



**HAL**  
open science

# Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique

Jean Dalibard

► **To cite this version:**

Jean Dalibard. Le rôle des fluctuations dans la dynamique d'un atome couplé au champ électromagnétique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1986. Français. NNT: . tel-00011856

**HAL Id: tel-00011856**

**<https://theses.hal.science/tel-00011856>**

Submitted on 9 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ DE PARIS

LABORATOIRE DE PHYSIQUE  
DE L'ÉCOLE NORMALE  
SUPÉRIEURE



THESE DE DOCTORAT D'ETAT  
ès Sciences Physiques

présentée à

l'Université Pierre et Marie Curie  
(Paris VI)

par

Jean DALIBARD

=====

pour obtenir

le grade de DOCTEUR - ES - SCIENCES

Sujet de la thèse : "LE ROLE DES FLUCTUATIONS DANS LA DYNAMIQUE  
D'UN ATOME COUPLE AU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE"

Soutenue le 26 Novembre 1986 devant le Jury :

MM. C.	COHEN-TANNOUJJI	)	Président
R.	BALIAN	)	
J.L.	BOBIN	)	
C.	BORDE	)	
J.	DUPONT-ROC	)	Examineurs
S.	HAROCHE	)	
H.	METCALF	)	
S.	STENHOLM	)	

THESE DE DOCTORAT D'ETAT

ès Sciences Physiques

présentée

à l'Université Pierre et Marie Curie

- Paris VI -

par Monsieur Jean DALIBARD

pour obtenir le grade de DOCTEUR ès SCIENCES

Sujet de la thèse :

LE ROLE DES FLUCTUATIONS DANS LA DYNAMIQUE D'UN ATOME

COUPLE AU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

soutenue le 26 Novembre 1986

devant le Jury composé de :

MM. C.	COHEN-TANNOUDJI	)	Président
R.	BALIAN	)	
J.L.	BOBIN	)	
C.	BORDE	)	
J.	DUPONT-ROC	)	Examineurs
S.	HAROCHE	)	
H.	METCALF	)	
S.	STENHOLM	)	

## REMERCIEMENTS

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure pendant la période 1982-1986. Je remercie Monsieur le Professeur Jean BROSEL et Monsieur Jacques DUPONT-ROC de m'y avoir accueilli, et fait bénéficier de conditions de recherche exceptionnelles.

Claude COHEN-TANNOUJJI a dirigé cette thèse avec une disponibilité permanente. Je veux lui exprimer ici ma profonde reconnaissance pour la richesse de l'enseignement et des conseils qu'il m'a prodigués depuis mon entrée dans la recherche. Qu'il sache combien son enthousiasme aussi bien que sa rigueur scientifique ont été essentiels pour moi tout au long de ces années.

Je dois également beaucoup à Alain ASPECT et Serge REYNAUD qui ont été pour moi des guides quotidiens depuis le début de cette thèse. Serge REYNAUD n'a ménagé ni son temps, ni sa peine, pour m'aider à résoudre les problèmes théoriques que j'ai pu rencontrer ; Alain ASPECT, qui m'avait initié aux joies de la physique expérimentale à l'Institut d'Optique, a manifesté un intérêt constant pour ce travail et il a eu un rôle essentiel lors de la réalisation de l'expérience décrite dans ce mémoire.

Cette expérience m'a également donné la chance de travailler avec Antoine HEIDMANN et Christophe SALOMON. Je veux qu'ils sachent combien collaborer avec eux m'a été profitable et agréable.

Je tiens aussi à remercier Harold METCALF de Stony Brook, et William D. PHILLIPS du N.B.S. Washington, dont l'hospitalité au cours des deux séjours que j'ai faits dans leur laboratoire restera pour moi un souvenir inoubliable.

Bien d'autres personnes m'ont aidé tout au long de ce travail de leurs observations et de leurs conseils. Qu'ils trouvent ici l'expression de ma gratitude.



Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Messieurs les Professeurs BOBIN, HAROCHE et STENHOLM et à Messieurs BALIAN et BORDE pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de faire partie du jury de soutenance.

La partie expérimentale de ce travail n'aurait pas pu être menée à bien sans l'aide efficace des différents ateliers de mécanique et d'électronique du Laboratoire de Physique de l'E.N.S. et du Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne. Je tiens à en remercier ici tous les membres, et tout particulièrement G. TRENEC qui a assuré la conception et le dessin du jet atomique et A. CLOUQUEUR qui s'est chargé de la conception de l'électronique. Je voudrais également dire à J. LAGADEC combien son aide lors du montage initial de l'expérience nous a été précieuse.

Je ne saurais terminer sans remercier très chaleureusement Mademoiselle GUILLAUME qui a assuré la frappe de ce mémoire avec une grande patience et une grande gentillesse, ainsi que Madame AUDOIN et Monsieur R. MANCEAU qui en ont assuré le tirage et la reliure.

TABLE DES MATIERES

-----

LE ROLE DES FLUCTUATIONS DANS LA DYNAMIQUE  
D'UN ATOME COUPLE AU CHAMP ELECTROMAGNETIQUE

\* \* \* \* \*

INTRODUCTION

PARTIE A - LA DYNAMIQUE ATOMIQUE INTERNE : FLUCTUATIONS DU  
VIDE ET REACTION DE RAYONNEMENT

- A0 - La dynamique d'un électron atomique :  
fluctuations du vide et réaction de  
rayonnement..... p. 9
- A1 - "Vacuum fluctuations and radiation reaction :  
identification of their respective contri-  
butions". J. Physique 43 (1982) 1617..... p. 13
- A2 - "Dynamics of a small system coupled to a  
reservoir : reservoir fluctuations and self  
reaction". J. Physique 45 (1984) 637..... p. 35

PARTIE B - LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE ATOMIQUE DANS  
UNE ONDE LUMINEUSE

- B0 - Le problème du mouvement atomique dans une  
onde lumineuse..... p. 57
- B1 - Etude d'un modèle de mouvement Brownien..... p. 61

- B2 - Thermalisation d'électrons libres dans  
le rayon du corps noir..... p. 81
- B3 - Mouvement d'un atome dans un champ  
incohérent..... p. 103
- B4 - Mouvement d'un atome dans un champ cohérent  
Article : "Atomic motion in laser light :  
connection between semi classical and quantum  
descriptions". J. Phys. B 18 (1985) 1661..... p. 129

PARTIE C - LES FORCES RADIATIVES ET LEUR APPLICATION  
AU REFROIDISSEMENT RADIATIF

- C0 - Les forces radiatives résonnantes..... p. 159
- C1 - La force radiative agissant sur un atome  
initialement au repos..... p. 161
- C2 - Fluctuations des forces radiatives..... p. 181
- C3 - Le refroidissement radiatif  
Article : "Cooling atoms with stimulated  
emission". Phy. Rev. Lett. (1986)..... p. 193
- Appendice 1 : "Potentialities of a new  $\sigma_+$  -  $\sigma_-$   
laser configuration for radiative  
cooling and trapping". J. Phys.  
B 17 (1984) 4577..... p. 221
- Appendice 2 : "Dressed atom approach to atomic  
motion in laser light : the dipole  
force revisited". J.O.S.A. B 2  
(1985) 1707..... p. 241

PARTIE D - LE PIEGEAGE RADIATIF

D0 - Le piégeage radiatif d'atomes neutres..... p. 261

D1 - Le piégeage par pression de radiation..... p. 263

D2 - Le piégeage par forces dipolaires..... p. 289

Appendice 1 : Proposals for stable optical traps  
for neutral atoms. Opt. Commun. 47  
(1983) 395..... p. 309

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

## INTRODUCTION

L'étude des processus d'interaction entre un atome et le champ électromagnétique est une préoccupation essentielle en physique atomique. Le but de ce travail est de présenter une approche "dynamique" de ce problème, en cherchant à décrire les différents processus radiatifs en termes de fluctuations des deux systèmes en interaction, l'atome et le champ. L'intérêt d'une telle approche réside principalement dans la nature des images physiques qu'elle fournit : la dynamique atomique dans un champ électromagnétique, aussi bien interne (mouvement des électrons dans le système du centre de masse) qu'externe (mouvement de translation du centre de masse), peut être décrite d'une manière très analogue à celle utilisée pour le mouvement Brownien, et des méthodes empruntées à la physique statistique, comme les équations de Heisenberg-Langevin, l'équation pilote ou la théorie de la réponse linéaire, peuvent alors être utilisées.

La recherche de telles images physiques, mettant en relief le rôle des fluctuations et de la dissipation dans l'interaction matière rayonnement, a été motivée par toute une classe d'expériences récentes, dans lesquelles ces fluctuations jouent précisément un rôle important : modification des corrections radiatives ou de l'émission spontanée pour un atome placé dans une cavité, étude de la fluorescence atomique induite par une onde laser intense, problème du mouvement atomique dans un faisceau lumineux... Pour ce dernier problème, qui sera étudié en détail au cours de ce travail, le rôle des fluctuations est crucial. Il est en effet apparu au cours des dernières années qu'on peut utiliser les forces exercées par le faisceau lumineux pour refroidir et piéger les atomes. Or, ce sont les fluctuations de ces forces qui déterminent la température minimale réalisable par refroidissement radiatif et qui limitent la durée du piégeage. Compte tenu des grandes perspectives ouvertes par ces techniques toutes récentes de refroidissement et de piégeage laser, il est donc essentiel d'avoir une bonne compréhension des processus de fluctuations et de dissipation en jeu.

Nous commencerons ce travail par l'étude des modifications de la dynamique interne de l'atome du fait de son couplage avec le champ de rayonnement, ce problème n'étant en fait qu'un cas particulier du problème plus général du couplage d'un petit système (l'atome) avec un grand réservoir (le champ). Deux classes de processus peuvent a priori être invoquées pour décrire cette interaction atome-réservoir. La première est la réaction de l'atome sur lui-même, via le réservoir : le mouvement de l'atome polarise le réservoir, et cette perturbation réagit en retour sur l'atome. Dans le cas où le réservoir est le champ électromagnétique, cette "self reaction" est souvent appelée *réaction de rayonnement*. La seconde classe de processus est liée aux fluctuations propres du réservoir, qui peuvent être d'origine quantique ou thermique. Si le réservoir est le champ électromagnétique dans son état fondamental, ces processus sont ceux liés aux *fluctuations du vide*. Plusieurs questions se posent alors naturellement, une fois identifiés ces deux types de processus. Peut-on les séparer de manière non ambiguë ? Si cette séparation est possible, contribuent-ils au même ordre ? Comment leur effet varie-t-il avec l'état du réservoir, sa température par exemple ?...

Dans la partie A, nous montrons qu'il est effectivement possible de séparer ces deux types de processus, pourvu que le couplage entre l'atome et le réservoir puisse être décrit perturbativement. La séparation que nous proposons est fondée sur l'étude des vitesses de variations des observables atomiques, sous l'effet du couplage atome-réservoir, dans le point de vue de Heisenberg. Elle est ensuite justifiée par des arguments liés à l'approche "mécanique statistique" pour ce problème : les déplacements des niveaux et les taux d'émission d'énergie par l'atome sont exprimés à l'aide de deux fonctions statistiques importantes définies pour l'atome et pour le réservoir, les fonctions de corrélation symétriques qui décrivent la dynamique des fluctuations et les susceptibilités linéaires qui décrivent la réponse de chaque système aux fluctuations de l'autre. Ces résultats sont alors appliqués à l'étude de la dynamique atomique interne dans le vide de rayonnement, et les contributions des *fluctuations du vide* et de la *réaction de rayonnement* sont clairement identifiées, la somme de ces deux contributions redonnant bien sûr les résultats connus de l'électrodynamique quantique.

Nous abordons ensuite dans la partie B l'étude de la dynamique externe dans un champ électromagnétique. Le problème est de déterminer l'équation du mouvement de l'atome, compte tenu du recul qui se produit lors de chaque processus d'absorption ou d'émission de photons. Ce problème est a priori plus compliqué que le précédent puisqu'il y a maintenant trois types de variables couplées : les variables externes qui nous intéressent, les variables internes dont l'état est changé lors de chaque processus d'absorption ou d'émission, et les variables du champ. Notre but dans cette partie B est d'éliminer les variables internes et les variables du champ pour obtenir une équation fermée, de type Fokker-Planck-Kramers, pour les variables externes. Cette équation, qui décrit l'évolution de la fonction de Wigner atomique, contient trois termes : la force radiative moyenne agissant sur un atome au repos, la force de friction, linéaire par rapport à la vitesse atomique, responsable du refroidissement radiatif, et un terme de diffusion décrivant l'échauffement de l'atome sous l'effet des fluctuations des forces radiatives. Nous montrons que chacun de ces termes peut être exprimé en fonction de valeurs moyennes à un ou deux temps de l'opérateur force radiative agissant sur l'atome, et nous relierons ces valeurs moyennes aux fonctions de corrélation et de susceptibilité décrivant les fluctuations et la réponse linéaire du système atomique.

Ces résultats sont très similaires à ceux obtenus pour le problème du mouvement Brownien d'une particule lourde ponctuelle dans un bain de particules légères. Cette ressemblance n'est bien sûr pas fortuite : le recul aléatoire de l'atome irradié par l'onde laser du fait des phénomènes d'émission spontanée provoque un effet très voisin de celui de la force de Langevin décrivant les chocs des particules légères sur la particule Brownienne. C'est pourquoi il nous a semblé intéressant de traiter également dans cette partie B ce problème du mouvement Brownien d'une particule sans degré de liberté interne. Ceci nous permet de "mettre en place" sur un exemple simple les méthodes de résolution qui seront reprises ensuite pour le problème du mouvement atomique dans une onde laser. Ceci nous permet également de discuter, toujours avec ces mêmes

méthodes, les problèmes de la thermalisation d'un électron libre et d'un atome à deux niveaux dans le rayonnement du corps noir.

La partie C est consacrée à une étude détaillée des propriétés des forces radiatives : valeur moyenne, fluctuations, dépendance en vitesse. Nous nous intéressons tout particulièrement au cas d'un atome à deux niveaux dans une onde monochromatique et au cas d'un atome  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$  dans deux ondes polarisées respectivement  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . L'étude simultanée de ces deux exemples nous permet de dégager une interprétation physique des différentes caractéristiques des forces radiatives, en termes de processus d'absorption et d'émission, spontanée ou stimulée, de photons par l'atome. Nous développons également l'approche "atome habillé en mouvement" qui nous permet de donner un éclairage nouveau sur les phénomènes apparaissant à haute intensité. Nous montrons comment cette approche permet de prévoir un refroidissement très efficace des atomes lorsqu'ils sont placés dans une onde stationnaire intense, et nous décrivons une expérience que nous avons réalisée, en collaboration avec A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, A. Heidmann et C. Salomon, pour mettre en évidence ce refroidissement.

La partie D enfin est consacrée à une discussion théorique concernant l'application des forces radiatives au piégeage d'atomes neutres. Suivant la nature de la force radiative utilisée, pression de radiation ou force dipolaire, les problèmes qui se posent pour la réalisation de ce piégeage sont de nature différente.

La force de pression de radiation, liée aux gradients de phase de l'onde laser, a une divergence nulle : la pression de radiation créée par une configuration quelconque de faisceaux lumineux ne peut donc pas à première vue confiner les atomes de manière stable. Toutefois, nous proposons dans la partie D une méthode nouvelle permettant de réaliser un piège dynamique stable. Elle consiste à superposer à une configuration laser qui piège par pression de radiation dans certaines directions et qui expulse dans les directions orthogonales, d'autres faisceaux laser qui amortissent la vitesse atomique dans les directions de fuite. En alternant dans



le temps les directions de piégeage et de fuite, on peut alors confiner les atomes de manière stable.

La force dipolaire, liée quant à elle aux gradients d'intensité de l'onde laser, attire les atomes dans la région de haute intensité lumineuse, pourvu que le désaccord fréquence laser-fréquence atomique soit négatif. Il est donc possible de réaliser un piège radiatif au point focal d'une telle onde laser. Mais le problème qui se pose alors est le chauffage des atomes piégés par l'onde lumineuse, ce chauffage étant dû aux fluctuations importantes des forces dipolaires. Nous proposons dans cette partie D deux solutions nouvelles pour refroidir les atomes piégés sans perturber la fonction de piégeage. L'énergie résiduelle des atomes dans le puits radiatif est, dans les deux cas, très petite devant la profondeur du puits, ce qui assure la stabilité du piégeage. Enfin, nous discutons quelques unes des perspectives qui s'ouvrent actuellement grâce au développement de ces techniques nouvelles de ralentissement, de refroidissement et de piégeage radiatif.

PARTIE A :

LA DYNAMIQUE ATOMIQUE INTERNE :

FLUCTUATIONS DU VIDE ET

REACTION DE RAYONNEMENT

LA DYNAMIQUE D'UN ELECTRON ATOMIQUE :  
FLUCTUATIONS DU VIDE ET REACTION DE RAYONNEMENT

Cette première partie A est consacrée à l'étude de la dynamique d'un électron atomique couplé au champ électromagnétique quantifié. Notre but est d'obtenir à partir de cette approche dynamique des images physiques simples pour divers processus radiatifs comme l'émission spontanée ou les corrections radiatives (déplacement de Lamb ou anomalie gyromagnétique de l'électron  $g - 2$ ).

Le point de départ du traitement proposé ici est très voisin de celui des théories quantiques du mouvement Brownien et de la réponse linéaire : chacun des deux systèmes en présence -électron et champ- fluctue et polarise l'autre système. De cette influence mutuelle, résultent les divers processus radiatifs mentionnés au dessus. Ce schéma d'interaction "fluctuations-polarisation" peut fonctionner suivant les deux "chemins" suivants :

(i) On peut d'une part considérer que le champ électromagnétique quantique fluctue -ce sont les *fluctuations du vide*- et fait vibrer l'électron atomique qui moyenne alors le potentiel Coulombien créé par le noyau, et qui voit ainsi ses propriétés modifiées. Une telle image a été proposée avec succès pour expliquer le déplacement de Lamb. Par contre elle ne permet pas de rendre compte du signe positif de l'anomalie gyromagnétique  $g - 2$  : toute vibration du spin électronique tend à réduire la composante de ce spin sur un axe donné et conduit ainsi à une valeur négative pour  $g - 2$ .

(ii) L'autre "chemin" possible consiste à partir du champ rayonné par l'électron en mouvement et à étudier la réaction de ce champ sur l'électron : c'est la *réaction de rayonnement*, qui est à la base des théories "source-field" dans lesquelles on essaie de rendre compte des divers processus radiatifs d'une manière semi-classique, c'est-à-dire sans prendre en compte la nature quantique du champ électromagnétique et de ses fluctuations.

Dans le chapitre A1, nous proposons une méthode pour déter-

miner sans ambiguïté les contributions respectives de ces deux mécanismes *fluctuations du vide* et *réaction de rayonnement*. et nous interprétons physiquement chacune des deux contributions. Notre calcul est fait à l'ordre le plus bas par rapport à la constante de structure fine et est limité à des électrons non relativistes. Notons bien sûr que nous retrouvons pour la somme des deux contributions cherchées les résultats habituels calculés par les méthodes standard de l'électrodynamique quantique. Dans le chapitre A2, nous étendons la séparation précédente au cas d'un petit système  $\mathcal{S}$  - généralisant l'électron- couplé à un grand réservoir  $\mathcal{R}$  - généralisant le champ-. Il s'agit alors d'identifier les termes dus aux fluctuations du réservoir qui polarisent le petit système et les termes dus à la self-réaction où le petit système interagit avec le champ qu'il a lui-même "rayonné" dans le réservoir. Nous verrons que la généralité d'un tel problème permet d'exprimer les résultats sous une forme très simple : tous les déplacements d'énergie -i.e. corrections radiatives- et les taux d'amortissement -i.e. taux d'émission spontanée- s'expriment à l'aide de deux types de grandeurs caractéristiques définies chacune pour  $\mathcal{S}$  et  $\mathcal{R}$  : fonctions de corrélation  $C_{\mathcal{R}}$  et  $C_{\mathcal{S}}$ , décrivant les fluctuations de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{S}$ , et fonctions de susceptibilité  $\chi_{\mathcal{R}}$  et  $\chi_{\mathcal{S}}$  décrivant la "polarisabilité" de  $\mathcal{R}$  et de  $\mathcal{S}$ . Les termes "fluctuations du réservoir" ont alors la structure suivante :

$$\text{termes dus aux fluctuations du réservoir} \Rightarrow f^{10n} (C_{\mathcal{R}}, \chi_{\mathcal{S}})$$

Conformément à ce qu'on pouvait attendre intuitivement, ils font intervenir la fonction,  $C_{\mathcal{R}}$  décrivant les fluctuations de  $\mathcal{R}$ , et la fonction  $\chi_{\mathcal{S}}$ , caractérisant la réponse de  $\mathcal{S}$  à ces fluctuations. Inversement, on trouve pour les termes de self-réaction

$$\text{termes dus à la self-réaction} \Rightarrow f^{10n} (\chi_{\mathcal{R}}, C_{\mathcal{S}})$$

ce qui correspond bien à à l'image du petit système  $\mathcal{S}$  fluctuant ( $C_{\mathcal{S}}$ ) et polarisant le réservoir ( $\chi_{\mathcal{R}}$ ). La séparation proposée au chapitre A1 et justifiée de cette manière par des arguments statistiques est enfin appliquée à deux cas particuliers importants : le cas d'un système quasi-classique couplé à un réservoir, et le pro-

blème de l'émission spontanée d'un grand moment cinétique, modèle de Dicke pour la superradiance.

*De nombreuses références aux divers travaux publiés sur les problèmes envisagés dans cette partie A sont donnés dans les deux chapitres A1 et A2 suivants.*

*J. Physique* 43 (1982) 1617-1638

## Vacuum fluctuations and radiation reaction : identification of their respective contributions

J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen-Tannoudji

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure, et Collège de France  
24, rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

(Reçu le 8 juin 1982, accepté le 5 juillet 1982)

**Résumé.** — Il semble généralement admis qu'il existe, en théorie quantique du rayonnement, une indétermination dans la séparation des effets respectifs des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement. Nous montrons ici que cette indétermination est levée si l'on impose aux vitesses de variation correspondantes d'être hermitiques (condition nécessaire pour qu'elles soient interprétables physiquement). Cette procédure est généralisée au cas d'un petit système  $S$  interagissant avec un grand réservoir  $R$ , et permet de séparer deux types de processus physiques, ceux où  $R$  fluctue et polarise  $S$  (effets des fluctuations du réservoir), ceux où c'est  $S$  qui polarise  $R$  (effets de la réaction de  $R$  sur  $S$ ). Nous appliquons cette procédure au cas d'un électron atomique interagissant avec le champ de rayonnement et identifions ainsi les contributions des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement aux corrections radiatives et à l'émission spontanée. L'analyse des résultats obtenus nous permet de préciser les images physiques qui doivent être associées aux divers processus radiatifs.

**Abstract.** — It is generally considered that there exists in quantum radiation theory an indetermination in the separation of the respective effects of vacuum fluctuations and radiation reaction. We show in this paper that such an indetermination can be removed by imposing to the corresponding rates of variation to be Hermitian (this is necessary if we want them to have a physical meaning). Such a procedure is generalized to the case of a small system  $S$  interacting with a large reservoir  $R$  and allows the separation of two types of physical processes, those where  $R$  fluctuates and polarizes  $S$  (effects of reservoir fluctuations), those where it is  $S$  which polarizes  $R$  (effects of self reaction). We apply this procedure to an atomic electron interacting with the radiation field and we then identify the contribution of vacuum fluctuations and self reaction to radiative corrections and spontaneous emission of radiation. The analysis of the results obtained in this way allows us to specify the physical pictures which must be associated with the various radiative processes.

**1. Introduction.** — Understanding the physical mechanisms responsible for spontaneous emission of radiation by an excited atom, or for radiative corrections such as radiative line shifts, electron's self energy or magnetic moment... is a very stimulating problem which has received a lot of attention [1, 2].

The quantitative results for these corrections are of course well established. The physical interpretations remain however more controversial. Two extreme points of view have been investigated. In the first one, the interaction of the electron with the quantum fluctuations of the vacuum field, the so-called « vacuum fluctuations », is considered as playing the central role. One tries to interpret spontaneous emission as an emission « triggered » by vacuum fluctuations. The most famous example of such an approach is the interpretation of the Lamb shift as being due to

the averaging of the Coulomb potential of the nucleus by the electron vibrating in vacuum fluctuations [3]. One must not forget however that such a picture leads to the wrong sign for the electron's spin anomaly  $g - 2$ : the vibration of the electron's spin in vacuum fluctuations does not increase the effective magnetic moment but reduces it [3, 4]. In the second point of view, the basic physical mechanism is identified as the interaction of the electron with its own field, the so called « radiation reaction » although it would be proper to call it the electromagnetic self interaction since it includes the interaction of the electron with its Coulomb field as well as with its radiation field [5-8]. We will use in the following the shorter denomination « self reaction » for this process. In such an approach, one tries to interpret Q.E.D. radiative corrections along the same lines as the radiative damping and

the radiative shift of an oscillating classical dipole moment. We should note however that the vacuum field cannot be completely forgotten in the interpretation of finer details of spontaneous emission, such as fluorescence spectrum or intensity correlations, which are related to higher order correlation functions [9, 10].

Actually, it is now generally accepted that vacuum fluctuations and self reaction are « two sides of the same quantum mechanical coin » [11], and that their respective contributions to each physical process cannot be unambiguously determined [11-14]. Such an opinion is based on the following analysis, carried out in the Heisenberg picture which provides a very convenient theoretical framework since it leads, for the relevant dynamical variables, to equations of motion very similar to the corresponding classical ones. The calculations [11-14] can be summarized by the general scheme of figure 1.

Heisenberg's equations of motion for field and atomic variables are derived from the Hamiltonian of the combined atom + field system. The equation for the field looks like the equation of motion of an harmonic oscillator driven by an atomic source term and is readily integrated. This leads to an expression for the total field  $E$  which is a sum of two terms :

$$E = E_f + E_s. \quad (1.1)$$

The « free field »  $E_f$  corresponds to the solution of the homogeneous field equation (without atomic source term), and coincides with the « vacuum field » when no photons are initially present. The « source field »  $E_s$  is the field generated by the atomic source (solution of the inhomogeneous field equation). Consider now the atomic equation. The rate of variation,  $dG(t)/dt$ , of a given atomic observable  $G(t)$  appears to be proportional to the product of atomic and field operators,  $N(t)$  and  $E(t)$ , taken at the same time :

$$\frac{dG(t)}{dt} \sim N(t) E(t). \quad (1.2)$$

The final step of the calculation consists in inserting in (1.2) the solution (1.1) obtained for  $E(t)$ , which

leads to a dynamical equation for the atomic system (Fig. 1). The contributions of  $E_f$  and  $E_s$  to  $dG/dt$  can be interpreted as rates of variation :

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{vf} \sim N(t) E_f(t) \quad (1.3a)$$

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{sr} \sim N(t) E_s(t) \quad (1.3b)$$

respectively due to vacuum fluctuations and self reaction. This interpretation directly follows from the physical origin of  $E_f$  and  $E_s$ . The ambiguity mentioned above for this separation comes from the fact that the two atomic and field operators  $N(t)$  and  $E(t)$  appearing in (1.2) commute [they commute at the initial time  $t = t_0$ , when they act in different spaces, and the Hamiltonian evolution between  $t_0$  and  $t$  preserves this commutation]. They can therefore be taken in any order,  $N(t) E(t)$  as in (1.2), or  $E(t) N(t)$ . However,  $E_f(t)$  and  $E_s(t)$  do not commute separately with  $N(t)$ , as their sum does. Consequently,  $N(t) E_f(t)$  and  $E_f(t) N(t)$  generally differ. The two rates of variation (1.3a) and (1.3b) therefore depend on the initial order between the two commuting operators  $N(t)$  and  $E(t)$ , the total rate (1.2) being of course independent of this order. In particular, if the normal order has been chosen in (1.2) [with all field annihilation operators at right, all field creation operators at left], the contribution of vacuum fluctuations vanishes when the average is taken over the vacuum state of the field, and all radiative corrections appear to come from self reaction. Different orders taken in (1.2) would lead to different conclusions. Thus, it seems that the relative contributions of vacuum fluctuations and self reaction cannot be unambiguously identified.

MOTIVATIONS OF THIS PAPER. — In this paper, we would like to present some arguments supporting the choice of a particular order in (1.2) leading, in our opinion, to a physically well defined separation between the contributions of vacuum fluctuations and self reaction. We don't question of course the mathematical equivalence of all possible initial orders in (1.2). Our argument rather concerns the physical interpretation of the two rates of variation appearing when (1.1) is inserted in (1.2). If  $G$  is an atomic observable (Hermitian operator), the two rates of variation contributing to  $\frac{d}{dt} G(t)$ , which is also Hermitian, must be separately Hermitian, if we want them to have a physical meaning. Furthermore, the field and atomic operators appearing in the different rates of variation must also be Hermitian if we want to be able to analyse these rates in terms of well defined physical quantities. We show in this paper that these hermiticity requirements restrict the possible initial orders in (1.2) to only one, the completely symmetrical order.

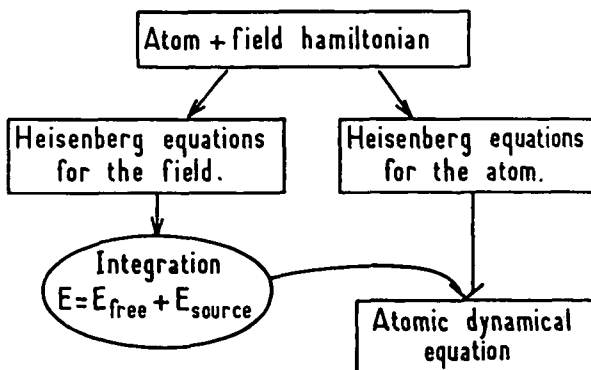


Fig. 1. — Principle of the derivation of the atomic dynamical equation.

A second motivation of this paper is to point out that, with such a symmetrical order, a clear connection can be made with a statistical mechanics point of view which appears to be in complete agreement with the usual physical pictures associated with vacuum fluctuations and self reaction. For example, the radiative corrections can be expressed as products of correlation functions by linear susceptibilities. For the vacuum fluctuations part of these corrections, one gets the correlation function of the field multiplied by the linear susceptibility of the atom, which supports the picture of a fluctuating vacuum field polarizing the atomic system and interacting with this induced polarization, whereas for the self reaction part, the reverse result is obtained : product of the correlation function of the atomic system by the linear « susceptibility » of the field which corresponds to the picture of a fluctuating dipole moment « polarizing » the field, i.e. producing a field, and interacting with this field.

**ORGANIZATION OF THE PAPER.** — In section 2 we introduce our notations and the basic concepts (vacuum field, source field, radiation reaction...) by applying the general theoretical scheme of figure 1 to the derivation of the quantum generalization of the Abraham-Lorentz equation [17] describing the dynamics of an atomic electron interacting with a static potential and with the quantized radiation field. We discuss the physical content of this equation and the difficulties associated with the quantum nature of field variables. We explain also why it is necessary to extend the calculations of section 2 (dealing with the position  $\mathbf{r}$  and the momentum  $\mathbf{p}$  of the electron) to more general atomic observables  $G$ .

The calculation of  $dG/dt$ , which is presented in section 3, raises the problem of the order between commuting observables, mentioned above in connection with equation (1.2) (such a difficulty does not appear for  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ ). We show how it is possible, by the physical considerations mentioned above, to single out the completely symmetrical order in (1.2). We then extend in section 4 the discussion to the more general case of a « small system »  $\mathcal{S}$  (playing the role of the atomic system) interacting with a « large reservoir »  $\mathcal{R}$  (playing the role of the electromagnetic field with its infinite number of degrees of freedom). The advantage of such a generalization is to provide a deeper insight in the problem. We point out in particular that the expressions giving  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{vf} \right\rangle$

and  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle$ , averaged in the vacuum state of the

field and calculated to the first order in the fine structure constant  $\alpha$ , can be expressed in terms of simple statistical functions of the two interacting systems (correlation functions and linear susceptibilities). We discuss the mathematical structure of these expressions and their physical content.

Finally, the general results of sections 3 and 4 are applied in section 5 to the physical discussion of the relative contributions of vacuum fluctuations and self reaction to the dynamics of an atomic electron. Two types of effects are considered : the shift of atomic energy levels, described by the Hamiltonian part of  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{vf} \right\rangle$  and  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle$ , and the dissipative effects associated with the exchange of energy between the electron and the radiation field.

**2. The quantum form of the Abraham-Lorentz equation.** — A few basic concepts are introduced in this section, by considering a very simple system formed by an electron bound near the origin by an external potential and interacting with the electromagnetic field.

We first introduce the Hamiltonian of the combined system « bound electron + electromagnetic field » (§ 2.1). We then establish, in the Heisenberg representation, the quantum dynamical equation for the electron (§ 2.2). This equation appears to be very similar to the corresponding classical one, known as the Abraham-Lorentz equation. This close analogy is however misleading and we will try to explain the difficulties hidden in the quantum equation (§ 2.3).

**2.1 BASIC HAMILTONIAN IN COULOMB GAUGE.** —

**2.1.1 Field variables.** — The electric field is divided into two parts : the longitudinal field  $\mathbf{E}_{\parallel}$  and the transverse field  $\mathbf{E}_{\perp}$ . The longitudinal field at point  $\mathbf{R}$  is the instantaneous Coulomb field created by the electron at this point. It is expressed as a function of the electron position operator  $\mathbf{r}$ .

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{R}) = -\nabla_{\mathbf{R}} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 |\mathbf{R} - \mathbf{r}|}. \quad (2.1)$$

The transverse field  $\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{R})$ , the vector potential  $\mathbf{A}(\mathbf{R})$  and the magnetic field  $\mathbf{B}(\mathbf{R})$  are expanded in a set of transverse plane waves, normalized in a cube of volume  $L^3$  :

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} (\mathcal{E}_{\mathbf{k}} \epsilon \epsilon^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}) a_{\mathbf{k}\epsilon} + hc \quad (2.2a)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} (\mathcal{A}_{\mathbf{k}} \epsilon \epsilon^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}) a_{\mathbf{k}\epsilon} + hc \quad (2.2b)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} (\mathcal{B}_{\mathbf{k}} \boldsymbol{\kappa} \times \epsilon \epsilon^{i\mathbf{k}\mathbf{R}}) a_{\mathbf{k}\epsilon} + hc \quad (2.2c)$$

with :

$$\mathcal{E}_{\mathbf{k}} = i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}}, \quad \mathcal{A}_{\mathbf{k}} = \sqrt{\frac{\hbar}{2\epsilon_0 L^3 \omega}}, \quad \mathcal{B}_{\mathbf{k}} = i \frac{\omega \cdot \boldsymbol{\kappa}}{c}, \quad (2.3)$$

$$\boldsymbol{\kappa} = \frac{\mathbf{k}}{k} \quad (2.4)$$



$a_{\mathbf{k}\epsilon}$  and  $a_{\mathbf{k}\epsilon}^+$  are the annihilation and creation operators for a photon with wave vector  $\mathbf{k}$  and polarization  $\epsilon$ . The summation concerns all the wave vectors  $\mathbf{k}$  with components multiple of  $2\pi/L$  and, for a given  $\mathbf{k}$ , two transverse orthogonal polarizations  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$ .

In classical theory, expansions similar to (2.2) can be written, the operators  $a_{\mathbf{k}\epsilon}$  and  $a_{\mathbf{k}\epsilon}^+$  being replaced by  $c$ -numbers  $\alpha_{\mathbf{k}\epsilon}(t)$  and  $\alpha_{\mathbf{k}\epsilon}^+(t)$  which are actually « normal » variables for the field.

In order to calculate the energy of the Coulomb field of the particle, it is also convenient to take the Fourier transform of the longitudinal field (2.1) (for a given value of  $\mathbf{r}$ ):

$$\mathbf{E}_{\parallel}(\mathbf{R}) = \sum_{\mathbf{k}} -i \frac{e}{2 \epsilon_0 L^3 k} \kappa e^{i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{r})} + hc. \quad (2.5)$$

2.1.2 *Electron variables.* — The electron motion is described by the position operator  $\mathbf{r}$  and the conjugate momentum  $\mathbf{p}$ :

$$\mathbf{p} = \frac{\hbar}{i} \nabla_{\mathbf{r}}. \quad (2.6)$$

The velocity operator,  $\mathbf{v}$ , is given by:

$$m\mathbf{v} = \mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}) \quad (2.7)$$

where  $m$  is the electron mass. Note that  $\mathbf{v}$  is not an electronic operator since it includes field variables through  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ . The electron is bound near the origin by an external static potential  $V_0(\mathbf{R})$ . If spin is taken into account, the electron variables are supplemented by the spin operator  $\mathbf{S}$ . Magnetic and spin effects will be briefly discussed in § 5.2.5. They are neglected elsewhere.

2.1.3 *The Hamiltonian.* — In the non relativistic approximation, the Hamiltonian is the sum of five terms: the rest mass energy of the electron, its kinetic energy, its potential energy in  $V_0(\mathbf{R})$ , the energy of the longitudinal field and the energy of the transverse fields:

$$\begin{aligned} H = mc^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{r}))^2 + \\ + V_0(\mathbf{r}) + \frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 R \mathbf{E}_{\parallel}^2(\mathbf{R}) \\ + \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \frac{\hbar\omega}{2} (a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} + a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^+). \quad (2.8) \end{aligned}$$

The energy of the longitudinal field appears to be a constant, representing the energy of the electrostatic field associated with the charge. This constant can be written as

$$\frac{\epsilon_0}{2} \int d^3 R \mathbf{E}_{\parallel}^2(\mathbf{R}) = \delta m_1 c^2 \quad (2.9)$$

$\delta m_1$  can be considered as a correction to the mechanical rest mass  $m$  of the electron. The same correction appears in classical theory.

2.1.4 *Introduction of a cut-off.* — It is well known that divergences appear in the computation of various physical quantities (such as energy, momentum...) associated with a charged point particle interacting with the electromagnetic field. These divergences are due to the contribution of the modes with large wave vectors. In order to deal with finite expressions, we will consider only the coupling of the electron with modes  $\mathbf{k}$  such that

$$|\mathbf{k}| < k_M. \quad (2.10)$$

This cut-off  $k_M$  is chosen not too large so that the non relativistic approximation is correct for all the modes which are taken into account ( $\hbar\omega_M \ll mc^2$  with  $\omega_M = ck_M$ ). On the other hand,  $\omega_M$  must be large compared to the characteristic resonance frequencies  $\omega_0$  of the bound electron. This gives two bounds for  $k_M$ :

$$\frac{\omega_0}{c} \ll k_M \ll \frac{mc}{\hbar}. \quad (2.11)$$

It is well known that theories using such a cut-off are no longer relativistic invariant [15]. The modes selected by condition (2.10) are not the same in two different reference frames, because of the Doppler effect. It is possible to restore relativistic invariance, by using some more sophisticated cut-off procedures [16]. However, we are not concerned here with the relativistic aspects of radiative problems and we will ignore these difficulties. To summarize, all the sums over  $\mathbf{k}$  appearing here after must be understood as limited by condition (2.10). The same restriction also applies to the expansion (2.5) of the longitudinal field. The energy of the longitudinal field is then finite and equal to

$$\delta m_1 c^2 = \sum_{\mathbf{k}} \frac{e^2}{2 \epsilon_0 L^3 k^2} = \frac{e^2 k_M}{4 \pi^2 \epsilon_0} \quad (2.12)$$

which can be written as  $\frac{\alpha}{\pi} \hbar\omega_M$ , where  $\alpha$  is the fine structure constant.

2.1.5 *Electric dipole approximation.* — We also suppose in this paper that the binding potential localizes the electron in a volume centred on the origin, with a linear dimension  $a$  much smaller than the wave-length of the modes interacting with the particle. (The cut-off  $k_M$  introduced above is supposed to satisfy  $k_M a \ll 1$ .) Such an assumption which is justified for an atomic electron, allows us to neglect the spatial variation of the fields interacting with the electron. We will then replace the fields at the electron position  $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{r})$  by the fields at the origin  $\mathbf{E}(\mathbf{0})$ ,  $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ .

The electric dipole approximation is not essential for the derivation of the results presented in this paper. But the calculations are much simpler and the physical conclusions remain unchanged <sup>(1)</sup>.

<sup>(1)</sup> Corrections to the electric dipole approximation are of higher order in  $1/c$ . They have to be considered when relativistic corrections are included in the Hamiltonian (see for example [4]).

To summarize the previous discussion, we will use hereafter the following Hamiltonian :

$$H_{ED} = (m + \delta m_1) c^2 + \frac{1}{2m} (\mathbf{p} - e\mathbf{A}(\mathbf{0}))^2 + V_0(\mathbf{r}) + \sum_{\substack{\mathbf{k}\epsilon \\ |\mathbf{k}| < k_M}} \frac{\hbar\omega}{2} (a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} + a_{\mathbf{k}\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon}^+) \quad (2.13)$$

with

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\epsilon \\ |\mathbf{k}| < k_M}} \mathcal{A}_k \boldsymbol{\epsilon} a_{\mathbf{k}\epsilon} + hc. \quad (2.14)$$

2.2 DYNAMICS OF THE ELECTRON INTERACTING WITH THE ELECTROMAGNETIC FIELD. — 2.2.1 *Principle of the calculation.* — The rate of variation of electron and field variables can be determined from the Hamiltonian (2.13). The corresponding two sets of equations are of course coupled; the field evolution depends on the charge motion and, conversely, the electron experiences a force due to the field.

The derivation of a dynamical equation for the

electron from these two sets of coupled equations is well known [8, 13, 14] and follows the general scheme of figure 1. One first integrates the field equations in presence of the particle. The solution obtained for the field is then inserted in the electron equation. This leads to a quantum dynamical equation describing the motion of the electron interacting with the free field as well as with its own field.

2.2.2 *The electromagnetic field in presence of the particle.* — Since all field operators are expressed in terms of  $a_{\mathbf{k}\epsilon}$  and  $a_{\mathbf{k}\epsilon}^+$ , we start with the Heisenberg equation for  $a_{\mathbf{k}\epsilon}(t)$  :

$$\dot{a}_{\mathbf{k}\epsilon}(t) = \frac{i}{\hbar} [H(t), a_{\mathbf{k}\epsilon}(t)] = -i\omega a_{\mathbf{k}\epsilon}(t) + \frac{ie}{m\hbar} \mathcal{A}_k \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\pi}(t) \quad (2.15)$$

where

$$\boldsymbol{\pi}(t) = m\mathbf{v}(t) = \mathbf{p}(t) - e\mathbf{A}(\mathbf{0}, t). \quad (2.16)$$

Equation (2.15) is then formally integrated and gives :

$$a_{\mathbf{k}\epsilon}(t) = a_{\mathbf{k}\epsilon}(t_0) e^{-i\omega(t-t_0)} + \frac{ie}{m\hbar} \mathcal{A}_k \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \boldsymbol{\epsilon}^* \cdot \boldsymbol{\pi}(t'). \quad (2.17)$$

The evolution of  $a_{\mathbf{k}\epsilon}(t)$  appears to be the superposition of a free evolution [first term of (2.17)] and a « forced » evolution driven by the motion of the charge [second term of (2.17)]. We finally insert (2.17) in the expansions (2.2) of the transverse field. The contributions of the two terms of (2.17) correspond respectively to the free fields ( $\mathbf{A}_f, \mathbf{E}_{\perp f}$ ) and to the source fields ( $\mathbf{A}_s, \mathbf{E}_{\perp s}$ ). Actually, we need only for the following to know the fields for  $\mathbf{R} = \mathbf{0}$  (because of the electric dipole approximation). From (2.2) and (2.17), one easily derives (see appendix A for the details of the calculation) :

$$\mathbf{A}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{A}_f(\mathbf{0}, t) + \mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t) \quad (2.18)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_f(\mathbf{0}, t) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} (\mathcal{A}_k \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\omega(t-t_0)}) a_{\mathbf{k}\epsilon}(t_0) + hc \end{array} \right. \quad (2.19a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t) = \frac{4}{3} \frac{\delta m_1}{me} \boldsymbol{\pi}(t) - \frac{2}{3} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \dot{\boldsymbol{\pi}}(t) \end{array} \right. \quad (2.19b)$$

similarly

$$\mathbf{E}_{\perp}(\mathbf{0}, t) = \mathbf{E}_{\perp f}(\mathbf{0}, t) + \mathbf{E}_{\perp s}(\mathbf{0}, t) \quad (2.20)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\perp f}(\mathbf{0}, t) = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} (\boldsymbol{\epsilon}_k \boldsymbol{\epsilon} e^{-i\omega(t-t_0)}) a_{\mathbf{k}\epsilon}(t_0) + hc \end{array} \right. \quad (2.21a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{E}_{\perp s}(\mathbf{0}, t) = -\frac{4}{3} \frac{\delta m_1}{me} \dot{\boldsymbol{\pi}}(t) + \frac{2}{3} \frac{e}{4\pi\epsilon_0 mc^3} \ddot{\boldsymbol{\pi}}(t). \end{array} \right. \quad (2.21b)$$

2.2.3 *The quantum Abraham-Lorentz equation.* — The Heisenberg equations for the electron operators  $\mathbf{r}$  and  $\boldsymbol{\pi}$  are

$$m\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{im}{\hbar} [H, \mathbf{r}] = \boldsymbol{\pi}(t) \quad (2.22)$$

$$\dot{\boldsymbol{\pi}}(t) = \frac{i}{\hbar} [H, \boldsymbol{\pi}] = -\nabla V_0(\mathbf{r}) + e\mathbf{E}_\perp(\mathbf{0}, t) + \frac{e}{2m} (\boldsymbol{\pi} \times \mathbf{B}(\mathbf{0}, t) - \mathbf{B}(\mathbf{0}, t) \times \boldsymbol{\pi}). \quad (2.23)$$

The last term of the right member of equation (2.23) is smaller than the second one by a factor  $v/c$  [see Eq. (2.3)]. It will be neglected hereafter. On the other hand, we notice that  $\mathbf{E}_\perp(\mathbf{0}, t)$  is not multiplied by any electronic operator so that the problem of order raised in the introduction does not appear here. Replacing in (2.23) the total transverse electric field by the sum (2.20) of the free field and the source field and using (2.22) to eliminate  $\boldsymbol{\pi}$ , one gets :

$$\begin{aligned} m\ddot{\mathbf{r}}(t) &= -\nabla V_0(\mathbf{r}) + e\mathbf{E}_{\perp s}(\mathbf{0}, t) + e\mathbf{E}_{\perp f}(\mathbf{0}, t) \\ &= -\nabla V_0(\mathbf{r}) - \frac{4}{3} \delta m_1 \ddot{\mathbf{r}}(t) + \frac{2}{3} \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 c^3} \ddot{\mathbf{r}}(t) + e\mathbf{E}_{\perp f}(\mathbf{0}, t). \end{aligned} \quad (2.24)$$

This equation is very similar to the classical Abraham-Lorentz equation [17]. This is not surprising since the classical Hamiltonian is similar to (2.13). The general scheme of figure 1 is valid for both quantum and classical theories, and the Hamilton-Jacobi equations have the same structure as the quantum Heisenberg ones. Since there is no problem of order, the physical interpretation of this equation is clear. Apart from the external potential  $V_0(\mathbf{r})$ , two fields act on the electron : its own field and the free field. The coupling of the electron with its own field is described by two terms : the first one, proportional to  $\ddot{\mathbf{r}}$ , correspond to a mass renormalization from  $m$  to  $m + \frac{4}{3} \delta m_1$  <sup>(2)</sup>. The second one proportional to  $\ddot{\mathbf{r}}$ , is the quantum analogue of the force which produces the radiative damping of the classical particle. The last term of (2.24) describes the coupling of the electron with the free field, i.e. the field which would exist if the particle was not there. This free field may include an incident radiation field. Classically, the description of the electron free motion is obtained by taking  $\mathbf{E}_{\perp f}(\mathbf{0}, t) = 0$ . In quantum mechanics on the contrary,  $\mathbf{E}_{\perp f}$  is an operator. Although its average value can be zero (in the vacuum state for example), its quadratic average value is always strictly positive. The modifications of the electron dynamics originating from this term correspond to the effect of vacuum fluctuations.

To summarize, it is possible to derive a quantum form of the Abraham-Lorentz equation. The self reaction terms appear in a natural and unambiguous way and are formally identical in quantum and classical theories. In the quantum equation, the term describing the interaction of the particle with

the free field operator cannot be considered as a  $c$ -number equal to zero in the vacuum. We discuss now some consequences of the quantum nature of this last term.

2.3 THE DIFFICULTIES OF THE QUANTUM DYNAMICAL EQUATION. — In its traditional form, the classical Abraham-Lorentz equation suffers from a well known defect : the existence of preacceleration and self accelerated solutions. The discussion of the same problem in quantum theory is undoubtedly interesting [18]. We prefer here to focus on some more fundamental difficulties inherent in the quantum formalism and which are hidden behind the formal analogy between the classical and the quantum dynamical equations.

First, it is worth noting that equation (2.24) relates non commuting operators. This of course complicates the resolution of the equation, but is unavoidable in a quantum theory of the electron dynamics.

Another difficulty lies in the fact that such an equation includes both particle and field operators, respectively  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{E}_r$ . This problem does not appear in the classical treatment where the free field, taken equal to zero, does not contribute to the Abraham-Lorentz equation. In quantum mechanics,  $\mathbf{E}_r$  cannot be cancelled in the same way : physically, this means that the electron cannot escape the vacuum fluctuations. To estimate the two contributions of vacuum fluctuations and self reaction, we then have to integrate the quantum Abraham-Lorentz equation with a source term ; this introduces further complications. To avoid this problem, one may try to deal only with electron operators averaged over the state of the field. Suppose that the radiation field is in the vacuum state at the initial time  $t_0$  : Let  $\langle S(t) \rangle_R$  be the average in this radiation state of the particle operator  $S(t)$ .  $\langle S(t) \rangle_R$  is still an operator, acting

<sup>(2)</sup> As in classical theory, the fact that the mass correction in the Abraham-Lorentz equation and the mass correction in the rest mass energy (2.9) differ by a factor  $\frac{4}{3}$  is due to the lack of covariance of the cut-off procedure.

only in the electron Hilbert space. The average of equation (2.24) gives :

$$m \langle \ddot{\mathbf{r}} \rangle_{\mathbf{R}} = - \langle \nabla V_0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{R}} - \frac{4}{3} \delta m_1 \langle \ddot{\mathbf{r}} \rangle_{\mathbf{R}} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \langle \ddot{\mathbf{r}} \rangle_{\mathbf{R}}. \quad (2.25)$$

We have used the fact that the average value of  $\mathbf{E}_r$  is zero in the vacuum state. It seems in this last equation that vacuum fluctuations have disappeared and do not play any role in the evolution of  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$ . Actually, the simplicity of equation (2.25) is misleading; the averaged operators  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$ ,  $\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{R}}$  do not have the same properties as the original operators  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{p}$ . For example, their commutation relations are not the canonical ones ( $[\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}, \langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{R}}] \neq i\hbar$ ) and their evolution is not unitary. So, we are no longer able to draw a parallel between the classical Abraham-Lorentz equation and the evolution of  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$  given by (2.25).

Furthermore, all the dynamical aspects of the electron motion cannot be described only by the two operators  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$  and  $\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{R}}$ . The value of the product  $\langle \mathbf{r} \cdot \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{R}}$ , for example, cannot be calculated as a function of  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$  and  $\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{R}}$ . Similarly, equation (2.25) is not a true differential equation since  $\langle \nabla V_0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{R}}$  cannot be expressed in terms of  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$  and  $\langle \mathbf{p} \rangle_{\mathbf{R}}$ . This equation is then not « closed » : it links  $\langle \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{R}}$  and its derivatives to another operator  $\langle \nabla V_0(\mathbf{r}) \rangle_{\mathbf{R}}$  for which we have to find the evolution equation (the vacuum fluctuations will probably contribute to this equation, which proves that their disappearance in (2.25) was only superficial).

The previous discussion clearly shows that we cannot avoid to study now the evolution of electron observables other than  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$  and to ask about their rate of variation the same type of questions concerning the respective contributions of vacuum fluctuations and self reaction. This problem will be dealt with in the next section. Note that the simplifications which occurred above for the evolution of  $\mathbf{r}$  (no order problem in (2.24) and nullity of the vacuum average of  $\mathbf{E}_r$  in (2.25)) will not occur for the evolution of a general particle observable.

There is a supplementary reason for studying the evolution of operators other than  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ . Very few experiments are dealing with the position or the momentum of an atomic electron. One rather measures the population of an energy level, the frequency or the damping of some atomic oscillations associated with off-diagonal elements of the density matrix. This suggests that operators such as  $|i\rangle\langle i|$  or  $|i\rangle\langle j|$  (where  $|i\rangle$  and  $|j\rangle$  are eigenstates of the electron in the potential  $V_0$ ) are more directly connected to experiment than  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ .

### 3. Identification of the contributions of vacuum fluctuations and self reaction to the rate of variation of an arbitrary atomic observable. — In this section,

we first evaluate the contributions of the various terms of the interaction Hamiltonian to the rate of variation,  $dG/dt$ , of an arbitrary atomic observable  $G$  (§ 3.1). We then discuss the problem of order which arises when the total field appearing in this rate is split into its free part and its source part (§ 3.2). We solve this problem by introducing hermiticity conditions associated with the requirement of physical meaning (§§ 3.3 and 3.4). Finally, we discuss the problem of the vacuum average of the various rates which requires a perturbative calculation (§ 3.5).

3.1 CONTRIBUTION OF THE VARIOUS TERMS OF THE INTERACTION HAMILTONIAN. — It will be convenient to divide the total Hamiltonian (2.13) into three parts, the Hamiltonian

$$H_s = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + V_0(\mathbf{r}) \quad (3.1)$$

of the electron in the static potential  $V_0(\mathbf{r})$ , the Hamiltonian

$$H_R = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega \left( a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon} + \frac{1}{2} \right) \quad (3.2)$$

of the transverse radiation field, and the Hamiltonian

$$V = - \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(0) + \frac{e^2}{2m} \mathbf{A}^2(0) + \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0} \frac{k_M}{\pi} \quad (3.3)$$

of the electron-field coupling, characterized by the electric charge  $e$  and including the energy of the longitudinal field of the electron (2.12).

The rate of variation of an atomic observable  $G$  can then be written as

$$\frac{d}{dt} G = \frac{i}{\hbar} [H_s, G] + \frac{i}{\hbar} [V, G]. \quad (3.4)$$

We discuss now the contributions of the three terms of  $V$  to the second commutator (to order 2 in  $e$ ).

(i) The last term of  $V$  is a  $c$ -number which commutes with  $G$  and which therefore does not produce any dynamical evolution. This term corresponds to an overall displacement of electronic energy levels which we have already interpreted in section 2 as due to the contribution  $\delta m_1 c^2$  of the Coulomb field of the electron to the electron rest mass energy. This effect must obviously be associated with self reaction since it originates from the longitudinal field created by the electron itself. The same situation exists in classical theory.

(ii) The second term of  $V$  does not depend on atomic variables and thus commutes with  $G$ . It has no dynamical consequences. It nevertheless contributes to the total energy. Let us calculate its average value. Since we limit the calculation to order 2 in  $e$ , we can replace  $\mathbf{A}(0)$  by the free field  $\mathbf{A}_f(0)$ . The term then becomes independent of the atomic state and can be interpreted as an overall shift of the electron

energy levels. The value of this shift for the vacuum state of the field is given by

$$\left\langle 0 \left| \frac{e^2}{2m} A_r^2(\mathbf{0}) \right| 0 \right\rangle = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \frac{e^2 \mathcal{A}_{\mathbf{k}^2}}{2m} = \frac{e^2 \hbar k_M^2}{8 \pi^2 \epsilon_0 mc} = \delta m_2 c^2. \quad (3.5)$$

This shift can be interpreted as a new contribution,  $\delta m_2 c^2$ , to the electron rest mass energy. It is proportional to the vacuum average of the square of the free field and thus is clearly a vacuum fluctuation effect, the interpretation of which is well known [19] : it is the kinetic energy associated with the electron vibrations produced by the vacuum fluctuations of the electric field.

(iii) Finally, only the first term of (3.3) contributes to the dynamical evolution of  $G$ . The corresponding term of (3.4) can be written as

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{coupling}} = - \frac{ie}{\hbar m} [\mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}), G] = e \mathbf{N} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}) \quad (3.6)$$

where  $\mathbf{N}$  is an atomic operator given by

$$\mathbf{N} = - \frac{i}{\hbar m} [\mathbf{p}, G]. \quad (3.7)$$

If  $G$  coincides with  $\mathbf{p}$  or  $\mathbf{r}$ ,  $\mathbf{N}$  is equal to  $\mathbf{0}$  or to a constant and (3.6) reduces to  $\mathbf{0}$  or to  $\mathbf{A}(\mathbf{0})$ . We find again that the evolution of  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$  is very simple.

Finally, combining (3.4) and (3.6) and reintroducing the time explicitly in the operators, we get

$$\frac{d}{dt} G(t) = \frac{i}{\hbar} [H_s(t), G(t)] + e \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}, t). \quad (3.8)$$

3.2 THE PROBLEM OF ORDER. — In expression (3.8), we split, as in section 2, the field  $\mathbf{A}(\mathbf{0}, t)$  in two parts,  $\mathbf{A}_r(\mathbf{0}, t)$  representing the free field and  $\mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t)$  representing the source field. If the atomic operator  $\mathbf{N}(t)$  does not reduce to  $\mathbf{0}$  or to a constant (as it is the case for  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ ), we are immediately faced with the problem of order mentioned in the introduction. Since  $\mathbf{N}(t)$  and  $\mathbf{A}(\mathbf{0}, t)$  commute, we can start in equation (3.8) with any order

$$\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}, t) \quad \text{or} \quad \mathbf{A}(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{N}(t).$$

More generally, we can write the last term of (3.8) as

$$e \lambda \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}, t) + e(1 - \lambda) \mathbf{A}(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{N}(t) \quad (3.9)$$

with  $\lambda$  arbitrary. Replacing  $\mathbf{A}$  by  $\mathbf{A}_r + \mathbf{A}_s$  leads to

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{coupling}} = \left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{vr}} + \left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{sr}} \quad (3.10)$$

where the two rates

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{vr}} = e \lambda \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}_r(\mathbf{0}, t) + e(1 - \lambda) \mathbf{A}_r(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{N}(t) \quad (3.11)$$

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{sr}} = e \lambda \mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t) + e(1 - \lambda) \mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{N}(t) \quad (3.12)$$

depend on  $\lambda$  since  $\mathbf{A}_r$  and  $\mathbf{A}_s$  do not commute separately with  $\mathbf{N}(t)$ .

$\lambda$  being arbitrary, the splitting (3.10) of the total rate is not uniquely defined [11-13].

3.3 PHYSICAL INTERPRETATION AND HERMITICITY CONDITIONS. — In order to remove this indetermination, we introduce now some simple physical considerations.

Suppose that  $G$  is a physical observable, represented by a Hermitian operator. The rate of variation of  $G$  due to the coupling is also a Hermitian operator [this clearly appears on (3.8) since  $\mathbf{N}(t)$  and  $\mathbf{A}(\mathbf{0}, t)$  are commuting Hermitian operators]. Our purpose is to split this rate of variation in two rates, involving  $\mathbf{A}_r$  and  $\mathbf{A}_s$  respectively, and having separately a well defined physical interpretation in terms of vacuum fluctuations and self reaction. This interpretation requires that (3.11) and (3.12) should have separately a physical meaning, and consequently should be separately Hermitian. This condition determines  $\lambda$  which must be equal to 1/2. Thus, the splitting of  $dG/dt$  is unique and given by

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{vr}} = e \frac{1}{2} [\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}_r(\mathbf{0}, t) + \mathbf{A}_r(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{N}(t)] \quad (3.13)$$

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{sr}} = e \frac{1}{2} [\mathbf{N}(t) \cdot \mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t) + \mathbf{A}_s(\mathbf{0}, t) \cdot \mathbf{N}(t)]. \quad (3.14)$$

This could have been obtained by choosing the completely symmetrical order in (3.9).

3.4 GENERALIZATION TO MORE COMPLICATED SITUATIONS. — It may happen that the total rate of variation of  $G$  does not appear as simple as in (3.6), i.e. as the product of an atomic observable by a field observable. For example, if we had not made the electric dipole approximation, the electron position operator  $\mathbf{r}$  would appear in  $\mathbf{A}$ . Another example is the appearance of non Hermitian operators in (3.6) when the total field  $\mathbf{A}$  is decomposed into its positive and negative frequency components which are not Hermitian. We extend now the previous treatment to these more complex situations.

We first note that, in the most general case, the total rate of variation of a physical observable  $G$

(due to the coupling with the field) can always be written as

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{coupling}} = \sum_i e(A_i N_i + A_i^+ N_i^+) \quad (3.15)$$

where the  $A_i$  are field operators and the  $N_i$  atomic operators which commute, but which are not necessarily Hermitian. For example, in simple models dealing with two-level atoms and using the « rotating wave approximation », the coupling Hamiltonian is taken of the form

$$V = - (E^{(+)} D^+ + E^{(-)} D^-) \quad (3.16)$$

where  $D^+$  and  $D^-$  are the raising and lowering components of the dipole moment operator, and  $E^{(+)}$  and  $E^{(-)}$  the positive and negative frequency components of the field [20].

In such a case, we get

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{coupling}} = E^{(+)} F^+ + E^{(-)} F^- \quad (3.17)$$

with

$$F^+ = \frac{i}{\hbar} [G, D^+] \quad (3.18)$$

(3.17) has a structure similar to (3.15).

$G$  being Hermitian, the right side of (3.15) is of course also Hermitian, but since the atomic and field operators commute, it could be written as well as

$$\sum_i (N_i A_i + N_i^+ A_i^+) \quad \text{or} \quad \sum_i (N_i A_i + A_i^+ N_i^+)$$

$$\text{or} \quad \sum_i (A_i N_i + N_i^+ A_i^+)$$

or any combination of these forms. When  $A_i$  is replaced by  $A_{if} + A_{is}$ , it is easy to see that the hermiticity condition imposed on  $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{vf}}$  and  $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{sr}}$  is no longer sufficient for removing the indetermination. For example,

$$\sum_i (A_{if} N_i + N_i^+ A_{if}^+) \quad \text{and} \quad \sum_i (N_i A_{if} + A_{if}^+ N_i^+)$$

are two Hermitian rates of variation which could be attributed to vacuum fluctuations and which generally do not coincide since  $A_{if}$  and  $A_{if}^+$  do not commute with  $N_i$  and  $N_i^+$ . For the simple model considered above [see (3.16) and (3.17)] these two rates respectively correspond to the anti normal and normal orders. So, when the  $A_i$  and the  $N_i$  are not Hermitian, we must introduce a new requirement.

Coming back to the expression (3.15) of the total rate, we first re-express this rate in terms of physically well defined atomic and field quantities, i.e. in terms of Hermitian operators. The physical justification for such a transformation is that we want to be able to analyse the total physical rate in terms of physical quantities. For example, it would be difficult to elaborate a physical picture from an expression involving only the positive frequency part of the field which is not observable. Introducing the real and the imaginary part of the various operators appearing in (3.15), and using the fact that field and atomic operators commute, we transform (3.15) into the strictly equivalent expression

$$\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{coupling}} = e \sum_i \left(\frac{A_i + A_i^+}{2}\right) (N_i + N_i^+) + e \sum_i \left(\frac{A_i - A_i^+}{2i}\right) \left(\frac{N_i - N_i^+}{-i}\right). \quad (3.19)$$

But now the total rate appears as a sum of products of observables of the field by observables of the particle as in (3.6) and the procedure of the previous section can be applied to each of these products and singles out the completely symmetric order

$$\begin{aligned} \left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{coupling}} &= e \frac{1}{2} \sum_i \left[ \left(\frac{A_i + A_i^+}{2}\right) (N_i + N_i^+) + (N_i + N_i^+) \left(\frac{A_i + A_i^+}{2}\right) \right] + \\ &+ e \frac{1}{2} \sum_i \left[ \left(\frac{A_i - A_i^+}{2i}\right) \left(\frac{N_i - N_i^+}{-i}\right) + \left(\frac{N_i - N_i^+}{-i}\right) \left(\frac{A_i - A_i^+}{2i}\right) \right] \end{aligned} \quad (3.20)$$

when  $A_i$  is replaced by  $A_{if} + A_{is}$  in (3.19).

To summarize the previous discussion, a unique well defined order is singled out by the following two conditions.

(i) The two rates  $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{vf}}$  and  $\left(\frac{dG}{dt}\right)_{\text{sr}}$  must have separately a physical meaning.

(ii) Before replacing  $A_i$  by  $A_{if} + A_{is}$ , the total rate must be expressed in terms of physical field and particle quantities.

3.5 VACUUM AVERAGE OF THE VARIOUS RATES. — To progress further, we must now take the average of the two rates (3.13) and (3.14) over the vacuum

state of the field. The calculation of such an average is not trivial (as it was the case in the previous section for  $r$  and  $p$ ). This is due to the presence of products of field and atomic operators in the right side of the equations. For example, when we average the product  $eA_r(\mathbf{0}, t) \cdot N(t)$ , we must not forget that these two operators are correlated since the atomic operator  $N(t)$  depends on the free field which has perturbed its evolution from the initial time  $t_0$  to  $t$ . Consequently, before taking the vacuum average, we have first to calculate, to a given order in  $e$ ,  $N(t)$  as a function of unperturbed (free) atomic and field operators. Since we limit our calculation to order 2 in  $e$  (i.e. to order 1 in the fine structure constant  $\alpha$ ), we must solve the Heisenberg equation for  $N(t)$  up to order  $e$  [ $e$  already appears in (3.13) and  $A_r$  is of order  $e^0$ ]. When we insert the perturbative expansion of  $N(t)$ , which contains zero or one field operator taken at a time  $t'$  such that  $t_0 < t' < t$ , in the product  $A_r(\mathbf{0}, t) \cdot N(t)$ , and when we take the vacuum average, we get « one-time averages »  $\langle 0 | A_r(t) | 0 \rangle$  which are equal to zero, and « two-time averages » such as

$$\langle 0 | A_{ri}(\mathbf{0}, t) A_{rj}(\mathbf{0}, t') | 0 \rangle$$

(with  $i, j = x, y, z$ ), i.e. vacuum averages of products of two components of free field operators taken at two different times. Similar considerations can be made about the other products of (3.13) and (3.14).

Actually, such perturbative calculations are not specific of our choice of the symmetrical order in (3.9) and they can be found in other papers where other choices are investigated [11, 13]. Rather than duplicating these calculations, we prefer in the next section to reconsider our problem of the separation between vacuum fluctuations and self reaction from a more general point of view where one asks the same type of questions for a small system  $S$  (generalizing the atom) interacting with a large reservoir  $\mathcal{R}$  (generalizing the field). The extension of the previous treatment to this more general situation is straightforward. It leads to mathematical expressions which, because of their generality, have a more transparent structure. In particular, since we don't use, in the intermediate steps of the calculation, simplifications specific to a particular choice of  $S$  and  $\mathcal{R}$ , we find that some important statistical functions of  $S$  and  $\mathcal{R}$  appear explicitly in the final expressions and this provides a deeper physical insight in the problem.

4. Extension of the previous treatment to a system  $S$  interacting with a large reservoir  $\mathcal{R}$ . — 4.1 INTRODUCTION-OUTLINE OF THE CALCULATION. — It is well known that spontaneous emission, and all associated effects such as radiative corrections or radiative damping, can be considered as a problem which can be studied in the general framework of the quantum theory of relaxation in the motional narrowing limit [21, 22]. Such a theory deals with the damping and energy shifts of a small system  $S$  coupled to a large

reservoir  $\mathcal{R}$ . Large means that  $\mathcal{R}$  has many degrees of freedom so that the correlation time  $\tau_c$  of the observables of  $\mathcal{R}$  is very short, allowing a perturbative treatment of the effect of the  $S$ - $\mathcal{R}$  coupling during a time  $\tau_c$ . For spontaneous emission, the atom plays the role of  $S$ , the vacuum field, with its infinite number of modes, plays the role of  $\mathcal{R}$ , and the correlation time of vacuum fluctuations is short enough for having the motional narrowing condition well fulfilled.

This point of view suggests that we can extend to any  $S$ - $\mathcal{R}$  system the same type of questions we have asked about the atom-field system. Is it possible to understand the evolution of  $S$  as being due to the effect of the reservoir fluctuations acting upon  $S$ , or should we invoke a kind of self reaction,  $S$  perturbing  $\mathcal{R}$  which reacts back on  $S$ ? Is it possible to make a clear and unambiguous separation between the contributions of these two effects?

The extension of the treatment of section 3 to this more general case is straightforward. We first note that, although most presentations of the quantum theory of relaxation use the Schrödinger picture (one derives a master equation for the reduced density operator of  $S$ ), we have to work here in the Heisenberg picture. Actually, the Heisenberg picture is also used in the derivation of the « Langevin-Mori » equations describing the evolution of the observables of  $S$  as being driven by a « Langevin force » (having a zero reservoir average) and a « friction force » (producing not only a damping but also a shift of energy levels) [21, 23, 24]. Our problem here is to identify in the « friction force » the contribution of reservoir fluctuations and self reaction. Following the general scheme of figure 1, we start with the Hamiltonian of the  $S$ - $\mathcal{R}$  system

$$H = H_s + H_R + V \quad (4.1)$$

where

$$V = - \sum_i R_i S_i \quad (4.2)$$

is the interaction Hamiltonian, and  $R_i$  and  $S_i$  are Hermitian observables of  $\mathcal{R}$  and  $S$  [we can always suppose that  $V$  has been put in this form, eventually after a transformation analogous to the one changing (3.15) into (3.19)]. We then write the Heisenberg equation for the reservoir observable  $R_i$  appearing in (4.2). The solution of this equation can be written as the sum of a free unperturbed part  $R_{if}$  (solution to order 0 in  $V$ ), and of a « source part »  $R_{is}$  due to the presence of  $S$  (solution to order 1 and higher in  $V$ )

$$R_i = R_{if} + R_{is} \quad (4.3)$$

Expression (4.3) is finally inserted in the last term of the Heisenberg equation for an arbitrary system observable  $G$

$$\frac{dG}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [G, H_s] + \frac{1}{i\hbar} \left[ G, - \sum_i R_i S_i \right] \quad (4.4)$$

in order to identify the contribution of reservoir fluctuations and self reaction. The problem of order between the commuting observables  $R_i$  and

$$N_i = \frac{-1}{i\hbar} [G, S_i] \quad (4.5)$$

in the last term of (4.4) arises in the same way as in section 3 and is solved by the same physical considerations which impose the completely symmetric order. We thus get

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} &= \frac{1}{2} \sum_i (N_i R_{if} + R_{if} N_i) \quad (4.6a) \\ \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} &= \frac{1}{2} \sum_i (N_i R_{is} + R_{is} N_i). \quad (4.6b) \end{aligned} \right.$$

It remains to perform the average of  $\left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf}$  and  $\left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr}$  in the reservoir state (reservoir average).

As explained in § 3.5, this requires a perturbative calculation leading, to order 2 in  $V$ , to two time operator averages which can be expressed in terms of correlation functions and linear susceptibilities. This is precisely where the advantage of working with a general  $S$ - $R$  system appears. As already explained in § 3.5, the intermediate steps of the calculation remain general. For example, when we solve perturbatively the Heisenberg equation for  $R_i$ , we get for the source part,  $R_{is}$ , a perturbative expansion where, at the lowest order, the linear susceptibility of the reservoir appears. In the particular case of the atom field system, the calculation of the source field has been done exactly and the result expressed in terms of atomic operators and time derivatives of these operators (see equation (2.21)). In such an intermediate calculation, the fact that the susceptibility of the electromagnetic field is involved remains hidden, and, thus this important function does not appear explicitly in the final result for  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle$ .

In order not to increase too much the length of this paper, we will not give here the detailed calculations of  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} \right\rangle$  and  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle$  following the general scheme outlined above. These calculations will be presented in a forthcoming paper [25], together with a discussion of the various approximations used in the derivation. We just give in this section the results of these calculations which will be useful for the discussion of section 5. We first give (§ 4.2) the expression of the correlation functions and linear susceptibilities in terms of which we then discuss the structure of the terms describing the effect of reservoir fluctuations (§ 4.3) and self reaction (§ 4.4).

4.2 CORRELATION FUNCTIONS AND LINEAR SUSCEPTIBILITIES [26]. — When the reservoir average is cal-

culated up to order 2 in  $V$ , the reservoir only appears in the final result through two statistical functions. The first one

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(R)}(\tau) &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \{ R_{if}(t) R_{jf}(t - \tau) + R_{jf}(t - \tau) R_{if}(t) \} \rangle_R \end{aligned} \quad (4.7)$$

is the symmetric correlation function of the two free reservoir observables  $R_{if}$  and  $R_{jf}$ . The average is taken over the initial state of the reservoir which is supposed to be stationary, so that  $C_{ij}^{(R)}$  only depends on  $\tau$ .  $C_{ij}^{(R)}(\tau)$  is a real function of  $\tau$  which describes the dynamics of the fluctuations of  $R_{if}$  and  $R_{jf}$  in the reservoir state.

The second statistical function,

$$\chi_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle [R_{if}(t), R_{jf}(t - \tau)] \rangle_R \theta(\tau), \quad (4.8)$$

where  $\theta(\tau)$  is the Heaviside function, is the linear susceptibility of the reservoir. It generally depends on the reservoir state.  $\chi_{ij}^{(R)}(\tau)$  is also a real function of  $\tau$ , which describes the linear response of the averaged observable  $\langle R_{if}(t) \rangle_R$  when the reservoir is acted upon by a perturbation proportional to  $R_{jf}$ . Note that both  $C$  and  $\chi$  have a classical limit (if it the case for  $R$ ): this is obvious for  $C$ , and for  $\chi$ , the commutator divided by  $i\hbar$  becomes the Poisson bracket.

Similar functions can of course be introduced for the small system  $S$  in an energy level  $|a\rangle$ , with energy  $E_a$ . We will note them

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(S,a)}(\tau) &= \frac{1}{2} \langle a | S_{if}(t) S_{jf}(t - \tau) + \\ &+ S_{jf}(t - \tau) S_{if}(t) | a \rangle \end{aligned} \quad (4.9)$$

$$\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle a | [S_{if}(t), S_{jf}(t - \tau)] | a \rangle \theta(\tau) \quad (4.10)$$

where the upper indices ( $S, a$ ) mean that  $S$  is in  $|a\rangle$ , and where the lower index  $f$  on  $S_{if}$  and  $S_{jf}$  means that these operators are unperturbed system operators evolving only under the effect of  $H_s$  (as for  $R_{if}$  and  $R_{jf}$  which evolve only under the effect of  $H_R$ ).

Finally, we will note  $\hat{C}_{ij}^{(R)}(\omega)$ ,  $\hat{\chi}_{ij}^{(R)}(\omega)$ ,  $\hat{C}_{ij}^{(S,a)}(\omega)$ ,  $\hat{\chi}_{ij}^{(S,a)}(\omega)$  the Fourier transforms of (4.7), (4.8), (4.9), (4.10), the Fourier transform  $\hat{f}(\omega)$  of  $f(\tau)$  being defined by

$$\hat{f}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau. \quad (4.11)$$

4.3 STRUCTURE OF THE RESULTS DESCRIBING THE EFFECT OF RESERVOIR FLUCTUATIONS. — The first important result concerning the reservoir averaged rate of variation  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} \right\rangle_R$  is that only  $C_{ij}^{(R)}(\tau)$



appears in its expression, and not  $\chi_{ij}^{(R)}(\tau)$ . Furthermore, the corresponding relaxation equations have exactly the same structure as the ones which would be obtained if the reservoir observables  $R_i$  were replaced in the interaction Hamiltonian (4.2) by fluctuating  $c$ -numbers  $r_i(t)$  having the same correlation functions  $C_{ij}^{(R)}(\tau)$

$$\overline{r_i(t) r_j(t - \tau)} = C_{ij}^{(R)}(\tau). \quad (4.12)$$

We conclude that, with our choice of the symmetric order in (4.6), the effect of reservoir fluctuations is the same as the one of a classical random field having the same symmetric correlation function as the quantum one.

We show also in reference [25] that the average rate of variation  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} \right\rangle_{\mathcal{R}}$ , and also  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle_{\mathcal{R}}$ , can be decomposed into a Hamiltonian part and a non Hamiltonian part. The Hamiltonian part describes (in the so-called secular approximation) a shift of the energy levels of  $S$  due to the  $S$ - $\mathcal{R}$  coupling. The non Hamiltonian part describes, among other things, the exchange of energy between  $S$  and  $\mathcal{R}$ .

The shift,  $(\delta E_a)_{rf}$ , of the level  $|a\rangle$  of  $S$  due to reservoir fluctuations is found to be

$$(\delta E_a)_{rf} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} dt C_{ij}^{(R)}(\tau) \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau). \quad (4.13)$$

Such a result has a very simple structure and a very clear physical meaning (Fig. 2a). One can consider that the fluctuations of  $\mathcal{R}$ , characterized by  $C_{ij}^{(R)}(\tau)$ , polarize  $S$  which responds to this perturbation in a way characterized by  $\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau)$ . The interaction of the fluctuations of  $\mathcal{R}$  with the polarization to which they give rise in  $S$  has a non zero value because of the correlations which exist between the fluctuations of  $\mathcal{R}$  and the induced polarization in  $S$ . The factor 1/2 in (4.13) is even somewhat similar to the factor 1/2 appearing in the polarization energy of a dielectric. Finally, it is shown in [25] (by parity arguments) that only the reactive part of  $\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau)$  contributes to the

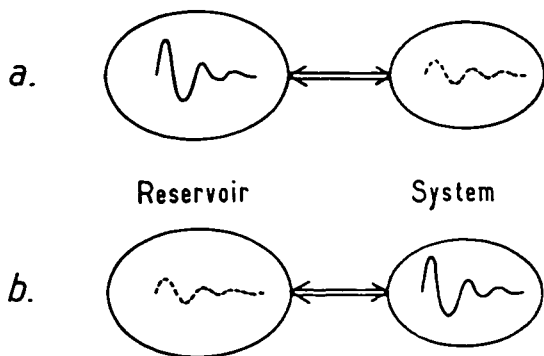


Fig. 2. — Physical pictures for the effect of reservoir fluctuations and self reaction. a) Reservoir fluctuations : the reservoir fluctuates and interacts with the polarization induced in the small system. b) Self reaction : the small system fluctuates and polarizes the reservoir which reacts back on the small system.

integral (4.13). To summarize this discussion, we can say that the energy shift  $(\delta E_a)_{rf}$  can be interpreted as resulting from the polarization of  $S$  by the fluctuations of  $\mathcal{R}$ .

We now turn to the discussion of the non Hamiltonian part of  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} \right\rangle_{\mathcal{R}}$ . A very suggestive result concerns the absorption of energy by  $S$  when  $S$  is in  $|a\rangle$ . The effect is described by  $\left\langle \left( \frac{dH_s}{dt} \right)_{rf} \right\rangle_{\mathcal{R},a}$  ( $G$  is replaced by  $H_s$  and the average is taken over both the state of the reservoir and the state  $|a\rangle$  of  $S$ ). One finds

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{dH_s}{dt} \right)_{rf} \right\rangle_{\mathcal{R},a} &= \\ &= -\pi \sum_{ij} \int_{-\gamma}^{+\infty} d\omega \hat{C}_{ij}^{(R)}(\omega) i\omega [\hat{\chi}_{ij}^{(S,a)*}(\omega) - \hat{\chi}_{ji}^{(S,a)}(\omega)]. \end{aligned} \quad (4.14)$$

This result is identical with the one which would be obtained if a classical random perturbation with a spectral power density  $\hat{C}_{ij}^{(R)}(\omega)$  was acting upon  $S$  (see reference [27], § 124; see also [28]). The term inside the brackets is actually the dissipative part of the susceptibility of  $S$  at frequency  $\omega$ . This dissipative part is multiplied by the spectral power density of the perturbation produced by  $\mathcal{R}$ . Here again we get a result in agreement with the picture of  $S$  responding to the fluctuations of  $\mathcal{R}$ .

#### 4.4 STRUCTURE OF THE TERMS DESCRIBING THE EFFECT OF SELF REACTION. —

As expected, the reservoir appears in  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle_{\mathcal{R}}$  only through the linear susceptibility  $\chi_{ij}^{(R)}(\tau)$ . Thus, it appears that  $\mathcal{R}$  is now polarized by  $S$ . We can interpret the rate of variation  $\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} \right\rangle_{\mathcal{R}}$  as being due to the reaction back on  $S$  of the polarization of  $\mathcal{R}$  by  $S$  (Fig. 2b).

As in the previous section (4.3), it will be interesting now to discuss the shift  $(\delta E_a)_{sr}$  of  $|a\rangle$  due to self reaction. This shift is found to be

$$(\delta E_a)_{sr} = -\frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} dt \chi_{ij}^{(R)}(\tau) C_{ij}^{(S,a)}(\tau). \quad (4.15)$$

The same comments can be made as for (4.13), the roles of  $S$  and  $\mathcal{R}$  being interchanged. Here also, only the reactive part of  $\chi_{ij}^{(R)}(\tau)$  contributes to (4.15).

Finally, we can study the equation corresponding to (4.14) for self reaction

$$\begin{aligned} \left\langle \left( \frac{dH_s}{dt} \right)_{sr} \right\rangle_{\mathcal{R},a} &= \\ &= \pi \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{C}_{ij}^{(S,a)}(\omega) i\omega [\hat{\chi}_{ij}^{(R)*}(\omega) - \hat{\chi}_{ji}^{(R)}(\omega)]. \end{aligned} \quad (4.16)$$

Here also the same comments can be made, the roles of  $S$  and  $\mathcal{R}$  being interchanged. Note however the difference of sign between (4.14) and (4.16). This is due to the fact that (4.14) describes a transfer of energy from  $\mathcal{R}$  to  $S$  (gain for  $S$ ), whereas (4.16) describes a transfer from  $S$  to  $\mathcal{R}$  (loss for  $S$ ). Actually (4.14) can also describe a loss for  $S$ , and (4.16) a gain, if there are adequate population inversions in  $S$  for (4.14), in  $\mathcal{R}$  for (4.16), responsible for an amplifying behaviour of the susceptibility (instead of a dissipative one).

It must be emphasized that all the results derived in this section follow from the choice of the symmetric order in the total rate  $dG/dt$  before replacing  $R_i$  by  $R_{if} + R_{is}$ . They can be all interpreted in terms of two simple physical pictures :  $\mathcal{R}$  fluctuates and polarizes  $S$ ,  $S$  fluctuates and polarizes  $\mathcal{R}$ . The clear physical structure of the results which have been obtained in this way, and the coherence of the physical interpretation can be considered as a confirmation *a posteriori* of the pertinence of the method of separation we propose in this paper. The privileged character of the symmetric order for physical interpretation is thus confirmed.

*Remark.* — The previous treatment allows an easy and clear discussion of the consequences of the fluctuation dissipation theorem [26]. Note first that this theorem holds only for systems in thermal equilibrium (populations of the various levels varying according to the Boltzmann factor corresponding to a given temperature). The above treatment is more general, and is valid for an arbitrary stationary state of the reservoir (the energy levels may have any population). For a reservoir at thermal equilibrium which is the case of the electromagnetic field vacuum, the fluctuation dissipation theorem states that the correlation function  $\hat{C}_{ij}^{(R)}(\omega)$  is proportional to the dissipative part of the corresponding reservoir susceptibility. Thus, in this case, one could formally replace in (4.13) and (4.14) the correlation function of the reservoir by the dissipative part of the reservoir susceptibility

and make the reservoir fluctuations to apparently disappear from formulae (4.13) and (4.14). But it is also clear that, after such a formal transformation, these two expressions have lost their physical meaning since they appear as the product of two susceptibilities.

**5. Physical discussion. Contributions of vacuum fluctuations and self reaction to the radiative corrections and radiative damping of an atomic electron.** — We now come back to our initial problem concerning the respective contributions of vacuum fluctuations and self reaction for an atomic electron.

We have given in the previous section very simple and general expressions for important physical effects such as the shifts of the energy levels of  $S$ , or the energy exchanges between  $S$  and  $\mathcal{R}$ , these expressions involving only correlation functions or linear susceptibilities of  $S$  and  $\mathcal{R}$ .

What we have to do now is to calculate first these correlation functions and linear susceptibilities in the case where  $S$  is an atom and  $\mathcal{R}$  the vacuum electromagnetic field (§ 5.1). We will then be able, using (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), to discuss the respective contributions of vacuum fluctuations and self reaction to the radiative corrections for an atomic electron (§ 5.2) and the rate of exchange of energy between the atom and the field (§ 5.3).

**5.1 CORRELATION FUNCTIONS AND LINEAR SUSCEPTIBILITIES FOR THE VACUUM FIELD AND FOR AN ATOMIC ELECTRON.** — Comparing (4.2) and the first term of (3.3) (which is the only one to produce a dynamical evolution of atomic observables, see § 3.1), we get, for the atom field problem

$$\begin{cases} R_i(t) = A_i(\mathbf{0}, t) \\ S_i(t) = \frac{e}{m} p_i(t) \end{cases} \quad (5.1)$$

with  $i = x, y, z$ .

According to (4.7) and (4.8), the relevant statistical functions for the field are :

$$\begin{cases} C_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{1}{2} \langle 0 | A_{if}(\mathbf{0}, t) A_{jf}(\mathbf{0}, t - \tau) + A_{jf}(\mathbf{0}, t - \tau) A_{if}(\mathbf{0}, t) | 0 \rangle & (5.2) \\ \chi_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle 0 | [A_{if}(\mathbf{0}, t), A_{jf}(\mathbf{0}, t - \tau)] | 0 \rangle \theta(\tau) & (5.3) \end{cases}$$

where  $|0\rangle$  is the vacuum state of the field and the index  $f$  means a free evolution for the operators. The calculation of these two functions is straightforward and given in the Appendix B. One gets :

$$C_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{\hbar \delta_{ij}}{12 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} |\omega| e^{i\omega\tau} d\omega \quad (5.4)$$

$$\chi_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{\delta_{ij}}{3 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \left( \omega_M \delta(\tau) - \frac{\pi}{2} \delta'(\tau) \right). \quad (5.5)$$

The Fourier transforms of (5.4) and (5.5) are also useful :

$$\hat{C}_{ij}^{(R)}(\omega) = \frac{\hbar \delta_{ij}}{12 \pi^2 \epsilon_0 c^3} |\omega| \quad (5.6)$$

$$\hat{\chi}_{ij}^{(R)}(\omega) = \frac{\delta_{ij}}{6 \pi^3 \epsilon_0 c^3} \left( \omega_M - i \frac{\pi}{2} \omega \right). \quad (5.7)$$

Because of the cut-off (2.10) expressions (5.6) and (5.7) hold only for  $|\omega| < \omega_M$ ,  $\hat{C}$  and  $\hat{\chi}$  being equal to zero elsewhere. It follows that the  $\delta$  and  $\delta'$  functions in (5.5) have actually a width  $1/\omega_M$ .

*Remarks :* (i) The linear susceptibility of the field relates the linear response of the field, at point  $\mathbf{0}$  and at time  $t$ , to the perturbation associated with the motion of the electron at earlier times. This response is nothing but the source field produced by the electron (and calculated to lowest order in  $e$ ). Going back to the precise definition of  $\chi$  [26], and using (5.5), we get for the « linear response »  $\langle 0 | A_i(t) | 0 \rangle$  :

$$\begin{aligned} \langle 0 | A_i(t) | 0 \rangle &= \sum_j \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \left\langle 0 \left| \chi_{ij}^{(R)}(\tau) \left( \frac{e}{m} \right) p_j(t - \tau) \right| 0 \right\rangle \\ &= \frac{e \omega_M}{3 \pi^2 \epsilon_0 c^3 m} \langle 0 | p_i(t) | 0 \rangle - \frac{e}{6 \pi \epsilon_0 c^3 m} \langle 0 | \dot{p}_i(t) | 0 \rangle \end{aligned} \quad (5.8)$$

which coincides, to order 1 in  $e$ , with the expression given in (2.19b) for the source field. This clearly shows that, in the derivation of (2.19b), we have implicitly calculated the susceptibility of the field. Rather than using this intermediate result, we have preferred in sections 4 and 5 to keep general expressions such as (4.13), (4.14), (4.15), (4.16), which have a clear physical meaning, and to specify the values of  $C$  and  $\chi$  for the field only in these final expressions.

(ii) The free field commutator of (5.3) is a  $c$ -number ( $[a, a^+] = 1$ ), proportional to  $\hbar$  [see expression (2.3) of  $\mathcal{A}_i$ ]. It follows that the linear susceptibility  $\chi^{(R)}$  of the field is independent of the state of the field, and independent of  $\hbar$ . Therefore the classical and quantum linear susceptibilities coincide. Since the source field is directly related to  $\chi^{(R)}$  (see previous remark), it has the same expression in both classical and quantum theories, and this explains why self reaction forces are formally identical in classical and quantum Abraham-Lorentz equations.

We consider now the atomic statistical functions. Their calculation is also straightforward: Using (5.1) in (4.9) and (4.10), replacing  $p_{if}(t)$  by  $e^{iH_a t/\hbar} p_i e^{-iH_a t/\hbar}$  and introducing some closure relations, we get :

$$\left\{ C_{ij}^{(S,a)}(\tau) = \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \sum_b \left\{ \langle a | p_i | b \rangle \langle b | p_j | a \rangle e^{i\omega_{ab}\tau} + \langle a | p_j | b \rangle \langle b | p_i | a \rangle e^{-i\omega_{ab}\tau} \right\} \right. \quad (5.9)$$

$$\left. \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \frac{e^2}{m^2} \theta(\tau) \sum_b \left\{ \langle a | p_i | b \rangle \langle b | p_j | a \rangle e^{i\omega_{ab}\tau} - \langle a | p_j | b \rangle \langle b | p_i | a \rangle e^{-i\omega_{ab}\tau} \right\} \right. \quad (5.10)$$

where  $\hbar\omega_{ab} = E_a - E_b$ .

The Fourier transforms of (5.9) and (5.10) are :

$$\left\{ \begin{aligned} \hat{C}_{ij}^{(S,a)}(\omega) &= \frac{1}{2} \frac{e^2}{m^2} \sum_b \left\{ \langle a | p_i | b \rangle \langle b | p_j | a \rangle \delta(\omega - \omega_{ab}) + \langle a | p_j | b \rangle \langle b | p_i | a \rangle \delta(\omega + \omega_{ab}) \right\} \quad (5.11) \\ \hat{\chi}_{ij}^{(S,a)}(\omega) &= - \frac{e^2}{2 \pi \hbar m^2} \sum_b \left\{ \langle a | p_j | b \rangle \langle b | p_i | a \rangle \mathfrak{P} \left( \frac{1}{\omega + \omega_{ab}} \right) - \langle a | p_i | b \rangle \langle b | p_j | a \rangle \mathfrak{P} \left( \frac{1}{\omega - \omega_{ab}} \right) \right\} \\ &\quad - i \frac{e^2}{2 \hbar m^2} \sum_b \left\{ \langle a | p_j | b \rangle \langle b | p_i | a \rangle \delta(\omega + \omega_{ab}) - \langle a | p_i | b \rangle \langle b | p_j | a \rangle \delta(\omega - \omega_{ab}) \right\} \quad (5.12) \end{aligned} \right.$$

where  $\mathfrak{P}$  means principal part.

The first line of (5.12), which contains only principal parts, is the reactive part  $\chi'$  of the susceptibility, whereas the second line, which contains only  $\delta$ -functions, is the dissipative part  $i\chi''$  [26-27].

5.2 RADIATIVE CORRECTIONS FOR AN ATOMIC ELECTRON. — 5.2.1 Calculations of  $(\delta E_a)_{\text{vf}}$  and  $(\delta E_a)_{\text{sr}}$ . — We can now use the results of the previous section (5.1) for evaluating the two integrals appearing in the expressions (4.13) and (4.15) giving the energy shifts of the atomic level  $a$  respectively due to vacuum fluctuations and self reaction. We must not forget to add  $\delta m_2 c^2$  to  $(\delta E_a)_{\text{vf}}$  and  $\delta m_1 c^2$  to  $(\delta E_a)_{\text{sr}}$  where  $\delta m_2 c^2$  and  $\delta m_1 c^2$

are given by (3.5) and (2.12) and represent overall energy shifts respectively due to vacuum fluctuations and self reaction (see § 3.1).

Using (4.15), (5.5) and (5.9), we first calculate :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \chi_{ij}^{(R)}(\tau) C_{ij}^{(S,a)}(\tau) &= -\frac{\omega_M}{6 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \sum_{ij} \delta_{ij} C_{ij}^{(S,a)}(0) \\ &= -\frac{\omega_M}{6 \pi^2 \epsilon_0 c^3} \frac{e^2}{m^2} \langle a | \mathbf{p}^2 | a \rangle \end{aligned} \quad (5.13)$$

which gives :

$$(\delta E_a)_{sr} = \delta m_1 c^2 - \frac{4}{3} \frac{\delta m_1}{m} \left\langle a \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right| a \right\rangle. \quad (5.14)$$

For  $(\delta E_a)_{vf}$ , we first use the Parseval-Plancherel identity

$$-\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) = -\pi \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \hat{C}_{ij}^{(R)*}(\omega) \hat{\chi}_{ij}^{(S,a)}(\omega). \quad (5.15)$$

The integral over  $\omega$  is then performed. Using (5.6) and (5.12), we get for (5.15) :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) &= \frac{e^2}{24 \pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \sum_b |\langle a | \mathbf{p} | b \rangle|^2 \int_{-\omega_M}^{\omega_M} d\omega |\omega| \left\{ \mathcal{F}\left(\frac{1}{\omega + \omega_{ab}}\right) - \mathcal{F}\left(\frac{1}{\omega - \omega_{ab}}\right) \right\} \\ &= -\frac{e^2}{6 \pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \sum_b \omega_{ab} |\langle a | \mathbf{p} | b \rangle|^2 \text{Log} \frac{\omega_M}{|\omega_{ab}|}. \end{aligned} \quad (5.16)$$

(Terms in  $1/\omega_M$  have been neglected in (5.16).)

As in similar calculations [29], we introduce an average atomic frequency  $\bar{\omega}$  defined by :

$$\sum_b \omega_{ab} |\langle a | \mathbf{p} | b \rangle|^2 \text{Log} \frac{\omega_M}{|\omega_{ab}|} = \sum_b \omega_{ab} |\langle a | \mathbf{p} | b \rangle|^2 \text{Log} \frac{\omega_M}{\bar{\omega}}. \quad (5.17)$$

The summation over  $b$  in (5.17) can then be easily done :

$$\begin{aligned} \sum_b \omega_{ab} |\langle a | \mathbf{p} | b \rangle|^2 &= \frac{1}{2\hbar} \langle a | [[H_s, \mathbf{p}], \mathbf{p}] | a \rangle \\ &= -\frac{\hbar}{2} \langle a | \Delta V_0(\mathbf{r}) | a \rangle. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Finally, one gets for  $(\delta E_a)_{vf}$  :

$$(\delta E_a)_{vf} = \frac{e^2 \hbar}{12 \pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \text{Log} \frac{\omega_M}{\bar{\omega}} \langle a | \Delta V_0(\mathbf{r}) | a \rangle + \delta m_2 c^2. \quad (5.19)$$

It is important to note that, in the derivation of (5.14) and (5.19), we have not used approximations such as the two-level approximation, or the rotating wave approximation. The energy level shifts are due to virtual transitions involving non resonant couplings. Consequently, a correct derivation of these shifts must take into account all atomic states and both positive and negative frequency components of the field.

**5.2.2 Main effect of self reaction : modification of kinetic energy due to a mass renormalization.** — The

first term of (5.14) has already been interpreted as the increase of the rest mass energy of the electron due to its Coulomb field. The last term can be considered as the first order correction to the average kinetic energy of the electron when  $m$  is replaced by  $m + 4 \delta m_1/3$  :

$$\begin{aligned} \left\langle a \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2(m + \frac{4}{3} \delta m_1)} \right| a \right\rangle &= \left\langle a \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right| a \right\rangle \times \\ &\times \left( 1 - \frac{4}{3} \frac{\delta m_1}{m} + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.20)$$

The electron is surrounded by its Coulomb field, and when one pushes the electron, one has also to push its Coulomb field (electromagnetic mass).

The mass corrections appearing in the two terms of (5.14) are not the same. This discrepancy is due to the non covariant cut-off (see discussion of § 2.1.4), and also exists in classical theory.

Finally, it must be noted that, since the  $2s_{1/2}$  and  $2p_{1/2}$  states of hydrogen have the same average kinetic energy, a mass correction produces equal shifts for the two levels and cannot remove their degeneracy. Self reaction alone cannot therefore explain the Lamb-shift.

**5.2.3 Main effect of vacuum fluctuations : modification of potential energy.** — The first term of (5.19) coincides with the standard non relativistic expression for the Lamb-shift [29]. It appears as a correction to the potential  $V_0(\mathbf{r})$  which becomes  $V_0(\mathbf{r}) + \delta V_0(\mathbf{r})$  where

$$\delta V_0(\mathbf{r}) = \frac{e^2 \hbar}{12 \pi^2 \epsilon_0 m^2 c^3} \text{Log} \frac{\omega_M}{\bar{\omega}} \Delta V_0(\mathbf{r}). \quad (5.21)$$

If  $V_0(\mathbf{r})$  is the Coulomb potential of a nucleus located at the origin,  $\Delta V_0(\mathbf{r})$  is proportional to  $\delta(\mathbf{r})$ , and therefore only s states are shifted by such a correction, which explains in particular how the degeneracy between  $2s_{1/2}$  and  $2p_{1/2}$  can be removed.

Welton has pointed out...[3] that a correction of the same type as (5.21) would be obtained, if the electron was submitted to a fluctuating classical field, with frequencies large compared to the atomic frequencies. The electron, vibrating in such a fluctuating field, averages the external static potential over a finite volume. If the spectral density of this random perturbation is identified with the one of vacuum fluctuations, one gets for the coefficient of  $\Delta V_0(\mathbf{r})$  the same value as in (5.21),  $\bar{\omega}$  being simply replaced by a low frequency cut-off. Welton's analysis establishes a connection between Lamb-shifts of atomic levels and vacuum fluctuations and provides a clear and simple physical picture.

Our choice of the symmetric order in (3.9) ascribes corrections such as (5.21) to vacuum fluctuations and entirely legitimates Welton's interpretation for the Lamb-shift.

We have already seen (§ 3.1.ii) that vacuum fluctuations are also responsible for a correction  $\delta m_2$  to the electron mass (last term of (5.19)).

*Remarks :* (i) It may appear surprising that our calculation doesn't give any correction to the kinetic energy associated with the mass correction  $\delta m_2$  due to vacuum fluctuations. One would expect to find, as in the previous section, a term of the order of

$$- \frac{\delta m_2}{m} \left\langle a \left| \frac{\mathbf{p}^2}{2m} \right| a \right\rangle. \quad (5.22)$$

Actually, coming back to the expressions (2.12) and (3.5) of  $\delta m_1$  and  $\delta m_2$ , and introducing the fine structure constant  $\alpha = e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ , one can write

$$\left\{ \frac{\delta m_1}{m} = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\hbar\omega_M}{mc^2} \right. \quad (5.23a)$$

$$\left. \frac{\delta m_2}{m} = \frac{\alpha}{2\pi} \left( \frac{\hbar\omega_M}{mc^2} \right)^2 \right. \quad (5.23b)$$

Therefore, it clearly appears that  $\delta m_2/m$  is of higher order in  $1/c$  than  $\delta m_1/m$ . This explains why the correction to the kinetic energy associated with  $\delta m_2$  is not given by our calculation which is limited to the lowest order in  $1/c$ . The basic Hamiltonian (2.13) does not contain any relativistic correction. A more precise calculation including in the Hamiltonian relativistic corrections up to order  $1/c^2$  [4] (and using an effective Hamiltonian method for evaluating radiative corrections) actually gives the expected correction (5.22).

(ii) The present calculation (as well as the one of reference [4]) does not include of course any multi-particle effect (virtual pair creation). It is well known [19] that many particle effects reduce the divergence of the electron self-energy  $(\delta m_1 + \delta m_2) c^2$ , with respect to the cut-off  $\omega_M$ . Instead of having a linear and quadratic divergence (see (5.23)), one gets a logarithmic one. Also, new correction terms, associated with vacuum polarization effects, appear.

**5.2.4 Classical versus quantum effects.** — A striking difference can be pointed out between the contributions of self reaction and vacuum fluctuations to radiative corrections :  $\hbar$  does not appear in  $(\delta E_a)_{sr}$  [see (5.14) and the expression (2.12) of  $\delta m_1$ ], whereas  $\hbar$  does appear in both terms of  $(\delta E_a)_{vr}$  [see (5.19) and the expression (3.5) of  $\delta m_2$ ].

The fact that self reaction corrections are purely classical (independent of  $\hbar$ ) is not surprising. We have already explained (see remark (ii) of section 5.1) why self reaction terms are identical in both classical and quantum theories.

On the other hand, vacuum fluctuation corrections have an essentially quantum nature since they are due to the non zero mean square value of the fields in the vacuum, which is a pure quantum effect. It must be noted however that, once the correlation function of vacuum fluctuations is computed from the quantum theory of radiation, their effect on the atom (to the lowest order in  $\alpha$ ) may be evaluated semi-classically, since we have shown in § 4.3 that reservoir fluctuations have the same effect (to the lowest order) as a classical random field having the same correlation function. This explains why pure quantum effects, such as those produced by the vacuum fluctuations of the quantized radiation field, can be calculated as if a classical random field, with a power spectral density equal to  $\hbar\omega/2$  per mode, was acting upon the atom [30].

To summarize, our choice of the symmetric order in (3.9) leads to self reaction corrections which are strictly equivalent to the corresponding classical ones, whereas vacuum fluctuations appear to be responsible for pure quantum effects which can be however computed semi-classically, once the correlation function of vacuum fluctuations is given.

5.2.5 *Spin and magnetic effects. Interpretation of the spin anomaly  $g - 2$ .* — In this section, we take into account the spin  $\mathbf{S}$  of the electron and the corresponding magnetic moment

$$\mathbf{M}_s = \frac{e}{m} \mathbf{S}. \quad (5.24)$$

Even in the absence of any external static magnetic field  $\mathbf{B}_0$ ,  $\mathbf{M}_s$  interacts with the magnetic field  $\mathbf{B}$  of the transverse radiation field. We should add to the interaction Hamiltonian  $V$  given in (3.3) a term,

$$- \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0}) = - \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}(\mathbf{0}) \quad (5.25)$$

describing such a coupling. This would introduce in the final expressions of radiative corrections new correlation functions and new linear susceptibilities involving two components of  $\mathbf{B}$ , or one component of  $\mathbf{B}$  and one component of  $\mathbf{A}$ . Since an extra  $1/c$  factor appears in the expansion of  $\mathbf{B}$  in plane waves [see expression (2.3)], we conclude that the new radiative corrections associated with (5.25) would be at least one order in  $1/c$  higher than those calculated previously, and which, according to (5.13) and (5.19) are in  $e^2/c^3$  (or  $\alpha/mc^2$ ). If we restrict our calculations to the lowest order in  $1/c$ , as we do in the non relativistic approach used in this paper, we can therefore ignore the magnetic couplings of the spin with the radiation field and neglect (5.25) <sup>(3)</sup>.

The same argument does not apply of course to the interaction of  $\mathbf{S}$  with an external static magnetic field  $\mathbf{B}_0$  deriving from the static vector potential  $\mathbf{A}_0$  :

$$\mathbf{B}_0(\mathbf{R}) = \nabla \times \mathbf{A}_0(\mathbf{R}). \quad (5.26)$$

We must add to the atomic Hamiltonian  $H_s$  a new term describing the interaction of  $\mathbf{M}_s$  with the static magnetic field  $\mathbf{B}_0$  at the electron position

$$- \mathbf{M}_s \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) = - \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}). \quad (5.27)$$

We must also replace the electron momentum  $\mathbf{p}$  by :

$$\boldsymbol{\pi}_0 = \mathbf{p} - e\mathbf{A}_0(\mathbf{r}). \quad (5.28)$$

To summarize, if, at the lowest order in  $1/c$ , i.e. at

order  $e^2/c^3$ , we want to include spin and magnetic effects, we must use :

$$H_s = \frac{\boldsymbol{\pi}_0^2}{2m} + V_0(\mathbf{r}) - \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \quad (5.29)$$

instead of (3.1), and replace  $\mathbf{p}$  by  $\boldsymbol{\pi}_0$  in the first term of (3.3) :

$$- \frac{e}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}) \rightarrow - \frac{e}{m} \boldsymbol{\pi}_0 \cdot \mathbf{A}(\mathbf{0}). \quad (5.30)$$

What are the corresponding changes in  $(\delta E_a)_{sr}$  and  $(\delta E_a)_{vf}$  ? Since the field operators remain unchanged in (5.30), we still use (5.4) and (5.5) for  $C^{(R)}$  and  $\chi^{(R)}$ . On the other hand, we must change  $\mathbf{p}$  into  $\boldsymbol{\pi}_0$  in the expressions (5.9) and (5.10) of  $C^{(S)}$  and  $\chi^{(S)}$ .

Consider first the modifications occurring for  $(\delta E_a)_{sr}$ . The only change in (5.14) is that we have  $\boldsymbol{\pi}_0^2/2m$  instead of  $\mathbf{p}^2/2m$ . Since  $\boldsymbol{\pi}_0^2/2m$  has the physical meaning of a kinetic energy in presence of the static vector potential  $\mathbf{A}_0$ , we conclude that the main effect of self reaction is, as before, to change the mass appearing in the kinetic energy

$$\frac{\boldsymbol{\pi}_0^2}{2m} \rightarrow \frac{\boldsymbol{\pi}_0^2}{2(m + \frac{4}{3}\delta m_1)}. \quad (5.31)$$

It must be emphasized that, at this order in  $1/c$ , the mass renormalization due to self reaction does not affect the last term of (5.29). The mass  $m$  which appears in the spin magnetic moment  $e\mathbf{S}/m$  remains unchanged. We don't get any term of the form

$$+ \frac{\delta m_1}{m} \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0. \quad (5.32)$$

We will come back later on this important point, when discussing the origin of the spin anomaly  $g - 2$ .

We now discuss the modifications for  $(\delta E_a)_{vf}$ . The calculations are very similar to those of § 5.2.1, the only difference being that, in the double commutator of (5.18), we must use the new expression (5.29) of  $H_s$  and replace  $\mathbf{p}$  by  $\boldsymbol{\pi}_0$ . We have therefore to calculate :

$$\frac{1}{2\hbar} \left\langle a \left| \left[ \left[ \frac{\boldsymbol{\pi}_0^2}{2m} + V_0(\mathbf{r}) - \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}), \boldsymbol{\pi}_0 \right], \boldsymbol{\pi}_0 \right] \right| a \right\rangle \quad (5.33)$$

If we suppose that  $\mathbf{B}_0(\mathbf{r})$  is homogeneous (independent of  $\mathbf{r}$ ) and if we keep only terms linear in  $\mathbf{B}_0$ , expression (5.33) reduces to (5.18). Thus, for homogeneous weak static magnetic fields, vacuum fluctuations do not introduce any new radiative correction related to spin and magnetic effects.

We have now at our disposal all what is needed for discussing the contribution of self reaction and vacuum fluctuations to the electron dynamics in presence of a weak homogeneous static magnetic

<sup>(3)</sup> If we would like to go to higher orders in  $1/c$ , we should include relativistic corrections in the Hamiltonian and retardation effects.

field. Combining the previous results, the corrected atomic Hamiltonian (including radiative corrections) can be written :

$$\frac{\pi_0^2}{2(m + \frac{4}{3}\delta m_1)} + V_0(\mathbf{r}) + \delta V_0(\mathbf{r}) - \frac{e}{m} \mathbf{S} \cdot \mathbf{B}_0(\mathbf{r}) \quad (5.34)$$

where corrections including  $\delta m_1$  are due to self reaction and  $\delta V_0(\mathbf{r})$  to vacuum fluctuations.

The spin magnetic moment appearing in the last term of (5.34) can be written as :

$$\mathbf{M}_s = \frac{e}{m} \mathbf{S} = 2 \frac{e}{2m} \mathbf{S}. \quad (5.35)$$

In terms of the «bare» (uncorrected) mass, the  $g$  factor of the electron spin is 2. But, the mass which is measured experimentally, in deflection experiments, is the renormalized mass, i.e. the mass which appears in the corrected kinetic energy

$$\bar{m} = m + \frac{4}{3}\delta m_1 \quad (5.36)$$

so that, if we reexpress  $\mathbf{M}_s$  in terms of  $\bar{m}$ , we have from (5.35)

$$\mathbf{M}_s = \frac{e}{m} \mathbf{S} = g \frac{e}{2\bar{m}} \mathbf{S} \quad (5.37)$$

with

$$g = 2 \frac{\bar{m}}{m} = 2 \left( 1 + \frac{4}{3} \frac{\delta m_1}{m} \right) > 2. \quad (5.38)$$

So, it clearly appears that the positive sign of  $g-2$  is due to the fact that self reaction corrects only to lowest order the kinetic energy and not the magnetic coupling between  $\mathbf{S}$  and  $\mathbf{B}_0$ . The motion of the charge is slowed down but not the precession of the spin. This is easy to understand. In the non relativistic limit we are considering in this paper, electric effects predominate over magnetic ones and self reaction is stronger for a charge than for a magnetic moment. We therefore arrive at the same conclusions as other treatments [4, 31].

If the calculation was pushed to higher orders in  $1/c$ , as in [4], we would get corrections to the spin magnetic moment, especially those due to the vacuum

fluctuations of the magnetic field  $\mathbf{B}(0)$  of the radiation field which exert a fluctuating torque on  $\mathbf{M}_s$ , producing an angular vibration of the spin and, consequently, a decrease of the effective magnetic moment. This is the equivalent of Welton's picture for  $g-2$  which would produce a negative spin anomaly if this was the only mechanism. We understand now the failure of such a picture. For  $g-2$ , the predominant physical mechanism is self reaction which slows down the motion of the electric charge.

5.3 RATE OF EXCHANGE OF ENERGY BETWEEN THE ELECTRON AND THE RADIATION FIELD. — 5.3.1 *Contribution of self reaction.* — We start from (4.16) and we use the expressions (5.7) of  $\chi^R$  and (5.11) of  $C^S$ . Because of the  $\delta$  function appearing in (5.11), the integral over  $\omega$  is readily done, and we get for the rate of energy loss due to self reaction by the electron in state  $a$

$$\begin{aligned} \left\langle 0, a \left| \left( \frac{d}{dt} H_s \right)_{sr} \right| 0, a \right\rangle &= \\ &= - \frac{e^2}{6 \pi m^2 \epsilon_0 c^3} \sum_b \sum_i |\langle a | p_i | b \rangle|^2 \omega_{ab}^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Now, we write <sup>(4)</sup>

$$\begin{aligned} \frac{1}{m} \langle a | p_i | b \rangle \omega_{ab} &= \frac{1}{m \hbar i} \langle a | [H_s, p_i] | b \rangle \\ &= - \frac{i}{m} \langle a | \dot{p}_i | b \rangle \\ &= - i \langle a | \ddot{r}_i | b \rangle. \end{aligned} \quad (5.40)$$

Finally, by using (5.40) and the closure relation over  $b$ , we transform (5.39) into :

$$\left\langle 0, a \left| \left( \frac{d}{dt} H_s \right)_{sr} \right| 0, a \right\rangle = - \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \langle a | (\ddot{\mathbf{r}})^2 | a \rangle. \quad (5.41)$$

Such a result is extremely simple and exactly coincides with what is found in classical radiation theory. The rate of radiation of electromagnetic energy is proportional to the square of the acceleration of the radiating charge, the proportionality coefficient being just the one appearing in (5.41). We note also that, if self reaction was alone, the atomic ground state would not be stable, since the square of the acceleration has a non zero average value in such a state.

5.3.2 *Contribution of vacuum fluctuations.* — We now use (4.14) and the expressions (5.6) of  $C^{(R)}$  and (5.12) of  $\chi^{(S)}$ . This gives

$$\left\langle 0, a \left| \left( \frac{d}{dt} H_s \right)_{sr} \right| 0, a \right\rangle = \frac{e^2}{12 \pi \epsilon_0 m^2 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega |\omega| \sum_b \sum_i |\langle a | p_i | b \rangle|^2 (\delta(\omega + \omega_{ab}) - \delta(\omega - \omega_{ab}))$$

<sup>(4)</sup> The atomic operators appearing in  $\chi^{(S)}$  are free atomic operators. This is why their time derivative is given by the commutator with  $H_s$  (and not with the total Hamiltonian  $H$ ).

$$= - \frac{e^2}{6 \pi \epsilon_0 m^2 c^3} \sum_b \sum_i |\langle a | p_i | b \rangle|^2 \omega_{ab} |\omega_{ab}|. \quad (5.42)$$

Using (5.40), and distinguishing the terms  $\omega_{ab} > 0$  ( $E_a > E_b$ ) and the terms  $\omega_{ab} < 0$  ( $E_a < E_b$ ), we get :

$$\left\langle 0, a \left| \left( \frac{dH_s}{dt} \right)_{\text{vf}} \right| 0, a \right\rangle = \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \left\{ \sum_{E_b > E_a} \langle a | \ddot{\mathbf{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\mathbf{r}} | a \rangle - \sum_{E_b < E_a} \langle a | \ddot{\mathbf{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\mathbf{r}} | a \rangle \right\}. \quad (5.43)$$

The first line describes an absorption of energy by the electron which jumps from  $a$  to a higher state  $b$ , whereas the second line describes an emission of energy by jumps to lower states. This is in agreement with the picture of a random field inducing in the atomic system both downwards and upwards transitions.

Now, coming back to (5.41), we can reintroduce the closure relation over  $b$  between  $\dot{\mathbf{r}}$  and  $\ddot{\mathbf{r}}$ , which gives :

$$\begin{aligned} \left\langle 0, a \left| \left( \frac{d}{dt} H_s \right)_{\text{sr}} \right| 0, a \right\rangle &= - \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \sum_b \langle a | \dot{\mathbf{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\mathbf{r}} | a \rangle \\ &= - \frac{2}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \left\{ \sum_{E_b > E_a} \langle a | \dot{\mathbf{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\mathbf{r}} | a \rangle + \sum_{E_b < E_a} \langle a | \dot{\mathbf{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\mathbf{r}} | a \rangle \right\}. \end{aligned} \quad (5.44)$$

Adding (5.43) and (5.44), we get for the total rate of energy loss by the electron in state  $a$

$$\left\langle 0, a \left| \frac{d}{dt} H_s \right| 0, a \right\rangle = - \frac{4}{3} \frac{e^2}{4 \pi \epsilon_0 c^3} \sum_{E_b < E_a} \langle a | \dot{\mathbf{r}} | b \rangle \cdot \langle b | \ddot{\mathbf{r}} | a \rangle. \quad (5.45)$$

This satisfactory result means that the electron in the vacuum can only lose energy by cascading downwards to lower energy levels. In particular, the ground state is stable since it is the lowest state.

The previous discussion clearly shows that the ground state cannot be stable in absence of vacuum fluctuations which exactly balance the energy loss due to self reaction [28]. In other words, if self reaction was alone, the ground state would collapse and the atomic commutation relation  $[x, p] = i\hbar$  would not hold. Such a collapse is prevented by vacuum fluctuations which actually originate from the quantum nature of the field, i.e. from the commutation relation  $[a, a^\dagger] = 1$ . We have here an illustration of a very general principle of quantum mechanics. When two isolated systems interact (here the atom and the field), treating one of them quantum mechanically and the other one semi-classically leads to inconsistencies [32]. The field commutation relations are necessary for preserving the atomic ones and *vice versa*.

**6. Conclusion.** — We have removed the apparent indetermination in the separation of vacuum fluctuations and self reaction by imposing to the corresponding rates of variation to have a well defined physical meaning (hermiticity requirements).

Such a procedure is very general and can be extended to the case of a small system  $\mathcal{S}$  interacting with a large reservoir  $\mathcal{R}$ . The results of the calculation can be expressed <sup>(5)</sup> in terms of simple statistical functions of the two interacting systems, leading to simple physical pictures :  $\mathcal{R}$  fluctuates and polarizes  $\mathcal{S}$  (reservoir fluctuations effects);  $\mathcal{S}$  fluctuates and polarizes  $\mathcal{R}$  (self reaction effects).

When applied to the case of an atomic electron interacting with the vacuum field, such a procedure gives results in complete agreement with the usual pictures associated with vacuum fluctuations and self reaction. All self reaction effects, which are independent of  $\hbar$ , are strictly identical to those derived from classical radiation theory. All vacuum fluctuation effects, which are proportional to  $\hbar$ , can be interpreted by considering the vibration of the electron induced by a random field having a spectral power density equal to  $\hbar\omega/2$  per mode.

<sup>(5)</sup> It must be kept in mind that all the calculations have been limited to order 2 in the coupling constant. At higher orders, cross terms would appear between reservoir fluctuations and self reaction.



**Appendix A : Calculation of the source fields  $A_s(\mathbf{0}, t)$  and  $E_{\perp s}(\mathbf{0}, t)$ .** — Equations (2.2a) and (2.2b) give the expressions of  $A$  and  $E_{\perp}$  in terms of the creation and annihilation operators :

$$A(\mathbf{0}, t) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\epsilon \\ |\mathbf{k}| < k_M}} \mathcal{A}_k \epsilon a_{\mathbf{k}\epsilon}(t) + hc \quad (\text{A.1a})$$

$$E_{\perp}(\mathbf{0}, t) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\epsilon \\ |\mathbf{k}| < k_M}} \delta_k \epsilon a_{\mathbf{k}\epsilon}(t) + hc. \quad (\text{A.1b})$$

Inserting (2.17) into these two equations, one gets the expression of  $A_s(\mathbf{0}, t)$  and  $E_{\perp s}(\mathbf{0}, t)$  :

$$A_s(\mathbf{0}, t) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\epsilon \\ |\mathbf{k}| < k_M}} i \frac{e\mathcal{A}_k^2}{m\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \epsilon(\epsilon^* \cdot \pi(t')) + hc \quad (\text{A.2a})$$

$$E_{\perp s}(\mathbf{0}, t) = \sum_{\substack{\mathbf{k}\epsilon \\ |\mathbf{k}| < k_M}} i \frac{e\mathcal{A}_k \delta_k}{m\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{-i\omega(t-t')} \epsilon(\epsilon^* \cdot \pi(t')) + hc. \quad (\text{A.2b})$$

We now permute the summation over  $\mathbf{k}, \epsilon$  and the integration on  $t'$ , the angular summation is easily performed and we get :

$$A_s(\mathbf{0}, t) = - \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \int_{t_0}^t dt' \pi(t') \delta'_M(t-t') \quad (\text{A.3a})$$

$$E_{\perp s}(\mathbf{0}, t) = \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \int_{t_0}^t dt' \pi(t') \delta''_M(t-t') \quad (\text{A.3b})$$

where the function  $\delta_M(\tau)$  is given by

$$\delta_M(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\omega_M}^{+\omega_M} d\omega e^{-i\omega\tau}. \quad (\text{A.4})$$

This function  $\delta_M(\tau)$  is symmetric, centred on  $\tau = 0$ , has a width equal to  $1/\omega_M$  and satisfies the equation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \delta_M(\tau) = 1. \quad (\text{A.5})$$

Equations (A.3a) and (A.3b) can be written, by putting  $\tau = t - t'$  and taking  $t_0$  equal to  $-\infty$  :

$$A_s(\mathbf{0}, t) = - \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \int_0^{+\infty} d\tau \pi(t-\tau) \delta'_M(\tau) \quad (\text{A.6a})$$

$$E_{\perp s}(\mathbf{0}, t) = \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \int_0^{+\infty} d\tau \pi(t-\tau) \delta''_M(\tau). \quad (\text{A.6b})$$

Using an integration by parts, one gets

$$A_s(\mathbf{0}, t) = \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \delta_M(0) \pi(t) - \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \int_0^{+\infty} d\tau \dot{\pi}(t-\tau) \delta_M(\tau) \quad (\text{A.7a})$$

$$E_{\perp s}(\mathbf{0}, t) = - \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \delta_M(0) \ddot{\pi}(t) + \frac{e}{3 \pi \epsilon_0 c^3 m} \int_0^{+\infty} d\tau \ddot{\pi}(t-\tau) \delta_M(\tau). \quad (\text{A.7b})$$

The characteristic times for the evolution of  $\pi(t)$  are very long compared to the width  $1/\omega_M$  of  $\delta_M(\tau)$  [see Eq. (2.11)]. We can therefore replace in (A.7a) and (A.7b)  $\dot{\pi}(t-\tau)$  and  $\ddot{\pi}(t-\tau)$  by  $\dot{\pi}(t)$  and  $\ddot{\pi}(t)$ . The remaining integral of  $\delta_M(\tau)$  from  $\tau = 0$  to  $\tau = \infty$  is equal to  $1/2$ , as a consequence of the symmetry of  $\delta_M(\tau)$ . One finally gets

$$A_s(\mathbf{0}, t) = \frac{e\omega_M}{3\pi^2\epsilon_0 c^3 m} \pi(t) - \frac{e}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \dot{\pi}(t) \quad (\text{A.8a})$$

$$E_{Ls}(\mathbf{0}, t) = -\frac{e\omega_M}{3\pi^2\epsilon_0 c^3 m} \dot{\pi}(t) + \frac{e}{6\pi\epsilon_0 c^3 m} \ddot{\pi}(t) \quad (\text{A.8b})$$

(A.8a) and (A.8b) are nothing but (2.19b) and (2.21b) using the expression of  $\delta m_1$  given in equation (2.12).

**Appendix B : Correlation function and linear susceptibility of the field.** — The correlation function of the field is given [cf. Eq. (5.2)] :

$$C_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{1}{2} \langle 0 | A_{if}(\mathbf{0}, t) A_{jf}(\mathbf{0}, t - \tau) + A_{jf}(\mathbf{0}, t - \tau) A_{if}(\mathbf{0}, t) | 0 \rangle \quad (\text{B.1})$$

where the operator  $A_f(\mathbf{0}, t)$  is the free vector potential. Using its expansion in plane waves, one gets

$$\begin{aligned} C_{ij}^{(R)}(\tau) &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{e}} \mathcal{A}_k^2 \epsilon_i \epsilon_j \langle 0 | a_{\mathbf{k}\mathbf{e}f}(t) a_{\mathbf{k}\mathbf{e}f}^+(t - \tau) + a_{\mathbf{k}\mathbf{e}f}(t - \tau) a_{\mathbf{k}\mathbf{e}f}^+(t) | 0 \rangle \\ &= \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}\mathbf{e}} \mathcal{A}_k^2 \epsilon_i \epsilon_j (e^{-i\omega\tau} + e^{i\omega\tau}). \end{aligned} \quad (\text{B.2})$$

Replacing the sum by an integral and using the expression (2.3) of  $\mathcal{A}_k$ , one gets

$$C_{ij}^{(R)}(\tau) = \delta_{ij} \frac{\hbar}{12\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^{\omega_M} d\omega \omega (e^{i\omega\tau} + e^{-i\omega\tau}). \quad (\text{B.3})$$

This can also be written :

$$C_{ij}^{(R)}(\tau) = \delta_{ij} \frac{\hbar}{12\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_{-\omega_M}^{\omega_M} d\omega |\omega| e^{i\omega\tau}. \quad (\text{B.4})$$

The linear susceptibility is calculated in the same way. Starting from

$$\chi_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle 0 | [A_{if}(\mathbf{0}, t), A_{jf}(\mathbf{0}, t - \tau)] | 0 \rangle \theta(\tau) \quad (\text{B.5})$$

one gets

$$\begin{aligned} \chi_{ij}^{(R)}(\tau) &= \frac{i}{\hbar} \delta_{ij} \frac{\hbar}{6\pi^2\epsilon_0 c^3} \int_0^{\omega_M} d\omega \omega (e^{-i\omega\tau} - e^{+i\omega\tau}) \theta(\tau) \\ &= -\frac{\delta_{ij}}{3\pi\epsilon_0 c^3} \delta'_M(\tau) \theta(\tau). \end{aligned} \quad (\text{B.6})$$

In this paper, the susceptibility of the field always appears in expressions such as

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}^{(R)}(\tau) f_{ij}^{(S)}(\tau) d\tau \quad (\text{B.7})$$

where  $f_{ij}^{(S)}(\tau)$  is a function concerning the small system  $S$ . The characteristic times of evolution of  $f_{ij}^{(S)}$  are then much larger than  $1/\omega_M$  so that one can proceed in the same way as for (A.6a). Using an integration by parts, one finds that

$$\chi_{ij}^{(R)}(\tau) = \frac{\delta_{ij}}{3\pi^2\epsilon_0 c^3} \left[ \omega_M \delta(\tau) - \frac{\pi}{2} \delta'(\tau) \right] \quad (\text{B.8})$$

where  $\delta$  here acts on the slowly varying functions  $f_{ij}^{(S)}(\tau)$  as a true delta function.

References

- [1] A discussion of early works on Q.E.D. can be found in, WEISSKOPF, V. F., *Physics in the Twentieth Century-Selected essays* (The M.I.T. Press, Cambridge) 1972, p. 96 to 129.
- [2] *Foundations of Radiation Theory and Quantum Electrodynamics*, edited by A. O. Barut (Plenum Press, New York) 1980. This book contains several papers reviewing recent contributions to these problems.
- [3] WELTON, T. A., *Phys. Rev.* **74** (1948) 1157.
- [4] DUPONT-ROC, J., FABRE, C. and COHEN-TANNOUJJI, C., *J. Phys. B* **11** (1978) 563.
- [5] SERIES, G. W., in *Optical Pumping and Atomic Line Shapes*, edited by T. Skalinski (Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa) 1969, p. 25.
- [6] BULLOUGH, R. K., in *Coherence and Quantum Optics*, edited by L. Mandel and E. Wolf (Plenum Press, New York) 1973, p. 121.
- [7] ACKERHALT, J. R., KNIGHT, P. L. and EBERLY, J. H., *Phys. Rev. Lett.* **30** (1973) 456.
- [8] ACKERHALT, J. R. and EBERLY, J. H., *Phys. Rev. D* **10** (1974) 3350.
- [9] KIMBLE, H. J. and MANDEL, L., *Phys. Rev. Lett.* **34** (1975) 1485.
- [10] KIMBLE, H. J. and MANDEL, L., *Phys. Rev. A* **13** (1976) 2123.
- [11] SENITZKY, I. R., *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 955.
- [12] MILONNI, P. W., ACKERHALT, J. R. and SMITH, W. A., *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 958.
- [13] MILONNI, P. W. and SMITH, W. A., *Phys. Rev. A* **11** (1975) 814.
- [14] MILONNI, P. W., *Phys. Rep.* **25** (1976) 1.
- [15] FRENCH, J. B., WEISSKOPF, V. F., *Phys. Rev.* **75** (1949) 1240.
- [16] FEYNMAN, R. P., *Phys. Rev.* **74** (1948) 1430.
- [17] JACKSON, J. D., *Classical Electrodynamics*, 2nd edition (John Wiley and Sons, New York) 1975, section 17.
- [18] MONIZ, E. J. and SHARP, D. H., *Phys. Rev. D* **10** (1974) 1133; *Phys. Rev. D* **15** (1977) 2850 and their contribution in reference [2].
- [19] WEISSKOPF, V. F., *Phys. Rev.* **56** (1939) 81.
- [20] ALLEN, L. and EBERLY, J. H., *Optical Resonance and Two-Level Atoms* (John Wiley and Sons, New York) 1975.
- [21] AGARWAL, G. S., *Springer Tracts in Modern Physics*, Volume 70 (Springer Verlag, Berlin) 1974.
- [22] COHEN-TANNOUJJI, C., in *Frontiers in Laser Spectroscopy*, Volume 1, Les Houches 1975 Session XXVII, edited by Balian R., Haroche S. and Liberman S. (North Holland, Amsterdam) 1977, p. 3.
- [23] LOUISELL, W. H., *Quantum Statistical Properties of Radiation* (John Wiley and Sons, New York) 1973.
- [24] GRABERT, H., *Z. Phys. B* **26** (1977) 79.
- [25] DALIBARD, J., DUPONT-ROC, J. and COHEN-TANNOUJJI, C., *J. Physique*, to be published.
- [26] MARTIN, P. in *Many Body Physics*, Les Houches 1967, edited by De Witt C. and Balian R. (Gordon and Breach, New York) 1968, p. 39.
- [27] LANDAU, L. and LIFCHITZ, E. M., *Statistical Physics* (Pergamon Press) 1958, section 124.
- [28] FAIN, V. M., *Sov. Phys. J.E.T.P.* **23** (1966) 882.  
FAIN, V. M. and KHANIN, Y. I., *Quantum Electronics* (M.I.T. Press, Cambridge) 1969.  
FAIN, B., *Il Nuovo Cimento* **68B** (1982) 73.
- [29] BETHE, H. A. and SALPETER, E. E., *Quantum Mechanics of One and Two-Electron Atoms* (Plenum Press, New York) 1977.
- [30] See contribution of BOYER, T. H. in reference [2] and references quoted in.
- [31] GROTCHE, H. and KAZES, E., *Am. J. Phys.* **45** (1977) 618 + their contribution in reference [2].
- [32] SENITZKY, I. R., *Phys. Rev. Lett.* **20** (1968) 1062.

## CHAPITRE A2

*J. Physique* 45 (1984) 637-656

### Dynamics of a small system coupled to a reservoir : reservoir fluctuations and self-reaction

J. Dalibard, J. Dupont-Roc and C. Cohen-Tannoudji

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École Normale Supérieure et Collège de France,  
24, rue Lhomond, 75231 Paris, France

*(Reçu le 3 octobre 1983, accepté le 6 décembre 1983)*

**Résumé.** — Les processus physiques responsables de l'évolution d'un petit système  $S$  faiblement couplé à un grand réservoir  $\mathcal{R}$  sont analysés à partir des équations de Heisenberg. Les contributions respectives des fluctuations du réservoir ( $\mathcal{R}$  fluctue et polarise  $S$ ) et de la self-réaction ( $S$  fluctue et polarise  $\mathcal{R}$  qui réagit en retour sur  $S$ ) sont identifiées en suivant une méthode générale exposée dans un précédent article à propos de l'étude des processus radiatifs (contributions des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement). Les parties hamiltonienne et non hamiltonienne de l'évolution de  $S$  sont explicitées et reliées aux fonctions de corrélation et polarisabilités de  $S$  et  $\mathcal{R}$ . La limite où  $S$  est un système quasi-classique est étudiée. On démontre que l'évolution de la fonction de distribution de l'énergie de  $S$  est décrite par une équation de Fokker-Planck dont les termes de dérive et de diffusion sont respectivement associés à la self-réaction et aux fluctuations du réservoir. Ces résultats généraux sont enfin appliqués au problème de l'émission spontanée d'un grand moment cinétique (modèle de Dicke pour la superradiance).

**Abstract.** — The physical processes responsible for the evolution of a small system  $S$  weakly coupled to a large reservoir  $\mathcal{R}$  are analysed through the coupled Heisenberg equations of the problem. The respective contributions of reservoir fluctuations ( $\mathcal{R}$  fluctuates and polarizes  $S$ ) and self-reaction ( $S$  fluctuates and polarizes  $\mathcal{R}$  which reacts back on  $S$ ) are identified with a general method developed in a previous paper dealing with radiative processes (contributions of vacuum fluctuations and radiation reaction). The Hamiltonian and non Hamiltonian parts of the evolution of  $S$  are made explicit and related to correlation functions and polarizabilities of  $S$  and  $\mathcal{R}$ . The limit where  $S$  is a quasi-classical system is investigated, and the evolution of the energy distribution function of  $S$  is shown to be described by a Fokker-Planck equation, the drift and diffusion terms of which are respectively associated with self-reaction and reservoir fluctuations. These results are finally applied to the problem of the spontaneous emission of a large angular momentum (Dicke's model of superradiance).

#### 1. Introduction.

In a previous paper [1], referred to as I in the following, we have considered the problem of the physical interpretation of radiative processes (radiative corrections such as the Lamb-shift or the spin anomaly  $g = 2$ , spontaneous emission rates). It is generally considered [2-5] that, in quantum radiation theory, there exists an indetermination in the separation of the respective effects of « vacuum fluctuations » (interaction of the electron with the quantized vacuum field) and « radiation reaction » (interaction of the electron with its own field). We have shown in I that such an indetermination can be removed by imposing to the corresponding two rates of variation to be Hermitian (this is necessary if we want them to have a physical meaning), and we have thus obtained results in complete agreement with the usual pictures associated with the two types of physical processes.

the expression (1.4) of  $N_i(t)$ , we thus get

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rr} &= - \frac{ig}{2\hbar} \sum_i \{ [S_i(t), G(t)] R_i^f(t) + R_i^f(t) [S_i(t), G(t)] \}, & (1.9a) \\ \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rr} &= - \frac{ig}{2\hbar} \sum_i \{ [S_i(t), G(t)] R_i^s(t) + R_i^s(t) [S_i(t), G(t)] \}. & (1.9b) \end{aligned} \right.$$

The next step is to compute the average of the two rates (1.9) in the reservoir state. Such a calculation is not trivial. First,  $R_i^f(t)$  does not commute with  $S_i(t)$  and  $G(t)$ . Secondly, the system observables  $S_i(t)$  and  $G(t)$  also operate on reservoir states since they have been « contaminated » by reservoir operators during the evolution between  $t_0$  and  $t$ . When the coupling constant  $g$  is small enough (more precisely when the motional narrowing condition of relaxation theory [7, 8] is fulfilled), a perturbative calculation of the two rates (1.9), up to order 2 in  $g$ , is sufficient. In I, we have just given the results of this perturbative calculation and discussed their structure.

A first motivation of this new paper is to give the details of the perturbative calculation of the reservoir averages of the two rates (1.9), and to discuss the various approximations allowing to express these averaged rates in terms of important statistical functions of the two interacting systems : correlation functions and linear susceptibilities. We also show how it is possible to decompose the various rates of variation in a Hamiltonian part, describing how the energy levels of  $S$  are shifted by the coupling with  $R$ , and a non-Hamiltonian part describing dissipative effects, such as energy transfers between  $S$  and  $R$ . These calculations are presented in sections 2 and 3.

A second motivation of this paper is to present a new application of the general procedure leading to the two rates (1.9). We consider, in section 4, the case when  $S$  is a quasi-classical system. The equation giving the rate of variation of the populations of  $S$  can be, in this case, transformed into a Fokker-Planck equation. We show that the separation between self-reaction effects and reservoir fluctuation effects is particularly transparent in this equation. The two effects are respectively associated with the « drift » and « diffusion » terms of the Fokker-Planck equation. Applying these results to the spontaneous emission of a large angular momentum (section 5) gives some insight to the superradiance problem.

As in the previous paper, we are concerned here with physical interpretation of equations, trying to identify in these equations what corresponds to the usual pictures of fluctuations and reaction. Whether it is possible to experimentally dissociate these two mechanisms is another interesting problem which is outside the scope of this paper.

## 2. Reservoir averaged rates of variation : perturbative calculation.

**2.1 INTRODUCTION.** — In this section, we first calculate a perturbative expansion of the two rates of variation (1.9a) and (1.9b), up to order 2 in  $g$  [§ 2.2 and 2.3]. We then take the average, in the reservoir state, of these two perturbative rates [§ 2.4].

We shall suppose here that, at the initial time  $t_0$ , the density operator  $\rho(t_0)$  is factorized into a system part  $\sigma_S(t_0)$  and a reservoir part  $\sigma_R(t_0)$  :

$$\rho(t_0) = \sigma_S(t_0) \cdot \sigma_R(t_0). \quad (2.1)$$

In other words, we « put together » the system and the reservoir at time  $t_0$  and let them interact. Our problem is to evaluate the subsequent rates of variation of  $S$ , respectively due to reservoir fluctuations and self-reaction, and averaged over the state  $\sigma_R(t_0)$  of the reservoir.

The more general case of a non factorized initial state is examined in appendix C.

**2.2 PERTURBATIVE RESOLUTION OF HEISENBERG EQUATIONS.** — Any operator  $O(t)$  evolves in time according to the Heisenberg equation

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} O(t) &= \frac{i}{\hbar} [H(t), O(t)] \\ &= \frac{i}{\hbar} [H_S(t) + H_R(t), O(t)] - \frac{ig}{\hbar} \sum_i [R_i(t) S_i(t), O(t)]. \end{aligned} \quad (2.2)$$

We want to calculate here the solution of this equation as a power series of  $g$ , in the case where  $O$  is a system or reservoir operator.

The first term of (2.2), which describes the free evolution of  $O(t)$ , is not in general proportional to  $O(t)$ , since several Bohr frequencies appear in the free motion of  $O(t)$ . It is therefore useful to introduce a basis of operators for  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{R}$  having each a single free evolution frequency :

$$Q_{AB} = |A\rangle\langle B| \quad \text{for operators of } \mathcal{R} \quad (2.3a)$$

$$q_{ab} = |a\rangle\langle b| \quad \text{for operators of } \mathcal{S} \quad (2.3b)$$

where  $|A\rangle, |B\rangle$  (resp.  $|a\rangle, |b\rangle$ ) are eigenstates of  $H_R$  (resp.  $H_S$ ), with energies  $E_A, E_B$  (resp.  $\varepsilon_a, \varepsilon_b$ ).

The Heisenberg equation for  $Q_{AB}$  reads

$$\frac{d}{dt} Q_{AB}(t) = i\Omega_{AB} Q_{AB}(t) - \frac{ig}{\hbar} \sum_i S_i(t) [R_i(t), Q_{AB}(t)], \quad (2.4)$$

where

$$\Omega_{AB} = (E_A - E_B)/\hbar \quad (2.5)$$

is the unperturbed Bohr frequency associated with  $|A\rangle$  and  $|B\rangle$ . This equation can be formally integrated to give

$$Q_{AB}(t) = Q_{AB}^f(t) + Q_{AB}^s(t), \quad (2.6)$$

where

$$Q_{AB}^f(t) = Q_{AB}(t_0) e^{i\Omega_{AB}(t-t_0)} \quad (2.7)$$

is the « free » part of  $Q_{AB}(t)$ , of order zero in the coupling constant  $g$  (i.e. the value of  $Q_{AB}$  if there was no coupling), and where

$$Q_{AB}^s(t) = -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\Omega_{AB}(t-t')} \sum_i S_i(t') [R_i(t'), Q_{AB}(t')] \quad (2.8)$$

is the solution of (2.4) to order one and higher in  $g$ , which we shall call the « source » part of  $Q_{AB}(t)$ , by analogy with the atom-field problem.

The coupling constant  $g$  explicitly appears in (2.8). If we want to calculate  $Q_{AB}^s(t)$  up to order one in  $g$ , we can replace the three operators appearing in the integral of (2.8) by their free parts.

This gives

$$Q_{AB}^s(t) = -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' e^{i\Omega_{AB}(t-t')} \sum_i S_i^f(t') [R_i^f(t'), Q_{AB}^f(t')] + O(g^2), \quad (2.9)$$

which can also be written, according to (2.7)

$$Q_{AB}^s(t) = -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sum_i S_i^f(t') [R_i^f(t'), Q_{AB}^f(t')] + O(g^2). \quad (2.10)$$

For the small system  $q_{ab}$  operators, the same algebra can be done, leading to :

$$q_{ab}(t) = q_{ab}^f(t) + q_{ab}^s(t) \quad (2.11)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{ab}^f(t) = q_{ab}(t_0) e^{i\omega_{ab}(t-t_0)} \quad (\hbar\omega_{ab} = \varepsilon_a - \varepsilon_b) \end{array} \right. \quad (2.12a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} q_{ab}^s(t) = -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sum_i R_i^f(t') [S_i^f(t'), q_{ab}^f(t')] \end{array} \right. \quad (2.12b)$$

These results can be generalized to any reservoir operator  $R$  (resp. system operator  $S$ ), using the expansion of this operator on the  $Q_{AB}$  (resp.  $q_{ab}$ ) basis. One gets

$$\begin{aligned} R(t) &= \sum_{AB} Q_{AB}(t) \langle A | R | B \rangle \\ &= R^f(t) + R^s(t), \end{aligned} \quad (2.13)$$

where the free and source parts of  $R(t)$  are

$$\left\{ \begin{array}{l} R^f(t) = \sum_{AB} Q_{AB}^f(t) \langle A | R | B \rangle \\ R^s(t) = \sum_{AB} Q_{AB}^s(t) \langle A | R | B \rangle. \end{array} \right. \quad (2.14a)$$

$$\left. \right\} \quad (2.14b)$$

The source part  $R^s(t)$  can also be written, according to (2.10)

$$R^s(t) = -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sum_i S_i^f(t') [R_i^f(t'), R^f(t)] + O(g^2). \quad (2.15)$$

In the same way, one gets for a system operator

$$S(t) = S^f(t) + S^s(t), \quad (2.16)$$

with

$$\left\{ \begin{array}{l} S^f(t) = \sum_{ab} q_{ab}^f(t) \langle a | S | b \rangle \\ S^s(t) = -\frac{ig}{\hbar} \int_{t_0}^t dt' \sum_i R_i^f(t') [S_i^f(t'), S^f(t)] + O(g^2). \end{array} \right. \quad (2.17a)$$

$$\left. \right\} \quad (2.17b)$$

**Remark :** *Validity of this perturbative expansion.*

The order of magnitude of  $\langle Q_{AB}^s \rangle$  is, using (2.10)

$$\langle Q_{AB}^s(t) \rangle \simeq \frac{(t - t_0) \sqrt{\langle V^2 \rangle}}{\hbar} \langle Q_{AB}^f \rangle \quad (2.18)$$

where  $\sqrt{\langle V^2 \rangle}$  represents the root mean square value of the coupling  $V$ . The following term in the perturbative expansion (2.10) of  $\langle Q_{AB}^s(t) \rangle$  would be of the order of

$$\frac{1}{\hbar^2} \int_{t_0}^t dt' \int_{t_0}^{t'} dt'' \langle V(t') V(t'') \rangle \langle Q_{AB}^f(t') \rangle. \quad (2.19)$$

Introducing the correlation time  $\tau_c$  of the reservoir, the integral over  $t''$  can be evaluated [8]

$$\int_{t_0}^{t'} dt'' \langle V(t') V(t'') \rangle \simeq \begin{cases} \langle V^2 \rangle (t' - t_0) & \text{if } t' - t_0 < \tau_c \\ \langle V^2 \rangle \tau_c & \text{if } t' - t_0 > \tau_c \end{cases} \quad (2.20)$$

The neglected term (2.19) is then certainly less than

$$\frac{\langle V^2 \rangle \tau_c (t - t_0)}{\hbar^2} \langle Q_{AB}^f \rangle. \quad (2.21)$$

Our approximation is valid as long as this term is small compared to both  $\langle Q_{AB}^f \rangle$  and the first-order value (2.18) of  $\langle Q_{AB}^s(t) \rangle$ .

(i) The comparison of (2.21) with (2.18) leads to

$$\frac{\sqrt{\langle V^2 \rangle} \tau_c}{\hbar} \ll 1. \quad (2.22)$$

This is the well known « motional narrowing condition » : The  $\mathcal{R}$ - $\mathcal{S}$  coupling can be treated perturbatively if the effect of this coupling during a correlation time  $\tau_c$  is small [8].

(ii) The comparison of (2.21) with  $\langle Q_{AB}^f \rangle$  leads to the condition

$$\frac{\langle V^2 \rangle \tau_c (t - t_0)}{\hbar^2} \ll 1. \quad (2.23)$$

If we note that  $V^2 \tau_c / \hbar^2$  is the inverse of the relaxation time  $T_R$  of the system  $\mathcal{S}$  under the action of  $\mathcal{R}$ , we can transform (2.23) into

$$t - t_0 \ll T_R. \quad (2.24)$$

The approximate expressions (2.15) and (2.17b) for the source parts of  $R$  and  $S$  are then valid as long as  $t - t_0$  is small compared to the relaxation time. (Note that, as long as the motional narrowing condition (2.22) is fulfilled, the relaxation time  $T_R$  is much longer than the correlation time  $\tau_c$ .)

**2.3 PERTURBATIVE RATES OF VARIATION.** — We can now use the results of the previous section 2.2 for evaluating the two rates of variation (1.9a) and (1.9b) up to order 2 in  $g$ .

We split the system operators  $S_i(t)$  and  $G(t)$  appearing in (1.9) into their free and source parts and we use the approximate expression (2.17b) for the source parts. We also use the approximate expression (2.15) for the source part  $R_i^s(t)$  of  $R_i(t)$ . This allows us, after a straightforward algebra, to get expressions for the two rates (1.9), valid up to order 2 in  $g$  and containing only free operators of  $\mathcal{R}$  and  $\mathcal{S}$

$$\left\{ \begin{aligned} \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf}(t) &= -\frac{ig}{2\hbar} \sum_i \{ R_i^f(t) [S_i^f(t), G^f(t)] + [S_i^f(t), G^f(t)] R_i^f(t) \} - \\ &\quad - \frac{g^2}{2\hbar^2} \sum_{ij} \int_{t_0}^t dt' (R_i^f(t) R_j^f(t') + R_j^f(t') R_i^f(t)) [S_j^f(t'), [S_i^f(t), G^f(t)]] + O(g^3) \end{aligned} \right. \quad (2.25a)$$

$$\left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr}(t) = -\frac{g^2}{2\hbar^2} \sum_{ij} \int_{t_0}^t dt' [R_j^f(t'), R_i^f(t)] (S_j^f(t') [S_i^f(t), G^f(t)] + [S_i^f(t), G^f(t)] S_j^f(t')) + O(g^3). \quad (2.25b)$$

we note that the self-reaction rate (2.25b) is of order 2 whereas the reservoir fluctuations part contains terms of order 1 (first line of 2.25a) and 2 (second line of 2.25a). Actually, the term of order 1 appears to be the first order term of the « Langevin force » acting upon  $G$ . (For the exact expression of this Langevin force, see for instance [7, 9, 10].)

The great interest of expressions (2.25) is that they can easily be averaged on the reservoir state since they only involve « free » operators. Their validity is the same as that of the expansions of § 2.2. The motional narrowing condition (2.22) being fulfilled, these expressions are valid as long as  $t - t_0$  is small compared to the relaxation time  $T_R$ .

**2.4 RESERVOIR AVERAGED RATES.** — As explained in the introduction of this section, we take a factorized initial state (2.1). The averages of the two rates (2.25) in the reservoir state  $\sigma_R(t_0)$  are therefore

$$\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} \right\rangle_R = \text{Tr}_R \left\{ \sigma_R(t_0) \cdot \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} \right\}. \quad (2.26)$$

We can always suppose that the average value of  $R_i^f(t_0)$  is equal to zero, possibly by writing

$$R_i^f(t_0) = R_i^f(t_0) - \langle R_i^f(t_0) \rangle_R + \langle R_i^f(t_0) \rangle_R \quad (2.27)$$

and by reincluding  $-g \sum_i \langle R_i^f(t_0) \rangle_R S_i(t)$  in the system Hamiltonian  $H_S$ . It follows that the reservoir average of the first line of (2.25a) is equal to zero (as is expected for a Langevin force).

Since the two rates (2.25) contain only free operators, their average value in the reservoir state is easily calculated. We get

$$\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf}(t) \right\rangle_R = -\frac{g^2}{\hbar^2} \sum_{ij} \int_{t_0}^t dt' C_{ij}^{(R)}(t, t') [S_j^f(t'), [S_i^f(t), G^f(t)]] \quad (2.28a)$$

$$\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr}(t) \right\rangle_R = -\frac{ig^2}{2\hbar} \sum_{ij} \int_{t_0}^t dt' \chi_{ij}^{(R)}(t, t') (S_j^f(t') [S_i^f(t), G^f(t)] + [S_i^f(t), G^f(t)] S_j^f(t')), \quad (2.28b)$$

where we have put

$$C_{ij}^{(R)}(t, t') = \frac{1}{2} \text{Tr}_R [\sigma_R(t_0) (R_i^f(t) R_j^f(t') + R_j^f(t') R_i^f(t))] \quad (2.29)$$

$$\chi_{ij}^{(R)}(t, t') = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R (\sigma_R(t_0) [R_i^f(t), R_j^f(t')]) \theta(t - t'), \quad (2.30)$$

$\theta$  being the Heaviside function ( $\theta(x) = 1$  if  $x > 0$ ,  $\theta(x) = 0$  if  $x \leq 0$ ). The two functions  $C_{ij}^{(R)}$  and  $\chi_{ij}^{(R)}$  are real, and they depend only on  $\tau = t - t'$  if  $\sigma_R(t_0)$  commutes with  $H_R$  (other properties of these functions are listed in appendix A).  $C_{ij}^{(R)}$  and  $\chi_{ij}^{(R)}$  are actually two important statistical functions of the reservoir [11].  $C_{ij}^{(R)}$  is the *symmetric correlation function*, describing the dynamics of the fluctuations of  $R_i$  and  $R_j$  in the stationary state  $\sigma_R(t_0)$ .



It is a satisfactory result to see that  $C_{ij}^{(R)}$  appears in the « reservoir fluctuations » term (2.28a).  $\chi_{ij}^{(R)}$  is the *linear susceptibility* of the reservoir, determining the linear response of the averaged observable  $\langle R_i(t) \rangle$  when the reservoir is acted upon by a perturbation proportional to  $R_j$ . It is also an interesting result to see that  $\chi_{ij}^{(R)}$  characterizes the « response » of the reservoir in the self reaction rate (2.28b).

The width of the two functions  $C_{ij}^{(R)}$  and  $\chi_{ij}^{(R)}$  is of the order of  $\tau_c$ . If we restrict ourselves to time  $t$  such as  $t - t_0 \gg \tau_c$  (and  $t - t_0 \ll T_R$  so that the perturbative calculation remains valid (see 2.24)), the expressions (2.28) can be simplified and written as

$$\left\langle \left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} (t) \right\rangle_R \right\rangle = - \frac{g^2}{\hbar^2} \sum_i [Y_i^f(t), [S_i^f(t), G^f(t)]] \quad (2.31a)$$

$$\left\langle \left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} (t) \right\rangle_R \right\rangle = - \frac{ig^2}{2\hbar} \sum_i (Z_i^f(t) [S_i^f(t), G^f(t)] + [S_i^f(t), G^f(t)] Z_i^f(t)), \quad (2.31b)$$

where

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_i(t) = \sum_{abj} q_{ab}(t) \langle a | S_j | b \rangle \int_0^\infty d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) e^{-i\omega_{ab}\tau} \\ Z_i(t) = \sum_{abj} q_{ab}(t) \langle a | S_j | b \rangle \int_0^\infty d\tau \chi_{ij}^{(R)}(\tau) e^{-i\omega_{ab}\tau} \end{array} \right. \quad (2.32a)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} Y_i(t) = \sum_{abj} q_{ab}(t) \langle a | S_j | b \rangle \int_0^\infty d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) e^{-i\omega_{ab}\tau} \\ Z_i(t) = \sum_{abj} q_{ab}(t) \langle a | S_j | b \rangle \int_0^\infty d\tau \chi_{ij}^{(R)}(\tau) e^{-i\omega_{ab}\tau} \end{array} \right. \quad (2.32b)$$

Note that the expressions (2.31) of the rates remain valid to order 2 in  $g$ , if we replace in the right member the free operator  $[Y_i^f(t), [S_i^f(t), G^f(t)]]$  by the reservoir average  $\langle [Y_i(t), [S_i(t), G(t)]] \rangle_R$  (from (2.11) and (2.12), the difference is at least of order 1 in  $g$ ):

$$\left\langle \left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{rf} (t) \right\rangle_R \right\rangle = - \frac{g^2}{\hbar^2} \sum_i \langle [Y_i(t), [S_i(t), G(t)]] \rangle_R \quad (2.33a)$$

$$\left\langle \left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{sr} (t) \right\rangle_R \right\rangle = - \frac{ig^2}{2\hbar} \sum_i \langle Z_i(t) [S_i(t), G(t)] + [S_i(t), G(t)] Z_i(t) \rangle_R. \quad (2.33b)$$

Each rate of variation of  $G(t)$  is now expressed as a function of  $G(t)$  itself rather than  $G^f(t)$ , and this will be more convenient for the calculations of section 3.

**Remark :** Our assumption concerning the factorization (2.1) of the initial state may seem questionable. Usually, the system  $S$  and the reservoir  $R$  are always interacting, and  $S$  and  $R$  cannot be considered as being « put together » at some initial time  $t_0$ . It follows that, at any time  $t_0$ , the total density matrix  $\rho(t_0)$  should rather be written

$$\rho(t_0) = \sigma_R(t_0) \cdot \sigma_S(t_0) + \Delta\sigma(t_0), \quad (2.34)$$

where

$$\sigma_R(t_0) = \text{Tr}_S(\rho(t_0)); \quad \sigma_S(t_0) = \text{Tr}_R(\rho(t_0)), \quad (2.35)$$

and where  $\Delta\sigma(t_0)$  describes *correlations* which exist at time  $t_0$  between  $S$  and  $R$  as a result of their previous interaction. In the presence of such correlations, the calculations presented in this section must be modified. We show, in appendix B, that, if  $R$  is a *large* reservoir, expressions (2.33) remain valid provided that the two rates of variation are considered as « coarse grained » rates of variation, i.e. as rates of variation averaged over a time interval  $\Delta t$  large compared to the correlation time  $\tau_c$ , but small compared to the relaxation time  $T_R$ .

### 3. Effective Hamiltonian and relaxation.

The two rates (2.33a) and (2.33b) only involve observables of the system  $S$ . Their expressions are more complicated than averaged Heisenberg rates, which are mere commutators of  $G(t)$  with another  $S$  operator. Nevertheless, one can distinguish in these two rates a part which is of that kind, i.e., which is physically equivalent to the effect of an effective Hamiltonian  $H_{\text{eff}}$ . The remaining non Hamiltonian part of the evolution of  $G(t)$  will simply be called relaxation.

**3.1 SEPARATION PROCEDURE.** — Consider first (2.33.a). The double commutator can be developed into

$$[Y_i, [S_i, G]] = Y_i S_i G + G S_i Y_i - Y_i G S_i - S_i G Y_i. \quad (3.1)$$

The last two terms cannot contribute to a commutator such as  $[H_{\text{eff}}, G]$ . (unless  $S_i$  reduces to a number, but, in this case, it does not express a real coupling between  $R$  and  $S$ ). Thus, the last two terms only contribute to relaxa-

tion. The first two terms can be split in a unique way into the sum of a commutator and an anticommutator, so that equation (3.1) becomes :

$$[Y_i, [S_i, G]] = \left[ \frac{1}{2}(Y_i S_i - S_i Y_i), G \right] + \frac{1}{2}(Y_i S_i + S_i Y_i) G + \frac{1}{2} G(Y_i S_i + S_i Y_i) - Y_i G S_i - S_i G Y_i. \quad (3.2)$$

In the same way, the operator of (2.33b) is transformed into :

$$Z_i [S_i, G] + [S_i, G] Z_i = \left[ \frac{1}{2}(Z_i S_i + S_i Z_i), G \right] + \frac{1}{2}(Z_i S_i - S_i Z_i) G + \frac{1}{2} G(Z_i S_i - S_i Z_i) + S_i G Z_i - Z_i G S_i. \quad (3.3)$$

We introduce the two effective Hamiltonians  $(H_{\text{eff}})_{\text{rf}}$  and  $(H_{\text{eff}})_{\text{sr}}$  corresponding to the commutator part of (3.2) and (3.3) :

$$(H_{\text{eff}}(t))_{\text{rf}} = \frac{ig^2}{2\hbar} \sum_i [Y_i(t), S_i(t)] \quad (3.4)$$

$$(H_{\text{eff}}(t))_{\text{sr}} = -\frac{g^2}{4} \sum_i (Z_i(t) S_i(t) + S_i(t) Z_i(t)). \quad (3.5)$$

The two rates (2.33a) and (2.33b) are then split into two parts using (3.2) and (3.3) :

$$\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{rf}}(t) \right\rangle_{\text{R}} = \frac{i}{\hbar} \langle [(H_{\text{eff}}(t))_{\text{rf}}, G(t)] \rangle_{\text{R}} + \left( \frac{-g^2}{2\hbar^2} \right) \sum_i \langle [Y_i(t), [S_i(t), G(t)]] + [S_i(t), [Y_i(t), G(t)]] \rangle_{\text{R}}, \quad (3.6)$$

$$\left\langle \left( \frac{dG}{dt} \right)_{\text{sr}}(t) \right\rangle_{\text{R}} = \frac{i}{\hbar} \langle [(H_{\text{eff}}(t))_{\text{sr}}, G(t)] \rangle_{\text{R}} + \left( \frac{-ig^2}{4\hbar} \right) \sum_i \langle Z_i(t) [S_i(t), G(t)] + [S_i(t), G(t)] Z_i(t) - S_i(t) [Z_i(t), G(t)] - [Z_i(t), G(t)] S_i(t) \rangle_{\text{R}}. \quad (3.7)$$

The first line of (3.6) (resp. (3.7)) describes the part of the evolution due to reservoir fluctuations (resp. due to self reaction) and which can be described by an effective Hamiltonian. The second line describes the non Hamiltonian part of the evolution of  $G$ , which we have called relaxation, caused by reservoir fluctuations (resp. self reaction). We discuss now the physical content of these equations.

**3.2 EFFECTIVE HAMILTONIANS.** — The Hamiltonian part of the evolution of  $S$  is now described by  $H_S(t) + (H_{\text{eff}}(t))_{\text{rf}} + (H_{\text{eff}}(t))_{\text{sr}}$ . We calculate in this section the modification of the energy spectrum of  $S$  due to the two effective Hamiltonians.

We have introduced above the unperturbed energy levels  $|a\rangle$  of  $S$  as the eigenstates of  $H_S(t_0)$ . The energy shifts  $(\delta E_a)_{\text{rf}}$  and  $(\delta E_a)_{\text{sr}}$  produced respectively by reservoir fluctuations and self reaction are therefore

$$(\delta E_a)_{\text{rf}} = \langle a | (H_{\text{eff}}(t_0))_{\text{rf}} | a \rangle, \quad (3.8)$$

$$(\delta E_a)_{\text{sr}} = \langle a | (H_{\text{eff}}(t_0))_{\text{sr}} | a \rangle. \quad (3.9)$$

Using formula (3.4),  $(\delta E_a)_{\text{rf}}$  becomes :

$$(\delta E_a)_{\text{rf}} = \frac{ig^2}{2\hbar} \sum_i \langle a | [Y_i(t_0), S_i(t_0)] | a \rangle. \quad (3.10)$$

Noting that  $S_i(t_0)$  is identical to  $S_i^f(t_0)$  and that  $Y_i(t_0)$  can be transformed into

$$Y_i(t_0) = \sum_j \int_0^\infty d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) S_j^f(t_0 - \tau), \quad (3.11)$$

and introducing the susceptibility of the system  $\mathcal{S}$  in the state  $|a\rangle$

$$\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle a | [S_i^f(t_0), S_j^f(t_0 - \tau)] | a \rangle \theta(\tau), \quad (3.12)$$

we transform  $(\delta E_a)_{rt}$  into :

$$(\delta E_a)_{rt} = \frac{-g^2}{2} \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ij}^{(R)}(\tau) \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) d\tau, \quad (3.13)$$

i.e., as a sum of time averaged products of susceptibilities of the system  $\mathcal{S}$  by correlation functions of reservoir observables [12]. This expression has a simple physical meaning : the fluctuations of the reservoir observables polarize  $\mathcal{S}$  and produce an additional motion of  $S_i(t)$  given by

$$\delta S_i(t) = g \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) R_j(t - \tau) d\tau. \quad (3.14)$$

The corresponding polarization energy is

$$-\frac{1}{2} g \sum_i R_i(t) \cdot \delta S_i(t), \quad (3.15)$$

as for an atom in an electric field which gets a polarization energy  $-\frac{1}{2} \chi E^2 = -\frac{1}{2} E \cdot \delta D$  for an induced dipole  $\delta D = \chi E$ . Of course, equations (3.14) and (3.15) are only qualitative, since they do not take care of the operator nature of the quantities  $R_i$  and  $\delta S_i$ . But they explain physically the structure of the exact equation (3.13). Using the symmetry properties (A.4) and (A.22) of  $C$  and  $\chi$  (see appendix A), one finds that only the reactive part  $\chi_{ij}^{(S,a)}$  contributes to (3.13) :

$$(\delta E_a)_{rt} = \frac{-g^2}{2} \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} C_{ij}^{(R)}(\tau) \chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) d\tau. \quad (3.16)$$

Only the reactive part of the susceptibility contributes to the polarization energy of  $\mathcal{S}$ .

From the expression (3.5) of  $(H_{eff})_{sr}$ , and following steps similar to those which have led us from (3.8) to (3.16), we find that the shift of the energy level  $|a\rangle$  produced by self reaction is :

$$(\delta E_a)_{sr} = \frac{-g^2}{2} \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{ij}^{(R)}(\tau) C_{ij}^{(S,a)}(\tau) d\tau, \quad (3.17)$$

where  $C_{ij}^{(S,a)}(\tau)$  is the symmetric correlation function of  $S_i$  and  $S_j$  for the system  $\mathcal{S}$  in the state  $|a\rangle$  :

$$C_{ij}^{(S,a)}(\tau) = \frac{1}{2} \langle a | S_i^f(t_0) S_j^f(t_0 - \tau) + S_j^f(t_0 - \tau) S_i^f(t_0) | a \rangle. \quad (3.18)$$

In the same way as in (3.16), only the reactive part of the susceptibility of  $\mathcal{R}$  contributes to  $(\delta E_a)_{sr}$ . Physically, it represents the polarization energy of the reservoir  $\mathcal{R}$  due to the motion of the system  $\mathcal{S}$ .

Note that the physical interpretation of both  $(\delta E_a)_{rt}$  and  $(\delta E_a)_{sr}$  is in complete agreement with the physical pictures associated with their basic origin, reservoir fluctuations and self reaction.

**3.3 RELAXATION RATES OF ENERGY.** — As an illustration of the relaxation processes produced by both reservoir fluctuations and self reaction, we compute the variation rates of the mean energy of  $\mathcal{S}$  initially in the state  $|a\rangle$ . So, we replace in (3.6) and (3.7) the observable  $G$  by the Hamiltonian  $H_S$  of  $\mathcal{S}$  and we take the diagonal matrix element of both members in the state  $|a\rangle$ . To order two in  $g$ , all the operators appearing in the right side of these equations can be considered as free operators. In this approximation, the commutators of the first lines of (3.6) and (3.7) reduce to :

$$\langle a | [H_{eff}^f, H_S^f] | a \rangle = 0, \quad (3.19)$$

since  $|a\rangle$  is an eigenstate of  $H_S^f$ . The rates (3.6) and (3.7) reduce to their relaxation parts, where we can replace  $[S_i^f(t), H_S^f(t)]$  by  $i\hbar \frac{d}{dt} S_i^f(t)$ , and similarly for  $Y_i^f(t)$  and  $Z_i^f(t)$ .

We get :

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{rf} (t) \right\rangle = \frac{-ig^2}{2\hbar} \sum_i \left\langle a \left| \left[ Y_i^f(t), \frac{d}{dt} S_i^f(t) \right] + \left[ S_i^f(t), \frac{d}{dt} Y_i^f(t) \right] \right| a \right\rangle \quad (3.20)$$

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{sr} (t) \right\rangle = \frac{g^2}{4} \sum_i \left\langle a \left| Z_i^f(t) \cdot \frac{d}{dt} S_i^f(t) + \frac{d}{dt} S_i^f(t) \cdot Z_i^f(t) - S_i^f(t) \cdot \frac{d}{dt} Z_i^f(t) - \frac{d}{dt} Z_i^f(t) \cdot S_i^f(t) \right| a \right\rangle. \quad (3.21)$$

Replacing in (2.32a) and (2.32b)  $q_{ab}(t)$  by  $q_{ab}^f(t)$ , one expresses  $Y_i^f(t)$  and  $Z_i^f(t)$  as a function of  $S_j^f(t - \tau)$ . Since  $\langle a | S_i^f(t) S_j^f(t - \tau) | a \rangle$  is independent of  $t$ , the time derivatives on  $S_i^f(t)$  can be transferred with a minus sign to  $S_j^f(t - \tau)$ , and written there as  $d/d\tau$ . We get in this way :

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{rf} (t) \right\rangle = \frac{-ig^2}{\hbar} \sum_{ij} \int_0^\infty d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) \frac{d}{d\tau} \langle a | [S_j^f(t - \tau), S_i^f(t)] | a \rangle \quad (3.22)$$

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{sr} (t) \right\rangle = \frac{g^2}{2} \sum_{ij} \int_0^\infty d\tau \chi_{ij}^{(R)}(\tau) \frac{d}{d\tau} \langle a | S_j^f(t - \tau) S_i^f(t) + S_i^f(t) S_j^f(t - \tau) | a \rangle. \quad (3.23)$$

We recognize in (3.22) the dissipative part  $i\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau)$  of the susceptibility of the system  $S$  in the state  $|a\rangle$  (see formule (A.21) of Appendix A)

$$i\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) = \frac{i}{2\hbar} \langle a | [S_i^f(t), S_j^f(t - \tau)] | a \rangle, \quad (3.24)$$

and in (3.23) the corresponding symmetric correlation function  $C_{ij}^{(S,a)}(\tau)$ , so that

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{rf} (t) \right\rangle = 2g^2 \sum_{ij} \int_0^\infty d\tau C_{ij}^{(R)}(\tau) \frac{d}{d\tau} i\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) \quad (3.25)$$

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{sr} (t) \right\rangle = g^2 \sum_{ij} \int_0^\infty d\tau \chi_{ij}^{(R)}(\tau) \frac{d}{d\tau} C_{ij}^{(S,a)}(\tau). \quad (3.26)$$

Since  $\chi_{ij}^{(R)}(\tau)$  is zero for  $\tau < 0$ , the lower limit of the integral in (3.26) can be extended to  $-\infty$ . Using the symmetry properties (A.4) of  $C_{ij}(\tau)$  and (A.22a, b) of  $\chi_{ij}(\tau)$ , one easily sees that only the dissipative part  $\chi_{ij}^{(R)}(\tau)$  contributes to (3.26). Also, in (3.25), the integrand is an even function of  $\tau$ , so that twice the integral from 0 to  $\infty$  is just the integral from  $-\infty$  to  $+\infty$ . We finally obtain two simple formulae of the same form (after an integration by parts in (3.25)), which may also be expressed by using the Fourier transforms  $\tilde{C}_{ij}(\omega)$  and  $\tilde{\chi}_{ij}(\omega)$  of the corresponding functions of  $\tau$  (see appendix A) :

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{rf} (t) \right\rangle = -g^2 \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau i\chi_{ij}^{(S,a)}(\tau) \frac{d}{d\tau} C_{ij}^{(R)}(\tau) \quad (3.27a)$$

$$= \frac{1}{2\pi} g^2 \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \tilde{C}_{ij}^{(R)}(\omega) (\tilde{\chi}_{ij}^{(S,a)}(\omega))^* \quad (3.27b)$$

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{sr} (t) \right\rangle = g^2 \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau i\chi_{ij}^{(R)}(\tau) \frac{d}{d\tau} C_{ij}^{(S,a)}(\tau) \quad (3.28a)$$

$$= -\frac{1}{2\pi} g^2 \sum_{ij} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \tilde{C}_{ij}^{(S,a)}(\omega) (\tilde{\chi}_{ij}^{(R)}(\omega))^*. \quad (3.28b)$$

These expressions are familiar : when a system  $S$  is perturbed by a classical random field  $r(t)$  through the coupling  $-gr(t)S$ , the energy absorption rate is [13] :

$$\left\langle \frac{dH_S}{dt} \right\rangle = \frac{1}{2\pi} g^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega \tilde{C}(\omega) (\tilde{\chi}''(\omega))^* \quad (3.29)$$

where  $\tilde{C}(\omega)$  is the spectral power of  $r(t)$  and  $i\tilde{\chi}''(\omega)$  is the Fourier transform of the dissipative part of the sus-

ceptibility of the system. The formula (3.27) is the extension of (3.29) for a quantum perturbation of the form (1.2). The spectral power, which, for a classical stationary random function, is just the Fourier transform of the correlation function, is replaced here by the quantum symmetric correlation function [14]. The energy relaxation rate due to reservoir fluctuations is exactly what we would expect on a physical basis : it is the power absorbed by  $S$  when it is driven by reservoir fluctuations.

Conversely, the relaxation rate of energy due to self reaction (3.28) represents the power dissipated in the reservoir by the free motion of the system  $S$ . The damping effect of the reservoir is expressed by the dissipative part of its susceptibility.

It is clear on these examples (effective Hamiltonian, relaxation rate of energy), that the separation of  $\frac{dG}{dt}$  into two parts (1.9a) and (1.9b), which was based on formal considerations, leads to results which have simple physical interpretations. The corresponding pictures are consistent with the initial assignment of the process involved, reservoir fluctuations or self reaction. This can be taken as an *a posteriori* proof of the validity of the criterion used for this separation.

#### 4. Quasi-classical system $S$ coupled to a reservoir.

4.1 MOTIVATION. — This section is devoted to the application of the previous results to the case of a quasi-classical  $S$  system. We shall see that both self reaction and reservoir fluctuation terms take remarkably simple forms; reservoir fluctuations broaden the population distribution of  $S$ , without changing its average position, while, on the contrary, self reaction produces a drift of this distribution without deforming it.

In all this section, we assume that the following properties are fulfilled by the quasi-classical system  $S$  [15] :

- (i)  $S$  has a single degree of freedom (or several separable ones).
- (ii) The energy levels, labelled by the quantum number  $n$ , are locally equidistant :

$$E_n - E_{n'} = (n - n') \hbar \omega . \quad (4.1)$$

Actually, (4.1) holds as soon as the difference  $n - n'$  is small compared to  $n$ ,  $\omega$  being the frequency of the corresponding classical motion of energy  $E_n$ .

(iii) The matrix elements  $\langle n' | G | n \rangle$  of any physical quantity  $G$  decrease rapidly as a function of  $n - n'$ , while being very smooth functions of  $n$  (for  $n - n'$  constant).

The quasi-classical nature of  $S$  introduces interesting simplifications in the general results of section 3, mainly concerning dissipative terms. In the following, we shall then focus on the evolution of the populations of  $S$ . More precisely, rather than working with the population  $P_n(t)$  of a unique level  $|n\rangle$ , which has no classical limit, we shall study the evolution of the average population  $P(E, t)$  of an energy band of width  $\delta E$  around  $E$  :

$$P(E, t) = \sum_n \varphi(E - E_n) P_n(t) . \quad (4.2)$$

The width  $\delta E$  of  $\varphi$  is chosen small compared to  $E$ , but large compared to  $\hbar \omega$  so that many energy levels contribute to the sum (4.2). We have thus replaced the discrete set of populations  $P_n(t)$  by the smoothed « energy distribution function »  $P(E, t)$ .

4.2 RESERVOIR FLUCTUATION CONTRIBUTION. — The rate of variation of  $P(E, t)$  under the effect of reservoir fluctuations is

$$\left( \frac{\partial P}{\partial t} (E, t) \right)_{rf} = \sum_n \varphi(E - E_n) \left( \frac{dP_n(t)}{dt} \right)_{rf} . \quad (4.3)$$

We first calculate the rate  $(dP_n/dt)_{rf}$  from the results of section 2. Putting  $G = |n\rangle \langle n|$  in equation (2.33a) and taking the average on both  $\mathcal{R}$  and  $S$ , one gets <sup>(2)</sup>

$$\begin{aligned} \left( \frac{dP_n(t)}{dt} \right)_{rf} &= \frac{-g^2}{\hbar^2} \langle n | YS + SY | n \rangle P_n(t) + \\ &+ \frac{g^2}{\hbar^2} \sum_{n'} (\langle n' | Y | n \rangle \langle n | S | n' \rangle + \langle n' | S | n \rangle \langle n | Y | n' \rangle) P_{n'}(t) \end{aligned} \quad (4.4)$$

(the coupling  $V = - \sum_i gR_i S_i$  is replaced in this section by the simpler one  $V = - gRS$ ). The matrix ele-

<sup>(2)</sup> We have neglected non secular couplings between populations and « coherences ».

ment  $\langle n' | Y | n \rangle$  can be written, using (2.32a) and (4.1) :

$$\langle n' | Y | n \rangle = \langle n' | S | n \rangle \int_0^\infty d\tau C^{(R)}(\tau) e^{i(n-n')\omega\tau}. \quad (4.5)$$

It is then convenient to put

$$\begin{aligned} A_k &= \frac{g^2}{\hbar^2} (\langle n+k | Y | n \rangle \langle n | S | n+k \rangle + \langle n+k | S | n \rangle \langle n | Y | n+k \rangle) \\ &= \frac{g^2}{\hbar} |\langle n | S | n+k \rangle|^2 \tilde{C}^{(R)}(-k\omega). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Because of property (iii) of § 4.1,  $A_k$  is practically independent of  $n$ . Furthermore, parity properties of  $\tilde{C}$  imply that

$$A_k \text{ real} \quad \text{and} \quad A_k = A_{-k}. \quad (4.7)$$

Introducing a closure relation in the first line of (4.4),  $\left(\frac{dP_n}{dt}\right)_{\text{rf}}$  can then be written as

$$\left(\frac{dP_n}{dt}\right)_{\text{rf}} = -P_n(t) \left(\sum_k A_k\right) + \sum_k A_k P_{n+k}(t). \quad (4.8)$$

We now carry this last expression into  $\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}}$  :

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}} = -\sum_n \sum_k \varphi(E - E_n) P_n(t) A_k + \sum_n \sum_k \varphi(E - E_n) P_{n+k}(t) A_k. \quad (4.9)$$

We change the index of summation  $n$  in  $n - k$  in the second sum to get

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}} = -\sum_n \sum_k \varphi(E - E_n) P_n(t) A_k + \sum_n \sum_k \varphi(E - E_{n-k}) P_n(t) A_k. \quad (4.10)$$

The summations over  $k$  concern both positive and negative values of  $k$ . Using (4.7), this can be written

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}} = \sum_n P_n(t) \sum_{k>0} A_k (\varphi(E - E_{n+k}) + \varphi(E - E_{n-k}) - 2\varphi(E - E_n)). \quad (4.11)$$

We can now use the fact that the width of the function  $\varphi$  as a function of  $k$  (through  $E - E_{n+k}$  or  $E - E_{n-k}$ ) is much larger than the width of  $A_k$  (property (iii) of § 4.1). The quantity  $\varphi(E - E_{n+k}) + \varphi(E - E_{n-k}) - 2\varphi(E - E_n)$  in (4.11) can then be approximated by  $(\hbar k\omega)^2 \frac{d^2\varphi(E - E_n)}{dE^2}$ .

Finally, the rate  $\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}}$  can be written as

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}} = \sum_n P_n(t) \frac{d^2\varphi(E - E_n)}{dE^2} \sum_{k>0} A_k (\hbar k\omega)^2, \quad (4.12)$$

or

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{\text{rf}} = D \frac{\partial^2 P}{\partial E^2}(E, t), \quad (4.13)$$

with

$$D = \sum_{k>0} A_k (\hbar k\omega)^2. \quad (4.14)$$

(4.13) is a very simple diffusion equation, on the energy axis, with the diffusion rate  $D$ . It follows that the only effect of reservoir fluctuations is a symmetrical broadening of the population distribution  $P(E, t)$ , while its centre remains constant. In particular, reservoir fluctuations do not change the average energy of the quasi classical system. This result can be understood in the framework of section 3 by noting that our approximations

concerning the quasi classical nature of  $S$  imply that  $\chi^{(S)}$  is zero. Equation (3.27) thus gives

$$\left\langle n \left| \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{sr} \right| n \right\rangle = 0. \quad (4.15)$$

The diffusion coefficient  $D$  can be interpreted by simple semiclassical arguments. Reservoir fluctuations induce a random walk of the system on the energy axis with steps multiple of  $\hbar\omega$ . The transition rate  $\Gamma_k$  from level  $n$  to levels  $n \pm k$  is

$$\Gamma_k = \frac{2g^2}{\hbar^2} |\langle n+k | S | n \rangle|^2 \tilde{C}(k\omega), \quad (4.16)$$

i.e., the product of the square of the matrix element of  $S$  by the spectral density  $\tilde{C}(k\omega)$  of the fluctuating field created by the reservoir at the frequency  $k\omega$ . The diffusion coefficient  $D_k$  associated with a random walk of step  $\hbar k\omega$  is then equal to half the square of the energy step times the transition rate

$$D_k = \frac{1}{2}(\hbar k\omega)^2 \Gamma_k. \quad (4.17)$$

Summing (4.17) over  $k > 0$  gives (4.14).

**4.3 SELF REACTION CONTRIBUTION.** — Self reaction terms can be calculated in the same way as reservoir fluctuations ones. One first determines the rate  $\left(\frac{dP_n}{dt}\right)_{sr}$  and then carries the result into

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr} = \sum_n \varphi(E - E_n) \left(\frac{dP_n(t)}{dt}\right)_{sr}. \quad (4.18)$$

From section 2 (see Eq. (2.33b)), one has :

$$\begin{aligned} \left(\frac{dP_n(t)}{dt}\right)_{sr} &= -\frac{ig^2}{2\hbar} \langle n | ZS - SZ | n \rangle P_n(t) + \\ &+ \frac{ig^2}{2\hbar} \sum_{n'} P_{n'}(t) (\langle n' | Z | n \rangle \langle n | S | n' \rangle - \langle n' | S | n \rangle \langle n | Z | n' \rangle). \end{aligned} \quad (4.19)$$

We now introduce the real coefficient  $B_k$  :

$$B_k = \frac{ig^2}{2\hbar} (\langle n+k | Z | n \rangle \langle n | S | n+k \rangle - \langle n+k | S | n \rangle \langle n | Z | n+k \rangle). \quad (4.20)$$

Using (2.32b),  $B_k$  can be written as

$$B_k = \frac{ig^2}{2\hbar} |\langle n | S | n+k \rangle|^2 (\tilde{\chi}^{(R)}(-k\omega) - \tilde{\chi}^{(R)}(k\omega)). \quad (4.21)$$

Since  $\tilde{\chi}^{(R)}(-\Omega) = \tilde{\chi}^{(R)*}(\Omega)$ , we get from (A.19)

$$B_k = \frac{g^2}{\hbar} |\langle n | S | n+k \rangle|^2 \tilde{\chi}^{(R)}(k\omega). \quad (4.22)$$

with the following property (compare with (4.7))

$$B_k \text{ real} \quad \text{and} \quad B_k = -B_{-k}. \quad (4.23)$$

As  $A_k$  in the previous paragraph,  $B_k$  decreases rapidly when  $|k|$  increases, while being nearly independent of  $n$ .

The rate  $(dP_n/dt)_{sr}$  of (4.19) can be written

$$\left(\frac{dP_n(t)}{dt}\right)_{sr} = -\left(\sum_k B_k\right) P_n(t) + \sum_k B_k P_{n+k}(t). \quad (4.24)$$

We now put this rate into  $\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr}$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr} = - \sum_n \sum_k \varphi(E - E_n) B_k P_n + \sum_n \sum_k \varphi(E - E_{n-k}) B_k P_n. \quad (4.25)$$

The first term is zero since, with (4.23)

$$\sum_k B_k = 0. \quad (4.26)$$

$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr}$  then becomes :

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr} &= \sum_n \sum_k \varphi(E - E_{n-k}) B_k P_n \\ &= \sum_n \sum_{k>0} (\varphi(E - E_{n-k}) - \varphi(E - E_{n+k})) B_k P_n. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Because of the presence of  $B_k$  in (4.27), only small values of  $k$  contribute and the quantity  $\varphi(E - E_{n-k}) - \varphi(E - E_{n+k})$  can be approximated by

$$2 \hbar k \omega \frac{d\varphi(E - E_n)}{dE}.$$

We finally get

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr} = \left(\sum_n \frac{d\varphi(E - E_n)}{dE} P_n\right) \left(\sum_{k>0} 2 \hbar k \omega B_k\right) \quad (4.28)$$

or

$$\left(\frac{\partial P}{\partial t}(E, t)\right)_{sr} = K \cdot \frac{\partial P}{\partial E}(E, t) \quad (4.29)$$

with

$$K = \sum_{k>0} 2 \hbar k \omega B_k = \sum_k \hbar k \omega B_k. \quad (4.30)$$

Equation (4.29) is a propagation equation : the energy distribution function drifts along the energy axis with the « speed »  $K$ . Note that  $-K$  is equal to the energy lost per unit of time by the system  $S$  in the state  $n$ , because of self reaction (see Eq. (3.28))

$$\begin{aligned} \left\langle \left(\frac{dH_S}{dt}\right)_{sr} \right\rangle &= - \frac{g^2}{2\pi} \int d\Omega \Omega \tilde{\chi}^{(R)}(\Omega) \tilde{C}^{(S,n)}(\Omega) \\ &= - \frac{g^2}{2} \int d\Omega \Omega \tilde{\chi}^{(R)}(\Omega) \sum_k |\langle n | S | n+k \rangle|^2 (\delta(\Omega - k\omega) + \delta(\Omega + k\omega)) \\ &= - \sum_k \hbar k \omega B_k. \end{aligned} \quad (4.31)$$

If we combine the results of this section, we find that the energy distribution function of a quasi classical system obeys a Fokker-Planck type equation

$$\frac{\partial P}{\partial t}(E, t) = K \frac{\partial P}{\partial E}(E, t) + D \frac{\partial^2 P}{\partial E^2}(E, t). \quad (4.32)$$

The drift term  $K \partial P / \partial E$  describes the emission or absorption of energy by the system, resulting from self reaction effects, while the diffusion term  $D \partial^2 P / \partial E^2$  describes the broadening of the distribution function caused by reservoir fluctuations.

## 5. Application to the spontaneous emission of a large angular momentum.

5.1 INTRODUCTION. — This last section is devoted to the application of the previous results to a specific example : we study the emission of energy by a large angular momentum coupled to the quantized radiation field in its vacuum state, which plays the rôle of a large reservoir.



The angular momentum is supposed to be put in a static magnetic field  $B_0$  so that its energy levels are equally spaced with a splitting  $\hbar\omega_0$ , where  $\omega_0 = -\gamma B_0$  is the Larmor frequency ( $\gamma$  gyromagnetic ratio). We thus have

$$H_S = \omega_0 J_z. \quad (5.1)$$

The Hamiltonian of the reservoir is simply

$$H_R = \sum_{\mathbf{k}\epsilon} \hbar\omega a_{\mathbf{k}\epsilon}^+ a_{\mathbf{k}\epsilon}, \quad (5.2)$$

where  $a_{\mathbf{k}\epsilon}$  ( $a_{\mathbf{k}\epsilon}^+$ ) is the destruction (creation) operator of a photon in the mode  $\mathbf{k}\epsilon$ . We take a magnetic dipole coupling between  $\mathbf{J}$  and the radiation field

$$V = -\gamma \mathbf{J} \cdot \mathbf{B} \quad (5.3)$$

where  $\mathbf{B}$  is the magnetic field operator.

At the initial time, the angular momentum is supposed to be in its upper level  $|J, m = J\rangle$ .

We want to study here the contribution of reservoir fluctuations (i.e. vacuum fluctuations) and self reaction to the evolution of the system :

(i) in the early stage of the emission (i.e. : the transition  $|J, J\rangle \rightarrow |J, J-1\rangle$ ) (§ 5.2),

(ii) in the following regime where the populated levels  $|J, m\rangle$  are such that  $J-m$  is large compared to 1. The angular momentum can then be treated as a quasi classical system (§ 5.3) and the results of § 4 apply.

Our principal motivation for studying this problem lies in the fact that the spontaneous emission of a large angular momentum is a simple model [16] for describing the superradiance of  $2J$  two level atoms put initially in their excited state. We shall see that vacuum fluctuations and self reaction equally contribute to the initial stage of superradiance, but that self reaction becomes predominant in the following part of the process.

5.2 EARLY STAGE OF THE EMISSION PROCESS. — If the angular momentum is put into its upper level  $|J, J\rangle$ , vacuum fluctuations and self reaction will both induce transitions towards  $|J, J-1\rangle$ . The easiest way to

compare their contributions is to study the two rates  $\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{\text{rf}} \right\rangle$  and  $\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{\text{sr}} \right\rangle$  for  $\sigma_S = |J, J\rangle \langle J, J|$ .

We shall not give here the explicit calculations of the statistical functions  $\chi^{(R)}$ ,  $C^{(R)}$  and  $\chi^{(S)}$ ,  $C^{(S)}$  involved in these rates; a similar algebra has already been performed in I. We just indicate the final result

$$\left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{\text{rf}} \right\rangle = \left\langle \left( \frac{dH_S}{dt} \right)_{\text{sr}} \right\rangle = \hbar\omega_0 \frac{\Gamma}{2}, \quad (5.4)$$

where we have put

$$\Gamma = \frac{\hbar\omega_0^3 \gamma^2 J}{3 \pi \epsilon_0 c^5}. \quad (5.5)$$

We therefore find that vacuum fluctuations and self reaction equally contribute to the emission of energy in the early stage of superradiance (half the total rate for each process).

Such a result also appears in the analysis of superradiance based on a Bloch vector ( $\langle \mathbf{J} \rangle$ ) approach [16], where the emission process is described in terms of a pendulum starting from its metastable (upwards) equilibrium position. Without fluctuations, the pendulum would remain indefinitely in this position. Actually, the quantum fluctuations of atomic dipole moment, and those of the quantum vacuum field play an essential rôle in the initial stage of the process by removing the pendulum from its metastable position; they introduce a small « tipping angle »  $\theta$ . The correct equation of motion for  $\langle \mathbf{J} \rangle$  is obtained if one takes [16]

$$\langle \theta^2 \rangle = \frac{2}{J}. \quad (5.6)$$

The tipping angle  $\theta_{\text{sr}}$  due to self reaction can be obtained simply by remarking that, since  $\mathbf{J}$  is a quantum operator,  $\langle J_x^2 + J_y^2 \rangle$  is non zero. This gives

$$\langle \theta_{\text{sr}}^2 \rangle = \frac{\langle J_x^2 + J_y^2 \rangle}{\langle J_z^2 \rangle} = \frac{1}{J}. \quad (5.7)$$

Since the power radiated by the pendulum is obviously proportional to  $\theta^2$ , one finds that the emission rate due to self reaction is only half of the total rate (compare (5.6) and (5.7)). The remaining part is due to vacuum fluctuations.

**Remark** : This result is actually not specific of the previous simple example. It also occurs for the spontaneous emission of any excited atomic level by electric dipole coupling : the contributions of vacuum fluctuations and self reaction for transitions towards lower levels are the same and equal to half the total emission rate [1]. This explains the well known following result : if one tries to calculate the spontaneous emission rate of a two level atom by coupling it to a classical random field having an energy  $\hbar\omega/2$  per mode, one gets only half the emission rate. This is simply due to the fact that one calculates in this way only the vacuum fluctuations rate. The missing emission rate is simply that due to self reaction.

**5.3 FOLLOWING STAGE OF THE EMISSION PROCESS.** — When the populated levels  $|J, m\rangle$  are such as  $J - m \gg 1$ , the results obtained for a quasi classical system (§ 4) can be applied : the levels are equally spaced and a given level  $|J, m\rangle$  is only coupled to  $|J, m - 1\rangle$  and  $|J, m + 1\rangle$  by the coupling  $V$  (5.3). Furthermore, matrix elements of  $V$  vary very smoothly with  $m$  (as  $\sqrt{J(J+1) - m(m+1)}$ ). One therefore gets a Fokker-Planck type equation (4.32) for the evolution of the energy distribution function  $P(E, t)$  :

$$\frac{\partial P}{\partial t} = K \frac{\partial P}{\partial E} + D \frac{\partial^2 P}{\partial E^2}, \quad (5.8)$$

with <sup>(3)</sup>

$$K = \hbar\omega_0 \Gamma \frac{J^2 - m^2}{2J}, \quad (5.9)$$

$$D = \hbar\omega_0 K. \quad (5.10)$$

As seen in § 4, the emission of energy (term  $K \partial P/\partial E$ ) is entirely due to self reaction, the only effect of vacuum fluctuations being to broaden the energy distribution (term  $D \partial^2 P/\partial E^2$ ).

Moreover, the vacuum fluctuation term is in fact negligible in the present case ; the order of magnitude of  $D \partial^2 P/\partial E^2$  is  $(D/\delta E)(\partial P/\partial E)$ , where  $\delta E$  is the width of  $P(E, t)$ , so that one gets from (5.10) :

$$D \frac{\partial^2 P}{\partial E^2} \simeq \frac{\hbar\omega_0}{\delta E} K \frac{\partial P}{\partial E}. \quad (5.11)$$

Since the width  $\delta E$  of  $P(E, t)$  has been taken much larger than  $\hbar\omega_0$  (see § 4.1), we have

$$D \frac{\partial^2 P}{\partial E^2} \ll K \frac{\partial P}{\partial E}. \quad (5.12)$$

The evolution of the system in this later stage appears then as being mainly due to self reaction. The energy distribution function drifts as a « quasi classical probability packet » [16] downward the energy axis.

When the emission process is completed, the angular momentum ends in the lower level  $|J, -J\rangle$ . Vacuum fluctuation effects play again a very important rôle ; they exactly balance the energy loss due to self reaction, ensuring the stability of the ground state [14].

#### Appendix A. — Some properties of correlation functions and susceptibilities.

We illustrate these properties, for the reservoir  $\mathcal{R}$  in a stationary state defined by the density matrix  $\sigma_{\mathcal{R}}$  ( $\sigma_{\mathcal{R}}$  commutes with the Hamiltonian  $H_{\mathcal{R}}$ ). Similar results also hold for the system  $S$  in an eigenstate of  $H_S$ . We use here the same definitions as in references [11] and [13] for the Fourier transforms  $\tilde{C}(\omega)$  and  $\tilde{\chi}(\omega)$ . The  $\hat{C}(\omega)$  and  $\hat{\chi}(\omega)$  of reference [1] are related to  $\tilde{C}$  and  $\tilde{\chi}$  by :

$$\hat{C}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{C}(-\omega) \quad \hat{\chi}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \tilde{\chi}(-\omega). \quad (A.1)$$

*Correlation functions :*

$$C_{ij}(t, t') = \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathcal{R}} \{ \sigma_{\mathcal{R}}(R_i^f(t) R_j^f(t') + R_j^f(t') R_i^f(t)) \}. \quad (A.2)$$

For a stationary state,  $C_{ij}$  depends only on  $\tau = t - t'$

$$C_{ij}(\tau) = \frac{1}{2} \text{Tr}_{\mathcal{R}} \{ \sigma_{\mathcal{R}}(R_i^f(t_0) R_j^f(t_0 - \tau) + R_j^f(t_0 - \tau) R_i^f(t_0)) \} \quad (A.3)$$

---

<sup>(3)</sup> The simple relation between  $D$  and  $K$  is actually a consequence of the fluctuation-dissipation theorem applied to the electromagnetic field in its ground state (reservoir at zero temperature).

$C_{ij}(\tau)$  is real. The expression (A.2) being invariant in the exchange of  $(i, t) \leftrightarrow (j, t')$ , we have the important property :

$$C_{ij}(\tau) = C_{ji}(-\tau). \quad (\text{A.4})$$

Developing on the eigenstates of  $H_R$ , one can write (A.2) as

$$C_{ij}(\tau) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | \sigma_R | \alpha \rangle \langle \alpha | R_i | \beta \rangle \langle \beta | R_j | \alpha \rangle e^{i\omega_{\alpha\beta}\tau} + \text{c.c.} \quad (\text{A.5})$$

The Fourier transform  $\tilde{C}_{ij}$  is defined by :

$$\tilde{C}_{ij}(\omega) = \int d\tau C_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau}. \quad (\text{A.6})$$

From the reality of  $C_{ij}$ , it follows that

$$\tilde{C}_{ij}(\omega) = (\tilde{C}_{ij}(-\omega))^*. \quad (\text{A.7})$$

From the property (A.3), we get

$$\tilde{C}_{ij}(\omega) = \tilde{C}_{ji}(-\omega) = (\tilde{C}_{ji}(\omega))^*. \quad (\text{A.8})$$

*Susceptibilities :*

$$\chi_{ij}(t, t') = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R \{ \sigma_R [R_i^f(t), R_j^f(t')] \} \theta(t - t'). \quad (\text{A.9})$$

Stationarity makes  $\chi_{ij}$  depend only on  $\tau = t - t'$

$$\chi_{ij}(\tau) = \frac{i}{\hbar} \text{Tr}_R \{ \sigma_R [R_i^f(t_0), R_j^f(t_0 - \tau)] \} \theta(\tau). \quad (\text{A.10})$$

$\chi_{ij}(\tau)$  is real and is equal to zero for  $\tau < 0$ . It is easily seen on formula (A.9) that exchanging  $(i, t)$  and  $(j, t')$  amounts to changing  $\theta(t - t')$  into  $-\theta(t - t')$ . Using the fact that  $\theta(t - t') + \theta(t' - t) = 1$ , we obtain the relation

$$\chi_{ij}(\tau) - \chi_{ji}(-\tau) = \frac{i}{\hbar} \langle [R_i^f(t_0), R_j^f(t_0 - \tau)] \rangle \quad (\text{A.11})$$

valid for  $\tau$  positive or negative. Using a development on the eigenstates of  $H_R$ , one can put (A.10) in the following form :

$$\chi_{ij}(\tau) = \sum_{\alpha\beta} \langle \alpha | \sigma_R | \alpha \rangle \left( \frac{i}{\hbar} \langle \alpha | R_i | \beta \rangle \langle \beta | R_j | \alpha \rangle e^{i\omega_{\alpha\beta}\tau} + \text{c.c.} \right) \theta(\tau). \quad (\text{A.12})$$

Its Fourier transform is given by :

$$\tilde{\chi}_{ij}(\omega) = \int d\tau \chi_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} = \sum_{\alpha\beta} \frac{-\pi}{\hbar} \langle \alpha | \sigma_R | \alpha \rangle \left\{ \langle \alpha | R_i | \beta \rangle \langle \beta | R_j | \alpha \rangle \left( \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\omega + \omega_{\alpha\beta}} - i \delta(\omega + \omega_{\alpha\beta}) \right) \right. \quad (\text{A.13})$$

$$\left. - \langle \alpha | R_j | \beta \rangle \langle \beta | R_i | \alpha \rangle \left( \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_{\alpha\beta}} - i \delta(\omega - \omega_{\alpha\beta}) \right) \right\}. \quad (\text{A.14})$$

The reality of  $\chi_{ij}(\tau)$  implies that

$$\tilde{\chi}_{ij}(\omega) = (\tilde{\chi}_{ij}(-\omega))^*. \quad (\text{A.15})$$

One distinguishes the reactive part  $\chi'_{ij}(\omega)$ , corresponding to the principal parts, and the dissipative part  $\chi''_{ij}(\omega)$  involving the  $\delta$  functions :

$$\tilde{\chi}_{ij}(\omega) = \tilde{\chi}'_{ij}(\omega) + i\tilde{\chi}''_{ij}(\omega) \quad (\text{A. 16})$$

$$\tilde{\chi}'_{ij}(\omega) = \sum_{\alpha\beta} \frac{-1}{\hbar} \langle \alpha | \sigma_{\mathbf{R}} | \alpha \rangle \left\{ \langle \alpha | R_i | \beta \rangle \langle \beta | R_j | \alpha \rangle \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega + \omega_{\alpha\beta}}\right) - \langle \alpha | R_j | \beta \rangle \langle \beta | R_i | \alpha \rangle \mathcal{P}\left(\frac{1}{\omega - \omega_{\alpha\beta}}\right) \right\} \quad (\text{A. 17a})$$

$$\tilde{\chi}''_{ij}(\omega) = \sum_{\alpha\beta} \frac{\pi}{\hbar} \langle \alpha | \sigma_{\mathbf{R}} | \alpha \rangle \left\{ \langle \alpha | R_i | \beta \rangle \langle \beta | R_j | \alpha \rangle \delta(\omega + \omega_{\alpha\beta}) - \langle \alpha | R_j | \beta \rangle \langle \beta | R_i | \alpha \rangle \delta(\omega - \omega_{\alpha\beta}) \right\}. \quad (\text{A. 17b})$$

For a symmetric susceptibility ( $i = j$ ),  $\tilde{\chi}'_{ii}$  and  $\tilde{\chi}''_{ii}$  correspond to the real and imaginary parts of  $\tilde{\chi}_{ii}$ . This property is not true in general, but is replaced by the properties

$$\tilde{\chi}'_{ij}(\omega) = (\tilde{\chi}'_{ji}(\omega))^* \quad (\text{A. 18a})$$

$$\tilde{\chi}''_{ij}(\omega) = (\tilde{\chi}''_{ji}(\omega))^* . \quad (\text{A. 18b})$$

From (A. 15) and (A. 17), one easily gets

$$\tilde{\chi}''_{ij}(\omega) = \frac{i}{2} ((\tilde{\chi}'_{ji}(\omega))^* - \tilde{\chi}'_{ij}(\omega)) \quad (\text{A. 19})$$

and then

$$\chi''_{ij}(\tau) = \frac{i}{2} (\chi_{ji}(-\tau) - \chi_{ij}(\tau)) \quad (\text{A. 20})$$

$$= \frac{1}{2\hbar} \langle [R_i^f(t_0), R_j^f(t_0 - \tau)] \rangle \quad (\text{A. 21})$$

by using (A. 10).

The Fourier transform of (A. 18a and b) gives the symmetry relations :

$$\chi'_{ij}(\tau) = \chi'_{ji}(-\tau) \quad (\text{A. 22a})$$

$$\chi''_{ij}(\tau) = -\chi''_{ji}(-\tau). \quad (\text{A. 22b})$$

### Appendix B. — Coarse grained rates of variation.

The reservoir averaged rates of variation (2. 28) have been calculated in § 2 with the assumption of a factorized initial state (2. 1). We consider in this appendix the more general case of a non factorized initial state (2. 34) (see remark at the end of § 2).

The fact that  $\mathcal{R}$  is a large reservoir has interesting consequences [8] on the reservoir operator  $\sigma_{\mathbf{R}}(t_0)$  appearing in (2. 34) and on the correlation term  $\Delta\sigma(t_0)$  :

(i) The state of the large reservoir is not perturbed by the small system. We can therefore neglect the  $t_0$  dependence of  $\sigma_{\mathbf{R}}(t_0)$ , which will be simply written  $\sigma_{\mathbf{R}}$ .

(ii) The correlations  $\Delta\sigma(t_0)$ , which exist between  $\mathcal{S}$  and  $\mathcal{R}$  at time  $t_0$ , contribute to the future evolution of  $\mathcal{S}$ , but only within a correlation time  $\tau_c$ , i.e. in the interval  $[t_0, t_0 + \tau_c]$ . After this interval, the effect of the correlations  $\Delta\sigma(t_0)$  washes out.

We consider now the average of the two rates (2. 25) in the state (2. 34). The contribution of the factorized part of (2. 34),  $\sigma_{\mathcal{S}}(t_0) \sigma_{\mathbf{R}}$ , is the same as in (2. 28). Since it is given by an integral from  $t_0$  to  $t$  involving statistical functions of the reservoir  $C^{(\mathbf{R})}$  and  $\chi^{(\mathbf{R})}$ , this contribution vanishes for  $t = t_0$ , increases over an interval  $\tau_c$  and then saturates (for  $t - t_0 \gg \tau_c$ ) to the value (2. 31). On the other hand, the contribution of the correlation part  $\Delta\sigma$  of (2. 34) is non zero only for  $t - t_0 \leq \tau_c$  because of the point (ii) mentioned above. It follows that, if we average the rates of variation over a time interval  $[t_0, t_0 + \Delta t]$  such that

$$\tau_c \ll \Delta t \ll T_{\mathbf{R}}, \quad (\text{B. 1})$$

we can ignore the contribution of  $\Delta\sigma$ , and replace the contribution of  $\sigma_{\mathcal{S}}(t_0) \sigma_{\mathbf{R}}$  by its asymptotic value (2. 31); the relative error associated with these two approximations is of the order of  $\tau_c/\Delta t$ . With such a « coarse grained average » at time  $t_0$ , we implicitly renounce to a detailed knowledge of the dynamics of  $\mathcal{S}$  on a time scale  $\tau_c$ .

Actually, the coarse grained average must be done on the part of the rate of variation which is due to the coupling (and not to the system Hamiltonian  $H_S$ ). Mathematically, it is therefore more convenient to use a set of operators  $\tilde{q}_{ab}(t)$  having no free evolution and defined by :

$$q_{ab}(t) = \tilde{q}_{ab}(t) e^{i\omega_{ab}t}. \quad (\text{B.2})$$

The coarse grained rate of variation is thus given by :

$$\left\langle \frac{\Delta \tilde{q}_{ab}}{\Delta t} \right\rangle (t_0) = \frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt \left\langle \frac{d\tilde{q}_{ab}}{dt} (t) \right\rangle, \quad (\text{B.3})$$

where  $\frac{d\tilde{q}_{ab}}{dt} (t)$  is deduced from (2.25). We then make the two previously mentioned approximations, and replace  $\left\langle \frac{d\tilde{q}_{ab}}{dt} (t) \right\rangle$  by its asymptotic value deduced from (2.31). After a straightforward algebra, one gets for example for the reservoir fluctuation term (compare with 2.33) :

$$\left\langle \frac{\Delta \tilde{q}_{ab}}{\Delta t} \right\rangle (t_0) = \frac{-g^2}{\hbar^2} \left( \sum_i \left\langle [Y_i(t_0), [S_i(t_0), \tilde{q}_{ab}(t_0)]] \right\rangle \right)_{\text{SEC}} \quad (\text{B.4})$$

where the index « SEC » means that, in the expansion of the atomic operator  $[Y_i(t_0), [S_i(t_0), \tilde{q}_{ab}(t_0)]]$  in the basis  $\tilde{q}_{cd}(t_0)$ , only the secular terms  $\tilde{q}_{cd}(t_0)$  with  $|\omega_{cd} - \omega_{ab}| \ll \Delta t^{-1}$  are kept. This is due to the fact that non secular couplings  $|\omega_{cd} - \omega_{ab}| \geq \Delta t^{-1}$  are washed out in the integral (B.3) by a factor :

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{t_0}^{t_0 + \Delta t} dt e^{i(\omega_{ab} - \omega_{cd})t} \lesssim \frac{1}{\Delta t |\omega_{ab} - \omega_{cd}|}. \quad (\text{B.5})$$

Equations (2.33a) and (2.33b) can therefore be generalized to any time  $t_0$ , provided that they are understood as secular equations for coarse grained rates of variation.

### Appendix C. — Time reversal properties of the two rates of variation due to self reaction and reservoir fluctuations.

In the splitting (1.7) of  $\sum_i R_i(t) N_i(t)$ , we have implicitly supposed  $\lambda$  real, so that hermiticity of reservoir fluctuation terms (1.8a) and self reaction ones (1.8b) implies  $\lambda = 1/2$ . Actually, one could consider taking  $\lambda$  complex, in which case hermiticity would only require  $\lambda + \lambda^* = 1$ , i.e.,  $\lambda = 1/2 + i\kappa$  ( $\kappa$  real). But it appears that  $\kappa$  must be zero if we want that the two rates of variation respectively due to vacuum fluctuations and self reaction behave separately as « good velocities ».

Consider a physical quantity  $G$  having a given signature in time reversal. If  $G$  is even,  $dG/dt$  is odd. It seems reasonable to impose separately the same property to reservoir fluctuation terms and self reaction ones. Actually, since we calculate only coarse grained rates of variation at time  $t_0$ ,  $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)_{\text{rf}}(t_0)$  and  $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)_{\text{sr}}(t_0)$  (see appendix B), it is sufficient to consider time reversal around  $t_0$ . Furthermore, the total interaction Hamiltonian is even, so that  $R_i$  and  $S_i$  can be chosen with a well defined parity. It then follows that  $R_i^f$  and  $R_i^s$  have the same parity as  $R_i$  in time reversal around  $t_0$  (see (2.7) and (2.8))<sup>(4)</sup>. Putting this result in (1.8), one easily sees that  $(dG/dt)_{\text{rf}}(t)$  and  $(dG/dt)_{\text{sr}}(t)$  have the parity opposite to that of  $G$  in time reversal around  $t_0$  if and only if  $\kappa$  is equal to zero. Such a property remains valid for the coarse grained rates  $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)_{\text{rf}}(t_0)$  and  $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)_{\text{sr}}(t_0)$  (see (B.3)).

We have therefore shown that  $\lambda$  has to be real in order that  $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)_{\text{rf}}(t_0)$  and  $\left(\frac{\Delta G}{\Delta t}\right)_{\text{sr}}(t_0)$  behave as « good velocities », i.e., that they have the opposite signature of  $G$  in a time reversal around  $t_0$ .

<sup>(4)</sup> In equation (2.19b) of [1], giving the source field ( $R_i^f$ ) in terms of the atomic velocity  $\pi/M$  and acceleration  $\dot{\pi}/M$ ,  $t - t_0$  is implicitly supposed to be positive. In the general case, the acceleration term is found to be multiplied by the sign of  $(t - t_0)$ , ensuring the good time reversal symmetry for  $R_i^f$ .

References

- [1] DALIBARD, J., DUPONT-ROC, J. and COHEN-TANNOUDJI, C., *J. Physique* **43** (1982) 1617.
  - [2] SENITZKY, I. R., *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 955.
  - [3] MILONNI, P. W., ACKERHALT, J. R. and SMITH, W. A., *Phys. Rev. Lett.* **31** (1973) 958.
  - [4] MILONNI, P. W. and SMITH, W. A., *Phys. Rev. A* **11** (1975) 814.
  - [5] MILONNI, P. W., *Phys. Rep.* **25** (1976) 1.
  - [6] This implicit assumption in [1] has been pointed out to us by S. EPSTEIN (Private Communication).
  - [7] AGARWAL, G. S., Springer Tracts in Modern Physics, Volume 70 (Springer Verlag, Berlin) 1974.  
AGARWAL, G. S., *Phys. Rev. A* **10** (1974) 717.
  - [8] COHEN-TANNOUDJI, C., in *Frontiers in Laser Spectroscopy*, Volume 1, les Houches 1975, Session XXVII, edited by BALIAN, R., HAROCHE, S. and LIBERMAN, S. (North Holland, Amsterdam) 1977, p. 3.
  - [9] GRABERT, H., *Z. Phys. B* **26** (1977) 79.
  - [10] COHEN-TANNOUDJI, C., Cours du Collège de France 1978-79, Paris (unpublished).
  - [11] MARTIN, P., in *Many Body Physics*, les Houches 1967, edited by DE WITT, C. and BALIAN, R. (Gordon and Breach, New York) 1968, p. 39.
  - [12] DUPLANTIER, B., Thèse 3<sup>e</sup> cycle, 1978, Paris (unpublished). Expressions of this type can also be found in the context of quantum electrodynamics in HUANG, K., *Phys. Rev.* **101** (1956) 1173.
  - [13] LANDAU, L. and LIFCHITZ, E. M., *Statistical Physics* (Pergamon Press) 1958, section 124.
  - [14] FAIN, V. M., *Sov. Phys. J.E.T.P.* **23** (1966) 882.  
FAIN, V. M. and KHANIN, Y. I., *Quantum Electronics* (M.I.T. Press, Cambridge) 1969.
  - [15] LANDAU, L. and LIFCHITZ, E. M., *Quantum Mechanics* (Pergamon Press) 1958, section 46.
  - [16] GROSS, M. and HAROCHE, S., *Phys. Rep.* **93** (1982) 301 and references therein.
-

PARTIE B :

LE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE ATOMIQUE

DANS UNE ONDE LUMINEUSE

## LE PROBLEME DU MOUVEMENT ATOMIQUE DANS UNE ONDE LUMINEUSE

La première partie de ce travail a été consacrée à l'étude des modifications de la dynamique *interne* d'un atome provoquées par l'interaction de cet atome avec le champ électromagnétique. Nous avons pour cela considéré le mouvement d'un électron à l'intérieur de l'atome, et étudié les perturbations induites sur ce mouvement par le rayonnement.

Dans cette seconde partie, nous allons nous intéresser au *mouvement global de translation* de l'atome, et essayer de comprendre comment les processus d'absorption et d'émission (spontanée ou induite) de photons par l'atome modifient sa trajectoire, par exemple en le "refroidissant" ou en le "chauffant". Plus précisément, notre but est d'obtenir une équation du mouvement ne concernant que les variables atomiques externes, après avoir éliminé à la fois les variables du champ électromagnétique et les variables atomiques internes.

L'élimination des variables du champ électromagnétique est une démarche bien connue en physique atomique et en optique quantique : elle permet d'obtenir, à partir de l'équation d'évolution du système total "atome + champ", "l'équation pilote" décrivant l'évolution de la matrice densité atomique réduite [1-3]. Ce problème peut également être rapproché du problème du mouvement Brownien d'une grosse particule évoluant dans un bain de molécules beaucoup plus légères : il s'agit alors d'éliminer les variables des molécules pour obtenir une équation fermée, généralement du type Fokker-Planck, pour les variables de la particule Brownienne [4,5]

L'élimination des variables atomiques internes est un problème de nature différente : l'évolution des variables externes est fortement couplée à celle des variables internes, et il faut avoir recours à des approximations supplémentaires pour pouvoir extraire de l'équation pilote relative à l'ensemble des degrés de liberté



de l'atome, une équation ne concernant que les variables externes. Nous supposerons ici que l'impulsion des photons échangés lors des processus absorption-émission est très petite devant l'impulsion moyenne de l'atome. Nous nous limiterons de plus à des atomes relativement lents : l'état interne de l'atome peut alors suivre quasi-adiabatiquement le mouvement externe, et nous serons ainsi ramenés au problème bien connu (et soluble !) de l'élimination de variables rapides (les variables internes) au profit de variables lentes (les variables externes) [6].

Afin de bien séparer ces deux problèmes d'élimination des variables du champ et des variables atomiques internes, nous avons choisi de commencer cette partie (chapitre B1) par l'étude d'un modèle quantique de mouvement Brownien pour une particule sans degré de liberté interne. Il nous a en effet semblé intéressant d'introduire sur cet exemple simple, qui a été étudié en détail depuis plusieurs dizaines d'années [7], des méthodes de résolution qui seront reprises par la suite. Le résultat essentiel de ce chapitre est l'établissement d'une équation d'évolution, de type Fokker-Planck, pour  $\pi(\vec{P}, t)$ , probabilité de trouver la particule Brownienne avec l'impulsion  $\vec{P}$  à l'instant  $t$  :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{P}} (\gamma \vec{P} \pi) + \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \vec{P}^2} \quad (\text{BO-1})$$

Nous donnons également l'expression des coefficients de friction  $\gamma$  et de diffusion  $D$  en fonction de valeurs moyennes à deux temps de la force agissant sur la particule Brownienne.

Une application directe de ces résultats est ensuite présentée dans le chapitre B2 consacré à l'étude de la thermalisation d'électrons libres dans le rayonnement du corps noir. Nous y discutons le processus physique à la base de cette thermalisation (la diffusion Compton), ainsi que les échelles de temps typiques du phénomène.

Dans le chapitre B3, nous abordons le problème du mouvement d'un atome à deux niveaux  $e$  et  $f$  dans un champ homogène chaotique. Grâce à l'hypothèse d'homogénéité, le problème est invariant par

translation, et la description du mouvement atomique peut encore se faire par l'intermédiaire de la fonction  $\pi(\vec{p}, t)$ . Mais l'équation pilote ne fournit plus directement l'évolution de  $\pi(\vec{p}, t)$  ; elle donne plutôt 4 équations d'évolution couplées pour chacune des composantes de la matrice densité atomique  $\sigma^A$  :  $\sigma_{e_e}^A(\vec{p}, t)$ ,  $\sigma_{f_f}^A(\vec{p}, t)$ ,  $\sigma_{e_f}^A(\vec{p}, t)$  et  $\sigma_{f_e}^A(\vec{p}, t)$ , où l'on a posé :

$$\sigma_{ij}^A(\vec{p}, t) = \langle i, \vec{p} | \sigma^A(t) | j, \vec{p} \rangle \quad \text{avec } i, j = e, f \quad (\text{BO-2})$$

$\pi(\vec{p}, t)$  est alors donné par :

$$\pi(\vec{p}, t) = (\sigma_{e_e}^A + \sigma_{f_f}^A) (\vec{p}, t) \quad (\text{BO-3})$$

A ce niveau, l'hypothèse d'un champ chaotique apporte une simplification notable : pourvu que le temps de corrélation des fluctuations de ce champ soit suffisamment court, l'évolution des "cohérences"  $\sigma_{e_f}^A$  et  $\sigma_{f_e}^A$  se découple de celle des populations  $\sigma_{e_e}^A$  et  $\sigma_{f_f}^A$ . Le problème de l'élimination des variables internes prend ainsi une forme particulièrement simple puisqu'il s'agit d'extraire des deux équations donnant  $\sigma_{e_e}^A$  et  $\sigma_{f_f}^A$  une équation pour  $\sigma_{e_e}^A + \sigma_{f_f}^A$  uniquement. Nous arrivons alors à une équation du type (BO-1) où là encore les coefficients de friction et de diffusion sont reliés aux fonctions de corrélation de l'opérateur force agissant sur l'atome.

Le dernier chapitre de cette partie (chapitre B4) concerne le problème plus complexe du mouvement d'un atome dans un faisceau laser intense et cohérent. C'est un problème qui a vu son importance décupler au cours des dernières années, aussi bien d'un point de vue expérimental que théorique, et dont diverses applications concernant le refroidissement et le piégeage radiatif seront envisagées dans les troisième et quatrième parties (parties C et D) de ce travail. Dans ce chapitre B4, nous établissons les équations qui régissent le mouvement atomique dans une onde laser monochromatique de forme quelconque. Le problème est a priori plus compliqué que celui du chapitre B3 (atome à deux niveaux + champ chaotique) pour plusieurs raisons :

(i) Du fait de la présence du faisceau laser, l'invariance par translation n'existe plus.  $\pi(\vec{p}, t)$  ne suffit plus à caractériser l'état atomique externe, et il faut avoir recours à la fonction de Wigner atomique [8,9] :

$$w(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int \frac{d^3 r'}{h^3} e^{-i\vec{p}\vec{u}/\hbar} \left\langle \vec{r}' + \frac{\vec{u}}{2} \left| \sigma^A(t) \right| \vec{r}' - \frac{\vec{u}}{2} \right\rangle \quad (\text{BO-4})$$

$w(\vec{r}, \vec{p}, t)$  représente la quasi-probabilité de trouver l'atome au point  $\vec{r}$ , avec l'impulsion  $\vec{p}$ , et à l'instant  $t$ .

(ii) Il n'y a plus découplage entre l'évolution des cohérences et l'évolution des populations : le nombre de variables rapides à éliminer est plus grand.

(iii) Il faut si possible élaborer une théorie valable pour n'importe quelle transition  $J_f \rightarrow J_e$  plutôt que se limiter au cas d'une transition à deux niveaux.

En dépit de ces difficultés supplémentaires, nous verrons qu'il est possible d'établir une équation pour  $w(\vec{r}, \vec{p}, t)$ , cette équation étant du type équation de Kramers :

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial w}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \left( \vec{\mathcal{F}}(\vec{r}, \vec{p}) w \right) + \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} (\mathcal{D}_{ij} w) \quad (\text{BO-5})$$

En plus de l'évolution due au vol libre atomique ( $\vec{p}/m \cdot \partial w / \partial \vec{r}$ ) nous voyons apparaître la contribution de la force radiative moyenne vue par l'atome  $\vec{\mathcal{F}}(\vec{r}, \vec{p})$ , et la contribution du terme de diffusion d'impulsion ( $\mathcal{D}_{ij}$ ) dû aux fluctuations des forces radiatives. Nous montrerons également qu'il est possible de relier  $\vec{\mathcal{F}}$  et  $\mathcal{D}_{ij}$  aux valeurs moyennes (à 1 ou 2 temps) de l'opérateur force agissant sur l'atome.

## B1 : ETUDE D'UN MODELE DE MOUVEMENT BROWNIEN

Ce premier chapitre est consacré à l'étude d'un modèle simple de mouvement Brownien quantique. Notre motivation essentielle est de dégager sur ce modèle simple des résultats concernant les coefficients de diffusion et de friction qui nous seront utiles ensuite pour interpréter la structure de l'équation décrivant le mouvement d'un atome dans une onde lumineuse.

Compte tenu de cette motivation, nous n'essaierons pas ici d'établir une théorie générale du mouvement Brownien [10], mais nous nous limiterons à des situations relevant du même type d'approximations que celles utilisées dans l'établissement de l'équation pilote décrivant l'évolution d'un atome couplé au champ de rayonnement quantique ("relaxation radiative" due à l'émission spontanée). Plus précisément, nous supposerons que l'interaction entre le système étudié (particule Brownienne) et le réservoir (fluide de particules légères) satisfait "la condition de rétrécissement par le mouvement" : ceci signifie que les fluctuations du réservoir sont suffisamment rapides pour que l'effet de l'interaction système-réservoir pendant le temps de corrélation de ces fluctuations puisse être traité perturbativement. Nous supposerons également que le réservoir se trouve, en l'absence de la particule Brownienne, dans un état stationnaire (qui n'est pas nécessairement l'équilibre thermodynamique).

Le premier paragraphe est consacré à une discussion de la validité de la condition de rétrécissement par le mouvement pour ce problème, et à l'établissement de l'équation pilote décrivant le mouvement de la particule Brownienne.

Dans le second paragraphe, nous développons cette équation perturbativement, en utilisant la valeur élevée de la masse de la particule Brownienne. Nous obtenons alors une équation de Fokker-Planck pour l'évolution de  $\pi(\vec{p}, t)$ , probabilité de trouver la

particule avec l'impulsion  $\vec{p}$  à l'instant  $t$  (cf. eq. B0-1).

Le troisième paragraphe enfin est consacré au cas d'un réservoir à l'équilibre thermodynamique, et nous y montrons qu'on peut retrouver dans ce cas la relation d'Einstein entre les coefficients de friction et de diffusion de l'équation de Fokker-Planck.

### B1-1 - L'EQUATION PILOTE POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

Nous considérons dans tout ce chapitre une particule Brownienne de masse  $M$  dont le mouvement est régi par le Hamiltonien :

$$H = \frac{\vec{P}^2}{2M} + U(\vec{R}, \text{réservoir}) + H_{\text{rés.}} \quad (\text{B1-1})$$

où  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$  représentent les opérateurs position et impulsion de la particule Brownienne,  $U(\vec{R}, \text{réservoir})$  le couplage de cette particule avec le "gaz" de particules légères, et où  $H_{\text{rés.}}$  décrit la dynamique de ce réservoir. Nous noterons  $\vec{r}_i$  l'opérateur position de la  $i^{\text{ème}}$  particule légère, de masse  $m$  ( $m \ll M$ ), et nous prendrons pour l'opérateur  $U$  :

$$U(\vec{R}, \text{réservoir}) = \sum_i u(\vec{R} - \vec{r}_i) \quad (\text{B1-2})$$

$u$  désignant le potentiel d'interaction entre la particule Brownienne et une particule du gaz. Soit  $v$  la vitesse quadratique moyenne d'une particule légère. Nous nous intéressons essentiellement à la situation où la particule Brownienne est à peu près "thermalisée" : ceci signifie que l'énergie cinétique moyenne de la particule Brownienne  $MV^2/2$ , où  $V$  est sa vitesse quadratique moyenne, est de l'ordre de l'énergie cinétique moyenne d'une petite particule :

$$\frac{1}{2} M \bar{V}^2 \simeq \frac{1}{2} m \bar{v}^2 \quad (\text{B1-3})$$

Cette égalité entraîne les relations suivantes entre les vitesses moyennes  $\bar{v}$  et  $\bar{V}$ , les impulsions moyennes  $\bar{p} = m\bar{v}$  et  $\bar{P} = M\bar{V}$ , et les longueurs de De Broglie moyennes  $\lambda_{DB} = h/\bar{p}$  et  $\Lambda_{DB} = h/\bar{P}$  :

$$\frac{\bar{V}}{\bar{v}} \simeq \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1 \quad (\text{B1-4a})$$

$$\frac{\bar{p}}{\bar{P}} \simeq \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1 \quad (\text{B1-4b})$$

$$\frac{\Lambda_{DB}}{\lambda_{DB}} \simeq \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1 \quad (\text{B1-4c})$$

### 1-1 Condition de rétrécissement par le mouvement et équation pilote

Commençons par rappeler les principaux résultats de l'établissement de l'équation pilote décrivant l'évolution de la matrice densité réduite  $\sigma^A$  d'un petit système  $\mathcal{A}$  couplé à un réservoir  $\mathcal{R}$ , à la limite où la condition de rétrécissement par le mouvement :

$$\frac{\bar{U}\tau_c}{\hbar} \ll 1 \quad (\text{B1-5})$$

est satisfaite [1-3,11,12]. Dans (B1-5),  $\bar{U}$  désigne l'ordre de grandeur de l'interaction  $U_{AR}$  entre  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{R}$  et  $\tau_c$  représente le temps de corrélation caractérisant les fluctuations de cette interaction. Quand la condition (B1-5) est satisfaite, l'effet de l'interaction  $U_{AR}$  sur la vitesse de variation de  $\sigma^A$  peut être calculé perturbativement. Le réservoir n'intervient dans l'équation pilote donnant  $d\sigma^A/dt$  que par l'intermédiaire de moyennes à un ou deux temps des observables du réservoir apparaissant dans  $U_{AR}$ .

Dans le cas où  $\mu$  est un électron atomique et  $\mathcal{R}$  le rayonnement quantique du vide,  $\tau_c$  est de l'ordre du temps de corrélation des fluctuations du vide, qui est extrêmement court (inférieur à une période optique) de sorte que la condition (B1-5) est très largement satisfaite. Comme nous l'avons indiqué plus haut, nous nous désirons ici analyser la structure de l'équation pilote décrivant le mouvement Brownien d'une particule dans les mêmes limites que celles relatives au mouvement d'un atome dans une onde lumineuse. Nous nous restreignons donc à un mouvement Brownien satisfaisant la condition (B1-5). Evaluons tout d'abord le temps de corrélation  $\tau_c$ . Nous nous limiterons à des situations où les collisions entre la particule Brownienne et les particules légères sont bien séparées dans le temps. Le temps  $\tau_c$  à prendre en compte est donc de l'ordre de la "durée de collision". En nous restreignant à la situation haute énergie :

$$\lambda_{DB}, \Lambda_{DB} \ll a_0 \quad (\text{B1-6})$$

pour laquelle les extensions spatiales des paquets d'onde  $\lambda_{DB}$  et  $\Lambda_{DB}$  sont petites devant la portée  $a_0$  du potentiel  $u(\vec{r}_1 - \vec{R})$ , nous avons<sup>(\*)</sup> :

$$\tau_c \approx \frac{a_0}{v} \quad (\text{B1-7})$$

Si  $u_0$  désigne l'ordre de grandeur du potentiel  $u(\vec{r}_1 - \vec{R})$  pendant la collision, la condition (B1-5) s'écrit donc, compte tenu de (B1-7) :

$$\frac{u_0 a_0}{\hbar v} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad u_0 \ll \frac{\hbar^2}{m a_0 \lambda_{DB}} \quad (\text{B1-8})$$

Cette dernière inégalité n'est autre que la condition de validité de l'approximation de Born pour le traitement de la collision dans

---

(\*) D'après l'inégalité (B1-4a), nous pouvons négliger ici la vitesse moyenne  $\bar{v}$  de la particule Brownienne.

le potentiel  $u(\vec{r}_1, -\vec{R})$ , dans la limite haute énergie (B1-6)[13]. Nous trouvons ainsi un résultat satisfaisant physiquement : la condition de rétrécissement par le mouvement correspond, pour le mouvement Brownien, à la limite où les collisions individuelles entre la particule Brownienne et les molécules du fluide peuvent être traitées perturbativement dans le cadre de l'approximation de Born.

Quand cette condition (B1-8) est satisfaite, l'équation pilote décrivant l'évolution de la matrice densité réduite de la particule Brownienne peut s'écrire :

$$\frac{d\sigma^A(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\vec{p}^2}{2M}, \sigma^A(t) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_{\text{rés}} \left\{ \int_0^\infty d\tau \left[ U, \left[ \tilde{U}(-\tau), \sigma^A(t) \sigma^R \right] \right] \right\} \quad (\text{B1-9})$$

$\sigma^R$  désigne la matrice densité stationnaire du réservoir ( $\sigma^R$  commute avec  $H_{\text{rés}}$ ) et  $\tilde{U}$  représente l'opérateur  $U$  pris en représentation interaction:

$$\tilde{U}(t) = \exp \left[ i \left( \frac{\vec{p}^2}{2M} + H_{\text{rés}} \right) t / \hbar \right] \cdot U \cdot \exp \left[ -i \left( \frac{\vec{p}^2}{2M} + H_{\text{rés}} \right) t / \hbar \right] \quad (\text{B1-10})$$

### 1-2 Forme opérationnelle de l'équation pilote

Nous allons maintenant chercher à transformer l'équation pilote (B1-9), pour la mettre sous une forme plus facilement exploitable. Introduisons d'abord la transformée de Fourier  $\mathcal{U}$  de  $U$  :

$$U(\vec{r}, \text{réservoir}) = \int d^3k \ e^{i\vec{k}\vec{r}} \ \mathcal{U}(\vec{k}) \quad (\text{B1-11})$$

$\mathcal{U}(\vec{k})$  est un opérateur agissant exclusivement sur le réservoir.



L'hermiticité de  $U(\vec{r}, \text{rés.})$  entraîne la relation suivante :

$$U^\dagger(\vec{k}) = U(-\vec{k}) \quad (\text{B1-12})$$

De plus l'invariance par translation de l'état du réservoir impose des conditions très strictes sur les valeurs moyennes des produits  $U(\vec{k}) \cdot U(\vec{k}')$ . Pour deux vecteurs quelconques  $\vec{r}$  et  $\vec{r}'$  de  $\mathbb{R}^3$ , cette invariance par translation entraîne en effet pour  $U$  :

$$\langle U(\vec{r}, \text{rés.}) U(\vec{r}', \text{rés.}) \rangle_{\sigma^R} = f^{t \rightarrow n}(\vec{r} - \vec{r}')$$

soit, en remplaçant  $U$  par son expression en fonction de  $U$  (eq. B1-11) :

$$\langle U(\vec{k}) \cdot U^\dagger(\vec{k}') \rangle \text{ proportionnel à } \delta(\vec{k} - \vec{k}').$$

Nous poserons donc dans la suite :

$$\langle U(\vec{k}) \cdot \tilde{U}^\dagger(\vec{k}', -t) \rangle_{\sigma^R} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') G(\vec{k}, t) \quad (\text{B1-13a})$$

$$\langle \tilde{U}^\dagger(\vec{k}', -t) \cdot U(\vec{k}) \rangle_{\sigma^R} = \delta(\vec{k} - \vec{k}') \bar{G}(\vec{k}, t) \quad (\text{B1-13b})$$

où les deux fonctions  $G$  et  $\bar{G}$  sont reliées par la relation suivante, déduite de (B1-12) :

$$\bar{G}(\vec{k}, t) = \left[ G(-\vec{k}, t) \right]^* \quad (\text{B1-14})$$

Reportons maintenant l'expression (B1-11) de  $U$  dans l'équation pilote. En utilisant les égalités (B1-13) pour évaluer le double commutateur, nous obtenons :

$$\frac{d\sigma^A(t)}{dt} = \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{p^2}{2M}, \sigma^A(t) \right] + \frac{1}{\hbar^2} \int d^3k \int_0^\infty d\tau \left[ e^{-i\vec{k}R(-\tau)} \sigma^A, e^{i\vec{k}R} \right] G(\vec{k}, \tau)$$

$$+ \frac{1}{\hbar^2} \int d^3 k \int_0^\infty d\tau \left[ e^{i\vec{k}\vec{R}, \sigma^A} e^{-i\vec{k}\vec{R}(-\tau)} \right] \vec{G}(\vec{k}, \tau) \quad (\text{B1-15})$$

Pour simplifier encore cette expression opérationnelle, nous pouvons exprimer  $\vec{R}(-\tau)$  :

$$\vec{R}(-\tau) = \vec{R} - \frac{\vec{P}\tau}{M} \quad (\text{B1-16})$$

Utilisons alors l'identité de Glauber :

$$\exp A \exp B = \exp (A + B) \exp \frac{1}{2}[A, B]$$

$$\text{si } [A, [A, B]] = [B, [A, B]] = 0 \quad (\text{B1-17})$$

pour simplifier l'expression de  $\exp(-i\vec{k}\vec{R}(-\tau))$  :

$$\begin{aligned} \exp(-i\vec{k}\vec{R}(-\tau)) &= \exp(-i\vec{k}\vec{R}) \exp\left(\frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M}\right) \exp\left(-i\frac{\hbar k^2 \tau}{2M}\right) \\ &= \exp\left(\frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M}\right) \exp(-i\vec{k}\vec{R}) \exp\left(i\frac{\hbar k^2 \tau}{2M}\right) \end{aligned} \quad (\text{B1-18})$$

Nous aboutissons alors à la forme finale suivante pour l'expression opérationnelle de l'équation pilote pour notre modèle de mouvement Brownien :

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma^A(t)}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\vec{P}^2}{2M}, \sigma^A(t) \right] - \frac{1}{\hbar^2} \int d^3 k \int_0^\infty d\tau \left\{ G(\vec{k}, \tau) e^{\frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M}} e^{-i\frac{\hbar k^2 \tau}{2M}} \sigma^A(t) \right. \\ &\quad \left. + G(\vec{k}, \tau) \sigma^A(t) e^{\frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M}} e^{\frac{i\hbar k^2 \tau}{2M}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\hbar^2} \int d^3 k \int_0^\infty d\tau \left\{ G(\vec{k}, \tau) e^{\frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M}} e^{\frac{i\hbar k^2 \tau}{2M}} e^{-i\vec{k}\vec{R}} \sigma^A(t) e^{i\vec{k}\vec{R}} \right. \\
 & \left. + G(\vec{k}, \tau) e^{i\vec{k}\vec{R}} \sigma^A(t) e^{-i\vec{k}\vec{R}} e^{\frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M}} e^{-\frac{i\hbar k^2 \tau}{2M}} \right\} \quad (B1-19)
 \end{aligned}$$

Pour interpréter physiquement les différents termes de cette équation et les exploiter, nous allons maintenant projeter cette équation sur la base  $\{|\vec{P}\rangle\}$  des vecteurs propres de l'impulsion  $\vec{P}$ .

### 1-3 Projection de l'équation pilote sur la base des vecteurs propres de l'impulsion

Nous allons nous intéresser dans la suite à l'évolution de la probabilité  $\pi(\vec{P}, t) = \langle \vec{P} | \sigma^A(t) | \vec{P} \rangle$  de trouver la particule Brownienne avec l'impulsion  $\vec{P}$  à l'instant  $t$ . Il faut donc projeter l'équation (B1-19) sur la base  $|\vec{P}\rangle$ . Ceci se fait sans difficulté. En utilisant :

$$\exp(i\vec{k}\vec{R}) |\vec{P}\rangle = |\vec{P} + \hbar\vec{k}\rangle \quad (B1-20)$$

nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \pi(\vec{P}, t)}{\partial t} &= -\frac{1}{\hbar^2} \int d^3 k \int_0^\infty d\tau \left( G(\vec{k}, \tau) e^{\frac{i\vec{k}\tau}{M} \left( \vec{P} - \frac{\hbar\vec{k}}{2} \right)} + G(\vec{k}, \tau) e^{\frac{i\vec{k}\tau}{M} \left( \vec{P} + \frac{\hbar\vec{k}}{2} \right)} \right) \pi(\vec{P}, t) \\
 &+ \frac{1}{\hbar^2} \int d^3 k \int_0^\infty d\tau G(\vec{k}, \tau) e^{\frac{i\vec{k}\tau}{M} \left( \vec{P} + \frac{\hbar\vec{k}}{2} \right)} \pi(\vec{P} + \hbar\vec{k}, t)
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{\hbar^2} \int d^3k \int_0^\infty d\tau \bar{G}(\vec{k}, \tau) e^{i\frac{\vec{k}\tau}{M}(\vec{P} - \frac{\hbar\vec{k}}{2})} \pi(\vec{P} - \hbar\vec{k}, t) \quad (B1-21)$$

Sous cette forme, l'équation pilote s'interprète facilement. Le nombre d'atomes d'impulsion  $\vec{P}$  varie sous l'effet de deux causes : d'une part, certains atomes d'impulsion  $\vec{P}$  disparaissent sous l'effet de chocs qui changent leur impulsion ; c'est l'effet décrit par la première ligne de (B1-21). D'autre part, certains atomes, d'impulsion initiale  $\vec{P} \pm \hbar\vec{k}$  peuvent subir un choc qui leur transfère l'impulsion  $\mp \hbar\vec{k}$  et les laisse alors avec l'impulsion  $\vec{P}$  : c'est ce que décrivent les deuxième et troisième lignes de (B1-21). Notons également que les arguments des exponentielles en  $\tau$  font intervenir la différence d'énergie entre l'état d'impulsion  $\vec{P}$  (énergie  $\vec{P}^2/2M$ ) et l'état d'impulsion  $\vec{P} \pm \hbar\vec{k}$  (énergie  $\vec{P}^2/2M \pm \hbar\vec{k} \cdot \vec{P}/M + \hbar^2 \vec{k}^2/2M$ ).

## B1-2 L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK POUR LE MOUVEMENT BROWNIEN

L'équation pilote telle qu'elle est écrite en B1-21 est, à la condition de rétrécissement par le mouvement près, exacte. Elle est malheureusement difficilement exploitable car elle est "non-locale" dans l'espace des impulsions : elle couple une impulsion  $\vec{P}$  à toutes les autres impulsions  $\vec{P} + \hbar\vec{k}$ . Le but de ce paragraphe est de simplifier, moyennant certaines approximations, l'équation B1-21 pour la transformer en une équation de Fokker-Planck du type (B0-1).

### 2-1 Les infiniment-petits du problème

Dans l'équation B1-21, nous voyons apparaître les quantités  $\pi(\vec{P}, t)$  et  $\pi(\vec{P} \pm \hbar\vec{k}, t)$ . Nous allons donc commencer par estimer l'im-

pulsion  $\hbar \vec{k}$  transférée au cours d'un choc pour la comparer à l'impulsion moyenne de la particule Brownienne  $\bar{P}$ . Pour les collisions "haute énergie" envisagée plus haut ( $\lambda_{DB} < a_0$ ), la diffusion se fait essentiellement vers l'avant, dans un cône d'angle au sommet  $\lambda_{DB}/a_0$  [13]. Nous trouvons donc :

$$\hbar k \simeq \bar{P} \frac{\lambda_{DB}}{a_0} = \frac{h}{a_0} \quad (\text{B1-22})$$

En utilisant l'inégalité (B1-4b), nous obtenons alors :

$$\varepsilon_1 = \frac{\hbar k}{\bar{P}} < \frac{\bar{P}}{\bar{P}} \simeq \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1 \quad (\text{B1-23})$$

$\varepsilon_1$  sera donc considéré comme un infiniment petit en fonction duquel nous développerons l'équation (B1-21).

Une autre quantité qui apparaît dans cette équation (B1-21) est  $\vec{k} \cdot \vec{P} \tau / M$ , où les temps  $\tau$  à prendre en compte sont inférieurs ou de l'ordre du temps de corrélation  $\tau_c$  donné en (B1-7) (largeur en  $\tau$  de  $\vec{G}(\vec{k}, \tau)$  ou  $\bar{\vec{G}}(\vec{k}, \tau)$ ). En reprenant l'ordre de grandeur de  $\vec{k}$  déterminé en (B1-22) et en utilisant l'inégalité (B1-4a), nous obtenons :

$$\varepsilon_2 = \left| \frac{\vec{k} \cdot \vec{P} \tau}{M} \right| \lesssim \frac{\bar{V}}{v} \simeq \sqrt{\frac{m}{M}} \ll 1 \quad (\text{B1-24})$$

Nous allons donc prendre également  $\varepsilon_2$  comme infiniment petit, et développer (B1-21) en puissances de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Ce développement sera fait à l'ordre deux inclus vis à vis de ces deux paramètres qui sont a priori du même ordre par rapport à l'infiniment petit "fondamental"  $\sqrt{m/M}$ .

2-2 L'équation de Fokker-Planck

Le développement de l'équation B1-21 en puissances de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  se fait sans difficulté. Nous utilisons par exemple :

$$\varepsilon_1 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \pi(\vec{P} + \hbar\vec{k}, t) \simeq \pi(\vec{P}, t) + \hbar\vec{k} \frac{\partial \pi}{\partial \vec{P}} + \dots \quad (\text{B1-25a})$$

$$\varepsilon_2 \ll 1 \quad \Rightarrow \quad \exp \frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M} \simeq 1 + \frac{i\vec{k}\vec{P}\tau}{M} + \dots \quad (\text{B1-25b})$$

Notons également que la quantité  $\hbar k^2 \tau / M$  s'écrit :

$$\frac{\hbar k^2 \tau}{M} = \frac{\hbar k}{P} \cdot \frac{\overline{kP\tau}}{M} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \quad (\text{B1-26})$$

de telle sorte qu'à l'ordre deux en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , nous avons :

$$\exp \left( i \frac{\hbar k^2 \tau}{2M} \right) = 1 + i \frac{\hbar k^2 \tau}{2M} \quad (\text{B1-27})$$

En utilisant (B1-25ab), nous obtenons tout d'abord à l'ordre 1 :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(\vec{P}, t) = \left[ \int d^3 k \int_0^\infty d\tau \frac{\vec{k}(\overline{G} - \overline{G})(\vec{k}, \tau)}{\hbar} \right] \cdot \frac{\partial \pi}{\partial \vec{P}}(\vec{P}, t) \quad (\text{B1-28})$$

Il est immédiat de constater que le terme entre crochets est nul pour un réservoir isotrope :  $\pi(\vec{P}, t)$  n'évolue donc pas à l'ordre 1 en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Remarquons que si le gaz était animé d'une vitesse d'ensemble, ce terme ne serait plus nul : il représenterait la force moyenne s'exerçant sur la particule Brownienne du fait de ce mouvement d'ensemble.

A l'ordre deux, nous obtenons le résultat suivant :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(\vec{P}, t) = \frac{\partial}{\partial P_i} (\gamma_{ij} P_j \pi(\vec{P}, t)) + D_{ij} \frac{\partial^2 \pi}{\partial P_i \partial P_j}(\vec{P}, t) \quad (\text{B1-29})$$

où les tenseurs  $\gamma_{ij}$  et  $D_{ij}$  s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_{ij} = \int d^3k \int_0^\infty d\tau \frac{ik_i k_j \tau}{M\hbar} (G - \bar{G}) (\vec{k}, \tau) \\ D_{ij} = \int d^3k \int_0^\infty d\tau \frac{k_i k_j}{2} (G + \bar{G}) (\vec{k}, \tau) \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{(B1-30a)} \\ \text{(B1-30b)} \end{array}$$

En réalité, du fait de l'isotropie du réservoir, ces deux tenseurs sont des scalaires :

$$\gamma_{ij} = \delta_{ij} \gamma = \frac{\delta_{ij}}{3} \int d^3k \int_0^\infty d\tau \frac{i k^2 \tau}{M\hbar} (G - \bar{G}) (\vec{k}, \tau) \quad \text{(B1-31a)}$$

$$D_{ij} = \delta_{ij} \frac{D}{3} = \frac{\delta_{ij}}{6} \int d^3k \int_0^\infty d\tau k^2 (G + \bar{G}) (\vec{k}, \tau) \quad \text{(B1-31b)}$$

Ceci nous permet d'écrire l'équation (B1-29) sous la forme finale :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} (\vec{P}, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial \vec{P}} (\vec{P} \pi(\vec{P}, t)) + \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \vec{P}^2} (\vec{P}, t) \quad \text{(B1-32)}$$

Nous reconnaissons en (B1-32) l'équation de Fokker-Planck classique décrivant le mouvement Brownien de la particule lourde [4,5,7,14]. Le premier terme de cette équation, proportionnel à  $\gamma$ , représente l'effet d'une force de friction\* -  $\gamma \vec{P}$ , et le second terme décrit la diffusion de l'impulsion de la particule, avec le coefficient de diffusion  $D$ .

### 2-3 Interprétation des coefficients de friction et de diffusion

Nous allons maintenant chercher à retrouver à partir d'arguments physiques simples les valeurs (B1-31ab) des coefficients de

---

(\*) Nous parlerons dans ce qui suit de force de friction, mais il est bien clair que rien n'impose à ce stade que  $\gamma$  soit positif. Il peut donc s'agir aussi bien d'une force d'accélération que d'une force de friction.

friction et de diffusion. Pour cela, commençons par réécrire les expressions (B1-31ab) de ces coefficients sous une forme plus parlante. Passons d'abord de l'espace des  $\vec{k}$  à l'espace ordinaire ; en introduisant un vecteur  $\vec{r}$  quelconque de  $\mathbb{R}^3$ , nous obtenons en utilisant (B1-13a) :

$$\begin{aligned} \int d^3 k \frac{\vec{k}}{k^2} G(\vec{k}, \tau) &= \iint d^3 k . d^3 k' \left( \vec{k} . \vec{k}' \right) G(\vec{k}, \tau) e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{r}} \delta(\vec{k}-\vec{k}') \\ &= \iint d^3 k . d^3 k' \left( \vec{k} . \vec{k}' \right) \langle \mathcal{U}(\vec{k}) . \tilde{\mathcal{U}}^*(\vec{k}', -\tau) \rangle_{\sigma^R} e^{i(\vec{k} - \vec{k}') \cdot \vec{r}} \\ &= \langle \vec{F}(\vec{r}) . \vec{F}(\vec{r}, -\tau) \rangle_{\sigma^R} \end{aligned} \quad (\text{B1-33})$$

où nous avons introduit l'opérateur force au point  $\vec{r}$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= - \vec{\nabla}_{\vec{r}} U(\vec{r}, \text{réservoir}) \\ &= - \int d^3 k \ i \vec{k} e^{i \vec{k} \cdot \vec{r}} \mathcal{U}(\vec{k}) \end{aligned} \quad (\text{B1-34})$$

En utilisant la stationnarité temporelle des fonctions de corrélation, (B1-33) s'écrit encore :

$$\int d^3 k \frac{\vec{k}}{k^2} G(\vec{k}, \tau) = \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) . \vec{F}(\vec{r}) \rangle_{\sigma^R} \quad (\text{B1-35a})$$

De même, nous obtenons :

$$\int d^3 k \frac{\vec{k}}{k^2} \bar{G}(\vec{k}, \tau) = \langle \vec{F}(\vec{r}) . \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle_{\sigma^R} \quad (\text{B1-35b})$$

Si nous reportons maintenant ces deux résultats (B1-35ab) dans les expressions (B1-31) de  $\gamma$  et  $D$ , nous trouvons :



$$\gamma = \frac{i}{3M\hbar} \int_0^\infty d\tau \cdot \tau \cdot \left\langle \left[ \vec{F}(\vec{r}, \tau) , \vec{F}(\vec{r}) \right] \right\rangle_{\sigma^R} \quad (B1-36a)$$

$$D = \frac{1}{2} \int_0^\infty d\tau \left\langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \right\rangle_{\sigma^R} \quad (B1-36b)$$

Ce sont ces deux expressions que nous allons maintenant chercher à interpréter. Le résultat pour D (B1-36b) est la généralisation quantique du coefficient de diffusion de l'impulsion qu'on trouve classiquement pour une particule soumise à une force aléatoire  $\vec{f}(t)$  [14] :

$$D_{class.} = \int_0^\infty dt \overline{\vec{f}(0) \cdot \vec{f}(t)} \quad (B1-37)$$

Le terme de diffusion de l'équation (B1-32) est donc dû aux fluctuations de la force agissant sur la particule Brownienne, ces fluctuations provenant elles-mêmes des fluctuations de la position  $\vec{r}_1$  des particules du gaz. Si l'on souhaite replacer ce résultat dans le cadre de ceux de la première partie de ce travail, on peut remarquer que le coefficient de diffusion D (B1-36b) fait intervenir une fonction de corrélation symétrique d'opérateurs du réservoir (cf. chap. A2) et en conclure que ce terme de diffusion est un terme de "fluctuations du réservoir".

Le coefficient de friction  $\gamma$  peut, quant à lui, être retrouvé en étudiant la réponse linéaire du réservoir au mouvement de la particule Brownienne. Ce mouvement, que nous traiterons classiquement dans ce qui suit, modifie l'état du réservoir, ce qui en retour vient changer la force qui s'exerce sur la particule. Notons  $t_0$  l'instant auquel nous voulons calculer cette force, et  $\vec{R} = \vec{R}(t_0)$  ;  $\vec{P}(t_0) = \vec{P}(t_0)$  la position et l'impulsion de la particule Brownienne à cet instant  $t_0$ . Le mouvement de cette particule remplace le couplage  $U(\vec{R}, \text{réservoir})$  par :

$$U \left( \vec{R} + \frac{\vec{P}(t-t_0)}{M}, \text{rés} \right) = U(\vec{R}, \text{rés}) + \delta U(t) \quad (\text{B1-38})$$

où la perturbation  $\delta U(t)$  due au mouvement de la particule Brownienne s'écrit, en utilisant (B1-34) :

$$\begin{aligned} \delta U(t) &= \frac{\vec{P}(t-t_0)}{M} \cdot \vec{\nabla} U(\vec{R}, \text{rés}) \\ &= - \frac{\vec{P}(t-t_0)}{M} \cdot \vec{F}(\vec{R}) \end{aligned} \quad (\text{B1-39})$$

La matrice densité du réservoir pour la particule en mouvement  $(\sigma^R)_{Mvt}$  s'obtient alors en fonction de la matrice densité trouvée pour l'atome au repos  $(\tilde{\sigma}^R)_{Rep}$ , au premier ordre en  $\delta U$  et à l'instant  $t_0$  [15] :

$$(\tilde{\sigma}^R)_{Mvt}(t_0) = (\tilde{\sigma}^R)_{Rep}(t_0) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_0} dt \left[ \delta \tilde{U}(t), (\tilde{\sigma}^R)_{Rep}(t_0) \right] \quad (\text{B1-40})$$

La force agissant sur l'atome en mouvement vaut donc à l'instant  $t_0$  :

$$\begin{aligned} \vec{f}_{Mvt}(t_0) &= \text{Tr} \left( \vec{F}(\vec{R}, t_0) (\tilde{\sigma}^R)_{Mvt}(t_0) \right) \\ &= \text{Tr} \left( \vec{F}(\vec{R}, t_0) (\sigma^R)_{Rep}(t_0) \right) \\ &\quad - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_0} \text{Tr} \left( \vec{F}(\vec{R}, t_0) \left[ \delta \tilde{U}(t), (\tilde{\sigma}^R)_{Rep}(t_0) \right] \right) dt \end{aligned} \quad (\text{B1-41})$$

Le premier terme de cette expression représente la force s'exerçant sur l'atome au repos. Il est nul pour un réservoir isotrope. Le second terme se réécrit en utilisant l'invariance d'une trace par permutation circulaire :

$$\vec{f}_{Mvt} = - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_0} \text{Tr} \left( \left[ \vec{F}(R, t_0), \delta \tilde{U}(t) \right] (\tilde{\sigma}^R)_{\text{Rep}}(t_0) \right) dt \quad (\text{B1-42})$$

Remplaçons alors  $\delta U(t)$  par son expression (B1-39). Il vient :

$$\vec{f}_{Mvt} = - \frac{i}{M\hbar} P_i \int_0^{\infty} \delta O.\tau. \langle [\vec{F}(R), \tilde{F}_i(R, -\tau)] \rangle \quad (\text{B1-43})$$

ce qui s'écrit encore, compte tenu de l'isotropie du réservoir et en utilisant l'expression (B1-36a) de  $\gamma$  :

$$\vec{f}_{Mvt} = - \gamma \vec{P} \quad (\text{B1-44})$$

Nous retrouvons ainsi par ce calcul de réponse linéaire la force de friction qui intervient dans l'équation de Fokker-Planck (B1-29). Au contraire du terme de diffusion, cette force de friction n'est donc pas un effet des "fluctuations du réservoir", mais un effet de "self-reaction" : le mouvement de la particule polarise le réservoir (eq. B1-40) et cette polarisation réagit en retour sur la particule en la freinant. Notons d'ailleurs que le coefficient de friction  $\gamma$  (B1-36a) fait intervenir un commutateur d'opérateurs du réservoir : nous retrouvons sur cet exemple particulier le résultat général concernant les termes de self-reaction établi dans la première partie de ce travail (chapitre A2).

D'autre part, signalons que nous obtiendrons une équation du même type que (B1-32) pour le mouvement d'un atome dans une onde électromagnétique. Les coefficients  $\gamma$  et  $D$  auront la même expression formelle que ceux trouvés ici (eq. B1-36), la force  $\vec{F} = - \vec{\nabla}U$  étant remplacée par l'opérateur "force radiative".

### B1-3 LE CAS DE L'EQUILIBRE THERMODYNAMIQUE

Comme nous l'avons déjà souligné, les résultats du paragraphe précédent concernant les coefficients de friction et de diffusion de la particule Brownienne ont été obtenus avec la simple hypothèse d'un réservoir dans un état stationnaire : cet état n'est

pas nécessairement l'équilibre thermodynamique, et il n'y a donc pas de relation simple entre  $\gamma$  et  $D$ . Si l'on considère maintenant le cas particulier d'un réservoir à l'équilibre thermodynamique, à la température  $T$ , on s'attend à ce que les équations (B1-36a) et (B1-36b) se simplifient pour donner la relation d'Einstein [16]:

$$D = 3M k_B T \gamma \quad (\text{B1-45})$$

Cette relation qu'on impose généralement "a priori" dans l'étude du mouvement Brownien, est en effet nécessaire pour assurer que la particule Brownienne va se thermaliser avec le réservoir et acquérir elle aussi la température  $T$ . L'objet de ce paragraphe est donc de transformer les équations (B1-36ab) pour un réservoir à la température  $T$ , pour aboutir à la relation (B1-45). Nous utiliserons pour cela les techniques standard de calcul de fonctions de corrélation à l'équilibre thermodynamique [16].

En utilisant la stationnarité de ces fonctions de corrélation :

$$\langle \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle = \langle \vec{F}(\vec{r}, -\tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle \quad (\text{B1-46})$$

nous pouvons réexprimer les coefficients  $\gamma$  et  $D$  :

$$\gamma = \frac{i}{6M\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tau \langle \left[ \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \right] \rangle \quad (\text{B1-47a})$$

$$D = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle \quad (\text{B1-47b})$$

Introduisons alors les deux fonctions de  $\omega$  :

$$\gamma(\omega) = \frac{i}{6M\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tau e^{-i\omega\tau} \langle \left[ \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \right] \rangle \quad (\text{B1-48a})$$

$$D(\omega) = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{-i\omega\tau} \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle \quad (\text{B1-48b})$$

$\gamma(\omega)$  et  $D(\omega)$  sont deux fonctions paires de  $\omega$ , et leurs valeurs en 0 sont  $\gamma(0) = \gamma$ ,  $D(0) = D$ . Nous allons maintenant décomposer la fonction de corrélation  $\langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle$  en utilisant la base  $\{|i\rangle\}$  des états propres de  $H_R$ , ces états propres ayant pour énergie  $E_i$  et pour population stationnaire  $\pi_i$  :

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle &= \text{Tr} \left( \rho e^{i H_R \tau / \hbar} \vec{F} e^{-i H_R \tau / \hbar} \vec{F} \right) \\ &= \sum_i \pi_i \langle i | e^{i H_R \tau / \hbar} \vec{F} e^{-i H_R \tau / \hbar} \vec{F} | i \rangle \\ &= \sum_{ij} \pi_i |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 e^{i \omega_{ij} \tau} \end{aligned} \quad (\text{B1-49})$$

où nous avons posé  $\hbar \omega_{ij} = E_i - E_j$ . Le commutateur et l'anticommutateur intervenant en (B1-48ab) s'écrivent alors :

$$\begin{aligned} \left\langle \left[ \vec{F}(\vec{r}, \tau), \vec{F}(\vec{r}) \right] \right\rangle &= \sum_{ij} (\pi_i - \pi_j) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 e^{i \omega_{ij} \tau} \\ &= - \sum_{ij} (\pi_i + \pi_j) \text{th} \left( \frac{\hbar \omega_{ij}}{2k_B T} \right) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 e^{i \omega_{ij} \tau} \end{aligned} \quad (\text{B1-50a})$$

$$\langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle = \sum_{ij} (\pi_i + \pi_j) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 e^{i \omega_{ij} \tau} \quad (\text{B1-50b})$$

où nous avons utilisé la relation :

$$\frac{\pi_i - \pi_j}{\pi_i + \pi_j} = - \text{th} \left( \frac{E_i - E_j}{2k_B T} \right) \quad (\text{B1-51})$$

Reportons maintenant les expressions (B1-50ab) dans les expressions de  $\gamma(\omega)$  et  $D(\omega)$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \frac{-1}{6M\hbar} \sum_{ij} (\pi_i + \pi_j) \text{th} \left( \frac{\hbar \omega_{ij}}{2k_B T} \right) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau i\tau e^{i(\omega_{ij} - \omega)\tau} \\ &= \frac{\pi}{3M\hbar} \sum_{ij} (\pi_i + \pi_j) \text{th} \left( \frac{\hbar \omega_{ij}}{2k_B T} \right) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 \frac{d}{d\omega} \delta(\omega_{ij} - \omega) \end{aligned}$$

$$= \frac{\pi}{3M\hbar} \cdot \frac{d}{d\omega} \left[ \text{th} \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \sum_{ij} (\pi_i + \pi_j) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 \delta(\omega_{ij} - \omega) \right] \quad (\text{B1-52a})$$

$$D(\omega) = \frac{\pi}{2} \sum_{ij} (\pi_i + \pi_j) |\langle i | \vec{F} | j \rangle|^2 \delta(\omega_{ij} - \omega) \quad (\text{B1-52b})$$

En combinant ces deux derniers résultats, nous arrivons à :

$$\begin{aligned} \gamma(\omega) &= \frac{2}{M\hbar} \cdot \frac{d}{d\omega} \left( \text{th} \left( \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \right) D(\omega) \right) \\ &= \frac{D(\omega)}{3Mk_B T \text{ ch}^2 \left( \frac{\hbar\omega}{k_B T} \right)} + \frac{2}{3M\hbar} \left( \frac{dD(\omega)}{d\omega} \right) \text{th} \frac{\hbar\omega}{2k_B T} \end{aligned} \quad (\text{B1-53})$$

Il nous suffit alors d'appliquer ce résultat en  $\omega = 0$  pour trouver ( $D(\omega)$  est paire, donc  $((dD/d\omega)_{\omega=0} = 0)$ ) :

$$\gamma = \frac{D}{3Mk_B T} \quad (\text{B1-54})$$

Nous retrouvons dans le cadre de notre modèle cette relation bien connue, généralement postulée dans les théories classiques du mouvement Brownien.

## B2 : THERMALISATION D'ELECTRONS LIBRES DANS LE RAYONNEMENT DU CORPS NOIR

Nous allons principalement nous intéresser dans la suite de ce travail au mouvement d'atomes neutres dans un champ électromagnétique. Néanmoins, il nous a semblé utile, à l'issue du chapitre précédent, d'appliquer les résultats obtenus au problème du mouvement d'un électron libre couplé au rayonnement. Pour simplifier, nous supposerons ce rayonnement dans un état stationnaire, chaotique (i.e. incohérent) et isotrope, et nous nous intéresserons tout particulièrement au cas du rayonnement du corps noir. Nous ferons un traitement non relativiste de ce problème, et nous limiterons donc à des températures telles que :

$$k_B T \ll Mc^2 \quad (B2-1)$$

où  $M$  représente la masse de l'électron. Nous négligerons de même tout effet lié à l'interaction du spin de l'électron avec le champ magnétique du rayonnement.

L'intérêt pratique de ce problème concerne essentiellement le domaine astrophysique, dans lequel on peut rencontrer des plasmas très dilués et complètement ionisés : l'interaction avec le rayonnement est alors le seul mode possible de thermalisation [17]. Plusieurs publications ont été consacrées à ce problème [17-20]. Elles font en général appel à une équation de transport de Boltzmann, dans laquelle le terme de collision est estimé à partir des sections efficaces d'interaction électron-photon.

La démarche que nous suivrons ici sera quelque peu différente. Nous partirons en effet du Hamiltonien total du problème, et nous utiliserons le formalisme de l'équation pilote pour décrire le mouvement d'un électron. Le premier paragraphe de ce chapitre (§ B2-1) est consacré au "choix" du Hamiltonien : en partant du Hamiltonien standard de l'électrodynamique quantique non relativiste, nous montrons qu'une transformation unitaire sur ce Hamiltonien permet de simplifier considérablement les calculs. Dans

le second paragraphe (§ B2-2), nous montrons que l'approche équation pilote est possible pour un tel problème et que la condition de rétrécissement par le mouvement est vérifiée. Nous en déduisons que le mouvement de l'électron peut être décrit par une équation de Fokker-Planck du type de celle trouvée pour le mouvement Brownien au chapitre précédent. Le troisième paragraphe est consacré au calcul explicite et à l'interprétation physique des coefficients de friction et de diffusion intervenant dans l'équation de Fokker-Planck. Enfin, dans le dernier paragraphe (§ B2-4), nous étudions le cas particulier du rayonnement du corps noir.

### B2-1 LE HAMILTONIEN DU PROBLEME

A priori, le Hamiltonien à prendre en compte pour ce problème est le Hamiltonien standard de l'électrodynamique non relativiste :

$$H = \frac{1}{2M} (\vec{P} - e \vec{A}(\vec{R}))^2 + H_R \quad (\text{B2-1})$$

$\vec{R}$  et  $\vec{P}$  représentent les opérateurs position et impulsion de l'électron,  $\vec{A}(\vec{r})$  est le potentiel vecteur au point  $\vec{r}$  et  $H_R$  le Hamiltonien du champ électromagnétique. Si le champ est quantifié sur la base des ondes planes, repérées par l'indice  $\lambda = (k, \varepsilon)$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde,  $\omega = c|\vec{k}|$  la fréquence et  $\varepsilon$  la polarisation de l'onde plane,  $\vec{A}(\vec{r})$  et  $H_R$  s'écrivent :

$$\vec{A}(\vec{r}) = \sum_{\lambda} \mathcal{A}_{\lambda} \vec{\varepsilon} (e^{i\vec{k}\vec{r}} a_{\lambda} + e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_{\lambda}^{\dagger}) \quad (\text{B2-2a})$$

$$H_R = \sum_{\lambda} \hbar\omega a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} \quad (\text{B2-2a})$$

En notant  $L^3$  le volume de quantification, on a :



$$\mathcal{H}_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2\varepsilon_0 \omega L^3}} \quad (\text{B2-3})$$

Nous allons maintenant écrire les équations du mouvement de l'électron couplé au rayonnement, pour étudier dans quelle mesure les résultats du chapitre B1 peuvent être appliqués au Hamiltonien (B2-1). Nous constaterons alors qu'une transposition directe de ces résultats n'est pas possible, mais qu'une transformation unitaire sur le Hamiltonien (B2-1) permet de résoudre cette difficulté.

### 1-1 L'équation du mouvement pour l'électron

Dans le point de vue de Heisenberg, l'évolution de l'opérateur position  $\vec{R}$  de l'électron s'écrit :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{R}] = \frac{\vec{P} - e \vec{A}(\vec{R})}{M} = \frac{\vec{\pi}}{M} \quad (\text{B2-4a})$$

$$\begin{aligned} M \frac{d^2 \vec{R}}{dt^2} &= \frac{d\vec{\pi}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{\pi}] \\ &= e \vec{E}_\perp(\vec{R}) + \frac{e}{2M} (\vec{\pi} \times \vec{B}(\vec{R}) - \vec{B}(\vec{R}) \times \vec{\pi}) \quad (\text{B2-4b}) \end{aligned}$$

$\vec{\pi}/M$  représente la vitesse de l'électron, et l'équation (B2-4b) donne donc l'opérateur force agissant sur l'électron. Cette force est constituée d'une part de la force due au champ électrique transverse  $\vec{E}_\perp$ , et d'autre part de la force de Lorentz due au champ magnétique.  $\vec{E}_\perp(\vec{r})$  et  $\vec{B}(\vec{r})$  valent respectivement :

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}) = \sum_\lambda i \mathcal{E}_\lambda \vec{\varepsilon} (e^{i\vec{k}\vec{r}} a_\lambda - e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_\lambda^\dagger) \quad (\text{B2-5a})$$

$$\vec{B}(\vec{r}) = \sum_\lambda i \mathcal{B}_\lambda \frac{\vec{k} \times \vec{\varepsilon}}{k} (e^{i\vec{k}\vec{r}} a_\lambda - e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_\lambda^\dagger) \quad (\text{B2-5b})$$

avec :

$$\mathcal{E}_\lambda = \omega \mathcal{A}_\lambda \quad (\text{B2-6a})$$

$$\mathcal{B}_\lambda = \frac{\omega}{c} \mathcal{A}_\lambda \quad (\text{B2-6b})$$

A ce point du calcul, on pourrait alors être tenté de procéder de la manière suivante : commencer par s'assurer que la condition de rétrécissement par le mouvement est satisfaite, ce qui entraîne que le mouvement de l'électron est descriptible par une équation de Fokker-Planck (cf. B1-32), et calculer ensuite les coefficients de diffusion et de friction de cette équation en reportant l'expression de la force (B2-4b) dans les formules (B1-36a) et (B1-36b). Malheureusement, on arrive alors au résultat  $D = \gamma = 0$ , ce qui signifie que la distribution  $\pi(\vec{P}, t)$  n'évolue pas à l'ordre 2 en paramètre de couplage. Vérifions rapidement ce résultat en nous limitant à la force électrique  $e \vec{E}_\perp$ , qui est prépondérante pour des atomes non relativistes(\*). L'opérateur  $\vec{E}_\perp(\vec{r})$  pris en point de vue de Heisenberg s'écrit :

$$\vec{E}_\perp(\vec{r}, t) = \sum_\lambda i \mathcal{E}_\lambda \vec{\varepsilon} \left( e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega_\lambda t)} a_\lambda - e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega_\lambda t)} a_\lambda^\dagger \right) \quad (\text{B2-7})$$

et on trouve alors pour le commutateur intervenant dans  $\gamma$ , après un calcul analogue à ceux faits dans la première partie de ce travail (chapitre A2, appendice B) :

$$[e \vec{E}_\perp(\vec{r}, t), e \vec{E}_\perp(\vec{r})] = \sum_\lambda e^2 \mathcal{E}_\lambda^2 (e^{-i \omega_\lambda t} - e^{i \omega_\lambda t})$$

---

(\*) La force de Lorentz, qui est en  $v/c$  par rapport à la force électrique, ne pourrait de toute façon pas être prise en compte simplement, car elle dépend de l'opérateur vitesse. Ceci vient du fait que le couplage électron-rayonnement fait intervenir l'impulsion  $\vec{P}$ , au contraire du couplage choisi au chapitre B1 (cf. eq B1-1).

$$\begin{aligned}
 &= \frac{\hbar e^2}{2\pi^2 \epsilon_0 c^3} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \omega^3 e^{-i\omega t} \\
 &= \frac{-i\hbar e^2}{\pi \epsilon_0 c^3} \delta'''(t) \tag{B2-8}
 \end{aligned}$$

Il suffit alors de reporter cette valeur dans (B1-36a) pour trouver  $\gamma = 0$ . De même, l'anticommutateur intervenant dans D vaut :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2} \langle e \vec{E}_\perp(\vec{r}, t) \cdot e \vec{E}_\perp(\vec{r}) + e \vec{E}_\perp(\vec{r}) \cdot e \vec{E}_\perp(\vec{r}, t) \rangle = \\
 = \sum_\lambda e^2 \mathcal{E}_\lambda^2 (e^{i\omega_\lambda t} + e^{-i\omega_\lambda t}) (n_\lambda + \frac{1}{2}) \tag{B2-9}
 \end{aligned}$$

où  $n_\lambda$  représente le nombre de photons moyens dans le mode  $\lambda$ . Si nous reportons cette expression dans (B1-36b) et si nous effectuons d'abord l'intégrale temporelle, nous trouvons :

$$\begin{aligned}
 D &= \sum_\lambda \frac{2\pi}{3} e^2 \mathcal{E}_\lambda^2 (n_\lambda + \frac{1}{2}) \delta(\omega_\lambda) \\
 &= \frac{e^2 \hbar}{3\pi \epsilon_0 c^3} \int_0^\infty d\omega \omega^3 (n(\omega) + \frac{1}{2}) \delta(\omega) \tag{B2-10}
 \end{aligned}$$

Si  $n(\omega)$  diverge moins vite que  $1/\omega^3$  en  $\omega = 0$ , on trouve alors que D est nul. C'est par exemple le cas du champ électromagnétique, pour lequel  $n(\omega) \simeq k_B T / \hbar \omega$  quand  $\omega$  tend vers zéro.

Pour conclure, nous trouvons donc que l'ordre de perturbation choisi pour établir l'équation pilote n'est pas suffisant dans ce cas pour rendre compte de l'effet du champ sur l'électron. Ceci peut a posteriori se comprendre assez aisément : le potentiel de couplage, correspondant au  $U(\vec{R}, \text{rés.})$  du chapitre B1, est ici du premier ordre en e, et c'est également le cas de la force (B2-4b) : cette force s'exprime en effet comme une somme d'opérateurs  $a_\lambda$  et  $a_\lambda^\dagger$ , correspondant à la disparition d'un photon ou à la création d'un photon. Il est alors clair qu'une telle force ne peut pas, à l'ordre le plus bas, modifier de manière réelle l'impulsion

de l'électron : on sait en effet qu'un électron libre ne peut pas absorber ou émettre réellement de photon car l'énergie et l'impulsion globale ne peuvent pas être simultanément conservées lors d'une telle absorption ou d'une telle émission. Les seuls processus susceptibles de modifier sa vitesse sont des processus de diffusion Compton pour lesquels il y a à la fois disparition et création d'un photon, ces processus apparaissant à l'ordre deux en e.

Deux possibilités s'offrent alors à nous. Nous pouvons d'abord songer à étendre à des ordres supérieurs le développement de perturbation conduisant à l'équation pilote, mais ceci peut être long et fastidieux. Une deuxième voie beaucoup plus rapide consiste à effectuer une transformation unitaire sur le Hamiltonien, qui élimine les termes d'ordre un en e, pour garder un couplage en e<sup>2</sup>. L'équation pilote pourra alors être calculée simplement à l'ordre le plus bas vis à vis du nouveau paramètre de couplage.

### 1-2 Transformation unitaire sur le Hamiltonien

La construction d'une transformation unitaire qui supprime du Hamiltonien les termes linéaires en e est un procédé classique en électrodynamique. Quand le Hamiltonien est pris à l'approximation dipolaire électrique, cette transformation est connue sous le nom de transformation de Pauli-Fierz [21,22]. Pour le Hamiltonien d'une particule libre (eq. B2-1), pour lequel on ne peut pas faire l'approximation dipolaire électrique, il est possible de généraliser la transformation de Pauli-Fierz. Ceci est fait en détail dans la référence [22], où les auteurs discutent également la signification physique différente des observables dans l'ancienne et la nouvelle représentation. Donnons ici le résultat final. Si l'on pose :

$$F = \frac{e}{M} \left\{ \vec{P} \cdot \vec{Z}(\vec{R}) + \vec{\nabla}_{\vec{R}} \cdot \frac{(\vec{P} \cdot \vec{Y}(\vec{R})) \vec{P} + \vec{P} (\vec{P} \cdot \vec{Y}(\vec{R}))}{2M} \right\} \quad (B2-11)$$

où  $\vec{Y}$  et  $\vec{Z}$  sont les deux opérateurs de champ :

$$\vec{Y}(\vec{r}) = \sum_{\lambda} y_{\lambda} \vec{\epsilon} (a_{\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} + a_{\lambda}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}) \quad (\text{B2-12a})$$

$$\vec{Z}(\vec{r}) = \sum_{\lambda} z_{\lambda} \vec{\epsilon} (a_{\lambda} e^{i\vec{k}\vec{r}} - a_{\lambda}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\vec{r}}) \quad (\text{B2-12b})$$

$$y_{\lambda} = - \frac{f_{\lambda}}{\omega^2} \quad z_{\lambda} = \frac{f_{\lambda}}{i\omega} \quad (\text{B2-12c})$$

alors le Hamiltonien transformé  $H' = e^{iF} H e^{-iF}$  s'écrit :

$$H' = \frac{\vec{p}^2}{2M^*} + \frac{e^2}{2M^*} \vec{A}^2(\vec{R}) + H_R + \delta H' \quad (\text{B2-13})$$

où  $\delta H'$  contient des termes d'ordre deux en  $e$  négligeables devant  $e^2 A^2 / 2M^*$  à l'ordre zéro en  $v/c$ , ainsi que des termes d'ordre 3 ou plus en  $e$ . Dans la suite, nous négligerons  $\delta H'$ . La quantité  $M^*$  apparaissant dans (B2-13) s'écrit :

$$M^* = M + \sum_{\lambda} \frac{e^2 f_{\lambda}^2}{\hbar\omega} \quad (\text{B2-14})$$

$M^*$  représente la "masse renormalisée" de l'électron non relativiste, c'est-à-dire la masse mécanique  $M$  à laquelle est ajoutée la contribution des modes non relativistes à la masse électromagnétique de l'électron. Nous avons déjà vu dans la première partie de ce travail (chapitre A1) que l'énergie associée à cette masse électromagnétique était égale (à un facteur 4/3 près), à l'énergie du champ de Coulomb de l'électron.

Il est important d'insister pour finir sur la signification physique des observables  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$  apparaissant dans cette nouvelle représentation. Dans la réf. [22], on montre que  $\vec{R}$  représente maintenant la "position moyenne" de l'électron, autour de laquelle l'électron vibre sous l'effet des fluctuations quantiques, décrites par la force (B2-4b). La signification de  $\vec{P}$  est alors immédiate d'après l'équation d'évolution de  $\vec{R}$  tirée du Hamiltonien (B2-13) :

$$\frac{d\vec{R}}{dt} = \frac{\vec{P}}{M} \quad (\text{B2-15})$$

$\vec{P}/M$  représente la "vitesse moyenne" de l'électron, et l'équation que nous allons maintenant chercher à obtenir pour  $\pi(\vec{P}, t)$  nous donnera l'évolution de la probabilité de trouver l'électron avec "l'impulsion moyenne"  $\vec{P}$ , à l'instant  $t$ . En d'autres termes, nous avons soustrait de la dynamique de l'électron le mouvement dû à la force (B2-4b) résultant des phénomènes d'absorption ou d'émission de photons *virtuels* pour ne garder que l'évolution due aux phénomènes de diffusion de photons *réels* et décrite par le terme  $e^2 \vec{A}^2(\vec{R})/2M^*$  du Hamiltonien (B2-13).

## B2-2 LE TRAITEMENT PAR EQUATION PILOTE

Le Hamiltonien (B2-13) trouvé après transformation unitaire est du type du Hamiltonien modèle (B1-1), et nous pouvons donc envisager d'appliquer les résultats obtenus au chapitre B1. Pour cela, commençons par étudier la validité de la condition de rétrécissement par le mouvement.

### 2-1 Validité de la condition de rétrécissement par le mouvement

La validité des résultats obtenus dans le chapitre B1 est liée à la condition de rétrécissement par le mouvement (B1-5). Il nous faut donc évaluer les ordres de grandeur du couplage électron rayonnement  $e^2 \vec{A}^2(\vec{R})/2M^*$  et du temps de corrélation  $\tau_c$ .

En ce qui concerne  $\tau_c$ , nous prendrons l'inverse de la fréquence typique d'un photon du rayonnement du corps noir :

$$\tau_c \simeq \frac{1}{\omega} \simeq \frac{\hbar}{k_B T} \quad (\text{B2-16})$$

Si le rayonnement n'est pas à l'équilibre thermodynamique, nous prendrons pour  $\tau_c$  l'inverse de la largeur spectrale de ce rayonnement  $1/\Delta\omega$ .

Cherchons maintenant à évaluer un ordre de grandeur du couplage  $e^2 \vec{A}^2(\vec{R})/2M^*$ . Nous pouvons commencer par réécrire ce couplage :

$$\begin{aligned} \frac{e^2 \vec{A}^2(\vec{R})}{2M^*} &= \frac{e^2}{2M^*} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_{\lambda'} \vec{\varepsilon}_\lambda \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda'} \left\{ e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{R}} a_\lambda a_{\lambda'} + e^{-i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{R}} a_\lambda^\dagger a_{\lambda'}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + e^{i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{R}} a_\lambda a_{\lambda'}^\dagger + e^{-i(\vec{k}-\vec{k}') \cdot \vec{R}} a_\lambda^\dagger a_{\lambda'} \right\} \\ &= \frac{e^2}{2M^*} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{A}_\lambda \mathcal{A}_{\lambda'} \vec{\varepsilon}_\lambda \cdot \vec{\varepsilon}_{\lambda'} \left\{ e^{i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{R}} a_\lambda a_{\lambda'} + e^{-i(\vec{k}+\vec{k}') \cdot \vec{R}} a_\lambda^\dagger a_{\lambda'}^\dagger \right. \\ &\quad \left. + 2 e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{R}} a_\lambda^\dagger a_{\lambda'} \right\} + \frac{e^2}{2M^*} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{A}_\lambda^2 \quad (\text{B2-17}) \end{aligned}$$

Le dernier terme de l'expression (B2-17) est un terme constant, qui représente l'énergie cinétique de vibration de l'électron dans les fluctuations du vide (cf. partie A, chapitre A2). Dans la mesure où ce terme constant ne contribue pas à l'évolution du système, nous le négligerons dans la suite. La valeur moyenne du terme restant vaut :

$$\left\langle \frac{e^2 \vec{A}^2(\vec{R})}{2M^*} \right\rangle_{\sigma^R} = \frac{e^2}{M^*} \sum_{\lambda} \mathcal{A}_\lambda^2 n_\lambda \quad (\text{B2-18})$$

où  $n_\lambda$  est, comme en (B2-10), le nombre de photons dans le mode  $\lambda$ . Nous remarquons d'abord que cette valeur moyenne est indépendante de  $\vec{R}$ , ce qui est une condition nécessaire pour écrire l'équation pilote sous la forme (B1-9) [3]. Pour le rayonnement du corps noir,  $n_\lambda$  s'écrit :

$$n_{\lambda} = \left( \exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1 \right)^{-1} \quad (\text{B2-19})$$

ce qui donne :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{e^2 A^2(\vec{R})}{2M^*} \right\rangle &= \frac{e^2 \hbar}{2\pi^2 \epsilon_0 M^* c^3} \int_0^{\infty} d\omega \frac{\omega}{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1} \\ &= \frac{2 I_1}{\pi} \alpha \frac{(k_B T)^2}{M^* c^2} \end{aligned} \quad (\text{B1-20})$$

où  $\alpha$  représente la constante de structure fine  $e^2/4\pi\epsilon_0 \hbar c$ , et où  $I_1$  est l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{u \, du}{e^u - 1} \quad (\text{B2-21})$$

En prenant la valeur de  $\tau_c$  donnée en (B2-16), nous trouvons alors que la condition de rétrécissement par le mouvement est équivalente à :

$$\alpha \cdot \frac{k_B T}{M^* c^2} \ll 1 \quad (\text{B2-22})$$

Pour les températures que nous envisageons ici (cf. eq. B2-1), cette condition est toujours vérifiée. L'utilisation de l'expression (B1-32) est donc parfaitement justifiée.

## 2-2 L'équation de Fokker-Planck décrivant le mouvement de l'électron

Nous pouvons maintenant reprendre pas à pas les calculs du chapitre B1 pour notre problème, et vérifier que la démarche suivie pour l'étude du mouvement Brownien reste valable ici, dans l'hypothèse d'un champ homogène et isotrope. Nous pouvons donc conclure immédiatement que l'équation du mouvement de l'électron est une



équation de Fokker-Planck :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t}(\vec{P}, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial \vec{P}} (\vec{P} \pi(\vec{P}, t)) + \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \pi(\vec{P}, t)}{\partial \vec{P}^2} \quad (\text{B2-23})$$

où les coefficients de friction  $\gamma$  et de diffusion  $D$  s'écrivent en fonction de l'opérateur force agissant sur l'électron  $\vec{F}$  (eq. B1-47ab)

$$\gamma = \frac{i}{6M^* \hbar} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cdot \tau \cdot \langle [\vec{F}(\vec{r}, \tau), \vec{F}(\vec{r})] \rangle_{\sigma^R} \quad (\text{B2-24a})$$

$$D = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle_{\sigma^R} \quad (\text{B2-24b})$$

Cette force  $\vec{F}$  se déduit quant à elle du couplage  $e^2 \vec{A}^2 / 2M^*$  :

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}) &= - \vec{\nabla}_{\vec{r}} \left( \frac{e^2 \vec{A}^2(\vec{r})}{2M^*} \right) \\ &= \frac{ie^2}{2M^*} \sum_{\lambda \lambda'} \mathcal{f}_{\lambda} \mathcal{f}_{\lambda'} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') (\vec{k} + \vec{k}') (a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda'}^{\dagger} e^{-i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}} - a_{\lambda} a_{\lambda'} e^{i(\vec{k} + \vec{k}') \cdot \vec{r}}) \\ &\quad + \frac{ie^2}{M^*} \sum_{\lambda \lambda'} \mathcal{f}_{\lambda} \mathcal{f}_{\lambda'} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}') (\vec{k} - \vec{k}') a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda'} e^{i(\vec{k}' - \vec{k}) \cdot \vec{r}} \end{aligned} \quad (\text{B2-25})$$

où nous avons utilisé le développement (B2-17). Pour obtenir  $\vec{F}(\vec{r}, \tau)$  à partir de  $\vec{F}(\vec{r})$ , il suffit enfin de remplacer  $a_{\lambda}$  et  $a_{\lambda}^{\dagger}$  par :

$$\tilde{a}_{\lambda}(\tau) = a_{\lambda} e^{-i\omega\tau} \quad (\text{B2-26a})$$

$$\tilde{a}_{\lambda}^{\dagger}(\tau) = a_{\lambda}^{\dagger} e^{i\omega\tau} \quad (\text{B2-26b})$$

**B2-3 L'AMORTISSEMENT ET LA DIFFUSION DE L'IMPULSION DE L'ELECTRON**

**3-1) Calcul des coefficients de friction et de diffusion**

Le calcul explicite des coefficients de friction  $\gamma$  et de diffusion  $D$  intervenant dans l'équation de Fokker-Planck se fait à partir des expressions (B2-24ab) dans lesquelles nous reportons le développement (B2-25) de l'opérateur force. Nous calculons d'abord les deux fonctions de corrélation :

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle_{\sigma^R} &= \frac{e^4}{2M^{*2}} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{A}_{\lambda}^2 \mathcal{A}_{\lambda'}^2 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}')^2 (\vec{k} + \vec{k}')^2 \\ & [n_{\lambda} n_{\lambda'} e^{i(\omega + \omega')\tau} + (n_{\lambda} + 1)(n_{\lambda'} + 1) e^{-i(\omega + \omega')\tau}] \\ + \frac{e^4}{M^{*2}} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{A}_{\lambda}^2 \mathcal{A}_{\lambda'}^2 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}')^2 (\vec{k} - \vec{k}')^2 n_{\lambda} (n_{\lambda'} + 1) e^{i(\omega - \omega')\tau} \end{aligned} \quad (B2-27a)$$

$$\langle \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle_{\sigma^R} = \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle_{\sigma^R}^* \quad (B2-27b)$$

Lorsque nous reportons ces deux fonctions de corrélation dans les équations (B2-24ab), les intégrales sur le temps font alors apparaître les fonctions  $\delta(\omega + \omega')$  et  $\delta(\omega - \omega')$  pour  $D$ ,  $\delta'(\omega + \omega')$  et  $\delta'(\omega - \omega')$  pour  $\gamma$ , où  $\delta'$  représente la dérivée de  $\delta$  :

$$\begin{aligned} \delta'(\omega) &= \frac{d}{d\omega} \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \right) \\ &= \frac{i}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tau e^{i\omega\tau} \end{aligned} \quad (B2-28)$$

Puisque les fréquences  $\omega$  et  $\omega'$  sont positives, la contribution de  $\delta(\omega + \omega')$  et  $\delta'(\omega + \omega')$  est nulle, et il reste :

$$\gamma = \frac{2\pi e^4}{3\hbar M^{*3}} \sum_{\lambda\lambda'} \mathcal{A}_{\lambda}^2 \mathcal{A}_{\lambda'}^2 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}')^2 (\vec{k} - \vec{k}')^2 n_{\lambda} (n_{\lambda'} + 1) \delta'(\omega - \omega') \quad (B2-29a)$$

$$D = \frac{\pi e^4}{M^*{}^2} \sum_{\lambda \lambda'} \mathcal{H}_\lambda^2 \mathcal{H}_{\lambda'}^2 (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}')^2 (\vec{k} - \vec{k}')^2 n_\lambda (n_\lambda + 1) \delta(\omega - \omega') \quad (\text{B2-29b})$$

Pour un champ isotrope,  $n_\lambda$  ne dépend que de la fréquence  $\omega$  du mode  $\lambda$ . Nous pouvons donc effectuer l'intégrale angulaire qui intervient dans les équations (B2-29ab). En posant :

$$\vec{k} - \vec{k}' = \frac{1}{c} (\omega \vec{u}_\lambda - \omega' \vec{u}_{\lambda'}) \quad (\text{B2-30})$$

où  $\vec{u}_\lambda$  et  $\vec{u}_{\lambda'}$  sont les deux vecteurs unitaires alignés avec  $\vec{k}$  et  $\vec{k}'$ , cette intégrale s'écrit :

$$\mathcal{J} = \frac{1}{c^2} \int d^2 \vec{u}_\lambda \int d^2 \vec{u}_{\lambda'} (\omega \vec{u}_\lambda - \omega' \vec{u}_{\lambda'})^2 \sum_{\substack{\vec{\varepsilon} \perp \vec{u}_\lambda \\ \vec{\varepsilon}' \perp \vec{u}_{\lambda'}}} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}')^2 \quad (\text{B2-31})$$

Pour la calculer, gardons dans un premier temps  $\vec{u}_\lambda$  et  $\vec{\varepsilon}$  fixés et passons pour l'intégrale sur  $\vec{u}_{\lambda'}, \vec{\varepsilon}_{\lambda'}$  en coordonnées sphériques d'axe  $\vec{u}_\lambda$ . Nous avons alors :

$$\begin{aligned} & \int d^2 \vec{u}_{\lambda'} (\omega \vec{u}_\lambda - \omega' \vec{u}_{\lambda'})^2 \sum_{\vec{\varepsilon}' \perp \vec{u}_{\lambda'}} (\vec{\varepsilon} \cdot \vec{\varepsilon}')^2 \\ &= \int d\theta' \sin\theta' \int d\varphi' [(\omega - \omega' \cos\theta')^2 + \omega'^2 \sin^2\theta'] [\sin^2\varphi' + \cos^2\varphi' \cos^2\theta'] \\ &= \frac{8\pi}{3} (\omega^2 + \omega'^2) \quad (\text{B2-32}) \end{aligned}$$

La sommation sur  $\vec{\varepsilon}$  et l'intégrale sur  $\vec{u}$  multiplie ce résultat par  $8\pi$ , ce qui donne :

$$\mathcal{J} = \frac{64\pi^2}{3c^2} (\omega^2 + \omega'^2) \quad (\text{B2-33})$$

Les coefficients  $\gamma$  et  $D$  s'écrivent alors :

$$\gamma = \frac{\hbar e^4}{18\pi^3 M^{*3} \varepsilon_0^2 c^8} \int d\omega \int d\omega' \omega \omega' (\omega^2 + \omega'^2) n(\omega) (n(\omega') + 1) \delta'(\omega - \omega') \quad (\text{B2-34a})$$

$$D = \frac{\hbar^2 e^4}{12\pi^3 M^{*2} \varepsilon_0^2 c^8} \int d\omega \int d\omega' \omega \omega' (\omega^2 + \omega'^2) n(\omega) (n(\omega') + 1) \delta(\omega - \omega') \quad (\text{B2-34b})$$

Le calcul de D est alors immédiat ; on trouve :

$$D = \frac{\hbar^2 e^4}{6\pi^3 M^{*2} \varepsilon_0^2 c^8} \int_0^\infty d\omega \omega^4 n(\omega) (n(\omega) + 1) \quad (\text{B2-35})$$

Le calcul de  $\gamma$  est un peu plus délicat, du fait de la présence de  $\delta'$ . Une intégration par parties sur la variable  $\omega$  donne :

$$\begin{aligned} \gamma &= - \frac{\hbar e^4}{9\pi^3 M^3 \varepsilon_0^2 c^8} \int_0^\infty d\omega \omega^3 (n(\omega) + 1) (2n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}) \\ &= - \frac{\hbar e^4}{18\pi^3 M^3 \varepsilon_0^2 c^8} [\omega^4 n^2(\omega)]_0^\infty \\ &\quad - \frac{\hbar e^4}{9\pi^3 M^3 \varepsilon_0^2 c^8} \int_0^\infty d\omega \omega^3 (2n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}) \end{aligned} \quad (\text{B2-36})$$

Si  $n(\omega)$  diverge moins vite que  $1/\omega^2$  en  $\omega = 0$  (c'est le cas du champ thermique), le terme tout intégré est nul\*. En utilisant l'identité :

$$\int_0^\infty d\omega \omega^4 \frac{dn}{d\omega} = - 4 \int_0^\infty d\omega \omega^3 n(\omega) \quad (\text{B2-37})$$

nous pouvons donc mettre  $\gamma$  sous l'une des deux formes suivantes :

---

(\*) La borne  $\omega = \infty$  du terme tout intégré ne pose pas de problème ici, car le fait que la densité volumique d'énergie soit finie impose que  $n(\omega)$  décroisse à l'infini plus vite que  $1/\omega^3$ .

$$\gamma = \frac{2 \hbar e^4}{9\pi^3 M^{*3} \varepsilon_0^2 c^8} \int_0^\infty d\omega \cdot \omega^3 \cdot n(\omega) \quad (\text{B2-38a})$$

$$= - \frac{\hbar e^4}{18\pi^3 M^{*3} \varepsilon_0^2 c^8} \int_0^\infty d\omega \cdot \omega^4 \cdot \frac{dn(\omega)}{d\omega} \quad (\text{B2-38b})$$

Remarquons que si nous introduisons la densité volumique d'énergie  $u$  :

$$\begin{aligned} u &= \sum_{\lambda} \frac{1}{L^3} \hbar \omega n_{\lambda} \\ &= \frac{\hbar}{\pi^2 c^3} \int_0^\infty d\omega \cdot \omega^3 n(\omega) \end{aligned} \quad (\text{B2-39})$$

et la section efficace Compton :

$$\sigma_c = \frac{e^4}{6\pi\varepsilon_0^2 M^{*2} c^4} \quad (\text{B2-40})$$

alors  $\gamma$  peut se réécrire :

$$\gamma = \frac{4}{3} \frac{u\sigma_c}{M^* c} \quad (\text{B2-41})$$

Nous retrouvons ici la valeur obtenue par l'approche équation de transport de Boltzmann par d'autres auteurs (voir par exemple référence 17, page 203, formules 8-3-12, 8-3-13).

### 3-2 Interprétation physique du coefficient de diffusion

Nous allons maintenant chercher à interpréter la valeur (B2-35) trouvée pour le coefficient de diffusion de l'impulsion. Rappelons d'abord que le processus physique à la base du changement d'impulsion de l'électron est la diffusion Compton, où un photon incident  $\lambda_i$  disparaît, un photon  $\lambda_f$  apparaît, et où le changement

d'impulsion de l'électron s'écrit :

$$\vec{\Delta p} = \hbar (\vec{k}_i - \vec{k}_f)$$

Puisque les  $\vec{\Delta p}$  correspondant à deux diffusions successives sont incorrélés, l'impulsion de l'électron subit une marche au hasard, et va donc diffuser. Pour calculer le coefficient de diffusion associé, supposons l'électron au repos au départ et calculons la valeur moyenne du carré de son impulsion au bout d'un temps  $\Delta T$ . Si le mode  $\lambda_1$  contenait un photon, et si tous les autres modes étaient vides, on aurait :

$$\overline{\vec{p}(\Delta T)} = \int d\Omega \frac{c \cdot \Delta T}{L^3} \frac{d\sigma}{d\Omega} (\lambda_1, \Omega) \hbar (\vec{k}_i - \vec{k}_f) \quad (\text{B2-42})$$

où  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  représente la section efficace différentielle Compton de diffusion du mode  $\vec{k}_i$  vers le mode  $\vec{k}_f$  [13] :

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2} (1 + \cos^2 \theta) \quad (\text{B2-43a})$$

$\theta$  désigne ici l'angle entre  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_f$ , et  $r_0$  le rayon classique de l'électron :

$$r_0 = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 M^* c^2} \quad (\text{B2-43b})$$

Les fréquences des photons  $\vec{k}_i$  et  $\vec{k}_f$  seront prises égales dans la suite : le décalage relatif en fréquence lors d'une diffusion Compton est en effet de l'ordre de  $\hbar\omega/M^*c^2$ , qui est une quantité très petite ici (cf. eq. B2-1). Passons maintenant à la situation réelle où tous les modes contiennent des photons.  $\overline{\vec{p}(\Delta T)}$  est alors nul, et  $\overline{P^2(\Delta T)}$  s'écrit :

$$\overline{\vec{P}^2(\Delta T)} = \sum_{\lambda_1} n_{\lambda_1} \int d\Omega \frac{c \cdot \Delta T}{L^3} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\lambda_1, \Omega) (n_{\lambda_f} + 1) \hbar^2 (\vec{k}_1 - \vec{k}_f)^2 \quad (\text{B2-44a})$$

En passant de la somme discrète sur  $\lambda_1$  à une intégrale, ceci devient :

$$\overline{\vec{P}^2(\Delta T)} = \Delta T \cdot \frac{16 \hbar^2 r_0^2}{3\pi c^4} \int d\omega \cdot \omega^4 n(\omega) (n(\omega) + 1) \quad (\text{B2-44b})$$

Le coefficient de diffusion en impulsion s'obtient à partir de :

$$D = \frac{1}{2} \cdot \frac{\overline{\vec{P}^2(\Delta T)}}{\Delta T} \quad (\text{B2-45})$$

En remplaçant  $r_0^2$  par sa valeur (B2-43b), nous constatons immédiatement que (B2-45) se ramène à la valeur trouvée "rigoureusement" en (B2-35).

Nous avons donc vérifié quantitativement que la diffusion de l'impulsion de l'électron qui intervient dans l'équation de Fokker-Planck est causée par la marche au hasard de cette impulsion lors des différents "chocs" Compton.

### 3-3 Interprétation physique du coefficient de friction

Pour interpréter physiquement l'expression (B2-38) du coefficient de friction, nous allons tout comme nous l'avons fait pour la diffusion, établir un bilan du changement d'impulsion de l'électron lors des chocs Compton. A la différence du paragraphe précédent, nous supposerons que l'électron a une impulsion non nulle  $\vec{P} = M \vec{V}$ . Du fait de ce mouvement, la force moyenne qui s'applique sur lui est non nulle, et c'est elle que nous nous proposons de calculer.

Nous ferons tout d'abord le bilan des transferts d'impulsion dans le référentiel où l'électron est initialement au repos

noté dans la suite  $\mathcal{R}_{r.e.p.}$ . Dans ce référentiel, un photon de vecteur d'onde  $\vec{k}'$  et de fréquence  $\omega'$  correspond à un photon de vecteur d'onde  $\vec{k}$  et de fréquence  $\omega$  dans le laboratoire, avec :

$$\vec{k}' = \vec{k} - \frac{\omega}{c^2} \vec{v} \quad (\text{B2-46a})$$

$$\omega' = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v} \quad (\text{B2-46b})$$

Le changement d'impulsion pendant le temps  $\Delta T$  s'écrit dans le référentiel  $\mathcal{R}_{r.e.p.}$  (cf. eq. B2-42):

$$\Delta \vec{p} = \sum_{\lambda'_i} n_{\lambda'_i} \int d\Omega' \frac{c\Delta T}{L^3} \frac{d\sigma}{d\Omega'} (\lambda'_i, \Omega') (n_{\lambda'_f} + 1) \hbar(\vec{k}'_i - \vec{k}'_f) \quad (\text{B2-47})$$

où  $n_{\lambda'_i}$  et  $n_{\lambda'_f}$  désignent les nombres de photons dans les modes  $\lambda'_i$  et  $\lambda'_f$  du référentiel  $\mathcal{R}_{r.e.p.}$ . Le nombre de photons  $n_{\lambda'}$  s'exprime en fonction du nombre de photons dans le mode  $\lambda$  du référentiel du laboratoire par :

$$\begin{aligned} n_{\lambda'} &= n_{\lambda} \\ &= n(\omega) \\ &= n(\omega' + \vec{k}' \cdot \vec{v}) \\ &\simeq n(\omega') + \vec{k}' \cdot \vec{v} \frac{dn}{d\omega'} \end{aligned} \quad (\text{B2-48})$$

Le champ électromagnétique dans le référentiel de l'électron n'est donc plus isotrope, et c'est de cette anisotropie que va résulter la force de friction. En reportant (B2-48) dans (B2-47), nous trouvons en effet :

$$\Delta \vec{p} = \sum_{\lambda'_i} \left( n(\omega') + (\vec{k}'_i \cdot \vec{v}) \frac{dn}{d\omega'} \right) \int d\Omega' \frac{c\Delta T}{L^3} \frac{d\sigma}{d\Omega'} (\lambda'_i, \Omega')$$



$$\left( 1 + n(\omega') + (\vec{k}'_f \cdot \vec{v}) \frac{dn}{d\omega'} \right) \hbar (\vec{k}'_i - \vec{k}'_f) \quad (\text{B2-49})$$

soit, en passant à une somme continue sur  $\lambda'_1$ , et en ne gardant que les termes linéaires en  $v$  :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta \vec{P}}{\Delta T} &= 2 \cdot \frac{1}{(2\pi)^3} \cdot \frac{8\pi r_0^2}{3} \cdot c \int d^3 k \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{dn}{d\omega} \\ &= \frac{e^4 \hbar}{18\pi^3 M^*{}^2 c^3 \epsilon_0^2} \int_0^\infty d\omega \omega^4 \frac{dn}{d\omega} \vec{v} \\ &= - \gamma \vec{P} \end{aligned} \quad (\text{B2-50})$$

Nous trouvons donc que la force qui s'applique à l'électron en mouvement est proportionnelle à l'impulsion de l'électron, et que le coefficient de proportionnalité est précisément le coefficient de friction  $\gamma$  intervenant dans l'équation de Fokker-Planck, donné à l'équation (B2-38).

Une propriété importante de ce coefficient est son signe :  $\gamma$  est toujours positif (cf. B2-38a), ce qui signifie qu'un électron placé dans un champ chaotique isotrope est toujours freiné. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'il n'en va pas de même pour un atome neutre : ce dernier va en effet aller "sonder"  $n(\omega)$  et  $\frac{dn}{d\omega}$  à sa fréquence de résonance  $\omega_0$ , ce qui permettra de réaliser aussi bien  $\gamma$  positif que négatif. Par contre, l'électron est sensible à tous les modes du champ à la fois, et le résultat en est une force qui amortit toujours le mouvement de l'électron. L'action simultanée de cet amortissement et du chauffage décrit au paragraphe B2-3-2 conduit alors à une solution stationnaire gaussienne pour l'équation de Fokker-Planck (B2-23) :

$$\pi(\vec{P}, t) \propto \exp \left( - \frac{\vec{P}^2}{2mk_B T_{eff}} \right) \quad (\text{B2-51})$$

où la température effective  $T_{eff}$  est donnée par (cf. réf. [19]) :

$$k_B T_{eff} = \frac{D}{3m\gamma} = \frac{\hbar}{4} \frac{\int_0^\infty \omega^4 n(\omega) (n(\omega) + 1) d\omega}{\int_0^\infty \omega^3 n(\omega) d\omega} \quad (B2-52)$$

Dans le cas où le rayonnement est lui-même à l'équilibre thermodynamique à une température donnée T, nous allons voir maintenant que cette température effective  $T_{eff}$  de l'électron est égale à la température T du rayonnement.

#### B2-4 LE CAS DU RAYONNEMENT DU CORPS NOIR

Pour terminer ce chapitre, nous allons indiquer ce que deviennent les résultats précédents dans le cas où le rayonnement est pris à l'équilibre thermodynamique. Le nombre de photons dans un mode de fréquence  $\omega$  vaut alors (cf. B2-19) :

$$n(\omega) = \left( \exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1 \right)^{-1} \quad (B2-53)$$

Si nous reportons cette valeur dans les expressions (B2-35) et (B2-38a) de D et  $\gamma$ , nous trouvons :

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{2\hbar e^4}{9\pi^3 M^{*3} \epsilon_0^2 c^8} \int_0^\infty \frac{d\omega \omega^3}{\exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1} \\ &= \frac{2 e^4 (k_B T)^4}{9\pi^3 \hbar^3 M^{*3} \epsilon_0^2 c^8} I_3 \end{aligned} \quad (B2-54a)$$

$$D = 3\gamma M^* k_B T \quad (B2-54b)$$

où nous avons posé :

$$I_3 = \int_0^\infty \frac{du u^3}{e^u - 1} = \frac{1}{4} \int_0^\infty \frac{du u^4 e^u}{(e^u - 1)^2} \quad (B2-55)$$

En introduisant la constante de structure fine  $\alpha = e^2 / 4\pi\epsilon_0 \hbar c$ ,  $\gamma$  et  $D$  peuvent encore s'écrire :

$$\gamma = \frac{D}{3M^* k_B T} = \frac{32}{9\pi} I_3 \alpha^2 \left( \frac{k_B T}{M^* c^2} \right)^3 \frac{k_B T}{\hbar} \quad (\text{B2-56})$$

Cette formule permet de donner un ordre de grandeur du temps caractéristique de thermalisation  $\gamma^{-1}$ . A la température ordinaire de 300 K ( $k_B T / M^* c^2 = 5.10^{-8}$ ), on trouve  $\gamma^{-1} = 5.10^{11}$  secondes = 15.000 ans. Il est bien clair qu'un tel processus est inobservable en laboratoire, et ne peut jouer un rôle en pratique que dans les conditions extrêmes qu'on rencontre par exemple en astrophysique. Il est ainsi possible que ce processus intervienne dans la thermalisation de plasmas très dilués et complètement ionisés, les autres mécanismes possibles étant le "bremsstrahlung", la recombinaison radiative et la photodissociation [17].

### B3 : MOUVEMENT D'UN ATOME DANS UN CHAMP INCOHERENT ET ISOTROPE

Nous allons aborder maintenant le problème du mouvement d'un atome dans un champ électromagnétique. Dans ce chapitre, le champ sera supposé dans un état incohérent, modélisant ainsi un rayonnement laser large bande ou le rayonnement du corps noir, alors que, dans le chapitre suivant (B4), ce champ sera au contraire supposé dans un état cohérent monochromatique (laser mono-mode par exemple). Nous nous limiterons de plus dans ce chapitre à un champ homogène et isotrope, et nous supposerons que l'atome ne possède que deux niveaux que nous noterons  $|f\rangle$  (fondamental) et  $|e\rangle$  (excité).

La méthode que nous allons utiliser ici est une généralisation directe de celle utilisée au chapitre B1 et fondée sur l'équation pilote. Dans le paragraphe B3-1, nous justifions cette approche, et nous écrivons l'équation pilote pour le mouvement de l'atome dans la base des états propres de l'impulsion. Nous développons ensuite perturbativement cette équation par rapport à l'impulsion des photons du champ (§ B3-2), ce qui nous conduit à deux équations aux dérivées partielles couplées pour les probabilités  $\Pi_e(\vec{p}, t)$  et  $\Pi_f(\vec{p}, t)$  de trouver l'atome dans l'état interne  $e$  ou  $f$ , avec l'impulsion  $\vec{p}$  et à l'instant  $t$ . Nous sommes donc confrontés à une difficulté supplémentaire par rapport aux deux chapitres précédents : il faut extraire de ces deux équations couplées une équation réduite unique pour :

$$\Pi(\vec{p}, t) = \Pi_e(\vec{p}, t) + \Pi_f(\vec{p}, t) \quad (\text{B3-1})$$

qui représente la probabilité de trouver l'atome avec l'impulsion  $\vec{p}$  indépendamment de son état interne. Ceci est fait grâce à une élimination adiabatique de la variable rapide du système qui est une certaine combinaison linéaire de  $\Pi_e$  et  $\Pi_f$ , au profit de la variable lente  $\Pi(\vec{p}, t)$  (§ B3-3). Enfin, au paragraphe B3-4, nous examinons le cas particulier du champ pris à l'équilibre thermodynamique.

Le problème de la thermalisation d'un atome à 2 niveaux interagissant avec le rayonnement du corps noir a été abordé dès 1917 par Einstein. Dans le fameux article où est introduit pour la première fois le concept d'émission stimulée [23], Einstein étudiait le mouvement de l'atome dans le rayonnement du corps noir et montrait à partir d'arguments physiques simples comment les échanges d'impulsion entre atomes et photons lors des processus d'absorption, d'émission spontanée et induite conduisaient bien à une thermalisation de l'atome. Beaucoup plus récemment, le problème du mouvement d'un atome dans un champ chaotique a été étudié par une méthode voisine de la notre, par J. Javanainen et S. Stenholm [24]. Leur but était de modéliser ainsi le refroidissement radiatif d'atomes neutres par un champ laser fluctuant "large bande".

### B3-1 L'EQUATION PILOTE DECRIVANT LE MOUVEMENT DE L'ATOME

#### 1-1 Le Hamiltonien du problème

Nous considérons ici un atome à deux niveaux f et e, séparés par l'énergie  $\hbar\omega_0$ . En notant  $\vec{R}$  et  $\vec{P}$ , la position et l'impulsion du centre de masse de l'atome, le Hamiltonien atomique s'écrit :

$$H_A = \frac{\vec{P}^2}{2M_f} |f\rangle\langle f| + \frac{\vec{P}^2}{2M_e} |e\rangle\langle e| + \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) \quad (\text{B3-2})$$

Nous affectons ici à l'atome des masses différentes  $M_e$  et  $M_f$  suivant qu'il est dans l'état e ou f, avec :

$$M_e c^2 - M_f c^2 = \hbar\omega_0 \quad (\text{B3-3})$$

Une telle distinction entre  $M_e$  et  $M_f$ , qui est peu courante en physique atomique, sera en effet nécessaire pour établir un bilan correct des transferts d'impulsion lors des processus d'absorption ou d'émission.

Pour simplifier les notations, nous introduirons dans la suite l'opérateur :

$$M_0 = M_e |e\rangle\langle e| + M_f |f\rangle\langle f| \quad (\text{B3-4})$$

qui permet de réécrire  $H_A$  sous la forme :

$$H_A = \frac{\vec{P}^2}{2M_0} + \frac{\hbar\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) \quad (\text{B3-2})'$$

Comme dans le chapitre B2, le champ électromagnétique est quantifié sur la base des ondes planes repérées par l'indice  $\lambda = (\vec{k}, \vec{\varepsilon})$ , où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde et  $\vec{\varepsilon}$  la polarisation de l'onde plane  $\lambda$ . En notant  $a_\lambda$  et  $a_\lambda^\dagger$  les opérateurs de destruction et de création d'un photon  $\lambda$ , le Hamiltonien du champ s'écrit :

$$H_R = \sum_{\lambda} \hbar\omega a_\lambda^\dagger a_\lambda \quad (\text{B3-5})$$

Le potentiel de couplage atome-champ est pris à l'approximation dipolaire électrique, et nous ferons de plus une approximation scalaire, en traitant le dipole atomique  $\vec{D}$  et le champ électrique  $\vec{E}$  comme des scalaires et non des vecteurs. Nous prendrons donc :

$$U = - D \cdot E(\vec{R}) \quad (\text{B3-6a})$$

avec :

$$D = d (|e\rangle\langle f| + |f\rangle\langle e|) \quad (\text{B3-6b})$$

$$E(\vec{R}) = \sum_{\lambda} i \mathcal{E}_\lambda (e^{i\vec{k}\vec{R}} a_\lambda - e^{-i\vec{k}\vec{R}} a_\lambda^\dagger) \quad (\text{B3-6c})$$

$\lambda$  désigne ici l'élément de matrice réduit du dipole atomique entre  $e$  et  $f$ , et  $\mathcal{E}_\lambda$  est donné en (B2-6a).

Cette approximation scalaire est nécessaire pour garder un caractère isotrope au problème. Pour aller au delà de cette approximation tout en préservant l'isotropie, il faudrait prendre une structure atomique plus réaliste telle qu'une transition  $|f, J=0\rangle \leftrightarrow |e, J=1\rangle$ , pour laquelle l'opérateur dipole s'écrirait

$$\vec{D} = \frac{d}{\sqrt{3}} \sum_{i=x,y,z} \vec{u}_i (|e, m_i = 0\rangle \langle f| + |f\rangle \langle e, m_i = 0|) \quad (\text{B3-6b})'$$

et pour laquelle  $\vec{E}$  serait donné par (B2-5a).

### 1-2 La condition de rétrécissement par le mouvement

Comme nous l'avons vu lors de l'étude du modèle de mouvement Brownien présenté au chapitre B1, la validité de l'équation (B1-9) est liée à la condition de rétrécissement par le mouvement :

$$\frac{\bar{U} \tau_c}{\hbar} \ll 1$$

$\bar{U}$  désigne un ordre de grandeur du potentiel d'interaction  $U$  (cf. B3-6) et  $\tau_c$  représente le temps de corrélation des fluctuations du champ électromagnétique.

Pour obtenir l'ordre de grandeur de  $\bar{U}$ , évaluons la valeur moyenne du carré du couplage  $U$  :

$$\begin{aligned} \bar{U}^2 &\simeq \langle U^2 \rangle \simeq d^2 \sum_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda}^2 n_{\lambda} \\ &= \frac{\hbar d^2}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^3} \int_0^{\infty} d\omega \omega^3 n(\omega) \end{aligned} \quad (\text{B3-7})$$

où nous avons utilisé le fait que dans un champ homogène et isotrope, le nombre de photons par mode  $n_{\lambda}$  ne dépend que de la fréquence  $\omega$  de ce mode, et peut donc se noter  $n(\omega)$ . Si les fréquences

des modes peuplés du champ sont centrés autour de  $\omega_0$ , avec une largeur  $\Delta\omega$ ,  $\langle U^2 \rangle$  se réécrit :

$$\langle U^2 \rangle = \frac{\hbar d^2 \omega_0^3}{4\pi^2 \varepsilon_0 c^3} n(\omega_0) \Delta\omega \quad (\text{B3-8a})$$

ou encore :

$$\langle U^2 \rangle \sim \hbar \Gamma \cdot \hbar \Delta\omega \cdot n(\omega_0) \quad (\text{B3-8b})$$

où nous avons introduit la largeur radiative  $\Gamma$  de la transition atomique, qui s'écrit pour le modèle scalaire utilisé ici :

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{2\pi \varepsilon_0 \hbar c^3} \quad (\text{B3-9})$$

Le temps de corrélation  $\tau_c$  du champ est de l'ordre de l'inverse de la largeur spectrale  $\Delta\omega$ , si bien que la condition de rétrécissement par le mouvement s'écrit finalement :

$$\sqrt{\frac{\Gamma}{\Delta\omega}} \cdot \sqrt{n(\omega_0)} \ll 1 \quad (\text{B3-10})$$

Cette condition vient donc limiter à la fois l'intensité du rayonnement ( $n(\omega_0)$  ne doit pas être trop grand) ainsi que sa finesse spectrale ( $\Delta\omega$  ne doit pas être trop petit). Dans le cas particulier du rayonnement thermodynamique de température  $T$  telle que :

$$\hbar \omega_0 \sim k_B T \quad (\text{B3-11})$$

$n(\omega_0)$  est de l'ordre de 1 et  $\Delta\omega$  de l'ordre de  $\omega_0$ , si bien que la condition (B3-10) se ramène à :

$$\sqrt{\frac{\Gamma}{\omega_0}} \ll 1 \quad (\text{B3-12})$$

Cette dernière condition est toujours vérifiée pour les transitions



que l'on rencontre en physique atomique.

### 1-3 L'équation pilote du problème

Si la condition de rétrécissement par le mouvement est vérifiée, l'évolution de la matrice densité atomique  $\sigma^A$  peut s'écrire (cf. eq. B1-9) :

$$\frac{d\sigma^A}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [H_A, \sigma^A(t)] - \frac{1}{\hbar^2} \text{Tr}_R \left\{ \int_0^\infty d\tau [U, [\tilde{U}(-\tau), \sigma^A(t) \sigma^R]] \right\} \quad (\text{B3-13})$$

où  $H_A$  et  $U$  sont donnés par les expressions (B3-2) et (B3-6). Nous allons maintenant chercher à obtenir à partir de cette équation pilote l'évolution des "populations" des deux états fondamental et excité :

$$\Pi_e(\vec{p}, t) = \langle e, \vec{p} | \sigma^A(t) | e, \vec{p} \rangle \quad (\text{B3-14a})$$

$$\Pi_f(\vec{p}, t) = \langle f, \vec{p} | \sigma^A(t) | f, \vec{p} \rangle \quad (\text{B3-14b})$$

Ces deux quantités représentent la probabilité de trouver l'atome à l'instant  $t$  avec l'impulsion  $\vec{p}$  et dans l'état interne  $e$  ou  $f$ . Indiquons tout de suite la forme finale que prendront ces deux équations d'évolution :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Pi_e}{dt}(\vec{p}, t) = \sum_{\lambda} \alpha_{\lambda}(\vec{p}, \vec{k}) \Pi_e(\vec{p}, t) + \beta_{\lambda}(\vec{p}, \vec{k}) \Pi_f(\vec{p}-\hbar\vec{k}, t) \quad (\text{B3-15a}) \\ \frac{d\Pi_f}{dt}(\vec{p}, t) = \sum_{\lambda} \gamma_{\lambda}(\vec{p}, \vec{k}) \Pi_e(\vec{p}+\hbar\vec{k}, t) - \delta_{\lambda}(\vec{p}, \vec{k}) \Pi_f(\vec{p}, t) \quad (\text{B3-15b}) \end{array} \right.$$

L'interprétation de ces deux équations sera alors très simple. Considérons par exemple (B3-15a). Cette équation contient d'abord un

terme "de départ" en  $-\alpha_\lambda \Pi_e(\vec{p}, t)$ , décrivant la disparition d'atomes dans l'état excité avec l'impulsion  $\vec{p}$  à la suite de l'émission stimulée ou spontanée d'un photon d'impulsion  $\hbar\vec{k}$ . Elle contient également un terme "d'arrivée", en  $\beta_\lambda \Pi_f(\vec{p}-\hbar\vec{k}, t)$  décrivant l'apparition d'atomes dans l'état excité avec l'impulsion  $\vec{p}$  : ces atomes étaient initialement dans l'état fondamental  $f$  avec l'impulsion  $\vec{p}-\hbar\vec{k}$ , et ils ont absorbé à l'instant  $t$  un photon d'impulsion  $\hbar\vec{k}$ . Les fonctions  $\alpha_\lambda, \beta_\lambda, \gamma_\lambda$  et  $\delta_\lambda$  assurent la conservation de l'énergie au cours de ces différents processus.

Abordons maintenant le calcul explicite des taux d'évolution de  $\Pi_e$  et  $\Pi_f$ . L'opérateur pris en représentation interaction  $\tilde{U}$  s'écrit :

$$\tilde{U}(t) = d(|e\rangle\langle f|(t) + |f\rangle\langle e|(t)) \sum_\lambda i \xi_\lambda (e^{i\vec{k}\vec{R}(t)} \tilde{a}_\lambda(t) - e^{-i\vec{k}\vec{R}(t)} \tilde{a}_\lambda^\dagger(t)) \quad (\text{B3-16})$$

A partir du Hamiltonien  $H_A$ , nous pouvons alors déterminer :

$$\vec{R}(t) = \vec{R} + \frac{\vec{P}t}{M_0} \quad (\text{B3-17a})$$

$$|e\rangle\langle f|(t) = |e\rangle\langle f| \exp \left[ i \left( \omega_0 + \frac{\vec{p}^2}{2\hbar} \left( \frac{1}{M_e} - \frac{1}{M_f} \right) \right) t \right] \quad (\text{B3-17b})$$

$$|f\rangle\langle e|(t) = |f\rangle\langle e| \exp \left[ -i \left( \omega_0 + \frac{\vec{p}^2}{2\hbar} \left( \frac{1}{M_e} - \frac{1}{M_f} \right) \right) t \right] \quad (\text{B3-17c})$$

De même, à partir de  $H_R$ , nous trouvons :

$$\tilde{a}_\lambda(t) = a_\lambda e^{-i\omega t} \quad (\text{B3-17d})$$

$$\tilde{a}_\lambda^\dagger(t) = a_\lambda^\dagger e^{i\omega t} \quad (\text{B3-17e})$$

Calculons maintenant à partir de l'équation pilote (B3-13) l'évolution de  $\Pi_e(\vec{p}, t)$  et  $\Pi_f(\vec{p}, t)$ . En développant le double commutateur de l'équation (B3-13), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t}(\vec{p}, t) = & - \frac{1}{\hbar^2} \left( \text{Tr}_R \int_0^\infty d\tau \langle e, \vec{p} | U \tilde{U}(-\tau) \sigma^A \sigma^R | e, \vec{p} \rangle + \text{c.c.} \right) \\ & + \frac{1}{\hbar^2} \left( \text{Tr}_R \int_0^\infty d\tau \langle e, \vec{p} | U \sigma^A \sigma^R \tilde{U}(-\tau) | e, \vec{p} \rangle + \text{c.c.} \right) \end{aligned} \quad (\text{B3-18})$$

Les éléments de matrice que nous devons alors évaluer font intervenir des opérateurs de trois espaces différents : l'espace des états du champ, l'espace des états internes de l'atome, et l'espace des états externes de l'atome. Nous trouvons par exemple :

$$\begin{aligned} \text{Tr}_R \langle e, \vec{p} | U \tilde{U}(-\tau) \sigma^A \sigma^R | e, \vec{p} \rangle = \\ \sum_\lambda n_\lambda \mathcal{E}_\lambda^2 e^{i\omega\tau} \langle e, \vec{p} | e^{-i\vec{k}R} D e^{i\vec{k}R(-\tau)} \tilde{D}(-\tau) \sigma^A(t) | e, \vec{p} \rangle \\ + \sum_\lambda (n_\lambda + 1) \mathcal{E}_\lambda^2 e^{-i\omega\tau} \langle e, \vec{p} | e^{i\vec{k}R} D e^{-i\vec{k}R(-\tau)} \tilde{D}(-\tau) \sigma^A(t) | e, \vec{p} \rangle \end{aligned} \quad (\text{B3-19})$$

En utilisant l'opérateur déplacement :

$$e^{i\vec{k}R} |\vec{p}\rangle = |\vec{p} + \hbar \vec{k}\rangle \quad (\text{B3-20})$$

et la relation tirée de l'identité de Glauber (voir eq. (B1-17)) :

$$\exp(i\vec{k}R(-\tau)) = \exp(i\vec{k}R) \exp\left(-i \frac{\vec{k}P\tau}{M_0}\right) \exp\left(-\frac{i\hbar k^2 \tau}{2M_0}\right) \quad (\text{B3-21})$$

nous pouvons transformer (B3-19) en :

$$\text{Tr}_R \langle e, \vec{p} | U \tilde{U}(-\tau) \sigma^A \sigma^R | e, \vec{p} \rangle = \Pi_e(\vec{p}, t) \times$$

$$\left[ \sum_{\lambda} n_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \exp i\tau \left( \omega - \frac{\vec{k}\vec{p}}{M_f} - \frac{\hbar k^2}{2M_f} + \omega_0 + \frac{p^2}{2\hbar M_e} - \frac{p^2}{2\hbar M_f} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\lambda} (n_{\lambda}+1) \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \exp -i\tau \left( \omega - \frac{\vec{k}\vec{p}}{M_f} + \frac{\hbar k^2}{2M_f} - \omega_0 - \frac{p^2}{2\hbar M_e} + \frac{p^2}{2\hbar M_f} \right) \right] \quad (\text{B3-22})$$

Nous pouvons alors réécrire la première ligne de (B3-18) sous la forme :

$$- \frac{2\pi}{\hbar^2} \Pi_e(\vec{p}, t) \left\{ \sum_{\lambda} n_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta \left( \omega + \omega_0 - \frac{\vec{k}\vec{p}}{M_f} - \frac{\hbar k^2}{2M_f} + \frac{p^2}{2\hbar M_e} - \frac{p^2}{2\hbar M_f} \right) \right. \\ \left. + \sum_{\lambda} (n_{\lambda}+1) \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta \left( \omega - \omega_0 - \frac{\vec{k}\vec{p}}{M_f} + \frac{\hbar k^2}{2M_f} - \frac{p^2}{2\hbar M_e} + \frac{p^2}{2\hbar M_f} \right) \right\} \quad (\text{B3-23})$$

Les fréquences  $\omega$  et  $\omega_0$  sont positives, et nous nous limitons à la situation non relativiste où  $p/M \ll c$  et  $\hbar\omega \ll Mc^2$ . La première des deux fonctions  $\delta$  de (B3-23) ne contribue donc pas, et il reste pour la première ligne de (B3-18) :

$$- \Pi_e(\vec{p}, t) \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 (n_{\lambda}+1) \delta \left( \hbar\omega + \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2M_f} - \hbar\omega_0 - \frac{p^2}{2M_e} \right) \quad (\text{B3-24})$$

Nous calculons de même la deuxième ligne de (B3-18) ; nous obtenons finalement pour  $\partial\Pi_e/\partial t$  :

$$\frac{\partial\Pi_e}{\partial t} = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta \left( \left( \hbar\omega + \frac{(\vec{p}-\hbar\vec{k})^2}{2M_f} \right) - \left( \hbar\omega_0 + \frac{p^2}{2M_e} \right) \right) \\ \left( - (n_{\lambda} + 1) \Pi_e(\vec{p}, t) + n_{\lambda} \Pi_f(\vec{p} - \hbar\vec{k}, t) \right) \quad (\text{B3-25a})$$

Pour  $\partial \Pi_f / \partial t$ , nous trouvons l'équation analogue :

$$\frac{\partial \Pi_f}{\partial t} = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta \left( \left( \hbar\omega + \frac{\vec{p}^2}{2M_f} \right) - \left( \hbar\omega_0 + \frac{(\vec{p} + \hbar \vec{k})^2}{2M_e} \right) \right) \left( - n_{\lambda} \Pi_f(\vec{p}, t) + (n_{\lambda} + 1) \Pi_e(\vec{p} + \hbar \vec{k}, t) \right) \quad (\text{B3-25b})$$

La signification physique de ces deux équations est claire ; prenons par exemple l'équation pour  $\partial \Pi_e / \partial t$ . Le terme de départ, en  $-(n_{\lambda} + 1) \Pi_e(\vec{p}, t)$  correspond à la disparition d'un atome initialement dans l'état e avec l'impulsion  $\vec{p}$ , par émission spontanée ou stimulée d'un photon d'impulsion  $\hbar \vec{k}$ . En notant  $\vec{p}'$  l'impulsion finale de l'atome, la conservation de l'énergie et de l'impulsion s'écrivent :

$$\vec{p}' = \vec{p} - \hbar \vec{k} \quad (\text{B3-26a})$$

$$\hbar\omega + \frac{\vec{p}'^2}{2M_f} = \hbar\omega_0 + \frac{\vec{p}^2}{2M_e} \quad (\text{B3-26b})$$

Ces deux lois de conservation sont précisément assurées par la fonction  $\delta$  de (B3-25a). L'autre contribution à  $\partial \Pi_e / \partial t$ , en  $n_{\lambda} \Pi_e(\vec{p} - \hbar \vec{k}, t)$  correspond au processus inverse, c'est-à-dire l'apparition d'atomes dans l'état e avec l'impulsion  $\vec{p}$ , à partir d'atomes initialement dans l'état f avec l'impulsion  $\vec{p} - \hbar \vec{k}$  et qui absorbent un photon  $\hbar \vec{k}$ . En ce qui concerne l'évolution de  $\Pi_f$ , les termes de départ correspondent aux atomes initialement dans l'état f avec l'impulsion  $\vec{p}$  qui absorbent un photon  $\hbar \vec{k}$ , et les termes d'arrivée correspondent au processus inverse : émission spontanée ou stimulée d'un photon  $\hbar \vec{k}$  par un atome initialement dans l'état e avec l'impulsion  $\vec{p} + \hbar \vec{k}$ .

**B3-2 DEVELOPPEMENT PERTURBATIF DE L'EQUATION PILOTE**

Dans l'équation pilote obtenue au paragraphe précédent (eq. B3-25), l'évolution des populations  $\Pi_e$  et  $\Pi_f$  est "non locale" en impulsion :  $\Pi_i(\vec{p}, t)$  est couplé à  $\Pi_j(\vec{p} \pm \hbar\vec{k}, t)$ . Cette situation est à rapprocher de celle rencontrée pour le mouvement Brownien (eq. B1-18) et nous allons lever cette difficulté de la même manière qu'au chapitre B1, en remarquant que l'impulsion d'un photon  $\hbar\vec{k}$  est en général très petite devant l'impulsion moyenne de l'atome. Dans le cas particulier de l'équilibre thermodynamique envisagé en (B3-11), nous avons par exemple :

$$\varepsilon_1 = \frac{\overline{\hbar k}}{\overline{p}} \approx \frac{k_B T/c}{\sqrt{Mk_B T}} = \sqrt{\frac{k_B T}{Mc^2}} \ll 1 \quad (B3-27)$$

Nous nous limiterons de plus dans ce qui suit à des atomes "lents", en supposant que "l'effet Doppler" moyen  $k v$  est petit devant la largeur spectrale  $\Delta\omega$  du champ. Une telle hypothèse est toujours vérifiée si l'atome et le rayonnement sont à l'équilibre thermodynamique (B3-11) :

$$\varepsilon_2 = \frac{\overline{k v}}{\Delta\omega} \approx \frac{\overline{v}}{c} \approx \sqrt{\frac{k_B T}{Mc^2}} \ll 1 \quad (B3-28)$$

Ces deux infiniment petits  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  sont analogues aux infiniment petits introduits lors de l'étude du modèle de mouvement Brownien (eq. B1-23 et B1-24), et nous allons maintenant suivre une démarche analogue à celle du chapitre B1 pour simplifier l'équation pilote (B3-25), en développant cette équation en puissances de  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ . Le développement par rapport à  $\varepsilon_1$  donne :

$$\Pi_i(\vec{p} \pm \hbar\vec{k}, t) = \Pi_i(\vec{p}, t) + \hbar\vec{k} \cdot \frac{\partial \Pi_i}{\partial \vec{p}} + \dots \quad (B3-29)$$

Pour développer par rapport à  $\varepsilon_2$ , remarquons d'abord que les quantités  $\hbar^2 k^2 / M$  et  $p^2 / M_f - p^2 / M_g$  peuvent se réécrire :

$$\overline{\frac{\hbar^2 k^2}{M}} = \hbar \overline{\frac{\hbar k}{p}} \cdot \overline{\frac{k \cdot p}{M}} = \varepsilon_1 \varepsilon_2 \hbar \Delta \omega \quad (\text{B3-30a})$$

$$\overline{\frac{p^2}{M_f}} - \overline{\frac{p^2}{M_g}} \approx \overline{\frac{p^2}{M^2}} \frac{\hbar \omega_0}{c^2} \approx \varepsilon_2^2 \cdot \frac{\Delta \omega}{\omega_0} \cdot \hbar \Delta \omega \quad (\text{B3-30b})$$

Ces deux quantités sont donc d'ordre deux en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , ce qui permet de développer les fonctions  $\delta$  intervenant dans l'équation pilote :

$$\begin{aligned} \delta \left( \hbar \omega + \frac{(\vec{p} - \hbar \vec{k})^2}{2M_f} - \hbar \omega_0 - \frac{p^2}{2M_e} \right) &= \delta(\hbar \omega - \hbar \omega_0) - \frac{\hbar k p}{M_f} \delta'(\hbar \omega - \hbar \omega_0) \\ + \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2M_f} + \frac{p^2}{2} \left( \frac{1}{M_f} - \frac{1}{M_e} \right) \right) \delta'(\hbar \omega - \hbar \omega_0) &+ \frac{\hbar^2}{2} \left( \frac{\vec{k} \cdot \vec{p}}{M_f} \right)^2 \delta''(\hbar \omega - \hbar \omega_0) \end{aligned} \quad (\text{B3-31})$$

La première ligne de (B3-31) contient les termes d'ordre 0 et 1 en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , et la seconde ligne contient les termes d'ordre deux.

En utilisant les différents développements (B3-29,30,31) nous pouvons alors écrire l'équation pilote (B3-25) à l'ordre 2 en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  :

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} = \mathcal{L}^{(0)} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} + \mathcal{L}^{(1)} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} + \mathcal{L}^{(2)} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} \quad (\text{B3-32})$$

Le terme d'ordre zéro  $\mathcal{L}^{(0)}$  s'écrit :

$$\mathcal{L}^{(0)} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \alpha & -\beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} \quad (\text{B3-33})$$

avec :

$$\alpha = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta(\hbar \omega - \hbar \omega_0) (n_{\lambda} + 1) \quad (\text{B3-34a})$$

$$\beta = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) n_{\lambda} \quad (\text{B3-34b})$$

Le terme d'ordre 1,  $\mathcal{L}^{(1)}$ , est nul en raison de l'isotropie du champ. Il fait en effet intervenir :

$$\sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) n_{\lambda} \vec{k} = 0 \quad (\text{B3-35})$$

Le terme d'ordre deux  $\mathcal{L}^{(2)}$  peut enfin s'écrire, en posant  $k_0 = \omega_0/c$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{(2)} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} (\vec{p}, t) &= \frac{\hbar^2 k_0^2}{6} \frac{\partial^2}{\partial p^2} \begin{pmatrix} \beta \Pi_f \\ \alpha \Pi_e \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\hbar^2 \vec{p}}{3M_f} \cdot \frac{\partial}{\partial \vec{p}} \begin{pmatrix} \beta' \Pi_f \\ -\alpha' \Pi_e \end{pmatrix} + \frac{\hbar^2}{2M_f} \begin{pmatrix} -\alpha' \Pi_e + \beta' \Pi_f \\ -\alpha' \Pi_e + \beta' \Pi_f \end{pmatrix} \\ &+ \frac{\vec{p}^2}{2M_f^2} \cdot \begin{pmatrix} -\alpha'' \Pi_e + \beta'' \Pi_f \\ \alpha'' \Pi_e - \beta'' \Pi_f \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{B3-36})$$

où nous avons posé :

$$\alpha' = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta'(\hbar\omega - \hbar\omega_0) (n_{\lambda} + 1) \vec{k}^2 \quad (\text{B3-36a})$$

$$\beta' = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \delta'(\hbar\omega - \hbar\omega_0) n_{\lambda} \vec{k}^2 \quad (\text{B3-36b})$$

et :

$$\alpha'' = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \left( \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{3} \delta''(\hbar\omega - \hbar\omega_0) + \frac{\hbar\omega_0}{c^2} \delta'(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \right) (n_{\lambda} + 1) \quad (\text{B3-37a})$$

$$\beta'' = \sum_{\lambda} \frac{2\pi}{\hbar} \mathcal{E}_{\lambda}^2 d^2 \left( \frac{\hbar^2 \vec{k}^2}{3} \delta''(\hbar\omega - \hbar\omega_0) + \frac{\hbar\omega_0}{c^2} \delta'(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \right) n_{\lambda} \quad (\text{B3-37b})$$



### B3-3 L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK

#### 3-1 Variable lente et variable rapide

Nous avons obtenu à la fin du paragraphe précédent une forme "locale" pour l'équation pilote où  $\Pi_e(\vec{p}, t)$  et  $\Pi_f(\vec{p}, t)$  ne sont couplés qu'à eux-mêmes et à leur dérivée par rapport à  $\vec{p}$ . Dans le chapitre B1 traitant du mouvement Brownien, cette équation "locale" n'était autre que l'équation de Fokker-Planck (B1-29). Pour l'équation (B3-32), le problème n'est pas si simple car il reste un couplage entre les deux variables  $\Pi_e$  et  $\Pi_f$  et il n'est donc pas possible d'écrire à ce stade une équation pour  $\Pi = \Pi_e + \Pi_f$ . Nous devons auparavant éliminer des équations (B3-32) une variable complémentaire de  $\Pi$ .

Le principe de cette élimination repose sur la remarque suivante : à l'ordre zéro, la variable  $\Pi_e + \Pi_f$  n'évolue pas. Nous trouvons en effet en utilisant (B3-33) :

$$\frac{d^{(0)}}{dt} (\Pi_e + \Pi_f) = 0 \quad (B3-38a)$$

$$\frac{d^{(0)}}{dt} (\alpha \Pi_e - \beta \Pi_f) = -(\alpha + \beta) (\alpha \Pi_e - \beta \Pi_f) \quad (B3-38b)$$

$\Pi = \Pi_e + \Pi_f$  est donc une variable lente qui ne commence à évoluer qu'à l'ordre deux en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ , au contraire de  $\alpha \Pi_e - \beta \Pi_f$  qui évolue à l'ordre zéro, et qui est donc la variable rapide de l'équation (B3-32). Il est alors possible d'éliminer adiabatiquement cette variable rapide pour obtenir une équation ne faisant plus intervenir que la variable lente.

#### 3-2 Elimination de la variable rapide

Puisque  $(\Pi_e + \Pi_f)$  n'évolue pas à l'ordre zéro, il est possible, à partir de (B3-38b), de calculer  $\Pi_e$  et  $\Pi_f$  à partir de

$\Pi_e + \Pi_f$  :

$$\begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} (\vec{p}, t) = (\Pi_e + \Pi_f) (\vec{p}, t) \begin{pmatrix} \mu_e \\ \mu_f \end{pmatrix} + e^{-\frac{t-t_1}{\tau}} \left( \mu_f \Pi_e (\vec{p}, t_1) - \mu_e \Pi_f (\vec{p}, t_1) \right) \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad (\text{B3-39})$$

où  $t_1$  représente l'instant où le couplage atome-champ a été branché, et où  $(\mu_e, \mu_f)$  désigne la solution stationnaire normalisée ( $\mu_e + \mu_f = 1$ ) de (B3-38) :

$$\mu_e = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \quad (\text{B3-40a})$$

$$\mu_f = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \quad (\text{B3-40b})$$

$\mu_e$  et  $\mu_f$  sont les populations stationnaires de e et f à l'ordre zéro en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$  et  $\tau$  représente la constante de temps d'atteinte de cet état :

$$\tau = (\alpha + \beta)^{-1} \quad (\text{B3-41})$$

Dans la suite, nous supposons que le couplage a été branché à un instant  $t_1$  éloigné dans le passé d'au moins plusieurs  $\tau$ , de telle sorte que (B3-39) peut s'écrire :

$$\begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} (\vec{p}, t) = (\Pi_e + \Pi_f) (\vec{p}, t) \begin{pmatrix} \mu_e \\ \mu_f \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) \quad (\text{B3-42})$$

Reportons maintenant cette expression dans l'équation pilote (B3-32) et cherchons à évaluer  $\partial\Pi/\partial t$ . En utilisant la notation :

$$(a_1, a_2) \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \quad (\text{B3-43})$$

nous obtenons :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial t} &= (1,1) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_e}{\partial t} \\ \frac{\partial \Pi_f}{\partial t} \end{pmatrix} = (1,1) \cdot \mathcal{L}^{(2)} \begin{pmatrix} \Pi_e \\ \Pi_f \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \\ &= (1,1) \cdot \mathcal{L}^{(2)} \Pi(\vec{p}, t) \begin{pmatrix} \mu_e \\ \mu_f \end{pmatrix} + \mathcal{O}(\varepsilon^3) \end{aligned} \quad (\text{B3-44})$$

Cette dernière équation (B3-44) a précisément la forme cherchée, puisqu'elle ne fait plus intervenir que la variable lente  $\Pi(\vec{p}, t)$  : la variable rapide de l'équation de départ (B3-32) est éliminée.

### 3-3 L'équation de Fokker-Planck

Il nous reste maintenant à remplacer l'opérateur  $\mathcal{L}^{(2)}$  par sa valeur (B3-36) pour obtenir la forme explicite de l'équation (B3-44) :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial t} &= \frac{\hbar^2 k_0^2}{6} (\beta \mu_f + \alpha \mu_e) \frac{\partial^2 \Pi}{\partial p^2} \\ &+ \frac{\hbar^2}{3M_f} (\beta' \mu_f - \alpha' \mu_e) \frac{\partial}{\partial p} (\vec{p} \cdot \Pi) \end{aligned} \quad (\text{B3-45})$$

Cette équation est, comme pour le mouvement Brownien, une équation de type Fokker-Planck (cf. eq. B0-1), avec un coefficient de friction  $\gamma$  et un coefficient de diffusion  $D$  donnés par :

$$\gamma = \frac{\hbar^2}{3M_f} (\beta' \mu_f - \alpha' \mu_e) \quad (\text{B3-46a})$$

$$D = \frac{\hbar^2 k_0^2}{2} (\beta \mu_f + \alpha \mu_e) \quad (\text{B3-46b})$$

Il ne reste plus qu'à calculer les coefficients  $\alpha, \beta, \alpha'$  et  $\beta'$  pour obtenir les valeurs explicites de  $\gamma$  et  $D$ . En utilisant (B3-34ab), nous obtenons :

$$\alpha = \frac{d^2}{2\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\omega d\omega \omega^3 (n(\omega) + 1) \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (\text{B3-47a})$$

$$\beta = \frac{d^2}{2\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\omega d\omega \omega^3 n(\omega) \delta(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (\text{B3-47b})$$

ce qui peut se réécrire en fonction de la largeur naturelle  $\Gamma$  (eq. B3-9) :

$$\alpha = \Gamma (n(\omega_0) + 1) \quad (\text{B3-48a})$$

$$\beta = \Gamma n(\omega_0) \quad (\text{B3-48b})$$

Nous pouvons alors déterminer la solution stationnaire ( $\mu_e, \mu_f$ ) donnée en (B3-40) :

$$\mu_e = \frac{n(\omega_0)}{1 + 2n(\omega_0)} \quad (\text{B3-49a})$$

$$\mu_f = \frac{1 + n(\omega_0)}{1 + 2n(\omega_0)} \quad (\text{B3-49b})$$

Le calcul de  $\alpha'$  et  $\beta'$  se fait de la même façon. En partant de l'expression (B3-36) de ces coefficients, nous obtenons :

$$\alpha' = \frac{d^2}{2\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\omega d\omega \omega^5 (n(\omega) + 1) \delta'(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (\text{B3-50a})$$

$$\beta' = \frac{d^2}{2\pi\epsilon_0 c^3} \int_0^\omega d\omega \omega^5 n(\omega) \delta'(\hbar\omega - \hbar\omega_0) \quad (\text{B3-50b})$$

Une intégration par parties donne alors :

$$\alpha' = - \frac{5\Gamma k_0}{\hbar c} \left( 1 + n(\omega_0) + \frac{\omega_0}{5} \left( \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right) \quad (\text{B3-51a})$$

$$\beta' = - \frac{5\Gamma k_0}{\hbar c} \left( n(\omega_0) + \frac{\omega_0}{5} \left( \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} \right) \quad (\text{B3-51b})$$

En reportant ces différents résultats dans l'expression (B3-46ab) de  $\gamma$  et  $D$ , nous obtenons finalement :

$$\gamma = - \frac{\hbar k_0^2}{3M_f} \cdot \frac{\Gamma}{1 + 2n(\omega_0)} \cdot \left( \frac{dn}{d\omega} \right)_{\omega_0} \quad (\text{B3-52a})$$

$$D = \hbar^2 k_0^2 \Gamma \frac{n(\omega_0)(1 + n(\omega_0))}{1 + 2n(\omega_0)} \quad (\text{B3-52b})$$

Avant d'interpréter physiquement ces deux expressions, notons la grande analogie qui existe entre ces résultats et les coefficients correspondants trouvés pour l'électron (B2-35) et (B2-38b) : les deux coefficients de friction font intervenir la dérivée  $dn/d\omega$ , et les deux coefficients de diffusion font intervenir le produit  $n(n + 1)$ . La différence entre les deux problèmes réside dans le fait que l'électron ne possède pas de fréquence de résonance de sorte que les coefficients  $\gamma$  et  $D$  s'expriment en fonction de la moyenne sur tous les modes de  $dn/d\omega$  et  $n(n + 1)$ , alors que l'atome n'est sensible qu'aux modes de fréquence  $\omega_0$  et vient "sonder"  $dn/d\omega$  et  $n(n + 1)$  pour  $\omega = \omega_0$ .

### 3-4 Interprétation physique de la friction

Nous allons maintenant montrer qu'il est possible de retrouver simplement l'expression des coefficients de friction et de diffusion par un bilan des impulsions transférées lors des processus d'absorption et d'émission. Pour simplifier, nous nous limiterons à un modèle à une dimension, où un atome se déplace sur un axe  $z$ , dans le champ de 2 ondes identiques  $\mathcal{E}_+$  et  $\mathcal{E}_-$  se propageant respectivement vers les  $z$  positifs et vers les  $z$  négatifs.

Commençons par évaluer la force moyenne agissant sur l'atome, et distinguons pour cela les cycles absorption-émission

stimulée, et les cycles absorption-émission spontanée. Dans un cycle absorption-émission stimulée, la variation moyenne d'impulsion est nulle ; en effet, pour tout couple de modes  $(k_1, k_2)$ , la probabilité d'avoir absorption du photon  $k_1$  et émission stimulée d'un photon  $k_2$  (variation d'impulsion de l'atome  $\hbar(k_1 - k_2)$ ) est égale dans un champ *incohérent* à la probabilité du processus inverse : absorption d'un photon  $k_2$  et émission stimulée d'un photon  $k_1$  (variation d'impulsion  $\hbar(k_2 - k_1)$ ). Seuls contribuent donc à la force moyenne les processus absorption-émission spontanée.

Commençons par étudier la variation moyenne de l'impulsion atomique lors de l'absorption d'un photon. Dans le référentiel atomique, se déplaçant à une vitesse  $v$  par rapport au laboratoire, ce photon doit avoir l'énergie  $\hbar\omega_0$ . Dans le référentiel du laboratoire, il doit donc avoir l'énergie  $\hbar\omega_0 (1 + \frac{v}{c})$  ou  $\hbar\omega_0 (1 - \frac{v}{c})$  suivant qu'il se propage vers les  $z$  positifs ou les  $z$  négatifs. Dans ce référentiel du laboratoire, la variation moyenne d'impulsion s'écrit donc :

$$\Delta p)_{abs} = \frac{\hbar k_0 (1 + \frac{v}{c}) n(\omega_0 (1 + \frac{v}{c})) - \hbar k_0 (1 - \frac{v}{c}) n(\omega_0 (1 - \frac{v}{c}))}{n(\omega_0 (1 + \frac{v}{c})) + n(\omega_0 (1 - \frac{v}{c}))} \quad (B3-53)$$

Nous avons utilisé ici le fait que la probabilité d'absorption d'un photon dans un mode donné est proportionnelle au nombre de photons  $n(\omega)$  présents dans ce mode. En développant l'expression (B3-53) au premier ordre en  $v/c$ , nous obtenons :

$$(\Delta p)_{abs} = \hbar k_0 \frac{v}{c} + \hbar k_0 \frac{v}{c} \cdot \frac{\omega_0}{n(\omega_0)} \cdot \frac{dn}{d\omega_0} \quad (B3-54)$$

Considérons maintenant un processus d'émission spontanée. L'émission se fait avec une probabilité égale suivant les deux directions  $z > 0$  et  $z < 0$ . De plus, dans le référentiel atomique, le photon émis est de fréquence  $\omega_0$ . Dans le référentiel du laboratoire, ce photon a donc la fréquence  $\omega_0 (1 + \frac{v}{c})$  s'il est émis suivant  $z > 0$ , et  $\omega_0 (1 - \frac{v}{c})$  s'il est émis suivant  $z < 0$ . La variation d'impulsion moyenne de l'atome lors de l'émission spontanée est alors dans le

référentiel du laboratoire :

$$\begin{aligned}
 (\Delta p)_{e.m.s.p.} &= -\frac{1}{2} \hbar k_0 \left(1 + \frac{v}{c}\right) + \frac{1}{2} \hbar k_0 \left(1 - \frac{v}{c}\right) \\
 &= -\hbar k_0 \frac{v}{c}
 \end{aligned}
 \tag{B3-55}$$

La variation moyenne d'impulsion lors d'un cycle absorption-émission spontanée est donc :

$$\overline{(\Delta p)}_{s.p.} = \hbar k_0 \frac{v}{c} \frac{\omega_0}{n(\omega_0)} \frac{dn}{d\omega_0}
 \tag{B3-56}$$

Le nombre de cycles absorption-émission spontanée par unité de temps est donné à l'état stationnaire par :

$$N_{s.p.} = \Gamma \mu_e
 \tag{B3-57}$$

puisque  $\mu_e$  est la population stationnaire de  $e$  (à l'ordre zéro en  $\varepsilon_1$  et  $\varepsilon_2$ ). Nous en déduisons la force moyenne agissant sur l'atome en utilisant (B3-49a) :

$$\bar{f} = N_{s.p.} \overline{(\Delta p)}_{s.p.} = \hbar k_0^2 v \frac{\Gamma}{1 + 2n(\omega_0)} \cdot \left(\frac{dn}{d\omega_0}\right)
 \tag{B3-58}$$

Cette force peut donc se mettre sous la forme :

$$\bar{f} = -\gamma' p
 \tag{B3-59}$$

où le coefficient  $\gamma'$  s'écrit :

$$\gamma' = -\frac{\hbar k_0^2}{M_f} \frac{\Gamma}{1 + 2n(\omega_0)} \left(\frac{dn}{d\omega_0}\right)
 \tag{B3-60}$$

Ce coefficient est bien égal au coefficient  $\gamma$  trouvé plus haut (eq. B3-52a), à un coefficient 3 près lié au fait que le modèle choisi ici est unidimensionnel. Nous pouvons donc en déduire que la friction est essentiellement causée par l'effet Doppler : l'atome en mouvement est couplé à des modes de fréquence différente suivant

que ce mode se propage dans le même sens que l'atome ou en sens contraire.

Remarques :

(i) Pour que la force (B3-58) soit réellement freinante, il faut que  $(dn/d\omega)$  soit négatif, c'est-à-dire que le spectre du rayonnement soit décalé vers le rouge par rapport à la résonance atomique. Nous retrouverons une telle condition dans la partie C lors de l'étude du refroidissement radiatif par un faisceau laser cohérent. Lorsque cette condition est satisfaite, la solution stationnaire de l'équation de Fokker-Planck (B3-45) est alors gaussienne :

$$\pi(\vec{p}, t) \propto \exp\left(-\frac{\vec{p}^2}{2mk_B T_{eff}}\right) \quad (B3-61)$$

où la température effective est donnée par :

$$k_B T_{eff} = \frac{D}{3m\gamma} = \hbar \frac{n(\omega_0)(1+n(\omega_0))}{|(dn/d\omega)_{\omega_0}|} \quad (B3-62)$$

Remarquons que cette "température" est a priori différente de la "température"  $T_{int}$  atteinte par les variables internes de l'atome :

$$k_B T_{int} = \frac{\hbar\omega_0}{\text{Log}\left(\frac{\mu_f}{\mu_e}\right)} = \frac{\hbar\omega_0}{\text{Log}\left(1 + \frac{1}{n(\omega_0)}\right)} \quad (B3-63)$$

Cependant, si le champ électromagnétique est lui-même à l'équilibre thermodynamique, avec la température  $T$ , nous verrons au paragraphe B3-4 que ces deux températures  $T_{eff}$  et  $T_{int}$  sont alors toutes deux égales à la température du rayonnement.

(ii) La formule (B3-55) donnant la variation d'impulsion atomique lors d'un processus d'émission spontanée, pourrait laisser penser qu'un atome émettant un photon spontané "ralentit". Une telle conclusion serait bien sûr erronée puisque cet atome ne peut



ralentir dans tous les repères simultanément. En fait, la variation d'impulsion trouvée en (B3-55) (ainsi que la première partie de (B3-54)) est due au changement de masse de l'atome lors de l'émission, sa vitesse restant constante :

$$\begin{aligned} \Delta p &= M_f v - M_e v \\ &= - \frac{\hbar \omega_0}{c^2} v = - \hbar k_0 \frac{v}{c} \end{aligned} \quad (\text{B3-64})$$

C'est pour tenir compte d'un tel effet que nous avons pris la précaution au début de ce chapitre de tenir compte de la différence de masse entre l'état fondamental et l'état excité (cf. eq. B3-2). Remarquons par ailleurs que cet effet ne joue aucun rôle lorsque les bilans d'impulsion se font sur des cycles entiers (cf. B3-56) puisque la masse finale de l'atome est dans ce cas égale à la masse initiale.

### 3-5 Interprétation physique du coefficient de diffusion

Nous allons maintenant montrer que le coefficient de diffusion de l'équation de Fokker-Planck (B3-45) peut être retrouvé simplement en considérant le mouvement Brownien de l'atome absorbant et émettant aléatoirement des photons. Lors d'un processus "absorption d'un photon  $\vec{k}_i$  - émission d'un photon  $\vec{k}_f$ ", l'impulsion atomique change de la quantité  $\hbar(\vec{k}_i - \vec{k}_f)$ , de direction aléatoire et de module moyen  $\sqrt{2} \hbar k_0$ . De tels processus provoquent alors une diffusion de l'impulsion : en supposant que l'atome a une impulsion nulle à  $t = 0$ , l'impulsion au bout d'un temps  $\Delta T$ ,  $\vec{p}(\Delta T)$ , vérifie :

$$\overline{p^2(\Delta T)} = 2 \hbar^2 k_0^2 \mathcal{N} \Delta T \quad (\text{B3-65})$$

où  $\mathcal{N}$  est le nombre de cycles absorption-émission (spontanée ou stimulée) par unité de temps. Ce nombre  $\mathcal{N}$  s'écrit

$$\begin{aligned} N &= \Gamma (1 + n(\omega_0)) \mu_e \\ &= \frac{\Gamma n(\omega_0) (1 + n(\omega_0))}{1 + 2n(\omega_0)} \end{aligned} \quad (\text{B3-66})$$

Nous en déduisons alors le coefficient de diffusion associé à cette marche au hasard de l'impulsion :

$$D = \frac{1}{2} \frac{\overrightarrow{p}^2 (\Delta T)}{\Delta T} = \hbar^2 k_0^2 \Gamma \frac{n(\omega_0) (1 + n(\omega_0))}{1 + 2n(\omega_0)} \quad (\text{B3-67})$$

Nous retrouvons ainsi exactement le coefficient obtenu à partir de l'équation pilote et donné en (B3-52b).

### 3-6 Réécriture des coefficients de friction et de diffusion

Pour terminer ce paragraphe, nous allons montrer qu'il est possible de réécrire les coefficients de friction (B3-52a) et de diffusion (B3-52b) en fonction de valeurs moyennes à deux temps de produits de l'opérateur force agissant sur l'atome. Ceci est à rapprocher du résultat (B1-33) obtenu pour le modèle de mouvement Brownien du chapitre B1.

L'opérateur force agissant sur l'atome s'obtient à partir du Hamiltonien (B3-2, B3-3, B3-4):

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}) = - \overrightarrow{\nabla}_{\vec{r}} (H_A + H_R + U) = - \overrightarrow{\nabla}_{\vec{r}} U(\vec{r}) \quad (\text{B3-68})$$

Soit

$$\overrightarrow{F}(\vec{r}) = - D \cdot \sum_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda} \vec{k} \left( e^{i\vec{k}\vec{r}} a_{\lambda} + e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_{\lambda}^{\dagger} \right) \quad (\text{B3-69})$$

En représentation interaction, cet opérateur s'écrit (cf. B3-15 et B3-16) :

$$\begin{aligned} \vec{F}(\vec{r}, t) = & - d \left( |e\rangle\langle f| e^{i\omega_0 t} + |f\rangle\langle e| e^{-i\omega_0 t} \right) \\ & \times \left( \sum_{\lambda} \mathcal{E}_{\lambda} \vec{k} \left( e^{i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} a_{\lambda} + e^{-i(\vec{k}\vec{r} - \omega t)} a_{\lambda}^{\dagger} \right) \right) \end{aligned} \quad (\text{B3-70})$$

où nous avons négligé la différence de masse entre l'état excité et l'état fondamental. Nous pouvons alors calculer les deux fonctions de corrélation suivantes, l'atome étant pris dans son état stationnaire interne  $(\mu_e, \mu_f)$  donné en (B3-49):

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle = & \sum_{\lambda} d^2 \mathcal{E}_{\lambda}^2 \vec{k}^2 \left( e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} n_{\lambda} \mu_f + \right. \\ & \left. + e^{-i(\omega_0 - \omega)\tau} (n_{\lambda} + 1) \mu_e \right) \end{aligned} \quad (\text{B3-71a})$$

$$\begin{aligned} \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle = & \sum_{\lambda} d^2 \mathcal{E}_{\lambda}^2 \vec{k}^2 \left( e^{i(\omega_0 - \omega)\tau} (n_{\lambda} + 1) \mu_e + \right. \\ & \left. + e^{-i(\omega_0 - \omega)\tau} n_{\lambda} \mu_f \right) \end{aligned} \quad (\text{B3-71b})$$

En utilisant les définitions (B3-34) et (B3-36) de  $\alpha, \beta, \alpha'$  et  $\beta'$  nous trouvons les relations suivantes :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \langle \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) + \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) \rangle = \hbar^2 k_0^2 (\beta \mu_f + \alpha \mu_e) \quad (\text{B3-72a})$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \tau \langle [\vec{F}(\vec{r}), \vec{F}(\vec{r}, \tau)] \rangle = i \hbar^3 (\beta' \mu_f - \alpha' \mu_e) \quad (\text{B3-72b})$$

soit, en prenant les expressions (B3-46ab) de  $\gamma$  et  $D$  :

$$\gamma = \frac{i}{3M_f \hbar} \int_0^{\infty} d\tau \tau \langle [\vec{F}(\vec{r}, \tau), \vec{F}(\vec{r})] \rangle \quad (\text{B3-73a})$$

$$D = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} d\tau \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle \quad (\text{B3-73b})$$

Ces expressions sont tout à fait similaires à celles déjà trouvées pour le modèle de mouvement Brownien (cf. eq. B1-33), et nous les retrouverons une nouvelle fois dans le prochain chapitre, lors de l'étude du mouvement atomique dans une onde laser cohérente.

#### B3-4 LE CAS DU RAYONNEMENT DU CORPS NOIR

Nous allons terminer ce chapitre en examinant rapidement ce que deviennent les résultats précédents dans le cas où le rayonnement est à l'équilibre thermodynamique.

Remarquons tout d'abord que la relation entre les coefficients  $D$  et  $\gamma$  caractérisant les fluctuations et la dissipation,  $D = M\gamma k_B T$ , est vérifiée, la démonstration de cette égalité à partir des expressions (B3-73) étant la même que celle du chapitre B1 (§ B1-3).

Le calcul explicite de ces coefficients  $\gamma$  et  $D$  se fait à partir des expressions (B3-52), où l'on remplace  $n(\omega)$  par :

$$n(\omega) = \left( \exp \frac{\hbar\omega}{k_B T} - 1 \right)^{-1} \quad (\text{B3-74})$$

Nous obtenons alors :

$$\gamma = \frac{1}{6} \cdot \frac{\hbar\omega_0}{M_f c^2} \cdot \frac{\frac{\hbar\omega_0}{k_B T}}{\text{sh} \left( \frac{\hbar\omega_0}{k_B T} \right)} \quad (\text{B3-75a})$$

$$D = 3M\gamma \cdot k_B T = \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{2 \text{sh} \left( \frac{\hbar\omega_0}{k_B T} \right)} \quad (\text{B3-75b})$$

L'équation (B3-75a) permet de donner un ordre de grandeur du temps  $\tau^{-1}$  de thermalisation de l'atome dans le rayonnement du corps noir. Ce temps décroît avec la température, mais au contraire de ce que nous avons trouvé pour l'électron (eq. B2-56), il tend vers une limite finie non nulle quand la température augmente :

$$k_B T \gg \hbar\omega_0 \implies \tau^{-1} = \frac{6}{\Gamma} \cdot \frac{Mc^2}{\hbar\omega_0} = 6 \frac{M}{\hbar k^2} \frac{\omega_0}{\Gamma} \quad (\text{B3-76})$$

Le temps  $\tau_0 = M/\hbar k^2$  est le temps typique de refroidissement d'un atome dans une onde lumineuse cohérente (cf. partie C). Le temps trouvé ici est considérablement plus grand que ce temps  $\tau_0$ , puisque la fréquence  $\omega_0$  est grande devant la largeur naturelle  $\Gamma$ .

Donnons quelques ordres de grandeur pour un atome à deux niveaux "typique" (raie de résonance du sodium). En prenant  $\Gamma/2\pi=10\text{MHz}$ ,  $\lambda = 2\pi c/\omega_0 = 0,6 \mu\text{m}$  et  $M = 23 \text{ uma}$ , nous trouvons d'abord à la température ordinaire  $T = 300 \text{ K}$  :

$$\frac{\hbar\omega_0}{k_B T} = 80 \implies \tau^{-1} = 10^{35} \text{ s} \sim 3 \cdot 10^{27} \text{ ans} !$$

Les températures nécessaires pour atteindre la limite (B3-73) sont de l'ordre de 20.000 K, et on a alors  $\tau^{-1} = 1000 \text{ s} \simeq 16 \text{ minutes}$ . Notons pour finir que de tels chiffres obtenus par un modèle d'atome à deux niveaux ne sont bien sûr que des ordres de grandeur très approximatifs des chiffres exacts pour des atomes réels.

**B4 : MOUVEMENT ATOMIQUE DANS UNE ONDE COHERENTE**

Ce chapitre est consacré à l'étude du mouvement d'un atome dans un faisceau laser monochromatique. Notre objectif est de dériver ici les caractéristiques essentielles des forces exercées par l'onde laser sur les atomes, les applications possibles de ces forces au ralentissement et au piégeage d'atomes neutres étant étudiées en détail dans les parties C et D ce travail. Ce chapitre est constitué essentiellement par la reproduction d'un article paru dans "Journal of Physics B" (Vol. 18, p 1661), dont la démarche peut être résumée de la manière suivante :

(i) Nous considérons ici le cas où la durée de l'interaction atome-laser est suffisamment longue pour que de nombreux processus d'émission spontanée se produisent pendant cette interaction. Le couplage atome-modes vides du rayonnement peut alors être traité par le formalisme de l'équation pilote, le champ laser étant quant à lui supposé dans un état cohérent et traité classiquement. Ceci nous permet d'écrire une équation d'évolution pour l'opérateur densité atomique  $\sigma^A(t)$ .

(ii) Pour étudier la dynamique atomique, il faut alors projeter l'équation précédente sur une base des états externes. Au contraire des chapitres précédents, il n'est pas possible d'étudier ici simplement l'évolution des quantités  $\langle \vec{p} | \sigma^A(t) | \vec{p} \rangle$ , car le problème n'est plus invariant par translation : de telles quantités sont alors couplées à  $\langle \vec{p}' | \sigma^A(t) | \vec{p} \rangle$ . Nous utiliserons ici la représentation de Wigner de la matrice densité atomique :

$$W(\vec{r}, \vec{p}, t) = \int \frac{d^3 u}{h^3} e^{-i \frac{\vec{p} \cdot \vec{u}}{\hbar}} \langle \vec{r} + \frac{\vec{u}}{2} | \sigma^A(t) | \vec{r} - \frac{\vec{u}}{2} \rangle$$

$$f(\vec{r}, \vec{p}, t) = \text{Tr } W(\vec{r}, \vec{p}, t) \tag{B4-1}$$

W est une matrice carrée de dimension  $n^2$  (n étant la dimension de

l'espace des états atomiques) dont la trace  $f$  représente la quasi probabilité de trouver l'atome au point  $\vec{r}$  avec l'impulsion  $\vec{p}$  et à l'instant  $t$ .

(iii) Il est immédiat à partir de l'équation pilote relative à  $\sigma^A$  d'obtenir l'équation d'évolution de  $W$ . Comme cela était déjà le cas pour  $\Pi_e(\vec{p}, t)$  et  $\Pi_f(\vec{p}, t)$  au chapitre précédent (eq. B3-25), cette équation pour  $W$  n'est pas "locale" en  $\vec{p}$  :  $W(\vec{r}, \vec{p}, t)$  est couplé à  $W(\vec{r}, \vec{p} + \hbar\vec{k}, t)$ . Ce problème est alors surmonté comme au chapitre B3 par un double développement : d'une part, l'impulsion  $\hbar\vec{k}$  d'un photon sera considérée comme petite devant la dispersion de l'impulsion atomique (cf. B3-27), d'autre part, notre étude sera limitée aux atomes lents (effet Doppler  $k v$  petit devant la largeur naturelle  $\Gamma$  du niveau excité, cf. B3-28).

(iv) Ce développement perturbatif conduit à une équation d'évolution reliant  $W$  à ses dérivées partielles par rapport à  $\vec{r}$  et  $\vec{p}$ . Comme au chapitre précédent, il apparaît alors que  $f$  est une variable lente de cette équation, et qu'il est possible d'éliminer adiabatiquement toutes les autres variables plus rapides. On arrive ainsi à une équation de Kramers pour  $f$  :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial}{\partial p_i} \left( (\phi_i(\vec{r}) - \gamma_{ij} p_j) f \right) + \mathcal{D}_{ij}(\vec{r}) \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \quad (\text{B4-2})$$

$\phi_i(\vec{r})$  représente la force radiative s'exerçant sur un atome immobile au point  $\vec{r}$ ,  $\gamma_{ij}(\vec{r})$  représente le tenseur de friction responsable du freinage (ou de l'accélération) des atomes dans l'onde lumineuse.  $\mathcal{D}_{ij}(\vec{r})$  est enfin le coefficient de diffusion de l'impulsion, diffusion entraînée par le caractère aléatoire des phénomènes d'émission spontanée.

(v) Ces trois coefficients  $\phi_i$ ,  $\gamma_{ij}$  et  $\mathcal{D}_{ij}$  peuvent s'exprimer en termes de valeurs moyennes à un ou deux temps de l'opérateur force radiative au point  $\vec{r}$  :

$$\vec{F}(\vec{r}) = - \vec{\nabla} V_{A-L}(\vec{r}) \quad (\text{B4-3})$$

où  $V_{A-L}(\vec{r})$  représente le potentiel de couplage atome-laser. Ces résultats permettent alors de valider l'approche semi-classique de la théorie des forces radiatives, dans laquelle on traite classiquement le mouvement atomique, et où la force vue par l'atome est calculée à partir des valeurs moyennes de  $F(\vec{r})$ , évaluées grâce au théorème d'Ehrenfest.



J. Phys. B: At. Mol. Phys. 18 (1985) 1661-1683.

## Atomic motion in laser light: connection between semiclassical and quantum descriptions

J Dalibard and C Cohen-Tannoudji

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure et Collège de France, 24 rue Lhomond, F 75231 Paris Cedex 05, France

Received 30 October 1984

**Abstract.** The quantum kinetic equation describing slow atomic motion in laser light is derived by an operatorial method which provides mathematical expressions with a transparent physical structure. We prove in a general way that the coefficients appearing in this equation, which is of a Fokker-Planck type, are simply related to the mean value and to the correlation functions of the Heisenberg radiative force of the semiclassical approach, where the atomic position is treated classically. We derive in particular a new theoretical expression for the damping force responsible for radiative cooling and we interpret it in terms of linear response theory. We also obtain a new crossed  $r-p$  derivative term, which does not appear in semiclassical treatments, but which we find to be very small in most situations. Finally, all the theoretical expressions derived in this paper are valid for any  $J_g$  to  $J_e$  transition and are not restricted to two-level atoms.

### 1. Introduction

The subject of atomic motion in resonant laser light has been intensively studied recently and applications as varied as cooling of an atomic beam (Prodan *et al* 1982, Balykin *et al* 1984), isotope separation (Bernhardt *et al* 1976) or radiative atomic trapping (Ashkin 1978, Ashkin and Gordon 1979, Dalibard *et al* 1983) have been investigated, from both theoretical or experimental points of view. Considering the various theoretical descriptions of this atomic motion, one can first make a distinction between 'short interaction time' treatments, where spontaneous emission processes can be neglected during the atom-laser interaction and 'long interaction time' treatments where, on the contrary, many spontaneous processes can occur during the interaction time. In the first case, one can write a Schrödinger equation for the atomic wavefunction (see e.g. Letokhov and Minogin 1981), and extract from this equation all the characteristics of the motion. In the second case, where the interaction time is long compared with the lifetime of the atomic excited levels, one has in principle to take into account the coupling of the atom with all the modes of the electromagnetic field responsible for spontaneous emission processes. The random character of spontaneous emission then causes a stochastic spreading of the atomic momentum distribution. This 'long-time' situation, which occurs very frequently in experiments, and which is the one we are interested in in this paper, is therefore much more complicated than the short-time limit.

Up to now, there have been two main approaches to the description of atomic motion in laser light in the long interaction time limit. The first one is based on a

classical treatment of the atom's position, assuming a very small atomic wavepacket (Cook 1979, 1980a, Gordon and Ashkin 1980). It is therefore possible to calculate, via optical Bloch equations, the stationary internal atomic state and then to find, by application of Ehrenfest's theorem, the equation of motion of the centroid of the atomic wavepacket. Such an approach brings out the notion of 'average radiative force'. It is also possible in this treatment to describe the spreading of the atomic momentum due to the randomness of spontaneous emission, in a way similar to the one used in noise theory: one introduces a momentum diffusion constant which is expressed in terms of the two-time autocorrelation function of the radiative force (Cook 1980a, Gordon and Ashkin 1980).

The second approach to atomic motion in laser light for long interaction times is a fully quantum treatment of both internal and external atomic degrees of freedom, based on the use of the Wigner transform of the atomic density matrix. Under some conditions, it is possible to eliminate, from the master equation describing the atomic dynamics, all the internal atomic variables and to get a closed equation for the Wigner phase-space distribution function. This equation is of a Fokker-Planck type, containing terms which describe not only the mean force, but also the diffusion of atomic momentum. It can be applied to various types of situations, such as slow atoms in any laser light (Cook 1980b), fast atoms in a fluctuating or weak field (Kazantsev 1978, Javanainen and Stenholm 1980, Cook 1980b), or fast atoms in a running or standing wave (Baklanov and Dubetskii 1976, Minogin 1980, 1981a, b, Letokhov and Minogin 1981, Kazantsev *et al* 1981a, b, Stenholm 1983, 1984b, Tanguy *et al* 1984, Minogin and Rozhdestvensky 1984).

This second approach seems probably more rigorous than the first one (i.e. semi-classical treatment) but it has an important disadvantage which lies in the complexity of the calculations which are involved. As a consequence, for most of its applications, calculations have been restricted to the case of two-level atoms. Furthermore, it is only at the end of the calculation, working on the explicit expressions of the coefficients of the Fokker-Planck equation, that one can relate this treatment to the semiclassical one.

The motivation of this paper is to try to fill the gap between these two approaches. We would like to present a new derivation of the Fokker-Planck equation leading, for the coefficients of this equation, to expressions directly given in terms of one- or two-time averages of the Heisenberg radiative force of the semiclassical approach. Such a derivation, which, in addition, is not limited to two-level atoms (it applies to any  $J_g$  to  $J_e$  transition), has therefore a more transparent structure. We thus prove, in a general way, that the momentum diffusion coefficient appearing in the Fokker-Planck equation exactly coincides with the one deduced in the semiclassical theory from the autocorrelation function of the radiative force. Furthermore, we establish some interesting new results. For example, we get for the friction coefficient of the Fokker-Planck equation, which is related to the linear term in the expansion of the radiative force in powers of the atomic velocity, an explicit expression in terms of two time averages of the radiative force, and we interpret this result as a linear response of the atomic dipole to the perturbation associated with the motion of the atom in the laser wave.

The paper is organised as follows. In § 2, we present our notations and we briefly recall the definition and the equation of evolution of the Wigner transform of the atomic density matrix. In § 3, we first show how to expand this equation of evolution for slow atoms. We then indicate the general principle of the elimination of fast internal atomic variables in terms of the slow one (Wigner function). We then apply,

in § 4, the previous results to the calculation of the atomic density matrix in the Wigner representation, and we physically interpret its expression. Finally, in § 5, we derive the Fokker-Planck equation for the Wigner function, we establish the connection between this equation and the 'semiclassical' theory, and we discuss the new results which appear in our derivation.

## 2. Evolution of the atomic density matrix in the Wigner representation

### 2.1. Notations and assumptions

The Hamiltonian of the system 'atom+field' is the sum of four parts:

$$H = H_A + H_F + V_{A-L} + V_{A-F}. \quad (2.1)$$

$H_A$  is the atomic Hamiltonian,  $H_F$  the quantised field Hamiltonian. The laser field is supposed to be in a coherent state, so that we can treat it as a  $c$ -number field, and then split the atom-field coupling into two parts (Mollow 1975), the first one ( $V_{A-L}$ ) describing the atom-laser coupling, and the second one ( $V_{A-F}$ ) the atom-quantised-field coupling, the quantised field being taken in its ground state.

The atomic Hamiltonian is the sum of the kinetic energy of the atom and of its internal energy:

$$H_A = \frac{P^2}{2m} + \frac{\hbar\omega_0}{2} \left( \sum_e Q_{ee} - \sum_g Q_{gg} \right) \quad (2.2)$$

where we use the general notation:

$$Q_{ab} = |a\rangle\langle b| \quad (2.3)$$

$|a\rangle, |b\rangle$  being internal atomic states. In (2.2), the summations bear respectively on the  $(2J_e + 1)$  and  $(2J_g + 1)$  Zeeman sublevels of the excited and ground energy levels,  $\omega_0$  being the atomic frequency.

The quantised electromagnetic field is expanded on the complete set of plane wave modes with wavevector  $k$ , frequency  $\omega = c|k|$  and polarisation  $\varepsilon$ . The Hamiltonian  $H_F$  of the quantised field is thus:

$$H_F = \sum_{k\varepsilon} \hbar\omega a_{k\varepsilon}^\dagger a_{k\varepsilon} \quad (2.4)$$

where  $a_{k\varepsilon}$  and  $a_{k\varepsilon}^\dagger$  are the destruction and creation operators of a photon in the mode  $k, \varepsilon$ .

The atom-quantised-field coupling  $V_{A-F}$  can be written in the electric-dipole approximation as:

$$V_{A-F} = -D \cdot E(R) \quad (2.5)$$

where  $D$  is the atomic dipole operator and  $E(R)$  the quantised field taken for the atomic position operator  $R$ :

$$E(R) = \sum_{k\varepsilon} i \left( \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 L^3} \right)^{1/2} \varepsilon \exp(ik \cdot R) a_{k\varepsilon} + \text{HC} \quad (2.6)$$

$L^3$  is the quantisation volume.

The atom-laser coupling is also taken in the electric dipole approximation:

$$V_{A-L}(R) = -D \cdot \mathcal{E}_{\text{laser}}(R, t) \quad (2.7)$$

where  $\mathcal{E}_{\text{laser}}(R, t)$  is obtained by replacing, in the classical function  $\mathcal{E}_{\text{laser}}(r, t)$  describing the laser field,  $r$  by the atomic position operator  $R$ . We assume that  $\mathcal{E}_{\text{laser}}$  is perfectly monochromatic and we split it into its positive and negative frequency part:

$$\mathcal{E}_{\text{laser}}(r, t) = \mathcal{E}^{(+)}(r) \exp(-i\omega_L t) + \mathcal{E}^{(-)}(r) \exp(i\omega_L t). \quad (2.8)$$

As usual, all the calculations will be done using the rotating-wave approximation, which consists in keeping only the resonant terms in the atom-laser coupling (2.7). To this end, we introduce the raising  $D^+$  and lowering  $D^-$  parts of the atomic dipole and we denote the reduced matrix element of the dipole between the ground and excited level by  $d$ . Putting

$$D^+ = dS^+ \quad D^- = dS^- \quad (2.9)$$

so that ( $S^+$ ,  $S^-$  dimensionless):

$$D = d(S^+ + S^-) \quad (2.10)$$

the atom-laser coupling can be written, in the rotating-wave approximation:

$$V_{A-L} = -d[S^+ \cdot \mathcal{E}^{(+)}(R) \exp(-i\omega_L t) + S^- \cdot \mathcal{E}^{(-)}(R) \exp(i\omega_L t)]. \quad (2.11)$$

## 2.2. Evolution of the reduced atomic density matrix

The atomic system is coupled by  $V_{A-F}$  (2.5) to all the modes of the electromagnetic field, this coupling being the cause of spontaneous emission. The first step of our calculation is then to take into account this coupling and to derive a master equation for the reduced atomic density matrix  $\rho_A = \text{Tr}_F(\rho)$ , describing the effect of the atom-quantised-field interaction. The approximations used in this derivation are based on the smallness of the correlation time  $\tau_c$  of the quantised electromagnetic field. It is then possible to consider only one interaction process between the atom and the field during the time  $\tau_c$ , and also to neglect the free flight of the atom during  $\tau_c$ . We will not derive here explicitly the master equation for  $\rho_A$ , since it is now a well known procedure (Cohen-Tannoudji 1977). We just indicate the final result for the contribution  $(d\rho_A/dt)_{\text{vac}}$  of the 'atom-vacuum quantised field' coupling, to the evolution of the reduced atomic matrix  $\rho_A$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{d}{dt} \rho_A \right)_{\text{vac}} = & -\frac{\Gamma}{2} [(S^+ \cdot S^-) \rho_A + \rho_A (S^+ \cdot S^-)] \\ & + \Gamma \int \frac{d^2 \kappa}{8\pi/3} \sum_{\epsilon \perp \kappa} (S^- \cdot \epsilon^*) [\exp(-ik \cdot R) \rho_A \exp(ik \cdot R)] (S^+ \cdot \epsilon). \end{aligned} \quad (2.12)$$

In this expression  $\kappa$  is a unit vector and  $k$  is defined by:

$$k = \frac{\omega_0}{c} \kappa. \quad (2.13)$$

$\Gamma$  is the natural linewidth of the excited level:

$$\Gamma = \frac{d^2 \omega_0^3}{3\pi \epsilon_0 \hbar c^3}. \quad (2.14)$$

The first line of equation (2.12) describes the de-excitation of the excited Zeeman sublevels. For example, using the normalisation for  $S^+$  and  $S^-$  ( $P_e$  projector on excited level):

$$S^+ \cdot S^- = P_e \quad (2.15)$$

one gets the following evolution for the population of level  $|e\rangle$ :

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} \langle e | \rho_A | e \rangle \right)_{\text{vac}} = -\Gamma \langle e | \rho_A | e \rangle. \quad (2.16)$$

This first line of (2.12) also describes the damping of 'Zeeman coherences' in the excited level and of 'optical coherences'.

The second line of (2.12) describes the 'feeding' by spontaneous emission of the ground-state Zeeman sublevels. Note the presence of  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})$  and  $\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})$ , so that a rate equation as simple as (2.16) cannot be obtained with this term. As we will see in § 2.4, these terms  $\exp(\pm i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})$  describe the recoil of the atom in the spontaneous emission process: the population of the ground state, corresponding to a given momentum  $\mathbf{p}$ , can be fed by spontaneous emission of atoms in the excited state with a momentum  $\mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}$ , where  $\hbar\mathbf{k}$  is the spontaneous photon momentum.

### 2.3. Transformation to the rotating reference frame

In order to eliminate all time dependences in the coefficients of the equation of evolution of the atomic density matrix, we now put

$$\begin{aligned} \langle e | \hat{\rho}_A | g \rangle &= \langle e | \rho_A | g \rangle \exp(i\omega_L t) \\ \langle g | \hat{\rho}_A | e \rangle &= \langle g | \rho_A | e \rangle \exp(-i\omega_L t) \\ \langle e | \hat{\rho}_A | e' \rangle &= \langle e | \rho_A | e' \rangle \\ \langle g | \hat{\rho}_A | g' \rangle &= \langle g | \rho_A | g' \rangle. \end{aligned} \quad (2.17)$$

The evolution of  $\rho_A$  is given by

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \hat{\rho}_A &= \frac{1}{i\hbar} [\hat{H}_A + \hat{V}_{A-L}, \hat{\rho}_A] - \frac{\Gamma}{2} [(S^+ \cdot S^-) \hat{\rho}_A + \hat{\rho}_A (S^+ \cdot S^-)] \\ &+ \Gamma \int \frac{d^2\kappa}{8\pi/3} \sum_{\epsilon \perp \kappa} (S^- \cdot \epsilon^*) [\exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}) \hat{\rho}_A \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R})] (S^+ \cdot \epsilon) \end{aligned} \quad (2.18)$$

where  $\hat{H}_A$  and  $\hat{V}_{A-L}$  are the time-independent operators

$$\hat{H}_A = \frac{P^2}{2m} - \frac{\hbar\delta}{2} \left( \sum_{\epsilon} Q_{\epsilon\epsilon} - \sum_{\mathbf{g}} Q_{\mathbf{g}\mathbf{g}} \right) \quad (2.19a)$$

$$\hat{V}_{A-L} = -d(S^+ \cdot \mathcal{E}^{(+)}(\mathbf{R}) + S^- \cdot \mathcal{E}^{(-)}(\mathbf{R})) \quad (2.19b)$$

$$\delta = \omega_L - \omega_0. \quad (2.19c)$$

### 2.4. Wigner representation of the atomic density matrix

As explained in the introduction, the Wigner representation is very well adapted to the study of atomic motion in a light wave. In this representation, the density operator  $\rho_A(t)$  is represented by the  $[(2J_g + 1) + (2J_e + 1)]^2$  matrix  $W(\mathbf{r}, \rho, t)$  (Wigner 1932,

Takabayasi 1954, De Groot and Suttorp 1972):

$$W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \frac{1}{h^3} \int d^3u |r + \frac{1}{2}u\rangle \hat{\rho}_A(t) |r - \frac{1}{2}u\rangle \exp(-i\mathbf{p} \cdot \mathbf{u}/\hbar). \quad (2.20)$$

We also define the Wigner function  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  which is the trace of  $W$ :

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \text{Tr}(W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)). \quad (2.21)$$

We can now write the equation of evolution for  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ : starting from (2.18), we obtain after a straightforward calculation

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = & -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{i\delta}{2} \left( \sum_{\epsilon} Q_{\epsilon\epsilon} - \sum_{\mathbf{g}} Q_{\mathbf{g}\mathbf{g}}, W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right) \\ & + \frac{i}{\hbar} \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) [W(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t) \mathcal{V}(\mathbf{k}) - \mathcal{V}(\mathbf{k}) W(\mathbf{r}, \mathbf{p} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t)] \\ & - \frac{1}{2} \Gamma [(S^+ \cdot S^-) W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) (S^+ \cdot S^-)] \\ & + \Gamma \int \frac{d^2\kappa}{8\pi/3} \sum_{\epsilon} (S^- \cdot \epsilon^*) W(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t) (S^+ \cdot \epsilon) \end{aligned} \quad (2.22)$$

where we have introduced the Fourier transform  $\mathcal{V}(\mathbf{k})$  of the operator  $\hat{V}_{A-L}(\mathbf{r})$ :

$$\hat{V}_{A-L}(\mathbf{r}) = \int d^3k \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \mathcal{V}(\mathbf{k}). \quad (2.23)$$

The first two terms in (2.22) come from  $H_A$ , via respectively the kinetic energy and the internal energy. The second line describes the atom-laser coupling and the third and fourth lines come from the atom-vacuum coupling. Note in the fourth line the presence of  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t)$  and not  $W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , which, as we already mentioned (§ 2.2), is a signature of the recoil of the atom in spontaneous emission.

### 2.5. Elimination of free flight

The last step of this section is to eliminate, in equation (2.22), the free flight term  $-(\mathbf{p}/m) \partial W/\partial \mathbf{r}$ . Such an elimination will indeed simplify the calculations of the next sections. This will be achieved simply by introducing the following change of function:

$$\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = W\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t - t_0), \mathbf{p}, t\right) \quad (2.24a)$$

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = f\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t - t_0), \mathbf{p}, t\right) \quad (2.24b)$$

where  $t_0$  is an arbitrary reference time. The equation of evolution of  $\tilde{W}$  can now be obtained in a straightforward way; we first write again (2.22) for  $(\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m)(t - t_0), \mathbf{p}, t)$  instead of  $(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ :

$$(i) \quad \left( \frac{\partial}{\partial t} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right)_{\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m)(t-t_0)} \text{ becomes } \left( \frac{\partial}{\partial t} W\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t - t_0), \mathbf{p}, t\right) \right)_{\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m)(t-t_0)}$$

and we have

$$\begin{aligned} & \left( \frac{\partial}{\partial t} W \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t - t_0), \mathbf{p}, t \right) \right)_{\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m)(t-t_0)} \\ &= \left( \frac{\partial}{\partial t} W \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t - t_0), \mathbf{p}, t \right) \right)_r - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t - t_0), \mathbf{p}, t \right) \right)_r \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) - \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \end{aligned} \quad (2.25)$$

$$(ii) \quad -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \text{ becomes } -\frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$$

$$(iii) \quad W(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}) \text{ becomes } W \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t - t_0), \mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t \right) \\ = \tilde{W} \left( \mathbf{r} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m} (t - t_0), \mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t \right).$$

We finally get for the equation of evolution of  $\tilde{W}$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{i}{\hbar} \delta \left( \sum_{\mathbf{e}} Q_{ee} - \sum_{\mathbf{g}} Q_{gg}, \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right) \\ &+ \frac{i}{\hbar} \int d^3k \left\{ \exp \left[ i\mathbf{k} \cdot \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t - t_0) \right) \right] \right. \\ &\times \left( \tilde{W} \left( \mathbf{r} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m} (t - t_0), \mathbf{p} + \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t \right) \mathcal{V}(\mathbf{k}) \right. \\ &\left. \left. - \mathcal{V}(\mathbf{k}) \tilde{W} \left( \mathbf{r} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{2m} (t - t_0), \mathbf{p} - \frac{1}{2}\hbar\mathbf{k}, t \right) \right) \right\} \\ &- \frac{1}{2} \Gamma [(S^+ \cdot S^-) \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) (S^+ \cdot S^-)] \\ &+ \Gamma \int \frac{d^2\kappa}{8\pi/3} \sum_{\mathbf{e}} (S^- \cdot \mathbf{e}^*) \tilde{W} \left( \mathbf{r} - \frac{\hbar\mathbf{k}}{m} (t - t_0), \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t \right) (S^+ \cdot \mathbf{e}). \end{aligned} \quad (2.26)$$

This equation, as (2.18) or (2.22), is an exact expression. The free flight term has been eliminated so that the equation of evolution of  $\tilde{W}$  does not contain any spatial derivative. The counterpart of this elimination is that the exponential  $\exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$  in the atom-laser coupling term is now  $\exp\{i\mathbf{k} \cdot [\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m)(t - t_0)]\}$  (Doppler effect) and also that the equation is no longer local in  $\mathbf{r}$  since it involves  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{r} \pm (\hbar\mathbf{k}/m)(t - t_0)$ .

*Remark.* One can note that the transformation (2.24), from  $W$  to  $\tilde{W}$ , is the equivalent of the following unitary transformation on the density operator.

$$\tilde{\rho}_A(t) = \exp \left( i \frac{\mathbf{p}^2(t - t_0)}{2m\hbar} \right) \rho_A(t) \exp \left( -i \frac{\mathbf{p}^2(t - t_0)}{2m\hbar} \right) \quad (2.27)$$

which corresponds to an interaction representation with respect to the atomic kinetic energy.

### 3. Principle of the adiabatic elimination of fast internal atomic variables

Equation (2.26), obtained at the end of the previous section, describes all the dynamics for an atom in a monochromatic light wave. Unfortunately, this equation involves a great number of coupled matrix elements ( $4(J_e + J_g + 1)^2$ ), each of these being a function of  $(r, p, t)$ , and its general solution is impossible to obtain, even for the simplest case of a two-level atom ( $J_e = J_g = 0$ ). The purpose of this section is then to show that under certain conditions concerning the atomic momentum distribution, it is possible to extract from (2.26) a closed equation for the trace  $\tilde{f}$  of  $\tilde{W}$ . More precisely, we want to express the time derivative  $\partial\tilde{f}(r, p, t)/\partial t$  in terms of  $\tilde{f}(r, p, t)$  and its  $r$  and  $p$  derivatives.

#### 3.1. Validity conditions and principle of the procedure

In all this paper, we will first limit ourselves to situations where the momentum width  $\Delta p$  of  $\tilde{W}$  is large compared with the photon momentum  $\hbar k$ :

$$\varepsilon_1 = \hbar k / \Delta p \ll 1. \quad (3.1)$$

This means that a single-photon absorption or emission process changes only very slightly the atomic momentum distribution. (For sodium atoms, this corresponds to a velocity spread large compared with  $3 \text{ cm s}^{-1}$ ). Note that such an assumption concerning the smallness of the elementary steps of a given process is very often the starting point of a Fokker-Planck treatment of this process (see e.g. Van Kampen 1981). Secondly, we will only consider in this paper slow atoms such as those found in laser cooling experiments. More precisely, we assume that these atoms travel over a small distance (compared with the optical wavelength  $\lambda$ ) during the internal relaxation time  $\Gamma^{-1}$ :

$$v\Gamma^{-1} \ll \lambda \quad \text{or} \quad \varepsilon_2 = kv/\Gamma \ll 1 \quad (3.2)$$

where  $v$  is a typical atomic velocity (root mean square velocity). For sodium atoms, this gives  $v \ll 6 \text{ m s}^{-1}$ . This assumption has important consequences concerning the form of the solution of equation (2.26). Since the displacement of the atom during the internal relaxation time is very small, the internal variables are at every time 'nearly' in their steady state, following quasi-adiabatically the external motion. In other terms, provided condition (3.2) is fulfilled, internal atomic variables appear as fast components of  $\tilde{W}$ , while  $\tilde{f} = \text{Tr}(\tilde{W})$ , the variations of which describe the modification of motion due to the laser light, is the only slow component of  $\tilde{W}$ .

#### Remarks

(i) Conditions (3.1) and (3.2), which put a lower and an upper bound on the atomic velocity are compatible only if:

$$\frac{\hbar^2 k^2 / 2m}{\hbar\Gamma} \ll 1. \quad (3.3)$$

This condition, which is supposed to be fulfilled in the following, means that the recoil energy has to be very small compared with the natural width or, in other words, that the atom is still in resonance with the laser light after a single photon absorption or emission.



(ii) Since there are two expansion parameters,  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , it is important to know their respective orders of magnitude, for a given situation, in order to expand at the correct order the initial equation (2.26). We are mostly interested here in the radiative cooling limit where one has (see e.g. Wineland and Itano 1979):

$$\Delta p^2/2m \sim \hbar\Gamma \quad (3.4)$$

so that

$$\varepsilon_1 \sim \varepsilon_2 \sim \left( \frac{\hbar^2 k^2/2m}{\hbar\Gamma} \right)^{1/2} \ll 1. \quad (3.5)$$

In such a case,  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  are small parameters with the same order of magnitude, and equation (2.26) has then to be expanded to the same order in  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ .

(iii) Because of the Heisenberg inequality

$$\Delta r \geq \hbar/\Delta p \quad (3.6)$$

condition (3.2) actually gives a lower bound for the spatial width  $\Delta r$  of the atomic distribution function:

$$\Delta r \gg \hbar k/m\Gamma. \quad (3.7)$$

Note that, because of (3.3), this lower bound is much smaller than the optical wavelength.

We can now outline the procedure which will be followed in this paper: we are looking for the time derivative  $\partial \tilde{f}/\partial t$ , which we will calculate for simplicity at time  $t = t_0$  ( $t_0$  can actually take any value so that this choice  $t = t_0$  does not introduce any restriction). In order to get this time derivative at time  $t_0$ , we will need the evolution of internal variables of  $\tilde{W}$  on a time interval prior to  $t_0$  and of the order of the relaxation time  $\Gamma^{-1}$  of these variables. We will then expand equation (2.26) on a time interval:

$$|t - t_0| \leq \text{a few } \Gamma^{-1}. \quad (3.8)$$

This expansion gives for the variable  $p$ , using (3.1):

$$\begin{aligned} W(\mathbf{r}, \mathbf{p} + \hbar\mathbf{k}, t) &= W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \hbar\mathbf{k} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \\ &+ \sum_{ij} \frac{\hbar^2 k_i k_j}{2} \frac{\partial^2}{\partial p_i \partial p_j} W(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \dots \end{aligned} \quad (3.9)$$

For the variable  $r$ , using (3.7) and (3.8), we get

$$\begin{aligned} \tilde{W}\left(\mathbf{r} + \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t - t_0), \mathbf{p}, t\right) &= \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}(t - t_0) \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \\ &+ \sum_{ij} \frac{\hbar^2 k_i k_j}{2m^2} (t - t_0)^2 \frac{\partial^2}{\partial r_i \partial r_j} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \dots \end{aligned} \quad (3.10)$$

We can also expand the exponential

$$\exp\left[i\mathbf{k} \cdot \left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t - t_0)\right)\right] = \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \left(1 + i \frac{(\mathbf{k} \cdot \mathbf{p})}{m}(t - t_0) + \dots\right). \quad (3.11)$$

We thus obtain in this way an expansion of  $\partial \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)/\partial t$  in terms of its  $r$  and  $p$  derivatives at the same point, same momentum and same time. In the next section

(§ 3.2), we study the zeroth order of this expansion and we show in particular that the trace  $\tilde{f}$  does not evolve at the lowest order. This will be the starting point of the adiabatic elimination (§§ 3.3-3.5) of the rapid internal variables of  $\tilde{W}$  to the benefit of the slow one  $\tilde{f}$ .

### 3.2. Zeroth-order expansion: optical Bloch equations

To zeroth order in  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , equation (2.26) can be written:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (3.12)$$

where  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}$  is the following operator acting on  $\tilde{W}$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = & \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\hbar\delta}{2} \left( \sum_{\mathbf{g}} Q_{gg} - \sum_{\mathbf{e}} Q_{ee} \right) + \hat{V}_{\text{A-L}}(\mathbf{r}), \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \right] \\ & - \frac{1}{2} \Gamma [(S^+ \cdot S^-) \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) + \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) (S^+ \cdot S^-)] \\ & + \Gamma \int \frac{d^2\kappa}{8\pi/3} \sum_{\mathbf{e} \perp \kappa} (S^- \cdot \mathbf{e}^*) \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) (S^+ \cdot \mathbf{e}). \end{aligned} \quad (3.13)$$

$\mathcal{L}_{\text{Bloch}}$  is the so-called Bloch operator (Allen and Eberly 1975), giving the evolution of the reduced atomic density matrix  $\rho_A$  for an atom 'at rest in  $\mathbf{r}$ ' (the variable  $\mathbf{p}$  remains spectator):

$$\frac{d}{dt} \rho_A = \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) \cdot \rho_A. \quad (3.14)$$

The first line of (3.13) describes the atomic free evolution and the atom-laser coupling, the second and third lines describe the relaxation due to spontaneous emission. An important quantity associated with the Bloch operator (3.13) is the steady-state density matrix,  $\sigma_s(\mathbf{r})$ , satisfying:

$$\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) \cdot \sigma_s(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.15a)$$

$$\text{Tr} \sigma_s(\mathbf{r}) = 1. \quad (3.15b)$$

Note that the characteristic time for reaching this steady state is  $\Gamma^{-1}$  (relaxation time of internal variables†).

Since  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}$  is time independent, equation (3.12) can be formally integrated, between two times  $t_1$  and  $t_2$  ( $t_2 \geq t_1$ ):

$$\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_2) = \exp[\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})(t_2 - t_1)] \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_1). \quad (3.16)$$

As soon as  $t_2 - t_1$  is larger than  $\Gamma^{-1}$ , (3.16) can be simplified since  $\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_2)$  is then proportional to the steady-state matrix  $\sigma_s(\mathbf{r})$ . The proportionality coefficient, equal to  $\text{Tr}(\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_2))$  according to (3.15b), is also equal to  $\text{Tr}(\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_1))$  since the trace of  $\tilde{W}$  remains unchanged during the time evolution (3.12), as a consequence of

$$\frac{d}{dt} (\text{Tr} \tilde{W}) = \text{Tr}(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) \cdot \tilde{W}) = 0 \quad (3.17)$$

† We eliminate here the rare cases where there are several steady states, or where the single steady state is reached only after a time long compared with  $\Gamma^{-1}$ , due to a very weak laser excitation implying long pumping times.

which can be easily shown from (3.13) (conservation of the total population at point  $r$ ). Equation (3.16) can then be written in this case

$$t_2 - t_1 \geq \Gamma^{-1} \rightarrow \tilde{W}(r, p, t_2) = \tilde{f}(r, p, t_1) \sigma_s(r). \quad (3.18)$$

### 3.3. The slow variable $\tilde{f}$

Since the trace  $\tilde{f}$  of  $\tilde{W}$  does not evolve at zeroth order (cf (3.17)),  $d\tilde{f}/dt$  is at least of order one in  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , contrary to the other components of  $\tilde{W}$ . In other words,  $\tilde{f}$  is a slowly varying function compared with the internal atomic variables. Starting from a formal expansion of (2.26) up to order two in  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{W}(r, p, t) = (\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(r) + \mathcal{L}_1(r, p, t) + \mathcal{L}_2(r, p, t)) \cdot \tilde{W}(r, p, t) \quad (3.19)$$

we can write for the evolution of  $\tilde{f}$ :

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{f}(r, p, t) = \text{Tr}[(\mathcal{L}_1(r, p, t) + \mathcal{L}_2(r, p, t)) \cdot \tilde{W}(r, p, t)] \quad (3.20)$$

( $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  represent respectively the first- and second-order contributions).

The next step is now to calculate formally  $\tilde{W}(r, p, t)$  up to order one, and to express it in terms of  $\tilde{f}$  and its  $r, p$  derivatives (§ 3.4). Using (3.20), we will then get the requested closed equation giving the evolution of  $\tilde{f}$  up to order two (§ 3.5). Such a procedure is called an adiabatic elimination of fast internal variables to the benefit of the slow variable  $\tilde{f}$  (see e.g. Gardiner 1983, Stenholm 1984a, b).

### 3.4. Calculation of the density matrix

We are looking here for a density operator  $\tilde{W}$  having the following form:

$$\tilde{W}(r, p, t) = \tilde{f}(r, p, t) \sigma_s(r) + \tilde{\chi}(r, p, t). \quad (3.21)$$

In this expression  $\tilde{f} \sigma_s$  is the part of  $\tilde{W}$  which follows adiabatically the external atomic motion, and  $\tilde{\chi}$  the deviation of  $\tilde{W}$  from its adiabatic part, which we hope to be small, and which we want to calculate up to order one.

We first note, using (2.21) and (3.15b), that

$$\text{Tr}(\tilde{\chi}(r, p, t)) = 0. \quad (3.22)$$

We now insert (3.21) in the equation of evolution of  $\tilde{W}$  (3.19); using (3.15a) and (3.20), we obtain at order one:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} = \mathcal{L}_{\text{Bloch}} \cdot \tilde{\chi} + \mathcal{L}_1 \cdot (\tilde{f} \sigma_s + \tilde{\chi}) - \text{Tr}[\mathcal{L}_1 \cdot (\tilde{f} \sigma_s + \tilde{\chi})] \sigma_s. \quad (3.23)$$

The perturbative resolution of (3.23) is now straightforward; at zeroth order, one gets:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} = \mathcal{L}_{\text{Bloch}} \cdot \tilde{\chi} \quad (3.24)$$

or

$$\tilde{\chi}(r, p, t) = \exp[\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(r)(t - t_i)] \tilde{\chi}(r, p, t_i) \quad (3.25)$$

for any time  $t$ , prior to  $t$ . Provided the atom-laser coupling has been on for a period

larger than  $\Gamma^{-1}$ , one can choose  $t_i < t - \Gamma^{-1}$  so that, using (3.19) and (3.22):

$$\tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = 0 \text{ at order zero.} \quad (3.26)$$

Putting (3.26) in (3.23), we obtain at order one:

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\chi} = \mathcal{L}_{\text{Bloch}} \cdot \tilde{\chi} + \mathcal{L}_1 \cdot \tilde{f} \sigma_s - \text{Tr}(\mathcal{L}_1 \cdot \tilde{f} \sigma_s) \sigma_s, \quad (3.27)$$

which can be integrated:

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = & \int_{t_i}^t dt' \exp[\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})(t-t')] [\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') \cdot \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') \sigma_s(\mathbf{r}) \\ & - \text{Tr}(\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') \cdot \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') \sigma_s(\mathbf{r})) \sigma_s(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Since the quantity inside the bracket has a zero trace, the only times which contribute to the integral verify  $t - t' \leq \Gamma$  so that one can replace the lower bound  $t_i$  of the integral by  $-\infty$ .

*Remark.* The previous calculations could be also presented in terms of projection operators (see e.g. Agarwal 1974, Stenholm 1984a, b). Let  $P(\mathbf{r})$  and  $Q(\mathbf{r})$  be the operators in Liouville space defined by their action on any vector  $\tilde{W}$  of this space:

$$\begin{aligned} P(\mathbf{r}) \cdot \tilde{W} &= \sigma_s(\mathbf{r}) \text{Tr}(\tilde{W}) \\ Q(\mathbf{r}) &= \mathbb{1} - P(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.29)$$

One easily checks that  $P$  and  $Q$  project respectively on slow and fast subspaces of equation (3.19). Using this general formulation, we get for  $\tilde{\chi}$ :

$$\tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = Q(\mathbf{r}) \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (3.30)$$

and  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})$  can be shown to obey the following equalities

$$P(\mathbf{r}) \cdot \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) = \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) \cdot P(\mathbf{r}) = 0 \quad (3.31a)$$

$$\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) = Q(\mathbf{r}) \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) Q(\mathbf{r}). \quad (3.31b)$$

The expression (3.28) for  $\tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  can then be written in the following way:

$$\tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = \int_{-\infty}^t dt' \exp[\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})(t-t')] Q(\mathbf{r}) \mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') P(\mathbf{r}) \cdot \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t'). \quad (3.32)$$

### 3.5. Evolution of the Wigner function

We now come to the last step of this section, i.e. we insert the expression of  $\tilde{W}$ , obtained in (3.21) and (3.28), in the equation of evolution (3.20) of  $\tilde{f}$ . This equation (3.20) is 'a priori' valid for any time  $t$  close to  $t_0$ . Actually, we write it for  $t = t_0$  since this choice will simplify notably the calculations of §§ 4 and 5; we then get:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \tilde{f} \Big|_{t=t_0} &= \text{Tr}(\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r})) \\ &+ \text{Tr}(\mathcal{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r})) \\ &+ \text{Tr} \left( \mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \int_{-\infty}^{t_0} dt' \exp[\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})(t_0-t')] \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \times \mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') \cdot \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r}) \Big) \\
 & - \text{Tr} \left( \mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \int_{-\infty}^{t_0} dt' \exp[\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})(t_0 - t')] \right. \\
 & \left. \times \text{Tr}(\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') \cdot \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r})) \sigma_s(\mathbf{r}) \right). \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

Note that we have replaced in the two time integrals  $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t')$  by  $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0)$ . This is possible since only times  $t'$  close to  $t_0$  contribute to the integral, and for such times, the difference  $\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t') - \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0)$  is of order one in  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$  and would then give a contribution to  $\partial \tilde{f} / \partial t|_{t=t_0}$  of order three at least. To summarise, we have derived in this section two main results. First, we have obtained an expression of the atomic density matrix (3.21)–(3.28). In § 4, we will discuss the physical content of this expression. Secondly, we have obtained a closed equation of evolution for the Wigner function (3.33). In § 5, we will show, using the expressions of  $\mathcal{L}_1$  and  $\mathcal{L}_2$  extracted from (2.26), that this equation is of a Fokker-Planck type and we will calculate its coefficients.

Note finally that equation (3.33) deals with the function  $\tilde{f}$  defined in (2.24b) and not with the real Wigner function  $f$ . However, since we are now considering a time  $t$  equal to the reference time  $t_0$ , we have from (2.24b):

$$\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \tag{3.34a}$$

$$\left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \left. \frac{\partial f}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \left. \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} \right|_{t=t_0}. \tag{3.34b}$$

#### 4. Perturbative calculation of the atomic density operator

In this section, we first determine, using (2.26), the operator  $\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  (§ 4.1). We then use this expression to calculate, using (3.21) and (3.28), the atomic density operator (§ 4.2). Finally, we interpret physically our results (§ 4.3).

##### 4.1. Rate of variation at order one

The expansion of (2.26), up to order one in  $\varepsilon_1$  and  $\varepsilon_2$ , can be written, using (3.9), (3.10) and (3.11):

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = (\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r}) + \mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)) \cdot \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \tag{4.1}$$

with

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \cdot \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) &= \frac{i(t-t_0)}{m\hbar} [p \cdot F(\mathbf{r}), \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] \\
 &- \frac{1}{2} \left\{ \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} - \frac{t-t_0}{m} \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \right) \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t), F(\mathbf{r}) \right\}_+. \tag{4.2}
 \end{aligned}$$

We have used in (4.2) the notation:

$$\{A, B\}_+ = AB + BA \tag{4.3}$$

and we have put

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = - \int d^3k \, ik \exp(ik \cdot \mathbf{r}) \mathcal{V}(k) = -\nabla \hat{V}_{A-L}(\mathbf{r}). \quad (4.4)$$

We will call  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$  the radiative force operator at point  $\mathbf{r}$ , since it is the quantum equivalent of a classical force, usually defined as the opposite of the potential gradient†.

#### 4.2. Calculation of the atomic density operator

We can now insert the expression of  $\mathcal{L}_1$  in (3.28), which gives  $\tilde{\chi}$ , and then get  $\tilde{W}$  up to order one. Since there are actually three terms in  $\mathcal{L}_1$ , one commutator of  $\tilde{W}$  with  $\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})$  and two anticommutators between  $\partial \tilde{W} / \partial \mathbf{p}$ ,  $\partial \tilde{W} / \partial \mathbf{r}$  and  $\mathbf{F}$ , there are three corresponding contributions from  $\tilde{\chi}$  to  $\tilde{W}$ ; taking (3.28) for  $t = t_0$  and putting  $\tau = t - t'$  in the integral, we immediately get‡

$$\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) + \tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \quad (4.5a)$$

with

$$\begin{aligned} \tilde{\chi}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = & -\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \frac{i}{m\hbar} \int_0^\infty d\tau \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})\tau) [\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}), \sigma_s(\mathbf{r})] \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \int_0^\infty d\tau \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})\tau) \\ & \times [\frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_s(\mathbf{r})\mathbf{F}(\mathbf{r})) - \phi(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r})] \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \int_0^\infty d\tau \frac{\tau}{m} \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})\tau) \\ & \times [\frac{1}{2}(\mathbf{F}(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r}) + \sigma_s(\mathbf{r})\mathbf{F}(\mathbf{r})) - \phi(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r})]. \end{aligned} \quad (4.5b)$$

The three terms of (4.5b) respectively come from the three contributions of  $\mathcal{L}_1$  to  $\tilde{\chi}$ . We have put in (4.5b):

$$\phi(\mathbf{r}) = \text{Tr}(\mathbf{F}(\mathbf{r})\sigma_s(\mathbf{r})). \quad (4.6)$$

$\phi$  is the average, in the stationary state, of the radiative force. It is equal to the stationary force calculated in the semiclassical approach (cf introduction).

#### 4.3. Physical interpretation

In addition to the adiabatic term  $\tilde{f}\sigma_s$ , there are, via  $\tilde{\chi}$ , three contributions to  $\tilde{W}$  that we want now to discuss.

Consider the first term of (4.5b):

$$-\tilde{f} \frac{i}{m\hbar} \int_0^\infty d\tau \tau \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}\tau) [\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}, \sigma_s].$$

† Note that, because of the isotropy of the quantised field in the vacuum state, the relaxation terms in (2.26) do not contribute to  $\mathcal{L}_1$ .

‡ The  $\mathbf{r}$  derivative of  $\tilde{W}$  actually gives rise to two terms  $(\partial \tilde{f} / \partial \mathbf{r})\sigma_s$  and  $\tilde{f} d\sigma_s / d\mathbf{r}$ . However the characteristic scale of variation for  $\sigma_s$  is larger than  $\lambda$  so that  $|d\sigma_s / d\mathbf{r}|$  is of the order or smaller than  $k\sigma_s$ . The contribution of  $\tilde{f} d\sigma_s / d\mathbf{r}$  can then be shown to be at least of order two, and is therefore neglected in (4.5b). The other term  $(\partial \tilde{f} / \partial \mathbf{r})\sigma_s$  cannot be neglected since spatial distributions narrower than  $\lambda$  can be considered (the only restriction on the spatial spread is (3.7)).

Adding this term to the adiabatic one  $\tilde{f}\sigma_s$ , we can write the result as  $\tilde{f}\sigma$  with:

$$\sigma = \sigma_s - \frac{i}{m\hbar} \int_0^\infty d\tau \tau \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}} \tau) [\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}, \sigma_s]. \quad (4.7)$$

Such a density matrix  $\sigma$  has actually a clear physical meaning. Note first that the integral term in (4.7) is just the linear atomic response at time  $t_0$ , to the time-dependent perturbation  $(\mathbf{p} \cdot \mathbf{E}/m\hbar)(t-t_0)$ .  $\sigma$  is then the (first-order) solution at time  $t_0$ , of the equation:

$$\frac{d}{dt} \sigma = \mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})\sigma - \frac{1}{i\hbar} \left[ \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r})}{m} (t-t_0), \sigma \right]. \quad (4.8)$$

Now, coming back to the definition of  $\mathbf{F}(\mathbf{r})$ , we get:

$$-\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}}{m} (t-t_0) = \hat{V}_{\text{A-L}} \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t-t_0) \right) - \hat{V}_{\text{A-L}}(\mathbf{r}) \quad (4.9)$$

so that  $\sigma$  is actually the solution of:

$$\frac{d}{dt} \sigma = \mathcal{L}_{\text{Bloch}} \left( \mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m} (t-t_0) \right) \sigma. \quad (4.10)$$

The matrix  $\sigma$  then appears to be the atomic density operator including the first-order correction due to the atomic motion. It contains, in particular, the modification of the internal state due to the Doppler effect in a plane wave. We will then call the first line of (4.5b) the 'Doppler term'.

Consider now the second and third contributions in (4.5b):

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{p}} \int_0^\infty d\tau \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}} \tau) \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{F}\sigma_s + \sigma_s \mathbf{F}) - \phi\sigma_s \right] \\ & -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{r}} \int_0^\infty d\tau \frac{\tau}{m} \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}} \tau) \left[ \frac{1}{2} (\mathbf{F}\sigma_s + \sigma_s \mathbf{F}) - \phi\sigma_s \right]. \end{aligned}$$

These two terms have a structure which is different from the 'Doppler term'. They are indeed not proportional to  $\tilde{f}$ , but to its derivatives with respect to  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{p}$ . For this reason, they cannot be taken into account by simply replacing the stationary state  $\sigma_s$ , by another one,  $\sigma$ , as we have done for the Doppler term. Actually, these terms describe a correlation between internal and external variables. More precisely, the position and momentum atomic distributions are split into several parts, each of these corresponding to a given atomic internal state. This can easily be seen on the simple example of a two-level atom moving in a strong resonant standing wave (no gradient of phase, zero detuning and Rabi frequency larger than  $\Gamma$ ). We introduce the dressed levels:

$$\begin{aligned} |1\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle + |g\rangle) \\ |2\rangle &= \frac{1}{\sqrt{2}} (|e\rangle - |g\rangle) \end{aligned} \quad (4.11)$$

where  $|g\rangle$  and  $|e\rangle$  are the ground and excited levels. These dressed states are eigenstates of the dressed-atom Hamiltonian ('atom+laser' Hamiltonian in the 'rotating' frame)

with energies respectively equal to  $\frac{1}{2}\hbar\omega_1$  and  $-\frac{1}{2}\hbar\omega_1$  (Reynaud and Cohen-Tannoudji 1982, Reynaud 1983). In this dressed set,  $\sigma_s$  and  $\tilde{F}$  have the following expressions, at the lowest order in  $\Gamma/\omega_1$ :

$$\sigma_s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \quad F = -\frac{\hbar\nabla\omega_1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.12)$$

and  $\tilde{W}$  can be easily calculated:

$$\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = \frac{1}{2}\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\mathbf{p}} \frac{\hbar\nabla\omega_1}{2\Gamma} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + \frac{\partial\tilde{f}}{\partial\mathbf{r}} \frac{\hbar\nabla\omega_1}{m\Gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

which can also be written:

$$\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \tilde{f}\left(\mathbf{r} + 2\frac{\hbar\nabla\omega_1}{m\Gamma^2}, \mathbf{p} + \frac{\hbar\nabla\omega_1}{\Gamma}, t_0\right) & 0 \\ 0 & \tilde{f}\left(\mathbf{r} - 2\frac{\hbar\nabla\omega_1}{m\Gamma^2}, \mathbf{p} - \frac{\hbar\nabla\omega_1}{\Gamma}, t_0\right) \end{pmatrix}. \quad (4.14)$$

We then find a diagonal density matrix with equal global weights on the two dressed levels. However, we see also that there is a slight splitting between the position or momentum distributions corresponding to levels 1 and 2. For example, if the total position distribution is centred in  $\mathbf{r}_0$ , then the position distribution 'for level 1' is centred in  $\mathbf{r}_0 - 2\hbar\nabla\omega_1/m\Gamma^2$ , and 'for level 2' in  $\mathbf{r}_0 + 2\hbar\nabla\omega_1/m\Gamma^2$ . Such a splitting has a straightforward interpretation: an atom in level 1 (level 2) experiences a force  $F = -\frac{1}{2}\hbar\nabla\omega_1$  ( $+\frac{1}{2}\hbar\nabla\omega_1$ , respectively); this force acts during a random time, of the order of  $T = 2/\Gamma$ , which is the radiative lifetime of both levels 1 and 2 (Reynaud 1983). It follows that this force produces a momentum splitting  $\Delta p \sim F \cdot T \sim \pm\hbar\nabla\omega_1/\Gamma$  and a position splitting  $\Delta r \sim m^{-1}F \cdot T^2 \sim \pm\hbar\nabla\omega_1/m\Gamma^2$  which are precisely those found above.

## 5. Fokker-Planck equation for the atomic Wigner function

In this last section, we derive the equation of motion for the Wigner function  $\tilde{f}$ . This is done first at order one (§ 5.1), and then at order two (§ 5.2). We get in this way a Fokker-Planck equation and we show that the coefficients of this equation are related to correlation functions of the radiative force operator (§ 5.3). Finally, we discuss the physical content of our results (§ 5.4).

### 5.1. Rate of variation of the Wigner function at order one: mean radiative force

At order one, the evolution of the Wigner function  $\tilde{f}$  is given by (cf (3.20)):

$$\left. \frac{\partial\tilde{f}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = \text{Tr}(\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0)\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0)\sigma_s(\mathbf{r})). \quad (5.1)$$

For  $t = t_0$ , the only non-vanishing part of the expression (4.2) of  $\mathcal{L}_1$  is:

$$\mathcal{L}_1(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0)\tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = -\frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial}{\partial\mathbf{p}} \tilde{W}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0), F(\mathbf{r}) \right\}_+ \quad (5.2)$$



so that

$$\left. \frac{\partial \tilde{f}}{\partial t} \right|_{t=t_0} = -\text{Tr} \left( \frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r})) \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}) \right) = -\frac{\partial \tilde{f}}{\partial \mathbf{p}} \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}) \quad (5.3)$$

using the definition (4.6) of  $\boldsymbol{\phi}$ . Coming back to  $f$ , via equation (3.34), we finally have at order one:

$$\left. \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)}{\partial t} \right|_{t=t_0} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \cdot \boldsymbol{\phi}(\mathbf{r}). \quad (5.4)$$

This equation is the same as the one describing the evolution of a classical phase-space distribution  $f(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$  for a particle with mass  $m$ , submitted to a force equal to the steady-state radiative force  $\boldsymbol{\phi}$ .

### 5.2. Variation of the Wigner function at order two: Fokker-Planck equation

In order to apply the formula (3.33), giving  $\partial \tilde{f} / \partial t|_{t=t_0}$ , we still have to evaluate the quantity:

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r})). \quad (5.5)$$

For that, we expand at order two the equation of evolution for  $\tilde{W}$  (2.26), keeping in mind that we only need  $\mathcal{L}_2$  for  $t = t_0$  and, furthermore, that we take the trace of  $\mathcal{L}_2 \cdot \tilde{W}$ . As a consequence, the atom-laser coupling is not going to contribute to (5.5), since the only non-zero part of this coupling at order two and for  $t = t_0$  is a sum of commutators:

$$\sum_{ij} -\frac{i\hbar}{8} \left[ \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial p_i \partial p_j}, \frac{\partial^2 \hat{V}_{A-L}}{\partial r_i \partial r_j} \right] \quad (5.6)$$

which have a zero trace. The relaxation term on the contrary has a non-vanishing contribution. For  $t = t_0$ , we find:

$$(\mathcal{L}_2 \tilde{W})_{\text{relaxation}} = \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{2} \sum_{ij} \int \frac{d^2 \kappa}{8\pi/3} \kappa_i \kappa_j \sum_{\epsilon} (\mathbf{S}^- \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial p_i \partial p_j} (\mathbf{S}^+ \cdot \boldsymbol{\epsilon}) \quad (5.7)$$

so that (5.5) becomes:

$$\text{Tr}(\mathcal{L}_2(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \tilde{f}(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t_0) \sigma_s(\mathbf{r})) = \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{2} \sum_{ij} \frac{\partial^2 \tilde{f}}{\partial p_i \partial p_j} E_{ij} \quad (5.8a)$$

with

$$E_{ij} = \int \frac{d^2 \kappa}{8\pi/3} \kappa_i \kappa_j \sum_{\epsilon} \langle (\mathbf{S}^+ \cdot \boldsymbol{\epsilon})(\mathbf{S}^- \cdot \boldsymbol{\epsilon}^*) \rangle_{\sigma_s}. \quad (5.8b)$$

The coefficients  $E_{ij}$  are related to the dipole radiation diagram for an atom in the stationary state  $\sigma_s$ . More precisely,  $E_{ij}$  is proportional to the average value of  $(\hbar \mathbf{k}_i) \cdot (\hbar \mathbf{k}_j)$  where  $\hbar \mathbf{k}$  is the momentum of a fluorescence photon. For a two-level atom,  $E_{ij}$  is also proportional to the stationary population of the excited level. In the

general case, we have the relation (using (2.15)):

$$\begin{aligned} \sum_i E_{ii} &= \int \frac{d^2\kappa}{8\pi/3} \sum_{\epsilon} \langle (S^+ \cdot \epsilon)(S^- \cdot \epsilon^*) \rangle_{\sigma_s} \\ &= \langle S^+ \cdot S^- \rangle_{\sigma_s} = \sum_{\epsilon} \langle e | \sigma_s | e \rangle. \end{aligned} \quad (5.9)$$

$\sum_i E_{ii}$  is then the total population of the excited atomic level.

We are now able to derive from (3.33) the explicit expression for  $\partial f / \partial t|_{t=t_0}$ ; in this expression, there will be a first-order term, already calculated in § 5.1, and two types of second-order terms. The first type is a term involving  $\mathcal{L}_2(t_0)$  which we have just calculated in (5.8). The second type of second-order terms are those formed by products of  $\mathcal{L}_1(t_0)$  and  $\mathcal{L}_1(t)$ ;  $\mathcal{L}_1(t_0)$  consists just in a  $p$  derivative of  $\tilde{W}$  (see (5.2)), while  $\mathcal{L}_1(t)$ , for  $t \neq t_0$ , involves three terms (see (4.2)): a  $p$  derivative, an  $r$  derivative and a commutator of  $\tilde{W}$  with  $p \cdot F(r)$ . As a consequence, there will be three terms of this second type in  $\partial f / \partial t|_{t=t_0}$ : a double  $p, p$  derivative ('diffusion term'), a crossed  $p, r$  derivative ('crossed term') and a single  $p$  derivative combined with a multiplication by  $p \cdot F$  ('friction term'). We then get the following Fokker-Planck equation, coming back to  $f$  via (3.34):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{p}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial r} &= -\frac{\partial f}{\partial p} \cdot \phi(r) + \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{2} \sum_{ij} E_{ij}(r) \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \\ &+ \sum_{ij} D_{ij}(r) \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} + \sum_{ij} \eta_{ij}(r) \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial r_j} + \sum_{ij} \gamma_{ij}(r) \frac{\partial}{\partial p_i} (p_j f). \end{aligned} \quad (5.10)$$

On the first line of (5.10), we find the first-order term and the second-order term related to  $\mathcal{L}_2(t_0)$ . On the second line, we find the three terms coming from the product  $\mathcal{L}_1(t_0) \cdot \mathcal{L}_1(t)$ . Using (3.33), (4.2) and (5.2), one finds for the three coefficients  $D_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  and  $\gamma_{ij}$ :

$$D_{ij}(r) = \text{Tr} \left( F_i(r) \int_0^{\infty} d\tau \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(r)\tau) \left[ \frac{1}{2} (F_j(r)\sigma_s(r) + \sigma_s(r)F_j(r)) - \phi_j(r)\sigma_s(r) \right] \right) \quad (5.11a)$$

$$\eta_{ij}(r) = \text{Tr} \left( F_i(r) \int_0^{\infty} d\tau \frac{\tau}{m} \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(r)\tau) \left[ \frac{1}{2} (F_j(r)\sigma_s(r) + \sigma_s(r)F_j(r)) - \phi_j(r)\sigma_s(r) \right] \right) \quad (5.11b)$$

$$\gamma_{ij}(r) = \text{Tr} \left( F_i(r) \int_0^{\infty} d\tau \frac{i\tau}{m\hbar} \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(r)\tau) [F_j(r), \sigma_s(r)] \right). \quad (5.11c)$$

### 5.3. Coefficients of the Fokker-Planck equation and correlation functions of the force operator

Before giving a physical interpretation for equation (5.10), it is useful to relate first the coefficients  $D_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  and  $\gamma_{ij}$  to the correlation functions of the Heisenberg force  $F_H(r, t)$  introduced in the semiclassical theory. More precisely, we want to establish here the two equalities:

$$\text{Tr} [A \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}} \tau) (B \sigma_s)]^* = \langle B_H(0) A_H(\tau) \rangle_{\sigma_s} \quad (5.12a)$$

$$\text{Tr} [A \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}} \tau) (\sigma_s B)]^* = \langle A_H(\tau) B_H(0) \rangle_{\sigma_s} \quad (5.12b)$$

Putting  $A = F_j$  and  $B = F_j$  in (5.12), we will then be able to simplify the three expressions (5.11).

It is important to note that, in the left-hand side of equations (5.12), the various operators  $A, B, \sigma_s$  are pure atomic operators, actually internal atomic operators† for an atom at rest in  $r$ , whereas, on the right-hand side,  $A_H(\tau)$  and  $B_H(0)$  are Heisenberg operators in the total space including the variables of the quantised field. More precisely, the evolution of  $A_H(\tau)$ , in the right-hand side of (5.12), is Hamiltonian, governed by the total Hamiltonian (2.1) where  $R$  is treated as a fixed  $c$  number  $r$  (see e.g. Gordon and Ashkin 1980), whereas  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}$  describes a non-Hamiltonian evolution, including relaxation terms, for the reduced atomic variables.

Let us first transform the left-hand side of (5.12a). Expanding  $A$  on a set of eigenvectors,  $V_\mu$ , of  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}$  (in Liouville space), with eigenvalues  $\lambda_\mu$ :

$$A = \sum_{\mu} \alpha_{\mu} V_{\mu} \quad (5.13)$$

we get

$$\text{Tr}[A \exp(\mathcal{L}_{\text{Bloch}} \tau) (B \sigma_s)]^* = \left\langle B \left( \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \exp(\lambda_{\mu} \tau) V_{\mu} \right) \right\rangle_{\sigma_s}. \quad (5.14)$$

Before turning to the right-hand side of (5.12a), consider now one-time averages,  $\langle A_H(\tau) \rangle$ , of the Heisenberg operator  $A_H(\tau)$  (for an arbitrary atomic state). Going back from the Heisenberg picture to the Schrödinger picture, and using the equation of motion (3.14) of the reduced atomic density matrix‡, one can show that, for  $\tau > 0$ :

$$\langle A_H(\tau) \rangle = \left\langle \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \exp(\lambda_{\mu} \tau) V_{\mu} \right\rangle. \quad (5.15)$$

In order to calculate the two-time average of the right-hand side of (5.12a), we can then use the quantum regression theorem (Lax 1968, Louisell 1973), which applies when the correlation time of the reservoir (in our case, the correlation time of vacuum fluctuations) is very short compared with the relaxation time (in our case, the radiative lifetime  $\Gamma^{-1}$ ). Such a theorem states that, for  $\tau > 0$ , the  $\tau$  dependence of the two-time average  $\langle B_H(0) A_H(\tau) \rangle$  is given by the same equation as the  $\tau$  dependence of the one-time average  $\langle A_H(\tau) \rangle$ . More precisely, if  $\langle A_H(\tau) \rangle$  is given by (4.15), then:

$$\langle B_H(0) A_H(\tau) \rangle = \left\langle B_H(0) \left( \sum_{\mu} \alpha_{\mu} \exp(\lambda_{\mu} \tau) V_{\mu} \right) \right\rangle. \quad (5.16)$$

Using  $B_H(0) = B$ , and comparing (5.14) and (5.16), one deduces the equality (5.12a). We could prove (5.12b) in the same way.

Finally, we can now re-express the coefficients  $D_{ij}$ ,  $\eta_{ij}$  and  $\gamma_{ij}$  in the following way:

$$D_{ij}(r) = \int_0^{\infty} d\tau \left[ \frac{1}{2} (F_{iH}(r, \tau) F_{jH}(r, 0) + F_{jH}(r, 0) F_{iH}(r, \tau)) \right]_{\sigma_s} - \phi_i(r) \phi_j(r) \quad (5.17)$$

$$\eta_{ij}(r) = \frac{1}{m} \int_0^{\infty} d\tau \tau \left[ \frac{1}{2} (F_{iH}(r, \tau) F_{jH}(r, 0) + F_{jH}(r, 0) F_{iH}(r, \tau)) \right]_{\sigma_s} - \phi_i(r) \phi_j(r) \quad (5.18)$$

$$\gamma_{ij}(r) = \frac{i}{m\hbar} \int_0^{\infty} d\tau \tau \left[ F_{iH}(r, \tau), F_{jH}(r, 0) \right]_{\sigma_s}. \quad (5.19)$$

† They can be also considered as vectors in the internal atomic Liouville space,  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}$  being an operator in this Liouville space.

‡ We need only this reduced matrix since  $A$  is an atomic operator.

#### 5.4. Physical discussion

The Fokker-Planck equation (5.10) describes the motion of a particle with mass  $m$ , submitted to a force ( $\partial f/\partial p_i$  terms), with momentum diffusion ( $\partial^2 f/\partial p_i \partial p_j$  terms) and 'crossed effects' ( $\partial^2 f/\partial p_i \partial r_j$  terms). We now discuss separately these three contributions.

5.4.1. *Mean force.* The total force appearing in (5.10) can be written:

$$\mathcal{F}_i(\mathbf{r}, \mathbf{p}) = \phi_i(\mathbf{r}) - \sum_j \gamma_{ij}(\mathbf{r}) p_j. \quad (5.20)$$

It is the sum of the stationary force  $\phi$  and of a damping (or heating) force. We have obtained in (5.19) an operatorial expression for the damping tensor  $\gamma_{ij}$ , which, to our knowledge, is a new one. We have checked that for a two-level system, (5.20) gives back the usual friction force calculated for example, semiclassically by an explicit expansion of the atomic density matrix in terms of  $kv/\Gamma$  (Gordon and Ashkin 1980). However let us insist on the fact that (5.19) and (5.20) are valid for any  $J_g - J_e$  transition.

We can find the damping force again by a semiclassical argument using a linear response theory, as we have done for the 'Doppler term' of the density matrix in § 4.3 (actually, the damping force and the 'Doppler term' come both from the component of  $\mathcal{L}_1(t)$ : [ $\mathbf{p} \cdot \mathbf{F}$ ,  $W$ ]). In a semiclassical treatment, the atomic motion can be taken into account by replacing the atom-laser coupling  $\hat{V}_{A-L}(\mathbf{r})$  by the time-dependent one  $\hat{V}_{A-L}(\mathbf{r} + (\mathbf{p}/m)(t - t_0))$  which, at first order, can be written (cf (4.9)):

$$\hat{V}_{A-L}\left(\mathbf{r} + \frac{\mathbf{p}}{m}(t - t_0)\right) = \hat{V}_{A-L}(\mathbf{r}) + U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) \quad (5.21)$$

where  $U$  is the operator:

$$U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t) = -\frac{t - t_0}{m} \mathbf{p} \cdot \mathbf{F}(\mathbf{r}). \quad (5.22)$$

If we look for the total average force acting on the moving atom (MA) at time  $t_0$ ,  $\langle F_{iH}(\mathbf{r}, t_0) \rangle_{MA}$ , we find first the stationary force  $\phi(\mathbf{r})$ , resulting from the atom-laser coupling  $V_{A-L}(\mathbf{r})$ , and secondly a small correction, due to the perturbation  $U(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)$ , and that we can write, using linear response theory (Martin 1968):

$$\langle F_{iH}(\mathbf{r}, t_0) \rangle_{MA} = \phi_i(\mathbf{r}) - \frac{i}{\hbar} \int_{-\infty}^{t_0} dt \langle [F_{iH}(\mathbf{r}, t_0), U_H(\mathbf{r}, \mathbf{p}, t)] \rangle_{\sigma_+}. \quad (5.23)$$

Using the expression of the damping tensor  $\gamma_{ij}$  (5.19), one then checks immediately that (5.23) is identical to (5.20).

5.4.2. *Diffusion terms.* The total diffusion coefficient of equation (5.10) is

$$\mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ij}(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \Gamma E_{ij}(\mathbf{r}). \quad (5.24)$$

As it is now well known (see e.g. Stenholm 1983), we find two contributions to the momentum diffusion coefficient. The term  $\frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \Gamma E_{ij}(\mathbf{r})$  is due to the fluctuations of the momentum carried away by fluorescence photons, while  $D_{ij}(\mathbf{r})$  corresponds to fluctuations in momentum exchanges between the atom and the laser (fluctuations of the number of photons absorbed in a plane running wave, fluctuations of the dipole force in a focused wave).

An important result of this paper is the expression (5.17) for the coefficient  $D_{ij}$ . Such an expression had already been used in a semiclassical treatment of the atomic motion in a light wave (Cook 1980a, Gordon and Ashkin 1980) but it has never appeared, to our knowledge, in a fully quantum treatment leading to a Fokker-Planck equation. Note that expression (5.17) is the quantum analogue of the classical diffusion coefficients found in Brownian motion theory:

$$D_{ij} = \overline{\mathcal{F}_i p_j} - \overline{\mathcal{F}_i} \overline{p_j} \quad (5.25)$$

where  $p$  is the momentum of the Brownian particle, and  $\mathcal{F}$  and the fluctuating force acting on it. Using:

$$\frac{dp}{dt} = \mathcal{F} \quad (5.26)$$

one gets

$$D_{ij} = \int_{-\infty}^0 dt (\overline{\mathcal{F}_i(0) \mathcal{F}_j(t)} - \overline{\mathcal{F}_i(0)} \overline{\mathcal{F}_j(t)}) \quad (5.27)$$

which, for a stationary process, is the analogue of equation (5.17).

5.4.3. *Crossed effects.* These effects come from the crossed derivative of (5.10):

$$\eta_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial r_j}$$

This seems to be a new term for free atoms, but one can note that a contribution of this type has already been found in the study of the motion of trapped ions (Javanainen 1981). In our problem, the origin of this term lies in the spatial splitting of the various components of the internal atomic density operator found in § 4.3. The action of the radiative force operator on these components causes a rotation in phase space of the total Wigner function, and this rotation is described by the  $\partial^2 f / \partial p_i \partial r_j$  term.

Note that, although we could not eliminate this term from the beginning since it appears at order two, as damping and diffusion, its contribution seems to be very small in most interesting physical situations. For example, for a two-level system moving in a strong running wave,  $\eta_{ij}$  is found to be of the order of the recoil energy  $\hbar^2 k^2 / 2m$ . If the spatial extension of  $f$  is of the order or larger than the optical wavelength  $\lambda$ , we then get:

$$\eta_{ij} \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial r_j} \leq \frac{\hbar^2 k^2 / m}{\hbar \Gamma} \hbar k \Gamma \frac{\partial f}{\partial p_i} = \epsilon_1 \epsilon_2 \phi \cdot \frac{\partial f}{\partial p} \quad (5.28)$$

where we have used the expression of the average force  $\phi$  in a strong running wave:

$$\phi = \frac{1}{2} \hbar k \Gamma. \quad (5.29)$$

Since  $\phi \partial f / \partial p$  is a term of order one in  $\epsilon_1$  and  $\epsilon_2$ ,  $\eta_{ij} \partial^2 f / \partial p_i \partial r_j$  is in this case at least of order three and can therefore be neglected. More generally, it appears that this term contributes only in situations where, after a large number of spontaneous emissions (which is necessary to derive the Fokker-Planck equation), the spatial extension remains small compared with  $\lambda$ . Besides this very particular case, we can omit the

crossed term, so that we are left finally with the following Fokker-Planck equation:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\mathbf{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} (\mathcal{F}(\mathbf{r}, \mathbf{p})f) + \sum_{ij} \mathcal{D}_{ij}(\mathbf{r}) \frac{\partial^2 f}{\partial p_i \partial p_j} \quad (5.30)$$

where  $\mathcal{F}$ , given by equation (5.20), includes the stationary radiative force and the damping force, and where  $\mathcal{D}_{ij}$ , given in (5.24), describes the diffusion due to the fluctuations of the radiative force and of the momentum carried away by spontaneous photons.

## 6. Conclusion

We have presented in this paper a full quantum treatment of atomic motion in laser light. Starting from the equation of motion of the reduced atomic density matrix, in the case of slow atoms (Doppler effect smaller than the natural width), we have eliminated the fast internal variables to the benefit of the slow external one, and we have derived a quantum kinetic equation for the Wigner function, which is of a Fokker-Planck type.

The originality of the approach presented in this paper consists in its operatorial character. Rather than calculating explicitly the coefficients of the Fokker-Planck equation, we have tried to keep mathematical expressions containing quantities with a clear physical meaning, such as the Bloch operator in  $\mathbf{r}$ ,  $\mathcal{L}_{\text{Bloch}}(\mathbf{r})$ , or the radiative force operator in  $\mathbf{r}$ ,  $F(\mathbf{r})$ . This allowed us to compare our results with the semiclassical ones, where similar quantities are introduced 'by hand'.

We have thus shown that our momentum diffusion coefficient exactly coincides with the semiclassical one. We have also derived a new operatorial expression for the damping force responsible for radiative cooling, and we have interpreted it using a semiclassical linear response theory. Finally, a third term appears in our treatment, consisting in a crossed  $\mathbf{r}, \mathbf{p}$  derivative. Such a term, which is very small in most situations, has not been anticipated in semiclassical approaches.

The similarity between our results and the semiclassical ones calls for a last comment. The semiclassical treatments are restricted to situations where the atomic wavepacket is very small, and the force and the diffusion coefficient are calculated at the centre of this wavepacket. In the quantum kinetic equation, we find a force and a diffusion coefficient which are functions of  $\mathbf{r}$  and which, for each value of  $\mathbf{r}$ , coincide with the semiclassical values associated with a very small wavepacket in  $\mathbf{r}$ . It must be kept in mind however that the quantum kinetic equation can be applied to atomic wavepackets which are not restricted in size. This equation has therefore a wider range of applicability and allows the study of situations which could not be easily handled by semiclassical treatments.

## References

- Agarwal G S 1974 *Quantum Optics* Springer Tracts in Modern Physics vol 70 (Berlin: Springer)  
 Allen L and Eberly J H 1975 *Optical Resonance and Two Level Atoms* (New York: Wiley)  
 Ashkin A 1978 *Phys. Rev. Lett.* **40** 729-32  
 Ashkin A and Gordon J P 1979 *Opt. Lett.* **4** 161-3  
 Baklanov E V and Dubetskii B Y 1976 *Opt. Spectrosc.* **41** 1-4

- Balykin V O, Letokhov V S and Sidorov A I 1984 *Opt. Commun.* **49** 248-52
- Bernhardt A F, Duerre D E, Simpson J R and Wood L L 1976 *Opt. Commun.* **16** 169-71
- Cohen-Tannoudji C 1977 *Frontiers in Laser Spectroscopy* ed R Balian, S Haroche and S Liberman (Amsterdam: North-Holland) pp 3-104
- Cook R J 1979 *Phys. Rev. A* **20** 224-8
- 1980a *Phys. Rev. Lett.* **44** 976-9
- 1980b *Phys. Rev. A* **22** 1078-98
- Dalibard J, Reynaud S and Cohen-Tannoudji C 1983 *Opt. Commun.* **47** 395-9
- De Groot S R and Suttrop L G 1972 *Foundations of Electrodynamics* (Amsterdam: North-Holland)
- Gardiner C W 1983 *Handbook of Stochastic Methods* (Berlin: Springer)
- Gordon J P and Ashkin A 1980 *Phys. Rev. A* **21** 1606-17
- Javanainen J 1981 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **14** 2519-34
- Javanainen J and Stenholm S 1980 *Appl. Phys.* **21** 35-45
- Kazantsev A P 1978 *Sov. Phys.-Usp.* **21** 58-76
- Kazantsev A P, Surdutovich G I and Yakovlev V P 1981a *Appl. Phys.* **25** 165-7
- 1981b *J. Physique* **42** 1231-7
- Lax M 1968 *Phys. Rev.* **172** 350-61
- Letokhov V S and Minogin V G 1981 *Phys. Rep.* **73** 1-65
- Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley)
- Martin P 1968 *Many Body Physics* ed C de Witt and R Balian (New York: Gordon and Breach) pp 37-136
- Minogin V G 1980 *Sov. Phys.-JETP* **52** 1032-8
- 1981a *Sov. Phys.-JETP* **53** 1164-70
- 1981b *Opt. Commun.* **37** 442-6
- Minogin V G and Rozhdestvensky Y V 1984 *Appl. Phys. B* **34** 161-6
- Mollow B 1975 *Phys. Rev. A* **12** 1919-43
- Prodan J V, Phillips W D and Metcalf H 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1149-53
- Reynaud S 1983 *Ann. Phys., Paris* **8** 315-70
- Reynaud S and Cohen-Tannoudji C 1982 *J. Physique* **42** 1021-35
- Stenholm S 1983 *Phys. Rev. A* **27** 2513-22
- 1984a *Quantum Electrodynamics and Quantum Optics*, ed A O Barut (New York: Plenum) pp 263-79
- 1984b *J. Opt. Soc. Am. B* **1** 658-61
- Takabayasi T 1954 *Prog. Theor. Phys.* **11** 341-73
- Tanguy C, Reynaud S and Cohen-Tannoudji C 1984 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **17** 4623-41
- Van Kampen N G 1981 *Stochastic Processes in Physics and Chemistry* (Amsterdam: North-Holland)
- Wigner E P 1932 *Phys. Rev.* **40** 749-59
- Wineland D J and Itano W M 1979 *Phys. Rev. A* **20** 1521-40

REFERENCES DE LA PARTIE B

- [1] W. Louisell dans "Quantum Optics" ed. S. Kay, A. Maitland (Academic Press, New York 1970) ; "Quantum Statistical Properties of Radiation" Wiley, New York, 1974.
- [2] G.S. Agarwal : "Quantum Statistical Theories of Spontaneous Emission and their relation to Other Approaches" Springer Tracts in Modern Physics, Vol. 70 (Springer Berlin, Heidelberg, New York 1974).
- [3] C. Cohen-Tannoudji dans "Les Houches, Session XXVII, 1975" ed. R. Balian, S. Haroche et S. Liberman (North Holland, Amsterdam, 1977).
- [4] J.G. Kirkwood, J. Chem. Phys. 14 (1946) 180. Cet article présente un traitement classique microscopique du mouvement Brownien.
- [5] A.O. Caldeira and A.J. Leggett, Physica 121 A (1983) 587. Cet article présente un traitement quantique du mouvement Brownien et contient de nombreuses références aux travaux antérieurs sur ce sujet.
- [6] N.G. Van Kampen, Phys. Rep. 124, 69 (1985)
- [7] Selected papers on Noise and Stochastic Processes, ed. N. Wax, (Dover Pub. Inc., New York, 1954).
- [8] T. Takabayasi, Prog. Theor. Phys. 11 (1954) 341.
- [9] S.R. de Groot and L.G. Suttorp, "Foundations of electrodynamics" (North Holland, Amsterdam, 1972).
- [10] Voir par exemple [5] pour les possibilités de généraliser le traitement perturbatif proposé ici.



- [11] A. Abragam, The principles of nuclear magnetism (Oxford University Press, London, 1961).
- [12] C.W. Gardiner, Handbook of Stochastic Methods (Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo 1983) et ref. in.
- [13] Voir par exemple A. Messiah, "Mécanique Quantique (Dunod, Paris, 1964).
- [14] N.G. Van Kampen, "Stochastic Processes in physics and chemistry" (North Holland, Amsterdam, 1981).
- [15] P. Martin dans "Les Houches 1967" ed. C. de Witt, et R. Balian (Gordon and Breach, New York, 1968).
- [16] R. Kubo dans "Many Body Theory" ed. R. Kubo, (Syokabo, Tokyo et Benjamin, New York, 1966).
- [17] Ya.B.Zel'dovich and I.D. Novikov, "The Structure and Evolution of the Universe" (The University of Chicago Press, Chicago and London, 1981).
- [18] H. Dreicer, the physics of fluids, 7 (1964) 735.
- [19] J. Peyraud, J. Physique 29 (1968) 88.
- [20] Ya.B. Zel'dovich and E.V. Levich, ZhETF Pis. Red. 11 (1970) 57.
- [21] W. Pauli and M. Fierz, Nuovo Cimento 15 (1938) 167
- [22] C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, "Processus d'interaction entre atomes et photons" en cours de publication.
- [23] A. Einstein, Phys. Z. 18 (1917) 121.
- [24] J. Javanainen and S. Stenholm, App. Phys. 21 (1980) 35 et App. Phys. 21 (1980) 163.

**PARTIE C :**

**LES FORCES RADIATIVES ET LEUR APPLICATION**

**AU REFROIDISSEMENT RADIATIF**

## LES FORCES RADIATIVES RESONNANTES

Après avoir étudié d'une manière très générale le mouvement atomique dans une onde lumineuse (cf partie B), nous passons maintenant à une description plus précise des caractéristiques des forces s'exerçant sur des atomes éclairés par un faisceau laser résonnant ou quasi-résonnant. Comme nous l'avons montré dans la partie B, les effets de ces forces peuvent être caractérisés par trois grandeurs qui feront chacune l'objet d'un chapitre de cette partie C. Nous commençons tout d'abord (chap. C1) par étudier la valeur moyenne  $\overline{\vec{\phi}(\vec{r})}$  de la force agissant sur un atome au repos. Cette force est décomposée en deux parties, la force réactive -ou force dipolaire- et la force dissipative -ou pression de radiation-, qui sont chacune interprêtées physiquement. Nous étudions ensuite (chap. C2) le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique caractérisant les fluctuations de ces forces et nous discutons l'origine de ces fluctuations pour trois cas particuliers importants : l'onde plane progressive, l'onde plane stationnaire et l'onde plane "stationnaire"  $\sigma_+$  -  $\sigma_-$ ". Nous passons enfin (chap. C3) à l'étude de la dépendance en vitesse de ces forces et nous calculons le "coefficient de friction"  $\gamma$  décrivant la partie linéaire en vitesse de la force. L'importance pratique de ce problème est considérable, puisqu'il est à la base du refroidissement radiatif d'atomes neutres, procédé susceptible de communiquer, par l'intermédiaire de l'onde laser, une température extrêmement basse à des atomes donnés, voire à un atome unique. Nous rappelons d'abord dans ce chapitre C3 le principe du refroidissement radiatif classique [1,2] qui utilise une onde laser de faible intensité et qui fait uniquement usage des processus absorption-émission spontanée. Nous présentons ensuite un type différent de refroidissement radiatif utilisant -en plus des processus spontanés- l'émission stimulée et nous décrivons une expérience réalisée en collaboration avec Alain Aspect, Claude Cohen-Tannoudji, Antoine Heidmann et Christophe Salomon, dans laquelle nous avons mis en évidence ce nouveau procédé de refroidissement radiatif qui s'avère beaucoup plus efficace que le refroidissement radiatif classique.

Signalons que dans tout ce chapitre, nous nous intéressons à la situation où les temps d'interaction entre l'atome et l'onde laser sont grands devant la durée de vie du niveau atomique excité : de nombreux processus d'émission spontanée prennent alors place pendant l'interaction. Nous n'aborderons pas ici l'étude de la situation opposée, dans laquelle aucun processus spontané ne se produit pendant la durée de l'interaction [3]. Indiquons par ailleurs que le recul atomique lors des processus d'absorption et d'émission de photons, qui est à l'origine des forces radiatives étudiées ici, a également été mis en évidence dans des expériences de spectroscopie à très haute résolution, à partir de techniques d'absorption saturée [4].

## C1 : LA FORCE RADIATIVE SUR UN ATOME INITIALEMENT AU REPOS

Ce chapitre a pour but d'établir l'expression générale des forces qui s'exercent sur un atome initialement immobile dans une onde lumineuse. Nous commençons (§ 1) par comparer les deux approches possibles à ce problème : l'approche semi-classique dans laquelle la dynamique interne de l'atome est traitée quantiquement, mais sa position d'une manière classique, et l'approche complètement quantique qui a déjà été exposée en détail dans le chapitre B4. Nous établissons ensuite (§ 2) l'expression générale de la force agissant sur l'atome et nous identifions dans cette force deux composantes, la force réactive et la force dissipative, que nous interprétons séparément. Nous pouvons alors passer à l'étude de deux cas particuliers pour lesquels des expressions analytiques de ces forces peuvent être obtenues. Dans le paragraphe 3, nous présentons en détail le cas d'un atome "à deux niveaux" pour lequel les deux forces réactive et dissipative sont respectivement égales à la pression de radiation et à la force dipolaire. Dans l'appendice n° 1 de cette partie C, nous étudions le mouvement d'un "atome  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$ " dans deux ondes opposées respectivement polarisées  $\sigma^+$  et  $\sigma^-$ .

### C1-1 : APPROCHE SEMI-CLASSIQUE ET APPROCHE QUANTIQUE

#### 1-1 Les systèmes en interaction

Nous considérons ici un atome neutre de masse  $m$  couplé à la fois aux modes vides du rayonnement électromagnétiques et à un champ laser monochromatique qu'on suppose accordé au voisinage d'une transition de résonance atomique. Le Hamiltonien de l'atome s'écrit

$$H_A = \frac{\vec{p}^2}{2m} + H'_A \quad (C1-1)$$

où  $\vec{P}$  désigne l'impulsion atomique et  $H'_A$  le Hamiltonien interne de l'atome. Le champ laser est supposé dans un état cohérent et peut donc être traité classiquement [5]. Nous écrirons ce champ sous la forme :

$$\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}) e^{-i\omega_L t} + \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}) e^{i\omega_L t} \quad (C1-2)$$

$\vec{\mathcal{E}}^{(+)}$  et  $\vec{\mathcal{E}}^{(-)}$  désignent respectivement les parties de fréquence positive et négative du champ  $\vec{\mathcal{E}}$ . Le couplage atome-champ laser, responsable des processus d'absorption et d'émission stimulée, s'écrit avec les approximations dipolaire électrique et du champ tournant :

$$V_{A-L} = - \left( \vec{D}^+ \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} + \vec{D}^- \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{R}) e^{i\omega_L t} \right) \quad (C1-3)$$

$\vec{R}$  représente l'opérateur position du centre de masse de l'atome, et  $\vec{D}^+$  et  $\vec{D}^-$  sont respectivement les parties montante -transitions vers des états d'énergie supérieure- et descendante -transitions vers des états d'énergie inférieure- du dipole atomique. Le champ électromagnétique est quantifié sur la base des ondes planes repérées par l'indice  $\lambda = (\vec{k}, \vec{\varepsilon})$  où  $\vec{k}$  est le vecteur d'onde et  $\vec{\varepsilon}$  la polarisation de l'onde plane  $\lambda$ . En notant  $a_\lambda$  et  $a_\lambda^+$  les opérateurs de destruction et de création d'un photon  $\lambda$ , le Hamiltonien du champ  $H_V$  s'écrit (l'indice V rappelle que les modes  $\lambda$  sont initialement vides par opposition au mode laser) :

$$H_V = \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} a_{\lambda}^+ a_{\lambda} \quad (C1-4)$$

Le couplage atome-champ quantifié responsable de l'émission spontanée s'écrit, avec les mêmes approximations que pour (C1-3) :

$$V_{A-V} = - \left( \vec{D}^+ \cdot \vec{E}^+(\vec{R}) + \vec{D}^- \cdot \vec{E}^-(\vec{R}) \right) \quad (C1-5)$$

où  $\vec{E}^+$  et  $\vec{E}^-$  sont les parties de fréquence positive et négative de l'opérateur champ électrique :

$$\begin{aligned}\vec{E}^+(\vec{r}) &= - \sum_{\lambda} i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{\epsilon} e^{i\vec{k}\vec{r}} a_{\lambda} \\ \vec{E}^-(\vec{r}) &= - \sum_{\lambda} i \sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 L^3}} \vec{\epsilon} e^{-i\vec{k}\vec{r}} a_{\lambda}^{\dagger}\end{aligned}\quad (C1-6)$$

Le Hamiltonien total des trois systèmes en interaction (atome, champ laser, modes vides) s'écrit alors :

$$\begin{aligned}H &= H_A + H_V + V_{A-L} + V_{A-V} \\ &= \frac{\vec{p}^2}{2m} + H'_A + \sum_{\lambda} \hbar\omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} \\ &\quad - \left( \vec{D}^+ \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{R}) e^{i\omega_L t} + \vec{D}^- \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{R}) e^{-i\omega_L t} \right) \\ &\quad - \left( \vec{D}^+ \cdot \vec{E}^+(\vec{R}) + \vec{D}^- \cdot \vec{E}^-(\vec{R}) \right)\end{aligned}\quad (C1-7)$$

Pour calculer la force agissant sur un atome au repos, il nous faut extraire de ce Hamiltonien la dynamique atomique externe. Au chapitre B4, nous avons présenté une méthode complètement quantique pour y parvenir, et nous rappellerons plus bas (§ 1-3) les résultats que nous avons obtenus. Mais auparavant, il nous a semblé utile de présenter une approche semi-classique plus simple, dans laquelle la position de l'atome est traitée d'une manière classique. C'est l'objet du paragraphe 1-2 suivant.

### 1-2 L'approche semi-classique [6,8a]

Commençons par établir, à partir du Hamiltonien (C1-7) les équations du mouvement des opérateurs position  $\vec{R}$  et impulsion  $\vec{P}$  de

l'atome pris en point de vue de Heisenberg :

$$\vec{R} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{R}] = \frac{\vec{P}}{m} \quad (\text{C1-8a})$$

$$\vec{P} = \frac{i}{\hbar} [H, \vec{P}] = - \vec{\nabla}_{\vec{R}} H = \vec{F} + \vec{F}' \quad (\text{C1-8b})$$

avec

$$\vec{F} = \sum_{i=x,y,z} D_i^\dagger \vec{\nabla}_{\vec{R}} \mathcal{E}_i^{(+)}(\vec{R}) e^{i\omega_L t} + \text{h.c.} \quad (\text{C1-8c})$$

$$\vec{F}' = \sum_{i=x,y,z} D_i^\dagger \vec{\nabla}_{\vec{R}} E_i^+(\vec{R}) + \text{h.c.} \quad (\text{C1-8d})$$

La première de ces équations permet de définir l'opérateur vitesse atomique  $\vec{P}/m$ , et la seconde donne l'expression de la force agissant sur l'atome  $\vec{F} + \vec{F}'$ .  $\vec{F}$  est l'opérateur force radiative définie à l'équation (4.4) du chapitre B4.  $\vec{F}'$  est lié au couplage atome-champ quantique.

Etudions maintenant les valeurs moyennes des opérateurs  $\vec{F}$  et  $\vec{F}'$  pour un atome initialement "au repos" au point  $\vec{r}_0$ , c'est-à-dire un atome dont la fonction d'onde externe a les propriétés suivantes :

(i) dans l'espace des  $\vec{r}$ , cette fonction d'onde est centrée en  $\vec{r}_0$  et son extension  $\delta r$  vérifie :

$$\delta r \ll \lambda \quad (\text{C1-9})$$

Dans la zone de l'espace "occupé" par l'atome, le champ laser varie donc très peu.

(ii) dans l'espace des  $\vec{p}$ , la fonction d'onde atomique est



centrée sur  $\vec{p} = \vec{0}$  et son extension  $\delta p$  vérifie :

$$k \cdot \frac{\delta p}{m} \ll \Gamma \quad (C1-10)$$

Ceci signifie que l'effet Doppler résiduel  $k\delta p/m$  est négligeable devant la largeur naturelle  $\Gamma$  des états atomiques excités et que l'évolution de l'état interne atomique est pratiquement le même que pour un atome immobile.

Remarquons que ces deux conditions (C1-9) et (C1-10) qui mettent une borne supérieure à la fois sur  $\delta r$  et  $\delta p$  ne sont compatibles avec l'inégalité de Heisenberg que si :

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ll \hbar \Gamma \quad (C1-11)$$

Cette condition, qui est également indispensable au traitement quantique (eq. 3.3 du chapitre B4) sera supposée satisfaite dans toute la suite. Etudions maintenant les valeurs moyennes des opérateurs  $\vec{F}$  et  $\vec{F}'$  pour un atome dont l'état externe vérifie les deux conditions (C1-9,10). Nous obtenons tout d'abord :

$$\langle \vec{F} + \vec{F}' \rangle = \sum_I \langle D_1^+ \vec{\nabla} (\mathcal{E}_1^+(\vec{R}) e^{-i\omega_1 t} + E_1^+(\vec{R})) \rangle + c.c. \quad (C1-12)$$

Comme nous l'avons vu dans la première partie de ce travail, le champ quantique  $\vec{E}(\vec{R}, t)$  pris en point de vue de Heisenberg, peut se décomposer en deux parties :

$$\vec{E}(\vec{R}, t) = \vec{E}_{\text{libre}}(\vec{R}, t) + \vec{E}_{\text{source}}(\vec{R}, t) \quad (C1-13)$$

$\vec{E}_{\text{libre}}(\vec{R}, t)$  représente le champ quantique qu'il y aurait en absence d'atome. Comme l'état initial du rayonnement est supposé être le vide de photons, on obtient après avoir rangé dans (C1-12) les  $\vec{\nabla} E_1^+$  à droite de  $D_1^+$  et les  $\vec{\nabla} E_1^-$  à gauche de  $D_1^-$  (ce qui est possible puisque les opérateurs de champ et les opérateurs atomiques commutent) :

$$\begin{aligned} & \langle 0 | \sum_1 D_1^+ \vec{\nabla} E_{1 \text{ libre}}^+ (\vec{R}) | 0 \rangle = \\ & = \langle 0 | \sum_1 \vec{\nabla} E_{1 \text{ libre}}^- (\vec{R}) D_1^- | 0 \rangle = \vec{0} \end{aligned} \quad (\text{C1-14})$$

ce qui montre que  $\vec{E}_{1 \text{ libre}}^+$  ne contribue pas à  $\langle \vec{F}' \rangle$ . Quant à  $\vec{E}_{\text{source}}^+$ , il représente le champ rayonné par l'atome. En partant des expressions données dans la partie A (chapitre A1, appendice A), on peut montrer que le gradient de  $\vec{E}_{\text{source}}^+$  est nul à l'emplacement de l'atome. Finalement la valeur moyenne de l'opérateur  $\vec{F}'$  (eq. C1-8d) est donc nulle. Pour évaluer la valeur moyenne de  $\vec{F}$  (eq. C1-8c), nous pouvons maintenant avoir recours à l'hypothèse (C1-9) qui nous permet de remplacer  $\vec{R}$  par sa valeur moyenne  $\vec{r}_0$  :

$$\langle D_1^{\pm} \vec{\nabla} \mathcal{E}_1^{\pm} (\vec{R}) \rangle \simeq \langle D_1^{\pm} \rangle \vec{\nabla} \mathcal{E}_1^{\pm} (\vec{r}_0) \quad (\text{C1-15})$$

Enfin,  $\langle D_1^{\pm} \rangle$  est évalué en utilisant la solution stationnaire des équations de Bloch optiques au point  $\vec{r}_0$  ce qui conduit à l'expression suivante pour la force moyenne  $\vec{\phi}(\vec{r}_0)$  agissant sur l'atome au point  $\vec{r}_0$  :

$$\vec{\phi}(\vec{r}_0) = \sum_1 \langle D_1^+ \rangle_{\text{St}(\vec{r}_0)} \vec{\nabla} \mathcal{E}_1^+(\vec{r}_0) e^{-i\omega_L t} + \text{c.c.} \quad (\text{C1-16})$$

### 1-3 L'approche quantique

Reprenons maintenant les principaux résultats de l'approche quantique exposée en détail au chapitre B4. La condition de validité de cette approche reste l'inégalité (C1-11), mais aucune hypothèse n'est cette fois nécessaire concernant l'extension spatiale  $\delta r$  du paquet d'onde atomique. A l'ordre zéro en vitesse, c'est-à-dire pour des atomes infiniment lents, l'équation d'évolution de

la fonction de Wigner atomique  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  est la suivante (équation 5.30 du chapitre B4) :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\vec{p}}{m} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{r}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{p}} (\phi(\vec{r})f) + \text{termes de diffusion} \quad (\text{C1-17})$$

Le premier terme du second membre de cette équation décrit l'évolution de  $f(\vec{r}, \vec{p}, t)$  dans le champ de force  $\phi(\vec{r})$  où  $\phi$  est donné par :

$$\phi(\vec{r}) = \text{Tr} (\sigma_{s,t}(\vec{r}) \vec{F}(\vec{r})) \quad (\text{C1-18})$$

ce qui n'est autre que l'expression (C1-16). Cette approche quantique apparaît ainsi à la fois comme une justification de l'approche semi-classique et une généralisation de cette approche au cas des distributions atomiques étendues.

## C1-2 FORCE REACTIVE ET FORCE DISSIPATIVE

### 2-1 Réponse du dipole atomique à une excitation monochromatique

Pour calculer la force  $\phi(\vec{r}_0)$  définie en (C1-16), il faut évaluer la valeur moyenne stationnaire du dipole atomique pour un atome au repos au point  $\vec{r}_0$ . Considérons d'abord un modèle d'électron élastiquement lié. En notant  $e$  et  $m_e$  la charge et la masse de l'électron, l'équation du mouvement du dipole s'écrit :

$$\langle \ddot{\vec{D}} \rangle + \gamma \langle \dot{\vec{D}} \rangle + \omega_0^2 \langle \vec{D} \rangle = \frac{e^2}{m_e} \vec{\mathcal{E}}(\vec{r}_0, t) \quad (\text{C1-19})$$

où  $\omega_0$  est la fréquence de résonance et  $\gamma$  le coefficient d'amortissement du mouvement de l'électron atomique. Le régime stationnaire de ce mouvement est alors dans ce cas particulier :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{D}^+ \rangle_{st} = \frac{e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 + i\omega\gamma} \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}_0) e^{i\omega t} \\ \langle \vec{D}^- \rangle_{st} = \frac{e^2/m_e}{\omega_0^2 - \omega^2 - i\omega\gamma} \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0) e^{-i\omega t} \end{array} \right. \quad (C1-20)$$

où nous avons noté  $\langle D^+ \rangle_{st}$  et  $\langle D^- \rangle_{st}$  les composantes de  $\langle \vec{D} \rangle_{st}$  variant en  $e^{i\omega t}$  et  $e^{-i\omega t}$ .

Dans le cas général, on peut toujours écrire la valeur stationnaire du dipole atomique sous la forme\* :

$$\left\{ \begin{array}{l} \langle \vec{D}^+ \rangle_{st} = \chi(\omega, I) \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}_0) e^{i\omega t} \\ \langle \vec{D}^- \rangle_{st} = \chi^*(\omega, I) \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0) e^{-i\omega t} \end{array} \right. \quad (C1-21)$$

Les grandeurs conjuguées  $\chi$  et  $\chi^*$  représentent la susceptibilité du système atomique à la fréquence  $\omega$ . Ce sont des quantités scalaires si nous supposons le système atomique isotrope mais qui peuvent éventuellement dépendre de l'intensité :

$$I(\vec{r}_0) = \vec{\mathcal{E}}^+(\vec{r}_0) \cdot \vec{\mathcal{E}}^-(\vec{r}_0) \quad (C1-22)$$

du champ laser au point  $\vec{r}_0$ . Nous pouvons maintenant définir [7] les parties réactives  $\chi'$  et dissipatives  $\chi''$  de cette susceptibilité :

$$\chi = \chi' + i \chi'' \quad \chi', \chi'' \text{ réelles} \quad (C1-23)$$

et relier les échanges d'énergie entre l'atome et le champ à la partie dissipative  $\chi''$ . En partant du travail exercé par le champ laser sur le dipole atomique par unité de temps, nous trouvons :

---

\* Nous négligeons ici tout effet de pompage optique, en nous limitant par exemple à une transition  $J = 0 \rightarrow J = 1$ .

$$\begin{aligned}
 \frac{dW}{dt} &= \left\langle \vec{\mathcal{E}} \cdot \frac{d\vec{D}}{dt} \right\rangle \\
 &= i\omega \left( \vec{\mathcal{E}}^{(+)} \cdot \langle \vec{D}^+ \rangle - \vec{\mathcal{E}}^{(-)} \cdot \langle \vec{D}^- \rangle \right) \\
 &= -2\omega \chi'' \mathbf{I}(\vec{r}_0)
 \end{aligned} \tag{C1-24}$$

Ceci correspond à la disparition de  $dN/dt$  photons laser par unité de temps :

$$\frac{dN}{dt} = \frac{1}{\hbar\omega} \frac{dW}{dt} = -\frac{2}{\hbar} \chi''(\omega, \mathbf{I}) \mathbf{I} \tag{C1-25}$$

Revenons maintenant au calcul de la force  $\vec{\phi}$  et remplaçons dans (C1-16) les valeurs moyennes  $\langle \vec{D}^{\pm} \rangle$  par leur expression (C1-21). Ceci permet d'écrire  $\vec{\phi}$  sous la forme [8b,10] :

$$\vec{\phi}(\vec{r}_0) = \vec{\phi}_{\text{react}}(\vec{r}_0) + \vec{\phi}_{\text{diss}}(\vec{r}_0) \tag{C1-26}$$

avec :

$$\vec{\phi}_{\text{react}}(\vec{r}_0) = \chi' \sum_i \left[ \vec{\mathcal{E}}_1^{(-)} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{E}_1^{(+)} + \mathcal{E}_1^{(+)} \cdot \vec{\nabla} \vec{\mathcal{E}}_1^{(-)} \right] \tag{C1-27a}$$

$$\vec{\phi}_{\text{diss}}(\vec{r}_0) = i\chi'' \sum_i \left[ \vec{\mathcal{E}}_1^{(-)} \cdot \vec{\nabla} \mathcal{E}_1^{(+)} - \mathcal{E}_1^{(+)} \cdot \vec{\nabla} \vec{\mathcal{E}}_1^{(-)} \right] \tag{C1-27b}$$

Ces deux composantes  $\vec{\phi}_{\text{react}}$  et  $\vec{\phi}_{\text{diss}}$  sont respectivement appelées force réactive et force dissipative.

## 2-2 La force réactive

En reprenant les deux expressions (C1-27a) et (C1-22) nous pouvons mettre  $\vec{\phi}_{\text{react}}$  sous la forme :

$$\vec{\phi}_{\text{react}} = \chi'(\omega, I) \vec{\nabla} I \quad (\text{C1-28})$$

$\vec{\phi}_{\text{react}}$  est donc une force proportionnelle au gradient d'intensité du champ laser (elle est en particulier nulle dans une onde plane progressive). Le signe de  $\vec{\phi}_{\text{react}}$  n'est a priori pas imposé puisque  $\chi'(\omega, I)$  peut être aussi bien positif que négatif. Ainsi dans le modèle d'électron élastiquement lié présenté plus haut, on a :

$$\chi'(\omega) = \frac{e(\omega_0^2 - \omega^2)}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + \gamma^2 \omega^2} \quad (\text{C1-29})$$

si bien que cette force réactive attire l'atome vers des régions de haute intensité si la fréquence laser  $\omega$  est inférieure à la fréquence atomique  $\omega_0$ , et repousse l'atome des régions de haute intensité dans le cas contraire [11]. Nous retrouverons cette conclusion dans le paragraphe suivant pour un atome "à deux niveaux". Une propriété importante de cette force dans la perspective du piégeage radiatif d'atomes réside dans le fait qu'elle dérive d'un potentiel :

$$\vec{\phi}_{\text{react}} = - \vec{\nabla} U(\vec{r}) \quad (\text{C1-30})$$

où le potentiel  $U$  est donné par :

$$U(\vec{r}) = \int_0^{\vec{I}(\vec{r})} \chi'(\omega, I') dI' \quad (\text{C1-31})$$

Cette force liée aux gradients d'intensité de l'onde laser a été mise en évidence expérimentalement en 1978 par observation d'une focalisation ou d'une défocalisation d'un jet atomique par un faisceau laser [12].

2-3 La force dissipative

L'équation (C1-27b) donnant la force dissipative peut être transformée, en utilisant les deux équations de Maxwell :

$$\begin{cases} \vec{\nabla} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(\pm)} = 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{\mathcal{E}}^{(\pm)} = \pm i\omega \vec{\mathcal{B}}^{(\pm)} \end{cases} \quad (C1-32)$$

en l'équation suivante :

$$\vec{\Phi}_{diss} = - \chi'' \left\{ \omega (\vec{\mathcal{E}}^{(-)} \times \vec{\mathcal{B}}^{(+)} + \vec{\mathcal{E}}^{(+)} \times \vec{\mathcal{B}}^{(-)}) + i \vec{\nabla} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(+)} \times \vec{\mathcal{E}}^{(-)}) \right\} \quad (C1-33)$$

Remplaçons alors  $\chi''$  par son expression en fonction de  $dN/dt$ , nombre de photons laser disparaissant par unité de temps (eq. C1-25). On trouve :

$$\vec{\Phi}_{diss} = \hbar \vec{\mathcal{K}}(\vec{r}_0) \frac{dN}{dt} \quad (C1-34a)$$

Le vecteur  $\vec{\mathcal{K}}(\vec{r}_0)$ , caractéristique de la géométrie du champ laser, mais indépendant de son intensité, s'écrit :

$$\vec{\mathcal{K}}(\vec{r}_0) = \frac{\omega (\vec{\mathcal{E}}^{(-)} \times \vec{\mathcal{B}}^{(+)} + \vec{\mathcal{E}}^{(+)} \times \vec{\mathcal{B}}^{(-)}) + i (\vec{\nabla} \times (\vec{\mathcal{E}}^{(+)} \times \vec{\mathcal{E}}^{(-)}))}{2 \vec{\mathcal{E}}^{(+)} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(-)}} \quad (C1-34b)$$

où les champs  $\vec{\mathcal{E}}$  et  $\vec{\mathcal{B}}$  sont pris au point  $\vec{r}_0$ . D'après l'expression (C1-34a),  $\hbar \vec{\mathcal{K}}(\vec{r}_0)$  apparaît comme l'impulsion transférée à l'atome lors de l'absorption d'un photon laser, cet atome se trouvant en  $\vec{r}_0$ . Une fois ce photon laser absorbé, l'atome est dans l'état excité et il retombe dans l'état fondamental en émettant un photon de fluorescence d'impulsion moyenne nulle. La répétition de tels cycles de fluorescence avec un taux  $dN/dt$  conduit à la force (C1-34a). Cette force, que nous appellerons dans la suite pression de radiation a été mise en évidence dès 1933 par R. Frisch sur des

atomes de sodium, par observation de la déflexion d'un jet atomique par la lumière d'une lampe spectrale [13].

Remarques :

(i) Pour une onde plane progressive  $\vec{\mathcal{E}}(\vec{r}, t) = \vec{\mathcal{E}}_0 \cos(\omega t - \vec{k}r)$  on constate sur (C1-34b) que  $\vec{\mathcal{K}}$  n'est autre que le vecteur d'onde  $\vec{k}$ . On vérifie donc sur ce cas particulier que l'impulsion transférée par un photon laser à l'atome est bien  $\hbar\vec{\mathcal{K}}$ .

(ii) Pour une onde polarisée linéairement ( $\vec{\mathcal{E}}^+ \neq \vec{\mathcal{E}}^-$ ) le vecteur  $\vec{\mathcal{K}}$  est aligné avec le vecteur de Poynting moyen :

$$\vec{\Pi} = \frac{1}{\mu_0} \left( \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}_0) \times \vec{\mathcal{B}}^{(+)}(\vec{r}_0) + \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0) \times \vec{\mathcal{B}}^{(-)}(\vec{r}_0) \right) \quad (C1-35a)$$

Ceci correspond bien à la propriété de base du vecteur de Poynting de représenter l'impulsion locale du champ. Il peut alors sembler curieux de constater que  $\vec{\mathcal{K}}$  et  $\vec{\Pi}$  ne sont plus alignés pour une polarisation non rectiligne. En fait, ce problème peut être résolu en remarquant que, puisque  $\vec{\Pi}$  n'est défini qu'à un rotationnel près par l'équation de continuité :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Pi} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

( $\rho$  désigne la densité d'énergie électromagnétique), on peut toujours définir un "nouveau" vecteur de Poynting :

$$\vec{\Pi}' = \vec{\Pi} + \frac{i}{\omega\mu_0} \vec{\nabla} \times \left( \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0) \times \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}_0) \right) \quad (C1-35b)$$

qui satisfait l'équation (C1-37) et qui est bien quant à lui parallèle au vecteur  $\vec{\mathcal{K}}$ . Indiquons sur un exemple simple la différence entre  $\vec{\Pi}$  et  $\vec{\Pi}'$ . Considérons la superposition de deux ondes planes de même amplitude  $\mathcal{E}_0$  et de même fréquence  $\omega$ , l'une de ces



ondes se propageant suivant l'axe Ox et étant polarisée suivant Oz :

$$\vec{\mathcal{E}}_1^{(+)} = \mathcal{E}_0 e^{ikx} \vec{u}_z \quad (\text{C1-36a})$$

et l'autre onde se propageant suivant l'axe Oy et étant polarisée suivant Ox :

$$\vec{\mathcal{E}}_2^{(+)} = \mathcal{E}_0 e^{iky} \vec{u}_x \quad (\text{C1-36b})$$

Le champ électrique total s'écrit donc :

$$\vec{\mathcal{E}}^{(+)} = \mathcal{E}_0 (e^{ikx} \vec{u}_z + e^{iky} \vec{u}_x) \quad (\text{C1-36c})$$

et le champ magnétique associé se déduit des équations de Maxwell (C1-32) :

$$\vec{\mathcal{B}}^{(+)} = -\frac{\mathcal{E}_0}{c} (e^{ikx} \vec{u}_y + e^{iky} \vec{u}_z) \quad (\text{C1-37})$$

On peut alors calculer les deux vecteurs  $\vec{\Pi}$  et  $\vec{\Pi}'$  d'après (C1-35a,b) :

$$\vec{\Pi} = \frac{2\mathcal{E}_0^2}{\mu_0 c} \left( \vec{u}_x + \vec{u}_y - \cos(k(x-y)) \vec{u}_z \right) \quad (\text{C1-38a})$$

$$\vec{\Pi}' = \frac{2\mathcal{E}_0^2}{\mu_0 c} \left( \vec{u}_x + \vec{u}_y \right) \quad (\text{C1-38b})$$

On constate que le vecteur  $\vec{\Pi}'$ , donnant la direction de la force de pression de radiation, est, comme on s'y attend intuitivement, dans le plan Oxy défini par les deux vecteurs d'onde des ondes 1 et 2, alors que le vecteur  $\vec{\Pi}$  a quant à lui une composante en dehors de ce plan, composante qui ne s'annule qu'après moyennage sur une longueur d'onde.

### C1-3 LE CAS D'UN ATOME A DEUX NIVEAUX [6,8,10,14-18]

Nous allons maintenant étudier le cas particulier important du mouvement atomique dans une onde dont la polarisation est à peu près constante dans l'espace. Nous supposerons de plus que nous pouvons nous ramener au cas d'une transition atomique à deux niveaux, comme c'est par exemple le cas pour une transition  $J = 0 \rightarrow J = 1$  dans une onde laser de polarisation quelconque, ou encore pour une transition  $J \rightarrow J + 1$  dans une onde laser polarisée circulairement (par pompage optique, l'atome se "verrouille" alors sur la transition

$|J, m_j = J\rangle \rightarrow |J + 1, m_j = J + 1\rangle$ ). Signalons qu'un exemple de traitement d'un mouvement dans une onde de polarisation variable est présenté dans l'appendice 1 de cette partie.

#### 3-1 Réponse d'un atome à deux niveaux à une excitation monochromatique

Pour obtenir l'expression de la force agissant sur un atome à deux niveaux, commençons par étudier la susceptibilité  $\chi(\omega, I)$  de cet atome (eq. C1-21). Le dipole atomique  $\vec{D}$  s'écrit en fonction de l'élément de matrice réduit  $\vec{d}$  de ce dipole :

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \vec{D}^+ + \vec{D}^- & \vec{D}^+ &= \vec{d} |e\rangle\langle f| \\ & & \vec{D}^- &= \vec{d} |f\rangle\langle e| \end{aligned} \tag{C1-39}$$

où  $f$  et  $e$  représentent respectivement les états fondamental et excité de l'atome, séparés par l'énergie  $\hbar\omega_0$ . La valeur moyenne du dipole s'obtient alors à partir de la matrice densité atomique stationnaire  $\bar{\rho}$  :

$$\langle \vec{D}^+ \rangle = \text{Tr} (\vec{D}^+ \bar{\rho}) = \vec{d} \bar{\rho}_{fe} \quad (\text{C1-40})$$

$$\langle \vec{D}^- \rangle = \text{Tr} (\vec{D}^- \bar{\rho}) = \vec{d} \bar{\rho}_{ef}$$

Cette matrice densité  $\bar{\rho}$  est elle-même obtenue à partir des équations de Bloch optiques [19] :

$$\begin{cases} \dot{\rho}_{ee} = -\Gamma \rho_{ee} + i \left( \frac{\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0)}{\hbar} \tilde{\rho}_{fe} - \frac{\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}_0)}{\hbar} \tilde{\rho}_{ef} \right) \\ \dot{\tilde{\rho}}_{ef} = i\delta \tilde{\rho}_{ef} - \frac{\Gamma}{2} \tilde{\rho}_{ef} + i \frac{\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0)}{\hbar} (\rho_{ff} - \rho_{ee}) \end{cases} \quad (\text{C1-41})$$

$$\begin{cases} \rho_{ff} + \rho_{ee} = 1 \\ \tilde{\rho}_{ef} = \tilde{\rho}_{fe}^* \end{cases} \quad (\text{C1-42})$$

où on a posé :

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_{ef} &= \rho_{ef} e^{i\omega t} \\ \tilde{\rho}_{fe} &= \rho_{fe} e^{-i\omega t} \\ \delta &= \omega - \omega_0 \end{aligned} \quad (\text{C1-43})$$

La première colonne des équations (C1-41) décrit l'évolution libre de  $\rho$  (Hamiltonien  $H'_A$ ), la seconde colonne décrit la relaxation par émission spontanée et la troisième colonne enfin provient de l'interaction atome-laser.

L'état stationnaire du système d'équations (C1-41,42) est donné par :

$$\bar{\rho}_{ee} = \frac{s}{2(1+s)} \quad \bar{\rho}_{ff} = \frac{2+s}{2(1+s)} \quad (C1-44)$$

$$\bar{\rho}_{ef} = - \frac{\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0)/\hbar}{\delta + i\Gamma/2} \cdot \frac{1}{1+s} e^{-i\omega t} = \bar{\rho}_{fe}^*$$

où le paramètre de saturation  $s$  vaut :

$$s(\vec{r}_0) = \frac{2 (\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}_0)) (\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(-)}(\vec{r}_0)) / \hbar^2}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (C1-45)$$

Nous trouvons donc finalement pour la susceptibilité de l'atome à deux niveaux :

$$\chi(\omega, I) = - \frac{\vec{d}^2/\hbar}{\omega - \omega_0 - i\Gamma/2} \cdot \frac{1}{1+s} \quad (C1-46)$$

### 3-2 La force réactive ou force dipolaire

La force réactive, liée au gradient d'intensité s'écrit ici :

$$\vec{\phi}_{\text{react}} = - \frac{\hbar\delta}{2} \frac{\vec{\nabla} s}{1+s} \quad (C1-47)$$

Elle est plus couramment appelée force dipolaire et dérive du potentiel :

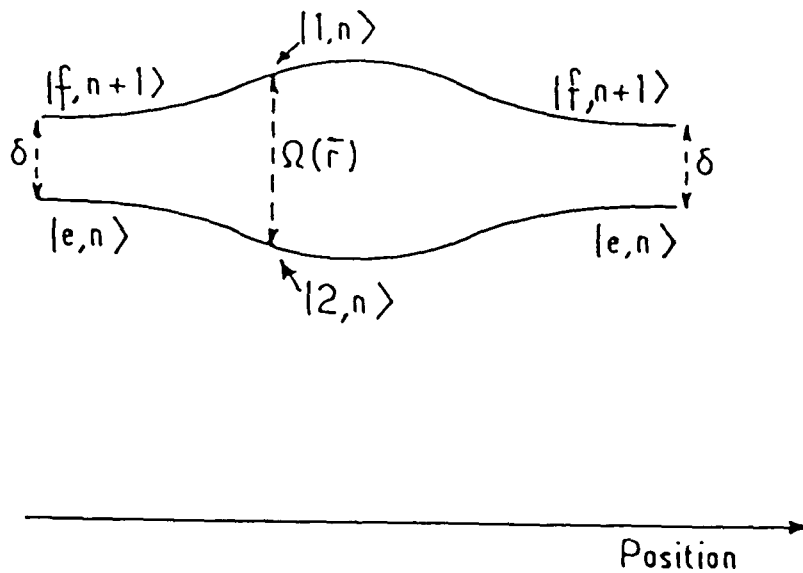
$$U = \frac{\hbar\delta}{2} \text{Log}(1+s) \quad (C1-48)$$

Donnons ici une valeur de ce potentiel, pour un atome de sodium et pour un faisceau laser de longueur d'onde  $0,59 \mu\text{m}$  (accordé sur la raie de résonance du sodium,  $\Gamma^{-1} = 16 \text{ ns}$ ), d'une puissance de 1 Watt et focalisé avec un rayon focal  $w_0 = 10 \mu\text{m}$ . On a alors une fréquence de Rabi  $\omega_1$  :

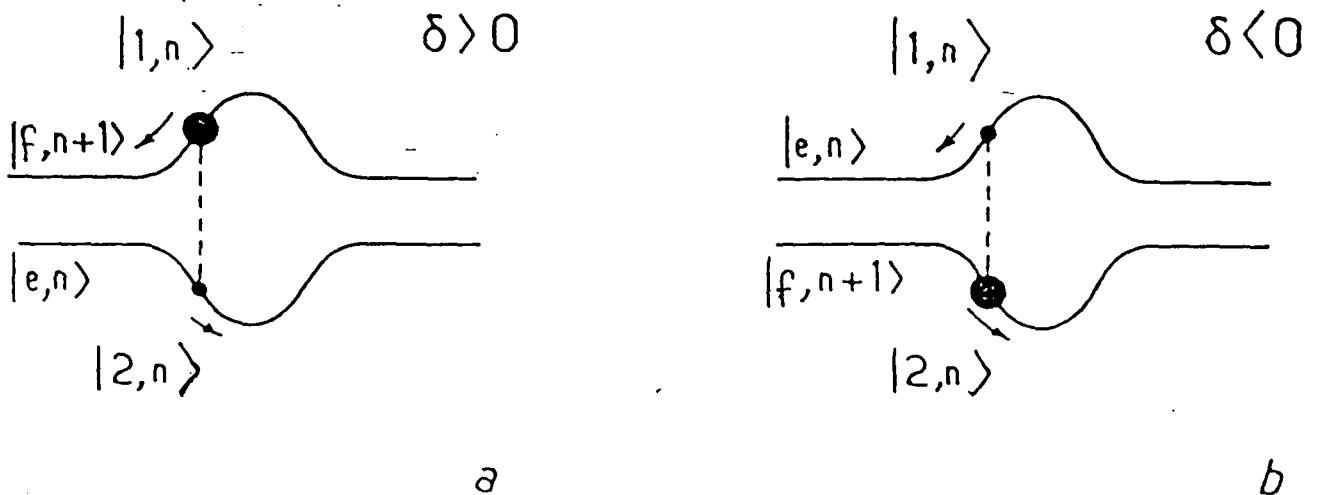
$$\omega_1(\vec{r}) = 2 \frac{\vec{d} \cdot \vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r})}{\hbar} \quad (\text{C1-49})$$

qui vaut au centre du faisceau  $|\omega_1|/2\pi \simeq 70$  GHz. Le désaccord optimisant la valeur du potentiel  $U$  donné en (C1-48) est  $|\delta| \simeq |\omega_1|/3$  ce qui conduit au potentiel  $U \simeq 0,3 \hbar\omega_1 \simeq 1$  degré Kelvin.

Comme nous l'avons vu pour le modèle de l'électron élastiquement lié, cette force est expulsante des régions de haute intensité si l'onde est désaccordée positivement ( $\omega > \omega_0$ ) et attirante sinon. Pour un atome à deux niveaux, cette variation du signe de la force peut s'interpréter simplement par le modèle de l'atome habillé. Ce modèle, qui est exposé en détail dans l'appendice B de cette partie, peut se résumer qualitativement de la manière suivante. Dans un gradient d'intensité, les énergies des niveaux habillés -i.e. les états propres du système atome-champ laser- varient dans l'espace, tout comme la fréquence de Rabi  $\omega_1(\vec{r})$  (eq. C1-49) caractérisant le couplage. La position de ces niveaux habillés, notés  $|1,n\rangle$  et  $|2,n\rangle$ , est représentée sur la figure 1 : hors du faisceau laser, ces états sont confondus avec les états non couplés  $|f,n+1\rangle$  et  $|e,n\rangle$  correspondant à l'atome dans l'état  $f$  ou  $e$  en présence respectivement de  $n+1$  ou  $n$  photons laser. Dans le faisceau laser, ces niveaux se repoussent, leur écart d'énergie en un point  $\vec{r}$  s'écrivant  $\hbar(\delta^2 + \omega_1^2(\vec{r}))^{1/2}$ . En l'absence d'émission spontanée, l'atome voit donc une force bivaluée, dépendant de son état interne, tout comme un spin 1/2 dans un champ magnétique inhomogène. Sur l'état  $|1,n\rangle$ , d'énergie la plus élevée, l'atome ressent une force  $\vec{F}_1$  qui l'expulse du faisceau lumineux, sur l'état  $|2,n\rangle$ , il ressent au contraire une force  $\vec{F}_2 = -\vec{F}_1$  qui l'attire au centre du faisceau. Considérons maintenant l'effet de l'émission spontanée ; un atome sur le niveau  $|1,n\rangle$  ou  $|2,n\rangle$  -qui sont tous deux contaminés par  $|e,n\rangle$  à l'intérieur du faisceau- peut se désexciter vers les niveaux  $|1,n-1\rangle$  ou  $|2,n-1\rangle$  -tous deux contaminés par  $|f,n\rangle$ . Ces états  $|1,n-1\rangle$  et  $|2,n-1\rangle$  peuvent eux-mêmes se désexciter vers  $|1,n-2\rangle$  et  $|2,n-2\rangle$ ... L'atome habillé effectue ainsi une cascade le long de son diagramme d'énergie :



**Figure 1** : Variation de la position des niveaux habillés lors de la traversée d'un faisceau laser : l'écart d'énergie  $\Omega(\vec{r})$  dépend de la position  $\vec{r}$ . Hors du faisceau, les niveaux d'énergie se raccordent aux niveaux non perturbés.



**Figure 2** : Interprétation du signe de la force dipolaire moyenne. Quand  $\delta = \omega - \omega_0$  est positif (a), l'état  $|1,n\rangle$  se raccorde à  $|f,n+1\rangle$  en dehors du faisceau ; il est donc moins contaminé par  $|e,n\rangle$  que l'autre niveau habillé  $|2,n\rangle$  et sa population est par conséquent plus grande. La force moyenne repousse alors l'atome hors du faisceau laser. Si  $\delta$  est négatif (b), la population de  $|2,n\rangle$  est au contraire supérieure à celle de  $|1,n\rangle$  et la force dipolaire moyenne attire l'atome au centre du faisceau.

$$\dots \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1, n+1\rangle \\ |2, n+1\rangle \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1, n\rangle \\ |2, n\rangle \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} |1, n-1\rangle \\ |2, n-1\rangle \end{array} \right\} \rightarrow \dots$$

En notant  $\pi_1$  et  $\pi_2$  les proportions de temps passé sur les niveaux de type 1 et de type 2 ( $\pi_1 + \pi_2 = 1$ ), la force moyenne vue par l'atome peut alors s'écrire :

$$\vec{f} = \pi_1 \vec{F}_1 + \pi_2 \vec{F}_2 \quad (C1-50)$$

Le sens de cette force (expulsant ou attirant) est alors déterminé par la valeur relative de  $\pi_1$  et  $\pi_2$ . Si le désaccord est positif (figure 2a), l'énergie de  $|f, n+1\rangle$  est supérieure à l'énergie de  $|e, n\rangle$ . Le niveau  $|1, n\rangle$  se raccorde donc à  $|f, n+1\rangle$  et le niveau  $|2, n\rangle$  à  $|e, n\rangle$ . Ceci implique que  $|1, n\rangle$  est plus stable que  $|2, n\rangle$  et on a alors :

$$\delta > 0 \implies \pi_1 > \pi_2 \implies \text{force expulsante}$$

Inversement, pour  $\delta$  négatif (figure 2b),  $|1, n\rangle$  se raccorde à  $|e, n\rangle$  hors du faisceau laser et est donc moins stable que  $|2, n\rangle$  :

$$\delta < 0 \implies \pi_1 < \pi_2 \implies \text{force attirante}$$

Nous voyons ainsi que ce modèle d'atome habillé permet de rendre compte du sens de la force dipolaire. En fait, le raisonnement précédent peut être fait de manière plus quantitative. Il est alors possible, à partir d'une expression du type de (C1-50), de retrouver la limite haute intensité de (C1-47) (voir appendice B de cette partie).

### 3-3 La force dissipative ou pression de radiation

Puisque nous nous limitons dans ce paragraphe à une onde de polarisation constante  $\vec{\varepsilon}$ , nous pouvons poser :

$$\vec{\mathcal{E}}^{(+)}(\vec{r}) = \vec{\varepsilon} e^{i\varphi(\vec{r})} \vec{\xi}(\vec{r}) \quad (C1-51)$$

où  $\varphi$  représente la phase de l'onde. En reportant cette expression dans la formule (C1-27a) donnant la force dissipative, nous trouvons alors :

$$\vec{\phi}_{diss} = \hbar \vec{\nabla} \varphi \frac{s}{1+s} \cdot \frac{\Gamma}{2} \quad (C1-52)$$

Cette force, proportionnelle au gradient de phase de l'onde laser, est couramment appelée pression de radiation ou force de diffusion ("scattering force"). Elle est maximale dans une onde plane progressive :

$$\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r} \quad (C1-53)$$

pour laquelle :

$$\vec{\phi}_{diss} = \hbar \vec{k} \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (C1-54)$$

L'interprétation de cette force a déjà été donnée au paragraphe 2-3 : dans l'onde laser, l'atome effectue des cycles de fluorescence, chacun de ces cycles lui transférant en moyenne l'impulsion  $\hbar \vec{k}$  ( $\hbar \vec{k}$  lors de l'absorption d'un photon laser, et  $\vec{0}$  en moyenne lors de l'émission d'un photon de fluorescence). Le taux de ces cycles étant  $\overline{\Gamma_{p_{ee}}} = (\Gamma/2) \cdot (s/1+s)$ , on trouve alors la force (C1-54).

L'ordre de grandeur de cette force peut être considérable : pour un faisceau laser saturant ( $s \gg 1$ ), la force  $\hbar k \Gamma / 2$  pour l'atome de sodium est 100 000 fois supérieure à la force de gravitation. Il est ainsi possible, grâce à la pression de radiation, de ralentir et même d'immobiliser complètement, sur une distance de l'ordre du mètre, des jets atomiques dont la vitesse initiale est de l'ordre de 1000 m/s [20-22].



## C2 : FLUCTUATIONS DES FORCES RADIATIVES

Dans le chapitre précédent, nous avons déterminé la force radiative moyenne agissant sur un atome au repos, et nous avons plus particulièrement étudié le cas d'un atome à 2 niveaux. Mais ce calcul ne suffit pas à préciser complètement la dynamique des atomes dans l'onde lumineuse. En effet, par suite du caractère aléatoire de l'émission spontanée, cette force radiative fluctue autour de sa valeur moyenne, ces fluctuations induisant une diffusion de l'impulsion atomique, et donc un "chauffage" des atomes.

L'expression générale du coefficient de diffusion de l'impulsion pour un atome au repos en  $\vec{r}$  a été établie au chapitre B4 (formules 5-17, 5-24). Nous nous intéressons ici à la trace de ce coefficient :

$$\mathcal{D} = \sum_{\vec{i}} \mathcal{D}_{\vec{i}, \vec{i}} \quad (\text{C2-1})$$

qui donne directement l'échauffement de l'atome sous l'effet des fluctuations des forces radiatives ; si  $\Delta p^2$  désigne la variance de l'impulsion atomique, on a :

$$\frac{d \Delta p^2}{dt} = 2 \mathcal{D} \quad (\text{C2-2})$$

A partir des résultats du chapitre B4, on peut mettre  $\mathcal{D}$  sous la forme :

$$\begin{aligned} \mathcal{D} = & \int_0^\infty d\tau \left\{ \frac{1}{2} \langle \vec{F}(\vec{r}, \tau) \cdot \vec{F}(\vec{r}) + \vec{F}(\vec{r}) \cdot \vec{F}(\vec{r}, \tau) \rangle - \vec{\phi}^2(\vec{r}) \right\} \\ & + \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \Gamma \pi_e \end{aligned} \quad (\text{C2-3})$$

où  $\vec{F}$  désigne l'opérateur force radiative au point  $\vec{r}$  (éq. C1-8c) et  $\pi_e$  la somme des populations des états excités. Comme nous l'avons vu dans le chapitre B4, la première ligne de  $\mathcal{D}$  est liée aux fluc-

tuations des échanges d'impulsions avec le laser, et la seconde correspond aux fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence [23].

Dans ce chapitre, nous commençons par rappeler brièvement les différentes étapes et le résultat du calcul de  $\mathcal{D}$  pour un atome à deux niveaux. Nous discutons ensuite physiquement les deux termes prépondérants de ce développement : fluctuations de la pression de radiation et fluctuations des forces dipolaires. Enfin nous présentons brièvement les résultats obtenus pour le cas d'un atome  $J = 0 \rightarrow J = 1$  dans une onde plane "stationnaire  $\sigma_+ - \sigma_-$ ", c'est-à-dire deux ondes planes se propageant en sens contraire et respectivement polarisées  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ .

## C2-1 EXPRESSION GENERALE DU COEFFICIENT DE DIFFUSION

Le calcul du coefficient de diffusion pour un atome à deux niveaux a été fait par Cook [6] et Gordon et Ashkin [8] en 1980. Nous nous bornerons à en rappeler ici les grandes lignes, une présentation beaucoup plus détaillée pouvant être trouvée dans la thèse de troisième cycle de C. Tanguy [24].

Partant de l'expression (C2-3) du coefficient de diffusion, nous commençons par remplacer l'opérateur force  $\vec{F}(r)$  par son expression (C1-8c) en fonction du dipole atomique. Nous voyons apparaître alors des fonctions de corrélation à deux temps du dipole atomique :  $\langle D_i^+(t) D_j^+(0) \rangle$ . Pour calculer ces fonctions, il faut avoir recours au théorème de régression quantique qui relie l'évolution de ces moyennes à deux temps à l'évolution des moyennes à un temps  $\langle D_i^+(t) \rangle$ . Ces dernières sont ensuite calculées à partir des équations de Bloch optiques (éq. C1-41,42), ce qui nous donne la première ligne de  $\mathcal{D}$  (éq. C2-3). La seconde ligne fait simplement intervenir la population stationnaire  $\pi_e = \overline{\rho_{ee}}$  de l'état excité, que nous avons déjà rencontrée (éq. C1-44). Au terme de ce calcul long mais sans difficulté on trouve alors :

$$\mathcal{D} = d_1 \left( \frac{\vec{\nabla}s}{s} \right)^2 + d_2 (\vec{\nabla}\varphi)^2 + d_3 \frac{\vec{\nabla}s \cdot \vec{\nabla}\varphi}{s} + \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{4(1+s)} \quad (\text{C2-4})$$

où  $s$  est le paramètre de saturation (proportionnel à l'intensité lumineuse),  $\varphi$  la phase de l'onde laser, et où :

$$d_1 = \frac{1}{16} \hbar^2 \Gamma \frac{s}{(1+s)^3} \left( 1 + \frac{\frac{3\Gamma^2}{4} - \delta^2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} s + 3 s^2 + \frac{\Gamma^2 + 4\delta^2}{\Gamma^2} s^3 \right) \quad (\text{C2-5a})$$

$$d_2 = \frac{1}{4} \hbar^2 \Gamma \frac{s}{(1+s)^3} \left( 1 - \frac{\frac{\Gamma^2}{4} - 3\delta^2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} s + s^2 \right) \quad (\text{C2-5b})$$

$$d_3 = \frac{1}{2} \hbar^2 \delta \frac{s^2}{(1+s)^3} \left( \frac{\Gamma^2}{\frac{\Gamma^2}{4} + \delta^2} + s \right) \quad (\text{C2-5c})$$

Les termes de  $\mathcal{D}$  proportionnels à  $d_1, d_2, d_3$  proviennent de l'intégrale sur le temps de la fonction de corrélation  $\langle \vec{F}(\tau) \cdot \vec{F}(0) \rangle$ , et s'expriment en fonction des gradients d'intensité ( $\vec{\nabla}s$ ) et de phase ( $\vec{\nabla}\varphi$ ) de l'onde laser. Nous interpréterons ces termes dans les paragraphes suivants pour une onde plane progressive et une onde plane stationnaire. Le dernier terme de  $\mathcal{D}$ , qui représente la diffusion liée à l'impulsion emportée par les photons spontanés, peut être retrouvé simplement. Chaque photon de fluorescence emporte l'impulsion  $\hbar \vec{k}$ , avec une direction aléatoire, provoquant par recul une marche au hasard de l'impulsion atomique. Le coefficient de diffusion correspondant est, selon la théorie du mouvement Brownien, la moitié du produit du carré du pas de la marche au hasard, soit  $\frac{1}{2} \hbar^2 k^2$ , par le taux de cette marche au hasard, c'est-à-dire le nombre de photons spontanés émis par unité de temps  $(\Gamma/2) \cdot (s/1+s)$  (cf. § 3-3 du chapitre C1). On trouve alors pour ce coefficient de diffusion lié aux photons spontanés :

$$D_{\text{spont}} = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \quad (\text{C2-6})$$

ce qui n'est autre que le dernier terme de (C2-4).

**C2-2 LA DIFFUSION D'IMPULSION DANS UNE ONDE PLANE PROGRESSIVE [8a, 25-29]**

Dans une onde plane progressive de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , l'intensité est constante -  $\vec{\nabla}s = \vec{0}$  - et la phase  $\varphi$  s'écrit  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r}$ , si bien que le coefficient de diffusion  $\mathcal{D}$  se simplifie pour donner :

$$\mathcal{D} = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{4(1+s)} + d_2 k^2 \quad (\text{C2-7})$$

On peut retrouver cette valeur en faisant un bilan d'impulsion pendant un intervalle de temps  $\delta t$  donné. Pendant  $\delta t$ , l'atome effectue un certain nombre  $\delta N$  de cycles de fluorescence et sa variation  $\delta \vec{p}$  d'impulsion s'écrit :

$$\delta \vec{p} = - \sum_{i=1}^{\delta N} \hbar \vec{k}_i + \delta N \hbar \vec{k} \quad (\text{C2-8})$$

où  $\vec{k}_i$  désigne l'impulsion du  $i^{\text{ème}}$  photon de fluorescence. Etudions alors la valeur moyenne et la variance de  $\delta \vec{p}$ . Puisque l'impulsion moyenne d'un photon de fluorescence est nulle, on a d'abord :

$$\overline{\delta \vec{p}} = \overline{\delta N} \hbar \vec{k} \quad (\text{C2-9})$$

ce qui permet de retrouver la force de pression de radiation.  $\vec{\Phi}_{diss} = \delta \vec{p} / \delta t = (\overline{\delta N} / \delta t) \cdot \hbar \vec{k}$  étudiée au chapitre précédent (§ C1-3-3). La variance de  $\delta \vec{p}$  s'écrit :

$$\Delta(\delta\vec{p}) = \overline{\delta\vec{p}^2} - \overline{\delta\vec{p}}^2 = \overline{\delta N} \hbar^2 \vec{k}^2 + \left( \overline{\delta N^2} - \overline{\delta N}^2 \right) \hbar^2 \vec{k}^2 \quad (\text{C2-10})$$

où nous avons utilisé le fait que les impulsions de deux photons de fluorescence distincts sont décorrélées :

$$\overline{\hbar\vec{k}_i \cdot \hbar\vec{k}_j} = \overline{\hbar\vec{k}_i} \cdot \overline{\hbar\vec{k}_j} = 0 \quad (\text{C2-11})$$

Nous voyons alors clairement apparaître deux sources de fluctuations pour  $\delta\vec{p}$ . Le premier terme de (C2-10) a déjà été rencontré au paragraphe précédent (éq. C2-6) : il s'agit des fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence. Le second terme de (C2-10) est proportionnel à la variance du nombre  $\delta N$  de cycles de fluorescence pendant le temps  $\delta t$ . Or cette variance peut être calculée par les méthodes standard de l'optique quantique. On la met généralement sous la forme [30] :

$$\Delta(\delta N^2) = \overline{\delta N^2} - \overline{\delta N}^2 = \overline{\delta N} (1 + Q) \quad (\text{C2-12})$$

où le paramètre  $Q$  décrit l'écart à la statistique poissonnienne de la variable aléatoire  $\delta N$ . Ce paramètre  $Q$  vaut pour un atome à deux niveaux :

$$Q = \frac{s}{(1+s)^2} \cdot \frac{\delta^2 - \frac{3\Gamma^2}{4}}{\delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \quad (\text{C2-13})$$

Il suffit alors de reporter cette valeur dans (C2-12) puis (C2-10) pour obtenir :

$$\frac{1}{2} \frac{\Delta(\delta\vec{p}^2)}{\delta t} = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{4(1+s)} + d_2 k^2 \quad (\text{C2-14})$$

où  $d_2$  a la même valeur qu'en (C2-5b). On retrouve bien ainsi le coefficient de diffusion (C2-7), conformément à la relation (C2-2).

Signalons pour conclure ce paragraphe que le fait que la

diffusion de l'impulsion de l'atome puisse être reliée à la statistique du nombre de cycles de fluorescence a été exploité expérimentalement : les auteurs de la référence [31] ont mis ainsi en évidence le caractère subpoissonien de la variable  $\delta N(Q < 0)$  pour certaines valeurs des paramètres  $\delta$  et  $\omega_1$  en étudiant les profils de déflexion d'un jet atomique par une onde laser progressive.

### C2-3 LA DIFFUSION D'IMPULSION DANS UNE ONDE STATIONNAIRE [6, 8a, 15, 39a]

Nous nous intéressons dans ce paragraphe à la diffusion de l'impulsion atomique dans une onde plane stationnaire ( $\varphi = C^t e$ ). Le paramètre de saturation peut s'écrire :

$$s = 4 s_0 \cos^2 kz \quad (C2-15)$$

où  $s_0$  est le paramètre de saturation correspondant à chacune des deux ondes progressives constituant l'onde stationnaire. Nous considérerons ici les deux cas limites d'une onde stationnaire faible ( $s_0 \ll 1$ ) et d'une onde stationnaire intense.

#### 3-1 Onde stationnaire peu intense

Dans une onde peu intense ( $s \ll 1$ ), nous pouvons ne garder que les termes d'ordre le plus bas en  $s$  dans l'expression (C2-4,5) de  $\mathcal{D}$ , ce qui donne :

$$\mathcal{D} \simeq \frac{1}{16} \kappa^2 \Gamma \frac{(\nabla s)^2}{s} + \frac{1}{4} \kappa^2 k^2 \Gamma s \quad (C2-16)$$

Remplaçons alors  $s$  par sa valeur (C2-15). Nous trouvons :

$$\mathcal{D} \simeq \kappa^2 k^2 \Gamma s_0 \sin^2 kz + \kappa^2 k^2 \Gamma s_0 \cos^2 kz$$

$$\simeq \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \quad (C2-17)$$

ce qui peut encore s'écrire :

$$D = 2 D_0 \quad (C2-18)$$

où  $D_0 = \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 / 2$  désigne le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique dans chacune des deux ondes progressives constituant l'onde stationnaire, ce coefficient étant obtenu en prenant la limite  $s_0 \gg 1$  dans (C2-5b) et (C2-7). Il apparaît donc qu'à basse intensité, on peut ajouter indépendamment les effets de ces deux ondes progressives pour établir les bilans des échanges d'impulsion entre l'atome et le mode laser. Nous allons voir que cette conclusion n'est plus valable à haute intensité.

### 3-2 Onde stationnaire intense

Limitons nous ici pour simplifier à une onde résonnante ( $\delta = 0$ ). Si cette onde est intense ( $\omega_1 \gg \Gamma$ ), le terme prépondérant du coefficient de diffusion (C2-4,5) provient du terme  $d_1 (\vec{v}s/s)^2$  (plus précisément du terme en  $s^4 / (1 + s)^3$  dans  $d_1$ ). Ce terme prépondérant s'écrit en utilisant (C2-15) :

$$D \simeq \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \sin^2 kz \quad (C2-19)$$

Puisque  $s_0$  est maintenant très grand devant 1, ce coefficient de diffusion est beaucoup plus grand (par un facteur  $s_0$ ) que le coefficient de diffusion qu'on trouverait en ajoutant les coefficients de diffusion des deux ondes progressives, égaux chacun à  $\hbar^2 k^2 \Gamma / 2$  à haute intensité ( $s_0 \gg 1$ ) d'après (C2-5b) et (C2-7). Cet accroissement considérable de la diffusion de l'impulsion atomique est dû aux processus "absorption dans une onde progressive - émission stimulée dans l'autre onde progressive", processus qui provoquent une redistribution cohérente de photons entre les deux ondes progres-

sives à un taux de l'ordre de la fréquence de Rabi atomique  $\omega_1$  (éq. C1-49). Montrons qu'on peut ainsi rendre compte qualitativement de l'expression (C2-19) de  $\mathcal{D}$ . Une phase donnée de redistribution cohérente dure un temps de l'ordre de  $\Gamma^{-1}$ , jusqu'à ce que se produise une émission spontanée qui "brise" la cohérence. Le nombre moyen de photons redistribués par phase est donc donné par  $\omega_1/\Gamma (\gg 1)$ , ce qui communique à l'atome une impulsion de module moyen  $\hbar k \omega_1/\Gamma$ . Le taux de répétition de ces phases étant  $\Gamma$ , ceci conduit à un coefficient de diffusion de l'ordre de :

$$\mathcal{D} \simeq (\hbar k \frac{\omega_1}{\Gamma})^2 \Gamma \quad (\text{C2-20})$$

ce qui est bien de l'ordre de grandeur de (C2-19) puisque, à résonance,  $s_0 \sim \omega_1^2/\Gamma^2$  (éq. C1-45).

Une interprétation plus quantitative de  $\mathcal{D}$  peut être donnée dans le cadre du formalisme de l'atome habillé présenté au chapitre précédent pour rendre compte de la force dipolaire. Pour une onde résonnante, les deux niveaux habillés  $|1,n\rangle$  et  $|2,n\rangle$  ont pour énergie  $\mp \hbar \vec{\nabla} \omega_1(z)/2$ . Le taux de passage  $\Gamma_{21}$  (resp  $\Gamma_{12}$ ) des niveaux de type 1 (resp 2) vers les niveaux de type 2 (resp 1) s'écrit pour cette onde résonnante :

$$\Gamma_{21} = \Gamma_{12} = \frac{\Gamma}{4} \quad (\text{C2-21})$$

Par conséquent l'atome immobile est soumis à une force de direction constante, mais dont le sens change aléatoirement avec une constante de temps  $4\Gamma^{-1}$ . L'impulsion atomique subit donc une marche au hasard de pas  $|\hbar(\vec{\nabla} \omega_1/2) \cdot 4\Gamma^{-1}|$ , le taux de "commutation" étant  $\Gamma/4$ . Le coefficient de diffusion lié à cette marche au hasard s'écrit alors :

$$\mathcal{D} \simeq \frac{1}{2} \left( \frac{\hbar \vec{\nabla} \omega_1}{2} 4\Gamma^{-1} \right)^2 \frac{\Gamma}{4} \quad (\text{C2-22})$$

ce qui n'est autre que le coefficient (C2-19).



Le raisonnement présenté ici, valable pour une onde résonnante, a été proposé initialement par Gordon et Ashkin [8a] et Cook [29]. Dans l'appendice B de cette partie, nous montrons comment ce raisonnement peut être généralisé à une onde non résonnante, en prenant en compte les temps moyens différents passés sur les niveaux de type 1 et les niveaux de type 2.

Remarquons pour conclure ce paragraphe que l'expression (C2-22) est d'une grande importance pour le piégeage radiatif. Nous avons vu en effet qu'une onde focalisée désaccordée vers le rouge pouvait attirer les atomes dans la région haute intensité et constituer ainsi un piège dont la profondeur est donnée par (C1-48). La diffusion d'impulsion liée aux gradients d'intensité va "chauffer" les atomes piégés et les faire sortir du puits de potentiel d'autant plus vite que le coefficient  $\mathcal{D}$  est plus grand. Or, ce coefficient croît plus vite que la profondeur du puits avec l'intensité laser :  $\mathcal{D}$  croît comme  $\omega_1^2$  alors que la profondeur du puits croît comme  $\omega_1$ . C'est donc un facteur limitatif crucial pour l'élaboration des pièges radiatifs (cf. partie D).

#### C2-4 LA DIFFUSION D'IMPULSION DANS UNE ONDE $\sigma_+$ - $\sigma_-$

Dans ce dernier paragraphe, nous allons nous intéresser à la diffusion de l'impulsion d'un atome présentant une transition de résonance  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$ , et placé dans deux ondes planes se propageant en sens contraire et respectivement polarisées  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  (voir figure 1). Cette situation peut à première vue sembler très proche de l'onde stationnaire étudiée au paragraphe précédent, mais le choix de polarisations orthogonales change complètement la dynamique atomique. Tous les processus de redistribution cohérente de photons qui conduisaient à un coefficient de diffusion important pour un atome dans une onde stationnaire (cf. éq. C2-19) sont désormais interdits par conservation du moment cinétique. Par exemple, après absorption d'un photon  $\sigma_+$ , il est impossible d'avoir émission stimulée d'un photon  $\sigma_-$  [32]. On s'attend donc à trouver

un coefficient de diffusion beaucoup plus proche de celui trouvé pour une onde progressive unique, que de celui trouvé pour une onde stationnaire.

Ceci est confirmé par le calcul complet de ce coefficient, présenté dans l'appendice A, qui conduit au résultat suivant :

$$D = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{2(1+s)} \quad (C2-23)$$

où  $s$  désigne le paramètre de saturation total de l'atome, égal à  $2s_0$  où  $s_0$  est le paramètre de saturation pour une onde progressive unique. Ce résultat peut être retrouvé simplement par un bilan du changement  $\delta \vec{p}$  de l'impulsion atomique pendant une période  $\delta t$ , analogue à celui fait au paragraphe C2-2. Cette variation  $\delta \vec{p}$  s'écrit :

$$\delta \vec{p} = - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar \vec{k}_i + (N_+ - N_-) \hbar \vec{k} \quad (C2-24)$$

où  $N_+$  (resp  $N_-$ ) désigne le nombre de photons absorbés dans l'onde

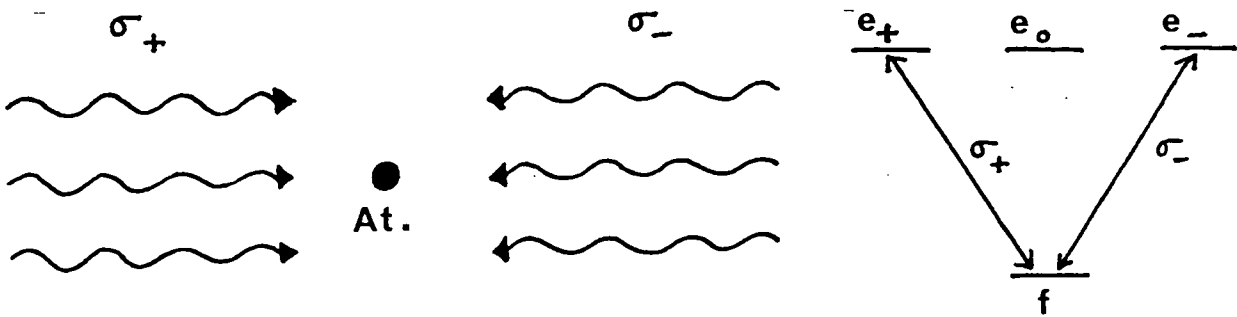


Figure 1 : Atome  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$  en mouvement dans une configuration  $\sigma_+ - \sigma_-$ .

$\sigma_+$  (resp  $\sigma_-$ ) et où  $\hbar\vec{k}_i$  représente l'impulsion du  $i^{\text{ème}}$  photon de fluorescence. La valeur moyenne de  $\delta\vec{p}$  est nulle, puisque  $\bar{N}_+ = \bar{N}_-$  et  $\vec{k}_i = 0$ . La variance  $\Delta(\delta\vec{p}^2)$  s'écrit :

$$\Delta(\delta\vec{p}^2) = \hbar^2 k^2 (\bar{N}_+ + \bar{N}_-) + \hbar^2 k^2 (\bar{N}_+ - \bar{N}_-)^2 \quad (\text{C2-25})$$

Le premier terme représente, comme dans (C2-10), les fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence. Il peut se relier à  $s$  par l'intermédiaire de :

$$\bar{N}_+ + \bar{N}_- = \frac{\Gamma}{2} \frac{s}{1+s} \delta t \quad (\text{C2-26})$$

Pour estimer le second terme, le point crucial est de remarquer qu'il n'y a pas de corrélation entre les polarisations ( $\sigma_+$  ou  $\sigma_-$ ) associées à deux cycles absorption-émission consécutifs : par exemple, après émission d'un photon  $\sigma_+$ , l'atome est dans l'état  $f$ , et il a la même probabilité d'absorber un photon  $\sigma_+$  ou  $\sigma_-$ . Ceci permet de montrer la relation suivante (cf. appendice 1):

$$(\bar{N}_+ - \bar{N}_-)^2 = \bar{N}_+ + \bar{N}_- \quad (\text{C2-27})$$

En reportant (C2-26,27) dans (C2-25), on peut alors retrouver le coefficient de diffusion (C2-23).

Pour conclure, récapitulons maintenant les principaux résultats obtenus dans ce chapitre. Dans une onde plane progressive, il y a deux causes distinctes de diffusion de l'impulsion atomique : les fluctuations du nombre de cycles de fluorescence et les fluctuations de l'impulsion emportée par les photons de fluorescence. Le coefficient de diffusion correspondant s'écrit à basse intensité  $\hbar^2 k^2 \Gamma s_0 / 2$ , et sature à haute intensité à une valeur proche de  $\hbar^2 k^2 \Gamma / 2$  (éq. C2-7). Quand plusieurs ondes planes progressives sont présentes simultanément, comme c'est le cas dans

une onde stationnaire, ces conclusions restent valables à basse intensité (éq. C2-17), où l'on peut ajouter indépendamment les effets des différentes ondes progressives, mais deviennent fausses à haute intensité (éq. C2-19) : les processus de redistribution cohérente de photons entre les ondes progressives provoquent en effet une diffusion accrue de l'impulsion atomique, le coefficient de diffusion croissant alors linéairement avec l'intensité. Il est toutefois possible de bloquer cette redistribution en choisissant des polarisations orthogonales  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$  pour les ondes progressives se propageant en sens opposé. Le coefficient de diffusion est alors de nouveau borné supérieurement par la valeur  $\hbar^2 k^2 \Gamma / 2$  (éq. C2-23), comme pour une onde progressive unique.

### C3 : LE REFROIDISSEMENT RADIATIF

Après le calcul de la force radiative moyenne agissant sur un atome au repos (chapitre C1) et de ses fluctuations (chapitre C2), nous passons maintenant à l'étude de la dépendance en vitesse de cette force, qui est à la base du refroidissement radiatif. Nous commençons (§ C3-1) par calculer la partie de cette force linéaire en vitesse. Cette partie qui est prépondérante pour des atomes lents (effet Doppler  $k v$  inférieur à la largeur naturelle  $\Gamma$ ) a déjà été obtenue formellement dans le chapitre B4 (éq. 5-19). Nous donnons ici son expression explicite pour le cas d'atomes à deux niveaux. Nous passons ensuite à l'étude de plusieurs cas particuliers importants pour lesquels il est possible d'obtenir, analytiquement ou numériquement, la force radiative agissant sur des atomes plus rapides. Dans le paragraphe C3-2, nous étudions d'abord le cas d'une onde plane progressive, puis nous appliquons le résultat obtenu au problème du mouvement d'un atome dans une onde stationnaire de faible intensité, pour laquelle on peut ajouter indépendamment les effets des deux ondes progressives constituant l'onde stationnaire. Un tel schéma expérimental est à la base du refroidissement radiatif tel qu'il a été proposé en 1975 par Hänsch et Schawlow [1] et Wineland et Dehmelt [2]. Le paragraphe C3-3 est ensuite consacré à l'étude du mouvement atomique dans une onde stationnaire de grande intensité. Ce régime, très différent du précédent, a été étudié théoriquement dès 1974 par Kazantsev [42], et nous montrons au paragraphe C3-3 qu'il peut conduire à un refroidissement beaucoup plus efficace des atomes. Nous décrivons dans le paragraphe C3-4 la mise en évidence expérimentale d'un tel refroidissement.

Signalons pour terminer cette présentation que l'idée d'utiliser de la lumière pour refroidir une assemblée d'atomes remonte à l'article de A. Kastler de 1950 sur le pompage optique [43], dans lequel il introduisait en particulier l'effet "lumino-frigorifique". En partant d'un atome à trois niveaux, d'énergies croissantes  $E_1 < E_2 < E_3$ , et en éclairant cet atome sur la transition  $2 \rightarrow 3$ , tous les atomes sont pompés optiquement dans l'état 1. S'il y a un couplage entre les degrés de libertés internes de l'atome et

son mouvement externe, par exemple par l'intermédiaire de collisions provoquant des transitions  $1 \rightarrow 2$ , la température cinétique des atomes est alors diminuée. Cet effet a été mis en évidence en 1981 [44].

### C3-1 LA FORCE S'EXERCANT SUR DES ATOMES LENTS

La théorie générale du mouvement d'atomes lents ( $kv \ll \Gamma$ ) dans une onde lumineuse a été présentée au chapitre B4. Nous avons montré dans ce chapitre que la force agissant sur les atomes s'écrit comme la somme de la force vue par un atome immobile  $\phi_1(\vec{r})$  (éq. C1-18) et d'une force linéaire en vitesse  $-m\gamma_{1j}v_j$ , où le tenseur de friction  $\gamma_{1j}$  s'écrit au point  $\vec{r}$  (éq. 5-19 du chap. B4) :

$$\gamma_{1j}(\vec{r}) = \frac{i}{m\hbar} \int_0^\infty d\tau \tau \langle [F_1(\vec{r}, \tau), F_j(\vec{r})] \rangle \quad (C3-1)$$

Le calcul explicite de  $\gamma_{1j}$  pour un atome à deux niveaux est très voisin du calcul du coefficient de diffusion  $D$  présenté au chapitre précédent : les fonctions de corrélation de l'opérateur force  $\vec{F}$  sont reliées aux fonctions de corrélation du dipole atomique, qui sont elles-mêmes calculées par le théorème de régression quantique. On arrive alors au résultat suivant :

$$\begin{aligned} m\gamma_{1j} = & - (\vec{\nabla}s)_1 (\vec{\nabla}s)_j \frac{\hbar}{4s(1+s)^3} \left\{ \frac{\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} (1-s) - 2 \frac{\delta}{\Gamma} s^2 \right\} \\ & - (\vec{\nabla}s)_1 (\vec{\nabla}\varphi)_j \frac{\hbar}{2(1+s)^2} \left\{ \frac{\delta^2 - \Gamma^2/4}{\delta^2 + \Gamma^2/4} - s \right\} \\ & - (\vec{\nabla}\varphi)_1 (\vec{\nabla}s)_j \frac{\hbar}{2(1+s)^3} \left( \delta^2 - \frac{\Gamma^2}{4} + s \frac{\Gamma^2}{2} \right) / \left( \delta^2 + \frac{\Gamma^2}{4} \right) \\ & - (\vec{\nabla}\varphi)_1 (\vec{\nabla}\varphi)_j \frac{\hbar s}{(1+s)^2} \frac{\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \end{aligned} \quad (C3-2)$$

Ce résultat est donné pour les deux cas particuliers  $\vec{\nabla}\varphi = 0$  ou  $\vec{\nabla}s = 0$  par Gordon et Ashkin [8a], à partir d'un traitement semi-classique du mouvement atomique (cf. chapitre C1). Pour un atome "à trois niveaux" (configuration  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$  dans deux ondes  $\sigma_+$  -  $\sigma_-$  étudiée au chapitre précédent (§ C2-4)), un calcul analogue peut être fait et le résultat est donné dans l'appendice A de cette partie.

### C3-2 LE REFROIDISSEMENT RADIATIF PAR PRESSION DE RADIATION

#### 2-1 La force dans une onde plane progressive

Pour un atome en mouvement dans une onde plane progressive de fréquence  $\omega$  et de vecteur d'onde  $\vec{k}$ , la force de pression de radiation est obtenue très simplement en se plaçant dans le référentiel de l'atome, dans lequel l'onde reste plane, avec une fréquence déplacée par effet Doppler  $\omega_1 = \omega - \vec{k} \cdot \vec{v}$ . La force s'écrit donc (cf. C1-54):

$$\vec{\phi}(\vec{v}) = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{\vec{s}(\vec{v})}{1 + s(\vec{v})} \quad (C3-3)$$

avec :

$$s(\vec{v}) = \frac{\omega^2/2}{(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \Gamma^2/4} \quad (C3-4)$$

Cette expression est valable quelle que soit la vitesse atomique. Pour des vitesses faibles ( $k \cdot v < \Gamma$ ),  $\vec{\phi}$  se développe en :

$$\vec{\phi}(\vec{v}) = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{s_0}{1 + s_0} + \hbar k (\vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{s_0}{(1 + s_0)^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (C3-5)$$

où  $s_0 = s(0)$  est le paramètre de saturation pour un atome au repos. Le premier terme de (C3-5) représente la force de pression de ra-

diation agissant sur l'atome au repos (éq. C1-54) et le second terme peut se mettre sous la forme  $- m\gamma_{1j} v_j$ , avec :

$$m\gamma_{1j} = - \hbar k_1 k_j \frac{s_0}{(1 + s_0)^2} \frac{\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (C3-6)$$

ce qui coïncide bien avec (C3-2), pour  $\varphi = \vec{k} \cdot \vec{r}$  et  $s = c^t e$ .

### 2-2 Le refroidissement radiatif dans une onde stationnaire peu intense

Disposant d'une force dépendant de la vitesse atomique, il est alors possible de chercher à refroidir grâce à cette force un ensemble d'atomes [1,2]. Pour éliminer de (C3-5) le premier terme qui accélère de la même façon toutes les classes de vitesse, ajoutons une deuxième onde laser identique à la précédente mais se propageant en sens contraire (voir figure 1). Supposons de plus que les intensités de ces deux ondes soient suffisamment faibles pour que l'on puisse ajouter indépendamment leur effet, ce qui revient à prendre le paramètre de saturation  $s_0$  de chacune des deux ondes

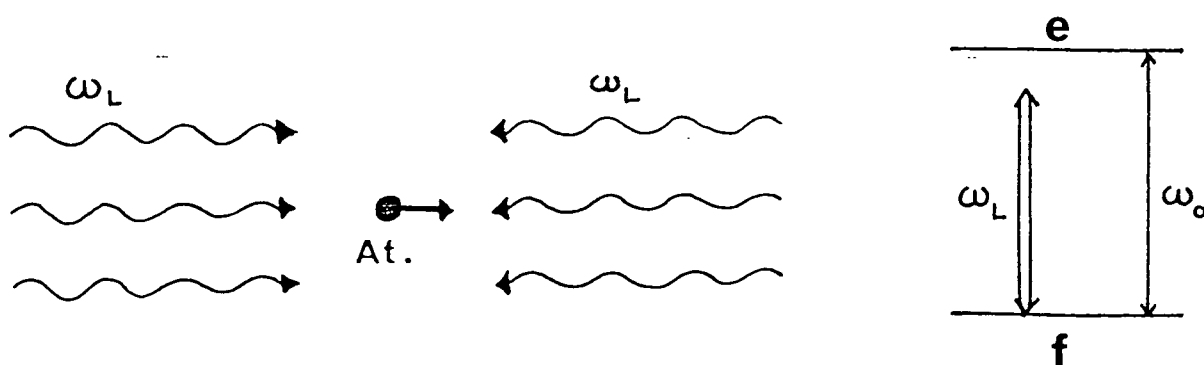


Figure 1 : Superposition de deux ondes planes, peu intenses et désaccordées négativement ( $\omega < \omega_0$ ) exerçant une force opposée à la vitesse atomique.



progressives petit devant 1 comme nous l'avons vu au chapitre précédent. On obtient alors la force :

$$\begin{aligned} \vec{\phi}(\vec{v}) &= \hbar k \frac{\Gamma}{2} (s(\vec{v}) - s(-\vec{v})) \\ &= \hbar k \frac{\Gamma \omega^2}{4} \left( \frac{1}{(\delta - \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} - \frac{1}{(\delta + \vec{k} \cdot \vec{v})^2 + \frac{\Gamma^2}{4}} \right) \end{aligned} \quad (C3-7)$$

Pour des vitesses atomiques faibles, cette force est proportionnelle à la vitesse :

$$\vec{\phi}(\vec{v}) = \hbar k (\vec{k} \cdot \vec{v}) s_0 \frac{2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \quad (C3-8)$$

Cette force est freinante pour des désaccords  $\delta$  négatifs et chauffante pour les désaccords positifs. Ce résultat, qui est à rapprocher de celui obtenu au chapitre B3 (§ 3-4), se comprend aisément : si le désaccord est négatif, à cause de l'effet Doppler, l'atome "voit" l'onde venant à sa rencontre plus résonnante que celle se propageant dans le même sens que lui ; il est donc freiné. Cette conclusion est inversée si le désaccord est positif.

Ce refroidissement peut aisément être rendu tridimensionnel en superposant trois ondes stationnaires identiques ( $\delta < 0$ ,  $s_0 \ll 1$ ) suivant trois axes orthogonaux. La force peut alors se mettre sous la forme :

$$\vec{\phi} = - \gamma m \vec{v} \quad (C3-9)$$

où la valeur maximale de  $\gamma$  est obtenue pour un désaccord égal à une moitié de largeur naturelle :

$$\delta = - \Gamma/2 \quad \Rightarrow \quad \gamma = 2 \frac{\hbar k^2}{m} s_0 \quad (C3-10)$$

Pour un atome à deux niveaux dans une onde stationnaire, cette formule n'est valable que si  $s_0$  est très petit devant 1. Si l'on

augmente  $s_0$ , les processus absorption-émission stimulée deviennent prédominants par rapport aux processus absorption-émission spontanée, et les conclusions précédentes ne sont plus du tout valables, comme nous le verrons dans le paragraphe suivant. On peut néanmoins envisager plusieurs possibilités pour refroidir les atomes par pression de radiation avec des intensités relativement élevées :

(i) La première possibilité consiste à utiliser une transition  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$  et deux ondes planes se propageant en sens contraire et polarisées respectivement  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ . Tout processus absorption dans une onde -émission stimulée dans l'autre onde- est alors interdit par conservation du moment cinétique (cf. chapitre précédent C2, § 4). On peut obtenir une expression analytique de la force quelles que soient la vitesse et l'intensité de l'onde (appendice A, § 3-3). Cette force est toujours freinante pour  $\delta < 0$  et accélérante pour  $\delta > 0$ . Les conditions conduisant à une friction maximale sont les suivantes :

$$\delta \simeq - \Gamma/2 \qquad s_0 \simeq 1/2 \qquad (C3-11)$$

ce qui conduit à :

$$\vec{\phi} \simeq - 0.3 \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}) \qquad (C3-12)$$

(ii) Une autre possibilité est d'alterner dans le temps les différentes ondes progressives, de telle sorte qu'à chaque instant, une seule onde progressive soit présente, ce qui interdit toute redistribution. La durée de chaque phase doit être choisie longue devant  $\Gamma^{-1}$ , pour que le régime stationnaire atomique interne ait le temps de s'établir, et courte devant le temps typique de refroidissement  $m/\hbar k^2$  (cf. éq. C3-12). Ce choix est toujours possible d'après l'inégalité (C1-11). D'après (C3-5), on obtient alors à une dimension :

$$\vec{\phi} = \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}) \frac{s_0}{(1 + s_0)^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} \qquad (C3-13)$$

Cette force  $\vec{\phi}$ , moyennée sur les différentes phases, est optimale pour :

$$\delta = - \Gamma/2 \quad s_0 = 1 \quad (C3-14)$$

ce qui conduit à (comparer avec (C3-12)) :

$$\vec{\phi} = - 0.25 \hbar \vec{k} (\vec{k} \cdot \vec{v}) \quad (C3-15)$$

A trois dimensions, avec ce procédé, le mouvement suivant chaque dimension n'est refroidi que le tiers du temps, soit :

$$\vec{\phi} = - \frac{1}{12} \hbar k^2 \vec{v} \quad (C3-16)$$

Le temps typique de refroidissement :

$$\tau = 12 \frac{m}{\hbar k^2} \quad (C3-17)$$

vaut 40  $\mu$ s pour l'atome de sodium, 450  $\mu$ s pour l'atome de césium (éclairés sur leur raie de résonance).

(iii) Citons enfin la solution qui consiste à n'utiliser qu'une onde plane progressive, et à annuler la force de pression de radiation agissant sur l'atome au repos par une force de nature différente. C'est ce qui est fait pour le refroidissement d'ions piégés [2], la force de confinement dans le piège compensant cette pression de radiation. C'est également ce qui a été proposé pour refroidir les ions d'un anneau de stockage, la pression de radiation étant compensée (pour une classe de vitesses atomiques donnée) par la force créée par un champ électrostatique accélérateur [33].

2-3 La température limite du refroidissement radiatif [8a,14,15,28,29,34]

Le processus de refroidissement décrit plus haut est limité par les fluctuations des forces radiatives qui viennent au contraire échauffer l'atome. Prenons par exemple le cas de trois ondes stationnaires peu intenses. Le coefficient de diffusion total peut s'écrire (cf. C2-17) :

$$D = 3 \hbar^2 k^2 \Gamma s_0 \quad (C3-18)$$

où  $s_0$  désigne le paramètre de saturation de chacune des 6 ondes progressives. L'évolution de la probabilité  $\pi(\vec{p}, t)$  de trouver l'atome avec l'impulsion  $\vec{p}$ , à l'instant  $t$ , varie comme (chapters B3 et B4) :

$$\frac{\partial \pi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial \vec{p}} (\gamma \vec{p} \pi) + \frac{D}{3} \frac{\partial^2 \pi}{\partial \vec{p}^2} \quad (C3-19)$$

ce qui admet comme solution stationnaire :

$$\pi(\vec{p}, t) \sim \exp \left( - \frac{\vec{p}^2}{2m k_B T_{eff}} \right) \quad (C3-20)$$

La distribution stationnaire est donc une distribution de Maxwell, de température effective :

$$k_B T_{eff} = \frac{D}{3 m \gamma} \quad (C3-21)$$

soit, en utilisant (C3-10) et (C3-18) :

$$k_B T_{eff} = \frac{\hbar \Gamma}{2} \quad (C3-22)$$

Cette température ne dépend donc de l'atome que par l'intermédiaire de la largeur naturelle de l'état excité, et est indépendante de l'intensité des ondes. Elle est extrêmement basse : 240  $\mu$ K pour

l'atome de sodium, 120  $\mu$ K pour l'atome de césium, éclairés sur leur raie de résonance.

Ce refroidissement radiatif d'atomes libres a été mis en évidence par deux groupes. Une équipe de l'Institut de Spectroscopie de Moscou a d'abord réussi en 1984 la collimation d'un jet atomique de sodium, en refroidissant les degrés de liberté transverses de ce jet atomique [35]. Les températures transverses observées étaient de 3 mK, soit un ordre de grandeur au dessus de la température limite (C3-22). Une équipe des Laboratoires Bell a ensuite mis en évidence en 1985 un refroidissement tridimensionnel, en bloquant des atomes de sodium dans une "mélasse optique" formée par trois ondes stationnaires orthogonales [36]. La durée du confinement était de l'ordre du dixième de seconde pour un volume de confinement de 0.2 cm<sup>3</sup>, ce qui conduit à une estimation de la température des atomes ainsi refroidis très proche de la limite (C3-22). Des techniques de refroidissement voisines ont également été mises en oeuvre avec succès sur des ions piégés [37,38].

### C3-3 LE REFROIDISSEMENT DANS UNE ONDE STATIONNAIRE INTENSE

#### 3-1 Le calcul de la force dans une onde stationnaire

Comme nous l'avons déjà remarqué lors du calcul du coefficient de diffusion au chapitre C2, il n'est pas possible, à haute intensité, d'ajouter indépendamment les pressions de radiation des deux ondes progressives constituant l'onde stationnaire. Les processus absorption-émission stimulée qui redistribuent d'une manière cohérente les photons entre ces deux ondes viennent en effet bouleverser complètement la dynamique atomique, comme on peut le constater sur le coefficient de friction calculé au paragraphe 1 (formule (C3-2)). Dans une onde stationnaire, ce coefficient s'écrit, en posant  $s = 4 s_0 \cos^2 kz$  :

$$m\gamma_{ij} = - \hbar k_i k_j \frac{s}{(1+s)^3} \left\{ \frac{\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4} (1-s) - \frac{2\delta}{\Gamma} s^2 \right\} \text{tg}^2 kz \quad (\text{C3-23})$$

ce qui donne après moyennage sur une longueur d'onde :

$$m \bar{\gamma}_{ij} = - \hbar k_i k_j \frac{1}{(1 + 4 s_0)^{3/2}} \left\{ \frac{2\delta\Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2/4} s_0 (1+2s_0) - 2 \frac{\delta}{\Gamma} (1 + 6 s_0 + 6 s_0^2 - (1 + 4 s_0)^{3/2}) \right\} \quad (C3-24a)$$

Pour une onde peu intense ( $s_0 \ll 1$ ), on vérifie immédiatement qu'on retrouve l'expression (C3-8). Par contre, dans une onde intense, la variation de  $\bar{\gamma}_{ij}$  avec les deux paramètres  $\delta$  et  $s$  est très différente de celle de (C3-8). Par exemple, on remarque sur (C3-24a) que pour  $s_0 \gg 1$  et  $\delta \gg \Gamma$  l'onde est freinante pour  $\delta$  positif, et chauffante pour  $\delta$  négatif, au contraire de ce qui a été trouvé à basse intensité. De plus, le coefficient  $\bar{\gamma}_{ij}$  trouvé ici ne sature pas si l'on augmente l'intensité de l'onde laser. Pour  $\delta \gg \Gamma$ , et une fréquence de Rabi totale au niveau des ventres  $\tilde{\omega}_1$  grande devant le désaccord  $\delta$ , on trouve :

$$m \bar{\gamma}_{ij} \simeq 0.5 \hbar k_i k_j \frac{|\tilde{\omega}_1|}{\Gamma} \quad (C3-24b)$$

ce qui excède par un facteur  $\tilde{\omega}_1/\Gamma$  (donc non borné) la friction maximale obtenue par le refroidissement classique (cf. éq. C3-12).

Pour avoir une meilleure compréhension du mouvement atomique dans ce régime haute intensité, nous commencerons (§ 3-2) par calculer de manière exacte la force agissant, dans une onde stationnaire, sur un atome de vitesse quelconque. Ce calcul sera fait à partir des équations de Bloch optiques que nous résoudrons numériquement, pour une vitesse atomique donnée, par une méthode de développement en fractions continues. Nous présenterons ensuite l'approche "atome habillé" à ce problème, approche valable à haute intensité uniquement, et qui nous permettra de donner dans cette limite à la fois une expression analytique et une image physique pour les résultats obtenus numériquement (§ 3-3). Ce modèle de l'atome habillé est également à la base d'un troisième mode de cal-

cul utilisant un traitement Monte-Carlo pour décrire le mouvement de l'atome et dont les principaux résultats seront présentés au paragraphe 3-4.

### 3-2 Le traitement par fractions continues et ses résultats [39a,b]

Ce traitement est semi-classique et du type de ceux présentés au chapitre B1. On se donne pour l'atome un mouvement externe uniforme à la vitesse  $v$  le long de l'axe  $Oz$ , et on cherche à déterminer la valeur du dipole atomique pour en déduire ensuite la force agissant sur l'atome.

L'évolution du dipole atomique est donnée par les équations de Bloch optiques (C1-41,42) qu'on réécrit ici en fonction des trois variables réelles :

$$\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} (\rho_{ef} e^{i\omega t} + \rho_{fe} e^{-i\omega t}) \\ S_2 = \frac{i}{2} (\rho_{ef} e^{i\omega t} - \rho_{fe} e^{-i\omega t}) \\ S_3 = \frac{1}{2} (\rho_{ee} - \rho_{ff}) \end{cases} \quad (C3-25)$$

ce qui donne :

$$\begin{cases} \dot{S}_1 = -\frac{\Gamma}{2} S_1 + \delta S_2 \\ \dot{S}_2 = -\delta S_1 - \frac{\Gamma}{2} S_2 - \omega_1(z) S_3 \\ \dot{S}_3 = +\omega_1(z) S_2 - \Gamma S_3 - \frac{\Gamma}{2} \end{cases} \quad (C3-26)$$

où la fréquence de Rabi  $\omega_1(z)$  s'écrit :

$$\omega_1(z) = \tilde{\omega}_1 \cos kz = \tilde{\omega}_1 \cos (kvt) \quad (C3-27)$$

Après un régime transitoire durant quelques  $\Gamma^{-1}$ , le dipole atomique atteint un régime forcé périodique, de période  $T = \lambda/v$ . On peut

donc chercher cette solution forcée sous la forme d'un développement de Fourier :

$$\begin{pmatrix} S_1 \\ S_2 \\ S_3 \end{pmatrix} (t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \begin{pmatrix} S_1^{(n)} \\ S_2^{(n)} \\ S_3^{(n)} \end{pmatrix} e^{i n k v t} \quad (C3-28)$$

avec la relation suivante entre les différents coefficients de Fourier :

$$\begin{cases} (in kv + \frac{\Gamma}{2}) S_1^{(n)} = \delta S_2^{(n)} \\ (in kv + \frac{\Gamma}{2}) S_2^{(n)} = -\delta S_1^{(n)} - \frac{\omega_1}{2} (S_3^{(n+1)} + S_3^{(n-1)}) \\ (in kv + \Gamma) S_3^{(n)} = \frac{\omega_1}{2} (S_2^{(n+1)} + S_2^{(n-1)}) - \frac{\Gamma}{2} \delta_{n,0} \end{cases} \quad (C3-29)$$

Pour résoudre un tel système, on peut le mettre sous une forme permettant un développement de la solution en fractions continues. Nous donnons ici simplement la relation de récurrence finale à la base de ce développement, sans expliciter les calculs intermédiaires qui ne posent aucune difficulté de principe. En posant:

$$\begin{cases} \beta_{2n} = \frac{S_2^{(2n+1)}}{S_3^{(2n)}} \\ \beta_{2n+1} = \frac{S_3^{(2n+2)}}{S_2^{(2n+1)}} \end{cases} \quad (C3-30)$$

on peut montrer la relation suivante :

$$\beta_{n-1} = \frac{1}{-\beta_n + 2\Gamma C(n)/\tilde{\omega}_1} \quad (C3-31)$$

avec :



$$\begin{cases} C(2n) = 1 + 2in kv/\Gamma \\ C(2n+1) = - \left( \frac{1}{2} + i(2n+1) \cdot \frac{kv}{\Gamma} + \frac{(\delta/\Gamma)^2}{1/2 + i(2n+1) kv/\Gamma} \right) \end{cases} \quad (C3-32)$$

A partir de cette relation de récurrence, on peut calculer numériquement le dipole atomique avec une précision arbitrairement élevée, et en déduire la force agissant sur l'atome. En fait, nous nous intéressons uniquement ici à la valeur moyenne de cette force sur une longueur d'onde  $\bar{\phi}_z(v)$  :

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_z(v) &= \overline{\left\langle - \frac{d}{dz} V_{A-L} \right\rangle} \\ &= \hbar k \tilde{\omega}_1 \overline{\sin kz \langle S_1 \rangle} \\ &= - \hbar k \tilde{\omega}_1 \text{Im} (S_1^{(1)}) \\ &= - \hbar k \tilde{\omega}_1 \text{Im} \left( \frac{\delta}{ikv + \Gamma/2} S_2^{(1)} \right) \\ &= \hbar k \tilde{\omega}_1 \text{Im} \left( \frac{\delta}{ikv + \Gamma/2} \frac{\beta_0}{1 - \text{Re}(\beta_0) \tilde{\omega}_1/\Gamma} \right) \end{aligned} \quad (C3-33)$$

Il suffit donc de déterminer  $\beta_0$  d'après la relation de récurrence (C3-31) pour en déduire la force  $\bar{\phi}_z$ . Remarquons que le signe du désaccord  $\delta$  n'intervient pas dans les relations de récurrence (C3-31,32) ; ce signe n'apparaît explicitement que dans l'expression (C3-33), ce qui indique que la force  $\phi_z(v)$  est une fonction impaire de  $\delta$ .

Donnons maintenant les résultats essentiels de ce calcul. A basse intensité ( $\tilde{\omega}_1 \ll \Gamma$ ), on vérifie bien que la force est à peu près égale à la somme des pressions de radiation des deux ondes progressives (voir figure 2-a pour  $\tilde{\omega}_1 = \Gamma/3$ ,  $\delta = +\Gamma/2$ ). Comme prévu la force est freinante pour  $\delta$  négatif et chauffante pour  $\delta$

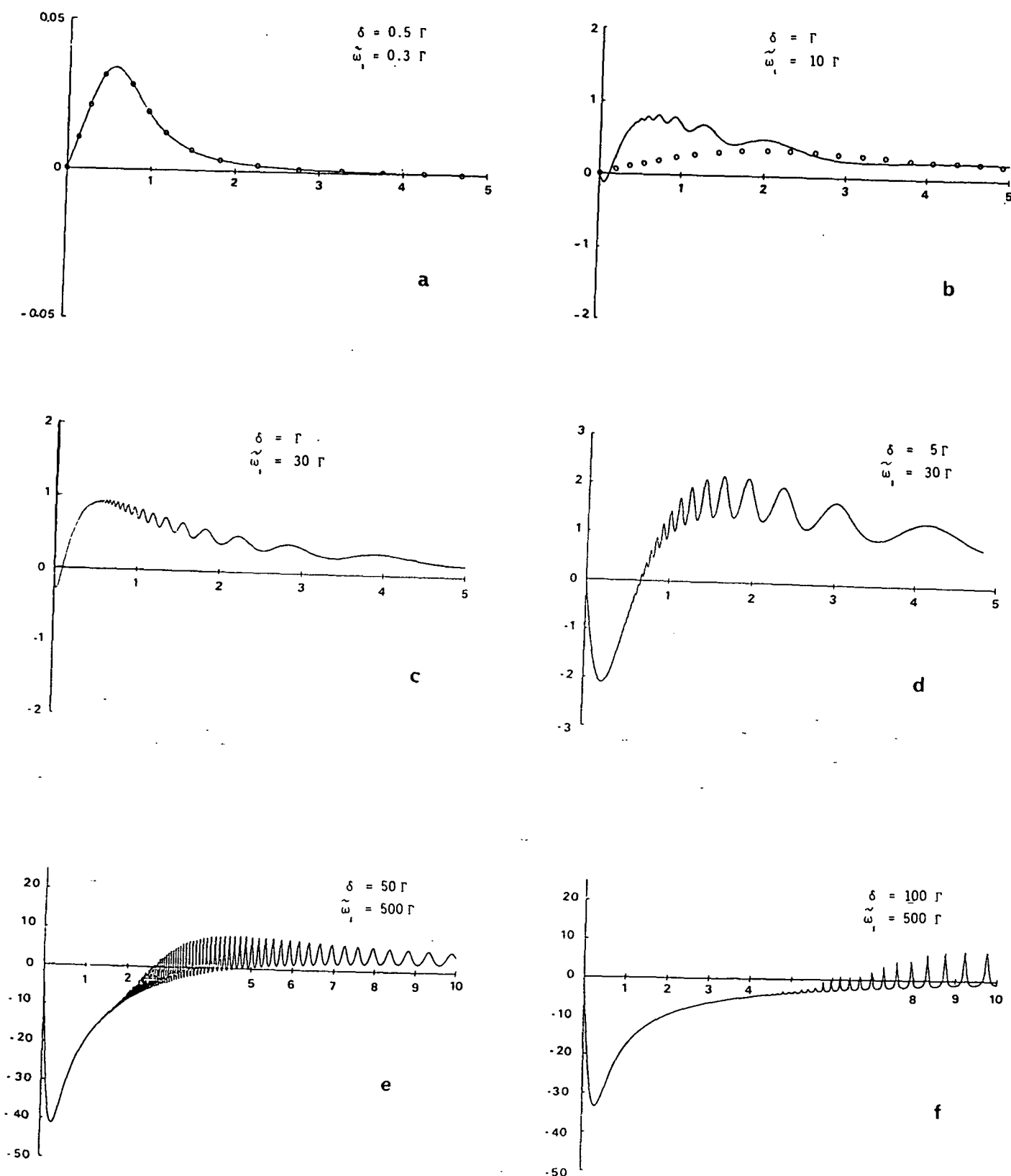


Figure 2 : Variation de la force moyenne (unité  $\hbar k \Gamma / 2$  : pression de radiation résonnante) s'exerçant sur un atome dans une onde stationnaire en fonction de la vitesse de cet atome. (unité  $\Gamma / k$  : effet Doppler égal à la largeur naturelle). Ces courbes (en trait plein) sont réalisées pour des fréquences de Rabi et des désaccords croissants. Les courbes en pointillé indiquent la valeur de la somme des pressions de radiation des deux ondes progressives constituant l'onde stationnaire.

positif. Quand l'intensité augmente, cette conclusion s'inverse, du moins pour les basses vitesses, comme on peut le voir sur les courbes 2-b, ..., 2-e, tracées pour des fréquences de Rabi et des désaccords croissants. Pour des fréquences de Rabi et des désaccords grands devant la largeur naturelle, ces courbes ont l'allure suivante :

(i) Pour des vitesses très faibles ( $kv < \Gamma/3$ ), la force est linéaire en vitesse et le coefficient de proportionnalité, donné en (C3-24), croît comme  $\tilde{\omega}_1$ . Ceci indique qu'une onde stationnaire intense et désaccordée positivement peut être un moyen très efficace de refroidissement par comparaison au refroidissement par pression de radiation dont l'efficacité est limitée par (C3-12).

(ii) La force est maximale pour des vitesses telles que  $kv \approx \Gamma/3$  et le désaccord optimal, pour une fréquence de Rabi  $\tilde{\omega}_1$  donnée, est de l'ordre de  $\delta \approx \tilde{\omega}_1/10$ . Pour cette vitesse et ce désaccord, la force est de l'ordre de  $\hbar k \tilde{\omega}_1/20$ . Il est donc possible de réaliser des forces considérablement plus fortes que chacune des pressions de radiation de chacune des ondes progressives constituant l'onde stationnaire, ces pressions de radiation saturant à  $\hbar k \Gamma/2$  (cf. C1-54).

(iii) La force décroît ensuite quand la vitesse augmente avec une loi en  $1/v$ . Cette loi est valable jusqu'à une certaine vitesse critique  $v_c$ , dont la valeur croît avec  $\omega_1$ .

(iv) A partir de  $v = v_c$ , des "résonances" apparaissent (résonances "Dopplerons [40]), et la force change de signe. Elle devient freinante pour des désaccords négatifs et chauffante sinon, comme c'était le cas à basse intensité.

Dans le cadre de cette théorie fondée sur un développement en fractions continues, il est difficile de donner une interprétation physique pour tous ces résultats. C'est pourquoi nous avons développé l'approche "atome habillé" qui permet de retrouver simplement les différentes caractéristiques de cette force. Cette

approche est exposée en détail dans l'appendice 2 (§ 5), et nous allons en rappeler ici les grandes lignes.

### 3-3 L'atome habillé en mouvement dans une onde stationnaire

Nous avons déjà vu au chapitre C1 comment rendre compte de la force dipolaire, liée au gradient d'intensité de l'onde laser, à partir de la courbure des niveaux d'énergie "habillés" dans un tel gradient. Dans le cas particulier d'une onde stationnaire, les énergies des niveaux habillés oscillent périodiquement dans l'espace tout comme la fréquence de Rabi  $\omega_1(z)$  (cf. C3-27). Sur la figure 3, nous avons représenté ces états habillés pour un désaccord positif. Aux noeuds de l'onde,  $\omega_1(z) = 0$ , les niveaux habillés  $|1,n\rangle$  et  $|2,n\rangle$  coïncident respectivement avec les états non perturbés  $|f,n+1\rangle$  et  $|e,n\rangle$ . En dehors des noeuds, les états habillés sont des combinaisons linéaires de  $|f,n+1\rangle$  et  $|e,n\rangle$  et leur écart  $\hbar(\delta^2 + \omega_1^2(z))^{1/2}$  est maximal aux ventres de l'onde stationnaire.

Prenons maintenant en compte l'émission spontanée. Comme nous l'avons vu au chapitre C1 (§ 3-2), un atome dans l'état  $|1,n\rangle$  ou  $|2,n\rangle$  (contaminés par  $|e,n\rangle$ ), peut émettre un photon spontané et tomber sur l'état  $|1,n-1\rangle$  ou  $|2,n-1\rangle$  (contaminés par  $|f,n\rangle$ ). Le point important est que les probabilités pour de tels processus varient dans l'espace : l'état  $|1,n\rangle$  est stable aux noeuds, où il est égal à  $|f,n+1\rangle$ , et se désexcite principalement autour des ventres, là où la contamination par  $|e,n\rangle$  est maximale. Au contraire l'état  $|2,n\rangle$  se désexcite principalement autour des noeuds, où il se confond avec  $|e,n\rangle$ .

Suivons alors la trajectoire d'un atome en mouvement, cet atome partant par exemple à un noeud de l'onde stationnaire, dans le niveau  $|1,n+1\rangle$  (voir figure 3). Partant de cette "vallée", l'atome monte sur la "colline", au sommet de laquelle il peut se désexciter. S'il tombe sur le niveau  $|1,n\rangle$ , ceci ne change rien d'un point de vue mécanique. S'il tombe sur le niveau  $|2,n\rangle$  au contraire, il se retrouve de nouveau dans une vallée. Il doit une

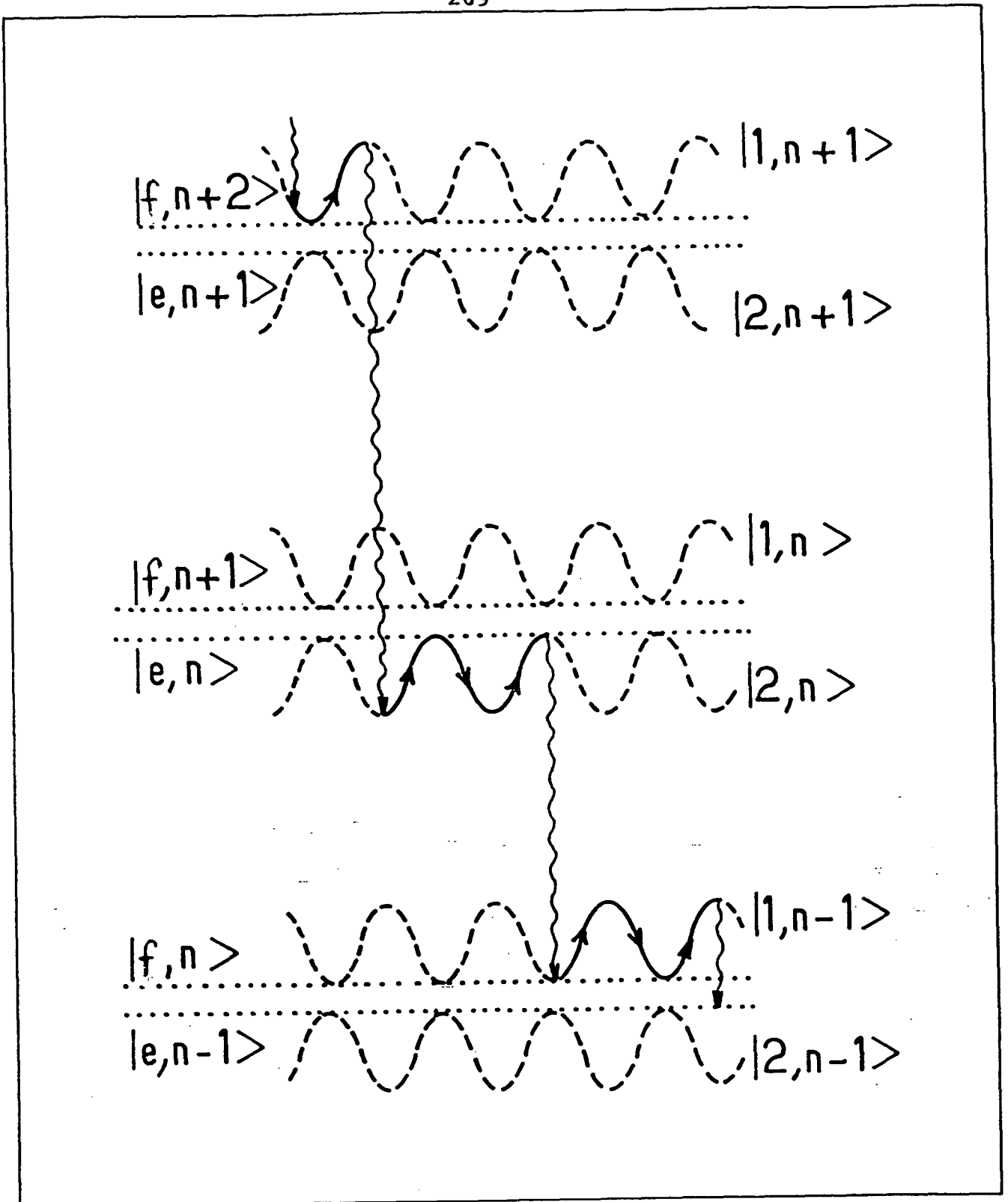


Figure 3 : Ralentissement dans une onde stationnaire intense. Les lignes tiretées représentent les niveaux d'énergie habillés qui coïncident avec les niveaux non perturbés (lignes pointillées) aux noeuds de l'onde stationnaire. La ligne pleine représente la "trajectoire" d'un atome en mouvement. A cause de la variation spatiale des fonctions d'onde habillées, l'émission spontanée se produit de préférence à un ventre (noeud) pour un niveau de type 1 (2). Entre deux émissions spontanées, l'atome "voit" en moyenne plus de parties montantes que de parties descendantes : il est donc ralenti.

nouvelle fois gravir une colline, la probabilité maximale de désexcitation étant encore au sommet de cette colline, etc. Il est clair que la vitesse atomique décroît dans un tel processus, qui peut être considéré comme la réalisation microscopique du mythe de Sisyphe : à chaque fois que l'atome a gravi une colline, il est remplacé au bas d'une autre colline par l'émission spontanée. Il apparaît également nettement dans ce point de vue de l'atome habillé que l'efficacité du refroidissement ne sature pas avec l'intensité laser : l'énergie perdue à chaque émission spontanée est de l'ordre de  $\hbar\tilde{\omega}_1$  et croît donc indéfiniment si l'on augmente la puissance laser.

Dans l'appendice 2, nous montrons comment utiliser une telle image pour calculer analytiquement la force agissant sur l'atome. Le résultat est trouvé en parfait accord avec les résultats obtenus par la méthode des fractions continues, du moins tant que les vitesses sont inférieures à la vitesse critique  $v_c$ . Au dessus de cette vitesse, il faut modifier l'image donnée plus haut et prendre en compte les transitions Landau-Zener susceptibles de se produire à chaque passage aux noeuds de l'onde, d'un niveau  $|i,n\rangle$  vers le niveau voisin  $|j,n\rangle$ . Pour certaines vitesses, les amplitudes de probabilité de transition Landau-Zener à deux noeuds consécutifs interfèrent constructivement et la force radiative présente une résonance. Dans la réf. [41], les auteurs montrent comment il est possible de calculer relativement précisément, par une méthode voisine de la méthode de l'atome habillé, les résonances prévues par la méthode des fractions continues.

### 3-4 La limite du refroidissement dans une onde stationnaire intense ; traitement Monte-Carlo du mouvement atomique

Nous avons déjà souligné deux caractéristiques importantes de la force agissant sur un atome dans une onde stationnaire intense. D'une part nous avons vu que la force maximale, obtenue pour une vitesse atomique  $kv = \Gamma/3$ , pouvait être considérable ( $\approx \hbar k\tilde{\omega}_1/20$ ) et dépasser largement les forces de pression de radia-

tion créées par chacune des deux ondes progressives ( $\approx \hbar k \Gamma / 2$ ). D'autre part, pour des atomes lents ( $k v \ll \Gamma$ ), nous avons vu que le coefficient de proportionnalité  $m \gamma_{1j}$  entre la force et la vitesse atomique (éq. C3-24ab) pouvait lui aussi être très grand par rapport au coefficient de friction trouvé pour le refroidissement radiatif classique (éq. C3-12).

La troisième caractéristique que nous souhaitons préciser maintenant concerne la température ultime que l'on peut obtenir dans une onde stationnaire intense. Intuitivement, on peut s'attendre à ce que le ralentissement décrit plus haut cesse lorsque l'énergie cinétique des atomes  $m v^2 / 2$  devient de l'ordre de la profondeur des vallées  $\hbar \omega_1 / 2$  (pour  $\delta \ll \omega_1$ ). Dans la mesure où  $\omega_1$  est grand devant  $\Gamma$ , on constate alors que la température limite  $T$  des atomes vérifie :

$$k_B T \approx \hbar \omega_1 \gg \hbar \Gamma \quad (\text{C3-34})$$

Cette température est donc nettement supérieure à la température limite du refroidissement radiatif classique  $k_B T \approx \hbar \Gamma$ .

Pour préciser ce raisonnement qualitatif, nous avons développé, en collaboration avec A. Heidmann, une simulation numérique du mouvement de l'atome dans l'onde stationnaire. Cette simulation consiste à faire une intégration pas à pas du mouvement représenté sur la figure 3. Chaque pas d'intégration comprend deux étapes : on calcule d'abord la nouvelle position et la nouvelle vitesse atomique en fonction de la position et de la vitesse au pas précédent et de la force vue sur le niveau habillé occupé à cet instant. Ensuite, on tire au sort un changement éventuel de niveau habillé, avec une probabilité calculée par la théorie de l'atome habillé (formule (2-12) de l'appendice 2 de cette partie). On remarquera que dans cette simulation, la vitesse atomique n'est pas maintenue constante, mais au contraire varie quand l'atome monte ou descend les "collines" représentées sur la figure 3. Ceci est à opposer à la méthode "fractions continues" dans laquelle on imposait une vitesse constante à l'atome pour calculer la force moyenne vue par cet atome. En fait, ces deux méthodes donnent des résultats voisins

tant que l'énergie cinétique atomique est grande devant la hauteur des "collines". Par contre, quand ces deux paramètres deviennent du même ordre, la simulation numérique est a priori beaucoup plus proche de la réalité que la méthode "fractions continues".

Les résultats de cette simulation numérique pour l'atome de césium, éclairé sur sa raie de résonance, ( $\lambda = 852 \text{ nm}$ ,  $\Gamma^{-1} = 30 \text{ ns}$ ) sont représentés sur la figure 4, correspondant à  $\tilde{\omega}_1 = 6\delta = 80 \Gamma$ . Les vitesses initiales sont choisies aléatoirement suivant une loi gaussienne, centrée en 0 et de largeur totale à mi-hauteur  $\Delta v = 5 \text{ m/s}$ . On constate qu'en un temps de l'ordre de  $10 \mu\text{s}$ , ces vitesses se concentrent en un pic de largeur totale à mi-hauteur  $\Delta v = 1.2 \text{ m/s}$ , ce qui correspond précisément à une énergie cinétique moyenne de l'ordre de la hauteur des collines. La constante de temps typique de cette décroissance de la vitesse, mesurée sur la figure 4a, est de l'ordre de  $2 \mu\text{s}$ , ce qui est en parfait accord avec la constante de temps calculée d'après (C3-24a) qui vaut  $1.8 \mu\text{s}$ . Les atomes sont alors plus ou moins piégés dans les vallées dessinées sur la figure 3 et le ralentissement tel qu'il a été décrit au paragraphe précédent ne peut plus continuer. Toutefois, avec une constante de temps beaucoup plus longue - de l'ordre d'une centaine de microsecondes - on observe une nouvelle décroissance de la vitesse quadratique moyenne (figure 4b). Cette décroissance s'accompagne d'une accumulation des atomes aux noeuds de l'onde stationnaire, comme on peut le voir sur les profils de position de la figure 4c. La courbe finale, au bout de  $500 \mu\text{s}$  d'interaction donne  $\Delta x \sim \lambda/40$  et  $\Delta v \sim 0.2 \text{ m/s}^*$ .

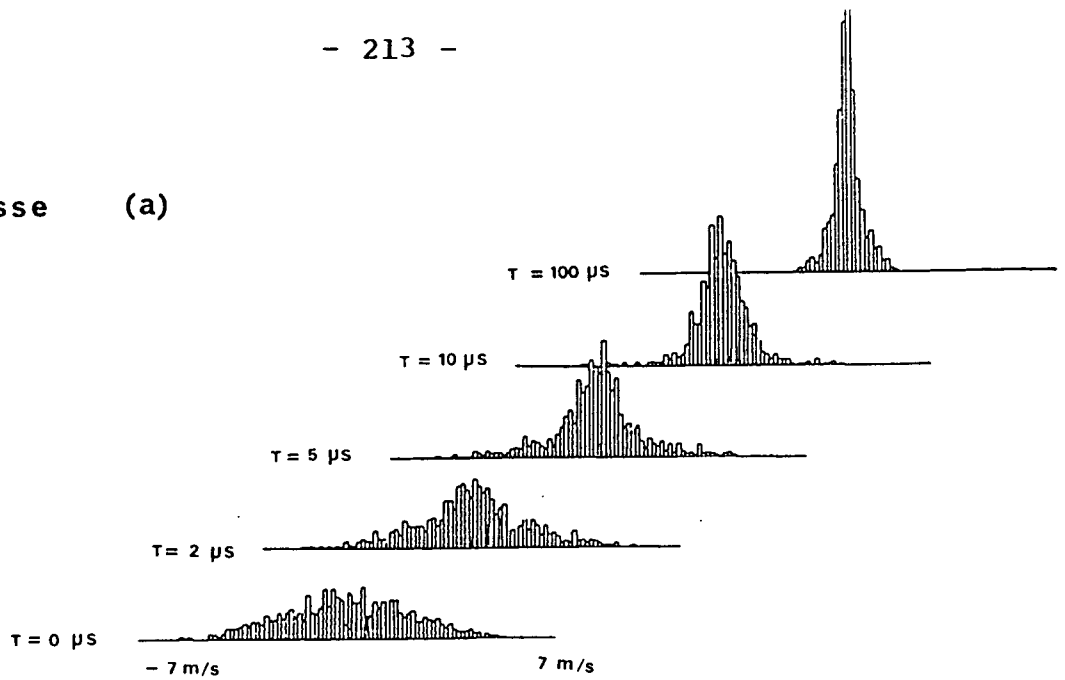
Cette accumulation aux noeuds de l'onde stationnaire n'est pas un piégeage au sens strict du terme, mais plutôt un équilibre dynamique : les atomes oscillent autour d'un noeud sur un niveau de type 1, puis "sautent" sur un niveau de type 2 pour retomber ensuite sur un niveau de type 1 au voisinage d'un autre noeud.

---

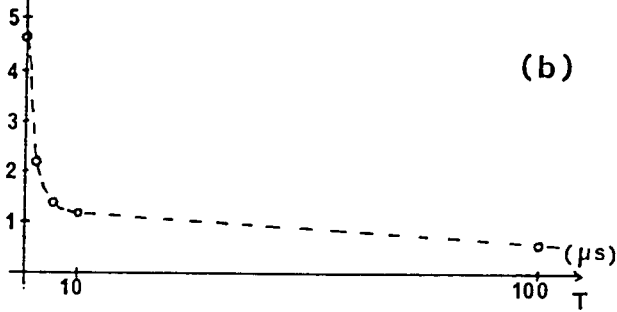
\* Le produit  $\Delta x \cdot \Delta p$  vaut dans ces conditions  $10 \hbar$ . On est donc à la limite de validité du traitement classique de la position de l'atome.



Profils de vitesse (a)



$\Delta v$  (m/s)



(b)

Profils de position (c)

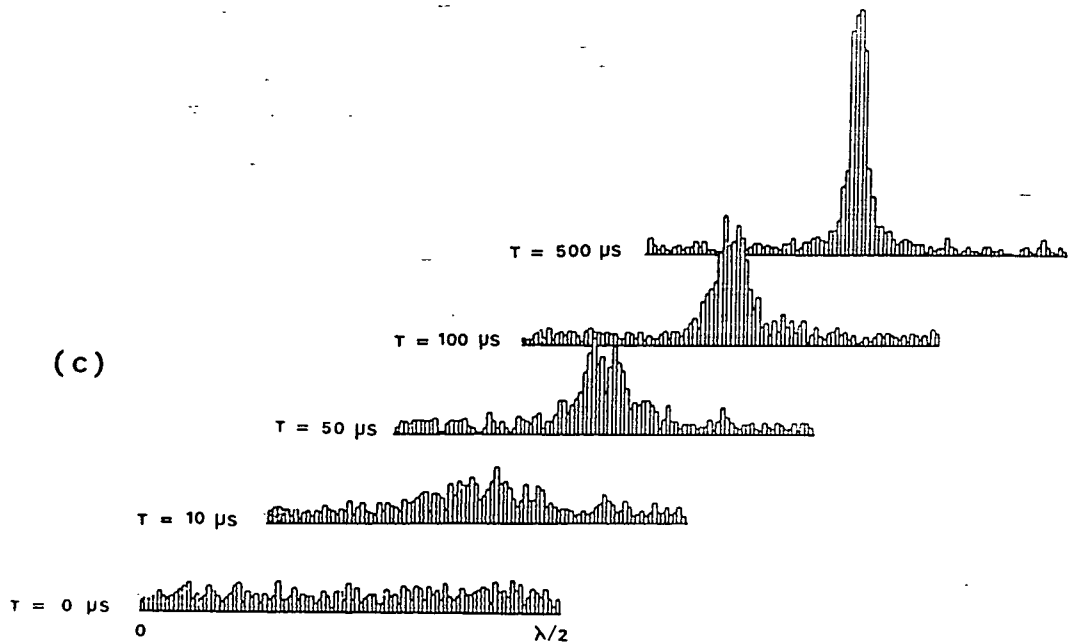


Figure 4 : Résultat de la simulation numérique du mouvement atomique (césium) dans une onde stationnaire intense ( $\tilde{\omega}_1 = 6 \delta = 80 \Gamma$ )  
 4a - Evolution des profils de vitesse d'une assemblée d'atomes  
 4b - Evolution de la vitesse quadratique moyenne de cette assemblée d'atomes  
 4c - Evolution des profils de position de cette assemblée d'atomes (modulo une longueur d'onde).

Une telle accumulation d'atomes aux noeuds d'une onde stationnaire désaccordée au dessus de résonance n'a encore jamais été observée. Pour la mettre en évidence, plusieurs techniques peuvent être envisagées. Nous en proposons ici deux : on peut d'abord observer simplement la fluorescence atomique. Si les atomes s'accumulent comme prévu aux noeuds de l'onde stationnaire, cette fluorescence doit décroître d'une quantité notable. On peut également essayer de sonder cette répartition périodique d'atomes par diffraction de Bragg d'une lumière de longueur d'onde plus courte.

#### **C3-4 MISE EN EVIDENCE EXPERIMENTALE DU REFROIDISSEMENT DANS UNE ONDE STATIONNAIRE INTENSE**

La première mise en évidence expérimentale des grandes perspectives ouvertes par le refroidissement d'atomes dans une onde stationnaire intense a été faite au laboratoire de l'ENS, en collaboration avec Alain Aspect, Claude Cohen-Tannoudji, Antoine Heidmann, et Christophe Salomon. Nous avons principalement tiré profit de la grande valeur de la force radiative dans une onde stationnaire intense pour les faibles valeurs de la vitesse atomique ( $kv \ll \Gamma$ ) en utilisant cette onde stationnaire pour collimater un jet atomique. Nous présentons ci-dessous la publication rendant compte de ces résultats.

## Cooling Atoms with Stimulated Emission

A. Aspect, J. Dalibard, A. Heidmann, C. Salomon, and C. Cohen-Tannoudji  
*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École Normale Supérieure et Collège de France,  
 F-75231 Paris Cedex 05, France*  
 (Received 30 July 1986)

We have observed an efficient collimation of a cesium atomic beam crossing at right angles an intense laser standing wave. This new cooling scheme is mainly based on a stimulated redistribution of photons between the two counterpropagating waves by the moving atoms. By contrast with usual radiation pressure cooling, this "stimulated molasses" works for blue detuning and does not saturate at high intensity.

PACS numbers: 32.80.Pj, 42.50.Vk

Control of atomic motion with quasis resonant laser light is a field of research which is rapidly expanding. Several experiments have demonstrated the possibility of using radiative forces for decelerating and stopping an atomic beam,<sup>1</sup> or for achieving a three-dimensional viscous confinement and cooling of atoms.<sup>2</sup> More recently, atoms have been trapped in the focal zone of a laser beam.<sup>3</sup>

This Letter gives experimental evidence for a new type of laser cooling, which is mainly based on stimulated emission and which can be much more efficient than the usual one involving only spontaneous emission. Let us first recall briefly the principle of usual radiative cooling<sup>4,5</sup> as it works in "radiation-pressure molasses." Consider an atom moving in a laser standing wave, with a light intensity weak enough (saturation parameter  $s \leq 1$ ) so that the radiation pressures due to the two counterpropagating waves can be added independently. If the laser frequency  $\omega_L$  is tuned below the atomic one  $\omega_0$  (detuning  $\delta = \omega_L - \omega_0$  negative), because of the Doppler effect, a moving atom will get closer to resonance with the opposing wave, and farther from resonance with the copropagating wave. The radiation pressure of the opposing wave will predominate, and the atom will be slowed down. When the laser intensity is increased ( $s \gg 1$ ), this simple picture breaks down. Stimulated emission processes, responsible for a coherent redistribution of photons between the two counterpropagating waves, become predominant. They produce a heating of the atoms for a negative detuning and a cooling for a positive one. This Letter reports the first experimental observation of such a change of sign. We also emphasize the potentialities of these velocity-dependent stimulated forces which, in contrast to radiation pressure, do not saturate at high laser intensity.

Atomic motion in a strong standing wave has been theoretically studied by various authors.<sup>6-10</sup> Recently, a physical picture, based on the dressed-atom approach, has been proposed for the understanding of this motion.<sup>10</sup> It can be summarized as follows. In a strong standing wave, the energies of the dressed lev-

els, i.e., the eigenstates of the atom plus laser-field system, oscillate periodically in space, as the Rabi frequency  $\omega_1(z)$  characterizing the atom-laser coupling in  $z$ . Figure 1 represents these dressed states for a positive detuning ( $\omega_L > \omega_0$ ). At a node [ $\omega_1(z) = 0$ ], the dressed states  $|1, n\rangle$  and  $|2, n\rangle$  respectively coincide with the unperturbed states  $|g, n+1\rangle$  and  $|e, n\rangle$  (an atom in the ground state  $g$  or in the excited state  $e$ , in the presence of  $n+1$  or  $n$  laser photons). Out of a node [ $\omega_1(z) \neq 0$ ] the dressed states are linear combinations of  $|g, n+1\rangle$  and  $|e, n\rangle$  and their splitting  $\hbar[\delta^2 + \omega_1^2(z)]^{1/2}$  is maximum at the antinodes of the standing wave. Consider now the effect of spontane-

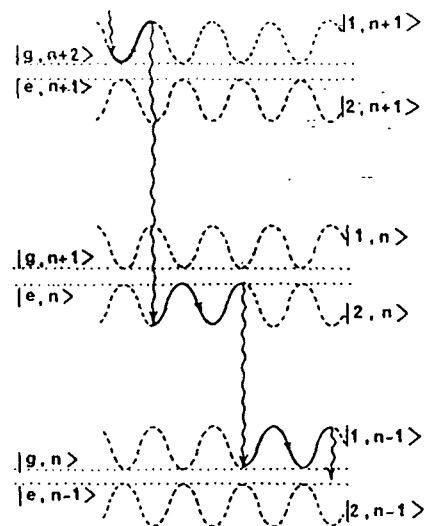


FIG. 1. Laser cooling in a strong standing wave. The dashed lines represent the spatial variations of the dressed-atom energy levels which coincide with the unperturbed levels (dotted lines) at the nodes. The solid lines represent the "trajectory" of a slowly moving atom. Because of the spatial variation of the dressed wave functions, spontaneous emission occurs preferentially at an antinode (node) for a dressed state of type 1 (2). Between two spontaneous emissions (wavy lines), the atom sees, on the average, more uphill parts than downhill ones and is therefore slowed down.

ous emission. An atom in level  $|1, n\rangle$  or  $|2, n\rangle$ —each containing some admixture of  $|e, n\rangle$ —can emit a spontaneous photon and decay to level  $|1, n-1\rangle$  or  $|2, n-1\rangle$ —each containing some admixture of  $|g, n\rangle$ . The key point is that the various rates for such spontaneous processes vary in space. If the atom is in level  $|1, n\rangle$ , its decay rate is zero at a node where  $|1, n\rangle = |g, n+1\rangle$  and maximum at an antinode where the contamination of  $|1, n\rangle$  by  $|e, n\rangle$  is maximum. In contrast, for an atom in level  $|2, n\rangle$ , the decay is maximum at the nodes, where  $|2, n\rangle$  is equal to  $|e, n\rangle$ . We can now follow the “trajectory” of a moving atom<sup>11</sup> starting, for example, at a node of the standing wave in level  $|1, n+1\rangle$  (Fig. 1). Starting from this valley, the atom climbs uphill until it approaches the top (antinode) where its decay rate is maximum. It may jump either into level  $|1, n\rangle$  (which does not change anything from a mechanical point of view<sup>12</sup>) or into level  $|2, n\rangle$ , in which case the atom is again in a valley. It has now to climb up again until it reaches a new top (node) where  $|2, n\rangle$  is the most unstable, and so on. It is clear that the atomic velocity is decreased in such a process, which can be viewed as a microscopic realization of the “Sisyphus myth”: Every time the atom has climbed a hill, it may be put back at the bottom of another one by spontaneous emission. We have used such a picture to derive quantitative results for the velocity dependence of the force acting upon the atom.<sup>10</sup> The force is found to be maximum for velocities such that the Doppler effect  $kv_z$  is on the order of the natural width  $\Gamma$ , or, in other words, for situations in which—as in Fig. 1—the atom travels over a distance on the order of a wavelength between two spontaneous emissions. The main point is that the magnitude of this friction force is directly related to the modulation depth of the dressed energy levels, i.e., to the Rabi frequency  $\omega_1$ . As a consequence, this force increases indefinitely with the laser intensity. To conclude this theoretical part, we can analyze the energy-momentum balance in the cooling process.<sup>10</sup> Between two spontaneous emission processes, the total (kinetic plus potential) energy of the atom is conserved. When the atom climbs uphill, its kinetic energy is transformed into potential energy by stimulated emission processes which redistribute photons between the two counterpropagating waves at a rate  $\omega_1$ . Atomic momentum is therefore transferred to laser photons. The total atomic energy is then dissipated by spontaneous emission processes which carry away part of the atomic potential energy.

This scheme has been experimentally applied to the transverse cooling of a cesium atomic beam (see Fig. 2). This beam, produced by a multichannel-array effusive source (most probable longitudinal velocity  $u = 250$  m/s), is collimated to  $\pm 8$  mrad. It is irradiated at right angles (along  $Oz$ ) by an intense standing

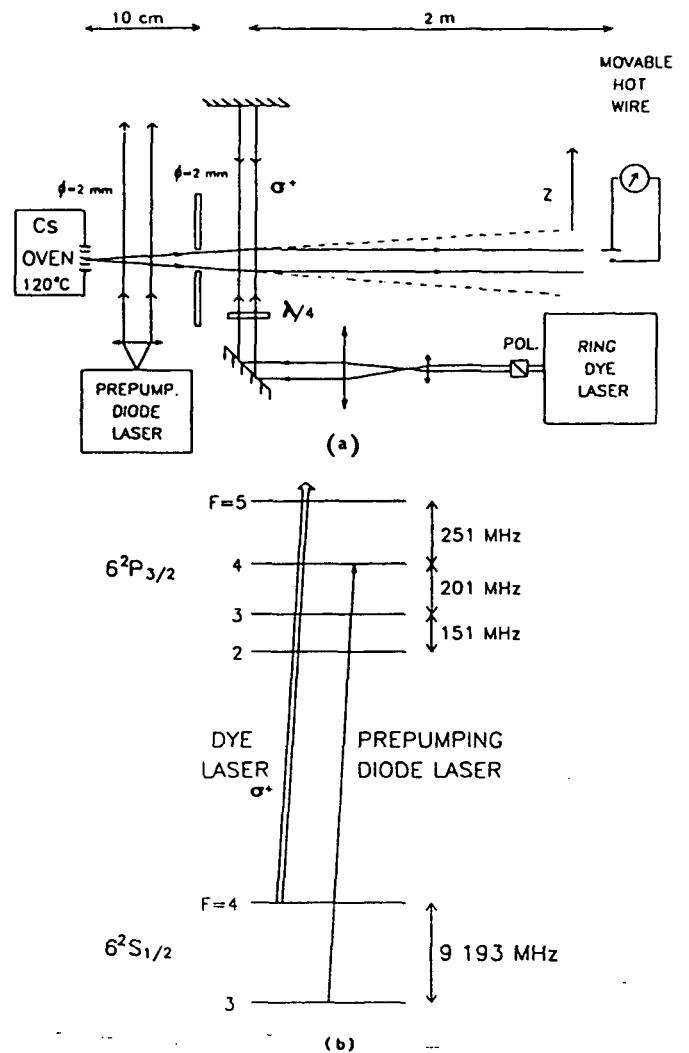


FIG. 2. (a) Experimental setup, (b) relevant cesium energy levels.

wave obtained from a frequency-controlled cw ring dye laser tuned to the  $D_2$  line at 852 nm (Styryl 9M—Coherent model No. 699-21). At the entrance of the interaction region, the initial transverse velocity spread along  $Oz$  is  $\pm 2$  m/s. The final velocity profile is analyzed by a tungsten hot-wire detector diameter ( $500 \mu\text{m}$ ) located 2 m downstream. Such a scheme allows us to study the cooling process in the low-velocity regime (Doppler effect  $kv_z \leq$  natural linewidth  $\Gamma = 3.3 \times 10^7 \text{ s}^{-1}$ ) where the cooling efficiency is maximum. Before entering the interaction region, all atoms are optically pumped into the  $|6^2S_{1/2}, F=4\rangle$  ground-state hyperfine level by a single-mode diode laser (Hitachi HLP 1400). The cooling laser is tuned around the  $|6^2S_{1/2}, F=4\rangle \rightarrow |6^2P_{3/2}, F=5\rangle$  resonance transition and  $\sigma^+$  polarized. (A 10-G dc magnetic field is applied along  $Oz$ .) Because of optical pumping, the atoms are rapidly locked to the transition  $|g, F=4, m_F=4\rangle \rightarrow |e, F=5, m_F=5\rangle$ , which achieves

a two-level system. In the interaction region the laser standing wave has a Gaussian profile with a beam waist  $w = 1.8$  mm. This leads to a transit time  $2w/u$  on the order of  $15 \mu\text{s}$ .

Experimental results are presented in Fig. 3. The incident laser power is 70 mW and leads to a maximum Rabi frequency of about  $50 \Gamma$ . For the optimum detuning  $\delta = \omega_L - \omega_0 = +6\Gamma$  (note the sign reversal compared to usual molasses), the atomic beam is strongly collimated to a narrow velocity peak of 40 cm/s half-width at half maximum (HWHM) (curve *b*). This width is 5 times narrower than that of the unperturbed atomic beam (curve *a*). For various laser powers, the peak intensity and width are found in excellent agreement with a Monte Carlo calculation which simulates the sequence of events depicted in Fig. 1 for our actual experimental configuration. For the previous laser power of 70 mW but opposite detuning ( $\delta = -6\Gamma$ ) the atomic beam is decollimated and the velocity profile exhibits a double-peak structure<sup>13</sup> (curve *c*). The slight asymmetry between these two peaks results from the imperfect orthogonality between the atomic beam and the laser standing wave. Note also the presence of a small additional central peak with a very narrow width of 20 cm/s. This structure, appearing consistently in the data as well as in the Monte Carlo simulation, seems to be due to a residual trapping of very low-velocity atoms at the antinodes of the standing wave.

Let us now compare our experiment with two other types of experiments dealing with deflection of atomic beams by stimulated forces.<sup>14,15</sup> The first one<sup>14</sup>

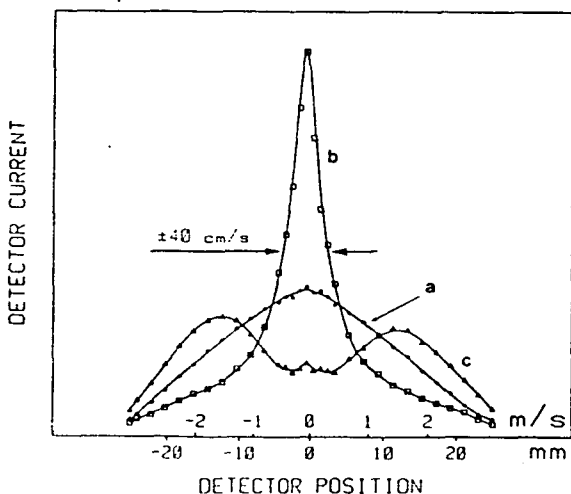


FIG. 3. Detector current vs position of the hot-wire detector. The corresponding transverse atomic velocities are given in m/s. Peak current is  $2.2 \times 10^9$  atoms/s. The full lines are intended merely as visual aids. Curve *a*, laser beam off (HWHM 2 m/s); curve *b*, laser beam on with a positive detuning ( $\delta/2\pi = +30$  MHz); curve *c*, laser beam on with a negative detuning ( $\delta/2\pi = -30$  MHz).

describes a focusing by dipole forces for a negative detuning. This process is a *nondissipative* one, to be contrasted with the *cooling* effect reported in this Letter leading to a collimation of the atomic beam. The second one<sup>15</sup> deals with the diffraction of an atomic beam by a standing wave (nearly resonant Kapitza-Dirac effect). In this diffractive regime, no spontaneous emission—and consequently no dissipation—takes place. In contrast, in the experiment presented here, each atom emits about 200 spontaneous photons.<sup>16</sup>

We have thus achieved a new type of transverse laser cooling, operating with a positive detuning. This “stimulated molasses” appears to be very efficient: Realization of the same cooling with the usual radiation-pressure molasses would have required an interaction length one order of magnitude larger. Actually, we have checked that with our beam waist of 1.8 mm this usual molasses—obtained at the optimal detuning  $\delta = -\Gamma/2$  and saturation parameter  $s \approx 1$ —has no significant effect. As a matter of fact, the minimum damping time of usual molasses is about  $100 \mu\text{s}$  for Cs, while it is only  $4 \mu\text{s}$  for stimulated molasses in our experimental conditions. Furthermore, since stimulated forces do not saturate, the damping time for stimulated molasses, which is inversely proportional to  $\omega_1$ , could be yet more decreased by an increase in the laser power.<sup>10</sup> On the other hand, because of the relatively large fluctuations of dipole forces, the final velocity spread in our experiments is about 3 times larger than the limit of usual molasses. When ultimate cooling is necessary, one can use the scheme presented here for an initial rapid cooling (of special interest for fast beams) combined with usual molasses for the final stage.

Another attractive effect is suggested by our Monte Carlo calculation which predicts, for a positive detuning, a “channeling” of the atoms: On a time scale of a few hundred microseconds the atoms should concentrate at the nodes of the standing wave, with a spatial spread  $\Delta z \approx \lambda/40$  and a residual velocity spread  $\Delta v_z \approx 30$  cm/s. Such a spatially ordered structure might be observed by Bragg diffraction.

To conclude, let us emphasize the potentialities of these velocity-dependent stimulated forces in a standing wave of efficient longitudinal slowing down of atoms. The standing wave must then be swept in order to have a weak enough relative velocity with respect to the atoms, corresponding to the most efficient decelerating force.<sup>6,10</sup> For a cesium thermal beam, a laser intensity of  $100 \text{ mW}/\text{mm}^2$  would produce a decelerating force one order of magnitude larger than the maximum radiation-pressure force. Consequently, the stopping distance would drop down from 1 m to about 10 cm. This might be of special interest for the realization of a compact atomic clock using slow atoms.

We thank R. Kaiser for valuable help during the final runs. This work is partially supported by Direction des Recherches et Etudes Techniques, under Grant No. 84-208. Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure et Collège de France is unité associée No. 18 au CNRS.

---

<sup>1</sup>For a review of these experiments, see, for example, W. D. Phillips, J. V. Prodan, and H. J. Metcalf, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1751 (1985) (special issue on the mechanical effects of light).

<sup>2</sup>S. Chu, L. Hollberg, J. E. Bjorkholm, A. Cable, and A. Ashkin, *Phys. Rev. Lett.* **55**, 48 (1985).

<sup>3</sup>S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable, *Phys. Rev. Lett.* **57**, 314 (1986).

<sup>4</sup>T. W. Hänsch and A. Schawlow, *Opt. Commun.* **13**, 68 (1975).

<sup>5</sup>D. J. Wineland and H. G. Dehmelt, *Bull. Am. Phys. Soc.* **20**, 637 (1975).

<sup>6</sup>A. P. Kazantsev, *Zh. Eksp. Teor. Fiz.* **66**, 1599 (1974) [*Sov. Phys. JETP* **39**, 784 (1974)].

<sup>7</sup>V. G. Minogin and O. T. Serimaa, *Opt. Commun.* **30**, 373 (1979).

<sup>8</sup>J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev. A* **21**, 1606 (1980).

<sup>9</sup>A. P. Kazantsev, V. S. Smirnov, G. I. Surdutovich, D. O. Chudesnikov, and V. P. Yakovlev, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1731 (1985).

<sup>10</sup>J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Opt. Soc. Am. B* **2**, 1707 (1985).

<sup>11</sup>We suppose here that the atomic velocity is sufficiently small that we can neglect Landau-Zener transitions from one dressed level to another one. Between two spontaneous emissions, the atom then follows adiabatically a given dressed level. A possible way to take into account such Landau-Zener transitions for large atomic velocities is presented in Ref. 9.

<sup>12</sup>Actually, the atomic velocity slightly changes in such a process because of the recoil due to the spontaneously emitted photon. We have taken into account these recoils in our Monte Carlo simulation and found the corresponding heating negligible compared to the dipole-force heating (Refs. 8 and 10).

<sup>13</sup>This decollimation process does not affect all transverse velocities. Above a critical value  $v_0$  the sign of the velocity-dependent force changes. Consequently, an atom with a small transverse velocity is accelerated until its velocity gets locked to  $v_0$  if the interaction time is long enough. This critical velocity increases with the Rabi frequency, and is on the order of 3 m/s at the center of our interaction region. This point has been suggested to us by A. P. Kazantsev.

<sup>14</sup>J. E. Bjorkholm, R. R. Freeman, A. Ashkin, and D. B. Pearson, *Phys. Rev. Lett.* **41**, 1361 (1978).

<sup>15</sup>P. L. Gould, G. A. Ruff, and D. E. Pritchard, *Phys. Rev. Lett.* **56**, 827 (1986), and references therein.

<sup>16</sup>The results presented here differ also from the rainbow structure predicted in the deflection profiles of an atomic beam by a laser standing wave [C. Tanguy, S. Reynaud, M. Matsuoka, and C. Cohen-Tannoudji, *Opt. Commun.* **44**, 249 (1983)]. These profiles appear for long interaction times and when the transverse displacement of the atoms inside the laser beam is much smaller than the wavelength. They do not depend on the sign of  $\delta$ .

APPENDICE N° 1

DE LA PARTIE C

## Potentialities of a new $\sigma_+ - \sigma_-$ laser configuration for radiative cooling and trapping

J Dalibard, S Reynaud and C Cohen-Tannoudji

Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure and Collège de France, 24 rue Lhomond, 75231 Paris Cedex 05, France

Received 30 May 1984

**Abstract.** In the process of cooling and trapping neutral atoms, we investigate a new laser configuration, which consists of two counterpropagating laser beams with orthogonal  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  polarisations. We show that such a configuration looks more promising than an ordinary standing wave (where the two counterpropagating waves have the same polarisation), and we explain this result as being due to angular momentum conservation which prevents any coherent redistribution of photons between the two waves. Our conclusions are based on a quantitative calculation of the various parameters (potential depth, friction coefficient, diffusion coefficient) describing the mean value and the fluctuations of the radiative forces experienced, in such a laser configuration, by an atom with a  $J = 0$  ground state and a  $J = 1$  excited state.

### 1. Introduction

A great deal of interest has been recently devoted to the study of the motion of atoms in a quasi-resonant standing light wave (Minogin and Serimaa 1979, Gordon and Ashkin 1980, Letokhov and Minogin 1981, Cook 1980a, b, Minogin 1981a, b, Kazantsev *et al* 1981). One of the main reasons for this interest relies upon the possibility of using this standing wave as an optical trap (Letokhov *et al* 1977, Letokhov and Minogin 1978, Ashkin 1978): the radiation pressures of the two counterpropagating waves forming the standing wave compensate, while dipole forces add and may lead to a trapping of atoms. Unfortunately, such a scheme also leads to a diffusion of atomic momentum, and therefore to a heating of the atoms, which is prohibitive in view of trapping as soon as the atomic transition is saturated (Gordon and Ashkin 1980, Cook 1980a, b, 1981a, Kazantsev *et al* 1981).

We can understand the leading term of the atomic momentum diffusion coefficient, in the saturating case, in terms of coherent redistribution of photons between the two waves (Arimondo *et al* 1981, Bernhardt and Shore 1981): the atom, initially in its ground state, can first absorb a photon in one of the counterpropagating waves and then emit a stimulated photon in the other wave; it thus gains the momentum  $2\hbar k$ , where  $\hbar k$  is the momentum of one photon. Since the number of such processes per unit of time is not limited, the resulting component of the momentum diffusion coefficient does not saturate when the light intensity increases.

The purpose of this paper is to present a new scheme which has the same trapping capabilities as the previous standing wave, but in which coherent redistribution processes cannot occur. It consists in two identical counterpropagating waves with



orthogonal polarisations, respectively  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  (figure 1(a)). For the sake of simplicity, we will choose a  $J = 0$  (ground level) to  $J = 1$  (excited level) atomic transition (figure 1(b)). It is then obvious that such a scheme does not allow coherent redistribution processes between the two waves: after the absorption of a  $\sigma_+$  photon for instance, the atom is in the ( $e, m = +1$ ) level and, because of angular momentum conservation, it cannot emit a stimulated  $\sigma_-$  photon in the other wave.

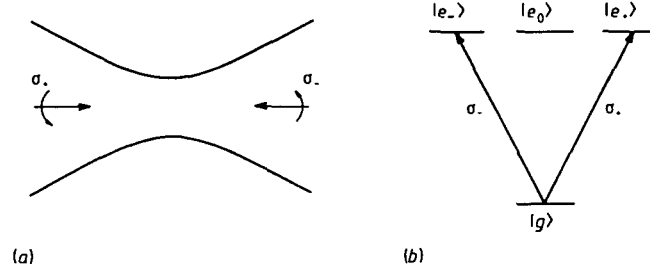


Figure 1. (a) Laser configuration studied in this paper: superposition of two focused  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  counterpropagating waves (with eventually 'infinite' beam waists: plane waves). (b) Zeeman optical components of the  $J = 0$  to  $J = 1$  transition, excited by the  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  waves.

In § 2 of this paper, we give our notations and our hypothesis. We then calculate the radiative forces acting, in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration, on an atom at rest (§ 3.1), or moving with a velocity  $v$  (§§ 3.2 and 3.3). Section 4 is devoted to the study of the momentum diffusion coefficient. Finally, the implications of this work concerning the radiative trapping are discussed in § 5, where numerical estimations are given.

## 2. Notations and assumptions

The total Hamiltonian is the sum of four parts:

$$H = H_A + H_F + V_{A-L} + V_{A-F}. \quad (2.1)$$

$H_A$  is the atomic Hamiltonian,  $H_F$  the quantised-field Hamiltonian. The laser field is supposed to be in a coherent state, so that we can treat it as a  $c$ -number field, and then split the atom-field coupling into two parts (Mollow 1975), the first one ( $V_{A-L}$ ) describing the atom-laser coupling, and the second one ( $V_{A-F}$ ) the atom-quantised-field coupling; the quantised field is taken in its ground state.

The atomic Hamiltonian is the sum of the kinetic energy of the atom and of its internal energy:

$$H_A = \frac{\mathbf{p}^2}{2m} + \hbar\omega_0 \sum_m Q_{e_m e_m} \quad (2.2)$$

where we have introduced the general notation

$$Q_{ab} = |a\rangle\langle b| \quad (2.3)$$

with  $|a\rangle, |b\rangle$  internal atomic states. In equation (2.2), we have only taken into account the excited level  $|e\rangle$  ( $J = 1$ ) coupled to the ground level  $|g\rangle$  ( $J = 0$ ) by the laser light,

and the summation is taken over the three Zeeman sublevels  $|e_m\rangle$  (with  $m = +, m = 0, m = -$ ) of  $|e\rangle$ ;  $\omega_0$  is the atomic frequency.

The electromagnetic field is quantised on a complete set of orthonormal field distributions  $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{R})$ , for example the plane waves of wavevector  $\mathbf{k}_\lambda$ , frequency  $\omega_\lambda = c|\mathbf{k}_\lambda|$  and polarisation  $\epsilon_\lambda$ . The Hamiltonian  $H_F$  of the quantised field is thus:

$$H_F = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda \quad (2.4)$$

where  $a_\lambda$  and  $a_\lambda^\dagger$  are respectively the destruction and creation operators of a photon in the mode  $\lambda$ .

The atom-quantised-field coupling  $V_{A-F}$  can be written in the electric dipole approximation:

$$V_{A-F} = -\mathbf{D} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{R}) \quad (2.5)$$

where  $\mathbf{D}$  is the atomic dipole operator and  $\mathbf{E}(\mathbf{R})$  the quantised electric field taken for the position operator  $\mathbf{R}$  of the atom:

$$\mathbf{E}(\mathbf{R}) = \sum_\lambda (\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{R})a_\lambda + \mathcal{E}_\lambda^*(\mathbf{R})a_\lambda^\dagger). \quad (2.6)$$

The atom-laser coupling is also taken at the electric dipole approximation:

$$V_{A-L} = -\mathbf{D} \cdot \mathcal{E}_{\text{laser}}(\mathbf{R}, t) \quad (2.7)$$

where  $\mathcal{E}_{\text{laser}}(\mathbf{r}, t)$  is the classical function describing the laser electric field.  $\mathcal{E}_{\text{laser}}(\mathbf{r}, t)$  results from the superposition of the two identical counterpropagating waves along the  $0z$  axis, with  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  polarisations:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{\text{laser}}(\mathbf{r}, t) &= \mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) + \mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) \\ \mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{2\sqrt{2}} \epsilon_+ \exp[-i(\omega_L t - kz)] + \text{cc} \\ \mathcal{E}_2(\mathbf{r}, t) &= -\frac{\mathcal{E}(\mathbf{r})}{2\sqrt{2}} \epsilon_- \exp[-i(\omega_L t + kz)] + \text{cc} \end{aligned} \quad (2.8)$$

where  $\omega_L$  is the laser frequency.

The complex unit vectors  $\epsilon_+$  and  $\epsilon_-$  can be written in terms of  $\epsilon_x$  and  $\epsilon_y$  (unit vectors along  $0x$  and  $0y$ ):

$$\epsilon_+ = -2^{-1/2}(\epsilon_x + i\epsilon_y) \quad \epsilon_- = 2^{-1/2}(\epsilon_x - i\epsilon_y). \quad (2.9)$$

Introducing now the  $r$ -dependent set

$$\begin{aligned} \epsilon' &= \epsilon_x \sin kz + \epsilon_y \cos kz = 2^{-1/2}i[\epsilon_+ \exp(ikz) + \epsilon_- \exp(-ikz)] \\ \epsilon'' &= -\epsilon_x \cos kz + \epsilon_y \sin kz = 2^{-1/2}[\epsilon_+ \exp(ikz) - \epsilon_- \exp(-ikz)] \end{aligned} \quad (2.10)$$

the laser field can be written:

$$\mathcal{E}_{\text{laser}}(\mathbf{r}, t) = \mathcal{E}(\mathbf{r})\epsilon' \sin(\omega_L t). \quad (2.11)$$

The resulting beam  $\mathcal{E}_{\text{laser}}$  then has at each point an amplitude  $\sqrt{2}$  times larger than the one of each initial beam  $\mathcal{E}_1$  and  $\mathcal{E}_2$ . Note in particular that this resulting amplitude does not present any important variation of the scale of a wavelength, as would be the case in a standing wave resulting from the superposition of  $\mathcal{E}_1$  and  $\mathcal{E}_2$  with the

same polarisation. On the other hand, the resulting polarisation  $\epsilon'$  is linear and rotates along the  $0z$  axis.

In order to describe the atom-laser coupling, it is convenient to introduce the following  $r$ -dependent basis for the atomic excited state (compare with equation (2.10)):

$$\begin{aligned} |e'\rangle &= 2^{-1/2}i[|e_+\rangle \exp(ikz) + |e_-\rangle \exp(-ikz)] \\ |e''\rangle &= 2^{-1/2}(|e_+\rangle \exp(ikz) - |e_-\rangle \exp(-ikz)) \\ |e_0\rangle & \end{aligned} \quad (2.12)$$

so that the atomic dipole reads:

$$\begin{aligned} D &= d(Q_{ge}, \epsilon_+ + Q_{ge-} \epsilon_- + Q_{ge_0} \epsilon_0) + \text{HC} \\ &= d(Q_{ge'} \epsilon' + Q_{ge''} \epsilon'' + Q_{ge_0} \epsilon_0) + \text{HC} \end{aligned} \quad (2.13)$$

where  $d$  is the electric dipole moment of the transition.

The atom-laser coupling can finally be written with these notations:

$$V_{A-L} = -d\mathcal{E}(\mathbf{R})(Q_{ge'} + Q_{e'g}) \sin(\omega_L t). \quad (2.14)$$

Let us mention at this point that, in some parts of this paper, we will be interested in the particular case of 'plane  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  waves': this means that the waists of the two  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  waves are very large so that we can neglect the dependence on  $\mathbf{R}$  of  $\mathcal{E}(\mathbf{R})$ .

As usual, all the calculations will be done using the rotating-wave approximation, which consists in keeping only the resonant terms in the atom-laser coupling (2.14):

$$V_{A-L} = \frac{1}{2}i d\mathcal{E}(\mathbf{R})(\tilde{Q}_{ge'} - \tilde{Q}_{e'g}) \quad (2.15)$$

where we have put:

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{ge'} &= Q_{ge'} \exp(i\omega_L t) \\ \tilde{Q}_{e'g} &= Q_{e'g} \exp(-i\omega_L t). \end{aligned} \quad (2.16)$$

In this paper, we will also use the semiclassical approximation, which consists in replacing the atomic position operator  $\mathbf{R}$  by its average value  $\mathbf{r} = \langle \mathbf{R} \rangle$ .

This is legitimate as soon as the spatial extension  $\Delta r$  of the atomic wavepacket is much smaller than the laser wavelength  $\lambda$ :

$$\Delta r \ll \lambda. \quad (2.17)$$

On the other hand, we will use the notion of atomic velocity and we will, in particular, consider atoms at rest, i.e. with a velocity spread  $\Delta v$  such that the Doppler effect  $k\Delta v$  is very small compared with the natural linewidth of the excited level  $\Gamma$ :

$$k\Delta v \ll \Gamma. \quad (2.18)$$

One then immediately notes that the two conditions (2.17) and (2.18) are compatible with the Heisenberg inequality:

$$m\Delta r \Delta v \geq \hbar \quad (2.19)$$

only if the following relation holds:

$$\hbar^2 k^2 / m \ll \hbar \Gamma. \quad (2.20)$$

This validity condition for the semiclassical calculation means that the recoil energy has to be very small compared with the natural linewidth, or, in other words, that the

atom is still in resonance with the laser light after a single photon absorption or emission. Note that when condition (2.20) is fulfilled, one can show (Cohen-Tannoudji 1983, Dalibard and Cohen-Tannoudji 1984) that the forces and the diffusion coefficient appearing in the Fokker-Planck equation describing the atomic motion, in a fully quantum treatment, are the same as the semiclassical ones, which we will calculate here.

### 3. Radiative forces in the $\sigma_+ - \sigma_-$ configuration

As usual in the semiclassical theory of radiative forces (see, for example, Cook 1980a, Gordon and Ashkin 1980), we will calculate these forces in the Heisenberg point of view. We first define a force operator as the time derivative of the atomic momentum:

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{P}] = -\nabla_{\mathbf{R}} H. \quad (3.1)$$

This force can be expressed in terms of atomic and field operators; using (2.1), (2.5), (2.12) and (2.15), we get:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{int}} + \mathbf{F}_{\text{pol}} + \mathbf{F}_{\text{vac}} \quad (3.2)$$

with

$$\mathbf{F}_{\text{int}} = -\frac{i}{2} d \nabla \mathcal{E}(\mathbf{R}) (\tilde{Q}_{ge'} - \tilde{Q}_{e'g}) \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{F}_{\text{pol}} = \frac{i}{2} d \mathcal{E}(\mathbf{R}) k (\tilde{Q}_{g'e'} - \tilde{Q}_{e'g}) \quad (3.3b)$$

$$\mathbf{F}_{\text{vac}} = \sum_{i=x,y,z} D_i \nabla E_i(\mathbf{R}). \quad (3.3c)$$

$\mathbf{F}_{\text{vac}}$  results from the gradient of the quantised-field-atom coupling, while  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  and  $\mathbf{F}_{\text{pol}}$  both come from the laser-atom coupling; more precisely,  $\mathbf{F}_{\text{int}}$  and  $\mathbf{F}_{\text{pol}}$  are respectively due to the  $\mathbf{R}$  dependence of  $V_{\Lambda-L}$  via  $\mathcal{E}(\mathbf{R})$  and via  $Q_{ge'} - Q_{e'g}$ .

As mentioned above, we will do a semiclassical treatment, and replace the position operator  $\mathbf{R}$  by its average value  $\mathbf{r}$ . Furthermore, we will actually be interested in the average  $\mathbf{f}$  of  $\mathbf{F}$  over both field and internal atomic state:

$$\mathbf{f} = \langle \mathbf{F} \rangle = \mathbf{f}_{\text{int}} + \mathbf{f}_{\text{pol}} + \mathbf{f}_{\text{vac}}. \quad (3.4)$$

#### 3.1. Radiative forces on an atom at rest

If one considers an atom at rest at point  $\mathbf{r}_0$ , it is clear from the expression of the laser-atom coupling (2.15) that only the sublevel  $|e'\rangle$  (at point  $\mathbf{r}_0$ ) is coupled to the ground state. It follows that a  $(J=0)-(J=1)$  atom at rest in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration behaves as a two-level system. More precisely, the evolution of

$$\begin{aligned} \rho_{e'e'} &= \langle Q_{e'e'} \rangle \\ \rho_{ge'} &= \langle \tilde{Q}_{e'g} \rangle \\ \rho_{e'g} &= \langle \tilde{Q}_{ge'} \rangle \\ \rho_{gg} &= \langle Q_{gg} \rangle \end{aligned} \quad (3.5)$$

is given by the usual optical Bloch equations:

$$\frac{d}{dt}\rho_{e'e'} = -\Gamma\rho_{e'e'} - \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r}_0)}{2\hbar}(\rho_{ge'} + \rho_{e'g}) \quad (3.6a)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{e'g} = (i\delta - \frac{1}{2}\Gamma)\rho_{e'g} + \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r}_0)}{2\hbar}(\rho_{e'e'} - \rho_{gg}) \quad (3.6b)$$

$$\frac{d}{dt}\rho_{ge'} = \left(\frac{d}{dt}\rho_{e'g}\right)^* \quad (3.6c)$$

$$\rho_{e'e'} + \rho_{gg} = 1 \quad (3.6d)$$

where we have put  $\delta = \omega_l - \omega_0$ . Using the stationary solution of these equations, we get:

$$f_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\hbar\delta\frac{\nabla s}{1+s} \quad (3.7)$$

where we have introduced the  $r$ -dependent saturation parameter:

$$s = \frac{1}{2}\left(\frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{\hbar}\right)^2 (\delta^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2)^{-1}. \quad (3.8)$$

It is important to note that this force is exactly equal to the usual dipole force (or gradient force) found for a two-level system.

We now turn to the calculation of  $f_{\text{pot}}$  and  $f_{\text{vac}}$ . The result for  $f_{\text{pot}}$  is immediate: since the level  $|e''\rangle$  (at point  $\mathbf{r}_0$ ) is not coupled to the laser field, the average value of  $Q_{ge''}$  is zero, and using (3.3b):

$$f_{\text{pot}} = 0. \quad (3.9)$$

In order to calculate  $f_{\text{vac}}$ , we first remark that the quantised field  $E$  can be written, in the Heisenberg point of view,  $E_{\text{free}} + E_{\text{source}}$ , where  $E_{\text{source}}$  is the field radiated by the atom, and  $E_{\text{free}}$  the field that would exist in the absence of a source. Since the source field has no gradient at the atom position (Tanguy 1983) one gets:

$$\langle \nabla E_i \rangle = \langle \nabla E_{i\text{free}} \rangle = 0 \quad (3.10)$$

since the quantised field is taken initially in its ground state. It follows that:

$$f_{\text{vac}} = 0 \quad (3.11)$$

so that

$$f = f_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\hbar\delta\frac{\nabla s}{1+s}. \quad (3.12)$$

For an atom at rest, the only contribution to the average force is then  $f_{\text{int}}$ . In the perspective of using this force to trap atoms, it is useful to notice that this force derives from the potential:

$$U(\mathbf{r}) = \frac{1}{2}\hbar\delta \ln(1+s) \quad (3.13)$$

and to optimise the potential well depth. For a given laser power and waist, i.e. for a given maximal field amplitude  $\mathcal{E}_m$ , one finds the optimal values:

$$s_m \approx 4 \quad \text{or} \quad \delta \approx -0.35 d\mathcal{E}_m/\hbar \quad (3.14)$$

leading to the optimal well depth:

$$U_0 \approx 0.3 d^2 \mathcal{E}_m. \quad (3.15)$$

### 3.2. Radiative forces on slowly moving atoms

We now suppose that the atom is moving with a velocity  $v$ , and we want to calculate in this section the first order velocity dependence of radiative forces, in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration.

It is clear that  $f_{vac}$  is still zero (quantised field in its ground state), but the values of  $f_{int}$  and  $f_{pot}$  are now changed, since the atomic motion implies a time dependence of the laser-atom coupling via  $\mathcal{E}(\mathbf{r}(t))$  and  $Q_{ge'} - Q_{e'g}$ . This motion will in particular cause a coupling of the level  $|e''\rangle$  with the ground level, and the results will therefore be quite different from the two-level atom case. In order to calculate the average values of  $Q_{e'g}$ ,  $Q_{e'g}$ ,  $\dots$ , appearing in the force, we shall use the general Heisenberg equation for a time-dependent observable:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{\hbar} [H, A]. \quad (3.16)$$

3.2.1. Calculation of  $f_{pot}$ . Applying (3.16) to the operator  $Q_{e''e}$  and taking the average value, we get:

$$\frac{d}{dt} \rho_{ge''} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \rho_{ge''} - (i\delta + \frac{1}{2}\Gamma) \rho_{ge''} + \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{2\hbar} \rho_{e'e''} \quad (3.17)$$

where we have put, as in (3.5):

$$\rho_{ge''} = \langle \tilde{Q}_{e''g} \rangle \quad \rho_{e'e''} = \langle Q_{e'e''} \rangle \quad (3.18)$$

and where we have used (see 2.12):

$$\frac{\partial}{\partial t} |e''\rangle = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} |e'\rangle. \quad (3.19)$$

We write the equivalent equation for  $\rho_{e'e''}$ :

$$\frac{d}{dt} \rho_{e'e''} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} (\rho_{e'e''} - \rho_{e''e'}) - \Gamma \rho_{e'e''} - \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{2\hbar} \rho_{ge''}. \quad (3.20)$$

We now want to extract from equations (3.17) and (3.20), the stationary values of  $\rho_{ge''}$  and  $\rho_{e'e''}$ , to order one in velocity. We first remark that these stationary values are at least of order one in  $v$ , since they are zero for an atom at rest. Consequently, the time derivatives of these stationary values are at least of order two in  $v$ : the time derivative of a stationary quantity  $A$  is indeed  $(\mathbf{v} \cdot \nabla)A$ . The first-order velocity dependences of the stationary values of  $\rho_{ge''}$  and  $\rho_{e'e''}$  can then be obtained from:

$$\begin{aligned} (i\delta + \frac{1}{2}\Gamma) \rho_{ge''} - \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{2\hbar} \rho_{e'e''} &= -\mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})/2\hbar}{i\delta + \frac{1}{2}\Gamma} \frac{1}{1+s} \\ \frac{d\mathcal{E}(\mathbf{r})}{2\hbar} \rho_{ge''} + \Gamma \rho_{e'e''} &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \frac{s}{2(1+s)}. \end{aligned} \quad (3.21)$$

We finally solve this system to get  $f_{\text{pol}}$ , to the first order in velocity:

$$f_{\text{pol}} = \hbar k(k \cdot v) \frac{s}{1+s} \frac{\delta/\Gamma}{(\delta^2/\Gamma^2) + \frac{1}{4}\{1+s[(\delta^2/\Gamma^2) + \frac{1}{4}]\}^2} \quad (3.22)$$

3.2.2. *Calculation of  $f_{\text{int}}$ .* Applying (3.16) to  $Q_{ge}$ ,  $Q_{e'g}$ ,  $Q_{e'e}$  and  $Q_{gg}$ , one gets the same result as (3.6), to the first order in  $v$ . The supplementary terms resulting from the component  $\partial A/\partial t$  in (3.16) are indeed all equal to  $k \cdot v$  times the average value of an operator where  $e''$  appears†. These supplementary terms are then at least of order two in  $v$ , and do not contribute. It follows that the only  $v$  dependence of the system giving  $\rho_{e'g}$ ,  $\rho_{ge'}$ ,  $\rho_{e'e}$  and  $\rho_{gg}$  is due to  $\mathcal{E}(r(t))$ , and consequently,  $f_{\text{int}}$  at first order in velocity is the same as for the two-level atom case. The result is found to be (see also Gordon and Ashkin 1980)

$$f_{\text{int}} = -\frac{1}{2}\hbar\delta \frac{\nabla s}{1+s} - \frac{\hbar\delta}{4\Gamma} \frac{\nabla s(v \cdot \nabla s)}{s(1+s)^3} \left( 2s^2 + (s-1) \frac{\Gamma^2}{\delta^2 + \frac{1}{4}\Gamma^2} \right). \quad (3.23)$$

3.2.3. *Physical discussion.* (i) Looking at the general structure of the results, one can note that there is no 'crossed' term as  $(k \cdot v)\nabla s$  or  $k(v \cdot \nabla s)$  in the expression of the total force. This is simply due to the physical invariance of the system by changing  $k$  in  $-k$  (or, which is equivalent, by exchanging the polarisations for the waves  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$ ).

(ii) We will not discuss here the result for  $f_{\text{int}}$  (3.23) since it is a well known expression, and we will rather focus on  $f_{\text{pol}}$ . We first note that  $f_{\text{pol}}$  can be a damping or an accelerating force depending on the sign of the detuning  $\delta$ . If  $\delta$  is negative, for example, the force is a damping one and this agrees with the following qualitative argument: an atom moving towards the right on figure 1 'sees', because of the Doppler effect, the  $\sigma_-$  wave closer to resonance than  $\sigma_+$ , and then 'experiences' a total force towards the left which damps its motion. In the case where the two waves  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  are plane progressive waves, it is also interesting to note that there is no change of sign of the force  $f = f_{\text{pol}}$  when the intensity of the waves varies. This has to be compared with the result obtained for a plane standing wave, where the sign of the force could change with the light intensity for a constant detuning (Minogin and Serimaa 1979, Minogin 1981a, b). In this way, the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration appears as a 'simpler' system than the standing-wave configuration.

(iii) In the perspective of cooling neutral atoms, it may be useful to optimise the damping qualities of  $f_{\text{pol}}$ . One gets the optimal values:

$$s \approx 1 \quad \delta \approx -\frac{1}{2}\Gamma \quad (3.24)$$

giving a damping force:

$$f_{\text{pol}} \approx -0.3\hbar k(k \cdot v). \quad (3.25)$$

(iv) Finally, one can ask for the validity of the expansion of the force in terms of the velocity. It appears from the calculations of this section that the following condition

† Equation (3.6d) should be replaced by  $\rho_{e'e} + \rho_{e'e'} + \rho_{ee} = 1$ , but one can easily show that  $\rho_{e'e'}$  is at least of order two in  $v$ . To order one, one can then use  $\rho_{e'e} + \rho_{ee} = 1$ .

has to be fulfilled in order to do this expansion:

$$|k \cdot v|/\Gamma \ll 1. \quad (3.26)$$

This can be interpreted in two ways: as already mentioned, it first means that the Doppler effect has to be small compared with the natural width of the excited level; another formulation of (3.26) is the following

$$v\Gamma^{-1} \ll \lambda \quad (3.27)$$

which means that the atom travels, during the excited level lifetime  $\Gamma^{-1}$ , over a distance  $v\Gamma^{-1}$  which is very small compared with the light wavelength  $\lambda$ , so that its internal state can follow the laser field nearly adiabatically.

### 3.3. Radiative forces in the case of plane waves

In the case of plane waves, it is possible to give the analytical expression of the radiative force acting on an atom for any velocity of this atom. Note that the amplitude  $\mathcal{E}(\mathbf{r})$  is now independent of  $\mathbf{r}$  so that only  $f_{\text{pot}}$  will contribute to the final result. In order to do the calculation in the simplest way, we will compute the force in the atomic frame, and we will use the  $|e_m\rangle$  ( $m = 0, \pm$ ) basis for the excited level. We are then faced with the problem of computing the stationary state of a three-level atom (here  $|g\rangle, |e_+\rangle, |e_-\rangle$ ) irradiated with two laser beams with the same intensities and two different frequencies  $\omega_L + k \cdot v$  and  $\omega_L - k \cdot v$  (figure 2). The radiative force is then given by:

$$f = \frac{d\mathcal{E}}{2\sqrt{2}} k \langle i\tilde{Q}_{ge_+} \exp(-ik \cdot vt) + \text{HC} \rangle - \frac{d\mathcal{E}}{2\sqrt{2}} k \langle i\tilde{Q}_{ge_-} \exp(ik \cdot vt) + \text{HC} \rangle. \quad (3.28)$$

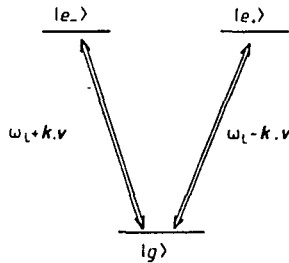


Figure 2. Atomic transitions and laser frequencies in the atom rest frame (atomic velocity  $v$  in laboratory frame).

(3.28) has been written by supposing the atom at the point  $\mathbf{r} = 0$  of its frame. The stationary state of the atom can be deduced from the nine Bloch equations of the problem; putting

$$\begin{aligned} \rho_{++} &= \langle Q_{e_+e_+} \rangle \\ \rho_{+-} &= \langle Q_{e_+e_-} \exp(-2ik \cdot vt) \rangle \\ \rho_{+g} &= \langle Q_{ge_+} \exp[i(\omega_L - k \cdot v)t] \rangle \\ &\text{etc} \end{aligned} \quad (3.29)$$



one gets the following system, with time-independent coefficients:

$$\begin{aligned}
 (3.20) \quad \frac{d}{dt} \rho_{+++} &= -\Gamma \rho_{+++} + \frac{id\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\hbar} (\rho_{+R} - \rho_{R+}) \\
 \frac{d}{dt} \rho_{+-} &= -(\Gamma + 2i\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) \rho_{+-} + \frac{id\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\hbar} (\rho_{+R} - \rho_{R-}) \\
 \frac{d}{dt} \rho_{+R} &= [i(\delta - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) - \frac{1}{2}\Gamma] \rho_{+R} + \frac{id\mathcal{E}}{2\sqrt{2}\hbar} (\rho_{+++} - \rho_{RR} + \rho_{+-}) \\
 \rho_{+++} + \rho_{--} + \rho_{RR} &= 1
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

and the five other equations deduced from (3.20) by taking complex conjugates and exchanging + and -. The analytical resolution of the linear system (3.20) in the stationary case is quite tedious but does not present any difficulty. One gets for the radiative force:

$$\mathbf{f} = \hbar k l (\rho_{+++} - \rho_{--}) = \hbar k \frac{\mathcal{N}}{\mathcal{D}} \tag{3.31}$$

where we have put

$$\begin{aligned}
 \mathcal{N} &= 0.5 \Gamma \delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}) [1^2 + 4(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2] (d\mathcal{E}/\hbar)^2 \\
 \mathcal{D} &= [\Gamma^2 + 4(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2] \{ Q + \frac{1}{8} (d\mathcal{E}/\hbar)^2 [4\Delta^2 + \frac{3}{8} (d\mathcal{E}/\hbar)^2 + 4(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2] \\
 &\quad + \frac{1}{16} (d\mathcal{E}/\hbar)^4 [\Delta^2 + \frac{3}{8} (d\mathcal{E}/\hbar)^2 - 3(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2] \} \\
 \Delta^2 &= \delta^2 + \frac{1}{4} \Gamma^2 + \frac{1}{8} (d\mathcal{E}/\hbar)^2 \\
 Q &= [\Delta^2 - (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2]^2 + (\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})^2 \Gamma^2.
 \end{aligned}
 \tag{3.32}$$

The expression (3.31) appears as the ratio of two polynomials in  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ : the numerator is of degree three, the denominator six. For small velocities, one can check that (3.31) is equal to the result of the previous section (3.22). One interest of formula (3.31) is to show that for a given detuning and a given light intensity, the radiative force has always the same sign as  $\delta(\mathbf{k} \cdot \mathbf{v})$ . Once more, this can be compared with the result for the plane standing wave case where a continuous fraction expansion† predicts changes of sign of the force with the velocity (Minogin and Serimaa 1979).

We have plotted in figure 3 the variation of the radiative force with the velocity, in the optimal case  $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$  and  $s = 1$ . One sees that the force is linear until  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  becomes of the order of  $\Gamma$ , reaches a maximum of the order of  $0.2 \hbar k l$  and then decreases. This means that the linear term found in the previous section is dominant in the range  $-\frac{1}{2}\Gamma \leq \mathbf{k} \cdot \mathbf{v} \leq \frac{1}{2}\Gamma$ , as expected.

*Note:* In order to understand why the atom-laser system studied in this section appears simpler than the standing-wave case, (not only for the calculations but also for the results), it may be useful to consider the dressed-atom picture (Cohen-Tannoudji and Reynaud 1977, 1978, Reynaud 1983). Take first the case of an atom in a standing wave: the state  $|g, n_1, n_2\rangle$ , representing the atom in the presence of  $n_1$  and  $n_2$  photons in the two counterpropagating waves forming the standing wave, is coupled by atom-laser coupling to the two states  $|e, n_1 - 1, n_2\rangle$  and  $|e, n_1, n_2 - 1\rangle$ . These two states are themselves coupled to  $|g, n_1 - 1, n_2 + 1\rangle$  and  $|g, n_1 + 1, n_2 - 1\rangle$  and so on (figure 4(a)).

† No analytical expression of the force could be obtained in the standing-wave case.

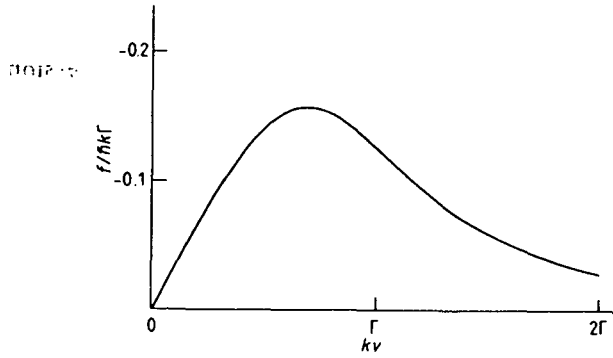


Figure 3. Variation of the intensity of the radiative force in the optimal cooling configuration ( $\delta = -\frac{1}{2}\Gamma$  and  $s = 1$ ).

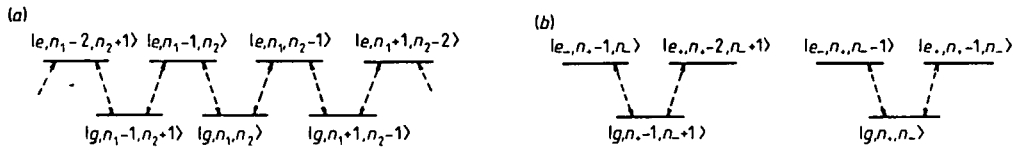


Figure 4. Dressed-atom picture. (a) Standing-wave case: all states corresponding to a given total number of excitations are coupled. Coherent redistribution can occur. (b)  $\sigma_+-\sigma_-$  case: manifolds involving only three coupled dressed states. No coherent redistribution can occur.

In particular, this coupling between all the states with a given value of  $n_1 + n_2$  is responsible for the coherent redistribution described in the introduction of this paper. Consider now the case of a ( $J = 0$ ) - ( $J = 1$ ) atom in two plane  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  waves. The state  $|g, n_+, n_->$  is coupled by atom-laser coupling to the two states  $|e_+, n_+ - 1, n_->$  and  $|e_-, n_+, n_- - 1>$ , and these two states are only coupled to the initial state  $|g, n_+, n_->$  (figure 4(b)), due to the conservation of angular momentum. The 'dressed atom' then contains manifolds involving only three levels, and it is therefore much easier to compute; one can in particular calculate the stationary atomic state, when spontaneous emission is taken into account, for any values of the laser frequencies (or equivalently for any atomic velocity).

#### 4. Atomic momentum diffusion in the $\sigma_+-\sigma_-$ configuration

As indicated in the introduction, the momentum diffusion is a crucial feature of atomic motion in a light wave, since the corresponding heating limits the stability of any radiative trap. We will see in this section that, in the  $\sigma_+-\sigma_-$  configuration, one can control independently the depth of the trap and the diffusion coefficient, contrary to what happened in a standing-wave trap. Our calculation will be done for an atom at rest at point  $r = 0$ , and we will actually be interested in the trace of the diffusion tensor (Gordon and Ashkin 1980, Cook 1980a)

$$D = \frac{1}{2} \langle \mathbf{F} \cdot \mathbf{P} + \mathbf{P} \cdot \mathbf{F} \rangle - \langle \mathbf{P} \rangle \cdot \langle \mathbf{F} \rangle$$

$$= \int_0^\infty d\tau \left( \frac{1}{2} \langle \mathbf{F}(0) \cdot \mathbf{F}(\tau) + \mathbf{F}(\tau) \cdot \mathbf{F}(0) \rangle - \langle \mathbf{F} \rangle^2 \right). \quad (4.1)$$

#### 4.1. Outline of the calculation

In order to compute  $D$ , we first replace the operators  $F$  in (4.1) by their expression (3.2):

$$F = F_{\text{int}} + F_{\text{pol}} + F_{\text{vac}}. \quad (4.2)$$

This will give *a priori* nine contributions to  $D$ . Actually, all the crossed terms vanish and one is left with only the three terms:

$$D = D_{\text{int}} + D_{\text{pol}} + D_{\text{vac}} \quad (4.3)$$

with

$$D_{\text{int}} = \int_0^\infty d\tau \langle \frac{1}{2} (F_{\text{int}}(0) \cdot F_{\text{int}}(\tau) + \text{HC}) - f^2 \rangle \quad (4.4)$$

$$D_{\text{pol}} = \int_0^\infty \frac{1}{2} d\tau \langle F_{\text{pol}}(0) \cdot F_{\text{pol}}(\tau) + \text{HC} \rangle \quad (4.5)$$

$$D_{\text{vac}} = \int_0^\infty \frac{1}{2} d\tau \langle F_{\text{vac}}(0) \cdot F_{\text{vac}}(\tau) + \text{HC} \rangle. \quad (4.6)$$

There are various reasons for the cancellation of the crossed terms. Consider first the crossed terms involving  $F_{\text{vac}}$ . One has then to take the average in the quantised-field ground state of the single operator  $\nabla E_i(0)$  or  $\nabla E_i(\tau)$ . For  $\nabla E_i(0)$ , it is clear that the quantum average is zero since it is only a sum of creation and annihilation operators (see equation (2.6)).  $\nabla E_i(\tau)$ , on the other hand is equal to  $\nabla E_{i \text{ free}}(\tau)$  (see § 3.1), and one can note that  $\nabla E_{i \text{ free}}(\tau)$  commutes with any atomic operator taken at time 0, so that terms involving this single-field operator cannot contribute when averaged in the field vacuum state.

We are then left with crossed terms involving products of  $F_{\text{int}}$  and  $F_{\text{pol}}$ . Physically, it is clear that such terms cannot contribute to  $D$ , since they would be proportional to  $\mathbf{k} \cdot \nabla s$  (see § 3.2.3) and would not be invariant by exchanging the  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  polarisations. Mathematically, they appear to be proportional to atomic correlation functions such as

$$\int_0^\infty \langle Q_{e'g}(0) Q_{e'g}(\tau) \rangle d\tau \quad \text{or} \quad \int_0^\infty \langle Q_{e'g}(0) Q_{e'g}(\tau) \rangle d\tau$$

and it is easy to show, using the equations of evolution of  $Q_{e'g}(\tau)$  and  $Q_{e'g}(\tau)$  given in § 3, and applying the quantum regression theorem that such correlation functions are always zero (see, for more details, § 4.3).

We have then to calculate three terms:  $D_{\text{vac}}$  (§ 4.2),  $D_{\text{int}}$  (§ 4.3) and  $D_{\text{pol}}$  (§ 4.4). Let us remark that the calculations of  $D_{\text{vac}}$  and  $D_{\text{int}}$  are very close to the corresponding calculations for a two-level system. We will then just briefly outline the explicit algebra for these two terms, referring for example to Gordon and Askin (1980) for more details.

#### 4.2. Calculation of $D_{\text{vac}}$

We first calculate the average value of  $(F_{\text{vac}}(0) \cdot F_{\text{vac}}(\tau) + \text{HC})$ . (Note again that only  $E_{i \text{ free}}(\tau)$  contributes to  $F_{\text{vac}}(\tau)$ ; § 3.1.) The quantised-field part of  $F_{\text{vac}}(0) \cdot F_{\text{vac}}(\tau)$  consists of products of annihilation and creation operators. The only non-zero contribution will come from field operators in the antinormal order ( $a_\lambda$  on the left,  $a_\lambda^+$  on the

right), so that  $D_{\text{vac}}$  can be written:

$$D_{\text{vac}} = \text{Re} \int_0^{\infty} d\tau \left\langle D_i(0) \sum_{\lambda} \nabla \mathcal{E}_{\lambda i}(0) a_{\lambda} \cdot D_j(\tau) \sum_{\mu} \nabla \mathcal{E}_{\mu j}^*(0) a_{\mu}^+ \exp(i\omega_{\mu}\tau) \right\rangle$$

$$= \text{Re} \int_0^{\infty} d\tau \left( \sum_{\lambda} \nabla \mathcal{E}_{\lambda i}(0) \cdot \nabla \mathcal{E}_{\lambda j}^*(0) \exp(i\omega_{\lambda}\tau) \right) \langle D_i(0) D_j(\tau) \rangle. \quad (4.7)$$

We then decompose the dipole  $D_j(\tau)$  into its positive and negative frequency parts.

$$D_j(\tau) = D_j^+(\tau) \exp(i\omega_0\tau) + D_j^-(\tau) \exp(-i\omega_0\tau) \quad (4.8)$$

where  $D_j^+$  contains 'raising type' operators ( $Q_{eg}$ ) and  $D_j^-$  'lowering type' ones ( $Q_{ge}$ ). We keep in the following only the resonant term, coming from  $D_i(0)D_j^-(\tau)$ , and we use the relation:

$$d^2 \sum_{\lambda} \nabla \mathcal{E}_{\lambda i}(0) \cdot \nabla \mathcal{E}_{\lambda j}^*(0) \exp[i(\omega_{\lambda} - \omega_0)\tau] = \hbar^2 k^2 \Gamma \delta_{ij} \delta(\tau). \quad (4.9)$$

We then get for  $D_{\text{vac}}$ :

$$D_{\text{vac}} = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \Gamma \sum_m \langle Q_{e_m e_m} \rangle. \quad (4.10)$$

$D_{\text{vac}}$  is then proportional to the population of the excited level, which is  $s/[2(1+s)]$ . This gives:

$$D_{\text{vac}} = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{4(1+s)} = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \mathcal{N} \quad (4.11)$$

where  $\mathcal{N}$  is the rate of emission of fluorescence photons.

### 4.3. Calculation of $D_{\text{int}}$

Using the expression of  $F_{\text{int}}$  (3.3a), we get:

$$D_{\text{int}} = \frac{1}{4} d^2 (\nabla \mathcal{E})^2 \text{Re} \int_0^{\infty} d\tau (\langle A(0)A(\tau) \rangle - \langle A \rangle^2) \quad (4.12)$$

where  $A(\tau)$  denotes the operator:

$$A(\tau) = i(\tilde{Q}_{ge}(\tau) - \tilde{Q}_{eg}(\tau)). \quad (4.13)$$

The calculation of the atomic correlation function  $\langle A(0)A(\tau) \rangle$  is then performed using the quantum regression theorem (Lax 1968, Louisell 1973): if the average value of  $A(\tau)$  evolves as:

$$\frac{d}{d\tau} \langle A(\tau) \rangle = \sum_i \alpha_i \langle A_i(\tau) \rangle \quad (4.14)$$

where the  $A_i$  are a set of internal atomic operators of the type  $Q_{ab}$  (ket-bra), then, for  $\tau$  positive, the evolution of  $A(0)A(\tau)$  is given by:

$$\frac{d}{d\tau} \langle A(0)A(\tau) \rangle = \sum_i \alpha_i \langle A(0)A_i(\tau) \rangle. \quad (4.15)$$

Writing the equivalent equations for each  $\langle A(0)A_i(\tau) \rangle$ , one then gets a differential system of coupled equations, from which it is possible to extract  $\langle A(0)A(\tau) \rangle$ .

Starting from the optical Bloch equations (3.6) giving the evolution of  $\langle A(\tau) \rangle$ , it first appears that one has to take into account the coupling between the four following correlation functions:

$$\langle A(0)Q_{e'e'}(\tau) \rangle \quad \langle A(0)\tilde{Q}_{e'g}(\tau) \rangle \quad \langle A(0)\tilde{Q}_{ge'}(\tau) \rangle \quad \langle A(0)Q_{gg}(\tau) \rangle. \quad (4.16)$$

This set of coupled equations is the same as for the two-level case, but it is no longer closed in our problem, since the population of level  $|g\rangle$  can be fed through the decay of levels  $|e''\rangle$  and  $|e_0\rangle$ . This couples the last correlation function of (4.16) to  $\langle A(0)Q_{e'e'}(\tau) \rangle$  and  $\langle A(0)Q_{e_0e_0}(\tau) \rangle$ . Fortunately, the evolution of these two quantities is very simple:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \langle A(0)Q_{e'e'}(\tau) \rangle &= -\Gamma \langle A(0)Q_{e'e'}(\tau) \rangle \\ \frac{d}{d\tau} \langle A(0)Q_{e_0e_0}(\tau) \rangle &= -\Gamma \langle A(0)Q_{e_0e_0}(\tau) \rangle \end{aligned} \quad (4.17)$$

and their initial values (for  $\tau=0$ ) are both zero. It follows that these two quantities are zero for any time  $\tau$ , so that the diffusion coefficient calculated through the resolution of the set (4.16), has the same mathematical expression as for the two-level case (Gordon and Ashkin 1980, Cook 1980a, b):

$$D_{\text{int}} = \frac{\hbar^2 (\nabla s)^2 \Gamma}{4s(1+s)^3} \left[ s^3 \left( \frac{\delta^2}{\Gamma^2} + \frac{1}{4} \right) + \frac{3s^2}{4} + \frac{\frac{3}{4}\Gamma^2 - \delta^2}{\Gamma^2 + 4\delta^2} s + \frac{1}{4} \right]. \quad (4.18)$$

It is, however, important to note that the order of magnitude of  $D_{\text{int}}$  is not at all the same for a ( $J=0 - J=1$ ) atom in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration and for a two-level system in a standing wave corresponding to the same value for the potential well depth  $U_0$  imposed by a choice of  $\delta$  and  $s$  (see (3.13)). In the standing-wave case  $(\nabla s)^2$  is indeed of the order of  $(ks)^2 = 4\pi^2 s^2 / \lambda^2$ , while, in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration, we have  $(\nabla s)^2 = (s/w_0)^2$  where  $w_0$  is the laser beam waist. The diffusion coefficient  $D_{\text{int}}$  in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration is then  $4\pi^2 (w_0/\lambda)^2$  smaller than the one found in a standing wave. The corresponding reduction can be considerable for usual waists, which are much larger than the wavelength.

The physical interpretation for such a reduction has been given in the introduction of this paper: the use of the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration prevents the coherent redistribution of photons between the two beams, responsible for the huge diffusion coefficient found in the standing-wave case. Coherent redistribution of photons, in the  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration, can then only occur inside a given beam, between the various plane waves forming this beam and which are at the origin of the gradient of  $s$ . In particular, if there is only one wavevector forming the  $\sigma_+$  or  $\sigma_-$  beam (plane  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  waves,  $\nabla s = 0$ ), no coherent redistribution can occur and  $D_{\text{int}}$  vanishes.

#### 4.4. Calculation of $D_{\text{pol}}$

We first report the expression (3.3b) of  $F_{\text{pol}}$  in the expression of  $D_{\text{pol}}$  and we get:

$$D_{\text{pol}} = \frac{d^2 k^2 \mathcal{E}^2}{4} \text{Re} \int_0^\infty d\tau \langle B(0)B(\tau) \rangle \quad (4.19)$$

where we have put:

$$B(\tau) = i(\tilde{Q}_{ge}(\tau) - \tilde{Q}_{e'g}(\tau)). \quad (4.20)$$

As in § 4.3, we have to evaluate an atomic correlation function, using the quantum regression theorem. It appears that there are four correlations functions involved, which separate into two groups:

$$\begin{aligned} \langle B(0)Q_{ge}(\tau) \rangle \\ \langle B(0)Q_{e'g}(\tau) \rangle \quad \text{for the first group} \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} \langle B(0)Q_{eg}(\tau) \rangle \\ \langle B(0)Q_{e'e}(\tau) \rangle \quad \text{for the second group.} \end{aligned}$$

The first group is easy to evaluate: the initial values ( $\tau=0$ ) for both functions are equal to zero so that these functions vanish for all  $\tau$ . To evaluate the second set, let us put

$$\begin{aligned} \alpha(\tau) &= \langle B(0)Q_{eg}(\tau) \rangle \\ \beta(\tau) &= \langle B(0)Q_{e'e}(\tau) \rangle. \end{aligned} \quad (4.21)$$

The initial conditions are the following

$$\begin{aligned} \alpha(0) &= i\langle Q_{eg} \rangle = i \frac{2+s}{2(1+s)} \\ \beta(0) &= i\langle Q_{e'e} \rangle = \frac{i}{1+s} \frac{d\mathcal{E}/2\hbar}{i\delta - \frac{1}{2}\Gamma}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

The equations of motion for  $\alpha$  and  $\beta$  are similar to (3.17) and (3.20) for  $k \cdot v = 0$

$$\begin{aligned} \frac{d\alpha}{d\tau} &= -(i\delta + \frac{1}{2}\Gamma)\alpha + \frac{d\mathcal{E}}{2\hbar}\beta \\ \frac{d\beta}{d\tau} &= -\frac{d\mathcal{E}}{2\hbar}\alpha - \Gamma\beta. \end{aligned} \quad (4.23)$$

We integrate these two equations from  $\tau=0$  to  $\tau=\infty$  and find:

$$\int_0^\infty \alpha(\tau) d\tau = \frac{\Gamma\alpha(0) + \beta(0)d\mathcal{E}/2\hbar}{(i\delta + \frac{1}{2}\Gamma)\Gamma + (d\mathcal{E}/2\hbar)^2}. \quad (4.24)$$

We report the result in  $D_{\text{pol}}$  and finally get:

$$D_{\text{pol}} = \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{4(1+s)}. \quad (4.25)$$

$D_{\text{pol}}$ , which is a new term compared with the two-level atom case, is then found to be equal to  $D_{\text{vac}}$ ; in particular, it saturates, when  $s$  increases, to the value  $0.25 \hbar^2 k^2 \Gamma$ .

#### 4.5. Corpuscular interpretation of the diffusion coefficients in the case of plane waves

In the case of plane  $\sigma_+$  and  $\sigma_-$  waves, one can give a simple corpuscular interpretation of  $D_{\text{vac}}$  and  $D_{\text{pol}}$  ( $D_{\text{int}}$  vanishes). The atomic motion can in this case be described as

a pure random walk in  $p$  space. The variation  $\Delta p$  of the atomic momentum during a time  $\Delta T$  can be written

$$\Delta p = - \sum_{i=1}^{N_+ + N_-} \hbar k_i + (N_+ - N_-) \hbar k \quad (4.26)$$

where  $N_+$  ( $N_-$  respectively) is the number of photons absorbed in the  $\sigma_+$  ( $\sigma_-$  respectively) wave, and  $\hbar k_i$  the momentum of the  $i$ th fluorescence photon. The mean value of  $\Delta p$  is zero, since  $\overline{N_+} = \overline{N_-}$  and  $\overline{k_i} = 0$ . The variance  $\overline{\Delta p^2}$  is:

$$\overline{\Delta p^2} = \hbar^2 k^2 (\overline{N_+ + N_-}) + \hbar^2 k^2 (\overline{N_+ - N_-})^2 \quad (4.27)$$

where we have used the fact that the momentum  $\hbar k_i$  of a given fluorescence photon is not correlated to the momentum of the other fluorescence photons, nor to the numbers  $N_+$  and  $N_-$ . Expression (4.27) leads to the momentum diffusion coefficient  $D$ :

$$D = \frac{\overline{\Delta p^2}}{2\Delta T} = \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \frac{\overline{N_+ + N_-}}{\Delta T} + \frac{1}{2} \hbar^2 k^2 \frac{(\overline{N_+ - N_-})^2}{\Delta T}. \quad (4.28)$$

The first contribution to  $D$  can be identified with  $D_{vac}$ : it describes the fluctuations of the momentum carried away by the fluorescence photons ( $\overline{N_+ + N_-}/T$  is identical to the rate of emission  $\mathcal{N}$  appearing in (4.11)).

The second term of (4.28), corresponding to  $D_{pol}$ , describes the fluctuations of the difference  $N_+ - N_-$  between the number of photons absorbed in each wave. Remark now that there is no correlation between the polarisations ( $\sigma_+$  or  $\sigma_-$ ) associated with two successive absorption-emission cycles: after the emission of a  $\sigma_+$  photon for example, the atom has the same probability of absorbing either a  $\sigma_+$  photon or a  $\sigma_-$  one. It follows that the probability  $P(N_+, N_-)$  for finding a realisation  $(N_+, N_-)$  is simply related to the probability  $P(N_+ + N_-)$  for finding a total number  $N_+ + N_-$  of emitted photons:

$$P(N_+, N_-) = \frac{(N_+ + N_-)!}{2^{N_+ + N_-} N_+! N_-!} P(N_+ + N_-). \quad (4.29)$$

One then deduces from (4.29):

$$\overline{(N_+ - N_-)^2} = \overline{N_+ + N_-}. \quad (4.30)$$

Consequently,  $D_{pol}$  is equal to  $D_{vac}$  (see (4.11) and (4.25)).

*Note:* The result (4.30) is the same as if  $N_+$  and  $N_-$  were independent Poisson variables. Actually, this is not the case since:

$$\overline{\Delta(N_+ + N_-)^2} = (1 + Q) \overline{N_+ + N_-}. \quad (4.31)$$

The factor  $Q$ , which expresses the non-Poisson character of the distribution of the total number of fluorescence photons, has the same value as for the two-level atom (Mandel 1979, Smirnov and Troshin 1979, 1981, Cook 1981b, Reynaud 1983, Stenholm 1983).

## 5. Implications for optical trapping

We have presented in this paper a new laser configuration, which appears very well adapted for the trapping of neutral atoms. We have calculated the optical depth for

such a configuration (§ 3.1) and optimised it, the best parameters being  $s_m = 4$ , and a laser intensity as large as possible. We have also derived the expression of the total diffusion coefficient which appears to be, for these optimal values:

$$D \approx 0.4 \hbar^2 k^2 \Gamma + D_{\text{int}} \quad (5.1)$$

where  $D_{\text{int}}$ , using the laser waist  $w_0$ , can be overestimated after some algebra by:

$$D_{\text{int}} \leq \hbar^2 \frac{1}{w_0^2} \frac{\delta^2}{\Gamma}. \quad (5.2)$$

The first term of (5.1) appears as 'incompressible' since it only depends on  $k$  and  $\Gamma$ . On the contrary,  $D_{\text{int}}$  can be reduced as much as wanted, since we can control the intensity gradients in the trap. The optimal situation corresponds to the case where  $D_{\text{int}}$  is of the order of the first term of (5.1). Let us give a numerical example for ytterbium atoms, excited on the intercombination line  $^1S-^3P$  at 556 nm. The spontaneous emission rate for this transition is  $\Gamma/2\pi = 0.2$  MHz. Assuming a laser power of 1 W, focused on 250  $\mu\text{m}$ , one then realises the condition  $s_m = 4$  by choosing a detuning  $\delta = 930 \Gamma$ , which leads to an optical well depth  $U_0 = 750 \hbar\Gamma$  (7 mK). The diffusion coefficient  $D_{\text{int}}$  is then  $0.1 \hbar^2 k^2 \Gamma$  so that the total coefficient is  $D = 0.5 \hbar^2 k^2 \Gamma$ . (For a standing-wave case, the diffusion coefficient would have been more than  $10^6$  times larger.) Of course this single  $\sigma_+ - \sigma_-$  configuration is not sufficient for achieving a stable trapping of neutral atoms, since the cooling properties of such beams optimised for trapping are very poor and will not compensate the heating due to diffusion (compare the present numerical values with the optimal ones for cooling (3.24)). However, we can finally mention that stable trapping can be achieved by alternating in time such trapping configurations with optimised cooling ones (Dalibard *et al* 1983a, b).

## References

- Arimondo E, Bambini A and Stenholm S 1981 *Phys. Rev. A* **24** 898-909  
 Ashkin A 1978 *Phys. Rev. Lett.* **40** 729-32  
 Bernhardt A F and Shore B W 1981 *Phys. Rev. A* **23** 1290-301  
 Cohen-Tannoudji C 1983 cours du Collège de France, Paris (unpublished)  
 Cohen-Tannoudji C and Reynaud S 1977 *J. Phys. B: At. Mol. Phys.* **10** 345-63  
 — 1978 *Multiphoton Processes* ed J H Eberly and P Lambropoulos (New York: Wiley) pp 103-18  
 Cook R J 1980a *Phys. Rev. Lett.* **44** 976-9  
 — 1980b *Phys. Rev. A* **22** 1078-98  
 — 1981a *Comment. At. Mol. Phys.* **10** 267-77  
 — 1981b *Phys. Rev. A* **23** 1243-50  
 Dalibard J and Cohen-Tannoudji C 1984 to be published  
 Dalibard J, Reynaud S and Cohen-Tannoudji C 1983a *Opt. Commun.* **47** 395-9  
 — 1983b *Proc. Laser 83* to be published  
 Gordon J P and Ashkin A 1980 *Phys. Rev. A* **21** 1606-17  
 Kazantsev A P, Surdovich G I and Yakovlev V P 1981 *J. Physique* **42** 1231-7  
 Lax M 1968 *Phys. Rev.* **172** 350-61  
 Letokhov V S and Minogin V G 1978 *Appl. Phys.* **17** 99-103  
 — 1981 *Phys. Rep.* **73** 1-65  
 Letokhov V S, Minogin V G and Pavlik B D 1977 *Sov. Phys.-JETP* **45** 698-705  
 Louisell W H 1973 *Quantum Statistical Properties of Radiation* (New York: Wiley)  
 Mandel L 1979 *Opt. Lett.* **4** 205-7



- Minogin V G 1981a *Sov. Phys.-JETP* 53 1164-70  
— 1981b *Opt. Commun.* 37 442-6  
Minogin V G and Serimaa O T 1979 *Opt. Commun.* 30 373-9  
Mollow B 1975 *Phys. Rev. A* 12 1919-43  
Reynaud S 1983 *Ann. Phys., Paris* 8 315-70  
Smirnov D F and Troshin A S 1979 *Sov. Phys.-JETP* 49 636-7  
— 1981 *Sov. Phys.-JETP* 54 848-51  
Stenholm S 1983 *Phys. Rev. A* 27 2513-22  
Tanguy C 1983 *Thèse de 3<sup>e</sup> cycle* Paris (unpublished)

APPENDICE N° 2

DE LA PARTIE C

Reprinted from *Journal of the Optical Society of America B*, Vol. 2, page 1707, November 1985  
Copyright © 1985 by the Optical Society of America and reprinted by permission of the copyright owner.

# Dressed-atom approach to atomic motion in laser light: the dipole force revisited

J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji

*Collège de France and Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'École Normale Supérieure [Laboratoire Associé au Centre National de la Recherche Scientifique (LA 18)], 24 rue Lhomond, F 75231 Paris Cedex 05, France*

Received March 28, 1985; accepted June 6, 1985

We show that the dressed-atom approach provides a quantitative understanding of the main features of radiative dipole forces (mean value, fluctuations, velocity dependence) in the high-intensity limit where perturbative treatments are no longer valid. In an inhomogeneous laser beam, the energies of the dressed states vary in space, and this gives rise to dressed-state-dependent forces. Spontaneous transitions between dressed states lead to a multivalued instantaneous force fluctuating around a mean value. The velocity dependence of the mean force is related to the modification, induced by the atomic motion, of the population balance between the different dressed states. The corresponding modification of the atomic energy is associated with a change of the fluorescence spectrum emitted by the atom. The particular case of atomic motion in a standing wave is investigated, and two regimes are identified in which the mean dipole force averaged over a wavelength exhibits a simple velocity dependence. The large values of this force achievable with reasonable laser powers are pointed out with view to slowing down atoms with dipole forces.

## INTRODUCTION

Absorption and emission of photons by an atom irradiated by a resonant or quasi-resonant laser beam give rise to a variation of the atomic momentum that can be analyzed, for time scales longer than the radiative lifetime, in terms of radiative forces fluctuating around a mean value.<sup>1-3</sup>

For an atom at rest or slowly moving, the mean radiative force is usually split into two parts<sup>1,2</sup>: The first part is related to the phase gradient of the laser wave (and to the quadrature part of the atomic dipole) and is called radiation pressure. The second one, related to the intensity gradient of the laser (and to the in-phase atomic dipole), is called dipole force.

The radiation-pressure force is now well understood, and its various features, such as velocity dependence and momentum diffusion, have been analyzed in detail in terms of cycles involving absorption of laser photons and spontaneous emission of fluorescence photons.<sup>1,2,4-6</sup>

The dipole force, on the other hand, is due to redistribution of photons among the various plane waves forming the light wave, using absorption-stimulated emission cycles.<sup>1,2,7,8</sup> Unfortunately, this interpretation does not give a physical account for some characteristics of the dipole force, especially at high intensity. Consider, for example, the problem of atomic motion in a standing wave formed by two counterpropagating plane waves. At low intensity, one finds that the dipole force averaged over a wavelength is just the sum of the radiation pressures of the two running waves.<sup>5,9</sup> In particular, the force is a damping one for negative detuning (laser frequency lower than atomic frequency), and this is easily understood when one considers that, owing to the Doppler effect, a moving atom "sees" the counterpropagating running wave more than the other one; it therefore

experiences a force opposed to its velocity (usual radiative cooling). At high intensity, however, this conclusion is reversed<sup>1,10,11</sup>: One finds that the force heats the atoms for a negative detuning and cools them for a positive one. Such a surprising result has not yet been interpreted physically.

The purpose of this paper is to present precisely for the high-intensity domain a new theoretical treatment of the dipole force that will allow us to give a physical interpretation for such unexpected features. This treatment is based on the dressed-atom approach that has been already applied with success to the physical interpretation of resonance fluorescence in the saturation regime.<sup>14-16</sup>

The fact that the dressed-atom approach is well adapted to the high-intensity limit can be easily understood. When the Rabi frequency  $\omega_1$  characterizing the strength of the laser atom coupling is large compared with the spontaneous damping rate  $\Gamma$ , it is a good approximation to consider first the energy levels of the combined system: atom and laser photons interacting together (dressed states). Then, in a second step, we can take into account the effect of spontaneous emission (coupling with all other empty modes of the radiation field), which can be described as a radiative-relaxation mechanism inducing, for example, population transfers between the dressed states with well-defined rates.

The case of an atom moving in an inhomogeneous laser beam raises new interesting questions. The Rabi frequency  $\omega_1$  then varies in space, since it is proportional to the position-dependent laser amplitude. It follows that the energy of the dressed states is now a function of  $r$ , so that it is possible to define for each dressed state a force equal to minus the gradient of the energy of this state. As in the Stern-Gerlach effect, we can introduce a force that depends on the internal state of the dressed atom. Is the dipole force

connected with such dressed-state-dependent forces? Is it possible with such an approach to build a clear physical picture of dipole forces and to derive quantitative expressions for their main features: mean values, fluctuations, velocity dependence? This is the problem that we want to address in this paper.

The paper is organized as follows: In Section 1, we present our notations. The dressed-atom approach is introduced in Section 2. Section 3 is devoted to the calculation of the mean dipole force and of its velocity dependence. We then calculate in Section 4 the momentum diffusion coefficient induced by the fluctuations of the dipole force. Finally, in Section 5, we investigate the particular case of atoms moving in a standing wave, and we compare our results with previous ones.

## 1. NOTATIONS AND ASSUMPTIONS

The total Hamiltonian is the sum of three parts:

$$H = H_A + H_R + V, \quad (1.1)$$

where  $H_A$  is the atomic Hamiltonian,  $H_R$  the Hamiltonian of the radiation field, and  $V$  the atom-field coupling.  $H_A$  is the sum of the kinetic and the internal energies of the atom considered here as a two-level system:

$$H_A = \frac{\mathbf{P}^2}{2m} + \hbar\omega_0 b^\dagger b. \quad (1.2)$$

$\omega_0$  is the atomic resonance frequency and  $b$  and  $b^\dagger$  the lowering and raising operators:

$$b = |g\rangle\langle e|, \quad b^\dagger = |e\rangle\langle g| \quad (1.3)$$

( $|g\rangle$  is the atomic ground level and  $|e\rangle$  the excited one). The electromagnetic field is quantized on a complete set of orthonormal field distributions  $\mathcal{E}_\lambda(\mathbf{r})$ , one among which corresponds to the laser field  $\mathcal{E}_L(\mathbf{r})$ . The Hamiltonian  $H_R$  of the free radiation field is then

$$H_R = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda, \quad (1.4)$$

where  $a_\lambda$  and  $a_\lambda^\dagger$  are, respectively, the destruction and the creation operators of a photon in the mode  $\lambda$ . The atom-field coupling  $V$  can be written in the electric-dipole and rotating-wave approximations as

$$V = -\mathbf{d} \cdot [b^\dagger \mathbf{E}^+(\mathbf{R}) + b \mathbf{E}^-(\mathbf{R})], \quad (1.5)$$

where  $\mathbf{d}$  is the atomic electric-dipole moment and  $\mathbf{E}^+(\mathbf{R})$  and  $\mathbf{E}^-(\mathbf{R})$  the positive and the negative frequency components of the electric field taken for the atomic position operator  $\mathbf{R}$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^+(\mathbf{R}) &= \sum_\lambda \mathcal{E}_\lambda(\mathbf{R}) a_\lambda, \\ \mathbf{E}^-(\mathbf{R}) &= \sum_\lambda \mathcal{E}_\lambda^*(\mathbf{R}) a_\lambda^\dagger. \end{aligned} \quad (1.6)$$

We shall use here a semiclassical approximation in the treatment of the atomic motion, by replacing the atomic position operator  $\mathbf{R}$  by its average value  $\langle \mathbf{R} \rangle = \mathbf{r}$  in expressions such as  $\mathcal{E}_L(\mathbf{R})$ . This is valid as soon as the extension  $\Delta r$  of the atomic wave packet is small compared with the laser wavelength  $\lambda$ , scale of variation of  $\mathcal{E}_L$ :

$$\Delta r \ll \lambda. \quad (1.7)$$

On the other hand, we shall also require the atomic velocity to be known with a good accuracy, such that the Doppler-effect dispersion  $k\Delta v$  is small compared with the natural linewidth  $\Gamma$  of the excited level:

$$k\Delta v \ll \Gamma. \quad (1.8)$$

Note that, because of Heisenberg inequality:

$$m\Delta r\Delta v \gtrsim \hbar, \quad (1.9)$$

inequalities (1.7) and (1.8) are compatible only if

$$\frac{\hbar^2 k^2}{2m} \ll \hbar\Gamma. \quad (1.10)$$

We shall suppose that inequality (1.10) is satisfied throughout this paper. Note that it is then possible to show<sup>12</sup> that the forces and the diffusion coefficients calculated semiclassically, as is done here, are identical to the ones appearing in a fully quantum treatment of the atomic motion.<sup>3,4,12,13</sup>

## 2. DRESSED-ATOM APPROACH

The semiclassical approximation leads to expressions for the forces and the diffusion coefficients that are average values of products involving internal atomic operators and field operators taken at the center of the atomic wave packet  $\mathbf{r}$  (see Section 3). The usual method for calculating these average values is to start from optical Bloch equations (OBE's) for an atom at point  $\mathbf{r}$  and to extract from their steady-state solution the required quantities. This method is in theory simple, but it does not lead to any physical picture concerning the dipole force and its velocity dependence.

The dressed-atom approach used in this paper treats the atom-field coupling in a different way.<sup>14-16</sup> We first diagonalize the Hamiltonian of the coupled system (atom + laser photons) and obtain in this way the so-called dressed states. We then take into account the coupling of the dressed atom with the empty modes of the electromagnetic field that is responsible for spontaneous emission of fluorescence photons. Note that, as when one uses OBE's, this treatment is done at a given point  $\mathbf{r}$ , i.e., we omit in this section the kinetic energy term  $\mathbf{P}^2/2m$  in  $H_A$  [Eq. (1.2)].

### A. Position-Dependent Dressed States

Let us start with the dressed-atom Hamiltonian at point  $\mathbf{r}$ ,  $H_{DA}(\mathbf{r})$ , which is the sum of the atomic internal energy, the laser mode energy, and the atom-laser mode coupling:

$$\begin{aligned} H_{DA}(\mathbf{r}) &= \hbar(\omega_L - \delta)b^\dagger b + \hbar\omega_L a_L^\dagger a_L \\ &\quad - [\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_L(\mathbf{r})b^\dagger a_L + \mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_L^*(\mathbf{r})b a_L^\dagger], \end{aligned} \quad (2.1)$$

where we have introduced the detuning  $\delta$  between the laser and the atomic frequencies:

$$\delta = \omega_L - \omega_0 \ll \omega_L, \omega_0. \quad (2.2)$$

If the atom-laser mode coupling is not taken into account ( $\mathbf{d} = \mathbf{0}$ ), the eigenstates of the dressed Hamiltonian are bunched in manifolds  $\mathcal{E}_n$  (Fig. 1a),  $n$  integer, separated by the energy  $\hbar\omega_L$ , each manifold consisting of the two states  $|g, n+1\rangle$  and  $|e, n\rangle$  (atom in the internal state  $g$  or  $e$  in the

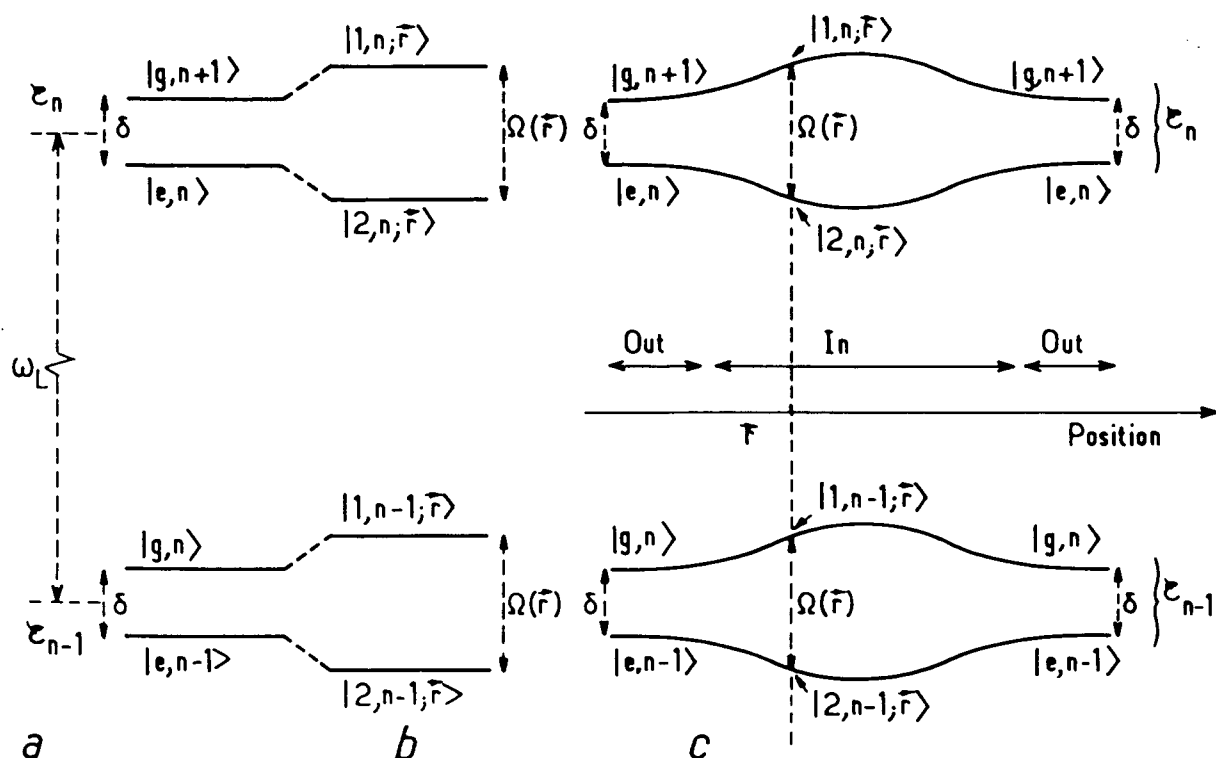


Fig. 1. Dressed-atom energy diagram. a, States of the combined atom-laser mode system without coupling, bunched in well-separated two-dimensional manifolds. b, Dressed states in a given point  $r$ . The laser-atom coupling produces a  $r$ -dependent splitting  $\Omega(r)$  between the two dressed states of a given manifold. c, Variation across the laser beam of the dressed-atom energy levels. The energy splitting and the wave functions both depend on  $r$ . Out of the laser beam, the energy levels connect with the uncoupled states of a.

presence of  $n + 1$  or  $n$  laser photons). The atom-laser coupling connects only the two states of a given manifold (transition from  $g$  to  $e$  with the absorption of one laser photon), and it can be characterized by the phase  $\varphi(r)$  and the Rabi frequency  $\omega_1(r)$  (real) defined by

$$\frac{2}{\hbar} \langle e, n | V | g, n + 1 \rangle = -2\sqrt{n+1} \frac{\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_L(\mathbf{r})}{\hbar} = \omega_1(\mathbf{r}) \exp[i\varphi(\mathbf{r})]. \quad (2.3)$$

Note that  $\omega_1(r)$  actually depends on the number  $n$  of photons in the manifold, but we shall neglect this dependence by supposing that the laser beam is initially excited in a coherent state with a Poisson distribution for  $n$ , the width  $\Delta n$  of which is very small compared with the average number of photons.

At this approximation, we then find a periodic energy diagram for  $H_{DA}$  when we take the atom-laser coupling into account (Fig. 1b). The new eigenenergies for the manifold  $\mathcal{E}_n$  are

$$E_{1n}(\mathbf{r}) = (n+1)\hbar\omega_L - \frac{\hbar\delta}{2} + \frac{\hbar\Omega(\mathbf{r})}{2},$$

$$E_{2n}(\mathbf{r}) = (n+1)\hbar\omega_L - \frac{\hbar\delta}{2} - \frac{\hbar\Omega(\mathbf{r})}{2}, \quad (2.4)$$

with

$$\Omega(\mathbf{r}) = \{\omega_1^2(\mathbf{r}) + \delta^2\}^{1/2}, \quad (2.5)$$

and the corresponding eigenvectors (dressed states) can be written as

$$|1, n; \mathbf{r}\rangle = \exp[i\varphi(\mathbf{r})/2] \cos \theta(\mathbf{r}) |e, n\rangle + \exp[-i\varphi(\mathbf{r})/2] \sin \theta(\mathbf{r}) |g, n+1\rangle,$$

$$|2, n; \mathbf{r}\rangle = -\exp[i\varphi(\mathbf{r})/2] \sin \theta(\mathbf{r}) |e, n\rangle + \exp[-i\varphi(\mathbf{r})/2] \cos \theta(\mathbf{r}) |g, n+1\rangle, \quad (2.6)$$

where the angle  $\theta(r)$  is defined by

$$\cos 2\theta(\mathbf{r}) = -\delta/\Omega(\mathbf{r}), \quad \sin 2\theta(\mathbf{r}) = \omega_1(\mathbf{r})/\Omega(\mathbf{r}). \quad (2.7)$$

The important point is that, in an inhomogeneous laser beam, these energies and eigenstates will vary with the position  $r$ . In Fig. 1c, we have represented the variation of the energy levels across a Gaussian laser beam: Out of the beam, the dressed levels coincide with the bare ones, and their splitting in a manifold is just  $\hbar\delta$ . Inside the beam, each dressed level is a linear superposition of  $|g, n+1\rangle$  and  $|e, n\rangle$ , and the splitting between the two dressed states of a given manifold is now  $\hbar\Omega(r)$ , larger than  $\hbar\delta$ .

### B. Effect of Spontaneous Emission

We now take into account the coupling of the dressed atom with the empty modes, responsible for spontaneous emission of fluorescence photons. The emission frequencies correspond to transitions allowed between dressed levels, i.e., to transitions between states connected by a nonzero matrix element of the atomic dipole. In the uncoupled basis, the only transition allowed is from  $|e, n\rangle$  to  $|g, n\rangle$ . In the coupled basis, we find transitions from the two dressed states of  $\mathcal{E}_n$  [both contaminated by  $|e, n\rangle$ , see Eqs. (2.6)] to the two dressed states of  $\mathcal{E}_{n-1}$  (both contaminated by  $|g, n\rangle$ ), and the dipole matrix element  $d_{ij}(r)$  between  $|j, n; \mathbf{r}\rangle$  and  $|i, n-1; \mathbf{r}\rangle$  is given by [cf Eqs. (2.6)]

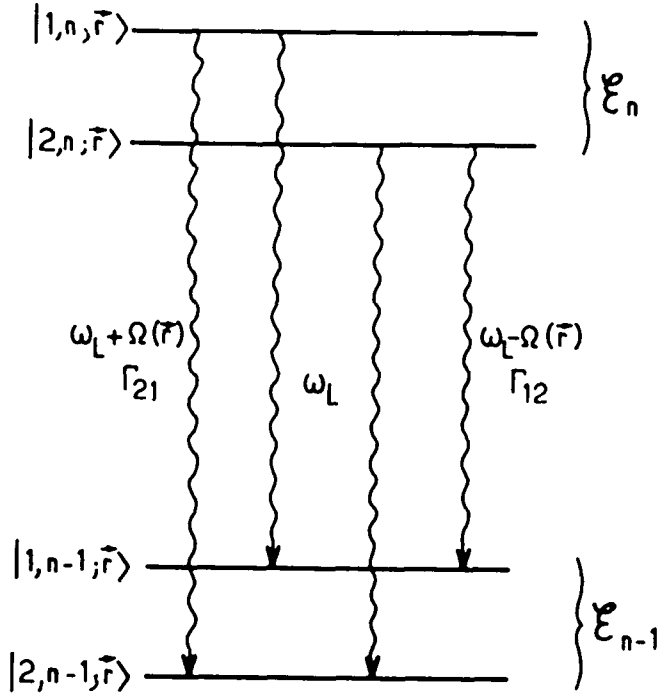


Fig. 2. Spontaneous radiative transitions between two adjacent manifolds, giving rise to the three components of the fluorescence spectrum with frequencies  $\omega_L + \Omega$ ,  $\omega_L$ ,  $\omega_L - \Omega$ .  $\Gamma_{ji}$  is the transition rate from a level  $i$  to a level  $j$ .

$$\begin{aligned} \mathbf{d}_{ij}(\mathbf{r}) &= \langle i, n-1; \mathbf{r} | \mathbf{d}(b + b^\dagger) | j, n; \mathbf{r} \rangle, \\ \mathbf{d}_{11} &= -\mathbf{d}_{22} = \mathbf{d} \cos \theta \sin \theta e^{i\varphi}, \\ \mathbf{d}_{12} &= -\mathbf{d} e^{i\varphi} \sin^2 \theta, \quad \mathbf{d}_{21} = \mathbf{d} e^{i\varphi} \cos^2 \theta. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Three different frequencies correspond to these four transitions allowed (Fig. 2):  $\omega_L + \Omega(\mathbf{r})$  for  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  to  $|2, n-1; \mathbf{r}\rangle$ ,  $\omega_L - \Omega(\mathbf{r})$  for  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  to  $|1, n-1; \mathbf{r}\rangle$ , and  $\omega_L$  for  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  to  $|1, n-1; \mathbf{r}\rangle$  and  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  to  $|2, n-1; \mathbf{r}\rangle$ . We interpret simply in this way the triplet structure of the fluorescence spectrum.<sup>17</sup>

It is now possible to write a master equation<sup>14-16</sup> for the density matrix  $\rho$  of the dressed atom at a given point  $\mathbf{r}$ . This equation describes both the internal free evolution of the dressed atom (atom-laser coupling) and the relaxation that is due to the atom-vacuum coupling, which causes, through the transitions  $\mathcal{E}_n \rightarrow \mathcal{E}_{n-1} \rightarrow \dots$ , a cascade of the dressed atom down its energy diagram. Actually, in this paper, we shall need not this complete master equation but only the evolution of the four reduced populations and coherences  $\Pi_i(\mathbf{r})$  and  $\rho_{ij}(\mathbf{r})$  defined by

$$\Pi_i(\mathbf{r}) = \sum_n \langle i, n; \mathbf{r} | \rho | i, n; \mathbf{r} \rangle, \quad (2.9a)$$

$$\rho_{ij}(\mathbf{r}) = \sum_n \langle i, n; \mathbf{r} | \rho | j, n; \mathbf{r} \rangle. \quad (2.9b)$$

Furthermore, we shall restrict ourselves in the following to the limit of well-resolved lines:

$$\Omega(\mathbf{r}) \gg \Gamma, \quad (2.10)$$

which means either intense fields ( $|\omega_1(\mathbf{r})| \gg \Gamma$ ) or large detunings ( $|\delta| \gg \Gamma$ ). In such a case, a secular approximation can be made that greatly simplifies the relaxation part of the

master equation. For a fixed point  $\mathbf{r}$ , one then finds for the evolution of  $\Pi_1$  and  $\Pi_2$  that

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1(\mathbf{r}) &= -\Gamma_{21}(\mathbf{r})\Pi_1(\mathbf{r}) + \Gamma_{12}(\mathbf{r})\Pi_2(\mathbf{r}), \\ \dot{\Pi}_2(\mathbf{r}) &= \Gamma_{21}(\mathbf{r})\Pi_1(\mathbf{r}) - \Gamma_{12}(\mathbf{r})\Pi_2(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.11)$$

where the rates of transfer  $\Gamma_{ij}$  from  $j$  to  $i$  are proportional to the squares of the dipole matrix elements  $d_{ij}$ 's:

$$\Gamma_{12}(\mathbf{r}) = \Gamma \sin^4 \theta(\mathbf{r}), \quad \Gamma_{21}(\mathbf{r}) = \Gamma \cos^4 \theta(\mathbf{r}). \quad (2.12)$$

Since each transition  $1 \rightarrow 2$  or  $2 \rightarrow 1$  corresponds to the emission of a photon  $\omega_L + \Omega$  or  $\omega_L - \Omega$ ,  $\Gamma_{21}\Pi_1$  and  $\Gamma_{12}\Pi_2$  represent, respectively, the number of photons emitted per unit time in the sidebands  $\omega_L + \Omega$  and  $\omega_L - \Omega$ . For a fixed point  $\mathbf{r}$ , the evolution of  $\rho_{12}$  and  $\rho_{21}$  is given by

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12}(\mathbf{r}) &= [-i\Omega(\mathbf{r}) - \Gamma_{\text{coh}}(\mathbf{r})]\rho_{12}(\mathbf{r}), \\ \dot{\rho}_{21}(\mathbf{r}) &= [i\Omega(\mathbf{r}) - \Gamma_{\text{coh}}(\mathbf{r})]\rho_{21}(\mathbf{r}), \end{aligned} \quad (2.13)$$

with

$$\Gamma_{\text{coh}}(\mathbf{r}) = \Gamma \left[ \frac{1}{2} + \cos^2 \theta(\mathbf{r}) \cdot \sin^2 \theta(\mathbf{r}) \right]. \quad (2.14)$$

The steady-state solution of Eqs. (2.11) and (2.13) is

$$\begin{aligned} \Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r}) &= \frac{\Gamma_{12}(\mathbf{r})}{\Gamma_{12}(\mathbf{r}) + \Gamma_{21}(\mathbf{r})} = \frac{\sin^4 \theta(\mathbf{r})}{\sin^4 \theta(\mathbf{r}) + \cos^4 \theta(\mathbf{r})}, \\ \Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r}) &= \frac{\Gamma_{21}(\mathbf{r})}{\Gamma_{12}(\mathbf{r}) + \Gamma_{21}(\mathbf{r})} = \frac{\cos^4 \theta(\mathbf{r})}{\sin^4 \theta(\mathbf{r}) + \cos^4 \theta(\mathbf{r})}, \\ \rho_{12}^{\text{st}}(\mathbf{r}) &= \rho_{21}^{\text{st}}(\mathbf{r}) = 0. \end{aligned} \quad (2.15)$$

It is reached with a rate  $\Gamma_{\text{coh}}(\mathbf{r})$  for the coherences  $\rho_{ij}$  and with a rate

$$\Gamma_{\text{pop}}(\mathbf{r}) = \Gamma_{12}(\mathbf{r}) + \Gamma_{21}(\mathbf{r}) = \Gamma [\cos^4 \theta(\mathbf{r}) + \sin^4 \theta(\mathbf{r})] \quad (2.16)$$

for the populations  $\Pi_i$ , since Eqs. (2.11) can be rewritten, using Eqs. (2.15) and  $\Pi_1 + \Pi_2 = 1$ , as

$$\dot{\Pi}_i(\mathbf{r}) = -\Gamma_{\text{pop}}(\mathbf{r})[\Pi_i(\mathbf{r}) - \Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})]. \quad (2.17)$$

Note, finally, that in steady state we have, according to Eqs. (2.11),  $\Gamma_{21}\Pi_1^{\text{st}} = \Gamma_{12}\Pi_2^{\text{st}}$ , so that equal numbers of photons are emitted in the two sidebands  $\omega_L \pm \Omega$ . Furthermore, one can show that the two sidebands have the same width, given by Eq. (2.14). It follows that, in steady state, the fluorescence spectrum is symmetric.<sup>17</sup>

### C. Effect of Atomic Motion

If the point  $\mathbf{r}$  varies with time (case of a moving atom), it is still possible to obtain the evolution of the  $\Pi_i$ 's and  $\rho_{ij}$ 's. The master equation must be modified to take into account the time dependence of  $|i, n; \mathbf{r}(t)\rangle$  and  $|j, n; \mathbf{r}(t)\rangle$  in Eqs. (2.9). Using

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_i(\mathbf{r}) &= \sum_n \langle i, n; \mathbf{r} | \dot{\rho} | i, n; \mathbf{r} \rangle + \overline{\langle i, n; \mathbf{r} | \rho | i, n; \mathbf{r} \rangle} \\ &\quad + \langle i, n; \mathbf{r} | \rho | \dot{i}, n; \mathbf{r} \rangle \end{aligned} \quad (2.18)$$

with

$$|i, n; \mathbf{r}\rangle = \mathbf{v} \cdot \nabla |i, n; \mathbf{r}\rangle \quad (2.19)$$

and coming back to the definitions (2.6) of  $|i, n; \mathbf{r}\rangle$ , one obtains, for example,

$$\begin{aligned} \dot{\Pi}_1 &= -\Gamma_{\text{pop}}(\Pi_1 - \Pi_1^{\text{st}}) + \mathbf{v} \cdot \nabla \Omega(\rho_{12} + \rho_{21}) \\ &\quad + i\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \sin \theta \cos \theta (\rho_{21} - \rho_{12}), \end{aligned} \quad (2.20a)$$

$$\begin{aligned} \dot{\rho}_{12} &= -[i(\Omega + \mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \cos 2\theta) + \Gamma_{\text{coh}}]\rho_{12} \\ &\quad + [\mathbf{v} \cdot \nabla \Omega + i\mathbf{v} \cdot \nabla \varphi \sin \theta \cos \theta](\Pi_2 - \Pi_1). \end{aligned} \quad (2.20b)$$

The variation  $d\Pi_i = \dot{\Pi}_i dt$  of  $\Pi_i$  during the time  $dt$  now appears from Eq. (2.20a) as the sum of two terms:

$$d\Pi_i = (d\Pi_i)_{\text{Rad}} + (d\Pi_i)_{\text{NA}}. \quad (2.21)$$

$(d\Pi_i)_{\text{Rad}}$  corresponds to the modification of  $\Pi_i$  that is due to radiative relaxation through spontaneous emission:

$$(d\Pi_i)_{\text{Rad}} = -\Gamma_{\text{pop}}(\Pi_i - \Pi_i^{\text{st}}). \quad (2.22)$$

Such a term already appeared for an atom at rest [cf. Eq. (2.17)].  $(d\Pi_i)_{\text{NA}}$ , on the other hand, represents the contribution of the two terms proportional to the atomic velocity:

$$\begin{aligned} (d\Pi_1)_{\text{NA}} &= v dt \cdot [\nabla \Omega(\rho_{12} + \rho_{21}) + i \sin \theta \cos \theta \nabla \varphi (\rho_{21} - \rho_{12})] \\ &= -(d\Pi_2)_{\text{NA}}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

This modification of the dressed populations, induced by the atomic motion, is due to the spatial variation of the dressed levels: We shall call this term nonadiabatic (NA) kinetic coupling since it describes the possibility for a moving atom initially on a level  $|i, n; \mathbf{r}(0)\rangle$  to reach, in the absence of spontaneous emission, the other level  $|j, n; \mathbf{r}(t)\rangle$  ( $j \neq i$ ), instead of following adiabatically  $|i, n; \mathbf{r}(t)\rangle$ . Let us take, for example, the case of an atom that goes from the antinode to the node of a standing wave and that thus experiences a rapid change of the dressed levels, and let us give an order of magnitude of the velocity  $v$  for which this NA coupling becomes important. The probability  $p_{i \rightarrow j}$  for a NA transition from  $|i, n; \mathbf{r}\rangle$  to  $|j, n; \mathbf{r}\rangle$  is overestimated by (see Ref. 18)

$$p_{i \rightarrow j} \lesssim \sup \left\{ \frac{| \langle j, n; \mathbf{r}(t) | \dot{i}, n; \mathbf{r}(t) \rangle |^2 }{|\omega_{ij}(t)|^2} \right\}. \quad (2.24)$$

$\omega_{ij}(t)$  is the Bohr frequency between levels  $i$  and  $j$  at time  $t$  equal to  $\pm \Omega[\mathbf{r}(t)]$ . On the other hand, using expression (2.6) for the dressed levels, we obtain ( $\varphi$  constant)

$$| \dot{i}, n; \mathbf{r}(t) \rangle = \pm \mathbf{v} \cdot \nabla |j, n; \mathbf{r}(t)\rangle, \quad (2.25)$$

and Eqs. (2.7) give for  $\nabla \Omega$

$$\nabla \Omega = \frac{-\delta \nabla \omega_1}{2(\delta^2 + \omega_1^2)}. \quad (2.26)$$

In a standing wave,  $\omega_1$  varies as  $\omega_1(\mathbf{r}) = \bar{\omega}_1 \cos \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}$  so that

$$|\nabla \Omega| = \frac{k}{2} \left| \frac{\delta \bar{\omega}_1 \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}{\delta^2 + \bar{\omega}_1^2 \cos^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \right| \leq \frac{k}{2} \left| \frac{\bar{\omega}_1}{\delta} \right| \quad (2.27)$$

and

$$p_{i \rightarrow j} \lesssim \left( \frac{kv}{2} \right)^2 \frac{|\delta \bar{\omega}_1 \sin \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}|^2}{|\delta^2 + \bar{\omega}_1^2 \cos^2 \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}|^3} \lesssim \left| \frac{kv}{2} \cdot \frac{\bar{\omega}_1}{\delta} \right|^2. \quad (2.28)$$

The effect of this NA coupling, which is maximal at the nodes of the standing wave, is negligible compared with the transfer by spontaneous emission (smaller than  $\Gamma\lambda/2v$ ) when

$$kv \ll kv_{cr} = (2\Gamma\delta^4/\bar{\omega}_1^2)^{1/3}. \quad (2.29)$$

Note that for a resonant wave ( $\delta = 0$ ),  $\nabla \Omega$  is zero [see Eq. (2.26)] so that the adiabatic approximation holds for any velocity.

### 3. MEAN DIPOLE FORCE $\mathbf{f}_{\text{dip}}$

#### A. Expression of $\mathbf{f}_{\text{dip}}$ in Terms of Dressed States

As usual in semiclassical theory, we start, according to the Heisenberg point of view, from the equation of motion of the atomic momentum  $\mathbf{P}$ . The force operator  $\mathbf{F}$  is defined as the time derivative of  $\mathbf{P}$ :

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{P}}{dt} = \frac{i}{\hbar} [H, \mathbf{P}] = -\nabla_{\mathbf{R}} H = -\nabla_{\mathbf{R}} V. \quad (3.1)$$

In the semiclassical treatment followed here, we replace in  $\nabla_{\mathbf{R}} H$  the position operator  $\mathbf{R}$  by its average value  $\mathbf{r}$ . Furthermore, we are interested in the average  $\mathbf{f}$  of  $\mathbf{F}$  over both field and internal atomic states:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \langle \mathbf{F}(\langle \mathbf{R} \rangle) \rangle. \quad (3.2)$$

In such an average, the contribution of empty modes in Eq. (3.1) vanishes, and the average force is related only to the gradient of the atom-laser mode coupling:

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \langle b^+ a_L \nabla [\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_L(\mathbf{r})] + b a_L^+ \nabla [\mathbf{d} \cdot \mathcal{E}_L^*(\mathbf{r})] \rangle. \quad (3.3)$$

Using Eq. (2.3), this can be written as

$$\mathbf{f}(\mathbf{r}) = \frac{\hbar \omega_1}{2} i \nabla \varphi (\rho_{eg} e^{-i\varphi} - \rho_{ge} e^{i\varphi}) - \frac{\hbar \nabla \omega_1}{2} (\rho_{eg} e^{-i\varphi} + \rho_{ge} e^{i\varphi}), \quad (3.4)$$

where we have put

$$\begin{aligned} \rho_{eg} &= \sum_n \langle e, n | \rho | g, n+1 \rangle, \\ \rho_{ge} &= \sum_n \langle g, n+1 | \rho | e, n \rangle. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Expression (3.4) for  $\mathbf{f}(\mathbf{r})$  is well known. Its two parts are, respectively, the radiation-pressure term proportional to the gradient of the phase  $\varphi(\mathbf{r})$  and the dipole force proportional to the gradient of the Rabi frequency  $\omega_1(\mathbf{r})$ . As indicated in the Introduction, we are interested here in the dipole force, so we shall focus on this second term in all the following, and we shall omit all terms proportional to  $\nabla \varphi$ . Using expressions (2.6) for the dressed levels, the mean dipole force  $\mathbf{f}_{\text{dip}}$  can be written in the dressed-atom basis as

$$\mathbf{f}_{\text{dip}} = \frac{\hbar \nabla \Omega}{2} (\Pi_2 - \Pi_1) - \hbar \Omega \nabla \Omega (\rho_{12} + \rho_{21}). \quad (3.6)$$

#### B. Energy Balance in a Small Displacement

In order to get some physical insight into expression (3.6) of  $\mathbf{f}_{\text{dip}}$ , we now calculate the work  $dW$  that has to be provided for moving the dressed atom by a quantity  $d\mathbf{r}$ :

$$\begin{aligned} dW &= -\mathbf{f}_{\text{dip}} \cdot d\mathbf{r} \\ &= -\hbar \frac{\nabla\Omega}{2} \cdot d\mathbf{r}(\Pi_2 - \Pi_1) + \hbar\Omega\nabla\theta \cdot d\mathbf{r}(\rho_{12} + \rho_{21}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

The first term of this expression can be written simply as

$$-\frac{\hbar d\Omega}{2}(\Pi_2 - \Pi_1) = \sum_{i=1,2} \Pi_i dE_i, \quad (3.8)$$

where  $dE_i$  represents the change of energy of the dressed level  $|i, n; \mathbf{r}\rangle$  in the manifold  $\mathcal{E}_n$ :

$$\begin{aligned} E_1(\mathbf{r}) &= \frac{1}{2} \hbar\Omega(\mathbf{r}), \\ E_2(\mathbf{r}) &= -\frac{1}{2} \hbar\Omega(\mathbf{r}) = -E_1(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3.9)$$

[ $E_1$  and  $E_2$  are the deviations of  $E_{1n}$  and  $E_{2n}$  from  $(E_{1n} + E_{2n})/2$ , which is independent of  $\mathbf{r}$ —see Eqs. (2.4).] Using Eq. (2.23), we can reexpress the second term of Eq. (3.7) in terms of the NA change of  $\Pi_i$  in the displacement  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}dt$ :

$$\begin{aligned} \hbar\Omega\nabla\theta \cdot \mathbf{v}dt(\rho_{12} + \rho_{21}) &= \hbar\Omega(d\Pi_1)_{\text{NA}} = -\hbar\Omega(d\Pi_2)_{\text{NA}} \\ &= \frac{\hbar\Omega}{2} [(d\Pi_1)_{\text{NA}} - (d\Pi_2)_{\text{NA}}] = \sum_i E_i(d\Pi_i)_{\text{NA}}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Finally,  $dW$  can be written as

$$dW = \sum_{i=1,2} [\Pi_i dE_i + E_i(d\Pi_i)_{\text{NA}}]. \quad (3.11)$$

A first comment that can be made about Eq. (3.11) is that only NA changes of populations  $(d\Pi_i)_{\text{NA}}$  appear in  $dW$ . It follows that, if  $v$  is low enough, NA effects can be neglected [(see expression 2.29)], and we can keep only the first term of Eq. (3.11):

$$dW = \sum_i \Pi_i dE_i \quad \text{if} \quad v \ll v_{cr}. \quad (3.12)$$

Since  $(d\Pi_i)_{\text{NA}}$  is not equal to  $(d\Pi_i)$ , it is clear also from Eq. (3.11) that  $dW$  is *not* equal to the change of  $\sum_i E_i \Pi_i$ , which can be interpreted as the mean potential energy of the atom in the field. In other words, if we put

$$U_A = \sum_i E_i \Pi_i, \quad (3.13)$$

then

$$dW \neq dU_A. \quad (3.14)$$

In order to understand the physical meaning of the difference between  $dW$  and  $dU_A$ , we now add and subtract  $\sum_i E_i(d\Pi_i)_{\text{rad}}$  to the right-hand side of Eq. (3.11). Using Eqs. (2.21) and (3.13), we first obtain

$$dW = dU_A - \sum_i E_i(d\Pi_i)_{\text{rad}}. \quad (3.15)$$

Then, we use Eqs. (2.11) and (3.9) to transform the last term of Eq. (3.15), and, finally, we obtain

$$dW = dU_A + (\Gamma_{21}\Pi_1\hbar\Omega - \Gamma_{12}\Pi_2\hbar\Omega)dt. \quad (3.16)$$

We claim now that the last term of Eq. (3.16) is the energy change  $dU_F$  of the electromagnetic field (laser + fluores-

cence photons) during the time  $dt$  of the displacement  $d\mathbf{r}$ :

$$dU_F = (\Gamma_{21}\Pi_1\hbar\Omega - \Gamma_{12}\Pi_2\hbar\Omega)dt. \quad (3.17)$$

Such a result can be understood by considering that, during the time  $dt$ ,  $dn$  laser photons (energy  $\hbar\omega_L$ ) disappear, and  $dn$  fluorescence photons are emitted. Photons emitted on transitions  $|i, n; \mathbf{r}\rangle \rightarrow |i, n-1; \mathbf{r}\rangle$  can be omitted in the energy balance since they have the same energy  $\hbar\omega_L$  as laser photons. By contrast, photons emitted on transitions  $|1, n; \mathbf{r}\rangle \rightarrow |2, n-1; \mathbf{r}\rangle$  or  $|2, n; \mathbf{r}\rangle \rightarrow |1, n-1; \mathbf{r}\rangle$  have an energy  $\hbar\omega_L + \hbar\Omega$  or  $\hbar\omega_L - \hbar\Omega$ , and the emission of such photons changes the energy of the field by a quantity  $\hbar\Omega$  or  $-\hbar\Omega$ . [Actually, because of the Doppler effect, the mean frequencies of the three components of the fluorescence spectrum are slightly shifted from the values  $\omega_L, \omega_L + \Omega, \omega_L - \Omega$ . We neglect these shifts for the moment, and we shall discuss their physical consequences later on. See remark (2) at the end of this subsection.] Since there are, respectively,  $\Gamma_{21}\Pi_1 dt$  and  $\Gamma_{12}\Pi_2 dt$  transitions during  $dt$ , we understand why the energy change  $dU_F$  of the field is given by Eq. (3.17). Note that  $dU_F$  different from zero implies that  $\Gamma_{21}\Pi_1 dt \neq \Gamma_{12}\Pi_2 dt$ , i.e., that the numbers of photons  $dn_+$  and  $dn_-$  emitted in the two sidebands  $\omega_L + \Omega$  and  $\omega_L - \Omega$  are not the same. In other words, the energy change  $dU_F$  of the field is associated with an *asymmetry* between the two sidebands of the fluorescence spectrum emitted by the atom during the displacement  $d\mathbf{r}$ .

Finally, we can write

$$dW = -\mathbf{f}_{\text{dip}} \cdot d\mathbf{r} = dU_A + dU_F, \quad (3.18)$$

which shows that the work done against the dipole force for moving the atom from  $\mathbf{r}$  to  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  is transformed into a variation of atomic and field energies. Note that Eq. (3.18) is valid for any velocity (since NA effects are included in  $dU_A$ ).

#### Remarks

(1) The energy  $dU_F$  taken by the field is different from zero even in the quasi-static limit, i.e., when the velocity  $\mathbf{v}$  between  $\mathbf{r}$  and  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  is extremely low. This is because the steady-state populations  $\Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})$  depend on  $\mathbf{r}$ . If, for example,  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) < \Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$  and, consequently,  $\Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) > \Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r})$ , there are necessarily more transitions from 1 to 2 than from 2 to 1 during the displacement  $d\mathbf{r}$ . This means that, in the quasi-static limit, the difference  $dn_+ - dn_-$  between the number of photons emitted in the two sidebands depends only on  $d\mathbf{r}$  and not on the velocity. On the other hand, when  $v$  decreases, the time  $dt$  required for going from  $\mathbf{r}$  to  $\mathbf{r} + d\mathbf{r}$  increases, and the number of photons  $dn_+$  and  $dn_-$  increases. This shows that the *relative* asymmetry of the fluorescence spectrum  $(dn_+ - dn_-)/(dn_+ + dn_-)$  tends to zero when  $v$  tends to zero, whereas the *absolute* asymmetry  $dn_+ - dn_-$  remains constant and proportional to  $dU_F$ .

(2) We come back now to the mean Doppler shift of the fluorescence spectrum mentioned above. Consider the simple case of an atom moving with velocity  $\mathbf{v}$  in a plane wave with wave vector  $\mathbf{k}$ . In the rest frame of the atom, the laser photons have a frequency  $\omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ , and the fluorescence spectrum is centered on  $\omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ . Coming back to the laboratory frame and averaging over the direction of the spontaneously emitted photons, one finds that the fluorescence spectrum is still centered, on the average, on  $\omega_L - \mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$ .



If  $n$  fluorescence cycles occur per unit time, the energy balance  $dU_F$  of the field calculated above in Eq. (3.17) must be corrected in the laboratory frame by an amount  $-ndth\mathbf{k} \cdot \mathbf{v}$  equal to  $-nh\mathbf{k} \cdot d\mathbf{r}$ . Such a correction corresponds to the work done against the *radiation-pressure force*  $nh\mathbf{k}$ . This shows that taking into account the Doppler shift in the energy balance is equivalent to including the radiation-pressure force in this energy balance. Since this paper is devoted to dipole forces, we shall ignore these corrections in what follows.

### C. Mean Dipole Force for an Atom at Rest in $\mathbf{r}$

If the atom is at rest in  $\mathbf{r}$ , we can ignore NA effects and replace in Eq. (3.12) the populations  $\Pi_i$  by their steady-state values  $\Pi_i^{\text{st}}$ , which gives

$$\mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}} = - \sum_i \Pi_i^{\text{st}} \nabla E_i = -\Pi_1^{\text{st}} \nabla E_1 - \Pi_2^{\text{st}} \nabla E_2. \quad (3.19)$$

The physical meaning of this expression is clear. The mean dipole force  $\mathbf{f}_{\text{dip}}$  is the average of the forces  $-\nabla E_1$  and  $-\nabla E_2$  "seen," respectively, on levels  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  and  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  and weighted by the probabilities of occupation  $\Pi_1^{\text{st}}$  and  $\Pi_2^{\text{st}}$  of these two types of states.

Using Eqs. (3.9) and expressions (2.5) and (2.15) of  $\Omega$  and  $\Pi_i^{\text{st}}$ , we can write Eq. (3.19) as

$$\mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}} = -h\delta \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + 2\delta^2} \alpha = -\nabla \left[ \frac{h\delta}{2} \log \left( 1 + \frac{\omega_1^2}{2\delta^2} \right) \right], \quad (3.20)$$

where we have put

$$\alpha = \frac{\nabla \omega_1}{\omega_1} = \frac{\Omega}{\omega_1^2} \nabla \Omega. \quad (3.21)$$

Expression (3.20) of  $\mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}}$  coincides exactly with the value derived from OBE's in the limit (2.10) of well-separated lines.<sup>1,2,4</sup>

We would like, finally, to show how the dressed-atom approach gives a simple understanding of the connection between the sign of the dipole force and the sign of the detuning  $\delta = \omega_L - \omega_0$  between the laser and atomic frequencies. If the detuning  $\delta$  is positive (Fig. 3a), the levels 1 are

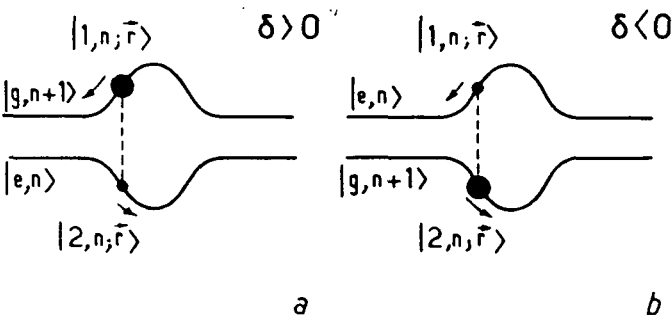


Fig. 3. Interpretation of the sign of the mean dipole force, which is the average of the two dressed-state-dependent forces weighted by the steady-state populations of these states represented by the filled circles. a, When  $\delta = \omega_L - \omega_0 > 0$ , the state  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$ , which connects to  $|g, n+1\rangle$  out of the laser beam, is less contaminated by  $|e, n\rangle$  than  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  and therefore more populated. The mean dipole force then expels the atom out of the laser beam. b, When  $\delta = \omega_L - \omega_0 < 0$ , the state  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  is more populated than  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$ , and the mean dipole force attracts the atom toward the high-intensity region.

those that coincide with  $|g, n+1\rangle$  outside the laser beam. It follows that they are less contaminated by  $|e, n\rangle$  than levels 2 and that fewer spontaneous transitions start from 1 than from 2. This shows that levels 1 are more populated than levels 2 ( $\Pi_1^{\text{st}} > \Pi_2^{\text{st}}$ ). The force resulting from levels 1 is therefore dominant, and the atom is expelled from high-intensity regions. If the detuning is negative (Fig. 3b), the conclusions are reversed: Levels 2 are more populated, and the atom is attracted toward high-intensity regions. Finally, if  $\omega_L = \omega_0$ , both states 1 and 2 contain the same admixture of  $e$  and  $g$ , they are equally populated ( $\Pi_1^{\text{st}} = \Pi_2^{\text{st}}$ ), and the mean dipole force vanishes.

### D. Mean Dipole Force for a Slowly Moving Atom

We consider now a slowly moving atom for which NA effects are negligible, so that we can use Eq. (3.12) and write

$$\mathbf{f}_{\text{dip}} = -\Pi_1 \nabla E_1 - \Pi_2 \nabla E_2. \quad (3.22)$$

Furthermore, we limit ourselves in this subsection to extremely small velocities such that

$$\frac{kv}{\Gamma} \ll 1 \quad \Leftrightarrow \quad v\Gamma^{-1} \ll \lambda. \quad (3.23)$$

Condition (3.23) means that the Doppler effect is very small compared with the natural width or, equivalently, that the atom travels over a small distance (compared with the laser wavelength  $\lambda$ ) during the radiative-relaxation time. It follows that the populations  $\Pi_i(\mathbf{r})$  for the moving atom are very close to the steady-state values  $\Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})$ , the difference between  $\Pi_i(\mathbf{r})$  and  $\Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})$  being of the order of  $kv/\Gamma$ . We therefore expect that Eq. (3.22) differs from the steady-state value (3.20) by a term linear in  $kv/\Gamma$ , which we now want to evaluate. Before doing this calculation, let us emphasize that the NA terms neglected in Eq. (3.22) would also give rise to velocity-dependent dipole forces if they were taken into account, but we shall see at the end of this section that their contribution to  $\mathbf{f}_{\text{dip}} - \mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}}$  is much smaller than that of  $\pi_i - \pi_i^{\text{st}}$ .

In order to obtain the first-order correction (in  $kv/\Gamma$ ) to  $\Pi_i - \Pi_i^{\text{st}}$ , we go back to Eq. (2.17) [since  $(\dot{\Pi}_i)_{\text{NA}}$  is negligible], and we replace  $\dot{\Pi}_i(\mathbf{r})$  by  $\mathbf{v} \cdot \nabla \Pi_i(\mathbf{r})$  in the left-hand-side member of this equation:

$$\mathbf{v} \cdot \nabla \Pi_i(\mathbf{r}) = -\Gamma_{\text{pop}}(\mathbf{r})[\Pi_i(\mathbf{r}) - \Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})]. \quad (3.24)$$

Since the left-hand-side member of Eq. (3.24) already contains  $\mathbf{v}$ , we can replace in this term  $\Pi_i(\mathbf{r})$  by  $\Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})$ . Equation (3.24) then gives

$$\Pi_i(\mathbf{r}) \simeq \Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r}) - \mathbf{v} \tau_{\text{pop}} \cdot \nabla \Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r}), \quad (3.25)$$

where

$$\tau_{\text{pop}}(\mathbf{r}) = 1/\Gamma_{\text{pop}}(\mathbf{r}). \quad (3.26)$$

Expression (3.25), which can be also written as

$$\Pi_i(\mathbf{r}) \simeq \Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r} - \mathbf{v} \tau_{\text{pop}}), \quad (3.27)$$

has a clear physical meaning. The radiative relaxation between the two states 1 and 2 takes place with a certain time constant  $\tau_{\text{pop}}$ . Since the atom is moving, and since the steady-state population  $\Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})$  generally depends on  $\mathbf{r}$ , the radiative relaxation cannot instantaneously adjust the population  $\Pi_i(\mathbf{r})$  to the steady-state value  $\Pi_i^{\text{st}}(\mathbf{r})$  that would be obtained if the atom were staying in  $\mathbf{r}$ . There is a certain

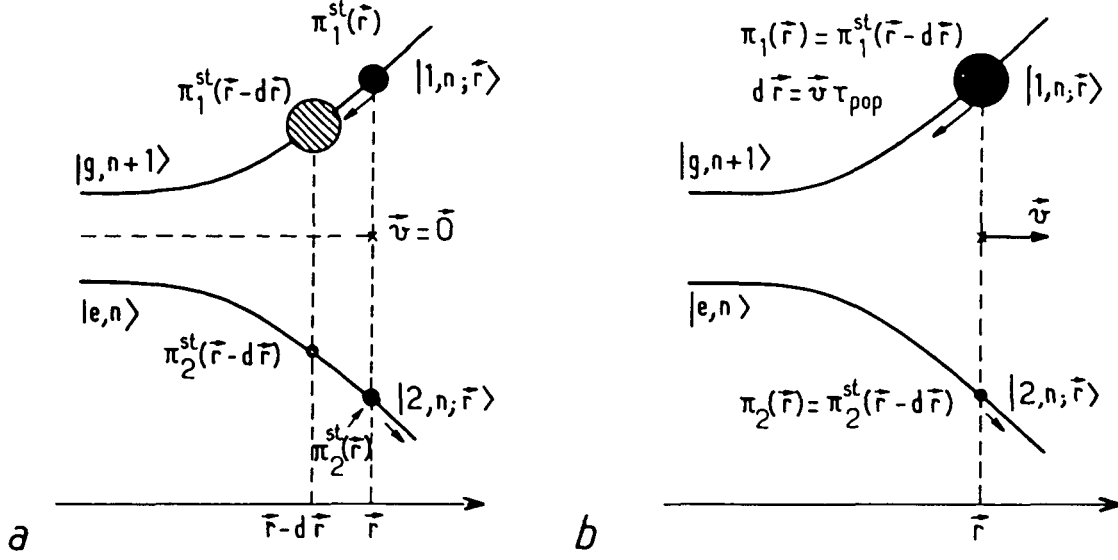


Fig. 4. Interpretation of the sign of the velocity-dependent dipole force ( $\delta > 0$ ) for a slowly moving atom. a, Level  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  connects with  $|g, n+1\rangle$  out of the laser beam, so that the steady-state population  $\Pi_1^{\text{st}}$  decreases as the atom is put in higher-intensity regions:  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r} - d\mathbf{r})$  (hatched circle) is larger than  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$  (filled circle), and consequently,  $\Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r} - d\mathbf{r}) < \Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r})$ . b, For an atom entering with a velocity  $\mathbf{v}$  in the laser beam, because of the time lag  $\tau_{\text{pop}}$  of radiative relaxation the instantaneous population in  $\mathbf{r}$ ,  $\Pi_1(\mathbf{r})$ , is the steady population at point  $\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau_{\text{pop}}$ , which is larger than  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$ . The mean dipole force then expels the moving atom out of the laser beam more than if it were at rest. The component of the force linear in  $v$  is therefore a damping term.

lag, characterized by the time constant  $\tau_{\text{pop}}$ , so that the population  $\Pi_i(\mathbf{r})$  for an atom passing in  $\mathbf{r}$  at  $t$  is the steady-state population corresponding to a previous time  $t - \tau_{\text{pop}}$ , i.e., corresponding to the position  $\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau_{\text{pop}}$ .

Such a simple idea provides a straightforward interpretation of the unusual sign of the velocity-dependent dipole force, which we have already mentioned in the Introduction. The problem is to understand why the dipole force is a friction force when the detuning  $\delta$  is positive, rather than a heating force, as is the case for radiation pressure. Consider an atom entering into a laser beam and suppose that  $\delta = \omega_L - \omega_0$  is positive. We have represented in Fig. 4a the steady-state populations in  $\mathbf{r}$ ,  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$ , and  $\Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r})$  by a circle with a diameter proportional to  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$  and  $\Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r})$ , respectively. Since, for  $\delta > 0$ , the state  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  is transformed continuously into  $|g, n+1\rangle$  out of the laser beam, it is more contaminated by  $|g, n+1\rangle$  than  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$ , and it is more populated:  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r}) > \Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r})$ . Furthermore, the contamination of  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  by  $|e, n\rangle$  increases when the Rabi frequency  $\omega_1(\mathbf{r})$  increases. It follows that  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$  decreases when  $\mathbf{r}$  is shifted toward the laser beam:  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r} - d\mathbf{r}) > \Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$ . Consider now an atom moving with the velocity  $\mathbf{v}$  (Fig. 4b). According to Eq. (3.27), the population  $\Pi_1(\mathbf{r})$  in  $\mathbf{r}$  is not  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r})$  but  $\Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r} - d\mathbf{r})$  with  $d\mathbf{r} = \mathbf{v}\tau_{\text{pop}}$ . It follows that

$$\Pi_1(\mathbf{r}) = \Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau_{\text{pop}}) > \Pi_1^{\text{st}}(\mathbf{r}). \quad (3.28)$$

(The filled circles in Fig. 4b have the same diameters as the hatched circles of Fig. 4a.) The same argument gives

$$\Pi_2(\mathbf{r}) = \Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau_{\text{pop}}) < \Pi_2^{\text{st}}(\mathbf{r}). \quad (3.29)$$

Finally, the moving atom is expelled from the high-intensity region with the force

$$\mathbf{f}_{\text{dip}} = -\frac{\hbar\nabla\Omega}{2} [\Pi_1(\mathbf{r}) - \Pi_2(\mathbf{r})], \quad (3.30)$$

which is *larger* than the steady-state force that it would experience if it were at rest in  $\mathbf{r}$ : The extra velocity-dependent force is therefore a *damping* force. With a negative detuning, the conclusions would be reversed: The velocity-dependent dipole force would then be a *heating* force.

We can also derive an explicit expression for the velocity-dependent force by inserting expression (3.25) into Eq. (3.22) and by using expressions (2.15) and (2.16) of  $\Pi_i^{\text{st}}$  and  $\Gamma_{\text{pop}} = \tau_{\text{pop}}^{-1}$ . We obtain in this way

$$\mathbf{f}_{\text{dip}}(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}}(\mathbf{r}) - \frac{2\hbar\delta}{\Gamma} \left( \frac{\omega_1^2(\mathbf{r})}{\omega_1^2(\mathbf{r}) + 2\delta^2} \right)^3 (\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{v})\boldsymbol{\alpha}, \quad (3.31)$$

where  $\mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}}$  is the dipole force (3.20) for an atom at rest in  $\mathbf{r}$  and where  $\boldsymbol{\alpha}$  is given in Eq. (3.21). Such an expression coincides exactly [in the limit (2.10)] with the one derived by Gordon and Ashkin.<sup>1</sup> In Section 5, we shall come back to Eq. (3.31) for the particular case of a standing wave, and we shall calculate the average of  $\mathbf{f}_{\text{dip}}(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  over a wavelength. We shall see that the contribution of  $\mathbf{f}_{\text{dip}}^{\text{st}}(\mathbf{r})$  to this average is zero so that one is left only with the contribution of the second part, proportional to the velocity, which is a damping or a heating force, depending on whether the detuning  $\delta$  is positive or negative.

#### Remark

In this section we have neglected NA effects coming from  $(d\Pi_i)_{\text{NA}}$ . If they were taken into account, they would give rise also to velocity-dependent forces, since  $(d\Pi_i)_{\text{NA}}$  is proportional to  $v$  [see Eq. (2.23)]. To estimate the order of magnitude of these NA forces, we come back to Eq. (3.6), and we try to overestimate the last term of this equation that has been neglected here. From Eq. (2.20b), we obtain

$f_{\text{dip}}^{\text{st}}(z)$  is an odd function of  $z$  so that its contribution to Eq. (5.6) vanishes. One is then left only with the second term of Eq. (5.6) that can be written as

$$\bar{f} = -\frac{m}{\tau} v, \quad (5.7)$$

provided that the dipole force is sufficiently small so that the velocity  $v$  can be considered as constant over a wavelength. Depending on the sign of the characteristic time  $\tau$ ,  $\bar{f}$  is either a damping or an accelerating force. The explicit calculation of  $\tau$  from Eq. (5.6) gives

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_0} \frac{\delta}{\Gamma} \left\{ \frac{3}{4} \sqrt{1+s} + \frac{3}{2\sqrt{1+s}} - \frac{1}{4(1+s)^{3/2}} - 2 \right\}, \quad (5.8)$$

with

$$\tau_0 = m/\hbar k^2, \quad s = \bar{\omega}_1^2/2\delta^2. \quad (5.9)$$

Several remarks can be made about Eq. (5.8). First, we note, as in Subsection 3.D, that the force damps the motion ( $\tau$  positive) for a positive detuning  $\delta$  and accelerates it ( $\tau$  negative) for a negative detuning. Second, Eq. (5.8) permits a comparison of  $\tau$  with  $\tau_0$  [given in Eqs. (5.9)], which is the characteristic time of radiation-pressure cooling. We see that  $\tau$  can be much shorter than  $\tau_0$ , which indicates that the dipole force in a strong standing wave can be much more efficient for radiative cooling than radiation pressure.<sup>20</sup> Let us mention, finally, that Eq. (5.8) is equal, in the limit of well-separated lines, to the result found by Minogin and Serimaa<sup>10</sup> by a continued-fraction expansion of the dipole force, calculated from OBE's.

### C. Case of Intermediate Velocities

We now turn to the case of intermediate velocities  $\Gamma \lesssim kv \ll \hbar v_c$ , for which NA terms can still be neglected in the evolution of the  $\Pi_i$ 's:

$$v \frac{d\Pi_i}{dz} = -\Gamma_{\text{pop}}(\Pi_i - \Pi_i^{\text{st}}) \quad (5.10)$$

but for which an expansion of  $\Pi_i$  in powers of  $kv/\Gamma$  is no longer possible. We then have to start with the general solution of Eq. (5.10):

$$\begin{aligned} \Pi_i(z) &= e(z_0, z) \Pi_i(z_0) + \int_{z_0}^z dz' \frac{\Gamma_{\text{pop}} \Pi_i^{\text{st}}}{v} e(z', z), \\ e(z_1, z_2) &= \exp \left\{ - \int_{z_1}^{z_2} dz' \frac{\Gamma_{\text{pop}}}{v} \right\}. \end{aligned} \quad (5.11)$$

We now take advantage of the periodicity of  $\Pi_i(z)$  and write Eqs. (5.11) with  $z_0 = z - \lambda$ . This gives

$$\Pi_i(z) = \frac{\int_{z-\lambda}^z dz' \frac{\Gamma_{\text{pop}} \Pi_i^{\text{st}}}{v} e(z', z)}{1 - e(z-\lambda, z)}. \quad (5.12)$$

This last expression is valid for any velocity satisfying the adiabatic approximation. It would now be possible to insert this value into the dipole force (3.22) and to obtain in this way a general result for the dipole force at the adiabatic approximation. A similar result has already been obtained by Fiordilino and Mittleman<sup>21</sup> by a method using a Fourier expansion of the OBE solution in the standing wave. We shall not perform this general calculation here, since we are

rather interested in  $\bar{f}$ , and, furthermore, we shall restrict ourselves to the high-velocity side:  $kv \gg \Gamma$ . For such velocities, the function  $e(z_1, z_2)$  is close to 1 if  $z_1 - z_2$  is smaller than or of the order of  $\lambda$ , so that we can write

$$e(z_1, z_2) \approx 1 - \int_{z_1}^{z_2} dz' \frac{\Gamma_{\text{pop}}}{v}. \quad (5.13)$$

Assuming that the velocity  $v$  does not change much on a wavelength, this gives the approximate value for  $\Pi_i$ :

$$\Pi_i(z) \approx \frac{\bar{\Gamma}_{\text{pop}} \bar{\Pi}_i}{\bar{\Gamma}_{\text{pop}}}, \quad (5.14)$$

where  $\bar{A}$  stands for the average of a quantity  $A(z)$  over a wavelength. We have neglected the second term of expression (5.13) in the numerator of Eq. (5.12) since this numerator is already in  $1/v$ . Using Eqs. (2.15) and (2.16) for  $\Pi_i$  and  $\Gamma_{\text{pop}}$ , expression (5.14) can be written as

$$\Pi_1 \approx \frac{\bar{\Gamma}_{12}}{\bar{\Gamma}_{12} + \bar{\Gamma}_{21}}, \quad \Pi_2 \approx \frac{\bar{\Gamma}_{21}}{\bar{\Gamma}_{12} + \bar{\Gamma}_{21}}. \quad (5.15)$$

These two last expressions have a straightforward interpretation: When  $kv$  is large compared with  $\Gamma$ , the atom has a small probability of emitting a fluorescence photon when it moves over a single wavelength. It is therefore not sensitive to the local  $\Gamma_{ij}$ 's, but rather it averages them over a wavelength  $\lambda$ ; the populations then become nearly independent of  $z$ , and they are determined by the balance of transfers between the dressed levels with these averaged rates  $\bar{\Gamma}_{ij}$ .

The final step of the calculation of  $\bar{f}$  is now to insert the  $\Pi_i$ 's into expression (3.17) of  $dU_F$  and integrate the result over one wavelength to get  $\bar{f}$  by using Eq. (5.5). We find that

$$dU_F = \left( \hbar \Omega \bar{\Gamma}_{21} \frac{\bar{\Gamma}_{12}}{\bar{\Gamma}_{12} + \bar{\Gamma}_{21}} - \hbar \Omega \bar{\Gamma}_{12} \frac{\bar{\Gamma}_{21}}{\bar{\Gamma}_{12} + \bar{\Gamma}_{21}} \right) dt \quad (5.16)$$

so that, by putting  $dt = dz/v$ ,

$$\bar{f} = -\frac{\hbar}{v} \frac{\bar{\Omega} \bar{\Gamma}_{21} \times \bar{\Gamma}_{12} - \bar{\Omega} \bar{\Gamma}_{12} \times \bar{\Gamma}_{21}}{\bar{\Gamma}_{12} + \bar{\Gamma}_{21}}. \quad (5.17)$$

For this second velocity range ( $\Gamma \ll kv$ ), it appears that the variation of  $\bar{f}$  with the velocity is completely different from what has been found for the first range  $kv \ll \Gamma$ : Instead of being proportional to the velocity (5.7),  $\bar{f}$  is now inversely proportional to  $v$ , thus indicating that the power dissipated by  $\bar{f}$  and transferred to the field is independent of the velocity.

Before giving the explicit results for  $\bar{\Gamma}_{ij}$  and  $\bar{\Omega} \bar{\Gamma}_{ij}$ , let us transform Eq. (5.17) in order to get some physical insight for  $\bar{f}$ :

$$-\bar{f}v = \frac{dU_F}{dt} = \frac{\frac{\hbar(\omega_L + \Omega)\bar{\Gamma}_{21}}{\bar{\Gamma}_{21}} + \frac{\hbar(\omega_L - \Omega)\bar{\Gamma}_{12}}{\bar{\Gamma}_{12}} - 2\hbar\omega_L}{\frac{1}{\bar{\Gamma}_{12}} + \frac{1}{\bar{\Gamma}_{21}}}. \quad (5.18)$$

The two quantities  $\hbar(\omega_L + \Omega)\bar{\Gamma}_{21}/\bar{\Gamma}_{21}$  and  $\hbar(\omega_L - \Omega)\bar{\Gamma}_{12}/\bar{\Gamma}_{12}$  are, respectively, the average energies of photons emitted in the transitions  $|1, n\rangle \rightarrow |2, n-1\rangle$  and  $|2, n'\rangle \rightarrow |1, n'-1\rangle$ , whereas  $-2\hbar\omega_L$  is the energy lost by the laser field when these two transitions occur. The numerator of Eq. (5.8) is then the total variation of the field energy in a cycle  $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$  (or  $2 \rightarrow 1 \rightarrow 2$ ). On the other hand, the denominator is just

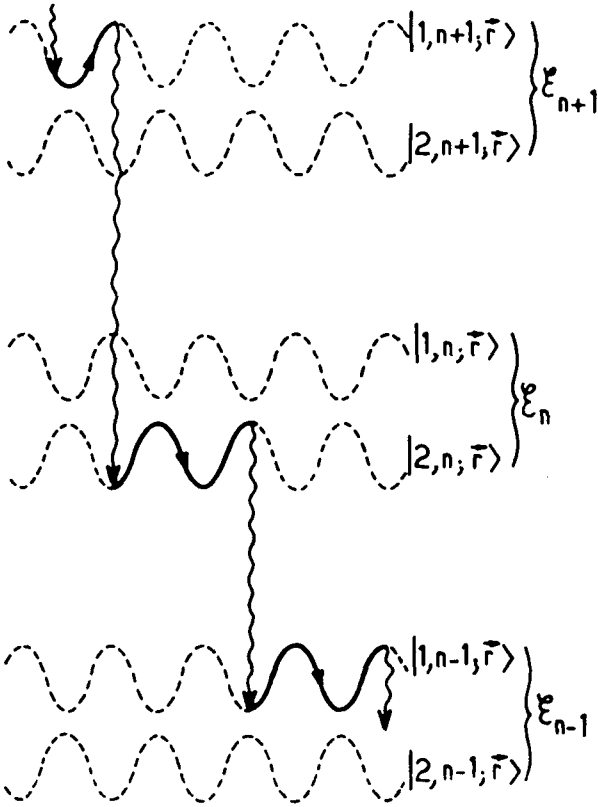


Fig. 6. Interpretation of the slowing down for  $\delta > 0$  of an atom moving in a standing wave with intermediate velocities. The emission of the upper sideband of the fluorescence spectrum (transitions  $1 \rightarrow 2$ ) occurs preferentially at the antinodes of the standing wave where the contaminations of  $|1, n+1; \mathbf{r}\rangle$  by  $|e, n+1\rangle$  and  $|2, n, \mathbf{r}\rangle$  by  $|g, n+1\rangle$  are the largest. By contrast, for the lower sideband, the transitions  $2 \rightarrow 1$  occur preferentially at the nodes where  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  and  $|1, n-1; \mathbf{r}\rangle$  coincide, respectively, with  $|e, n\rangle$  and  $|g, n\rangle$ . Consequently, between two transitions  $1 \rightarrow 2$  or  $2 \rightarrow 1$ , the moving atom "sees" on the average more "uphill" parts than "downhill" ones in the dressed-atom energy diagram and is therefore slowed down.

the duration of such a cycle so that the right-hand side of Eq. (5.18) is the variation of the field energy per unit time, as expected. The main interest of Eq. (5.18) is to indicate clearly the dependence of the sign of  $\bar{\gamma}$  with the detuning  $\delta$ . Take, for example,  $\delta > 0$  (Fig. 6). Photons emitted on the lines  $1, n \rightarrow 2, n-1$  ( $\omega_L + \Omega$ ) will be preferentially emitted at the *antinodes* of the standing wave, since it is at these points that the level  $|1, n; \mathbf{r}\rangle$  (essentially  $|g, n+1\rangle$  for  $\delta > 0$ ) contains the largest admixture of  $|e, n\rangle$  and is therefore the most unstable. We then obtain

$$\frac{\hbar(\omega_L + \Omega)\Gamma_{21}}{\bar{\Gamma}_{21}} \approx \hbar[\omega_L + (\bar{\omega}_1^2 + \delta^2)^{1/2}]. \quad (5.19)$$

By contrast, photons emitted on the line  $2, n \rightarrow 1, n-1$  will be preferentially emitted at the *nodes* of the standing wave since, at these points,  $|2, n; \mathbf{r}\rangle$  is equal to  $|e, n\rangle$  and is therefore the most unstable. This gives

$$\frac{\hbar(\omega_L - \Omega)\Gamma_{12}}{\bar{\Gamma}_{12}} \approx \hbar(\omega_L - \delta). \quad (5.20)$$

Putting approximations (5.19) and (5.20) into expression (5.18), we obtain

$$-\bar{\gamma}v \approx \frac{\hbar(\omega_1^2 + \delta^2)^{1/2} - \hbar\delta}{\frac{1}{\Gamma_{12}} + \frac{1}{\Gamma_{21}}}, \quad (5.21)$$

which shows that  $\bar{\gamma}$  will be a damping force for  $\delta$  positive. Another way of expressing this result is to say that the moving atom "sees" more "uphill" parts than "downhill" ones, since transitions preferentially occur for  $\delta > 0$  from the "top" of a given dressed energy level to the "bottom" of the other one (see Fig. 6). For  $\delta < 0$ , the conclusion is of course reversed so that, finally, it appears that the respective signs of  $\bar{\gamma}$  and  $\delta$  are the same here as for very slow atoms (Subsection 5.B).

An explicit calculation of  $\bar{\Gamma}_{ij}$  and  $\bar{\Omega}\bar{\Gamma}_{ij}$  is possible from expressions (2.5) and (2.12) of  $\Omega$  and  $\Gamma_{ij}$ , where  $\omega_1$  is replaced by Eq. (5.1). One obtains

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma}_{21} &= \frac{\Gamma}{4} \left\{ 1 + \frac{1}{4(1+2s)^{1/2}} \left[ 1 \pm \frac{4\epsilon}{\pi} K \left( \frac{2s}{1+2s} \right)^{1/2} \right] \right\}, \\ \bar{\Omega}\bar{\Gamma}_{21} &= \frac{\Gamma|\delta|}{2\pi} \left\{ (1+2s)^{1/2} E \left( \frac{2s}{1+2s} \right)^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{(1+2s)^{1/2}} K \left( \frac{2s}{1+2s} \right)^{1/2} \pm \pi\epsilon \right\}, \end{aligned} \quad (5.22)$$

where  $K$  and  $E$  are the elliptic integrals of the first and the second kind<sup>22</sup>:

$$\begin{aligned} K(k) &= \int_0^{\pi/2} \frac{d\alpha}{(1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}}, \\ E(k) &= \int_0^{\pi/2} d\alpha (1-k^2 \sin^2 \alpha)^{1/2}, \end{aligned} \quad (5.23)$$

where  $s$  is given by Eq. (5.9) and where  $\epsilon$  is the sign of  $\delta$  ( $\epsilon = \delta/|\delta|$ ).

#### Remark

It is interesting to come back to the problem of the asymmetry of the fluorescence spectrum emitted by the moving atom. In Subsection 2.B we have seen that, in a small displacement  $d\mathbf{r} = \mathbf{v} dt$ , a change  $dU_F$  of the field energy reflects that different numbers of photons  $dn_+$  and  $dn_-$  are emitted in the two sidebands  $\omega_L \pm \Omega(\mathbf{r})$ . On the other hand, because of the periodic variation of the populations  $\Pi_i(z)$  for an atom moving in a standing wave, the averages over a distance  $\lambda$  of the numbers of photons emitted in the two sidebands  $\bar{N}_+$  and  $\bar{N}_-$  are necessarily equal. This equality  $\bar{N}_+ = \bar{N}_-$  does not imply, however, that the field energy does not change when the atom travels over  $\lambda$  but only that the total weights of the two sidebands of the fluorescence spectrum emitted during this interval are equal. Actually the field energy *does* vary, because the average energies of the  $\bar{N}_+$  and  $\bar{N}_-$  photons emitted in the upper and lower sidebands are larger (smaller) than  $\omega_L + \bar{\Omega}$  and  $\omega_L - \bar{\Omega}$  if  $\delta$  is positive (negative) (see Fig. 6). In other words, even if the two sidebands have the same weights, their centers of gravity are not symmetric with respect to  $\omega_L$ .

$$|\rho_{12}|, |\rho_{21}| \leq \text{Max} \left\{ \frac{k\nu}{\Gamma} \times \frac{\Gamma}{\Omega}, \frac{k\nu}{\Gamma} \times \frac{\Gamma\omega_1}{\Omega\delta} \right\}, \quad (3.32)$$

since  $|\nabla\Omega|$  and  $|\nabla\varphi|$  are, respectively, smaller than or equal to  $k\omega_1/\delta$  and  $k$  [see Eq. (2.27)]. This has to be compared with the  $\nu$ -dependent contribution of the first term of Eq. (3.6), which is of the order of  $k\nu/\Gamma$  since it comes from the difference between  $\Pi_i$  and  $\Pi_i^{\text{st}}$ . This shows that NA forces are  $\Omega/\Gamma$  or  $\Omega\delta/\omega_1\Gamma$  smaller than the velocity-dependent forces studied in this section, which come from the lag of radiative relaxation for a moving atom. It is therefore correct to neglect them in the limit (2.10) of well-resolved lines and for  $\delta$  not too small compared with  $\omega_1$ . (Note, finally, that, if  $\Gamma$  were not small compared with  $\Omega$ , it would be also necessary to include nonsecular couplings between diagonal and off-diagonal elements of the density matrix in the master equation describing radiative relaxation).

#### 4. ATOMIC-MOMENTUM DIFFUSION DUE TO THE FLUCTUATIONS OF DIPOLE FORCES

Because of the random character of spontaneous emission, the forces acting upon an atom in a laser beam fluctuate around their mean value, and these fluctuations produce a diffusion of the atomic momentum  $\mathbf{P}$ , characterized by a diffusion coefficient  $D$ . The calculation of  $D$  exhibits several contributions, most of which are now well understood.<sup>6</sup> For example, there is a contribution that is proportional to the square of the phase gradient and that is associated with the fluctuations in the number of fluorescence cycles occurring in a given time interval (fluctuations of radiation pressure). There is also another term describing the fluctuations of the recoil momentum transferred by the fluorescence photons that are emitted in random directions. In this section we shall focus on the fluctuations of dipole forces that give rise to a contribution  $D_{\text{dip}}$  proportional to the square of the intensity gradient. Gordon and Ashkin have already pointed out that the dressed-atom approach provides a simple physical picture for the fluctuations of dipole forces.<sup>1</sup> We shall show here that such an approach can lead also to a quantitative evaluation of  $D_{\text{dip}}$  for an atom at rest.

##### A. Fluctuations of Dipole Forces

The picture of the dressed atom cascading down its energy diagram leads to a simple interpretation of the mean value and fluctuations of dipole forces for an atom initially at rest in  $\mathbf{r}$ . If the dressed atom is in a dressed state of type 1, it undergoes a force  $-\nabla E_1$  equal to minus the gradient of the energy of this state (Fig. 5). Then, by spontaneous emission of a photon  $\hbar(\omega_L + \Omega)$ , which occurs at a *random* time, it jumps into a state of type 2, where the force  $-\nabla E_2 = +\nabla E_1$  has a value opposite the previous one. A subsequent emission of a photon  $\hbar(\omega_L - \Omega)$  puts it back in a state of type 1 and again changes the sign of the force. And so on . . . . It thus appears that the instantaneous force experienced by the atom switches back and forth between two opposite values after random time intervals  $\tau_1, \tau_2, \dots$ . If  $\bar{\tau}_1$  and  $\bar{\tau}_2$  are the mean values of these successive time intervals spent by the dressed atom in levels of type 1 and 2, it is clear that the mean dipole force is the average value of  $-\nabla E_1$  and  $-\nabla E_2$ , respectively, weighted by  $\bar{\tau}_1/(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2)$  and  $\bar{\tau}_2/(\bar{\tau}_1 + \bar{\tau}_2)$ , which are actually just the steady-state probabilities of occupation

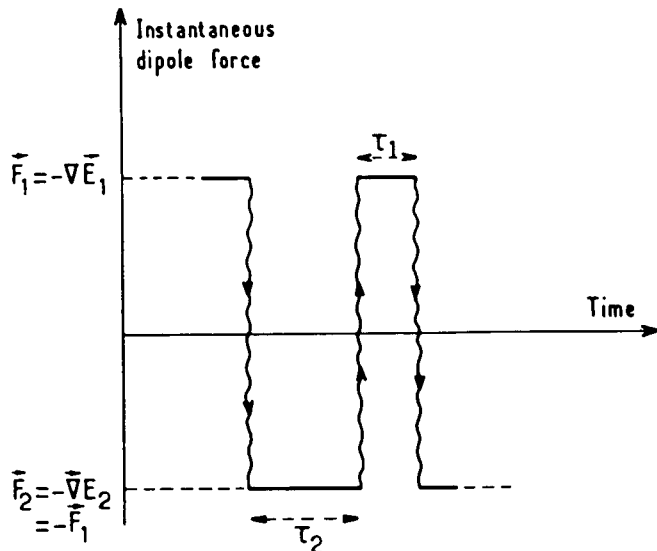


Fig. 5. The instantaneous dipole force switches back and forth between the two dressed-state-dependent forces  $-\nabla E_1$  and  $-\nabla E_2$ . The intervals of time  $\tau_1$  and  $\tau_2$  spent in each dressed state between two successive jumps are random variables.

$\Pi_1^{\text{st}}$  and  $\Pi_2^{\text{st}}$  of levels 1 and 2. We obtain in this way the result already derived in Subsection 3.B for the mean dipole force. But the present discussion also provides a good insight into the random nature of the two-valued instantaneous dipole force.

##### B. Evaluation of the Momentum Diffusion Coefficient

The fluctuations of dipole forces are responsible for a diffusion of atomic momentum described by a diffusion coefficient  $D_{\text{dip}}$ , which is given (in the semiclassical treatment followed here for an atom at rest) by

$$D_{\text{dip}} = \int_0^\infty dt \{ \langle \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t + \tau) \rangle - \mathbf{f}_{\text{dip}}^2 \}, \quad (4.1)$$

where  $\mathbf{F}$  is the two-valued instantaneous dipole force with mean value  $\mathbf{f}_{\text{dip}}$ .

The expression of the correlation function  $\langle \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t + \tau) \rangle$  results from the physical picture given above:

$$\langle \mathbf{F}(t) \cdot \mathbf{F}(t + \tau) \rangle = \sum_{i=1,2} \sum_{j=1,2} (-\nabla E_i)(-\nabla E_j) P(i, t; j, t + \tau). \quad (4.2)$$

It is equal to the product of the two instantaneous forces  $-\nabla E_i$  and  $-\nabla E_j$  weighted by the probability to be in a state of type  $i$  at time  $t$  and in a state of type  $j$  at time  $t + \tau$  and summed over  $i$  and  $j$ . In the steady-state regime,  $P(i, t; j, t + \tau)$  depends only on  $\tau$  and can be written as

$$P(i, t; j, t + \tau) = P_i P(j, \tau/i, 0), \quad (4.3)$$

where  $P_i$  is the steady-state probability to be in  $i$ , which is just  $\Pi_i^{\text{st}}$ :

$$P_i = \Pi_i^{\text{st}}, \quad (4.4)$$

and  $P(j, \tau/i, 0)$  is the *conditional* probability to be in  $j$  at  $\tau$ , knowing that the atom is in  $i$  at  $t = 0$ . Solving Eq. (2.17) with the initial condition  $\Pi_i(0) = 1$  gives

$$P(i, \tau/i, 0) = \Pi_i^{\text{st}} + \Pi_j^{\text{st}} \exp(-\Gamma_{\text{pp}} \tau), \quad (4.5a)$$

$$P(j, \tau/i, 0) = 1 - P(i, \tau/i, 0). \quad (4.5b)$$

Finally, inserting Eqs. (4.3)–(4.5) into Eqs. (4.2) and (4.1) and using the expressions given above for  $E_i$ ,  $\Pi_i^{\text{st}}$ ,  $\Gamma_{\text{pp}}$ , one obtains

$$D_{\text{dip}} = \frac{\hbar^2}{2\Gamma} \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + 2\delta^2} \right)^3 (\nabla\omega_1)^2. \quad (4.6)$$

### C. Discussion

Expression (4.6) for  $D_{\text{dip}}$  coincides exactly with the one derived from OBE's<sup>1</sup> in the limit (2.10) of well-resolved lines. Actually, Gordon and Ashkin have used a dressed-atom picture, similar to the one presented here in Subsection 4.A, for evaluating the order of magnitude of  $D_{\text{dip}}$  at resonance. Our result (4.6), which is valid for any detuning  $\delta$ , shows that the dressed-atom picture is useful not only for an understanding of the physical mechanisms but also for a quantitative calculation of  $D_{\text{dip}}$ .

The most important feature of Eq. (4.6) is that  $D_{\text{dip}}$  increases as  $(\nabla\omega_1)^2$  and does not saturate when the light intensity increases. Such a behavior is quite different from the one exhibited by the diffusion coefficient of radiation pressure that saturates to values of the order of  $(\hbar k)^2\Gamma$ . The large value of  $D_{\text{dip}}$  is due to the fact that, between two spontaneous emission processes, the atomic momentum increases as  $\nabla E_i$  and is therefore not limited when  $\omega_1$  increases. This introduces severe limitations for the realization of radiative traps using standing waves: The diffusion coefficient increases more rapidly with  $\omega_1$  (as  $\omega_1^2$ ) than the depth of the potential well, which varies only as  $\log(1 + \omega_1^2/2\delta^2)$  [see Eq. (3.20)].

## 5. ATOMIC MOTION IN A STANDING WAVE

This last section is devoted to the application of the dressed-atom approach to the particular case of atomic motion in a standing wave. We are interested here in the average  $\bar{f}$  of the dipole force over a wavelength and in the variations of  $\bar{f}$  with the atomic velocity. We first relate  $\bar{f}$  to the rate of variation of the field energy (Subsection 5.A); we then restrict ourselves to the adiabatic limit [velocities smaller than  $v_{cr}$ ; see inequality (2.29)], and we investigate in detail the two velocity ranges  $kv \ll \Gamma$  (Subsection 5.B) and  $kv \gtrsim \Gamma$  (Subsection 5.C). Finally (Subsection 5.D), we compare our results with the ones obtained with a continued-fraction expansion of the dipole force.

### A. Dipole Force Averaged on a Wavelength

We consider in the following a one-dimensional standing wave:

$$\omega_1(z) = \bar{\omega}_1 \cos kz, \quad (5.1)$$

and we restrict ourselves to a motion along the  $z$  direction. With view to using this standing wave for slowing down (or accelerating) atoms, it is interesting to consider the kinetic energy  $\Delta W$  lost or gained by the atom over a wavelength and equal to the work of the dipole force along a wavelength<sup>19</sup>:

$$\Delta W = \int_z^{z+\lambda} f_{\text{dip}} dz = \lambda \bar{f}. \quad (5.2)$$

$\bar{f}$  is the average of the dipole force over a wavelength. Because of the spatial periodicity of the system,  $\Delta W$  depends only on the atomic velocity  $v$  and not on  $z$ . Now, using Eq. (3.18),  $\bar{f}$  can be related to the change of the atomic potential energy  $U_A$  and of the field energy  $U_F$  over one wavelength:

$$\bar{f} = -\frac{1}{\lambda} \int_z^{z+\lambda} dU_A - \frac{1}{\lambda} \int_z^{z+\lambda} dU_F. \quad (5.3)$$

Since  $\Pi_i$  and  $E_i$  are periodic functions of  $z$ , the atomic potential energy  $U_A(z)$  given in Eq. (3.13) is also periodic in  $z$ , and the contribution of the first term of Eq. (5.3) vanishes:

$$-\frac{1}{\lambda} \int_z^{z+\lambda} dU_A = -\frac{1}{\lambda} [U_A(z+\lambda) - U_A(z)] = 0. \quad (5.4)$$

Equation (5.3) then reduces to

$$\bar{f} = -\frac{1}{\lambda} \int_z^{z+\lambda} dU_F. \quad (5.5)$$

The integral of  $dU_F$  over one wavelength, contrary to  $dU_A$ , is not necessarily zero. The atomic motion can indeed induce an asymmetry of the fluorescence triplet, so that the energy radiated in the two sidebands of this triplet, at  $\omega_L + \Omega$  and  $\omega_L - \Omega$ , can be larger or smaller than the energy of the photons  $\omega_L$  absorbed in the laser wave. This gain (or loss) of energy by the electromagnetic field is then of course compensated by a loss (or gain) of kinetic energy of the atom, by the action of the dipole force upon this atom.

To go further in the calculation of  $\bar{f}$ , we now need to evaluate  $f_{\text{dip}}$  [Eq. (5.2)] or  $dU_F$  [Eq. (5.5)] as functions of the position and the velocity of the atom. From Eq. (3.6) for  $f_{\text{dip}}$  or Eq. (3.17) for  $dU_F$ , we see that this amounts to determining the populations  $\Pi_i$  and the coherences  $\rho_{ij}$  at a given point and for a given velocity. A general determination of the  $\Pi_i$ 's and the  $\rho_{ij}$ 's (i.e., for any velocity) would require that the set of equations (2.20) be solved. Actually, we shall restrict ourselves to velocities such as  $kv$  small compared with  $kv_{cr}$  so that only the  $\Pi_i$ 's are needed and NA terms can be neglected in Eqs. (2.20). The equation of evolution for the  $\Pi_i$ 's is then Eq. (2.17), which we are now going to solve for the following two velocity ranges: very low velocities  $kv \ll \Gamma$  (which have already been explored in Subsection 3.D) and intermediate velocities  $\Gamma \lesssim kv \ll kv_{cr}$ .

### B. Case of Very Low Atomic Velocities

For very low velocities such that  $kv$  is small compared with  $\Gamma$ , the principle of the resolution of the equation of evolution of  $\Pi_i$  [Eq. (2.17)] has already been given in Subsection 3.D: One can expand the solution of Eq. (2.17) in powers of  $kv/\Gamma$ , the zeroth-order solution being simply the steady-state value  $\Pi_i^{\text{st}}$ . The simplest way to obtain  $\bar{f}$  is then to start from the expression of  $f_{\text{dip}}(z, v)$  [Eq. (3.31)] obtained in Subsection 3.D and to average it over a wavelength:

$$\begin{aligned} \bar{f} &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f_{\text{dip}}(z, v) dz \\ &= \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} f_{\text{dip}}^{\text{st}}(z) dz - \frac{1}{\lambda} \int_{-\lambda/2}^{\lambda/2} \frac{2\hbar\delta}{\Gamma} \left( \frac{\omega_1^2}{\omega_1^2 + 2\delta^2} \right)^3 \alpha^2 v dz. \end{aligned} \quad (5.6)$$

#### D. Connection with Previous Works

In the low-intensity limit ( $\bar{\omega}_1 < \Gamma$ ), atomic motion in a standing wave can be analyzed in perturbative terms. At the lowest order (in  $\bar{\omega}_1^2/\Gamma^2$ ), the mean dipole force averaged over  $\lambda$  appears as the difference between the radiation pressures of the two counterpropagating waves, "seen" with different Doppler shifts by the moving atom.<sup>9</sup> At higher orders, resonant multiphoton processes appear that involve absorption of photons from one wave and stimulated emission of photons in the opposite wave ("Doppleron" resonances).<sup>7</sup>

At higher intensities ( $\bar{\omega}_1 \gg \Gamma$ ), such a perturbative approach is no longer valid. Most previous works use then an exact solution of OBE's in terms of continued fractions or Fourier-series expansion.<sup>10,11,21</sup> These methods provide an exact solution, but, unfortunately, they do not give any physical picture for the new features that appear in this intensity range.

The dressed-atom approach followed in this paper is precisely well adapted to the limit  $\bar{\omega}_1 \gg \Gamma$ . It has the advantage of providing not only simple physical pictures but also tractable analytical expressions in different velocity ranges. In order to demonstrate the accuracy of expressions (5.7) and (5.17)–(5.22) given above, we compare now their predictions with those of an exact calculation.

For example, the solid curve of Fig. 7 represents the result obtained by the continued-fraction method for the variations with  $kv/\Gamma$  of the mean dipole  $\bar{f}$  when  $\bar{\omega}_1 = 1000\Gamma$  and  $\delta = 200\Gamma$ , whereas the two dashed lines represent the dressed-atom predictions (5.7) and (5.17)–(5.22):

$$kv \ll \Gamma, \quad \bar{f} = -460 \left( \frac{\hbar k \Gamma}{2} \right) \left( \frac{kv}{\Gamma} \right), \quad (5.24a)$$

$$\Gamma \ll kv \ll kv_{cr} \simeq 20\Gamma, \quad \bar{f} = -40 \left( \frac{\hbar k \Gamma}{2} \right) \left( \frac{\Gamma}{kv} \right). \quad (5.24b)$$

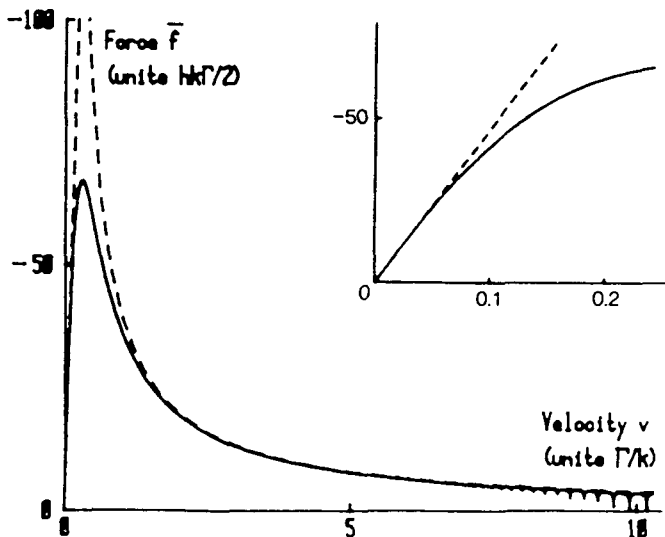


Fig. 7. Mean dipole force  $\bar{f}$  (in units of  $\hbar k \Gamma/2$ ) versus velocity (in units of  $\Gamma/k$ ) for an atom moving in a standing wave ( $\bar{\omega}_1 = 1000\Gamma$ ,  $\delta = 200\Gamma$ ). The solid curve is an exact numerical solution obtained by the method of continued fractions. The two dashed lines represent the analytical predictions of the dressed-atom approach for very low velocities ( $kv \ll \Gamma$ ) (see also the insert) and for intermediate velocities ( $\Gamma \ll kv \ll kv_{cr}$ ). The structures appearing in the exact solution in the high-velocity domain are a signature of the breakdown of the adiabatic approximation ("Doppleron" resonances).

We see that the agreement between the two theories is very good for these two velocity ranges. Note that it is possible to connect the two results for the dressed atom [expressions (5.24a) and (5.24b)] by calculating  $f$  from the general expression (5.12) for the populations. Actually, we have done such a numerical calculation, and the predictions of the two theories (dressed atom and continued fractions) then coincide perfectly, provided that the adiabatic approximation holds. When the velocity becomes too large, resonances appear on the solid curve of Fig. 7 (continued-fractions result), which are a signature of the breakdown of the adiabatic approximation. These are related to the so-called "Doppleron resonances."<sup>7</sup>

The force has been expressed in Fig. 7 in units of  $\hbar k \Gamma/2$ , which is the saturation radiation pressure. We see that the averaged dipole force can exceed this radiation pressure by 2 orders of magnitude for realistic Rabi frequencies ( $\bar{\omega}_1 = 1000\Gamma$  is achieved for sodium atoms with 1-W laser power focused on  $100 \mu\text{m}$ ). This indicates the very rich potentialities of this system, for example, for slowing down an atomic beam by sweeping a standing wave over the Doppler profile. The idea would be to change the relative frequencies of the two counterpropagating waves so that the nodes and the antinodes of the standing wave would move with a velocity  $v_{sw}$ . The velocity appearing in the expressions (5.24) of the dipole force would now be the relative velocity  $v - v_{sw}$  between the moving atom and the standing wave. An appropriate sweeping of  $v_{sw}$  would then permit the decelerating force to be kept close to the optimal value of Fig. 7. Kazantsev has also suggested<sup>23</sup> that a swept standing wave be used to accelerate beams of neutral atoms.

#### 6. CONCLUSION

In conclusion, we have derived the following results in this paper.

The dipole force experienced by an atom in a gradient of light intensity is closely related to the spatial variation of the energy levels of the combined system: atom + laser photons (dressed states) and to the redistribution of populations between these levels induced by the atomic motion (NA effects) or by spontaneous emission of fluorescence photons (radiative relaxation). We have shown that the work done by the dipole force during a small atomic displacement  $dr$  corresponds to the sum of the changes of the atomic potential energy and of the field energy, the latter change being related to an asymmetry of the fluorescence spectrum emitted by the atom during the displacement.

As in the Stern–Gerlach effect, two different forces with opposite signs are associated with the two types of position-dependent dressed states. An atom initially at rest in  $r$  undergoes spontaneous transitions between these two types of states. The corresponding picture of a two-valued instantaneous force fluctuating around a mean value leads to the correct values for the mean dipole force and for the atomic-momentum diffusion coefficient associated with intensity gradients.

For a very slowly moving atom ( $kv \ll \Gamma$ ), we have interpreted the velocity-dependent dipole force as being due to the finite time constant of radiative relaxation, which introduces a time lag in the variation of the dressed-state populations of the moving atom. We have explained in this way why the velocity-dependent dipole force damps the atomic

motion when the laser is detuned above the atomic frequency and why, in a high-intensity standing wave, the sign of the force is opposite the one obtained by adding the radiation pressures of the two counterpropagating waves.

We have also considered the case of an atom moving in a high-intensity standing wave with intermediate velocities ( $\Gamma \ll kv \ll kv_{cr}$ ). We have shown in this case that the dipole force averaged over  $\lambda$  is inversely proportional to  $v$ , and we have interpreted this result as being due to the fact that one sideband of the fluorescence spectrum is emitted preferentially in the antinodes of the standing wave, whereas the other one is emitted in the nodes. Potentialities of such a dipole force for efficient slowing down of atoms have been pointed out.

It thus appears that the dressed atom provides useful physical insights in the dipole force in the high-intensity domain ( $\omega_1 \gg \Gamma$ ) where perturbative approaches are no longer valid. We have also shown that such an approach leads to tractable mathematical expressions that are in good quantitative agreement with the prediction of other exact solutions (analytical or numerical) when they exist.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We would like to thank Serge Renaud and Christian Tanguy for several stimulating discussions.

#### REFERENCES

1. J. P. Gordon and A. Ashkin, *Phys. Rev. A* **21**, 1606 (1980).
2. R. J. Cook, *Comments At. Mol. Phys.* **10**, 267 (1981).
3. V. S. Letokhov and V. G. Minogin, *Phys. Rep.* **73**, 1 (1981).
4. A. P. Kazantsev, G. I. Surdutovich, and V. P. Yakovlev, *J. Phys. (Paris)* **42**, 1231 (1981).
5. D. J. Wineland and W. M. Itano, *Phys. Rev. A* **20**, 1521 (1979).
6. S. Stenholm, *Phys. Rev. A* **27**, 2513 (1983).
7. E. Kyrölä and S. Stenholm, *Opt. Commun.* **22**, 123 (1977).
8. A. F. Bernhardt and B. W. Shore, *Phys. Rev. A* **23**, 1290 (1981).
9. R. J. Cook, *Phys. Rev. A* **20**, 224 (1979).
10. V. G. Minogin and O. T. Serimaa, *Opt. Commun.* **30**, 373 (1979).
11. V. G. Minogin, *Opt. Commun.* **37**, 442 (1981).
12. J. Dalibard and C. Cohen-Tannoudji, *J. Phys. B* **18**, 1661 (1985).
13. R. J. Cook, *Phys. Rev. A* **22**, 1078 (1980).
14. C. Cohen Tannoudji and S. Reynaud, in *Multiphoton Processes*, J. H. Eberly and P. Lambropoulos, eds. (Wiley, New York, 1978), p. 103.
15. C. Cohen-Tannoudji and S. Reynaud, *J. Phys. B* **10**, 345 (1977).
16. S. Reynaud, *Ann. Phys. (Paris)* **8**, 315 (1983).
17. B. R. Mollow, *Phys. Rev.* **188**, 1969 (1969).
18. A. Messiah, *Mécanique Quantique II* (Dunod, Paris, 1964), p. 642.
19. The phase of the standing wave is constant so that radiation pressure does not play any role here.
20. The counterpart of this advantage is that the diffusion coefficient is bigger in a strong standing wave, so that the equilibrium velocities after cooling are larger than for usual radiation-pressure cooling (See Ref. 5).
21. E. Fiordilino and M. H. Mittleman, *Phys. Rev. A* **30**, 177 (1984).
22. I. S. Gradshteyn and L. M. Ryzhik, *Tables of Integrals, Series, and Products* (Academic, New York, 1980).
23. A. P. Kazantsev, *Sov. Phys. Usp.* **21**, 58 (1978).



REFERENCES DE LA PARTIE C

- [1] T.W. Hänsch and A. Schawlow, Opt. Commun. 13, 68 (1975).
- [2] D. Wineland and H. Dehmelt, B.A.P.S. 20, 637 (1975).
- [3] Voir par exemple P.L. Gould, G.A. Ruff and D.E. Pritchard Phys. Rev. Lett. 41, 1361 (1986).
- [4] a.J.L. Hall, C.J. Bordé and K. Uehara, Phys. Rev. Lett. 37, 1339 (1976).  
b.C.J. Bordé in "Advances in Laser Spectroscopy",  
ed. F.T. Arecchi, F. Strumia and H. Walter, Plenum (1983).
- [5] B. Mollow, Phys. Rev. A 12, 1919 (1975).
- [6] R.J. Cook, Phys. Rev. A 20, 224 (1979) et Phys. Rev. Lett. 44, 976 (1980).
- [7] L. Landau et E. Lifchitz, Mécanique Statistique, éditions Mir.
- [8] a.J.P. Gordon and A. Ashkin, Phys. Rev. A 21, 1606 (1980).  
b.J.P. Gordon dans N.B.S. Special Publication 653,  
W.D. Phillips editor (1983).
- [9] A. Ashkin and J.P. Gordon, Opt. Lett. 8, 511 (1983).
- [10] C. Cohen-Tannoudji, cours donnés au Collège de France, années 1982-83 et 1983-84.
- [11] G.A. Askar'yan, Sov. Phys. J.E.T.P. 15, 1088 (1962).
- [12] J.E. Bjorkholm, R.R. Freeman, A. Ashkin and D.B. Pearson, Phys. Rev. Lett. 41, 1361 (1978).
- [13] R. Frisch, Z. Phys. 86, 42 (1933).

- [14] S. Stenholm, Phys. Rep. 43, 151 (1978) et App. Phys. 15, 287 (1978).
- [15] A.P. Kazantsev, G.I. Surdutovich and V.P. Yakovlev, J. Physique 42, 1231 (1981).
- [16] V.S. Letokhov and V.G. Minogin, Phys. Rep. 73, 1 (1981).
- [17] A. Al-Hilfy and R. Loudon, Optica Acta 32, 995 (1985).
- [18] P. Badziag, Physica 135 A, 271 (1986).
- [19] L. Allen and J.H. Eberly, Optical Resonance and Two-Level Atoms, New-York, Wiley (1975).
- [20] J.V. Prodan, A. Migdall, W.D. Phillips, I. So., H. Metcalf and J. Dalibard, Phys. Rev. Lett. 54, 992 (1985).
- [21] W. Ertmer, R. Blatt, J. Hall and M. Zhu, Phys. Rev. Lett. 54, 996 (1985).
- [22] V.I. Balykin, V.S. Letokhov and A.I. Sidorov, Opt. Commun. 49, 248 (1984).
- [23] S. Stenholm, Phys. Rev. A 27, 2513 (1983).
- [24] C. Tanguy, thèse de troisième cycle, Paris (1983).
- [25] I.V. Krasnov and N. Ya. Shaparev, Sov. Tech. Phys. Lett. 1, 381 (1975).
- [26] E.V. Baklanov and B.Y. Dubetskii, Opt. Spectrosc. 41, 1 (1976).
- [27] A. Yu. Pusep, Sov. Phys. J.E.T.P. 43, 441 (1976).
- [28] V.S. Letokhov, V.G. Minogin and B.D. Pavlick, Sov. Phys. J.E.T.P. 45, 698 (1977).

- [29] R.J. Cook, Phys. Rev. A 22, 1078 (1980).
- [30] L. Mandel, Opt. Lett. 4, 205 (1979).
- [31] Y.Z. Wang, W.G. Huang, Y.D. Cheng and L. Liu dans Laser Spectroscopy VII, T.W. Hänsch and Y.R. Shen Editors, Springer Verlag (1985).
- [32] Pour les mêmes raisons physiques, cette géométrie  $\sigma_+$  -  $\sigma_-$  présente de nombreuses caractéristiques intéressantes en absorption saturée : C. Bordé, dans "Laser Spectroscopy III" ed. J.L. Hall and J. Carlsten, Springer Verlag, Berlin.
- [33] J. Javanainen, M. Kaivola, U. Nielsen, O. Poulsen and E. Riis, JOSA B2, 1768 (1985).
- [34] D.J. Wineland and W.M. Itano, Phys. Rev. A 20, 1521 (1979).
- [35] V.I. Balykin, V.S. Letokhov and A.I. Sidorov, J.E.T.P. Letters 40, 1027 (1984).
- [36] S. Chu, L. Hollberg, J.E. Bjorkholm, A. Cable and A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. 55, 48 (1985).
- [37] D.J. Wineland, R.E. Drullinger and F.L. Walls, Phys. Rev. Lett. 40, 1639 (1978).
- [38] W. Neuhauser, M. Hohenstatt, P. Toschek and H.G. Dehmelt, Phys. Rev. Lett. 41, 233 (1978).
- [39] a.V.G. Minogin, Opt. Commun. 37, 442 (1981).  
b.V.G. Minogin and O.T. Serimaa, Opt. Commun. 30, 373 (1979).
- [40] E. Kyrölä and S. Stenholm, Opt. Commun. 22, 123 (1977).
- [41] A.P. Kazantsev, V.S. Smirnov, G.I. Surdutovich, D.O. Chudesnikov and V.P. Yakovlev, JOSA B2, 1731 (1985) et references in ; A.P. Kazantsev, D.O. Chudesnikov, V.P. Yakovlev (en cours de publication 1986).

- [42] A.P. Kazantsev, Sov. Phys. J.E.T.P. 36, 861 (1973), 39  
784 (1974) et Sov. Phys. Usp. 21, 58 (1978).
- [43] A. Kastler, J. Phys. Rad. 11, 255 (1950).
- [44] N. Djeu and W.T. Whitney, Phys. Rev. Lett. 46, 236 (1981).

PARTIE D :

LE PIEGEAGE RADIATIF

## LE PIEGEAGE RADIATIF

Nous abordons maintenant la dernière partie de ce travail consacré au piégeage radiatif. Le problème posé est le suivant : comment utiliser les forces radiatives étudiées précédemment pour confiner des atomes neutres en un point donné de l'espace ? Nous étudierons en détail la stabilité de ces pièges quand sont prises en compte les fluctuations des forces radiatives. Ces fluctuations, qui "chauffent" les atomes piégés, font en effet sortir les atomes du piège si aucun mécanisme de refroidissement ne prend place simultanément. En présence d'un mécanisme de refroidissement, l'énergie des atomes atteint une valeur stationnaire (voir chap. C3) et, pourvu que cette énergie soit très inférieure à la profondeur du puits, le piégeage est alors stabilisé.

Nous étudierons dans un premier temps (chap. D1) les pièges n'utilisant que la pression de radiation, et nous montrerons qu'il est possible de réaliser une force de confinement en superposant la force de pression de radiation avec une force dissipative du type de celles décrites au chapitre C3. Nous considérerons ensuite (chap. D2) des pièges utilisant la force dipolaire : nous montrerons comment combiner cette force dipolaire, qui dérive d'un potentiel (cf. éq.C1-47,48) et qui est donc piégeante là où ce potentiel est minimal, avec un faisceau lumineux qui amortit la vitesse atomique et assure donc la stabilité du piégeage. Remarquons que c'est un piège de ce type qui a été réalisé aux laboratoires Bell au début de l'année 1986, ce qui constituait la première mise en évidence expérimentale du confinement d'atomes neutres dans une onde laser [1]. Signalons pour terminer cette présentation que les pièges lumineux ne sont pas les seuls types de pièges atomiques envisageables. On peut également réaliser des pièges magnétiques, qui fonctionnent en courbant les niveaux Zeeman atomiques : on réalise un champ magnétique présentant un minimum local et les atomes se trouvant sur un sous niveau Zeeman de facteur de Landé positif (énergie minimale là où B est le plus faible) sont confinés autour de ce minimum local. Un tel procédé de piégeage a déjà fonctionné [2,3]. Il présente l'avantage sur les

pièges lumineux de fonctionner avec une "vraie" force et pas une force fluctuante : il n'est donc pas indispensable de refroidir les atomes piégés pour stabiliser le piégeage. Toutefois ce refroidissement, qui peut être fait par un laser, devient indispensable dès que l'on veut remplir le piège continuellement, et augmenter la densité atomique au fond du piège.

## D1 : LE PIEGEAGE PAR PRESSION DE RADIATION

La possibilité d'utiliser la pression de radiation pour confiner le mouvement d'atomes neutres a été envisagée dès 1970 par A. Ashkin [4]. Cette première proposition ne visait pas à piéger les atomes en un point donné mais plutôt à les faire tourner sur une piste circulaire, la pression de radiation créant une force centripète qui compense en tout point la force centrifuge liée au mouvement atomique. En 1982, une nouvelle proposition de V.G. Minogin et J. Javanainen suggérait la possibilité d'accumuler les atomes en un point donné, en utilisant un système d'ondes laser divergentes [5]. Malheureusement la stabilité d'un tel confinement n'est pas possible, comme l'ont montré peu après A. Ashkin et J.P. Gordon [6] : le théorème de Gauss optique ("Optical Earnshaw theorem") interdit en effet tout piégeage stable d'atomes utilisant uniquement la pression de radiation produite par un ensemble statique d'ondes laser. Ceci est à rapprocher du théorème de Gauss électrostatique qui prouve l'impossibilité de réaliser un équilibre mécanique stable pour un ensemble de corps chargés, si les seules forces en présence sont les forces électrostatiques. Fort heureusement, plusieurs moyens de contourner ce théorème sont possibles. Le premier fut proposé par A. Ashkin [7] et consistait à reproduire avec des faisceaux laser l'équivalent d'un piège radiofréquence pour les ions, qui est un moyen bien connu pour s'affranchir du théorème de Gauss électrostatique. Nous avons ensuite suggéré avec W.D. Phillips d'utiliser la nature dissipative des forces radiatives pour contourner le théorème de Gauss optique [8]. Enfin, il a été proposé récemment de profiter du pompage optique pour s'affranchir là encore du théorème de Gauss [9].

Malgré leur instabilité à trois dimensions, les pièges "à la Minogin-Javanainen" sont loin d'être dépourvus d'intérêt. Ils fonctionnent parfaitement à une ou deux dimensions et fournissent ainsi un moyen remarquablement simple de collimater et focaliser un jet atomique. Nous commençons donc par étudier en détail ce type de pièges (§ D1-1) ; nous exposerons ensuite brièvement la démonstration du théorème de Gauss optique (§ D1-2), pour étudier enfin un moyen de contourner ce théorème (§ D1-3).



### D1-1 LE PIEGEAGE A UNE OU DEUX DIMENSIONS

Le schéma de principe d'un piège à une dimension est indiqué sur la figure 1 : les deux ondes laser représentées sont identiques, résonnantes (pas de force dipolaire) et non saturantes : le paramètre de saturation  $s(0)$  de chaque onde au point 0 est supposé petit devant 1, si bien qu'on peut ajouter indépendamment les pressions de radiation de chaque onde. Si l'atome est au point 0, ces deux pressions de radiation ont même intensité et la force totale vue par l'atome est nulle. Si l'atome s'écarte de 0 vers la gauche, il se rapproche du foyer  $F_1$  de l'onde 1 et s'éloigne du foyer  $F_2$  de l'onde 2. La pression de radiation de l'onde 1 est alors dominante et l'atome est rappelé vers le point 0. Si l'atome s'écarte de 0 vers la droite, c'est la pression de radiation de l'onde 2 qui l'emporte et l'atome est encore rappelé vers 0. On réalise donc ainsi une force de rappel sur l'axe  $F_1F_2$  qui est confinante autour du point 0.

Etudions maintenant plus en détail les caractéristiques de cette force. Considérons d'abord un faisceau gaussien unique résonnant, de foyer  $F_1$  et de rayon focal ("waist")  $w_0$ , et étudions la force au voisinage d'un point donné 0 de l'axe du faisceau, situé à une distance  $z_0$  du foyer  $F_1$  (fig. 2). Notons M le point courant voisin de 0, repéré par sa distance à l'axe  $\rho_{\perp}$  et son abscisse le long de l'axe  $\rho_{\parallel}$ . Ces deux coordonnées  $\rho_{\perp}$  et  $\rho_{\parallel}$  sont supposées petites devant  $z_0$  et devant le rayon du faisceau au point 0 :  $w(0) = w_0 (1 + z_0^2/z_R^2)^{1/2}$  où  $z_R = \pi w_0^2/\lambda$  représente la longueur de Rayleigh du faisceau [10]. La force de pression de radiation en ce point M s'écrit (cf. éq. C1-52) :

$$\vec{f}(M) = \hbar \vec{\nabla}\psi(M) \frac{s(M)}{1 + s(M)} \frac{\Gamma}{2} \quad (D1-1)$$

Au voisinage de 0, l'onde laser est à peu près sphérique, de rayon  $z_0 + z_0^2/z_R$  [10]. On a donc :

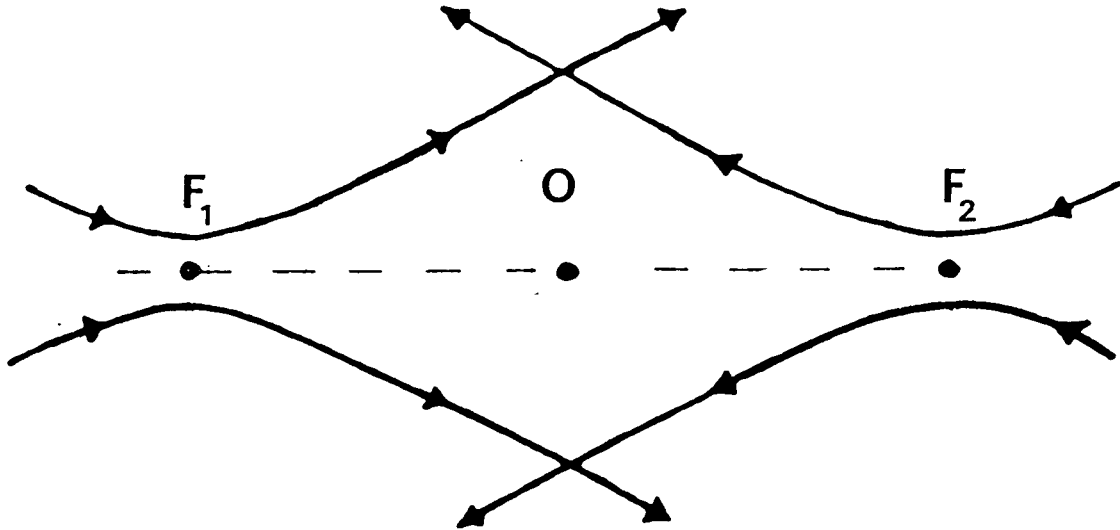


Figure 1 : Configuration laser assurant un piégeage à une dimension sur l'axe  $F_1, F_2$ .

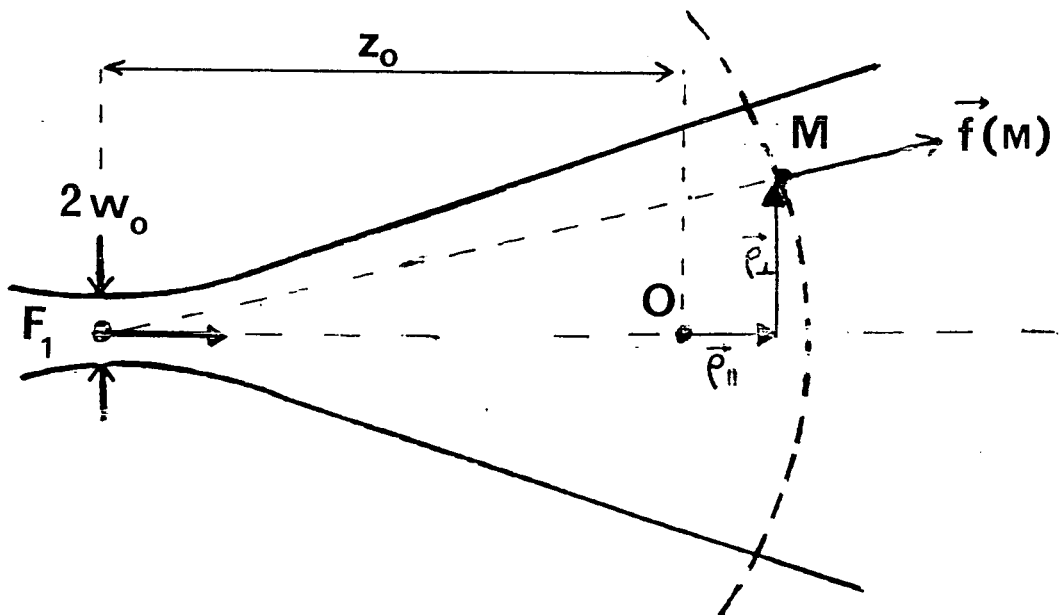


Figure 2 : Etude de la force au voisinage d'un point  $O$  situé sur l'axe d'une onde laser gaussienne.

$$\vec{\nabla}\varphi(M) \simeq \vec{k} + \frac{kz_0}{z_0^2 + z_R^2} \vec{\rho}_\perp \quad (D1-2)$$

où  $\vec{k} = \omega\vec{u}/c$  est dirigé suivant l'axe de l'onde laser et où nous n'avons gardé que les termes dominants pour  $z_0$  et  $z_R$  grands devant la longueur d'onde optique  $\lambda$ . Le paramètre de saturation au point M peut s'écrire, au premier ordre en  $\rho_\parallel$  et  $\rho_\perp$  :

$$s(M) = s(0) \left( 1 - \frac{2z_0 \rho_\parallel}{z_0^2 + z_R^2} \right) \quad (D1-3)$$

En reportant (D1-2) et (D1-3) dans (D1-1), nous obtenons alors :

$$\vec{f}(M) = \vec{f}(0) + \|\vec{f}(0)\| \frac{z_0 \vec{\rho}_\perp}{z_0^2 + z_R^2} - \frac{\|\vec{f}(0)\|}{1 + s(0)} \frac{2z_0 \vec{\rho}_\parallel}{z_0^2 + z_R^2} \quad (D1-4)$$

où  $\vec{f}(0)$  désigne la pression de radiation au point 0 :

$$\vec{f}(0) = \hbar k \frac{\Gamma}{2} \frac{s(0)}{1 + s(0)} \quad (D1-5)$$

Dans toute la suite de ce chapitre, nous supposerons que la distance  $z_0$  a été choisie grande devant la longueur de Rayleigh  $z_R$ , et nous nous limiterons de plus à un paramètre de saturation  $s(0)$  petit devant 1. L'équation (D1-4) peut alors se simplifier pour donner :

$$\vec{f}(M) = \vec{f}(0) + \|\vec{f}(0)\| \left( \frac{\vec{\rho}_\perp}{z_0} - 2 \frac{\vec{\rho}_\parallel}{z_0} \right) \quad (D1-4)'$$

Supposons maintenant que l'on ajoute un deuxième faisceau le long de l'axe  $z$ , se propageant en sens contraire et focalisé en  $F_2$ , symétrique de  $F_1$  par rapport à 0 (Fig. 1). Puisque le paramètre de saturation  $s(0)$  est petit devant 1, la force totale vue par l'atome est alors simplement la somme des deux pressions de radia-

tion, ce qui donne au point M :

$$\vec{f}(M) = 2 \|\vec{f}(0)\| \frac{\vec{\rho}_{\perp}}{z_0} - 4 \|\vec{f}(0)\| \frac{\vec{\rho}_{\parallel}}{z_0} \quad (D1-6)$$

Cette force est confinante autour de 0 pour un mouvement suivant l'axe  $F_1 F_2$  et est expulsante radialement. Elle dérive du potentiel :

$$U = -\frac{1}{2} K \rho_{\perp}^2 + K \rho_{\parallel}^2 \quad (D1-7)$$

où la raideur K s'écrit :

$$K = \frac{2 \|\vec{f}(0)\|}{z_0} = \frac{\hbar k \Gamma s(0)}{z_0} \quad (D1-8)$$

Pour obtenir une force confinante à deux dimensions, il suffit de considérer la configuration indiquée sur la figure 3, comprenant quatre faisceaux respectivement focalisés en  $\pm z_0 \vec{u}_x$  et  $\pm z_0 \vec{u}_y$  et dont les axes passent tous par le point 0. D'après (D1-7) la paire d'onde alignée suivant 0x crée le potentiel :

$$U_x = -\frac{1}{2} K(y^2 + z^2) + Kx^2 \quad (D1-9)$$

De même, les deux ondes alignées suivant 0y créent le potentiel :

$$U_y = -\frac{1}{2} K(x^2 + z^2) + Ky^2 \quad (D1-10)$$

Le potentiel total créé par les quatres ondes de la figure 3 est alors :

$$U = U_x + U_y = \frac{1}{2} Kx^2 + \frac{1}{2} Ky^2 - Kz^2 \quad (D1-11)$$

C'est un potentiel qui est bien confinant dans tout le plan x-y (mais expulsant suivant la direction orthogonale z). Dans la mesure où le développement conduisant à (D1-6) est valable tant que  $\rho$  reste inférieur au rayon des faisceaux au point 0,  $w(0) \approx w_0 z_0 / z_R$ ,

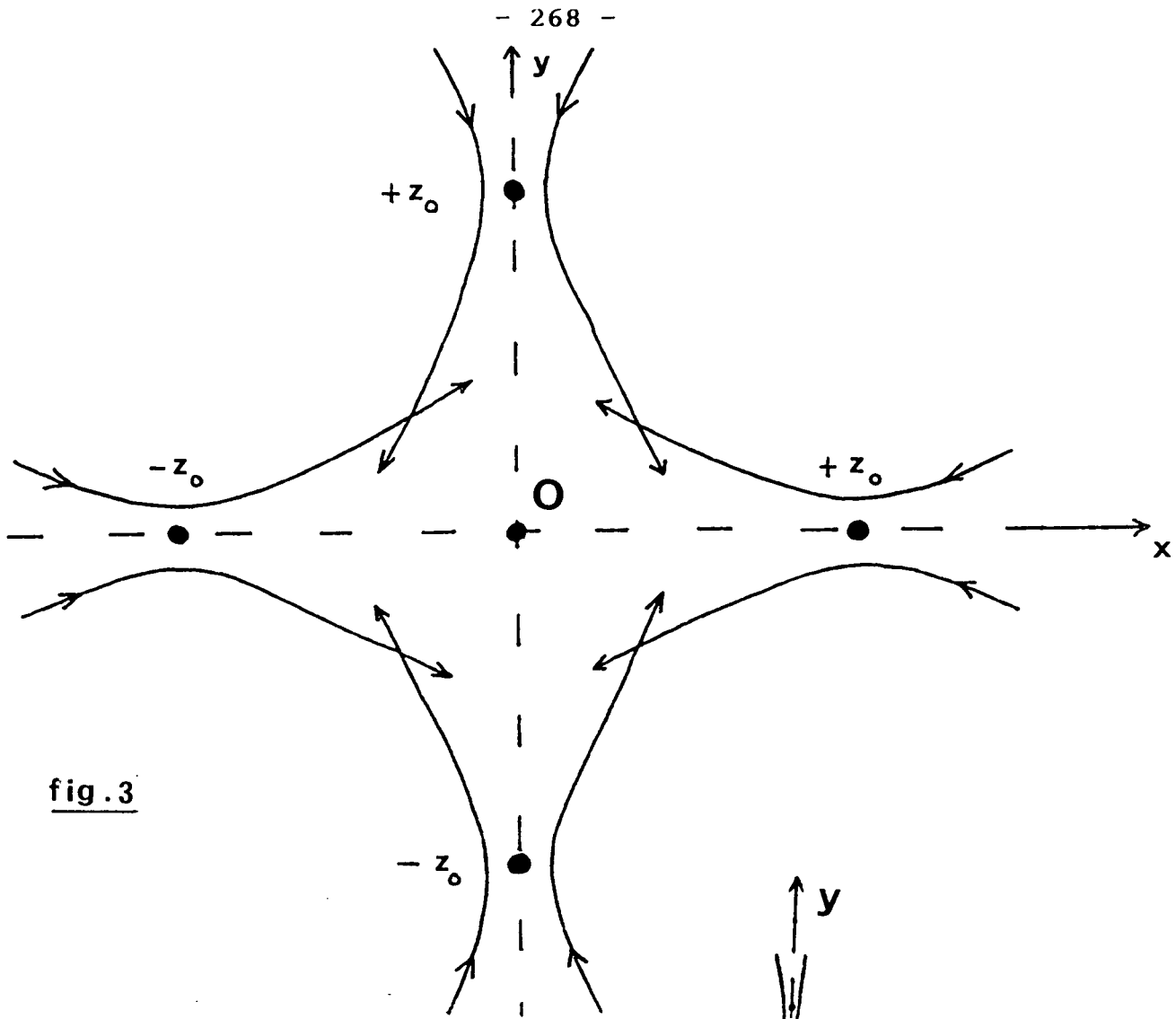


fig.3

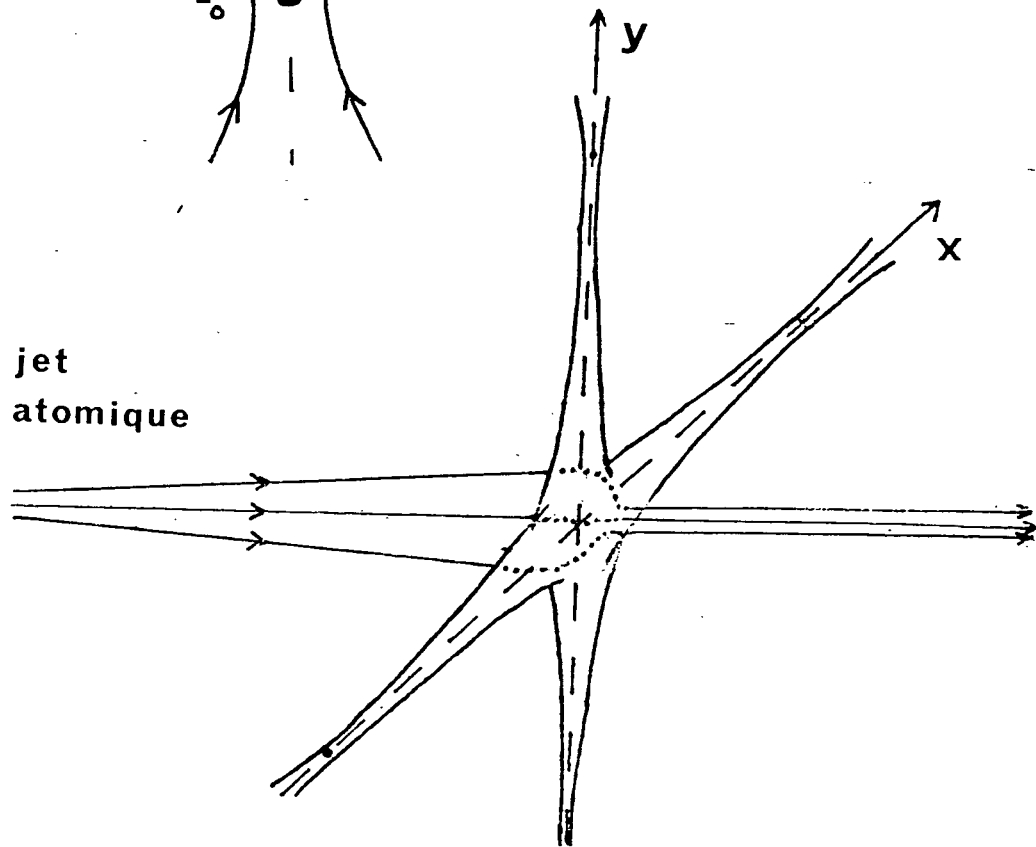


fig.4

Figure 3 : Configuration laser assurant un piégeage à deux dimensions dans le plan  $Oxy$ .

Figure 4 : Collimation et focalisation d'un jet atomique.

la profondeur  $U_0$  du puits de potentiel (D1-11) peut s'estimer en prenant la valeur de ce potentiel en  $x = y = w(0)/4$  et  $z = 0$ . On trouve alors :

$$U_0 \approx \frac{1}{16} K w^2(0) = \frac{z_0}{8 z_R} \hbar \Gamma s(0) \quad (D1-12)$$

Ce piégeage à deux dimensions peut s'accompagner d'un refroidissement si les ondes laser, au lieu d'être parfaitement résonantes, sont désaccordées d'une demi-largeur naturelle vers le rouge (cf. C3-10). Comme nous l'avons vu au chapitre C3, les atomes atteignent alors une température de l'ordre de  $\hbar \Gamma / 2$  qui peut être très inférieure à la profondeur  $U_0$  : si la puissance laser est suffisante, on peut en effet choisir la distance  $z_0$  grande devant  $z_R$ , tout en conservant un paramètre de saturation appréciable,  $s(0) = 1/10$  par exemple. On réalise alors un piégeage à deux dimensions stable\*.

Un intérêt important de ce piégeage à deux dimensions est la focalisation et la collimation d'un jet atomique, l'axe du jet étant perpendiculaire au plan des faisceaux piège (Fig. 4). Prenons l'exemple d'un jet atomique de Césium éclairé sur sa raie de résonance ( $\lambda = 852 \text{ nm}$ ,  $\Gamma^{-1} = 30 \text{ ns}$ ), chacun des faisceaux laser vérifiant  $s(0) = 1/8$ ,  $z_R = 30 \text{ } \mu\text{m}$  ( $w_0 = 3 \text{ } \mu\text{m}$ ) et  $z_0 = 4 \text{ cm}$ . En sortie d'une telle zone, la vitesse atomique transverse moyenne est donnée par :

$$\frac{1}{2} m \overline{v_{\perp}^2} \approx \frac{1}{2} \hbar \Gamma \quad \Rightarrow \quad \overline{v_{\perp}} = \sqrt{\frac{\hbar \Gamma}{m}} \approx 12 \text{ cm/s} \quad (D1-13)$$

et l'extension spatiale atomique  $\rho_{\perp}$  s'écrit :

---

\* En toute rigueur, il faudrait également considérer l'effet des forces dipolaires puisque le désaccord n'est plus nul. Toutefois, on voit immédiatement d'après (C1-47) que, pour le désaccord choisi, elles sont inférieures à la pression de radiation par un facteur  $\lambda/w(0)$ .

$$\frac{1}{2} K \overline{\rho_{\perp}^2} \simeq \frac{1}{2} \hbar \Gamma \quad \Rightarrow \quad \overline{\rho_{\perp}} = \sqrt{\frac{z_0 \lambda}{2\pi s(0)}} \simeq 200 \text{ } \mu\text{m} \quad (\text{D1-14})$$

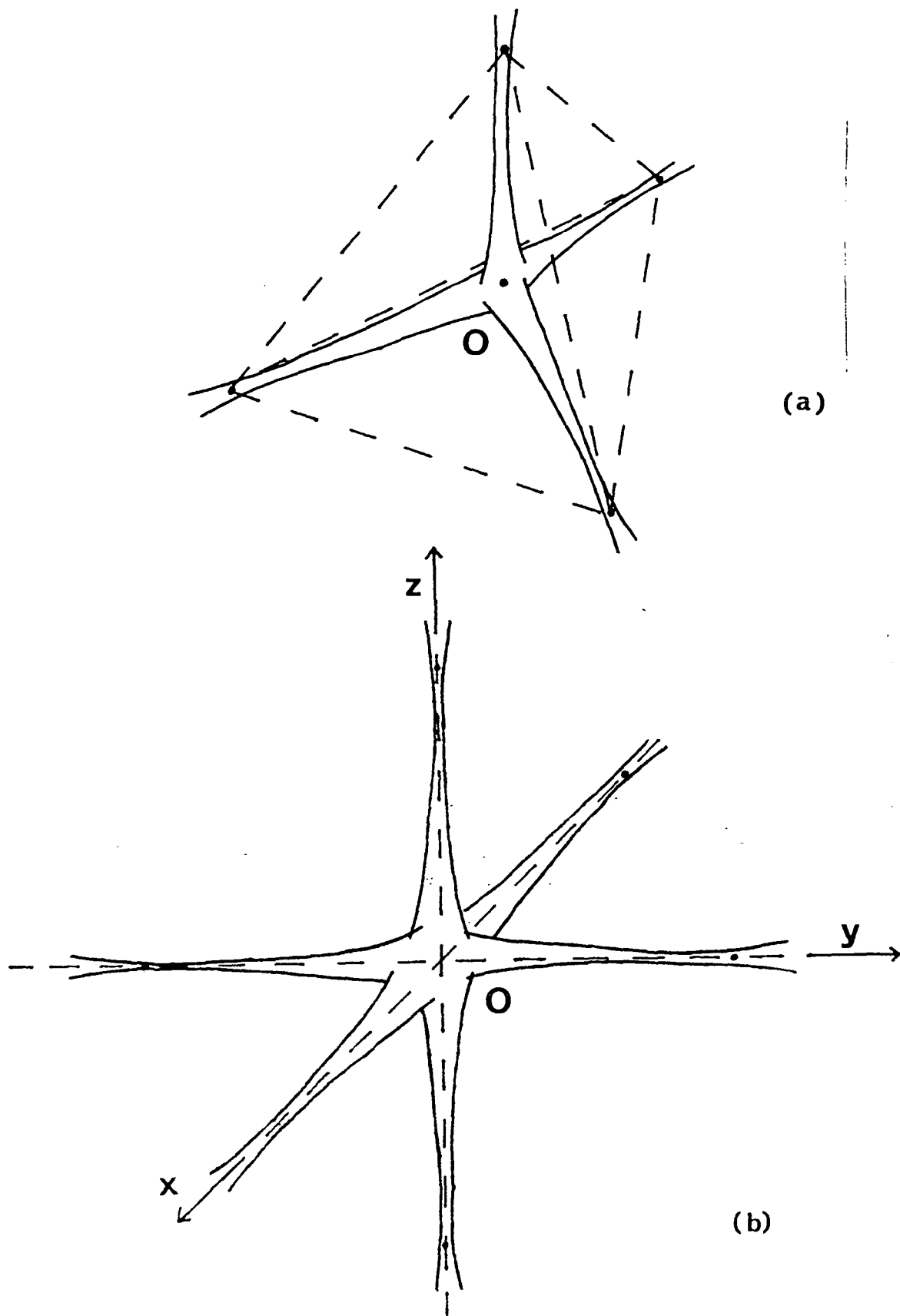
On obtient donc un jet atomique extrêmement bien collimaté et focalisé. Le temps nécessaire pour atteindre cet équilibre est fonction à la fois de la constante de temps d'amortissement de la vitesse  $\Gamma^{-1}$  (cf. éq. C3-8,10) et de la période d'oscillation dans le piège  $T_0$  :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}} = \sqrt{\frac{2\pi m \lambda z_0}{\hbar \Gamma s(0)}} \quad (\text{D1-15})$$

Pour le piège décrit plus haut, on a  $T_0 = 10 \text{ ms}$ , ce qui est beaucoup plus long que le temps minimal d'amortissement de la vitesse qui est de  $150 \text{ } \mu\text{s}$  pour  $\delta = -\Gamma/2$ . En fait, la situation optimale correspond à un choix du désaccord  $\delta$  conduisant à la relation  $\gamma T_0 = 4\pi$ . La vitesse atomique est alors amortie au régime critique et la constante de temps d'atteinte de l'équilibre (D1-13,14) est de l'ordre de  $T_0/4$ , c'est-à-dire 2 ou 3 millisecondes. Pour mettre en évidence un tel effet (qui n'a encore jamais été observé), il est probablement préférable de partir d'un jet atomique préalablement ralenti longitudinalement par pression de radiation. Ainsi, si la vitesse moyenne des atomes du jet est de l'ordre de  $50 \text{ m/s}$ , la longueur d'interaction nécessaire est d'une dizaine de centimètres ce qui semble tout à fait réalisable expérimentalement.

## D1-2 LE THEOREME DE GAUSS OPTIQUE

Il est tentant de généraliser à trois dimensions les pièges que nous venons d'étudier à une ou deux dimensions, en considérant par exemple une des configurations représentées sur la figure 5 [5,11]. Malheureusement, si on ajoute toutes les forces de pression de radiation créées par ces quatre ou six faisceaux, on se convainc aisément que la force totale au voisinage de 0 est nulle, ce qui ne permet pas a priori de réaliser un piégeage stable en ce point. Considérons par exemple la configuration à six faisceaux de la



*Figure 5 : Configurations de champs laser envisagées dans les réf. [5,11] pour créer un piègeage à trois dimensions par pression de radiation.*



figure 5b. Le potentiel créé par les deux faisceaux d'axe Ox s'écrit d'après (D1-9) :

$$U_x = -\frac{1}{2} K (y^2 + z^2) + Kx^2 \quad (D1-16a)$$

C'est comme nous l'avons vu un potentiel confinant le long de l'axe Ox et expulsant dans le plan Oyz. De même, les potentiels créés par les faisceaux alignés suivant y et z s'écrivent respectivement :

$$U_y = -\frac{1}{2} K (x^2 + z^2) + Ky^2 \quad (D1-16b)$$

$$U_z = -\frac{1}{2} K (x^2 + y^2) + Kz^2 \quad (D1-16c)$$

En additionnant les trois potentiels  $U_x$ ,  $U_y$  et  $U_z$  nous trouvons :

$$U = U_x + U_y + U_z = 0 \quad (D1-17)$$

ce qui correspond bien à une force nulle, à cet ordre du calcul, au voisinage de 0.

En fait, ce résultat n'est que le cas particulier du théorème de Gauss optique (Optical Earnshaw theorem) [6]. Ce théorème peut s'énoncer comme suit :

*Il est impossible de réaliser un piégeage stable pour un atome ou une particule diélectrique isotrope en utilisant uniquement les forces de pression de radiation linéaires en intensité créées par un ensemble statique d'ondes laser monochromatiques.*

La démonstration de ce théorème est très simple. L'expression de la force de pression de radiation est donnée par l'équation (C1-33), dans laquelle nous prenons  $\chi''$  constant puisque nous nous intéressons ici à la partie linéaire de la force. La force est dans ce cas directement proportionnelle au vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}'$  donnée en (C1-35b). Puisque la divergence de ce vecteur  $\vec{\Pi}'$  est nulle, on en déduit que :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{\Phi}_{diss} = 0 \quad (D1-18)$$

Ceci interdit la réalisation d'un point d'équilibre stable : la force devrait en effet pointer vers un tel point sur tout un voisinage de ce point, ce qui est interdit par (D1-18). Ce théorème est très voisin du théorème de Gauss électrostatique indiquant qu'on ne peut pas réaliser de point d'équilibre stable en utilisant uniquement des champs électrostatiques, la force électrostatique vérifiant une relation analogue à (D1-18). On peut d'ailleurs prolonger cette analogie et remarquer que la force (D1-4) est formellement identique à la force créée par une charge ponctuelle placée en  $F_1$  sur une autre charge située en M [6]. Les configurations laser de la figure 5 tentent ainsi de réaliser un piégeage à trois dimensions en créant des champs de forces analogues à ceux produits par les systèmes de charges représentés sur la figure 6.

Il y a fort heureusement plusieurs possibilités pour contourner le théorème de Gauss optique. On peut tout d'abord chercher à réaliser l'analogie d'un piège radiofréquence [12], c'est-à-dire alterner rapidement dans le temps diverses configurations de champ laser [7]. Ceci impose un micromouvement aux atomes et l'énergie cinétique de ce micromouvement, nulle au point 0 et positive partout ailleurs, joue le rôle d'une énergie potentielle pour le mouvement séculaire et confine ainsi les atomes autour de 0. Dans la référence [7], l'auteur suggère de plus de désaccorder vers le rouge les ondes laser créant ce micromouvement, dans le but d'amortir la vitesse atomique et de compenser ainsi l'échauffement des atomes dû aux fluctuations des forces radiatives. En fait, cette dernière suggestion soulève un autre problème : il apparaît en effet que le freinage ainsi induit affecte également le micromouvement ; ceci diminue alors considérablement la profondeur du puits pour le mouvement séculaire et rend la stabilité du piégeage problématique.

En collaboration avec W. Phillips, nous avons alors cherché à concevoir un type différent de piège fonctionnant avec la pression de radiation, en abandonnant l'idée de micromouvement : nous avons cherché à réaliser (théoriquement) un piégeage dynamique des atomes, en alternant dans le temps des phases de piégeage suivant un axe Oz (configuration de la figure 1) et des phases de piégeage suivant le plan orthogonal Oxy (configuration de la figure 3) [8].

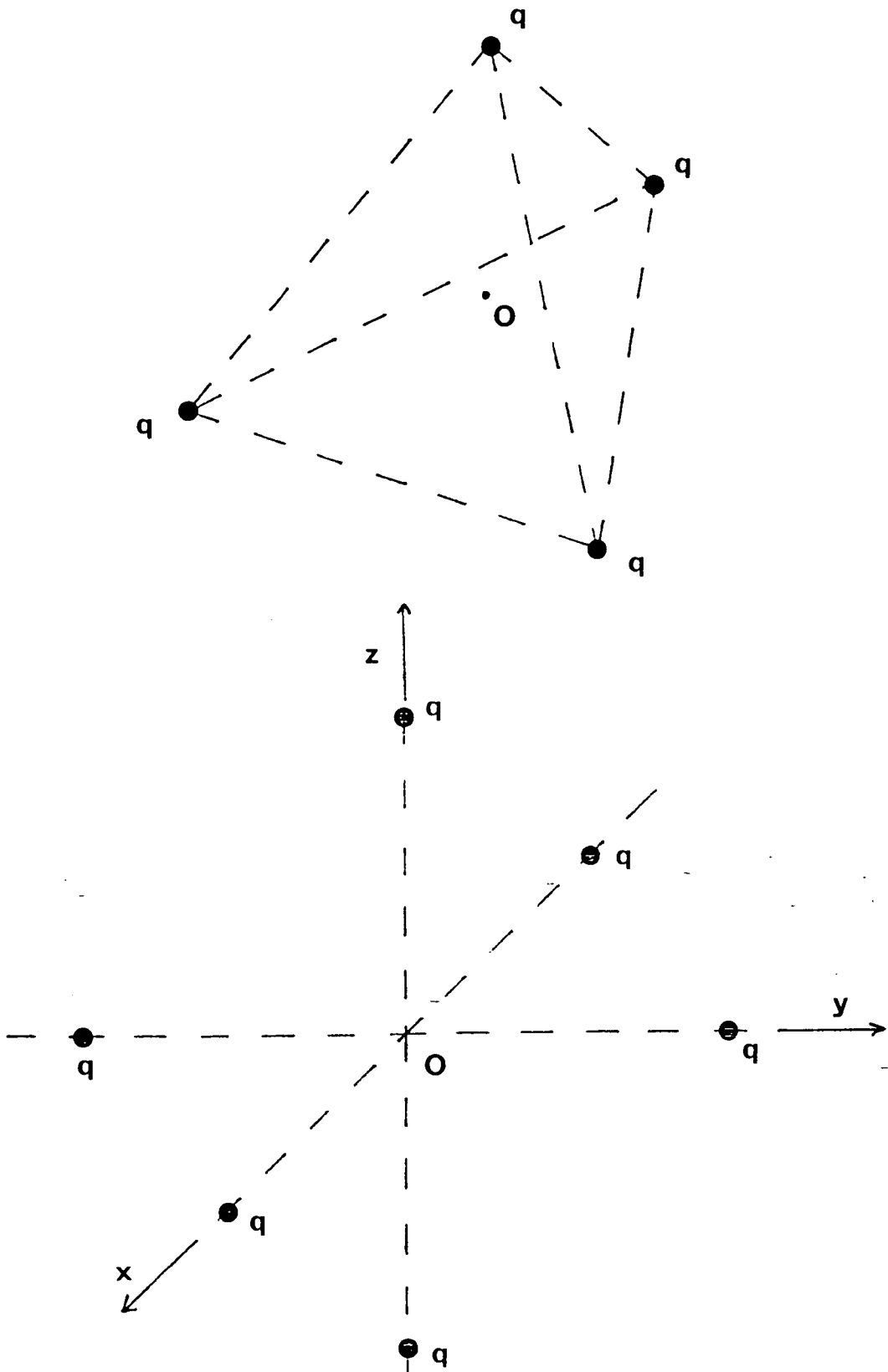


Figure 6 : Configurations de charges créant des champs de forces analogues à ceux de la figure 5.

La partie "expulsante" de la force de pression de radiation est dans chacune des phases "inhibée" par des mélasse optiques judicieusement placées. Cette solution est exposée dans le paragraphe suivant.

Signalons pour finir une dernière proposition [9] qui consiste à s'affranchir de la relation de proportionnalité entre la force  $\vec{\phi}_{dis}$  et le vecteur de Poynting  $\vec{\Pi}'$ . On peut par exemple tirer parti du pompage optique créé par les ondes laser sur les atomes, ces ondes laser ayant chacune des polarisations différentes. On est alors dans une situation où la force de pression de radiation n'est plus linéaire en intensité et les limitations du théorème de Gauss optique ne s'appliquent pas. Nous proposons à la fin du paragraphe suivant (§ D1-3-3) une autre version de ce type de piège où l'on exploite une non-linéarité entre la force et le vecteur de Poynting.

### D1-3 UN PIEGEAGE A TROIS DIMENSIONS PAR PRESSION DE RADIATION [8]

#### 3-1 Principe de fonctionnement du piège

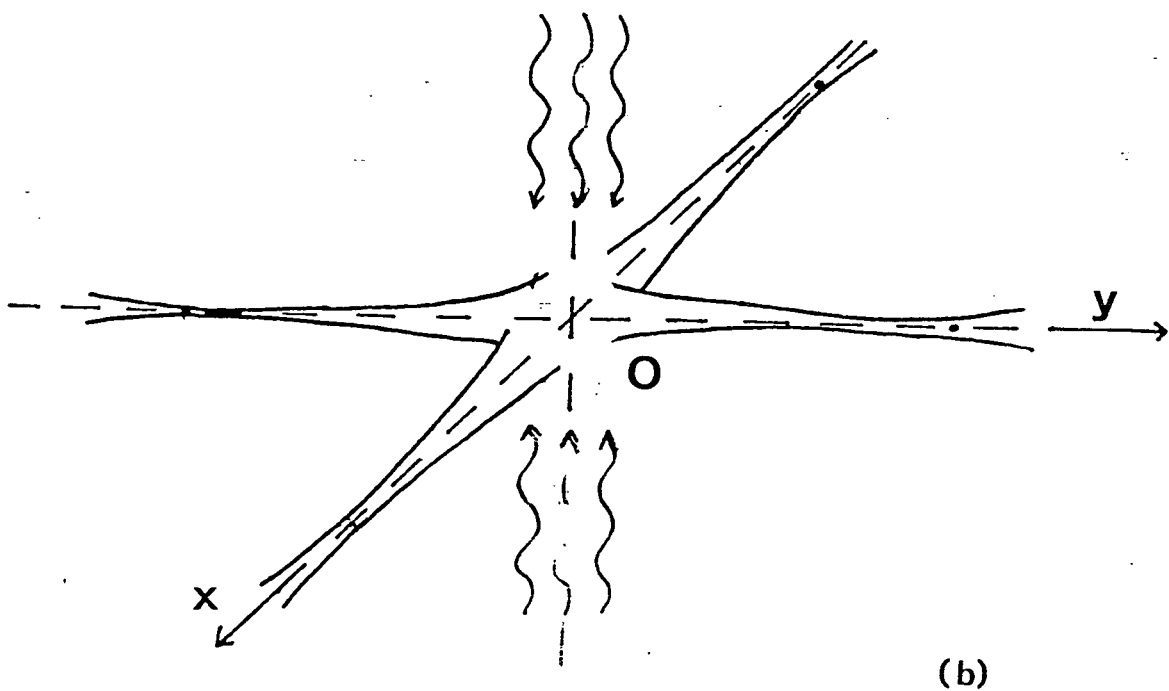
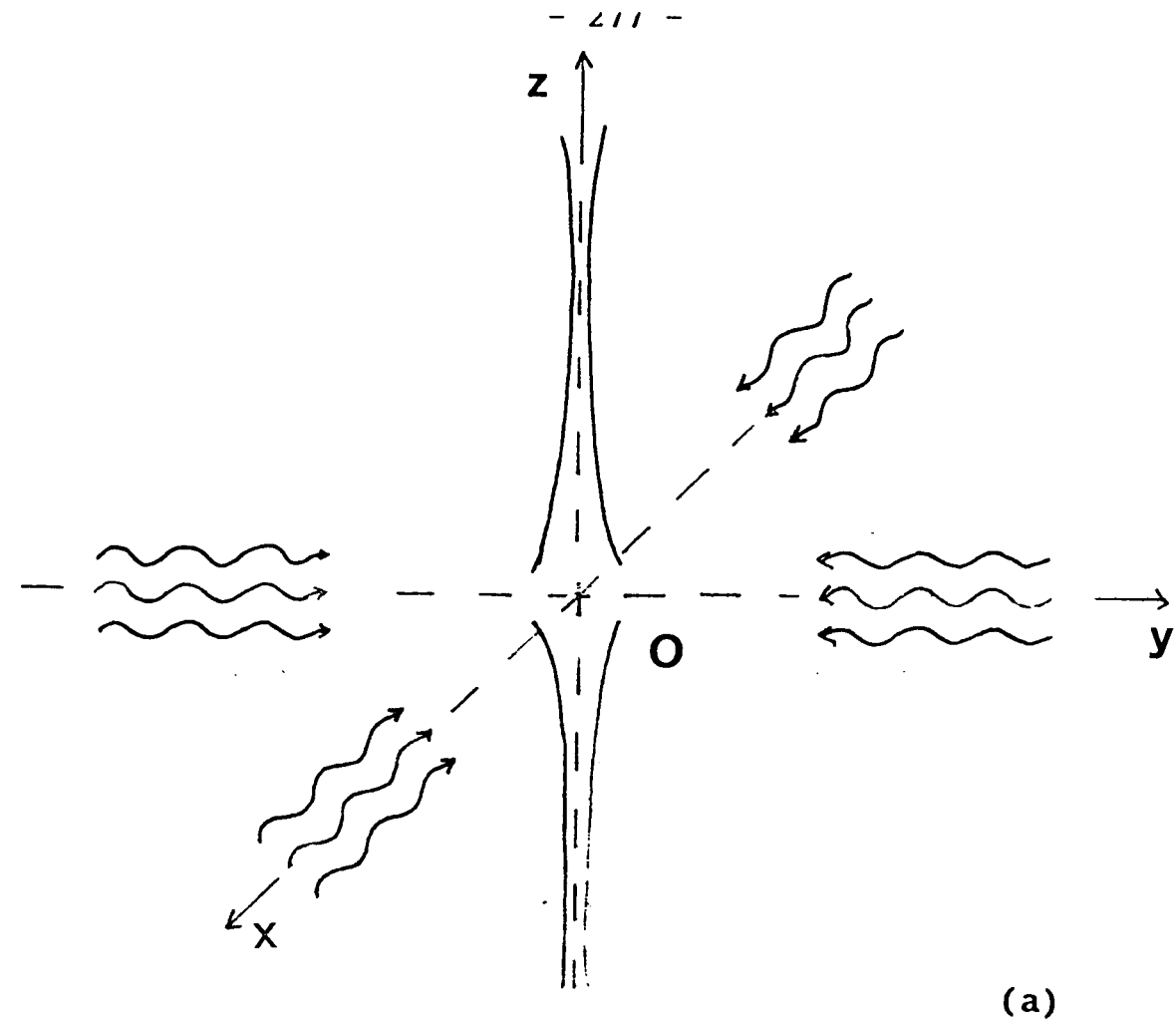
Reprenons les pièges à une et deux dimensions décrits dans le premier paragraphe de ce chapitre. Pour le piège à une dimension représenté sur la figure 1, le confinement se fait sur l'axe Oz des faisceaux avec une force  $- 2 K \vec{z}$ . Transversalement, la force est expulsante et vaut  $K \vec{\rho}$  ( $\vec{\rho}$  : composante du vecteur  $\vec{OM}$  dans le plan Oxy orthogonal à Oz). Pour le piège à deux dimensions représenté sur la figure 3, le confinement se fait dans le plan xOy des 4 faisceaux laser avec la force  $- K \vec{\rho}$  et la force est expulsante suivant l'axe Oz perpendiculaire au plan de la figure ( $+ 2 K \vec{z}$ ). La présence de cette force expulsante est inévitable. D'après la relation  $\vec{\nabla} \cdot \vec{\phi}_{dis} = 0$  (éq. D1-18), tout confinement suivant une ou deux directions doit obligatoirement s'accompagner d'une expulsion suivant la ou les directions orthogonales.

Toutefois, il est possible de rendre négligeable une telle expulsion en tirant parti des possibilités offertes par le refroidissement radiatif. Considérons une des deux situations expérimentales représentées sur la figure 7. Sur la figure 7a, on réalise un confinement suivant l'axe Oz, tout en disposant deux "mélasses optiques" suivant les axes Ox et Oy, c'est-à-dire deux ondes planes stationnaires peu intenses et désaccordées en dessous de résonance, qui freinent le mouvement atomique suivant ces deux axes. Le mouvement oscillatoire suivant l'axe Oz n'est pas perturbé par la présence de ces mélasses, par contre le mouvement d'expulsion suivant Ox et Oy peut être très diminué si la constante de temps typique de ralentissement  $\gamma^{-1}$  (donnée à l'éq. C3-10) est très courte devant la constante de temps caractérisant l'expulsion  $\sqrt{m/K}$ . De même, dans la configuration de la figure 7b, on continue à bénéficier du piégeage dans le plan Oxy tout en diminuant l'expulsion suivant Oz.

Il suffit alors d'alterner rapidement dans le temps les deux configurations de la figure 7 pour réaliser un piège à trois dimensions stable : suivant chaque direction, l'atome est tour à tour piégé avec la force  $-2K\vec{z}$  ou  $-K\vec{\rho}$  et expulsé avec une force très réduite par rapport à  $+2K\vec{z}$  et  $+K\vec{\rho}$ , ce qui assure la stabilité du piège.

### 3-2 Etude quantitative

Nous pouvons reprendre de manière plus quantitative ce raisonnement pour tenir compte également des fluctuations des forces radiatives, qui chauffent les atomes piégés. Etudions par exemple la stabilité suivant l'axe Ox, les deux autres directions étant manifestement équivalentes. Nous allons calculer pour un atome initialement placé au centre du piège et avec une vitesse nulle, l'évolution des trois valeurs moyennes  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{v_x^2}$  et  $\overline{xv_x}$  : nous connaissons alors à chaque instant l'étendue de la répartition spatiale atomique, ainsi que la vitesse quadratique moyenne des atomes dans le piège [13]. En particulier, si ces trois quantités tendent vers une limite finie, nous pourrons donner les caractéristiques



*Figure 7 : Configurations assurant un piégeage stable le long de Oz (Fig. a) ou dans le plan Oxy (Fig. b) tout en présentant une expulsion très faible suivant les directions orthogonales grâce à des mélasses optiques appliquées le long de ces directions. En alternant rapidement dans le temps ces configurations, on réalise un piégeage à trois dimensions stable.*

dynamiques des atomes piégés.

Pour déterminer l'évolution de ces trois quantités, repartons de l'équation de Fokker-Planck établie au chapitre B4. A une dimension, et dans le domaine linéaire qui nous intéresse ici -coefficient de diffusion  $D_x$  constant, force harmonique  $\pm Kx$  ou linéaire en vitesse  $-\gamma v_x$  - cette équation prend une forme relativement simple. On a pour une phase de piégeage :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) w(x, v_x, t) = \frac{\partial}{\partial v_x} \left[ \left( \frac{K}{m} x + \gamma_p v_x \right) w \right] + D_x \frac{\partial^2 w}{\partial v_x^2} \quad (D1-19a)$$

et pour une phase d'expulsion :

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x}\right) w(x, v_x, t) = \frac{\partial}{\partial v_x} \left[ \left( -\frac{K}{m} x + \gamma_e v_x \right) w \right] + D_x \frac{\partial^2 w}{\partial v_x^2} \quad (D1-19b)$$

Le coefficient de friction pendant la phase d'expulsion est noté  $\gamma_e$  et nous nous sommes réservés la possibilité de mettre un freinage le long de  $Ox$  pendant la phase de piégeage (freinage non représenté sur la figure 7). Pour simplifier, nous avons pris le même coefficient de diffusion  $D_x$  pendant les phases de piégeage et d'expulsion.

A partir des deux équations (D1-19ab), il est maintenant facile d'obtenir l'évolution des trois quantités  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{v_x^2}$  et  $\overline{xv_x}$ , définies par :

$$\begin{aligned} \overline{x^2}(t) &= \int \int dx dv_x x^2 w(x, v_x, t) \\ \overline{v_x^2}(t) &= \int \int dx dv_x v_x^2 w(x, v_x, t) \\ \overline{xv_x}(t) &= \int \int dx dv_x xv_x w(x, v_x, t) \end{aligned} \quad (D1-20)$$

Considérons par exemple l'évolution de  $\overline{v_x^2}(t)$  pendant une phase de

piégeage. En multipliant l'équation (D1-19a) par  $\overline{v_x^2}$  et en intégrant ensuite les variables  $x$  et  $v_x$ , on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial t} \overline{v_x^2} = - 2 \frac{K}{m} \overline{xv_x} - 2 \gamma_p \overline{v_x^2} + 2 D_x \quad (D1-21)$$

Le premier terme du membre de droite est dû au potentiel de piégeage, le second provient du freinage radiatif, et le dernier terme enfin décrit l'échauffement sous l'effet des fluctuations des forces radiatives. On peut de même établir l'évolution de  $\overline{x^2}$  et  $\overline{xv_x}$ , le point crucial étant que dans le domaine linéaire étudié ici, le système donnant l'évolution des trois quantités  $\overline{x^2}$ ,  $\overline{v_x^2}$  et  $\overline{xv_x}$  est fermé et peut être complètement résolu [14].

Pendant une phase de piégeage (p) pour le plan Oxy (Fig. 7b) cette évolution s'écrit :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{x^2} = 2 \overline{xv_x} \\ \frac{d}{dt} \overline{xv_x} = - \frac{K}{m} \overline{x^2} - \gamma_p \overline{xv_x} + \overline{v_x^2} \\ \frac{d}{dt} \overline{v_x^2} = - 2 \frac{K}{m} \overline{xv_x} - 2 \gamma_p \overline{v_x^2} + \frac{D_x}{m} \end{cases} \quad (D1-22a)$$

Pendant une phase d'expulsion (e) pour le plan Oxy (Fig. 7a), le système correspondant est :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{x^2} = 2 \overline{xv_x} \\ \frac{d}{dt} \overline{xv_x} = \frac{K}{m} \overline{x^2} - \gamma_e \overline{xv_x} + \overline{v_x^2} \\ \frac{d}{dt} \overline{v_x^2} = 2 \frac{K}{m} \overline{xv_x} - 2 \gamma_e \overline{v_x^2} + \frac{D_x}{m} \end{cases} \quad (D1-22b)$$

Pour résoudre ces équations, il est commode de les réécrire sous la forme :



$$\frac{d\vec{C}}{dt} = M_p \vec{C} \quad \text{ou} \quad \frac{d\vec{C}}{dt} = M_e \vec{C} \quad (D1-23)$$

où  $\vec{C}$  est le vecteur :

$$\vec{C} = \left( \frac{\overline{Kx^2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{mK}}{D_x}, \frac{mv_x^2}{2} \cdot \frac{\sqrt{mK}}{D_x}, \frac{Kmxv_x}{D_x}, 1 \right) \quad (D1-24)$$

et  $M_{p/e}$  la matrice :

$$M_{p/e} = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{K/m} & 0 & 0 \\ 2\varepsilon_{p/e} \sqrt{K/m} & -\gamma_{p/e} & 2\sqrt{K/m} & 0 \\ 0 & \varepsilon_{p/e} \sqrt{K/m} & -2\gamma_{p/e} & \sqrt{K/m} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (D1-25)$$

avec  $\varepsilon_p = -1$  et  $\varepsilon_e = 1$ .

En notant  $T$  la durée de chaque phase de piégeage et d'expulsion, le vecteur  $\vec{C}(2T)$  après un cycle piégeage-expulsion peut s'écrire en fonction du vecteur  $\vec{C}(0)$  avant le cycle :

$$\vec{C}(2T) = U \cdot \vec{C}(0) \quad (D1-26)$$

avec :

$$U = \exp(M_e T) \exp(M_p T) \quad (D1-27)$$

La condition de stabilité du piège est alors simple : le piège est stable si et seulement si toutes les valeurs propres de  $U$  sont de module inférieur à un. Si cette condition est réalisée, nous pouvons de plus déterminer l'état stationnaire par :

$$\vec{C}(\infty) = U \cdot \vec{C}(\infty) \quad (D1-28)$$

et déduire l'extension spatiale  $\sqrt{x^2}$  et la vitesse quadratique stationnaire  $\sqrt{v^2}$  des atomes piégés.

Donnons maintenant les résultats essentiels du calcul numérique des valeurs propres de U que nous avons effectué pour étudier la stabilité de ce piège. La matrice U dépend des trois paramètres sans dimension  $T\sqrt{K/m}$ ,  $\gamma_e T$  et  $\gamma_p T$ .

(i) Pour avoir une bonne stabilité et un état stationnaire compact, nous avons constaté que le premier de ces paramètres devait être choisi de l'ordre de 1.5, c'est-à-dire :

$$T \simeq 0.2 T_0 = 0.2 (2\pi \sqrt{m/K}) \quad (D1-29)$$

où  $T_0$  est la période d'oscillation le long de Ox pendant la phase piégeante (cf. D1-15). En d'autres termes la durée T de chaque phase doit être suffisante pour que les atomes puissent effectuer une fraction notable d'oscillation dans le puits pendant chaque phase.

(ii) T étant fixé par cette première relation, la détermination du second paramètre  $\gamma_e T$  revient à chercher le freinage optimum à exercer pendant les phases d'expulsion. Comme on peut s'y attendre intuitivement, le piégeage est d'autant meilleur que ce freinage est important. Considérons par exemple un piège pour atomes de Césium analogue à celui décrit au premier paragraphe de ce chapitre\* :  $z_0 = 4 \text{ cm}$ ,  $z_R = 30 \mu\text{m}$  et un paramètre de saturation pour chaque onde, aussi bien piégeante que freinante, de 1/8. La période d'oscillation  $T_0$  vaut 10 ms, ce qui conduit à prendre,

---

\* Les chiffres que nous donnons ici correspondent, comme ceux des équations (D1-14,15), à une valeur du paramètre de saturation petite devant 1. En fait, étant donné le grand nombre de faisceaux présents simultanément, avec chacun  $s(0) = 1/8$ , il faudrait en toute rigueur tenir compte de la saturation totale de l'atome pour calculer  $T_0, \gamma_e, \dots$ .

d'après (D1-29),  $T = 2$  ms. Le freinage optimal pendant les phases d'expulsion est celui obtenu pour un désaccord de  $-\Gamma/2$  (cf. C3-10), ce qui conduit à  $\gamma_e^{-1} = 150$   $\mu$ s, soit  $\gamma_e T \simeq 13$ .

(iii) Le choix du freinage optimal pendant la phase de piégeage est moins intuitif. La valeur de  $\gamma_p T$ , conduisant à l'état stationnaire le plus compact, varie suivant les caractéristiques de l'atome et du piège considéré. En règle générale, on a toujours intérêt à mettre un frein pendant les phases de piégeage, ce frein devant toutefois être moins efficace que le frein présent pendant les phases d'expulsion, sous peine de déstabiliser le piégeage. Pour le piégeage envisagé plus haut, les valeurs de l'extension spatiale et la vitesse stationnaire sont données sur la figure 8, pour différentes valeurs de  $\gamma_p T$ . L'état le plus compact est obtenu pour  $\gamma_p T = 6$ , ce qui conduit aux caractéristiques finales pour ce piège à trois dimensions :

$$\sqrt{x^2} = 400 \text{ } \mu\text{m} \quad (\text{D1-30a})$$

$$\sqrt{v_x^2} = 12 \text{ cm/s} \quad (\text{D1-30b})$$

On peut constater que ces deux valeurs sont suffisamment petites pour justifier a posteriori le traitement linéaire choisi ici :  $\sqrt{x^2}$  est petit devant le rayon du faisceau laser en 0 ( $\simeq 4$  mm), et l'effet Doppler trouvé pour la vitesse (D1-30b) est petit devant la largeur naturelle  $\Gamma$ .

Ce type de piégeage n'a encore jamais été mis en évidence expérimentalement. Par contre, nous avons comparé nos résultats avec une simulation numérique du mouvement de l'atome dans le piège. Cette simulation est fondée sur un traitement Monte-Carlo de la dynamique atomique, dans laquelle le nombre de cycles de fluorescence pendant un intervalle de temps donné et l'impulsion des photons de fluorescence émis pendant ce temps sont des variables tirées au sort. L'accord entre les deux approches s'est révélé très bon. Ceci permet d'espérer qu'un piège de ce type

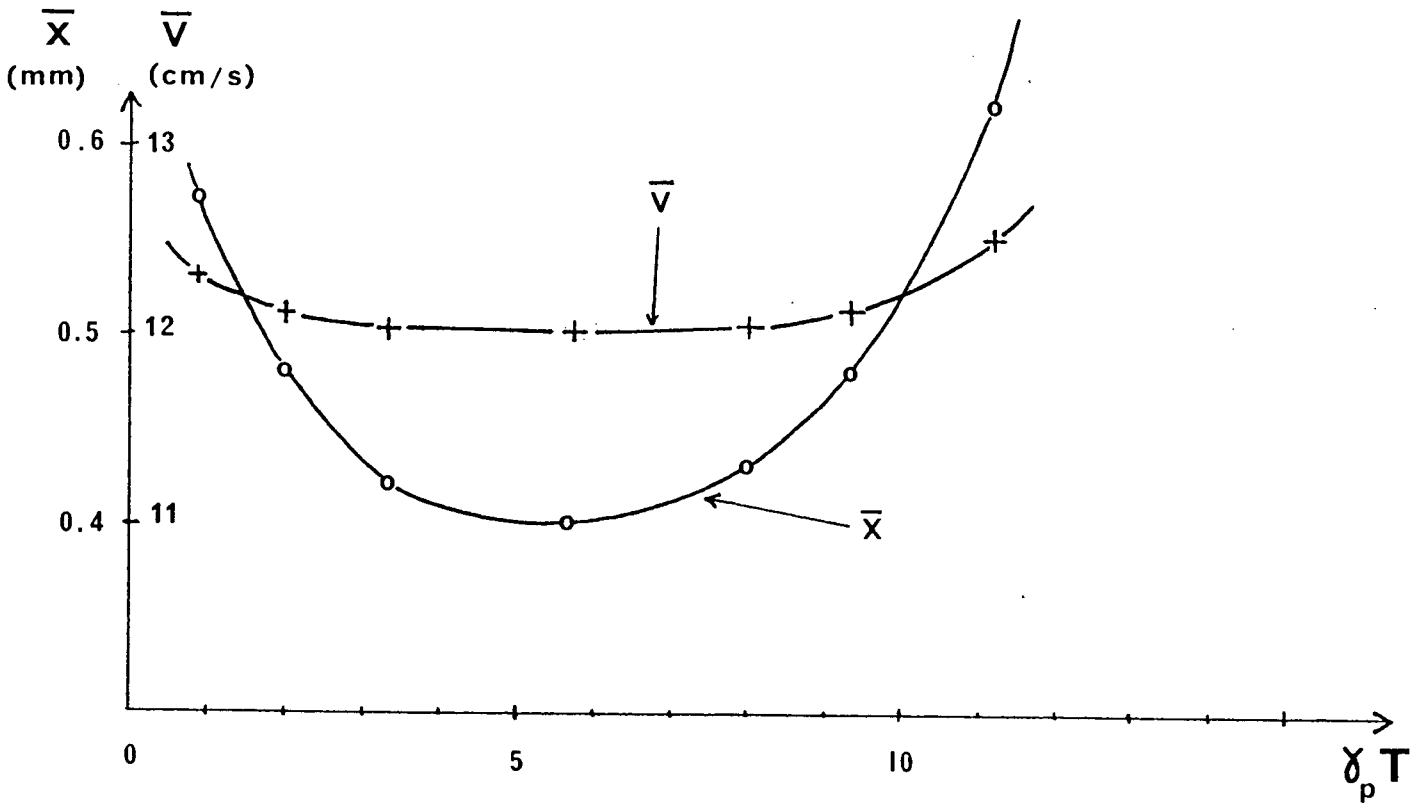


Figure 8 : Variation avec le "frein" de la phase piégeante de l'extension spatiale et de la vitesse pour le piège 3D à pression de radiation de la figure 7.

pourra fonctionner prochainement, notamment pour l'atome de Césium, le piégeage (qui ne nécessite que très peu de puissance lumineuse) pouvant alors se faire avec des diodes laser.

### 3-3 Un autre exemple de piège à trois dimensions

Dans ce dernier paragraphe, nous allons présenter un autre exemple de piège, basé sur la remarque faite par les auteurs de la référence [9] : si l'on s'affranchit de la relation de proportionnalité entre la force et le vecteur de Poynting, le théorème de Gauss optique ne s'applique plus, et rien n'empêche alors la réalisation d'un piège à trois dimensions stable. Dans la référence [9], les auteurs se proposaient d'utiliser un effet Zeeman ou un effet de pompage optique pour créer une non-linéarité entre la force de pression de radiation et le vecteur de Poynting. Dans le piège que nous proposons ici, la non-linéarité provient simplement d'un effet de saturation atomique.

Considérons tout d'abord la configuration de la figure 9. Cette configuration est expulsante suivant l'axe  $F_1 F_2 (Oz)$  et piégeante dans le plan orthogonal à cet axe  $(Oxy)$ . Si le paramètre de saturation en 0,  $s(0)$ , de chacune des deux ondes est petit devant 1, la force s'écrit en un point M voisin de 0 (cf. (D1-6)) :

$$\vec{f}(M) = - 2 \|\vec{f}(0)\| \frac{\vec{\rho}_\perp}{z_0} + 4 \|\vec{f}(0)\| \frac{\vec{\rho}_\parallel}{z_0} \quad (D1-31)$$

Cette force conformément au théorème de Gauss optique a une divergence nulle. Augmentons maintenant la puissance dans chacune des ondes, en alternant rapidement ces deux ondes dans le temps pour éviter les phénomènes de redistribution cohérente de photons. En prenant  $z_0 \gg z_R$ , nous obtenons d'après (D1-4) :

$$\vec{f}(M) = - 2 \|\vec{f}(0)\| \frac{\vec{\rho}_\perp}{z_0} + 4 \frac{\|\vec{f}(0)\|}{1 + s(0)} \frac{\vec{\rho}_\parallel}{z_0} \quad (D1-32)$$

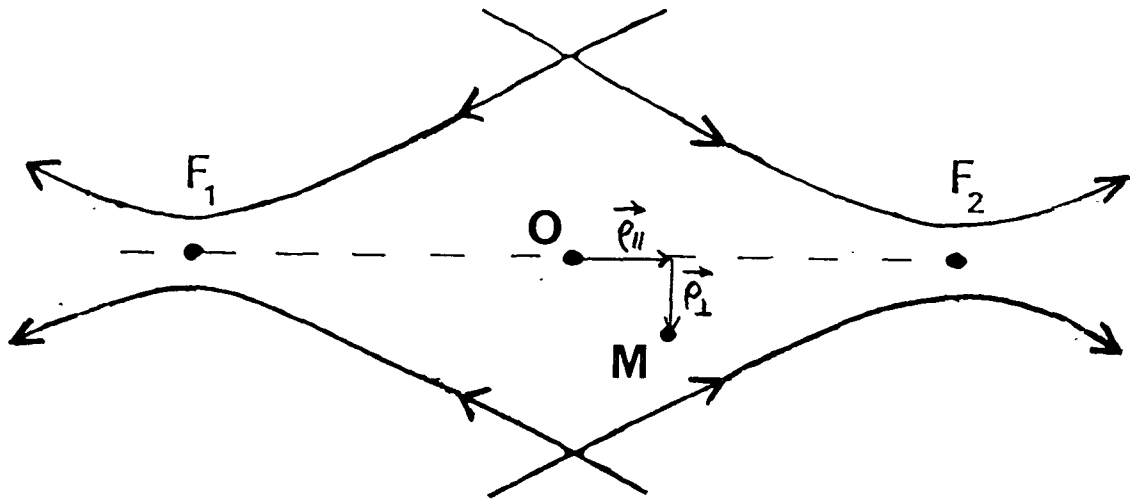


Figure 9 : Configuration laser assurant un piégeage dans le plan orthogonal à l'axe  $F_1F_2$ .

Cette force ne satisfait plus le théorème de Gauss optique : le confinement radial (terme en  $\vec{\rho}_\perp$ ) existe toujours, mais l'expulsion suivant Oz (terme en  $\vec{\rho}_\parallel$ ) est réduite par un facteur  $(1 + s(0))$ . La raison physique de cette réduction est claire : si les deux ondes sont très saturantes, elles exercent chacune sur l'atome la force maximale  $\hbar k \Gamma / 2$ , et la différence entre ces deux forces sur l'axe  $F_1 F_2$  devient négligeable. Par contre, le confinement radial qui est dû à la courbure des fronts d'onde hors de l'axe  $F_1 F_2$  n'est pas affecté. Pour créer un piège à trois dimensions, il suffit alors d'alterner rapidement trois configurations du type de celle de la figure 9 suivant trois axes orthogonaux. On obtient alors une force de rappel tridimensionnelle :

$$\vec{f}(M) = - K' \vec{\rho} \quad (D1-33)$$

avec :

$$\begin{aligned} K' &= \frac{4}{3} \frac{s(0)}{1 + s(0)} \frac{\|\vec{f}(0)\|}{z_0} \\ &= \frac{2}{3} \left( \frac{s(0)}{1 + s(0)} \right)^2 \frac{\hbar k \Gamma}{z_0} \end{aligned} \quad (D1-34)$$

La profondeur du puits ainsi créé peut s'estimer comme en (D1-12) en étudiant la différence entre le potentiel au centre et le potentiel en un point  $|\vec{\rho}| = W(0)/2$  (limite de validité du traitement linéaire) :

$$\begin{aligned} U_0 &= \frac{1}{2} K' \left( \frac{W(0)}{2} \right)^2 \\ &= \frac{z_0}{6z_R} \hbar^2 \left( \frac{s(0)}{1 + s(0)} \right)^2 \end{aligned} \quad (D1-35)$$

Si chacun des faisceaux est désaccordé en dessous de résonance, on peut en plus bénéficier du refroidissement radiatif créé par ces faisceaux. Pour un désaccord égal à une demi-largeur naturelle, la force linéaire en vitesse s'écrit  $- m \gamma \vec{v}$  avec (cf. C3-13) :

$$\gamma = \frac{1}{3} \hbar k^2 \frac{s(0)}{(1 + s(0))^2} \quad (D1-36)$$

Le coefficient de diffusion est de l'ordre de (cf. (C2-4,14)) :

$$D = \hbar^2 k^2 \frac{\Gamma}{2} \frac{s(0)}{1 + s(0)} \quad (D1-37)$$

ce qui conduit à une température pour les atomes piégés :

$$k_B T = \frac{D}{3m\gamma} = \frac{\hbar\Gamma}{2} (1 + s(0)) \quad (D1-38)$$

La condition de stabilité du piège s'écrit alors :

$$U_0 \gg k_B T \iff \frac{z_0}{z_R} \gg 3 \frac{(1 + s(0))^3}{(s(0))^2} \quad (D1-39)$$

Cette condition peut être aisément satisfaite. Reprenons les caractéristiques géométriques des pièges envisagés précédemment :  $z_0 = 4$  cm et  $z_R = 30$   $\mu$ m. Si on choisit un paramètre de saturation  $s(0) = 2$ , ce qui correspond à une puissance de l'ordre du milliwatt dans chaque onde laser, on vérifie que la condition (D1-39) est largement satisfaite. La vitesse et l'extension spatiale des atomes piégés sont alors suivant une direction  $Ox$  donnée :

$$\sqrt{v_x^2} = \sqrt{\frac{k_B T}{m}} = 15 \text{ cm/s} \quad (D1-40a)$$

$$\sqrt{x^2} = \sqrt{\frac{k_B T}{K'}} \simeq 0.9 \sqrt{z_0 \lambda} = 165 \text{ } \mu\text{m} \quad (D1-40b)$$

Ces caractéristiques sont voisines de celles obtenues pour le piège décrit plus haut (§ 3-1 et 3-2) dans lequel l'"expulsion" était inhibée par des mélasses optiques judicieusement disposées.



## D2 : LE PIEGEAGE PAR FORCE DIPOLAIRE

La possibilité d'utiliser les forces dipolaires, liées aux gradients d'intensité lumineuse, pour confiner des atomes neutres a été suggérée dès 1962 par G.A. Askar'yan [15]. De nombreuses propositions ont ensuite suivi cette première publication [16-21]. Il apparaît en effet clairement sur l'expression de la force dipolaire donnée au chapitre C1 (éq. C1-47) que cette force dérive d'un potentiel. Pour une fréquence laser inférieure à la fréquence de résonance atomique, ce potentiel présente un minimum là où l'intensité laser est maximale. Les atomes sont donc attirés vers les régions de haute intensité lumineuse.

Il a cependant fallu attendre 1986 pour voir la première réalisation expérimentale d'un piège radiatif [1]. Deux problèmes majeurs viennent en effet compliquer la réalisation pratique d'un tel piège. D'une part, les puits que l'on peut ainsi réaliser sont très peu profonds et seuls des atomes très lents peuvent s'y trouver confinés lors de la "mise en route" du piège. D'autre part la force dipolaire confinante n'est qu'une force moyenne et la force réelle vue par les atomes fluctue autour de cette valeur moyenne. Ces fluctuations chauffent les atomes initialement piégés qui finissent alors par s'échapper. Pour surmonter ces problèmes, il faut refroidir en permanence les atomes piégés en introduisant un mécanisme dissipatif au niveau de la zone de piégeage. On peut alors capturer continuellement des atomes, ces atomes atteignant ensuite, sous l'effet de la compétition refroidissement-chauffage, un état stationnaire. Si l'énergie de cet état stationnaire est très inférieure à la profondeur du puits, le piégeage est stable.

Le plan de ce chapitre est le suivant : dans le premier paragraphe, nous cherchons d'abord à optimiser les différents paramètres du piège, c'est-à-dire à obtenir une profondeur maximale pour une diffusion minimale. Nous proposons ensuite un moyen de refroidir continuellement les atomes piégés, moyen que nous avons initialement suggéré, avec C. Cohen-Tannoudji et S. Reynaud, dans la publication jointe en annexe. Remarquons que cette technique est celle qui a été utilisée dans la réalisation expérimentale du piège

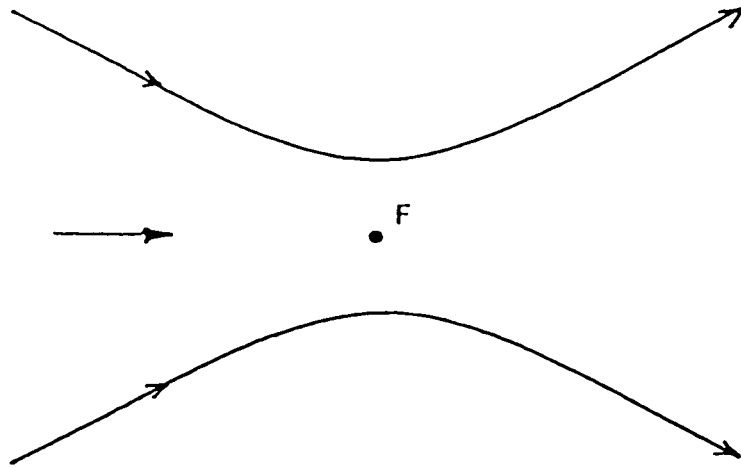


Figure 1a : Le piège lumineux le plus simple : une onde progressive focalisée désaccordée en dessous de résonance. La force dipolaire moyenne attire l'atome vers le foyer F.

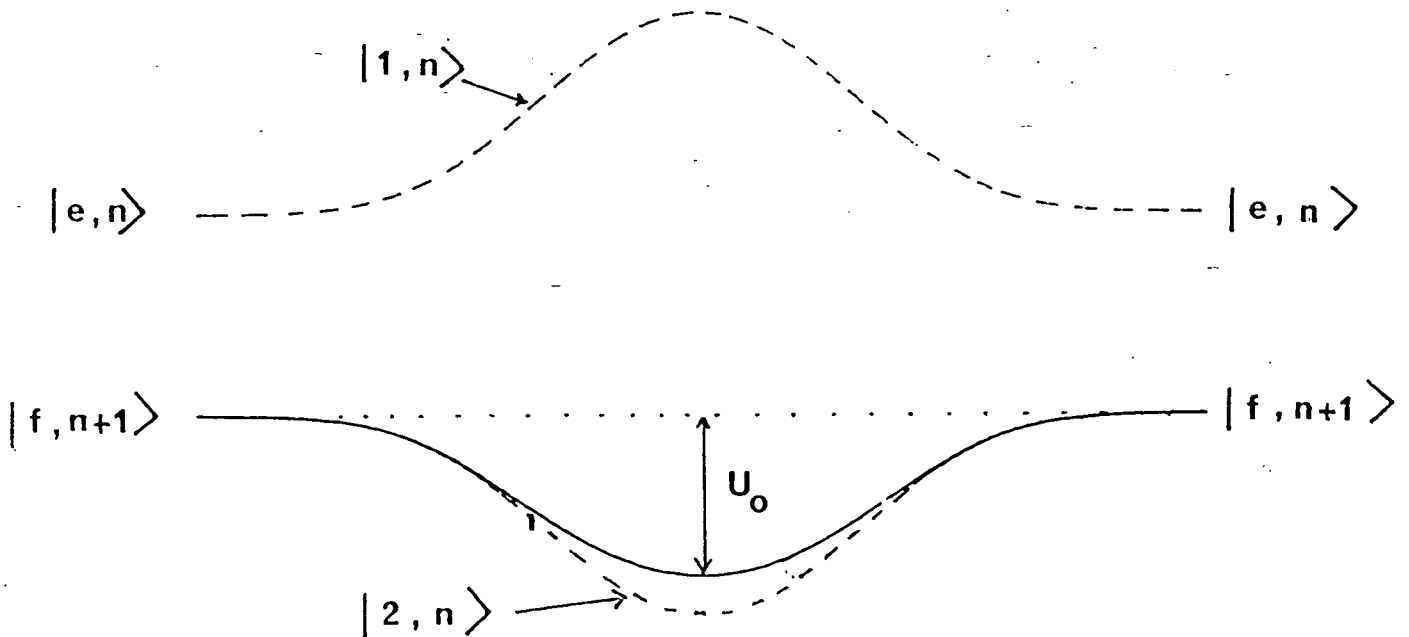


Figure 1b : Variation de la position des niveaux habillés (trait pointillé) et du potentiel dipolaire moyen (trait plein) au cours de la traversée du faisceau de la figure 1a. Ces courbes sont tracées pour  $(\omega_1)_m = 3 \delta$ , soit  $s(F) \approx 4$ .

de la référence [1].

## D2-1 LA REALISATION D'UN PIEGE LUMINEUX

### 1-1 Onde progressive focalisée

Le piège lumineux le plus simple conceptuellement est sans doute celui consistant en une onde laser progressive focalisée (Fig. 1a). La fréquence de l'onde doit être choisie inférieure à la fréquence de la transition atomique, de telle sorte que l'atome soit attiré par la force dipolaire dans une région de haute intensité. Si la transition atomique peut être assimilée à une transition à deux niveaux, la profondeur  $U_0$  du puits de potentiel est donnée par la formule (C1-48) :

$$U_0 = \frac{\hbar\delta}{2} \text{Log} \left( 1 + \frac{(\omega_1)_m^2}{2\delta^2 + \Gamma^2/2} \right) \quad (\text{D2-1})$$

Pour une géométrie et une puissance laser données, la fréquence de Rabi maximale  $(\omega_1)_m$  est imposée, et nous supposons dans ce qui suit qu'elle est grande devant la largeur naturelle  $\Gamma$ . Le désaccord optimal est alors :

$$\delta \approx 0.3 (\omega_1)_m \Leftrightarrow s(F) \approx \frac{(\omega_1)_m^2}{2\delta^2} \approx 4 \quad (\text{D2-2})$$

où  $s(F)$  est le paramètre de saturation au foyer  $F$ , ce qui conduit à la profondeur maximale :

$$U_0 \approx 0.3 \hbar(\omega_1)_m \quad (\text{D2-3})$$

Sur la figure 1b, nous avons représenté pour  $s(F) = 4$  (trait continu) la variation du potentiel  $U(\vec{r})$  dont dérive la force dipolaire moyenne. Nous avons également dessiné (trait pointillé) la position des niveaux habillés  $|1,n\rangle$  et  $|2,n\rangle$ . Rappelons que la force dipolaire est la moyenne des deux forces "vues" sur ces niveaux  $|1,n\rangle$

et  $|2,n\rangle$ , pondérées par les populations stationnaires de ces niveaux.

En fait, ce calcul de la profondeur du puits n'est valable que dans les dimensions transverses. Longitudinalement, la pression de radiation tend à déstabiliser le piège en poussant les atomes hors du puits. Cherchons à quelle condition la force dipolaire le long de l'axe Fz est suffisante pour restabiliser le piège. La force totale vue par l'atome le long de l'axe Fz peut s'écrire :

$$f_z = - \frac{\hbar\delta}{2} \frac{ds/dz}{1+s} + \frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{ks}{1+s} \quad (D2-4)$$

Le paramètre de saturation s vérifie :

$$s = s(F) \frac{z_R^2}{z^2 + z_R^2} \quad \text{et} \quad \frac{ds}{dz} = \left( \frac{-2z}{z^2 + z_R^2} \right) s \quad (D2-5)$$

La force  $f_z$  dérive du potentiel :

$$U(z) = \frac{\hbar\delta}{2} \text{Log}(1+s) - \frac{\hbar\Gamma}{2} \frac{kz_R s(F)}{\sqrt{1+s(F)}} \text{Arctg} \left( \frac{z}{z_R \sqrt{1+s(F)}} \right) \quad (D2-6)$$

Deux situations sont alors possibles suivant la valeur du paramètre sans dimension :

$$\mu = \frac{\Gamma}{\delta} kz_R \quad (D2-7)$$

Si  $\mu$  est supérieur à 1 (faisceau peu focalisé), aucun piégeage n'est possible sur l'axe Fz car il n'y a pas de minimum de potentiel. Par contre si  $\mu$  est inférieur à 1 (faisceau focalisé), on peut trouver un point d'équilibre stable au voisinage du foyer du faisceau. Sur la figure 2, nous avons représenté les variations de  $U(z)$  pour une valeur de  $s(F)$  égale à 4 (cf. D2-2) et pour différentes valeurs de  $\mu$ . On constate que pour  $\mu = 1/3$ , la hauteur de la barrière de potentiel longitudinale  $U'_0$  est égale à la moitié de la barrière transverse  $U_0$  donnée en (D2-3).

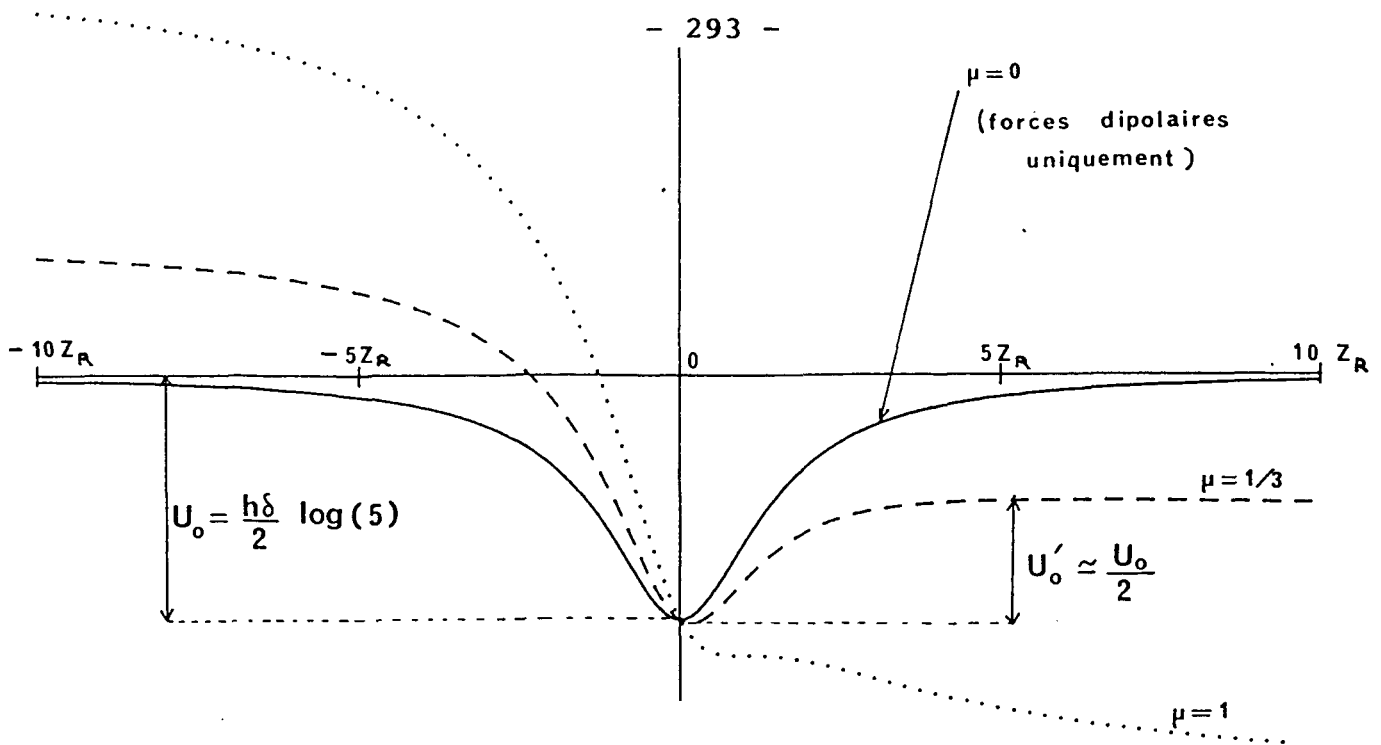


Figure 2 : Variation du potentiel créé par les deux forces pression de radiation et force dipolaire suivant l'axe de l'onde laser de la figure 1. On a pris un paramètre de saturation au point F,  $s(F)$ , égal à 4. Suivant la focalisation de l'onde laser, caractérisée par  $\mu = \Gamma k z_R / \delta$ , il y a ou il n'y a pas de puits de potentiel longitudinal.

Etudions maintenant le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique dans un tel piège. A partir de la formule (C2-4), on obtient :

$$D \approx \hbar^2 k^2 \Gamma \frac{s}{2(1+s)} + \hbar^2 (\vec{\nabla}s)^2 \frac{\delta^2}{\Gamma} \frac{s^2}{4(1+s)^3} \quad (D2-8)$$

Le premier de ces deux termes correspond aux fluctuations de l'impulsion des photons de fluorescence et aux fluctuations du nombre de cycles de fluorescence. Ce terme, qui est "incompressible", sature à une valeur proche de  $\hbar^2 k^2 \Gamma / 2$  au centre du faisceau. Le second terme de (D2-8) est dû aux fluctuations des forces dipolaires. Pour  $s(F) = 4$ , un calcul sans difficulté montre qu'il peut être majoré en tout point de l'onde laser par :

$$\hbar^2 (\vec{\nabla}s)^2 \frac{\delta^2}{\Gamma} \frac{s^2}{4(1+s)^3} \lesssim \left( \frac{1}{\mu} \frac{\delta}{\Gamma} \right) \frac{\hbar^2 k^2 \Gamma}{2} \quad (D2-9)$$

On voit alors que le choix du paramètre  $\mu$  qui stabilise le piège

( $\mu < 1$ ) rend simultanément ce coefficient de diffusion dû aux forces dipolaires grand devant le coefficient dû aux photons spontanés (puisque  $\delta$  est grand  $\Gamma$ ). Ce piège obtenu à partir d'un seul faisceau est donc difficilement optimisable : si l'on veut la plus grande profondeur de puits possible, on est conduit à focaliser le faisceau à un degré tel que la diffusion due aux forces dipolaires devient considérable par rapport à la diffusion due aux photons spontanés.

### 1-2 Utilisation de deux ondes confocales

Pour compenser la pression de radiation d'une onde focalisée unique, on peut alors songer à utiliser deux ondes focalisées au même point F et se propageant en sens contraire (Fig. 3). On s'affranchit alors de la condition  $\mu < 1$  et il est possible de moins focaliser les ondes piégeantes, le puits de potentiel ayant

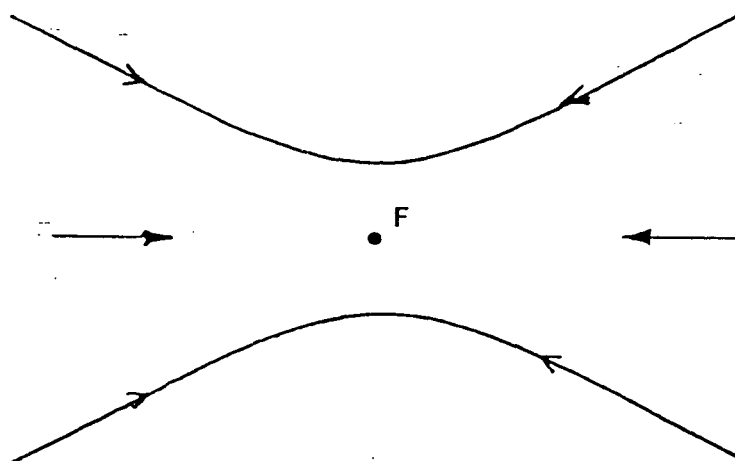


Figure 3 : Utilisation de deux ondes laser confocales pour éliminer la déstabilisation du piège de la figure 1 par la pression de radiation.

la même profondeur  $U_0$  radialement et longitudinalement. Pour estimer le coefficient de diffusion de l'impulsion atomique dans cette géométrie, nous pouvons reprendre les résultats du chapitre C2.

(i) Si les deux ondes ont même polarisation, on réalise alors une onde stationnaire. Le coefficient de diffusion, proportionnel au carré du gradient de l'intensité, peut alors être très élevé du fait de la possibilité pour l'atome de redistribuer de manière cohérente les photons entre les deux ondes progressives. Une telle configuration est donc à éviter.

(ii) Si les deux ondes ont des polarisations respectivement égales à  $\sigma_+$  et  $\sigma_-$ , la conservation du moment cinétique interdit une telle redistribution et le coefficient de diffusion redevient du même ordre que pour une onde focalisée unique. De même, on peut éviter toute redistribution entre les deux ondes en les alternant dans le temps. Chaque onde doit rester présente la moitié du temps, pendant des durées grandes devant la durée de vie atomique (typiquement 10 ns) pour que (D2-1) soit valable mais courte devant la période d'oscillation dans le piège (typiquement 1 ms). On peut alors considérer que l'atome voit la moyenne des forces créées par les deux ondes.

Dans ces deux cas ( $\sigma_+ - \sigma_-$  ou ondes alternées), on peut choisir le paramètre  $\mu$  de telle sorte que :

$$\mu = \frac{\delta}{\Gamma} \iff \frac{\delta}{\Gamma} = \sqrt{kz_R} \quad (\text{D2-10})$$

ce qui entraîne que le coefficient de diffusion dû aux forces dipolaires n'excède pas le coefficient de diffusion dû aux photons spontanés (cf. éq. D2-8,9) :

$$D \lesssim k^2 k^2 \Gamma \quad (\text{D2-11})$$

A partir des relations (D2-2) et (D2-10), on peut alors déterminer, pour une puissance laser  $P$  donnée, quels sont les diamètres et le désaccord optimaux pour obtenir à la fois un piège profond et un

petit coefficient de diffusion de l'impulsion atomique, c'est-à-dire un coefficient dominé par les fluctuations de l'impulsion des photons spontanés. En utilisant l'expression de la fréquence de Rabi au foyer d'une onde laser gaussienne de puissance P [22] :

$$\frac{\omega_1}{\Gamma} = \sqrt{\frac{3}{\pi^2} \frac{\lambda^3 P}{hcw_0^2 \Gamma}} \quad (D2-12)$$

on trouve :

$$\frac{\delta}{\Gamma} \simeq 0.9 \left( \frac{\lambda P}{hc\Gamma} \right)^{1/4} \quad (D2-13a)$$

$$\frac{w_0}{\lambda} \simeq 0.2 \left( \frac{\lambda P}{hc\Gamma} \right)^{1/4} \quad (D2-13b)$$

Le coefficient sans dimension  $\lambda P/hc\Gamma$  représente le nombre de photons laser émis pendant l'intervalle de temps  $\Gamma^{-1}$ . Il faut que ce coefficient soit très grand devant 1 pour que les deux conditions  $\delta \gg \Gamma$  et  $w_0 \gg \lambda$ , à la base du traitement proposé ici, soient vérifiées. Considérons par exemple un piège utilisant ces forces dipolaires pour l'atome de césium : si l'on dispose de 100 mW de rayonnement laser à la longueur d'onde de résonance du césium ( $\lambda = 852 \text{ nm}$ ,  $\Gamma/2\pi = 5 \text{ MHz}$ ), on trouve que le piège optimal correspond à  $w_0 = 60 \text{ }\mu\text{m}$  et  $\delta = 300 \Gamma$ , ce qui donne un puits de profondeur  $U_0 = 300 \text{ }k_B \simeq 0.1 \text{ Kelvin}$  et un coefficient de diffusion total inférieur à  $\hbar^2 k^2 \Gamma$ .

### 1-3 Utilisation de deux ondes à foyers décalés

Dans le paragraphe précédent, nous avons supposé que les deux ondes de la figure 3 avaient rigoureusement la même intensité, ce qui assurait la compensation des pressions de radiation de ces deux ondes. Expérimentalement, il n'est pas aisé d'assurer l'égalité des deux intensités et il peut être préférable d'utiliser la géométrie suggérée par A. Ashkin [19], et représentée sur la figure 4. Cette géométrie, qui combine, pour assurer le piégeage,



les forces dipolaires et la pression de radiation, utilise deux ondes identiques se propageant en sens contraire, dont les foyers respectifs  $F_1$  et  $F_2$  sont situés de part et d'autre du centre  $O$  du piège, à une distance  $z_0$ . Nous nous plaçons ici dans la situation où les deux ondes sont alternées dans le temps pour éviter toute redistribution cohérente de photons. Comme nous allons le montrer ci-dessous, le confinement transverse dans cette configuration utilise toujours les forces dipolaires, mais le confinement longitudinal se fait maintenant grâce à la pression de radiation comme pour les pièges à une dimension étudiés au chapitre précédent (§ D1-1).

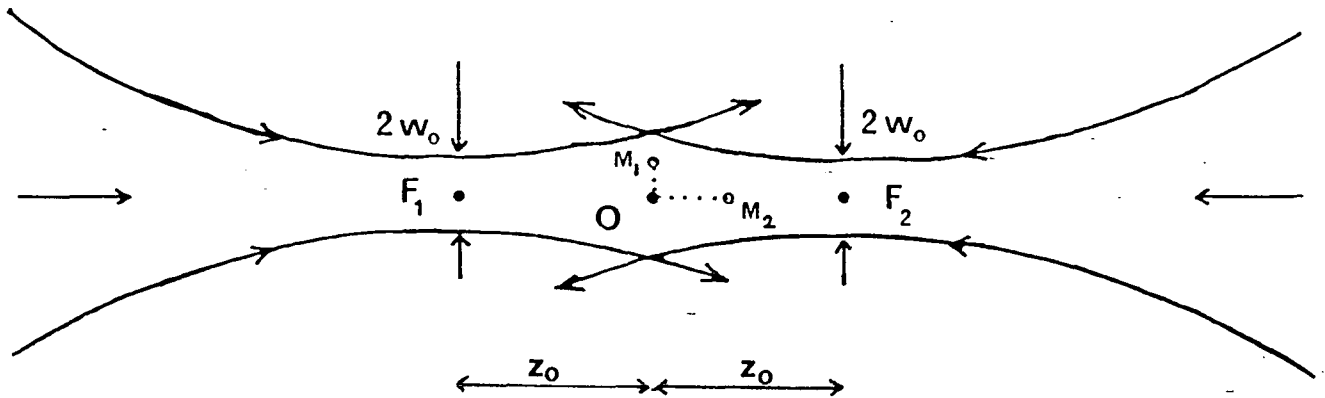


Figure 4 : Utilisation de deux ondes à foyers décalés.

Pour obtenir un puits transverse de profondeur importante, il faut que le rayon des faisceaux en 0,  $w(0)$ , reste petit, c'est-à-dire que la longueur  $z_0$  n'excede pas la longueur de Rayleigh  $z_R$ . Dans ce qui suit, nous prendrons :

$$z_0 = z_R \quad \Rightarrow \quad w(0) = \sqrt{2} w_0 \quad (D2-14)$$

les faisceaux ayant par ailleurs toutes les caractéristiques étudiées précédemment : un paramètre de saturation en 0,  $s(0)$ , égal à 4 pour chaque onde (cf. éq. D2-2), et un désaccord tel que  $\delta/\Gamma = \sqrt{kz_R}$  (cf. éq. D2-10).

Etudions tout d'abord le confinement transverse dans ce piège. En un point  $M_1$  situé à une distance  $\rho$  de l'axe ( $\rho \ll w(0)$ ), la force dipolaire attire l'atome vers l'axe si  $\delta$  est négatif et a pour expression :

$$\left( \vec{f}_{dip} \right)_\perp = \frac{\hbar\delta}{2} \cdot \frac{s(0)}{1+s(0)} \cdot \frac{\rho_\perp}{w(0)^2} \quad (D2-15)$$

Les forces de pression de radiation au point  $M_1$  sont toujours expulsantes et valent (éq. D1-4 pour  $z_0 = z_R$ ) :

$$\left( \vec{f}_{P.R.} \right)_\perp = \frac{\hbar k \Gamma}{2} \cdot \frac{s(0)}{1+s(0)} \cdot \frac{\rho_\perp}{2z_R} \quad (D2-16)$$

On obtient alors :

$$\frac{\left\| \left( \vec{f}_{P.R.} \right)_\perp \right\|}{\left\| \left( \vec{f}_{dip} \right)_\perp \right\|} = \frac{\Gamma}{|\delta|} \frac{w^2(0)k}{8z_R} = \frac{\Gamma}{2|\delta|} \quad (D2-17)$$

Comme le désaccord choisi par l'intermédiaire de (D2-13a) est grand devant la largeur naturelle  $\Gamma$ , nous pouvons en déduire que les forces de pression de radiation sont, dans les directions transverses, négligeables devant les forces dipolaires.

Pour les directions longitudinales, nous allons voir que cette conclusion est inversée : les forces de pression de radiation créent autour du point 0 une force de rappel qui s'écrit au point  $M_2$  situé à une distance  $z \ll z_R$  de 0 (cf. éq. D1-4) :

$$(f_{P.R.})_{\parallel} = - \frac{\hbar k \Gamma}{2} \cdot \frac{s(0)}{(1+s(0))^2} \cdot \frac{z}{z_R} \quad (D2-18)$$

Cette force est à comparer à la force dipolaire moyenne créée par les deux ondes autour du point 0. Cette force dipolaire dérive du potentiel :

$$\begin{aligned} \bar{U}(z) &= \frac{1}{2} U_1(z) + \frac{1}{2} U_2(z) \\ &= \frac{\hbar \delta}{4} \left\{ \text{Log} \left( 1+s(0) \frac{2z_R^2}{(z_R+z)^2 + z_R^2} \right) + \text{Log} \left( 1+s(0) \frac{2z_R^2}{(z_R-z)^2 + z_R^2} \right) \right\} \end{aligned} \quad (D2-19)$$

Pour  $s(0) = 4$ , ce potentiel s'écrit au voisinage de 0 :

$$\bar{U}(z) \simeq \frac{\hbar \delta}{25} \frac{z^2}{z_R^2} \quad (D2-20)$$

La force dipolaire est donc expulsante autour de 0 ( $\delta < 0$ ) et vaut :

$$(f_{dip})_{\parallel} = - \frac{2 \hbar \delta}{25} \frac{z}{z_R^2} \quad (D2-21)$$

On trouve alors :

$$\frac{\| (f_{dip})_{\parallel} \|}{\| (f_{P.R.})_{\parallel} \|} = \frac{\delta}{\Gamma} \frac{1}{kz_R} = \frac{1}{\mu} \quad (D2-22)$$

Compte tenu de la valeur choisie pour ce paramètre  $\mu$  (éq. D2-10), on a :

$$\frac{\| (f_{dip.}) \|}{\| (f_{p.r.}) \|} = \frac{\Gamma}{|\delta|} \ll 1 \quad (D2-23)$$

Les forces dipolaires le long de l'axe Oz sont donc négligeables devant les forces de pression de radiation.

La configuration à foyers décalés présente plusieurs avantages par rapport à la configuration confocale du paragraphe 2-2. D'une part, comme nous l'avons déjà remarqué, sa stabilité est beaucoup moins sensible à un défaut dans l'égalité des intensités des ondes piégeantes : si une onde est légèrement plus intense que l'autre, la seule conséquence en est un déplacement du point d'équilibre du piège vers le foyer de l'onde la moins intense. D'autre part, le puits de potentiel sur l'axe Oz est maintenant largement supérieur à  $U_0$ . En utilisant la formule (D2-6), la profondeur du puits le long de Oz s'écrit ( $s(F) = 2s(0)$  pour  $z_0 = z_R$ ) :

$$U'_0 = \hbar\Gamma \frac{2kz_R s(0)}{\sqrt{1+2s(0)}} \operatorname{Argtg} \left( \frac{1}{\sqrt{1+2s(0)}} \right) \quad (D2-24)$$

Pour  $s(0) = 4$  et  $\mu = \Gamma kz_R / \delta \gg 1$ , on trouve en effet :

$$U'_0 \simeq 0.85 \hbar\Gamma kz_R \simeq \hbar\delta (0.85 \mu) \gg U_0 \simeq \hbar\delta \quad (D2-25)$$

Ceci permet de diminuer les fuites d'un tel piège, qui ne se feront plus que radialement, au lieu de se faire dans les trois dimensions comme c'était le cas précédemment.

## D2-2 LE REFROIDISSEMENT DES ATOMES PIEGES

Une fois déterminées les caractéristiques optimales du piège, nous pouvons maintenant chercher à estimer le temps de séjour moyen des atomes dans ce piège, c'est-à-dire le temps que met un atome initialement au fond du piège pour s'échapper. Considérons pour simplifier un coefficient de diffusion de l'impulsion atomique  $D$  constant sur toute l'étendue du piège. L'énergie d'un

atome piégé augmente alors linéairement avec le temps :

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathcal{D}}{m} \quad (D2-26)$$

et cette énergie devient de l'ordre de la profondeur  $U_0$  du piège au bout d'un temps  $T$  tel que :

$$T = \frac{U_0}{\mathcal{D}/m} \quad (D2-27)$$

soit, en utilisant (D2-3) et (D2-11) :

$$T = \frac{0.3 \hbar \omega_1}{\hbar^2 k^2 \Gamma/m} = 0.3 \frac{m}{\hbar k^2} \frac{\omega_1}{\Gamma} \quad (D2-28)$$

Pour le piège envisagé plus haut, on trouve un temps de séjour de l'ordre de 10 millisecondes.

Pour piéger les atomes pendant un temps plus long, il faut refroidir ces atomes pour compenser l'échauffement décrit par (D2-26). Si un tel refroidissement peut être décrit par une force linéaire en vitesse ( $f = -m \gamma \vec{v}$ ), l'évolution de l'énergie atomique est alors

$$\frac{dE}{dt} = \frac{\mathcal{D}}{m} - m \gamma v^2 \quad (D2-29)$$

L'énergie (cinétique + potentielle) des atomes atteint ainsi une valeur stationnaire  $\bar{E}$  telle que :

$$\bar{E} \simeq 2 \times \left( \frac{1}{2} m v^2 \right) = \frac{\mathcal{D}}{m \gamma} \quad (D2-30)$$

et l'on peut considérer que le refroidissement stabilise le piégeage si  $\bar{E}$  est très inférieure à  $U_0$ .

A première vue, on peut espérer que les faisceaux piégeants pourront effectuer ce refroidissement puisqu'ils sont désaccordés vers le rouge. Rappelons que, puisque ces faisceaux sont alternés

dans le temps (ou polarisés  $\sigma_+$  -  $\sigma_-$ ), aucune redistribution cohérente de photons ne peut prendre place entre les deux ondes. On est alors dans la situation décrite au § C3-2-2 (ii) et la force de freinage créée par les faisceaux piégés est donnée par la formule C3-13. Un premier problème apparaît alors : le refroidissement ne se fait que suivant l'axe des lasers. On peut néanmoins espérer que de légères assymétries dans le piège, ou des collisions entre atome piégés, rendent ce refroidissement tridimensionnel. Prenons alors la force de friction déduite de (C3-13) :

$$\vec{f} = - \frac{\hbar k^2}{3} \frac{s(0)}{(1+s(0))^2} \frac{\delta \Gamma}{\delta^2 + \Gamma^2 / 4} \vec{v} \quad (D2-31)$$

Le coefficient de diffusion dans ce piège a été estimé, pour le cas particulier  $s(0) = 4$ , à  $\hbar^2 k^2 \Gamma$  (éq. D2-11) si  $\mu = \delta / \Gamma$ . Dans le cas général, on peut toujours minorer le coefficient de diffusion total par le coefficient de diffusion dû aux photons spontanés  $\hbar^2 k^2 \Gamma s(0) / 4(1+s(0))$  (cf. éq. C2-6). L'énergie stationnaire  $\bar{E}$  donnée en (D2-30) est donc au moins de l'ordre de :

$$\bar{E} \gtrsim \frac{3}{4} \hbar \delta (1 + s(0)) \left( 1 + \frac{\Gamma^2}{4\delta^2} \right) \quad (D2-32)$$

On constate alors que cette énergie est toujours supérieure à la profondeur du puits de potentiel créé par les forces dipolaires :

$$\bar{E} > U_0 = \frac{\hbar \delta}{2} \text{Log} (1 + s(0)) \quad (D2-33)$$

Le refroidissement créé par le faisceau piégeant n'est donc pas suffisant pour assurer la stabilité du piège [19-21, 23-26]. Ceci provient du fait que les caractéristiques d'un bon faisceau de refroidissement ( $\delta = -\Gamma/2$ ,  $s(0) \lesssim 1$ ) sont très différentes des caractéristiques d'un bon faisceau piège ( $|\delta| \gg \Gamma$ ,  $s(0) = 4$ ).

Nous en arrivons donc à l'idée qu'il faut dissocier les fonctions de piégeage et de freinage, par exemple en superposant une configuration piège du type de celle de la figure 4 et une "mélasse optique" formée par trois ondes stationnaires peu intenses

et désaccordées juste en dessous de résonance ( $\delta = -\Gamma/2$ , cf. § C3-2) [19b]. Un problème subsiste néanmoins : le faisceau piège déplace les niveaux d'énergie atomiques (c'est le principe même du piégeage) et la condition  $\delta = -\Gamma/2$  ne peut pas être maintenue sur toute l'étendue du piège. Le signe même du désaccord du faisceau frein peut changer : un désaccord négatif au centre du piège peut se transformer en un désaccord positif sur les bords, ce qui va alors chauffer les atomes à cet endroit au lieu de les refroidir.

Fort heureusement, le remède à ce dernier problème est simple, et fait appel à une technique que nous avons déjà évoquée : pour éviter les perturbations mutuelles des faisceaux piège et frein, il suffit d'alterner dans le temps ces faisceaux. La durée de chaque phase doit être choisie longue devant la durée de vie atomique pour que les expressions données plus haut pour les forces radiatives soient valables, mais cette durée doit par contre être choisie courte devant la période d'oscillation et la constante de temps d'amortissement de la vitesse atomique. On peut alors moyenner les effets des faisceaux pièges et des faisceaux freins. L'atome voit en moyenne un puits de potentiel de profondeur (cf. éq. D2-3) :

$$\bar{U} = \frac{U_0}{2} = 0.15 \hbar (\omega_1)_m \quad (D2-34)$$

et il est freiné par une force (cf. éq. C3-16) :

$$\vec{f} = - \frac{1}{12} \hbar k^2 \vec{v} \quad (D2-35)$$

Le coefficient de diffusion moyenné sur les deux phases peut être majoré par  $\hbar^2 k^2 \Gamma$ , et l'atome atteint alors une énergie stationnaire :

$$\bar{E} \simeq 12 \hbar \Gamma = 3k_B T_{eff} \quad (D2-36)$$

qui peut être inférieure à la profondeur  $\bar{U}$  du puits. Le piégeage est alors stable, la durée de piégeage d'un atome variant comme

$\exp(-\bar{U}/k_B T_{eff})$  [27]. Reprenons l'exemple du piège pour atomes de césium envisagé plus haut : on a  $\bar{U} = 150 \hbar\Gamma \gg k_B T_{eff} = 4\hbar\Gamma$ . Les atomes sont alors piégés d'une manière stable, leur extension spatiale stationnaire étant d'une dizaine de microns.

Dans l'appendice 1, nous avons reproduits la publication dans laquelle nous avons fait initialement, avec C. Cohen-Tannoudji et S. Reynaud, cette proposition de piégeage et de refroidissement alternés. Très récemment, la première réalisation expérimentale d'un piège radiatif a été faite aux laboratoires Bell, en utilisant cette technique de piège et de frein alternés [1]. La configuration choisie était la plus simple possible, celle d'une onde unique focalisée. Il a été possible dans cette expérience de conserver dans le piège environ un millier d'atomes pendant plusieurs secondes.

Une autre méthode peut être utilisée pour piéger et refroidir simultanément les atomes : on peut utiliser pour cela deux transitions atomiques  $a \leftrightarrow b$  et  $c \leftrightarrow d$  ne présentant pas de niveaux communs, le basculement de la transition "piégeante"  $a \leftrightarrow b$  vers la transition "freinante"  $c \leftrightarrow d$  se faisant par l'intermédiaire de l'émission spontanée. Cette méthode, qui s'applique tout particulièrement aux atomes alcalins pour lesquels l'état fondamental est dédoublé par structure hyperfine (niveaux  $a$  et  $c$ ), est exposée en détail dans l'appendice 1 de cette partie.



APPENDICE N° 1

DE LA PARTIE D

**PROPOSALS OF STABLE OPTICAL TRAPS FOR NEUTRAL ATOMS**

J. DALIBARD, S. REYNAUD and C. COHEN-TANNOUDJI

*Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne, Ecole Normale Supérieure and Collège de France,  
F 75231 Paris Cedex 05, France*

Received 21 July 1983

Proposals of three dimensional stable optical traps for neutral atoms are presented. Two different laser beam configurations, separately optimized for trapping and cooling, act alternately on the same atomic transition, or simultaneously on two different transitions. Large values are predicted for the ratio optical potential depths over residual kinetic energy.

**1. Introduction**

This paper presents new proposals of three dimensional optical traps for neutral atoms. Special attention is given to the discussion of the stability of these optical traps in terms of two important parameters (fig. 1), the depth  $U_0$  of the potential well associated with radiative dipole forces [1-4], and the residual total energy  $E$  resulting from the competition between diffusion heating and radiative cooling:

$$E = D\tau/M = 3k_B T, \tag{1}$$

where  $D$  is the atomic momentum diffusion coefficient [actually the trace of the diffusion tensor] due to the fluctuations of radiative forces [1-4],  $M$  the atomic mass,  $\tau$  the damping time of the atomic velocity due to the cooling force ( $T$  is the effective temperature associated with  $E$ ).

An optical trap can be considered as stable if

$$U_0 \gg k_B T, \tag{2}$$

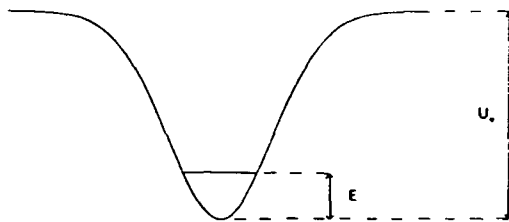


Fig. 1. Important characteristics of an optical trap: potential depth  $U_0$  and residual energy  $E$ .

since the escape probability [5] contains the factor  $\exp(-U_0/k_B T)$ . The problem is therefore to reduce  $k_B T$  to the lowest possible value, which is practically of the order of  $\hbar\Gamma$  ( $\Gamma$  natural width of the atomic excited state) [6], while achieving the largest possible potential depth  $U_0$ , i.e.  $U_0$  much larger than  $\hbar\Gamma$ .

It is now generally admitted [1] that using a single laser wave does not allow to achieve stable traps, since  $U_0$  and  $k_B T$  are at best of the same order. This results from the difficulty of optimizing simultaneously the trapping and cooling efficiencies of a single laser wave. It has been proposed to use two separate waves for cooling and trapping on the same transition [7]. But, in that case, the light-shifts produced by the intense trapping beam strongly perturb the cooling efficiency by introducing a position dependent detuning. The question of the three dimensional stability of such a trap seems to remain open [1,8].

The main idea of the present paper is to decouple the two trapping and cooling functions, either temporally (sect. 4), i.e. by using alternated trapping and cooling phases, or by use of two different atomic transitions sharing no common level (sect. 5). It is then possible to optimize *separately* the two trapping and cooling beams. We discuss in particular in sect. 2 a new laser configuration for trapping which uses two counter-propagating  $\sigma^+$  and  $\sigma^-$  polarized beams and leads to a deep potential well with a reasonably small diffusion coefficient. The cooling design is discussed in sect. 3.

## 2. Trapping design

The simplest possible idea is to take a focused travelling gaussian beam tuned below resonance. Dipole forces attract the atom towards the focal zone, but radiation pressure pushes it along the beam. Dipole forces can be predominant, but only in situations leading to a too large momentum diffusion [condition (2) not fulfilled].

The next idea is then to eliminate radiation pressure <sup>‡</sup> by using two counterpropagating waves forming a standing wave [10, 11]. But the intensity gradients along the beam are huge (variations over a wavelength  $\lambda$ ) and lead to a prohibitive diffusion coefficient  $D$  [12], which does not saturate at high intensities or large detunings (i.e. for  $U_0 \gg \hbar\Gamma$ ). Physically, this large value of  $D$  is due to the coherent redistribution of photons between the two counterpropagating waves [coherent processes involving absorption in one wave and stimulated emission in the other one [13]]. Such a momentum diffusion can be also interpreted as being due to spontaneous emission which introduces random jumps between two "dressed states" with opposite energy gradients [1, 2, 14].

Our proposal here is rather to use two counterpropagating  $\sigma^+$  and  $\sigma^-$  polarized gaussian beams with co-incident foci (fig. 2a). The resulting wave has a linear polarization which rotates along the direction of the beam. But the intensity along this direction varies smoothly over a wavelength. The possibility of trapping the atom in the focal zone is the same as for a standing wave, but with a much smaller diffusion coefficient. Because of conservation of angular momentum, redistribution cannot indeed occur between the two waves: absorption of a  $\sigma^+$  photon cannot be fol-

lowed by the stimulated emission of a  $\sigma^-$  one (fig. 2b). The redistribution can only occur inside the same wave, so that the contribution of dipole forces to the diffusion coefficient is much smaller than for a standing wave, by a factor of the order of  $(1/kw_0)^2$ , where  $w_0$  is the beam waist and  $k = 2\pi/\lambda$ .

All the previous qualitative predictions have been confirmed by a quantitative calculation of the potential well and diffusion coefficient for a  $J = 0$  to  $J = 1$  atomic transition (resolution of the corresponding optical Bloch equations). For a detuning  $\delta = \omega_L - \omega_0$  between the laser ( $\omega_L$ ) and atomic ( $\omega_0$ ) frequencies equal to  $-100\Gamma$ , for a saturation parameter

$$s = \frac{\omega_1^2/2}{\delta^2 + (\Gamma^2/4)}, \quad (3)$$

(where  $\omega_1$  is the Rabi frequency) equal to 4, and for a beam waist  $w_0$  equal to  $50\lambda$ , one gets a diffusion coefficient due to dipole forces equal to  $0.1\hbar^2k^2\Gamma$ , and a potential depth  $U_0$  equal to  $80\hbar\Gamma$ .

## 3. Cooling design

In the quadiabatic regime  $v\tau_R \ll \lambda$  (where  $v$  is the velocity and  $\tau_R$  the radiative lifetime), or equivalently  $kv \ll \Gamma$  (Doppler effect small compared to the natural width), the velocity dependence of radiative forces is mainly linear [1] and can be used for damping the atomic motion.

As for trapping, radiation pressure prevents us from using a plane running wave for cooling.

The case of a plane standing wave has been studied in detail [1, 15]. For small values of the detuning ( $|\delta| < \Gamma/\sqrt{3}$ ), radiative cooling occurs for  $\delta < 0$  as for a travelling wave. For larger detunings, the sign of the velocity dependent force, spatially averaged over a wavelength, changes when the saturation parameter increases. This behaviour remains valid when one takes three perpendicular standing waves with three orthogonal polarizations. A quantitative calculation gives for example for a  $J = 0$  to  $J = 1$  transition the three dimensional cooling  $F = -Mv/\tau$  with  $\tau = 5M/\hbar k^2$  for  $\delta = +4\Gamma$  and  $s = 3$ . Note that  $\delta$  has been chosen much smaller than for the trapping configuration in order to avoid large momentum diffusion (here  $D = 3.7\hbar^2k^2\Gamma$ ).

Another interesting new possibility is to use the  $\sigma^+ - \sigma^-$  configuration of fig. 2a (with a larger beam

<sup>‡</sup> Some proposals of optical traps using only radiation pressure [9] are criticized in ref. [8].

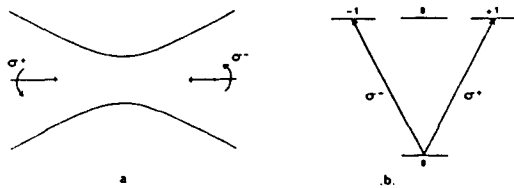


Fig. 2. (a) Trapping configuration: superposition of two focused  $\sigma^+$  and  $\sigma^-$  counterpropagating waves. (b) Zeeman optical components (for a  $J = 0$  to  $J = 1$  transition) excited by the  $\sigma^+$  and  $\sigma^-$  waves.

waist). As for a running wave, cooling (in the direction of the beam) always occurs for  $\delta < 0$ . The optimum cooling force is found to be  $F = -Mv/\tau$  with  $\tau = 3M/\hbar k^2$  for  $\delta = -\Gamma/2$  and  $s = 1$  (the corresponding value of  $D$  being  $0.25 \hbar^2 k^2 \Gamma$ ). It is however impossible to generalize these results to three orthogonal directions, since one would then reintroduce intensity gradients over a wavelength as in the standing wave case. A simple solution for achieving three dimensional cooling with a single  $\sigma^+ - \sigma^-$  laser configuration is to apply it to an asymmetrical trap with three different oscillation frequencies (such a trap can be produced for example by focusing the  $\sigma^+ - \sigma^-$  trapping beams with cylindrical lenses). If the cooling beam has equal projections along the three axis of the trap, it damps equally the three components of the atomic velocity (with a three times smaller efficiency) [16–18].

#### 4. Alternating cooling and trapping phases for a $J = 0$ to a $J = 1$ atomic transition

As mentioned in the introduction, our first proposal for achieving the stability condition (2) is to alternate in time cooling and trapping phases, each with a duration  $T$ . It is then possible to optimize separately the two functions (as this is done in sections 2 and 3) and to avoid their mutual perturbation ‡.

If the duration  $T$  of each phase is large compared to the radiative lifetime  $\tau_R$ , but small compared to the cooling time  $\tau$  and to the oscillation period in the potential well, the coefficients appearing in the Fokker-Planck equation describing the atomic motion are the average of the same coefficients corresponding to the cooling and trapping phases:

$$\begin{aligned} D &= \frac{1}{2} [D_{\text{cool}} + D_{\text{trap}}] , \\ 1/\tau &= \frac{1}{2} [1/\tau_{\text{cool}} + 1/\tau_{\text{trap}}] , \\ U &= \frac{1}{2} [U_{\text{cool}} + U_{\text{trap}}] . \end{aligned} \quad (4)$$

$D_{\text{cool}}$  and  $D_{\text{trap}}$  are of the same order. But  $1/\tau_{\text{cool}} \gg 1/\tau_{\text{trap}}$  so that  $\tau \approx 2\tau_{\text{cool}}$  and  $U_{0\text{trap}} \gg U_{0\text{cool}}$  so

‡ The same result would be obtained by leaving the cooling on, all the time, and switching on and off the trapping, since, when the trapping is on, its products light shifts which make the effect of the cooling negligible.

that  $U_0 = U_{0\text{trap}}/2$ . The stability condition (2) becomes

$$U_{0\text{trap}} \gg [2(D_{\text{cool}} + D_{\text{trap}})\tau_{\text{cool}}]/3M . \quad (5)$$

Since we have optimized separately  $U_{0\text{trap}}$  and  $\tau_{\text{cool}}$ , while keeping reasonably small values of  $D_{\text{cool}}$  and  $D_{\text{trap}}$ , it follows that stable traps can be achieved [we take “half the best of each function”].

We consider now the two specific examples of Mg and Yb atoms which have a  $J = 0$  to  $J = 1$  resonance line [ $^1S-^1P$  at 285 nm with  $\Gamma = 5 \times 10^8 \text{ s}^{-1}$  for Mg,  $^1S-^3P$  at 556 nm with  $\Gamma = 1.2 \times 10^6 \text{ s}^{-1}$  for Yb]. Using an asymmetrical  $\sigma^+ - \sigma^-$  trap and a single  $\sigma^+ - \sigma^-$  cooling beam (see end of sect. 3), one gets the following values: for Mg (with a 100 mW trapping laser power † focused on a waist  $w_0 = 13 \mu\text{m}$ ),  $U_0 = 40 \hbar \Gamma$  and  $k_B T = 2.5 \hbar \Gamma$  ( $T = 10 \text{ mK}$ ); for Yb (1 W on  $250 \mu\text{m}$ ),  $U_0 = 370 \hbar \Gamma$  and  $k_B T = 2.5 \hbar \Gamma$  ( $T = 24 \mu\text{K}$ ). Large values of  $U_0/k_B T$  are thus achieved (16 for Mg, 150 for Yb).

Finally, we would like to emphasize the versatile character of the alternating scheme. One could for example achieve a more compact spherical trap by alternating trapping phases using  $\sigma^+ - \sigma^-$  beams with orthogonal directions. In such a case, the direction of the cooling beam would have also to be alternated. “Black” phases could be also devoted to the observation of unperturbed atoms.

#### 5. Simultaneous cooling and trapping on two different atomic transitions

When a single atomic transition is used, alternating cooling and trapping phases seems the only way to avoid mutual perturbations of the two functions. Another solution is to use simultaneously two different atomic transitions sharing no common level for cooling and trapping (fig. 3).

The 4-level scheme of fig. 3 represents for example a simplified energy diagram for an alkali atom. Levels a and b are then the two hyperfine ground levels, sepa-

† Entering a linearly polarized beam in an optical cavity containing two quarter wave plates and two focusing lenses, one can produce the laser configuration of fig. 2a, while taking advantage of the power enhancement factor of the cavity. A 100 mW power at 285 nm seems therefore achievable.

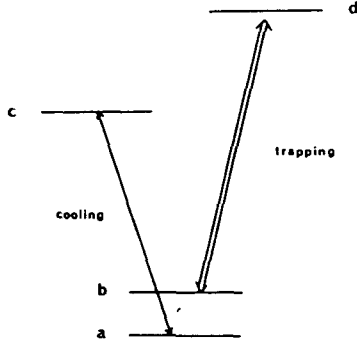


Fig. 3. Four level scheme. Two transitions a-c and b-d are respectively used for cooling and trapping.

rated by the hyperfine splitting  $S_g$ . Transition a-c ( $D_1$  line) is used for cooling, with a detuning  $\delta_{cool}$  and a Rabi frequency  $\omega_{1 cool}$ . Transition b-d ( $D_2$  line) is used for trapping ( $\delta_{trap}$  and  $\omega_{1 trap}$ ). Because of spontaneous emission processes,  $c \rightarrow a, b$  and  $d \rightarrow a, b$ , the atom interacts randomly and successively with both cooling and trapping beams. The simultaneous presence of the two laser beams prevents atoms from being put in a trap level by optical pumping.

Even if the trapping beam is far from resonance for the a-d transition, it however produces light shifts on level a. If one uses the  $\sigma^+ - \sigma^-$  cooling design of sect. 3, which is optimum for  $\delta_{cool} = -\Gamma/2$ , these light shifts must be kept much smaller than  $\Gamma$ , if one wants an efficient cooling throughout the trap. The standing wave cooling design on the other hand works with larger values of  $\delta$  and consequently allows larger light shifts of level a. This is why we will prefer here such a scheme.

All these qualitative considerations have been quantitatively confirmed by a numerical resolution of the 16 optical Bloch equations of the problem. Stable trapping is predicted for each alkali atom. Best results are obtained for cesium ( $\lambda_{cool} = 894$  nm and  $\lambda_{trap} = 852$  nm with  $\Gamma = 3.3 \times 10^7$  s $^{-1}$ ) which has the greatest hyperfine splitting ( $S_g = 1740$   $\Gamma$ ) and then allows the most intense trapping beam. For  $\delta_{trap} = -250$   $\Gamma$ ,  $\omega_{1 trap} = 200$   $\Gamma$  (at the center of the trap),  $\delta_{cool} = 10$   $\Gamma$  and  $\omega_{1 cool} = 4$   $\Gamma$  (averaged over  $\lambda$ ), one gets a potential depth  $U_0 = 20 \hbar \Gamma$  with a temperature  $k_B T = \hbar \Gamma$ , ( $T = 0.2$  mK), i.e.  $U_0/k_B T = 20$ . We find that the shift of level a due to the trapping beam never exceeds  $-5$   $\Gamma$  ( $< \delta_{cool}$ ) so that cooling effectively remains efficient on the whole trap.

We finally discuss the validity of our model.

(i) The hyperfine structure of level d ( $6P_{3/2}$ ) in Cs is of the order of 110  $\Gamma$ . The trap detuning  $|\delta_{trap}|$  is larger than this structure, so that if the laser is tuned below the lowest hyperfine level of  $6P_{3/2}$ , all the four hyperfine levels of d contribute to trapping with the same sign.

(ii) The hyperfine structure of level c ( $6P_{1/2}$ ) in Cs is of the order of 230  $\Gamma$ .  $\delta_{cool}$  and  $\omega_{1 cool}$  are much smaller than this structure so that one can choose for c the upper hyperfine level of  $6P_{1/2}$  and ignore the other one.

(iii) For each hyperfine level, we have neglected the Zeeman structure. But taking it into account would not change drastically the physical results.

## 6. Conclusion

We have proposed new laser configurations for trapping and cooling neutral atoms. Stable optical traps have been quantitatively predicted with large values of  $U_0/k_B T$  (ranging from 16 to 150). A lower bound for the confinement time can be obtained by multiplying the oscillation period in the trap by  $\exp(U_0/k_B T)$  [5]. One finds confinements times larger than one minute in all presented cases. This means that other physical processes (collisions with residual gas for example) will actually limit the trapping time. Finally, the recent developments in the production of slow atomic beams [19,20] seem to provide a possible solution for the problem of loading such traps #.

## Acknowledgements

The authors wish to thank W.D. Philipps for stimulating discussions.

# For Yb, one would have to use the strong resonance line  $^1S-^1P$  at 399 nm, with  $\Gamma = 1.8 \times 10^8$  s $^{-1}$ , for slowing down a thermal beam in a reasonable length.

## References

- [1] J.P. Gordon and A. Ashkin, Phys. Rev. A21 (1980) 1606.
- [2] R.J. Cook, Phys. Rev. A22 (1980) 1078.

- [3] V.S. Letokhov and V.G. Minogin, Phys. Rep. 73 (1981) 1.
- [4] S. Stenholm, Phys. Rep. 43 (1978) 152, Phys. Rev. A27 (1983) 2513.
- [5] H.A. Kramers, Physica 7 (1940) 284.
- [6] See for example the argument of Purcell, cited by Ashkin and Gordon (ref. [7]) or Wineland and Itano (ref. [18]).
- [7] A. Ashkin and J.P. Gordon, Optics Lett. 4 (1979) 161.
- [8] J.P. Gordon, in: Laser-cooled and trapped atoms, Proc. Workshop on Spectroscopic applications of slow atomic beams, ed. W.D. Phillips, NBS Special Publication 653.
- [9] V.G. Minogin and J. Javanainen, Optics Comm. 43 (1982) 119.
- [10] A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. 40 (1978) 729.
- [11] V.S. Letokhov and V.G. Minogin, Appl. Phys. 17 (1978) 99.
- [12] R.J. Cook, Phys. Rev. Lett. 44 (1980) 976.
- [13] E. Arimondo, A. Bambini and S. Stenholm, Phys. Rev. A24 (1981) 898.
- [14] C. Tanguy, Thèse de 3e cycle, Paris (1983), unpublished.
- [15] V.G. Minogin and O.T. Serimaa, Optics Comm. 30 (1979) 373.
- [16] D.J. Wineland and H. Dehmelt, Bull. Am. Phys. Soc. 20 (1975) 637.
- [17] N. Neuhauser, M. Hohenstatt, P.E. Toschek and H. Dehmelt, Phys. Rev. A22 (1980) 1137.
- [18] D.J. Wineland and W.M. Itano, Phys. Rev. A20 (1979) 1521.
- [19] J.V. Prodan, W.D. Phillips and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. 49 (1982) 1149 and their contribution in ref. [8].
- [20] S.V. Andreev, V.I. Balykin, V.S. Letokhov and V.G. Minogin, Sov. Phys. JETP 55 (1982) 828.

## CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce travail a été consacré à une étude détaillée du rôle des fluctuations dans l'interaction d'un atome avec le rayonnement. Nous avons successivement considéré les modifications induites par ce couplage sur la dynamique interne puis sur la dynamique externe de l'atome.

En ce qui concerne la dynamique interne (partie A), nous nous sommes principalement intéressés au cas où le champ électromagnétique est dans son état fondamental et nous avons montré dans ce cas que les divers processus radiatifs peuvent être interprétés en considérant que chacun des deux systèmes en présence (atome et champ) fluctue et polarise l'autre. Plus précisément, nous avons montré qu'il est possible de séparer, dans le mouvement des électrons atomiques dû au couplage avec le champ, les effets des *fluctuations du vide*, liés aux fluctuations quantiques du champ électromagnétique, et les effets de la *réaction de rayonnement*, provenant du champ rayonné par le dipole atomique. Les fluctuations du vide ont à l'ordre le plus bas le même effet qu'un champ classique fluctuant, avec une puissance spectrale de  $\hbar\omega/2$  par mode. La réaction de rayonnement quant à elle a les mêmes conséquences qu'en théorie classique du rayonnement, c'est-à-dire principalement une augmentation de la masse de l'électron. Ainsi, la réaction de rayonnement apparaît responsable de l'anomalie gyromagnétique de l'électron  $g - 2$ , alors que le déplacement de Lamb est dû aux fluctuations du vide.

Nous avons ensuite abordé (partie B) le problème de la dynamique atomique externe de l'atome dans une onde lumineuse. En partant de l'analogie entre ce problème et celui du mouvement Brownien, nous avons développé une méthode d'étude de cette dynamique, conduisant à une équation de Fokker-Planck-Kramers pour l'évolution de la fonction de Wigner atomique. Les différents coefficients de cette équation - force moyenne sur un atome immobile, coefficient de diffusion, dépendance en vitesse de la force - ont été exprimés en termes de valeurs moyennes à un ou deux temps de l'opérateur force radiative égal à l'opposé du gradient du poten-

tiel de couplage atome-laser. Nous avons également appliqué cette méthode de résolution à l'étude de la thermalisation d'un électron libre ou d'un atome neutre dans le rayonnement du corps noir, et souligné les analogies entre les solutions de ces deux problèmes.

Dans la partie C, nous avons étudié en détail les différentes caractéristiques des forces radiatives s'exerçant sur un atome à deux niveaux ou sur un atome  $J = 0 \leftrightarrow J = 1$ . Nous nous sommes en particulier intéressés au comportement à haute intensité de ces forces, et nous avons développé l'approche "atome habillé en mouvement" qui nous a permis de prévoir un nouveau type de refroidissement laser, beaucoup plus efficace que le refroidissement radiatif classique. Nous avons ensuite décrit une expérience, que nous avons réalisée en collaboration avec A. Aspect, C. Cohen-Tannoudji, A. Heidmann et C. Salomon, pour mettre en évidence ce nouveau type de refroidissement radiatif.

Enfin, nous avons proposé dans la partie D plusieurs méthodes originales pour piéger de manière stable des atomes neutres avec des faisceaux laser, en utilisant soit la pression de radiation, soit les forces dipolaires. L'une de ces méthodes a été reprise très récemment aux laboratoires Bell (USA) pour la première réalisation expérimentale d'un piège radiatif.

Les prolongements de ce travail sont bien sûr liés aux grandes perspectives ouvertes par les techniques nouvelles de refroidissement et de piégeage radiatifs, dont témoignent les nombreux "articles d'information" consacrés aux résultats récents dans ce domaine [28-35].

Le ralentissement et le refroidissement de jets atomiques offrent ainsi un outil remarquable pour la spectroscopie à haute résolution et pour la métrologie. Il est maintenant possible, grâce à la nature dissipative des forces radiatives, de regrouper tous les atomes d'un jet thermique ordinaire en un jet monocinétique de vitesse ajustable et dont la température longitudinale est nettement inférieure au degré Kelvin [36,37]. On peut alors concevoir des expériences de spectroscopie où le temps d'interaction avec un atome donné est extrêmement long : fontaine gravitationnelle à



atomes [38,39], anneau de stockage où les anneaux sont défléchis par pression de radiation [38,40], ...

Ces jets monocinétiques intenses peuvent également trouver une application dans l'étude des collisions atomiques (collisions jet sur jet à une vitesse très bien contrôlée et éventuellement très basse) et dans l'étude des interactions atomes-surface : les longueurs d'onde de De Broglie atomiques après refroidissement radiatif sont très grandes (10 nm pour des atomes de césium à la limite  $k_B T = \hbar\Gamma/2$ ). Que se produit-il dans ces conditions lorsque l'atome s'approche de la surface, et que les défauts et les puits attractifs de cette surface ont une dimension très inférieure à la longueur d'onde de De Broglie atomique ? L'atome continue-t-il à être adsorbé, ou bien peut-il rebondir élastiquement comme semblent le suggérer certaines expériences déjà réalisées [41,42] ?

Le piégeage radiatif d'atomes neutres ouvre une autre voie, qui est l'étude de l'interaction entre atomes à température extrêmement basse. On peut obtenir dans ces pièges des densités atomiques relativement élevées. Ainsi, dans le premier piège radiatif, qui a fonctionné en 1986 [1], la densité était de  $10^{12}$  at./cm<sup>3</sup> et les auteurs espèrent pouvoir gagner prochainement deux ordres de grandeur sur cette densité [43]. Pour comparaison, signalons que les densités couramment réalisées dans des pièges à ions également refroidis par laser sont seulement de  $2 \cdot 10^7$  at./cm<sup>3</sup> du fait de la limitation due à la charge d'espace. Que peut-on attendre dans ces conditions de température et de densité ? On peut bien sûr songer à une condensation de type Bose-Einstein, si le spin atomique total est entier. Par exemple pour le sodium, à la température de 300  $\mu$ K observée dans le premier piège radiatif, la limite  $n \lambda_{DB}^3 \simeq 1$  (un atome toutes les longueurs d'onde de De Broglie) conduit à une densité de  $10^{18}$  at./cm<sup>3</sup>. La réalisation d'une telle densité ne paraît a priori pas irréalisable dans un piège radiatif optimisé. Toutefois, il semble exclu de pouvoir atteindre de telles densités sans aboutir simultanément à la formation de molécules [44,45], au moins pour des atomes facilement polarisables comme le sodium ou le césium. Les molécules ainsi formées ne sont alors plus piégées par l'onde lumineuse et peuvent s'échapper. Quels sont les produits

finalement formés (dimères, trimères, agrégats, ... ) ? Quelle est la densité atomique la plus élevée qu'on peut réaliser ? Les réponses à ces questions dépendent probablement des types de pièges utilisés et des catégories d'atomes en jeu. Elles seront de toute façon très riches d'enseignement sur la nature des interactions entre atomes dans ces conditions si peu usuelles de température et de densité.

REFERENCES DE LA PARTIE D ET DE LA CONCLUSION

- [1] S. Chu, J. Bjorkholm, A. Ashkin and A. Cable, Phys. Rev. Lett. 57, 314 (1986).
- [2] A. Migdall, J. Prodan, W. Philipps, T. Bergeman and H. Metcalf, Phys. Rev. Lett. 54, 2596 (1985).
- [3] Un tel piège magnétique a également fonctionné pour des neutrons : K.-J. Kügler, W. Paul and U. Trinks, Phys. Lett. 72 B, 422 (1978).
- [4] A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. 25, 1321 (1970).
- [5] V.G. Minogin and J. Javanainen, Opt. Commun. 43, 119 (1982).
- [6] A. Ashkin and J.P. Gordon, Opt. Lett. 8, 511 (1983).
- [7] A. Ashkin, Opt. Lett. 9, 454 (1984).
- [8] J. Dalibard and W.D. Phillips, B.A.P.S. 30, 748 (1985).
- [9] D.E. Pritchard, E.L. Raab, V. Bagnato, C.E. Wieman and R.N. Watts, Phys. Rev. Lett. 57, 310 (1986).
- [10] Voir par exemple : H. Kogelnik and T. Li, App. Opt. 5, 1550 (1966).
- [11] V.G. Minogin, Sov. J. Quant. Elect. 12, 299 (1982).
- [12] Voir par exemple R. Wuenker, H. Shelton and R.V. Langmuir, J. App. Phys. 30, 342 (1958).
- [13] Une méthode similaire a été utilisée par R. Blatt, P. Toschek et leurs collaborateurs pour étudier le refroidissement d'ions piégés (R. Blatt, communication au congrès "Laser Cooling and Trapping", Helsinki, 1986).

- [14] Ce point nous a été signalé par S. Reynaud.
- [15] G.A. Askar'yan, Sov. Phys. J.E.T.P. 15, 1088 (1962).
- [16] V.S. Letokhov, J.E.T.P. Lett. 7, 272 (1968).
- [17] A.V. Kazantsev, Sov. Phys. J.E.T.P. 36, 861 (1973),  
784 (1974) et Sov. Phys. Usp. 21, 58 (1978).
- [18] a. V.S. Letokhov and B.D. Pavlik, App. Phys. 9, 229 (1976)  
b. V.S. Letokhov and V.G. Minogin, Phys. Lett. 61 A, 370 (1977)  
et Appl. Phys. 17, 99 (1977)  
c. V.S. Letokhov, V.G. Minogin and B.D. Pavlik, Opt. Commun.  
19, 72 (1976) et Sov. Phys. J.E.T.P. 45, 698 (1978).
- [19] a. A. Ashkin, Phys. Rev. Lett. 40, 729 (1978).  
b. A. Ashkin and J.P. Gordon, Opt. Lett. 4, 161 (1979).
- [20] J. Dalibard, S. Reynaud and C. Cohen-Tannoudji,  
Opt. Commun. 47 395 (1983) et Proceedings of the  
International Conference on Lasers'83 (1983).
- [21] V.G. Minogin, Opt. Lett. 10, 179 (1985).
- [22] Voir par exemple C. Cohen-Tannoudji, cours donné au  
Collège de France 1983-84.
- [23] J.P. Gordon and A. Ashkin, Phys. Rev. A 21, 1606 (1980).
- [24] R.J. Cook, Phys. Rev. Lett. 44, 976 (1980) et  
Comments Atom. Mol. Phys. 10, 267 (1981).
- [25] A.P. Kazantsev, G.I. Surdutovich and V.P. Yakovlev,  
J. Physique 42, 1231 (1981).
- [26] V.S. Letokhov and V.G. Minogin, Phys. Rep. 73, 1 (1981).
- [27] H.A. Kramers, Physica 7, 284 (1940).

- [28] A. Ashkin, *Science*, 210, 1081 (1980).
- [29] A. Robinson, *Science*, 229, 39 (1985).
- [30] a. B.M. Schwarzschild, *Physics Today*, Juin 1985, p 17.  
b. B.M. Schwarzschild, *Physics Today*, Septembre 1986, p 17.
- [31] B.W. Petley, *Nature*, 315, 716 (1985).
- [32] H. Metcalf, *Nature*, 315, 717 (1985).
- [33] J. Maddox, *Nature* 318, 11 (1985) et 322, 403 (1986).
- [34] J. Dalibard, *La Recherche*, 16, 935 (1985).
- [35] *Laser Focus/Electro Optics*, Décembre 1985, p. 32.
- [36] Voir par exemple l'article de revue : W.D. Phillips,  
J.V. Prodan and H.J. Metcalf, *J.O.S.A. B2*, 1751 (1985).
- [37] Des températures allant jusqu'à 10 mK ont pu être observées  
par J. Hall et ses collaborateurs, après une analyse très  
fine de la largeur Doppler de la fluorescence du jet ainsi  
ralenti (C. Salomon, Communication privée).
- [38] W. Ertmer, R. Blatt, J.L. Hall and M. Zhu, *Phys. Rev.  
Lett.* 54, 996 (1985)..
- [39] R.G. Beausoleil and T.W. Hänsch, *Opt. Lett.* 10, 547  
(1985).
- [40] W. Ertmer and S. Penselin, à paraître dans *Metrologia*,  
(1986).
- [41] V.U. Navak, D.O. Edwards, and N. Masuhara, *Phys. Rev.  
Lett.* 50, 990 (1983).
- [42] S. Haroche et al, à paraître.

- [43] S. Chu, communication privée.
- [44] J. Vigué, à paraître dans Phys. Rev. A (1986).
- [45] J. Weiner, communication au congrès "Laser cooling and Trapping", Helsinki, 1986.

RESUME : Ce travail est consacré à l'étude de la modification de la dynamique d'un atome induite par le couplage de cet atome avec le rayonnement. Nous commençons par étudier la dynamique atomique interne, et nous montrons qu'il est possible de séparer, pour les différents processus radiatifs (émission spontanée, déplacement de Lamb, ...), la contribution des fluctuations du vide et de la réaction de rayonnement. Nous étudions ensuite la dynamique externe de l'atome dans une onde électromagnétique. Partant de l'analogie profonde entre ce problème et celui du mouvement Brownien, nous montrons qu'il est possible d'établir, pour l'évolution de la fonction de Wigner atomique, une équation de Fokker-Planck-Kramers. Les différents termes de cette équation, force stationnaire, force de friction, coefficient de diffusion de l'impulsion atomique, sont interprétés physiquement en termes de processus d'absorption et d'émission (stimulée ou spontanée) de photons par l'atome. Le cas particulier du mouvement atomique dans une onde laser stationnaire intense est étudié en détail, et nous montrons, théoriquement et expérimentalement, qu'un tel système peut conduire à un refroidissement très efficace des atomes. Nous abordons enfin le problème du piégeage radiatif d'atomes neutres, et nous présentons plusieurs propositions originales pour confiner de manière stable des atomes à l'aide de faisceaux laser.