



HAL
open science

Mesure de la constante de Rydberg par spectroscopie à deux photons des états de Rydberg de l'hydrogène

Jean-Claude Garreau

► **To cite this version:**

Jean-Claude Garreau. Mesure de la constante de Rydberg par spectroscopie à deux photons des états de Rydberg de l'hydrogène. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1989. Français. NNT: . tel-00011865

HAL Id: tel-00011865

<https://theses.hal.science/tel-00011865>

Submitted on 9 Mar 2006

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

DEPARTEMENT DE PHYSIQUE
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE



THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris VI -

présentée par

Jean-Claude GARREAU

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse: "MESURE DE LA CONSTANTE DE RYDBERG PAR SPECTROSCOPIE A DEUX PHOTONS DES ETATS DE RYDBERG DE L'ATOME D'HYDROGENE".

Soutenue le 26 Septembre 1989, devant le jury composé de :

M. B. CAGNAC, Président

M. C. AUDOIN

M. J. BAUDON

M. F. BIRABEN

M. P. JUNCAR

M. J. R. R. LEITE

THESE DE DOCTORAT DE L'UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE

- Paris 6 -

Spécialité :
PHYSIQUE QUANTIQUE

présentée par

Jean-Claude GARREAU

pour obtenir le titre de DOCTEUR DE L'UNIVERSITE PARIS 6

Sujet de la thèse : "MESURE DE LA CONSTANTE DE RYDBERG PAR SPECTROSCOPIE A DEUX PHOTONS DES ETATS DE RYDBERG DE L'ATOME D'HYDROGENE".

Soutenue le 26 Septembre 1989, devant le jury composé de :

M. B. CAGNAC, Président
M. C. AUDOIN
M. J. BAUDON
M. F. BIRABEN
M. P. JUNCAR
M. J.R.R. LEITE

Ce travail a été effectué au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'Ecole Normale Supérieure (Halle aux Vins) pendant la période 1985-1989. Je remercie d'abord Monsieur le Professeur Jean BROSSEL et Monsieur Jacques DUPONT-ROC de m'y avoir accueilli, me faisant ainsi bénéficier de conditions de recherche exceptionnelles.

Je tiens aussi à remercier MM. Claude COHEN-TANNOUJJI et Luiz DAVIDOVICH, grâce à qui mon séjour en France est devenu possible.

Je remercie Monsieur Bernard CAGNAC d'avoir suivi de près ce travail et d'avoir accepté de présider le jury.

J'ai eu la chance de travailler sous l'orientation de François BIRABEN, dont la maîtrise du sujet, l'enthousiasme et la gentillesse ont été fondamentaux pour moi. J'ai eu le plaisir de travailler avec Lucile JULIEN, dont je suis aussi redevable.

Je tiens à remercier Dominique DELANDE et Bernard GYORS pour une aide constante et patiente, en particulier en ce qui concerne l'utilisation des systèmes informatiques et le calcul numérique.

Je remercie l'ensemble de chercheurs du Laboratoire qui m'ont souvent fait bénéficier de leurs connaissances dans le domaine de la Physique. Je leur suis gré de l'agréable atmosphère de recherche de ce Laboratoire.

Je tiens à remercier le personnel technique, MM. QUILBEUF et TOMME, de l'atelier de Mécanique, MM. CLERGEAU, REGAZZI et MAIZIA, de l'atelier d'Electronique, ainsi que MM. FLORY et TREHIN.

Je remercie également MM. Y. MILLERIOUX et P. JUNCAR de l'Institut National de Métrologie pour le prêt d'un laser de référence.

Je remercie vivement MM. Claude AUDOIN, Jacques BAUDON, Patrick JUNCAR et José R. R. LEITE qui m'ont fait l'honneur de participer à ce jury ; je leur suis reconnaissant de cette marque d'intérêt.

Je ne saurais terminer sans remercier Mmes. Brigitte ENRIQUE et Marie-Nôelle OLLIVIER, qui ont assuré le traitement informatique de ce manuscrit, aussi bien que Mlle. GAZAN et M. MANCEAU, responsables du tirage et de la reliure.

Mon séjour en France a été financé par une bourse de la CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal do Ensino Superior), je l'en remercie.

TABLE DE MATIERES

Remerciements

Table de Matières

INTRODUCTION	1
I - LA CONSTANCE DE RYDBERG ET SES METHODES DE MESURE	5
1.1 - La spectroscopie de l'Hydrogène et la Mécanique Quantique	5
1.2 - L'importance de la mesure de la constante de Rydberg dans la physique actuelle	10
1.2.1 - Rapport avec la théorie	10
1.2.2 - Rapport avec d'autres quantités	12
1.2.3 - Hydrogène : un étalon de fréquence? Liaison entre différentes parties du spectre	13
1.2.4 - La "cinquième force" électromagnétique	14
1.3 - Les mesures de la constante de Rydberg de 1927 à 1973	14
1.4 - Les mesures de la constante de Rydberg par spectroscopie laser sans effet Doppler jusqu'à 1986	15
1.4.1 - La spectroscopie d'absorption saturée	16
1.4.2 - La spectroscopie à deux photons	16

1.4.3 - Jet atomique et faisceau laser perpendiculaires	17
1.4.4 - Les résultats. Comparaison entre différentes techniques	17
1.5 - Notre expérience de mesure de la constante de Rydberg	20
1.5.1 - Considérations générales	20
1.5.2 - Les choix fondamentaux de notre expérience	22
1.6 - Les autres mesures de la constante de Rydberg depuis 1986	26
Références du Chapitre I	30
II - RESUME DE LA THEORIE DE L'ATOME D'HYDROGENE	33
2.1 - L'atome de Schrödinger	33
2.2 - L'atome de Dirac	36
2.2.1 - Solution exacte pour un noyau de masse infinie	36
2.2.2 - Les corrections de masse réduite	38
2.2.3 - Les résultats	39
2.3 - Les corrections radiatives. Le Lamb-shift	40
2.3.1 - Les processus contribuant aux corrections radiatives	40
2.3.2 - Les corrections radiatives	44
2.3.3 - Les résultats numériques	50

2.4 - Effets de la structure du noyau. Structure hyperfine	54
2.5 - La spectroscopie atomique et les tests de la QED	59
2.5.1 - <i>Hydrogène</i>	60
2.5.2 - <i>Positronium</i>	62
2.5.3 - <i>Muonium</i>	63
2.5.4 - <i>Hélium ionisé</i>	64
2.5.5 - <i>Conclusion</i>	64
2.6 - Conclusion	69
Références du Chapitre II	71
III - LE MONTAGE EXPERIMENTAL	75
3.1 - Le jet de métastables	75
3.1.1 - <i>La dissociation moléculaire</i>	75
3.1.2 - <i>Le bombardement électronique</i>	78
3.1.3 - <i>L'interaction avec le laser</i>	83
3.1.4 - <i>Le système de détection des métastables</i>	84
3.1.5 - <i>Influence des divers paramètres sur le nombre de métastables</i>	89
3.1.6 - <i>Calcul du nombre de métastables</i>	94
3.1.7 - <i>L'effet des collisions sur le temps de vie des métastables dans la région d'interaction avec le laser</i>	100
3.1.8 - <i>Mesure de la distribution de vitesse des atomes métastables</i>	101
3.2 - Les lasers	104
3.2.1 - <i>La structure du laser à colorant</i>	104

3.2.2 - <i>La stabilisation et le balayage du laser</i> à colorant	109
3.2.3 - <i>Le laser Hélium-Néon stabilisé sur I_2</i>	112
3.2.4 - <i>Le pilotage du laser à colorant</i>	117
3.3 - <i>Le signal atomique</i>	123
3.3.1 - <i>La cavité optique</i>	123
3.3.2 - <i>Le signal observé</i>	123
Références du Chapitre III	126
IV - MONTAGE ET METHODE DE MESURE DES LONGUEURS D'ONDE	129
4.1 - <i>La méthode interférométrique de mesure de</i> longueurs d'onde	129
4.2 - <i>La méthode des miroirs virtuels</i>	134
4.3 - <i>Le montage expérimental</i>	136
4.4 - <i>Les modes des cavités à miroirs sphériques. Le</i> déphasage de Fresnel	141
4.4.1 - <i>Cavités à symétrie cylindrique parfaite</i>	141
4.4.2 - <i>Cavités à symétrie cylindrique légèrement</i> <i>imparfaite</i>	146
4.5 - <i>Mesure du déphasage de Fresnel</i>	148
4.6 - <i>Le déphasage à la réflexion et le vieillissement</i> des miroirs	151
Références du Chapitre IV	156

V - LE CALCUL DES FORMES DE RAIE	157
5.1 - Le taux de transition à deux photons et le light-shift	157
5.2 - La statistique des trajectoires	164
5.3 - Les corrections de structure fine et hyperfine. Effet de repopulation du niveau $2S_{1/2}$ par désexcitation spontanée du niveau excité	168
5.3.1 - Effet de la structure hyperfine du niveau $2S$	168
5.3.2 - Effet de la structure fine du niveau excité	169
5.3.3 - Effet des cascades radiatives vers les niveaux $1S$ et $2S$	170
5.3.4 - Effet de pompage hyperfin du niveau $2S$	173
5.3.5 - Corrections apportées au calcul de la forme de raie	175
5.4 - Résultats	178
5.4.1 - Le déplacement des raies.	179
5.4.2 - L'élargissement et la déformation des raies	183
5.5 - L'intégrale de vitesses et l'effet Doppler du deuxième ordre	191
5.6 - Commentaire sur les effets négligés	196
5.6.1 - L'effet Stark	197
5.6.2 - L'effet Zeeman	200
5.6.3 - L'ionisation du niveau excité par le laser	201

5.6.4 - <i>L'élargissement dû au temps de transit transversal</i>	202
5.6.5 - <i>L'effet des collisions</i>	202
5.7 - Conclusion	202
Références du Chapitre V	204
VI - ANALYSE DES RESULTATS ET DETERMINATION DE LA CONSTANTE DE RYDBERG	205
6.1 - L'acquisition du signal atomique	205
6.2 - La comparaison des Fabry-Perot	209
6.3 - Les "fits" des signaux expérimentaux et la correction à puissance lumineuse nulle	210
6.3.1 - <i>L'analyse des signaux à deux photons. Les "fits"</i>	212
6.3.2 - <i>Les extrapolations à puissance lumineuse nulle</i>	223
6.4 - Détermination de la fréquence de résonance à puissance nulle	226
6.5 - La détermination de la constante de Rydberg et des déplacements isotopiques	232
6.5.1 - <i>Les corrections de structure hyperfine et d'effet Doppler du deuxième ordre</i>	232
6.5.2 - <i>Les incertitudes sur la détermination de la fréquence de transition</i>	235
6.5.3 - <i>La détermination de la constante de Rydberg</i>	239

6.5.4 - Les déplacements isotopiques et la détermination de m_p/m_e	242
6.6 - Discussion des incertitudes et possibilités d'amélioration	246
6.6.1 - La mesure de la fréquence absolue du laser standard	246
6.6.2 - L'effet Stark	246
6.6.3 - Les causes d'élargissement. L'incertitude statistique	248
6.6.4 - Erreur due au vieillissement des miroirs	250
6.6.5 - Erreurs sur le calcul théorique des fréquences de transition	250
6.7 - Comparaison avec d'autres mesures	251
6.8 - Conclusion	253
Références du Chapitre VI	254
CONCLUSION	257
APPENDICE I - La renormalisation de la masse et le Lamb-shift	261
APPENDICE II - Les effets de charge d'espace	275
APPENDICE III - Calcul des éléments de matrice de dipôle	279
APPENDICE IV - Formules utiles pour le calcul des corrections de structure fine et hyperfine	283

INTRODUCTION

La spectroscopie de l'atome d'hydrogène a joué un rôle fondamental dans le développement de la Mécanique Quantique, au début du XX^e siècle. Depuis, le progrès des techniques spectroscopiques ne s'est pas arrêté, et l'étude du spectre de l'hydrogène a conduit à de nouvelles découvertes, la principale parmi celles-ci étant le "Lamb-shift" (déplacement de l'énergie d'un niveau atomique induit par les fluctuations du vide électromagnétique).

La constante de Rydberg joue un rôle unificateur dans l'étude du spectre de l'hydrogène, car elle est le "facteur d'échelle" des positions des niveaux. Même si la position des niveaux ne peut pas être calculée à partir de cette seule constante (et de nombres entiers), comme c'était le cas dans la théorie de Bohr, les corrections qui doivent y être apportées (structure fine, Lamb-shift, structure hyperfine, etc...) restent proportionnelles à la constante de Rydberg. D'où l'intérêt fondamental que l'on porte aux mesures de cette constante.

Vers 1970, la constante de Rydberg était connue par la spectroscopie optique avec une précision d'environ 10^{-7} , limitée par l'élargissement Doppler des raies étudiées. Depuis, le développement des lasers accordables a conduit à de nouvelles méthodes de spectroscopie sans effet Doppler, permettant une amélioration considérable de la précision sur cette constante.

Jusqu'en 1986, la mesure la plus précise était celle réalisée en 1981 à Yale University [1] sur la transition Balmer- α . La précision obtenue (10^{-9}) était due essentiellement à la largeur naturelle du niveau 3P (30 MHz) responsable d'une largeur relative de raie de 7×10^{-8} .

La largeur naturelle des niveaux variant avec n^{-3} , il était intéressant d'étudier les transitions vers des niveaux de n plus élevé. C'est pourquoi l'étude des transitions à deux photons 2S-nD ($n \geq 8$) sans effet Doppler a été entreprise en 1983 par François Biraben au Laboratoire de Spectroscopie Hertzienne de l'ENS. En 1986, une première mesure de la constante de Rydberg est obtenue par cette méthode avec une précision de 5×10^{-10} . La mesure des longueurs d'onde des transitions est faite par une comparaison interférométrique avec celle d'un laser HeNe de référence stabilisé sur une

raie de la molécule d'iode (I_2) [2].

De nombreuses améliorations du dispositif expérimental utilisé ont été réalisées entre 1986 et 1988 conduisant à une nouvelle mesure qui est décrite dans ce mémoire. Cette mesure, dont la précision est de $1,7 \times 10^{-10}$, est la mesure la plus précise de la constante de Rydberg disponible à l'heure actuelle [3]. Elle place la constante de Rydberg en seconde position parmi les constantes fondamentales les mieux mesurées, derrière le facteur g de l'électron.

Tout au long de ce mémoire, nous avons cherché à décrire en détail la méthode expérimentale qui nous a permis d'obtenir une telle précision, en explicitant au mieux les hypothèses qui ont été faites dans l'interprétation des résultats et surtout dans le calcul des erreurs.

Ce mémoire est organisé selon le plan suivant :

Dans le chapitre I sont faits des rappels historiques sur la spectroscopie de l'hydrogène et les mesures de la constante de Rydberg. On y compare les diverses méthodes de mesure utilisées à l'heure actuelle, et on présente les choix de base conduisant à notre technique de mesure. L'importance de ces expériences dans la physique contemporaine est discutée.

Le chapitre II est consacré à un résumé de la théorie de l'atome d'hydrogène : les modèles de Schrödinger et de Dirac, les corrections radiatives, la structure hyperfine. On y présente les calculs qui seront utilisés pour la détermination de la constante de Rydberg à partir des mesures (chapitre VI), ainsi qu'un bref compte-rendu de l'état actuel des mesures spectroscopiques sur des systèmes hydrogénoïdes (H, D, He^+ , positronium, muonium) et la comparaison avec la théorie.

Dans le chapitre III est décrit l'ensemble du montage expérimental : le jet de métastables, la technique de détection des métastables, la mesure de la distribution des vitesses dans le jet ; le laser à colorant utilisé pour induire les transitions, ses systèmes de stabilisation et de balayage en fréquence ; le laser de référence ; le signal atomique obtenu.

La méthode de mesure des longueurs d'onde est exposée dans le chapitre

IV.

Le chapitre V est consacré au calcul des forme de raies théoriques qui sont utiles pour l'interprétation des signaux expérimentaux. On y présente une étude numérique des effets de "light-shift" et de saturation sur nos raies.

Dans le chapitre VI sont présentées l'analyse des résultats et la détermination de la constante de Rydberg. On y décrit en détail la technique de dépouillement des mesures expérimentales et l'analyse des erreurs commises. On y discute les améliorations possibles de la technique utilisée et on fait une comparaison avec d'autres résultats récents.

Les références sont groupées à la fin de chaque chapitre.

REFERENCES

- 1 S. R. Amin, C. D. Caldwell and W. Lichten, Phys. Rev. Lett. 47, 1234 (1981).
- 2 F. Biraben, J. C. Garreau and L. Julien, Europhys. Lett. 2, 925 (1986).
- 3 F. Biraben, J. C. Garreau, L. Julien and M. Allegrini, Phys. Rev. Lett. 62, 621 (1989).

CHAPITRE I

LA CONSTANTE DE RYDBERG ET SES METHODES DE MESURE

Dans la première partie de ce chapitre, on essayera de situer rapidement l'étude du spectre de l'hydrogène dans son contexte historique et d'établir son importance dans la physique d'aujourd'hui. On verra que l'amélioration des méthodes spectroscopiques a conduit à des raffinements de la théorie quantique, les nouveaux effets détectés demandant de nouvelles explications. Ce processus a amené successivement à la formulation de la théorie quantique relativiste de l'électron (Dirac) et à l'électrodynamique quantique (Bethe, Feynman, Schwinger, Tomonaga..., suite aux expériences historiques de Lamb et Retherford, qui ont mis en évidence l'existence du Lamb-shift). Il n'est pas sûr que ce processus soit clos aujourd'hui... (La plupart des données historiques de cette première partie vient des deux références [1.1, 1.2]).

Ensuite, dans la seconde partie, on discutera les schémas et les choix de principe qui ont conduit à réaliser notre expérience telle qu'elle est.

1.1 - La spectroscopie de l'hydrogène et la Mécanique Quantique.

Entre la découverte des spectres atomiques par Kirchoff et Bunsen au début du XIX^e siècle et les travaux de Balmer, vers la fin de ce même siècle, on peut dire que la spectroscopie de l'atome d'hydrogène a traversé sa préhistoire. A l'époque, aucune possibilité sérieuse d'explication des raies observées n'avait été envisagée. La première de ces raies, aujourd'hui connue sous le nom de Balmer- α , une raie intense dans le rouge (656 nm), a été identifiée par Angstrom en 1853.

Remarque : Il semble que A. Masson ait attribué cette raie à l'hydrogène déjà en 1851 (G. W. Series in *The Hydrogen Atom*, G. F. Bassani et al. eds., Springer-Verlag, 1989).

L'étude de l'hydrogène atomique en laboratoire présentait des difficultés presque insurmontables pour l'époque, du fait que l'énergie de dissociation de la molécule H_2 est assez élevée ; l'étude systématique a dû

attendre le développement des décharges gazeuses, vers le début du XX^e siècle. Néanmoins, des mesures faites sur les spectres stellaires, celui du soleil en particulier, ont permis des déterminations assez précises de la position des raies. De ce point de vue, il est heureux que le soleil soit constitué surtout d'hydrogène ; cela a permis de commencer l'étude des spectres par le plus simple d'entre eux (les cosmologistes diront qu'il n'y a pas d'accident!).

Ainsi, déjà vers 1881, W. Riggins avait enregistré, de source astronomique, la position des raies de l'hydrogène de façon systématique et précise.

En 1885, une première formule "phénoménologique" donnant la position de ces raies a été proposée par Balmer. Celui-ci a trouvé une équation simple où les raies de l'hydrogène qui tombent dans le visible (les seules connues à l'époque) - et qui ont été nommées par la suite série de Balmer - étaient identifiées à un nombre entier $n \geq 3$, commençant par l'extrémité rouge du spectre. La longueur d'onde correspondante était donnée par :

$$\lambda_n = A \frac{n^2}{n^2 - 4} \quad (1.1)$$

Un peu plus tard, en 1889, Rydberg, travaillant essentiellement sur les éléments alcalins (dont le spectre est semblable à celui de l'hydrogène mais qui ont l'avantage de ne pas former de molécules) a proposé une formule capable de rendre compte de ces spectres [1.3]. Cette formule, dans une version un peu modifiée, s'écrit (n et p sont des nombres entiers avec $n > p$)

$$\frac{1}{\lambda_n} = R \left[\frac{1}{(p + \delta_1)^2} - \frac{1}{(n + \delta_2)^2} \right] \quad (1.2)$$

qui est équivalente à la formule de Balmer dans le cas particulier $\delta_1 = \delta_2 = 0$ et $p=2$. Rydberg a observé que les nombres entiers p et n et $\delta_{1,2}$ (plus tard nommés *défauts quantiques*) changeaient avec la série et l'espèce atomique considérée, mais la constante R semblait être - à la précision de l'époque - une constante universelle. Il a aussi déterminé une première valeur pour cette constante, nommée par la suite *constante de Rydberg* (on en reparlera le long de ce mémoire...) :

$$R = 109\,721,6 \text{ cm}^{-1}.$$

Remarque : On fera ici une distinction entre la constante de Rydberg (R), mesurée en unités d'inverse de longueur, et le Rydberg (R_y), mesuré en unités d'énergie. Les deux sont reliés par $R_y = Rhc$.

Si l'on corrige cette valeur de l'effet de masse réduite et de l'indice de réfraction de l'air (Rydberg a fait ses mesures à l'air), on trouve :

$$R = 109\,747 \text{ cm}^{-1},$$

qui diffère de la valeur actuelle 109 737,315 71 [1.4] de moins de 1×10^{-4} .

Le pas suivant a été fait par Bohr. Moyennant quelques hypothèses simples, mais révolutionnaires, il a obtenu la première valeur théorique pour la constante de Rydberg [1.5] :

$$R = \frac{mq^4}{8\epsilon_0^2 h^3 c}.$$

La théorie de Bohr permettait ainsi de rendre compte du spectre de l'hydrogène autant que les formules de Balmer et de Rydberg pouvaient le décrire. Néanmoins, à cette époque on savait depuis plus de vingt-cinq ans que les raies de Balmer pouvaient être résolues en composantes, chaque raie correspondant à un doublet (et aujourd'hui on sait qu'elles ont une structure beaucoup plus compliquée qu'un doublet). Déjà, en 1892, Michelson avait utilisé son interféromètre pour mesurer la séparation du doublet Balmer- α et avait trouvé 0,0014 nm, en accord, à cette précision, avec les valeurs actuelles.

Des progrès importants ont été accomplis vers la fin du siècle, en particulier l'étude de l'hélium ionisé He^+ , qui, ayant une masse plus grande que celle de l'hydrogène, présente un élargissement Doppler moins important.

A peu près à l'époque où Bohr présentait sa théorie, l'étude expérimentale des six premières raies de la série de Balmer par Curtis [1.6] a mis en évidence quelques discordances avec les valeurs calculées. Bohr a alors

introduit les premières corrections de masse réduite et de variation relativiste de la masse.

Une confirmation supplémentaire de la théorie a été fournie par l'étude de nouvelles séries de raies - dont les positions étaient en accord avec les prévisions - : La série de Lyman (correspondant à $p=1$ dans la formule de Rydberg) en 1914 ; Paschen avait déjà trouvé les deux premières raies de la série $p=3$ en 1908 [1.7]. La série $p=4$ a été trouvée par Brackett en 1922 [1.8], la série $p=5$ par Pfund en 1924 [1.9].

L'étude des composantes de ces raies a aussi fait des progrès importants, mettant en évidence ce qui a été nommé par la suite *structure fine* de l'atome d'hydrogène. Des modifications de la théorie visant à rendre compte de ces effets ont été envisagées par Bohr lui même [1.10], par Sommerfeld [1.11] et par Wilson [1.12].

Le progrès continu des techniques expérimentales a permis une résolution à chaque fois meilleure de cette sous-structure des raies. L'utilisation de l'hélium ionisé par Paschen a produit toute une nouvelle série de données expérimentales qui étaient en bon accord avec la théorie de Sommerfeld.

En 1926, Goudsmit et Uhlenbeck [1.13] ont introduit la notion de spin pour expliquer l'effet Zeeman anormal et certains doublets observés dans le spectre des alcalins. Cette idée a été confirmée plus tard par l'expérience classique de Stern et Gerlach. Il était alors devenu nécessaire d'incorporer le spin dans la théorie. Cela n'a jamais été possible dans le cadre des postulats de Bohr.

Néanmoins, pendant les années 20, une nouvelle théorie était née, la Mécanique Ondulatoire, qui avait pour origine l'idée formulée par de Broglie (dans sa thèse de doctorat) que, si la lumière présentait à la fois des comportements ondulatoire et corpusculaire, il devait en être de même pour la matière, les électrons en particulier. Il a même réussi, en développant cette idée d'une façon "naïve", à déduire la loi de quantification du moment cinétique introduite par Bohr comme conséquence de ses postulats.

Cette nouvelle théorie quantique est arrivée à sa forme "définitive" après les travaux de Heisenberg (incertitude quantique, 1926), Schrödinger

(équation d'onde, 1926) et Born (interprétation probabiliste, 1929). Dans ce cadre, Pauli a pu incorporer le spin électronique. Cela a permis un progrès important dans l'étude théorique du spectre de l'hydrogène, avec et sans champ magnétique.

Un résultat encore plus général a été obtenu par Dirac [1.14], avec son équation qui incorporait à la fois le spin et l'invariance relativiste. Bien qu'elle ne prenne pas en compte des corrections dues à l'interaction avec les fluctuations du vide et à l'interaction faible, celle-ci est la théorie de l'électron la plus complète dont nous disposons à ce jour.

La théorie de Dirac prévoit "naturellement" l'existence d'une structure fine dans l'hydrogène et indique aussi que celle-ci ne dépend que du nombre quantique J décrivant le moment cinétique total de l'électron. Cette théorie a permis en outre de rendre compte des effets d'interaction entre l'électron et la structure électromagnétique du proton (spin, distribution de charge), connus sous le nom de *structure hyperfine* (ce problème avait été traité aussi par Fermi vers 1930).

Le dernier pas pour atteindre la théorie de l'hydrogène telle qu'on la connaît aujourd'hui a pour origine les résultats d'une expérience demeurée classique : l'expérience de Lamb et Retherford (1949, 1950).

Vers 1932, Dirac avait créé une théorie quantique du champ électromagnétique, laquelle présentait des problèmes encore non résolus à la fin des années 40 ; en particulier, l'application "naïve" de cette théorie au calcul de l'énergie d'interaction d'un électron avec les fluctuations quantiques du vide électromagnétique produisait un résultat infini.

L'expérience de Lamb et Retherford intervient dans ce contexte [1.15]. Ils ont mesuré un intervalle radio-fréquence (d'environ 1 GHz) entre les niveaux $2S_{1/2}$ et $2P_{1/2}$ de l'hydrogène, qui, ayant le même moment cinétique total, devraient être dégénérés d'après la théorie de Dirac, intervalle aujourd'hui connu sous le nom de Lamb-shift. Des indices indirects de l'existence de cet intervalle s'étaient déjà présentés auparavant [1.16], mais ils étaient peu concluants.

La possibilité que l'interaction de l'électron avec les fluctuations du

vide électromagnétique soit à l'origine de cet effet a été envisagée, et un grand effort a été fait pour résoudre le problème de la divergence dans ce calcul. Une solution a été trouvée - connue sous le nom de renormalisation de la masse - et a donné naissance à ce que l'on appelle aujourd'hui l'Electrodynamique Quantique (QED), grâce aux travaux de Bethe, Feynman, Schwinger, Tomonaga...

Dès lors, des calculs de plus en plus précis ont été menés, mais le corps théorique décrivant l'interaction d'un électron avec le champ électromagnétique n'a guère changé, et la QED est aujourd'hui une des théories physiques fondamentales mieux testées expérimentalement.

Dans le chapitre II, on présentera un résumé des résultats de la théorie concernant le calcul des niveaux d'énergie de l'hydrogène.

La spectroscopie de l'hydrogène joue donc un rôle fondamental dans le développement de la physique moderne, et la mesure de la constante de Rydberg est un des tests possibles de la consistance de la théorie quantique. Actuellement, en effet, il n'y a qu'une constante fondamentale mieux connue que la constante de Rydberg : le facteur gyromagnétique de l'électron [1.17]. On peut alors se demander s'il est vraiment utile de mesurer cette constante avec une telle précision. C'est à cette question que nous allons essayer de répondre maintenant.

1.2 - L'importance de la mesure de la constante de Rydberg dans la physique actuelle.

L'importance de la constante de Rydberg dans la physique d'aujourd'hui est à la fois théorique et pratique, et elle risque de s'accroître dans un futur proche. Discutons quelles sont les applications des mesures ultra-précises de cette constante.

1.2.1 - Rapport avec la théorie.

En premier lieu, il faut remarquer que la constante de Rydberg telle qu'on la déduit des mesures de fréquences de transition entre niveaux atomiques n'est une constante que si les théories permettant de calculer

précisément la position de ces niveaux sont correctes. En effet, ce n'est que pour un atome "de Schrödinger" (avec un noyau ponctuel de masse infinie, sans spin et sans structure, et un électron sans spin, non relativiste, et qui n'interagit pas avec les fluctuations du vide) que la constante de Rydberg peut être directement déduite (c'est à dire, sans faire intervenir d'autres constantes) des fréquences de transition mesurées, simplement en multipliant ces fréquences par des combinaisons adéquates de nombres entiers.

Quand on tient compte de tous les autres effets, on fait nécessairement intervenir d'autres constantes en appliquant des formules théoriques. Les corrections de masse réduite font intervenir le rapport de la masse du proton à celle de l'électron [remarquons de plus qu'il n'y a pas de théorie exacte pour ces corrections dans le domaine relativiste, du fait que le problème de deux corps n'est pas séparable en relativité restreinte] ; les corrections de structure fine (effets de spin et effets relativistes) font intervenir, moyennant l'application de la formule de Dirac (voir chapitre II), la constante de structure fine α ; les corrections de structure hyperfine (spin et structure du proton) font intervenir le magnéton de Bohr de l'électron, celui du proton et d'autres caractéristiques de la structure de cette particule, son volume par exemple, dans une théorie perturbative qui rend compte de ces effets. Finalement, les corrections radiatives (QED, interaction avec les fluctuations du vide, polarisation du vide, etc.) font intervenir une théorie perturbative qui, malgré d'éclatants succès, est encore loin d'être satisfaisante et dont la difficulté des calculs numériques est telle qu'elle se trouve souvent en retard (en supposant qu'il ne s'agisse pas de désaccord...) par rapport aux mesures, comme c'est le cas actuellement pour le positronium.

C'est pourquoi la mesure de la constante de Rydberg pour différentes transitions fournit un test de plus en plus poussé de l'ensemble des théories qui sont au coeur même de la Mécanique Quantique. S'il est vrai que pour des aspects particuliers de ces théories on trouve souvent des tests plus précis que la mesure de la constante de Rydberg, le fait même qu'elle fait intervenir cet ensemble de théories est d'une importance non négligeable.

1.2.2 - Rapport avec d'autres quantités.

La mesure de la constante de Rydberg est utile à la détermination d'autres quantités. Par exemple, on ne peut déduire une valeur du Lamb-shift de l'état 1S à partir des mesures de la fréquence de transition 1S-2S [1.18, 1.19] qu'en connaissant la valeur de R. Ainsi, la mesure de cette constante sur différentes transitions atomiques joue un double rôle dans les tests de la QED : soit, en faisant confiance aux valeurs calculées théoriquement pour les corrections, on vérifie que la valeur de la constante est indépendante de la transition, soit on utilise la valeur de la constante déterminée sur une transition pour vérifier les calculs théoriques sur une autre. Il est important alors de noter que certaines corrections peuvent être déterminées expérimentalement indépendamment des mesures de R, comme le Lamb-shift du niveau 2S [1.20], tandis que d'autres (le Lamb-shift du niveau 1S par exemple) ne peuvent être déduites que de mesures d'une fréquence de transition entre deux niveaux de nombres quantiques principaux différents.'

La constante de Rydberg joue aussi un rôle important pour la détermination d'autres constantes fondamentales. En effet, ces constantes, mesurées indépendamment, sont reliées théoriquement les unes aux autres ; par exemple, la constante de Rydberg est reliée à la masse de l'électron, à la constante de structure fine et à la constante de Planck par

$$R = \frac{m c \alpha^2}{4 \pi \hbar}$$

La constante de structure fine, à son tour, est reliée à la charge de l'électron et à la constante de Planck par

$$\alpha = \frac{q^2}{4 \pi \epsilon_0 \hbar c}$$

Remarque : La vitesse de la lumière dans le vide vaut *par définition* exactement 299 792 458 m/s (voir § 1.2.3). La permittivité du vide vaut exactement $1/\mu_0 c^2$, avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$, par définition.

Evidemment, la précision avec laquelle ces constantes sont mesurées varie de l'une à l'autre. Ainsi, la valeur de R qui peut être déduite de la

formule ci-dessus est moins précise que celle obtenue expérimentalement car les constantes apparaissant dans le terme de droite de la formule sont connues avec des précisions inférieures à celle de la mesure de la constante de Rydberg (α est connue avec une précision de $4,5 \times 10^{-8}$ et h de 6×10^{-7} [1.21]. R est mesurée avec une précision de $1,7 \times 10^{-10}$ [1.4]).

Pour tenir compte de ces relations aussi bien que des mesures expérimentales, on procède périodiquement à un ajustement des valeurs des constantes fondamentales par une méthode de moindres carrés. Ces ajustements sont faits depuis une vingtaine d'années par B. N. Taylor, du NBS, et collaborateurs, le dernier datant de 1986 [1.21]. Dans cet ajustement, les constantes sont divisées en deux groupes : *les constantes auxiliaires*, les plus précises et dont les valeurs ne sont pas soumises à ajustement, et les *constantes stochastiques*, qui subissent un ajustement. La constante de Rydberg y entre en tant que constante auxiliaire.

Les mesures de plus en plus précises de R aident donc à réduire l'imprécision avec laquelle sont déterminées les constantes moins bien mesurées.

1.2.3 - Hydrogène : un étalon de fréquence? Liaison entre différentes portions du spectre.

Le spectre de l'hydrogène s'étend de l'ultraviolet aux micro-ondes, couvrant une plage de longueurs d'onde, en principe, de l'infini à environ 100 nm. Si l'expérience montre que la formulation théorique dont nous disposons est adéquate sur toute cette plage, permettant de calculer les corrections nécessaires pour relier la constante de Rydberg aux fréquences directement mesurées sur l'hydrogène, on disposera ainsi d'une chaîne capable de relier tous ces domaines de longueurs d'onde et donc de raccorder les micro-ondes à l'ultraviolet [1.22]. L'atome d'hydrogène pourrait même, dans un futur proche, permettre de réaliser un étalon de longueur dans le domaine optique. La redéfinition du mètre, en 1983, en fonction de la vitesse de la lumière - le mètre est, depuis, la distance parcourue par la lumière en $1/299\,792\,458$ ème de seconde - rend théoriquement équivalentes les mesures de longueur d'onde et de fréquence. L'étalon de fréquence, l'horloge à césium, est exacte à quelques 10^{-13} près. Pour réaliser un étalon de longueur à la même exactitude il suffit - en principe - de mesurer une fréquence par comparaison avec l'horloge à

césium avec la même précision. Néanmoins, les difficultés techniques liées posent à la construction d'une chaîne allant des micro-ondes au visible ont empêché, jusqu'à présent, la détermination de fréquences optiques avec une précision meilleure que $1,6 \times 10^{-10}$ [1.23], qui correspond à la précision sur la fréquence d'un laser Hélium-Néon stabilisé sur une raie vibrationnelle de la molécule d'iode (HeNe/I₂). Notre mesure de la constante de Rydberg [1.4] a été effectuée par comparaison interférométrique des fréquences de transition de l'hydrogène (voir partie 1.5 plus loin) avec la fréquence de l'HeNe/I₂. Comme on le verra dans le chapitre VI, l'incertitude sur cette comparaison est de 4×10^{-11} , ce qui montre que la précision sur la valeur de R est limitée fondamentalement par l'imprécision sur la réalisation du mètre dans le domaine optique. Il peut ainsi devenir intéressant d'utiliser l'hydrogène comme réalisation pratique du mètre dans le domaine optique, ce qui augmenterait la précision de cette réalisation d'un facteur quatre environ, avec un avantage additionnel de pouvoir facilement l'étendre à d'autres domaines de longueur d'onde.

1.2.4 - La "cinquième force" électromagnétique.

Récemment, une nouvelle application des mesures précises de la constante de Rydberg pour différentes transitions a été suggérée : ces mesures testent les déviations du potentiel électrostatique à la loi coulombienne, ce qui permet d'imposer des limites supérieures à une "cinquième force" électromagnétique [1.24]. En effet, les mesures de R sont le meilleur test de la forme coulombienne du potentiel électrostatique dans la région des distances comprises entre 10^{-11} et 10^{-6} mètres et permettent de limiter les déviations à moins d'une partie pour 10^7 . Une mesure de R dans le domaine des micro-ondes, permettrait d'étendre ce test à 10^{-4} m, où, d'après la référence [1.24], il a un "trou" dans les tests actuellement disponibles.

1.3 - Les mesures de la constante de Rydberg, de 1927 à 1973.

On a donné plus haut la valeur de la constante de Rydberg mesurée par Rydberg lui-même, en étudiant le spectre des éléments alcalins à l'aide de réseaux de diffraction.

La mesure suivante, utilisant des données spectroscopiques, date de

1927, faite par W. V. Houston [1.25], déjà sur l'hydrogène (Balmer- α et β) et sur l'hélium. De 1927 à 1973, sept déterminations ont été faites dont les valeurs sont montrées dans la table 1.I. En 46 ans, l'amélioration sur la précision n'est guère plus que d'un facteur 2 ($1,5 \times 10^{-7}$ pour Houston, $7,0 \times 10^{-8}$ pour Kibble).

TABLE 1.I

Mesures de la constante de Rydberg de 1927 à 1973

Date	Groupe	Raie étudiée	Résultat corrigé R-10973730 m ⁻¹	Incertitude (10 ⁻⁸)
1927	Houston	H- α, β ; He+ (468 nm)	3,6 (16)	15
1939	Chu	He+ (468 nm)	1,4 (20)	18
1940	Drinkwater <i>et al</i>	H, D- α	1,4 (9)	8,2
1968	Csillag	D- $\alpha, \dots, D-\eta$	0,60 (60)	5,4
1971	Masui	H- α	1,88 (45)	4,1
1973	Kessler	He+ (468, 656, 1012 nm)	2,08 (85)	7,7
1973	Kibble <i>et al</i>	H, D- α	2,53 (77)	7,0

Résultats corrigés des variations dans la définition du mètre, des erreurs sur les standards de fréquences, etc. [1.26, 1.27, 1.2].

1.4 - Les mesures de la constante de Rydberg par spectroscopie laser sans effet Doppler jusqu'à 1986.

Vers le début des années 70, l'effet Doppler était devenu la principale limitation à la spectroscopie de haute résolution sur les atomes légers. Les deux dernières mesures de la constante de Rydberg avant l'apparition de la spectroscopie laser sans effet Doppler ont essayé de s'en affranchir par des méthodes sans lendemain : celle de Kessler [1.28] utilisant encore une fois l'hélium ionisé (l'effet Doppler est plus petit, mais les raies sont moins intenses par rapport à celles l'hydrogène). Celle de Kibble *et al.* [1.29] en refroidissant la cellule d'hydrogène à l'hélium liquide, ce que ne réduit guère l'effet Doppler que d'un facteur 9, l'élargissement Doppler équivalant

encore à plus de 10% de l'intervalle de structure fine.

1.4.1 - La spectroscopie d'absorption saturée.

L'introduction de la spectroscopie d'absorption saturée, en 1972 [1.30] a produit deux ans après une mesure de R [1.31] dont la précision progressait d'un ordre de grandeur. En un an, la précision a fait un bond d'un facteur huit, tandis que pendant les 46 années antérieures elle n'avait progressée que d'un facteur deux!

La spectroscopie d'absorption saturée est fondée sur le principe suivant (très schématiquement) : si deux faisceaux laser se propageant en sens opposé traversent un milieu absorbant, seuls les atomes ayant une vitesse nulle le long de l'axe commun des faisceaux seront simultanément en résonance avec les deux faisceaux, l'effet Doppler décalant les autres atomes en dehors de la résonance. Ces atomes seront alors soumis à une forte puissance lumineuse et la transition sera saturée, ce qui se manifestera par une diminution détectable de l'absorption. Cela permet ainsi de sélectionner les atomes de vitesse nulle, éliminant l'effet Doppler (du premier ordre).

Cette technique suppose l'application de puissances lumineuses importantes, c'est pourquoi sa mise en oeuvre a dû attendre l'apparition des lasers accordables.

1.4.2 - La spectroscopie à deux photons.

A peu près à la même époque est apparue une autre technique permettant l'élimination de l'effet Doppler : la spectroscopie à deux photons [1.32, 1.33]. Cette technique consiste à faire interagir les atomes avec deux ondes qui se propagent en sens opposé et dont la fréquence est la moitié de la fréquence de transition. Les transitions se font alors par absorption de deux photons. Si ces photons se propagent en sens opposés, les effets Doppler du premier ordre sur chacun ont même module mais des signes opposés et s'annulent quand on somme les deux fréquences (ce qui donne la fréquence de transition). Cette technique nécessite aussi des puissances laser importantes, car les probabilités de transition à deux photons sont en général petites. Cette technique n'a été employée pour la mesure de R que beaucoup plus tard, vers 1986, mais elle a complètement surpassé la technique d'absorption saturée,

pour des raisons qu'on discutera plus loin.

1.4.3 - Jet atomique et faisceau laser perpendiculaires.

Une troisième technique a été utilisée pour l'élimination de l'effet Doppler : l'étude d'un jet atomique par un faisceau laser perpendiculaire à celui-ci ; les atomes n'ayant alors pas de composante de vitesse le long du faisceau laser, il n'y a pas d'effet Doppler du premier ordre.

1.4.4 - Les résultats. Comparaison entre les différentes techniques.

La table 1.II montre les résultats des mesures de la constante de Rydberg de l'ère laser, antérieures à 1986. La figure 1.1 montre l'évolution des mesures et de la précision de 1927 à 1986.

TABLE 1.II

Mesures de la constante de Rydberg de 1974 à 1986 (m^{-1}).

1974 : Groupe Stanford, spectroscopie d'absorption saturée sur H et D- α [1.31] :	10 973 731,43 (10)	(9,1 ppb)
1978 : Groupe Stanford, spectroscopie de polarisation sur H- α [1.34] :	10 973 731,476 (32)	(2,9 ppb)
1980 : Groupe NPL, spectroscopie d'absorption saturée sur H- α [1.35] :	10 973 731,513 (85)	(7,7 ppb)
1981 : Groupe Yale, jet et faisceau perpendiculaires sur H, D- α [1.36] ^a :	10 973 731,544 (11)	(1,0 ppb)
1986 : Groupe Stanford, deux photons à impulsion sur 1S-2S [1.37] ^b :	10 973 731,492 (22)	(2,0 ppb)
1986 : Groupe Southampton, deux photons à impulsion sur 1S-2S [1.38] ^b :	10 973 731,500 (110)	(10 ppb)

^a Valeur corrigée, valeur originale : 10 973 731,521 (11) m^{-1} .

^b Ces mesures utilisent la valeur théorique du Lamb-shift de l'état 1S pour la détermination de R.

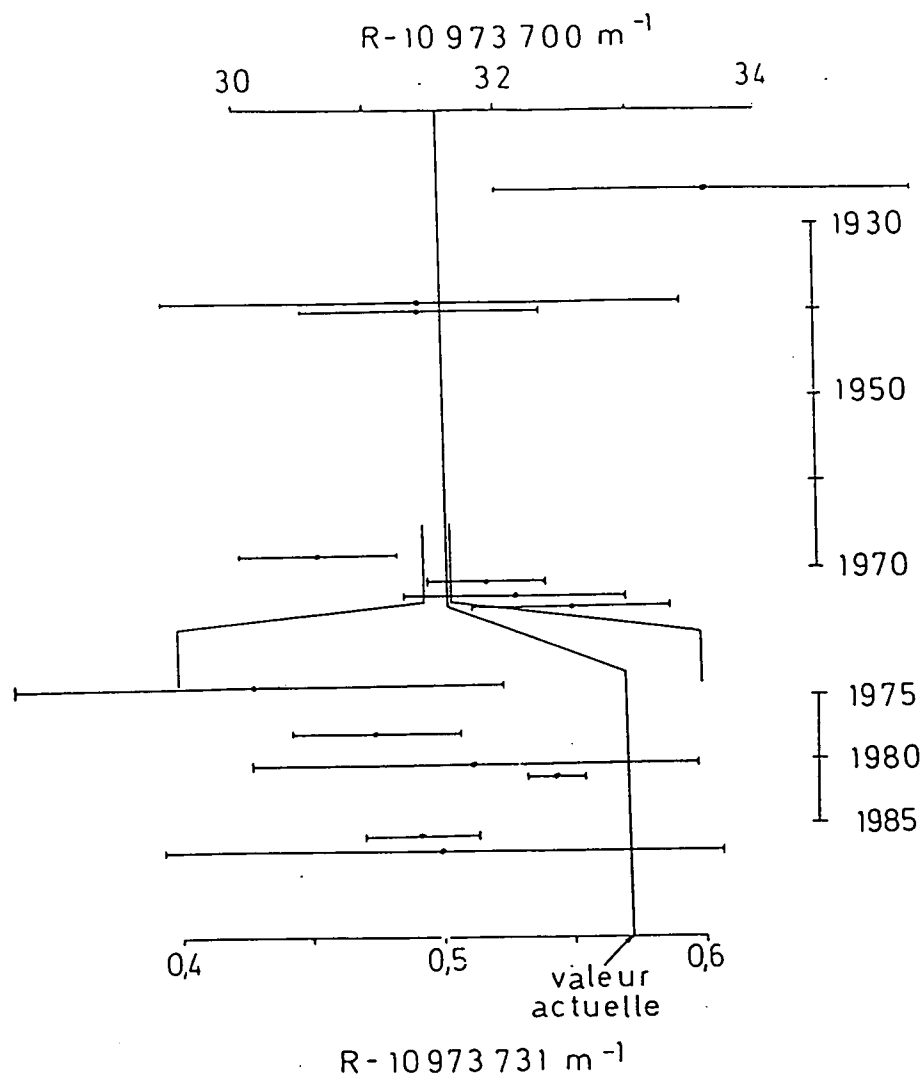


Figure 1.1 - Mesures de la constante de Rydberg au XXe siècle. Le changement d'échelle vers 1973 traduit l'apparition de la spectroscopie laser sans effet Doppler. Les valeurs numériques concernées sont montrées dans les tables 1.I et 1.II.

On peut maintenant comparer les atouts de chacune de ces méthodes.

La spectroscopie d'absorption saturée (aussi bien que sa soeur, la spectroscopie de polarisation) permet d'éliminer l'effet Doppler au premier ordre, mais elle présente l'inconvénient que seule une petite partie des atomes - ceux de la classe de vitesse nulle - contribue au signal d'absorption saturée. Cela oblige dans la pratique à travailler à des densités atomiques élevées, ce qui augmente l'effet des collisions atomiques (élargissement par pression, etc.).

La technique de jet et faisceau perpendiculaires permet d'utiliser tous les atomes disponibles - donc de travailler à basse pression - mais on ne peut pas éliminer complètement l'effet Doppler du premier ordre, du fait que ni la collimation du jet atomique ni l'orthogonalité du jet et du faisceau laser ne sont jamais parfaits. On peut éliminer les déplacements de la raie dus à ces imperfections en rétro-réfléchissant le faisceau sur lui même, mais il reste un élargissement résiduel.

Il en ressort que la technique de spectroscopie à deux photons semble être la plus adéquate : des quatre dernières mesures de R (voir partie suivante), trois utilisent cette technique. L'effet Doppler du premier ordre est complètement éliminé et tous les atomes disponibles peuvent être utilisés. L'inconvénient est la forte puissance lumineuse nécessaire pour induire les transitions à deux photons, nettement plus élevée que celle utilisée pour les transitions à un photon. Les puissances élevées provoquent des déplacements et des déformations de la raie (le *light-shift*, voir chapitre V) dont il faut tenir compte. Néanmoins, la théorie décrivant ces effets est bien connue et le calcul théorique est en accord avec les extrapolations expérimentales (voir chapitre VI). La spectroscopie à deux photons présente aussi un avantage additionnel en ce qui concerne l'étude de la transition 1S-2S [1.18, 1.19, 1.37, 1.38] : cette transition est complètement interdite à un photon. De plus, cette transition tombe dans le vuv, à 121,5 nm et il est bien plus facile de générer les 243 nm nécessaires à la transition à deux photons.

Enfin, les transitions à deux photons, reliant des niveaux de même parité, permettent d'étudier les transitions S-S ou S-D (interdites à un

photon) et d'éviter les états P qui ont en général des largeurs naturelles importantes.

1.5 - Notre expérience de mesure de la constante de Rydberg.

1.5.1 - Considérations générales.

Une fois que l'on s'est affranchi de l'effet Doppler (au premier ordre), la limitation essentielle qui intervient sur la précision de toute expérience visant à mesurer la constante de Rydberg est la largeur naturelle des niveaux en question. Du point de vue théorique, il existe quatre types différents de niveaux dans l'hydrogène présentant des largeurs naturelles petites.

Le premier candidat est le niveau fondamental, dont la durée de vie est infinie (largeur naturelle nulle).

Le deuxième est le niveau métastable $2S_{1/2}$, dont la largeur naturelle est de l'ordre de 1,3 Hz.

Les niveaux de Rydberg élevés (avec un petit ℓ) forment la troisième catégorie, dont la largeur naturelle varie comme n^{-3} pour des niveaux de moment cinétique donné (105 kHz pour 10S, 737 Hz pour 50S, 296 kHz pour 10D, 2,43 kHz pour 50D).

Finalement, les états dits *circulaires*, avec $\ell=|m|=n-1$, dont la largeur varie comme n^{-5} (19 kHz pour $n=10$, 5,6 Hz pour $n=50$).

Générer des états de Rydberg circulaires dans l'hydrogène n'est pas simple : à ce jour, cela n'a pas encore été fait. Il reste donc quatre types de transitions possibles : du niveau 1S vers les états de Rydberg, de 1S vers 2S, de 2S vers les niveaux de Rydberg et enfin les transitions entre niveaux de Rydberg élevés. Le premier choix est exclu : la transition tombera encore plus loin dans l'uv que celle vers l'état 2S et, pour trouver un niveau de Rydberg de largeur comparable à celle du niveau 2S il faut monter jusqu'au niveau 210S (ou 310D). Or, le taux de transition à deux photons varie comme n^{-3} , et il sera donc environ un million de fois plus petit que pour la transition 1S-2S. La dernière possibilité n'est pas facile à réaliser non

plus : ces niveaux élevés sont élargis de façon importante par des champs électriques parasites (cet effet est proportionnel à n^2 , voir chapitre V) et la largeur expérimentale risque d'être élevée.

Remarque : On peut également mesurer la constante de Rydberg sur des atomes alcalins à condition de connaître très précisément le défaut quantique des niveaux étudiés. Une expérience de ce type est en cours dans notre laboratoire sur l'atome de lithium, pour lequel la transition entre états circulaires $n=24$ et $n=25$ a déjà été observée (cf. M. Gross *et al.* in *The Hydrogen Atom*, G. F. Bassani *et al.* eds., Springer-Verlag, 1989).

La transition 1S-2S semble alors la meilleure du point de vue de la largeur naturelle. Elle présente néanmoins un inconvénient théorique : le Lamb-shift de l'état 1S, de l'ordre de 8 GHz, va intervenir dans le calcul de la constante de Rydberg à partir de la fréquence de transition mesurée. Ce Lamb-shift ne peut pas être déterminé expérimentalement de façon indépendante (c'est-à-dire autre que la mesure d'une fréquence de transition entre niveaux de n différents). On peut bien sûr déduire la constante de Rydberg en partant du calcul théorique du Lamb-shift, mais alors la mesure perd beaucoup de sa valeur en tant que test de la QED. Pour cette raison, on doit regarder les mesures de la fréquence de transition 1S-2S plutôt comme une détermination du Lamb-shift de l'état 1S (faisant intervenir dans le calcul la valeur de la constante de Rydberg obtenue sur une transition ne partant pas du niveau 1S) que comme une mesure de R .

Par contre, le Lamb-shift de l'état 2S (de l'ordre de 1 GHz) a été déterminé expérimentalement de façon indépendante à travers la mesure de l'intervalle $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ [1.20]. Le Lamb-shift varie comme n^{-3} et est donc nettement moins important pour les niveaux de Rydberg (voir chapitre II).

D'autre part, des problèmes techniques, liés surtout aux difficultés de production du rayonnement à 243 nm, empêchent l'obtention de raies expérimentales aussi étroites que ne le prévoit la théorie ; dans les deux mesures les plus récentes effectuées sur cette transition, les largeurs observées [1.18, 1.19] ont été de l'ordre de 5 à 10 MHz.

1.5.2 - Les choix fondamentaux de notre expérience.

Ces considérations nous ont amenés à choisir l'étude des transitions 2S-nD sur l'hydrogène et le deutérium comme méthode de détermination de la constante de Rydberg. La figure 1.2 montre la géométrie de notre montage.

L'hydrogène (ou deutérium) moléculaire est dissocié par une décharge radio-fréquence et forme un jet d'atomes dans l'état fondamental qui pénètre dans une première chambre à vide pompée à 10^{-4} mbar. L'excitation vers l'état métastable 2S est obtenue par bombardement électronique. Le jet de métastables résultant - dévié d'environ 20° par l'impact des électrons - entre dans une deuxième chambre à vide, pompée à 10^{-7} mbar par deux pompes cryogéniques, où se passe l'interaction avec le faisceau d'un laser à colorant de fréquence appropriée. L'ensemble du jet atomique est placé dans une cavité optique dont l'axe est colinéaire avec le jet, de façon à obtenir : 1) un long temps d'interaction, 2) des photons se propageant dans les deux sens (nécessaires à l'absorption sans effet Doppler) et 3) une puissance lumineuse importante. Ensuite, dans une troisième chambre, un champ électrique appliqué détruit les métastables en mélangeant les niveaux 2S et 2P, le dernier se désexcitant par émission de photons Lyman- α vers l'état fondamental. On détecte ces photons, obtenant ainsi un signal proportionnel au nombre de métastables. La transition est étudiée en balayant le laser à travers la résonance et en observant la diminution du nombre de métastables (qui va jusqu'à 20%) résultant de l'excitation optique vers le niveau de Rydberg (ce dernier se désexcite dans une proportion de 95% vers l'état 1S). Ce montage est décrit en détail dans le chapitre III.

La mesure de la fréquence de transition se fait en comparant interférométriquement - au moyen d'un Fabry-Perot étalon - la longueur d'onde du laser à colorant à celle d'un laser Hélium-Néon stabilisé sur des raies de la molécule I_2 , dont la fréquence absolue est connue avec une précision de $1,6 \times 10^{-10}$ [1.23]. Les détails de cette comparaison de longueurs d'onde sont donnés dans les chapitres IV et VI.

Un premier jet de métastables, quelque peu différent de l'actuel, mais utilisant les mêmes principes, a été mis au point entre 1983 et 1984. La première observation du signal à deux photons a eu lieu vers octobre 1984

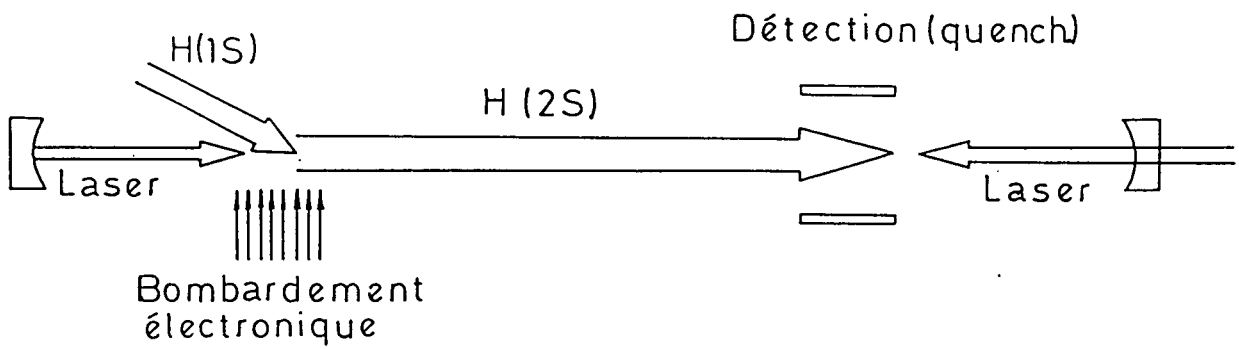


Figure 1.2 - Schéma de principe de notre dispositif de mesure de la constante de Rydberg.

[1.39]. La figure 1.3 montre les signaux observés (en modulant la fréquence du laser, d'où leur forme en dispersion) pour l'hydrogène et pour les transitions 2S-8S et 2S-8D. Les composantes fines sont explicitement résolues, ainsi que la structure hyperfine du niveau $2S_{1/2}$ (celle du niveau $n=8$ n'est pas résolue).

En 1986, nous avons fait une première mesure de la constante de Rydberg en utilisant ce jet atomique [1.40]. Cette mesure a été réalisée sur les transitions $2S_{1/2}(F=1) \rightarrow 8D_{5/2}$ de l'hydrogène et du deutérium et $2S_{1/2}(F=1) \rightarrow 10D_{5/2}$ de l'hydrogène. Ce choix des niveaux fins et hyperfins correspond à la transition la plus intense parmi celles montrées sur la figure 1.3. Le résultat de cette mesure sont montrés dans la table 1.III, la précision finale obtenue est de $5,2 \times 10^{-10}$.

TABLE 1.III

Mesures de la constante de Rydberg depuis 1986 (m^{-1}).

1986	Groupe ENS, deux photons, 2S-8, 10D (H,D), réf. de fréq. I_2 [1.40] : 10 973 731,569 (6) (0,52 ppb)
1986	Groupe Yale-NBS, jet et faisceau croisés, H,D- α , réf. de fréq. I_2 [1.41] : 10 973 731,569 (7) (0,61 ppb)
1987	Groupe Yale-NBS, jet et faisceau croisés, H,D- β , réf. de fréq. I_2 [1.42] : 10 973 731,573 (3) (0,27 ppb)
1987	Groupe Stanford, deux photons 1S-2S (H), CW, réf. de fréq. Te_2 [1.18] ^a : 10 973 731,571 (7) (0,64 ppb)
1987	Groupe Oxford, deux photons 1S-2S (H,D), CW, réf. de fréq. Te_2 [1.19] ^a : 10 973 731,573 5 (35) (0,32 ppb)
1989	Groupe ENS, deux photons 2S-8,10,12D (H,D), réf. de fréq. I_2 [1.4]: 10 973 731,570 9 (18) (0,17 ppb)

^a Ces mesures utilisent la valeur théorique du Lamb-shift de l'état 1S pour déterminer R.

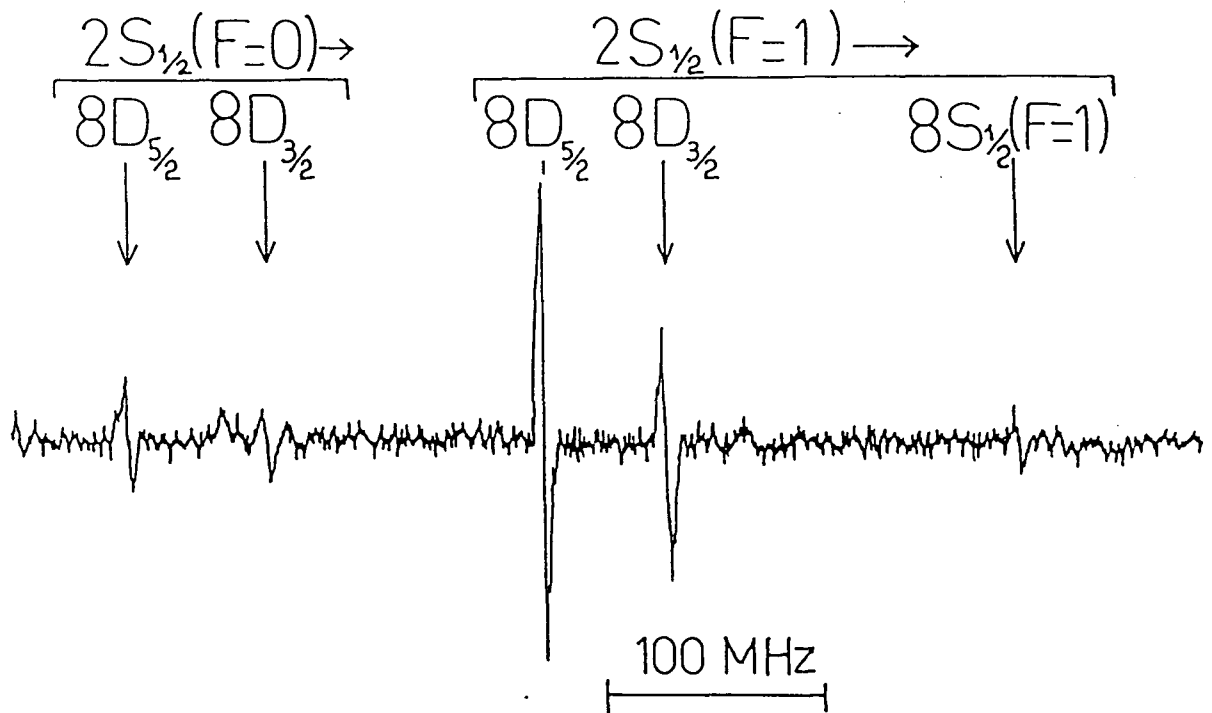


Figure 1.3 - Signal observé en modulant la fréquence laser (d'où la forme en dispersion). La structure hyperfine du niveau $2S_{1/2}$ et la structure fine du niveau $8D$ sont résolues.

Entre 1986 et 1988, des améliorations du dispositif expérimental nous ont permis de réaliser en 1988 une nouvelle mesure de la constante de Rydberg [1.4], qui fait l'objet de ce mémoire. Par rapport au montage antérieur, les principales améliorations sont les suivantes :

- Le jet atomique a été refait. On a cherché à diminuer les champs électriques parasites, à avoir un vide meilleur et plus propre, en remplaçant une pompe à diffusion par deux pompes cryogéniques, et à avoir un temps d'interaction plus long (la longueur d'interaction est passée de 20 à 96 cm). Les détails de ce nouveau jet sont donnés dans le chapitre III.

- Le système de pilotage du laser à colorant a été changé, permettant un balayage en fréquence plus reproductible (paragraphe 3.2.4). Plusieurs techniques liées aux comparaisons de longueurs d'onde ont été améliorées (voir chapitre IV).

- Un système informatisé d'acquisition et d'analyse des données a été mis en place (voir chapitre VI).

- Des mesures soignées de la distribution de vitesses des atomes métastables ont été faites (voir paragraphe 3.1.8).

- Une étude approfondie des formes de raies à la fois théorique et expérimentale a été faite, de façon à compenser au mieux les déplacements et les déformations observés (voir chapitres V et VI).

Comme résultat de ces améliorations, on a progressé d'un facteur 3 sur la précision finale (de 5,2 à $1,7 \times 10^{-10}$), et d'un facteur 12 si l'on exclue l'imprécision sur la fréquence de la référence. Le résultat final est donné dans la table 1.III. Notre mesure plus récente diffère de la précédente de 0,3 écarts types.

1.6 - Les autres mesures de la constante de Rydberg depuis 1986.

Trois autres groupes ont publié des mesures du Rydberg depuis notre mesure de 1986. Une remarquable convergence a été observée (voir figure 1.4).

En 1986 et 1987, le groupe de l'Université de Yale et du NBS, coordonné par W. Lichten, responsable déjà d'une mesure datant de 1981 faite avec la même technique [1.36] (table 1.II), a publié deux mesures utilisant la technique de jet et faisceau croisés sur les raies Balmer- α [1.41] et - β [1.42] de l'hydrogène et du deutérium, utilisant comme référence le laser

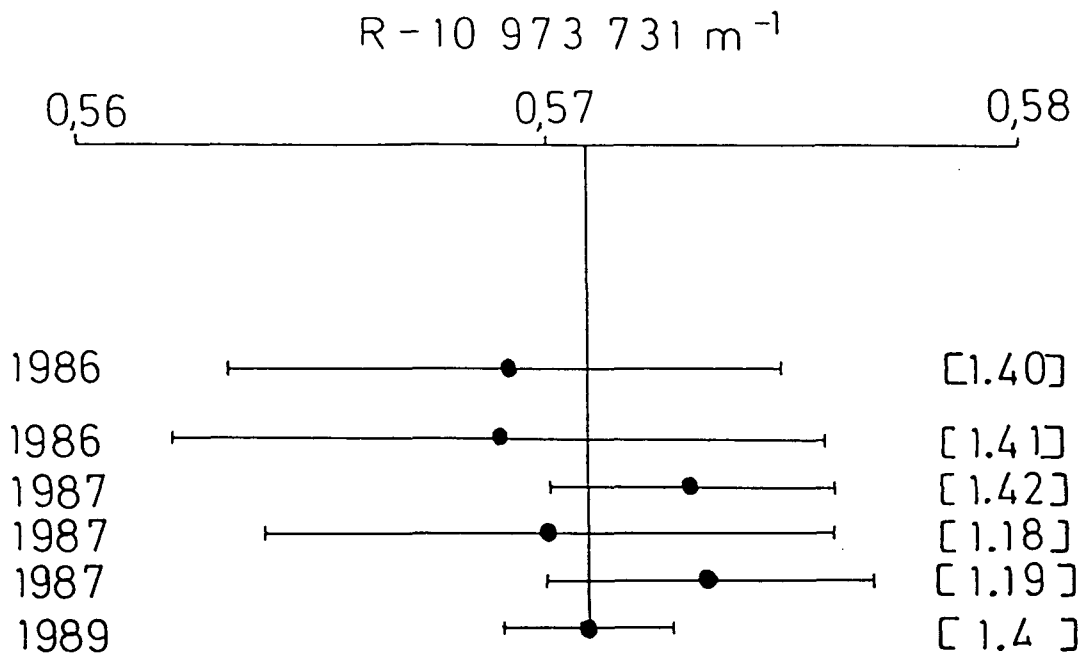


Figure 1.4 - Mesures récentes de la constante de Rydberg par spectroscopie laser sans effet Doppler (1986-1989). Les valeurs numériques sont données dans la table 1.III.

HeNe/I₂. L'utilisation de la raie Balmer- β , dont la largeur naturelle est 2,5 fois plus petite que Balmer- α (12 et 30 MHz, respectivement), leur a permis de gagner un facteur 2,3 sur la précision (6,1 et $2,7 \times 10^{-10}$ respectivement). Ces nouvelles mesures tombent à 2,3 (H- α) et 2,6 (H- β) écarts types de leur mesure de 1981 et à 0,3 (H- α) et 0,7 (H- β) de notre dernière mesure.

Le groupe de l'Université de Stanford, animé par T. W. Hänsch (aujourd'hui à l'Institut Max-Planck, à Munich), travaillant sur la transition 1S-2S à deux photons sur l'hydrogène avec un laser continu a publié en 1987 une nouvelle mesure dont la précision est de $6,4 \times 10^{-10}$ [1.18]. La référence de fréquence est une raie de la molécule de tellure, dont la fréquence est déterminée à $4,0 \times 10^{-10}$ près [1.43]. Cette nouvelle mesure tombe à 3,6 écarts types de leur mesure en impulsion de 1986 [1.37] et coïncide avec notre récente mesure.

Le groupe de l'Université d'Oxford, dirigé par D. N. Stacey, travaillant aussi sur la transition 1S-2S dans l'hydrogène et le deutérium a produit aussi en 1987 une mesure précise à 3×10^{-10} [1.19]. La référence de fréquence est la même raie de Te₂, mais on lui a attribué une précision meilleure que celle donnée dans la référence [1.43], $2,6 \times 10^{-10}$ au lieu de 4×10^{-10} . Elle est à 0,7 écarts types de notre mesure actuelle.

Comme on l'a déjà mentionné ci-dessus, ces mesures sur la transition 1S-2S utilisent la valeur théorique du Lamb-shift de l'état 1S pour obtenir une détermination indépendante de la constante de Rydberg. En utilisant une valeur de R obtenue indépendamment, il est possible d'en déduire une valeur pour le Lamb-shift de l'état fondamental. Ces valeurs sont 8173,3 (1,7) MHz pour la mesure du groupe de Stanford et 8172,93 (84) MHz pour la mesure du groupe d'Oxford, à comparer à la valeur théorique de 8172,94 (9) MHz.

Remarque : Les résultats ci-dessus utilisent la valeur du Rydberg de la référence [1.42], mais, au niveau actuel de précision, le résultat obtenu n'est pas sensible aux différences entre cette valeur et la nôtre.

En regardant la figure 1.4, on constate un remarquable accord entre les mesures de R faites ces dernières années. Toutes ces six mesures sont compatibles à moins d'un écart type.

Quelles sont les perspectives pour le futur? En ce qui concerne notre expérience, la principale limitation, pour le moment, provient du étalon de fréquence, le laser HeNe/I₂. Une première tâche consisterait alors à améliorer la détermination de sa fréquence absolue, car ce laser lui-même est stable à 10⁻¹¹ près. Une autre possibilité est de s'affranchir complètement de ce laser et de la méthode interférométrique en construisant une chaîne de fréquences capable de nous relier aux lasers à CO₂ fonctionnant à une longueur d'onde d'environ 10 μm, qui sont eux-mêmes déjà reliés par des chaînes de fréquence à l'horloge à césium, exacte à 10⁻¹³.

Un autre objectif est d'affiner nos raies expérimentales (dont la largeur est encore plus du double de la largeur naturelle) et d'améliorer notre rapport signal/bruit ce qui nous permettrait de monter vers des niveaux de Rydberg plus élevés. Une discussion plus détaillée des améliorations possibles de notre méthode sera donnée dans le chapitre VI.

Pour les mesures sur la transition 1S-2S, les limitations actuelles proviennent des sources de rayonnement à 243 nm, qui sont relativement peu puissantes et larges en fréquence, et de l'imprécision sur le standard à Te₂, en plus de la limitation théorique due au Lamb-shift de l'état 1S. Ces deux derniers problèmes peuvent être résolus d'un seul coup. En effet, le rayonnement à 243 nm peut être obtenu par doublage dans un cristal de β-baryum-borate (BBO) à partir de 486 nm. Cela permet alors en principe une comparaison *directe* avec la fréquence de la raie Balmer-β, qui correspond à la même longueur d'onde. Ce système a été proposé par Hänsch, Lee, Wallenstein et Wieman, en 1975 [1.44]. Des efforts dans ce sens sont fait actuellement à Munich et à Oxford.

REFERENCES DU CHAPITRE I

- 1.1 G.W. Series ed., *The Hydrogen Atom: Advances*, World Scientific Pub. , London, 1988.
- 1.2 B.W. Petley, *The Fundamental Physical Constants and the Frontier of Measurements*, Adam Hilger, Bristol, 1985.
- 1.3 J.R. Rydberg, K. Svenska Vetensk Akad. Handl. 23, 11 (1889).
- 1.4 F. Biraben, J.C. Garreau, L. Julien and M. Allegrini, Phys. Rev. Lett. 62, 621 (1989).
- 1.5 N. Bohr, Phil. Mag. 26, 1 (1913).
- 1.6 W.E. Curtis, Proc. Royal Soc. A90, 605 (1914).
- 1.7 F. Paschen, Ann. Phys. Lpz. 27, 565 (1908).
- 1.8 F.S. Brackett, Nature 109, 209 (1922).
- 1.9 A.H. Pfund, J. Opt. Soc. Am. 16, 193 (1924).
- 1.10 N. Bohr, Phil. Mag. 29, 332 (1915).
- 1.11 A. Sommerfeld, Ann. Phys. Lpz. 51, 1 (1916).
- 1.12 W. Wilson, Phil. Mag. 29, 795 (1915); *ib.* Phil. Mag. 31, 156 (1916).
- 1.13 S. Goudsmit and G.E. Uhlenbeck, Nature 117, 264 (1926).
- 1.14 P.A.M. Dirac, Proc. Royal Soc. A117, 610 (1928).
- 1.15 W.E. Lamb and R.C. Retherford, Phys. Rev. 72, 241 (1947); *ib.*, 79, 549 (1950); *ib.*, 81, 222 (1951); *ib.*, 86, 1014 (1952).

- 1.16 R.C. Williams and R.C. Gibbs, *Phys. Rev.* 45, 475 (1934); *ib.*, 49, 416 (1936).
- 1.17 R.S. van Dyck, Jr., P.B. Schwinberg and H.G. Dehmelt, *Phys. Rev. Lett.* 59, 26 (1987).
- 1.18 R.G. Beausoleil, D.H. McIntyre, C.J. Foot, E.A. Hildum, B. Couillaud and T.W. Hänsch, *Phys. Rev. A* 35, 4878 (1987).
- 1.19 M.G. Boshier, P.E.G. Baird, C.J. Foot, E.A. Hinds, M.D. Plimmer, D.N. Stacey, J.B. Swan, D.A. Tate, D. M. Warrington and G.K. Woodgate, *Nature* 330, 463 (1987).
- 1.20 V.G. Pal'chikov, Yu. L. Sokolov and V.P. Yakovlev, *Metrologia* 21, 99 (1985).
- 1.21 E.R. Cohen and D.N. Taylor, *The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants*, *Codata Bulletin*, November 1986; *ib.*, *Rev. Mod. Phys.* 59, 1121 (1987).
- 1.22 L. Julien, F. Biraben et B. Cagnac, *Bull. du BNM* 66, 31 (1986).
- 1.23 D.A. Jennings, C.R. Pollock, F.R. Petersen, R.E. Drullinger, K.M. Evenson, J.S. Wells, J.L. Hall and H.P. Layer, *Opt. Lett.* 8, 136 (1983).
- 1.24 D.F. Barlett and S. Lögl, *Phys. Rev. Lett.* 61, 2285 (1988).
- 1.25 W.V. Houston, *Phys. Rev.* 30, 608 (1927).
- 1.26 B.N. Taylor, W.H. Parker and D.N. Langenberg, *Rev. Mod. Phys.* 41, 375 (1969).
- 1.27 E.R. Cohen and B.N. Taylor, *J. Chem. Ref. Data* 2, 663 (1973).
- 1.28 E.G. Kessler, Jr., *Phys. Rev. A* 2, 408 (1973).
- 1.29 B.P. Kibble, W.R.C. Rowley, R.E. Shawyer and G.W. Series, *J. Phys.* B6, 1079 (1973).

CHAPITRE II

RESUME DE LA THEORIE DE L'ATOME D'HYDROGENE

Dans ce chapitre on discutera les principaux résultats théoriques concernant le calcul de la position des niveaux de l'atome d'hydrogène, utiles au dépouillement des mesures expérimentales. Cette théorie se divise naturellement en quatre parties, que l'on appellera l'*atome de Schrödinger* (une charge électrique interagissant avec un noyau de masse infinie), l'*atome de Dirac* (une charge électrique relativiste et avec spin interagissant avec un potentiel coulombien), les *corrections radiatives* (effet de l'interaction avec le champ électromagnétique quantifié) et les *corrections hyperfines* (dus à la structure et au spin du noyau). Dans chaque partie, on discutera aussi l'effet de la masse finie du proton - l'effet de masse réduite - dont on ne peut tenir compte exactement que pour l'atome de Schrödinger.

Finalement, on présentera un résumé de l'état actuel des calculs de QED en Physique atomique comparés aux résultats expérimentaux disponibles.

2.1 - L'atome de Schrödinger

On examinera d'abord le problème de l'interaction coulombienne de deux particules de charges électriques égales en module mais de signes opposés, sans spin et en mouvement non relativiste. Dans un premier temps, on négligera le mouvement de la particule la plus lourde. L'équation de Schrödinger correspondante s'écrit alors :

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m} \Delta - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r) = E \psi(r). \quad (2.1)$$

Le potentiel coulombien présente une symétrie sphérique, donc on peut chercher des solutions qui soient des états propres du moment cinétique. Pour cela, on réécrit l'équation (2.1) comme

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2mr} \frac{\partial^2}{\partial r^2} r + \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right] \psi(r) = E \psi(r) \quad (2.2)$$

et on essaye des solutions de la forme

$$\psi_{n\ell m}(r) = R_{n\ell}(r) Y_{\ell m}(\theta, \varphi) \quad (2.3)$$

où $Y_{\ell m}(\theta, \varphi)$ est une harmonique sphérique et $R_{n\ell}(r)$ est la fonction d'onde radiale, à déterminer. Les nombres entiers n , ℓ et m caractérisent entièrement la solution (nombres quantiques *principal*, *orbital* et *magnétique*, respectivement). On obtient alors une *équation radiale* pour $R_{n\ell}(r)$. Il est bien connu que les valeurs propres de l'énergie obtenues sont indépendantes de ℓ et de m à cause des symétries du potentiel coulombien. L'indépendance vis-à-vis de m découle de la symétrie sphérique, celle vis-à-vis de ℓ , d'une symétrie moins évidente [2.1, p. 156], lié à l'invariance du vecteur de Runge-Lenz, c'est-à-dire, au fait que les orbites classiques d'une particule sous l'action d'un potentiel en $1/r$ sont fermées. Les fonctions d'onde radiales sont alors de la forme :

$$R_{n\ell}(r) = a_0^{-3/2} \frac{2}{n^2 (2\ell+1)!} \left[\frac{(n+\ell)!}{(n-\ell+1)!} \right]^{1/2} \left[\frac{2r}{na_0} \right]^\ell e^{-r/na_0} \quad (2.4)$$

$$\times F(-n+\ell+1, 2\ell+2; \frac{2r}{na_0})$$

où a_0 est le *rayon de Bohr*, $a_0 = \hbar^2/me^2 = 5,3 \times 10^{-11}$ m, et F est la *fonction hypergéométrique confluente* [2.2] :

$$F(a, b; x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a(a+1)\dots(a+k-1)}{b(b+1)\dots(b+k-1)} \frac{x^k}{k!} \quad (2.5)$$

Remarque : Dans ce chapitre on utilisera souvent la charge "rationalisée" de l'électron, e , donnée par $e^2 = q^2/4\pi\epsilon_0$. Notons que q et e sont positifs, la charge de l'électron est donc $-e$ ou $-q$.

Pour les états discrets, le premier argument de la fonction hypergéométrique confluente est un entier négatif. Cette fonction est alors un *polynôme de Laguerre* de degré $n-\ell-1$ [2.2].

Les valeurs propres de l'énergie sont données par la formule de Bohr :

$$E_n = - (1/2) mc^2 \alpha^2 / n^2 \quad (2.6)$$

où $\alpha = e^2 / \hbar c \approx 1/137$ est la *constante de structure fine*.

Considérons maintenant le mouvement du noyau. Le problème de deux corps en Mécanique Quantique non-relativiste est séparable [2.3, ch.VII], exactement comme en Mécanique Newtonienne. On peut montrer que les solutions trouvées ci-dessus continuent d'être valables si l'on tient compte du mouvement du noyau, avec m substitué dans toutes les formules par la masse réduite $\mu = mM / (M+m)$, où m et M sont les masses des deux particules qui interagissent, et r est alors la coordonnée relative des deux particules. Dans ce cas, à la rigueur, on doit additionner à l'énergie donnée par l'équation (2.6) un terme d'énergie cinétique dû au mouvement du centre de masse du système. Comme ce mouvement ne nous intéresse pas ici, on négligera ce terme. Il en ressort que l'effet de masse réduite peut être incorporé exactement dans les solutions de l'équation de Schrödinger, les énergies étant alors données par

$$E_n = - (1/2) \mu c^2 \alpha^2 / n^2. \quad (2.7)$$

La longueur d'onde de la transition entre deux niveaux de nombre quantique principal n' et n est alors donnée par

$$\frac{1}{\lambda} = R_M \left[\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right] \quad (2.8)$$

où R_M , la constante de Rydberg pour un noyau de masse M , vaut

$$R_M = \frac{1}{2} \left(\frac{m M}{m + M} \right) \frac{c \alpha^2}{h} = \frac{M}{m + M} R \quad (2.9)$$

où R est la constante de Rydberg pour un noyau de masse infinie.

On voit donc que la constante R_M peut être déduite directement d'une mesure de longueur d'onde sans faire intervenir d'autres constantes (à part les nombres entiers n et n'). Par contre, la détermination de R fera intervenir le rapport de masses M/m . Dans le cas de l'hydrogène, ce rapport

vaut 1 836,152 701 (37) [2.4]. L'incertitude sur cette valeur, 2×10^{-8} , se manifeste sur la détermination de la constante de Rydberg par une incertitude de l'ordre de 1×10^{-11} .

2.2 - L'atome de Dirac.

La théorie de l'électron de Dirac incorpore simultanément le spin et le mouvement relativiste de l'électron. Par contre, on ne peut tenir compte exactement du mouvement du noyau. Le problème de deux corps dans la théorie de Dirac n'est pas séparable, de même qu'en Mécanique Classique relativiste.

2.2.1 - Solution exacte pour un noyau de masse infinie.

L'électron de Dirac est décrit [2.5] par un *spinor* à quatre dimensions dont les composantes sont des fonctions d'un espace de Hilbert. L'équation de Dirac s'écrit alors :

$$\gamma^\mu (i\hbar \partial_\mu + q A_\mu) \psi = mc \psi, \quad (2.10)$$

où γ^μ sont des matrices 4x4 données par :

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \gamma^{x,y,z} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{x,y,z} \\ -\sigma_{x,y,z} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

$\sigma_{x,y,z}$ étant les matrices de Pauli. ψ est un spinor à quatre dimensions, $\psi = (\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3)$. On définit aussi :

$$\partial_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}, -\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}, -\frac{\partial}{\partial z} \right) \quad \text{et} \quad A_\mu = (c\phi, -A_x, -A_y, -A_z) \quad (2.12)$$

ϕ est le potentiel Coulombien et A le potentiel vecteur.

Remarque : On utilisera ici la *convention de somme*, les indices grecs répétés croisés (un en haut, un en bas) doivent être sommés de 0 à 3. Un quadrivecteur avec indice en bas a le signe de sa partie spatiale renversé.

Il est utile d'écrire l'équation de Dirac (2.10) dans la représentation de l'impulsion. L'opérateur d'impulsion s'écrit simplement

$$P_{\mu} = i\hbar \partial_{\mu} \quad (2.13)$$

et l'équation de Dirac devient

$$[*P + q^*A] \psi = mc \psi, \quad (2.14)$$

où on a introduit la notation [2.5] $*P = \gamma^{\mu} P_{\mu}$ (et de même pour $*A$).

Si l'on considère que le potentiel A_{μ} est le potentiel coulombien créé par une particule chargée, de masse infinie et sans structure, l'équation de Dirac a une solution exacte [2.6, 2.7, 2.8]. Nous n'entrerons pas ici dans les détails de ce calcul, la discussion se limitera à la formule que l'on obtient pour l'énergie des niveaux discrets. Cette formule incorpore les effets de spin et de mouvement relativiste de l'électron, les valeurs sont proches de celles données par l'équation de Schrödinger ; la différence étant d'ordre $\alpha^2 \approx 5 \times 10^{-4}$:

$$E_{nJ} = \frac{mc^2}{[1 + \alpha^2 / (n - \epsilon_J)^2]^{1/2}} - mc^2 \quad (2.15)$$

où J est le moment cinétique total de l'électron et $\epsilon_J = J + 1/2 - [(J+1/2)^2 - \alpha^2]^{1/2}$. On observe que la dégénérescence des niveaux de même nombre quantique principal, observée pour les solutions de l'équation de Schrödinger (2.6), a été levée, mais que les solutions avec même n et J sont encore dégénérées.

L'équation (2.15) peut être développée en puissances de α^2 , et l'on obtient au premier ordre :

$$E_{nJ} = - \frac{1}{2} \frac{mc^2 \alpha^2}{n^2} \left[1 + \frac{\alpha^2}{n^2} \left(\frac{n}{J+1/2} - \frac{3}{4} \right) + \dots \right] \quad (2.16)$$

Le deuxième terme à droite est la correction de structure fine d'ordre α^2 . On observe que pour n grand (tel que $n/(J+1/2) \gg 3/4$) cette correction est proportionnelle à $1/n^3$.

Jusqu'à l'ordre α^4 , on peut écrire

$$E_{nJ} = - \frac{mc^2 \alpha^2}{2n^2} \left[1 + \frac{\beta_{20} \alpha^2}{n} + \frac{\beta_{40} \alpha^4}{n} + \dots \right] \quad (2.17)$$

avec

$$\beta_{20} = \frac{1}{J+1/2} - \frac{3}{4n} \quad (2.18)$$

et

$$\beta_{40} = \frac{1}{4(J+1/2)^3} + \frac{3}{4n(J+1/2)^2} - \frac{3}{4n^2(J+1/2)} + \frac{5}{8n^3}. \quad (2.19)$$

Pour n suffisamment grand, le premier terme de β_{40} prédomine et l'on obtient à nouveau une correction qui varie avec $1/n^3$.

2.2.2 - Les corrections de masse réduite.

En général, on tient compte des effets de masse réduite sur les formules (2.15-2.17) simplement en substituant m par μ (la masse réduite) [2.9]. Il est important de noter qu'on n'a pas de justification théorique rigoureuse pour cela, puisque le problème de deux corps n'est pas exactement séparable dans la théorie de Dirac. Des indications de ce que cette procédure est valable sont données d'abord par l'accord des résultats expérimentaux avec la théorie, mais aussi - du point de vue théorique - à partir de l'équation de Breit [2.8, 2.10]. On n'entrera pas ici dans le détail de ces calculs.

On donnera, néanmoins, la principale correction de masse réduite qui peut être déduite par des méthodes approximatives. Cette correction (dite non-relativiste) [2.11 ; 2.9, éq. 2.7], qui est proportionnelle à n^{-4} et qui ne contribue pas au Lamb-shift (c'est-à-dire à l'intervalle entre niveaux de même n et J mais de ℓ différent), est valable dans la limite non-relativiste où l'énergie de liaison atomique E est beaucoup plus petite que l'énergie totale au repos des particules en question, soit $E \ll (mc^2 + Mc^2)$, et vaut :

$$- \frac{\mu}{M+m} \frac{\alpha^2 Z^4}{4 n^4} hcR_M$$

où $\mu = mM/(m+M)$ est la masse réduite. Conformément à l'usage, cette correction sera calculée parmi les corrections radiatives (encore qu'elle n'en soit pas une à proprement parler) dans la partie suivante.

2.2.3 - Résultats.

La table 2.I montre les énergies de quelques niveaux choisis, calculées pour l'atome de Schrödinger et pour l'atome de Dirac.

TABLE 2.I

Position de quelques niveaux selon Schrödinger et selon Dirac.
Structure fine de l'hydrogène.

Niv.	Schrodinger (MHz)	J	Dirac (MHz)	Ecart (MHz)
1	-3 288 051 232,460	1/2	-3 288 095 006,898	-43 774,438
2	-822 012 808,115	1/2	-822 026 487,647	-13 679,532
8	-51 375 800,507	1/2	-51 376 110,431	-309,924
		3/2	-51 375 939,437	-138,930
		5/2	-51 375 882,440	-81,933
10	-32 880 512,325	1/2	-32 880 674,289	-161,964
		3/2	-32 880 586,740	-74,415
		5/2	-32 880 557,557	-45,232
12	-22 833 689,114	1/2	-22 833 784,110	-94,996
		3/2	-22 833 733,445	-44,331
		5/2	-22 833 716,557	-27,443

Valeurs des constantes utilisées : $\alpha^{-1} = 137,035\ 989\ 5$ et
 $M/m = 1\ 836,152\ 701$, $R = 10\ 973\ 731,570\ 9\ \text{m}^{-1}$.

En tenant compte seulement du principal effet de masse réduite (et pas de la correction non-relativiste ci-dessus) et de la formule de Dirac (2.15), la longueur d'onde de transition entre deux niveaux nJ , $n'J'$ vaut ($n > n'$) :

$$\frac{1}{\lambda} = \frac{M}{m+M} R \left[\frac{1}{[1+\alpha^2/(n-\epsilon_J)^2]^{1/2}} - \frac{1}{[1+\alpha^2/(n'-\epsilon_{J'})^2]^{1/2}} \right] \quad (2.20)$$

On voit que dans la théorie de Dirac, en plus du rapport des masses, pour déduire la constante de Rydberg de la mesure d'une longueur d'onde de transition, on fait intervenir aussi la constante de structure fine. Les corrections de structure fines sont typiquement de l'ordre 10^{-4} à 10^{-5} (ordre $\alpha^2 \approx 5 \times 10^{-5}$). La valeur actuelle de cette constante est $\alpha^{-1} = 137,035\,989\,5\,(61)$ avec une incertitude de $4,5 \times 10^{-8}$ [2.12]. Cette incertitude se manifeste dans la détermination de la constante de Rydberg par une incertitude de 4×10^{-12} .

2.3 - Les corrections radiatives. Le Lamb-shift.

Dans cette partie on étudiera les corrections radiatives. On trouvera dans l'Appendice I une discussion théorique dont le but est de montrer l'origine physique de ces corrections. On donnera ici - avec un éventuel commentaire sur leur origine - les termes qui contribuent à notre niveau de précision (10^{-11} sur la fréquence de transition, c'est-à-dire essentiellement sur le niveau 2S).

2.3.1 - Les processus contribuant aux corrections radiatives.

Dans ce paragraphe on discutera les principaux processus qui contribuent aux corrections radiatives de l'énergie des atomes hydrogénoïdes.

Ces processus peuvent être divisés en cinq groupes : contributions d'*auto-énergie*, de *moment magnétique anormal* de l'électron, de *polarisation du vide*, de *recul du noyau* (ou de *masse réduite*) et de *structure du noyau*. Les contributions de recul du noyau sont usuellement subdivisées en contributions *non-relativiste*, *relativiste* (ou de *Bethe-Salpeter*) et de *recul radiatif*. Quelques contributions dues à la structure du noyau sont groupées sous le nom de *structure hyperfine* (elles dépendent du moment cinétique total électron+noyau) et seront traitées dans la partie suivante.

a) Termes d'*auto-énergie* (AE). On groupe sous ce nom les termes ayant pour origine l'émission et la réabsorption de photons virtuels par l'électron

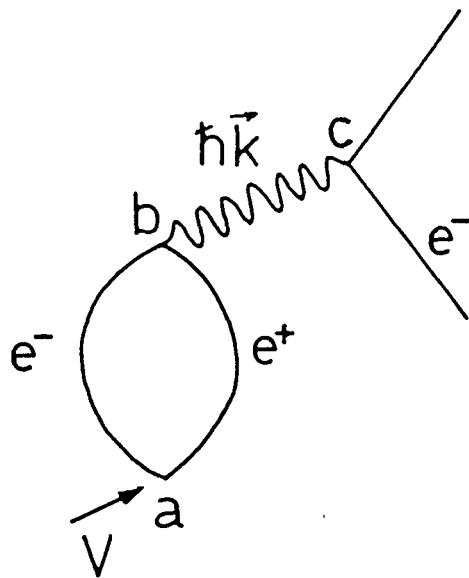


Figure 2.1 - Diagramme de Feynman correspondant à la contribution de la polarisation du vide à l'ordre le plus bas.

produisant (après renormalisation) une correction à la masse de l'électron (voir Appendice I). Les termes d'ordre le plus bas correspondent aux diagrammes de Feynman de la figure A1.2 (Appendice I).

b) Termes de *moment magnétique anormal* (MA) de l'électron. Il est bien connu que les corrections radiatives changent la valeur du facteur g de l'électron d'environ 1×10^{-3} , c'est-à-dire qu'en fait $g \approx 2,0023$. Cela peut être compris si l'on imagine l'effet des corrections radiatives sur un électron placé dans un champ magnétique statique : les corrections à l'énergie de l'électron peuvent être interprétées comme une modification du facteur g [2.13, p. 76]. Ce terme est aussi présent pour un électron atomique, et contribue à déplacer les niveaux d'énergie.

c) *Polarisation du vide* (PV). En plus des diagrammes montrés sur la figure A1.2, l'existence des positrons, prévue par l'équation de Dirac, permet de concevoir des processus d'une nature différente, correspondant, à l'ordre le plus bas, au diagramme de Feynman de la figure 2.1. Au point a de l'espace-temps, le potentiel atomique produit une paire électron-positron (virtuelle) qui se recombine au point b , produisant un photon virtuel qui est absorbé par l'électron au point c . Ce terme donne une correction qui peut être interprétée comme une correction à la charge de l'électron (ou au potentiel coulombien), connue comme *renormalisation de la charge*.

d) Termes de *recul du noyau*. Ces corrections tiennent compte du mouvement du noyau. Le terme dit non-relativiste a déjà été discuté dans le paragraphe 2.3.2. Les corrections dites relativistes découlent du traitement complètement covariant du problème de deux corps (équation de Bethe-Salpeter [2.14]). Ces corrections sont d'ordre relatif α^3 ou plus.

e) Termes de *recul nucléaire radiatif* (RNR). Une formulation complètement covariante du problème doit être faite dans la jauge de Lorentz - ou une autre équivalente - (qui est covariante sous la transformation de Lorentz) et pas dans celle de Coulomb (qui ne l'est pas). Dans cette formulation, il n'y a pas de potentiel coulombien, toutes les interactions entre les charges sont retardées et peuvent être interprétées comme un échange de photons virtuels (transverses et longitudinaux) [2.15, ch. V]. L'interaction la plus simple est alors celle du diagramme (a) de la figure 2.2. Mais on peut aussi concevoir d'autres possibilités, comme celles des

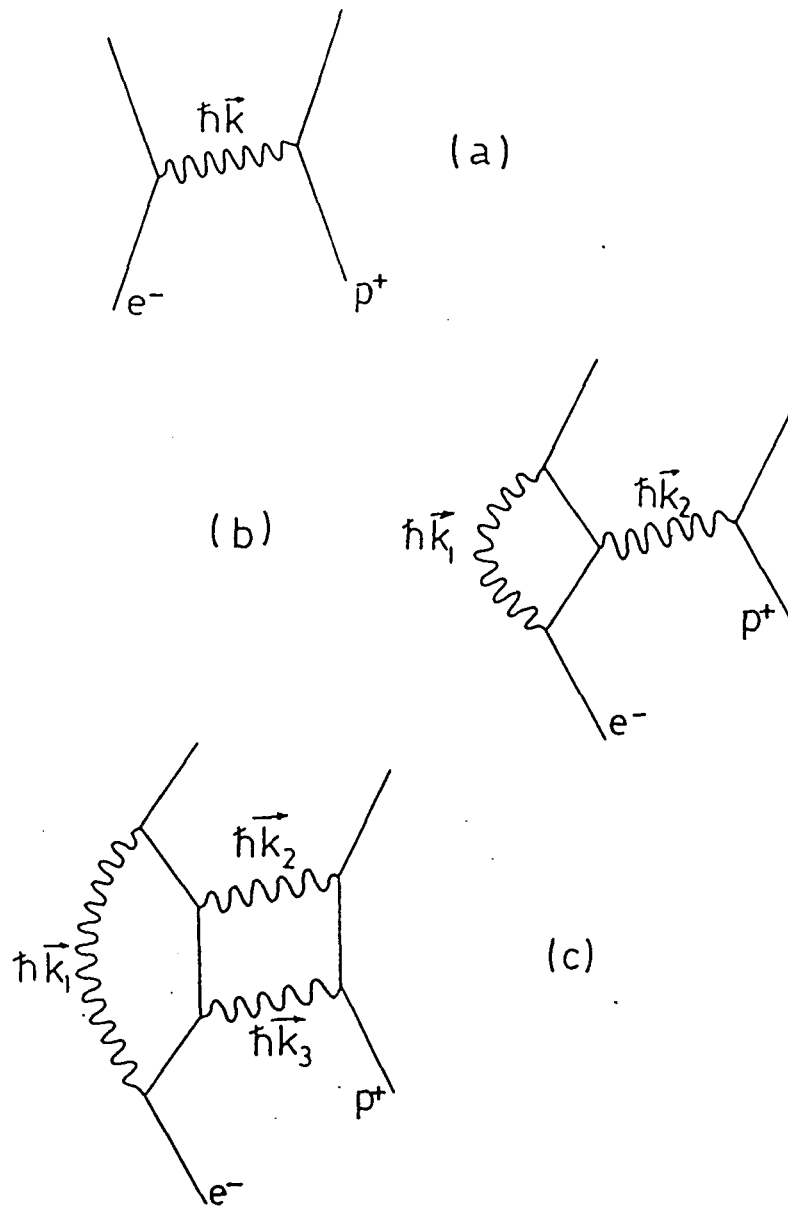


Figure 2.2 - Diagrammes de Feynman correspondant à la liaison électromagnétique électron-proton. (a) Contribution d'ordre 2. (b) Correction radiative d'ordre 2 au terme d'ordre 2. (c) Correction radiative d'ordre 2 au terme d'ordre 4.

diagrammes (b) et (c). Ces contributions sont dites de recul radiatif.

Certaines contributions, encore que trop petites à notre niveau de précision, peuvent néanmoins être mentionnés. Les termes de polarisation du vide ne sont pas limités à la formation de (une ou plusieurs, aux ordres supérieurs) paires électron-positron, mais aussi peuvent donner des termes de polarisation muonique (production de paires muon-antimuon), hadronique (paires proton-antiproton). Evidemment, plus élevée est la masse de la paire, moins probable est l'évènement, donc plus petite la contribution.

2.3.2 - Les corrections radiatives.

Les corrections considérées ici peuvent être groupées selon des puissances successives de α , selon la formule :

$$\begin{aligned} \delta E_{\text{rad}} &= \frac{8}{3\pi} R \frac{Z^3 \alpha^3}{n^3} \left[\frac{\mu}{m} \right]^3 \\ &\times \left\{ A_{30} + A_{31} \ell n(Z\alpha)^{-2} \right. \\ &+ A_{40}(Z\alpha) \\ &+ \left[A_{50} + A_{51} \ell n(Z\alpha)^{-2} + A_{52} [\ell n(Z\alpha)^{-2}]^2 \right] (Z\alpha)^2 \\ &+ A_{60} (Z\alpha)^3 \left. \right\} \\ &+ (Z^3 \alpha^2 / n^3) B_{20}. \end{aligned} \tag{2.21}$$

On remarque que l'ordre relatif (par rapport à l'énergie de Schrödinger) en puissance d'alpha d'une contribution est donné par le premier chiffre de l'indice. Chaque coefficient A peut être constitué de contributions d'origine différente. On utilisera des indices AE pour auto-énergie, MA pour moment magnétique anormal, PV pour polarisation du vide, BS pour les corrections de recul relativiste, RNR pour recul nucléaire radiatif. Le terme marqué AD tient compte de quelques corrections additionnelles d'ordre α^6 . Les formules données ici sont cohérentes avec la référence [2.16] qui diffèrent en certains points de celles de la référence [2.9].

Ordre α^3 :

$$A_{30} = A_{30}^{AE} + A_{30}^{MA} + A_{30}^{PV} + A_{30}^{BS}$$

$$A_{30}^{AE} = \left[\ell n \left(\frac{m}{\mu} \right) + \frac{11}{24} \right] \delta_{\ell 0} + L_n \ell \quad (2.22a)$$

$$A_{30}^{MA} = \frac{3}{8} \left[\delta_{\ell 0} + \left(\frac{m}{\mu} \right) \frac{C_{\ell J}}{2\ell+1} (1-\delta_{\ell 0}) \right] \quad (2.22b)$$

$$A_{30}^{PV} = -\frac{1}{5} \delta_{\ell 0} \quad (2.22c)$$

$$A_{30}^{BS} = Z \left[\begin{matrix} m \\ - \\ \mu \end{matrix} \right]_3 \frac{m}{M}$$

$$\times \left\{ \left[\frac{7}{2} S_n + 1 - \frac{1}{2n} - \ell n \left(\frac{n}{2} \right) - \frac{1}{12} + F(M/m) \right] \delta_{\ell 0} \right.$$

$$\left. - \frac{7}{4} \frac{b_\ell}{(\ell+1)(2\ell+1)} + 2 L_n \ell \right\}$$

où $L_n \ell$ est le logarithme de Bethe dont les valeurs qui nous intéressent sont :

$$L_{1s} = -2,984\ 128\ 555\ 9$$

$$L_{2s} = -2,811\ 768\ 893\ 2$$

$$L_{2p} = 0,030\ 016\ 708$$

$$L_{8s} = -2,728\ 178\ 423\ 4$$

$$L_{8D} = 0,010\ 046\ 960\ 0.$$

Remarque : Une table plus complète de valeurs des logs de Bethe peut être trouvée dans la réf. [2.9], appendice B.

Et :

$$S_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{i}$$

$$C_{\ell J} = \begin{cases} 1/(\ell+1) & (J=\ell+1/2) \\ & (J=\ell-1/2) \\ -1/\ell & \end{cases}$$

$$b_\ell = \begin{cases} 0 & (\ell=0) \\ 1/\ell & (\ell \neq 0) \end{cases}$$

$$F(M/m) = -\frac{3}{2} \frac{1}{(M/m)^2 - 1} \left[\frac{M}{m} \ln \frac{m}{\mu} - \ln \frac{M}{\mu} \right].$$

Observations : 1) Le facteur $(m/\mu)^3$ en A_{30}^{BS} est absent dans la référence [2.9] mais présent dans la réf. [2.16] et donc dans nos calculs. 2) On posera dans les calculs $F(M/m)=0$ (cohérent avec [2.16]).

$$A_{31} = A_{31}^{AE} + A_{31}^{BS}$$

$$A_{31}^{AE} = \delta_{\ell_0} \quad (2.23a)$$

$$A_{31}^{AE} = \frac{Z}{4} (m/\mu)^3 \frac{m}{M} \delta_{\ell_0} \quad (2.23b)$$

Observation : Le facteur $(m/\mu)^3$ est absent en [2.9].

Ordre α^4 :

$$A_{40} = A_{40}^{AE} + A_{40}^{MA} + A_{40}^{PV} + A_{40}^{RNR}$$

$$A_{40}^{AE} = \left[\frac{3}{Z\pi} \left(-\frac{4819}{5184} - \frac{49}{432} \pi^2 + \frac{\pi^2}{2} \ln 2 - \frac{3}{4} \zeta(3) \right) + \pi \frac{417}{128} - \frac{3}{2} \ln 2 \right] \delta_{\ell_0} \quad (2.24a)$$

$$A_{40}^{MA} = \frac{3}{4\pi Z} \frac{C_{\ell_j}}{2\ell+1} \left[\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) \right] \quad (2.24b)$$

$$A_{40}^{PV} = \left[-\frac{41}{54\pi Z} + \frac{5\pi}{64} \right] \delta_{\ell_0} \quad (2.24c)$$

$$A_{40}^{RNR} = \frac{3\pi}{4} \left[\frac{m}{\mu} \right]^3 \frac{m}{M} \left[\frac{35}{4} \ln 2 - \frac{7333}{960} + C_{BG} + Z(3 - \ln 2) \right] \delta_{\ell_0} \quad (2.24d)$$

où C_{B_G} a été calculé numériquement [2.17] :

$$C_{B_G} = -0,415 \quad (4)$$

et $\zeta(x)$ est la fonction zeta de Rieman :

$$\zeta(3) = 1,202\ 056\ 903$$

Le terme A_{40}^{RNR} est le dernier en date calculé pour le Lamb-shift de l'hydrogène [2.16, 2.17] et il est, bien entendu, absent de [2.9].

$$A_{41}^{RNR} = -\frac{3\pi}{8} \left[\frac{m}{\mu} \right]^3 \frac{m}{M} \delta_{\ell_0} \quad (2.24e)$$

Observation : cette contribution vient de la référence [2.16] et est bien sûr absente de [2.9].

Ordre α^5 :

$$A_{50} = A_{50}^{AE} + A_{50}^{MA} + A_{50}^{PV}$$

$$A_{50}^{AE} = C_{60} \quad (2.25a)$$

$$A_{50}^{MA} = \frac{3}{4\pi^2 Z^2} \frac{C_{\ell_J}}{2\ell+1} a_6 \quad (2.25b)$$

$$A_{50}^{PV} = -\frac{9}{35} \delta_{\ell_0} \quad (2.25c)$$

avec a_6 et C_{60} calculés numériquement [2.9] :

$$a_6 = 1,285 \quad (57).$$

Le terme C_{60} (pour l'état 2S) a fait l'objet d'une longue polémique entre Erickson et Mohr : C_{60} (Erick.) = -17,598 (500) et C_{60} (Mohr) = -23,4 (1,2). La valeur de Mohr a été favorisée à la fois par des données théoriques et expérimentales. Un calcul de la même contribution fait par une autre méthode par Sapirstein a donné C_{60} (Sap.) = -25,1 (1,2). De plus, des mesures récentes du Lamb-shift sur He^+ (voir partie 2.5) concordent davantage avec les calculs de Mohr qu'avec ceux d'Erickson.

En accord avec [2.16] on mettra $C_{60} = -24$ (1) dans nos calculs. Pour les autres états, on conservera les valeurs données par Erickson [2.9, table C] (notons que pour les états non-S les calculs d'Erickson et Mohr sont en bon accord), en particulier :

$$C_{60}(2P_{1/2}) = -0,352.$$

Observation : le terme A_{50}^{MA} est absent dans la référence [2.16]. De toute façon, sa contribution est plus petite que l'erreur sur C_{60} .

$$A_{51} = A_{51}^{AE} + A_{51}^{PV} + A_{51}^{RNR}$$

$$A_{51}^{AE} = C_{61} \quad (2.26a)$$

$$A_{51}^{PV} = -\frac{1}{10} \delta \ell_0. \quad (2.26b)$$

C_{61} est un coefficient qui dépend de l'état considéré :

$$C_{61} = \begin{cases} 7 \ln 2 - 63/80 & (1S_{1/2}) \\ 4 \ln 2 + 67/40 & (2S_{1/2}) \\ 103/240 & (2P_{1/2}). \end{cases}$$

$$A_{52} = A_{52}^{AE}$$

$$A_{52}^{AE} = -\frac{3}{4} \delta \ell_0. \quad (2.27)$$

Ordre α^6 :

$$A_{60} = A_{60}^{PV} + A_{60}^{AD}$$

$$A_{60}^{PV} = \frac{21}{256} \delta \ell_0 \quad (2.28 a)$$

$$A_{60}^{AD} = C_7 \quad (2.28 b)$$

où [2.9] :

$$C_7 = \begin{cases} 30,04 & (1S_{1/2}) \\ 18,48 & (2S_{1/2}) \\ -1,28 & (2P_{1/2}) \end{cases}$$

Observation : aucune correction d'ordre α^6 n'a été considérée dans la référence [2.16]. Nous ne les incluons pas non plus dans nos calculs.

Finalement, on a les corrections qui ne sont pas, à proprement parler, purement radiatives, mais qui sont usuellement incluses parmi les corrections radiatives :

$$B_{20} = B_{20}^{NR} + B_{20}^{BS} + B_{20}^{VN}$$

$$B_{20}^{NR} = - \frac{1}{4n} \left[\frac{\mu}{m} \right]^2 \frac{1}{1+M/m}. \quad (2.29 a)$$

Cette correction non-relativiste aux énergies de Dirac a déjà été discutée dans le paragraphe 2.2.2. Elle est proportionnelle à n^{-4} et ne contribue pas au Lamb-shift, car elle est indépendante de ℓ . Pour cette raison elle est souvent exclue du calcul du Lamb-shift de l'état fondamental (dans le Lamb-shift des états $n=2$, $J=1/2$, défini comme la différence d'énergie entre les niveaux S et P, elle s'annule de toute façon).

$$B_{20}^{BS} = - \left[\frac{m}{M} \right]^2 \frac{C_{\ell J}}{2\ell+1} (1-\delta_{\ell 0}). \quad (2.29 b)$$

Le terme de volume du noyau est :

$$B_{20}^{VN} = \frac{4}{3} \frac{\langle r^2 \rangle}{\lambda_c^2} (1+C_{str}) \delta_{10} \quad (2.29 c)$$

où $\langle r^2 \rangle$ est le rayon électromagnétique quadratique moyen du noyau, λ_c la longueur d'onde Compton divisée par 2π . C_{str} est un facteur de forme nucléaire. Dans la référence [2.9] il vaut $-0,004$, et il vaut zéro en [2.16] (et aussi dans nos calculs).

Actuellement, l'incertitude sur la valeur du rayon du proton est la principale limitation sur les calculs de Lamb-shift. Deux mesures sont disponibles, donnant des résultats qui ne sont pas en accord :

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = 0,805 (11) \times 10^{-15} \text{ m [2.18]} \quad (\text{"ancienne" mesure})$$

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} = 0,862 (12) \times 10^{-15} \text{ m [2.19]} \quad (\text{"nouvelle" mesure}).$$

Comme on le verra par la suite, l'accord entre les mesures expérimentales du Lamb-shift et les calculs théoriques est nettement meilleur si l'on utilise l'"ancienne" valeur de $\langle r^2 \rangle^{1/2}$.

2.3.3 - Les résultats numériques.

La table 2.II montre les corrections radiatives pour quelques niveaux choisis, groupées par puissances successives d'alpha et selon leur origine physique. On observe, en particulier, que pour le niveau $8D_{5/2}$ seules les corrections d'ordre relatif α^3 contribuent jusqu'au niveau du dixième de kHz (et il en est de même pour $10D_{5/2}$ et $12D_{5/2}$). De plus, la correction sur le niveau $8S_{1/2}$ est presque 250 fois plus grande que pour le niveau $8D_{5/2}$. Ces calculs sont cohérents avec la référence [2.16], y compris pour ce qui est des valeurs des constantes fondamentales utilisées.

La valeur obtenue pour le Lamb-shift de l'état $n=2$, $J=1/2$ est 1 057,849 MHz (comme en [2.16], où l'incertitude sur cette valeur est estimée en 11 kHz) que l'on doit comparer aux valeurs expérimentales

$$\begin{array}{lll} 1\,057,845\ (9)\ \text{MHz} & [2.20] & \text{et} \\ 1\,057,851\ (2)\ \text{MHz} & [2.21]. & \end{array}$$

Le calcul théorique a utilisé l'"ancienne" valeur pour le rayon du proton, en accord avec [2.16]. Si l'on prend la "nouvelle" valeur pour le rayon du proton, le résultat est

$$1\,057,867\ \text{MHz},$$

distant de 2,0 et 1,5 incertitudes théoriques des mesures expérimentales.

Pour le Lamb-shift de l'état fondamental, on a 8 172,876 MHz, à comparer aux mesures expérimentales

$$\begin{array}{lll} 8\,173,3\ (1,7)\ \text{MHz} & [2.22] \\ 8\,172,93\ (84)\ \text{MHz} & [2.23]. \end{array}$$

TABLE 2.II

Contributions des corrections radiatives à quelques niveaux
choisis de l'atome d'hydrogène (en MHz).

	$1S_{1/2}$					
	AE	MA	PV	BS	RNR	Total
A 30	-2735,805	406,267	-216,676	0,960		-2545,253
A 31	10660,982			1,454		10662,436
A 40	58,638	-0,620	0,030		0,003	58,051
A 41					-0,050	-0,050
A 50	-1,385					-1,385
A 51	2,308		-0,057			2,251
A 52	-4,190					-4,190
Total	7980,548	405,647	-216,703	2,414	-0,047	8171,860
Volume du noyau ^a : 1,015						
Recul du noyau : -23,814				Lamb-shift ^b : 8172,875		
TOTAL DES CORRECTIONS : 8 149,061 MHz						

$2S_{1/2}$

	AE	MA	PV	BS	RNR	Total
A ₃₀	-318,634	50,783	-27,085	0,160		-294,775
A ₃₁	1332,623			0,182		1332,804
A ₄₀	7,330	-0,078	0,004		4×10 ⁻⁴	7,256
A ₄₁					-0,006	-0,006
A ₅₀	-0,173					-0,173
A ₅₁	0,316		-0,007			0,308
A ₅₂	-0,524					-0,524
Total	1020,937	50,706	-27,088	0,342	-0,006	1044,891
Volume du noyau ^a : 0,127						
Recul du noyau : -1,488 Contr. au Lamb-shift ^b : 1045,018						
TOTAL DES CORRECTIONS : 1 043,530 MHz						

 $2P_{1/2}$

	AE	MA	BS	Total
A ₃₀	4,065	-16,937	-0,017	-12,889
A ₄₀		0,026		0,026
A ₅₁	0,031			0,031
Total	4,095	-16,911	-0,017	-12,833
Recul du noyau : -1,486 B ₂₀ ^{NR} : -1,488				
Contr. au Lamb-shift ^b : -12,831				
TOTAL DES CORRECTIONS : -14,319 MHz				

$8S_{1/2}$

	AE	MA	PV	BS	RNR	Total
A_{30}	-4,802	0,794	-0,423	0,003		-4,429
A_{31}	20,822			0,003		20,825
A_{40}	0,115	-0,001	6×10^{-5}		6×10^{-6}	0,113
A_{41}					-1×10^{-4}	-1×10^{-4}
A_{50}	-0,003					-0,003
A_{51}	0,005		-1×10^{-4}			0,005
A_{52}	-0,008					-0,008
Total	16,129	0,792	-0,423	0,006	-9×10^{-5}	16,503
Volume du noyau ^a : 0,002						
Recul du noyau : -0,006 Contr. au Lamb-Shift ^b : 16,505						
TOTAL DES CORRECTIONS : 16,500 MHz						

 $8D_{5/2}$

	AE	MA	BS	Total
A 30	0,021	0,053	-4×10^{-5}	0,074
A_{40}		-8×10^{-5}		-8×10^{-5}
A_{51}	1×10^{-4}			1×10^{-4}
Total	0,021	0,053	-4×10^{-5}	0,074
Recul du noyau : -0,006				
Contr. au Lamb-shift ^b : 0,074				
TOTAL DES CORRECTIONS : 0,068 MHz				

NOTES DE LA TABLE 2.II :

Constantes utilisées : $\alpha^{-1} = 137,035\ 989\ 5$

$R = 10\ 973\ 731,571\ \text{m}^{-1}$

$$M/m = 1\,836,153\,701.$$

- ^a Cette contribution est calculée avec l'"ancienne" valeur du rayon du proton [2.18] : 0,805 fm.
- ^b Cette valeur n'inclue pas la contribution de recul non-relativiste du noyau (B_{20}^{NR}).

2.4 - Effets de la structure du noyau. Structure hyperfine.

En plus de l'effet de masse réduite, le noyau - proton, deutéron ou autre - présente d'autres caractéristiques susceptibles d'affecter la position des niveaux, les principales d'entre celles-ci étant le spin et la distribution spatiale de la charge dans le noyau.

Le critère usuellement retenu pour faire la séparation entre la structure hyperfine et certaines corrections radiatives est souvent arbitraire (du point de vu théorique), néanmoins pratique : comme on verra ci-dessous, la contribution la plus importante à la structure hyperfine est donné par l'équation dite de Fermi (voir ci-dessous éq. (2.30)), qui est proportionnelle à une combinaison particulière des nombres quantiques F , I et J qui a la propriété - comme on verra plus loin - de ne pas déplacer le barycentre des raies. On considérera comme faisant partie de la structure hyperfine les corrections proportionnelles à l'équation de Fermi.

La structure hyperfine produit des corrections d'ordre 10^{-7} aux positions des niveaux, et les corrections radiatives à ces corrections sont souvent négligeables à notre niveau de précision.

Le traitement rigoureux des effets de structure hyperfine consisterait à considérer l'équation de Dirac avec un quadrivecteur A_μ correspondant au potentiel coulombien plus l'interaction dipôle-dipôle [2.24, paragraphe 30]. Le terme dit de contact, dû au mouvement de l'électron dans le proton donne la principale contribution pour les états S , et il y a aussi un effet de recul du noyau.

Au niveau de précision qui nous intéresse, ces calculs peuvent être faits perturbativement dans le contexte de la formulation de Pauli, qui est une approximation non-relativiste de la théorie de Dirac [2.8, paragraphe 22]. Il en résulte une correction à l'énergie des niveaux donnée par la formule suivante (dite de Fermi), exprimée en termes de fréquence :

$$\delta v_{\text{Fermi}} = \frac{\alpha^2 \mu_N}{n^3 \mu_B} g cR \frac{F(F+1) - I(I+1) - J(J+1)}{J(J+1)(2\ell+1)}. \quad (2.30)$$

Dans cette formule, μ_N est le moment magnétique du noyau ($\approx 1,521 \times 10^{-3} \mu_B$ pour le proton), μ_B le magnéton de Bohr, g est le facteur gyromagnétique (non corrigé, les corrections seront considérées explicitement plus loin) de l'électron (= 2), I est le spin du noyau et F est le moment cinétique total, $F = J+I$. Les autres symboles ont leur signification usuelle.

Une propriété importante des corrections de structure hyperfine est de ne pas changer le barycentre des raies. En fait, l'intensité d'une raie de structure hyperfine est proportionnelle à la multiplicité $(2F+1)$ du niveau correspondant. Ainsi, si l'on définit le barycentre des niveaux de structure hyperfine (avec n , J et ℓ fixes) comme la somme sur F de la fréquence fois la multiplicité, le décalage en fréquence du barycentre dû aux corrections de structure hyperfine sera :

$$\sum_F (2F+1) \delta v_{\text{Fermi}} = 0. \quad (2.31)$$

Les corrections à la formule de Fermi sont proportionnelles à la formule de Fermi elle-même, donc on peut écrire :

$$\delta v_{\text{shf}} = C \delta v_{\text{Fermi}}, \quad (2.32)$$

elles conservent ainsi la propriété de ne pas déplacer le barycentre des raies. Ces corrections peuvent être divisées en quatre groupes [2.25] :

1) *Correction de masse réduite non relativiste.* Cette correction vient du fait que la formule de Fermi est proportionnelle à $|\psi(0)|^2$, donc à m^3 . Si l'on substitue m par μ (masse réduite) on obtient .

$$C(\mu, n.r.) = (\mu/m)^3. \quad (2.33)$$

2) *Corrections indépendantes de l'état considéré.* On en considérera ici deux : la correction due au moment magnétique anormal de l'électron et la correction radiative d'ordre le plus bas (α^2). Ces corrections sont données par :

$$\delta_{ma1} = (2\pi)^{-1} \quad \text{et} \quad (2.34 \text{ a})$$

$$\delta_{ma2} = \pi^{-2} \left[\frac{197}{144} + \frac{\pi^2}{12} - \frac{\pi^2}{2} \ln 2 + \frac{3}{4} \zeta(3) \right]$$

$$\delta_{qed} = \ln 2 - 5/2 \quad (2.34 \text{ b})$$

où ma indique les correction de moment magnétique anormal et qed la correction radiative d'ordre α^2 .

3) *Corrections dépendant de l'état considéré.* On n'en considérera qu'une, d'ordre α^2 , celle dite de Breit, qui est une correction relativiste aux effets de mouvement du noyau. On donnera ici les valeurs de cette correction pour les niveaux $1S_{1/2}$ et $2S_{1/2}$ [2.26, p. 71] :

$$\delta_{Breit} = (3/2) \alpha^2 \quad (1S_{1/2}) \quad (2.35)$$

$$\delta_{Breit} = (17/8) \alpha^2 \quad (2S_{1/2})$$

4) *Autres corrections.* On groupe ici diverses corrections radiatives qui n'ont pas été considérées auparavant, de recul du noyau et dues à la structure du noyau. Les corrections dues à la structure du noyau sont mal connues, et là se trouve l'actuelle limitation aux calculs de structure hyperfine. On représentera ces corrections par le symbole

$$\delta_{autres} \quad (2.36)$$

Ces corrections sont d'environ -4×10^{-5} pour le niveau $1S$, dont $-3,5 \times 10^{-5}$ viennent de la structure du proton.

En regroupant toutes ces corrections on obtient

$$C = (\mu/m)^3 [1 + \delta_{ma1} \alpha + (\delta_{ma2} + \delta_{qed} + \delta_{Breit}) \alpha^2 + \delta_{autres}]. \quad (2.37)$$

La structure hyperfine fait intervenir une nouvelle constante dans le calcul de la position des niveaux : le rapport entre le moment magnétique du proton et le magnéton de Bohr. Ce rapport est connu avec une précision de $1,0 \times 10^{-8}$ [2.12], ce qui est trente fois plus précis que le moment magnétique du proton lui-même.

Pour les niveaux élevés qui nous intéressent, les corrections ci-dessus sont négligeables à notre niveau de précision (le kHz). La structure hyperfine du niveau $8D_{5/2}$ est d'environ 59 kHz pour $F=3$ et -83 kHz pour $F=2$. La correction d'ordre le plus bas (mal) est d'ordre $\alpha/(2\pi)$, éq. (2.34 a), donc 1×10^{-3} . La correction de masse réduite non relativiste, éq. (2.33), est d'ordre $3m/M \approx 2 \times 10^{-3}$.

Les formules (2.33), (2.34) et (2.35) sont suffisantes pour déterminer les corrections de structure hyperfine avec une précision de $\approx 5 \times 10^{-5}$. Celle-ci est largement suffisante pour calculer les corrections sur les niveaux élevés ($n \geq 8$) au kHz près. Pour les niveaux 1S et 2S, la contribution de la structure du proton doit être considérée, ainsi que quelques corrections radiatives et de recul d'ordre supérieur. Néanmoins, ces valeurs sont très bien mesurées expérimentalement. La structure hyperfine du niveau 1S est une des grandeurs les mieux mesurées de la physique ; elle est connue avec 14 chiffres! Même en tenant compte des corrections d'ordre supérieur, les valeurs théorique et expérimentale diffèrent encore de 2,3 kHz [2.27].

Dans nos calculs, on ne considérera que la correction due à la structure du noyau. Cette correction dépend des facteurs de forme électrique et magnétique du proton, dont la détermination théorique et expérimentale est encore controversée. Nous nous contenterons de mettre

$$\delta_{autres} = - f_{sn} \quad (2.37a)$$

où $f_{sn} \approx 3,46 (7) \times 10^{-5}$, sans entrer dans le détail de cette détermination [2.25, 2.27].

Des corrections radiatives d'ordre supérieur ont été calculées, mais leur valeur est comparable à l'erreur sur la contribution due à la structure

du noyau. On ne les considérera pas dans nos calculs. Les résultats obtenus dans ces conditions (pour les niveaux $1S$ et $2S$) sont donnés dans la table 2.III.

TABLE 2.III

Calcul théorique de la structure hyperfine de quelques niveaux de l'atome d'hydrogène (MHz).

 $1S_{1/2}$

Contribution	F=0	F=1
Fermi	-1065,870	355,290
Masse réduite	1,740	-0,580
Mom. mag. anormal	-1,234	0,411
Breit	-0,085	0,028
QED	0,102	-0,034
Vol. noyau	0,037	-0,012
Total	-1065,310	355,103
Intervalle : 1420,413 MHz	(Exp. : 1420,405 7 [2,28])	

 $2S_{1/2}$

Contribution	F=0	F=1
Fermi	-133,234	44,411
Masse réduite	0,217	-0,073
Mom. mag. anormal	-0,154	0,051
Breit	-0,011	0,004
QED	0,013	-0,004
Vol. noyau	0,005	-0,002
Total	-133,164	44,388
Intervalle : 177,552 MHz	(Exp. : 177,556 8 [2.29])	

Constantes utilisées : les mêmes que dans la table 2.II

Si l'on prend en compte toutes les contributions connues à ce jour, on obtient, pour l'intervalle de structure hyperfine du niveau $1S_{1/2}$ [2.27] :

1 420,403 444 (1278) MHz

à comparer avec la valeur expérimentale [2.28] :

1 420,405 751 770 (3) MHz .

2.5 - La spectroscopie atomique et les tests de la QED.

Pendant ces dernières années, plusieurs espèces atomiques ont été étudiées par des méthodes spectroscopiques, permettant la comparaison avec les résultats prévus par l'Electrodynamique Quantique. Les principales études concernent les atomes dits hydrogenoïdes (à un seul électron) : l'hydrogène et le deutérium étant les exemples évidents, mais aussi le positronium (un système lié électron-positron), le muonium (électron plus muon) et l'hélium ionisé (He^+).

Chaque espèce atomique présente des avantages particuliers. L'hydrogène est de loin le mieux étudié, présentant l'avantage d'être stable (par rapport au positronium et au muonium) et d'être neutre (par rapport à He^+). Néanmoins, la valeur des résultats obtenus sur l'hydrogène en tant que test de la QED est diminuée par les incertitudes sur la mesure de la taille du noyau, c'est-à-dire par les incertitudes sur la structure du proton.

Le positronium est particulièrement intéressant parce qu'il pose à l'extrême les problèmes liés aux corrections de masse réduite, étant formé par deux particules de masses identiques. Il teste donc un des points sensibles le moins clair de la QED : le problème de deux corps en mécanique relativiste, usuellement traité via l'équation de Bethe-Salpeter. L'état triplet du positronium a un temps de vie dû à l'annihilation électron-positron de 0,1 μs , l'état singlet 0,1 ns. Cela limite, en définitif, la précision possible sur les mesures spectroscopiques à 1,6 MHz, soit environ 10^{-9} de la fréquence de transition $1^3\text{S}-2^3\text{S}$.

Le muonium est intéressant d'une part parce que (au contraire du positronium) il ne fait pas intervenir des corrections de masse réduite importantes (sa masse étant 208 fois celle de l'électron) et d'autre part

parce que (à l'inverse de l'hydrogène) on ne décèle pas de structure chez le muon (à part les termes de polarisation du vide hadroniques, voir paragraphe 2.3.2). Le muon étant une particule instable de temps de vie $2,2 \mu\text{s}$, la précision sur les mesures est limitée à 72 kHz, soit 2×10^{-11} de la transition $1S-2S$.

L'hélium ionisé, finalement, présente l'intérêt à cause de sa charge nucléaire double, ce qui permet de tester des effets relativistes sur les calculs de la QED et surtout du fait que le rayon nucléaire a été mesuré avec une précision exceptionnelle, ce qui élimine cette source d'incertitude qui handicape les calculs pour l'hydrogène. De plus, en raison du moment magnétique nul du noyau de ${}^4\text{He}$, cette espèce ne présente pas de structure hyperfine, ce qui simplifie considérablement les choses.

2.5.1 - Hydrogène.

Les résultats de mesures du Lamb-shift ont déjà été mentionnés plus haut. L'actuelle valeur théorique [2.16] et l'actuelle valeur expérimentale [2.21] pour le Lamb-shift $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$ diffèrent de 2 kHz, ce qui correspond à 0,18 écart-types théoriques (11 kHz) ou 1 écart-type expérimental (2 kHz), si l'on prend l'"ancienne" détermination du rayon électromagnétique du proton [2.18]. Si l'on prend la "nouvelle" mesure [2.19] la situation se dégrade : la différence passe à 16 kHz, soit 1,5 écart-types théoriques et 8 écart-types expérimentaux. La figure 2.3 résume ces résultats.

Deux déterminations du Lamb-shift de l'état $1S$ ont été fournies par les récentes mesures de la fréquence de transition $1S_{1/2} - 2S_{1/2}$. Les résultats obtenus, 8 173,3 (1,7) MHz [2.22] et 8 172,93 (84) MHz [2.23] sont en accord avec le calcul théorique (8 172,94 (9) MHz) à 0,2 et 0,01 écart-type près, respectivement. Le Lamb-shift de l'état fondamental est moins sensible à l'incertitude sur le rayon du proton ; utiliser la "nouvelle" valeur pour le rayon du proton change la valeur théorique citée plus haut en 8 173,02 MHz, les différences étant alors 0,16 et 0,11 écart-type.

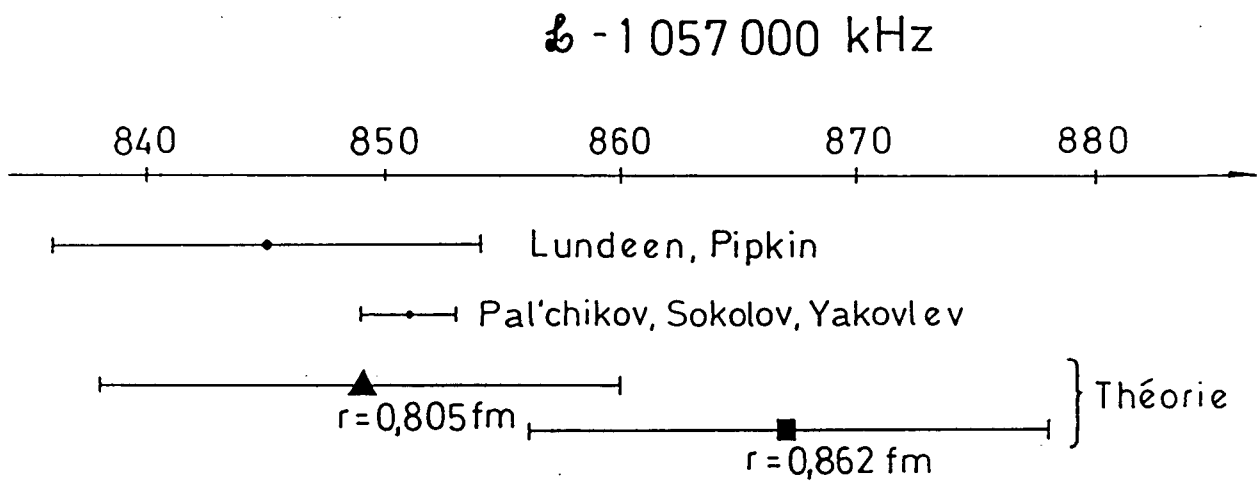


Figure 2.3 - Situation actuelle des calculs et des mesures du Lamb-shift $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$.

2.5.2 - Positronium.

Les derniers résultats expérimentaux en date concernent la fréquence de transition $1^3S_1 - 2^3S_1$ [2.30] et la structure fine du niveau $n=2$ [2.31].

La mesure de la fréquence de transition $1S-2S$ a donné comme résultat 1 233 607 185 (15) MHz et a été mesurée par rapport à une raie de Te_2 . Cette valeur diffère de la valeur théorique, 1 233 607 197 MHz (calculée jusqu'à l'ordre relatif α^3), de 0,8 écart-type. Néanmoins, la raie de référence du Te_2 a postérieurement été recalibrée [2.32] changeant le résultat expérimental en 1 233 607 143 (11) MHz, et changeant la différence en 5 écart-types (3,7 si l'on conserve l'ancien écart-type). Cette calibration a été faite avec une ancienne valeur de la constante de Rydberg [2.33]. La correction faite avec la valeur actuelle de R ajouterait environ 3 MHz à la valeur expérimentale, ce qui ne change guère le désaccord avec la théorie (4,6 écart-types au lieu de 5).

Les mesures des intervalles de structure fine, $2^3S_1 - 2^3P_J$, avec $J=0,1,2$ ont été faites avec une précision de quelques parties en 10^4 [2.31] et sont comparées avec les calculs théoriques qui ont été faits jusqu'à l'ordre relatif α^3 . La table 2.IV présente les résultats théoriques et expérimentaux. Les valeurs sont en moyenne à 1,3 écart-type des calculs théoriques. L'ordre de grandeur de ces désaccords (quelques MHz) suggère néanmoins que l'accord pourra être amélioré par l'inclusion de termes d'ordre relatif α^4 qui n'ont pas encore été calculés.

Un résultat quelque peu plus ancien concerne l'intervalle de structure hyperfine de l'état fondamental du positronium [2.34] : 203 389,10 (74) MHz qui tombe à -13,4 MHz de la valeur théorique calculée jusqu'à l'ordre relatif α^2 [2.27]. Ce calcul est un des plus compliqués, car le paramètre d'expansion m/M , qui est crucial dans les calculs de structure hyperfine, n'est pas petit dans le cas présent.

TABLE 2.IV

Structure fine du positronium
(théorie et expérience) (MHz).

Raie	Exper.	Théorie
$2^3S_1 - 2^3P_0$	18 504 (12)	18 496
$2^3S_1 - 2^3P_1$	13 001 (5)	13 011
$2^3S_1 - 2^3P_2$	8 620 (4)	8 625,2

2.5.3 - Muonium.

Des mesures spectroscopiques de l'intervalle 1S-2S, de la structure hyperfine et du Lamb-shift 2S-2P du muonium ont été faites à l'heure actuelle.

L'étude de la transition 1S-2S est encore à ses débuts, la récente mesure réf. [2.35] correspondent à l'observation de quelques centaines d'atomes à peine. Le résultat pour la fréquence de transition 1S(F=1) - 2S(F=1) est 2 455 527 696 (45) MHz, à comparer à la fréquence prévue par la QED : 2 455 527 959,60 (90) MHz. Cette mesure est donc trop imprécise pour avoir une réelle signification en tant que test de la QED.

Une mesure plus ancienne a été faite de l'intervalle de structure hyperfine du muonium [2.36]. Le résultat, 4 463,302 88 (16) MHz est 1,8 kHz en dessous de la valeur théorique, qui inclue les corrections jusqu'à l'ordre $\alpha^2 E_F$ (E_F énergie de Fermi). Cette mesure, assez précise, permet une détermination de la constante de structure fine α (en fait, de $\alpha^2 \mu_\mu \mu_p$), libre des effets de volume du noyau qui empêchent d'avoir une précision comparable sur l'hydrogène. Cette mesure de α a été prise en compte dans l'ajustement de constantes fondamentales [2.12].

Le Lamb-shift 2S-2P, finalement, a été mesuré avec une précision de 1% environ [2.37]. Le résultat est 1070 (15) MHz, à comparer à la prévision théorique 1047,03 MHz.

2.5.4 - Hélium ionisé.

Deux mesures très récentes du Lamb-shift 2S-2P dans l'He⁺ ont été faites. Ces mesures ont permis de trancher en faveur du calcul de Mohr par rapport à celui de Erickson (voir paragraphe 2.3.3) du terme d'ordre α^5 . Comme on l'a déjà mentionné, le rayon électromagnétique nucléaire pour l'hélium est exceptionnellement bien mesuré [2.38], avec une précision de 5×10^{-4} .

Les deux résultats sont en excellent accord l'un avec l'autre :

14 042,22 (35) MHz	[2.39]
14 042,0 (12) MHz	[2.40].

La valeur théorique (calculée d'après Mohr) est 14 042,26 (50) MHz, tandis que la valeur d'Erickson tombe à 8 écart-types de la mesure la plus précise [2.39].

2.5.5 - Conclusion.

En conclusion, on peut dire qu'il existe à l'heure actuelle - malgré des difficultés expérimentales et théoriques - un accord raisonnable entre les mesures de nature spectroscopique en physique atomique et les calculs de la QED. Il est évident que le travail ici est loin d'être fini : il reste - côté théorique - des diagrammes potentiellement importants à calculer et - côté expérimental - des progrès à faire en ce qui concerne surtout les atomes "exotiques" (positronium et muonium).

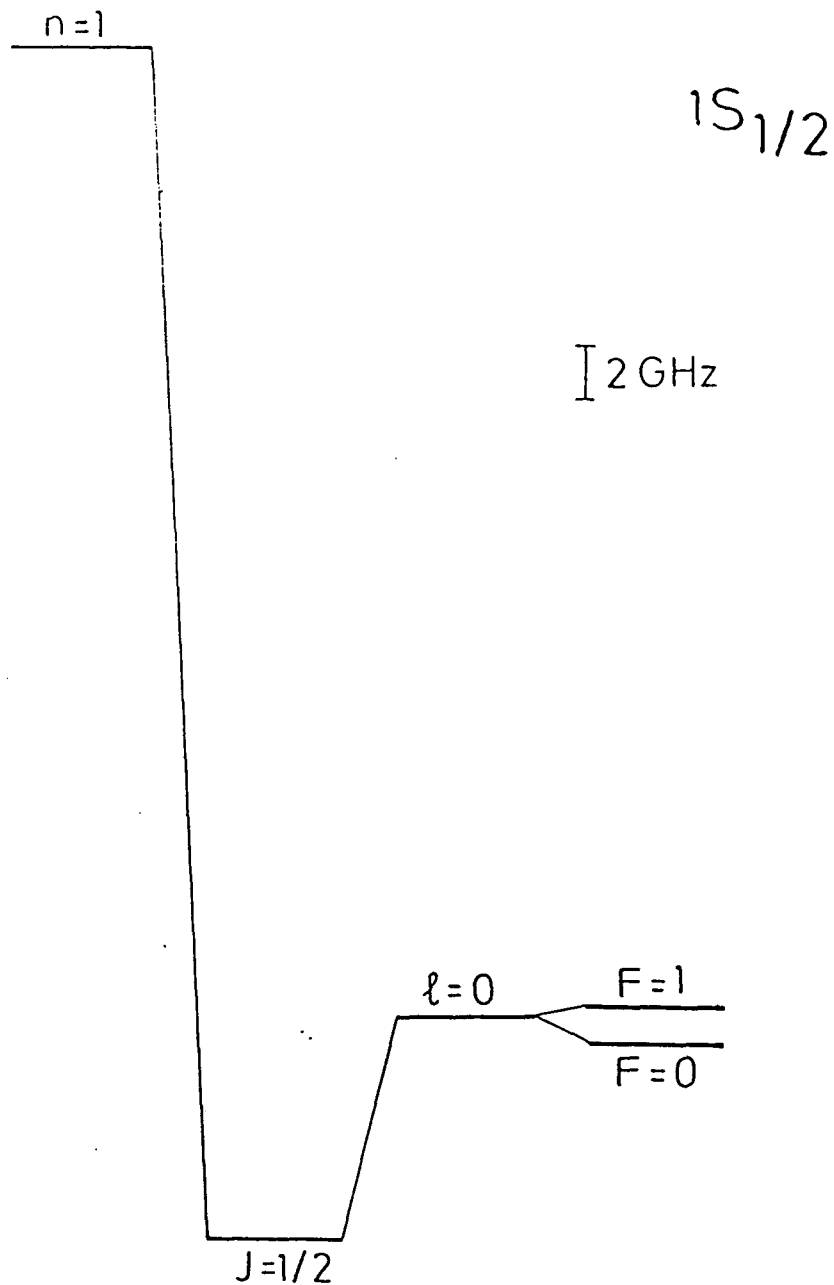
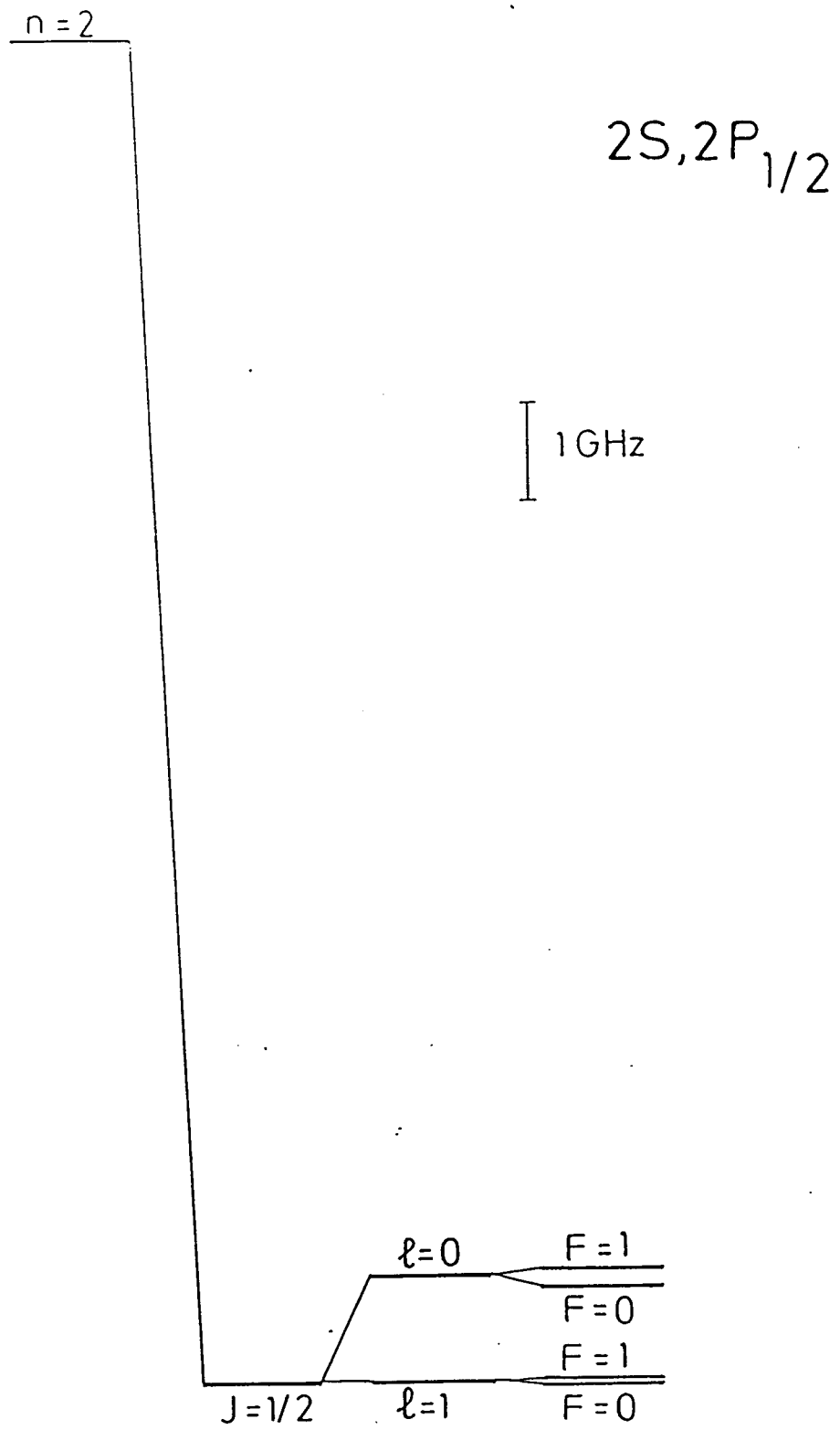
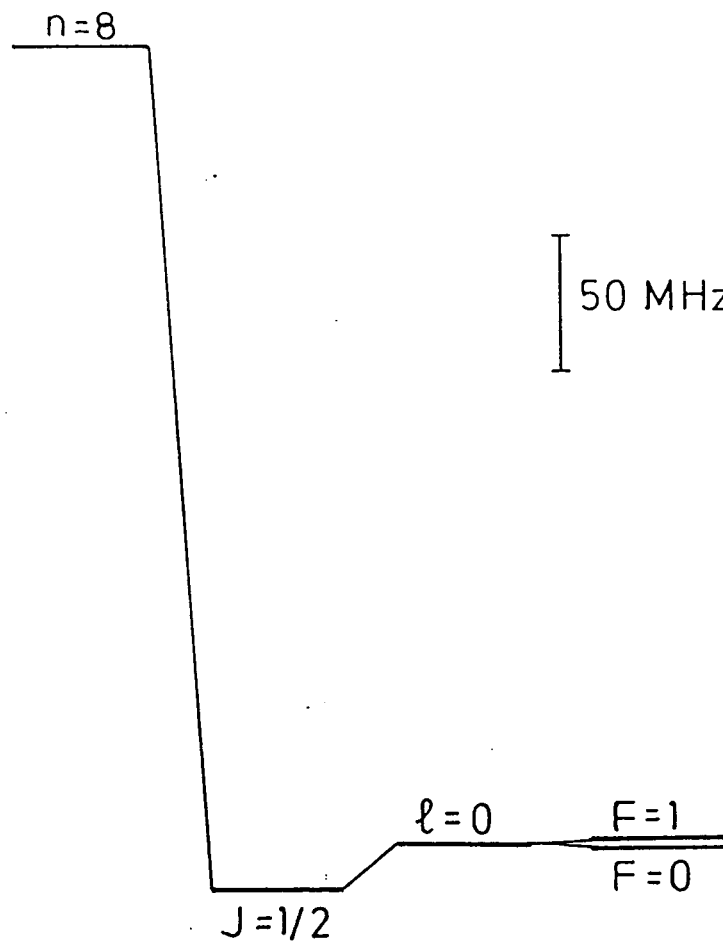
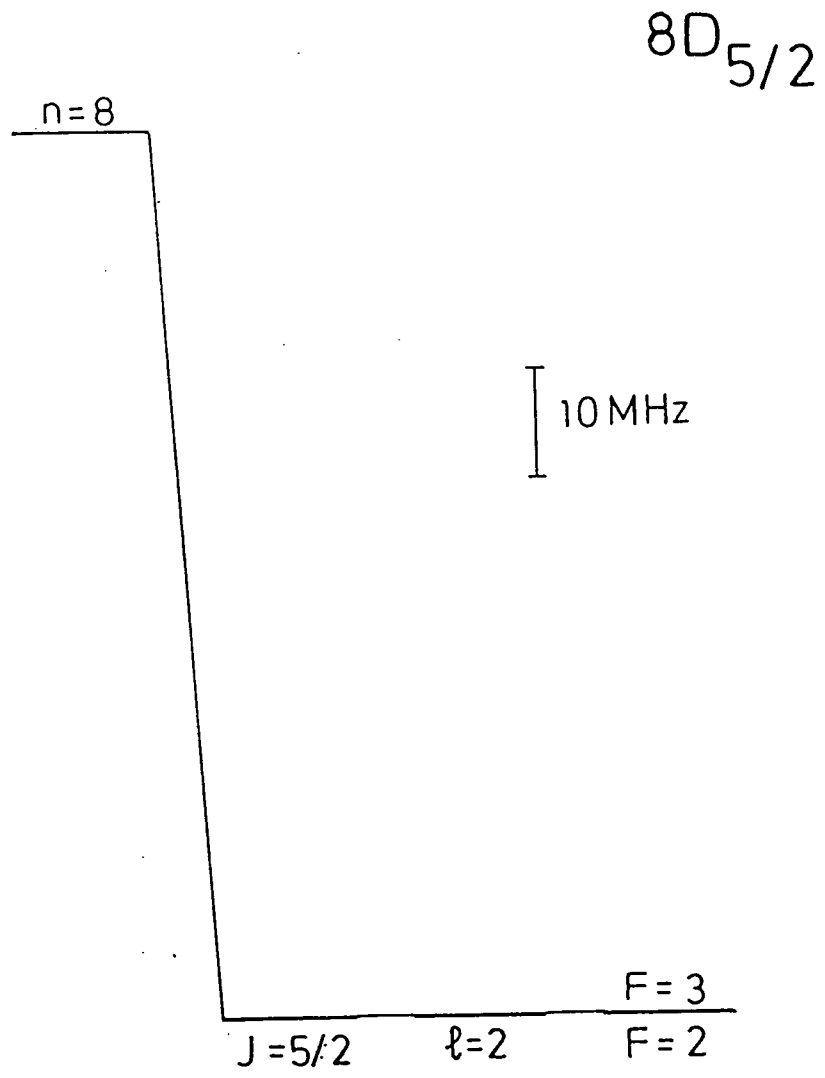


Figure 2.4 - Corrections successives à quelques niveaux de Schrödinger choisis. De gauche à droite les corrections sont : structure fine (Dirac) ; correction radiative ; structure hyperfine. (a) Niveau $1S_{1/2}$. (b) Niveau $2S, 2P$. (c) Niveau $8S_{1/2}$. (d) Niveau $8D_{1/2}$.



$8S_{1/2}$ 



2.6 - Conclusion.

Les figures 2.4 (a), (b), (c) et (d) montrent l'effet des corrections successives sur les niveaux 1S, 2S, 2P, 8S et 8D.

La théorie développée dans ce chapitre sera amplement utilisée dans le chapitre VI pour la détermination de la constante de Rydberg. On y utilisera, évidemment, autant que possible les mesures expérimentales disponibles, comme celle du Lamb-shift de l'état $2S_{1/2}$ [2.20, 2.21]. Par contre, une valeur expérimentale pour le deutérium n'est pas disponible, et on sera bien obligé d'utiliser la valeur théorique.

Pour finir ce chapitre, un commentaire sur l'influence de l'interaction électrofaible sur l'énergie des niveaux. Pour les basses énergies dont il s'agit ici, les interactions électromagnétique et faible peuvent être considérées indépendamment l'une de l'autre, et cette dernière peut être traitée par un potentiel effectif composé de deux parties. La première, de parité impaire, V_{VP} , est responsable des effets de violation de la parité ; l'autre, de parité paire, V_{CN} , tient compte de l'effet des courants neutres nucléoniques et électroniques.

Considérons leurs effets sur l'état $2S_{1/2}$. En raison de sa parité, V_{VP} n'aura pas d'élément de matrice diagonal, et ne pourra donner de contributions qu'au second ordre, où la contribution la plus importante viendra du couplage avec le niveau $2P_{1/2}$ (dont le dénominateur d'énergie sera le seul Lamb-shift). V_{VP} est très faible, et cette contribution sera de plusieurs ordres de grandeur inférieure au Hz.

V_{CN} , par contre, aura un élément de matrice diagonal dans l'état $2S_{1/2}$ et donnera une contribution au premier ordre. Cette contribution a été calculée pour l'état fondamental [2.41 ; 2.26, p. 280], et vaut :

$$\delta_{EF} = 140 C_{AA} \text{ Hz,}$$

où C_{AA} est une constante de couplage caractéristique des interactions faibles. Cette constante dépend du modèle théorique particulier et on ne dispose pas pour elle d'une valeur expérimentale fiable. Selon le modèle dit standard (Salan-Weinberg-Glashow), cette constante vaut environ 0,63, ce qui produit

$\delta_{EF}(1S) \approx 90$ Hz. Ces contributions sont proportionnelles à $|\psi(0)|^2$, donc à n^{-3} . La valeur pour l'état $2S_{1/2}$ sera donc de l'ordre de 11 Hz. Cela prouve que ces effets sont complètement négligeables à notre niveau de précision.

Remarque : Très récemment, un article a été publié où une correction aux résultats expérimentaux pour la fréquence de transition 1S-2S dans le positronium [2.30] et dans le muonium [2.35] est introduite, améliorant significativement l'accord avec la théorie [K. Danzmann *et al.*, Phys. Rev. A39, 6072 (1989)].

REFERENCES DU CHAPITRE II

- 2.1 L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Mécanique Quantique*, Mir, Moscou, 1967.
- 2.2 M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- 2.3 C. Cohen-Tannoudji, B. Diu et F. Lalœe, *Mécanique Quantique*, 2 tomes, Hermman, Paris, 1973.
- 2.4 R. S. van Dyck, Jr., F. L. More, D. L. Farnham and P. B. Schwinberg, *Bull. Am. Phys. Soc.* 31, 244 (1986).
- 2.5 R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Benjamin/Cummings, Reading (USA), 1962 (seconde édition corrigée).
- 2.6 C. G. Darwin, *Proc. Roy. Soc.* A118, 654 (1928).
- 2.7 W. Gordon, *Z. Physik* 48, 11 (1928).
- 2.8 H. S. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- 2.9 G. W. Erickson, *J. Phys. Chem. Ref. Data* 6, 831 (1977).
- 2.10 G. Breit, *Phys. Rev.* 34, 553 (1929) ; *ib.* 36, 383 (1930) ; *ib.* 39, 616 (1932).
- 2.11 E. Brezin, C. Itzykson and J. Zinn-Justin, *Phys. Rev.* D1, 2349 (1970).
- 2.12 E. R. Cohen and B. N. Taylor, *The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants*, *Rev. Mod. Phys.* 59, 1121 (1987).
- 2.13 E. M. Lifchitz et L. Pitayevski, *Théorie Quantique Relativiste*, 2e partie, Mir, Moscou, 1973.
- 2.14 E. E. Salpeter, *Phys. Rev.* 87, 328 (1952).

- 2.15 C. Cohen-Tannoudji, J. Dupont-Roc et G. Grynberg, *Introduction à l'Electrodynamique Quantique*, InterEditions/Editions du CNRS, Paris, 1987.
- 2.16 G. W. Erickson and H. Grotch, *Phys. Rev. Lett.* 60, 2611 (1988).
- 2.17 G. Bhatt and H. Grotch, *Phys. Rev. Lett.* 58, 471 (1987).
- 2.18 D. J. Drickey and N. L. Hand, *Phys. Rev. Lett.* 9, 521 (1962).
- 2.19 G. G. Simon, Ch. Schmitt, F. Borkowski and V. H. Walter, *Nucl. Phys.* A333, 381 (1981).
- 2.20 S. R. Lundeen and F. M. Pipkin, *Phys. Rev. Lett.* 46, 232 (1981).
- 2.21 V. G. Pal'chikov, Yu. L. Sokolov and V. P. Yakovlev, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 38, 347 (1983) [*JETP Lett.* 38, 418 (1983)].
- 2.22 R. G. Beausoleil, D. H. McIntyre, C. J. Foot, E. A. Hildum, B. Couillaud and T. W. Hänsch, *Phys. Rev.* A35, 4878 (1987).
- 2.23 M. G. Boshier, P. E. G. Baird, C. J. Foot, E. A. Hinds, M. D. Plimmer, D. N. Stacey, J. B. Swan, D. A. Tate, D. M. Warrington and G. K. Woodgate, *Nature* 330, 463 (1987).
- 2.24 A. Messiah, *Mécanique Quantique*, Dunod, Paris, 1964.
- 2.25 B. E. Lautrup, A. Peterman and E. de Rafael, *Phys. Rep.* 3C, 193 (1972).
- 2.26 G. W. Series, ed., *The Spectrum of Atomic Hydrogen: Advances*, World Scientific, Singapore, 1988.
- 2.27 T. Kinoshita and J. Sapirstein in *Atomic Physics IX*, R. S. Van Dyck, Jr. and E. N. Fortson eds., World Scientific, Singapore, 1984.
- 2.28 J. Vanier and C. Audoin, *The Quantum Physics of Atomic Frequency Standards*, Adam Hilger, Bristol, 1989.

- 2.29 J. W. Heberle, H. A. Reich and P. Kusch, Phys. Rev. 101, 612 (1956).
- 2.30 S. Chu, A. P. Mills, Jr. and J. L. Hall, Phys. Rev. Lett. 52, 1689 (1984).
- 2.31 S. Hatamian, R. S. Conti and A. Rich, Phys. Rev. Lett. 58, 1833 (1987).
- 2.32 D. H. McIntyre and T. W. Hänsch, Phys. Rev. A34, 4504 (1986).
- 2.33 S. R. Amin, C. D. Caldwell and W. Lichten, Phys. Rev. Lett. 47, 1234 (1981).
- 2.34 M. W. Ritter, P. O. Egan, V. W. Hugues and K. A. Woodle, Phys. Rev. A30, 1331 (1984).
- 2.35 S. Chu, A. P. Mills, Jr., A. G. Yodh, K. Nagamine, Y. Miyake and T. Kuga, Phys. Rev. Lett. 60, 101 (1988).
- 2.36 F. G. Mariani, W. Beer, P. R. Bolton, P. O. Egan, C. J. Gardner, V. H. Hugues, D. C. Lu, P. A. Souder, H. Orth, J. Vetter, U. Moser and G. zu Putlitz, Phys. Rev. Lett. 49, 993 (1982).
- 2.37 C. J. Oram, J. M. Bailey, P. W. Schmor, C. A. Fry, R. F. Kiefl, J. B. Warren, G. M. Marshall and A. Olin, Phys. Rev. Lett. 52, 910 (1984).
- 2.38 E. Borie and G. A. Rinker, Phys. Rev. A18, 324 (1978).
- 2.39 G. W. F. Drake, J. Patel and A. Wijngaarden, Phys. Rev. Lett. 60, 1002 (1988).
- 2.40 M. S. Dewey and R. W. Dunford, Phys. Rev. Lett. 60, 2014 (1988).
- 2.41 M. A. Bég and G. Feinberg, Phys. Rev. Lett. 33, 606 (1974), *ib.* (errata), 35, 130 (1975).

CHAPITRE III

LE MONTAGE EXPERIMENTAL

Dans le Chapitre I ont été décrites les grandes lignes du principe et de l'allure générale du montage expérimental utilisé pour la mesure de la constante de Rydberg. La figure 3.1 montre un schéma d'ensemble du montage. Dans ce chapitre, nous décrivons en détail chacune des parties constituantes de ce montage.

3.1 - Le jet de métastables.

3.1.1 - La dissociation moléculaire.

La première étape pour l'obtention d'un jet d'atomes métastables est la production d'un jet d'atomes dans l'état fondamental. Dans notre expérience ceci est réalisé à l'aide d'une décharge radio-fréquence [3.1, 3.2].

L'hydrogène ou le deutérium moléculaire est dissocié dans un tube en pyrex par une décharge rf à 30 MHz, dont la puissance est environ 50 W. La décharge est produite par une bobine cylindrique (voir figure 3.2) en fil de cuivre montée autour du tube en pyrex. Un cylindre en cuivre, coaxial avec la bobine et le tube en pyrex, sert à créer une cavité résonnante [3.3]. Entre le tube et la bobine est monté un deuxième tube de verre dans lequel on fait couler de l'eau, de façon à refroidir le système. La région où se produit la dissociation fait 10 cm de long. La pression dans le tube en pyrex est environ 0,3 mbar.

On a observé une progressive dégradation du tube au cours du fonctionnement, ce qui entraîne une diminution de l'efficacité de la dissociation moléculaire, si bien qu'au bout d'une centaine d'heures de travail il est nécessaire de démonter le système et de nettoyer le tube à l'acide fluorhydrique, ou bien de le changer.

L'efficacité de ce système dépend évidemment des conditions de travail. Dans des conditions idéales, on peut obtenir des rendements de 80 à 95% [3.1, 3.2]. On peut avoir une indication pratique sur la bonne marche de la

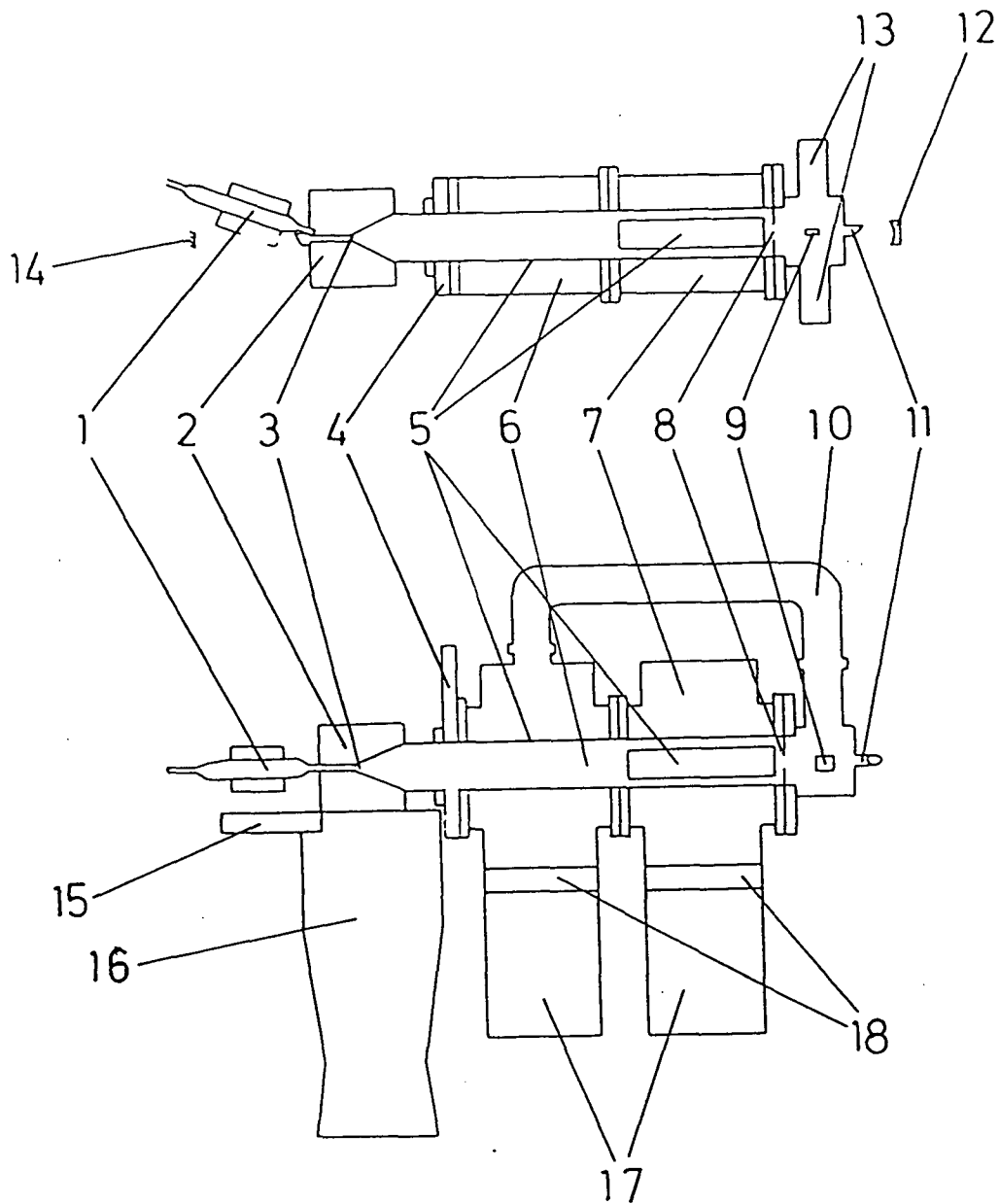


Figure 3.1 - Schéma d'ensemble du montage expérimental du jet atomique. 1) Décharge rf ; 2) 1e chambre à vide : bombardement électronique ; 3) 1e diaphragme de collimation ; 4) vanne tiroir verticale (isole la 1e chambre) ; 5) blindage anti-champ électrique parasite ; 6) 2e chambre à vide : interaction avec le laser ; 7) 3e chambre à vide : interaction avec le laser ; 8) 2e diaphragme de collimation ; 9) électrodes de "quenching", 4e chambre : détection ; 10) tube pour le pompage de la 4e chambre ; 11) fenêtre à Brewster (entrée du faisceau laser) ; 12) miroir d'entrée de la cavité optique ; 13) photomultiplicateurs ; 14) miroir de sortie de la cavité optique ; 15) vanne tiroir horizontale (isole la pompe à diffusion) ; 16) pompe à diffusion ; 17) pompes cryogéniques ; 18) baffles refroidis à eau (pour protéger les têtes des pompes cryogéniques).

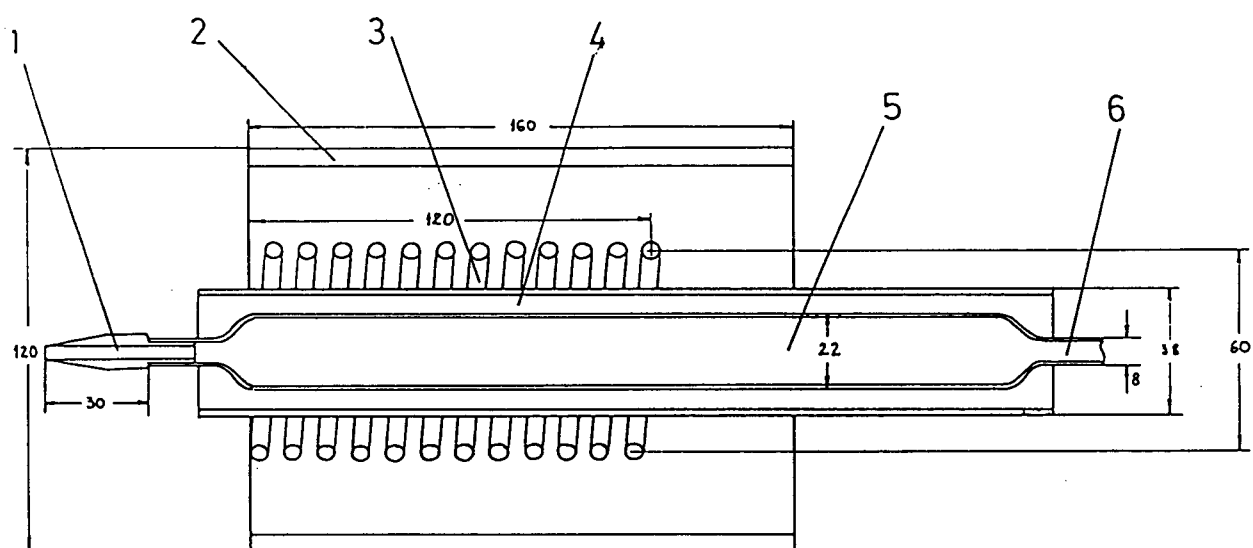


Figure 3.2 - La dissociation moléculaire. 1) Buse en Téflon, sortie du jet atomique ; 2) cylindre en cuivre (cavité résonnante) ; 3) bobine rf ; 4) tube en verre pour le refroidissement ; 5) tube pyrex ; 6) entrée de l'hydrogène moléculaire.

dissociation en examinant la lumière émise par la décharge à l'aide d'un petit spectroscopie : quand tout marche bien, on observe les raies atomiques de Balmer sur un fond noir. Si la proportion de molécules est importante, on voit ces raies sur un fond coloré de bandes moléculaires.

3.1.2 - Le bombardement électronique.

A la sortie de la région de dissociation, on a un jet thermique d'atomes dans l'état fondamental. Ce jet est alors introduit à travers une buse en Téflon dans une première chambre à vide où a lieu l'excitation des atomes vers l'état métastable 2S. Cette chambre est pompée par une pompe à diffusion à une pression de l'ordre de 10^{-4} mbar.

D'après la référence [3.4], le flux d'atomes à travers la buse est donné par

$$N = \frac{2\pi}{3} n_0 v \frac{r^3}{L} \approx 3,9 \times 10^{18} \text{ at/s.}$$

où n_0 est la densité d'atomes du côté haute pression du tube ($\approx 7,2 \times 10^{15}$ at/cm³), v la vitesse moyenne des atomes (3,0 km/s), r le rayon de la buse (1,5 mm) et L la longueur de la buse (4 cm). Ce résultat est compatible avec un autre type de calcul : on sait que la vitesse de pompage dans cette chambre est de 1 m³/s, et que la pression y est de 10^{-4} mbar. A la température ambiante (300 K) cela correspond à environ 6×10^{18} atomes/s (en tenant compte du fait qu'une molécule est faite de deux atomes).

Le jet présente aussi une dispersion angulaire, centrée autour de l'axe de la buse et dont la mi-hauteur correspond à un angle [3.4] :

$$\theta_{1/2} = 3,27 r_{at} (N/rv)^{1/2} \approx 9^\circ$$

où r_{at} est le rayon atomique.

Ces résultats correspondent au cas de l'hydrogène. Pour le deutérium, on a :

$$N \approx 2,5 \times 10^{18} \text{ at/s} \quad \text{et} \quad \theta_{1/2} \approx 9^\circ.$$

L'excitation vers l'état 2S est obtenue dans notre montage par bombardement électronique. Un filament en tungstène (figure 3.3) émet des électrons qui sont ensuite accélérés par un potentiel qui est réglé de façon à maximiser le nombre d'atomes métastables obtenus, entre 11 et 12 V (l'écart en énergie entre les niveaux 1S et 2S étant de 10,2 eV). Une plaque maintenue à un potentiel positif d'environ 150 V recueille les électrons.

Comme les atomes métastables sont extrêmement sensibles aux champs électriques (qui mélangent les niveaux 2S et 2P, ce dernier se désexcitant très rapidement (1,6 ns) vers l'état fondamental), il importe de les en protéger dès qu'ils sont produits. Ceci est obtenu au moyen d'une grille cylindrique constitué de 30 fils, dont les 7 qui sont placés devant le filament sont en tantale et les autres en inox. Ces fils sont tenus en place par des ressorts de façon à rester bien tendus même lorsqu'ils se dilatent sous l'effet de la chaleur du filament. Cette grille crée une région équipotentielle, maintenue au potentiel nul, dans laquelle les atomes métastables sont créés et où ils se déplacent par la suite.

Le bombardement électronique sert à exciter les atomes dans l'état 2S, mais il a aussi pour effet de dévier la direction du jet et d'introduire dans celui-ci une certaine dispersion. Cette déviation est très utile car elle permet d'aligner le jet de métastables avec le faisceau laser (voir paragraphe 3.3.1).

La cinématique du bombardement électronique est montrée sur la figure 3.4. Le maximum d'efficacité de l'excitation est obtenu pour une énergie supérieure au seuil de 10,2 eV, à environ 11,6 eV. La figure 3.5 montre la section efficace d'excitation en fonction de l'énergie de l'électron incident [3.5]. Le maximum de cette courbe vaut $0,168 \pi a_0^2$ (a_0 rayon de Bohr), à 11,6 eV.

Après la collision, l'électron possède donc un surplus d'énergie d'environ 1,4 eV. Nous supposons que la direction du recul de l'électron est complètement aléatoire. Pour les atomes ayant la vitesse moyenne (voir paragraphe 3.1.8) un calcul élémentaire permet alors de déterminer l'angle θ de déviation du jet et sa dispersion $\delta\theta$ autour de cette direction. On obtient $\theta=20,7^\circ$ pour l'hydrogène ($\delta\theta = 7^\circ$) et $\theta = 15,8^\circ$ pour le deutérium ($\delta\theta = 5,7^\circ$).

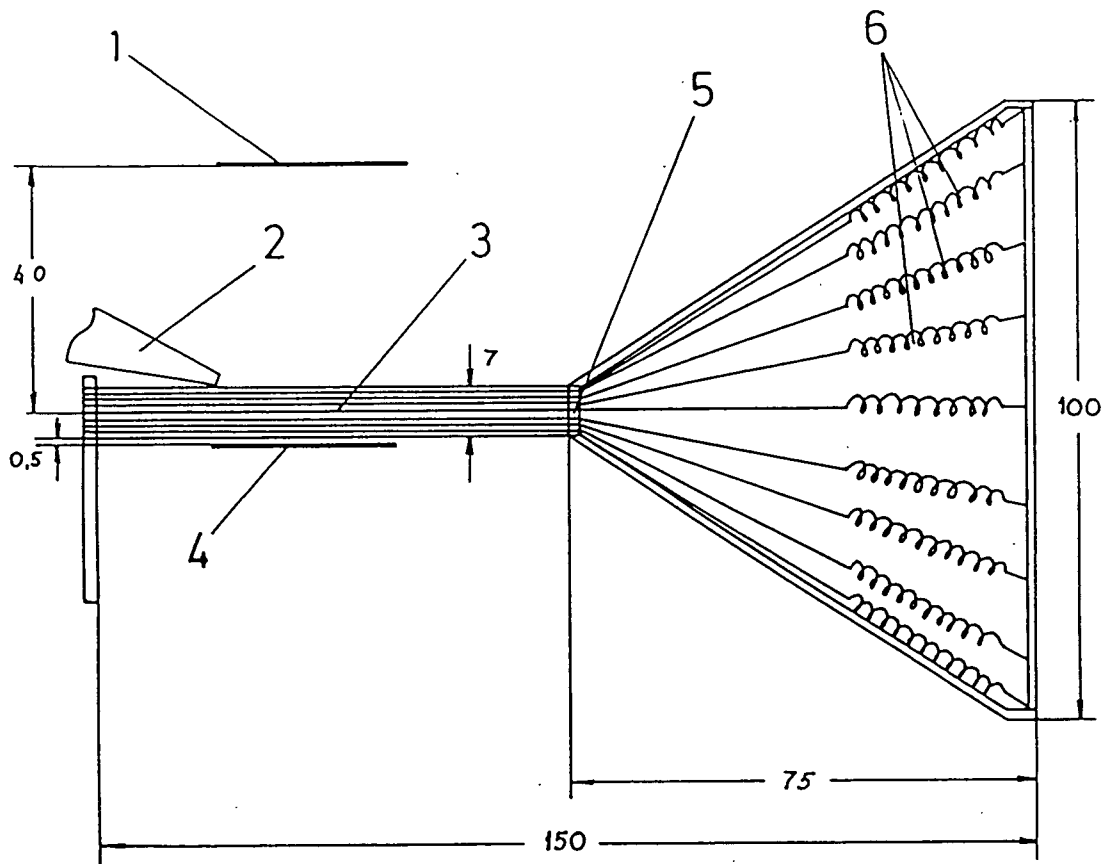


Figure 3.3 - Le bombardement électronique. 1) Plaque (+150 V) ; 2) buse, entrée du jet atomique ; 3) grille (0 V) ; 4) filament (-11,6 V) ; 5) premier diaphragme de collimation ; 6) ressorts.

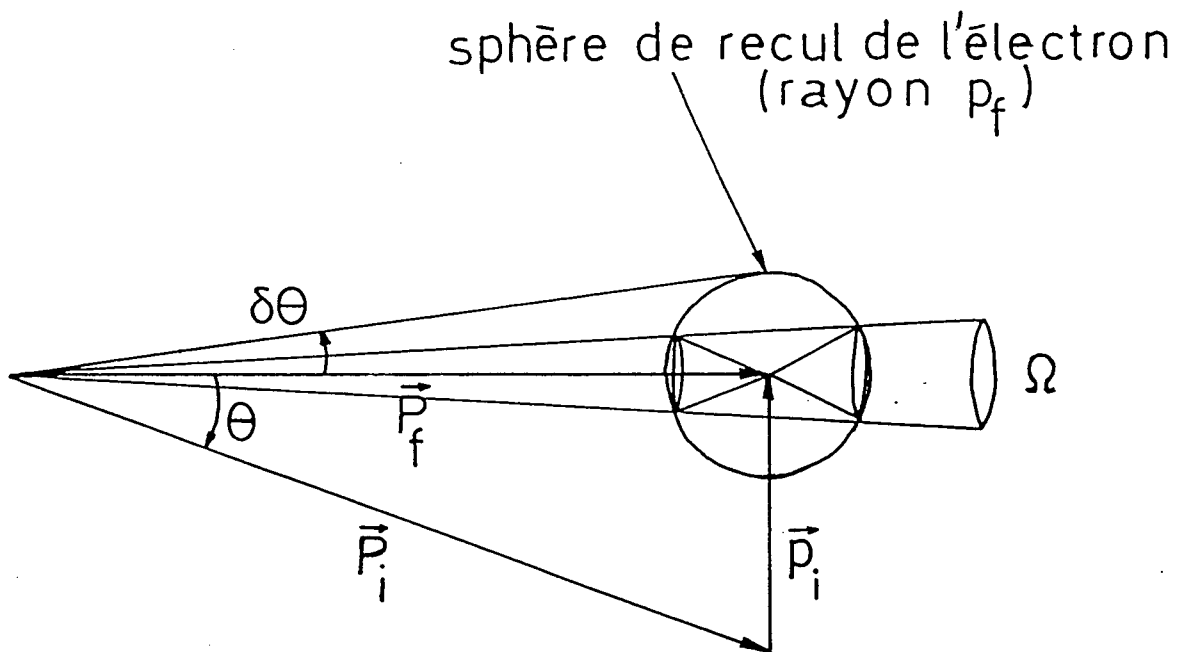


Figure 3.4 - Cinématique du bombardement électronique (cf. texte). P_i = impulsion initiale des atomes, p_i = impulsion initiale des électrons, P_f = impulsion finale des atomes, Ω = angle solide correspondant au deuxième diaphragme. $\theta = 20^\circ$.

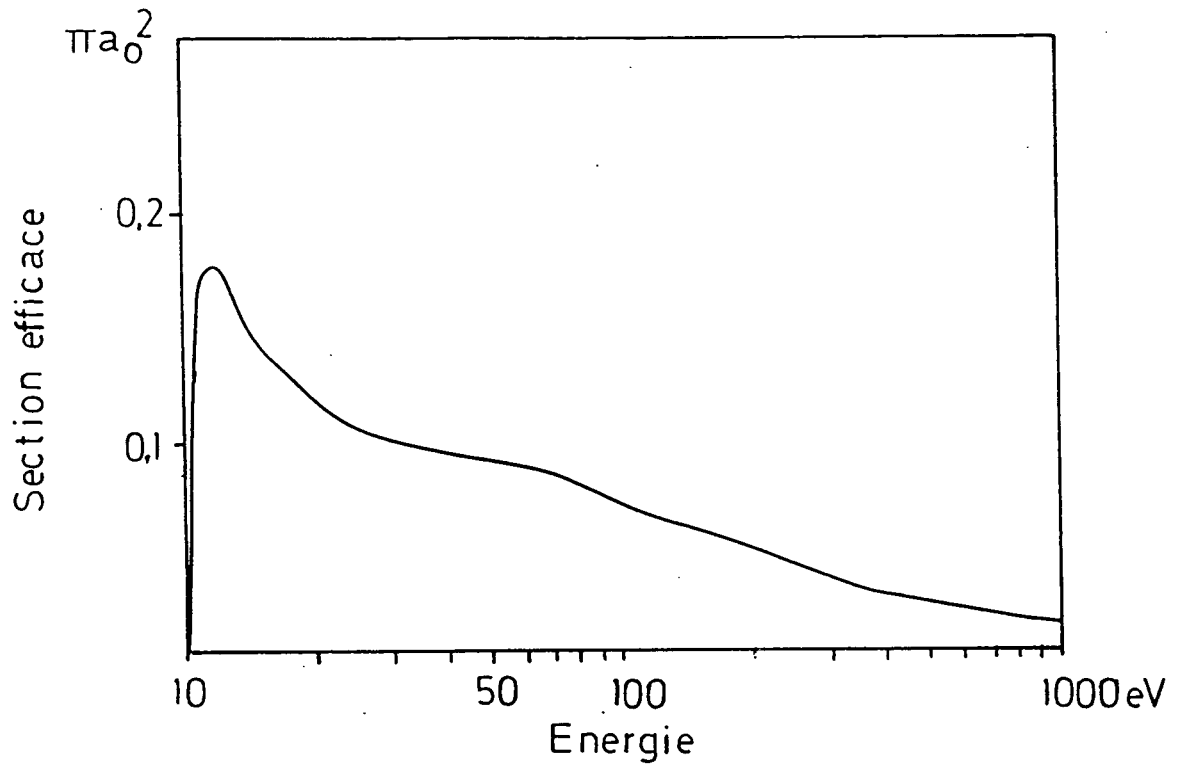


Figure 3.5 - Section efficace d'excitation du niveau 2S par collision électronique, réf. [3.5].

On voit donc que les atomes peuvent se distribuer entre 10° et 28° . Dans la géométrie du montage expérimental, cet angle est fixé à 20° .

3.1.3 - L'interaction avec le laser.

En quittant la première chambre à vide, le jet de métastables, après être collimaté par un diaphragme de 7 mm de diamètre, traverse deux autres chambres à vide où a lieu l'interaction avec le faisceau laser. La région d'interaction a une longueur totale de 956 mm. Ces deux chambres sont pompées par deux pompes cryogéniques (Air Liquide PCF 200 et Cryophysics Cryo-Torr 8) jusqu'à un vide de l'ordre de 10^{-7} mbar dans la première et 10^{-8} mbar dans la deuxième chambre. Les enceintes à vide sont en inox.

Les champs magnétiques sont réduits autant que possible par trois paires de bobines de Helmholtz (verticale, horizontale et longitudinale), prévues pour produire un champ constant à 1% près sur toute la région d'interaction et dont les courants ont été réglés de façon à annuler le champ magnétique détecté par une sonde à effet Hall au milieu de la région d'interaction.

Le blindage contre les champs électriques parasites est fait au moyen de plaques en inox peintes avec de l'*aquadag* (une solution colloïdale de graphite, très bonne conductrice de l'électricité). Ces plaques sont chauffées par des fils *thermocoax* disposés en spirale autour de l'ensemble; cela permet d'éviter la formation de dépôts isolants sur les plaques. Pour pouvoir chauffer le système au-delà de 100°C , il a été nécessaire d'installer au dessus des pompes cryogéniques des baffles refroidis à l'eau afin d'éviter une surchauffe des têtes de pompes. On peut ainsi travailler à des températures d'environ 160°C .

Il est très difficile de mesurer les champs électriques résiduels. Néanmoins, on peut donner une limite supérieure à leur valeur d'après nos observations des transitions vers des niveaux de Rydberg plus excités ($n=20$). Cela nous a permis d'évaluer cette limite à 2 mV/cm, comme on le verra dans le chapitre VI.

Après avoir interagi avec le rayonnement laser, les atomes métastables sont à nouveau collimatés par un diaphragme de 7 mm de diamètre et passent dans une quatrième chambre où ils sont détectés.

3.1.4 - Le système de détection des métastables.

Le système de détection utilisé dans notre montage, montré sur la figure 3.6, utilise le quenching des atomes métastables par un champ électrique. Dans la quatrième chambre, sont montées deux électrodes entre lesquelles on applique une différence de potentiel. Le champ électrique ainsi produit (qui est parallèle au jet) mélange l'état 2S avec l'état 2P et celui-ci se désexcite par émission d'un photon Lyman- α . Ce photon est alors détecté par un des deux photomultiplicateurs (PM) (Hamamatsu R1459) montés de chaque côté des électrodes, de part et d'autre du jet. Pour maximiser l'angle solide de détection, les électrodes sont constituées chacune de l'enroulement d'un fil d'inox, de façon à former une grille permettant aux photons d'atteindre les PM.

Entre les deux électrodes de quenching, le champ électrique est donné par [3.6, tome II, p. 285] :

$$E(x) = \frac{V}{a} \frac{1}{\text{ch}(\pi x/a)}$$

où V est la différence de potentiel et a la distance entre les électrodes. Pour l'état 2S, le taux de quenching est donné par $\Gamma = 2780 E^2 \text{ s}^{-1}$, avec E mesuré en V/cm. Pour un atome métastable qui traverse la région de quenching avec la vitesse v , la probabilité de quenching est

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} 2780 E^2(x) \frac{dx}{v} = \alpha V^2$$

avec $\alpha = 1770/(av)$.

Le signal détecté est alors

$$S = 1 - \exp(-\alpha V^2).$$

La figure 3.7 montre la courbe obtenue dans notre expérience pour S en fonction de V . On constate un excellent accord avec la théorie. On peut extraire de cette courbe la valeur expérimentale de α : $8,19 \times 10^{-3} \text{ V}^{-2}$ et en déduire un ordre de grandeur de la vitesse moyenne des atomes : 3,09 km/s.

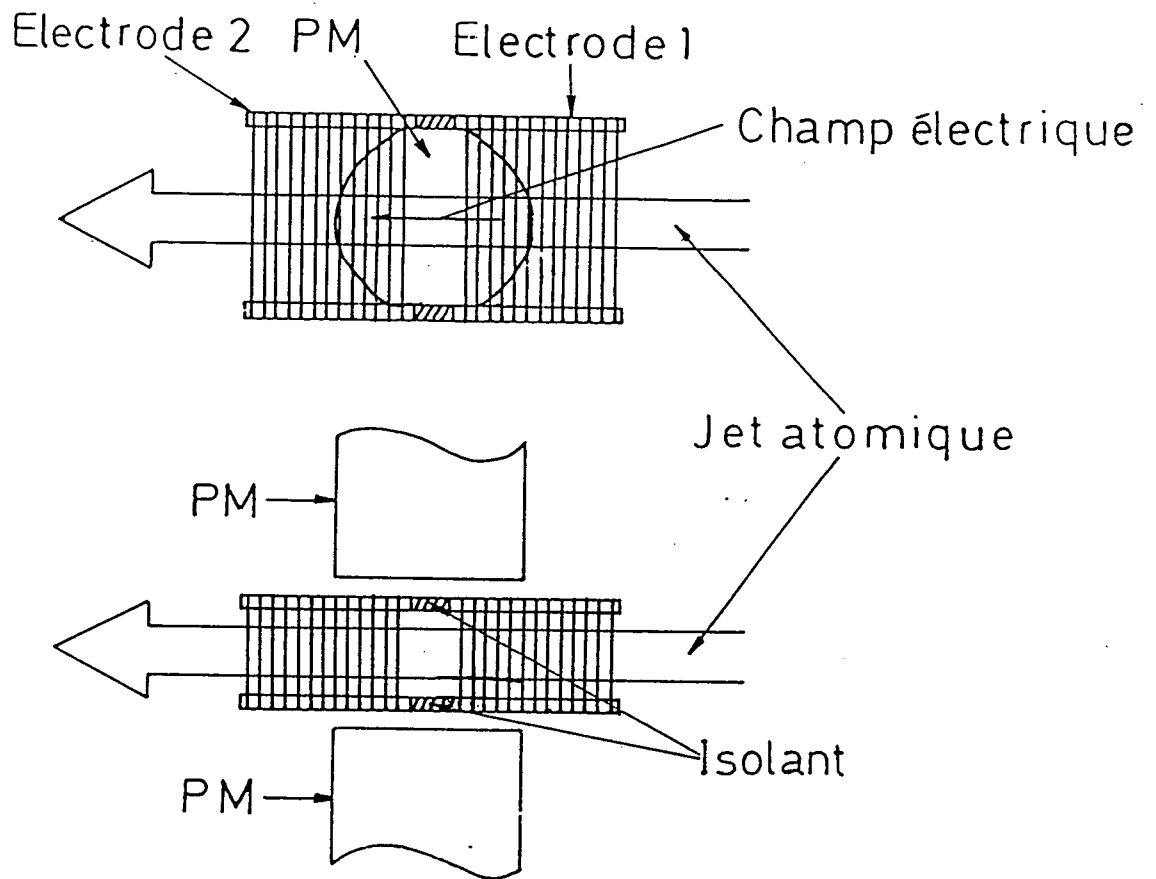


Figure 3.6 - Système de détection des métastables.

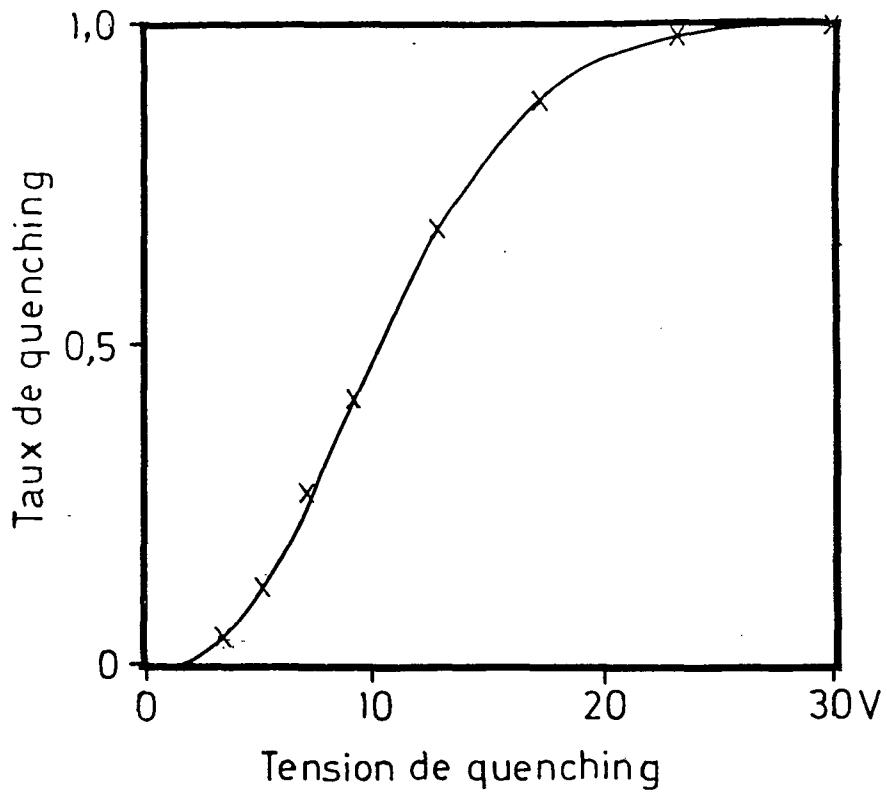


Figure 3.7 - Points expérimentaux et courbe théorique (cf. texte) pour le taux de quenching en fonction de la tension appliquée aux électrodes de quenching.

Comme les deux PM n'ont pas le même gain et peuvent aussi être placés à des distances légèrement différentes par rapport au jet, on a ajusté les tensions d'alimentation de chaque PM de façon à ce qu'ils contribuent également au signal total. De cette façon, tous les photons détectés ont le même "poids" et le bruit relatif total est divisé par $\sqrt{2}$ par rapport au bruit individuel sur un seul PM. Pour cela on a branché les PM selon le schéma montré sur la figure 3.8. On détecte le signal sur les bornes haute tension et on filtre le continu au moyen des condensateurs. Pour avoir un signal AC qui puisse traverser les condensateurs on doit moduler un paramètre; cela peut être soit la tension de quenching, cas où l'on détecte un signal proportionnel au nombre de métastables, soit la fréquence laser (on détecte alors un signal proportionnel à la dérivée du nombre de métastables par rapport à cette fréquence).

Le signal de métastables (proportionnel au flux d'atomes) est obtenu en appliquant aux électrodes de quenching une différence de potentiel de modulée par un signal carré (entre 0 et 60 V) à 830 Hz, et le signal produit par les PM est analysé à la même fréquence par une détection synchrone (ATNE ADS2). Ce signal est proportionnel au flux de métastables.

Avec la configuration montrée ci-dessus, on peut déterminer le rapport entre le signal de la détection synchrone et le flux de métastables. Supposons qu'on ait un signal de 500 μ V sur la détection synchrone. Celle-ci mesure le signal en en faisant le produit avec un créneau carré dont la fréquence est celle de la référence (la fréquence de modulation du quenching) et en le filtrant ensuite. Cela donne alors un signal rms qui est la moitié de la valeur moyenne initiale, qui est donc 1 mV. La résistance de charge étant 100 k Ω , le courant correspondant est 10^{-8} A. Le gain du PM est environ 6×10^6 à sa tension de fonctionnement. Le flux de photo-électrons est ainsi :

$$\frac{1 \times 10^{-8}}{1,6 \times 10^{-19} \times 6 \times 10^6} \approx 10^4 \text{ s}^{-1}.$$

L'angle solide de détection pour un PM est 0,3 et le rendement quantique 0,06. Le flux d'atomes métastables détectés est alors

$$\frac{10^4}{0,3 \times 0,06} \approx 5 \times 10^5 \text{ s}^{-1}.$$

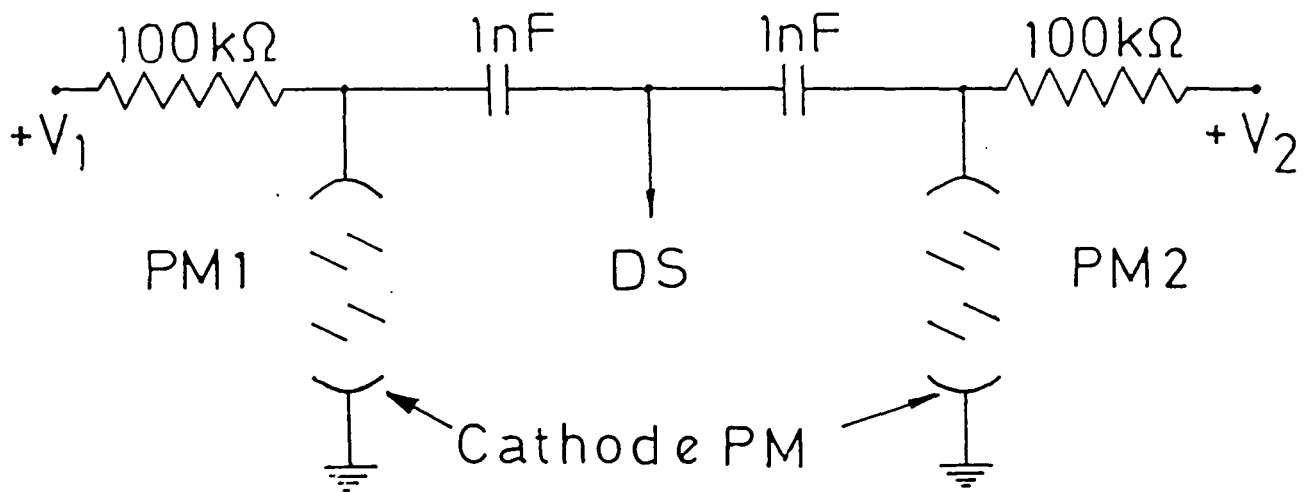


Figure 3.8 - Schéma du montage pour l'obtention du signal atomique. V_1 et V_2 : tensions (positives) d'alimentation des photomultiplicateurs ; DS : entrée de la détection synchrone.

Dans de bonnes conditions, on a des signaux de métastables de l'ordre de 2 mV. On détecte alors environ 2×10^6 atomes métastables par seconde. Compte tenu de la vitesse des atomes (3×10^3 m/s), on peut calculer que cela correspond à une densité de 17 atomes métastables par cm^3 (!) ou à une pression de 7×10^{-16} mbar.

En présence du jet atomique, la pression dans la première chambre d'interaction est de 2×10^{-6} mbar (comparée à 10^{-7} mbar en l'absence du jet). Si l'on attribue cette pression aux atomes dans l'état 1S et si l'on admet qu'ils sont distribués de façon isotrope, on peut calculer une densité de 5×10^{10} atomes 1S/ cm^3 , soit, dans le jet, environ 3×10^9 atomes dans l'état 1S pour un atome dans l'état 2S.

3.1.5. - Influence des divers paramètres sur le nombre de métastables.

Quand on met en route le jet atomique, on dispose de plusieurs paramètres susceptibles d'être réglés : la fréquence de la décharge rf, le flux d'hydrogène (ou de deuterium), la tension du filament, la tension de la grille, la distance entre le filament et la grille et la tension de la plaque. Le nombre de métastables obtenu est sensible à tous ces paramètres et présente un maximum relativement étroit en fonction de chacun d'eux (à l'exception de la tension de la plaque). On les a réglés pour une efficacité maximale de production de métastables.

La figure 3.9 montre la dépendance du nombre de métastables avec la tension grille-filament (énergie des électrons). On observe une montée relativement rapide au voisinage du seuil et la présence d'un pic autour de la tension correspondant à la section efficace d'excitation maximale (11,6 V, voir figure 3.5). Le deuxième pic, plus petit, présent sur la courbe est dû aux processus moléculaires directs, c'est-à-dire à des molécules dissociées par le bombardement électronique avec production d'atomes métastables. La courbe (a) donne le nombre de métastables dans les conditions normales de fonctionnement. La courbe (b) donne ce nombre divisé par le courant. La courbe (c) montre le nombre de métastables en absence de la décharge rf. direct. La différence entre les deux courbes (a) et (c) permet d'évaluer l'efficacité de la dissociation moléculaire à environ 50%. Les courbes (a) et (b) sont très semblables à celles observées par Lamb et Retherford (figure 3.10) dans leur expérience classique [3.7]. On trouve dans cette référence une discussion très

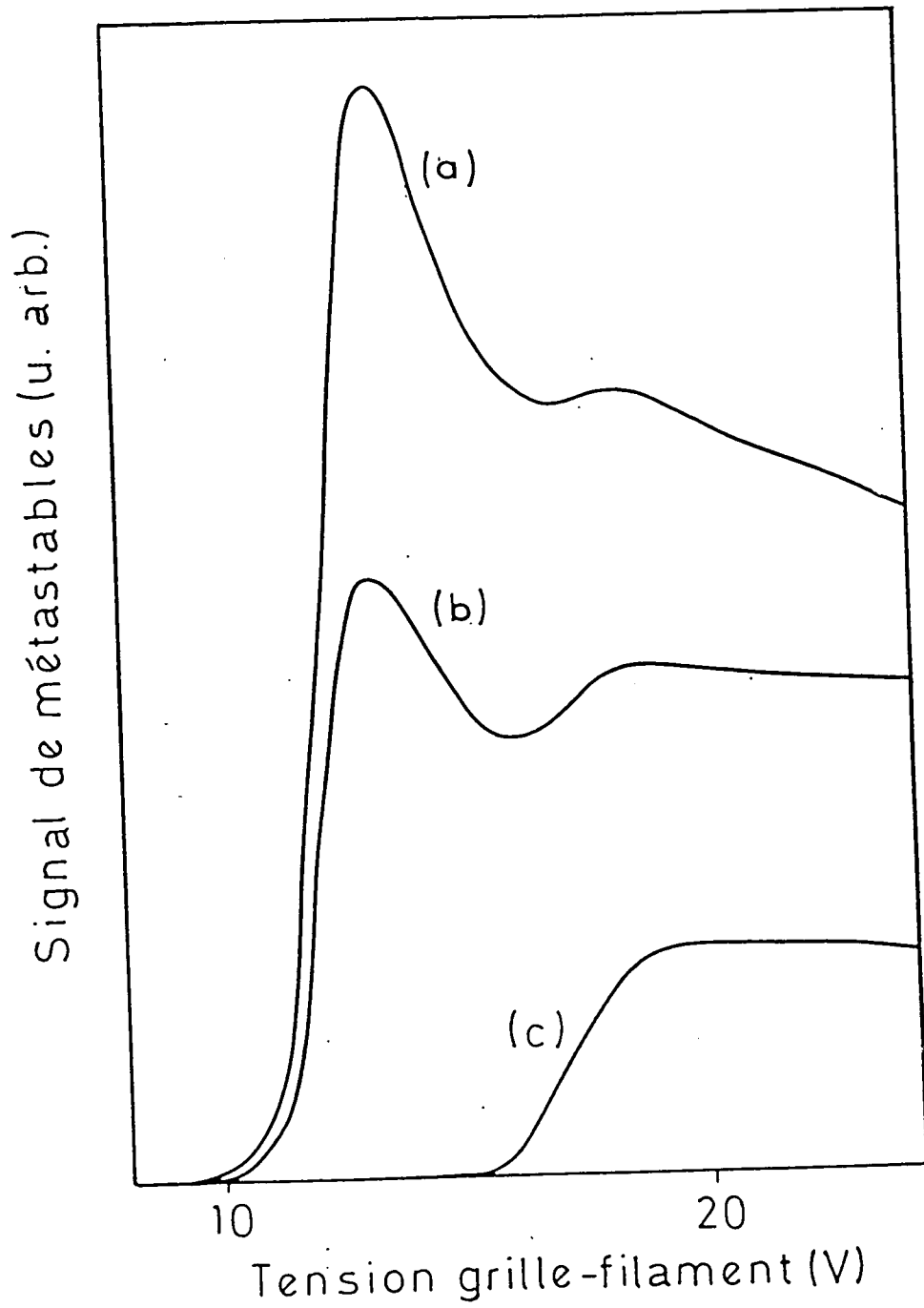


Figure 3.9 - Courbes expérimentales pour le flux de métastables en fonction de la tension filament-grille. (a) Décharge rf en route ; (b) courbe (a) divisé par le courant électronique ; (c) décharge rf éteinte.

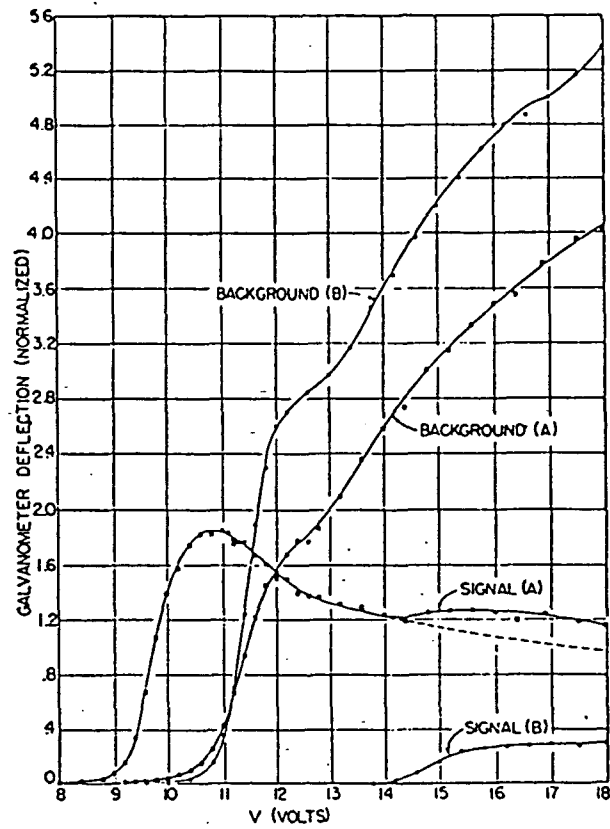


Figure 3.10 - Courbes expérimentales correspondant [signal (A) et signal (B)] à celles de la fig. 3.9, obtenues par Lamb et Retherford, réf. [3.7].

complète des effets parasites sur le bombardement électronique.

La figure 3.9. montre que la tension grille-filament est imposée : le pic étant assez étroit, le nombre de métastables est très sensible au réglage de cette tension au maximum de la courbe. Le courant électronique, par contre, est déterminé alors par la distance grille-filament. Cette distance ne peut être ni trop petite, ce qui produirait des court-circuits en plus des importants effets de charge d'espace que l'on verra plus loin, ni trop grande, ce qui, en réduisant trop le courant, réduirait le nombre de métastables. On voit donc qu'il y a une valeur optimale pour cette distance.

Il est intéressant de discuter plus en détail les effets de charge d'espace sur le bombardement électronique. Traiter ce problème en toute généralité, c'est-à-dire avec la vraie géométrie tridimensionnelle du montage, est très compliqué, et l'on se contentera donc d'un modèle simplifié, unidimensionnel, mais capable de donner une idée de la physique et des ordres de grandeur. Pour ne pas surcharger l'exposé, on a résumé les détails mathématiques de ce calcul dans l'Appendice II.

Nous nous intéressons ici à l'effet de la charge d'espace sur le mouvement des électrons dans la région de bombardement. Le filament est représenté par un plan infini et la grille (cylindrique) par deux plans infinis parallèles entre eux et parallèles au plan-filament (figure 3.11). La distance entre le filament et le premier plan-grille (région I) est d , et la distance entre les deux plans-grille (région II) est D , égale au diamètre de la grille (7 mm). On supposera que les deux plans-grille sont à une tension fixe U_g par rapport au filament, et qu'une densité de courant constante j traverse les trois plans (c'est-à-dire, qu'aucun électron ne fait demi-tour "réfléchi" par l'un des plans).

Dans l'appendice II, on montre que, à cause des effets de charge d'espace, le potentiel dans la région de bombardement électronique a la forme montrée sur la figure 3.11. On remarque que le potentiel de charge d'espace dans la grille freine les électrons, diminuant ainsi leur énergie cinétique. Cela se manifeste sur la courbe de production de métastables (figure 3.9) par un déplacement du maximum vers les tensions plus élevées que le maximum théorique de 11,6 V. Ce déplacement, dans nos conditions expérimentales, est de 1 V, ce qui donne l'ordre de grandeur de $U_g - U_{min}$. On a observé aussi, en

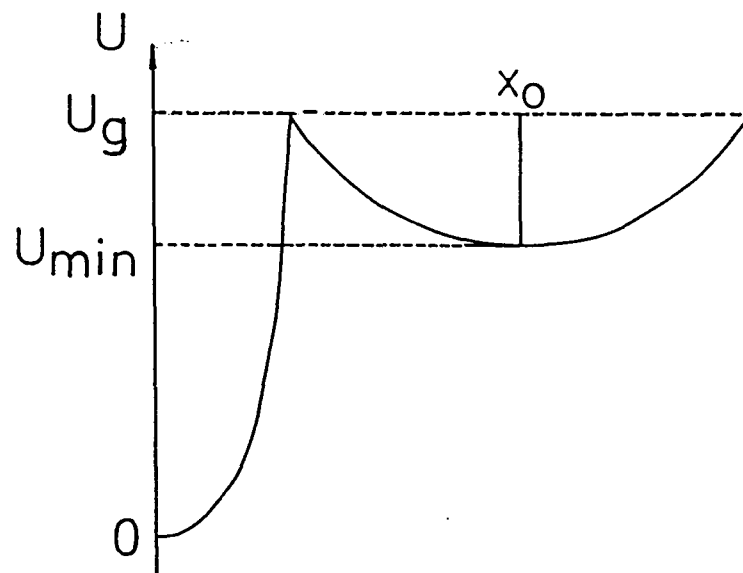
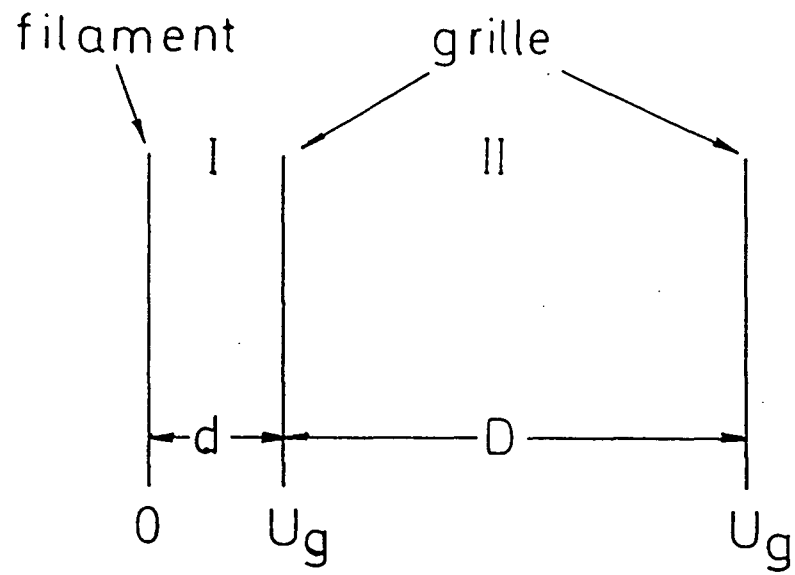


Figure 3.11 - Potentiel généré dans la région de bombardement électronique par la charge d'espace (cf. texte).

augmentant la distance filament-grille, que ce déplacement se réduit progressivement, tendant vers la valeur théorique de 11,6 V (au prix, bien entendu, d'une diminution du nombre de métastables).

Dans nos conditions expérimentales, on observe un courant de plaque de 4 mA, et une densité de courant filament-grille de 2 mA/cm². La distance filament-grille est $d = 0,5$ mm.

3.1.6 - Calcul du nombre de métastables.

On évaluera maintenant l'efficacité du système de production de métastables. La probabilité d'excitation est :

$$P_{exc} = \sigma_{exc} \frac{j}{v_e q} v_r \frac{D}{v \sin\theta} \quad (3.1)$$

où σ_{exc} est la section efficace d'excitation ($0,17 \pi a_0^2$), j la densité de courant (2 mA/cm²), v_e la vitesse d'incidence des électrons, v_r la vitesse relative des électrons par rapport aux atomes (qui est pratiquement identique à la vitesse des électrons, car la vitesse des atomes est 10^3 fois plus petite) et $D/(v \sin\theta)$ le temps de transit des atomes dans la grille (7×10^{-6} s en moyenne). Avec ces valeurs, on peut calculer une probabilité d'excitation associée à la vitesse moyenne, $P_{exc}(\langle v \rangle) = 1,3 \times 10^{-6}$.

Néanmoins, ce qui nous intéresse ce sont les atomes excités qui parviennent à la région de détection; pour cela il faut non seulement qu'ils soient excités mais aussi qu'ils puissent traverser les deux diaphragmes de collimation. Ecrivons cette probabilité sous la forme :

$$P = P_{exc}(\langle v \rangle) P_{\Omega} \quad (3.2)$$

Si tous les atomes avaient la même vitesse $v = \langle v \rangle$, P_{Ω} correspondrait simplement à probabilité pour qu'un atome excité se trouve dans l'angle solide Ω correspondant au deuxième diaphragme. Un calcul approché de cette dernière probabilité peut être obtenu en considérant l'intersection du cône d'angle solide Ω correspondant au 2ème diaphragme avec la sphère de dispersion des électrons. Cette intersection vaut (cf. figure 3.3)

$$2 \frac{p_f^2}{p_f^2} \frac{\Omega}{4\pi} = 2 \frac{\Omega}{4\pi} \frac{1}{(\delta\theta)^2} \approx 4 \times 10^{-4}.$$

Revenons au problème plus général, où les atomes n'ont pas tous la même vitesse. On a réalisé une simulation numérique où l'on a calculé la direction de mouvement et la vitesse des atomes après le bombardement électronique. On y suppose que les électrons incidents ont tous la même impulsion (énergie correspondant au maximum de la section d'excitation à 11,6 V et vitesse perpendiculaire à l'axe du montage, voir figure 3.3) et que la direction du recul, dans le référentiel du centre de masse, est complètement aléatoire. Les atomes ^{15}S sont supposés avoir une vitesse de direction donnée $\theta=20^\circ$, et la distribution de vitesse d'un jet thermique [3.8, p. 258], proportionnelle à

$$f(v) = v^3 \exp - \frac{v^2}{2\sigma^2}$$

où v est la vitesse des atomes. La mesure du paramètre σ est décrite dans le paragraphe 3.1.8. On peut écrire la probabilité P , éq. (3.2), comme

$$P = \alpha \frac{\int_{\Omega} dv \frac{1}{v} f(v)}{\int dv f(v)}$$

où α peut être déduit de l'équation (3.1) : $\alpha = (\sigma_{exc} jD / q \sin\theta)$ (on a pris $v_r = v_e$) et l'intégrale du numérateur porte sur les atomes qui, après la collision avec les électrons, sont dans l'angle solide Ω correspondant au 2ème diaphragme. Notons que l'intégrale de normalisation dans le dénominateur porte *sur tous les atomes qui subissent le bombardement électronique*. Si l'on change la variable d'intégration en $x = (v/\langle v \rangle)$, on aura

$$P = \frac{\alpha}{\langle v \rangle} \frac{\int_{\Omega} dx \frac{1}{x} f(x)}{\int dx f(x)}$$

Pour interpréter cette équation, divisons le numérateur et le

dénominateur par

$$I_{\Omega} = \int_{\Omega} dx f(x) = \begin{cases} \text{nombre total d'atomes qui} \\ \text{après la collision passent} \\ \text{dans le 2ème diaphragme} \end{cases}$$

on obtient au numérateur exactement la moyenne de $1/x$ pour les atomes qui passent dans le 2ème diaphragme. L'autre facteur peut être écrit comme I_{Ω}/I (I = intégrale au dénominateur = nombre total d'atomes) et peut être interprété comme la probabilité pour qu'un atome (excité ou pas) tombe dans le 2ème diaphragme après collision avec un électron. On a ainsi

$$P = \frac{\alpha}{\langle v \rangle} \frac{I_{\Omega}}{I} \frac{1}{\langle x^{-1} \rangle_{\Omega}}$$

et donc

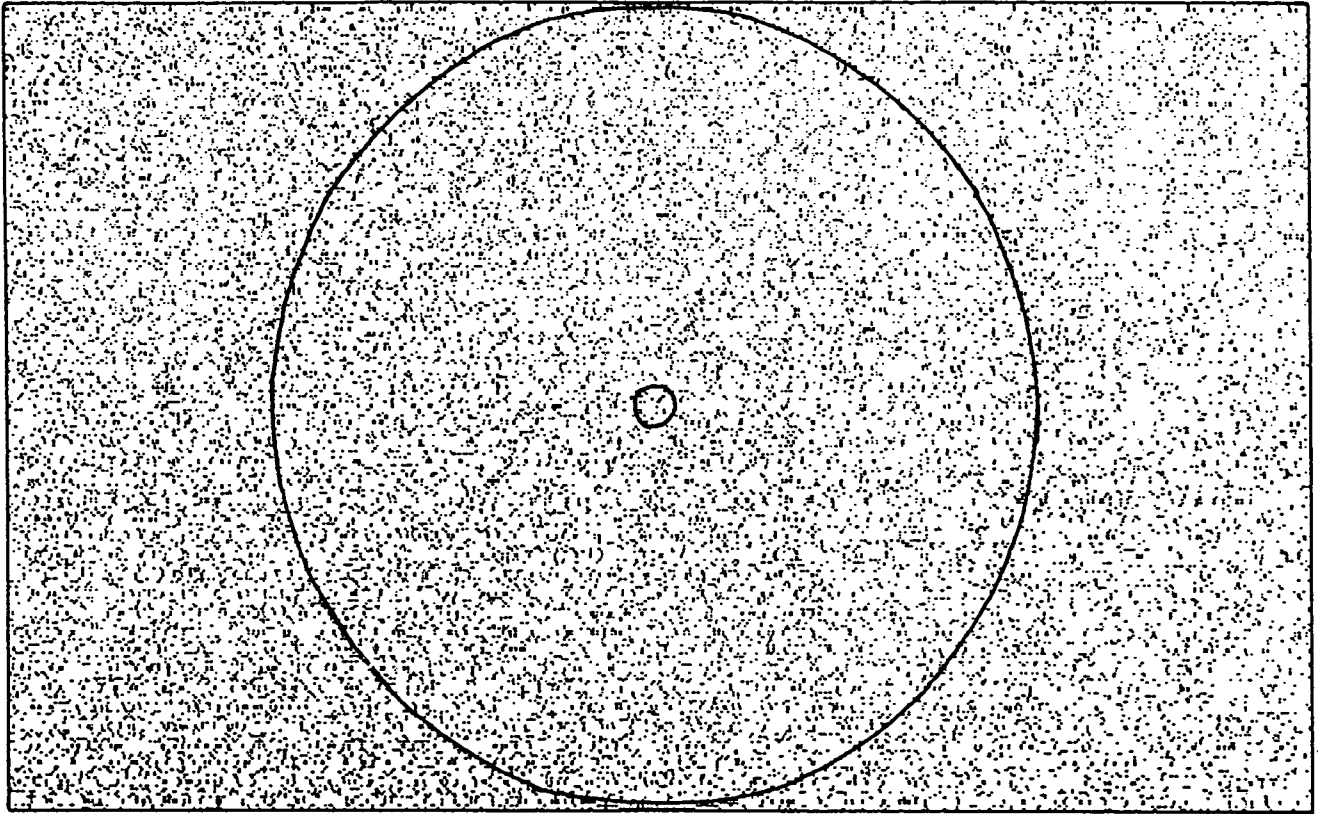
$$P_{\Omega} = (I_{\Omega}/I) \langle x^{-1} \rangle_{\Omega}.$$

Le résultat de la simulation numérique est montré sur la figure 3.12, où les deux cercles représentent la projection des deux diaphragmes de collimation (voir paragraphe 3.1.3) sur un plan, vus par un atome depuis la région de bombardement électronique. Le deuxième diaphragme, plus distant que le premier, est donc représenté plus petit. On a trouvé $P_{\Omega} \approx 2,2 \times 10^{-4}$. On a aussi calculé la probabilité pour qu'un atome tombe dans le premier ou dans le deuxième (I_{Ω}/I) diaphragme. Cette dernière vaut $2,4 \times 10^{-4}$, assez proche de P_{Ω} . Cela s'explique du point de vue physique par le fait que le diaphragme sélectionne les atomes dont la vitesse est proche de la vitesse moyenne (donc $\langle x^{-1} \rangle_{\Omega} \approx 1$). Avec ce résultat, on peut déterminer la probabilité de détection.

On obtient ainsi :

$$P \approx 3 \times 10^{-10}.$$

Le flux d'atomes dans l'état fondamental qui rentre dans la région du bombardement électronique a été calculé au paragraphe 3.1.2 et vaut environ 4×10^{18} atomes/s. On doit alors s'attendre à détecter environ $1,2 \times 10^9$ atomes/s. Cette valeur est 600 fois plus grande que celle qu'on observe expérimentalement (voir paragraphe 3.1.4).



ATOMES UTILES 1e DIA: 0.081
 ATOMES UTILES 2e DIA: 0.00024

Prob. eff.: 0.078
 Prob. eff.: 0.00022
 N° de POINTS: 150000

$$P_{\Omega} = 2,2 \times 10^{-4}$$

$$I_{\Omega} / I = 2,4 \times 10^{-4}$$

Figure 3.12 - Résultats de la simulation numérique de la distribution spatiale des atomes après le bombardement électronique (cf. texte).

Essayons d'indiquer quelques effets possibles responsables de ce désaccord.

1) *Dissociation moléculaire imparfaite.* Comme on l'a vu plus haut, l'efficacité de la dissociation moléculaire est d'environ 50%, ce qui n'a pas été considéré dans le calcul ci-dessus.

2) *Quenching par des collisions atomiques ou moléculaires.* On peut déduire l'ordre de grandeur du facteur de quenching en étudiant la variation du nombre de métastables avec la pression dans la chambre où se fait le bombardement électronique. Cette variation doit être décrite par une courbe de la forme $p e^{-\Gamma p}$, où p est la pression. Le premier facteur tient compte de la dépendance du flux d'atomes avec la pression ; le facteur exponentiel tient compte du quenching par pression. La courbe expérimentale et son "fit" par la courbe ci-dessus est montrée sur la figure 3.13. On en déduit $\Gamma = 6,2 \times 10^3 \text{ mbar}^{-1}$. A une pression de $1,5 \times 10^{-4} \text{ mbar}$, on obtient un facteur de quenching $\approx 61\%$.

3) *Quenching des métastables par les collisions avec les électrons.* Un ordre de grandeur de la section efficace correspondante est donné dans la référence [3.9] : $6 \times 10^{-12} \text{ cm}^2$. Si l'on prend une densité de courant électronique de 2 mA/cm^2 on obtient un taux de quenching de

$$6 \times 10^{-12} \times \frac{2 \times 10^{-3}}{1,6 \times 10^{-19}} = 7,5 \times 10^4 \text{ s}^{-1}$$

Le temps de quenching, sur une distance de 1 cm, est de l'ordre de $3 \times 10^{-6} \text{ s}$, ce qui donne un facteur de quenching d'environ 20%.

4) *Quenching par le champ de charge d'espace.* Comme on a vu dans le paragraphe antérieur, la charge d'espace peut produire un potentiel parasite de l'ordre de 1 V sur une distance de 3,5 mm. Un champ de 2,8 V/cm, produirait un taux de quenching d'environ 15%.

5) *Quenching par le champ électrique résiduel dans la région de bombardement électronique (blindage imparfait des champs électriques par la grille, etc...).* Cet effet est difficile à évaluer à cause de la difficulté à

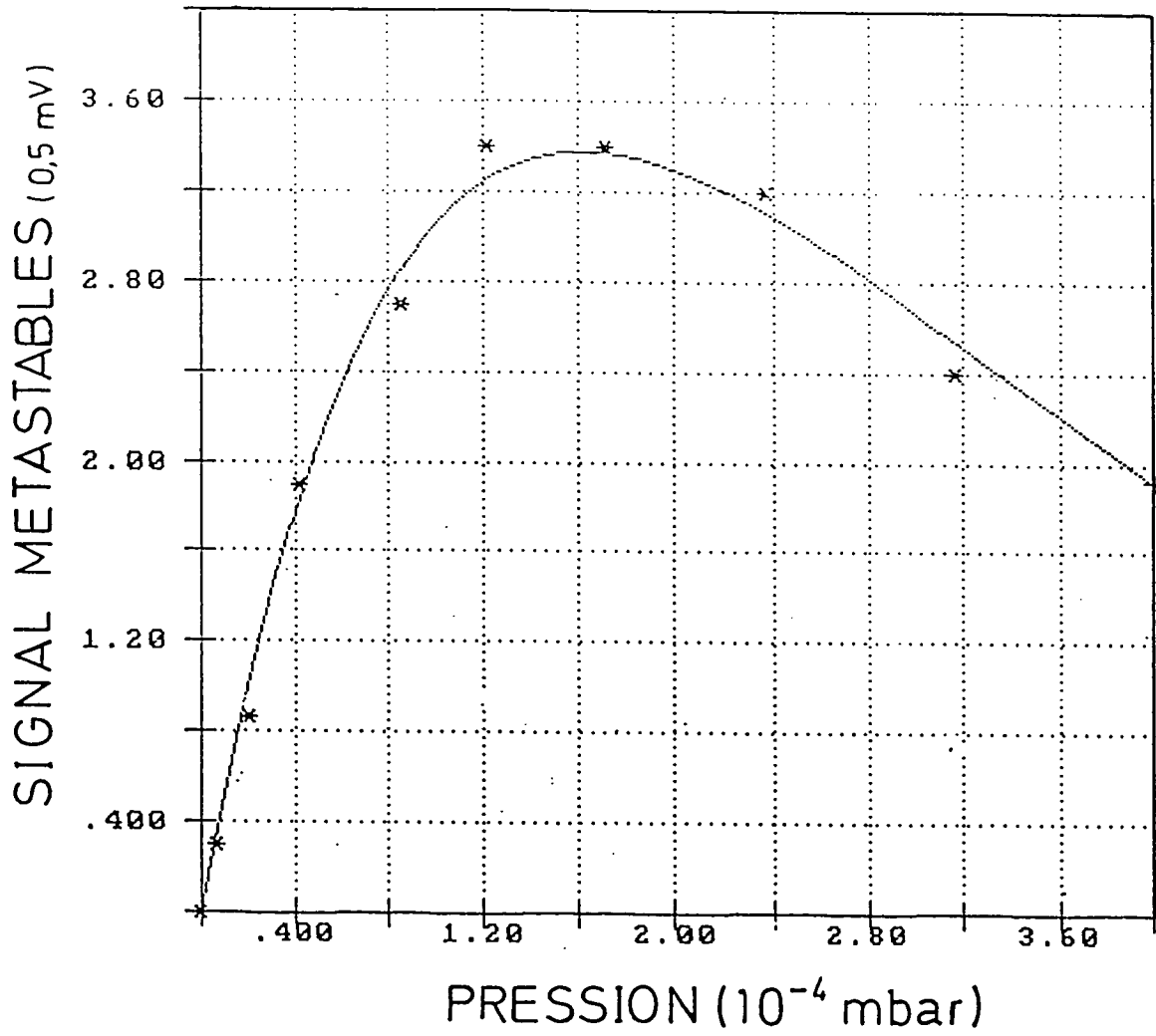


Figure 3.13 - Points expérimentaux et courbe théorique (cf. texte) pour le flux de métastables en fonction de la pression dans la première chambre.

déterminer exactement ces champs. On verra dans le chapitre VI que l'analyse des raies expérimentales suggère que seuls les atomes métastables produits dans une région proche de l'axe de la grille de diamètre de l'ordre de 3 mm survivent. Si l'on fait $D=3$ mm, la probabilité d'excitation sera réduite d'un facteur $(3/7)^2 \approx 0,18$.

En regroupant tous ces facteurs, on obtient un facteur total de quenching de 0,024, ce qui réduit le désaccord d'un facteur 600 à un facteur 15.

Le quenching résiduel peut être dû à deux facteurs dont il est difficile de calculer l'ordre de grandeur : le fait que les électrons provenant du filament ont une énergie mal définie (ce qui moyenne en quelque sorte la courbe d'excitation et empêche de se placer au maximum de la courbe de section efficace) et la déflexion d'atomes hors de la région de bombardement électronique par collision avec les fils de la grille.

3.1.7 - L'effet des collisions sur le temps de vie des métastables dans la région d'interaction avec le laser.

Il est intéressant de faire un calcul de l'ordre de grandeur de l'effet des collisions entre les atomes métastables et les atomes dans l'état fondamental dans le jet.

Nous n'avons pas trouvé de mesures de la section efficace de quenching (σ_{quen}) dans une collision $H(1S) + H(2S) \rightarrow H(1S) + H(1S)$. Des valeurs expérimentales existent pour des collisions avec des gaz rares [3.10] ou avec l'hydrogène moléculaire [3.10, 3.11]. Si l'on fait une extrapolation logarithmique à $Z = 1$ des données concernant les gaz rares, on trouve une section efficace de quenching de l'ordre de $530 a_0^2$. Pour l'hélium on a $\sigma_{\text{quen}} \approx 600 a_0^2$. Pour l'hydrogène moléculaire on a $\sigma_{\text{quen}} \approx 495 a_0^2$. Comme on fait ici simplement un calcul d'ordre de grandeur, on prendra $\sigma_{\text{quen}} \approx 500 a_0^2$. On voit aussi que, à ce niveau d'approximation, il est indifférent de considérer que les collisions se font avec des atomes dans l'état fondamental ou avec des molécules, car les sections efficaces sont presque égales.

On fera deux approximations supplémentaires : on prendra 3000 m/s comme vitesse relative des atomes 1S par rapport aux métastables (voir paragraphe suivant ; les valeurs de σ_{quen} données plus haut correspondent à cette vitesse) et on utilisera la valeur calculée dans le paragraphe 3.1.4 pour la densité d'atomes 1S : 5×10^{16} atomes/m³. Dans ces hypothèses, on obtient un taux de quenching de $\approx 200 \text{ s}^{-1}$. Cela correspond à un temps typique de collision de l'ordre de 5 ms, à comparer au temps de transit des atomes dans le faisceau laser (0,33 ms).

Cela prouve que l'effet des collisions sur l'élargissement des raies doit être négligeable dans notre expérience.

3.1.8 - Mesure de la distribution de vitesses des atomes métastables.

Pour calculer théoriquement les formes de raie (chapitre V) il est important de connaître la distribution de vitesses des atomes métastables dans le jet. On a mesuré cette distribution en étudiant l'absorption d'un photon Balmer- α (656 nm) par les métastables. Des profils typiques sont montrés sur la figure 3.14 dans le cas de l'hydrogène, pour différentes valeurs de la puissance du laser.

On verra par la suite que les atomes ont une dispersion de vitesses de l'ordre de 1,5 km/s (pour l'hydrogène). Cela correspond à un élargissement Doppler d'environ 2,3 GHz sur la transition Balmer- α . Comme la séparation de structure fine des composantes $2S_{1/2} - 3P_{1/2}$ et $2S_{1/2} - 3P_{3/2}$ est de 3,2 GHz, les profils montrés dans la figure 3.14 correspondent en fait à une superposition de ces deux composantes. Le laser fournit de 50 à 100 mW à cette longueur d'onde. Pour éviter d'avoir une trop grande saturation, on a atténué le faisceau laser d'un facteur 1000 au moyen de lames placées sur son trajet.

L'échelle de fréquences a été calibrée par comparaison avec la position des pics d'un Fabry-Perot très stable et dont la longueur est connue précisément (le *Fabry-Perot de référence*, voir paragraphe 3.2.4). Le faisceau laser a été haché par une roue dentée. On applique une tension de quenching continue et on détecte le signal de métastables, analysé à la fréquence de modulation du laser.

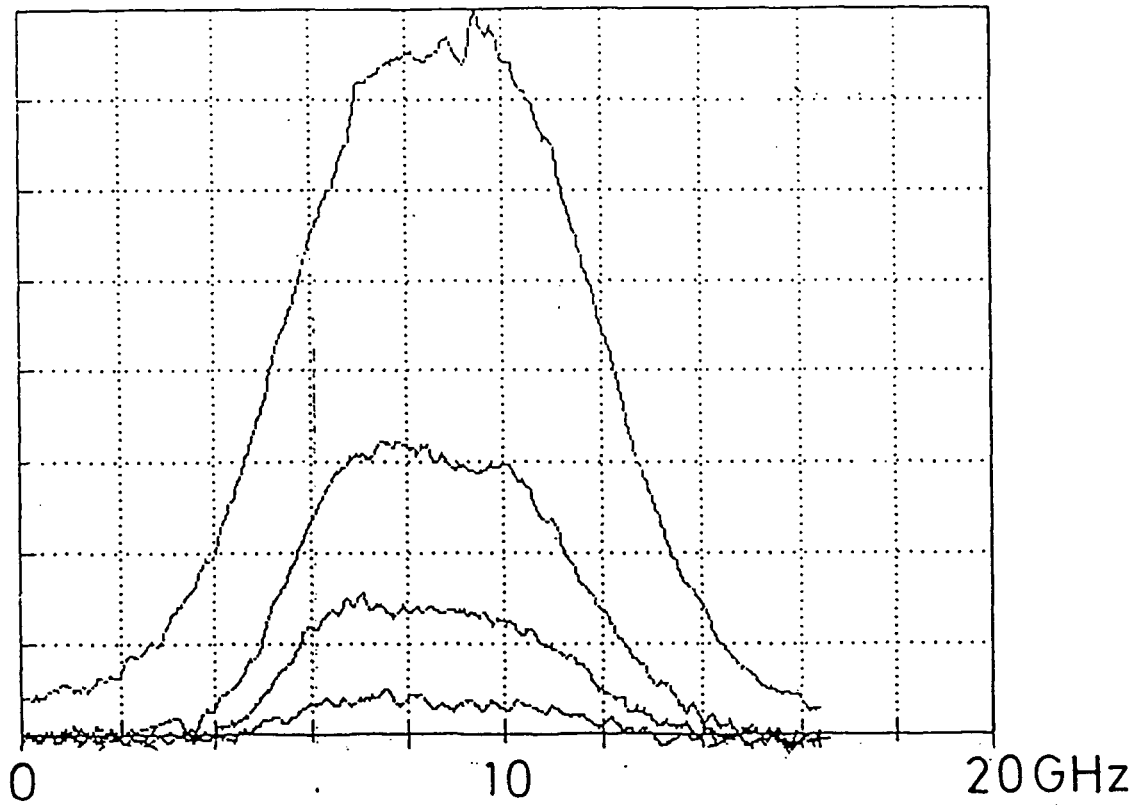


Figure 3.14 - Raies d'absorption à 1 photon Balmer- α pour différentes puissances lumineuses.

Pour interpréter les résultats, on a calculé numériquement les formes des raies théoriques :

$$F(\Omega) = A \int_0^{+\infty} dv f(v) \left(1 - \exp\left(-\frac{g(v, \Omega)}{v}\right) \right)$$

où

$$g(v, \Omega) = \frac{B}{\Gamma^2/4 + [\Omega - \Omega_1(1+\beta)]^2} + \frac{B/2}{\Gamma^2/4 + [\Omega - \Omega_2(1+\beta)]^2}$$

avec $\beta=v/c$, Ω_1 = fréquence de la transition vers $3P_{3/2}$, Ω_2 = fréquence de la transition vers $3P_{1/2}$, Γ = largeur de la transition; A et B sont des paramètres libres. Le facteur 1/2 dans le deuxième terme de $g(v, \Omega)$ tient compte de l'intensité relative des deux composantes de structure fine. La fonction $f(v)$ ci-dessus est la distribution de vitesses. Pour employer cette méthode de dépouillement, il est nécessaire de connaître la forme de cette distribution. Des distributions de ce genre sont connues, et sa forme générale est [3.12] :

$$f(v) = Nv^4 \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right)$$

où σ est une constante à déterminer et N une constante de normalisation. La constante σ peut être reliée à la température du jet par $\sigma = (kT/m)^{1/2}$.

On peut aisément comprendre l'origine physique de cette forme de distribution : on commence (après la décharge rf) avec un jet thermique dont la distribution de vitesses, comme l'on a vu au paragraphe 3.1.2, est

$$v^3 \exp\left(-\frac{v^2}{2\sigma^2}\right).$$

La probabilité d'excitation par bombardement électronique est proportionnelle au temps de transit des atomes devant le filament, ce qui introduit un facteur $1/v$ dans la distribution de vitesses. On a vu plus haut que le bombardement électronique produit aussi une dispersion angulaire des atomes, ce qui introduit un nouveau facteur v^2 . En regroupant tous ces

facteurs on obtient la distribution

$$v^4 \exp(-v^2/2\sigma^2).$$

La figure 3.15 montre un fit d'une des courbes expérimentales par la forme de raie indiquée ci-dessus.

Nous avons obtenu comme résultat final :

$$\begin{aligned} \sigma &= 1525 \pm 10 \text{ m/s pour l'hydrogène} \\ \sigma &= 983 \pm 10 \text{ m/s pour le deutérium.} \end{aligned}$$

On remarquera que le rapport σ (hydrogène)/ σ (deutérium) est de 1,55, tandis que le rapport entre les masses $(M_D/M_H)^{1/2}$ vaut $\sqrt{2} = 1,41$. La raison de cette discordance est la géométrie fixe du jet. En effet, comme on l'a déjà vu, l'angle de déviation par bombardement électronique est plus grand que l'angle optimal pour les atomes de deutérium ayant la vitesse moyenne. Cela privilégie donc les atomes de deutérium plus lents, qui sont davantage déviés par les collisions électroniques. La vitesse moyenne des atomes peut être calculée à partir de la distribution de vitesses donnée ci-dessus et vaut 2σ , soit 3,05 km/s pour l'hydrogène, en très bon accord avec la valeur trouvée au paragraphe 3.1.4 (3,09 km/s).

3.2 - Les lasers.

3.2.1. - La structure du laser à colorant.

Le rayonnement laser infrarouge utilisé pour exciter les atomes métastables est fourni par un laser à colorant conçu par François Biraben [3.13 - 3.15]. Il s'agit d'un laser en anneau, stabilisé en fonctionnement monomode. Le colorant utilisé est le LD700 et le laser de pompe est un laser à Kr⁺ (Spectra Physics 270 Exciter). Le laser à colorant peut fournir des puissances jusqu'à 1 W dans le domaine de longueurs d'onde considéré (730 à 780 nm). La cavité optique fait 1,70 m de long, ce qui correspond à un intervalle entre ordres de 176 MHz. La figure 3.16 montre un schéma de la cavité laser. Les miroirs M_1 et M_2 sont sphériques avec une distance focale $f=50$ mm. Les quatre autres miroirs sont plans. Le miroir M_p ($f=25$ mm) focalise le faisceau de pompe sur le jet de colorant. Tous les miroirs, à l'exception du miroir de sortie M_3 , ont un coefficient de réflexion maximum.

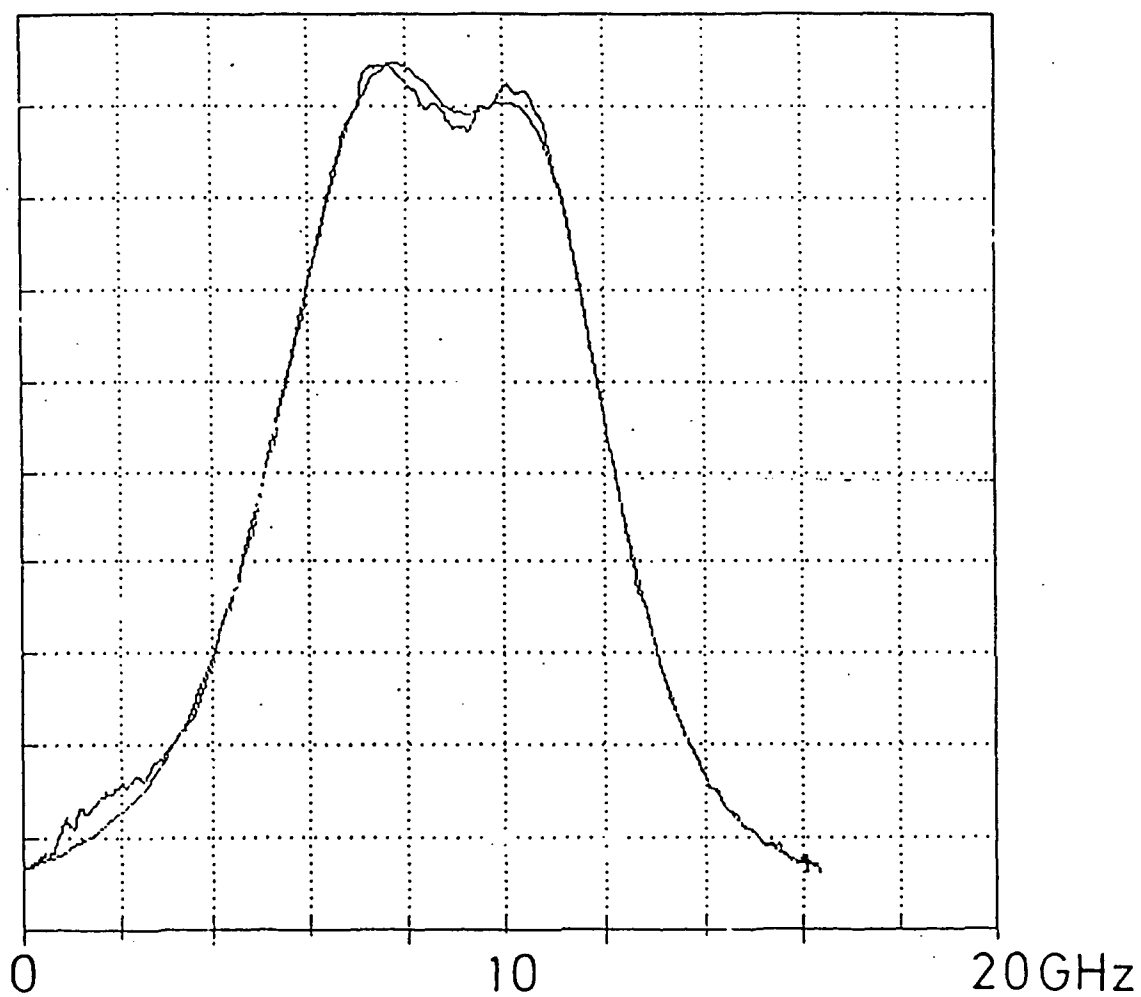


Figure 3.15 - "Fit" d'une raie par la courbe théorique (cf. texte).

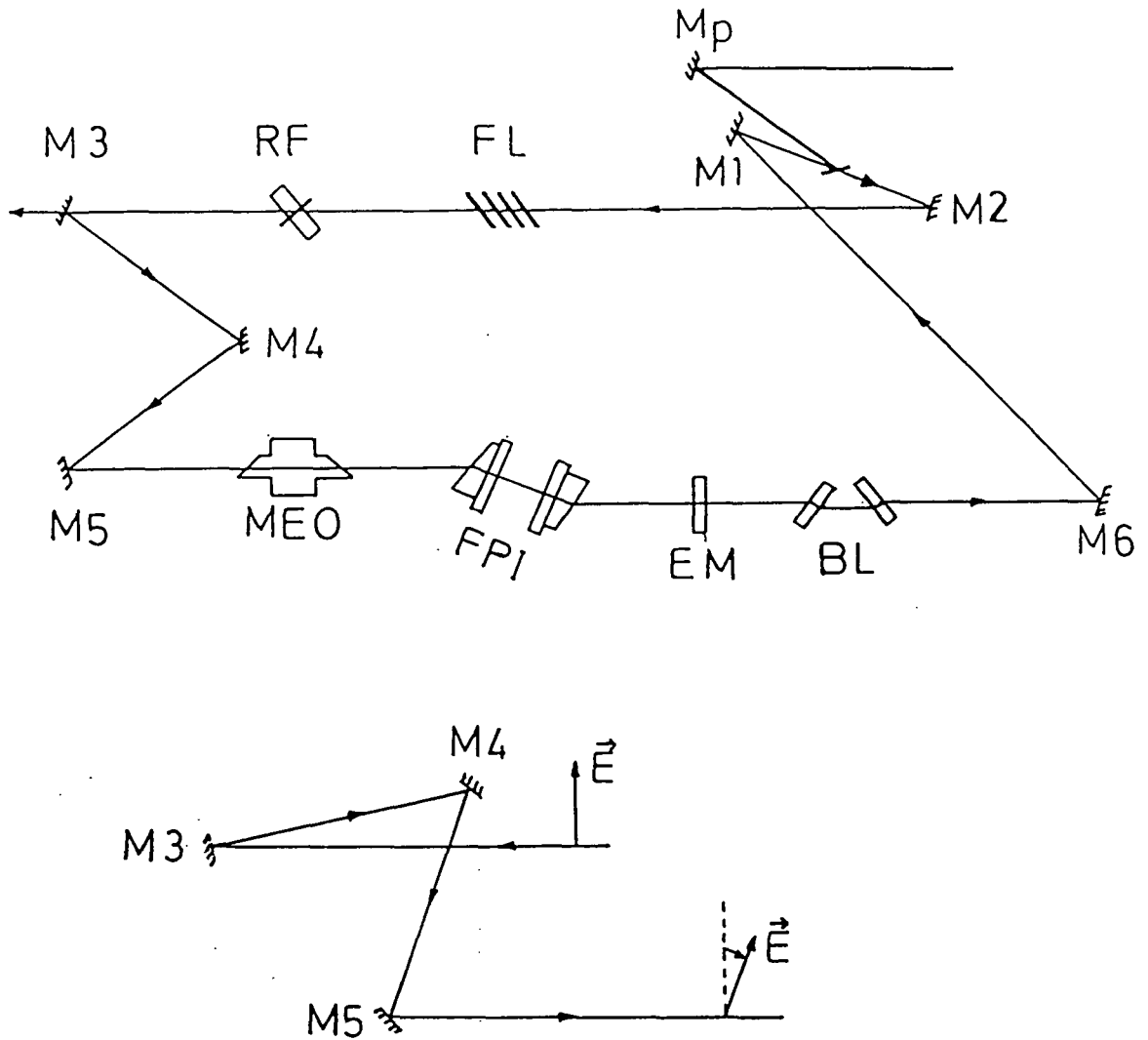


Figure 3.16 - Schéma de la cavité du laser à colorant (avec détail de la disposition des miroirs M3, M4 et M5, cf. texte). Mp : miroir de pompe ; FL : filtre de Lyot ; RF : rotateur de Faraday ; MEO : modulateur électro-optique ; FPI : Fabry-Perot intracavité ; EM : étalon mince ; BL : bilame.

Dans la cavité, on remarque l'existence de quatre systèmes : a) le système de sélection de longueur d'onde; b) le système unidirectionnel; c) le système de stabilisation monomode; d) des éléments utiles au balayage et à la stabilisation en fréquence du laser. Nous les décrirons séparément puis étudierons dans le paragraphe suivant la stabilisation en fréquence du laser.

a) La sélection de longueur d'onde est faite au moyen d'un filtre de Lyot (FL). Ce filtre de Lyot a été construit au laboratoire. Il comporte quatre lames d'épaisseurs croissantes dont les axes optiques sont parallèles. Pour qu'elles sélectionnent la même longueur d'onde, elles ont des épaisseurs multiples dans les rapports 1, 2, 4, et 16, la lame la plus mince ayant une épaisseur de 410 μm . Ce filtre de Lyot sélectionne une zone de longueur d'onde de 0,05 nm de large. L'orientation de l'ensemble des lames peut être variée à l'aide d'un système mécanique, permettant ainsi de changer la zone de longueur d'onde sélectionnée.

b) Dans un laser en anneau, le rayonnement peut être émis dans les deux sens de propagation, ce qui diminue la puissance disponible à la sortie. Pour éviter cela, le miroir M_4 (figure 3.16) est placé légèrement au-dessus du plan des quatre autres miroirs, de façon que l'ensemble des trois miroirs M_3 , M_4 et M_5 fasse légèrement tourner la polarisation de la lumière [3.14]. Cette rotation de polarisation a un sens qui dépend de la direction de propagation. On place d'autre part dans la cavité un rotateur de Faraday (RF) capable de corriger cette rotation pour un des sens de propagation. Comme la rotation induite par le rotateur de Faraday est indépendante du sens de propagation, elle augmente la rotation de la polarisation de la lumière se propageant à contresens, ce qui introduit des pertes pour ce sens de propagation.

c) La sélection de mode est accomplie par deux Fabry-Perot, qu'on appellera Fabry-Perot intracavité (FPI) et étalon mince (EM).

Le Fabry-Perot intracavité se compose de deux prismes dont les faces en regard sont traitées à 30%. Le faisceau laser y entre à l'angle de Brewster, ce qui permet d'éviter des traitements anti-reflet. Les traitements diélectriques à 30% de coefficient de réflexion sont efficaces de 450 à 900 nm, formant ainsi un système à très large bande. L'épaisseur du FPI, réglable, est d'environ 8 mm, correspondant à un intervalle entre ordres de 19 GHz. Un

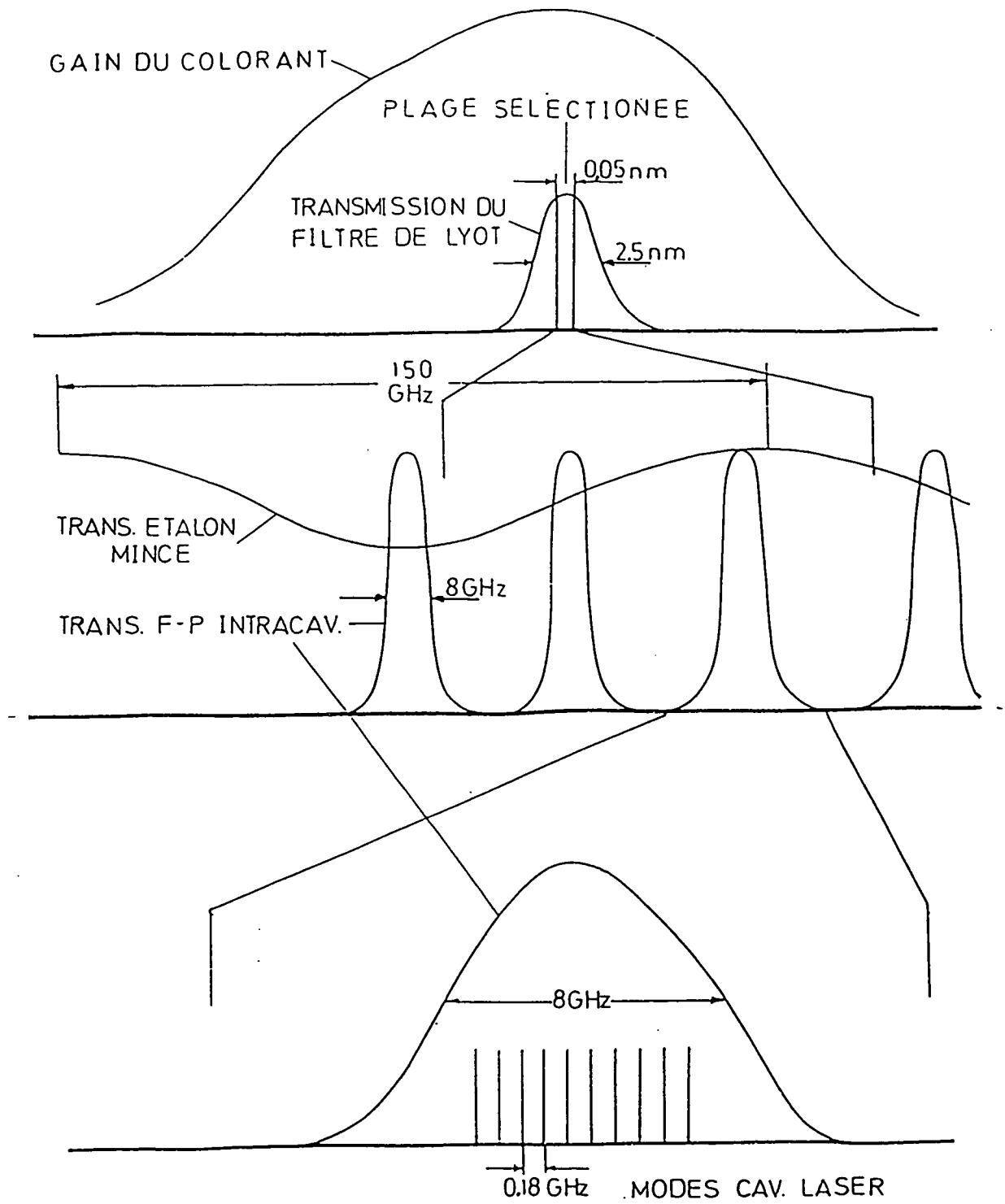


Figure 3.17 - Asservissement en fréquence du laser en colorant : sélection d'un mode.

piézo-électrique permet une excursion de fréquence de 400 GHz.

Le Fabry-Perot mince est fait simplement d'une lame de silice non traitée d'épaisseur 0,7 mm (intervalle entre ordres de 150 GHz). La courbe d'Airy correspondante est pratiquement une sinusoïde, modulée à 14%. En faisant varier l'inclinaison de l'EM par rapport au faisceau laser au moyen d'un système mécanique, on peut faire varier sa longueur optique.

Dans la zone de longueur d'onde sélectionnée par le filtre de Lyot (voir figure 3.17) l'EM sélectionne un pic du FPI. Si les deux Fabry-Perot sont centrés l'un par rapport à l'autre, on peut calculer que les pertes introduites sur les modes adjacents du FPI sont de l'ordre de 2,4% [3.13]. De façon analogue, le FPI sélectionne un mode de la cavité laser. Les pertes introduites dans les modes adjacents de la cavité laser sont de 1,2% [3.13].

d) Finalement, on a dans la cavité laser des éléments utiles à la stabilisation et au balayage en fréquence du laser : un bilame (BL) et un modulateur électro-optique (MEO). Le bilame est constitué de deux lames de silice placées à peu près à l'angle de Brewster. L'inclinaison des lames du bilame par rapport au faisceau laser est pilotée par un système mécanique, ce qui permet de faire varier la longueur optique de la cavité. D'autre part, deux des miroirs (M_5 et M_6) sont montés sur des céramiques piézo-électriques permettant également de faire varier la longueur optique de la cavité.

Le modulateur électro-optique permet lui aussi de faire varier la longueur optique de la cavité au moyen d'un champ électrique appliqué à un milieu Kerr. Son avantage particulier est la rapidité de réponse, utile à l'élimination des fluctuations de haute fréquence de la fréquence du laser.

3.2.2 - La stabilisation et le balayage du laser à colorant.

La stabilisation en fréquence du laser est faite [3.15] en deux étapes : d'abord on asservit tous les éléments de sélection de mode décrits dans le paragraphe précédent, puis l'on asservit la longueur de la cavité laser sur une cavité extérieure. Une représentation schématique de ces asservissements est montrée sur la figure 3.18.

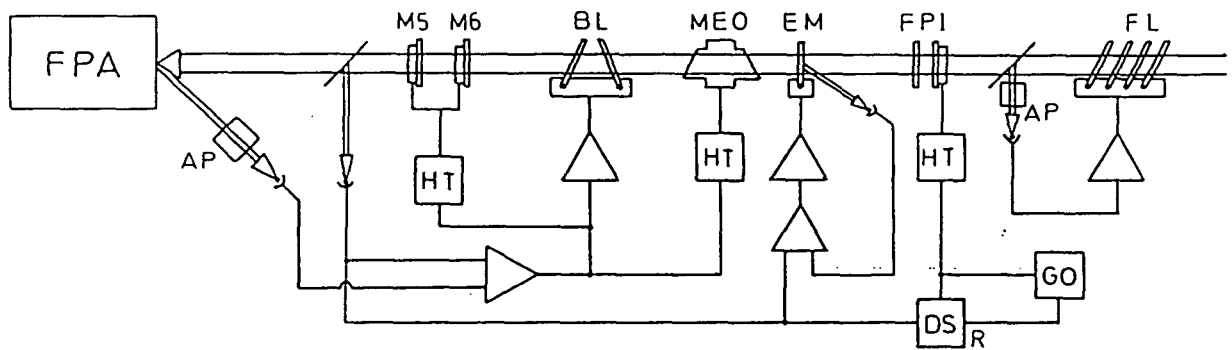


Figure 3.18 - Schéma de l'électronique pour l'asservissement du laser à colorant. FPA : Fabry-Perot auxiliaire ; AP : analyseur de polarisation ; HT : amplificateur haute tension ; DS : détection synchrone ; GO : générateur d'ondes. (Pour les autres abréviations, voir figure 3.16).

On asservit le FPI sur le mode du laser. Cet asservissement se fait en modulant l'épaisseur de ce Fabry-Perot à 5 kHz. Cela induit une modulation de l'intensité du laser qui est détectée par une détection synchrone. Le signal de la détection synchrone sert comme signal d'erreur pour le système qui pilote la céramique piézo-électrique du FPI.

L'asservissement de l'étalon mince se fait en regardant la lumière réfléchie par cet étalon. Quand il est réglé au maximum de sa courbe de transmission, la lumière réfléchie, mesurée par une photodiode, est minimale. Le signal de cette photodiode (corrigé de façon à être nul au minimum) sert de signal d'erreur pour l'asservissement de l'EM.

L'asservissement du filtre de Lyot se fait en regardant la polarisation de la lumière du laser. Un analyseur de polarisation donne un signal non nul si la polarisation n'est pas linéaire. Si le filtre est bien réglé, la polarisation est linéaire et le signal d'erreur est nul.

Quand ces trois asservissements fonctionnent, on peut balayer le laser à l'aide du bilame, sans qu'il ne saute de mode. Ce système permet une excursion monomode de 300 GHz [3.15].

On peut alors asservir la longueur de la cavité laser sur une cavité extérieure. Dans le présent montage, on utilise une cavité Fabry-Perot de longueur de 25 cm, formée de deux miroirs sphériques de rayon 25 cm et dont les pics ont une largeur de 10 MHz. L'un de ces miroirs est monté sur une céramique piézo-électrique. L'asservissement se fait en regardant la polarisation de la lumière réfléchie par la cavité [3.16], c'est pourquoi on a placé une lame à l'angle de Brewster dans la cavité. On peut balayer le laser en balayant cette cavité. Par la suite, on appellera celle-ci *Fabry-Perot auxiliaire* (FPA). Le FPA est enfermé dans une enceinte métallique pompée à 10^{-3} mbar pour réduire les dérives thermiques.

Si le laser dérive un peu par rapport au FPA, l'asservissement doit corriger la dérive en envoyant un signal au système qui pilote les miroirs M_5 et M_6 et le bilame. Le modulateur électro-optique sert à corriger les fluctuations de haute-fréquence, en utilisant le même signal d'erreur que pour l'asservissement des deux miroirs et du bilame, comme décrit plus haut. Même

si le système utilisé actuellement n'est pas encore optimal (on aurait dû utiliser une photodiode rapide et un amplificateur à temps de réponse très court), on a pu observer une réduction du bruit d'un facteur 5 grâce au MEO. Avec le système décrit ici, on peut estimer le jitter du laser à colorant à environ 50 kHz.

3.2.3 - Le laser Hélium-Néon stabilisé sur I_2 .

La référence de fréquence dans le domaine optique est le laser hélium-néon stabilisé sur les composantes hyperfines de la raie R 127 du spectre vibrationnel de la molécule d'iode. Ces raies se trouvent à une longueur d'onde d'environ 633 nm et présentent des avantages pratiques [3.17] : 1) Ce sont des raies assez étroites, dont la largeur est 2,4 MHz ; 2) elles présentent très bonne stabilité et reproductibilité en fréquence, car elles sont peu sensibles aux paramètres extérieurs (pression, température de la vapeur d'iode) ; 3) elles tombent dans la région de fonctionnement d'un laser très simple : le laser HeNe ; 4) les fréquences absolues des composantes g et i ont été mesurées avec une précision de $1,6 \times 10^{-10}$ [3.18]. L'ensemble de ces qualités a fait du laser HeNe/ I_2 le standard de fréquence dans le domaine optique, utilisé jusqu'à présent pour la réalisation pratique du mètre, défini depuis 1983 en fonction de la vitesse de la lumière [3.19].

Dans notre montage le laser HeNe/ I_2 joue deux rôles différents : il sert comme standard de fréquence absolue (connue) et il nous fournit une fréquence fixe de référence, comme on le montrera plus loin.

Le laser HeNe/ I_2 fonctionne selon le schéma classique d'un laser avec absorbant saturable intracavité (figure 3.19). La saturation de l'absorption des photons par le milieu saturable fait apparaître des petits pics sur la courbe d'intensité du laser (figure 3.20). Les miroirs du laser sont montés sur des céramiques piézo-électriques qui permettent de contrôler la longueur de la cavité. On module cette longueur à une fréquence de 1,5 kHz et l'on détecte le signal produit par cette modulation à l'aide d'une détection synchrone. Pour éliminer le fond dû à la dérivée de la courbe de gain du laser, le signal d'erreur utilisé pour l'asservissement est détecté sur le troisième harmonique de la fréquence de modulation. La courbe d'intensité est donnée [3.17] par la superposition d'une gaussienne large (largeur L) - la courbe de gain du laser - et d'une lorentzienne étroite (largeur δ) - la raie

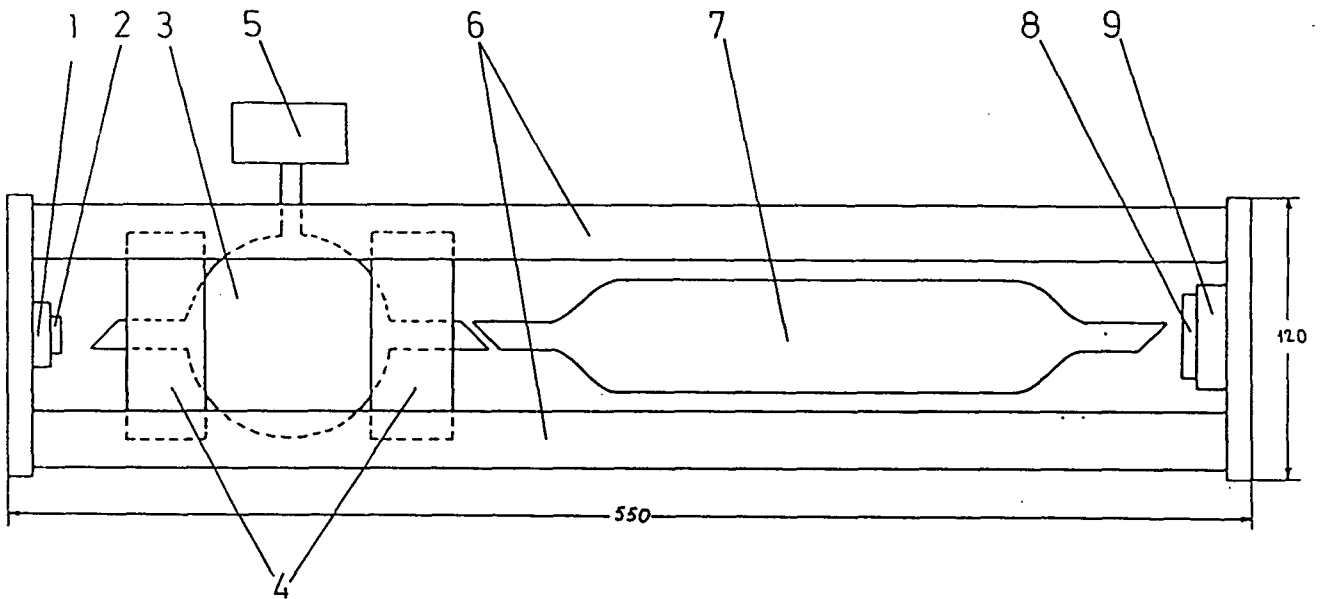


Figure 3.19 - Le laser hélium-Néon stabilisé sur l'iode (HeNe/I_2). 1) PZT ; 2) miroir R_{max} ; 3) cellule à iode ; 4) four en Téflon pour le chauffage de la cellule ; 5) dispositif à effet Peltier pour contrôle de la pression d'iode dans la cellule ; 6) barres en "invar" ; 7) tube laser ; 8) miroir de sortie ; 9) PZT.

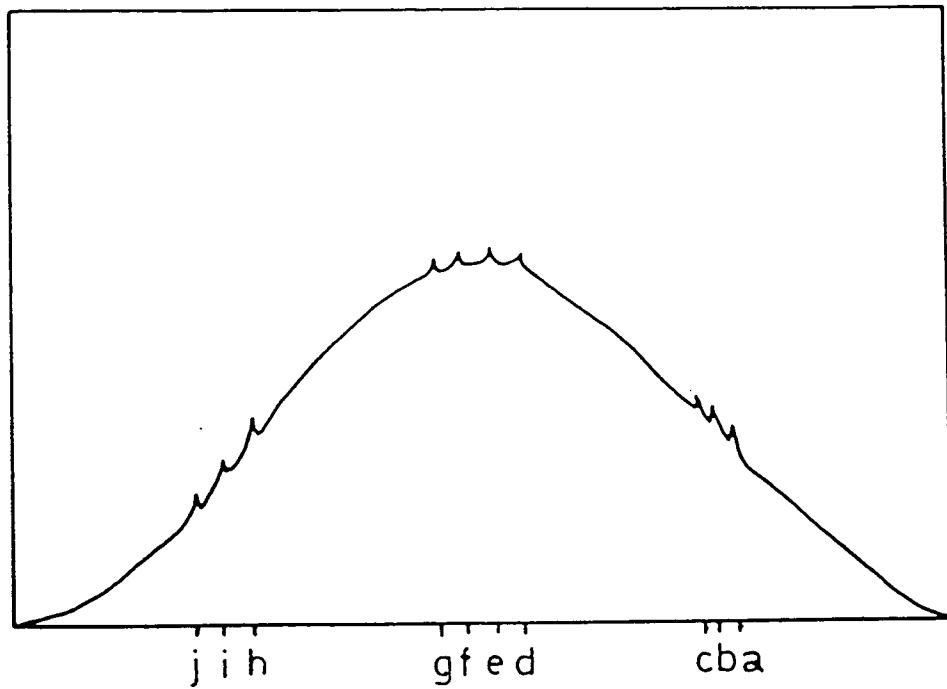


Figure 3.20 - Courbe de gain du laser HeNe/I₂ montrant les petits pics d'absorption saturée sur l'iode.

d'absorption de l' I_2 . On a $\delta/L \approx 2 \text{ MHz}/500 \text{ MHz} \approx 4 \times 10^{-3}$. La présence du fond Gaussien induit une erreur de pointé du maximum de la lorentzienne. Soit $h(x)$ la lorentzienne et $g(x)$ la gaussienne. Le profil d'intensité est alors $I(x) = g(x) + \alpha' g(x) h(x)$ [3.17], où α' est une constante. Dans le deuxième terme à droite, comme la gaussienne est beaucoup plus large que la lorentzienne, on peut prendre pour $g(x)$ une valeur $g(x_0)$ constante, x_0 étant la position du centre de la lorentzienne. Cette constante peut alors être incorporée à la constante α' . On a ainsi

$$I(x) = g(x) + \alpha h(x)$$

La dérivée première donne

$$I'(x) = h'(x) \left[\alpha + \frac{g'(x)}{h'(x)} \right] \approx h'(x) \left[\alpha + \beta \frac{\delta}{L} \right]$$

où l'on fait l'approximation $f'(x) \approx f'(x_m)/(largeur \text{ de } f)$, x_m étant la position du maximum de $f(x)$. β est une constante de proportionnalité de l'ordre de $g(x_0)/h(x_0)$. La dérivée troisième donne

$$\begin{aligned} I^{(3)}(x) &= h^{(3)}(x) \left[\alpha + \frac{g^{(3)}(x)}{h^{(3)}(x)} \right] \\ &\approx h^{(3)}(x) \left[\alpha + \beta (\delta/L)^3 \right] \end{aligned}$$

où l'on remarque que l'erreur de pointé a été réduite d'un facteur proportionnel à $(\delta/L)^2$.

Pour être sûr d'être sur une raie d'absorption saturée, on regarde aussi le signal sur le deuxième harmonique de la fréquence de modulation; on peut montrer qu'il y a un extremum sur les raies d'absorption saturée. On a adapté à la sortie de la détection synchrone un intégrateur afin d'éliminer la dérive lente de l'asservissement. On a pu constater une stabilité satisfaisante à long terme, mais en revanche l'asservissement est devenu sensible aux réglages de zéro, un décalage pouvant entraîner l'asservissement très loin de l'endroit désiré.

La cavité du laser est renforcée par des barreaux d'invar pour diminuer les dérives thermiques. Le tube laser utilisé est du type NEC GLT 2040. La cellule à iode est refroidie par un dispositif à effet Peltier qui permet de

contrôler la pression de vapeur d'iode. Cette pression a une valeur optimale : si elle est trop élevée, l'absorption excessive empêche le laser de bien fonctionner; si elle est trop petite, on ne détecte pas bien les pics d'absorption saturée. Comme le dispositif à effet Peltier est indépendant du corps de la cellule à iode (voir figure 3.19), on peut faire chauffer cette cellule dans un four en Téflon, ce qui permet d'augmenter l'excitation du spectre vibrationnel de sorte que les pics d'absorption saturée sont plus marqués [3.17].

Ce dispositif permet d'observer jusqu'à dix composantes hyperfines sur la courbe de gain du laser; elles sont désignées par des lettres de l'alphabet allant de a à j en ordre *décroissant* de fréquence. Normalement, ce sont les raies d, e, f et g qui se trouvent au sommet de la courbe de gain du laser, on a donc intérêt à les utiliser. Comme leur différence de fréquence est connue à 5 kHz près par rapport aux raies dont la fréquence absolue est connue, on peut déduire leur fréquence absolue avec la même précision.

Les valeurs mesurées [3.18] des fréquences absolues des raies g et i sont :

$$f_g = 473\,612\,340,492 \pm 0,074 \text{ MHz}$$

$$f_i = 473\,612\,214,789 \pm 0,074 \text{ MHz}$$

Ces mesures n'ont pas été faites dans des conditions recommandées dans la référence [3.19] (pression, température de l'iode, puissance du laser, amplitude de la modulation). Une correction doit alors être faite. La valeur recommandée dans [3.19] est :

$$f_i \text{ (corrigée)} = 473\,612\,214,287 \pm 0,074 \text{ MHz}$$

Les écarts de fréquence entre les diverses composantes sont donnés dans la table 3.I.

TABLE 3.I

Ecarts de fréquence entre les composantes
hyperfines de la raie de l'iode

Ecart entre ^(a)	MHz
a - b	8,831
b - c	8,094
c - d	117,890
d - e	12,861
e - f	13,363
f - g	13,198
g - h	104,025
h - i	21,939
i - j	21,565

Le laser HeNe/I₂ utilisé dans notre montage a été comparé à un laser standard du BIPM (Bureau International des Poids et Mesures) par le biais d'un laser intermédiaire, prêté par Patrick Juncar et Yves Millerioux de l'Institut National de Métrologie, laser qui a été calibré par rapport à un laser du BIPM. Nous avons comparé pendant un mois les deux lasers, le nôtre sur la raie f, celui de l'INM sur la raie d. Nous avons mesuré un écart de fréquence entre ces deux raies de 26,1954 (48) MHz au lieu de 26,224 MHz. Notre laser est donc décalé de +29 kHz par rapport à celui de l'INM qui, lui, est décalé de -23 kHz par rapport au laser BIPM2. On sait ainsi que notre laser est décalé de +6 kHz par rapport au laser BIPM2. Comme cette comparaison est faite avec une précision meilleure que 10⁻¹¹ (sur des mesures durant de l'ordre de 200 s notre laser est stable à quelques 10⁻¹²) on peut considérer que notre laser a la même précision que les standards de fréquence du BIPM.

3.2.4 - Le pilotage du laser à colorant.

Il est essentiel pour la spectroscopie de haute résolution d'être capable de balayer la fréquence du laser tout en la contrôlant précisément à

chaque instant. Pour cela, on a mis en place le dispositif montré sur la figure 3.21.

On a construit une cavité Fabry-Perot, longue de 50 cm, constituée de deux miroirs de haute qualité (on estime la finesse de la cavité à environ 100 à 630 nm et 150 à 750 nm), l'un plan, l'autre sphérique de rayon de courbure 60 cm, montés sur un barreau de *zéro-dur*. Un des miroirs est monté sur une céramique piézo-électrique de façon à ce que la cavité soit balayable. Cette cavité est enfermée dans une enceinte pompée à 10^{-7} mbar par une pompe ionique.

On fait passer dans cette cavité, qu'on nommera *Fabry-Perot de référence* (FPR), le faisceau d'un laser HeNe/I₂, de façon à pouvoir l'asservir sur les raies de l'iode. Comme cette cavité, en raison de sa construction, est très stable, on a opté pour un schéma d'asservissement particulier : on asservit le laser HeNe sur le FPR. Pour cela, on mesure l'intensité transmise dont on soustrait un signal proportionnel à l'intensité du laser HeNe/I₂, réglé de façon à ce que la différence soit nulle au maximum de la transmission (voir figure 3.21) ; cela permet d'éliminer le décalage dû à la dérivée de la courbe de gain du laser. Ce signal ainsi compensé est détecté par une détection synchrone et sert alors de signal d'erreur pour l'asservissement. On asservit ensuite, selon la technique de détection sur le troisième harmonique décrite dans le paragraphe précédent, le FPR sur les raies de l'iode. Cette méthode est en principe équivalente à celle qui consiste à asservir le FPR sur un laser HeNe stabilisé sur l'iode, mais dans la pratique elle permet d'obtenir une meilleure stabilité.

On dispose ainsi d'une cavité dont la longueur - et donc la position des pics en présence - est stable dans la même mesure que l'asservissement sur les raies de l'iode l'est, soit à 10^{-11} près au moins. Ce Fabry-Perot de référence ainsi asservi nous fournit alors une référence stable à partir de laquelle on peut mesurer les fréquences, d'où son nom.

L'intervalle entre ordres du FPR est de 300 MHz. Pour pouvoir atteindre n'importe quelle fréquence à partir d'un de ses pics on doit être capable de balayer les fréquences - tout en conservant une précision suffisante - d'au moins ± 150 MHz. Cela se fait à l'aide d'un dispositif acousto-optique (AO).

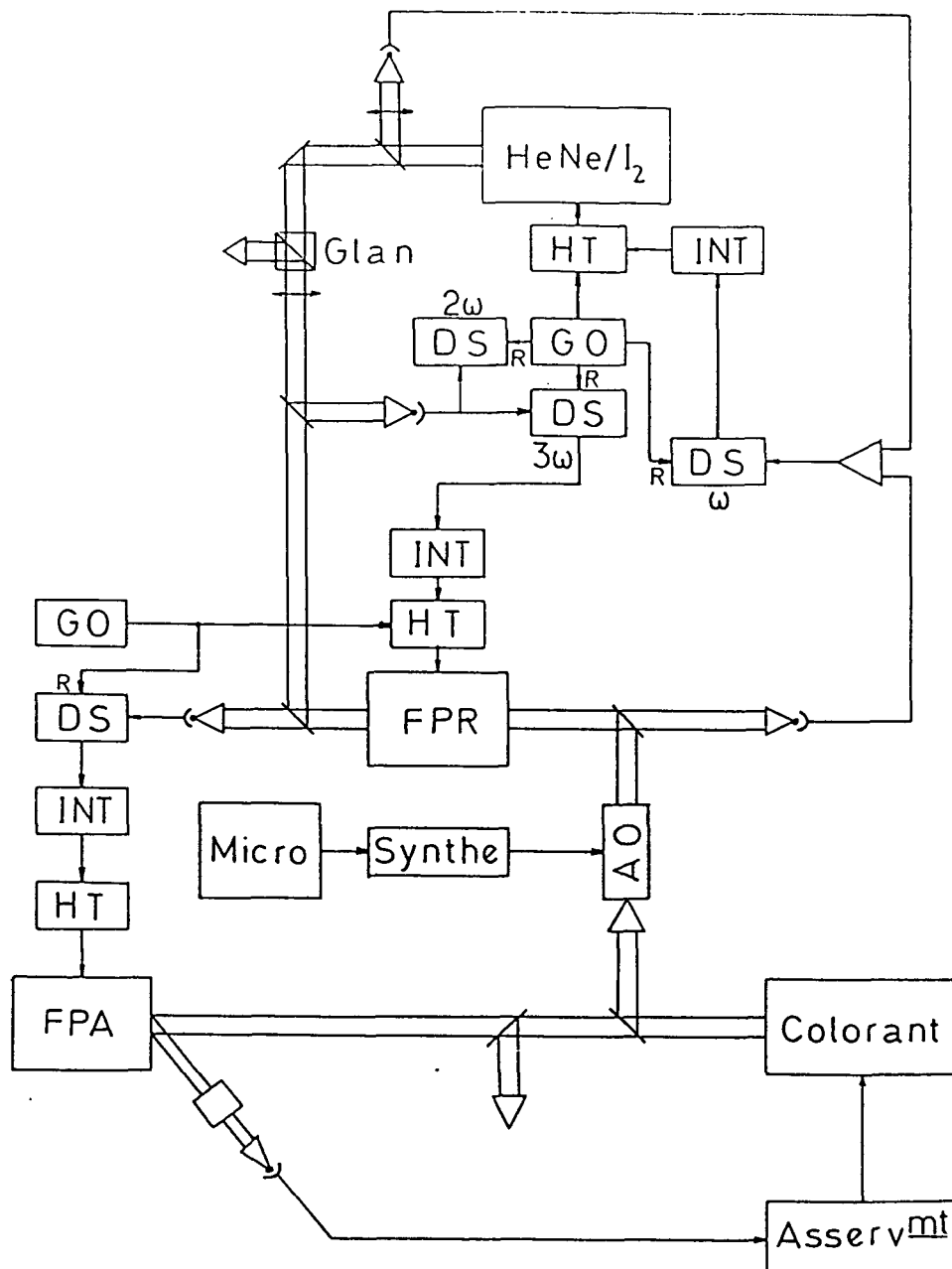


Figure 3.21 - Schéma de l'électronique pour le pilotage du laser à colorant.
 AO : acousto-optique ; DS : détection synchrone ; GO : générateur d'ondes ;
 HT : amplificateur hautetension ; ; INT : intégrateur.

Un AO est un cristal auquel on applique une tension modulée (fréquence δ). Lorsqu'un faisceau laser le traverse une partie de celui-ci est défléchie d'environ 2° et sa fréquence est augmentée de δ . L'AO dont on dispose (Crystal Technology 3200) peut être modulé entre 150 et 250 MHz. On a installé un système capable de doubler ce décalage (figure 3.22) et, en même temps, de diminuer l'effet de la déviation angulaire sur les alignements optiques. On fait passer dans l'AO un faisceau secondaire provenant du laser à colorant. Les faisceaux émergents traversent ensuite une lame quart d'onde, sont réfléchis par un miroir focalisé sur l'AO, traversent à nouveau la lame quart d'onde - leur polarisation a donc tourné de 90° - et passent à nouveau dans l'AO. On les récupère ensuite à l'aide d'un prisme de Glan, grâce à leur polarisation orthogonale à celle du faisceau incident. On aurait alors quatre faisceaux émergents, l'un dont la fréquence est inchangée, deux qui sont décalés de δ et l'un décalé de 2δ , mais en fait on coupe le faisceau dont la fréquence est inchangée (grâce à la déviation angulaire qui fait qu'il n'est pas superposé au faisceau décalé) après le premier passage dans l'AO. Ainsi on n'a à la sortie que deux faisceaux, un décalé de δ et l'autre de 2δ et on peut alors sélectionner à nouveau ce dernier grâce à la déviation angulaire introduite par l'AO.

Le faisceau décalé de 2δ est alors envoyé dans le FPR. On peut ainsi asservir le FPA - donc le laser à colorant - sur le FPR. Cela se fait en modulant le FPR et en détectant le signal avec une détection synchrone. Le balayage du laser se fait en changeant la fréquence de modulation de l'acousto-optique : si, par exemple, l'on augmente cette fréquence, comme le faisceau décalé doit rester en résonance dans le FPR, la fréquence du laser à colorant est abaissée proportionnellement. L'acousto-optique est modulé par un synthétiseur Fluke 6061A piloté par un micro-ordinateur Olivetti M28. Ce système nous permet donc de balayer très précisément le laser de 200 MHz autour de n'importe quelle fréquence.

En fait, dans la pratique, le système a présenté une petite dérive d'origine thermique qui a dû être corrigée. En effet, le substrat sur lequel est déposée la couche argentée réfléchissante du miroir du FPR a des faces parallèles (figure 3.23). Il se comporte donc comme un petit Fabry-Perot de très faible finesse, mais qui module les pics du FPA. Comme l'indice de réfraction du substrat dépend de la température, la modulation induite, donc la position des pics du FPA, dérive quand la température change. Cet effet

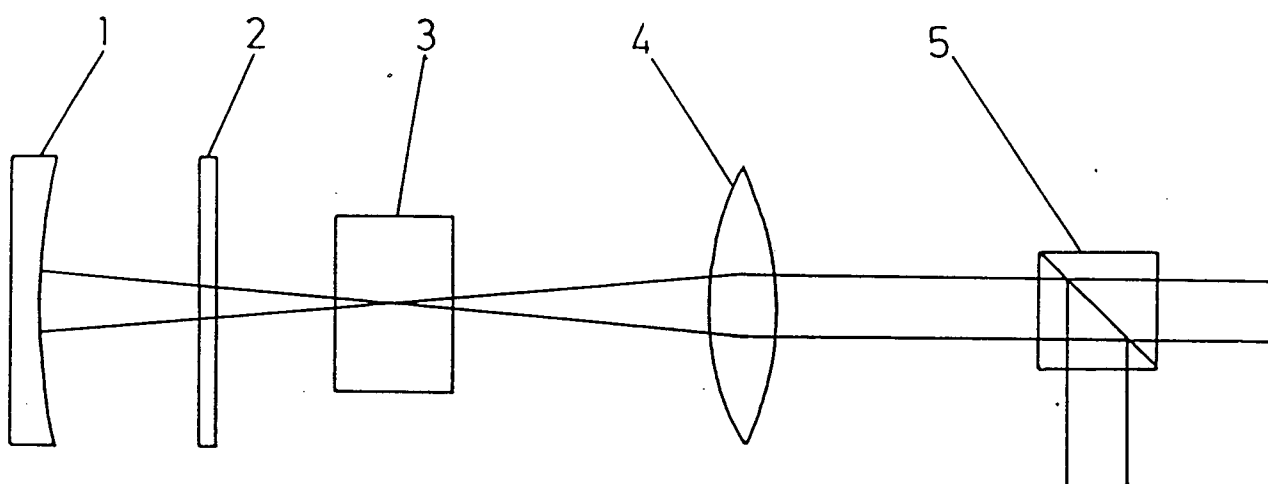


Figure 3.22 - Système de doublage du décalage de fréquence. 1) Miroir sphérique ; 2) lame 1/4 d'onde ; 3) acousto-optique ; 4) lentille ; 5) prisme de glan.

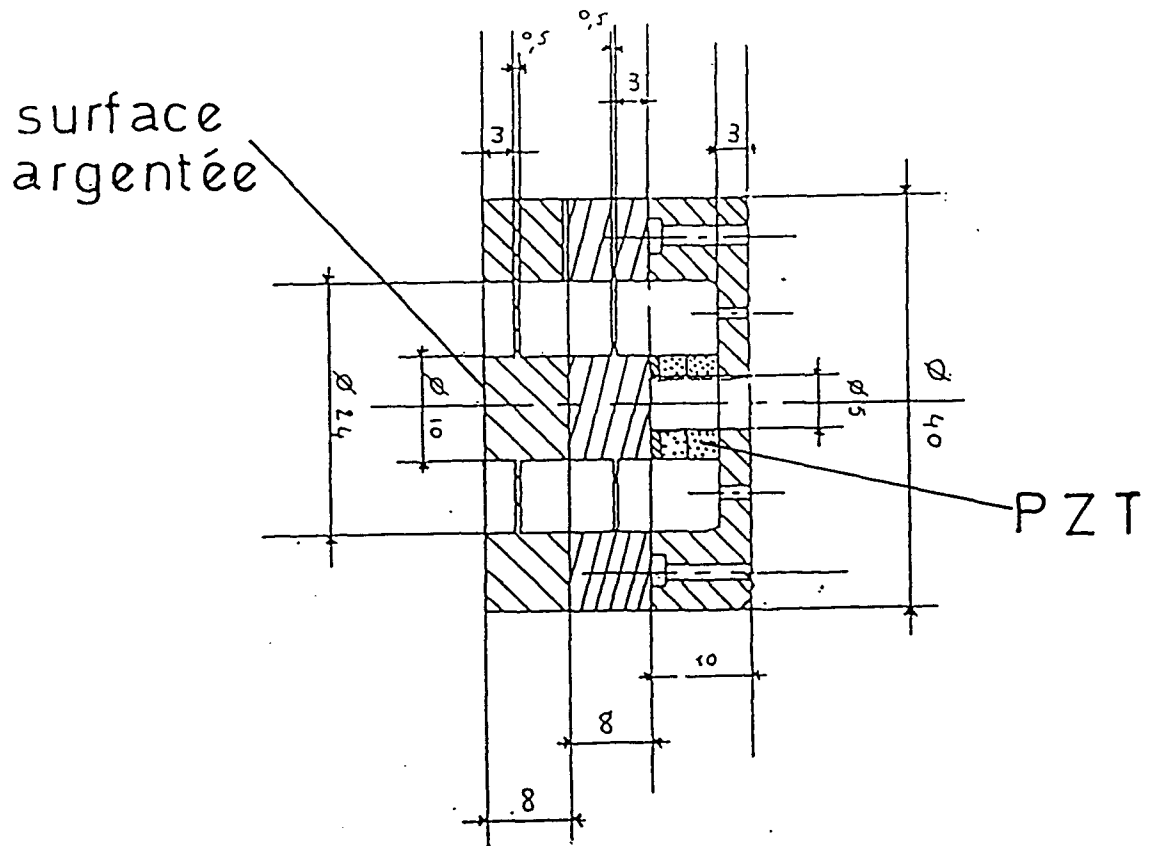


Figure 3.23 - Montage du miroir du Fabry-Perot de référence. Les faces parallèles des deux blocs cylindriques entre la surface argentée et le piézo-électrique (PZT) sont responsables de l'effet de dérive thermique observé (cf. texte).

n'est pas très grand car le FPR, placé sous vide, est relativement isolé des variations de la température ambiante, mais on a quand même observé des dérives de 50 kHz à 100 kHz, ce qui correspond à une erreur de $3,4 \times 10^{-4}$ sur l'intervalle entre ordres. On a donc été obligé, lors du dépouillement des résultats, de corriger cette petite dérive (voir chapitre VI).

3.3 - Le signal atomique.

3.3.1 - La cavité optique

L'interaction avec le laser a lieu sur une longueur totale de 956 mm. L'ensemble du jet de métastables est aligné avec deux miroirs (4 m de rayon de courbure, distants de 1,3 m), qui forment ainsi une cavité optique. Cet alignement est rendu possible grâce à la déviation introduite dans le jet atomique par les collisions avec les électrons. Cette géométrie où le jet atomique est colinéaire avec le faisceau laser permet d'obtenir de très longs temps de transit des atomes dans les faisceaux (330 μ s pour l'hydrogène, 510 μ s pour le deutérium), ce qui réduit à des valeurs négligeables (<500 Hz) l'élargissement des signaux dû au temps de transit longitudinal. L'effet du temps de transit transversal sera traité plus loin (chapitre V).

On utilise la polarisation de la lumière réfléchiée par la cavité pour l'asservir sur la longueur d'onde du laser selon la technique bien connue introduite par Hänsch et Couillaud [3.16]. Cette cavité permet à la fois d'avoir du rayonnement électromagnétique se propageant dans les deux sens dans la région d'interaction - ce qui est nécessaire pour l'absorption à deux photons sans effet Doppler - et d'avoir une puissance lumineuse plus importante, de façon à augmenter les probabilités de transition. Avec une puissance d'entrée de l'ordre de 400 mW, on peut obtenir 50 W dans chaque sens de propagation dans la cavité.

3.3.2 - Le signal observé.

Quand le laser à colorant est en résonance avec les atomes, le niveau 2S est dépeuplé, et on observe une diminution du signal (voir figure 3.24, où l'on voit l'intervalle de structure fine entre les sous-niveaux $D_{3/2}$ et $D_{5/2}$).

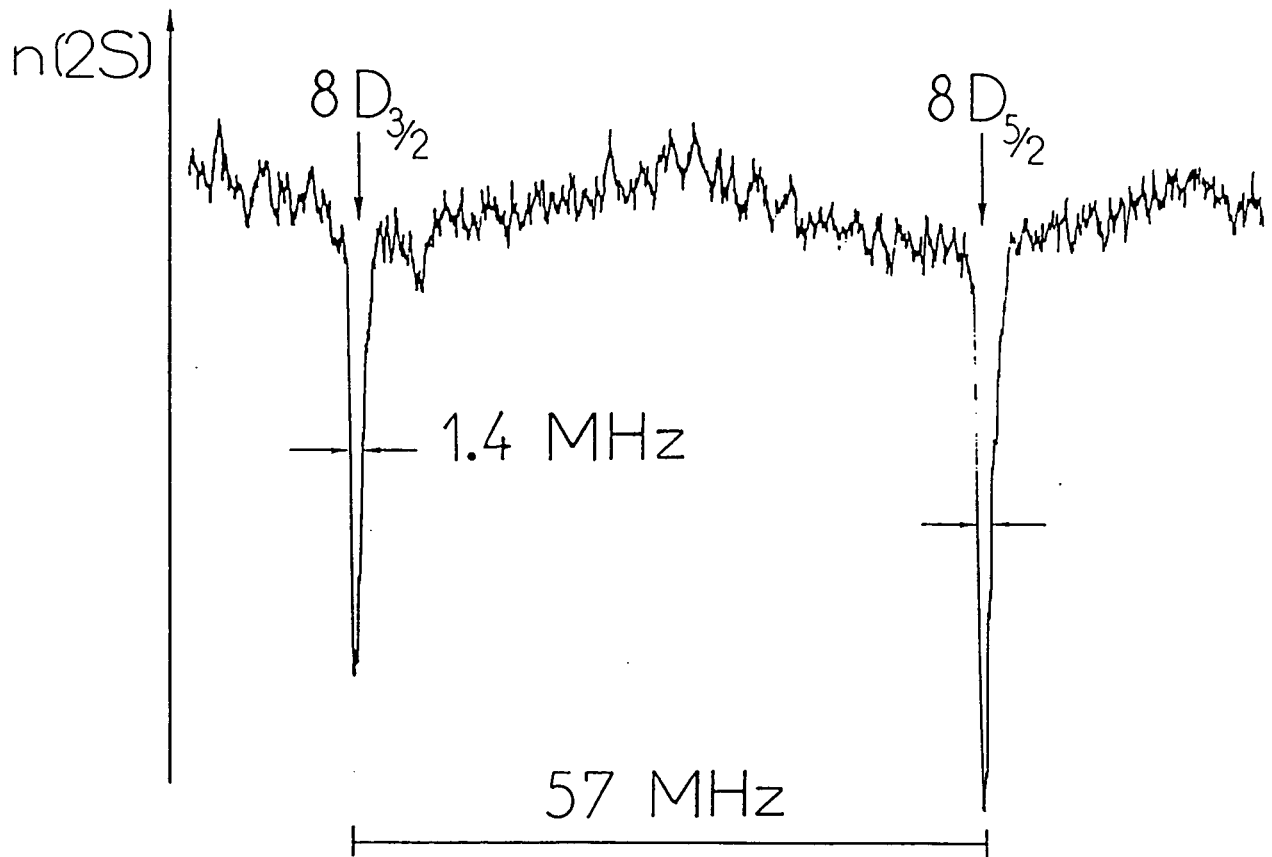


Figure 3.24 - Signal atomique observé en modulant la tension de quenching. L'intervalle de structure fine $8D_{3/2} - 8D_{5/2}$ est montré.

Une autre possibilité est de moduler la fréquence du laser et d'appliquer aux électrodes de quenching une tension continue (d'environ 60 V). On obtient ainsi les signaux en dispersion montrés dans la figure 1.3.

REFERENCES DU CHAPITRE III

- 3.1 E.J. Murphy, J.H. Brophy, Rev. Sci. Instrum. 50, 635 (1979).
- 3.2 J. Slevin and W. Stirling, Rev. Sci. Instrum. 52, 1780 (1981).
- 3.3 W.W. MacAlpine and R.O. Schildknecht, Proceedings of IRE p. 2099, dec. 1959.
- 3.4 J.A. Giordmaine and T.C. Wang, J. App. Phys. 31, 463 (1960).
- 3.5 W.E. Kaupilla, W.R. Ott and W.L. Fite, Phys. Rev. A1, 1099 (1970).
- 3.6 E. Durand, *Electrostatique*, 3 tomes, Masson, Paris, 1966.
- 3.7 W.E. Lamb, Jr and R.C. Retherford, Phys. Rev. 81, 222 (1951).
- 3.8 B. Cagnac et J.C. Pebay-Peyroula, *Physique atomique*, tome 1, 2^e édition, Dunod (1975).
- 3.9 R.F. Stebbings, W.L. Fite, D.G. Hummer and R.T. Brackmann, Phys. Rev. 119, 1939 (1960).
- 3.10 S.R. Ryan, S.J. Czuchlewski and M.V. McCusjer, Phys. Rev. A16, 1892 (1977).
- 3.11 H. Weissmann, W. Hartmann and D.S. Burch, Z. Phys. D7, 119 (1987).
- 3.12 R.T. Robiscoe and T.W. Shyn, Phys. Rev. Lett. 24, 559 (1970).
- 3.13 F. Biraben, *Notice sur l'utilisation du laser à colorant*, non publiée.
- 3.14 F. Biraben, Opt. Comm. 29, 353 (1979).
- 3.15 F. Biraben and P. Labastie, Opt. Comm. 41, 49 (1982).
- 3.16 T.W. Hänsch and B. Couillaud, Opt. Comm. 35, 441 (1980).

3.17 P. Cerez and A. Brillet, *Metrologia* 13, 29 (1977).

3.18 D.A. Jennings, C.R. Pollock, F.R. Petersen, R.E. Drullinger, K.M. Evenson, J.S. Wells, J.L. Hall and H.P. Layer, *Opt. Lett.* 8, 136 (1983).

3.19 *Documents concerning the new definition of the meter*, *Metrologia* 19, 163 (1983).

CHAPITRE IV

MONTAGE ET METHODE DE MESURE DES LONGUEURS D'ONDE

Dans ce chapitre sont discutés la méthode et le montage expérimental utilisés pour la comparaison de la longueur d'onde du laser à colorant avec celle du laser HeNe stabilisé sur l'iode. Dans un premier temps, le principe de la méthode est exposé sans tenir compte des complications pratiques (le déphasage de Fresnel, le déphasage à la réflexion, etc.), dont les corrections seront introduites dans les parties suivantes.

4.1 - La méthode interférométrique de comparaison de longueurs d'onde.

Nous commençons par décrire la méthode interférométrique de comparaison des longueurs d'onde dans le cas simple où l'on utilise une cavité construite avec des miroirs plans (pas de déphasage de Fresnel) de conductivité infinie (pas de déphasage à la réflexion). Dans ces conditions, la fréquence de résonance d'un rayonnement lumineux monochromatique dans la cavité Fabry-Perot est reliée à la longueur L de celle-ci par :

$$\nu_N = N \nu_0 \quad (4.1)$$

où N est un nombre entier et

$$\nu_0 = c/2L \quad (4.2)$$

est l'intervalle entre ordres de la cavité. Si l'on a deux rayonnements de fréquences différentes en résonance avec la même cavité, leurs fréquences ν_1 et ν_2 sont dans un rapport rationnel :

$$\frac{\nu_1}{\nu_2} = \frac{N_1}{N_2} \quad (4.3)$$

Ainsi, si l'une des fréquences est connue, ainsi que les nombres entiers N_1 et N_2 , on peut déduire la deuxième fréquence. Le premier problème à résoudre est alors la détermination des deux nombres entiers. Pour connaître un nombre entier, il suffit d'être capable de le mesurer avec une erreur

absolue inférieure à 0,5. Dans cette expérience, on a comparé des fréquences de l'ordre de 4×10^{14} Hz en se servant d'un Fabry-Perot dont l'épaisseur est environ 10 cm. Le nombre entier est alors de l'ordre de 3×10^5 . Si l'on connaît les fréquences en question et l'épaisseur du Fabry-Perot avec une précision meilleure que $0,5/(3 \times 10^5) \approx 10^{-6}$ on peut déterminer le nombre entier à l'aide des formules (4.1) et (4.2). Nous disposons d'un lambda-mètre largement capable de mesurer les longueurs d'onde avec cette précision. Pour déterminer l'épaisseur du Fabry-Perot, on l'a comparé à un autre Fabry-Perot dont l'épaisseur (environ 3 cm) avait été déterminée précédemment à partir de raies atomiques dont la fréquence est bien connue. La méthode de comparaison consiste à balayer linéairement la fréquence d'un laser et enregistrer simultanément les pics de transmission des deux Fabry-Perot (voir figure 4.1). On calcule ensuite, à partir de l'enregistrement, le nombre d'intervalles entre ordres du Fabry-Perot de 10 cm correspondant à un certain nombre (connu) d'intervalles entre ordre du Fabry-Perot de 3 cm. Ce nombre (qui comprend évidemment une partie fractionnaire) est égal au rapport des longueurs des deux Fabry-Perot. En se référant à la figure 4.2, on voit que ce rapport entre nombre d'intervalles entre ordres vaut, pour n pics du Fabry-Perot de 3 cm :

$$r_n = \frac{N + \frac{x_N - x_0}{a}}{n} .$$

Les nombres n et N (nombre de pics du Fabry-Perot de 10 cm) peuvent être aisément connus si l'on sait de combien la fréquence du laser a été balayée (à l'aide, par exemple, du lambda-mètre) ; x_0/a et x_N/a sont les excédents fractionnaires, mesurés directement sur l'enregistrement. Le point important est que l'erreur sur x_n provenant des erreurs sur la détermination de x_0/a et x_N/a diminue quand N (ou n) augmente. En effet, l'erreur relative $\delta r_n / r_n$ vaut :

$$\frac{\delta r_n}{r_n} \approx \frac{\delta [(x_N - x_0)/a]}{N} ,$$

où l'on voit que l'erreur sur les excédents fractionnaires est divisée par un facteur de l'ordre de N .

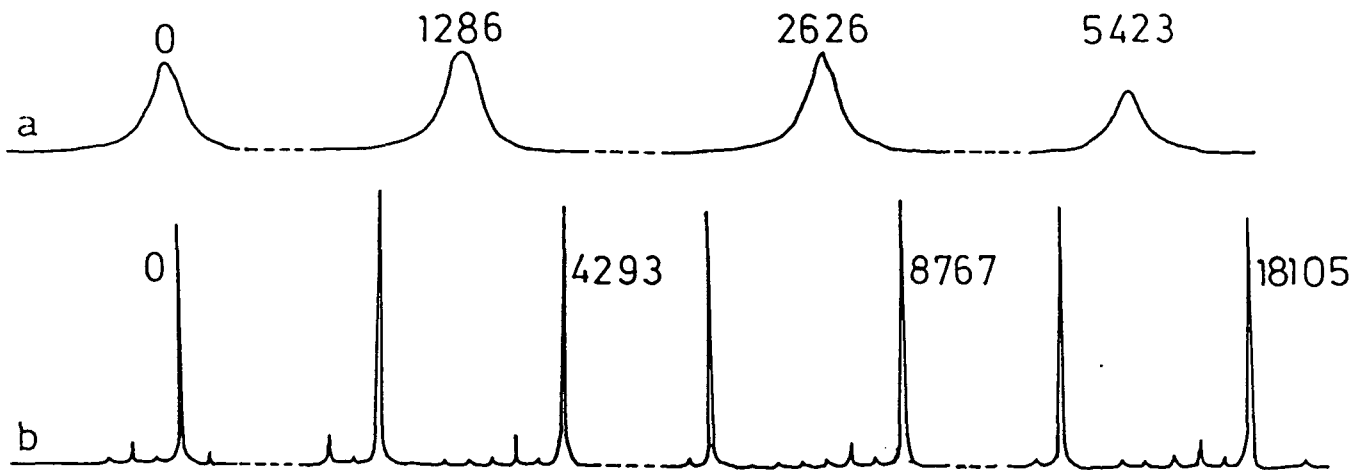


Figure 4.1 - Extraits d'un enregistrement simultané des pics d'Airy des Fabry-Perot de 3 cm (courbe a) et de 10 cm (courbe b).

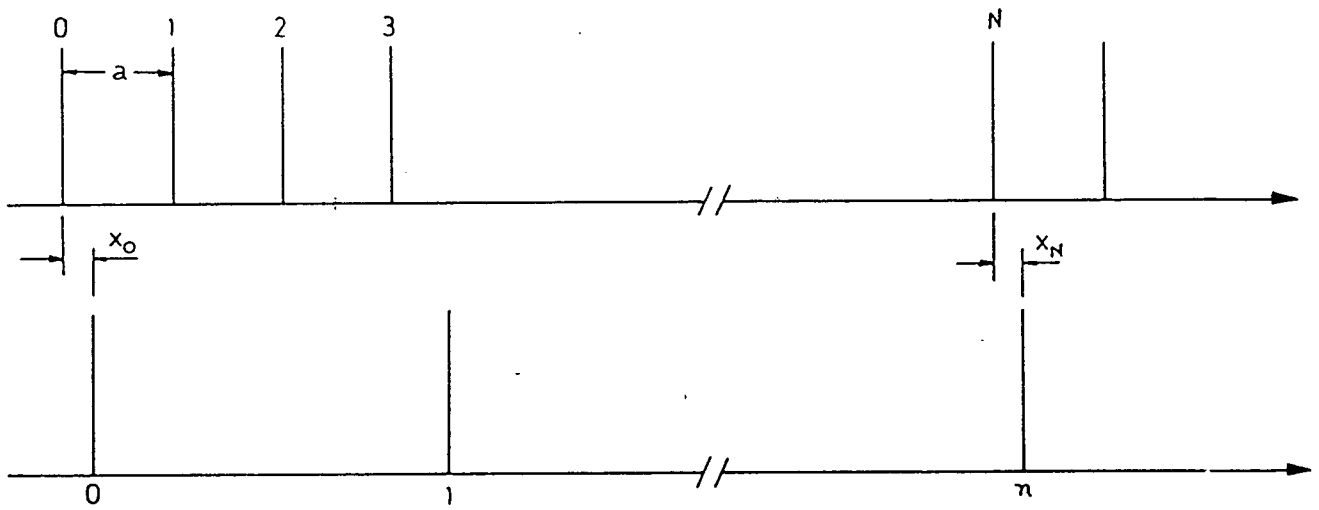


Figure 4.2 - Comparaison des deux Fabry-Perot.

TABLE 4.I

Convergence de r_n quand $n \rightarrow \infty$.

n	r_n
1	3,343
11	3,3392
40	3,3387
1286	3,338662
2626	3,338663
5423	3,3386625

La table 4.I montre, pour l'enregistrement de la figure 4.1, la convergence de r_n quand n croit. Nous avons pu ainsi déterminer l'épaisseur de notre Fabry-Perot de 10 cm, qui vaut

$$L^{(c)} = 10,010\ 94\ (1)\ \text{cm}$$

ce qui correspond à un intervalle entre ordres

$$\nu_0^{(c)} = 1\ 497,324\ (2)\ \text{MHz} .$$

En résumé, si l'on connaît les nombres entiers (c'est-à-dire si l'on connaît a priori les longueurs d'onde et l'épaisseur du Fabry-Perot avec une précision suffisante), on peut alors comparer deux longueurs d'onde quelconques avec une précision en principe illimitée. Deux complications apparaissent dans la pratique. Premièrement, comme la conductivité des miroirs n'est pas infinie, les faisceaux subissent un changement de phase à la réflexion qui dépend de la longueur d'onde et de la nature des miroirs, mais qui est indépendant de la géométrie de la cavité. Deuxièmement, comme on utilise des cavités à miroirs sphériques, la courbure du front d'onde dans la cavité est responsable également d'un changement de phase, qui, lui ne dépend que de la géométrie de la cavité : c'est le déphasage de Fresnel. Ces deux effets seront discutés en détail par la suite. Leur existence se traduit par

une modification de la formule (4.1) qui devient :

$$\nu_N = (N + \varphi + \Phi) \nu_0 \quad (4.4)$$

où φ est le déphasage de Fresnel et Φ le déphasage à la réflexion. Pour éliminer l'effet du déphasage à la réflexion, une méthode [4.1] a été utilisée, qui tire avantage de l'indépendance de Φ vis à vis de la géométrie de la cavité : c'est la méthode des miroirs virtuels, décrite dans la partie suivante.

4.2 - La méthode des miroirs virtuels.

Cette méthode [4.1] consiste à faire les mesures avec deux épaisseurs différentes de Fabry-Perot (dans notre cas 10 et 50 cm, correspondant à des intervalles entre ordres respectifs de 1,5 et 0,3 GHz), en utilisant les mêmes miroirs dans les deux cas, de façon à s'assurer que le déphasage à la réflexion reste le même. On obtient ainsi un système de deux équations qui permet d'éliminer le déphasage à la réflexion. On utilisera des indices ℓ et c (pour long et court) pour caractériser les deux cas. On réécrit la formule (4.4) sous la forme :

$$L^{(i)} = (\lambda/2) (N^{(i)} + \varphi^{(i)} + \Phi) \quad (4.5)$$

où $i = \ell, c$. On peut alors déduire

$$\begin{aligned} L = L^{(\ell)} - L^{(c)} &= (\lambda/2) [(N^{(\ell)} - N^{(c)}) + (\varphi^{(\ell)} - \varphi^{(c)})] \\ &= (\lambda/2) (\delta N + \delta \varphi) \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $\delta N = N^{(\ell)} - N^{(c)}$ et $\delta \varphi = \varphi^{(\ell)} - \varphi^{(c)}$. En appliquant la formule (4.6) aux deux longueurs d'onde que l'on veut comparer (correspondant à des conditions de résonance de l'étalon pour les deux épaisseurs) et en tenant compte du fait que L dans (4.6) ne dépend pas de la longueur d'onde, on obtient :

$$\lambda_1 (\delta N_1 + \delta \varphi) = \lambda_2 (\delta N_2 + \delta \varphi) \quad (4.7)$$

$$\lambda_2 = \lambda_1 \frac{\delta N_1 + \delta \varphi}{\delta N_2 + \delta \varphi} .$$

Cette équation relie donc entre elles les deux longueurs d'onde indépendamment du déphasage à la réflexion. L'examen de la formule 4.6 permet de comprendre la signification du terme "miroirs virtuels". On y voit que la mesure faite avec deux épaisseurs différentes du Fabry-Perot étalon équivaut à une mesure avec un Fabry-Perot d'épaisseur $L=L^{(\ell)}-L^{(c)}$ de déphasage de Fresnel $\delta\varphi=\varphi^{(\ell)}-\varphi^{(c)}$, mais dont les miroirs (virtuels) ne présenteraient plus de déphasage à la réflexion. Dans la pratique, les longueurs d'onde à comparer ne correspondent pas exactement à celles des résonances du Fabry-Perot étalon qu'on peut donc écrire $\lambda+\delta\lambda^{(1)}$; la formule (4.5) doit donc être réécrite sous la forme :

$$2L^{(1)} = (\lambda + \delta\lambda^{(1)}) (N^{(1)} + \varphi^{(1)} + \Phi) \quad (4.8)$$

$$= \lambda \left[N^{(1)} + \varphi^{(1)} + \Phi + N^{(1)} \left(\frac{\delta\lambda^{(1)}}{\lambda} \right) \left(1 + \frac{\varphi^{(1)}}{N^{(1)}} + \frac{\Phi}{N^{(1)}} \right) \right].$$

Evaluons les ordres de grandeur des corrections apportées aux formules précédentes. On a :

$$\delta\lambda^{(1)}/\lambda \approx \delta\nu^{(1)}/\nu \leq 750 \text{ MHz} / (4 \times 10^8 \text{ MHz}) \approx 2 \times 10^{-6}.$$

On verra par la suite (voir (4.22) plus loin) que $\varphi^{(\ell)} \approx 0,37$ et $\varphi^{(c)} \approx 0,13$ donc que $\varphi^{(1)}/N^{(1)} \leq 4 \times 10^{-7}$. On verra aussi que l'effet du déphasage à la réflexion peut être interprété comme une variation de l'épaisseur optique du Fabry-Perot d'environ 1,5 nm entre le rouge et l'infrarouge. Cet effet est évidemment plus marqué sur l'épaisseur courte, 10 cm, et donne $\Phi/N^{(c)} \leq 2 \times 10^{-8}$. En reportant ces résultats dans la formule (4.8) on obtient :

$$2L^{(1)} = \lambda \{ N^{(1)} + \varphi^{(1)} + \Phi + N^{(1)} (2 \times 10^{-8}) [1 + (4 \times 10^{-7}) + (2 \times 10^{-8})] \}.$$

Les corrections dues à φ et Φ dans le second terme sont de l'ordre de 8×10^{-13} , complètement négligeables à notre niveau de précision (10^{-11}). On peut donc récrire la formule (4.5) sous la forme :

$$2L^{(1)} = \lambda (N^{(1)} + \varphi^{(1)} + \Phi) + N^{(1)} \delta\lambda^{(1)}, \quad (4.9)$$

et l'appliquer aux deux cas (long et court). On obtient par soustraction :

$$2L = 2(L^{(\ell)} - L^{(c)}) = \lambda (\delta N + \delta \varphi) + N^{(\ell)} \delta \lambda^{(\ell)} - N^{(c)} \delta \lambda^{(c)} \quad (4.10)$$

En écrivant la formule (4.10) pour les deux longueurs d'onde λ_1 et λ_2 , on obtient finalement :

$$\lambda_2 = \frac{\delta N_1 + \delta \varphi}{\delta N_2 + \delta \varphi} \lambda_1 + \frac{1}{\delta N_2} \left[N_1^{(\ell)} \delta \lambda_1^{(\ell)} + N_2^{(c)} \delta \lambda_2^{(c)} - N_1^{(c)} \delta \lambda_1^{(c)} - N_2^{(\ell)} \delta \lambda_2^{(\ell)} \right] \quad (4.11)$$

où l'on a négligé - d'après le même argument d'ordre de grandeur - le terme $\delta \varphi$ dans le terme en facteur des corrections dans la formule (4.11). L'équation (4.11) permet ainsi en principe de relier n'importe quel couple de longueurs d'onde en éliminant le déphasage à la réflexion. Dans la pratique, la mesure est faite en aller-retour, c'est-à-dire avec l'épaisseur de 10 cm, puis de 50 cm, puis à nouveau de 10 cm. Le retour à 10 cm est nécessaire car en passant d'une épaisseur à l'autre un léger vieillissement des miroirs peut se produire, ce qui change légèrement le déphasage à la réflexion. On doit alors procéder à une interpolation avec les deux mesures à 10 cm. On discutera plus loin ce problème.

4.3 - Le montage expérimental.

Notre objectif est d'appliquer l'équation (4.11) à la longueur d'onde du laser HeNe stabilisé sur l'iode et à la longueur d'onde correspondant au signal de transition atomique à deux photons. Il faut donc un dispositif expérimental permettant de mesurer les écarts entre ces longueurs d'onde et les pics de résonance les plus proches du Fabry-Perot étalon. Ce dispositif est montré sur la figure 4.3. Remarquons d'abord que les écarts en question peuvent être mesurés en fréquences puis convertis en longueurs d'onde par la formule :

$$\delta \lambda = \frac{c \delta \nu}{\nu(\nu - \delta \nu)} \quad (4.12)$$

$$\delta \lambda / \lambda = -\delta \nu / \nu + (\delta \nu / \nu)^2 + \dots$$

Le deuxième terme sera d'environ 4×10^{-12} , donc négligeable. De la même façon, il suffit d'utiliser dans (4.12) une valeur de la longueur d'onde

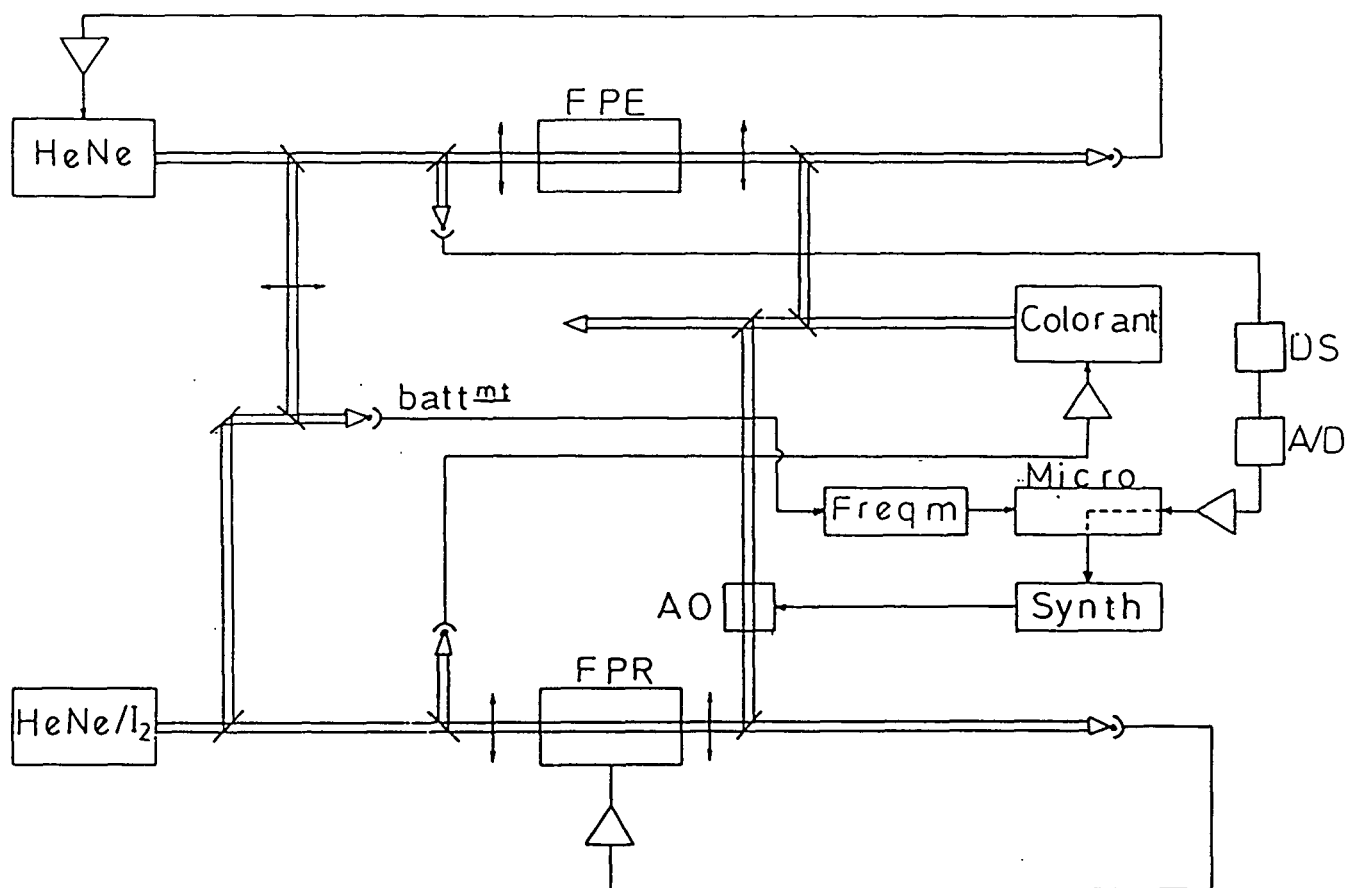


Figure 4.3 - Schéma du système de comparaison des longueurs d'onde du laser à colorant et du laser HeNe/I₂. A/D : convertisseur analogique-digital.

connue avec une précision de l'ordre de 10^{-6} , donnée, par exemple par le lambda-mètre. Le Fabry-Perot étalon est composé de deux miroirs métalliques de haute qualité, l'un plan et l'autre de rayon de courbure 60 cm. Ces miroirs sont montés par adhérence optique sur un barreau de zéro-dur, matériel à très faible coefficient de dilatation thermique. La finesse du Fabry-Perot varie de 60 dans le rouge à 100 dans l'infrarouge. L'ensemble est placé dans une enceinte pompée sous un vide poussé (10^{-7} mbar) par une pompe ionique. Le changement d'épaisseur se fait en démontant le système et en changeant le barreau de zéro-dur. Cette opération nécessite d'exposer à l'air les miroirs, ce qui est une des principales causes de l'effet de vieillissement mentionné plus haut. On dispose d'un laser HeNe balayable équipé d'un interféromètre de Michelson intracavité permettant un balayage monomode d'environ 1,5 GHz. Le faisceau de ce laser est introduit dans le Fabry-Perot étalon, à travers une lentille qui permet de l'adapter au mode fondamental de ce Fabry-Perot. La fréquence du laser est accordée sur une fréquence de résonance de la cavité. On mesure l'écart entre cette fréquence de résonance et la fréquence du laser étalon stabilisé sur l'iode en mesurant la fréquence de battement entre les deux lasers, qui est de l'ordre de quelques centaines de MHz. La mesure est réalisée au moyen d'un fréquence-mètre Racal-Dana 1998, qui peut mesurer des fréquences jusqu'à 1,3 GHz.

La fréquence du rayonnement infrarouge correspondant au signal à deux photons est connue précisément par rapport à la fréquence d'un pic du Fabry-Perot de référence (FPR) (voir paragraphe 3.2.4) ; l'écart entre les deux est en effet le double (à cause du système montré sur la figure 3.22) de la fréquence fournie par le synthétiseur.

Une partie du faisceau du laser à colorant (figure 4.3) est envoyée - après avoir traversé une lentille d'adaptation de mode - dans le Fabry-Perot étalon. On peut ainsi balayer la fréquence du laser à colorant jusqu'à une résonance du FPE, et la distance en fréquence entre ce pic et le pic de référence du FPR est immédiatement donnée par le double de la fréquence de sortie du synthétiseur. On peut alors déduire la distance en fréquence entre le signal à deux-photons et la résonance du Fabry-Perot étalon.

La mesure est faite de la façon suivante. La figure 4.4 montre les pics et les intervalles de fréquence concernés. Dans un premier temps, on balaye le signal à deux photons et le micro-ordinateur enregistre l'intensité du signal

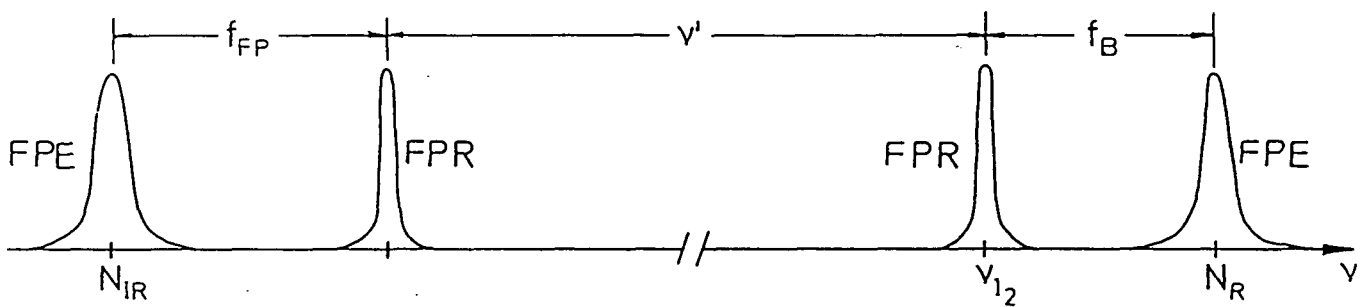


Figure 4.4 - Positions relatives des pics des deux Fabry-Perot dans le rouge (droite) et dans l'infrarouge (gauche). f_B : fréquence de battement entre le laser HeNe balayable et le laser HeNe/I₂.

atomique en fonction de la fréquence de sortie du synthétiseur. Cela permet de déterminer l'intervalle de fréquence f_{2P} entre le pic de référence infrarouge du FPR et le signal atomique. Les détails de cette détermination ("fit" du signal par une courbe théorique) seront discutés dans le Chapitre VI. Ensuite, le laser à colorant est balayé jusqu'à la résonance infrarouge du FPE (dont le numéro d'ordre est N_{IR}) et il y est asservi (figure 4.3). Cet asservissement se fait en analysant le signal de transmission du faisceau infrarouge à travers le FPE (à la fréquence de modulation du colorant) au moyen d'une détection synchrone. Le signal de sortie de la détection synchrone est introduit dans le micro-ordinateur après être passé par un convertisseur analogique-digital (A/D). Le micro corrige alors la fréquence du synthétiseur de façon à annuler ce signal. En même temps, le laser HeNe balayable est asservi sur la résonance rouge du FPE (dont le numéro d'ordre est N_R). Le micro-ordinateur enregistre simultanément la fréquence de battement f_B entre le laser HeNe balayable et le laser étalon stabilisé sur I_2 et la fréquence de sortie du synthétiseur, ce qui permet de déterminer l'intervalle de fréquence f_{FP} entre le pic du FPE et celui du FPR dans l'infrarouge. Ces deux fréquences varient du fait que le FPE subit des variations d'épaisseur dues à des fluctuations de température (malgré le barreau de zéro-dur et le vide poussé...), mais on peut les réduire à une valeur constante arbitraire. En effet, l'intervalle de fréquences f_B satisfait l'équation

$$\nu(I_2) + f_B = N_R \nu_0(R)$$

où $\nu_0(R)$ est l'intervalle entre ordres du FPE dans le rouge. De façon analogue, f_{FP} vérifie

$$\nu(I_2) - \nu' - f_{FP} = N_{IR} \nu_0(IR)$$

où ν' est l'intervalle de fréquence entre le pic rouge (qui est asservi sur les raies de l'iode) et le pic infrarouge du FPR et $\nu_0(IR)$ l'intervalle entre ordres du FPE dans l'infrarouge. La variation d'épaisseur du FPE a pour effet de faire varier l'intervalle entre ordres ν_0 . La variation relative de ν_0 est indépendante de la fréquence, c'est-à-dire $\nu'_0(R \text{ ou } IR) = \nu_0(R \text{ ou } IR) (1+\epsilon)$. Si l'on appelle δf_B et δf_{FP} les variations produites sur f_B et f_{FP} respectivement, on obtient

$$\delta f_B = N_R \nu_0(R) \epsilon \quad \text{et} \quad \delta f_{FP} = N_{IR} \nu_0(IR) \epsilon . \quad (4.13)$$

La différence entre $\nu_0(R)$ et $\nu_0(IR)$ dans les relations (4.13) vient du déphasage à la réflexion. L'argument d'ordre de grandeur développé dans la partie antérieure montre que son effet sur les corrections (4.13) est négligeable. On peut donc ignorer la variation de l'intervalle entre ordres avec la longueur d'onde dans les formules ci-dessus. Ainsi

$$\delta f_{FP} \approx -(N_{IR}/N_R) \delta f_B \approx -(\lambda_R/\lambda_{IR}) \delta f_B \quad (4.14)$$

où, d'après le même argument d'ordre de grandeur, on peut utiliser les valeurs de la longueur d'onde données par le lambda-mètre. On peut alors se référer à une fréquence de battement fixe $f_B(0)$ et corriger les fréquences f_{FP} :

$$f_{FP}(\text{corrigée}) = f_{FP} - (\lambda_R/\lambda_{IR}) (f_B - f_B^{(0)}) . \quad (4.15)$$

Dans notre expérience, cette correction est faite automatiquement par le micro-ordinateur. On peut vérifier dans la pratique que cette correction est totalement indépendante de la fréquence du laser étalon, ce qui confirme qu'elle est indépendante des fluctuations de fréquence de ce laser.

On peut maintenant appliquer la formule (4.11) aux longueurs d'onde du laser étalon et du signal à deux photons, avec les corrections données par les mesures de $f_B^{(0)}$ et f_{FP} (corrigée) converties en longueurs d'onde à l'aide de la relation (4.12).

4.4 - Les modes des cavités à miroirs sphériques. Le déphasage de Fresnel.

4.4.1 - Cavités à symétrie cylindrique parfaite.

Dans ce paragraphe sont rappelés la structure et les principales propriétés des modes des cavités optiques à miroirs sphériques présentant une parfaite symétrie cylindrique. Les modes d'une telle cavité, pour une lumière linéairement polarisée, ont la forme suivante, en coordonnées cylindriques (r, θ, z) [4.2] :

$$F_{p\ell}(r, \theta, z) = g_{p\ell}(x) \exp(-x^2) \exp\{i(Q + \ell\theta)\} \quad (4.16)$$

où $x=r(z)/w(z)$, Q est un facteur de phase et p et ℓ sont des nombres entiers $0,1,\dots$ qui caractérisent le mode. La partie réelle ou imaginaire de $F_{p,\ell}$ donne la distribution spatiale du champ électrique pour le mode en question. On voit que ce mode présente un profil radial gaussien avec une largeur w qui dépend de z . La dépendance de w en z est donnée par

$$w(z)^2 = w_0^2 [1+(z/L_R)^2] \quad (4.17)$$

où w_0 est le rayon minimal du faisceau, z la distance axiale mesurée à partir du point où le faisceau a sa largeur minimale et L_R la longueur de Rayleigh du faisceau, $L_R = \pi w_0^2 / \lambda$ (λ longueur d'onde). La forme du faisceau est donc celle d'un hyperboloïde de révolution dont l'axe coïncide avec l'axe z . Cela est vrai pour le mode fondamental $p=0$, $\ell=0$. Pour les modes d'ordre plus élevé, à cette structure se superpose une autre, donnée par le produit

$$g_{p,\ell}(x) \{ \cos(\ell\theta) \text{ ou } \sin(\ell\theta) \} \quad (4.18)$$

$$= (\sqrt{2x})^\ell L_p^\ell(2x^2) \{ \cos(\ell\theta) \text{ ou } \sin(\ell\theta) \},$$

où L_p^ℓ est un polynôme de Laguerre généralisé [4.3, ch. 22] (polynôme d'ordre p dont les zéros sont concentrés dans une région de dimension de l'ordre de ℓ autour de l'origine). La possibilité d'avoir soit un sinus soit un cosinus pour la partie angulaire vient du fait qu'on peut prendre soit la partie réelle soit la partie imaginaire de (4.16).

La structure de ces modes peut être comprise en analysant la forme des noeuds de la distribution d'intensité. Les noeuds de la distribution radiale sont déterminés par les zéros du polynôme de Laguerre (avec un noeud additionnel au centre si $\ell \neq 0$). Le nombre de ces noeuds est p et ils sont concentrés dans une région de dimension ℓ autour du centre du faisceau. Les noeuds de la distribution angulaire sont déterminés par ℓ . Si $\ell=0$, on a un mode à symétrie cylindrique. Si $\ell=1$ on a une ligne nodale pour $\theta=0^\circ$ (cas sinus) ou pour $\theta=90^\circ$ (cas cosinus), etc. Le nombre de lignes nodales angulaires est ℓ .

La figure 4.5 montre la distribution d'intensité lumineuse sur une section plane transversale du faisceau laser pour les modes d'ordre plus bas.

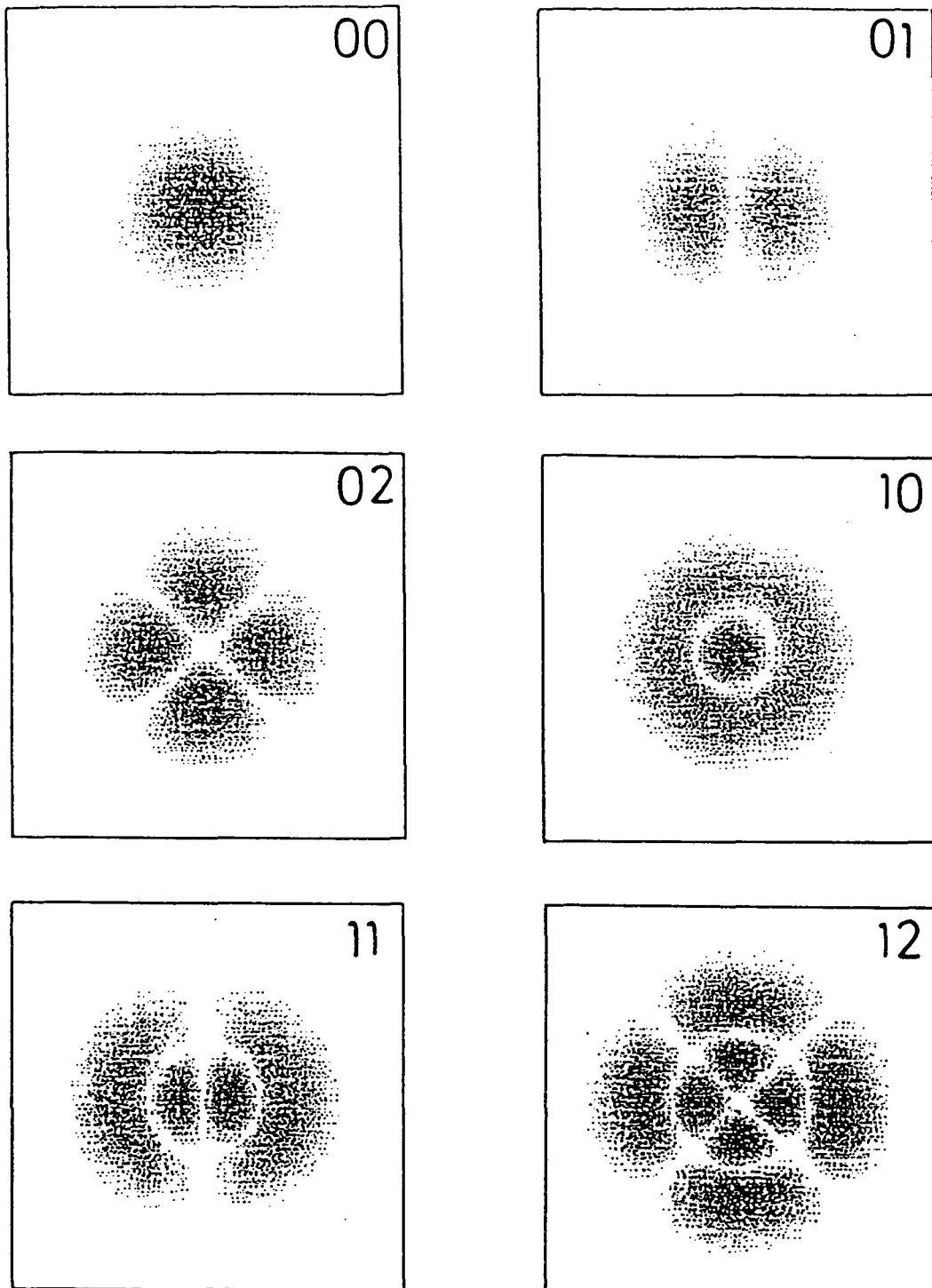


Figure 4.5 - Modes TEM d'un Fabry-Perot à symétrie cylindrique parfaite. Les chiffres en haut à droite indiquent le mode.

Il est important de noter que la direction des noeuds angulaires est en fait complètement arbitraire, car l'origine des θ n'est pas fixée. Si l'on fixe cette origine - par exemple parallèlement à la direction de la polarisation de la lumière - on peut toujours avoir un noeud angulaire dans n'importe quelle direction en combinant linéairement les deux solutions en sinus et cosinus. En effet

$$\begin{aligned} & a \cos(\ell\theta) + b \sin(\ell\theta) \\ &= (a^2+b^2)^{1/2} [\sin\alpha \cos(\ell\theta) + \cos\alpha \sin(\ell\theta)] \quad (4.19) \\ &= (a^2+b^2)^{1/2} \sin(\alpha+\ell\theta) \end{aligned}$$

où $\sin\alpha = a/(a^2+b^2)^{1/2}$. Cela prouve que la symétrie cylindrique est bien respectée. La figure 4.6 montre l'effet de rotation des taches lumineuses décrit par l'éq. (4.19) quand on varie le paramètre de superposition α .

Les fréquences de résonance de ces modes sont données par (on ignore pour l'instant le déphasage à la réflexion) :

$$\nu_N = \nu_0 [N + (2p+\ell+1) \varphi_0] \quad (4.20)$$

où ν_0 est donné par (4.2) et

$$\varphi_0 = (1/\pi) \arccos \left\{ [(1-d/R_1)(1-d/R_2)]^{1/2} \right\} \quad (4.21)$$

où R_1 et R_2 sont les rayons de courbure des miroirs et d est la distance entre eux. Le déphasage de Fresnel vaut alors

$$\varphi = (2p+\ell+1) \varphi_0.$$

Pour le mode fondamental (00) on a $\varphi=\varphi_0$. Dans notre cas, on a $d=10$ ou 50 cm, $R_1=60$ cm et $R_2=\infty$. Cela donne comme déphasage de Fresnel

$$\varphi_0(10 \text{ cm}) = 0,13 \quad \text{ou} \quad \varphi_0(50 \text{ cm}) = 0,37 \quad (4.23)$$

c'est-à-dire

$$\nu_0 \varphi_0 \approx 200 \text{ MHz} \quad (10 \text{ cm}) \quad \text{ou} \quad \nu_0 \varphi_0 \approx 110 \text{ MHz} \quad (50 \text{ cm}).$$

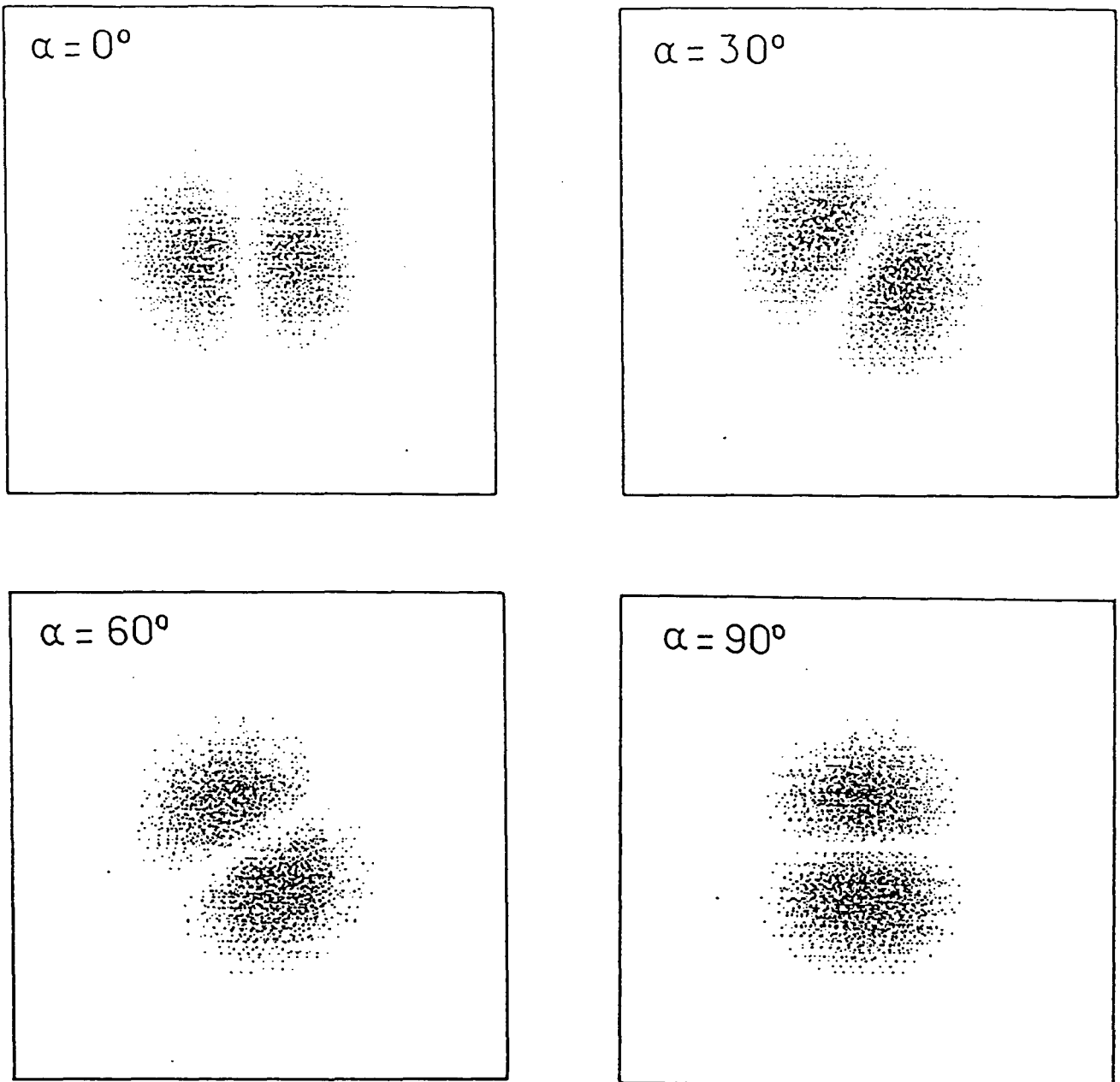


Figure 4.6 - Effet de rotation des taches pour le mode TEM_{01} (cf. texte).

La formule (4.20) suggère une façon de mesurer le déphasage de Fresnel : la distance en fréquence entre les pics de même ordre N du premier mode transverse TEM_{01} et du mode fondamental TEM_{00} vaut $\nu_0 \varphi_0$. Avant de décrire nos mesures du déphasage de Fresnel on doit néanmoins tenir compte d'une complication pratique, le fait qu'on n'a jamais une symétrie cylindrique parfaite.

4.4.2 - Cavités à symétrie cylindrique légèrement imparfaite.

Dans la pratique, des imperfections de polissage des miroirs d'une cavité produisent toujours des déviations à la symétrie cylindrique, la courbure locale des miroirs dépendant du point d'incidence du faisceau. Dans ce paragraphe les formules présentées ci-dessus sont généralisées de façon à tenir compte de ces imperfections de la symétrie cylindrique au moyen d'un traitement perturbatif à partir du cas de la symétrie parfaite [4.4]. Le déphasage de Fresnel est sensible à ce genre d'imperfections des miroirs et un soin spécial a dû être apporté à sa mesure, comme on le verra dans la partie suivante.

Dans la référence [4.4] on suppose que les miroirs présentent une symétrie elliptique. D'après le théorème d'Euler [4.5] la courbure d'une surface régulière (un ellipsoïde par exemple) dépend de la direction tangentielle selon laquelle on regarde, cette courbure ayant un maximum et un minimum pour des directions orthogonales (directions de courbure principale). On peut alors montrer [4.4, 4.6, 4.7] que les modes ne différant que par la dépendance angulaire en sinus ou cosinus, eq. (4.18), et correspondant aux mêmes valeurs de p et ℓ ne sont plus dégénérés en fréquence. En effet, l'existence des directions de courbure principale brise la symétrie cylindrique et fournit une origine privilégiée pour les θ . Le mode $(p\ell)$ est alors séparé en deux modes non dégénérés, correspondant à des déphasages de Fresnel φ_+ et φ_- différents, qui sont donnés par [4.4] :

$$\varphi_{\pm} = \varphi_m \pm \delta\varphi \quad (4.24)$$

$$\delta\varphi = (\nu_c - \nu_s) / 2\nu_0$$

où ν_c et ν_s sont les fréquences des modes cosinus et sinus respectivement. On

voit ainsi que φ_m est donné par la moyenne de φ_+ et φ_- .

Quand on éclaire le Fabry-Perot avec un laser, on "sonde" la courbure locale de la région du miroir où tombe le faisceau. Cette courbure détermine alors le déphasage de Fresnel subi par le faisceau (voir eq. (4.21)). D'après le théorème d'Euler, la courbure locale d'une surface régulière peut être écrite comme [4.5, p. 81] :

$$\Gamma = \Gamma_m + \delta\Gamma \cos 2\theta \quad (4.25)$$

où Γ_m est la courbure moyenne, $\delta\Gamma$ la variation de courbure et θ l'angle mesuré dans le plan tangent à la surface par rapport à la direction de courbure maximum. Si le faisceau est parfaitement aligné avec l'axe du Fabry-Perot, il verra une courbure locale égale à Γ_m . Si le faisceau est un peu désaligné, il verra une courbure locale qui dépend de l'angle θ . L'eq. (4.21) peut être réécrite sous la forme (on fait $R_1 = 1/\Gamma$ et $R_2 = \infty$) :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= (1/\pi) \arccos [(1-\Gamma d)^{1/2}] \\ &= (1/\pi) \arccos [(1 - \Gamma_m d - \delta\Gamma d \cos 2\theta)^{1/2}] . \end{aligned}$$

Comme la variation de courbure $\delta\Gamma$ est très petite, on peut développer cette expression au premier ordre en $\delta\Gamma$ et on obtient :

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \varphi_m + (1/2\pi) [(\Gamma_m d)(1-\Gamma_m d)]^{-1/2} \delta\Gamma d \cos 2\theta \\ \text{et si l'on écrit } R_m &= 1/\Gamma_m \text{ et } \delta\Gamma = -\delta R/R_m^2 \text{ cela donne :} \end{aligned}$$

$$\varphi_0 = \varphi_m - \frac{1}{2\pi} \left[\frac{d/R_m}{1 - d/R_m} \right]^{1/2} \frac{\delta R}{R_m} \cos 2\theta \quad (4.26)$$

avec

$$\varphi_m = (1/\pi) \arccos [(1-d/R_m)^{1/2}] . \quad (4.27)$$

En fait, faire varier l'alignement du faisceau laser par rapport à l'axe du Fabry-Perot revient à faire varier les coefficients de superposition des deux modes TEM_{01} (sinus et cosinus), qui, n'étant plus dégénérés, correspondent à des fréquences de résonance légèrement différentes, ce qui est en accord avec la variation du déphasage de Fresnel. Un point intéressant est

que, d'après l'eq. (4.19), on verra tourner la direction de la ligne nodale qui sépare les deux taches lumineuses caractéristiques des modes TEM_{01} au fur et à mesure que l'on fera varier l'alignement et que l'on observera la variation du déphasage de Fresnel. En effet, la variable α de l'eq. (4.19) et l'angle θ sont égaux à une constante additive près.

Ce qui nous intéresse principalement est de déterminer la valeur de φ_m qui sera reportée dans la formule (4.20) à la place de φ_0 pour la détermination de la longueur d'onde de la transition à deux photons, car, pour ces mesures, on utilise le mode fondamental avec le faisceau laser aligné aussi bien que possible.

Dans la partie suivante, on décrira la mesure expérimentale de φ_m en tenant compte de cette petite déviation à la symétrie cylindrique.

4.5 - Mesure du déphasage de Fresnel.

La mesure du déphasage de Fresnel consiste à mesurer l'intervalle de fréquence entre le mode fondamental (00) et le premier mode transverse (01) du Fabry-Perot étalon. On fait varier l'alignement du faisceau laser et l'on mesure l'intervalle de fréquence entre la superposition des modes TEM_{01} en sinus et cosinus et le mode fondamental TEM_{00} en fonction de l'orientation de la ligne nodale caractéristique des modes 01. Ensuite on fait un "fit" des résultats - corrigés de la dérive du Fabry-Perot - par une sinusoïde, qui donne ainsi la valeur de φ_m , qui est celle qui correspond au cas du faisceau parfaitement aligné sur le mode fondamental.

Pendant la mesure, on observe une dérive du FPE due aux variations de température. Pour la corriger, on maintient le laser à colorant asservi sur le pic du mode fondamental du FPE ; il sert ainsi à sonder cette dérive. On peut alors corriger la fréquence de battement entre des deux laser HeNe (le laser balayable et le laser étalon) exactement de la même façon que pour la mesure de la longueur d'onde de la transition à deux photons (voir équation (4.15)). En effet, au début de la mesure, on asservit le laser HeNe balayable sur le mode fondamental et on obtient deux fréquences : la fréquence de battement dans le rouge, f_{800} , et la distance entre le pic infrarouge du FPR et le pic

infrarouge du FPE, $f_{FP}^{(0)}$. D'après le même argument que celui qui précède la formule (4.15), une dérive dans l'infrarouge de $f_{FP}^{(0)}$ à f_{FP} correspond à une dérive $-(\lambda_{IR}/\lambda_R) (f_{FP} - f_{FP}^{(0)})$ dans le rouge. On peut ainsi corriger les mesures de la position du premier mode transverse :

$$f_{B01}^{(c)} = f_{B01} - (\lambda_{IR}/\lambda_R) (f_{FP} - f_{FP}^{(0)}) \quad (4.28)$$

et obtenir des valeurs de l'intervalle entre le premier mode transverse et le mode fondamental $f_{B01}^{(c)} - f_{B00}$ corrigées de la dérive thermique. Pour la mesure de cet intervalle dans l'infrarouge on fait de même, les rôles du laser à colorant et du laser HeNe balayable étant interchangés. La figure 4.7 montre le résultat obtenu et son "fit" par une sinusoïde. De ces données on déduit

$$\nu_0 \varphi_0 = 201,024 + 0,565 \sin [2(\theta - 142,1^\circ)] \text{ MHz.}$$

TABLE 4.II

Mesures du déphasage de Fresnel.

Détermination	$\nu \varphi$ (kHz)
	0 0
10 cm, première mesure	200 776 (67)
50 cm (dans le rouge)	109 851 (13)
50 cm (infrarouge)	109 852 (13)
10 cm, deuxième mesure ^a	201 024 (49)

^a Après être passé par la longueur 50 cm.

La Table 4.II donne les valeurs du déphasage de Fresnel obtenues. La mesure pour l'épaisseur 50 cm dans le rouge (la plus précise) permet alors de déterminer :

$$R_m = 599,520 (0,071) \text{ mm.}$$

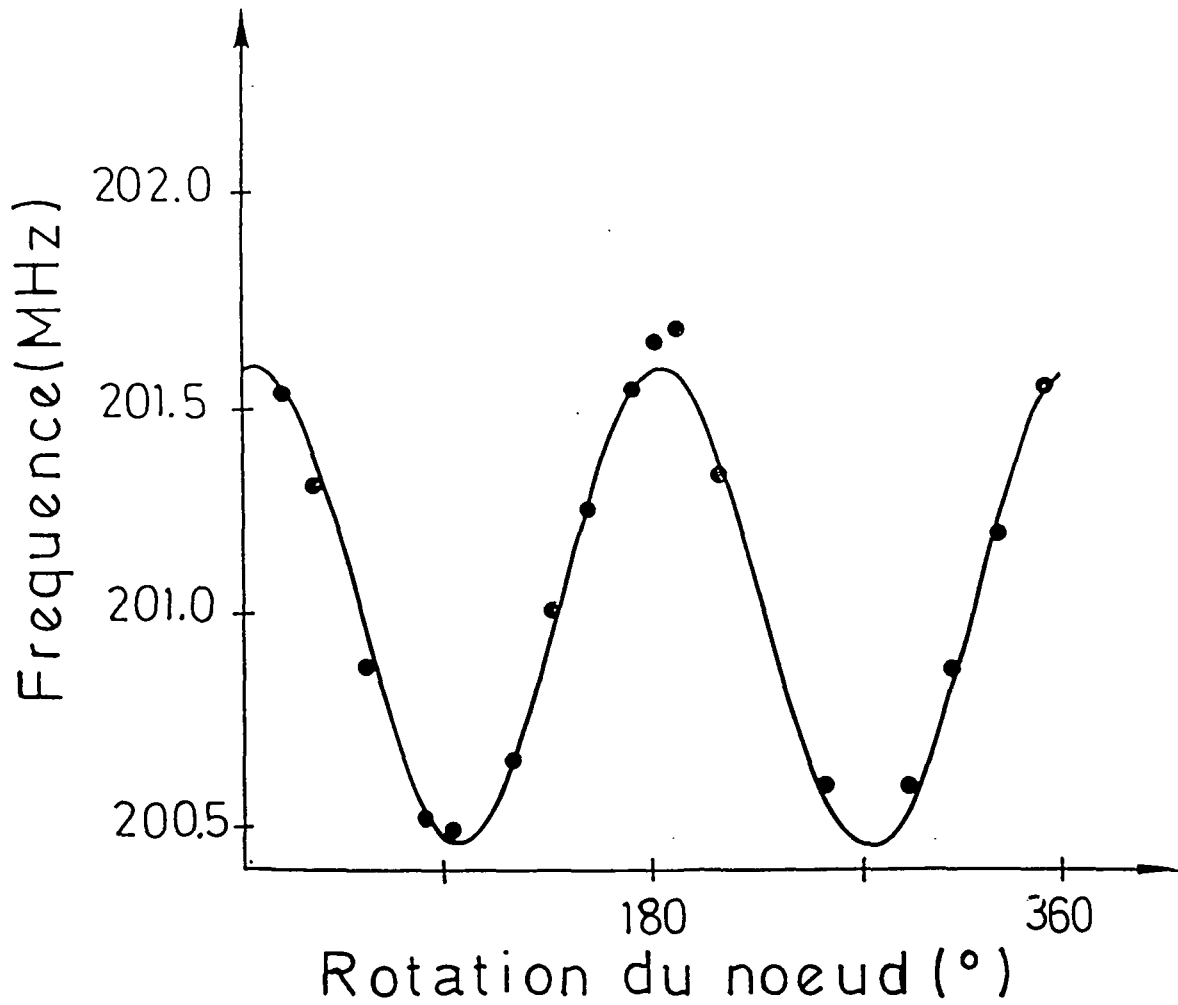


Figure 4.7 - Variation de l'intervalle de fréquence entre les modes TEM_{01} et TEM_{00} en fonction de l'orientation du noeud entre les deux taches (voir fig. 4.6).

Dans la partie suivante, qui conclut ce chapitre, on étudiera le déphasage à la réflexion et l'effet de vieillissement des miroirs.

4.6 - Le déphasage à la réflexion et le vieillissement des miroirs.

Il est bien connu qu'une onde électromagnétique incidente sur une surface métallique y pénètre en partie et y est absorbée. L'intensité de l'onde dans le métal est atténuée exponentiellement avec une constante de décroissance $2k$, k étant le coefficient d'extinction du métal. Ce coefficient dépend de la conductivité du métal en question ; il est en première approximation proportionnel à la racine carrée de la conductivité [4.8, ch. 13].

La distance d de pénétration dans le métal est proportionnelle à $1/k$. Les miroirs de notre Fabry-Perot sont fabriqués en déposant de l'argent sur un substrat diélectrique et l'effet de pénétration se manifeste alors comme une augmentation de l'épaisseur optique du Fabry-Perot de $4d$. Cet effet peut aussi être interprété comme un déphasage de l'onde à la réflexion d'un angle Φ qui est relié à la distance d par $\Phi=8\pi d/\lambda$, λ étant la longueur d'onde dans le métal. Le coefficient d'extinction dépend lui aussi de la longueur d'onde considérée, il diminue quand la longueur d'onde augmente. Cela veut dire que notre Fabry-Perot a une longueur optique qui est plus grande dans le rouge que dans l'infrarouge, ou, ce qui est équivalent, qu'il présente un intervalle entre ordres ν_0 qui est plus petit dans le rouge que dans l'infrarouge.

Les deux équations de la méthode des miroirs virtuels qui permettent d'éliminer le déphasage à la réflexion (partie 4.2 ci dessus) permettent aussi de déterminer les épaisseurs optiques pour les diverses longueurs d'onde considérées. La table 4.III montre les résultats (en termes d'intervalles entre ordres) pour le cas 10 cm.

TABLE 4.III

Intervalle entre ordres du Fabry-Perot d'épaisseur 10 cm
en fonction de la longueur d'onde

λ (nm)	$\nu - 1497$ MHz 0
633 (HeNe)	0,320 027 51
750 (2S-12D)	0,320 042 90
760 (2S-10D)	0,320 048 03
778 (2S-8D)	0,320 049 55

Cela permet alors de déterminer la variation de la distance de pénétration d entre le rouge et l'infrarouge. On trouve :

$$\delta d(633\text{nm}-779\text{nm}) = 0,74 \text{ nm.}$$

Discutons maintenant l'effet de vieillissement des miroirs. Ce vieillissement semble présenter deux composantes : une "lente", qui est probablement liée à des réarrangements des couches métalliques des miroirs et qui diminue le long du temps [4.1]. La dérive due à cette composante a été évaluée dans la référence [4.1] à 4×10^{-10} /jour pendant le premier mois après l'évaporation et décroît jusqu'à 1×10^{-10} /jour pendant le deuxième mois ; dans cette même référence il est montré qu'une interpolation linéaire permet d'éliminer cette dérive à 5×10^{-11} près. Les miroirs utilisés par nous ont été fabriqués trois années avant les mesures, et sont donc peu sensibles à ce genre de dérive.

Le second type de vieillissement est dû à l'exposition des miroirs à l'air lors du changement d'épaisseur du Fabry-Perot. Il semble que les miroirs deviennent moins sensibles à ces changements au cours du temps. La figure 4.8 montre les changements d'épaisseur dus au déphasage à la réflexion en fonction du temps, y compris pour les résultats obtenus lors de notre première mesure de 1986 [4.9]. Ces variations s'échelonnent entre 0,25 et 1 Å.

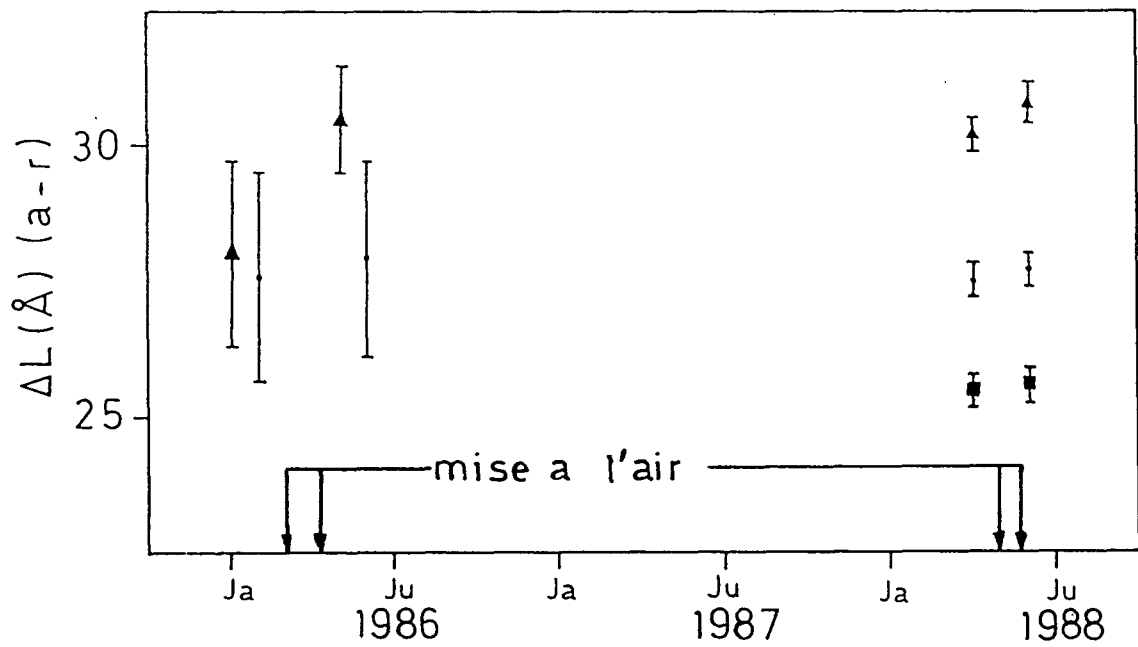


Figure 4.8 - Variation de la longueur apparente du Fabry-Perot étalon pour différentes longueurs d'onde en fonction du temps. ■ : 750 nm (2S-12D) ; ● : 760 nm (2S-10D) ; ▲ : 778 nm (2S-8D).

Dans les jours qui suivent un changement d'épaisseur du Fabry-Perot on observe de brusques variations de l'épaisseur dans des temps très courts. La figure 4.9 montre la variation de l'intervalle entre ordres du Fabry-Perot juste après un changement d'épaisseur en fonction du temps. Ces variations sont probablement dues à des réarrangements atomiques au niveau des surfaces d'adhérence optique et elles disparaissent au bout de quelques jours.

On discutera dans le chapitre VI de l'application de la technique décrite ici au dépouillement de nos résultats expérimentaux, et on donnera une analyse détaillée des incertitudes expérimentales.

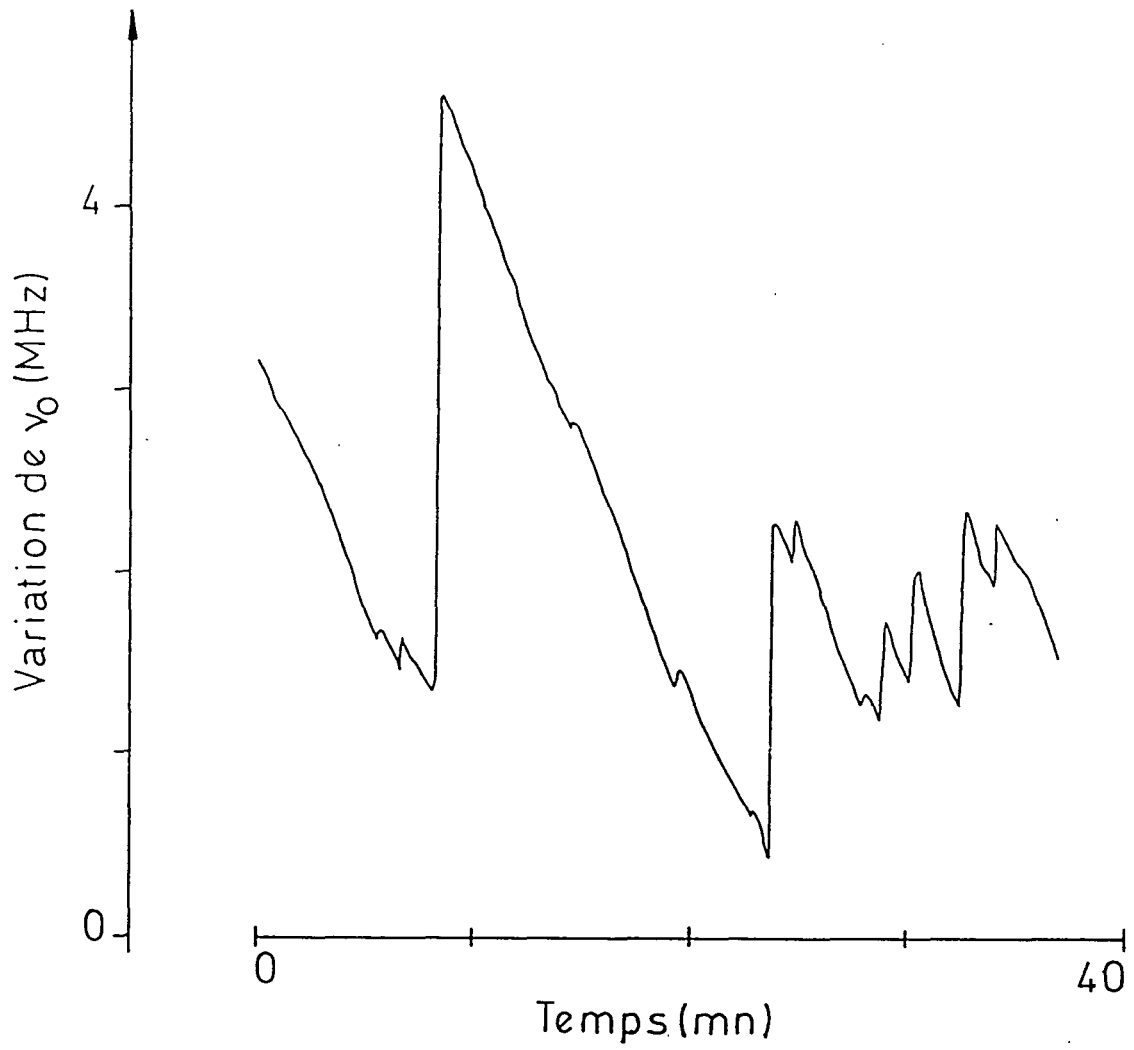


Figure 4.9 - Variation de l'intervalle entre ordres du FPE en fonction du temps après un changement d'épaisseur.

REFERENCES DU CHAPITRE IV

- 4.1 H. P. Layer, R. D. Deslattes and W. G. Schweitzer, Jr., *Appl. Opt.* 15, 734 (1976).
- 4.2 H. Kogelnik and T. Li, *Appl. Opt.* 5, 1550 (1966).
- 4.3 M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- 4.4 C. Fabre, R. G. DeVoe and R. G. Brewer, *Opt. Lett.* 11, 365 (1986).
- 4.5 D. J. Struik, *Lectures on Classical Differential Geometry*, Addison-Wesley, Reading, 1961.
- 4.6 M. M. Popov, *Opt. Spectr. (URSS)* 25, 213 (1968).
- 4.7 J. Arnaud and H. Kogelnik, *Appl. Opt.* 8, 1687 (1969).
- 4.8 M. Born and E. Wolf, *Principles of Optics*, Pergamon, London, 1959.
- 4.9 F. Biraben, J. C. Garreau and L. Julien, *Europhys. Lett.* 2, 925 (1986).

CHAPITRE V

LE CALCUL DES FORMES DE RAIES

Dans une expérience de spectroscopie de haute résolution il est important non seulement de déterminer très précisément la position en fréquence des raies étudiées mais aussi de bien comprendre les effets capables de déplacer ou de déformer ces raies. Pour cela on va ajuster les formes de raies obtenues expérimentalement par des courbes théoriques qui reproduisent aussi bien que possible les vraies conditions de l'expérience (Chapitre VI). Cela doit nous permettre de tenir compte de plusieurs effets systématiques, comme par exemple le déplacement et l'élargissement de la raie dû à l'interaction avec le laser ("light-shift" ou déplacement lumineux).

Dans la première partie de ce chapitre, on donnera les formules théoriques concernant le calcul du taux de transition à deux photons et du light-shift. On considérera ensuite le calcul numérique des formes de raies et on introduira les différentes corrections dues aux effets de structure fine et de structure hyperfine. On discutera ensuite l'effet Doppler du deuxième ordre. On interprétera les principaux effets observés sur les formes de raies théoriques et l'importance des effets mineurs qui n'ont pas été considérés. La comparaison avec les résultats expérimentaux sera faite dans le Chapitre VI.

5.1 - Le taux de transition à deux photons et le light-shift.

Soient deux états atomiques $|i\rangle$ et $|f\rangle$ dont les énergies sont respectivement E_i et E_f ($E_f > E_i$, avec $\hbar\omega_{f1} = E_f - E_i$). Le taux de transition entre ces deux états induit par deux photons d'énergie $\hbar\omega$ est [5.1, 5.2] :

$$\Gamma_1 = \frac{n^2 \omega^2}{\epsilon_0^2 \hbar^2} \left| \sum_r \frac{\langle f | d \cdot \epsilon | r \rangle \langle r | d \cdot \epsilon | i \rangle}{\omega - \omega_{r1}} \right|^2 \frac{\Gamma_f}{(2\omega - \omega_{f1})^2 + (\Gamma_f/2)^2} \quad (5.1)$$

où n est le nombre de photons par unité de volume dans un sens de propagation, $\hbar\omega_{r1} = E_r - E_i$ ($|r\rangle$ représente n'importe quel état intermédiaire possible dont l'énergie est E_r , y compris des états du continuum, cas où la somme en (5.1) se transforme en une intégrale), Γ_f est la largeur naturelle du niveau excité,

d l'opérateur moment dipolaire électrique et ϵ le vecteur polarisation de la lumière incidente.

La formule (5.1) peut être réécrite :

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_{f1} I^2}{(\Omega - c_{\ell_s} I)^2 + (\Gamma_f/2)^2} \quad (5.2)$$

Les fréquences sont comptées à partir de la fréquence de la résonance atomique. Comme cette résonance est déplacée par la puissance lumineuse, il vaut mieux dire à partir de la fréquence de résonance à puissance nulle $\omega_{f1}(0)$. On a donc $\Omega = 2\omega - \omega_{f1}(0)$. On a indiqué explicitement dans la formule (5.2) l'effet du light-shift : $\omega_{f1} = \omega_{f1}(0) + c_{\ell_s} I$. Le coefficient de light-shift c_{ℓ_s} sera calculé plus loin. I est la puissance lumineuse par unité de surface transverse du faisceau laser ; elle est reliée à la densité de photons n qui apparaît dans (5.1) : $I = n\hbar\omega c$.

On écrira le coefficient γ_{f1} comme

$$\gamma_{f1} = 4\pi^2 \left(\frac{2a_0^2}{mc^2 \alpha} \right)^2 |\gamma|^2 \Gamma_f \quad (5.3)$$

où a_0 est le rayon de Bohr, α la constante de structure fine. La quantité γ est calculée en unités atomiques $\hbar = m = (q^2/4\pi\epsilon_0) = 1$ (pour le cas où la polarisation est linéaire) :

$$\gamma = \sum_r \frac{\langle f | z | r \rangle \langle r | z | i \rangle}{\omega - (E_r - E_i)} \quad (\text{u.at.}) \quad (5.4)$$

Le light-shift est une correction à l'énergie de l'électron due à des processus d'absorption et d'émission virtuels des photons du laser (ce qui le différencie du Lamb-shift, dû à l'interaction avec le vide). La contribution à l'ordre le plus bas correspond aux deux diagrammes de Feynman montrés sur la figure 5.1. La théorie des perturbations au second ordre donne une correction proportionnelle à la puissance lumineuse et le coefficient de light-shift est donné par :

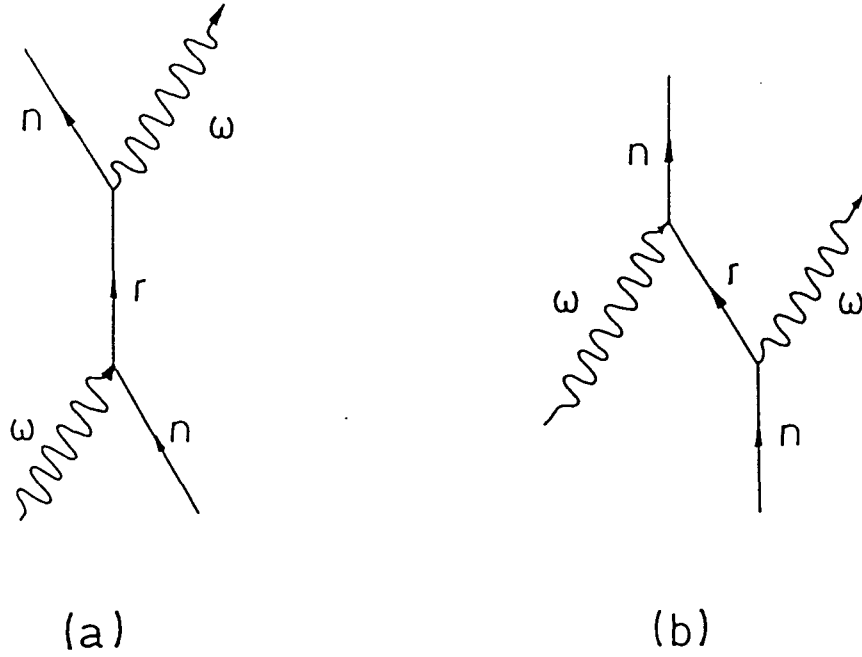


Figure 5.1 - Diagrammes de Feynman correspondant aux deux processus responsables du "light-shift" à l'ordre 2. (a) Absorption suivie d'émission virtuelle d'un photon laser ; (b) Emission suivie d'absorption virtuelle.

$$c_{\ell_s} = 2\pi \left(\frac{2a_0^2}{mc^2 \alpha} \right) \beta \quad (5.5)$$

avec β également évalué en unités atomiques :

$$\beta = \beta_f - \beta_i$$

avec $(n=i, f)$:

$$\beta_n = \sum_r \left[\frac{|\langle n|z|r\rangle|^2}{E_n - E_r + \omega} + \frac{|\langle n|z|r\rangle|^2}{E_n - E_r - \omega} \right]. \quad (\text{u.at.}) \quad (5.6)$$

Le terme en $+\omega$ au dénominateur correspond au diagramme de Feynman (a) sur la figure 5.1 (absorption virtuelle suivi d'émission virtuelle), le terme en $-\omega$ correspond au diagramme (b) (émission virtuelle suivi d'absorption virtuelle).

Dans l'Appendice III sont réunies certaines formules utiles au calcul des éléments de matrice de dipôle pour un atome de Schrödinger, dans une forme adéquate au calcul numérique. A partir de ces formules, nous avons calculé les coefficients β et γ pour les différentes transitions.

Dans les tables 5.I et 5.II sont données quelques valeurs numériques de γ et β . Les figures 5.2 et 5.3 montrent les variations de ces deux coefficients avec n (nombre quantique principal), entre $n=4$ et $n=20$. Quelques commentaires intéressants peuvent être faits :

En écrivant ces équations on a choisi la jauge $-r.E$, plutôt que $p.A$, pour représenter l'interaction dipolaire électrique. Le résultat final est bien sûr indépendant de la jauge choisie, mais il est connu [5.3] que la convergence de la série est plus rapide pour ce choix de jauge.

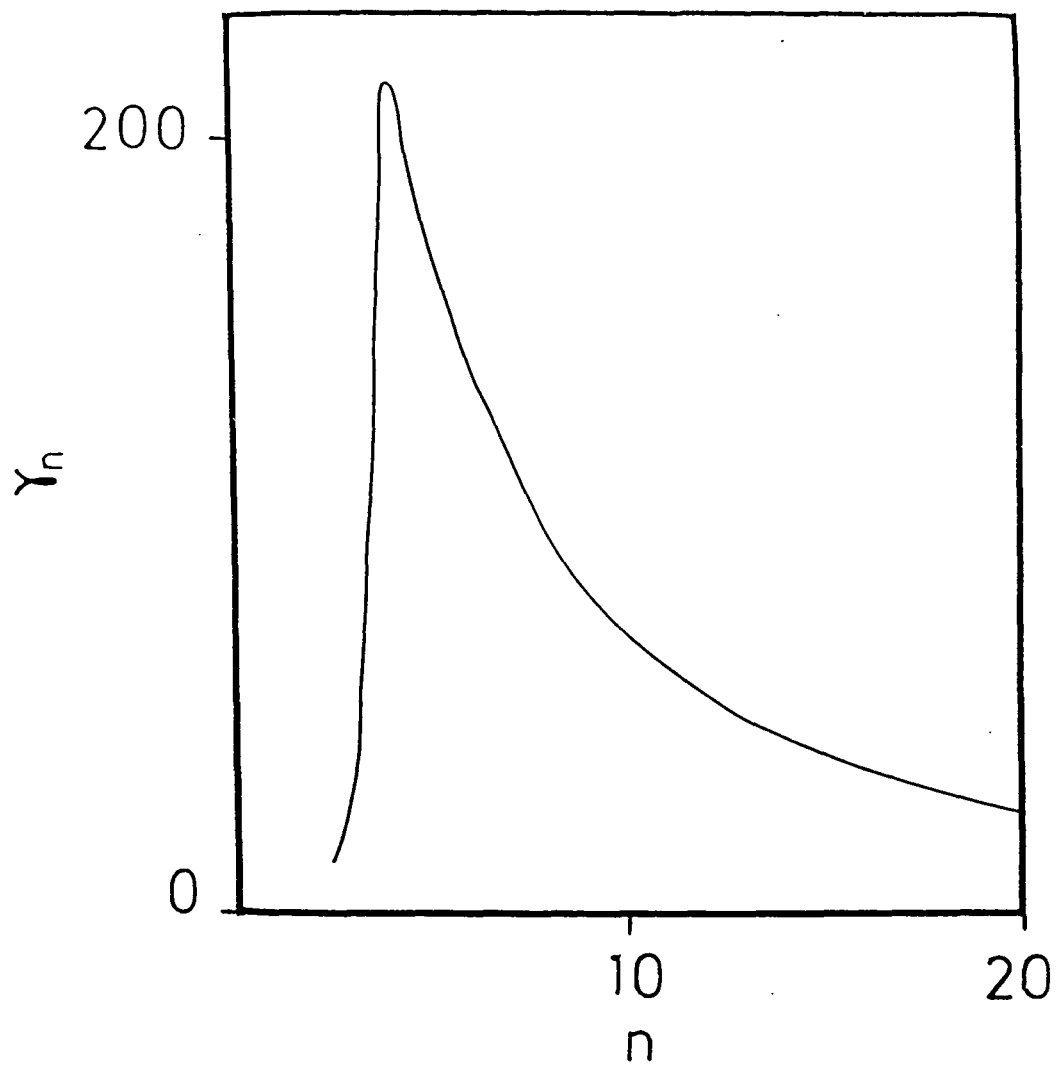


Figure 5.2 - Variation du coefficient γ du taux de transition à deux photons (cf. texte) avec n .

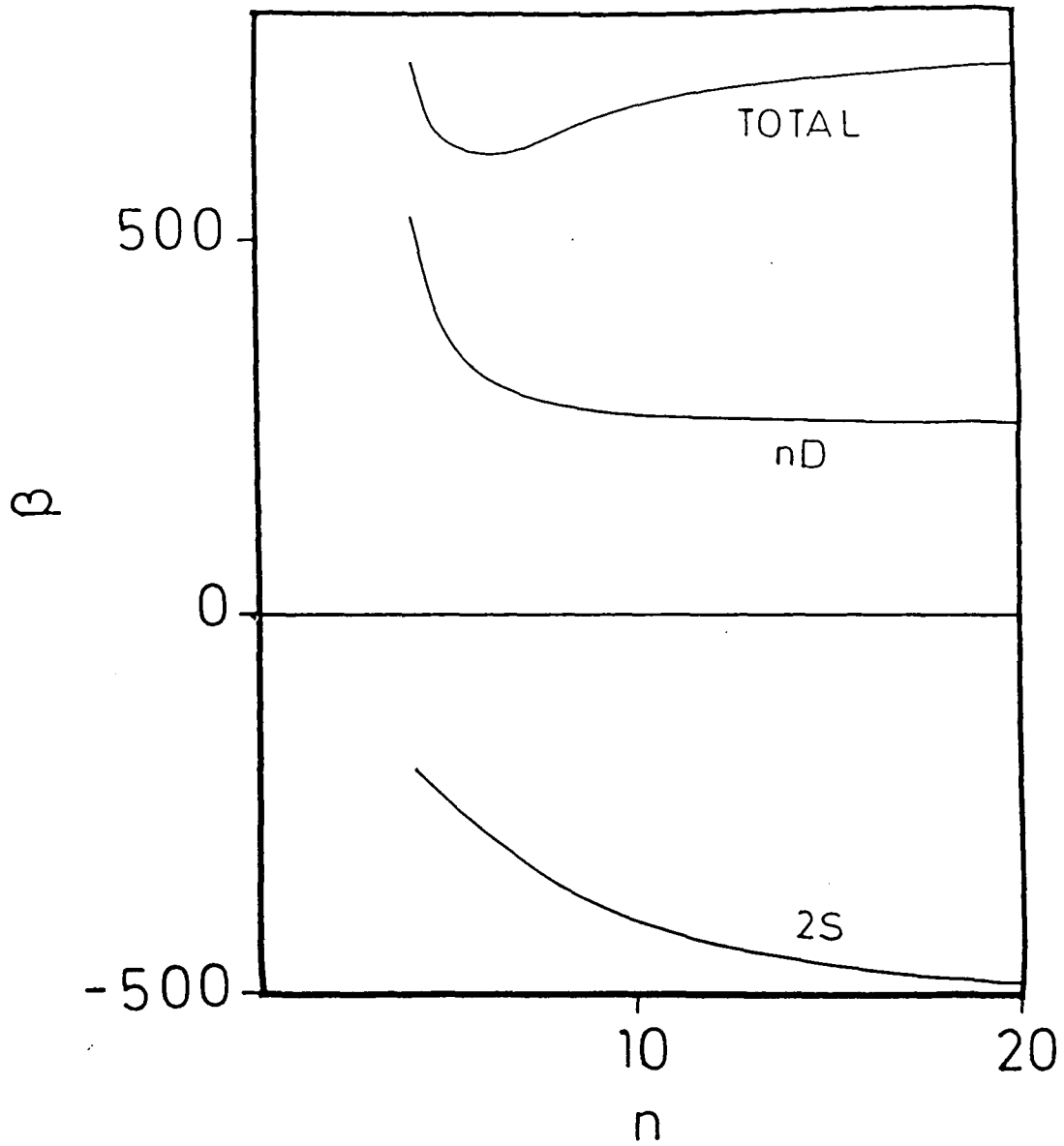


Figure 5.3 - Variation du coefficient de light shift β avec n . On montre la contribution due au niveau 2S, celle due au niveau nD et l'effet global $[\beta(nD) - \beta(2S)]$.

TABLE 5.I

Contributions au coefficient γ des divers type d'état.

Transition	Etats discrets	Etats du continuum	Total
2S-8S	2,402	-17,323	-14,921
2S-10S	5,730	-18,566	-12,836
2S-8D	-86,957	-5,980	-92,937
2S-10D	-62,700	-7,220	-69,920
2S-12	-46,870	-8,164	-55,034
2S-nD (n $\rightarrow\infty$)			-2535,8 n ^{-3/2}

TABLE 5.II

Contributions au coefficient β .

Transition	Niv.	Discrets		Continuum		Total
		$\ell+1$	$\ell-1$	$\ell+1$	$\ell-1$	
2S-8D	2S	-344,6		-10,7		-355,3
2S-8D	8D	473,2	-251,4	57,2	6,4	285,4
2S-10D	2S	-388,2		-10,8		-399,0
2S-10D	10D	454,2	-235,6	48,7	6,8	274,1
2S-12D	2S	-417,7		-10,8		-428,5
2S-12D	12D	446,6	-228,2	43,0	7,1	268,5
2S-nD	2S (n $\rightarrow\infty$)					-519,7
2S-nD	nD (n $\rightarrow\infty$)					256,0

Il est intéressant de noter que, pour la transition 2S-10D par exemple, l'absorption du premier photon met l'atome dans un état virtuel d'énergie -0,13 Ry, comparée à -0,111 Ry pour l'état 3P, soit 16% en dehors de la résonance. La sommation numérique de la série (5.4) montre que l'approximation

qui consiste à prendre le seul état 3P comme état intermédiaire, approximation fondée sur des arguments de résonance largement répandus dans la littérature, donne un résultat faux de 30% environ. Quand on calcule des taux de transition vers les états S (2S-nS), on constate que la contribution due à l'état 3P interfère destructivement avec les autres contributions des états discrets et que la contribution la plus importante vient des états du continuum.

On observe que le coefficient de light-shift β_n tend vers des valeurs asymptotiques indépendantes de n : il y a une "saturation" du light-shift (ce qui est visible sur la figure 5.3). Ce résultat peut paraître surprenant quand on sait que les niveaux de Rydberg très excités sont fortement couplés aux niveaux voisins n+1 et n-1. Néanmoins, la différence d'énergie entre le niveau considéré et les niveaux voisins est très petite (elle varie en gros comme n^{-3}) comparée à l'énergie du photon (qui, asymptotiquement, ne dépend presque pas de n). Si l'on néglige, dans (5.6), cette différence d'énergie face à l'énergie du photon on voit que les contributions s'annulent pour des niveaux tels que $n \approx n'$. Autrement dit, les deux diagrammes de Feynman de la figure 5.1 interfèrent destructivement pour ces niveaux. On observe aussi, comme il a déjà été dit plus haut, que la contribution des niveaux du continuum aux amplitudes de transition 2S-nS est 5 à 8 fois plus grande que la contribution des états discrets, une interférence destructive ayant lieu entre les états du continuum et les états discrets.

5.2 - La statistique des trajectoires.

On a vu dans la partie précédente que la probabilité de transition à deux photons comme le light-shift dépendent de la puissance lumineuse vue par l'atome. Dans notre expérience on a des atomes qui se meuvent avec une dispersion de trajectoires qu'on supposera aléatoire et limitée uniquement par les deux diaphragmes de collimation (voir Chapitre III). La distribution des trajectoires sera considéré comme uniforme sur le deuxième diaphragme (ce qui est en accord avec la simulation numérique de la figure 3.12). Par contre, nous disposons de peu de renseignements sur la distribution des trajectoires sur le premier diaphragme, où des champs électriques parasites et des effets de dispersion spatiale des atomes (car ce diaphragme, vu de la région du bombardement électronique, correspond à un angle solide comparable à l'angle solide de dispersion des atomes) peuvent influencer la distribution spatiale

des trajectoires des atomes métastables sur ce diaphragme. Ce problème sera discuté en plus grand détail dans le paragraphe 6.3.1. Pour l'instant on supposera que cette distribution est également uniforme, mais concentrée dans un disque de rayon $0 < R_1 < 3,5$ mm à déterminer (il sera déterminé par les "fits" des courbes expérimentales, comme on le verra dans le chapitre VI).

Le faisceau laser pour sa part a une distribution d'intensité transverse gaussienne, caractéristique des cavités optiques à miroirs sphériques (Chapitre IV, partie 4.4). On voit donc que la puissance lumineuse vue par l'atome dépend de sa trajectoire ; en particulier, le light-shift qu'il expérimente varie d'un point à l'autre. On verra que cette inhomogénéité du light-shift est la principale cause d'élargissement des raies.

Chaque trajectoire sera caractérisée par ses points initial et final sur les diaphragmes (voir figure 5.4). On prendra pour cela des coordonnées cylindriques, r_1 et θ_1 étant les coordonnées du point de départ sur le premier diaphragme, r_2 et θ_2 celles du point final sur le deuxième diaphragme et z la distance mesurée le long de l'axe du faisceau laser, supposé parfaitement aligné avec les diaphragmes.

Le taux de transition à deux photons Γ_1 en un point quelconque (r, θ, z) dans le faisceau laser est donné par la formule (5.2), avec $I=I(r, z)$. La probabilité pour qu'un atome reste dans l'état métastable satisfera alors à l'équation

$$\frac{dn}{dt} = - \Gamma_1(r, z) n(r, z) ;$$

si la vitesse des atomes le long de l'axe du faisceau laser est v , on peut écrire ($z=vt$) :

$$\frac{dn}{dz} = - \frac{1}{v} \Gamma_1(r, z) n(r, z) .$$

Si l'on intègre cette équation le long d'une trajectoire caractérisée par ses points initial et final $r_1, \theta_1; r_2, \theta_2$, on obtient la probabilité pour qu'un atome métastable parcoure la trajectoire sans subir une transition à deux photons, d'où l'on peut déduire la probabilité de transition à la fin d'une trajectoire ($z=L$) :

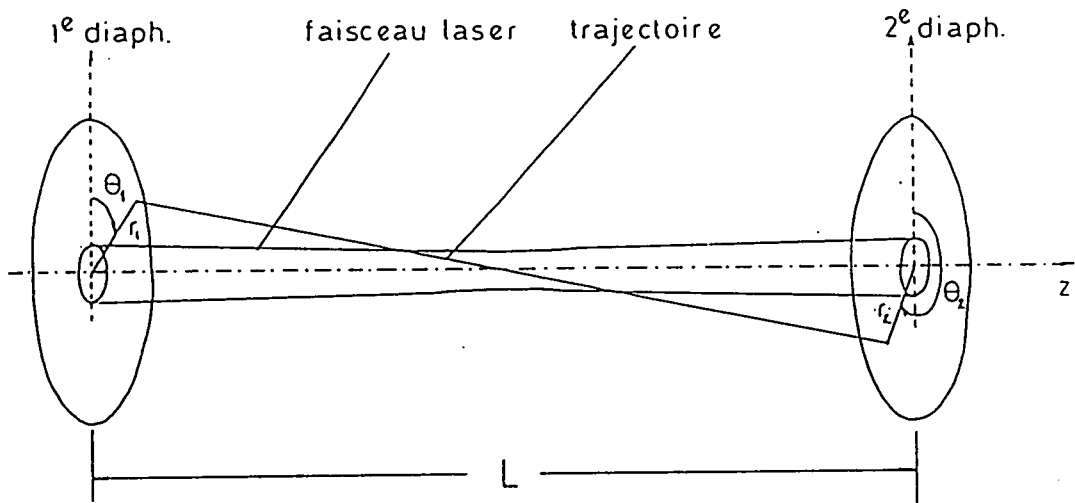


Figure 5.4 - Paramètres caractérisant une trajectoire atomique.

$$P(r_1, \theta_1, r_2, \theta_2) = 1 - \exp \left\{ -v^{-1} \int_0^L dz \frac{\gamma_{f1} [I(z)]^2}{[\Omega - c_{1s} I(z)]^2 + (\Gamma_f/2)^2} \right\} \quad (5.7)$$

où L est la distance entre les deux diaphragmes (956 mm). Comme les atomes n'ont pas la même vitesse, on mettra à la place de v^{-1} la moyenne de v^{-1} calculée à partir de la distribution de vitesses des atomes (paragraphe 3.1.7), $\langle v^{-1} \rangle$. Cela est, bien entendu, une approximation dont la portée sera discutée plus loin (partie 5.5).

La fonction sous l'intégrale dépend de la variable d'intégration z par l'intermédiaire de l'intensité du laser, qui est donnée par (voir partie 4.4) :

$$I(z) = I_0 \exp \left\{ -2 \left(\frac{\rho(z)}{w(z)} \right)^2 \right\} \quad (5.8)$$

où ρ est la distance radiale à l'axe du faisceau laser et w est la distance radiale à laquelle le champ électrique dû au faisceau laser tombe à $1/e$ de sa valeur sur l'axe.

La dépendance explicite de ρ et w avec les paramètres de la trajectoire est (on a mis $\theta_1 = 0$ grâce à la symétrie cylindrique du problème) :

$$\rho^2 = r_1^2 \left(1 - \frac{z}{L} \right)^2 + 2r_1 r_2 \frac{z}{L} \left(1 - \frac{z}{L} \right) \cos \theta_2 + \left(\frac{r_2 z}{L} \right)^2 \quad (5.9)$$

$$\text{et} \quad w^2 = w_0^2 \left(1 + \frac{(z - z_0)^2}{L_R^2} \right) \quad (5.10)$$

où w_0 est le rayon minimum du faisceau laser, déterminé par la géométrie de la cavité où se trouve le jet atomique (dans notre expérience w_0 vaut environ $600 \mu\text{m}$), $z_0 = 134$ mm la distance entre le premier diaphragme et le point de diamètre minimum du faisceau laser et $L_R = \pi w_0^2 / \lambda$ la longueur de Rayleigh du faisceau laser (voir partie 4.4).

On doit sommer l'expression (5.7) sur toutes les trajectoires possibles, soit

$$P(\Omega, I_0) = N^{-1} \int_0^{R_1} dr_1 r_1 \int_0^{R_2} dr_2 r_2 \int_0^\pi d\theta_2 P(r_1, r_2, \theta_2) \quad (5.12)$$

où $N = \pi R_1^2 R_2^2 / 4$ (R_1 et R_2 sont les rayons des diaphragmes). On prendra toujours $R_2 = 3,5$ mm, la valeur de R_1 sera considérée comme une variable à déterminer, comme on l'a discuté plus haut. La symétrie cylindrique du problème (si le faisceau laser et les diaphragmes sont vraiment alignés) nous permet d'éliminer l'intégrale sur θ_1 (fixé à 0°).

Dans la suite de ce chapitre, on apportera à cette formule différentes corrections (structure fine et hyperfine, etc), mais le problème numérique central est déjà posé : il consiste à calculer une intégrale multiple d'ordre 4. Nous avons réalisé ce calcul au moyen d'un programme d'intégration du type "Gauss" [5.4, ch 25].

5.3 - Les corrections de structure fine et hyperfine. Effet de repopulation du niveau $2S_{1/2}$ par désexcitation spontanée du niveau excité.

Les résultats présentés dans le paragraphe 5.2 ont été obtenus pour un atome de Schrödinger, les effets de structure fine et hyperfine n'ayant pas été considérés.

5.3.1 - Effet de la structure hyperfine du niveau $2S$.

Dans notre expérience, la résolution optique est suffisamment bonne pour résoudre complètement la structure hyperfine du niveau $2S_{1/2}$ mais la méthode de détection employée - "quenching" des atomes métastables survivant à l'interaction avec le laser - ne distingue pas les deux sous-niveaux de structure hyperfine de l'état $2S_{1/2}$.

La dispersion en énergie des électrons utilisés dans le bombardement électronique étant beaucoup plus grande que la différence d'énergie entre les deux sous-niveaux hyperfins du niveau $2S$ (de l'ordre de $0,7 \mu\text{eV}$ pour l'hydrogène), on peut supposer qu'au départ ces sous-niveaux hyperfins sont également peuplés. La population d'un niveau hyperfin de moment cinétique total F_1 sera alors proportionnelle à la dégénérescence $2F_1 + 1$ de ce niveau.

Pour l'hydrogène, on a $F_1=0$ et 1, pour le deutérium $F_1=1/2$ et $3/2$.

La résolution de l'expérience ne nous permet pas de résoudre la structure hyperfine du niveau excité. Dans ces conditions, on peut montrer que le taux d'excitation à deux photons ne dépend pas de F_1 (voir Appendice IV équation A4.3). L'amplitude du signal obtenu est donc simplement proportionnelle à la population du niveau de départ, et plus grande pour le niveau de F_1 plus élevé ($F_1=1$ pour H, $F_1=3/2$ pour D). Ce sont des transitions à partir de ces niveaux que nous avons choisi d'étudier dans cette expérience. On doit tenir compte du fait que les atomes initialement présents dans le jet dans le niveau hyperfin de F_1 plus petit sont aussi détectés. La formule (5.7) doit donc être multipliée par un facteur C_{sh} (rapport entre la population du niveau hyperfin 2S étudié et le nombre total d'atomes 2S) qui vaut

$$C_{sh} = \frac{2F_p + 1}{2F_{np} + 1 + 2F_p + 1}$$

où F_p correspond au niveau qui subit le pompage par les transitions à deux photons et F_{np} correspond au niveau qui n'est pas pompé. Pour l'hydrogène on a

$$C_{sh}(H) = 3/4$$

et pour le deutérium

$$C_{sh}(D) = 2/3$$

L'effet de ces corrections sur la formule (5.12) est donc d'ajouter un facteur multiplicatif :

$$P_{sh}(\Omega, I_0) = C_{sh} P(\Omega, I_0). \quad (5.13)$$

5.3.2 - Effet de la structure fine du niveau excité.

La structure fine du niveau excité est complètement résolue ; on a choisi d'étudier la plus intense des composantes de structure fine, celle correspondant à $J_f=5/2$. On n'en a pas tenu compte dans les formules données dans la partie 5.2. En particulier, le coefficient γ_{f_1} présent dans la formule (5.3) ne tient pas compte de la structure fine du niveau excité. Dans l'Appendice IV (formule (A4.3)) on montre que ce taux d'excitation à deux

photons est aussi indépendant de J_f . Cela veut dire que la contribution de chaque niveau de structure fine est proportionnelle à la dégénérescence $2J_f + 1$ du niveau en question. On doit donc corriger le coefficient γ_{f1} d'un facteur (les indices p et np signifient pompé et non pompé par la transition à deux photons).

$$\frac{2J_p + 1}{2J_{np} + 1 + 2J_p + 1} = 0,6$$

et écrire

$$\gamma_{f1}(\text{sf}) = 0,6 \gamma_{f1}. \quad (5.14)$$

5.3.3 - Effet des cascades radiatives vers les états 1S et 2S.

Considérons maintenant l'effet de repopulation du niveau $2S_{1/2}$ par émission spontanée à partir du niveau excité. Evidemment, cela ne peut se faire qu'à l'aide d'un nombre pair de photons, en raison des parités des deux niveaux. On considérera le cas le plus simple : des cascades à deux photons passant par un niveau intermédiaire mP . On verra par la suite que la structure hyperfine introduit dans ce calcul des corrections qui sont indépendantes du nombre quantique principal, ce que nous permet de les ignorer pour l'instant et de les rajouter plus tard.

Le niveau $2S_{1/2}$ a une durée de vie naturelle d'environ 0,1 s qui doit être comparée aux temps de transit qui sont au maximum de l'ordre de 500 μ s ; on peut donc prendre la durée de vie du niveau 2S comme étant infinie. On a ainsi deux états finals possibles, les niveaux 1S et 2S. De plus, comme le taux d'émission spontanée du niveau excité est beaucoup plus grand que le taux d'excitation à deux photons, nous pouvons négliger la population de l'état excité.

La figure 5.5 montre les processus considérés ici. Le laser excite des atomes vers l'état $nD_{5/2}$ qui se désexcite par émission spontanée d'un photon vers un état intermédiaire mP . Celui-ci se désexcite ensuite soit vers l'état 2S, soit vers l'état 1S. On veut déterminer la probabilité totale de retombée dans l'état 2S.

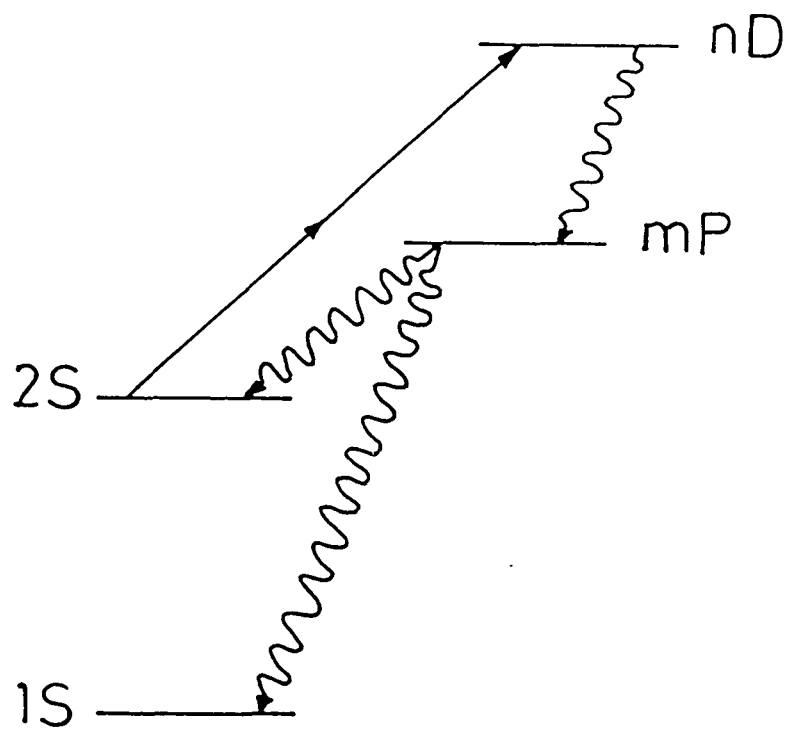


Figure 5.5 - Niveaux atomiques contribuant aux processus considérés ici (cf. texte). Effet de repopulation du niveau $2S$.

Définissons d'abord le taux d'émission spontanée $A(n, \ell \rightarrow n', \ell')$ entre les états $|n, \ell\rangle$ et $|n', \ell'\rangle$ avec $n > n'$:

$$A(n, \ell \rightarrow n', \ell') = \alpha \omega_{nn'}^3 |\langle n, \ell | r | n', \ell' \rangle|^2 \quad (5.15)$$

où α est une constante indépendante de n et n' et $\omega_{nn'}$ est la fréquence de la transition. Tenant compte des rapports de branchement entre les niveaux, on trouve aisément la probabilité pour qu'un atome excité se désexcite vers le niveau 2S :

$$R_n(2S) = \sum_{m=3}^{n-1} \frac{A(m, 1 \rightarrow 2, 0)}{2} \frac{A(n, 2 \rightarrow m, 1)}{n-1} \frac{1}{\sum_{k=1}^{m-1} A(m, 1 \rightarrow k, 0)} \frac{1}{\sum_{k=2}^{n-1} A(n, 2 \rightarrow k, 1)} \quad (5.16)$$

La table 5.III montre quelques valeurs de $R_n(2S)$ pour différents n .

TABLE 5.III

Taux de retombée à deux photons vers l'état 2S
à partir d'un niveau nD

n	R (2S) n
8	0,0513
10	0,0536
12	0,0548
15	0,0558
20	0,0567
∞	0,0582

On peut aussi évaluer l'effet des cascades à quatre photons du type $nD \rightarrow jF \rightarrow kD \rightarrow mP \rightarrow 2S$. On trouve que leur contribution rabaisse les valeurs de la

table 5.III de 5% environ. Comme les effets de structure hyperfine sur ces cascades à 4 photons sont laborieux à calculer et que l'effet total est si petit, on les a complètement négligés.

5.3.4 - Effet de pompage hyperfin du niveau $2S$.

Considérons maintenant l'effet de la structure hyperfine sur la repopulation du niveau $2S_{1/2}$. Prenons comme exemple le cas de l'hydrogène ; le cas du deutérium est analogue, un peu plus compliqué, mais la généralisation d'un cas à l'autre est immédiate. Comme seul le niveau hyperfin $F_1=1$ est susceptible d'interagir avec les photons, il importe de déterminer dans quelle proportion les atomes provenant du niveau excité se partagent entre les deux niveaux de structure hyperfine.

Le niveau excité est un mélange de deux niveaux de structure hyperfine, $F_f=2$ et $F_f=3$. Dans l'Appendice IV (formule (A4.1)) on montre que la population $P(F_f)$ de chacun de ces niveaux est proportionnelle à

$$(2F_f + 1) \left\{ \begin{matrix} 5/2 & 1/2 & 2 \\ 1 & F_f & 1/2 \end{matrix} \right\}_2 \quad (5.17)$$

ce qui donne $P(F_f=2) = 2/9$ et $P(F_f=3) = 7/9$.

On montre aussi dans l'Appendice IV que le taux de désexcitation spontanée entre un niveau hyperfin (J_h, F_h) (celui du haut) et (J_b, F_b) (celui du bas) est proportionnel à

$$M(J_h, F_h \rightarrow J_b, F_b) = (2F_b + 1) \left\{ \begin{matrix} J_h & F_h & I \\ F_b & J_b & 1 \end{matrix} \right\}_2. \quad (5.18)$$

Il est intéressant de noter que toute la dépendance du nombre quantique principal est contenue dans le facteur $R_n(2S)$. En se référant à la figure 5.6, on peut procéder exactement de la même façon que pour calculer $R_n(2S)$. On trouve ainsi les probabilités p_0 et p_1 pour qu'un atome partant de l'état excité finisse dans le niveau hyperfin $2S_{1/2}(F_1=0)$ ou dans le niveau hyperfin $2S_{1/2}(F_1=1)$:

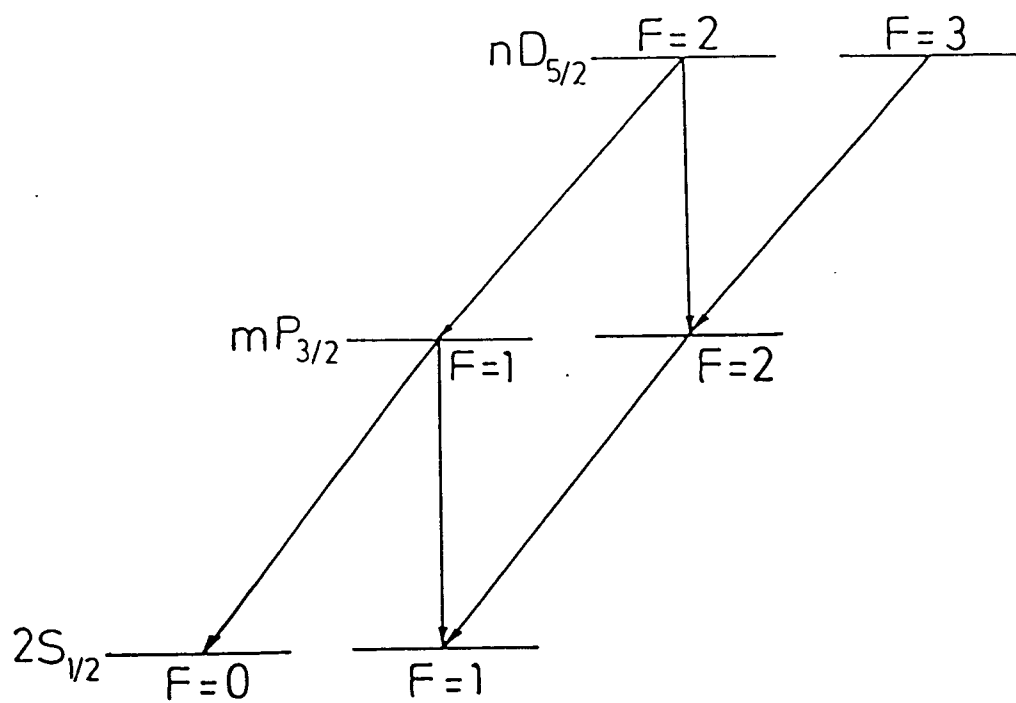


Figure 5.6 - Niveaux de structure hyperfine contribuant aux effets de pompage hyperfin (cf. texte).

$$p_0 = 0,6 P(F_f=2) R_n(2S) = (2/15) R_n(2S) \quad (5.19a)$$

$$p_1 = [0,4 P(F_f=2) + P(F_f=3)] R_n(2S) = (13/15) R_n(2S). \quad (5.19b)$$

Pour le deutérium on obtient

$$p_{1/2} = (8/45) R_n(2S) \quad (5.19c)$$

$$p_{3/2} = (37/45) R_n(2S). \quad (5.19d)$$

5.3.5 - Corrections apportées au calcul de la forme de raie.

Finalement, il nous reste à considérer les corrections que la retombée apporte à la formule (5.12). La figure 5.7 montre les processus qui nous intéressent.

Le comportement de ce système peut être décrit par les trois équations suivantes :

$$\frac{dN_1}{dt} = -\Gamma_1 N_1 + p_1 \Gamma_f N_f \quad (5.20a)$$

$$\frac{dN_0}{dt} = p_0 \Gamma_f N_f \quad (5.20b)$$

$$\frac{dN_f}{dt} = \Gamma_1 N_1 - \Gamma_f N_f \quad (5.20c)$$

où N_1 et N_0 sont les populations des sous-niveaux hyperfins du niveau 2S pompé et non pompé par la transition à deux photons, respectivement, et N_f la population du niveau excité. Γ_1 est le taux de transition à deux photons et Γ_f le taux de desexcitation spontanée du niveau excité.

Comme $\Gamma_f \gg \Gamma_1$, la population du niveau excité reste stable à un niveau très proche de zéro. On peut donc faire $dN_f/dt = 0$ dans (5.20c), ce qui donne l'identité

$$\Gamma_1 N_1 = \Gamma_f N_f. \quad (5.21)$$

En reportant cette équation dans (5.20a) on obtient

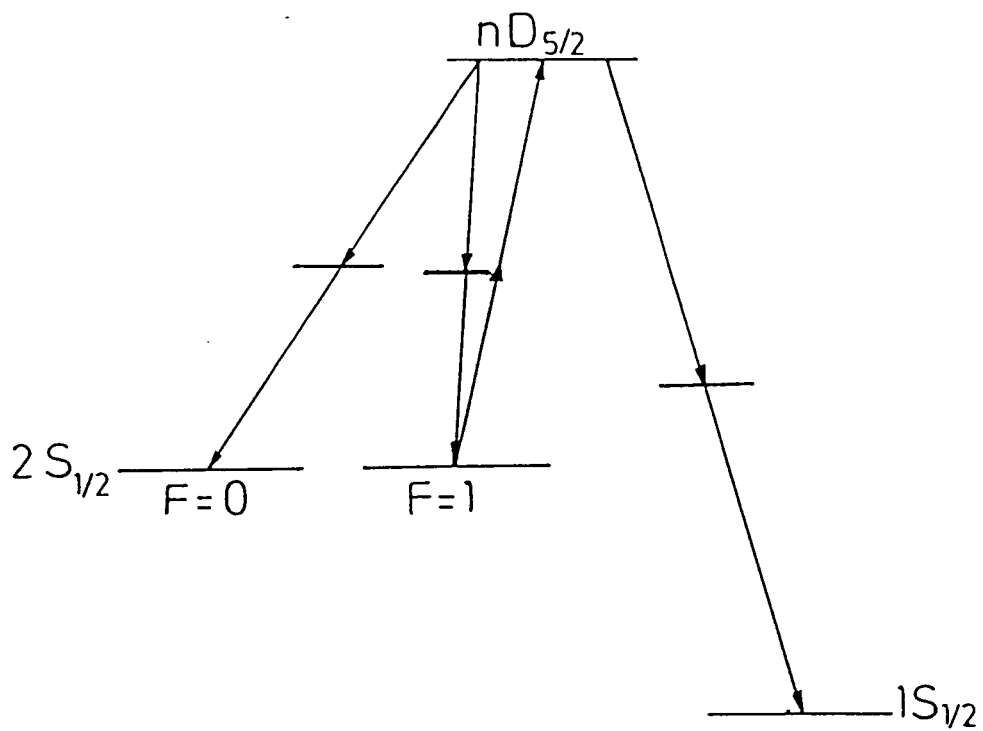


Figure 5.7 - Différents processus produisant des corrections au calcul de forme de raie (cf. texte).

$$\frac{dN_1}{dt} = - (1-p_1) \Gamma_f N_1 = - \Gamma_f' N_1 \quad (5.22)$$

où

$$\Gamma_f' = (1-p_1) \Gamma_f. \quad (5.23)$$

En intégrant cette équation on obtient :

$$N_1(t) = N_1(0) \exp(-\Gamma_f' t). \quad (5.24)$$

En reportant (5.23) dans (5.20b) et en intégrant on trouve

$$N_0(t) = N_0(0) + \frac{p_0}{1-p_1} N_1(0) [1 - \exp(-\Gamma_f' t)]. \quad (5.25)$$

Le signal expérimental que l'on détecte est la diminution relative du nombre total de métastables ($F_1=0$ ou 1) :

$$S_{\text{exp}} = \frac{N_0(0) + N_1(0) - N_0(t) - N_1(t)}{N_0(0) + N_1(0)}. \quad (5.26)$$

Avec l'aide de (5.24) et (5.25) on trouve

$$S_{\text{exp}} = \frac{N_1(0)}{N_0(0) + N_1(0)} \left[1 - \frac{p_0}{1-p_1} \right] S \quad (5.27)$$

où $S = 1 - \exp(-\Gamma_f' t)$ sera donné par la formule (5.12), $S = P_{sf,sh}(\Omega, I_0)$, où l'on doit modifier le taux de transition utilisé dans le calcul de P_{sf} en accord avec (5.23), ce qui revient à faire

$$\gamma_{f_1}(sf, sh) = (1-p_1) \gamma_{f_1}(sf) \quad (5.28a)$$

$\gamma_{f_1}(sf)$ étant donné par (5.14).

Le facteur $N_1(0)/[N_0(0)+N_1(0)]$ en (5.27) est exactement le facteur C_{sh} qui apparait en (5.13), on voit qu'il doit être aussi corrigé :

$$C_{sh} \rightarrow \left[1 - \frac{p_0}{1-p_1}\right] C_{sh}. \quad (5.28b)$$

Ces corrections s'appliquent aussi pour le deutérium en faisant les substitutions

$$p_0 \rightarrow p_{1/2} \text{ et } p_1 \rightarrow p_{3/2}.$$

En résumé, les effets discutés dans cette partie reviennent à récrire la formule (5.12) sous la forme

$$P_{sf,sh}(\Omega, I_0) = \left[1 - \frac{p_a}{1-p_b}\right] C_{sh} P(\Omega, I_0) \quad (5.29)$$

et à corriger

$$\gamma_{f1}(sf, hf) = 0,6 (1-p_b) \gamma_{f1} \quad (5.30)$$

où p_a correspond au sous-niveau hyperfin du niveau $2S_{1/2}$ qui n'interagit pas et p_b à celui qui interagit avec le laser.

5.4 - Résultats.

Dans cette partie on présentera et on discutera les résultats de l'intégration numérique de (5.12) avec les corrections (5.29) et (5.30).

Les principales caractéristiques des formes de raie que l'on obtient sont indépendantes de la transition considérée et aussi de l'espèce atomique (H ou D) en question. On les présentera normalisées de façon à accentuer ces similitudes et on prendra comme cas typique - sauf mention contraire - la transition $2S_{1/2} \rightarrow 10D_{5/2}$ dans l'hydrogène.

On a observé plusieurs effets intéressants sur les formes de raies :

a) Un déplacement de la position du maximum des courbes vers les fréquences positives par rapport à la résonance à puissance laser nulle.

b) Un élargissement croissant des raies avec la puissance lumineuse.

c) Une asymétrie croissante des profils pour les hautes puissances lumineuses.

d) Une saturation de l'intensité de la raie avec l'augmentation de la puissance laser.

Ces effets sont nettement mis en évidence sur la figure 5.8. Le dernier effet mentionné est très bien connu : il se manifeste pour n'importe quelle transition optique, et l'on ne peut pas le considérer indépendamment des effets de light-shift ; ces deux effets seront donc discutés ensemble.

5.4.1 - Le déplacement des raies.

Cet effet est évidemment dû au light-shift. Comme les raies deviennent asymétriques pour les hautes puissances, on a choisi de caractériser cet effet non pas par la position du maximum de la raie, mais par la position du centre à mi-hauteur (CMH). La figure 5.9 montre le déplacement de la raie (pour la transition vers le $10D_{5/2}$) en fonction de la puissance.

Pour mieux comprendre cet effet, on a choisi une normalisation qui consiste à diviser la position du CMH par la valeur du light-shift maximum (l_{smax}), donnée par $c_{\ell_s} I_0$ (voir partie 5.1). On peut ainsi éliminer la dépendance linéaire avec la puissance lumineuse et obtenir des résultats moins dépendants de la transition considérée.

La figure 5.10 montre la position du CMH normalisée en fonction de la puissance laser. On voit que les courbes sont décroissantes. La raison de cet écart à la linéarité repose sur le fait qu'avec l'augmentation de la puissance lumineuse, un nombre chaque fois plus grand d'atomes subit des transitions loin de l'axe du faisceau laser, présentant ainsi un light-shift moins important que le light-shift maximum (qui, lui, dépend linéairement de la puissance). En effet, on peut penser que la position du CMH définit une valeur moyenne de la puissance laser donnée par $\langle I_{\ell_s} \rangle = CMH/c_{\ell_s}$. De cette valeur on peut déduire un rayon moyen effectif du faisceau laser :

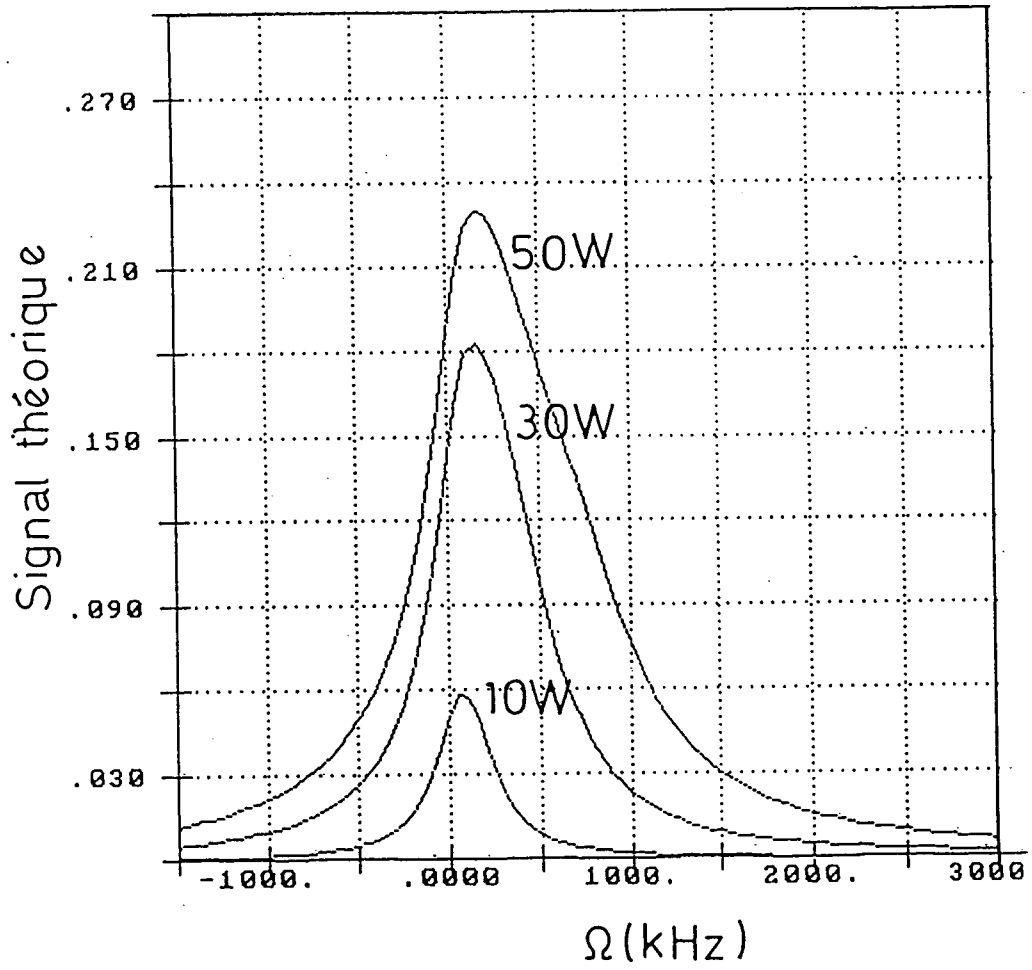


Figure 5.8 - Courbes théoriques obtenues pour la transition $2S_{1/2} (F=1) - 10D_{3/2}$ pour différentes puissances lumineuses.

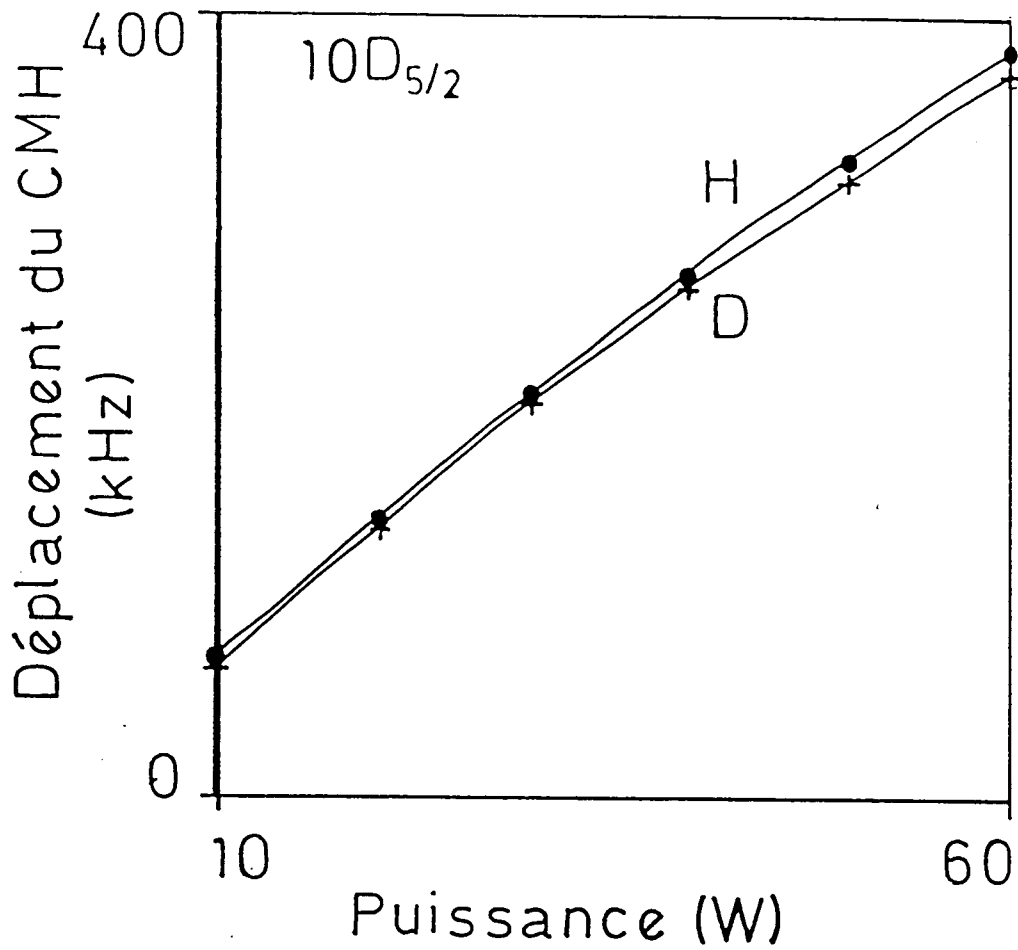


Figure 5.9 - Déplacement du centre à mi-hauteur (CMH) des raies théoriques par le light-shift en fonction de la puissance laser.

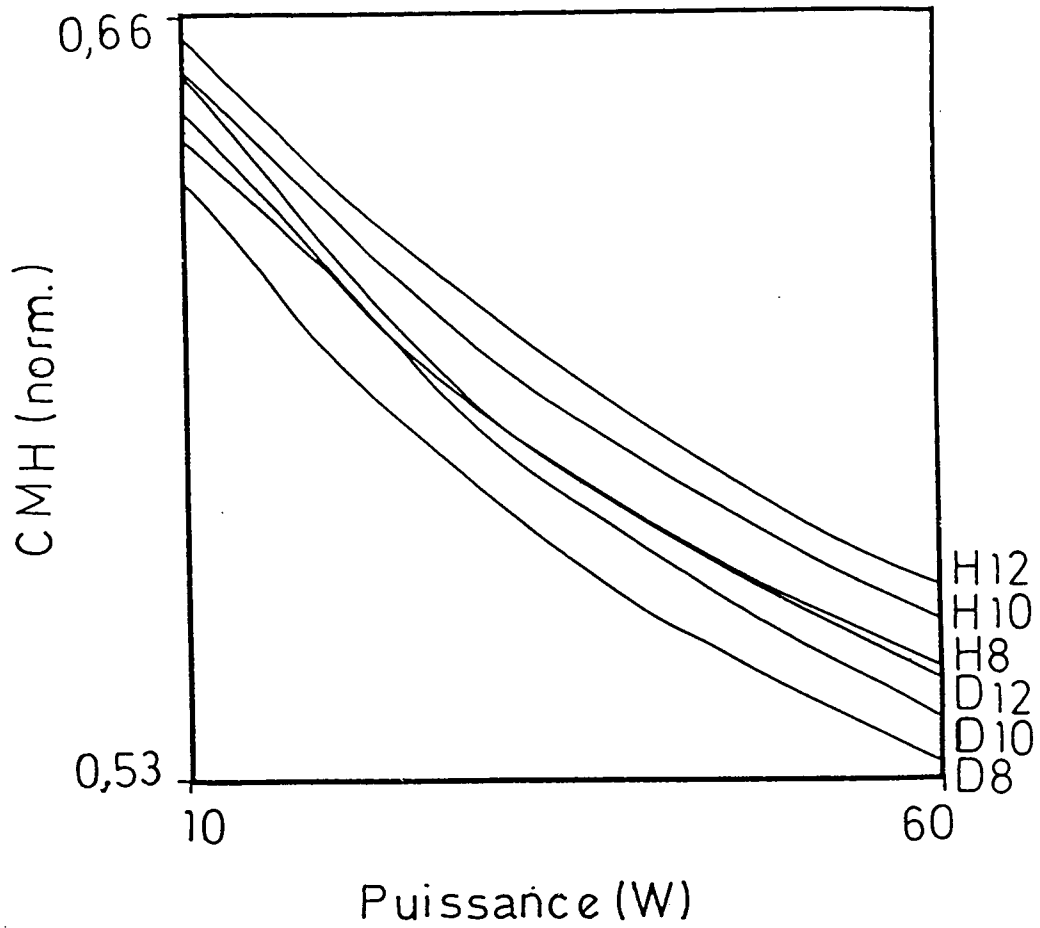


Figure 5.10 - Position du CMH (divisée par le light-shift maximum sur l'axe du faisceau laser, cf. texte) en fonction de la puissance laser.

$$\begin{aligned} \langle r_{\ell_s} \rangle &= \frac{W_0}{\sqrt{2}} \left[\ln \frac{I_0}{\langle I_{\ell_s} \rangle} \right]^{1/2} \\ &= \frac{W_0}{\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{I_{smax}}{CMH} \right) \right]^{1/2}. \end{aligned}$$

Si $\langle I_{\ell_s} \rangle$ dépendait linéairement de la puissance, on obtiendrait une valeur de $\langle r_{\ell_s} \rangle$ indépendante de la puissance. La figure 5.10 montre que $\langle I_{\ell_s} \rangle$ croît plus lentement que I_0 , de telle façon que $\langle r_{\ell_s} \rangle$ croît en fait avec la puissance. Cela est un cas typique de l'expansion du volume d'interaction, effet qui a un rôle important dans plusieurs expériences d'interaction d'atomes avec des lasers intenses, comme par exemple en ionisation multiphotonique [5.5].

La figure 5.11 montre le comportement de $\langle r_{\ell_s} \rangle$. On observe pour des puissances lumineuses élevées une saturation due au fait que le volume d'interaction est limité par la dimension transversale du jet atomique.

5.4.2 - L'élargissement et la déformation des raies.

Dans ce paragraphe on étudiera l'élargissement et la déformation progressifs des raies quand la puissance lumineuse augmente. On verra que ces effets sont indissociablement liés et que leur origine physique est l'inhomogénéité du light-shift subi par les atomes dû au profil gaussien du faisceau laser.

La table 5.IV permet de constater que la principale contribution à l'intensité de la raie, pour toutes puissances lumineuses et toutes fréquences, vient des trajectoires qui croisent le faisceau laser ($\theta_2 \approx 180^\circ$), subissant ainsi une puissance laser maximum. On voit que dans tous les cas les trajectoires telles que θ_2 est compris entre 135° et 180° sont responsables de plus de 75% de l'intensité de la raie.

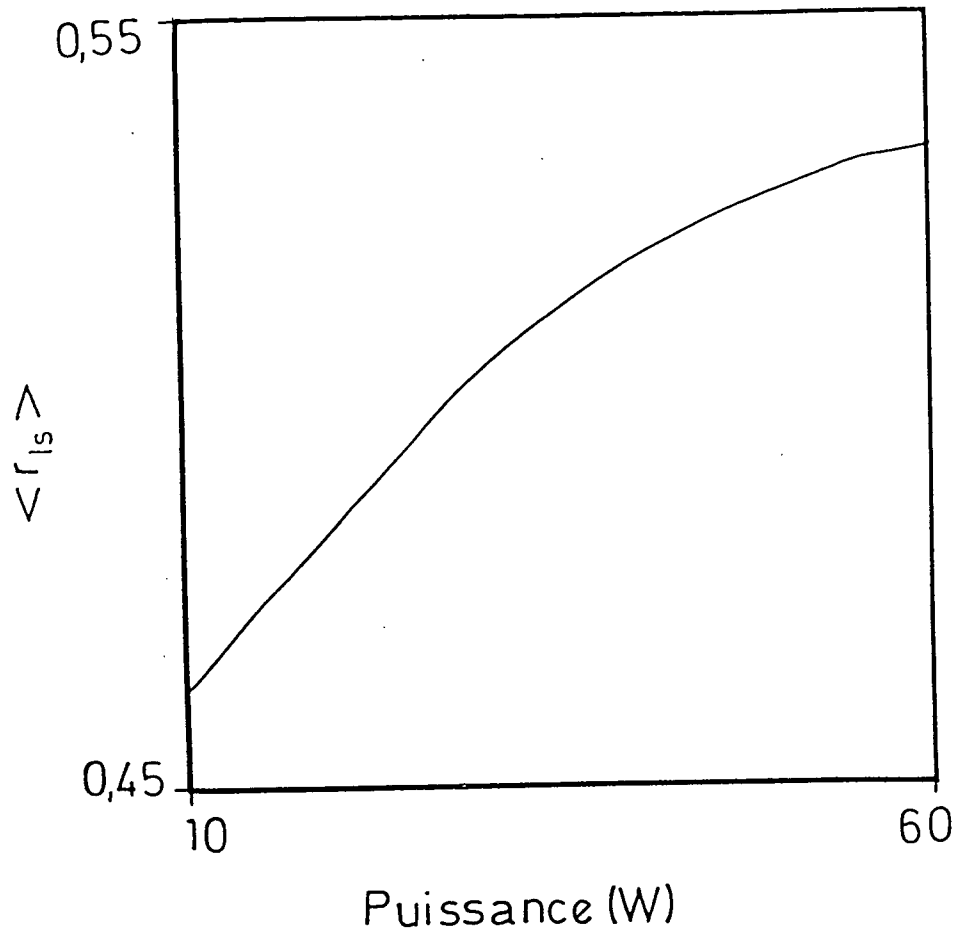


Figure 5.11 - Variation du "rayon moyen effectif" du faisceau laser (cf. texte) en fonction de la puissance laser.

TABLE 5.IV

Contribution des divers types de trajectoires à l'intensité de la raie.

P=20 W

Type	-50 kHz ^a	150 kHz ^b	350 kHz ^c
I	3,1%	2,6%	2,2%
II	4,4%	3,6%	3,1%
III	10,6%	8,7%	7,5%
IV	81,9%	85,1%	87,2%

P=60 W

Type	-50 kHz ^a	350 kHz ^b	750 kHz ^d	1150 kHz ^d
I	4,1%	4,4%	3,3%	2,3%
II	5,8%	5,5%	4,1%	3,1%
III	13,9%	11,1%	8,3%	6,8%
IV	76,2%	79,0%	84,3%	87,8%

^a Mi-hauteur coté basse fréquence

^b Maximum de la raie.

^c Mi-hauteur coté haute fréquence.

^d En raison de l'asymétrie de la raie, on présente deux valeurs :

750 kHz est le symétrique de -50 kHz par rapport au maximum ;

1150 kHz correspond à la mi-hauteur coté haute fréquence.

Types de trajectoire : I : $0^\circ < \theta_2 < 45^\circ$; II : $45^\circ < \theta_2 < 90^\circ$;

III : $90^\circ < \theta_2 < 135^\circ$; IV : $135^\circ < \theta_2 < 180^\circ$.

Cela prouve qu'on peut restreindre notre analyse à ces trajectoires sans perte d'aucun effet important. La figure 5.12 montre le comportement du taux de transition (divisé par le taux maximum sur l'axe du faisceau laser) le long de quelques trajectoires de ce type (toutes sont telles que $\theta_2 = 180^\circ$) en fonction de z/L (z , distance le long du faisceau laser, L longueur de la

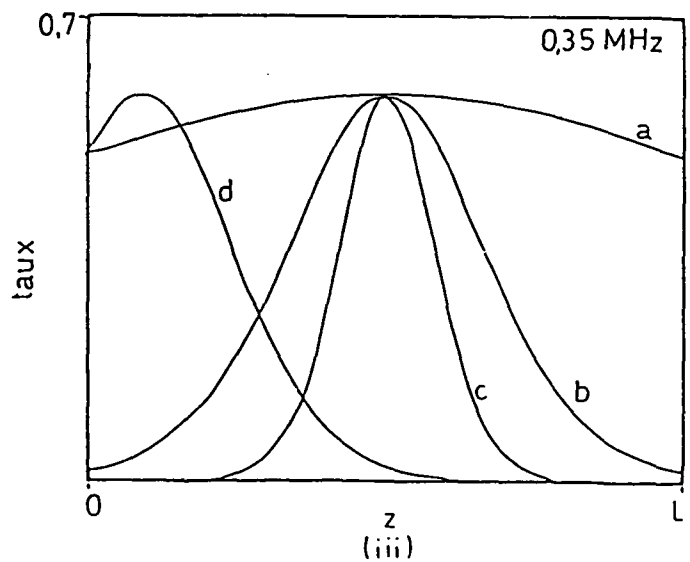
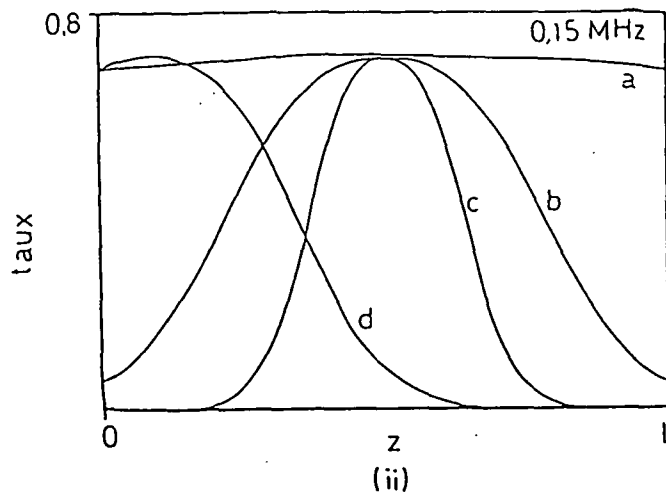
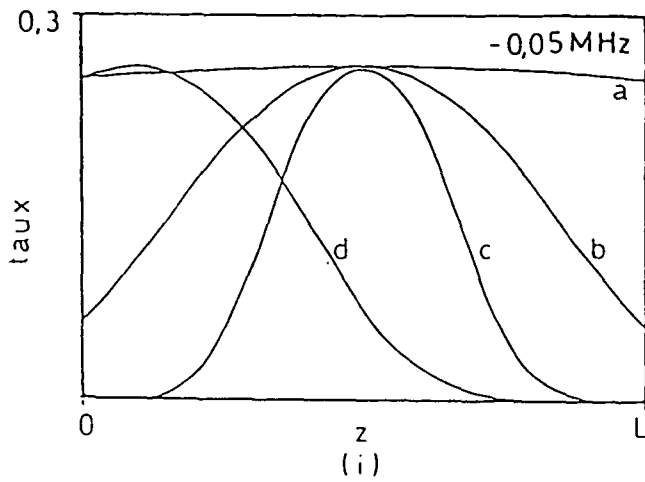
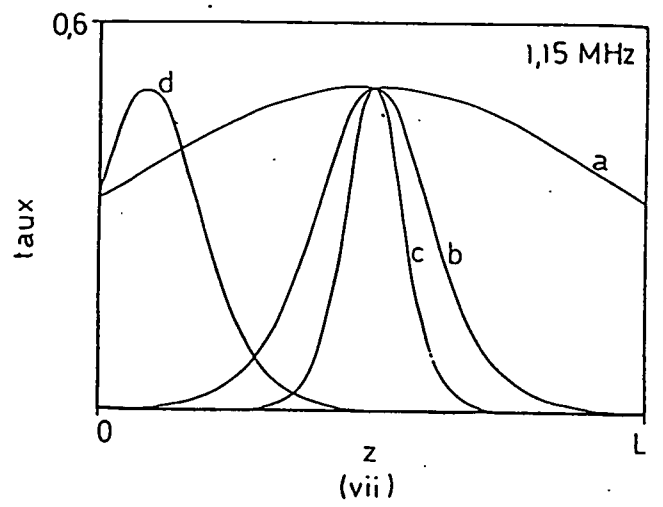
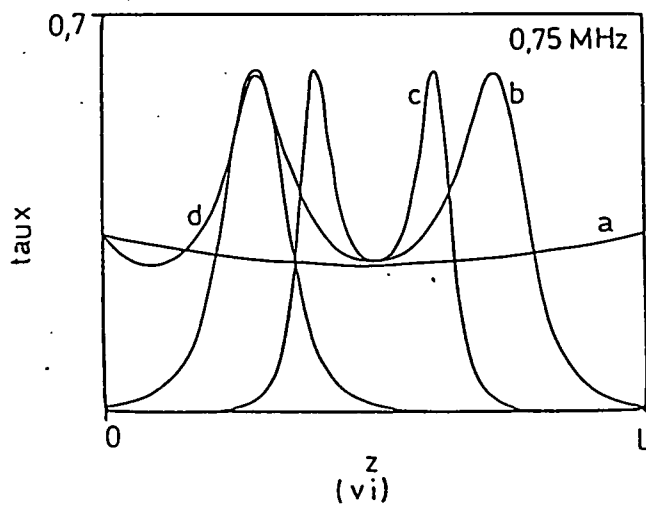
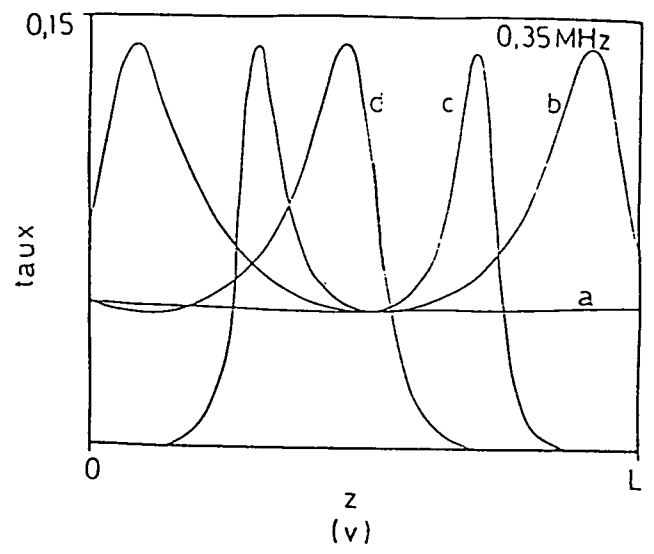
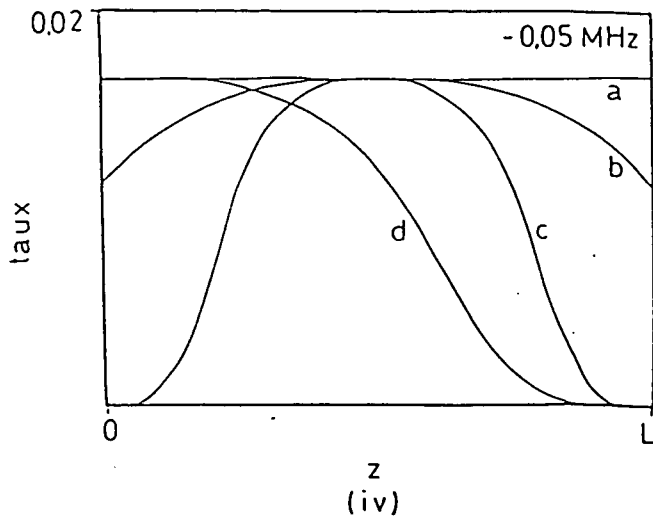


Figure 5.12 - De (i) à (vii), variation du taux d'excitation à deux photons (divisé par le taux maximum sur l'axe du faisceau laser) le long de différentes trajectoires (cf. texte) et pour différentes fréquences. (i) à (iii) : $P=20 \text{ W}$; iiv) à (vii), $P=60 \text{ W}$.



région d'interaction, 956 mm). Définissons les trajectoires de type a, b, c ou d :

$$(a) \quad r_1 = 0,1 \text{ mm} \qquad r_2 = 0,1 \text{ mm}$$

$$(b) \quad r_1 = 0,5 \text{ mm} \qquad r_2 = 0,5 \text{ mm}$$

$$(c) \quad r_1 = 1,0 \text{ mm} \qquad r_2 = 1,0 \text{ mm}$$

$$(d) \quad r_1 = 0,1 \text{ mm} \qquad r_2 = 1,0 \text{ mm.}$$

Les figures 5.12 (i), (ii) et (iii) correspondent aux trois premières valeurs de fréquence de la table 5.IV, celles de (iv) à (vii), aux quatre dernières. Les figures 5.12 (i) à (iii), correspondant à une basse puissance lumineuse (20 W), sont faciles à interpréter : quand l'atome s'approche de l'axe du faisceau laser, il voit une puissance lumineuse plus importante et le taux de transition augmente jusqu'à un maximum (sur l'axe). On remarque que la largeur des pics de ces courbes diminue quand la fréquence du laser augmente. Cela est dû au fait que pour des fréquences négatives le light-shift éloigne l'atome de la résonance, on a ainsi une courbe large avec un maximum peu prononcé. En revanche, pour des fréquences positives, le light shift pousse l'atome vers la résonance, ce qui donne une courbe étroite avec un maximum accentué. Cela est vrai tant que le light-shift est plus petit que la largeur naturelle de la transition. Pour $P=20 \text{ W}$ le light-shift maximum correspond à environ 80% de la largeur naturelle.

Les figures 5.12 (iv) et (vii) ($P=60 \text{ W}$) montrent un comportement qui est essentiellement le même que celui observé à basse puissance. Par contre, un changement de comportement important est observé sur les figures 5.12 (v) et (vi) comparées à (ii). Le light-shift peut maintenant être 2 à 3 fois la largeur naturelle de la transition et peut donc pousser les atomes largement hors de résonance. Ainsi, même si les atomes sont dans la région de puissance laser maximum, près de l'axe du faisceau, le taux de transition diminue parce que les atomes sont largement en dehors de la résonance. Autour de l'axe, on a néanmoins une couche cylindrique (en fait, à cause de la divergence du faisceau laser, ces couches sont hyperboloïdales, mais on négligera ce détail par la suite, car cette divergence est assez petite sur notre faisceau) dans laquelle le light-shift met l'atome en résonance. Pour une fréquence Ω fixe,

le rayon de cette couche est

$$r_m = \frac{w_0}{\sqrt{2}} \left[\ln \left(\frac{c \ell_s I_0}{\Omega} \right) \right]^{1/2}.$$

Ce rayon diminue quand la fréquence augmente. Pour des fréquences négatives, le light-shift éloigne l'atome de la résonance, il n'y a donc pas de couche où les atomes sont en résonance et r_m (imaginaire) n'a pas de sens dans ce cas là. On a alors le même genre de comportement qu'à basse puissance (figure 5.12 (iv)) et le maximum du taux de transition se trouve au voisinage de l'axe du faisceau. Pour des fréquences positives et plus grandes que le light-shift maximum ($l_{smax} = c \ell_s I_0$), le light-shift n'est pas assez important pour remettre les atomes en résonance, et l'on a à nouveau le comportement de basse puissance (figure 5.12 (vii)). Dans la région de fréquences comprises entre 0 et l_{smax} il y a toujours une couche dans laquelle les atomes sont en résonance. A mesure que Ω s'approche de l_{smax} , r_m tend vers zéro : cette couche s'approche alors de la région de puissance lumineuse maximum et le taux de transition tend vers un maximum. Si l'on compare les figures 5.12 (iv) et (vi) - qui correspondent à des valeurs de la fréquence symétriques par rapport au maximum de la raie - l'on comprend aisément pourquoi l'intensité de la raie est plus importante à 750 kHz qu'à -50 kHz : dans le premier cas, les atomes passent à la résonance, dans le second, non. Ce phénomène est à l'origine physique de l'asymétrie des raies à haute puissance.

De cette discussion on peut conclure que le principal facteur d'élargissement et de déformation des raies est le light-shift et que la saturation y joue un rôle moins important. En effet, sur la figure 5.13 où l'on a tracé la largeur des raies (divisée par la largeur naturelle) en fonction de la puissance, on voit qu'à part dans la région de basse puissance on observe un comportement linéaire, ce qui est caractéristique du light-shift (pour une transition à deux photons, les effets de saturation seraient quadratiques par rapport à la puissance).

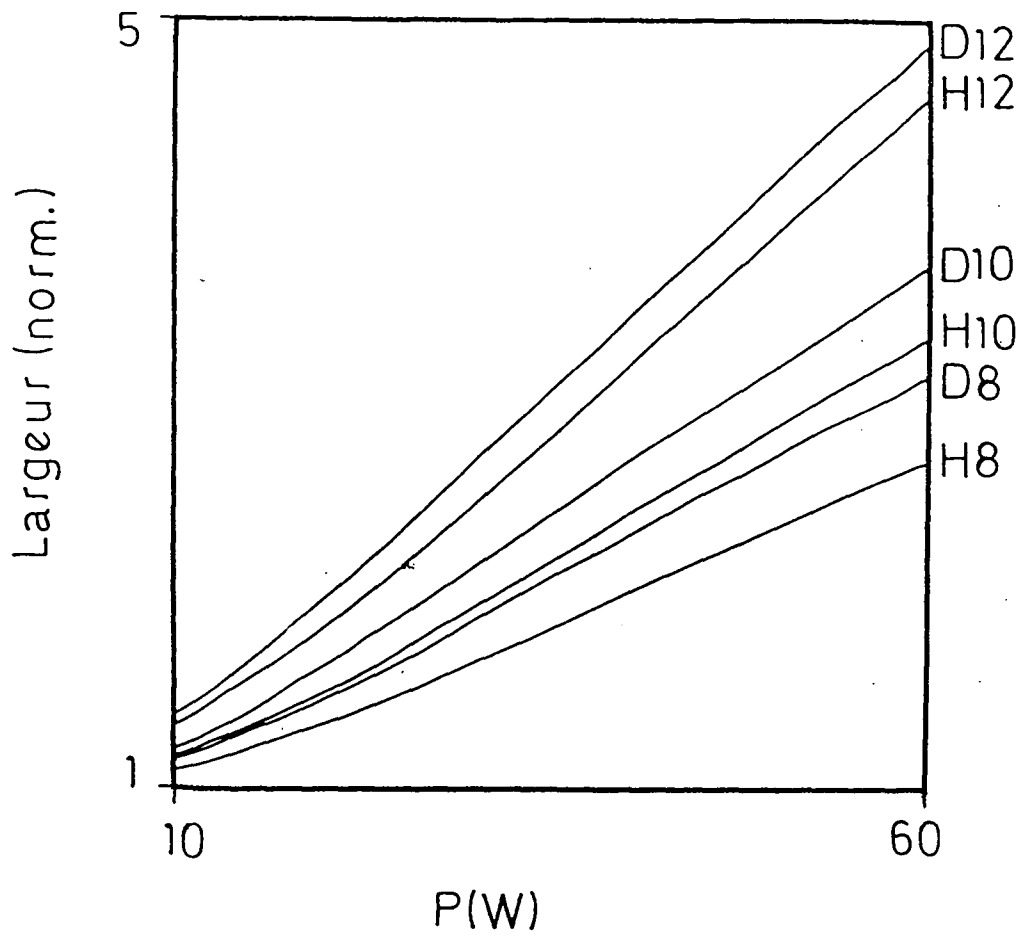


Figure 5.13 - Largeur totale à mi-hauteur (divisée par la largeur naturelle) des raies théoriques en fonction de la puissance laser.

5.5 - L'intégrale de vitesses et l'effet Doppler du deuxième ordre.

Les atomes n'ont pas tous la même vitesse ; au contraire, ils ont une distribution de vitesses dont la mesure a été décrite dans le paragraphe 3.1.8. Dans nos calculs, jusqu'à maintenant, on a tenu compte de cet effet simplement en mettant dans la formule (5.7) la vitesse moyenne calculée à partir de cette distribution. Cela est évidemment une approximation ; on devrait ajouter à la formule (5.12) une moyenne sur les vitesses. Néanmoins, avec cette intégrale additionnelle, les temps de calculs nécessaires pour générer les raies deviennent prohibitifs. Nous avons néanmoins étudié quelques cas particuliers pour avoir une idée de l'effet produit, qui n'ont pas été utilisés pour le dépouillement des résultats expérimentaux. On a constaté que cela rabaisse l'intensité de la raie d'un facteur variant de 4% sur les ailes à 2% sur le pic par rapport aux raies calculés avec la vitesse moyenne. Dans ce calcul, on a étudié aussi l'influence de l'effet Doppler du 2^e ordre sur la position et sur l'élargissement des raies.

Considérons d'abord le changement de la fréquence de transition induit par l'effet Doppler du deuxième ordre. On étudiera ensuite l'effet produit sur les formes de raies, au moyen d'un calcul simple et à travers la simulation numérique.

On peut montrer [5.2] que cet effet a pour résultat de diminuer la fréquence de résonance atomique d'une quantité

$$\delta\omega = \omega_T v^2 / 2c^2$$

où ω_T est la fréquence de la transition. On écrira cette relation sous la forme

$$\delta\omega = c_{ed} v^2 \quad (5.31)$$

avec

$$c_{ed} = \omega_T / 2c^2. \quad (5.32)$$

La formule (5.2) s'écrit alors :

$$\Gamma_1 = \frac{\gamma_{f1} I^2}{(\Omega - c_{\ell s} I + c_{ed} v^2)^2 + (\Gamma_f / 2)^2} \quad (5.33)$$

En plus de cela, une quatrième intégration sur les vitesses avec le poids

$$f(v) = \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{\pi}} \sigma^{-5} v^4 \exp(-v^2/2\sigma^2)$$

doit être rajoutée à la formule (5.12).

Pour de basses puissances laser, on peut développer l'exponentielle de (5.7) (avec $\langle v^{-1} \rangle$ substituée par v^{-1}) en puissances et on obtient au premier ordre une moyenne de (5.33) ci-dessus avec un poids $f(v)/v$. On peut à ce niveau d'approximation alors substituer v^2 dans le dénominateur de (5.33) par

$$\langle v^2 \rangle_{ed} = N^{-1} \int_0^{\infty} dv \frac{f(v)}{v} v^2 = 4\sigma^2 \quad (5.34)$$

avec

$$N = \int_0^{\infty} dv \frac{f(v)}{v}.$$

Pour la transition 2S - 10D dans l'hydrogène, cela produit un déplacement de fréquence de 40,8 kHz, et pour le deutérium (même transition) on a un déplacement de 17,0 kHz.

Les figures 5.14 à 5.16 montrent les résultats de la simulation numérique où l'on tient compte de la distribution des vitesses et de l'effet Doppler du 2e ordre pour la transition $2S_{1/2} - 10D_{5/2}$ dans l'hydrogène et dans le deutérium comparés au cas à vitesse constante. On montre l'intensité de la raie dans les deux cas fig. 5.14 (a) et (b) ; la différence entre les déplacements du centre à mi-hauteur dans les deux cas (qui est censé représenter l'effet de déplacement dû au seul effet Doppler du 2e ordre), fig. 5.15 ; et l'élargissement de la raie, fig. 5.16, (racine carrée de la différence entre le carré de la largeur obtenue dans la simulation avec distribution de vitesses et le carré de la largeur avec vitesse moyenne ; les

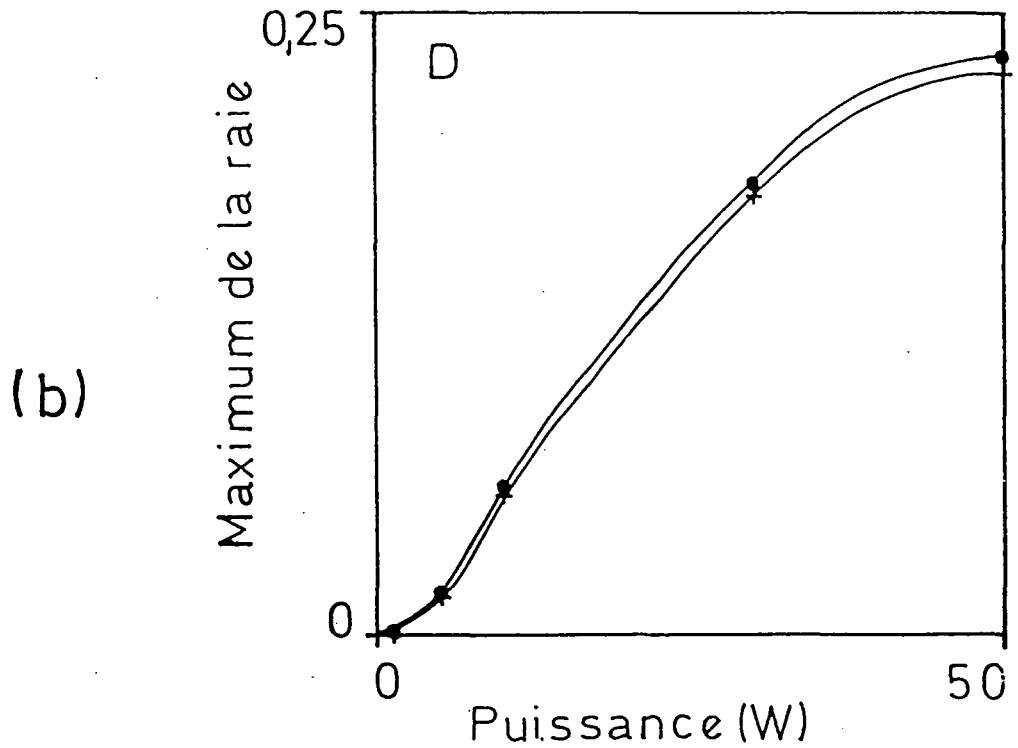
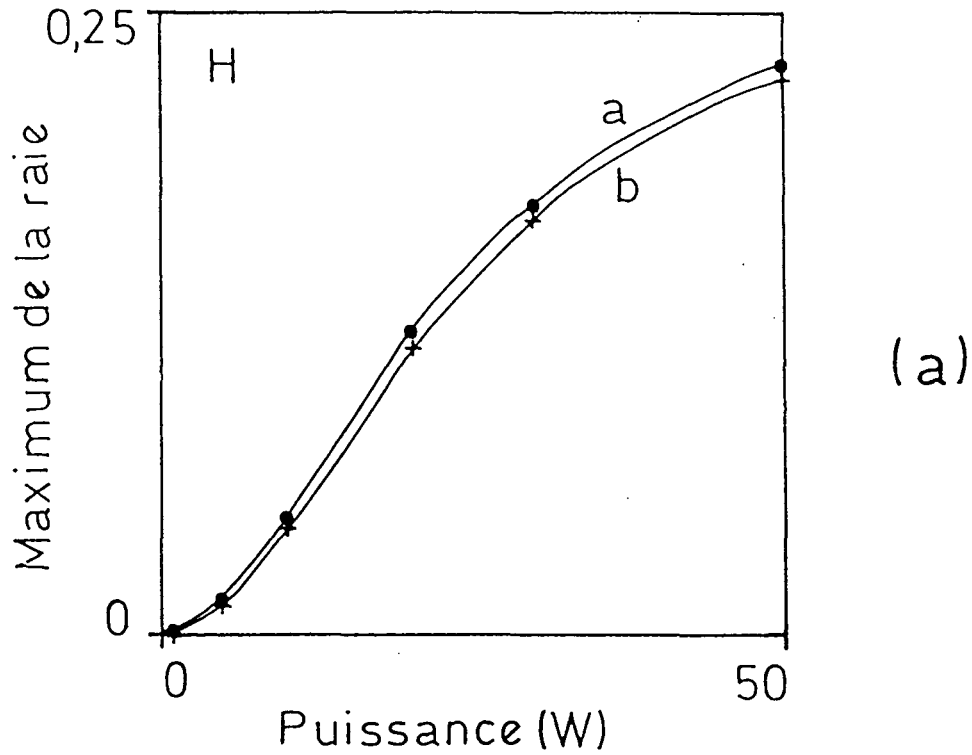


Figure 5.14 - Position du maximum des raies théoriques calculé avec l'intégrale de vitesses et l'effet Doppler du 2e ordre (+) et avec la vitesse moyenne (•) (sans effet Doppler du 2e ordre). (a) Hydrogène. (b) Deutérium.

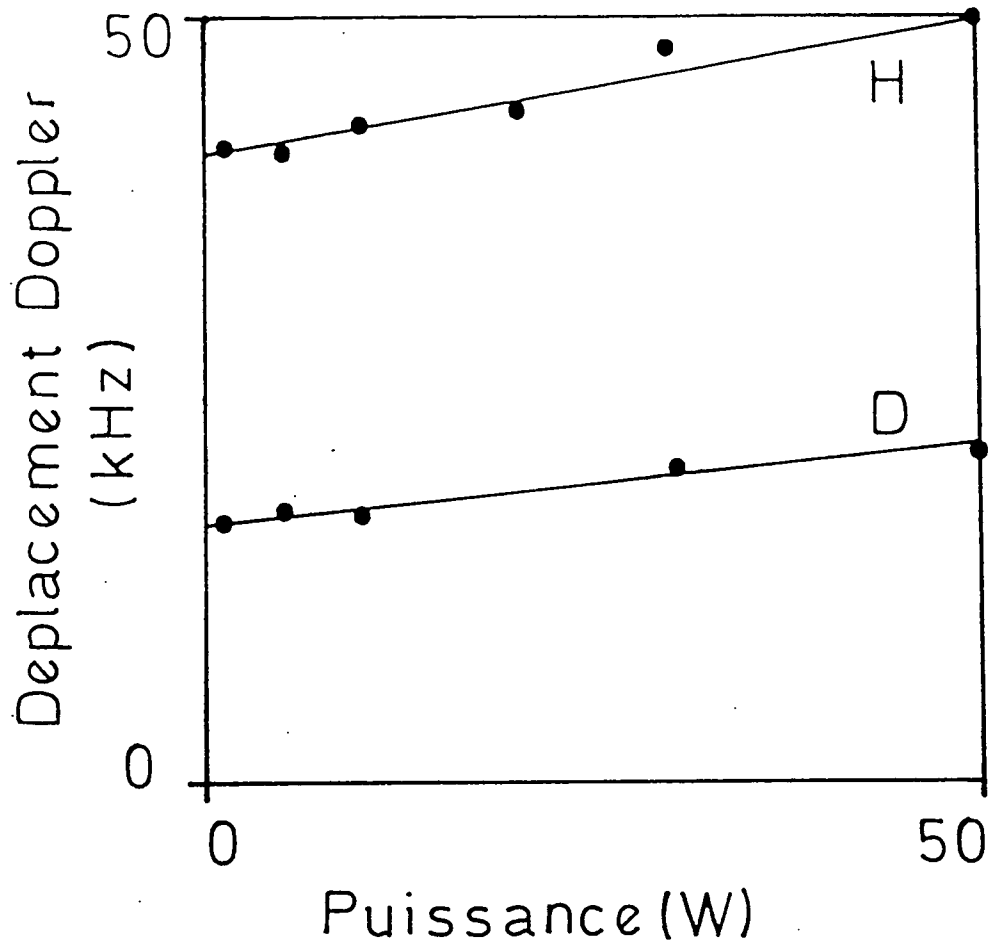


Figure 5.15 - Déplacement dû à l'effet Doppler du 2e ordre (cf. texte) en fonction de la puissance laser.

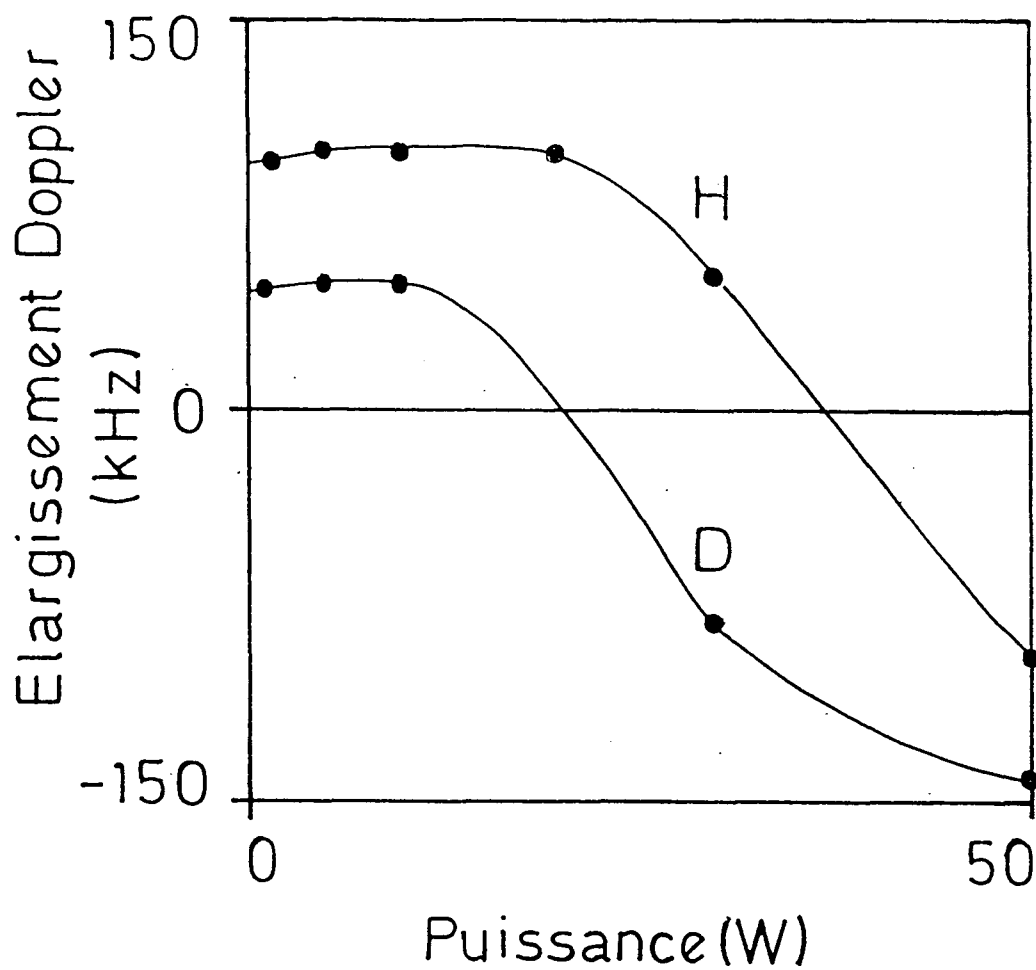


Figure 5.16 - Elargissement dû à l'effet Doppler du 2e ordre (racine carrée du module de la différence entre les carrés des largeurs calculées avec et sans effet Doppler du 2e ordre, le signe moins étant attribué quand la largeur est plus grande dans le deuxième cas) en fonction de la puissance laser.

valeurs négatives correspondent aux cas où la raie calculée avec l'effet de vitesses est plus étroite) dûs à l'effet Doppler du 2e ordre en fonction de la puissance lumineuse. On observe en particulier qu'à basse puissance le déplacement de la raie tend correctement vers les valeurs calculées ci-dessus.

Un fait remarquable est que, pour des hautes puissances laser, l'élargissement dû à l'effet Doppler du 2e ordre est négatif, c'est-à-dire que les raies deviennent plus étroites que celles obtenues sans considérer l'effet de vitesse. Cela peut se comprendre en regardant le dénominateur de la formule (5.33). On voit que l'effet Doppler du deuxième ordre rabaisse les fréquences de résonance, allant ainsi en sens inverse du light-shift. Pour des basses puissances, les atomes rapides ne peuvent pas donner une contribution importante, car leur probabilité de transition est négligeable. A mesure que la puissance lumineuse monte, ces atomes commencent à subir des transitions au voisinage du centre du faisceau laser, là où le light-shift est élevé. Mais étant des atomes rapides, ils subissent aussi un effet Doppler du 2e ordre important de signe contraire au light-shift. On voit donc que les deux effets interfèrent ainsi destructivement.

On observera finalement que négliger l'effet des vitesses nous mène à surestimer l'intensité de la raie de 2 à 3% environ.

Comme on le verra dans le Chapitre VI, on a corrigé les résultats expérimentaux du déplacement Doppler calculé en utilisant le calcul approximatif pour basses puissances ci dessus.

5.6 - Commentaire sur les effets négligés.

Nous croyons, d'après ce qui a été décrit dans ce chapitre, avoir tenu compte des principaux effets qui déplacent nos raies expérimentales. Il y a néanmoins un certain nombre d'autres effets qui sont vraisemblablement présents mais dont on ne peut pas tenir compte du façon assez simple. Ces effets peuvent être responsables d'un élargissement additionnel observé sur les courbes expérimentales, comme on le verra dans le chapitre VI. On discutera maintenant ces effets :

(a) Effets Stark et Zeeman causés par des champs électriques et magnétiques parasites ;

- (b) ionisation des atomes excités par le laser ;
- (c) élargissement dû au temps de transit transverse ;
- (d) collisions.

5.6.1 - L'effet Stark.

Les champs électriques parasites perturbent les formes de raies par effet Stark produisant des élargissements et des déplacements. Le déplacement Stark est proportionnel à n^7 (n =nombre quantique principal), l'élargissement à n^2 . Pour les champs parasites présents dans notre montage, seul l'effet sur le niveau excité est important. L'élargissement vient du fait que les sous-niveaux de structure fine ayant différents nombres quantiques magnétiques m_j sont perturbés de façon différente. L'élargissement Stark linéaire sur un niveau de nombre quantique n est donné approximativement par [5.6, p. 231] :

$$\delta_{\text{stark}} = S n(n-1) E \quad (5.35)$$

où E est le champ électrique et S une constante

$$S = 3,84 \text{ MHz cm V}^{-1}. \quad (5.36)$$

On discutera ici, comme cas-type, l'effet Stark sur le niveau $10D$ de l'hydrogène, en présentant une approche quelque peu plus fine que celle de la formule (5.35). La figure 5.17 montre les niveaux de structure fine qui nous concernent. Les intervalles de fréquences sont ceux de la ref. [5.7]. Dans notre calcul, on considérera que les niveaux $10D_{5/2}$ et $10F_{5/2}$ sont complètement mélangés par le champ électrique (comme s'ils étaient dégénérés) ce que produit un terme d'effet Stark linéaire. Par contre, l'interaction avec les autres niveaux voisins est à l'origine de l'effet Stark quadratique. La figure 5.18 montre le résultat obtenu.

On ne peut pas faire un modèle exact de l'influence de l'effet Stark sur les formes de raies car on ne connaît ni les valeurs exactes ni la distribution spatiale des champs électriques parasites dans le montage expérimental. L'action de l'effet Stark sur la largeur des raies a été traité comme une perturbation statistique. Le déplacement dû à l'effet Stark - auquel

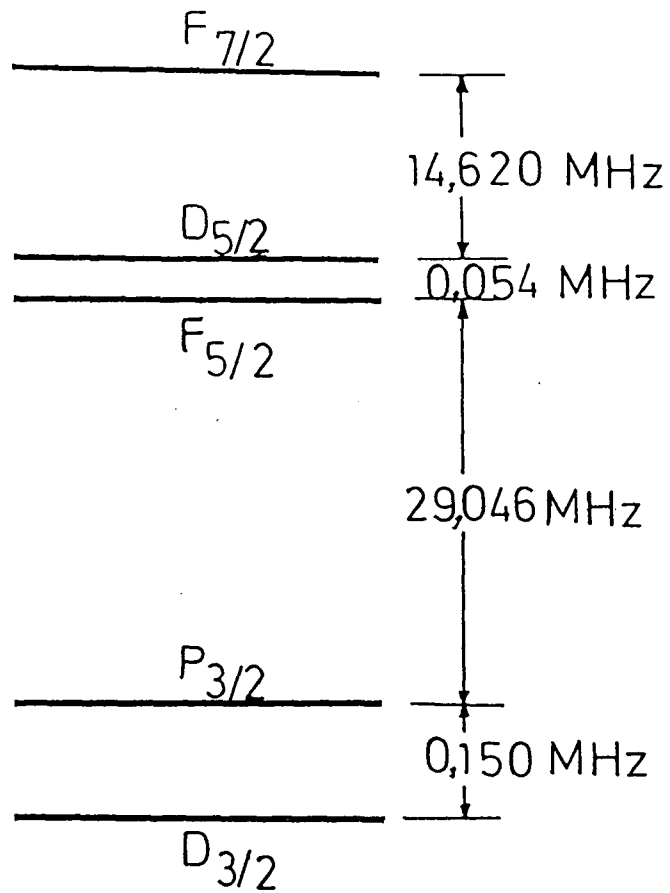


Figure 5.17 - Niveaux de structure fine contribuant au calcul de l'effet Stark sur le niveau $n=10$.

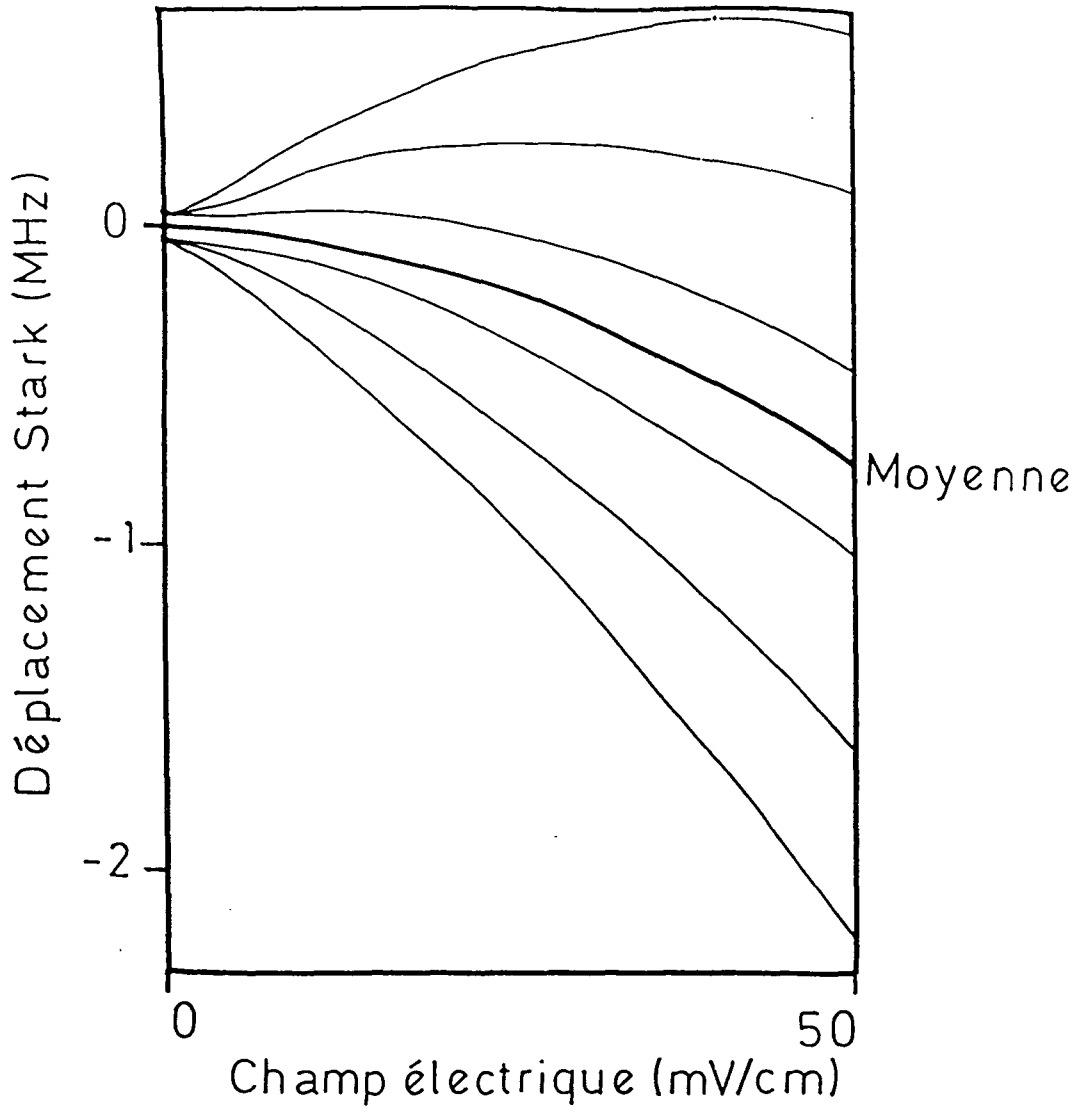


Figure 5.18 - Effet Stark sur le niveau $n=10$.

on peut donner une limite supérieure (voir paragraphe 6.5.2), a été incorporé à l'erreur sur le pointé des raies.

5.6.2 - L'effet Zeeman.

Comme on l'a expliqué dans le Chapitre III (paragraphe 3.1.3) des bobines de Helmholtz ont été installées sur notre montage pour éliminer autant que possible les champs magnétiques présents. Ce système élimine, a priori, les champs magnétiques à 1% près. Cela veut dire qu'on peut s'attendre à avoir des champs résiduels de l'ordre de 5 à 10 mG.

L'effet Zeeman linéaire ne déplace pas le centre de gravité des raies ; son effet consiste à lever la dégénérescence des sous niveaux de nombres quantiques magnétiques m_j différents. Ces niveaux s'ouvrent comme un éventail ce qui produit un élargissement de la raie. Cet élargissement est indépendant de n ; il ne dépend que de J et de ℓ .

Il faut ici distinguer deux cas, celui du niveau du haut, où la structure hyperfine n'est pas résolue et celui du niveau du bas, où elle est complètement résolue.

D'une façon générale, l'élargissement Zeeman linéaire d'un niveau d'énergie est donné par [5.8, p. 544]

$$\delta_{\text{Zeeman}} = (\mu_0 B / \hbar) g (M_{\text{max}} - M_{\text{min}}) \quad (5.37)$$

où μ_0 est le magnéton de Bohr, g est le facteur de Landé, B est le champ magnétique et M_{max} et M_{min} sont les valeurs maximum et minimum du nombre quantique magnétique concerné. On a $\mu_0 / \hbar \approx 1,40$ MHz/G. Le facteur de Landé g est donné par [5.8, p. 501]

$$g_J = 1 + \frac{J(J+1) - \ell(\ell+1) + S(S+1)}{2J(J+1)} \quad (5.38a)$$

dans le cas où la structure fine est concernée, et par [5.8, p. 544]

$$g_F = g_J \frac{F(F+1) + J(J+1) - I(I+1)}{2F(F+1)}$$

dans le cas où la structure hyperfine est concernée.

Considérons l'effet de ces élargissements pour la transition $2S_{1/2} - nD_{5/2}$ de l'hydrogène. On obtient $g_{J=5/2} = 1,2$ (niveau du haut) ; $g_{J=1/2} = 2$ d'où $g_{F=1} (J=1/2) = 1$ (niveau du bas). On a aussi $M_{\max} - M_{\min}$ égal à 5 et 2 respectivement.

On peut ainsi calculer que le champ de 10 mG mentionné plus haut élargirait le niveau $S_{1/2}$ de ≈ 30 kHz et le niveau $D_{5/2}$ de ≈ 90 kHz. La somme fait alors 120 kHz. Il se peut, néanmoins, que les champs magnétiques présents dans notre montage soient bien plus importantes que cela. On discutera cette possibilité dans le Chapitre VI.

5.6.3 - L'ionisation du niveau excité par le laser.

Pour la transition-type $2S - 10D$, l'énergie des photons laser vaut 0,12 Ry, tandis que le niveau 10D est à 0,01 Ry en dessous du seuil d'ionisation. On voit donc que le rayonnement laser couple l'état excité au continuum ; autrement dit, on est en présence d'un canal qui n'a pas été considéré lors des calculs de repopulation des niveaux (partie 5.3 ci-dessus) : l'ionisation des atomes excités par le faisceau laser. Comme il s'agit d'un effet dépendant de la puissance lumineuse, on ne peut pas le traiter d'une façon aussi simple que les effets de repopulation considérés auparavant. Pour en tenir compte, il aurait fallu remplacer dans notre intégration l'une des intégrales (eq. 5.12) par la solution d'un système de deux équations différentielles couplées.

On peut faire une évaluation de l'ordre de grandeur de cet effet : un calcul basé sur la "règle d'or" de Fermi, avec les éléments de matrice du dipôle de l'hydrogène calculés selon les formules présentées dans l'Appendice III, montre que le taux d'ionisation maximum pour une puissance laser de 50 W correspond à 12% du taux d'émission spontanée du niveau 10D. Négliger complètement cet effet nous mène à légèrement sous-estimer l'intensité de nos raies à forte puissance. Néanmoins, comme la probabilité pour qu'un atome ionisé se recombine dans l'état 2S est complètement négligeable, cet effet ne contribue pas à repeupler le niveau 2S ; il n'apporterait qu'une correction aux coefficients p_a et p_b (eqs. 5.29 et 5.30), qui, eux mêmes, n'apportent qu'une petite correction à nos formes de raies.

5.6.4 - L'élargissement dû au temps de transit transversal.

Le faisceau laser qui interagit avec les atomes présente un profil radial gaussien. Ainsi, un atome dont la trajectoire n'est pas parallèle à l'axe du faisceau voit, en le traversant, une modulation de l'intensité lumineuse, comme s'il interagissait avec un pulse. Cet effet est à l'origine d'une dispersion de fréquences, donc d'un élargissement. On peut montrer que pour des atomes ayant une vitesse transverse moyenne v_t , cet élargissement vaut [5.9] :

$$\delta_t = v_t / (2\pi w_0) \quad (5.39)$$

w_0 est le "waist" du faisceau laser (eq. 5.10), environ 600 μm . Dans notre cas, on a un jet dont la vitesse longitudinale moyenne vaut 2σ , $\sigma = (kT/m)^{1/2}$. Pour un atome faisant l'angle maximum permis par les diaphragmes avec le faisceau laser (environ $0,4^\circ$), on obtient, en posant $v_t = 2\sigma \sin(0,4^\circ)$:

$$\delta_t \text{ (hydrogène)} \approx 6 \text{ kHz et } \delta_t \text{ (deutérium)} \approx 4 \text{ kHz.}$$

Ces résultats montrent que l'effet du temps du transit transversal est complètement négligeable dans notre montage.

5.6.5 - L'effet des collisions.

Un dernier effet qui n'a pas été pris en considération est l'effet des collisions atomiques. Il est mentionné ici par souci d'être complet, puisqu'il a déjà été discuté dans le paragraphe 3.1.7, où l'on a montré qu'il est négligeable dans nos conditions expérimentales.

5.7 - Conclusion.

Pour simuler l'élargissement dû à l'ensemble des effets non considérés dans le calcul théorique, on a fait l'hypothèse que tous produisent des élargissements gaussiens. On a donc calculé les produits de convolution de nos formes de raies théoriques avec des gaussiennes de largeurs variables et se sont ces courbes "élargies" qui ont été utilisées pour les "fits" des signaux expérimentaux, le coefficient d'élargissement étant un des paramètres du fit (voir chapitre VI).

Nous verrons dans le chapitre VI que le modèle théorique présenté est capable de reproduire assez bien les principaux effets systématiques de déplacement, déformation et élargissement des raies atomiques. Le traitement détaillé des résultats expérimentaux montre néanmoins qu'il reste des facteurs d'élargissement soit inconnus soit impossibles à déterminer assez précisément en raison de l'incertitude sur les paramètres expérimentaux (champs électriques parasites, etc.).

REFERENCES DU CHAPITRE V

- 5.1 G. Grynberg, *Thèse d'Etat*, Paris (1976). F. Biraben, *Thèse d'Etat*, Paris (1977).
- 5.2 B. Cagnac, G. Grynberg et F. Biraben, *J. Physique* 34, 845 (1973).
- 5.3 F. Bassani, J. J. Forney and A. Quattropani, *Phys. Rev. Lett.* 39, 1070 (1977).
- 5.4 Voir par exemple M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover, New York.
- 5.5 M. Crance in *Multiphoton Ionization of Atoms*, ed. par S. L. Chin et P. Lambropoulos, Academic, New York, 1984, p. 94.
- 5.6 H. S. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- 5.7 G. W. Erickson, *J. Phys. Chem. Ref. Data.* 6, 831 (1977).
- 5.8 L. D. Landau et E. M. Lifshitz, *Mécanique Quantique*, MIR, Moscou, 1966.
- 5.9 F. Biraben, M. Bassini and B. Cagnac, *J. Physique* 40, 445 (1979).

CHAPITRE VI

ANALYSE DES RESULTATS ET DETERMINATION DE LA CONSTANTE DE RYDBERG

Dans ce chapitre on discutera la détermination des fréquences des transitions $2S_{1/2}(F=3/2)-8,10,12D_{5/2}$ dans l'hydrogène et $2S_{1/2}(F=3/2)-8,10,12D_{5/2}$ dans le deutérium. Ensuite, on en déduira la constante de Rydberg et les déplacements isotopiques pour chaque transition, chacun de ces derniers nous permettant l'obtention d'une valeur indépendante pour le rapport de masse proton-électron. L'évaluation des incertitudes sera discutée. Finalement, on présentera une comparaison avec d'autres mesures récentes du Rydberg.

6.1 - L'acquisition du signal atomique.

Les signaux atomiques sont enregistrés par "runs" qui durent environ 20 minutes chacun, pendant lesquels la raie atomique est balayée dix fois. Le balayage est fait automatiquement par le micro-ordinateur (travaillant sur un logiciel ASYST 2.0) qui pilote le synthétiseur (voir chapitre III). La fréquence du synthétiseur est centrée sur le signal et est balayée de 2 MHz, ce qui correspond à un balayage de 8 MHz en fréquence atomique (un facteur 2 vient des deux passages dans l'acousto-optique, un autre facteur 2 vient du fait que l'on induit une transition à deux photons). Un balayage du signal atomique est constitué de 101 valeurs de fréquence du synthétiseur parcourues alternativement en sens croissant et décroissant. Pour chaque valeur de fréquence, le micro-ordinateur enregistre 10 mesures du nombre de métastables (on appellera ces données SDS - signal de la détection synchrone). Simultanément, on enregistre, pour chaque valeur de fréquence du synthétiseur, une mesure de la fréquence de battement entre le laser HeNe/I₂ (SHeNe) qui sert à l'asservissement du Fabry-Perot de référence (ch. III) et un laser HeNe/I₂ de contrôle. Au moyen d'un convertisseur analogique-digital, on dispose, de plus, des données correspondant à deux signaux de contrôle provenant de photodiodes, l'une qui mesure la transmission d'une partie du faisceau du laser à colorant à travers un Fabry-Perot (SLC), ce qui permet de contrôler ses éventuels sauts, et l'autre qui mesure la transmission de la cavité qui entoure le jet de métastables (SCA), voir ch. III, assurant ainsi le contrôle des sauts de cette cavité et de la puissance à laquelle sont soumis les atomes.

La figure 6.1 montre l'enregistrement du signal atomique (signal de la détection synchrone SDS) correspondant aux balayages de la fréquence du synthétiseur (partie (b)) pour chaque balayage d'un run. Ce run correspond à l'une des nos observations de la transition $2S_{1/2} - 10S_{1/2}$. Le signal étant plus petit pour cette transition que pour les transitions vers des états $D_{3/2}$, l'effet du traitement informatisé est plus évident.

Pour chaque run on élimine les points correspondant à des sauts du laser à colorant (au moyen des données SLC), du laser HeNe/I₂ (au moyen de SHeNe) et de la cavité du jet atomique (au moyen de SCA) et on moyenne ensuite les valeurs de SDS pour une même fréquence du synthétiseur. Grâce au balayage en sens alternativement croissant et décroissant de la fréquence du synthétiseur, cette procédure élimine des éventuelles asymétries linéaires du balayage. Le résultat, pour le run montré sur la figure 6.1, est présenté sur la figure 6.2. L'amélioration du rapport signal sur bruit est évidente.

Pour chacune des six transitions étudiées, on a enregistré 56 runs, en faisant varier la puissance laser vue par les atomes. Les runs pour une même transition sont en général distribués en trois groupes correspondant à une puissance laser forte (puissance maximum disponible), puissance laser moyenne (le faisceau laser est atténué par une lame semi-réfléchissante de coefficient de réflexion 30% placée devant la cavité du jet atomique) et puissance laser faible (le faisceau est atténué par deux lames à 30% de réflexion). On observe une certaine dispersion dans chaque groupe due à des variations de la puissance de sortie du laser à colorant (vieillissement du colorant, détérioration progressive du réglage au cours des runs, désalignement progressif du faisceau laser par rapport à la cavité du jet atomique, etc). Cela nous a permis de bien contrôler la dépendance de la fréquence de transition avec la puissance lumineuse, comme on le verra dans la partie 6.3 ci-dessous.

Pour pouvoir appliquer la méthode des miroirs virtuels (voir chapitre IV), on a aussi fait varier la longueur du Fabry-Perot étalon. Parmi les 56 runs pour chaque transition, les 24 premiers correspondent à l'épaisseur 10 cm, les 24 suivants à 50 cm et les 8 derniers sont à nouveau comparés à l'épaisseur 10 cm.

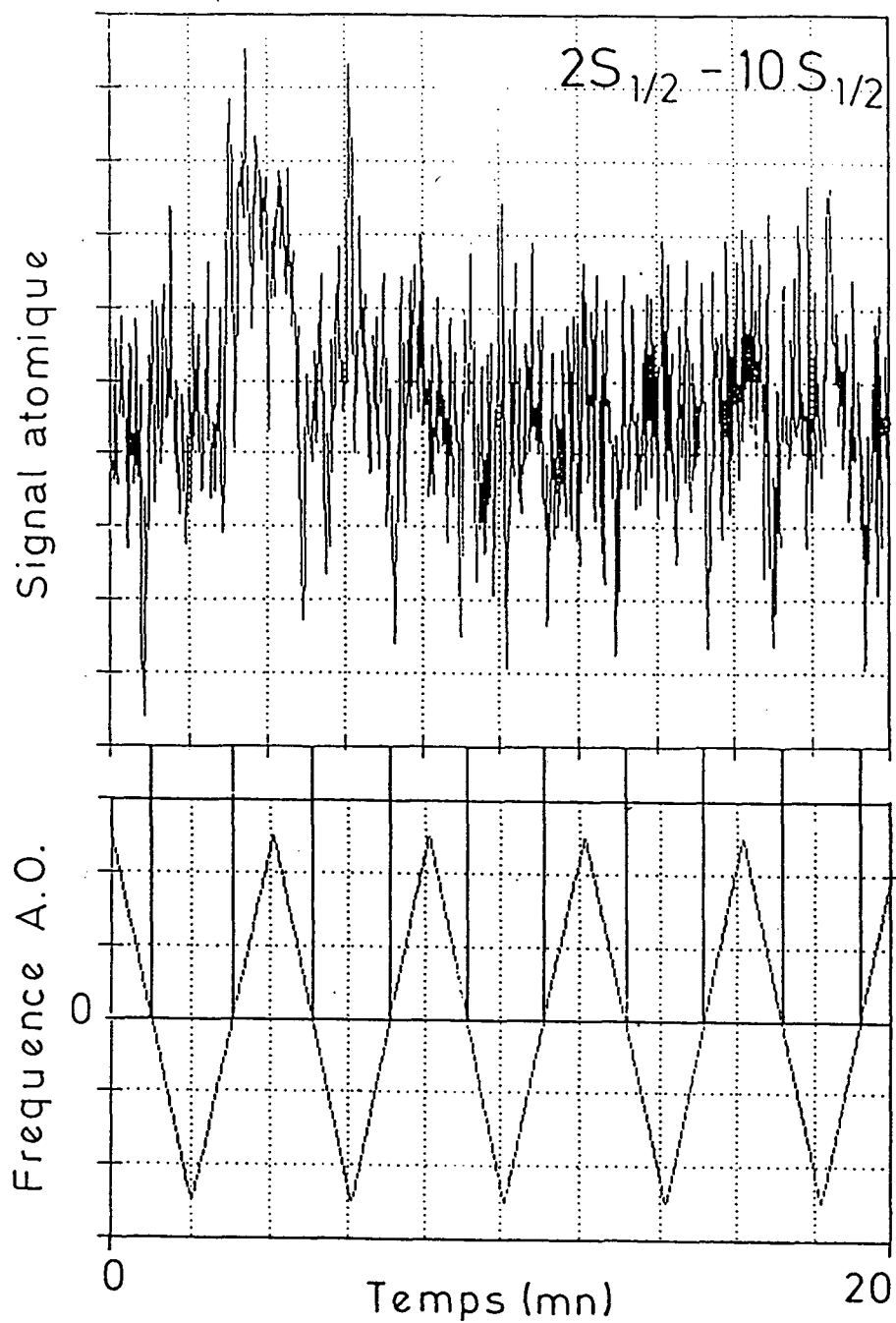


Figure 6.1 - Signal atomique enregistré au cours d'un "run" (dix passages sur le signal) pour la transition $2S_{1/2} - 10S_{1/2}$ (partie supérieure) et balayage de la fréquence laser (partie inférieure).

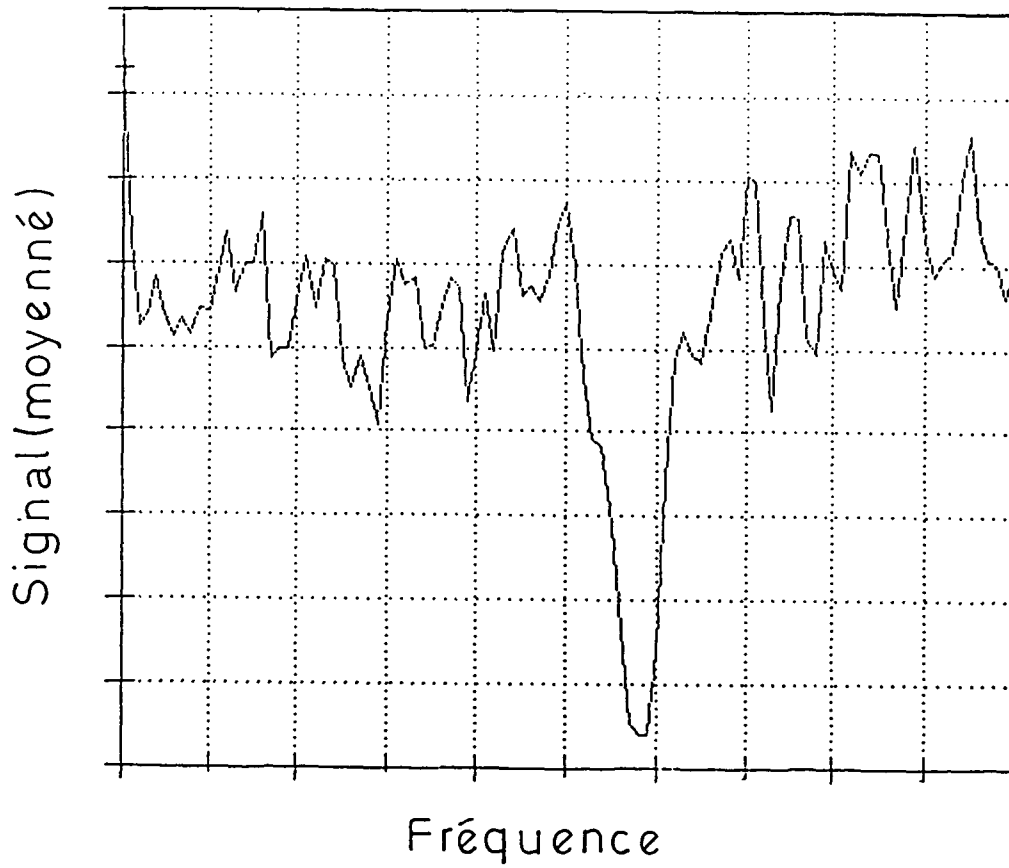


Figure 6.2 - Signal obtenu en moyennant les points correspondant à la même fréquence laser.

6.2 - La comparaison des Fabry-Perot.

Une fois que la position d'une transition a été mesurée en unités de fréquence du synthétiseur, c'est-à-dire par rapport à un pic donné du Fabry-Perot de référence, il faut comparer la position de ce pic du FPR à celle du pic voisin du Fabry-Perot étalon. Cette procédure a été décrite dans la partie 4.3. Pour cela, le laser à colorant est asservi sur un pic infrarouge du FPE par l'intermédiaire du micro-ordinateur, l'HeNe balayable étant sur un pic rouge de ce Fabry-Perot. Le micro-ordinateur enregistre simultanément la fréquence de battement entre le laser HeNe balayable et celui stabilisé sur I_2 et la fréquence de sortie du synthétiseur. A cause de la dérive thermique du FPE ces deux fréquences ne sont pas constantes, mais on peut éliminer cette dérive en se référant à une fréquence de battement fixe $f_B^{(0)}$ et en corrigeant la fréquence du synthétiseur au moyen de la formule (4.15), ce qui est fait automatiquement par le micro-ordinateur, qui nous fournit directement la fréquence corrigée.

Une comparaison comprend typiquement 200 mesures individuelles de fréquence, 100 avec le laser HeNe balayable asservi sur le pic du FPE situé du côté haute fréquence du pic du FPR et l'autre avec ce laser asservi sur le pic du côté basse fréquence.

Dans le chapitre III, paragraphe 3.2.6, on a mentionné l'effet de dérive thermique observé sur les pics du Fabry-Perot de référence. Pour l'éliminer, on a procédé à la comparaison des deux Fabry-Perot (FPR et FPE) après chaque groupe de quatre runs consécutifs. Pour les runs intermédiaires, on a fait une interpolation linéaire des fréquences mesurées, et ce sont ces valeurs doublement corrigés (correction (4.15) et correction de la dérive du FPR) qui ont été utilisées dans la détermination de la fréquence de transition.

Malheureusement, lors des mesures, nous ne nous sommes aperçus de l'effet de dérive thermique du FPR qu'après avoir fini la première série de mesures avec l'épaisseur de 10 cm, et on ne disposait que de comparaisons entre le FPE et le FPR faites au début et à la fin des 24 premiers runs. Par la suite, on a fait des comparaisons à la fin de chaque groupe de 4 runs consécutifs. La valeur corrigée de la dérive pour les premiers 24 runs est donc obtenue à partir d'une interpolation sur une période de temps beaucoup plus longue, donc moins précise.

6.3 - Les "fits" des signaux expérimentaux et la correction à puissance lumineuse nulle.

Les procédures décrites dans les deux parties précédentes produisent une série de données (voir figure 6.3). Pour chaque transition, on a :

- quatre nombres entiers correspondant aux pics rouge et infrarouge du FPE pour les longueurs de 10 (c) et 50 cm (ℓ) : N_R^ℓ , N_R^c , N_{IR}^ℓ et N_{IR}^c (voir table 6.I),

- la valeur de la fréquence de battement fixe $f_B^{(0)}$,

- la valeur $\nu(I_2)$ de la fréquence de référence du laser HeNe/ I_2 utilisée (les données sont toutes relatives à la raie f de l' I_2).

TABLE 6.I

Données fixes pour les différentes transitions.

At.	Trans.	$N_{IR}^{(c)}$	$N_R^{(c)}$	$N_{IR}^{(\ell)}$	$N_R^{(\ell)}$	$f_B^{(0)}(\ell)$	$f_B^{(0)}(c)$
H	2S-8D	257 343	316 307	1 285 698	1 580 285	653	66
D	2S-8D	257 413	316 307	1 286 048	1 580 285	653	66
H	2S-10D	263 519	316 307	1 316 555	1 580 285	653	66
D	2S-10D	263 591	316 307	1 316 914	1 580 285	653	66
H	2S-12D	266 874	316 307	1 333 317	1 580 285	653	66
D	2S-12D	266 947	316 307	1 333 679	1 580 285	653	66

Les fréquences $f_B^{(0)}$ sont données en MHz et mesurées par rapport à la raie f de I_2 .

Pour chaque groupe de quatre runs (sauf pour les 24 premiers runs) on a une valeur de la distance en fréquence FPE entre le pic infrarouge du FPE et

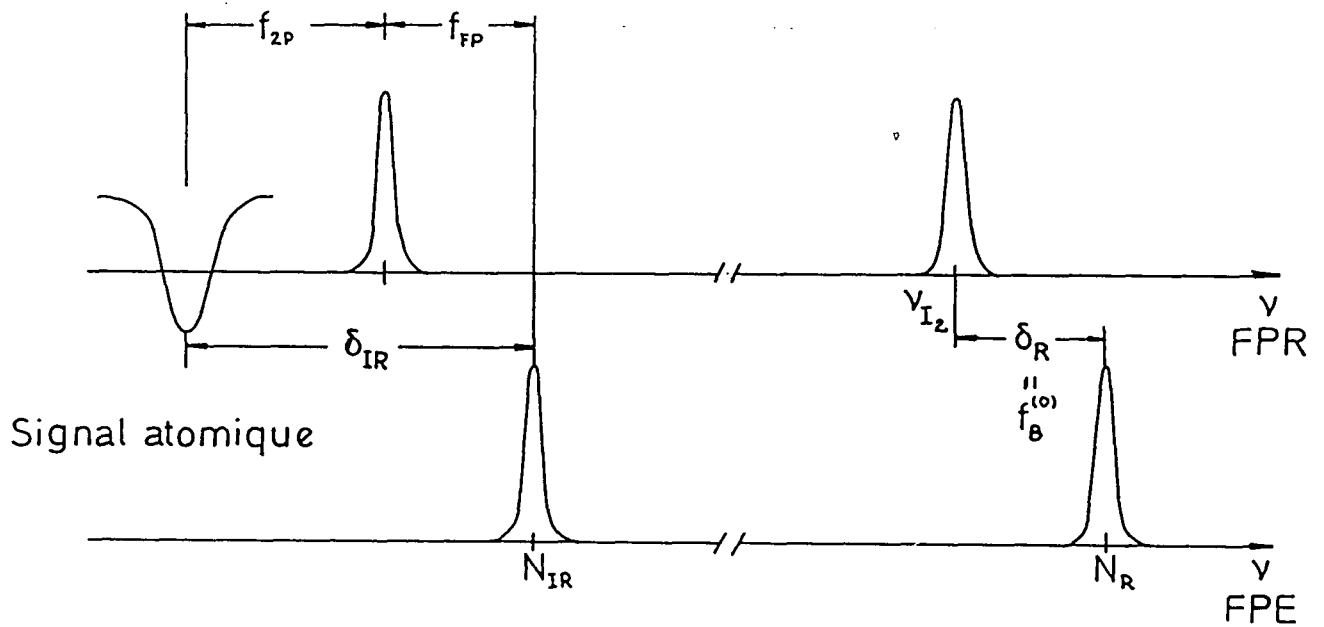


Figure 6.3 - Positions relatives des pics du FPR (en haut) et du FPE (en bas) et du signal atomique dans le rouge (à droite) et dans l'infrarouge (à gauche).

celui du FPR doublement corrigée.

Finalement, pour chaque run on a une valeur de la distance en fréquence f_{2P} entre le pic infrarouge du FPR et le signal à deux photons (cette valeur est obtenue après élimination du light-shift, comme on le montrera dans le paragraphe suivant).

A partir de ces groupes de valeurs, on peut déterminer la fréquence de résonance expérimentale réduite à puissance laser nulle pour chaque transition.

6.3.1 - L'analyse des signaux à deux photons. Les "fits".

Dans le chapitre V a été présenté le calcul des formes de raies théoriques, qui seront utilisées pour faire les "fits" des courbes expérimentales. Ainsi, le signal résultant de chaque run a été soumis à un fit par une procédure du type Newton-Gauss (disponible dans la bibliothèque du logiciel ASYST). Les paramètres du fit sont le coefficient d'élargissement gaussien (voir partie 5.6) qui tient compte des effets d'élargissement non considérés dans le calcul théorique, la position en fréquence de la raie et la puissance lumineuse.

Nos premiers fits correspondant à des hautes puissances lumineuses ont montré un désaccord systématique (voir figure 6.4) dû au fait que les courbes expérimentales présentaient des asymétries moins importantes que les courbes théoriques. La figure 6.5 montre, en fonction de la puissance lumineuse, la position en fréquence des raies corrigée du light-shift, telle qu'elle est obtenue à partir des fits. On observe nettement une dépendance résiduelle avec la puissance, tandis que cette position corrigée ne devrait pas en dépendre (on aurait dû avoir une droite horizontale) ; la pente négative de la droite indique qu'il y a une surcompensation du light-shift ou, autrement dit, une surestimation de la puissance lumineuse. L'intensité relative de la raie n'est pas un des paramètres du fit, car le nombre absolu de métastables est mesuré à chaque instant (signal SDC) et cette intensité est donc connue. C'est pourquoi, pour obtenir l'intensité correcte, le programme de fit est obligé d'aller vers les hautes puissances lumineuses ce qui, comme on a vu dans le paragraphe 5.4.2, conduit à des raies asymétriques, et qui peut expliquer l'effet observé sur la figure 6.4.

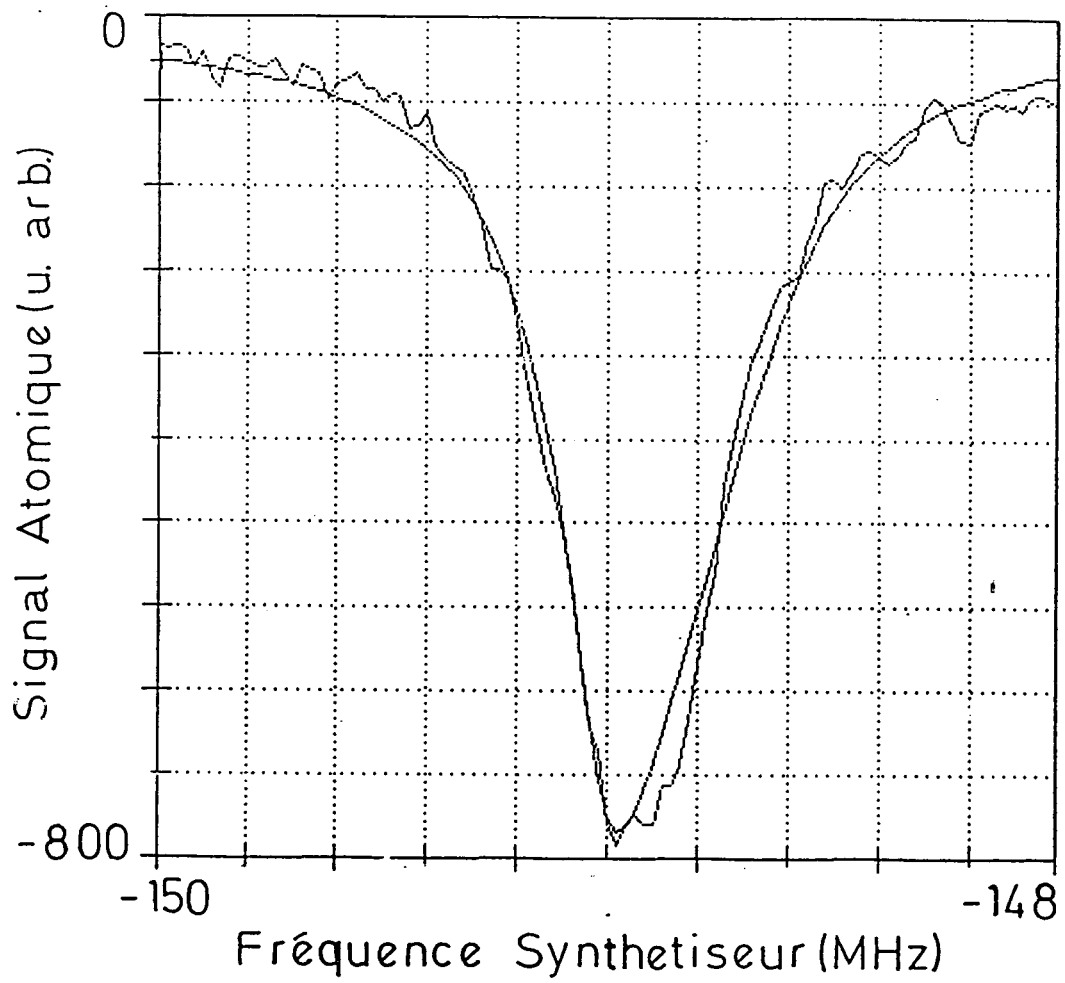


Figure 6.4 - Signal atomique et "fit" pour un run à haute puissance laser. Le désaccord au voisinage du minimum de la courbe est net.

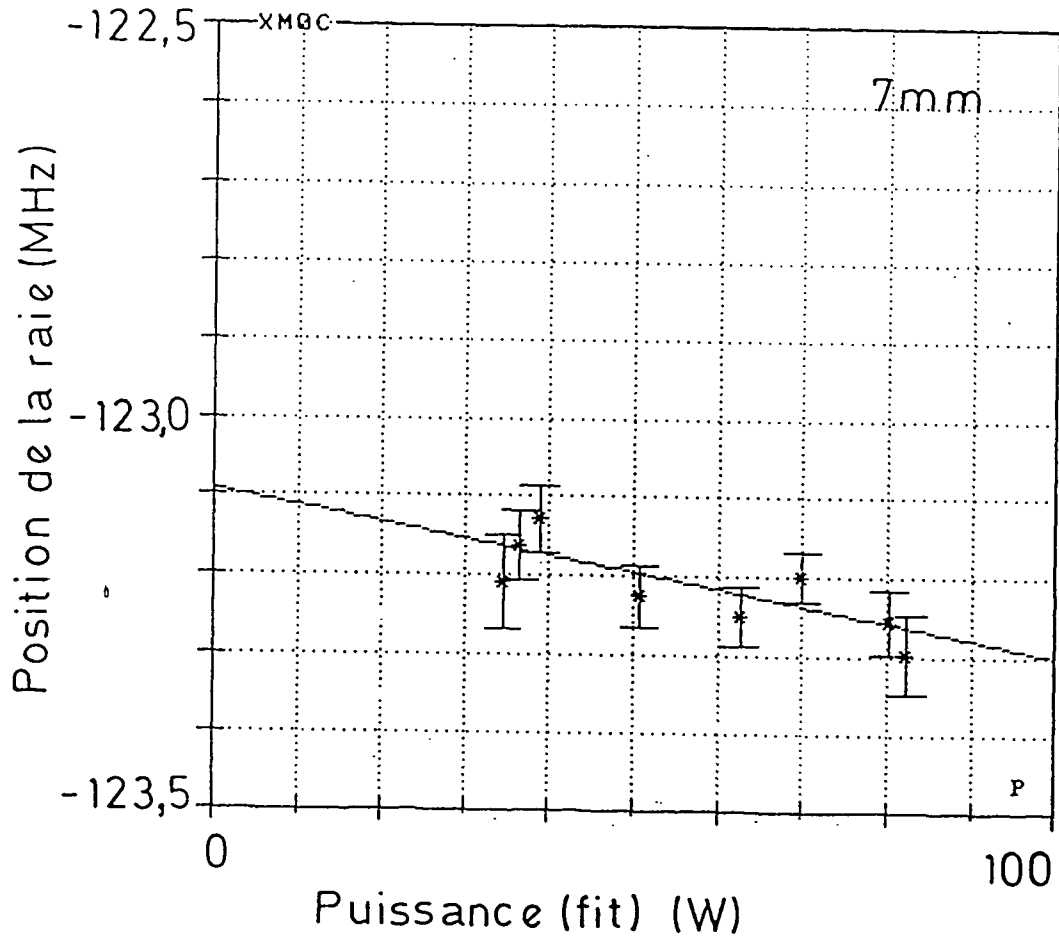


Figure 6.5 - Position des raies (corrigées du light-shift théorique) en fonction de la puissance laser donné par le fit et extrapolation linéaire à puissance nulle. La pente négative de la droite est marquée.

Nous avons interprété cet effet comme étant dû à la non-uniformité de la distribution des trajectoires des atomes métastables sur le premier diaphragme, contrairement à ce qui a été supposé pour les calculs décrits dans le chapitre V. En effet, la proximité de ce diaphragme de la région de bombardement électronique suggère que cette hypothèse n'est pas vérifiée, car le diaphragme correspond à un angle solide important (vu de la région de bombardement électronique) comparé à la dispersion des atomes métastables (4° , comparé à l'angle de dispersion de 7° , voir partie 3.1.2). De plus, la proximité de la région de bombardement électronique est susceptible d'entraîner l'apparition de champs électriques parasites près des bords du diaphragme, capables de détruire les atomes métastables qui passent trop près de ceux-ci.

Faute de connaître la distribution des trajectoires sur le diaphragme, on a simplement fait varier le diamètre de ce diaphragme dans le calcul des courbes théoriques, simulant ainsi la distribution inconnue par le "créneau carré moyen" (voir figure 6.6) correspondant. Finalement, on a vérifié que le diamètre de 3 mm produisait le meilleur fit à toute puissance laser. Les figures 6.7 (a)-(e) montrent les fits obtenus pour un même run en faisant varier le diamètre du premier diaphragme. On a aussi vérifié qu'avec ce nouveau diamètre, la position en fréquence corrigée des raies ne présentait plus de dépendance résiduelle systématique avec la puissance. Nos résultats ont donc été dépouillés en utilisant les courbes théoriques correspondant à un diaphragme de 3 mm, et l'incertitude sur la distribution spatiale des trajectoires a été incorporée dans nos incertitudes, comme on le verra par la suite (partie 6.4.2).

La puissance lumineuse (P) est obtenue à partir des fits. Les valeurs ainsi obtenues peuvent être comparées à celles obtenues directement par la photodiode qui contrôle la transmission de la cavité optique (IT) placée autour du jet atomique (dont le signal est enregistré par le micro-ordinateur, signal SCA). On a bien vérifié que les deux valeurs pour un même run sont proportionnelles (voir figure 6.8), même si la droite ne passe pas exactement à l'origine (cet effet systématique n'a pas pu être expliqué).

Nos fits produisent une série de données (avec les incertitudes statistiques associées), dont les plus importantes sont : X_M (la position du...

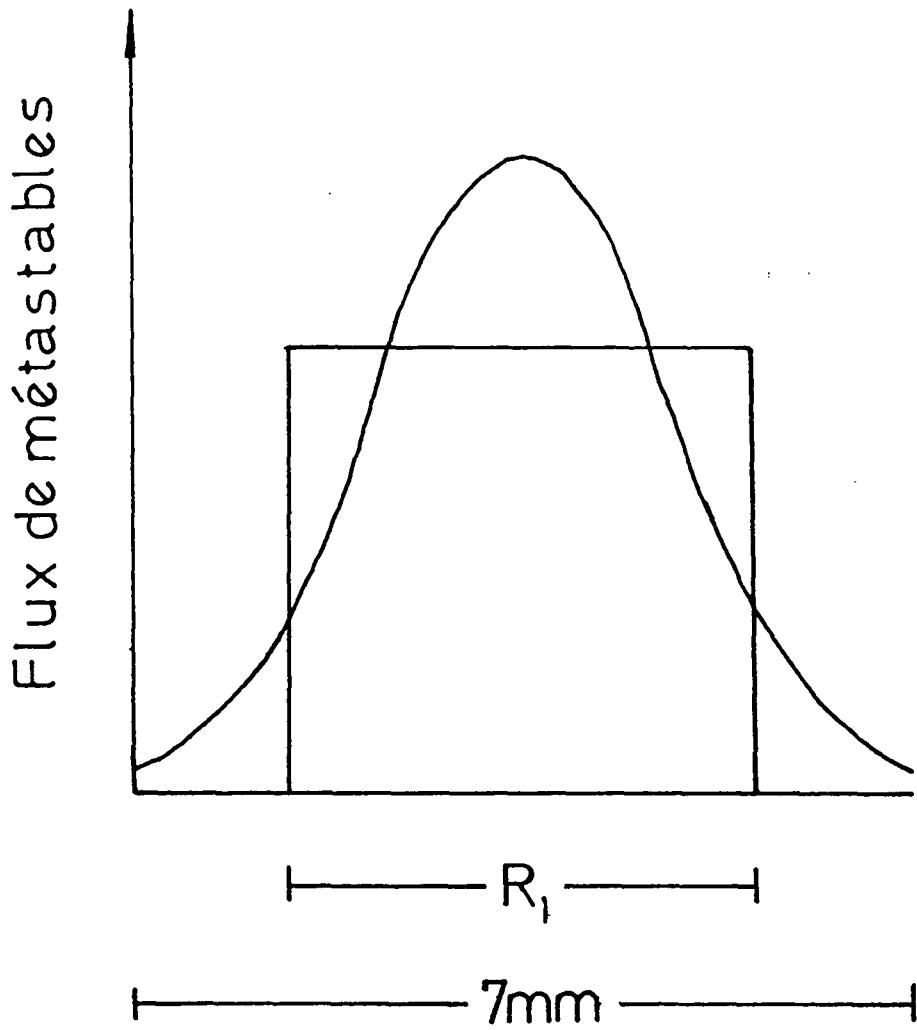


Figure 6.6 - Le "créneau carré moyen" utilisé pour simuler la distribution non uniforme des métastables sur le premier diaphragme.

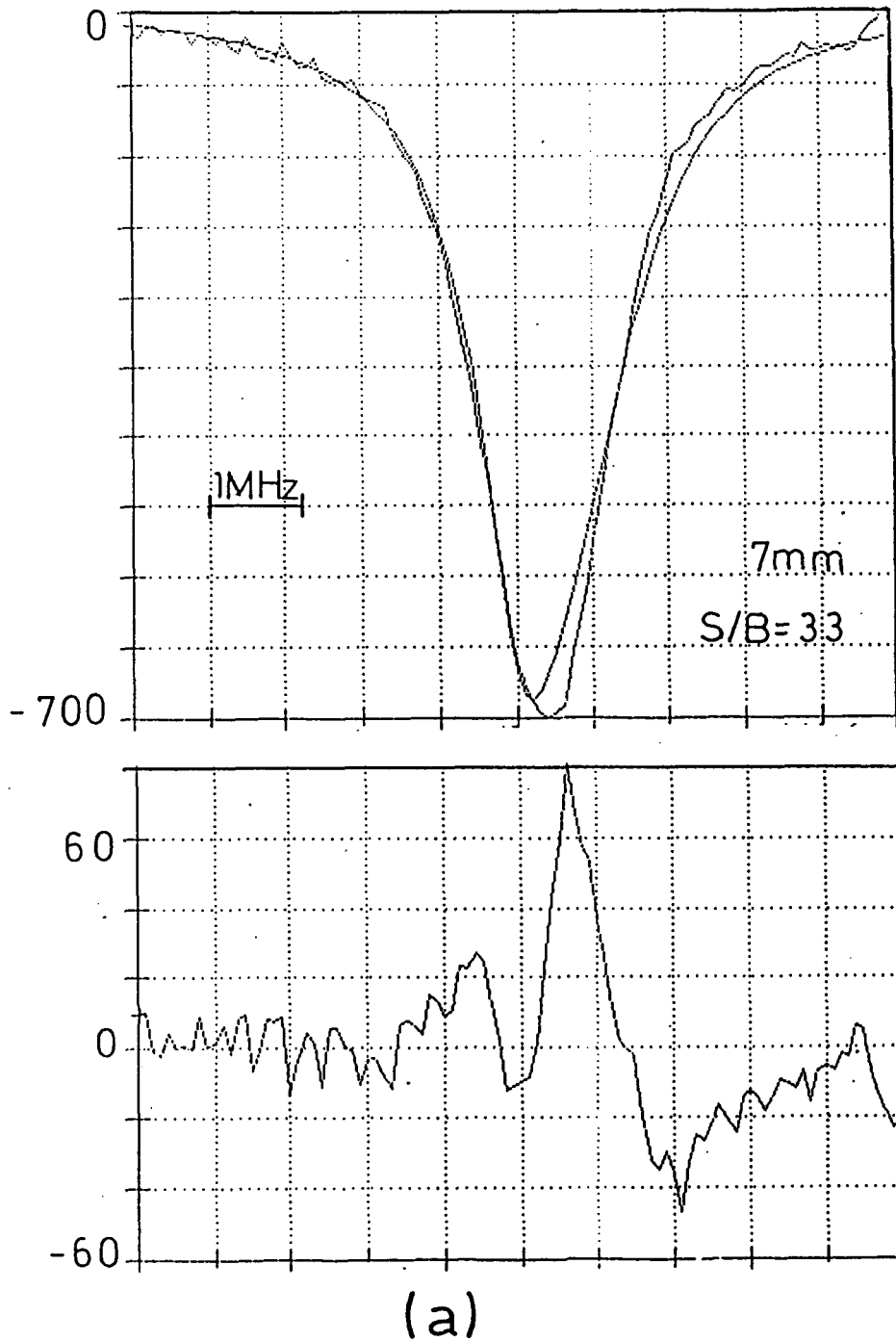
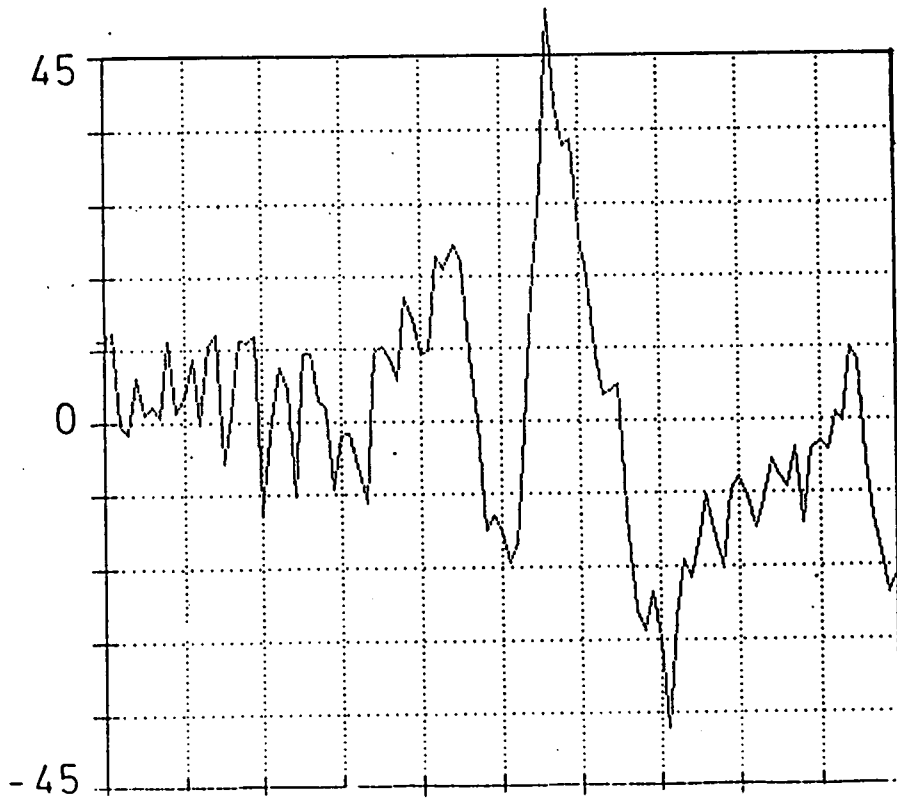
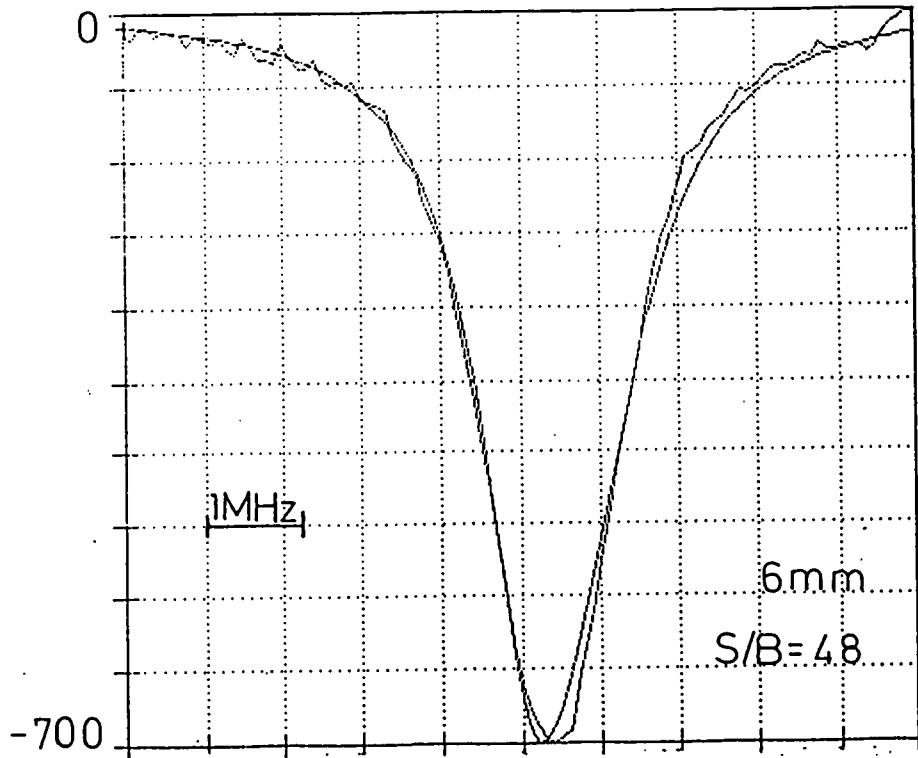
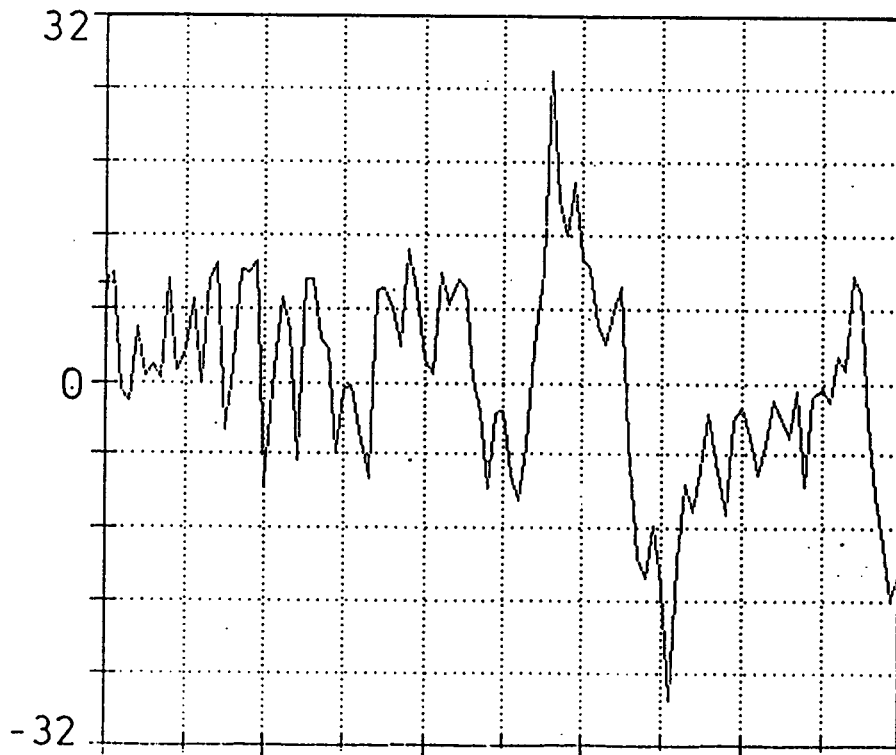
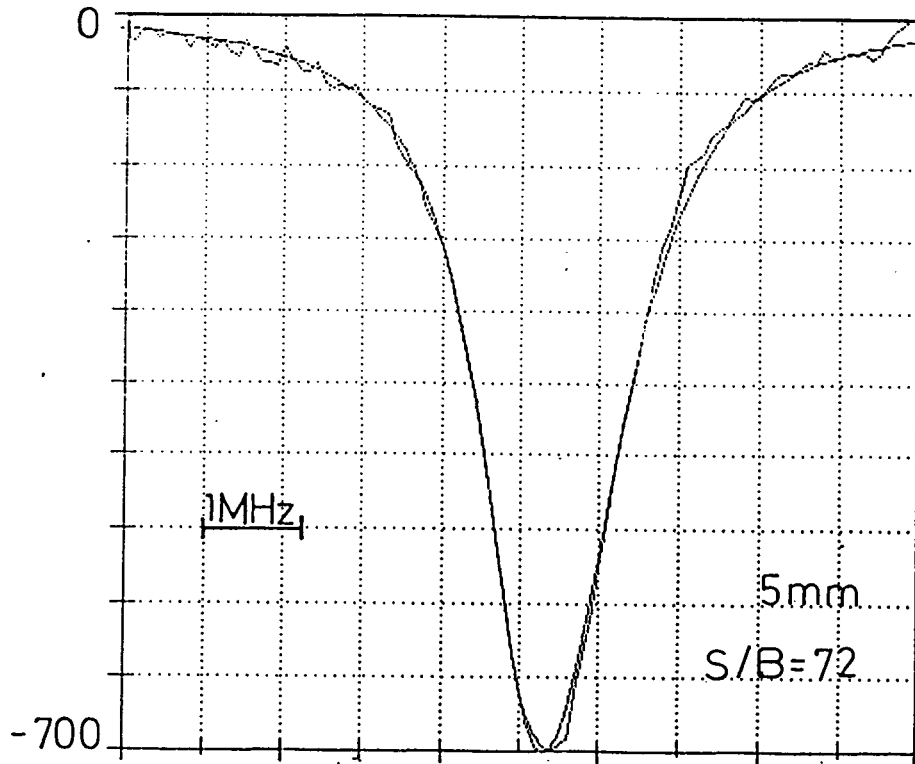


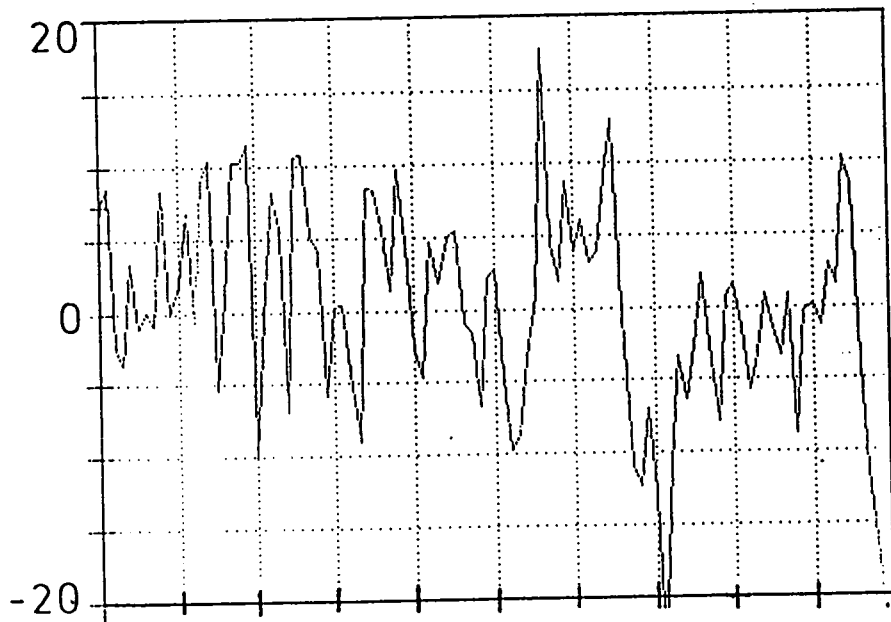
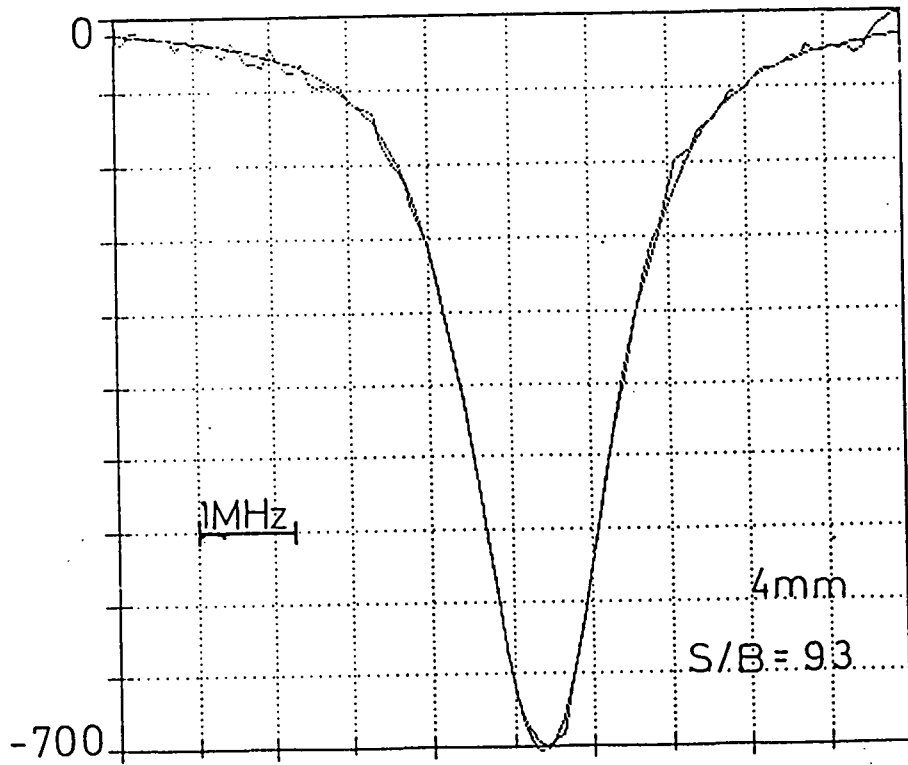
Figure 6.7 - De (a) à (e) : Signal atomique (moyenne de plusieurs runs à haute puissance laser) et fit (partie supérieure) et différence entre le signal et le fit (partie inférieure) pour les valeurs de R_1 allant de 7 à 3 mm.



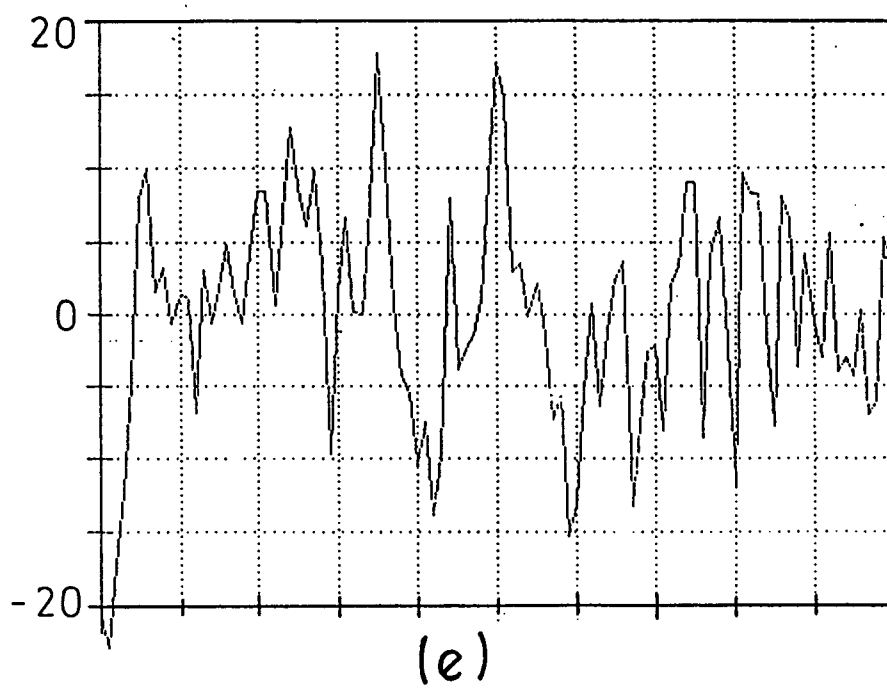
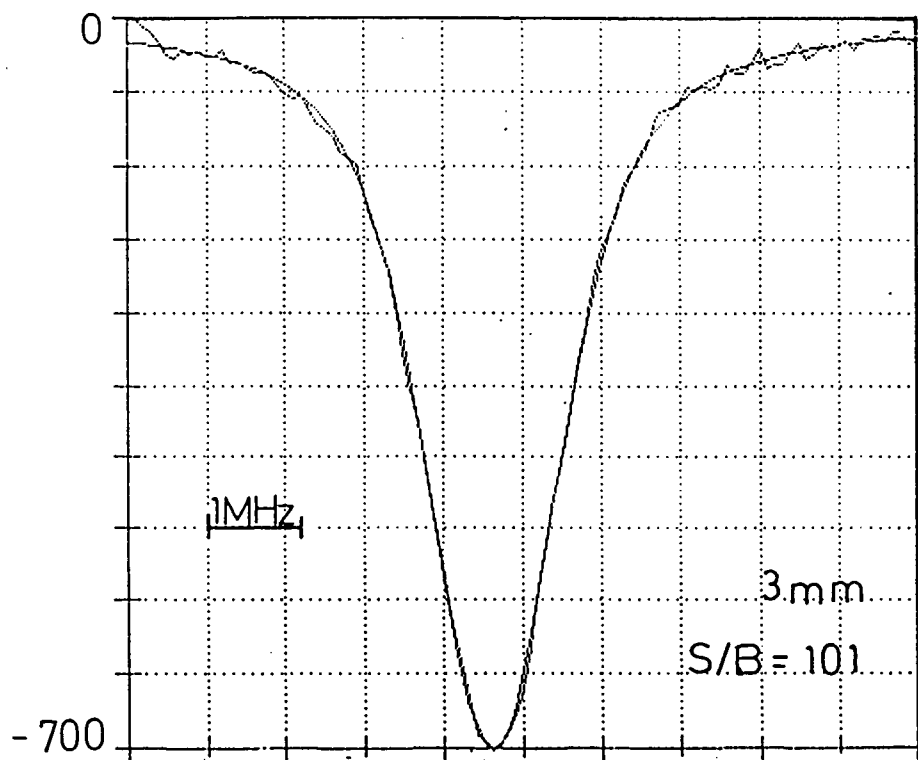
(b)



(c)



(d)



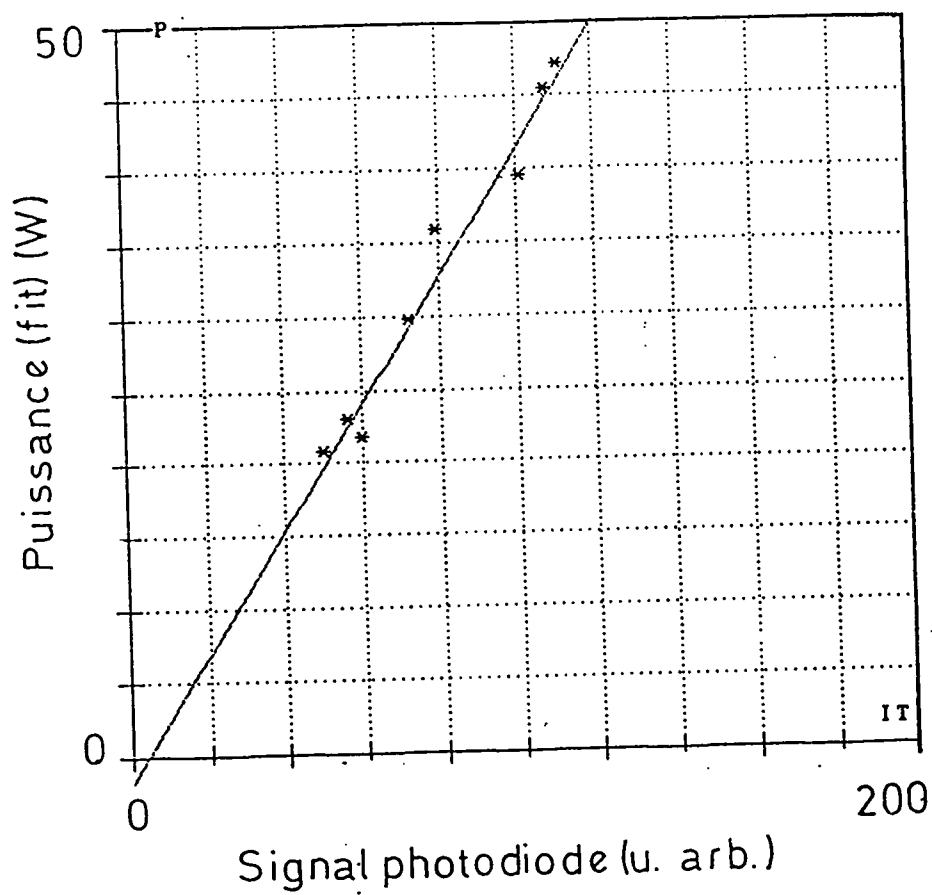


Figure 6.8 - Puissance laser donnée par les fits en fonction du signal de la photodiode (SCA) qui mesure la transmission du laser à travers la cavité du signal atomique.

maximum de la raie en fréquence corrigée du light-shift), CMH (position en fréquence du centre à mi-hauteur, non corrigé du light-shift), P (puissance lumineuse), IT (intensité moyenne correspondant au signal de la photodiode, SCA) et S/B (rapport signal sur bruit). Les valeurs typiques de nos rapports S/B vont de 15 à 30 sur le résultat d'un run.

6.3.2 - Les extrapolations à puissance lumineuse nulle.

Pour un groupe de runs d'une même transition et une même épaisseur du FPE, on a extrapolé à puissance nulle les positions des raies en fréquence, XM et CMH. Pour les 24 premiers runs comparés au FPE d'épaisseur 10 cm, on a pris les valeurs corrigées de la dérive de ce Fabry-Perot, comme décrit plus haut (partie 6.2), que l'on notera XMC (C pour corrigé) et CMHC. Pour les 24 runs correspondant à l'épaisseur 50 cm et les 8 derniers runs avec l'épaisseur 10 cm, on a pris des valeurs corrigées aussi bien de la dérive du FPE comme de la petite dérive thermique du FPR (voir 6.2), que l'on notera XMCC et CMHCC (CC pour doublement corrigés). Les figures 6.9 (a) et (b) montrent l'effet de cette dernière correction sur la position des raies. L'effet de regroupement autour de la droite moyenne est évident. Ces extrapolations ont été faites soit en fonction de la puissance donnée par le fit (P), soit par rapport à l'intensité moyenne vue par la photodiode (IT). Les figures 6.10 (a) et (b) montrent ces extrapolations à fréquence nulle pour les valeurs corrigées et non corrigées du light-shift, et aussi pour les valeurs du diamètre du premier diaphragme de 3 et 4 mm. La détermination des positions des raies extrapolées à puissance nulle est faite à partir des valeurs corrigées du light-shift, car cette correction tient compte du comportement non-linéaire du light-shift avec la puissance laser (voir paragraphe 5.4.1), ce que l'extrapolation linéaire à partir des positions CMH ne fait pas. A cause des incertitudes expérimentales, la compensation du light-shift n'est pas parfaite, mais la droite obtenue à partir des données XM a une pente beaucoup plus petite que celle obtenue à partir des données CMH.

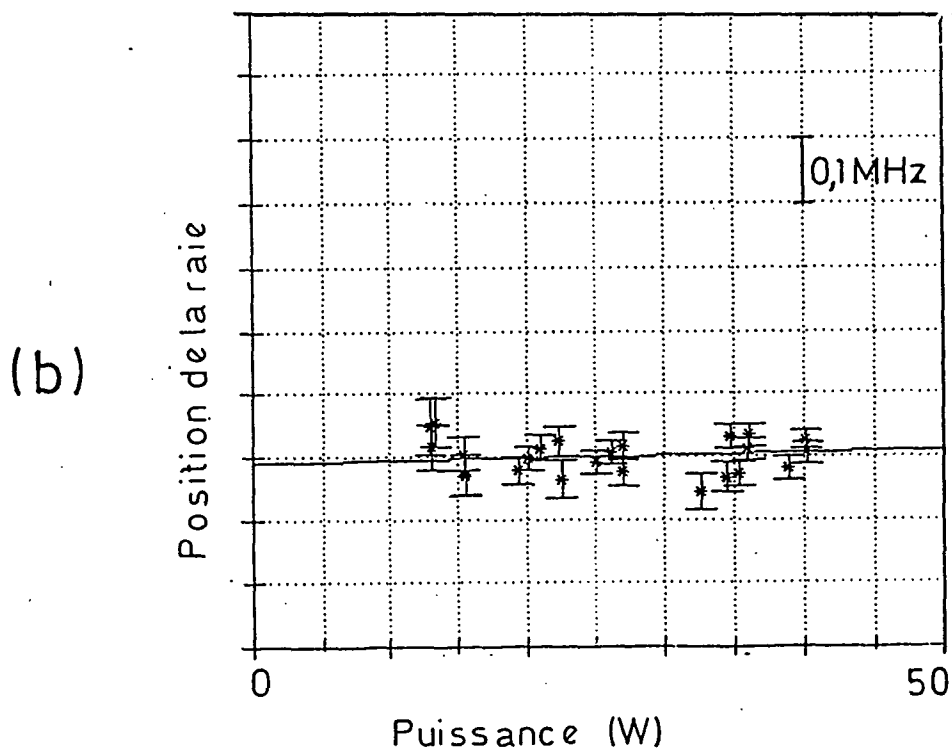
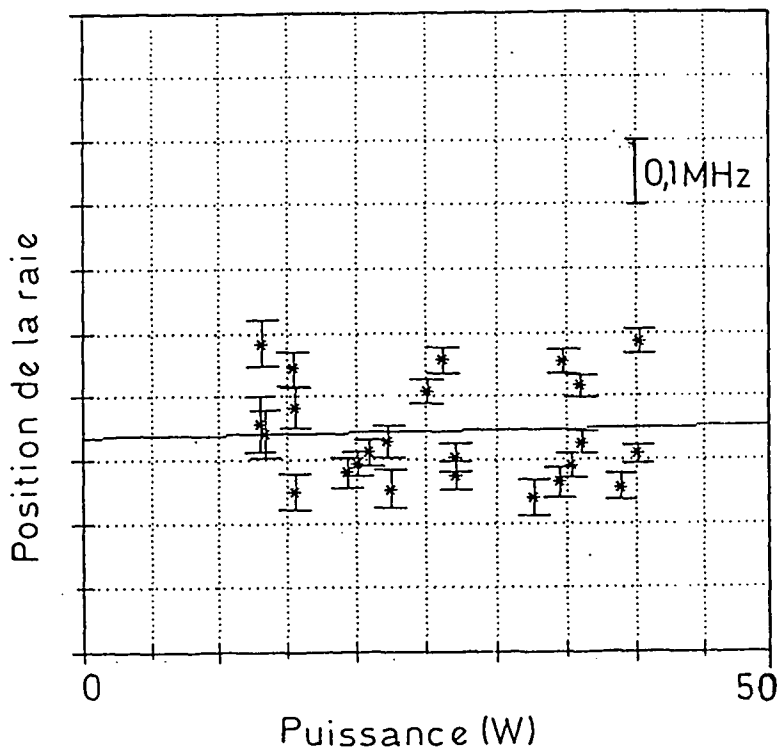


Figure 6.9 - Extrapolation à puissance nulle de la position (corrigée du light-shift) des raies pour $R_1=3$ mm. (a) Sans correction de la dérive du FPR ; (b) dérive du FPR corrigée.

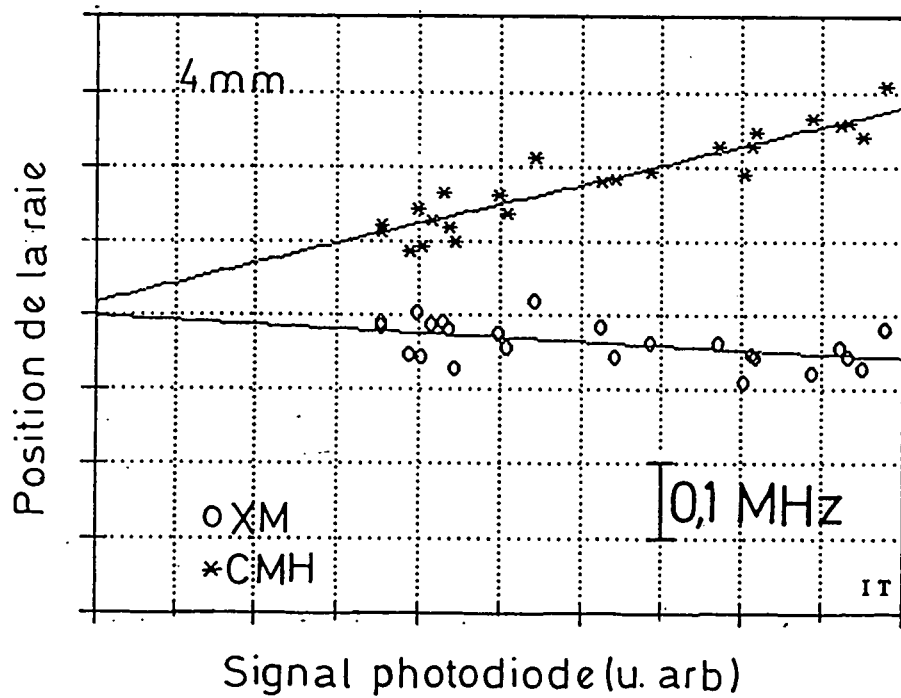
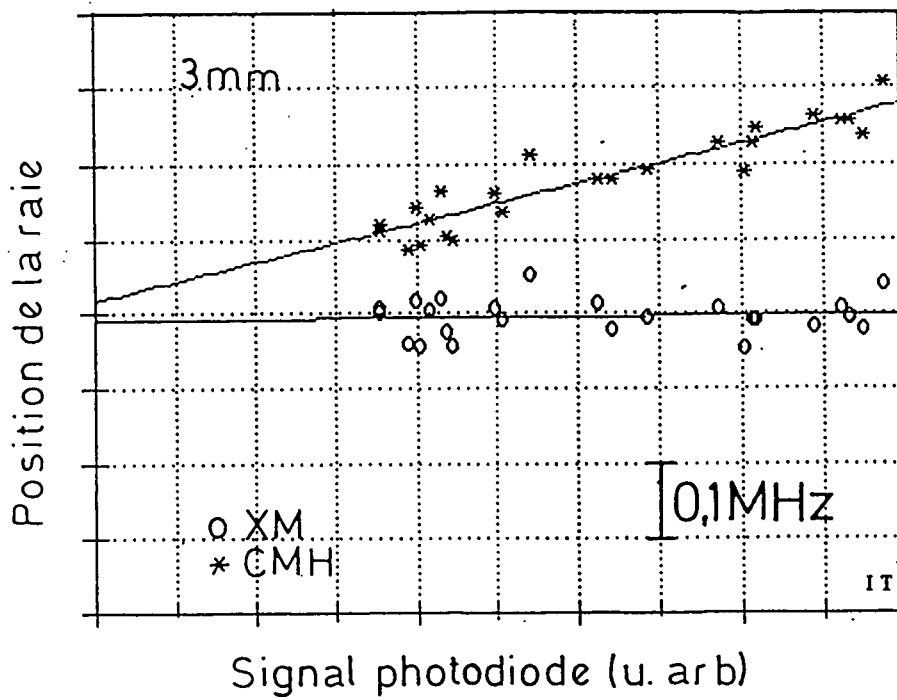


Figure 6.10 - Extrapolations à puissance nulle CMH (position non corrigée du light-shift) et XM (corrigée du light-shift). (a) $R_1 = 3$ mm ; (b) $R_1 = 4$ mm.

6.4 - Détermination de la fréquence de résonance à puissance nulle.

Pour présenter simplement l'application de la méthode des miroirs virtuels (voir chapitre IV), on réécrira la condition de résonance du Fabry-Perot étalon dans le rouge sous la forme

$$\nu(I_2) = (M_R + \Phi_R) \nu_0 \quad (6.1)$$

où $\nu(I_2)$ est la fréquence du laser HeNe/I₂, Φ_R le déphasage à la réflexion dans le rouge, ν_0 l'intervalle entre ordres et M_R vaut, par définition :

$$M_R = N_R + \varphi + (\delta_R / \nu_0) \quad (6.2)$$

N_R étant le nombre entier, φ le déphasage de Fresnel et δ_R la distance entre le pic du FPE dans le rouge et la raie de référence de l'iode, c'est-à-dire $f_B^{(0)}$. Notons qu'il suffit d'utiliser une valeur de ν_0 donnée avec sept chiffres dans la formule (6.2) ; à ce niveau de précision, cette valeur ne dépend donc pas de la longueur d'onde. La mesure du déphasage de Fresnel a été considérée dans le chapitre IV.

Les mêmes définitions peuvent être appliquées à la fréquence de la transition dans l'infrarouge, donnant

$$\nu_{2P} = (M_{IR} + \Phi_{IR}) \nu_0 \quad (6.3)$$

avec

$$M_{IR} = N_{IR} + \varphi + (\delta_{IR} / \nu_0) \quad (6.4)$$

où δ_{IR} est le décalage en fréquence entre le pic infrarouge du FPE et le signal atomique, qui, d'après la figure 6.3, est la somme de f_{FP} et f_{2P} .

En appliquant alors la méthode des miroirs virtuels, on obtient aisément :

$$\nu_{2P} = \frac{M_{IR}^{\ell} - M_{IR}^c}{M_R^{\ell} - M_R^c} \nu(I_2) \quad (6.5)$$

Nos données expérimentales nous permettent de faire deux déterminations de la fréquence de transition, l'une à partir du premier couple de mesures 10-50 cm, ν_{2P}^a , et l'autre à partir du couple 50-10 cm, ν_{2P}^b . Pour fixer les idées, on prendra comme exemple la transition $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ dans l'hydrogène. Pour la suite, on se référera à la figure 6.3.

- Pour le premier ensemble de mesures à 10 cm, nous avons utilisé la valeur de XMC obtenue à partir de l'extrapolation à puissance nulle des données obtenus pour les 24 runs réalisés (dans l'hydrogène et le deutérium). Ces valeurs sont rapportées au pic infrarouge du FPR. Pour les exprimer par rapport au pic infrarouge du FPE, on a interpolé les résultats des deux mesures de comparaison des deux Fabry-Perot faites au début et à la fin de la série de 24 runs. Cela produit une valeur pour δ_{IR} (voir figure 6.3) que l'on appellera $\delta_{IR}^{c1}(H)$ pour l'hydrogène et $\delta_{IR}^{c1}(D)$ pour le deutérium. Cette interpolation ne peut pas tenir compte de façon tout à fait adéquate de la dérive thermique du FPR (voir partie 6.2), ce qui aura des conséquences sur l'incertitude.

- Pour les mesures à 50 cm la situation est bien plus simple car la dérive thermique du FPR a été contrôlée et l'ordinateur sort directement des valeurs XMCC corrigées de la dérive et exprimées par rapport aux pics du FPE. On a pris les valeurs de l'extrapolation à puissance nulle de XMCC pour δ_{IR}^l (H ou D) (série 50 cm).

- Pour la deuxième série de mesures avec l'épaisseur de 10 cm la situation est identique à celle des mesures avec l'épaisseur de 50 cm. On a donc pris les valeurs de l'extrapolation de XMCC (deuxième série 10 cm) pour δ_{IR}^{c2} (H ou D).

Les mesures faites avec l'épaisseur de 50 cm sont plus précises car la largeur des pics d'Airy est 5 fois plus petite que pour l'épaisseur de 10 cm (les miroirs du FPE étant toujours les mêmes, la finesse est constante) et parce que la correction de la dérive thermique du FPR a toujours été faite plus soigneusement. Dans ces conditions, à partir des mesures relatives au Fabry-Perot de 50 cm, on peut déterminer une valeur très précise pour le déplacement isotopique. En effet, ce déplacement vaut environ 210 GHz pour la transition $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$, ce qui correspond à 105 GHz en fréquence laser. Pour cette différence de fréquence, la variation du déphasage à la réflexion est négligeable. On peut alors obtenir le déplacement isotopique simplement par :

$$\delta\nu_{1so} = \nu_0^\ell [N_{IR}^\ell(D) - N_{IR}^\ell(H)] + \delta_{IR}^\ell(D) - \delta_{IR}^\ell(H) . \quad (6.6)$$

La valeur de ν_0^ℓ devant être employée - qui doit être connue avec une précision d'environ 10^{-8} - peut être déterminée à partir de nos mesures de 1986 [6.1] à mieux que 10^{-9} près (car le FPE est le même qu'alors).

On a donc intérêt à considérer que les mesures faites avec l'épaisseur de 10 cm pour l'hydrogène et pour le deutérium ne sont pas indépendantes. Par exemple, à partir de la mesure de $\delta_{IR}^{c1}(D)$ on peut déduire une valeur de $\delta_{IR}^{c1}(H)$, que nous noterons $\delta_{IR}^{c1}(H)_D$ (voir figure 6.11) :

$$\delta_{IR}^{c1}(H)_D = \delta_{IR}^{c1}(D) + [N_{IR}^c(D) - N_{IR}^c(H)] \nu_0^c - \delta\nu_{1so} \quad (6.7)$$

où ν_0^c peut aussi être déterminé avec une précision suffisante à partir des résultats de 1986 [6.1]. On peut faire de même pour déterminer $\delta_{IR}^{c1}(D)_H$ à partir de $\delta_{IR}^{c1}(H)$ et $\delta\nu$.

Nous avons retenu pour la détermination des fréquences de transition la moyenne des deux valeurs, $\langle \delta_{IR}^{c1}(H) \rangle = (1/2) [\delta_{IR}^{c1}(H) + \delta_{IR}^{c1}(H)_D]$ (et de même pour le deutérium).

On trouve ainsi, dans le cas où l'extrapolation à puissance nulle est faite en fonction de IT (les valeurs sont données en MHz, *fréquence laser*) :

$$\delta_{IR}^{c1}(H) = -275,758 \quad \delta_{IR}^{c1}(D) = -227,183 .$$

Pour la longueur 50 cm on a obtenu, après l'extrapolation des valeurs doublement corrigées (CC) :

$$\delta_{IR}^\ell(H) = 228,573 \quad \delta_{IR}^\ell(D) = 194,396 .$$

On a aussi (valeurs obtenues à partir des mesures de 1986 [6.1]) :

$$\nu_0^c = 1\,497,320\,049 \quad \nu_0^\ell = 299,700\,567\,4 .$$

On peut alors calculer :

$$\delta\nu_{1so} = (1286048 - 1285698) \times 299,7005674 + 194,396 - 228,573 = 104\,861,022 .$$

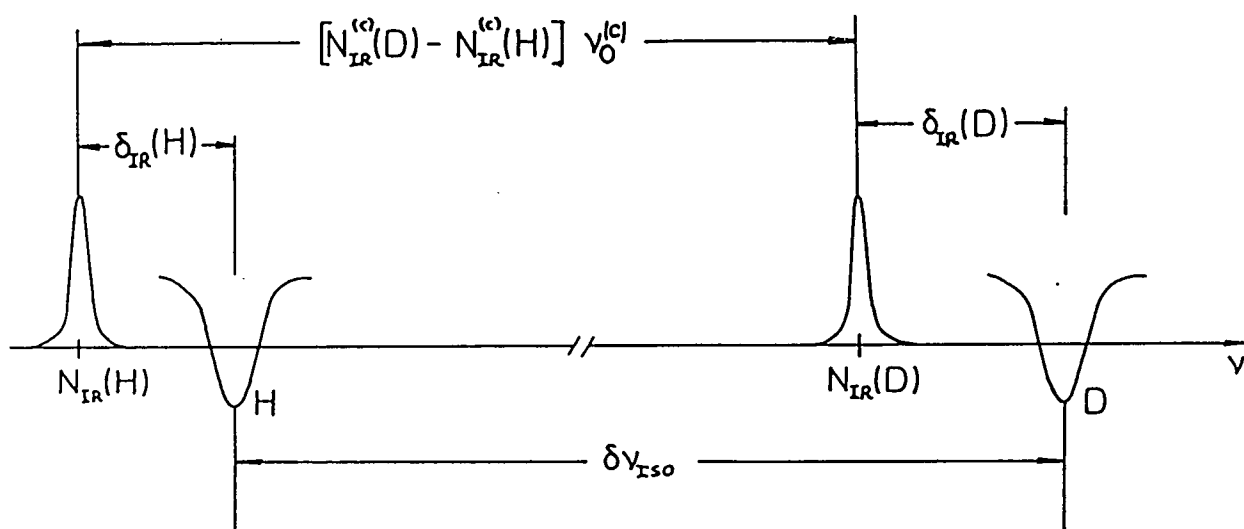


Figure 6.11 - Détermination de $\delta_{IR}(H)_D$ à partir de $\delta_{IR}(H)$, $\delta_{IR}(D)$ et $\delta\nu_{iso}$.

On a donc

$$\delta_{\text{IR}}^{\text{c}1}(\text{H})_{\text{D}} = (257413-257343) \times 1497,320049 - 227,183 - \delta\nu_{\text{iso}} = -275,801$$

et

$$\langle \delta_{\text{IR}}^{\text{c}1}(\text{H}) \rangle = -275,779 .$$

De même :

$$\langle \delta_{\text{IR}}^{\text{c}1}(\text{D}) \rangle = -227,161 .$$

Dorénavant, pour ne pas surcharger la notation, on délaissera les symboles de moyenne, étant entendu que $\delta_{\text{IR}}^{\text{c}1}$ correspond à une moyenne calculée comme ci-dessus. On calculera de façon analogue ces moyennes pour la deuxième série à 10 cm, que l'on appellera $\delta_{\text{IR}}^{\text{c}2}$.

A partir de ces données, on peut calculer la fréquence de résonance à puissance nulle. Les valeurs du déphasage de Fresnel (calculées à partir des mesures décrites dans le chapitre IV) sont :

$$\varphi^{\text{c}1} = 0,134\ 090$$

$$\varphi^{\ell} = 0,366\ 534$$

$$\varphi^{\text{c}2} = 0,134\ 256$$

où l'on note que le déphasage de Fresnel a varié entre la première et la deuxième mesure à 10 cm.

Par exemple, pour la transition 2S-8D sur l'hydrogène on procède comme suit :

$$\begin{aligned} M_{\text{IR}}^{\ell} &= 1285698 + 0,366534 + \frac{228,573}{299,7005674} \\ &= 1\ 285\ 699,129\ 205 . \end{aligned}$$

De même, on détermine les quantités $M_{\text{IR}}^{\text{c}1}$, $M_{\text{IR}}^{\text{c}2}$, M_{R}^{ℓ} et M_{R}^{c} . On peut

maintenant appliquer la méthode des miroirs virtuels, éq. (6.5), pour déterminer deux valeurs de la fréquence ν_{2P}^a et ν_{2P}^b en fréquence laser [Pour obtenir la fréquence atomique ces valeurs doivent être multipliées par deux (puisqu'il s'agit de transitions à deux photons identiques)]. On trouve :

$$\nu_{2P}^a = 385\,324\,758,650$$

$$\nu_{2P}^b = 385\,324\,758,675 .$$

Pour éliminer les dérives dues à l'exposition des miroirs du FPE à l'air pendant les changements d'épaisseur, on moyenne ces deux valeurs. La table 6.II donne les valeurs des fréquences de transition à puissance nulle (en fonction de P ou de IT) ainsi obtenus, exprimées en termes de fréquence atomique. Ces valeurs doivent encore être corrigées des effets de structure hyperfine et de l'effet Doppler du deuxième ordre, ce qui sera fait dans la partie suivante.

TABLE 6.II

Fréquences de transition à puissance nulle (MHz).

At.	Transition	Fréquence	IT	P	(IT+P)/2
H	2S-8D	770 649 517 +	0,3253	0,3481	0,3667
D	2S-8D	770 859 239 +	0,3686	0,3690	0,3688
H	2S-10D	789 144 842 +	0,1762	0,1792	0,1777
D	2S-10D	789 359 596 +	0,7650	0,7665	0,7658
H	2S-12D	799 191 683 +	0,1418	0,1592	0,1505
D	2S-12D	799 409 171 +	0,5147	0,5406	0,5277

6.5 - La détermination de la constante de Rydberg et des déplacements isotopiques.

Dans cette partie on discutera les corrections qui doivent être apportées aux fréquences de résonance calculées dans la partie précédente et la procédure de détermination de la constante de Rydberg et des déplacements isotopiques.

6.5.1 - Les corrections de structure hyperfine et d'effet Doppler du deuxième ordre.

Rappelons encore une fois que notre expérience est capable de résoudre complètement la structure hyperfine du niveau $2S_{1/2}$, mais pas celle des niveaux excités. Il est nécessaire de ramener les fréquences de résonance mesurées au barycentre des sous-niveaux de structure hyperfine.

L'intervalle de structure hyperfine du niveau $2S_{1/2}$ a été mesuré expérimentalement avec une précision plus que suffisante, aussi bien pour l'hydrogène (177 556,86 (5) kHz) [6.2] que pour le deutérium (40 924,439 (20) kHz) [6.3].

A partir des formules (2.30) et (2.32), on peut aisément calculer que l'effet de la structure hyperfine sur le niveau $2S_{1/2}$ est de

- remonter le niveau $F=1$ de l'hydrogène de $1/4$ de l'intervalle de structure hyperfine, soit de 44,389 2 MHz ;

- remonter le niveau $F=3/2$ du deutérium de $1/3$ de l'intervalle de structure hyperfine, soit de 13,641 5 MHz.

Ces corrections doivent donc être ajoutées aux valeurs obtenues dans la partie antérieure.

Pour les niveaux excités la situation est un peu plus compliquée. Comme les sous-niveaux ne sont pas résolus, on doit faire une moyenne des déplacements de structure hyperfine pondérée par l'intensité de la transition à deux photons vers le sous-niveau hyperfin considéré.

La formule (A4.1) de l'Appendice IV donne l'intensité $M(J_1, F_1 \rightarrow J_f, F_f)$ d'une transition à deux photons entre deux sous-niveaux hyperfins. Considérons, par exemple, la transition $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ dans l'hydrogène. On a

$$M(1/2, 1 \rightarrow 5/2, 2) = 2/9 \quad \text{et} \quad M(1/2, 1 \rightarrow 5/2, 3) = 7/9 .$$

Les déplacements de structure hyperfine ont été déterminés avec une précision suffisante dans le chapitre II. On a

$$\delta\nu_{F=2} = - 83,2 \text{ kHz} \quad \text{et} \quad \delta\nu_{F=3} = 59,4 \text{ kHz} .$$

Le déplacement de structure hyperfine est alors

$$(2/9) (-83,2) + (7/9) 59,4 = 27,7 \text{ kHz} .$$

Ce déplacement contribue à augmenter la fréquence de résonance, et doit donc être soustrait de la fréquence mesurée.

Le total des corrections de structure hyperfine est donc

$$44,389 2 - 0,027 7 = 44,361 5 \text{ MHz} .$$

L'effet Doppler du deuxième ordre a été discuté dans la partie 5.5, où, en particulier, on a déterminé sa valeur à puissance nulle (car il dépend de la puissance). Les valeurs ainsi trouvées sont, à notre niveau de précision, insensibles à la transition considérée, elles ne dépendent que de l'espèce atomique considérée. On prendra donc

$$40,8 \text{ kHz pour H} \quad \text{et} \quad 17,0 \text{ kHz pour D} .$$

Cette correction - comme il a été montré dans la partie 5.5 - doit être ajoutée à la fréquence de résonance. Le total des corrections est donc de 44,402 3 MHz pour la transition $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ de l'hydrogène. La table 6.III donne le total de ces corrections pour chacune des transitions considérées.

TABLE 6.III

Corrections de structure hyperfine et d'effet Doppler
du 2e ordre (MHz)

Transition	Correction
2S - 8D (H) 1/2 5/2	44,402 3
2S - 8D (D) 1/2 5/2	13,646 9
2S - 10D (H) 1/2 5/2	44,415 9
2S - 10D (D) 1/2 5/2	13,654 0
2S - 12D (H) 1/2 5/2	44,422 4
2S - 12D (D) 1/2 5/2	13,656 2

En ajoutant ces corrections aux fréquences de résonance données dans la table 6.II (la valeur moyenne, donnée dans la cinquième colonne), on obtient les valeurs corrigées des fréquences de transition, qui sont montrées dans la table 6.IV.

TABLE 6.IV

Fréquences de transition corrigées (MHz)

Transition	Fréquence (MHz) ^a
$2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ (H)	770 649 561,737 (48)
$2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ (D)	770 859 253,018 (43)
$2S_{1/2} - 10D_{5/2}$ (H)	789 144 886,593 (35)
$2S_{1/2} - 10D_{5/2}$ (D)	789 359 610,420 (34)
$2S_{1/2} - 12D_{5/2}$ (H)	799 191 727,573 (47)
$2S_{1/2} - 12D_{5/2}$ (D)	799 409 185,184 (42)

^a L'incertitude donnée n'inclue pas la contribution de la mesure de la fréquence absolue du laser standard.

6.5.2 - Les incertitudes sur la détermination de la fréquence de transition.

On fera maintenant un bilan des incertitudes sur la fréquence de transition. Ces incertitudes seront discutées selon leur origine physique. On ignorera pour l'instant celle due à l'incertitude sur la mesure de la fréquence du laser HeNe/I₂, qui, comme on le verra, est notre principale source d'incertitude, pour nous concentrer sur celles dues à la méthode et aux techniques que nous avons utilisées.

a) *Incertitude statistique.* Cette incertitude a une double source : les incertitudes sur la détermination des fréquences de résonance dues aux fluctuations du signal atomique (fluctuations de la fréquence du laser à colorant, fluctuations du nombre de métastables, fluctuations de la puissance vue par les atomes, etc.), et celle due à l'extrapolation à puissance nulle. Elles sont prises en considération directement dans les extrapolations, qui attribuent un poids plus grand aux points les plus précis, le micro-ordinateur produisant directement l'incertitude sur la valeur de XM à puissance nulle. Notre incertitude statistique est calculée comme il s'ensuit (pour fixer les idées, on prendra l'exemple de la transition $2S_{1/2} - 8D_{1/2}$ dans l'hydrogène). Les valeurs sont données en kHz de fréquence laser.

Notons que chaque incertitude sur les δ_{IR} se répercute sur la valeur de $M_{IR}^c - M_{IR}^c$ en (6.5) à travers δ_{IR}/ν_0 . La différence entre les deux valeurs de M_{IR} est de l'ordre de 10^6 , et la contribution de chaque incertitude est alors

$$\frac{(\text{incertitude})}{10^6 \nu_0}$$

où ν_0 est, bien entendu, la valeur correspondant à l'épaisseur en question ($\approx 1,5$ GHz pour court, ≈ 300 MHz pour long).

Incertitude sur $\langle \delta_{IR}^{c1}(H) \rangle$:

incertitude sur l'extrapolation :	13
incertitude sur le déplacement isotopique (qui provient de l'extrapolation des données pour 50 cm) :	16
incertitude sur la moyenne :	10,3
incertitude due à la dérive thermique du FPR :	56
somme quadratique :	57
somme quadratique pour le deutérium :	32
incertitude sur la moyenne : $(1/2)(57^2 + 32^2)^{1/2}$	33

soit : $2,2 \times 10^{-11}$.

Incertitude sur $\delta_{IR}^{\ell}(H)$:

incertitude sur l'extrapolation : 12,5

soit : $4,2 \times 10^{-11}$.

Erreur sur $\langle \delta_{IR}^{c2}(H) \rangle$:

somme quadratique : 15,5

somme quadratique deutérium : 42,5

incertitude totale : 23

soit : $1,6 \times 10^{-11}$.

Dans les deux derniers cas, la dérive thermique du FPR a été compensée.

L'incertitude statistique totale est alors

$$\left[\frac{(2,2)^2 + (1,6)^2}{2} + (4,2)^2 \right]^{1/2} = 4,6 \text{ parties en } 10^{-11} .$$

On observe que la contribution de l'incertitude sur la détermination des excédents fractionnaires pour l'épaisseur de 10 cm à l'incertitude totale est en fait plus petite que celle des excédents fractionnaires pour l'épaisseur de 50 cm. Cela tient au fait que l'intervalle entre ordres (qui intervient dans le calcul des excédents fractionnaires) est 5 fois plus grand pour l'épaisseur courte que pour la longue.

b) *Incertitude due au vieillissement des miroirs.* Celle-ci a été déterminée en observant la dérive de la position du signal à deux photons par rapport au FPE avec épaisseur 10 cm avant et après le changement d'épaisseur. Pour la transition qui nous intéresse, ce changement donne une contribution de $3,1 \times 10^{-11}$ (moitié de la différence entre les deux déterminations).

c) *Incertitude due à la mesure du déphasage de Fresnel.*

Récrivons la formule (6.5) sous la forme :

$$\nu_{2P} = (\Delta M_{IR} / \Delta M_R) \nu(I_2) .$$

L'incertitude $\delta\varphi$ sur le déphasage de Fresnel est la même dans le rouge et dans l'infrarouge. L'incertitude sur ν_{2P} aura donc deux composantes qui tendront à se compenser

$$\delta\nu_{2P} = \left(\frac{\delta\varphi}{\Delta M_R} - \frac{M_{IR} \delta\varphi}{\Delta M_R^2} \right) \nu(I_2)$$

et

$$\frac{\delta\nu_{2P}}{\nu_{2P}} = \delta\varphi \left[\frac{1}{\Delta M_{IR}} - \frac{1}{\Delta M_R} \right] \approx 2 \times 10^{-7} \delta\varphi .$$

Les incertitudes sur le déphasage de Fresnel ont été données dans le chapitre IV : 67 kHz (1^{ère} détermination 10 cm), 13 kHz (50 cm), 49 kHz (2^{ème} détermination 10 cm). Par rapport aux intervalles entre ordres respectifs, cela fait respectivement $4,5 \times 10^{-5}$, $4,3 \times 10^{-5}$ et $3,3 \times 10^{-5}$. On prendra comme incertitude

$$\left[\frac{(4,5)^2 + (3,3)^2}{2} + (4,3)^2 \right]^{1/2} \times 2 \times 10^{-12} = 1,2 \times 10^{-11} .$$

d) *Incertitude sur les formes de raie théoriques.* Comme on l'a vu dans le paragraphe 6.3.1, les résultats des fits dépendent de la distribution spatiale des trajectoires. Cet effet a été pris en considération en faisant varier le diamètre du premier diaphragme. Pour tenir compte de cette incertitude, on a ajouté à nos incertitudes une composante qui correspond à la variation de la fréquence de résonance calculée avec le diamètre de 3 mm et celle calculée avec un diamètre de 4 mm. Cela donne une contribution de $1,3 \times 10^{-11}$, indépendamment de la transition considérée.

En plus de cela, il y a l'incertitude due à la non-coïncidence des extrapolations en fonction de P et IT, dont la contribution est de

$0,7 \times 10^{-11}$.

La somme de ces deux contributions est donc 2×10^{-11} sur le résultat final.

e) *Fluctuations de fréquence du laser HeNe/I₂ de référence.* Comme on l'a mentionné dans le paragraphe 3.2.3, la comparaison de notre laser de référence à un laser standard de l'INM a montré qu'il était stable à 10^{-11} .

f) *Incertitude sur les corrections de structure hyperfine et d'effet Doppler du 2^e ordre.* Les valeurs de la structure hyperfine employées sont précises bien au-delà de ce dont nous avons besoin, et elles ne contribuent donc pas à nos incertitudes. A la valeur obtenue pour la correction due à l'effet Doppler du 2^e ordre nous avons attribué une incertitude de 10 kHz pour l'hydrogène et 5 kHz pour le deutérium. Ces valeurs correspondent à la variation de cette correction avec la puissance lumineuse et donnent une contribution de resp. 0,5 et $0,3 \times 10^{-11}$ pour l'hydrogène et le deutérium.

g) *Effet Stark.* Le déplacement des raies par des champs électriques parasites peut induire des erreurs. On discutera dans la partie 6.5 la détermination de cette erreur, mais on l'inclura dès maintenant dans l'erreur totale. Ces valeurs dépendent évidemment de la transition considérée. Pour la transition $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$, cette contribution est de $0,2 \times 10^{-11}$ (mais $0,5 \times 10^{-11}$ pour les transitions vers le $12D_{5/2}$).

La somme quadratique de toutes ces contributions est $6,2 \times 10^{-11}$ pour la transition considérée ici, ce qui correspond à une incertitude de 48 kHz.

6.5.3 - La détermination de la constante de Rydberg.

Pour obtenir une valeur de la constante de Rydberg à partir de la mesure d'une fréquence de transition, il faut encore la corriger de la structure fine et du Lamb-shift.

Pour l'hydrogène, on a utilisée la valeur expérimentale du Lamb-shift $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$, 1 057,851 (2) MHz [6.4], pour calculer, à partir des fréquences mesurées, une valeur expérimentale de l'intervalle $2P_{1/2} - nD_{5/2}$. En utilisant alors le calcul théorique décrit dans le chapitre II, on a cherché la valeur

de R qui donnait la valeur expérimentale pour l'intervalle $2P_{1/2} - nD_{5/2}$.

Pour le deutérium, vu que l'on ne dispose pas de mesures assez précises du Lamb-shift $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$, on a utilisé la valeur théorique 1 057,229 MHz calculée selon les formules données dans le chapitre II, et on a procédé ensuite comme pour l'hydrogène.

Les valeurs des constantes fondamentales utilisées sont :

$$\alpha^{-1} = 137,035\,989\,5\,(61) \quad [6.5]$$

$$m_p/m_e = 1\,836,152\,701\,(37) \quad [6.6]$$

$$m_d/m_e = 3\,670,483\,013\,(73) \quad [6.5].$$

On obtient ainsi six déterminations indépendantes de la constante de Rydberg, données dans la table 6.V.

TABLE 6.V

Déterminations de la constante de Rydberg à partir de la fréquence mesurée pour chacune des transitions étudiées.

Transition	R (m^{-1}) ^a
$2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ (H)	10 973 731,570 76 (70)
$2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ (D)	10 973 731,570 86 (61)
$2S_{1/2} - 10D_{5/2}$ (H)	10 973 731,570 84 (48)
$2S_{1/2} - 10D_{5/2}$ (D)	10 973 731,570 73 (47)
$2S_{1/2} - 12D_{5/2}$ (H)	10 973 731,570 78 (64)
$2S_{1/2} - 12D_{5/2}$ (D)	10 973 731,571 32 (58)

^a L'incertitude donnée n'inclue pas la contribution de mesure de la fréquence absolue du laser standard.

L'incertitude sur R est le résultat de la somme quadratique de l'incertitude sur la fréquence mesurée plus l'incertitude sur la méthode de détermination de la constante de Rydberg.

Cette dernière incertitude est composée de :

- L'incertitude sur la mesure du Lamb-shift de l'état $2S_{1/2}$ pour l'hydrogène ou sur le calcul de ce Lamb-shift pour le deutérium. On a pris la valeur de 10 kHz pour cette incertitude, ce qui fait 1×10^{-11} sur la fréquence de transition.

- L'incertitude sur le calcul théorique de la fréquence de transition $2P_{1/2} - nD_{5/2}$. Cette incertitude est donnée par Erickson [6.7], et elle est d'environ 4 kHz (et pratiquement indépendante de n pour $n=8,10$ ou 12 , car la contribution dominante vient de l'énergie du niveau $2P_{1/2}$). Sur la fréquence de transition cela fait $0,4 \times 10^{-11}$.

L'incertitude totale sur la fréquence de transition due à ces deux contributions est donc $1,4 \times 10^{-11}$.

- Incertitude sur la valeur expérimentale de α ($4,5 \times 10^{-8}$). Celle-ci affecte essentiellement la correction de structure fine. La contribution des niveaux $nD_{5/2}$ est bien évidemment négligeable par rapport à celle du niveau $n=2$ (le rapport des intervalles de structure fine est presque 200). On peut calculer ainsi que l'incertitude sur α produit une incertitude de 3 kHz sur la correction de structure fine du niveau $n=2$, ce qui fait $0,4 \times 10^{-11}$ sur la fréquence de transition.

- L'incertitude sur le rapport m_e/m_p (2×10^{-8}) [6.6] joue essentiellement sur le facteur de masse réduite $(1+m_e/m_p)^{-1}$. Sur la détermination de la constante de Rydberg, cette incertitude donne une contribution de $1,1 \times 10^{-11}$.

La somme quadratique de ces contributions donne $1,9 \times 10^{-11}$. Ces *incertitudes* sont indépendantes de notre montage expérimental et donnent donc l'actuelle limitation théorique de la méthode.

A partir de ces six déterminations on peut déduire notre valeur finale de la constante de Rydberg (en faisant la moyenne) :

$$R = 10\,973\,731,570\,88\,(47)\,m^{-1}.$$

L'incertitude attribuée à cette valeur n'inclue pas l'incertitude sur la mesure de fréquence du laser standard et a été calculée de la façon suivante :

On a considéré toutes les incertitudes discutées ci-dessus comme inchangées sauf l'incertitude statistique. Comme incertitude statistique, on a pris l'écart quadratique moyen des six déterminations, ce qui donne 2×10^{-11} . Pour l'erreur due à l'effet Stark on a pris la valeur maximum, correspondant aux transitions vers le $12D_{5/2}$. Pour l'effet Doppler du 2^e ordre on a pris la valeur maximum, correspondant à l'hydrogène. La table 6.VI montre les diverses contributions de ce calcul.

En ajoutant (par somme quadratique) l'incertitude sur la mesure de fréquence du laser standard ($1,6 \times 10^{-10}$) on obtient :

$$R = 10\,973\,731,570\,9\,(18)\,m^{-1}.$$

6.5.4 - Les déplacements isotopiques et la détermination de m_p/m_e .

Nos mesures permettent également des déterminations des déplacements isotopiques pour chaque transition. On a décrit dans la partie 6.4 (éq. 6.6) leur détermination à partir des mesures correspondant à l'épaisseur de 50 cm. Ces valeurs sont, de plus, corrigées des effets de structure hyperfine et du déplacement Doppler du 2^e ordre.

TABLE 6.VI

Calcul de l'incertitude sur la constante de Rydberg.

Contribution	incertitude (10^{-11})
m_p/m_e	1,1
Calcul théorique de la position des niveaux, Lamb shift, α	1,5
Effet Stark	0,5
Effet Doppler du 2 ^e ordre	0,5
Fluctuations du laser standard	1,0
Déphasage de Fresnel	1,2
Statistique	2,0
Formes de raies théoriques	2,0
Vieillissement des miroirs	2,0
	<hr/>
SOMME QUADRATIQUE	4,3
Fréquence absolue du laser standard	16,0
	<hr/>
SOMME QUADRATIQUE FINALE	16,6

La table 6.VII montre les résultats obtenus pour les différentes transitions. Les incertitudes citées sont la somme quadratique des contributions dues à l'incertitude statistique sur les extrapolations et de l'incertitude sur la correction d'effet Doppler du 2^e ordre.

TABLE 6.VII

Déplacements isotopiques (MHz).

$2S_{1/2} - 8D_{5/2}$	209 691,281 (30)
$2S_{1/2} - 10D_{5/2}$	214 723,827 (22)
$2S_{1/2} - 12D_{5/2}$	217 457,611 (36)

A partir de ces valeurs on peut déterminer une valeur pour le rapport de masses m_p/m_e . En effet, le rapport $m_D/m_p = 1,999\ 007\ 496$ [6.5] des masses du deutéron et du proton est connu avec une précision de 3×10^{-9} . Le déplacement isotopique est dû principalement aux effets de masse réduite discutés dans le chapitre II, mais il est aussi sensible à l'effet de taille du noyau (paragraphe 2.3.3) qui est différent pour les deux espèces atomiques. Nous avons calculé théoriquement le déplacement isotopique, selon les formules du chapitre II, et nous avons fait varier m_p/m_e (en conservant m_D/m_p fixe) de façon à retrouver les valeurs expérimentales pour le déplacement isotopique.

La table 6.VIII montre les valeurs obtenues et leur moyenne. La table 6.IX montre les diverses contributions à l'incertitude sur la moyenne. La valeur finale

$$1\ 836,152\ 59\ (24)$$

est en bon accord avec la mesure la plus précise disponible actuellement [6.6]

$$1\ 836,152\ 701\ (37) .$$

La table 6.IX montre que la principale limitation de principe pour la mesure de m_p/m_e à partir des déplacements isotopiques provient de la connaissance imparfaite de la taille du noyau. Si une mesure plus précise des distributions de charge électromagnétique pour le proton et le deutéron était disponible, il serait en principe possible d'avoir des mesures aussi précises que celle de van Dyck *et al.* [6.6].

TABLE 6.VIII

Déterminations de m_p/m_e .

Transition	m_p/m_e
$2S_{1/2} - 8D_{5/2}$	1 836,152 64
$2S_{1/2} - 10D_{5/2}$	1 836,152 77
$2S_{1/2} - 12D_{5/2}$	1 836,152 37
Moyenne	1 836,152 59 (24)

TABLE 6.IX

Composition de l'incertitude sur m_p/m_e (10^{-7}).

Statistique	1,1
m_D/m_P	0,03
Vol. du noyau	0,63
Effet Doppler du 2 ^e ordre	0,2
<hr/>	
SOMME QUADRATIQUE	1,3

6.6 - Discussion des incertitudes et possibilités d'amélioration.

Dans cette partie, on commentera les principales sources d'incertitude sur notre mesure et les possibilités de les réduire.

6.6.1 - La mesure de la fréquence absolue du laser étalon.

La table 6.VI montre que la principale source d'incertitude dans notre expérience vient de la mesure de la fréquence du laser de référence [6.8], qui donne une contribution de 16×10^{-11} à l'incertitude totale de $16,6 \times 10^{-11}$. La précision de notre mesure par rapport au laser standard est de $4,3 \times 10^{-11}$, ce qui représente un progrès d'un facteur 4 par rapport à la mesure de Zhao et al. [6.9], qui utilise le même standard de fréquence.

Cela montre que le besoin d'une amélioration des mesures de fréquences absolues dans le domaine optique se fait sentir.

Cette limitation peut être levée soit par une nouvelle mesure, plus précise, de la fréquence absolue du laser standard - car celui-ci est stable à 10^{-11} près - soit en raccordant notre laser à colorant directement à d'autres standards de fréquence plus précis, comme le méthane (CH_4) ou l'horloge à césium. Cette possibilité sera discuté plus loin.

6.6.2 - L'effet Stark.

Notre estimation de l'erreur due à l'effet Stark a pour base la limite supérieure que l'on a déterminée pour le champ électrique parasite dans notre montage. Cette limite a été obtenue à partir des observations de la transition $2S_{1/2} - 20D_{5/2}$.

Comme on l'a vu dans le paragraphe 5.6.1, l'élargissement d'une raie dû à l'effet Stark est proportionnel à n^2 pour n suffisamment grand. Les transitions vers les niveaux plus élevés sont donc plus sensibles aux champs électriques. La largeur naturelle de la transition vers le niveau 20D est de 38 kHz. La figure 6.12 montre le signal observé sur cette transition (où l'on voit les deux composantes de structure fine $J=3/2$ et $J=5/2$). La largeur déterminée par le fit est 950 kHz. Si l'on élimine l'élargissement dû à la puissance laser, il reste 750 kHz d'élargissement supplémentaire. Supposons

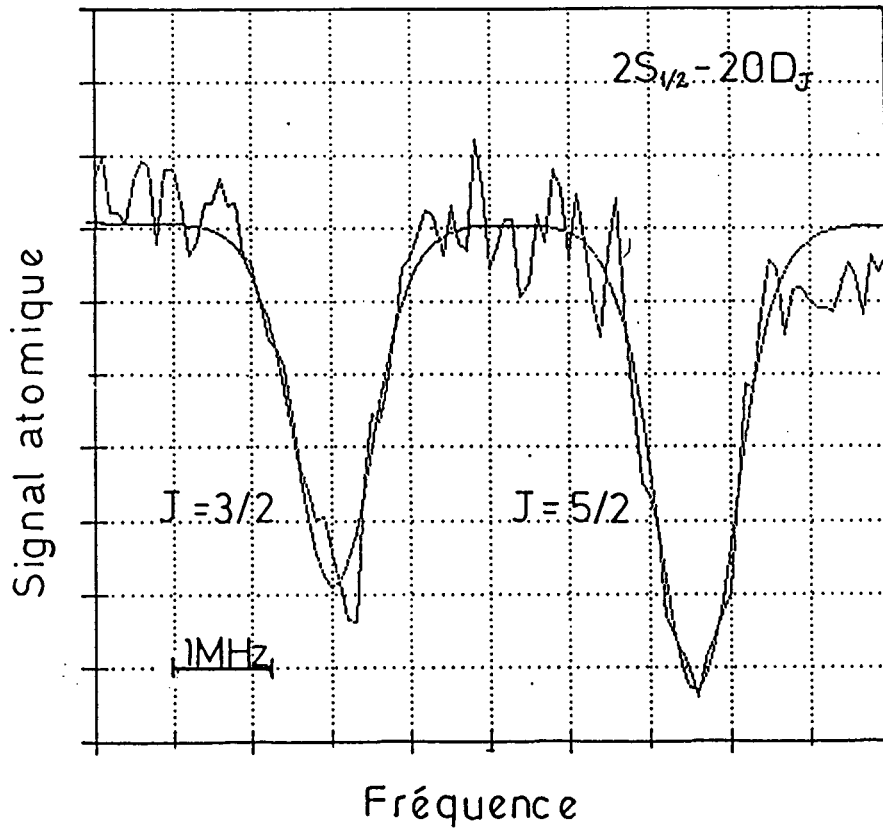


Figure 6.12 - Etude de la transition $2S_{1/2} - 2D_{3/2, 5/2}$.

que tout cet élargissement soit dû à l'effet Stark. Celui-ci est proportionnel à $n(n-1)$ (voir paragraphe 5.6.1), ce qui correspondrait à un élargissement de 180 kHz environ sur le niveau $10D_{5/2}$. D'après le calcul présenté dans le paragraphe 5.6.1, qui tient compte de la structure fine, on peut en déduire un champ électrique de 2 mV/cm (voir figure 5.17). D'après le même calcul, un tel champ déplacerait le barycentre de la raie d'environ 2 kHz, ce qui correspond à une erreur de 3×10^{-12} . Pour le $8D_{5/2}$ et $12D_{5/2}$ on trouve respectivement 2 et 5×10^{-12} .

Dans notre montage actuel, un effort important a été fait pour réduire les champs électriques parasites par rapport au montage de 1986 [6.1], où ces champs étaient évalués à 30 mV/cm. Cela a été possible grâce au vide plus propre des pompes cryogéniques, l'utilisation d'enceintes à vide plus grandes (de façon à ce que le jet atomique reste loin des parois métalliques), à l'usage généralisé de l'aquadag et au chauffage des enceintes à vide destiné à empêcher la formation de dépôts (voir paragraphe 3.1.3). Au niveau actuel, l'effet Stark ne constitue pas une limitation à notre précision. Néanmoins, si par le futur on s'intéresse à des transitions vers les niveaux de n plus élevé, un effort additionnel de réduction de ces champs sera nécessaire.

6.6.3 - Les causes d'élargissement. L'incertitude statistique.

L'incertitude statistique observée sur nos mesures - et qui est en fait la principale contribution pour les déplacements isotopiques - a des origines différentes : la fluctuation de la position de la raie (causée par des fluctuations de la puissance lumineuse et de la fréquence du laser), les fluctuations du nombre de métastables et d'autres contributions au bruit sur nos raies, ainsi que les incertitudes dans l'extrapolation à puissance nulle causées par les imperfections du calcul des formes de raie théoriques.

Parmi les premières, la principale est la fluctuation du nombre de métastables. Notre montage est particulièrement sensible à ce genre de fluctuation du fait que notre méthode de détection - mesure du nombre de métastables - ne se fait pas sur fond noir. On pourrait améliorer ceci en utilisant une détection par champ statique dans laquelle au lieu de faire le "quenching" des atomes métastables, on appliquerait un champ électrique capable d'ioniser les atomes excités (mais pas les métastables) et où l'on détecterait les ions formés (ou les électrons). (Ce système est largement

utilisé pour l'étude d'atomes de Rydberg.) L'avantage de cette détection sur fond noir est quelque peu contrecarré par la nécessité d'employer des champs nettement plus importants que le champ de quenching utilisé à présent, ce qui pose des problèmes de blindage. Pour éviter des champs trop grands, ce système serait plus adapté à l'étude de transitions vers des niveaux plus élevés (car le champ critique d'ionisation varie avec $1/n^4$). L'amélioration du rapport signal/bruit permettrait aussi de travailler à des puissances lumineuses moins importantes, réduisant les effets dus au light-shift.

Les autres facteurs mineurs de bruit peuvent aussi être réduits, en améliorant les systèmes d'asservissement, mais cela n'aurait pas de sens tant que le problème du bruit sur le nombre de métastables ne serait pas résolu.

Les incertitudes dues à l'extrapolation à puissance nulle pourraient être réduites en mesurant la distribution des trajectoires des atomes métastables sur le premier diaphragme, ce qui nous permettrait un calcul des formes de raies plus réaliste.

Nos raies présentent des largeurs typiques de 1 MHz, dont environ 600 kHz sont dus au light-shift. Il reste à expliquer l'élargissement résiduel de 800 kHz, qui, dans les fits, est pris en considération par la convolution avec une gaussienne.

Les causes d'élargissement qui n'ont pas été considérées dans le calcul théorique (cf. partie 5.6) sont les suivantes :

a) *Largeur du laser à colorant.* Comme on l'a vu dans le paragraphe 3.2.2, notre laser a une largeur de 50 kHz, ce qui donne une contribution de 100 kHz en fréquence atomique.

b) *Effet Doppler du 2e ordre.* On a vu dans la partie 5.5 - voir figure 5.15 - que cet élargissement est de l'ordre de 70 kHz (il dépend de la puissance lumineuse).

c) *Temps de transit transversal.* Il donne une contribution de 6 kHz (cf. paragraphe 5.6.4).

d) *Effet Stark.* Comme on l'a vu ci-dessus (paragraphe 6.6.2), cet

contribution est de l'ordre de 180 kHz.

La somme (quadratique) de tous ces effets vaut 210 kHz.

Il reste donc environ 750 kHz d'élargissement dû à d'autres facteurs, dont l'effet Zeeman.

Comme on l'a vu dans le paragraphe 5.6.2, l'élargissement dû à l'effet Zeeman correspond à environ 120 kHz pour un champ de 10 mG. Si tout l'élargissement résiduel est attribué à l'effet Zeeman, cela permet de déduire un champ magnétique parasite d'environ 60 mG.

6.6.4 - Incertitude due au vieillissement des miroirs.

Comme il est commenté dans le chapitre IV (cf. partie 4.6) l'effet de vieillissement des miroirs devient moins important au fur et à mesure que le temps passe. L'incertitude due à cet effet sur notre dernière mesure est dix fois plus petite que celle observée sur la mesure de 1986 [6.1], bien que cela soit aussi dû à l'amélioration générale du système de balayage du laser.

On a montré sur la figure 4.8 le changement avec le temps du déphasage à la réflexion calculé à partir de la position des raies $2S_{1/2} - 8D_{5/2}$ et $2S_{1/2} - 10D_{5/2}$.

6.6.5 - Incertitudes sur le calcul théorique des fréquences de transition.

La détermination de la constante de Rydberg à partir des fréquences de transition mesurées fait intervenir - comme on l'a vu dans la partie 6.5, le calcul théorique des corrections dues aux effets de structure hyperfine, de corrections radiatives et de structure fine. Dans ces calculs, interviennent trois sources d'incertitudes : sur la détermination du Lamb-shift, sur les valeurs de m_p/m_e et sur la constante de structure fine α . Ces incertitudes sont indépendantes de notre méthode et constituent sa limitation de principe. L'incertitude sur la taille du proton et du deutéron affecte d'une façon importante (voir chapitre II) les calculs théoriques du Lamb-shift et sont une limitation sur nos mesures du déplacement isotopique.

6.7 - Comparaison avec d'autres mesures.

Dans les trois dernières années, six mesures différentes de la constante de Rydberg ont été effectuées avec des précisions meilleures que 1×10^{-9} . Toutes ces mesures sont en excellent accord, différant entre elles de moins d'un écart-type de la moins précise (6×10^{-10}). Les résultats de ces mesures sont montrés sur la figure 6.13.

Quatre d'entre ces mesures - notre mesure de 1986 [6.1], les deux mesures du groupe de Yale sur les raies Balmer- α et β , resp. [6.10] et [6.9], et notre dernière mesure [6.11] - utilisent le même étalon de fréquence absolue, le laser HeNe/I₂. Tandis que le progrès sur la précision de ces mesures (de 6 à $1,7 \times 10^{-10}$) a été d'un facteur 3,5, la progression par rapport au standard de fréquence a été d'un facteur 14 (de 58 à 4×10^{-11})! Cela nous mène à croire que la méthode interférométrique utilisée ici voit la fin de ses beaux jours. Evidemment, il serait toujours possible d'améliorer simplement la mesure de la fréquence des raies de l'iode par la construction de chaînes de fréquences plus performantes et, ainsi, améliorer automatiquement la précision de notre mesure. Des groupes y travaillent actuellement, comme par exemple celui d'André Clairon au Laboratoire Primaire des Temps et Fréquences (LPTF) [6.12]. Actuellement, cette chaîne relie l'horloge à césium (9 GHz) aux lasers à CO₂ stabilisés sur OsO₄ (à $10 \mu\text{m} \approx 30 \text{ THz}$) dont la fréquence est mesurée avec une précision meilleure que 10^{-12} . Néanmoins, il serait plus intéressant de raccorder directement nos mesures à une chaîne de fréquence éventuellement reliée à l'horloge à césium.

Pour cela, le premier pas serait de fabriquer un laser stabilisé autour de 750 nm. Actuellement nous essayons de stabiliser une diode-laser sur une raie moléculaire de l'IBr à cette longueur d'onde.

Ce même problème se pose, évidemment, pour les autres groupes. Deux autres mesures du Rydberg publiées récemment ont été faites sur la transition 1S-2S. Toutes les deux utilisent comme référence une raie de la molécule de Tellure (¹³⁰Te₂) dont la fréquence (486 nm) a été comparée à la fréquence d'un laser HeNe/I₂ standard [6.13]. Cette mesure est donc moins précise que la mesure de fréquence de l'HeNe/I₂ lui-même : sa précision est de 2×10^{-10} . Les précisions finales sur les déterminations du Rydberg sont 6×10^{-10} [6.14] et 3×10^{-10} [6.15].

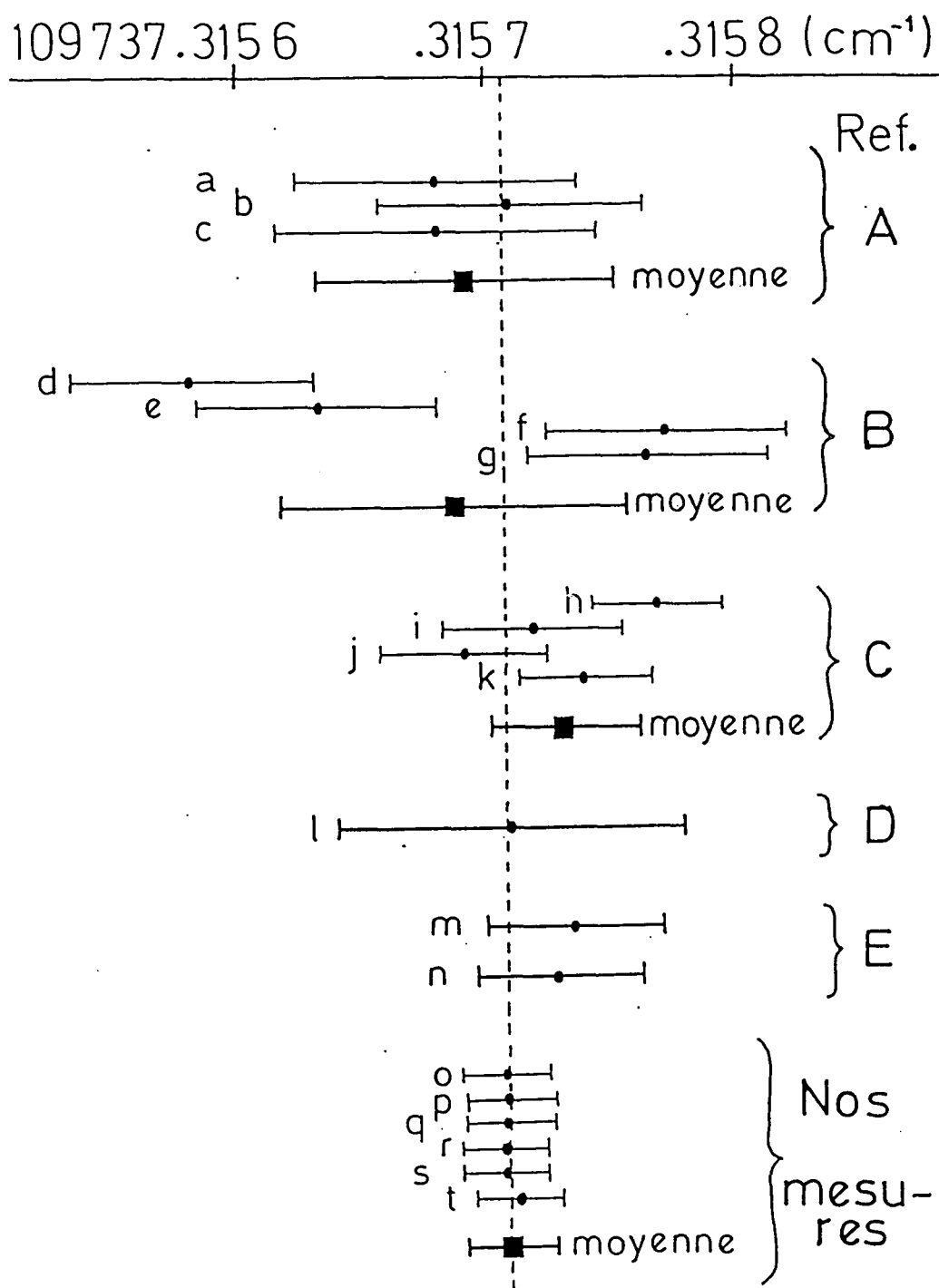


Figure 6.13 - Mesures récentes de la constante de Rydberg. A : réf [6.1], B : réf. [6.10], C ; réf. [6.9] ; D : réf. [6.15], E : réf. [6.16]. Transitions étudiées : a : 2S-8D (Hydrogène) ; b : 2S-3D (Deutérium) ; c : 2S-10D (H) ; d : 2S-3P(J=1/2,H) ; e : 2S-3P(J=3/2,H) ; f : 2S-3P(J=3/2,D) ; g : 2S-3P(J=1/2D) ; h : 2S-4P(J=1/2,H) ; i : 2S-4P(J=3/2,H) ; j : 2S-4P(J=1/2,D) ; k : 2S-4P(J=3/2,D) ; l : 1S-2S (H) ; m : 1S-2S (H) ; n : 1S-2S (D) ; o : 2S-8D (H) ; p : 2S-8D (D) ; q : 2S-10D (H) ; r : 2S-10D (D) ; s : 2S-12D (H) et t : 2S-12D (D).

6.8 - Conclusion.

Dans ce chapitre, nous avons présenté en détail l'analyse des résultats expérimentaux et la détermination des erreurs. Nous avons essayé d'explicitier toutes les hypothèses utilisées, surtout dans le calcul des erreurs, et la façon dont la détermination des fréquences de transition à puissance lumineuse nulle conduit à la détermination de la constante de Rydberg. La même attention a également été apportée à la détermination des déplacements isotopiques et du rapport m_p/m_e .

REFERENCES DU CHAPITRE VI

- 6.1 F. Biraben, J. C. Garreau and L. Julien, *Europhys. Lett.* 2, 925 (1986).
- 6.2 J. W. Heberle, H. A. Reich and P. Kusch, *Phys. Rev.* 101, 612 (1956).
- 6.3 H. A. Reich, J. W. Heberle and P. Kusch, *Phys. Rev.* 104, 1585 (1956).
- 6.4 V. G. Pal'chikov, Yu. L. Sokolov and V. P. Yakovlev, *Pis'ma Zh. Eksp. Teor. Fiz.* 38, 347 (1983) [*JETP Lett.* 38, 418 (1983)].
- 6.5 E. R. Cohen and B. N. Taylor, *The 1986 Adjustment of the Fundamental Physical Constants*, *Rev. Mod. Phys.* 59, 1121 (1987).
- 6.6 R. S. van Dyck, Jr., F. L. More, D. L. Farnham and P. B. Schwinberg, *Bull. Am. Phys. Soc.* 31, 244 (1986).
- 6.7 G. W. Erickson, *J. Phys. Chem. Ref. Data* 6, 831 (1977).
- 6.8 D. A. Jennings, C. R. Pollock, F. R. Petersen, R. E. Drullinger, K. M. Evenson, J. S. Wells, J. L. Hall, H. P. Layer, *Opt. Lett.* 8, 136 (1983).
- 6.9 P. Zhao, W. Lichten, H. Layer and J. Bergquist, *Phys. Rev. Lett.* 58, 1293 (1987).
- 6.10 P. Zhao, W. Lichten, H. P. Layer and J. Bergquist, *Phys. Rev.* A34, 5138 (1986).
- 6.11 F. Biraben, J. C. Garreau, L. Julien and M. Allegrini, *Phys. Rev. Lett.* 62, 621 (1989)
- 6.12 A. Clairon, *Bull. du BNM*, 63-64, 114 (1986).
- 6.13 J. R. M. Barr, J. M. Girkin, A. I. Ferguson, G. P. Barwood, P. Gill, W. R. C. Rowley and R. C. Thompson, *Opt. Comm.* 54, 217 (1985).

6.14 R. G. Beausoleil, D. H. McIntyre, C. J. Foot, E. A. Hildum, B. Couillaud and T. W. Hänsch, *Phys. Rev. A* 35, 4878 (1987).

6.15 M. G. Boshier, P. E. G. Baird, C. J. Foot, E. A. Hinds, M. D. Plimmer, D. N. Stacey, J. B. Swan, D. A. Tate, D. M. Warrington and G. K. Woodgate, *Nature* 330, 463 (1987).

CONCLUSION

Dans ce mémoire ont été décrits le montage expérimental, la technique de mesure et l'analyse des résultats qui nous ont conduit à une nouvelle détermination de la constante de Rydberg [1] :

$$R = 10\,973\,731,570\,9\ (18)\ \text{m}^{-1},$$

qui est à ce jour la mesure la plus précise de cette constante. Ce résultat est en excellent accord avec notre précédente mesure faite en 1986 [2]. Nos résultats ont permis de corriger la valeur précédemment admise jusqu'en 1986 [3] d'environ $2,5 \times 10^{-9}$. Notons que toutes les mesures publiées depuis 1986, et qui utilisent des techniques différentes, sont en bon accord avec cette nouvelle valeur.

Notre technique expérimentale nous a aussi permis d'obtenir des raies dont la largeur relative est de l'ordre de 10^{-9} , ce qui est la meilleure résolution obtenue jusqu'à présent dans le domaine optique sur l'atome d'hydrogène.

L'étude simultanée de l'hydrogène et du deutérium nous a permis la détermination de déplacements isotopiques, dont on a pu déduire une mesure du rapport de masses entre le proton et l'électron. Notre résultat est :

$$m_p/m_e = 1836,152\,59\ (24).$$

Il est en bon accord avec les mesures les plus précises obtenues dans des pièges atomiques [4].

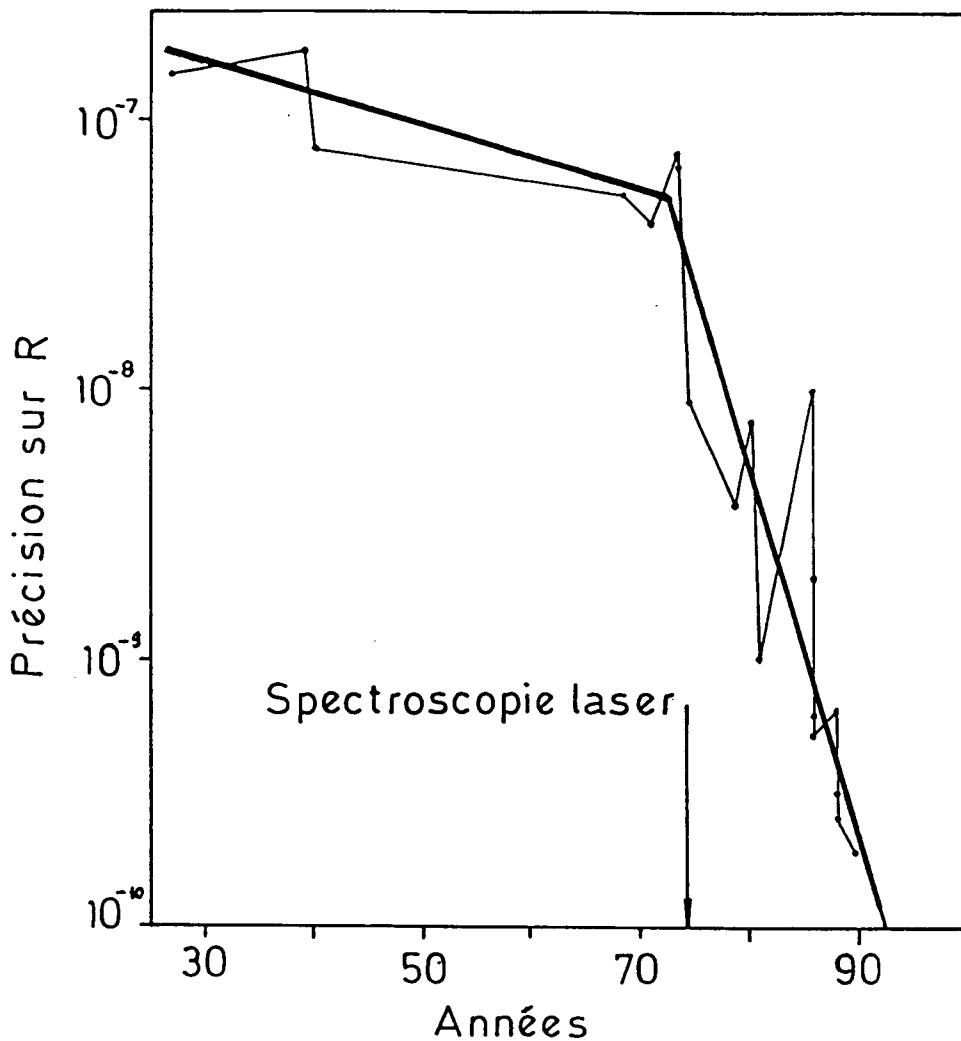
La plus grande contribution à l'incertitude totale de $1,7 \times 10^{-10}$ de notre détermination de la constante de Rydberg vient de la fréquence absolue du laser HeNe/I₂ de référence dont la fréquence n'est connue à l'heure actuelle qu'avec une précision de $1,6 \times 10^{-10}$. Par rapport au laser de référence, notre incertitude n'est que de 4×10^{-11} , ce qui représente une progression d'un facteur 12 par rapport à notre mesure de 1986.

Il est clair que toute amélioration de notre précision passe maintenant par une meilleure détermination de la fréquence de référence utilisée. Une nouvelle mesure de la fréquence absolue du laser HeNe/I₂ produirait automatiquement une amélioration d'un facteur 4 sur notre précision. Cependant l'utilisation de la méthode interférométrique de comparaison des longueurs d'onde ne peut nous permettre d'obtenir une précision meilleure que 10⁻¹¹. C'est pourquoi il sera plus intéressant d'utiliser à l'avenir une technique de comparaison directe de fréquences en raccordant notre montage à une chaîne de fréquence reliée à l'horloge à césium (9 GHz), dont la précision actuelle est de l'ordre de 10⁻¹³.

D'autres techniques pouvant conduire à des mesures de la constante de Ryberg sont actuellement utilisées par d'autres groupes. L'étude de la transition 1S-2S à deux photons sans effet Doppler présente un intérêt particulier à cause de la très faible largeur naturelle de cette transition. Néanmoins, étant donné que le Lamb-shift de l'état 1S n'a pas été mesuré indépendamment, il est nécessaire de faire appel au calcul théorique pour obtenir une détermination de R.

Une autre possibilité est l'étude des transitions entre états circulaires de n élevés. Ces transitions ont l'avantage de tomber dans le domaine des micro-ondes, ce qui rend plus aisée la détermination directe de leur fréquence absolue. L'intérêt des états circulaires est que leur largeur naturelle varie comme n⁻⁵. Pour obtenir cependant une largeur de raie relative comparable à celle de nos transitions optiques il faut monter jusqu'aux niveaux de n=35 ou plus qui sont très sensibles aux champs électriques parasites.

La dernière figure de ce mémoire montre l'évolution de la précision sur la constante de Rydberg depuis 1920. L'apparition des méthodes de spectroscopie sans effet Doppler dans les années 70 s'accompagne d'une rupture de pente très marquée : pendant les quinze dernières années, la précision sur la constante de Rydberg a varié de trois ordres de grandeur. Bien que R soit l'une des constantes fondamentales les mieux connues à l'heure actuelle, les raisons de vouloir améliorer encore sa précision sont nombreuses :



- cette constante joue un rôle clé dans l'ajustement des constantes fondamentales ; elle permet donc de vérifier la cohérence entre différents domaines de la physique;

- une valeur très précise de R est nécessaire pour tester les prévisions de l'électrodynamique quantique sur les systèmes atomiques simples (hydrogène, positronium, muonium, etc...);

- comme elle établit une relation entre des transitions de l'atome d'hydrogène appartenant à des domaines spectraux très différents, elle pourrait permettre à l'avenir d'utiliser cet atome lui-même pour raccorder les fréquences visibles aux fréquences micro-ondes.

Ainsi, malgré les progrès considérables réalisés ces dernières années, des mesures encore plus précises de la constante de Rydberg s'imposent encore. Pour notre part, nous pensons que nous n'avons pas épuisé les possibilités de

notre méthode et que celle-ci doit permettre d'approcher la précision de 10^{-11} dans les années à venir.

REFERENCES

- 1 F. Biraben, J. C. Garreau, L. Julien and M. Allegrini, Phys. Rev. Lett. 62, 621 (1989).
- 2 F. Biraben, J. C. Garreau and L. Julien, Europhys. Lett. 2, 925 (1986).
- 3 S. R. Amin, C. D. Caldwell and W. Lichten, Phys. Rev. Lett. 47, 1234 (1981).
- 4 R. S. van Dyck, Jr., F. L. Moore, D. L. Farnham and P. B. Schwinberg, Bull. Am. Phys. Soc. 31, 244 (1986).

APPENDICE I

LA RENORMALISATION DE LA MASSE ET LE LAMB-SHIFT

Les corrections dites radiatives sont l'effet de l'interaction d'une particule chargée avec le champ électromagnétique quantifié. Il est bien connu que, même si la particule se trouve dans le vide électromagnétique (c'est à dire, l'état à zéro photons) elle subit l'action des fluctuations quantiques du champ électromagnétique, dont la moyenne quadratique est non nulle. Ces fluctuations du vide donnent la contribution la plus importante au calcul du Lamb-shift d'un état atomique lié. Néanmoins un problème théorique apparaît tout de suite : le calcul de l'effet de ces fluctuations sur l'énergie d'un électron libre donne un résultat infini, même à l'ordre le plus bas en perturbation.

Le point de départ de ce calcul est l'expansion perturbative connue sous le nom de série de Dyson. Etant donné un hamiltonien H_0 , on peut définir un opérateur $U_0(t, t')$ (opérateur d'évolution), tel que, si $|\varphi(t')\rangle$ est un état propre de H_0 au temps t' , alors

$$|\varphi(t)\rangle = U_0(t, t') |\varphi(t')\rangle \quad (\text{A1.1})$$

est un état propre de H_0 au temps t , avec $t \geq t'$. Si l'on projette (A1.1) dans une représentation $|q\rangle$ (par exemple la représentation de position, ou d'impulsion), on obtient :

$$\varphi(q, t) = \int_{\text{tous } q'} dq' K_0(q, t; q', t') \gamma^0 \varphi(q', t') \quad (\text{A1.2})$$

où $K_0(q, t; q', t') = \langle q | U_0(t, t') | q' \rangle$ est le propagateur associé à H_0 dans la représentation $|q\rangle$.

Remarque : L'insertion de la matrice γ^0 est nécessaire pour rendre l'équation covariante. Pour la même raison, on définit le conjugué d'un spinor φ par $\varphi^* \gamma^0$. Comme $(\gamma^0)^2 = 1$, cela n'affecte pas le produit scalaire. Voir réf. [1].

Considérons maintenant un nouvel hamiltonien obtenu à partir de H_0 en

ajoutant une perturbation V :

$$H = H_0 + V \quad (\text{A1.3})$$

on peut alors montrer que le propagateur K associé à H et le propagateur K_0 associé à H_0 sont liés par l'équation intégrale :

$$K(q, t; q', t') = K_0(q, t; q', t') \quad (\text{A1.4})$$

$$-i\hbar \int_{\text{(tous } q''\text{)}} dq'' dt'' K_0(q, t; q'', t'') V(q'', t'') \cancel{K(q'', t'')} K(q'', t''; q', t').$$

avec $V(q, t) = \langle q | V(t) | q \rangle$ (la représentation $|q\rangle$ est supposée être telle que V est diagonal).

Cette équation est le point de départ de la série de Dyson. Si l'effet du potentiel V est petit, l'intégrale dans (A1.4) peut, dans un premier temps, être négligée. Cela donne le premier terme (d'ordre 0 en V) de la série :

$$K^{(0)}(Q; Q') = K_0(Q; Q') \quad (\text{A1.5})$$

où l'on a introduit la notation Q pour représenter l'ensemble de paramètres (q, t) (et de même pour Q'). L'approximation d'ordre 1 est obtenue en substituant K par $K^{(0)}$ dans le côté droit de (A1.4) :

$$K^{(1)}(Q; Q') = K_0(Q; Q') - i\hbar \int dQ'' K_0(Q; Q'') V(Q'') K_0(Q''; Q').$$

et ainsi successivement pour les ordres supérieurs. La correction d'ordre n est donc de la forme

$$(-i\hbar)^n \int dQ_1 \dots dQ_n K_0(Q; Q_n) V(Q_n) \dots K_0(Q_2; Q_1) V(Q_1) K_0(Q_1; Q'). \quad (\text{A1.6})$$

On peut donner une interprétation simple à ce terme en le lisant de droite à gauche : le premier K_0 représente l'évolution du système sous l'action de l'hamiltonien H_0 entre t' et t_1 . A l'instant t_1 , le système interagit avec la perturbation V . Le suivant représente l'évolution sous l'action de H_0 entre t_1 et t_2 . A l'instant t_2 le système interagit à nouveau avec le potentiel V , et ainsi de suite. L'évolution du système sous l'action de la perturbation V peut donc être interprétée comme une séquence



d'évolutions non perturbées suivies d'interactions avec la perturbation.

Cette image peut être représentée graphiquement par des diagrammes de Feynman. Une ligne droite représente l'évolution non perturbée et un vortex l'interaction avec la perturbation. La correction du premier ordre peut donc être représentée par le diagramme montré sur la figure A1.1 (a). Le diagramme correspondant à la correction d'ordre 2 est celui de la figure A1.1 (b).

Considérons maintenant le cas d'un électron de Dirac interagissant avec le champ électromagnétique quantifié. Dans ce cas, H_0 est l'hamiltonien de Dirac pour une particule libre et V est le potentiel d'interaction électromagnétique. On peut alors montrer [1] que, dans la représentation de l'impulsion, le propagateur K_0 est donné par :

$$K_0 = \frac{1}{*P - mc} \quad (A1.7)$$

où $*P = \gamma^\mu P_\mu$. Ce propagateur est diagonal dans la représentation de l'impulsion, car celle-ci est une constante de mouvement pour une particule libre. La perturbation V est proportionnelle au quadrivecteur A_μ . Inséré dans l'équation de Dirac, A_μ doit être multiplié par γ^μ et sommé sur μ , ce qui donne $*A$, qui est proportionnel à $[a * \epsilon_\mu \exp(-ik_\alpha x^\alpha) / \omega^{1/2}]$, x^α étant le quadrivecteur (ct, r) , $k_\alpha = (\omega, -kc)$ et ϵ_μ le quadrivecteur polarisation $(1, -\epsilon)$, orthogonal à k_α . La perturbation est donc :

$$\frac{q}{c} \left[\frac{\hbar}{16\pi^3 \epsilon_0 \omega} \right]^{1/2} * \epsilon_\alpha a \exp(-ik_\alpha x^\alpha) \quad (A1.8)$$

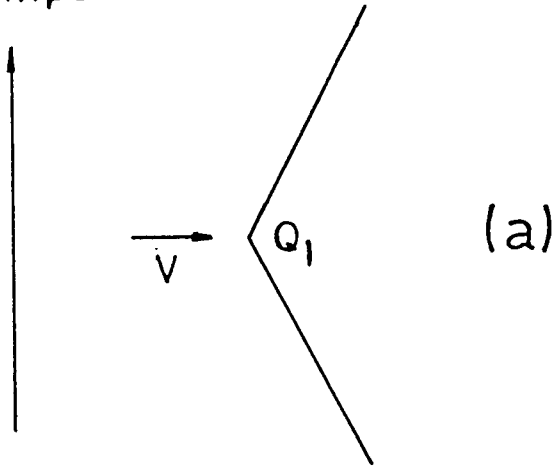
ab-lcc ab-lcc

où a est l'opérateur de destruction de photons, plus l'hermitique conjugué de (A1.8), correspondant à l'émission de photons (où a est changé en a^\dagger).

Ce résultat doit bien sûr être sommé sur tous les modes du champ en question.

Essayons maintenant d'appliquer la série de Dyson à notre problème. Remarquons d'abord que, même s'il n'y a pas de photon initialement, on peut imaginer des contributions dues à des processus dits virtuels, où des photons (virtuels) sont émis et absorbés par l'électron, comme dans les diagrammes de Feynman montrés sur la figure A1.2. Ces diagrammes correspondent aux termes

Temps



(b)

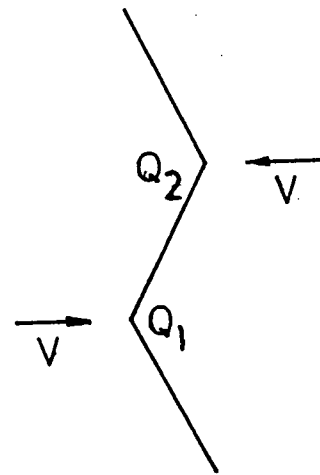
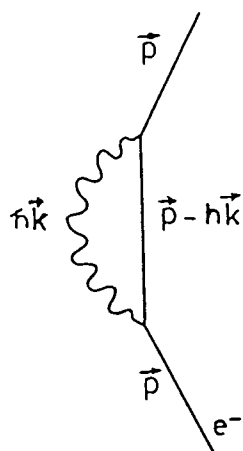
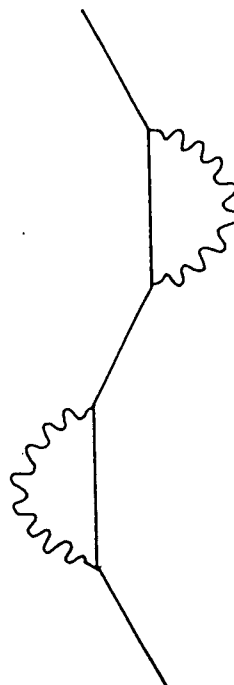


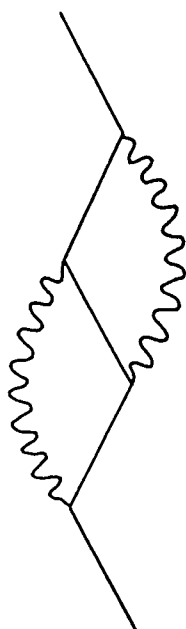
Figure A1.1



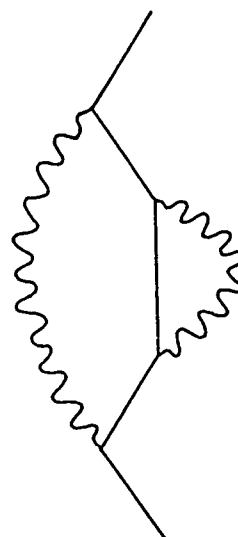
(a)



(b)



(c)



(d)

Figure A1.2

appelés d'auto-énergie de l'électron ou de fluctuation du vide.

Nous allons nous restreindre ici aux corrections d'ordre le plus bas. Si initialement il n'y a pas de photons (l'électron dans le vide électromagnétique), l'ordre le plus bas est 2, puisqu'il faut émettre et réabsorber un photon virtuel. Le diagramme correspondant est celui de la figure A1.2 (a). La première interaction avec le potentiel (émission) fera intervenir le potentiel V , éq. (A1.8), la deuxième (absorption) fera intervenir son conjugué. Les seuls états du champ qui contribueront sont les états $|0\rangle$ et $|1\rangle$. Comme

$$\langle 0|a|1\rangle = \langle 1|a^\dagger|0\rangle = 1 \quad (\text{A1.9})$$

on remplacera a et a^\dagger par 1 partout dans les équations suivantes. Jusqu'au second ordre, la série perturbative s'écrit alors

$$K^{(2)}(2,1) = K_0(2,1) \quad (\text{A1.10})$$

$$-\hbar^2 \int d^4x_4 \int d^4x_3 K_0(2,4) V(4) K_0(4,3) V(3) K_0(3,1)$$

où $d^4x_1 = d^3x_1 dt_1$ est l'élément de volume de l'espace-temps au point (x_1, t_1) que l'on a aussi représenté simplement par un chiffre dans les arguments de K .

Il est bien connu de la théorie de perturbations que la correction du second ordre (A1.10) est à l'origine d'une correction sur l'énergie [1, p. 137]. Cette correction peut être interprétée comme une correction sur la masse m de l'électron, et vaut :

$$(2 mc^4) \delta m = \hbar^2 \langle \varphi | \int d^4x V(4) K_0(4,3) V(3) | \varphi \rangle \quad (\text{A1.11})$$

où $|\varphi\rangle$ est l'état atomique considéré et d^4x représente l'élément d'intervalle d'espace-temps entre 3 et 4. Explicitons cette expression. Pour ne pas trop surcharger les formules, on utilisera le système d'unités relativistes où $\hbar=c=1$. On a alors :



$$V(4) K_0(4,3) V(3)$$

$$= \sum_k C * \epsilon \exp(-ik \cdot x_4) K_0(4,3) * \epsilon \exp(ik \cdot x_3) \quad (A1.12)$$

où $k \cdot x = k_\mu x^\mu$, C est une constante et la somme porte sur tous les modes et polarisations possibles. On peut montrer [1, p. 126] que la somme sur les polarisations est équivalente en fait à substituer le premier $*\epsilon$ par γ^μ , le deuxième par γ_μ et sommer sur μ (puisque les indices sont croisés). Seuls les γ^μ ne commutent pas avec K_0 . En transformant la somme en intégrale sur k , ceci donne (notons que, en unités relativistes, $k = \omega$) :

$$C \gamma^\mu K_0(4,3) \gamma_\mu \int \frac{d^3 k}{(2\pi)^3} \frac{\exp\{-ik \cdot (x_4 - x_3)\}}{k}$$

L'intégrale ci-dessus est en fait une fonction delta à quatre dimensions. Puisque

$$\exp(-i|k|t) = (2\pi)^{-1} \int dk' \frac{2ik' e^{-1k't}}{k'^2 - k^2 + i\epsilon}$$

où ϵ est une quantité infiniment petite ; elle peut être mise sous une forme covariante (à un facteur multiplicatif près) :

$$\delta_+(1,2) = -4\pi \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{\exp[-ik \cdot (x_2 - x_1)]}{k \cdot k + i\epsilon} \quad (A1.13a)$$

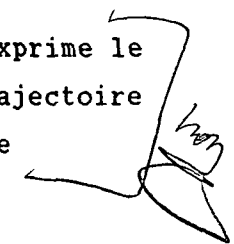
ou, dans la représentation de l'impulsion :

$$\delta_+(k) = -4\pi / (k \cdot k + i\epsilon). \quad (A1.13b)$$

L'interprétation physique de cette fonction est simple : elle exprime le fait que les points de l'espace-temps 1 et 2 se trouvent sur la trajectoire d'un photon (sur le cône de lumière) et qu'ils doivent donc satisfaire

$$|x_2 - x_1| = c (t_2 - t_1).$$

Finalement, dans la représentation de l'impulsion on aura :



$$\delta_m = \frac{2\pi e^2}{m} \int \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} \frac{-1}{k^2 + i\epsilon} \langle a | \gamma^\mu \frac{i}{*P - *k - m} \gamma_\mu | a \rangle. \quad (\text{A1.14})$$

Le propagateur de l'électron comporte un terme $*k$ du fait de la conservation de l'impulsion (voir le diagramme A1.2 (a)), l'impulsion de l'électron étant $p-k$ après l'émission d'un photon d'impulsion k . Le facteur $1/(k^2+i\epsilon)$ vient de la fonction δ_+ . Il est souvent appelé propagateur du photon.

Cette intégrale diverge! En effet, pour k suffisamment grand, $k \gg (p-m)$, l'intégrand est proportionnel à $1/k$ (le $1/k^2$ du propagateur photonique se simplifie avec le k^2 de l'élément de volume), ce qui donne une divergence logarithmique.

Cette divergence a paralysé le développement de l'électrodynamique quantique pendant 20 ans.

Une solution à ce problème - la renormalisation de la masse - a été proposée vers la fin des années 1940, sous la forme de postulats *ad hoc* [2]. Cette solution, que l'on discutera en suite, est néanmoins loin d'être satisfaisante du point de vu formel, et, sous cet aspect, la QED est une théorie encore incomplète. Le bon accord avec l'expérience est la principale raison pour la considérer comme une théorie physique valable.

L'idée de la renormalisation de la masse, due essentiellement à Hans Bethe, est la suivante : la formule ci-dessus est divergente pour un électron libre. Mais il n'y a pas d'électron vraiment libre, et, s'il y en avait, on ne pourrait pas mesurer sa masse (pour cela il aurait fallu qu'il interagisse avec un instrument de mesure). La masse mesurée expérimentalement pour un électron - appelons-la m_{exp} - n'est jamais la masse d'un électron libre. Si l'on imagine un électron libre et qui n'interagit pas avec le vide électromagnétique (sans auto-énergie) dont la masse serait m_{sae} , alors cette masse serait liée à la masse expérimentale par $m_{exp} = m_{sae} + a.e.$ (a.e. = auto-énergie). Quand on calcule l'énergie d'un électron lié, on doit tenir compte de l'auto-énergie, qui est *différente* de celle d'un électron libre (puisque le propagateur de l'électron libre dans l'équation (A1.14) doit être substitué par le propagateur de l'électron lié). On aura alors



Energie de l'électron lié = énergie calculé sans a.e. (donc avec $m=m_{sae}$)
+ auto énergie (lié).

Or, si l'on veut utiliser la masse expérimentale m_{exp} , on ne peut pas compter deux fois l'auto-énergie, pour l'électron libre et lié à la fois, on doit donc soustraire l'auto-énergie de l'électron libre. D'où :

Energie de l'électron lié = énergie calculée avec $m=m_{exp}$
+ a.e. (lié) - a.e. (libre).

Feynman exprime cette idée sous la forme d'une équivalence [1, p. 142] :

Une théorie utilisant m_{sae} et l'auto-énergie

EST EQUIVALENTE A

Une théorie utilisant m_{exp} plus l'auto-énergie moins l'auto-énergie
pour un électron libre.

En regardant l'équation (A1.14) on comprend pourquoi ce système marche : le propagateur d'une particule liée peut (pour un potentiel indépendant du temps) être écrit formellement sous la forme :

$$\frac{1}{\underbrace{P_v^2 - k^2 - m^2}}$$

$$\delta_x(P^2 - e A^2) + g \mu \nu \dots$$

(où P_v peut être interprété comme l'opérateur d'impulsion modifié par le potentiel V. Or, les potentiels atomiques sont responsables d'énergies de liaison beaucoup plus petites que mc^2 donc de changements d'impulsion beaucoup plus petits que mc (ou m en unités relativistes). Ainsi, pour des valeurs typiques de l'ordre ou plus grandes que m , P et P_v doivent pratiquement coïncider. On voit que la différence entre les contributions de a.e. (lié) - a.e. (libre) tendront à s'annuler pour $P \gg m$, et la divergence logarithmique sera éliminée. Le calcul (A1.15) donne ainsi un résultat fini.

??

On est amené à se poser des questions sur la validité mathématique de la procédure de renormalisation de la masse, quand on sait que la soustraction de deux sommes infinies peut donner des résultats différents selon la façon dont la soustraction est faite. Néanmoins, l'électrodynamique quantique a des

règles précises [1, p. 138] pour effectuer une telle soustraction, et les résultats sont - à ce jour - cohérents.

On peut maintenant calculer d'une façon heuristique la principale contribution aux corrections radiatives. Ce calcul a été fait pour la première fois par Bethe, dans un contexte non relativiste [3 ; 4, paragraphe 19]. La théorie de perturbations non-relativiste au deuxième ordre donne pour la correction associée au diagramme de Feynman A1.1 (a) (après somme sur toutes les polarisations) un déplacement de l'énergie d'un niveau atomique $|0\rangle$:

$$\delta E_0 = - \frac{2}{3\pi m^2} \sum_n \int dk k^2 \left| \frac{e \langle n|P|0\rangle}{k^{1/2}} \right|^2 \frac{1}{E_n - E_0 + k} \quad (\text{A1.16})$$

où le terme module au carré est le potentiel d'interaction électron-champ et la somme s'étend sur tous les états (discrets et du continuum) de Schrödinger. En utilisant l'identité

$$\frac{1}{E_n - E_0 + k} = \frac{1}{k} - \frac{E_n - E_0}{k(E_n - E_0 + k)}$$

on obtient :

$$\delta E_0 = - \frac{2e^2}{3\pi m^2} \int dk \left\{ \langle 0|P^2|0\rangle - \sum_{n \neq 0} \frac{|\langle 0|P|n\rangle|^2 (E_n - E_0)}{E_n - E_0 + k} \right\}. \quad (\text{A1.16a})$$

Le premier terme sous l'intégrale est proportionnel à $\langle 0|P^2|0\rangle$. Ce terme, qui est indépendant des états $|n\rangle$ et des dénominateurs d'énergie, est responsable d'une divergence linéaire de l'intégrale, qui doit être annulée quand on fait la renormalisation de la masse [3 ; 4, p. 98]. Pour voir ceci, il faut, suivant le raisonnement heuristique de Bethe, introduire un opérateur de renormalisation. Considérons un électron libre. Son hamiltonien est

$$H = \frac{p^2}{2m_{sae}} + \text{auto énergie.}$$

Le terme d'auto énergie (au premier ordre en e^2 , c'est-à-dire, en α) est calculé exactement comme ci-dessus. Comme les états propres d'un électron

libre sont des états propres de l'impulsion, on n'a que les termes diagonaux :

$$H = \frac{p^2}{2m_{sae}} - \frac{2e^2}{3\pi m_{exp}^2} p^2 \int dk$$

la correction étant calculée avec la "vraie" valeur de la masse de l'électron, m_{exp} . La suite de l'argument de Bethe consiste à écrire $m_{sae} = m_{exp} - \delta m$ et faire un développement au 1er ordre en δm , en arguant de ce que δm doit être petit, puisqu'il est proportionnel à α . Cet argument n'est pas rigoureux puisque δm , s'il est calculé directement, est en fait infini! Si l'on admet encore cela, on obtient :

$$H = \frac{p^2}{2m_{exp}} - \frac{p^2}{2m_{exp}} \frac{\delta m}{m_{exp}} - \frac{2e^2}{3\pi m_{exp}^2} p^2 \int dk.$$

Or, par définition, la masse expérimentale m_{exp} de l'électron doit être telle que l'énergie d'un électron libre soit exactement $P^2/2m_{exp}$. Les deux derniers termes doivent donc s'annuler. Pour ceci, en premier ordre en e^2 , on doit avoir

$$\delta m = - \frac{4e^2}{3\pi} \int dk .$$

Ce résultat doit donc être interprété de la façon suivante : dans l'hamiltonien de l'électron, quand on substitue m_{sae} par m_{exp} et que l'on ajoute l'auto-énergie, on doit en même temps soustraire une contribution

$$\frac{p^2}{2m_{exp}} \frac{\delta m}{m_{exp}}$$

avec δm donné plus haut. La correction apportée par cet opérateur à la formule (A1.16a) est sa moyenne dans l'état $|0\rangle$. On voit ainsi que son effet est d'annuler exactement le premier terme de (A1.16a).

Le terme restant ne contiendra que les éléments non-diagonaux. Après renormalisation, on obtient donc :

$$\delta E_0 \text{ (renormalisé)} = \frac{2e^2}{3\pi m^2} \int dk \sum_{n \neq 0} \frac{|P_{n0}|^2 (E_n - E_0)}{E_n - E_0 + k}. \quad (\text{A1.17})$$

Cette intégrale diverge encore logarithmiquement, mais la divergence linéaire a été éliminée. La divergence restante est une conséquence du traitement non relativiste ; dans le traitement relativiste [1, p. 153] il n'y a plus de divergence (car l'intégrale non renormalisée ne diverge que logarithmiquement, comme on l'a vu plus haut). D'après l'argument relativiste développé ci-dessus, on voit que la renormalisation de la masse doit annuler les contributions pour $k > m$; on peut donc introduire une coupure dans l'intégrale (A1.17) pour $k=K \approx m$. On obtient ainsi

$$\delta E_0 \text{ (renorm)} = (2e^2/3\pi m^2) \sum |P_{n0}|^2 (E_n - E_0) \ell n \frac{K + E_n - E_0}{|E_n - E_0|}.$$

Etant donné que $P_{n0} (E_n - E_0) = (PH - HP)_{n0} = -i(\Delta V)_{n0}$ (H est l'hamiltonien de Schrödinger pour l'atome et V le potentiel coulombien), et que $K \gg |E_n - E_0|$, on a

$$\delta E_0 \text{ (renorm)} = \left(\frac{2e^2}{3\pi m^2}\right) \sum_{n \neq 0} (\Delta V)_{n0} \ell n \left(\frac{K}{|E_n - E_0|}\right)$$

La dernière somme représente une sorte de moyenne, que l'on réécrira :

$$\sum_{n \neq 0} (\Delta V)_{n0} \ell n \left(\frac{K}{|E_n - E_0|}\right) = (\Delta V)_{00} \ell n (m/K_0) \quad (\text{A1.18})$$

où K_0 est défini par cette équation, et le logarithme est connu comme logarithme de Bethe (posant $K=m$). Le Laplacien du potentiel coulombien vaut $4\pi e^2 \delta(r)$. On a ainsi

$$\delta E_0 = (8e^4/3m^2) |\phi(0)|^2 \ell n(m/K_0). \quad (\text{A1.19})$$

On voit donc que cette correction est non-nulle uniquement pour les états S. Comme $|\phi(0)|^2$ est proportionnel à α^3 (et à n^{-3}), la correction est proportionnelle à α^5 (et à n^{-3}), la correction relative est donc d'ordre α^3 . Pour l'état 2S, Bethe a calculé

$$\delta E_{2s} \text{ (renormalisé)} \approx 1,04 \text{ GHz}$$

à comparer avec la mesure du Lamb-shift par Lamb et Retherford (1062 (5) MHz, pour l'intervalle $2S_{1/2} - 2P_{1/2}$) et aux calculs actuels (1045,02 MHz, pour le seul déplacement du niveau $2S_{1/2}$).

Pour finir cet appendice, il est intéressant de transcrire un commentaire de F. J. Dyson sur la renormalisation de la masse, publié dans un récent article *in memoriam* de Feynman [5, p. 36] :

"We would never have believed it if anyone had told us that our theory would still be around 40 years later, the calculated effect of radiative reactions still agreeing with experiments to an accuracy of 10 or 11 significant figures. We would have been even more surprised to learn that the ugliest and more awkward features of our theory, the tricky renormalization of mass and charge, would remain as key features when the theory was eventually incorporated, first into the Weinberg-Salan-Glashow unified theory of electromagnetic and weak interactions, and later into the grand unified theories of weak and strong interactions. For Feynman, renormalization was not something to be proud of but something to be got rid of. He spent a lot of time trying to construct a finite electron theory that would make renormalization unnecessary".

REFERENCES

- 1 R. P. Feynman, *Quantum Electrodynamics*, Benjamin/Cummings, Reading (USA) 1962 (seconde édition corrigée).
- 2 R. P. Feynman, *Phys. Rev.* 76, 749 (1949) ; *ib.* 76, 769 (1949).
- 3 H. S. Bethe, *Phys. Rev.* 72, 339 (1947).
- 4 H. S. Bethe and E. E. Salpeter, *Quantum Mechanics of One- and Two-Electron Atoms*, Springer-Verlag, Berlin, 1957.
- 5 F. J. Dyson, *Phys. Today* 42, 32 (1989).

APPENDICE II

LES EFFETS DE CHARGE D'ESPACE

L'équation du mouvement des électrons sous l'effet du potentiel électrique est :

$$\frac{1}{2} m v^2 = q(V - V_0) \quad (\text{A2.1})$$

où le potentiel satisfait l'équation de Poisson :

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = - \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{A2.2})$$

La densité de charge et la densité de courant sont liées par

$$j = \rho v. \quad (\text{A2.3})$$

Si l'on définit $U = V - V_0$ (l'origine du potentiel est prise à l'endroit où la vitesse des électrons est nulle, c'est-à-dire, au niveau du filament), on peut obtenir à partir de ces trois équations une seule équation différentielle :

$$U \left(\frac{d^2 U}{dx^2} \right)^2 = \alpha j^2 \quad (\text{A2.4})$$

où $\alpha = m / (2q\epsilon_0^2)$.

On peut résoudre cette équation en utilisant l'identité

$$2 \frac{d^2 U}{dx^2} dU = d \left[\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \right]. \quad (\text{A2.5})$$

(A2.4) peut donc être écrite

$$d \left[\left(\frac{dU}{dx} \right)^2 \right] = 2 \sqrt{\alpha} \frac{j}{\sqrt{U}} dU. \quad (\text{A2.6})$$

En intégrant deux fois (A2.6), on obtient

$$\sqrt{\alpha} j (x-x_0)^2 = \frac{4}{9} (\sqrt{U} - a)(\sqrt{U} + 2a)^2 \quad (\text{A2.7})$$

où x_0 et a sont des constantes d'intégration.

Si l'on impose les conditions aux limites montrées sur la figure A2.1, $U(0) = 0$ et $U(d) = U_g$, x_0 et a sont liés par $\sqrt{\alpha} j x_0^2 = (-16/9) a^3$. En choisissant $a = x_0 = 0$, on obtient

$$U_g = (9/4)^{2/3} \alpha^{1/3} j^{2/3} d^{4/3} \quad (\text{A2.8})$$

relation connue sous le nom de *Loi des Diodes*.

Si l'on choisit des conditions aux limites comme celles de la figure A2.2 ($U(0) = U(D) = U_g$) on obtient $x_0 = D/2$ et

$$\sqrt{\alpha} j D^2 = \frac{16}{9} U_g^{3/2} f(z) \quad (\text{A2.9})$$

où $z = a/\sqrt{U_g}$ et $f(z) = (1-z)(1+2z)^2$. Le comportement de $f(z)$ est montré sur la figure A2.3. On voit donc que, pour U_g et D fixes, on a une densité de courant maximum donnée par

$$j_{\max} = \frac{32}{9} \frac{U_g^{3/2}}{\sqrt{\alpha} D^2}. \quad (\text{A2.10})$$

Notons finalement que dans cette configuration $x_0 = D/2$ correspond, par symétrie, au minimum du potentiel. On déduit ainsi de l'équation (A2.7) que $a = (U_{\min})^{1/2}$, et donc

$$\sqrt{\alpha} j \left(x - \frac{D}{2} \right)^2 = (4/9) U^{3/2} f(y) \quad (\text{A2.11})$$

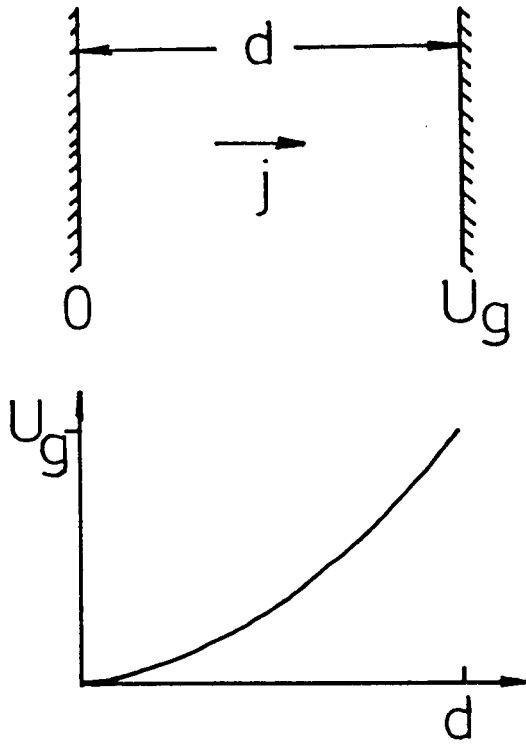


Figure A2.1

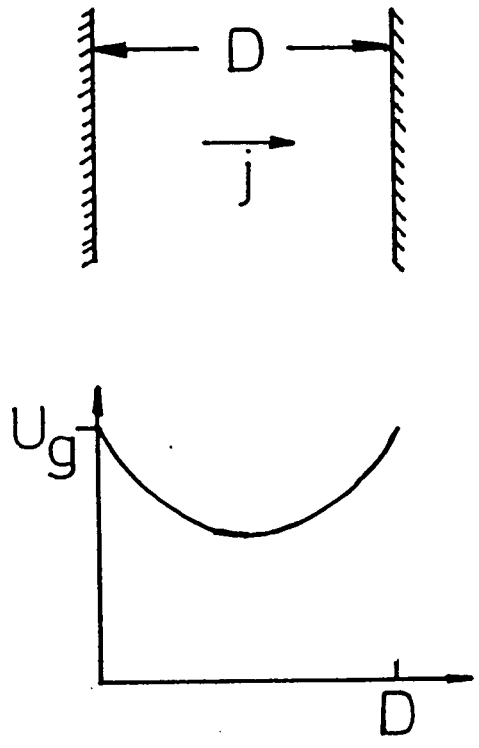


Figure A2.2

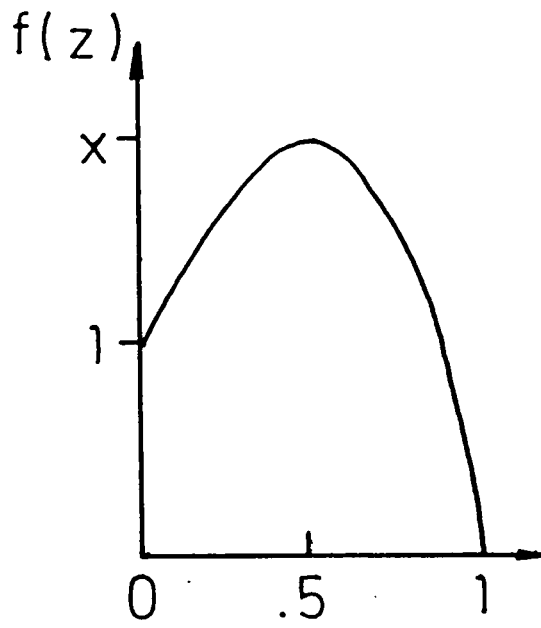


Figure A2.3

où f est la fonction définie plus haut et $y = (U_{\min}/U)^{1/2}$.

APPENDICE III

CALCUL DES ELEMENTS DE MATRICE DU DIPOLE

Dans cet appendice on discutera le calcul numérique des éléments de matrice du dipôle pour un atome de Schrödinger.

Les éléments de matrice $R(n, \ell; n', \ell+1) = \langle n' \ell | r | n \ell \rangle$ où n, ℓ et $n', \ell+1$ caractérisent des états discrets (on présentera plus loin la généralisation pour les couplages discret-continuum), sont donnés en unités atomiques par [1] :

$$R(n, \ell; n', \ell+1) = \frac{(-4)^{\ell+1}}{(2\ell+1)!} z_2^{\ell+2} \sqrt{(n'-\ell-1)_{2\ell+3} (n-\ell)_{2\ell+1}} z_1^n (-z_1)^{n'} \left[F(\ell+1-n, \ell+2-n'; 2\ell+2; -4z_2) - z_1^2 F(\ell+1-n, \ell-n'; 2\ell+2; -4z_2) \right] \quad (\text{A3.1})$$

où :

$$(a)_k = a(a+1)\dots(a+k-1), \quad (a)_0 = 1 \quad (\text{Symbole de Pochhammer});$$

$$F(a, b; c; z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(a)_k (b)_k}{(c)_k} \frac{z^k}{k!} \quad (\text{Fonction hypergéométrique});$$

(notons que si l'un des niveaux concernés est discret, les fonctions hypergéométriques se réduisent à des polynômes).

et finalement :

$$z_1 = \frac{n-n'}{n+n'} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{nn'}{(n-n')^2}$$

(cette façon de définir z_1 et z_2 est utile pour calculer les couplages avec des niveaux de n élevé).

La formule (A3.1) s'applique si n est différent de n' . Pour $n = n'$, on a :

$$R(n, \ell; n, \ell+1) = -\frac{3}{2} n \sqrt{n^2 - (\ell+1)^2} \quad (\text{A3.2})$$

Dans beaucoup de références on trouve cette formule écrite avec un signe incorrect, c'est-à-dire avec une convention de phase incompatible avec celle de (A3.1).

Pour généraliser ces résultats au couplage discret-continuum on doit faire une extension analytique de la formule (A3.1). Cela peut se faire [1] en changeant n en $i\eta$, avec

$$\eta = \sqrt{\frac{Ry}{E}} \quad (= (1/2E)^{1/2} \text{ en unités atomiques}) \quad (\text{A3.3})$$

où Ry est la constante de Rydberg (en unités d'énergie) et E est l'énergie de l'état du continuum. Cela revient à normaliser les états du continuum de telle façon que

$$\Psi_{E, \ell}(r) = \frac{\Psi_{i\eta, \ell}(r)}{\sqrt{\frac{2ik^3}{\pi\eta} [1 - \exp(-2\pi\eta)]}} \quad (\text{A3.4})$$

où la fonction d'onde dans le deuxième terme est une fonction d'onde d'état discret avec n changé en $i\eta$, et où $k = \alpha_0^{-1} (E/Ry)^{1/2}$ (a_0 rayon de Bohr).

Les éléments de matrice discret-continuum sont donc obtenus simplement à partir des éléments de matrice discret-discret en changeant n (ou n') en $i\eta$ et en multipliant par un facteur $\exp(-i\pi/4) [1 - \exp(-2\pi\eta)]^{-1/2}$; la densité d'états du continuum est alors donnée par

$$\rho(E) dE = (2E)^{-3/2} dE \text{ (u. at.)} \quad (\text{A3.5})$$

qui est le prolongement analytique de la densité d'états en énergie pour les états discrets :

$$\rho(n) |dn| = 1 |dn| = \rho(E) |dE|$$

$$\text{avec } E = -\frac{1}{2n^2}.$$

REFERENCE

1. W.J. Karzas and R. Latter, *Astroph. J. Suppl. Ser.* 6, 167 (1961).

APPENDICE IV

FORMULES UTILES POUR LE CALCUL DES CORRECTIONS DE STRUCTURE FINE ET HYPERFINE

Dans cet appendice on présentera certaines formules et on étudiera des cas particuliers utiles au calcul des corrections de structure fine et hyperfine discutées essentiellement dans le Chapitre V. L'intensité de la raie correspondant à une transition à deux-photons entre deux niveaux hyperfins J_i, F_i (initial) et J_f, F_f (final), avec J_i différent de J_f , est proportionnelle à [1, eq 22] :

$$M(J_i, F_i \rightarrow J_f, F_f) = (2F_i + 1) (2F_f + 1) \left\{ \begin{matrix} J_f & J_i & 2 \\ F_i & F_f & I \end{matrix} \right\}_2 \quad (\text{A4.1})$$

où I est le spin du noyau. Dans ce calcul, les petites corrections d'énergie dues à l'interaction fine ou hyperfine - qui seraient présentes dans le dénominateur de l'équation (5.1) sont négligées.

Dans notre expérience, la structure hyperfine du niveau initial (2S) est complètement résolue, mais pas celle du niveau final (nD). L'équation (A4.1) doit alors être sommée sur F_f :

$$M(J_i, F_i \rightarrow J_f) = (2F_i + 1) \sum_{F_f} (2F_f + 1) \left\{ \begin{matrix} J_f & J_i & 2 \\ F_i & F_f & I \end{matrix} \right\}_2. \quad (\text{A4.2})$$

En utilisant des propriétés bien connues des symboles "6j" (invariance dans l'échange de deux colonnes et dans l'échange de deux éléments d'une même colonne [2, § 108]) on peut transformer la somme (A4.2) en

$$\sum_{F_f} (2F_f + 1) \left\{ \begin{matrix} J_f & 2 & J_i \\ F_i & I & F_f \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} J_f & 2 & F_f \\ F_i & I & J_i \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2J_i + 1} \quad (\text{A4.3})$$

où la dernière égalité découle de l'éq. (108,7) de la réf. [2]. Cela montre que $M(J_i, F_i \rightarrow J_f)$ est indépendant de J_f . L'intensité de la transition vers chaque niveau final J_f de structure fine sera donc proportionnelle à sa

dégénérescence $(2J_f+1)$. Pour des transitions à un photon (pour les calculs de repopulation du niveau 2S), le taux d'émission spontanée entre un couple particulier de sous-niveaux hyperfins $(F M_F J \ell) \rightarrow (F' M_{F'}, J' \ell')$ est proportionnel à

$$\sum_q |\langle F M_F J \ell | r_q | F' M_{F'} J' \ell' \rangle|^2 \quad (\text{A4.4})$$

où r_q sont les composantes tensorielles irréductibles de l'opérateur position r . Les équations (109,1) et (109,3) de la réf. [2] nous permettent de montrer que (A4.4) est proportionnelle à

$$\sum_q (2F+1) (2F'+1) \begin{pmatrix} F & 1 & F' \\ -M_F & q & M_{F'} \end{pmatrix}^2 \begin{Bmatrix} J & F & I \\ F' & J' & \ell \end{Bmatrix}^2 |\langle J \ell | r_q | J' \ell' \rangle|^2 \quad (\text{A4.5})$$

où les trois derniers symboles sont, respectivement, un symbole "3j", un symbole "6j" et l'élément de matrice réduit d'une composante de l'opérateur de position. Ce résultat doit être sommé sur les nombres quantiques M_F et $M_{F'}$, qui n'interviennent pas dans le problème. D'après l'équation (106,12) de [2], en faisant une telle somme on obtient :

$$(2F'+1) \begin{Bmatrix} J & F & I \\ F' & J' & \ell \end{Bmatrix}^2 \sum_q |\langle J \ell | r_q | J' \ell' \rangle|^2. \quad (\text{A4.6})$$

Le dernier facteur ne dépend que des niveaux de structure fine, ce qui montre que le poids relatif d'une transition hyperfine particulière partant d'un même niveaux de structure fine est proportionnel à

$$(2F'+1) \begin{Bmatrix} J & F & I \\ F' & J' & \ell \end{Bmatrix}^2 \quad (\text{A4.7})$$

où le sens de la transition est $J, F \rightarrow J', F'$.

REFERENCES

- 1 G. Grynberg, F. Biraben, E. Giacobino and B. Cagnac, *J. Physique* 38, 629 (1977).
- 2 L. D. Landau et E. M. Lifchitz, *Mécanique Quantique*, Mir, Moscou, 1967.

RESUME

Ce memoire décrit une mesure de la constante de Rydberg par spectroscopie à deux photons sans effet Doppler des atomes d'hydrogène et de deutérium. Les transitions étudiées relient l'état métastable $2S_{1/2}$ (largeur naturelle 1,3 Hz) aux états $nD_{3/2}$ avec $n=8,10,12$ (largeur naturelle du niveau $n=10 \approx 300$ kHz) de façon à avoir de raies très fines. La largeur expérimentale observée est de l'ordre de 1 MHz, correspondant à une largeur relative d'environ 10^{-9} , ce qui est la meilleure résolution obtenue sur l'hydrogène dans le domaine optique.

Les signaux atomiques obtenus sont comparés à des courbes théoriques de façon à éliminer les effets dus au "light-shift" ou déplacement lumineux.

Notre résultat est :

$$R = 10\,973\,731,570\,9\,(18)\text{ m}^{-1}.$$

La mesure de la fréquence absolue de transition se fait par comparaison interférométrique avec un laser hélium-néon stabilisé sur la molécule d'iode dont la fréquence a été mesurée avec une exactitude de $1,6 \times 10^{-10}$. La précision de notre mesure par rapport au laser de référence est de 4×10^{-11} . L'incertitude totale, $1,7 \times 10^{-10}$ est donc due essentiellement à la mesure de la fréquence absolue de la raie de l'iode. Notre laser de référence a été calibré par comparaison avec un laser standard du Bureau International des Poids et Mesures.

Notre expérience permet aussi d'obtenir les déplacements isotopiques pour les trois niveaux de Rydberg étudiés d'où on peut déduire une valeur pour le rapport de masse entre le proton et l'électron :

$$m_p/m_e = 1836,152\,59\,(24)$$

en très bon accord avec la valeur plus précise actuellement disponible.