



**HAL**  
open science

# Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non-linéaire avec un réservoir harmonique

Jean-Michel Courty

► **To cite this version:**

Jean-Michel Courty. Les fluctuations quantiques dans l'interaction d'un système non-linéaire avec un réservoir harmonique. Physique Atomique [physics.atom-ph]. Université Pierre et Marie Curie - Paris VI, 1990. Français. NNT: . tel-00011868

**HAL Id: tel-00011868**

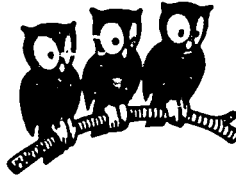
**<https://theses.hal.science/tel-00011868>**

Submitted on 9 Mar 2006

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**DEPARTEMENT DE PHYSIQUE  
DE L'ECOLE NORMALE SUPERIEURE**



**THESE**

présentée pour obtenir  
le titre de Docteur de l'Université Paris VI

spécialité: physique quantique

**LES FLUCTUATIONS QUANTIQUES DANS L'INTERACTION  
D'UN SYSTEME NON LINEAIRE AVEC UN RESERVOIR HARMONIQUE**

par Jean-Michel COURTY

Soutenue le 5 avril 1990 devant le jury composé de:

MM. S. HAROCHE (président)  
C. COHEN-TANNOUDJI (rapporteur)  
M. DUCLOY (rapporteur)  
D. ESTEVE  
P. GRANGIER  
S. REYNAUD (directeur)

# **THESE**

présentée pour obtenir

le titre de Docteur de l'Université Paris VI

## **LES FLUCTUATIONS QUANTIQUES DANS L'INTERACTION D'UN SYSTEME NON LINEAIRE AVEC UN RESERVOIR HARMONIQUE**

par Jean-Michel COURTY

Soutenu le 5 avril 1990 devant le jury composé de:

Mr S. HAROCHE (président)

Mr C. COHEN-TANNOUDJI (rapporteur)

Mr M. DUCLOY (rapporteur)

Mr D. ESTEVE

Mr P. GRANGIER

Mr S. REYNAUD (directeur)

*Il est terrible le petit bruit...*

J. Prévert (Paroles)

Ce travail a été réalisé au laboratoire de spectroscopie hertzienne de l'E.N.S.. Je remercie Jacques DUPONT-ROC de m'y avoir accueilli.

Serge REYNAUD a assuré la direction de cette thèse. Ce travail doit beaucoup à sa profonde compréhension de la physique et surtout à l'originalité de son approche. Par son enthousiasme communicatif et son attention constante il a su m'initier de manière stimulante aux différents aspects du travail de chercheur. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude.

J'ai bénéficié des conseils de Claude COHEN-TANNOUJJI qui a suivi ce travail depuis le début. Sa grande expérience et son intuition physique ont rendu passionnantes et très enrichissantes les discussions que nous avons eues. Je l'en remercie vivement.

Le groupe des "squeezeurs" m'a permis de réaliser ce travail dans des conditions exceptionnelles. Je tiens particulièrement à remercier Antoine HEIDMANN qui a répondu avec compétence et gentillesse à mes questions pendant toute la durée de ma thèse et dont les remarques se sont toujours avérées judicieuses. Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance à Claude FABRE et Elisabeth GIACOBINO dont les conseils avisés m'ont beaucoup aidé.

Je remercie S. HAROCHE, M. DUCLOY, D. ESTEVE et P. GRANGIER pour l'intérêt qu'ils ont manifesté pour ce travail en acceptant de faire partie du jury.

Je souhaite enfin exprimer toute ma reconnaissance à Mlle GUILLAUME, Mme EMO, Mlle LEFEVRE et Mlle GAZAN qui avec une grande gentillesse et une grande efficacité se sont chargées de la frappe et du tirage de ce mémoire.

## TABLE DES MATIERES

<b>INTRODUCTION</b>	<b>9</b>
<b>I ETUDE GENERALE DU COUPLAGE AVEC UN RESERVOIR HARMONIQUE</b>	<b>14</b>
<b>I.A Présentation du Hamiltonien modèle</b>	<b>17</b>
I.A.1 Introduction: particule couplée à une collection discrète d'oscillateurs harmoniques	17
I.A.2 Le modèle définitif	20
I.A.3 Présentation de fonctions caractérisant le réservoir	22
<b>I.B Equations de Heisenberg, équations de Langevin</b>	<b>25</b>
I.B.1 Equations de Langevin retardées	25
I.B.2 Equations de Langevin avancées	28
I.B.3 Le spectre normal	31
<b>I.C Relations du modèle étudié avec des situations expérimentales</b>	<b>32</b>
I.C.1 Electrodynamique	32
I.C.2 Electronique	41
<b>I.D Un modèle de cavité</b>	<b>60</b>
I.D.1 Modèle avec propagation de champs	60
I.D.2 Modèle du réservoir harmonique	68
I.D.3 Comparaison des modèles: discussion physique	71
I.D.4 L'approximation d'une cavité à un mode	73
<b>II LE SYSTEME A DEUX NIVEAUX COUPLE A UN RESERVOIR HARMONIQUE</b>	<b>88</b>
<b>II.A La relaxation du spin fictif</b>	<b>90</b>
II.A.1 Le modèle du spin fictif	90
II.A.2 Etude d'un modèle classique	95
<b>II.B La relaxation de l'atome habillé</b>	<b>105</b>
II.B.1 L'atome habillé	105
II.B.2 Relaxation de l'atome habillé	111
<b>II.C Le calcul des spectres</b>	<b>119</b>
II.C.1 Le cas où le réservoir est vide	119
II.C.2 Le cas où le réservoir est non vide	126
II.C.3 Le calcul des fonctions de corrélation atomiques	132
<b>II.D Atome en cavité (réservoir vide tricolore)</b>	<b>138</b>
II.D.1 Etude de la relaxation	138
II.D.2 Etude des spectres	142

<b>II.E Atome en champ comprimé</b>	
II.E.1 Relaxation de l'atome habillé en champ comprimé	149
II.E.2 Relaxation du spin fictif en champ comprimé: interprétation géométrique	149
II.E.3 Le spectre de fluorescence	167
<b>III PRESENTATION DU FORMALISME GENERAL</b>	<b>171</b>
<b>III.A Les outils</b>	<b>173</b>
III.A.1 Espace de Liouville	173
III.A.2 Evolution - propagateurs - résolvante	179
III.A.3 Projecteurs	180
<b>III.B Le modèle choisi: hypothèses et propriétés</b>	<b>183</b>
III.B.1 Le modèle et les hypothèses	183
III.B.2 Construction et propriétés des projecteurs	184
III.B.3 Discussion des hypothèses	186
<b>III.C La relaxation du système non linéaire</b>	<b>188</b>
III.C.1 L'évolution réduite	188
III.C.2 Le théorème de régression quantique	193
III.C.3 Résultats sous forme tensorielle	196
<b>III.D Le traitement des fluctuations</b>	<b>199</b>
III.D.1 Equations de Langevin - Forces de Langevin	199
III.D.2 La réponse linéaire généralisée	202
<b>III.E Discussion des approximations</b>	<b>204</b>
<b>APPENDICES</b>	
<b>A<sub>1</sub> Propriétés des états comprimés</b>	<b>76</b>
<b>B<sub>1</sub> Oscillateur harmonique couplé à un réservoir harmonique</b>	<b>79</b>
<b>REFERENCES</b>	<b>208</b>

## INTRODUCTION

L'étude d'un système non linéaire excité loin de l'équilibre et couplé à un réservoir harmonique a donné lieu à de très nombreux travaux depuis une dizaine d'années. Il permet en effet de se poser d'intéressantes questions. Quelle est l'influence des fluctuations quantiques du réservoir sur le comportement du système non linéaire? Comment ces fluctuations sont-elles modifiées par l'interaction du réservoir avec le système non linéaire? Ces problèmes ont été abordés dans de nombreux domaines de recherche. Nous en donnons maintenant quelques exemples afin de définir le contexte dans lequel se place ce travail de thèse.

Un premier type de travaux est regroupé sous le nom d'électrodynamique quantique en cavité. Le système considéré est un atome couplé au rayonnement électromagnétique. Lorsqu'un atome se trouve dans l'espace libre, ce couplage donne naissance au phénomène d'émission spontanée. L'utilisation d'une cavité permet de changer de manière importante la densité spectrale du couplage entre l'atome et le champ, ce qui entraîne une profonde modification de son comportement. En effet, le taux d'émission spontanée, donné par la règle d'or de Fermi, est proportionnel à la densité de modes du champ électromagnétique à la fréquence de la transition considérée. Dans une cavité, cette densité de modes est augmentée pour les fréquences résonnantes alors qu'elle est diminuée pour les fréquences non résonnantes.

Il est, par exemple, possible d'inhiber ou d'augmenter le taux d'émission spontanée d'un atome de Rydberg en plaçant celui-ci dans une cavité micro-onde [1]. Ce phénomène est un cas particulier du problème général de la relaxation d'un système dans un bruit coloré (appelé ainsi par opposition au bruit blanc indépendant de la fréquence).

Une seconde catégorie d'études est consacrée à l'étude de l'influence de la dissipation sur les systèmes quantiques macroscopiques. L'un des objectifs de ces travaux est de comprendre comment l'apparition du comportement classique d'un système est reliée à la dissipation due à son couplage avec l'environnement. Le système privilégié pour l'étude expérimentale de ce système est constitué d'une jonction Josephson couplée à une ligne dissipative. Placée dans certaines conditions, une jonction Josephson a en effet la particularité de constituer un système quantique macroscopique: les grandeurs la caractérisant (tension, intensité, taille du système, etc. ) sont macroscopiques et cependant l'utilisation de la mécanique quantique est nécessaire pour comprendre son comportement. Il présente en effet une structure discrète de niveaux d'énergie dont les fréquences de transition se trouvent dans le domaine des micro-ondes.

On peut d'autre part observer sur ce système le phénomène d'effet tunnel ainsi que l'influence de la dissipation sur cet effet, en particulier lorsque la densité spectrale du couplage dépend de la fréquence [2,3].

Un autre type de travaux a porté sur l'étude d'un atome soumis à un rayonnement monochromatique intense. Le premier phénomène à expliquer est la structure du spectre de la lumière diffusée. Celui-ci se présente sous la forme d'un triplet composé d'une raie centrée sur la fréquence du champ exciteur et de deux raies latérales placées de part et d'autre de la raie centrale [4,5]. La méthode de l'atome habillé permet de comprendre simplement ce spectre. Le principe consiste à considérer comme système non linéaire non plus le seul atome mais l'atome couplé au mode pompe du champ électromagnétique. Les fréquences de Bohr de ce système sont au nombre de trois et correspondent aux fréquences des différentes raies du triplet de fluorescence [6].

Ce système permet aussi de s'intéresser aux propriétés non classiques du rayonnement électromagnétique. La statistique du rayonnement de fluorescence présente en effet de telles propriétés: l'exemple le plus connu est le dégroupement de photons que nous discutons maintenant.

Un des moyens d'étude des propriétés statistiques du rayonnement consiste à mesurer les délais séparant les arrivées des photons arrivant sur un détecteur. Lorsque le rayonnement est dans un état cohérent comme par exemple pour un faisceau laser, on constate que les arrivées des photons ne sont pas corrélées. Lorsque le rayonnement est bruité, comme c'est le cas pour un rayonnement thermique, les photons ont tendance à se "grouper" (bunching): l'histogramme des délais présente un maximum pour les temps courts. Il est possible de rendre compte de cette propriété par un modèle classique de champ [7].

Par contre, la lumière de fluorescence d'un atome unique excité par une onde laser présente un effet de dégroupement (antibunching) [8]. L'histogramme des délais présente un minimum pour les temps courts. Autrement dit, après la détection d'un photon, il faut attendre un temps minimum avant l'arrivée du suivant. Ce phénomène ne peut pas être expliqué par un modèle classique de champ et l'on parle donc de



propriété "non classique" du rayonnement électromagnétique. Cette propriété peut s'interpréter simplement. Immédiatement après l'émission d'un photon, l'atome se trouve dans l'état fondamental et il y reste pendant un certain temps. Il n'est pas capable durant ce temps d'émettre d'autres photons.

Une autre propriété non classique a été très étudiée ces dernières années, la compression des fluctuations quantiques. Lorsque l'on décrit le rayonnement à l'aide de l'électrodynamique quantique, les deux quadratures de l'amplitude du champ sont des variables conjuguées. Il existe entre elles une inégalité de Heisenberg stipulant que le produit de leurs variances est supérieur à une certaine valeur. Dans le vide ou les états cohérents du champ, ces deux variances sont égales. Lors de toute mesure d'une composante du champ, il existe donc un bruit minimum d'origine fondamentale. Il est cependant possible de contourner le problème, car l'inégalité de Heisenberg fait intervenir le produit des variances. Rien n'empêche donc de réduire les fluctuations d'une variance tant que l'on augmente l'autre afin de garder le produit constant. Lorsque l'on fera une mesure sur la quadrature comprimée le bruit sera réduit [9,10,11,12].

Ces états comprimés sont obtenus par l'interaction du champ électromagnétique avec un milieu non linéaire. Un progrès marquant de ces dernières années a été l'obtention expérimentale de compressions importantes (60 % à 70 % de réduction de bruit) [13,14]. Les milieux non linéaires sont des cristaux non linéaires ou des milieux atomiques. Il faut noter que le rayonnement produit par la fluorescence de résonance que nous avons déjà évoquée est comprimée [15,16].

Nous venons de voir qu'il est maintenant possible de produire du rayonnement comprimé. Un tel rayonnement possède des propriétés statistiques très différentes de celles du vide ou des rayonnements classiques (états cohérents, états thermiques). Des études théoriques ont montré que la relaxation d'un système à deux niveaux peut être fortement modifiée lorsque celui-ci est soumis à un rayonnement comprimé plutôt qu'au rayonnement du vide. Lorsque l'atome n'est pas excité, le taux de relaxation d'une des cohérences est réduit proportionnellement à la réduction des fluctuations. Lorsqu'il est excité par un champ monochromatique intense, la largeur de la raie centrale du spectre de fluorescence est réduite lorsque le champ exciteur est résonnant avec la fréquence de la transition atomique considérée [17,18,19]. Ces effets n'ont pas encore été observés expérimentalement.

Le comportement de l'atome est modifié lorsque celui-ci est placé dans une cavité. Des modifications des largeurs et des poids des raies du spectre de fluorescence lorsqu'un atome est placé en cavité ont été observées [20-23]. Ce phénomène s'explique à l'aide de la méthode de l'atome habillé. Les trois taux de transition entre les différents niveaux sont modifiés de manière différente par la cavité car ils correspondent à des fréquences de Bohr différentes. Ceci explique d'une part la modification des largeurs et d'autre part la modification des poids relatifs des raies [24].

Le dernier thème que nous abordons est celui de la mesure en mécanique quantique. Depuis quelques années, ce problème a été largement renouvelé. Par exemple le concept de mesures "quantiques non destructives" est apparu. Ce concept nouveau consiste à considérer l'action de mesure comme le résultat du couplage du système mesuré avec un système mesureur [25-30]. Ce couplage fait apparaître des corrélations entre les deux systèmes, corrélations qui sont utilisées pour obtenir de l'information sur le système mesuré à partir de l'évolution du système mesureur. On peut alors se poser la question de la qualité de l'opération de mesure en étudiant les deux caractéristiques suivantes: la mesure est-elle effectivement une mesure de l'observable recherchée? le couplage avec l'appareil mesureur perturbe-t-il l'évolution du système mesuré, et, si oui, cette perturbation est-elle inévitable?

Le problème devient encore plus intéressant lorsque l'on introduit un réservoir dans l'appareil de mesure [31,32]. En effet, ce réservoir fait apparaître des phénomènes de relaxation. Il est alors crucial de comprendre comment cette relaxation modifie le comportement du système observé ainsi que l'apparition des corrélations entre celui-ci et les fluctuations du signal.

Après ce survol du domaine de recherche, nous pouvons maintenant définir le problème général auquel est consacré ce travail. Il s'agit de l'étude d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Le spectre de couplage entre le système et le réservoir est a priori quelconque, ce qui permet de traiter les systèmes en cavité. De même les fluctuations initiales du réservoir sont quelconques, c'est-à-dire qu'elles peuvent être non classiques, en particulier comprimées et colorées (le spectre qui les caractérise peut dépendre de la fréquence).

Notre objectif est à priori d'être capable de calculer à la fois la relaxation du système non linéaire, les fluctuations du système non linéaire, les corrélations entre ces fluctuations et celles du réservoir et la modification des fluctuations du réservoir.

Le thème principal de ce travail est d'essayer de mettre en place un traitement théorique englobant ces différents aspects du problème. En effet, comme nous allons le voir maintenant, les méthodes utilisées dans ce domaine lorsque nous avons commencé ce travail étaient très diverses et peu compatibles entre elles.

En ce qui concerne l'évolution du système non linéaire, les méthodes d'étude utilisées se divisent en deux groupes.

Le premier type d'approche utilise la théorie de la relaxation. L'état du système et du réservoir sont décrits par des matrices densité. Une approche perturbative de l'interaction permet d'étudier l'évolution de la matrice densité réduite du système non linéaire. C'est ce type d'approche qui permet par exemple d'obtenir les équations de Bloch optiques [33,34]. Dans la grande majorité de ces travaux, le réservoir est initialement vide ou dans un état thermique.

Ces travaux ont permis en particulier d'étudier la fluorescence de résonance [4,6]. Les fonctions de corrélation du champ sont reliées à celles du dipôle atomique. Bien que la théorie de la relaxation ne donne que l'évolution des valeurs moyennes des opérateurs atomiques, il est possible d'étudier les fonctions de corrélation atomiques en utilisant le théorème de régression quantique [35].

Le second type d'approche, utilisé principalement pour l'étude de la dissipation quantique sur les systèmes macroscopiques, utilise le formalisme des intégrales fonctionnelles [36]. Des résultats très intéressants ont par exemple été obtenus sur l'influence de la dissipation dans l'effet tunnel [37,38] ; dans ces travaux, le réservoir était initialement vide. Ces travaux utilisent une approche perturbative consistant à considérer les fluctuations autour d'une trajectoire classique. Il est ainsi extrêmement difficile de les utiliser lorsque l'on ne dispose pas de description classique du système non linéaire comme par exemple pour un système à deux niveaux. Le problème est encore plus délicat si le réservoir est comprimé.

Le second problème est celui des fluctuations du système non linéaire. Les différents travaux sur ce sujet ont parlé sur la réponse du système non linéaire à une fluctuation extérieure classique. La méthode d'étude utilisée est la théorie de la réponse linéaire [39]. Dans ce cas la relaxation du système non linéaire est due à son interaction avec le réservoir et la source de fluctuation est classique et extérieure. Cette méthode n'est donc pas directement utilisable pour le problème que nous avons posé car nous désirons connaître la réponse du système non linéaire à des fluctuations quantiques provenant du réservoir qui le fait relaxer.

Nous allons nous étendre plus longuement sur le problème de la modification des fluctuations du réservoir et en particulier sur la génération de rayonnement non classique.

La compression du rayonnement par un milieu non résonnant est maintenant bien comprise grâce à une approche semi classique. La transformation de Wigner est utilisée ici afin d'obtenir une distribution de quasi probabilité décrivant les fluctuations du champ. La méthode consiste à étudier la modification de cette distribution de quasi probabilité lors des différentes interactions. Cette méthode permet d'interpréter quantitativement de manière très satisfaisante les résultats des expériences produisant du rayonnement comprimé à l'aide d'un oscillateur paramétrique optique (OPO). On relie ainsi entre elles les fluctuations arrivant sur la cavité, repartant de celle-ci, arrivant sur le milieu non linéaire et en repartant. Lorsque le milieu non linéaire n'est pas résonnant, l'effet du cristal est uniquement de transformer les fluctuations lorsque celles-ci le traversent (il s'agit d'une interaction purement dispersive). En pratique, l'étude de cette modification est une généralisation de la méthode classique d'analyse des fluctuations [40,41,42].

Le problème devient plus délicat lorsque le milieu est résonnant. Le milieu ne se contente plus de modifier les fluctuations du réservoir, il y ajoute ses fluctuations propres. Une description semi classique devient alors très délicate, en particulier pour décrire le système atomique.

Un autre type de problème est lié à l'influence de la compression du rayonnement incident sur l'évolution des systèmes atomiques. Les fluctuations d'un rayonnement comprimé ne sont pas des fluctuations classiques. Il faut donc s'attendre à ce que la relaxation d'un atome soumis à un tel rayonnement soit modifiée [17]. Ce problème apparaît par exemple lors de l'étude de la compression par un milieu atomique épais où interviennent des effets de propagation. Dans un tel milieu, les fluctuations quantiques du rayonnement sont comprimées au fur et à mesure de la propagation. Les propriétés du milieu vont alors se trouver modifiées

et la propagation ultérieure en sera affectée. Les méthodes d'approche utilisées pour ce problème utilisent principalement une simulation stochastique des fluctuations. L'évolution du système non linéaire est décrite par une équation adjointe dérivée des équations différentielles stochastiques [43-46].

Nous venons de voir que différentes approches étaient utilisées pour l'étude de ces problèmes bien que ceux-ci soient intimement liés. Ces approches sont même souvent incompatibles entre elles, en particulier dans le cas de l'étude des systèmes atomiques. On sait d'une part étudier la compression du rayonnement par une couche mince par un type d'approche, mais une autre approche qui est utilisée pour étudier l'influence de la compression sur la relaxation atomique. Il s'avère ainsi difficile d'étudier la compression par un milieu épais en combinant ces deux approches. Il faut enfin noter que dans certaines méthodes, en particulier à cause de leur complexité, de nombreuses approximations sont mal contrôlées.

Nous pouvons maintenant en venir à l'objectif de notre travail. Parmi les problèmes que nous venons d'évoquer, nous chercherons à éclaircir les points suivants:

- faire une théorie totalement quantique de type entrée-sortie qui prenne en compte les fluctuations quantiques provenant du milieu non linéaire.

- étudier l'influence de la compression des fluctuations incidentes sur la relaxation d'un système atomique et être en mesure de déduire de ces résultats les propriétés du rayonnement diffusé par un système placé dans de telles conditions ;

- obtenir une meilleure compréhension des phénomènes et un meilleur contrôle des approximations.

Pour cela, nous allons étudier un système composé d'un réservoir non linéaire. Nous avons choisi ce modèle car il permet une approche générale du problème tout en correspondant à plusieurs situations expérimentales intéressantes.

Notre étude s'articule en trois parties. Dans un premier temps nous étudions les propriétés générales du réservoir harmonique afin de mettre en place une théorie quantique de l'entrée-sortie. Dans un second temps, nous nous intéressons en détail aux propriétés d'un système à deux niveaux couplé à un tel réservoir et en particulier aux propriétés statistiques du champ émis et à l'influence de l'état initial du réservoir sur le comportement atomique. Dans la troisième partie, nous revenons à l'étude du problème général en développant une méthode globale d'approche des différents problèmes.

Venons en maintenant plus précisément au contenu de ces trois parties.

Nous présentons tout d'abord notre modèle: un continuum harmonique monodimensionnel couplé à un système non linéaire. Afin de fixer les idées, nous avons choisi, pour cette partie, de prendre comme système non linéaire une particule placée dans un puits de potentiel.

Nous étudions ensuite les caractéristiques d'un réservoir harmonique, c'est-à-dire les propriétés générales de notre modèle. Ceci nous permet d'une part de poser les bases de la théorie quantique de l'entrée-sortie et d'autre part d'introduire des notions qui nous seront très utiles par la suite: susceptibilité, densité spectrale, champs entrants et sortants, etc.

Nous consacrons alors un chapitre à la présentation de situations physiques décrites par notre modèle. Ceci nous permettra d'une part de montrer qu'il se prête à l'étude d'une grande variété de systèmes et d'autre part, une fois les liens établis, de bénéficier des interprétations et des images physiques propres à ces systèmes. Nous nous intéressons plus particulièrement à deux domaines. Le premier est l'électrodynamique ; nous étudions dans le détail le problème d'un atome placé dans l'espace libre ou dans une cavité. Le second domaine est celui de l'électronique micro-onde ; dans ce cas, le système non linéaire est une jonction Josephson.

Pour terminer cette partie, nous étudions la modélisation d'une cavité dans le cadre de notre approche. Bien que cette étude laisse supposer que nous ne considérons ici qu'un cas particulier de réservoir, son intérêt est général. Elle permet en effet d'étudier dans le détail les propriétés d'un réservoir coloré (c'est-à-dire dont la densité spectrale dépend de la fréquence). Son utilité est très grande car, pour améliorer la compression des fluctuations par un système, on est souvent amené à utiliser une cavité. Ce chapitre nous permet enfin de soulever quelques points délicats qui apparaissent lorsque l'on étudie l'entrée-sortie pour une cavité.

La seconde partie est consacrée à l'étude d'un atome à deux niveaux excité par un champ monochromatique intense. Une étude précise de différents effets liés à la compression du rayonnement est en effet possible pour ce système particulièrement simple.

L'intérêt de cette partie est double. D'une part, le modèle de l'atome à deux niveaux s'applique à de très nombreux systèmes quantiques lorsqu'ils sont excités près d'une résonance. Les résultats que nous obtiendrons seront ainsi directement utilisables dans des situations physiques. D'autre part, l'utilisation d'images physiques telles que le spin fictif ou l'atome habillé nous permet d'aborder de manière simple les méthodes que nous développerons dans la troisième partie.

Après une étude de la relaxation du spin fictif et de l'atome habillé en champ comprimé nous nous intéresserons à deux situations physiques pour lesquelles nous avons obtenu des résultats originaux.

Un chapitre sera consacré à l'étude d'un atome placé dans une cavité et soumis aux fluctuations du vide. Nous verrons que l'utilisation d'une cavité permet d'améliorer la compression du rayonnement de fluorescence émis par un tel atome [24].

Un autre chapitre sera consacré à l'étude d'un atome soumis à un rayonnement comprimé. Nous verrons que sa relaxation est profondément modifiée. Nous mettons en effet en évidence un phénomène de piégeage de population dans un niveau habillé et cela quelque soit la compression du rayonnement incident. Ceci se traduit sur le spectre de fluorescence par la disparition d'une raie latérale [47]. Nous étudions d'autre part la possibilité de modifier les largeurs des raies en influant sur la densité spectrale du réservoir et sur le spectre de la compression des fluctuations.

La troisième partie est consacrée à une méthode formelle puissante qui peut être utilisée pour étudier les problèmes discutés dans les deux premières parties. Notre but dans cette partie est d'une part de justifier les approximations que nous avons faites dans la seconde partie et d'autre part de présenter une méthode générale de résolution de notre problème.

## I. ETUDE GENERALE DU COUPLAGE AVEC UN RESERVOIR HARMONIQUE :

Dans la première partie, nous nous consacrons à l'étude des propriétés générales du modèle d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Ce modèle a joué un rôle important dans la compréhension des phénomènes de relaxation [48]. Il permet en effet de traiter de manière hamiltonienne les phénomènes dissipatifs [49]. Il a été utilisé en particulier pour étudier l'effet de la relaxation sur les systèmes quantiques macroscopiques [37]. Ce modèle se prête particulièrement bien à une étude par la méthode des intégrales fonctionnelles [36] ou par les techniques de l'équation pilote [34]. Il s'applique à des situations physiques très variées. Un atome couplé au champ électromagnétique par exemple peut être considéré comme un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Il en est de même pour l'étude de Jonctions Josephson couplée à une résistance puisque celle-ci peut être modélisée par un réservoir harmonique [51].

Par ailleurs, il nous faut rapprocher les problèmes que nous étudions dans cette partie des travaux portant sur l'électrodynamique quantique en cavité. Différentes approches ont été utilisées pour étudier ce problème.

On peut considérer d'abord que la présence de la cavité change la densité de modes du champ électromagnétique [50]. C'est cette modification de la densité spectrale du réservoir qui est responsable de l'inhibition ou de l'augmentation de l'émission spontanée. Il faut noter que cette notion de densité spectrale modifiée n'est pas le propre de l'électrodynamique mais apparait aussi en électronique lors de l'étude de la relaxation de systèmes contenant des jonctions Josephson. Ces travaux mettent en évidence une équivalence entre les notions de densité spectrale et d'impédance électrique : à l'espace libre de l'électromagnétisme correspond une résistance électrique et à une cavité correspond un circuit dissipatif présentant des résonances.

D'autres travaux préfèrent considérer une cavité comme une collection discrète d'oscillateurs harmoniques couplés au champ électromagnétique extérieur. En général un seul de ces oscillateurs joue effectivement un rôle privilégié dans les effets étudiés [51]. Lorsqu'un système atomique se trouve dans la cavité, le système étudié est le système atomique couplé à un oscillateur harmonique (le champ dans la cavité), cet oscillateur harmonique étant lui même couplé à un réservoir harmonique (le champ électromagnétique hors de la cavité). Presque tous les calculs sur les propriétés statistiques du rayonnement émis par une cavité contenant un milieu atomique ont été menés par cette méthode [52,53].

Dans notre travail, nous nous intéressons à la modification des fluctuations du réservoir. La méthode utilisée habituellement pour traiter ce problème est une théorie quantique d'entrée-sortie [43]. Il est aussi possible de développer une approche entrée-sortie dans le cadre d'une approche semi-classique [41]. L'approche semi-classique met clairement en évidence le fait que ce problème est très analogue à la théorie classique du Fabry Perot : des champs arrivant sur la cavité sont réfléchis sur les différents miroirs, interfèrent puis finalement repartent de la cavité [42].

Le dernier sujet que nous évoquons maintenant est celui des fluctuations auxquelles le système non linéaire est soumis. Leur étude se fait en mettant les équations d'évolution du système non linéaire sous la forme d'équations de Langevin [43]. Cette approche est étroitement reliée à la théorie de l'entrée-sortie des fluctuations [54]. Il est en effet possible d'identifier les forces de Langevin qui apparaissent dans les équations de relaxation habituelles aux fluctuations entrantes. Les fluctuations sortantes peuvent aussi s'identifier à des forces de Langevin mais de manière moins intuitive car cela se fait dans le cadre d'une relaxation privilégiant le futur et non le passé.

Dans toute cette partie nous nous consacrons à l'étude des propriétés générales du modèle d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Un des objectifs visés est d'aborder ces propriétés selon un même point de vue afin d'établir un cadre général qui nous permettra dans la seconde partie d'étudier précisément le problème d'un système à deux niveaux couplé à un réservoir harmonique.

Pour définir ce cadre général, nous considérons que le système non linéaire est une particule (de position  $X$  et d'impulsion  $P$ ) placée dans un potentiel  $V(X)$ . Notre premier but est de caractériser l'action du réservoir sur le système non linéaire par un certain nombre de fonctions et en premier lieu par la fonction appelée densité spectrale du couplage avec le réservoir. Le second but est de mettre en place une théorie de type entrée-sortie permettant de relier les fluctuations du réservoir avant et après interaction avec le système non linéaire. Nous étudierons en particulier le cas important de la densité spectrale normale, qui correspond à une force de friction proportionnelle à la vitesse de la particule.

Comme nous l'avons dit, un champ d'application de notre modèle est celui des atomes couplés au rayonnement par l'intermédiaire d'une cavité. Nous étudierons donc soigneusement comment il est possible de modéliser une cavité par un réservoir monodimensionnel. Pour cette étude nous avons choisi d'utiliser une approche semblable à celle de l'approche semi-classique et à la théorie classique du Fabry Perot. Ceci nous permettra d'une part d'établir des équations quantiques d'entrée-sortie pour les champs arrivant sur la cavité ou en repartant, et d'autre part de déterminer le modèle de réservoir harmonique qui permet de traiter ce problème. Il sera alors possible de mieux comprendre le modèle qui consiste à considérer que la présence de la cavité change la densité spectrale du réservoir à cause de l'apparition de résonances aux fréquences qui correspondent aux modes propres de la cavité vide ; toutefois, nous montrerons que ce modèle doit être manipulé avec beaucoup de précautions lors de l'étude des relations d'entrée-sortie. D'autre part, l'étude du modèle exactement soluble d'un oscillateur harmonique couplé à un réservoir harmonique et à un second oscillateur harmonique nous permettra de faire le lien entre cette approche d'une cavité et l'approche consistant à modéliser un mode de la cavité par un oscillateur harmonique (ce modèle est traité dans l'appendice  $B_I$ ).

Les propriétés que nous dégagons dans cette partie ne font intervenir que la structure du réservoir. Des fonctions telles que la densité spectrale ne suffisent cependant à caractériser son action sur un système que lorsque le réservoir est à l'équilibre thermodynamique (le vide correspondant au cas d'une température nulle). Le théorème "fluctuation-dissipation" permet alors de relier toutes les propriétés du réservoir à la densité spectrale. Par contre, pour un état comprimé du réservoir, il est nécessaire de définir indépendamment des fonctions de corrélation caractérisant les fluctuations du réservoir. Dans cette première partie, nous ne nous intéressons pas à ce problème. Il jouera cependant un rôle essentiel dans les parties II et III. Nous avons donc consacré un appendice à ce sujet afin de rappeler et discuter les propriétés des états comprimés d'un réservoir harmonique (appendice  $A_I$ ).

Dans un premier temps, nous présentons le modèle et les notations (§ I.A). Nous décrivons le modèle utilisé fréquemment pour l'étude de la relaxation : une particule couplée par des ressorts à une collection de particules. Nous mettons ensuite en évidence la relation entre ce modèle et l'électromagnétisme ce qui nous permet d'obtenir la forme définitive que nous utilisons dans toute cette partie.

Le second chapitre (§ I.B) est consacré à l'étude des propriétés générales du modèle. A partir des équations de Heisenberg, nous étudions en particulier les problèmes de dissipation et de fluctuations. Ceci nous permet de mettre les équations d'évolution du système non linéaire sous forme d'équations de Langevin avancées ou retardées. Les forces de Langevin qui apparaissent dans ces équations sont des champs libres qui correspondent aux fluctuations qui arrivent sur le système ou en repartent. Une identification des deux équations obtenues nous permet alors d'établir la relation d'entrée-sortie des fluctuations. Nous montrons en particulier que la différence entre les fluctuations entrantes et sortantes est liée à la partie dissipative de l'évolution du système non linéaire. Nous terminons ce chapitre par l'étude de la densité spectrale normale qui correspond à une force de friction proportionnelle à la vitesse de la particule.

Nous discutons ensuite des relations entre notre modèle et des situations expérimentales (§ I.C). Nous nous intéressons à deux domaines, l'électrodynamique et l'électronique. En électrodynamique, le système non linéaire est un système atomique et le réservoir harmonique est le champ électromagnétique. Une étude précise du cas d'un atome dans l'espace libre nous permet de montrer l'équivalence totale entre notre modèle et le Hamiltonien dipolaire électrique. Grâce à ce résultat, nous sommes alors en mesure de donner une image physique des fluctuations entrantes et sortantes qui avaient été définies formellement dans le chapitre précédent : il s'agit des fluctuations du champ électromagnétique libre arrivant sur l'atome et en repartant.

En électronique, le système non linéaire est une jonction Josephson et le réservoir harmonique une résistance modélisée par une ligne coaxiale. Dans un premier temps, nous présentons les jonctions Josephson et l'approche quantique de ces dipôles électriques. Nous faisons ensuite le lien avec notre modèle d'une part et avec l'électrodynamique d'autre part, en montrant en particulier qu'il est aussi possible de réaliser des "cavités" électroniques.

Le dernier chapitre de cette partie (§ I.D) est consacré à l'étude du problème d'une cavité. En nous basant sur l'approche du Fabry-Perot, nous montrons comment il est possible de traiter le problème d'une cavité dans le cadre de notre modèle. Nous montrons que la relaxation du système peut être entièrement décrite par une densité spectrale modifiée. Par contre, la transformation des fluctuations entre l'entrée et la

sortie de la cavité doit être calculée avec beaucoup de précaution : il faut en effet tenir compte d'un filtrage des fluctuations effectué par la cavité aussi bien à l'entrée qu'à la sortie.

Un second appendice est consacré à l'étude du cas où le système est un oscillateur harmonique (Appendice *B<sub>I</sub>*). Le problème peut alors être résolu de manière exacte. Nous étudions en particulier le cas où cet oscillateur est couplé à un autre oscillateur harmonique qui est couplé au réservoir. Nous utilisons nos résultats dans le chapitre I.D afin de faire le lien entre notre approche et celle qui consiste à modéliser la cavité par un oscillateur harmonique.

## I.A. Présentation du modèle

### I.A.1. Introduction: particule couplée à une collection discrète d'oscillateurs harmoniques

Dans cette partie, nous étudions les propriétés générales du réservoir harmonique. Cette étude est reliée à deux domaines: d'une part la théorie de la relaxation et d'autre part, l'électromagnétisme. Pour présenter notre modèle, nous allons donc procéder de la manière suivante: dans un premier temps nous décrivons le modèle qui est fréquemment utilisé pour l'étude de la relaxation. Nous mettrons ensuite en évidence le rapport entre ce modèle et l'électrodynamique. Ceci nous permettra d'obtenir la forme définitive du modèle que nous utiliserons dans toute cette partie. L'analogie formelle entre notre modèle et l'électromagnétisme nous permettra dans un chapitre suivant (§ I.C) de discuter précisément les relations entre ce modèle et des situations expérimentales réelles en électrodynamique.

Afin de fixer les idées et les notations, nous considérons que le système non linéaire est une particule  $S$  placée dans un puits de potentiel. Cette particule est décrite par des opérateurs position et impulsion  $X$  et  $P$  qui obéissent à la relation de commutation habituelle:

$$[X ; P] = i \quad (I.A.1;1)$$

Le Hamiltonien qui donne l'évolution libre de cette particule est le Hamiltonien  $H_S$  :

$$H_S = \frac{1}{2M} P^2 + V(X) \quad (I.A.1;2)$$

où  $M$  est la masse de la particule et  $V(X)$  le potentiel dans lequel elle évolue.

Venons en maintenant au modèle de réservoir et à son interaction avec la particule. Ce modèle se présente sous la forme suivante: la dissipation est due à l'interaction de la particule  $S$  (de position  $X$ ) avec une collection de particules par l'intermédiaire de ressorts. Chaque particule  $\mathcal{R}_\lambda$  a une masse  $m_\lambda$ . Elle est décrite par des opérateurs position et impulsion  $x_\lambda$  et  $p_\lambda$ . Le ressort reliant la particule  $\mathcal{R}_\lambda$  à la particule  $S$  a une raideur  $k_\lambda$ . Ainsi, chaque particule est décrite par un Hamiltonien  $h_\lambda$  :

$$h_\lambda = \frac{1}{2m_\lambda} p_\lambda^2 + \frac{1}{2} k_\lambda (x_\lambda - X)^2 \quad (I.A.1;3)$$

Nous noterons  $\omega_\lambda$  la fréquence propre de l'oscillateur harmonique que l'on obtient lorsque la particule  $S$  est fixe. Cette fréquence est donnée par l'expression:

$$\omega_\lambda = \sqrt{\frac{k_\lambda}{m_\lambda}} \quad (I.A.1;4)$$

Le Hamiltonien décrivant l'évolution de la particule  $S$  couplée à la collection de particules  $\mathcal{R}_\lambda$  est obtenu en ajoutant au Hamiltonien  $H_S$  d'évolution libre de la particule  $S$  les Hamiltoniens  $h_\lambda$  qui régissent l'évolution des particules  $\mathcal{R}_\lambda$  :

$$\begin{aligned} H &= H_S + \sum_\lambda h_\lambda \\ &= \frac{1}{2M} P^2 + V(x) + \sum_\lambda \frac{1}{2m_\lambda} p_\lambda^2 + \sum_\lambda \frac{1}{2} k_\lambda (x_\lambda - X)^2 \end{aligned} \quad (I.A.1;5)$$

Nous allons maintenant discuter le lien entre ce modèle et les formulations habituelles en électrodynamique. Pour cela, nous allons décomposer l'expression du Hamiltonien que nous venons de donner en une somme de quatre termes que nous discuterons successivement

$$H = H_S + H_R + H_1 + H_2 \quad (I.A.1;6)$$



$$H_S = \frac{1}{2M} P^2 + V(X) \quad (I.A.1; 7.a)$$

Nous connaissons déjà ce terme qui régit l'évolution libre de la particule  $S$ .

$$H_R = \sum_{\lambda} \left\{ \frac{1}{2m_{\lambda}} p_{\lambda}^2 + \frac{1}{2} m_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 x_{\lambda}^2 \right\} \quad (I.A.1; 7.b)$$

Ceci est un Hamiltonien qui régit l'évolution libre d'une collection (discrète) d'oscillateurs harmoniques.

$$H_1 = - \sum_{\lambda} m_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 x_{\lambda} X \quad (I.A.1; 7.c)$$

C'est un terme de couplage linéaire entre la particule et chacun des oscillateurs  $\mathcal{R}_{\lambda}$  du réservoir par l'intermédiaire des constantes de couplage  $m_{\lambda} \omega_{\lambda}^2$ .

$$H_2 = \frac{1}{2} \sum_{\lambda} m_{\lambda} \omega_{\lambda}^2 X^2 \quad (I.A.1; 7.d)$$

Ce terme apparaît comme un terme d'énergie propre de la particule dû au couplage avec le réservoir. Ce terme est semblable au terme d'énergie propre qui apparaît en électromagnétisme lorsque l'on passe au Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique (cf. § I.C.1). Ici, il s'agit d'une conséquence de l'invariance par translation du Hamiltonien  $H$  (une "correction" au fait que les oscillateurs harmoniques de  $H_R$  sont reliés à l'origine).

La nouvelle image que nous avons du modèle est donc celle d'une particule  $S$  interagissant avec un réservoir constitué d'une collection d'oscillateurs harmoniques par un couplage entre l'opérateur position  $X$  et une superposition linéaire des opérateurs ( $x_{\lambda}$ ).

Poursuivons le rapprochement avec l'électrodynamique en décrivant les oscillateurs harmoniques par des opérateurs création et annihilation d'excitation. Ces opérateurs  $a_{\lambda}^{\dagger}$  et  $a_{\lambda}$  sont définis de la manière suivante:

$$a_{\lambda} = \sqrt{\frac{m_{\lambda}\omega_{\lambda}}{2}} x_{\lambda} + i \sqrt{\frac{1}{2m_{\lambda}\omega_{\lambda}}} p_{\lambda} \quad (I.A.1; 8.a)$$

$$a_{\lambda}^{\dagger} = \sqrt{\frac{m_{\lambda}\omega_{\lambda}}{2}} x_{\lambda} - i \sqrt{\frac{1}{2m_{\lambda}\omega_{\lambda}}} p_{\lambda} \quad (I.A.1; 8.b)$$

Les opérateurs position et impulsion  $x_{\lambda}$  et  $p_{\lambda}$  s'expriment alors en fonction des opérateurs création et annihilation de la manière suivante:

$$x_{\lambda} = \sqrt{\frac{1}{2m_{\lambda}\omega_{\lambda}}} (a_{\lambda} + a_{\lambda}^{\dagger}) \quad (I.A.1; 9.a)$$

$$p_{\lambda} = \sqrt{\frac{m_{\lambda}\omega_{\lambda}}{2}} \frac{(a_{\lambda} - a_{\lambda}^{\dagger})}{i} \quad (I.A.1; 9.b)$$

Les opérateurs création et annihilation obéissent aux relations de commutation suivantes:

$$[a_\lambda; a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda;\lambda'} \quad (I.A.1; 10.a)$$

$$[a_\lambda; a_{\lambda'}] = 0 \quad (I.A.1; 10.b)$$

$$[a_\lambda^\dagger; a_{\lambda'}^\dagger] = 0 \quad (I.A.1; 10.c)$$

Réécrivons maintenant les différents Hamiltoniens à l'aide de ces opérateurs création et annihilation. Le Hamiltonien  $H_R$  d'évolution libre du réservoir s'écrit maintenant:

$$H_R = \sum_\lambda \frac{1}{2} \omega_\lambda (a_\lambda^\dagger a_\lambda + a_\lambda a_\lambda^\dagger) \quad (I.A.1; 11)$$

Le Hamiltonien de couplage  $H_1$  prend la forme d'un couplage linéaire entre la particule lourde et un opérateur champ, que nous notons  $A$  et qui est une combinaison linéaire d'opérateurs création et annihilation:

$$H_1 = - A X \quad (I.A.1; 12)$$

$$\begin{aligned} A &= \sum_\lambda m_\lambda \omega_\lambda^2 X_\lambda \\ &= \sum_\lambda \omega_\lambda \sqrt{\frac{m_\lambda \omega_\lambda}{2}} (a_\lambda + a_\lambda^\dagger) \end{aligned} \quad (I.A.1; 13)$$

Nous noterons désormais  $\alpha_\lambda$  le coefficient

$$\alpha_\lambda = \sqrt{\frac{m_\lambda \omega_\lambda}{2}} \quad (I.A.1; 14.a)$$

de sorte que  $A$  s'écrit:

$$A = \sum_\lambda \omega_\lambda \alpha_\lambda (a_\lambda + a_\lambda^\dagger) \quad (I.A.1; 14.b)$$

Nous pouvons enfin réexprimer le terme  $H_2$  pour faire apparaître les coefficients  $\alpha_\lambda$  :

$$H_2 = C_A X^2 \quad (I.A.1; 15)$$

où l'on a noté:

$$\begin{aligned} C_A &= \sum_\lambda \frac{1}{2} m_\lambda \omega_\lambda^2 \\ &= \sum_\lambda \omega_\lambda \alpha_\lambda^2 \end{aligned} \quad (I.A.1; 16)$$

Nous pouvons remarquer que les grandeurs qui caractérisent les oscillateurs harmoniques et leur couplage avec la particule  $\mathcal{S}$  ne sont plus la masse  $m_\lambda$  et la raideur  $k_\lambda$  mais une fréquence propre  $\omega_\lambda$  et un coefficient de couplage  $\alpha_\lambda$ .

### I.A.2. Le modèle définitif

Nous pouvons maintenant présenter notre modèle sous sa forme définitive. Il s'agit d'un continuum harmonique monodimensionnel. Comme son nom l'indique, ce réservoir est une distribution continue d'oscillateurs harmoniques que nous appelons aussi modes du réservoir. Ce réservoir est de plus monodimensionnel ; ceci signifie qu'à chaque fréquence d'évolution correspond un seul oscillateur ; nous pourrions ainsi désigner chaque mode par sa fréquence propre  $\omega$ .

D'un point de vue plus technique, nous obtenons ce modèle par un passage à la limite continue du modèle de Caldeira et Legett. Pour ce passage à la limite continue, nous supposons que la densité de mode est indépendante de la fréquence (parce que nous considérons un réservoir monodimensionnel). Nous transformons ainsi les sommes  $\sum_{\lambda}$  en intégrales  $\int \frac{d\omega}{2\pi}$ . Le principe est ici le même que celui que l'on utilise pour quantifier un champ monodimensionnel en quantifiant dans une boîte dont on fait ensuite tendre la taille vers  $+\infty$ .

Nous noterons  $a_{\omega}^{\dagger}$  et  $a_{\omega}$  les opérateurs création et annihilation d'excitation dans le mode de fréquence  $\omega$ . Ces opérateurs obéissent aux relations de commutation habituelles:

$$[a_{\omega}; a_{\omega'}^{\dagger}] = 2\pi \delta(\omega - \omega') \quad (I.A.2; 1.a)$$

$$[a_{\omega}^{\dagger}; a_{\omega'}^{\dagger}] = 0 \quad (I.A.2; 1.b)$$

$$[a_{\omega}; a_{\omega'}] = 0 \quad (I.A.2; 1.c)$$

Le Hamiltonien qui régit l'évolution libre du réservoir est:

$$H_R = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} \quad (I.A.2; 2)$$

La particule est couplée linéairement au réservoir par l'intermédiaire de l'opérateur champ  $A$  :

$$H_1 = - A X \quad (I.A.2; 3)$$

$$A = A^+ + A^- \quad (I.A.2; 4)$$

où  $A^+$  (resp :  $A^-$ ) est la partie de  $A$  évoluant à des fréquences positives (resp: négatives). Ils sont définis par les expressions suivantes:

$$A^+ = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega} \quad (I.A.2; 5.a)$$

$$A^- = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger} \quad (I.A.2; 5.b)$$

Les coefficients  $\alpha_{\omega}$  et  $\alpha_{\omega}^*$  sont deux complexes conjugués précisant le couplage entre la particule et le mode de fréquence  $\omega$  ; ils sont nuls pour les fréquences  $\omega$  négatives. Dans ce modèle, c'est la dépendance en fréquence de ces coefficients qui permet de décrire les différents types de réservoir. Le coefficient du terme d'énergie propre s'exprime de la manière suivante en fonction de ces coefficients:

$$C_A = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega} \alpha_{\omega}^* \quad (I.A.2; 6)$$

Le Hamiltonien total du système constitué de la particule et du réservoir est ainsi le suivant:

$$H = \frac{P^2}{2M} + V(X) + \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} - AX + C_A X^2 \quad (I.A.2; 7)$$

Dans la suite, nous décomposerons le Hamiltonien  $H$  sous la forme:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \quad (I.A.2;8)$$

où:

$$H_0 = H_S + H_R = \frac{P^2}{2M} + V(X) + \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega a_\omega^\dagger a_\omega \quad (I.A.2;9.a)$$

$$H_1 = -AX \quad (I.A.2;9.b)$$

$$H_2 = C_A X^2 \quad (I.A.2;9.c)$$

Dans la décomposition de  $H$  donnée dans l'équation précédente,  $H_0$  ne présente aucun terme d'interaction,  $H_1$  correspond à une interaction (due à la présence de  $\alpha_\omega$  ou  $\alpha_\omega^*$ ) et  $H_2$  correspond à "deux interactions" (présence d'un facteur  $\alpha_\omega \alpha_\omega^*$ ). Ainsi, dans un traitement perturbatif de l'interaction,  $H_1$  sera traité comme un terme du premier ordre et  $H_2$  comme un terme du second ordre. En particulier, dans une théorie de la relaxation où l'on traite l'interaction au second ordre, on ne prendra en compte que les termes où  $H_1$  apparaît deux fois ou bien où  $H_2$  apparaît une fois au plus.

### I.A.3. Présentation de fonctions caractérisant le réservoir

Dans cette dernière section, nous allons introduire différentes fonctions caractérisant le couplage du système non linéaire avec le réservoir harmonique. Nous reviendrons plus tard sur la signification physique de ces fonctions. Nous nous contenterons ici de donner leurs définitions et d'établir des relations entre elles.

Nous caractériserons le couplage par les deux fonctions:

$$L(\omega) = \omega \alpha_\omega \alpha_\omega^* \quad (I.A.3; 1.a)$$

$$J(\omega) = \omega^2 \alpha_\omega \alpha_\omega^* \quad (I.A.3; 1.b)$$

Une quantité importante est la densité spectrale du couplage. Elle s'exprime à l'aide de commutateurs entre des opérateurs évoluant librement en représentation de Heisenberg. Notons donc  $O(\tau)$  l'opérateur qui correspond (en représentation de Heisenberg) à une évolution libre (selon  $H_0$ ) pendant une durée  $\tau$  de l'opérateur  $O$  :

$$\frac{d}{dt} O(\tau) = i [H_0; O(\tau)] \quad (I.A.3; 2.a)$$

$$O(\tau = 0) = O \quad (I.A.3; 2.b)$$

Pour deux opérateurs  $O_1$  et  $O_2$  du réservoir, nous définissons la fonction  $\hat{\xi}_{O_1 O_2}(\tau)$  de la manière suivante:

$$\hat{\xi}_{O_1 O_2}(\tau) = [O_1(\tau); O_2] \quad (I.A.3; 3.a)$$

Nous noterons  $\xi_{O_1 O_2}(\omega)$  la transformée de Fourier de cette fonction:

$$\xi_{O_1 O_2}(\omega) = \int d\tau \hat{\xi}_{O_1 O_2}(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (I.A.3; 3.b)$$

Nous pouvons maintenant définir la densité spectrale du couplage avec le réservoir. Il s'agit de la fonction  $\xi_{AA}(\omega)$ . Celle-ci est reliée très simplement à la fonction  $J(\omega)$  comme nous allons maintenant le voir. En effet, avec ces notations:

$$A^+(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_\omega^* a_\omega e^{-i\omega\tau} \quad (I.A.3; 4.a)$$

$$A^-(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_\omega a_\omega^\dagger e^{i\omega\tau} \quad (I.A.3; 4.b)$$

Ainsi:

$$\begin{aligned} \hat{\xi}_{A^+ A^-}(\tau) &= [A^+(\tau); A^-] \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} [\omega \alpha_\omega^* a_\omega e^{-i\omega\tau}; \omega' \alpha_{\omega'} a_{\omega'}^\dagger] \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega^2 \alpha_\omega \alpha_\omega^* e^{-i\omega\tau} \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} J(\omega) e^{-i\omega\tau} \end{aligned} \quad (I.A.3; 5)$$

La transformée de Fourier de cette équation nous donne alors:

$$\xi_{A+A-}(\omega) = J(\omega) \quad (I.A.3;6.a)$$

Un calcul similaire donne l'expression suivante pour  $\xi_{A+A-}(\omega)$  :

$$\xi_{A-A+}(\omega) = -\xi_{A+A-}(-\omega) = -J(-\omega) \quad (I.A.3;6.b)$$

Ainsi, comme  $\xi_{A+A+}$  et  $\xi_{A-A-}$  sont identiquement nuls, la densité spectrale  $\xi_{AA}(\omega)$  a pour expression:

$$\begin{aligned} \xi_{AA}(\omega) &= \xi_{A+A-}(\omega) + \xi_{A-A+}(\omega) \\ &= J(\omega) - J(-\omega) \end{aligned} \quad (I.A.3;7)$$

A partir de cette densité spectrale, nous pouvons définir la susceptibilité linéaire du réservoir, quantité qui caractérise la réponse du réservoir au mouvement de la particule. Nous noterons cette fonction  $\chi_{AA}(z)$  :

$$\chi_{AA}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{\xi_{AA}(\omega)}{\omega - z} \quad (I.A.3;8)$$

où  $z$  est un nombre complexe.

La fonction  $\chi_{AA}(z)$  d'une variable complexe  $z$  nous permet de définir deux fonctions d'une variable réelle  $\omega$  en prenant sa limite sur l'axe réel:

$$\chi_{AA}^+(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_{AA}(\omega + i\epsilon) \quad (I.A.3;9.a)$$

$$\chi_{AA}^-(\omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \chi_{AA}(\omega - i\epsilon) \quad (I.A.3;9.b)$$

Ces deux fonctions vérifient la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \chi_{AA}^+(\omega) - \chi_{AA}^-(\omega) &= \int \frac{d\omega'}{2\pi} \left( \frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} - \frac{1}{\omega' - \omega + i\epsilon} \right) \xi_{AA}(\omega') \\ &= i \xi_{AA}(\omega) \end{aligned} \quad (I.A.3;10)$$

Les transformées de Fourier de ces fonctions, que nous noterons  $\hat{\chi}_{AA}^+(\tau)$  et  $\hat{\chi}_{AA}^-(\tau)$  ont de même des relations avec  $\hat{\xi}_{AA}(\tau)$  :

$$\begin{aligned} \chi_{AA}^+(\tau) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{-i\omega\tau} \chi_{AA}^+(\omega) \\ &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \int \frac{d\omega'}{2\pi} e^{-i\omega\tau} \frac{1}{\omega' - \omega - i\epsilon} \xi_{AA}(\omega') \\ &= i \hat{\xi}_{AA}(\tau) \theta(\tau) \end{aligned} \quad (I.A.3;11.a)$$

$$\chi_{AA}^-(\tau) = -i \hat{\xi}_{AA}(\tau) \theta(-\tau) \quad (I.A.3;11.b)$$

Remarquons enfin que nous avons déjà rencontré  $\chi_{AA}(0)$  :

$$\begin{aligned}
\chi_{AA}(0) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega} \xi_{AA}(\omega) \\
&= \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{1}{\omega} (J(\omega) - J(-\omega)) \\
&= 2 \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{J(\omega)}{\omega} \\
\chi_{AA}(0) &= 2 \int \frac{d\omega}{2\pi} L(\omega) = 2C_A
\end{aligned}
\tag{I.A.3;12}$$

Le facteur du terme d'énergie propre est ainsi relié à la susceptibilité statique du réservoir.

Nous allons terminer ce chapitre en présentant une dernière fonction que l'on notera  $\gamma(\tau)$ . Cette fonction est définie par analogie avec l'expression (I.A.3;7) de  $\xi$  :

$$\gamma(\tau) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \{L(\omega) + L(-\omega)\} e^{-i\omega\tau}
\tag{I.A.3;13}$$

Avec cette définition,  $\gamma(\tau)$  est, à un facteur multiplicatif près, une primitive de  $\hat{\xi}_{AA}(\tau)$  :

$$\begin{aligned}
\frac{d}{d\tau} \gamma(\tau) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \{L(\omega) + L(-\omega)\} (-i\omega) e^{-i\omega\tau} \\
&= -i \int \frac{d\omega}{2\pi} \{\omega L(\omega) - (-\omega L(-\omega))\} e^{-i\omega\tau} \\
&= -i \hat{\xi}_{AA}(\tau)
\end{aligned}
\tag{I.A.3;14}$$

c'est la primitive qui vérifie:

$$\begin{aligned}
\gamma(0) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \{L(\omega) + L(-\omega)\} \\
&= \chi_{AA}(0) = 2C_A
\end{aligned}
\tag{I.A.3;15}$$

## I.B. Equations de Heisenberg - Equations de Langevin

Cette partie est consacrée à l'étude des équations de Heisenberg donnant l'évolution du système non-linéaire et du réservoir. Ceci va nous permettre d'établir des équations de Langevin pour l'évolution de la particule. Dans ces équations apparaissent des termes d'amortissement et de fluctuations. En se basant sur ces équations, nous mettrons alors en place une théorie quantique de l'entrée sortie pour les fluctuations du réservoir. Nous terminerons cette partie en donnant des expressions plus explicites pour un cas particulièrement important de réservoir: le réservoir normal.

### I.B.1. Equations de Langevin retardées

En représentation de Heisenberg, l'équation qui régit l'évolution d'un opérateur  $O$  sous l'action d'un Hamiltonien  $H$  est la suivante:

$$\frac{d}{dt} O(t) = i [H; O(t)] \quad (I.B.1;1)$$

$H$  est le Hamiltonien présenté dans le chapitre précédent. Pour les opérateurs position et impulsion de la particule, nous obtenons les équations suivantes:

$$\frac{d}{dt} X(t) = \frac{1}{M} P(t) \quad (I.B.1;2.a)$$

$$\frac{d}{dt} P(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} + A(t) - 2 C_A X(t) \quad (I.B.1;2.b)$$

Nous reviendrons sur ces équations lorsque nous aurons étudié l'évolution de l'opérateur du réservoir  $A(t)$ .

L'évolution des opérateurs création et annihilation est la suivante:

$$\frac{d}{dt} a_\omega(t) = -i\omega a_\omega(t) + i\omega\alpha_\omega X(t) \quad (I.B.1;3.a)$$

$$\frac{d}{dt} a_\omega^\dagger(t) = i\omega a_\omega^\dagger(t) - i\omega\alpha_\omega^* X(t) \quad (I.B.1;3.b)$$

Ces équations sont des équations différentielles linéaires du premier ordre à coefficients constant. Le terme proportionnel à  $X(t)$  joue le rôle d'un second membre. Ces équations s'intègrent ainsi de la manière suivante:

$$a_\omega(t) = e^{-i\omega(t-t_0)} a_\omega(t_0) + i\omega\alpha_\omega \int_0^{t-t_0} d\tau e^{-i\omega\tau} X(t-\tau) \quad (I.B.1;4.a)$$

$$a_\omega^\dagger(t) = e^{i\omega(t-t_0)} a_\omega^\dagger(t_0) - i\omega\alpha_\omega^* \int_0^{t-t_0} d\tau e^{i\omega\tau} X(t-\tau) \quad (I.B.1;4.b)$$

On a noté ici  $t_0$  l'instant où l'on fixe les conditions initiales du problème. Ces équations sont toutefois valables que  $t$  soit antérieur ou postérieur à  $t_0$ .

Nous remarquons que l'on obtient une somme de deux termes. Le premier terme correspond à une évolution libre et ne dépend donc que de la condition initiale à  $t_0$ . Le second par contre est une réponse au mouvement de la particule entre les instants  $t_0$  et  $t$ .

Nous allons maintenant utiliser ces équations pour obtenir une décomposition semblable du champ  $A(t)$ . Pour cela, nous utilisons les définitions du champ données aux équations (I.A.2;5.a et 5.b). Nous obtenons alors les équations suivantes:



$$A^+(t) = A_0^+(t) + i \int_0^{t-t_0} d\tau \xi_{A+A-}(\tau) X(t-\tau) \quad (I.B.1;5.a)$$

$$A^-(t) = A_0^-(t) + i \int_0^{t-t_0} d\tau \xi_{A-A+}(\tau) X(t-\tau) \quad (I.B.1;5.b)$$

$$A(t) = A_0(t) + i \int_0^{t-t_0} d\tau \xi_{AA}(\tau) X(t-\tau) \quad (I.B.1;5.c)$$

où nous avons noté  $A_0^+$ ,  $A_0^-$  et  $A_0$  les champs évoluant librement à partir de  $t_0$  :

$$A_0^+(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_\omega^* e^{-i\omega(t-t_0)} a_\omega(t_0) \quad (I.B.1;6.a)$$

$$A_0^-(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_\omega e^{i\omega(t-t_0)} a_\omega^\dagger(t_0) \quad (I.B.1;6.b)$$

$$A_0(t) = A_0^+(t) + A_0^-(t) \quad (I.B.1;6.c)$$

D'autre part une interversion de somme dans le second terme nous a permis de reconnaître les fonctions  $\xi(\tau)$  définies au (I.A.3;4) et au (I.A.3;5). Nous remarquons que la réponse du réservoir est obtenue de manière exacte. Ceci provient de la nature harmonique du réservoir.

Revenons maintenant sur l'équation donnant l'évolution de la particule que nous rappelons:

$$\frac{d}{dt} P(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} + A(t) - 2 C_A X(t) \quad (I.B.1;7)$$

$A(t)$  joue le rôle d'une force provenant du réservoir. D'après la discussion que nous avons menée précédemment, ce champ peut se séparer en un terme  $A_0(t)$  qui évolue librement et une réponse au mouvement de la particule. Reportons l'équation (I.B.1;5.c) qui exprime ce fait dans l'équation (I.B.1;7):

$$\frac{d}{dt} P(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} + A_0(t) + i \int_0^{t-t_0} d\tau \xi_{AA}(\tau) X(t-\tau) - 2 C_A X(t) \quad (I.B.1;8)$$

Grâce à cette transformation, nous avons supprimé le champ  $A$  en tant que variable dynamique. La particule est alors soumise à trois forces:

\* La première est due au potentiel  $V(X)$  :

$$F_V(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} \quad (I.B.1;9)$$

\* La seconde force est due à l'interaction avec un champ libre:

$$F_A(t) = A_0(t) \quad (I.B.1;10)$$

\* La troisième est due à la réponse du réservoir au mouvement de la particule. Nous avons adjoint à cette réponse la force due à l'énergie propre de la particule. Nous allons voir tout de suite qu'une intégration par partie permet simultanément d'éliminer le contre-terme et de mettre la force sous forme d'une force de friction:

$$\begin{aligned}
F_F &= \int_0^{t-t_0} d\tau i\xi_{AA}(\tau)X(t-\tau) - 2C_A X(t) \\
&= - \int_0^{t-t_0} d\tau (\partial_\tau \gamma(\tau))X(t-\tau) - \gamma(0)X(t) \\
&= - \int_0^{t-t_0} d\tau \gamma(\tau) \dot{X}(t-\tau) + \gamma(t-t_0)X(t_0)
\end{aligned} \tag{I.B.1;11}$$

Nous avons utilisé les propriétés de la fonction  $\gamma(\tau)$  définie dans la section I.A.3.

Jusqu'à présent, toutes les équations que nous avons étudiées sont valables que l'instant d'observation  $t$  soit antérieur ou postérieur à l'instant  $t_0$  où l'on définit la condition "initiale". Nous allons maintenant nous intéresser à un cas limite en supposant la condition initiale fixée à un instant  $t_0$  infiniment éloigné dans le passé.

Nous noterons à l'aide d'un indice "in" et appellerons champs entrants les champs évoluant librement depuis une condition initiale très loin dans le passé. Nous pouvons tout d'abord exprimer les champs  $A^+(t)$  et  $A^-(t)$  à l'aide des champs entrants en utilisant les équations (I.B.1;5.a.b.c) pour  $t_0$  tendant vers  $-\infty$  :

$$A^+(t) = A_{\text{in}}^+(t) + i \int_0^\infty dt \xi_{A^+A^-}(\tau)X(t-\tau) \tag{I.B.1;12.a}$$

$$A^-(t) = A_{\text{in}}^-(t) + i \int_0^\infty d\tau \xi_{A^-A^+}(\tau)X(t-\tau) \tag{I.B.1;12.b}$$

$$A(t) = A_{\text{in}}(t) + i \int_0^\infty d\tau \xi_{AA}(\tau)X(t-\tau) \tag{I.B.1;12.c}$$

Nous donnons aussi les expressions correspondantes dans l'espace des fréquences en utilisant les susceptibilités linéaires introduites en (I.A.3;9)

$$\tilde{A}^+(\omega) = \tilde{A}_{\text{in}}^+(\omega) + \chi_{A^+A^-}^+(\omega) \tilde{X}(\omega) \tag{I.B.1;13.a}$$

$$\tilde{A}^-(\omega) = \tilde{A}_{\text{in}}^-(\omega) + \chi_{A^-A^+}^+(\omega) \tilde{X}(\omega) \tag{I.B.1;13.b}$$

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{A}_{\text{in}}(\omega) + \chi_{AA}^+(\omega) \tilde{X}(\omega) \tag{I.B.1;13.c}$$

Il est aussi possible d'obtenir l'équation d'évolution de l'impulsion de la particule:

$$\frac{d}{dt} P(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} + A_{\text{in}}(t) - \int_0^\infty d\tau \gamma(\tau) \dot{X}(t-\tau) \tag{I.B.1;14}$$

Pour établir cette équation, nous avons utilisé le fait que, pour les réservoirs que nous étudierons, la fonction  $\gamma(t)$  a une limite nulle pour  $\tau$  tendant vers  $+\infty$  ou  $-\infty$ . Il faut remarquer que la force de friction est ici une force de friction retardée. La force  $A_{\text{in}}(t)$  qui provient du réservoir est une source de fluctuations qui est appelée force de Langevin retardée.

### I.B.2. Equations de Langevin avancées

Dans la section précédente, nous avons dérivé une équation de Langevin (I.B.1;14) où la force fluctuante est reliée aux fluctuations du champ entrant. Autrement dit, nous avons introduit la notion de force de Langevin entrante en prenant une condition initiale infiniment éloignée dans le passé. Nous allons maintenant nous intéresser à une situation où la force de Langevin correspond à des champs sortants. Comme nous allons le voir, nous allons obtenir une équation de Langevin symétrique de la précédente par renversement du temps. Alors que précédemment nous avions des champs libres avant interaction avec le système, nous allons avoir ici des champs libres après interaction avec le système. Ceci nous permettra d'obtenir les fluctuations du champ émis par le système.

Prenons donc maintenant une condition "initiale" à un instant  $t_0$  infiniment éloigné dans le futur. Les champs évoluant librement "depuis" cette condition seront appelés champs sortants et notés à l'aide de l'indice "out".

De même que pour les champs entrants, nous pouvons obtenir l'expression des champs  $A^+(t)$  et  $A^-(t)$  :

$$A^+(t) = A_{\text{out}}^+(t) - i \int_{-\infty}^0 d\tau \xi_{A+A-}(\tau) X(t-\tau) \quad (I.B.2; 1.a)$$

$$A^-(t) = A_{\text{out}}^-(t) - i \int_{-\infty}^0 d\tau \xi_{A-A+}(\tau) X(t-\tau) \quad (I.B.2; 1.b)$$

$$A(t) A_{\text{out}}(t) - i \int_{-\infty}^0 d\tau \xi_{AA}(\tau) X(t-\tau) \quad (I.B.2; 1.c)$$

Le changement de signe pour la réponse du réservoir ( $+i$  devient  $-i$ ) provient du fait que nous avons rétabli le sens croissant entre les deux bornes de l'intégrale ( $\int_0^{-\infty} d\tau$  devient  $-\int_{-\infty}^0 d\tau$ ). On peut exprimer ce résultat dans l'espace des fréquences grâce aux susceptibilités linéaires :

$$\tilde{A}^+(\omega) = \tilde{A}_{\text{out}}^+(\omega) + \chi_{A+A-}^-(\omega) X(\omega) \quad (I.B.2; 2.a)$$

$$\tilde{A}^-(\omega) = \tilde{A}_{\text{out}}^-(\omega) + \chi_{A-A+}^-(\omega) X(\omega) \quad (I.B.2; 2.b)$$

$$\tilde{A}(\omega) = \tilde{A}_{\text{out}}(\omega) + \chi_{AA}^-(\omega) X(\omega) \quad (I.B.2; 2.c)$$

Poursuivons en donnant l'équation de Langevin avancée:

$$\frac{d}{dt} P(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + A_{\text{out}}(t) + \int_{-\infty}^0 d\tau \gamma(\tau) \dot{X}(t-\tau) \quad (I.B.2; 3)$$

Cette équation est semblable à l'équation (I.B.1;14) que nous avons obtenue dans la section précédente. Nous avons en effet une force due au potentiel, une force fluctuante et une force de friction.

Notons cependant que la force de friction dépend de l'évolution future de la particule et que son sens est opposé au sens habituel. Ceci signifie que nous avons ici une force de friction avancée symétrique par renversement du temps d'une force de friction retardée. Cette force de friction "accélère" la particule. Ce paradoxe n'est qu'apparent : nous ne devons pas oublier la force de Langevin avancée qui provient de fluctuations du réservoir après interaction avec la particule. Si on suppose que les fluctuations initiales sont des fluctuations indépendantes du mouvement de la particule, les fluctuations après interaction sont corrélées au mouvement de la particule. Or l'effet d'une force fluctuante corrélée au mouvement est inhabituel et il n'est pas étonnant que le terme de dissipation prenne aussi une forme inhabituelle.

Nous sommes maintenant en mesure d'écrire les relations entre les fluctuations avancées et retardées. Nous disposons actuellement de trois champs qui sont respectivement :

$A_{\text{in}}(t)$  : ce sont des fluctuations libres qui proviennent du réservoir avant que celui-ci n'interagisse avec la particule.

$A(t)$  : il s'agit de la valeur instantanée du champ qui interagit avec la particule

$A_{\text{out}}(t)$  : ce sont des fluctuations libres du réservoir après que celui-ci ait interagi avec la particule.

Nous disposons d'autre part d'équations qui relient ces champs entre eux.

\* Une première relie  $A(t)$  à  $A_{\text{in}}(t)$ , il s'agit de l'équation (I.B.1;2.c) que nous rappelons :

$$A(t) = A_{\text{in}}(t) + i \int_0^{\infty} d\tau \xi_{AA}(\tau) X(t - \tau)$$

(Voir figure I.1.a).  $A(t)$  et  $A_{\text{in}}(t)$  sont égaux pour un temps  $t_0$  infiniment loin dans le passé,  $A$  évolue de manière couplée.  $A_{\text{in}}$  évolue librement.

\* Une seconde est l'équation (I.B.2;1.c) qui relie  $A(t)$  à  $A_{\text{out}}(t)$  :

$$A(t) = A_{\text{out}}(t) - i \int_{-\infty}^0 dt \xi_{AA}(\tau) X(t - \tau)$$

(Voir figure I.1.b).  $A(t)$  et  $A_{\text{out}}(t)$  sont égaux pour un temps  $t_1$  infiniment éloigné dans le futur,  $A$  évolue de manière couplée alors que  $A_{\text{out}}$  est libre.

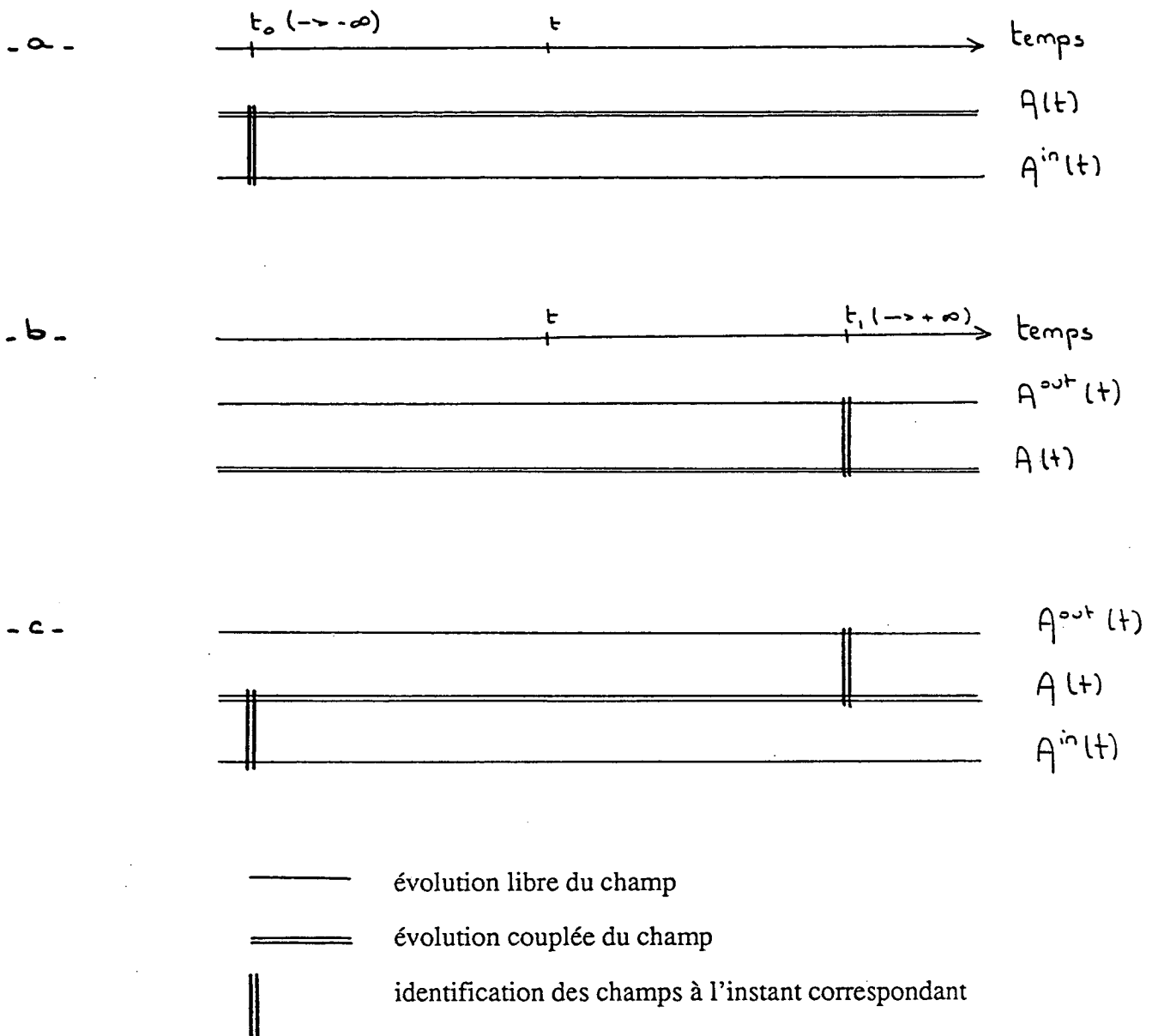
\* Il nous suffit de recoller les deux dessins en identifiant  $A(t)$  dans les deux cas pour obtenir les champs sortants en fonction des champs entrants. (Voir figure I.1.c). On obtient l'équation :

$$A_{\text{out}}(t) = A_{\text{in}}(t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \xi_{AA}(\tau) X(t - \tau) \quad (I.B.2;4.a)$$

$$\tilde{A}_{\text{out}}(\omega) = \tilde{A}_{\text{in}}(\omega) + i \xi_{AA}(\omega) X(\omega) \quad (I.B.2;4.b)$$

Nous obtenons ainsi une expression reliant les fluctuations entrantes aux fluctuations sortantes. Le but des parties II et III sera d'étudier l'évolution du système non linéaire afin d'obtenir une expression de  $X(\omega)$  en fonction des fluctuations entrantes pour connaître plus précisément les fluctuations sortantes.

Figure I.1



**Relations d'entrée sortie**

-a- Champ entrant: les champs  $A$  et  $A^{in}$  sont identiques à un instant très éloigné dans le passé.  $A^{in}$  évolue librement,  $A$  est couplé avec le système non linéaire.

-b- Champ sortant: les champs  $A$  et  $A^{out}$  sont identiques à un instant  $t$  très éloigné dans le futur.  $A^{out}$  évolue librement,  $A$  est couplé avec le système non linéaire

-c- Relation entrée sortie: le champ  $A$  est le même pour les schémas a et b. L'identification de son expression en fonction de  $A^{in}$  et de son expression en fonction de  $A^{out}$  permet de relier le champ sortant et le champ entrant

### I.B.3. Le spectre normal

Nous terminons ce chapitre par l'étude du cas particulièrement important d'un spectre de couplage normal qui correspond à une fonction  $L(\omega)$  constante:

$$L(\omega) = 2\Gamma \theta(\omega) \quad (I.B.3;1)$$

où  $\Gamma$  est une grandeur caractérisant l'intensité du couplage.

Passons tout d'abord en revue quelques unes des fonctions que nous avons définies au I.A.3. La fonction  $J(\omega)$  est linéaire en  $\omega$  :

$$J(\omega) = 2\omega\Gamma \theta(\omega) \quad (I.B.3;2)$$

La densité spectrale du couplage est donc la suivante:

$$\begin{aligned} \xi_{AA}(\omega) &= 2\omega\Gamma \theta(\omega) - 2\Gamma(-\omega) \theta(-\omega) \\ &= 2\Gamma \omega \end{aligned} \quad (I.B.3;3)$$

Une des fonctions caractérisant le réservoir est extrêmement simple, il s'agit de la fonction  $\gamma(\tau)$  :

$$\begin{aligned} \gamma(\tau) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} 2\Gamma e^{-i\omega\tau} \\ &= 2\Gamma \delta(\omega) \end{aligned} \quad (I.B.3;4)$$

Nous déduisons de cette relation une dernière équation:

$$\hat{\xi}_{AA}(\tau) = 2i\Gamma \delta'(\tau) \quad (I.B.3;5)$$

Nous pouvons ainsi donner les expressions que nous avons obtenues au début de ce chapitre dans le cas particulier du réservoir normal. Les équations de Langevin deviennent:

$$\frac{d}{dt} P(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + A_{in}(t) - \Gamma \dot{X}(t) \quad (I.B.3;6.a)$$

$$= -\frac{\partial V}{\partial X} + A_{out}(t) + \Gamma \dot{X}(t) \quad (I.B.3;6.b)$$

Nous remarquons que dans le cas du spectre normal, les forces de friction ne dépendent que de la vitesse de la particule à l'instant considéré. Il s'agit de la force de friction visqueuse à laquelle nous sommes habitués.

Les relations entre champs entrant, sortant et instantané sont également très simples:

$$A_{out}(t) = A_{in}(t) - 2\Gamma \dot{X}(t) \quad (I.B.3;7.a)$$

$$A(t) = A_{in}(t) + 2C_A X(t) - \Gamma \dot{X}(t) \quad (I.B.3;7.b)$$

$$A(t) = A_{out}(t) + 2C_A X(t) + \Gamma \dot{X}(t) \quad (I.B.3;7.c)$$

Nous terminerons par une équation qui nous sera utile par la suite:

$$A(t) = \frac{1}{2} \{A_{in}(t) + A_{out}(t)\} + 2C_A X(t) \quad (I.B.3;7.d)$$

## I.C. Relations du modèle étudié avec des situations expérimentales

Dans ce chapitre, nous discuterons les relations qui existent entre le modèle que nous utilisons et diverses situations expérimentales. Nous considérerons deux domaines, d'une part l'électrodynamique (atome couplé au rayonnement électromagnétique) et d'autre part, l'électronique (dipôles électriques amortis par dissipation résistive). Par cette discussion nous poursuivons un double objectif.

Tout d'abord, cette présentation nous permet de motiver les développements qui suivront. Nous verrons en effet que le modèle que nous utilisons décrit des situations expérimentales réalistes et fournit ainsi des résultats utilisables dans des situations pratiques.

Ensuite, lorsque nous aurons relié le modèle étudié avec l'électrodynamique ou l'électronique, nous pourrons nous appuyer sur l'intuition développée dans chacun de ces domaines. Ceci nous guidera en nous indiquant les caractéristiques importantes de notre modèle et en nous fournissant des images physiques pour l'interprétation des résultats.

### I.C.1. Systèmes électrodynamiques

Dans cette section, nous nous intéressons au cas d'un système atomique couplé au rayonnement électromagnétique. Nous étudierons tout d'abord le cas d'un système de charges localisées placé dans l'espace libre puis celui d'un atome en cavité.

#### I.C.1.a. Système localisé de charges

Pour étudier un système localisé de charges couplées au champ électromagnétique nous nous placerons dans le cadre de l'approximation dipolaire électrique. Une comparaison détaillée avec le modèle que nous utilisons sera alors possible. Pour ce faire, nous allons procéder de la manière suivante. Nous présenterons le système étudié et le Hamiltonien dipolaire électrique. Nous discuterons ensuite l'analogie entre cette situation et le modèle que nous utilisons. Nous reviendrons alors sur la signification physique de certains objets du système électrodynamique pour les utiliser dans notre modèle. Nous terminerons par une discussion des différences entre les deux situations.

#### L'origine du Hamiltonien dipolaire électrique

Le Hamiltonien d'interaction dipolaire électrique est obtenu à partir du Hamiltonien standard de l'électrodynamique en jauge de Coulomb grâce à la transformation de Göppert-Mayer. Nous ne présenterons pas en détail cette transformation. Néanmoins, il est important de se souvenir que cette transformation consiste en une transformation unitaire. Ainsi, les opérateurs qui apparaissent dans l'expression finale du Hamiltonien ont subi cette transformation unitaire. Cette précision est nécessaire pour leur donner un sens physique correct.

Pour la présentation qui suit, nous avons utilisé les résultats du complément A<sub>IV</sub> de "Photons et atomes" tome I [34]. Nous avons quelque peu changé les notations afin de mieux mettre en évidence les analogies avec le modèle que nous utilisons.

Venons en maintenant à la présentation du système. Il s'agit d'un système de charges localisées autour de l'origine et couplées au champ électromagnétique. Les charges dont il est question sont des particules de masse  $m_\alpha$  et de charge  $q_\alpha$  qui sont décrites par des opérateurs position et impulsion  $\vec{r}_\alpha$  et  $\vec{p}_\alpha$ . La charge totale de ce système est supposée nulle et les particules sont supposées localisées autour de l'origine. Le moment dipolaire électrique de la distribution de charges sera noté  $\vec{d}$ :

$$\vec{d} = \sum_{\alpha} q_{\alpha} \vec{r}_{\alpha} \quad (I.C.1;1)$$

Le champ électromagnétique, après décomposition en ondes planes se présente sous la forme d'un réservoir harmonique. Les modes propres de ce réservoir sont caractérisés par un vecteur d'onde  $\vec{k}$  et une polarisation  $\vec{\epsilon}$ . A chacun d'eux correspondent des opérateurs création et annihilation de photons.  $a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^{\dagger}$  et  $a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}$ . Le Hamiltonien dipolaire électrique est:

$$H = H_S + H_R + H_1 + H_2 \quad (I.C.1;2)$$

où les quatre termes sont les suivants:

$$H_S = \sum_{\alpha} \frac{1}{2m_{\alpha}} \vec{P}_{\alpha}^2 + V_{\text{Coul}} \quad (\text{I.C.1;3})$$

Ce Hamiltonien régit l'évolution du système de particules non couplées avec le rayonnement ;  $V_{\text{Coul}}$  est le potentiel d'interaction coulombienne entre les particules.

$$H_R = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\epsilon}} \omega a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^{\dagger} a_{\vec{k}\vec{\epsilon}} \quad (\text{I.C.1;4})$$

où  $\omega$  est la fréquence du mode  $\vec{k}; \vec{\epsilon}$  ;  $H_R$  est le Hamiltonien du champ électromagnétique non couplé aux particules. Ce réservoir est ici constitué de deux continua harmoniques tridimensionnels.

$$H_1 = -\vec{d} \cdot \frac{\vec{F}(0)}{\epsilon_0} \quad (\text{I.C.1;5})$$

$\vec{F}(0)$  est un opérateur du champ électromagnétique défini par:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \vec{F}(0) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\epsilon}} \omega \left\{ \alpha_{\omega}^{\dagger} \vec{\epsilon} a_{\vec{k}\vec{\epsilon}} + \alpha_{\omega} \vec{\epsilon} a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^{\dagger} \right\} \quad (\text{I.C.1;6})$$

où

$$\alpha_{\omega} = -i \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0\omega}} \quad (\text{I.C.1;7})$$

Il s'agit d'un couplage linéaire entre le réservoir et le système de particules. L'opérateur  $\vec{F}(0)$  représente ici la valeur à l'origine de l'induction électrique.

$$H_2 = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\epsilon}} \omega \alpha_{\omega} \alpha_{\omega}^* (\vec{\epsilon} \cdot \vec{d})^2 \quad (\text{I.C.1;8})$$

Ce terme est un terme d'énergie propre dipolaire électrique du système de particules dans le champ électromagnétique.

#### Analogie des modèles

Les notations que nous avons utilisées pour présenter la situation mettent en évidence une grande analogie entre le cas présent et notre modèle. Nous allons ici détailler cette idée.

Le système non linéaire est ici une collection de particules couplées entre elles par un potentiel, situation analogue à celle de notre modèle: une particule placée dans un potentiel. Une différence provient du fait que les particules se déplacent ici dans un espace à trois dimensions. L'opérateur intervenant dans le couplage est, dans le cas présent une combinaison linéaire d'opérateurs position et est en quelque sorte une généralisation de l'opérateur intervenant dans notre modèle.

La différence la plus importante vient de la structure des réservoirs. Dans le cas de l'électrodynamique, le réservoir est tridimensionnel (i.e.: les modes sont indicés par une grandeur de  $\mathbb{R}^3$  et non de  $\mathbb{R}$  comme c'est le cas pour notre modèle) et le champ intervenant dans le couplage est vectoriel contrairement à celui que



nous utilisons qui est scalaire. Cette différence mise à part, nous allons voir qu'il y a concordance parfaite entre les Hamiltoniens d'interaction et d'énergie propre.

Réécrivons pour cela le Hamiltonien d'interaction  $H_1$  en utilisant la définition de  $\vec{F}(0)$  :

$$H_1 = - \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\epsilon}} \left[ \alpha_{\omega}^* a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}(\vec{\epsilon}, \vec{d}) + \alpha_{\omega} a_{\vec{k}\vec{\epsilon}}^{\dagger}(\vec{\epsilon}, \vec{d}) \right] \quad (I.C.1; 9.a)$$

que l'on compare à celui de notre modèle

$$H'_1 = - \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \left[ \alpha_{\omega}^* a_{\omega} X + \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger} X \right] \quad (I.C.1; 9.b)$$

De même pour termes d'énergie propre:

$$H_2 = \int \frac{d^3 \vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{\epsilon}} \omega \left[ \alpha_{\omega}^*(\vec{\epsilon}, \vec{d}) \right] \left[ \alpha_{\omega}(\vec{\epsilon}, \vec{d}) \right] \quad (I.C.1; 10.a)$$

$$H'_2 = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \left[ \alpha_{\omega}^* X \right] \left[ \alpha_{\omega} X \right] \quad (I.C.1; 10.b)$$

Nous allons maintenant nous intéresser à la valeur des coefficients de couplage qui sont ici imposés par la théorie:

$$\alpha_{\omega} = -i \sqrt{\frac{1}{2\epsilon_0 \omega}} \quad (I.C.1; 11)$$

On peut donner la fonction  $L(\omega)$  qui correspond à ce couplage:

$$L(\omega) = \omega \alpha_{\omega} \alpha_{\omega}^* = \frac{1}{2\epsilon_0} \quad (I.C.1; 12)$$

Cette fonction est constante, ce qui correspond à un couplage normal. Notons cependant que la densité spectrale est différente de celle d'un reservoir monodimensionnel. Pour une dimension d'espace  $D$ , la densité spectrale du couplage normal varie de la manière suivante:

$$\xi(\omega) \propto \omega^D \quad (I.C.1; 13)$$

Ce résultat nous fournit une image physique du réservoir normal monodimensionnel. Celui-ci s'obtient en ne considérant que certains modes du champ électromagnétique. On ne considérera que les modes ayant une direction de propagation fixée, par exemple l'axe des  $y$ , ceci pour passer de trois à une dimension, et un sens de propagation ( $k_y > 0$ ) et une polarisation ( $\vec{\epsilon}$  selon l'axe  $0_x$ ) pour passer du caractère vectoriel à un caractère scalaire et n'avoir qu'un mode par fréquence. Nous noterons d'un chapeau les grandeurs électromagnétiques obtenues de cette manière. Ainsi, les Hamiltoniens  $H_1$  et  $H_2$  deviennent:

$$\hat{H}_2 = - \int_0^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \left\{ \omega \alpha_{\omega}^* a_{k_y} + \omega \alpha_{\omega} a_{k_y}^{\dagger} \right\} d_y \quad (I.C.1; 14)$$

$$\hat{H}_1 = \int_0^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \omega \alpha_{\omega} \alpha_{\omega}^* d_y^2 \quad (I.C.1; 15)$$

Nous disposons maintenant d'un moyen de passage entre l'électromagnétisme et le modèle du réservoir normal monodimensionnel. Nous allons utiliser ce fait pour obtenir de nouveaux renseignements sur le modèle que nous utilisons grâce à ce que nous connaissons de l'électromagnétisme.

### Utilisation de l'analogie

Dans la présentation que nous avons faite du modèle gèneral, le réservoir n'était muni d'aucune structure spatiale ; nous l'avons considéré comme une simple collection d'oscillateurs harmoniques. Nous allons utiliser l'analogie électrodynamique pour donner une structure spatiale à ce réservoir.

En électrodynamique, nous avons rencontré l'opérateur  $\vec{F}(0)$ . Il s'agit de la valeur à l'origine du champ  $\vec{F}(\vec{r})$  dont voici l'expression:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \vec{F}(\vec{r}) = \int \frac{d^3\vec{k}}{(2\pi)^3} \sum_{\vec{z}} \omega \left\{ \alpha_{\omega}^* \bar{c} a_{\vec{k}\vec{z}} e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} + \alpha_{\omega} \bar{c} a_{\vec{k}\vec{z}}^{\dagger} e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}} \right\} \quad (I.C.1; 16)$$

Nous déduisons de cet opérateur le champ  $\hat{F}(y)$  en ne considérant que les modes se dirigeant selon  $0y$  dont le sens de propagation est fixée ( $k_y > 0$ ) et de polarisation selon  $0z$  :

$$\frac{1}{\epsilon_0} \hat{F}(y) = \int_0^{\infty} \frac{dk_y}{2\pi} \omega \left\{ \alpha_{\omega}^* a_{k_y} e^{ik_y y} + \alpha_{\omega} a_{k_y}^{\dagger} e^{-ik_y y} \right\} \quad (I.C.1; 17)$$

On peut maintenant donner une structure spatiale au réservoir normal monodimensionnel en définissant:

$$A(y; t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}(t) e^{i\omega y} + \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger}(t) e^{-i\omega y} \quad (I.C.1; 18.a)$$

$$A^{\text{in}}(y; t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}^{\text{in}}(t) e^{i\omega y} + \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger \text{in}}(t) e^{-i\omega y} \quad (I.C.1; 18.b)$$

$$A^{\text{out}}(y; t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}^{\text{out}}(t) e^{i\omega y} + \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger \text{out}}(t) e^{-i\omega y} \quad (I.C.1; 18.c)$$

L'évolution des champs  $A^{\text{in}}$  et  $A^{\text{out}}$  est libre, on en déduit que leur évolution est une propagation dans le sens des  $y$  croissants:

$$\begin{aligned} A^{\text{in}}(y; t) &= \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}^{\text{in}} e^{-i\omega(t-y)} + \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger \text{in}} e^{i\omega(t-y)} \\ &= A^{\text{in}}(0, t - y) \end{aligned} \quad (I.C.1; 19.a)$$

$$A^{\text{out}}(y; t) = A^{\text{out}}(0; t - y) \quad (C.I.1; 19.b)$$

Nous venons donc de donner une image spatiale des champs libres. Le champ  $A(y; t)$  peut s'exprimer en fonction des champs libres en procédant comme pour l'équation (I.B.1;12) et en utilisant l'expression de  $\xi_{AA}(\tau)$  pour le spectre normal (eq. I.B.3;5):

$$\begin{aligned} A(y; t) &= A^{\text{in}}(y; t) - 2\Gamma \int_0^{\infty} d\tau \delta'(\tau - y) X(t - \tau) \\ &= A^{\text{in}}(y; t) - 2\Gamma \int d\tau \delta'(\tau - y) [X(t - \tau) \theta(\tau)] \\ &= A^{\text{in}}(y; t) + 2\Gamma \int d\tau \delta(\tau - y) \frac{d}{d\tau} [X(t - \tau) \theta(\tau)] \\ A(y; t) &= A^{\text{in}}(y; t) + 2\Gamma \delta(y) X(t) - 2\Gamma \dot{X}(t - y) \theta(y) \end{aligned} \quad (I.C.1; 20.a)$$

De même:

$$A(\mathbf{y}; t) = A^{\text{out}}(\mathbf{y}; t) + 2\Gamma\delta(\mathbf{y})X(t) + 2\Gamma\dot{X}(t - \tau)\theta(-\mathbf{y}) \quad (\text{I.C.1;20.b})$$

Enfin, en exprimant la relation qui donne le champ sortant en fonction du champ entrant on obtient:

$$A(\mathbf{y}; t) = A^{\text{in}}(\mathbf{y}; t)\theta(-\mathbf{y}) + A^{\text{out}}(\mathbf{y}; t)\theta(\mathbf{y}) + 2\Gamma\delta(\mathbf{y})X(t) \quad (\text{I.C.1;21.a})$$

$$= A^{\text{in}}(t - \mathbf{y})\theta(-\mathbf{y}) + A^{\text{out}}(t - \mathbf{y})\theta(\mathbf{y}) + 2\Gamma\delta(\mathbf{y})X(t) \quad (\text{I.C.1;21.b})$$

Remarquons tout d'abord que ces équations, prises en  $\mathbf{y} = 0$ , permettent de retrouver les équations (I.B.3). Pour cela, il faut utiliser les deux propriétés suivantes:

- La valeur à l'origine de la fonction de Heavyside  $\theta(\mathbf{y})$  est  $1/2$ .
- Pour prendre la valeur à l'origine de la distribution de Dirac, il faut utiliser sa transformée de Fourier:

$$\delta(\mathbf{y}) = \int \frac{d\omega}{2\pi} e^{i\omega\mathbf{y}}$$

Ainsi:

$$2\Gamma\delta(0) = \int \frac{d\omega}{2\pi} 2\Gamma = 2 \int \frac{d\omega}{2\pi} 2\Gamma \theta(\omega) = 2 C_A$$

On retrouve ainsi le coefficient du Hamiltonien d'énergie propre.

Venons en maintenant à la structure de  $A(\mathbf{y}; t)$ . Ce champ s'identifie au champ entrant pour les  $\mathbf{y}$  négatifs, cette partie du champ se propage vers le système. Il s'identifie au champ sortant pour les  $\mathbf{y}$  positifs, cette partie s'éloigne du système (cf. figure I.2). Nous obtenons ainsi une image spatiale de l'évolution du champ  $A$  et de la relation entre champ entrant et champ sortant pour le réservoir normal monodimensionnel.

Il faut tout de suite préciser que cette image n'est valable que pour le réservoir normal. Pour d'autres types de couplage, il faut s'en tenir à la définition temporelle des champs entrant et sortant. La raison en est que dans les autres types de couplage, la réponse du réservoir n'est pas instantanée ce qui se traduirait d'un point de vue spatial par une interaction non locale entre le système et le champ.

Nous allons terminer l'étude du réservoir normal en nous intéressant au troisième terme de l'équation (I.C.1;21). Il faut pour cela revenir au sens physique du champ  $\vec{F}(\vec{r})$  : il s'agit ici de l'induction électrique. Ce champ est relié au champ électrique  $\vec{E}(\vec{r})$  et à la densité de polarisation  $\vec{P}(\vec{r})$  par l'équation suivante:

$$\frac{1}{\epsilon_0} \vec{F}(\vec{r}) = \vec{E}(\vec{r}) + \frac{1}{\epsilon_0} \vec{P}(\vec{r}) \quad (\text{I.C.1;22})$$

Dans notre cas,  $\vec{P}(\vec{r})$  est la densité de polarisation créée par un dipôle électrique  $\vec{d}$  placé à l'origine ; son expression est ainsi:

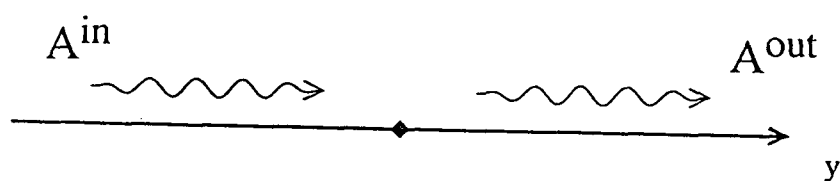
$$\vec{P}(\vec{r}) = \vec{d} \delta(\vec{r}) \quad (\text{I.C.1;23})$$

Ainsi, dans le modèle que nous utilisons et pour le réservoir normal, le troisième terme de ces équations est l'équivalent de la densité de polarisation électrique. L'équivalent du champ électrique est alors le champ:

$$A^{\text{in}}(\mathbf{y}; t) \theta(-\mathbf{y}) + A^{\text{out}}(\mathbf{y}; t) \theta(\mathbf{y})$$

C'est un champ dont la seule singularité se trouve à l'origine et est due à l'émission d'un champ  $A^{\text{out}} - A^{\text{in}}$  par le système non linéaire.

Figure I.2



### Interprétation spatiale de l'entrée sortie

Dans le cas d'un réservoir normal il est possible de donner un sens spatial aux champs entrants et sortants. Le champ entrant correspond aux fluctuations qui se propagent vers le système non linéaire. Le champ sortant correspond aux fluctuations qui partent du système non linéaire.

### Fluctuations du vide et réaction de rayonnement

L'étude que nous venons de faire sur le réservoir monodimensionnel est en fait équivalente à l'étude de la relaxation en électrodynamique, plus particulièrement lors de la séparation entre fluctuations du vide et réaction de rayonnement.

Il a en effet été montré que le champ interagissant avec l'atome peut être décomposé en deux termes. Le premier est un champ évoluant librement et arrivant sur l'atome que l'on appelle fluctuations du vide, il ne dépend pas de l'état atomique. Le second ne dépend que de la susceptibilité du réservoir et de l'évolution atomique, il s'agit d'un terme appelé réaction de rayonnement. Ces résultats ont été obtenus dans le cadre d'équations de Heisenberg Langevin retardées. Dans notre étude du réservoir monodimensionnel, nous avons aussi une décomposition du champ  $A(t)$  en fluctuations du champ entrant et réaction de rayonnement retardée. Il existe une autre décomposition en fluctuations du champ sortant et réaction de rayonnement avancée.

Un autre résultat de l'électrodynamique concerne l'étude du champ en présence d'une source de rayonnement. Celui-ci peut se mettre sous la forme d'une somme entre un champ du vide (champ évoluant librement) et un champ des sources. C'est ce que nous faisons en exprimant le champ  $A(y; t)$  en fonction du champ  $A^{in}(y; t)$  et du champ émis par le système.

### Différences entre modèles

La différence majeure entre le modèle que nous utilisons et l'électrodynamique provient de la dimensionalité du réservoir. Les conséquences peuvent être importantes; alors que les modes ne sont pas dégénérés dans le cas monodimensionnel, ils le sont dans le cas de l'électrodynamique: à une fréquence correspondent plusieurs modes propres. Cette dégénérescence autorise une redistribution des photons dans les modes de même énergie, il s'agit de la diffusion élastique des photons par un atome ou diffusion Rayleigh. Ce phénomène physique est impossible pour un réservoir monodimensionnel car il n'y a pas de modes où l'on puisse redistribuer les photons.

La situation n'est cependant pas dramatique car les phénomènes de relaxation sont semblables dans les deux cas. En effet, tout ce qui est lié au caractère harmonique des réservoirs est inchangé. Or le passage aux équations de Heisenberg Langevin ne dépend que de ce fait.

Une seconde différence provient du caractère vectoriel de l'interaction électromagnétique, et ainsi des problèmes liés à la polarisation du rayonnement incident ou émis. Une bonne compréhension des phénomènes qui se produisent dans le cas du réservoir monodimensionnel sera extrêmement utile pour l'étude du champ électromagnétique.

### I.C.1.b. Atome dans une cavité

Lors des dernières années, l'électrodynamique quantique en cavité a suscité de nombreuses études tant théoriques qu'expérimentales. Un phénomène particulièrement intéressant est l'inhibition ou l'augmentation de l'émission spontanée d'un atome placé dans une cavité.

On peut comprendre simplement ce phénomène de la manière suivante. L'atome est couplé au rayonnement par l'intermédiaire de la cavité. Celle-ci modifie le couplage entre l'atome et les différents modes du champ. Les modes résonnants voient leur couplage avec l'atome augmenté alors que les autres le voient diminué. Ainsi selon la position de la fréquence atomique, l'émission spontanée peut être augmentée ou diminuée.

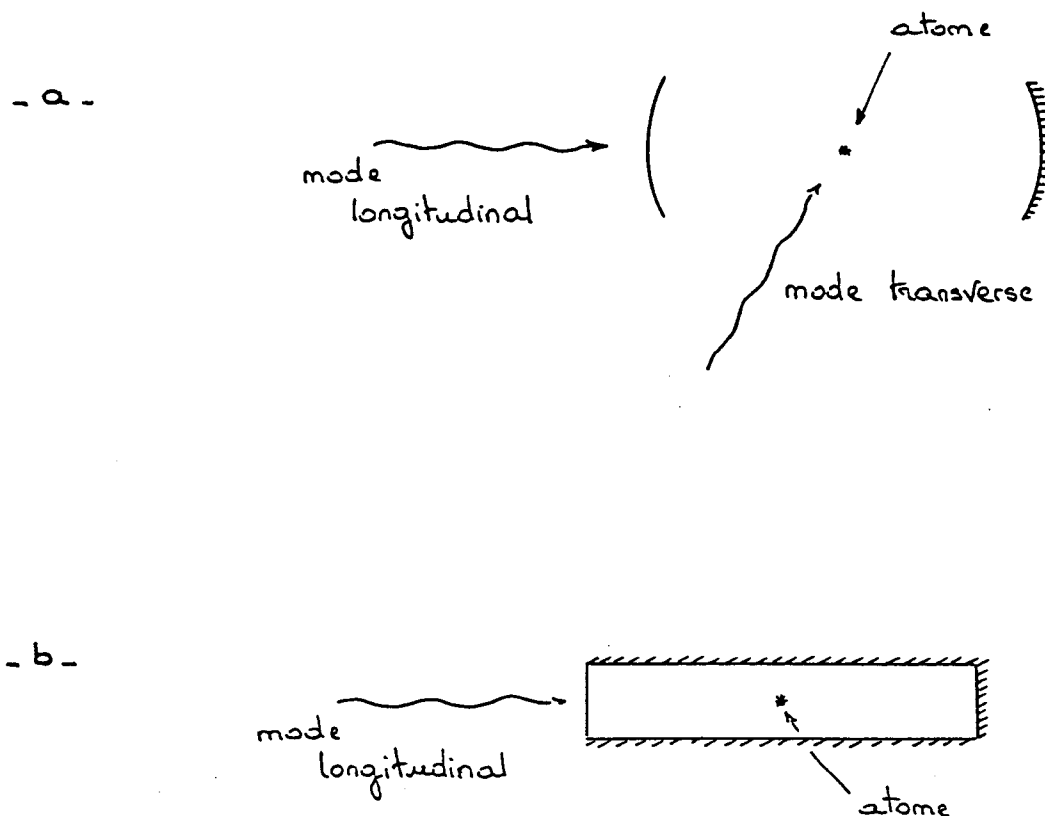
Une cavité peut donc être utilisée pour privilégier le couplage de l'atome avec certains modes du champ électromagnétique. Les modes du champ doivent alors être scindés en deux groupes: les modes dont le couplage est modifié par la cavité et ceux dont le couplage n'est pas affecté.

Dans le cas d'une cavité ouverte, ces deux types de modes sont présents (voir figure I.3.a). Les modes entrant par le miroir sont affectés par la présence de la cavité. Les modes latéraux ne sont pas affectés par la présence de la cavité. Cependant, leur influence relative est diminuée par rapport aux modes de la cavité qui jouent un rôle dominant.

Dans le cas d'une cavité de type guide d'onde, tous les modes sont affectés (voir figure I.3.b). Seuls les modes entrant par le "miroir" dans la cavité sont présents. On considérera pour simplifier que cette cavité sélectionne une seule direction de propagation et de polarisation pour les modes couplés à l'atome. On retrouve l'idée d'un continuum harmonique monodimensionnel. Cependant, le spectre de couplage ne sera pas le spectre normal mais présentera des résonances.

Pour de bonnes cavités (lorsque l'influence des modes latéraux est négligeable) ou pour des cavités fermées, le modèle du continuum monodimensionnel est directement utilisable. Toutefois, il pourra être intéressant d'étudier des situations où les modes latéraux restent présents. Nous considérerons alors un modèle plus général où l'atome est couplé à deux réservoirs. Le premier de ces réservoirs est un continuum monodimensionnel qui correspond aux modes de la cavité et dont la densité spectrale donc varier de manière très importante avec la fréquence. Le second réservoir correspond aux modes latéraux. Il nous permet de traiter de manière simple les imperfections de la cavité. Pour simplifier, nous le supposerons aussi monodimensionnel et nous prendrons une densité spectrale de couplage normale.

Figure I.3



### Deux types de cavité en électrodynamique

#### -a- cavité ouverte

Il existe dans ce cas deux types de modes.

Les modes transverses: ces modes correspondent aux fluctuations qui arrivent sur l'atome par les cotés de la cavité. Leur couplage avec l'atome n'est pas modifié par la cavité.

Les modes longitudinaux: ces modes correspondent au champ qui entre dans la cavité par le miroir. Leur couplage avec l'atome est modifié.

#### -b- cavité fermée

Seuls les modes longitudinaux peuvent entrer dans la cavité. Le couplage entre ces modes et l'atome est fortement modifié.

## I.C.2. Systèmes électroniques

Après avoir étudié quelques problèmes que l'on rencontre en physique atomique, nous en venons à un autre domaine, celui des systèmes électroniques dissipatifs. Le dipôle non linéaire sera par exemple une jonction Josephson.

Comme les jonctions Josephson sont peu connues dans le domaine de la physique atomique, nous commencerons cette partie par une présentation de ces systèmes. Nous montrerons ensuite que leur couplage à des résistances peut être modélisé par l'effet d'un réservoir harmonique monodimensionnel. Ceci nous permettra de montrer que notre modèle général correspond de manière assez précise à ces systèmes.

### I.C.2.a. Présentation du système

Nous étudions d'abord un circuit  $LC$  afin de nous familiariser avec la description quantique d'un oscillateur électrique. Nous traitons ensuite le cas d'un système contenant une jonction Josephson.

#### $\alpha$ . Le circuit $LC$

D'un point de vue classique, l'état du circuit  $LC$  est décrit par la charge  $q$  du condensateur et le flux magnétique  $\varphi$  qui traverse l'inductance (voir figure I.4). Deux grandeurs électriques caractérisent l'état du circuit; il s'agit de la tension  $u$  aux bornes de la capacité et de l'intensité  $i$  parcourant le circuit.

Différentes équations relient les grandeurs que nous venons d'introduire. Il s'agit d'une part d'équations caractéristiques des éléments présents dans le circuit:

$$q = Cu \quad (I.C.2; 1.a)$$

$$\varphi = -Li \quad (I.C.2; 1.b)$$

où  $C$  est la capacité du condensateur et  $L$  l'inductance de la bobine.

Nous avons d'autre part deux équations dynamiques reliant les grandeurs électriques à la dérivée temporelle des variables du système:

$$\dot{q} = i \quad (I.C.2; 2.a)$$

$$\dot{\varphi} = u \quad (I.C.2; 2.b)$$

Nous obtenons ainsi un système d'équations régissant l'évolution du système:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{C} q \quad (I.C.2; 3.a)$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{L} \varphi \quad (I.C.2; 3.b)$$

Ce sont les équations d'évolution d'un oscillateur harmonique. Regardons tout de suite l'analogie avec un oscillateur harmonique mécanique. Les équations d'évolution sont dans ce cas:

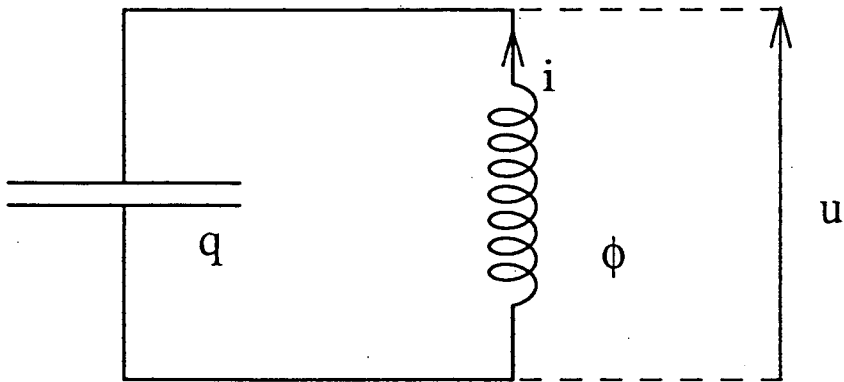
$$\dot{x} = \frac{1}{m} p \quad (I.C.2; 4.a)$$

$$\dot{p} = -k x \quad (I.C.2; 4.b)$$

où  $x$  est la position et  $p$  l'impulsion de l'oscillateur. L'analogie électrique de la variable position est donc ici le flux traversant l'inductance.



Figure I.4



**Circuit L C**

La charge de la capacité C est  $q$  et le flux de l'inductance L est  $\phi$ .

Par analogie avec la mécanique, nous choisissons  $\varphi$  comme variable dynamique pour mettre en place une formulation Lagrangienne. Nous obtenons à l'aide de cette variable une énergie potentielle  $E_p$  et une énergie cinétique  $E_c$  :

$$E_p = \frac{1}{2L} \varphi^2 \quad (I.C.2; 5.a)$$

$$E_c = \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 \quad (I.C.2; 5.b)$$

Le Lagrangien du système est donc:

$$\mathcal{L}(\varphi; \dot{\varphi}) = \frac{1}{2} C \dot{\varphi}^2 - \frac{1}{2L} \varphi^2 \quad (I.C.2; 6)$$

Ce Lagrangien nous permet d'obtenir la variable conjuguée de  $\varphi$  :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = C \dot{\varphi} = q \quad (I.C.2; 7)$$

La variable conjuguée du flux magnétique traversant l'inductance est la charge électrique du condensateur. Le Hamiltonien du système est alors:

$$\mathcal{H}(\varphi; q) = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2L} \varphi^2 \quad (I.C.2; 8)$$

On retrouve alors les équations du circuit  $LC$  comme des équations de Hamilton:

$$\dot{\varphi} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial q} = \frac{1}{C} q \quad (I.C.2; 9.a)$$

$$\dot{q} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \varphi} = -\frac{1}{L} \varphi \quad (I.C.2; 9.b)$$

Nous pouvons maintenant passer à une description quantique de ce système en utilisant la procédure de quantification canonique. Les variables  $q$  et  $\varphi$  deviennent deux observables  $Q$  et  $\phi$ . Ces deux opérateurs conjugués vérifient la relation de commutation canonique:

$$[\phi; Q] = i \quad (I.C.2; 10)$$

Le Hamiltonien régissant l'évolution de ce système est:

$$H_s = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2L} \phi^2 \quad (I.C.2; 11)$$

Les équations de Heisenberg sont:

$$\dot{\phi} = i [H_s; \phi] = \frac{1}{C} Q \quad (I.C.2; 12.a)$$

$$\dot{Q} = i [H_s; Q] = -\frac{1}{L} \phi \quad (I.C.2; 12.b)$$

### $\beta$ . La jonction libre

Une jonction Josephson peut être considérée comme une inductance non linéaire. En effet, la loi qui relie l'intensité qui la traverse et le flux magnétique  $\varphi$  est la loi découverte par Josephson:

$$I = -I_0 \sin \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \quad (I.C.2;13)$$

où  $I_0$  est l'intensité Josephson, une caractéristique de la jonction et où  $\varphi_0$  est le quantum de flux:

$$\varphi_0 = \frac{\hbar}{2e} \quad (I.C.2;14)$$

On note que la charge  $q = 2e$  intervenant dans l'expression du flux élémentaire provient de l'appariement en paires des électrons dans un supraconducteur. Le système est schématisé figure I.5. La capacité  $C$  est la capacité de la fonction Josephson elle-même.

La relation de Josephson peut être comparée à la relation (I.C.2;1.b) que nous avons utilisée pour l'inductance. L'intensité était alors une fonction linéaire du flux. C'est pour cette raison qu'il est possible de dire qu'une jonction Josephson est une inductance non linéaire.

De l'équation de Josephson (I.C.2;13), nous tirons une équation d'évolution pour la charge  $q$  du condensateur:

$$\dot{q} = -I_0 \sin \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) = -\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -\varphi_0 I_0 \cos \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \quad (I.C.2;15)$$

Il est encore possible d'utiliser un formalisme Hamiltonien avec:

$$\mathcal{H} = \frac{1}{2C} q^2 + U(\varphi) \quad (I.C.2;16)$$

où l'on a noté

$$U(\varphi) = -I_0 \varphi_0 \cos \left( \frac{\varphi}{\varphi_0} \right) \quad (I.C.2;17)$$

$U(\varphi)$  est le nouveau terme d'énergie potentielle. Il remplace le potentiel harmonique de l'inductance. De la même manière que pour l'oscillateur harmonique, nous pouvons quantifier canoniquement ce système. On obtient ainsi le Hamiltonien  $H_S$  suivant:

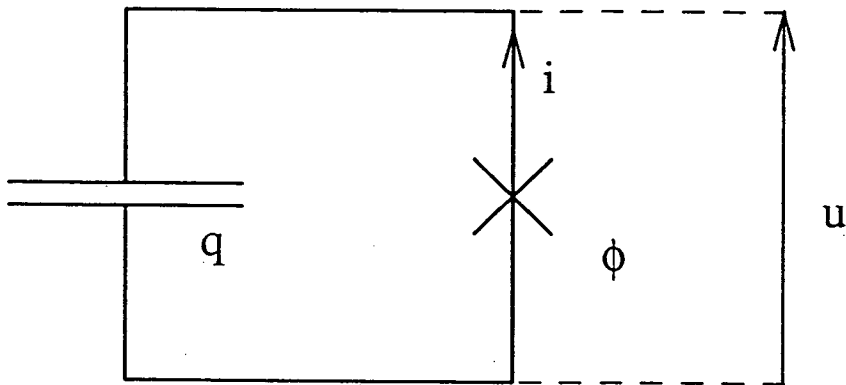
$$H_S = \frac{1}{2C} Q^2 + U(\phi) \quad (I.C.2;18)$$

et les équations de Heisenberg:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{C} Q \quad (I.C.2;19.a)$$

$$\dot{Q} = -\frac{\partial U(\phi)}{\partial \phi} = -I_0 \sin \left( \frac{\phi}{\varphi_0} \right) \quad (I.C.2;19.b)$$

Figure I.5



### jonction Josephson

La charge de la capacité  $C$  est  $q$  et le flux de l'inductance "non linéaire" est  $\phi$ .

### γ. La jonction polarisée

En imposant un courant continu dans la jonction, il est possible de transformer le potentiel sinusoïdal que nous avons présenté. Les équations d'évolution sont en effet modifiées puisque l'intensité qui traverse la jonction devient:

$$I = I_P - I_0 \sin \left( \frac{\phi}{\varphi_0} \right) \quad (I.C.2; 20)$$

L'équation d'évolution de la charge  $q$  est alors

$$\dot{Q} = -I_0 \sin \left( \frac{\phi}{\varphi_0} \right) + I_P = - \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( -I_P \phi - \varphi_0 I_0 \cos \left( \frac{\phi}{\varphi_0} \right) \right) \quad (I.C.2; 21)$$

Ceci correspond donc à un Hamiltonien:

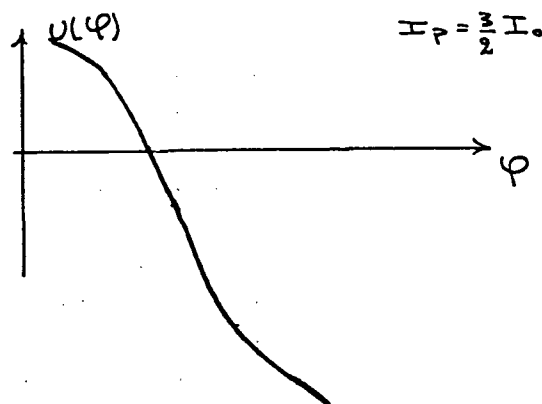
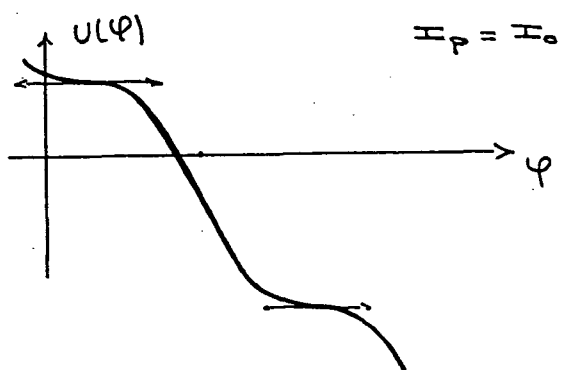
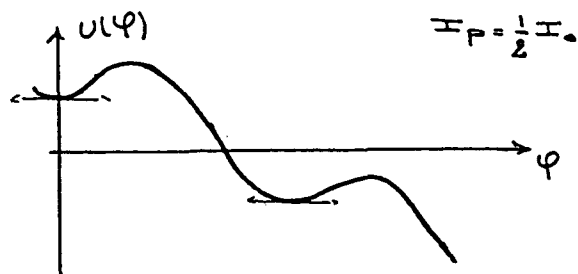
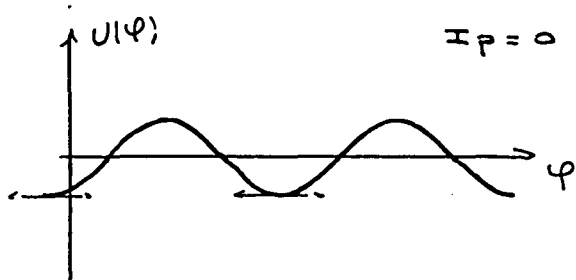
$$H_S = \frac{1}{2C} Q^2 + U_p(\phi) \quad (I.C.2; 22.a)$$

où

$$U_p(\phi) = -I_P \phi - \varphi_0 I_0 \cos \left( \frac{\phi}{\varphi_0} \right) \quad (I.C.2; 22.b)$$

Lorsque  $I_P$  est inférieur à  $I_0$  ce potentiel présente des minima qui sont d'autant moins profonds que  $I_P$  est proche de  $I_0$  (voir figure I.6).

Figure I.6



**Potentiels  $U(\varphi)$  intervenant dans la description Hamiltonienne de la jonction Josephson**

Les potentiels représentés correspondent à différentes intensités de polarisation  $I_p$ . Pour  $I_p < I_0$ , ce potentiel présente des minima; pour  $I_p > I_0$ , il n'y a plus de minimum.

#### δ. Propriétés physiques d'une jonction Josephson

Les jonctions Josephson que nous considérons ici ont une taille de  $25 \mu\text{m}^2$ . L'épaisseur de la barrière isolante qui sépare les deux domaines supraconducteurs est de l'ordre du nanomètre. Les grandeurs électriques caractérisant ces systèmes sont une capacité  $C$  de quelques picofarad et une intensité Josephson  $I_0$  de  $10 \mu\text{A}$ .

Ces valeurs, ajoutées au fait que la réalisation de systèmes comprenant ces jonctions se fait expérimentalement à l'aide de fils et de soudures indiquent qu'il s'agit d'un système macroscopique.

Au début de l'étude expérimentale de ces systèmes, une description classique suffisait à expliquer leurs propriétés physiques et en particulier leur caractéristique courant-tension (voir figure I.7). Nous allons donc commencer par discuter cet aspect du problème.

La caractéristique est obtenue en faisant varier l'intensité à partir d'une valeur nulle et en l'augmentant progressivement. On observe alors que la tension aux bornes de la jonction reste nulle puis, à partir d'une intensité  $I_P$  passe à une valeur  $V_s$  qu'elle conserve lorsque l'on continue à augmenter l'intensité. La tension  $V_s$  est la tension de switching dont une valeur typique est  $2\text{mV}$ .

La description que nous avons faite de la jonction nous permet de comprendre cette caractéristique. La variation de l'intensité  $I$  se traduit par une déformation du potentiel  $U(\varphi)$  auquel est soumise la jonction (figure I.8). Lorsque l'intensité est nulle, le flux est au fond d'un puits, sa "vitesse" est nulle ainsi que la tension aux bornes de la jonction. Tant que l'intensité reste inférieure à l'intensité critique (qui est l'intensité Josephson), le potentiel présente toujours des minima locaux; le flux est donc bloqué et la tension reste nulle. Dès que l'intensité critique est dépassée, le potentiel ne présente plus aucun minimum, le flux se met donc à "dévaler" la pente de plus en plus rapidement; la tension augmente simultanément. Les équations prédisent alors que la vitesse de la phase (et donc la tension) devrait diverger. Cependant se produit alors de la dissipation dans la jonction ce limite la tension à une valeur maximale, la tension de switching.

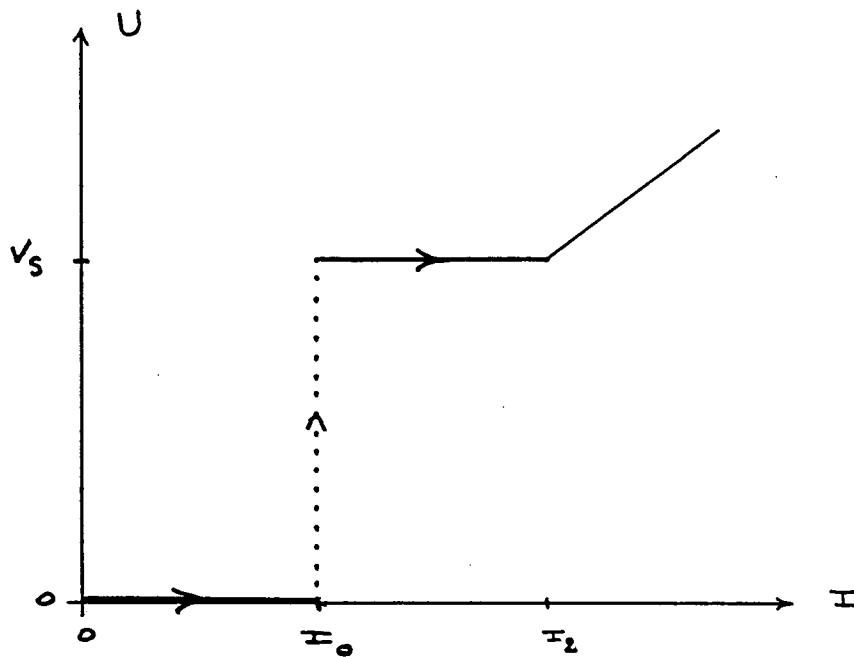
Récemment, un nouveau phénomène a pu être mis en évidence. En suivant la même procédure que pour tracer la caractéristique mais en s'arrêtant avant d'atteindre l'intensité critique, on a observé que, alors que la description classique prévoit que la tension doit rester nulle celle-ci pouvait passer à la valeur  $V_s$  et ceci avec une probabilité qui augmente lorsque l'intensité à laquelle on se place se rapproche de l'intensité critique. On pourrait penser pouvoir expliquer ce phénomène par une activation thermique: plus l'on se rapproche de l'intensité critique moins le puits de potentiel est profond et donc plus la probabilité d'activation est grande. Lorsqu'on se place à très basse température ce n'est pas la bonne interprétation

Bien que l'étude de ce phénomène présente de grosses difficultés expérimentales, il a en fait été montré que la "sortie" du puits de potentiel doit être attribuée à un effet tunnel et non à une activation thermique. Une description quantique de ce système électrique est donc nécessaire. Le traitement quantique que nous avons présenté (qui consiste en une quantification canonique des équations classiques) permet une très bonne description de ce système quantique.

Ces mesures d'effet tunnel ont non seulement une importance théorique (mise en évidence de propriétés quantiques d'un système macroscopique) mais aussi une très grande importance expérimentale. Elles sont en effet devenues un outil permettant de sonder les propriétés de ces jonctions. C'est ainsi que l'on a pu mettre en évidence la présence de niveaux discrets d'énergie dans le puits de potentiel: lorsque le flux se trouve dans un état excité à l'intérieur du puits, sa probabilité de passage par effet tunnel est plus importante que lorsqu'elle se trouve dans le fondamental (figure I.9). La jonction, placée initialement dans le fondamental, est excitée par un signal micro-onde sinusoïdal. L'expérience, répétée pour des fréquences d'excitation différentes montre que la probabilité de sortie par effet tunnel présente des résonances. Ceci est la traduction du fait que, lorsque la micro-onde est résonnante avec une transition entre niveaux, la jonction passe de l'état fondamental à l'état excité et la probabilité tunnel est augmentée.

On pourra donc dans certains cas considérer un circuit contenant une jonction Josephson comme un "atome électrique" possédant des niveaux d'énergie discrets.

Figure I.7

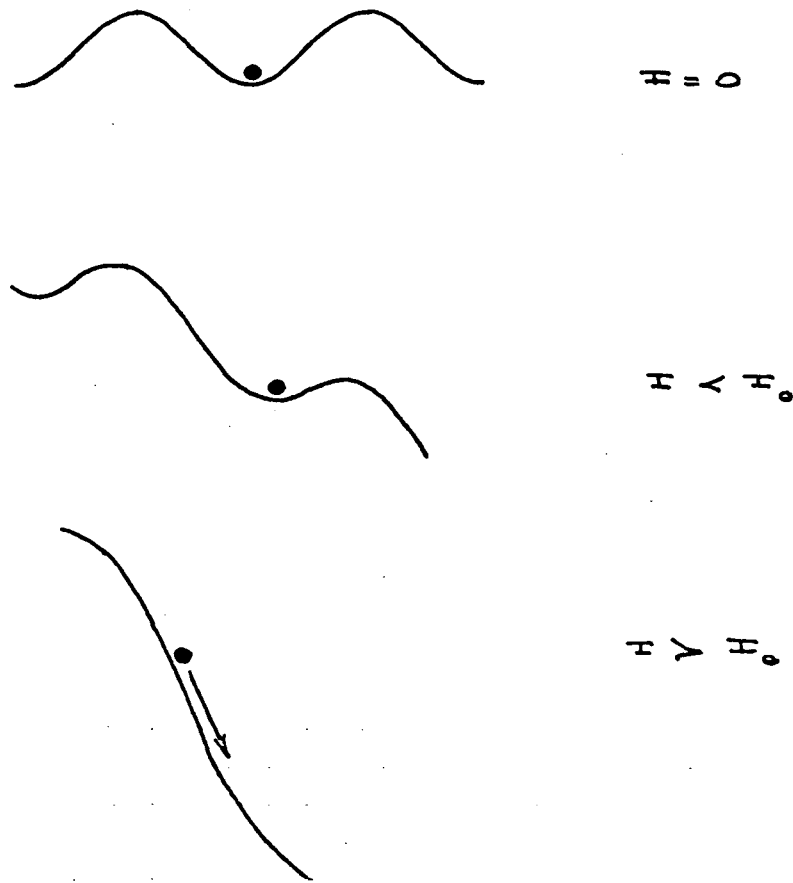


### Caractéristique d'une jonction Josephson

Cette caractéristique est obtenue en partant de  $I=0$ .  $I_0$  est l'intensité Josephson et  $V_S$  la tension de switching.



Figure I.8

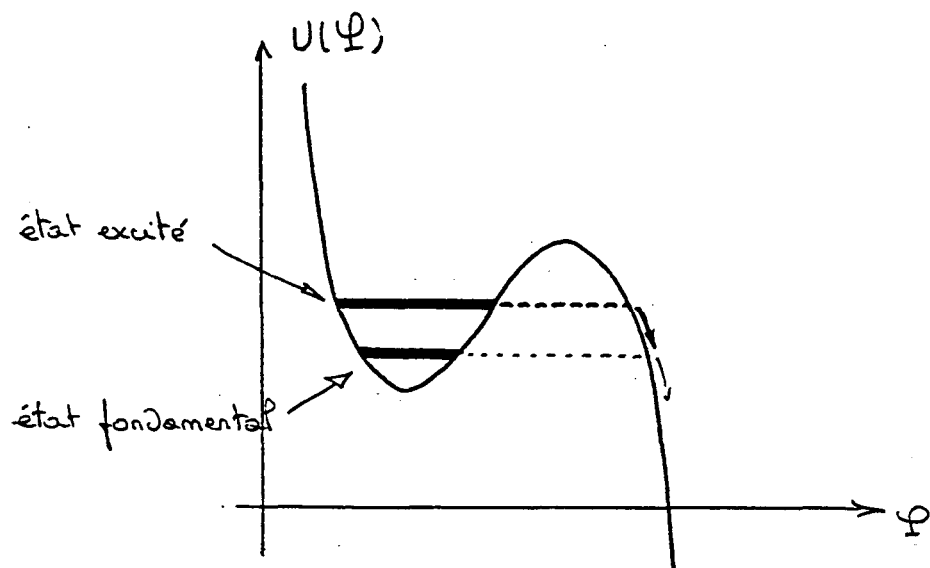


### Les différents régimes pour l'évolution de la phase

Pour une intensité de polarisation inférieure à l'intensité Josephson, la phase reste bloquée au fond du puits.

Lorsque l'intensité de polarisation est supérieure à l'intensité Josephson, il n'y a pas de puits et la phase dévale la pente.

Figure I.9



### Sortie du puits par effet tunnel

La probabilité de sortir du puits par effet tunnel est plus importante lorsque le système est dans un état excité que lorsqu'il est dans le fondamental.

### I.C.2.b. Le système en présence de dissipation

Nous pouvons maintenant aborder le problème de la dissipation. Comme précédemment, nous considérons d'abord le circuit  $LC$ . Nous établissons les équations d'évolution classique de ce système en présence de dissipation. Nous présentons ensuite le point de vue quantique.

#### α. Point de vue classique

La dissipation est obtenue à l'aide d'une résistance  $R$  (voir figure I.10). De même que précédemment, l'état du système électrique est caractérisé par la charge  $q$  de la capacité et le flux  $\varphi$  de l'inductance. Les grandeurs électriques à considérer sont au nombre de trois. Ce sont la tension  $u$  aux bornes de la capacité, l'intensité  $i$  traversant l'inductance et l'intensité  $i_R$  traversant la résistance. Les équations qui relient ces grandeurs sont les suivantes:

-i- équations caractérisant les éléments:

$$q = Cu \quad (I.C.2; 23.a)$$

$$\varphi = -Li \quad (I.C.2; 23.b)$$

$$U = Ri_R \quad (I.C.2; 23.c)$$

-ii- équations dynamiques:

$$\dot{q} = i - i_R \quad (I.C.2; 24.a)$$

$$\dot{\varphi} = u \quad (I.C.2; 24.b)$$

Les équations d'évolution du système sont ainsi

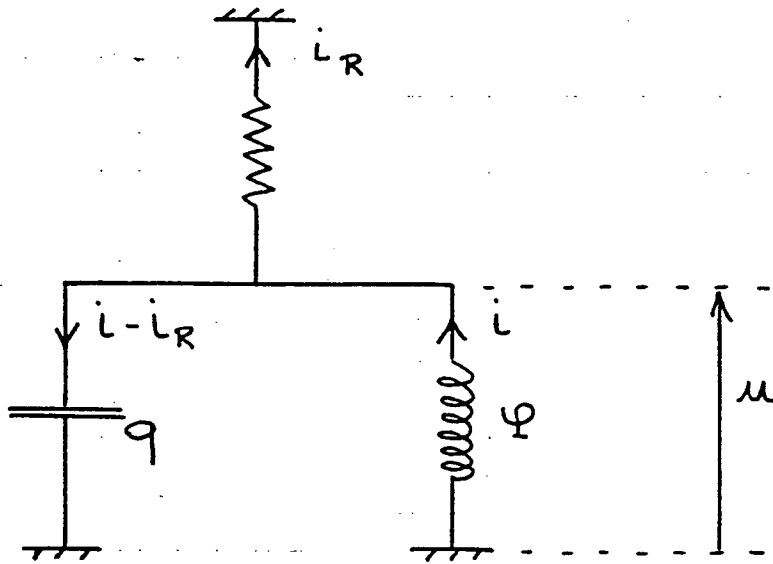
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{C} q \quad (I.C.2; 25.a)$$

$$\dot{q} = -\frac{1}{L} \varphi - \frac{1}{RC} q \quad (I.C.2; 25.b)$$

Dans le traitement quantique, nous essayerons d'obtenir ces mêmes équations de Heisenberg avec une formulation Hamiltonienne. Or, les systèmes Hamiltoniens sont des systèmes conservatifs alors qu'ici, nous désirons traiter la dissipation.

Il est possible cependant de contourner ce problème en suivant la méthode proposée initialement par Nyquist [55]. Un équivalent électrique de la résistance est en effet une ligne coaxiale dont l'impédance caractéristique est la résistance  $R$ . Une ligne coaxiale présente l'avantage de pouvoir être modélisée par un réservoir harmonique monodimensionnel. Nous n'étudierons pas comment l'on passe de la ligne au réservoir mais nous verrons qu'en développant l'idée de réservoir harmonique, l'image d'une ligne coaxiale apparaît spontanément.

Figure I.10



Circuit R L C

$\beta$ . Point de vue quantique

Nous désirons maintenant trouver un Hamiltonien pour lequel les équations de Heisenberg sont:

$$\dot{\phi} = \frac{1}{C} Q \quad (I.C.2; 26.a)$$

$$\dot{Q} = -\frac{1}{L} \phi - \frac{1}{RC} Q \quad (I.C.2; 26.b)$$

Considérons le système constitué du circuit  $LC$  couplé à un réservoir harmonique monodimensionnel et utilisons pour cela le Hamiltonien de l'équation (I.C.2;7) où l'on a utilisé l'analogie électricité  $\leftrightarrow$  mécanique:

$$\begin{array}{lcl} \phi & \leftrightarrow & X \\ Q & \leftrightarrow & P \\ C & \leftrightarrow & M \\ \frac{1}{2L} \phi^2 & \leftrightarrow & V(X) \end{array}$$

Celui-ci s'écrit:

$$H = \frac{1}{2C} Q^2 + \frac{1}{2L} \phi^2 + \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega a_{\omega}^{\dagger} a_{\omega} - A\phi + C_A \phi^2 \quad (I.C.2; 27)$$

Nous pouvons nous intéresser aux équations d'évolution qui éliminent la dynamique du réservoir, c'est-à-dire aux équations de Langevin. Tout d'abord regardons les équations retardées (ce sont les équations habituelles)

$$\dot{\phi}(t) = \frac{1}{C} Q(t) \quad (I.C.2; 28.a)$$

$$\dot{Q}(t) = -\frac{1}{L} \phi(t) - \int_0^{\infty} d\tau \gamma(\tau) \dot{\phi}(t-\tau) + A_{in}(t) \quad (I.C.2; 28.b)$$

Afin d'obtenir des équations sans force de Langevin, nous prenons la valeur moyenne de ces équations

$$\langle \dot{\phi}(t) \rangle = \frac{1}{C} \langle Q(t) \rangle \quad (I.C.2; 29.a)$$

$$\langle \dot{Q}(t) \rangle = -\frac{1}{L} \langle \phi(t) \rangle - \int_0^{\infty} d\tau \gamma(\tau) \langle \dot{\phi}(t-\tau) \rangle \quad (I.C.2; 29.b)$$

Le choix du réservoir normal ( $\gamma(\tau) = \Gamma(\tau)$ ) nous permet d'obtenir une dissipation proportionnelle à la valeur instantanée de  $\dot{\phi}$  comme nous le désirons. Afin d'obtenir le bon coefficient de friction nous prenons:

$$\Gamma = \frac{1}{R} \quad (I.C.2; 30)$$

L'équation d'évolution de la charge est ainsi:

$$\dot{Q} = -\frac{1}{L} \phi - \frac{1}{R} \dot{\phi} + A_{in}(t) \quad (I.C.2; 31)$$

Nous avons réussi à obtenir des équations de Heisenberg qui correspondent aux équations classiques en présence de dissipation. Il y a néanmoins une différence importante: les équations contiennent une force aléatoire  $A_{in}(t)$ . L'existence d'un théorème de fluctuation dissipation justifie ce fait: on ne peut avoir de

dissipation sans fluctuations. Les fluctuations que nous venons de trouver constituent le bruit Nyquist, un bruit que l'on retrouve chaque fois que l'on utilise une résistance.

Il faut d'autre part noter que nous devons utiliser un réservoir normal. Utilisons donc les résultats obtenus dans la partie précédente. Nous disposons d'un champ  $A(y;t)$  s'identifiant au champ sortant pour les  $y$  positifs et au champ entrant pour les  $y$  négatifs, ces deux champs se propageant librement (voir figure I.11.a). Définissons à partir de ce champ un champ  $B(y;t)$  pour les  $y$  positifs de la manière suivante:

$$B(y;t) = A(y;t)\theta(y) + A(-y;t)\theta(-y) \quad (I.C.2;32)$$

Il s'agit d'un champ dont une partie ( $A^{\text{in}}$ ) se propage dans un sens et l'autre ( $A^{\text{out}}$ ) dans l'autre (voir figure I.11.b). On retrouve ainsi la notion de ligne coaxiale dont nous venons, indirectement, de donner un traitement quantique. Le schéma électrique du système devient alors celui de la figure I.11.c.

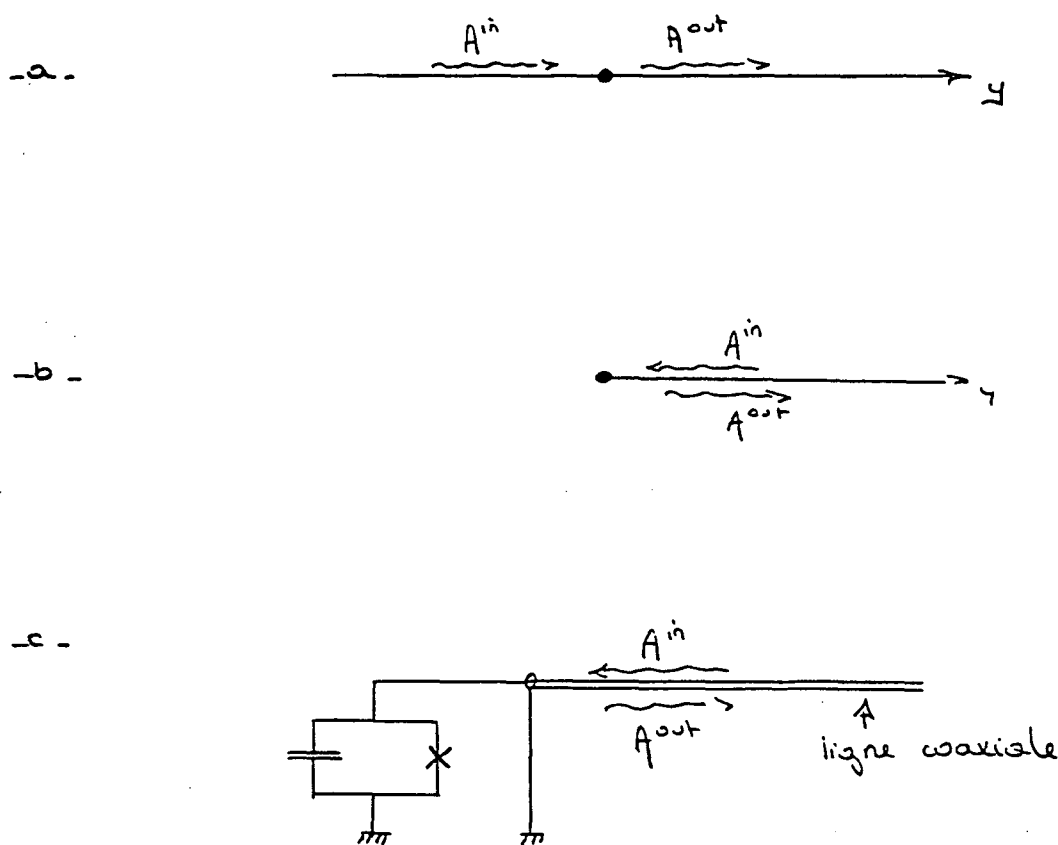
Ceci nous permet ainsi, dans le cadre des systèmes électroniques, de donner une image physique des champs entrants et sortants pour le réservoir normal. D'un point de vue pratique, le champ entrant correspond aux fluctuations que l'on envoie dans la ligne et que l'on peut donc contrôler, soit en envoyant un état comprimé, soit en n'envoyant rien (ce sera dans ce cas les fluctuations du vide). Cela montre aussi que les fluctuations du champ qui reviennent dans la ligne sont les fluctuations du champ sortant.

Il est expérimentalement possible de contrôler les fluctuations que l'on envoie tout en mesurant celles qui reviennent. Ceci peut se faire en utilisant un circulateur (voir figure I.12.a). Ce dispositif a la propriété suivante: un signal qui arrive dans le circulateur par la voie  $A$  en repart par la voie  $B$ , un signal qui arrive par la voie  $B$  repart par la voie  $C$  et un signal qui arrive par la voie  $C$  repart par la voie  $A$  (schéma de la figure I.12.b). L'émetteur de fluctuations permet de contrôler le champ  $A^{\text{in}}$  qui arrive sur le système non linéaire. L'utilisation du circulateur permet alors de rendre possible une étude du champ  $A^{\text{out}}$  en lui imposant d'aller vers un détecteur au lieu de revenir sur l'émetteur.

Il faut enfin souligner que les circuits électriques peuvent eux aussi comporter l'équivalent de cavités optiques: les "éléments réservoir" ("tank circuit"). Considérons par exemple le cas de deux lignes coaxiales dont les impédances ne sont pas adaptées; les champs qui se propagent dans ces lignes subissent alors une réflexion au point de couplage de ces deux lignes; on dispose ainsi de l'équivalent électrique d'un miroir. La figure I.13 montre comment ceci est utilisé pour réaliser une cavité en électronique.

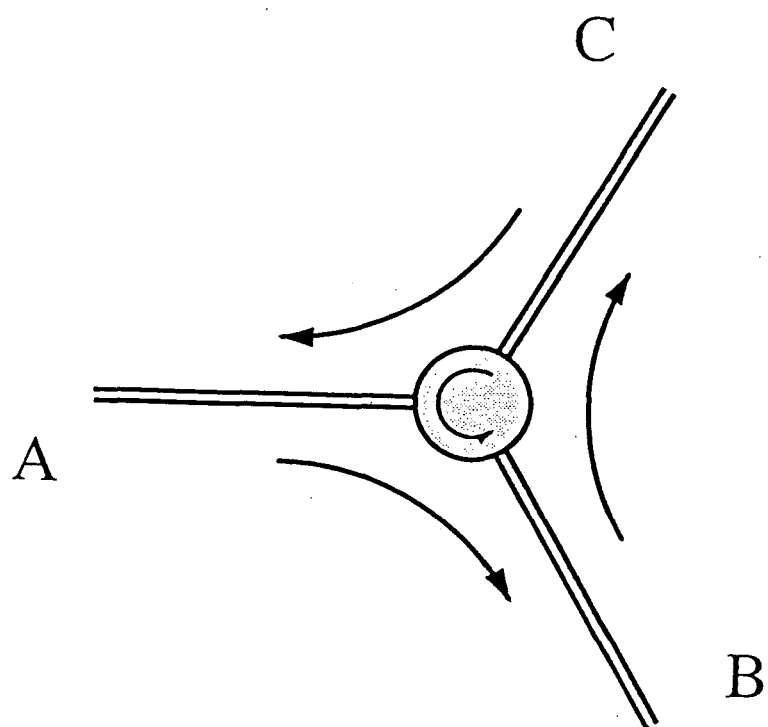
En conclusion, nous venons de voir que dans le cadre de l'électronique, on peut réaliser des "atomes" (ie: des systèmes à quelques niveaux), que le modèle du réservoir harmonique monodimensionnel s'applique exactement et que l'on peut construire des cavités. On pourra donc concevoir des applications de notre modèle aussi bien en électrodynamique qu'en électronique. Nous reviendrons sur ce point dans la partie II.

Figure I.11



Fluctuations entrantes et sortantes pour les circuits électriques

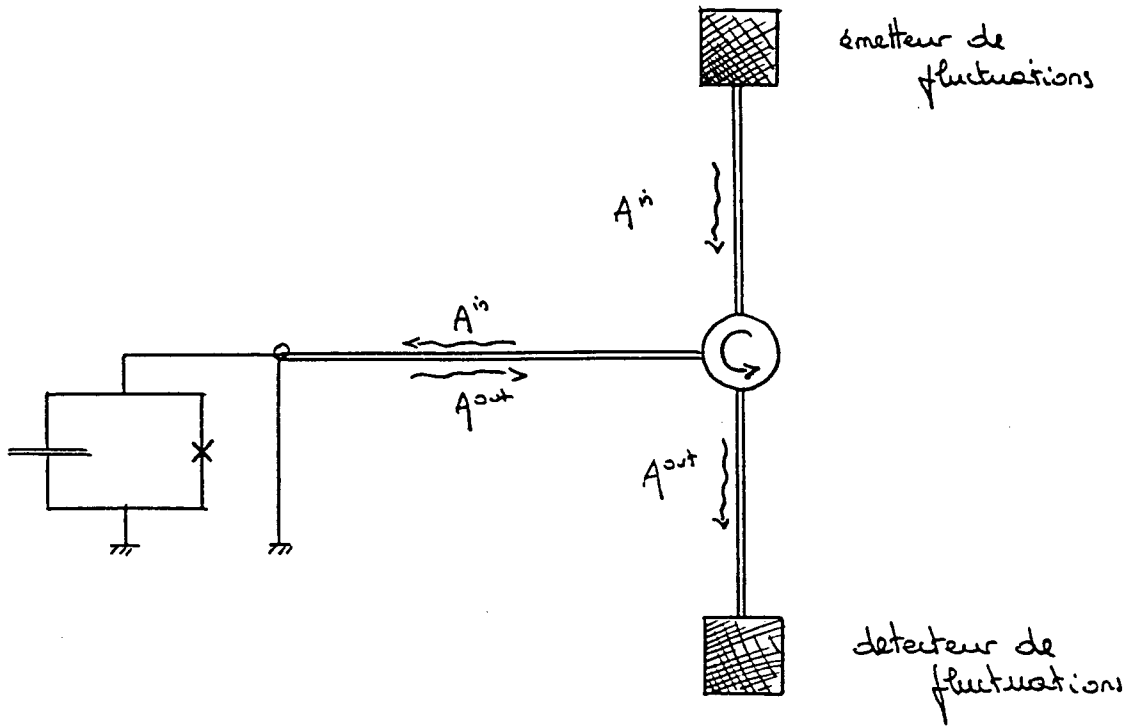
Figure I.12a



Circulateur à trois entrées



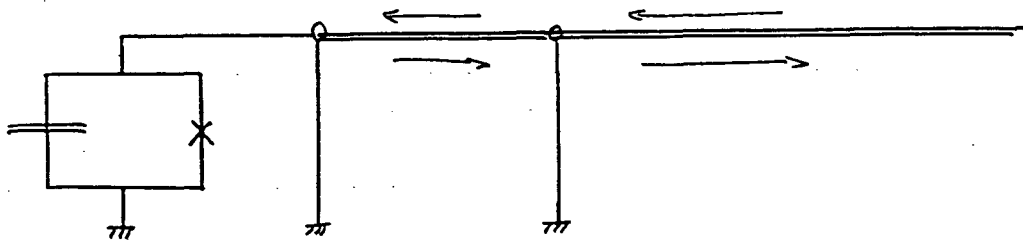
Figure I.12b



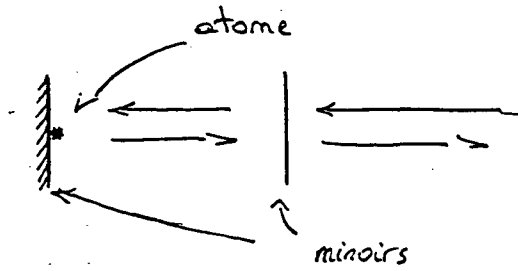
Utilisation d'un circulateur pour éviter que les fluctuations sortantes retournent vers l'émetteur de fluctuations

Figure I.13

a.



b.



Cavité électronique et cavité optique

## I.D. Un modèle de cavité

Dans la partie I.C, nous avons évoqué le rôle que peut jouer une cavité, en particulier par des effets d'inhibition ou d'augmentation de l'émission spontanée. Nous avons expliqué ces phénomènes par une modification de la densité spectrale de couplage entre le champ et le système non linéaire. Le but de ce chapitre est de préciser cette idée.

Pour cela nous allons dans un premier temps étudier un modèle réaliste de cavité obtenu à partir de miroirs. L'étude de la propagation des champs nous permettra d'obtenir des équations de Langevin pour l'évolution du système non linéaire. Nous montrerons en particulier que l'on peut relier les forces de Langevin qui agissent sur le système non linéaire aux champs qui arrivent sur la cavité ou qui en repartent. Nous montrerons ensuite qu'il est possible d'obtenir les mêmes équations de Langevin pour l'évolution du système non linéaire en considérant que celui-ci est couplé à un réservoir harmonique monodimensionnel dont la densité spectrale reflète les résonances de la cavité.

Nous donnerons alors la relation qui existe entre les champs entrant et sortant de ce modèle et les champs qui arrivent et repartent de la cavité. Nous obtiendrons ainsi une expression du champ qui repart de la cavité en fonction du champ qui arrive sur la cavité.

Nous étudierons pour terminer la situation où seul un des modes de la cavité est important.

### I.D.1. Modèle avec propagation de champs

#### I.D.1.a. Présentation

Le modèle de cavité que nous étudions correspond à des situations que l'on peut rencontrer en électrodynamique ou en électronique.

La situation en l'électrodynamique est celle d'une cavité en anneau où l'on ne considère qu'un sens de propagation. Il correspond à la figure I.14.a. Dans ce modèle, nous ne considérons pas les modes latéraux du champ pour les raisons que nous avons évoquées dans la section I.C.1.

La situation en l'électronique est celle d'une cavité obtenue en couplant deux lignes dont les impédances ne sont pas adaptées. Ceci permet de faire un "miroir" pour les signaux électriques (voir figure I.14.b).

Dans les deux cas, les interprétations des champs et les relations qu'ils ont entre eux sont les mêmes.

Il faut en particulier noter que les champs  $A^{\text{in}}$  et  $A^{\text{out}}$  correspondent au champ extérieur à la cavité et donc à un réservoir normal.

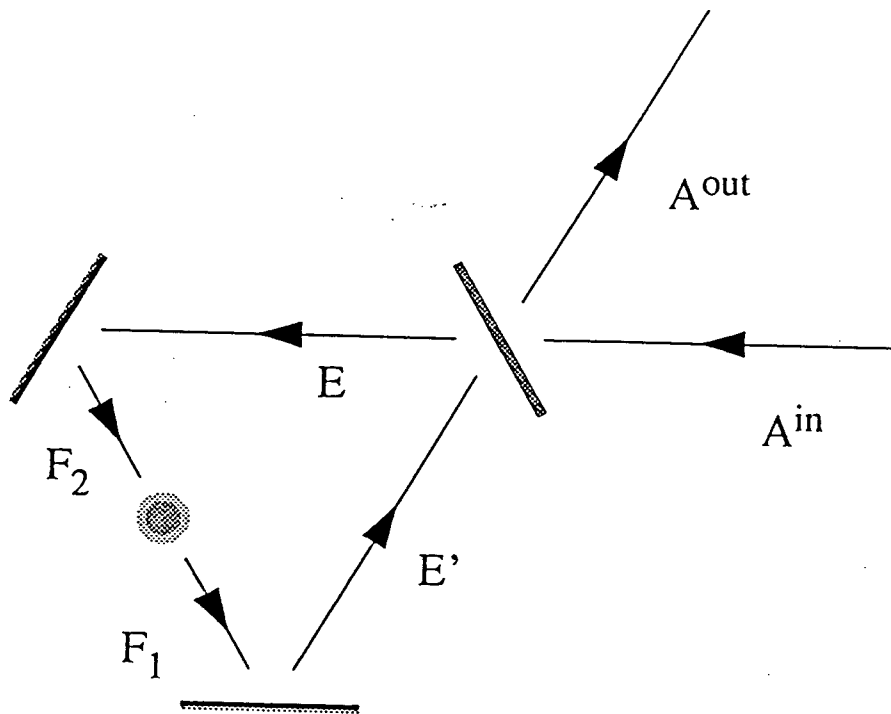
$$A^{\text{in}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \{ \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}^{\text{in}} + \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\text{in}\dagger} \} \quad (I.D.1;1.a)$$

$$A^{\text{out}} = \int \frac{d\omega}{2\pi} \{ \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}^{\text{out}} + \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\text{out}\dagger} \} \quad (I.D.1;1.b)$$

où  $\alpha_{\omega}$  est le coefficient de couplage qui correspond au réservoir normal:

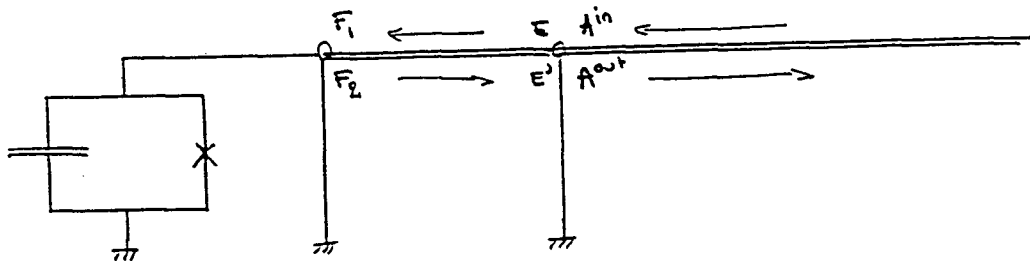
$$\alpha_{\omega} = \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega}} \quad (I.D.1;2)$$

Figure I.14a



Les champs dans une cavité en anneau

Figure I.14b



Les champs dans une cavité électronique

Nous discutons maintenant les équations qui relient les champs:

i. Condition de passage sur le miroir

Ces équations relient les champs qui arrivent sur les miroirs aux champs qui en repartent:

$$\begin{aligned} E(t) &= T A^{\text{in}}(t) + R E'(t) & (I.D.1;3.a) \\ A^{\text{out}}(t) &= -R A^{\text{in}}(t) + T E'(t) & (I.D.1;3.b) \end{aligned}$$

$E$  et  $E'$  sont les champs qui partent et arrivent sur le miroir à l'intérieur de la cavité.  $R$  et  $T$  sont la réflectivité et la transmissivité en amplitude du miroir. Ces deux grandeurs vérifient la relation suivante:

$$R^2 + T^2 = 1 \quad (I.D.1;4)$$

ii. Propagation dans la cavité

Ces équations relient les champs  $F_1$  à  $E$  et  $F_2$  à  $E'$  :

$$F_1(t) = E\left(t - \frac{\tau_c}{2}\right) \quad (I.D.1;5.a)$$

$$F_2(t) = E'\left(t + \frac{\tau_c}{2}\right) \quad (I.D.1;5.b)$$

$F_1$  et  $F_2$  sont les champs qui arrivent et repartent du système non linéaire.  $\tau_c$  est le temps que met un signal lumineux pour faire un tour dans la cavité.

iii. Relations au niveau du système non linéaire

Les équations dont nous avons besoin au niveau du système non linéaire sont de deux types:

- nous devons relier le champ  $F_2$  qui part du système non linéaire au champ  $F_1$  qui y arrive
- nous devons obtenir une expression du champ  $F$  qui interagit avec le système non linéaire et qui intervient dans les équations de ce système.

Pour obtenir ces relations, nous allons utiliser l'interprétation spatiale des relations d'entrée-sortie que nous avons faites dans la section I.C.1. Nous avons en effet montré à cette occasion que, lorsqu'un champ électromagnétique qui se propage dans un espace à une dimension interagit avec un système non-linéaire, on peut donner aux champs entrants et sortants la signification de champs qui arrivent et repartent du système non linéaire.

Nous déduisons de ceci la relation suivante:

$$F_2(t) = F_1(t) - 2\gamma \dot{X}(t) \quad (I.D.1;6)$$

Le champ  $F(t)$  qui interagit avec le système non linéaire a pour expression:

$$F(t) = \frac{1}{2} \{F_1(t) + F_2(t)\} + 2C_N X(t) \quad (I.D.1;7.a)$$

$$= F_1(t) - \gamma \dot{X}(t) + 2C_N X(t) \quad (I.D.1;7.b)$$

$$= F_2(t) + \gamma \dot{X}(t) + 2C_N X(t) \quad (I.D.1;7.c)$$

Ces équations sont obtenues à l'aide de la section I.C.1 ; le coefficient  $C_N$  est le coefficient d'énergie propre pour un spectre normal.

Le champ  $F(t)$  est une force qui intervient de la manière suivante dans l'évolution du système non linéaire:

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{M} P(t) \quad (I.D.1; 8.a)$$

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + F(t) - 2C_N X(t) \quad (I.D.1; 8.b)$$

Nous disposons maintenant de toutes les équations nécessaires à la poursuite de notre étude. Nous allons les récapituler en les exprimant dans l'espace des fréquences car c'est sous cette forme que nous les utiliserons par la suite.

i. Equations au miroir

$$E(\omega) = T A^{\text{in}}(\omega) + R E'(\omega) \quad (I.D.1; 9.a)$$

$$A^{\text{out}}(\omega) = -R A^{\text{in}}(\omega) + T E'(\omega) \quad (I.D.1; 9.b)$$

ii. Equations de propagation

$$F_1(\omega) = e^{i\omega \frac{z_c}{c}} E(\omega) \quad (I.D.1; 9.c)$$

$$F_2(\omega) = e^{-i\omega \frac{z_c}{c}} E'(\omega) \quad (I.D.1; 9.d)$$

iii. Equations sur le système non linéaire

$$F_2(\omega) = F_1(\omega) - 2\gamma \dot{X}(\omega) \quad (I.D.1; 9.e)$$

$$F(\omega) = F_1(\omega) - \gamma \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \quad (I.D.1; 9.f)$$

$$F(\omega) = F_2(\omega) + \gamma \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \quad (I.D.1; 9.g)$$

#### I.D.1.b. Etude du modèle

Dans cette section, nous allons manipuler les équations que nous venons de présenter pour obtenir des équations ayant la même forme que celles du chapitre I.B. Il s'agit en particulier de mettre les équations d'évolution du système non linéaire sous forme d'équations de Langevin en déterminant les forces de Langevin avancées ou retardées et les forces de friction.

Pour cela, nous allons éliminer les champs qui se propagent dans la cavité pour ne conserver que les champs  $A^{\text{in}}$  et  $A^{\text{out}}$  et le champ  $U$  qui interagit avec l'atome.

Commençons par éliminer  $E$  et  $E'$ .

Nous noterons pour simplifier:

$$\Omega = \omega \tau_c \quad (I.D.1; 10)$$

$\Omega$  est un paramètre sans dimension.

$$\begin{aligned} F_1(\omega) &= e^{i\frac{\Omega}{2}} E(\omega) \\ &= e^{i\frac{\Omega}{2}} \left\{ T A^{\text{in}}(\omega) + R e^{i\frac{\Omega}{2}} F_2(\omega) \right\} \\ &= T e^{i\frac{\Omega}{2}} A^{\text{in}}(\omega) + R e^{i\Omega} F_1(\omega) + R e^{i\Omega} \left\{ -2\gamma \dot{X}(\omega) \right\} \\ &= \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} A^{\text{in}}(\omega) + \frac{R}{e^{-i\Omega} - R} \left\{ -2\gamma \dot{X}(\omega) \right\} \end{aligned} \quad (I.D.1; 11.a)$$

On obtient de même:

$$F_2(\omega) = \frac{T e^{i\frac{\Omega}{2}}}{e^{i\Omega} - R} A^{\text{out}}(\omega) - \frac{R}{e^{i\Omega} - R} \{-2\gamma \dot{X}(\omega)\} \quad (\text{I.D.1;11.b})$$

Nous éliminons maintenant les champs  $F_1$  et  $F_2$  pour obtenir une expression de  $F$  en fonction de  $A^{\text{in}}$ , le champ qui arrive sur la cavité, ou de  $A^{\text{out}}$ , celui qui en repart. Nous substituons pour cela l'expression (I.D.1;11.a) de  $F_1$  dans l'équation (I.D.1;9.f)

$$\begin{aligned} F(\omega) &= F_1(\omega) - \gamma \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \\ &= \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} A^{\text{in}}(\omega) - \gamma \frac{e^{-i\Omega} + R}{e^{-i\Omega} - R} \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \end{aligned} \quad (\text{I.D.1;12.a})$$

En substituant (I.D.1;11.b) dans (I.D.1;9.g) on obtient de même:

$$F(\omega) = \frac{T e^{i\frac{\Omega}{2}}}{e^{i\Omega} - R} A^{\text{out}}(\omega) + \gamma \frac{e^{i\Omega} + R}{e^{i\Omega} - R} \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \quad (\text{I.D.1;12.b})$$

Afin de faire une comparaison précise avec le chapitre I.B. nous définissons deux champs  $F^{\text{in}}(\omega)$  et  $F^{\text{out}}(\omega)$  et deux fonctions dépendant de la fréquence  $\zeta^+(\omega)$  et  $\zeta^-(\omega)$  :

$$F^{\text{in}}(\omega) = \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} A^{\text{in}}(\omega) \quad (\text{I.D.1;13.a})$$

$$F^{\text{out}}(\omega) = \frac{T e^{i\frac{\Omega}{2}}}{e^{i\Omega} - R} A^{\text{out}}(\omega) \quad (\text{I.D.1;13.b})$$

$$\zeta^+(\omega) = \gamma \frac{e^{i\Omega} + R}{e^{-i\Omega} - R} \quad (\text{I.D.1;14.a})$$

$$\zeta^-(\omega) = \gamma \frac{e^{-i\Omega} + R}{e^{i\Omega} - R} \quad (\text{I.D.1;14.b})$$

Nous réécrivons maintenant les équations (I.D.1;12) à l'aide de ces notations:

$$F(\omega) = F^{\text{in}}(\omega) - \zeta^+(\omega) \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \quad (\text{I.D.1;15.a})$$

$$F(\omega) = F^{\text{out}}(\omega) + \zeta^-(\omega) \dot{X}(\omega) + 2C_N X(\omega) \quad (\text{I.D.1;15.b})$$

En reportant ces équations dans les équations d'évolution (I.D.1;8) nous obtenons finalement les équations de Langevin suivantes:

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + F^{\text{in}}(t) - \int d\tau \zeta^+(\tau) \dot{X}(t-\tau) \quad (\text{I.D.1;16.a})$$

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + F^{\text{out}}(t) + \int d\tau \zeta^-(\tau) \dot{X}(t-\tau) \quad (\text{I.D.1;16.b})$$



I.D.1.c. Discussion sur les forces de Langevin et la friction

Nous étudions tout d'abord les forces de friction. Les pôles de la fonction  $\zeta^+(\omega)$  ont une partie imaginaire négative. La transformée de Fourier inverse  $\zeta^+(\tau)$  est donc nulle pour les temps négatifs. La situation est symétrique pour  $\zeta^-(\omega)$  dont les pôles ont une partie imaginaire positive et dont la transformée de Fourier inverse est nulle pour les temps positifs.

Nous définissons ainsi la fonction  $\zeta(\tau)$  :

$$\zeta(\tau) = \zeta^+(\tau) + \zeta^-(\tau) \quad (I.D.1;17)$$

Cette fonction est reliée à  $\zeta^+$  et  $\zeta^-$  par la relation suivante:

$$\zeta^+(\tau) = \zeta(\tau)\theta(\tau) \quad (I.D.1;18.a)$$

$$\zeta^-(\tau) = \zeta(\tau)\theta(-\tau) \quad (I.D.1;18.b)$$

Les équations de Langevin s'écrivent ainsi de la manière suivante:

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + F^{\text{in}}(t) - \int_0^{\infty} d\tau \zeta(\tau)\dot{X}(t-\tau) \quad (I.D.1;19.a)$$

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + F^{\text{out}}(t) + \int_{-\infty}^0 d\tau \zeta(\tau)\dot{X}(t-\tau) \quad (I.D.1;19.b)$$

La friction due à  $\zeta^+(\tau)$  est ainsi une friction retardée et celle due à  $\zeta^-(\tau)$  est avancée.

Nous pouvons rapprocher ces équations de celles que nous avons obtenues au § I.B.: l'équation (I.B.1;14) pour la friction retardée et l'équation (I.B.2;3) pour la friction avancée. Nous constatons que les forces de friction sont identiques si l'on identifie  $\zeta(\tau)$  à  $\gamma(\tau)$ . Nous allons maintenant regarder à quelle densité spectrale cette force de friction correspond:

$$\begin{aligned} \zeta(\omega) &= \zeta^+(\omega) + \zeta^-(\omega) \\ &= \gamma \left\{ \frac{e^{-i\Omega} + R}{e^{-i\Omega} - R} + \frac{e^{i\Omega} + R}{e^{-i\Omega} + R} \right\} \\ &= 2\gamma \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Omega} \end{aligned} \quad (I.D.1;20)$$

Cette friction correspond à la densité spectrale:

$$\xi(\omega) = 2\gamma\omega \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R \cos \Omega} \quad (I.D.1;21)$$

La transposition dans l'espace des temps des expressions de  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $F^{\text{in}}$  et  $F^{\text{out}}$  est particulièrement intéressante. En effet:

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{2\pi} \frac{T e^{-i\omega \frac{\tau_c}{2}}}{e^{-i\omega\tau_c} - R} e^{i\omega t} &= \int \frac{d\omega}{2\pi} T e^{i\omega t} e^{-i\omega \frac{\tau_c}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} R^n e^{in\omega\tau_c} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} T R^n \delta \left( t - \left[ \frac{\tau_c}{2} + n\tau_c \right] \right) \end{aligned} \quad (I.D.1;22)$$

On déduit alors de l'expression (I.D.1;11.a):

$$F_1(t) = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n A^{\text{in}} \left( t - \left[ \frac{\tau_c}{2} + n\tau_c \right] \right) + \sum_{n=1}^{\infty} R^n \left[ -2\gamma \dot{X}(t - n\tau_c) \right] \quad (\text{I.D.1;23.a})$$

$$F^{\text{in}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n A^{\text{in}} \left( t - \left[ \frac{\tau_c}{2} + n\tau_c \right] \right) \quad (\text{I.D.1;23.b})$$

Le champ  $F_1(t)$  qui arrive sur le système non linéaire est ainsi la somme du champ  $A^{\text{in}}$  qui a traversé le miroir et de ses réflexions successives à l'intérieur de la cavité et des champs émis par le système non linéaire qui ont fait eux aussi un certain nombre de tours dans la cavité.

Une même étude est possible pour le champ  $F_2(t)$  ; on aboutit alors à l'expression suivante:

$$F_2(t) = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n A^{\text{out}} \left( t + \left[ \frac{\tau_c}{2} + n\tau_c \right] \right) - \sum_{n=1}^{\infty} R^n [-2\gamma \dot{X}(t + n\tau_c)] \quad (\text{I.D.1;24.a})$$

$$F^{\text{out}}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} TR^n A^{\text{out}} \left( t + \left[ \frac{\tau_c}{2} + n\tau_c \right] \right) \quad (\text{I.D.1;24.b})$$

Il s'agit en fait des expressions (I.D.1;23) dans lesquelles on a inversé le sens du temps (et donc remplacé  $A^{\text{in}}$  par  $A^{\text{out}}$  et changé le signe de  $\dot{X}(t)$ ).

### I.D.2. Modèle du réservoir harmonique

Dans la section précédente nous avons vu que les équations de Langevin du système non linéaire pour le modèle d'une cavité "à miroirs" sont semblables à celles que l'on obtient pour un réservoir harmonique. Nous allons ici étudier plus précisément cette analogie.

Dans un premier temps nous allons choisir un réservoir harmonique pour lequel la force de friction est la même que pour le modèle "à miroirs". Nous comparerons alors les forces de Langevin que l'on obtient avec ce réservoir avec celles que nous avons obtenues dans la section précédente.

#### I.D.2.a. Le choix du réservoir

Dans ce chapitre, la lettre  $A$  est relative au champ qui arrive ou qui repart de la cavité. Nous utiliserons donc la lettre  $B$  pour le réservoir harmonique.

Les opérateurs création et annihilation sont notés  $b_\omega^\dagger$  et  $b_\omega$ . Le Hamiltonien qui régit l'évolution du système non linéaire couplé au réservoir est:

$$H = \frac{P^2}{2M} + V(X) + \int \frac{d\omega}{2\pi} \hbar \omega b_\omega^\dagger b_\omega - \hbar BX + C_B X^2 \quad (I.D.2;1)$$

où

$$B = \int \frac{d\omega}{2\pi} \{ \omega \beta_\omega^* b_\omega + \omega \beta_\omega b_\omega^\dagger \} \quad (I.D.2;2)$$

Nous utilisons maintenant les résultats du chapitre I.B qui nous donnent:

\* L'équation d'évolution de l'impulsion (eq. (I.B.1;2.b))

$$\frac{dP(t)}{dt} = - \frac{\partial V}{\partial X} + B(t) + 2C_B X(t) \quad (I.D.2;3)$$

\* L'expression de  $B(t)$

$$B(t) = B^{\text{in}}(t) - \int_0^\infty d\tau \gamma_B(\tau) \dot{X}(t-\tau) - 2C_B X(t) \quad (I.D.2;4.a)$$

$$B(t) = B^{\text{out}}(t) + \int_{-\infty}^0 d\tau \gamma_B(\tau) \dot{X}(t-\tau) - 2C_B X(t) \quad (I.D.2;4.b)$$

\* Les équations de Langevin (eq. (I.B.1;14) et (I.B.2;3))

$$\dot{P}(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} + B^{\text{in}}(t) - \int_0^\infty d\tau \gamma_B(\tau) \dot{X}(t-\tau) \quad (I.D.2;5.a)$$

$$\dot{P}(t) = - \frac{\partial V}{\partial X} + B^{\text{out}}(t) + \int_{-\infty}^0 d\tau \gamma_B(\tau) \dot{X}(t-\tau) \quad (I.D.2;5.b)$$

où

$$\gamma_B(\omega) = \frac{1}{\omega} \xi_{BB}(\omega) \quad (I.D.2;6)$$

Afin d'obtenir la même force de friction que pour le modèle "à miroirs" nous devons prendre la densité spectrale donnée par l'équation (I.D.1;21):

$$\xi_{BB}(\omega) = 2\gamma\omega \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\Omega} \quad (I.D.2;7)$$

Ceci nous conduit à choisir les coefficients de couplage suivants:

$$\beta_\omega = \beta_\omega^* = \frac{T}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\Omega}} \sqrt{\frac{2\gamma}{\omega}} = \frac{T}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\Omega}} \alpha_\omega \quad (I.D.2;7)$$

où  $\alpha_\omega$  correspond au couplage du réservoir normal (eq. (I.D.1;2)).

#### I.D.2.b. Comparaison des forces de Langevin

Dans le modèle "à miroirs" les forces de Langevin sont  $F^{\text{in}}$  et  $F^{\text{out}}$ . Nous devons les comparer à  $B^{\text{in}}$  et  $B^{\text{out}}$ .

Pour cela, nous nous plaçons dans l'espace des fréquences et ne considérons que les fréquences positives (les fréquences négatives sont obtenues par conjugaison hermitique).

Pour le modèle du réservoir, nous obtenons:

$$B^{\text{in}}(\omega) = \omega \beta_\omega^* b_\omega^{\text{in}} = \omega \frac{T}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\Omega}} \alpha_\omega^* b_\omega^{\text{in}} \quad (I.D.2;8.a)$$

$$B^{\text{out}}(\omega) = \omega \frac{T}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\Omega}} \alpha_\omega^* b_\omega^{\text{out}} \quad (I.D.2;8.b)$$

Pour le modèle "miroirs", nous avons les relations suivantes pour les champs qui arrivent et repartent de la cavité:

$$A^{\text{in}}(\omega) = \omega \alpha_\omega^* a_\omega^{\text{in}} \quad (I.D.2;9.a)$$

$$A^{\text{out}}(\omega) = \omega \alpha_\omega^* a_\omega^{\text{out}} \quad (I.D.2;9.b)$$

Les forces de Langevin sont ainsi

$$F^{\text{in}}(\omega) = \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} A^{\text{in}}(\omega) = \omega \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} \alpha_\omega^* a_\omega^{\text{in}} \quad (I.D.2;10.a)$$

$$F^{\text{out}}(\omega) = \frac{T e^{i\frac{\Omega}{2}}}{e^{i\Omega} - R} A^{\text{out}}(\omega) = \omega \frac{T e^{i\frac{\Omega}{2}}}{e^{i\Omega} - R} \alpha_\omega^* a_\omega^{\text{out}} \quad (I.D.2;10.b)$$

Nous remarquons alors que les coefficients qui interviennent à une fréquence  $\omega$  pour les forces de Langevin entrantes et sortantes des deux modèles ont même module:

$$\left| \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} \right| = \left| \frac{T e^{i\frac{\Omega}{2}}}{e^{i\Omega} - R} \right| = \frac{T}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\Omega}} \quad (I.D.2;11)$$

Il nous est ainsi possible d'identifier les forces de Langevin des deux modèles. Pour faire correctement cette identification, il est nécessaire de prendre en compte des déphasages à l'entrée et à la sortie. Nous précisons maintenant ce point.

Notons  $\theta_\omega$  la phase définie par la relation:

$$\frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} = e^{i\theta_\omega} \frac{T}{\sqrt{1+R^2-2R\cos\Omega}} \quad (I.D.2;12)$$

L'identification des expressions (I.D.2;8) aux expressions (I.D.2;10) nous conduit à la relation:

$$b_{\omega}^{\text{in}} = e^{i\theta_{\omega}} a_{\omega}^{\text{in}} \quad (\text{I.D.2;13.a})$$

$$b_{\omega}^{\text{out}} = e^{-i\theta_{\omega}} a_{\omega}^{\text{out}} \quad (\text{I.D.2;13.b})$$

Ces expressions nous montrent qu'il est impossible de se débarrasser du facteur de phase  $\theta_{\omega}$  en redéfinissant l'opérateur  $b_{\omega}$  ou le coefficient de couplage  $\beta_{\omega}$ .

### I.D.2.c. Comparaison du coefficient d'énergie propre

Les comparaisons que nous venons de faire nous permettent d'identifier les forces de friction et de Langevin des deux modèles. Les équations de Langevin (I.D.1;19) et (I.D.2;5) sont ainsi identiques. Pour que l'analogie soit totale, il faut que nous puissions identifier le champ  $F(t)$  au champ  $B(t)$ . La comparaison des équations (I.D.1;15) et (I.D.2;4) nous indique qu'il nous reste à montrer l'égalité des coefficients d'énergie propre  $C_N$  et  $C_B$  dont nous rappelons les expressions:

$$C_N = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega} \alpha_{\omega}^* = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} 2\gamma \quad (\text{I.D.2;14.a})$$

$$C_B = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \beta_{\omega} \beta_{\omega}^* = \int_0^{\infty} \frac{d\omega}{2\pi} 2\gamma \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\omega\tau_c} \quad (\text{I.D.2;14.b})$$

Ces deux intégrales sont divergentes. Il faut toutefois les comprendre en considérant que l'on intègre jusqu'à une fréquence de coupure grande devant toutes les fréquences du problème. Les coefficients d'énergie propre que l'on obtient avec cette fréquence sont bien définies. En utilisant la périodicité et la parité de la fonction qui intervient dans le coefficient  $C_B$  on se ramène à la comparaison des deux intégrales suivantes:

$$I_N = \int_0^{\frac{\pi}{\tau_c}} \frac{d\omega}{2\pi} \quad (\text{I.D.2;15.a})$$

$$I_B = \int_0^{\frac{\pi}{\tau_c}} \frac{d\omega}{2\pi} \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\omega\tau_c} \quad (\text{I.D.2;15.b})$$

Dans l'intégrale  $I_B$ , le changement de variable:

$$v = \frac{1 + R}{1 - R} \operatorname{tg} \frac{\omega \tau_c}{2} \quad (\text{I.D.2;16})$$

nous conduit à l'expression suivante:

$$I_B = \frac{1}{\pi \tau_c} \int_0^{\infty} dv \frac{1}{1 + v^2} \quad (\text{I.D.2;17})$$

Le changement de variable  $v = \operatorname{tg} \omega$  transforme alors cette intégrale en l'expression (I.D.2;15.a) de  $I_N$  et l'égalité des coefficients  $C_B$  et  $C_N$  est ainsi montrée.

Cette section nous a permis de montrer l'équivalence des deux modèles. Nous allons résumer la situation dans la section suivante.

### I.D.3. Comparaison des modèles. Discussion physique

Dans les deux sections précédentes nous avons présenté deux modèles de cavité dont nous avons montré l'équivalence. Le premier modèle se base sur l'approche physique d'une cavité réelle: on étudie les équations de propagation des champs et les équations d'évolution d'un système non linéaire placé dans une telle cavité. Le second modèle est celui d'un système non linéaire couplé à un réservoir dont la densité spectrale reflète la présence de résonances dans la cavité.

Nous avons ainsi montré que, vu de l'atome, tout se passe de la même manière dans les deux cas: les forces de Langevin et les forces de friction sont les mêmes. Il faut être plus prudent pour comparer les résultats liés au réservoir. En effet, on ne peut pas identifier directement les opérateurs entrants  $a_\omega^{\text{in}}$  et  $b_\omega^{\text{in}}$  et les opérateurs sortants  $a_\omega^{\text{out}}$  et  $b_\omega^{\text{out}}$  car nous avons vu qu'il faut prendre en compte des déphasages. La procédure pratique à suivre sera alors la suivante:

#### -i- Données du problème

Les données du problème sont les fluctuations du champ  $A^{\text{in}}$  qui arrivent sur la cavité, elles sont données par les fonctions de corrélation des opérateurs  $a_\omega^{\text{in}}$  et  $a_\omega^{\dagger\text{in}}$ .

#### -ii- Le filtrage des fluctuations à l'entrée

Ces fluctuations, qui correspondent au premier modèle, nous permettent d'obtenir les fluctuations du champ entrant  $B^{\text{in}}$  (champ entrant au sens temporel):

$$B^{\text{in}}(\omega) = \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} A^{\text{in}}(\omega) \quad (I.D.3;1)$$

Le champ  $B^{\text{in}}(\omega)$  peut se concevoir comme le champ  $A^{\text{in}}(\omega)$  filtré par la cavité. Les fonctions de corrélation du champ  $B^{\text{in}}$  sont données par celles des opérateurs  $b_\omega^{\text{in}}$  et  $b_\omega^{\dagger\text{in}}$  que l'on peut obtenir à l'aide des fonctions de corrélation des  $a_\omega^{\text{in}}$  et  $a_\omega^{\dagger\text{in}}$ .

#### -iii- Etude de l'évolution du système non linéaire

Connaissant le champ  $B^{\text{in}}$ , on peut mener une étude de l'évolution du système non linéaire (cf. parties II et III).

Il faut pour cela étudier les équations de Langevin suivantes:

$$\dot{X}(t) = \frac{1}{M} P(t) \quad (I.D.3;2.a)$$

$$\dot{P}(t) = -\frac{\partial V}{\partial X} + B^{\text{in}}(t) - \int_0^\infty d\tau \gamma_B(\tau) \dot{X}(t-\tau) \quad (I.D.3;2.b)$$

On peut d'autre part établir une relation entre le champ entrant et le champ sortant (qui suppose connue l'évolution du système non linéaire):

$$B^{\text{out}}(\omega) = B^{\text{in}}(\omega) - 2\gamma \frac{T^2}{1 + R^2 - 2R\cos\Omega} \dot{X}(\omega) \quad (I.D.3;3)$$

#### -iv- Le filtrage des fluctuations à la sortie

De même que l'on obtient les fluctuations  $B^{\text{in}}$  en filtrant  $A^{\text{in}}$ , on obtient les fluctuations  $B^{\text{out}}$  en filtrant  $A^{\text{out}}$ :

$$A^{\text{out}}(\omega) = \frac{e^{i\Omega} - R}{T e^{i\frac{\Omega}{2}}} B^{\text{out}}(\omega) \quad (I.D.3;4)$$

-v- Transformation entrée sortie du système global

On déduit finalement de ce qui précède une relation entre les fluctuations qui sortent de la cavité et celles qui y entrent. On utilise les relations que nous venons de donner pour ne faire intervenir que le champ  $A$  :

$$A^{\text{out}}(\omega) = \frac{e^{i\Omega} - R}{e^{-i\Omega} - R} A^{\text{in}}(\omega) - 2\gamma \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} \dot{X}(\omega) \quad (I.D.3;5)$$

Les fluctuations qui sortent de la cavité sont ainsi la somme:

- des fluctuations qui entrent dans la cavité déphasées par leur passage dans cette cavité
- du champ émis par le système non linéaire filtré par la cavité.

Nous venons ainsi de mettre en évidence les effets physiques suivants pour une cavité:

- vu de l'atome, la cavité modifie la densité spectrale du réservoir
- vu du champ, la cavité a un rôle de filtre, que ce soit lorsque le champ entre dans la cavité ou lorsqu'il en sort. C'est cet effet qui conduit à un déphasage du champ lorsque la cavité est vide.

#### I.D.4. L'approximation d'une cavité à un mode

Le modèle de cavité que nous venons de présenter prend en compte tous les modes de la cavité. Toutefois, dans certaines situations, et en particulier lors de l'étude d'un système résonnant, il peut se trouver qu'un seul de ces modes intervienne.

Nous allons présenter une approximation du modèle de cavité qui consiste à ne considérer qu'une seule résonance de la cavité. La fonction de filtrage est alors une Lorentzienne et non plus une fonction d'Airy. En utilisant les résultats que nous venons de discuter nous pourrons faire le lien entre notre modèle et un modèle fréquemment utilisé qui consiste à modéliser la cavité par un oscillateur harmonique.

##### I.D.4.a. Présentation

Dans les sections précédentes nous avons obtenu les relations suivantes:

$$B^{\text{in}}(\omega) = \varphi(\omega) A^{\text{in}}(\omega) \quad (I.D.4; 1.a)$$

$$B^{\text{out}}(\omega) = B^{\text{in}}(\omega) - 2\gamma \varphi(\omega) \varphi^*(\omega) \dot{X}(\omega) \quad (I.D.4; 1.b)$$

$$B^{\text{out}}(\omega) = \varphi^*(\omega) A^{\text{out}}(\omega) \quad (I.D.4; 1.c)$$

où  $\varphi(\omega)$  est la fonction filtre suivante:

$$\varphi(\omega) = \frac{T e^{-i\frac{\Omega}{2}}}{e^{-i\Omega} - R} \quad (I.D.4; 1.d)$$

Il est possible de décomposer cette fonction afin de mettre ses pôles en évidences. Pour cela, nous l'écrivons sous la forme:

$$\begin{aligned} \varphi(\omega) &= \frac{T}{e^{-i\frac{\Omega}{2}} - R e^{i\frac{\Omega}{2}}} \\ &= \frac{2iT}{\sqrt{R}} \frac{1}{\sin \left\{ \frac{\Omega}{2} - \frac{i}{2} \ln R \right\}} \end{aligned} \quad (I.D.4; 2)$$

Nous utilisons alors la relation suivante (cf. Gradshteyn et Ryzhik eq. 1.422):

$$\frac{1}{\sin z} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{z - n\pi} \quad (I.D.4; 3)$$

Nous obtenons ainsi l'expression suivante pour  $\varphi(\omega)$  :

$$\varphi(\omega) = \frac{4iT}{\sqrt{R}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \frac{1}{\Omega - i \ln R - 2n\pi} \quad (I.D.4; 4)$$

Considérons maintenant le cas d'une cavité de bonne finesse, c'est-à-dire:  $T \ll 1$ , ce qui se traduit par:

$$R = \sqrt{1 - T^2} = 1 - \frac{1}{2} T^2 \quad (I.D.4; 5.a)$$

$$\ln R = -\frac{1}{2} T^2 \quad (I.D.4; 5.b)$$



nous noterons maintenant:

$$\Gamma = \frac{1}{2} T^2 \quad (I.D.4;6)$$

Dans une telle situation, les modes sont bien séparés et lorsque l'on se trouve proche d'une résonance seul l'un des deux joue un rôle. Nous noterons  $\Omega_0 = 2N\pi$  (soit  $\omega_0 = \frac{2N\pi}{T_c}$ ) la fréquence propre du mode que nous considérons. Ce mode joue un rôle pour les fréquences positives autour de  $\omega_0$  et pour les fréquences négatives autour de  $-\omega_0$ ; ces deux bandes de fréquence qui interviennent dans le problème sont bien distinctes, nous les traitons donc séparément.

Nous obtenons ainsi deux filtres:  $\varphi_+(\omega)$  pour les fréquences positives et  $\varphi_-(\omega)$  pour les fréquences négatives. Le premier est obtenu en considérant uniquement le pôle de  $\varphi(\omega)$  de partie réelle  $\omega_0$  le second en ne conservant que le pôle de partie réelle  $-\omega_0$ :

$$\varphi_+(\omega) = 4i\sqrt{2\Gamma} (-1)^N \frac{1}{\Omega - \Omega_0 + i\Gamma} \quad (I.D.4;7.a)$$

$$\varphi_-(\omega) = 4i\sqrt{2\Gamma} (-1)^N \frac{1}{\Omega + \Omega_0 + i\Gamma} \quad (I.D.4;7.b)$$

En notant  $O_+$  et  $O_-$  les parties de fréquence positive et négative d'un opérateur  $O$  les équations (I.D.4;1) deviennent avec l'approximation à un mode:

$$B_u^{\text{in}}(\omega) = \varphi_u(\omega) A_u^{\text{in}}(\omega) \quad (I.D.4;8.a)$$

$$B_u^{\text{out}}(\omega) = B_u^{\text{in}}(\omega) - 2\gamma \varphi_u(\omega) \varphi_u^*(\omega) \dot{X}_u(\omega) \quad (I.D.4;8.b)$$

$$B_u^{\text{out}}(\omega) = \varphi_u^*(\omega) A_u^{\text{out}}(\omega) \quad (I.D.4;8.c)$$

où  $u$  représente l'indice  $+$  ou  $-$ .

Ceci nous donne les relations entrée sortie suivantes pour le champ  $A$ :

$$A_+^{\text{out}}(\omega) = -\frac{\Omega - \Omega_0 - i\Gamma}{\Omega - \Omega_0 + i\Gamma} A_+^{\text{in}}(\omega) - \frac{8i\gamma\sqrt{2\Gamma}(-1)^N}{\Omega - \Omega_0 + i\Gamma} \dot{X}_+(\omega) \quad (I.D.4;9.a)$$

$$A_-^{\text{out}}(\omega) = -\frac{\Omega + \Omega_0 - i\Gamma}{\Omega + \Omega_0 + i\Gamma} A_-^{\text{out}}(\omega) - \frac{8i\gamma\sqrt{2\Gamma}(-1)^N}{\Omega + \Omega_0 + i\Gamma} \dot{X}_-(\omega) \quad (I.D.4;9.b)$$

#### I.D.4.b. Lien avec le modèle de l'oscillateur harmonique

Un modèle fréquemment utilisé pour étudier l'effet d'une cavité consiste à modéliser celle-ci par un oscillateur harmonique. La situation correspond à celle de la figure I.15.

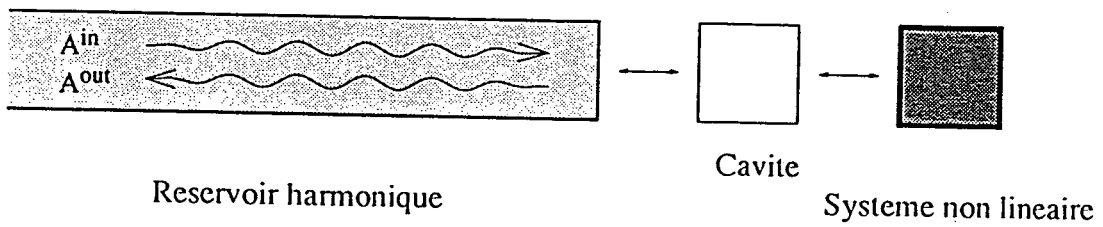
Le filtre que l'on obtient pour les fréquences positives est donné par l'équation (B.I.5;3.a):

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{-i\omega + i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)} \quad (I.D.4;10)$$

La forme de ce filtre est semblable à celle du filtre  $\varphi_+(\omega)$  (eq. (I.D.4;7.a)).

Nous constatons ainsi que, dans le cas où seul un mode joue un rôle, l'approche consistant à étudier un modèle "à miroirs" puis à ne considérer qu'un mode est équivalente à une modélisation de la cavité par un oscillateur harmonique.

Figure I.15



Modèle où la cavité est modélisée par une collection d'oscillateurs harmoniques

## APPENDICE A<sub>I</sub>

Dans cette appendice, nous présentons les états comprimés d'un réservoir harmonique. Nous discutons tout d'abord les propriétés d'un champ monomode. Nous donnons ensuite la généralisation de ces résultats pour la compression à deux modes.

### 1-Compression à un mode

Dans cette section, nous ne considérons qu'un mode du champ. Il est décrit par un oscillateur harmonique de fréquence propre  $\omega$  dont les opérateurs création et annihilation sont  $a^\dagger$  et  $a$ . Ils vérifient:

$$[a; a^\dagger] = 1 \quad (A_I; 1)$$

Ces opérateurs évoluent aux fréquences  $\omega$  et  $-\omega$  :

$$a(t) = e^{-i\omega t} a(0) \quad (A_I; 2.a)$$

$$a^\dagger(t) = e^{-i\omega t} a^\dagger(0) \quad (A_I; 2.b)$$

Les quadratures du champ sont les parties "réelles" et "imaginaires" de ces opérateurs:

$$a_1 = a + a^\dagger \quad (A_I; 3.a)$$

$$a_2 = -i(a - a^\dagger) \quad (A_I; 3.b)$$

L'évolution de ces opérateurs est:

$$a_1(t) = \cos\omega t a_1(0) + \sin\omega t a_2(0) \quad (A_I; 4.a)$$

$$a_2(t) = -\sin\omega t a_1(0) + \cos\omega t a_2(0) \quad (A_I; 4.b)$$

Les deux quadratures ont la relation de commutation suivante:

$$[a_1; a_2] = 2i \quad (A_I; 5)$$

Leurs variances vérifient une inégalité de Heisenberg:

$$\langle (\Delta a_1)^2 \rangle \langle (\Delta a_2)^2 \rangle \geq 1 \quad (A_I; 6)$$

Lorsque l'état du champ est le vide, rien ne distingue les deux quadratures et leurs variances sont donc égales:

$$\langle (\Delta a_1)^2 \rangle = \langle (\Delta a_2)^2 \rangle = 1 \quad (A_I; 7)$$

Ces variances correspondent aux fluctuations du vide ou à celles des états cohérents.

L'inégalité de Heisenberg n'impose de condition que sur le produit des variances. Il est en fait possible de réduire l'une de ces deux variances autant qu'on le désire. On appellera état comprimé un état dont l'une des deux variances a des fluctuations inférieures à celles du vide; l'autre variance aura alors des fluctuations supérieures pour que l'inégalité de Heisenberg soit vérifiée. De façon générale, on considèrera la quadrature de phase  $\varphi$ :

$$a_\varphi = e^{i\varphi} a + e^{-i\varphi} a^\dagger \quad (A_I; 8)$$

La variance de cette quadrature est:

$$\langle (\Delta a_\varphi)^2 \rangle = \langle \Delta a \Delta a^\dagger \rangle + \langle \Delta a^\dagger \Delta a \rangle + e^{2i\varphi} \langle \Delta a \Delta a \rangle + e^{-2i\varphi} \langle \Delta a^\dagger \Delta a^\dagger \rangle \quad (A_I; 9)$$

Dans cette expression interviennent les fonctions de corrélation suivantes:

$$\langle \Delta a^\dagger \Delta a \rangle = N \quad (A_I; 10.a)$$

$$\langle \Delta a \Delta a^\dagger \rangle = 1 + N \quad (A_I; 10.b)$$

$$\langle \Delta a \Delta a \rangle = M = |M|e^{-i\theta} \quad (A_I; 10.c)$$

$$\langle \Delta a^\dagger \Delta a^\dagger \rangle = M^* = |M|e^{i\theta} \quad (A_I; 10.d)$$

Le nombre réel  $N$  correspond au nombre de photons dans le mode. Le nombre complexe  $M$  décrit les corrélations entre les quadratures. La variance de la quadrature  $a_\varphi$  s'écrit finalement:

$$\langle (\Delta a_\varphi)^2 \rangle = 1 + 2N + 2|M| \cos(\theta - 2\varphi) \quad (A_I; 11)$$

Lorsque  $\varphi$  varie, cette quantité évolue de  $1 + 2N - 2|M|$  pour  $\cos(\theta - 2\varphi) = -1$  à  $1 + 2N + 2|M|$  pour  $\cos(\theta - 2\varphi) = 1$ . On voit qu'une quadrature est comprimée dès que  $|M|$  est plus grand que  $N$ .

Les valeurs minimales et maximales obéissent à une inégalité de Heisenberg qui s'écrit:

$$(1 + 2N - 2|M|)(1 + 2N + 2|M|) \geq 1 \quad (A_I; 12.a)$$

Soit:

$$|M| \leq \sqrt{N(1+N)} \quad (A_I; 12.b)$$

Lorsque l'inégalité de Heisenberg est une égalité, on parle d'état comprimé minimal. Les états comprimés minimaux peuvent être obtenus à partir du vide par une transformation unitaire. Les opérateurs  $aeta^\dagger$  sont transformés en opérateurs  $betb^\dagger$  de la façon suivante:

$$b = \text{ch}\xi a + \text{sh}\xi e^{-i\theta} a^\dagger \quad (A_I; 13.a)$$

$$b^\dagger = \text{sh}\xi e^{i\theta} a + \text{ch}\xi a^\dagger \quad (A_I; 13.b)$$

Leur relation de commutation est la même que celle de  $aeta^\dagger$ :

$$[b; b^\dagger] = \text{ch}^2\xi - \text{sh}^2\xi \quad (A_I; 14)$$

Les fonctions de corrélations du champ transformé sont aisément calculées dans le cas où l'état de départ est le vide ( $\langle a^\dagger a \rangle = \langle a a \rangle = \langle a^\dagger a^\dagger \rangle = 0$ ;  $\langle a a^\dagger \rangle = 1$ ):

$$\langle b^\dagger b \rangle = N = \text{sh}^2\xi \quad (A_I; 15.a)$$

$$\langle b b^\dagger \rangle = 1 + N = \text{ch}^2\xi \quad (A_I; 15.b)$$

$$\langle b b \rangle = M = \text{ch}\xi \text{sh}\xi e^{-i\theta} \quad (A_I; 15.c)$$

$$\langle b^\dagger b^\dagger \rangle = M^* = \text{ch}\xi \text{sh}\xi e^{i\theta} \quad (A_I; 15.d)$$

L'état obtenu vérifie  $|M| = \sqrt{N(1+N)}$ , c'est donc un état minimal.

Dans le cas où  $\theta = 0$ , les variances des quadratures  $b_1etb_2$  s'écrivent très simplement:

$$\begin{aligned} \langle (\Delta b_1)^2 \rangle &= 1 + 2N + 2M = e^{2\xi} & (A_I; 16.a) \\ \langle (\Delta b_2)^2 \rangle &= 1 + 2N - 2M = e^{-2\xi} & (A_I; 16.b) \end{aligned}$$

## 2-Compression à deux modes

Nous donnons maintenant la généralisation des résultats précédents au problème à deux modes. Ces deux modes ont pour fréquence  $\omega + \Delta$  et  $\omega - \Delta$ ; ils sont décrits par les opérateurs  $a_+ et a_+^\dagger$  d'une part et  $a_- et a_-^\dagger$  d'autre part.

Nous nous intéressons aux fluctuations du champ  $A$  suivant:

$$A = a_+ + a_+^\dagger + a_- + a_-^\dagger \quad (A_I; 17)$$

Dans le référentiel du champ tournant (à la fréquence  $\omega$ ) l'évolution temporelle de  $A$  est:

$$A(t) = e^{-i\Delta t} (a_+(0) + a_-^\dagger(0)) + e^{i\Delta t} (a_+^\dagger(0) + a_-(0)) \quad (A_I; 18)$$

Pour un état stationnaire, les seules fonctions de corrélation non nulles sont:

$$\begin{aligned} \langle a_+^\dagger a_+ \rangle &= N_+ & (A_I; 19.a) \\ \langle a_+ a_+^\dagger \rangle &= 1 + N_+ & (A_I; 19.b) \\ \langle a_-^\dagger a_- \rangle &= N_- & (A_I; 19.c) \\ \langle a_- a_-^\dagger \rangle &= 1 + N_- & (A_I; 19.d) \\ \langle a_+ a_- \rangle = \langle a_- a_+ \rangle &= M = |M| e^{-i\theta} & (A_I; 19.e) \\ \langle a_+^\dagger a_-^\dagger \rangle = \langle a_-^\dagger a_+^\dagger \rangle &= M^* = |M| e^{i\theta} & (A_I; 19.f) \end{aligned}$$

$N_+$  est le nombre de photons dans le mode  $\omega + \Delta$ ;  $N_-$  est le nombre de photons dans le mode  $\omega - \Delta$ .  $M$  correspond aux corrélations entre ces deux modes. Les inégalités de Heisenberg à deux modes se traduisent sur ces nombres par les relations:

$$\begin{aligned} |M| &\leq \sqrt{N_+ (1 + N_-)} & (A_I; 20.a) \\ |M| &\leq \sqrt{N_- (1 + N_+)} & (A_I; 20.b) \end{aligned}$$

La transformation unitaire suivante produit des états comprimés minimaux à partir du vide:

$$\begin{aligned} b_+ &= \text{ch}\xi a_+ + \text{sh}\xi e^{-i\theta} a_-^\dagger & (A_I; 21.a) \\ b_+^\dagger &= \text{sh}\xi e^{i\theta} a_- + \text{ch}\xi a_+^\dagger & (A_I; 21.b) \\ b_- &= \text{ch}\xi a_- + \text{sh}\xi e^{-i\theta} a_+^\dagger & (A_I; 21.c) \\ b_-^\dagger &= \text{sh}\xi e^{i\theta} a_+ + \text{ch}\xi a_-^\dagger & (A_I; 21.d) \end{aligned}$$

Ce qui correspond pour  $N_+, N_- et M$  à :

$$\begin{aligned} N_+ = N_- &= \text{sh}^2\xi & (A_I; 22.a) \\ M &= \text{sh}\xi \text{ch}\xi e^{-i\theta} & (A_I; 22.b) \end{aligned}$$

## APPENDICE B<sub>I</sub>

### Introduction

Nous étudions dans cette appendice le cas où le système non linéaire est un oscillateur harmonique. Ceci nous permet de résoudre de manière exacte non seulement les équations d'évolution du réservoir mais aussi celles de l'oscillateur.

Dans un premier temps nous étudierons le problème d'un oscillateur couplé à un réservoir. Nous étudierons ensuite le cas où un second oscillateur est couplé au premier. Cette situation est fréquemment utilisée comme modèle de cavité ; le premier oscillateur représente alors un mode propre de la cavité.

### 1. Présentation du modèle

Le réservoir est une collection discrète d'oscillateurs harmoniques  $\mathcal{R}_\lambda$ . Chacun de ces oscillateurs a une fréquence propre d'évolution  $\omega_\lambda$  et est décrit par des opérateurs création et annihilation  $a_\lambda^\dagger$  et  $a_\lambda$  qui vérifient la relation de commutation suivante:

$$[a_\lambda; a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda;\lambda'} \quad (B_{I.1};1)$$

Le système est un oscillateur harmonique dont la fréquence propre est  $\omega_0$ ; il est décrit par les opérateurs création et annihilation  $b^\dagger$  et  $b$  qui vérifient:

$$[b; b^\dagger] = 1 \quad (B_{I.1};2)$$

Le Hamiltonien  $H$  qui régit l'évolution se décompose en trois termes:

$$H = H_0 + H_1 + H_2 \quad (B_{I.1};3)$$

\*  $H_0$  est le Hamiltonien d'évolution libre:

$$H_0 = \sum_\lambda \omega_\lambda a_\lambda^\dagger a_\lambda + \omega_0 b^\dagger b \quad (B_{I.1};4)$$

\*  $H_1$  est un couplage linéaire entre le système et le réservoir:

$$H_1 = -\{A^- b + A^+ b^\dagger\} \quad (B_{I.1};5)$$

où l'on a noté:

$$A^- = \sum_\lambda \omega_\lambda \alpha_\lambda a_\lambda^\dagger \quad (B_{I.1};6.a)$$

$$A^+ = \sum_\lambda \omega_\lambda \alpha_\lambda^* a_\lambda \quad (B_{I.1};6.b)$$

Ce Hamiltonien ne couple pas les opérateurs qui évoluent librement à des fréquences positives à ceux qui évoluent à des fréquences négatives; il s'agit ainsi d'une interaction qui se place dans le cadre de l'approximation du champ tournant.

\*  $H_2$  est un Hamiltonien d'énergie propre de l'oscillateur harmonique dû au réservoir:

$$H_2 = C_A b^\dagger b \quad (B_{I.1};7)$$

où

$$C_A = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \alpha_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* \quad (B_I.1;8)$$

Ce terme d'énergie propre a été choisi pour compenser la susceptibilité statique du réservoir dans les équations de Langevin de l'oscillateur (cf. discussion dans § I.B).

## 2. Equations de Heisenberg

Nous écrivons maintenant les équations d'évolution pour les opérateurs du système et du réservoir:

$$\frac{d}{dt} b(t) = -i\omega_0 b(t) + iA^+(t) - iC_A b(t) \quad (B_I.2;1.a)$$

$$\frac{d}{dt} b^\dagger(t) = i\omega_0 b^\dagger(t) - iA^-(t) + iC_A b^\dagger(t) \quad (B_I.2;1.b)$$

$$\frac{d}{dt} a_{\lambda}(t) = -i\omega_{\lambda} a_{\lambda}(t) + i\omega_{\lambda} \alpha_{\lambda} b(t) \quad (B_I.2;2.a)$$

$$\frac{d}{dt} a_{\lambda}^\dagger(t) = i\omega_{\lambda} a_{\lambda}^\dagger(t) - i\omega_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* b^\dagger(t) \quad (B_I.2;2.b)$$

Dans le cadre de l'approximation du champ tournant, les opérateurs de création ne sont pas couplés aux opérateurs d'annihilation. Nous poursuivrons dans les calculs avec les seuls opérateurs d'annihilation. Nous nous placerons systématiquement dans l'espace des fréquences.

## 3. Equations retardées

Dans cette section nous fixons des conditions initiales à  $t_0 = 0$  et nous étudions l'évolution du système pour des instants postérieurs à  $t_0$ . Nous noterons  $\hat{f}(\omega)$  la transformée de Fourier de la fonction  $f(t)$  limitée aux temps positifs:

$$\hat{f}(\omega) = \int dt e^{i(\omega+i\epsilon)t} f(t)\theta(t) \quad (B_I.3;1)$$

où  $\epsilon$  est un réel positif tendant vers zéro et  $\theta(t)$  la fonction de Heavyside. Nous utiliserons par la suite les deux résultats classiques:

-i- transformée d'une dérivée

Si  $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$  alors:

$$\begin{aligned} \hat{g}(\omega) &= \int dt (e^{i(\omega+i\epsilon)t} \theta(t)) \left( \frac{d}{dt} f(t) \right) \\ &= \int dt \left[ \frac{d}{dt} (e^{i(\omega+i\epsilon)t} \theta(t)) \right] f(t) \\ &= (-i\omega + \epsilon) \hat{f}(\omega) - f(0) \end{aligned} \quad (B_I.3;2)$$

-ii- transformée d'une exponentielle:

Si  $E_{\nu}(t) = \exp\{-i\nu t\}$  alors:

$$\begin{aligned} \hat{E}_{\nu}(\omega) &= \int_0^{\infty} dt e^{-i\nu t} e^{i(\omega+i\epsilon)t} \\ &= \frac{1}{-i\omega + i\nu + \epsilon} \end{aligned} \quad (B_I.3;3)$$

Les équations différentielles ( $B_I.2; 1.a$  et  $2.a$ ) deviennent des équations algébriques

$$(-i\omega + \epsilon)\hat{b}(\omega) - b(0) = -i\omega_0\hat{b}(\omega) + i\hat{A}^+(\omega) - iC_A\hat{b}(\omega) \quad (B_I.3; 4.a)$$

$$(-i\omega + \epsilon)\hat{a}_\lambda(\omega) - a(0) = -i\omega_\lambda\hat{a}_\lambda(\omega) + i\omega_\lambda\alpha_\lambda\hat{b}(\omega) \quad (B_I.3; 4.b)$$

Nous résolvons tout d'abord l'équation ( $B_I.3; 4.b$ ) :

$$\hat{a}_\lambda(\omega) = \frac{1}{-i\omega + i\omega_\lambda + \epsilon} \{a_\lambda(0) + i\omega_\lambda\alpha_\lambda\hat{b}(\omega)\} \quad (B_I.3; 5)$$

Une évolution libre de cet opérateur  $a_\lambda$  nous aurait mené à l'équation suivante:

$$a_\lambda^0(t) = e^{-i\omega_\lambda t} a_\lambda(0) \quad (B_I.3; 6.a)$$

$$\hat{a}_\lambda^0(\omega) = \frac{1}{-i\omega + i\omega_\lambda + \epsilon} a_\lambda(0) \quad (B_I.3; 6.b)$$

En reportant cette expression dans l'équation ( $B_I.3; 5$ ) nous obtenons:

$$\hat{a}_\lambda(\omega) = \hat{a}_\lambda^0(\omega) + i \frac{\omega_\lambda\alpha_\lambda}{-i\omega + i\omega_\lambda + \epsilon} \hat{b}(\omega) \quad (B_I.3; 7)$$

En sommant sur tous les modes nous arrivons à:

$$\hat{A}^+(\omega) = \hat{A}_0^+(\omega) + \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} \hat{b}(\omega) \quad (B_I.3; 8)$$

Cette expression constitue la décomposition en champ libre et réponse au mouvement de l'oscillateur (comparer avec l'équation (I.B.1;5)).

Nous substituons maintenant cette expression dans l'équation d'évolution de  $b$  ( $B_I.3; 4.a$ ) :

$$(-i\omega + \epsilon)\hat{b}(\omega) - b(0) = -i\omega_0\hat{b}(\omega) + i\hat{A}_0^+(\omega) + i \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} \hat{b}(\omega) - iC_A\hat{b}(\omega) \quad (B_I.3; 9)$$

On remarque que:

$$\sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} = \sum_\lambda \omega_\lambda\alpha_\lambda\alpha_\lambda^* + \omega \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} \quad (B_I.3; 10)$$

Le premier terme compense exactement  $C_A$ . Nous noterons dorénavant:

$$-i\omega \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} = \Gamma(\omega) + i\Delta(\omega) \quad (B_I.3; 11.a)$$

où  $\Gamma(\omega)$  et  $\Delta(\omega)$  sont deux fonctions réelles de  $\omega$  :

$$\Gamma(\omega) = \omega \pi \sum_\lambda \omega_\lambda\alpha_\lambda^*\alpha_\lambda \delta(\omega - \omega_\lambda) \quad (B_I.3; 11.b)$$

$$\Delta(\omega) = \omega \sum_\lambda \omega_\lambda\alpha_\lambda^*\alpha_\lambda \mathcal{P} \frac{1}{\omega - \omega_\lambda} \quad (B_I.3; 11.c)$$



Ainsi l'équation (B<sub>I</sub>.3;9) s'écrit sous la forme:

$$(-i\omega + \epsilon)\hat{b}(\omega) - b(0) = [-i(\omega_0 + \Delta(\omega)) - \Gamma(\omega)]\hat{b}(\omega) + iA_0^+(\omega) \quad (B_{I.3;12})$$

Cette expression est l'équation de Langevin pour le mouvement de l'oscillateur.  $\Gamma(\omega)$  est le coefficient de friction,  $\Delta(\omega)$  est un terme de déplacement et  $A_0^+$  une force fluctuante. Dans le cas du système harmonique auquel nous nous intéressons ici, il est possible de résoudre exactement cette équation d'évolution:

$$\hat{b}(\omega) = \frac{1}{-i\omega + i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)} \{b(0) + i\hat{A}_0^+(\omega)\} \quad (B_{I.3;13})$$

#### 4. Equations avancées

Nous étudions maintenant de la même façon l'évolution antérieure à un instant  $t_1 = 0$  auquel nous fixons les conditions initiales. Nous notons:

$$\check{f}(\omega) = \int dt e^{i(\omega - i\epsilon)t} f(t)\theta(-t) \quad (B_{I.4;1})$$

Les propriétés (B<sub>I</sub>.3;2 et 3) se transposent de la manière suivante:

-i- si  $g(t) = \frac{d}{dt} f(t)$

$$\check{g}(\omega) = (-i\omega - \epsilon)\check{f}(\omega) + f(0) \quad (B_{I.4;2})$$

-ii- si  $E_\nu(t) = \exp\{-i\nu t\}$

$$\check{E}_\nu(\omega) = \frac{1}{\omega - i\nu + \epsilon} \quad (B_{I.4;3})$$

De même, les équations (B<sub>I</sub>.3;4 et 9) deviennent:

$$(-i\omega - \epsilon)\check{b}(\omega) + b(0) = -i\omega_0\check{b}(\omega) + i\check{A}^+(\omega) - iC_A\check{b}(\omega) \quad (B_{I.4;4.a})$$

$$(-i\omega - \epsilon)\check{a}_\lambda(\omega) + a_\lambda(0) = -i\omega_\lambda\check{a}_\lambda(\omega) + i\omega_\lambda\alpha_\lambda\check{b}(\omega) \quad (B_{I.4;4.b})$$

$$\check{a}_\lambda^0(\omega) = \frac{1}{i\omega - i\omega_\lambda + \epsilon} a_\lambda(0) \quad (B_{I.4;5})$$

$$\check{a}_\lambda(\omega) = \check{a}_\lambda^0(\omega) - i \frac{\omega_\lambda\alpha_\lambda}{i\omega - i\omega_\lambda + \epsilon} \check{b}(\omega) \quad (B_{I.4;6})$$

$$\check{A}^+(\omega) = \check{A}_0^+(\omega) + \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega + i\epsilon} \check{b}(\omega) \quad (B_{I.4;7})$$

On remarque alors que:

$$\begin{aligned} \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega + i\epsilon} &= \left[ \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2\alpha_\lambda\alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} \right]^* \\ &= C_A - \Delta(\omega) - i\Gamma(\omega) \end{aligned} \quad (B_{I.4;8})$$

En reportant l'expression (B<sub>I</sub>.4;7) dans l'équation d'évolution de  $b$  et en utilisant l'équation (B<sub>I</sub>.4;8), on obtient:

$$(-i\omega - \epsilon)\bar{b}(\omega) + b(0) = [-i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)]\bar{b}(\omega) + i\bar{A}_0^+(\omega) \quad (B_I.4;9)$$

Nous pouvons résoudre exactement l'évolution de  $b$  pour les temps négatifs:

$$\bar{b}(\omega) = \frac{1}{i\omega - i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)} \{b(0) - \bar{A}_0^+(\omega)\} \quad (B_I.4;10)$$

Les expressions que nous venons d'établir correspondent en fait aux expressions de la section précédente auxquelles on aurait fait subir un renversement du sens du temps. Ceci explique pourquoi que le terme de déplacement  $\Delta(\omega)$  agit dans les deux cas dans le même sens alors que le terme de dissipation  $\Gamma(\omega)$  a des effets opposés (comparer (B\_I.3;12) à (B\_I.4;9)):

$$\hat{b} = [-i(\omega_0 + \Delta(\omega)) - \Gamma(\omega)]\hat{b}(\omega) + i\hat{A}_0^+(\omega) \quad (B_I.4;11.a)$$

$$\bar{\hat{b}} = [-i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)]\bar{\hat{b}}(\omega) + i\bar{\hat{A}}_0^+(\omega) \quad (B_I.4;11.b)$$

### 5. Champ entrant - Champ sortant

Afin d'étudier les résultats concernant les champs entrants et sortants, nous adoptons l'approche suivante : nous choisissons un instant  $t_0$  loin dans le passé et un instant  $t_1$  dans le futur.

Les définitions de  $\hat{f}(\omega)$  et  $\bar{\hat{f}}(\omega)$  sont les suivantes:

$$\hat{f}(\omega) = \int_{t_0}^{\infty} dt e^{i\omega(t-t_0)} f(t) \quad (B_I.5;1.a)$$

$$\bar{\hat{f}}(\omega) = \int_{-\infty}^{t_1} dt e^{i\omega(t-t_1)} f(t) \quad (B_I.5;1.b)$$

Les équations (B\_I.3;13) et (B\_I.4;10) deviennent:

$$\hat{b}(\omega) = \varphi_1(\omega)\{b(t_0) + i\hat{A}_0^+(\omega)\} \quad (B_I.5;2.a)$$

$$\bar{\hat{b}}(\omega) = \varphi_2(\omega)\{b(t_1) - i\bar{\hat{A}}_0^+(\omega)\} \quad (B_I.5;2.b)$$

avec

$$\varphi_1(\omega) = \frac{1}{-i\omega + i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)} \quad (B_I.5;3.a)$$

$$\varphi_2(\omega) = \frac{1}{i\omega - i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)} \quad (B_I.5;3.b)$$

$$\hat{A}_0^+(\omega) = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* \frac{1}{-i\omega + i\omega_{\lambda} + \epsilon} a_{\lambda}(t_0) \quad (B_I.5;4.a)$$

$$\bar{\hat{A}}_0^+(\omega) = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* \frac{1}{-i\omega - i\omega_{\lambda} + \epsilon} a_{\lambda}(t_1) \quad (B_I.5;4.b)$$

Pour établir une relation entrée-sortie, il faut revenir dans l'espace des temps et faire tendre  $t_0$  vers  $-\infty$  et  $t_1$  vers  $+\infty$ .

Appelons  $\Phi_1(t)$  et  $\Phi_2(t)$  les transformées de Fourier de  $\varphi_1(\omega)$  et  $\varphi_2(\omega)$ . Les pôles de  $\varphi_1(\omega)$  ont une partie imaginaire négative ; la fonction  $\Phi_1(t)$  est ainsi nulle pour les temps négatifs. La situation est symétrique pour  $\varphi_2(\omega)$  qui a des pôles dont la partie imaginaire est positive ; la fonction  $\Phi_2(t)$  est donc nulle pour les temps positifs :

$$\Phi_1(\tau) = \Phi_1(\tau) \theta(\tau) \quad (B_I.5; 5.a)$$

$$\Phi_2(\tau) = \Phi_2(\tau) \theta(-\tau) \quad (B_I.5; 5.b)$$

L'expression temporelle de  $\hat{A}_0^+(t)$  et  $\check{A}_0^+(t)$  est :

$$\hat{A}_0^+(t) = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* e^{-i\omega(t-t_0)} a_{\lambda}(t_0) \theta(t-t_0) \quad (B_I.5; 6.a)$$

$$\check{A}_0^+(t) = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} \alpha_{\lambda}^* e^{-i\omega(t-t_1)} a_{\lambda}(t_1) \theta(t_1-t) \quad (B_I.5; 6.b)$$

En se référant à la partie I.B, on constate alors que :

$$\lim_{t_0 \rightarrow -\infty} \hat{A}_0^+(t) = A_{in}^+(t) \quad (B_I.5; 7.a)$$

$$\lim_{t_1 \rightarrow +\infty} \check{A}_0^+(t) = A_{out}^+(t) \quad (B_I.5; 7.b)$$

La transformée de Fourier des équations  $B_I.5$  donne :

$$b(t)\theta(t-t_0) = \Phi_1(t-t_0)b(t_0) + i \int d\tau \Phi_1(\tau) \hat{A}_0^+(t-\tau) \quad (B_I.5; 8.a)$$

$$b(t)\theta(t_1-t) = \Phi_2(t-t_1)b(t_1) - i \int d\tau \Phi_2(\tau) \check{A}_0^+(t-\tau) \quad (B_I.5; 8.b)$$

En prenant les limites pour  $t_0 \rightarrow -\infty$  et  $t_1 \rightarrow +\infty$ , on obtient :

$$b(t) = i \int d\tau \Phi_1(\tau) A_{in}^+(t-\tau) \quad (B_I.5; 9.a)$$

$$b(t) = -i \int d\tau \Phi_2(\tau) A_{out}^+(t-\tau) \quad (B_I.5; 9.b)$$

On a utilisé le fait que dans tous les cas qui nous intéressent, la densité spectrale est telle que

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \Phi_1(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow -\infty} \Phi_2(\tau) = 0 \quad (B_I.5; 10)$$

Nous revenons dans l'espace des fréquences en notant la transformée de Fourier de  $f(t)$  de la manière suivante :

$$\tilde{f}(\omega) = \int dt e^{i\omega t} f(t) \quad (B_I.5; 11)$$

On obtient alors (TF des équations ( $B_I.5;9.a$  et  $b$ ))

$$\tilde{b}(\omega) = i \varphi_1(\omega) \tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.5; 12.a)$$

$$\tilde{b}(\omega) = -i \varphi_2(\omega) \tilde{A}_{out}^+(\omega) \quad (B_I.5; 12.b)$$

Ces expressions permettent d'obtenir le champ sortant en fonction du champ entrant :

$$\tilde{A}_{out}^+(\omega) = - \frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi_2(\omega)} \tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.5; 12.a)$$

$$= \frac{\omega - (\omega_0 + \Delta(\omega)) - i\Gamma(\omega)}{\omega - (\omega_0 + \Delta(\omega)) + i\Gamma(\omega)} \tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.5; 12.b)$$

L'effet de l'interaction du réservoir avec l'oscillateur harmonique est donc un déphasage dépendant de la fréquence.

Remarquons que l'on peut écrire les équations ( $B_I.4;11$ ) sous la forme:

$$\tilde{b}(\omega) = [-i(\omega_0 + \Delta(\omega)) - \Gamma(\omega)]\tilde{b}(\omega) + i \tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.5; 14.a)$$

$$\tilde{b}(\omega) = [-i(\omega_0 + \Delta(\omega)) + \Gamma(\omega)]\tilde{b}(\omega) + i \tilde{A}_{out}^+(\omega) \quad (B_I.5; 14.b)$$

En faisant la différence de ces équations nous obtenons :

$$\tilde{A}_{out}^+(\omega) = \tilde{A}_{in}^+(\omega) - 2i \Gamma(\omega) \tilde{b}(\omega) \quad (B_I.5; 15)$$

Cette relation est analogue à l'équation (I.B.2;4.b); elle exprime le champ sortant comme la somme du champ entrant et d'un champ "émis" par la cavité qui est proportionnel à la partie dissipative de l'effet du réservoir.

## 6. Cas de deux oscillateurs harmoniques

Nous couplons maintenant un second oscillateur harmonique au premier. La fréquence propre de cet oscillateur est  $\omega_1$ , il est décrit par des opérateurs création et annihilation  $c^\dagger$  et  $c$ . Cette situation correspond à un modèle de cavité à un mode: l'opérateur  $b$  décrit la cavité et l'opérateur  $c$  un oscillateur harmonique placé dans cette cavité.

Le Hamiltonien qui régit l'évolution de ce système s'obtient en ajoutant au Hamiltonien que nous avons utilisé dans le début de cet appendice un Hamiltonien  $H'_0$  d'évolution libre du deuxième oscillateur et un Hamiltonien  $H'_1$  qui le couple au premier oscillateur :

$$H' = H_0 + H_1 + H_2 + H'_0 + H'_1 \quad (B_I.6; 1.a)$$

$$H'_0 = \omega_1 c^\dagger c \quad (B_I.6; 1.b)$$

$$H'_1 = -\lambda (b^\dagger c + c^\dagger b) \quad (B_I.6; 1.c)$$

Comme précédemment, nous restons dans le cadre de l'approximation du champ tournant ce qui nous permet d'étudier uniquement les opérateurs annihilation.

Les équations d'évolution de ces opérateurs sont:

$$\begin{aligned}
\dot{a}_\lambda(t) &= -i\omega_\lambda a_\lambda(t) + i\omega_\lambda \alpha_\lambda b(t) & (B_{I.6}; 2.a) \\
\dot{b}(t) &= -i\omega_0 b(t) + iA^+(t) - iC_A b(t) + i\lambda c(t) & (B_{I.6}; 2.b) \\
\dot{c}(t) &= -i\omega_1 c(t) + i\lambda b(t) & (B_{I.6}; 2.c)
\end{aligned}$$

Nous utilisons les mêmes méthodes que précédemment pour étudier l'évolution du second oscillateur.

a. Equations retardées

Dans le formalisme retardé, les équations d'évolution deviennent:

$$\begin{aligned}
(-i\omega + \epsilon)\hat{a}_\lambda(\omega) - a_\lambda(0) &= -i\omega_\lambda \hat{a}_\lambda(\omega) + i\omega_\lambda \alpha_\lambda \hat{b}(\omega) & (B_{I.6}; 3.a) \\
(-i\omega + \epsilon)\hat{b}(\omega) - b(0) &= -i\omega_0 \hat{b}(\omega) + i\hat{A}^+(\omega) - iC_A \hat{b}(\omega) + i\lambda \hat{c}(\omega) & (B_{I.6}; 3.b) \\
(-i\omega + \epsilon)\hat{c}(\omega) - c(0) &= -i\omega_1 \hat{c}(\omega) + i\lambda \hat{b}(\omega) & (B_{I.6}; 3.c)
\end{aligned}$$

La résolution des deux premières équations se fait de manière identique à celles de la section  $B_{I.3}$ . On obtient :

$$\hat{A}^+(\omega) = \hat{A}_0^+(\omega) + \sum_\lambda \frac{\omega_\lambda^2 \alpha_\lambda \alpha_\lambda^*}{\omega_\lambda - \omega - i\epsilon} \hat{b}(\omega) \quad (B_{I.6}; 4.a)$$

$$\hat{b}(\omega) = \varphi_1(\omega) \{b(0) + i\hat{A}_0^+(\omega) + i\lambda \hat{c}(\omega)\} \quad (B_{I.6}; 4.b)$$

Nous reportons maintenant l'expression ( $B_{I.6}; 4.b$ ) dans l'équation d'évolution de  $c$  :

$$(-i\omega + \epsilon)\hat{c}(\omega) - c(0) = -i\omega_1 \hat{c}(\omega) + i\lambda \varphi_1(\omega) \{b(0) + i\hat{A}_0^+(\omega) + i\lambda \hat{c}(\omega)\} \quad (B_{I.6}; 5)$$

Nous notons  $\Gamma'(\omega)$  et  $\Delta'(\omega)$  les fonctions:

$$\Gamma'(\omega) = \frac{\lambda^2 \Gamma(\omega)}{[\omega - (\omega_0 + \Delta(\omega))]^2 + \Gamma(\omega)^2} \quad (B_{I.6}; 6.a)$$

$$\Delta'(\omega) = \frac{\lambda^2 (\omega - (\omega_0 + \Delta(\omega)))}{[\omega - (\omega_0 + \Delta(\omega))]^2 + \Gamma(\omega)^2} \quad (B_{I.6}; 6.b)$$

Avec ces notations, on a:

$$\lambda^2 \varphi_1(\omega) = \Gamma'(\omega) + i \Delta'(\omega) \quad (B_{I.6}; 7.a)$$

$$\lambda^2 \varphi_2(\omega) = \Gamma'(\omega) - i \Delta'(\omega) \quad (B_{I.6}; 7.b)$$

L'équation ( $B_{I.6}; 5$ ) devient:

$$(-i\omega + \epsilon)\hat{c}(\omega) - c(0) = [-i(\omega_1 + \Delta'(\omega)) - \Gamma'(\omega)]\hat{c}(\omega) + i\lambda \varphi_1(\omega) \{b(0) + i\hat{A}_0^+(\omega)\} \quad (B_{I.6}; 8)$$

Nous résolvons ainsi exactement l'équation du mouvement de  $c$  :

$$\tilde{c}(\omega) = \varphi'_1(\omega)\{c(0) - \lambda\varphi_1(\omega)\tilde{A}_0^+(\omega) + i\lambda\varphi_1(\omega)b(0)\} \quad (B_I.6;9.a)$$

où

$$\varphi'_1(\omega) = \frac{1}{-i\omega + i(\omega_1 + \Delta'(\omega)) + \Gamma'(\omega)} \quad (B_I.6;9.b)$$

### b. Equations avancées

Les étapes du calcul sont les mêmes que pour les équations retardées. Nous ne donnons donc que les résultats importants, à savoir les équations qui concernent l'évolution de  $c$ .

$$\tilde{c}(\omega) = \varphi'_2(\omega)\{c(0) + \lambda\varphi_2(\omega)\tilde{A}_0^+(\omega) - i\lambda\varphi_2(\omega)b(0)\} \quad (B_I.6;10.a)$$

$$\varphi'_2(\omega) = \frac{1}{i\omega - i(\omega + \Delta'(\omega)) + \Gamma'(\omega)} \quad (B_I.6;10.b)$$

### c. Relations entrée-sortie

La méthode employée est la même que celle de la section B<sub>I</sub>.5. On obtient les équations suivantes :

$$\tilde{c}(\omega) = [-i(\omega_1 + \Delta'(\omega)) - \Gamma'(\omega)]\tilde{c}(\omega) - \lambda\varphi_1(\omega)\tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.6;11.a)$$

$$\tilde{c}(\omega) = [-i(\omega_1 + \Delta'(\omega)) + \Gamma'(\omega)]\tilde{c}(\omega) - \lambda\varphi_2(\omega)\tilde{A}_{out}^+(\omega) \quad (B_I.6;11.b)$$

$$\tilde{c}(\omega) = -\lambda\varphi'_1(\omega)\varphi_1(\omega)\tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.6;12.a)$$

$$\tilde{c}(\omega) = \lambda\varphi'_2(\omega)\varphi_2(\omega)\tilde{A}_{out}^+(\omega) \quad (B_I.6;12.b)$$

Nous remarquons que l'opérateur  $b$  de la première cavité est absent de toutes ces équations. D'autre part, ces équations sont semblables à celles que l'on a obtenues lors de l'étude d'un seul oscillateur : on a remplacé  $\Delta(\omega)$  et  $\Gamma(\omega)$  par  $\Delta'(\omega)$  et  $\Gamma'(\omega)$ ,  $\varphi_1(\omega)$  et  $\varphi_2(\omega)$  par  $\varphi'_1(\omega)$  et  $\varphi'_2(\omega)$ ,  $\tilde{A}_{in}^+(\omega)$  et  $\tilde{A}_{out}^+(\omega)$  par  $i\lambda\varphi_1\tilde{A}_{in}^+(\omega)$  et  $i\lambda\varphi_2(\omega)\tilde{A}_{out}^+(\omega)$ . Les relations entrée-sortie sont les suivantes:

$$i\lambda\varphi_2(\omega)\tilde{A}_{out}^+(\omega) = i\lambda\varphi_1(\omega)\tilde{A}_{in}^+(\omega) - 2i\Gamma'(\omega)\tilde{c}(\omega) \quad (B_I.6;13.a)$$

$$i\lambda\varphi_2(\omega)\tilde{A}_{out}^+(\omega) = -\frac{\varphi'_1(\omega)}{\varphi'_2(\omega)} \{i\lambda\varphi_1(\omega)\tilde{A}_{in}^+(\omega)\} \quad (B_I.6;13.b)$$

ou, autrement dit:

$$\tilde{A}_{out}^+(\omega) = \frac{\varphi_1(\omega)}{\varphi_2(\omega)} \tilde{A}_{in}^+(\omega) - \frac{\Gamma'(\omega)}{\lambda\varphi_2(\omega)} \tilde{c}(\omega) \quad (B_I.6;14.a)$$

$$\tilde{A}_{out}^+(\omega) = \frac{\varphi_1(\omega)\varphi'_1(\omega)}{\varphi_2(\omega)\varphi'_2(\omega)} \tilde{A}_{in}^+(\omega) \quad (B_I.6;14.b)$$

Les équations (B<sub>I</sub>.6;13) montrent que la situation pour les relations entrée sortie est la même qu'avec un seul oscillateur à condition de considérer que les champs sont "filtrés". Ce filtrage est dû à la présence de la cavité modélisée par l'oscillateur b.

L'équation (B<sub>I</sub>.6;14.a) indique que le champ sortant est la somme du champ entrant déphasé (par réflexion sur la cavité, c'est à dire l'oscillateur b) et du champ émis par le second oscillateur filtré.

L'équation (B<sub>I</sub>.6;14.b) montre que, comme le second oscillateur est harmonique, il faut ajouter au déphasage dû à la réflexion sur le premier oscillateur un déphasage dû à la réflexion sur le second.

## II. UN SYSTEME A DEUX NIVEAUX COUPLE A UN RESERVOIR HARMONIQUE :

La seconde partie est consacrée à une étude détaillée du cas où le système non linéaire est un système à deux niveaux.

Le problème d'un atome à deux niveaux couplé au rayonnement électromagnétique est depuis longtemps l'objet de très nombreux travaux [1,4-8,17-20]. En effet, tout système atomique excité par un champ monochromatique a tendance à se comporter comme un atome à deux niveaux, du moins quand on peut ignorer les effets dus à la dégénérescence des niveaux concernés.

Deux approches sont fréquemment utilisées pour son étude, celle du spin fictif et celle de l'atome habillé.

Un système à deux niveaux peut être considéré comme un spin  $1/2$  fictif placé dans un champ magnétique. De nombreux phénomènes peuvent s'expliquer par analogie avec des effets de résonance magnétique. Il s'agit par exemple de la précession de Rabi (analogie avec la précession dans un champ magnétique constant) ou de la relaxation (analogie avec la relaxation d'un spin dans un champ magnétique fluctuant). L'évolution du système atomique est alors décrite par des "équations de Bloch optiques" contenant des termes de précession et des termes de relaxation [34,56].

Dans l'approche de l'atome habillé, le système étudié est constitué du système à deux niveaux couplé au mode du champ excitateur, ou, autrement dit, habillé par les photons laser. Cette approche, introduite dans le domaine microonde [42] peut aussi être utilisée dans le domaine optique puisqu'elle permet de traiter la relaxation par émission spontanée [5].

Un grand nombre de problèmes ont été abordés dans l'étude du rayonnement diffusé par un atome à deux niveaux excité par un champ monochromatique intense, c'est-à-dire l'étude de la fluorescence de résonance [4,6]. La répartition spectrale de la fluorescence reflète la dynamique du système à deux niveaux excité par le champ pompe. Plus précisément, le spectre de fluorescence peut être relié à des fonctions de corrélation du dipole atomique. Ces fonctions de corrélation atomiques peuvent alors être étudiées à l'aide des équations de Bloch optique grâce au théorème de régression quantique [58,33]. Dans la méthode de l'atome habillé, les positions, les poids et les largeurs des raies ont des interprétations simples puisqu'elles correspondent respectivement aux fréquences des transitions entre niveaux habillés, à l'intensité de ces transitions (taux de transition multiplié par les populations des niveaux de départ) et aux taux de relaxation des dipôles correspondants [6].

La lumière de fluorescence présente d'autre part des propriétés statistiques non classiques. Les photons émis par un seul atome à deux niveaux sont dégroupés : en effet, après l'émission d'un premier photon, l'atome se trouve forcément dans l'état fondamental et il ne peut donc pas immédiatement émettre un second photon. Cet effet peut se calculer avec les équations de Bloch optiques [33] ou par la méthode de l'atome habillé [6]. Ce dégroupement est à la source du caractère non poissonnien de la statistique de comptage du nombre de photons pendant un temps  $T$  donné [8]. Enfin, les fluctuations du champ de fluorescence émis par un atome à deux niveaux sont des fluctuations comprimées [15,16].

Un autre type de travaux a porté sur la modification de la relaxation atomique. Cette modification peut se faire tout d'abord en changeant le couplage entre l'atome et le champ par l'utilisation d'une cavité. Deux types de résultats ont été obtenus. Il s'agit tout d'abord de l'inhibition ou de l'augmentation de l'émission spontanée pour un atome en cavité, observée en mesurant la durée de vie radiative d'atomes placés dans la cavité [1]. Par ailleurs, la modification de l'émission de rayonnement par des atomes excité par un laser a été observée par modification du spectre de fluorescence [20]. On peut aussi envisager d'étudier les propriétés statistiques du rayonnement dans les mêmes conditions [21].

Le comportement atomique peut aussi être changé en modifiant les propriétés statistiques du champ incident. Des études théoriques ont montré que la relaxation d'un atome soumis à des fluctuations comprimées obéit à des équations ayant la même structure que les équations de Bloch optiques mais des taux de relaxation différents. La compression des fluctuations permettrait de réduire le taux de transition d'une composante du dipole atomique [17-19]. Ceci se traduirait par une modification importante des spectres de fluorescence [47].

Nous venons de voir que le problème d'un atome à deux niveaux couplé à un réservoir harmonique a été étudié sous de nombreux aspects ; il reste cependant une grande variété de problèmes envisageables. Par

exemple, il peut s'agir de l'étude des propriétés statistiques du rayonnement émis par un atome en cavité, ou de la relaxation d'un atome soumis à des fluctuations non classiques ayant une dépendance en fréquence.

Nous avons vu que deux approches sont possibles pour étudier un système à deux niveaux : le spin fictif et l'atome habillé. Nous utiliserons ces deux images en tenant compte d'une part de la modification de la densité spectrale (due par exemple à une cavité) et d'autre part des propriétés statistiques non classiques du rayonnement incident sur l'atome.

Les deux premiers chapitres sont consacrés à l'étude de la relaxation d'un système à deux niveaux dans un champ comprimé et (ou) coloré.

Nous étudions tout d'abord le modèle du spin fictif (§ II.A). Nous nous intéressons en particulier au problème de la relaxation sous l'effet d'un champ magnétique classique fluctuant. Cette approche permet une première compréhension géométrique de l'influence de la compression du rayonnement sur la relaxation. On montre en effet que le taux de relaxation d'une composante du spin est proportionnel à la variance du champ magnétique qui lui est orthogonal. Il est aussi possible de s'intéresser aux situations où le spectre des fluctuations n'est pas blanc. Il apparaît alors clairement que seules certaines composantes de fréquence du bruit interviennent dans la relaxation.

Nous passons ensuite à une étude quantique du problème en nous intéressant à la méthode de l'atome habillé (§ II.B). Dans un premier temps, nous discutons les deux méthodes qui peuvent être utilisées pour la construction de l'atome habillé (en tant que système composé de l'atome et du mode pompe d'une part et de la valeur moyenne du champ d'autre part). En nous inspirant de la procédure que nous avons suivie pour établir les équations de relaxation du spin fictif, nous établissons ensuite les équations de relaxation de l'atome habillé en champ comprimé et coloré.

Le troisième chapitre (§ II.C) est consacré à l'obtention des spectres du champ émis par l'atome. Il est connu que pour un réservoir plat et vide, les fonctions de corrélation du champ émis sont reliées à des fonctions de corrélation atomiques où les opérateurs sont rangés dans un ordre temporel précis. Nous montrons que cette propriété se généralise au cas d'un réservoir vide coloré. Lorsque le réservoir n'est pas vide, cette propriété n'est plus vraie. Nous montrons qu'il est cependant possible de résoudre le problème en utilisant une "réponse linéaire généralisée" de l'atome aux fluctuations quantiques du réservoir.

Nous présentons ensuite le théorème de régression quantique qui permet d'obtenir les fonctions de corrélations atomiques à partir des équations de relaxation. Une compréhension simple de ce théorème nous sera donnée par l'utilisation de la "réponse linéaire généralisée".

Nous étudions plus en détail le cas d'un réservoir vide coloré (§ II.D). Les équations de relaxation de l'atome habillé peuvent se comprendre à l'aide de taux de transition entre niveaux. Les trois taux de transition qui interviennent sont directement reliés à la densité spectrale du couplage aux fréquences de Bohr des transitions de l'atome habillé. L'utilisation d'une cavité, permet, par une modification de la densité spectrale, de modifier séparément ces trois taux. Une cavité permet ainsi d'améliorer la compression du rayonnement produit par un atome [24].

Nous étudions ensuite le cas d'un réservoir comprimé (§ II.E). Les équations de relaxation de l'atome habillé ne peuvent plus s'interpréter en termes de taux de transition. En effet, les corrélations des fluctuations incidentes font apparaître des couplages entre les populations et des cohérences entre niveaux de multiplicité différentes. Cependant, lorsque le champ pompe est dans un état cohérent, il est possible de sommer les équations de relaxation correspondant à des multiplicités différentes. Cette sommation conduit à une interprétation géométrique des équations de relaxation. Cette interprétation nous permet alors de mettre en évidence un effet étonnant: le piégeage de populations habillées. Un atome excité par un champ laser et relaxant dans un réservoir comprimé peut voir sa population piégée dans un de ses états habillés [47]. Cela se traduit en particulier par la disparition totale de l'une des raies latérales du triplet de fluorescence. Nous montrons aussi qu'il est possible d'affiner toutes les raies du triplet de fluorescence lorsque la compression du réservoir peut dépendre de la fréquence.



## II.A. La relaxation du spin fictif

Ce chapitre constitue une première approche de la relaxation d'un système à deux niveaux en champ comprimé. Nous utilisons l'analogie entre le mouvement d'un atome à deux niveaux excité par un laser et celui d'un moment magnétique placé dans un champ magnétique fluctuant. La relaxation du moment magnétique dans ce modèle classique sera due aux fluctuations d'un champ magnétique aléatoire. Cette approche nous permettra de mettre en évidence un certain nombre de "propriétés géométriques".

Nous présentons d'abord le Hamiltonien correspondant au cas d'un système à deux niveaux dans le cadre de l'approximation de résonance. Nous établissons l'analogie entre ce système et le spin 1/2 et nous obtenons les équations de Heisenberg.

Ceci nous permet de présenter le modèle classique d'un moment magnétique relaxant dans un champ magnétique fluctuant.

### II.A.1. Le modèle du spin fictif

Le Hamiltonien que nous utilisons pour l'atome à deux niveaux se déduit de celui que nous avons utilisé dans la première partie par quelques transformations. Nous utilisons en particulier l'approximation de résonance pour écrire les équations dans le référentiel du champ tournant.

#### II.A.1.a. Le système à deux niveaux

##### - Présentation -

Le système non linéaire présente une structure discrète de niveaux d'énergie. Lorsqu'il est excité par une onde monochromatique dont la fréquence est proche d'une fréquence de transition, l'approximation de résonance nous permet de le traiter comme un système à deux niveaux. Nous appellerons ces niveaux état fondamental ( $|f\rangle$ ) et état excité ( $|e\rangle$ ); leurs énergies respectives sont  $E_f$  et  $E_e$ . Le Hamiltonien qui régit l'évolution libre de ce système est ainsi:

$$H_s = E_e |e\rangle\langle e| + E_f |f\rangle\langle f| \quad (II.A.1;1)$$

##### - l'approximation du champ tournant -

Les fréquences d'évolution qui interviennent dans le problème peuvent souvent être séparées en deux catégories bien distinctes. En effet, ces fréquences se trouvent dans deux bandes de fréquence centrées autour de  $\frac{E_e - E_f}{\hbar}$  et  $-\frac{E_e - E_f}{\hbar}$ . Dans le cas de l'optique, ces fréquences ont une valeur de l'ordre de  $10^{14}$  Hz. La largeur de la bande de fréquence est donnée par les autres fréquences qui interviennent dans le problème. Il s'agit du désaccord de la fréquence excitatrice, de la fréquence de Rabi associée à cette excitation et de la largeur de la transition considérée. Nous considérerons des situations où cette bande de fréquence n'excède pas  $10^9$  Hz.

Le rapport entre la largeur de la bande et la fréquence de la transition est ainsi inférieur à  $10^{-5}$ . Il est alors légitime de séparer les opérateurs en deux classes: opérateurs évoluant à fréquence positive et opérateurs évoluant à fréquence négative. L'approximation du champ tournant consistera à négliger tout couplage entre ces deux classes.

##### - Le Hamiltonien d'interaction -

Le Hamiltonien discuté dans la première partie s'écrivait:

$$H_1^0 = -AX \quad (II.A.1;2)$$

Nous avons déjà défini les parties de fréquences positives et négatives de  $A$  (champs  $A^+$  et  $A^-$ ; cf. eqs. I.A.2;5). Nous allons procéder à la même décomposition sur l'opérateur  $X$  couplé au champ:

$$X = X^+ + X^- \quad (II.A.1;3.a)$$

$$X^+ = x_0 |e\rangle\langle f| \quad (II.A.1;3.b)$$

$$X^- = x_0^* |f\rangle\langle e| \quad (II.A.1;3.c)$$

En nous référant au Hamiltonien  $H_1$ , nous constatons que  $X^+$  évolue librement à la fréquence  $-\frac{E_e - E_f}{\hbar}$  et que  $X^-$  évolue librement à  $\frac{E_e - E_f}{\hbar}$ . L'approximation du champ tournant consiste à ne considérer que les couplages entre opérateurs d'une même classe de fréquence. Ceci revient à ne conserver dans le Hamiltonien  $H_1$  que les termes évoluant autour de la fréquence nulle:

$$H_1 = -(X_+ A^+ + X_- A^-) \quad (II.A.1;4)$$

- Le Hamiltonien d'énergie propre -

Dans le chapitre I.B nous avons discuté du rôle du Hamiltonien  $H_2$  d'énergie propre du système non linéaire. Il compense la susceptibilité statique du réservoir dans les équations de Langevin. Dans le cadre de l'approximation du champ tournant il prend la forme suivante:

$$H_2 = C_A X_+ X_- \quad (II.A.1;5)$$

- Le référentiel du champ tournant -

Lorsque le système à deux niveaux est excité à l'aide d'un champ de fréquence  $\omega_p$ , les valeurs moyennes des champs  $A^+$  et  $A^-$  ont les expressions suivantes:

$$\langle A^+(t) \rangle = A e^{-i\omega_p t} \quad (II.A.1;6.a)$$

$$\langle A^-(t) \rangle = A^* e^{i\omega_p t} \quad (II.A.1;6.b)$$

L'évolution des valeurs moyennes des opérateurs  $X_+$  et  $X_-$  contient donc des termes oscillant à la fréquence  $\omega_p$ . Pour rendre ces termes statiques on passe dans le "référentiel du champ tournant". On définit pour cela les opérateurs:

$$\tilde{X}_+(t) = e^{-i\omega_p t} X_+(t) \quad (II.A.1;7.a)$$

$$\tilde{X}_-(t) = e^{i\omega_p t} X_-(t) \quad (II.A.1;7.b)$$

$$\tilde{A}^+(t) = e^{i\omega_p t} A^+(t) \quad (II.A.1;8.a)$$

$$\tilde{A}^-(t) = e^{-i\omega_p t} A^-(t) \quad (II.A.1;8.b)$$

Dans ce référentiel, l'évolution est régie par le Hamiltonien  $\tilde{H}$  suivant:

$$\tilde{H} = \int \frac{d\omega}{2\pi} (\omega - \omega_p) \tilde{a}_\omega^\dagger \tilde{a}_\omega + \frac{\omega_0}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) - (\tilde{A}^+ \tilde{X}_+ + \tilde{A}^- \tilde{X}_-) \quad (II.A.1;9)$$

où  $\omega_0$  est le désaccord entre la fréquence de la transition et la fréquence excitatrice:

$$\omega_0 = \frac{E_e - E_f}{\hbar} - \omega_p \quad (II.A.1;10)$$

A partir de maintenant et jusqu'à la fin du chapitre II.A nous resterons dans ce référentiel mais nous omettrons les  $\tilde{\phantom{x}}$  pour simplifier les notations.

### II.A.1.b. Le spin fictif

#### - Présentation -

Nous identifions tout d'abord le système à deux niveaux à un spin 1/2. L'état excité  $|e\rangle$  du système à deux niveaux correspond à l'état  $|+\rangle$  du spin (ie: spin dirigé selon  $Oz$  positif) l'état fondamental  $|f\rangle$  correspond à l'état  $|-\rangle$  du spin. Afin d'obtenir une formulation géométrique du problème nous utilisons les opérateurs de spin:

$$S_x = \frac{1}{2} (|+\rangle\langle -| + |-\rangle\langle +|) \quad (II.A.1; 11.a)$$

$$S_y = \frac{1}{2i} (|+\rangle\langle -| - |-\rangle\langle +|) \quad (II.A.1; 11.b)$$

$$S_z = \frac{1}{2} (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) \quad (II.A.1; 11.c)$$

Ces opérateurs vérifient les relations de commutation habituelles:

$$[S_x; S_y] = iS_z \quad (II.A.1; 12.a)$$

$$[S_y; S_x] = iS_z \quad (II.A.1; 12.b)$$

$$[S_z; S_x] = iS_y \quad (II.A.1; 12.c)$$

$$[(\vec{B} \cdot \vec{S}); \vec{S}] = -i \vec{B} \times \vec{S} \quad (II.A.1; 13)$$

où  $\vec{S}$  est le vecteur de coordonnées  $S_x$ ,  $S_y$  et  $S_z$  et  $\vec{B}$  un vecteur ou un opérateur vectoriel qui commute avec  $\vec{S}$ .

Nous utiliserons aussi les opérateurs  $S_+$  et  $S_-$  :

$$S_+ = |+\rangle\langle -| = S_x + iS_y \quad (II.A.1; 14.a)$$

$$S_- = |-\rangle\langle +| = S_x - iS_y \quad (II.A.1; 14.b)$$

#### - Expression géométrique du Hamiltonien -

Nous pouvons réexprimer le Hamiltonien donné par l'équation (II.A.1;9) en utilisant les opérateurs de spin. Nous remarquons que:

$$X_+ = x_0 S_+ \quad (II.A.1; 15.a)$$

$$X_- = x_0^\dagger S_- \quad (II.A.1; 15.b)$$

Nous intégrons  $x_0$  dans les coefficients de couplage  $\alpha_\omega$  et nous utilisons maintenant les équations (II.A.1;14) pour changer la forme du Hamiltonien d'interaction:

$$\begin{aligned} A^+ S_+ + A^- S_- &= A^+ (S_x + iS_y) + A^- (S_x - iS_y) \\ &= (A^+ + A^-) S_x + i(A^+ - A^-) S_y \end{aligned} \quad (II.A.1; 16)$$

Ceci nous conduit au Hamiltonien suivant:

$$H = H_R + \omega_0 S_z + (A^x S_x + A^y S_y) \quad (II.A.1;17)$$

où l'on a noté:

$$A^x = - (A^+ + A^-) \quad (II.A.1;18.a)$$

$$A^y = - i (A^+ - A^-) \quad (II.A.1;18.b)$$

Le Hamiltonien prend ainsi une forme de produit scalaire:

$$H = H_R + \hbar \vec{B} \cdot \vec{S} \quad (II.A.1;19)$$

où  $\vec{B}$  est l'opérateur dont les coordonnées  $B_x$ ,  $B_y$  et  $B_z$  sont définies par:

$$B_x = A^x \quad (II.A.1;20.a)$$

$$B_y = A^y \quad (II.A.1;20.b)$$

$$B_z = \omega_0 \quad (II.A.1;20.c)$$

On peut interpréter ce Hamiltonien comme l'énergie d'un moment magnétique  $\vec{S}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}$ . L'opérateur  $\vec{B}$  commutant avec  $\vec{S}$ , nous pouvons dériver l'équation de Heisenberg pour le spin:

$$\begin{aligned} d_t \vec{S}(t) &= i [H; \vec{S}] \\ &= \vec{B}(t) \times \vec{S}(t) \end{aligned} \quad (II.A.1;21)$$

L'évolution prend ainsi le sens d'une précession autour d'un champ magnétique  $\vec{B}(t)$  (voir figure II.1). Nous allons discuter cela en séparant, pour le champ  $A$ , valeur moyenne et fluctuations:

$$\vec{B}(t) = \vec{B}_0 + \vec{h}(t) \quad (II.A.1;22.a)$$

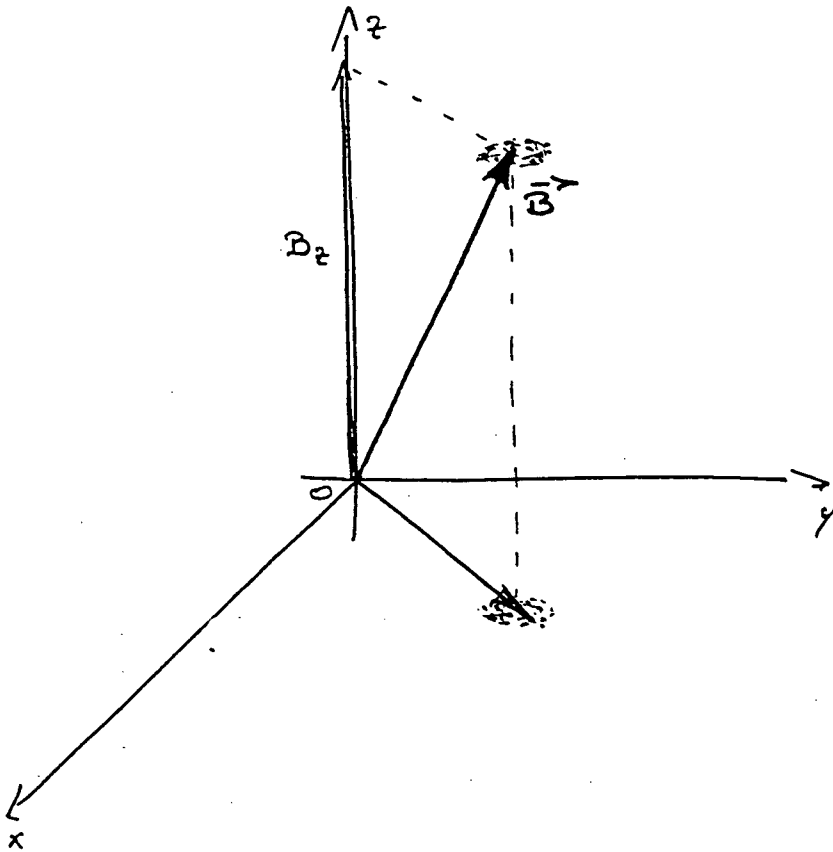
$$\vec{B}_0 = \langle \vec{B}(t) \rangle \quad (II.A.1;22.b)$$

$$\vec{h}(t) = \vec{B}(t) - \langle \vec{B}(t) \rangle \quad (II.A.1;22.c)$$

Les composantes du champ  $\vec{B}_0$  sont, selon  $Oz$  le désaccord  $\omega_0$  entre la fréquence atomique et la fréquence excitatrice et selon  $Ox$  et  $Oy$  les champs associés aux valeurs moyennes  $\langle A^x \rangle$  et  $\langle A^y \rangle$ . Ces valeurs moyennes sont indépendantes du temps dans le référentiel du champ tournant. Ce sont elles qui sont responsables de la précession de Rabi.

Le champ  $\vec{h}(t)$  est dans le plan  $xOy$ ; il décrit les fluctuations du champ  $A$  qui sont responsables de la relaxation de l'atome. Dans l'approche habituelle, il s'agit des fluctuations du vide qui sont isotropes et ont un spectre de bruit blanc. Nous allons nous intéresser ici à une situation nouvelle en considérant des fluctuations qui peuvent être comprimées et dont le spectre peut dépendre de la fréquence (spectre coloré par opposition à un bruit blanc).

Figure II.1



### Le modèle du champ fluctuant

Le champ  $B_z$  correspond au désaccord entre la fréquence atomique et la fréquence pompe.

Le champ se trouvant dans le plan  $xOy$  correspond à la fréquence de Rabi, il s'agit d'un champ fluctuant.

## II.A.2. Etude d'un modèle classique

Dans ce chapitre, nous étudions la relaxation d'un moment magnétique placé dans un champ  $\vec{h}(t)$  fluctuant classique.

### II.A.2.a. Présentation du modèle

Nous étudions dans cette section le modèle classique d'un dipôle magnétique  $\vec{S}$  placé dans un champ magnétique  $\vec{B}_0$  statique et un champ  $\vec{h}(t)$  fluctuant de valeur moyenne nulle (voir figure II.2):

$$\bar{h}_i(t) = 0 \quad (II.A.2;1)$$

où  $h_i(i = x, y, z)$  sont les composantes de  $\vec{h}$ . Ce champ aléatoire est supposé stationnaire: sa fonction d'autocorrélation

$$C_{ij}(\tau) = \overline{h_i(t)h_j(t-\tau)} \quad (II.A.2;2.a)$$

ne dépend pas de  $t$ . Les fonctions  $J_{ij}(\omega)$  sont les spectres de bruit associés à la variable aléatoire  $h$  :

$$J_{ij}(\omega) = \int d\tau C_{ij}(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (II.A.2;2.b)$$

L'équation d'évolution du moment magnétique est:

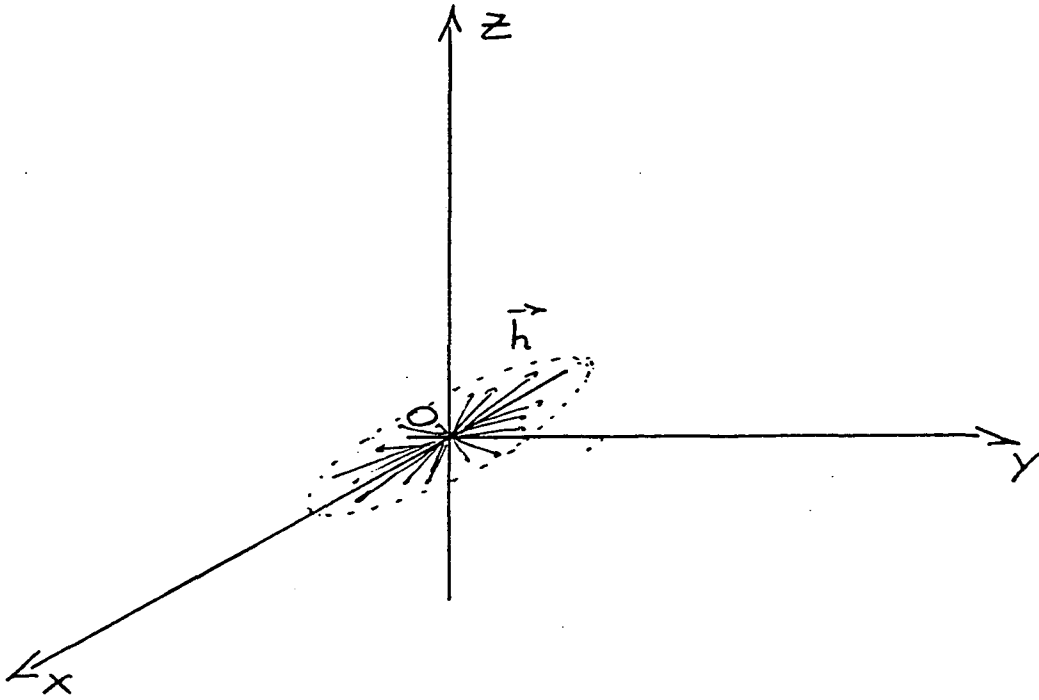
$$d_t \vec{S}(t) = \vec{B}_0 \times \vec{S}(t) + \vec{h}(t) \times \vec{S}(t) \quad (II.A.2.3)$$

Pour faire le rapport entre ce modèle et le problème de l'atome couplé au réservoir harmonique, les différentes composantes ont la signification suivante (cf. figure II.2).

- \*  $B_z$  est le désaccord entre la fréquence du laser et la fréquence de la transition
- \*  $B_x$  et  $B_y$  sont les composantes d'un vecteur du plan  $xOy$  associé à la precession de Rabi
- \*  $\vec{h}(t)$  est un vecteur du plan  $xOy$  associées aux fluctuations du champ électromagnétique.

Dans un premier temps, nous supposons le champ statique nul. Nous considérerons ensuite le cas où la fréquence de nutation  $B$  est beaucoup plus grande que les autres fréquences.

Figure II.2



**Le modèle du champ fluctuant: champ moyen nul**

Le champ fluctuant est dans le plan  $xOy$ .

### II.A.2.b. Relaxation à champ constant nul

#### - Equations de relaxation -

Quand le champ magnétique  $\vec{B}$  est nul, l'équation d'évolution du moment magnétique s'écrit:

$$d_t \vec{S}(t) = \vec{h}(t) \times \vec{S}(t) \quad (II.A.2;4)$$

Lors de cette évolution la norme de  $\vec{S}$  reste constante, la valeur moyenne  $\langle \vec{S}(t) \rangle$  évolue cependant car  $\vec{S}$  précesse autour d'un champ aléatoire. C'est l'évolution de cette valeur moyenne que nous étudions. Nous noterons:

$$\vec{s}(t) = \langle \vec{S}(t) \rangle \quad (II.A.2;5)$$

Intégrons formellement l'équation (II.A.2;4):

$$\vec{S}(t) = \vec{S}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{h}(t') \times \vec{S}(t') \quad (II.A.2;6)$$

et reportons dans l'équation d'évolution (II.A.2;4):

$$d_t \vec{S}(t) = \vec{h}(t) \times \vec{S}(t_0) + \int_{t_0}^t dt' \vec{h}(t) \times (\vec{h}(t') \times \vec{S}(t')) \quad (II.A.2;7)$$

Nous développons ensuite le terme qui se trouve dans l'intégrale en utilisant l'expression du double produit vectoriel:

$$\begin{aligned} \vec{h}(t) \times (\vec{h}(t-\tau) \times \vec{S}(t-\tau)) = \\ \vec{h}(t-\tau)[\vec{h}(t) \cdot \vec{S}(t-\tau)] - [\vec{h}(t) \cdot \vec{h}(t-\tau)]\vec{S}(t-\tau) \end{aligned} \quad (II.A.2;8)$$

Ceci donne par exemple pour le terme intervenant dans l'évolution de la composante  $S_x$  :

$$\begin{aligned} h_x(t-\tau)[h_y(t)S_y(t-\tau) + h_z(t)S_z(t-\tau)] - \\ [h_y(t)h_y(t-\tau) + h_z(t)h_z(t-\tau)]S_x(t-\tau) \end{aligned} \quad (II.A.2;9)$$

Nous prenons maintenant la valeur moyenne de l'équation d'évolution (II.A.2;7) en utilisant le fait que  $\vec{h}(t)$  a une valeur moyenne nulle et en faisant tendre  $t_0$  vers  $-\infty$ . Ceci nous donne l'expression suivante:

$$d_t \vec{s}(t) = \int_0^\infty d\tau \langle \vec{h}(t) \times (\vec{h}(t-\tau) \times \vec{S}(t-\tau)) \rangle \quad (II.A.2;10)$$

En utilisant la forme développée (II.A.2;9) pour les termes qui sont dans l'intégrale, nous obtenons des termes qui ont la forme suivante:

$$\langle h_i(t)h_j(t-\tau)S_k(t-\tau) \rangle \quad (II.A.2;11)$$

Pour étudier plus précisément l'évolution de la valeur moyenne du moment magnétique, nous allons nous placer dans le cadre d'une approximation du second ordre. Avec une telle approximation, on peut négliger dans l'expression précédente les corrélations entre  $\vec{S}$  et  $\vec{h}$ . On remplace donc les termes de type (II.A.2; 11) par l'expression suivante:



$$\overline{h_i(t)h_j(t-\tau)} s_k(t-\tau) = C_{ij}(\tau)s_k(t-\tau) \quad (II.A.2; 12)$$

On obtient par exemple pour la composante  $s_x$  :

$$d_t s_x(t) = \int_0^\infty d\tau \{ -(C_{yy}(\tau) + C_{zz}(\tau))s_x(t-\tau) + C_{yx}(\tau)s_y(t-\tau) + C_{zx}(\tau)s_z(t-\tau) \} \quad (II.A.2; 13)$$

Pour obtenir les équations d'évolution des autres composantes il suffit de faire une permutation circulaire sur les coordonnées  $x$ ,  $y$  et  $z$ . Ces expressions se simplifient en prenant en compte le fait que dans notre modèle la composante  $h_z$  est nulle. Les équations de relaxation deviennent:

$$d_t s_x(t) = \int_0^\infty d\tau (-C_{yy}(\tau)s_x(t-\tau) + C_{yx}(\tau)s_y(t-\tau)) \quad (II.A.2; 14.a)$$

$$d_t s_y(t) = \int_0^\infty d\tau (-C_{xx}(\tau)s_y(t-\tau) + C_{xy}(\tau)s_x(t-\tau)) \quad (II.A.2; 14.b)$$

$$d_t s_z(t) = \int_0^\infty d\tau - (C_{xx}(\tau) + C_{yy}(\tau))s_z(t-\tau) \quad (II.A.2; 14.c)$$

- L'approximation de bruit blanc -

Les fluctuations du champ  $\vec{h}$  sont caractérisées par un temps de corrélation  $\tau_c$ . Lorsque ce temps de corrélation est négligeable devant le temps caractéristique d'évolution du spin fictif, on peut faire l'approximation suivante que l'on appelle approximation de mémoire courte:

$$\overline{h_i(t)h_j(t-\tau)} = C_{ij}(\tau) = C_{ij}\delta(\tau) \quad (II.A.2; 15.a)$$

Ceci revient à considérer un bruit blanc puisque le spectre correspondant à (II.A.2;15) est:

$$J_{ij}(\omega) = C_{ij} \quad (II.A.2; 15.b)$$

En pratique, la condition de validité de cette approximation est que le temps de corrélation  $\tau_c$  doit être très petit devant le temps caractéristique d'évolution qui est ici  $\frac{1}{C_{ij}}$ . L'approximation sera ainsi valable lorsque:

$$C_{ij}\tau_c \ll 1 \quad (II.A.2; 16)$$

Dans le domaine des fréquences, ceci signifie que le spectre des fluctuations doit être plat sur une zone de largeur  $\tau_c^{-1}$  qui inclue toutes les fréquences d'évolution intervenant dans le problème.

Avec cette approximation les équations (II.A.2;14) deviennent des équations différentielles:

$$d_t s_x(t) = -\frac{1}{2} C_{yy}s_x(t) + \frac{1}{2} C_{xy}s_y(t) \quad (II.A.2; 17.a)$$

$$d_t s_y(t) = -\frac{1}{2} C_{xx}s_y(t) + \frac{1}{2} C_{yx}s_x(t) \quad (II.A.2; 17.b)$$

$$d_t s_z(t) = -\frac{1}{2} (C_{xx} + C_{yy})s_z(t) \quad (II.A.2; 17.c)$$

La matrice des covariances (matrice carrée 2\*2 dont les coefficients sont les  $C_{ij}$ ) est symétrique, il est donc possible de la diagonaliser dans une base  $Ox'y'z$  obtenue à partir de  $Oxyz$  par une rotation autour de  $Oz$ . Dans cette base, les équations de relaxation du moment magnétique sont particulièrement simples:

$$\begin{aligned}
d_t s_{x'}(t) &= -\gamma_{x'} s_{x'}(t) & (II.A.2; 18.a) \\
d_t s_{y'}(t) &= -\gamma_{y'} s_{y'}(t) & (II.A.2; 18.b) \\
d_t s_z(t) &= -\gamma_z s_z(t) & (II.A.2; 18.c)
\end{aligned}$$

$$\gamma_{x'} = \frac{1}{2} C_{y'y'} \quad (II.A.2; 19.a)$$

$$\gamma_{y'} = \frac{1}{2} C_{x'x'} \quad (II.A.2; 19.b)$$

$$\gamma_z = \frac{1}{2} (C_{x'x'} + C_{y'y'}) = \gamma_{x'} + \gamma_{y'} \quad (II.A.2; 19.c)$$

Chaque composante du spin est amortie avec un taux de relaxation proportionnel à la variance du champ magnétique qui lui est orthogonal.

Dans le cas où l'on veut étudier des fluctuations qui correspondent à un réservoir vide, les fluctuations sont les mêmes selon les axes  $0x$  et  $0y$  :

$$\gamma_x = \gamma_y \quad (II.A.2; 20.a)$$

$$\gamma_z = 2 \gamma_x \quad (II.A.2; 20.b)$$

On retrouve le fait bien connu que le taux de relaxation des cohérences est la moitié du taux de relaxation des populations.

Nous donnons maintenant les équations de Bloch obtenues en tenant compte du fait que les fluctuations sont quantiques:

$$d_t s_{x'}(t) = -\gamma_{x'} s_{x'}(t) \quad (II.A.2; 21.a)$$

$$d_t s_{y'}(t) = -\gamma_{y'} s_{y'}(t) \quad (II.A.2; 21.b)$$

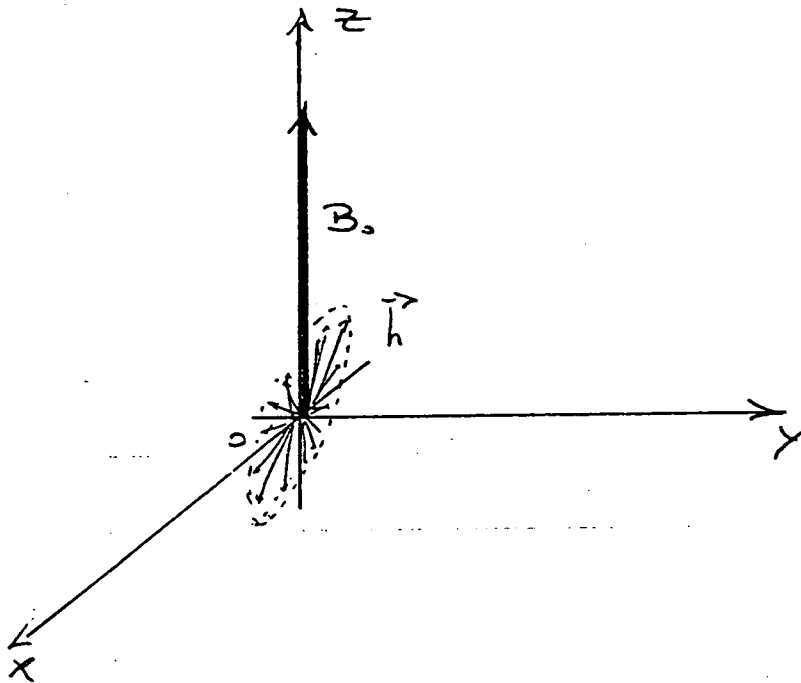
$$d_t s_z(t) = -\gamma_z s_z(t) - \frac{1}{2} \eta \quad (II.A.2; 21.c)$$

où

$$\eta = \gamma_z \left| \begin{array}{l} \text{réservoir} \\ \text{vide} \end{array} \right. \quad (II.A.2; 22)$$

Les termes de relaxation sont exactement les mêmes que ceux de l'équation II.A.1;18. Ces termes sont dûs à la partie fluctuation de l'interaction entre l'atome et le champ magnétique. Il apparaît par contre un terme constant  $\eta$  dans l'équation d'évolution de  $s_z$ . Celui-ci intervient en particulier dans le calcul de l'état stationnaire. Ce terme est dû à la partie réaction de rayonnement de l'interaction avec le champ électromagnétique ce qui explique que notre modèle classique ne nous permette pas de l'obtenir. Dans le chapitre suivant, nous ferons une étude quantique de la relaxation atomique, nous obtiendrons alors l'expression correcte de ce terme.

Figure II.3



**Le modèle du champ fluctuant: champ moyen non nul**

L'axe  $Oz$  est aligné selon la direction du champ moyen  $B_0$ .

Le champ fluctuant n'est plus dans le plan  $xOy$ .

### II.A.2.c. Champ statique non nul

Nous reprenons maintenant l'étude du problème dans le cas où le champ magnétique statique est non nul. En se plaçant dans le repère qui précesse dans le champ  $\vec{B}_0$  on obtient les équations de relaxation à partir de l'équation (II.A.2;13). Nous considérons alors la situation où le champ  $\vec{B}_0$  est suffisamment intense pour que le temps de précession soit très petit devant le temps caractéristique de relaxation. Ceci nous permet de faire l'approximation séculaire qui consiste à négliger les couplages entre les composantes du spin qui évoluent à des fréquences différentes. Nous faisons alors l'approximation consistant à considérer que le spectre est localement blanc autour de chacune des trois fréquences d'évolution libre des composantes du spin fictif. Cette approximation qui généralise au cas d'un champ intense l'approximation de bruit blanc sera appelée dans la suite approximation du "bruit tricolore".

#### - Evolution libre dans $\vec{B}_0$ -

Lorsque seul le champ  $\vec{B}_0$  est présent les équations d'évolution (II.A.2;3) deviennent:

$$d_t S_+(t) = i B_0 S_+(t) \quad (II.A.2; 23.a)$$

$$d_t S_z(t) = 0 \quad (II.A.2; 23.b)$$

$$d_t S_-(t) = - i B_0 S_-(t) \quad (II.A.2; 23.c)$$

Les trois composantes  $S_+$ ,  $S_z$  et  $S_-$  évoluent donc à trois fréquences différentes. Dans l'étude de la relaxation, pour  $B_0$  suffisamment intense, nous ne conserverons que les termes qui couplent  $S_+$  à  $S_+$ ,  $S_z$  à  $S_z$  et  $S_-$  à  $S_-$ . Nous allons maintenant établir ces équations de relaxation.

#### - Equations de relaxation -

Pour prendre en compte simplement l'effet de la précession, nous effectuons une rotation qui amène l'axe  $Oz$  dans la direction du champ statique  $\vec{B}_0$  (voir figure II.3). Dans ce nouveau repère, le champ  $h_z$  n'est plus nécessairement nul, les champs  $h_x$  et  $h_y$  sont eux aussi modifiés par la rotation. Nous discuterons en détail ces transformations dans le chapitre II.D. Le but principal de cette section est de discuter l'approximation séculaire et de généraliser à ce cas l'approximation de mémoire courte.

L'axe  $Oz$  étant maintenant dans la direction de  $\vec{B}_0$ , plaçons-nous dans un repère tournant autour de cet axe:

$$\vec{i}(t) = \cos B_0 t \vec{i} + \sin B_0 t \vec{j} \quad (II.A.2; 24.a)$$

$$\vec{j}(t) = - \sin B_0 t \vec{i} + \cos B_0 t \vec{j} \quad (II.A.2; 24.b)$$

$$\vec{k}(t) = \vec{k} \quad (II.A.2; 24.c)$$

où  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont les vecteurs unitaires du repère  $Oxyz$ .

Les composantes des vecteurs  $\vec{S}$  et  $\vec{h}$  sont obtenues par un changement de base habituel

$$\tilde{S}_+(t) = e^{-iB_0 t} S_+(t) \quad (II.A.2; 25.a)$$

$$\tilde{S}_-(t) = e^{iB_0 t} S_-(t) \quad (II.A.2; 25.b)$$

$$\tilde{S}_z(t) = S_z(t) \quad (II.A.2; 25.c)$$

Nous définissons d'autre part les champs  $h_+$  et  $h_-$  de la manière suivante:

$$h_+(t) = h_x(t) + i h_y(t) \quad (II.A.2; 26.a)$$

$$h_-(t) = h_x(t) - i h_y(t) \quad (II.A.2; 26.b)$$

$$\begin{aligned}\tilde{h}_+(t) &= e^{-iB_0 t} h_+(t) & (II.A.2; 27.a) \\ \tilde{h}_-(t) &= e^{iB_0 t} h_-(t) & (II.A.2; 27.b)\end{aligned}$$

Les équations d'évolution sont des équations vectorielles qui se transforment bien dans ce changement de repère:

$$d_t \tilde{S}(t) = \tilde{h}(t) \times \tilde{S}(t) \quad (II.A.2; 28)$$

Nous utilisons donc les équations de relaxation que nous avons établies plus tôt (II.A.2;22). Cela donne par exemple pour  $\tilde{s}_x$  :

$$\begin{aligned}d_t \tilde{s}_x &= \int_0^\infty d\tau \{ -(\tilde{c}_{yy}(\tau) + \tilde{c}_{zz}(\tau)) \tilde{s}_x(t-\tau) \\ &\quad + \tilde{c}_{yx}(\tau) \tilde{s}_y(t-\tau) + \tilde{c}_{zx}(\tau) \tilde{s}_z(t-\tau) \} \quad (II.A.2; 29)\end{aligned}$$

- L'approximation séculaire -

Les remarques que nous avons faites à propos des équations (II.A.2;23) se traduisent dans le repère qui précède à ne conserver que les termes qui couplent  $\tilde{S}_+$  à  $\tilde{S}_+$ ,  $\tilde{S}_z$  à  $\tilde{S}_z$  et  $\tilde{S}_-$  à  $\tilde{S}_-$ .

Commençons par  $\tilde{S}_z$  ; son équation de relaxation est:

$$\begin{aligned}d_t \tilde{s}_z(t) &= \int_0^\infty d\tau \{ -(\tilde{c}_{xx}(\tau) + \tilde{c}_{yy}(\tau)) \tilde{s}_z(t-\tau) \\ &\quad + \tilde{c}_{xy}(\tau) \tilde{s}_x(t-\tau) + \tilde{c}_{yz}(\tau) \tilde{s}_y(t-\tau) \} \quad (II.A.2; 30)\end{aligned}$$

On ne conserve donc que les termes suivants:

$$d_t \tilde{s}_z(t) = - \int_0^\infty d\tau (\tilde{c}_{xx}(\tau) + \tilde{c}_{yy}(\tau)) \tilde{s}_z(t-\tau) \quad (II.A.2; 31.a)$$

Pour les composantes  $\tilde{s}_+$  et  $\tilde{s}_-$  on procède de la même manière, on obtient ainsi:

$$\begin{aligned}d_t \tilde{s}_+(t) &= - \int_0^\infty d\tau \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{c}_{xx}(\tau) + \tilde{c}_{yy}(\tau) - \right. \\ &\quad \left. - i\tilde{c}_{xy}(\tau) + i\tilde{c}_{yx}(\tau)) + \tilde{c}_{zz}(\tau) \right\} \tilde{s}_+(t-\tau) \quad (II.A.2; 31.a)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}d_t \tilde{s}_-(t) &= - \int_0^\infty d\tau \left\{ \frac{1}{2}(\tilde{c}_{xx}(\tau) + \tilde{c}_{yy}(\tau) + \right. \\ &\quad \left. + i\tilde{c}_{xy}(\tau) - i\tilde{c}_{yx}(\tau)) + \tilde{c}_{zz}(\tau) \right\} \tilde{s}_-(t-\tau) \quad (II.A.2; 31.b)\end{aligned}$$

soit en utilisant les définitions de  $h_+$  et  $h_-$  (eq. II.A.2;26)

$$d_t \tilde{s}_+(t) = - \int_0^\infty d\tau \tilde{\gamma}_+(\tau) \tilde{s}_+(t-\tau) \quad (II.A.2; 32.a)$$

$$d_t \tilde{s}_-(t) = - \int_0^\infty d\tau \tilde{\gamma}_-(\tau) \tilde{s}_-(t-\tau) \quad (II.A.2; 32.b)$$

$$d_t \tilde{s}_z(t) = - \int_0^\infty d\tau \tilde{\gamma}_z(\tau) \tilde{s}_z(t-\tau) \quad (II.A.2; 32.c)$$

$$\tilde{\gamma}_+(\tau) = \frac{1}{2} \tilde{c}_{+-}(\tau) + \tilde{c}_{zz}(\tau) \quad (II.A.2; 33.a)$$

$$\tilde{\gamma}_-(\tau) = \frac{1}{2} \tilde{c}_{-+}(\tau) + \tilde{c}_{zz}(\tau) \quad (II.A.2; 33.b)$$

$$\tilde{\gamma}_z(\tau) = \frac{1}{2} \{ \tilde{c}_{+-}(\tau) + \tilde{c}_{-+}(\tau) \} \quad (II.A.2; 33.c)$$

Nous connaissons ainsi les taux de relaxation exprimés à l'aide des fonctions de corrélation du champ dans le repère tournant. Nous allons les réexprimer à l'aide des fonctions de corrélation du repère non tournant. On remarque que:

$$\tilde{c}_{+-}(\tau) = e^{-iB_0\tau} c_{+-}(\tau) \quad (II.A.2; 34.a)$$

$$\tilde{c}_{-+}(\tau) = e^{iB_0\tau} c_{-+}(\tau) \quad (II.A.2; 34.b)$$

Pour continuer, nous faisons une hypothèse sur les corrélations du champ  $h$  :

$$\overline{h_x(t)h_y(t-\tau)} = \overline{h_y(t)h_x(t-\tau)} \quad (II.A.2; 35)$$

(soit  $c_{yx}(\tau) = c_{xy}(-\tau)$ ).

Les fonctions de corrélation  $c_{+-}$  et  $c_{-+}$  ont ainsi les expressions suivantes:

$$c_{+-}(\tau) = c_{xx}(\tau) + c_{yy}(\tau) + i(c_{xy}(\tau) + c_{yx}(\tau)) + c_{xx}(\tau) + c_{yy}(\tau) \quad (II.A.2; 36.a)$$

$$c_{-+}(\tau) = c_{xx}(\tau) + c_{yy}(\tau) \quad (II.A.2; 36.b)$$

- L'approximation du spectre tricolore -

Comme précédemment, nous faisons une approximation de mémoire courte pour les fluctuations du champ  $\tilde{h}$ . Autrement dit, nous supposons:

$$\tilde{\gamma}_i(\tau) = \tilde{\gamma}_i \delta(\tau)$$

Cette approximation est moins restrictive que l'hypothèse de bruit blanc faite dans la section précédente. En effet, l'hypothèse de bruit blanc signifie que le temps de corrélation  $\tau_c$  des fluctuations de  $\tilde{h}$  est négligeable devant tous les temps caractéristiques d'évolution. Or le temps le plus court est ici  $\frac{1}{B_0}$  puisque la précession autour de  $\vec{B}_0$  est plus rapide que la relaxation.

Ainsi, pour que l'approximation du bruit blanc soit valable, le spectre de bruit de  $\tilde{h}$  doit être plat sur une bande de fréquence dont la largeur est très grande devant  $B_0$  (figure II.4.a).

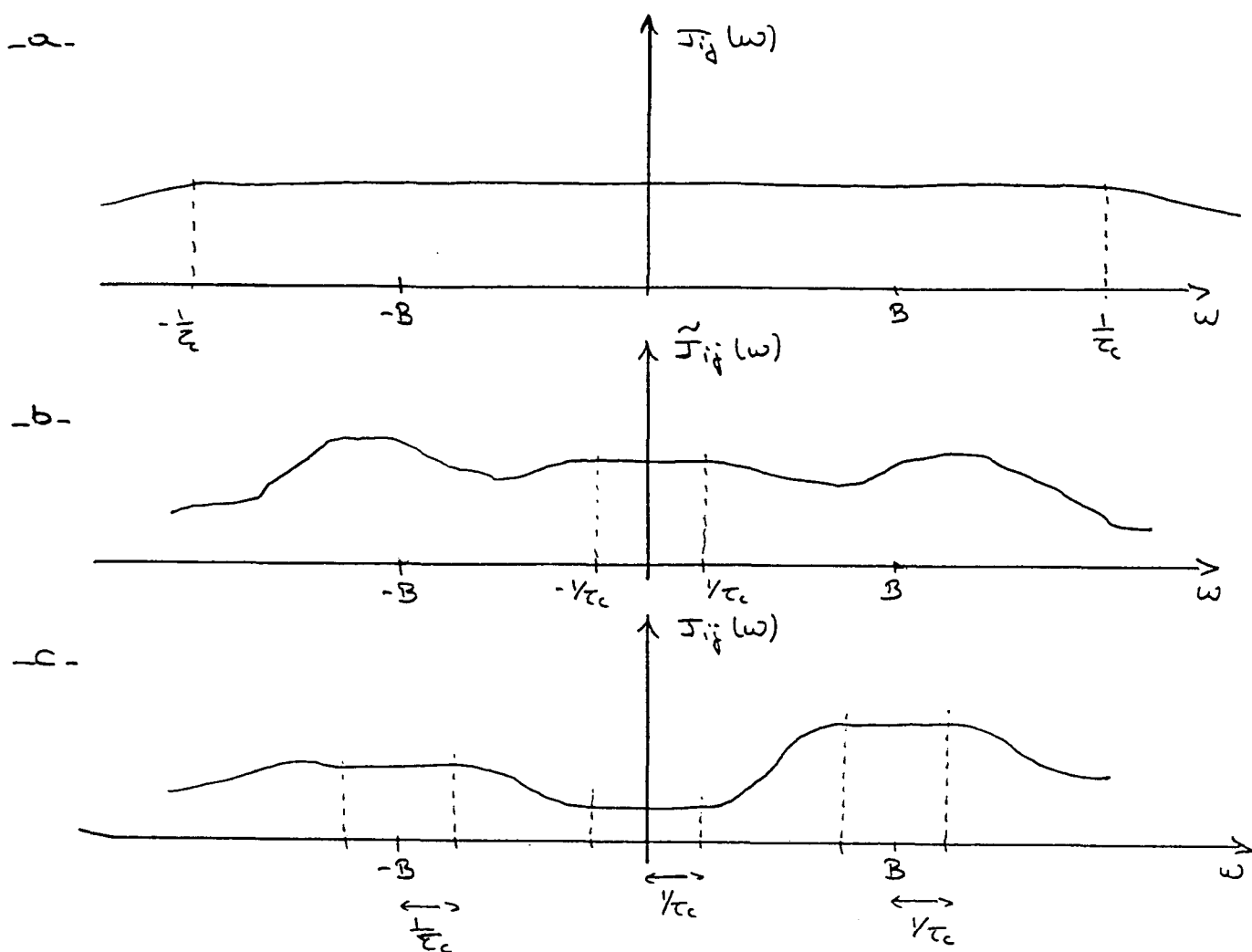
Dans notre cas, nous faisons une hypothèse de mémoire courte dans le repère qui tourne. Le seul temps qui intervient dans l'évolution de  $\tilde{S}$  est le temps de relaxation. Cela signifie que le spectre de bruit de  $\tilde{h}$  doit être plat sur une bande de fréquence dont la largeur est grande devant le taux de relaxation (cf. figure II.4.b).

Nous pouvons maintenant revenir au spectre de  $\tilde{h}$ . Le champ  $\tilde{h}(\omega)$  s'exprime en fonction des champs  $h(-B_0)$ ,  $h(0)$  et  $h(B_0)$  (cf. eqs. II.A.2;25). Notre hypothèse sur  $\tilde{h}$  se traduit donc par le fait que le spectre  $J_{ij}(\omega)$  doit être localement plat autour de  $B$ ,  $0$  et  $-B_0$  (figure II.4.c).

Par opposition à un spectre blanc et puisque  $J_{ij}$  doit être constant sur trois bandes de fréquence, nous parlerons d'un spectre tricolore.

Cette situation est en fait analogue au traitement de l'émission spontanée dans un système à plusieurs niveaux. La relaxation est supposée Markovienne sur chaque transition prise séparément mais on prend en compte dans l'expression des taux de relaxation de la variation de la densité spectrale du couplage avec la fréquence de transition (soit, pour le cas de l'espace libre, une variation en  $\omega^3$ ).

Figure II.4



### Spectres de bruit

-a- Bruit blanc: le spectre de bruit ne dépend pas de la fréquence.

-b- Bruit localement blanc: le spectre est plat sur un domaine de fréquence contenant les fréquences d'évolution du système. Cette situation correspond à l'approximation de mémoire courte lorsque le champ moyen est nul.

-c- Bruit tricolore: le spectre est localement plat autour de chaque fréquence d'évolution libre du système. Cette situation correspond à l'approximation de mémoire courte lorsque le champ moyen n'est pas nul.

## II.B. La relaxation de l'atome habillé

Dans ce chapitre nous étudions la relaxation d'un système à deux niveaux excité par un champ monochromatique intense et couplé à un réservoir harmonique en utilisant la méthode de l'atome habillé. Dans une première section, nous présentons cette méthode. Nous établissons ensuite les équations de relaxation dans le cadre de l'approximation du bruit tricolore.

### II.B.1. L'atome habillé

Nous étudions un système à deux niveaux excité par un champ monochromatique intense et couplé à un réservoir harmonique. La méthode de l'atome habillé a pour but de permettre un traitement perturbatif de la relaxation (c'est-à-dire de l'effet des fluctuations du réservoir) tout en traitant l'effet du champ exciteur de manière non perturbative. Il faut pour cela séparer le champ électromagnétique en deux parties: le champ pompe d'une part et les fluctuations d'autre part. Cette séparation peut être réalisée de deux façons différentes.

#### - Séparation du champ pompe et des fluctuations -

La première approche consiste à isoler le mode pompe des autres modes du réservoir. Le système non linéaire est alors constitué du système à deux niveaux couplé à un oscillateur harmonique (le mode pompe) ; son évolution libre peut être étudiée de manière exacte. On traite ensuite perturbativement la relaxation de ce système.

La seconde approche consiste à séparer le champ en un champ moyen et en des fluctuations. En pratique elle consiste à opérer une transformation unitaire de translation sur les opérateurs création et annihilation en définissant:

$$\begin{aligned} a_\omega &= \langle a_\omega \rangle + \delta a_\omega \\ a_\omega^\dagger &= \langle a_\omega^\dagger \rangle + \delta a_\omega^\dagger \end{aligned}$$

où  $\langle \rangle$  sont les valeurs moyennes et où  $\delta a_\omega$  sont des opérateurs décrivant les fluctuations quantiques du champ. Les opérateurs  $\delta a_\omega$  et  $\delta a_\omega^\dagger$  ont exactement les mêmes relations de commutation que les opérateurs  $a_\omega$  et  $a_\omega^\dagger$ . Le réservoir qu'ils constituent a ainsi la même structure et les mêmes fluctuations que le réservoir initial.

Après cette transformation, on se trouve en présence d'un système à deux niveaux excité par un champ classique monochromatique et couplé à un réservoir qui correspond à un champ fluctuant dont l'amplitude moyenne est nulle. Le système non linéaire est dans ce cas un système à deux niveaux excité par un champ monochromatique classique. Une transformation de Floquet permet de le remplacer par un système équivalent constitué d'une échelle de niveaux  $\{|e, n\rangle; |f, n\rangle\}_{n \in \mathbb{Z}}$  où  $e$  et  $f$  indiquent l'état du système à deux niveaux et où  $n$  est un entier relatif correspondant à la multiplicité.

Dans ces deux approches, le système est constitué d'une multiplicité de niveaux. Dans la première approche, l'indice  $n$  de la multiplicité est un entier positif correspondant au nombre de photons dans le mode pompe. Dans le second cas, cet entier peut aussi être négatif.

La différence majeure entre les deux approches tient au fait que dans le premier cas, les fluctuations du mode pompe sont prises en compte dans le système alors que dans le second, elles sont prises en compte dans le réservoir. Ceci se traduit par le fait que la précession de Rabi (due au couplage entre l'état  $|e, n\rangle$  et l'état  $|f, n\rangle$ ) dépend de la multiplicité où l'on se trouve dans le premier cas alors qu'elle en est indépendante dans le second.

Dans les situations auxquelles nous nous intéressons, le champ laser est intense; ainsi, les états impliqués correspondent à un nombre  $n$  de photons très grand et la fréquence de Rabi varie très peu. Les deux méthodes semblent alors tout à fait équivalentes. Il faut cependant rester prudent. En effet, le traitement des fluctuations du champ pompe est différent dans les deux méthodes (si on s'intéresse à ces fluctuations, il est préférable d'utiliser la seconde approche). Pour l'étude des fluctuations du champ sortant dans les autres modes (ce qui est en général le problème étudié) les deux méthodes sont équivalentes.



Nous présentons maintenant de manière plus détaillée l'atome habillé tel que nous l'utiliserons par la suite; il est construit à l'aide de la seconde méthode.

- Etats et opérateurs de l'atome habillé -

Les états de l'atome habillé sont formés de deux échelles  $\{|e, n\rangle\}$  et  $\{|f, n\rangle\}$ ; les indices  $e$  et  $f$  correspondent respectivement à l'état excité et à l'état fondamental de l'atome et le nombre  $n$  correspondrait, si l'on avait utilisé la première méthode, à un nombre de photons. L'énergie de l'état excité est  $\hbar\omega_0$  et celle d'un photon pompe est  $\omega_p$ . La fréquence de Rabi caractérisant l'intensité du champ pompe est notée  $\omega_1$ . Le Hamiltonien de ce système est ainsi:

$$H_S = \sum_n \left( (n\omega_p - \frac{\omega_0}{2}) |f, n\rangle\langle f, n| + (n\omega_p + \frac{\omega_0}{2}) |e, n\rangle\langle e, n| + \frac{\omega_1}{2} (|e, n\rangle\langle f, n+1| + |f, n+1\rangle\langle e, n|) \right) \quad (II.B.1;1)$$

Les opérateurs caractérisant l'état atomique sont:

$$D_+ = |e\rangle\langle f| = \sum_n |e, n\rangle\langle f, n| \quad (II.B.1;2.a)$$

$$D_- = |f\rangle\langle e| = \sum_n |f, n\rangle\langle e, n| \quad (II.B.1;2.b)$$

$$\begin{aligned} D_z &= \frac{1}{2} (|e\rangle\langle e| - |f\rangle\langle f|) \\ &= \sum_n \frac{1}{2} (|e, n\rangle\langle e, n| - |f, n\rangle\langle f, n|) \end{aligned} \quad (II.B.1;2.c)$$

On peut définir l'équivalent des opérateurs création et annihilation pour le champ pompe:

$$b^- = \sum_n (|e, n-1\rangle\langle e, n| + |f, n-1\rangle\langle f, n|) \quad (II.B.1;3.a)$$

$$b^+ = \sum_n (|e, n+1\rangle\langle e, n| + |f, n+1\rangle\langle f, n|) \quad (II.B.1;3.b)$$

Il faut remarquer que, contrairement aux "vrais" opérateurs création et annihilation les opérateurs  $b^-$  et  $b^+$  commutent.

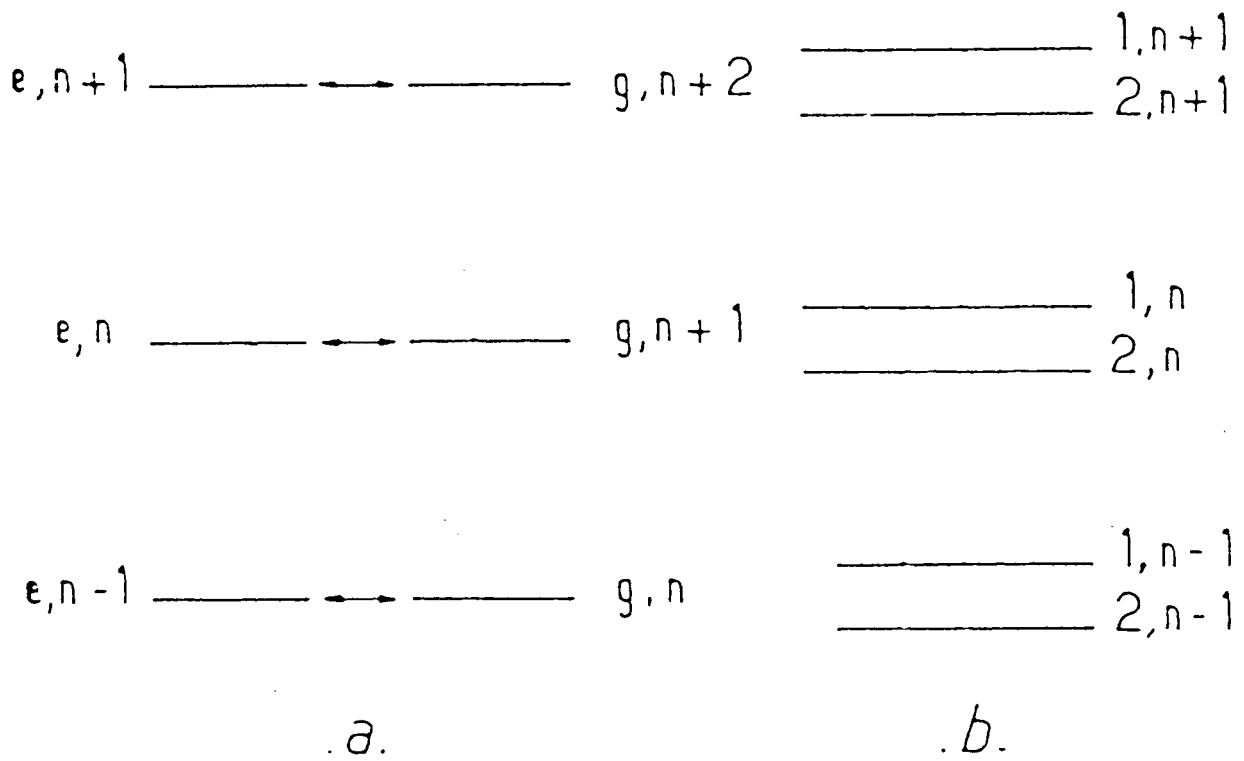
Nous définissons un état cohérent du champ pompe comme état propre de l'opérateur  $b^-$  (qui est aussi état propre de  $b^+$ )

$$b^- |\varphi\rangle = e^{i\varphi} |\varphi\rangle \quad (II.B.1;4.a)$$

où  $\varphi$  est une phase. Cet état s'écrit:

$$|\varphi\rangle = \sum_n e^{in\varphi} |n\rangle \quad (II.B.1;4.b)$$

Figure II.5



**L'atome habillé**

-a- base non couplée

-b- base couplée

Nous allons maintenant regrouper les états en multiplicités  $\{\mathcal{M}_n\}$  (figure II.5.a). Chaque multiplicité a une énergie moyenne de  $n\hbar\omega_p$ . Elle est constituée des deux niveaux  $|e, n\rangle$  et  $|f, n+1\rangle$ . A l'intérieur d'une multiplicité, le Hamiltonien  $h_n$  est le même que celui d'un spin fictif:

$$h_n = \frac{\omega_0 - \omega_p}{2} (|e, n\rangle\langle e, n| - |f, n+1\rangle\langle f, n+1|) + \frac{\omega_1}{2} (|e, n\rangle\langle f, n+1| + |f, n+1\rangle\langle e, n|) \quad (II.B.1;5)$$

Le Hamiltonien total  $H_S$  s'écrit ainsi:

$$H_S = \sum_n n\omega_p (|e, n\rangle\langle e, n| + |f, n+1\rangle\langle f, n+1|) + \sum_n h_n \quad (II.B.1;6)$$

A l'intérieur d'une multiplicité  $\mathcal{M}_n$  on peut diagonaliser le Hamiltonien  $h_n$  en introduisant la base couplée (figure II.5.b)

$$|1, n\rangle = \cos\theta |e, n\rangle + \sin\theta |f, n+1\rangle \quad (II.B.1;7.a)$$

$$|2, n\rangle = -\sin\theta |e, n\rangle + \cos\theta |f, n+1\rangle \quad (II.B.1;7.b)$$

$$|e, n\rangle = \cos\theta |1, n\rangle - \sin\theta |2, n\rangle \quad (II.B.1;8.a)$$

$$|f, n+1\rangle = \sin\theta |1, n\rangle + \cos\theta |2, n\rangle \quad (II.B.1;8.b)$$

où

$$2\theta = \text{Arccos} \left( \frac{\omega_0 - \omega_p}{\Delta} \right) \quad (II.B.1;9.a)$$

$$\Delta = \sqrt{(\omega_0 - \omega_p)^2 + \omega_1^2} \quad (II.B.1;9.b)$$

Dans la base couplée, les hamiltoniens sont:

$$h_n = \frac{\Delta}{2} (|1, n\rangle\langle 1, n| - |2, n\rangle\langle 2, n|) \quad (II.B.1;10.a)$$

$$H_S = \sum_n (n\omega_p (|1, n\rangle\langle 1, n| + |2, n\rangle\langle 2, n|) + h_n) \quad (II.B.1;10.b)$$

Puisque chaque multiplicité est équivalente à un système à deux niveaux, nous introduisons les opérateurs de spin:

$$S_+ = \sum_n |e, n\rangle\langle f, n+1| \quad (II.B.1;11.a)$$

$$S_- = \sum_n |f, n+1\rangle\langle e, n| \quad (II.B.1;11.b)$$

$$S_z = \sum_n \frac{1}{2} [|e, n\rangle\langle e, n| - |f, n+1\rangle\langle f, n+1|] \quad (II.B.1;11.c)$$

$$S_x = \sum_n \frac{1}{2} [|e, n\rangle\langle f, n+1| + |f, n+1\rangle\langle e, n|] \quad (II.B.1;11.d)$$

$$S_y = \sum_n \frac{1}{2i} [|e, n\rangle\langle f, n+1| - |f, n+1\rangle\langle e, n|] \quad (II.B.1;11.e)$$

Nous introduisons d'autre part des opérateurs de spin correspondant à une quantification selon la direction du champ statique, c'est-à-dire dont les états de base sont la base couplée:

$$S'_+ = \sum_n |1, n\rangle\langle 2, n| \quad (II.B.1; 12.a)$$

$$S'_- = \sum_n |2, n\rangle\langle 1, n| \quad (II.B.1; 12.b)$$

$$S'_z = \sum_n \frac{1}{2} (|1, n\rangle\langle 1, n| - |2, n\rangle\langle 2, n|) \quad (II.B.1; 12.c)$$

$$S'_x = \sum_n \frac{1}{2} (|1, n\rangle\langle 2, n| + |2, n\rangle\langle 1, n|) \quad (II.B.1; 12.d)$$

$$S'_y = \sum_n \frac{1}{2i} (|1, n\rangle\langle 2, n| - |2, n\rangle\langle 1, n|) \quad (II.B.1; 12.e)$$

La relation entre les  $S_v$  et les  $S'_v$  correspond à une rotation d'angle  $2\theta$  autour de l'axe  $Oy$

$$S_+ = \cos^2\theta S'_+ + 2 \sin\theta \cos\theta S'_z - \sin^2\theta S'_- \quad (II.B.1; 13.a)$$

$$S_- = -\sin^2\theta S'_+ + 2 \sin\theta \cos\theta S'_z + \cos^2\theta S'_- \quad (II.B.1; 13.b)$$

$$S_z = -\sin\theta \cos\theta S'_+ + (\cos^2\theta - \sin^2\theta)S'_z - \sin\theta \cos\theta S'_- \quad (II.B.1; 13.c)$$

$$S_x = \cos 2\theta S'_x + \sin 2\theta S'_z \quad (II.B.1; 13.d)$$

$$S_y = S'_y \quad (II.B.1; 13.e)$$

$$S_z = -\sin 2\theta S'_x + \cos 2\theta S'_z \quad (II.B.1; 13.f)$$

On remarquera enfin que les relations qui existent entre les opérateurs de spin  $S_v$  et les opérateurs du dipôle  $D_u$  définis par les équations (II.B.1;2) sont:

$$D_+ = S_+ b^+ \quad (II.B.1; 14.a)$$

$$D_- = S_- b^- \quad (II.B.1; 14.b)$$

$$D_z = S_z \quad (II.B.1; 14.c)$$

Par la suite, nous nous intéresserons à des états de l'atome habillés pour lesquels le champ est dans un état cohérent  $|\varphi\rangle$  (défini par l'équation (II.B.1;4)). Nous noterons:

$$|e, \varphi\rangle = \sum_n e^{in\varphi} |e, n\rangle \quad (II.B.1; 15.a)$$

$$|f, \varphi\rangle = \sum_n e^{in\varphi} |f, n\rangle \quad (II.B.1; 15.b)$$

$$|1, \varphi\rangle = \sum_n e^{in\varphi} |1, n\rangle \quad (II.B.1; 15.c)$$

$$|2, \varphi\rangle = \sum_n e^{in\varphi} |2, n\rangle \quad (II.B.1; 15.d)$$

Ces états vérifient les relations suivantes:

$$|e, \varphi\rangle = \cos\theta |1, \varphi\rangle - \sin\theta |2, \varphi\rangle \quad (II.B.1; 16.a)$$

$$|f, \varphi\rangle = \sin\theta e^{i\varphi} |1, \varphi\rangle + \cos\theta e^{i\varphi} |2, \varphi\rangle \quad (II.B.1; 16.b)$$

$$|1, \varphi\rangle = \cos\theta |e, \varphi\rangle + \sin\theta e^{-i\varphi} |f, \varphi\rangle \quad (II.B.1; 16.c)$$

$$|2, \varphi\rangle = -\sin\theta |e, \varphi\rangle + \cos\theta e^{-i\varphi} |f, \varphi\rangle \quad (II.B.1; 16.d)$$

- Le référentiel du champ tournant -

Nous nous plaçons maintenant dans le référentiel du champ tournant. Dans la base couplée, un opérateur  $|i, n\rangle \langle j, m|$  évolue selon  $H_s$  à la fréquence  $(m-n)\omega_p + (i-j)\Delta$ . Le passage dans le référentiel du champ tournant permet d'éliminer l'évolution rapide à  $(m-n)\omega_p$  pour ne conserver que l'évolution qui correspond au spin fictif. Nous définissons pour cela les états suivants:

$$|\widetilde{i, n}\rangle(t) = e^{-in\omega_p t} |i, n\rangle \quad (II.B.1; 17)$$

L'évolution dans cette base peut être décrite par le Hamiltonien  $\widetilde{H}$  :

$$\begin{aligned} \widetilde{H} &= \sum_n \frac{\Delta}{2} (|\widetilde{1, n}\rangle \langle \widetilde{1, n}| - |\widetilde{2, n}\rangle \langle \widetilde{2, n}|) \\ &= \Delta S'_z \end{aligned} \quad (II.B.1; 18)$$

Il faut noter que dans ce nouveau référentiel toutes les multiplicités ont la même énergie; nous utiliserons cette remarque lors de l'étude de la relaxation. Dans toute la suite, afin de ne pas alourdir les notations nous omettrons les  $^m$  tout en nous souvenant que nous sommes dans le référentiel du champ tournant pour l'atome et pour le champ  $A$ .

## II.B.2. Relaxation de l'atome habillé

Nous étudions maintenant la relaxation de l'atome habillé. Nous utilisons pour cela le même principe que pour l'étude du spin fictif en nous plaçant dans le cadre de l'approximation séculaire et de l'approximation du bruit tricolore.

### - Couplage avec le réservoir -

Nous utilisons le Hamiltonien d'interaction  $H_1$  qui correspond à l'approximation du champ tournant (voir eq. II.A.1;4)

$$H_1 = - (A^+ D_+ + A^- D_-) \quad (II.B.2;1)$$

Pour l'étude de la relaxation, il est préférable, comme nous l'avons vu lors de l'étude du spin fictif, de réexprimer le Hamiltonien  $H_1$  à l'aide d'opérateurs propres du Hamiltonien d'évolution libre et de mettre en évidence les changements de multiplicité. Pour cela, nous utilisons les expressions (II.B.1;14) des opérateurs  $D_u$  et ensuite l'expression des opérateurs de spin obtenus par rotation (II.B.1;13). Ceci nous donne:

$$H_1 = - \{ (\cos^2\theta S'_+ + 2 \sin\theta \cos\theta S'_z - \sin^2\theta S'_-) b^+ A^+ + (-\sin^2\theta S'_+ + 2 \sin\theta \cos\theta S'_z + \cos^2\theta S'_-) b^- A^- \} \quad (II.B.2;2)$$

### - Passage en représentation d'interaction -

Nous nous plaçons maintenant en représentation d'interaction par rapport au Hamiltonien  $H_S$ . Cette transformation est équivalente à celle que nous avons faite lors de l'étude du spin fictif quand nous nous sommes placés dans le repère précessant autour du champ statique  $\vec{B}_0$ . Nous définissons pour cela les opérateurs  $T_u$  :

$$T_+(t) = e^{-i\Delta t} S'_+(t) \quad (II.B.2;3.a)$$

$$T_z(t) = S'_z(t) \quad (II.B.2;3.b)$$

$$T_-(t) = e^{i\Delta t} S'_-(t) \quad (II.B.2;3.c)$$

D'autre part, afin d'écrire le Hamiltonien d'interaction de manière plus compacte et d'éviter la manipulation d'un nombre excessif de  $\sin\theta$  ou  $\cos\theta$  pendant les calculs, nous définissons:

$$A_+^+(t) = \cos^2\theta e^{i\Delta t} A^+(t) \quad (II.B.2;4.a)$$

$$A_z^+(t) = 2 \sin\theta \cos\theta A^+(t) \quad (II.B.2;4.b)$$

$$A_-^+(t) = -\sin^2\theta e^{-i\Delta t} A^+(t) \quad (II.B.2;4.c)$$

$$A_+^-(t) = -\sin^2\theta e^{i\Delta t} A^-(t) \quad (II.B.2;5.a)$$

$$A_z^-(t) = 2 \sin\theta \cos\theta A^-(t) \quad (II.B.2;5.b)$$

$$A_-^-(t) = \cos^2\theta e^{-i\Delta t} A^-(t) \quad (II.B.2;5.c)$$

En reportant ces expressions dans le Hamiltonien  $H_1$  de l'équation (II.B.2;2) et en utilisant le fait que nous passons en représentation d'interaction selon  $H_S$  nous obtenons comme Hamiltonien total:

$$H = - \sum_{\alpha, u} A_u^\alpha b^\alpha T_u \quad (II.B.2;6)$$

où  $\alpha = +, -$  et  $u = +, z, -$ .

- Dérivation des équations de relaxation -

L'équation d'évolution d'un opérateur  $X$  de l'atome habillé en représentation d'interaction selon  $H_S$  est:

$$d_t X(t) = -i \sum_{\alpha, u} A_\alpha^u(t) [b^\alpha T_u(t); X(t)] \quad (II.B.2;7)$$

Nous l'intégrons formellement:

$$X(t) = -i \int_0^\infty d\tau \sum_{\alpha, u} A_\alpha^u(t-\tau) [b^\alpha T_u(t-\tau); X(t-\tau)] \quad (II.B.2;8)$$

Nous reportons dans l'équation d'évolution (II.B.2;7):

$$d_t X(t) = - \int_0^\infty d\tau \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ u, v}} [A_v^\beta(t) b^\beta T_v(t); [A_u^\alpha(t-\tau) b^\alpha T_u(t-\tau); X(t-\tau)]] \quad (II.B.2;9)$$

Nous nous plaçons maintenant dans le cadre d'une approximation au second ordre comme nous l'avons fait avec le spin fictif en prenant la moyenne sur le réservoir et en négligeant les couplages entre le système et le réservoir:

$$d_t X(t) = - \int_0^\infty d\tau \sum_{\substack{\alpha, \beta \\ u, v}} \{ \langle A_v^\beta(t) A_u^\alpha(t-\tau) \rangle b^\beta T_v(t) [b^\alpha T_u(t-\tau); X(t-\tau)] \\ - \langle A_u^\alpha(t-\tau) A_v^\beta(t) \rangle [b^\alpha T_u(t-\tau); X(t-\tau)] b^\beta T_v(t) \} \quad (II.B.2;10)$$

Nous faisons maintenant une approximation de mémoire courte puisque nous recherchons un effet cumulatif du bruit du réservoir ; la grandeur qui nous intéresse est alors l'intégrale des fonctions de corrélation. Nous noterons:

$$\langle A_u^\alpha(t) A_v^\beta(t') \rangle = C_{uv}^{\alpha\beta} \delta(t-t') \quad (II.B.2;11)$$

Lorsque nous exprimerons les coefficients  $C_{uv}^{\alpha\beta}$  à l'aide des fonctions de corrélation du champ  $A$  que nous avons introduites dans l'appendice  $A_I$ , nous verrons que cette approximation de mémoire courte est l'approximation du bruit tricolore que nous avons faite dans l'étude du spin fictif. En reportant l'expression (II.B.2;11) des fonctions de corrélation dans l'équation de relaxation (II.B.2;10), nous obtenons:

$$d_t X(t) = - \sum_{\alpha\beta} \frac{C_{uv}^{\alpha\beta}}{2} \{ b^\alpha b^\beta T_u T_v X - 2b^\alpha T_u X T_v b^\alpha + X T_u T_v b^\alpha b^\beta \} \quad (II.B.2;12)$$

- Approximation séculaire -

Nous faisons maintenant l'approximation séculaire qui consiste à ne conserver que les termes qui couplent des opérateurs évoluant librement à la même fréquence.

Dans l'expression (II.B.2;12) que nous venons d'établir, les opérateurs couplés à  $X$  sont des produits de  $b^\alpha, b^\beta, T_u, T_v$  et  $X$  lui-même. Les opérateurs  $b^\alpha$  et  $b^\beta$  évoluent à fréquence nulle car dans le référentiel du

champ tournant toutes les multiplicités ont même énergie. Par contre, les opérateurs  $T_u$  et  $T_v$  correspondent à des opérateurs  $S'_u$  et  $S'_v$  qui évoluent respectivement aux fréquences  $-u\Delta$  et  $-v\Delta$ .

Ainsi, pour obtenir un opérateur évoluant à la même fréquence que  $X$  il faut prendre les termes où  $u = -v$ . Nous utilisons le fait que:

$$T_u = T_{-u}^\dagger \quad (II.B.2;13)$$

En faisant l'approximation séculaire dans l'équation de relaxation (II.B.2;12) on obtient:

$$d_t X(t) = - \sum_{\alpha, \beta} \frac{C_{u, -u}^{\alpha\beta}}{2} (b^\alpha b^\beta T_u T_u^\dagger X - 2b^\alpha T_u X T_u^\dagger b^\alpha + X T_u T_u^\dagger b^\alpha b^\beta) \quad (II.B.2;14)$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner les expressions explicites des équations de relaxation des opérateurs  $|i, n\rangle\langle j, m|$ . Pour cela, nous allons expliciter les coefficients de relaxation  $C_{u, -u}^{\alpha\beta}$  en fonction de la densité spectrale du réservoir et des paramètres décrivant l'état du champ.

- Coefficients de relaxation -

La première hypothèse que nous faisons sur le bruit est que celui-ci est stationnaire. C'est-à-dire que  $\langle A^\alpha(t) A^\beta(t') \rangle$  ne dépend que de  $(t - t')$ . En fréquence cela signifie:

$$\begin{aligned} \langle A^\alpha(\omega) A^\beta(\omega') \rangle &= 2\pi\delta(\omega + \omega') \langle A^\alpha(\omega) A^\beta \rangle \\ &= 2\pi\delta(\omega + \omega') \rho^{\alpha\beta}(\omega) \end{aligned} \quad (II.B.2;15)$$

Nous avons d'autre part défini les champs  $A_u^\alpha$  lors du passage en représentation d'interaction (II.B.2;4 et 5):

$$A_u^\alpha(t) \propto e^{iu\Delta t} A^\alpha(t) \quad (II.B.2;16)$$

où le coefficient de proportionalité est une fonction trigonométrique du paramètre de saturation  $\theta$ . En fréquence cela signifie que:

$$A_u^\alpha(\omega) \propto A^\alpha(\omega + u\Delta) \quad (II.B.2;17)$$

et donc:

$$\langle A_u^\alpha(\omega) A_v^\beta(\omega') \rangle \propto 2\pi\delta(\omega + \omega' + \Delta(u + v)) \rho^{\alpha\beta}(\omega + u\Delta) \quad (II.B.2;18)$$

Nous avons ensuite fait une approximation de mémoire courte. Cette approximation est justifiée dès que le temps de corrélation  $\tau_c$  entre les champs  $A_u^\alpha(t)$  et  $A_v^\beta(t)$  est négligeable devant le temps de relaxation  $\tau_R$ . En fréquence, cela signifie que le spectre  $\rho^{\alpha\beta}(\omega + u\Delta)$  doit être plat sur une largeur supérieure à  $\frac{1}{\tau_R}$  autour de  $\omega = 0$ . Nous retrouvons l'approximation du bruit tricolore consistant à dire que le spectre  $\rho^{\alpha\beta}$  est localement plat autour des trois fréquences  $-\Delta, 0$  et  $+\Delta$ . Nous supposons ainsi:

$$\rho^{\alpha\beta}(\omega + u\Delta) = \rho^{\alpha\beta}(u\Delta) \quad (II.B.2;19)$$

pour  $\omega \ll \frac{1}{\tau_R}$ . Dans ce cas:

$$C_{u, -u}^{\alpha\beta} \propto \rho^{\alpha\beta}(u\Delta) \quad (II.B.2;20)$$

Rappelons maintenant les expressions des fonctions  $\rho^{\alpha\beta}(u\Delta)$  que nous avons données dans l'appendice A<sub>I</sub>. Nous sommes dans le référentiel du champ tournant; on a donc:



$$A^+(\omega) = (\omega_p + \omega) \alpha_{\omega_p+\omega} a_{\omega_p+\omega} \quad (II.B.2; 21.a)$$

$$A^-(\omega) = (\omega_p - \omega) \alpha_{\omega_p-\omega} a_{\omega_p-\omega}^\dagger \quad (II.B.2; 21.b)$$

nous notons  $J_+$ ,  $J_0$  et  $J_-$  les densités spectrales:

$$J_+ = (\omega_p + \Delta)^2 \alpha_{\omega_p+\Delta} \alpha_{\omega_p-\Delta}^* \quad (II.B.2; 22.a)$$

$$J_0 = \omega_p^2 \alpha_{\omega_p} \alpha_{\omega_p}^* \quad (II.B.2; 22.b)$$

$$J_- = (\omega_p - \Delta)^2 \alpha_{\omega_p-\Delta} \alpha_{\omega_p+\Delta}^* \quad (II.B.2; 22.c)$$

A fréquence nulle, les fonctions de corrélation du champ font intervenir le seul mode  $\omega_p$ . Nous notons:

$$N_0 = \langle a_{\omega_p}^\dagger a_{\omega_p} \rangle \quad (II.B.2; 23.a)$$

$$M_0 = \langle a_{\omega_p} a_{\omega_p} \rangle \quad (II.B.2; 23.b)$$

$$M_0^* = \langle a_{\omega_p}^\dagger a_{\omega_p}^\dagger \rangle \quad (II.B.2; 23.c)$$

A fréquences  $\Delta$  et  $-\Delta$  interviennent les populations des modes  $\omega_p + \Delta$  et  $\omega_p - \Delta$  et les corrélations entre ces deux modes. Nous notons:

$$N_+ = \langle a_{\omega_p+\Delta}^\dagger a_{\omega_p+\Delta} \rangle \quad (II.B.2; 24.a)$$

$$N_- = \langle a_{\omega_p-\Delta}^\dagger a_{\omega_p-\Delta} \rangle \quad (II.B.2; 24.b)$$

$$M = \langle a_{\omega_p+\Delta} a_{\omega_p-\Delta} \rangle = \langle a_{\omega_p-\Delta} a_{\omega_p+\Delta} \rangle \quad (II.B.2; 24.c)$$

$$M^* = \langle a_{\omega_p+\Delta}^\dagger a_{\omega_p-\Delta}^\dagger \rangle = \langle a_{\omega_p-\Delta}^\dagger a_{\omega_p+\Delta}^\dagger \rangle \quad (II.B.2; 24.d)$$

Nous donnons maintenant l'expression des coefficients de relaxation  $C_{u,-u}^{\alpha\beta}$  à l'aide de ces fonctions:

$$C_{+-}^{++} = -\sin^2\theta \cos\theta \quad \rho^{++}(\Delta) = -\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} M \quad (II.B.2; 25.a)$$

$$C_{+-}^{+-} = \cos^4\theta \quad \rho^{+-}(\Delta) = \cos^4\theta \quad J_+(1 + N_+) \quad (II.B.2; 25.b)$$

$$C_{+-}^{-+} = \sin^4\theta \quad \rho^{-+}(\Delta) = \sin^4\theta \quad J_- N_- \quad (II.B.2; 25.c)$$

$$C_{+-}^{--} = -\sin^2\theta \cos^2\theta \rho^{--}(\Delta) = -\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} M^* \quad (II.B.2; 25.d)$$

$$C_{-+}^{++} = -\sin^2\theta \cos\theta \quad \rho^{++}(-\Delta) = -\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} M \quad (II.B.2; 26.a)$$

$$C_{-+}^{+-} = \sin^4\theta \quad \rho^{+-}(-\Delta) = \sin^4\theta \quad J_-(1 + N_-) \quad (II.B.2; 26.b)$$

$$C_{-+}^{-+} = \cos^4\theta \quad \rho^{-+}(-\Delta) = \cos^4\theta \quad J_+ N_+ \quad (II.B.2; 26.c)$$

$$C_{-+}^{--} = -\sin^2\theta \cos^2\theta \rho^{--}(-\Delta) = -\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} M^* \quad (II.B.2; 26.d)$$

$$C_{ZZ}^{++} = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \rho^{++}(0) = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta J_0 M_0 \quad (II.B.2; 27.a)$$

$$C_{ZZ}^{+-} = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \rho^{+-}(0) = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta J_0 (1 + N_0) \quad (II.B.2; 27.b)$$

$$C_{ZZ}^{-+} = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \rho^{-+}(0) = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta J_0 N_0 \quad (II.B.2; 27.c)$$

$$C_{ZZ}^{--} = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta \rho^{--}(0) = 4 \sin^2\theta \cos^2\theta J_0 M_0^* \quad (II.B.2; 27.d)$$

- Relaxation de  $|1, n\rangle \langle 2, m|$  -

Nous allons maintenant détailler les calculs de l'équation de relaxation pour l'opérateur  $|1, n \rangle \langle 2, m|$ . Nous donnerons ensuite les résultats pour les autres opérateurs.

Appliquée à l'opérateur  $|1, n \rangle \langle 2, m|$ , l'équation de relaxation (II.B.2;14) devient:

$$d_t |1, n \rangle \langle 2, n| = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ u}} C_{u,-u}^{\alpha\beta} (b^\alpha b^\beta T_u T_u^\dagger |1, n \rangle \langle 2, n| - 2b^\alpha T_u |1, n \rangle \langle 2, n| T_u^\dagger b^\alpha + |1, n \rangle \langle 2, n| T_u T_u^\dagger b^\alpha b^\beta) \quad (II.B.2;28)$$

Dans un premier temps, nous explicitons la somme sur  $u$  en utilisant les relations suivantes obtenues à partir des définitions (II.B.2;3) de  $T_u$  :

$$T_+ T_- = \sum_n |1, n \rangle \langle 1, n| \quad (II.B.2;29.a)$$

$$T_- T_+ = \sum_n |2, n \rangle \langle 2, n| \quad (II.B.2;29.b)$$

Nous obtenons alors l'équation suivante:

$$d_t |1, n \rangle \langle 2, n| = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} \left\{ C_{+-}^{\alpha\beta} b^\alpha b^\beta |1, n \rangle \langle 2, n| + C_{-+}^{\alpha\beta} |1, n \rangle \langle 2, n| b^\alpha b^\beta + \frac{1}{4} C_{00}^{\alpha\beta} (b^\alpha b^\beta |1, n \rangle \langle 2, n| + 2b^\alpha |1, n \rangle \langle 2, n| b^\beta + |1, n \rangle \langle 2, n| b^\alpha b^\beta) \right\} \quad (II.B.2;30)$$

Nous prenons maintenant en compte l'effet des opérateurs  $b^\alpha$  et  $b^\beta$  en utilisant les relations suivantes:

$$b^+ |1, n \rangle \langle 2, m| = |1, n+1 \rangle \langle 2, m| \quad (II.B.2;31.a)$$

$$b^- |1, n \rangle \langle 2, m| = |1, n-1 \rangle \langle 2, m| \quad (II.B.2;31.b)$$

$$|1, n \rangle \langle 2, m| b^+ = |1, n \rangle \langle 2, m-1| \quad (II.B.2;31.c)$$

$$|1, n \rangle \langle 2, m| b^- = |1, n \rangle \langle 2, m+1| \quad (II.B.2;31.d)$$

En utilisant ces relations et les expressions des coefficients de relaxation, nous obtenons l'équation suivante:

$$d_t |1, n \rangle \langle 2, m| = -\frac{1}{2} (\cos^4 \theta J_+ (1+2N_+) + \sin^4 \theta J_- (1+2N_-)) |1, n \rangle \langle 2, m| + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} \{ M(|1, n+2 \rangle \langle 2, m| + |1, n \rangle \langle 2, m-2|) + M^*(|1, n-2 \rangle \langle 2, m| + |1, n \rangle \langle 2, m+2|) \} - \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 \{ 2(1+2N_0) |1, n \rangle \langle 2, m| + 2(1+N_0) |1, n+1 \rangle \langle 2, m+1| + 2N_0 |1, n-1 \rangle \langle 2, m-1| + M_0(|1, n+2 \rangle \langle 2, m| + 2|1, n+1 \rangle \langle 2, m-1| + |1, n \rangle \langle 2, m-2|) + M_0^*(|1, n-2 \rangle \langle 2, m| + 2|1, n-1 \rangle \langle 2, m+1| + |1, n \rangle \langle 2, m+2|) \} \quad (II.B.2;32.a)$$

Nous donnons maintenant les équations d'évolution de  $|1, n \rangle \langle 1, n|$  et  $|2, n \rangle \langle 2, n|$ :

$$\begin{aligned}
d_t |1, n \rangle \langle 1, m| = & \\
& -(\cos^4 \theta J_+ (1 + N_+) + \sin^4 \theta J_- N_-) |1, n \rangle \langle 1, m| \\
& + \sin^4 \theta J_- (1 + N_-) |2, n+1 \rangle \langle 2, m+1| \\
& + \cos^4 \theta J_+ N_+ |2, n-1 \rangle \langle 2, m-1| \\
& + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} \{M(|1, n+2 \rangle \langle 1, m| + |1, n \rangle \langle 1, m-2|) \\
& \quad + M^*(|1, n-2 \rangle \langle 1, m| + |1, n \rangle \langle 1, m+2|)\} \\
& - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} \{M |2, n+1 \rangle \langle 2, m-1| + M^* |2, n-1 \rangle \langle 2, m+1|\} \\
& + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 \{-2(1 + 2N_0) |1, n \rangle \langle 1, m| \\
& \quad + 2(1 + N_0) |1, n+1 \rangle \langle 1, m+1| + 2N_0 |1, n-1 \rangle \langle 1, m-1| \\
& \quad - M_0(|1, n+2 \rangle \langle 1, m| \\
& \quad \quad + 2 |1, n+1 \rangle \langle 1, m-1| + |1, n \rangle \langle 1, m-2|) \\
& \quad - M_0^*(|1, n-2 \rangle \langle 1, m| \\
& \quad \quad + 2 |1, n-1 \rangle \langle 1, m+1| + |1, n \rangle \langle 1, m+2|)\} \tag{II.B.2; 32.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_t |2, n \rangle \langle 2, m| = & \\
& -(\cos^4 \theta J_+ N_+ + \sin^4 \theta J_- (1 + N_-) |2, n \rangle \langle 2, m| \\
& + \sin^4 \theta J_- N_- |1, n+1 \rangle \langle 1, m+1| \\
& + \cos^4 \theta J_+ (1 + N_+) |1, n-1 \rangle \langle 1, m-1| \\
& + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} \{M(|2, n+2 \rangle \langle 2, m| + |2, n \rangle \langle 2, m-2|) \\
& \quad + M^*(|2, n-2 \rangle \langle 2, m| + |2, n \rangle \langle 2, m+2|)\} \\
& - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} \{M |1, n+1 \rangle \langle 1, m-1| + M^* |1, n-1 \rangle \langle 1, m+1|\} \\
& + \frac{1}{2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 \{-2(1 + 2N_0) |2, n \rangle \langle 2, m| \\
& \quad + 2(1 + N_0) |2, n+1 \rangle \langle 2, m+1| + 2N_0 |2, n-1 \rangle \langle 2, m-1| \\
& \quad - M_0(|2, n+2 \rangle \langle 2, m| \\
& \quad \quad + 2 |2, n+1 \rangle \langle 2, m-1| + |2, n \rangle \langle 2, m-2|) \\
& \quad - M_0^*(|2, n-2 \rangle \langle 2, m| \\
& \quad \quad + 2 |2, n-1 \rangle \langle 2, m+1| + |2, n \rangle \langle 2, m+2|)\} \tag{II.B.2; 32.c}
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant donner les équations de relaxation d'opérateurs obtenus en sommant les opérateurs  $|i, n \rangle \langle j, m|$ . Dans un premier temps nous sommes à  $n - m = p$  constant. Pour cela nous notons:

$$Q_{ij}^p = \sum_n |i, n+p \rangle \langle j, n| \tag{II.B.2; 33}$$

$Q_{12}^0$  représente la somme des cohérences  $|1, n \rangle \langle 2, n|$  sur toutes les multiplicités;  $Q_{11}^0$  et  $Q_{22}^0$  sont respectivement les sommes sur toutes les multiplicités des populations des niveaux 1 et 2. Leurs équations de relaxation sont obtenues à l'aide des équations (II.B.2;32) que nous venons d'établir:

$$\begin{aligned}
d_t Q_{12}^P &= -\frac{1}{2} (\cos^4 \theta J_+(1+2N_+) + \sin^4 \theta J_-(1+2N_-)) Q_{12}^P \\
&\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (M Q_{12}^{P+2} + M^* Q_{12}^{P-2}) \\
&\quad - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 (1+2N_0) Q_{12}^P \\
&\quad - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 (M_0 Q_{12}^{P+2} + M_0^* Q_{12}^{P-2})
\end{aligned} \tag{II.B.2; 34.a}$$

$$\begin{aligned}
d_t Q_{11}^P &= -(\cos^4 \theta J_+(1+N_+) + \sin^4 \theta J_- N_-) Q_{11}^P \\
&\quad + (\cos^4 \theta J_+ N_+ + \sin^4 \theta J_- (1+N_-)) Q_{22}^P \\
&\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (M(Q_{11}^{P+2} - Q_{22}^{P+2}) + M^*(Q_{11}^{P-2} - Q_{22}^{P-2}))
\end{aligned} \tag{II.B.2; 34.b}$$

$$\begin{aligned}
d_t Q_{22}^P &= -(\cos^4 \theta J_+ N_+ + \sin^4 \theta J_- (1+N_-)) Q_{22}^P \\
&\quad + (\cos^4 \theta J_+(1+N_+) + \sin^4 \theta J_- N_-) Q_{11}^P \\
&\quad + \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (M(Q_{22}^{P+2} - Q_{11}^{P+2}) + M^*(Q_{22}^{P-2} - Q_{11}^{P-2}))
\end{aligned} \tag{II.B.2; 34.c}$$

Enfin, pour nous rapprocher du spin fictif, nous allons calculer la relaxation des opérateurs qui correspondent à un état cohérent du champ électromagnétique. Ceux-ci s'obtiennent comme somme des opérateurs que nous venons de définir:

$$\begin{aligned}
\Phi_{ij} &= \sum_{n,m} e^{in\varphi} e^{-jm\varphi} |1, n \rangle \langle 2, m| \\
&\quad = \sum_p e^{ip\varphi} Q_{ij}^P
\end{aligned} \tag{II.B.2; 35}$$

Nous obtenons ainsi les relations suivantes:

$$\begin{aligned}
d_t \Phi_{12} &= -\frac{1}{2} \{ [\cos^4 \theta J_+(1+2N_+) + \sin^2 \theta J_-(1+2N_-) \\
&\quad - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (e^{-2i\varphi} M + e^{2i\varphi} M^*)] \\
&\quad + 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 (1+2N_0 + e^{-2i\varphi} M_0 + e^{2i\varphi} M_0^*) \} \Phi_{12}
\end{aligned} \tag{II.B.2; 36.a}$$

$$\begin{aligned}
d_t \Phi_{11} &= -\{ \cos^4 \theta J_+(1+N_+) + \sin^4 \theta J_- N_- \\
&\quad - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (e^{-2i\varphi} M + e^{2i\varphi} M^*) \} \Phi_{11} \\
&\quad + \{ \cos^4 \theta J_+ N_+ + \sin^4 \theta J_- (1+N_-) \\
&\quad - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (e^{-2i\varphi} M + e^{2i\varphi} M^*) \} \Phi_{22}
\end{aligned} \tag{II.B.2; 36.b}$$

$$\begin{aligned}
d_t \Phi_{22} &= -\{ \cos^4 \theta J_+ N_+ + \sin^4 \theta J_- (1+N_-) \\
&\quad - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (e^{-2i\varphi} M + e^{2i\varphi} M^*) \} \Phi_{22} \\
&\quad + \{ \cos^4 \theta J_+(1+N_+) + \sin^4 \theta J_- N_- \\
&\quad - \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (e^{-2i\varphi} M + e^{2i\varphi} M^*) \} \Phi_{11}
\end{aligned} \tag{II.B.2; 36.c}$$

Finalement, afin de pouvoir faire la comparaison avec le spin fictif nous allons introduire un opérateur  $\Phi_Z$  représentant la différence de populations:

$$\Phi_Z = \Phi_{11} - \Phi_{22} \quad (II.B.2;37)$$

son équation de relaxation s'obtient en faisant la différence des équations (II.B.2;36.b) et (II.B.2;36.c):

$$\begin{aligned} d_t \Phi_Z = & - \left\{ \cos^4 \theta J_- (1 + 2N_-) + \sin^4 \theta J_+ (1 + 2N_+) \right. \\ & \left. - 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \sqrt{J_+ J_-} (e^{-2i\gamma} M + e^{2i\gamma} M^*) \right\} \Phi_Z \\ & - \left\{ \cos^4 \theta J_- + \sin^4 \theta J_+ \right\} \end{aligned} \quad (II.B.2;38)$$

### II.C.1. Le cas où le réservoir est vide

Pour un réservoir vide, lorsque le spectre est normal, il est établi que les fonctions de corrélation du champ sortant s'obtiennent à partir des fonctions de corrélation atomiques prises dans un ordre temporel précis.

Nous montrons dans cette section que ce résultat se généralise lorsque la densité spectrale n'est plus normale. Nous retrouvons ensuite le résultat pour le réservoir normal comme un cas particulier de l'expression que nous avons établie.

#### II.C.1.a. Relations champ entrant - champ sortant

Dans le chapitre I.B, nous avons établi les équations reliant le champ sortant au champ entrant (eqs.: I.B.1 ; 12 et 13 ; I.B.2; 1 et 2). Nous n'avions alors pas encore fait l'approximation du champ tournant, il nous faut donc maintenant obtenir les équations d'entrée sortie correspondant au nouvel Hamiltonien. La démarche est identique à celle que nous avons suivie dans la section I.B.1 et les résultats ne sont que très peu modifiés. On obtient les équations suivantes:

$$A^+(t) = A_{\text{in}}^+(t) + i \int_0^{\infty} d\tau \xi_{+-}(\tau) S_-(t - \tau) \quad (\text{II.C.1; 1.a})$$

$$A^-(t) = A_{\text{in}}^-(t) + i \int_0^{\infty} d\tau \xi_{-+}(\tau) S_+(t - \tau) \quad (\text{II.C.1; 1.b})$$

$$A^+(t) = A_{\text{out}}^+(t) - i \int_{-\infty}^0 d\tau \xi_{+-}(\tau) S_-(t - \tau) \quad (\text{II.C.1; 2.a})$$

$$A^-(t) = A_{\text{out}}^-(t) - i \int_{-\infty}^0 d\tau \xi_{-+}(\tau) S_+(t - \tau) \quad (\text{II.C.1; 2.b})$$

où l'on a noté:

$$\xi_{+-}(\tau) = \xi_{A+A-}(\tau) \quad (\text{II.C.1; 3.a})$$

$$\xi_{-+}(\tau) = \xi_{A-A+}(\tau) \quad (\text{II.C.1; 3.b})$$

Les relations champ entrant - champ sortant sont ainsi:

$$A_{\text{out}}^+(t) = A_{\text{in}}^+(t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \xi_{+-}(\tau) S_-(t - \tau) \quad (\text{II.C.1; 4.a})$$

$$A_{\text{out}}^-(t) = A_{\text{in}}^-(t) + i \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau \xi_{-+}(\tau) S_+(t - \tau) \quad (\text{II.C.1; 4.b})$$

Soit, sous forme abrégée (où  $u = +$  ou  $-$ )

$$\begin{aligned} A_{\text{out}}^u(t) &= A_{\text{in}}^u(t) + i \int d\tau \xi_{u,-u}(\tau) S_{-u}(t - \tau) \\ &= A_{\text{in}}^u(t) + i \int dt' \xi_{u,-u}(t - t') S_{-u}(t') \end{aligned} \quad (\text{II.C.1; 4.c})$$

Nous pouvons ensuite obtenir les fonctions de corrélation du champ sortant:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{out}}^u(t) A_{\text{out}}^v(t') \rangle &= \langle A_{\text{in}}^u(t) A_{\text{in}}^v(t') \rangle \\
&+ i \int d\tau \xi_{u,-u}(\tau) \langle S_{-u}(t-\tau) A_{\text{in}}^v(t') \rangle \\
&+ i \int d\tau' \xi_{v,-v}(\tau') \langle A_{\text{in}}^u(t) S_{-v}(t'-\tau') \rangle \\
&- \int d\tau d\tau' \xi_{u,-u}(\tau) \xi_{v,-v}(\tau') \langle S_{-u}(t-\tau) S_{-v}(t'-\tau') \rangle \quad (II.C.1;5)
\end{aligned}$$

Les termes composant l'équation (II.C.1;5) sont de trois types:

- i- des fonctions de corrélation du champ entrant  $\langle A_{\text{in}}^u(t) A_{\text{in}}^v(t') \rangle$  qui sont supposées connues.
- ii- des fonctions de corrélation atomiques  $\langle S_u(t) S_v(t') \rangle$ : la seconde partie de ce chapitre consistera à montrer comment on peut déduire ces fonctions de corrélation à partir des équations de relaxation.
- iii- des fonctions de corrélation champ entrant - atome  $\langle A_{\text{in}}^u(t) S_v(t') \rangle$ : c'est à ces fonctions de corrélation que nous consacrons la présente section. Nous allons montrer qu'il est possible d'exprimer ces fonctions de corrélation tout d'abord pour un réservoir vide puis pour un état initial quelconque du réservoir.

#### II.C.1.b. Le cas d'un réservoir vide

Lorsque le réservoir est vide, de nombreux termes de l'équation (II.C.1;5) s'avèrent nuls. En effet, l'état vide  $|0\rangle$  vérifie les propriétés suivantes:

$$\begin{aligned}
a_{\omega}^{\text{in}} |0\rangle &= 0 & (II.C.1;6.a) \\
\langle 0 | a_{\omega}^{\dagger \text{in}} &= 0 & (II.C.1;6.b)
\end{aligned}$$

Ainsi, les champs  $A_{\text{in}}^+(t)$  et  $A_{\text{in}}^-(t')$  vérifient:

$$\begin{aligned}
A_{\text{in}}^+(t) |0\rangle &= 0 & (II.C.1;7.a) \\
\langle 0 | A_{\text{in}}^-(t') &= 0 & (II.C.1;7.b)
\end{aligned}$$

Les seuls termes qui restent non nuls dans l'équation (II.C.1;5) sont ainsi:

- i-  $\langle A_{\text{in}}^+(t) A_{\text{in}}^-(t') \rangle$
- ii-  $\langle S_u(t) S_v(t') \rangle$
- iii-  $\langle A_{\text{in}}^+(t) S_v(t') \rangle$  et  $\langle S_u(t) A_{\text{in}}^-(t') \rangle$

Nous allons nous intéresser au calcul des termes -iii-. Ces termes sont des valeurs moyennes de produits d'un opérateur du champ entrant et d'un opérateur atomique. Nous les transformons tout d'abord en valeurs moyennes de commutateurs en utilisant le fait que le réservoir est vide. En effet:

$$\langle S_v(t') A_{\text{in}}^+(t) \rangle = 0 \quad (II.C.1;8)$$

Ainsi:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{in}}^+(t) S_v(t') \rangle &= \langle A_{\text{in}}^+(t) S_v(t') \rangle - \langle S_v(t') A_{\text{in}}^+(t) \rangle \\
&= \langle A_{\text{in}}^+(t) S_v(t') \rangle - \langle S_v(t') A_{\text{in}}^+(t) \rangle & (II.C.1;9.a) \\
\langle S_u(t') A_{\text{in}}^-(t) \rangle &= \langle [S_u(t'); A_{\text{in}}^-(t)] \rangle & (II.C.1;9.b)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant calculer les commutateurs. Nous savons, que les opérateurs champ  $A^+(t')$  et  $A^-(t')$  commutent avec les opérateurs atomiques  $S_+(t')$  et  $S_-(t')$  pris au même instant  $t$ . Pour utiliser cette propriété, il nous faut exprimer le champ entrant à l'instant  $t$  en fonction du champ à l'instant  $t'$ .

Dans un premier temps, nous allons utiliser l'expression (II.C.1;1) qui nous permet d'obtenir le champ entrant à l'instant  $t$  en fonction du champ au même instant:

$$A_{\text{in}}^+(t) = A^+(t) - i \int_0^{\infty} d\tau \xi_{+-}(\tau) S_-(t-\tau) \quad (\text{II.C.1;10.a})$$

$$A_{\text{in}}^-(t) = A^-(t) - i \int_0^{\infty} d\tau \xi_{-+}(\tau) S_+(t-\tau) \quad (\text{II.C.1;10.b})$$

Il faut maintenant exprimer le champ à l'instant  $t$  en fonction du champ à l'instant  $t'$ . Les résultats obtenus dans la section I.B.1., modifiés pour prendre en compte l'approximation du champ tournant, nous le permettent. L'équation (I.B.1;5) nous dit que le champ  $A^u(t)$  est la somme du champ  $A_0^u(t)$  obtenu en faisant évoluer librement le champ  $A^u(t')$  de l'instant  $t'$  à l'instant  $t$  et du champ rayonné par le système entre ces deux instants:

$$A^+(t) = A_0^+(t) + i \int_0^{t-t'} d\tau \xi_{+-}(\tau) S_-(t-\tau) \quad (\text{II.C.1;11.a})$$

$$A^-(t) = A_0^-(t) + i \int_0^{t-t'} d\tau \xi_{-+}(\tau) S_+(t-\tau) \quad (\text{II.C.1;11.b})$$

Ainsi, en reportant ces expressions dans les expressions (II.C.1;10) du champ entrant, nous obtenons:

$$A_{\text{in}}^+(t) = A_0^+(t) - i \int_{t-t'}^{+\infty} d\tau \xi_{+-}(\tau) S_-(t-\tau) \quad (\text{II.C.1;12.a})$$

$$A_{\text{in}}^-(t) = A_0^-(t) - i \int_{t-t'}^{+\infty} d\tau \xi_{-+}(\tau) S_+(t-\tau) \quad (\text{II.C.1;12.b})$$

Les champs  $A_0^+(t)$  et  $A_0^-(t)$  sont obtenus en faisant évoluer librement les champs  $A^+$  et  $A^-$  de  $t'$  à  $t$ , leur expression est ainsi la suivante:

$$A_0^+(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega}^* a_{\omega}(t') e^{-i\omega(t-t')} \quad (\text{II.C.1;13.a})$$

$$A_0^-(t) = \int \frac{d\omega}{2\pi} \omega \alpha_{\omega} a_{\omega}^{\dagger}(t') e^{i\omega(t-t')} \quad (\text{II.C.1;13.b})$$

Ce sont des combinaisons linéaires d'opérateurs du réservoir à l'instant  $t'$  ; ils commutent donc avec les opérateurs du dipôle à l'instant  $t'$  :

$$[A_0^u(t) ; S_v(t')] = 0 \quad (\text{II.C.1;14})$$

Les commutateurs apparaissant dans les équations (II.C.1;9) ont finalement les expressions suivantes:



$$\begin{aligned}
[A_{\text{in}}^+(t); S_v(t')] &= -i \int_{t-t'}^{+\infty} d\tau \xi_{+-}(\tau) [S_-(t-\tau); S_v(t')] \\
&= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \xi_{+-}(t-t'') [S_-(t''); S_v(t')] \theta(t'-t'') \quad (II.C.1; 15.a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[S_v(t'); A_{\text{in}}^+(t)] &= -i \int_{t-t'}^{+\infty} d\tau \xi_{-+}(\tau) [S_v(t'); S_+(t-\tau)] \\
&= -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \xi_{-+}(t-t'') [S_v(t'); S_+(t'')] \theta(t'-t'') \quad (II.C.1; 15.b)
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant exprimer les corrélations du champ sortant en fonction des corrélations du système.

Nous avons quatre fonctions de corrélation à calculer. Nous réduisons tout d'abord ce nombre à deux en remarquant que:

$$\langle A_{\text{out}}^-(t) A_{\text{out}}^-(t') \rangle = \langle A_{\text{out}}^+(t') A_{\text{out}}^+(t) \rangle^* \quad (II.C.1; 16.a)$$

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{out}}^+(t) A_{\text{out}}^-(t') \rangle &= \langle A_{\text{out}}^-(t') A_{\text{out}}^+(t) \rangle + \langle [A_{\text{out}}^+(t); A_{\text{out}}^-(t')] \rangle \\
&= \langle A_{\text{out}}^-(t') A_{\text{out}}^+(t) \rangle + \xi_{+-}(t-t') \quad (II.C.1; 16.b)
\end{aligned}$$

La fonction de corrélation de  $\langle A_{\text{out}}^+(t) A_{\text{out}}^-(t') \rangle$  ne présente pas de difficulté ; l'équation (II.C.1;5) nous donne:

$$\langle A_{\text{out}}^-(t) A_{\text{out}}^+(t') \rangle = - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{-+}(t-t_1) \xi_{+-}(t'-t_2) \langle S_+(t_1) S_-(t_2) \rangle \quad (II.C.1; 17)$$

Les trois autres termes sont nuls car le réservoir est vide. Par contre, dans la fonction de corrélation  $\langle A_{\text{out}}^+(t) A_{\text{out}}^+(t') \rangle$ , est présente une fonction de corrélation atome - champ entrant non nulle:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{out}}^+(t) A_{\text{out}}^+(t') \rangle &= i \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \xi_{+-}(t'-t_2) \langle A_{\text{in}}^+(t) S_-(t_2) \rangle \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \xi_{+-}(t-t_1) \xi_{+-}(t-t_2) \langle S_-(t_1) S_-(t_2) \rangle \quad (II.C.1; 18)
\end{aligned}$$

Nous transformons cette fonction de corrélation en une valeur moyenne de commutateur et nous utilisons l'expression (II.C.1;15.a)

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{out}}^+(t) A_{\text{out}}^+(t') \rangle &= \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \xi_+(t-t_1) \xi_+(t-t_2) \\
&\quad \langle [S_-(t_1); S_-(t_2)] \rangle \theta(t_2-t_1) \\
&\quad - \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \xi_{+-}(t-t_1) \xi_{+-}(t-t_2) \\
&\quad \langle S_-(t_1) S_-(t_2) \rangle \quad (II.C.1; 19)
\end{aligned}$$

Nous remarquons alors que les deux termes ont des formes semblables ; nous allons donc les regrouper:

$$\langle A_{\text{out}}^+(t)A_{\text{out}}^+(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \xi_{+-}(t-t_1)\xi_{+-}(t-t_2) \{ \langle [S_-(t_1); S_-(t_2)] \rangle \theta(t_2-t_1) - \langle S_-(t_1); S_-(t_2) \rangle \} \quad (\text{II.C.1;20})$$

Nous remarquons que:

$$\begin{aligned} & [S_-(t_1); S_-(t_2)] \theta(t_2-t_1) - S_-(t_1)S_-(t_2) \\ &= \{S_-(t_1)S_-(t_2) - S_-(t_2)S_-(t_1)\} \theta(t_2-t_1) \\ &\quad - S_-(t_1)S_-(t_2) \{\theta(t_1-t_2) + \theta(t_2-t_1)\} \\ &= \{S_-(t_1)S_-(t_2) \theta(t_1-t_2) + S_-(t_2)S_-(t_1) \theta(t_2-t_1)\} \end{aligned} \quad (\text{II.C.1;21})$$

La fonction de corrélation du champ sortant est donc:

$$\langle A_{\text{out}}^+(t)A_{\text{out}}^+(t') \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \xi_{+-}(t-t_1) \xi_{+-}(t-t_2) \{S_-(t_1)S_-(t_2) \theta(t_1-t_2) + S_-(t_2)S_-(t_1) \theta(t_2-t_1)\} \quad (\text{II.C.1;22})$$

Nous résumons, maintenant les expressions des quatre fonctions de corrélations du champ sortant:

$$\begin{aligned} & \langle A_{\text{out}}^-(t)A_{\text{out}}^+(t') \rangle = \\ & \quad - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{+-}(t-t_1)\xi_{+-}(t'-t_2) \langle S_+(t_1)S_-(t_2) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.C.1;23.a})$$

$$\begin{aligned} & \langle A_{\text{out}}^+(t)A_{\text{out}}^-(t') \rangle = \\ & \quad \xi_{+-}(t-t') - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{+-}(t-t_1)\xi_{+-}(t'-t_2) \langle S_+(t_2)S_-(t_1) \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.C.1;23.b})$$

$$\begin{aligned} & \langle A_{\text{out}}^+(t)A_{\text{out}}^+(t') \rangle = \\ & \quad - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{+-}(t-t_1)\xi_{+-}(t'-t_2) \\ & \quad \{ \langle S_-(t_1)S_-(t_2) \rangle \theta(t_1-t_2) + \langle S_-(t_2)S_-(t_1) \rangle \theta(t_2-t_1) \} \end{aligned} \quad (\text{II.C.1;23.c})$$

$$\begin{aligned} & \langle A_{\text{out}}^-(t)A_{\text{out}}^-(t') \rangle = \\ & \quad - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{-+}(t-t_1)\xi_{-+}(t'-t_2) \\ & \quad \{ \langle S_+(t_2)S_+(t_1) \rangle \theta(t_1-t_2) + \langle S_+(t_1)S_+(t_2) \rangle \theta(t_1-t_2) \} \end{aligned} \quad (\text{II.C.1;23.d})$$

Pour écrire ces résultats de manière plus agréable, nous définissons le  $\mathcal{T}$ produit d'opérateurs  $S_+$  et  $S_-$ . Il s'applique à un produit d'opérateurs  $S_+$  et  $S_-$  pris à des instants différents; ces opérateurs sont rangés de manière suivante:

- les opérateurs  $S_+$  sont mis à gauche et les  $S_-$  à droite;
- les opérateurs  $S_+$  sont rangés de manière à ce que les instants où ils sont pris soient croissants de gauche à droite;
- les  $S_-$  sont rangés par temps croissant de droite à gauche.

Les fonctions de corrélation du champ sortant pour l'ordre normal des opérateurs du champ s'écrivent: (l'ordre normal est indiqué par le symbole " : " )

$$\begin{aligned} \langle : A_{\text{out}}^u(t) A_{\text{out}}^v(t') : \rangle = \\ \int dt_1 \int dt_2 \xi_{u,-u}(t-t_1) \xi_{v,-v}(t'-t_2) \langle T(S_u(t_1) S_v(t_2)) \rangle \end{aligned} \quad (II.C.1;24)$$

En procédant par récurrence, on peut montrer que ce résultat se généralise à un nombre quelconque d'opérateurs du champ sortant:

$$\begin{aligned} \langle : \prod_{p=1}^N A_{\text{out}}^{u_p}(t_p) : \rangle = \\ \int \left( \prod_{p=1}^N dt'_p \right) \left( \prod_{p=1}^N i \xi_{u_p, -u_p}(t_p - t'_p) \right) \langle T \left( \prod_{p=1}^N S_{-u_p}(t'_p) \right) \rangle \end{aligned} \quad (II.C.1;25)$$

#### Cas particulier du spectre normal

Dans le cas d'un réservoir normal, la densité spectrale prend la forme suivante dans le référentiel du champ tournant:

$$J(\omega) = 2(\omega_p + \omega) \Gamma \theta(\omega_p + \omega) \quad (II.C.1;26)$$

Cette expression s'obtient à l'aide de l'expression (I.B.3;2). Remarquons que, dans le référentiel du champ tournant, les fréquences sont mesurées relativement à la fréquence du champ pompe  $\omega_p$ .

D'autre part, les fréquences  $\omega$  qui interviennent dans notre étude sont, comme nous l'avons déjà dit, petites devant la fréquence pompe  $\omega_p$ . Nous utiliserons donc l'expression suivante pour la densité spectrale du réservoir normal dans le référentiel du champ tournant:

$$J(\omega) = 2\Gamma \omega_p \quad (II.C.1;27)$$

Les susceptibilités prennent les formes simples suivantes:

$$\xi_{+-}(\omega) = J(\omega) = 2\Gamma \omega_p \quad (II.C.1;28.a)$$

$$\xi_{-+}(\omega) = -J(-\omega) = -2\Gamma \omega_p \quad (II.C.1;28.b)$$

Ces fonctions sont plates dans l'espace des fréquences, ceci conduit à des distributions de Dirac dans l'espace des temps:

$$\xi_{+-}(\tau) = 2\Gamma \omega_p \delta(\tau) \quad (II.C.1;29.a)$$

$$\xi_{-+}(\tau) = -2\Gamma \omega_p \delta(\tau) \quad (II.C.1;29.b)$$

Les relations entrée sortie prennent alors la forme suivante:

$$A_{\text{out}}^+(t) = A_{\text{in}}^+(t) + 2i \Gamma \omega_p S_-(t) \quad (II.C.1; 30.a)$$

$$A_{\text{out}}^-(t) = A_{\text{in}}^-(t) - 2i \Gamma \omega_p S_+(t) \quad (II.C.1; 30.b)$$

Les fonctions de corrélation du champ sortant sont ainsi:

$$\langle A_{\text{out}}^+(t) A_{\text{out}}^+(t') \rangle = - (2\Gamma \omega_p)^2 \langle \mathcal{T}(S_-(t) S_-(t')) \rangle \quad (II.C.1; 31.a)$$

$$\langle A_{\text{out}}^-(t) A_{\text{out}}^+(t') \rangle = (2\Gamma \omega_p)^2 \langle S_+(t) S_-(t') \rangle \quad (II.C.1; 31.b)$$

### II.C.2. Cas où le réservoir est non vide

Lorsque le réservoir n'est pas initialement vide, nous ne pouvons plus dire a priori que certains termes sont nuls et nous ne pouvons plus mettre les fonctions de corrélation champ entrant - dipôle sous forme de commutateurs du dipôle. La situation semble donc beaucoup plus difficile.

Comme nous allons maintenant le voir, il est possible de résoudre ce problème en généralisant la théorie de la réponse linéaire. Nous présentons maintenant les calculs de la façon la plus simple possible. Dans la troisième partie, lors de la présentation de la méthode générale, nous reviendrons de manière plus rigoureuse sur ce problème.

La théorie de la réponse linéaire permet, sous sa forme habituelle, d'obtenir la réponse d'un système couplé à un réservoir et soumis à une force classique. Cette force dérive d'un Hamiltonien d'interaction dont la forme est la suivante:

$$V(t) = - (A^+(t) S_+ + A^-(t) S_-) \quad (II.C.2;1)$$

où  $A(t)$  est une fonction classique du temps.

Dans notre cas la situation est différente. Nous voulons la réponse du système au champ  $A^{in}(t)$ . Ce champ provient du réservoir et agit par l'intermédiaire du couplage  $H_I$  :

$$H_I = - (A^+(t) S_+ + A^-(t) S_-) \quad (II.C.2;2)$$

Le problème que nous nous posons présente ainsi deux difficultés supplémentaires par rapport à la théorie habituelle. Tout d'abord, la force dont nous cherchons l'effet est une force quantique  $A^{in}(t)$  et non plus une fonction classique  $A(t)$ . D'autre part, alors que, dans le cas habituel, la dissipation et la force proviennent de deux sources différentes, (couplage avec un réservoir d'une part, Hamiltonien d'interaction  $V(t)$  d'autre part), c'est ici la même interaction qui joue les deux rôles: la dissipation et la force proviennent du couplage avec un même réservoir.

Avant de montrer comment nous avons résolu ce problème nous allons présenter la démarche habituelle de la réponse linéaire.

#### Rappel sur la réponse linéaire à une force classique

L'équation d'évolution d'un opérateur  $S_u$  du système est la suivante:

$$d_t S_u(t) = i [H; S_u(t)] + i [V(t); S_u(t)] \quad (II.C.2;3)$$

où  $H$  est le Hamiltonien correspondant à l'évolution couplée du système et du réservoir et  $V(t)$  le Hamiltonien correspondant à la force classique (eq. II.C.2;1).

Dans un premier temps, nous nous plaçons en représentation d'interaction par rapport au Hamiltonien  $H$ . Pour cela nous considérons des opérateurs  $O_\alpha$  qui forment une base de l'espace des opérateurs et qui évoluent à des fréquences  $\alpha_\alpha$  selon  $H$  :

$$i [H; O_\alpha] = -i \omega_\alpha O_\alpha \quad (II.C.2;4)$$

Il faut remarquer que les opérateurs  $O_\alpha$  ne sont pas forcément des opérateurs du système mais peuvent agir sur le réservoir.

L'équation d'évolution de ces opérateurs est alors la suivante:

$$d_t O_\alpha(t) = -i \omega_\alpha O_\alpha(t) + i [V(t); O_\alpha(t)] \quad (II.C.2;5)$$

Nous définissons l'opérateur  $\tilde{O}_\alpha(t)$  correspondant à la représentation d'interaction de la manière suivante:

$$\tilde{O}_\alpha(t) = e^{i\omega_\alpha(t-t_0)} O_\alpha(t) \quad (II.C.2;6)$$

L'équation d'évolution de cet opérateur est:

$$\begin{aligned} d_t \tilde{O}_\alpha(t) &= i\omega_\alpha e^{-i\omega_\alpha(t-t_0)} O_\alpha(t) + e^{-i\omega_\alpha(t-t_0)} d_t O_\alpha(t) \\ &= e^{-i\omega_\alpha(t-t_0)} i [V(t); O_\alpha(t)] \\ &= i [V(t); \tilde{O}_\alpha(t)] \end{aligned} \quad (II.C.2;7)$$

Nous sommes maintenant en mesure de traiter perturbativement au premier ordre l'effet de la force  $\mathcal{A}(t)$ . Nous décomposons pour cela  $\tilde{O}_\alpha(t)$  en un terme d'ordre zéro et un terme d'ordre un:

$$\tilde{O}_\alpha(t) = \tilde{O}_\alpha(t)|_0 + \tilde{O}_\alpha(t)|_1 \quad (II.C.2;8)$$

En prenant l'ordre zéro et l'ordre un de l'équation d'évolution de  $\tilde{O}_\alpha$  (II.C.2;7), nous obtenons l'équation d'évolution de ces deux termes:

$$d_t \tilde{O}_\alpha(t)|_0 = 0 \quad (II.C.2;9.a)$$

$$d_t \tilde{O}_\alpha(t)|_1 = i [V(t); \tilde{O}_\alpha(t)|_0] \quad (II.C.2;9.b)$$

La première de ces équations se résoud immédiatement:

$$\tilde{O}_\alpha(t)|_0 = \tilde{O}_\alpha(t')|_0 \quad (II.C.2;10)$$

Nous pouvons maintenant passer à l'ordre un:

$$\begin{aligned} d_t \tilde{O}_\alpha(t)|_1 &= i [V(t); \tilde{O}_\alpha(t)|_0] \\ &= -i [(A^+(t)S_+(t) + A^-(t)S_-(t)); \tilde{O}_\alpha(t)|_0] \end{aligned} \quad (II.C.2;11)$$

Cette équation peut s'intégrer formellement à partir d'un instant  $t_0$  très éloigné dans le passé:

$$\begin{aligned} \tilde{O}_\alpha(t)|_1 &= -i \int_0^\infty d\tau A^+(t-\tau) [S_+(t-\tau); \tilde{O}_\alpha(t-\tau)|_0] \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau A^-(t-\tau) [S_-(t-\tau); \tilde{O}_\alpha(t-\tau)|_0] \end{aligned} \quad (II.C.2;12)$$

Comme à l'ordre zéro l'opérateur  $\tilde{O}_\alpha$  est indépendant du temps, cette équation devient:

$$\begin{aligned} \tilde{O}_\alpha(t)|_1 &= -i \int_0^\infty d\tau A^+(t-\tau) [S_+(t-\tau); \tilde{O}_\alpha(t)|_0] \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau A^-(t-\tau) [S_-(t-\tau); \tilde{O}_\alpha(t)|_0] \end{aligned} \quad (II.C.2;13)$$

Ainsi, en quittant la représentation d'interaction, nous obtenons l'expression

$$\begin{aligned} O_\alpha(t)|_1 &= -i \int_0^\infty d\tau A^+(t-\tau) [S_+(t-\tau); O_\alpha(t)|_0] \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau A^-(t-\tau) [S_-(t-\tau); O_\alpha(t)|_0] \end{aligned} \quad (II.C.2;14)$$

Nous utilisons enfin le fait que l'opérateur  $S_u$  peut se décomposer sur la base des  $O_\alpha$  pour obtenir son expression au premier ordre:

$$\begin{aligned} S_u(t) |1\rangle &= -i \int_0^\infty d\tau \mathcal{A}^+(t-\tau) [S_+(t-\tau); S_u(t)] \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau \mathcal{A}^-(t-\tau) [S_-(t-\tau); S_u(t)] \end{aligned} \quad (II.C.2; 15)$$

Le résultat final de la réponse linéaire, c'est-à-dire la valeur moyenne de la réponse du système est donc le suivant:

$$\begin{aligned} \langle S_u(t) |1\rangle &= -i \int_0^\infty d\tau \sum_v \chi_{vu}(\tau) \mathcal{A}^v(t-\tau) \\ &= -i \int_0^\infty d\tau \chi_{+,u}(\tau) \mathcal{A}^+(t-\tau) + \chi_{-,u}(\tau) \mathcal{A}^-(t-\tau) \end{aligned} \quad (II.C.2; 16)$$

où  $\chi_{uv}(\tau)$  est une susceptibilité atomique définie par:

$$\chi_{uv}(\tau) = \langle [S_u(t-\tau); S_v(t)] \rangle \quad (II.C.2; 17)$$

Cette susceptibilité est une fonction de corrélation atomique. Elle est calculée en tenant compte de l'évolution amortie de  $S$  associée au couplage du système avec le réservoir.

#### La réponse linéaire aux fluctuations quantiques

Passons maintenant à l'étude du problème qui nous intéresse, c'est-à-dire la réponse aux fluctuations quantiques  $A^{in}(t)$ . La démarche que nous suivons est analogue à celle que nous venons de présenter; nous insisterons donc principalement sur les modifications qu'il faut faire pour obtenir la réponse linéaire à une force quantique qui provient du réservoir.

Regardons tout d'abord l'équation d'évolution d'un opérateur  $S_u(t)$  :

$$d_t S_u(t) = i [H_0; S_u(t)] + i [H_I; S_u(t)] \quad (II.C.2; 18)$$

Nous sommes en face d'une première difficulté: la relaxation et la dissipation proviennent du même Hamiltonien d'interaction  $H_I$ . Dans la méthode que nous présentons dans la troisième partie l'utilisation de projecteurs permettra de séparer de manière claire les effets de fluctuation et de dissipation dûs à l'interaction du système avec le réservoir. Nous allons ici faire cette séparation de manière heuristique.

Dans le chapitre précédent, nous avons établi des équations de relaxation pour les valeurs moyennes d'opérateurs du dipôle. Nous utiliserons ces équations pour identifier la partie dissipative de l'évolution. Ces équations correspondent à une friction retardée, nous prendrons donc comme force fluctuante les fluctuations entrantes  $A^{in}(t)$ . Cette force correspond au Hamiltonien d'interaction

$$H_I'(t) = -(A_{in}^+(t) S_+ + A_{in}^-(t) S_-) \quad (II.C.2; 19)$$

Cet Hamiltonien prend une forme semblable à celle du Hamiltonien  $V(t)$  correspondant à la forme classique  $\mathcal{A}(t)$ .

L'équation d'évolution de l'opérateur dipôle est alors la suivante:

$$\begin{aligned} d_t S_u(t) &= (d_t S_u(t))_{\text{relax}} \\ &\quad - i \{ A_{in}^+(t) [S_+(t); S_u(t)] + A_{in}^-(t) [S_-(t); S_u(t)] \} \end{aligned} \quad (II.C.2; 20)$$

Cette équation est semblable à l'équation (II.C.2;3) car les effets de dissipation et de fluctuation sont séparés. Un second problème se pose pourtant. Dans le cas de la force classique, la partie dissipation se traite de manière Hamiltonienne et le passage en représentation d'interaction se fait de manière simple. Ici, l'évolution d'ordre zéro n'est pas Hamiltonienne car on utilise des équations de relaxation. Il est cependant toujours possible de trouver des opérateurs  $O_\alpha$  formant une base de l'espace des opérateurs du dipôle et évoluant à des fréquences  $\tilde{\omega}_\alpha$ . Ces fréquences sont alors complexes à cause de la dissipation. L'évolution d'ordre zéro pour ces opérateurs peut être écrite:

$$(d_t O_\alpha(t))_{\text{relax}} = -i\tilde{\omega}_\alpha O_\alpha(t) \quad (\text{II.C.2;21})$$

$$\tilde{O}_\alpha(t) = e^{i\tilde{\omega}_\alpha(t-t_0)} O_\alpha(t) \quad (\text{II.C.2;22})$$

L'équation d'évolution dans cette représentation d'interaction est ainsi:

$$d_t \tilde{O}_\alpha(t) = -i \left\{ A_{\text{in}}^+(t) [S_+(t); \tilde{O}_\alpha(t)] + A_{\text{in}}^-(t) [S_-(t); \tilde{O}_\alpha(t)] \right\} \quad (\text{II.C.2;23})$$

Le calcul perturbatif au premier ordre est identique à celui que nous avons mené pour la force classique. Nous obtenons:

$$\begin{aligned} O_\alpha(t) |_1 &= -i \int_0^\infty d\tau A_{\text{in}}^+(t-\tau) [S_+(t-\tau); O_\alpha(t) |_0] \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau A_{\text{in}}^-(t-\tau) [S_-(t-\tau); O_\alpha(t) |_0] \end{aligned} \quad (\text{II.C.2;24})$$

Ainsi, en décomposant l'opérateur  $S_u$  sur la base des  $O_\alpha$  on obtient au premier ordre

$$\begin{aligned} S_u(t) &= S_u(t) |_0 - i \int_0^\infty d\tau A_{\text{in}}^+(t-\tau) [S_+(t-\tau); S_u(t)] \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau A_{\text{in}}^-(t-\tau) [S_-(t-\tau); S_u(t)] \end{aligned} \quad (\text{II.C.2;25})$$

Une nouvelle différence apparaît avec la théorie habituelle. Nous désirons ici, non pas une valeur moyenne de la réponse aux fluctuations mais la fonction de corrélation  $\langle A_{\text{in}}^\nu(t) S_u(t') \rangle$  entre la force et la réponse.

Nous utilisons l'équation (II.C.2;25) pour écrire:

$$\begin{aligned} \langle A_{\text{in}}^\nu(t) S_u(t') \rangle &= \langle A_{\text{in}}^\nu(t) S_u(t') \rangle - i \int_0^\infty d\tau \langle A_{\text{in}}^\nu(t) A_{\text{in}}^+(t'-\tau) [S_+(t'-\tau); S_u(t')] \rangle \\ &\quad - i \int_0^\infty d\tau \langle A_{\text{in}}^\nu(t) A_{\text{in}}^-(t'-\tau) [S_-(t'-\tau); S_u(t')] \rangle \end{aligned} \quad (\text{II.C.2;26})$$

Le premier terme est nul. En effet, l'opérateur du dipôle à l'ordre zéro n'est pas corrélé avec la force aléatoire. La valeur moyenne de leur produit est le produit des valeurs moyennes. La valeur moyenne du champ entrant étant nulle, ce terme est nul. Les deux termes suivants font intervenir le produit de deux opérateurs du champ entrant et de deux opérateurs du système. Comme nous sommes au premier ordre, nous pouvons négliger les corrélations entre le champ et le dipôle et factoriser la valeur moyenne en un produit d'une valeur moyenne



portant sur le champ et d'une valeur moyenne portant sur le dipôle. Il s'agit de la même approximation que celle que nous avons faite lorsque nous avons dérivé les équations de relaxation. Nous obtenons ainsi:

$$\langle A_{in}^v(t)S_u(t') \rangle = -i \int_0^{\infty} d\tau \sum_w \langle A_{in}^v(t)A_{in}^w(t' - \tau) \rangle \chi_{wu}(t) \quad (II.C.2;27)$$

où les fonctions  $\chi_{wu}(\tau)$  sont les susceptibilités qui apparaissent déjà dans la théorie de la réponse linéaire classique (eq. II.C.2;17).

#### Retour sur le réservoir vide

Lorsque le réservoir est vide, nous disposons de deux approches: la première utilise le fait que le réservoir est vide pour transformer les corrélations champ entrant-atome en moyenne de commutateurs d'opérateurs atomiques, la seconde utilise notre généralisation de la théorie de la réponse linéaire. Nous allons maintenant comparer les résultats fournis par ces deux méthodes en étudiant la fonction de corrélation  $\langle A_{in}^+(t)S^v(t') \rangle$ .

Le résultat de la première approche est donné par l'équation (II.C.1;15.a) que nous rappelons:

$$\langle A_{in}^+(t)S^v(t') \rangle = -i \int_{-\infty}^{+\infty} dt'' \xi_{+-}(t-t'') \langle [S^-(t''); S^v(t')] \rangle \theta(t'-t'') \quad (II.C.2;28)$$

Le résultat de la seconde approche provient de l'équation (II.C.2;27):

$$\begin{aligned} \langle A_{in}^+(t)S(t') \rangle &= \\ & -i \int_0^{\infty} d\tau \sum_w \langle A_{in}^+(t)A_{in}^w(t' - \tau) \rangle \chi_{wv}(\tau) \end{aligned} \quad (II.C.2;29)$$

Reportons dans cette équation les fonctions de corrélation du champ entrant correspondant à un réservoir vide:

$$\langle A_{in}^+(t)A_{in}^+(t') \rangle = 0 \quad (II.C.2;30.a)$$

$$\langle A_{in}^+(t)A_{in}^-(t') \rangle = \xi_{+-}(t-t') \quad (II.C.2;30.b)$$

On obtient:

$$\langle A_{in}^+(t)S_v(t') \rangle = -i \int d\tau \theta(\tau) \xi_{+-}(t'-t-\tau) \langle [S_-(t'-\tau); S_v(t')] \rangle \quad (II.C.2;31)$$

Le changement de variable  $t'' = t - \tau$  nous conduit finalement à une expression identique à l'équation (II.C.2;28). Les deux méthodes conduisent donc au même résultat lorsque le réservoir est vide.

Grâce à notre généralisation de la théorie de la réponse linéaire, nous avons pu étendre le calcul des fonctions de corrélation du champ sortant au cas d'un réservoir dont la densité spectrale dépend de la fréquence et dont l'état initial est quelconque. L'expression que nous obtenons pour ces fonctions de corrélation est:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{out}}^u(t)A_{\text{out}}^v(t') \rangle &= \langle A_{\text{in}}^u(t)A_{\text{in}}^v(t') \rangle \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_0^{\infty} d\tau \sum_w \xi_{u,-u}(t-t_1)\chi_{w,-u}(\tau) \langle A_{\text{in}}^w(t_1-\tau)A_{\text{in}}^v(t') \rangle \\
&+ \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \int_0^{\infty} d\tau' \sum_w \xi_{v,-v}(t-t_2)\chi_{w,-v}(\tau') \langle A_{\text{in}}^u(t)A_{\text{in}}^w(t_2-\tau') \rangle \\
&- \int_{-\infty}^{+\infty} dt_1 \int_{-\infty}^{+\infty} dt_2 \xi_{u,-u}(t-t_1)\xi_{v,-v}(t'-t_2) \langle S_{-u}(t_1)S_{-v}(t_2) \rangle \quad (II.C.2;32.b)
\end{aligned}$$

Soit dans l'espace des fréquences:

$$\begin{aligned}
\langle A_{\text{out}}^u(\omega)A_{\text{out}}^v(\omega') \rangle &= \langle A_{\text{in}}^u(\omega)A_{\text{in}}^v(\omega') \rangle \\
&+ \sum_w \xi_{u,-u}(\omega)\chi_{w,-u}^+(\omega) \langle A_{\text{in}}^w(\omega)A_{\text{in}}^v(\omega') \rangle \\
&+ \sum_w \xi_{v,-v}(\omega')\chi_{w,-v}^+(\omega') \langle A_{\text{in}}^u(\omega)A_{\text{in}}^w(\omega') \rangle \\
&- \xi_{u,-u}(\omega)\xi_{v,-v}(\omega') \langle S_{-u}(\omega)S_{-v}(\omega') \rangle \quad (II.C.2;32.b)
\end{aligned}$$

où

$$\chi_{uv}^+(\omega) = \int d\tau \chi_{uv}(\tau)\theta(\tau) e^{i\omega\tau} \quad (II.C.2;33)$$

### II.C.3. Calcul des fonctions de corrélation atomiques

Nous venons de voir que les fonctions de corrélation du champ sortant s'expriment à l'aide des fonctions de corrélation atomiques. Nous allons maintenant montrer comment calculer ces fonctions de corrélation à partir des équations de relaxation. Nous nous intéresserons dans un premier temps à l'état stationnaire du dipôle. Nous montrerons ensuite comment le théorème de régression quantique permet de calculer les fonctions de corrélation atomiques.

#### II.C.3.a. Equations de relaxation

Dans les chapitres précédents, nous avons établi, pour un système à deux niveaux placé dans un champ comprimé et dans le cadre de l'approximation séculaire, les équations de relaxation suivantes:

$$d_t s_u = -\Delta s_v - \gamma_{uv} s_u \quad (II.C.3;1.a)$$

$$d_t s_v = \Delta s_u - \gamma_{uv} s_v \quad (II.C.3;1.b)$$

$$d_t s_w = -\gamma_w s_w - \eta_w/2 \quad (II.C.3;1.c)$$

où  $u, v$  et  $w$  sont les axes du repère obtenu en faisant une rotation du repère  $Oxyz$  autour de l'axe  $Oy$  afin d'aligner  $Ow$  selon le champ constant (eq. I.A.2.24-36).

Pour étudier de manière plus générale le problème, nous écrivons ces équations de relaxation de la manière suivante:

$$d_t s_i = \sum_{ij} \tilde{\Delta}_{ij} s_j - \eta_i/2 \quad (II.C.3;2)$$

où  $\{\tilde{\Delta}_{ij}\}$  correspond à l'évolution Hamiltonienne du dipôle et à la friction et où  $\eta_i/2$  est un terme inhomogène. Il faut remarquer que ces équations sont des équations de relaxation retardées.

#### II.C.3.b. Etat stationnaire

Le système évolue vers un état stationnaire que nous allons maintenant calculer en écrivant:

$$d_t s_i = 0 \quad (II.C.3;3)$$

Dans le cas général, ceci correspond à la résolution d'un système linéaire à trois inconnues:

$$\sum_{ij} \tilde{\Delta}_{ij} s_j = \frac{\eta_i}{2} \quad (II.C.3;4)$$

Dans notre cas, les équations sont les suivantes:

$$-\Delta s_v - \gamma_{uv} s_u = 0 \quad (II.C.3;5.a)$$

$$\Delta s_u - \gamma_{uv} s_v = 0 \quad (II.C.3;5.b)$$

$$\gamma s_w = -\eta_w/2 \quad (II.C.3;5.c)$$

En notant  $\langle S_i \rangle_{st}$  la valeur moyenne de l'opérateur  $S_i$  dans l'état stationnaire nous obtenons:

$$\langle S_u \rangle_{st} = \langle S_v \rangle_{st} = 0 \quad (II.C.3;6.a)$$

$$\langle S_w \rangle_{st} = -\frac{\eta_w}{2\gamma_w} \quad (II.C.3;6.b)$$

Nous introduisons d'autre part les populations  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$  des états  $|1\rangle$  et  $|2\rangle$  :

$$S_w = \frac{1}{2} (\Pi_1 - \Pi_2) \quad (II.C.3; 7.a)$$

$$\Pi_1 + \Pi_2 = 1 \quad (II.C.3; 7.b)$$

Les équations d'évolution de ces populations sont:

$$d_t \Pi_1 = -d_t \Pi_2 = -\frac{(\gamma_w + \eta_w)}{2} \Pi_1 + \frac{(\gamma_w - \eta_w)}{2} \Pi_2 \quad (II.C.3; 8)$$

On peut interpréter ces équations en termes de taux de transition  $\Gamma_{ji}$  de l'état  $|i\rangle$  vers l'état  $|j\rangle$

$$d_t \Pi_1 = -\Gamma_{21} \Pi_1 + \Gamma_{12} \Pi_2 \quad (II.C.3; 9.a)$$

$$\Gamma_{12} = \frac{\gamma_w - \eta_w}{2} \quad (II.C.3; 9.b)$$

$$\Gamma_{21} = \frac{\gamma_w + \eta_w}{2} \quad (II.C.3; 9.c)$$

Les populations stationnaires sont alors:

$$\langle \Pi_1 \rangle_{st} = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (II.C.3; 10.a)$$

$$\langle \Pi_2 \rangle_{st} = \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (II.C.3; 10.b)$$

### II.C.3.c. Le théorème de régression quantique

Nous désirons calculer les fonctions de corrélation à deux temps  $\langle S_i(t) S_j(t') \rangle$ . Nous allons pour cela utiliser le théorème de régression quantique qui permet de relier l'évolution de ces fonctions de corrélation aux équations d'évolution des valeurs moyennes.

Nous donnons tout d'abord un énoncé de ce théorème: un opérateur  $S_i(t)$  peut se mettre sous forme d'une somme d'une valeur moyenne  $s_i(t)$  et d'une fluctuation  $\delta S_i(t)$ :

$$S_i(t) = s_i(t) + \delta S_i(t) \quad (II.C.3; 11)$$

L'évolution des valeurs moyennes est régie par les équations de relaxation:

$$d_t s_i(t) = \sum_j \tilde{\Delta}_{ij} s_j(t) + \frac{\eta_i}{2} \quad (II.C.3; 12)$$

Le théorème de régression quantique dit que, pour  $t' > t$  les équations d'évolution des fonctions de corrélation sont déduites des équations d'évolution des valeurs moyennes:

$$\frac{d}{dt'} \langle \delta S_i(t) \delta S_j(t') \rangle = \sum_k \tilde{\Delta}_{jk} \langle \delta S_i(t) \delta S_k(t') \rangle \quad (II.C.3; 13.a)$$

$$\frac{d}{dt'} \langle \delta S_j(t') \delta S_i(t) \rangle = \sum_k \tilde{\Delta}_{jk} \langle \delta S_k(t') \delta S_i(t) \rangle \quad (II.C.3; 13.b)$$

Ce théorème peut être démontré en utilisant la théorie de la réponse linéaire généralisée. Nous présentons ici le calcul de manière simple (un calcul plus détaillé est présenté dans la troisième partie).

Comme précédemment, nous séparons l'évolution atomique en deux termes: un terme de dissipation et un terme de fluctuation. Pour obtenir les équations d'évolution des opérateurs, nous utilisons les équations de relaxation en y ajoutant un terme de fluctuation que nous notons  $F_i(t)$ . Cette force est une combinaison linéaire des champs  $A_{in}^+(t)$  et  $A_{in}^-(t)$  (comme nous l'avons vu pour la réponse linéaire). Ainsi, les équations d'évolution des opérateurs du dipôle sont:

$$d_t S_i(t) = \sum_j \tilde{\Delta}_{ij} S_j(t) + \eta_i/2 + F_i(t) \quad (II.C.3;14)$$

L'évolution de la partie fluctuante  $\delta S_i(t)$  de l'opérateur  $S_i(t)$  s'obtient en faisant la différence des équations (II.C.3;12) et (II.C.3;14):

$$d_t \delta S_i(t) = \sum_j \tilde{\Delta}_{ij} \delta S_j(t) + F_i(t) \quad (II.C.3;15)$$

L'équation d'évolution de la fonction de corrélation  $\langle \delta S_i(t) \delta S_j(t') \rangle$  est donc:

$$\frac{d}{dt'} \langle \delta S_i(t) \delta S_j(t') \rangle = \sum_k \tilde{\Delta}_{jk} \langle \delta S_i(t) \delta S_k(t') \rangle + \langle \delta S_i(t) F_j(t') \rangle \quad (II.C.3;16)$$

La réponse linéaire généralisée nous permet de donner l'expression du second terme:

$$\langle \delta S_i(t) \delta F_j(t') \rangle = -i \int_{-\infty}^t dt'' \sum_u \chi_{ui}(t-t'') \langle A_{in}^u(t'') F_j(t') \rangle \quad (C.II.3;17)$$

Comme  $F_j(t')$  est une combinaison linéaire des  $A_{in}^u(t')$ , la fonction de corrélation  $\langle A_{in}^u(t'') F_j(t') \rangle$  est du même type que celles que nous avons rencontrées lorsque nous avons établi les équations de relaxation. L'approximation de mémoire courte que nous avons alors utilisé signifie que cette fonction de corrélation  $\langle A_{in}^u(t'') F_j(t') \rangle$  est une fonction de  $t-t'$  dont la largeur  $\tau_c$  est très petite devant le taux de relaxation  $\gamma^{-1}$  et dont l'intégrale est de l'ordre de  $\gamma$ .

Ainsi, pour  $t' > t + \tau_c$ , la fonction de corrélation  $\langle \delta S_i(t) \delta F_j(t') \rangle$  est nulle. L'équation d'évolution de la fonction de corrélation atomique est donc conforme au théorème de régression quantique:

$$d_{t'} \langle \delta S_i(t) \delta S_j(t') \rangle = \sum_k \tilde{\Delta}_{jk} \langle \delta S_i(t) \delta S_k(t') \rangle \quad (II.C.3;18)$$

Nous étudions maintenant la contribution due à la fonction de corrélation atome-champ pour  $t' < t + \tau_c$ . L'ordre de grandeur de la susceptibilité  $\chi_{ki}$  est l'unité. Ainsi, pour  $t' < t + \tau_c$  la fonction de corrélation  $\langle \delta S_i(t) \delta F_j(t') \rangle$  est de l'ordre de l'intégrale de la fonction de corrélation du champ, c'est-à-dire  $\gamma$ . Nous voyons tout d'abord que pour  $t' < t$  il faut tenir compte de ce terme et que l'équation d'évolution ne se réduit pas à la forme simple (II.C.3;18). Nous pouvons ensuite évaluer la contribution de ce terme entre  $t$  et  $t + \tau_c$ : cette contribution est de l'ordre de  $\gamma\tau_c$  et est donc négligeable. Finalement, le théorème de régression quantique est vérifié.

#### II.C.3.d. Calcul des fonctions de corrélation

Nous calculons maintenant les différentes fonctions de corrélation qui nous serviront lors de l'étude des spectres du champ sortant. Nous nous intéressons tout d'abord aux valeurs moyennes de produits d'opérateurs pris au même instant  $\langle \delta S_i(t) \delta S_j(t) \rangle$ , qui serviront comme conditions initiales pour le calcul des fonctions de corrélation à deux temps.

##### - équations d'évolution -

Les équations de relaxation sont particulièrement simples dans le repère  $O_{uvw}$  :

$$d_t s_u = -\Delta s_v - \gamma_{uv} s_u \quad (II.C.3; 19.a)$$

$$d_t s_v = \Delta s_u - \gamma_{uv} s_v \quad (II.C.3; 19.b)$$

$$d_t s_w = -\gamma_w s_w - \frac{\eta_w}{2} \quad (II.C.3; 19.c)$$

Soit, en notant:

$$S'_+ = S_u + i S_v \quad (II.C.3; 20.a)$$

$$S'_- = S_u - i S_v \quad (II.C.3; 20.b)$$

$$d_t s'_+ = (i\Delta - \gamma_{uv}) s'_+ \quad (II.C.3; 21.a)$$

$$d_t s'_- = (-i\Delta - \gamma_{uv}) s'_- \quad (II.C.3; 21.b)$$

$$d_t s_w = -\gamma_w s_w - \frac{\eta_w}{2} \quad (II.C.3; 21.c)$$

- Valeurs moyennes stationnaires des produits -

Nous calculons maintenant les valeurs stationnaires des produits des trois opérateurs  $\delta S'_+$ ,  $\delta S'_-$  et  $\delta S_w$ . Nous rappelons les valeurs moyennes stationnaires obtenues au début de ce chapitre:

$$\langle S_u \rangle_{st} = \langle S_v \rangle_{st} = 0 \quad (II.C.3; 21.a)$$

$$\langle S_w \rangle_{st} = \frac{1}{2} (\langle \Pi_1 \rangle_{st} - \langle \Pi_2 \rangle_{st}) \quad (II.C.3; 21.b)$$

Les produits des trois opérateurs  $S'_+$ ,  $S'_-$  et  $S'_w$  sont:

$$S'_+ S'_+ = 0 \quad (II.C.3; 22.a)$$

$$S'_+ S'_w = -\frac{1}{2} S'_+ \quad (II.C.3; 22.b)$$

$$S'_+ S'_- = \Pi_1 \quad (II.C.3; 22.c)$$

$$S'_w S'_+ = \frac{1}{2} S'_+ \quad (II.C.3; 23.a)$$

$$S'_w S'_w = \frac{1}{4} \quad (II.C.3; 23.b)$$

$$S'_w S'_- = -\frac{1}{2} S'_- \quad (II.C.3; 23.c)$$

$$S'_- S'_+ = \Pi_2 \quad (II.C.3; 24.a)$$

$$S'_- S'_w = \frac{1}{2} S'_- \quad (II.C.3; 24.b)$$

$$S'_- S'_- = 0 \quad (II.C.3; 24.c)$$

Les valeurs moyennes stationnaires de produits que nous cherchons sont obtenues en utilisant les relations précédentes et:

$$\langle \delta S_i \delta S_j \rangle_{st} = \langle S_i S_j \rangle_{st} - \langle S_i \rangle_{st} \langle S_j \rangle_{st} \quad (II.C.3; 25)$$

Six des neuf produits ont une valeur moyenne stationnaire nulle:

$$\begin{aligned} \langle \delta S'_+ \delta S'_+ \rangle_{st} &= \langle \delta S'_+ \delta S'_w \rangle_{st} = 0 & (II.C.3; 26.a) \\ \langle \delta S'_w \delta S'_+ \rangle_{st} &= \langle \delta S'_w \delta S'_- \rangle_{st} = 0 & (II.C.3; 26.b) \\ \langle \delta S'_- \delta S'_w \rangle_{st} &= \langle \delta S'_- \delta S'_- \rangle_{st} = 0 & (II.C.3; 26.c) \end{aligned}$$

Les trois produits non nuls sont:

$$\begin{aligned} \langle \delta S'_+ \delta S'_- \rangle_{st} &= \langle \Pi_1 \rangle_{st} & (II.C.3; 27.a) \\ \langle \delta S'_- \delta S'_+ \rangle_{st} &= \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 27.b) \\ \langle \delta S'_w \delta S'_w \rangle_{st} &= \frac{1}{4} [1 - (\langle \Pi_1 \rangle_{st} - \langle \Pi_2 \rangle_{st})^2] \\ &= \langle \Pi_1 \rangle_{st} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 27.c) \end{aligned}$$

- Fonctions de corrélation -

Nous utilisons maintenant le théorème de regression quantique pour calculer les trois fonctions de corrélation non nulles  $\langle \delta S'_+(t) \delta S'_-(t+\tau) \rangle$ ,  $\langle \delta S'_-(t) \delta S'_+(t+\tau) \rangle$  et  $\langle \delta S'_w(t) \delta S'_w(t+\tau) \rangle$ .

Pour  $\tau$  positif, leurs équations d'évolution sont les suivantes:

$$\begin{aligned} d_\tau \langle \delta S'_+(t) \delta S'_-(t+\tau) \rangle &= (-i\Delta - \gamma_{uv}) \langle \delta S'_+(t) \delta S'_-(t+\tau) \rangle & (II.C.3; 28.a) \\ d_\tau \langle \delta S'_-(t) \delta S'_+(t+\tau) \rangle &= (i\Delta - \gamma_{uv}) \langle \delta S'_-(t) \delta S'_+(t+\tau) \rangle & (II.C.3; 28.b) \\ d_\tau \langle \delta S'_w(t) \delta S'_w(t+\tau) \rangle &= -\gamma_w \langle \delta S'_w(t) \delta S'_w(t+\tau) \rangle & (II.C.3; 28.c) \end{aligned}$$

Leur solution pour  $\tau \geq 0$  s'écrit:

$$\begin{aligned} \langle \delta S'_+(t) \delta S'_-(t+\tau) \rangle &= e^{(-i\Delta - \gamma_{uv})\tau} \langle \Pi_1 \rangle_{st} & (II.C.3; 29.a) \\ \langle \delta S'_-(t) \delta S'_+(t+\tau) \rangle &= e^{(i\Delta - \gamma_{uv})\tau} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 29.b) \\ \langle \delta S'_w(t) \delta S'_w(t+\tau) \rangle &= e^{-\gamma_w \tau} \langle \Pi_1 \rangle_{st} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 29.c) \end{aligned}$$

En procédant de la même manière on obtient aussi, toujours pour  $\tau \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \langle \delta S'_+(t+\tau) \delta S'_-(t) \rangle &= e^{(i\Delta - \gamma_{uv})\tau} \langle \Pi_1 \rangle_{st} & (II.C.3; 30.a) \\ \langle \delta S'_-(t+\tau) \delta S'_+(t) \rangle &= e^{(-i\Delta - \gamma_{uv})\tau} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 30.b) \\ \langle \delta S'_w(t+\tau) \delta S'_w(t) \rangle &= e^{-\gamma_w \tau} \langle \Pi_1 \rangle_{st} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 30.c) \end{aligned}$$

On utilise alors l'expression suivante valable pour tout  $\tau$ :

$$\langle \delta S'_i(t) \delta S'_j(t+\tau) \rangle_{st} = \langle \delta S'_i(t) \delta S'_j(t+\tau) \rangle_{st} \theta(\tau) + \langle \delta S'_i(t-\tau) \delta S'_j(t) \rangle_{st} \theta(-\tau) \quad (II.C.3; 31)$$

On obtient finalement pour tout  $\tau$ :

$$\begin{aligned} \langle \delta S'_+(t) \delta S'_-(t+\tau) \rangle &= e^{-i\Delta\tau - \gamma_{uv}|\tau|} \langle \Pi_1 \rangle_{st} & (II.C.3; 32.a) \\ \langle \delta S'_-(t) \delta S'_+(t+\tau) \rangle &= e^{i\Delta\tau - \gamma_{uv}|\tau|} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 32.b) \\ \langle \delta S'_w(t) \delta S'_w(t+\tau) \rangle &= e^{-\gamma_w|\tau|} \langle \Pi_1 \rangle_{st} \langle \Pi_2 \rangle_{st} & (II.C.3; 32.c) \end{aligned}$$

Pour terminer, nous calculons les deux fonctions de corrélation que nous utiliserons lors du calcul des spectres du champ sortant. Nous les notons  $C_{+-}(\tau)$  et  $C_{++}(\tau)$ :

$$C_{+-}(\tau) = \langle S_+(t)S_-(t+\tau) \rangle_{st} \quad (II.C.3; 33.a)$$

$$C_{--}(\tau) = \langle T(S_+(t)S_+(t+\tau)) \rangle_{st} \quad (II.C.3; 33.b)$$

Pour obtenir ces fonctions de corrélation nous décomposons  $S_+$  et  $S_-$  sur la base  $S'_+$ ,  $S'_-$ ,  $S'_w$  et nous obtenons, en ne conservant que les termes dont nous savons qu'ils ne sont pas nuls:

$$\begin{aligned} C_{+-}(\tau) &= \cos^4\theta \langle S'_+(t)S'_-(t+\tau) \rangle + \sin^4\theta \langle S'_-(t)S'_+(t+\tau) \rangle \\ &\quad + 4\sin^2\theta \cos^2\theta \langle S'_w(t)S'_w(t+\tau) \rangle \\ &= \cos^4\theta \langle \Pi_1 \rangle_{st} e^{-i\Delta\tau - \gamma_{w+}|\tau|} + \sin^4\theta \langle \Pi_2 \rangle_{st} e^{i\Delta\tau - \gamma_{w+}|\tau|} \\ &\quad + \sin^2\theta \cos^2\theta (\langle \Pi_1 \rangle_{st} - \langle \Pi_2 \rangle_{st})^2 \\ &\quad + \sin^2\theta \cos^2\theta \langle \Pi_1 \rangle_{st} \langle \Pi_2 \rangle_{st} e^{-\gamma_w|\tau|} \end{aligned} \quad (II.C.3; 34.a)$$

$$\begin{aligned} C_{++}(\tau) &= \langle S_+(t)S_+(t+\tau) \rangle \theta(\tau) + \langle S_+(t+\tau)S_+(t) \rangle \theta(-\tau) \\ &= \langle S_+(t)S_+(t+|\tau|) \rangle \\ &= -\sin^2\theta \cos^2\theta (\langle S'_+(t)S'_-(t+|\tau|) \rangle + \langle S'_-(t)S'_+(t+\tau) \rangle) \\ &\quad + 4\sin^2\theta \cos^2\theta \langle S'_w(t)S'_w(t+|\tau|) \rangle \\ &= -\sin^2\theta \cos^2\theta (\langle \Pi_1 \rangle_{st} e^{(i\Delta - \gamma_{w+})|\tau|} + \langle \Pi_2 \rangle_{st} e^{(-i\Delta - \gamma_{w+})|\tau|}) \\ &\quad + \sin^2\theta \cos^2\theta \end{aligned} \quad (II.C.3; 34.b)$$



## II.D. Atome en cavité (réservoir vide tricolore)

Nous passons maintenant à la discussion de quelques effets physiques apparaissant dans le cas où le réservoir est dépendant de la fréquence et initialement vide.

L'approche de l'atome habillé nous permet d'interpréter de manière simple l'effet de la dépendance en fréquence de la densité spectrale sur la relaxation et de déterminer l'évolution atomique. Nous étudions ensuite le spectre du rayonnement émis. En particulier, nous discutons des conditions optimales pour la production de champ comprimé.

### II.D.1. Etude de la relaxation

#### II.D.1.a. Les équations de relaxation de l'atome habillé

Dans le cas où le réservoir est vide, de nombreux termes disparaissent dans les équations que nous avons établies au chapitre II.B. En effet, le nombre de photons dans les différents modes du réservoir est nul:

$$N_0 = M_0 = 0 \quad (II.D.1;1.a)$$

$$N_+ = N_- = M = 0 \quad (II.D.1;1.b)$$

Les équations de relaxation que nous obtenons à partir des équations (II.B.2;32) sont:

$$d_t |1, n \rangle \langle 1, m| = -(\cos^4 \theta J_+ + \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0) |1, n \rangle \langle 1, m| \\ + \sin^4 \theta J_- |2, n+1 \rangle \langle 2, m+1| + \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 |1, n+1 \rangle \langle 1, m+1| \quad (II.D.1;2.a)$$

$$d_t |2, n \rangle \langle 2, m| = -(\sin^4 \theta J_- + \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0) |2, n \rangle \langle 2, m| \\ + \cos^4 \theta J_+ |1, n+1 \rangle \langle 1, m+1| + \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 |2, n+1 \rangle \langle 2, m+1| \quad (II.D.1;2.b)$$

$$d_t |1, n \rangle \langle 2, m| = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 |1, n+1 \rangle \langle 2, m+1| \\ - \frac{1}{2} (\cos^4 \theta J_+ + \sin^4 \theta J_- + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0) |1, n \rangle \langle 2, m| \quad (II.D.1;2.c)$$

Nous pouvons constater que les termes  $|i, n \rangle \langle j, m|$  sont couplés à des termes  $|i, n' \rangle \langle j, m'|$  avec  $n' - m' = n - m$ . Ceci va nous permettre d'interpréter l'évolution de l'atome habillé en terme de cascade radiative.

#### II.D.1.b. Etude des populations

Nous notons  $\Pi_{i,n}$  la population de l'état  $|i \rangle$  dans la multiplicité  $n$  :

$$\Pi_{i,n} = \langle |i, n \rangle \langle i, n| \rangle \quad (II.D.1;3)$$

L'évolution de ces populations est régie par les équations suivantes obtenues à partir de (II.D.1;2):

$$d_t \Pi_{1,n} = -(\Gamma_{11} + \Gamma_{21}) \Pi_{1,n} + \Gamma_{11} \Pi_{1,n+1} + \Gamma_{12} \Pi_{2,n+1} \quad (II.D.1;4.a)$$

$$d_t \Pi_{2,n} = -(\Gamma_{12} + \Gamma_{22}) \Pi_{2,n} + \Gamma_{21} \Pi_{1,n+1} + \Gamma_{22} \Pi_{2,n+1} \quad (II.D.1;4.b)$$

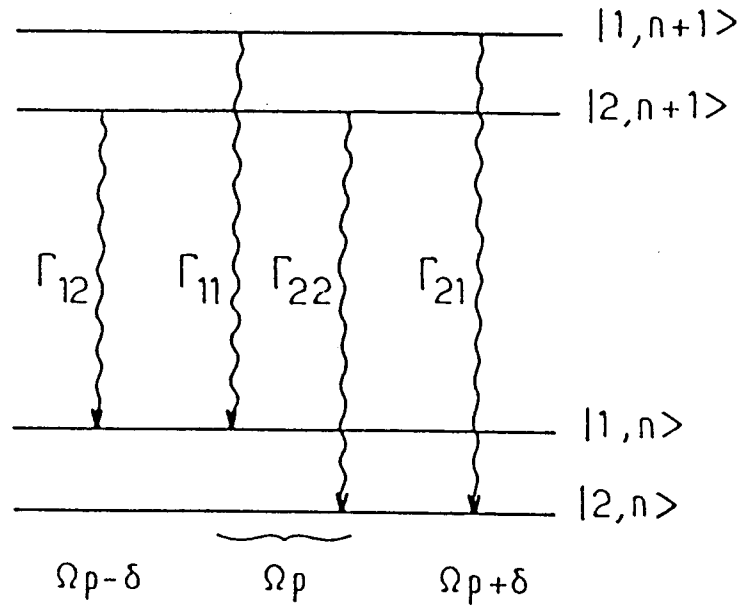
où l'on a noté:

$$\Gamma_{12} = \sin^4 \theta J_- \quad (II.D.1;5.a)$$

$$\Gamma_{11} = \Gamma_{22} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 \quad (II.D.1;5.b)$$

$$\Gamma_{21} = \cos^4 \theta J_+ \quad (II.D.1;5.c)$$

Figure II.6



**Etats habillés et leurs transitions**

Le taux de transition  $\Gamma_{ji}$  dépend de la densité spectrale à la fréquence de Bohr correspondant à la transition  $|i, n+1\rangle \rightarrow |j, n\rangle$ .

Les coefficients  $\Gamma_{ij}$  s'interprètent comme des taux de transition de l'état  $|i, n+1\rangle$  vers l'état  $|j, n\rangle$  (cf. figure II.6).

Ces taux de transition sont exactement ceux que l'on aurait obtenus à partir de la règle d'or de Fermi. Celle-ci dit en effet que le taux de transition d'un état  $|a\rangle$  vers un état  $|b\rangle$  est le produit de la densité de mode du réservoir à la fréquence de Bohr de la transition  $|a\rangle \rightarrow |b\rangle$  par le carré du terme de couplage entre le système et le réservoir. Dans notre cas, le couplage se fait par l'intermédiaire des opérateurs  $|e, n\rangle\langle g, n|$ , ce qui explique la présence des facteurs en  $\sin\theta$  et  $\cos\theta$ . D'autre part les fréquences de transition sont  $\omega_p - \Delta$ ,  $\omega_p$ , et  $\omega_p + \Delta$  ce qui explique la présence des densités spectrales  $J_-$ ,  $J_0$  et  $J_+$ .

Nous pouvons d'autre part étudier les populations  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ , obtenues en sommant les populations  $\Pi_{1,n}$  et  $\Pi_{2,n}$  sur toutes les multiplicités. Leur équation d'évolution est obtenue en sommant sur toutes les multiplicités les équations (II.D.1;4):

$$\Pi_1 = \sum_n \Pi_{1,n} \quad (II.D.1;6.a)$$

$$\Pi_2 = \sum_n \Pi_{2,n} \quad (II.D.1;6.b)$$

$$d_t \Pi_1 = -\Gamma_{21} \Pi_1 + \Gamma_{12} \Pi_2 \quad (II.D.1;7.a)$$

$$d_t \Pi_2 = -\Gamma_{12} \Pi_2 + \Gamma_{21} \Pi_1 \quad (II.D.1;7.b)$$

Les populations stationnaires sont obtenues en utilisant la condition de normalisation  $\Pi_1 + \Pi_2 = 1$  et la condition de bilan détaillé signifiant qu'il y a autant de transition de 1 vers 2 que de 2 vers 1:

$$\Gamma_{21} \Pi_1 = \Gamma_{12} \Pi_2 \quad (II.D.1;8)$$

Ainsi ces populations, notées  $\Pi_1^{st}$  et  $\Pi_2^{st}$  sont:

$$\Pi_1^{st} = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (II.D.1;9.a)$$

$$\Pi_2^{st} = \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (II.D.1;9.b)$$

Les populations relaxent vers cet état stationnaire avec un taux de relaxation que nous notons  $\gamma_{pop}$  et que l'on obtient à partir des équations (II.D.1;7):

$$d_t(\Pi_1 - \Pi_2) = -\gamma_{pop}(\Pi_1 - \Pi_2) + (\Gamma_{21} - \Gamma_{12}) \quad (II.D.1;10.a)$$

$$\gamma_{pop} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} \quad (II.D.1;10.b)$$

### II.D.1.c. Etude des cohérences

Nous nous intéressons maintenant à la cohérence entre l'état  $|1, n\rangle$  et l'état  $|2, n\rangle$ . En utilisant les taux de transition que nous venons d'introduire, l'équation de relaxation de cette cohérence est:

$$d_t |1, n\rangle\langle 2, n| = -\frac{1}{2} (\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{21} + \Gamma_{22}) |1, n\rangle\langle 2, n| - \Gamma_{11} |1, n+1\rangle\langle 2, n+1| \quad (II.D.1;11)$$

Le premier terme provient des transitions partant des niveaux  $|1, n\rangle$  et  $|2, n\rangle$  et est la demi somme des différents taux de transition; le second est un transfert de cohérence de la multiplicité  $n+1$  vers la multiplicité  $n$ . En resommant sur les différentes multiplicités, on obtient alors l'équation suivante:

$$\rho_{12} = \langle \left( \sum_n |1, n\rangle \langle 2, n| \right) \rangle \quad (II.D.1; 12.a)$$

$$d_t \rho_{12} = - \gamma_{\text{coh}} \rho_{12} \quad (II.D.1; 12.b)$$

$$\gamma_{\text{coh}} = - \frac{1}{2} (\Gamma_{11} + \Gamma_{12} + \Gamma_{21} + \Gamma_{22}) + \Gamma_{11} \quad (II.D.1; 12.c)$$

Nous avons noté  $\gamma_{\text{coh}}$  le taux de relaxation des cohérences. On remarque que ce taux vérifie:

$$\gamma_{\text{coh}} = \frac{1}{2} \gamma_{\text{pop}} + 2\Gamma_{11} \quad (II.D.1; 12.d)$$

#### II.D.1.d. Discussion physique

Nous pouvons maintenant discuter l'influence de la densité spectrale sur la relaxation atomique. Dans un premier temps nous réécrivons les populations stationnaires (eq. II.D.1;9):

$$\Pi_1^{st} = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} = \frac{\sin^4 \theta J_-}{\sin^4 \theta J_- + \cos^4 \theta J_+} \quad (II.D.1; 13.a)$$

$$\Pi_2^{st} = \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} = \frac{\cos^4 \theta J_+}{\sin^4 \theta J_- + \cos^4 \theta J_+} \quad (II.D.1; 13.b)$$

Les taux de transition  $\Gamma_{11}$  et  $\Gamma_{22}$  n'interviennent ni dans les expressions des populations stationnaires ni dans le taux de relaxation des populations. Il est de même pour la densité spectrale  $J_0$ .

Si on suppose que les densités spectrales  $J_+$  et  $J_-$  sont égales on retrouve les formules habituelles:

$$\Pi_1^{st} = \frac{\sin^4 \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} \quad (II.D.1; 14.a)$$

$$\Pi_2^{st} = \frac{\cos^4 \theta}{\sin^4 \theta + \cos^4 \theta} \quad (II.D.1; 14.b)$$

$$\gamma_{\text{pop}} = J \frac{1 + \cos^2 2\theta}{2} \quad (II.D.1; 14.c)$$

où  $J = J_+ = J_-$

Par contre, lorsque ces densités spectrales sont différentes, il peut apparaître des effets de pompage des populations (réf. [20-22]).

Il nous reste à voir le taux de relaxation des cohérences:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{coh}} &= \frac{1}{2} \gamma_{\text{pop}} + 2\Gamma_{11} \\ &= \frac{1}{2} \gamma_{\text{pop}} + 2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta J_0 \end{aligned} \quad (II.D.1; 15)$$

Dans le cas où les trois densités  $J_0$ ,  $J_+$  et  $J_-$  sont égales nous retrouvons l'expression habituelle:

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{coh}} &= \left( \frac{1 + \cos^2 2\theta}{4} + \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \right) J \\ &= \frac{2 + \cos^2 2\theta}{4} J \end{aligned} \quad (II.D.1; 16)$$

Il faut cependant noter la présence dans l'expression (II.D.1;17) d'un terme proportionnel à la densité spectrale  $J_0$ . Nous reviendrons sur ce fait lorsque nous étudierons la compression du champ émis par un tel système.

## II.D.2. Etude des spectres

Nous étudions le champ émis par un atome couplé à un réservoir dont le spectre dépend de la fréquence: le but est de calculer les propriétés du champ qui ressort d'une cavité. Il faut donc prendre des précautions relatives au rapport cavité-spectre non plat comme nous l'avons discuté dans le chapitre I.D.

### II.D.2.a. Fonctions de corrélation du champ sortant de la cavité

Nous rappelons ici le mode opératoire discuté dans la section I.D.3. en l'adaptant au problème qui nous intéresse. Les données du problème sont les fonctions de corrélation du champ entrant qui correspond ici au vide. le filtrage à l'entrée ne pose aucun problème. En effet, ce filtrage modifie la densité spectrale des modes dans la cavité de la manière suivante:

$$J_0 = 2\gamma\omega_p \frac{T^2}{1 + R^2 - 2 R \cos[\omega_p \tau_c]} \quad (II.D.2; 1.a)$$

$$J_+ = 2\gamma(\omega_p + \Delta) \frac{T^2}{1 + R^2 - 2 R \cos[(\omega_p + \Delta)\tau_c]} \quad (II.D.2; 1.b)$$

$$J_- = 2\gamma(\omega_p - \Delta) \frac{T^2}{1 + R^2 - 2 R \cos[(\omega_p - \Delta)\tau_c]} \quad (II.D.2; 1.c)$$

L'état du réservoir est le vide aussi bien pour le champ arrivant sur la cavité que pour le champ arrivant sur l'atome.

- Relation entrée-sortie -

La relation entrée-sortie nous est donnée par les équations (II.C.1;17) et (II.C.1;23):

$$\langle B_{\text{out}}^-(t) B_{\text{out}}^+(t') \rangle = - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{-+}(t-t_1) \xi_{+-}(t'-t_2) C_{+-}(t_1; t_2) \quad (II.D.2; 2.a)$$

$$\langle B_{\text{out}}^+(t) B_{\text{out}}^+(t') \rangle = - \int dt_1 \int dt_2 \xi_{+-}(t-t_1) \xi_{+-}(t'-t_2) C_{--}(t_1; t_2) \quad (II.D.2; 2.b)$$

$$C_{+-}(t_1; t_2) = \langle S_+(t_1) S_-(t_2) \rangle \quad (II.D.2; 3.a)$$

$$C_{--}(t_1; t_2) = \langle T(S_-(t_1) S_-(t_2)) \rangle \quad (II.D.2; 3.b)$$

Nous avons conservé les notations de la section II.D.1. pour les champs:  $A$  pour le champ à l'extérieur de la cavité ( $A^{\text{in}}$  pour le champ qui arrive sur la cavité et  $A^{\text{out}}$  pour celui qui en repart) et  $B$  pour le champ du réservoir à spectre modifié.

Les expressions précédentes s'écrivent dans l'espace des fréquences:

$$\langle B_{\text{out}}^-(\omega) B_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = - \xi_{-+}(\omega) \xi_{+-}(\omega') C_{+-}(\omega; \omega') \quad (II.D.2; 4.a)$$

$$\langle B_{\text{out}}^+(\omega) B_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = - \xi_{+-}(\omega) \xi_{+-}(\omega') C_{--}(\omega; \omega') \quad (II.D.2; 4.b)$$

Dans le chapitre I.D, nous avons obtenu la relation de filtrage entre les opérateurs création et annihilation du réservoir normal et du réservoir modifié: il s'agit d'un déphasage à l'entrée et d'un déphasage à la sortie (I.D.2;13):

$$b_{\omega}^{\text{in}} = e^{i\theta\omega} a_{\omega}^{\text{in}} \quad (II.D.2; 5.a)$$

$$b_{\omega}^{\text{out}} = e^{-i\theta\omega} a_{\omega}^{\text{out}} \quad (II.D.2; 5.b)$$

Le champ entrant est le vide, peu nous importe donc qu'il y ait un déphasage à l'entrée (le vide déphasé reste le vide). Un déphasage à la sortie pose par contre un problème, d'autant plus qu'il dépend de la fréquence.

En notant  $J_N$  la densité spectrale du spectre de  $A$ , les relations entre les champs  $A$  et  $B$  à la sortie sont:

$$A_{\text{out}}^+(\omega) = \sqrt{\frac{J_N}{J(\omega)}} e^{i\theta_\omega} B_{\text{out}}^+(\omega) \quad (\text{II.D.2; 6.a})$$

$$A_{\text{out}}^-(\omega) = \sqrt{\frac{J_N}{J(-\omega)}} e^{-i\theta_{-\omega}} B_{\text{out}}^-(\omega) \quad (\text{II.D.2; 6.b})$$

Ces équations sont obtenues à partir de l'équation (I.D.3;4.b). Nous avons pris en compte le fait que nous sommes dans le référentiel du champ tournant.

- transformation entrée sortie globale -

Nous reportons finalement les expressions que nous venons d'obtenir dans les fonctions de corrélation:

$$\langle A_{\text{out}}^-(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = \frac{J_N e^{i(-\theta_{-\omega} + \theta_{\omega'})}}{\sqrt{J(-\omega)J(\omega')}} \langle B_{\text{out}}^-(\omega) B_{\text{out}}^+(\omega') \rangle \quad (\text{II.D.2; 7.a})$$

$$\langle A_{\text{out}}^+(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = \frac{J_N e^{i(\theta_\omega + \theta_{\omega'})}}{\sqrt{J(-\omega)J(\omega')}} \langle B_{\text{out}}^+(\omega) B_{\text{out}}^+(\omega') \rangle \quad (\text{II.D.2; 7.b})$$

Soit, en utilisant les expressions (II.D.2;2) et en exprimant les susceptibilités en fonction de  $J(\omega)$  :

$$\langle A_{\text{out}}^-(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = J_N \sqrt{J(-\omega)J(\omega')} e^{i(-\theta_{-\omega} + \theta_{\omega'})} C_{+-}(\omega; \omega') \quad (\text{II.D.2; 8.a})$$

$$\langle A_{\text{out}}^+(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = -J_N \sqrt{J(\omega)J(\omega')} e^{i(\theta_\omega + \theta_{\omega'})} C_{--}(\omega; \omega') \quad (\text{II.D.2; 8.b})$$

Du fait que les spectres sont stationnaires  $C_{uv}(t; t + \tau)$  ne dépend que de  $\tau$  et nous pouvons définir:

$$C_{uv}(\omega) = \int d\tau e^{i\omega\tau} C_{uv}(t, t + \tau) \quad (\text{II.D.2; 9})$$

Les fonctions  $C_{uv}(\omega, \omega')$  sont ainsi reliées à  $C_{uv}(\omega)$ :

$$C_{uv}(\omega; \omega') = 2\pi\delta(\omega + \omega') C_{uv}(\omega') \quad (\text{II.D.2; 10})$$

Les fonctions de corrélation du champ sortant ont finalement l'expression suivante:

$$\langle A_{\text{out}}^-(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') J_N J(\omega') C_{+-}(\omega') \quad (\text{II.D.2; 11.a})$$

$$\langle A_{\text{out}}^+(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') J_N \sqrt{J(\omega')J(-\omega')} e^{2i\theta_{\omega'}} C_{--}(\omega') \quad (\text{II.D.2; 11.b})$$

### II.D.2.b. Spectre de fluorescence

Dans un premier temps, nous nous intéressons au spectre de fluorescence de l'atome. Celui-ci est obtenu grâce à la fonction de corrélation  $\langle A_{\text{out}}^-(\omega) A_{\text{out}}^+(\omega') \rangle$ : l'intensité  $I(\omega)$  de la lumière émise à la fréquence  $\omega$  est définie par:

$$\langle A_{\text{out}}^-(\omega') A_{\text{out}}^+(\omega) \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') I(\omega) \quad (\text{II.D.2; 12})$$

Cette intensité est donc obtenue à l'aide de la fonction de corrélation atomique  $C_{+-}(\omega)$  grâce à l'expression (II.D.2;11.a) que nous venons d'établir:

$$I(\omega) = J_N J(\omega) C_{+-}(\omega) \quad (\text{II.D.2; 13})$$

Pour calculer cette fonction de corrélation, nous utilisons les résultats que nous avons établis lors du calcul des spectres: la formule (II.C.3;34.a) donne:

$$\begin{aligned} \langle S_+(t)S_-(t+\tau) \rangle &= \Pi_1^{st} \cos^4\theta e^{-i\Delta\tau - \gamma_{\text{coh}}|\tau|} \\ &+ \Pi_2^{st} \sin^4\theta e^{i\Delta\tau - \gamma_{\text{coh}}|\tau|} \\ &+ (\Pi_1^{st} - \Pi_2^{st})^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \\ &+ 4\Pi_1^{st}\Pi_2^{st} \sin^2\theta \cos^2\theta e^{-\gamma_{\text{pop}}|\tau|} \end{aligned} \quad (\text{II.D.2;14})$$

La fonction de corrélation  $C_{+-}(\omega)$  est donc:

$$\begin{aligned} C_{+-}(\omega) &= \Pi_1^{st} \cos^4\theta \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{(\Delta - \omega)^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \\ &+ \Pi_2^{st} \sin^4\theta \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{(\Delta + \omega)^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \\ &+ (\Pi_1^{st} - \Pi_2^{st})^2 \sin^2\theta \cos^2\theta \delta(\omega) \\ &+ 4\Pi_1^{st}\Pi_2^{st} \sin^2\theta \cos^2\theta \frac{2\gamma_{\text{pop}}}{\omega^2 + \gamma_{\text{pop}}^2} \end{aligned} \quad (\text{II.D.2;15})$$

Considérons d'abord les raies latérales. Plaçons nous dans un premier temps autour de la raie centrée sur  $\omega = \Delta$  et notons  $\omega = \Delta + \nu$ . En utilisant le fait que la densité spectrale vaut  $J_+$  autour de  $\Delta$ , on obtient:

$$\begin{aligned} I(\Delta + \nu) &= J_N J_+ C_{+-}(\Delta + \nu) \\ &= J_N J_+ \Pi_1^{st} \cos^4\theta \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{\nu^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \\ &= J_N \Gamma_{21} \Pi_1^{st} \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{\nu^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \end{aligned} \quad (\text{II.D.2;16.a})$$

On obtient de même:

$$I(-\Delta + \nu) = J_N \Gamma_{21} \Pi_2^{st} \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{\nu^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \quad (\text{II.D.2;16.b})$$

Les poids des deux raies, que nous notons  $I_+$  et  $I_-$  pour les raies centrées respectivement autour de  $\Delta$  et de  $-\Delta$  sont:

$$I_+ = J_N \Gamma_{21} \Pi_1^{st} \quad (\text{II.D.2;17.a})$$

$$I_- = J_N \Gamma_{12} \Pi_2^{st} \quad (\text{II.D.2;17.b})$$

Ces poids sont ainsi proportionnels aux nombres de transitions par unité de temps de l'état 1 vers 2 pour  $I_+$  et 2 vers 1 pour  $I_-$ . Le bilan détaillé utilisé pour trouver l'état stationnaire des populations nous indique que ces deux nombres sont égaux et donc que les nombres de photons émis sur chaque raie sont égaux:

$$I_+ = I_- = \Gamma_{12} \Pi_1^{st} \quad (\text{II.D.2;18})$$

Les deux raies étant des Lorentziennes de même largeur  $\gamma_{\text{coh}}$  le spectre de fluorescence est symétrique.

D'après les expressions de  $\Gamma_{12}$  et de  $\Pi_1^{st}$  (eqs. II.D.1;5.a et 14.a), il apparaît que le nombre de photons émis dans les bandes latérales est indépendant de la densité spectrale  $J_0$  à la fréquence  $\omega_0$ . Par contre, la largeur des raies  $\gamma_{\text{coh}}$  dépend de  $J_0$  et est donc sensible à la relaxation intervenant à fréquence  $\omega_p$  par l'intermédiaire des transitions  $|i, n\rangle \rightarrow |i, n-1\rangle$  et des transferts de cohérence. On peut donc considérer la relaxation à la fréquence  $\omega_p$  comme une relaxation supplémentaire. L'utilisation d'une cavité non résonnante à la fréquence pompe peut permettre, en diminuant  $J_0$ , de diminuer la largeur des raies latérales de fluorescence tout en conservant leurs poids.

Nous terminons cette étude du spectre par la raie centrale, que nous pouvons séparer en une composante élastique  $I_{el}(\omega)$  et inélastique  $I_0(\omega)$ . Pour  $\nu$  situé autour de la fréquence nulle:

$$I(\nu) = I_{el}(\nu) + I_0(\nu) \quad (II.D.2; 18.a)$$

$$I_{el}(\nu) = J_N J_0 (\Pi_1^{st} - \Pi_2^{st})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \delta(\nu) \quad (II.D.2; 18.b)$$

$$I_0(\nu) = J_N J_0 \Pi_1^{st} \Pi_2^{st} 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{2\gamma_{pop}}{\nu^2 + \gamma_{pop}^2} \quad (II.D.2; 18.c)$$

Les poids de ces deux composantes  $I_{el}$  et  $I_0$  sont:

$$I_{el} = J_N J_0 (\Pi_1^{st} - \Pi_2^{st})^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (II.D.2; 19.a)$$

$$I_0 = J_N J_0 \Pi_1^{st} \Pi_2^{st} 4 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (II.D.2; 19.b)$$

L'intensité totale de la raie centrale  $I_c$  est donc:

$$\begin{aligned} I_c &= I_{el} + I_0 \\ &= J_N \Gamma_{11} \end{aligned} \quad (II.D.2; 20)$$

Ou bien, en utilisant l'égalité de  $\Gamma_{11}$  et  $\Gamma_{22}$  :

$$I_c = J_N (\Gamma_{11} \Pi_1^{st} + \Gamma_{22} \Pi_2^{st}) \quad (II.D.2; 21)$$

Le nombre de photons émis autour de  $\omega_p$  est proportionnel au nombre de transitions de la multiplicité  $n$  vers la multiplicité  $n - 1$  qui conservent l'état atomique (avec le même facteur de proportionnalité  $J_N$  que pour les raies latérales). On remarquera que l'intensité totale de la raie centrale est indépendante des densités spectrales  $J_+$  et  $J_-$  mais que par contre, le rapport entre l'intensité des deux composantes en dépend.

### II.D.2.c. Compression du rayonnement de fluorescence

Nous nous intéressons maintenant à la compression du rayonnement de fluorescence. La compression du champ sortant est donnée par l'expression suivante démontrée dans l'appendice  $A_I$  :

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \frac{1}{J_N} \{ \langle A_{out}^+(-\omega) A_{out}^-(\omega) \rangle + \langle A_{out}^-(-\omega) A_{out}^+(\omega) \rangle \\ &\quad - 2 \langle A_{out}^+(-\omega) A_{out}^+(\omega) \rangle \} \end{aligned} \quad (II.D.2; 22)$$

En utilisant les expressions des champs sortants en fonction des fonctions de corrélation atomiques, on obtient:

$$\begin{aligned} S_c(\omega) &= \{ 1 + J(\omega) C_{+-}(\omega) + J(-\omega) C_{+-}(-\omega) \\ &\quad - 2\sqrt{J(\omega)J(-\omega)} | C_{++}(\omega) | \} \end{aligned} \quad (II.D.2; 23)$$

Ce spectre est symétrique en  $\omega$ . Considérons la région située autour de  $\Delta$  :

$$\begin{aligned} S_c(\Delta + \nu) &= 1 + J_+ C_{+-}(\Delta + \nu) + J_- C_{+-}(-\Delta - \nu) \\ &\quad - 2\sqrt{J_+ J_-} | C_{++}(\Delta + \nu) | \end{aligned} \quad (II.D.2; 24)$$

Les expressions des fonctions de corrélation  $C_{+-}(\tau)$  et  $C_{++}(\tau)$  sont données par les équations (II.C.3;34), en ne conservant pas la raie centrale:

$$C_{+-}^{lat}(\tau) = \Pi_1^{st} \cos^4 \theta e^{-i\Delta\tau - \gamma_{coh}|\tau|} + \Pi_2^{st} \sin^4 \theta e^{i\Delta\tau - \gamma_{coh}|\tau|} \quad (II.D.2; 25.a)$$

$$C_{++}^{lat}(\tau) = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta [\Pi_1^{st} e^{(i\Delta - \gamma_{coh})|\tau|} + \Pi_2^{st} e^{(-i\Delta - \gamma_{coh})|\tau|}] \quad (II.D.2; 25.b)$$



Soit, en les exprimant dans l'espace des fréquences:

$$C_{+-}^{\text{lat}}(\omega) = \Pi_1^{st} \cos^4 \theta \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{(\omega - \Delta)^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} + \Pi_2^{st} \sin^4 \theta \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{(\omega + \Delta)^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \quad (\text{II.D.2; 26.a})$$

$$C_{++}^{\text{lat}}(\omega) = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta \left( \Pi_1^{st} \frac{2(\gamma_{\text{coh}} + i\Delta)}{\omega^2 + (\gamma_{\text{coh}} + i\Delta)^2} + \Pi_2^{st} \frac{2(\gamma_{\text{coh}} - i\Delta)}{\omega^2 + (\gamma_{\text{coh}} - i\Delta)^2} \right) \quad (\text{II.D.2; 26.b})$$

Nous nous plaçons maintenant autour de  $\Delta$  :

$$C_{+-}(\Delta + \nu) = \Pi_1^{st} \cos^4 \theta \frac{2\gamma_{\text{coh}}}{\nu^2 + \gamma_{\text{coh}}^2} \quad (\text{II.D.2; 27.a})$$

$$C_{++}(\Delta + \nu) = -\sin^2 \theta \cos^2 \theta \left\{ \Pi_1^{st} \frac{1}{\gamma_{\text{coh}} - i\nu} + \Pi_2^{st} \frac{1}{\gamma_{\text{coh}} + i\nu} \right\} \quad (\text{II.D.2; 27.b})$$

Nous pouvons alors écrire la compression du champ émis à la fréquence  $\Delta$  :

$$\begin{aligned} S_c(\Delta) &= 1 + J_+ C_{+-}(\Delta) + J_- C_{+-}(-\Delta) - 2\sqrt{J_+ J_-} C_{++}(\Delta) \\ &= 1 + J_+ \cos^4 \theta \Pi_1 \frac{2}{\gamma_{c0}} + J_- \sin^4 \theta \Pi_2 \frac{2}{\gamma_{c0}} - 2\sqrt{J_+ J_-} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \frac{1}{\gamma_{c0}} \end{aligned} \quad (\text{II.D.2; 28})$$

En utilisant les expressions suivantes, que nous avons établies au début de ce chapitre:

$$J_+ \cos^4 \theta = \Gamma_{21} \quad (\text{II.D.2; 29.a})$$

$$J_- \sin^4 \theta = \Gamma_{12} \quad (\text{II.D.2; 29.b})$$

$$\Pi_1^{st} = \frac{\Gamma_{12}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (\text{II.D.2; 29.c})$$

$$\Pi_2^{st} = \frac{\Gamma_{21}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (\text{II.D.2; 29.d})$$

$$\gamma_{\text{coh}} = \frac{1}{2} (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + 2\Gamma_{11} \quad (\text{II.D.2; 29.e})$$

On obtient:

$$S_c(\Delta) = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2} (\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + 2\Gamma_{11}} \left\{ \frac{4\Gamma_{12}\Gamma_{21}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} - 2\sqrt{\Gamma_{12}\Gamma_{21}} \right\} \quad (\text{II.D.2; 30})$$

Introduisons les deux paramètres suivants:

$$\sigma = 2 \frac{\sqrt{\Gamma_{12}\Gamma_{21}}}{\Gamma_{12} + \Gamma_{21}} \quad (\text{II.D.2; 31.a})$$

$$\beta = \frac{\Gamma_{11}}{\sqrt{\Gamma_{12}\Gamma_{21}}} = \frac{J_0}{\sqrt{J_+ J_-}} \quad (\text{II.D.2; 31.b})$$

$\sigma$  est un paramètre de saturation valant 0 lorsque l'une des populations est nulle et 1 lorsqu'elles sont égales.  $\beta$  représente l'importance relative de la relaxation à fréquence nulle par rapport à la relaxation aux fréquences  $\pm\Delta$ . La compression s'exprime de la manière suivante à l'aide de ces deux paramètres:

$$S_c(\Delta) = 1 - 2 \frac{\sigma(1 - \sigma)}{1 + 2\beta\sigma} \quad (\text{II.D.2; 32})$$

- Discussion -

Pour un réservoir plat ( $J_+ = J_- = J_0$ ), le coefficient  $\beta$  est égal à un, on retrouve le résultat connu

$$S_c(\Delta) = 1 - 2 \frac{\sigma(1 - \sigma)}{1 + 2\sigma} \quad (II.D.2;33)$$

La réduction est optimale pour  $\sigma \simeq 0.27$  et donne une réduction de 27 % ( $S \simeq 0,73$ ) (voir figure II.7).

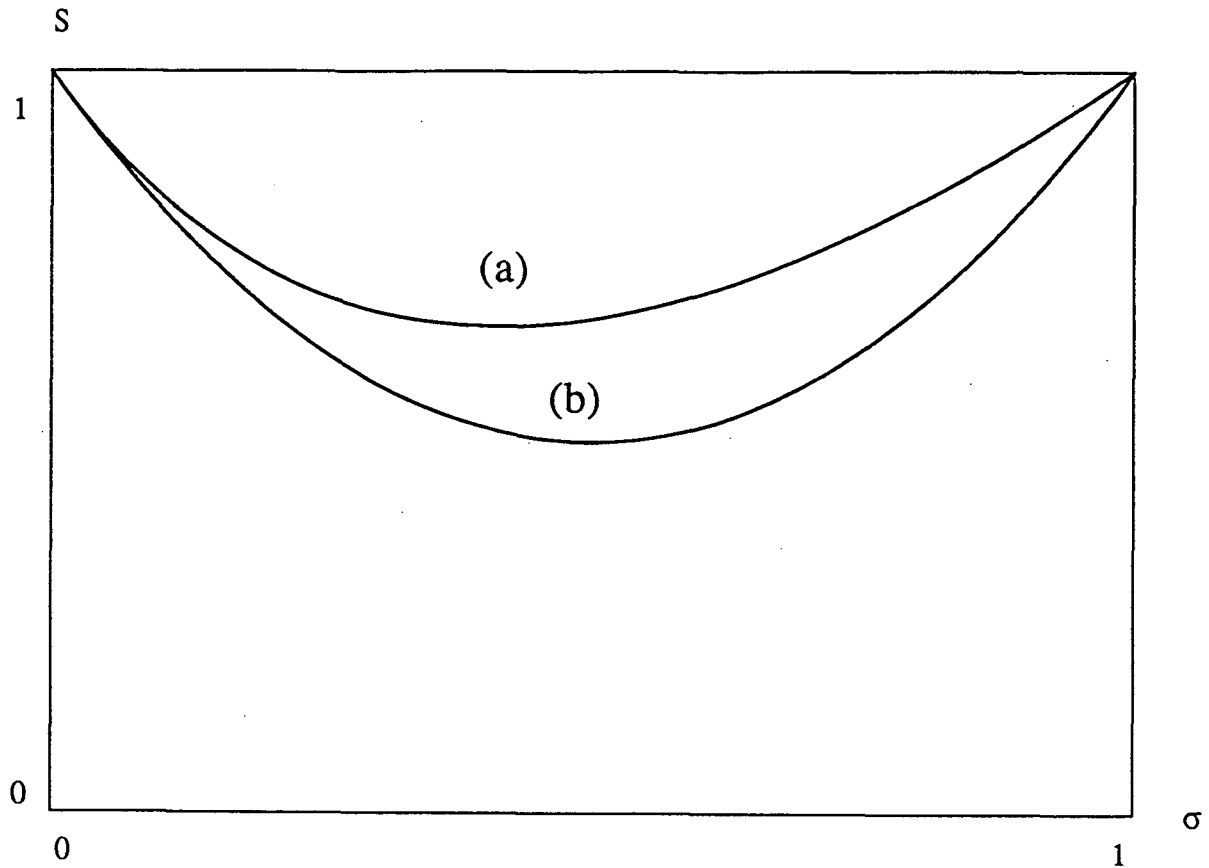
La relaxation à fréquence nulle peut être modifiée par l'utilisation d'une cavité. Nous avons vu dans l'étude du spectre de fluorescence que son seul effet sur les raies latérales est un élargissement à poids constant. Diminuer ce taux revient à rétrécir les raies et donc à augmenter leur hauteur. Le même effet existe pour le spectre de compression (eq. II.D.2;26): réduire la relaxation à fréquence (c'est-à-dire, diminuer  $\beta$ ) améliore la compression.

Considérons la situation idéale où la relaxation à fréquence nulle est négligeable (soit  $\beta = 0$ ). Ceci est en pratique réalisé lorsque les raies latérales sont accordées sur deux modes d'une cavité alors que la fréquence pompe est hors de résonance. L'expression du spectre de compression devient:

$$S_c(\Delta) = 1 + 2\sigma(\sigma - 1) \quad (II.D.2;34)$$

L'optimum de compression, réalisé pour  $\sigma = 1/2$  est de 50 % de réduction. L'utilisation d'une cavité permet donc d'améliorer la compression du rayonnement par fluorescence de résonance (voir figure II.7).

Figure II.7



### Amélioration de la compression par l'utilisation d'une cavité

Cette figure représente la compression  $S$  à la fréquence des raies latérales dans la limite des raies bien séparées en fonction du paramètre de saturation  $\sigma$ .

-a- Spectre de couplage plat. La compression optimale est de 27% pour  $\sigma=0.27$ .

-b- Spectre de couplage dépendant de la fréquence choisi de manière à ce que la relaxation à fréquence pompe soit interdite. La compression optimale est de 50% pour  $\sigma=0.5$ .

## II.E. Atome en champ comprimé

Nous étudions maintenant la relaxation d'un atome soumis à des fluctuations comprimées. Nous nous plaçons dans l'approximation du bruit tricolore: la densité spectrale et la compression du champ peuvent être différentes pour les trois fréquences de transition de l'atome habillé.

Dans un premier temps nous étudions les équations de relaxation de l'atome habillé. Nous verrons en particulier que la notion de cascade radiative ne s'applique plus lorsque les fluctuations sont comprimées. Toutefois les équations du spin fictif restent simples et permettent de calculer toutes les propriétés de l'atome et du champ de fluorescence.

Nous discuterons dans un premier temps l'état stationnaire atteint par l'atome. Nous montrerons que la compression des fluctuations incidentes peut permettre de stabiliser l'un des deux niveaux. Nous discuterons ensuite les taux de relaxation, en particulier lorsque la compression dépend de la fréquence. Nous déterminerons enfin comment se traduisent les différents effets discutés sur le spectre de la lumière émise par l'atome dans un second réservoir. Pour simplifier les notations, nous supposons que ce second réservoir ne perturbe pas la relaxation atomique.

### II.E.1. Relaxation de l'atome habillé en champ comprimé

Dans le chapitre précédent, nous avons vu que les équations décrivant la relaxation de l'atome habillé s'interprètent simplement en termes de cascade radiative lorsque le réservoir est vide. Autrement dit, elles correspondent à des transitions par émission spontanée dans le diagramme de l'atome habillé, les taux de transition étant donnés par la règle d'or de Fermi. Nous allons voir que ce n'est plus le cas dans un réservoir comprimé. Ceci est lié au fait qu'un champ comprimé contient des photons, et que les processus d'absorption et d'émission stimulée de ces photons doivent manifester. Nous allons dans un premier temps considérer un modèle de bruit thermique: dans ce cas, le nombre moyen  $N$  de photons par mode est non nul, mais il n'y a pas de corrélation entre ces modes. Il est alors possible de comprendre l'évolution de l'atome habillé grâce à des taux de transition prenant en compte non seulement l'émission spontanée mais aussi l'émission stimulée et l'absorption de photons du réservoir.

Nous étudions ensuite le cas d'un réservoir comprimé. La situation est plus compliquée puisqu'il y a alors des cohérences entre des modes différents du réservoir. La relaxation couple les populations de l'atome habillé à des cohérences entre niveaux de multiplicités différentes. En supposant que le mode pompe est un état cohérent, nous montrerons qu'il est possible de se ramener à des équations de relaxation sur le spin fictif. Nous mettrons alors en évidence le fait que la compression des fluctuations permet de stabiliser un niveau habillé.

#### II.E.1.a. Relaxation dans un réservoir thermique

Nous supposons que le réservoir est dans un état thermique, c'est-à-dire que les modes du champ contiennent un nombre moyen de photons non nul, mais qu'ils ne sont pas corrélés entre eux. Ceci se traduit sur les paramètres décrivant l'état du réservoir (que nous avons utilisés dans le chapitre II.B. lorsque nous avons établi les équations de relaxation de l'atome habillé) par le fait que les corrélations  $M$  et  $M_0$  sont nulles:

$$M = M_0 = 0 \quad (II.E.1; 1)$$

Les seuls coefficients qui interviennent dans les équations de relaxation (II.B.2;32) les sont  $N_+$ ,  $N_0$  et  $N_-$ , ce sont les nombres moyens de photons par mode autour des fréquences  $\omega_p + \Delta$ ,  $\omega_p$  et  $\omega_p - \Delta$ .

Avec ces hypothèses, on constate que les populations  $\pi_{i,n} = \langle (|i,n\rangle\langle i,n|) \rangle$  ne sont couplées à aucune cohérence. Nous pouvons donc écrire l'évolution de ces populations de la manière suivante:

$$\begin{aligned} d_t \Pi_{1,n} = & - (\Gamma_{21}^+ + \Gamma_{11}^+ + \Gamma_{21}^- + \Gamma_{11}^-) \Pi_{1,n} \\ & + \Gamma_{11}^- \Pi_{1,n+1} + \Gamma_{12}^- \Pi_{2,n+1} + \Gamma_{11}^+ \Pi_{1,n-1} + \Gamma_{12}^+ \Pi_{2,n-1} \end{aligned} \quad (II.E.1; 2.a)$$

$$\begin{aligned} d_t \Pi_{2,n} = & - (\Gamma_{12}^+ + \Gamma_{22}^+ + \Gamma_{12}^- + \Gamma_{22}^-) \Pi_{2,n} \\ & + \Gamma_{21}^- \Pi_{1,n+1} + \Gamma_{22}^- \Pi_{2,n+1} + \Gamma_{21}^+ \Pi_{1,n-1} + \Gamma_{22}^+ \Pi_{2,n-1} \end{aligned} \quad (II.E.1; 2.b)$$

où

$$\Gamma_{12}^- = (1 + N_-) \Gamma_{12} = \sin^4 \theta (1 + N_-) J_- \quad (II.E.1; 3.a)$$

$$\Gamma_{21}^+ = N_- \Gamma_{12} = \sin^4 \theta N_- J_- \quad (II.E.1; 3.b)$$

$$\Gamma_{11}^- = \Gamma_{22}^- = (1 + N_0) \Gamma_{11} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta (1 + N_0) J_0 \quad (II.E.1; 3.c)$$

$$\Gamma_{11}^+ = \Gamma_{22}^+ = N_0 \Gamma_{11} = \sin^2 \theta \cos^2 \theta N_0 J_0 \quad (II.E.1; 3.d)$$

$$\Gamma_{21}^- = (1 + N_+) \Gamma_{21} = \cos^4 \theta (1 + N_+) J_+ \quad (II.E.1; 3.e)$$

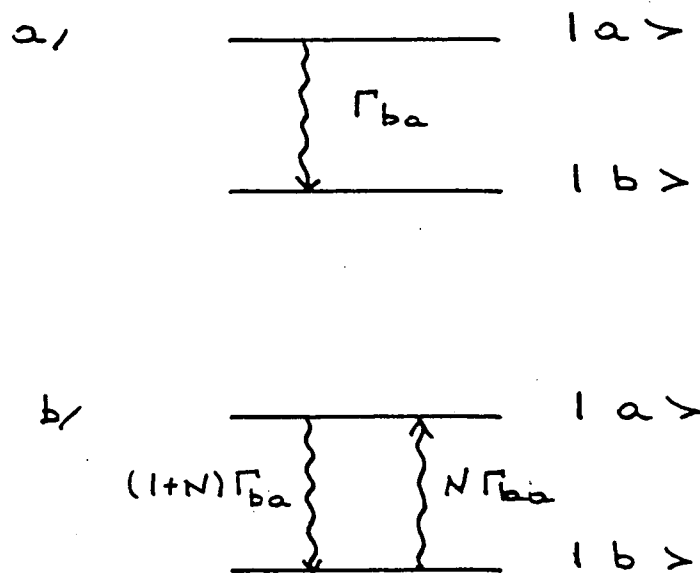
$$\Gamma_{12}^+ = N_+ \Gamma_{21} = \cos^4 \theta N_+ J_+ \quad (II.E.1; 3.f)$$

$\Gamma_{ij}^\alpha$  est un taux de transition du niveau  $|i, n\rangle$  vers le niveau  $|j, n+\alpha\rangle$ . Ces taux ont une interprétation physique simple. Si  $|a\rangle$  et  $|b\rangle$  sont deux niveaux habillés de deux multiplicités consécutives, et si le réservoir est vide, seule la transition de  $|a\rangle$  vers  $|b\rangle$  est possible par émission spontanée avec un taux  $\Gamma_{ba}$ . Lorsque le réservoir n'est plus vide, s'ajoutent à ce phénomène l'émission stimulée et l'absorption de photons du réservoir, avec deux taux de transitions égaux et valant  $N\Gamma_{ba}$ , où  $N$  est le nombre de photons par mode. Le bilan final est ainsi un taux de transition  $\Gamma'_{ba} = \Gamma_{ba}(1 + N)$  de  $|a\rangle$  vers  $|b\rangle$  et un taux  $\Gamma'_{ab} = \Gamma_{ba}N$  de  $|b\rangle$  vers  $|a\rangle$  (cf. figure II.8).

Sur la figure II.9, nous comparons les cas d'un réservoir vide ou thermique pour les départs et les arrivées sur un niveau de l'atome habillé.

Il faut noter que nous n'avons plus affaire à une cascade radiative mais plutôt à une sorte de marche aléatoire dans l'échelle de l'atome habillé avec un mouvement global de dérive vers le bas.

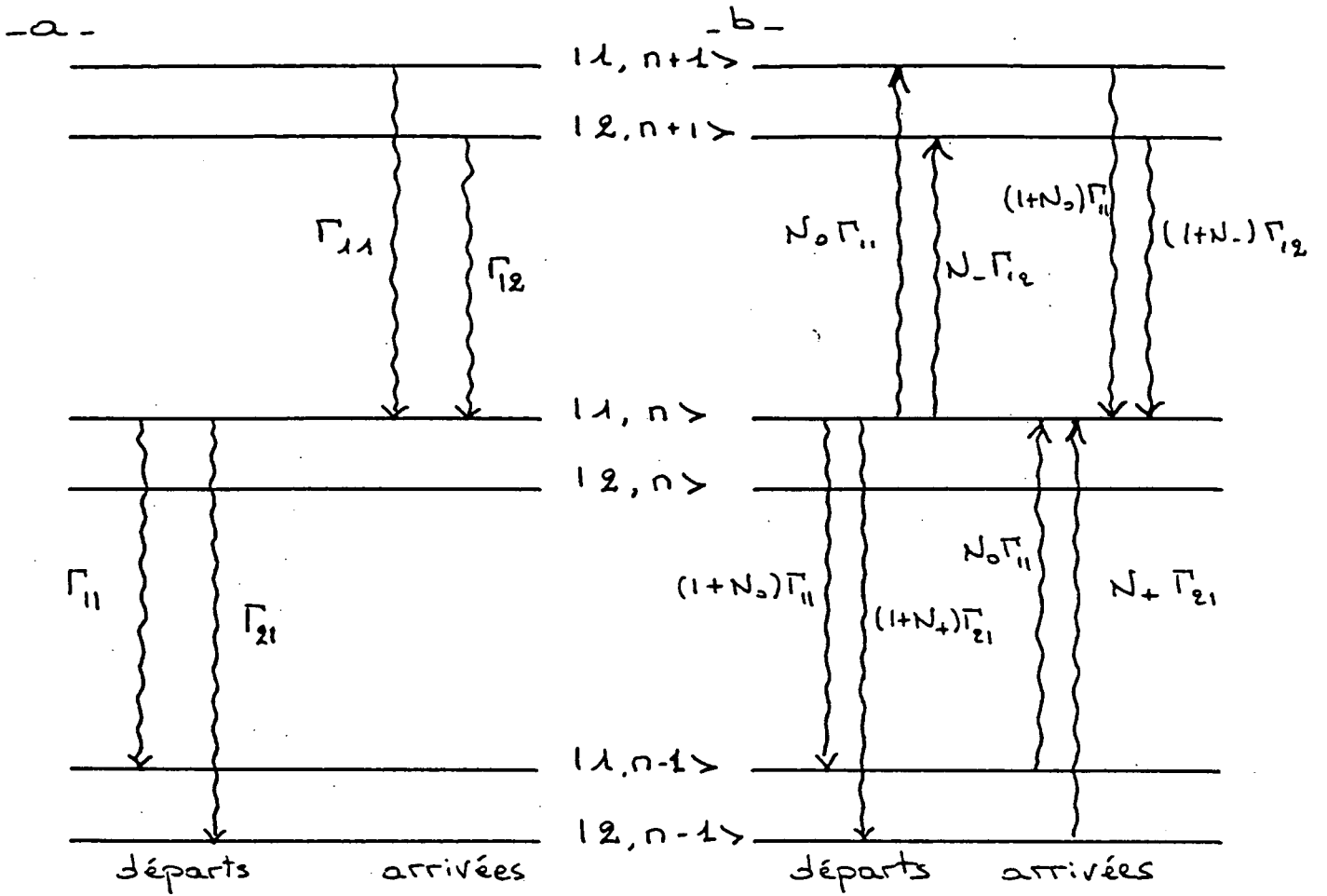
Figure II.8



### Transitions entre deux niveaux

- a- émission spontanée dans le vide
- b- réservoir dans un état thermique

Figure II.9



Evolution de la population de l'état  $|1, n\rangle$

-a- réservoir vide

-b- réservoir dans un état thermique

### II.E.1.b. Atome habillé dans un champ comprimé

Lorsque le réservoir est dans un état comprimé la situation est plus délicate car les modes du réservoir sont corrélés.

Les équations de relaxation sont reliées aux fonctions de corrélation  $N$  et  $M$  (eqs II.B.2;23, 24 et 32) qui s'expriment en fonction du paramètre de compression  $\xi$ . Dans notre cas interviennent le paramètre  $\xi_\Delta$  pour la compression autour de la fréquence  $\Delta$  et  $\xi_0$  pour la fréquence nulle ainsi que les phases  $\varphi_0$  et  $\varphi_\Delta$  des quadratures comprimées:

$$N_0 = \text{sh}^2 \xi_0 \quad (II.E.1;4.a)$$

$$M_0 = \text{sh} \xi_0 \text{ ch} \xi_0 e^{-i\varphi_0} \quad (II.E.1;4.b)$$

$$N_+ = N_- = \text{sh}^2 \xi_\Delta \quad (II.E.1;4.c)$$

$$M = \text{sh} \xi_\Delta \text{ ch} \xi_\Delta e^{-i\varphi_\Delta} \quad (II.E.1;4.d)$$

En reportant ces expressions dans les équations (II.B.1;32) nous obtenons:



$$\begin{aligned}
d_i |1, n \rangle \langle 2, m| = & \\
& -\frac{1}{2}(\cos^4\theta J_+ + \sin^4\theta J_-)(\text{sh}^2\xi_\Delta + \text{ch}^2\xi_\Delta) |1, n \rangle \langle 2, m| \\
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} \text{sh}\xi_\Delta \text{ch}\xi_\Delta \{e^{-i\varphi_\Delta}(|1, n+2 \rangle \langle 2, m| + |1, n \rangle \langle 2, m-2|) \\
& \quad + e^{i\varphi_\Delta}(|1, n-2 \rangle \langle 2, m| + |1, n \rangle \langle 2, m+2|)\} \\
& -\frac{1}{2}\sin^2\theta \cos^2\theta J_0 \{2(\text{sh}^2\xi_0 + \text{ch}^2\xi_0) |1, n \rangle \langle 2, m| \\
& \quad + 2\text{ch}^2\xi_0 |1, n+1 \rangle \langle 2, m+1| + 2\text{sh}^2\xi_0 |1, n-1 \rangle \langle 2, m-1| \\
& \quad + \text{sh}\xi_0 \text{ch}\xi_0 e^{-i\varphi_0}(|1, n+2 \rangle \langle 2, m| \\
& \quad \quad + 2|1, n+1 \rangle \langle 2, m-1| + |1, n \rangle \langle 2, m-2|) \\
& \quad + \text{sh}\xi_0 \text{ch}\xi_0 e^{i\varphi_0}(|1, n-2 \rangle \langle 2, m| \\
& \quad \quad + 2|1, n-1 \rangle \langle 2, m+1| + |1, n \rangle \langle 2, m+2|)\} \tag{II.E.1;5.a}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_i |1, n \rangle \langle 1, m| = & \\
& -(\cos^4\theta J_+ \text{ch}^2\xi_\Delta + \sin^4\theta J_- \text{sh}^2\xi_\Delta) |1, n \rangle \langle 1, m| \\
& +\sin^4\theta J_- \text{ch}^2\xi_\Delta |2, n+1 \rangle \langle 2, m+1| \\
& +\cos^4\theta J_+ \text{sh}^2\xi_\Delta |2, n-1 \rangle \langle 2, m-1| \\
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} \text{sh}\xi_\Delta \text{ch}\xi_\Delta \{e^{-i\varphi_\Delta}(|1, n+2 \rangle \langle 1, m| + |1, n \rangle \langle 1, m-2|) \\
& \quad + e^{i\varphi_\Delta}(|1, n-2 \rangle \langle 1, m| + |1, n \rangle \langle 1, m+2|)\} \\
& -\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} \text{sh}\xi_\Delta \text{ch}\xi_\Delta \{e^{-i\varphi_\Delta} |2, n+1 \rangle \langle 2, m-1| + e^{i\varphi_\Delta} |2, n-1 \rangle \langle 2, m+1|\} \\
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta \cos^2\theta J_0 \{-2(\text{sh}^2\xi_0 + \text{ch}^2\xi_0) |1, n \rangle \langle 1, m| \\
& \quad + 2\text{ch}^2\xi_0 |1, n+1 \rangle \langle 1, m+1| + 2\text{sh}^2\xi_0 |1, n-1 \rangle \langle 1, m-1| \\
& \quad - \text{sh}\xi_0 \text{ch}\xi_0 e^{-i\varphi_0}(|1, n+2 \rangle \langle 1, m| \\
& \quad \quad + 2|1, n+1 \rangle \langle 1, m-1| + |1, n \rangle \langle 1, m-2|) \\
& \quad - \text{sh}\xi_0 \text{ch}\xi_0 e^{i\varphi_0}(|1, n-2 \rangle \langle 1, m| \\
& \quad \quad + 2|1, n-1 \rangle \langle 1, m+1| + |1, n \rangle \langle 1, m+2|)\} \tag{II.B.2;5.b}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_i |2, n \rangle \langle 2, m| = & \\
& -(\cos^4\theta J_+ \text{sh}^2\xi_\Delta + \sin^4\theta J_- \text{ch}^2\xi_\Delta) |2, n \rangle \langle 2, m| \\
& +\sin^4\theta J_- \text{sh}^2\xi_\Delta |1, n+1 \rangle \langle 1, m+1| \\
& +\cos^4\theta J_+ \text{ch}^2\xi_\Delta |1, n-1 \rangle \langle 1, m-1| \\
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} \text{sh}\xi_\Delta \text{ch}\xi_\Delta \{e^{-i\varphi_\Delta}(|2, n+2 \rangle \langle 2, m| + |2, n \rangle \langle 2, m-2|) \\
& \quad + e^{i\varphi_\Delta}(|2, n-2 \rangle \langle 2, m| + |2, n \rangle \langle 2, m+2|)\} \\
& -\sin^2\theta \cos^2\theta \sqrt{J_+ J_-} \text{sh}\xi_\Delta \text{ch}\xi_\Delta \{e^{-i\varphi_\Delta} |1, n+1 \rangle \langle 1, m-1| + e^{i\varphi_\Delta} |1, n-1 \rangle \langle 1, m+1|\} \\
& +\frac{1}{2}\sin^2\theta \cos^2\theta J_0 \{-2(\text{sh}^2\xi_0 + \text{ch}^2\xi_0) |2, n \rangle \langle 2, m| \\
& \quad + 2\text{ch}^2\xi_0 |2, n+1 \rangle \langle 2, m+1| + 2\text{sh}^2\xi_0 |2, n-1 \rangle \langle 2, m-1| \\
& \quad - \text{sh}\xi_0 \text{ch}\xi_0 e^{-i\varphi_0}(|2, n+2 \rangle \langle 2, m| \\
& \quad \quad + 2|2, n+1 \rangle \langle 2, m-1| + |2, n \rangle \langle 2, m-2|) \\
& \quad - \text{sh}\xi_0 \text{ch}\xi_0 e^{i\varphi_0}(|2, n-2 \rangle \langle 2, m| \\
& \quad \quad + 2|2, n-1 \rangle \langle 2, m+1| + |2, n \rangle \langle 2, m+2|)\} \tag{II.B.2;5.c}
\end{aligned}$$

Nous constatons qu'il existe des termes thermiques semblables à ceux que nous avons discutés plus tôt. Viennent s'ajouter à ceux-ci des termes dus aux corrélations entre modes. Nous constatons que ces corrélations font apparaître un couplage entre les populations  $|i, n\rangle\langle i, n|$  et des cohérences entre niveaux de multiplicités différentes  $|j, m+1\rangle\langle j, m-1|$  et  $|j, m-1\rangle\langle j, m+1|$ . Dans le référentiel du champ tournant, bien que l'usage nous fasse représenter les niveaux d'énergie sous forme d'une échelle, les différentes multiplicités ont une même énergie. En d'autres termes, les fréquences de Bohr entre deux états  $|1\rangle$  (ou  $|2\rangle$ ) appartenant à deux multiplicités différentes sont nulles.

La fréquence d'évolution libre d'un opérateur  $|i, n\rangle\langle j, m|$  ne dépend pas des nombres  $n$  et  $m$ . Le couplage entre population et cohérences que nous obtenons ici reste donc dans le cadre de l'approximation séculaire que nous nous étions fixé pour établir les équations de relaxation.

Nous allons maintenant supposer que le laser est dans un état cohérent  $|\varphi\rangle$ . Nous calculons dans ce cas l'évolution des opérateurs  $|i, \varphi\rangle\langle j, \varphi|$ :

$$|i, \varphi\rangle\langle j, \varphi| = \sum_{n, m} e^{in\varphi} e^{-im\varphi} |i, n\rangle\langle j, m| \quad (II.E.1;6)$$

Nous noterons  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  et  $\rho_{12}$  les valeurs moyennes des opérateurs  $|i, \varphi\rangle\langle j, \varphi|$ :

$$\Pi_1 = \langle (|1, \varphi\rangle\langle 1, \varphi|) \rangle \quad (II.E.1;7.a)$$

$$\Pi_2 = \langle (|2, \varphi\rangle\langle 2, \varphi|) \rangle \quad (II.E.1;7.b)$$

$$\rho_{12} = \langle (|1, \varphi\rangle\langle 2, \varphi|) \rangle \quad (II.E.1;7.c)$$

Il faut noter que ces opérateurs sont obtenus en sommant sur  $n$  et  $m$  indépendamment. Le terme  $\Pi_1$  qui s'interprète comme la population du niveau  $|1\rangle$  du spin fictif est donc non seulement la somme des populations des niveaux  $|1, n\rangle$  mais contient aussi des contributions dues aux cohérences  $|1, n\rangle\langle 1, m|$ .

Les équations d'évolutions de  $\Pi_1$ ,  $\Pi_2$  et  $\rho_{12}$  sont obtenues en sommant sur  $m$  et  $n$  les équations (II.E.1;5):

$$d_t \Pi_1 = -\Gamma_{21} \Pi_1 + \Gamma_{12} \Pi_2 \quad (II.E.1;8.a)$$

$$d_t \Pi_2 = -\Gamma_{12} \Pi_2 + \Gamma_{21} \Pi_1 \quad (II.E.1;8.b)$$

$$d_t \rho_{12} = -\gamma_{\text{coh}} \rho_{12} = -\left\{ \frac{1}{2}(\Gamma_{12} + \Gamma_{21}) + \gamma'_{\text{coh}} \right\} \rho_{12} \quad (II.E.1;8.a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{12} &= J_+ \cos^4 \theta \operatorname{sh}^2 \xi_\Delta + J_- \sin^4 \theta \operatorname{ch}^2 \xi_\Delta \\ &\quad - 2\sqrt{J_+ J_-} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos(2\varphi - \varphi_\Delta) \operatorname{sh} \xi_\Delta \operatorname{ch} \xi_\Delta \\ &= (\sqrt{J_+} \cos^2 \theta \operatorname{sh} \xi_\Delta - \sqrt{J_-} \sin^2 \theta \operatorname{ch} \xi_\Delta)^2 \\ &\quad + 2(1 - \cos(2\varphi - \varphi_\Delta)) \sqrt{J_+ J_-} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \operatorname{sh} \xi_\Delta \operatorname{ch} \xi_\Delta \end{aligned} \quad (II.E.1;9.a)$$

$$\begin{aligned} \Gamma_{21} &= J_+ \cos^4 \theta \operatorname{ch}^2 \xi_\Delta + J_- \sin^4 \theta \operatorname{sh}^2 \xi_\Delta \\ &\quad - 2\sqrt{J_+ J_-} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \cos(2\varphi - \varphi_\Delta) \operatorname{sh} \xi_\Delta \operatorname{ch} \xi_\Delta \\ &= (\sqrt{J_+} \cos^2 \theta \operatorname{ch} \xi_\Delta - \sqrt{J_-} \sin^2 \theta \operatorname{sh} \xi_\Delta)^2 \\ &\quad + 2(1 - \cos(2\varphi - \varphi_\Delta)) \sqrt{J_+ J_-} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \operatorname{sh} \xi_\Delta \operatorname{ch} \xi_\Delta \end{aligned} \quad (II.E.1;9.b)$$

$$\begin{aligned} \gamma'_{\text{coh}} &= 2 J_0 \sin^2 \theta \cos^2 \theta [\operatorname{sh}^2 \xi_0 + \operatorname{ch}^2 \xi_0 + 2 \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0 \cos(2\varphi - \varphi_0)] \\ &= 2 J_0 \sin^2 \theta \cos^2 \theta [(\operatorname{sh} \xi_0 - \operatorname{ch} \xi_0)^2 + 2(1 + \cos(2\varphi - \varphi_0)) \operatorname{sh} \xi_0 \operatorname{ch} \xi_0] \end{aligned} \quad (II.E.1;9.c)$$

Les équations que nous obtenons peuvent maintenant s'interpréter à l'aide de taux de transitions. Le taux de relaxation des populations  $\gamma_{\text{pop}}$  est:

$$d_t \left( \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{2} \right) = -\gamma_{\text{pop}} \left( \frac{\Pi_1 - \Pi_2}{2} \right) - \frac{\eta_{\text{pop}}}{2} \quad (\text{II.E.1;10})$$

$$\gamma_{\text{pop}} = \Gamma_{12} + \Gamma_{21} \quad (\text{II.E.1;11.a})$$

$$\begin{aligned} \eta_{\text{pop}} &= \Gamma_{21} - \Gamma_{12} \\ &= J_+ \cos^4 \theta - J_- \sin^4 \theta \end{aligned} \quad (\text{II.E.1;11.b})$$

Ainsi:

$$\gamma_{\text{coh}} = \frac{1}{2} \gamma_{\text{pop}} + \gamma'_{\text{coh}} \quad (\text{II.E.1;12})$$

Nous remarquons tout d'abord que les taux de transition  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{21}$  dépendent des spectres aux fréquences  $\Delta$  et  $-\Delta$  comme dans le chapitre précédent. D'autre part, le taux de relaxation des cohérences est la somme de la moitié du taux de relaxation des populations et d'un terme  $\gamma'_{\text{coh}}$  dépendant du bruit à fréquence nulle.

Nous allons maintenant étudier plus précisément les taux de transition  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{21}$ .

- Le piégeage de population -

Lorsque la phase  $\varphi_{\Delta}$  de la quadrature du champ vérifie  $\varphi_{\Delta} = 2\varphi$ , les taux de transition  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{21}$  prennent une forme particulièrement simple:

$$\Gamma_{12} = (\sqrt{J_+} \cos^2 \theta \operatorname{sh} \xi_{\Delta} - \sqrt{J_-} \sin^2 \theta \operatorname{ch} \xi_{\Delta})^2 \quad (\text{II.E.1;13.a})$$

$$\Gamma_{21} = (\sqrt{J_+} \cos^2 \theta \operatorname{ch} \xi_{\Delta} - \sqrt{J_-} \sin^2 \theta \operatorname{sh} \xi_{\Delta})^2 \quad (\text{II.E.1;13.b})$$

Pour  $\xi_{\Delta}$  positif, il existe deux angles  $\theta_1$  et  $\theta_2$  pour lesquels les taux  $\Gamma_{12}$  et  $\Gamma_{21}$  sont respectivement nuls. (Pour  $\xi_{\Delta}$  négatif, cette propriété est vraie pour  $\varphi_{\Delta} = 2\varphi + \pi$ ). Ces angles sont solutions des équations:

$$\operatorname{tg}^2 \theta_1 = \operatorname{th} \xi_{\Delta} \sqrt{\frac{J_+}{J_-}} \quad (\text{II.E.1;14.a})$$

$$\operatorname{tg}^2 \theta_2 = \frac{1}{\operatorname{th} \xi_{\Delta}} \sqrt{\frac{J_+}{J_-}} \quad (\text{II.E.1;14.b})$$

Pour un réservoir vide, soit  $\xi_{\Delta} = 0$ , les solutions sont:

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2} \quad (\text{II.E.1;15.a})$$

$$\theta_2 = 0 \quad (\text{II.E.1;15.b})$$

Ceci correspond dans le premier cas à  $|1\rangle = |f\rangle$  et dans le second à  $|2\rangle = |f\rangle$ . On retrouve la situation habituelle où les seules transitions sont dues à l'émission spontanée car l'atome n'est pas excité et le réservoir est vide. Le taux de transition de l'état fondamental vers l'état excité est nul.

Les relations que nous venons d'établir montrent que cette propriété de stabilité d'un niveau se généralise au cas où le réservoir est comprimé. Le niveau stable ne sera alors plus l'état fondamental mais un niveau habillé du spin fictif.

## II.E.2. Relaxation du spin fictif en champ comprimé: interprétation géométrique

Dans la section précédente, nous avons étudié la relaxation de l'atome habillé en champ comprimé. Nous avons montré que, pour un état cohérent du champ laser ces équations se ramènent aux équations de relaxation d'un système à deux niveaux et nous avons mis en évidence une propriété de stabilisation de la population d'un niveau habillé.

Pour pouvoir discuter cet effet, nous allons maintenant nous appuyer sur l'image du spin fictif et sur l'étude que nous avons faite au chapitre II.A. Nous allons montrer comment il est possible de retrouver de manière simple et géométrique les équations de relaxation d'un système à deux niveaux en champ comprimé. Ceci nous permettra d'interpréter le phénomène de stabilisation.

### II.E.2.a. Notations. Relaxation sans champ pompe

Nous considérons tout d'abord un spectre de fluctuations blanc. Les équations de relaxation du spin fictif lorsque le champ pompe est nul s'écrivent:

$$d_t S_x = - \gamma_x S_x \quad (II.E.2; 1.a)$$

$$d_t S_y = - \gamma_y S_y \quad (II.E.2; 1.b)$$

$$d_t S_z = - \gamma_z S_z - \eta_z/2 \quad (II.E.2; 1.c)$$

Nous nous sommes placés dans un repère tel que les axes  $x$  et  $y$  représentent les axes de "l'ellipse des fluctuations":  $x$  et  $y$  correspondent aux quadratures dont le bruit est respectivement maximal ou minimal. Donnons maintenant les expressions des différents taux de relaxation en fonction du degré de compression des fluctuations  $\xi$ :

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \gamma e^{-2\xi} \quad (II.E.2; 2.a)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \gamma e^{2\xi} \quad (II.E.2; 2.b)$$

$$\gamma_z = \gamma_x + \gamma_y = \gamma \operatorname{ch} 2\xi \quad (II.E.2; 2.c)$$

L'image que nous avons développée dans le chapitre II.A. est celle d'un spin soumis à un champ fluctuant  $\vec{h}$  qui se trouve dans le plan  $xOy$ . Le taux de relaxation d'une composante de spin est donné par la variance du champ qui lui est orthogonal:

$$\gamma_i = \frac{1}{2} \langle \Delta h_{\perp i}^2 \rangle \quad (II.E.2; 3)$$

Dans notre cas, ces variances sont:

$$\langle \Delta h_x^2 \rangle = \gamma e^{2\xi} \quad (II.E.2; 4.a)$$

$$\langle \Delta h_y^2 \rangle = \gamma e^{-2\xi} \quad (II.E.2; 4.b)$$

On vérifie ainsi que:

$$\gamma_x = \frac{1}{2} \langle \Delta h_y^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma e^{-2\xi} \quad (II.E.2; 5.a)$$

$$\gamma_y = \frac{1}{2} \langle \Delta h_x^2 \rangle = \frac{1}{2} \gamma e^{2\xi} \quad (II.E.2; 5.b)$$

$$\gamma_z = \frac{1}{2} (\langle \Delta h_x^2 \rangle + \langle \Delta h_y^2 \rangle) = \gamma \operatorname{ch} 2\xi \quad (II.E.2; 5.c)$$

On remarque que  $\gamma_z$  peut être écrit:

$$\gamma_z = \gamma \operatorname{ch} 2\xi = \gamma (1 + 2N) \quad (II.E.2; 6.a)$$

$$N = s h^2 \xi \quad (II.E.2; 6.b)$$

où  $N$  est le nombre moyen de photons par mode. Comme  $\gamma_z$  est le taux de relaxation des populations, quand le champ pompe est nul, on retrouve bien que dans ce cas la relaxation des populations est la même que dans un champ thermique. Le terme  $\eta_z$  dû à la réaction de rayonnement est:

$$\eta_z = \gamma \quad (II.E.2.;7)$$

Ce terme ne dépend pas de l'état du réservoir.

Nous calculons maintenant l'état stationnaire de l'atome et nous notons  $\Pi_+(Z)$  et  $\Pi_-(Z)$  les populations des niveaux  $|+; Z\rangle$  et  $|-; Z\rangle$  correspondent à une quantification selon  $O_z$ .

$$S_z = \frac{\Pi_+(Z) + \Pi_-(Z)}{2} \quad (II.E.2; 8.a)$$

$$\Pi_+(Z) + \Pi_-(Z) = 1 \quad (II.E.2; 8.b)$$

L'équation d'évolution des populations s'écrit:

$$d_t \Pi_+(Z) = -\Gamma_{-+}(Z) \Pi_+(Z) + \Gamma_{+-}(Z) \Pi_-(Z) \quad (II.E.2; 9.a)$$

$$d_t \Pi_-(Z) = -\Gamma_{+-}(Z) \Pi_-(Z) + \Gamma_{-+}(Z) \Pi_+(Z) \quad (II.E.2; 9.b)$$

$\Gamma_{+-}(Z)$  et  $\Gamma_{-+}(Z)$  sont les taux de transition entre les deux niveaux  $|+; Z\rangle$  et  $|-; Z\rangle$ :

$$\Gamma_{+-}(Z) = \frac{\gamma_z - \eta_z}{2} \quad (II.E.2; 10.a)$$

$$\Gamma_{-+}(Z) = \frac{\gamma_z + \eta_z}{2} \quad (II.E.2; 10.b)$$

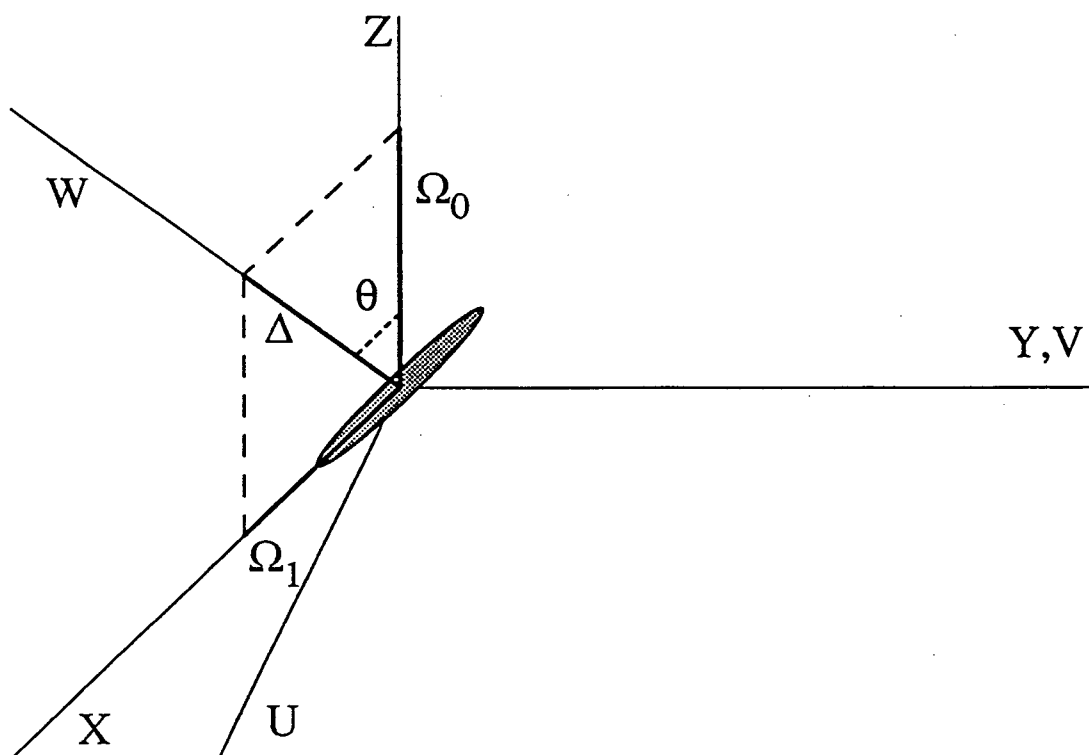
L'état stationnaire est ainsi:

$$\Pi_-(Z) = \frac{\Gamma_{-+}(Z)}{\Gamma_{-+}(Z) + \Gamma_{+-}(Z)} = \frac{\gamma_z + \eta_z}{2 \gamma_z} \quad (II.E.2; 11.a)$$

$$\Pi_+(Z) = \frac{\Gamma_{+-}(Z)}{\Gamma_{-+}(Z) + \Gamma_{+-}(Z)} = \frac{\gamma_z - \eta_z}{2 \gamma_z} \quad (II.E.2; 11.b)$$

On remarquera que, lorsque le réservoir est vide, les coefficients  $\gamma_z$  et  $\eta_z$  sont égaux, l'état stationnaire correspond donc à un état  $|-; Z\rangle$  contenant toute la population et un état  $|+; Z\rangle$  vide.

Figure II.10



### Le spin fictif

Le repère Ouvw est obtenu à partir du repère Oxyz par une rotation d'angle  $\theta$  telle que l'axe Ow soit aligné selon le champ magnétique  $\Delta$ . Les fluctuations du réservoir sont représentées par une ellipse du plan xOy.

### II.E.2.b. Equations de relaxation dans un champ pompe intense

Nous soumettons maintenant l'atome à un champ laser intense ce qui revient à placer le spin fictif dans un champ magnétique constant. Dans un premier temps nous supposons que ce champ est situé dans le plan  $xOz$ .

Nous notons  $\Delta$  la fréquence de précession autour de ce champ magnétique et  $2\theta$  l'angle qu'il fait avec l'axe  $Oz$ . Pour cette étude, il est préférable de se placer dans un repère  $Ouvw$  obtenu en faisant tourner le repère  $Oxyz$  autour de l'axe  $Oy$  d'un angle  $2\theta$  (voir figure II.10). Dans ce repère, les équations d'évolution libre sont:

$$d_t S_u = -\Delta S_v \quad (II.E.2; 12.a)$$

$$d_t S_v = \Delta S_u \quad (II.E.2; 12.b)$$

$$d_t S_w = 0 \quad (II.E.2; 12.c)$$

Afin d'obtenir les équations de relaxation nous allons procéder en plusieurs étapes.

Nous faisons tout d'abord l'approximation des vitesses de variation indépendantes: on suppose que les termes de relaxation sont les mêmes en l'absence ou en présence de champ pompe.

$$d_t S_\alpha = d_t S_\alpha |_{\text{libre}} + d_t S_\alpha |_{\text{relax}} \quad (II.E.2; 13)$$

Ecrivons maintenant les équations de relaxation dans le repère  $Ouvw$ . Nous utilisons pour cela les relations entre les opérateurs  $S_u S_v S_w$  et  $S_x S_y S_z$ :

$$S_u = \cos 2\theta S_x - \sin 2\theta S_z \quad (II.E.2; 14.a)$$

$$S_v = S_y \quad (II.E.2; 14.b)$$

$$S_w = \sin 2\theta S_x + \cos 2\theta S_z \quad (II.E.2; 14.c)$$

Ceci nous donne:

$$d_t S_u |_{\text{relax}} = -(\gamma_x \cos^2 2\theta + \gamma_z \sin^2 2\theta) S_u + \sin 2\theta \cos 2\theta (\gamma_z - \gamma_x) S_w + \frac{1}{2} \sin 2\theta \eta_z \quad (II.E.2; 15.a)$$

$$d_t S_v |_{\text{relax}} = -\gamma_y S_v \quad (II.E.2; 15.b)$$

$$d_t S_w |_{\text{relax}} = -(\gamma_x \sin^2 2\theta + \gamma_z \cos^2 2\theta) S_w - \frac{1}{2} \cos 2\theta \eta_z + \sin 2\theta \cos 2\theta (\gamma_z - \gamma_x) S_v \quad (II.E.2; 15.c)$$

Nous faisons ensuite l'approximation séculaire consistant à négliger les termes couplant des composantes évoluant à des fréquences différentes. Nous ne prenons pas en compte les termes couplant  $S_u$  et  $S_w$  car  $S_u$  précesse autour du champ à fréquence  $\Delta$  et  $S_w$  évolue à fréquence nulle. Les équations deviennent ainsi:

$$d_t S_u |_{\text{relax}} = -\gamma_u S_u \quad (II.E.2; 16.a)$$

$$d_t S_v |_{\text{relax}} = -\gamma_v S_v \quad (II.E.2; 16.b)$$

$$d_t S_w |_{\text{relax}} = -\gamma_w S_w - \frac{\eta_w}{2} \quad (II.E.2; 16.c)$$

où l'on a noté:

$$\gamma_u = \cos^2 2\theta \gamma_x + \sin^2 2\theta \gamma_z = \gamma_x + \sin^2 2\theta \gamma_y \quad (II.E.2; 17.a)$$

$$\gamma_v = \gamma_y \quad (II.E.2; 17.b)$$

$$\gamma_w = \sin^2 2\theta \gamma_x + \cos^2 2\theta \gamma_z = \gamma_x + \cos^2 2\theta \gamma_y \quad (II.E.2; 17.c)$$

$$\eta_w = \eta_z \cos 2\theta \quad (II.E.2; 17.d)$$

Ces formules peuvent s'interpréter de la manière suivante: nous savons que le taux de relaxation d'une composante du spin est proportionnel à la variance des fluctuations qui lui sont orthogonales. Le champ fluctuant, de composantes  $h_x$  et  $h_y$ , se projette sur les axes  $Ou$ ,  $Ov$  et  $OW$  de la manière suivante:

$$h_u = h_x \cos 2\theta \quad (II.E.2; 18.a)$$

$$h_v = h_y \quad (II.E.2; 18.b)$$

$$h_w = h_x \sin 2\theta \quad (II.E.2; 18.c)$$

Le taux de relaxation de  $S_u$  est, selon la règle que nous avons donnée, la variance du champ dans le plan  $Ovw$  :

$$\begin{aligned} \gamma_u &= \frac{1}{2} (\langle \Delta h_v^2 \rangle + \langle \Delta h_w^2 \rangle) \\ &= \frac{1}{2} (\langle \Delta h_y^2 \rangle + \langle \Delta h_x^2 \rangle \sin^2 2\theta) \\ &= \gamma_x + \sin^2 2\theta \gamma_y \end{aligned} \quad (II.E.2; 19.a)$$

Il ne faut pas oublier que  $\gamma_x$  correspond aux fluctuations de  $h_y$  et  $\gamma_y$  aux fluctuations selon  $h_x$  (II.E.2;5). On obtient de même:

$$\begin{aligned} \gamma_v &= \frac{1}{2} (\langle \Delta h_u^2 \rangle + \langle \Delta h_w^2 \rangle) \\ &= \gamma_y \end{aligned} \quad (II.E.2; 19.b)$$

$$\begin{aligned} \gamma_w &= \frac{1}{2} (\langle \Delta h_u^2 \rangle + \langle \Delta h_v^2 \rangle) \\ &= \gamma_x + \cos^2 2\theta \gamma_y \end{aligned} \quad (II.E.2; 19.c)$$

Le terme de réaction de rayonnement s'obtient de même en projetant sur l'axe  $OW$  un vecteur aligné selon  $Oz$  de norme  $\eta_x$ .

Une dernière étape consiste à prendre en compte la précession autour du champ  $\Delta$ . Les opérateurs  $S_u$  et  $S_v$  précessent alors rapidement autour de l'axe  $OW$  ce qui a pour effet de moyennner les taux de relaxation qu'ils subissent. Les équations finales sont ainsi:

$$d_t S_u = -\Delta S_v - \gamma_{uv} S_u \quad (II.E.2; 20.a)$$

$$d_t S_v = -\Delta S_u - \gamma_{uv} S_v \quad (II.E.2; 20.b)$$

$$d_t S_w = -\gamma_w S_{uv} - \frac{\eta_w}{2} \quad (II.E.2; 20.c)$$

$$\gamma_{uv} = \frac{\gamma_u + \gamma_v}{2} = \frac{1}{2} (\gamma_x + (1 + \sin^2 2\theta) \gamma_y) \quad (II.E.2; 21)$$

### II.E.2.c. Populations stationnaires

Lorsque l'atome est soumis à un champ intense, les états à considérer sont ceux de l'atome habillé. Pour le spin fictif, cela revient à considérer les populations  $\Pi_+(W)$  et  $\Pi_-(W)$  des états  $|+; W\rangle$  et  $|-; W\rangle$ :

$$S_w = \frac{\Pi_+(W) - \Pi_-(W)}{2} \quad (II.E.2; 21.a)$$

$$\Pi_+(W) + \Pi_-(W) = 1 \quad (II.E.2; 21.b)$$



Nous pouvons écrire leurs équations d'évolution à partir de celle de  $S_w$  (II.E.2;14.c):

$$\begin{aligned} d_t \Pi_+(W) &= d_t S_w \\ &= -\frac{1}{2}(\gamma_w + \eta_w)\Pi_+(W) + \frac{1}{2}(\gamma_w - \eta_w)\Pi_-(W) \end{aligned} \quad (II.E.2;22)$$

On définit ainsi deux taux de transition:

$$\Gamma_{-+}(W) = \frac{1}{2}(\gamma_w + \eta_w) \quad (II.E.2;23.a)$$

$$\Gamma_{+-}(W) = \frac{1}{2}(\gamma_w - \eta_w) \quad (II.E.2;23.b)$$

Nous allons maintenant exprimer ces taux à l'aide du facteur de compression  $\xi$  et de l'angle de rotation  $2\theta$  :

$$\begin{aligned} \Gamma_{-+}(W) &= \frac{1}{2}(\gamma_x + \cos^2 2\theta \gamma_y - \gamma) \\ &= \frac{\gamma}{4}(e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi} - 2) \\ &= \frac{\gamma}{4}(e^{-\xi} - \cos 2\theta e^{\xi})^2 \end{aligned} \quad (II.E.2;24.a)$$

$$\Gamma_{+-}(W) = \frac{\gamma}{4}(e^{\xi} - \cos 2\theta e^{-\xi})^2 \quad (II.E.2;24.b)$$

Les populations stationnaires sont ainsi:

$$\Pi_-(W) = \frac{(e^{-\xi} + \cos 2\theta e^{\xi})^2}{2(e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi})} \quad (II.E.2;25.a)$$

$$\Pi_+(W) = \frac{(e^{-\xi} - \cos 2\theta e^{\xi})^2}{2(e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi})} \quad (II.E.2;25.b)$$

On remarque alors que, lorsqu'il existe une relation précise entre  $\xi$  et  $\theta$ , l'un des taux de transition devient nul et toute la population se retrouve dans l'un des deux états. Cette relation est:

$$e^{-2\xi} = |\cos 2\theta| \quad (II.E.2;26)$$

Il faut remarquer que, quelque soit la compression des fluctuations du réservoir, il existe un taux de saturation de la transition pour lequel ce phénomène se produit.

Nous allons maintenant donner une interprétation géométrique de cette condition.

On remarque tout d'abord que, lorsque le réservoir est non comprimé ( $\xi = 0$ ) la situation où une population est piégée correspond à  $\theta = 0$  : dans ce cas l'atome n'est pas excité par un champ laser et l'état fondamental est stable. Dans cette situation, les fluctuations ont une distribution circulaire dans le plan  $xOy$ .

Donnons maintenant une interprétation géométrique du taux de relaxation  $\gamma_x$  et du terme de réaction de rayonnement  $\eta_x$  lorsque le réservoir est comprimé. Dans une telle situation, les fluctuations sont réparties dans une ellipse. Nous supposons que les axes de cette ellipse sont  $Ox$  et  $Oy$ . Nous notons  $R_x$  et  $R_y$  les dimensions des deux axes de l'ellipse. Pour le vide, ces deux axes sont égaux et nous les normalisons à 1:

$$R_x^0 = R_y^0 = 1 \quad (II.E.2;27)$$

Pour un état comprimé, ils prennent comme valeurs:

$$R_x = e^{\xi} \quad (II.E.2;28.a)$$

$$R_y = e^{-\xi} \quad (II.E.2;28.b)$$

Le taux de relaxation  $\gamma_z$  est proportionnel à la variance du champ qui lui est orthogonal soit:

$$\gamma_z = \frac{\gamma}{2} (R_x^2 + R_y^2) \quad (II.E.2; 29.a)$$

Le terme  $\eta_z$  de réaction de rayonnement est indépendant de la compression, comme l'aire de l'ellipse. Nous prenons donc comme expression de  $\eta_z$  :

$$\eta_z = \gamma R_x R_y \quad (II.E.2; 29.b)$$

Nous vérifions maintenant que ces définitions géométriques se généralisent au cas où l'atome est pompé. Nous allons établir les coefficients  $\gamma_w$  et  $\eta_w$  à l'aide des expressions géométriques et vérifier que c'est bien le résultat attendu.

Pour étudier la relaxation de  $S_w$  il faut étudier les fluctuations orthogonales à l'axe  $Ow$  et donc projeter l'ellipse sur le plan  $Ouv$  (voir figure II.10). Nous obtenons une nouvelle ellipse d'axes  $R_u$  et  $R_v$

$$R_u = \cos 2\theta R_x \quad (II.E.2; 30.a)$$

$$R_v = R_y \quad (II.E.2; 30.b)$$

Les coefficients  $\gamma_w$  et  $\eta_w$  sont alors:

$$\begin{aligned} \gamma_w &= \frac{\gamma}{2} (R_u^2 + R_v^2) \\ &= \frac{\gamma}{2} (\cos^2 2\theta R_x^2 + R_y^2) \end{aligned} \quad (II.E.2; 31.a)$$

$$\begin{aligned} \eta_w &= \gamma R_u R_v \\ &= \gamma \cos 2\theta \end{aligned} \quad (II.E.2; 31.b)$$

En remarquant que les taux  $\gamma_x$  et  $\gamma_y$  sont proportionnels respectivement aux fluctuations selon  $Oy$  et  $Ox$  nous vérifions que ce sont bien les expressions attendues.

Ainsi, lorsque l'on autorise le réservoir à être comprimé, cette définition géométrique de la relaxation des fluctuations nous permet de remarquer une analogie totale entre les situations où l'atome est excité et celles où il ne l'est pas.

Lorsque l'atome n'est pas excité, il existe une situation bien particulière lorsque l'ellipse est un cercle, ce qui correspond à un réservoir vide. On a alors une égalité entre  $\eta_w$  et  $\gamma_w$  et ainsi l'un des taux de transition s'annule et toute la population est piégée dans l'état fondamental.

Cette propriété peut se généraliser à une excitation quelconque: lorsque les fluctuations ont une distribution circulaire dans le plan  $Ouv$ , la situation est identique à celle que nous venons de décrire et toute la population est piégée dans un état. Cet état n'est plus l'état fondamental mais un état habillé du spin par exemple  $|-, w\rangle$ .

Ceci se produit lorsque l'ellipse du plan  $xOy$  correspondant à un état comprimé se projette sur un cercle dans le plan  $uOv$ . Ecrivons la condition sur  $\theta$  et  $\xi$  pour que cela se produise:

$$\begin{aligned} R_u &= R_v \\ |\cos 2\theta| R_x &= R_y \\ |\cos 2\theta| e^\xi &= e^{-\xi} \\ e^{-2\xi} &= |\cos 2\theta| \end{aligned} \quad (II.E.2; 32)$$

Il s'agit de la condition (II.E.2;20) que nous avons trouvée précédemment.

Cette similarité entre les situations correspondant à des excitations différentes permet ainsi de transférer la propriété de stabilité de l'état fondamental (en l'absence d'excitation et pour une relaxation dans le vide) à un état habillé.

#### II.E.2.d. Les taux de relaxation

Lorsque l'on excite l'atome, les taux de relaxation sont obtenus en faisant une rotation des axes. La conservation de la trace d'une application linéaire dans une rotation nous permet d'établir la propriété suivante:

$$\gamma_u + \gamma_v + \gamma_w = \gamma_x + \gamma_y + \gamma_z = 2 \gamma_z \quad (II.E.2; 33.a)$$

$$\gamma_w + 2 \gamma_{uv} = 2 \gamma_z \quad (II.E.2; 33.b)$$

Ainsi, la réduction éventuelle par la compression d'un coefficient de relaxation se traduira par une augmentation de l'autre (il faut noter que la valeur minimale de  $\gamma_x$  est obtenue pour le vide).

Le taux de relaxation des populations  $\gamma_{pop}$  est ici  $\gamma_w$  :

$$\begin{aligned} \gamma_w &= \gamma_x + \cos^2 2\theta \gamma_y \\ &= \frac{\gamma}{2} \{e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi}\} \end{aligned} \quad (II.E.2; 34)$$

A pompage fixé ( $\theta$  constant) ce taux de relaxation peut être réduit jusqu'à la valeur  $\gamma_w(\theta) = \frac{\gamma}{2} |\cos 2\theta|$  obtenue lorsque l'on se trouve dans la situation de piégeage de population.

Nous venons de voir que le taux de relaxation des populations peut être réduit de façon très importante. La règle de somme (II.E.2;28.b) que nous avons établie nous permet de voir que le taux de relaxation des cohérences  $\gamma_{uv}$  (qui correspond à  $\gamma_{coh}$ ) sera alors augmenté. En particulier, celui-ci est supérieur à  $\frac{\gamma_x}{2}$  lorsque le taux  $\gamma_w$  est réduit. L'expression de ce taux est:

$$\begin{aligned} \gamma_{uv} &= \frac{1}{2} (\gamma_x + (1 + \sin^2 2\theta) \gamma_y) \\ &= \frac{\gamma}{4} (e^{-2\xi} + (1 + \sin^2 2\theta) e^{2\xi}) \end{aligned} \quad (II.E.2; 35)$$

A taux de pompage fixé, sa valeur minimale est:

$$\gamma_{uv}(\theta) = \frac{\gamma}{2} \sqrt{1 + \sin^2 2\theta} \quad (II.E.2; 36)$$

Cette valeur est toujours supérieure à la valeur obtenue quand le réservoir est vide et l'excitation laser nulle. Il n'est donc pas possible de réduire le taux de relaxation de cohérences lorsque le spectre de bruit est blanc (réservoir plat et compression indépendante de la fréquence).

#### II.E.2.e. La relaxation en bruit tricolore symétrique

Nous avons jusqu'à présent considéré que le spectre des fluctuations auxquelles l'atome est soumis était plat. Nous nous intéressons maintenant au cas où le spectre est tricolore.

Dans ce cas, les équations de relaxation ont toujours la même forme:

$$d_t S_u = - \Delta S_v - \gamma_{uv} S_u \quad (II.E.2; 37.a)$$

$$d_t S_v = \Delta S_u - \gamma_{uv} S_v \quad (II.E.2; 37.b)$$

$$d_t S_w = - \gamma_w S_w - \eta_w / 2 \quad (II.E.2; 37.c)$$

Les coefficients de relaxation dépendent maintenant des spectres de bruit à fréquence nulle et à fréquence  $\Delta$ . Nous notons  $\gamma_x^0$  et  $\gamma_y^0$  les taux de relaxation de  $S_x$  et  $S_y$  correspondant à un spectre plat dont la compression est celle des fluctuations à fréquence nulle et  $\gamma_x^\Delta$ ,  $\gamma_y^\Delta$  le taux correspondant à un spectre plat à fréquence  $\Delta$ .

Ces taux dépendent de la densité spectrale et de la compression du réservoir aux fréquences correspondantes, nous supposons ici que la situation est symétrique et nous reviendrons plus tard sur le cas non symétrique.

$$\gamma_x^0 = \frac{1}{2} \gamma^0 e^{-2\xi^0} \quad (II.E.2; 38.a)$$

$$\gamma_y^0 = \frac{1}{2} \gamma^0 e^{2\xi^0} \quad (II.E.2; 38.b)$$

$$\gamma_x^\Delta = \frac{1}{2} \gamma^\Delta e^{-2\xi^\Delta} \quad (II.E.2; 38.c)$$

$$\gamma_y^\Delta = \frac{1}{2} \gamma^\Delta e^{2\xi^\Delta} \quad (II.E.2; 38.d)$$

Etudions tout d'abord le taux de relaxation  $\gamma_w$  des populations. La transition entre les états  $|+; W\rangle$  et  $| -; W\rangle$  se fait à une fréquence de Bohr  $\Delta$ . Les taux de relaxation qui interviennent dans  $\gamma_w$  correspondent donc à un bruit à fréquence  $\Delta$ . Nous avons déjà observé ce fait lorsque nous avons étudié le cas d'un atome en cavité. Le taux  $\gamma_w$  et le terme  $\eta_w$  sont ainsi:

$$\gamma_w = \gamma_w^\Delta + \cos^2 2\theta \gamma_y^\Delta \quad (II.E.2; 39.a)$$

$$\eta_w = \cos 2\theta \gamma^\Delta \quad (II.E.2; 39.b)$$

La relaxation des populations ne fait intervenir que le bruit à une seule fréquence. La nature tricolore de ce bruit n'affecte donc en rien la discussion que nous avons menée pour les populations stationnaires et le taux de relaxation des populations. On a ainsi les mêmes propriétés de piégeage de populations et de réduction des taux de relaxation.

Nous avons vu dans la section précédente, lors de l'étude de l'atome habillé, que le taux de relaxation des cohérences est la somme d'un terme "inélastique" et d'un terme "élastique". Le terme inélastique est égal à la moitié du taux de relaxation des populations et le terme élastique dépend des fluctuations à fréquence nulle:

$$\gamma_{uv} = \frac{1}{2} \gamma_w + \gamma'_{uv} \quad (II.E.2; 40)$$

L'expression de  $\gamma'_{uv}$  nous est donnée par l'équation (II.E.1;9.c) en prenant  $\varphi_0 = 2\varphi$ :

$$\begin{aligned} \gamma'_{uv} &= 2 J_0 \sin^2\theta \cos^2\theta [sh^2\xi_0 + ch^2\xi_0 + 2 sh\xi_0 ch\xi_0] \\ &= \frac{1}{2} J_0 \sin^2 2\theta (sh^2\xi_0 + ch^2\xi_0)^2 \\ &= \frac{1}{2} J_0 \sin^2 2\theta e^{2\xi_0} \\ &= \sin^2 2\theta \gamma_y^0 \end{aligned} \quad (II.E.2; 41)$$

On vérifie que lorsque le spectre est plat l'expression de  $\gamma_{uv}$  est l'expression que nous avons obtenue avec le spin fictif:

$$\begin{aligned} \gamma_{uv} &= \frac{1}{2} \gamma_w + \gamma'_w \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_x + \cos^2 2\theta \gamma_y) + \sin^2 2\theta \gamma_y \\ &= \frac{1}{2} (\gamma_x + (1 + \sin^2 2\theta) \gamma_y) \end{aligned} \quad (II.E.2; 42)$$

La situation est par contre totalement différente pour ce qui est des cohérences. En effet, la réduction du taux de relaxation des populations est rendue possible par une réduction de  $\gamma_x^\Delta$  (bruit selon  $O_y$  à fréquence

$\Delta$ ). Or le taux de relaxation parasite  $\gamma'_{uv}$  est proportionnel au coefficient  $\gamma_y^0$  (soit un bruit selon  $Ox$  à fréquence nulle). Pour un spectre plat, le produit de ces deux termes est constant et une diminution de l'un se traduit par une augmentation de l'autre. Par contre, pour un spectre tricolore, ceci n'est plus vrai. On dispose alors de deux moyens pour réduire le terme  $\gamma'_{uv}$ .

Le premier est celui que nous avons utilisé dans le chapitre précédent. En plaçant l'atome dans une cavité bien choisie il est possible de réduire la densité spectrale à fréquence nulle (et donc le coefficient  $\gamma^0$ ). L'atome devient alors insensible aux fluctuations à cette fréquence. En utilisant ce moyen il est ainsi possible, avec un spectre de compression indépendant de la fréquence, de réduire simultanément et autant que désiré les taux de relaxation des populations et des cohérences. On obtient dans ce cas à résonance:

$$\gamma_w = \gamma e^{-2\xi\Delta} \quad (II.E.2; 43.a)$$

$$\gamma'_{uv} = 0 \quad (II.E.2; 43.b)$$

Le second moyen est encore plus surprenant car il ne nécessite l'usage d'aucune cavité (la densité spectrale est alors plate). Il consiste à réduire le bruit selon  $Ox$  à fréquence nulle tout en réduisant le bruit selon  $Oy$  à fréquence  $\Delta$  ce qui revient à réduire  $\gamma_y^0$  et  $\gamma_x^\Delta$ . A résonance, l'expression des deux taux de relaxation est:

$$\gamma_w = \gamma e^{-2\xi\Delta} \quad (II.E.2; 44.a)$$

$$\gamma'_{uv} = \gamma e^{2\xi^0} \quad (II.E.2; 44.b)$$

Ainsi, pour  $\xi^\Delta \gg 1$  et  $\xi^0 \ll 1$  les deux taux deviennent très inférieurs à leur valeur dans le vide, la compression du réservoir permet ainsi de découpler artificiellement l'atome et le réservoir.

### II.E.3. Le spectre de fluorescence

Dans le chapitre précédent nous avons vu que la compression du rayonnement peut avoir des conséquences très importantes sur la relaxation atomique. Nous allons voir que cette propriété se traduit par une modification du spectre de fluorescence.

Nous allons considérer ici que l'atome est couplé à deux réservoirs: l'un est comprimé et responsable de la relaxation, l'autre de densité spectrale négligeable devant celle du premier, permet d'observer le spectre de fluorescence. On peut considérer ce second réservoir comme une "fenêtre" d'observation sur l'atome. Mais on négligera son effet sur la relaxation atomique.

#### II.E.3.a. Les deux réservoirs

Nous considérons que l'atome est couplé à deux réservoirs  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  par l'intermédiaire du Hamiltonien d'interaction  $H_I$  suivant:

$$H_I = - [A^+ S_+ + A^- S_-] - [B^+ S_+ + B^- S_-] \quad (II.E.3;1)$$

Le réservoir  $\mathcal{A}$  est celui que nous avons considéré jusqu'ici: sa densité spectrale est tricolore et il peut être dans un état comprimé. Le réservoir  $\mathcal{B}$  est un réservoir auxiliaire. En physique atomique il représente les modes latéraux d'une cavité, en électronique une seconde ligne de très forte impédance.

Nous supposons que le réservoir  $\mathcal{B}$  est normal et initialement vide et nous nous plaçons dans une situation où la densité spectrale  $J_B$  est négligeable devant celle du réservoir  $\mathcal{A}$  ce qui nous permet de négliger l'effet de  $\mathcal{B}$  sur la relaxation.

Nous étudions le spectre de fluorescence de l'atome dans le réservoir  $\mathcal{B}$ .

#### II.E.3.b. Le spectre de fluorescence

Nous avons calculé l'expression du spectre de fluorescence d'un atome dans un réservoir vide dans le § I.C.; l'expression que nous obtenons est:

$$I(\omega) = I_{el} \delta(\omega - \omega_p) + I_0 \mathcal{L}(\omega - \omega_p; \gamma_w) + I_+ \mathcal{L}(\omega - \omega_p - \Delta; \gamma_{uv}) + I_- \mathcal{L}(\omega - \omega_p + \Delta; \gamma_{uv}) \quad (II.E.3;2)$$

$\mathcal{L}(\omega - \omega_0; \gamma)$  est une lorentzienne normalisée centrée sur  $\omega_0$  et de largeur  $\gamma$  et les poids sont:

$$I_{el} = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) \sin^2 2\theta [\Pi_+(W) - \Pi_-(W)]^2 \quad (II.E.3;3.a)$$

$$I_0 = \gamma_b \sin^2 2\theta \Pi_+(W) \Pi_-(W) \quad (II.E.3;3.b)$$

$$I_+ = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) (1 + \cos 2\theta)^2 \Pi_+(W) \quad (II.E.3;3.c)$$

$$I_- = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) (1 - \cos 2\theta)^2 \Pi_-(W) \quad (II.E.3;3.d)$$

Reportons dans ces expressions les populations stationnaires que nous avons obtenues au § II.E.2. (eq. II.E.2;20)

$$I_{el} = \gamma_b \sin^2 2\theta \cos^2 2\theta \frac{1}{(e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi})^2} \quad (II.E.3;4.a)$$

$$I_0 = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) \sin^2 2\theta \left(\frac{e^{-2\xi} - \cos^2 2\theta e^{2\xi}}{e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi}}\right)^2 \quad (II.E.3;4.b)$$

$$I_+ = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) (1 + \cos 2\theta)^2 \frac{(e^{-\xi} - \cos 2\theta e^{\xi})^2}{2(e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi})} \quad (II.E.3;4.c)$$

$$I_- = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) (1 - \cos 2\theta)^2 \frac{(e^{-\xi} + \cos 2\theta e^{\xi})^2}{2(e^{-2\xi} + \cos^2 2\theta e^{2\xi})} \quad (II.E.3;4.d)$$

La figure II.11 présente les spectres obtenus pour les fluctuations du vide et des fluctuations comprimées de 50% .

### II.E.3.c. Etude du spectre. Intensités

Lorsque le réservoir  $\mathcal{A}$  est vide, le spectre de fluorescence est symétrique. Par contre, pour un réservoir comprimé, les poids des raies  $I_+$  et  $I_-$  sont en général différents. Nous allons maintenant discuter plus précisément les spectres obtenus dans différentes conditions:

- spectre à fort désaccord -

Nous supposons tout d'abord  $|\omega_0| \gg |\omega_1|$  et nous nous plaçons à désaccord positif soit  $\theta = 0$  et  $\Delta = \omega_0$ .

Les différents poids sont alors les suivants:

$$I_{el} = I_0 = I_- = 0 \quad (II.E.3;5.a)$$

$$I_+ = \gamma_b \frac{\text{sh}^2 \xi}{\text{ch} 2\xi} = \gamma_b \frac{N}{1 + 2N} \quad (II.E.3;5.b)$$

La raie  $I_+$  est une raie centrée sur la fréquence  $\omega_p + \omega_0$ , c'est-à-dire la fréquence de la transition atomique. Lorsque le réservoir  $\mathcal{A}$  est vidé, toutes les raies ont un poids tendant vers zéro lorsque le désaccord augmente. Lorsqu'il est comprimé, une raie reste cependant dans le spectre: il s'agit de la diffusion élastique des photons du réservoir  $\mathcal{A}$  dans le réservoir  $\mathcal{B}$ . Cette raie disparaît bien sûr si le réservoir  $\mathcal{A}$  est vide de photons ( $N = 0$ ).

- population piégée -

Un autre cas intéressant est celui où l'une des populations est piégée c'est-à-dire pour  $\cos 2\theta = e^{-2\xi}$ :

$$I_{el} = \left(\frac{\gamma_b}{4}\right) \sin^2 2\theta \quad (II.E.3;6.a)$$

$$I_0 = 0 \quad (II.E.3;6.b)$$

$$I_+ = 0 \quad (II.E.3;6.c)$$

$$I_- = \frac{\gamma_b}{4} (1 - \cos 2\theta)^2 \quad (II.E.3;6.d)$$

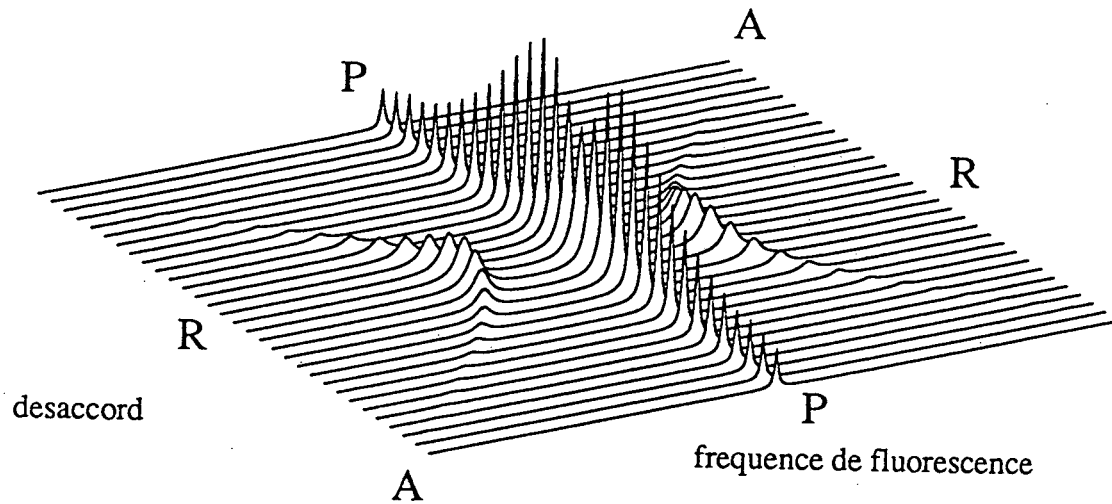
Le piégeage de population se traduit par la disparition totale de la raie centrée autour de  $\omega_p + \Delta$ . Le spectre ne comporte maintenant plus que deux raies. On remarquera aussi la disparition de la composante inélastique de la raie centrale.

### II.E.3.d. Etude des spectres. Largeurs

Les remarques que nous avons faites sur les taux de relaxation s'appliquent aux largeurs des raies ( $\gamma_\omega$  pour la raie centrale inélastique:  $\gamma_{uv}$  pour les raies latérales).

Un fait important est que les poids des raies ne dépendent pas de  $\gamma'_{uv}$ : ainsi, une réduction de ce taux permet une substantielle réduction de la largeur des raies latérales. Ainsi, à résonance, une compression judicieuse permet d'espérer une réduction des largeurs de toutes les raies sans aucune modification de poids.

Figure II.11a

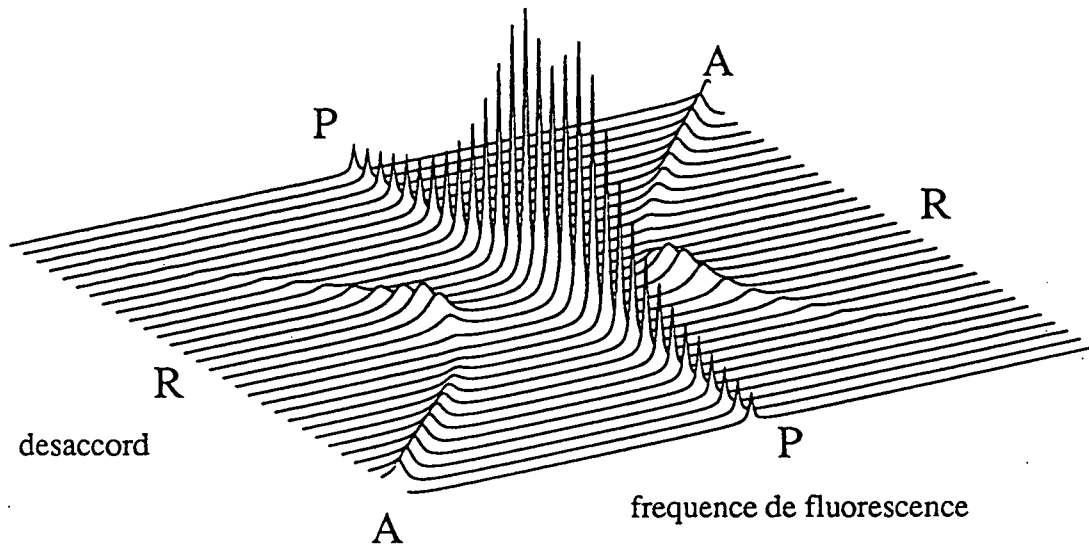


### Spectres de fluorescence pour un réservoir vide

La fréquence de Rabi  $\Omega$  est constante et prise comme unité de fréquence. Les spectres correspondent à des valeurs également espacées du désaccord  $\Omega_0$  de -3 à 3. Les lignes A-A, P-P et R-R correspondent respectivement à la fréquence atomique ( $\omega=\omega_{at}$ ), à la fluorescence à la fréquence pompe ( $\omega=\omega_p$ ) et à une excitation résonnante ( $\omega_{at}=\omega_p$ ).



Figure II.11b



### Spectres de fluorescence pour un réservoir comprimé de 50%

La fréquence de Rabi  $\Omega$  est constante et prise comme unité de fréquence. Les spectres correspondent à des valeurs également espacées du désaccord  $\Omega_0$  de -3 à 3. Les lignes A-A, P-P et R-R correspondent respectivement à la fréquence atomique ( $\omega = \omega_{at}$ ), à la fluorescence à la fréquence pompe ( $\omega = \omega_p$ ) et à une excitation résonnante ( $\omega_{at} = \omega_p$ ).

### III PRESENTATION DU FORMALISME GENERAL

Dans la troisième partie, nous revenons au problème général d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Nous présenterons une méthode formelle d'étude de ce problème. Cette méthode est fondée sur l'utilisation de projecteurs dans l'espace de Liouville.

Les projecteurs dans l'espace de Liouville ont été initialement introduits en physique statistique pour l'étude des phénomènes de transport [59,60]. Le but est dans ce cas d'obtenir des équations d'évolution de grandeurs macroscopiques en les séparant des degrés de liberté microscopiques. Ces techniques ont été employées aussi bien dans le point de vue de Schrödinger (équation pilote pour une matrice densité réduite) [61,62] que dans le point de vue de Heisenberg [63,62]. Dans ce second point de vue, l'utilisation des projecteurs permet de mettre les équations d'évolution des observables étudiées sous la forme d'équations de Langevin quantiques [59,64]. Dans ces équations d'évolution apparaissent des termes de relaxation (les mêmes que pour l'équation pilote) mais aussi des forces de Langevin représentant les fluctuations quantiques associées aux degrés de liberté éliminés [59,65].

Un autre outil que nous utilisons est la résolvante. La résolvante est principalement utilisée dans l'espace de Hilbert associé au système [34]. Les pôles de cet opérateur correspondent aux énergies propres du Hamiltonien. Des techniques de projecteurs (qui projettent sur des sous espaces de l'espace des états) peuvent être employés pour résoudre certains problèmes. Cette méthode permet par exemple une étude très simple de la désexcitation d'un état discret couplé à un continuum [34].

Comme nous allons le voir, la conjugaison des méthodes de projecteurs et de la résolvante appliquées à l'espace de Liouville associée au système quantique permet de mettre au point une méthode extrêmement générale et puissante.

Après avoir présenté le modèle d'un système non linéaire couplé à un continuum harmonique monodimensionnel (partie I), nous nous sommes attachés à l'étude d'un cas particulier : l'atome à deux niveaux. Ceci nous a permis de voir comment une dépendance en fréquence du spectre du réservoir ou une compression des fluctuations incidentes peut affecter le comportement d'un système non linéaire. Lors de cette étude, nous avons été amenés à faire diverses approximations ou à procéder de manière heuristique, par exemple quand nous avons séparé l'évolution du système à deux niveaux en une partie dissipation et une partie fluctuation.

Nous allons maintenant reprendre l'étude de l'évolution d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique de manière plus générale. Le but de cette étude est multiple. Il s'agit tout d'abord de justifier les différentes approximations de la partie II et de discuter précisément le traitement perturbatif. Il s'agit ensuite de généraliser et d'étendre les résultats que nous avons obtenus. Il serait en effet fastidieux d'avoir à refaire tous les raisonnements et calculs pour chaque nouveau système étudié. Nous essayerons donc de mettre les résultats sous une forme directement utilisable. Il s'agit enfin de donner un cadre qui permette d'aborder de nouveaux problèmes tels que le calcul de fonctions de corrélation d'ordre plus élevées ou de relaxation colorée.

La méthode que nous allons présenter est basée sur l'utilisation de l'espace de Liouville, de la résolvante et de projecteurs. Le choix de ces outils se justifie par les remarques suivantes. Dans les parties précédentes, nous avons pu remarquer que la représentation de Heisenberg se prêtait bien à l'étude des problèmes d'entrée-sortie d'où le choix de se placer dans l'espace de Liouville. Toutes les approximations faites à un moment où à un autre correspondent, comme nous allons le voir, à un traitement perturbatif de l'interaction entre le système et le réservoir. Alors que dans l'espace des temps, le traitement perturbatif de l'interaction fait apparaître des équations integro-différentielles, dans l'espace des fréquences, toutes les équations d'évolution prennent une forme algébrique. Un traitement perturbatif peut alors être mené de façon naturelle par l'utilisation de la résolvante. De plus, l'utilisation de projecteurs permet de résoudre de manière non ambiguë le problème délicat de la séparation entre fluctuations et dissipation.

Dans un premier temps, nous présentons les outils que nous utilisons dans toute cette partie (§ III.A). Nous commençons par l'espace de Liouville. Nous insistons en particulier sur le fait que la structure des équations d'évolution en point de vue de Heisenberg est la même qu'en point de vue de Schrödinger. Nous introduisons ensuite la résolvante dans l'espace de Liouville et nous montrons que cette méthode permet de traiter sur un pied d'égalité les propagateurs avancés et retardés. Pour terminer ce chapitre de présentation,

nous étudions les projecteurs dans l'espace de Liouville et nous décrivons des expressions donnant différentes projections de la résolvante.

Dans le chapitre suivant (§ III.B), nous en venons au modèle d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Nous rappelons ce modèle et nous précisons quelques hypothèses nécessaires à l'utilisation des projecteurs. Nous construisons alors les deux projecteurs que nous utiliserons dans toute la suite et nous établissons les propriétés propres à ces projecteurs. Nous revenons ensuite sur les hypothèses que nous avons faites afin de les justifier et de les discuter.

Nous passons ensuite à l'étude de la relaxation du système non linéaire (§ III.C). Dans un premier temps, nous calculons l'opérateur relaxation et nous en donnons une expression explicite faisant intervenir les fonctions de corrélation des fluctuations entrantes. Nous montrons ensuite comment obtenir les équations d'évolution pour les valeurs moyennes d'opérateurs atomiques.

L'utilisation des projecteurs nous permet une dérivation simple du théorème de regression quantique. Pour déterminer ce chapitre, nous donnons les différents résultats sous une forme telle qu'ils soient utilisables directement lors de l'étude d'un problème particulier.

Nous en venons ensuite à l'étude des fluctuations (§ III.D). L'utilisation des projecteurs nous permet de mettre les équations d'évolution des opérateurs du système non linéaire sous la forme d'équations de Langevin quantiques. Nous montrons alors que dans le cadre d'une approche perturbative au second ordre, les forces de Langevin s'identifient aux champs libres entrant et sortant. La différence entre le champ sortant et le champ entrant est liée à la partie dissipative de la relaxation. Nous établissons ensuite les résultats de la "réponse linéaire généralisée" qui nous permettent d'obtenir les corrélations entre les fluctuations du système non linéaire et celles du réservoir entrant.

Un dernier chapitre est consacré à la discussion des approximations (§ III.E). Nous montrons que les différentes approximations que nous avons faites dans les deux chapitres précédents se ramènent à une même hypothèse que nous discutons. Nous montrons ensuite que les projecteurs permettent d'obtenir un développement perturbatif à des ordres supérieurs.

### III.A. Présentation générale du formalisme

Dans ce chapitre, nous présentons les propriétés générales du formalisme que nous utilisons: l'espace de Liouville, la résolvante et les projecteurs. Nous évoquerons le cas d'un système couplé à un réservoir sans toutefois faire référence au modèle particulier que nous étudions par la suite.

Nous débutons cette présentation par l'espace de Liouville et les différents objets qui lui sont reliés ; nous introduisons à cette occasion une notation de Dirac pour les opérateurs qui nous sera utile pour présenter certains résultats.

Nous passons ensuite à une étude de l'évolution qui nous permettra de présenter les opérateurs d'évolution et les propagateurs, ce qui nous conduira naturellement à l'expression de la résolvante.

Nous terminons ce chapitre par l'étude de projecteurs. En cherchant leur effet sur la résolvante nous introduirons la notion de résolvante réduite à l'intérieur de l'espace d'un sous-système.

#### III.A.1. L'espace de Liouville

Nous présentons successivement l'espace des états, l'espace de Liouville et l'espace des opérateurs qui agissent sur l'espace de Liouville. Dans chaque cas nous fixons les notations et nous mettons l'accent sur les propriétés qui nous seront utiles par la suite. Nous étudions en particulier les structures qui apparaissent lorsque le système est composé de deux sous-systèmes. Nous terminons cette section par une présentation d'une notation de Dirac pour l'espace de Liouville et l'utilisation d'une base de cet espace.

##### III.A.1.a. L'espace des états

La structure de base associée à un système quantique  $\mathcal{S}$  est un espace de Hilbert appelé espace des états. Les éléments de cet espace (les "kets") sont notés  $|\varphi\rangle$ . Les formes linéaires agissant sur cet espace (les "bras") sont notés  $\langle\psi|$ . La forme linéaire qui correspond au produit scalaire par le ket  $|\varphi\rangle$  est noté  $\langle\varphi|$ .

Lorsque le système est composé d'un sous-système  $\mathcal{S}$  et d'un réservoir  $\mathcal{R}$ , l'espace des états est le produit tensoriel des espaces des états de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{R}$ . Une base de cet espace peut être obtenue à l'aide d'une base  $\{|\varphi_\alpha\rangle_{\mathcal{S}}\}$  de l'espace des états  $\mathcal{S}$  et d'une base  $\{|\psi_\beta\rangle_{\mathcal{R}}\}$  de l'espace des états de  $\mathcal{R}$ . Elle est formée des états  $\{|\varphi_\alpha\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\psi_\beta\rangle_{\mathcal{R}}\}$ .

##### III.A.1.b. L'espace de Liouville

L'espace des opérateurs linéaires agissant sur l'espace des états est appelé espace de Liouville. Il est muni d'une structure d'algèbre: c'est un espace vectoriel possédant une loi de composition correspondant au produit de deux opérateurs définie par:

$$(AB)|\varphi\rangle = A(B|\varphi\rangle) \quad (III.A.1;1)$$

Nous notons  $\mathbb{1}$  l'élément unité de cette algèbre.

Il est souvent utile de disposer d'une base de cet espace. La plus courante est obtenue à partir d'une base  $\{|\varphi_\alpha\rangle\}$  de l'espace des états. Elle est formée par les opérateurs  $e_{\alpha\beta}$  définis par

$$e_{\alpha\beta} = |\varphi_\alpha\rangle\langle\varphi_\beta| \quad (III.A.1;2)$$

Un exemple d'opérateur de l'espace de Liouville est le Hamiltonien  $H$  du système. En représentation de Schrödinger, l'équation d'évolution d'un état  $|\varphi\rangle$  est obtenue à partir de cet opérateur de la manière suivante:

$$d_t |\varphi(t)\rangle = -iH|\varphi(t)\rangle \quad (III.A.1;3)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre qu'il est possible d'intégrer formellement à partir d'un instant  $t_0$  :

$$|\varphi(t)\rangle = \exp\{-iH(t-t_0)\}|\varphi(t_0)\rangle \quad (III.A.1;4)$$

On peut alors introduire un autre opérateur, l'opérateur d'évolution  $U(\tau)$  qui correspond à une évolution selon  $H$  pendant un temps  $\tau$  :

$$|\varphi(t + \tau)\rangle = U(\tau) |\varphi(t)\rangle \quad (III.A.1;5.a)$$

$$U(\tau) = \exp \{-i H \tau\} \quad (III.A.1;5.b)$$

On peut enfin définir des projecteurs. Le plus simple correspond à une projection sur un état  $|\varphi_0\rangle$  :

$$P_\varphi = |\varphi_0\rangle\langle\varphi_0| \quad (III.A.1;6)$$

Lorsque le système est composé d'un sous-système  $\mathcal{S}$ , et d'un réservoir  $\mathcal{R}$  l'espace de Liouville est le produit tensoriel des espaces de Liouville de  $\mathcal{S}$  et de  $\mathcal{R}$ . Nous utiliserons très souvent des opérateurs ayant la forme suivante:

$$A = a_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \quad (III.A.1;7.a)$$

$$B = \mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes b_{\mathcal{R}} \quad (III.A.1;7.b)$$

Leur action sur un état de la forme  $|\varphi\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}}$  est la suivante:

$$A(|\varphi\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}}) = (a_{\mathcal{S}} |\varphi\rangle_{\mathcal{S}}) \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}} \quad (III.A.1;8.a)$$

$$B(|\varphi\rangle_{\mathcal{S}} \otimes |\psi\rangle_{\mathcal{R}}) = |\varphi\rangle_{\mathcal{S}} \otimes (b_{\mathcal{R}} |\psi\rangle_{\mathcal{R}}) \quad (III.A.1;8.b)$$

Ces opérateurs commutent entre eux. Pour simplifier les notation, nous dirons que  $A$  est un opérateur du système et  $B$  un opérateur du réservoir. Pour un opérateur  $C$  de la forme suivante:

$$C = a_{\mathcal{S}} \otimes b_{\mathcal{R}} = (a_{\mathcal{S}} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}})(\mathbb{1}_{\mathcal{S}} \otimes b_{\mathcal{R}}) \quad (III.A.1;9)$$

nous parlerons du produit d'un opérateur  $A$  du système et d'un opérateur  $B$  du réservoir.

### III.A.1.c. Espace des opérateurs agissant sur l'espace de Liouville

La représentation de Schrödinger se prête mal aux calculs de relaxation. Par contre, la représentation de Heisenberg est particulièrement bien adaptée pour l'étude de ces problèmes. En représentation de Heisenberg, ce ne sont pas les états, mais les opérateurs qui évoluent. Leur évolution est régie par l'équation de Heisenberg:

$$d_t A(t) = i [H; A(t)] \quad (III.A.1;10)$$

Cette équation est une équation différentielle linéaire homogène du premier ordre semblable en tous points à l'équation de Schrödinger (III.A.1;3). Ainsi, de même que pour étudier l'évolution des états nous avons eu besoin d'introduire l'espace de Liouville constitué des opérateurs agissant sur l'espace des états, nous allons maintenant, pour étudier l'évolution des opérateurs, présenter l'espace des opérateurs agissant sur l'espace de Liouville. Puisque l'espace de Liouville est une algèbre, les structures obtenues sont nettement plus riches dans le second cas, en particulier parce que l'évolution en représentation de Heisenberg préserve non seulement la structure d'espace vectoriel, mais aussi celle d'algèbre.

A partir d'un opérateur  $O$  de l'espace de Liouville, il est possible de définir un opérateur  $\hat{O}$  agissant sur l'espace de Liouville de la manière suivante:

$$\hat{O}A = [O; A] \quad (III.A.1;11)$$

L'équation de Heisenberg s'écrit avec cette notation:

$$d_t A(t) = i \hat{H} A(t) \quad (III.A.1;12)$$

Nous utilisons par la suite l'opérateur de Liouville  $\mathcal{L}$  défini par:

$$\mathcal{L} = -\hat{H} \quad (III.A.1;13)$$

Avec cet opérateur, l'équation de Heisenberg s'écrit:

$$d_t A(t) = -i \mathcal{L} A(t) \quad (III.A.1;14)$$

Comme nous l'avons fait en représentation de Schrödinger, nous pouvons introduire un opérateur d'évolution  $\mathcal{U}(\tau)$  correspondant à une évolution pendant le temps  $\tau$  :

$$A(t + \tau) = \mathcal{U}(\tau) A(t) \quad (III.A.1; 15.a)$$

$$\mathcal{U}(\tau) = \exp\{-i \mathcal{L} \tau\} \quad (III.A.1; 15.b)$$

Lorsque le système est composé d'un sous-système et d'un réservoir, on peut souvent décomposer le Hamiltonien  $H$  comme somme de trois termes:

$$H = H_S + H_{\mathcal{R}} + H_I \quad (III.A.1;16)$$

où  $H_S$  est un opérateur du système (correspondant à une évolution libre du système),  $H_{\mathcal{R}}$  un opérateur du réservoir (correspondant à une évolution libre) et  $H_I$  un Hamiltonien d'interaction.

Il est possible d'associer un opérateur de Liouville à chacun de ces Hamiltoniens:

$$\mathcal{L}_S = -\hat{H}_S \quad (III.A.1; 17.a)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = -\hat{H}_{\mathcal{R}} \quad (III.A.1; 17.b)$$

$$\mathcal{L}_I = -\hat{H}_I \quad (III.A.1; 17.c)$$

Ces opérateurs de Liouville ont alors les propriétés suivantes: pour  $S$  opérateur du système et  $R$  opérateur du réservoir:

$$\mathcal{L}_S R = -[H_S; R] = 0 \quad (III.A.1; 18.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S(SR) &= -[H_S; SR] \\ &= -[H_S; S]R = (\mathcal{L}_S S)R \end{aligned} \quad (III.A.1; 18.b)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} S = 0 \quad (III.A.1; 18.c)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}}(SR) = S(\mathcal{L}_{\mathcal{R}} R) \quad (III.A.1; 18.d)$$

#### - Notations de Dirac -

Pour écrire les résultats, il sera utile d'utiliser une notation de Dirac.

Nous appelons pour cela les éléments de l'espace de Liouville superkets et nous notons  $|A\rangle\rangle$  le superket correspondant à l'opérateur  $A$ . Les formes linéaires agissant sur l'espace de Liouville seront appelées superbras et notées  $\langle\langle \chi |$ . La fonction associant à un opérateur  $A$  sa valeur moyenne  $\langle A \rangle$  est une forme linéaire, pour un état décrit par une matrice densité  $\rho$ , nous noterons  $\langle\langle \rho |$  le superbra correspondant :

$$\ll \rho | A \gg = \langle A \rangle = Tr \{ \rho A \} \quad (III.A.1;19)$$

Lorsque le système est constitué d'un sous-système  $S$  et d'un réservoir  $\mathcal{R}$  et que ceux-ci ne sont pas corrélés, la matrice densité  $\rho$  est le produit tensoriel d'une matrice densité  $\sigma_{\mathcal{R}}$  du réservoir et  $\sigma_S$  du système.

Le superbra correspondant est alors le produit tensoriel de deux superbra:

$$\ll \rho | = \ll \sigma_S | \otimes \ll \sigma_{\mathcal{R}} | \quad (III.A.1;20)$$

Il est possible dans ce cas de définir des traces partielles sur  $S$  ou sur  $\mathcal{R}$ . Pour le produit d'un opérateur du système  $S$  par un opérateur du réservoir  $R$  celles-ci s'écrivent:

$$Tr_S \{ \sigma_S SR \} = \ll \sigma_S | S \gg | R \gg \quad (III.A.1;21.a)$$

$$Tr_S \{ \sigma_{\mathcal{R}} SR \} = | S \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} | R \gg \quad (III.A.1;21.b)$$

- Projecteurs -

A l'aide de la matrice densité  $\sigma_{\mathcal{R}}$ , il est possible de construire deux projecteurs supplémentaires,  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Nous définissons  $\mathcal{P}$  par son effet sur un opérateur

$$\mathcal{P}O = Tr_{\mathcal{R}} \{ \sigma_{\mathcal{R}} O \} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \quad (III.A.1;22.a)$$

Soit, en notation de Dirac:

$$\mathcal{P} = \mathbb{1}_S \otimes | \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} | \quad (III.A.1;22.b)$$

Vérifions que  $\mathcal{P}$  est un projecteur:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^2 &= (\mathbb{1}_S \otimes | \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} |)(\mathbb{1}_S \otimes | \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} |) \\ &= \mathbb{1}_S \otimes | \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} | \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} | \\ &= \mathbb{1}_S \otimes | \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \gg \ll \sigma_{\mathcal{R}} | \\ &= \mathcal{P} \end{aligned} \quad (III.A.1;23)$$

Pour  $R$  opérateur du réservoir ( $R = \mathbb{1}_S \otimes r$ )

$$\langle R \rangle = Tr_{\mathcal{R}} \{ \sigma_{\mathcal{R}} r \} \quad (III.A.1;24.a)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}R &= Tr_{\mathcal{R}} \{ \sigma_{\mathcal{R}} R \} \\ &= \mathbb{1}_S \otimes Tr_{\mathcal{R}} \{ \sigma_{\mathcal{R}} r \} \end{aligned} \quad (III.A.1;24.b)$$

Nous noterons donc:

$$\mathcal{P}R = \langle R \rangle \quad (III.A.1;25)$$

Avec cette convention, pour  $S$  opérateur du système:

$$\mathcal{P}(SR) = \langle R \rangle S \quad (III.A.1;26)$$

Le projecteur  $\mathcal{P}$  projette ainsi sur l'espace de Liouville du système et laisse invariant les opérateurs du système.

Définissons maintenant  $Q$  par:

$$Q = \mathbf{1} - \mathcal{P} \quad (III.A.1;27)$$

$Q$  est un projecteur, en effet:

$$\begin{aligned} Q^2 &= (\mathbf{1} - \mathcal{P})(\mathbf{1} - \mathcal{P}) \\ &= \mathbf{1} - 2\mathcal{P} + \mathcal{P}^2 \\ &= \mathbf{1} - \mathcal{P} \\ &= Q \end{aligned} \quad (III.A.1;28)$$

$\mathcal{P}$  et  $Q$  sont supplémentaires:

$$\begin{aligned} \mathcal{P} + Q &= \mathbf{1} & (III.A.1;29.a) \\ \mathcal{P} Q &= \mathcal{P}(1 - \mathcal{P}) = \mathcal{P} - \mathcal{P}^2 = 0 & (III.A.1;29.b) \\ Q \mathcal{P} &= 0 & (III.A.1;29.c) \end{aligned}$$

#### III.A.1.d. Notation tensorielle

Nous présentons une notation tensorielle qui nous permettra de mettre sous une forme directement utilisable les résultats que nous obtiendrons. Pour cela, nous nous fixons une base de l'espace de Liouville et nous exprimons les différents objets que nous avons rencontrés dans celle-ci.

Dans notre étude, l'espace de Liouville concerné sera celui du système non-linéaire.

- choix d'une base -

Les expressions que nous donnons sont valables quelle que soit la base choisie à condition qu'elle soit composée d'opérateurs propres de l'opérateur de Liouville correspondant à l'évolution libre du système.

Une base particulièrement bien adaptée à notre problème est constituée des opérateurs  $e_i$  obtenus à l'aide d'une base d'états propres du Hamiltonien  $H_S$ .

Cette base est composée des kets  $|\varphi_\mu\rangle$  d'énergie  $\omega_\mu$  :

$$H_S |\varphi_\mu\rangle = \omega_\mu |\varphi_\mu\rangle \quad (III.A.1;31)$$

L'opérateur  $e_i$  est défini par:

$$e_i = |\varphi_\mu\rangle\langle\varphi_\nu| \quad (III.A.1;32)$$

L'indice  $i$  correspond au couple  $(\mu, \nu)$ ; il faudra cependant dans les calculs le considérer comme un indice à une dimension: si la dimension de l'espace des états est  $n$ , l'indice  $i$  varie de 1 à  $n^2$ . On pourra l'associer à  $(\mu, \nu)$  par exemple par la relation  $i = \mu + (n-1)\nu$ .

Tout opérateur  $Y$  se décompose sur la base des  $\{e_i\}$ , nous notons ces composantes  $y^i$  :

$$\begin{aligned} Y &= \sum_i y^i e_i \\ &= y^i e_i \end{aligned} \quad (III.A.1;33)$$

Nous adoptons par la suite la convention de sommation d'Einstein sur les indices répétés. Nous utilisons d'autre part des indices covariants et contravariants, afin de préciser le comportement des différents objets lors d'un changement de base.



Nous introduisons maintenant le tenseur  $c_{ij}^k$  intervenant dans la décomposition du produit de deux opérateurs:

$$e_i e_j = c_{ij}^k e_k \quad (III.A.1;34)$$

Nous pouvons calculer à partir de  $c$  les composantes du produit de deux opérateurs  $x$  et  $y$  :

$$z^k = c_{ij}^k x^i y^j \quad (III.A.1;35)$$

Un opérateur  $\mathcal{M}$  agissant sur l'espace de Liouville est représenté par un tenseur à deux indices  $\mathcal{M}_i^j$  défini par:

$$\mathcal{M} e_i = \mathcal{M}_i^j e_j \quad (III.A.1;36)$$

Nous donnons un exemple, l'opérateur de Liouville  $\mathcal{L}_S$ . Son tenseur est particulièrement simple car nous avons choisi une base particulière:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S e_i &= -i [H_S; |\varphi_\mu\rangle\langle\varphi_\nu|] \\ &= (\omega_\mu - \omega_\nu) e_i \\ &= \omega_i e_i \end{aligned} \quad (III.A.1;37.a)$$

Le tenseur est alors diagonal:

$$\mathcal{L}_S^j_i = (\omega_i) \delta_i^j \quad (III.A.1;37.b)$$

où  $\delta_i^j$  est le tenseur de Kroneker.

A un état du système, on associe un tenseur à un indice correspondant à sa matrice densité et défini par:

$$\rho_i = \langle e_i | \quad (III.A.1;38)$$

La valeur moyenne d'un opérateur est ainsi:

$$\langle X \rangle = x^i \rho_i \quad (III.A.1;39)$$

### III.A.2. Evolution - Propagateurs - Résolvante

Comme nous l'avons vu, l'équation d'évolution en représentation de Heisenberg est en tout points semblable à l'équation d'évolution en représentation de Schrödinger. Les outils utilisés dans ce dernier cas se généralisent sans aucun problème pour la situation qui nous intéresse. Nous les présentons ici.

#### III.A.2.a. Opérateur d'évolution - Propagateurs

Dans la section précédente, nous avons présenté l'équation d'évolution en représentation de Heisenberg et l'opérateur d'évolution

$$d_t X(t) = -i \mathcal{L} X(t) \quad (III.A.2; 1.a)$$

$$U(\tau) = \exp \{-i \mathcal{L} \tau\} \quad (III.A.2; 1.b)$$

Les propagateurs  $U^+(\tau)$  et  $U^-(\tau)$  sont les deux solutions de l'équation différentielle suivante respectivement nulles pour les temps  $\tau$  négatifs et positifs:

$$d_\tau U^\alpha(\tau) = -i \mathcal{L} U^\alpha(\tau) + \delta(\tau) \mathbb{1} \quad (III.A.2; 2)$$

Ces propagateurs peuvent s'exprimer à l'aide de l'opérateur d'évolution:

$$U^+(\tau) = U(\tau) \theta(\tau) \quad (III.A.2; 3.a)$$

$$U^-(\tau) = -U(\tau) \theta(-\tau) \quad (III.A.2; 3.b)$$

$$U(\tau) = U^+(\tau) - U^-(\tau) \quad (III.A.2; 3.c)$$

Nous calculons maintenant les transformées de Fourier de ces opérateurs que nous notons  $\mathcal{G}^+(\omega)$  et  $\mathcal{G}^-(\omega)$  :

$$\mathcal{G}^\pm(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\tau e^{i\omega\tau} U^\pm(\tau) \quad (III.A.2; 4)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^+(\omega) &= \int_0^{\infty} d\tau \exp\{(i\omega - i\mathcal{L})\tau\} \\ &= i \frac{1}{\omega + i\epsilon - \mathcal{L}} \end{aligned} \quad (III.A.2; 5.a)$$

$$\mathcal{G}^-(\omega) = i \frac{1}{\omega - i\epsilon - \mathcal{L}} \quad (III.A.2; 5.b)$$

#### III.A.2.b. Résolvante

Les opérateurs  $\mathcal{G}^+$  et  $\mathcal{G}^-$  peuvent s'exprimer à partir de la résolvante de l'opérateur de Liouville. La résolvante  $\mathcal{G}(z)$  est une fonction d'une variable complexe  $z$  définie pour les valeurs de  $z$  n'appartenant pas au spectre de  $\mathcal{L}$  :

$$\mathcal{G}(z) = (z - \mathcal{L})^{-1} \quad (III.A.2; 6)$$

Les opérateurs  $\mathcal{G}^+(\omega)$  et  $\mathcal{G}^-(\omega)$  sont ainsi:

$$\mathcal{G}^+(\omega) = i \mathcal{G}(\omega + i\epsilon) \quad (III.A.2; 7.a)$$

$$\mathcal{G}^-(\omega) = i \mathcal{G}(\omega - i\epsilon) \quad (III.A.2; 7.b)$$

### III.A.3. Projecteurs

Nous donnons ici les expressions des projections de la résolvante par les deux projecteurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$ . Ce sont des relations générales qui ne dépendent pas des projecteurs choisis.

Nous nous plaçons ensuite dans le cas où  $\mathcal{P}$  projette sur l'espace des opérateurs du sous-système  $\mathcal{S}$ . Nous montrons alors qu'il est possible de définir une résolvante réduite correspondant à l'évolution de ce sous-système et nous donnons les expressions obtenues sous forme tensorielle en nous plaçant dans une base de l'espace de Liouville du sous-système.

#### III.A.3.a. Relations générales

Nous donnons tout d'abord les différentes égalités qui nous intéressent, nous les démontrons ensuite.

- \*  $\mathcal{G}(z)$  est la résolvante définie par l'équation (III.A.2;6)
- \*  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  sont deux projecteurs supplémentaires
- \*  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)$  est l'opérateur défini par:

$$\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z) = \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}} \quad (III.A.3;1)$$

Dans les équations que nous donnons, nous n'hésitons pas à utiliser de manière redondante certains projecteurs afin de mettre clairement en évidence les différents facteurs de chaque produit.

Les relations sont les suivantes:

$$\mathcal{G}(z) = \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z) + \mathcal{G}(z).\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z) \quad (III.A.3;2)$$

$$\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q} = \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} \quad (III.A.3;3.a)$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} \quad (III.A.3;3.b)$$

$$z\mathcal{G}(z) = 1 + \mathcal{G}(z).\mathcal{P}\mathcal{L} + \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z).\mathcal{Q}\mathcal{L} + \mathcal{G}(z).\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}.\mathcal{L} \quad (III.A.3;4)$$

$$z\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{P} \quad (III.A.3;5)$$

On introduit l'opérateur  $\mathcal{R}(z)$  :

$$\mathcal{R}(z) = \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{P} \quad (III.A.3;6)$$

Les relations suivantes sont alors vérifiées:

$$z\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P} \quad (III.A.3;7)$$

$$\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{P} \frac{1}{z - \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P}} \mathcal{P} \quad (III.A.3;8)$$

Nous donnons maintenant les démonstrations de ces expressions:

- \* Equation (III.A.3;2)

$$\begin{aligned}
\mathcal{G}(z) &= \frac{1}{z - \mathcal{L}} \\
&= \frac{1}{z - \mathcal{L}} (z - \mathcal{Q}\mathcal{L}) \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}} \\
&= \frac{1}{z - \mathcal{L}} (z - \mathcal{L} + \mathcal{P}\mathcal{L}) \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}} \\
&= \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}} + \frac{1}{z - \mathcal{L}} \mathcal{P}\mathcal{L} \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}}
\end{aligned} \tag{III.A.3;9}$$

\* Equation (III.A.3;3.a)

$$\begin{aligned}
z\mathcal{P}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} &= \mathcal{P} z \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}} \mathcal{Q} \\
&= \mathcal{P}(z - \mathcal{Q}\mathcal{L}) \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}} \mathcal{Q} \\
&= \mathcal{P}\mathcal{Q} = 0
\end{aligned} \tag{III.A.3;10}$$

On multiplie alors l'équation (III.A.3;2) à gauche par  $\mathcal{P}$  et à droite par  $\mathcal{Q}$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q} &= \mathcal{P}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{G}(z) \mathcal{P}\mathcal{L} \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} \\
&= \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} \cdot \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q} \cdot \mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}
\end{aligned} \tag{III.A.3;11}$$

L'équation (III.A.3;3.b) se démontre de même.

\* Equation (III.A.3;4)

$$\begin{aligned}
z\mathcal{G}(z) &= z \frac{1}{z - \mathcal{L}} \\
&= 1 + \frac{1}{z - \mathcal{L}} \mathcal{L} \\
&= 1 + \frac{1}{z - \mathcal{L}} \mathcal{P}\mathcal{L} + \frac{1}{z - \mathcal{L}} \mathcal{Q}\mathcal{L} \\
&= 1 + \mathcal{G}(z)\mathcal{P}\mathcal{L} + \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}\mathcal{L} + \mathcal{G}(z)\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}\mathcal{L}
\end{aligned} \tag{III.A.3;12}$$

\* Equation (III.A.3;5)

Elle s'obtient en multipliant l'équation (III.A.3;4) à gauche et à droite par  $\mathcal{P}$ .

### III.A.3.b. Propagateurs

On définit les deux opérateurs  $\mathcal{R}^+$  et  $\mathcal{R}^-$  de la manière suivante:

$$\mathcal{R}^+(\omega) = i \mathcal{R}(\omega + i\epsilon) \tag{III.A.3;13.a}$$

$$\mathcal{R}^-(\omega) = i \mathcal{R}(\omega - i\epsilon) \tag{III.A.3;13.b}$$

Les propagateurs projetés ont ainsi les expressions suivantes:

$$\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P} = i \mathcal{P} \frac{1}{\omega + i\epsilon - \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} + i\mathcal{P}\mathcal{R}^+(\omega)\mathcal{P}} \mathcal{P} \tag{III.A.3;14.a}$$

$$\mathcal{P}\mathcal{G}^{-}(\omega)\mathcal{P} = i\mathcal{P} \frac{1}{\omega - i\epsilon - \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} + i\mathcal{P}\mathcal{R}^{-}(\omega)\mathcal{P}} \mathcal{P} \quad (III.A.3; 14.b)$$

### III.A.3.c. Projecteurs sur un sous-système

Nous considérons maintenant le cas où le projecteur  $\mathcal{P}$  projette sur un sous-système  $\mathcal{S}$ , comme par exemple celui que nous avons défini en (III.A.1;22).

Nous remarquons que l'expression (III.A.1;8) de  $\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}$  ne fait intervenir que des opérateurs de la forme  $\mathcal{P}\mathcal{M}\mathcal{P}$ . Or, ces opérateurs, lorsqu'on les applique à un opérateur du sous-système, donnent un opérateur du sous-système. Il est ainsi possible de les exprimer de manière tensorielle à partir d'une base de l'espace du sous-système:

$$\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} e_i = [\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}]_i^j e_j \quad (III.A.3; 15.a)$$

$$\mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P} e_j = [\mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P}]_i^j e_j \quad (III.A.3; 15.b)$$

$$\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} e_i = [\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}]_i^j e_i \quad (III.A.3; 15.c)$$

Le calcul de  $\mathcal{R}(z)$  nous obligera à travailler dans l'espace de Liouville complet; cependant, son résultat pourra s'exprimer sous forme d'un tenseur  $n \times n$ . Une fois ce calcul fait, le calcul de la résolvante réduite  $\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}$  consistera uniquement en l'inversion d'une matrice  $n \times n$ .

Ainsi, alors que le calcul de  $\mathcal{G}(z)$  serait en pratique impossible car la dimension de l'espace de Liouville total est infinie, l'utilisation de projecteurs permet un calcul de l'évolution du système non linéaire et en fait, comme nous allons le voir, permet d'obtenir des renseignements sur l'évolution du réservoir.

### III.B. Le modèle choisi: hypothèses et propriétés

Nous en venons maintenant au modèle d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Dans un premier temps, nous discutons la structure du système étudié. Nous présentons ensuite les projecteurs adaptés à notre problème. Nous en déduisons les propriétés dues à la nature particulière de ces projecteurs. Nous terminons par une discussion des hypothèses faites afin de préciser les situations où ce modèle peut être utilisé.

#### III.B.1. Le modèle étudié

Le modèle étudié est, comme dans la première partie, un système non linéaire  $\mathcal{S}$  en interaction avec un réservoir harmonique  $\mathcal{R}$ . Le réservoir est composé d'une collection d'oscillateurs harmoniques décrits par des opérateurs création et annihilation  $a_\lambda^\dagger$  et  $a_\lambda$  obéissant à la relation de commutation suivante:

$$[a_\lambda; a_{\lambda'}^\dagger] = \delta_{\lambda, \lambda'} \quad (III.B.1;1)$$

L'évolution libre de ce réservoir est régie par le Hamiltonien  $H_{\mathcal{R}}$  :

$$H_{\mathcal{R}} = \sum_{\lambda} \omega_{\lambda} a_{\lambda}^{\dagger} a_{\lambda} \quad (III.B.1;2)$$

où  $\omega_{\lambda}$  est la fréquence du mode  $\lambda$ .

Nous ne précisons pas la nature du système non linéaire  $\mathcal{S}$ . Il peut s'agir par exemple de:

\* un atome à deux niveaux décrit par des opérateurs de spin  $S_+$ ,  $S_-$  et  $S_z$  et dont le Hamiltonien d'évolution libre  $H_{\mathcal{S}}$  est:

$$H_{\mathcal{S}} = \omega_0 S_z \quad (III.B.1;3.a)$$

\* une particule de masse  $m$  placée dans un potentiel  $V(x)$  décrite par les opérateurs position et impulsion  $X$  et  $P$  et dont le Hamiltonien d'évolution libre est:

$$H_{\mathcal{S}} = \frac{P^2}{2m} + V(x) \quad (III.B.1;3.b)$$

L'interaction du système et du réservoir se fait par un Hamiltonien d'interaction  $H_1$ . Nous le supposons de la forme suivante:

$$H_1 = - \sum_{\alpha} A_{\alpha} X_{\alpha} \quad (III.B.1;4)$$

où les opérateurs  $A_{\alpha}$  sont des opérateurs du réservoir obtenus par combinaisons linéaires d'opérateurs création et annihilation  $a_{\lambda}^{\dagger}$  et  $a_{\lambda}$  et où les  $X_{\alpha}$  sont des opérateurs du système non linéaire.

Finalement le Hamiltonien total s'écrit:

$$H = H_{\mathcal{S}} + H_{\mathcal{R}} + H_1 + H_2 \quad (III.B.1;5)$$

où  $H_2$  est un Hamiltonien d'énergie propre du système non linéaire.

A chacun de ces Hamiltoniens est associé un opérateur de Liouville:

$$\mathcal{L} = - \hat{H} \quad (III.B.1;6.a)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{S}} = - \hat{H}_{\mathcal{S}} \quad (III.B.1;6.b)$$

$$\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = - \hat{H}_{\mathcal{R}} \quad (III.B.1;6.c)$$

$$\mathcal{L}_1 = - \hat{H}_1 \quad (III.B.1;6.d)$$

$$\mathcal{L}_2 = - \hat{H}_2 \quad (III.B.1;6.e)$$

### III.B.2. Construction et propriétés des projecteurs

Nous définissons les projecteurs adaptés à notre problème en explicitant les hypothèses que nous utilisons. Nous discuterons la pertinence de ces hypothèses dans la section suivante. Nous démontrons les propriétés de ces projecteurs.

#### III.B.2.a. Les hypothèses - les projecteurs

Pour pouvoir construire les projecteurs nous faisons les trois hypothèses suivantes:

- i - Nous connaissons la matrice densité d'un état du réservoir. Nous notons cette matrice densité  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$ .
- ii - La matrice densité  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$  correspond à un état stationnaire du réservoir, soit:

$$[H_{\mathcal{R}}; \sigma_{\mathcal{R}}^0] = 0 \quad (III.B.2;1)$$

- iii - Les valeurs moyennes des différents opérateurs  $A_{\alpha}$  qui interviennent dans le Hamiltonien d'interaction sont nulles lorsque le réservoir est dans l'état décrit par  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$  soit:

$$Tr_{\mathcal{R}}\{A_{\alpha}\sigma_{\mathcal{R}}^0\} = 0 \quad (III.B.2;2)$$

Nous construisons avec cette matrice densité les projecteurs que nous avons donnés en exemple dans la section III.A.1.:

$$\mathcal{P} O = Tr_{\mathcal{R}}\{\sigma_{\mathcal{R}}^0 O\} \otimes \mathbb{1}_{\mathcal{R}} \quad (III.B.2;3.a)$$

$$Q = \mathbb{1} - \mathcal{P} \quad (III.B.2;3.b)$$

#### III.B.2.b. Propriétés des projecteurs

Nous donnons tout d'abord les différentes propriétés que nous allons établir

$$(1) \quad \mathcal{P}\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S\mathcal{P} \quad (III.B.2;4.a)$$

$$(1bis) \quad \mathcal{P}\mathcal{L}_S Q = Q \mathcal{L}_S \mathcal{P} \quad (III.B.2;4.b)$$

$$(2) \quad \mathcal{L}_{\mathcal{R}}\mathcal{P} = 0 \quad (III.B.2;4.c)$$

$$(3) \quad \mathcal{P}\mathcal{L}_{\mathcal{R}} = 0 \quad (III.B.2;4.d)$$

$$(4) \quad \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{P} = 0 \quad (III.B.2;4.e)$$

$$(4bis) \quad \mathcal{P}\mathcal{L}_1 = \mathcal{P}\mathcal{L}_1 Q \quad (III.B.2;4.f)$$

$$(4ter) \quad \mathcal{L}_1\mathcal{P} = Q\mathcal{L}_1\mathcal{P} \quad (III.B.2;4.g)$$

Nous les démontrons rapidement afin de préciser leur origine. Nous ferons toutes ces démonstrations en utilisant le produit d'un opérateur  $S$  du système et  $R$  du réservoir.

Propriété 1 -

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{L}_S(RS) &= (- [H_S; RS]) \\ &= \mathcal{P} (- R [H_S; S]) \\ &= \langle R \rangle (- [H_S; S]) \\ &= \langle R \rangle \mathcal{L}_S S \\ &= \mathcal{L}_S (\langle R \rangle S) \\ &= \mathcal{L}_S \mathcal{P}(RS) \end{aligned} \quad (III.B.2;5)$$

Nous avons utilisé la définition de  $\mathcal{P}$  et le fait que,  $H_S$  étant un opérateur de  $S$ , il commute avec  $S$ . La propriété (1bis) est un corrolaire de celle-ci basée sur le fait que  $\mathcal{P}Q = 0$ .

- Propriété 2 -

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\mathcal{P}(RS) &= \mathcal{L}_{\mathcal{R}} \langle R \rangle S \\ &= \langle R \rangle \{-[H_{\mathcal{R}}; S]\} \\ &= 0\end{aligned}\quad (III.B.2;6)$$

Nous avons utilisé la définition de  $\mathcal{P}$  et le fait que,  $H_{\mathcal{R}}$  étant un opérateur du réservoir, il commute avec  $S$ .

- Propriété 3 -

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{L}_{\mathcal{R}}(RS) &= \mathcal{P}(-[H_{\mathcal{R}}, R]S) \\ &= -\langle [H_{\mathcal{R}}, R] \rangle S\end{aligned}\quad (III.B.2;7.a)$$

or  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$  est un état stationnaire de  $H_{\mathcal{R}}$  ainsi :

$$\begin{aligned}\langle [H_{\mathcal{R}}, R] \rangle &= \text{Tr}_{\mathcal{R}} \{\sigma_{\mathcal{R}}^0 [H_{\mathcal{R}}; R]\} \\ &= -\text{Tr}_{\mathcal{R}} \{[\sigma_{\mathcal{R}}^0; H_{\mathcal{R}}]R\} \\ &= 0\end{aligned}\quad (III.B.2;7.b)$$

Cette propriété nécessite l'utilisation de l'hypothèse - ii - selon laquelle l'état du réservoir  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$  est stationnaire. Ainsi, bien que les propriétés 2 et 3 aient des apparences semblables, leur origine est différente.

- Propriété 4 -

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{P}(RS) &= \mathcal{P}\mathcal{L}_1(\langle R \rangle S) \\ &= \langle R \rangle \mathcal{P}(\sum_{\alpha} A_{\alpha}[X_{\alpha}; S]) \\ &= \langle R \rangle \sum_{\alpha} \langle A_{\alpha} \rangle [X_{\alpha}; S] \\ &= 0\end{aligned}\quad (III.B.2;8)$$

Cette propriété découle de l'hypothèse - iii - selon laquelle les valeurs moyennes des opérateurs  $A_{\alpha}$  sont nulles lorsque le réservoir est dans l'état  $\sigma_{\mathcal{R}}$ .

Nous utilisons maintenant ces propriétés pour déduire des relations entre les projecteurs et l'opérateur de Liouville du Hamiltonien total:

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_S\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\mathcal{P} + \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{P} \\ &= \mathcal{P}\mathcal{L}_S\mathcal{P}\end{aligned}\quad (III.B.2;9.a)$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q} &= \mathcal{P}\mathcal{L}_S\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{L}_{\mathcal{R}}\mathcal{Q} + \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{Q} \\ &= \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{Q}\end{aligned}\quad (III.B.2;9.b)$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{P} = \mathcal{Q}\mathcal{L}_1\mathcal{P}\quad (III.B.2;9.c)$$

Nous constatons que les projecteurs  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  permettent de séparer les parties évolution libre et interaction de l'opérateur de Liouville  $\mathcal{L}$ .



### III.B.3. Discussion du modèle et des hypothèses

Le modèle que nous avons présenté s'applique au cas général d'un système non linéaire couplé à un réservoir harmonique. Nous avons certes fait une hypothèse sur la forme du Hamiltonien d'interaction, mais celle-ci est en fait peu restrictive et est vérifiée par les systèmes usuels. Cette forme permettrait en particulier de traiter le cas du champ électromagnétique de l'espace à trois dimensions.

Le point important de la discussion porte en fait sur la matrice densité  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$ . Nous discutons tout d'abord la signification physique qu'il faut lui donner, puis les conditions sur le réservoir qu'impliquent les hypothèses - ii - et - iii -.

#### III.B.3.a. Remarque sur l'état du système en représentation de Heisenberg

En représentation de Heisenberg, ce n'est pas l'état du système qui évolue, mais les opérateurs de l'espace de Liouville. Nous devons donc préciser le sens que nous donnons à "état initial" et à la notion d'état initial factorisé.

Nous avons donné dans le premier chapitre une définition de la notion d'état factorisé, mais nous ne considérons alors que la description du système à un instant et non son évolution. Nous dirons que l'état du système est factorisé à un instant  $t$  quand la valeur moyenne de tout produit  $R(t) S(t)$  d'opérateurs  $R(t)$  du réservoir et  $S(t)$  du système à l'instant  $t$  est égal au produit de leurs valeurs moyennes. Il faut noter que, puisque le système et le réservoir sont couplés, un opérateur  $R(t')$  du réservoir à un instant  $t'$  n'est pas un opérateur du réservoir à un instant  $t$  différent de  $t'$ . Ainsi, bien que l'état du système n'évolue pas, le fait qu'il soit factorisé dépend de l'instant où on l'observe à cause de l'évolution des opérateurs. La notion de valeur moyenne d'opérateurs dans l'état initial devra de même être comprise comme valeur moyenne d'opérateurs  $O(t_0)$  considérés à l'instant  $t_0$  initial.

#### III.B.3.b. Le choix de $\sigma_{\mathcal{R}}^0$

Nous voulons étudier l'évolution du système non linéaire et des champs émis en fonction des champs entrants, c'est-à-dire considérés à un instant  $t_0$  très loin dans le passé. Dans l'étude de tels problèmes, il est usuel de supposer l'état initial factorisé, soit:

$$\rho(t_0) = \sigma_{\mathcal{R}}(t_0) \otimes \sigma_{\mathcal{S}}(t_0) \quad (III.B.3;1)$$

Nous disposons ainsi d'un bon candidat pour  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$  : l'état initial du réservoir.

Le rôle du projecteur  $\mathcal{P}$  est de nous permettre d'obtenir des équations du système; nous désirons donc que la relation suivante soit vérifiée:

$$\langle X(t) \rangle = \langle \mathcal{P}X(t) \rangle \quad (III.B.3;2)$$

Calculons chacun des deux membres de cette égalité:

$$\begin{aligned} \langle X(t) \rangle &= Tr\{\rho(t_0)X(t)\} \\ &= Tr\{(\sigma_{\mathcal{R}}(t_0) \otimes \sigma_{\mathcal{S}}(t_0))X(t)\} \\ &= Tr_{\mathcal{S}}\{\sigma_{\mathcal{S}}(t_0)Tr_{\mathcal{R}}\{\sigma_{\mathcal{R}}(t_0)X(t)\}\} \end{aligned} \quad (III.B.3;3.a)$$

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}X(t) \rangle &= Tr\{\rho(t_0)Tr_{\mathcal{R}}\{\sigma_{\mathcal{R}}^0 X(t)\}\} \\ &= Tr_{\mathcal{R}}\{\sigma_{\mathcal{R}}(t_0)Tr_{\mathcal{S}}\{\sigma_{\mathcal{S}}^0(t_0)Tr_{\mathcal{R}}\{\sigma_{\mathcal{R}}^0 X(t)\}\}\} \\ &= Tr_{\mathcal{S}}\{\sigma_{\mathcal{S}}(t_0)Tr_{\mathcal{R}}\{\sigma_{\mathcal{R}}^0 X(t)\}\} \end{aligned} \quad (III.B.3;3.b)$$

Nous choisissons donc:

$$\sigma_{\mathcal{R}}^0 = \sigma_{\mathcal{R}}(t_0) \quad (III.B.3;4)$$

### III.B.3.c. Les hypothèses sur l'état initial

Pour que les projecteurs vérifient les différentes propriétés désirées, nous avons dû faire des hypothèses sur  $\sigma_{\mathcal{R}}^0$ ; nous devons maintenant vérifier que la matrice  $\sigma_{\mathcal{R}}(t_0)$  les vérifie.

Nous commençons par discuter l'hypothèse - iii - selon laquelle les valeurs moyennes des champs  $A^\alpha$  doivent être nulles.

Nous avons en fait déjà été confrontés à un tel problème. En effet, dans la seconde partie, nous avons étudié un système à deux niveaux excité par un champ monochromatique intense provenant du réservoir. Nous avons en fait contourné le problème en écrivant que le champ laser était la somme d'une valeur moyenne et de fluctuations. La partie due à la valeur moyenne du Hamiltonien d'interaction a été incluse dans le Hamiltonien d'évolution libre du système et a pu être traitée exactement. Cette stratégie peut être utilisée dans le cas général et permet ainsi de vérifier l'hypothèse - iii -. Celle-ci n'est donc aucunement restrictive. Le réservoir est alors uniquement une source de fluctuations. L'hypothèse - ii - signifie dans ce cas que ces fluctuations doivent être stationnaires. Ceci est le cas pour un état thermique du réservoir et pour un état comprimé. Cette hypothèse sera donc toujours vérifiée dans les situations qui nous intéressent.

### III.C. La relaxation du système non linéaire

Nous entamons avec ce chapitre l'étude perturbative de l'interaction entre le système non linéaire et le réservoir. Cette étude se fonde sur l'utilisation de la résolvente et des projecteurs introduits dans le chapitre précédent. Dans un premier temps (ce chapitre et le suivant), nous procédons à une étude perturbative au second ordre en interaction. Nous discuterons précisément les approximations dans le chapitre III.E. Il y sera aussi discuté la possibilité de faire des développements perturbatifs à des ordres plus élevés.

Nous débuterons ce chapitre par une présentation du traitement perturbatif. Nous poursuivrons par un calcul de la relaxation et de la résolvente réduite. Nous terminerons ce chapitre par l'étude du théorème de régression quantique et des fonctions de corrélation atomiques.

#### III.C.1. L'évolution réduite

##### III.C.1.a. Présentation

Nous désirons tout d'abord étudier la relaxation des opérateurs atomiques. Pour cela, nous allons utiliser les projecteurs en nous appuyant sur la relation suivante:

$$\begin{aligned} \langle X(t) \rangle &= \langle U(t-t_0) X(t_0) \rangle \\ &= \langle \mathcal{P} U(t-t_0) \mathcal{P} X(t_0) \rangle \end{aligned} \quad (III.C.1;1)$$

Nous avons utilisé, pour établir cette relation, le fait qu'à l'instant initial  $t_0$  le projecteur  $\mathcal{P}$  ne modifie pas les opérateurs du système non linéaire. Nous avons en fait à calculer l'opérateur évolution réduit, ce que nous allons faire à l'aide de la résolvente réduite dont nous rappelons l'expression:

$$\mathcal{P}G(z)\mathcal{P} = \mathcal{P} \frac{1}{z - \mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P} - \mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P}} \mathcal{P} \quad (III.C.1;2.a)$$

soit, en utilisant les propriétés des projecteurs (III.B.2;4)

$$\mathcal{P}G(z)\mathcal{P} = \mathcal{P} \frac{1}{z - [\mathcal{L}_S + (\mathcal{P}\mathcal{R}(z)\mathcal{P}) + \mathcal{L}_2]} \mathcal{P} \quad (III.C.1;2.b)$$

Nous constatons que l'opérateur qui intervient au dénominateur est la somme de l'opérateur  $\mathcal{L}_S$  correspondant à l'évolution libre du système et de l'opérateur  $\mathcal{R}(z)$  qui correspond à la relaxation et où intervient le Hamiltonien d'interaction  $\mathcal{L}_1$ . C'est ce terme  $\mathcal{R}(z)$  que nous allons traiter perturbativement au second ordre. Dans un premier temps, nous donnons une expression formelle de  $\mathcal{R}(z)$  pris au second ordre, puis nous calculerons son expression explicite qui fait intervenir les fonctions de corrélation du champ.

##### III.C.1.b. Expression formelle de l'opérateur $\mathcal{R}(z)$ au second ordre

Nous rappelons l'expression de  $\mathcal{R}(z)$  :

$$\mathcal{R}(z) = \mathcal{P}\mathcal{L}Q.Q \frac{1}{z - Q\mathcal{L}Q} Q.Q\mathcal{L}\mathcal{P} \quad (III.C.1;3)$$

Nous utilisons alors une propriété très importante pour nous dans toute cette partie:

$$\mathcal{P}\mathcal{L}Q = \mathcal{P}\mathcal{L}_1Q \quad (III.C.1;4.a)$$

$$Q\mathcal{L}\mathcal{P} = Q\mathcal{L}_1\mathcal{P} \quad (III.C.1;4.b)$$

L'expression (III.C.1;3) s'écrit alors:

$$\mathcal{R}(z) = \mathcal{P}\mathcal{L}_1Q.Q \frac{1}{z - Q\mathcal{L}Q} Q.Q\mathcal{L}\mathcal{P} \quad (III.C.1;5)$$

Si nous nous limitons au second ordre en  $\mathcal{L}_1$ , nous pouvons prendre le dénominateur à l'ordre zéro. Cette approximation sera discutée dans le chapitre III.E. Nous notons  $\mathcal{R}_2(z)$  l'opérateur relaxation ainsi obtenu:

$$\mathcal{R}_2(z) = \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{Q} \frac{1}{z - \mathcal{Q}(\mathcal{L}_S + \mathcal{L}_R)\mathcal{Q}} \mathcal{Q}\mathcal{Q}\mathcal{L}_1\mathcal{P} \quad (III.C.1;6)$$

Afin d'obtenir une forme utilisable plus facilement dans les calculs explicites, nous allons éliminer les projecteurs superflus. Nous commençons par le facteur central:

Nous avons montré les relations suivantes:

$$\mathcal{Q}\mathcal{L}_R = \mathcal{L}_R\mathcal{Q} \quad (III.C.1;7.a)$$

$$\mathcal{Q}\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S\mathcal{Q} \quad (III.C.1;7.b)$$

On déduit de ces relations l'égalité suivante:

$$\begin{aligned} [\mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)\mathcal{Q}]^2 &= \mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)\mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)\mathcal{Q} \\ &= \mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)^2\mathcal{Q} \end{aligned} \quad (III.C.1;8.a)$$

En procédant par récurrence on montre alors pour tout  $n$  entier:

$$[\mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)\mathcal{Q}]^n = \mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)^n\mathcal{Q} \quad (III.C.1;8.b)$$

La relation suivante est ainsi vérifiée:

$$\mathcal{Q} \frac{1}{z - \mathcal{Q}(\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)\mathcal{Q}} \mathcal{Q} = \mathcal{Q} \frac{1}{z - (\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)} \mathcal{Q} \quad (III.C.1;9)$$

Le terme que nous avons fait apparaître est en fait la projection selon  $\mathcal{Q}$  de la résolvante correspondant à une évolution non couplée du système et du réservoir que nous notons  $\mathcal{G}_0(z)$ :

$$\mathcal{G}_0(z) = \frac{1}{z - (\mathcal{L}_R + \mathcal{L}_S)} = \frac{1}{z - \mathcal{L}_O} \quad (III.C.1;10)$$

Nous reportons alors l'expression obtenue dans l'équation (III.C.1;5):

$$\mathcal{R}_2(z) = \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{Q} \mathcal{G}_0(z) \mathcal{Q}\mathcal{L}_1\mathcal{P} \quad (III.C.1;11)$$

En utilisant les propriétés de  $\mathcal{L}_1$ , nous supprimons finalement les projecteurs  $\mathcal{Q}$ :

$$\mathcal{R}_2(z) = \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P} \quad (III.C.1;12)$$

C'est cette expression que nous allons utiliser pour calculer explicitement l'opérateur  $\mathcal{R}_2(z)$ .

### III.C.1.c. Expression explicite de l'opérateur relaxation au second ordre

Le calcul que nous allons maintenant mener est relativement long. Cependant, l'expression définitive pourra être appliquée directement lors de l'étude d'un système particulier et il ne sera pas nécessaire de refaire ce calcul.

Nous introduisons tout d'abord quelques notations.

Nous faisons le calcul de  $\mathcal{R}_2(z)$  en l'appliquant à un opérateur  $Y$  du système non linéaire évoluant librement à la fréquence  $\omega_y$ , soit:

$$\mathcal{L}_S Y = \omega_y Y \quad (III.C.1;13)$$

Nous utilisons une décomposition des opérateurs  $X_\alpha$  en somme d'opérateur  $X_\alpha^\mu$  évoluant librement à des fréquences  $\omega_\mu$  soit:

$$X = \sum X_\alpha^\mu \quad (III.C.1; 14.a)$$

$$\mathcal{L}_S X_\alpha^\mu = \omega_\mu X_\alpha^\mu \quad (III.C.1; 14.b)$$

Nous explicitons après chaque étape ce que nous avons fait ou la propriété que nous avons utilisée. Nous écrivons la définition explicite de  $\mathcal{L}_1$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(z)Y &= \mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}Y \\ &= \mathcal{P} \left[ \sum_\alpha A_\alpha X_\alpha; \mathcal{G}_0(z) \left[ \sum_\beta A_\beta X_\beta; Y \right] \right] \\ &= \sum_\alpha \sum_\beta \mathcal{P} [A_\alpha X_\alpha; \mathcal{G}_0(z)(A_\beta [X_\beta; Y])] \end{aligned} \quad (III.C.1; 15)$$

L'opérateur  $A_\beta$  est un opérateur du réservoir; il commute avec  $Y$ :

$$\mathcal{R}_2(z)Y = \sum_\alpha \sum_\beta \sum_\mu \mathcal{P}[A_\alpha X_\alpha; \mathcal{G}_0(z)(A_\beta [X_\beta^\mu; Y])] \quad (III.C.1; 16)$$

Nous décomposons  $X_\beta$  en opérateurs propres de  $\mathcal{L}_S$ . Nous allons ensuite utiliser la propriété suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_S A_\beta [X_\beta^\mu; Y] &= A_\beta \mathcal{L}_S [X_\beta^\mu; Y] \\ &= A_\beta (\omega_\mu + \omega_y) [X_\beta^\mu; Y] \end{aligned} \quad (III.C.1; 17)$$

$\mathcal{L}_S$  correspond au Hamiltonien du système et n'agit pas sur les opérateurs du réservoir. On déduit de cette relation:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_0(z)(A_\beta [X_\beta^\mu; Y]) &= \frac{1}{z - \mathcal{L}_R - \mathcal{L}_S} (A_\beta [X_\beta^\mu; Y]) \\ &= \frac{1}{z - \mathcal{L}_R - (\omega_\mu + \omega_y)} A_\beta [X_\beta^\mu; Y] \\ &= (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu - \omega_y) A_\beta) [X_\beta^\mu; Y] \end{aligned} \quad (III.C.1; 18)$$

Nous reportons cette expression dans l'équation (III.C.1;15):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_2(z) Y &= \sum_{\alpha\beta\mu} \mathcal{P}[A_\alpha X_\alpha; (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu - \omega_y) A_\beta) [X_\beta^\mu; Y]] \\ &= \sum_{\alpha\beta\mu} \mathcal{P} \left\{ A_\alpha (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu - \omega_y) A_\beta) X_\alpha [X_\beta^\mu; Y] \right. \\ &\quad \left. - (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu - \omega_y) A_\beta) A_\alpha [X_\beta^\mu; Y] X_\alpha \right\} \\ &= \sum_{\alpha\beta\mu} \left\{ \langle A_\alpha (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu - \omega_y) A_\beta) \rangle X_\alpha [X_\beta^\mu; Y] \right. \\ &\quad \left. - \langle (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu - \omega_y) A_\beta) A_\alpha \rangle [X_\beta^\mu; Y] X_\alpha \right\} \end{aligned} \quad (III.C.1; 19)$$

L'expression de  $\mathcal{R}_2(z)$  que nous venons d'obtenir ne fait intervenir que des opérateurs du système et des nombres.

### III.C.1.d. Les fonctions de corrélation du champ

Nous allons maintenant relier ces nombres aux fonctions de corrélation du champ.

Nous considérons tout d'abord les fonctions de corrélation du champ évoluant librement à partir d'un instant  $t_0$ . Nous noterons  $A_\alpha^0(t)$  le champ obtenu par une évolution libre de  $A_\alpha$  à partir de  $t_0$ . Les fonctions de corrélation que nous considérons sont ainsi  $\langle A_\alpha^0(t+\tau) A_\alpha^0(t) \rangle$ . L'état du réservoir à  $t_0$  étant supposé stationnaire, ces fonctions ne dépendent que de  $\tau$ . Nous notons ainsi:

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(\tau) &= \langle A_\alpha^0(\tau) A_\beta \rangle \\ &= \langle A_\alpha A_\beta^0(-\tau) \rangle\end{aligned}\quad (III.C.1; 20.a)$$

Comme précédemment, nous notons  $\rho_{\alpha\beta}(\omega)$  la transformée de Fourier de ces fonctions de corrélation:

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha\beta}(\omega) &= \int d\tau e^{i\omega\tau} \rho_{\alpha\beta}(\tau) \\ &= \langle A_\alpha^0(\omega) A_\beta \rangle \\ &= \langle A_\alpha A_\beta^0(-\omega) \rangle\end{aligned}\quad (III.C.1; 20.b)$$

Nous notons:

$$\xi_{\alpha\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int d\omega' \frac{1}{\omega - \omega'} \rho_{\alpha\beta}(\omega') \quad (III.C.1; 21)$$

où  $\frac{1}{\omega}$  doit être entendu comme la distribution partie principale.

Avec les notations que nous venons de donner, en notant  $\mathcal{U}_0^+(t)$  et  $\mathcal{U}_0^-(t)$  les propagateurs qui correspondent à une évolution libre des champs:

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{U}_0^+(\tau) A_\alpha A_\beta \rangle &= \rho_{\alpha\beta}(\tau) \theta(\tau) & (III.C.1; 22.a) \\ \langle A_\alpha \mathcal{U}_0^+(\tau) A_\beta \rangle &= \rho_{\alpha\beta}(-\tau) \theta(\tau) & (III.C.1; 22.b) \\ \langle \mathcal{U}_0^-(\tau) A_\alpha A_\beta \rangle &= -\rho_{\alpha\beta}(\tau) \theta(-\tau) & (III.C.1; 22.c) \\ \langle A_\alpha \mathcal{U}_0^-(\tau) A_\beta \rangle &= -\rho_{\alpha\beta}(-\tau) \theta(-\tau) & (III.C.1; 22.d)\end{aligned}$$

$\mathcal{G}_0^+(\omega)$  et  $\mathcal{G}_0^-(\omega)$  sont les transformées de Fourier des propagateurs  $\mathcal{U}_0^+(\tau)$  et  $\mathcal{U}_0^-(\tau)$ . Nous utilisons alors les relations suivantes:

$$\int d\tau \theta(\tau) e^{i\omega\tau} = \pi \delta(\omega) + i\frac{1}{\omega} \quad (III.C.1; 23.a)$$

$$\int d\tau \theta(-\tau) e^{-i\omega\tau} = \pi \delta(\omega) - i\frac{1}{\omega} \quad (III.C.1; 23.b)$$

et nous en déduisons:

$$\langle \mathcal{G}_0^+(\omega) A_\alpha A_\beta \rangle = \frac{1}{2} \rho_{\alpha\beta}(\omega) + \frac{i}{2} \xi_{\alpha\beta}(\omega) \quad (III.C.1; 24.a)$$

$$\langle A_\alpha \mathcal{G}_0^+(\omega) A_\beta \rangle = \frac{1}{2} \rho_{\alpha\beta}(-\omega) - \frac{i}{2} \xi_{\alpha\beta}(-\omega) \quad (III.C.1; 24.b)$$

$$\langle \mathcal{G}_0^-(\omega) A_\alpha A_\beta \rangle = -\frac{1}{2} \rho_{\alpha\beta}(\omega) + \frac{i}{2} \xi_{\alpha\beta}(\omega) \quad (III.C.1; 24.c)$$

$$\langle A_\alpha \mathcal{G}_0^-(\omega) A_\beta \rangle = -\frac{1}{2} \rho_{\alpha\beta}(-\omega) - \frac{i}{2} \xi_{\alpha\beta}(-\omega) \quad (III.C.1; 24.d)$$

Nous pouvons écrire ces expressions différemment:

$$\begin{aligned}
\langle ((\mathcal{G}_0^+(\omega) - \mathcal{G}_0^-(\omega))A_\alpha)A_\beta \rangle &= \rho_{\alpha\beta}(\omega) & (III.C.1; 25.a) \\
\langle A_\alpha((\mathcal{G}_0^+(\omega) - \mathcal{G}_0^-(\omega))A_\beta) \rangle &= \rho_{\alpha\beta}(-\omega) & (III.C.1; 25.b) \\
\langle ((\mathcal{G}_0^+(\omega) + \mathcal{G}_0^-(\omega))A_\alpha)A_\beta \rangle &= i \xi_{\alpha\beta}(\omega) & (III.C.1; 25.c) \\
\langle A_\alpha((\mathcal{G}_0^+(\omega) + \mathcal{G}_0^-(\omega))A_\beta) \rangle &= -i \xi_{\alpha\beta}(-\omega) & (III.C.1; 25.d)
\end{aligned}$$

Nous allons maintenant utiliser ces expressions pour déterminer les opérateurs  $\mathcal{R}_2^+(\omega)$  et  $\mathcal{R}_2^-(\omega)$ .

### III.C.1.e. Relaxation avancée - Relaxation retardée

Nous rappelons les définitions des opérateurs  $\mathcal{R}^+(\omega)$  et  $\mathcal{R}^-(\omega)$  :

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^+(\omega) &= i \mathcal{R}(\omega + i\epsilon) \\
&= i \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_0(\omega + i\epsilon) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} \\
&= \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_0^+(\omega) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} & (III.C.1; 26.a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}^-(\omega) &= i \mathcal{R}(\omega - i\epsilon) \\
&= \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_0^-(\omega) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} & (III.C.1; 26.b)
\end{aligned}$$

$\mathcal{R}^+(\omega)$  correspond à une évolution vers les temps positifs, soit une relaxation retardée alors que  $\mathcal{R}^-(\omega)$  correspond à une relaxation avancée. Nous allons séparer chacun de ces deux opérateurs en deux termes; le premier,  $\Gamma(\omega)$ , qui change de signe lorsque l'on passe d'une évolution retardée à une évolution avancée et correspond donc à une friction; le second,  $\Delta(\omega)$ , dont l'effet est le même dans les deux cas, correspond donc à un déplacement:

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{2}(\mathcal{R}^+(\omega) - \mathcal{R}^-(\omega)) \quad (III.C.1; 27.a)$$

$$\Delta(\omega) = \frac{1}{2i}(\mathcal{R}^+(\omega) + \mathcal{R}^-(\omega)) \quad (III.C.1; 27.b)$$

$$\mathcal{R}^+(\omega) = \Gamma(\omega) + i\Delta(\omega) \quad (III.C.1; 28.a)$$

$$\mathcal{R}^-(\omega) = -\Gamma(\omega) + i\Delta(\omega) \quad (III.C.1; 28.b)$$

Les propagateurs avancés et retardés sont ainsi:

$$\mathcal{P} \mathcal{G}^+(\omega) \mathcal{P} = \mathcal{P} \frac{1}{-i\omega + i[\mathcal{L}_S + \Delta(\omega) + \mathcal{L}_2] + \Gamma(\omega)} \mathcal{P} \quad (III.C.1; 29.a)$$

$$\mathcal{P} \mathcal{G}^-(\omega) \mathcal{P} = \mathcal{P} \frac{1}{-i\omega + i[\mathcal{L}_S + \Delta(\omega) + \mathcal{L}_2] - \Gamma(\omega)} \mathcal{P} \quad (III.C.1; 29.b)$$

Nous sommes maintenant en mesure de donner les expressions des deux opérateurs  $\Gamma_2(\omega)$  et  $\Delta_2(\omega)$  au second ordre en interaction en utilisant l'expression (III.C.1;25) et les fonctions de corrélation du champ:

$$\Gamma_2(\omega)Y = \sum_{\alpha\beta\mu} \frac{1}{2} \left\{ \rho_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_\mu + \omega_y) X_\alpha [X_\beta^\mu; Y] - \rho_{\beta\alpha}(\omega - \omega_\mu - \omega_y) [X_\beta^\mu; Y] X_\alpha \right\} \quad (III.C.1; 30.a)$$

$$\Delta_2(\omega)Y = - \sum_{\alpha\beta\mu} \frac{1}{2} \left\{ \xi_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_\mu + \omega_y) X_\alpha [X_\beta^\mu; Y] + \xi_{\beta\alpha}(\omega - \omega_\mu - \omega_y) [X_\beta^\mu; Y] X_\alpha \right\} \quad (III.C.1; 30.b)$$

Par la suite, nous intégrerons l'opérateur de Liouville  $\mathcal{L}_2$  d'énergie propre dans l'opérateur déplacement car il est lui aussi du second ordre.

### III.C.1.f. Etat stationnaire

L'évolution réduite conduit à une relaxation des opérateurs du système non linéaire vers un état stationnaire. Dans le cadre d'une relaxation retardée, cet état stationnaire est relié à une limite du propagateur  $\mathcal{P}U^+(t)\mathcal{P}$  pour les temps très grands. Une étude de cette limite est possible à partir de  $\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}$ . Cet opérateur présente différents pôles. Tout pôle dont la partie imaginaire est non nulle (négative par construction de  $\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}$ ) conduit à une décroissance exponentielle. Ainsi, seuls les pôles de partie imaginaire nulle contribuent à l'état stationnaire. On sait que l'opérateur  $\mathbb{1}_S$  ne relaxe pas, il y a donc un pôle en  $\omega = 0$ ). L'étude de l'opérateur relaxation montre que (sauf cas pathologique) un seul des pôles de  $\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}$  a une partie imaginaire nulle. Ce pôle est un pôle simple qu'il est possible d'isoler :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mathcal{P}U^+(t)\mathcal{P} = \lim_{\omega \rightarrow 0} \{-i\omega \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}\} \quad (III.C.1;31)$$

Ainsi, pour un opérateur  $Y$  du système:

$$\langle Y \rangle_{st} = \lim_{t \rightarrow \infty} \langle Y(t) \rangle = \lim_{\omega \rightarrow 0} \langle (-i\omega \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P})Y \rangle \quad (III.C.1;32)$$

L'opération qui consiste à associer la valeur moyenne  $\langle Y \rangle_{st}$  à un opérateur  $Y$  du système est équivalent à l'effet d'une matrice densité  $\sigma_S^{st}$  :

$$\langle Y \rangle_{st} = Tr \{Y \sigma_S^{st}\} \quad (III.C.1;33)$$

Cette matrice densité est définie par:

$$\sigma_S^{st} \otimes \sigma_R^0 = \lim_{\omega \rightarrow 0} (-i\omega \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}) \quad (III.C.1;34)$$

## III.C.2. Le théorème de régression quantique

### III.C.2.a. Introduction

Nous nous intéressons maintenant aux fonctions de corrélation à deux temps du système non linéaire. Ces fonctions de corrélation sont  $\langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle$  où  $Y_1$  et  $Y_2$  sont deux opérateurs du système non linéaire. Pour utiliser la résolvante, nous exprimons cette fonction de corrélation à l'aide de l'opérateur d'évolution et des opérateurs  $Y_1$  et  $Y_2$  pris à l'instant initial  $t_0$  :

$$\begin{aligned} \langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle &= \langle \mathcal{U}(t_1 - t_0)[Y_1(\mathcal{U}(t_2 - t_1)Y_2)] \rangle \\ \langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle &= \langle \mathcal{U}(t_2 - t_0)[(\mathcal{U}(t_1 - t_2)Y_1)Y_2] \rangle \end{aligned} \quad (III.C.2;1)$$

Plaçons-nous dans le cadre d'une relaxation retardée où  $t_0$  est très loin dans le passé:  $t_0 < t_1$  et  $t_0 < t_2$ , l'équation (III.C.2;1) s'exprime uniquement avec le propagateur  $\mathcal{U}^+$  :

$$\begin{aligned} \langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle &= \langle \mathcal{U}^+(t_1 - t_0)[Y_1(\mathcal{U}^+(t_2 - t_1)Y_2)] \rangle \\ &+ \langle \mathcal{U}^+(t_2 - t_0)[(\mathcal{U}^+(t_1 - t_2)Y_2)Y_1] \rangle \end{aligned} \quad (III.C.2;2)$$

Nous sommes ainsi amenés, dans l'espace des fréquences, à étudier:

$$\langle \mathcal{G}(z)[Y_1(\mathcal{G}(z')Y_2)] \rangle \quad (III.C.2;3.a)$$

$$\langle \mathcal{G}(z)[(\mathcal{G}(z')Y_1)Y_2] \rangle \quad (III.C.2;3.b)$$

### III.C.2.b. Le théorème de régression quantique

Nous allons maintenant chercher à faire apparaître la résolvante réduite par l'utilisation des projecteurs dans les expressions (III.C.2;3).



Nous utilisons tout d'abord les deux propriétés suivantes:

$$\begin{aligned} \langle O \rangle &= \langle \mathcal{P}O \rangle & (III.C.2; 4.a) \\ Y_2 &= \mathcal{P}Y_2 & (III.C.2; 4.b) \end{aligned}$$

où  $O$  est un opérateur quelconque et  $Y_2$  un opérateur du système. Nous obtenons ainsi :

$$\langle \mathcal{G}(z)[Y_1(\mathcal{G}(z')Y_2)] \rangle = \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)[Y_1(\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2)] \rangle \quad (III.C.2; 5)$$

Nous insérons la relation  $\mathcal{P} + \mathcal{Q} = \mathbb{1}$  après  $\mathcal{G}(z)$  et avant  $\mathcal{G}(z')$  :

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}(z)[Y_1(\mathcal{G}(z')Y_2)] \rangle &= \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}[Y_1(\mathcal{P}\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2)] \rangle \\ &+ \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}[Y_1(\mathcal{P}\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2)] \rangle \\ &+ \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}[Y_1(\mathcal{Q}\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2)] \rangle \\ &+ \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}[Y_1(\mathcal{Q}\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2)] \rangle \end{aligned} \quad (III.C.2; 6)$$

$\mathcal{P}\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2$  est un opérateur du système non linéaire, son produit par  $Y_1$  l'est aussi et donc le projeté par  $\mathcal{Q}$  de ce produit est nul. D'autre part, le produit par un opérateur du système d'un opérateur projeté par  $\mathcal{Q}$  tel que  $\mathcal{Q}\mathcal{G}(z')\mathcal{P}Y_2$  est dans l'espace image de  $\mathcal{Q}$  et son projeté par  $\mathcal{P}$  est donc nul. Le troisième terme est ainsi nul. Il reste:

$$\langle \mathcal{G}(z)[Y_1(\mathcal{G}(z)Y_2)] \rangle = \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}[Y_1(\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2)] \rangle + \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}[Y_1(\mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2)] \rangle \quad (III.C.2; 7.a)$$

On montre de même:

$$\mathcal{G}(z)[[(\mathcal{G}(z')Y_1)Y_2]] = \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}[(\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1)Y_2] \rangle + \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}[(\mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1)Y_2] \rangle \quad (III.C.2; 7.b)$$

Dans chacune de ces deux expressions apparaissent deux termes: le premier ne fait intervenir que la résolvante réduite  $\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}$  et se calcule donc en restant dans l'espace du système non linéaire, le second fait apparaître la projection  $\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}$  ou  $\mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}$ . Le théorème de régression quantique consiste à négliger ce second terme.

Nous allons étudier ce terme plus précisément pour justifier l'approximation. Pour cela, nous reportons la propriété (III.B.2;9) dans les équations (III.A.3;3)

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q} &= \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} \\ &= \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} & (III.C.2; 8.a) \\ \mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} &= \mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q}.\mathcal{Q}\mathcal{L}_1\mathcal{P}.\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} & (III.C.2; 8.b) \end{aligned}$$

En utilisant ces expressions, nous obtenons les équations suivantes:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}[Y_1(\mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2)] \rangle &= \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)[Y_1(\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2)] \rangle & (III.C.2; 9.a) \\ \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{Q}[(\mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1)Y_2] \rangle &= \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}\mathcal{L}_1\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)[(\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1)Y_2] \rangle & (III.C.2; 9.b) \end{aligned}$$

Nous constatons alors que ces termes sont du second ordre par rapport aux premiers termes des expressions (III.C.2;7). Ils sont donc négligeables et finalement:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}(z)[Y_1(\mathcal{G}(z)Y_2)] \rangle &= \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}[Y_1(\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2)] \rangle & (III.C.2; 10.a) \\ \langle \mathcal{G}(z)[(\mathcal{G}(z)Y_1)Y_2] \rangle &= \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}[(\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1)Y_2] \rangle & (III.C.2; 10.b) \end{aligned}$$

Ainsi, dans le cadre de notre approximation, les fonctions de corrélation peuvent être obtenues à l'aide de l'évolution réduite.

### III.C.2.c. Les fonctions de corrélation atomiques

Nous revenons à l'expression des fonctions de corrélation atomiques et nous les exprimons uniquement à l'aide de propagateurs retardés:

$$\begin{aligned} \langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle = & \langle U(t_1 - t_0)[Y_1(U(t_2 - t_1)Y_2)] \rangle_{\theta(t_2 - t_1)} \\ & + \langle U(t_2 - t_0)[U(t_1 - t_2)Y_1]Y_2 \rangle_{\theta(t_1 - t_2)} \end{aligned} \quad (III.C.2;11)$$

Soit, puisque  $t_0$  est infiniment éloigné dans le passé:

$$\begin{aligned} \langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle = & \langle U^+(t_1 - t_0)[Y_1(U^+(t_2 - t_1)Y_2)] \rangle \\ & + \langle U^+(t_2 - t_0)[(U^+(t_1 - t_2)Y_1)Y_2] \rangle \end{aligned} \quad (III.C.2;12)$$

Nous utilisons maintenant le théorème de régression quantique et nous obtenons:

$$\begin{aligned} \langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle = & \langle \mathcal{P}U^+(t_1 - t_0)\mathcal{P}[Y_1(\mathcal{P}U^+(t_2 - t_1)\mathcal{P}Y_2)] \rangle \\ & + \langle \mathcal{P}U^+(t_2 - t_0)\mathcal{P}[(\mathcal{P}U^+(t_1 - t_2)\mathcal{P}Y_1)Y_2] \rangle \end{aligned} \quad (III.C.2;13)$$

L'instant  $t_0$  est infiniment éloigné dans le passé, nous utilisons alors le fait que les opérateurs du système relaxent vers un état stationnaire et la définition que nous en avons donnée (III.C.1;31):

$$\langle Y_1(t_1)Y_2(t_2) \rangle = \langle Y_1(\mathcal{P}U^+(t_2 - t_1)\mathcal{P}Y_2) \rangle_{st} + \langle (\mathcal{P}U^+(t_1 - t_2)\mathcal{P}Y_1)Y_2 \rangle_{st} \quad (III.C.2;14)$$

### III.C.3. Les résultats sous forme tensorielle

Nous utilisons maintenant les notations tensorielles pour exprimer les différents résultats que nous avons établis dans ce chapitre.

#### III.C.3.a. L'opérateur relaxation

Nous commençons par les opérateurs  $\Gamma(\omega)$  et  $\Delta(\omega)$ :

$$\Gamma(\omega)Y = \frac{1}{2} \left\{ \rho_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_y + \omega_\mu) X_\alpha [X_\beta^\mu; Y] - \rho_{\beta\alpha}(\omega - \omega_y - \omega_\mu) [X_\beta^\mu; Y] X_\alpha \right\} \quad (III.C.3; 1.a)$$

$$\Delta(\omega)Y = -\frac{1}{2} \left\{ \xi_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_y + \omega_\mu) X_\alpha [X_\beta^\mu; Y] + \xi_{\beta\alpha}(\omega - \omega_y - \omega_\mu) [X_\beta^\mu; Y] X_\alpha \right\} \quad (III.C.3; 1.b)$$

L'indice  $\alpha$  correspond aux différents champs  $A_\alpha$  qui interagissent avec le système non linéaire. Nous avons étendu la convention de sommation à cet indice.

Nous décomposons maintenant l'opérateur  $X_\alpha$  sur la base des  $e_i$  et nous notons  $x_\alpha^i$  ses coordonnées:

$$X_\alpha = x_\alpha^i e_i \quad (III.C.3; 2)$$

Cette décomposition est parfois différente de celle en  $X_\alpha^\mu$  que nous avons utilisée lors du calcul de  $\mathcal{R}(z)$ . Donnons en un exemple en considérant le cas d'un atome à deux niveaux.

Le Hamiltonien d'interaction est:

$$H_1 = -(A_+ S_+ + A_- S_-) \quad (III.C.3; 3)$$

Ainsi  $X_\alpha = S_+$  ou  $S_-$ .

La décomposition en  $X_\alpha^\mu$  se fait à l'aide des  $S'_i$  par exemple:

$$S_+ = \cos^2\theta S'_+ + 2\sin\theta \cos\theta S'_z - \sin^2\theta S'_- \quad (III.C.3; 4)$$

La décomposition sur la base des  $|i\rangle\langle j|$  est différente car  $S'_z$  ne fait pas partie de cette base:

$$S_+ = \cos^2\theta |1\rangle\langle 2| + \sin\theta \cos\theta |1\rangle\langle 1| - \sin\theta \cos\theta |2\rangle\langle 2| - \sin^2\theta |2\rangle\langle 1| \quad (III.C.3; 5)$$

On voit sur cet exemple que les opérateurs  $X_\alpha^\mu$  sont des combinaisons linéaires d'opérateurs de la base  $\{e_i\}$  évoluant librement à une même fréquence.

Nous réécrivons l'expression de  $\Gamma(\omega)$  en utilisant cette décomposition:

$$\Gamma(\omega)Y = \frac{1}{2} \left\{ \rho_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_y + \omega_j) x_\alpha^i e_i [x_\beta^j e_j; Y] - \rho_{\beta\alpha}(\omega - \omega_y - \omega_j) [x_\beta^j e_j; Y] x_\alpha^i e_i \right\} \quad (III.C.3; 6)$$

Les éléments de matrice  $\Gamma(\omega)_k^m$  s'obtiennent en appliquant l'opérateur  $\Gamma(\omega)$  à l'opérateur  $e_k$  et en exprimant le résultat dans la base:

$$\Gamma(\omega)e_k = \left\{ \rho_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_k + \omega_j) x_\alpha^i x_\beta^j e_i [e_j; e_k] - \rho_{\beta\alpha}(\omega - \omega_k - \omega_j) x_\alpha^i x_\beta^j [e_j; e_k] e_i \right\} \quad (III.C.3; 7)$$

Nous calculons maintenant les produits d'opérateurs:

$$\begin{aligned} e_i [e_j; e_k] &= e_i e_j e_k - e_i e_k e_j \\ &= e_i c_{jk}^l e_l - c_{jk}^l e_l e_i c_{ki}^l e_l \\ &= c_{il}^m (c_{jk}^l - c_{kj}^l) e_m \end{aligned} \quad (III.C.3; 8.a)$$

$$[e_j; e_k] e_i = (c_{jk}^l - c_{kj}^l) c_{li}^m e_m \quad (III.C.3; 8.b)$$

On reporte ces expressions dans (III.C.3;7):

$$\Gamma(\omega)e_k = \frac{1}{2} \left\{ \rho_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_j + \omega_k) x_\alpha^i x_\beta^j c_{il}^m (c_{jk}^l - c_{kj}^l) - \rho_{\beta\alpha}(\omega - \omega_j - \omega_k) x_\alpha^j x_\beta^i (c_{jk}^l - c_{kj}^l) c_{li}^m \right\} e_m \quad (III.C.3;9)$$

Autrement dit, le tenseur  $\Gamma(\omega)_k^m$  a pour expression:

$$\Gamma(\omega)_k^m = \frac{1}{2} x_\alpha^i x_\beta^j \left\{ \rho_{\alpha\beta}(-\omega + \omega_j + \omega_k) c_{il}^m (c_{jk}^l - c_{kj}^l) - \rho_{\beta\alpha}(\omega - \omega_j - \omega_k) (c_{jk}^l - c_{kj}^l) c_{li}^m \right\} e_m \quad (III.C.3;10)$$

L'opérateur déplacement s'obtient de la même manière:

$$\Delta(\omega)_k^n = \frac{1}{2} x_\alpha^i x_\beta^j \left\{ \xi_{\alpha\beta}(-\omega - \omega_j - \omega_k) c_{il}^m (c_{jk}^l - c_{kj}^l) + \xi_{\beta\alpha}(\omega + \omega_j + \omega_k) (c_{jk}^l - c_{kj}^l) c_{li}^m \right\} \quad (III.C.3;11)$$

### III.C.3.c. Propagateur réduit - état stationnaire

Les propagateurs  $\mathcal{G}^+(\omega)$  et  $\mathcal{G}^-(\omega)$  s'obtiennent par inversion de deux matrices carrées  $n^2 \times n^2$  (où  $n$  est la dimension de l'espace des états):

$$\mathcal{G}^+(\omega)_j^k = [\mathcal{M}^+(\omega)^{-1}]_j^k \quad (III.C.3;12.a)$$

$$\mathcal{G}^-(\omega)_j^k = [\mathcal{M}^-(\omega)^{-1}]_j^k \quad (III.C.3;12.b)$$

où les deux tenseurs à inverser sont:

$$\mathcal{M}^+(\omega)_j^k = -i\omega \delta_j^k + i\mathcal{L}_{Sj}^k + i\Delta(\omega)_j^k + \Gamma(\omega)_j^k \quad (III.C.3;13.a)$$

$$\mathcal{M}^-(\omega)_j^k = -i\omega \delta_j^k + i\mathcal{L}_{Sj}^k + i\Delta(\omega)_j^k - \Gamma(\omega)_j^k \quad (III.C.3;13.b)$$

L'état stationnaire est, comme nous l'avons dit, obtenu en prenant la limite de  $-i\omega \mathcal{G}^+(\omega)$  quand  $\omega$  tend vers zéro (III.C.1;34). Il est ici possible d'en donner une expression explicite faisant intervenir les valeurs des tenseurs  $\Delta$  et  $\Gamma$  à fréquence nulle.

Nous rappelons pour cela l'expression de l'inverse d'une matrice:

$$(M(\omega)^{-1})_j^k = \frac{\text{Com}(M(\omega))_j^k}{\text{Det}(M(\omega))} \quad (III.C.3;14)$$

où  $\text{Com}(M(\omega))$  est la matrice des cofacteurs de  $M(\omega)_j^k$  et  $\text{Det}(M(\omega))$  le déterminant de  $M(\omega)$ . La matrice  $M(\omega)$  que nous étudions est telle que  $\frac{1}{-i\omega} \text{Det}(M(\omega))$  tend vers une limite finie non nulle quand  $\omega$  tend vers zéro. Nous noterons cette limite  $D_0$ :

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{\text{Det}(M(\omega))}{-i\omega} = D_0 \quad (III.C.3;15)$$

On obtient ainsi:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \mathcal{G}^+(\omega)_j^k = \frac{\text{Com}(M^+(0))_j^k}{D_0} \quad (III.C.3;16)$$

Nous avons d'autre part montré que (eq.I.C.2;31 écrite en notation de Dirac):

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} -i\omega \mathcal{P} \mathcal{G}^+(\omega) \mathcal{P} = | \mathbb{1} \gg \ll \sigma_S^{st} |$$

L'image de  $Y$  par l'opérateur que nous venons d'écrire est ainsi proportionnelle à l'unité, soit en utilisant la somme relation de fermeture, à la somme des opérateurs population  $e_{i_\alpha} = | \varphi_\alpha \rangle \langle \varphi_\alpha |$ . La valeur moyenne  $\langle Y \rangle_{st}$  est le coefficient de proportionnalité et donc la composante de l'image de  $Y$  sur un vecteur population  $e_{i_\alpha}$  (cette composante ne dépend pas du vecteur population choisi). Ainsi:

$$\sigma_j^{st} = \frac{1}{D_0} \text{Com}(\mathcal{M}^+(0))_j^{i_\alpha} \quad (III.C.3; 17)$$

#### III.C.3.d. Fonctions de corrélation atomiques

Nous donnons pour terminer l'expression des fonctions de corrélation atomiques obtenues à l'aide du théorème de régression quantique. Nous avons obtenu les expressions suivantes:

$$\langle Y(\omega') Z(\omega) \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') \langle Y(\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Z) \rangle_{st} \quad (III.C.3; 18.a)$$

$$\langle Y(\omega) Z(\omega') \rangle = 2\pi\delta(\omega + \omega') \langle (\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Y)Z \rangle_{st} \quad (III.C.3; 18.b)$$

Nous détaillons le calcul de la première expression. L'opérateur  $Z$  est un opérateur du système qui se décompose en:

$$Z = z^i e_i \quad (III.C.3; 19)$$

Le facteur  $\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Z$  est obtenu en faisant agir la résolvante projetée sur  $Z$ :

$$\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Z = z^i \mathcal{G}^+(\omega)_i^j e_j \quad (III.C.3; 20)$$

Nous reportons cette expression dans l'équation (III.C.3;18.a) et nous décomposons  $Y$  sur une base:

$$\begin{aligned} \langle Y(\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Z) \rangle_{st} &= \langle Y^k z^i \mathcal{G}^+(\omega)_i^j e_k e_j \rangle_{st} \\ &= \langle Y^k z^i \mathcal{G}^+(\omega)_i^j C_{kj}^l e_l \rangle_{st} \\ &= Y^k z^i \mathcal{G}^+(\omega)_i^j c_{kj}^l \sigma_l^{st} \end{aligned} \quad (III.C.3; 21.a)$$

On montre de même:

$$\langle Y(\mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Z) \rangle_{st} = y^i z^k \mathcal{G}^+(\omega)_i^j c_{jk}^l \sigma_l^{st} \quad (III.C.3; 21.b)$$

### III.D. Le traitement des fluctuations

Nous allons maintenant étudier les problèmes liés à la partie fluctuations de l'évolution du système non linéaire dans le but d'obtenir une théorie de l'entrée-sortie. L'utilisation des projecteurs permet de séparer, dans l'évolution du système non linéaire, la partie relaxation de la partie fluctuations. Nous allons tout d'abord montrer que cette séparation conduit à des équations d'évolution ayant la forme d'équations de Langevin.

Nous verrons alors que dans une approche perturbative au second ordre, les forces de Langevin s'identifient aux champs entrants ou sortants. Nous montrerons alors que la théorie de la réponse linéaire se généralise au cas des fluctuations quantiques provenant du réservoir ce qui nous permettra ensuite de calculer les fonctions de corrélations du champ sortant. Nous terminerons en donnant les expressions matricielles des résultats.

#### III.D.1. Equations de Langevin - Forces de Langevin

Nous écrivons ici, à l'aide de la résolvante, de équations d'évolution du système non linéaire séparant la partie fluctuations de la partie dissipation.

Dans la partie générale sur les projecteurs, nous avons établi la relation suivante (III.A.3;4):

$$z\mathcal{G}(z) = 1 + \mathcal{G}(z)\mathcal{P}\mathcal{L} + \mathcal{G}_Q(z)\mathcal{Q}\mathcal{L} + \mathcal{G}(z)\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{Q}.\mathcal{G}_Q(z)\mathcal{Q}\mathcal{L} \quad (III.D.1;1)$$

Nous appliquons cette relation à un opérateur  $Y$  du système, nous utilisons le fait que  $\mathcal{P}$  projette un opérateur du système sur lui-même et nous reconnaissons  $\mathcal{R}(z)$  :

$$z\mathcal{G}(z)Y - Y = \mathcal{G}(z).\mathcal{P}\mathcal{L}\mathcal{P}Y + \mathcal{G}_Q(z).\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{P}Y + \mathcal{G}(z).\mathcal{R}(z)Y \quad (III.D.1;2)$$

Nous utilisons enfin les propriétés des projecteurs:

$$z\mathcal{G}(z)Y - Y = \mathcal{G}(z)(\mathcal{L}_S Y) + \mathcal{G}_Q(z)(\mathcal{L}_1 Y) + \mathcal{G}(z)(\mathcal{R}(z)Y) \quad (III.D.1;3)$$

$$-i\omega\mathcal{G}^+(\omega)Y - Y = i\mathcal{G}^+(\omega)(\mathcal{L}_S Y) + \mathcal{G}^+(\omega)(\mathcal{R}^+(\omega)Y) - i\mathcal{G}_Q^+(\omega)(\mathcal{L}_1 Y) \quad (III.D.1;4.a)$$

$$-i\omega\mathcal{G}^-(\omega)Y - Y = -i\mathcal{G}^-(\omega)(\mathcal{L}_S Y) + \mathcal{G}^-(\omega)(\mathcal{R}^-(\omega)Y) - i\mathcal{G}_Q^-(\omega)(\mathcal{L}_1 Y) \quad (III.D.1;4.b)$$

Nous identifions maintenant les différents termes de cette équation comme les termes d'équations de Langevin. Pour ce faire, nous les écrivons dans l'espace des temps.

-i:  $-i\omega \mathcal{G}^u(\omega)Y - Y$

Ce terme correspond à la dérivée temporelle de  $Y$ . Le terme  $Y$  provient du fait que l'on ne considère ici qu'un demi axe des temps,

$$\begin{aligned} [d_t \mathcal{U}(t)]\theta(t) &= d_t[\mathcal{U}(t)\theta(t)] - \mathcal{U}(t)\delta(t) \\ &= d_t \mathcal{G}^+(t) - \delta(t) \end{aligned} \quad (III.D.1;5.a)$$

$$\begin{aligned} -[d_t \mathcal{U}(t)]\theta(-t) &= d_t[-\mathcal{U}(t)\theta(-t)] - \mathcal{U}(t)\delta(t) \\ &= d_t \mathcal{G}^-(t) - \delta(t) \end{aligned} \quad (III.D.1;5.b)$$

-ii:  $-i\mathcal{G}^u(\omega)[\mathcal{L}_S Y]$

Ce terme correspond à l'action du Hamiltonien d'évolution libre du système non linéaire. Si  $Y$  est un opérateur propre de  $\mathcal{L}_S$  correspondant à la fréquence  $\omega_y$ , ce terme est la transformée de Fourier de:

$$-i\omega_y Y(t) \quad (III.D.1;6)$$

-iii-:  $\mathcal{G}^u(\omega)[\mathcal{R}^u(\omega)Y]$

Ce terme correspond à la relaxation du système non linéaire. Le produit en fréquence correspond à une convolution en temps que nous allons exprimer en considérant une base de l'espace de Liouville  $e_i$  et en notant:

$$\mathcal{R}^+(\omega)e_i = r(\omega)_i^j e_j \quad (III.D.1;7)$$

La force de friction retardée agissant sur  $e_i(t)$  est ainsi:

$$- \int_0^\infty d\tau r_i^j(\tau) e_j(t-\tau) \quad (III.D.1;8)$$

-iv-:  $\mathcal{G}_Q(\omega)\mathcal{L}_1 Y$

Ce terme est un terme que nous n'avions pas obtenu lorsque nous nous étions limités à l'évolution réduite; il est obtenu en projetant selon  $Q$  l'évolution du système non linéaire. Il s'agit d'une force de Langevin. Nous noterons  $\mathcal{F}_y^+(\omega)$  et  $\mathcal{F}_y^-(\omega)$  les forces de Langevin correspondant à l'opérateur  $Y$  :

$$\mathcal{F}_y^+(\omega) = \frac{1}{\omega - i\epsilon - Q\mathcal{L}Q} \mathcal{L}_1 Y \quad (III.D.1;9.a)$$

$$\mathcal{F}_y^-(\omega) = \frac{1}{\omega + i\epsilon - Q\mathcal{L}Q} \mathcal{L}_1 Y \quad (III.D.1;9.b)$$

Il est possible d'obtenir une relation entre la force entrante et la force sortante en faisant la différence des équations (III.D.1;5.a) et (III.D.1;5.b):

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_y^-(\omega) - \mathcal{F}_y^+(\omega) &= [\mathcal{G}^-(\omega) - \mathcal{G}^+(\omega)](-i\omega + i\mathcal{P}\mathcal{L})Y + \\ &+ (\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{R}^+(\omega) - \mathcal{G}^-(\omega)\mathcal{R}^-(\omega))Y \end{aligned} \quad (III.D.1;10)$$

Nous multiplions alors cette équation par  $-i\omega + i\mathcal{L}$  :

$$\begin{aligned} (-i\omega + i\mathcal{L})(\mathcal{F}_y^-(\omega) - \mathcal{F}_y^+(\omega)) &= (\mathcal{R}^+(\omega) - \mathcal{R}^-(\omega))Y \\ &= 2\Gamma(\omega)Y \end{aligned} \quad (III.D.1;11)$$

Soit finalement:

$$\mathcal{F}_y^-(\omega) - \mathcal{F}_y^+(\omega) = 2(\mathcal{G}^+(\omega) - \mathcal{G}^-(\omega))\Gamma(\omega)Y$$

La différence entre la force de Langevin entrante et la force de Langevin sortante est ainsi liée à la partie dissipative de la relaxation du système non linéaire.

### III.D.1.b. Traitement perturbatif

Nous avons obtenu une expression des forces de Langevin faisant intervenir le propagateur  $\mathcal{G}_Q$ . Lorsque nous avons procédé au traitement perturbatif de la relaxation, nous avons remplacé ce propagateur par le propagateur d'évolution libre  $\mathcal{G}_0$ . Nous faisons ici la même approximation. Les forces de Langevin s'écrivent alors:

$$\mathcal{F}_Y^u(\omega) = \mathcal{G}_0^u(\omega) \mathcal{L}_1 Y$$

$$\mathcal{G}_0^u(\omega) \left( \sum_{\alpha} A_{\alpha} [X_{\alpha}; Y] \right) \quad (III.D.1;12)$$

Soit, en décomposant  $[X_{\alpha}; Y]$  sur la base des  $e_i$  :

$$\mathcal{F}_Y^u(\omega) = \mathcal{G}_0^u(\omega) \left( \sum_{\alpha} A_{\alpha} x_{\alpha}^i y^j [e_i, e_j] \right)$$

$$= \sum_{\alpha} x_{\alpha}^i y^j [e_i, e_j] \left( \mathcal{G}_0^u(\omega - \omega_i - \omega_j) A_{\alpha} \right) \quad (III.D.1;13)$$

Ce qui se traduit pour le formalisme avancé et le formalisme retardé par:

$$\mathcal{F}_Y^+(\omega) = -i \sum_{\alpha} x_{\alpha}^i y^j [e_i; e_j] A_{\alpha}^{\text{in}}(\omega - \omega_i - \omega_j) \quad (III.D.1;14.a)$$

$$\mathcal{F}_Y^-(\omega) = -i \sum_{\alpha} x_{\alpha}^i y^j [e_i; e_j] A_{\alpha}^{\text{out}}(\omega - \omega_i - \omega_j) \quad (III.D.1;14.b)$$

On a reconnu les champs  $A^{\text{in}}$  et  $A^{\text{out}}$  obtenus par évolution libre d'une condition initiale infiniment éloignée dans le passé ou dans le futur.

Dans le cadre d'une approche perturbative, la partie liée au champ des forces de Langevin est un champ libre qui s'identifie au champ entrant pour une relaxation retardée et au champ sortant pour une relaxation avancée.

Ces forces de Langevin correspondent à celles que nous avons introduites de manière heuristique dans la deuxième partie (équation II.C.2;20).



### III.D.2. La réponse linéaire généralisée

Nous voulons maintenant calculer les fonctions de corrélation qui apparaissent entre le système non linéaire et les forces de Langevin, c'est-à-dire les fonctions de corrélations  $\langle A_\alpha^{\text{in}}(t)Y(t') \rangle$  et  $\langle Y(t')A_\alpha^{\text{in}}(t) \rangle$ .

En utilisant la résolvante, ces fonctions de corrélations s'écrivent  $\langle B(\mathcal{G}(z)Y) \rangle$  et  $\langle (\mathcal{G}(z)Y)B \rangle$  où  $B$  est un champ libre. L'opérateur  $B$  vérifie les propriétés suivantes:

$$\mathcal{P}B = 0 \quad (\text{III.D.2;1})$$

On en déduit pour un opérateur  $O$  quelconque:

$$\mathcal{P}(BO) = \mathcal{P}(B(QO)) \quad (\text{III.D.2;2.a})$$

$$\mathcal{P}(OB) = \mathcal{P}((QO)B) \quad (\text{III.D.2;2.b})$$

Nous savons d'autre part que (III.B.3;2):

$$\langle O \rangle = \langle \mathcal{P}O \rangle \quad (\text{III.D.2;3})$$

On utilise alors relations pour réexprimer les fonctions de corrélation:

$$\begin{aligned} \langle B(\mathcal{G}(z)Y) \rangle &= \langle \mathcal{P}(B(\mathcal{G}(z)Y)) \rangle \\ &= \langle \mathcal{P}(B(Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y)) \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.D.2;4.a})$$

$$\begin{aligned} \langle (\mathcal{G}(z)Y)B \rangle &= \langle \mathcal{P}((\mathcal{G}(z)Y)B) \rangle \\ &= \langle \mathcal{P}((Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y)B) \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.D.2;4.b})$$

Nous avons aussi utilisé le fait que,  $Y$  étant opérateur du système,  $Y = \mathcal{P}Y$ .

Nous donnons maintenant une expression perturbative du propagateur  $Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P}$  établie dans la partie III.A:

$$Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{G}_Q(z)Q\mathcal{L}\mathcal{P}\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} \quad (\text{III.D.2;5})$$

Soit, en utilisant les propriétés des projecteurs:

$$Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{G}_Q(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} \quad (\text{III.D.2;6})$$

L'expression perturbative est obtenue en remplaçant le propagateur  $\mathcal{G}_Q(z)$  par le propagateur d'évolution libre  $\mathcal{G}_0(z)$ :

$$Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P} = \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} \quad (\text{III.D.2;7})$$

Nous appliquons maintenant cet opérateur à un opérateur  $Y$  du système non linéaire et nous développons l'opérateur  $\mathcal{L}_1$ :

$$\begin{aligned} Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y &= \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y \\ &= \mathcal{G}_0(z)\left(\sum_{\alpha} A_{\alpha}[X_{\alpha};\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y]\right) \end{aligned} \quad (\text{III.D.2;8})$$

Nous décomposons pour terminer l'opérateur  $[X_{\alpha};\mathcal{P}\mathcal{G}(z)Y]$  en opérateurs propres de  $\mathcal{L}_S$  de fréquence propre  $\omega_{\mu}$ :

$$[X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y] = \sum_{\mu} ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y])_{\mu} \quad (III.D.2;9)$$

En reportant cette expression dans (III.B.2;8), nous obtenons:

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y &= \mathcal{G}_0(z) \left( \sum_{\alpha\mu} A_\alpha ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y])_{\mu} \right) \\ &= \sum_{\alpha\mu} (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu) A_\alpha) ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y])_{\mu} \end{aligned} \quad (III.D.2;10)$$

Nous obtenons ainsi, sous une première forme, la réponse linéaire d'un opérateur  $Y$  du système aux fluctuations du réservoir. Nous allons maintenant voir comment ceci se traduit sur les corrélations entre le champ entrant et le système non linéaire.

Reportons l'expression (III.B.2;10) que nous venons d'obtenir dans les fonctions de corrélation (III.B.2;4) et utilisons le fait que les expressions obtenues sont des produits d'un opérateur du réservoir par un opérateur du système non linéaire:

$$\begin{aligned} \langle B(\mathcal{G}(z)Y) \rangle &= \sum_{\alpha\mu} \langle B(\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu) A_\alpha) ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y])_{\mu} \rangle \\ &= \sum_{\alpha\mu} \langle B(\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu) A_\alpha) \rangle \langle ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y])_{\mu} \rangle_{st} \end{aligned} \quad (III.D.2;11.a)$$

$$\langle (\mathcal{G}(z)Y)B \rangle = \sum_{\alpha\mu} \langle (\mathcal{G}_0(z - \omega_\mu) A_\alpha)B \rangle \langle ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y])_{\mu} \rangle_{st} \quad (III.D.2.11.b)$$

Ceci nous permet d'obtenir les fonctions de corrélation entre le champ entrant et un opérateur du système non linéaire:

$$\langle A_\beta^{in}(\omega)Y(\omega') \rangle = -i \sum_{\alpha\mu} \langle A_\beta^{in}(\omega)A_\alpha^{in}(\omega' - \omega_\mu) \rangle \langle ([X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Y])_{\mu} \rangle_{st} \quad (III.D.2;12.a)$$

$$\langle Y(\omega')A_\beta^{in}(\omega) \rangle = -i \sum_{\alpha\mu} \langle A_\alpha^{in}(\omega' - \omega_\mu)A_\beta^{in}(\omega) \rangle \langle [X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Y])_{\mu} \rangle_{st} \quad (III.D.2;12.b)$$

Les termes qui apparaissent sont des produits de fonctions de corrélation du champ entrant par des fonctions de corrélation atomiques. La fonction de corrélation atomique qui correspond à la réponse au champ  $A_\alpha^{in}$  de  $Y$  est le commutateur  $\langle [X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Y] \rangle_{st}$ . Nous retrouvons les susceptibilités de la réponse linéaire que nous avons obtenues dans la seconde partie (équation II.C.2;17).

Nous décomposons maintenant les fonctions de corrélation atomiques sur une base comme précédemment (III.C.3;17 à 21)

$$\begin{aligned} \langle [X_\alpha; \mathcal{P}\mathcal{G}^+(\omega)\mathcal{P}Y] \rangle_{st} &= x_\alpha^i y^j \mathcal{M}(\omega)_j^k \langle [e_i; e_k] \rangle_{st} \\ &= x_\alpha^i y^j \mathcal{M}(\omega)_j^k (c_{ik}^l - c_{ki}^l) \langle e_l \rangle_{st} \\ &= x_\alpha^i y^j \mathcal{M}(\omega)_j^k (c_{ik}^l - c_{ki}^l) \sigma_l^{st} \end{aligned} \quad (III.D.2;13)$$

soit, en reportant cette expression dans les équations (III.D.2;12):

$$\langle A_\beta^{in}(\omega)Y(\omega') \rangle = -i \langle A_\beta^{in}(\omega)A_\alpha^{in}(\omega' - \omega_1) \rangle x_\alpha^i y^j \mathcal{M}(\omega)_j^k (C_{ik}^l - C_{ki}^l) \sigma_l^{st} \quad (III.D.2;14.a)$$

$$\langle Y(\omega')A_\beta^{in}(\omega) \rangle = -i \langle A_\alpha^{in}(\omega' - \omega_1)A_\beta^{in}(\omega) \rangle x_\alpha^i y^j \mathcal{M}(\omega)_j^k (C_{ik}^l - C_{ki}^l) \sigma_l^{st} \quad (III.D.2;14.b)$$

### III.E. Discussion des approximations

Nous revenons maintenant sur les approximations que nous avons faites durant toute cette partie lors des calculs perturbatifs. Ces approximations ont été faites pour établir la matrice  $\mathcal{R}(z)$  au second ordre, pour dériver le théorème de régression quantique et les équations de Langevin et enfin pour établir les résultats de la réponse linéaire généralisée. Ces approximations apparaissent soit comme une approximation de mémoire courte (par exemple pour la relaxation) soit comme une approximation de faible bruit (par exemple pour la réponse linéaire généralisée). Nous allons discuter plus précisément ces approximations et montrer qu'elles se ramènent en fait à une même hypothèse.

Nous montrerons pour terminer que la méthode des projecteurs doit permettre de mener les calculs perturbatifs à des ordres plus élevés en prenant l'exemple de la réponse du système aux fluctuations et de traiter un bruit coloré en prenant l'exemple de  $\mathcal{R}(z)$ .

#### III.E.1. Les approximations utilisées

##### III.E.1.a. Introduction

Lors des différentes approximations nous ne nous sommes pas arrêtés à un même ordre: certaines ont été faites au premier ordre, d'autres au second. Nous allons tout d'abord, en nous intéressant au résultat final que nous recherchons, justifier ce fait et déterminer l'ordre auquel il faut mener les calculs pour avoir un résultat cohérent.

Le résultat final est l'obtention des fonctions de corrélation du champ sortant  $\langle A_\alpha^{\text{out}}(\omega)A_\beta^{\text{out}}(\omega') \rangle$  dont nous rappelons l'expression:

$$\begin{aligned} \langle A_\alpha^{\text{out}}(\omega)A_\beta^{\text{out}}(\omega') \rangle &= \langle A_\alpha^{\text{in}}(\omega)A_\beta^{\text{in}}(\omega') \rangle \\ &+ i\xi_\alpha^{\alpha'}(\omega) \langle X_{\alpha'}(\omega)A_\beta^{\text{in}}(\omega') \rangle \\ &+ i\xi_\beta^{\beta'}(\omega') \langle A_\alpha^{\text{in}}(\omega)X_{\beta'}(\omega') \rangle \\ &- \xi_\alpha^{\alpha'}(\omega)\xi_\beta^{\beta'}(\omega') \langle X_\alpha(\omega)X_{\beta'}(\omega') \rangle \end{aligned} \quad (\text{III.E.1;1})$$

où l'on a noté:

$$\xi_\alpha^{\alpha'}(\omega) = [A_\alpha; (\mathcal{G}_0^+(\omega) - \mathcal{G}_0^-(\omega'))A_{\alpha'}] \quad (\text{III.E.1;2})$$

Nous introduisons maintenant les paramètres correspondant aux amplitudes moyennes des différents paramètres qui interviennent:

- $a$  est l'amplitude moyenne des fluctuations du champ  $A^{\text{in}}$
- $\epsilon$  est le paramètre qui correspond à  $\mathcal{G}_0(\omega)A$ , c'est à dire à l'effet de l'amplitude de  $a$  pendant son temps de corrélation:

$$\epsilon = \frac{a}{\omega_c} = a \tau_c \quad (\text{III.E.1;3})$$

où  $\omega_c$  est la fréquence caractéristique d'évolution des fluctuations c'est-à-dire l'inverse du temps de corrélation  $\tau_c$

- $x$  est l'amplitude moyenne d'un opérateur du dipôle  $X_\alpha$ .

Avec ces notations, l'ordre de grandeur d'une susceptibilité  $\xi_\alpha^{\alpha'}(\omega)$  est  $a\epsilon$ . Les taux de relaxation du système non linéaire sont d'ordre  $x^2a\epsilon$ . Ces taux de relaxation donnent la fréquence caractéristique d'évolution d'un opérateur  $X_\alpha$ ; l'ordre de grandeur d'une fonction de corrélation  $\langle X_\alpha(\omega)X_\beta(\omega') \rangle$  est donc  $\frac{x^2}{x^2a\epsilon} = \frac{1}{a\epsilon}$ . Nous réécrivons maintenant l'expression (III.E.1;1) d'une fonction de corrélation du champ sortant en isolant les termes d'ordre zéro (on les met entre crochet pour les repérer):

$$\begin{aligned}
\left[ \frac{\langle A_{\alpha}^{\text{out}}(\omega) A_{\beta}^{\text{out}}(\omega') \rangle}{a\epsilon} \right] &= \left[ \frac{\langle A_{\alpha}^{\text{in}}(\omega) A_{\beta}^{\text{in}}(\omega') \rangle}{a\epsilon} \right] \\
&+ i \left[ \frac{\xi_{\alpha}^{\alpha'}(\omega)}{a\epsilon} \right] \langle X_{\alpha'}(\omega) A_{\beta}^{\text{in}}(\omega') \rangle \\
&+ i \left[ \frac{\xi_{\beta}^{\beta'}(\omega')}{a\epsilon} \right] \langle A_{\alpha}^{\text{in}}(\omega) X_{\beta'}(\omega') \rangle \\
&- \left[ \frac{\xi_{\alpha}^{\alpha'}(\omega)}{a\epsilon} \right] \left[ \frac{\xi_{\beta}^{\beta'}(\omega')}{a\epsilon} \right] [a\epsilon \langle X_{\alpha}(\omega) X_{\beta}(\omega') \rangle] \quad (III.E.1;4)
\end{aligned}$$

L'ordre le plus bas des corrélations champ entrant-système est donné par la réponse linéaire

$$\begin{aligned}
\langle X_{\alpha'}(\omega) A_{\beta}^{\text{in}}(\omega') \rangle &\sim \langle A_{\beta}^{\text{in}}(\omega) A_{\beta}^{\text{in}}(\omega') \rangle \langle [X_{\beta}; X_{\alpha'}(\omega)] \rangle \\
&\sim \left[ \frac{\langle A_{\beta}^{\text{in}}(\omega) A_{\beta}^{\text{in}}(\omega') \rangle}{a\epsilon} \right] [a\epsilon \langle [X_{\beta}; X_{\alpha'}(\omega)] \rangle] \quad (III.E.1;5)
\end{aligned}$$

L'ordre le plus bas est l'ordre zéro. Nous constatons donc qu'il suffit de considérer la réponse linéaire du système non linéaire pour avoir un résultat cohérent pour les fluctuations du champ sortant.

Ainsi, en considérant  $a$  et  $\epsilon$  comme petits paramètres, la fonction de corrélation sortante est d'ordre deux mais il suffit pour l'obtenir de calculer la force de Langevin ou la réponse linéaire généralisée à l'ordre un.

#### III.E.1.b. Récapitulatif des approximations

Après cette présentation, nous allons détailler chacune des approximations que nous avons faites en précisant l'ordre auquel nous l'avons faite et en vérifiant sa cohérence avec les autres approximations.

Pour préciser la discussion, nous faisons auparavant un calcul qui donne une expression exacte de  $\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)$  en fonction de  $\mathcal{G}_0(z)$ . Nous rappelons que

$$\mathcal{Q}\mathcal{L}_0 = \mathcal{L}_0\mathcal{Q} \quad (III.E.1;6)$$

Nous l'utilisons dans le calcul qui suit:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}\mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z)\mathcal{Q} &= \mathcal{Q} \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{Q}} \mathcal{Q} \\
&= \mathcal{Q} \frac{1}{z - \mathcal{L}_0} (z - \mathcal{L}_0) \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{Q}} \mathcal{Q} \\
&= \mathcal{Q} \left\{ \frac{1}{z - \mathcal{L}_0} + \frac{1}{z - \mathcal{L}_0} (\mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{Q} - \mathcal{L}_0) \frac{1}{z - \mathcal{Q}\mathcal{L}\mathcal{Q}} \right\} \mathcal{Q} \\
&= \mathcal{Q} \{ \mathcal{G}_0(z) + \mathcal{G}_0(z) \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z) \} \mathcal{Q} \quad (III.E.1;7)
\end{aligned}$$

Nous pouvons maintenant revenir sur chaque approximation. Nous donnons dans chaque cas une expression exacte (=) et l'expression approchée ( $\simeq$ ).

#### -i- Calcul de $\mathcal{R}(z)$

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(z) &= \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} \\
&= \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_0(z) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} + \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_0(z) \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_{\mathcal{Q}}(z) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} \quad (III.E.1;8.a)
\end{aligned}$$

$$\simeq \mathcal{P} \mathcal{L}_1 \mathcal{G}_0(z) \mathcal{L}_1 \mathcal{P} \quad (III.E.1;8.b)$$

Nous avons conservé un terme d'ordre  $\alpha\epsilon$  et négligé un terme d'ordre  $\alpha\epsilon^2$ . L'ordre deux est le premier qui apparaît dans le calcul de  $\mathcal{R}(z)$ .

-ii- Théorème de régression quantique

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{G}(z)Y_1\mathcal{G}(z)Y_2 \rangle &= \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2 \rangle + \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)QY_1\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2 \rangle & (III.E.1;9.a) \\ &\simeq \langle \mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P}Y_2 \rangle & (III.E.1;9.b) \end{aligned}$$

Nous avons conservé le terme d'ordre le plus bas et négligé un terme qui est deux ordres plus loin. Dans l'expression des corrélations sortantes, ce terme d'ordre le plus bas correspond à un terme du même ordre que les corrélations entrantes, il est donc suffisant.

-iii- Forces de Langevin

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_Y(z) &= \mathcal{G}_Q(z)\mathcal{L}_1 Y \\ &= \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1 Y + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1 \mathcal{G}_Q(z) Y & (III.E.1;10.a) \\ &\simeq \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1 Y & (III.E.1;10.b) \end{aligned}$$

Nous avons conservé un terme d'ordre  $\epsilon$  et négligé un terme d'ordre  $\epsilon^2$ . Nous avons vu que l'ordre un était suffisant pour obtenir les corrélations du champ sortant.

-iv- Réponse linéaire généralisée

$$\begin{aligned} Q\mathcal{G}(z)\mathcal{P} &= \mathcal{G}_Q(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} \\ &= \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} + \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{G}_Q(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} & (III.E.1;11.a) \\ &\simeq \mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1\mathcal{P}\mathcal{G}(z)\mathcal{P} & (III.E.1;11.b) \end{aligned}$$

La discussion est la même que pour les forces de Langevin: nous conservons l'ordre un qui est suffisant et nous négligeons l'ordre deux.

Les approximations que nous avons faites se résument ainsi toutes à considérer comme petit paramètre  $\mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1$  et à ne le conserver qu'à l'ordre le plus bas où il intervient. Appliqué à un opérateur  $Y$  du système non linéaire, ce terme donne:

$$\mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1 Y = \mathcal{G}_0(z) \sum_{\alpha} A_{\alpha}[X_{\alpha}; Y] \quad (III.E.1;12)$$

Son ordre de grandeur est  $v\tau_c$  où  $v$  correspond à l'amplitude moyenne de la force de Langevin à laquelle le système non linéaire est soumis et  $\tau_c$  le temps de corrélation de cette force.

Dans le cas où le spectre de ces fluctuations n'est pas plat, il est possible de faire une estimation plus fine de ce paramètre en décomposant  $[X_{\alpha}, Y]$  sur une base d'opérateurs propres de  $\mathcal{L}_S$ :

$$\mathcal{G}_0(z)\mathcal{L}_1 Y = x_{\alpha}^i y^j c_{ij}^k e_k \mathcal{G}_0(\omega - \omega_k) A_{\alpha} \quad (III.E.1;13)$$

Nous avons alors autant de paramètre que de fréquences propres  $\omega_k$  de  $\mathcal{L}_S$  qui sont  $v_k \tau_{ck}$ . Ils correspondent à la composante de la force de Langevin située autour de la fréquence  $\omega_k$ . Dans le cas où le système non linéaire est un système à deux niveaux, cette approximation correspond à l'approximation du bruit tricolore.

### III.E.2. Au-delà de l'ordre deux

L'approche que nous avons utilisée lors de cette étude permettrait manifestement de poursuivre les développements perturbatifs à des ordres plus élevés. Le principe de ces développements perturbatifs est l'itération de la transformation suivante:

$$\frac{1}{z-A} = \frac{1}{z-B} + \frac{1}{z-B} (B-A) \frac{1}{z-A} \quad (III.E.2;1)$$

où  $A$  et  $B$  sont deux opérateurs agissant sur l'espace de Liouville. Si  $\frac{1}{z-B} (B-A)$  est considéré comme un petit paramètre, l'ordre zéro est:

$$\frac{1}{z-A} \simeq \frac{1}{z-B} \quad (III.E.2;2)$$

Pour obtenir les ordres suivants, on itère l'expression (III.E.2;1):

$$\frac{1}{z-A} = \frac{1}{z-B} + \frac{1}{z-B} (B-A) \frac{1}{z-B} + \frac{1}{z-B} (B-A) \frac{1}{z-B} (B-A) \frac{1}{z-A} \quad (III.E.1;3)$$

et on obtient à l'ordre un:

$$\frac{1}{z-A} = \frac{1}{z-B} + \frac{1}{z-B} (B-A) \frac{1}{z-B} \quad (III.E.2;4)$$

Cette méthode permet dans chaque cas de se ramener à des calculs faisant intervenir comme seule résolvante celle qui correspond à une évolution libre.

Nous donnons un exemple d'utilisation de cette méthode pour le calcul de la réponse du système à l'ordre suivant la réponse linéaire. Il s'agit de calculer  $QG(z)PY$  où  $Y$  est un opérateur du système non linéaire:

$$\begin{aligned} QG(z)PY &= G_Q(z)L_1PG(z)PY \\ &= G_0(z)L_1PG(z)PY + G_Q(z)L_1G_0(z)L_1PG(z)PY \end{aligned} \quad (III.E.2;5)$$

soit, en allant un ordre après la réponse linéaire:

$$QG(z)PY = G_0(z)L_1PG(z)PY + G_0(z)L_1G_0(z)L_1PG(z)PY \quad (III.E.2;6)$$

Le second terme est celui que nous cherchons, un calcul long mais direct permet d'en obtenir une expression explicite par l'utilisation d'une base de l'espace de Liouville du système non linéaire.

## REFERENCES

- 1 Haroche S. in "New Trends in Atomic Physics", eds G.Grynberg and R.Stora (North Holland, 1984) (Les Houches 1982)  
Haroche S. and Kleppner D., Physics Today 24 (Janvier 1983)
- 2 Esteve D., Devoret M.H. and Martinis J., Physical Review B34 158 (1986)
- 3 Devoret M.H., Esteve D., Martinis J. and Urbinaz C., Physica Scripta T25 118 (1989)
- 4 Mollow B.R., Progress in Optics XIX 3 (1981)
- 5 Reynaud S., Thèse d'Etat (Paris 6, 1981)
- 6 Reynaud S., Annales de Physique 8 315 (1983)
- 7 Hanbury-Brown R. and Twiss R.Q., Nature 177 27 (1956)
- 8 Kimble H.J., Dagenais M. and Mandel L., Physical Review Letters 39 691 (1977)
- 9 "Squeezed Light", eds Loudon and Knight, Journal of Modern Optics 34 709-1020 (1987)
- 10 "Squeezed States of the Electromagnetic Field", eds Kimble and Walls, Journal of the Optical Society of America B4 1449-1741 (1987)
- 11 "Photons and Quantum Fluctuations", eds Pike and Walther, Malvern Series in Physics, Adam Hilger (Bristol, 1988)
- 12 "Squeezed and non classical Light", eds Tombesi and Pike, Plenum (New York, 1989)
- 13 Debuisschert T., Reynaud S., Heidmann A., Giacobino E. and Fabre C., Quantum Optics 1 3 (1989)
- 14 Wu L.A., Min Xiao, Kimble H.J, Journal of the Optical Society of America B4 1465 (1988)
- 15 Heidmann A., Thèse de 3<sup>ième</sup> cycle (Paris, 1985)
- 16 Heidmann A. and Reynaud S., Journal de Physique 46 1937 (1985)
- 17 Gardiner C.W., Physical Review Letters 56 1917 (1986)

- 18 Carmichael H.J., Lane A.S. and Walls D.F., *Physical Review Letters* **58** 2539 (1987)
- 19 An S., Sargent M. and Walls D.F., *Optics Communications* **67** 373 (1988)
- 20 Lewenstein M., Mossberg T.W. and Glauber R.J., *Physical Review Letters* **59** 775 (1987)
- 21 Lewenstein M. and Mossberg T.W., *Physical Review* **A38** 2048 (1988)
- 22 Zhu Y., Lezama A., Mossberg T.W. and Lewenstein M., *Physical Review Letters* **61** 1946 (1988)
- 23 Lewenstein M. and Mossberg T.W., *Physical Review* **A38** 1075 (1988)
- 24 Courty J.M. and Reynaud S., *Optics Communications* **72** 98 (1989)
- 25 Caves C.M., Thorne K.S., Drever R.W.P., Sandberg V.D. and Zimmermann M, *Reviews of Modern Physics* **52** 341 (1980)
- 26 Caves C.M., in "Quantum Optics, Experimental Gravitation and Measurement Theory" eds Meystre and Scully (Plenum, 1983)
- 27 Unruh W.G., *Physical Review* **D19** 2888 (1979)
- 28 Braginski V.B. and Vorontsov Yu.I., *Soviet Physics Uspekhi* **17** 644 (1975)
- 29 Milburn G.J., Lane A.S. and Walls D.F., *Physical Review* **A27** 2804 (1983)
- 30 Imoto N., Haus H.A. and Yamamoto Y., *Physical Review* **A32** 2287 (1985)
- 31 Cohen-Tannoudji C., cours au Collège de France (Paris, 1989-90)
- 32 Zurek, *Physical Review* **D24** 1516 (1981)  
Zurek, *Physical Review* **D26** 1862 (1982)
- 33 Cohen-Tannoudji C., in "Frontiers in Laser Spectroscopy", eds R.Balian, S.Haroche, S.Liberman (North Holland, 1977) (Les Houches 1975)
- 34 Cohen-Tannoudji C., Dupont-Roc J. and Grynberg G., "Processus d'Interactions entre Photons et Atomes", InterEditions/Editions du CNRS (Paris, 1988)
- 35 Lax M., *Physical Review* **172** 350 (1968)
- 36 Feynmann R.P. and Vernon F.L., *Annals of Physics* **24** 118 (1963)
- 37 Caldeira A.O. and Leggett A.J., *Annals of Physics* **149** 374 (1983)
- 38 Leggett A.J., *Physical Review* **B30** 1208 (1984)
- 39 Kubo, *Reports in Progress in Physics* **29** 255 (1965)



- 40 Gibbs H.M., "Optical Bistability" (Academic Press, 1985)
- 41 Reynaud S., Fabre C. and Giacobino E., Journal of the Optical Society of America B4 1520 (1987)
- 42 Reynaud S. and Heidmann A., Optics Communications 71 209 (1989)
- 43 Gardiner C.W., IBM Journal of Research and Development 32 127 (1988)
- 44 Gardiner C.W., Physical Review A38 4073 (1988)
- 45 Parkins and Gardiner C.W., Physical Review A37 4073 (1988)
- 46 Parkins and Gardiner C.W., Physical Review A40 3796 (1988)
- 47 Courty J.M. and Reynaud S., EuroPhysics Letters 10 237 (1989)
- 48 Ford ,Kac and Mazur, Journal of Mathematical Physics 6 504 (1965)
- 49 Dekker H, Physics Reports 80 1 (1980)
- 50 Purcell, Physical Review 69 681 (1946)
- 51 Gardiner C.W. and Collett M.J., Physical Review A31 3761 (1985)
- 52 Carmichael, Brecha, Raizen and Kimble, Physical Review A40 (1989)
- 53 Raizen, Thompson, Brecha, Kimble and Carmichael, Physical Review Letters 63 240 (1989)
- 54 Reynaud S., Annales de Physique (1990)
- 55 Nyquist, Physical Review 32 110 (1928)
- 56 Allen and Eberly, "Optical Resonance in Two Level Atoms"
- 57 Haroche S., Annales de Physique 6 189 (1971)
- 58 Mollow B.R., Physical Review 188 1969 (1969)
- 59 Grabert H., Zeitschrift Physik B26 79 (1977)
- 60 Zwanzig R., Journal of Chemical Physics 33 1338 (1960)
- 61 Nakajima S., Progress in Theoretical Physics 20 948 (1958)
- 62 Haake F., Springer Tracts in Modern Physics 66 98 (1973)
- 63 Argyres P.N. and Kelley P.L., Physical Review 134A 98 (1964)
- 64 Mori H., Progress in Theoretical Physics 33 423 (1965)
- 65 Cohen-Tannoudji C., cours au Collège de France (Paris, 1978-79)