant et en remplaçant $\frac{d}{dt} e(\vec{x}_0)$ par sa valeur (V.17), il vient :

$$\frac{d}{dt^2} \theta + \frac{1}{2T_{\text{CAV}}} \frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{T_{\text{SR}} L/c} \sin \theta \quad (\text{V.21})$$

(pour retrouver le coefficient du terme en $\sin \theta$ au deuxième membre, nous avons fait apparaître T_{SR}), équation que l'on peut écrire de façon équivalente en faisant apparaître T_{MASER} et T_{CAV} au deuxième membre :

$$\frac{d}{dt^2} \theta + \frac{1}{2T_{\text{CAV}}} \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{4T_{\text{MASER}} \cdot T_{\text{CAV}}} \sin \theta \quad (\text{V.22})$$

On reconnaît ici l'équation du mouvement d'une particule amortie dans le puit de potentiel W_A . On en déduit l'évolution de $\theta(t)$, puis celle de $\bar{N}(t)$ et $\bar{P}(t)$ par l'équation (V.18), ainsi que celle de $e(\vec{x}_0)$ et de l'intensité émise $I = |e(\vec{x}_0)|^2$ à partir de (V.20).

3) Etude de l'état final (effet de superradiance totale)

L'état final correspond à un minimum d'énergie du système atomique W_A (cf. chap. IV, § C.3). On a donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta(t = +\infty) = \pi \\ W_A(\theta) = -\frac{N}{2} \hbar \omega_0 \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} (\text{V.23-a}) \\ (\text{V.23-b}) \end{array}$$

Sur la figure V.2, cet état final correspond au point F. Il ne reste alors plus aucun atome dans le niveau de départ de la transition superradiante (niveau +) et la superradiance est totale.

Nous avons vu, au § B.1, que tous les atomes voyaient le même champ $e(\vec{x}_0)$. Le problème est donc symétrique par permutation des atomes et il n'est pas possible de définir des classes distinctes d'atomes ou de dipôles. L'effet de superradiance limitée ne se produit donc pas et il y a superradiance totale. Cet effet a pu être observé expérimentalement (se reporter au chapitre VIII § C 4.)

4) Allure des solutions en fonction de $\alpha = T_{\text{CAV}} / T_{\text{MASER}}$

a) Le démarrage de l'évolution

Avant de discuter des différents types de solutions obtenues pour l'équation d'évolution de l'émission maser, nous allons nous intéresser

tout d'abord au démarrage de l'évolution pendant lequel $\sin \theta \simeq \theta$. L'équation (V-22) est alors linéaire et il vient :

$$\frac{d\theta}{dt^2} + \frac{1}{2T_{\text{CAV}}} \frac{d\theta}{dt} - \frac{1}{4T_{\text{CAV}} \cdot T_{\text{MASER}}} \theta = 0 \quad (\text{V-24})$$

avec à $t=0$ $\theta \sim \theta_0 = \frac{2}{\sqrt{N}}$ (conf chapitre II § III C 5).

L'interprétation de (V-24) conduit à la somme d'une exponentielle décroissante qui s'amortit très vite et d'une exponentielle croissante de constante de temps en $\exp t/2\tau_e$ où :

$$\tau_e = \frac{2 T_{\text{CAV}}}{\sqrt{1 + 4\alpha - 1}} \quad (\text{V-25b})$$

$$\text{ou } \alpha = T_{\text{CAV}}/T_{\text{MASER}} \quad (\text{V 25b})$$

τ_e est alors le temps caractéristique d'évolution au démarrage de l'émission superradiante maser.

■ Si $T_{\text{CAV}} \ll T_{\text{MASER}}$ ($\alpha \ll 1$) on trouve :

$$\tau_e \simeq T_{\text{MASER}} \quad (\text{V 26})$$

■ Si par contre $T_{\text{CAV}} \gg T_{\text{MASER}}$ ($\alpha \gg 1$) on trouve :

$$\tau_e \simeq \sqrt{T_{\text{CAV}} \cdot T_{\text{MASER}}} \quad (\text{V-27})$$

Comme le "tipping angle" $\theta(t=0)$ est de l'ordre de $\frac{2}{\sqrt{N}}$ et comme θ croît en $e^{t/2\tau_e}$, l'ordre de grandeur du délai d'émission t_D est dans tous les cas :

$$t_D \simeq \tau_e \text{ Log } N \quad (\text{V 28})$$

b) Evolution aux temps très long

Considérons maintenant la fin de l'émission superradiante pour $t \gg t_D$. La plus grande partie de l'énergie a été émise et la particule

se trouve au voisinage du fond du puit de potentiel W_A . (au voisinage du point F). Il est alors possible d'assimiler W_A à une parabole et l'équation (V 22) devient :

$$\frac{d}{dt^2} \theta + \frac{1}{2T_{CAV}} \frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{4 T_{MASER} T_{CAV}} (\pi - \theta) \quad (V-29)$$

L'évolution de θ est alors de la forme :

■ pour $\alpha < 1/4$

$$(\pi - \theta) \propto e^{-\Gamma t} \quad (V-30)$$

$$\text{où } \Gamma = -\frac{1}{4T_{CAV}} (1 - \sqrt{1-4\alpha}) \quad (V-30b)$$

L'équation (V 30b) se réduit pour $\alpha \ll 1$ à

$$\Gamma = \frac{1}{2T_{MASER}} \quad (V-30c)$$

Dans ce cas il n'y a pas d'oscillation de la particule autour de F : l'amortissement est sur critique.

$$\text{■ } \underline{\text{pour } \alpha > 1/4} : (\pi - \theta) \propto e^{-\Gamma t} \sin(\Omega t + \phi) \quad (V-31)$$

$$\text{où } \Gamma = \frac{1}{4} T_{CAV} \quad (V-31b)$$

$$\text{et où } \Omega = \frac{1}{4T_{CAV}} \cdot \sqrt{4\alpha - 1} \quad (V-31c)$$

L'équation (V-31c) se réduit pour $\alpha \gg 1$, à

$$\Omega \simeq 1/2 \tau_e \quad (V-31d)$$

On observe cette fois des oscillations amorties autour de F.

On notera que l'énergie, proportionnelle à $(\pi - \theta)^2$, s'amortit en un temps égal à $2T_{CAV}$ et non à T_{CAV} , comme l'énergie électromagnétique du champ présent dans la cavité. En effet :

- en moyenne dans le temps, l'énergie est équi- répartie entre les atomes et le champ présent dans la cavité,

- et seul le champ est amorti en un temps T_{CAV} .

On remarquera enfin que dans le cas du régime oscillant pour $\alpha \gg 1$, les oscillations aux temps longs ont une période voisine de $4\pi\tau_e$. τ_e caractérise donc, l'évolution aux temps courts, comme aux temps longs.

c) Evolution pour $\alpha \ll 1$ Cas du pendule fortement amorti : solution de Dicke.

Si α est très petit devant 1 l'évolution à pour temps caractéristique

$$\tau_e \sim T_{MASER}$$

On a alors dans l'équation (V-22)

$$\frac{1}{2T_{CAV}} \frac{d}{dt} \theta \sim \frac{1}{2\alpha} \frac{d^2}{dt^2} \theta \gg \frac{d^2}{dt^2} \theta \quad (V-32)$$

Le terme en $\frac{d\theta^2}{dt^2}$ devient alors négligeable, et l'équation (V-22) se ramène à une équation de pendule très fortement amorti :

$$\frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{2T_{MASER}} \sin \theta \quad (V-33)$$

(23)
formellement identique à l'équation obtenue par Dicke. Les résultats du chapitre II § III sont alors valables à condition de remplacer T_{SR} par T_{MASER} . En particulier l'évolution "typique" (qui correspond à la condition initiale $\theta(t=0) = \theta_0 = 2/\sqrt{N}$) de l'intensité I est en secante hyperbolique (équation (II III 19)). Nous avons représenté sur la figure (V 3a) en fonction de τ_e l'intensité émise $I(t)$ dans ce cas pour $N=10^8$ atomes et $\alpha = 10^{-1} \ll 1$.

d) Evolution dans le cas général :

Dans le cas général le terme d'amortissement de l'équation du pendule (V-22) n'est plus nécessairement prépondérant et il peut y avoir des oscillations autour de la position d'équilibre stable $\theta=\pi$ (point F de la figure V-2).

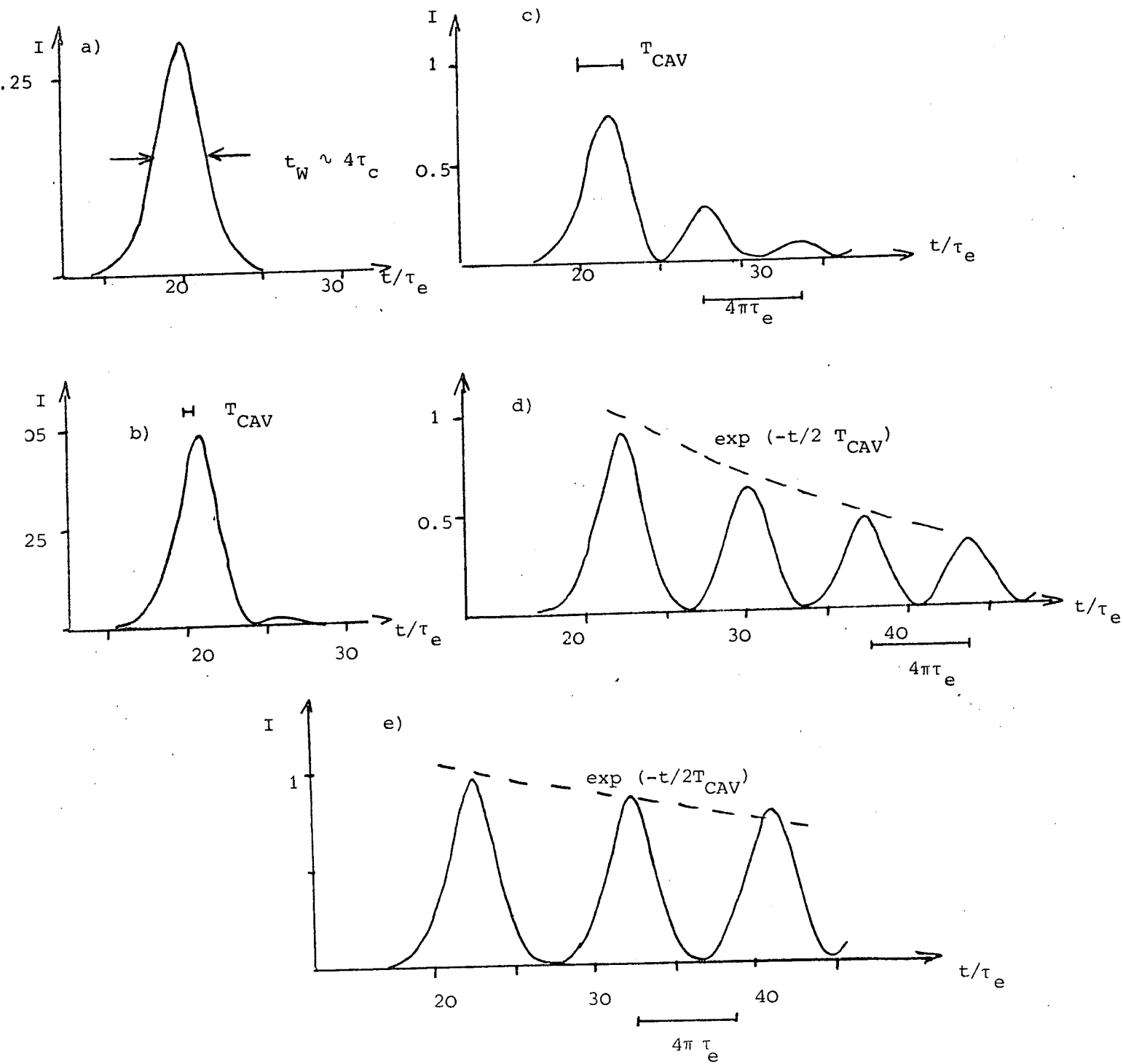


Figure V 3

Intensité émise I par superradiance maser dans le cas où le milieu émetteur est de petite dimension. (unité $Nh\omega_0/\tau_e$) pour

- | | | | |
|----|-----------------------------------|----|-----------------|
| a) | $\alpha = T_{MASER}/T_{CAV} = .1$ | c) | $\alpha = 10$ |
| b) | $\alpha = 1$ | d) | $\alpha = 100$ |
| | | e) | $\alpha = 1000$ |

Nous avons représenté sur la figure (V 3) a,b,c,d,e, l'allure des solutions obtenues pour $\alpha = .1, 1, 10, 100, 1000$ l'unité de temps étant τ_e . On passe continuellement d'une allure de courbe symétrique (cas de Dicke $\alpha = .1 \ll 1$; figure V 3a) à une courbe présentant des oscillations importantes. L'allure de ces solutions se comprend très facilement en considérant la figure (V 2).

i) Si $\alpha \gtrsim 1$ la condition d'amortissement sur critique (V 32) n'est plus remplie et on observe des oscillations de θ autour de la position d'équilibre $\theta = \pi$. L'intensité émise I présente alors plusieurs lobes qui correspondent à des signes alternés de l'enveloppe $e(\vec{x}_0)$ du champ \vec{E} ; $e(\vec{x}_0)$ est positif quand θ augmente et négatif quand θ diminue (figure V-3 b c d e). Ces oscillations sont analogues aux "ringings" cohérents observés dans un milieu étendu à une dimension (cf II IV A).

ii) Pour α de l'ordre de un, ces oscillations sont extrêmement faibles (figure V 3b). Ces oscillations ne deviennent en effet importantes que pour α de l'ordre de 10 (figure V 3c), car pour α de l'ordre de 10, la durée du pulse superradiant t_w ($t_w \sim 4\tau_e$) devient du même ordre que le temps d'amortissement de la cavité T_{CAV} : $4\tau_e = T_{CAV}$ pour $\alpha = 20$, et il reste après le premier lobe une énergie notable à dissiper. Si l'on augmente encore α la particule est capable de remonter très près du point O' symétrique de O sur la figure V 2 et le deuxième lobe est presque aussi grand que le premier (figure V-3 d et e). On observe alors, au temps longs, pour $\alpha \gg 1$, une série de lobes quasi-périodiques, de période voisine de $4\pi\tau_e$ et qui s'amortissent en un temps de l'ordre de $2T_{CAV}$. (cf V.31d)

Remarques :

i) La figure (V 3) qui résume l'ensemble des résultats présente la solution des équations (IV-22) avec le temps caractéristique τ_e comme unité de temps. On peut vérifier que le délai t_D est bien de l'ordre de $\tau_e \log N = 18,4 \tau_e$. Le choix de cette unité de temps permet également de trouver quel que soit α , des valeurs de l'intensité maximale du même ordre :

pour $\alpha \ll 1$, I_{\max} est atteint pour $\theta = \pi/2$ et l'on a

$$I_{\max} \approx \frac{N \hbar \omega_0}{4\tau_c} \quad (V-34a)$$

pour $\alpha \gg 1$, par contre, I_{\max} est atteint pour $\theta = \pi$ et l'on a :

$$I_{\max} \approx \frac{N \hbar \omega_0}{\tau_c} \quad (V-34b)$$

On peut vérifier sur la figure (V-3) que l'on obtient bien ces deux valeurs limites de I_{\max} . Notons au passage que sur la figure (V-3) l'aire des courbes $\int I(t, dt)$ n'est pas conservée lorsque l'on change α . Ce n'est pas significatif et cela résulte simplement du choix de l'unité de temps.

ii) Le changement de nature des solutions que l'on observe ici dans le cas de la superradiance en cavité est à rapprocher avec les différents régimes de superradiance dont nous avons discuté au chapitre II § V. (14)

On peut en effet définir pour le maser superradiant une longueur effective L_{eff} :

$$\frac{L_{\text{eff}}}{c} = T_{\text{CAV}} \quad (V-35)$$

(L_{eff} représente la dimension longitudinale du système en présence de ses images successives).

Si la condition d'Arècchi Courtens (II V-11) est satisfaite pour le maser : on a

$$c T_{\text{MASER}} > L_{\text{eff}} \quad (V-36)$$

(condition qui équivaut à $T_{\text{MASER}} > T_{\text{CAV}}$) et on observe une superradiance Markovienne pour les observables lentes comme l'intensité I . Dans le cas du maser ceci se traduit par une solution ne présentant qu'un seul lobe (dont l'allure se rapproche de la secante hyperbolique si $T_{\text{MASER}} \gg \frac{L_{\text{eff}}}{c} \leftrightarrow \alpha \ll 1$)

Si la condition d'Arecchi Courtens n'est plus satisfaite pour le maser .

$$T_{\text{MASER}} < \frac{L_{\text{eff}}}{c} \quad (\text{V-37})$$

On observe un changement de régime des solutions et la constante de temps d'évolution devient (cf equ. V-27)

$$\tau_e = \sqrt{T_{\text{MASER}} \cdot \frac{L_{\text{eff}}}{c}} \quad (\text{V-38})$$

Ce résultat est à rapprocher du résultat obtenu dans le cas de la superradiance par morceau qui évoluait en un temps : (cf chapitre II § V c)

$$\sqrt{T_{\text{SR}} \cdot \frac{L}{c}}$$

Notons toutefois que l'analogie entre l'effet observé ici pour le maser, et la "superradiance par morceaux" observé pour un milieu étendu, n'est pas complète, car les fluctuations sont très différentes dans les deux cas. Pour le maser, la condition initiale peut toujours être décrite par un seul paramètre : le "tipping angle" $\theta(t=0)$ et les différents lobes émis sont complètement corrélés entre eux. Dans le cas de la superradiance par morceau, le "tipping angle" $\theta(z, t=0)$ fluctue d'une "tranche" à l'autre, et si la condition d'Arecchi Courtens (II V 11) est violée, ces fluctuations restent importantes durant toute l'évolution. Les différents "morceaux" de superradiance sont alors incorrélés entre eux.

C) La superradiance d'un système étendu à l'intérieur d'une cavité (effets des ondes stationnaires).

1°) Position du problème

Au cours de ce paragraphe nous reprendrons l'étude du système atomique en présence d'une cavité, mais cette fois nous considérerons que le milieu peut être étendu (dimension grande devant λ) et que l'on ne peut plus négliger l'effet des noeuds et ventres du champ à l'intérieur de la cavité.

Pour simplifier l'étude (sans nuire comme nous le verrons à la généralité du problème) on peut considérer que les variations spatiales du champ sont liées uniquement à l'effet d'onde stationnaire. Pour que cette dernière hypothèse soit valide, on peut considérer que les atomes sont situés au voisinage du "waist" de la cavité, près de l'axe de symétrie Oz (voir figure V-1, mais que la dimension Δz du milieu émetteur est grande devant λ . Au total, ces conditions peuvent se mettre sous la forme :

$$|x_i|, |y_i| \ll w_0 \quad (V-39a)$$

$$|z_i - z_j| \sim \Delta z \quad i \neq j \quad (V-39b)$$

avec :

$$\lambda \ll \Delta z \ll \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \quad (V-39c)$$

Le champ électrique local en un point de la région où sont situés les atomes ne dépend alors, que de la position relative de ce point par rapport aux nœuds et aux ventres. En posant :

$$\phi = k_0 z \text{ (modulo } 2\pi) \quad (V-40)$$

on obtient pour les enveloppes e et p en $e^{-i\omega_0 t}$ du champ \vec{E} et de la polarisation \vec{P}

$$\begin{aligned} e(x, y, z) &= e(\vec{x}_0) \cos \phi \\ P(x, y, z) &= P(\vec{x}_0) \cos \phi \end{aligned} \quad (V-41)$$

où \vec{x}_0 est un point de l'axe de symétrie voisin du waist et correspondant à un "ventre". (e est maximum en \vec{x}_0). L'enveloppe e n'est alors fonction que de ϕ .

2°) Equations d'évolutions

En posant de façon similaire à (V-11)

$$\bar{P} = \int p(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} P(\phi) d\phi \quad (V-42a)$$

$$\bar{N} = \int n(x, y, z) dx dy dz = \int_0^{2\pi} N(\phi) d\phi \quad (V-42b)$$

L'équation de Bloch s'écrit :

$$\frac{d}{dt} P(\phi) = \frac{i |D_{+-}|^2}{\hbar} e(\vec{x}_0) N(\phi) \cos \phi \quad (V 43a)$$

$$\frac{d}{dt} N(\phi) = \frac{i}{2\hbar} (e^+(\vec{x}_0) P(\phi) - e^-(\vec{x}_0) P^+(\phi)) \cos \phi \quad (V 43b)$$

Pour établir l'équation de Maxwell sur $e(\vec{x}_0)$ utilisons la même méthode qu'au paragraphe (V B) . Calculons l'énergie électromagnétique W_E (cf V-14)

$$W_E = \epsilon_0 a^2 L |e(\vec{x}_0)|^2 \quad (V 44)$$

et en écrivant la conservation de l'énergie (cf V 15)

$$\frac{d}{dt} W = - \frac{W}{T_{CAV}} + \hbar \omega_0 \int_0^{2\pi} d\phi \frac{d}{dt} N(\phi) \quad (V 45)$$

Il vient alors (cf V-17) en développant et en séparant parties réelle et imaginaire :

$$\frac{d}{dt} e(\vec{x}_0) = - \frac{e(\vec{x}_0)}{2T_{CAV}} - \frac{i\omega_0}{2\epsilon_0} \int_0^{2\pi} \cos \phi d\phi \frac{P(\phi)}{a^2 L} \quad (V-46)$$

On notera ici, que , par rapport à l'équation (V-17), le terme source $P(\phi)$ est pondéré par le coefficient $\cos \phi$. La présence de ce coefficient signifie simplement que des dipôles en tant qu'émetteurs, sont couplés de façon différente au mode de la cavité, suivant qu'ils sont situés dans des nœuds ou des ventres.

Pour intégrer les équations de Bloch Maxwell (V 43) et (V 46) on peut poser comme nous l'avons fait précédemment (V 18) :

$$2\pi N(\phi) = N \cos(\theta(\phi)) \quad (V 47a)$$

$$2\pi P(\phi) = iND_{+-} \sin(\theta(\phi)) \quad (V 47b)$$

où $\theta(\phi)$ est fonction de ϕ

(le facteur de normalisation 2π permet de retrouver ici pour $\theta/(\phi) = 0$

$$\int_0^{2\pi} d\phi N(\phi) = N \quad (V-48)$$

Il vient de (V 43)

$$\frac{d}{dt} \theta(\phi) = \frac{D_{+-}}{\hbar} e(\vec{x}_0) \cos \phi \quad (V-49)$$

Comme à $t=0$ on a $\theta(\phi) \sim 0$, on a pour $t \neq 0$:

$$\theta(\phi) = \bar{\theta} \cos \phi \quad (V 50a)$$

$$\text{où } \bar{\theta} = \frac{D_{+-}}{\hbar} \int_0^t e(\vec{x}_0) dt \quad (V 50b)$$

L'énergie du système atomique W_A n'est fonction que de $\bar{\theta}$, il vient :

$$W_A = \frac{\hbar\omega_0}{2} \int_0^{2\pi} d\phi N(\phi) \quad (V-51)$$

qui à l'aide de (V-47) devient :

$$\begin{aligned} W_A &= \frac{N}{2} \hbar\omega_0 \cdot \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \cos(\bar{\theta} \cos \phi) \quad (V-52) \\ &= \frac{N}{2} \hbar\omega_0 J_0(\bar{\theta}) \end{aligned}$$

où J_0 est la fonction de Bessel d'ordre zero.

Nous avons représenté sur la figure (V-4) l'allure de W_A en fonction de $\bar{\theta}$.

L'équation d'évolution de θ se déduit de (V 46) et (V-49)

Il vient :

$$\frac{d}{dt} \bar{\theta} + \frac{1}{2T_{CAV}} \frac{d}{dt} \bar{\theta} = \frac{1}{4T_{MASER} \cdot T_{CAV}} J_1(\bar{\theta}) \quad (V 53)$$

(nous avons fait apparaître ici la fonction de Bessel $J_1(\theta) = \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \theta(\phi)$)
On reconnaît l'équation d'une particule amortie dans le potentiel W_A (le deuxième membre est à un coefficient près égal à la dérivée $\frac{d}{d\theta} W_A(\bar{\theta})$).

Pourcentage d'atomes dans le
niveau de départ

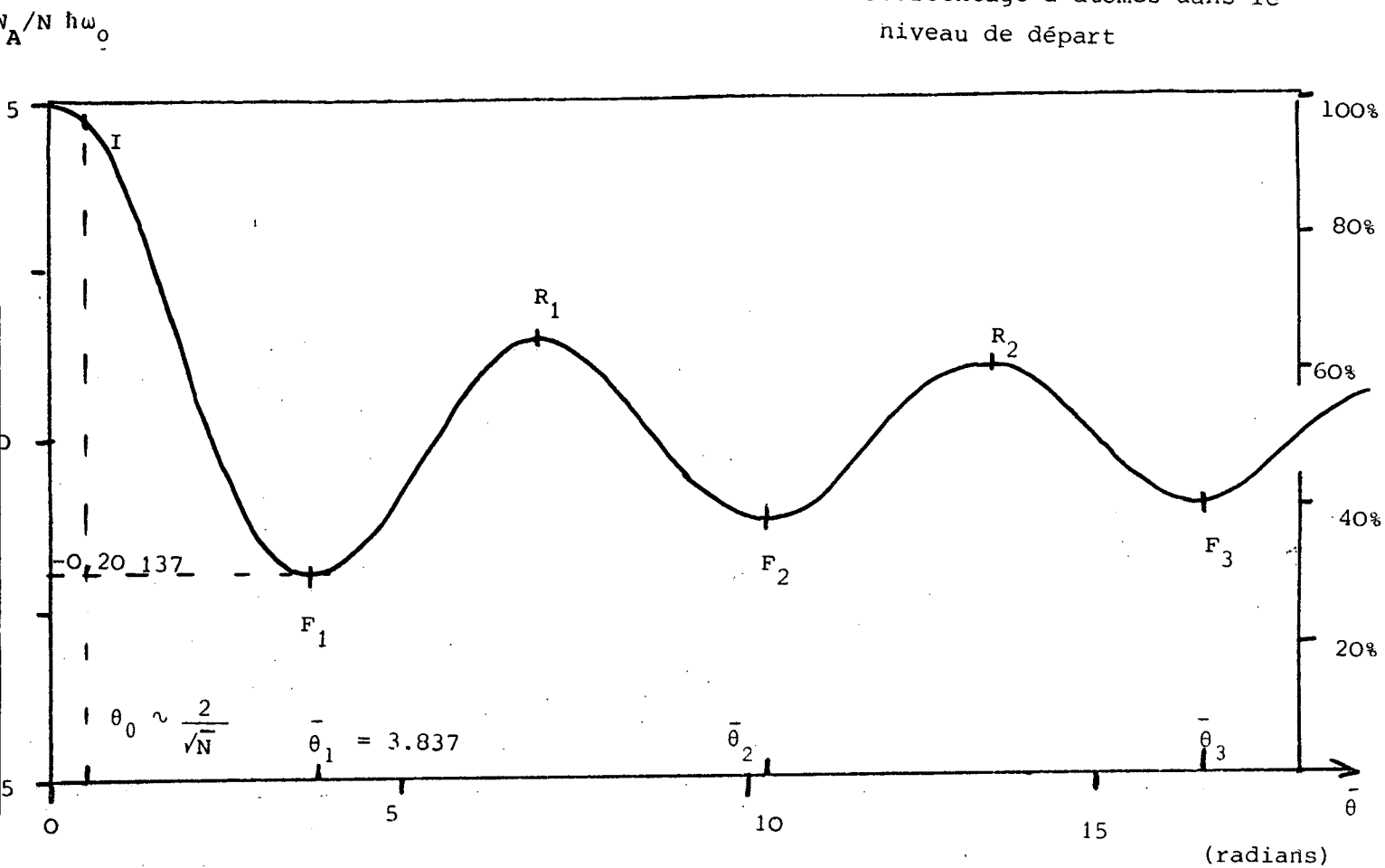


Figure V-4

Energie W_A du système atomique en fonction de $\bar{\theta}$.

On a également à partir de (V-47) et (V-50) pour la différence de population totale et le dipole total :

$$\int_0^\pi N(\phi) d\phi = N \cdot J_0(\theta) \quad (\text{V } 54\text{a})$$

$$\int_0^\pi P(\phi) d\phi = iND_{+-} J_1(\theta) \quad (\text{V } 54\text{b})$$

On notera que les équations (V-53) et (V-54) sont formellement identiques aux équations (V-22) et (V-18) du § A à condition de faire la transformation

$$\theta \longleftrightarrow \bar{\theta} \quad (\text{V } 55\text{a})$$

$$J_0 \longleftrightarrow \cos \bar{\theta} \quad (\text{V } 55\text{b})$$

$$J_1 \longleftrightarrow \sin \bar{\theta} \quad (\text{V } 55\text{c})$$

Remarque

Dans le cas particulier traité ici : hypothèse (V 39), le potentiel W_A s'exprime simplement en fonction de J_0 . Si ces hypothèses n'étaient plus satisfaites on obtiendrait des résultats très similaires. Seule la forme exacte du potentiel W_A serait modifiée, mais l'allure générale des solutions en serait la même. On aurait en particulier (cf figure V 4).

$$W_A \text{ min} > -\frac{N}{2} \hbar \omega_0 \quad (\text{V } 56\text{a})$$

et
$$W_A (\bar{\theta} = +\infty) \sim 0 \quad (\text{V } 56\text{b})$$

En utilisant la méthode développée plus haut, il est toujours possible de calculer $W_A(\bar{\theta})$ dans n'importe quel cas et de calculer ainsi l'évolution correspondante.

3°) Etat final atteint : effet de superradiance limité

Sans faire aucun calcul il est très facile de déterminer l'état final atteint à $t = +\infty$. L'état final correspond en effet à un minimum d'énergie et la particule, dont le mouvement est amorti ne peut s'arrêter qu'en un des points F_1, F_2, \dots d'équilibre stable. (ces points correspondent aux minimums successifs de la fonction de Bessel $J_0(\bar{\theta})$, ou aux zéros de $J_1(\bar{\theta})$).

Si l'amortissement est grand le point d'équilibre stable correspond à F_1 et il reste $\sim 30\%$ d'atomes dans le niveau de départ. Si par contre, l'amortissement est faible, la particule ne s'arrêtera que pour $\bar{\theta}$ très grand et le point F_n atteint correspondra à $n \gg 1$. Au moment où l'évolution cesse, il y a alors, équirépartition des atomes entre le niveau de départ et celui d'arrivée.

Dans tous les cas il existe des classes d'atomes, chaque classe étant associée à une valeur de ϕ . Pour chaque classe il existe un dipole macroscopique

$$P(\phi) = \frac{1}{2\pi} iD_{+-} \sin(\theta(\phi)) \quad (V-57)$$

qui contribue de façon non nulle au champ $e(\vec{x}_0)$ (cf equ. V-46) proportionnellement à :

$$P(\phi) \cos \phi \quad (V\ 58a)$$

En sommant sur toutes les classes de dipôles, la contribution totale au champ est cependant nulle à $t = +\infty$ et l'on a :

$$\int_0^{2\pi} P(\phi) \cos \phi \, d\phi = 0 \quad \text{à } t = +\infty \quad (V\ 58b)$$

Nous avons représenté sur la figure (V-5) le dipole $P(\phi)$ (figure V-5) en fonction de ϕ . (ou si l'on préfère le dipole local $p(z)$ en fonction de z), ainsi que la contribution $P(\phi) \cos \phi$ de ce dipole au rayonnement dans le mode (figure V 5b), pour le premier et le 5ème point d'équilibre stable (point F_1 et F_5 de la figure V 4). On remarquera, que les courbes présentées sont paires si l'on prend l'origine dans un noeud, et impaires ou paires, suivant les cas, si l'on prend l'origine dans un ventre (impaires pour $P(\phi)$, paire pour $\cos P(\phi)$). Le dipole total $\int d\phi P(\phi)$ est alors nul par symétrie. ($P(\phi)$ impaire). Comme on est dans un des points d'équilibre stable (F_1, F_2, \dots, F_i) l'intégrale (V-58b) de la contribution des dipôles au champ rayonné est également nulle. On peut vérifier que la figure (V 5b) est compatible avec ce résultat, qui provient non pas d'une relation de symétrie, mais de la valeur particulière $\bar{\theta}_i$ prise par $\bar{\theta}$ au point d'équilibre F_i (ici $i=1$ ou 5) "L'étalement" de la phase des dipôles dans l'état d'équilibre final dépend alors de $\bar{\theta}_i$ (ou de i).

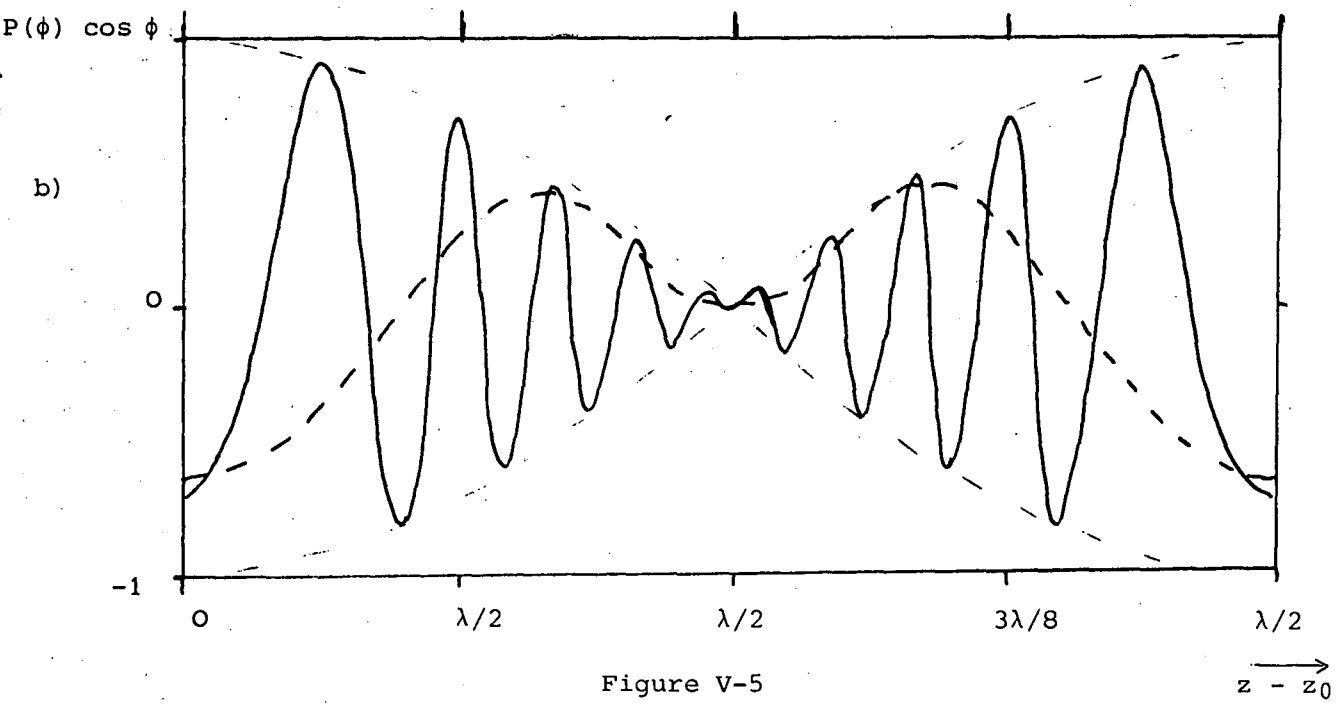
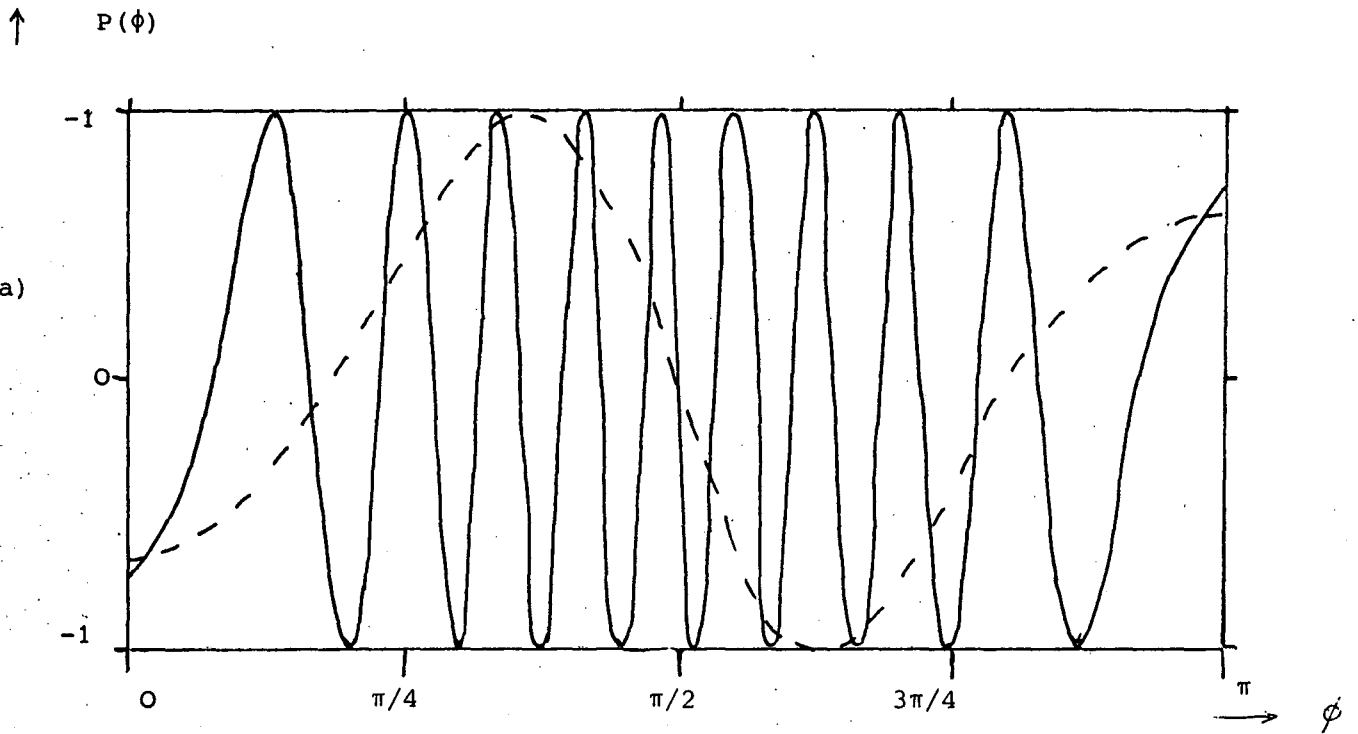


Figure V-5

- a) Dipole $P(\phi)$ en fonction de la position relative dans les noeuds et ventres de la cavité : paramètre ϕ
 - b) Contribution $P(\phi) \cos \phi$ du dipole au champ rayonné dans le mode de la cavité.
- Trait plein : F_1
Trait pointillé : F_5

• Si θ_i est petit, (par exemple $\theta_i = \theta_1 = 3,837$, voir figure (V-5) ; courbes en pointillé), $P(\phi)$ varie lentement en ϕ . ($p(z)$ varie sur des distances de l'ordre de λ) et le nombre de classes de dipôles est restreint. Le système reste relativement ordonné dans l'état final.

• Si θ_i est grand (par exemple $\theta_i = \theta_5$: voir figure (V-5) courbes en traits plein), $P(\phi)$ varie beaucoup plus vite en ϕ ($p(z)$ varie sur des distances petites devant λ et l'état final ressemble beaucoup plus à un état complètement incorréolé, sans aucun dipôle macroscopique. Il n'est pas étonnant alors de trouver une équirépartition des populations entre les deux niveaux + et - (énergie $W_A \approx 0$ sur la figure V-4).

Remarques

On notera ici la très grande similitude entre le problème traité ici et celui de la superradiance limitée de deux systèmes à deux niveaux de forces d'oscillateurs différentes au chapitre IV C). Dans les deux cas l'énergie du système atomique : W_A ici et W_A au chapitre IV-C, ne dépend que de $\bar{\theta}$. La forme des potentiels est légèrement différentes. Au chapitre IV C, W_A résultait de la superposition de deux cosinus (cf équation IV-18) car il n'y avait que deux classes d'atomes. Ici par contre W_A résulte d'une intégrale (equ. V 52) faisant intervenir une somme infinie de cosinus et une infinité de classes de positions.

L'effet de superradiance limitée résulte ici de l'existence de classes de dipôles, liés à la positions des atomes dans les noeuds et ventres (paramètre ϕ). Les dipôles associés à chaque classe se battent alors à des vitesses différentes (V 47 et V 50 a) et se déphasent, pour finir (à $t = +\infty$), par interférer destructivement de façon complète.

On notera enfin que l'effet de superradiance limitée observé ici peut aussi être obtenu également en absence de cavité au voisinage du centre du milieu émetteur ($z \approx L/2$). Il résulte alors de la présence d'ondes stationnaires dues aux émissions vers l'avant et vers l'arrière. (cf appendice II A 3°).

4°) Allure des solutions

a) Le démarrage de l'évolution

Au démarrage de l'évolution l'équation (V 53 se linéarise et l'on

a :

$$\frac{d}{dt^2} \bar{\theta} + \frac{1}{2T_{\text{CAV}}} \frac{d}{dt} \bar{\theta} - \frac{1}{8 T_{\text{CAV}} \cdot T_{\text{MASER}}} \bar{\theta} = 0 \quad (\text{V } 59)$$

qui conduit à une croissance exponentielle en $\exp t/2\tau'_e$ mais cette fois τ'_e est donné par :

$$\tau'_e = \frac{2 T_{\text{CAV}}}{(\sqrt{1 + 2\alpha} - 1)} \quad (\text{V } 60a)$$

où $\alpha = T_{\text{CAV}}/T_{\text{MASER}}$

- Si $T_{\text{CAV}} \ll T_{\text{MASER}}$ ($\alpha \ll 1$) on a

$$\tau'_e \sim 2T_{\text{MASER}} \quad (\text{V } 61)$$

- Si $T_{\text{CAV}} \gg T_{\text{MASER}}$ ($\alpha \gg 1$) on a :

$$\tau'_e \sim \sqrt{2} \cdot T_{\text{CAV}} \cdot T_{\text{MASER}} \quad (\text{V } 62)$$

dans les deux cas le délai t_D est de l'ordre de :

$$t_D \sim \tau'_e \text{ Log } N \quad (\text{V } 63)$$

Il est à noter que le temps caractéristique de l'émission τ'_e dans le cas d'un milieu étendu, est différent de celui trouvé, pour un milieu de petite dimension (équation V.25).

b) Evolution aux temps très long

Si l'on considère $t \gg t_D$ la plus grande partie de l'énergie a été émise, et la particule se trouve au voisinage de l'une des positions d'équilibre stable F_i . On peut alors assimiler W_A à une parabole, comme nous l'avons fait au § A 3° b). Cette fois cependant le résultat dépend du point F_i et l'on a pour l'équation (V 53) :

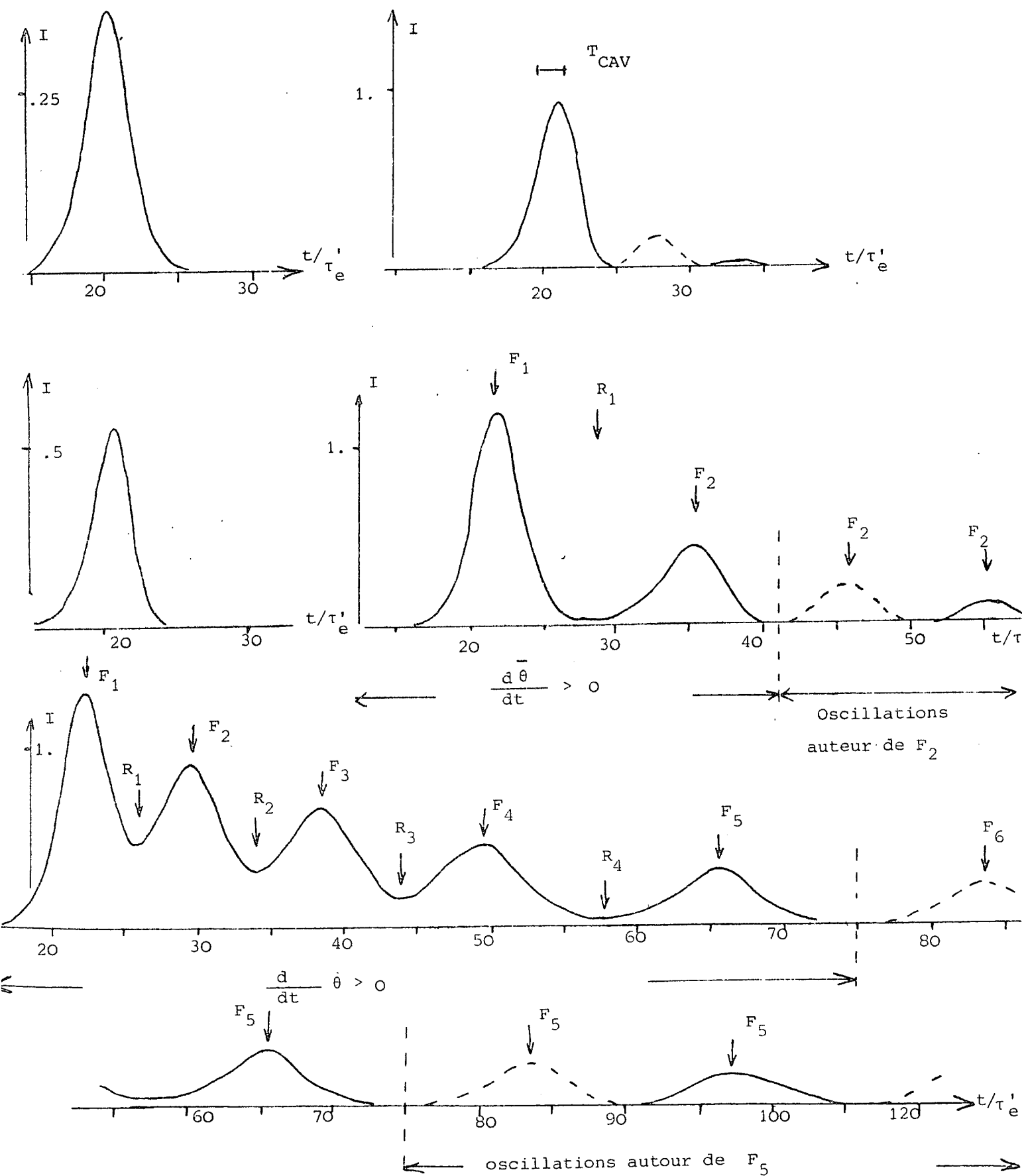


Figure V6 : Intensité I émise par superradiance maser dans le cas d'un milieu étendu (unité : $N\hbar\omega_0/\tau'_e$) avec $\alpha = .1$ (a), $\alpha = 1$ (b), $\alpha = 10$ (c), $\alpha = 100$ (d) et $\alpha = 1000$ (d).

$$\frac{d}{dt^2} \bar{\theta} + \frac{1}{2T_{\text{CAV}}} \frac{d}{dt} \bar{\theta} = \frac{\bar{\theta} - \bar{\theta}_i}{4T_{\text{MASER}} \cdot T_{\text{CAV}}} J_0(\bar{\theta}_i) \quad (\text{V } 64)$$

(on utilise ici le fait que $\frac{d}{d\bar{\theta}} J_1(\bar{\theta}) = +J_0(\bar{\theta})$) (V-64)

● Pour $\alpha < 0,62$, la particule termine son évolution en F_1 . Il n'y a pas d'oscillation et l'on a :

$$\theta_i - \theta \propto e^{-\Gamma t} \quad (\text{V-65})$$

où $\Gamma = \frac{1}{4 \cdot T_{\text{MASER}}} (1 - \sqrt{1 - 1,61 \alpha})$ (V-66)

(car $J_0(\bar{\theta}_i) = -0,40275$)

qui pour $\alpha \ll 1$ se réduit à $\Gamma \simeq \frac{1}{4 \cdot 96 \cdot T_{\text{CAV}}}$ (V 66b)

● Pour $\alpha > 0,62$, on observe des oscillations autour du point F_i atteint à $t = +\infty$ et l'on a

$$\bar{\theta} \propto e^{-\Gamma t} \sin(\Omega t + \phi) \quad (\text{V-67})$$

où $\Gamma = \frac{1}{4 \cdot T_{\text{CAV}}}$

et où $\Omega = \frac{1}{4T_{\text{CAV}}} \sqrt{4\alpha J_0(\bar{\theta}_i) - 1}$ (V-68)

qui pour $\alpha \gg 1$ se réduit à :

$$\Omega = \frac{|2 J_0(\bar{\theta}_i)|^{1/2}}{2 \tau'_e} \quad (\text{V-68c})$$

c) Allure des solutions en fonction de α

La figure (V 6) représente $I(t)$, en fonction de α pour $N = 10^8$ atomes. Comme dans le cas de la figure (V-3) au § A 3°, nous avons choisi τ_e comme unité de temps. Nous avons convenu de représenter sur la figure V-6 $I(t)$ en trait plein lorsque $e(\vec{x}_0)$ est positif et en pointillé lorsque $e(\vec{x}_0)$ est négatif.

En augmentant α on observe successivement les régimes suivants :

i) $\alpha < 0,62$

Il n'y a pas d'oscillation autour de la position d'équilibre stable F_1 , l'amortissement est sur critique. On observe un seul lobe d'émission. Dans le cas $\alpha \ll 1$, l'équation (V 53) peut être simplifié et l'on a :

$$\frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{2T_{\text{MASER}}} J_1(\theta) \quad (\text{V-69})$$

la solution est d'allure symétrique. La figure (V-6a) représente $I(t)$ dans ce cas pour $\alpha = 0.1$,

ii) $\alpha > 0,62$ et $\alpha \sim 1$ à 10 .

La condition d'amortissement sur critique n'est plus remplie et l'émission se fait sous forme de lobes successifs au temps long.. Si α est de l'ordre de un, seul le premier lobe est notable (figure V-6 b pour $\alpha = 1$) Les oscillations ne deviennent importantes que pour α de l'ordre de 10 (voir figure V-6 pour $\alpha = 10$ voir également § A 3°d . On notera que l'état final correspond à $\bar{\theta} = \bar{\theta}_1$ (point F_1 de la figure V-4) car la particule est trop fortement amortie pour atteindre le point d'équilibre instable R_1 .

iii) $\alpha \gg 1$

Dans ce cas l'état final ne correspond plus nécessairement au premier minimum $\bar{\theta}_1$ de J_0 , car la particule est capable d'atteindre et de dépasser le point R_1 de la figure (V-6).

On peut alors distinguer dans l'évolution deux périodes (voir figure V-6, d,e,f).

Dans un premier temps $\frac{d}{dt} \bar{\theta}$ est positif et la particule traverse les minimums et maximums successifs de $W_A(\bar{\theta})$ (F_1, F_2, \dots et R_1, R_2, \dots) On observe des modulations sur l'intensité rayonnée I qui ne correspondent pas à des changements de phase de $e(\vec{x}_0)$ (I ne s'annule pas) . On observe une

diminution de l'amplitude de ces modulations, au cours du temps. Cet effet s'explique par la diminution en $\frac{1}{\bar{\theta}_{\text{moyen}}}$ des modulations de $W_A(\bar{\theta})$ proportionnel à $J_0(\bar{\theta})$ (voir figure V-4) On observe également une diminution exponentielle en $e^{-t/T_{\text{CAV}}}$ du signal moyen. Au total aux temps long, les modulations l'emportent (l'exponentielle $\exp(-t/T_{\text{CAV}})$ décroît plus vite que la fonction en $\frac{1}{\bar{\theta}_{\text{moyen}}} \propto \tau'_e/t$) et I peut s'annuler. On observe un arrêt de la particule dans le potentiel W_A . C'est le début de la deuxième période.

Dans ce deuxième temps après que la particule se soit arrêtée (d'où I nul) elle se met à osciller autour de l'un des minimum F_i de $W_A(\theta)$. L'émission I se fait alors sous forme de lobes successifs. La phase de $e(\vec{x}_0)$ change d'un lobe, au lobe suivant (il y a changement de signe de $\frac{d}{dt} \theta$). Ces changements de signe apparaissent clairement sur la figure (V-6) car les parties correspondant à $e(\vec{x}_0)$ négatif sont en pointillé. On notera que la période de ces oscillations est de $4 \pi \tau'_e |J_0(\bar{\theta}_1)|^{-1/2}$ et que leur temps d'amortissement est $2T_{\text{CAV}}$ (le calcul est ici tout à fait similaire à celui fait au A 3°d). Ces oscillations avec changement de phase de $e(\vec{x}_0)$ correspondent aux "ringing cohérents" observés dans un milieu étendu à une dimension et aux oscillations observées en cavité pour un milieu de petite dimension (§ A 3°d). (*)

Remarques

i) Comme dans le cas de la figure (V-3) et pour les mêmes raisons le choix de τ'_e , comme unité de temps sur la figure (V-6), permet d'obtenir dans tous les cas des courbes avec des délais du même ordre $t_D \sim \tau'_e \log N = 18,6 \tau'_e$ et des maximums du même ordre $\sim N \frac{\hbar \omega}{\tau'_e} 0$. Bien entendu ce choix de τ'_e comme unité de temps ne permet de conserver l'aire des courbes de la figure (V-6).

ii) Si l'on ne tient pas compte des diverses oscillations qui s'amortissent en quelques dizaines de τ'_e , on peut distinguer suivant α deux types de régime.

Pour α petit l'évolution est similaire à l'évolution décrite par Dicke, en tenant compte bien sûr de l'effet de superradiance limité et

*) Il ne faut pas confondre ces oscillations cohérentes liées à la cavité avec les modulations liées à des effets de pompage que l'on observe en étudiant transitoirement le démarrage d'une oscillation maser.

l'on observe un pulse unique. Le delai augmente comme N^{-1} et le maximum d'émission comme N^2 . (Figure V-6 a).

Pour α grand au contraire, le pulse émis par les atomes est intégré par la cavité et l'on observe essentiellement une exponentielle décroissante en $e^{-t/T_{\text{CAV}}}$ (Figure V-6-d et e). Le délai est très court devant T_{CAV} et le maximum d'émission est proportionnel à N . Ce régime correspond à un régime d'oscillation laser "Q switché" dont le temps d'évolution est lié au temps caractéristique de la cavité.

D) Conclusion

Nous avons pu montrer au cours de ce chapitre, que l'évolution d'un système collectif, couplé à une cavité représente un cas idéal de superradiance entièrement calculable : (la simplification provenant du caractère monomode du couplage avec le champ), l'équation d'évolution se réduit en effet à l'équation d'une particule amortie dans un puit de potentiel (équations V-21 ou V-53).

L'allure des solutions que l'on obtient alors (figure V-3) et (V-6) dépend, de la dimension du milieu et des différents temps associés au problème. Rappelons brièvement l'effet de ces différents paramètres.

i) Dimension du milieu

- Si le milieu est étendu, il existe différentes classes d'atomes qui évoluent dans des champs différents et la superradiance en cavité est limitée .
- Si par contre le milieu est de petite dimension, tous les atomes voient le même champ et ils sont indiscernables vis à vis de l'émission. L'approximation de Dicke est valide et la superradiance est totale.

ii) Temps caractéristiques du problème T_{MASER} et T_{CAV}

- Si le temps caractéristique T_{MASER} d'évolution de la superradiance du système collectif en présence de ses images est plus long que le temps d'emprisonnement des photons dans la cavité :

$$T_{\text{MASER}} \gg T_{\text{CAV}}$$

l'amortissement de la particule est sur critique et l'émission se fait sous forme d'un seul lobe. L'intensité émise I est alors proportionnelle au carré du nombre d'atome N alors que le temps d'évolution τ_e (τ') et le délai t_D varient en N^{-1} :

$$t_D, \tau_e \propto N^{-1} \quad (V\ 70a)$$

$$I \propto N^2 \quad (V\ 70b)$$

Ce régime correspond à une superradiance en un seul morceau (la condition d'Arecchi Courtens (II V 11) est satisfaite).

• Si par contre

$$T_{\text{MASER}} \ll T_{\text{CAV}}$$

l'amortissement du système est très faible et l'intensité émise I oscille. Ces oscillations se font sur des périodes de l'ordre de τ_e (τ')

$$\tau_e \propto N^{-1/2} \quad (V\ 71a)$$

Comme l'énergie ne peut s'échapper de la cavité plus vite que T_{CAV} , le temps d'évolution global du système (en négligeant les oscillations rapides) se fait en T_{CAV} et l'on a :

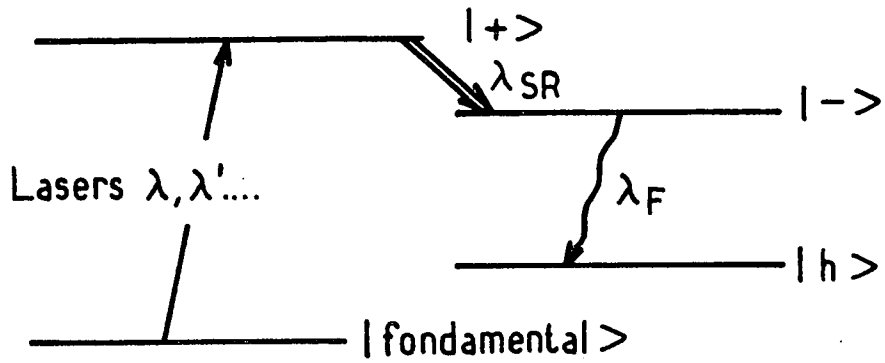
$$I \propto N \quad (V-71b)$$

Ce régime correspond à une superradiance par morceau pour laquelle la condition d'Arecchi Courtens (II V 11) est violée.

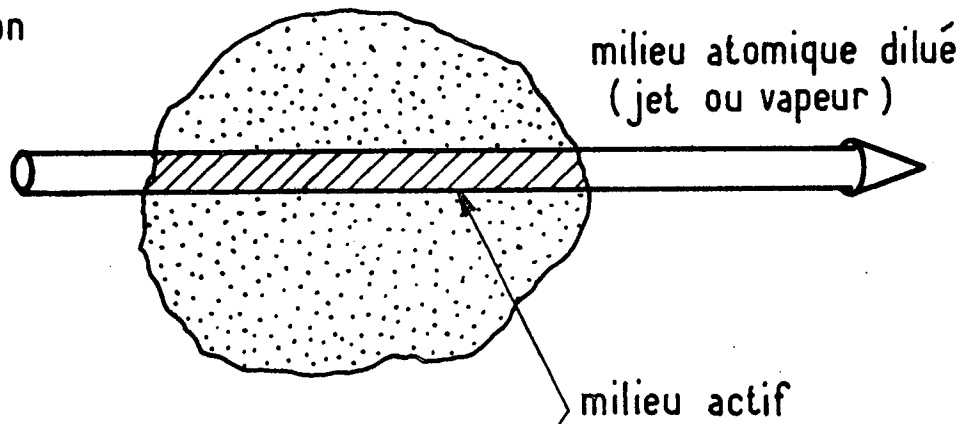
Dans le cas particulier, d'une superradiance en cavité de faible surtension ($T_{\text{CAV}} \ll T_{\text{MASER}}$), d'un système de volume petit, nous avons montré enfin que l'on se ramenait strictement au modèle de Dicke (equ. V-33), ce qui est très intéressant car il est possible de se placer expérimentalement dans ce cas (voir chapitre VIII § C 4°)

CHAPITRE VI

"MISE EN EVIDENCE DE LA SUPERRADIANCE DANS LE
PROCHE INFRAROUGE"



a) Excitation



b) Détection

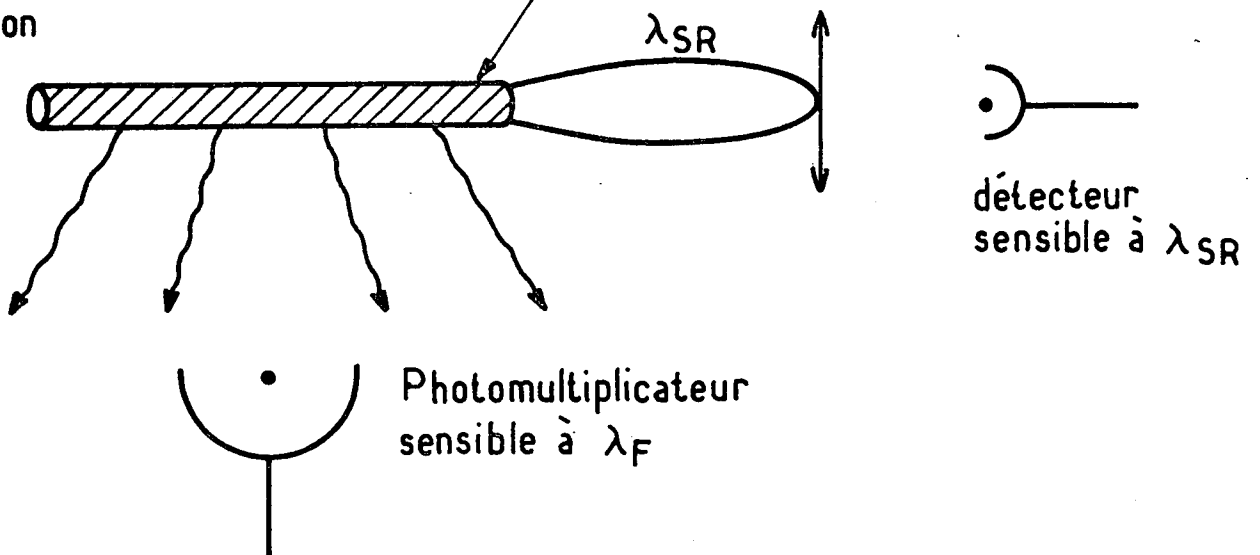


Fig. VI 1

MISE EN EVIDENCE DE LA SUPERRADIANCE DANS LE PROCHE INFRA ROUGE.

A. Introduction

Pour étudier l'émission superradiante d'un système atomique, il faut, d'une part, pouvoir créer :

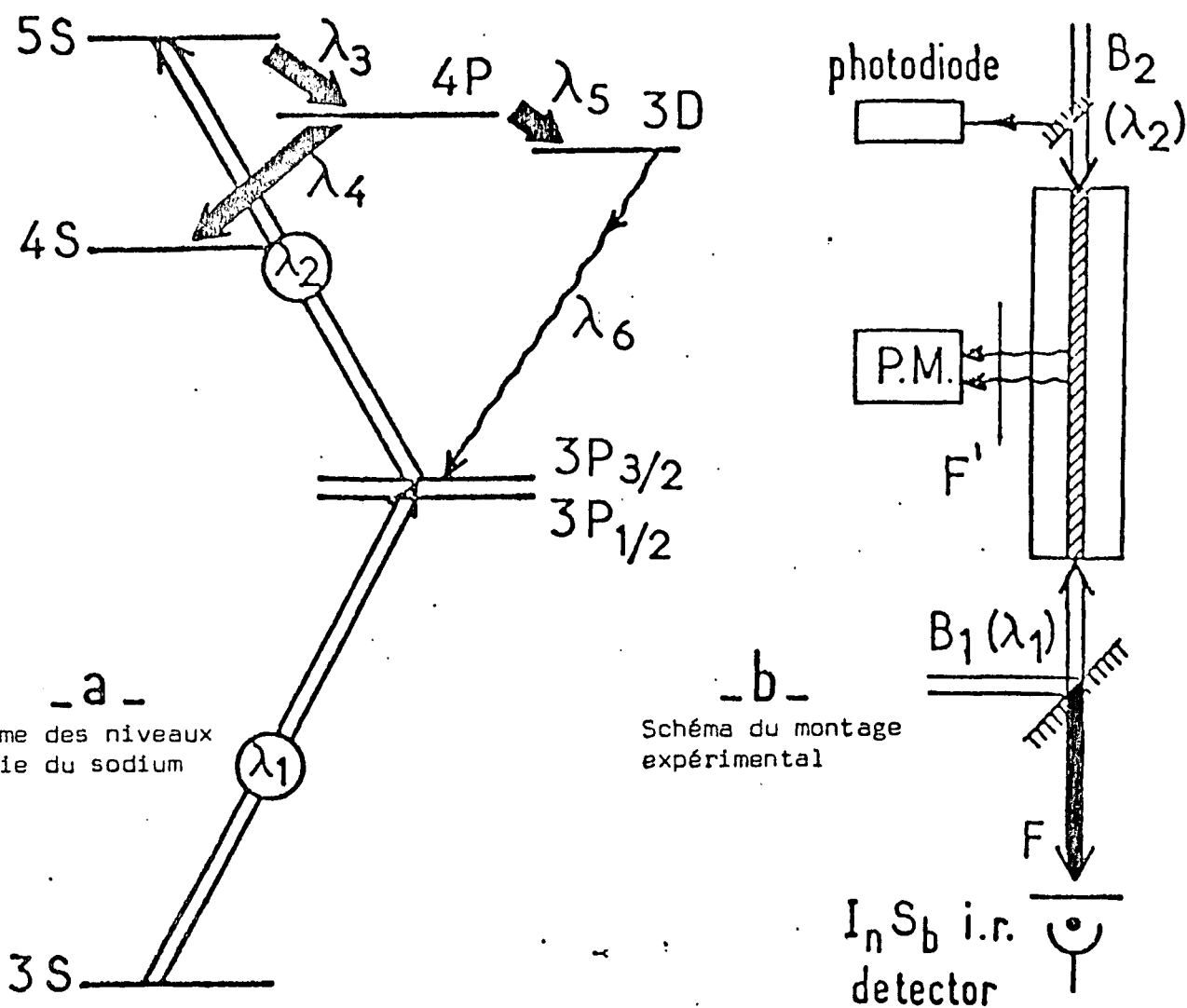
- une inversion de population suffisante sur une transition atomique permise (pour dépasser le seuil),
- en un temps suffisamment court devant le temps caractéristique d'évolution du système superradiant (et bien entendu a fortiori court devant les autres temps de relaxation du système et devant la durée de vie du niveau de départ de la transition superradiante),
- dans un volume de forme telle que l'émission coopérative puisse se bâtir facilement (par exemple milieu actif de forme cylindrique allongé).

D'autre part, il faut pouvoir détecter directement ou indirectement le rayonnement superradiant émis et étudier la dynamique de cette émission.

Ces conditions sont aujourd'hui facilement réalisables sur des transitions proches infra rouge ⁽³⁰⁾ ou même visibles ⁽⁶³⁾ en utilisant des pulses lasers accordables en fréquence, de quelques nanosecondes de durée (lasers à colorants pompés par laser à azote ou par laser à YAG). Le schéma de principe de l'expérience est présenté par la figure (VI-1).

Les atomes d'un jet ou d'une vapeur sont portés de l'état fondamental dans l'état excité + , à l'aide d'un (ou de plusieurs) pulses lasers (excitation optique directe ou en échelon : voir figure VI-1a). Comme les transitions vers les niveaux excités proches sont en général très permises (forces d'oscillation de l'ordre de 10^{-1} à 1), il est facile de saturer ces transitions et de porter un pourcentage notable d'atomes dans le niveau +. L'excitation se fait alors en un temps court (quelques nanosecondes) devant la durée de vie du niveau + (quelques dizaines à quelques centaines de nanosecondes) et la région active, (intersection des lasers et du milieu atomique dilué) est tout naturellement de forme cylindrique allongé (longueur L , section a^2). Il est alors facile de calculer le seuil de l'émission superradiante et de vérifier que ce seuil est atteint avec des densités d'atomes très faibles (10^{10} à 10^{12} atomes par cm^3).

Pour étudier la superradiance en elle même (voir figure VI-1b), on peut détecter directement le rayonnement superradiant en plaçant, dans l'axe, un détecteur sensible à la longueur d'onde λ_{SR} . Comme l'émission superradiante



Flèches en trait double : transitions de pompage $\lambda_1 = 0,5890 \mu$ et $\lambda_2 = 0,6160 \mu$
 Flèches en trait épais : transitions superradiantes $\lambda_3 = 3,41 \mu$, $\lambda_4 = 2,21 \mu$ et $\lambda_5 = 9,10 \mu$ (les transitions 5S-4P et 4P-4S sont détectées dans l'axe de l'excitation par la cellule photovoltaïque InSb).
 Flèches en trait ondulé : transition à $\lambda_6 = 0,8191 \mu$ détectée perpendiculairement par un photomultiplicateur.

FIGURE VI-2

est très directive., (elle correspond à une seule aire de cohérence si $\tilde{F} < 1$), il est possible de recueillir sur le détecteur pratiquement tous les photons émis dans l'une des directions axiales avant ou arrière, et l'on peut utiliser des détecteurs relativement peu sensibles (d'où la possibilité de détection dans le proche infra rouge en utilisant des détecteurs photovoltaïques). On peut également étudier l'évolution respective des populations des niveaux + et -, et en particulier celle du niveau - en analysant la fluorescence issue de ce niveau - vers un niveau couplé h. Bien entendu, ce signal est isotrope et cette détection indirecte peut se faire perpendiculairement à la direction axiale de l'émission. Il faut bien sûr utiliser un détecteur beaucoup plus sensible (photomultiplicateur), pour compenser les pertes d'angle solide de détection. Dans le cas de la détection directe, le signal observé correspond à l'intensité superradiante émise I, alors que dans le cas de la détection indirecte le signal (\propto à la population du niveau du bas) est plutôt relié à $R_3 = \sum_i r_{3i}$, ou à $\int_0^t dt' I(t')$.

Dans les deux cas, il est nécessaire d'utiliser un détecteur rapide ainsi qu'une électronique capable d'enregistrer toute l'information en un coup.

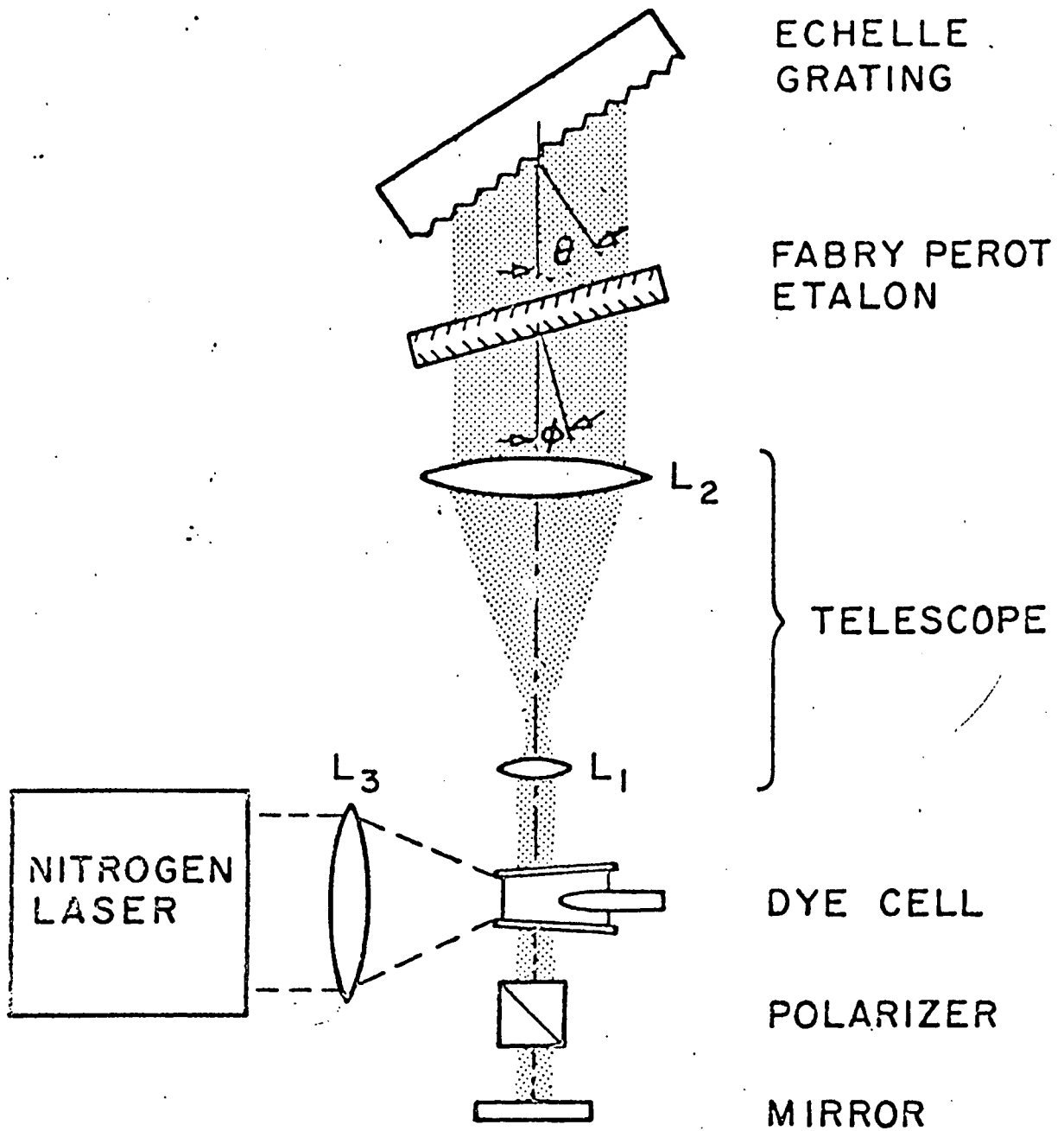
Le but de ce chapitre est de présenter la première expérience de mise en évidence de la superradiance proche infra rouge (§ C) et de décrire le montage expérimental utilisé (§ B). Les techniques expérimentales que nous décrivons ici en détail seront utilisées par la suite pour les autres expériences proches infra rouge (chapitre VII).

L'ensemble des résultats contenus dans ce chapitre a déjà été décrit dans la thèse de 3^e cycle de P. PILLET⁽⁵⁵⁾. Nous reprendrons ici certains éléments de cette thèse à laquelle le lecteur pourra se référer, s'il désire des informations complémentaires concernant ce travail.

B. Description du montage expérimental

1) Description schématique de l'expérience

Le principe de l'expérience est schématisé sur la figure VI-2. L'étude est faite sur une vapeur de Sodium et le niveau de départ de la transition superradiante est le niveau $5 S^{1/2}$. Les atomes sont portés dans ce niveau par excitation en échelon du niveau $3 S^{1/2}$ à $3 P^{3/2}$ par une impulsion du laser B_1 , puis, avant qu'ils n'aient eu le temps de retourner au fondamental par émission spontanée, du niveau $3 P^{3/2}$ à $5 S^{1/2}$ par une impulsion du laser B_2 , synchronisée



FIGUREVI-3: Schéma de principe du laser à colorant
(dans nos expériences de superradiance le
polariseur était placé en dehors de la cavité)

par rapport à la première de même direction et de sens opposé. On détecte l'émission de lumière superradiante dans l'axe d'excitation (détection directe). Pour cela, on envoie dans la cellule l'un des faisceaux laser à l'aide d'un miroir semi-transparent (transparent pour la longueur d'onde du pulse superradiant et réflecteur pour celles des lasers) et l'on place derrière ce miroir, dans l'axe de l'excitation, une cellule photovoltaïque In Sb. On intercale également entre le miroir et la cellule photovoltaïque un filtre F qui permet d'isoler les différentes transitions superradiant en cascade. Le signal reçu par la cellule photovoltaïque est ensuite analysé par une chaîne de détection rapide. On détecte également la lumière de fluorescence à angle droit issue des différents niveaux finaux possibles, la sélection du niveau choisé se faisant à l'aide d'un filtre F' (figure VI 2b)

2) L'excitation optique

La source optique est un élément important de l'expérience. Elle doit tout d'abord être assez intense pour exciter efficacement les atomes et surtout fournir des impulsions plus courtes que le temps de délai des pulses superradiants. Nous avons utilisé pour cela des lasers à colorants pulsés de grande largeur de bande. Ces lasers ont été décrits en détail dans ma thèse de 3^e cycle⁽⁵⁹⁾. Il s'agit, rappelons le, de lasers à colorant pompé par laser à azote de type "Hansch"⁽⁶⁰⁾ (voir figure VI-3) dans la version avec télescope (de grandissement 25) et sans étalon intracavité. Ces lasers à colorants sont pompés par un laser à azote modèle UV1000 de Moletron, dont on a séparé en deux le faisceau UV. On utilise comme colorants de la rhodamine 6G à 10^{-3} mole/l pour exciter la transition $3 S^{1/2} - 3 P^{3/2}$ à 5890 Å (jaune) et de la rhodamine B pour exciter la transition $3 P^{3/2} - 5 S^{1/2}$ à 6160 Å (rouge orangé).

Caractéristiques des pulses ainsi obtenus

A l'aide de tels lasers, nous avons obtenus des impulsions de 2 à 3 ns de durée. La mesure a été faite à l'aide d'une photodiode ultra rapide (I.T.L. type HSD 50 de 100 ps de temps de montée). Cette photodiode nous a permis également de mesurer la puissance crête émise qui est d'environ 10 Kwatts, ce qui est suffisant pour saturer les deux transitions aux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 . Ainsi environ le quart

des atomes du volume actif sont préparés dans l'état $5 S^{1/2}$. Enfin, la largeur spectrale (mesurée à l'aide d'un monochromateur Jobin-Yvon THR2 d'une résolution de 1 GHz environ) est de l'ordre de 15 GHz. Cette valeur correspond à la largeur

attendue en un passage pour un laser de type "Hänsch" avec télescope et sans étalon. L'ensemble du dispositif d'excitation est placé dans une cage de Faraday. Cette précaution est indispensable pour ne pas perturber complètement les signaux superradiants toujours très faibles, par le bruit électrique rayonné par le laser à azote.

3) Cellule de résonance

a) Forme et dimension de la cellule

Nous avons utilisé dans ces expériences deux types de cellule.

La première, de longueur $L = 140$ mm et de diamètre $d = 30$ mm, est en pyrex. La seconde, de longueur $L = 30$ mm et de diamètre $d = 30$ mm, est en verre de Corning 1720. Les deux faisceaux laser se propagent en sens inverse suivant l'axe de la cellule et excitent ainsi un échantillon d'atomes contenu dans un cylindre allongé de longueur L et de section environ 2 à 3 mm. Le nombre de FRESNEL correspondant vaut $\eta \approx 5$ pour la première cellule et $\eta \approx 20$ pour la seconde.

b) Température et pression du sodium

La connaissance de la température et de la pression de la vapeur de sodium est un élément important pour l'interprétation des résultats obtenus. En effet, il en dépend une connaissance précise de la densité d'atomes excités dans la cellule : à une variation de quelques degrés, il peut correspondre un facteur deux sur la densité.

Une estimation précise du nombre d'atomes excités exigeait de connaître et de stabiliser la température de la cellule à 2 ou 3 degrés près. A cette fin, la cellule est placée dans un four taillé dans un bloc de laiton qui permet de réaliser une bonne homogénéité de température ; la température du point froid est régulée à part et détermine la densité d'atomes de sodium dans la cellule. Un dispositif électronique stabilise la température à 2 ou 3 degrés. On maintient enfin les températures du queusot et du four peu différentes (en imposant cependant que celle du queusot soit toujours plus basse pour éviter de contaminer la cellule).

4) La détection

a) Les détecteurs

Nous avons utilisé, pour détecter les pulses lumineux superradiants émis dans l'axe d'excitation, une cellule photovoltaïque InSb (SAT) sensible dans le proche infrarouge et dont le temps de réponse est inférieur à la nanoseconde (~ 500 MHz). Pour séparer les différentes transitions, nous avons pla-

cé un filtre F devant cette cellule photovoltaïque. F est constitué :

- pour la transition 5S - 4P ($3,4 \mu$) par un filtre interférentiel ;
- pour la transition 5P - 4S ($2,2 \mu$) par une lame de germanium + un filtre Schott RG665 ;
- pour la transition 4P - 3D ($1,2 \mu$) par une cuve à eau d'épaisseur 1cm + un filtre Kodak C88 qui coupe l'émission 3D - 3P à $0,822\mu$.

Pour détecter la fluorescence émise perpendiculairement à l'axe d'excitation, nous avons utilisé un photomultiplicateur Hamamatsu R666, dont le temps de réponse est de l'ordre de $2,5 \text{ ns}$ ($\sim 100 \text{ MHz}$). Le filtre F' permet de choisir la transition sur laquelle cette fluorescence est observée. Nous étudierons en particulier les transitions 5S - 3P à $\lambda_2 = 0,6160 \mu$ et 3D - 3P à $\lambda_6 = 0,82 \mu$.

Enfin, nous avons utilisé une photodiode rapide (100 ps de temps de montée) HSD 50 pour détecter le pulse laser B_2 afin de fournir un signal de déclenchement permettant de déterminer avec précision l'origine des temps.

b) La chaîne de détection rapide

Pour enregistrer les signaux superradiants, nous avons utilisé un digitaliseur de transitoire rapide (Tecktronix R 7912). Il s'agit d'un oscilloscope rapide (500 MHz), dans lequel l'écran cathodique est remplacé par une cible constitué d'un réseau de 512×512 photodiodes, le tout couplé à une électronique permettant de mémoriser le numéro des diodes éclairées. Cet appareil permet de digitaliser en une seule fois l'ensemble d'une trace de 512 points avec une résolution de l'ordre de 9 bits (512 points). Cet appareil couplé à un moyenneur (l'interface avec le moyenneur ainsi que le moyenneur ont été réalisés à l'atelier d'électronique du laboratoire) avait été utilisé lors de ma thèse de 3^e cycle⁽⁵⁹⁾ pour enregistrer et moyennier des signaux de battements quantiques. Ici, comme les signaux superradiants fluctuent de façon importante, le moyenneur est utilisé le plus souvent pour enregistrer des signaux individuels ("moyennés sur un coup"). Ces signaux sont ensuite reproduits sur table traçante.

Pour étudier de façon précise la dynamique de l'évolution, le signal de déclenchement (laser B_2) est superposé au signal étudié, en profitant du fait que l'on peut utiliser sur le R 7912 un tiroir d'entrée à deux voies. Une ligne à retard (constitué par quelques mètres de câble supplémentaire sur l'une des voies) permet de bien séparer le déclenchement, du signal et d'éliminer toute incertitude liée à un mauvais déclenchement. La mesure précise du

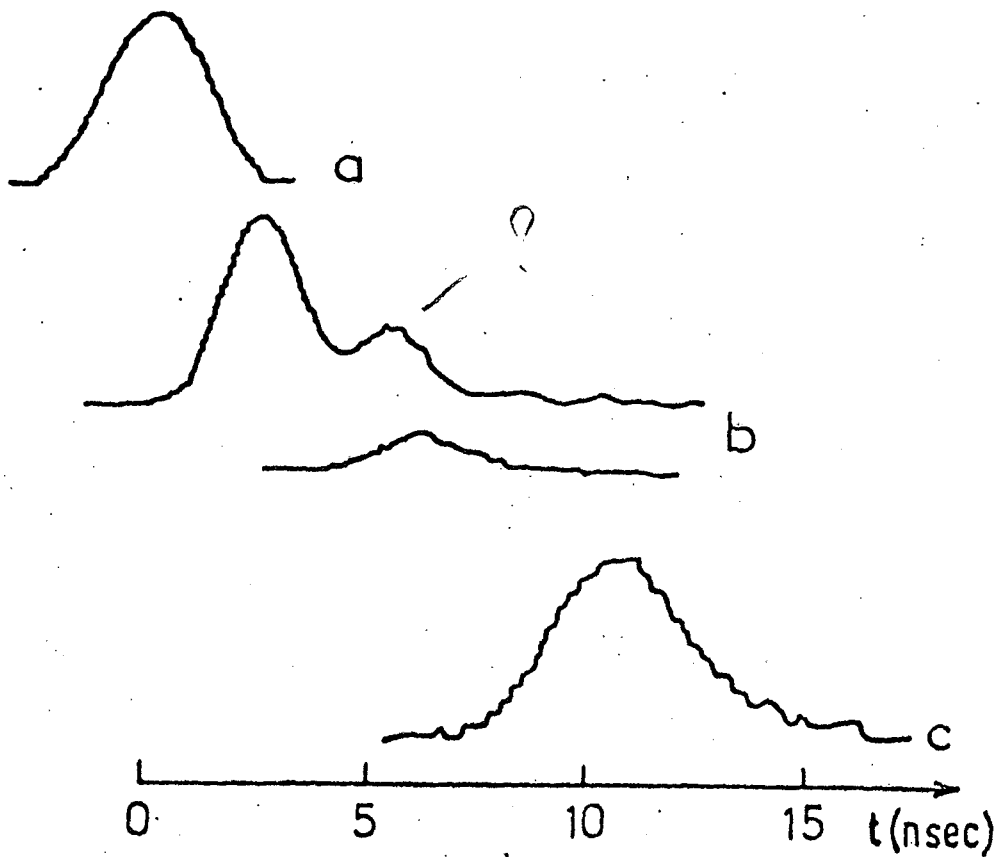


FIGURE VI-4

Variation temporelle des pulses superradiants détectée par la cellule photovoltaïque InSb.

Trace a : pulse excitateur B_2 ($0,6160 \mu$) donnant l'origine des temps

Trace b : pulse superradiant à $3,41 \mu$ pour deux taux d'excitation différents

Trace c : pulse superradiant à $2,21 \mu$ pour un même taux d'excitation que le second pulse superradiant à $3,41 \mu$.

retard introduit par le cable se fait en enregistrant au préalable à la place du signal superradiant le signal laser B_2 : il suffit pour cela que le filtre placé devant le détecteur (respectivement F ou F' suivant que l'on étudie le signal superradiant ou la fluorescence) laisse passer une partie du pulse laser à la longueur d'onde λ_2 .

Au total, il nous est possible d'enregistrer en même temps, pour une réalisation particulière de l'expérience, le signal superradiant et le signal laser B_2 , ce qui permet de déterminer parfaitement l'origine des temps.

C. Allure des signaux superradiants et résultats

En utilisant le montage expérimental décrit plus haut § B, nous avons pu observer, après préparation du niveau 5S, une émission superradiante sur un certain nombre de transition directe, ou en cascades à partir de ce niveau.

1) Détection directe de l'émission superradiante

A une pression de sodium comprise entre 10^{-6} et 10^{-5} torr ($n \approx 10$ atomes/cm³), nous avons détecté dans l'axe de l'excitation deux pulses infrarouges émis de façon très directive, longs de quelques nano secondes et dont les longueurs d'onde (mesurées par un réseau de 50,8 traits par mm et blazé à 18 μ) sont 3,41 μ et 2,21 μ , (ce qui correspond aux transitions 5S - 4P et 4P - 4S). Des filtres adéquats nous permettent de séparer ces deux transitions et de les étudier indépendamment. Le pulse à 3,41 μ est émis avec un retard de quelques nanosecondes par rapport au pulse laser B_2 . Le retard observé le plus long pour cette transition est de 7 ns (la trace étant prise en un seul coup et non pas moyennée). L'observation d'éventuels délais plus longs est rendue impossible car le pulse superradiant disparaît alors dans le bruit de détection. Le pulse à 2,21 μ est émis avec un retard de quelques nanosecondes par rapport au pulse à 3,41 μ (le retard observé le plus long par rapport au pulse laser B_2 étant de 12 ou 13 ns). La figure VI-4 montre le pulse laser excitateur B_2 (trace a) et des enregistrements typiques de pulses retardés à 3,41 μ (trace b) et 2,21 μ (trace c).

Nous avons étudié systématiquement les caractéristiques des pulses émis à 3,41 μ : variation de la hauteur et du retard moyen des pulses en fonction de la densité d'atomes excités initialement dans la cellule. Cette étude est rendue difficile du fait que la superradiance est un phénomène essentiellement fluctuant et instable, très sensible à de faibles fluctuations de puissance du laser de pompe ou à de faibles variations de la température. Nous avons fait deux sortes d'étude, à la fois différentes et complémentaires.

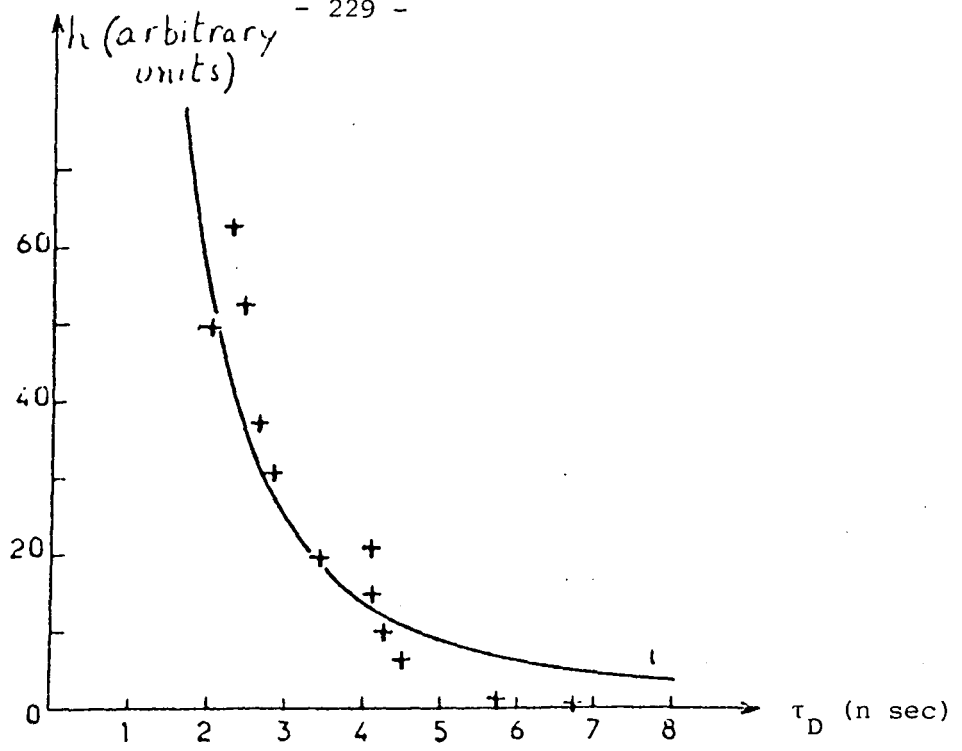


FIGURE VI-5: Variation de la hauteur h des pulses superradiants (à $3,41 \mu$) en fonction de leur délai τ_D . Les croix sont des valeurs expérimentales. La courbe tracée en trait plein correspond à une fonction telle que h soit proportionnel à l'inverse du carré du délai τ_D .

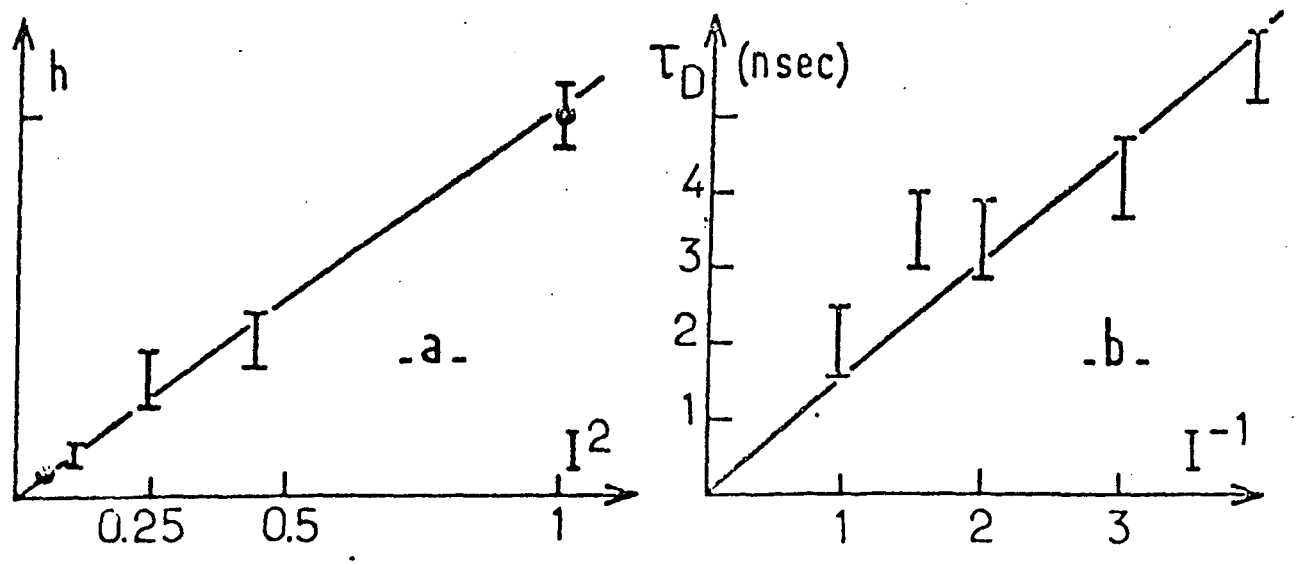


FIGURE VI-6: a) hauteur h du pulse superradiant à $3,41 \mu$ en fonction du carré I^2 de l'intensité du pulse excitateur B_2
b) délai τ_D du pulse superradiant à $3,41 \mu$ en fonction de l'inverse I^{-1} de l'intensité du pulse excitateur B_2

- a) Dans une première série d'expériences, nous avons enregistré une série de pulses avec les délais et les intensités distribués de façon aléatoires et nous avons porté sur une courbe l'intensité h en fonction du délai τ_D pour chaque pulse (voir figure VI-5). Nous avons ainsi une série de points expérimentaux qui montrent que h varie suivant une loi approximative τ_D^{-2} (courbe en trait plein). Ce résultat était attendu puisque l'on a vu que l'intensité des pulses devait être proportionnelle au carré de la densité d'atomes excités et le délai moyen à l'inverse de cette densité.

- b) Dans une seconde série d'expérience, nous avons choisi une pression de sodium d'environ 10^{-5} torr et désaturé le pompage du pulse laser B_2 avec des filtres correspondant à une atténuation connue. De cette manière, nous préparons une densité d'atomes excités proportionnelle à l'intensité I du pulse laser B_2 . Pour éliminer les fluctuations dues au pompage, nous moyennons quelques centaines de coups les pulses superradiants. Nous portons alors les valeurs moyennes de h en fonction de I^2 et de τ_D en fonction de I^{-1} (voir figure VI-6).

Nous vérifions les lois en n^2 et n^{-1} de variations respectives de h et τ_D .

Ces caractéristiques constituent une mise en évidence du caractère superradiant des pulses lumineux.

Nous avons enfin essayé d'observer la suite de l'émission en cascade, c'est-à-dire la transition 4S - 3P (voir figure VI-2). Nous avons pu l'observer à la longueur d'onde $1,15 \mu$, sans pouvoir mettre en évidence des délais à cette longueur d'onde, l'observation se faisant pour des densités de sodium très élevées, pour lesquelles les délais de superradiance sont plus courts que le temps de pompage.

2) Détection indirecte de l'émission superradiante

En étudiant la fluorescence émise à partir du niveau final de la transition superradiante, il est possible, comme nous l'avons vu, de mettre en évidence de manière indirecte l'émission superradiante. Pour le cas que nous considérons ici, cet effet a été étudié pour la transition superradiante 4P - 3D à $\lambda_5 = 9,10 \mu$ pour laquelle l'émission superradiante, ne peut être détectée directement, (le verre pyrex au corning 1720 de la cellule est opaque à cette longueur d'onde et de plus nous ne possédons pas de détecteur sensible à $9,1 \mu$).

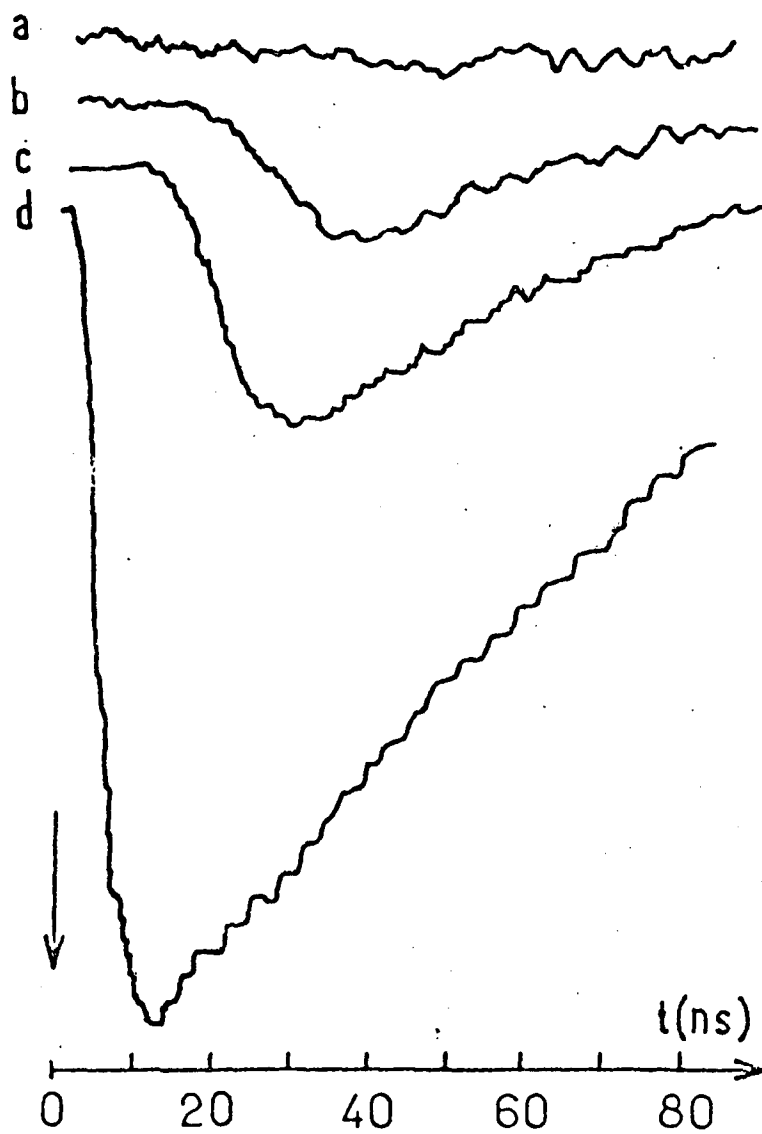


FIGURE VI-7

Variation en fonction du temps du signal de fluorescence à $0,82 \mu$.
Les courbes de a à d correspondent à un accroissement de l'intensité
du pompage pour une densité de sodium donnée. La flèche indique
l'instant du pompage et l'origine des temps.

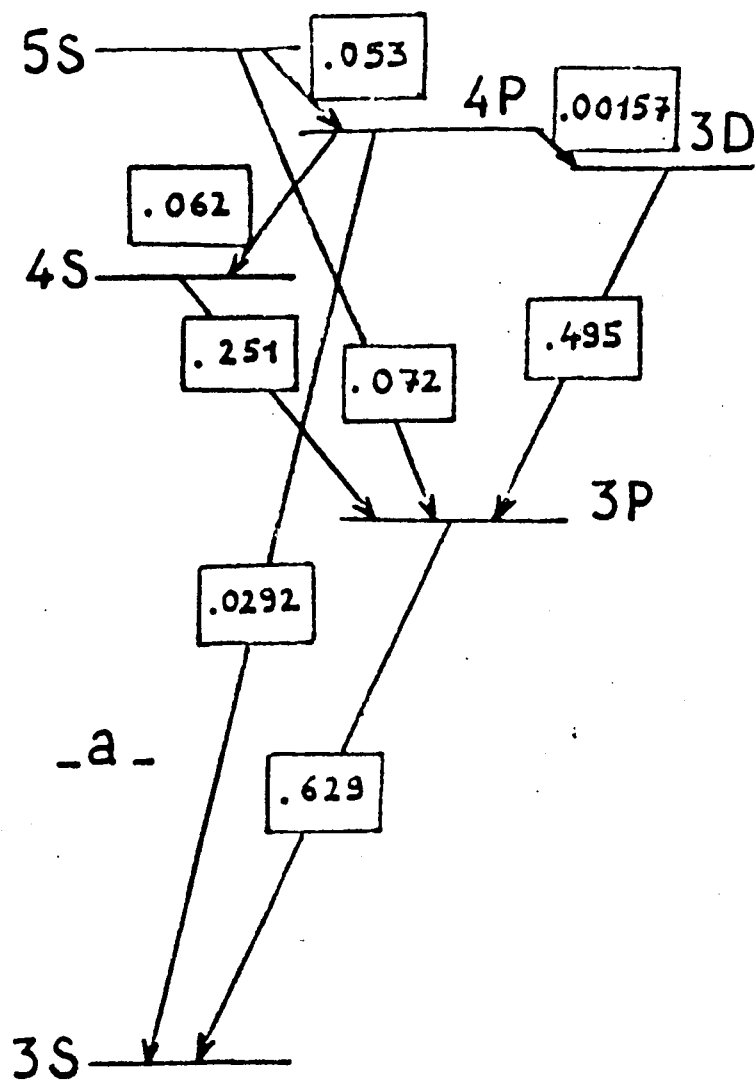
La figure VI-7 présente le signal de fluorescence sur la transition 3D - 3P à $\lambda_0 = 0,82 \mu$. Cette longueur d'onde est isolée en intercallant devant le photomultiplicateur un filtre Schott RG 665 (F'). La courbe de réponse du PM et du filtre font que seule la transition 3D - 3P à $0,82 \mu$ est enregistrée. Le signal de fluorescence observé permet de mesurer en fonction du temps la population du niveau 3D. La figure VI-7 montre le signal observé, en fonction du délai après l'excitation, pour des densités croissantes d'atomes excités à pression globale de sodium constante. La figure VI-7-a montre qu'au-dessous de $N_0 = 10^{10}$ atomes/cm³, le taux d'atomes transférés au niveau 3d est négligeable. Ceci se comprend si l'on consulte la figure VI-8 donnant le rapport de branchement des différentes transitions issues du niveau 5S. Par émission spontanée normale, moins de un pour cent des atomes transite par le niveau 3D. Lorsque N_0 augmente au-dessus de 10^{10} atomes /cm³, on observe (voir figure VI-7-b, c, d) un signal de fluorescence très important qui commence par croître en fonction du temps, passe par un maximum et diminue. Le délai du maximum de l'émission diminue lorsque N_0 augmente. Ainsi, au-dessus d'un certain seuil critique, on observe un transfert très important et de plus en plus rapide des atomes du niveau 5S vers le niveau 3D. Ce transfert est une manifestation indirecte de l'émission superradiante en cascade sur les transitions 5S - 4P et 4P - 3D.

Dans le cas où il y a transfert superradiant vers le niveau 3D, nous avons essayé de voir s'il existait un pulse superradiant émis à partir du niveau 3D, sur la transition 3D - 3P, à $0,82 \mu$ dans l'axe d'excitation. Nous avons pu observer une telle émission directive, mais là encore, comme pour le pulse à $1,15 \mu$, pour une densité trop grande pour permettre l'étude de délais éventuels.

Remarque : On notera, que le montage expérimental utilisé ici, peut également être utilisé pour faire des expériences de spectroscopie résolue en temps (battements quantiques, mesure de durée de vie). La superradiance peut apparaître alors comme un phénomène parasite. C'est d'ailleurs par ce biais que nous avons été amenés à étudier pour la première fois le phénomène de superradiance.

Au cours de ma thèse de troisième cycle ⁽⁵⁹⁾, j'ai étudié la structure fine des niveaux de Rydberg nD du Sodium en observant les battements quantiques sur la fluorescence réémise par le niveau nD vers le niveau 3P ⁽⁶¹⁾.

Pour améliorer le rapport signal/bruit des battements quantiques, nous avons tenté d'augmenter le nombre d'atomes excités, soit en augmentant la



- a -

- b -

Transition	Pourcentage d'atomes émettant sur cette transition
5S - 4P	42.4
5S - 3P	57.6
4P - 4S	28.35
4P - 3S	13.35
4P - 3D	0.7

FIGURE VI-2

a) Différentes valeurs des A_{ki} pour chaque transition $k \rightarrow i$
(unité : 10^8 sec^{-1})

b) Rapports de branchement

densité globale des atomes dans la cellule (en augmentant sa température), soit en excitant un plus grand nombre d'atomes à densité globale constante en utilisant des pulses lasers plus intenses. Dans les deux cas, on constate qu'au dessus d'une densité d'atomes excités de l'ordre de 10^9 atomes par cm^3 , le contraste des battements quantiques non seulement ne s'améliore pas, mais diminue et disparaît. En même temps, la forme exponentielle du signal, s'altère et des formes non exponentielles sont observées. L'interprétation la plus simple est qu'un processus de transfert du niveau de Rydberg nD initialement excité, à d'autres niveaux, se produit. Ces autres niveaux, énergétiquement très proches, émettent des longueurs d'onde voisines que le détecteur ne peut séparer de celle de la transition nD - 3P. Sur ces nouvelles longueurs d'onde, il n'y a évidemment pas de battements quantiques, la cohérence atomique ne se conservant pas au cours du transfert. Le caractère non exponentiel des signaux s'explique d'ailleurs par la repopulation, après l'instant $t = 0$, de nouveaux niveaux excités. Ces transferts de population peuvent avoir une origine soit collisionnelle, soit radiative. S'il s'agissait de collisions seules, les battements ne disparaîtraient que dans le cas d'une augmentation globale de pression et subsisteraient dans le cas d'une augmentation du taux de pompage à pression globale constante. Seuls des processus collectifs radiatifs expliquent la disparition des battements dans ce dernier cas. C'est pour tester la validité de cette hypothèse de transfert radiatif, donc superradiant, que nous avons été amenés à étudier les signaux de fluorescence obtenus après préparation du niveau nD.

De manière très similaire GOUNAND et al ont pu mettre en évidence des transferts superradiants entre niveaux de Rydberg⁽¹⁰⁾ en étudiant les sections efficaces de collision et les durées de vie de ces niveaux.

3) Interprétation des résultats et ordres de grandeurs

Nous avons reporté sur le tableau VI-1 la valeur des différents paramètres caractérisant l'émission superradiante pouvant être observée après avoir préparé le niveau 5S. Nous indiquons dans ce tableau le temps caractéristique T_2^* , le temps de superradiance T_{SR} correspondant à une densité typique de 10^{10} atomes/ cm^3 , et la densité seuil de superradiance pour chacune des transitions concernées. Nous constatons que les ordres de grandeurs des seuils obtenus sont compatibles avec les densités évaluées expérimentalement (10^{10} à 10^{11} atomes excités/ cm^3).

Comme les temps de superradiance 5S - 4P et 4P - 4S sont voisins, on observe le plus souvent, lorsque le seuil sur la première transition est dépassé, une émission en cascade vers 4S. Cette émission "vide" par ailleurs le niveau 4P et la superradiance sur l'autre transition possible à partir de

T A B L E A U VI-1

Transition	λ (en μ)	T_2^* (en ns)	T_{SR} (en ns)	n_{seuil} (atomes/cm ³)
5S-4P _{3/2} } 5S-4P _{1/2} }	3,41	0,56	0,13 0,27	3.10 ⁹ 5.10 ⁹
4P-4S	2,21	0,36	0,17	5.10 ⁹
4P-3D _{5/2} } 4P-3D _{3/2} }	9,10	1,53	0,77 1.13	5.10 ⁹ 7.10 ¹⁰
4P-3P _{1/2}	1,14	0,2	0,53	3.10 ¹⁰
3D-3P _{1/2}	0,82	0,13	0,53	4.10 ¹⁰
5S-3P _{1/2}	0,615	0,1	6,66	6.10 ¹¹

Différents paramètres des transitions superradiantes possibles à partir du niveau excité 5S.

- T_2^* temps de déphasage Doppler pour la transition
- T_{SR} , temps caractéristique de l'émission superradiante, est donné pour une densité de 10^{10} atomes/cm³ et une longueur de la cellule $L = 14$ cm
- n_{seuil} est la densité du seuil de superradiance pour la transition tel que $T_{SR} \sim T_2^*$

4P, la transition 4P - 3D, ne peut se bâtir. En fait ce résultat n'est valide que partiellement, car la superradiance n'est en général pas totale mais limitée. On peut s'attendre alors à observer une émission superradiante sur la transition 4P - 3D et nous avons pu mettre en évidence le transfert de population correspondant en étudiant la fluorescence de 3D (§2). En fait lors de cette série d'expériences préliminaires, les délais des pulses superradiants sur les transitions 5S - 4P ou 4P - 4S sont très courts (quelques nanosecondes). Si l'on augmente légèrement le nombre d'atomes, les pulses superradiants sur ces deux premières transitions se superposent au pulse laser de pompe B₂. Les effets de pompage deviennent alors prépondérants et l'on s'attend à observer une égalisation des populations niveaux couplés par les rayonnements laser et superradiants. La population restante après les pulses superradiants 5S - 4P et 4P - 4S dans le niveau 4P est alors importante et l'on peut observer un transfert superradiant notable vers 3D. Ces effets de pompage ont été étudiés en détails dans la thèse de P. Pillet⁽⁵⁵⁾ et le lecteur pourra s'y référer.

Pour terminer remarquons sur le tableau VI-1, que les seuils de transitions superradiants vers 3P^{3/2} sont beaucoup plus élevés (10¹⁰ à 10¹¹ atomes/cm³), ce qui est en bon accord avec l'expérience et correspondent à des temps de superradiance $T_{SR} \sim T_2^*$, donc des délais $t_D \sim 30 T_{SR}$ beaucoup plus courts. On comprend alors pourquoi, il n'a pas été possible de mettre en évidence une émission superradiante avec un délai notable sur ces dernières transitions.

D. Conclusion

Nous avons vu au cours de ce chapitre qu'il était extrêmement simple de mettre en évidence l'effet de superradiance sur des transitions entre niveaux peu excités. Cet effet apparaît d'ailleurs bien souvent comme un effet parasite lors d'une expérience de spectroscopie résolue en temps⁽⁵⁹⁾ (notons d'ailleurs que dans ce cas, l'effet est encore plus important sur des niveaux très excités : voir remarque au § C-2°⁽¹⁰⁾). L'étude de cet effet nous a permis de retrouver les propriétés attendues : temps d'évolution de l'ordre de T_{SR} , délai t_D proportionnel à N^{-1} . Cette expérience constitue néanmoins une expérience préliminaire dans la mesure où la dynamique des délais possibles est relativement faible (délai maximum 7 ns alors que la durée du pulse exciteur est de 3 ns et que la durée de vie du niveau est de 80 ns). Nous verrons au chapitre suivant (chapitre VII) qu'en améliorant le rapport signal - bruit, il sera possible d'observer des délais plus longs (~ 30 ns). Des effets nouveaux liés à la structure des niveaux intervenant dans l'émission superradiante apparaîtront alors.

CHAPITRE VII

" EXPERIENCE DE BATTEMENT DE SUPERRADIANCE ENTRE ATOMES
DE CLASSES DE VITESSES DIFFERENTES "

EXPERIENCE DE BATTEMENT DE SUPERRADIANCE ENTRE ATOMES DE CLASSE DE VITESSES DIFFERENTES.

A. Introduction

Après avoir mis en évidence le phénomène de superradiance sur une vapeur atomique de sodium nous avons cherché à étendre l'étude en améliorant le rapport signal/bruit, afin d'augmenter la dynamique des délais observables.

En utilisant des amplificateurs faible bruit pour amplifier les très faibles signaux issus du détecteur infrarouge (In S_p) et en étudiant la superradiance aux mêmes longueurs d'onde (3μ), d'atomes plus lourd (Césium) pour lesquels le temps de déphasage Doppler est plus long, il nous a été possible d'observer en un coup la superradiance avec des délais beaucoup plus long allant jusqu'à 30 ou 40ns (au lieu de 7ns au chapitre précédent).

Avec de tels délais, la structure des niveaux peut devenir importante et des effets de battements peuvent être observés. Ces effets de battements, qui ont été mis en évidence pour la première fois par Gibbs et Vreheh⁽⁷⁾ sont très différents, comme nous l'avons vu au chapitre III, des battements lumineux observés sur la lumière de fluorescence (battements quantiques). Alors que ces derniers font intervenir des interférences intra-atomiques (entre amplitude de probabilités associés à un seul atome), les battements de superradiance impliquent des interférences entre des champs émis par des atomes différents. Pour vérifier, ce dernier point nous avons cherché à mettre en évidence des effets de battements entre atomes physiquement différents (atomes appartenant à des classes de vitesses différentes). L'existence de ces battements prouve alors le caractère classique des battements de superradiance.

Dans un premier temps (§ B), nous décrivons le principe de l'expérience de battements de superradiance entre atomes appartenant à des classes de vitesses différentes. Nous décrivons ensuite le montage expérimental utilisé (§ C) et présentons les résultats (§ D).

B. Principe de l'expérience de battements entre classes de vitesses :

Indiquons tout d'abord, comment généraliser au Césium les expériences de superradiance proche infra-rouge décrites au chapitre précédent.

La figure VII 1 présente le schéma des niveaux du Césium. Un pulse laser à $\lambda_L = 4594 \text{ \AA}$ porte ici les atomes de Césium du niveau fondamental $7S_{1/2}$ au niveau de résonance $7P_{1/2}$ et crée par là même une inversion de population totale sur la transition $7P_{1/2} - 7S_{1/2}$. Si le nombre d'atomes est suffisant, on observe, au bout d'un temps t_D , une émission superradiante axiale sur la transition $7P_{1/2} - 7S_{1/2}$ (que nous appellerons transition superradiante) à $\lambda_{SR} = 3,095 \mu$.

Comme nous l'avons indiqué le délai t_D peut être ici relativement long ($\sim 30 \text{ ns}$) et la structure des niveaux bordant la transition superradiante peut jouer un rôle important. Il s'agit ici de structures hyperfines ; 400 MHz pour le niveau $7P_{1/2}$; 2175 MHz pour $7S_{1/2}$. On notera immédiatement que cette dernière structure est très grande. La superradiance se batit donc de manière indépendante sur les transitions allant de $7P_{1/2}$ vers les deux sous-niveaux hyperfins $F=3$ et $F=4$ de $7S_{1/2}$. Il doit donc se produire des battements à la fréquence correspondant à la structure de $7S_{1/2}$ (2175 GHz). Comme ces battements sont trop rapides pour être détectés (la fréquence de coupure de nos détecteurs est 400 MHz), tout se passe comme si la structure hyperfine de $7S_{1/2}$ pouvait être négligée (on doit alors sommer simplement les intensités émises vers les deux sous-niveaux $F=3$ et 4 de $7S_{1/2}$). C'est la raison pour laquelle la structure de $7S_{1/2}$ n'apparaît pas sur la figure VII 1. Par la suite nous raisonnerons comme si ce niveau ne possédait pas de structure et nous le noterons f.

L'allure du signal superradiant observé dépend alors essentiellement de la largeur spectrale du laser excitateur à la longueur d'onde λ_L .

i) Excitation en raie large

Si la largeur spectrale du laser de pompe à λ_L est grande

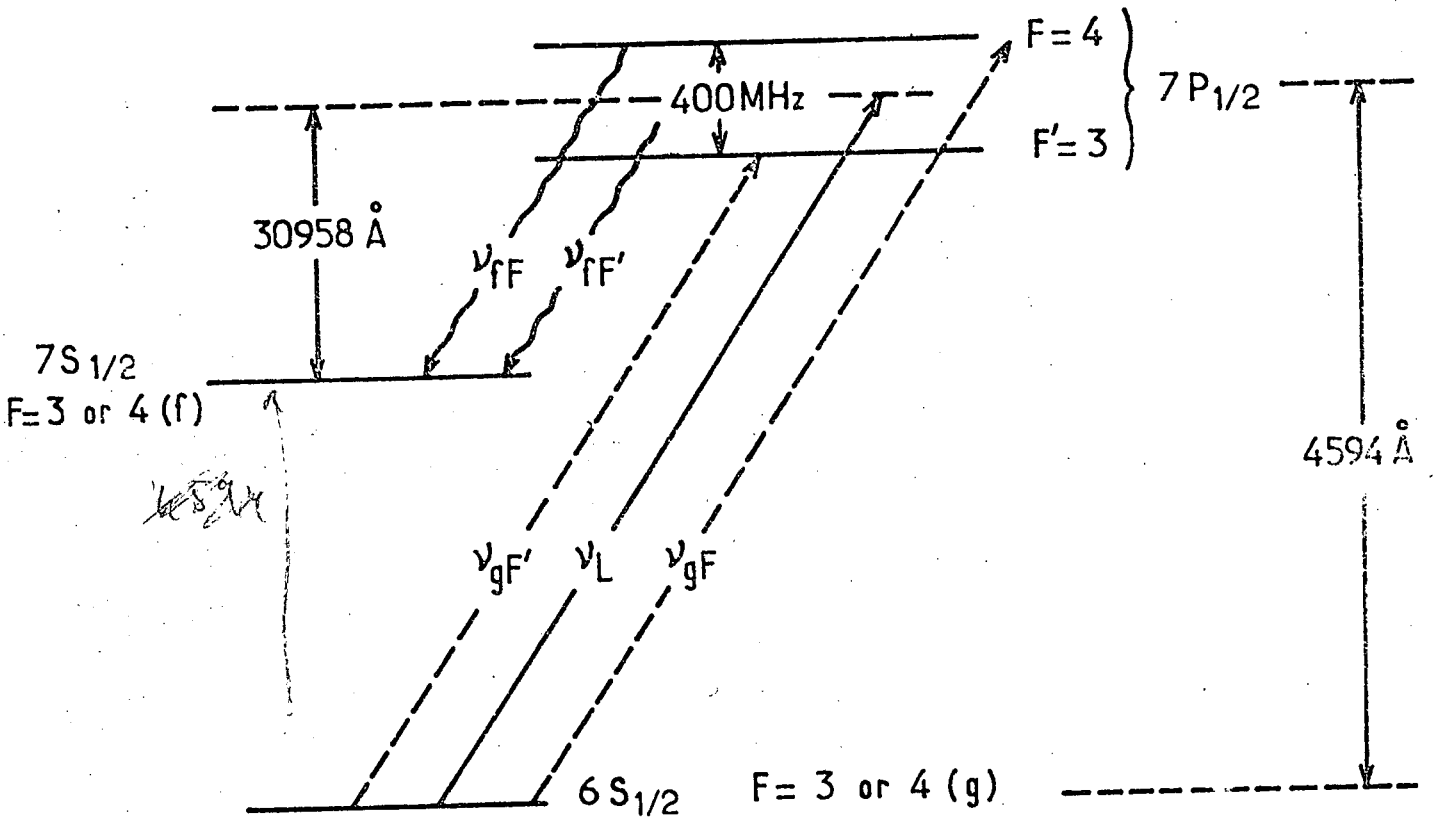
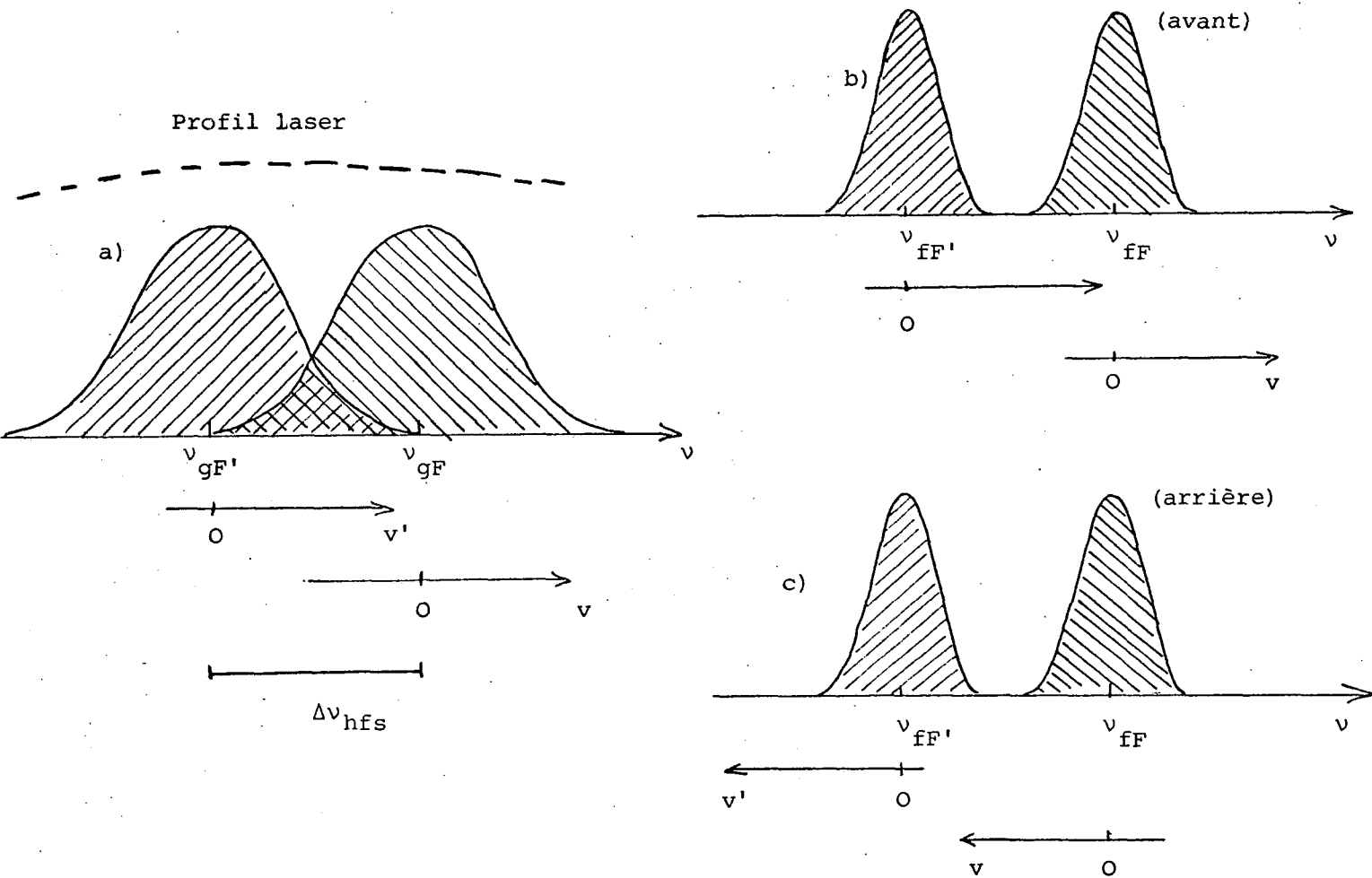


Figure VII-1 : Schéma des niveaux du Césium



Processus d'excitation

(Transition $6S_{1/2} - 7P_{1/2}$ noté ici
g - F ou P')

Processus d'émission superradiante

(Transition $7P_{1/2} - 7S_{1/2}$ noté ici
F ou F' - f)

Figure VII -2 : Profil Doppler, dans le cas d'une excitation en raie large , des transitions correspondant aux processus
- d'absorption (a)
- d'émission superradiante vers l'avant (b)
- d'émission superradiante vers l'arrière (c)

L'axe des abscisses représente à la fois la fréquence et la composante v (ou v') de la vitesse suivant l'axe Oz . Les parties hachurées représentent les atomes participant aux différents processus.

devant la structure Δv_{hfs} du niveau $7P_{1/2}$, les deux sous niveaux hyperfins $F=3$ et $F=4$ de $7P_{1/2}$ sont peuplés, et l'on peut observer des battements à Δv_{hfs} sur le signal de superradiance. Ces battements correspondent aux interférences entre les champs classiques émis sur les transitions $F \rightarrow f$ et $F' \rightarrow f$ ($F = (7P_{1/2}, F=4)$, $F' = (7P_{1/2}, F'=3)$ voir figure VII -1).

Pour faire un calcul plus rigoureux de cet effet, il faut tenir compte de l'élargissement Doppler des différentes transitions intervenant dans le problème (largeur Doppler ~ 500 MHz).

La Figure VII 2a représente le profil Doppler de la transition d'excitation $f \rightarrow 7P_{1/2}$ à λ_L . On voit apparaître dans ce spectre deux composantes correspondant aux deux transitions $6S_{1/2} - 7P_{1/2}$; $F'=3$ et $F=4$. En fait le niveau fondamental $6S_{1/2}$ possède également une structure hyperfine et l'on devrait présenter sur la figure VII 2 quatre composantes. Comme cependant cette structure du fondamental $6S_{1/2}$ est grande : 9,193 GHz (*), nous supposons qu'elle est résolue par le laser excitateur (ce qui est réalisé dans nos expériences), et que seul l'un des deux sous-niveaux hyperfins de $6S_{1/2}$ que nous noterons g , intervient dans le problème. L'excitation laser étant large (courbe pointillée), la totalité des deux profils Doppler participe au processus d'excitation (partie hachurée de la figure VII 2a). On notera que l'axe des abscisses représente à la fois la fréquence ν de la transition et la composante longitudinale de la vitesse de chaque atome. Ces deux quantités sont en effet reliées par :

$$\nu = \nu_{gF'} + k_L v' \quad \text{ou} \quad \nu_{gF} + k_L v \quad (\text{VII-1})$$

$$\text{où } k_L = \frac{2\pi}{\lambda_L}$$

*) par définition de la seconde .

Nous avons également représenté sur la figure VII 2b le profil Doppler de la transition superradiante elle-même. Bien entendu l'effet Doppler est moins grand et la structure de $7P_{1/2}$ est résolue (les deux composantes du spectre sont bien résolues et correspondent à $v \approx v_{F'g}$ et $v \approx v_{Fg}$). Comme l'émission superradiante fait apparaître toutes les fréquences associées aux atomes émetteurs, il existe une infinité de fréquence de battements possibles. Tous ces battements interfèrent, et il en résulte un battement global, dont la fréquence est voisine de la fréquence atomique Δv_{hfs} . A cause de la dispersion des fréquences qui lui donnent naissance, ce battement est amorti. Le temps caractéristique de cet amortissement est au plus de l'ordre de l'inverse de la largeur des profils Doppler de la Figure VII 2b et c. Cet amortissement des battements, correspond en fait à l'amortissement de l'émission superradiante elle-même, et la condition qui li le temps d'amortissement des battements, à la largeur du profil Doppler correspond à la condition de seuil

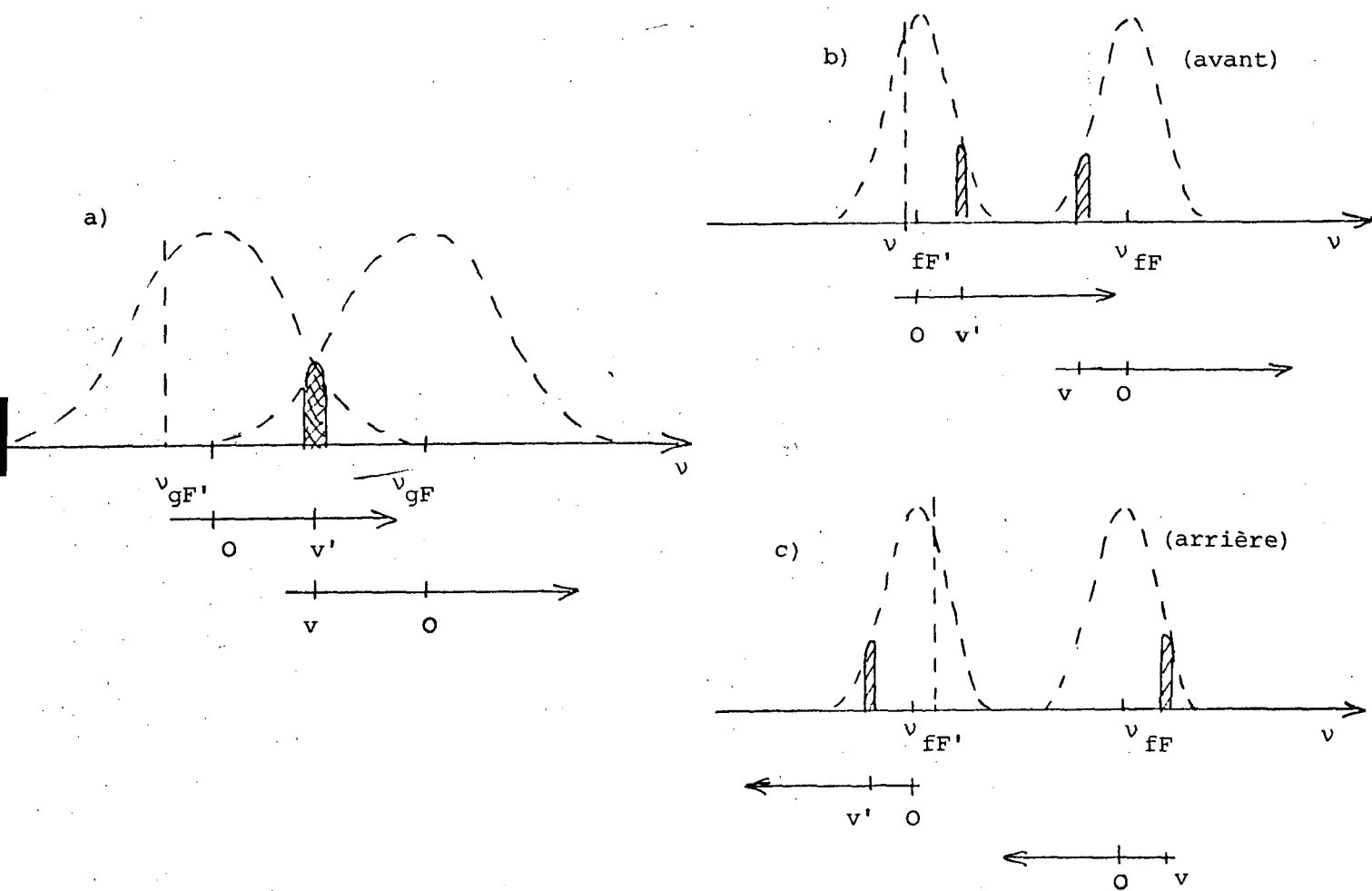
$$T_{SR} < T_2^* \quad (\text{VII -2})$$

Au total, on observe, après excitation en raie large, des battements amortis à la fréquence atomique Δv_{hfs} (la figure VII 2b représente alors en quelque sorte le spectre de fréquence du pulse superradiant émis).

ii) Excitation en raie étroite :

Si la largeur spectrale du laser de pompe à λ_L est faible devant la structure Δv_{hfs} du niveau $7P_{1/2}$, il n'est pas possible en négligeant l'effet Doppler de peupler à la fois les deux sous-niveaux hyperfins $F'=3$ et $F=4$ de $7P_{1/2}$, et donc d'observer des battements.

Si l'on tient compte de l'effet Doppler, (voir figure VII-3a); on excite dans la plupart des cas un seul des sous-niveaux de $7P_{1/2}$ (voir Figure VII trait vertical pointillé). Ce n'est que pour certaine valeur très particulière de la fréquence laser ν_L (voir figure VII 3a partie hachurée, que l'excitation des deux sous-niveaux se fait avec des poids comparables. Nous verrons que l'on peut observer dans ce cas des battements dans l'émission superradiante. On notera néanmoins, que même dans ce cas, aucune cohérence



Processus d'excitation :

(transition $6S_{1/2} - 7P_{1/2}$ notées ici F ou F')

Processus d'émission superradiante

(transition $7P_{1/2} - 7S_{1/2}$ notée ici

F ou F' \rightarrow f)

Figure VII-3 Profils Doppler des différents processus dans le cas d'une excitation en raie étroite (voir légende de la figure VIII-2)

ne peut être créée entre les niveaux F et F'. En effet les atomes préparés dans les sous niveaux F et F' appartiennent à des classes de vitesse v et v' différentes, ou v et v' obéissent à :

$$v_L = v_{gF} + k_L v \quad (\text{VII-3a})$$

$$v_L = v_{gF'} + k_L v' \quad (\text{VII-3b})$$

Étudions maintenant l'émission superradiante et considérons que les nombres d'atomes préparés dans chaque sous-niveaux F et F' sont du même ordre (figure VII 3a partie hachurée) . Nous avons représenté le profil Doppler de la transition superradiante

- dans le cas où l'émission a lieu vers l'avant sur la figure VII 3b (émission dans la même direction que le laser de pompe ; vecteur d'onde de l'émission \vec{k}_{SR} défini par :

$$\vec{k}_{SR} = \vec{k}_L \cdot \left(1 - \frac{v_{SR}}{v_L} \right)$$

- et dans le cas où l'émission a lieu vers l'arrière (vecteur d'onde $-\vec{k}_{SR}$) sur la figure VII 3c .

Dans les deux cas : (avant et arrière) , deux fréquences sont susceptibles d' être réémises :

$$\text{Vers l'avant : } v_{fF} + k_{SR} v \quad (\text{atomes de vitesse } v) \quad (\text{VII-5a})$$

$$\text{et } v_{fF'} + k_{SR} v' \quad (\text{atomes de vitesse } v') \quad (\text{VII-5b})$$

Vers l'arrière :

$$v_{fF} - k_{SR} v \quad (\text{atomes de vitesse } v) \quad (\text{VII-5c})$$

$$\text{et } v_{fF'} - k_{SR} v' \quad (\text{atomes de vitesse } v') \quad (\text{VII-5d})$$

et les battements observés vers l'avant et l'arrière , se font aux fréquences

$$\text{(vers l'avant)} \quad v_{\text{avant}} = \Delta v_{\text{hfs}} \left(1 - \frac{k_{\text{SR}}}{k_{\text{L}}} \right) = 341 \text{ MHz} \quad \text{(VII-6a)}$$

$$\text{(vers l'arrière)} \quad v_{\text{arrière}} = \Delta v_{\text{hfs}} \left(1 + \frac{k_{\text{SR}}}{k_{\text{L}}} \right) = 459 \text{ MHz} \quad \text{(VII-6b)}$$

Au total, si l'on est capable de disposer d'une source laser de pompe suffisamment monochromatique pour n'exciter qu'une seule classe de vitesse dans chaque sous niveau hyperfin F et F', on peut s'attendre à observer, si la fréquence du laser est judicieusement choisie, des battements de superradiance entre atomes appartenant à des classes de vitesses différentes. Ces battements, se traduisent par des modulations dans le signal de superradiance, dont la fréquence est différente, suivant que la superradiance a lieu vers l'avant ($v_{\text{Avant}} \approx 340 \text{ MHz}$), ou vers l'arrière ($v_{\text{Arrière}} \approx 440 \text{ MHz}$). Cet effet est très facile à caractériser car si la profondeur de modulation des battements dépend de la fréquence du laser de pompe ν_{L} (elle est quasi nulle lorsqu'un seul sous niveau, par exemple F est excité : traits pointillés sur la figure VII-3), leur fréquence ν_{Avant} ou $\nu_{\text{Arrière}}$ n'en dépend pas au 1er ordre (cf VII-6).

C) Le montage expérimental

Le montage expérimental utilisé pour réaliser l'expérience de battements de superradiance entre classe d'atomes de vitesses différentes est présenté sur la figure VII-4.

On utilise un laser à colorant pompé par laser à azote pour préparer un pinceau d'atomes de forme cylindrique allongé. Ces atomes réémettent (dans l'axe du cylindre) un pulse superradiant. Ce pulse est alors détecté par un détecteur infrarouge (In Sb) et enregistré au coup par coup. Comme on retrouve ici les mêmes éléments : laser, cellule de résonance, détecteur infrarouge, électronique de détection, que dans le cas de l'expérience de mise en évidence de l'émission superradiante, nous ne reprendrons pas la description générale des différents éléments du montage, faite au chapitre VI. Néanmoins, il faut noter que par rapport au chapitre précédent, certains éléments de l'appareillage diffèrent, aussi en dirons nous quelques mots.

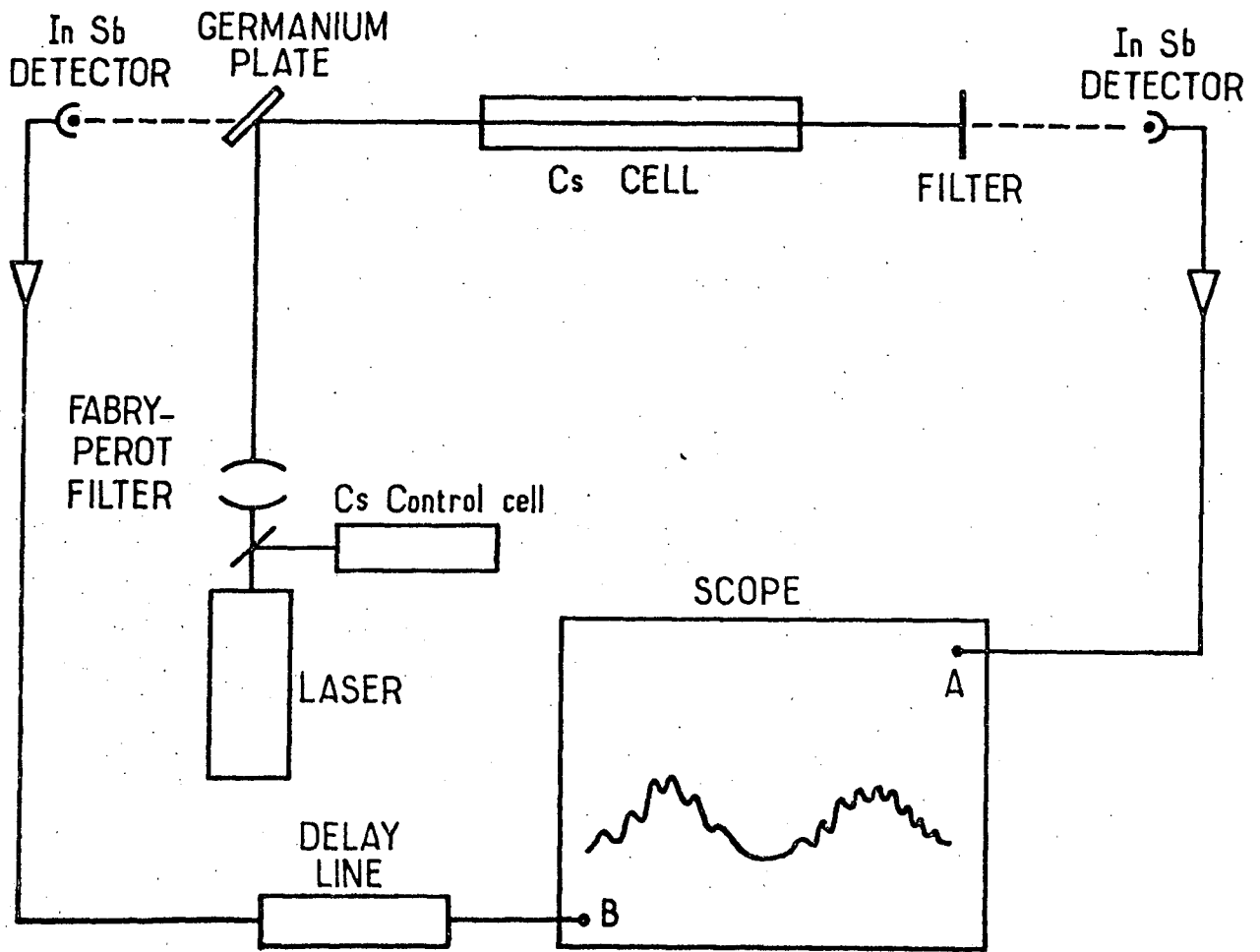


FIGURE VII.4 : Dispositif expérimental

i) La source laser

Nous avons vu, au paragraphe précédent, que pour réaliser l'expérience de battements, il était nécessaire de disposer d'une source pulsée suffisamment monochromatique pour pouvoir sélectionner une seule classe de vitesse v (ou v').

Pour cela nous avons utilisé un laser à colorant type "Hänsch", dans la version utilisant un étalon Perot-Fabry plan intra cavité. Le laser est ici un laser commercial, fabriqué par Sopra, utilisant de la 7 Diethyl-4 Methyl Coumarine (à 10^{-2} mole/l dans l'éthanol). L'étalon intra-cavité est un étalon solide de marque Moletron de 3mm d'épaisseur (30 GHz d'intervalle entre ordre) de finesse 20.

Afin d'augmenter la puissance du laser et d'améliorer la qualité géométrique du faisceau, nous avons utilisé une cellule amplificatrice placée à environ 30cm du laser. Les pulses laser ainsi obtenus ont une durée de l'ordre de 5ns, une puissance crête pouvant atteindre une dizaine de Kilowatts. La largeur spectrale est essentiellement celle d'un des modes du Fabry-Pérot intra-cavité, c'est-à-dire de l'ordre de 1,5 MHz. La pureté géométrique, qui n'est limitée que par la diffraction dans le milieu amplificateur est excellente (divergence 5 mRd).

Une petite partie du faisceau du laser ainsi obtenu est dirigée dans une cellule à Césium de contrôle, qui sert, en observant la fluorescence réémise, à faire l'accord grossier du laser sur la transition atomique (cet accord grossier est rendu plus aisé par l'emploi d'un monochromateur de 1 m de long Jobin Yvon THR 2).

Pour rendre le faisceau laser encore plus monochromatique, nous avons utilisé un étalon Fabry-Pérot externe en tant que filtre passif. Il s'agit d'un étalon ^wcofocal de 50mm (Tropel), d'intervalle spectral 1500 MHz. Nous avons mesuré sa finesse en traçant la courbe de transmission de cet étalon à l'aide d'un laser continu oscillant à 4600 \AA . Cette courbe est présentée sur la figure VII-5. L'échelle des fréquences est de 75 MHz/cm. La largeur du mode obtenu est ici de 75MHz, ce qui est suffisant pour sélectionner une seule classe de vitesse (largeur Doppler \sim 500 MHz). Il est à noter,

que la finesse de cet étalon est relativement faible (finesse 20) et qu'elle est limitée essentiellement par la réflectivité des miroirs à la longueur d'onde considérée (finesse 200 à 5400 Å).

Au total, on obtient après filtrage un pulse laser de 75 MHz de largeur spectrale et de quelque centaine de watts de puissance. Cette puissance, bien que réduite, est suffisante pour atteindre le seuil de superradiance.

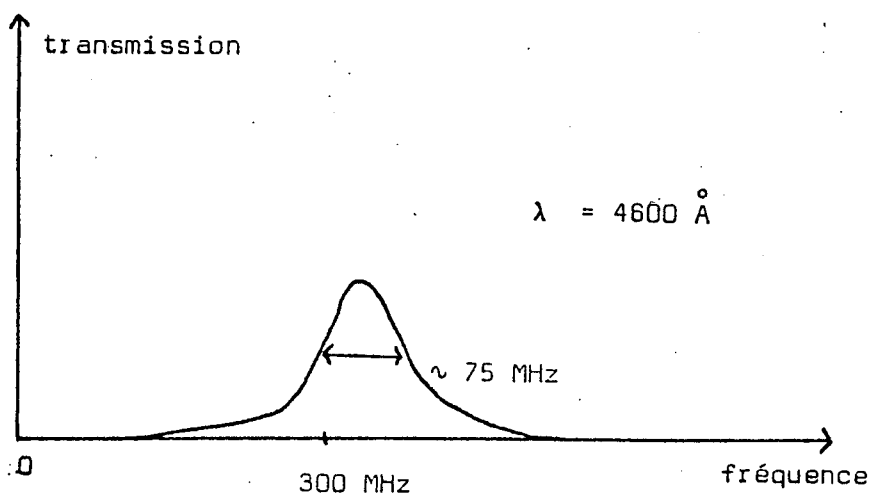


FIGURE VII.5

On notera toutefois, un inconvénient de l'appareillage utilisé ici. Après filtrage passif par l'étalon cofocal, on observe des fluctuations extrêmement importantes de la puissance du laser. Cet effet signalé par différents expérimentateurs (74) provient de la structure complexe du spectre en fréquence des lasers en impulsions, spectre qui fluctue toujours d'un coup à l'autre du laser.

ii) La détection de l'émission superradiante

Par rapport au montage expérimental du chapitre VI, nous avons amélioré le rapport signal/bruit en plaçant le plus près possible du

détecteur un amplificateur faible bruit (2,5 dB de facteur de bruit) de 5 à 500 MHz de bande passante (Nuclétude). Nous avons également amélioré la focalisation sur le détecteur, en utilisant des lentilles en quartz de plus courte focale (35mm).

Pour observer à la fois les signaux superradiants émis vers l'avant et vers l'arrière, nous avons ajouté ici un deuxième détecteur InSb. Le signal émis vers l'arrière est retardé de 25ns (5m de câble coaxial) par rapport au signal émis vers l'avant, et les deux signaux sont enregistrés à l'aide du digitaliseur de transitoire R 7912. On utilise ici le tiroir d'entrée à deux voies pour superposer les deux signaux.

Comme le nombre d'atomes préparé à chaque coup de laser fluctue de manière considérable (à cause des fluctuations de puissance dues au filtrage passif), il est nécessaire d'enregistrer un très grand nombre de signaux, afin de pouvoir sélectionner parmi eux ceux qui correspondent, après filtrage, à une même puissance laser (donc à un même nombre d'atomes). Pour réaliser cette opération, nous avons utilisé un magnétoscope qui est couplé directement au digitaliseur de transitoire R 7912.

Au total, il nous est possible de conserver toute l'information correspondant à chaque réalisation de l'expérience, en enregistrant pour chaque coup de laser sur la même trace, les pulses superradiants avant et arrière.

D) Analyse des résultats

En utilisant le montage expérimental décrit au paragraphe précédent (§ C) il nous a été possible de mettre en évidence l'effet de battements entre atomes de vitesses différentes. En fait nous avons réalisé trois types d'expériences à l'aide de ce montage correspondant à différents types d'excitation :

- excitation en raie étroite (étalon cofocal présent)
- excitation en raie large (étalon cofocal supprimé)
- excitation en raie large déplacée par rapport à la fréquence de résonance atomique. (étalon cofocal supprimé, fréquence du laser déplacée).

1°) Résultats en raie étroite :

Les figures VII-6 a-b présentent ces résultats. La figure VII 6a représente un signal typique avant et arrière , correspondant à une même réalisation de l'expérience . Le retard de 25ns entre les deux pulses a été compensé pour rétablir la véritable échelle des temps. Les émissions vers l'avant et l'arrière n'ont pas strictement le même délai. Ce n'est pas étonnant car la superradiance démarre sur un bruit aléatoire à priori différent dans les deux directions. (cf Appendice II § A, 1°c).

Les battements sont bien nets, et il est clair que la fréquence des battements vers l'avant est inférieure à la fréquence des battements vers l'arrière.

La profondeur de modulation est très importante : elle atteint 50% sur le signal vers l'avant. Elle est plus faible sur le signal arrière, ce qui est dû sans doute à l'électronique de détection dont la fréquence de coupure se situe aux alentours de 400MHz (la fréquence attendue pour ces battements est, rappelons le, de 460 MHz). On peut compter sur chaque signal une dizaine de périodes des battements.

La procédure expérimentale utilisée pour enregistrer ce signal est la suivante : l'accord grossier du laser est réalisé, d'abord à l'aide du spectromètre, ensuite à l'aide de la cellule de contrôle. L'accord précis du laser est obtenu ensuite en faisant varier la tension appliquée aux cales du Fabry Perot externe, jusqu'à ce que l'on observe les battements sur le signal. L'accord en fréquence du laser est alors réalisé , et les nombres d'atomes préparés, dans les deux sous niveaux hyperfins F et F', sont voisins (on se trouve alors dans la situation illustrée par la figure VII-3)

Cet accord est assez critique et l'on voit, si l'on balaye la fréquence d'accord de l'étalon, que le signal de battement disparaît très vite, bien plus vite que le signal superradiant lui-même. Une fois l'accord réalisé, on enregistre les signaux sur le magnétoscope pendant quelques minutes. Ce temps est suffisant pour enregistrer un millier de courbes, prises dans les mêmes conditions expérimentales (la fréquence d'accord de l'étalon n'a pas le temps de varier). Nous avons pu ainsi enregistrer, un très grand nombre de courbes similaires à celles présentées sur la figure VII-6).

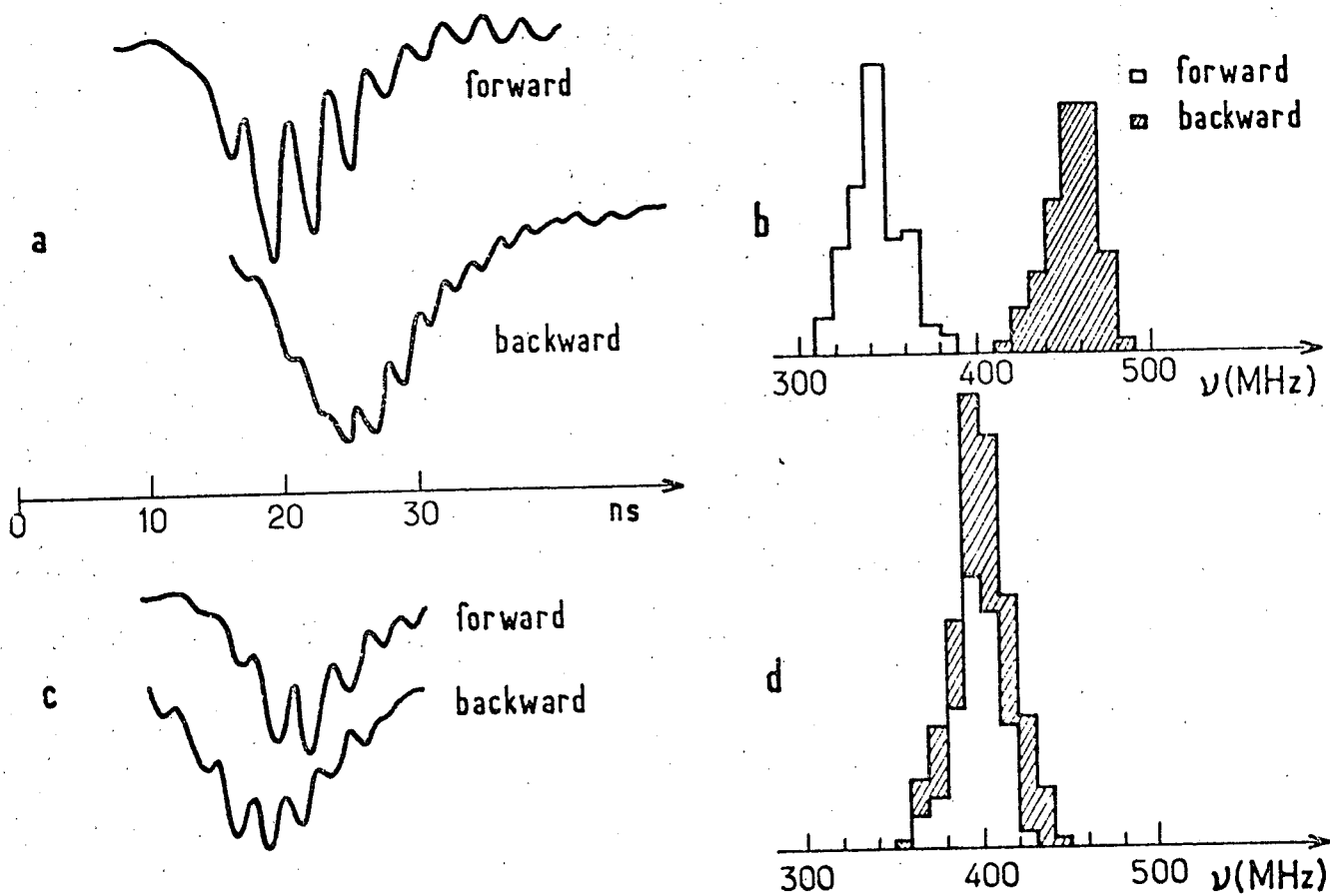


Figure VII 6 : Résultats des expériences

a) b) en raie étroite

a) signal typique

b) histogramme des fréquences de battement

c) d) en raie large

c) signal typique

d) histogramme des fréquences de battement

Pour étudier la distribution des fréquences émises, il suffit de mesurer, pour chaque courbe d'une même série, la fréquence des battements avant et arrière. Pour rendre la mesure plus précise, nous avons sélectionné parmi les courbes celles dont les délais sont de l'ordre de 20 à 30 ns (cette valeur du délai constitue un optimum : la durée du pulse est suffisamment longue pour que l'on puisse observer un grand nombre de modulations, et le nombre d'atomes suffisamment grand pour que le signal sorte du bruit). La distribution des fréquences ainsi obtenues présente une assez grande dispersion, due surtout à la difficulté de la mesure : on peut compter au plus une dizaine de battements par pulse superradiant. Il n'y a cependant aucune cause d'erreur systématique, et nous avons pu construire les histogrammes des fréquences observées.

L'histogramme des fréquences correspondant à 100 coups de laser est représenté sur la figure VII 6b. On voit deux groupes de fréquences bien séparées (*), l'un pour les signaux avant, l'autre pour les signaux arrière. Les fréquences moyennes des battements sont respectivement $\nu_{\text{avant}} = 344 \pm 14$ MHz et $\nu_{\text{arrière}} = 454 \pm 16$ MHz. La fréquence médiane $(\nu_{\text{avant}} + \nu_{\text{arrière}})/2 = 399 \pm 15$ MHz est aussi en bon accord avec les précédentes déterminations expérimentales de la structure hyperfine du niveau $7P_{1/2}$ (42) (43). La demi-différence des fréquences observées $(\nu_{\text{avant}} - \nu_{\text{arrière}})/2$, qui doit être égale au shift Doppler, vaut 55 ± 15 MHz, ce qui est toujours en bon accord avec la valeur théorique de 59 MHz. L'accord de l'expérience avec la théorie est ici assez précis pour que l'on puisse être sûr d'avoir bien observé les battements entre atomes physiquement différents que l'on recherchait.

*) Il faut signaler, ici que l'expérience a été faite en excitant le niveau $7P_{1/2}$ à partir du sous niveau hyperfin fondamental : $(6S_{1/2}; F=4)=g$, qui est couplé de façon relativement symétrique aux sous niveaux hyperfins de $7P_{1/2}$: $F=4$ ou $F'=3$ (le rapport des poids statistique des deux raies $g \rightarrow F$ et $g \rightarrow F'$ est en effet ici de 0.714). En choisissant comme point de départ l'autre niveau hyperfin fondamental : $(6S_{1/2}; F=3)=g$, qui est couplé de manière plus dissymétrique à F et F' (rapport des poids statistique des raies $g \rightarrow F'$ et $g \rightarrow F$ égal à 0.333), on observe également des battements mais leur contraste est en général moins bon, et les histogrammes obtenus ont une plus grande dispersion. En particulier, il n'est pas possible de séparer aussi bien les deux groupes de fréquences avant et arrière.

2°) Résultats en raie large :

A titre de contrôle, nous avons repris l'étude des battements en supprimant l'étalon Fabry Perot cofocal. La largeur spectrale du rayonnement ainsi obtenu est, nous l'avons vu, de 1,5 GHz (c'est-à-dire très supérieure à la largeur Doppler de la transition optique) et répond aux conditions d'excitation en raie large. Les résultats de cette expérience sont donnés sur les figures VII 6c et d. La figure VII 6c représente les signaux typiquement obtenus en coïncidence sur les détecteurs avant et arrière. Le délai sur le signal arrière a été à nouveau supprimé pour rétablir la véritable échelle des temps. Il apparaît clairement que les deux notes de battements sont maintenant très voisines et, plus précisément, intermédiaires entre les notes de battements avant et arrière obtenues précédemment en raie étroite. La profondeur de modulation est encore très importante : elle dépasse 30% pour le signal vers l'avant. Elle n'est pas identique sur les deux signaux, ce qui correspond peut être à une dissymétrie dans les bandes passantes de nos voies de détection.

L'histogramme correspondant à la mesure des notes de battements pour 100 coups du laser est représenté sur la figure VII 6a. L'aspect est essentiellement différent de celui obtenu en raie étroite. Les deux groupes de fréquences sont maintenant centrés autour de la même valeur moyenne, ce qui correspond bien à ce qui était qualitativement attendu, c'est-à-dire une seule note de battement égale à la structure hyperfine du niveau excité. Les valeurs moyennes observées pour les fréquences "avant" et "arrière" sont maintenant respectivement $\nu_{\text{avant}} = 396 \pm 13$ MHz et $\nu_{\text{arrière}} = 398 \pm 41$ MHz. Ces deux moyennes ne diffèrent que de 2MHz, et correspondent bien à la fréquence attendue, déterminée par ailleurs (42) (43).

Ces mesures constituent une bonne vérification de (7), et permettent par ailleurs de confirmer la valeur de la structure hyperfine qui se déduit des expériences en raie étroites (les valeurs obtenues pour $\Delta\nu_{\text{hfs}}$ au § 1° et 2° ne diffèrent que de 3MHz)

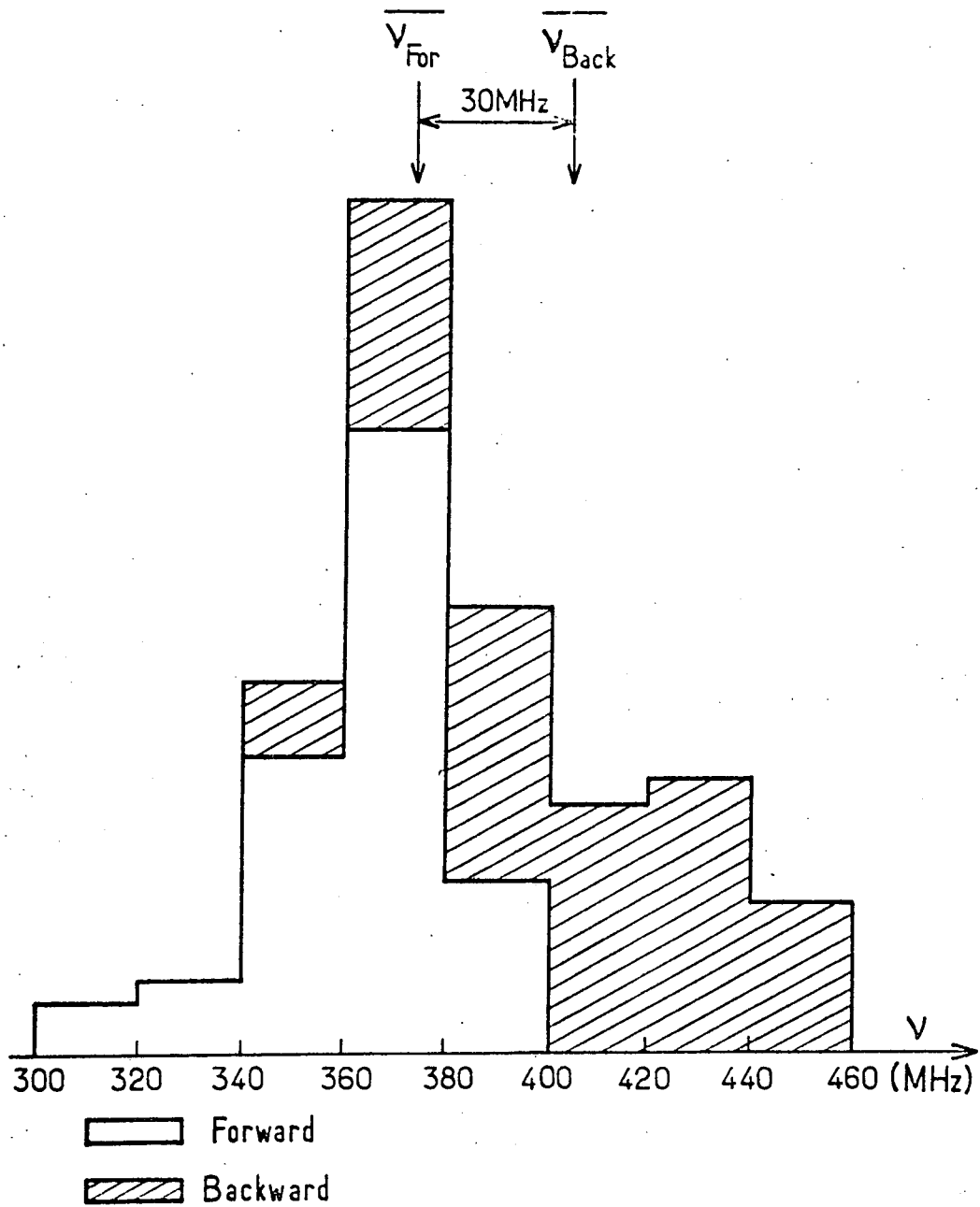


FIGURE VII.7

Histogramme des fréquences de battement dans le cas d'une excitation en raie large hors résonnance.

3°) Résultat en raie large hors résonance

Pour terminer nous avons étudié les battements obtenus après excitation en raie large non résonnante.

Cette étude est intéressante, car elle permet de voir dans quelle mesure la fréquence des battements dépend de la fréquence d'oscillation du laser pompe, ce qui est important si l'on veut utiliser les battements de superradiance en tant qu'outil spectroscopique.

L'expérience est réalisée en raie large, le laser pompe est utilisé sans étalon cofocal externe. La procédure expérimentale est la suivante : le laser est d'abord, aussi précisément que possible, accordé au centre de la résonance atomique, ceci à l'aide de la cellule de contrôle ; on déplace ensuite dans un sens ou dans l'autre la fréquence centrale du laser en inclinant l'étalon contenu dans la cavité de l'oscillateur laser et l'on repère l'écart de fréquence à l'accord par l'angle d'inclinaison de l'étalon. Une fois le laser ainsi réglé, on enregistre pendant quelques minutes une série de signaux, que l'on dépouille enfin. Notons que le dépouillement est assez délicat, car, comme le laser est hors résonance, les nombres d'atomes portés dans les deux sous-niveaux hyperfins F et F' sont différents, et le contraste des battements est relativement faible.

Nous avons reporté sur la figure VII-7 l'histogramme des fréquences obtenu pour 50 coups de laser dans le cas où la fréquence centrale du laser ν_L est inférieure à la fréquence atomique $\nu_{gF'}$ ($\nu_L < \nu_{gF'}$). On observe ici de façon systématique un déplacement de fréquence de l'ordre de 30 MHz entre la fréquence du battement avant (ν_{avant}) et celle du battement arrière ($\nu_{\text{arrière}}$). Ce déplacement $\sim 30\text{MHz}$ est beaucoup plus important que dans le cas de l'excitation résonnante (5 MHz) et se fait toujours dans le même sens : le battement avant est ralenti, alors que le battement arrière est accéléré. On notera néanmoins que la fréquence moyenne n'est pratiquement pas déplacée.

Cet effet de déplacement systématique de fréquence s'explique de manière très simple. Nous avons reporté sur la figure VII-8 les profils Doppler associés aux processus d'excitation (VII 8a), et d'émission

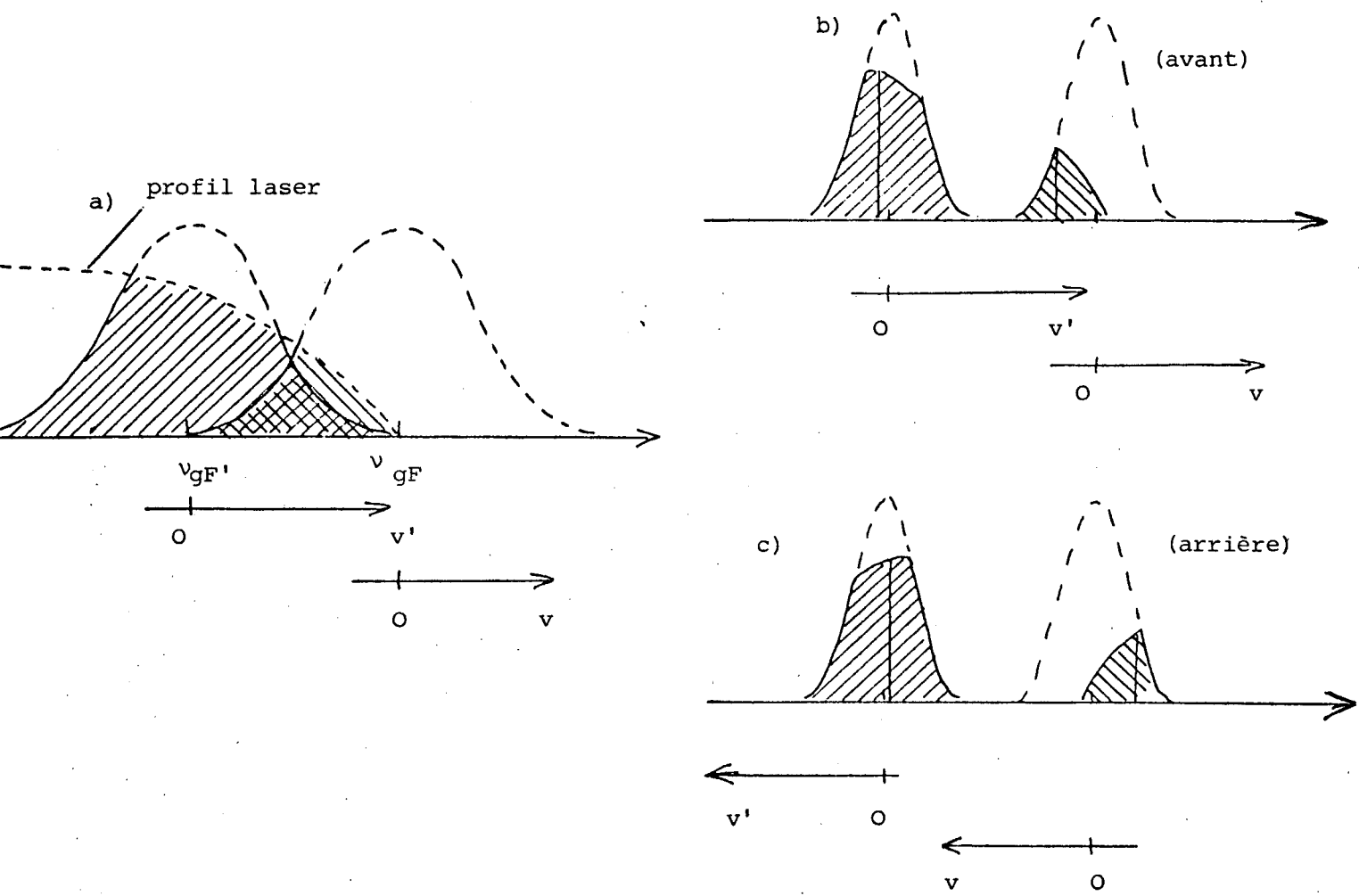
superradiante vers l'avant(VII 8b) et vers l'arrière(VII 8c). Les parties hachurées représentent les atomes participant à chaque processus. On voit immédiatement, que dans le cas considéré ici (excitation en raie large hors résonance), les battements de superradiance se trouvent ralentis vers l'avant et accéléré vers l'arrière . On notera que ce résultat ne dépend pas du signe du désaccord de fréquence

$$(\nu_L = \frac{\nu_{gF} + \nu_{gF'}}{2})$$

E) Conclusion

En mettant en évidence dans les expériences en raie étroites, des battements déplacés par effet Doppler de façon différente vers l'avant et vers l'arrière , nous avons pu montrer qu'il est possible d'observer des battements entre deux classes de vitesse, c'est-à-dire deux classes d'atomes physiquement différents, susceptibles d'émettre à des fréquences voisines. Nous avons ainsi pu mettre en évidence de façon très claire, le caractère essentiellement inter-atomique des battements lumineux de superradiance , ce qui les différencie nettement des battements quantiques de fluorescence (phénomène intra-atomique).

La possibilité d'observer expérimentalement de tels battements peut conduire à une spectroscopie des battements de superradiance . Une telle spectroscopie permettrait, entre autres, de mesurer directement les déplacements isotopiques de certains éléments. Nos expériences (en particulier les expériences en raie large hors résonance) ont toutefois montré à quel point, contrairement aux battements quantiques ordinaires, les battements de superradiance étaient sensibles à l'effet Doppler. Nous avons vu en effet , en raie large que la fréquence des battements obtenus dépend de la position de la raie laser et de son profil exact. Une éventuelle spectroscopie de battements de superradiance doit donc s'assortir d'un contrôle soigneux de l'effet Doppler.



Processus d'excitation

(transition $6S_{1/2} \rightarrow 7P_{1/2}$ notée ici
g-F ou F')

Processus d'émission superradiante

(transition $7P_{1/2} \rightarrow 7S_{1/2}$ notée F ou F'- f)

Figure VII 8 : Profils Doppler des différents processus dans le cas d'une excitation en raie large hors résonance (voir légende en figure VII 2).

Il faut alors :

- soit éliminer l'effet Doppler, en effectuant l'expérience de superradiance sur un jet bien collimaté,
- soit le compenser, en faisant la moyenne des fréquences mesurées vers l'avant et l'arrière (nous avons vérifié en effet que cette moyenne est peu déplacée).

CHAPITRE VIII

"ETUDE DE LA SUPERRADIANCE ENTRE NIVEAUX DE RYDBERG DANS LE
DOMAINE MILLIMETRIQUE "

ETUDE DE LA SUPERRADIANCE ENTRE NIVEAUX DE RYDBERG DANS LE DOMAINE MILLIMETRIQUE

A- Introduction

Après avoir ouvert la voie en mettant en évidence l'émission superradiante dans le domaine proche infrarouge, (cf chapitre VI), ce qui nous a permis d'étudier les effets de dégénérescence et de battement (chapitre VII), nous avons cherché à étendre l'étude aux grandes longueurs d'onde (~ 3 à 1 mm) en nous intéressant à la superradiance entre niveaux de Rydberg dans le domaine millimétrique.

Il est alors possible de détecter de manière indirecte l'émission superradiante par ionisation par effet de champ. Cette technique de détection décrite au § B, est extrêmement sensible et permet d'étudier la superradiance d'un très petit nombre d'atomes.

Nous avons tout d'abord (§ C) envisagé le cas de la superradiance proprement dite (en absence de cavité) et mis en évidence l'effet avec des nombres N d'atomes de l'onde de 10^5 à 10^6 (à titre de comparaison nous avons dans le proche infrarouge : $N \sim 10^8$ à 10^9). Nous avons ensuite (§ D) fait le lien avec l'émission maser à étudier la superradiance d'un système atomique couplé à une cavité. Les seuils obtenus ($N \sim 10^4$ à 10^5) sont plus faibles de plus en modifiant l'accord de la cavité, on peut choisir le niveau final de la transition maser. Enfin, en préparant les atomes dans un volume de dimension petite devant la longueur d'onde (ce qui est possible dans le domaine millimétrique), nous avons pu observer l'effet de superradiance totale.

Sur le plan théorique, l'expérience de superradiance en cavité, présente un grand intérêt, car comme nous l'avons vu au chapitre V, il est possible de calculer l'évolution sans aucune approximation. De plus, le cas envisagé expérimentalement : cavité de faible coefficient de surtension ; milieu de faible dimension devant λ correspond au cas idéal pour lequel les équations de Dicke (23) sont valides. Comme enfin, la superradiance peut être observée avec des nombres d'atomes extrêmement faibles ($N \sim 10^4$), il est possible d'atteindre le régime de superradiance "microscopique" (cf chapitre

II § V) pour lequel les éléments de matrice de ρ ont un sens et sont calculables (dans le cas "idéal" de Dicke considéré ici l'expression de ρ a d'ailleurs été calculée au chapitre II § II cf équation II II 48).

On notera , pour terminer, que dans le domaine microonde, l'émission superradiante démarre , non pas sur le bruit d'émission spontanée mais sur le rayonnement thermique à la température ambiante. Le système superradiant apparaît alors comme un système amplificateur de bruit. Ce dernier effet, qui suggère des applications de la superradiance en tant que détecteur sera étudié de manière plus approfondie au chapitre IX.

B- La détection indirecte de la superradiance dans les états de Rydberg (l'ionisation par effet de champ).

Au cours de ce paragraphe nous décrivons rapidement la méthode de détection d'ionisation par effet de champ, méthode qui comme nous le verrons est particulièrement bien adaptée à l'étude des états de Rydberg. Nous discuterons ensuite des avantages et des inconvénients propres de ce type de détection.

1°) Principe de la détection par ionisation par champ.

Les états de Rydberg sont extrêmement sensibles aux couplages électromagnétiques aussi bien périodiques et résonnants que statiques C'est ce dernier effet qui nous intéressera ici :

Un atome, dans un état de Rydberg peut en effet être ionisé par un champ électrique statique. Le champ ionisant E_{ion} seuil de cet effet varie en fonction de l'état auquel on s'intéresse et en particulier en fonction des nombres quantiques n et l . En fait E_{ion} dépend essentiellement de n , ($E_{ion} \propto 1/n^4$) et décroit très vite lorsque l'on monte dans les niveaux n . Il devient alors facile de réaliser le champ statique nécessaire à l'ionisation des atomes ($E_{ion} \sim 1\text{KV/cm}$ pour $n=25$) et l'on peut utiliser cet effet pour détecter sélectivement les atomes portés dans des niveaux de Rydberg.

La figure (VIII-1) illustre le principe d'une telle détection Le milieu atomique dilué, sur lequel on fait l'expérience est un jet atomique qui passe entre deux plaques de condensateur , distantes de e ($e \sim 5$ à 10mm), dont l'une est portée à la masse et l'autre à un potentiel $V(t)$ variable. Les atomes situés entre les deux plaques du condensateur voient alors un champ $\vec{E}(t) = V(t)/e$.

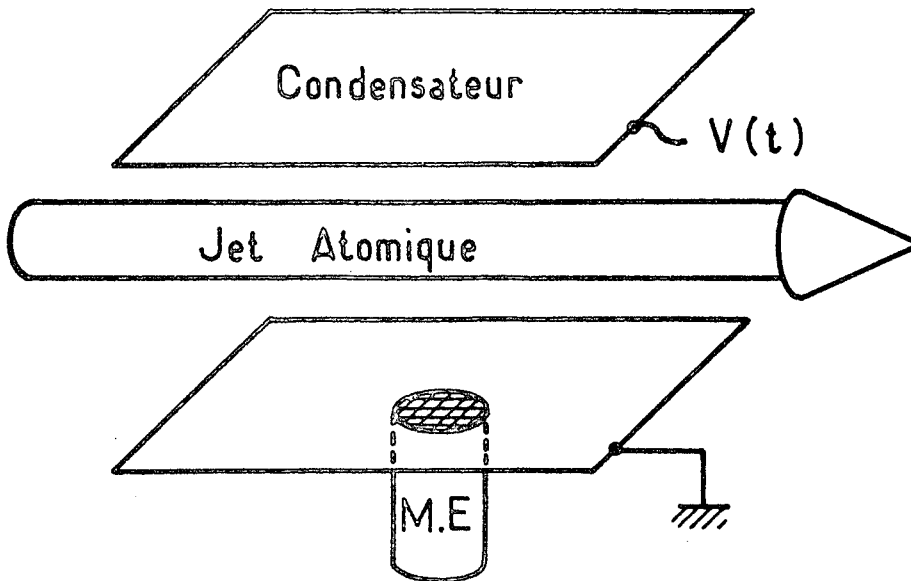


Figure VIII-1

Si $E(t)$ dépasse le seuil d'ionisation d'un niveau de Rydberg donné, les atomes présents dans ce niveau sont ionisés et les ions et les électrons ainsi libérés sont accélérés par le champ $E(t)$ régnant entre les plaques. Si l'une des plaques est percée d'un trou couvert d'une grille il est possible de recueillir ces ions ou ces électrons sur la première dinode d'un multiplicateur d'électrons. Le courant d'ionisation disponible en sortie de ce multiplicateur est alors proportionnel à la population du niveau de Rydberg considéré. La méthode est extrêmement sensible. Il est en effet possible de compter les ions détectés (le gain du multiplicateur d'électrons est en général suffisant : 10^5 à 10^6 (*)) et le rendement quantique de détection de l'ordre de 100% (rendement de 100% pour le processus d'ionisation lui même, rendement de l'ordre de 100% pour la détection par le multiplicateur d'électron d'un ion ou d'un électron convenablement accéléré).

*) Le gain théorique est de 10^7 à 10^8 mais la pollution du multiplicateur par le jet est importante et le gain utilisable est beaucoup plus faible.

2°) Utilisation de la méthode pour étudier la superradiance entre niveaux de Rydberg .

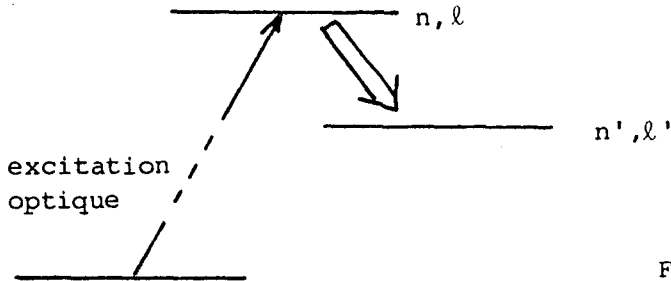


FIGURE VIII.2

Supposons qu'après avoir préparé optiquement un système dans le niveau $n\ell$ à $t=0$ (à l'aide par exemple de lasers pulsés), on s'intéresse à l'émission superradiante sur la transition $n\ell - n'\ell'$ (fig.VIII 2). Comme cette émission s'accompagne d'un transfert de population, on peut détecter indirectement la superradiance en étudiant ce transfert.

Pour cela considérons que la zone active est située entre les deux plaques du condensateur d'ionisation par effet de champ, décrit précédemment (§ 1°) et appliquons sur celui-ci une rampe de tension $V(t)$ démarrant à l'instant t_1 : (voir figure VIII 3c):

$$V(t) = 0 \quad \text{pour } 0 < t < t_1$$

$$V(t) = A t \quad \text{pour } t > t_1$$

Entre t et t_1 le système est libre d'évoluer et la superradiance peut se bâtir. Par contre dès que $t > t_1$, le champ électrique régnant à l'intérieur du condensateur modifie la position des niveaux et brouille les cohérences responsables de la superradiance. La superradiance cesse, mais les populations respectives des niveaux $n\ell$ et $n'\ell'$ ne sont pas modifiées. Le système est en quelque sorte gelé et reste dans l'état atteint à $t=t_1$ (du moins en négligeant les processus de désexcitation ou de transferts autre que la superradiance). Pour $t > t_1$ le champ électrique régnant à l'intérieur du condensateur augmente et finit par atteindre à $t=t_{n\ell}$ le seuil $E_{n\ell}$ d'ionisation du niveau de départ

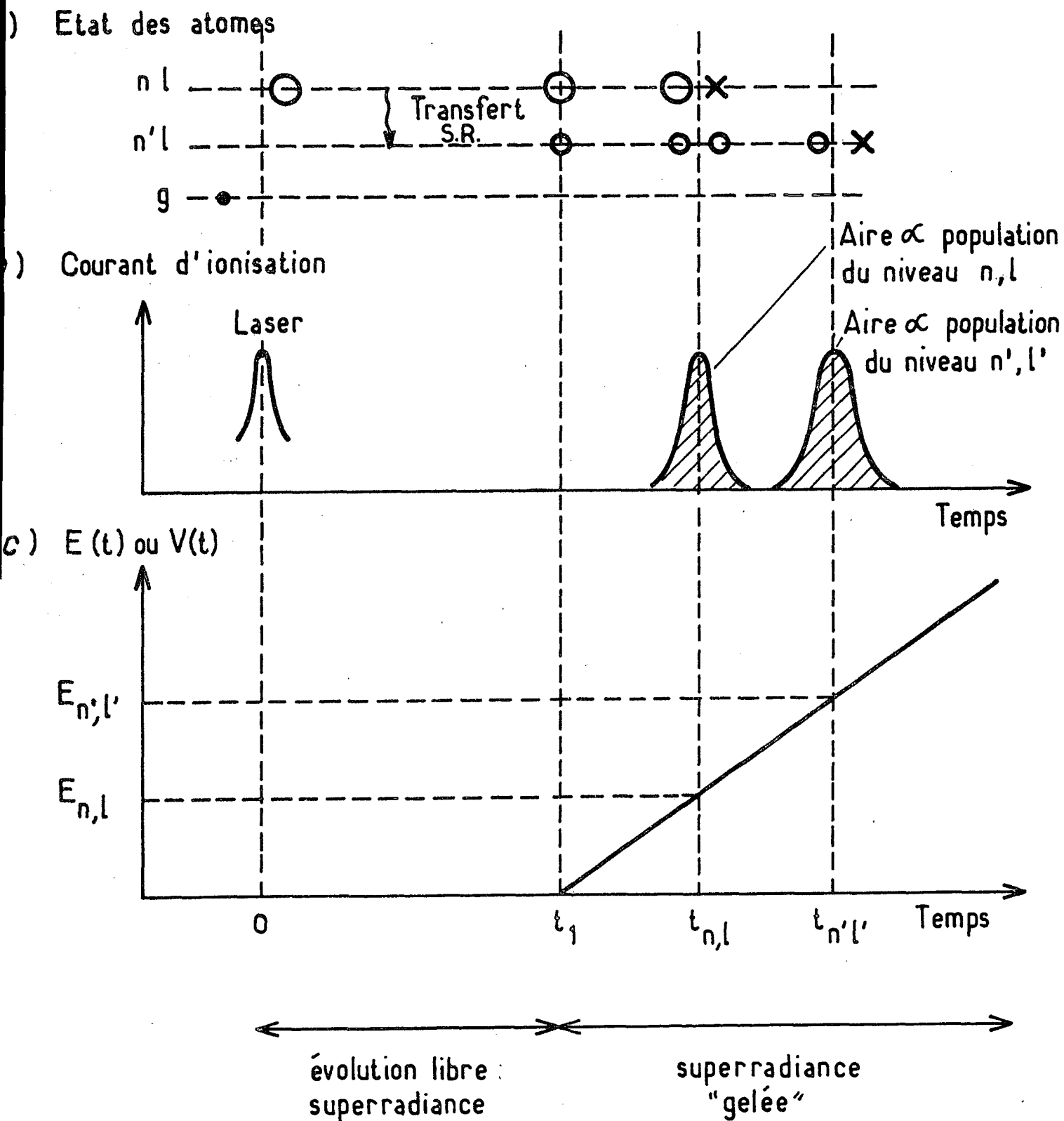


Figure VIII-3

ANALYSE SIGNAUX

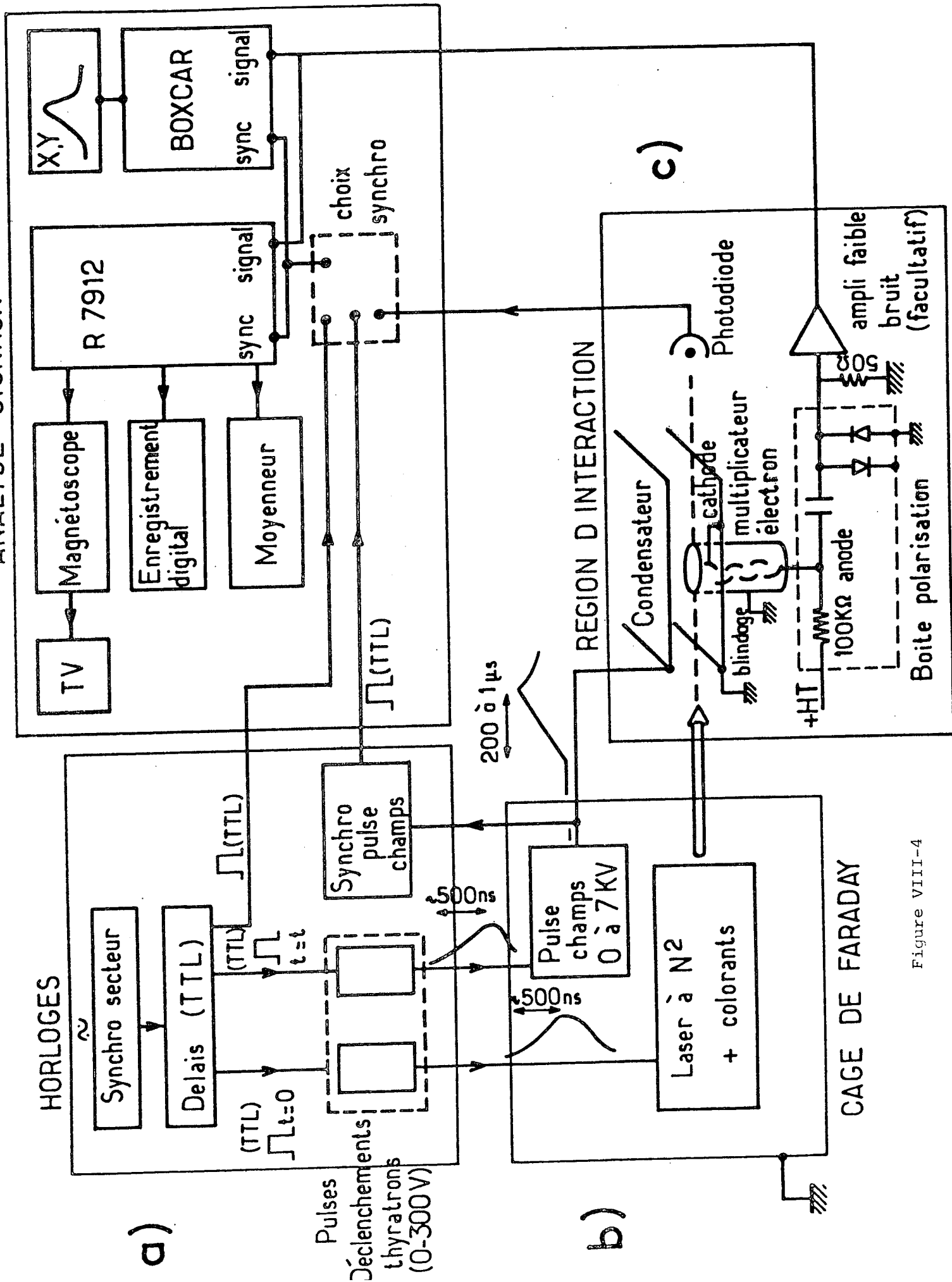


Figure VIII-4

(le niveau de départ étant le plus excité, il est ionisé dans le champ le plus faible). On observe alors un pic sur le courant d'ionisation à $t = t_{n\ell}$ proportionnel à la population du niveau $n\ell$. Un peu plus tard à $t = t_{n'\ell'}$, le même phénomène se produit pour le niveau $n'\ell'$ (voir figure VII 3b).

En faisant varier l'instant de mesure t_1 sans faire varier la position relative de t_1 , $t_{n\ell}$ et $t_{n'\ell'}$, il est possible en mesurant l'aire respective des pics d'ionisation détectés à $t = t_{n\ell}$ et $t = t_{n'\ell'}$,

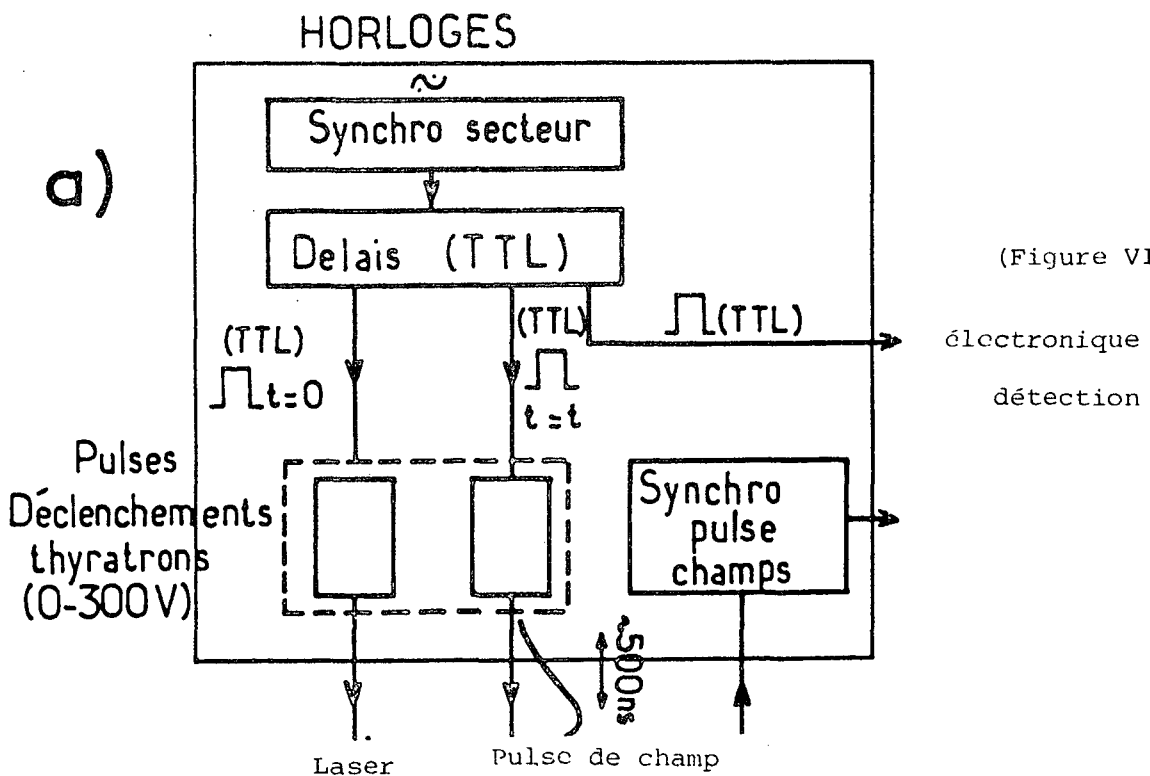
de reconstruire la courbe de transfert des populations $\rho_{n\ell}$ et $\rho_{n'\ell'}$. La dérivée de cette courbe est alors liée à l'intensité I émise par superradiance,

$$I = - N h \omega_0 \frac{d}{dt} (\rho_{n\ell} - \rho_{n'\ell'})$$

3°) Description d'une expérience de superradiance détectée en ionisation par effet de champ.

La figure VII(4) présente le schéma synoptique d'une expérience de superradiance microonde dans les niveaux de Rydberg utilisant la technique d'ionisation par champ pour détecter les atomes. Sur ce schéma on distingue successivement :

a) Les signaux d'horloge (fig. VII 4a)



(Figure VII 4a)

Ces signaux sont utilisés ici pour synchroniser de façon précise le laser, la rampe de champ et l'électronique de détection. Ils sont fournis par un système délivrant jusqu'à trois signaux TTL dont on peut faire varier les délais relatifs de 0 à 200 μ s par pas de 100 ns. Ce système est déclenché extérieurement à un taux de répétition de 5 à 10 Hz en synchronisme avec le secteur (on élimine ainsi les fluctuations périodiques à 50 Hz). Les deux premiers signaux d'horloge servent à déclencher respectivement le laser et la rampe de champ. Le troisième signal d'horloge peut servir pour déclencher l'électronique d'analyse à n'importe quel instant.

Le délai entre les pulses de déclenchement et le laser (ou la rampe de champ) est de l'ordre de 2 à 5 μ s. Il peut varier d'un coup à l'autre de 20 à 50 ns. On observe donc après analyse un "jitter" de 20 à 50 ns sur la position des signaux. Pour éviter cet effet, et suivant le signal étudié, on déclenche l'électronique, soit sur le laser (pour étudier ce qui se passe au voisinage de l'origine des temps $t=0$) et l'on utilise pour cela une photodiode rapide (cf figure VII 4c) ; soit sur la rampe de champ (pour étudier ce qui se passe au voisinage de $t=t_1$ et en particulier pour les signaux d'ionisation) et l'on emploie alors un ampli à seuil générant un pulse TTL lorsque $V(t)$ dépasse une certaine valeur que l'on peut régler au préalable.

b) le pulse de champ et les lasers (fig. VIII 4 b)

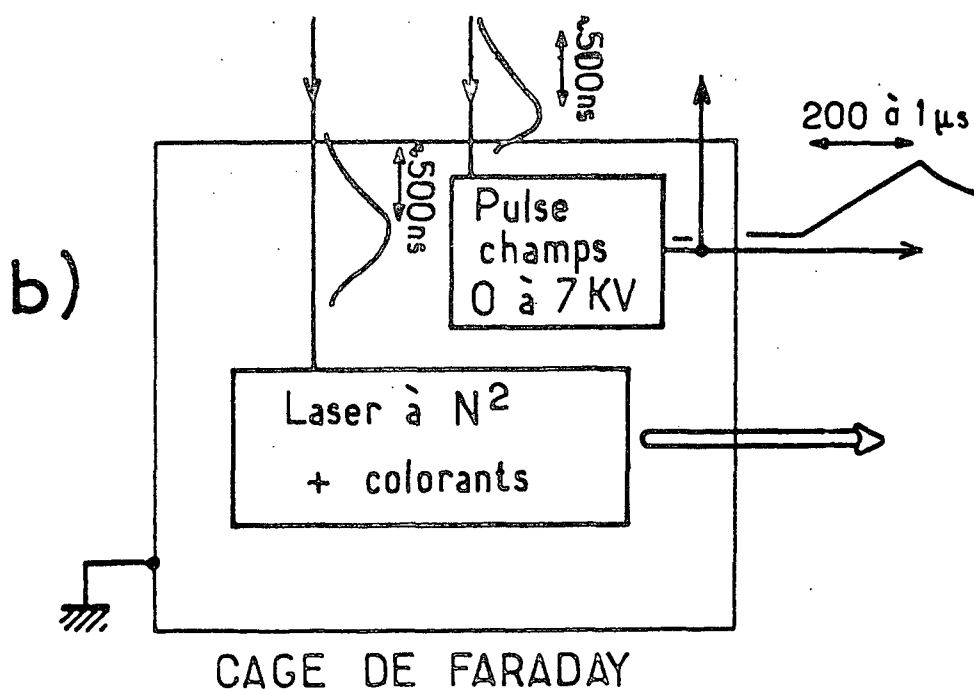


Figure VIII-4 b

i) Le pulse de champ.

Pour réaliser la rampe de champ nécessaire à l'ionisation des atomes, on peut utiliser :

- soit des transistors en avalanche en cascade si la haute tension maximale nécessaire est inférieure à 1,5kV et si le temps de montée ne doit pas être inférieur à une microseconde.

soit un thyatron. Il n'y a plus dans ce cas de limitation sur tension maximale, si ce n'est la tenue en isolement des cables et du condensateur (7kV). Le temps de montée intrinsèque du système est alors de l'ordre de 20ns et l'on utilise alors un filtrage R-C pour obtenir la forme de pulse désiré.

D'un point de vue pratique nous avons utilisé des rampes de champs dont les temps de montée sont compris entre 500 et 1500 ns. L'intervalle entre les différents pics d'ionisation est alors de l'ordre de 100 ns.

ii) Les lasers ,

Les lasers utilisés pour ces expériences sont similaires à ceux dont nous nous sommes servis pour réaliser les expériences dans le proche infrarouge (laser à colorants pompés par lasers à N_2). Suivant les expériences la configuration exacte des lasers peut changer et nous indiquerons brièvement à chaque fois les particularités éventuelles de ces lasers.

On notera toutefois que, dans certains cas, le laser à azote est un laser construit au laboratoire qui ne peut être déclenché directement par les pulses TTL de synchro. Le pulse de 300 à 500 V et de 500 ns de temps de montée nécessaire pour provoquer l'allumage du thyatron du laser à N_2 est généré par un circuit utilisant un transistor haute tension en régime d'avalanche. Un circuit identique peut être utilisé également pour déclencher le thyatron délivrant la rampe de champ (*) dans le cas où cette rampe est générée

*) Nous avons utilisé initialement à la place des transistors hautes tension des triacs, mais il n'était pas possible de déclencher indépendamment le thyatron du laser et celui du pulse de champ, car le parasite créé par l'un des thyatrons était capable de déclencher le triac présent dans le circuit de l'autre thyatron. En effet un triac est un système instable, qui peut être déclenché par un parasite sur son anode. Cet ennui disparaît avec des transistors haute tension (BUX 45) qui demandent une permanence de la commande pour être mis en avalanche.

par un thyatron : voir figure V 4a).

On notera pour finir la présence de la cage de Faraday qui sert à éliminer le bruit électrique des thyatrons (laser et pulse de champs).

c) La région d'interaction proprement dite : (fig. VIII 4c)

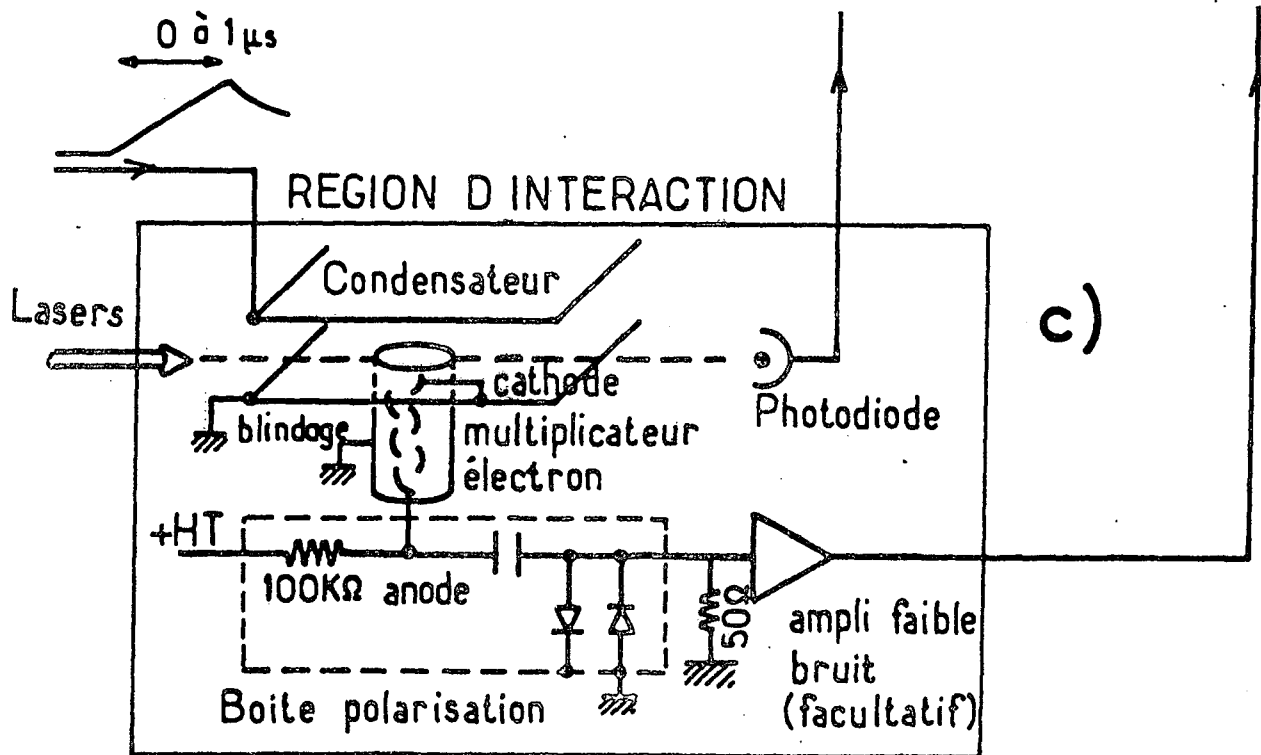


Figure VIII 4c

La région d'interaction dans laquelle se produit l'ionisation par effet de champ des atomes est située entre deux plaques d'un condensateur (figure VIII 4c et figure VII-1). Sur l'une des plaques est appliquée le pulse de tension, tandis que l'autre est maintenue à la masse. Pour des raisons de commodité, nous avons placé le multiplicateur d'électron (RTC 50 P3R) coté masse : la cathode est à la masse alors que l'anode est portée à une haute tension positive. Il est alors possible de blinder très efficacement le multiplicateur d'électrons, et l'on évite ainsi les champs électriques parasites au niveau de la région d'interaction. Cette configuration présente un petit inconvénient : le courant à détecter, est prélevé sur l'anode du multiplicateur d'électron, en un point porté à une haute tension positive

(point chaud). Comme , seule la composante alternative est intéressante (le signal est très bref), on utilise un découplage par filtre R-C constitué par une résistance de 100K coté haute tension, et une capacité de 10^4 pf coté signal. On notera la présence de deux diodes tête bèches destinées à protéger l'électronique de détection contre des surtensions, dues soit à des arcages dans la boîte de polarisation ou dans le multiplicateur d'électrons, soit à des signaux ioniques saturants (50V) liés à la présence d'impuretés dans le jet.

Du fait de la pollution des diodes par les atomes du jet le gain du multiplicateur d'ion est assez faible (10^5) et l'on est souvent amené à utiliser un amplificateur faible bruit (SCD), que l'on placera le plus près possible (*) de la boîte de polarisation et de l'anode.

Jusqu'à présent nous n'avons pas précisé la polarisation du pulse de tension utilisé. Si $V(t)$ est positif , ce sont les ions qui sont accélérés vers le multiplicateur d'électrons, si $V(t)$ est négatif ce sont au contraire les électrons. Nous avons choisi le plus souvent de détecter des électrons. Nous évitons ainsi de polluer la première diode du multiplicateur par des ions lourds d'atomes du jets où d'impuretés. On notera que le temps de vol des électrons depuis l'intérieur du condensateur, jusqu'au multiplicateur d'électrons est complètement négligeable. (Ce n'est pas le cas notons le si l'on détecte les ions (temps de vol de 100 à 200 ns et l'on risque, dans ce cas, d'être gêné par la dispersion de ces temps). A signaler un petit ennui expérimental observé en détectant les électrons. Cet effet est illustré par la figure (VII 5). Les ions lourds accélérés vers la plaque du condensateur au potentiel $V(t)$ sont capables d'arracher des électrons à cette plaque et l'on observe après le pic d'ionisation principal, un écho retardé de 100 à 200ns. (figure VIII 5A).

*) Le soin du câblage entre l'anode et l'amplificateur faible bruit est important surtout en régime de comptage d'ions.

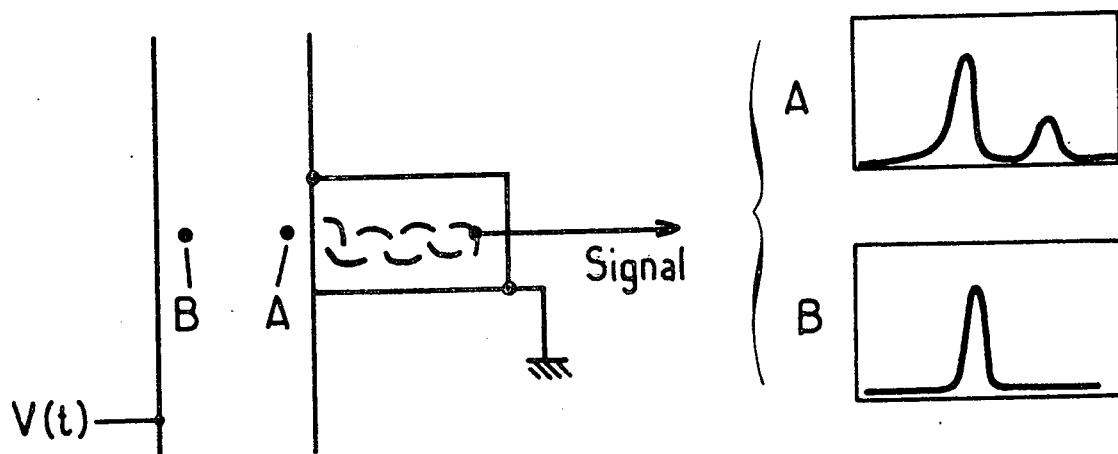


Figure VIII-5

Allure des signaux d'ionisation correspondant à un niveau donné :

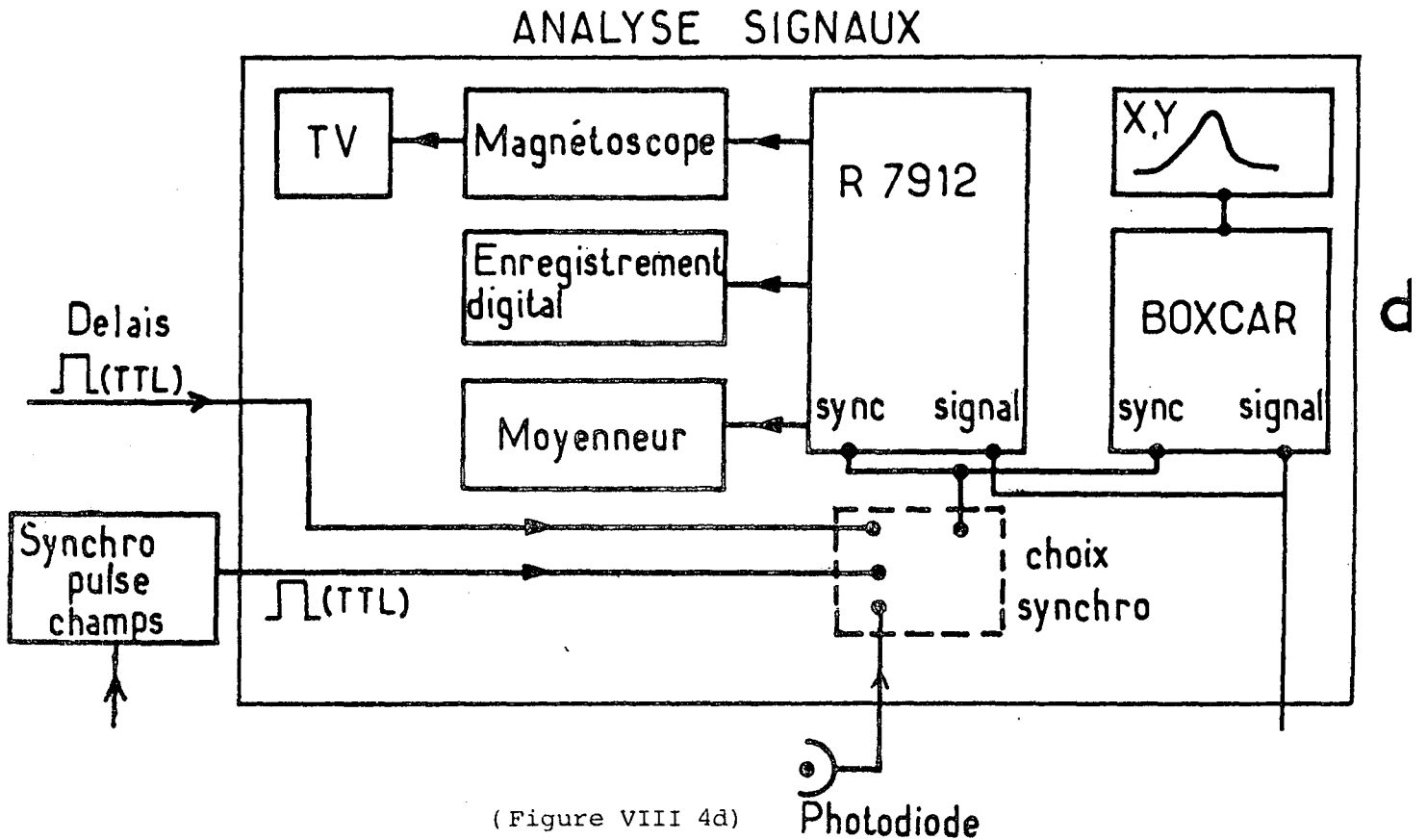
- A) La région d'interaction est située du côté du multiplicateur d'électrons, au voisinage de la masse.
- B) La région d'interaction est au contraire située au voisinage de la plaque portée au potentiel variable $V(t)$.

Ce retard correspond au temps de vol des ions de la région d'interaction à la plaque au potentiel $V(t)$. Pour éviter cet effet, il suffit de placer la région d'interaction très près de cette plaque figure VIII 5B. Dans ce cas, le retard de l'écho s'annule ; de plus sa hauteur diminue car l'énergie des ions au niveau de la plaque est plus faible, et le nombre d'électrons arraché l'est aussi.

Pour terminer disons quelques mots de la forme des pics d'ionisation obtenu. L'ionisation elle-même étant quasi instantanée on pourrait a priori s'attendre à observer des pics d'ionisation extrêmement fins de forme régulière. Il n'en est rien. On observe en fait des signaux d'ionisation de forme d'autant plus complexe que le nombre quantique orbital est grand, en général un pic pour des niveaux s, 2 pour des niveaux p, 3 pour des niveaux d etc... Cette forme peut changer suivant la vitesse de montée de la rampe de champ, ce qui d'un point de vue de la compréhension théorique du phénomène correspond à des régimes d'approximation différentes : approximation soudaine ou adiabatique. Dans la plupart des cas en faisant varier le temps de montée de la rampe de champ entre 200 et $1,5 \mu s$, la forme des pics d'ionisation ne change pas (à une homothétie près) et nous sommes dans un régime d'approximation adiabatique. Notre but n'est pas de discuter ici, de la forme exacte de ces signaux (c'est un problème théorique très complexe)^(*). Nous remarquerons simplement que la forme et la position des courbes d'ionisation sont caractéristiques des niveaux considérés et constituent en quelque sorte leur signature. Nous utiliserons par la suite cette propriété pour identifier les niveaux .

*) Ce problème est d'autant plus difficile, que la forme des signaux d'ionisation peut changer de façon dramatique d'un niveau $n\ell$, au niveau voisin de même moment angulaire $(n \pm 1)\ell$ (par exemple du niveau 32F, du niveau 35P)

d) L'analyse des signaux (fig VIII 4d)



Pour analyser les signaux nous utilisons en général le digitaliseur de transitoire, qui peut être couplé comme nous l'avons vu ;

- à un moyeneur , et par là à une table traçante (cf chapitre VI).
- ou, si l'on désire conserver l'information correspondante à chaque trace, à un taux de récurrence élevé, ≈ 25 Hz à un magnétoscope (cf chapitre VII).

Malheureusement les signaux vidéo enregistrés sur magnétoscope sont difficiles à analyser, aussi avons nous fait réaliser par l'atelier d'électronique du laboratoire, un système d'enregistrement digital utilisant un magnétophone NAGRA. Ce système décrit en détail dans la thèse de J.M. RAIMOND (57) permet d'enregistrer le signal digital de 512×9 bits correspondant à une trace , à un taux de récurrence de 2Hz.

Nous disposons enfin, si nécessaire, d'un boxcar à deux voies . On peut alors en plaçant les deux portes du boxcar au voisinage de $t=t_{nl}$

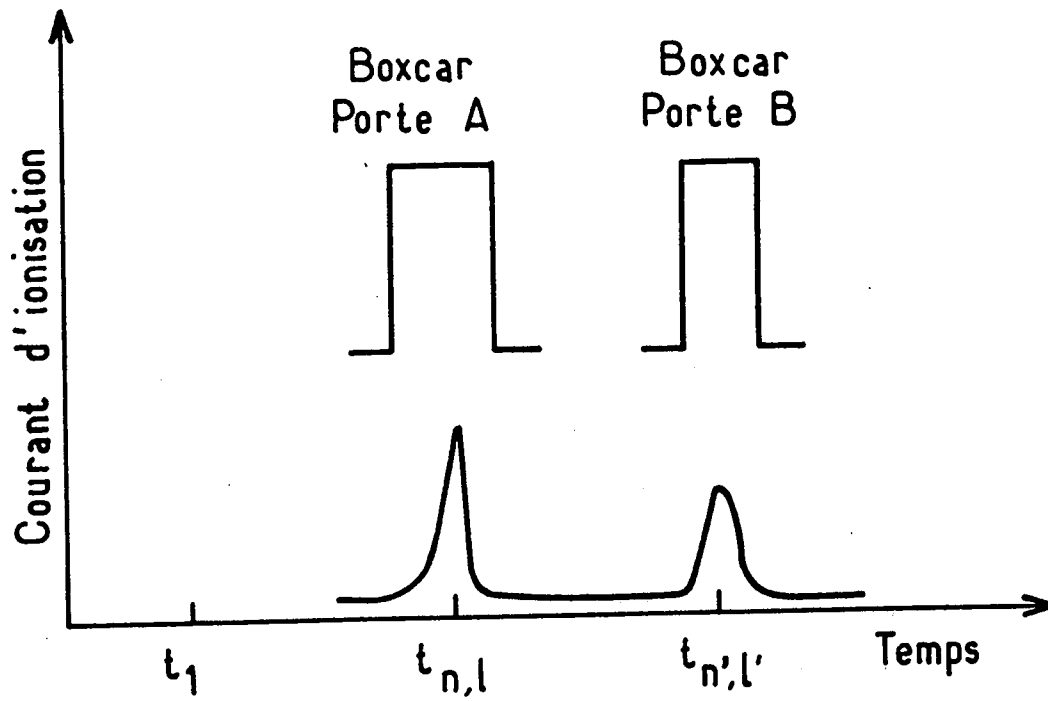


Figure VIII 6

et de $t = t_{n' \ell'}$, respectivement et en analysant le courant d'ionisation, avoir très directement une information sur les populations des niveaux $n\ell$ et $n'\ell'$. (voir figure VIII-6) . L'opération peut être faite soit en temps réel, soit sur le signal enregistré sur NAGRA.

4°) Conclusion : les avantages et les inconvénients de la méthode pour étudier la superradiance.

Nous avons vu qu'il était possible en utilisant la technique d'ionisation par effet de champ, d'étudier des transitions entre états de Rydberg et en particulier des transitions par superradiance.

Ce type de détection présente l'avantage d'être extrêmement sensible. Il est possible d'étudier ainsi des transferts mettant en jeu de très faibles nombres d'atomes. Dans bien des cas, la sensibilité est presque trop élevée et il est difficile de ne pas saturer le multiplicateur d'électrons.

La méthode permet également de calibrer de façon absolue et indépendante, le nombre d'atomes présents à $t=0$, en comparant les signaux à fort niveau en régime analogique et à faible niveau, en régime de comptage.

Notons cependant que cette méthode ne donne d'information sur le système qu'au seul instant t_1 . Pour mesurer l'évolution au cours du temps des populations, $\rho_{n\ell}(t)$ ou $\rho_{n'\ell'}(t)$ il faut répéter un grand nombre de fois l'expérience avec des délais t_1 différents et des conditions initiales identiques. L'opération n'est pas simple, surtout si l'on tient compte des fluctuations en puissance et en fréquence du laser qui prépare le niveau de départ de la transition superradiante. Au total, il faut, soit se contenter d'informations partielles, soit avoir recours à un dépouillement relativement lourd.

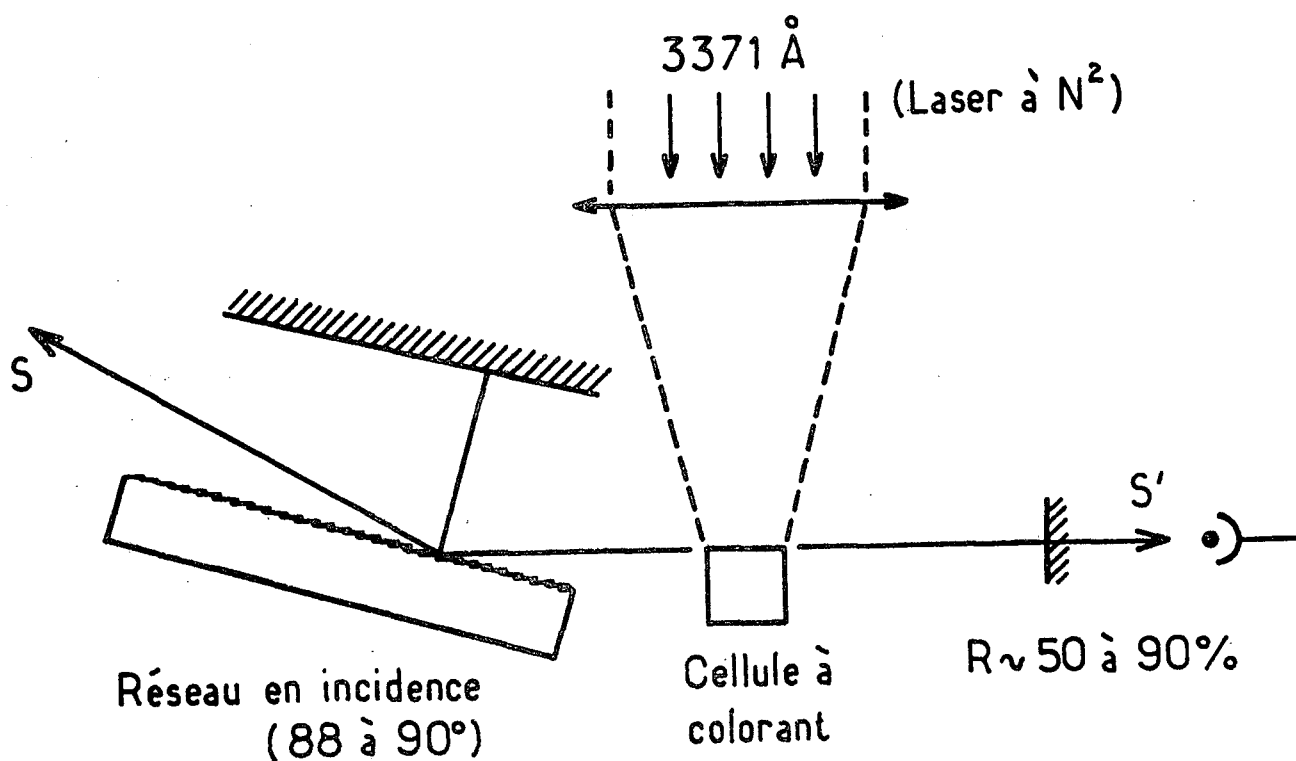


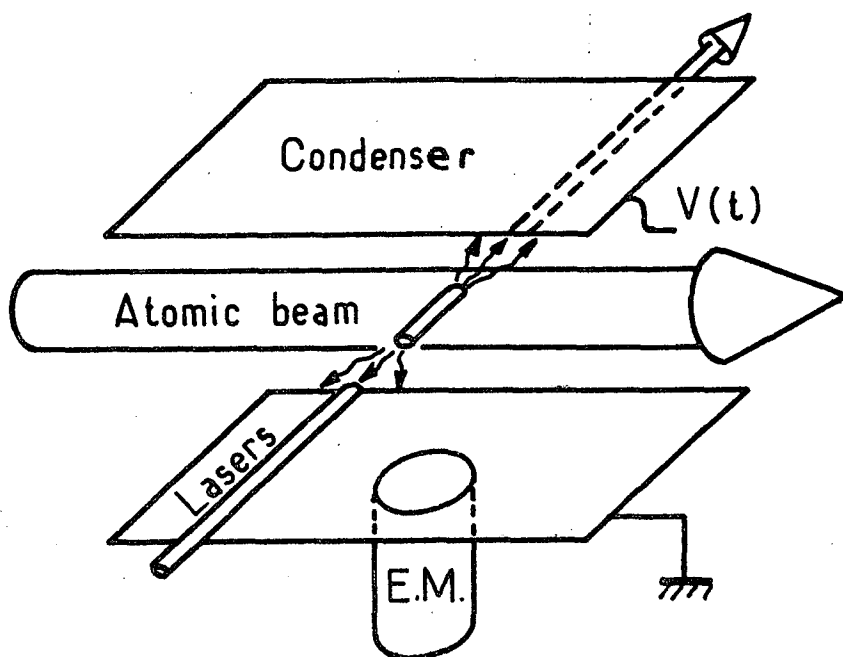
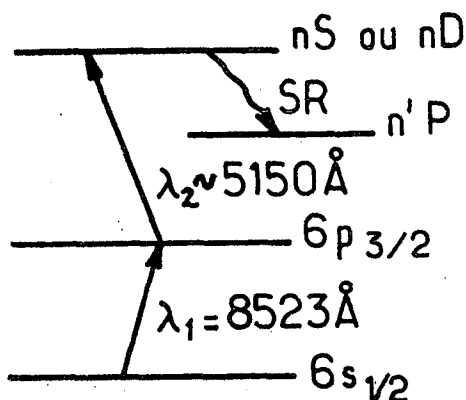
FIGURE VIII.8 : Laser en configuration de LITTMANN

- Le réseau est utilisé en incidence rasante; il peut ainsi être éclairé sur toute sa largeur.
- La sortie S' ne contient pas de fluorescence parasite; elle sert de test et permet de voir si le laser est correctement réglé.
- La sortie S est beaucoup plus intense, mais contient une part importante de fluorescence (20 à 50%). C'est la sortie qui est utilisée pour nos expériences.

C. Mise en évidence de la superradiance des niveaux de Rydberg du Cesium :

1) Description du montage

Shéma des niveaux du Cesium



- a -

Figure VIII-7

- b -

La figure (VIII-7) indique le principe des expériences. Les atomes d'un jet atomique de Césium sont excités successivement par deux pulses lasers, issus de lasers à colorants pompés par un même laser à azote. Le premier pulse à $\lambda_1 = 8523 \text{ \AA}$ porte les atomes de Cesium du niveau fondamental $6s_{1/2}$ au premier niveau de résonance $6p_{3/2}$, le second réalise ensuite la transition $6p_{3/2}$, nS ou nD . La durée des impulsions laser est de l'ordre de 3 nanosecondes, leur puissance de l'ordre du kilowatt pour le premier échelon (ce qui est suffisant pour saturer la transition $6s_{1/2} - 6p_{3/2}$, et de l'ordre de quelques dizaines de kilowatt pour le second. Le premier laser à $\lambda_1 = 8523 \text{ \AA}$ est de type Hänsch. Il utilise pour colorant de l'hexacyanine III ce qui explique sa faible puissance (l'hexacyanine III a un rendement de l'ordre de 10 % de celui de la rhodamine 6G). Le second laser à $\lambda_2 = 5150 \text{ \AA}$, qui utilise la coumarine 520 est de type Littmann avec extraction de l'énergie côté réseau (voir fig. VIII-8). Ce type de laser présente l'avantage d'une bonne puissance (il est inutile d'utiliser un ampli extérieur) jointe à une relative finesse : 8 à 10 GHz. Il permet de séparer sans peine les niveaux nS et nD jusqu'à $n \approx 50$ et de saturer les transitions $6p_{3/2} \rightarrow nS$ et $6p_{3/2} \rightarrow n'D$ jusqu'à $n \approx 20$ et $n' \approx 25$ respectivement.

La région d'interaction est définie par l'intersection (à angle droit) du jet et des lasers. Le jet utilisé est un jet de Césium dont la section est de l'ordre de 5 mm. Il a une divergence de l'ordre de 1/10 et la région d'interaction est située à 3 cm de l'embouchure du jet (formé d'un faisceau de tubulures de 9 mm de diamètre). Les détails techniques concernant ce jet ont été donnés dans la thèse de 3^e cycle de J-M. Raimond⁽⁵⁷⁾. Les faisceaux des lasers à colorant sont collinéaires et ont une section au niveau du jet de l'ordre du millimètre carré. Au total la région d'interaction est cylindrique allongée de dimensions $L \times a^2$ avec

$$L \sim 5 \text{ mm}$$

$$a^2 \sim 1 \text{ mm}^2$$

En utilisant cette configuration de lasers et de jet, on est capable de préparer au maximum de l'ordre de 10^7 (10^8) atomes dans des niveaux nS (nD) avec $n \sim 30$ à 35.

La détection se faisant en ionisation par effet de champ, et le déplacement des atomes dans le jet durant le temps t_1 d'évolution libre du système (t_1 est l'intervalle entre les lasers et la rampe de champ : cf figure VIII-3) étant négligeable (comme $t_1 \sim$ quelques microsecondes, ce déplacement est inférieur ou de l'ordre du millimètre), on a intérêt à exciter les atomes entre les deux plaques du condensateur à la hauteur du multiplicateur d'électrons. C'est ce que nous avons représenté sur la figure VIII-7 b).

2) Etude expérimentale de la superradiance sur la transition 24S - 23P

En utilisant le montage décrit plus haut, nous avons pu voir la superradiance sur un grand nombre de transitions entre états de Rydberg. Avant de décrire brièvement les résultats obtenus sur les autres transitions, nous étudierons le cas particulier de la transition 24S - 23P et nous ferons différents tests pour vérifier que le phénomène observé est bien de la superradiance. Un calcul d'ordre de grandeur dans ce cas particulier nous permettra de montrer l'intérêt de cette étude. Nous verrons qu'au seuil de superradiance le nombre d'atomes émetteurs est très inférieur au nombre d'atomes présents dans les expériences de superradiance discutées aux chapitres VI et VII.

a) Calcul d'ordre de grandeur

Considérons la superradiance sur la transition $24S - 23P \ 3/2$ à $\lambda = 0,6 \text{ mm}$, le volume actif ayant 5 mm de longueur et 1 mm^2 de surface. Le temps caractéristique de superradiance est alors de :

$$T_{SR} = \frac{1}{N \Gamma \mu} \approx 2,3 \cdot 10^{-2} N^{-1} \text{ seconde} \quad (\text{VIII-1})$$

Dans cette expression Γ qui vaut 860 s^{-1} a été calculée à l'approximation Coulombienne ⁽⁶²⁾, et correspond à la transition 24S - 23P 3/2 (la superradiance se produit de manière indépendante sur les transitions 24S - 23P 1/2 et 24S - 23P 3/2 car la différence de fréquence entre ces deux transitions est telle que $\Delta\omega \times T_{\text{SR}} \gg 1$: cf. chapitre III-B 2°) et l'expression de μ est donnée par (II-II-51) (ici $\mathcal{F} = a^2/L\lambda \sim 1$ ⁽¹¹⁾).

La durée de vie T_{sp} du niveau 24S étant $\sim 10 \text{ } \mu\text{s}$ et le délai du pulse superradiant de l'ordre de $20 T_{\text{SR}}$ (voir figure II-12) avec $N \sim 10^5 - 10^6$ atomes), le seuil de superradiance ($T_{\text{D}} = T_{\text{sp}}$) correspond à $T_{\text{SR}} \sim 0,5 \text{ } \mu\text{s}$ et à $N \sim 0,5 \cdot 10^5$ atomes. Si l'on considère des délais plus courts ($T_{\text{D}} \sim 2 \text{ } \mu\text{s}$), il faut alors plutôt $N \sim 2,5 \cdot 10^5$ atomes.

Vérifions pour terminer que la superradiance a bien lieu sur la transition 24S - 23P et non sur des transitions vers des niveaux plus profonds 24S - 22P, 24S - 21P etc... Nous avons reporté sur le tableau (VIII 1) les probabilité de transition de 24 s vers n'P (n' = 23, 22, ...) ainsi que les longueurs d'onde, les facteurs μ ^(*) et les produits $\Gamma\mu$ correspondants. On vérifie sans peine que la transition 24S - 23P 3/2 correspond à la valeur maximale du produit $\Gamma\mu$ et l'émission superradiante se produira donc sur cette transition.

*) Suivant la transition considéré $\mathcal{F} = a^2/L\lambda$ n'est plus nécessairement de l'ordre de 1. Dans le cas général l'expression de μ est en première approximation : (11) :

$$\mu = \frac{3}{8\Gamma} \cdot \frac{\lambda^2}{a^2} \quad \text{pour} \quad \mu \gg 1 \quad (\text{VIII } 2a)$$

$$\mu = \frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda}{L} \quad \text{pour} \quad \mu \ll 1 \quad (\text{VIII } 2b)$$

Soit au total $\mu \sim$ plus petit $\frac{3}{8\Gamma} \cdot \frac{\lambda^2}{a^2}$ et de $\frac{3}{8} \cdot \frac{\lambda}{L}$

Transitions	Γ en s^{-1}	λ en mm	μ	$\Gamma\mu$ en s^{-1}
24S - 23P 3/2	860	.666	$4,7 \cdot 10^{-2}$	40,4
24S - 23P 1/2	482	.621	$4,1 \cdot 10^{-2}$	20,0
24S - 22P 3/2	446	.210	$5,3 \cdot 10^{-3}$	2,3
24S - 22P 1/2	233	.206	$5,0 \cdot 10^{-3}$	1,0
24S - 21P 3/2	406	.117	$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,66
24S - 21P 1/2	209	.115	$1,6 \cdot 10^{-3}$	0,33

Tableau VIII-1

b) Analyse des signaux expérimentaux

Détectée en ionisation par effet de champ, l'émission superradiante sur la transition 24S - 23P apparaît comme un transfert de population du niveau 24S vers le niveau 23P, transfert qui donne lieu à une modification de la forme du signal d'ionisation. Cependant d'autres types de transferts peuvent se produire (collisions, rayonnement thermique, émission spontanée) et il nous faut faire un certain nombre de tests pour vérifier que l'effet observé correspond bien à de la superradiance.

D'un point de vue pratique lorsque l'on observe les signaux d'ionisation, au coup par coup, l'effet de superradiance se distingue de tout autre effet de transfert de façon triviale. Le phénomène de superradiance est en effet un phénomène à seuil et la forme des signaux dépend de manière dramatique, du nombre total d'atomes excités. D'un coup à l'autre du laser, ce nombre change (du fait des fluctuations d'intensité et de fréquence des lasers) et le pourcentage d'atomes transférés par superradiance change de façon dramatique. La figure (VIII-9-b) illustre cet effet. Les différentes courbes correspondent à différents signaux d'ionisation pris avec les mêmes conditions expérimentales (aux fluctuations des lasers près). Le temps d'évolution libre des atomes est ici de 2 μs . Les aires des courbes d'ionisation (correspondant aux parties hachurées de la figure VIII-9-b) sont proportionnelles aux nombres d'atomes N. On voit très nettement, au fur et à mesure que N augmente, que la forme des courbes change, et que le pourcentage d'atomes transférés dans le niveau 23P croît également. Sur la figure (VIII-9-b), on voit que ce pourcentage peut passer de 0 % (courbe inférieure) à presque 100 % (courbe supérieure).

Il est possible d'étudier quantitativement cet effet de seuil en mesurant le coefficient de proportionnalité liant l'aire des courbes de la fi-

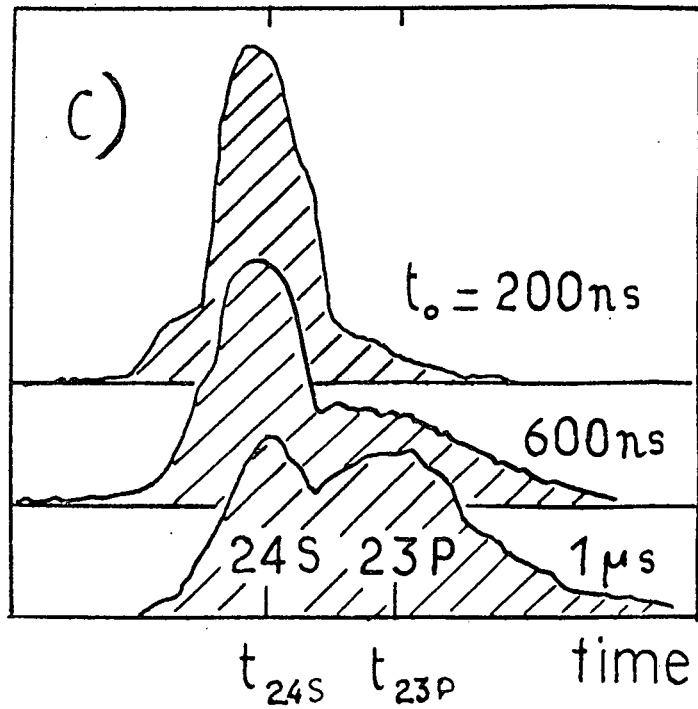
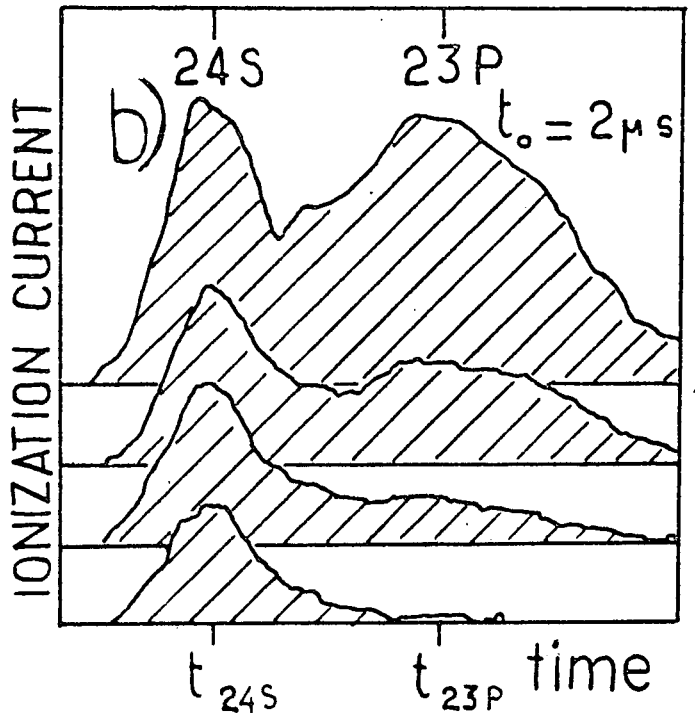
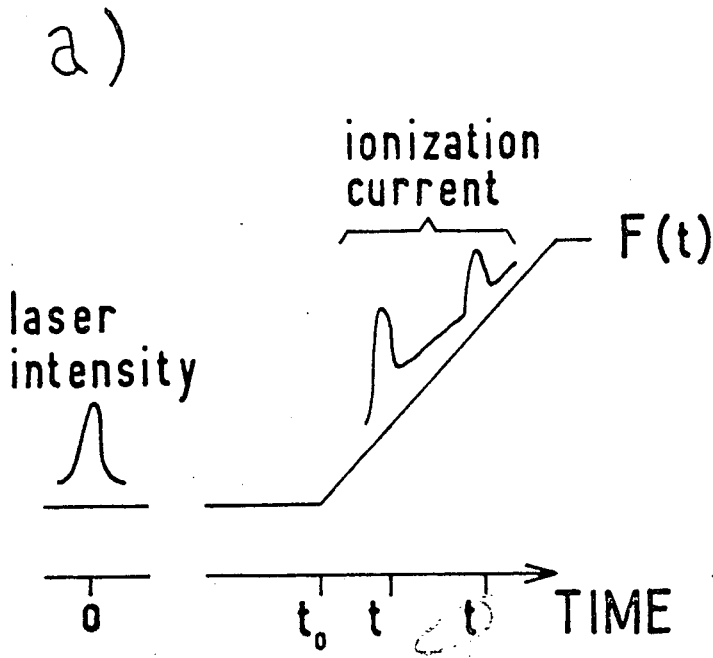


Figure VIII-9

- a) Rappel du principe de détection
- b) Signaux d'ionisation pour $t_1 = 2 \mu s$. et $N \approx 2.10^5, 4.10^5, 6.10^5$ et $1.2 \cdot 10^6$ (de bas en haut)
- c) Signaux d'ionisation pour $N \approx 2.10^6$ pour $t_1 = 0.200, 0.6$ et $1 \mu s$ (de haut en bas).

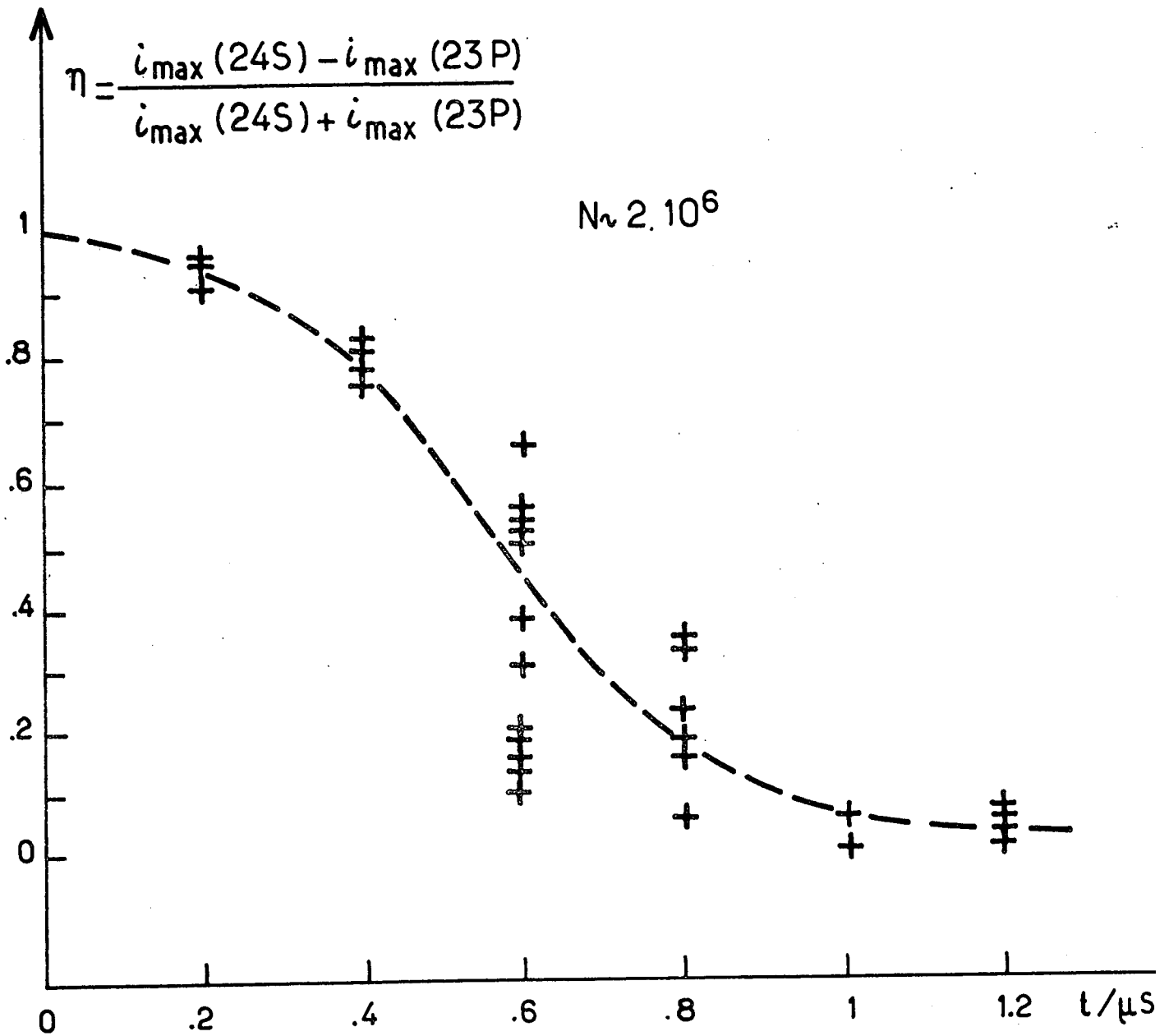


Figure VIII -10

gure (VIII-9) au nombre d'atomes N . Il suffit pour cela d'atténuer d'un facteur connu (par exemple 10^5) le laser à λ_2 de la figure (VIII-7), qui notons le, ne sature jamais la transition $6P\ 3/2 - 24S$. Seuls quelques atomes sont alors préparés dans le niveau $24S$ à chaque coup du laser. En amplifiant suffisamment le signal d'ionisation, on peut compter ces atomes. Bien entendu, ce nombre change d'un coup du laser à l'autre et il faut, pour déterminer le coefficient de proportionnalité liant l'aire au nombre d'atomes excités, comparer la statistique des aires, avec celle des nombres d'atomes détectés en régime de comptage.

Nous avons fait cette opération et nous avons analysé un grand nombre de signaux en régime analogique et de comptage à l'aide du système d'enregistrement digital sur magnétophone (Nagra). En supposant que le rendement quantique du processus d'ionisation est de 100 %, les courbes de la figure (VIII-9-b) correspondent alors respectivement, de bas en haut, à $2 \cdot 10^5$, $4 \cdot 10^5$, $6 \cdot 10^5$ et $12 \cdot 10^5$ atomes. L'incertitude sur ces valeurs est, de l'ordre de 50 %. Le nombre d'atomes seuil correspondant à un délai t_D de 2 μs est au vu de la figure (VIII-9-b), de l'ordre de $5 \cdot 10^5$ atomes, ce qui est en excellent accord avec le calcul d'ordre de grandeur précédent. On notera, ici que la méthode de mesure du nombre d'atomes excités N est très directe. Il est donc possible d'évaluer ce nombre beaucoup plus facilement et avec une bien meilleure précision que dans le cas des expériences sur cellule dans le proche infrarouge (décrits au chapitre VI et VII, mais également en référence (54)).

En plus de cet effet de seuil, on observe un changement de forme des signaux de superradiance lorsque l'on fait varier le temps d'évolution libre t_1 . La figure (VIII-9-c) illustre ce dernier effet. Pour un même nombre d'atomes (même aire hachurée), la forme et le pourcentage d'atomes transférés change suivant t_1 . Pour $t_1 = 200$ ns, (courbe du haut), t_1 est inférieur au délai t_D et il n'y a pas de transfert vers $23P$. Pour $t_1 = 600$ ns, t_1 est de l'ordre de t_D , le transfert est en cours. Pour $t_1 = 1 \mu s$, t_1 est supérieur à t_D et la plupart des atomes ont été transférés vers le niveau $23P$ (VIII 9c courbe du bas).

En répétant la mesure pour toutes les valeurs de t_1 on peut reconstituer la courbe de transfert des populations. La figure (VIII-10) représente une telle courbe. Comme il est difficile de mesurer séparément l'aire des pics d'ionisation de $24S$ et $23P$, car ces pics se recouvrent partiellement, nous nous sommes contentés ici de mesurer les maxima : i_{\max} de courant d'ionisation, $i_{\max}^{(24S)}$ et $i_{\max}^{(23P)}$, de chacun de ces pics d'ionisation et de porter :

$$\eta = \frac{i_{\max}(24S) - i_{\max}(23P)}{i_{\max}(24S) + i_{\max}(23P)} \quad (\text{VIII-3})$$

en fonction du délai, en sélectionnant parmi l'ensemble des courbes celle dont l'aire totale est comprise entre 73 et 83 (unités arbitraires) ce qui correspond à $N \sim 2 \cdot 10^6$ atomes $\pm 7\%$. La dispersion des points autour de la courbe de transfert moyenne en pointillés, provient d'une part des variations du nombre d'atomes d'une courbe à l'autre, d'autre part des fluctuations intrinsèques du délai de l'émission superradiante étudiées au chapitre II, § III et IV.

2) Extension des expériences aux autres niveaux de Rydberg du Césium

Bien entendu, la transition 24S - 23P sur laquelle nous avons étudié l'émission superradiante ne joue aucun rôle particulier et l'on peut observer le même phénomène de superradiance sur d'autres transitions entre niveaux de Rydberg.

a) Superradiance sur les transitions nD - nP

En plus des transitions homologues nS - (n-1)P pour $n \sim 25$, nous nous sommes intéressés aux transitions superradiantes ayant pour niveau de départ un niveau nD. La figure (VIII-11) nous présente un signal de superradiance typique sur la transition 22D - 22P, la durée d'évolution libre étant ici $t_1 = 4,5 \mu\text{s}$. On remarquera que les deux pics d'ionisation des niveaux 22D et 22P sont nettement mieux séparés que pour la transition 24S - 23P (voir figure (VIII 9)). Ceci peut être relié au fait que la différence des nombres quantiques effectifs n^* ($n^* = n - \text{défaut quantique}$) est plus grande ici (de l'ordre de 1 au lieu de 0,5). Nous avons évalué expérimentalement le seuil en nombre d'atomes de cet effet de superradiance. Le seuil obtenu est nettement plus élevé que pour la transition 24S - 23P (facteur 5 à 10). Ce résultat est en bon accord avec le calcul d'ordre de grandeur : nous avons évalué $\Gamma\mu$ pour les différentes transitions issues de 22D (le calcul est similaire à celui fait au § B-2°-a)) et les résultats sont résumés sur le tableau (VIII-2).

Transitions	Γ en s^{-1}	λ en mm	μ	$\Gamma\mu$ en s^{-1}
22D - 23P 3/2	19,6	3,62	0,27	5,3
22D - 22P 3/2	813	0,28	$0,93 \cdot 10^{-2}$	7,6
22D - 21P 3/2	1068	0,13	$1,7 \cdot 10^{-3}$	1,8
22D - 20P 3/2	1290	0,084	$8,4 \cdot 10^{-4}$	1,1

Tableau VIII 2

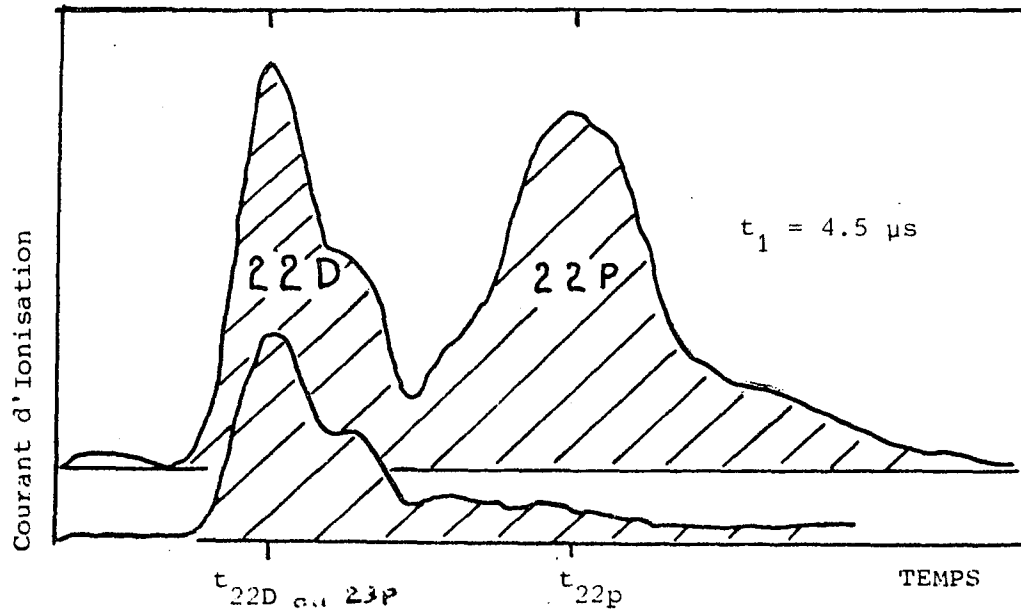


Figure VIII-11: Superradiance sur la transition 22D - 22P
($t_1 = 4.5 \mu s$)

- courbe du bas : au dessous du seuil, seul le niveau 22D est peuplé
- courbe du haut : au dessus du seuil, on observe le transfert 22 D - 22P

On retrouve bien un facteur 5 à 10 sur le seuil de superradiance : $\Gamma\mu = 7,6 \text{ s}^{-1}$ pour la transition 22D - 22P 3/2 alors que l'on avait $\Gamma\mu = 40,4 \text{ s}^{-1}$ (voir tableau VIII-1) pour la transition 24S - 23P 3/2. On notera également sur le tableau (VIII-2) que la transition 22D - 22P 3/2 est la transition de plus faible seuil (de plus grand $\Gamma\mu$) (*).

b) Superradiance en cascade

En augmentant le nombre d'atomes excités, il est possible d'observer des phénomènes de superradiance en cascade. La figure (VIII 12) présente un tel phénomène. On observe après la superradiance sur la transition 24S - 23P, un effet de superradiance sur la transition 23P - 23S, le délai étant ici $t_1 = 8 \mu\text{s}$. Si l'on augmente encore le nombre d'atomes excités, on peut observer des transferts en cascade vers des niveaux encore plus profonds, mais la forme des signaux d'ionisation devient trop complexe pour être analysée simplement (les pics d'ionisation des différents niveaux atteints se chevauchent).

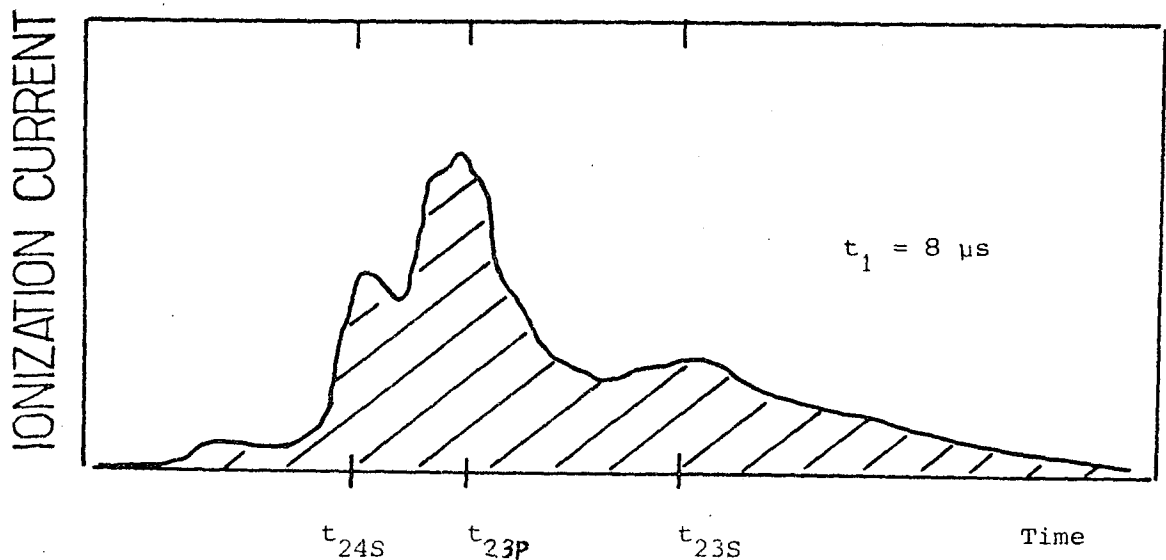


Figure VIII 12 : Superradiance en cascade sur les transitions 24S - 23P puis 23P - 23S avec $t_1 = 8 \mu\text{s}$. On observe les pics d'ionisation correspondants aux niveaux 24S- 23P et 23S

(*) D'un point de vue expérimental, il faut remarquer que les niveaux 22D et 23P sont d'énergie très voisines et que ces niveaux s'ionisent dans le même champ. Il n'est donc pas possible d'observer expérimentalement un transfert de populations de 22D vers 23P.

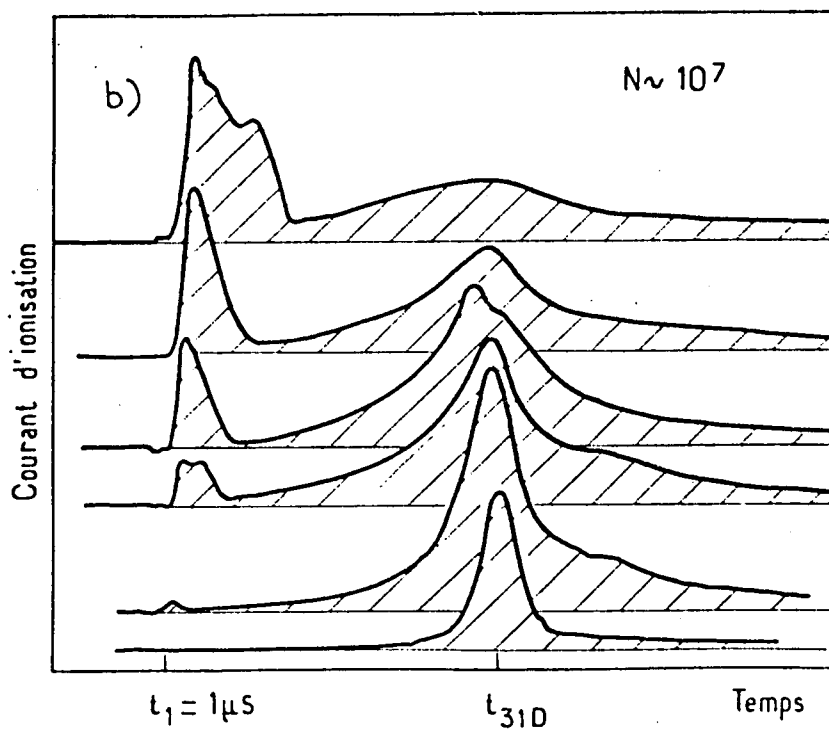
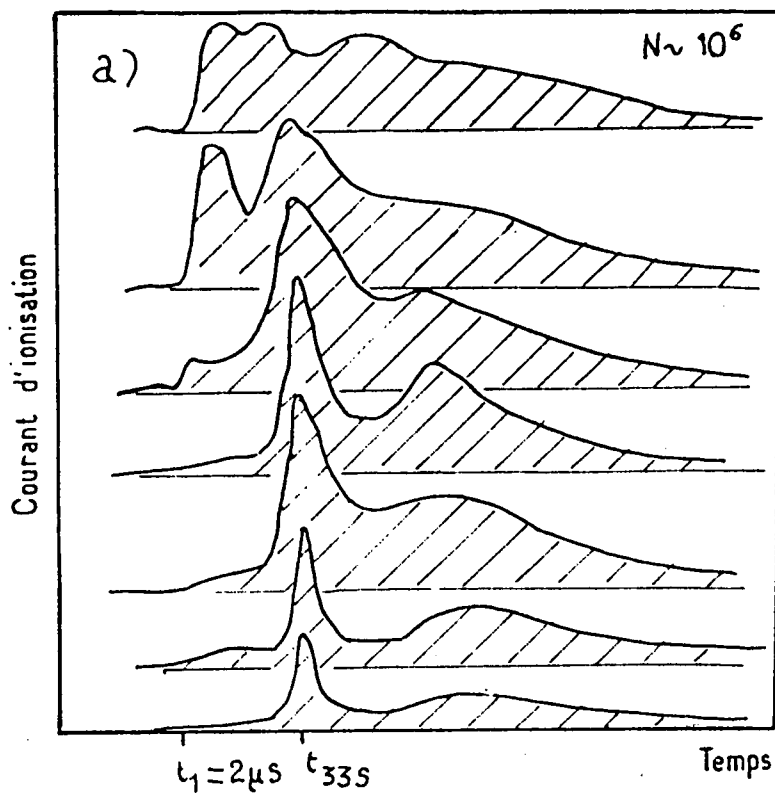


Figure VIII -13

c) Transferts vers des niveaux voisins de la limite d'ionisation

En cherchant à étudier la superradiance, pour des niveaux de Rydberg plus proche de la limite d'ionisation ($n \sim 30$ à 40) nous avons observé, en plus du transfert vers les niveaux plus profonds, un transfert, vers des niveaux très excités voisins de la limite d'ionisation.

La figure (VIII-13) illustre ces effets. Elle représente les signaux d'ionisation observés en excitant à $t = 0$ le niveau 33S (figure VIII-13-a) ou le niveau 31D (figure VIII-13-b). Chaque série de courbes (a ou b) a été prise dans les mêmes conditions expérimentales, et correspond à une réalisation particulière (moyennage sur un coup). D'une courbe à l'autre, le nombre d'atomes excités N peut changer (fluctuations du laser), et l'on observe, lorsque ce nombre N dépasse un certain seuil ($\sim 10^6$ si l'on part du niveau 33S et $\sim 10^7$ pour 31D) une modification très brutale de la forme des signaux d'ionisation. On notera, au dessus du seuil, un effet de transfert vers des niveaux voisins de la limite d'ionisation. Cet effet, particulièrement visible dans le cas où l'on excite initialement le niveau 31D (figure VIII-13-b), n'a pu être compris jusqu'ici.

Au total, l'interprétation des signaux observés sur la figure VIII-13 reste un problème ouvert. Indiquons simplement, que le seuil des effets observés $\sim 10^6$ (ou $\sim 10^7$) correspond assez bien au seuil de superradiance (*) sur la transition $nS - (n-1)P$ (ou $nD - nP$) avec $n^* \sim 31$ et semble inférieur au seuil attendu pour un effet de transfert par collision entre atomes excités (un transfert important en un temps $t_1 = 1 \mu s$ pour 10^7 atomes dans un volume a^2L avec $a = 1 \text{ mm}$ et $L = 5 \text{ mm}$ correspond à une section efficace $\sigma \sim 1.5 \cdot 10^8 \text{ \AA}^2$, alors que la valeur de la section efficace de collision entre atomes excités évaluée en référence (75) est de $\sigma \sim 5 \cdot 10^6 \text{ \AA}^2$ (cinq fois la section efficace géométrique).

4) Conclusion

Ces expériences (et en particulier l'étude de la superradiance du niveau 24S du Cesium) nous ont permis de vérifier que l'on pouvait réaliser des expériences de superradiance dans un domaine de longueur d'onde complètement différent du domaine proche infra-rouge ($\lambda \sim 1 \text{ mm}$ au lieu de $\lambda \sim 3 \mu$) et avec des nombres d'atomes coopérant beaucoup plus petits ($\sim 10^5$) que dans toutes les expériences de superradiance qui ont précédé (10^8 à 10^9 pour les expériences dans le proche infra rouge⁽⁷¹⁾⁽³⁰⁾, 10^{12} pour l'expérience de Feld sur la molécule de

(*) Seuil correspondant à $t_D \sim t_1$

$H_F^{(26)}$, 10^{11} à 10^{12} pour les expériences de superradiance sur cellule dans les niveaux de Rydberg proche : $n \sim 13^{(10)}$.

Par rapport aux expériences dans le proche infra-rouge, on peut noter ici que la superradiance démarre non sur le bruit d'émission spontané, mais sur le bruit thermique de rayonnement du corps noir à la température ambiante. Au démarrage de l'émission, ce bruit est en effet $KT/h \nu_{SR}$ ($KT/h\nu_{SR} \simeq 55$ pour $\lambda_{SR} = 1$ mm) fois plus gros que le bruit d'émission spontané. L'émission superradiante apparaît alors comme une amplification transitoire du rayonnement thermique.

Notons pour finir, que les effets de cascades peuvent être très importants, et que le nombre de niveaux couplés par superradiance peut être très grand. On peut se demander dans ces conditions, s'il ne serait pas intéressant de favoriser plus particulièrement une transition afin de simplifier l'étude. C'est ce que nous allons faire au prochain paragraphe (§ C) en augmentant le couplage radiatif de certains modes par adjonction d'une cavité.

C- La superradiance des niveaux de Rydberg du Sodium en présence d'une cavité microonde (le maser en régime superradiant).

1°) Principe des expériences .

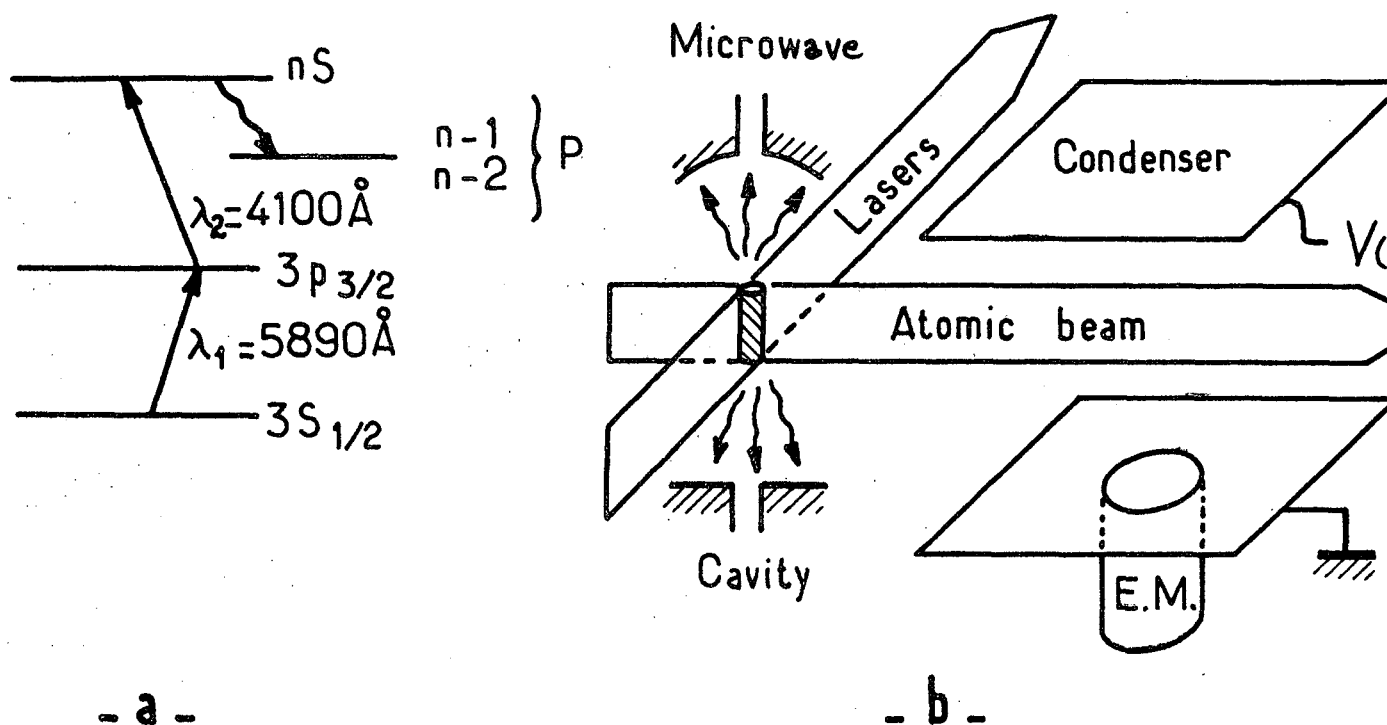


Figure VIII 14

Les expériences maser (superradiance en cavité), sont tout à fait similaires aux expériences de superradiance sans cavité décrites au § B. Elles ne diffèrent que par le choix de l'alcalin : il s'agit de sodium au lieu de Césium (voir schéma des niveaux sur la figure VIII 14a), et que par la présence de la cavité (voir figure VIII 14b). Cette cavité peut être mise à résonance sur une transition couplant le niveau nS initialement préparé à $t=0$ (niveau de départ de la transition maser) à un niveau $n'P$ (niveau d'arrivée de la transition maser) avec $n-n'=1$ ou 2 . Si la cavité est à

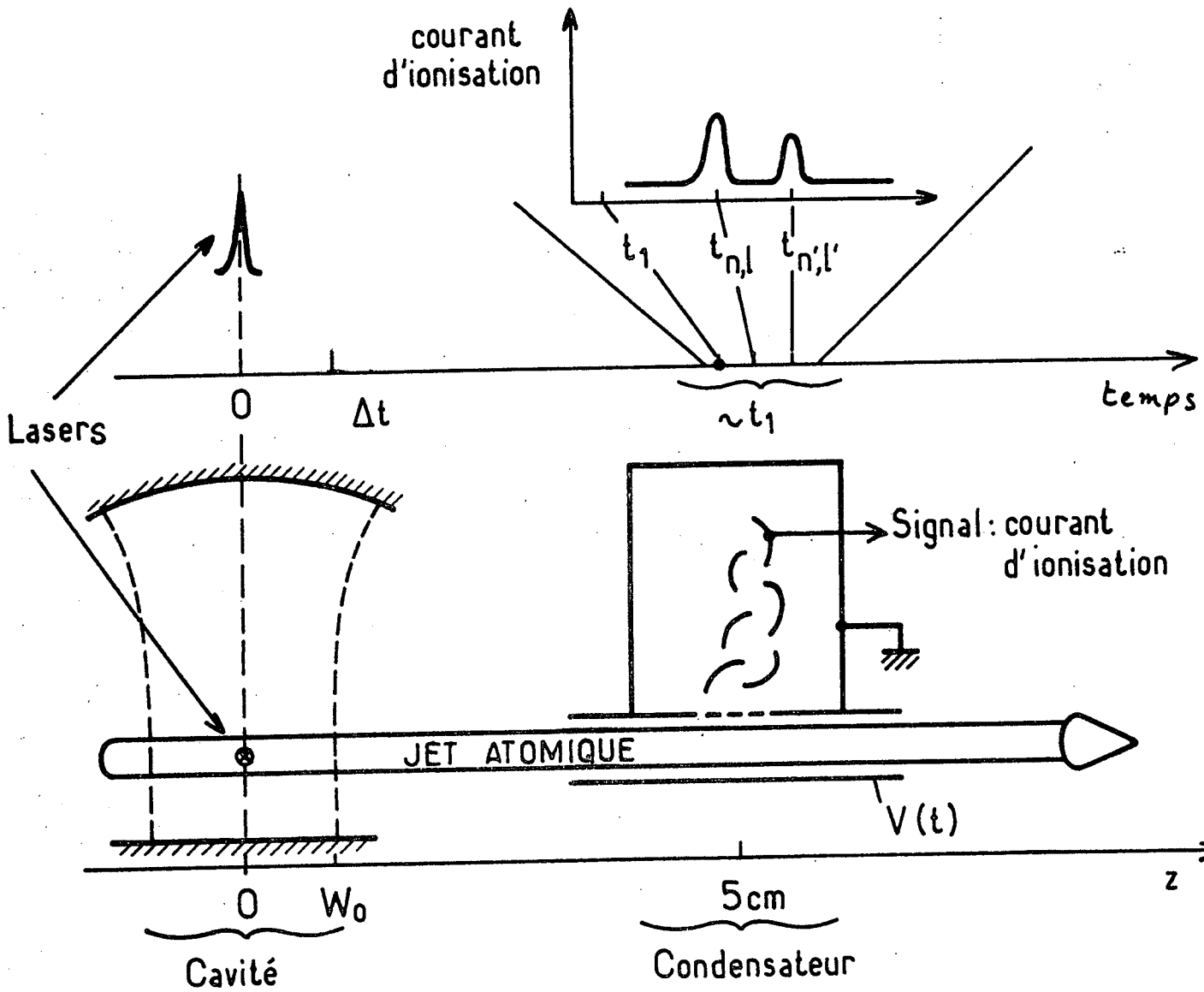


Figure VIII 15

résonance , et si le nombre d'atomes est suffisant, on observe, une émission maser sur la transition $n^{\text{S}} - n^{\text{P}}$ à λ_{MASER} , émission qui s'accompagne d'un transfert des atomes dans le niveau n^{P} . C'est ce transfert qui est observé en ionisation par effet de champ.

Malheureusement pour des raisons d'encombrement , il n'est pas possible d'ioniser les atomes à l'intérieur de la cavité, aussi a t'on placé le système d'ionisation par effet de champ (condensateur et multiplicateur d'électrons) à l'extérieur de celle-ci, en profitant du fait que les atomes se déplacent dans le jet.

La figure VIII-15 illustre la procédure utilisée et indique les différentes périodes de l'évolution des atomes. De 0 à Δt les atomes sont couplés à la cavité et peuvent coopérer à l'émission maser. De Δt à t_1 , les atomes transitent de la cavité au condensateur ; c'est essentiellement durant cette période que les effets parasites autres que le rayonnement maser étudié peuvent se produire (émission spontanée vers des niveaux peu excités, couplage entre niveaux de Rydberg sous l'effet des collisions ou du rayonnement thermique . Enfin à $t = t_1$, la rampe de champ est appliquée aux plaques du condensateur) et les atomes situés à la hauteur du multiplicateur d'électrons sont ionisés (peu après t_1), à t_{ns} (pour les atomes dans le niveau n^{s}) et $t_{\text{n,p}}$ (pour les atomes dans le niveau n^{p}).

Bien entendu il n'est pas possible d'étudier la dynamique de cette émission Maser (comme nous l'avions fait pour l'émission superradiante en absence de cavité) car le temps Δt pendant lequel le système évolue à l'intérieur de la cavité (temps de transit des atomes dans la cavité) ne peut être choisi arbitrairement. Il faut en effet, que les atomes de sodium (qui se déplacent à une vitesse thermique : $\sim 600 \text{ m/s}$), aient le temps d'aller de la cavité au système de détection (distant de 5cm). On doit donc choisir t_1 de l'ordre du temps de vol des atomes de la cavité au détecteur ($100 \mu\text{s}$)^(*) et l'on a par voie de conséquence : (cf figure VIII 15);

$$\Delta t \sim t_1 \times (W_0 / 5\text{cm}) \quad (\text{VIII-4})$$

*) En fait pour que le signal reste notable il faut que t_1 , soit aussi plus petit que ou de l'ordre de la durée de vie des niveaux bordant la transition maser . Au total nous avons pris en général t_1 égal à $30 \mu\text{s}$.

De plus, les atomes étudiés (ionisés à $t = t_1$) correspondent à une seule classe de vitesse longitudinale v_1 , ($v_1 = 5\text{cm}/t_1$ cf VIII-15°) et l'aire des signaux d'ionisation est plus faible. Pour relier cette aire au nombre d'atomes, il faut comparer les signaux détectés ici (lasers croisant le jet à l'intérieur de la cavité avec $t_1 \sim 30\mu\text{s}$) avec ceux que l'on obtient en régime de comptage, en excitant les atomes entre les plaques du condensateur avec $t_1 \sim 0$. (Cette dernière configuration correspond, rappelons le, à la configuration utilisée pour étudier la superradiance : cf § B)

2°) Description du montage expérimental.

Le montage expérimental, que nous avons utilisé pour réaliser les expériences maser, est décrit en détail dans la thèse d'Etat de Claude FABRE : (65) : Ce montage a en effet été utilisé pour étudier par spectroscopie microonde les défauts quantiques des niveaux de Rydberg du sodium (66) (65). Sans entrer dans tous les détails, donnons quelques indications concernant certains éléments de l'appareillage.

a) Les lasers :

L'excitation en échelon des niveaux nS (voir figure VIII 14) du sodium, se fait à l'aide de deux lasers à colorants pompés par laser à azote (Molelectron UV 1000) . Ces lasers sont de type Hänsch (60) avec télescope (largeur spectrale 15 GHz). Le premier (1er échelon à la longueur d'onde $\lambda_1 = 5890 \text{ \AA}$, à une puissance de quelques centaines de watts, ce qui suffit à saturer la transition $3S_{1/2} - 3P_{3/2}$. Le second (2ème échelon) à $\lambda_2 \sim 4100 \text{ \AA}$, utilise un étage amplificateur, et a une puissance de l'ordre de 50 KW. Il est capable de saturer les transitions $3P_{3/2} - nS$ jusqu'à $n \sim 20$, et peut peupler efficacement les niveaux nS jusqu'à $n \sim 40$ ($\sim 1\%$ pour le niveau $40s$)

b) Le jet atomique :

Il s'agit d'un jet thermique dont l'embouchure de diamètre 4mm est située à 7cm de la cavité. Il permet d'atteindre des densités de l'ordre de $3 \cdot 10^{12}$ atomes par cm^3 . Un diaphragme (hauteur \times largeur $\sim 2\text{cm}^2$) limite la dimension du jet au voisinage de la région d'interaction (cavité).

Avec les lasers décrits plus haut, pour une section de faisceau de 1mm^2 , le volume actif est de $\sim 10\text{mm}^3$, et le nombre maximum d'atomes que l'on est capable de préparer est de $\sim 5 \cdot 10^6$.

c) La cavité

Pour réaliser les expériences maser nous avons utilisé deux cavités différentes, dont les côtes principales sont données sur la figure (VIII-1.6)

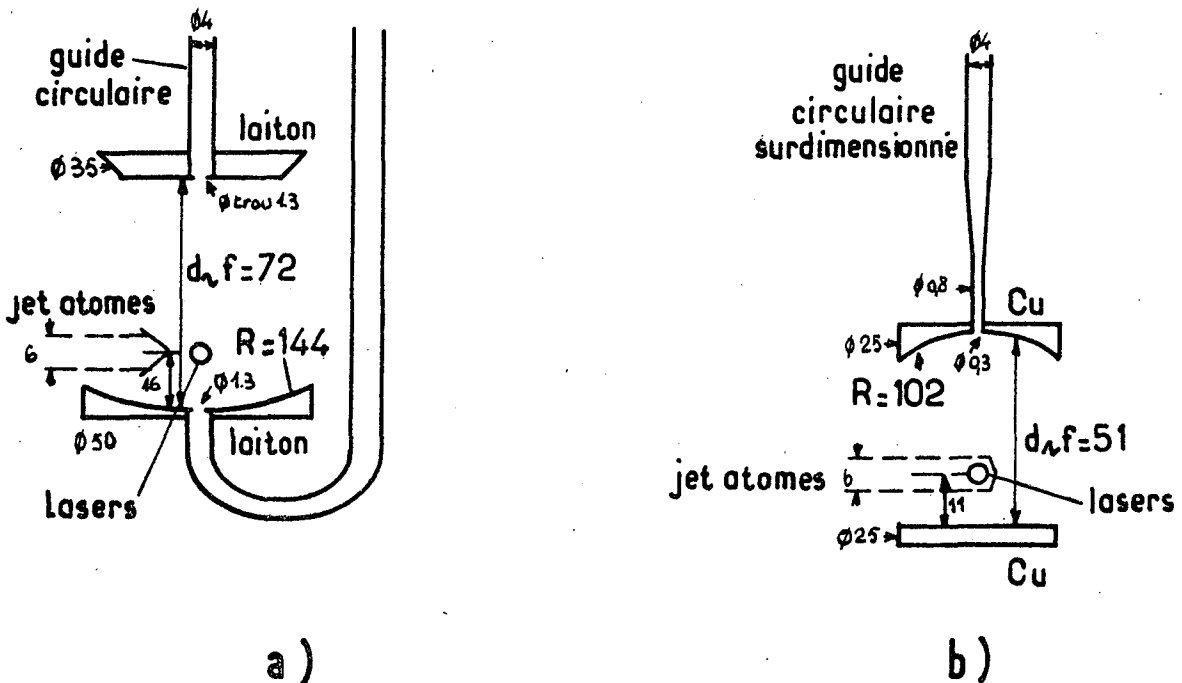


Figure VIII 16

La première cavité, (figure VIII 16) conçue initialement pour réaliser des expériences de résonances microonde de haute résolution (66) est en laiton et sa focale est de 72mm. Elle est optimisée pour fonctionner sur la bande 60-90 GHz. Son coefficient de surtension Q est de $2,5 \cdot 10^4$ à 7 GHz. Il est encore de 10^4 à 100 GHz. Ces valeurs correspondent aux valeurs mesurées par transmission (la cavité est couplée à deux guide). On peut bien sûr

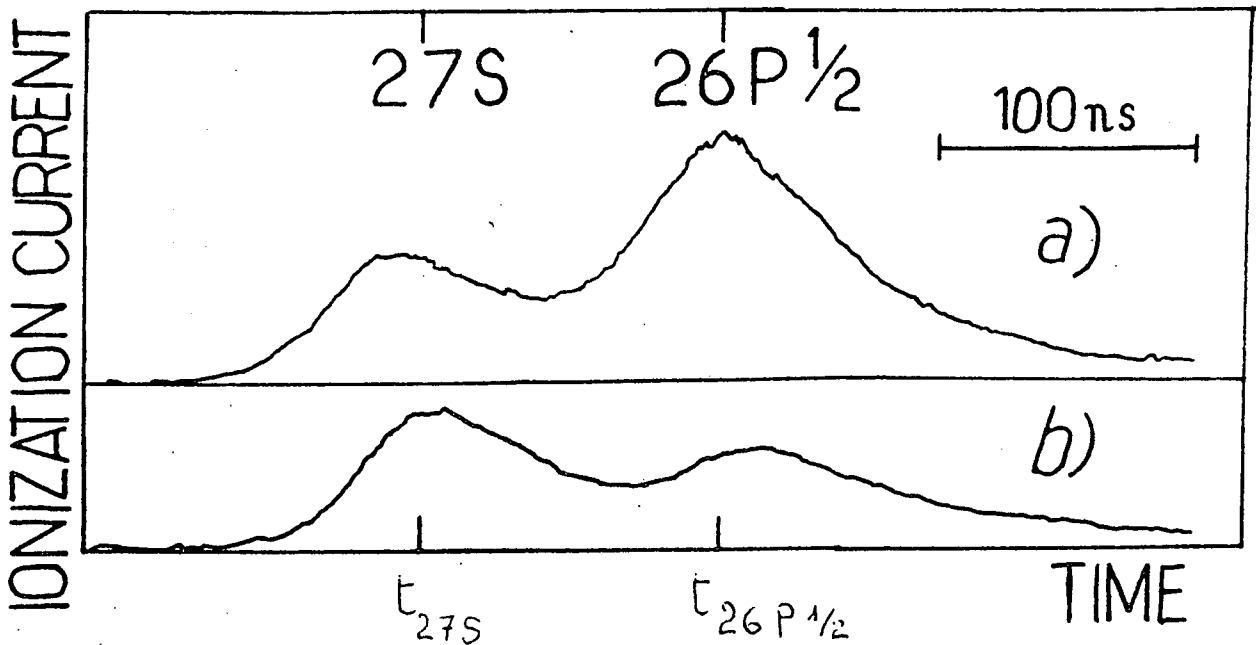


Figure VIII-17 :

Signal d'ionisation moyenné (1000 coups obtenu après excitation du niveau 27 S. La rampe de champ étant retardé de $t_1 = 30\ \mu\text{s}$ par rapport à l'excitation laser. La cavité utilisée ici est la cavité en cuivre de 51 mm de focale (figure VIII 16b. Le pic d'ionisation à t_{27S} ($t_{26P\frac{1}{2}}$) est proportionnel à la population dans le niveau 27s ($26P_{1/2}$) à l'instant t_1 .

Les deux traces correspondent respectivement aux situations où l'on a

- a) la cavité à résonance .
- b) la cavité hors résonance .

La différence entre les traces a) et b) met clairement en évidence l'effet maser.

utiliser cette cavité à des fréquences ν plus élevées, et nous avons observé avec elles, des émissions maser jusqu'à

$$\nu = 336 \text{ GHz}$$

La seconde cavité (figure VIII 16b) a été conçue pour avoir un facteur de surtension Q plus élevé : elle est en cuivre et n'est couplée qu'à un seul guide. et pour fonctionner à plus haute fréquence : optimale à 200 GHz, elle a pu être utilisée à 946 GHz. Le coefficient de surtension Q , qui est certainement meilleur que pour l'autre cavité n'est malheureusement pas mesurable (pas de mesure en transmission). Certainement supérieur à 20000, Q est probablement de l'ordre de 40 000 pour $\nu \sim 200$ GHz.

3°) Mise en évidence de l'effet Maser sur la transition 27 S - 26 P :

En utilisant le montage expérimental décrit plus haut nous avons pu observer, en ionisation par effet de champ, des signaux maser correspondants à des transitions entre niveaux de Rydberg.

La figure (VIII-17) représente un signal expérimental typique mettant en évidence l'émission maser sur la transition 27 S - 26 P_{1/2}. On observe deux pics correspondant à l'ionisation des atomes dans les niveaux 27S et 26P (il s'agit en fait ici du niveau 26 P_{1/2}). La présence du pic 26P traduit le transfert des atomes de 27S vers 26P. Ce transfert est dû,

- d'une part au rayonnement thermique à 300K sur tous les modes du champ électromagnétique, qui agit, à l'intérieur et à l'extérieur de la cavité, pendant l'intervalle de temps t_1 .

- d'autre part au rayonnement maser des atomes eux mêmes, présent dans le seul mode propre de la cavité pendant un temps beaucoup plus court (inférieur ou égal à l'intervalle de temps Δt pendant lequel les atomes sont présents dans la cavité, cf figure VIII -14) . Le transfert maser étant résonnant avec l'accord de cavité, la différence très nette entre les courbes a et b de la figure (VIII-17) , prises à résonance (fig VIII 17a) et hors résonance (figure VIII 17b) de la cavité, met clairement à évidence la présence d'un effet maser sur la transition 27S - 26 P_{1/2} .

En balayant la longueur d de la cavité on observe des signaux maser résonnants similaires à ceux de la figure (VIII-17) pour des positions de la cavité distantes de :

$$\Delta d = \frac{1}{2} \lambda_{27S - 26P_{1/2}}$$

Pour chacune de ces positions, la cavité est en effet résonnante pour la transition maser $27S - 26P_{1/2}$, ce qui confirme bien l'interprétation donnée des signaux de la figure VIII-17). (Nous avons d'ailleurs vérifié directement, lorsque nous disposions de sources microonde à la fréquence maser étudiée que les positions d'accord de cavité obtenues en observant les signaux masers, correspondaient aux fréquences des transitions microondes que nous avions mesuré précédemment).

En balayant la longueur d de la cavité on observe également d'autres positions d'accord qui correspondent à la transition $27S - 26P_{3/2}$. En mesurant les longueurs de cavité associée à ces différentes résonances on peut alors en déduire la structure fine du niveau $26P$. On utilise ainsi le bruit thermique amplifié par le milieu comme source microonde pour faire des mesures spectroscopiques dans les niveaux de Rydberg. Les résultats spectroscopiques de cette étude ont été reportés dans la thèse de C. FABRE⁽⁶⁵⁾.

4°) Extension des expériences aux autres niveaux de Rydberg du Sodium

Comme dans le cas des expériences de superradiance sur les niveaux de Rydberg du Césium, il est possible ici d'étendre l'étude à un grand nombre d'autres transitions entre niveaux de Rydberg.

La figure (VIII-18) présente le diagramme des niveaux de Rydberg du Sodium pour $33 \geq n \geq 22$ et indique l'ensemble des transitions masers observées ainsi que leurs fréquences en MHz. Les expériences ont été faites en utilisant - soit la cavité laiton de 72mm de focale, optimale à 70 GHz, pour les transitions dans les niveaux les plus excités (transition issue de 33S). - soit plus généralement la cavité cuivre de 51 millimètre de focale, optimale à 200 GHz pour les autres transitions.

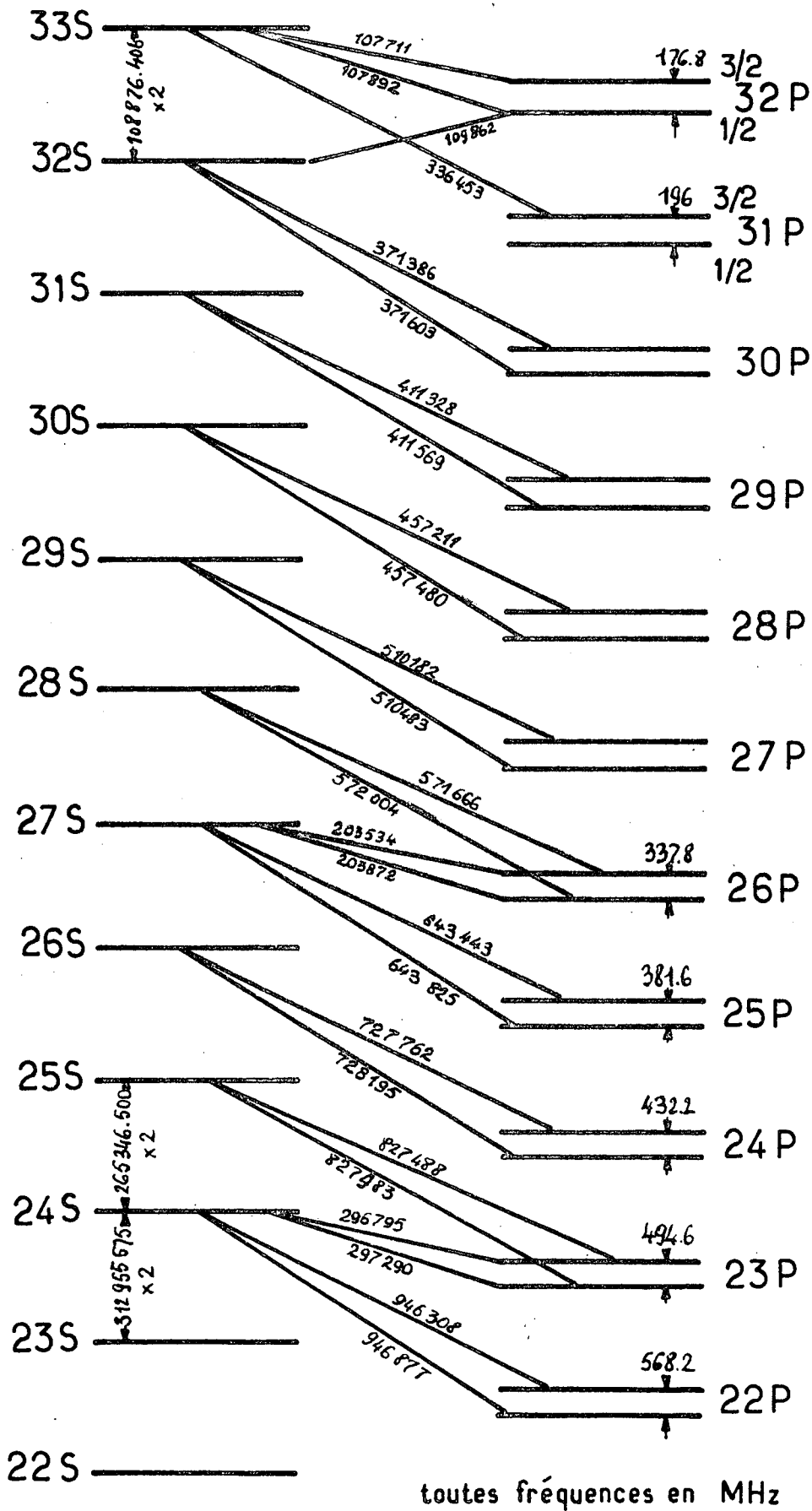


Figure VIII 18

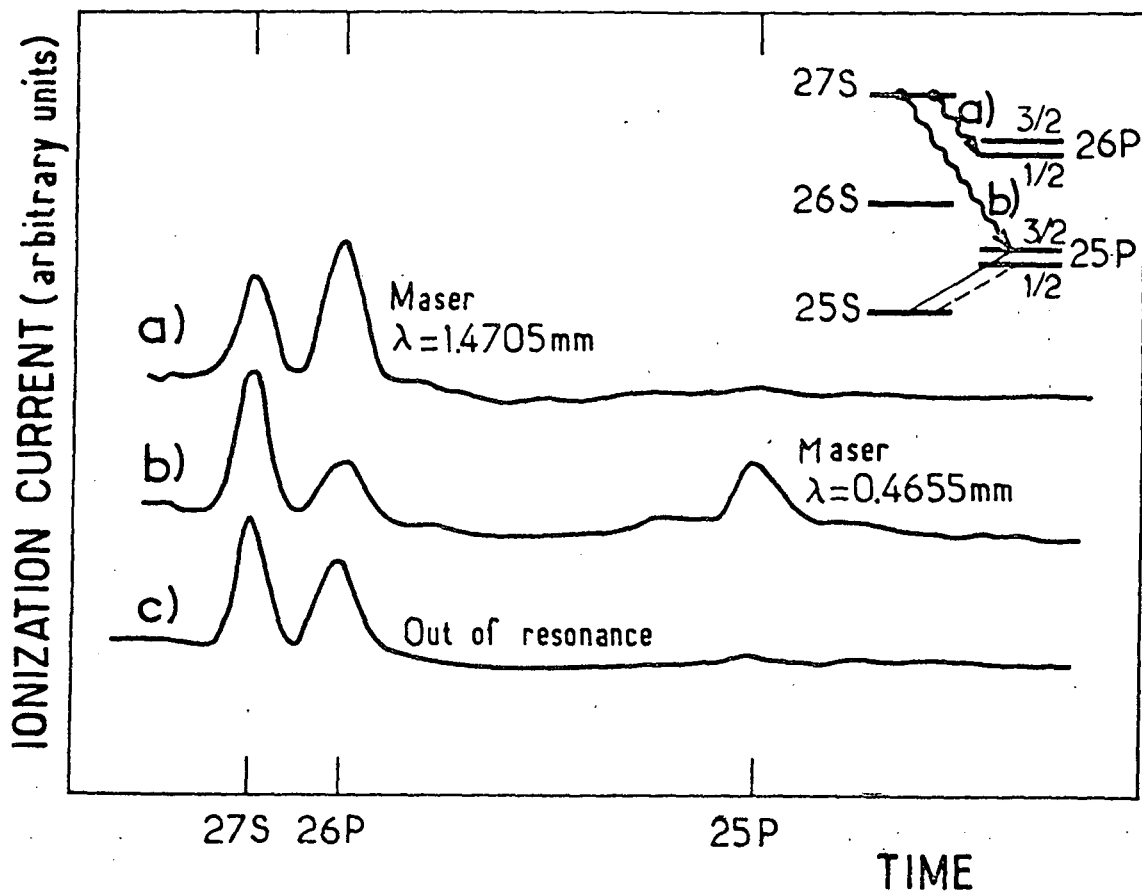


Figure (VIII-19) : Signaux d'ionisation (moyennés 100 coups) obtenus après excitation du niveau 27S ($t_1 = 30 \mu s$, cavité

cuivre de focale 5 mm)

a) La cavité est accordée à la fréquence de la transition maser 27S - 26P 1/2 .

b) La cavité est accordée à la fréquence de la transition maser 27S - 25P 3/2 .

c) La cavité est hors résonance (on observe néanmoins un transfert partiel vers 26P. Ce transfert est superradiant : comparer à b)

Au total a), b) et c) illustrent la possibilité de sélectionner le niveau final de la transition maser par un accord judicieux de la cavité.

En encart : Schéma des niveaux correspondants

A noter les transitions testées par application d'une microonde

- Ligne en trait plein : la microonde résonnante à la fréquence correspondant à 25S - 25P 3/2 modifié le signal laser b) (test positif).

- Ligne en pointillés : La microonde résonnante à la fréquence correspondant à 25S - 25P 1/2 ne modifie pas le signal maser b) (test négatif).

Ces deux tests permettent d'identifier le signal maser b) comme correspondant à la transition 27S - 25P 3/2.

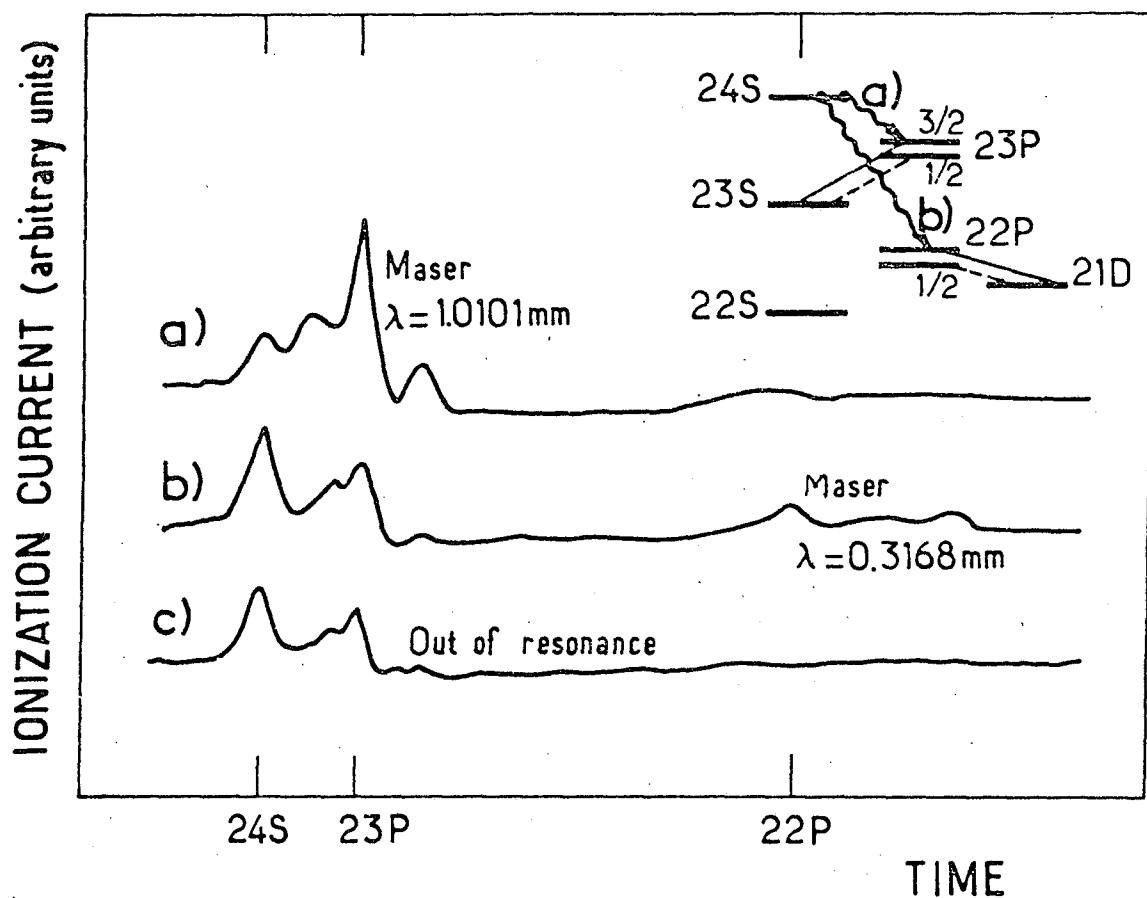


Figure (VIII-20) :

Signaux d'ionisation (moyenné 100 coups) obtenus après excitation du niveau 24S, ($t_1 = 30 \mu\text{s}$, cavité cuivre de 51 mm de focale)

- a) Cavité accordée sur la transition maser 24S - 23P 3/2
- b) Cavité accordée sur la transition maser 24S - 22P 3/2
- c) Cavité accordée hors résonance

En encart avec le schéma des niveaux et les transitions test pour identifier les niveaux finaux (voir légende figure VIII 19)

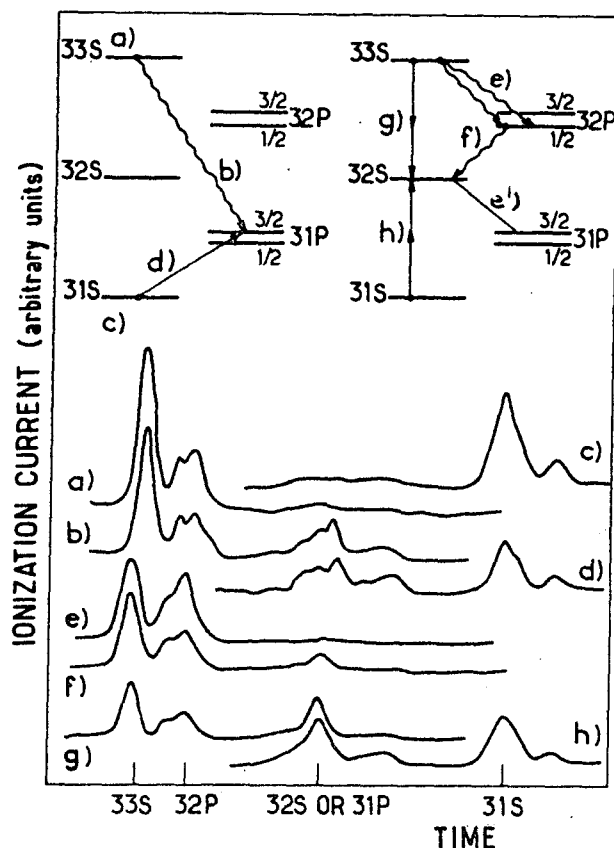


Figure (VIII-21) :

Signaux d'ionisation mesurée sur 100 coups obtenus après excitation du niveau 33S, le délai t_1 est de 30 μ s, la cavité utilisée est la cavité de 72 mm de focale.

a) Excitation de 33S avec cavité hors résonance. On observe un transfert thermique vers 32P.

b) Excitation de 33S et cavité à résonance sur la transition 33S - 31P 3/2. On observe un transfert vers 31P 3/2 .

c) Excitation de 31S donnant la position et la forme de l'ionisation du niveau 31S.

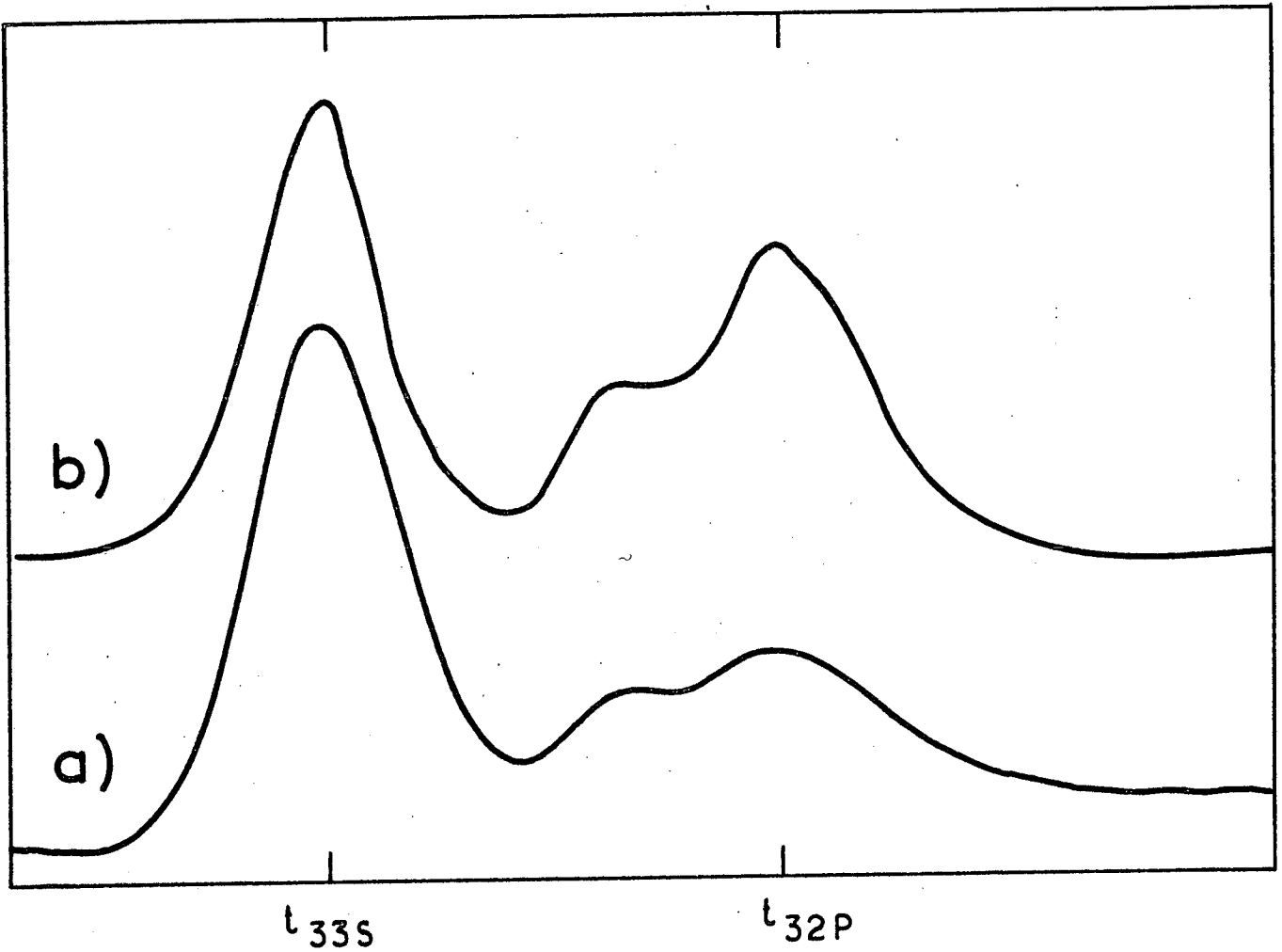
d) Excitation du niveau 31S et peuplement par microonde du niveau 31P. Identification du niveau observé en b) comme étant le niveau 31P (même forme des signaux d'ionisation).

e) et f) Excitation du niveau 33S. La cavité est à résonance à la fois sur les transitions en cascades 33S - 32P 1/2 et 32P 1/2 - 32S. (Il s'agit ici de modes parasites de faible Q , respectivement $Q = 5$ à 10 et $Q = 2400$).

f) On observe un transfert en cascade 33S - 32P 1/2 puis 32P 1/2 - 32S.

e) Une microonde test e') est appliquée à la fréquence de la transition 32S - 31P 3/2 . On voit disparaître le transfert sur la cascade vers 32S.

g) et h) Identification du niveau observé en f) comme étant le niveau 32S préparé à partir de 33S(g) ou de 31S(h) par transition à deux photons.



Signal superradiant : Figure (VIII-22)

Transfert superradiant sur la transition 33S - 32P du Césium

a) en dessous du seuil

b) au dessus du seuil

On notera que le signal n'apparaît que lorsque les lasers sont défocalisés ($a^2 \sim 20 \text{ mm}^2$)

Nous avons observé suivant l'accord de cavité les transitions $nS - (n-1)P_{3/2}$ et $nS - (n-1)P_{1/2}$ vers les deux niveaux de structure fine de $(n-1)P$. Nous avons également observé des transitions maser $nS - (n-2)P$, là encore vers les deux niveaux de structure fine de $(n-2)P$.

Indiquons brièvement les différentes méthodes que nous avons utilisées pour identifier les transitions maser indiquées sur la figure (VIII-13) :

- On peut tout d'abord, comme nous l'avons vu au § 2°, mesurer la longueur de la cavité correspondant aux positions successives d'accords. Connaissant les structures fines des niveaux P , il est possible d'en déduire le niveau final atteint. Une méthode alternative consiste, comme nous l'avons vu également au § 2°, à mesurer avec une source extérieure la fréquence d'accord de la cavité dans une position donnée.

- On peut également utiliser la forme et la position du signal d'ionisation pour identifier le niveau final. C'est ce que nous avons fait sur les figures (VIII 19, 20 et 21) et plus particulièrement la figure (VIII-21) b et d ou g et h).

- On peut enfin utiliser une microonde pour modifier la forme des signaux maser. Il suffit pour cela de coupler par une microonde résonnante le niveau final à un autre niveau de parité opposée (d'un point de vue expérimental la puissance nécessaire ici est très faible et il suffit de faire fonctionner la source microonde (carcinotron) au voisinage du montage expérimental pour voir l'effet). On peut observer alors deux types de phénomènes

Si la microonde est très saturante, elle peut vider le niveau final en un temps court devant le temps de battement de l'effet maser. Les cohérences responsables de l'émission sont détruites et l'émission cesse. Ceci se produit en général pour des niveaux très excités ($n \gtrsim 30$).

Si la microonde est moins saturante, elle a pour effet de transférer des atomes du niveau final de la transition maser, vers le niveau couplé par microonde, et l'on observe un peuplement de ce niveau.

Sur les figures (VIII 19, 20 et 21) les lignes en traits plein et en pointillées dans les schémas de niveaux encart, indiquent les transitions testées pour identifier le niveau final. Les lignes en trait pleins indiquent les cas, où l'on observe une modification du signal (test positif), les lignes en pointillées, les cas où le signal n'est pas modifié. (test négatif). Au total nous avons pu ainsi lever toutes les ambiguïtés et identifier sans peine les transitions maser observées.

En plus de ces trois méthodes d'identification de niveaux, nous verrons au chapitre suivant (IX § E) qu'il est possible dans certains cas (transition $33S - 32p_{1/2}$ ou $P_{3/2}$ de détecter le signal maser directement par battement hétérodyne. Cette méthode permet bien entendu de mesurer également la fréquence de la transition maser et donc d'identifier le niveau final atteint.

Au total nous avons pu mettre en évidence l'effet maser entre transition entre niveaux de Rydberg $nS - n'P$ ($P_{1/2}$ et $P_{3/2}$) pour $n-n'=1$, ou 2 et $24 < n < 33$, ce qui correspond à une gamme de fréquence allant de 107 714 MHz. jusqu'à 946 877 MHz (figure VIII-19). Indiquons pour terminer que nous avons également observé des transferts superradiants (cavité désaccordée) analogues à ceux étudiés au § B. Pour voir cet effet, il faut défocaliser les lasers et le milieu actif est alors cylindrique de diamètre 5mm sur 20mm de long (dimension latérale du diaphragme). La figure VII 22 présente un tel signal superradiant sur la la transition $33S - 32 P_{1/2}$.

5°) Effets liés à la structure de mode : la superradiance totale :

Dans le cas d'une émission superradiante d'atomes couplés à une cavité microonde, la position et la forme du milieu émetteur peut avoir une grande influence sur l'évolution du système. En effet suivant la position des atomes (noeuds ou ventres), le couplage avec le mode de la cavité n'est pas le même, et le temps caractéristique d'évolution dépend de cette position. Il en est de même pour le seuil.

Nous avons étudié cet effet sur l'émission maser du niveau 33S vers le niveau $32 P_{1/2}$ en utilisant la cavité laiton de 72mm de focale (figure VIII 15a). Nous avons placé un diaphragme de 5mm de largeur pour réduire la

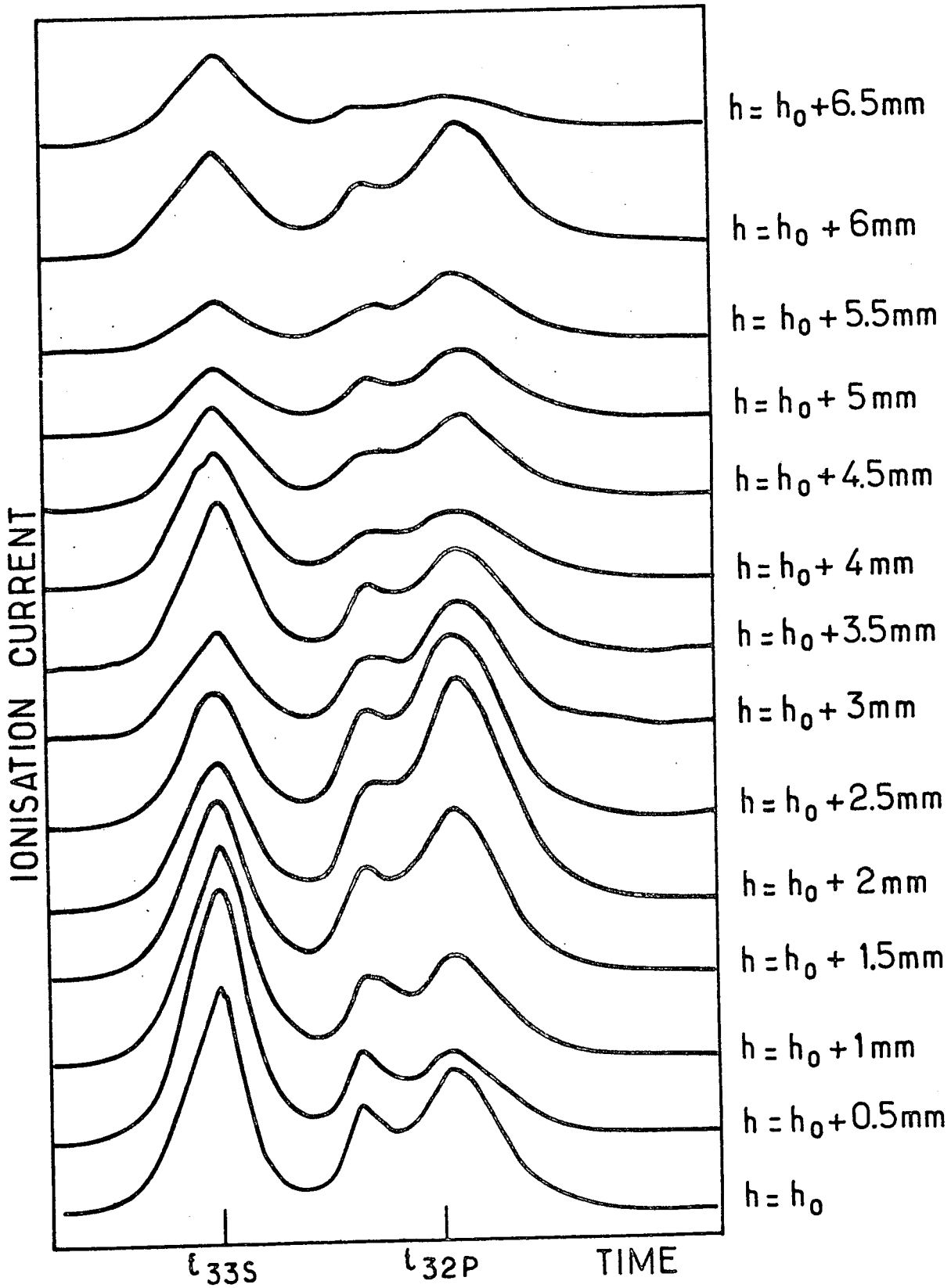


Fig. VIII. 24

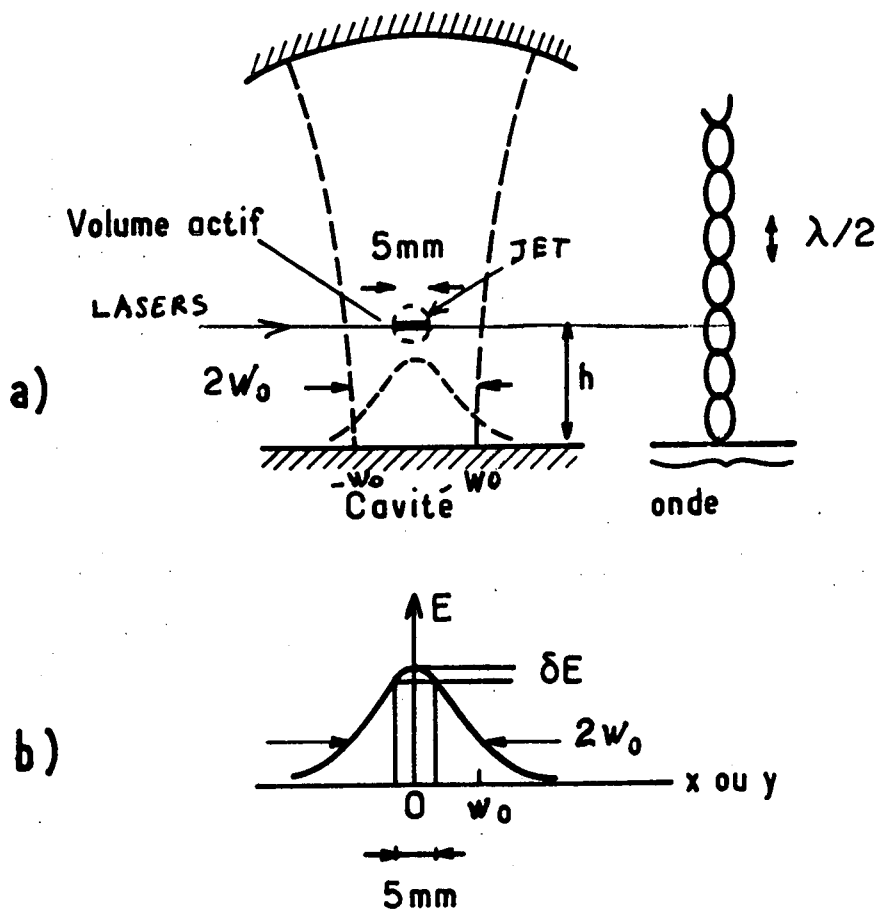


Figure VIII 23

dimension latérale du jet . Nous avons également focalisé les lasers de façon à avoir des faisceaux de diamètre très réduit ($\sim 0.2\text{mm}$). Au total les atomes sont excités à l'interaction des lasers et du jet, dans un petit cylindre de diamètre $d \sim 2\text{mm}$ et de longueur $L \sim 5\text{mm}$. Il est facile de vérifier dans ces conditions, que tous les atomes situés dans ce volume actif, voient le même champ (voir figure (VIII 23)). Car pour la transition étudiée et pour cette cavité on a :

$$\begin{aligned} \lambda / 2 &= 1,4 \text{ mm} &>> 0.2 \text{ mm} \\ W_0 &= 8 \text{ mm} &>> 5 \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{VIII } 6)$$

En déplaçant verticalement la position de la zone éclairée par les lasers de pompe, il est possible de faire varier h (voir figure VIII-24) et d'explorer les noeuds et les ventres de la cavité.

On peut alors étudier l'influence de la position des atomes sur l'émission maser $33\text{S} - 32 P_{1/2}$. La figure VIII-24 présente les signaux d'ionisation obtenus, la cavité étant à résonance, en faisant varier h .

- Lorsque les atomes que l'on excite sont situés dans un ventre, le système est nettement au dessus du seuil pour l'émission maser $33\text{S} - 32 P_{1/2}$ et l'on observe un transfert important vers le niveau final $32P_{1/2}$

- Si par contre le volume actif explore un noeud, le système est au dessous du seuil, et le transfert observé, qui est beaucoup plus faible correspond au transfert thermique.

En déplaçant la position de la zone éclairée, on doit donc observer, en plus d'une variation lente des signaux (dérive des lasers, variation de la densité du jet en fonction de h) une variation périodique de période $\lambda/2$. C'est bien ce que l'on observe sur la figure (VIII-24).

En plus de cet effet de périodicité suivant la position, nous avons vérifié que la taille du milieu actif joue un rôle important. En effet, de par la présence du diaphragme, et du fait que l'on a focalisé les lasers, les atomes actifs voient tous le même champ (cf VIII-23). Ils sont alors indiscernables vis à vis de l'émission maser et l'approximation de Dicke est valable. On doit observer un transfert total des atomes du niveau

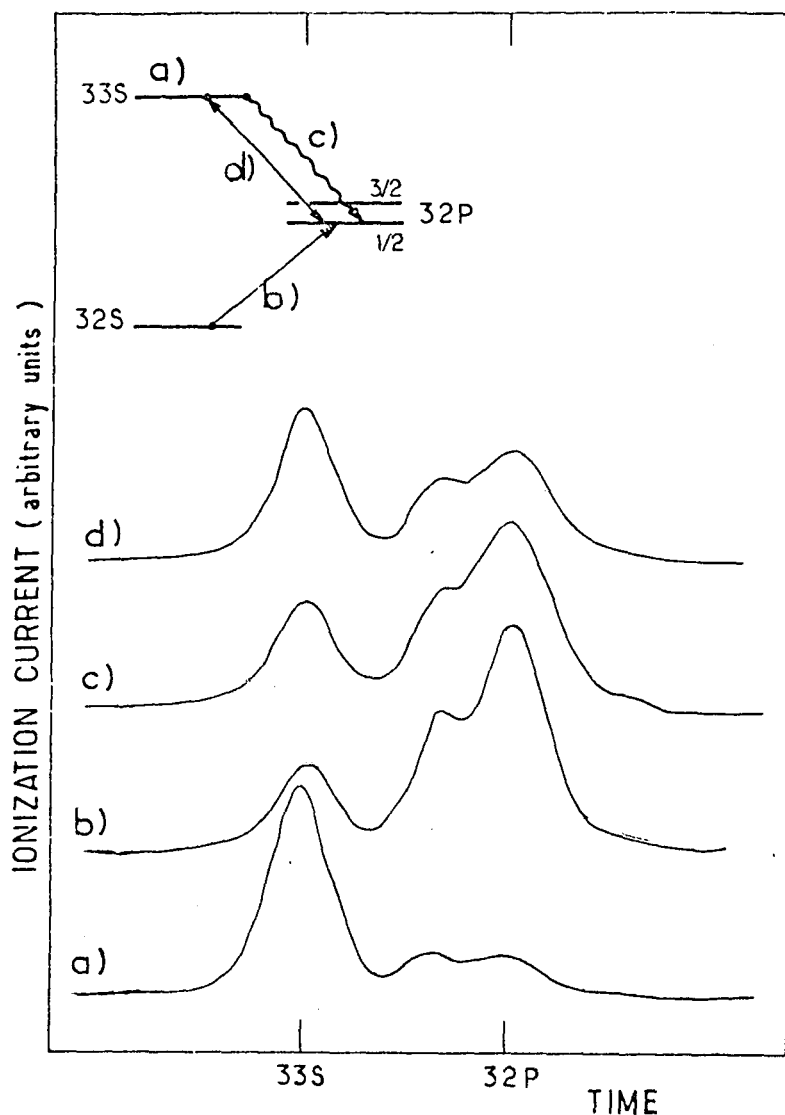


Figure VIII-24 :

Signaux d'ionisation (moyennés 100 coups cavité cuivre 72 mm de focale, $t = 30 \mu\text{s}$) mettant en évidence l'effet d'émission superradiante (maser) totale.

a) Signature du niveau 33S : on prépare optiquement le niveau 33S et la cavité est hors résonance.

b) Signature du niveau 32P 1/2 : on prépare optiquement 32S et l'on réalise la transition 32S - 32P 1/2 à l'aide d'une source microonde.

c) Signal maser : on prépare optiquement 33S, la cavité étant accordée sur la transition 33S - 32P 1/2.

d) égalisation des populations 33S - 32P 1/2. On prépare optiquement 33S et l'on sature la transition 33S - 32P 1/2 à l'aide d'une source microonde (carcinotron).

La comparaison de c) avec b) et d), montre que l'émission maser (c) se poursuit au delà de l'égalisation de population (d) jusqu'à transfert total de tous les atomes dans le niveau final (b).

33S , vers le niveau $32 P_{1/2}$. Nous allons voir que ce phénomène se produit effectivement.

Etudions pour cela la figure VIII-25. Nous avons tout d'abord cherché à identifier les niveaux en enregistrant les signaux d'ionisation en absence de transfert maser (cavité désaccordée) : la figure VIII 24a présente la forme du signal d'ionisation du niveau de départ $33S_{1/2}$ (signal obtenu en préparant optiquement le niveau $33S_{1/2}$) ; la figure VIII 24b présente le signal correspondant au niveau d'arrivé $32P_{1/2}$ (signal obtenu en préparant optiquement le niveau $32S_{1/2}$ et en peuplant le niveau $32P_{1/2}$ à l'aide d'une microonde résonnante sur la transition $32S_{1/2} - 32P_{1/2}$). Ces courbes représentent en quelque sorte les signatures des niveaux concernés $33S_{1/2}$ et $32P_{1/2}$.

La figure VIII 24c correspond au transfert maser lorsque la cavité est à résonance . On voit que ce transfert maser est quasiment total et que le signal d'ionisation obtenu sur la figure VIII 24c correspond à l'ionisation du niveau $32P_{1/2}$ (comparer avec la figure VIII 24b). La figure VIII 24 d) représente enfin le signal obtenu en égalisant les populations des niveaux $33S_{1/2}$ et $32 P_{1/2}$ à l'aide d'une microonde saturante sur la transition correspondante. Ce signal est intermédiaire entre les signaux d'ionisation des niveaux $33S_{1/2}$ (figure VIII 24a) et $32 P_{1/2}$ (figure VIII 24b et c).

On voit que l'effet maser superradiant que l'on observe ici, ne se contente pas d'égaliser les populations des niveaux concernés (figure VIII 24d) , mais qu'il transfère tous les atomes dans le niveau final (figure VIII 24b et c) . C'est l'effet de superradiance totale, que l'on attend lorsque tous les atomes sont couplés au même champ. Comme de plus le temps t_{CAV} d'emprisonnement des photons dans la cavité ($t_{CAV} \sim 10$ à 20 ns) est court devant le temps t_{MASER} d'évolution de l'émission maser ($T_{MASER} > 30$ ns), on s'attend à une émission sous forme d'un seul lobe, suivant une loi en secante hyperbolique qui correspond à la solution des équations de Dicke (voir chapitre V B 4°) c) . Nous nous trouvons donc ici dans une situation idéale dans laquelle l'expérience "rejoint" en quelque sorte la théorie simple de Dicke (23).

6°) Comparaison théorie-expérience : évaluation des seuils :

Dans le cas d'un système collectif couplé à une cavité, le calcul des différents paramètres gouvernant l'évolution est très similaire au calcul fait pour la superradiance au § B. Connaissant ces différents paramètres, nous évaluerons les nombres d'atomes seuils, N_{seuil} , en calculant le délai t_D correspondant à une valeur typique du nombre N d'atomes ($N = 10^4$ ou 10^5) et nous comparerons ce délai t_D avec le temps Δt de couplage des atomes détectés avec la cavité donné par (VIII.4). On obtient alors pour N_{seuil} :

$$N_{\text{seuil}} = N \cdot \frac{t_D(N)}{\Delta t} \quad (\text{VIII.7})$$

Notons que ce seuil n'est défini que pour une valeur du temps d'interaction Δt . Dire que N dépasse N_{seuil} signifie que le délai du pulse maser superradiant, qui se bâtit dans la cavité, est plus court que Δt .

Pour les atomes détectés en ionisation par champ au voisinage de l'instant $t = t_1$, le taux de transvert vers le niveau final est alors supérieur à 50%.

Les seuils calculés ici (voir tableau VIII.3, colonne 4) sont en général beaucoup plus faibles que les seuils obtenus pour la superradiance en absence de cavité au § B. En effet, chaque atome est couplé non seulement à N atomes (où N = nombre total d'atomes), comme pour la superradiance, mais également aux f images de ces N atomes (où f est la finesse de la cavité). A géométrie égale, le seuil se trouve alors divisé par un facteur de l'ordre de la finesse f .

On notera que ces seuils N_{seuil} sont calculables exactement à condition de connaître le facteur de finesse f ou (ce qui revient au même) le coefficient de surtension Q lié à R par :

$$Q = \frac{2\pi L \sqrt{R}}{\lambda (1-R)} = \frac{2L}{\lambda} f \quad (\text{VIII.8})$$

Nous avons calculé ces seuils :

$$N = 10^4$$

(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
Γ/s^{-1}	λ nm	$\Delta T/\mu s$	$\frac{1}{2} T_{CAV}/ns$	$\mu \cdot 10^{-3}$	$2T_{MASER}/ns$	$2 t_D/\mu s$	$N_{seuil}/(10^3)$
Proportionalité à Γ et λ		$\propto \lambda^{1,2}$	$\propto \lambda$	$\propto \lambda$	$\propto 1/\lambda^2$	$\propto 1/\lambda^2$	$\propto 1/\lambda^{5/2}$

Transitions cavité laiton :

$$Q = 10^4 \quad d=L = R/2 = 7,2mm \quad t_1 = 30\mu s \quad (v = 600 m/s)$$

Transition fictive

33S-32P_{3/2}

1	1	2,872	10,6	3,315	3,263 10 ⁵	3,1977 10 ³	0,555
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
70,4	2,78	4,8	29	9,2	782	5,87	6,1

Cavité cuivre :

$$Q = 4 \cdot 10^4 \quad d=L = R/2 = 51mm \quad t_1 = 30\mu s \quad (v = 600 m/s)$$

Transition fictive

Transition (n-n')=1

32S-31P_{3/2}

31S-30P_{3/2}

30S-29P_{3/2}

29S-28P_{3/2}

28S-27P_{3/2}

27S-26P_{3/2}

26S-25P_{3/2}

25S-24P_{3/2}

24S-23P_{3/2}

23S-22P_{3/2}

1	1	1,41	42,4	4,68	2,1329 10 ⁵	1,604 10 ³	0,33
(a)	(b)	(c)	(d)	(e)	(f)	(g)	(h)
82,7	2,52	3,8	106	11,7	407	3,05	4
97,8	2,28	3,6	96	10,7	420	3,15	4,3
116,3	2,05	3,4	87	9,6	437	3,28	4,8
139	1,84	3,2	78	8,6	454	3,40	5,2
168	1,65	3,1	70	7,7	467	3,50	5,7
203	1,47	2,9	62	6,8	487	3,65	6,3
248	1,30	2,7	55	6,0	510	3,82	7
305	1,15	2,6	48	5,3	530	3,97	7,6
380	1,01	2,4	42	4,7	555	4,13	8,5
476	0,88	2,3	37	4,1	581	4,36	9,6

transitions (n-n')=2

32S-31P_{3/2}

32S-30P_{3/2}

31S-29P_{3/2}

30S-28P_{3/2}

29S-27P_{3/2}

28S-26P_{3/2}

27S-25P_{3/2}

26S-24P_{3/2}

25S-23P_{3/2}

24S-22P_{3/2}

37,6	0,89	2,3	38	4,16	718	5,38	120
44,4	0,80	2,1	34	3,74	752	5,64	130
52,7	0,73	2,0	31	3,41	761	5,71	140
60,9	0,65	1,9	28	3,06	713	5,34	150
75,7	0,59	1,8	25	2,76	811	6,08	160
91,6	0,52	1,7	22	2,43	863	6,47	180
111,2	0,46	1,6	19	2,15	909	6,81	210
136	0,41	1,5	17	1,91	935	7,01	230
169	0,36	1,4	15	1,68	976	7,32	250
221	0,316	1,3	13	1,47	969	7,26	270

Tableau VIII-3

Evaluation des différents paramètres associés à l'émission maser superradiante (pour faire le calcul nous avons calculé tout d'abord pour chaque cavité la valeur des différents paramètres pour une transition fictive de probabilité de transition $\Gamma = 1s^{-1}$ et de longueur d'onde $\lambda = 1mm$. Les paramètres de chaque transition sont calculés ensuite à l'aide des lois de proportionnalité en fonction de Γ et λ).

▪ d'une part pour la transition $33S - 32P_{3/2}$ en considérant que l'on utilise la cavité laiton, dont le Q a été mesuré à fréquence correspondante ($Q \approx 10^4$ pour $\nu \approx 100$ GHz)

▪ d'autre part pour les autres transitions en utilisant la cavité cuivre. Le Q n'est alors pas mesurable et nous avons fait tous les calculs en considérant que :

$$Q \sim 4 \cdot 10^4$$

Le tableau VIII.3 indique les résultats obtenus. Les deux premières colonnes donnent les valeurs des longueurs d'onde λ et des probabilités de transition spontanée Γ (le calcul de Γ utilise les valeurs des forces d'oscillateurs obtenues en référence ⁽⁶²⁾ à l'approximation coulombienne. Les colonnes suivantes donnent les différents paramètres caractérisant l'émission maser, respectivement Δt , T_{CAV} , μ , T_{MASER} , T_D).

▪ En remarquant que, pour une cavité cofocale le "waist" w_0 a pour valeur $w_0 = \sqrt{\frac{R\lambda}{2\pi}}$, il vient pour Δt :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{R}{2\pi}} \times \frac{30 \mu s}{5 \text{ cm}} \quad (\text{VIII.9})$$

▪ T_{CAV} se déduit de (V.1), (V.7) et (VIII.8). Il vient (pour $R \approx 1$) :

$$T_{CAV} = \frac{f}{\pi} \cdot \frac{L}{c} = \frac{2Q\lambda}{\pi c} \quad (\text{VIII.10})$$

▪ Le facteur géométrique μ se déduit de (V.2-b) et de (V.4). En remplaçant w_0 par sa valeur, il vient :

$$\mu = \frac{3}{2\pi} \frac{\lambda}{R} \quad (\text{VIII.11})$$

▪ On en déduit alors $T_{SR} = (N\Gamma\mu)^{-1}$ et T_{MASER} (cf. (V.6)) :

$$T_{MASER} = \frac{\pi}{4f} \cdot T_{SR} = \frac{\pi}{8} \frac{L/\lambda}{Q N\Gamma\mu} \quad (\text{VIII.12})$$

en remplaçant μ par sa valeur (VIII.11), on a :

$$T_{\text{MASER}} = \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{NQ\Gamma} \left(\frac{L}{\lambda} \right)^2 \quad (\text{VIII.13})$$

Le délai t_D se déduit alors de T_{MASER} . Comme T_{MASER} est plus long que T_{CAV} et comme l'on est capable de préparer les atomes dans un petit volume devant λ (on a pu observer l'effet de superradiance totale, cf. § D.4), on a (cf. chap. V.A.3) :

$$t_D \approx T_{\text{MASER}} \text{Log } N. \quad (\text{VIII.14})$$

Notons toutefois que l'expression (VIII.14) du délai, qui se déduit des calculs faits au chapitre V, correspond au cas où le système démarre sur le bruit d'émission spontanée. En fait, nous verrons au prochain chapitre (chapitre IX) que dans le domaine microonde ($\nu \sim 100$ GHz), à la température ambiante (300°K), le bruit thermique n'est pas négligeable et que c'est lui qui est responsable du démarrage de l'émission. La nouvelle valeur du délai $t_{D'}$, s'obtient alors en remplaçant $\text{Log } N$ par $\text{Log } N_{\text{eff}}$, avec :

$$N_{\text{eff}} = \frac{Nh\nu}{KT} \quad (\text{VIII.15})$$

dans l'expression du délai. Il vient ici :

$$t_{D'} = T_{\text{MASER}} \cdot \text{Log} \left(\frac{Nh\nu}{KT} \right) \quad (\text{VIII.16})$$

$$\approx 7,5 \cdot T_{\text{MASER}} \text{ pour } (N \sim 10^5 \text{ atomes})$$

On en déduit alors N_{seuil} en comparant $t_{D'}(N)$ à Δt . N_{seuil} est reporté sur le tableau VIII.3 en colonne 4.

Nous avons mesuré expérimentalement N_{seuil} en comptant les ions. On obtient pour les transitions $nS - n'P_{3/2}$:

$$\begin{cases} N_{\text{seuil, mesuré}} \sim 5 \cdot 10^3 \text{ à } 10^4 \text{ atomes pour } n-n' = 1 \\ N_{\text{seuil, mesuré}} \sim 10^5 \text{ atomes pour } n-n' = 2 \end{cases}$$

En tenant compte des diverses incertitudes :

- incertitude sur la mesure (ou l'évaluation) du coefficient de surtension Q ,
 - incertitude sur la mesure directe de N_{seuil} par comptage d'ions,
- on peut considérer que l'accord entre les seuils calculés (tableau VIII.3, colonne 4) et les seuils mesurés est satisfaisant.

7°) Conclusion :

Au cours de ce paragraphe, nous avons pu mettre en évidence l'émission maser superradiante (émission superradiante d'atomes couplés à une cavité). Cette étude fait en quelque sorte le lien entre les expériences de superradiance proprement dites (sans cavité) et les expériences maser (ou laser) en régime continu, ou quasi continu.

Par rapport aux expériences de superradiance entre atomes de Rydberg (§ C), l'adjonction d'une cavité nous a permis ici :

- d'augmenter le nombre effectif d'atomes et de diminuer le seuil ($N_{\text{seuil}} 10^4$ au lieu de 10^5 à 10^6 pour la superradiance au § C);
- de choisir le niveau final atteint (partant de $nS_{1/2}$, on peut atteindre $(n-1) P_{1/2}$, $(n-1) P_{3/2}$, $(n-2) P_{1/2}$ ou $(n-2) P_{3/2}$);
- et d'observer, lorsque les atomes sont confinés dans un volume petit, l'effet de superradiance totale.

On notera ici le caractère assez inhabituel des ordres de grandeur du maser à états de Rydberg (à des longueurs d'onde comparables, les masers moléculaires fonctionnent avec des nombres d'atomes qui sont de l'ordre de 10^{12} !). Il serait certainement intéressant d'augmenter la finesse des cavités utilisées afin de diminuer le seuil et peut-être d'atteindre un régime d'oscillation maser avec un seul atome !

Remarquons enfin que la forme des signaux émis est ici entièrement calculable. Une étude expérimentale quantitative de l'émission maser superradiante serait donc certainement intéressante. Malheureusement, la technique d'ionisation par effet de champ est trop lourde pour réaliser ce travail. Nous verrons, au chapitre suivant, qu'une autre technique de détection est utilisable (la détection directe de l'émission maser par battement hétérodyne) et nous l'utiliserons pour étudier qualitativement et quantitativement le déclenchement de l'émission maser superradiante.

CHAPITRE IX

" LA SUPERRADIANCE DECLENCHEE "

LA SUPERRADIANCE DECLENCHEE

Nous avons, dans toute notre étude théorique (chapitres 1 à 5), admis que la superradiance démarrait sur les fluctuations de polarisation de l'émission spontanée. Le délai t_D du pulse de lumière émis, ainsi que les fluctuations de ce délai et de l'intensité émise reflètent alors simplement les propriétés statistiques de l'émission spontanée. En ce sens, l'étude expérimentale de la superradiance constitue une méthode très intéressante d'investigation des fluctuations initiales de la polarisation atomique du milieu. Une technique pour étudier expérimentalement ces fluctuations, proposée et mise en oeuvre pour la première fois par VREHEN et al (21), consiste à "injecter" sur le système prêt à superradiier un petit champ électromagnétique résonnant qui va avoir pour effet de modifier la phase de déclenchement de l'émission et donc de changer certaines de ces propriétés (délai, intensité, direction, phase, fluctuations ...). L'analyse de ces modifications permet de remonter aux paramètres de l'émission superradiante spontanée ("tipping angle" θ_0 notamment).

En fait, les modifications de l'émission superradiante ne nécessitent qu'une infime puissance de champ d'injection (de l'ordre de 1 photon dans le temps T_{SR} sur la section du milieu). Le déclenchement de la superradiance apparaît ainsi également comme une méthode de détection extrêmement sensible de tous petits champs électromagnétiques résonnants sur la transition de superradiance. En balayant la fréquence du petit champ injecté, on peut également faire -avec une puissance extrêmement faible- une étude spectroscopique de la transition superradiante.

Il faut enfin remarquer que dans certaines expériences -celles qui s'effectuent sur des transitions basse fréquence à température assez élevée pour avoir $h\nu/KT \ll 1$ - la superradiance se trouve en fait déclenchée par le rayonnement thermique qui joue alors le rôle de champ extérieur injecté sur le système.

Pour toutes ces raisons, le problème du déclenchement de la superradiance par un champ imposé initialement au système mérite d'être abordé à la fin de ce mémoire consacré à la superradiance. Nous commençons (§ A) par décrire de façon qualitative quelques effets simples induits par l'injection d'un champ extérieur sur un milieu superradiant. Puis au § B, nous analysons

de façon rapide les équations décrivant le déclenchement par un champ injecté dans le cadre de l'approximation du champ moyen. Nous sommes alors à même d'interpréter les expériences décrites au § C et D qui se rapportent respectivement au déclenchement de la superradiance dans le domaine infrarouge (le champ injecté est alors produit par un laser accordable à centre coloré) et dans le domaine microonde (le champ injecté provient d'un klystron multiplié en fréquence).

A. Principe de l'effet

La figure IX.1 illustre le principe d'une expérience de superradiance déclenchée. Après avoir préparé le milieu émetteur (partie hachurée de la figure IX.1), on injecte un signal (flèche) résonnant à la fréquence de la transition superradiante et l'on étudie la modification de l'évolution de la superradiance sous l'effet de l'injection.

On peut tout d'abord étudier la variation du délai du pulse superradiant, le signal d'injection étant axial (de vecteur d'onde \vec{k}_0). On observe, en présence d'un signal injecté, une diminution du délai t_D (fig. IX.1-a). L'étude de cet effet permet alors d'évaluer le bruit responsable du démarrage de l'émission superradiante (21). Malheureusement, le délai ne varie avec le signal injecté que logarithmiquement et il est difficile d'en mesurer l'amplitude avec précision en utilisant cette méthode.

En fait, l'émission superradiante a toujours un caractère multi-mode et l'on peut mettre à profit ce fait pour étudier de façon plus sensible l'effet du signal d'injection. En absence de ce signal injecté, l'émission est statistiquement symétrique vers l'avant et vers l'arrière (fig. IX.1-b haut) et se fait suivant deux lobes (vecteurs d'ondes \vec{k} des photons émis voisins de $\pm\vec{k}_0$). L'injection d'un signal de vecteur d'onde \vec{k}' favorise alors l'émission des photons du mode $\vec{k} = \vec{k}'$ au détriment des autres modes.

Si $\vec{k}' = +\vec{k}_0$ par exemple (fig. IX.1-b bas), l'émission est systématiquement plus forte vers l'avant. C'est ce que nous avons représenté sur la figure IX.1-b en trait plein (à comparer avec les courbes en pointillé en absence d'injection). Malheureusement, pour observer cet effet, il faut utiliser des taux d'injection relativement élevés, car, comme nous l'avons vu à l'ap-

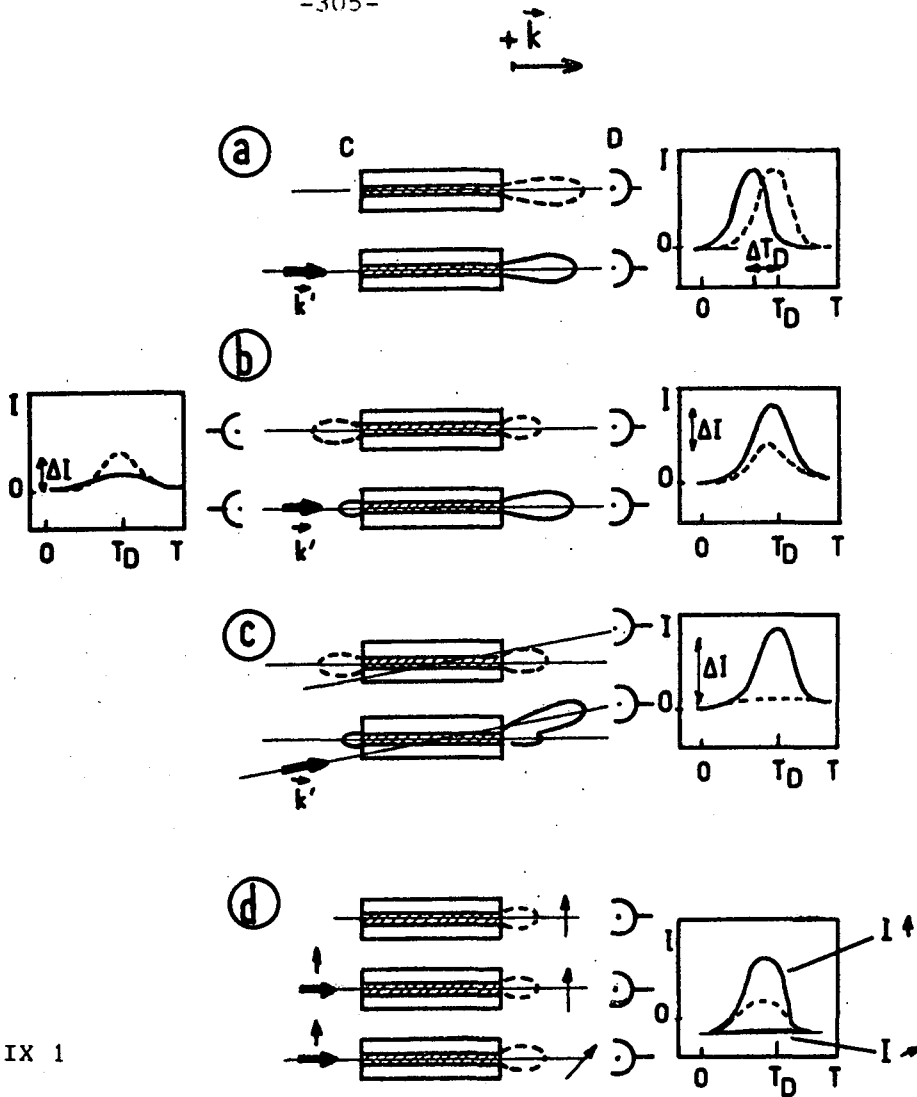


Figure IX 1

Schéma illustrant la façon dont la superradiance peut être modifiée par l'injection d'un signal extérieur :

- a) Changement de délai
- b) Changement relatif de l'intensité vers l'avant et vers l'arrière
- c) Changement de direction

Les parties hautes des différents diagrammes ainsi que les courbes en pointillés correspondent aux signaux obtenus en absence d'injection extérieure .

Les parties basses et les courbes en traits pleins aux signaux en présence d'injection.

Les diagrammes représentent les cellules émettrices C, dont la partie active est hachurée, les détecteurs D, ainsi que les signaux d'injection : flèches noires. Le diagramme d présente également les polariseurs utilisés sur le faisceau lumineux injecté (P) et sur le faisceau superradiant détecté(A).

pendice II A 1°), les atomes qui contribuent aux émissions avant et arrière sont différents.

Une méthode plus sensible consiste à désaxer légèrement le signal d'injection de direction \vec{k}' par rapport à la direction axiale \vec{k}_0 ($\vec{k}' \neq \vec{k}_0$ mais $\vec{k}' \approx \vec{k}_0$) et à placer le détecteur dans la direction \vec{k}' . En absence d'injection, on observe alors un très faible signal (courbe en pointillé). Ce signal devient par contre beaucoup plus gros en présence d'injection et peut même complètement supprimer l'émission axiale vers l'avant ($+\vec{k}_0$) (courbe en trait plein). Cet effet de changement de direction est extrêmement facile à observer expérimentalement, car en choisissant judicieusement \vec{k}' , le signal de superradiance déclenché apparaît pratiquement sur fond noir (comparer les courbes en trait plein et en pointillé sur la figure IX.1-c).

On peut enfin profiter de la dégénérescence des niveaux bordant la transition qui superradie, pour étudier la polarisation de l'émission superradiante. Nous considérerons par exemple une configuration de spin telle que l'émission superradiante est de polarisation linéaire aléatoire (9) (un exemple correspondant à un cas expérimental sera donné au § D.3.b). En absence d'injection, on observe une émission de polarisation quelconque et après analyse suivant chaque direction de polarisation, les signaux fluctuent, tout en restant égaux en valeur moyenne (figure IX.1-d : trait pointillé). Par contre, en présence d'injection, l'émission de même polarisation que l'injection l'emporte et supprime l'émission polarisée orthogonalement (courbes en trait plein de la figure IX.1-d). Nous verrons plus loin que cet effet de polarisation apparaît dès que le signal d'injection devient de l'ordre du bruit qui déclenche le système; c'est dire la sensibilité de la méthode.

Nous avons étudié expérimentalement les deux derniers effets décrits. De façon plus précise, l'effet de changement de direction a été étudié dans le proche infrarouge ($\lambda \sim 3\mu$) sur des niveaux peu excités (voir § C) Par contre, l'effet de polarisation, qui ne fait pas intervenir le caractère multimode de l'émission superradiante a été étudié en cavité (où le couplage ne se fait qu'avec les modes axiaux de la cavité) dans le domaine millimétrique entre niveaux de Rydberg (§ D).

B. Etude théorique simplifiée du démarrage de l'émission super-radiante à l'approximation du champ moyen

Pour ne pas alourdir le calcul des effets de démarrage, nous restreindrons ici notre étude au cas de l'approximation du champ moyen. De plus, nous nous limiterons à un calcul classique bien que celui-ci cesse d'être valide au tout début de l'émission, lorsque le système démarre sur le bruit quantique (émission spontanée). Nous étudierons tout d'abord le cas où le champ incident injecté est un champ classique de phase connue (champ cohérent) au § 1, pour généraliser ensuite le calcul au cas du champ thermique (champ incohérent) au § 2.

1) Déclenchement de l'émission par un champ classique

Nous décrivons l'évolution du système par les équations classiques de BLOCH-MAXWELL à l'approximation du champ moyen : équation de BLOCH donnée par (II.II.70-b et c), et équation de MAXWELL obtenue en intégrant sur z (II.II.70-a) :

$$\mathcal{E}(z) = \mathcal{E}(z=0) - \frac{ik_0}{2\epsilon_0} \int_0^z dz \mathcal{P}(z) \quad (IX.1)$$

en moyennant sur l'espace (z) :

$$\mathcal{E} = - \frac{ik_0 L}{4\epsilon_0} \mathcal{P} + \mathcal{E}_{ex} \quad (IX.2)$$

(nous avons supprimé la variable z à cause du moyennage sur z et nous avons appelé \mathcal{E}_{ex} le champ extérieur injecté qui était représenté dans l'équation (IX.1) par $\mathcal{E}(z=0)$).

Pour décrire l'évolution par une quantité sans dimension, nous considérerons l'évolution de l'angle θ du vecteur de Bloch

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{N} = \mathcal{N}(t=0) \cos \theta \\ \mathcal{P} = iD_{+-} \mathcal{N}(t=0) \sin \theta \end{array} \right. \quad (IX.3-a)$$

$$(IX.3-b)$$

et nous ferons l'approximation du démarrage :

$$\mathcal{N} \approx \mathcal{N}(t=0) \quad (IX.4-a)$$

$$\mathcal{P} \approx iD_{+-} \mathcal{N}(t=0) \quad \theta \quad (IX.4-b)$$

ce qui conduit pour θ à une équation linéaire

$$\frac{d}{dt} \theta = \frac{1}{2T_{SR}} \theta + \frac{D_{+-}}{N} \mathcal{E}_{ex} \quad (\text{IX.5})$$

On obtient alors, si le champ injecté est résonnant ($\mathcal{E}_{ex}(t) =$ constante) :

$$\theta = \theta_{sp} + \theta_{décl} \quad (\text{IX.6-a})$$

avec
$$\theta_{sp} = \theta(t=0) \exp \left(\frac{t}{2T_{SR}} \right) \quad (\text{IX.6-b})$$

et
$$\theta_{décl} = \theta_1 \left(\exp \frac{t}{2T_{SR}} - 1 \right) \quad (\text{IX.6-c})$$

. $\theta(t=0)$, qui représente le "tipping angle" initial, est une quantité complexe de phase aléatoire et dont le module obéit à la loi de probabilité gaussienne (II II.88) de valeur moyenne $\theta_0 = 2/\sqrt{N}$.

. θ_1 représente l'angle associé au champ injecté, c'est une quantité complexe qui a la même phase que \mathcal{E}_{ex} ; on a en effet

$$\frac{\theta_1}{2T_{SR}} = \frac{D_{+-}}{N} \mathcal{E}_{ex} \quad (\text{IX.7})$$

A partir de (IX.7), on peut relier θ_1 au nombre $n_\phi(T_{SR})$ de photons injectés dans la surface a^2 du milieu en un temps T_{SR} . Il vient :

$$\theta_1 = 2 \cdot | n_\phi(T_{SR}) |^{1/2} \cdot \frac{2}{\sqrt{N}} \quad (\text{IX.8})$$

Il faut noter que dans (IX.6-a), θ_{sp} et $\theta_{décl}$ représentent respectivement les parties spontanée et déclenchée de l'émission. θ_{sp} est obtenue à partir de (IX.5) avec la condition initiale spontanée : $\theta(t=0) \neq 0$ et $\mathcal{E}_{ex} = 0$, alors que $\theta_{décl}$ s'obtient avec la condition initiale déclenchée : $\theta(t=0) = 0$ et $\mathcal{E}_{ex} \neq 0$.

Pour calculer $\theta_{décl}$ dans le cas où \mathcal{E}_{ex} est non résonnant, calculons tout d'abord la fonction de GREEN G_θ définie par :

$$\left\{ \begin{array}{l} G_\theta(t < 0) = 0 \\ \frac{d}{dt} G_\theta(t) = \frac{1}{2T_{SR}} G_\theta(t) + \delta(t) \end{array} \right. \quad (\text{IX.9-a})$$

$$(\text{IX.9-b})$$

Il vient
$$G_{\theta} = \frac{1}{2T_{SR}} \exp \left(\frac{t}{2T_{SR}} \right) \quad (IX.10)$$

et l'on a, dans le cas général :

$$\theta_{\text{décl}} = \int_0^t d\tau \theta_1(\tau) \cdot G_{\theta}(t-\tau) \quad (IX.11)$$

Cette équation montre que le signal de déclenchement n'est efficace que pendant un temps de l'ordre de $2T_{SR}$ au début de l'évolution. Ce temps représente en quelque sorte donc la durée de la période de démarrage de l'évolution.

Considérons le cas d'un champ injecté non résonnant

$$\mathcal{E}_{\text{ex}}(t) = \mathcal{E}_{\text{ex}}(t=0) \exp(i\Delta\omega t) \quad (IX.12)$$

Il vient :

$$\theta_1(t) = \theta_1(t=0) \exp(i\Delta\omega t) \quad (IX.13)$$

(où $\theta_1(t=0)$ est donné par (IX.8)).

On peut calculer le rapport η entre la partie spontanée θ_{sp} et la partie déclenchée $\theta_{\text{décl}}$ de θ . Il vient, si $\exp \frac{t}{T_{SR}} \gg 1$

$$|\eta|^2 = \left| \frac{\theta_{\text{décl}}}{\theta_{\text{sp}}} \right|^2 = \left| \frac{\theta_1(t=0)}{\theta(t=0)} \right|^2 4n_{\phi}(T_{SR}) \frac{1}{1 + \left(\frac{\Delta\omega}{\Omega}\right)^2} \quad (IX.14-a)$$

où
$$\Omega^{-1} = 2T_{SR} \quad (IX.14-b)$$

- Si $\Delta\omega$ est nul, on retrouve le résultat obtenu par (IX.6-a et b). Le seuil de l'effet de déclenchement ($|\eta|^2 = 1$) correspond alors (comme $\theta_{\text{sp}}/\theta(t=0) \sim 1$) à un photon incident en un temps de l'ordre de $2T_{SR}$, c'est-à-dire en un temps de l'ordre de la durée de la période de démarrage.
- Si $\Delta\omega$ n'est plus nul, l'efficacité du déclenchement doit être pondérée par une lorentzienne de largeur $\Omega = \frac{1}{2T_{SR}}$ et le seuil de l'effet ($|\eta|^2 = 1$) doit être multiplié par $1 + (2\Delta\omega T_{SR})^2$.

Au total, l'équation (IX.14) permet de calculer l'effet de raccourcissement du délai (figure IX.1-a) ainsi que l'effet de polarisation d'émission (figure IX.1-d). Ces deux effets sont, notons-le, les seuls effets de déclenchement qui subsistent à l'approximation du champ moyen (il n'y a pas d'effets multimodes). Envisageons successivement ces deux effets.

(i) effet de raccourcissement du délai

Pour simplifier, nous négligerons les fluctuations et prendrons $\theta(t=0) = \theta_0$ et nous évaluerons le délai t_D par

$$\theta(t_D) = 1 \quad (IX.15)$$

(IX.15) conduit à :

$$\theta_{sp}(t_D) = \frac{1}{(1 + \eta)} \quad (IX.16)$$

Comme θ_{sp} croît exponentiellement (éq. IX.6-b), il vient :

$$\begin{aligned} t_D &= 2T_{SR} \text{Log} \left(\frac{\theta_{sp}(t_D)}{\theta_0} \right) \\ &= T_{SR} \text{Log} \left(\frac{N}{|1+\eta|^2} \right) \end{aligned} \quad (IX.17)$$

On notera : - que le seuil de l'effet correspond à $|\eta| = 1$
 - que la dépendance de l'effet en η où $n_\phi (T_{SR})$ (donc en signal injecté) n'est que logarithmique.

(ii) effet de polarisation

Si l'émission peut se produire suivant deux directions de polarisation \vec{u} , \vec{u}' orthogonales ($\vec{u} \perp \vec{u}'$), il faut calculer l'évolution associée à chacune de ces polarisations. Pour ce faire, calculons les intensités $I_{\vec{u}}$ et $I_{\vec{u}'}$, correspondant à \vec{u} et \vec{u}' . On a :

$$\begin{aligned} I_{\vec{u}} &\propto |\theta_{\vec{u}}|^2 = |(\theta_{sp, \vec{u}} + \theta_{décl, \vec{u}})|^2 \\ I_{\vec{u}'} &\propto |\theta_{\vec{u}'}|^2 = |\theta_{sp, \vec{u}'}|^2 \end{aligned} \quad (IX.18)$$

($\theta_{\vec{u}}$, $\theta_{sp, \vec{u}}$, etc... sont les angles θ des vecteurs de BLOCH associés aux pôles de polarisations \vec{u} et \vec{u}').

Si le signal de déclenchement est de polarisation \vec{u} , on peut définir $\eta = \theta_{décl, \vec{u}} / \theta_{sp, \vec{u}}$, dont l'expression est donnée par l'équation (IX.14). Il vient alors pour les intensités moyennes relatives suivant \vec{u} et \vec{u}' :

$$\langle I_{\vec{u}} \rangle / \langle I \rangle = \langle I_{\vec{u}} \rangle / (\langle I_{\vec{u}} \rangle + \langle I_{\vec{u}'} \rangle) = \frac{1 + \langle |\eta|^2 \rangle}{2 + \langle |\eta|^2 \rangle} \quad (IX.19-a)$$

$$\langle I_{\vec{u}'} \rangle / \langle I \rangle = \frac{1}{2 + \langle |\eta|^2 \rangle} \quad (IX.19-b)$$

La figure IX.2 représente $\langle I_u \rangle / \langle I \rangle$ en fonction de $|\eta|^2$. On voit que l'effet, notable dès que $|\eta|^2 \sim 1$, sature très vite pour des valeurs supérieures de $|\eta|^2$.

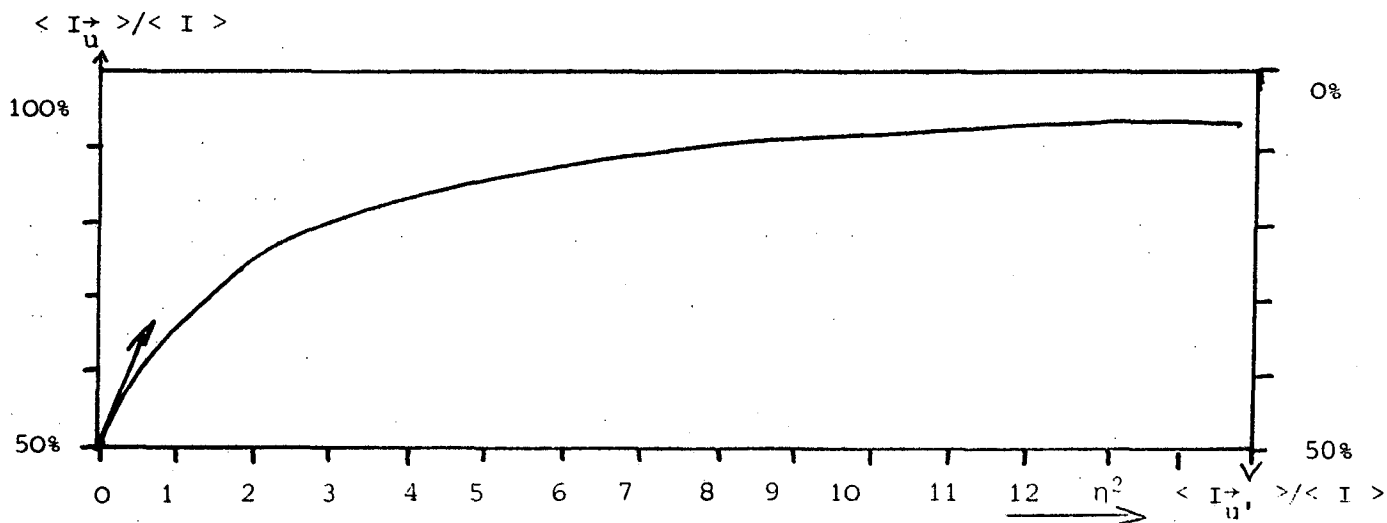


Figure IX-2 : Allure de $\langle I_u \rangle / \langle I \rangle$ en fonction de $\eta^2 = \left| \frac{\theta_{\text{decl}}}{\theta_{\text{sp}}} \right|^2 \propto n_\phi$

2) Déclenchement de l'émission par le champ thermique

Il est possible de généraliser le calcul précédent au cas d'un rayonnement incohérent. Pour cela, il suffit de calculer la contribution au déclenchement de chaque mode du champ et de sommer ensuite sur tous les modes. Comme le couplage du système ne se fait qu'avec les modes axiaux (approximation du champ moyen), il suffit de quantifier le champ dans la direction axiale, en appelant \mathcal{L} la longueur de quantification.

Calculons tout d'abord θ_{decl} en négligeant les fluctuations et, pour cela, calculons la contribution $\theta_{\text{decl}, i}$ associée au mode i . Le nombre moyen de photons dans le mode i est, à la température T :

$$\frac{KT}{h\nu} \tag{IX.20}$$

Le nombre $n_{\phi, i}(T_{\text{SR}})$ de photons du mode i , incident sur les atomes pendant un temps T_{SR} , est alors :

$$n_{\phi,i}(T_{SR}) = \frac{KT}{h\nu} \times \frac{c T_{SR}}{2 \mathcal{L}} \quad (\text{IX.21})$$

et la contribution à $\theta_{\text{décl}}$ correspondante est d'après (IX-8) et (IX6-c)

$$\theta_{\text{décl},i} = \frac{4}{\sqrt{N}} \left(\frac{n_{\phi,i}(T_{SR})}{1 + (2(\omega - \omega_0) T_{SR})^2} \right)^{1/2} \left(\exp \left(\frac{t}{2T_{SR}} \right) - 1 \right) \quad (\text{IX.22})$$

Sommons maintenant les contributions $\theta_{\text{décl},i}$ associées à chaque mode. Comme ces contributions sont de phases incorréllées, il vient :

$$|\theta_{\text{décl}}|^2 = \sum_i |\theta_{\text{décl},i}|^2 \quad (\text{IX.23})$$

En remplaçant la sommation discrète par une intégrale (on utilise pour cela le fait que l'intervalle en ω entre deux modes axiaux est $\omega_0 \times \frac{\lambda_0}{2L} = \pi c / \mathcal{L}$), il vient :

$$|\theta_{\text{décl}}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{N}} \right)^2 \times 4 \times \frac{\mathcal{L}}{\pi c} \times \frac{c T_{SR}}{2} \times \exp \left(\frac{t}{2T_{SR}} - 1 \right) \times \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \left(\frac{KT}{h\nu} \right) \times \frac{1}{1 + (2(\omega - \omega_0) T_{SR})^2} \quad (\text{IX.24})$$

d'où :

$$|\theta_{\text{décl}}|^2 = \left(\frac{2}{\sqrt{N}} \right)^2 \left(\frac{KT}{h\nu_0} \right) \cdot \exp \left(\frac{t}{2T_{SR}} - 1 \right) \quad (\text{IX.25})$$

Au total, en négligeant les fluctuations, tout se passe comme si le "tipping angle" initial n'était pas égal à $2/\sqrt{N}$, mais à $2/\sqrt{N_{\text{eff}}}$, où :

$$N_{\text{eff}} = N \frac{h\nu}{KT} \quad (\text{IX.26})$$

et l'on observe une diminution du délai de l'émission t_D (défini par $\theta(t_D)=1$) qui passe de

$$t_D = T_{SR} \text{ Log } N \quad \text{à} \quad t_D = T_{SR} \text{ Log } N_{\text{eff}} \quad (\text{IX.27})$$

Si l'on tient compte des fluctuations, on trouve que chaque contribution $\theta_{\text{décl},i}(t)$ est de statistique gaussienne. La somme $\theta_{\text{décl}}(t)$ est alors également de statistique gaussienne, et le "tipping angle" $\theta(t=0)$ associé (défini par

$$\theta(t) = \theta_{\text{décl}}(t) = \theta(t=0) e^{t/2T_{\text{SR}}} \quad (\text{IX.28})$$

l'est aussi. Les fluctuations sont donc les mêmes que pour l'émission spontanée et les calculs de l'évolution peuvent se faire en multipliant le "tipping angle" $\theta(t=0)$ à température nulle ($T=0$) par la racine du facteur $KT/h\nu$ d'occupation du mode k_o :

$$\theta_{T=0}(t=0) \rightarrow \theta_{T \neq 0}(t=0) = \theta_{T=0}(t=0) \times \left(\frac{KT}{h\nu} \right)^{1/2} \quad (\text{IX.29})$$

(ce qui revient, là encore, à remplacer N par N_{eff} dans l'expression de $\theta(t=0)$ ou dans celle du délai t_D).

Nous avons reporté en appendice III le calcul quantique du démarrage du système en présence du champ thermique et nous avons trouvé qu'il y avait diminution du délai moyen suivant (IX.27) sans modification de la forme des histogrammes des fluctuations du délai t_D autour de la valeur moyenne $\langle t_D \rangle$ ce qui confirme de manière rigoureuse le résultat que nous venons d'énoncer.

C. Mise en évidence des effets de déclenchement de superradiance dans le domaine proche infrarouge

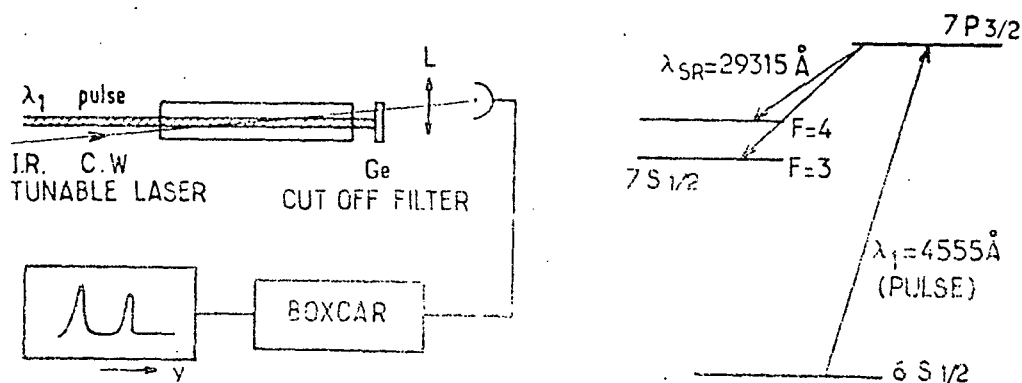
Les premières expériences de déclenchement de superradiance ont été faites en étudiant la variation du délai du pulse superradiant, le signal injecté étant résonnant et de durée très courte (21). Il nous a paru intéressant d'étendre l'étude en utilisant une source continue (laser à centre coloré) comme signal du déclenchement. Il est ainsi possible d'étudier le spectre de fréquence du signal superradiant déclenché. Cette étude présente un double intérêt :

- elle permet de mieux comprendre le phénomène de superradiance et, en particulier, son démarrage;
- elle ouvre la voie à une nouvelle méthode spectroscopique, extrêmement sensible, la spectroscopie par superradiance déclenchée.

L'expérience décrite ici au § D a été réalisée à Stanford, en collaboration avec l'équipe du Professeur SCHAWLOW (19).

1) Description du montage expérimental

La figure IX.3 décrit le montage expérimental utilisé pour réaliser l'expérience.



Sketch of cesium superradiance triggering spectroscopy experiment. In the insert : diagram of relevant energy levels of Cs.

Figure IX-3

Les atomes de césium d'une vapeur atomique (densité de l'ordre de 10^{12} atomes/cm³) sont portés de manière percussive du niveau fondamental $6S_{1/2}$ dans le niveau de résonance $7P_{3/2}$ par un pulse laser issu d'un laser à colorant pompé par un laser à azote (durée du pulse ~ 3 ns, longueur d'onde $\lambda_1 = 4555 \text{ \AA}$). On prépare ainsi une inversion totale de population sur la transition $7P_{3/2} - 7S_{1/2}$ à l'intérieur d'un volume actif de longueur $L = 10$ cm (longueur de la cellule) et de diamètre $d = 4$ mm (diamètre du faisceau laser à λ_1).

Le signal d'injection est constitué ici par le faisceau de diamètre ~ 4 mm (\geq diamètre du laser de pompe) d'un laser à centre coloré (Burleigh FCL 20) pompé par un laser à krypton ionisé. Pour faire varier la puissance injectée, on utilise un jeu de filtres neutres calibrés. Le laser à centre coloré est rendu monomode à l'aide d'un étalon à lame d'air. On réalise un balayage fin de la fréquence d'oscillation du laser en modifiant la pression

régnant à l'intérieur de la partie du laser contenant l'étalon (balayage par pression). La calibration de la fréquence est obtenue en enregistrant les pics de transmission d'un analyseur de spectre infrarouge de 10 GHz d'intervalle entre ordres et en mesurant la pression régnant à l'intérieur de la cavité laser à l'aide d'une jauge Baratron (MKS).

Pour détecter les pulses superradiants, on utilise un détecteur infrarouge InAs (Judson J12 LD) couplé à une électronique de détection permettant d'enregistrer en un coup les signaux (digitaliseur de transitoire R 7912). Pour enregistrer le spectre de l'effet de superradiance déclenchée, nous avons également utilisé un boxcar délivrant un signal proportionnel à l'aire du pulse superradiant intégré sur une dizaine de coups.

Notons, pour terminer, que l'expérience décrite ici est, si l'on excepte la présence du signal d'injection, tout à fait similaire aux expériences de superradiance proche infrarouge décrites aux chapitres VI et VII. Nous avons même, au chapitre VII, § A, étudié la superradiance sur une transition voisine $7P_{1/2} - 7S_{1/2}$ du césium (cf. figure VII. 1) et le lecteur pourra donc se référer au chapitre VI pour une description complète d'un montage expérimental similaire (lasers, cellule de résonance, détection résolue en temps).

2) Les signaux de superradiance déclenchée

En utilisant le montage décrit plus haut (§ 1), on peut observer les différents effets de déclenchement décrits au § A et illustrés par la figure IX.1. En utilisant un signal d'injection axial, nous avons observé de manière qualitative les effets de raccourcissement (fig. IX.1-a) et de superradiance préférentielle vers l'avant (cf. IX-1 b).

Nous avons étudié ensuite de manière plus approfondie l'effet de changement de direction. Pour cela, nous avons désaxé légèrement le faisceau injecté (de vecteur d'onde \vec{k}') par rapport au faisceau pompe (de direction \vec{k}_0 : cf. figure IX.1-c). En pratique, l'angle que font les directions de \vec{k}_0 et de \vec{k}' est pris égal à $\theta \sim 1,5^\circ$, ce qui permet un recouvrement total du milieu actif par le faisceau injecté.

On peut alors placer le détecteur de façon à observer :

- Soit le signal $I_{\vec{k}_0}$ émis dans la direction axiale \vec{k}_0
- Soit le signal $I_{\vec{k}'}$ émis dans la direction \vec{k}' du

signal d'injection.

Dans le plan focal de la lentille L les positions correspondantes du détecteur sont bien résolues (distantes de 2mm) et l'on a en absence de déclenchement :

$$I_{\vec{k}_0} \gg I_{\vec{k}'} \quad (\text{IX-30})$$

Par contre , en présence de déclenchement, on peut observer le changement de direction et l'on peut avoir :

$$I_{\vec{k}'} \gg I_{\vec{k}_0} \quad (\text{IX-31})$$

Il est alors possible d'utiliser cet effet pour enregistrer le spectre de la transition superradiante $7p_{3/2} - 7s_{1/2}$ à $\lambda_{SR} = 2,93\mu$. En effet, les deux niveaux bordants la transition superradiante possèdent une structure hyperfine. L'étalement total du niveau $7p_{3/2}$ est de 200 MHz ⁽⁷⁶⁾ et les différents sous-niveaux ne sont pas résolus à l'excitation.

(Largeur Doppler à $\lambda_1 \sim 500$ MHz, largeurs spectrales du laser à $\lambda_1 \gtrsim 1$ GHz). Par contre (voir figure IX-3) les deux niveaux de structure hyperfines $F=3$ et $F=4$ du niveau $7s_{1/2}$ sont mieux séparés ($\Delta\nu_{hfs} = 2185$ MHz ⁽⁷⁶⁾) et la superradiance se batit de façon indépendante sur les deux transitions

$7p_{3/2} \rightarrow 7s_{1/2} F=3, 7p_{3/2} \rightarrow 7s_{1/2} F=4.$

En effet, on a ici (cf chapitre III § B 2°) :

$$\Delta\omega \cdot T_{SR} \gg 1 \quad (\text{IX 32a})$$

$$(\text{où } \Delta\omega = 2\pi\Delta\nu_{hfs} \quad (\text{IX 32b}))$$

représente l'écart en fréquence des deux transitions superradiantes $7p_{3/2} \rightarrow 7s_{1/2}$ $F=3$ et $F=4$)

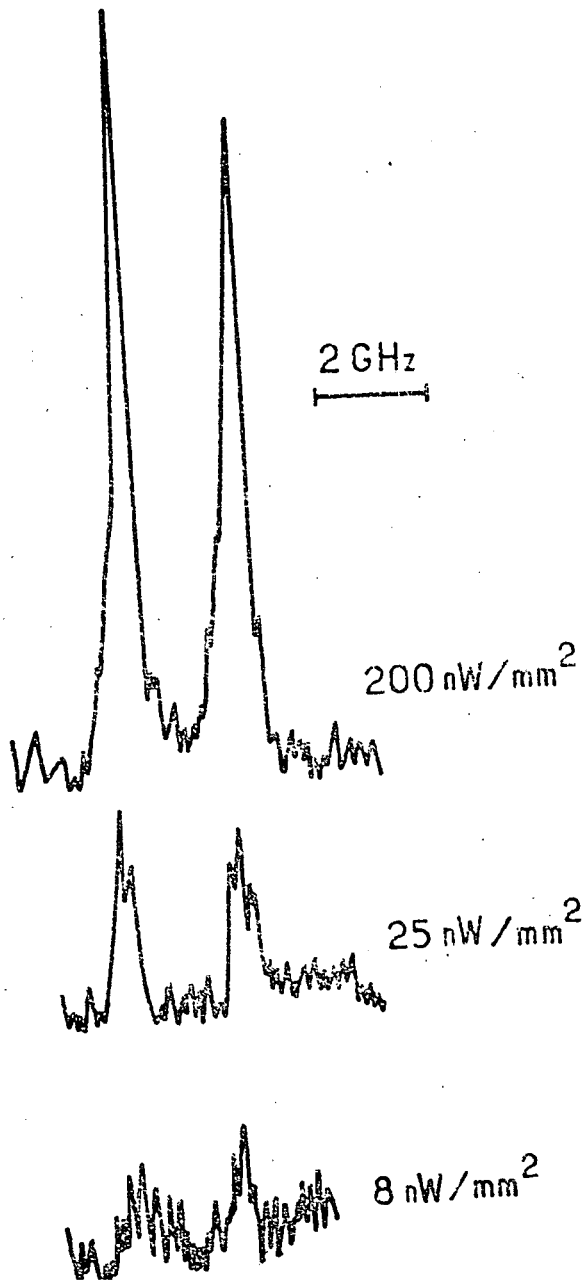


Figure IX-4

Spectre de superradiance déclenchée sur la transition $7P_{3/2} - 7S_{1/2}$ du Césium pour trois valeurs du flux injecté .

La figure (IX-4) présente les spectres de changement de direction d'émission superradiante. Ces courbes représentent l'énergie émise dans la direction k' moyenné à l'aide du Box-car (sur ~ 10 coups), on fonction de la fréquence du signal d'injection (pression regnant dans la cavité laser mesurée par la jauge Baratron (\star)). Le doublet observé correspond à la structure hyperfine du niveau $7S_{1/2}$. La figure IX-4 permet de mesurer l'intervalle de structure hyperfine du niveau $7S_{1/2}$:

$$\Delta\nu_{hfs} = 2100 \pm 150 \text{ MHz} \quad (\text{IX-33})$$

Cette valeur est en bon accord avec des déterminations précédentes $(^{76})$. La structure hyperfine du niveau $7P_{3/2}$ est beaucoup plus petite et n'est pas résolue ici.

En effet nous avons vu à l'approximation du champ moyen (cf équation IX-14), que l'efficacité du signal de déclenchement variait comme :

$$\frac{1}{1 + (2(\omega - \omega_0)T_{SR})^2} \quad (\text{IX-34})$$

où ω_0 est la fréquence atomique
et ω la fréquence injectée.

(\star) Comme la cavité n'est pas complètement pressurisée, on peut observer des sauts de mode, lorsque l'on balaye par pression la fréquence d'oscillation laser. Nous avons vérifié pour chacune des courbes de la figure (IX-4), qu'il n'y a pas eu de saut de mode lors de l'enregistrement. L'intervalle entre mode étant de l'ordre de 300 MHz, ce contrôle se fait très simplement à l'aide de l'analyseur de spectre (cf § 1°)

Avec $t_D \sim 15\text{ns}$, on a (figure II-13-c) $T_{SR} \sim 0.5\text{ns}$ et la largeur totale en fréquence de (IX-34) est de l'ordre de :

$$\Delta\nu \sim 250 \text{ MHz} \quad (\text{IX-35})$$

Le spectre de l'effet de superradiance déclenchée, doit donc présenter une largeur intrinsèque de l'ordre de 250 MHz et il n'est pas possible de résoudre la structure fine de $P_{3/2}$ dont les quatre composantes $F=2,3,4$ et 5 s'étendent sur ~ 200 MHz. Au total, le pic que l'on s'attend à observer doit avoir une largeur de $\sim 300\text{MHz}$. C'est bien ce qui est observé sur la figure IX-4.

Nous avons mesuré le flux incident correspondant aux différentes courbes de la figure IX-4. Le flux minimal détecté dans cette expérience est de $8 \cdot 10^{-9}$ watts/mm². Ce seuil est déterminé avec une incertitude d'un facteur deux ou trois et correspond à un flux de 10 à 20 photons résonnant sur une surface $a^2 = L\lambda (\mathcal{F} \sim 1)$ en un temps T_{SR} . Le "tipping angle" $\theta(t=0)$ est alors de l'ordre de 10^{-3} , alors que la valeur théorique correspondante (§ B ou (54)) est :

$$\theta(t=0) \sim \theta_0 = 2,3 \cdot 10^{-4} \quad (\text{IX-36a})$$

et que la valeur précédemment mesurée par raccourcissement du délai (21) est :

$$10^{-4} < \theta(t=0) < 2 \cdot 10^{-3} \quad (\text{IX-36b})$$

En tenant compte du fait que le calcul complet de l'effet de changement de direction n'a pas été fait : ce calcul conduit a priori à $\theta(t=0) > \theta_0$ (comme le gain hors d'axe est plus faible, il faut utiliser un signal de déclenchement plus fort), on peut considérer que l'accord entre la valeur mesurée du flux minimal détectée et la valeur théorique est satisfaisant .

Remarques :

Le calcul de la largeur de la courbe d'efficacité de superradiance déclenchée, a été fait ici (équation IX-14) à l'approximation du champ moyen, alors que visiblement les effets de propagation

sont importants (milieu cylindrique allongé). Il serait possible de faire un calcul similaire à celui fait au § B 1°) à l'approximation de propagation à une dimension. Il faut alors remplacer la croissance de θ en

$$e^{t/2T_{SR}}$$

par une croissance en (cf II IV-18) :

$$J_0(2i\sqrt{t/T_{SR}}) \sim e^{\sqrt{t/T_{SR}}}$$

Il est alors facile de vérifier que l'efficacité du signal de déclenchement ne varie plus en fonction de la fréquence comme (IX-34) mais comme :

$$\frac{1}{1 + (\omega - \omega_0)^2 T_{SR} T_D} \quad (XI-37)$$

Dans le cas de notre expérience (IX-37) conduit à :

$$\Delta\nu \sim 125 \text{ MHz}$$

ce qui est également compatible avec la largeur observée (300 MHz).

Expérimentalement il serait très certainement intéressant de reprendre l'expérience dans une autre configuration de niveaux, afin de trancher entre IX-34 et IX-37 ce qui devrait permettre de tester la validité du modèle de propagation à une dimension.

D'un autre point de vue, si l'on admet la validité de (IX-34) ou (IX-37), on peut considérer, que la mesure de la largeur du spectre de superradiance déclenchée, est une mesure indirecte de T_{SR} dans l'espace des fréquences. Cette mesure indirecte est bien sûr beaucoup plus facile que la mesure directe, qui implique une détermination absolue du nombre d'atomes (64).

3) Conclusion

L'expérience décrite plus haut nous a permis de mettre en évidence un nouvel effet de superradiance déclenchée: l'effet de changement de direction. Elle nous a permis d'étudier également le spectre du bruit responsable du déclenchement du système en enregistrant la variation du signal de changement de direction en fonction de la fréquence. Les ordres de grandeurs des largeurs obtenues et des puissances nécessaires pour voir cet effet sont en bon accord avec les évaluations théoriques du § B,

D'un autre point de vue, on peut considérer que cette expérience illustre la possibilité d'utiliser le phénomène de déclenchement de la superradiance, comme une nouvelle méthode spectroscopique. En effet nous avons pu enregistrer le spectre de la transition $7P_{3/2} - 7S_{1/2}$ en utilisant une énergie incidente de quelques photons par coup de laser. Il devient ainsi possible de faire de la spectroscopie d'émission à des longueurs d'onde (infrarouge) où l'on ne dispose que de sources accordables, de très faible puissance (oscillateurs paramétriques, effet Raman).

Par rapport aux techniques habituelles (absorption, émission) le gain en sensibilité de la méthode de spectroscopie par superradiance déclenchée provient du gain (de l'ordre de $N \approx 10^8$) du milieu atomique lui-même. Ce gain est tellement grand que le système oscille spontanément (= superradiance spontanée) et c'est en observant les modifications de cette oscillation spontanée (ici les modifications de direction) que l'on peut étudier l'effet du signal incident.

D) Les effets de superradiance déclenchée dans le domaine microonde :

Après avoir étudié le déclenchement de l'émission superradiante dans le domaine proche infrarouge, il nous a paru naturel d'étendre l'expérience au domaine microonde. Les expériences ont été faites dans le cas des transitions maser superradiantes en cavité. D'un point de vue théorique, ce cas est très différent du cas étudié précédemment (superradiance dans le domaine proche infrarouge) :

- d'une part, parce que le démarrage de l'émission se fait sous l'effet du rayonnement thermique (domaine microonde),
- d'autre part, parce que le calcul de l'évolution peut se faire à l'approximation du champ moyen (cavité).

Au total, la dynamique de l'amplification est beaucoup plus faible, et le rapport entre le délai d'émission t_D et T_{SR} est plus petit : on a, en effet, dans le domaine millimétrique en cavité :

$$t_D \sim 7,5 T_{SR} \quad (IX.38)$$

alors que l'on avait , dans le domaine proche infrarouge (cf figure II-13)

$$t_D \sim 30 \cdot T_{SR} \quad (IX.39)$$

Sur le plan expérimental, l'étude des effets de déclenchement n'est facile que si l'on est capable de détecter directement l'émission maser. Nous emploierons pour cela une technique de battement hétérodyne utilisée en astrophysique pour détecter des rayonnements millimétriques de très faible puissance. Après avoir décrit le montage expérimental (§ 1°), nous décrirons rapidement l'allure des signaux de battement hétérodyne au § 2° (pour une description plus complète, le lecteur pourra se référer à (65)), et nous présenterons au § 3° les expériences de superradiance déclenchée proprement dites.

1°) Description du montage expérimental

La figure (IX 5) présente le schéma général de l'expérience de superradiance déclenchée.

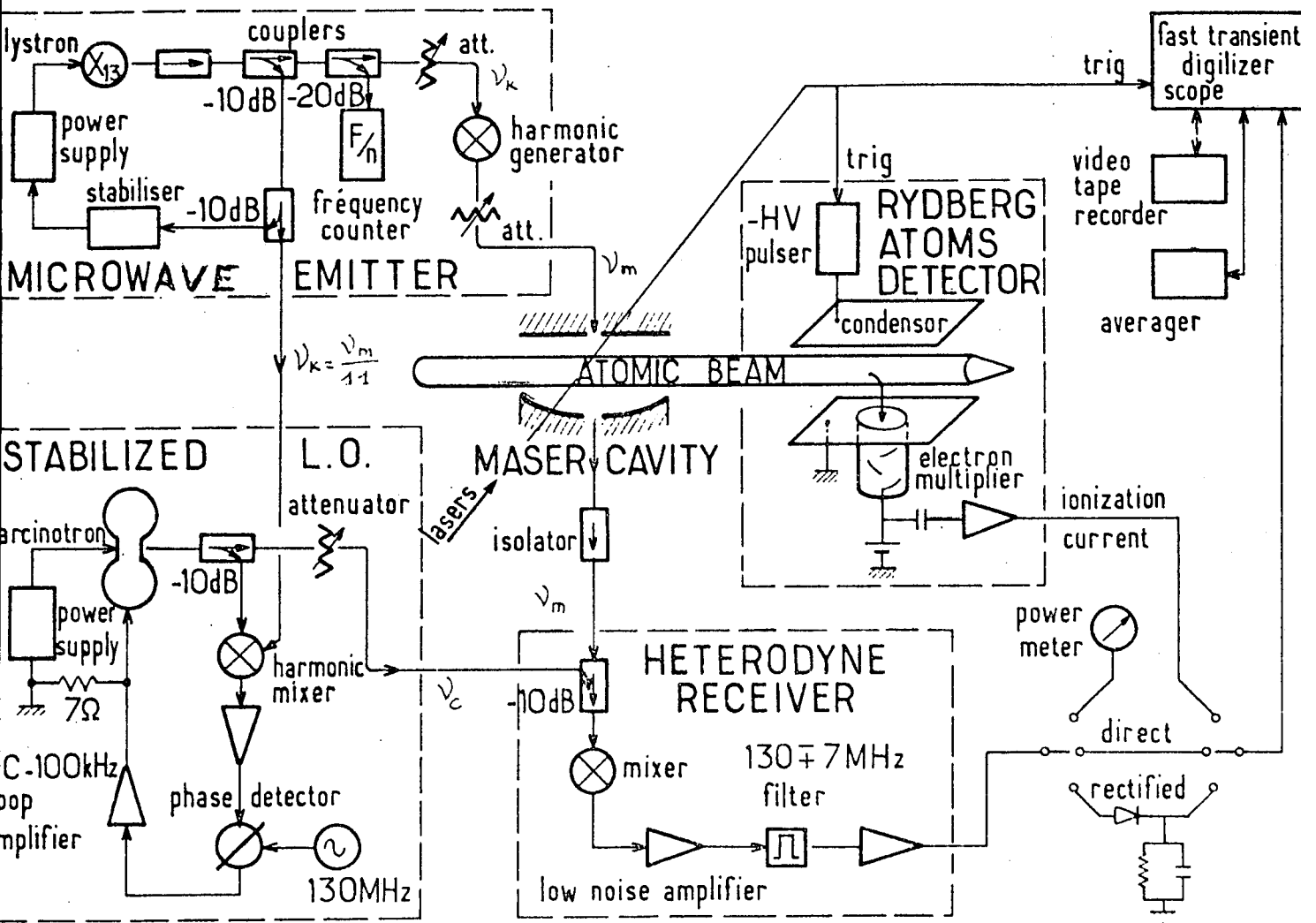


Figure IX-5

Schéma général de l'expérience de superradiance déclenchée dans le domaine microonde

Pour étudier le déclenchement de l'émission maser en détectant l'émission par battement hétérodyne, il faut d'une part, réaliser le battement hétérodyne, c'est à dire, faire battre sur un élément mélangeur le signal à étudier (émission maser) avec un signal extérieur (oscillateur local) de fréquence voisine, d'autre part, déclencher l'émission à l'aide d'une deuxième source extérieure résonnante avec la transition maser.

Décrivons rapidement ces différents éléments :

i) L'oscillateur local (stabilized L.O sur la figure IX 5).

Nous avons utilisé, comme oscillateur local un des carcinotrons asservi, que C. FABRE a employé pour ses expériences de spectroscopie de haute résolution (73). Rappelons rapidement le principe de l'asservissement utilisé. Un klystron fonctionnant au voisinage de 10 GHz est asservi en phase sur un quartz hautement stabilisé (Mos - 5: microwave system). La fréquence d'oscillation de ce klystron ν_K est le sous-harmonique 11 de la fréquence ν_m de la transition maser superradiante étudiée (dans le cas de la transition $33S - 32P_{3/2}$: $\nu_m = 107\ 714$ MHz) :

$$11 \cdot \nu_K = \nu_m \quad (\text{IX.40})$$

On fait alors battre l'harmonique 11 du klystron avec le signal du carcinotron à l'aide d'une diode mélangeuse (harmonic Mixer sur la figure IX.5). Le battement obtenu est alors asservi en phase sur un synthétiseur à 130 MHz. La fréquence ν_c du carcinotron est alors

$$\nu_c = \nu_m \pm 130 \text{ MHz} \quad (\text{IX.41})$$

et le battement hétérodyne entre le signal maser à ν_m et le carcinotron à ν_c se fait à 130 MHz.

ii) La source servant à déclencher l'oscillation maser (microwave emitter sur la figure IX.5)

Pour déclencher l'oscillation maser, on utilise une deuxième diode (harmonic generator sur la figure IX.5) qui est couplée par guide d'onde à la cavité maser, et qui, à partir du signal du klystron à la fréquence ν_K génère l'harmonique 11 à la fréquence ν_m (équation IX.40).

On dispose ainsi :

- en plus d'une source puissante (carcinotron) à la fréquence $\nu_m \pm 130$ MHz (qui sert d'oscillateur local pour observer le battement hétérodyne),
- d'une source de faible puissance (klystron multiplié) à la fréquence ν_m (qui peut servir à déclencher l'émission maser).

iii) Le système de détection par battement hétérodyne (hétérodyne receiver sur la figure IX.5)

Pour effectuer le battement hétérodyne entre le signal à détecter (maser) et l'oscillateur local (carcinotron), nous avons utilisé une troisième diode (mixer sur la figure IX.5) de très faible bruit qui nous a été prêtée par le groupe de radioastronomie millimétrique de l'Observatoire de Meudon et de l'E.N.S. Cette diode est couplée par guide d'onde à la cavité maser (cavité laiton de la figure VIII-15-a). Elle est couplée également à l'oscillateur local par l'intermédiaire d'un coupleur directionnel 10 db

Le battement hétérodyne à 130 MHz issu de cette diode est amplifié par un amplificateur faible bruit (S.C.D. Nuclétude Type 5.35.2 de 2.5 dB de facteur de bruit) et filtré par un filtre actif (Acronetics -25-15-1) centré à 130 MHz et de bande ± 7 MHz. Le signal de battement est alors enregistré à l'aide du digitaliseur de transitoire (Tecktronix R7912) couplé,

soit au magnétoscope,

soit au moyennneur,

et cela soit directement,

soit après avoir été redressé par une diode Shottky (BAT 19) et un filtre RC de 50 ns de constante de temps.

Il est également possible de mesurer directement en continu la puissance disponible à 130 MHz à l'aide d'un microwatt-mètre (voir figure IX.5).

Evaluons les performances de ce système de détection hétérodyne. La température de bruit intrinsèque de la diode mélangeuse utilisée ici est 2500°K (à titre indicatif, les meilleures diodes existantes à l'heure actuelle qui fonctionnent à la température de l'hélium liquide, ont des températures de bruit de l'ordre de 400°K).

On perd un facteur 7db dans le guide qui couple la cavité au détecteur, et un facteur 3 db du fait que l'on est sensible au bruit dans les deux bandes latérales $\nu_c \pm 130$ MHz ; Un autre facteur 3 db est perdu enfin, du fait que la cavité est couplée à deux guides. Au total, le bruit de la chaîne de détection vis-à-vis du signal régnant à l'intérieur de la cavité est de l'ordre de $2500^\circ\text{K} \times 10^{1,3} \sim 5.10^4$ °K.

2°) La détection directe de l'émission maser (rappel des résultats obtenus en (65) et (32))

En utilisant le montage expérimental décrit au paragraphe précédent il nous a été possible de détecter directement l'émission maser, que celle-ci soit déclenchée ou non.

La figure IX.6 présente des signaux maser typiques obtenus en absence de déclenchement extérieur. Les signaux de battement hétérodyne à 130 MHz sont enregistrés en "un coup" à l'aide du magnétoscope. L'origine des temps correspond à l'instant d'excitation. On observe au bout d'un temps de l'ordre de 0,5 μs (le filtre de 130 ± 2 MHz présent ici introduit un retard instrumental de $\sim 0,25$ μs), l'émission d'un pulse maser, qui se traduit ici par une "bouffée" dans le signal de battement. La forme exacte de cette "bouffée" n'est malheureusement pas significative, car le bruit en absence de signal qui correspond à une température de 5.10^4 °K n'est pas négligeable (voir signal, avant et après la bouffée maser sur la figure IX.6).

Pour éliminer ce bruit, il suffit de moyenniser les signaux après redressement. La figure IX.7 présente un signal typique obtenu après moyennage sur 100 coups. On notera l'élargissement temporel du signal, qui provient des fluctuations, d'un coup à l'autre, du délai (ces fluctuations sont ici essentiellement liées aux fluctuations expérimentales du nombre d'atomes N que l'on est capable de préparer).

REMARQUE

Les signaux de battement présentés ici sont extraits de (32), et ont été obtenus à l'aide d'une chaîne de détection hétérodyne légèrement plus performante (rapport signal/bruit amélioré de 3 dB), que la chaîne décrite au § D 1° et utilisée pour réaliser les expériences de superradiance déclenchée. Le lecteur se reportera à la thèse de Claude Fabre (65) pour une description plus complète de l'expérience de détection de l'émission maser par battement hétérodyne. Indiquons toutefois, que les signaux obtenus à l'aide de la chaîne simplifiée de la figure (IX.5) sont tout à fait similaires à ceux présentés ici sur les figures (IX.6 et 7).

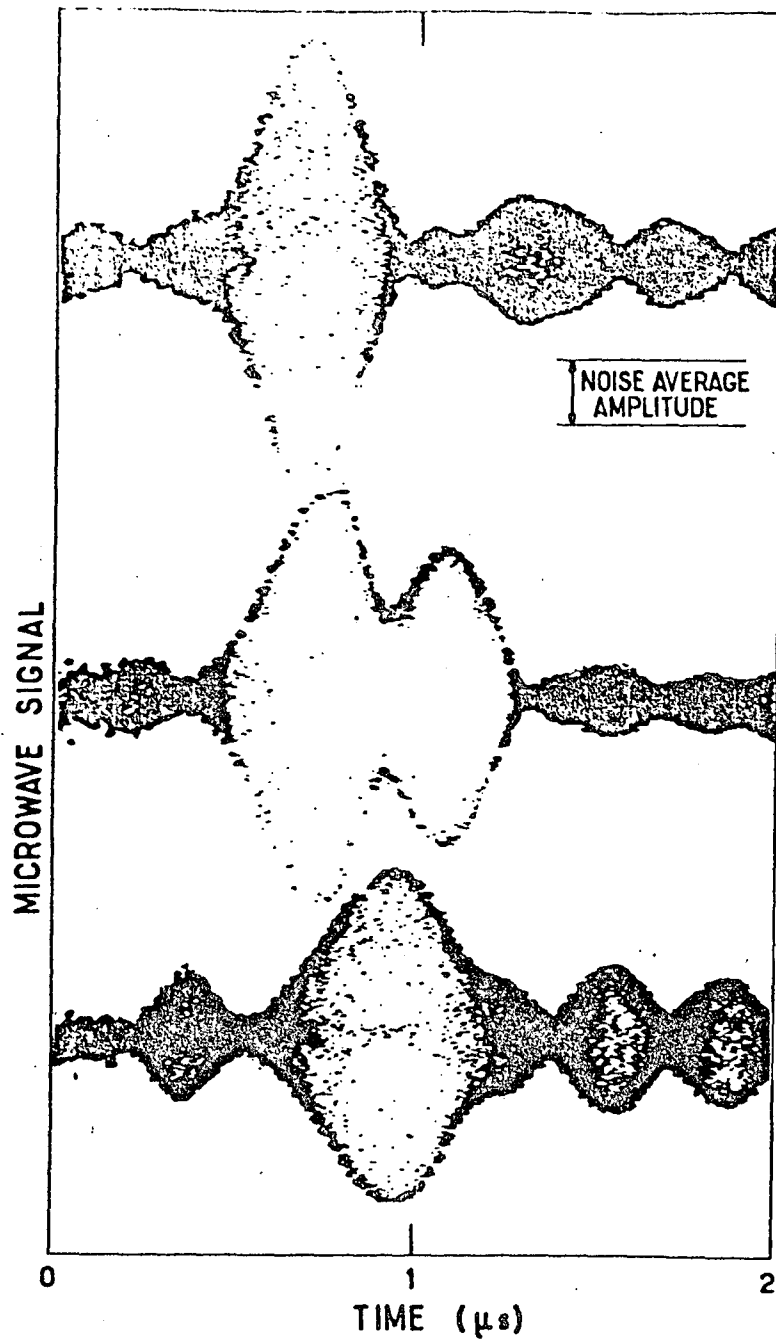


Figure IX-6

Figure extraite de (65)

Signaux de battement hétérodyne détectés en un coup et enregistré sur magnétoscope (Photo de l'écran de télévision). Le battement rapide à 130 MHz n'est pas observable ici. Les "bouffées" correspondant aux signaux maser. Le bruit avant et après les "bouffées" provient du bruit de la chaîne de détection qui correspond à une température de bruit de $2,5 \cdot 10^4$ °K.

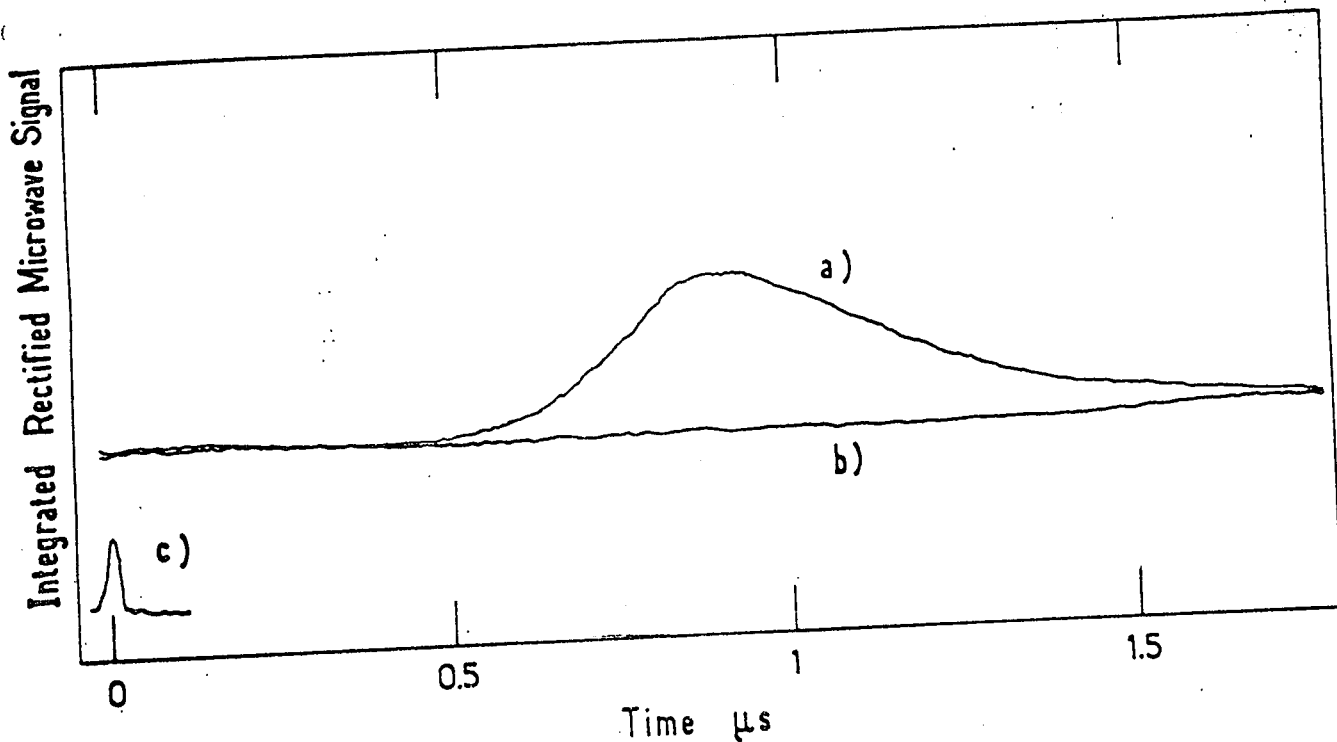


Figure IX.7 Figure extraite de (65)

Signal de battement hétérodyne moyenné sur 100 coups après redressement

- a) Signal proprement dit
- b) Ligne de base (pas d'émission maser)
- c) Origine des temps : pulse laser de pompe à λ_1

3°) Mise en évidence de la superradiance déclenchée dans le domaine microonde

a) Etude qualitative

En injectant dans la cavité l'harmonique 11 du klystron résonnante à la fréquence de la transition $33S - 32P_{3/2}$, il nous a été possible de mettre en évidence l'effet de déclenchement d'émission maser.

La figure IX.8 illustre cet effet sur les signaux détectés "en un coup".

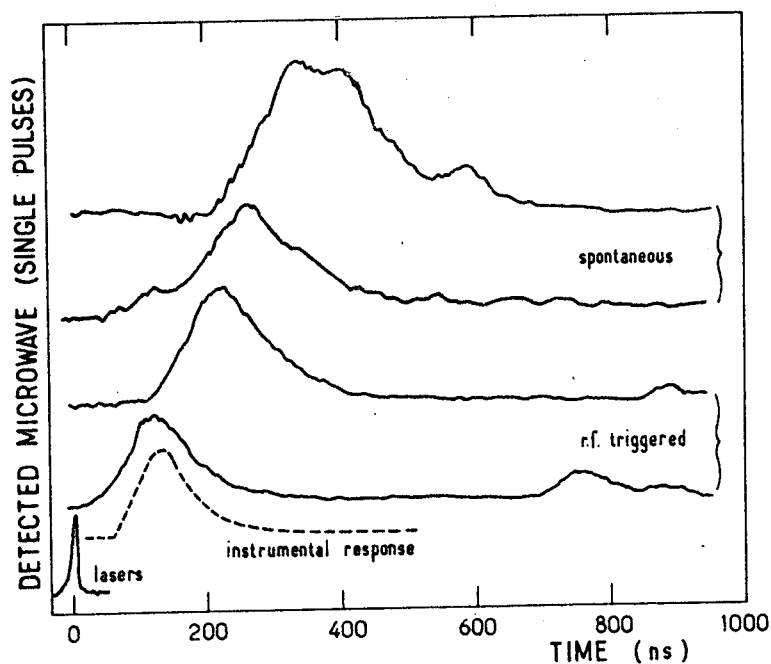


Figure IX.8

Effet de raccourcissement du délai en présence d'un signal de déclenchement résonnant

Le signal est enregistré au coup par coup après redressement (en pointillé la fonction d'appareil).

La cavité est ici à résonance sur la transition maser et l'on observe, malgré les fluctuations, un raccourcissement très net du délai en présence d'un signal injecté. Lorsque le signal de déclenchement est important, l'évolution est plus rapide que le temps de réponse du filtre à 130 ± 7 MHz. L'allure du pulse observé dans ce cas (courbe du bas) est déterminée uniquement par la fonction d'appareil de la détection (courbe en pointillé).

En moyennant les signaux, il est possible d'éliminer les fluctuations et d'observer l'effet de raccourcissement du délai avec un meilleur contraste. Les figures (IX.9) et (IX.10) nous présentent un tel effet. Le signal détecté est la somme :

- du signal, dû au bruit du détecteur: dans la cavité, ce bruit correspond à $5 \cdot 10^4$ °K, soit 2,2 pW sur la bande 130 ± 7 MHz,
- du signal dû à la microonde de déclenchement incidente,
- du signal maser proprement dit.

On notera sur les figures (IX.9) et (IX.10) la calibration absolue en puissance de l'échelle des ordonnées. Pour réaliser cette calibration, il suffit de comparer en absence d'atomes excités:

- la hauteur du fond continu après moyennage (voir par exemple, figure IX.9, 10 et 11),
- à la puissance continue mesurée à l'aide du microwatt mètre (power meter sur la figure IX.5) en sortie de chaîne (puissance du signal à 130 MHz).

Nous avons pu vérifier que ces deux quantités varient linéairement. Le signal redressé que l'on observe sur les figures IX.9, 10 et 11 varie donc linéairement avec la puissance microonde régnant à l'intérieur de la cavité (la détection est linéaire en amplitude avant redressement et la diode qui redresse le signal à 130 MHz fonctionne dans la partie quadratique de sa caractéristique). En absence d'atomes et de signal injecté, le signal détecté correspond alors à une puissance de 2,2 pW (bruit du détecteur = $5 \cdot 10^4$ °K sur une bande de ± 7 MHz) incidente sur la cavité. L'incertitude relative sur cette calibration absolue de puissance est de l'ordre d'un facteur deux*. Les puissances les plus faibles que l'on

* Le facteur le plus difficile à mesurer ici est le facteur de perte entre la cavité et le détecteur (que nous avons pris égal à -7dB), car cette quantité n'est pas directement accessible à la mesure. Seulement la perte globale à la traversée de la cavité est mesurable (-14dB).

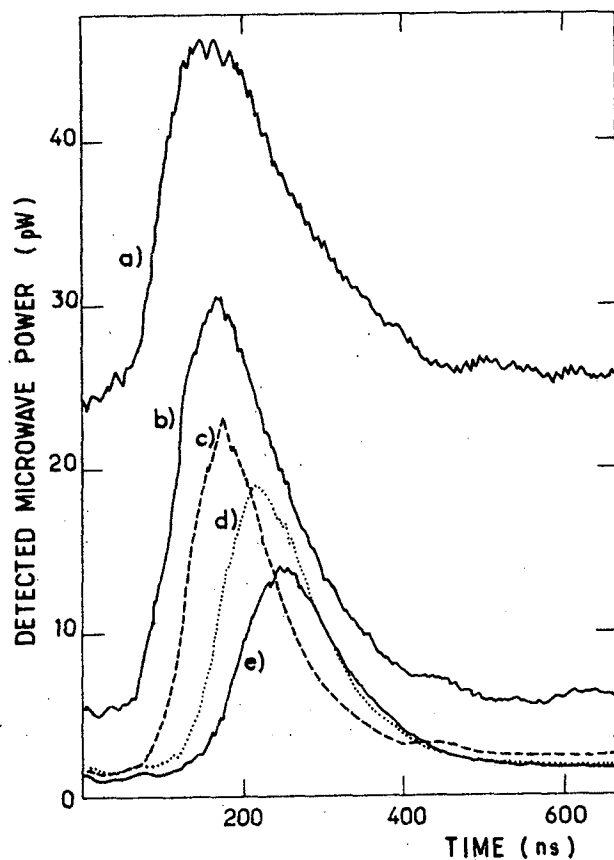


Figure IX-9: Raccourcissement du délai de l'émission maser sur la transition $33S - 32P_{3/2}$ de Na observé en présence d'un signal de déclenchement résonnant.

- a, b, c, d,) Signaux détectés après moyennage sur 100 coups avec des puissances de déclenchement décroissantes
- e) (idem) en absence de déclenchement

On notera l'augmentation du fond continu avec la puissance injectée et la calibration de puissance. Le fond continu en absence de déclenchement correspond au bruit total de la chaîne de détection vu de la cavité (50 000 °K ou 2,2 pW).

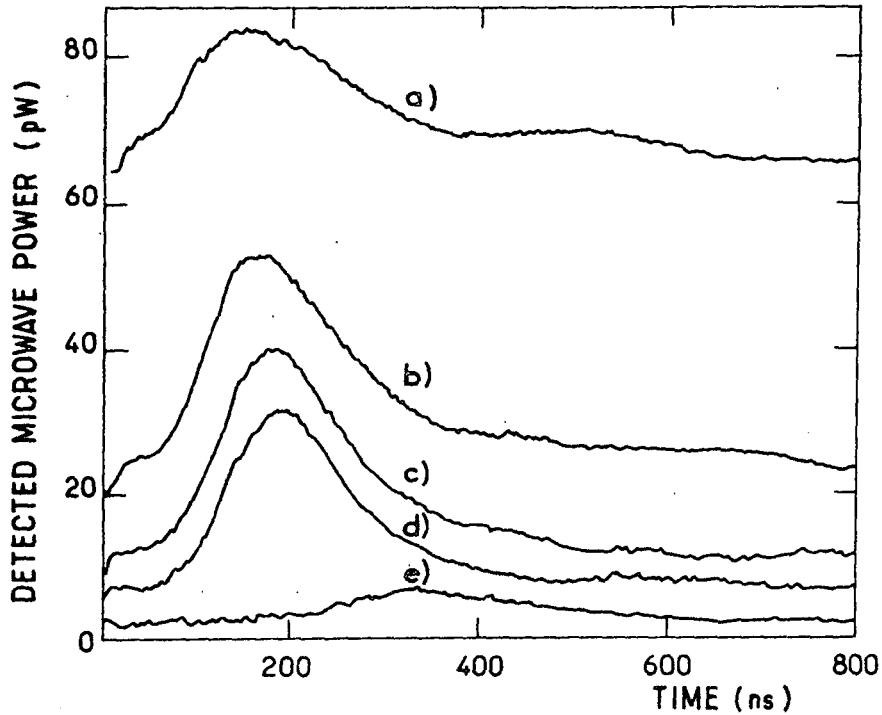


FIGURE IX.10 : voir légende de la figure IX.9
 a, b, c, d) signaux pour différentes valeurs du déclenchement
 e) signal spontané

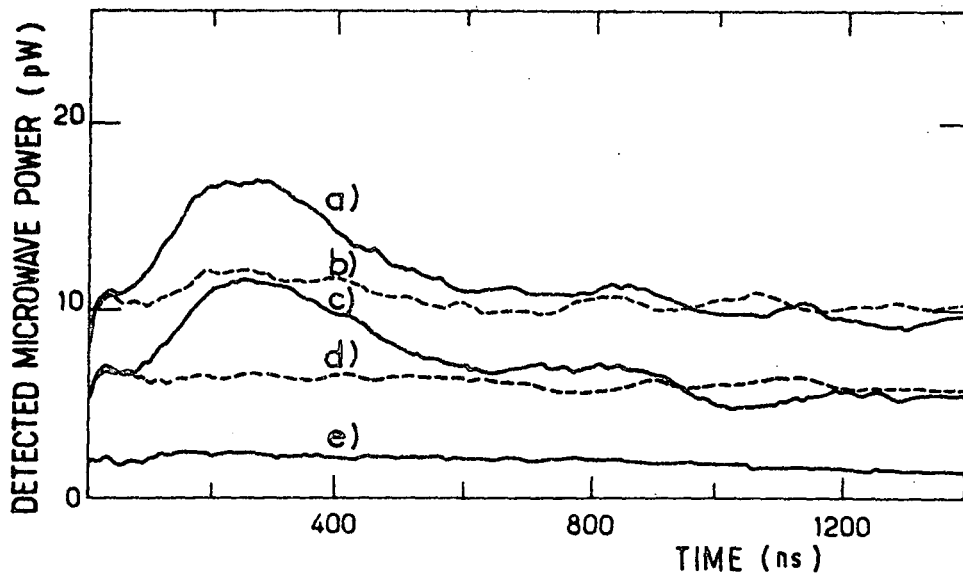


FIGURE XI.11 : Amplification de la microonde incidente sur la transition $33S - 32P_{3/2}$. Signal moyenné après redressement (100 fois)
 a, b) microonde incidente de l'ordre de 10 pW
 a) lasers allumés. Il y a des atomes dans le niveau 33S
 b) lasers éteints. Il n'y a pas d'atomes dans le niveau 33S
 c, d) idem, mais microonde de l'ordre de 5 pW
 e) signal maser spontané (au-dessous du seuil de visibilité)

puisse mesurer sont de l'ordre de 55 nW, ce qui correspond à 0.1 dB au-dessus du bruit.

D'un point de vue expérimental, il faut indiquer que l'observation de l'effet maser par battement hétérodyne dépend de façon très critique des différents réglages, et en particulier du réglage de la fréquence d'accord de la cavité, et il peut arriver que le signal maser de battement hétérodyne disparaisse alors que l'on continue à observer l'effet maser par transfert de populations. Pour rendre l'observation du signal de battement hétérodyne moins critique, il suffit de déclencher l'émission. La figure (IX.10) illustre cet effet. On observe sur cette figure, une augmentation très importante du signal maser détecté par battement alors que l'émission maser est déclenchée.

On notera cependant, que cette augmentation du signal en présence de déclenchement apparaît également lorsque le signal maser est confortable (tout est bien réglé), mais cette fois, le gain obtenu se limite à un facteur de l'ordre de deux (cf. figure IX.9). Nous verrons que ce phénomène est lié à l'effet de polarisation (cf. § 3° b).

Pour finir, notons qu'au-dessous du seuil maser, il est possible de faire fonctionner le système en tant qu'amplificateur transitoire du signal injecté. Cet effet est présenté sur la figure (IX.11).

b) Effets de déclenchement en polarisation

Si l'on cherche à étudier de manière quantitative les signaux maser sur les transitions $33S_{1/2} - 32P_{3/2}$ ou $1/2$, il faut tenir compte des effets de polarisations liés à la dégénérescence de ces niveaux. Considérons par exemple, le cas de la transition $33S_{1/2} - 32P_{1/2}$ (qui est le cas le plus simple).

La figure (IX.12) représente le diagramme associé

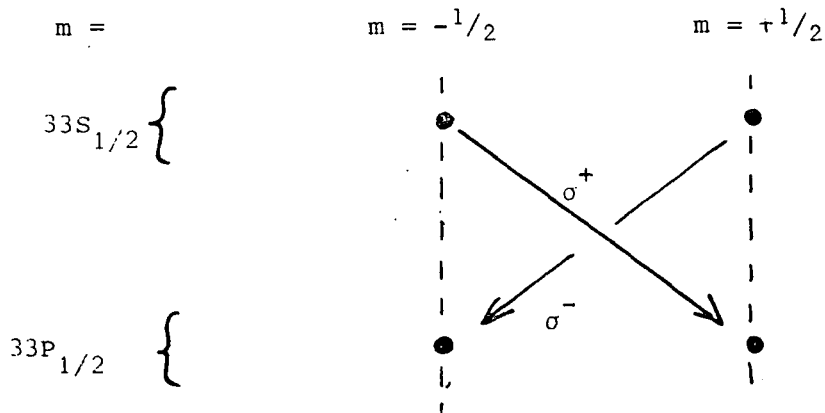


Figure IX.12

Etudions tout d'abord la polarisation de l'émission dans le cas où le démarrage est spontané. Comme l'émission se fait dans le mode \vec{k}_0 de la cavité, nous avons choisi l'axe $Oz//k_0^+$ (axe de symétrie de la cavité) comme axe de quantification sur la figure IX.12. L'émission se produisant suivant k_0^+ , les seules polarisations possibles sont σ^+ et σ^- . Si l'on considère alors que l'excitation optique du niveau 33S se fait en polarisation linéaire (ce qui est le cas dans nos expériences), on ne crée aucune cohérence dans le niveau 33S et il y a même égalité des populations des deux sous-niveaux Zeeman : $m = \pm 1/2$. On ne crée, en effet, dans le niveau 33S $1/2$, ni alignement (car le niveau 33S est de spin $1/2$), ni orientation (car l'excitation se fait en polarisation linéaire). Par ailleurs, les émissions maser superradiantes σ^+ et σ^- sont complètement décorrélées (polarisations orthogonales et atomes émetteurs différents : les atomes "a" initialement dans le niveau 33S $m = +1/2$ émettent en σ^+ ; les atomes "b" initialement en $m = -1/2$ émettent en σ^-). Par symétrie du problème, l'intensité émise est la même en σ^+ et σ^- . Comme la phase relative des champs émis en σ^+ et σ^- est aléatoire, on obtient au total, une émission de polarisation linéaire, orthogonale à O_z , et de direction aléatoire dans le plan xOy. En fait, en tenant compte des fluctuations, on trouve que le champ émis est de polarisation elliptique, l'hélicité changeant au cours de l'évolution.

Comme le détecteur hétérodyne est polarisé linéairement, car on utilise entre la cavité et le mélangeur hétérodyne des guides rectangulaires qui ne transmettent l'onde entrante que suivant une direction de polarisation, on observe, en absence de déclenchement, des fluctuations importantes sur l'amplitude des battements hétérodynes. Ces fluctuations traduisent simplement les fluctuations de la direction de polarisation d'émission. Au total, après intégration et moyennage, seule la moitié de l'énergie émise par les atomes est détectée.

Si par contre, l'émission maser est déclenchée, la polarisation de l'onde qui se construit dans le milieu, sera celle du signal injecté et l'on n'observe, ni les fluctuations de direction de polarisation, ni les fluctuations d'amplitude associées. Au total, on observe alors, après moyennage :

- une augmentation (de l'ordre d'un facteur deux) du signal détecté si les polarisations d'injection et de détection sont parallèles,

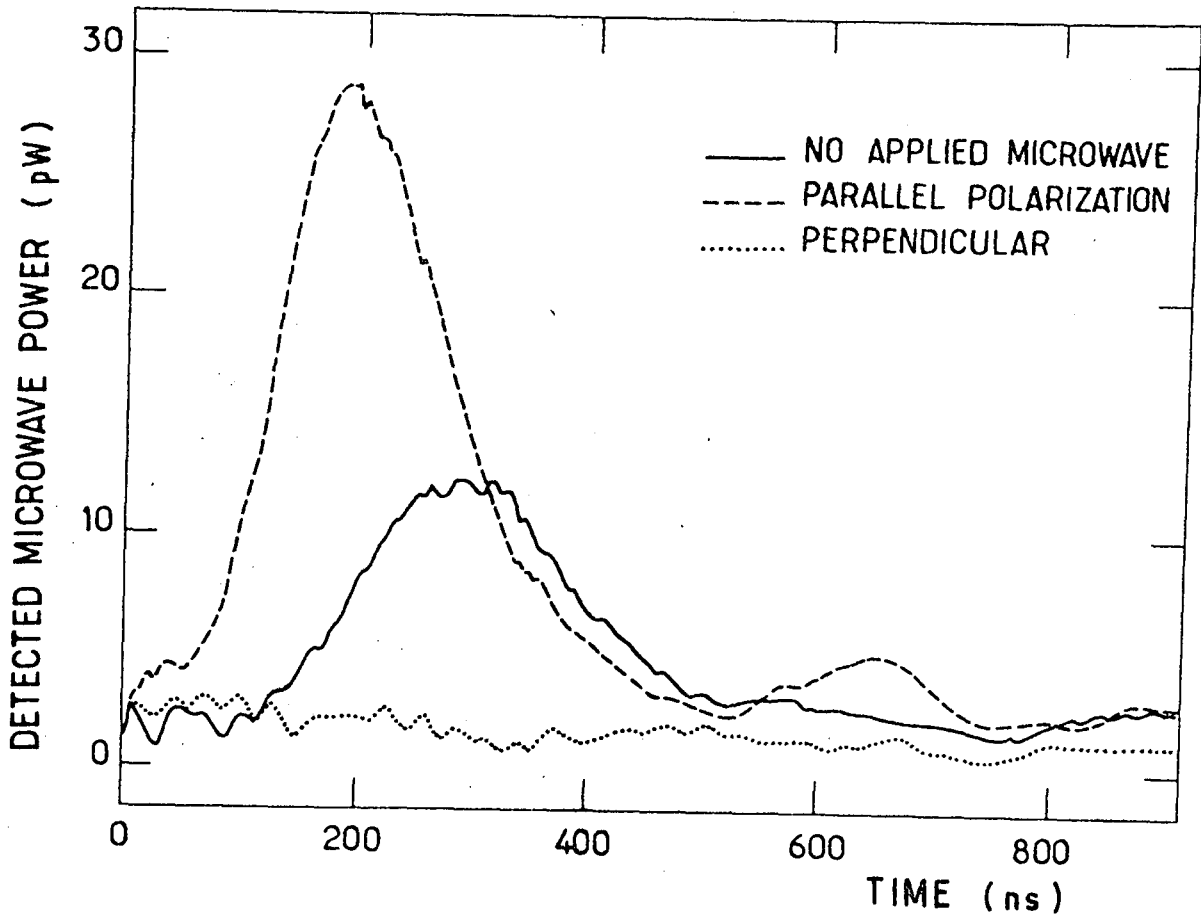


Figure IX-13 : Mise en évidence de l'effet de déclenchement en polarisation

Les différentes courbes présentent les signaux de battement hétérodyne obtenus après redressement et intégration sur 100 coups (transition maser 33S - 32P $3/2$) .

Trait plein : Maser spontané

Trait tireté : Maser déclenché . La polarisation du signal de déclenchement est parallèle à celle du détecteur.
On observe une augmentation de l'aire du signal de l'ordre de deux.

Trait pointillé : Maser déclenché orthogonalement au détecteur
Disparition du signal maser.

- ou une disparition qui peut être quasiment complète du signal détecté, lorsque les polarisations d'injection et de détection sont orthogonales.

La figure (IX.13) nous présente les signaux correspondants à cet effet de polarisation et l'on observe bien suivant les polarisations l'effet de superradiance déclenchée : augmentation du signal avec diminution du délai, ou disparition du signal suivant le cas.

c) Effet de synchronisation de la phase de l'émission maser

En présence d'un signal de déclenchement, on peut observer en plus de l'effet de polarisation décrit plus haut, une mise en phase de l'onde maser superradiante sur l'onde incidente de déclenchement. Cet effet est assez difficile à observer dans le domaine optique, car on ne dispose pas de détecteur sensible à la phase.

Le principe de l'expérience est décrit sur la figure (IX.14) qui est une version simplifiée du schéma général (IX.5) auquel le lecteur peut également se référer. La symétrie de la figure montre que dans le cas où l'émission maser est déclenchée, c'est à dire si l'onde qui sort de la cavité (maser) est en phase avec l'onde qui y entre (déclenchement), les signaux de battement à 130 MHz : battement hétérodyne, et battement de la boucle d'asservissement du carcinotron, ont une phase commune. Cette phase est également commune avec le signal issu du synthétiseur, car le carcinotron est asservi en phase.

Au total, on obtient, en comparant, à l'aide d'un "double balanced Mixer" (D.B.M. : Mini-Circuit Lab.), la phase du signal de battement hétérodyne avec celle du signal 130 MHz, issu du synthétiseur, un signal proportionnel à

$$\text{Re} (\mathcal{E} (\exp i \Delta\phi)) \quad (\text{IX.40})$$

où \mathcal{E} est l'enveloppe du champ maser et $\Delta\phi$ la différence de phase entre le battement hétérodyne et le synthétiseur.

- Dans le cas où l'émission maser est déclenchée $\Delta\phi$ est constant. En modifiant la longueur des câbles, on peut alors rendre le signal maximum en faisant $\Delta\phi = 0$ ou π

- Si au contraire, l'émission maser est spontanée, $\Delta\phi$ fluctue aléatoirement et quel que soit le réglage (longueur des câbles), le signal moyen est nul.

La figure IX.15 illustre cet effet et présente les signaux de comparaison de phase en présence et en absence de microonde déclenchant le système. Lorsque le maser est déclenché, il y a synchronisation de la phase ($\langle \epsilon \rangle \neq 0$), et on observe un signal (figure IX.15 a). Nous avons vérifié, en modifiant la longueur des câbles, que l'on pourrait faire varier le signe de ce signal en modifiant $\Delta\phi$ dans (IX.40). En absence de déclenchement, $\langle \epsilon \rangle = 0$ et le signal est nul (figure IX.15 c).

La figure (IX.15 b) permet de vérifier que le signal observé en (IX.15 a) est atomique et disparaît lorsque les atomes ne sont pas excités.

Au total, on observe bien l'effet prévu de synchronisation de la phase. On pourrait utiliser cet effet, pour détecter sur fond noir, une onde incidente, à condition d'en connaître la phase. Il est à noter, là encore, l'extrême sensibilité de la méthode, le bruit associé à cette détection de phase étant ici, comme dans le cas de l'effet de polarisation, de l'onde du bruit thermique qui déclenche le système ($\sim 300^\circ\text{K}$).

4°) Etude quantitative de la superradiance déclenchée dans le domaine microonde.

Pour étudier de manière quantitative, l'effet de superradiance déclenchée, nous avons mesuré la puissance injectée.

Cette mesure se fait en comparant, à l'aide du microwatts mètre (Power meter) de la figure IX-5) la puissance détectée en continu en présence et en absence d'injection. La précision de la mesure est de l'ordre de 0.1 dB, soit $25 \cdot 10^{-3}$ de la puissance moyenne de bruit P_N (P_N correspond à une température de bruit de 50 000 °K sur une bande de $\pm 7\text{MHz}$, soit $\sim 2,2$ picowatt).

La figure (IX-16) présente quelques signaux d'injection dans le cas où les polarisations de déclenchement et de détection sont les mêmes.

Les courbes (a,b,c) présentent dans les mêmes conditions expérimentales (même nombre d'atomes excités) les signaux

en absence d'injection (a)

en présence d'une injection correspondant $P_{\text{decl}} = 4.10^{-2} \text{PN}$ (b)

en présence d'une injection de $P_{\text{decl}} = 12.10^{-2} \text{PN}$ (c)

On observe nettement, en présence d'injection, un raccourcissement du délai et une augmentation globale du signal de l'onde d'un facteur deux (effet de polarisation). Le délai en absence de déclenchement (a) est de l'ordre de 250 ns (on tient compte ici d'un décalage de l'origine de l'ordre de 50 au 100 ns, du fait de la présence du filtre $\pm 7\text{MHz}$), et T_{SR} est de l'ordre de 33ns. (car $t_D \sim 7,5 T_{\text{SR}}$ cf VIII 16).

Evaluons tout d'abord le nombre d'atomes émetteurs en mesurant l'aire des courbes de la figure (IX-16). En absence de déclenchement, la population est aléatoire et seule la moitié de l'énergie est détectée, par contre, si le système est déclenché figure (IX 16b ou c) l'aire augmente d'un facteur de l'ordre de deux. En tenant compte de ce facteur, on trouve alors que le nombre N d'atomes émetteurs est

$$N \sim 1.5 \cdot 10^5 \quad \text{pour la courbe a.}$$

$$N \sim 1.2 \cdot 10^5 \quad \text{pour la courbe c.}$$

Ces valeurs sont en très bon accord avec la valeur calculée à partir du délai $t_D \sim 250\text{ns}$. Il vient en effet, à partir des valeurs de t_D tabulées (cf Tableau VIII-3) :

$$N \sim 10^4 \frac{T_D(N=10^4)}{250 \text{ ns}} = 1,17 \times 10^5 \quad (\text{IX 38})$$

Etudions maintenant l'effet de diminution du délai. Pour cela il nous faut calculer la puissance de bruit P_0 , qui déclenche le système. Cette puissance correspond à une température $T = 300 \text{ }^\circ\text{K}$ (qui est la température vue par les atomes), dans la bande $\Delta\omega$ correspondant au temps de superradiance T_{SR} . De part l'équation (IX-34) il vient :

$$\Delta\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{1 + (2(\omega - \omega_0)T_{\text{SR}})^2} = \frac{\pi}{2 T_{\text{SR}}} \quad (\text{IX-39})$$

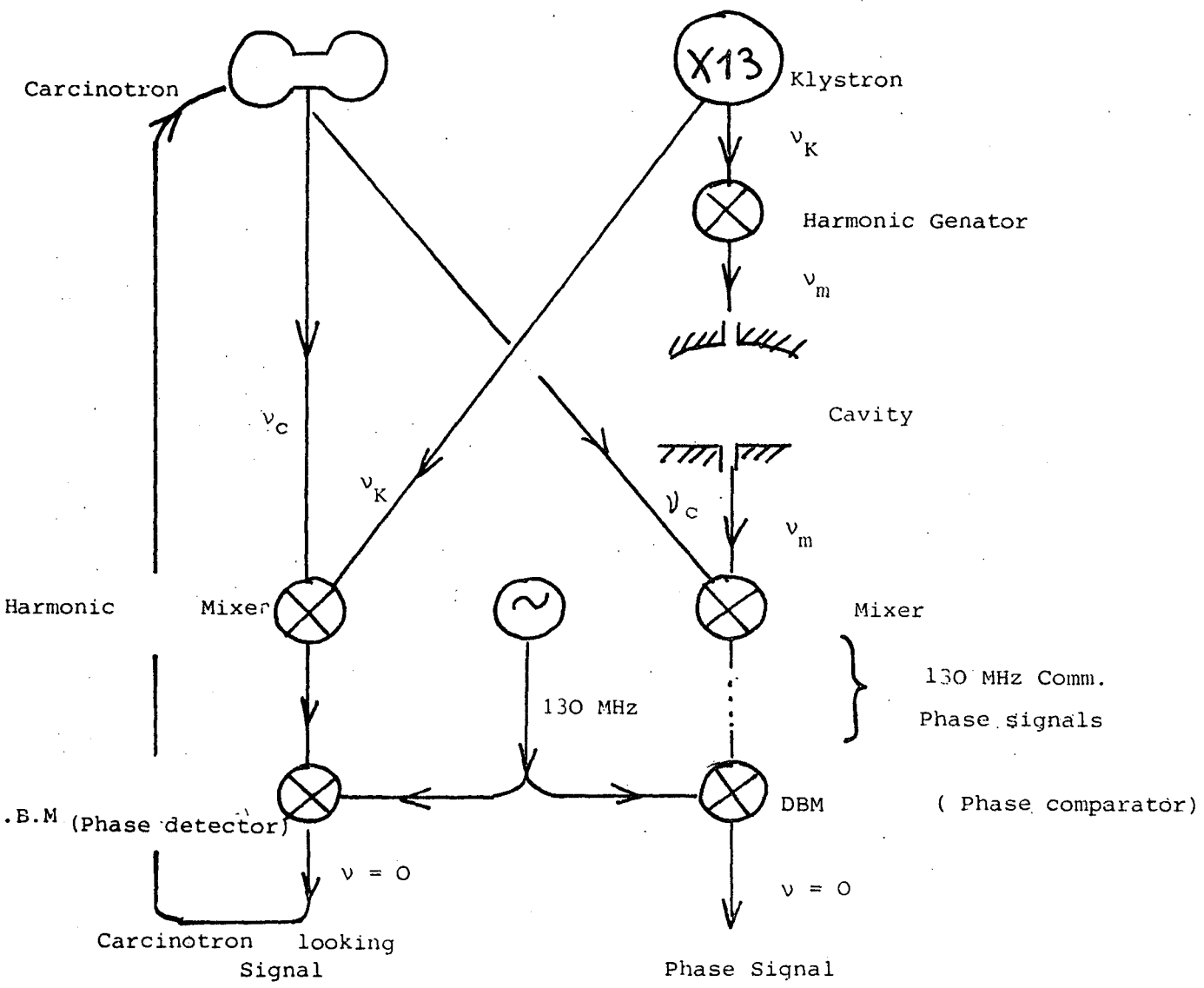


Figure IV-14

Schéma de principe de l'expérience de comparaison de phase.

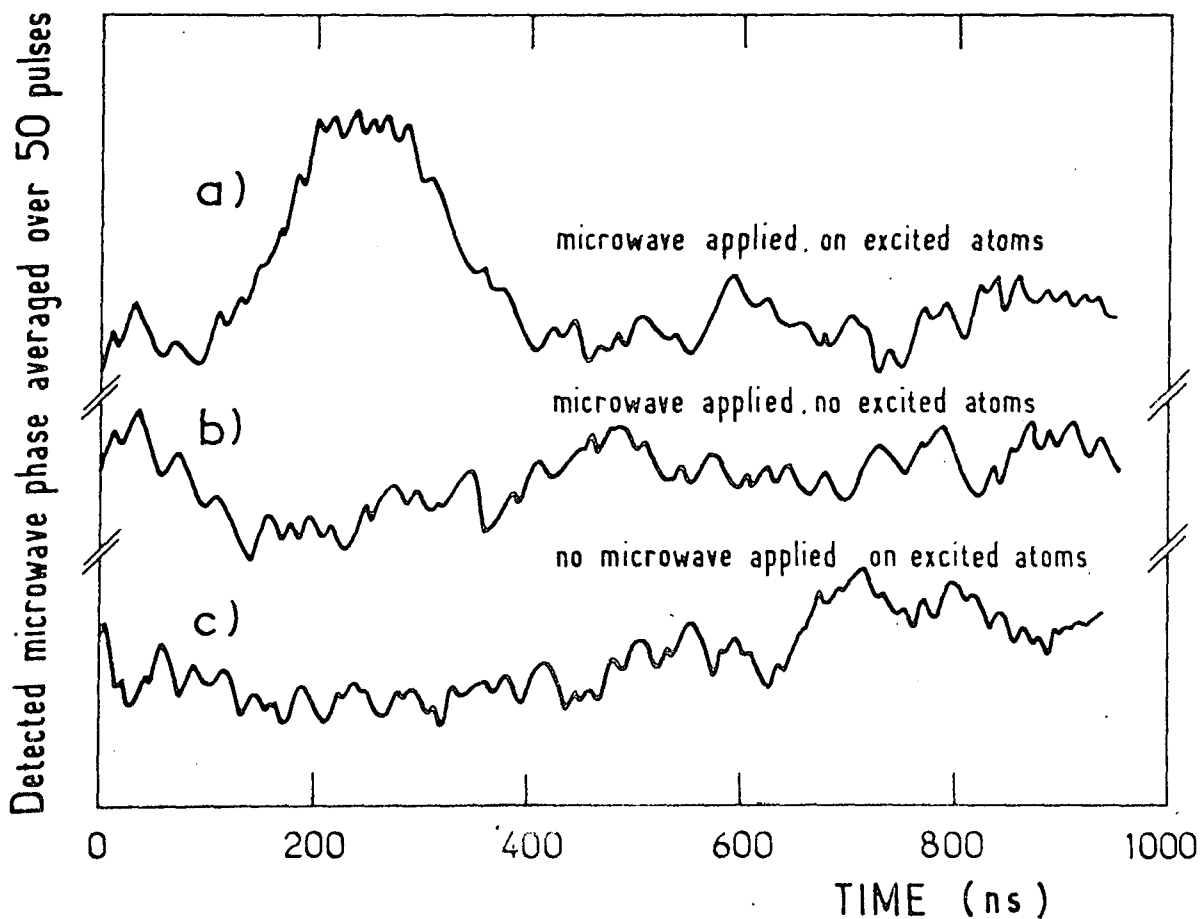


Figure IX-15 : Effet de synchronisation de la phase de l'émission maser

Signaux résultant de la comparaison de phase du signal de battement hétérodyne à 130 MHz, avec le signal de référence à la même fréquence, issu du synthétiseur. (Moyenné sur 100 coups).

- a) L'émission maser est déclenchée . On observe un signal proportionnel à $\text{Re} (\xi \exp(i\Delta\phi))$
- b) Le signal a) disparaît en absence d'atomes excités
- c) Le signal a) disparaît en absence de déclenchement.

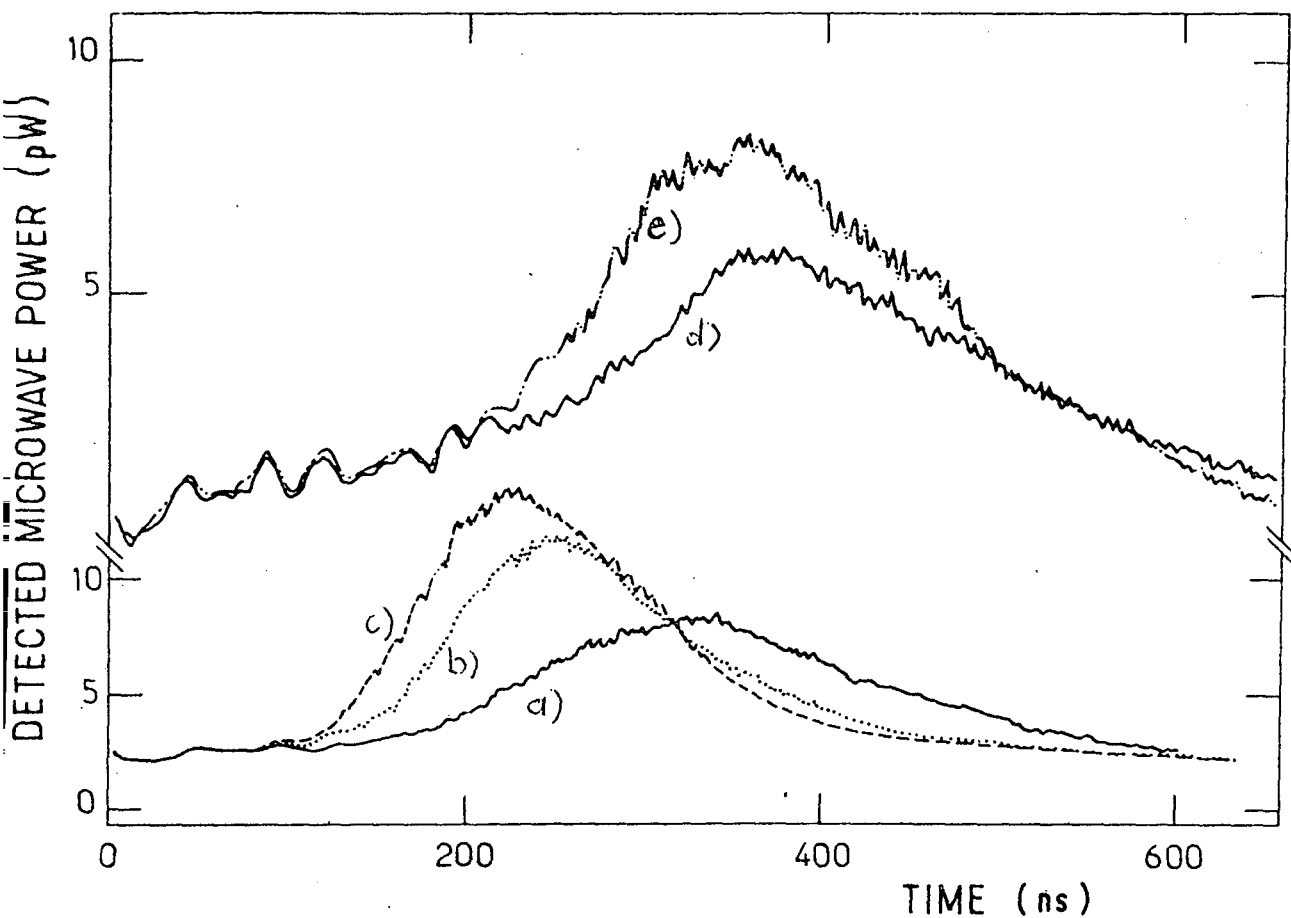


Figure IX-16 : Seuil de sensibilité à la microonde appliquée

Signal redressé moyenné sur 100 coups.

Les courbes a) b) c) et e) et d) respectivement ont été prises dans les mêmes conditions expérimentales de nombre d'atomes avec des puissances injectées P_{decl} égales à

- a) $P_{\text{decl}} = 0$
- b) $P_{\text{decl}} \sim 4 \cdot 10^{-2} P_N = 11,4 P_0$
- c) $P_{\text{decl}} \sim 12 \cdot 10^{-2} P_N = 34 P_0$
- d) $P_{\text{decl}} = 0$
- e) $P_{\text{decl}} \sim 25 \cdot 10^{-3} P_N = 7 P_0$

où $P_N = 2,2 \cdot 10^{-42}$ watt représente la puissance équivalente de bruit du détecteur ($5 \cdot 10^4$ °K dans la bande ± 7 MHz) et $P_0 = 7,8 \cdot 10^{-15}$ watt celle du bruit thermique vu par les atomes (300°K dans la bande $\Delta\nu = \frac{1}{4T_{\text{SR}}}$)

On observe nettement en a) b) et c) un raccourcissement du délai de $T_{\text{SR}} \log(P_{\text{decl}}/P_0)$
 On observe également en d et e) un effet de déclenchement pour $P_{\text{decl}} \lesssim 7P_0$.

soit :

$$\Delta\nu = \frac{\Delta\omega}{2\pi} = \frac{1}{4T_{SR}} \sim 8,3 \text{ MHz} \quad (\text{IX-40})$$

On a donc :

$$P_0 \sim \frac{8,3 \text{ MHz}}{2 \times 7 \text{ MHz}} \times \frac{300^\circ\text{K}}{5 \cdot 10^4 \text{K}} \times P_N$$

$$\sim 3,5 \times 10^{-3} P_N = 7,8 \cdot 10^{-15} \text{ watts} \quad (\text{IX-41})$$

Les courbes ^b et ^c correspondent alors à une puissance injectée de respectivement 11,4 P_0 et 34 P_0 et l'on a :

$$\eta = \left(\frac{P_{\text{decl}}}{P_0} \right)^{1/2} = 3,37 \text{ et } 5,83$$

respectivement. On s'attend à observer une diminution du délai de $2T_{SR} \text{Log}(1+\eta)$ (cf IX-17) soit 80ns et 116ns respectivement. Ces valeurs sont, notons le, en très bon accord avec la figure (IX 16 a,b,c).

Pour terminer nous avons cherché à évaluer le seuil de l'effet de déclenchement sur la figure (IX-16) d et e) qui présente

- le signal en absence d'injection (d)
- le signal en présence d'une injection minimale

(0.1 db) correspondant à : $P_{\text{decl}} \sim 25 \cdot 10^{-3} P_N = 7,14 P_0$ (IX-42)

On observe en présence d'injection :

i) une diminution du délai de l'ordre de T_{SR} (ici $T_{SR} \sim 40\text{ns}$ car $t_D \sim 300\text{ns}$)

ii) et une augmentation du signal dans le rapport 7/5.

L'accord entre les courbes d et e et le calcul est ici nettement moins bon. On devrait en effet observer une diminution du délai de l'ordre de deux T_{SR} ($\sim 80\text{ns}$) ce qui est incompatible avec la figure d et e). Ce désaccord provient de la grande incertitude que l'on a ici sur la mesure de P_{decl} .

On peut utiliser ici, l'effet de polarisation pour évaluer P_{decl} . A une augmentation du signal dans le rapport 7/5 correspond en effet d'après l'équation (IX-19) :

$$|n| \sim 1,15 \quad (\text{IX } 42)$$

$$\text{ou } P_{\text{decl}} \sim 1,33 P_0 \quad (\text{IX } 43)$$

Ces valeurs sont tout à fait compatibles avec la diminution du délai, de l'ordre de T_{SR} , observée sur la figure (IX 16a). La courbe e a donc été enregistrée, avec une puissance injectée nettement plus faible que la valeur minimale mesurable ($7,1 P_0$), et le seuil de l'effet de superradiance déclenchée correspond à une puissance incidente de l'ordre de $P_0 = 7,8 \cdot 10^{-12}$ watts.

Cette expérience illustre la possibilité d'utiliser un système maser comme préamplificateur avant détection hétérodyne. Cette méthode, nous a permis en effet de détecter un signal dont la puissance $P_{\text{decl}} \sim P_0$ est beaucoup plus faible que la puissance équivalente de bruit P_N du détecteur. Ceci est possible dans la mesure où la température de bruit de l'amplificateur maser est ici de l'ordre de la température ambiante vue par les atomes (300°K). En refroidissant la cavité, il est possible de diminuer considérablement ce bruit. A température nulle, le bruit initial qui déclenche le système est lié à l'émission spontanée, ce qui correspond à une température de bruit de l'ordre de :

$$\frac{T}{kT/h\nu} \simeq 6^\circ \text{ K pour } \lambda = 1 \text{ mm} \quad (\text{XI-44})$$

L'inconvénient essentiel de ce système de détection : préamplificateur maser + détecteur hétérodyne peu performant, est de fonctionner en impulsion durant un temps très court (pendant les deux premiers T_{SR} de l'émission superradiante). Si l'on était capable de répéter l'expérience à un taux de récurrence extrêmement rapide $\sim 1\text{MHz}$, ce qui est difficile technologiquement mais physiquement possible, puisque le délai est ici de 250 ns), on obtiendrait alors un détecteur continu dont la température de bruit serait de l'ordre de

$$6^\circ\text{K} \times \sqrt{\frac{1\mu\text{s}}{2T_{\text{SR}}}} \simeq 23^\circ\text{K} \quad (\text{IX-45})$$

à $\lambda = 1\text{mm}$

Ce détecteur serait alors meilleur que les meilleurs détecteurs disponibles actuellement à ces longueurs d'onde ($\lambda \sim 1$ mm).

Si l'on étend la méthode à des longueurs d'onde plus courtes ($\lambda \lesssim 0,3$ mm), pour lesquelles on ne dispose pas de détecteurs performants, l'intérêt d'un tel préamplificateur atomique apparaît alors plus grand dans la mesure où il doit permettre de gagner un à deux ordres de grandeurs sur le rapport signal/bruit des meilleurs détecteurs existants.

CONCLUSION GENERALE

=====

Nous avons, dans ce mémoire, présenté un ensemble de résultats théoriques et expérimentaux sur le phénomène de la superradiance. La motivation de la partie théorique (chapitres I à V) était de bien comprendre la physique de l'effet sur des cas simples et d'analyser le phénomène dans des situations plus compliquées et donc plus proches de l'expérience (atomes à plusieurs niveaux notamment). Nous avons ainsi présenté un formalisme général permettant de calculer la forme et la statistique des signaux dans n'importe quel type d'expériences et donné plusieurs exemples de calculs explicites. Nous avons, afin de présenter un ensemble clair et cohérent, incorporé dans cette partie théorique, en en donnant une présentation originale, les contributions importantes de plusieurs auteurs ayant travaillé à ce problème au cours des dernières années.

Sur le plan expérimental, l'étude du phénomène de superradiance s'est, elle aussi, énormément développée durant cette même période. Les diverses expériences, dont celles présentées dans ce mémoire, peuvent se classer en trois catégories.

(i) Expériences mettant en évidence un phénomène nouveau

Au cours de ce travail, nous avons été amenés à mettre en évidence le phénomène de superradiance dans diverses configurations expérimentales nouvelles.

Nous avons tout d'abord montré qu'il était possible d'observer très simplement la superradiance d'atomes peu excités en détectant directement le rayonnement infrarouge émis, ce qui a ouvert la voie à de nombreuses études expérimentales similaires (cf. chapitre VI).

Nous avons ensuite mis en évidence de manière indirecte la superradiance d'atomes de Rydberg en étudiant par ionisation par champ la dynamique des transferts de populations. Par la même méthode, nous avons étudié l'émission maser d'atomes de Rydberg couplés à une cavité microonde. Il a été ainsi possible de voir des effets superradiants avec des nombres d'atomes extrêmement bas ($\sim 10^4$ à 10^5 atomes; cf. chapitre VIII).

Nous avons montré enfin, dans le cas du maser, qu'il était possible de détecter directement le champ émis par battement hétérodyne (cf. chapitre IX.D).

Parallèlement à notre travail, d'autres groupes ont pu mettre en évidence des effets superradiants intéressants, comme des effets de battement ⁽⁷⁾, ou des effets de polarisation ⁽⁹⁾. Enfin, l'étude de la superradiance a pu être étendue vers les courtes longueurs d'onde au domaine visible ⁽⁶³⁾.

(ii) Expériences testant la théorie

Nous avons également été amenés à plusieurs reprises à tester notre compréhension théorique du phénomène de superradiance.

Nous avons, par exemple, vérifié, pour les expériences proche infrarouge, les relations de proportionnalité entre le nombre d'atomes, N , le délai T_D et le maximum d'intensité I_{\max} : $I_{\max} \propto N^2$, $T_D \propto N^{-1}$ (cf. chapitre VI).

Nous avons également montré, dans les expériences de battement entre atomes de classes de vitesse différentes, que les fréquences observées correspondaient aux fréquences attendues, ce qui illustre le caractère classique des battements de superradiance (cf. chapitre VII).

Enfin, pour les expériences de superradiance microonde (superradiance proprement dite, émission maser détectée indirectement ou directement), nous avons étudié les seuils, ainsi que le déclenchement de l'émission (dans le cas du maser seulement), en comparant à chaque fois le résultat mesuré au résultat attendu (cf. chapitres VIII et IX).

D'autres expériences test ont été réalisées dans d'autres groupes; parmi les plus notables, citons les expériences de mesure du bruit quantique initial qui déclenche l'émission ⁽²¹⁾ et l'étude des fluctuations statistique du délai ⁽³¹⁾.

(iii) Les expériences ouvrant la voie à des applications

Enfin, il a été possible d'envisager certaines applications technologiques (détecteurs) ou spectroscopiques.

Il est possible en effet d'utiliser les battements de superradiance pour étudier des structures atomiques ou même des déplacements isotopiques, que l'on ne peut étudier par battement quantique de fluorescence. Cependant, des limitations liées aux déplacements Doppler peuvent apparaître et il est important d'en tenir compte si l'on veut utiliser l'effet de battement comme outil spectroscopique (chapitre VII).

Il est possible également d'utiliser les effets de superradiance déclenchée pour réaliser des expériences de spectroscopie avec des sources dont la puissance est extrêmement faible. Le système étudié joue en effet un rôle d'amplificateur de son propre rayonnement et le gain en sensibilité est de l'ordre du nombre d'atomes (cf. chapitre IX.B).

Enfin, l'étude du déclenchement de l'émission maser permet d'envisager la réalisation de détecteurs extrêmement sensibles dont le bruit serait de l'ordre du bruit théorique (cf. chapitre IX.C). Ceci ouvre des perspectives extrêmement intéressantes surtout aux longueurs d'onde où les détecteurs existants sont peu performants ($30 \mu \leq \lambda \leq 300 \mu$).

APPENDICE I : "CALCUL AU PREMIER ORDRE DES TEMPS NEGLIGES A
L'APPROXIMATION DE BORN-MARKOV "

APPENDICE I - CALCUL AU PREMIER ORDRE DES TERMES NEGLIGES A L'APPROXIMATION DE BORN-MARKOV

Le but de cet appendice est d'étudier au premier ordre les termes négligés à l'approximation de Born-Markov. Il nous sera possible ainsi d'étudier la validité de cette approximation

- pour le calcul de la matrice densité
- pour le calcul de certaines observables lentes comme l'énergie.

Nous verrons qu'il existe un lien très profond entre les approximations de Born et de Markov; ce lien se traduira au premier ordre par une compensation des termes négligés correspondants : termes non Born et non Markov. Nous ferons le calcul dans le cas le plus général soluble simplement, c'est-à-dire à l'approximation de propagation à une dimension.

Les équations de la matrice densité les plus générales (sans aucune approximation) sont de la forme (cf. II.II.22) :

$$\begin{aligned}
 \frac{d\rho}{dt} = & -\frac{1}{i\hbar} \int_0^t dz \quad T_{r_{ray}} \left[\tilde{V}(t), (\tilde{V}(t-z), \tilde{g}(t-z) \otimes |0\rangle_{ray} \langle 0|_{ray}) \right] \quad (\text{ordre 2}) \\
 & -\frac{1}{i\hbar^2} \int_0^t dz \int_0^z dz' \quad T_{r_{ray}} \left[\tilde{V}(t), (\tilde{V}(t-z+z'), (\tilde{V}(t-z), \tilde{g}(t-z) \otimes |0\rangle_{ray} \langle 0|_{ray})) \right] \quad (\text{ordre 3}) \\
 & -\frac{1}{i\hbar^3} \int_0^t dz \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \left\{ T_{r_{ray}} \left[\tilde{V}(t), (\tilde{V}(t-z+z''), (\tilde{V}(t-z+z'), (\tilde{V}(t-z), \tilde{g}(t-z) \otimes |0\rangle_{ray} \langle 0|_{ray})) \right] \right\} \quad (\text{ordre 4}) \\
 & - T_{r_{ray}} \left[\tilde{V}(t), [V(t-z+z'), |0\rangle_{ray} \langle 0|_{ray} \otimes T_{r_{ray}} (\tilde{V}(t-z+z''), (\tilde{V}(t-z), \tilde{g}(t-z) \otimes |0\rangle_{ray} \langle 0|_{ray}))] \right]
 \end{aligned}$$

+ termes ordre supérieurs

On remarque immédiatement que les termes d'ordre impair s'annulent. C'est en particulier le cas du terme d'ordre 3. En effet, ce terme contient trois fois l'interaction \tilde{V} , qui est un opérateur qui change le nombre de photons d'une unité. Partant d'un état diagonal du rayonnement : $|0\rangle_{ray} \langle 0|_{ray}$, on obtient alors nécessairement un état non diagonal du rayonnement qui donne zéro après l'opération de trace sur les variables du champ.

A l'approximation de Born, on ne tient compte que du premier terme non nul de (II.II.22), c'est-à-dire du terme d'ordre 2. Nous appellerons terme de Born ce terme et nous le noterons $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^{BORN}$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{S}}_{\text{BORN}} = -\frac{1}{k^2} \int_0^t dz \, T_{\text{ray}} \left(\tilde{V}(k) (V(t-z), \tilde{\mathcal{F}}(t-z) | 0 \rangle \langle 0 |_{\text{ray}}) \right)$$

On fait ensuite l'approximation de Markov sur ce terme de Born, en remplaçant dans le terme d'ordre 2 (deuxième membre de AI.2) $\tilde{\mathcal{F}}(t-z)$ par $\tilde{\mathcal{F}}(t)$. Nous appellerons terme de Born-Markov ce terme, et nous le noterons $\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{S}}_{\text{BORN-MARKOV}}$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{S}}_{\text{BORN-MARKOV}} = -\frac{1}{k^2} \int_0^t dz \, T_{\text{ray}} \left(\tilde{V}(k) (V(t-z), \tilde{\mathcal{F}}(t) | 0 \rangle \langle 0 |_{\text{ray}}) \right)$$

Dans cet appendice, nous serons amenés à développer le terme de Born en série, en remplaçant $\tilde{\mathcal{F}}(t-z)$ par le développement :

$$\tilde{\mathcal{F}}(t-z) = \tilde{\mathcal{F}}(t) - z \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{F}}(t) + z^2 \frac{d^2}{dt^2} \tilde{\mathcal{F}}(t) \text{ etc...}$$

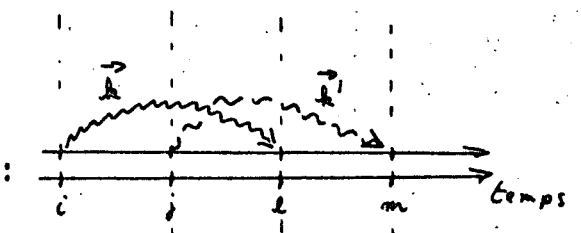
au deuxième membre de l'équation (AI.2). Le premier terme : $\tilde{\mathcal{F}}(t)$ de la série (AI.4) conduit au terme de Born-Markov; le terme du premier ordre $z \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{F}}(t)$ permet d'évaluer au premier ordre l'erreur commise en faisant l'approximation de Markov. Nous appellerons premier terme non Markov ce terme, et nous le noterons $\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{S}}_{1^{\circ} \text{ non MARKOV}}$:

$$\frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{S}}_{1^{\circ} \text{ non MARKOV}} = -\frac{1}{k^2} \int_0^t z \, dz \, T_{\text{ray}} \left(\tilde{V}(k) (V(t-z), \frac{d}{dt} \tilde{\mathcal{F}}(t) | 0 \rangle \langle 0 |_{\text{ray}}) \right)$$

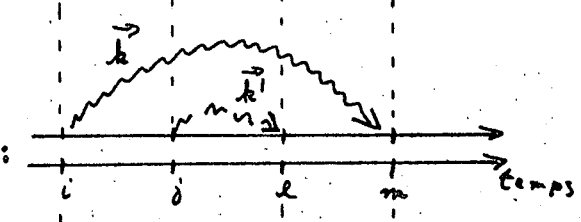
Nous introduirons également le premier terme non Born obtenu en gardant dans le développement (II.II.22) le deuxième terme non nul, soit le terme d'ordre 4, et en le calculant à l'approximation de Markov, il vient :

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{S}}_{1^{\circ} \text{ non BORN}} &= \frac{1}{k^4} \int_0^t dz \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \\ & T_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(k), [\tilde{V}(t-z+z'), (\tilde{V}(t-z+z''), (\tilde{V}(t-z), \tilde{\mathcal{F}}(t) \otimes | 0 \rangle \langle 0 |_{\text{ray}}))] \right] \\ & - T_{\text{ray}} \left[\tilde{V}(k), [\tilde{V}(t-z+z'), | 0 \rangle \langle 0 |_{\text{ray}} \otimes T_{\text{ray}} (\tilde{V}(t-z+z''), (\tilde{V}(t-z), \tilde{\mathcal{F}}(t) \otimes | 0 \rangle \langle 0 |_{\text{ray}}))] \right] \end{aligned}$$

$$i) \tilde{V}_{m,h}^-(t) \tilde{V}_{l,h}^-(t-z+z') \tilde{V}_{j,h}^+(t-z+z'') \tilde{V}_{i,h}^+(t-z) :$$



$$ii) \tilde{V}_{l,h}^-(t) \tilde{V}_{m,h}^-(t-z+z') \tilde{V}_{j,h}^+(t-z+z'') \tilde{V}_{i,h}^+(t-z) :$$



$$iii) \tilde{V}_{m,h}^-(t) \tilde{V}_{l,h}^-(t-z+z') \tilde{V}_{j,h}^+(t-z+z'') \tilde{V}_{i,h}^+(t-z) :$$

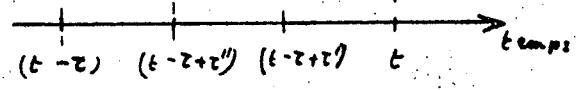
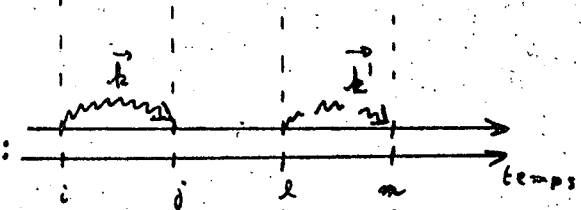


Figure AI 1

Le but de ce paragraphe est alors de calculer explicitement $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^{1^{\circ}}$ non MARKOV et $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^{1^{\circ}}$ non BORN et de comparer ces quantités à $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^{1^{\circ}}$ BORN-MARKOV, ce qui permettra d'étudier au premier ordre $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}^{1^{\circ}} - \frac{d}{dt} \tilde{\rho}^{1^{\circ}}_{\text{BORN-MARKOV}}$

Nous commencerons par calculer le premier terme non Born.

1° Calcul du premier terme non Born

Le premier terme non Born est le terme d'ordre 4 qui contient des quadruples commutateurs, soit au total 2^4 termes. Etudions tout d'abord le premier de ces 2^4 termes. Il vient :

$$\tilde{\rho}^{1^{\circ}}_{\text{non BORN}} = \frac{1}{h^4} \int_0^t dz \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz''$$

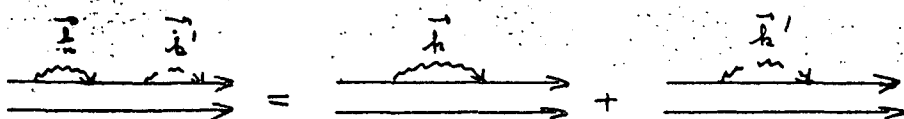
$$\left. \begin{aligned} & T_{\Omega_{\text{ray}}} \left(\tilde{V}(t) \tilde{V}(t-z+z') \tilde{V}(t-z+z'') \tilde{V}(t-z) \tilde{\rho}(t) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} \right) \\ & - T_{\Omega_{\text{ray}}} \left(\tilde{V}(t) \tilde{V}(t-z+z') \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} T_{\Omega_{\text{ray}}} \tilde{V}(t-z+z'') \tilde{V}(t-z) \tilde{\rho}(t) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ligne 1.}$$

$$\left. \begin{aligned} & - T_{\Omega_{\text{ray}}} \left(\tilde{V}(t) \tilde{V}(t-z+z') \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} T_{\Omega_{\text{ray}}} \tilde{V}(t-z+z'') \tilde{V}(t-z) \tilde{\rho}(t) \otimes |0\rangle_{\text{ray}} \langle 0|_{\text{ray}} \right) \end{aligned} \right\} \text{ligne 2}$$

+ 15 autres termes similaires

Nous appelons par la suite ligne 1 et 2 les termes correspondant à la première et à la deuxième ligne de (AI.6).

Dans cette équation, à la ligne 1 comme à la ligne 2, le couplage \tilde{V} agit quatre fois. Nous noterons $\tilde{V}_{1,k} \rightarrow (\tilde{V}_{1,k}^{\rightarrow})$ la partie de \tilde{V} en $a_{\vec{k}1}^{\dagger} r_1^{-}$ (où $a_{\vec{k}1}^{\dagger}$). A la ligne 1, du fait de la trace sur les variables du champ, il n'apparaît que trois types de termes (voir figure AI.1). Nous avons représenté, à côté de chaque terme, le diagramme qui lui est associé (Ces diagrammes ont été, rappelons-le, introduits au chapitre II § II B 3°b). On remarquera que le troisième terme : iii) apparaît également dans le développement de la ligne 2 de l'équation (AI.6), avec un signe opposé. Au total il y a compensation des termes de type iii). Cette compensation ne doit pas nous surprendre; elle résulte de la forme même du diagramme iii). Le diagramme iii) se décompose en effet en deux diagrammes d'interaction à un photon :



et les termes représentés par ce diagramme iii) sont déjà contenus dans les équations à l'approximation de Born (équations qui ne contiennent que des diagrammes d'interaction à un photon).

Développons maintenant les deux termes restants : ii) et ii'), il vient :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{1^{0}mm}^{\text{Born}} = \left[\frac{|D_{+}|^2 \mathcal{V}}{\lambda^2 (2\pi)^3} \cdot \frac{1}{\alpha^2} \cdot k_0^2 \cdot g^2(k_0) \cdot \frac{2\pi}{c} \text{ ou } \frac{1}{N T_{SR}} \right] \sum_{i, \delta, \ell, m}$$

$$\int_0^t dz R_m^+ R_\ell^+ R_i^- R_i^- \tilde{\rho}(t) \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \delta_{\lambda_0/c} [z' - (z_\ell - z_i)/c] \cdot \delta(z - z'' - (z_m - z_i)/c) \leftarrow (i)$$

$$+ \int_0^t dz R_\ell^+ R_m^+ R_i^- R_i^- \tilde{\rho}(t) \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \delta_{\lambda_0/c} [z - (z_\ell - z_i)/c] \cdot \delta(z' - z'' - (z_m - z_i)/c) \leftarrow (ii)$$

(Pour établir (AI.8), nous avons utilisé l'identité (II.II.45) du chapitre II § II B 3°b.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dk_x \int_{-\infty}^{+\infty} dk_y \int_{-\infty}^{+\infty} dk_z \dots \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \int_0^{+\infty} dk$$

et nous avons effectué les intégrations sur k et sur k' , qui sont de la forme :

$$\left\{ \int_0^{\infty} k^2 dk g^2(k) e^{+ic(k_0 - k)[z - (z_i - z_j)/c]} = k_0^2 g^2(k_0) \frac{2\pi}{c} \delta_{\lambda_0/c} [z - (z_i - z_j)/c] \right.$$

(idem pour k')

Nous avons fait apparaître ici les pseudo-distributions de Dirac δ_{λ_0} de longueur $\lambda_0 = c/\omega_0$ et de hauteur $1/\lambda_0$, que nous avons déjà rencontrées au chapitre II § II B 3°b.)

On peut calculer les diverses intégrales sur z , z' et z'' . Il vient :

$$\int_0^t dz \int_0^z dz' \int_0^{z'} dz'' \delta_{\lambda_0/c} [z' - (z_\ell - z_i)/c] \cdot \begin{cases} \delta_{\lambda_0/c} [z - z'' - (z_m - z_i)/c] = z_L \leftarrow (i) \\ \delta_{\lambda_0/c} [z' - z'' - (z_m - z_i)/c] = z'_L \leftarrow (ii) \end{cases}$$

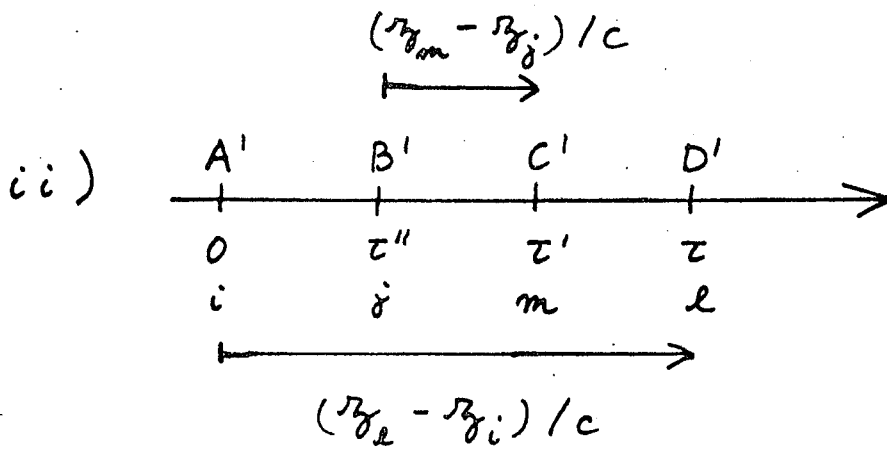
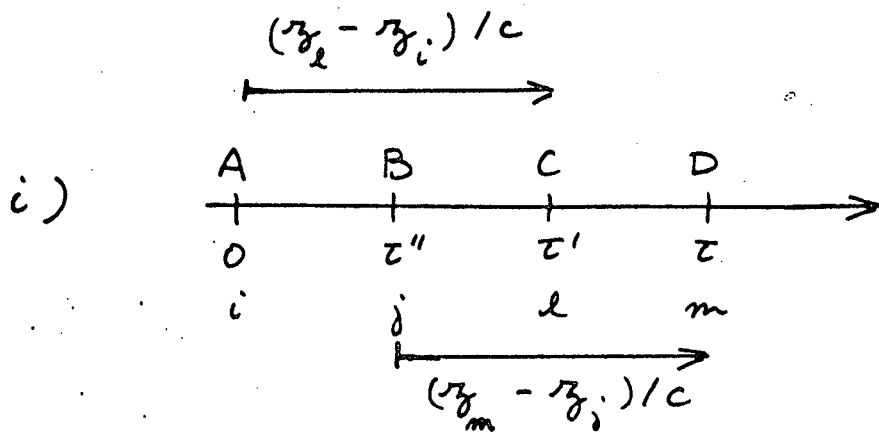


Figure AI 2

avec $\begin{cases} \tau_L = \text{le plus petit de } (z_m - z_j)/c \text{ et de } (z_l - z_i)/c \sim L/c \text{ si } l > i \text{ et } m > j \\ \tau_L = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$

$\begin{cases} \tau'_L = (z_l - z_i)/c - (z_m - z_j)/c \sim L/c \text{ si } m > j, l > i \text{ et } l - i > m - j \\ \tau'_L = 0 \text{ dans tous les autres cas.} \end{cases}$

Le calcul de τ_L et de τ'_L ne pose pas de difficulté. La figure AI.2 illustre le résultat obtenu. τ_L représente en effet le degré de liberté relatif du vecteur \vec{AC} de module $(z_l - z_i)/c$, par rapport au vecteur \vec{BD} de module $(z_m - z_j)/c$ (voir figure AI.2 i). De même, τ'_L représente le degré de liberté relatif de $\vec{B'C'}$ de module $(z_m - z_j)/c$, par rapport à $\vec{A'D'}$ de module $(z_l - z_i)/c$.

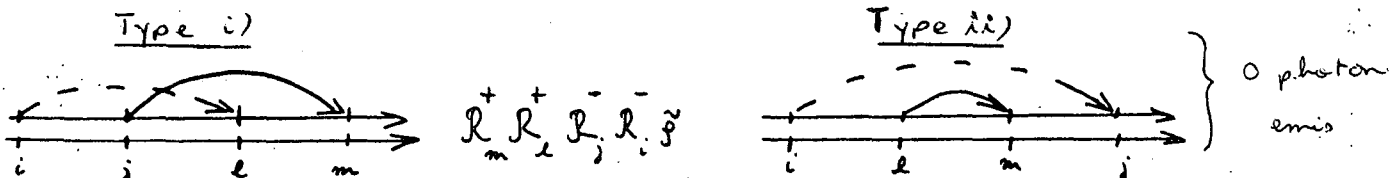
En sommant les contributions des termes i) et ii), il vient :

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,l,m} \tau_L + \tau'_L &= \frac{L}{Nc} \sum_{\substack{l > i; m > j \\ m-j < l-i}} (m-j) + \sum_{\substack{l > i; m > j \\ m-j > l-i}} (l-i) + \sum_{\substack{m > j, l > i \\ m-j < l-i}} (l-i) - \sum_{\substack{m > j, l > i \\ m-j < l-i}} (m-j) \\ &= \frac{L}{Nc} \sum_{l > i; m > j} (l-i) \end{aligned}$$

L'équation (AI.8) devient alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{\text{non BORN}}^{10 \text{ adae}} &= \left(\frac{1}{N T_{SR}} \right)^2 \cdot \frac{L}{Nc} \sum_{\substack{i,j,l,m \\ m > j; l > i}} (l-i) (R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \tilde{\rho} + \\ &+ \dots \text{ (15 termes similaires)} \end{aligned}$$

Le premier terme écrit à l'équation (AI.8) correspond aux deux diagrammes :

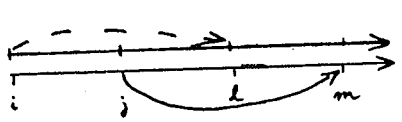


(---) \rightarrow = mode \vec{k} et \curvearrowright = mode \vec{k}'

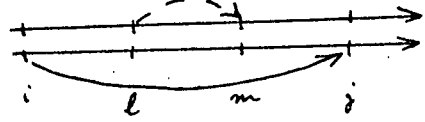
On peut en déduire les 15 autres termes à l'aide des diagrammes suivants :

TYPE (i)

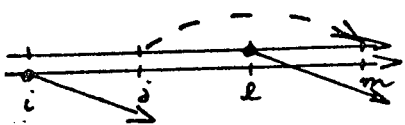
TYPE (ii)



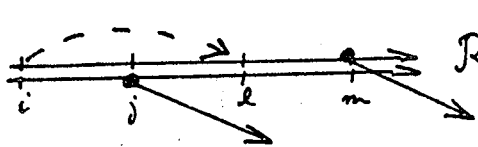
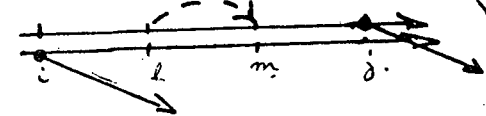
$$R_l^+ R_{ij}^- R_j^- R_m^+$$



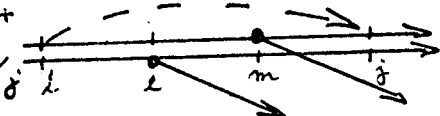
0 photon
emis



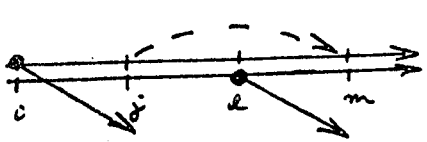
$$R_m^+ R_l^- R_j^- \tilde{R}_i^+ R_i^+$$



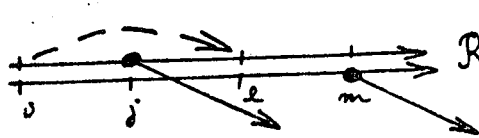
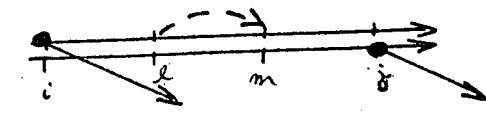
$$R_l^+ R_m^- R_i^- \tilde{R}_j^+ R_j^+$$



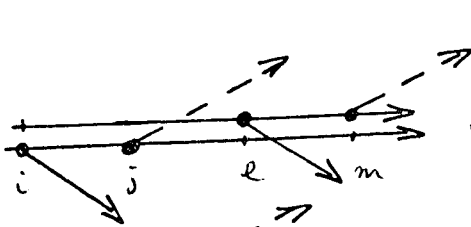
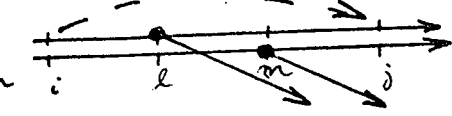
1 photon
emis



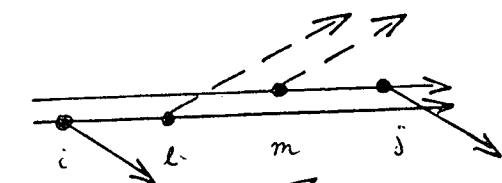
$$R_m^+ R_i^- R_j^- \tilde{R}_l^+ R_l^+$$



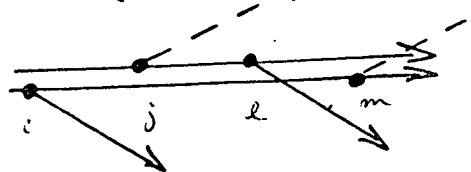
$$R_l^+ R_j^- R_i^- \tilde{R}_m^+ R_m^+$$



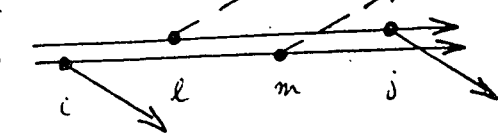
$$R_l^- R_j^- \tilde{R}_i^+ R_i^+$$



2 photon
emis



$$R_l^- R_i^- \tilde{R}_j^+ R_j^+$$



en plus de ces huit termes (16 diagrammes), les huit autres termes se déduisent par symétrie :

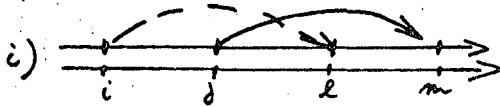
par exemple

$$R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^-$$

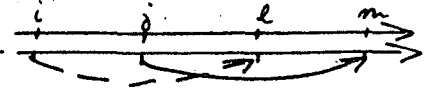
donne

$$R_i^+ R_j^+ R_l^- R_m^-$$

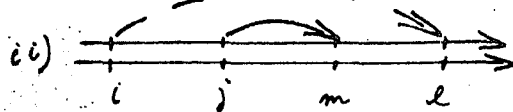
, ce qui correspond à :



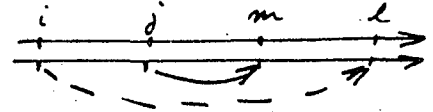
qui donne



, et à :



qui donne



On peut remarquer que tous ces diagrammes correspondent à une double interaction photonique, l'une dans le mode \vec{k} (trait pointillé), l'autre dans le mode \vec{k}' (trait plein). Ces interactions sont :

- soit virtuelles : la flèche part d'un atome en amont (par exemple i), pour aller vers un atome en aval (par exemple atome l tel que $l > i$) - ler diagramme type i) mode \vec{k} (en pointillé),

- soit réelles : le photon émis correspond alors à deux flèches (l'une côté "bra", l'autre côté "ket"), qui décrivent les interférences des processus d'émission des deux atomes.

Nous avons regroupés ensemble les diagrammes ayant

- deux interactions virtuelles (deux premières lignes); il n'y a pas d'émission de photons réels, et l'énergie globale du système atomique n'est pas modifiée par les interactions correspondant à ces diagrammes (zéro photon émis);

- une interaction photonique réelle et une virtuelle (quatre lignes suivantes); ces diagrammes correspondent à l'émission d'un seul photon et à une diminution de $\hbar\omega_0$ de l'énergie du système atomique;

- deux interactions photoniques réelles (deux dernières lignes); l'énergie diminue de $2\hbar\omega_0$. Il y a émission de deux photons.

Nous noterons également que, pour écrire ces diagrammes, nous avons choisi l'ordre des indices de façon à obtenir pour tous les diagrammes de type i) la même valeur de τ_L (équation AI.10), et, pour tous les diagrammes de type ii), la même valeur de τ_L' . Il suffit pour cela de prendre pour les diagrammes i) les indices dans l'ordre : i, j, l, m, et pour les diagrammes ii) les indices dans l'ordre : i, j, m, l. En tenant compte des 16 termes et des 32 diagrammes, des quadrules commutateurs décrits plus haut, on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{1^{0} m m}^{\text{BORN}} = \left(\frac{1}{NT_{SR}}\right)^2 \frac{L}{Nc} \sum_{\substack{i,j,l,m \\ m > j, l > i}} (l-i)$$

$$\left. \begin{aligned} &+ R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \tilde{\rho} & + \tilde{\rho} R_i^+ R_j^+ R_l^- R_m^- \\ &+ R_l^+ R_j^- \tilde{\rho} R_i^+ R_m^- & + R_m^+ R_j^- \tilde{\rho} R_i^+ R_l^- \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 0 \text{ photons} \\ \text{emis} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} &- R_m^+ R_l^- R_j^+ \tilde{\rho} R_i^+ & - R_i^- \tilde{\rho} R_j^+ R_l^+ R_m^- \\ &- R_l^+ R_m^- R_j^+ \tilde{\rho} R_i^+ & - R_j^- \tilde{\rho} R_i^+ R_l^+ R_m^- \\ &- R_m^+ R_l^- R_j^+ \tilde{\rho} R_i^- & - R_l^- \tilde{\rho} R_i^+ R_l^+ R_m^- \\ &- R_l^+ R_j^- R_i^+ \tilde{\rho} R_m^- & - R_j^- \tilde{\rho} R_i^+ R_l^+ R_m^- \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 1 \text{ photon} \\ \text{emis} \end{array}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ R_m^- R_l^- \tilde{\rho} R_i^+ R_j^+ & + R_i^- R_j^- \tilde{\rho} R_l^+ R_m^+ \\ &+ R_l^- R_j^- \tilde{\rho} R_i^+ R_m^+ & + R_i^- R_m^- \tilde{\rho} R_j^+ R_l^+ \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ photons} \\ \text{emis} \end{array}$$

2° Calcul du premier terme non Markov

En développant \tilde{V} dans l'équation (AI.4), il vient :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{\text{BORN}}^{\sim}(t) = \frac{-\mathcal{V}^2 |D_+|^2}{(2\pi)^3 t^2} \int_0^\infty k^2 dk g(k) \int_0^{2\pi} d\Omega_{\vec{k}} \int_0^t dz \sum_{i,j} e^{i c (k_0 - k) z} e^{i (\vec{k} - \vec{k}_0) (\vec{x}_i - \vec{x}_j)} R_i^+ R_j^- \tilde{\rho}(t-z) + \dots \text{ (3 autres termes)}$$

En utilisant l'identité (II.II.45) (valide à l'approximation de propagation à une dimension) et en effectuant l'intégration sur k suivant l'équation (AI.9), on obtient :

$$\frac{1}{ic} \tilde{\rho}_{\text{BORN}}^{\sim}(t) = -\frac{1}{NT_{SR}} \sum_{\substack{i,j \\ i > j}} R_i^+ R_j^- \tilde{\rho}[t - (z_i - z_j)/c] + \tilde{\rho}[t - (z_i - z_j)/c] R_j^+ R_i^-$$

$$+ R_i^- \tilde{\rho}[t - (z_i - z_j)/c] R_j^+ + R_j^- \tilde{\rho}[t - (z_i - z_j)/c] R_i^+$$

Cette équation est formellement identique à l'équation (II.II.49) ($\Gamma_{\mu} = (NT_{SR})^{-1}$) au changement de :

$$\tilde{\rho}(t) \text{ en } \tilde{\rho}(t - (z_1 - z_j)/c)$$

près. Dans l'équation (AI.15), la propagation se traduit par

- la condition $i > j$

- la présence d'un retard $\tau_{i,j} = (z_1 - z_j)/c$, entre la cause : $\tilde{\rho}(t - \tau)$ au deuxième membre de (AI.15) et l'effet $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}$ au premier membre de (AI.15). Ce retard, de l'ordre de L/c , est dû au temps fini que met l'information issue de l'atome j pour parvenir à l'atome i .

Faisons le changement d'indice muet $i, j \rightarrow l, i$:

$$i \rightarrow l$$

$$j \rightarrow i$$

et développons $\tilde{\rho}(t - (z_1 - z_i)/c)$ au premier ordre. A partir de (II.II.49), il vient :

$$\tilde{\rho}[t - (z_1 - z_i)/c] \simeq \tilde{\rho}(t) - \frac{L}{Nc} (l-i) \cdot \frac{1}{T_{SR}} \sum_{m>i} (-R_m^+ R_i^- \tilde{\rho} - \tilde{\rho} R_j^+ R_m^- + R_m^- \tilde{\rho} R_j^+ + R_j^- \tilde{\rho} R_m^+)$$

en reportant dans (AI.4), après le changement d'indice (AI.17), il vient :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho} \Big|_{1^{\circ} \text{ non MARKOV}} = \left(\frac{1}{NT_{SR}}\right)^2 \frac{L}{Nc} \sum_{i>j, l, m} (l-i)$$

$- R_l^+ R_i^+ (R_m^- R_j^- \tilde{\rho})$	$- (\tilde{\rho} R_j^+ R_m^+) R_i^- R_l^-$	$\left. \begin{array}{l} \text{0 photon} \\ \text{emis} \end{array} \right\}$
$- R_l^+ R_i^- (\tilde{\rho} R_j^+ R_m^-)$	$- R_m^- \tilde{\rho} R_j^+ R_i^- R_l^-$	
$+ R_l^+ (R_m^- R_j^- \tilde{\rho}) R_i^+$	$+ R_i^- (\tilde{\rho} R_j^+ R_m^+) R_l^-$	$\left. \begin{array}{l} \text{1 photon} \\ \text{emis} \end{array} \right\}$
$+ R_l^+ R_i^- (R_m^- \tilde{\rho} R_j^+)$	$+ (R_j^- \tilde{\rho} R_m^+) R_i^- R_l^-$	
$+ R_l^+ (R_m^- R_j^- \tilde{\rho}) R_i^-$	$+ R_l^- (\tilde{\rho} R_j^+ R_m^+) R_i^-$	
$+ R_l^+ R_i^- (R_m^- \tilde{\rho} R_j^+)$	$+ (R_j^- \tilde{\rho} R_m^+) R_i^- R_l^-$	
$R_l^- (R_m^- \tilde{\rho} R_j^+) R_i^+$	$R_i^- (R_j^- \tilde{\rho} R_m^+) R_l^-$	$\left. \begin{array}{l} \text{2 photons} \\ \text{emis} \end{array} \right\}$
$R_l^- (R_m^- \tilde{\rho} R_j^+) R_i^+$	$R_i^- (R_j^- \tilde{\rho} R_m^+) R_l^-$	

On peut remarquer que les expressions obtenues pour $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_1^{\text{non BORN}}$ et $\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_1^{\text{non MARKOV}}$ sont égales et opposées si l'on se restreint aux sommations dans lesquelles les indices i, j, l, m , sont tous différents. Au total, on a :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_1^{\text{non BORN}} + \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_1^{\text{non MARKOV}} \approx 0$$

Il est tout à fait inutile de chercher à calculer la somme exacte des termes premier non BORN et premier non MARKOV à partir de (AI.13) et (AI.19), dans la mesure où, pour établir ces équations, nous n'avons pas fait attention aux coïncidences d'indices. On notera que la compensation des termes ne peut être totale, car on sait bien que cette compensation ne se produit pas dans certains cas particuliers (émission spontanée de l'atome isolé). L'équation (AI.20) illustre cependant le lien physique profond qui existe entre les approximations de Born et de Markov.

3° Poids relatif des différents termes

Pour discuter de la validité de l'approximation de Born-Markov, nous allons évaluer le poids relatif des termes négligés au premier ordre, c'est-à-dire le rapport entre le poids du premier terme non Born (ou du premier terme non Markov) et le poids du terme principal : terme de Born-Markov. Nous effectuerons ce calcul pour un élément de matrice particulier de la matrice densité (observable rapide au sens du chapitre II § 5) et pour l'énergie (observable lente).

a) Poids relatif du premier terme non Born pour la matrice densité

Comme chacun des 4 termes de (AI.3) ou des 16 termes de (AI.5) couple un même élément de matrice à des éléments de matrice différents, il suffit, pour comparer les poids relatifs du terme principal et du premier terme non Born, de considérer respectivement l'un des 4 et l'un des 16 termes de (II.II.49) et (AI.13).

Si l'on se place au moment du maximum d'émission, on a

$$R_i^{\pm} \sim 1/2v_1$$

et en reportant dans (II.II.49) et (AI.13), on trouve, pour le terme principal :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho^{\sim} \text{BORN-MARKOV} &\sim \frac{1}{NT_{SR}} \sum_{\substack{i,j \\ i>j}} R_i^+ R_j^- \rho^{\sim} \\ &\sim \frac{1}{NT_{SR}} N^2 = N/T_{SR} \end{aligned}$$

On trouve également, pour le premier terme non Born :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho^{\sim} \text{non BORN} &\sim \frac{1}{(NT_{SR})^2} \left(\frac{L}{Nc}\right) \sum_{\substack{i,j,l,m \\ m>j, l>i}}^{(l-i)} R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \rho^{\sim} \\ &\sim \frac{L}{c} (N/T_{SR})^2 \end{aligned}$$

Si la condition de Born-Markov restrictive n'est plus remplie (cf. II.V.3 avec $\tau_c = L/c$), on a :

$$T_{SR} < NL/c$$

et le premier non Born est plus gros que le terme principal (il suffit de comparer (AI.21) et (AI.22)). Dans le développement (AI.1), le terme du 4^e ordre est plus important que celui du 2^e ordre. Il en est de même pour les termes pairs d'ordre élevé. Le développement (AI.1) diverge et l'approximation de Born n'est plus valide pour le calcul de la matrice densité. Il en est de même pour l'approximation de Markov qui cesse d'être valide.

Ce résultat n'est pas contradictoire avec la compensation accidentelle des termes non Born et non Markov observée au premier ordre (équation AI.20). Au premier ordre en effet, cette compensation se produit dans la mesure où, dans un produit de quatre R_i^{\pm} , les termes ayant des indices tous différents sont les plus nombreux. Ce n'est plus le cas pour les produits d'ordre élevé de R_i^{\pm} , et la compensation entre les termes non Born et les termes non Markov n'a plus lieu dès que l'on a (AI.23), car les développements de Born et de Markov divergent, et il faut faire le calcul à tous les ordres.

b) Poids relatif du premier terme non Born pour l'évolution de l'énergie

Etudions l'évolution de l'énergie, ou, ce qui revient au même, de

$\langle R_3 \rangle$. On a :

$$\frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle = \frac{d}{dt} \text{Tr} (R_3 \rho) = \text{Tr} (R_3 \frac{d}{dt} \rho)$$

On a alors, pour le terme principal :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle_{\text{BORN-MARKOV}} &= \frac{1}{N T_{SR}} \sum_{\substack{i,j \\ i > j}} (-\langle R_3 R_i^+ R_j^- \rangle - \langle R_j^+ R_i^- R_3 \rangle + \langle R_j^+ R_3 R_i^- \rangle + \langle R_i^+ R_3 R_j^- \rangle) \\ &= \frac{1}{N T_{SR}} \sum_{\substack{i,j \\ i > j}} \langle R_j^+ [R_3, R_i^-] \rangle + \langle [R_i^+, R_3] R_j^- \rangle \\ &= \frac{-2}{N T_{SR}} \sum_{\substack{i,j \\ i > j}} \langle R_j^+ R_i^- \rangle + \langle R_i^+ R_j^- \rangle \end{aligned}$$

Ce qui, au maximum d'émission : $R_i^+ \sim 1/2 \sim 1$, conduit à :

$$\frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle_{\text{BORN-MARKOV}} \sim N / T_{SR}$$

Pour le premier terme non Born, on a de même (en n'écrivant que les 8 termes de la 1ère colonne de l'équation (A1.13)) :

$$\frac{d}{dt} \langle R_3 \rangle \text{ Non BORN } 1^{\circ} \text{ ordre} = \left(\frac{-1}{N T_{SR}} \right)^2 \cdot \frac{L}{Nc} \cdot \sum_{\substack{i,j,l,m \\ l > i, m > j}} (l-i)$$

1° colonne

$+ \langle R_3 R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \rangle \Rightarrow + \langle R_3 R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \rangle$	}	0 photon émis
$+ \langle R_j^+ R_m^- R_3 R_l^+ R_i^- \rangle \Rightarrow + \langle R_j^+ R_m^- R_l^+ R_i^- \rangle - \langle R_j^+ R_m^- R_l^+ R_i^- \rangle + \langle R_3 R_j^+ R_m^- R_l^+ R_i^- \rangle$		
$- \langle R_i^+ R_3 R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle \Rightarrow + \langle R_i^+ R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle - \langle R_3 R_i^+ R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle$	}	1 photon émis
$- \langle R_j^+ R_3 R_l^+ R_m^- R_i^- \rangle \Rightarrow + \langle R_j^+ R_l^+ R_m^- R_i^- \rangle - \langle R_3 R_j^+ R_l^+ R_m^- R_i^- \rangle$		
$- \langle R_l^+ R_3 R_m^+ R_j^- R_i^- \rangle \Rightarrow + \langle R_l^+ R_m^+ R_j^- R_i^- \rangle - \langle R_3 R_l^+ R_m^+ R_j^- R_i^- \rangle$		
$- \langle R_m^+ R_3 R_l^+ R_j^- R_i^- \rangle \Rightarrow + \langle R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \rangle - \langle R_3 R_m^+ R_l^+ R_j^- R_i^- \rangle$		
$+ \langle R_j^+ R_i^+ R_3 R_m^- R_l^- \rangle \Rightarrow -2 \langle R_j^+ R_i^+ R_m^- R_l^- \rangle + \langle R_3 R_j^+ R_i^+ R_m^- R_l^- \rangle$	}	2 photons émis
$+ \langle R_l^+ R_i^+ R_3 R_m^- R_j^- \rangle \Rightarrow -2 \langle R_l^+ R_i^+ R_m^- R_j^- \rangle + \langle R_3 R_l^+ R_i^+ R_m^- R_j^- \rangle$		

(A côté de chacun des 8 termes de (AI.27), nous avons donné l'expression obtenue, en faisant passer l'opérateur R_3 en tête du produit. Nous utilisons pour cela les relations de commutation des R_i^{\pm} et $R_{3,i}$, en remarquant que $R_3 = \sum_i R_{3,i}$. On a par exemple à la troisième ligne

$$\langle R_i^+ R_3 R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle = \langle R_3 R_i^+ R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle + \langle R_i^+ R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle$$

En négligeant les cas de coïncidence d'indices, qui sortent, comme nous l'avons vu, du cadre de ce calcul, on peut remarquer que les termes du type $\langle R_3 \times \text{produit de quatre } R_i^{\pm} \rangle$ se simplifient. Cette compensation résulte du fait que

$$\frac{d}{dt} T_n \tilde{S} 1^{\circ} \text{ non BORN}$$

doit être nul. En développant (AI.28), on retrouverait en effet une correspondance terme à terme avec (AI.27). Il suffit de faire correspondre aux

<produits de quatre \mathcal{R}_1^+ > du développement de (AI.28), les < \mathcal{R}_3 x produits de quatre \mathcal{R}_1^+ > de (AI.27) (par exemple le terme < $\mathcal{R}_3 \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_1^+ \mathcal{R}_1^-$ > de (AI.27) 2° ligne correspond au terme < $\mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_1^+ \mathcal{R}_1^-$ > qui apparaît dans le développement de (AI.28))

En simplifiant les termes en < \mathcal{R}_3 x produits de quatre \mathcal{R}_1^+ > et en ajoutant aux 8 termes de (AI.27) 1ère colonne, ceux obtenus par symétrie, il vient :

$$\frac{d}{dt} \langle \mathcal{R}_3 \rangle_{1^\circ \text{ non BORN}} = \left(\frac{-1}{N T_{SR}} \right)^2 \cdot \frac{L}{N c} \cdot \sum_{l > j; m > j} (l - i)$$

$$+ (-1) \times \left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_l^- \mathcal{R}_j^- & + \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_i^- \\ + \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_i^- & + \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_l^- \mathcal{R}_j^- \\ + \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_i^- \mathcal{R}_j^- & + \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_l^- \\ + \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_i^- \mathcal{R}_j^- & + \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_l^- \mathcal{R}_m^- \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_l^- \mathcal{R}_j^- \\ \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_i^- \\ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_i^- \mathcal{R}_j^- \\ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_i^- \mathcal{R}_j^- \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 1 \text{ photon} \\ \text{émis} \end{array}$$

$$+ (-2) \times \left(\begin{array}{cc} \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_l^- & + \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_i^- \mathcal{R}_j^- \\ + \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_l^- \mathcal{R}_j^- & + \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_l^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_i^- \end{array} \right) \left. \vphantom{\begin{array}{cc} \mathcal{R}_j^+ \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_m^- \mathcal{R}_l^- \\ \mathcal{R}_m^+ \mathcal{R}_i^+ \mathcal{R}_l^- \mathcal{R}_j^- \end{array}} \right\} \begin{array}{l} 2 \text{ photons} \\ \text{émis} \end{array}$$

Cette équation peut s'obtenir directement en prenant la trace des différents termes décrivant l'évolution de la matrice densité (équation AI.13), et en affectant un coefficient (-1) aux termes correspondant à l'émission de un photon (ils font diminuer \mathcal{R}_3 d'une unité) et un coefficient (-2) aux termes correspondant à l'émission de deux photons.

Au total, le premier terme de non Born traduit un processus de diffusion de \mathcal{R}_3 , qui augmente l'étalement de \mathcal{R}_3 , sans en modifier la vitesse d'évolution moyenne. Si l'on tient compte des coïncidences d'indices, on peut évaluer $\frac{d}{dt} \langle \mathcal{R}_3 \rangle_{1^\circ \text{ non BORN}}$. Il vient :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle R_{3,1} \rangle_{1^{\circ} \text{ nm BORN}} &\sim \frac{1}{N} \frac{d}{dt} \langle R_{3,1} \rangle_{1^{\circ} \text{ nm BORN}} \text{ 1}^{\circ} \text{ terme} \\ &\sim \frac{1}{N} \left(-\frac{1}{NT_{SR}} \right)^2 \cdot \frac{L}{Nc} \cdot \sum_{l>j; m>j} (l-i) \langle R_i^+ R_m^+ R_l^- R_j^- \rangle \end{aligned}$$

ce qui, au maximum d'émission ($R_i^+ \sim 1$), conduit à :

$$\frac{d}{dt} \langle R_{3,1} \rangle_{1^{\circ} \text{ nm BORN}} \sim \frac{L}{cT_{SR}} \times \frac{N}{T_{SR}}$$

L'approximation de Born est alors valide dès que la condition d'Arecchi-Courtens (II.V.7 pour $\tau_c = L/c$), qui équivaut à :

$$L / (cT_{SR}) < 1$$

est remplie. On retrouve bien les résultats du chapitre II § V.

APPENDICE II : "ETUDE DES EFFETS GEOMETRIQUES"

APPENDICE II - ETUDE DES EFFETS GEOMETRIQUES

Au cours de cet appendice, nous allons étudier les effets géométriques négligés à l'approximation de propagation à une dimension. De par la forme du milieu émetteur (cylindrique allongé), l'émission se fait suivant deux lobes correspondant à des vecteurs d'onde \vec{k} voisins de $\pm \vec{k}_0$. L'approximation de propagation à une dimension consiste alors, comme nous l'avons vu au chapitre II § II B 3°, à négliger deux types d'effets

d'une part on ne tient pas compte de l'émission dans le lobe arrière, d'autre part on ne considère dans le lobe avant que les vecteurs d'onde axiaux ($\vec{k} // \vec{k}_0$).

Nous étudierons tout d'abord le premier type d'effet, en considérant le problème de la superradiance dans deux directions axiales opposées (§A), et nous nous intéresserons en particulier aux couplages possibles entre les deux champs émis. Nous verrons que le calcul de ces effets ne pose pas de problème particulier. Nous verrons également que l'allure des solutions obtenues à l'approximation de propagation à une dimension est peu modifiée par ses effets.

Ce point acquis, nous nous intéresserons au §B, à l'étude des effets transverses d'émission (composantes k_x ou k_y du vecteur d'onde \vec{k} des photons émis différente de zéro). Nous verrons que, s'il est facile d'établir les équations d'évolution correspondantes, et de décrire le démarrage de l'émission, il est très difficile d'intégrer numériquement les équations obtenues et d'analyser les résultats. Ce problème reste donc ouvert, non pour des raisons théoriques fondamentales, mais simplement pour des raisons pratiques que nous analyserons.

A - Superradiance avant-arrière

Dans ce paragraphe, nous allons étudier comment tenir compte d'une émission superradiante simultanée vers l'avant et vers l'arrière. Dans un premier temps, nous considérerons que les champs émis vers l'avant et vers l'arrière n'interfèrent pas, et nous étudierons l'allure générale des solutions (déclenchement par une polarisation uniforme correspondant à $\theta(t=0) = \theta_0 = 2/\sqrt{N}$), avant d'étudier les propriétés statistiques de cette émission simultanée. Nous étudierons enfin, dans le cas simple du démarrage par une polarisation uniforme, l'effet des ondes stationnaires produites par les interférences des ondes émises vers l'avant et vers l'arrière.

1° Calcul simplifié : on néglige les interférences des champs avant et arrière

a) Les équations d'évolution

Le plus simple pour tenir compte de l'émission avant-arrière est de considérer que les atomes sont couplés à deux champs classiques (au lieu d'un), se propageant respectivement vers l'avant (\mathcal{E}_1 de vecteur d'onde \vec{k}_0) et vers l'arrière (\mathcal{E}_2 de vecteur d'onde $-\vec{k}_0$).

Les équations de Bloch Maxwell (II.II.70) se généralisent alors, et si l'on néglige le couplage par interférence entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 , il vient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_1 + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_1}{\partial t} = -\frac{i \hbar \omega_0}{2 \epsilon_0} \mathcal{P}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_1 = i \frac{|D_{+-}|^2}{\hbar} \mathcal{E}_1 \mathcal{N}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_2 - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}_2}{\partial t} = +\frac{i \hbar \omega_0}{2 \epsilon_0} \mathcal{P}_2$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_2 = i \frac{|D_{+-}|^2}{\hbar} \mathcal{E}_2 \mathcal{N}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N} = \frac{i}{2 \hbar} [(\mathcal{E}_1 \mathcal{P}_1 - \mathcal{E}_1 \mathcal{P}_1) + (\mathcal{E}_2 \mathcal{P}_2 - \mathcal{E}_2 \mathcal{P}_2)]$$

où $\mathcal{E}_1, \mathcal{P}_1$ ($\mathcal{E}_2, \mathcal{P}_2$) sont les enveloppes du champ électrique E et de la polarisation atomique P en $e^{-i(k_0 z - \omega_0 t)}$ ($e^{+i(k_0 z + \omega_0 t)}$)

$$E = \text{Re} \left(\mathcal{E}_1 e^{+i(\omega_0 t - k_0 z)} + \mathcal{E}_2 e^{+i(\omega_0 t + k_0 z)} \right)$$

$$P = \text{Re} \left(\mathcal{P}_1 e^{+i(\omega_0 t - k_0 z)} + \mathcal{P}_2 e^{+i(\omega_0 t + k_0 z)} \right)$$

Ces équations simplifiées ont été utilisées par de nombreux auteurs (5) (55).

Les termes d'émission vers l'avant (\mathcal{E}_1 et \mathcal{P}_1) ne sont couplés aux termes d'émission vers l'arrière que par le terme de population $\frac{d}{dt} \mathcal{N}$. Durant la période de démarrage de l'évolution, on peut négliger la variation de ce terme \mathcal{N} et les émissions vers l'avant et vers l'arrière sont complètement indépendantes.

- a) — AV } 43%
- b) - - - AV - AR }
- c) — • — AV - AR + interferences = 28%

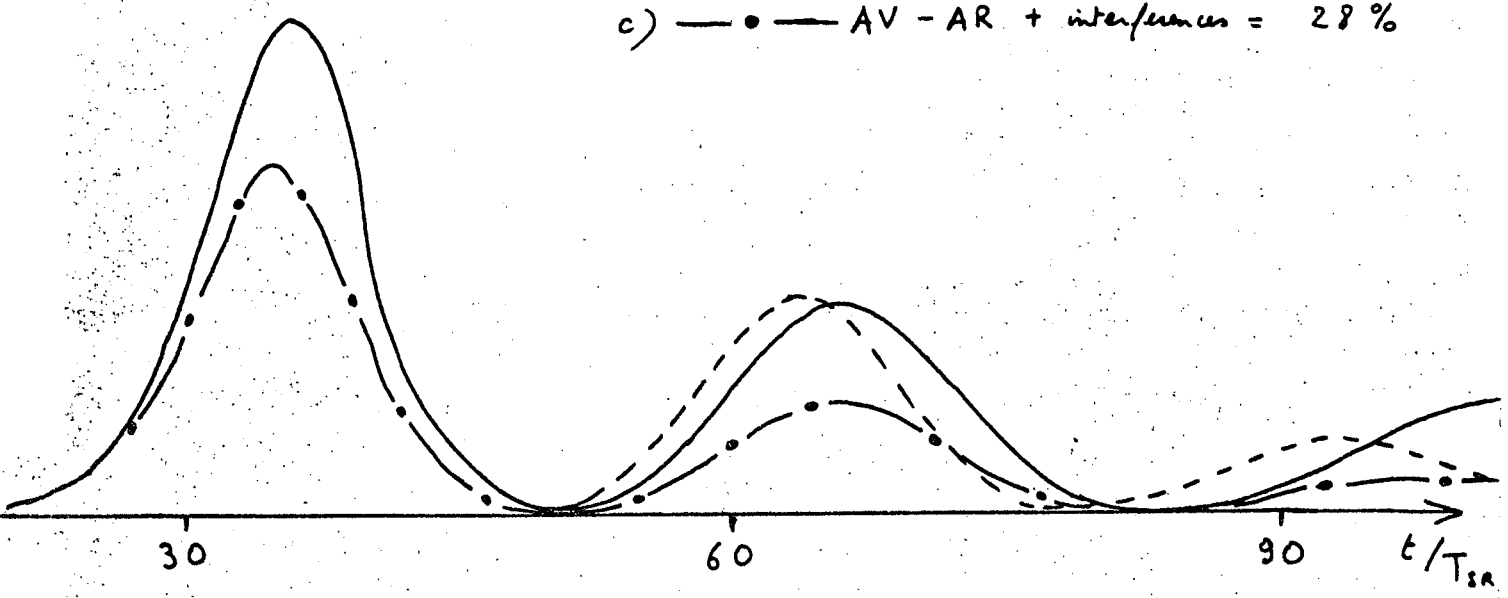


Figure A II 1

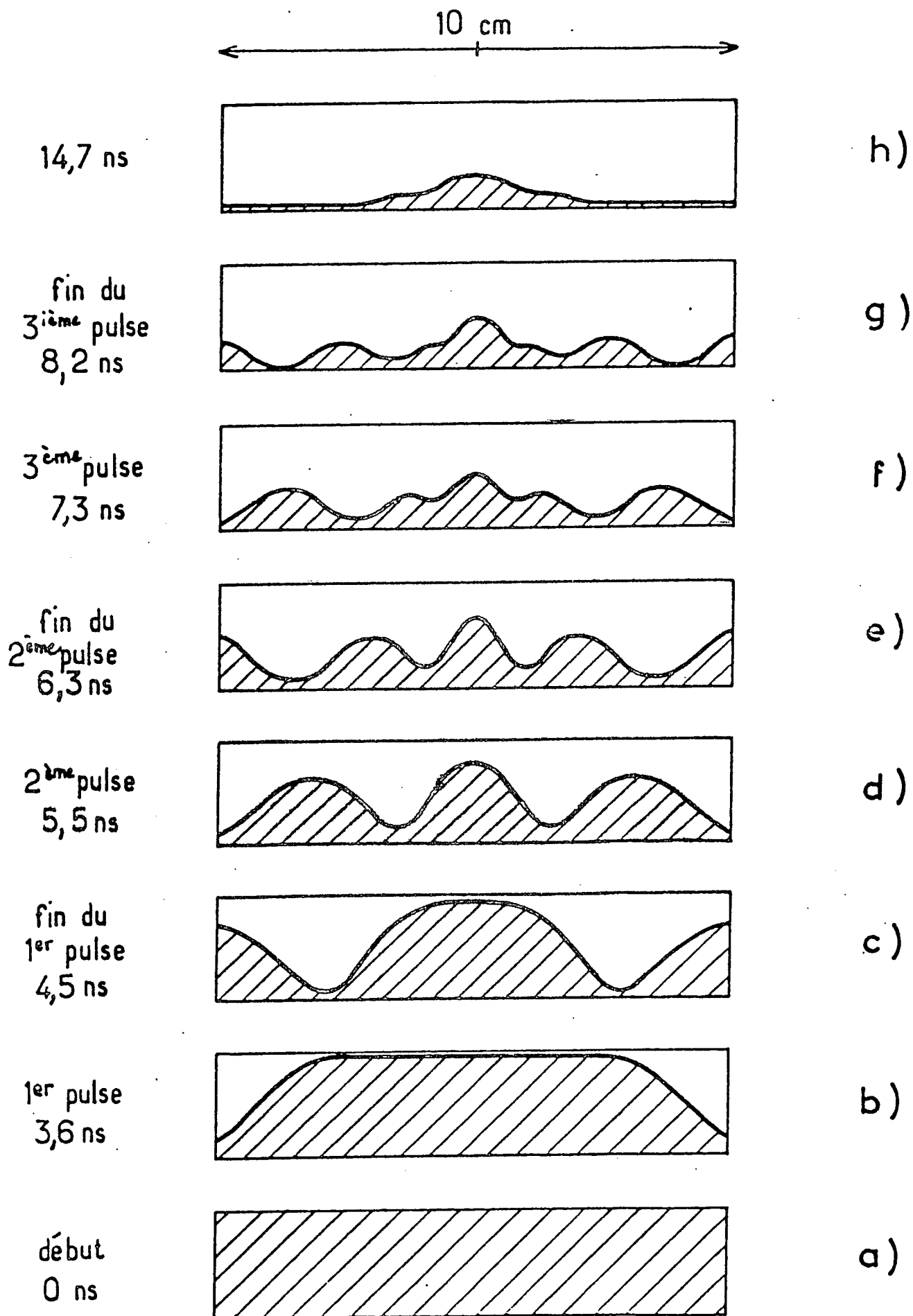


Figure A II 2

zone hachurée : atomes excités
 zone blanche : atomes désexcités

Etudions maintenant l'allure des solutions de (AII.1) afin de voir s'il y a des différences notables avec le modèle simple décrit au chapitre II (modèle de propagation à une dimension.).

b) Allure de la solution typique

Une réalisation typique est obtenue en considérant que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont uniformes et correspondent à un "tipping angle" $\theta(t=0)$ égal à $2/\sqrt{N}$. Ceci correspond à la condition initiale du modèle de Feld. Par la suite, nous appellerons cette réalisation la solution "typique". Bien que cette réalisation ne soit a priori pas plus "physique" que n'importe quelle autre, elle présente d'indéniable avantage de correspondre à une condition initiale bien déterminée et relativement simple. En comparant entre elles les trajectoires "typiques", on peut étudier qualitativement l'influence de tel ou tel paramètre sur l'émission superradiante, sans avoir à calculer et à dépouiller un grand nombre de courbes correspondant aux réalisations possibles de l'expérience. Aussi serons-nous souvent amenés à calculer ces solutions "typiques".

Pour $N=10^8$ atomes, nous avons représenté sur la figure AII.1 l'intensité émise I en fonction du temps, dans le cas où l'émission n'a lieu que vers l'avant (figure AII.1-a), et dans le cas où l'on tient compte des émissions vers l'avant et vers l'arrière (figure AII.1-b). On remarquera que les deux courbes obtenues sont très voisines, en particulier pour le premier et le deuxième lobe émis. Ce résultat n'est pas nouveau : Feld et al (15) avait déjà remarqué cet effet qui a été étudié en détail par Pierre Pillet dans sa thèse de 3^e cycle (55). Rappelons brièvement la discussion qu'il en a tirée. La figure AII.2 extraite de sa thèse représente les populations relatives d'un niveau de départ (partie hachurée) et du niveau final (partie blanche) de la transition superradiante, en fonction de la position le long de l'échantillon à différents instants. On voit immédiatement qu'au moment de l'émission du premier lobe de rayonnement, les atomes qui contribuent aux deux pulses émis sont différents (figure AII.2-b et c). Il en est de même en grande partie pour le deuxième lobe (figure AII.2-d et e). Ce n'est qu'après que les inversions de densité qui "reculent" à partir des extrémités de la cellule, commencent à se chevaucher au centre, entraînant des corrélations entre les lobes suivants (figure AII.2-f, g et h). A ce moment cependant, le nombre d'atomes restant excités

est relativement faible et l'on se retrouve dans la "queue" du pulse superradiant.

Par contre, si l'on étudie la forme des courbes représentant les populations le long du milieu émetteur à un instant donné, la différence est bien entendu beaucoup plus importante. On se reportera à la figure AII.3 qui représente à $t=100 T_{SR}$ les populations respectives dans le niveau de départ (partie hachurée) et d'arrivée (partie blanche) dans le cas où l'on tient compte de l'émission dans une (figure AII.3-a) et deux (figure AII.3-b) directions.

c) La statistique des solutions

En plus des fluctuations statistiques de la forme et des délais du pulse émis (fluctuations décrites au chapitre II.IV.B), on observe ici des fluctuations entre les intensités relatives des pulses émis vers l'avant et vers l'arrière. Il faut alors généraliser les résultats concernant la statistique de l'émission superradiante pour tenir compte de cet effet.

Pour cela, rappelons que l'on peut décrire les fluctuations de l'émission vers l'avant en considérant qu'à $t=0$, chaque dipole est classique, de module D_{+-} et de phase aléatoire. Les enveloppes \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 se déduisent alors par sommation sur les dipoles individuels avec un facteur de phase en $e^{-ik_0 z}$ pour \mathcal{P}_1 (et $e^{+ik_0 z}$ pour \mathcal{P}_2). \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 sont alors des variables aléatoires indépendantes (si la dimension Δz est grande devant celle de devant la longueur d'onde λ : $\Delta z = L/I \gg \lambda^*$) de statistique gaussienne. De façon plus précise, la valeur initiale de \mathcal{P}_1 (\mathcal{P}_2) est $\alpha_1 D_{+-}$ ($\alpha'_1 D_{+-}$) où α_1 (α'_1) est aléatoire suivant la loi II.IV.30.

En utilisant ce résultat et en résolvant numériquement les équations pour un grand nombre de tirages des conditions initiales, on peut décrire l'évolution du système superradiant. On observera des fluctuations entre les délais, les hauteurs, etc., des pulses avant et arrière. La figure AII.4 représente par exemple l'histogramme associé à la différence ΔI_{\max} entre les maximums d'intensité émise vers l'avant et vers l'arrière (5). Il est à noter, comme nous l'avons vu pour la trajectoire typique (où $\theta(t=0) = 2/\sqrt{N}$), que les émissions avant et arrière sont pratiquement décorrélatées, du moins en ce qui concerne le délai et l'intensité du premier maximum. Ce résultat reste vrai en général pour les autres trajectoires, et l'on peut calculer directement l'histogramme associé à la différence de délai Δt_D en

*

Il est à noter ici que I est le nombre de "tranches", cf. chapitre II § IV B 1°

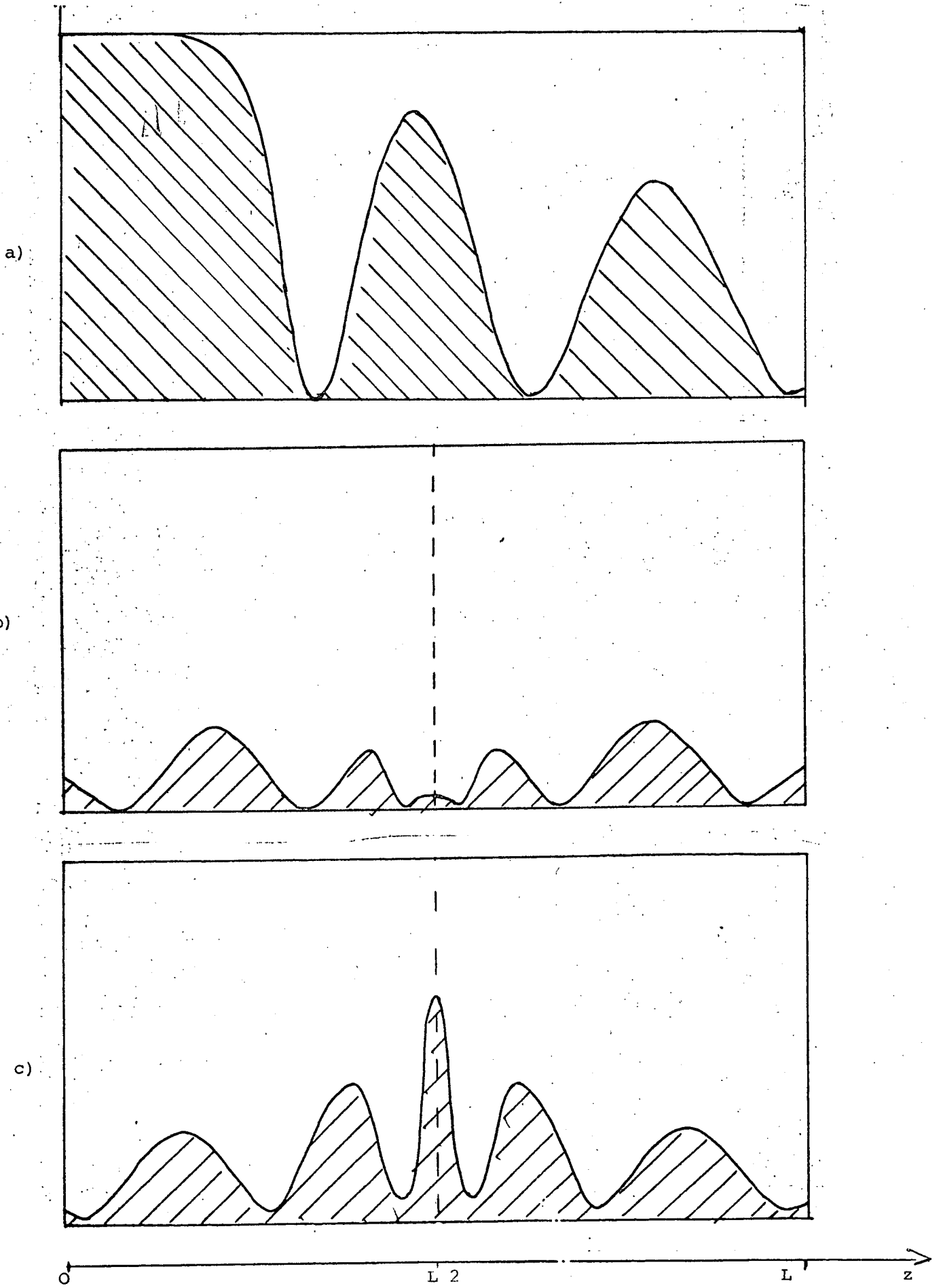


Figure A II 3

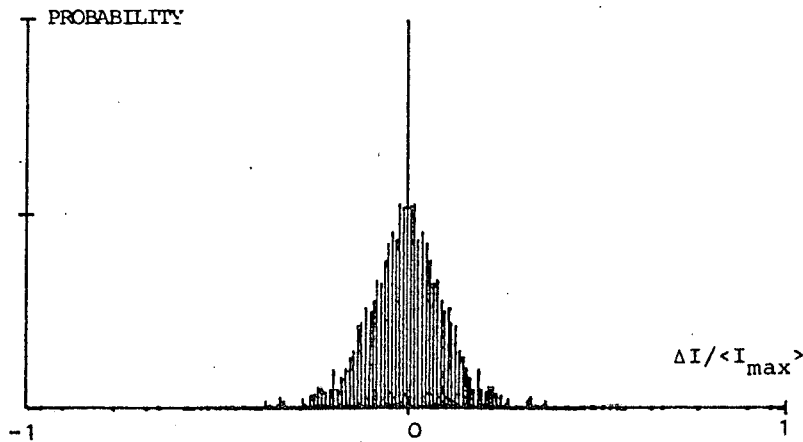


Figure A II-4

Distribution relative des différences entre les premiers maximums d'intensité des pulses superradiants émis vers l'avant et vers l'arrière.

faisant le produit de convolution de l'histogramme associé au délai t_D (voir figure II.13 ou expression approchée II.IV.35) avec lui-même.

2°) Influence de l'onde stationnaire due aux interférences entre les émissions vers l'avant et vers l'arrière

Dans ce qui précède, nous avons négligé la présence d'une onde stationnaire due aux interférences entre les émissions vers l'avant et vers l'arrière. Nous allons étudier ici l'influence de cet effet sur l'allure générale de la solution.

a) Les équations d'évolution

A partir des enveloppes ξ_1 , ξ_2 et \mathcal{P}_1 , \mathcal{P}_2 , on peut construire

$$e = \xi_1 e^{-i k_0 z} + \xi_2 e^{+i k_0 z}$$

$$n = \mathcal{P}_1 e^{i k_0 z} + \mathcal{P}_2 e^{-i k_0 z}$$

e et n sont les enveloppes de E et \mathcal{P} en $e^{+i\omega_0 t}$, et l'on a :

$$E = e \cdot e^{i\omega_0 t} + c.c$$

$$P = n e^{i\omega_0 t} + c.c$$

(Ces quantités e et n ont été également définies au chapitre V pour décrire l'évolution d'un système placé dans une cavité : cf. équation V.9.) Comme les équations de Bloch sont des équations locales qui ne font pas intervenir le facteur de phase en $e^{\pm i k_0 z}$, les équations de Bloch pour e et n sont formellement identiques à (II.II.70-b et c), et l'on a, comme au chapitre V équation (V.10) :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = i \frac{|D_+|^2}{\hbar} e \mathcal{N}$$

$$\frac{\partial \mathcal{N}}{\partial t} = -\frac{i}{2\hbar} (e^\dagger n - e n^\dagger)$$

On peut alors poser :

$$\mathcal{N} = \bar{\mathcal{N}} + \mathcal{N}^+ e^{2i k_0 z} + \mathcal{N}^- e^{-2i k_0 z}$$

l'équation (AII.5-b) devient alors :

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}^+ = \frac{-i}{2\hbar} (\xi_1^+ \mathcal{P}_2 - \xi_2 \mathcal{P}_1^+)$$

$$\frac{d}{dt} \mathcal{N}^- = \frac{-i}{2\hbar} (\xi_2^+ \mathcal{P}_1 - \xi_1 \mathcal{P}_2^+)$$

(\mathcal{N}^+ et \mathcal{N}^- sont complexes conjugués l'un de l'autre). En considérant que \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 varient lentement dans l'espace, l'équation (AII.5-a) devient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_1 = i \frac{|D_+|^2}{\hbar} (\xi_1 \bar{\mathcal{N}} + \xi_2 \mathcal{N}^-)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}_2 = i \frac{|D_+|^2}{\hbar} (\xi_2 \bar{\mathcal{N}} + \xi_1 \mathcal{N}^+)$$

L'équation de Maxwell, par contre, n'est pas modifiée par rapport à (AII.1-a et c).

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_1^e + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_1^e = \frac{i k_0}{\epsilon_0} \mathcal{P}_1$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E}_2^e + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}_2^e = \frac{i k_0}{\epsilon_0} \mathcal{P}_2$$

Au total, le système d'équation de Bloch-Maxwell que nous avons obtenu ici après différents auteurs (72) ne diffère des équations simplifiées (AII.1) que par la présence des termes \mathcal{N}^{\pm} qui représentent la partie à modulation rapide des populations \mathcal{N} . Ce terme couple entre elles les émissions vers l'avant et vers l'arrière (\mathcal{P}_1 est couplé à \mathcal{E}_2 dans (AII.7) ainsi que \mathcal{P}_2 à \mathcal{E}_1). Ces termes proviennent des variations d'amplitude du champ vu par les atomes suivant leur position dans l'onde stationnaire produite par les émission avant et arrière. Cet effet sera particulièrement important pour z voisin de $L/2$, car, dans ce cas, \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont du même ordre. Notons enfin que les termes \mathcal{N}^{\pm} , qui sont, comme nous l'avons vu, capables de coupler les émissions avant et arrière, pourraient également être utilisés en tant que réseaux de populations, pour dévier des faisceaux sondes, ce qui constituerait une méthode nouvelle de détection de l'émission superradiante.

b) Allure de la solution "typique"

Nous avons intégré les équations (AII.7), (AII.8) et (AII.9) avec la condition initiale "typique" correspondant à $N=10^8$ atomes.

La figure AII.1-c représente l'intensité émise I en fonction du temps. On notera que I est nettement plus petit que dans le cas où l'on néglige l'onde stationnaire (figure AII.1-b) et que dans celui où l'on ne tient compte que de l'émission vers l'avant (figure AII.1-a). Le "ringing" cohérent est également moins prononcé (28% au lieu de 43% dans le cas de la figure AII.1-a et b), tout en restant du même ordre de grandeur.

La figure (AII.3-c) représente les populations respectives des différents niveaux à $t=100 T_{SR}$. Nous avons ici moyenné les variations spatiales rapides sur des distances de l'ordre de λ (nous avons représenté $\overline{\mathcal{N}}(z, t=100 T_{SR})$). On notera que, par rapport au cas de la figure AII.3-b, il reste ici beaucoup plus d'atomes que dans le niveau de départ. Ceci traduit le fait que l'intensité émise est beaucoup plus petite lorsque l'on tient compte des effets d'onde stationnaire (figure AII.1-c) que lorsque l'on néglige ces effets (figure AII.1-b)

Pour $z=L/c$, l'effet d'onde stationnaire est maximum et le pourcentage d'atomes restants dans le niveau de départ est très grand. En effet, de par la symétrie de la condition initiale, \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 sont égaux, et les atomes situés dans les neuds ne voient aucun champ et n'évoluent pas. L'effet est alors très similaire à l'effet observé dans le cas de la superradiance d'un système étendu dans une cavité. (Voir chapitre V.B). Suivant leur position dans les neuds et ventres, les atomes voient des champs différents et évoluent à des vitesses différentes. On observe alors au voisinage de $z=L/2$, l'effet de superradiance limité (voir chapitre IV), et il reste au moins 50% des atomes dans le niveau de départ +. On a en effet pour $t = +\infty$ et $z = L/2$:

$$\mathcal{N}^+(t=+\infty, L/2) = \mathcal{N}^-(t=+\infty, L/2) = -1/2 \cdot \overline{\mathcal{N}}^+(t=+\infty, L/2) = +1/2 \cdot \mathcal{N}(t=0)$$

ce qui permet, d'après (AII.8), d'annuler \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 , et d'avoir, dans les neuds $\mathcal{N}^{\pm}(t=+\infty) = \mathcal{N}^{\pm}(t=0)$. Cet effet de superradiance limitée n'est observé que pour $z=L/2$. Dès que cette condition n'est plus remplie, les interférences entre \mathcal{E}_1 et \mathcal{E}_2 ne sont plus totales et tous les atomes sont portés dans l'état - à $t = +\infty$ ($\overline{\mathcal{N}}^+(z=0, t=+\infty) = 0$). On observe donc une discontinuité de la courbe représentant $\overline{\mathcal{N}}^+(z)$ au voisinage de $z = L/2$ à $t = +\infty$. Sur la figure AII.3-c pour $t=100 T_{SR}$, cette discontinuité se traduit par un maximum très fin et très prononcé de $\overline{\mathcal{N}}^+(z)$ pour $z = L/2$.

Dans le cas d'une réalisation de l'expérience qui ne conserve plus la symétrie avant-arrière de la condition initiale (cas général), l'effet d'interférence est maximum en un point qui n'est plus d'abscisse $z = L/2$, mais qui reste néanmoins voisin et au total les résultats décrits plus haut restent qualitativement valables.

3° Conclusion

La prise en compte des deux directions d'émission ne présente pas de grande difficulté, surtout si l'on néglige les effets d'onde stationnaire. Les résultats obtenus sont peu différents de ceux que l'on obtient dans le cas du modèle simple de propagation à une dimension dans la direction avant, et l'émission superradiante continue à présenter des "ringings" cohérents importants. On notera un effet physique nouveau : dans certaines con-

ditions, on peut obtenir un réseau de populations de pas $\lambda/2$ qui peut permettre de détecter l'émission superradiante d'une manière originale, et qui donne naissance à un effet de superradiance limitée analogue à ceux décrits au chapitre IV.

B - La superradiance vers l'avant d'un milieu étendu en tenant compte des effets transverses (problème à trois dimensions)

Nous allons ici nous intéresser aux effets transverses liés à la dimension latérale finie du milieu superradiant. L'étude de ces effets qui n'a pas encore été achevée à ce jour, constitue en quelque sorte le chaînon manquant à une théorie quantitative complète de la superradiance d'un système à deux niveaux. C'est dire l'intérêt du problème que nous abordons. Si ce problème ne présente a priori pas de grande difficulté théorique et, s'il est facile de généraliser les équations d'évolution de l'émission superradiante, en tenant compte des effets transverses, nous allons voir qu'il est par contre très difficile d'intégrer numériquement les équations obtenues, et qu'il est également difficile d'analyser les résultats.

Au total, ce problème reste encore ouvert, et nous nous contenterons de livrer au lecteur quelques amorces de solutions et quelques directions de recherche qui nous paraissent intéressantes.

1° Généralisation des équations de Bloch-Maxwell à trois dimensions

Les équations couplant un système à deux niveaux à une onde électromagnétique classique (équations de Bloch-Maxwell) sont en général des équations assez lourdes. Ces équations font intervenir les enveloppes \vec{E} du champ \vec{E} , \vec{P} du dipole \vec{D} , ainsi que la différence de populations \mathcal{N} des niveaux + et - , où \vec{E} , \vec{P} et \mathcal{N} sont fonction des trois variables de l'espace : x, y, z , et où \vec{E} et \vec{P} sont des vecteurs. Une première simplification de ces équations peut être faite en remarquant que, pour un système à deux niveaux, la direction du dipole \vec{D} est fixe, et que seule la composante de \vec{D} perpendiculaire à Oz rayonne, car tous les photons émis ont un vecteur d'onde \vec{k} de direction voisine de celle de \vec{k}_0 . On peut donc, sans nuire à la généralité du problème, supposer que \vec{D} est perpendiculaire à Oz (par exemple \vec{D} parallèle à Ox). Le champ superradiant vu par les atomes est alors également de polarisation parallèle à Ox et au total seuls les composantes sur Ox, D_x et E_x de \vec{D} et \vec{E} interviennent dans le problème.

Introduisons alors les enveloppes $\mathcal{E}(\vec{x})$ et $\mathcal{P}(\vec{x})$ de E_x et D_x qui, à la différence des enveloppes $\mathcal{E}(z)$ et $\mathcal{P}(z)$ sont des fonctions des trois variables de position x, y, z notés \vec{x} :

$$E_x(\vec{x}) = \mathcal{E}(\vec{x}) e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{x})} + c.c.$$

$$P_x(\vec{x}) = \mathcal{P}(\vec{x}) e^{i(\omega_0 t - \vec{k}_0 \cdot \vec{x})} + c.c.$$

$$\text{ou } P_x(\vec{x}) = 2 D_{+-} \sum_i r_i^+ \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Introduisons de même $\mathcal{N}(\vec{x})$ analogue à $\mathcal{N}(z)$:

$$\mathcal{N}(\vec{x}) = \sum_i 2 r_{3,i} \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)$$

Comme les enveloppes $\mathcal{E}(\vec{x})$, $\mathcal{P}(\vec{x})$ ont la phase d'une onde plane de vecteur d'onde \vec{k}_0 et, comme \vec{k} est voisin de \vec{k}_0 les enveloppes \mathcal{E} et \mathcal{P} varient lentement en x, y et z . Par ailleurs, \mathcal{E} et \mathcal{P} varient également lentement, dans le temps (les variations rapides en $e^{\pm i\omega_0 t}$ sont éliminées).

Les équations de Bloch, qui sont des équations locales, ont alors la même forme pour les enveloppes en \vec{x} que les enveloppes en z , et il vient en négligeant l'émission vers l'arrière :

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{P}(\vec{x}) = \frac{i}{\hbar} |D_{+-}|^2 \mathcal{E}(\vec{x}) \mathcal{P}(\vec{x})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{N}(\vec{x}) = \frac{i}{2\hbar} (\mathcal{E}(\vec{x})^+ \mathcal{P}(\vec{x}) - \mathcal{E}(\vec{x}) \mathcal{P}(\vec{x})^+)$$

L'équation donnant $\mathcal{E}(\vec{x})$ se déduit de l'équation de Maxwell :

$$\text{rot}(\text{rot } \vec{E}) + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{D}}{\partial t^2}$$

En ne gardant que les composantes en \vec{x} , et en faisant les mêmes approximations que celles faites dans le cas du modèle à une dimension (76), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \mathcal{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E} + \frac{i}{2k_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E} = - \frac{i k_0}{2\varepsilon_0} \mathcal{P}$$

Cette équation associée aux équations de Bloch (AII.13) constitue la généralisation à trois dimensions des équations de Bloch-Maxwell (II.II.70). Ces deux systèmes d'équations ne diffèrent que par la présence du terme en $\frac{i}{2k_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E}$ dans l'équation de Maxwell généralisée. Dans la suite de l'exposé, nous désignerons ce terme sous le nom de terme supplémentaire, et nous allons en étudier la signification physique au prochain paragraphe.

2° Signification physique du terme supplémentaire $\frac{i}{2k_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E}$ présent dans l'équation de Maxwell généralisée

Le terme supplémentaire provient du développement du laplacien $\Delta \vec{E}$ contenu dans $\vec{\text{rot}} (\vec{\text{rot}} \vec{E})$ de l'équation (AII.14)

$$\vec{\text{rot}} \vec{\text{rot}} \vec{E} = \vec{\text{grad}} \text{div} \vec{E} - \Delta \vec{E}$$

Développons en effet $\Delta \vec{E}$ pour la partie en $\mathcal{E} e^{-ik_0 z}$ de E_x . Il vient :

$$\Delta \mathcal{E} e^{-ik_0 z} = \left[-k_0^2 \mathcal{E} - 2ik_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} + \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \mathcal{E} \right] e^{-ik_0 z}$$

Analysons les différents termes du deuxième membre :

- le terme $-k_0^2 \mathcal{E}$ se simplifie avec le terme en $\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial t^2}$ de l'équation (AII.14)

- le terme en $-ik_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$ est le terme principal qui est présente aussi bien dans les calculs à une dimension qu'à trois dimensions : équations (AII.15) et (II.II.70-a)

- le terme en $\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E}$, qui n'apparaît que dans le calcul à trois dimensions, est le terme supplémentaire que nous étudions

- le terme en $\frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial z^2}$ est négligeable : comme \mathcal{E} évolue sur une distance de l'ordre de L , il est L/λ fois plus petit que le terme principal $-ik_0 \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z}$

Etudions maintenant de façon plus détaillée la signification physique et le poids du terme supplémentaire $(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}) \mathcal{E}$. Nous considérerons pour cela que le terme source $-ik_0 \int_{2\epsilon_0}$ de l'équation de Maxwell (AII.15) est nul. L'équation de Maxwell décrit alors la propagation libre d'une onde électromagnétique dans le vide. Etudions alors deux exemples.

- Supposons que \mathcal{E} représente une onde plane de vecteur d'onde \vec{k}_0 , mais de dimension transversale a finie. Les dérivés $\frac{\partial}{\partial x^2}$ et $\frac{\partial}{\partial y^2}$ de \mathcal{E} sont alors de l'ordre de $\mathcal{E}/(k_0 a^2)$ et le terme supplémentaire représente la diffraction. Si λ tend vers zéro, l'effet du terme supplémentaire devient nul (coefficient de proportionnalité en $1/(2k_0)$). Le terme principal étant de l'ordre de \mathcal{E}/L (car \mathcal{E} évolue en z sur des distances de l'ordre de L), le terme supplémentaire prédomine si $\mathcal{E}/k_0 a^2 > \mathcal{E}/L$, ce qui équivaut à :

$$\mathcal{F} < 1$$

(où $\mathcal{F} = a^2/(L\lambda)$ est le nombre de Fresnel : cf. équation II.II.56).

- Supposons maintenant que \mathcal{E} représente une onde plane de dimension transversale infinie, mais de vecteur d'onde \vec{k} différent de \vec{k}_0 avec $|\vec{k} - \vec{k}_0| \ll |\vec{k}_0|$. L'enveloppe $\mathcal{E}(x, y, z)$ est alors de la forme :

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{i[(k - k_0)z - (\vec{k} \cdot \vec{r}_0) - \omega t]}$$

où $k = |\vec{k}|$

On a pour le terme principal de (AII.15)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathcal{E}}{\partial y^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial z} &= i(k - k_0) \mathcal{E}_0 \\ &= \frac{i}{2} \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0} - \right) \mathcal{E}_0 \end{aligned}$$

et pour le terme supplémentaire :

$$\frac{i}{2k_0} \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \mathcal{E} = -\frac{i}{2} \left(\frac{k_x^2 + k_y^2}{k_0} - \right) \mathcal{E}_0$$

On vérifie bien que ces deux termes se compensent, ce qui est naturel, car l'onde plane (AII.18) est solution de l'équation (AII.15) sans second membre.

Notons cependant que le poids respectif de chacun des deux termes peut devenir important. Si l'on considère que \vec{k} fait avec \vec{k}_0 un angle voisin de l'angle géométrique a/L , le terme supplémentaire qui est alors de l'ordre de $\mathcal{F} \varepsilon / L$, est grand devant le terme principal si :

$$\mathcal{F} > 1$$

Au total, si $\mathcal{F} < 1$, le terme supplémentaire représente surtout la diffraction. Ce terme augmente avec \mathcal{F}^{-1} et λ . Si par contre $\mathcal{F} > 1$, le terme supplémentaire traduit surtout l'effet des modes transverses de vecteur d'onde \vec{k} voisin de \vec{k}_0 . Le terme supplémentaire augmente alors avec \mathcal{F} et avec λ . Dans tous les cas, le terme supplémentaire est au moins aussi important que le terme principal. Pour minimiser son effet, il faut choisir le nombre de Fresnel de l'ordre de l'unité. Si \mathcal{F} est grand, ou très petit, le terme supplémentaire peut devenir très gros et l'intégration numérique des équations devient alors de plus en plus difficile.

3° La condition initiale à prendre pour résoudre les équations de Bloch-Maxwell généralisées

Après avoir généralisé à trois dimensions les équations de Bloch-Maxwell, nous allons indiquer comment généraliser de même les conditions initiales.

Pour cela, remarquons tout d'abord que les équations de Bloch-Maxwell généralisées (AII.13) et (AII.15) doivent être intégrées numériquement. Il faut donc passer des variables continues \vec{x} aux variables discrètes correspondantes en décomposant le milieu en "boîtes" de dimensions Δx , Δy et Δz . Dans chaque "boîte", on considère que les enveloppes \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} ne varient pas. En appelant n le nombre d'atomes contenus dans chaque "boîte", on peut faire pour les "boîtes" la même démonstration que celle faite pour les "tranches" au chapitre II § IV B. L'évolution du système superradiant s'obtient alors en décomposant les opérateurs \mathcal{E} , \mathcal{P} et \mathcal{N} en trajectoires classiques $\mathcal{E}_{cl, \alpha}$, $\mathcal{P}_{cl, \alpha}$, $\mathcal{N}_{cl, \alpha}$, l'indice α caractérisant la condition initiale prise pour \mathcal{P} dans chaque "boîte". Les signaux expérimentaux correspondent à de telles trajectoires, le choix de la trajectoire étant aléatoire. Pour simuler une expérience, il suffit de considérer qu'à $t = 0$, la valeur initiale de la polarisation atomique est de phase aléatoire et correspond à un angle θ du vec-

teur de Bloch qui obéit à la loi de probabilité (II.IV.32) dans laquelle n représente non plus le nombre d'atomes de chaque "tranche", mais le nombre d'atomes de la "boîte" considérée. (On obtient cette loi de probabilité sur \int , en associant à chaque atome un dipôle classique de module D_+ et de phase aléatoire et en sommant sur les n dipôles classiques contenus dans la "boîte".)

4° Difficultés rencontrées lors de l'étude du problème de la superradiance à trois dimensions

L'étude complète des solutions des équations de Bloch-Maxwell généralisées (AII.13) et (AII.15) est très lourde et sort du cadre de cet appendice. Indiquons brièvement les difficultés qu'il faudrait résoudre pour mener à bien un tel travail.

a) Difficultés mathématiques d'intégration numérique

Les équations de Bloch-Maxwell (AII.13) et (AII.15) sont la généralisation à quatre dimensions (trois dimensions pour l'espace : x, y, z ; une dimension pour le temps : t) des équations (II.II.70) à deux dimensions (z et t). Si le nombre de pas d'intégration sur x et sur y est de l'ordre de $32 = 2^5$ (32 semble être un minimum), le temps de calcul se trouve de ce fait multiplié par $32^2 \approx 10^3$.

L'équation de Maxwell généralisée (AII.15) contient de plus le terme supplémentaire $i(2k_0)^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2} \right) \mathcal{E}$, qui, comme nous l'avons vu, représente à la fois la diffraction et la propagation dans les modes non axiaux. Pour calculer ce terme, il faut évaluer la dérivée seconde d'une fonction $\mathcal{E}(x, y, z)$ à y et z , ou x et z fixé, dont on ne connaît la valeur qu'en un nombre fini de points (par exemple 32). D'un point de vue mathématique, cette opération n'est pas simple. La meilleure solution consiste, semble-t-il, à passer en transformée de Fourier sur x et y en posant :

$$\hat{\mathcal{E}}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{2\pi} \int dx \int dy \mathcal{E}(x, y, z) e^{i k_x x} e^{i k_y y}$$

$$\hat{\mathcal{P}}(k_x, k_y, z) = \frac{1}{2\pi} \int dx \int dy \mathcal{P}(x, y, z) e^{i k_x x} e^{i k_y y}$$

L'équation de Maxwell devient alors :

$$\frac{\partial}{\partial z} \tilde{E} = -i \frac{(k_z^2 + k_y^2)}{2k_0} \tilde{E} - i \frac{k_0}{2\varepsilon_0} \tilde{P}$$

Après intégration de (AII.23) - intégration qui ne présente pas de difficultés particulières -, il suffit de passer en transformée de Fourier inverse pour obtenir $\tilde{E}(x, y, z)$. On en déduit alors \tilde{P} et \tilde{A} par les équations de Bloch (AII.13).

Evaluons rapidement le nombre d'opérations nécessaires pour intégrer numériquement les équations de Bloch-Maxwell par cette méthode. Le nombre de pas d'intégration minimum est de

32 pour x et pour y , soit au total 1024

15 pour z

100 pour t .

Si l'on ne tient compte que des transformées de Fourier (qui prennent ici la majorité du temps de calcul), on doit faire, à chaque pas d'intégration sur t et z , deux transformées de Fourier (une transformée de Fourier directe pour \tilde{P} , une transformée de Fourier inverse pour \tilde{E}) sur 1024 points, qui correspondent chacune à $\approx 10^4 \approx 1024 \text{ Log } 1024$ multiplications complexes. (On utilise bien sûr ici des programmes de calcul de transformée de Fourier rapide - le nombre d'opérations est alors de $n \text{ Log } n$, où n est le nombre de points.) Au total, le nombre d'opérations est de $2 \times 10^4 \times 15 \times 100 = 3 \cdot 10^7$ multiplications complexes, soit un temps de calcul de l'ordre de deux à cinq minutes sur l'UNIVAC d'Orsay. Ce calcul serait réalisable si d'autres difficultés d'un autre ordre ne venaient pas compliquer encore l'étude.

b) Difficultés liées à la statistique et à l'analyse des résultats

Si l'on tient compte des effets transverses, l'émission n'a plus aucune raison d'avoir lieu dans la direction Oz , et l'on observe en plus des fluctuations de délai et de forme -fluctuations que l'on observe également dans le modèle de propagation à une dimension (voir chapitre II § IV B)-, des fluctuations sur la direction d'émission. L'analyse statistique de l'émission s'en trouve alors grandement compliquée, car, comme l'intensité émise dépend de la position en x, y, z du détecteur, il n'existe plus d'observable unique caractérisant le pulse superradiant. De plus, il est à noter que le résultat

dépend de la forme exacte du milieu émetteur, et en particulier du nombre de Fresnel \mathcal{F} . Il est donc important de contrôler ce paramètre si l'on veut comparer à l'expérience le résultat du calcul.

5° Conclusion

L'étude de la superradiance d'un milieu étendu à trois dimensions, ne pose, sur le plan théorique, aucun problème particulier, et il nous a été facile de généraliser les équations de Bloch-Maxwell à ce cas (§ 1°), et de décrire le démarrage du système par un choix judicieux des conditions initiales (§ 3°). L'intégration numérique des équations et l'étude des solutions est par contre beaucoup plus difficile (§ 4°) :

- parce que le calcul de chaque trajectoire est une opération difficile en elle-même;
- parce que les fluctuations caractérisant chaque trajectoire portent sur un plus grand nombre de paramètres - les polarisations initiales fluctuent non seulement suivant z , comme au chapitre II § IV, mais également suivant x et y ;
- parce qu'enfin il n'est pas possible de décrire complètement les propriétés du champ émis pour une trajectoire donnée (Le résultats dépendant de la position exacte du détecteur.)

Au total, l'intégration numérique complète des équations de Bloch-Maxwell généralisées (AII.13 et AII.15) sort du cadre de ce mémoire, et il n'est donc pas possible de décrire l'allure des solutions que l'on attend. Ces solutions n'ont aucune raison de ressembler aux solutions obtenues dans le cadre du modèle à une dimension, en particulier en ce qui concerne la présence de "ringings" cohérents. Ces "ringings", qui apparaissent dans le modèle à une dimension (cf. figure AII.1), n'ont pu être mis clairement en évidence expérimentalement. Ce désaccord devrait disparaître en *faisant* le calcul complet.

Avant d'entreprendre un tel calcul, il peut être intéressant de se demander si certaines situations ne sont pas plus favorables, non pour le calcul lui-même, qui sera toujours difficile, mais pour l'analyse des signaux attendus lors d'une réalisation d'expérience et pour l'étude des fluctuations entre les diverses réalisations. Nous allons voir que tout dépend alors du nombre de Fresnel.

- Dans le cas du "disque" : $\mathcal{F} \gg 1$, l'angle géométrique est très supérieur à l'angle de diffraction, et l'émission peut avoir lieu à l'intérieur de cet angle géométrique. Il peut donc exister plusieurs aires de cohérence et les fluctuations de direction sont importantes. Corrélativement, le champ vu par les atomes évolue vite sur la dimension transversale du milieu, et les différentes classes d'atomes d'une même "tranche" n'évoluent pas à la même vitesse. Ce cas est au total très défavorable, car le calcul de l'évolution, comme l'analyse des résultats, est complexe.

- Dans le cas de l' "aiguille" : $\mathcal{F} \ll 1$, le gain associé au mode axial est très supérieur au gain associé aux autres modes. Il n'y a plus de fluctuations de direction, et le champ vu par les atomes est pratiquement le même à l'intérieur de chaque "tranche". Le problème se trouve considérablement simplifié, non seulement pour le calcul de l'évolution, mais surtout pour l'analyse des résultats obtenus (analyse des signaux, fluctuations). Ce cas est sans doute le plus intéressant à étudier si l'on veut faire une étude quantitative de la forme des signaux que l'on observe expérimentalement.

APPENDICE III : " LES FLUCTUATIONS DE L'EFFET DE DECLENCHEMENT PAR RAYONNEMENT

THERMIQUE : CALCUL DANS LE FORMALISME DE SCHRÖDINGER

Appendice IIILes fluctuations de l'effet de déclenchement par rayonnement thermique : calcul dans le formalisme de Schrödinger

Pour étudier les fluctuations liées au déclenchement thermique de la superradiance, nous allons reprendre depuis le début, l'ensemble du traitement de la superradiance à l'approximation du champ moyen. Comme précédemment, chapitre II § 2, le système atomique constitue un "petit système", couplé à un "grand réservoir", mais cette fois le "réservoir" n'est plus à température nulle.

À $t = 0$, l'état initial de la matrice densité du champ n'est plus

$$| 0 \rangle_{\text{ray}} \langle 0 |_{\text{ray}} \quad \text{A.III.1}$$

mais $\rho_R(0)$:

$$\rho_R(0) = \prod_{\vec{k}, \vec{\epsilon}} \left(\sum_n |n, \vec{k}, \vec{\epsilon}\rangle \langle n, \vec{k}, \vec{\epsilon}| P(n, k, T) \right) \quad \text{A.III.2}$$

où $|n, \vec{k}, \vec{\epsilon}\rangle$ représente l'état du champ à n photons dans le mode \vec{k} , de polarisation $\vec{\epsilon}$

et où $P(n, k, T)$ est la probabilité correspondante

$$P(n, k, T) = e^{-\frac{n\hbar ck}{KT}} (1 - e^{-\frac{\hbar ck}{KT}}) \quad \text{A.III.3}$$

et la matrice densité globale à $t = 0$ n'est plus (II.II.12), mais

$$\phi(0) = \left(|+\rangle_1 \otimes |+\rangle_2 \dots |+\rangle_N \langle +|_1 \otimes \langle +|_2 \dots \langle +|_N \right) \otimes \rho_R(0) \quad \text{A.III.4}$$

En reprenant les mêmes calculs qu'au chapitre II § 2, on obtient alors de façon analogue à (II.II.26) à l'approximation de Born (qui consiste ici à remplacer dans l'équation II.II.18 $\hat{\phi}^\sim(t-\tau)$ par $\hat{\rho}^\sim(t-\tau) \otimes \rho_R(0)$) :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \tilde{\rho}(t) &= \sum_{\vec{k}} \frac{g^2(\vec{k})}{\chi^2} \sum_n P(n, \vec{k}, T) \\
&- (n+1) \int_0^t d\tau \cos c(k_0 - k) \tau \\
&\quad \times \left[[R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^-, \tilde{\rho}(t-\tau)]_+ + 2 R_{\vec{k}}^- \tilde{\rho}(t-\tau) R_{\vec{k}}^+ \right] \\
&- i(n+1) \int_0^t d\tau \sin c(k_0 - k) \tau \quad [R_{\vec{k}}^+ R_{\vec{k}}^-, \tilde{\rho}(t-\tau)] \\
&- n \int_0^t d\tau \cos c(k_0 - k) \tau \\
&\quad \times \left[[R_{\vec{k}}^- R_{\vec{k}}^+, \tilde{\rho}(t-\tau)]_+ + 2 R_{\vec{k}}^+ \tilde{\rho}(t-\tau) R_{\vec{k}}^- \right] \\
&+ i n \int_0^t d\tau \sin c(k_0 - k) \tau \quad [R_{\vec{k}}^- R_{\vec{k}}^+, \tilde{\rho}(t-\tau)]
\end{aligned} \tag{A.III.5}$$

(On retrouve bien (II.II.26) en faisant :

$$T = 0 \iff P(n, \vec{k}, T) = \delta_{n,0}$$

Dans cette équation, les deux premières lignes: termes $\propto (n+1)$, représentent l'émission spontanée collective superradiante: termes $\propto (+1)$, ainsi que l'émission stimulée sous l'effet du champ thermique, alors que les deux dernières lignes: termes $\propto n$ représentent l'absorption du rayonnement thermique. Les facteurs $(n+1)$ et n , proviennent de traces sur les variables du champ de la forme.

$$\text{Tr}_{\text{ray}} [a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^+ \tilde{\rho}_R^{\sim}(0)] \rightarrow n+1 \tag{A.III.6.a}$$

$$\text{Tr}_{\text{ray}} [a_{\vec{k}}^+ a_{\vec{k}}^+ \tilde{\rho}_R^{\sim}(0)] \rightarrow n \tag{A.III.6.b}$$

Pour pouvoir effectuer les différentes sommations présentes dans (A.III.5) on est conduit -suivant en cela le traitement fait au chapitre II § 2 B- à faire l'approximation de Markov qui consiste à faire le changement :

$$\tilde{\rho}(t - \tau) \longrightarrow \tilde{\rho}(t) \quad \text{A.III.7}$$

et l'approximation du champ moyen qui consiste, d'une part, à faire dans

$$\sum_{\mathbf{k}} \equiv \frac{V}{(2\pi)^3} \iiint d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z :$$

$$\iiint d\mathbf{k}_x d\mathbf{k}_y d\mathbf{k}_z \longrightarrow \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 \int d\mathbf{k}_z \quad \text{A.III.8}$$

(approximation de propagation à une dimension cf. II.II.46) et d'autre part, à négliger les parties imaginaires de (A.III.5).

L'intégration sur t fait alors apparaître la fonction $\delta(k - k_0)$:

$$\int_0^{\infty} dt \cos c(k_0 - k) \tau = \frac{1}{c} \pi \delta(k - k_0) \quad \text{A.III.9}$$

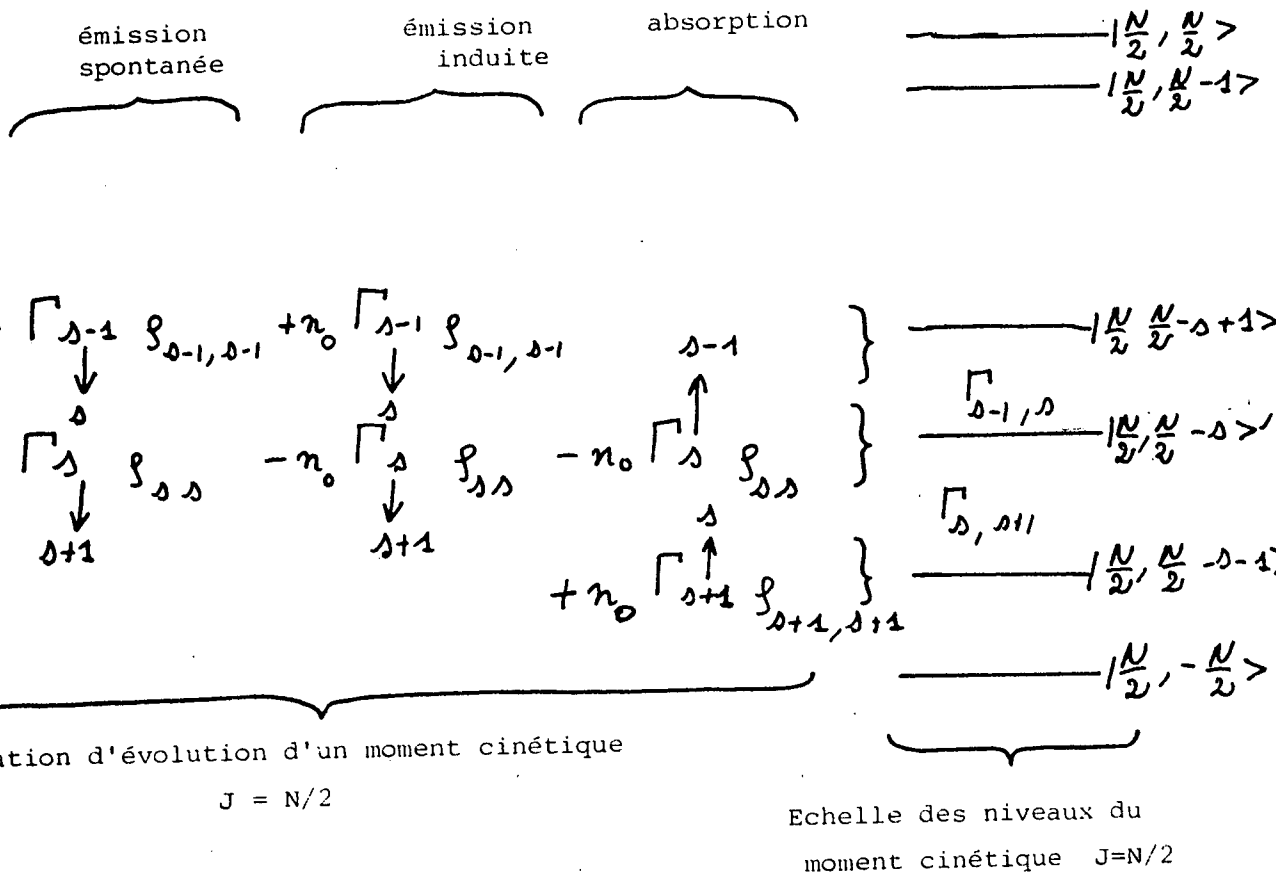
ce qui rend la sommation sur n extrêmement simple :

$$\sum_n n \cdot P(n, k, T) \delta(k - k_0) \approx \frac{KT}{\hbar c k_0} \delta(k - k_0) \quad \text{A.III.10}$$

ainsi que la sommation sur $k_2 \approx k$. On obtient alors en faisant apparaître $\Gamma\mu$ (de façon similaire à II.II.55)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho} = & - \Gamma\mu \left(R_{\vec{k}_0}^+ R_{\vec{k}_0}^- \tilde{\rho} + \tilde{\rho} R_{\vec{k}_0}^+ R_{\vec{k}_0}^- - 2 R_{\vec{k}_0}^- \tilde{\rho} R_{\vec{k}_0}^+ \right) \\ & - \frac{KT}{\hbar c k_0} \left(R_{\vec{k}_0}^+ R_{\vec{k}_0}^- \tilde{\rho} + R_{\vec{k}_0}^- R_{\vec{k}_0}^+ \tilde{\rho} - 2 R_{\vec{k}_0}^+ \tilde{\rho} R_{\vec{k}_0}^- - 2 R_{\vec{k}_0}^- \tilde{\rho} R_{\vec{k}_0}^+ + \tilde{\rho} R_{\vec{k}_0}^+ R_{\vec{k}_0}^- + \tilde{\rho} R_{\vec{k}_0}^- R_{\vec{k}_0}^+ \right) \end{aligned}$$

A.III.11



Notations : Γ_{s-1} et Γ_s^{s-1} représentent les probabilités associées aux transitions de $J=N/2, m=N/2-s+1$ vers $J=N/2, m=N/2-s$ et réciproquement. Ces probabilités sont égales et sont notés dans le texte

$$\Gamma_{s, s-1} = \Gamma_{s-1, s} = s(N-s+1) \Gamma_\mu$$

Figure A III-1

qui, dans la base des états de Dicke conduit à :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss} = & + \Gamma \mu \left[- (s+1) (N-s) \tilde{\rho}_{ss} + s (N-s+1) \tilde{\rho}_{s-1, s-1} \right] \\ & + n_0 \Gamma \mu \left[- (s+1) (N-s) \tilde{\rho}_{ss} + s (N-s+1) \tilde{\rho}_{s-1, s-1} \right] \\ & + n_0 \Gamma \mu \left[- s (N-s+1) \tilde{\rho}_{ss} + (s+1) (N-s) \tilde{\rho}_{s+1, s+1} \right] \end{aligned}$$

A.III.12

où $s = N/2 - n$ (cf. II.III.8)

et où $n_0 = \frac{KT}{\hbar \nu_{ck_0}}$

On reconnaît là l'équation décrivant le couplage d'un moment cinétique $J = N/2$ avec le champ de rayonnement. On peut facilement séparer dans l'équation (A.III.12) et sur la figure (A.III.1) les termes d'émission spontanée (1ère ligne de A.III.12), des termes d'émission induite (2ème ligne) et d'absorption (3ème ligne).

L'équation (A.III.12) montre qu'au temps court ($s \ll n_0$) les termes induits par le champ thermique sont prépondérants, et l'évolution moyenne est alors de l'ordre de $n_0/s+1$ fois plus rapide qu'en absence de déclenchement. Par contre, dès que $s \gg n_0$, il y a compensation presque totale entre les termes d'émission stimulée et les termes d'absorption, et l'évolution est la même qu'à température nulle.

Vérifions le, en calculant à l'approximation du démarrage $\left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss}\right)_{\text{spontané}}$ et $\left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss}\right)_{\text{déclenché}}$. Il vient de (A.III.12) :

$$\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss} = \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss}\right)_{\text{spon}} + \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss}\right)_{\text{décl}} \quad \text{A.III.13.a}$$

$$\text{avec } \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss} \right)_{\text{spon}} = \frac{1}{T_{SR}} \left[- (s+1) \tilde{\rho}_{ss} + s \tilde{\rho}_{s-1, s-1} \right] \quad \text{A.III.13.b}$$

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss} \right)_{\text{décl}} = \frac{n_0}{T_{SR}} \left[(s+1) (\tilde{\rho}_{s+1, s+1}) - s (\tilde{\rho}_{ss} - \tilde{\rho}_{s-1, s-1}) \right] \quad \text{A.III.13.c}$$

en passant à la limite continue sur la variable s et en se souvenant qu'à t fixé, $\frac{d}{ds} \tilde{\rho}_{ss} \sim \frac{1}{s} \tilde{\rho}_{ss}$ (cf. figure II.3 et II.6), il vient

$$\left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss} \right)_{\text{spon}} \approx \frac{1}{T_{SR}} \frac{d}{ds} \left(s \tilde{\rho}_{ss} \right) = \frac{1}{T_{SR}} \left(\tilde{\rho}_{ss} + s \frac{d}{ds} \tilde{\rho}_{ss} \right)$$

$$\sim \frac{1}{T_{SR}} \tilde{\rho}_{ss} \quad \text{A.III.14.a}$$

$$\text{et } \left(\frac{d}{dt} \tilde{\rho}_{ss} \right)_{\text{décl}} \approx \frac{n_0}{T_{SR}} \frac{d}{ds} \left(s \frac{d}{ds} \tilde{\rho}_{ss} \right) = \frac{n_0}{T_{SR}} \left(\frac{d}{ds} \tilde{\rho}_{ss} + s \frac{d^2}{ds^2} \tilde{\rho}_{ss} \right)$$

$$\sim \frac{1}{T_{SR}} \frac{n_0}{s} \tilde{\rho}_{ss} \quad \text{A.III.14.b}$$

Au total, pour décrire l'évolution du système, il n'est nécessaire de tenir compte des termes de déclenchement qu'au début de l'évolution, tant que s reste plus petit ou de l'ordre de n_0 . En faisant le calcul, on s'aperçoit alors que l'état atteint à la fin de la période de démarrage à $t = t_1$ aurait été obtenu à l'instant

$$t = t_1 + T_{SR} \text{Log } n_0 \quad \text{A.III.15}$$

si le système avait démarré spontanément à température nulle.

La figure (A.III.2) illustre ce résultat. Nous avons représenté pour $s = 40$:

$\rho_{ss}(t)$ à la température T telle que $n_0 = 5$

(figure (A.III.2) trait plein)

et $\rho_{ss}(t - T_{SR} \text{Log } n_0)$ à température nulle

(figure (III.2) trait pointillé)

On voit nettement que ces deux courbes sont très voisines (en augmentant encore s pour avoir réellement $s \gg 5$, on aurait encore un meilleur accord). Pour comprendre la signification physique de ce résultat, il suffit de se souvenir (cf. chapitre II § III) que $\tilde{\rho}_{ss}(t)$ est proportionnel à la probabilité d'émission du $s^{\text{ème}}$ photon. On peut d'ailleurs vérifier, que lorsque s augmente, la forme de cette loi de probabilité tend vers une limite qui correspond à une translation près à l'histogramme du délai t_D donné sur la figure (II. 10) Ce résultat, qui résulte des calculs faits au chapitre II § III, peut se comprendre simplement en calculant l'intervalle de temps $\Delta t (s, N/2)$ séparant l'instant d'émission du $s^{\text{ème}}$ photon et l'instant t_D d'émission du $\frac{N}{2}$ photon. On a, en effet, à température nulle ($T = 0$) :

$$\langle \Delta t (s, s') \rangle \approx \sum_{s''=s}^{s'} \Gamma_{s''}^{-1} \tag{A.III.15}$$

alors que la dispersion sur $\Delta t (s > s')$ est de l'ordre de

$$\langle \Delta^2 t (s, s') \rangle - \langle \Delta t (s, s') \rangle^2 \approx \sum_{s''=0}^{s'} \Gamma_{s''}^{-2} \tag{A.III.16}$$

(dans (A.III.15) et (A.III.16) $\Gamma_{s''}$ représente la probabilité d'émission du $s''^{\text{ème}}$ photon :

$$\Gamma_{s''} = \frac{(s'' + 1) (N - s'')}{NT_{SR}} \tag{A.III.17}$$

Il est alors facile de vérifier à partir de (A.III.15, 16 et 17), que la dispersion sur $\Delta t (s, \frac{N}{2})$ est de l'ordre de T_{SR} / \sqrt{s} , et qu'elle est donc négligeable devant la largeur de la loi de probabilité $\tilde{\rho}_{ss}(t)$. La loi de distribution du délai t_D , se déduit alors simplement par une translation dans le

temps de $\langle \Delta t (s, \frac{N}{2}) \rangle \approx T_{SR} \text{Log} (\frac{N}{S})$ de la loi de distribution de l'instant d'émission du s^{e} photon.

Ce résultat, valide à température nulle ($T = 0$), peut être étendu pour $T \neq 0$ à condition que s soit très supérieur à s_0 , car, comme nous l'avons vu plus haut, les termes supplémentaires d'émission stimulée et d'absorption sont alors négligeables.

Au total, l'histogramme des délais des pulses superradiants peut se déduire par translation des courbes de la figure A.III.2 aussi bien à $T = 0$ qu'à $T \neq 0$. Comme les deux courbes de la figure A.III.2 ont même forme, l'histogramme des délais sera donc le même, et le champ thermique aura pour seul effet de diminuer le délai moyen de $T_{SR} \text{Log} \frac{KT}{h\nu}$ sans changer les fluctuations de ce délai autour de sa valeur moyenne.

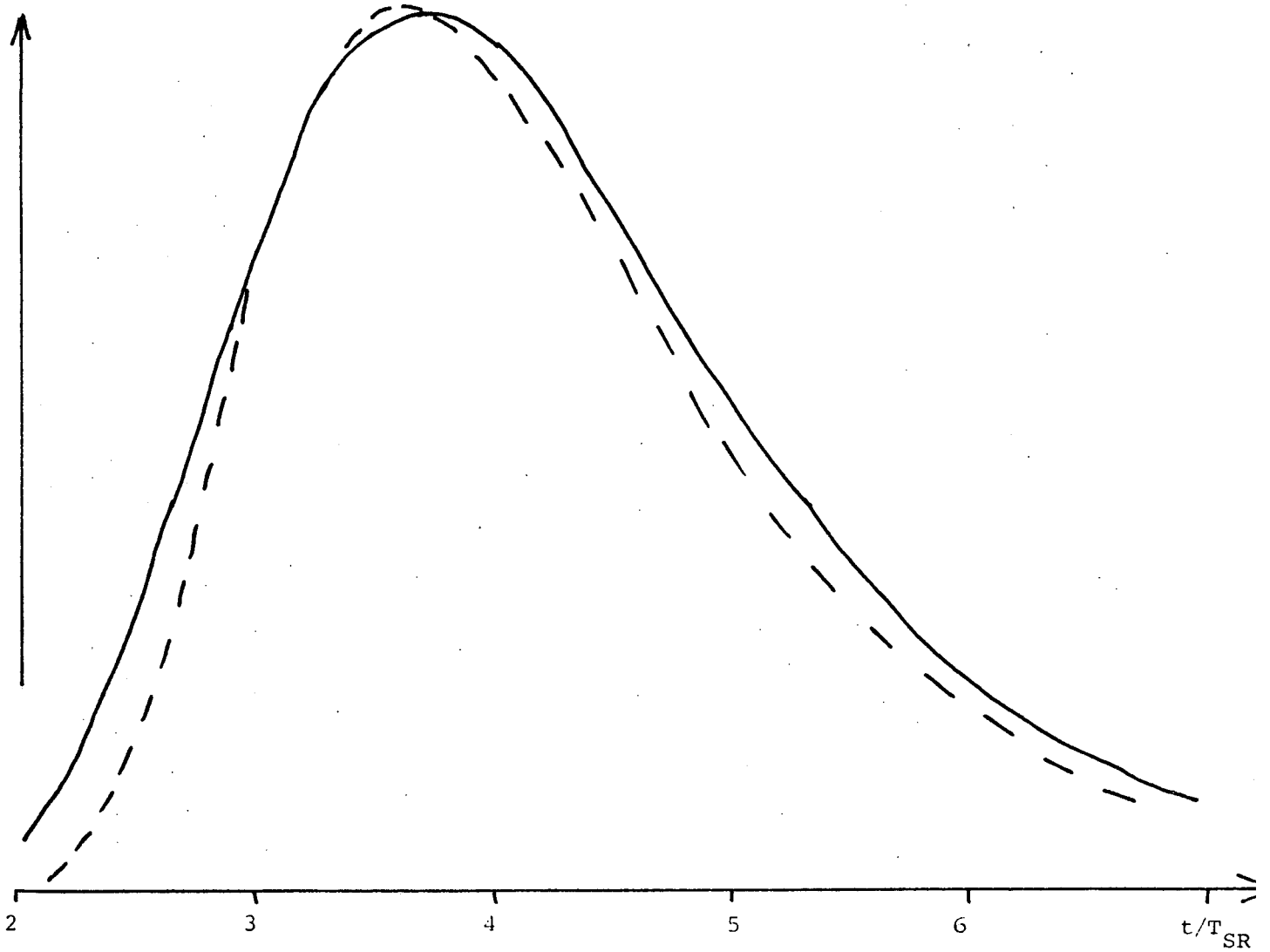


Figure A III-2

Allure de :

- a) $\rho_{SS}(t)$ avec $n_0=5$ ($T \neq 0$) en trait plein
- b) $\rho_{SS}(t - \text{Log } n_0)$ avec $n_0=0$ ($T=0$) en pointillé

On notera que les courbes a) et b) représentent à une homothétie translation près la loi de probabilité $P(t_D)$ d'observer le délai t_D (cf figure II 10).

- (¹) S. HAROCHE, J.A. PAISNER and A.L. SHALOW, Phys. Rev. Lett. 30 948 (1973) (voir également réf. 61)
- (²) R.H. Dicke, Quantum electronics ed Grivet and Bloembergen Vol. I (Columbia University Press N.Y. 1964)
- (³) G. BANFI and R. BONIFACIO, Phys. Rev. A12 1068 (1975)
- (⁴) E. RESSAYRE and A. TALLET, Phys. Rev. A18 2196 (1978)
- (⁵) F. HAAKE, H. KING, G. SCHRÖDER, J. HAUSS, R. GLAUBER
Phys. Rev. A20 2047 (1979)
(voir également) F. HAAKE, H. KING, G. SCHRÖDER, J. HAUSS,
R. GLAUBER and F. HOPF, Phys. Rev. Lett. 42 1740 (1979)
- (⁶) F.A. HOPF, Phys. Rev. A20 2064 (1979)
- (⁷) Q.H.F. VREHEN, H.M.J. HIKSPOORS, H.M. GIBBS
Phys. Rev. Lett. 38 764 (1974)
- (⁸) A. FLUSSBERG, T. MOSSBERG and S.R. HARTMANN
Phys. Lett. A58 373 (1976)
- (⁹) A. CRUBELLIER, S. LIBERMANN and P. PILLET
Phys. Rev. Lett. 41 1237 (1978)
- (¹⁰) F. GOUNAND, M. HUGON, R.P. FOURNIER and J. BERLANDE
J. Phys. B. 12 547 (1979)
- (¹¹) WE REHLER and J.H. EBERLY, Phys. Rev. A3 1735 (1971)
- (¹²) A. ICSEVGI and WE LAMB Jr, Phys. Rev. 185 517 (1969)
- (¹³) L. CASPERSON and A. YARIV, Phys. Rev. Lett. 26 293 (1971)
- (¹⁴) R. BONIFACIO and L.A. LUGIATO
a) Phys. Rev. A11 1507 (1975)
b) Phys. Rev. A12 587 (1975)
- (¹⁵) J.C. GILLIVRAY, M.S. FELD, Phys. Rev. A14 1169 (1976)
- (¹⁶) N.A. KURNITT, F.P. ABELLA, S.R. HARTMANN
Phys. Rev. Lett. 13 567 (1964)
- (¹⁷) R. JODOIN, MANDEL, Phys. Rev. A10 1898 (1974)
- (¹⁸) R.G. BREWER and R.L. SHOEMAKER, Phys. Rev. A6 2001 (1972)
- (¹⁹) N.W. CARLSON, D.J. JACKSON, A.L. SCHALOW, M. GROSS, S. HAROCHE
Opt. Comm. 32 350 (1980)
- (²⁰) M. GROSS, J.M. RAIMOND, S. HAROCHE, Phys. Rev. Lett. 40 1711 (1978)

- (21) Q.H.F. VREHEN, M.F.H. SCHUURMANN, Phys. Rev. Lett. 42 224 (1979)
- (22) M. GROSS, C. FABRE, P. GOY, S. HAROCHE, J.M. RAIMOND
Phys. Rev. Lett. 43 343 (1979)
- (23) R.H. DICKE, Phys. Rev. 93 99 (1954)
- (24) P. SCHWENDIMANN, Z Physik 265 267 (1973)
BONIFACIO PREPARATA, Phys. Rev. A2 336 (1970)
F. HAAKE et al., Z Physik 223 353 (1969)
V. DEGIORGIO, F. GHIEIMETTI, Phys. Rev. A4 2415 (1971)
C.R. STROUD, Jr. J.EBELY, W.L. LAMA, L. MANDEL
Phys. Rev. A5 1094 (1972)
GONCALVES et A. TALLET, Phys. Rev. A4 1319 (1971)
OLIVIER et A. TALLET, Phys. Rev. A7 1061 (1973)
E. RESSAYRE et A. TALLET, Phys. Rev. Lett. (1973)
V. ERNST and P. STEHLE, Phys. Rev. 176 1456 (1969)
G.I. PETERS and L. ALLAN, J. Phys. A4 238 (1971)
voir également réf. (35) (36) (37)
- (25) E. RESSAYRE et A. TALLET, Phys. Rev. A15 2410 (1977)
- (26) N.S. SKRIBANOWITZ, J.P. HERMANN, J.C. Mc. GILLIVRAY et M.S. FIELD
Phys. Rev. Lett. 30 309 (1973)
- (27) F. HOPF, MEYSTRE, LAUGHIN, Phys. Rev. A13 777 (1976)
- (28) K. IKEDA, Phys. Lett. 63A 248 (1977)
- (29) R. FRIEDBERG, S.R. HARTMANN, Phys. Rev. A10 1728 (1974)
- (30) M. GROSS, C. FABRE, P. PILLET, S. HAROCHE, Phys. Rev. Lett 36
1035 (1976)
- (31) Q.H.F. VREHEN, Proceedings of the Fourth International Conference
Rattach Egeen Springer Verlag Berlin Heidelberg New York 1979
- (32) L. MOI, C. FABRE, P. GOY, M. GROSS, S. HAROCHE, P. ENCRENAZ,
G. BEAUDIN and B. LAZAREFF, Opt. Comm. 33 47 (1980)
- (33) A. CRUBELLIER and M. SCHWEIGHOFER, Phys. Rev. A15 2430 (1977)
A. CRUBELLIER, Phys. Rev. A18 1797 (1978)
- (34) L. ALLAN, G.I. PETERS, Physics Letters 31A 95 (1970)
- (35) G.S. AGARWALL, Springer tracts in Modern Physics (vol. 70)
Springer Verlag 1974
voir également G.S. AGARWALL, Phys. Rev. 178 2025 (1969)
A2 2038 (1970)
A3 1783 (1971)
A4 1791 (1971)
A4 1778 (1971)
A7 1195 (1973)

- (36) T. ARECCHI et E. COURTENS, Phys. Rev. A2 1730 (1970)
- (37) BONIFACIO, KIM, SCULLY, Phys. Rev. 187 441 (1969)
- (38) R.W. ZWANZIG in Lectures in Theoretical Physics Vol. III
W.E. BRITTIN (ed) (John Wiley, New York) 1961, Physica 33 119 (1964)
voir aussi (35)
- (39) WIGNERT, WEISSKOPF (Zs. f. Phys. 63 54 (1930))
- (40) C. COHEN-TANNOUDJI (cours au Collège de France 1975) Paris
- (41) RESSAYRE et A. TALLET A12 1725 (1975) (Validité Markov)
- (42) D. FEIERTAG, A. SAHM, G. ZU PULITZ, Z Physik 255 93 (1972)
- (43) H. BUCKA, NATURWISSENSCHAFTEN 16 371 (1956), Z Physik 151 328 (1958)
- (44) S. REYNAUD, M. HIMBERT, J. DUPONT-ROC, H.H. STROKE ou
C. COHEN-TANNOUDJI, Phys. Rev. Lett. 42 756 (1979)
(voir également)
S. REYNAUD, M. HIMBERT, J. DUPONT-ROC ou C. COHEN-TANNOUDJI,
LASER SPECTROSCOPY IV ed H. WALTHER ou K.W. ROTHE
Springer Series in Optical Science 21
(Springer Verlag Berlin 1979)
- (46) W.E. LAMB Jr, Phys. Rev. 134A 1429 (1964) (voir également (12))
- (47) C.T. LEE, Phys. Rev. A12 575 (1975)
- (48) F. HAAKE, R. GLAUBER, Phys. Rev. A5 1457 (1972)
R. GLAUBER, F. HAAKE, Phys. Rev. A13 357 (1976)
- (49) BONIFACIO, SCHWENDIMANN, F. HAAKE, Phys. Rev. A4 302 (1971)
A4 854 (1971)
- (50) DEGIORGIO, Opt. Comm. 2 262 (1971)
- (51) F. BLOCH, Phys. Rev. 70 460 (1946)
- (52) R. SAUNDERS, S.S. HASSAN, R.K. BULLOUGH, J. Phys. A9 1725 (1976)
- (53) D.C. BURNHAM, R.Y. CHIAO, Phys. Rev. 188 667 (1969)
- (54) D. POLDER, M.F.H. SCHUURMANS, Q.H.F. VREHEN, Phys. Rev. A19
1192 (1979)
- (55) P. PILLET, Thèse de 3è cycle Université Paris VI (1977)
- (56) Q.H.F. VREHEN, A.N. ANDERSEN and J.J. de WEDUWE
(à paraître) voir également (31)
- (57) J.M. RAIMOND, Thèse de 3è cycle Université Paris VI (1979)

- (58) FRIEDBERG and S.R. HARTMANN, Phys. Lett. 40A 365 (1972)
- (59) M. GROSS, Thèse de 3è cycle Université Paris VI (1975)
- (60) T.W. HANSCH, Appl. Optics 11 895 (1972)
- (61) S. HAROCHE, M. GROSS, M.S. SILVERMANN, Phys. Rev. Lett. 33
1063 (1974)
- (62) D.R. BATES, A. DAMGAARD, Phil. Trans. Roy. Soc. A242 101 (1949)
(voir également GOUNAND, J. Phys. (Paris) 40 457 (1979))
- (63) C. BRECHIGNAC, P. CAHUZAC, J. Phys. Paris 40 L.123 (1979)
C. CAHUZAC, H. SONTAG, P.E. TOSCHEK, Opt. Comm. 31 37 (1979)
- (64) H.M. GIBBS, Q.H.F. VREHEN and H.M.J. HIKSPOORS
Phys. Rev. Lett. 39 547 (1977)
- (65) C. FABRE, Thèse d'Etat Université Paris VI (1980)
- (67) J. MAREK, J. Phys. B. 12 L.229 (1979)
- (68) A. CRUBELLIER, S. LIBERMANN, P. PILLET, Opt. Comm. (Mai 1980)
- (69) R. FRIEDBERG, S.R. HARTMANN, Phys. Lett. 37A 285 (1971)
Phys. Rev. A13 495 (1976)
Opt. Comm. 10 298 (1974)
Phys. Lett. 38A 227 (1972)
- (70) A. KASTLER, Appl. Optic 1 17 (1962)
- (71) PURCELL, Proceeding of the American Physical Society B.10
Phys. Rev. 69 681 (1946)
- (72) Jr. LAMB, Rev. Mod. Phys. 43 99 (1971)
- (73) P. GOY, C. FABRE, M. GROSS, S. HAROCHE, J. Phys. B. Lett. (1980)
à paraître
- (74) SHAHIN, Ph. D. Thesis (non publié)
- (75) R.E. ALSON, Phys. Rev. Lett. 43 126 (1979)
- (76) E. ARIMONDO, M. INGUSCIO and P. VIOLINO, Rev. Mod. Phys. 49 31 (1977)